Aproximações da diagonal e anéis de cohomologia dos grupos fundamentais das superfícies, de fibrados do toro e de certos grupos virtualmente cíclicos

Sérgio Tadao Martins

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves

São Paulo, outubro de 2012

Aproximações da diagonal e anéis de cohomologia dos grupos fundamentais das superfícies, de fibrados do toro e de certos grupos virtualmente cíclicos

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 28/11/2012. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Agradecimentos

Esta tese não é apenas o fruto do trabalho individual de seu autor (como nenhuma tese é). Ela não existiria, em primeiro lugar, sem o acompanhamento de meu orientador nestes últimos anos. Indo além, devo agradecer também todos os professores que participaram da minha formação acadêmica, e não apenas nestes últimos anos: deveria retornar até àquela época na qual eu ainda nem sabia, verdadeiramente, o que era Matemática.

E a Matemática pode ser, às vezes, uma atividade bastante solitária (pois, como se sabe, ninguém pode estudar por você). E por este motivo tenho muito a agradecer àquelas pessoas que, compreendendo a situação, muito me auxiliaram e auxiliam ao simplesmente, em seu silêncio, me permitirem estes momentos solitários nos quais tudo acontece (bem, nem sempre: às vezes o saldo de horas de estudo não passa de um monte de papel com rabiscos inúteis e ideias que não funcionaram). Em especial, agradeço à minha esposa Elaine, que há anos compreende muito bem como as coisas são e me apoia com amor e paciência.

Também não tenho como agradecer o suficiente a meus pais, Gilberto e Cecília, que não apenas me deram condições de estudo, mas me deram tudo, desde o dia em que eu nasci.

Finalmente, agradeço a Deus, que nos dá a vida e nos acompanha, sutilmente, em todos os momentos. Afinal, o que é que nós temos, que não nos tenha sido dado por Ele?

Resumo

MARTINS, S. T. **Aproximações da diagonal e anéis de cohomologia dos grupos fundamentais das superfícies, de fibrados do toro e de certos grupos virtualmente cíclicos**. 2012. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

Dado um grupo G, a definição dos grupos de cohomologia $H^*(G, M)$ para um $\mathbb{Z}G$-módulo M podem ser dadas usando as técnicas usuais da Álgebra Homológica, que garantem a existência de resoluções projetivas de P de $\mathbb{Z}$ como um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial, a equivalência entre resoluções distintas etc. Podemos também construir um produto $H^*(G, M) \otimes H^*(G, N) \to H^*(G, M \otimes N)$, cuja definição depende de uma aproximação da diagonal $\Delta\colon P \to P \otimes P$. Entretanto, o cálculo explícito de tais resoluções projetivas e dos grupos $H^*(G, M)$ pode ser bastante difícil na prática, e ainda mais difícil a obtenção de uma aproximação da diagonal Δ. Nesta tese, obteremos resoluções livres e aproximações da diagonal para os grupos fundamentais das superfícies que são espaços $K(G, 1)$ e também para o grupo fundamental de fibrados do toro com base S^1, bem como a estrutura do anel de cohomologia de tais grupos. Ainda, para certos grupos virtualmente cíclicos G, obteremos o anel de cohomologia $H^*(G, \mathbb{Z})$ calculando diretamente uma resolução livre e uma aproximação da diagonal, ou então usando a sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre. A motivação para o estudo da primeira família de grupos vem do fato de representarem variedades de dimensão 2 e 3, e da segunda família por ser constituida de grupos que atuam em esferas de homotopia.

Palavras-chave: cohomologia de grupos, resoluções livres, aproximação da diagonal, grupos fundamentais das superfícies, fibrados do toro, grupos virtualmente cíclicos.

Abstract

MARTINS, S. T. **Diagonal approximations and cohomology rings for the fundamental groups of surfaces, torus bundles and some virtually cyclic groups**. 2012. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

Given a group G, a definition for the cohomology groups $H^*(G, M)$ for a $\mathbb{Z}G$-modulo M can be given using the standard techniques of Homological Algebra, that ensure the existence of projective resolutions P of $\mathbb{Z}$ as a trivial $\mathbb{Z}G$-module, the equivalence between two such resolutions etc. We can also construct a product $H^*(G, M) \otimes H^*(G, N) \to H^*(G, M \otimes N)$, whose definition depends on a diagonal approximation $\Delta\colon P \to P \otimes P$. However, the explicit computation of such resolutions and of the groups $H^*(G, M)$ may be very hard in practice, and even worse may be the task of constructing a diagonal approximation Δ. In this thesis, we obtain free resolutions and diagonal approximations for the fundamental groups of surfaces that are $K(G, 1)$ spaces and for the fundamental group of the torus bundle with S^1 as the base space, as well as the structure of the cohomology ring of these groups. Also, for some virtually cyclic groups, we obtain the cohomology ring $H^*(G, \mathbb{Z})$ by an explicit computation of a free resolution and a diagonal approximation, or by the Lyndon-Hochschild-Serre spectral sequence. The motivation for the study of the first family of groups comes from the fact that such groups represent manifolds of dimension 2 and 3, and the groups of the second family act on homotopy spheres.

Keywords: cohomology of groups, free resolutions, diagonal approximation, fundamental groups of surfaces, torus bundles, virtually cyclic groups.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Anéis de grupos

Seja G um grupo (com notação multiplicativa). Definimos o *anel de grupo* $\mathbb{Z}G$ como o $\mathbb{Z}$-módulo livre gerado pelos elementos de G. Mais especificamente, um elemento de $\mathbb{Z}G$ é uma soma formal

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g, \quad \alpha_g \in \mathbb{Z},$$

na qual $\alpha_g = 0$ exceto para uma quantidade finita de elementos $g \in G$.

A multiplicação em G se estende unicamente para um produto bilinear $\mathbb{Z}G \times \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$. Desta forma, $\mathbb{Z}G$ se torna um anel com as operações

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g$$

e

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \left(\sum_{h \in G} \beta_h h \right) = \sum_{g,h \in G} (\alpha_h \beta_h) gh.$$

O elemento neutro multiplicativo de $\mathbb{Z}G$ é, portanto, o elemento $\sum_{g \in G} \alpha_g g$ tal que $\alpha_{1_G} = 1$ e $\alpha_g = 0$ se $g \neq 1_G$. Para nós, um anel sempre significará anel com unidade.

Definimos o *homomorfismo de aumento* $\varepsilon \colon \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ como sendo o homomorfismo de anéis tal que $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$. O núcleo deste homomorfismo é chamado de *ideal de aumento* e denotado por IG.

O anel de grupo $\mathbb{Z}G$ é caracterizado pela seguinte propriedade universal:

Proposição 1.1 *Denotemos por $i \colon G \to \mathbb{Z}G$ a inclusão óbvia, e seja R um anel. Para qualquer função $f \colon G \to R$ tal que $f(xy) = f(x)f(y)$ e $f(1_G) = 1_R$, existe um único homomorfismo de anéis $f' \colon \mathbb{Z}G \to R$ tal que $f' \circ i = f$.*

Um $\mathbb{Z}G$-módulo (à esquerda) A é definido a partir de um homomorfismo $\sigma' \colon \mathbb{Z}G \to \mathrm{End}(A)$. Como um homomorfismo de anéis levam elementos inversíveis em elementos inversíveis e todo elemento de G é inversível em $\mathbb{Z}G$, o homomorfismo σ' é obtido, pela propriedade universal, a partir de um homomorfismo de grupos $\sigma \colon G \to \mathrm{Aut}(A)$. Dizemos que o módulo A é *trivial* se os isomorfismos $\sigma(g) \colon A \to A$ são todos iguais à identidade. Também podemos definir $\mathbb{Z}G$-módulos à direita de modo similar.

1.2 Homologia e cohomologia de grupos

Seja A um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda e B um $\mathbb{Z}G$-módulo à direita. Definimos o n-ésimo grupo de cohomologia de G com coeficientes em A por

$$H^n(G,A) = \operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A),$$

e o n-ésimo grupo de homologia de G com coeficientes em B por

$$H_n(G,B) = \operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},B).$$

Em ambas as definições, $\mathbb{Z}$ é visto como um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. Mais detalhes a respeito desta definição, bem como sua motivação, podem ser encontrados em [Bro82] e [HS97].

Com esta definição, temos então um método (teórico, pelo menos) de calcular os grupos $H^n(G,A)$ e $H_n(G,B)$: inicialmente, tomamos uma resolução projetiva P sobre o anel $\mathbb{Z}G$ do $\mathbb{Z}G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$, construimos os complexos de cadeia $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P,A)$ e $B \otimes_{\mathbb{Z}G} P$, e em seguida calculamos a (co)homologia destes complexos.

Recordaremos então brevemente algumas definições e resultados de Álgebra Homológica que nos permitem mostrar que a definição dos grupos de (co)homologia não dependem da resolução projetiva escolhida e que também serão úteis no futuro. No que segue, os complexos de cadeia são complexos de cadeia de R-módulos para algum anel R, e todos os homomorfismos são homomorfismos de R-módulos, a menos que outra estrutura seja explicitamente mencionada. Uma *homotopia* h entre dois homomorfismos de cadeia $f,g\colon (C,\partial) \to (C',\partial')$ é uma família de homomorfismos $(h_i\colon C_i \to C'_{i+1})$ tal que $\partial'_{i+1}h_i + h_{i-1}\partial_i = f_i - g_i$ para todo i. Neste caso escrevemos $f \sim g$, e a relação $\sim$ é uma relação de equivalência. Dizemos que $f\colon C \to C'$ é uma *equivalência homotópica* se existe $f'\colon C' \to C$ tal que $f'f \sim \mathrm{id}_C$ e $ff' \sim \mathrm{id}_{C'}$.

Lema 1.2 *Sejam (C,∂) e (C',∂') dois complexos de cadeia e seja $r \in \mathbb{Z}$ tal que C_i é projetivo para $i > r$ e $H_i(C') = 0$ para $i \geq r$. Se $(f_i\colon C_i \to C'_i)_{i\leq r}$ é uma família de homomorfismos tal que $\partial'_i f_i = f_{i-1}\partial_i$ para $i \leq r$, então $(f_i)_{i\leq r}$ se estende para um homomorfismo de cadeias $f\colon C \to C'$, e f é única a menos de homotopia. Mais precisamente, duas extensões quaisquer são homotópicas por uma homotopia h tal que $h_i = 0$ para $i \leq r$.*

Demonstração: Assuma indutivamente que f_i tenha sido construída para $i \leq n$, com $n \leq r$, e que $\partial'_i f_i = f_{i-1}\partial_i$ para $i \leq n$. Nosso problema então consiste em definir o homomorfismo f_{n+1} que torna o diagrama a seguir comutativo:

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dashed, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'"'] & C'_n \arrow[r, "\partial'"'] & C'_{n-1}.
\end{tikzcd}$$

Observando que $\partial' f_n \partial = f_{n-1}\partial\partial = 0$, segue que $\operatorname{im} f_n\partial \subset \ker\partial' = \operatorname{im}\partial' \subset C'_n$. Portanto podemos considerar o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & C_{n+1} \arrow[dl, dashed, "f_{n+1}"'] \arrow[d, "f_n\partial"] & \\
C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'"'] & \operatorname{im}\partial' \subset C_n \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

do qual a existência do homomorfismo f_{n+1} segue imediatamente do fato de C_{n+1} ser projetivo.

Suponha agora que g é uma outra extensão de $(f_i)_{i\leq r}$. Queremos encontrar uma homotopia h entre f e g. Assumimos, indutivamente, que $h_i\colon C_i \to C'_{i+1}$ tenha sido definida para $i \leq n$, em que $n \geq r$, e tal que

$$\partial' h_i + h_{i-1}\partial = f_i - g_i.$$

Note que podemos tomar $h_i = 0$ para $i \leq r$. Definindo $\tau_i = f_i - g_i$, devemos então determinar o homomorfismo h_{n+1} no diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, dashed, "h_{n+1}"'] \arrow[d, "\tau_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, "\tau_n"'] & C_{n-1} \arrow[dl, "h_{n-1}"] \\
C'_{n+2} \arrow[r, "\partial'"'] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'"'] & C'_n, &
\end{tikzcd}$$

no qual

$$\begin{aligned}
\partial' h_n \partial &= (\tau_n - h_{n-1}\partial)\partial && \text{por hipótese de indução}\\
&= \tau_n \partial && \text{pois } \partial\partial = 0\\
&= \partial' \tau_{n+1} && \text{pois } \tau \text{ é homomorfismo de complexo de cadeias.}
\end{aligned}$$

Logo $\operatorname{im}(h_n\partial - \tau_{n+1}) \subset \ker \partial' = \operatorname{im} \partial' \subset C'_{n+1}$, e estamos numa situação análoga a que encontramos no problema de extensão da família $(f_i)_{i\leq r}$. A existência de h_{n+1} segue então do fato de C_{n+1} ser projetivo.

■

Considere agora duas resoluções projetivas P e P' do módulo M:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & P'_1 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pelo Lema 1.2, existe um homomorfismo de cadeias $f\colon P \to P'$ que satisfaz $\varepsilon' f = \varepsilon$ (dizemos então que f *preserva o aumento*), que é único a menos de homotopia. Analogamente, existe um homomorfismo de cadeias $f\colon P' \to P$ que preserva o aumento. O Lema 1.2 implica ainda que $f'f \sim \mathrm{id}_P$ e $ff' \sim \mathrm{id}_{P'}$, em que $\sim$ indica a relação de homotopia. Isto prova o seguinte teorema:

Teorema 1.3 *Dadas duas resoluções projetivas P e P' de um módulo M, existe um homomorfismo de cadeias $f\colon P \to P'$, único a menos de homotopia, e f é uma equivalência homotópica.*

Corolário 1.4 *Seja*

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo. Então ε é uma equivalência homotópica (neste caso, como estamos tratando de $\mathbb{Z}$-módulos, todos os homomorfismos são simplesmente homomorfismos de grupos abelianos).

Demonstração: Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

no qual a segunda linha também é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo. O resultado segue então imediatamente do Teorema 1.3.

■

Corolário 1.5 *Se P é um complexo de cadeia não negativo exato (isto é, cuja homologia é nula) de R-módulos projetivos, então P é contrátil, isto é,* $\mathrm{id}_P \sim 0$.

Demonstração: O resultado segue imediatamente observando que o P e o complexo nulo são resoluções projetivas (sobre o anel R) de 0, logo são homotopicamente equivalentes através de uma R-homotopia.

■

Quando um complexo de cadeia é homotópico ao complexo nulo, uma homotopia entre id_P e 0 é chamada de *homotopia de contração.* Considere então uma resolução projetiva P de $\mathbb{Z}$ como um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial:

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Se ignorarmos a ação de G, o complexo acima é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo. Portanto, pelo Corolário 1.5, existe uma homotopia de contração s para a resolução P, na qual os homomorfismos s_n são homomorfismos de $\mathbb{Z}$-módulos (isto é, homomorfismos de grupos abelianos), mas não necessariamente de $\mathbb{Z}G$-módulos.

Proposição 1.6 *Se os homomorfismos de complexos de cadeia $f, g\colon (C, \partial) \to (C', \partial')$ são homotópicos, então $H(f) = H(g)\colon H(C) \to H(C')$.*

Demonstração: Seja h uma homotopia entre f e g e seja $z \in \ker \partial_n$. Então

$$(f-g)(z) = \partial h(z) + h\partial(z) = \partial h(z),$$

pois $\partial(z) = 0$. Logo $f(z) - g(z) \in \operatorname{im} \partial'_{n+1}$, isto é, $f(z)$ e $g(z)$ pertencem à mesma classe de homologia.

■

Lema 1.7 *Seja $F\colon R\text{-mod} \to \mathbb{Z}\text{-mod}$ um funtor aditivo da categoria dos R-módulos na categoria dos $\mathbb{Z}$-módulos. Se os homomorfismos de complexos de cadeia $f, g\colon C \to C'$ são tais que $f \sim g$, então $F(f) \sim F(g)\colon F(C) \to F(C')$.*

Demonstração: Seja h uma homotopia entre f e g. Temos

$$F(f) - F(g) = F(f-g) = F(\partial h + h\partial) = F(\partial)F(h) + F(h)F(\partial),$$

logo $F(h)$ é uma homotopia entre $F(f)$ e $F(g)$.

■

Assim, observando que os funtores $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\_, A)$ e $B \otimes_{\mathbb{Z}G} \_$ são aditivos, então o Teorema 1.3, a Proposição 1.6 e o Lema 1.7 garantem que os grupos $H^n(G, A)$ e $H_n(G, B)$ estão bem definidos.

Dado um grupo G, determinar uma resolução projetiva (ou livre) de $\mathbb{Z}$ como um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial não é, em geral, uma tarefa simples. Veremos agora que ações livres de G sobre complexos contráteis dão origem a resoluções livres de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial.

Um *G-complexo* é um CW-complexo X munido de uma ação de G sobre X que permuta suas células. Assim, para cada $g \in G$, temos um homeomorfismo $x \mapsto gx$ de X tal que a imagem de $g\sigma$ de qualquer célula σ de X é também uma célula. Se X é um G-complexo, a ação de G em X induz uma ação de G no complexo de cadeia celular $C_*(X)$, que se torna então um complexo de cadeia de $\mathbb{Z}G$-módulos, no qual o aumento $\varepsilon\colon C_0(X) \to \mathbb{Z}$ dado por $\varepsilon(v) = 1$ para toda 0-célula v de X é um homomorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos.

Dizemos que X é um G-complexo *livre* se a ação de G permuta livremente as células de X, ou seja, para toda célula σ de X e $g \in G$, $g \neq 1 \Rightarrow g\sigma \neq \sigma$. Neste caso, cada $\mathbb{Z}G$-módulo $C_n(X)$ é de fato um $\mathbb{Z}G$-módulo livre.

Finalmente, se X é contrátil, a sequência

$$\cdots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é exata, e temos:

Proposição 1.8 *Seja X um G-complexo livre e contrátil. O complexo de cadeia celular aumentado de X é uma resolução de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial.*

Se Y é um espaço $K(G, 1)$, então o seu recobrimento universal $p\colon X \to Y$ é um G-complexo livre contrátil. Logo da proposição anterior segue o seguinte resultado:

Corolário 1.9 *Se Y é um $K(G, 1)$, então o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal de Y é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial.*

Damos agora um exemplo de aplicação do Corolário 1.9:

1. Seja $G = F(S)$ o grupo livre gerado pelo conjunto S. Seja $Y = \bigvee_{s \in S} S^1_s$, um buquê de círculos S^1 com um círculo para cada elemento de S. Então Y é um 1-complexo com 1 vértice e uma 1-célula para cada elemento de S. Sabemos que $\pi_1(Y) \cong G$. Além disso, Y é um $K(G, 1)$, pois seu recobrimento universal X é unidimensional. Como ponto base de X escolhemos um vértice x_0, que é um gerador para $C_0(X)$. Uma base de $C_1(X)$ é construída tomando, para cada $s \in S$, uma 1-célula e_s de X sobre S^1_s (percorrida no sentido positivo) e cujo vértice inicial é x_0. Seu vértice final é, portanto, sx_0, logo $\partial e_s = (s-1)x_0$. Obtemos então a resolução livre

   $$0 \longrightarrow \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

   na qual uma base para $\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}G$ é dada por $\{e_s \,:\, s \in S\}$, $\partial e_s = s - 1$ e $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$.

2. Como um caso particular do exemplo anterior, se S é um conjunto unitário, então $G \cong \mathbb{Z} = \langle t \rangle$ e obtemos a seguinte resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial:

   $$0 \longrightarrow \mathbb{Z}\mathbb{Z} \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Além do caso dos grupos livres, são conhecidas também resolução para outras famílias de grupos. Por exemplo, para o grupo cíclico $G = \mathbb{Z}_n = \langle t \mid t^n \rangle$, mostra-se em [Bro82] que

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

é uma resolução livre, com $N = 1 + t + \cdots + t^{n-1}$.

Embora não haja uma técnica padrão para construirmos uma resolução de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, tal técnica existe pelo menos para construirmos o início de uma resolução usando o cálculo de Fox, como detalharemos neste momento. Um tratamento mais geral pode ser encontrado em [FC63].

Seja $G = \langle X \mid R \rangle$ um grupo finitamente presentado, isto é, temos um conjunto finito X de geradores e um conjunto finito de relações R. Suponha que $x, y \in X$ e $v, w \in \mathbb{Z}G$. O *cálculo de Fox* define funções

$$\frac{\partial}{\partial x} \colon \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G,$$

chamadas de *derivadas de Fox*, tais que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(y) &= \begin{cases} 1, & \text{se } y = x, \\ 0, & \text{se } y \neq x, \end{cases} \\ \frac{\partial}{\partial x}(v + w) &= \frac{\partial}{\partial x}(v) + \frac{\partial}{\partial x}(w), \\ \frac{\partial}{\partial x}(vw) &= \frac{\partial}{\partial x}(v) + v\frac{\partial}{\partial x}(w). \end{aligned}$$

As derivadas de Fox nos permitem construir uma resolução parcial (até P_2) de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. Mais precisamente, temos:

Proposição 1.10 *Suponha que $G = \langle X \mid R \rangle$ seja um grupo finitamente presentado com $X = \{x_i\}$ e $R = \{r_i\}$. Definimos os módulos livres*

$$\begin{aligned} &P_0 = (\mathbb{Z}G\textit{-módulo livre com gerador } a) \cong \mathbb{Z}G, \\ &P_1 = (\mathbb{Z}G\textit{-módulo livre com um gerador } b_i \textit{ para cada elemento } x_i \in X) \cong \mathbb{Z}G^{|X|}, \\ &P_2 = (\mathbb{Z}G\textit{-módulo livre com um gerador } c_j \textit{ para cada elemento } r_i \in R) \cong \mathbb{Z}G^{|R|}, \end{aligned}$$

e defina os diferenciais

$$\begin{aligned} \varepsilon \colon\ & P_0 \to \mathbb{Z} \\ & \varepsilon(a) = 1, \\ d_1 \colon\ & P_1 \to P_0 \\ & d_1(b_i) = (x_i - 1)a \quad \forall b_i, \\ d_2 \colon\ & P_2 \to P_1 \\ & d_2(c_i) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(r_i) b_j \quad \forall c_i. \end{aligned}$$

Então a sequência

$$P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é exata em P_0.

Demonstração: Temos $\varepsilon(d_1(b_i)) = \varepsilon((x_i - 1)a) = 0$, logo $\operatorname{im} d_1 \subset ker d_0$. Para mostrar a inclusão contrária, definimos os homomorfismos de grupos abelianos $s_{-1}\colon \mathbb{Z} \to P_0$ e $s_0\colon P_0 \to P_1$ por $s_{-1}(1) = a$ e $s_0(wa) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(w)b_i$, com $w \in G$. Então, para todo $g \in G$, temos

$$(d_1 s_0 + s_{-1}\varepsilon)(ga) = d_1\left(\sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} b_i\right) + a = \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_i - 1) + a = (g-1)a + a = ga.$$

■

A partir desta resolução parcial, é fácil notar o fato (também observável por outros meios) que

$$H^0(G, M) = M^G = \{m \in M \ : \ gm = m \quad \forall g \in G\}.$$

Usaremos este fato para realizar a construção da sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre. Outro fato que será útil para esta mesma construção é o lema a seguir.

Lema 1.11 (Shapiro) *Se H é um subgrupo do grupo G e M é um $\mathbb{Z}H$-módulo, então*

$$H^*(H, M) \cong H^*(G, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)).$$

Demonstração: Sendo

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

uma resolução projetiva, o lema segue imediatamente do fato que

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(P, M) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)).$$

■

1.3 Resoluções para extensões de grupos

Neste trabalho, usaremos mais de uma vez uma técnica contida no artigo [Wal61] e que resumiremos agora: dada uma sequência exata de grupos

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1,$$

somos capazes de construir uma resolução livre para G se possuirmos resoluções livres de H e K do seguinte modo: seja

$$\cdots \longrightarrow B_r \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_1 \longrightarrow B_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

uma resolução livre sobre $\mathbb{Z}K$. Como K é subgrupo de G, $\mathbb{Z}G$ é um $\mathbb{Z}K$-módulo livre, logo $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K} B_r$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre e $1 \otimes \varepsilon\colon \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K} B \to \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}H$ induz um isomorfismo em homologia.

Seja

$$\cdots \longrightarrow C_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

uma resolução livre sobre $\mathbb{Z}H$, de modo que C_s seja livre em α_s geradores. Definimos D_s como a soma direta de α_s cópias de $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K} B$, o que nos fornece um homomorfismo de aumento sobre sobre a soma direta de α_s cópias de $\mathbb{Z}H$, a qual identificamos com C_s e escrevemos $\varepsilon_s\colon D_s \to C_s$. Se $A_{r,s}$ é o submódulo de D_s que é a soma direta de α_s cópias de $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}K} B_r$, então $A_{r,s}$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre e D_s é a soma direta dos $A_{r,s}$'s. Denotamos por d_0 o diferencial em cada um dos complexos D_s. O seguinte lema é então demonstrado em [Wal61]:

Lema 1.12 *Existem $\mathbb{Z}G$-homomorfismos $d_k \colon A_{r,s} \to A_{r+k-1,s-k}$ tais que*

(i) $d_1\varepsilon_{s-1} = \varepsilon_s d \colon A_{0,s} \to C_{s-1}$*, em que d denota o diferencial em C;*

(ii) $\sum_{i=0}^{k} d_i d_{k-i} = 0$ *para todo k, em que d_k é nulo se $r = k = 0$ ou se $s < k$.*

Com estes homomorfismos, é provado então o seguinte teorema:

Teorema 1.13 *Sendo A a soma direta dos $A_{r,s}$, graduado por $\dim A_{r,s} = r + s$, e sendo $d = \sum d_k$, temos que o complexo (A, d) é acíclico, e portanto nos dá uma resolução livre sobre $\mathbb{Z}G$.*

1.4 Produtos em cohomologia

Sejam G e G' grupos, M um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda e M' um $\mathbb{Z}G'$-módulo módulo à esquerda. O produto tensorial $M \otimes M'$ (sempre que usamos o símbolo $\otimes$ sem a especificação do anel, entende-se o produto tensorial sobre $\mathbb{Z}$, isto é, o produto tensorial de grupos abelianos) torna-se então um $\mathbb{Z}[G \times G']$-módulo à esquerda ao definirmos

$$(g, g') \cdot (m \otimes m') = gm \otimes g'm'.$$

Observe que, se M é projetivo sobre $\mathbb{Z}G$ e M' é projetivo sobre $\mathbb{Z}G'$, então $M \otimes M'$ é projetivo sobre $\mathbb{Z}[G \times G']$. De fato, basta verificarmos esta afirmação quando $M = \mathbb{Z}G$ e $M' = \mathbb{Z}G'$, mas neste caso a afirmação segue diretamente do isomorfismo $\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}G' \cong \mathbb{Z}[G \times G']$.

Proposição 1.14 *Sejam G e G' grupos. Se*

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial e

$$\cdots \longrightarrow Q_n \xrightarrow{d'_n} Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_0 \xrightarrow{\varepsilon'} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G'$-módulo trivial, então

$$\cdots \longrightarrow (P \otimes Q)_n \xrightarrow{\partial_n} (P \otimes Q)_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow (P \otimes Q)_0 \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon'} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[G \times G']$-módulo trivial, na qual o complexo $(P \otimes Q)$ é definido por

$$(P \otimes Q)_n = \bigoplus_{i=0}^{n} P_i \otimes Q_{n-i}$$

e cujo diferencial ∂_n, quando restrito a $P_i \otimes Q_{n-i}$, é dado por

$$\partial_n(p_i \otimes q_{n-i}) = d_i(p_i) \otimes q_{n-i} + (-1)^i p_i \otimes d'_{n-i}(q_{n-i}).$$

Demonstração: O complexo $P \otimes Q$ é um complexo de $\mathbb{Z}[G \times G']$-módulos projetivos, pela observação feita no início desta seção. Se h é uma homotopia de contração para a resolução P, então o homomorfismo $H \colon (P \otimes Q)_n \to (P \otimes Q)_{n+1}$ definido em $P_i \otimes Q_{n-i}$ por $H(p_i \otimes q_{n-i}) = h(p_i) \otimes q_{n-i}$ é uma homotopia de contração para o complexo $P \otimes Q$.

■

Assim, se tomarmos $G' = G$, obtemos:

Corolário 1.15 *Se*

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ *como* $\mathbb{Z}G$*-módulo trivial, então*

$$\cdots \longrightarrow (P \otimes P)_n \xrightarrow{\partial_n} (P \otimes P)_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow (P \otimes P)_0 \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

também é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ *como* $\mathbb{Z}G$*-módulo trivial, em que* G *age diagonalmente sobre* $P \otimes P$*.*

Logo, pelo Teorema 1.3, existe um homomorfismo de complexos de cadeia $\Delta\colon P \to (P \otimes P)$ que preserva o aumento, e que tal homomorfismo é único a menos de homotopia:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\Delta_n"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta_0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & (P \otimes P)_n \arrow[r, "\partial_n"] & (P \otimes P)_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (P \otimes P)_0 \arrow[r, "\varepsilon \otimes \varepsilon"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Um homomorfismo Δ que tenha essas propriedades é chamado de *aproximação da diagonal* para a resolução P.

De posse do homomorfismo Δ, já podemos definir a construção do produto cup em cohomologia. Seja P uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$,

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

e sejam M e N dois $\mathbb{Z}G$-módulos. Dados $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P, M)$ e $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P, N)$, definimos seu *produto cross* $(u \times v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P \otimes P, M \otimes N)$ por

$$(u \times v)(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y).$$

Se $\alpha \in H^p(G, M)$ e $\beta \in H^q(G, N)$ são as classes de u e v, respectivamente, definimos então o *produto cup* de α e β, denotado por $\alpha \smile \beta$, por

$$(\alpha \smile \beta) = [(u \times v) \circ \Delta] \in H^{p+q}(G, M \otimes N),$$

em que [ ] denota a classe de cohomologia. Mais explicitamente, dados homomorfismos $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_p, M)$ e $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_q, N)$, o produto cup $[u] \smile [v] \in H^{p+q}(G, M \otimes N)$ é a classe do homomorfismo $(u \times v) \circ \Delta_{pq}$, em que Δ_{pq} é a composição do homomorfismo Δ_{p+q} com a projeção $\pi_{pq}\colon (P \otimes P)_{p+q} \to P_p \otimes P_q$:

$$P \xrightarrow{\Delta_{p+q}} (P \otimes P)_{p+q} \xrightarrow{\pi_{pq}} P_p \otimes P_q.$$

As principais propriedades do produto cup podem ser encontradas em [Bro82]. Fazemos apenas as seguintes observações:

1. o elemento $1 \in H^0(G, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ satisfaz $1 \smile u = u = u \smile 1$ para todo $u \in H^*(G, M)$, fazendo as identificações óbvias $\mathbb{Z} \otimes M = M \otimes \mathbb{Z} = M$.

2. Se A é um anel comutativo (com ação trivial de G, para simplificar), a multiplicação $A \otimes A \to A$ nos dá um produto

$$H^*(G,A) \otimes H^*(G,A) \xrightarrow{\smile} H^*(G, A \otimes A) \longrightarrow H^*(G,A).$$

Estas duas observações nos permitem então ver $H^*(G,\mathbb{Z})$ como um anel.

Para calcular o produto cup, precisamos da aproximação da diagonal $\Delta\colon P \to P \otimes P$. Em [Tom05], encontramos os seguintes resultados que nos permitem, em certos casos, determinar Δ:

Proposição 1.16 *Seja G um grupo e seja*

$$\cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ finitamente gerada, isto é, cada C_n é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo. Se s é uma homotopia de contração para a resolução C, então uma homotopia de contração $\tilde{s}$ para a resolução $C \otimes C$ é dada por

$$\begin{aligned}
\tilde{s}_{-1}\colon \mathbb{Z} &\to C_0 \otimes C_0 \\
&\tilde{s}_{-1}(1) = s_{-1}(1) \otimes s_{-1}(1), \\
\tilde{s}_n\colon (C \otimes C)_n &\to (C \otimes C)_{n+1} \\
&\tilde{s}_n(u_i \otimes v_{n-i}) = s_i(u_i) \otimes v_{n-i} + s_{-1}\varepsilon(u_i) \otimes s_{n-i}(v_{n-i}), \quad \text{se } n \geq 0,
\end{aligned}$$

em que $s_{-1}\varepsilon\colon C_0 \to C_0$ é estendido para $s_{-1}\varepsilon = \{(s_{-1}\varepsilon)_n\colon C_n \to C_n\}$ de forma que $(s_{-1}\varepsilon)_n = 0$ para $n \geq 1$.

Proposição 1.17 *Seja G um grupo, seja*

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ finitamente gerada (isto é, cada C_n é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo), e seja s uma homotopia de contração para a resolução C. Se $\tilde{s}$ é a homotopia de contração para a resolução $C \otimes C$ dada pela Proposição 1.16, então uma aproximação da diagonal $\Delta\colon C \to C \otimes C$ pode ser construída da seguinte maneira: para cada $n \geq 0$, o homomorfismo $\Delta_n\colon C_n \to (C \otimes C)_n$ é definido em cada gerador ρ do módulo livre C_n por

$$\begin{aligned}
&\Delta_0 = s_{-1}\varepsilon \otimes s_{-1}\varepsilon \\
&\Delta_n(\rho) = \tilde{s}_{n-1}\Delta_{n-1}d_n(\rho), \quad \text{se } n \geq 1.
\end{aligned}$$

As duas proposições acima são usadas em [Tom05] para o cálculo da resolução projetiva e do produto cup de certos grupos finitos que possuem uma resolução projetiva de período 4.

1.5 A sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre

Nesta seção introduziremos a sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre, a qual, dada uma sequência exata de grupos

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1,$$

relaciona as cohomologias de H e Q com a cohomologia de G. Começaremos introduzindo uma noção mais geral de sequência espectral, daremos a construção da sequência espectral associada a um complexo duplo e então faremos a construção específica para a sequência de Lyndon-Hochschild-Serre. Seguiremos os livros [McC01] e [Eve91].

Um *módulo bigraduado diferencial* sobre um anel R é uma coleção de R-módulos $\{E^{p,q}\}$, com p e q inteiros, junto com um R-homomorfismo $d\colon E^{*,*} \to E^{*,*}$ (o diferencial) de bigrau $(s, 1-s)$ para algum inteiro s satisfazendo $d \circ d = 0$.

A partir do diferencial d, podemos tomar a homologia de um módulo bigraduado diferencial. Por exemplo, se o bigrau de d é $(s, 1-s)$, então

$$H^{p,q}(E^{*,*}, d) = \frac{\ker(d\colon E^{p,q} \to E^{p+s,q-s+1})}{\operatorname{im}(d\colon E^{p-s,q+s-1} \to E^{p,q})}.$$

Fazemos então a seguinte definição: uma *sequência espectral* de tipo cohomológico[1] é uma coleção de R-módulos bigraduados diferenciais $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ para r inteiro positivo, cujos diferenciais d_r têm bigrau $(r, 1-r)$ e tal que, para todos p, q, r, temos $E_{r+1}^{p,q} \cong H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$.

Muitas sequências espectrais são construídas a partir de complexos duplos, portanto os revisaremos brevemente. Seja $A = \{A^{*,*}, d', d''\}$ um complexo duplo (de cocadeias). Isto quer dizer que d' tem bigrau $(1,0)$ e d'' tem bigrau $(0,1)$, e além disso temos $(d')^2 = 0$, $(d'')^2 = 0$, $d'd'' + d''d' = 0$:

$$\begin{tikzcd}
A^{p,q+1} \arrow[r, "d'"] & A^{p+1,q+1} \\
A^{p,q} \arrow[u, "d''"] \arrow[r, "d'"'] & A^{p+1,q} \arrow[u, "d''"']
\end{tikzcd}$$

Definimos

$$\operatorname{Tot}(A)^n = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}$$

e $d = d' + d''$, o que torna $\{\operatorname{Tot}(A), d\}$ um complexo simples. Quando nos referimos a cohomologia de A, estamos nos referindo à cohomologia de $\operatorname{Tot}(A)$.

Vamos assumir ainda que os componentes não nulos de A estão restritos ao primeiro quadrante, isto é, $A^{p,q} = 0$ se $p < 0$ ou $q < 0$. Esta hipótese não é estritamente necessária, mas simplifica a análise da convergência da sequência espectral que construiremos. Mais detalhes sobre o problema de convergência de sequências espectrais pode ser encontrado em [McC01].

$$\begin{tikzcd}
& q & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
& A^{0,3} \arrow[u] \arrow[dr, dash, dashed] & A^{1,3} & A^{2,3} & A^{3,3} & A^{4,3} & \cdots \\
& A^{0,2} \arrow[u, dash] \arrow[dr, dash, dashed] & A^{1,2} \arrow[dr, dash, dashed] & A^{2,2} & A^{3,2} & A^{4,2} & \cdots \\
& A^{0,1} \arrow[u, dash] \arrow[dr, dash, dashed] & A^{1,1} \arrow[dr, dash, dashed] & A^{2,1} \arrow[dr, dash, dashed] & A^{3,1} & A^{4,1} & \cdots \\
{} \arrow[r, dash] & A^{0,0} \arrow[u, dash] \arrow[d, dash] \arrow[r, dash] \arrow[dr, dashed] & A^{1,0} \arrow[r, dash] \arrow[dr, dashed] & A^{2,0} \arrow[r, dash] \arrow[dr, dashed] & A^{3,0} \arrow[r, dash] \arrow[dr, dashed] & A^{4,0} \arrow[r] & p \\
& {} & A^0 & A^1 & A^2 & A^3 & \cdots
\end{tikzcd}$$

[1]existe uma definição análoga para uma sequência espectral de tipo homológico, cujo diferencial d_r tem bigrau $(-r, r-1)$

Realizamos uma *filtração* (por colunas) do complexo duplo A definindo

$$F^pA^n = \bigoplus_{p' \geq p} A^{p',n-p'},$$

isto é, ignoramos as componentes de A^n que estão à esquerda da coluna p. Observamos que, para todo $n \geq 0$,

$$0 = F^{n+1}A^n \subset F^nA^n \subset F^{n-1}A^n \subset \cdots \subset F^0A^n = A^n.$$

Dada a filtração F, seja

$$C_r^{p,q} = \{x \in F^pA^{p+q} \ : \ d(x) \in F^{p+r}A^{p+q+1}\}. \tag{1.1}$$

Cada elemento de $C_r^{p,q}$ pode ser visualizado como uma soma de componentes na diagonal $p+q = n$, começando da posição (p,q) e indo para a direita e para baixo, para os quais as componentes vertical e horizontal do diferencial d se cancelam para as colunas p' tais que $p \leq p' < p+r$. A partir de $C_r^{p,q}$, definimos

$$E_r^{p,q} = \frac{C_r^{p,q} + F^{p+1}A^{p+q}}{d(C_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}) + F^{p+1}A^{p+q}}, \tag{1.2}$$

e esta definição é motivada pelo fato de d induzir então homomorfismos

$$d_r^{p,q} \colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$$

que satisfazem $d_r^2 = 0$ e tais que $H(E_r, d_r) = E_{r+1}$, isto é, $E_{r+1}^{p,q} = \dfrac{\ker d_r^{p,q}}{\operatorname{im} d_r^{p-r,q+r-1}}$.

Como estamos supondo que A está concentrado no primeiro quadrante, para cada (p,q) temos que d_r é nulo para r suficientemente grande. Portanto cada módulo $E_r^{p,q}$ eventualmente se estabiliza em um valor que denotamos por $E_\infty^{p,q}$. Observamos, entretanto, que o valor r depende para o qual $E^{p,q}$ se estabiliza depende de (p,q), e pode não haver um r único para o qual $E_r = E_\infty$.

Suponha que $a \in A^n$ é um cociclo que começa no termo $A^{p,q}$ $(p+q=n)$, isto é, um elemento de A^n tal que $a \in F^pA^n$ mas $a \notin F^{p+1}A^n$ e, além disso, $d(a) = 0$. Então a determina um elemento de $E_r^{p,q}$ para todo $r \geq 1$, e d_r é zero nestes elementos, logo a determina um elemento de $E_\infty^{p,q}$. Podemos então definir um epimorfismo

$$F^pH^{p+q}(A) = \operatorname{im}\{H^{p+q}(F^pA) \to H^{p+q}(A)\} \to E_\infty^{p,q},$$

cujo núcleo é $F^{p+1}H^{p+q}(A)$. Assim, $H^*(A)$ é filtrado por $F^pH^*(A)$ e

$$E_\infty^{p,q} \cong \frac{F^pH^{p+q}(A)}{F^{p+1}H^{p+q}(A)}. \tag{1.3}$$

Da equação acima, notamos que a sequência espectral não nos dá uma informação direta a respeito de $H^*(A)$, mas que esta informação é dada módulo a filtração $F^pH^*(A)$. Quando existe uma filtração de $H^*(A)$ tal que $E_\infty^{p,q}$ satisfaz a equação (1.3), como no caso que exemplificamos acima, dizemos que a sequência espectral *converge* para $H^*(A)$.

No lugar da construção que acabamos de realizar, o complexo A também poderia ter sido filtrado por linhas ao invés de colunas, definindo

$$F^qA^n = \bigoplus_{q' \geq q} A^{n-q',q'}.$$

Fazendo construções análogas à da primeira sequência espectral, obtemos então uma segunda sequência espectral que também converge para $H^*(A)$. Resumimos estes resultados no seguinte teorema:

Teorema 1.18 *Dado um complexo duplo* $\{A^{*,*}, d', d''\}$ *tal que* $A^{p,q} = 0$ *se* $p < 0$ *ou* $q < 0$, *existem duas sequências espectrais* $\{_I E_r^{*,*}, _I d_r\}$ *e* $\{_{II} E_r^{*,*}, _{II} d_r\}$ *tais que*

$$_I E_2^{*,*} = H(H(A^{*,*}, d''), d') \quad e \quad _{II} E_2^{*,*} = H(H(A^{*,*}, d'), d'')$$

e que convergem para $H^*(A)$.

Demonstração: Faremos a demonstração para a sequência $_I E_2^{*,*}$, e o outro caso segue por simetria. A única tarefa que resta a ser feita é identificarmos o termo $_I E_2^{*,*}$. A partir da definição de $C_1^{p,q}$ e $E_1^{p,q}$ dadas pelas equações (1.1) e (1.2), temos

$$_I E_1^{p,q} = H^{p+q}\left(\frac{F_I^p \operatorname{Tot}(A)}{F_I^{p+1} \operatorname{Tot}(A)}, d\right) \cong H^{p+q}(A^{p,q}, d''),$$

em que F_I é a filtração por colunas $F_I^p A^n = \bigoplus_{p' \geq p} A^{p', n-p'}$. Pela definição de d_1, obtemos então o termo $_I E_2^{p,q}$ como no enunciado.

■

Procedemos agora com a construção da sequência de Lyndon-Hochschild-Serre. Seja G um grupo, H um sungrupo normal e $Q = G/H$, de modo que temos uma sequência exata curta de grupos

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1.$$

Seja

$$\cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{1.4}$$

uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre o anel $\mathbb{Z}G$ e seja

$$\cdots \longrightarrow Y_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{1.5}$$

uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre o anel $\mathbb{Z}Q$. Se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo, o grupo G age sobre $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, M)$ por $(gf)(x) = g(f(g^{-1}x))$. Nesta ação, o subgrupo H age trivialmente, logo o complexo $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, M)$ pode ser visto como um $\mathbb{Z}Q$-complexo. Formamos então o complexo duplo

$$A = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}Q}(Y, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, M)),$$

isto é, $A^{p,q} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}Q}(Y_p, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X_q, M))$. Se d_X e d_Y denotam os diferenciais nas resoluções projetivas X e Y, respectivamente, definimos

$$\begin{aligned} d' &= \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}Q}(d_Y, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathrm{id}, \mathrm{id})), \\ d'' &= \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}Q}(\mathrm{id}, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(d_X, \mathrm{id})), \end{aligned}$$

com a convenção de que existe um sinal implícito $(-1)^p$ do lado direito da equação que define d'', em que p é a dimensão do elemento da resolução Y. Sendo então $d = d' + d''$, A torna-se um complexo duplo.

A partir do complexo duplo A, podemos construir então duas sequências espectrais, ambas convergindo para $H^*(A)$. Analisaremos cada uma delas para obter o resultado desejado.

Uma das sequências possui termo E_2 dado por

$$\begin{aligned} E_2 &= H(H(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}Q}(Y, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, M)), d''), d') \\ &= H(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}Q}(Y, H^*(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, M))), d') \qquad \text{pois } \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}Q}(Y, \underline{\quad}) \text{ é um funtor exato} \\ &= H(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}Q}(Y, H^*(H, M))) \\ &= H^*(Q, H^*(H, M)). \end{aligned}$$

A outra sequência possui termo $E_2 = H(H(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}Q}(Y, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, M)), d'), d'')$. Temos

$$H(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}Q}(Y, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, M)), d') = H^*(Q, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, M))$$

e afirmamos que $H^p(Q, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, M)) = 0$ se $p > 0$. Como cada X_q é projetivo sobre $\mathbb{Z}G$, basta provar tal afirmação para $X = \mathbb{Z}G$.

Seja M_0 o grupo abeliano associado a M (via o funtor esquecimento). Definiremos um isomorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos à esquerda

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M_0)$$

no qual G age sobre o lado esquerdo por $(gf)(x) = gf(g^{-1}x)$ e age do lado direito por $(gf')(x) = f'(xg)$. Para $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, M)$, definimos $f' \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, M_0)$ por $f'(x) = xf(x^{-1})$ para $x \in G$. Temos $(f')' = f$ e, se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$, então

$$f'(xh) = xhf(h^{-1}x^{-1}) = xf(x^{-1}) = f'(x).$$

Logo $f(hx) = f'(xx^{-1}hx) = f'(x)$, pois H é normal em G, e $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M_0)$. Reciprocamente, se $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M_0)$, é fácil ver que $f = f' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$. Isto nos dá um isomorfismo de grupos abelianos $f \leftrightarrow f'$ que, na verdade, é um isomorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos. De fato, $\forall x \in G$,

$$(gf)'(x) = x(gf)(x^{-1}) = xgf(g^{-1}x^{-1}) = f'(xg) = (gf')(x).$$

Como H age trivialmente em M_0, temos ainda $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M_0) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}Q, M_0)$. Portanto, pelo Lema 1.11,

$$\begin{aligned} H^p(Q, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)) &\cong H^p(Q, \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}Q, M_0)) \\ &\cong H^p(\{1\}, M_0) = 0 \end{aligned}$$

se $p > 0$.

Assim, o termo $E_2 = H(H(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}Q}(Y, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, M)), d'), d'')$ da segunda sequência espectral está concentrado na coluna $p = 0$ e, nesta coluna, temos

$$H^0(Q, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, M)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, M)^Q = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(X, M),$$

de onde segue que $H(H(A, d'), d'') = H^*(G, M)$. Assim, como $E_2 = E_\infty$, temos então que $H^n(A) = H^n(G, M)$. Demonstramos então:

Teorema 1.19 (Lyndon-Hochschild-Serre) *Dada uma sequência exata de grupos*

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1,$$

e um $\mathbb{Z}G$-módulo M, existe uma sequência espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ tal que

$$E_2^{p,q} = H^p(Q, H^q(H, M))$$

e que converge para $H^*(G, M)$.

Vejamos agora a estrutura multiplicativa na sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre. Sejam M e N dois $\mathbb{Z}G$-módulo. Sendo

$$\Delta_X \colon X \to X \otimes X$$

uma aproximação da diagonal para a resolução (1.4) e

$$\Delta_Y : Y \to Y \otimes Y$$

uma aproximação da diagonal para a resolução (1.5), temos que Δ_X e Δ_Y induzem um homomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[Q\times Q]}(Y\otimes Y, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H\times H]}(X\otimes X, M\otimes N)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}Q}(Y, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, M\otimes N)),$$

e temos também um produto

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}Q}(Y, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, M)) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}Q}(Y, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, N)) \to \\ &\qquad\qquad \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[Q\times Q]}(Y\otimes Y, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H\times H]}(X\otimes X, M\otimes N)).\end{aligned}$$

Compondo estes homomorfismos, obtemos então

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}Q}(Y, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, M)) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}Q}(Y, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, N)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}Q}(Y, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X, M\otimes N)),$$

que nos fornece uma estrutura multiplicativa no complexo duplo A. Pode-se verificar [Eve91] que esta estrutura induz uma multiplicação

$$E_r(M) \otimes E_r(N) \to E_r(M\otimes N)$$

na qual cada d_r é uma derivação, e tal que a multiplicação em cada estágio é a cohomologia da estrutura multiplicativa no estágio anterior. Logo uma estrutura multiplicativa é induzida no termo E_∞. Além disso, o produto é compatível com a filtração F, isto é, $F^{p'} \otimes F^{p''} \to F^{p'+p''}$. Mostra-se então que, para a sequência do Teorema 1.19, o produto para o termo E_2

$$H^{p'}(Q, H^{q'}(H, M)) \otimes H^{p''}(Q, H^{q''}(H, N)) \to H^{p'+p''}(Q, H^{q'+q''}(H, M\otimes N))$$

é obtido multiplicando o produto cup usual por $(-1)^{q'p''}$.

Capítulo 2

Aproximações da diagonal para os grupos fundamentais das superfícies

Neste capítulo construiremos resoluções livres e aproximações da diagonal para os grupos que são grupos fundamentais de superfícies distintas de S^2 e $\mathbb{R}P^2$. Tais construções (ainda que parciais no caso das aproximações da diagonal) nos permitirão, de forma eficaz, determinar o anel de cohomologia de tais grupos para uma grande variedade de sistemas de coeficientes (não triviais).

Para a superfície orientável M_n de gênero $n \geq 1$, escolhemos a seguinte presentação para o grupo fundamental:

$$\pi_1(M_n) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \cdots [a_n, b_n] \rangle ,$$

e para a superfície não orientável N_n escolhemos a presentação

$$\pi_1(N_n) = \left\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \mid a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2 \right\rangle ,$$

para $n \geq 3$ e a presentação

$$\pi_1(K) = \pi_1(N_2) = \left\langle a, b \mid abab^{-1} \right\rangle$$

no caso da garrafa de Klein.

As superfícies S^2 e $\mathbb{R}P^2$ foram excluídas do estudo por não serem espaços do tipo $K(G,1)$. Além disso, temos $\pi_1(S^2) = 0$ e $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$, e as resoluções livres de grupos cíclicos são conhecidas, bem como aproximações da diagonal para tais resoluções. Veja, por exemplo, [Bro82].

Faremos um estudo mais detalhado do grupo fundamental do toro (no caso orientável) e da garrafa de Klein (no caso não orientável). Tais grupos servem para ilustrar o método a ser usado no caso das outras superfícies, e para estes dois grupos obteremos aproximações da diagonal completas para as resoluções livres destes mesmos grupos.

Apenas para mencionar um exemplo no qual o estudo da cohomologia dos grupos fundamentais das superfícies é relevante, citamos [GO97].

2.1 O toro

Seja $G = \left\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \right\rangle$ o grupo fundamental do toro. Nesta seção exibiremos uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. Sendo P esta resolução, em seguida construiremos uma aproximação da diagonal $\Delta \colon P \to P \otimes P$. Esta aproximação da diagonal permite que calculemos então não apenas os grupos $H^*(G, M)$ para um $\mathbb{Z}G$-módulo M, mas também o produto cup. Faremos tais cálculos para $M = \tilde{\mathbb{Z}}$ (isto é, $\mathbb{Z}$ como um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial ou não) e $M = \mathbb{Z}G$.

Proposição 2.1 *Uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial é dada por*

$$0 \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \tag{2.1}$$

com

$$\begin{aligned} P_0 &= \langle e_0 \rangle \cong \mathbb{Z}G, \\ P_1 &= \langle e_1^1, e_1^2 \rangle \cong \mathbb{Z}G \oplus \mathbb{Z}G, \\ P_2 &= \langle e_2 \rangle \cong \mathbb{Z}G, \end{aligned}$$

e tal que os homomorfismos são definidos por

$$\begin{aligned} \varepsilon(e_0) &= 1, \\ d_1(e_1^1) &= (a-1)e_0, \\ d_1(e_1^2) &= (b-1)e_0, \\ d_2(e_2) &= (1-b)e_1^1 + (a-1)e_1^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Demonstração: Um modo de verificar que a sequência obtida em (2.1) é de fato exata consiste em exibirmos uma homotopia de contração, isto é, exibirmos homomorfismos de grupos abelianos

$$\begin{aligned} s_{-1}&\colon \mathbb{Z} \to P_0 \\ s_0&\colon P_0 \to P_1 \\ s_1&\colon P_1 \to P_2 \end{aligned}$$

de forma que, no diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[dl, "0"'] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[dl, "s_1"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dl, "s_0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{-1}"'] & 0 \arrow[dl, "0"'] \\ 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

tenhamos $\varepsilon s_{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, $d_1 s_0 + s_{-1}\varepsilon = \mathrm{id}_{P_0}$, $d_2 s_1 + s_0 d_1 = \mathrm{id}_{P_1}$ e $s_1 d_2 = \mathrm{id}_{P_2}$.

Temos $\varepsilon(s_{-1}(1)) = 1$, que pode ser satisfeita definindo $s_{-1}(1) = e_0$. O homomorfismo s_0 pode ser definido por

$$s_0(a^m b^n e_0) = \frac{\partial a^m}{\partial a} e_1^1 + a^m \frac{\partial b^n}{\partial b} e_1^2, \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

em que as derivadas são as derivadas de Fox, de acordo com a demonstração da Proposição 1.10. De fato, temos

$$\begin{aligned} d_1(s_0(a^m b^n e_0)) + s_{-1}(\varepsilon(a^m b^n e_0)) &= d_1\left(\frac{\partial a^m}{\partial a} e_1^1 + a^m \frac{\partial b^n}{\partial b} e_1^2\right) + e_0 \\ &= \frac{\partial a^m}{\partial a}(a-1)e_0 + a^m \frac{\partial b^n}{\partial b}(b-1)e_0 + e_0 \\ &= (a^m - 1)e_0 + a^m(b^n - 1)e_0 + e_0 \\ &= a^m b^n e_0. \end{aligned}$$

Resta-nos definir s_1. Seja $s_1(a^m b^n e_1^1) = ke_2$, em que m e n são inteiros e $k \in \mathbb{Z}G$. Temos

$$\begin{aligned}
& d_2(s_1(a^m b^n e_1^1)) + s_0(d_1(a^m b^n e_1^1)) = a^m b^n e_1^1 \\
& \Leftrightarrow d_2(ke_2) + s_0(a^m b^n (a-1)e_0) = a^m b^n e_1^1 \\
& \Leftrightarrow d_2(ke_2) + s_0(a^{m+1} b^n e_0) - s_0(a^m b^n e_0) = a^m b^n e_1^1 \\
& \Leftrightarrow d_2(ke_2) + \left[\frac{\partial a^{m+1}}{\partial a} - \frac{\partial a^m}{\partial a}\right] e_1^1 + (a^{m+1} - a^m)\frac{\partial b^n}{\partial b} e_1^2 = a^m b^n e_1^1 \\
& \Leftrightarrow d_2(ke_2) = a^m (b^n - 1)e_1^1 + a^m(1-a)\frac{\partial b^n}{\partial b} e_1^2 \\
& \Leftrightarrow k((1-b)e_1^1 + (a-1)e_1^2) = a^m(b^n-1)e_1^1 + a^m(1-a)\frac{\partial b^n}{\partial b} e_1^2,
\end{aligned}$$

e é fácil ver que esta última igualdade é satisfeita para $k = -a^m \dfrac{\partial b^n}{\partial b}$, isto é, podemos definir $s_1(a^m b^n e_1^1) = -a^m \dfrac{\partial b^n}{\partial b} e_2$. Um cálculo semelhante ao que usamos para definir $s_1(a^m b^n e_1^1)$ mostra que podemos tomar $s_1(a^m b^n e_1^2) = 0$. Finalmente, temos

$$\begin{aligned}
s_1(d_2(a^m b^n e_2)) &= s_1(a^m b^n((1-b)e_1^1 + (a-1)e_1^2)) \\
&= s_1(a^m b^n e_1^1) - s_1(a^m b^{n+1} e_1^1) \\
&= a^m \left[\frac{\partial b^{n+1}}{\partial b} - \frac{\partial b^n}{\partial b}\right] \\
&= a^m b^n e_2.
\end{aligned}$$

■

Tendo a homotopia de contração s, podemos usar imediatamente as Proposições 1.16 e 1.17 para obtermos uma aproximação da diagonal $\Delta\colon P \to (P \otimes P)$. O resultado é resumido na proposição a seguir:

Proposição 2.2 *Sendo P a resolução livre dada pela Proposição 2.1, uma aproximação da diagonal $\Delta\colon P \to P \otimes P$ é dada por*

$$\begin{aligned}
&\Delta_0\colon P_0 \to (P \otimes P)_0 \\
&\quad \Delta_0(e_0) = s_{-1}\varepsilon(e_0) \otimes s_{-1}\varepsilon(e_0) = e_0 \otimes e_0, \\
&\Delta_1\colon P_1 \to (P \otimes P)_1 \\
&\quad \Delta_1(e_1^1) = \tilde{s}_0 \Delta_0 d_1(e_1^1) = \tilde{s}_0(ae_0 \otimes ae_0 - e_0 \otimes e_0) \\
&\qquad = s_0(ae_0) \otimes ae_0 + s_{-1}\varepsilon(ae_0) \otimes s_0(ae_0) - s_0(e_0) \otimes e_0 - s_{-1}\varepsilon(e_0) \otimes s_0(e_0) \\
&\qquad = e_1^1 \otimes ae_0 + e_0 \otimes e_1^1, \\
&\quad \Delta_1(e_1^2) = \tilde{s}_0 \Delta_0 d_1(e_1^2) = \tilde{s}_0(be_0 \otimes be_0 - e_0 \otimes e_0) \\
&\qquad = s_0(be_0) \otimes be_0 + s_{-1}\varepsilon(be_0) \otimes s_0(be_0) - s_0(e_0) \otimes e_0 - s_{-1}\varepsilon(e_0) \otimes s_0(e_0) \\
&\qquad = e_1^2 \otimes be_0 + e_0 \otimes e_1^2, \\
&\Delta_2\colon P_2 \to (P \otimes P)_2 \\
&\quad \Delta_2(e_2) = \tilde{s}_1 \Delta_1 d_2(e_2) = \tilde{s}_1 \Delta_1((1-b)e_1^1 + (a-1)e_1^2) \\
&\qquad = \tilde{s}_1(e_1^1 \otimes ae_0 - be_1^1 \otimes abe_0 + e_0 \otimes e_1^1 - be_0 \otimes be_1^1 + \\
&\qquad\qquad + ae_1^2 \otimes abe_0 - e_1^2 \otimes be_0 + ae_0 \otimes ae_1^2 - e_0 \otimes e_1^2) \\
&\qquad = e_2 \otimes abe_0 + (e_1^1 \otimes ae_1^2 - e_1^2 \otimes be_1^1) + e_0 \otimes e_2.
\end{aligned}$$

Partindo da resolução dada pela Proposicao 2.1, podemos calcular os grupos $H^*(G, \mathbb{Z}G)$.

Teorema 2.3 *Os grupos $H^*(G, \mathbb{Z}G)$ são dados por*

$$\begin{aligned} H^0(G, \mathbb{Z}G) &= 0, \\ H^1(G, \mathbb{Z}G) &= 0, \\ H^2(G, \mathbb{Z}G) &\cong \mathbb{Z}, \\ H^n(G, \mathbb{Z}G) &= 0 \quad \textit{se } n \geq 3. \end{aligned}$$

Demonstração: Considere o complexo de cocadeia obtido a partir da resolução livre (2.1):

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z}G) \xrightarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, \mathbb{Z}G) \xrightarrow{d_2^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2, \mathbb{Z}G) \longrightarrow 0.$$

Seja $u_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z})$. Temos $(d_1^* u_0)(e_1^1) = u_0 d_1(e_1^1) = (a-1)u_0(e_0)$ e $(d_1^* u_0)(e_1^2) = u_0 d_1(e_1^2) = (b-1)u_0(e_0)$. E se $u_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, \mathbb{Z}G)$, então $(d_2^* u_1)(e_2) = u_1 d_2(e_2) = (1-b)u_1(e_1^1) + (a-1)u_1(e_1^1)$. Portanto o complexo de cocadeia acima é isomorfo a

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}G & \xrightarrow{d_1^*} & \mathbb{Z}G \oplus \mathbb{Z}G & \xrightarrow{d_2^*} & \mathbb{Z}G & \longrightarrow & 0\ , \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ & & \langle g_0 \rangle & & \langle g_1^1 \rangle \oplus \langle g_1^2 \rangle & & \langle g_2 \rangle & & \end{array}$$

no qual

$$\begin{aligned} d_1^*(g_0) &= (a-1)g_1^1 + (b-1)g_1^2, \\ d_2^*(g_1^1) &= (1-b)g_2, \\ d_2^*(g_1^2) &= (a-1)g_2. \end{aligned}$$

Mostremos que d_1^* é injetora:

$$d_1^*\left(\left(\sum h_{mn} a^m b^n\right) g_0\right) = 0 \Leftrightarrow \sum (h_{(m-1)n} - h_{mn}) a^m b^n = \sum (h_{m(n-1)} - h_{mn}) a^m b^n = 0,$$

o que implica $h_{mn} = 0$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$, visto que $h_{mn} = 0$ exceto para um número finito de índices (m, n). Logo d_1^* é injetora $H^0(G, \mathbb{Z}G) = 0$.

Em seguida, mostremos que $\ker d_2^* = \mathrm{im}\, d_1^*$: Se $X, Y \in \mathbb{Z}G$, temos

$$d_2^*(Xg_1^1 + Yg_1^2) = 0 \Leftrightarrow X(1-b) + Y(a-1) = 0 \Leftrightarrow -X(b-1) + Y(a-1) = 0$$

Mas $-X(b-1) + Y(a-1) = 0 \Leftrightarrow Ye_1^1 - Xe_1^2 \in \ker d_1 = \mathrm{im}\, d_2$. Portanto existe $W \in \mathbb{Z}G$ tal que

$$d_2(We_2) = Ye_1^1 - Xe_1^2 \Leftrightarrow W(1-b)e_1^1 + W(a-1)e_1^2 = Ye_1^1 - Xe_1^2,$$

de onde segue que $Xg_1 + Yg_1^2 = -W(a-1)g_1^1 - W(b-1)g_1^2 = d_1^*(-Wg_0) \in \mathrm{im}\, d_1^*$. Isto basta para provar que $\ker d_2^* = \mathrm{im}\, d_1^*$, e temos portanto $H^1(G, \mathbb{Z}G) = 0$.

Finalmente, é fácil ver que a imagem de d_2^* é isomorfa à imagem de d_1, logo $H^2(G, \mathbb{Z}G) \cong \mathrm{coker}\, d_1 \cong \mathbb{Z}$, em que $\mathbb{Z}$ é o $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. Para $n \geq 3$, claramente temos $H^n(G, \mathbb{Z}G) = 0$.

$\blacksquare$

Calcularemos agora a estrutura multiplicativa de $H^*(G,\mathbb{Z})$ para as diversas estruturas de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo. Representaremos por $\mathbb{Z}_{\theta_0}$ o $\mathbb{Z}G$-módulo trivial, por $\mathbb{Z}_{\theta_1}$ o $\mathbb{Z}G$-módulo em que $a \cdot 1 = 1$, $b \cdot 1 = -1$, por $\mathbb{Z}_{\theta_2}$ o $\mathbb{Z}G$-módulo em que $a \cdot 1 = -1$, $b \cdot 1 = 1$, e por $\mathbb{Z}_{\theta_3}$ o $\mathbb{Z}G$-módulo em que $a \cdot 1 = -1$, $b \cdot 1 = -1$.

Teorema 2.4 *Os grupos de cohomologia $H^*(G,\mathbb{Z}_{\theta_i})$, para $0 \le i \le 3$, são dados por*

$$\begin{array}{llll}
H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_0}) \cong \mathbb{Z}, & H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_1}) = 0, & H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_2}) = 0, & H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_3}) = 0,\\
H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_0}) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_1}) \cong \mathbb{Z}_2, & H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_2}) \cong \mathbb{Z}_2, & H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_3}) \cong \mathbb{Z}_2,\\
H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_0}) \cong \mathbb{Z}, & H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_1}) \cong \mathbb{Z}_2, & H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_2}) \cong \mathbb{Z}_2, & H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_3}) \cong \mathbb{Z}_2,
\end{array}$$

e $H^n(G,\mathbb{Z}_{\theta_i}) = 0$ para $n \ge 3$. Mais especificamente, usando a notação $[\ ]_{\theta_i}$ para representar as classes de cohomologia em $H^*(G,\mathbb{Z}_{\theta_i})$, podemos explicitar os geradores de cada um destes grupos:

$$\begin{array}{ll}
H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_0}) = \langle [e_0^*]_{\theta_0}\rangle, & H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_1}) = 0,\\
H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_0}) = \left\langle [e_1^{1*}]_{\theta_0}\right\rangle \oplus \left\langle [e_1^{2*}]_{\theta_0}\right\rangle, & H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_1}) = \left\langle [e_1^{2*}]_{\theta_1}\right\rangle,\\
H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_0}) = \langle [e_2^*]_{\theta_0}\rangle, & H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_1}) = \langle [e_2^*]_{\theta_1}\rangle,
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_2}) = 0, & H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_3}) = 0,\\
H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_2}) = \left\langle [e_1^{1*}]_{\theta_2}\right\rangle, & H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_3}) = \left\langle [e_1^{1*}+e_1^{2*}]_{\theta_3}\right\rangle,\\
H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_2}) = \langle [e_2^*]_{\theta_2}\rangle, & H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_3}) = \langle [e_2^*]_{\theta_3}\rangle.
\end{array}$$

Finalmente, os produtos entre estes elementos são calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&[e_1^{1*}]_{\theta_0}^2 = 0,\\
&[e_1^{2*}]_{\theta_0}^2 = 0,\\
&[e_1^{1*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{2*}]_{\theta_0} = [e_2^*]_{\theta_0},\\
&[e_1^{1*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{2*}]_{\theta_1} = [e_2^*]_{\theta_1},\\
&[e_1^{2*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{2*}]_{\theta_1} = 0,\\
&[e_1^{1*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{1*}]_{\theta_2} = 0,\\
&[e_1^{2*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{1*}]_{\theta_2} = [e_2^*]_{\theta_2},\\
&[e_1^{1*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{1*}+e_1^{2*}]_{\theta_3} = [e_2^*]_{\theta_3},\\
&[e_1^{2*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{1*}+e_1^{2*}]_{\theta_3} = [e_2^*]_{\theta_3},\\
&[e_1^{2*}]_{\theta_1}^2 = 0,\\
&[e_1^{2*}]_{\theta_1} \smile [e_1^{1*}]_{\theta_2} = [e_2^*]_{\theta_3},\\
&[e_1^{1*}]_{\theta_1} \smile [e_1^{1*}+e_1^{2*}]_{\theta_3} = [e_2^*]_{\theta_2},\\
&[e_1^{1*}]_{\theta_2}^2 = 0,\\
&[e_1^{1*}]_{\theta_2} \smile [e_1^{1*}+e_1^{2*}]_{\theta_3} = [e_2^*]_{\theta_1},\\
&[e_1^{1*}+e_1^{2*}]_{\theta_3}^2 = 0.
\end{aligned}$$

Demonstração: Iniciemos com $\mathbb{Z}_{\theta_0}$. A partir da resolução livre (2.1), podemos calcular os grupos $H^*(G,\mathbb{Z}_{\theta_0})$. Considere o complexo de cocadeia

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0,\mathbb{Z}_{\theta_0}) \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\mathbb{Z}_{\theta_0}) \arrow[r, "d_2^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2,\mathbb{Z}_{\theta_0}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Seja $u_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0,\mathbb{Z}_{\theta_0})$. Temos $(d_1^*u_0)(e_1^1) = u_0(d_1(e_1^1)) = au_0(e_0) - u(e_0) = 0$ e $(d_1^*u_0)(e_1^2) = u_0(d_1(e_1^1)) = bu_0(e_0) - u_0(e_0) = 0$. Assim, $d_1^* = 0$ e $H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_0}) \cong \mathbb{Z}$. Um gerador para $H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_0})$ é a classe do homomorfismo e_0^*.

Seja agora $u_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\mathbb{Z}_{\theta_0})$. Temos $(d_2^*u_1)(e_2) = u_1((1-b)e_1^1 + (a-1)e_1^2) = 0$. Assim, $d_2^* = 0$ e $H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_0}) \cong \ker d_2^* \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Um par de geradores para $H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_0})$ são as classes dos homomorfismos e_1^{1*} e e_1^{2*}. Finalmente, $H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_0}) \cong \ker 0 \cong \mathbb{Z}$, e um gerador de $H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_0})$ é a classe do homomorfismo e_2^*.

Calculemos agora os grupos $H^*(G,\mathbb{Z}_{\theta_1})$. Considere o complexo de cocadeia

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0,\mathbb{Z}_{\theta_1}) \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\mathbb{Z}_{\theta_1}) \arrow[r, "d_2^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2,\mathbb{Z}_{\theta_1}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Seja $u_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0,\mathbb{Z}_{\theta_1})$. Temos $(d_1^*u_0)(e_1^1) = u_0(d_1(e_1^1)) = au_0(e_0) - u(e_0) = 0$ e $(d_1^*u_0)(e_1^2) = u_0(d_1(e_1^2)) = bu_0(e_0) - u(e_0) = -2u_0(e_0)$. Portanto $H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_1}) \cong \ker d_1^* = \{u_0 : u_0(e_0) = 0\} \cong 0$. Temos também $\mathrm{im}\, d_1^* \cong 0 \oplus 2\mathbb{Z}$.

Seja $u_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\mathbb{Z}_{\theta_1})$. Temos $(d_2^*u_1)(e_2) = u_1(d_2(e_2)) = (1-b)u_1(e_1^1) + (a-1)u_1(e_1^2) = 2u_1(e_1^1)$. Logo $\ker d_2^* = \{u_1 : u_1(e_1^1) = 0\} \cong 0 \oplus \mathbb{Z}$, o que nos dá $H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_1}) = \dfrac{\ker d_2^*}{\mathrm{im}\, d_1^*} \cong \dfrac{0\oplus\mathbb{Z}}{0\oplus 2\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_2$. Um gerador para $H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_1})$ é a classe do homomorfismo e_1^{2*}. Finalmente, $H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_1}) = \dfrac{\ker 0}{\mathrm{im}\, d_2^*} \cong \mathbb{Z}_2$, e um gerador para $H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_1})$ é a classe do homomorfismo e_2^*.

O cálculo de $H^*(G,\mathbb{Z}_{\theta_2})$ é análogo ao de $H^*(G,\mathbb{Z}_{\theta_1})$: a classe do homomorfismo e_1^{1*} gera $H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_2}) \cong \mathbb{Z}_2$, e a classe do homomorfismo e_2^* gera $H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_2}) \cong \mathbb{Z}_2$.

Calculemos então os grupos $H^*(G,\mathbb{Z}_{\theta_3})$. Novamente consideramos o complexo de cocadeia

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0,\mathbb{Z}_{\theta_3}) \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\mathbb{Z}_{\theta_3}) \arrow[r, "d_2^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2,\mathbb{Z}_{\theta_3}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Seja $u_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0,\mathbb{Z}_{\theta_3})$. Temos $(d_1^*u_0)(e_1^1) = u_0(d_1(e_1^1)) = (a-1)u_0(e_0) = -2u_0(e_0)$ e $(d_1^*u_0)(e_1^2) = u_0(d_1(e_1^2)) = (b-1)u_0(e_0) = -2u_0(e_0)$, o que nos dá $H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_3}) \cong \ker d_1^* \cong 0$ e $\mathrm{im}\, d_1^* = \{u_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\mathbb{Z}_{\theta_3}) : u_1(e_1^1) = u_1(e_1^2) = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Seja $u_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\mathbb{Z}_{\theta_3})$. Temos $(d_2^*u_1)(e_2) = (1-b)u_1(e_1^1) + (a-1)u_1(e_1^2) = 2u_1(e_1^1) - 2u_1(e_1^2)$. Portanto $\ker d_2^* = \{u_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\mathbb{Z}_{\theta_3}) : u_1(e_1^1) = u_1(e_1^2)\}$, de onde segue que $H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_3}) = \dfrac{\ker d_2^*}{\mathrm{im}\, d_1^*} \cong \mathbb{Z}_2$. Um gerador para $H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_3})$ é a classe do homomorfismo $e_1^{1*} + e_1^{2*}$.

Finalmente, $H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_3}) = \dfrac{\ker 0}{\mathrm{im}\, d_2^*} \cong \mathbb{Z}_2$, com um gerador dado pelo homomorfismo e_2^*.

A fim de considerarmos os produtos

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_i}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_j}) \xrightarrow{\smile} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_i} \otimes \mathbb{Z}_{\theta_j}),$$

com $0 \leq i, j \leq 3$, novamente observamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{\theta_0} \otimes \mathbb{Z}_{\theta_i} &\cong \mathbb{Z}_{\theta_i}, \quad \forall 1 \leq i \leq 3, \\ \mathbb{Z}_{\theta_i} \otimes \mathbb{Z}_{\theta_i} &\cong \mathbb{Z}_{\theta_0}, \quad \forall 0 \leq i \leq 3, \\ \mathbb{Z}_{\theta_i} \otimes \mathbb{Z}_{\theta_j} &\cong \mathbb{Z}_{\theta_k}, \quad \text{se } 1 \leq i < j \leq 3 \text{ e } k > 0,\ k \neq i, j. \end{aligned}$$

Usaremos a notação $[\ ]_{\theta_i}$ para representar as classes em $H^*(G, \mathbb{Z}_{\theta_i})$. Tendo a aproximação da diagonal dada pela Proposicao 2.2 e os geradores dos grupos $H^i(G, \mathbb{Z}_{\theta_j})$, os cálculos são imediatos.

Iniciemos com o caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \xrightarrow{\smile} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}).$$

Neste caso, temos $[e_1^{1*}]_{\theta_0}^2 = [e_1^{2*}]_{\theta_0}^2 = 0$ e $[e_1^{1*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{2*}]_{\theta_0} = [e_2^*]_{\theta_0}$. No caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \xrightarrow{\smile} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}),$$

temos $[e_1^{1*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{2*}]_{\theta_1} = [e_2^*]_{\theta_1}$ e $[e_1^{2*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{2*}]_{\theta_1} = 0$. No caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \xrightarrow{\smile} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}),$$

temos $[e_1^{1*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{1*}]_{\theta_2} = 0$ e $[e_1^{2*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{1*}]_{\theta_2} = [e_2^*]_{\theta_2}$. No caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) \xrightarrow{\smile} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}),$$

temos $[e_1^{1*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3} = [e_2^*]_{\theta_3}$ e $[e_1^{2*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3} = [e_2^*]_{\theta_3}$. No caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \xrightarrow{\smile} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}),$$

temos $[e_1^{2*}]_{\theta_1}^2 = 0$. No caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \xrightarrow{\smile} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}),$$

temos $[e_1^{2*}]_{\theta_1} \smile [e_1^{1*}]_{\theta_2} = [e_2^*]_{\theta_3}$. No caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) \xrightarrow{\smile} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}),$$

temos $[e_1^{1*}]_{\theta_1} \smile [e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3} = [e_2^*]_{\theta_2}$. No caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \xrightarrow{\smile} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}),$$

temos $[e_1^{1*}]_{\theta_2}^2 = 0$. No caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) \xrightarrow{\smile} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}),$$

temos $[e_1^{1*}]_{\theta_2} \smile [e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3} = [e_2^*]_{\theta_1}$. Finalmente, no caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) \xrightarrow{\smile} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}),$$

temos $[e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3}^2 = 0$.

$\blacksquare$

2.2 Superfícies orientáveis

Seja $G = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \cdots [a_n, b_n] \rangle$, com $n \geq 2$. Nesta seção exibiremos uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. Sendo P esta resolução, em seguida construiremos parcialmente uma aproximação da diagonal $\Delta \colon P \to P \otimes P$. Esta aproximação da diagonal permite que calculemos então não apenas os grupos $H^*(G, M)$ para um $\mathbb{Z}G$-módulo M, mas também o produto cup. Faremos tais cálculos para coeficientes M triviais e também para $M = \tilde{\mathbb{Z}}$ (isto é, $\mathbb{Z}$ como um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial ou não).

Sejam $p_i = [a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ para $1 \leq i \leq n$ e seja $p = p_1 p_2 \cdots p_n$. Portanto o grupo G é gerado por $\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$ e sujeito à relação $p = 1$.

Proposição 2.5 *Uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial é dada por*

$$0 \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \tag{2.3}$$

na qual

$$\begin{aligned} P_0 &= \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}G, \\ P_1 &= \langle y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n \rangle \cong \mathbb{Z}G^{2n}, \\ P_2 &= \langle w \rangle \cong \mathbb{Z}G, \end{aligned}$$

e os homomorfismos ε, d_1 e d_2 são definidos por

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= 1, \\ d_1(y_i) &= (a_i - 1)x, \\ d_1(z_i) &= (b_i - 1)x, \\ d_2(w) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial p}{\partial a_i} y_i + \frac{\partial p}{\partial b_i} z_i \right), \end{aligned}$$

em que as derivadas parciais são as derivadas de Fox, que podem ser calculadas explicitamente do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial a_i} &= (p_1 \cdots p_{i-1}) \frac{\partial p_i}{\partial a_i} = (p_1 \cdots p_{i-1})(1 - a_i b_i a_i^{-1}), \\ \frac{\partial p}{\partial b_i} &= (p_1 \cdots p_{i-1}) \frac{\partial p_i}{\partial b_i} = (p_1 \cdots p_{i-1}) a_i (1 - b_i a_i^{-1} b_i^{-1}). \end{aligned}$$

Demonstração: Seguindo o Corolário 1.9, a nossa superfície é recoberta pelo plano $\mathbb{R}^2$, que é um 2-complexo que é também um G-complexo livre e contrátil. Seu complexo de cadeia celular aumentado é exatamente aquele dado pela equação (2.3). Tal fato está demonstrado em [FH83]. Finalmente, quanto ao cálculo de $\frac{\partial p}{\partial a_i}$ e $\frac{\partial p}{\partial b_i}$, em primeiro lugar temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial a_i} &= 1 - a_i b_i a_i^{-1}, \\ \frac{\partial p_i}{\partial b_i} &= a_i (1 - b_i a_i^{-1} b_i^{-1}), \end{aligned}$$

logo

$$\frac{\partial p}{\partial a_i} = (p_1 \cdots p_{i-1})\frac{\partial p_i}{\partial a_i} = (p_1 \cdots p_{i-1})(1 - a_i b_i a_i^{-1}),$$
$$\frac{\partial p}{\partial b_i} = (p_1 \cdots p_{i-1})\frac{\partial p_i}{\partial b_i} = (p_1 \cdots p_{i-1})a_i(1 - b_i a_i^{-1} b_i^{-1}).$$

■

Passemos agora à construção parcial de uma aproximação da diagonal $\Delta\colon P \to P \otimes P$. Pela demonstração da Proposição 1.10, existe uma homotopia de contração s para a resolução (2.3) tal que

$$\begin{aligned} s_{-1}(1) &= x, \\ s_0(\tilde{p}x) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial a_j} y_j + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial b_j} z_j \right), \end{aligned}$$

em que $\tilde{p}$ é uma palavra reduzida em G. Sendo assim, usando a Proposição 1.17, podemos construir os homomorfismos $\Delta_0\colon P_0 \to P_0 \otimes P_0$ e $\Delta_1\colon P_1 \to (P \otimes P)_1$:

$$\begin{aligned} \Delta_0(x) &= s_{-1}\varepsilon(x) \otimes s_{-1}\varepsilon(x) = x \otimes x, \\ \Delta_1(y_i) &= \tilde{s}_0 \Delta_0 d_1(y_i) = \tilde{s}_0(a_i x \otimes a_i x) - \tilde{s}_0(x \otimes x) \\ &= y_i \otimes a_i x + x \otimes y_i, \\ \Delta_1(z_i) &= \tilde{s}_0 \Delta_0 d_1(z_i) = \tilde{s}_0(b_i x \otimes b_i x) - \tilde{s}_0(x \otimes x) \\ &= z_i \otimes b_i x + x \otimes z_i. \end{aligned}$$

Quanto ao homomorfismo Δ_2, fazemos a seguinte observação, já presente no Capítulo 1: a fim de calcularmos o produto

$$H^1(G, M) \otimes H^1(G, N) \xrightarrow{\smile} H^2(G, M \otimes N),$$

é suficiente o conhecimento do homomorfismo $\Delta_{11}\colon P_2 \to P_1 \otimes P_1$, em que $\Delta_{11} = \pi_{11} \circ \Delta_2$ e $\pi_{ij}\colon (P \otimes P)_{i+j} \to P_i \otimes P_j$ é a projeção. Observando que, para $g, g' \in G$,

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1(gx \otimes g'y_i) &= \underbrace{s_0(gx) \otimes g'y_i}_{\in P_1 \otimes P_1} + \underbrace{x \otimes s_1(g'y_i)}_{\in P_0 \otimes P_2}, \\ \tilde{s}_1(gx \otimes g'z_i) &= \underbrace{s_0(gx) \otimes g'z_i}_{\in P_1 \otimes P_1} + \underbrace{x \otimes s_1(g'z_i)}_{\in P_0 \otimes P_2}, \\ \tilde{s}_1(gy_i \otimes g'x) &= s_1(gy_i) \otimes g'x \in P_2 \otimes P_0, \\ \tilde{s}_1(gz_i \otimes g'x) &= s_1(gz_i) \otimes g'x \in P_2 \otimes P_0, \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}(w) = \pi_{11}\circ\Delta_2(w) &= \pi_{11}\tilde{s}_1\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p}{\partial a_i}(x\otimes y_i)+\frac{\partial p}{\partial b_i}(x\otimes z_i)\right)\\
&= \pi_{11}\tilde{s}_1\left(\sum_{i=1}^{n}(p_1\cdots p_{i-1})(1-a_ib_ia_i^{-1})(x\otimes y_i)+(p_1\cdots p_{i-1})a_i(1-b_ia_i^{-1}b_i^{-1})(x\otimes z_i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}s_0((p_1\cdots p_{i-1})x)\otimes(p_1\cdots p_{i-1})y_i- \qquad (2.4)\\
&\quad -\sum_{i=1}^{n}s_0((p_1\cdots p_{i-1})a_ib_ia_i^{-1}x)\otimes(p_1\cdots p_{i-1})a_ib_ia_i^{-1}y_i\\
&\quad +\sum_{i=1}^{n}s_0((p_1\cdots p_{i-1})a_ix)\otimes(p_1\cdots p_{i-1})a_iz_i-\sum_{i=1}^{n}s_0((p_1\cdots p_i)x)\otimes(p_1\cdots p_i)z_i.
\end{aligned}$$

Observando a equação acima, procedemos calculando o homomorfismo s_0 nos elementos da forma

$$\begin{aligned}
&(p_1\cdots p_{i-1})x,\\
&(p_1\cdots p_{i-1})a_ix,\\
&(p_1\cdots p_{i-1})a_ib_ia_i^{-1}x.
\end{aligned}$$

Em primeiro lugar,

$$\begin{aligned}
s_0((p_1\cdots p_{i-1})x) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(p_1\cdots p_{i-1})}{\partial a_j}y_j+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(p_1\cdots p_{i-1})}{\partial b_j}z_j\\
&= \sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial(p_1\cdots p_{i-1})}{\partial a_j}y_j+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial(p_1\cdots p_{i-1})}{\partial b_j}z_j\\
&= \sum_{j=1}^{i-1}(p_1\cdots p_{j-1})(1-a_jb_ja_j^{-1})y_j+\sum_{j=1}^{i-1}(p_1\cdots p_{j-1})a_j(1-b_ja_j^{-1}b_j^{-1})z_j.
\end{aligned}$$

Em seguida,

$$\begin{aligned}
s_0((p_1\cdots p_{i-1})a_ix) &= \sum_{j=1}^{i-1}\Big((p_1\cdots p_{j-1})(1-a_jb_ja_j^{-1})y_j+(p_1\cdots p_{j-1})a_j(1-b_ja_j^{-1}b_j^{-1})z_j\Big)+\\
&\quad +(p_1\cdots p_{i-1})y_i.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
&s_0((p_1\cdots p_{i-1})a_ib_ia_i^{-1}x) =\\
&\qquad = \sum_{j=1}^{i-1}\Big((p_1\cdots p_{j-1})(1-a_jb_ja_j^{-1})y_j+(p_1\cdots p_{j-1})a_j(1-b_ja_j^{-1}b_j^{-1})z_j\Big)+\\
&\qquad\quad +(p_1\cdots p_{i-1})(1-a_ib_ia_i^{-1})y_i+(p_1\cdots p_{i-1})a_iz_i.
\end{aligned}$$

Substituindo estes valores em (2.4), obtemos o seguinte resultado:

Proposição 2.6 *Se P é a resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial dada pela Proposição 2.5, uma aproximação da diagonal $\Delta\colon P\to(P\otimes P)$ é dada parcialmente por*

$\Delta_0\colon P_0\to(P\otimes P)_0$

$$
\begin{aligned}
&\Delta_0(x) = s_{-1}\varepsilon(x) \otimes s_{-1}\varepsilon(x) = x \otimes x,\\
\Delta_1\colon\ & P_1 \to (P \otimes P)_1\\
&\Delta_1(y_i) = \tilde{s}_0\Delta_0 d_1(y_i) = \tilde{s}_0(a_i x \otimes a_i x) - \tilde{s}_0(x \otimes x) = y_i \otimes a_i x + x \otimes y_i,\\
&\Delta_1(z_i) = \tilde{s}_0\Delta_0 d_1(z_i) = \tilde{s}_0(b_i x \otimes b_i x) - \tilde{s}_0(x \otimes x) = z_i \otimes b_i x + x \otimes z_i.\\
\Delta_{11}\colon\ & P_2 \to (P_1 \otimes P_1)\\
&\Delta_{11}(w) = \sum_{i=1}^{n}\Bigg[\sum_{j=1}^{i-1}(p_1\cdots p_{j-1})(1 - a_j b_j a_j^{-1})y_j \otimes (p_1\cdots p_{i-1})y_i +\\
&\qquad + \sum_{j=1}^{i-1}(p_1\cdots p_{j-1})a_j(1 - b_j a_j^{-1} b_j^{-1})z_j \otimes (p_1\cdots p_{i-1})y_i\Bigg] -\\
&\quad - \sum_{i=1}^{n-1}\Bigg[\sum_{j=1}^{i-1}\Bigg((p_1\cdots p_{j-1})(1 - a_j b_j a_j^{-1})y_j \otimes (p_1\cdots p_{i-1})a_i b_i a_i^{-1} y_i +\\
&\qquad\quad + (p_1\cdots p_{j-1})a_j(1 - b_j a_j^{-1} b_j^{-1})z_j \otimes (p_1\cdots p_{i-1})a_i b_i a_i^{-1} y_i\Bigg) +\\
&\qquad + (p_1\cdots p_{i-1})(1 - a_i b_i a_i^{-1})y_i \otimes (p_1\cdots p_{i-1})a_i b_i a_i^{-1} y_i +\\
&\qquad + (p_1\cdots p_{i-1})a_i z_i \otimes (p_1\cdots p_{i-1})a_i b_i a_i^{-1} y_i\Bigg] +\\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\Bigg[\sum_{j=1}^{i-1}\Bigg((p_1\cdots p_{j-1})(1 - a_j b_j a_j^{-1})y_j \otimes (p_1\cdots p_{i-1})a_i z_i +\\
&\qquad\quad + (p_1\cdots p_{j-1})a_j(1 - b_j a_j^{-1} b_j^{-1})z_j \otimes (p_1\cdots p_{i-1})a_i z_i\Bigg) +\\
&\qquad + (p_1\cdots p_{i-1})y_i \otimes (p_1\cdots p_{i-1})a_i z_i\Bigg] -\\
&\quad - \sum_{i=1}^{n-1}\Bigg[\sum_{j=1}^{i}(p_1\cdots p_{j-1})(1 - a_j b_j a_j^{-1})y_j \otimes (p_1\cdots p_i)z_i +\\
&\qquad\quad (p_1\cdots p_{j-1})a_j(1 - b_j a_j^{-1} b_j^{-1})z_j \otimes (p_1\cdots p_i)z_i\Bigg] -\\
&\quad - z_n \otimes b_n y_n.
\end{aligned}
$$

Desta proposição segue:

Corolário 2.7 *Seja M um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. Se $u, v \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, M)$, então o produto $[u] \smile [v] \in H^2(G, M \otimes M)$ é representado por um homomorfismo $(u \smile v) \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2, M \otimes M)$ tal que*

$$(u \smile v)(w) = \sum_{i=1}^{n}\left(u(y_i) \otimes v(z_i) - u(z_i) \otimes v(y_i)\right).$$

Demonstração: Se M é um módulo trivial e $\varepsilon\colon \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ é o homomorfismo de aumento, então para todo $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, M)$ vale

$$f(k\alpha) = \varepsilon(k) \cdot f(\alpha), \quad \forall k \in \mathbb{Z}G,\ \forall \alpha \in P_1.$$

Observando que

$$\varepsilon(1 - a_j b_j a_j^{-1}) = \varepsilon(1 - b_j a_j^{-1} b_j^{-1}) = 0$$

e

$$\varepsilon(p_1\cdots p_{i-1}) = \varepsilon((p_1\cdots p_{i-1})a_i) = \varepsilon((p_1\cdots p_{i-1})a_ib_ia_i^{-1}) = 1,$$

o corolário segue imediatamente da fórmula para $\Delta_{11}(w)$.

■

Teorema 2.8 *Se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial, então os grupos de cohomologia $H^*(G,M)$ são dados por*

$$\begin{aligned} &H^0(G,M) \cong M,\\ &H^1(G,M) \cong M^{2n},\\ &H^2(G,M) \cong M,\\ &H^n(G,M) = 0, \quad \textit{se } n \geq 3. \end{aligned}$$

Demonstração: Sendo P a resolução (2.3), considere o complexo de cocadeia

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0,M) \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,M) \arrow[r, "d_2^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2,M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & M^{2n} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Se $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0,M)$, então, $\forall 1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} (d_1^*u)(y_i) &= u(d_1(y_i)) = u(a_ix - x) = a_iu(x) - u(x) = 0,\\ (d_1^*u)(z_i) &= u(d_1(z_i)) = u(b_ix - x) = b_iu(x) - u(x) = 0. \end{aligned}$$

portanto $d_1^* = 0$. Se $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,M)$, então

$$\begin{aligned} (d_2^*u)(w) = u(d_2(w)) &= u\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial a_i}y_i + \frac{\partial p}{\partial b_i}z_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\varepsilon\left(\frac{\partial p}{\partial a_i}\right)u(y_i) + \varepsilon\left(\frac{\partial p}{\partial b_i}\right)u(z_i)\right) = 0, \end{aligned}$$

pois $\varepsilon\left(\frac{\partial p}{\partial a_i}\right) = \varepsilon\left(\frac{\partial p}{\partial b_i}\right) = 0$. Logo $d_2^* = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} H^0(G,M) &= \ker d_1^* \cong M,\\ H^1(G,M) &= \ker d_2^*/\operatorname{im} d_1^* \cong M^{2n},\\ H^2(G,M) &= \ker 0/\operatorname{im} d_2^* \cong M, \end{aligned}$$

e $H^n(G,M) = 0$ se $n \geq 3$.

■

Quanto ao cálculo do produto cup, temos:

Teorema 2.9 *Seja M um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. Os conjuntos de geradores para os grupos de cohomologia $H^*(G, M)$ são dados por:*

$$\begin{aligned} &H^0(G, M): \ \{[x^*]\},\\ &H^1(G, M): \ \{[y_1^*], \ldots, [y_n^*], [z_1^*], \ldots, [z_n^*]\},\\ &H^2(G, M): \ \{[w^*]\}. \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} &[y_i^*]^2 = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n,\\ &[z_i^*]^2 = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n,\\ &[y_i^*] \smile [z_j^*] = \begin{cases} [w^*], & se\ i = j \in \{1, \ldots, n\},\\ 0, & se\ i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Demonstração: Os geradores para os grupos de cohomologia são os dados no enunciado do teorema, pois os homomorfismos d_1^* e d_2^* são nulos. Quanto ao produto

$$H^1(G, M) \otimes H^1(G, M) \overset{\smile}{\to} H^2(G, M \otimes M),$$

as fórmulas dadas no enunciado seguem imediatamente do Corolário 2.7.

■

Também podemos realizar os cálculos para $H^*(G, \tilde{\mathbb{Z}})$, em que $\tilde{\mathbb{Z}}$ é o $\mathbb{Z}G$-módulo dado pela ação

$$\theta \colon G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$$

definida por $\theta(b_n)(1) = -1$ e $\theta(a_i)(1) = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, $\theta(b_i)(1) = 1$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. Como se demonstra em [GG10], esta é a única ação não trivial que precisamos considerar.

Teorema 2.10 *Os grupos de cohomologia $H^*(G, \tilde{\mathbb{Z}})$ são dados por*

$$\begin{aligned} &H^0(G, \tilde{\mathbb{Z}}) = 0,\\ &H^1(G, \tilde{\mathbb{Z}}) = \langle [y_1^*] \rangle \oplus \cdots \oplus \left\langle [y_{n-1}^*] \right\rangle \oplus \langle [z_1^*] \rangle \oplus \left\langle [z_{n-1}^*] \right\rangle \oplus \langle [z_n^*] \mid 2[z_n^*] = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}^{2n-2} \oplus \mathbb{Z}_2,\\ &H^2(G, \tilde{\mathbb{Z}}) = \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2,\\ &H^n(G, \tilde{\mathbb{Z}}) = 0 \quad se\ n \geq 3. \end{aligned}$$

Além disso, o produto cup

$$H^1(G, \tilde{\mathbb{Z}}) \otimes H^1(G, \tilde{\mathbb{Z}}) \overset{\smile}{\to} H^2(G, \mathbb{Z})$$

é dado por

$$\begin{aligned} [y_i^*]^2 &= 0 \quad para\ 1 \leq i \leq n-1,\\ [z_i^*]^2 &= 0 \quad para\ 1 \leq i \leq n,\\ [y_i^*] \smile [z_i^*] &= [w^*] \quad para\ 1 \leq i \leq n-1,\\ [y_i^*] \smile [z_j^*] &= 0 \quad se\ i \neq j,\\ [y_i^*] \smile [y_j^*] &= 0 \quad se\ i \neq j,\\ [z_i^*] \smile [z_j^*] &= 0 \quad se\ i \neq j. \end{aligned}$$

Demonstração: Sendo P a resolução (2.3), considere o complexo de cocadeia

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0,\tilde{\mathbb{Z}}) \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\tilde{\mathbb{Z}}) \arrow[r, "d_2^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2,\tilde{\mathbb{Z}}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}^{2n} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Se $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0,\tilde{\mathbb{Z}})$, então, $\forall 1 \leq i \leq n$ e $\forall 1 \leq j \leq n-1$,

$$\begin{aligned}
(d_1^*u)(y_i) &= u(d_1(y_i)) = u(a_i x - x) = a_i u(x) - u(x) = 0,\\
(d_1^*u)(z_j) &= u(d_1(z_i)) = u(b_j x - x) = b_j u(x) - u(x) = 0,
\end{aligned}$$

e $(d_1^*u)(z_n) = b_n u(x) - u(x) = -2u(x)$. Portanto d_1^* é injetora e $H^0(G,\tilde{\mathbb{Z}}) = 0$. Ainda, $\mathrm{im}(d_1^*) = \{v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\tilde{\mathbb{Z}}) \ : \ v(z_n) \text{ é par}\}$. A matriz de d_1^* nas bases duais de $\{x\}$ e $\{y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_n\}$ é

$$[d_1^*] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & (-2) \end{bmatrix}^T$$

Se $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\tilde{\mathbb{Z}})$, então

$$\begin{aligned}
(d_2^*u)(w) = u(d_2(w)) &= u\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial a_i} y_i + \frac{\partial p}{\partial b_i} z_i\right)\\
&= u\left(\frac{\partial p}{\partial a_n} y_n + \frac{\partial p}{\partial b_n} z_n\right) = 2u(y_n).
\end{aligned}$$

A matriz de d_2^* nas bases duais de $\{y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_n\}$ e $\{w\}$ é

$$[d_2^*] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 2 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto $H^1(G,\tilde{\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}^{2n-2} \oplus \mathbb{Z}_2$ e $H^2(G,\tilde{\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}_2$, com os geradores dados no enunciado do teorema, e $H^n(G,\tilde{\mathbb{Z}}) = 0$ se $n \geq 3$.

Para o cálculo do produto cup, se $u, v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\tilde{\mathbb{Z}})$, então o produto $[u] \smile [v] \in H^2(G,\tilde{\mathbb{Z}} \otimes \tilde{\mathbb{Z}}) \cong H^2(G,\mathbb{Z})$ é representado por um homomorfismo $(u \smile v)$ tal que

$$(u \smile v)(w) = (u \times v)\Delta_{11}(w) = \left(\sum_{i=1}^{n} u(y_i) \otimes v(z_i) - \sum_{i=1}^{n-1} u(z_i) \otimes v(y_i)\right) + u(z_n) \otimes v(y_n),$$

fórmula essa que é obtida usando o homomorfismo Δ_{11} dado pela Proposicao 2.6. Temos então

$$\begin{aligned}
[y_i^*]^2 &= 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq n-1,\\
[z_i^*]^2 &= 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq n,\\
[y_i^*] \smile [z_i^*] &= [w^*] \quad \text{para } 1 \leq i \leq n-1,\\
[y_i] \smile [z_j^*] &= 0 \quad \text{se } i \neq j,\\
[y_i] \smile [y_j^*] &= 0 \quad \text{se } i \neq j,\\
[z_i] \smile [z_j^*] &= 0 \quad \text{se } i \neq j,
\end{aligned}$$

no qual recordamos que a classe $[w^*]$ que aparece acima pertence a $H^2(G,\mathbb{Z})$.

■

2.3 A garrafa de Klein

Seja $G = \left\langle a, b \mid abab^{-1} \right\rangle$. Nesta seção exibiremos uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. Sendo P esta resolução, em seguida construiremos uma aproximação da diagonal $\Delta\colon P \to P \otimes P$. Esta aproximação da diagonal permite que calculemos então não apenas os grupos $H^*(G, M)$ para um $\mathbb{Z}G$-módulo M, mas também o produto cup. Faremos tais cálculos para $M = \tilde{\mathbb{Z}}$ (isto é, $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial ou não), $M = \mathbb{Z}_2$ e $M = \mathbb{Z}_p$, com p um primo ímpar, para as diversas estruturas de $\mathbb{Z}_p$ como $\mathbb{Z}G$-módulo.

Proposição 2.11 *Uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial é dada por*

$$0 \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \tag{2.5}$$

em que

$$\begin{aligned} P_0 &= \langle e_0 \rangle \cong \mathbb{Z}G, \\ P_1 &= \left\langle e_1^1, e_1^2 \right\rangle \cong \mathbb{Z}G \oplus \mathbb{Z}G, \\ P_2 &= \langle e_2 \rangle \cong \mathbb{Z}G, \end{aligned}$$

e os homomorfismos são definidos por

$$\begin{aligned} \varepsilon(e_0) &= 1 \\ d_1(e_1^1) &= (a-1)e_0 \\ d_1(e_1^2) &= (b-1)e_0 \\ d_2(e_2) &= (1+ab)e_1^1 + (a-1)e_1^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Demonstração: Para mostrarmos que a sequência (2.5) é exata, exibiremos uma homotopia de contração para a resolução (2.5), isto é, exibiremos homomorfismos de grupos abelianos

$$\begin{aligned} s_{-1}&\colon \mathbb{Z} \to P_0 \\ s_0&\colon P_0 \to P_1 \\ s_1&\colon P_1 \to P_2 \end{aligned}$$

de forma que, no diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[dl, "0"'] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[dl, "s_1"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dl, "s_0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{-1}"'] & 0 \arrow[dl, "0"'] \\ 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

tenhamos $\varepsilon s_{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, $d_1 s_0 + s_{-1}\varepsilon = \mathrm{id}_{P_0}$, $d_2 s_1 + s_0 d_1 = \mathrm{id}_{P_1}$ e $s_1 d_2 = \mathrm{id}_{P_2}$.

Temos $\varepsilon(s_{-1}(1)) = 1$, que pode ser satisfeita definindo $s_{-1}(1) = e_0$. O homomorfismo s_0 pode ser definido, de acordo com a demonstração da Proposição 1.10, por

$$s_0(a^m b^n e_0) = \frac{\partial a^m}{\partial a} e_1^1 + a^m \frac{\partial b^n}{\partial b} e_1^2, \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

em que as derivadas são as derivadas de Fox. De fato, temos

$$\begin{aligned} d_1(s_0(a^m b^n e_0)) + s_{-1}(\varepsilon(a^m b^n e_0)) &= d_1\left(\frac{\partial a^m}{\partial a} e_1^1 + a^m \frac{\partial b^n}{\partial b} e_1^2\right) + e_0 \\ &= \frac{\partial a^m}{\partial a}(a-1)e_0 + a^m \frac{\partial b^n}{\partial b}(b-1)e_0 + e_0 \\ &= (a^m - 1)e_0 + a^m(b^n - 1)e_0 + e_0 \\ &= a^m b^n e_0. \end{aligned}$$

Resta então definirmos o homomorfismo s_1, o que deve ser feito para elementos da forma $a^m b^n e_1^1$ e $a^m b^n e_1^2$. Seja $s_1(a^m b^n e_1^1) = ke_2$, com $k \in \mathbb{Z}G$. Então

$$\begin{aligned} & d_2(s_1(a^m b^n e_1^1)) + s_0(d_1(a^m b^n e_1^1)) = a^m b^n e_1^1 \\ \Leftrightarrow\ & d_2(ke_2) + s_0(a^m b^n a e_0) - s_0(a^m b^n e_0) = a^m b^n e_1^1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Observando que $ba = a^{-1}b$, temos que

$$a^m b^n a = \begin{cases} a^{m+1} b^n, & \text{se } n \text{ é par} \\ a^{m-1} b^n, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Vamos então dividir o cálculo de $s_1(a^m b^n e_1^1)$ em dois casos: n par e n ímpar. Se n é par, a equação (2.7) se escreve

$$\begin{aligned} & d_2(ke_2) + s_0(a^{m+1} b^n e_0) - s_0(a^m b^n e_0) = a^m b^n e_1^1 \\ \Leftrightarrow\ & d_2(ke_2) + \left[\frac{\partial a^{m+1}}{\partial a} - \frac{\partial a^m}{\partial a}\right] e_1^1 + (a^{m+1} - a^m)\frac{\partial b^n}{\partial b} e_1^2 = a^m b^n e_1^1 \\ \Leftrightarrow\ & d_2(ke_2) + a^m e_1^1 + a^m(a-1)\frac{\partial b^n}{\partial b} e_1^2 = a^m b^n e_1^1 \\ \Leftrightarrow\ & d_2(ke_2) = a^m(b^n - 1)e_1^1 + a^m(1-a)\frac{\partial b^n}{\partial b} e_1^2 \\ \Leftrightarrow\ & k(1+ab)e_1^1 + k(a-1)e_1^2 = a^m(b^n-1)e_1^1 + a^m(1-a)\frac{\partial b^n}{\partial b} e_1^2. \end{aligned}$$

Se $k = a^m k_1$, então $k_1 \in \mathbb{Z}G$ deve satisfazer

$$k_1(1+ab) = b^n - 1 \quad \text{e} \quad k_1(a-1) = (1-a)\frac{\partial b^n}{\partial b}.$$

Podemos escrever $\dfrac{\partial b^n}{\partial b}$ como uma soma da forma

$$\frac{\partial b^n}{\partial b} = \pm\left[\sum_{j \text{ par}} b^j + \sum_{j \text{ ímpar}} b^j\right],$$

e desta forma temos

$$a\frac{\partial b^n}{\partial b} = \pm\left[\sum_{j \text{ par}} ab^j + \sum_{j \text{ ímpar}} ab^j\right] = \pm\left[\sum_{j \text{ par}} b^j a + \sum_{j \text{ ímpar}} b^j a^{-1}\right],$$

logo

$$\begin{aligned} k_1(a-1) = (1-a)\frac{\partial b^n}{\partial b} &= \pm\left[\sum_{j \text{ par}} b^j(1-a) + \sum_{j \text{ ímpar}} b^j(1-a^{-1})\right] = \\ = \pm\left[-\sum_{j \text{ par}} b^j(a-1) + \sum_{j \text{ ímpar}} b^j a^{-1}(a-1)\right] &= \pm\left[-\sum_{j \text{ par}} b^j + \sum_{j \text{ ímpar}} b^j a^{-1}\right](a-1) \end{aligned}$$

Portanto podemos tomar $k_1 = \pm\left[-\sum_{j \text{ par}} b^j + \sum_{j \text{ ímpar}} b^j a^{-1}\right]$, e é fácil verificar que $k_1(1+ab) = b^n - 1$, o que nos dá

$$s_1(a^m b^n e_1^1) = \pm\, a^m \left[-\sum_{j \text{ par}} b^j + \sum_{j \text{ ímpar}} b^j a^{-1}\right] e_2$$

quando n é par. Apenas para exemplificar, quando $n = 4$, temos

$$\frac{\partial b^4}{\partial b} = 1 + b + b^2 + b^3,$$

e

$$s_1(a^m b^4 e_1^1) = a^m(-1 - b^2 + ba^{-1} + ba^{-3})e_2$$

Se n é ímpar, a equação (2.7) se escreve como

$$\begin{aligned} d_2(ke_2) + s_0(a^{m-1}b^n e_0) - s_0(a^m b^n e_0) &= a^m b^n e_1^1 \\ \Leftrightarrow d_2(ke_2) - a^{m-1}e_1^1 + a^{m-1}(1-a)\frac{\partial b^n}{\partial b}e_1^2 &= a^m b^n e_1^1 \\ \Leftrightarrow d_2(ke_2) &= a^{m-1}(ab^n + 1)e_1^1 + a^{m-1}(a-1)\frac{\partial b^n}{\partial b}e_1^2 \\ \Leftrightarrow k(1+ab)e_1^1 + k(a-1)e_1^2 &= a^{m-1}(ab^n+1)e_1^1 + a^{m-1}(a-1)\frac{\partial b^n}{\partial b}e_1^2. \end{aligned}$$

Se $k = a^{m-1}k_2$, com $k_2 \in \mathbb{Z}G$, então k_2 deve satisfazer

$$k_2(1+ab) = ab^n + 1 \quad \text{e} \quad k_2(a-1) = (a-1)\frac{\partial b^n}{\partial b}.$$

Procedendo como no caso anterior e escrevendo

$$\frac{\partial b^n}{\partial b} = \pm\left[\sum_{j \text{ par}} b^j + \sum_{j \text{ ímpar}} b^j\right],$$

obtemos

$$s_1(a^m b^n e_1^1) = \pm a^{m-1}\left[\sum_{j \text{ par}} b^j - \sum_{j \text{ ímpar}} b^j a^{-1}\right] e_2.$$

Se repetirmos as contas que fizemos para calcular $s_1(a^m b^n e_1^2)$, obtemos $s_1(a^m b^n e_1^2) = 0$, e não é difícil verificar que $s_1 d_2 = \mathrm{id}_{P_2}$.

■

Tendo a homotopia de contração para a resolução que obtivemos, podemos calcular uma aproximação da diagonal $\Delta\colon P \to P \otimes P$ imediatamente usando a Proposição 1.17. Obtemos

Proposição 2.12 *Sendo P a resolução dada pela Proposição 2.11, uma aproximação da diagonal $\Delta\colon P \to P \otimes P$ é dada por*

$$\begin{aligned} &\Delta_0\colon P_0 \to P_0 \otimes P_0 \\ &\qquad \Delta_0(e_0) = e_0 \otimes e_0, \\ &\Delta_1\colon P_1 \to (P_1 \otimes P_0) \oplus (P_0 \otimes P_1) \\ &\qquad \Delta_1(e_1^1) = \tilde{s}_0\Delta_0 d_1(e_1^1) = e_1^1 \otimes ae_0 + e_0 \otimes e_1^1, \\ &\qquad \Delta_1(e_1^2) = \tilde{s}_0\Delta_0 d_1(e_1^2) = e_1^2 \otimes be_0 + e_0 \otimes e_1^2, \\ &\Delta_2\colon P_2 \to (P_2 \otimes P_0) \oplus (P_1 \otimes P_1) \oplus (P_0 \otimes P_2) \\ &\qquad \Delta_2(e_2) = \tilde{s}_1\Delta_1 d_2(e_2) = e_2 \otimes (be_0) + [e_1^1 \otimes abe_1^1 + e_1^1 \otimes ae_1^2 + ae_1^2 \otimes abe_1^1] + e_0 \otimes e_2. \end{aligned}$$

Calcularemos os grupos de cohomologia $H^*(G, M)$ e as estruturas de produto cup nos seguintes casos:

1. $M = \mathbb{Z}$, em que $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo (trivial ou não),
2. $M = \mathbb{Z}_2$,
3. $M = \mathbb{Z}_p$, com p um primo ímpar (trivial ou não).

Iniciemos com $H^*(G, \mathbb{Z})$ para as diversas estruturas de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo. Representaremos por $\mathbb{Z}_{\theta_0}$ o $\mathbb{Z}G$-módulo trivial, por $\mathbb{Z}_{\theta_1}$ o $\mathbb{Z}G$-módulo em que $a \cdot 1 = 1$, $b \cdot 1 = -1$, por $\mathbb{Z}_{\theta_2}$ o $\mathbb{Z}G$-módulo em que $a \cdot 1 = -1$, $b \cdot 1 = 1$, e por $\mathbb{Z}_{\theta_3}$ o $\mathbb{Z}G$-módulo em que $a \cdot 1 = -1$, $b \cdot 1 = -1$.

Teorema 2.13 *Os grupos de cohomologia $H^*(G, \mathbb{Z}_{\theta_i})$, para $0 \leq i \leq 3$, são dados por*

$$\begin{array}{llll} H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \cong \mathbb{Z}, & H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) = 0, & H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) = 0, & H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) = 0, \\ H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \cong \mathbb{Z}, & H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \cong \mathbb{Z}_2, & H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) \cong \mathbb{Z}_2, \\ H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \cong \mathbb{Z}_2, & H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \cong \mathbb{Z}, & H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \cong \mathbb{Z}_2, & H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) \cong \mathbb{Z}_2, \end{array}$$

e $H^n(G, \mathbb{Z}_{\theta_i}) = 0$ para $n \geq 3$. Mais especificamente, usando a notação $[\ ]_{\theta_i}$ para representar as classes de cohomologia em $H^*(G, \mathbb{Z}_{\theta_i})$, podemos explicitar os geradores de cada um destes grupos:

$$\begin{array}{ll} H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) = \langle [e_0^*]_{\theta_0} \rangle, & H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) = 0, \\ H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) = \left\langle [e_1^{2*}]_{\theta_0} \right\rangle, & H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) = \left\langle [e_1^{1*}]_{\theta_1} \right\rangle \oplus \left\langle [e_1^{2*}]_{\theta_1} \right\rangle, \\ H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) = \langle [e_2^*]_{\theta_0} \rangle, & H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) = \langle [e_2^*]_{\theta_1} \rangle, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) = 0, & H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) = 0, \\ H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) = \left\langle [e_1^{1*}]_{\theta_2} \right\rangle, & H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) = \left\langle [e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3} \right\rangle, \\ H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) = \langle [e_2^*]_{\theta_2} \rangle, & H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) = \langle [e_2^*]_{\theta_3} \rangle, \end{array}$$

em que os elementos $[e_2^*]_{\theta_0}$, $[e_1^{2*}]_{\theta_1}$, $[e_1^{1*}]_{\theta_2}$, $[e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3}$, $[e_2^*]_{\theta_3}$ são de ordem 2. Finalmente, os produtos entre estes elementos são calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &[e_1^{2*}]_{\theta_0}^2 = 0, \\ &[e_1^{2*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{1*}]_{\theta_1} = -[e_2^*]_{\theta_1}, \\ &[e_1^{2*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{2*}]_{\theta_1} = 0, \\ &[e_1^{2*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{1*}]_{\theta_2} = [e_2^*]_{\theta_2}, \\ &[e_1^{2*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3} = [e_2^*]_{\theta_3}, \\ &[e_1^{1*}]_{\theta_1}^2 = [e_2^*]_{\theta_0}, \\ &[e_1^{2*}]_{\theta_1}^2 = 0, \\ &[e_1^{1*}]_{\theta_1} \smile [e_1^{2*}]_{\theta_1} = [e_2^*]_{\theta_0}, \\ &[e_1^{1*}]_{\theta_1} \smile [e_1^{1*}]_{\theta_2} = [e_2^*]_{\theta_3}, \\ &[e_1^{2*}]_{\theta_1} \smile [e_1^{1*}]_{\theta_2} = [e_2^*]_{\theta_3}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&[e_1^{1*}]_{\theta_1} \smile [e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3} = 0,\\
&[e_1^{2*}]_{\theta_1} \smile [e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3} = [e_2^*]_{\theta_2},\\
&[e_1^{1*}]_{\theta_2}^2 = [e_2^*]_{\theta_0},\\
&[e_1^{1*}]_{\theta_2} \smile [e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3} = 0,\\
&[e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3}^2 = [e_2^*]_{\theta_0}.
\end{aligned}
$$

Demonstração: Comecemos com $H^*(G, \mathbb{Z}_{\theta_0})$. A partir da resolução (2.5), considere a sequência

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \arrow[r, "d_2^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "d_1^*"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "d_2^*"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}
\tag{2.8}
$$

Se $u_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z}_{\theta_0})$, então $(d_1^* u_0)(e_1^1) = u_0((a-1)e_0) = 0$ e $(d_1^* u_0)(e_1^2) = u_0((b-1)e_0) = 0$. Logo $d_1^* = 0$ e $H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \cong \mathbb{Z}$.

Se $u_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, \mathbb{Z}_{\theta_0})$, então $(d_2^* u_1)(e_2) = u_1((1+ab)e_1^1 + (a-1)e_1^2) = 2u_1(e_1^1)$. Logo $\ker d_2^* = \{u_1 \mid u_1(e_1^1) = 0\} \cong \mathbb{Z}$ e $\mathrm{im}\, d_2^* = 2\mathbb{Z}$, observando a segunda linha do diagrama (2.8).

Portanto $H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \cong \ker d_2^* \cong \mathbb{Z}$, com um gerador dado pela classe do homomorfismo e_1^{2*}. Também temos $H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \cong \mathbb{Z}_2$, com um gerador dado pela classe do homomorfismo e_2^*.

Passemos para $H^*(G, \mathbb{Z}_{\theta_1})$. Como no caso de $\mathbb{Z}$ trivial, considere a sequência

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \arrow[r, "d_2^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "d_1^*"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "d_2^*"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}
\tag{2.9}
$$

Se $u_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z}_{\theta_1})$, então $(d_1^* u_0)(e_1^1) = u_0((a-1)e_0) = 0$ e $(d_1^* u_0)(e_1^2) = u_0((b-1)e_0) = -2u_0(e_0)$. Logo $\ker d_1^* \cong 0$ e $H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \cong 0$. Temos também $\mathrm{im}\, d_1^* = \{0 \oplus 2\mathbb{Z}\}$, observando a segunda linha do diagrama (2.9).

Se $u_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, \mathbb{Z}_{\theta_1})$, então $(d_2^* u_1)(e_2) = u_1((1+ab)e_1^1 + (a-1)e_1^2) = 0$. Logo $d_2^* = 0$ e temos $H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) = \dfrac{\ker d_2^*}{\mathrm{im}\, d_1^*} \cong \dfrac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{0 \oplus 2\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. Um par de geradores para $H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_1})$ é dado pelas classes dos homomorfismos e_1^{1*} e e_1^{2*}.

Finalmente, temos $H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \cong \mathbb{Z}$, com um gerador dado pela classe do homomorfismo e_2^*.

Calculemos agora $H^*(G, \mathbb{Z}_{\theta_2})$. Considere a sequência

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \arrow[r, "d_2^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "d_1^*"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "d_2^*"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}
\tag{2.10}
$$

Se $u_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z}_{\theta_2})$, então $(d_1^* u_0)(e_1^1) = u_0((a-1)e_0) = -2u_0(e_0)$ e $(d_1^* u_0)(e_1^2) = u_0((b-1)e_0) = 0$. Logo $\ker d_1^* \cong 0$ e $H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \cong 0$. Temos também $\mathrm{im}\, d_1^* = 2\mathbb{Z} \oplus 0$, observando a segunda linha do diagrama (2.10).

Se $u_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, \mathbb{Z}_{\theta_2})$, então $(d_2^* u_1)(e_2) = u_1((1+ab)e_1^1 + (a-1)e_1^2) = -2u_1(e_1^2)$. Logo $\ker d_2^* = \{u_1 \mid u_1(e_1^2) = 0\} \cong \mathbb{Z} \oplus 0$ (observando a segunda linha de (2.10)) e temos $H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) = \dfrac{\ker d_2^*}{\mathrm{im}\, d_1^*} \cong \dfrac{\mathbb{Z} \oplus 0}{2\mathbb{Z} \oplus 0} \cong \mathbb{Z}_2$. Um gerador para $H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_2})$ é dado pela classe do homomorfismo e_1^{1*}.

Temos ainda $\operatorname{im} d_2^* = 2\mathbb{Z}$ (observando a segunda linha de (2.10)), portanto $H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \cong \mathbb{Z}_2$, com um gerador dado pela classe do homomorfismo e_2^*.

Para o cálculo de $H^*(G, \mathbb{Z}_{\theta_3})$, considere a sequência

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z}_{\theta_3}) \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[d, "\cong"] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, \mathbb{Z}_{\theta_3}) \arrow[r, "d_2^*"] \arrow[d, "\cong"] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2, \mathbb{Z}_{\theta_3}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "d_1^*"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "d_2^*"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{2.11}$$

Se $u_0 \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z}_{\theta_3})$, então $(d_1^* u_0)(e_1^1) = u_0((a-1)e_0) = -2u_0(e_0)$ e $(d_1^* u_0)(e_1^2) = u_0((b-1)e_0) = -2u_0(e_0)$. Logo $\ker d_1^* \cong 0$ e $H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) \cong 0$. Temos também $\operatorname{im} d_1^* = \{(2k, 2k) \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, observando a segunda linha do diagrama (2.11).

Se $u_1 \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, \mathbb{Z}_{\theta_3})$, então $(d_2^* u_1)(e_2) = u_1((1+ab)e_1^1 + (a-1)e_1^2) = 2u_1(e_1^1) - 2u_1(e_1^2)$. Logo $\ker d_2^* = \{u_1 \mid u_1(e_1^1) = u_1(e_1^2)\} \cong \{(k, k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (observando a segunda linha de (2.11)) e temos $H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) = \dfrac{\ker d_2^*}{\operatorname{im} d_1^*} \cong \mathbb{Z}_2$. Um gerador para $H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_3})$ é dado pela classe do homomorfismo $(e_1^{1*} + e_1^{2*})$.

Temos ainda $\operatorname{im} d_2^* = 2\mathbb{Z}$ (observando a segunda linha de (2.11)), portanto $H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) \cong \mathbb{Z}_2$, com um gerador dado pela classe do homomorfismo e_2^*.

A fim de considerarmos os produtos

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_i}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_j}) \overset{\smile}{\to} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_i} \otimes \mathbb{Z}_{\theta_j}),$$

com $0 \leq i, j \leq 3$, primeiro observamos que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Z}_{\theta_0} \otimes \mathbb{Z}_{\theta_i} \cong \mathbb{Z}_{\theta_i}, \quad \forall 1 \leq i \leq 3, \\
&\mathbb{Z}_{\theta_i} \otimes \mathbb{Z}_{\theta_i} \cong \mathbb{Z}_{\theta_0}, \quad \forall 0 \leq i \leq 3, \\
&\mathbb{Z}_{\theta_i} \otimes \mathbb{Z}_{\theta_j} \cong \mathbb{Z}_{\theta_k}, \quad \text{se } 1 \leq i < j \leq 3 \text{ e } k > 0,\ k \neq i, j.
\end{aligned}$$

Usaremos a notação $[\ ]_{\theta_i}$ para representar as classes em $H^*(G, \mathbb{Z}_{\theta_i})$. Com esta notação e observando os cálculos que já fizemos, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) = \langle [e_0^*]_{\theta_0} \rangle, && H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) = 0, \\
&H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) = \left\langle [e_1^{2*}]_{\theta_0} \right\rangle, && H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) = \left\langle [e_1^{1*}]_{\theta_1} \right\rangle \oplus \left\langle [e_1^{2*}]_{\theta_1} \right\rangle, \\
&H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) = \langle [e_2^*]_{\theta_0} \rangle, && H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) = \langle [e_2^*]_{\theta_1} \rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) = 0, && H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) = 0, \\
&H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) = \left\langle [e_1^{1*}]_{\theta_2} \right\rangle, && H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) = \left\langle [e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3} \right\rangle, \\
&H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) = \langle [e_2^*]_{\theta_2} \rangle, && H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) = \langle [e_2^*]_{\theta_3} \rangle,
\end{aligned}$$

em que os elementos $[e_2^*]_{\theta_0}$, $[e_1^{2*}]_{\theta_1}$, $[e_1^{1*}]_{\theta_2}$, $[e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3}$, $[e_2^*]_{\theta_3}$ são de ordem 2. Feitas estas observações, o cálculo do produto cup em qualquer caso é imediato a partir da Proposição 2.12. Iniciemos com o caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \overset{\smile}{\to} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}).$$

Neste caso, temos $[e_1^{2*}]_{\theta_0}^2 = 0$. No caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \overset{\smile}{\to} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}),$$

temos $[e_1^{2*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{1*}]_{\theta_1} = -[e_2^*]_{\theta_1}$ e $[e_1^{2*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{2*}]_{\theta_1} = 0$. No caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \stackrel{\smile}{\to} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}),$$

temos $[e_1^{2*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{1*}]_{\theta_2} = [e_2^*]_{\theta_2}$. No caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) \stackrel{\smile}{\to} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}),$$

temos $[e_1^{2*}]_{\theta_0} \smile [e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3} = [e_2^*]_{\theta_3}$. No caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \stackrel{\smile}{\to} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}),$$

temos $[e_1^{1*}]_{\theta_1}^2 = [e_2^*]_{\theta_0}$, $[e_1^{2*}]_{\theta_1}^2 = 0$ e $[e_1^{1*}]_{\theta_1} \smile [e_1^{2*}]_{\theta_1} = [e_2^*]_{\theta_0}$. No caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \stackrel{\smile}{\to} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}),$$

temos $[e_1^{1*}]_{\theta_1} \smile [e_1^{1*}]_{\theta_2} = [e_2^*]_{\theta_3}$ e $[e_1^{2*}]_{\theta_1} \smile [e_1^{1*}]_{\theta_2} = [e_2^*]_{\theta_3}$. No caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) \stackrel{\smile}{\to} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}),$$

temos $[e_1^{1*}]_{\theta_1} \smile [e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3} = 0$ e $[e_1^{2*}]_{\theta_1} \smile [e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3} = [e_2^*]_{\theta_2}$. No caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \stackrel{\smile}{\to} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}),$$

temos $[e_1^{1*}]_{\theta_2}^2 = [e_2^*]_{\theta_0}$. No caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) \stackrel{\smile}{\to} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}),$$

temos $[e_1^{1*}]_{\theta_2} \smile [e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3} = 0$. Finalmente, no caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_3}) \stackrel{\smile}{\to} H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}),$$

temos $[e_1^{1*} + e_1^{2*}]_{\theta_3}^2 = [e_2^*]_{\theta_0}$.

■

Teorema 2.14 *Os grupos de cohomologia $H^*(G, \mathbb{Z}_2)$ são dados por*

$$\begin{aligned} H^0(G, \mathbb{Z}_2) &\cong \mathbb{Z}_2, \\ H^1(G, \mathbb{Z}_2) &\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \\ H^2(G, \mathbb{Z}_2) &\cong \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

e $H^n(G, \mathbb{Z}_2) = 0$ para $n \geq 3$. Além disso, sendo ζ_1 e ζ_2 os geradores de $H^1(G, \mathbb{Z}_2)$ e ξ o gerador de $H^2(G, \mathbb{Z}_2)$, temos $\zeta_1^2 = \xi$, $\zeta_2^2 = 0$ e $\zeta_1 \smile \zeta_2 = \xi$.

Demonstração: Usamos a notação aditiva para $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Como no caso de $\mathbb{Z}$ trivial, considere a sequência

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "d_2^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2, \mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r, "d_1^*"] & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \arrow[r, "d_2^*"] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{2.12}$$

Se $u_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z}_2)$, temos $(d_1^* u_0)(e_1^1) = (d_1^* u_0)(e_1^2) = 0$. Logo $d_1^* = 0$ e $H^0(G, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.

Se $u_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, \mathbb{Z}_2)$, temos $(d_2^* u_1)(e_2) = 0$, logo também temos $d_2^* = 0$ e $H^1(G, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, com geradores dados pelas classes dos homomorfismos e_1^{1*} e e_1^{2*}.

Finalmente temos $H^2(G, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, com um gerador dado pela classe do homomorfismo e_2^*. Calculemos a estrutura multiplicativa de $H^*(G, \mathbb{Z}_2)$:

$$\begin{aligned}
(e_1^{1*} \smile e_1^{1*})(e_2) &= (u_1^1 \times u_1^1)\Delta_2(e_2) = \overline{1} \otimes \overline{1}, \\
(e_1^{1*} \smile e_1^{2*})(e_2) &= (u_1^1 \times u_1^2)\Delta_2(e_2) = \overline{1} \otimes \overline{1}, \\
(e_1^{2*} \smile e_1^{2*})(e_2) &= (u_1^2 \times u_1^2)\Delta_2(e_2) = 0,
\end{aligned}$$

o que nos dá imediatamente o resultado do enunciado ao tomarmos $\zeta_1 = [e_1^{1*}]$, $\zeta_2 = [e_1^{2*}]$, $\xi = [e_2^*]$.

■

Passemos agora ao cálculo dos grupos $H^*(G, \mathbb{Z}_p)$, com p um primo ímpar, bem como ao cálculo dos produtos cup para as diversas estruturas de $\mathbb{Z}_p$ como $\mathbb{Z}G$-módulo. Considere então $\mathbb{Z}_p = \{\overline{0}, \ldots, \overline{p-1}\}$. A ação de $\mathbb{Z}G$ sobre $\mathbb{Z}_p$ é definida por um homomorfismo de grupos

$$\theta \colon G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)$$

definida por

$$\begin{aligned}
\theta(a)(\overline{1}) &= r \cdot \overline{1} = \overline{r} \\
\theta(b)(\overline{1}) &= s \cdot \overline{1} = \overline{s},
\end{aligned}$$

com $\mathrm{mdc}(r, p) = \mathrm{mdc}(s, p) = 1$. Devemos ter ainda $\theta(abab^{-1})(\overline{1}) = \overline{1} \Leftrightarrow rsrs^{-1} \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow r^2 \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow r \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

Teorema 2.15 *Seja $\mathbb{Z}_p$ o $\mathbb{Z}G$-módulo tal que a ação de G sobre $\mathbb{Z}_p$ é definida pelo homomorfismo de grupos*

$$\theta \colon G \to Aut(\mathbb{Z}_p)$$

tal que

$$\begin{aligned}
\theta(a)(\overline{1}) &= r \cdot \overline{1} = \overline{r} \\
\theta(b)(\overline{1}) &= s \cdot \overline{1} = \overline{s},
\end{aligned}$$

com $\mathrm{mdc}(r, p) = \mathrm{mdc}(s, p) = 1$ e $r \equiv \pm 1 \pmod{p}$. Os grupos de cohomologia $H^*(G, \mathbb{Z}_p)$ são dados por

$$H^0(G, \mathbb{Z}_p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & \textit{se } r \equiv s \equiv 1 \pmod{p} \\ 0, & \textit{caso contrário}, \end{cases}$$

$$H^1(G, \mathbb{Z}_p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & \textit{se } r \equiv 1 \pmod{p},\ s \equiv \pm 1 \pmod{p} \\ 0, & \textit{caso contrário}, \end{cases}$$

$$H^2(G, \mathbb{Z}_p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & \textit{se } r \equiv 1 \pmod{p},\ s \equiv -1 \pmod{p} \\ 0, & \textit{caso contrário}. \end{cases}$$

Demonstração: Considere a sequência

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0,\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "d_2^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2,\mathbb{Z}_p) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_p \arrow[r, "d_1^*"] & \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \arrow[r, "d_2^*"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{2.13}$$

Seja $u_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z}_2)$. Temos

$$(d_1^* u_0)(e_1^1) = (r-1)u_0(e_0),$$
$$(d_1^* u_0)(e_1^2) = (s-1)u_0(e_0),$$

logo a matriz de $d_1^*\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ nas bases duais de $\{e_0\}$ e $\{e_1^1, e_1^2\}$ é

$$[d_1^*] = \begin{bmatrix} r-1 \\ s-1 \end{bmatrix},$$

o que nos dá

$$\ker d_1^* \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & \text{se } r \equiv s \equiv 1 \pmod{p} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathrm{im}\, d_1^* \cong \begin{cases} 0, & \text{se } r \equiv s \equiv 1 \pmod{p} \\ \mathbb{Z}_p, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim,

$$H^0(G, \mathbb{Z}_p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & \text{se } r \equiv s \equiv 1 \pmod{p} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja agora $u_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, \mathbb{Z}_p)$. Temos $(d_2^* u_1)(e_2) = (1+rs)u_1(e_1^1) + (r-1)u_1(e_1^2)$. Segue que a matriz de $d_2^*\colon \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ nas bases duais de $\{e_1^1, e_1^2\}$ e $\{e_2\}$ é

$$[d_2^*] = \begin{bmatrix} (1+rs) & (r-1) \end{bmatrix}.$$

Dividimos nossa análise em 2 casos. Em primeiro lugar, se $r \equiv 1 \pmod{p}$, temos $[d_2^*] = \begin{bmatrix} (1+s) & 0 \end{bmatrix}$, logo

$$\ker d_2^* = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p, & \text{se } s \equiv -1 \pmod{p} \\ 0 \oplus \mathbb{Z}_p, & \text{se } s \not\equiv -1 \pmod{p} \end{cases}$$

e

$$\mathrm{im}\, d_2^* = \begin{cases} 0, & \text{se } s \equiv -1 \pmod{p} \\ \mathbb{Z}_p, & \text{se } s \not\equiv -1 \pmod{p} \end{cases}$$

Se, por outro lado, tivermos $r \equiv -1 \pmod{p}$, então

$$(d_2^* u_1)(e_2) = 0 \Leftrightarrow (1-s)u_1(e_1^1) - 2u_1(e_1^2) = 0.$$

Se $s \equiv 1 \pmod{p}$, isto implica que $u_1(e_1^2) = 0$. Caso contrário, se $s \not\equiv 1 \pmod{p}$ devemos ter $u_1(e_1^2) \equiv 2^{-1}(1-s)u_1(e_1^1) \pmod{p}$. Deste modo, temos

$$\ker d_2^* = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \oplus 0, & \text{se } s \equiv 1 \pmod{p} \\ \{(k, k2^{-1}(1-s)k) \mid k \in \mathbb{Z}_p\} \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } s \not\equiv 1 \pmod{p} \end{cases}$$

e $\operatorname{im} d_2^* = \mathbb{Z}_p$. Unindo o que obtivemos nos casos $r \equiv \pm 1 \pmod{p}$, podemos calcular

$$H^1(G, \mathbb{Z}_p) = \frac{\ker d_2^*}{\operatorname{im} d_1^*} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & \text{se } r \equiv 1 \pmod{p},\ s \equiv \pm 1 \pmod{p} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Finalmente,

$$H^2(G, \mathbb{Z}_p) = \frac{\mathbb{Z}_p}{\operatorname{im} d_2^*} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & \text{se } r \equiv 1 \pmod{p},\ s \equiv -1 \pmod{p} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A fim de determinarmos a estrutura multiplicativa de $H^*(G, \mathbb{Z}_p)$, só precisamos nos preocupar com o produto caso em que $r \equiv 1 \pmod{p}$, $s \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

$$H^1(G, \mathbb{Z}_p^{(1)}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_p^{(-1)}) \xrightarrow{\smile} H^2(G, \mathbb{Z}_p^{(1)} \otimes \mathbb{Z}_p^{(-1)}) \cong H^2(G, \mathbb{Z}_p^{(-1)}),$$

em que representamos por $\mathbb{Z}_p^{(1)}$ o $\mathbb{Z}G$-módulo em que $r \equiv s \equiv 1 \pmod{p}$ e por $\mathbb{Z}_p^{(-1)}$ o $\mathbb{Z}G$-módulo em que $r \equiv 1 \pmod{p}$ e $s \equiv -1 \pmod{p}$. Pelos cálculos que já realizamos, um gerador para $H^1(G, \mathbb{Z}_p^{(1)})$ é $[e_1^{2*}]$ e um gerador para $H^1(G, \mathbb{Z}_p^{(-1)})$ é $[e_1^{1*}]$. Usando a Proposição 2.12, obtemos

$$[e_1^{2*}] \smile [e_1^{1*}] = -[e_2^*],$$

em que $[e_2^*]$ é o gerador de $H^2(G, \mathbb{Z}_p^{(-1)})$.

■

2.4 Superfícies não orientáveis

Seja $G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \mid a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2 \rangle$, com $n \geq 3$. Nesta seção exibiremos uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. Sendo P esta resolução, em seguida construiremos parcialmente uma aproximação da diagonal $\Delta \colon P \to P \otimes P$. Esta aproximação da diagonal permite que calculemos então não apenas os grupos $H^*(G, M)$ para um $\mathbb{Z}G$-módulo M, mas também o produto cup. Faremos tais cálculos para coeficientes $M = \tilde{\mathbb{Z}}$ (isto é, $\mathbb{Z}$ como um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial ou não) e $M = \mathbb{Z}_2$.

Seja $p = a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2$. Portanto o grupo G é gerado por $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e sujeito à relação $p = 1$.

Proposição 2.16 *Uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial é dada por*

$$0 \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \tag{2.14}$$

na qual

$$\begin{aligned} P_0 &= \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}G, \\ P_1 &= \langle y_1, \ldots, y_n \rangle \cong \mathbb{Z}G^n, \\ P_2 &= \langle w \rangle \cong \mathbb{Z}G, \end{aligned}$$

e os homomorfismos ε, d_1 e d_2 são definidos por

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= 1, \\ d_1(y_i) &= (a_i - 1)x, \\ d_2(w) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial a_i} y_i, \end{aligned}$$

em que as derivadas parciais são as derivadas de Fox, que podem ser calculadas explicitamente do seguinte modo:

$$\frac{\partial p}{\partial a_i} = (a_1^2 \cdots a_{i-1}^2)(1 + a_i).$$

Demonstração: Como no caso das superfícies orientáveis, seguindo o Corolário 1.9, a nossa superfície é recoberta pelo plano $\mathbb{R}^2$, que é um 2-complexo que é também um G-complexo livre e contrátil. Seu complexo de cadeia celular aumentado é exatamente aquele dado pela equação (2.14), como se prova em [FH83]. Finalmente, quanto ao cálculo de $\dfrac{\partial p}{\partial a_i}$, em primeiro lugar temos

$$\frac{\partial a_i^2}{\partial a_i} = 1 + a_i,$$

logo

$$\frac{\partial p}{\partial a_i} = (a_1^2 \cdots a_{i-1}^2)\frac{\partial a_i^2}{\partial a_i} = (a_1^2 \cdots a_{i-1}^2)(1 + a_i),$$

■

Passemos agora à construção parcial de uma aproximação da diagonal $\Delta\colon P \to P \otimes P$. Novamente usaremos a demonstração da Proposicao 1.10. Existe uma homotopia de contração s para a resolução (2.3) tal que

$$\begin{aligned} s_{-1}(1) &= x, \\ s_0(\tilde{p}x) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial a_j} y_j + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial b_j} z_j \right), \end{aligned}$$

em que $\tilde{p}$ é uma palavra reduzida em G. Sendo assim, pela Proposicao 1.17, podemos construir os homomorfismos $\Delta_0\colon P_0 \to P_0 \otimes P_0$ e $\Delta_1\colon P_1 \to (P \otimes P)_1$:

$$\begin{aligned} \Delta_0(x) &= s_{-1}\varepsilon(x) \otimes s_{-1}\varepsilon(x) = x \otimes x, \\ \Delta_1(y_i) &= \tilde{s}_0 \Delta_0 d_1(y_i) = \tilde{s}_0(a_i x \otimes a_i x) - \tilde{s}_0(x \otimes x) \\ &= y_i \otimes a_i x + x \otimes y_i, \end{aligned}$$

Quanto ao homomorfismo Δ_2, fazemos a mesma observação que já nos foi útil anteriormente: a fim de calcularmos o produto

$$H^1(G, M) \otimes H^1(G, N) \xrightarrow{\smile} H^2(G, M \otimes N),$$

é suficiente o conhecimento do homomorfismo $\Delta_{11}\colon P_2 \to P_1 \otimes P_1$, em que $\Delta_{11} = \pi_{11} \circ \Delta_2$ e $\pi_{ij}\colon (P \otimes P)_{i+j} \to P_i \otimes P_j$ é a projeção. Observando que, para $g, g' \in G$,

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1(gx \otimes g'y_i) &= \underbrace{s_0(gx) \otimes g'y_i}_{\in P_1 \otimes P_1} + \underbrace{x \otimes s_1(g'y_i)}_{\in P_0 \otimes P_2}, \\ \tilde{s}_1(gy_i \otimes g'x) &= s_1(gy_i) \otimes g'x \in P_2 \otimes P_0, \end{aligned}$$

podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\Delta_{11}(w) = \pi_{11} \circ \Delta_2(w) &= \pi_{11} \tilde{s}_1 \Delta_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial a_i} y_i \right) \\
&= \pi_{11} \tilde{s}_1 \left(\sum_{i=1}^{n} (a_1^2 \cdots a_{i-1}^2)(1 + a_i)(x \otimes y_i) \right) \qquad (2.15) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(s_0((a_1^2 \cdots a_{i-1}^2)x) \otimes (a_1 \cdots a_{i-1}^2) y_i + s_0((a_1^2 \cdots a_{i-1}^2) a_i x) \otimes (a_1^2 \cdots a_{i-1}^2) a_i y_i \big)
\end{aligned}
$$

Para terminar os cálculos da equação acima, calculamos em seguida o homomorfismo s_0 nos elementos da forma

$$
\begin{aligned}
&(a_1^2 \cdots a_{i-1}^2)x, \\
&(a_1^2 \cdots a_{i-1}^2)a_i x.
\end{aligned}
$$

Os cálculos são análogos ao que fizemos no caso das superfícies orientáveis, e obtemos

$$
\begin{aligned}
s_0((a_1^2 \cdots a_{i-1}^2)x) &= \sum_{j=1}^{i-1} (a_1^2 \cdots a_{j-1}^2)(1 + a_j) y_j, \\
s_0((a_1^2 \cdots a_{i-1}^2)a_i x) &= \sum_{j=1}^{i-1} \big((a_1^2 \cdots a_{j-1}^2)(1 + a_j) y_j \big) + (a_1^2 \cdots a_{i-1}^2) y_i.
\end{aligned}
$$

Substituindo estes valores na equação (2.15), obtemos

Proposição 2.17 *Se P é a resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial dada pela Proposição 2.16, uma aproximação da diagonal $\Delta\colon P \to (P \otimes P)$ é dada parcialmente por*

$$
\begin{aligned}
\Delta_0 &\colon P_0 \to (P \otimes P)_0 \\
&\quad \Delta_0(x) = s_{-1}\varepsilon(x) \otimes s_{-1}\varepsilon(x) = x \otimes x, \\
\Delta_1 &\colon P_1 \to (P \otimes P)_1 \\
&\quad \Delta_1(y_i) = y_i \otimes a_i x + x \otimes y_i, \\
\Delta_{11} &\colon P_2 \to (P_1 \otimes P_1) \\
&\quad \Delta_{11}(w) = \sum_{i=1}^{n} \Bigg[\left(\sum_{j=1}^{i-1} (a_1^2 \cdots a_{j-1}^2)(1 + a_j) y_j \otimes (a_1^2 \cdots a_{i-1}^2) y_i \right) + \\
&\qquad + \left(\sum_{j=1}^{i-1} (a_1^2 \cdots a_{j-1}^2)(1 + a_j) y_j \otimes (a_1^2 \cdots a_{i-1}^2) a_i y_i \right) + \\
&\qquad + (a_1^2 \cdots a_{i-1}^2) y_i \otimes (a_1^2 \cdots a_{i-1}^2) a_i y_i \Bigg].
\end{aligned}
$$

Com estes resultados, calcularemos os grupos $H^*(G, \mathbb{Z})$, quando $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial ou não, e também o produto cup. De acordo com [GG10], temos três casos a considerar. O primeiro é o caso dos coeficientes triviais, isto é,

$$
\theta_0 \colon G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})
$$

tal que $\theta_0(g)(1) = 1$ para todo $g \in G$. O segundo caso é o dado pela ação

$$\theta_1 \colon G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$$

tal que $\theta_1(a_1)(1) = -1$ e $\theta_1(a_i)(1) = 1$ para $i > 1$. O terceiro caso é o dado pela ação

$$\theta_2 \colon G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$$

tal que $\theta_2(a_1)(1) = -1$, $\theta_2(a_2)(1) = -1$ e $\theta_1(a_i)(1) = 1$ para $i > 2$. Denotando por $\mathbb{Z}_{\theta_i}$ o $\mathbb{Z}G$-módulo dado por cada uma dessas ações, temos:

Teorema 2.18 *Os grupos de cohomologia $H^*(G, \mathbb{Z}_{\theta_i})$ são dados por:*

$$\begin{array}{lll} H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_0}) \cong \mathbb{Z}, & H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_1}) = 0, & H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_2}) = 0, \\ H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_0}) \cong \mathbb{Z}^{n-1}, & H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_1}) \cong \mathbb{Z}^{n-2} \oplus \mathbb{Z}_2, & H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_2}) \cong \mathbb{Z}^{n-2} \oplus \mathbb{Z}_2, \\ H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_0}) \cong \mathbb{Z}_2, & H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_1}) \cong \mathbb{Z}_2, & H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_2}) \cong \mathbb{Z}_2, \end{array}$$

e $H^n(G, \mathbb{Z}_{\theta_i}) = 0$ para $n \geq 3$. Mais especificamente, usando a notação $[\ ]_{\theta_i}$ para representar as classes de cohomologia em $H^*(G, \mathbb{Z}_{\theta_i})$, podemos explicitar os geradores de cada um destes grupos:

$$\begin{aligned} H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_0}) &= \langle [x^*]_{\theta_0} \rangle, \\ H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_0}) &= \bigoplus_{k=1}^{n-1} \left\langle [y_k^* - y_{k+1}^*]_{\theta_0} \right\rangle, \\ H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_0}) &= \langle [w^*]_{\theta_0} \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_1}) &= 0, \\ H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_1}) &= \langle [y_1^*]_{\theta_1} \rangle \oplus \left(\bigoplus_{k=2}^{n-1} \left\langle [y_k^* - y_{k+1}^*]_{\theta_1} \right\rangle \right), \\ H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_1}) &= \langle [w^*]_{\theta_1} \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_2}) &= 0, \\ H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_2}) &= \langle [y_1^*]_{\theta_2} \rangle \oplus \langle [y_1^* + y_2^*]_{\theta_2} \rangle \oplus \left(\bigoplus_{k=3}^{n-1} \left\langle [y_k^* - y_{k+1}^*]_{\theta_2} \right\rangle \right), \\ H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_2}) &= \langle [w^*]_{\theta_2} \rangle, \end{aligned}$$

em que $[y_1^*]_{\theta_1}$, $[y_1^* + y_2^*]_{\theta_2}$ e $[w^*]_{\theta_i}$ são de ordem 2. Além disso, os produtos

$$H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_i}) \otimes H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_j}) \xrightarrow{\smile} H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_i} \otimes \mathbb{Z}_{\theta_j})$$

são dados por

$$\begin{aligned} &[y_k^* - y_{k+1}^*]_{\theta_0}^2 = 0, \\ &[y_k^* - y_{k+1}^*]_{\theta_0} \smile [y_\ell^* - y_{\ell+1}^*]_{\theta_0} = \begin{cases} [w^*]_{\theta_0}, & \textit{se } \ell = k \pm 1, \\ 0, & \textit{caso contrário}, \end{cases} \\ &[y_k^* - y_{k+1}^*]_{\theta_0} \smile [y_1^*]_{\theta_1} = \begin{cases} [w^*]_{\theta_1}, & \textit{se } k = 1, \\ 0, & \textit{se } k > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

$$[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_0}\smile[y_\ell^*-y_{\ell+1}^*]_{\theta_1}=\begin{cases}[w^*]_{\theta_1}, & \textit{se } \ell=k\pm1,\\ 0, & \textit{caso contrário},\end{cases}$$
$$[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_0}\smile[y_\ell^*-y_{\ell+1}^*]_{\theta_2}=\begin{cases}[w^*]_{\theta_2}, & \textit{se } \ell=k\pm1,\\ 0, & \textit{caso contrário},\end{cases}$$
$$[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_0}\smile[y_1^*]_{\theta_2}=\begin{cases}[w^*]_{\theta_2}, & \textit{se } k=1,\\ 0, & \textit{caso contrário},\end{cases}$$
$$[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_0}\smile[y_1^*+y_2^*]_{\theta_2}=\begin{cases}[w^*]_{\theta_2}, & \textit{se } k=2,\\ 0, & \textit{caso contrário},\end{cases}$$
$$[y_1^*]_{\theta_1}^2=[w^*]_{\theta_0},$$
$$[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_1}^2=0,$$
$$[y_1^*]_{\theta_1}\smile[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_1}=0,$$
$$[y_1^*]_{\theta_2}^2=[w^*]_{\theta_0},$$
$$[y_1^*+y_2^*]_{\theta_2}^2=0,$$
$$[y_1^*]_{\theta_2}\smile[y_1^*+y_2^*]_{\theta_2}=[w^*]_{\theta_0},$$
$$[y_1^*]_{\theta_2}\smile[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_2}=0,$$
$$[y_1^*+y_2^*]_{\theta_2}\smile[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_2}=0,$$
$$[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_0}\smile[y_\ell^*-y_{\ell+1}^*]_{\theta_1}=\begin{cases}[w^*]_{\theta_0}, & \textit{se } \ell=k\pm1,\\ 0, & \textit{caso contrário},\end{cases}$$
$$[y_1^*]_{\theta_1}\smile[y_1^*]_{\theta_2}=[w^*]_{\theta_1},$$
$$[y_1^*]_{\theta_1}\smile[y_1^*+y_2^*]_{\theta_2}=0,$$
$$[y_1^*]_{\theta_1}\smile[y_\ell^*-y_{\ell+1}^*]_{\theta_2}=0,$$
$$[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_1}\smile[y_1^*]_{\theta_2}=0,$$
$$[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_1}\smile[y_1^*+y_2^*]_{\theta_2}=\begin{cases}[w^*]_{\theta_1}, & \textit{se } k=2,\\ 0, & \textit{caso contrário},\end{cases}$$
$$[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_1}\smile[y_\ell^*+y_{\ell+1}^*]_{\theta_2}=\begin{cases}[w^*]_{\theta_1}, & \textit{se } \ell=k\pm1,\\ 0, & \textit{caso contrário}.\end{cases}$$

Demonstração: Iniciemos a análise com $\mathbb{Z}_{\theta_0}$. Sendo P a resolução (2.14), considere o complexo de cocadeia

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0,\mathbb{Z}_{\theta_0}) \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\mathbb{Z}_{\theta_0}) \arrow[r, "d_2^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2,\mathbb{Z}_{\theta_0}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}^{2n} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Se $u\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0,\mathbb{Z}_{\theta_0})$, então, $\forall 1\le i\le n$,

$$(d_1^*u)(y_i)=u(d_1(y_i))=u(a_ix-x)=a_iu(x)-u(x)=0$$

portanto $d_1^*=0$ e $H^0(G,\mathbb{Z}_{\theta_0})=[x^*]_{\theta_0}\cong\mathbb{Z}$. Se $u\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\mathbb{Z}_{\theta_0})$, então

$$(d_2^*u)(w)=u(d_2(w))=u\left(\sum_{i=1}^n(a_1^2\cdots a_{i-1}^2)(1+a_i)y_i\right)=\sum_{i=1}^n 2u(y_i).$$

Logo a matriz de d_2^* nas base duais de $\{y_1, \ldots, y_n\}$ e $\{w\}$ é

$$[d_2^*] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \end{bmatrix},$$

o que nos dá

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) = \bigoplus_{k=1}^{n-1} \left\langle [y_k^* - y_{k+1}^*]_{\theta_0} \right\rangle \cong \mathbb{Z}^{n-1} \quad \text{e} \quad H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) = \langle [w^*]_{\theta_0} \rangle \cong \mathbb{Z}_2.$$

Agora consideramos o módulo $\mathbb{Z}_{\theta_1}$. Sendo P a resolução (2.14), considere o complexo de cocadeia

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[d, "\cong"] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \arrow[r, "d_2^*"] \arrow[d, "\cong"] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}^{2n} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Se $u \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z}_{\theta_1})$, então, $\forall 1 \leq i \leq n$,

$$(d_1^* u)(y_i) = u(d_1(y_i)) = u(a_i x - x) = a_i u(x) - u(x) = \begin{cases} -2u(x), & \text{se } i = 1, \\ 0, & \text{se } i \geq 2. \end{cases}$$

portanto $\ker d_1^* = 0$ e $H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) = 0$. A matriz de d_1^* nas bases duais de $\{x\}$ e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ é

$$[d_1^*] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Se $u \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, \mathbb{Z}_{\theta_1})$, então

$$(d_2^* u)(w) = u(d_2(w)) = u\left(\sum_{i=1}^{n} (a_1^2 \cdots a_{i-1}^2)(1 + a_i) y_i\right) = \sum_{i=2}^{n} 2u(y_i).$$

Logo a matriz de d_2^* nas base duais de $\{y_1, \ldots, y_n\}$ e $\{w\}$ é

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & \cdots & 2 \end{bmatrix},$$

o que nos dá

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) = \langle [y_1^*]_{\theta_1} \rangle \oplus \bigoplus_{k=2}^{n-1} \left\langle [y_k^* - y_{k+1}^*]_{\theta_0} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{n-2} \quad \text{e} \quad H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) = \langle [w^*]_{\theta_1} \rangle \cong \mathbb{Z}_2,$$

em que a ordem de $[y_1^*]_{\theta_1}$ é 2.

Finalmente, consideramos o módulo $\mathbb{Z}_{\theta_2}$. Sendo P a resolução (2.14), considere o complexo de cocadeia

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[d, "\cong"] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \arrow[r, "d_2^*"] \arrow[d, "\cong"] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2, \mathbb{Z}_{\theta_2}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}^{2n} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Se $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z}_{\theta_2})$, então, $\forall 1 \leq i \leq n$,

$$(d_1^* u)(y_i) = u(d_1(y_i)) = u(a_i x - x) = a_i u(x) - u(x) = \begin{cases} -2u(x), & \text{se } i = 1, 2, \\ 0, & \text{se } i \geq 3. \end{cases}$$

portanto $\ker d_1^* = 0$ e $H^0(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) = 0$. A matriz de d_1^* nas bases duais de $\{x\}$ e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ é

$$[d_1^*] = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Se $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, \mathbb{Z}_{\theta_1})$, então

$$(d_2^* u)(w) = u(d_2(w)) = u\left(\sum_{i=1}^{n} (a_1^2 \cdots a_{i-1}^2)(1 + a_i) y_i\right) = \sum_{i=3}^{n} 2u(y_i).$$

Logo a matriz de d_2^* nas base duais de $\{y_1, \ldots, y_n\}$ e $\{w\}$ é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & \cdots & 2 \end{bmatrix},$$

o que nos dá

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) = \langle [y_1^*]_{\theta_2} \rangle \oplus \langle [y_1^* + y_2^*]_{\theta_2} \rangle \oplus \left(\bigoplus_{k=3}^{n-1} \left\langle [y_k^* - y_{k+1}^*]_{\theta_2} \right\rangle \right) \text{ e } H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_2}) = \langle [w^*]_{\theta_2} \rangle \cong \mathbb{Z}_2,$$

em que $[y_1^* + y_2^*]_{\theta_2}$ tem ordem 2.

A fim de considerarmos os produtos cup para os coeficientes $\mathbb{Z}_{\theta_i}$, observamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{\theta_0} \otimes \mathbb{Z}_{\theta_i} &\cong \mathbb{Z}_{\theta_i}, \\ \mathbb{Z}_{\theta_i} \otimes \mathbb{Z}_{\theta_i} &\cong \mathbb{Z}_{\theta_0}, \\ \mathbb{Z}_{\theta_1} \otimes \mathbb{Z}_{\theta_2} &\cong \mathbb{Z}_{\theta_1}. \end{aligned}$$

A partir da Proposição 2.17, os cálculos são imediatos. Começamos com o caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \cong H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}).$$

Neste caso, temos $[y_k^* - y_{k+1}^*]_{\theta_0}^2 = 0$ e

$$[y_k^* - y_{k+1}^*]_{\theta_0} \smile [y_\ell^* - y_{\ell+1}^*]_{\theta_0} = \begin{cases} [w^*]_{\theta_0}, & \text{se } \ell = k \pm 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

No caso

$$H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_0}) \otimes H^1(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}) \cong H^2(G, \mathbb{Z}_{\theta_1}),$$

temos, para $1 \leq k \leq n-1$,

$$[y_k^* - y_{k+1}^*]_{\theta_0} \smile [y_1^*]_{\theta_1} = \begin{cases} [w^*]_{\theta_1}, & \text{se } k = 1, \\ 0, & \text{se } k > 1 \end{cases}$$

e, para $1 \leq k \leq n-1$ e $2 \leq \ell \leq n-1$,

$$[y_k^* - y_{k+1}^*]_{\theta_0} \smile [y_\ell^* - y_{\ell+1}^*]_{\theta_1} = \begin{cases} [w^*]_{\theta_1}, & \text{se } \ell = k \pm 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

No caso
$$H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_0})\otimes H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_2})\cong H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_2}),$$
temos, para $1\leq k\leq n-1$ e $3\leq \ell\leq n-1$
$$[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_0}\smile [y_\ell^*-y_{\ell+1}^*]_{\theta_2}=\begin{cases}[w^*]_{\theta_2}, & \text{se } \ell=k\pm 1,\\ 0, & \text{caso contrário,}\end{cases}$$
$$[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_0}\smile [y_1^*]_{\theta_2}=\begin{cases}[w^*]_{\theta_2}, & \text{se } k=1,\\ 0, & \text{caso contrário,}\end{cases}$$
e
$$[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_0}\smile [y_1^*+y_2^*]_{\theta_2}=\begin{cases}[w^*]_{\theta_2}, & \text{se } k=2,\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$
No caso
$$H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_1})\otimes H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_1})\cong H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_0}),$$
temos $[y_1^*]_{\theta_1}^2=[w^*]_{\theta_0}$ e, para $2\leq k\leq n-1$, $[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_1}^2=0$ e $[y_1^*]_{\theta_1}\smile [y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_1}=0$. No caso
$$H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_2})\otimes H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_2})\cong H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_0}),$$
temos $[y_1^*]_{\theta_2}^2=[w^*]_{\theta_0}$, $[y_1^*+y_2^*]_{\theta_2}^2=0$, $[y_1^*]_{\theta_2}\smile [y_1^*+y_2^*]_{\theta_2}=[w^*]_{\theta_0}$ e, para $3\leq k,\ell\leq n-1$, $[y_1^*]_{\theta_2}\smile [y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_2}=0$, $[y_1^*+y_2^*]_{\theta_2}\smile [y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_2}=0$ e
$$[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_0}\smile [y_\ell^*-y_{\ell+1}^*]_{\theta_1}=\begin{cases}[w^*]_{\theta_0}, & \text{se } \ell=k\pm 1,\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$
Finalmente, no caso
$$H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_1})\otimes H^1(G,\mathbb{Z}_{\theta_2})\cong H^2(G,\mathbb{Z}_{\theta_1}),$$
temos $[y_1^*]_{\theta_1}\smile [y_1^*]_{\theta_2}=[w^*]_{\theta_1}$, $[y_1^*]_{\theta_1}\smile [y_1^*+y_2^*]_{\theta_2}=0$ e, para $2\leq k\leq n-1$ e $3\leq \ell\leq n-1$, temos $[y_1^*]_{\theta_1}\smile [y_\ell^*-y_{\ell+1}^*]_{\theta_2}=0$, $[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_1}\smile [y_1^*]_{\theta_2}=0$,
$$[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_1}\smile [y_1^*+y_2^*]_{\theta_2}=\begin{cases}[w^*]_{\theta_1}, & \text{se } k=2,\\ 0, & \text{caso contrário,}\end{cases}$$
e
$$[y_k^*-y_{k+1}^*]_{\theta_1}\smile [y_\ell^*+y_{\ell+1}^*]_{\theta_2}=\begin{cases}[w^*]_{\theta_1}, & \text{se } \ell=k\pm 1,\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$
■

Os cálculos para coeficientes $\mathbb{Z}_2$ são ainda mais simples, pois neste caso o homomorfismo
$$d_2^*\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\mathbb{Z}_2)\to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2,\mathbb{Z}_2)$$
é nulo. Obtemos então o seguinte resultado:

Teorema 2.19 *Os grupos de cohomologia $H^*(G,\mathbb{Z}_2)$ são tais que*
$$\begin{aligned} H^0(G,\mathbb{Z}_2)&=\langle [x^*]\rangle\cong \mathbb{Z}_2,\\ H^1(G,\mathbb{Z}_2)&=\langle [y_1^*],\ldots,[y_n^*]\rangle\cong \mathbb{Z}_2^n,\\ H^2(G,\mathbb{Z}_2)&=\langle [w^*]\rangle\cong \mathbb{Z}_2,\\ H^n(G,\mathbb{Z}_2)&=0,\quad \textit{se } n\geq 3.\end{aligned}$$

Além disso, o produto cup

$$H^1(G,\mathbb{Z}_2) \otimes H^1(G,\mathbb{Z}_2) \stackrel{\smile}{\to} H^2(G,\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2) \cong H^2(G,\mathbb{Z}_2)$$

é dado por

$$[y_i^*] \smile [y_j^*] = \begin{cases} [w^*], & se\ i = j \in \{1,\ldots,n\}, \\ 0, & se\ i \neq j. \end{cases}$$

Capítulo 3

Aproximação da diagonal para o grupo $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$

3.1 Introdução

Considere um fibrado $p\colon E \to S^1$ cuja fibra seja $F = S^1 \times S^1$, o toro. Desta forma, a partir de

$$(S^1 \times S^1) \longrightarrow E \xrightarrow{\ p\ } S^1,$$

obtemos uma sequência exata de grupos

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1(S^1 \times S^1) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(E) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_1(S^1) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r] & \pi_1(E) \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

pois $\pi_2(S^1) = 0$ e $S^1 \times S^1$ é conexo por caminhos. Como $\mathbb{Z}$ é um grupo livre, temos então $\pi_1(E) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$. Neste capítulo, determinaremos o anel de cohomologia do grupo $\pi_1(E)$ para coeficientes $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_p$, com p um primo ímpar.

Sendo assim, denotemos por $G = \langle a, b \mid ab = ba \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ o grupo fundamental do toro e consideremos o grupo $G \rtimes \mathbb{Z}$, em que o grupo $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ atua sobre G da seguinte maneira:

$$t \cdot a = a^{\alpha} b^{\beta}, \quad t \cdot b = a^{\gamma} b^{\delta},$$

com α, β, γ e δ números inteiros satisfazendo

$$\det \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} = \pm 1.$$

Para os elementos de $G \rtimes \mathbb{Z}$, usaremos a notação $G \rtimes \mathbb{Z} = \{(a^m b^n, t^k) : m, n, k \in \mathbb{Z}\}$, e definimos

$$\theta = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}.$$

O primeiro passo para determinar o anel de cohomologia de $G \rtimes \mathbb{Z}$ é obter uma resolução projetiva (de fato, obteremos uma resolução livre) do $\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ sobre o anel $\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$, o qual permite o cálculo dos grupos de cohomologia $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Faremos isso usando a técnica contida no artigo [Wal61] e que foram resumidas no Capítulo 1. Em seguida, procuramos obter uma aproximação da diagonal para a resolução obtida, de modo que possamos determinar a fim de obtermos a estrutura de anel de $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Virtualmente sem esforço adicional, podemos determinar também os grupos $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$, $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$ e suas estruturas multiplicativas, com p um primo ímpar.

3.2 Resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$-módulo trivial

Apliquemos as ideias do artigo [Wal61] e descritas no Lema 1.12 e no Teorema 1.13 para a extensão

$$1 \to G \to G \rtimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 1,$$

com G e $G \rtimes \mathbb{Z}$ os grupos dados na introdução. Uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial já foi vista na Proposição 2.1. Além disso, uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-módulo trivial é

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}\mathbb{Z} \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

A partir destas resoluções, os módulos $A_{r,s}$ usados no Lema 1.12 e no Teorema 1.13 são não nulos apenas para $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq s \leq 1$. Para estes valores de r e s temos:

$$\begin{aligned} A_{2,1} \cong A_{2,0} \cong A_{0,1} \cong A_{0,0} &\cong \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \\ A_{1,1} \cong A_{1,0} &\cong \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \oplus \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]. \end{aligned}$$

Obtemos então o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \langle w \rangle \arrow[d, equal] & \langle z_1 \rangle \oplus \langle z_2 \rangle \arrow[d, equal] & \langle y_3 \rangle \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"] & \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \oplus \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"] & \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \arrow[r, "\varepsilon_0"] \arrow[d, "d_1"] & \mathbb{Z}\mathbb{Z} \arrow[d, "t-1"] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \oplus \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \arrow[r, "\varepsilon_0"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}\mathbb{Z} \\
 & \langle z_3 \rangle & \langle y_1 \rangle \oplus \langle y_2 \rangle & \langle x \rangle &
\end{tikzcd}$$

No diagrama acima, no qual usamos x, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 e w para representar os geradores dos $\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$-módulos livres que aparecem, os homomorfismos d_0 e ε_0 são calculados diretamente da resolução livre de G e são os seguintes:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 \colon \langle y_3 \rangle &\to \mathbb{Z}\mathbb{Z} \\
\varepsilon_0((a^m b^n, t^k) y_3) &= t^k \\
\varepsilon_0 \colon \langle x \rangle &\to \mathbb{Z}\mathbb{Z} \\
\varepsilon_0((a^m b^n, t^k) x) &= t^k \\
d_0 \colon \langle w \rangle &\to \langle z_1 \rangle \oplus \langle z_2 \rangle \\
d_0(w) &= ((1,1) - (b,1)) z_1 + ((a,1) - (1,1)) z_2 \\
d_0 \colon \langle z_3 \rangle &\to \langle y_1 \rangle \oplus \langle y_2 \rangle \\
d_0(z_3) &= ((1,1) - (b,1)) y_1 + ((a,1) - (1,1)) y_2 \\
d_0 \colon \langle z_1 \rangle \oplus \langle z_2 \rangle &\to \langle y_3 \rangle \\
d_0(z_1) &= ((a,1) - (1,1)) y_3 \\
d_0(z_2) &= ((b,1) - (1,1)) y_3 \\
d_0 \colon \langle y_1 \rangle \oplus \langle y_2 \rangle &\to \langle x \rangle \\
d_0(y_1) &= ((a,1) - (1,1)) x \\
d_0(y_2) &= ((b,1) - (1,1)) x
\end{aligned}$$

Os homomorfismos d_1 devem ser determinados para obtermos a resolução desejada de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$-módulo trivial. Comecemos com

$$d_1 \colon \langle y_3 \rangle \to \langle x \rangle \,.$$

Este homomorfismo deve satisfazer $\varepsilon_0 \circ d_1 = (t-1) \circ \varepsilon_0$. Temos então $\varepsilon_0(d_1(y_3)) = (t-1) \circ (\varepsilon_0(y_3)) \Leftrightarrow \varepsilon_0(d_1(y_3)) = (t-1)$. Podemos tomar então

$$d_1(y_3) = [(1,t) - (1,1)]x.$$

O próximo homomorfismo $d_1 \colon \langle z_1 \rangle \oplus \langle z_2 \rangle \to \langle y_1 \rangle \oplus \langle y_2 \rangle$ é obtido da seguinte maneira: digamos que $d_1(z_1) = Ay_1 + By_2$ e $d_1(z_2) = Cy_1 + Dy_2$, em que A, B, C e D são elementos de $\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$. O diagrama

$$\begin{tikzcd}
\langle z_1 \rangle \oplus \langle z_2 \rangle \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & \langle y_3 \rangle \arrow[d, "d_1"] \\
\langle y_1 \rangle \oplus \langle y_2 \rangle \arrow[r, "d_0"'] & \langle x \rangle
\end{tikzcd}$$

é tal que $d_0 d_1 + d_1 d_0 = 0$. Calculando em z_1, esta equação se torna

$$A((a,1) - (1,1)) + B((b,1) - (1,1)) = (1,t) - (1,1) + (a,1) - (a,t). \tag{3.1}$$

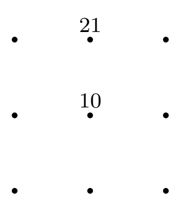
Se escrevermos

$$\begin{aligned}
A &= (1,1) + \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} g_{mn}(a^m b^n, t), \\
B &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} h_{mn}(a^m b^n, t),
\end{aligned}$$

a equação (3.1) se torna

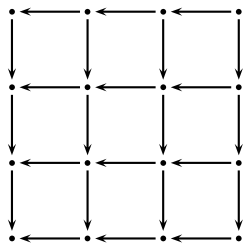
$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left(g_{(m-\alpha)(n-\beta)} - g_{mn} + h_{(m-\gamma)(n-\delta)} - h_{mn} \right) (a^m b^n, t) = (1,t) - (a,t). \tag{3.2}$$

A equação (3.2) é, na realidade, um sistema de equações, com uma equação para cada $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Para resolvê-la, usaremos o seguinte artifício gráfico: em primeiro lugar, consideramos os pontos (m,n) de coordenadas inteiras do plano. No ponto de coordenadas (m,n) escreveremos dois números inteiros, um com o valor de g_{mn} e outro com o valor de h_{mn} (valores que teremos que determinar). Apenas para exemplificar, no desenho abaixo, supondo que o ponto central é o ponto $(0,0)$, temos $g_{00} = 1$, $h_{00} = 0$, $g_{01} = 2$ e $h_{01} = 1$.

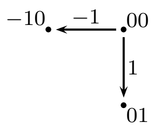


Estes pontos serão os vértices de um grafo orientado em que cada vértice (m,n) é a origem de uma aresta com destino $(m-\alpha, n-\beta)$ e também é a origem de uma aresta com destino $(m-\gamma, n-\delta)$.

Como a matriz $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ tem determinante ± 1, podemos encontrar um caminho entre quaisquer dois vértices do grafo que acabamos de construir (ainda que seja necessário andar no sentido inverso de uma ou mais arestas). Por esta razão, é mais conveniente desenhar o grafo da seguinte maneira:



Neste novo desenho, o vizinho esquerdo do vértice (m, n) é o vértice $(m - \alpha, n - \beta)$, e abaixo do vértice (m, n) está o vértice $(m - \gamma, n - \delta)$. Usando esta representação acima com arestas horizontais e verticais, marcaremos em cada aresta horizontal com origem no vértice (m, n) o valor de $g_{(m-\alpha)(n-\beta)} - g_{mn}$, e marcaremos em cada aresta vertical com origem no vértice (m, n) o valor de $h_{(m-\gamma)(n-\delta)} - h_{mn}$, como no seguinte desenho:



Agora usemos este grafo para resolver a equação (3.2). Observando o lado direito da equação, podemos reescrevê-la assim:

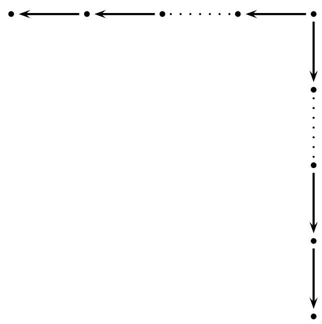
$$g_{(m-\alpha)(n-\beta)} - g_{mn} + h_{(m-\gamma)(n-\delta)} - h_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{se } (m,n) = (0,0), \\ -1, & \text{se } (m,n) = (1,0), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.3}$$

O truque para encontrar uma solução de (3.3) consiste em encontrar um caminho entre os vértices $(0, 0)$ e $(1, 0)$. Para tanto, sejam m_1 e n_1 números inteiros tais que

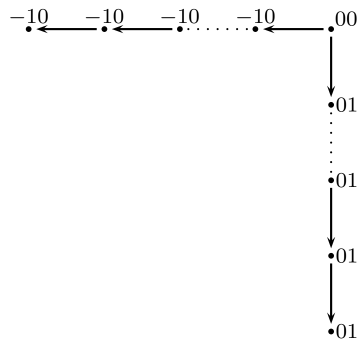
$$\left| \begin{array}{l} -\alpha m_1 - \gamma n_1 = 1 \\ -\beta m_1 - \delta n_1 = 0. \end{array} \right.$$

Assim, partindo do vértice $(0, 0)$, atingimos o vértice $(1, 0)$ percorrendo $|m_1|$ arestas horizontais seguidas de $|n_1|$ arestas verticais (percorremos as arestas em seu sentido contrário caso o valor de m_1 ou n_1 seja negativo).

Vamos supor inicialmente que $m_1 < 0$ e $n_1 > 0$. Considere, no grafo que construimos, as seguintes arestas:



O vértice superior esquerdo é o $(0,0)$ e o vértice inferior direito é o $(1,0)$. Existem $|m_1|$ arestas horizontais e $|n_1|$ verticais neste desenho. As arestas que partem do vértice $(0,0)$ devem somar 1, as arestas que partem do vértice $(1,0)$ devem somar -1, e as arestas que partem de quaisquer outros vértices devem somar zero. Isto pode ser obtido com os seguintes valores de g_{mn} e h_{mn}:



Em todos os vértices que não estão desenhados, temos $g_{mn} = h_{mn} = 0$. Lemos do grafo acima os valores desejados de A e B:

$$A = (1,1) - \sum_{k=0}^{m_1-1} (a^{k\alpha} b^{k\beta}, t),$$
$$B = \sum_{k=0}^{n_1-1} (a^{1+k\gamma} b^{k\delta}, t).$$

Podemos, no caso geral, calcular explicitamente os valores de m_1, n_1, A e B. Os valores de C e D são calculados analogamente, e podemos sintetizar os resultados que obtemos: sejam m_1, n_1, m_2 e n_2 os inteiros dados por

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix} = -\theta^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} -\delta & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Então $d_1(z_1) = Ay_1 + By_2$ e $d_1(z_2) = Cy_1 + Dy_2$, em que

$$A = \begin{cases} (1,1) + \sum_{k=1}^{m_1} (a^{-k\alpha} b^{-k\beta}, t), & \text{se } m_1 > 0, \\ (1,1) - \sum_{k=0}^{-m_1-1} (a^{k\alpha} b^{k\beta}, t), & \text{se } m_1 < 0, \\ (1,1), & \text{se } m_1 = 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$B = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n_1-1}(a^{1+k\gamma}b^{k\delta}, t), & \text{se } n_1 > 0, \\ \displaystyle -\sum_{k=1}^{-n_1}(a^{1-k\gamma}b^{-k\delta}, t), & \text{se } n_1 < 0, \\ 0, & \text{se } n_1 = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$C = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{m_2}(a^{-k\alpha}b^{-k\beta}, t), & \text{se } m_2 > 0, \\ \displaystyle -\sum_{k=0}^{-m_2-1}(a^{k\alpha}b^{k\beta}, t), & \text{se } m_2 < 0, \\ 0, & \text{se } m_2 = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$D = \begin{cases} \displaystyle (1,1) + \sum_{k=0}^{n_2-1}(a^{k\gamma}b^{1+k\delta}, t), & \text{se } n_2 > 0, \\ \displaystyle (1,1) - \sum_{k=1}^{-n_2}(a^{-k\gamma}b^{1-k\delta}, t), & \text{se } n_2 < 0, \\ (1,1), & \text{se } n_2 = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Finalmente, devemos determinar o homomorfismo $d_1\colon \langle w\rangle \to \langle z_3\rangle$. Considere, portanto, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \langle w\rangle \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & \langle z_1\rangle \oplus \langle z_2\rangle \arrow[d, "d_1"] \\ \langle z_3\rangle \arrow[r, "d_0"'] & \langle y_1\rangle \oplus \langle y_2\rangle \end{tikzcd}$$

Sendo $d_1(w) = Ez_3$, com $E \in \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$, temos

$$\begin{gathered} d_0d_1(w) + d_1d_0(w) = 0 \Leftrightarrow \\ Ed_0(z_3) + d_1(((1,1)-(b,1))z_1 + ((a,1)-(1,1))z_2) = 0 \Leftrightarrow \\ E\big(((1,1)-(b,1))y_1 + ((a,1)-(1,1))y_2\big) = ((b,1)-(1,1))(Ay_1+By_2)+ \\ \qquad + ((1,1)-(a,1))(Cy_1+Dy_2) \end{gathered}$$

Logo E deve satisfazer

$$\left| \begin{array}{l} E((1,1)-(b,1)) = ((b,1)-(1,1))A + ((1,1)-(a,1))C \\ E((a,1)-(1,1)) = ((b,1)-(1,1))B + ((1,1)-(a,1))D. \end{array} \right. \tag{3.8}$$

Dadas as expressões para A, B, C e D, uma conjectura para o formato de E é

$$E = -(1,1) + \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} h_{mn}(a^m b^n, t).$$

Com esta conjectura para E, temos

$$E((1,1)-(b,1)) = ((b,1)-(1,1)) + \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} (h_{mn} - h_{(m-\gamma)(n-\delta)})(a^m b^n, t)$$

e

$$E((a,1)-(1,1)) = ((1,1)-(a,1)) + \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} (h_{(m-\alpha)(n-\beta)} - h_{mn})(a^m b^n, t).$$

A determinação de E então se divide em vários casos, dadas as diversas expressões existentes para A, B, C e D. Vamos supor, como caso inicial, que $m_1 < 0$, $n_1 > 0$, $m_2 > 0$ e $n_2 < 0$ (este caso ocorre quando $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ e $\det \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} = 1$). Neste caso, a primeira equação de (3.8) se escreve como

$$((b,1)-(1,1)) + \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} (h_{mn} - h_{(m-\gamma)(n-\delta)})(a^m b^n, t) = ((b,1)-(1,1)) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{-m_1-1} \Big[(a^{k\alpha} b^{k\beta}, t) - (a^{k\alpha} b^{1+k\beta}, t)\Big] + \sum_{k=1}^{m_2} \Big[(a^{-k\alpha} b^{-k\beta}, t) - (a^{1-k\alpha} b^{-k\beta}, t)\Big] \tag{3.9}$$

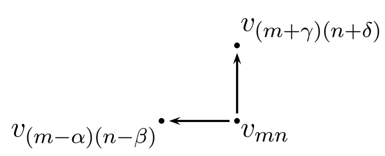
e a segunda se escreve como

$$((1,1)-(a,1)) + \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} (h_{(m-\alpha)(n-\beta)} - h_{mn})(a^m b^n, t) = ((1,1)-(a,1)) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n_1-1} \Big[(a^{1+k\gamma} b^{1+k\delta}, t) - (a^{1+k\gamma} b^{k\delta}, t)\Big] - \sum_{k=1}^{-n_2} \Big[(a^{-k\gamma} b^{1-k\delta}, t) - (a^{1-k\gamma} b^{1-k\delta}, t)\Big] \tag{3.10}$$

O artifício que utilizaremos para resolver o sistema dado pelas equações (3.9) e (3.10) é parecido com o que utilizamos para determinar A, B, C e D anteriormente. Construímos um grafo orientado cujos vértice são os pontos do plano de coordenadas inteiras. Do vértice v_{mn} de coordenadas (m,n) partem duas arestas, uma para o vértice $v_{(m-\alpha)(n-\beta)}$ de coordenadas $(m-\alpha, n-\beta)$ e outra para o vértice $v_{(m+\gamma)(n+\delta)}$ de coordenadas $(m+\gamma, n+\delta)$.

Em cada aresta horizontal com origem em v_{mn}, escreveremos um rótulo com o valor de $h_{(m-\alpha)(n-\beta)} - h_{mn}$, e em cada aresta vertical com destino em v_{mn} escreveremos um rótulo com o valor de $h_{mn} - h_{(m-\gamma)(n-\delta)}$. Deste modo, a nossa tarefa consiste em determinar um valor inteiro h_{mn} para cada vértice v_{mn} de coordenadas (m,n) de modo que os valores predeterminados pelas arestas seja respeitado e quase todos os h_{mn} sejam iguais a zero (isto é, todos os h_{mn} são zero exceto por uma quantidade finita deles).

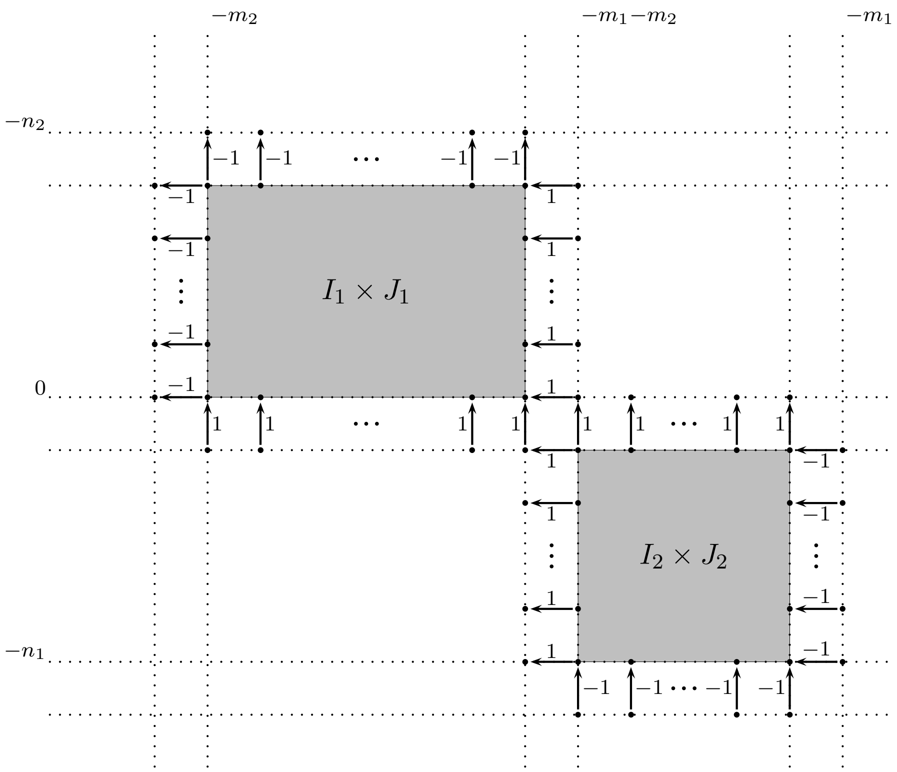
Vamos desenhar este grafo no caso que estamos considerando. É mais conveniente representarmos as arestas horizontal e verticalmente, como na figura a seguir:



Para tanto, basta realizarmos uma transformação linear $T\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tal que

$$T(m,n) = -\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = (-m_1 m - m_2 n, -n_1 m - n_2 n).$$

Desta maneira, observando as equações (3.9) e (3.10), o nosso grafo é o seguinte (no caso $m_1 < 0$, $n_1 > 0$, $m_2 > 0$, $n_2 < 0$):



Na figura acima, as arestas que não estão desenhadas são aquelas que recebem rótulo zero. Os números das retas pontilhadas representam as coordenadas das respectivas retas após a realização da transformação T. E as reticências indicam uma sequência de arestas com o mesmo sentido e com o mesmo rótulo.

Observando o grafo é fácil encontrar os valores h_{mn} que satisfazem todos os valores dos rótulos das arestas. Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} I_1 &= [-m_2, -m_1 - m_2 - 1] \cap \mathbb{Z} \\ J_1 &= [0, -n_2 - 1] \cap \mathbb{Z} \\ I_2 &= [-m_1 - m_2, -m_1 - 1] \cap \mathbb{Z} \\ J_2 &= [-n_1, -1] \cap \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Se $h_{mn} = 1$ para $(m, n) \in I_1 \times J_1$, $h_{mn} = -1$ para $(m, n) \in I_2 \times J_2$ e $h_{mn} = 0$ para os outros valores de (m, n), então as equações (3.9) e (3.10) são satisfeitas. Retornando para as coordenadas originais e notando que a matriz da transformação T^{-1} é $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$, podemos escrever

$$E = -(1,1) + \sum_{(m,n) \in I_1 \times J_1} (a^{\alpha m + \gamma n} b^{\beta m + \delta n}, t) - \sum_{(m,n) \in I_2 \times J_2} (a^{\alpha m + \gamma n} b^{\beta m + \delta n}, t) \tag{3.11}$$

Em todos os outros casos, o elemento E é calculado analogamente e obtemos em cada um deles a expressão (3.11) para E, mudando apenas em cada caso os conjuntos I_1, J_1, I_2 e J_2. Na tabela abaixo exibimos os conjuntos I_1, J_1, I_2, J_2 para os diversos casos possíveis. As quatro primeiras colunas da tabela indicam os sinais de m_1, n_1, m_2, n_2, ou o valor de qualquer uma destas variáveis. O símbolo $\mathbb{Z}$ em uma das quatro primeiras colunas indica que o valor da variável correspondente não importa.

Tabela 3.1: Os conjuntos I_1, J_1, I_2 e J_2

m_1	n_1	m_2	n_2	$I_1,\ J_1,\ I_2,\ J_2$	Observação
$+$	$+$	$+$	$+$	$I_1 = [-m_1 - m_2, -m_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_1 = [-n_2, -n_1 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $I_2 = [-m_2, -m_1 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_2 = [-n_1, -1] \cap \mathbb{Z}$	se $m_1 < m_2$, $n_1 < n_2$
$+$	$+$	$+$	$+$	$I_1 = [-m_1, -m_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_1 = [-n_2, -1] \cap \mathbb{Z}$, $I_2 = [-m_1 - m_2, -m_1 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_2 = [-n_1, -n_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$	se $m_1 > m_2$, $n_1 > n_2$
$-$	$-$	$-$	$-$	$I_1 = [-m_2, -m_1 - m_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_1 = [-n_1, -n_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $I_2 = [-m_1, -m_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_2 = [0, -n_1 - 1] \cap \mathbb{Z}$	se $m_1 > m_2$, $n_1 > n_2$
$-$	$-$	$-$	$-$	$I_1 = [-m_2, -m_1 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_1 = [0, -n_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $I_2 = [-m_1, -m_1 - m_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_2 = [-n_2, -n_1 - 1] \cap \mathbb{Z}$	se $m_1 < m_2$, $n_1 < n_2$
$-$	$+$	$+$	$-$	$I_1 = [-m_2, -m_1 - m_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_1 = [0, -n_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $I_2 = [-m_1 - m_2, -m_1 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_2 = [-n_1, -1] \cap \mathbb{Z}$	
$+$	$-$	$-$	$+$	$I_1 = [-m_1 - m_2, -m_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_1 = [-n_2, -1] \cap \mathbb{Z}$, $I_2 = [-m_1, -m_1 - m_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_2 = [0, -n_1 - 1] \cap \mathbb{Z}$	
$+$	$-$	$+$	$-$	$I_1 = [-m_2, -m_1 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_1 = [0, -n_1 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $I_2 = [-m_1 - m_2, -m_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_2 = [-n_1, -n_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$	se $m_1 < m_2$, $n_1 > n_2$
$+$	$-$	$+$	$-$	$I_1 = [-m_1 - m_2, -m_1 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_1 = [-n_2, -n_1 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $I_2 = [-m_1, -m_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_2 = [0, -n_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$	se $m_1 > m_2$, $n_1 < n_2$
$-$	$+$	$-$	$+$	$I_1 = [-m_1, -m_1 - m_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_1 = [-n_1, -n_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $I_2 = [-m_2, -m_1 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_2 = [-n_2, -1] \cap \mathbb{Z}$	se $m_1 < m_2$, $n_1 > n_2$
$-$	$+$	$-$	$+$	$I_1 = [-m_1, -m_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_1 = [-n_1, -1] \cap \mathbb{Z}$, $I_2 = [-m_2, -m_1 - m_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_2 = [-n_2, -n_1 - 1] \cap \mathbb{Z}$	se $m_1 > m_2$, $n_1 < n_2$
$+$	$+$	$-$	$-$	$I_1 = [-m_1, -m_1 - m_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_1 = [-n_1, -1] \cap \mathbb{Z}$, $I_2 = [-m_1 - m_2, -m_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_2 = [0, -n_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$	

$-$	$-$	$+$	$+$	$I_1 = [-m_1 - m_2, -m_1 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_1 = [0, -n_1 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $I_2 = [-m_2, -m_1 - m_2 - 1] \cap \mathbb{Z}$, $J_2 = [-n_2, -1] \cap \mathbb{Z}$	
0	1	1	$\mathbb{Z}$	$I_1 = \emptyset$, $J_1 = \emptyset$, $I_2 = \{-1\}$, $J_2 = \{-1\}$	
0	-1	-1	$\mathbb{Z}$	$I_1 = \emptyset$, $J_1 = \emptyset$, $I_2 = \{0\}$, $J_2 = \{0\}$	
0	1	-1	$\mathbb{Z}$	$I_1 = \{0\}$, $J_1 = \{-1\}$, $I_2 = \emptyset$, $J_2 = \emptyset$	
0	-1	1	$\mathbb{Z}$	$I_1 = \{-1\}$, $J_1 = \{0\}$, $I_2 = \emptyset$, $J_2 = \emptyset$	
1	0	$\mathbb{Z}$	1	$I_1 = \{-m_2 - 1\}$, $J_1 = \{-1\}$, $I_2 = \emptyset$, $J_2 = \emptyset$	
-1	0	$\mathbb{Z}$	-1	$I_1 = \{-m_2\}$, $J_1 = \{0\}$, $I_2 = \emptyset$, $J_2 = \emptyset$	
1	0	$\mathbb{Z}$	-1	$I_1 = \emptyset$, $J_1 = \emptyset$, $I_2 = \{-m_2 - 1\}$, $J_2 = \{0\}$	
-1	0	$\mathbb{Z}$	1	$I_1 = \emptyset$, $J_1 = \emptyset$, $I_2 = \{-m_2\}$, $J_2 = \{-1\}$	
1	$\mathbb{Z}$	0	1	$I_1 = \{-1\}$, $J_1 = \{-1\}$, $I_2 = \emptyset$, $J_2 = \emptyset$	
-1	$\mathbb{Z}$	0	-1	$I_1 = \{0\}$, $J_1 = \{0\}$, $I_2 = \emptyset$, $J_2 = \emptyset$	
1	$\mathbb{Z}$	0	-1	$I_1 = \emptyset$, $J_1 = \emptyset$, $I_2 = \{-1\}$, $J_2 = \{0\}$	

-1	$\mathbb{Z}$	0	1	$I_1 = \emptyset$, $J_1 = \emptyset$, $I_2 = \{0\}$, $J_2 = \{-1\}$	
$\mathbb{Z}$	1	1	0	$I_1 = \emptyset$, $J_1 = \emptyset$, $I_2 = \{-m_1 - 1\}$, $J_2 = \{-1\}$	
$\mathbb{Z}$	-1	-1	0	$I_1 = \emptyset$, $J_1 = \emptyset$, $I_2 = \{-m_1\}$, $J_2 = \{0\}$	
$\mathbb{Z}$	1	-1	0	$I_1 = \{-m_1\}$, $J_1 = \{-1\}$, $I_2 = \emptyset$, $J_2 = \emptyset$	
$\mathbb{Z}$	-1	1	0	$I_1 = \{-m_1 - 1\}$, $J_1 = \{0\}$, $I_2 = \emptyset$, $J_2 = \emptyset$	

Apesar de haver muitos casos distintos, é interessante notar que, em todos os casos, vale

$$|(I_1 \times J_1)| - |(I_2 \times J_2)| = \det \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} = \pm 1.$$

Portanto, se denotarmos por $\varepsilon\colon \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \to \mathbb{Z}$ o homomorfismo de aumento, temos

$$\varepsilon(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } \det \theta = 1, \\ -2, & \text{se } \det \theta = -1. \end{cases} \tag{3.12}$$

Isso quer dizer que o homomorfismo

$$d_1^*\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G\rtimes\mathbb{Z}]}(\langle z_3 \rangle, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G\rtimes\mathbb{Z}]}(\langle w \rangle, \mathbb{Z})$$

ou é o homomorfismo nulo, ou é a multiplicação por -2. Este fato será útil no cálculo dos grupos de cohomologia $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

Os homomorfismo d_k com $k \geq 2$ do Lema 1.12 são todos nulos. Logo, aplicando agora o Teorema 1.13, podemos finalmente obter uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$-módulo trivial. Provamos então o seguinte:

Teorema 3.1 *Sejam*

$$\begin{aligned} P_0 &= \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \\ P_1 &= \langle y_1 \rangle \oplus \langle y_2 \rangle \oplus \langle y_3 \rangle \cong \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \oplus \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \oplus \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \\ P_2 &= \langle z_1 \rangle \oplus \langle z_2 \rangle \oplus \langle z_3 \rangle \cong \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \oplus \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \oplus \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \\ P_3 &= \langle w \rangle \cong \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]. \end{aligned}$$

A sequência a seguir é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$-módulo trivial:

$$0 \longrightarrow P_3 \xrightarrow{\varphi_3} P_2 \xrightarrow{\varphi_2} P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \tag{3.13}$$

na qual os homomorfismos de $\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$-módulos ε_0, φ_1, φ_2 e φ_3 são definidos por

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0(x) = 1\\
\\
&\varphi_1(y_1) = [(a,1) - (1,1)]x\\
&\varphi_1(y_2) = [(b,1) - (1,1)]x\\
&\varphi_1(y_3) = [(1,t) - (1,1)]x\\
\\
&\varphi_2(z_1) = Ay_1 + By_2 + [(a,1) - (1,1)]y_3\\
&\varphi_2(z_2) = Cy_1 + Dy_2 + [(b,1) - (1,1)]y_3\\
&\varphi_2(z_3) = [(1,1) - (b,1)]y_1 + [(a,1) - (1,1)]y_2\\
\\
&\varphi_3(w) = [(1,1) - (b,1)]z_1 + [(a,1) - (1,1)]z_2 + Ez_3.
\end{aligned}$$

Os elementos A, B, C, D e $E \in \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$ são dados pelas equações (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) e (3.11).

3.3 Os grupos de cohomologia $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$ e $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$

De posse da resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$-módulo trivial, podemos calcular os grupos de cohomologia $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Considere o complexo de cadeia

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G\rtimes\mathbb{Z}]}(P_0,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi_1^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G\rtimes\mathbb{Z}]}(P_1,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi_2^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G\rtimes\mathbb{Z}]}(P_2,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi_3^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G\rtimes\mathbb{Z}]}(P_3,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi_1^*"] & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi_2^*"] & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi_3^*"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

No diagrama acima, os isomorfismos entre as linhas são obtidos observando que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G\rtimes\mathbb{Z}]}(\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}], \mathbb{Z}) &\to \mathbb{Z}\\
f &\mapsto f(1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G\rtimes\mathbb{Z}]}(M \oplus N, \mathbb{Z}) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G\rtimes\mathbb{Z}]}(M, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G\rtimes\mathbb{Z}]}(N, \mathbb{Z})\\
f &\mapsto (f \circ i_{M\to M\oplus N}, f \circ i_{N\to M\oplus N})
\end{aligned}$$

são isomorfismos.

Seja $u_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G\rtimes\mathbb{Z}]}(P_0, \mathbb{Z})$. Temos

$$\begin{aligned}
(\varphi_1^*(u_0))(y_1) &= u_0(\varphi_1(y_1)) = (a,1)u_0(x) - u_0(x) = 0,\\
(\varphi_1^*(u_0))(y_2) &= u_0(\varphi_1(y_2)) = (b,1)u_0(x) - u_0(x) = 0,\\
(\varphi_1^*(u_0))(y_3) &= u_0(\varphi_1(y_3)) = (1,t)u_0(x) - u_0(x) = 0.
\end{aligned}$$

Logo $\varphi_1^* = 0$ e $H^0(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \ker(\varphi_1^*) \cong \mathbb{Z}$, com gerador $[x^*]$.

Seja $u_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G\rtimes\mathbb{Z}]}(P_1, \mathbb{Z})$. Temos

$$\begin{aligned}
(\varphi_2^*(u_1))(z_1) &= u_1(\varphi_2(z_1)) = Au_1(y_1) + Bu_1(y_2) + (a,1)u_1(y_3) - u_1(y_3) \\
&= \varepsilon(A)u_1(y_1) + \varepsilon(B)u_1(y_2) \\
(\varphi_2^*(u_1))(z_2) &= u_1(\varphi_2(z_2)) = Cu_1(y_1) + Du_1(y_2) + (b,1)u_1(y_3) - u_1(y_3) \\
&= \varepsilon(C)u_1(y_1) + \varepsilon(D)u_1(y_2) \\
(\varphi_2^*(u_1))(z_3) &= u_1(\varphi_2(z_3)) = u_1(y_1) - (b,1)u_1(y_1) + (a,1)u_1(y_2) - u_1(y_2) = 0,
\end{aligned}$$

em que $\varepsilon\colon \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}] \to \mathbb{Z}$ é o homomorfismo de aumento. Observamos que $\varepsilon(A) = 1 + m_1$, independentemente do sinal de m_1. Da mesma forma, $\varepsilon(B) = n_1$, $\varepsilon(C) = m_2$ e $\varepsilon(D) = 1 + n_2$. Assim, podemos descrever $\varphi_2^*\colon \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ pela matriz

$$[\varphi_2^*] = \begin{bmatrix} 1+m_1 & n_1 & 0 \\ m_2 & 1+n_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

relativa às bases duais de $\{y_1, y_2, y_3\}$ e de $\{z_1, z_2, z_3\}$. Assim, $H^1(G\rtimes\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \dfrac{\ker\varphi_2^*}{\operatorname{im}\varphi_1^*} \cong \ker\varphi_2^* \cong (\mathbb{Z})^{3-\mathrm{posto}([\varphi_2^*])}$.

Seja $u_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G\rtimes\mathbb{Z}]}(P_2, \mathbb{Z})$. Por causa da observação feita em (3.12), temos

$$(\varphi_3^*(u_2))(w) = \varepsilon(E)u_2(z_3) = \left(-1 + \det\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}\right) u_2(z_3),$$

de onde podemos escrever que a matriz de φ_3^* nas bases duais de $\{z_1, z_2, z_3\}$ e $\{w\}$ é

$$[\varphi_3^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(-1 + \det\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Teorema 3.2 *Seja $G \rtimes \mathbb{Z} = \{(a^m b^n, t^k) \ : \ m,n,k \in \mathbb{Z}\}$ o produto semi-direto entre $G = \langle a, b \mid ab = ba\rangle \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} = \langle t\rangle$, no qual a ação de $\mathbb{Z}$ sobre G é definida por $t\cdot a = a^\alpha b^\beta$, $t \cdot b = a^\gamma b^\delta$, com $\theta = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$. Temos*

$$\begin{aligned}
&H^0(G\rtimes\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \\
&H^1(G\rtimes\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z})^{3-\mathrm{posto}(\theta - I)}, \\
&H^2(G\rtimes\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & \textit{se } \mathrm{posto}(\theta - I) = 0, \\ \mathbb{Z}_{\mathrm{mdc}(\beta,\gamma)}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & \textit{se } \mathrm{posto}(\theta - I) = 1 \ \textit{e} \det\theta = 1, \\ \mathbb{Z}_{\mathrm{mdc}(\beta,\gamma,2)}\oplus\mathbb{Z}, & \textit{se } \mathrm{posto}(\theta - I) = 1 \ \textit{e} \det\theta = -1, \\ \mathbb{Z}_{c_1}\oplus\mathbb{Z}_{c_2}\oplus\mathbb{Z}, & \textit{se } \mathrm{posto}(\theta - I) = 2 \ \textit{e} \det\theta = 1, \\ \mathbb{Z}_{c_1}\oplus\mathbb{Z}_{c_2}, & \textit{se } \mathrm{posto}(\theta - I) = 2 \ \textit{e} \det\theta = -1, \end{cases} \\
&H^3(G\rtimes\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \textit{se } \det\theta = 1, \\ \mathbb{Z}_2, & \textit{se } \det\theta = -1, \end{cases} \\
&H^n(G\rtimes\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong 0, \ \textit{se } n \geq 4.
\end{aligned}$$

No cálculo de $H^2(G\rtimes\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, os inteiros positivos c_1 e c_2 satisfazem $c_1 \mid c_2$, $c_1 c_2 = |\det(\theta - I)|$.

Demonstração: Não resta nada a mostrar a respeito do cálculo de $H^0(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Quanto a $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, basta observar que posto$(\theta - I) =$ posto$(I - \theta^{-1})$, e que

$$I - \theta^{-1} = \begin{bmatrix} 1+m_1 & m_2 \\ n_1 & 1+n_2 \end{bmatrix},$$

logo posto$(I - \theta^{-1}) =$ posto$[\varphi_2^*]$. Podemos ainda explicitar os geradores de $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ da seguinte maneira: se a matriz $[\varphi_2^*]$ tem posto zero, então os geradores de $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ são $[y_1^*]$, $[y_2^*]$ e $[y_3^*]$. Se o posto da matriz $[\varphi_2^*]$ é igual a 2, então o gerador de $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ é $[y_3^*]$. Se o posto de $[\varphi_2^*]$ é igual a 1, então um dos geradores de $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ é $[y_3^*]$. O outro gerador é obtido da seguinte forma: se $(1 + m_1) = n_1 = 0$, então tomamos

$$\left[-\frac{1+n_2}{\mathrm{mdc}(m_2, 1+n_2)} y_1^* + \frac{m_2}{\mathrm{mdc}(m_2, 1+n_2)} y_2^*\right]$$

como o segundo gerador de $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Caso contrário, se $1 + m_1 \neq 0$ ou $n_1 \neq 0$, então tomamos

$$\left[-\frac{n_1}{\mathrm{mdc}(1+m_1, n_1)} y_1^* + \frac{1+m_1}{\mathrm{mdc}(1+m_1, n_1)} y_2^*\right]$$

como o segundo gerador de $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

Passemos ao cálculo de $H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. A partir das equações (3.14) e (3.15), dividimos o cálculo de $H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \dfrac{\ker \varphi_3^*}{\mathrm{im}\, \varphi_2^*}$ em dois casos. Se $\det \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} = 1$, então $z_3^* \in \ker \varphi_3^*$ e

$$H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \frac{\langle z_1^* \rangle \oplus \langle z_2^* \rangle}{\mathrm{im}\, \varphi_2^*} \oplus \mathbb{Z}.$$

Por outro lado, se $\det \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} = -1$, então

$$H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \frac{\langle z_1^* \rangle \oplus \langle z_2^* \rangle}{\mathrm{im}\, \varphi_2^*}.$$

Em ambos os casos, a estrutura do grupo $\dfrac{\langle z_1^* \rangle \oplus \langle z_2^* \rangle}{\mathrm{im}\, \varphi_2^*}$ pode ser determinada calculando a forma normal de Smith da matriz

$$\begin{bmatrix} 1+m_1 & m_2 \\ n_1 & 1+n_2 \end{bmatrix} = I - \theta^{-1}.$$

Se posto$(I - \theta^{-1}) = 0$, então $\dfrac{\langle z_1^* \rangle \oplus \langle z_2^* \rangle}{\mathrm{im}\, \varphi_2^*} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, com geradores $[z_1^*]$ e $[z_2^*]$. Se posto$(I - \theta^{-1}) = 1$, então $I - \theta^{-1}$ é uma matriz não nula da forma

$$\begin{bmatrix} r & (p/q)r \\ s & (p/q)s \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} (p/q)r & r \\ (p/q)s & s \end{bmatrix},$$

com r, s, p e q inteiros tais que $q \neq 0$ e $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$. Analisemos o primeiro caso, já que os dois são análogos. Podemos escrever $r = qr'$ e $s = qs'$ para certos inteiros r', s', de modo que

$$I - \theta^{-1} = \begin{bmatrix} qr' & pr' \\ qs' & ps' \end{bmatrix}.$$

Existem inteiros k e ℓ tais que $pk + q\ell = 1$. Observando que $\begin{bmatrix} \ell & -p \\ k & q \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$, temos

$$(I - \theta^{-1}) \begin{bmatrix} \ell & -p \\ k & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r' & 0 \\ s' & 0 \end{bmatrix},$$

de onde concluimos que a forma normal de Smith de $(I - \theta^{-1})$ é $\begin{bmatrix} \mathrm{mdc}(r', s') & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, o que implica imediatamente que

$$\frac{\langle z_1^* \rangle \oplus \langle z_2^* \rangle}{\operatorname{im} \varphi_2^*} \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{mdc}(r',s')} \oplus \mathbb{Z}.$$

Se $p \neq 0$, então $\mathrm{mdc}(r', s') = \mathrm{mdc}(pr', qs') = \mathrm{mdc}(m_2, n_1) = \mathrm{mdc}(\beta, \gamma)$, e neste caso temos então

$$\frac{\langle z_1^* \rangle \oplus \langle z_2^* \rangle}{\operatorname{im} \varphi_2^*} \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{mdc}(\beta,\gamma)} \oplus \mathbb{Z}.$$

Vejamos agora o que ocorre quando $p = 0$. Se $p = 0$ e $\det \theta = 1$, então $\alpha = \delta = 1$ e $\gamma = 0$, logo $r' = 0$ e $\mathrm{mdc}(r', s') = \mathrm{mdc}(0, \beta) = \beta = \mathrm{mdc}(\beta, \gamma)$, e novamente temos

$$\frac{\langle z_1^* \rangle \oplus \langle z_2^* \rangle}{\operatorname{im} \varphi_2^*} \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{mdc}(\beta,\gamma)} \oplus \mathbb{Z}.$$

Se, no entanto, $p = 0$ e $\det \theta = -1$, temos $\alpha = -1$, $\delta = 1$, $\gamma = 0$ e $r' = 2$ (pois neste caso podemos tomar $q = 1$). Sendo assim, $\mathrm{mdc}(r', s') = \mathrm{mdc}(\beta, 2) = \mathrm{mdc}(\beta, \gamma, 2)$.

Fazemos ainda mais uma observação: se $\mathrm{posto}(I - \theta^{-1}) = 1$ e $\det \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} = -1$, então $\mathrm{mdc}(r', s') \in \{1, 2\}$. De fato, neste caso temos

$$\begin{bmatrix} qr' & pr' \\ qs' & ps' \end{bmatrix} = I - \theta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + m_1 & m_2 \\ n_1 & 1 + n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \delta & -\gamma \\ -\beta & 1 + \alpha \end{bmatrix},$$

e $\det(I - \theta^{-1}) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \delta = 0 \Leftrightarrow (ps' - 1) + (qr' - 1) = 0 \Leftrightarrow ps' + qr' = 2 \Rightarrow \mathrm{mdc}(r', s') \mid 2$. Assim, quando $\det \theta = -1$ e $\mathrm{posto}(\theta - I) = 1$, sempre podemos escrever $\mathrm{mdc}(r', s') = \mathrm{mdc}(\beta, \gamma, 2)$.

Finalmente, se $\mathrm{posto}(I - \theta^{-1}) = 2$, a forma normal de Smith de $(I - \theta^{-1})$ é uma matriz

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix},$$

com $c_1, c_2 > 0$, $c_1 \mid c_2$ e $c_1 c_2 = |\det(I - \theta^{-1})| = |\det(\theta - I)|$.

O cálculo de $H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ é mais simples. Observando a equação (3.15), temos

$$H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } \det \theta = 1, \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } \det \theta = -1, \end{cases}$$

e um gerador de $H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ é $[w^*]$. Ainda temos $H^n(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$ para $n \geq 4$.

■

Os cálculos dos grupos $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$ e $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$ para p um primo ímpar são simples com o que já fizemos.

Teorema 3.3 *Seja* $G \rtimes \mathbb{Z} = \{(a^m b^n, t^k) : m, n, k \in \mathbb{Z}\}$ *o produto semi-direto entre* $G = \langle a, b \mid ab = ba\rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *e* $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$*, no qual a ação de* $\mathbb{Z}$ *sobre* G *é definida por* $t \cdot a = a^\alpha b^\beta$*,* $t \cdot b = a^\gamma b^\delta$*, com* $\theta = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$*. Temos*

$$\begin{aligned}
&H^0(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2,\\
&H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{3-\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}_2}(\theta - I)},\\
&H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{3-\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}_2}(\theta - I)},\\
&H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2,\\
&H^n(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \cong 0, \ \textit{se } n \geq 4.
\end{aligned}$$

Demonstração: Não há o que demonstrar para o cálculo de $H^0(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$, $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$ e $H^n(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$ para $n \geq 4$. Observando que, com coeficientes $\mathbb{Z}_2$, $\varphi_3^* = 0$, temos $H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Para o cálculo de $H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$, notamos que θ, quando vista mód 2, é uma das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se, para cada uma destas matrizes, escrevermos a matriz $[\varphi_2^*]$ mód 2 correspondente, obtemos, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e a partir destas matrizes o cálculo de $H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$ é imediato.

■

Teorema 3.4 *Seja* $G \rtimes \mathbb{Z} = \{(a^m b^n, t^k) : m, n, k \in \mathbb{Z}\}$ *o produto semi-direto entre* $G = \langle a, b \mid ab = ba\rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *e* $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$*, no qual a ação de* $\mathbb{Z}$ *sobre* G *é definida por* $t \cdot a = a^\alpha b^\beta$*,* $t \cdot b = a^\gamma b^\delta$*, com* $\theta = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$*. Temos, para um primo ímpar* p *e para o* $\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$*-módulo trivial* $\mathbb{Z}_p$*,*

$$\begin{aligned}
&H^0(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p,\\
&H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) \cong (\mathbb{Z}_p)^{3-\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}_p}(\theta - I)},\\
&H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) \cong \begin{cases} (\mathbb{Z}_p)^{3-\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}_p}(\theta - I)}, & \textit{se } \det\theta = 1,\\ (\mathbb{Z}_p)^{2-\mathrm{posto}_{\mathbb{Z}_p}(\theta - I)}, & \textit{se } \det\theta = -1, \end{cases}\\
&H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & \textit{se } \det\theta = 1,\\ 0, & \textit{se } \det\theta = -1, \end{cases}\\
&H^n(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) \cong 0, \ \textit{se } n \geq 4.
\end{aligned}$$

Demonstração: Não há o que demonstrar para o cálculo de $H^0(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$, $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$ e $H^n(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$ para $n \geq 4$. Observando que, com coeficientes $\mathbb{Z}_p$, $\varphi_3^* = 0$ se $\det\theta = 1$ e é uma bijeção se $\det\theta = -1$, temos

$$H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & \text{se } \det\theta = 1,\\ 0, & \text{se } \det\theta = -1. \end{cases}$$

Para o cálculo de $H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$, basta notar que $\dim_{\mathbb{Z}_p} \operatorname{im}(\varphi_2^*) = 3 - \operatorname{posto}_{\mathbb{Z}_p}(\theta - I)$ e a observação que fizemos sobre φ_3^*.

■

3.4 Homotopia de contração

A fim de calcularmos o produto cup em $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ e $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$, precisamos de uma aproximação da diagonal $\Delta\colon P \to P \otimes P$, a qual pode ser obtida, segundo a Proposição 1.17, se pudermos calcular uma homotopia de contração para a resolução livre (3.13). Na verdade, de forma análoga a uma observação que já fizemos no Capítulo 2, veremos que não é necessário obter completamente a homotopia de contração para (3.13), pelo menos para calcular as componentes de Δ necessárias para a obtenção do produto cup.

Iniciemos calculando os homomorfismos s_{-1} e s_0 da homotopia de contração. Dada a resolução (3.13), existem homomorfimos de grupos abelianos s_n, para $n \geq -1$ inteiro, com

$$\begin{aligned} s_{-1}\colon \mathbb{Z} &\to P_0 \\ s_n\colon P_n &\to P_{n+1} \quad \text{se } 0 \leq n \leq 2, \end{aligned}$$

tais que $\varepsilon_0 s_{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, $\varphi_1 s_0 + s_{-1}\varepsilon_0 = \mathrm{id}_{P_0}$, $\varphi_2 s_1 + s_0\varphi_1 = \mathrm{id}_{P_1}$, $\varphi_3 s_2 + s_1\varphi_2 = \mathrm{id}_{P_2}$ e $s_2\varphi_3 = \mathrm{id}_{P_3}$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[dl, "0"'] & P_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[dl, "s_2"'] & P_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dl, "s_1"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon_0"] \arrow[dl, "s_0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{-1}"'] & 0 \arrow[dl, "0"'] \\ 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "\varphi_3"'] & P_2 \arrow[r, "\varphi_2"'] & P_1 \arrow[r, "\varphi_1"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon_0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Temos $\varepsilon_0(s_{-1}(1)) = 1$ se tomarmos $s_{-1}(1) = x$. Quanto a s_0, podemos defini-lo por

$$s_0((a^m b^n, t^k)x) = \frac{\partial(a^m, 1)}{\partial(a, 1)} y_1 + (a^m, 1)\frac{\partial(b^n, 1)}{\partial(b, 1)} y_2 + (a^m b^n, 1)\frac{\partial(1, t^k)}{\partial(1, y)} y_3,$$

em que as derivadas parciais são as derivadas de Fox, e é fácil verificar que $\varphi_1 s_0 + s_{-1}\varepsilon_0 = \mathrm{id}_{P_0}$ dado que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(a^m, 1)}{\partial(a, 1)}((a, 1) - (1, 1)) = (a^m, 1) - (1, 1), \\ &\frac{\partial(b^n, 1)}{\partial(b, 1)}((b, 1) - (1, 1)) = (b^n, 1) - (1, 1), \\ &\frac{\partial(1, t^k)}{\partial(1, t)}((1, t) - (1, 1)) = (1, t^k) - (1, 1). \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} &\varphi_1(s_0((a^m b^n, t^k)x)) + s_{-1}(\varepsilon_0((a^m b^n, t^k)x)) = \\ &= \varphi_1\left(\frac{\partial(a^m, 1)}{\partial(a, 1)} y_1 + (a^m, 1)\frac{\partial(b^n, 1)}{\partial(b, 1)} y_2 + (a^m b^n, 1)\frac{\partial(1, t^k)}{\partial(1, t)} y_3\right) + x = \\ &= \Big((a^m, 1) - (1, 1) + (a^m, 1)((b^n, 1) - (1, 1)) + (a^m b^n, 1)((1, t^k) - (1, 1)) + (1, 1)\Big)\, x = \\ &= (a^m b^n, t^k)x. \end{aligned}$$

Quanto aos homomorfismos s_1 e s_2, não precisaremos determiná-los em todos os elementos dos grupos abelianos P_1 e P_2 para obter o produto cup em $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ (na verdade, não será necessário descobrirmos como calcular s_2 em nenhum elemento). Vejamos como. Com os homomorfimos s_0 e s_{-1}, já somos capazes de escrever Δ_0 e Δ_1:

$$\begin{aligned}
&\Delta_0 \colon P_0 \to P_0 \otimes P_0\\
&\qquad \Delta_0(x) = s_{-1}\varepsilon(x) \otimes s_{-1}\varepsilon(x) = x \otimes x\\
&\Delta_1 \colon P_1 \to (P_1 \otimes P_0) \oplus (P_0 \otimes P_1)\\
&\qquad \Delta_1(y_1) = \tilde{s}_0\Delta_0\varphi_1(y_1) = \tilde{s}_0\Delta_0((a,1) - (1,1)x) = \tilde{s}_0((a,1)x \otimes (a,1)x) - \tilde{s}_0(x \otimes x)\\
&\qquad\qquad = s_0((a,1)x) \otimes (a,1)x + s_{-1}\varepsilon((a,1)x) \otimes s_0((a,1)x) - s_0(x) \otimes x - s_{-1}\varepsilon(x) \otimes s_0(x)\\
&\qquad\qquad = y_1 \otimes (a,1)x + x \otimes y_1\\
&\qquad \Delta_1(y_2) = \tilde{s}_0\Delta_0\varphi_1(y_2) = y_2 \otimes (b,1)x + x \otimes y_2\\
&\qquad \Delta_1(y_3) = \tilde{s}_0\Delta_0\varphi_1(y_3) = y_3 \otimes (1,t)x + x \otimes y_3
\end{aligned}$$

Para o cálculo de $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \otimes H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile} H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z})$, só necessitamos da componente de $\Delta_2 \colon P_2 \to (P \otimes P)_2$ que pertence a $P_1 \otimes P_1$. Analogamente, para o cálculo de $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \otimes H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile} H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z})$ só é necessário conhecer a componente de $\Delta_3 \colon P_3 \to (P \otimes P)_3$ que pertence a $P_1 \otimes P_2$. Começando a análise com Δ_2, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_2(z_1) &= \tilde{s}_1\Delta_1\varphi_2(z_1) = \tilde{s}_1\big(A\Delta_1(y_1) + B\Delta_1(y_2) + [(a,1) - (1,1)]\Delta_1(y_3)\big)\\
&= \tilde{s}_1\big(A[y_1 \otimes (a,1)x + x \otimes y_1] + B[y_2 \otimes (b,1)x + x \otimes y_2] +\\
&\qquad + (a,1)y_3 \otimes (a,t)x + (a,1)x \otimes (a,1)y_3 - y_3 \otimes (1,t)x - x \otimes y_3\big)\\
\Delta_2(z_2) &= \tilde{s}_1\Delta_1\varphi_2(z_2) = \tilde{s}_1\big(C\Delta_1(y_1) + D\Delta_1(y_2) + [(b,1) - (1,1)]\Delta_1(y_3)\big)\\
&= \tilde{s}_1\big(C[y_1 \otimes (a,1)x + x \otimes y_1] + D[y_2 \otimes (b,1)x + x \otimes y_2] +\\
&\qquad + (b,1)y_3 \otimes (b,t)x + (b,1)x \otimes (b,1)y_3 - y_3 \otimes (1,t)x - x \otimes y_3\big)\\
\Delta_2(z_3) &= \tilde{s}_1\Delta_1\varphi_2(z_3) = \tilde{s}_1\big(\Delta_1(y_1) - (b,1)\Delta_1(y_1) + (a,1)\Delta_1(y_2) - \Delta_1(y_2)\big)\\
&= s_1(y_1) \otimes (a,1)x + x \otimes s_1(y_1) - s_1((b,1)y_1) \otimes (ab,1)x - s_0((b,1)x) \otimes (b,1)y_1\\
&\quad - x \otimes s_1((b,1)y_1) + s_1((a,1)y_2) \otimes (ab,1)x + s_0((a,1)x) \otimes (a,1)y_2\\
&\quad + x \otimes s_1((a,1)y_2) - s_1(y_2) \otimes (b,1)x - x \otimes s_1(y_2)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Observando as expressões de A, B, C e D obtidas anteriormente e a definição de $\tilde{s}_1$, o homomorfismo Δ_2 será determinado completamente se pudermos calcular s_1 nos elementos da seguinte forma (lembrando que já temos s_0):

$$\begin{array}{l}
y_3\\
(a,1)y_3\\
(b,1)y_3\\
(a^m b^n, 1)y_1\\
(a^m b^n, 1)y_2\\
(a^m b^n, t)y_1\\
(a^m b^n, t)y_2
\end{array} \tag{3.17}$$

Para calcular apenas $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \otimes H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile} H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z})$, precisamos de ainda menos: sendo $\pi_{ij} \colon (P \otimes P)_{i+j} \to P_i \otimes P_j$ a projeção e $\Delta_{ij} = \pi_{ij} \circ \Delta_{i+j} : P_{i+j} \to P_i \otimes P_j$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}(z_1) &= \pi_{11}(\Delta_2(z_1)) = \pi_{11} \circ \tilde{s}_1(A(x \otimes y_1) + B(x \otimes y_2) + (a,1)x \otimes (a,1)y_3 - x \otimes y_3)\\
\Delta_{11}(z_2) &= \pi_{11}(\Delta_2(z_2)) = \pi_{11} \circ \tilde{s}_1(C(x \otimes y_1) + D(x \otimes y_2) + (b,1)x \otimes (b,1)y_3 - x \otimes y_3)\\
\Delta_{11}(z_3) &= \pi_{11}(\Delta_2(z_3)) = -s_0((b,1)x) \otimes (b,1)y_1 + s_0((a,1)x) \otimes (a,1)y_2,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

e estes cálculos dependem somente do conhecimento de s_0, já calculado. De fato, sendo $g, g' \in G \rtimes \mathbb{Z}$ e $i \in \{1,2,3\}$, o homomorfismo $\tilde{s}_1$ é definido por

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1(gx \otimes g'y_i) &= \underbrace{s_0(gx) \otimes g'y_i}_{\in P_1 \otimes P_1} + \underbrace{x \otimes s_1(g'y_i)}_{\in P_0 \otimes P_2}, \\ \tilde{s}_1(gy_i \otimes g'x) &= s_1(gy_i) \otimes g'x \in P_2 \otimes P_0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Para o cálculo de $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \otimes H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \overset{\smile}{\to} H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z})$, precisamos de $\Delta_{12} = \pi_{12} \circ \Delta_3$. Temos

$$\begin{aligned} \Delta_3(w) &= \tilde{s}_2 \Delta_2 \varphi_3(w) = \tilde{s}_2 \Delta_2 \big([(1,1) - (b,1)] z_1 + [(a,1) - (1,1)] z_2 + E z_3 \big) \\ &= \tilde{s}_2 \big([(1,1) - (b,1)] \Delta_2(z_1) + [(a,1) - (1,1)] \Delta_2(z_2) + E \Delta_2(z_3) \big) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Uma parcela pertencente a $P_1 \otimes P_2$ em $\Delta_3(w)$ surge do cálculo de $\tilde{s}_2$ em um elemento de $P_0 \otimes P_2$. De fato, sendo $g, g' \in G \rtimes \mathbb{Z}$ e $i, j \in \{1,2,3\}$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{s}_2(gx \otimes g'z_i) &= \underbrace{s_0(gx) \otimes g'z_i}_{\in P_1 \otimes P_2} + \underbrace{x \otimes s_2(g'x)}_{\in P_0 \otimes P_3}, \\ \tilde{s}_2(gy_i \otimes g'y_j) &= s_1(gy_i) \otimes g'y_j \in P_2 \otimes P_1, \\ \tilde{s}_2(gz_i \otimes g'x) &= s_2(gz_i) \otimes g'x \in P_3 \otimes P_0. \end{aligned}$$

Logo $\Delta_{12}(w) = \pi_{12} \circ \Delta_3(w) = \pi_{12} \circ \tilde{s}_2 \circ (\pi_{02} \circ \Delta_2) \circ \varphi_3(w)$. Por sua vez, o cálculo de $\Delta_{02} = \pi_{02} \circ \Delta_2$ pode ser feito, observando a primeira equação de (3.19), se formos capazes de calcular o homomorfismo s_1 nos mesmos elementos da lista (3.17). Deste modo, procedemos agora ao cálculo do homomorfismo s_1 nos elementos da lista (3.17). Como última observação antes de iniciarmos de fato os cálculos, notamos que, se M é um $\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$-módulo, N é um $\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$-módulo trivial, $g \in \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$, $m \in M$, e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]}(M, N)$, então

$$f(gm) = g \cdot f(m) = \varepsilon(g) \cdot f(m). \tag{3.21}$$

Mais adiante usaremos este fato simples para simplificar alguns cálculos. Na verdade, já usamos este fato para calcular os grupos $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ anteriormente.

Iniciamos com $s_1(y_3)$. Temos $\varphi_2(s_1(y_3)) + s_0(\varphi_1(y_3)) = y_3 \Leftrightarrow \varphi_2(s_1(y_3)) + s_0((1,t)x) - s_0(x) = y_3 \Leftrightarrow \varphi_2(s_1(y_3)) + y_3 - 0 = y_3 \Leftrightarrow \varphi_2(s_1(y_3)) = 0$. Logo podemos tomar $s_1(y_3) = 0$.

Em seguida calculamos $s_1((a,1)y_3)$. Temos

$$\begin{gathered} \varphi_2(s_1((a,1)y_3)) + s_0(\varphi_1((a,1)y_3) = (a,1)y_3 \Leftrightarrow \\ \varphi_2(s_1((a,1)y_3)) + s_0((a,t)x) - s_0((a,1)x) = (a,1)y_3 \Leftrightarrow \\ \varphi_2(s_1((a,1)y_3)) + y_1 + (a,1)y_3 - y_1 = (a,1)y_3 \Leftrightarrow \\ \varphi_2(s_1((a,1)y_3)) = 0 \end{gathered}$$

e portanto também tomamos $s_1((a,1)y_3) = 0$.

O cálculo de $s_1((b,1)y_3)$ é similar:

$$\begin{gathered} \varphi_2(s_1((b,1)y_3)) + s_0(\varphi_1((b,1)y_3) = (b,1)y_3 \Leftrightarrow \\ \varphi_2(s_1((b,1)y_3)) + s_0((b,t)x) - s_0((b,1)x) = (b,1)y_3 \Leftrightarrow \\ \varphi_2(s_1((b,1)y_3)) + y_2 + (b,1)y_3 - y_2 = (b,1)y_3 \Leftrightarrow \\ \varphi_2(s_1((b,1)y_3)) = 0, \end{gathered}$$

e definimos $s_1((b,1)y_3) = 0$.

Seja $s_1((a^m b^n,1)y_1) = u_1^{m,n} z_1 + u_2^{m,n} z_2 + u_3^{m,n} z_3$, em que $u_1^{m,n}, u_2^{m,n}, u_3^{m,n} \in \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}\varphi_2(s_1((a^m b^n,1)y_1)) = &[u_1^{m,n}A + u_2^{m,n}C + u_3^{m,n}((1,1)-(b,1))]y_1 + \\ &[u_1^{m,n}B + u_2^{m,n}D + u_3^{m,n}((a,1)-(1,1))]y_2 + \\ &[u_1^{m,n}((a,1)-(1,1)) + u_2^{m,n}((b,1)-(1,1))]y_3.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Devemos ter $\varphi_2(s_1((a^m b^n,1)y_1)) + s_0(\varphi_1((a^m b^n,1)y_1)) = (a^m b^n,1)y_1 \Leftrightarrow \varphi_2(s_1((a^m b^n,1)y_1)) = (a^m b^n,1)y_1 - s_0(\varphi_1((a^m b^n,1)y_1))$, e

$$\begin{aligned}(a^m b^n,1)y_1 - s_0(\varphi_1((a^m b^n,1)y_1)) &= (a^m b^n,1)y_1 + s_0((a^m b^n,1)x) - s_0((a^{m+1} b^n,1)x) \\ &= \left[(a^m b^n,1) + \frac{\partial(a^m,1)}{\partial(a,1)} - \frac{\partial(a^{m+1},1)}{\partial(a,1)}\right] y_1 + \\ &\quad + [(a^m,1)-(a^{m+1},1)]\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} y_2 \\ &= [(a^m b^n,1)-(a^m,1)]y_1 + [(a^m,1)-(a^{m+1},1)]\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} y_2.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Comparando as expressões obtidas em (3.22) e (3.23), notamos que em (3.23) o coeficiente de y_3 é zero. Sendo assim, tomamos $u_1^{m,n} = u_2^{m,n} = 0$, e tentamos encontrar $u_3^{m,n}$ de tal modo que

$$\begin{aligned}&u_3^{m,n}((1,1)-(b,1))y_1 + u_3^{m,n}((a,1)-(1,1))y_2 = \\ &= [(a^m b^n,1)-(a^m,1)]y_1 + [(a^m,1)-(a^{m+1},1)]\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} y_2.\end{aligned}$$

É imediato verificar que $u_3^{m,n} = -(a^m,1)\dfrac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)}$ satisfaz a igualdade acima. Logo podemos definir

$$s_1((a^m b^n,1)y_1) = -(a^m,1)\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} z_3.$$

O cálculo de $s_1((a^m b^n,1)y_2)$ é mais simples que o de $s_1((a^m b^n,1)y_1)$. Devemos ter $\varphi_2(s_1((a^m b^n,1)y_2)) + s_0(\varphi_1((a^m b^n,1)y_2)) = (a^m b^n,1)y_2 \Leftrightarrow \varphi_2(s_1((a^m b^n,1)y_2)) = (a^m b^n,1)y_2 - s_0(\varphi_1((a^m b^n,1)y_2))$, mas

$$\begin{aligned}&(a^m b^n,1)y_2 - s_0(\varphi_1((a^m b^n,1)y_2)) = (a^m b^n,1)y_2 + s_0((a^m b^n,1)x) - s_0((a^m b^{n+1},1)x) = \\ &= (a^m b^n,1)y_2 + \frac{\partial(a^m,1)}{\partial(a,1)}y_1 + (a^m,1)\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)}y_2 - \frac{\partial(a^m,1)}{\partial(a,1)}y_1 - (a^m,1)\frac{\partial(b^{n+1},1)}{\partial(b,1)}y_2 = \\ &= (a^m b^n,1)y_2 + (a^m,1)\left[\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} - \frac{\partial(b^{n+1},1)}{\partial(b,1)}\right] = 0,\end{aligned}$$

e assim podemos definir $s_1((a^m b^n,1)y_2) = 0$.

Cálculo de $s_1((a^m b^n, t)y_1)$

Iniciemos agora o cálculo de $s_1((a^m b^n,t)y_1)$. Seja $s_1((a^m b^n,t)y_1) = k_1^{m,n} z_1 + k_2^{m,n} z_2 + k_3^{m,n} z_3$, com $k_1^{m,n}, k_2^{m,n}, k_3^{m,n} \in \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$. Sabendo que $\varphi_2(s_1((a^m b^m,t)y_1)) + s_0(\varphi_1((a^m b^n,t)y_1)) = (a^m b^n,t)y_1$ e procedendo de modo análogo ao que fizemos ao comparar as equações (3.22) e

(3.23), descobrimos que $k_1^{m,n}$, $k_2^{m,n}$ e $k_3^{m,n}$ devem satisfazer o sistema

$$\left| \begin{array}{l} k_1^{m,n}A + k_2^{m,n}C + k_3^{m,n}[(1,1)-(b,1)] = (a^m b^n, t) - (a^m,1)\dfrac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)} \\ k_1^{m,n}B + k_2^{m,n}D + k_3^{m,n}[(a,1)-(1,1)] = (a^m,1)\dfrac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} - (a^{m+\alpha},1)\dfrac{\partial(b^{n+\beta},1)}{\partial(b,1)} \\ k_1^{m,n}[(a,1)-(1,1)] + k_2^{m,n}[(b,1)-(1,1)] = (a^m b^n,1) - (a^{m+\alpha}b^{n+\beta},1) \end{array} \right. \tag{3.24}$$

Verifiquemos que $k_1^{m,n} = -(a^m b^n,1)\dfrac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)}$ e $k_2^{m,n} = -(a^{m+\alpha}b^n,1)\dfrac{\partial(b^\beta,1)}{\partial(b,1)}$ satisfazem a terceira equação de (3.24). De fato,

$$\begin{aligned} -(a^m b^n,1)\frac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)}[(a,1)-(1,1)] - (a^{m+\alpha}b^n,1)\frac{\partial(b^\beta,1)}{\partial(b,1)}[(b,1)-(1,1)] = \\ = -(a^m b^n,1)((a^\alpha,1)-(1,1)] - (a^{m+\alpha}b^n,1)[(b^\beta,1)-(1,1)] = \\ = (a^m b^n,1) - (a^{m+\alpha}b^n,1) - (a^{m+\alpha}b^{n+\beta},1) + (a^{m+\alpha}b^n,1) = \\ = (a^m b^n,1) - (a^{m+\alpha}b^{n+\beta},1) \end{aligned}$$

Substituindo estes valores de $k_1^{m,n}$ e $k_2^{m,n}$ nas duas primeiras equações, devemos então encontrar $k_3^{m,n}$ que satisfaça

$$\begin{aligned} k_3^{m,n}[(1,1)-(b,1)] &= (a^m b^n,t) - (a^m,1)\frac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)} - k_1^{m,n}A - k_2^{m,n}C \\ &= (a^m b^n,t) - (a^m,1)\frac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)} + (a^m b^n,1)\frac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)}A + (a^{m+\alpha}b^n,1)\frac{\partial(b^\beta,1)}{\partial(b,1)}C \end{aligned} \tag{3.25}$$

e

$$\begin{aligned} k_3^{m,n}[(a,1)-(1,1)] &= (a^m,1)\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} - (a^{m+\alpha},1)\frac{\partial(b^{n+\beta},1)}{\partial(b,1)} - k_1^{m,n}B - k_2^{m,n}C \\ &= (a^m,1)\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} - (a^{m+\alpha},1)\frac{\partial(b^{n+\beta},1)}{\partial(b,1)} + (a^m b^n,1)\frac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)}B + \\ &\quad + (a^{m+\alpha}b^n,1)\frac{\partial(b^\beta,1)}{\partial(b,1)}D \end{aligned} \tag{3.26}$$

Para determinar $k_3^{m,n}$, escrevemos

$$k_3^{m,n} = \sum_{u,v\in\mathbb{Z}} g_{uv}(a^u b^v,1) + \sum_{u,v\in\mathbb{Z}} h_{uv}(a^u b^v,t), \quad g_{uv}, h_{uv} \in \mathbb{Z},$$

de modo que as equações (3.25) e (3.26) se escrevem

$$\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} (g_{uv} - g_{u(v-1)})(a^u b^v,1) = (a^m b^n,1)\frac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)} - (a^m,1)\frac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)} \tag{3.27}$$

$$\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} (g_{(u-1)v} - g_{uv})(a^u b^v,1) = (a^m,1)\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} - (a^{m+\alpha},1)\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} \tag{3.28}$$

e

$$\sum_{u,v\in\mathbb{Z}}(h_{uv}-h_{(u-\gamma)(v-\delta)})(a^ub^v,t)=(a^mb^n,t)+(a^mb^n,1)\frac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)}(A-(1,1))+$$
$$+(a^{m+\alpha}b^n,1)\frac{\partial(b^\beta,1)}{\partial(b,1)}C \tag{3.29}$$

$$\sum_{u,v\in\mathbb{Z}}(h_{(u-\alpha)(v-\beta)}-h_{uv})(a^ub^v,t)=(a^mb^n,1)\frac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)}B+(a^{m+\alpha}b^n,1)\frac{\partial(b^\beta,1)}{\partial(b,1)}(D-(1,1)) \tag{3.30}$$

Para resolver as equações (3.27) e (3.28), usamos um método similar ao já usado para determinar o elemento E na resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[G\rtimes\mathbb{Z}]$. Obtemos o seguinte:

1. Se $\alpha=0$ ou $n=0$, então $g_{uv}=0$ para todos $u,v\in\mathbb{Z}$;
2. Se $\alpha>0$ e $n>0$, então
$$g_{uv}=\begin{cases}-1, & \text{se } (u,v)\in\{m,\dots,m+\alpha-1\}\times\{0,\dots,n-1\},\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$
3. Se $\alpha>0$ e $n<0$, então
$$g_{uv}=\begin{cases}1, & \text{se } (u,v)\in\{m,\dots,m+\alpha-1\}\times\{n,\dots,-1\},\\ 0, & \text{caso contrário,}\end{cases}$$
4. Se $\alpha<0$ e $n>0$, então
$$g_{uv}=\begin{cases}1, & \text{se } (u,v)\in\{m+\alpha,\dots,m-1\}\times\{0,\dots,n-1\},\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$
5. Se $\alpha<0$ e $n<0$, então
$$g_{uv}=\begin{cases}-1, & \text{se } (u,v)\in\{m+\alpha,\dots,m-1\}\times\{n,\dots,-1\},\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Os casos acima podem ser resumidos e podemos em todos eles escrever

$$\sum_{u,v\in\mathbb{Z}}g_{uv}(a^ub^v,1)=-(a^m,1)\frac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)}\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)}. \tag{3.31}$$

Para resolver as equações (3.29) e (3.30), usaremos novamente o artifício que usamos para calcular E na resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[G\rtimes\mathbb{Z}]$-módulo trivial. Como veremos, por causa da observação da equação (3.21), será suficiente calcularmos

$$\varepsilon_0(k_3^{m.n})=\sum_{u,v\in\mathbb{Z}}g_{uv}+\sum_{u,v\in\mathbb{Z}}h_{uv},$$

e como já calculamos os inteiros g_{uv} (dados pela equação (3.31)), resta-nos calcular $\sum_{u,v\in\mathbb{Z}}h_{uv}$.

Este cálculo divide-se em vários casos, pois, observando as equações (3.29) e (3.30), vemos que nelas aparecem os elementos

$$A,\ B,\ C,\ D,\ \frac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)},\frac{\partial(b^\beta,1)}{\partial(b,1)},$$

e as expressões explícitas para estes elementos dependem dos sinais de α, β, γ, δ e $\det\theta$. Comecemos analisando os vários casos em que a matriz θ contém um elemento nulo.

Primeiro caso: $\alpha = 0$. Neste caso, a matriz θ deve ter um dos seguintes formatos:

$$(\alpha.1)\ \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & \delta\end{bmatrix} \qquad (\alpha.2)\ \begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & \delta\end{bmatrix} \qquad (\alpha.3)\ \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & \delta\end{bmatrix} \qquad (\alpha.4)\ \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & \delta\end{bmatrix}$$

Nas quatro situações (α.1), (α.2), (α.3) e (α.4), temos $D-(1,1)=0$ e $\dfrac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)}=0$, e observando a equação (3.30) devemos ter $h_{uv}=0$ para quaisquer u, $v\in\mathbb{Z}$. Não é difícil ver que, em cada uma das quatro situações, a equação (3.29) também é satisfeita.

Segundo caso: $\beta = 0$. Neste caso, a matriz θ deve ter um dos seguintes formatos:

$$(\beta.1)\ \begin{bmatrix}1 & \gamma\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (\beta.2)\ \begin{bmatrix}-1 & \gamma\\ 0 & -1\end{bmatrix} \qquad (\beta.3)\ \begin{bmatrix}1 & \gamma\\ 0 & -1\end{bmatrix} \qquad (\beta.4)\ \begin{bmatrix}-1 & \gamma\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Nestas quatro situações (β.1), (β.2), (β.3) e (β.4), temos $B=0$ e $\dfrac{\partial(b^\beta,1)}{\partial(b,1)}=0$, e observando novamente a equação (3.30), devemos ter $h_{uv}=0$ para todos u, $v\in\mathbb{Z}$. Como no caso anterior, verifica-se facilmente que a equação (3.29) também é satisfeita.

Terceiro caso: $\gamma = 0$. Neste caso, a matriz θ deve ter um dos seguintes formatos:

$$(\gamma.1)\ \begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta & 1\end{bmatrix} \qquad (\gamma.2)\ \begin{bmatrix}-1 & 0\\ \beta & -1\end{bmatrix} \qquad (\gamma.3)\ \begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta & -1\end{bmatrix} \qquad (\gamma.4)\ \begin{bmatrix}-1 & 0\\ \beta & 1\end{bmatrix}$$

Na situação (γ.1), o lado direito da equação (3.30) se escreve como

$$(a^m b^n,1)\left[B-(a,1)\frac{\partial(b^\beta,1)}{\partial(b,1)}(1,t)\right],$$

e, independentemente se $\beta>0$, $\beta=0$ ou $\beta<0$, a expressão acima sempre se anula. Mais uma vez, portanto, devemos ter $h_{uv}=0$ para todos u, $v\in\mathbb{Z}$, e a equação (3.29) é satisfeita em todos os casos.

Na situação (γ.2), o lado direito da equação (3.30) se escreve como

$$(a^{m-1}b^n,1)\left[-B+\frac{\partial(b^\beta,1)}{\partial(b,1)}(b,t)\right].$$

Se $\beta=0$, a expressão acima é nula e, portanto, $h_{uv}=0$ para todos u, $v\in\mathbb{Z}$. Se $\beta>0$,

$$(a^{m-1}b^n,1)\left[-B+\frac{\partial(b^\beta,1)}{\partial(b,1)}(b,t)\right]=(a^{m-1}b^n,1)\left[\sum_{k=0}^{\beta-1}(b^{k+1},t)-(ab^{-k},t)\right]$$

Montando um grafo de modo similar ao que construimos para calcular o elemento E (ver (3.11)), neste caso descobrimos que $\sum\limits_{u,v\in\mathbb{Z}} h_{uv} = \beta$. Se $\beta < 0$,

$$(a^{m-1}b^n,1)\left[-B + \frac{\partial(b^\beta,1)}{\partial(b,1)}(b,t)\right] = (a^{m-1}b^n,1)\left[\sum_{k=1}^{-\beta}(ab^k,t) - (b^{k-1},t)\right],$$

e neste caso também temos $\sum\limits_{u,v\in\mathbb{Z}} h_{uv} = \beta$.

Na situação (γ.3), o lado direito da equação (3.30) se escreve como

$$(a^m b^n,1)\left[B + (a,1)\frac{\partial(b^\beta,1)}{\partial(b,1)}(b,t)\right],$$

e esta expressão é sempre nula independentemente do valor de β, o que nos dá $h_{uv} = 0$ para todos u, $v \in \mathbb{Z}$, e a equação (3.29) é também satisfeita.

Na situação (γ.4), o lado direito da equação (3.30) se escreve como

$$(a^{m-1}b^n,1)\left[-B - \frac{\partial(b^\beta,1)}{\partial(b,1)}(1,t)\right].$$

Se $\beta = 0$, a expressão acima se anula e, logo, $h_{uv} = 0$ para quaisquer u, $v \in \mathbb{Z}$. Se $\beta > 0$, temos

$$(a^{m-1}b^n,1)\left[-B - \frac{\partial(b^\beta,1)}{\partial(b,1)}(1,t)\right] = (a^{m-1}b^n,1)\left[\sum_{k=1}^{\beta}(ab^{-k},t) - \sum_{k=0}^{\beta-1}(b^k,t)\right].$$

Procedendo de maneira análoga à situação (γ.2), neste caso temos $\sum\limits_{u,v\in\mathbb{Z}} h_{uv} = -\beta$. Se $\beta < 0$,

$$(a^{m-1}b^n,1)\left[-B - \frac{\partial(b^\beta,1)}{\partial(b,1)}(1,t)\right] = (a^{m-1}b^n,1)\left[-\sum_{k=0}^{-\beta-1}(ab^k,t) + \sum_{k=1}^{-\beta}(b^{-k},t)\right],$$

e neste caso obtemos novamente $\sum\limits_{u,v\in\mathbb{Z}} h_{uv} = -\beta$.

Quarto caso: $\delta = 0$. Neste caso, a matriz θ deve ter um dos seguintes formatos:

(δ.1) $\begin{bmatrix}\alpha & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (δ.2) $\begin{bmatrix}\alpha & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ (δ.3) $\begin{bmatrix}\alpha & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (δ.4) $\begin{bmatrix}\alpha & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

Na situação (δ.1), o lado direito de (3.30) se escreve como

$$(a^m b^n,1)\left[-\frac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)}(1,t) + (a^\alpha,1)(D-(1,1))\right].$$

Se $\alpha = 0$ a expressão acima se anula e temos $h_{uv} = 0$ para todos u, $v \in \mathbb{Z}$, e a equação (3.29) também é satisfeita. Se $\alpha > 0$, temos

$$(a^m b^n,1)\left[-\frac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)}(1,t) + (a^\alpha,1)(D-(1,1))\right] = (a^m b^n,1)\left[-\sum_{k=0}^{\alpha-1}(a^k,t) + (a^\alpha,1)\sum_{k=0}^{\alpha-1}(a^k b,t)\right].$$

Procedendo de modo análogo ao que já fizemos em outros casos, neste obtemos $\sum\limits_{u,v\in\mathbb{Z}} h_{uv} = \alpha$.
Se $\alpha < 0$, temos

$$(a^m b^n, 1)\left[-\frac{\partial(a^\alpha, 1)}{\partial(a, 1)}(1, t) + (a^\alpha, 1)(D - (1, 1))\right] = (a^m b^n, 1)\left[\sum_{k=1}^{-\alpha}(a^{-k}, t) - (a^\alpha, 1)\sum_{k=1}^{-\alpha}(a^{-k}b, t)\right],$$

e neste caso obtemos novamente $\sum\limits_{u,v\in\mathbb{Z}} h_{uv} = \alpha$.

Na situação (δ.2), o lado direito de (3.30) se escreve como

$$(a^m b^n, 1)\left[\frac{\partial(a^\alpha, 1)}{\partial(a, 1)}(a, t) - (a^\alpha b^{-1}, 1)(D - (1, 1))\right].$$

Esta expressão se anula independentemente do valor de α, logo $h_{uv} = 0$ para todos u, $v \in \mathbb{Z}$, e a equação (3.29) também é satisfeita.

Na situação (δ.3), o lado direito de (3.30) se escreve como

$$(a^m b^n, 1)\left[\frac{\partial(a^\alpha, 1)}{\partial(a, 1)}(a, t) + (a^\alpha, 1)(D - (1, 1))\right].$$

Se $\alpha = 0$ a expressão acima se anula e temos $h_{uv} = 0$ para todos u, $v \in \mathbb{Z}$ e a equação (3.29) também é satisfeita. Se $\alpha > 0$,

$$(a^m b^n, 1)\left[\frac{\partial(a^\alpha, 1)}{\partial(a, 1)}(a, t) + (a^\alpha, 1)(D - (1, 1))\right] = (a^m b^n, 1)\left[\sum_{k=0}^{\alpha-1}(a^{k+1}, t) - (a^\alpha, 1)\sum_{k=1}^{\alpha}(a^k b, t)\right],$$

e neste caso obtemos $\sum\limits_{u,v\in\mathbb{Z}} h_{uv} = -\alpha$. Se $\alpha < 0$,

$$(a^m b^n, 1)\left[\frac{\partial(a^\alpha, 1)}{\partial(a, 1)}(a, t) + (a^\alpha, 1)(D - (1, 1))\right] = (a^m b^n, 1)\left[(a^\alpha, 1)\sum_{k=0}^{-\alpha-1}(a^{-k}b, t) - \sum_{k=1}^{-\alpha}(a^{-k+1}, t)\right],$$

e neste caso também obtemos $\sum\limits_{u,v\in\mathbb{Z}} h_{uv} = -\alpha$.

Na situação (δ.4), o lado direito de (3.30) se escreve como

$$(a^m b^n, 1)\left[-\frac{\partial(a^\alpha, 1)}{\partial(a, 1)}(1, t) - (a^\alpha b^{-1}, 1)(D - (1, 1))\right].$$

Esta expressão se anula independentemente do valor de α, logo $h_{uv} = 0$ para todos u, $v \in \mathbb{Z}$ e a equação (3.29) também é satisfeita.

Finalmente, analisemos os casos em que a matriz θ não possui elementos nulos. Recordando que as expressões explícitas para as equações (3.29) e (3.30) dependem dos sinais de α, β, γ, δ, $\det\theta$ e que $\det\theta \pm 1$, obtemos os seguintes casos: quanto aos elementos α, β, γ e δ, eles podem ser todos positivos, todos negativos, ou haver entre eles 2 positivos e 2 negativos. Como $\binom{4}{2} = 6$, isto nos dá 8 possiblidades para a matriz θ. Como o seu determinante ainda pode ser igual a ± 1, temos no total 16 casos a analisar.

Iniciemos com o caso em que α, β, γ e δ são positivos e $\det\theta = 1$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
A - (1,1) &= -\sum_{k=0}^{\delta-1}(a^{k\alpha}b^{k\beta}, t),\\
B &= \sum_{k=0}^{\beta-1}(a^{1+k\gamma}b^{k\delta}, t),\\
C &= \sum_{k=1}^{\gamma}(a^{-k\alpha}b^{-k\beta}, t),\\
D - (1,1) &= -\sum_{k=1}^{\alpha}(a^{-k\gamma}b^{1-k\delta}, t),
\end{aligned}$$

e as equações (3.29) e (3.30) se escrevem como

$$\sum_{u,v\in\mathbb{Z}}(h_{uv} - h_{(u-\gamma)(v-\delta)})(a^u b^v, t) =$$
$$= (a^m b^n, 1)\left[(1,t) - \sum_{j=0}^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\delta-1}(a^{j+k\alpha}b^{k\beta}, t) + \sum_{j=0}^{\beta-1}\sum_{k=1}^{\gamma}(a^{\alpha-k\alpha}b^{j-k\beta}, t)\right] \tag{3.32}$$

e

$$\sum_{u,v\in\mathbb{Z}}(h_{(u-\alpha)(v-\beta)} - h_{uv})(a^u b^v, t) =$$
$$= (a^m b^n, 1)\left[\sum_{j=0}^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\beta-1}(a^{1+j+k\gamma}b^{k\delta}, t) - \sum_{j=0}^{\beta-1}\sum_{k=1}^{\alpha}(a^{\alpha-k\gamma}b^{1+j-k\delta}, t)\right]. \tag{3.33}$$

Iremos resolver estas equações usando o mesmo método que utilizamos para o cálculo do elemento E na resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$-módulo trivial. Ou seja, construimos um grafo orientado cujos vértices são os pontos do plano de coordenadas inteiras e tal que o vértice de coordenadas (x, y) é origem de uma aresta com destino no vértice $(x-\alpha, y-\beta)$ e é também origem de uma aresta com destino $(x+\gamma, y+\delta)$. Na aresta que liga (x, y) a $(x+\gamma, y+\delta)$ colocamos um rótulo com o valor de $h_{uv} - h_{(u-\gamma)(v-\delta)}$, o qual é obtido da equação (3.32), e na aresta que liga (x, y) e $(x-\alpha, y-\beta)$ colocamos um rótulo com o valor de $h_{(u-\alpha)(v-\beta)} - h_{uv}$, o qual é obtido da equação (3.33).

Desta forma, resolver as equações (3.32) e (3.33) equivale a determinar valores inteiros para cada vértice do grafo de forma que o rótulo de cada aresta coincida com o valor obtido subtraindo os números atribuídos aos vértices de destino e origem daquela aresta.

Para desenharmos o grafo acima descrito, é mais conveniente realizarmos novamente a transformação de coordenadas $T\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ dada por

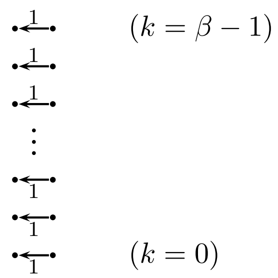
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = T(x,y) = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

de modo que, nas coordenadas (u, v), as arestas que ligam (x, y) e $(x-\alpha, y-\beta)$ se tornam horizontais (apontando uma unidade para a esquerda) e as arestas que ligam (x, y) e $(x+\gamma, y+\delta)$ tornam-se verticais (apontando uma unidade para cima).

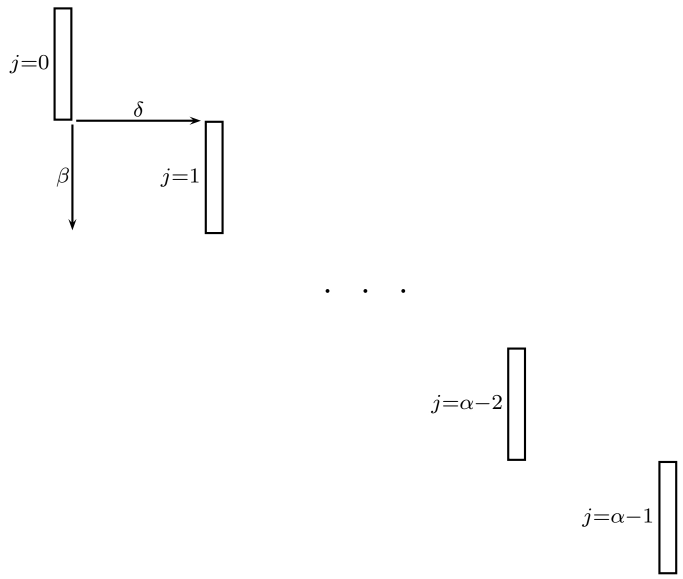
No caso que estamos analisando, observemos o lado direito da equação (3.33). Como estamos apenas interessados no cálculo de $\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} h_{uv}$, podemos ignorar o termo $(a^m b^n, 1)$ que multiplica tudo e nos concentrarmos apenas em

$$\sum_{j=0}^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\beta-1}(a^{1+j+k\gamma}b^{k\delta}, t) - \sum_{j=0}^{\beta-1}\sum_{k=1}^{\alpha}(a^{\alpha-k\gamma}b^{1+j-k\delta}, t).$$

As parcelas da soma $\sum_{j=0}^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\beta-1}(a^{1+j+k\gamma}b^{k\delta}, t)$ contribuem com arestas cujos rótulos são iguais a 1. Para um valor de $j \in \{0, \ldots, \alpha - 1\}$ fixo, obtemos arestas horizontais dispostas da seguinte maneira:



No desenho acima, a aresta inferior corresponde ao valor de $k = 0$ e a aresta superior corresponde ao valor de $k = \beta - 1$. Para simplificar o desenho, o conjunto de arestas acima será denominado o "bloco" correspondente a j. Ao passarmos de j para $j + 1$, somamos $(1, 0)$ às coordenadas (x, y), o que equivale a somar $(\delta, -\beta)$ às coordenadas (u, v) correspondentes após a aplicação da transformação T. Desse modo, as arestas com rótulo 1 se dispõem no grafo de acordo com a seguinte configuração:



No desenho acima, cada retângulo representa um bloco de β arestas correspondentes a um valor de j, cada uma delas com rótulo igual a 1. Há, portanto, α tais blocos no nosso grafo.

A aresta superior esquerda tem sua origem no vértice que corresponde a $j = 0$, $k = \beta - 1$, o que nos dá coordenadas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (\beta - 1)\gamma \\ (\beta - 1)\delta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ -1 \end{bmatrix},$$

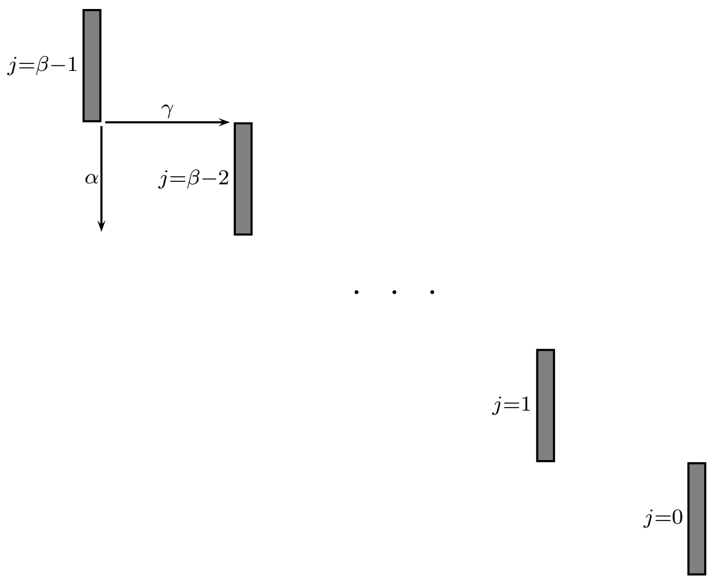
enquanto a aresta inferior direita tem sua origem no vértice que corresponde a $j = \alpha - 1$, $k = 0$, o que nos dá coordenadas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\delta \\ -\alpha\beta \end{bmatrix},$$

Se agora observarmos a soma $-\sum_{j=0}^{\beta-1} \sum_{k=1}^{\alpha} (a^{\alpha - k\gamma} b^{1+j-k\delta}, t)$, notamos que suas parcelas contribuem com arestas cujos rótulos são iguais a -1. Para um valor fixo de $j \in \{0, \ldots, \beta - 1\}$, obtemos arestas horizontais dispostas do seguinte modo:

$$\begin{array}{ll} \bullet \xleftarrow{-1} \bullet & \quad (k = 1) \\ \bullet \xleftarrow{-1} \bullet & \\ \bullet \xleftarrow{-1} \bullet & \\ \vdots & \\ \bullet \xleftarrow[-1]{} \bullet & \\ \bullet \xleftarrow[-1]{} \bullet & \\ \bullet \xleftarrow[-1]{} \bullet & \quad (k = \alpha) \end{array}$$

Ao variarmos o valor de j, obtemos então a seguinte configuração no nosso grafo:



Usamos blocos preenchidos com cinza para representar arestas com rótulo -1 e blocos brancos para arestas com rótulos iguais a 1.

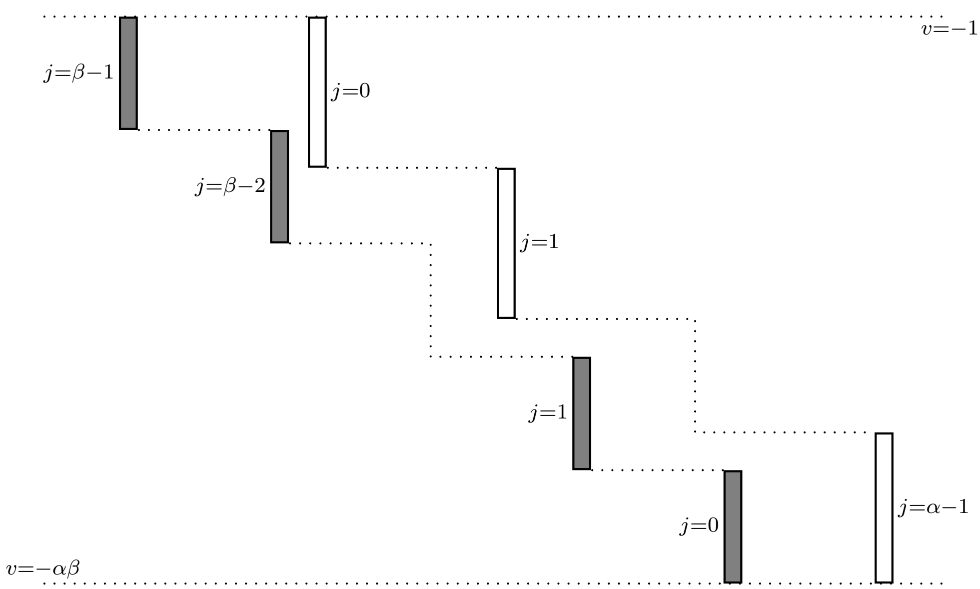
A aresta superior esquerda neste conjunto de blocos tem origem no vértice cujas coordenadas correspondem a $j = \beta - 1$, $k = 1$, o que nos dá coordenadas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \gamma \\ \beta - \delta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

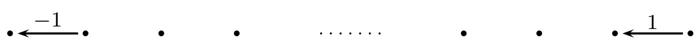
enquanto a aresta inferior direita tem origem no vértice correspondente a $j = 0$, $k = \alpha$, cujas coordenadas são

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \alpha\gamma \\ 1 - \alpha\delta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\delta - \gamma \\ -\alpha\beta \end{bmatrix},$$

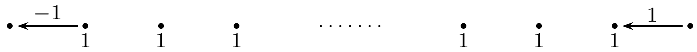
O grafo, portanto, possui a seguinte aparência (não desenhamos as arestas com rótulo nulo):



A partir do grafo acima, é fácil determinarmos $\sum_{u,v \in \mathbb{Z}} h_{uv}$. Cada linha do grafo (isto é, uma reta dada por v constante) que contém uma aresta com rótulo não nulo possui a seguinte forma:



Para satisfazermos os valores dados pelos rótulos das arestas, basta atribuirmos o valor 1 aos vértices da linha entre a origem da aresta com rótulo -1 e ao destino da aresta com rótulo igual a 1, inclusive. Os demais vértices recebem o valor 0 (que omitimos da figura):



Sendo assim, a soma $\sum_{u,v \in \mathbb{Z}} h_{uv}$ é dada pela quantidade de pontos limitada pelos blocos de arestas com rótulos 1 e -1 do nosso grafo. A quantidade de vértices com valor 1 em cada linha é dada, simplesmente, pela subtração da coordenada u de origem do vértice com rótulo -1 da coordenada u do vértice de rótulo 1. Logo

$$\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} h_{uv} = \begin{pmatrix} \text{soma das coordenadas } u \\ \text{das origens dos vértices} \\ \text{com rótulo } 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{soma das coordenadas } u \\ \text{das origens dos vértices} \\ \text{com rótulo } -1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{(\alpha\delta+\delta)\alpha\beta}{2} - \frac{(\alpha\delta-\gamma+1)\alpha\beta}{2} = \frac{\alpha\beta}{2}(\gamma+\delta-1).$$

O grafo que fizemos para calcular $\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} h_{uv}$ considera apenas a equação (3.33). Ainda é necessário construir o grafo correspondente para a equação (3.32) e verificar que ela também é satisfeita. A construção é completamente análoga à que acabamos de fazer e, felizmente, a solução obtida para a equação (3.33) também satisfaz a equação (3.32).

Este é o primeiro dos 16 casos que existem para serem analisados. A análise de cada um dos casos é similar ao que acabamos de fazer, portanto omitimos os detalhes computacionais e resumimos os resultados obtidos. Temos

$$\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} h_{uv} = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{2}(\gamma+\delta-1), & \text{se } \det\theta = 1 \\ \frac{\alpha\beta}{2}(\gamma+\delta+1), & \text{se } \det\theta = -1 \end{cases}$$

As fórmulas acima continuam válidas mesmo quando a matriz θ contém um elemento nulo.

Observamos que a construção do grafo que fizemos nos permitiu calcular a soma $\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} h_{uv}$ no caso geral. Entretanto, a construção do grafo para um caso particular da matriz θ nos permitiria dar uma fórmula explícita para $s_1((a^m b^n, t)y_1)$, o que é necessário para o cálculo do produto cup com coeficientes não triviais.

Cálculo de $s_1((a^m b^n, t)y_2)$

Passemos agora ao cálculo de $s_1((a^m b^n, t)y_2)$, que se mostra completamente análogo ao de $s_1((a^m b^n, t)y_1)$. Seja $s_1((a^m b^n, t)y_2) = \ell_1^{m,n} z_1 + \ell_2^{m,n} z_2 + \ell_3^{m,n} z_3$, em que $\ell_1^{m,n}$, $\ell_2^{m,n}$ e $\ell_3^{m.n} \in \mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]$. Procedendo de modo similar ao que fizemos no cálculo de $s_1((a^m b^n, t)y_1)$, os elementos $\ell_1^{m,n}$, $\ell_2^{m,n}$ e $\ell_3^{m.n}$ devem satisfazer o sistema

$$\left| \begin{array}{l} \ell_1^{m,n} A + \ell_2^{m,n} C + \ell_3^{m,n}[(1,1)-(b,1)] = \dfrac{\partial(a^m,1)}{\partial(a,1)} - \dfrac{\partial(a^{m+\gamma},1)}{\partial(a,1)} \\ \ell_1^{m,n} B + \ell_2^{m,n} D + \ell_3^{m,n}[(a,1)-(1,1)] = (a^m b^n, t) + (a^m,1)\dfrac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} - (a^{m+\gamma},1)\dfrac{\partial(b^{n+\delta},1)}{\partial(b,1)} \\ \ell_1^{m,n}[(a,1)-(1,1)] + \ell_2^{m,n}[(b,1)-(1,1)] = (a^m b^n,1) - (a^{m+\gamma} b^{n+\delta},1) \end{array} \right. \tag{3.34}$$

Como a terceira equação de (3.34) é idêntica à terceira equação de (3.24) se substituirmos α e β por γ e δ, respectivamente, temos

$$\ell_1^{m,n} = -(a^m b^n, 1)\frac{\partial(a^\gamma,1)}{\partial(a,1)}, \quad \ell_2^{m,n} = -(a^{m+\gamma} b^n, 1)\frac{\partial(b^\delta,1)}{\partial(b,1)}.$$

Substituindo estes valores de $\ell_1^{m,n}$ e $\ell_2^{m,n}$ nas duas primeiras equações de (3.34), vemos que $\ell_3^{m,n}$ deve satisfazer

$$\ell_3^{m,n}[(1,1)-(b,1)] = \frac{\partial(a^m,1)}{\partial(a,1)} - \frac{\partial(a^{m+\gamma},1)}{\partial(a,1)} + (a^m b^n,1)\frac{\partial(a^\gamma,1)}{\partial(a,1)}A + (a^{m+\gamma} b^n,1)\frac{\partial(b^\delta,1)}{\partial(b,1)}C \tag{3.35}$$

e

$$\ell_3[(a,1)-(1,1)] = (a^m b^n, t) + (a^m,1)\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} - (a^{m+\gamma},1)\frac{\partial(b^{n+\delta},1)}{\partial(b,1)} + \\ + (a^m b^n,1)\frac{\partial(a^\gamma,1)}{\partial(a,1)}B + (a^{m+\gamma}b^n,1)\frac{\partial(b^\delta,1)}{\partial(b,1)}D \tag{3.36}$$

Para determinar $\ell_3^{m,n}$, escrevemos

$$\ell_3^{m.n} = \sum_{u,v\in\mathbb{Z}} p_{uv}(a^u b^v,1) + \sum_{u,v\in\mathbb{Z}} q_{uv}(a^u b^v,t), \quad p_{uv}, q_{uv} \in \mathbb{Z},$$

e as equações (3.35) e (3.36) se escrevem como

$$\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} (p_{uv} - p_{u(v-1)})(a^u b^v,1) = (a^m b^n,1)\frac{\partial(a^\gamma,1)}{\partial(a,1)} - (a^m,1)\frac{\partial(a^\gamma,1)}{\partial(a,1)} \tag{3.37}$$

$$\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} (p_{(u-1)v} - p_{uv})(a^u b^v,1) = (a^m,1)\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} - (a^{m+\gamma},1)\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} \tag{3.38}$$

e

$$\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} (q_{uv} - q_{(u-\gamma)(v-\delta)})(a^u b^v,t) = (a^m b^n,1)\frac{\partial(a^\gamma,1)}{\partial(a,1)}(A-(1,1)) + (a^{m+\gamma}b^n,1)\frac{\partial(b^\delta,1)}{\partial(b,1)}C \tag{3.39}$$

$$\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} (q_{(u-\alpha)(v-\beta)} - q_{uv})(a^u b^v,t) = (a^m b^n,t) + (a^m b^n,1)\frac{\partial(a^\gamma,1)}{\partial(a,1)}B + \\ + (a^{m+\gamma}b^n,1)\frac{\partial(b^\delta,1)}{\partial(b,1)}(D-(1,1)) \tag{3.40}$$

Como as equações (3.37) e (3.38) são análogas às equações (3.27) e (3.28), temos

$$\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} p_{uv}(a^u b^v,1) = -(a^m,1)\frac{\partial(a^\gamma,1)}{\partial(a,1)}\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} \tag{3.41}$$

Resta-nos determinar os inteiros q_{uv}. Novamente por causa da equação (3.21), é suficiente calcularmos

$$\varepsilon_0(\ell_3^{m,n}) = \sum_{u,v\in\mathbb{Z}} p_{uv} + \sum_{u,v\in\mathbb{Z}} q_{uv},$$

e como já temos os inteiros p_{uv}, resta-nos calcular $\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} q_{uv}$. Faremos este cálculo dividindo-o em casos como no fizemos para os inteiros h_{uv} no cálculo de $s_1((a^m b^n,t)y_1)$.

Iniciamos com os casos em que a matriz θ contém um elemento nulo. Como as contas são análogas às que já fizemos durante o cálculo de $s_1((a^m b^n,t)y_1)$, limitamo-nos a escrever os resultados obtidos em cada um deles.

Primeiro caso: $\alpha = 0$. Neste caso, a matriz θ deve ter um dos seguintes formatos:

$(\alpha.1)$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \delta \end{bmatrix}$ $\quad$ $(\alpha.2)$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \delta \end{bmatrix}$ $\quad$ $(\alpha.3)$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \delta \end{bmatrix}$ $\quad$ $(\alpha.4)$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{bmatrix}$

Na situação $(\alpha.1)$, temos $\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} q_{uv} = \delta$. Na situação $(\alpha.4)$, temos $\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} q_{uv} = -\delta$. E nas situações $(\alpha.2)$ e $(\alpha.3)$, temos $q_{uv} = 0$ para quaisquer u, $v \in \mathbb{Z}$.

Segundo caso: $\beta = 0$. Neste caso, a matriz θ deve ter um dos seguintes formatos:

$$(\beta.1)\ \begin{bmatrix}1 & \gamma\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (\beta.2)\ \begin{bmatrix}-1 & \gamma\\ 0 & -1\end{bmatrix} \qquad (\beta.3)\ \begin{bmatrix}1 & \gamma\\ 0 & -1\end{bmatrix} \qquad (\beta.4)\ \begin{bmatrix}-1 & \gamma\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Nas situações $(\beta.1)$ e $(\beta.4)$, temos $q_{uv} = 0$ para quaisquer u, $v \in \mathbb{Z}$. Na situação $(\beta.2)$, temos $\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} q_{uv} = \gamma$. Na situação $(\beta.3)$, temos $\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} q_{uv} = -\gamma$.

Terceiro caso: $\gamma = 0$. Neste caso temos $q_{uv} = 0$ para quaisquer u, $v \in \mathbb{Z}$.

Quarto caso: $\delta = 0$. Neste caso também temos $q_{uv} = 0$ para quaisquer u, $v \in \mathbb{Z}$.

Restam ainda os casos nos quais a matriz θ não possui elementos nulos. Como fizemos no cálculo de $s_1((a^m b^n, t)y_1)$, dividimos a análise em 16 casos, dependendo dos sinais de α, β, γ, δ e $\det\theta$. Em cada um destes casos, construimos um grafo para calcular o valor da soma $\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} q_{uv}$ e obtemos o seguinte resultado:

$$\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} q_{uv} = \begin{cases} \dfrac{\gamma\delta}{2}(\alpha+\beta-1), & \text{se } \det\theta = 1,\\ \dfrac{\gamma\delta}{2}(\alpha+\beta+1), & \text{se } \det\theta = -1. \end{cases}$$

Novamente, as fórmulas acima continuam válidas mesmo quando a matriz θ contém um elemento nulo.

Podemos resumir os vários cálculos executados nesta subseção no seguinte resultado:

Lema 3.5 *Seja*

$$0 \longrightarrow P_3 \xrightarrow{\varphi_3} P_2 \xrightarrow{\varphi_2} P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

a resolução livre dada pelo Teorema 3.1. Existem homomorfismos de grupos abelianos s_n, para $n \geq -1$ inteiro, com

$$\begin{aligned} s_{-1}&\colon \mathbb{Z} \to P_0\\ s_n&\colon P_n \to P_{n+1} \quad \textit{se } 0 \leq n \leq 2, \end{aligned}$$

tais que $\varepsilon_0 s_{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, $\varphi_1 s_0 + s_{-1}\varepsilon_0 = \mathrm{id}_{P_0}$, $\varphi_2 s_1 + s_0\varphi_1 = \mathrm{id}_{P_1}$, $\varphi_3 s_2 + s_1\varphi_2 = \mathrm{id}_{P_2}$ e $s_2\varphi_3 = \mathrm{id}_{P_3}$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[dl, "0"'] & P_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[dl, "s_2"'] & P_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dl, "s_1"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon_0"] \arrow[dl, "s_0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{-1}"'] & 0 \arrow[dl, "0"'] \\ 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "\varphi_3"'] & P_2 \arrow[r, "\varphi_2"'] & P_1 \arrow[r, "\varphi_1"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon_0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Estes homomorfismos podem ser definidos de tal forma que:

$$
\begin{aligned}
s_{-1}(1) &= x, \\
s_0((a^m b^n, t^k)x) &= \frac{\partial(a^m,1)}{\partial(a,1)} y_1 + (a^m,1)\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} y_2 + (a^m b^n,1)\frac{\partial(1,t^k)}{\partial(1,y)} y_3, \\
s_1((a^m b^n,1)y_1) &= -(a^m,1)\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} z_3, \\
s_1((a^m b^n,1)y_2) &= 0, \\
s_1(y_3) &= 0, \\
s_1((a,1)y_3) &= 0, \\
s_1((b,1)y_3) &= 0, \\
s_1((a^m b^n,1)y_1) &= -(a^m,1)\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} z_3 \\
s_1((a^m b^n,1)y_2) &= 0, \\
s_1((a^m b^n,t)y_1) &= -(a^m b^n,1)\frac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)} z_1 - (a^{m+\alpha} b^n,1)\frac{\partial(b^\beta,1)}{\partial(b,1)} z_2 + \\
&\quad + \left(-(a^m,1)\frac{\partial(a^\alpha,1)}{\partial(a,1)}\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} + \sum_{u,v\in\mathbb{Z}} h_{uv}(a^u b^v,t) \right) z_3, \\
s_1((a^m b^n,t)y_2) &= -(a^m b^n,1)\frac{\partial(a^\gamma,1)}{\partial(a,1)} z_1 - (a^{m+\gamma} b^n,1)\frac{\partial(b^\delta,1)}{\partial(b,1)} z_2 + \\
&\quad + \left(-(a^m,1)\frac{\partial(a^\gamma,1)}{\partial(a,1)}\frac{\partial(b^n,1)}{\partial(b,1)} + \sum_{u,v\in\mathbb{Z}} q_{uv}(a^u b^v,t) \right) z_3,
\end{aligned}
$$

na qual os inteiros h_{uv} e q_{uv} satisfazem

$$
\begin{aligned}
\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} h_{uv} &= \frac{\alpha\beta}{2}\left(\gamma+\delta-\det\theta\right), \\
\sum_{u,v\in\mathbb{Z}} q_{uv} &= \frac{\gamma\delta}{2}\left(\alpha+\beta-\det\theta\right).
\end{aligned}
$$

3.5 Aproximação da diagonal e produto cup em $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$ e $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$

Usaremos as equações (3.18) e (3.20) para obtermos fórmulas que nos permitam calcular os produtos $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \otimes H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile} H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ e $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \otimes H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile} H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Na obtenção de tais fórmulas, faremos uso dos homomorfismos dados pelo Lema 3.5.

Apenas para simplificarmos a notação, sendo A, B, C, D e E os elementos dados pelas equações (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) e (3.11), escreveremos

$$
A = \sum \pm A_k, \quad B = \sum \pm B_k, \quad C = \sum \pm C_k, \quad D = \sum \pm D_k, \quad E = \sum \pm E_k,
$$

nas quais A_k, B_k, C_k, D_k e E_k são elementos do grupo $G \rtimes \mathbb{Z}$. Dessa forma, a equação (3.18) se escreve como

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}(z_1) &= \pm \sum s_0(A_k x) \otimes A_k y_1 \pm \sum s_0(B_k x) \otimes B_k y_2 + y_1 \otimes (a,1) y_3 \\
\Delta_{11}(z_2) &= \pm \sum s_0(C_k x) \otimes C_k y_1 \pm \sum s_0(D_k x) \otimes D_k y_2 + y_2 \otimes (b,1) y_3 \\
\Delta_{11}(z_3) &= y_1 \otimes (a,1) y_2 - y_2 \otimes (b,1) y_1
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Sejam $u, v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]}(P_1, \mathbb{Z})$. Usando a fórmula para s_0 dada no Lema 3.5, a equação (3.42) e recordando que estamos usando coeficientes $\mathbb{Z}$ triviais, o produto $[u] \smile [v]$ é representado por um homomorfismo $(u \smile v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]}(P_2, \mathbb{Z})$ tal que

$$\begin{aligned}
(u \smile v)(z_1) &= (u \times v)\Delta_{11}(z_1) = \\
&= \left(-\frac{\alpha m_1(m_1+1)}{2}\right) u(y_1) \otimes v(y_1) + \left(-\frac{\beta m_1(m_1+1)}{2}\right) u(y_2) \otimes v(y_1) + m_1 u(y_3) \otimes v(y_1) + \\
&+ \left(n_1 + \frac{\gamma n_1(n_1-1)}{2}\right) u(y_1) \otimes v(y_2) + \left(\frac{\delta n_1(n_1-1)}{2}\right) u(y_2) \otimes v(y_2) + n_1 u(y_3) \otimes v(y_2) + \\
&+ u(y_1) \otimes v(y_3) \\
(u \smile v)(z_2) &= (u \times v)\Delta_{11}(z_2) = \\
&= \left(-\frac{\alpha m_2(m_2+1)}{2}\right) u(y_1) \otimes v(y_1) + \left(-\frac{\beta m_2(m_2+1)}{2}\right) u(y_2) \otimes v(y_1) + m_2 u(y_3) \otimes v(y_1) + \\
&+ \left(\frac{\gamma n_2(n_2-1)}{2}\right) u(y_1) \otimes v(y_2) + \left(n_2 + \frac{\delta n_2(n_2-1)}{2}\right) u(y_2) \otimes v(y_2) + n_2 u(y_3) \otimes v(y_2) + \\
&+ u(y_2) \otimes v(y_3) \\
(u \smile v)(z_3) &= u(y_1) \otimes v(y_2) - u(y_2) \otimes v(y_1)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Apesar das expressões para A, B, C, D dependerem dos sinais de m_1, n_1, m_2 e n_2, as fórmulas acimas são válidas quaisquer que sejam os valores de m_1, n_1, m_2 e n_2.

Considere agora $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]}(P_1, \mathbb{Z})$, $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G \rtimes \mathbb{Z}]}(P_2, \mathbb{Z})$. O cálculo de $[u] \smile [v]$ depende do conhecimento de $\Delta_{12}(w)$, o qual pode ser calculado a partir da equação (3.20) do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\Delta_{12}(w) &= \pi_{12} \circ \tilde{s}_2(\Delta_{02}(z_1) - (b,1)\Delta_{02}(z_1) + (a,1)\Delta_{02}(z_2) - \Delta_{02}(z_2) + E\Delta_{02}(z_3)) \\
&= \pm \sum y_1 \otimes (a,1) s_1(C_k y_1) \pm \sum y_1 \otimes (a,1) s_1(D_k y_2) \\
&\mp \sum y_2 \otimes (b,1) s_1(A_k y_1) \mp \sum y_2 \otimes (b,1) s_1(B_k y_2) \\
&+ \sum \pm s_0(E_k x) \otimes E_k z_3.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Na equação acima, o cálculo de Δ_{02} é imediato a partir da equação (3.16). O Lema (3.5) nos permite calcular o homomorfismo s_0, e também o homomorfismo s_1 com detalhes suficientes para calcularmos o produto $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \otimes H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile} H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

Iniciemos com $s_0(E_k x)$. Da equação (3.11), temos

$$
\begin{aligned}
(u \times v)\left(\sum \pm s_0(E_k x) \otimes E_k z_3\right) = & \sum_{(m,n)\in I_1\times J_1} (\alpha m + \gamma n) u(y_1) \otimes v(z_3) + \sum_{(m,n)\in I_1\times J_1} (\beta m + \delta n) u(y_2) \otimes v(z_3) \\
& + \sum_{(m,n)\in I_1\times J_1} u(y_3) \otimes v(z_3) \\
& - \sum_{(m,n)\in I_2\times J_2} (\alpha m + \gamma n) u(y_1) \otimes v(z_3) - \sum_{(m,n)\in I_2\times J_2} (\beta m + \delta n) u(y_2) \otimes v(z_3) \\
& - \sum_{(m,n)\in I_2\times J_2} u(y_3) \otimes v(z_3) \\
= & \left(\alpha |J_1| \sum_{m\in I_1} m + \gamma |I_1| \sum_{n \in J_1} n - \alpha |J_2| \sum_{m\in I_2} m - \gamma |I_2| \sum_{n\in J_2} n\right) u(y_1) \otimes v(z_3) \\
& + \left(\beta |J_1| \sum_{m\in I_1} m + \delta |I_1| \sum_{n \in J_1} n - \beta |J_2| \sum_{m\in I_2} m - \delta |I_2| \sum_{n\in J_2} n\right) u(y_2) \otimes v(z_3) \\
& + (\det\theta) u(y_3) \otimes v(z_3).
\end{aligned}
$$

Cálculos similares mostram que

$$
\begin{aligned}
(u \times v)\left(\pm \sum y_1 \otimes (a,1) s_1(C_k y_1)\right) &= (-\alpha m_2) u(y_1) \otimes v(z_1) + (-\beta m_2) u(y_1) \otimes v(z_2) \\
&+ \left(\frac{\alpha\beta m_2}{2}(\gamma + \delta + m_2 + 1 - \det\theta)\right) u(y_1) \otimes v(z_3), \\
(u \times v)\left(\pm \sum y_1 \otimes (a,1) s_1(D_k y_2)\right) &= (-\gamma n_2) u(y_1) \otimes v(z_1) + (-\delta n_2) u(y_1) \otimes v(z_2) \\
&+ \left(-\gamma n_2 - \frac{\gamma\delta n_2}{2}(-\alpha - \beta + n_2 - 1 + \det\theta)\right) u(y_1) \otimes v(z_3), \\
(u \times v)\left(\mp \sum y_2 \otimes (b,1) s_1(A_k y_1)\right) &= (\alpha m_1) u(y_2) \otimes v(z_1) + (\beta m_1) u(y_2) \otimes v(z_2) \\
&+ \left(\frac{-\alpha\beta m_1}{2}(\gamma + \delta + m_1 + 1 - \det\theta)\right) u(y_2) \otimes v(z_3), \\
(u \times v)\left(\mp \sum y_2 \otimes (b,1) s_1(B_k y_2)\right) &= (\gamma n_1) u(y_2) \otimes v(z_1) + (\delta n_1) u(y_2) \otimes v(z_2) \\
&+ \left(\frac{\gamma\delta n_1}{2}(-\alpha - \beta + n_1 - 1 + \det\theta)\right) u(y_2) \otimes v(z_3).
\end{aligned}
$$

Substituindo em (3.44), e recordando que

$$
\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}^{-1},
$$

obtemos que o produto $[u] \smile [v] \in H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ é representado pelo homomorfismo $(u \smile v) \in$

$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G\rtimes\mathbb{Z}]}(P_3,\mathbb{Z})$ definido por

$$\begin{aligned}(u\smile v)(w) &= (u\times v)\Delta_{12}(w)\\ &= u(y_1)\otimes v(z_2) - u(y_2)\otimes v(z_1)+\\ &+\left[\frac{\alpha\beta m_2}{2}(\gamma+\delta+m_2+1-\det\theta)-\gamma n_2-\frac{\gamma\delta n_2}{2}(-\alpha-\beta+n_2-1+\det\theta)+\right.\\ &\quad\left.\alpha|J_1|\sum_{m\in I_1}m+\gamma|I_1|\sum_{n\in J_1}n-\alpha|J_2|\sum_{m\in I_2}m-\gamma|I_2|\sum_{n\in J_2}n\right]u(y_1)\otimes v(z_3)+\\ &+\left[\frac{-\alpha\beta m_1}{2}(\gamma+\delta+m_1+1-\det\theta)+\frac{\gamma\delta n_1}{2}(-\alpha-\beta+n_1-1+\det\theta)+\right.\\ &\quad\left.\beta|J_1|\sum_{m\in I_1}m+\delta|I_1|\sum_{n\in J_1}n-\beta|J_2|\sum_{m\in I_2}m-\delta|I_2|\sum_{n\in J_2}n\right]u(y_2)\otimes v(z_3)+\\ &+(\det\theta)u(y_3)\otimes v(z_3).\end{aligned}\tag{3.45}$$

Podemos simplificar a equação acima fazendo as seguintes observações. Em primeiro lugar, temos

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha\beta m_2}{2}(\gamma+\delta+m_2+1-\det\theta)-\gamma n_2-\frac{\gamma\delta n_2}{2}(-\alpha-\beta+n_2-1+\det\theta)=\\ &\qquad=\begin{cases}0, & \text{se } \det\theta=1\\ \alpha\gamma(\delta-\beta-1), & \text{se } \det\theta=-1,\end{cases}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}&\frac{-\alpha\beta m_1}{2}(\gamma+\delta+m_1+1-\det\theta)+\frac{\gamma\delta n_1}{2}(-\alpha-\beta+n_1-1+\det\theta)=\\ &\qquad=\begin{cases}0, & \text{se } \det\theta=1,\\ \beta\delta(\gamma-\alpha+1), & \text{se } \det\theta=-1.\end{cases}\end{aligned}$$

Ambas as igualdades acimas são obtidas simplesmente substituindo os valores de m_1, n_1, m_2 e n_2. Vale ainda o seguinte resultado:

Lema 3.6 *Seja $S\colon\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ a função definida por*

$$S(x,y)=x|J_1|\sum_{m\in I_1}m+y|I_1|\sum_{n\in J_1}n-x|J_2|\sum_{m\in I_2}m-y|I_2|\sum_{n\in J_2}n,$$

em que os conjuntos I_1, J_1, I_2 e J_2 são dados pela Tabela 3.1. Então

$$S(\alpha,\gamma)=\begin{cases}\dfrac{1-\alpha-\gamma-\alpha\gamma}{2}, & \textit{se } \det\theta=1,\\[2mm] \dfrac{-1+\alpha+\gamma-\alpha\gamma}{2}, & \textit{se } \det\theta=-1,\end{cases}$$

e

$$S(\beta,\delta)=\begin{cases}\dfrac{1-\beta-\delta+\beta\delta}{2}, & \textit{se } \det\theta=1,\\[2mm] \dfrac{-1+\beta+\delta+\beta\delta}{2}, & \textit{se } \det\theta=-1.\end{cases}$$

Demonstração: A demonstração do lema é, de fato, direta. Para cada um dos casos listados na Tabela 3.1, calculamos $S(\alpha,\gamma)$ e $S(\beta,\delta)$ simplesmente efetuando a substituição dos valores de m_1, n_1, m_2 e n_2, recordando que

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{bmatrix} -\delta & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix}.$$

■

Com o lema acima e a observação antes dele, a equação (3.45) pode ser escrita da seguinte maneira: se $\det\theta = 1$, então

$$(u \smile v)(w) = u(y_1)\otimes v(z_2) - u(y_2)\otimes v(z_1) + \left(\frac{1-\alpha-\gamma-\alpha\gamma}{2}\right) u(y_1)\otimes v(z_3) + \left(\frac{1-\beta-\delta+\beta\delta}{2}\right) u(y_2)\otimes v(z_3) + u(y_3)\otimes v(z_3), \tag{3.46}$$

e, se $\det\theta = -1$,

$$\begin{aligned}(u \smile v)(w) = {} & u(y_1)\otimes v(z_2) - u(y_2)\otimes v(z_1) + \\ & \left[\alpha\gamma(\delta-\beta-1) + \left(\frac{-1+\alpha+\gamma-\alpha\gamma}{2}\right)\right] u(y_1)\otimes v(z_3) + \\ & \left[\beta\delta(\gamma-\alpha+1) + \left(\frac{-1+\beta+\delta+\beta\delta}{2}\right)\right] u(y_2)\otimes v(z_3) - u(y_3)\otimes v(z_3).\end{aligned} \tag{3.47}$$

Com estas equações e observando que um isomorfismo $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}$ é dado por $m\otimes n\mapsto mn$, podemos agora calcular os produtos

$$H^p(G\rtimes\mathbb{Z},\mathbb{Z})\otimes H^q(G\rtimes\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile} H^{p+q}(G\rtimes\mathbb{Z},\mathbb{Z}).$$

Usando a notação do Teorema 3.2, dividimos os cálculos em vários casos, dependendo do posto de $(\theta - I)$ e de $\det(\theta)$.

Primeiro caso: $\text{posto}(\theta - I) = 0$. Temos $\theta = I$ e

$$\begin{aligned} H^1(G\rtimes\mathbb{Z},\mathbb{Z}) &= \langle[y_1^*]\rangle\oplus\langle[y_2^*]\rangle\oplus\langle[y_3^*]\rangle \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, \\ H^2(G\rtimes\mathbb{Z},\mathbb{Z}) &= \langle[z_1^*]\rangle\oplus\langle[z_2^*]\rangle\oplus\langle[z_3^*]\rangle \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, \\ H^3(G\rtimes\mathbb{Z},\mathbb{Z}) &= \langle[w^*]\rangle \cong \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Das equações (3.43) e (3.46), temos

$$\begin{aligned} &[y_1^*]^2 = [y_2^*]^2 = [y_3^*]^2 = 0, \\ &[y_1^*] \smile [y_2^*] = [z_3^*], \\ &[y_1^*] \smile [y_3^*] = [z_1^*], \\ &[y_2^*] \smile [y_3^*] = [z_2^*], \\ &[y_1^*] \smile [z_1^*] = 0, \\ &[y_1^*] \smile [z_2^*] = [w^*], \\ &[y_1^*] \smile [z_3^*] = 0, \\ &[y_2^*] \smile [z_1^*] = -[w^*], \\ &[y_2^*] \smile [z_2^*] = 0, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[y_2^*] \smile [z_3^*] &= 0,\\
[y_3^*] \smile [z_1^*] &= 0,\\
[y_3^*] \smile [z_2^*] &= 0,\\
[y_3^*] \smile [z_3^*] &= [w^*].
\end{aligned}
$$

Segundo caso: posto$(\theta - I) = 1$ e $\det\theta = 1$. Como na demonstração do teorema 3.2, supondo que $1 + m_1 \neq 0$ ou $n_1 \neq 0$ (o caso em que $1 + m_1 = n_1 = 0$ pode ser analisado analogamente), temos

$$I - \theta^{-1} = \begin{bmatrix} 1+m_1 & m_2 \\ n_1 & 1+n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qr' & pr' \\ qs' & ps' \end{bmatrix},$$

em que os inteiros p e q satisfazem $\mathrm{mdc}(p,q) = 1$ e $p, q \neq 0$. Os geradores de $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ são $[u]$ e $[y_3^*]$, em que

$$u = -\frac{qs'}{\mathrm{mdc}(qr', qs')} y_1^* + \frac{qr'}{\mathrm{mdc}(qr', qs')} y_2^* = -\frac{s'}{\mathrm{mdc}(r', s')} y_1^* + \frac{r'}{\mathrm{mdc}(r', s')} y_2^*.$$

Podemos dizer ainda mais: temos $\det(I - \theta^{-1}) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \delta = 2$. Mas $\alpha + \delta = 2 \Leftrightarrow (1 - qr') + (1 - ps') = 2 \Leftrightarrow qr' + ps' = 0$. Portanto $p \mid r'$ e $q \mid s'$. Escrevendo $r' = pr''$ e $s' = qs''$, temos então $pqr'' + pqs'' = 0 \Leftrightarrow s'' = -r''$. Assim, temos

$$I - \theta^{-1} = \begin{bmatrix} 1+m_1 & m_2 \\ n_1 & 1+n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\delta) & \gamma \\ \beta & (1-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pqr'' & p^2r'' \\ -q^2r'' & -pqr'' \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

e, além disso, $\mathrm{mdc}(\beta, \gamma) = \mathrm{mdc}(r', s') = |r''|$. Podemos então reescrever o homomorfismo u:

$$u = -\frac{s'}{\mathrm{mdc}(r', s')} y_1^* + \frac{r'}{\mathrm{mdc}(r', s')} y_2^* = qy_1^* + py_2^*.$$

Usando a equação (3.43), temos

$$
\begin{aligned}
(u \smile u)(z_1) &= -\frac{(1+pqr'')(pqr'')(pqr''-1)q^2}{2} + \frac{(q^2r'')(pqr'')(pqr''-1)pq}{2} + \\
&\quad + \left(-q^2r'' + \frac{(p^2r'')(-q^2r'')(-q^2r''-1)}{2}\right) pq + \frac{(1-pqr'')(-q^2r'')(-q^2r''-1)p^2}{2}\\
&= \frac{pq^2(p-q)r''}{2},\\
(u \smile u)(z_2) &= \frac{p^2q(p-q)r''}{2},\\
(u \smile u)(z_3) &= 0.
\end{aligned}
$$

Assim, $(u \smile u) = \dfrac{pq(p-q)r''}{2}(qz_1^* + pz_2^*)$. Sabemos que $H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{mdc}(\beta,\gamma)} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{r''} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. O gerador de um dos fatores $\mathbb{Z}$ de $H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ é $[z_3^*]$. Os outros dois geradores são obtidos a partir da forma normal de Smith de

$$I - \theta^{-1} = \begin{bmatrix} 1+m_1 & m_2 \\ n_1 & 1+n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pqr'' & p^2r'' \\ -q^2r'' & -pqr'' \end{bmatrix}.$$

Sendo k e ℓ inteiros tais que $pk + q\ell = 1$, temos $\begin{bmatrix} \ell & -p \\ k & q \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ e

$$\begin{bmatrix} \ell & -p \\ k & q \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} q & p \\ -k & \ell \end{bmatrix},$$

o que nos dá

$$(I - \theta^{-1}) \begin{bmatrix} \ell & -p \\ k & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pr'' & 0 \\ -qr'' & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \ell & -p \\ k & q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qz_1^* + pz_2^* \\ -kz_1^* + \ell z_2^* \end{bmatrix}.$$

Logo o gerador do fator $\mathbb{Z}_{r''}$ de $H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ é a classe do homomorfismo $qz_1^* + pz_2^*$, e o gerador de um dos fatores $\mathbb{Z}$ de $H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ é $-kz_1^* + \ell z_2^*$.

Como $pq(p-q)$ é sempre par, temos

$$(u \smile u) = \left(\frac{pq(p-q)}{2} \right) \cdot r''(qz_1^* + pz_2^*),$$

o que significa que $[u]^2 = 0$. Também temos $[y_3^*]^2 = 0$. Calculemos $[u] \smile [y_3^*]$: usando a equação (3.43), temos

$$\begin{aligned}
(u \smile y_3^*)(z_1) &= q, \\
(u \smile y_3^*)(z_2) &= p, \\
(u \smile y_3^*)(z_3) &= 0,
\end{aligned}$$

portanto $[u] \smile [y_3^*] = [qz_1^* + pz_2^*]$.

Para calcularmos os produtos $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \otimes H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile} H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, usamos a equação (3.46). Obtemos facilmente

$$\begin{aligned}
&[u] \smile [qz_1^* + pz_2^*] = 0, \\
&[u] \smile [-kz_1^* + \ell z_2^*] = [w^*], \\
&[y_3^*] \smile [qz_1^* + pz_2^*] = 0, \\
&[y_3^*] \smile [-kz_1^* + \ell z_2^*] = 0, \\
&[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*].
\end{aligned}$$

O cálculo que resta a fazer neste caso, é $[u] \smile [z_3^*]$. A equação (3.46) nos dá

$$(u \smile z_3^*)(w) = \left(\frac{1 - \alpha - \gamma - \alpha\gamma}{2} \right) q + \left(\frac{1 - \beta - \delta + \beta\delta}{2} \right) p \tag{3.49}$$

Se fizermos a suposição (sem perda de generalidade) que $q \geq 0$, então de (3.48) segue que

$$r'' = -\frac{\beta}{|\beta|} \operatorname{mdc}(\beta, \gamma) = \frac{\gamma}{|\gamma|} \operatorname{mdc}(\beta, \gamma)$$

e

$$q = \sqrt{\frac{-\beta}{r''}} = \sqrt{\frac{|\beta|}{\operatorname{mdc}(\beta, \gamma)}}.$$

Ainda temos

$$\frac{p}{q} = \frac{1 - \alpha}{\beta} \Leftrightarrow p = \sqrt{\frac{|\beta|}{\operatorname{mdc}(\beta, \gamma)}} \cdot \frac{1 - \alpha}{\beta},$$

e se substituirmos os valores de p e q em (3.49), obtemos

$$
\begin{aligned}
[u] \smile [z_3^*] &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{|\beta|}{\mathrm{mdc}(\beta,\gamma)}}\left(1-\alpha-\gamma-\alpha\gamma+(1-\beta-\delta+\beta\delta)\frac{1-\alpha}{\beta}\right)[w^*] \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{|\beta|}{\mathrm{mdc}(\beta,\gamma)}}\left(1-\alpha-\gamma-\alpha\gamma+\frac{(1-\beta)(1-\delta)(1-\alpha)}{\beta}\right)[w^*]. \qquad (3.50)
\end{aligned}
$$

Mas temos ainda $\det\theta = 1$ e $\alpha+\delta = 2$, logo $\alpha(2-\alpha)-\beta\gamma = 1 \Leftrightarrow -\beta\gamma = (\alpha-1)^2$ e $1-\delta = \alpha-1$. Substituindo em (3.50), ficamos com

$$
\begin{aligned}
[u] \smile [z_3^*] &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{|\beta|}{\mathrm{mdc}(\beta,\gamma)}}\left(1-\alpha-\gamma-\alpha\gamma-\frac{(1-\beta)(\alpha-1)^2}{\beta}\right)[w^*] \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{|\beta|}{\mathrm{mdc}(\beta,\gamma)}}(1-\alpha-\gamma-\alpha\gamma+(1-\beta)\gamma)[w^*] \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{|\beta|}{\mathrm{mdc}(\beta,\gamma)}}(1-\alpha-\alpha\gamma-\beta\gamma)[w^*]
\end{aligned}
$$

Terceiro caso: $\mathrm{posto}(\theta - I) = 1$ e $\det\theta = -1$. Novamente supomos $1+m_1 \neq 0$ ou $n_1 \neq 0$ (a análise quando $1+m_1 = n_1 = 0$ é análoga) e escrevemos

$$
I - \theta^{-1} = \begin{bmatrix} 1+m_1 & m_2 \\ n_1 & 1+n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qr' & pr' \\ qs' & ps' \end{bmatrix},
$$

em que os inteiros p e q satisfazem $\mathrm{mdc}(p,q) = 1$ e $p,q \neq 0$. Neste caso, temos $\det(I-\theta^{-1}) = 0 \Leftrightarrow \alpha+\delta = 0$. Portanto $(1+m_1)+(1+n_2) = (1+\delta)+(1+\alpha) = 2 \Leftrightarrow qr'+ps' = 2$. Logo $\mathrm{mdc}(\beta,\gamma,2) = \mathrm{mdc}(r',s') \in \{1,2\}$. Separamos então este caso em dois subcasos.

No primeiro subcaso, vamos supor que $\mathrm{mdc}(r',s') = 1$. Sendo assim, temos

$$
\begin{aligned}
H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle [u] \rangle \oplus \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \\
H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle [-kz_1^* + \ell z_2^*] \rangle \cong \mathbb{Z}, \\
H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2,
\end{aligned}
$$

em que $u = -s'y_1^* + r'y_2^*$ e os inteiros k e ℓ satisfazem $pk+q\ell = 1$. Analisando a forma normal de Smith de $(I-\theta^{-1})$ como fizemos no caso anterior, vemos que neste subcaso temos $[qz_1^*+pz_2^*] = 0$ em $H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Usando a equação (3.43), obtemos

$$
(u \smile u) = \frac{r's'(-r'-s')}{2}(qz_1^* + pz_2^*),
$$

o que implica $[u]^2 = 0$. Também temos $[y_3^*]^2 = 0$, e

$$
(u \smile y_3^*) = -s'z_1^* + r'z_2^*.
$$

Como $pk + q\ell = 1 \Leftrightarrow p(2k) + q(2\ell) = 2$ e $ps' + qr' = 2$, existe um inteiro m tal que

$$
\left| \begin{array}{l} s' = 2k - qm \\ r' = 2\ell + pm \end{array} \right. .
$$

Sabemos que m é ímpar, pois $\text{mdc}(r', s') = 1$. Logo temos

$$[u] \smile [y_3^*] = [-2kz_1^* + 2\ell z_2^*] + [mqz_1^* + mpz_2^*] = 2[-kz_1^* + \ell z_2^*].$$

Quanto aos produtos $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \otimes H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile} H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, usamos a equação (3.47) para obter imediatamente que $[y_3^*] \smile [-kz_1^* + \ell z_2^*] = 0$, e temos ainda

$$\begin{aligned}(u \smile (-kz_1^* + \ell z_2^*)) &= (r'k - s'\ell)w^* \\ &= ((2\ell + pm)k - (2k - qm)\ell)w^* \\ &= mw^*,\end{aligned}$$

e como m é ímpar, $[u] \smile [-kz_1^* + \ell z_2^*] = [w^*]$.

No segundo subcaso, $\text{mdc}(r', s') = 2$, e

$$\begin{aligned}H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle [u] \rangle \oplus \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \\ H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle [qz_1^* + pz_2^*] \rangle \oplus \langle [-kz_1^* + \ell z_2^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, \\ H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2,\end{aligned}$$

em que $u = -\frac{s'}{2}y_1^* + \frac{r'}{2}y_2^*$ e os inteiros k e ℓ são tais que $pk + q\ell = 1$. Usando a equação (3.43), temos

$$(u \smile u) = \frac{r's'(-r' - s')}{8}(qz_1^* + pz_2^*).$$

Lembrando que r' e s' são pares, temos $r's'(-r' - s') \equiv 0 \pmod{16}$, o que implica $[u]^2 = 0$, pois $2[qz_1^* + pz_2^*] = 0$ em $H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Também temos $[y_3^*]^2 = 0$ e

$$(u \smile y_3^*) = -\frac{s'}{2}z_1^* + \frac{r'}{2}z_2^*.$$

Novamente sabemos que existe um inteiro m tal que

$$\left| \begin{aligned} s' &= 2k - qm \\ r' &= 2\ell + pm \end{aligned} \right.$$

Sabemos que neste caso m é par, $m = 2m'$, logo

$$(u \smile y_3^*) = (-k + qm')z_1^* + (\ell + pm')z_2^* = (-kz_1^* + \ell z_2^*) + m'(qz_1^* + pz_2^*),$$

o que nos dá $[u] \smile [y_3^*] = m'[qz_1^* + pz_2^*] + [-kz_1^* + \ell z_2^*]$, e o inteiro m' pode ser par ou ímpar.

Ainda resta calcularmos $[u] \smile [qz_1^* + pz_2^*]$ e $[u] \smile [-kz_1^* + \ell z_2^*]$, pois é imediato a partir da equação (3.47) que $[y_3^*] \smile [qz_1^* + pz_2^*] = 0$ e $[y_3^*] \smile [-kz_1^* + \ell z_2^*] = 0$. Temos

$$(u \smile (qz_1^* + pz_2^*)) = \frac{-s'p - r'q}{2}w^* = -w^*,$$

de onde segue que $[u] \smile [qz_1^* + pz_2^*] = [w^*]$. Finalmente,

$$(u \smile (-kz_1^* + \ell z_2^*)) = \frac{kr' - \ell s'}{2}w^*,$$

e portanto $[u] \smile [-kz_1^* + \ell z_2^*] = \frac{kr' - \ell s'}{2}[w^*]$, e o inteiro $\frac{kr' - \ell s'}{2}$ pode ser par ou ímpar.

Quarto caso: $\operatorname{posto}(\theta - I) = 2$ e $\det\theta = 1$. Neste caso temos

$$\begin{aligned}
H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z},\\
H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle [u] \rangle \oplus \langle [v] \rangle \oplus \langle [z_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_{c_1} \oplus \mathbb{Z}_{c_2} \oplus \mathbb{Z},\\
H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

Da equação (3.43), temos $[y_3^*]^2 = 0$. Os geradores dos fatores $\mathbb{Z}_{c_1}$ e $\mathbb{Z}_{c_2}$ de $H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ são classes de homomorfismos u e v que são combinações lineares de z_1^* e z_2^*, logo a equação (3.46) mostra imediatamente que $[y_3^*] \smile [u] = [y_3^*] \smile [v] = 0$ e que $[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*]$.

Quinto caso: $\operatorname{posto}(\theta - I) = 2$ e $\det\theta = -1$. Neste caso temos

$$\begin{aligned}
H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z},\\
H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle [u] \rangle \oplus \langle [v] \rangle \cong \mathbb{Z}_{c_1} \oplus \mathbb{Z}_{c_2},\\
H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2,
\end{aligned}$$

Da equação (3.43), temos $[y_3^*]^2 = 0$. Os geradores dos fatores $\mathbb{Z}_{c_1}$ e $\mathbb{Z}_{c_2}$ de $H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ são classes de homomorfismos u e v que são combinações lineares de z_1^* e z_2^*, logo a equação (3.47) mostra que $[y_3^*] \smile [u] = [y_3^*] \smile [v] = 0$.

Resumimos todos os cálculos acima no seguinte resultado:

Teorema 3.7 *Seja $G \rtimes \mathbb{Z} = \{(a^m b^n, t^k) \;:\; m, n, k \in \mathbb{Z}\}$ o produto semi-direto entre $G = \langle a, b \mid ab = ba \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$, no qual a ação de $\mathbb{Z}$ sobre G é definida por $t \cdot a = a^\alpha b^\beta$, $t \cdot b = a^\gamma b^\delta$, com $\theta = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$.*

1. *Se $\operatorname{posto}(\theta - I) = 0$, então*

$$\begin{aligned}
H^0(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z},\\
H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle \zeta_1 \rangle \oplus \langle \zeta_2 \rangle \oplus \langle \zeta_3 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},\\
H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle \xi_1 \rangle \oplus \langle \xi_2 \rangle \oplus \langle \xi_3 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},\\
H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle \chi \rangle \cong \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
&\zeta_1^2 = \zeta_2^2 = \zeta_3^2 = 0,\\
&\zeta_1 \smile \zeta_2 = \xi_3, \quad \zeta_1 \smile \zeta_3 = \xi_1, \quad \zeta_2 \smile \zeta_3 = \xi_2,\\
&\zeta_1 \smile \xi_1 = \zeta_1 \smile \xi_3 = \zeta_2 \smile \xi_2 = \zeta_2 \smile \xi_3 = \zeta_3 \smile \xi_1 = \zeta_3 \smile \xi_2 = 0,\\
&\zeta_1 \smile \xi_2 = \zeta_3 \smile \xi_3 = \chi, \quad \zeta_2 \smile \xi_1 = -\chi.
\end{aligned}$$

2. *Se $\operatorname{posto}(\theta - I) = 1$ e $\det\theta = 1$, então*

$$\begin{aligned}
H^0(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z},\\
H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle \zeta_1 \rangle \oplus \langle \zeta_2 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},\\
H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle \xi_1 \rangle \oplus \langle \xi_2 \rangle \oplus \langle \xi_3 \rangle \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{mdc}(\beta,\gamma)} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},\\
H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \langle \chi \rangle \cong \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
&\mathrm{mdc}(\beta,\gamma)\cdot\xi_1 = 0,\\
&\zeta_1^2 = \zeta_2^2 = 0,\\
&\zeta_1 \smile \zeta_2 = \xi_1,\\
&\zeta_1 \smile \xi_1 = 0,\\
&\zeta_1 \smile \xi_2 = \chi,\\
&\zeta_1 \smile \xi_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{|\beta|}{\mathrm{mdc}(\beta,\gamma)}}(1-\alpha-\alpha\gamma-\beta\gamma)\chi,\\
&\zeta_2 \smile \xi_1 = 0,\\
&\zeta_2 \smile \xi_2 = 0,\\
&\zeta_2 \smile \xi_3 = 0.
\end{aligned}$$

3. *Se* $\mathrm{posto}(\theta - I) = 1$ *e* $\det\theta = -1$ *e* $\mathrm{mdc}(\beta,\gamma,2) = 1$*, então*

$$\begin{aligned}
&H^0(G\rtimes\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},\\
&H^1(G\rtimes\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \langle\zeta_1\rangle\oplus\langle\zeta_2\rangle \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z},\\
&H^2(G\rtimes\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \langle\xi\rangle \cong \mathbb{Z},\\
&H^3(G\rtimes\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \langle\chi\rangle \cong \mathbb{Z}_2,
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
&\zeta_1^2 = \zeta_2^2 = 0,\\
&\zeta_1 \smile \zeta_2 = 2\xi,\\
&\zeta_1 \smile \xi = \chi,\\
&\zeta_2 \smile \xi = 0.
\end{aligned}$$

4. *Se* $\mathrm{posto}(\theta - I) = 1$ *e* $\det\theta = -1$ *e* $\mathrm{mdc}(\beta,\gamma,2) = 2$*, então*

$$\begin{aligned}
&H^0(G\rtimes\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},\\
&H^1(G\rtimes\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \langle\zeta_1\rangle\oplus\langle\zeta_2\rangle \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z},\\
&H^2(G\rtimes\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \langle\xi_1\rangle\oplus\langle\xi_2\rangle \cong \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z},\\
&H^3(G\rtimes\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \langle\chi\rangle \cong \mathbb{Z}_2,
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
&2\cdot\xi_1 = 0\\
&\zeta_1^2 = \zeta_2^2 = 0,\\
&\zeta_1 \smile \zeta_2 = m\cdot\xi_1 + \xi_2,\\
&\zeta_1 \smile \xi_1 = \chi,\\
&\zeta_1 \smile \xi_2 = \left(\frac{kr' - \ell s'}{2}\right)\cdot\chi.
\end{aligned}$$

Nestas equações, os inteiros k *e* ℓ *são tais que* $pk + q\ell = 1$*, em que* p *e* q *são inteiros primos entre si tais que* $\dfrac{p}{q} = \dfrac{\gamma}{1+\delta} = \dfrac{1+\alpha}{\beta}$*. Ainda, os inteiros* r'*,* s' *e* m *são tais que* $ps' + qr' = 2$*,* $m = \dfrac{2k - s'}{2q} = \dfrac{r' - 2\ell}{2p}$*.*

5. *Se* $\mathrm{posto}(\theta - I) = 2$ *e* $\det\theta = 1$*, então*

$$\begin{aligned}
&H^1(G\rtimes\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \langle\zeta\rangle \cong \mathbb{Z},\\
&H^2(G\rtimes\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \langle\xi_1\rangle\oplus\langle\xi_2\rangle\oplus\langle\xi_3\rangle \cong \mathbb{Z}_{c_1}\oplus\mathbb{Z}_{c_2}\oplus\mathbb{Z},\\
&H^3(G\rtimes\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \langle\chi\rangle \cong \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
&c_1 \cdot \xi_1 = c_2 \cdot \xi_2 = 0,\\
&\zeta^2 = 0,\\
&\zeta \smile \xi_1 = \zeta \smile \xi_2 = 0,\\
&\zeta \smile \xi_3 = \chi.
\end{aligned}$$

Nestas equações, os inteiros positivos c_1 *e* c_2 *são tais que* $c_1 \mid c_2$ *e* $c_1c_2 = |\det(\theta - I)|$.

6. *Se* $\operatorname{posto}(\theta - I) = 2$ *e* $\det\theta = -1$, *então*

$$\begin{aligned}
&H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \langle\zeta\rangle \cong \mathbb{Z},\\
&H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \langle\xi_1\rangle \oplus \langle\xi_2\rangle \cong \mathbb{Z}_{c_1} \oplus \mathbb{Z}_{c_2},\\
&H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \langle\chi\rangle \cong \mathbb{Z}_2,
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
&c_1 \cdot \xi_1 = c_2 \cdot \xi_2 = 0,\\
&\zeta^2 = 0,\\
&\zeta \smile \xi_1 = \zeta \smile \xi_2 = 0.
\end{aligned}$$

Nestas equações, os inteiros positivos c_1 *e* c_2 *são tais que* $c_1 \mid c_2$ *e* $c_1c_2 = |\det(\theta - I)|$.

O cálculo do produto cup em $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$ também pode ser feito e não apresenta nenhuma nova dificuldade. A matriz $\begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{bmatrix}$, quando reduzida mód 2, é uma das seguintes matrizes:

1. $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, 2. $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, 3. $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, 4. $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, 5. $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, 6. $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

No primeiro caso, temos

$$\begin{aligned}
&H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle[y_1^*]\rangle \oplus \langle[y_2^*]\rangle \oplus \langle[y_3^*]\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,\\
&H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle[z_1^*]\rangle \oplus \langle[z_2^*]\rangle \oplus \langle[z_3^*]\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,\\
&H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle[w^*]\rangle \cong \mathbb{Z}_2,
\end{aligned}$$

e as equações (3.43), (3.46) e (3.47) dão

$$\begin{aligned}
&[y_1^*]^2 = \frac{1+m_1}{2}[z_1^*] + \frac{\gamma}{2}[z_2^*]\\
&[y_2^*]^2 = \frac{\beta}{2}[z_1^*] + \left(1 + \frac{n_2-1}{2}\right)[z_2^*]\\
&[y_3^*]^2 = 0\\
&[y_1^*] \smile [y_2^*] = 0\\
&[y_1^*] \smile [y_3^*] = [z_1^*]\\
&[y_2^*] \smile [y_3^*] = [z_2^*]\\
&[y_1^*] \smile [z_1^*] = 0\\
&[y_1^*] \smile [z_2^*] = [w^*]\\
&[y_1^*] \smile [z_3^*] = S(\alpha,\gamma)[w^*]\\
&[y_2^*] \smile [z_3^*] = S(\beta,\delta)[w^*]\\
&[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*].
\end{aligned}$$

No segundo caso, temos

$$\begin{aligned}
&H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [y_1^* + y_2^*] \rangle \oplus \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,\\
&H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [z_1^*] \rangle \oplus \langle [z_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad (\text{obs.: } [z_1^*] = [z_2^*])\\
&H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2,
\end{aligned}$$

e as equações (3.43), (3.46) e (3.47) dão

$$\begin{aligned}
&[y_1^* + y_2^*]^2 = \left(1 + \frac{\alpha + \delta + m_2 + n_1}{2}\right)[z_1^*]\\
&[y_3]^2 = 0\\
&[y_1^* + y_2^*] \smile [y_3^*] = 0\\
&[y_1^* + y_2^*] \smile [z_1^*] = [w^*]\\
&[y_1^* + y_2^*] \smile [z_3^*] = (S(\alpha, \gamma) + S(\beta, \delta))[w^*]\\
&[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*].
\end{aligned}$$

No terceiro caso, temos

$$\begin{aligned}
&H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2,\\
&H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [z_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2,\\
&H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2,
\end{aligned}$$

e as equações (3.43), (3.46) e (3.47) dão

$$\begin{aligned}
&[y_3^*]^2 = 0\\
&[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*].
\end{aligned}$$

No quarto caso, temos

$$\begin{aligned}
&H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [y_1^*] \rangle \oplus \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,\\
&H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [z_2^*] \rangle \oplus \langle [z_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,\\
&H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2,
\end{aligned}$$

e as equações (3.43), (3.46) e (3.47) dão

$$\begin{aligned}
&[y_1^*]^2 = \frac{\gamma}{2}[z_2^*]\\
&[y_3^*]^2 = 0\\
&[y_1^*] \smile [y_3^*] = 0\\
&[y_1^*] \smile [z_2^*] = [w^*]\\
&[y_1^*] \smile [z_3^*] = S(\alpha, \gamma)[w^*]\\
&[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*]
\end{aligned}$$

No quinto caso, temos

$$\begin{aligned}
&H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [y_2^*] \rangle \oplus \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,\\
&H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [z_1^*] \rangle \oplus \langle [z_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,\\
&H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2,
\end{aligned}$$

e as equações (3.43), (3.46) e (3.47) dão

$$
\begin{aligned}
&[y_2^*]^2 = \frac{\beta}{2}[z_1^*] \\
&[y_3^*]^2 = 0 \\
&[y_2^*] \smile [y_3^*] = 0 \\
&[y_2^*] \smile [z_1^*] = [w^*] \\
&[y_2^*] \smile [z_3^*] = S(\beta,\delta)[w^*] \\
&[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*]
\end{aligned}
$$

Finalmente, no sexto caso, temos

$$
\begin{aligned}
H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) &= \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2, \\
H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) &= \langle [z_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2, \\
H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) &= \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2,
\end{aligned}
$$

e as equações (3.43), (3.46) e (3.47) dão

$$
\begin{aligned}
&[y_3^*]^2 = 0 \\
&[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*].
\end{aligned}
$$

Resumimos os resultados para $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$ no seguinte teorema:

Teorema 3.8 *Seja $G \rtimes \mathbb{Z} = \{(a^m b^n, t^k) \ : \ m,n,k \in \mathbb{Z}\}$ o produto semi-direto entre $G = \langle a, b \mid ab = ba \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$, no qual a ação de $\mathbb{Z}$ sobre G é definida por $t \cdot a = a^\alpha b^\beta$, $t \cdot b = a^\gamma b^\delta$, com $\theta = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$.*

1. *Se $\theta \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (mód 2), então*

$$
\begin{aligned}
H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) &= \langle [y_1^*] \rangle \oplus \langle [y_2^*] \rangle \oplus \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \\
H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) &= \langle [z_1^*] \rangle \oplus \langle [z_2^*] \rangle \oplus \langle [z_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \\
H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) &= \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2,
\end{aligned}
$$

com

$$
\begin{aligned}
&[y_1^*]^2 = \frac{1+m_1}{2}[z_1^*] + \frac{\gamma}{2}[z_2^*] \\
&[y_2^*]^2 = \frac{\beta}{2}[z_1^*] + \left(1 + \frac{n_2 - 1}{2}\right)[z_2^*] \\
&[y_3^*]^2 = 0 \\
&[y_1^*] \smile [y_2^*] = 0 \\
&[y_1^*] \smile [y_3^*] = [z_1^*] \\
&[y_2^*] \smile [y_3^*] = [z_2^*] \\
&[y_1^*] \smile [z_1^*] = 0 \\
&[y_1^*] \smile [z_2^*] = [w^*] \\
&[y_1^*] \smile [z_3^*] = S(\alpha,\gamma)[w^*] \\
&[y_2^*] \smile [z_3^*] = S(\beta,\delta)[w^*] \\
&[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*].
\end{aligned}
$$

2. *Se* $\theta \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \pmod 2$, *então*

$$\begin{aligned} &H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [y_1^* + y_2^*] \rangle \oplus \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \\ &H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [z_1^*] \rangle \oplus \langle [z_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad \textit{(obs.: } [z_1^*] = [z_2^*]\textit{)} \\ &H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} &[y_1^* + y_2^*]^2 = \left(1 + \frac{\alpha + \delta + m_2 + n_1}{2}\right) [z_1^*] \\ &[y_3]^2 = 0 \\ &[y_1^* + y_2^*] \smile [y_3^*] = 0 \\ &[y_1^* + y_2^*] \smile [z_1^*] = [w^*] \\ &[y_1^* + y_2^*] \smile [z_3^*] = (S(\alpha, \gamma) + S(\beta, \delta))[w^*] \\ &[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*]. \end{aligned}$$

3. *Se* $\theta \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \pmod 2$, *então*

$$\begin{aligned} &H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2, \\ &H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [z_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2, \\ &H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} &[y_3^*]^2 = 0 \\ &[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*]. \end{aligned}$$

4. *Se* $\theta \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \pmod 2$, *então*

$$\begin{aligned} &H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [y_1^*] \rangle \oplus \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \\ &H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [z_2^*] \rangle \oplus \langle [z_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \\ &H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} &[y_1^*]^2 = \frac{\gamma}{2}[z_2^*] \\ &[y_3^*]^2 = 0 \\ &[y_1^*] \smile [y_3^*] = 0 \\ &[y_1^*] \smile [z_2^*] = [w^*] \\ &[y_1^*] \smile [z_3^*] = S(\alpha, \gamma)[w^*] \\ &[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*]. \end{aligned}$$

5. *Se* $\theta \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(\text{mód}\, 2)$, *então*

$$\begin{aligned}
H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) &= \langle [y_2^*] \rangle \oplus \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \\
H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) &= \langle [z_1^*] \rangle \oplus \langle [z_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \\
H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) &= \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2,
\end{aligned}$$

e as equações (3.43), (3.46) e (3.47) dão

$$\begin{aligned}
&[y_2^*]^2 = \frac{\beta}{2}[z_1^*] \\
&[y_3^*]^2 = 0 \\
&[y_2^*] \smile [y_3^*] = 0 \\
&[y_2^*] \smile [z_1^*] = [w^*] \\
&[y_2^*] \smile [z_3^*] = S(\beta, \delta)[w^*] \\
&[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*].
\end{aligned}$$

6. *Se* $\theta \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $(\text{mód}\, 2)$, *então*

$$\begin{aligned}
H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) &= \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2, \\
H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) &= \langle [z_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2, \\
H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) &= \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_2,
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
&[y_3^*]^2 = 0 \\
&[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*].
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos também calcular o produto cup em $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$, para p um primo ímpar. Tendo como ponto de partida o Teorema 3.4, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.9 *Seja* $G \rtimes \mathbb{Z} = \{(a^m b^n, t^k) \ : \ m, n, k \in \mathbb{Z}\}$ *o produto semi-direto entre* $G = \langle a, b \mid ab = ba \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *e* $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$*, no qual a ação de* $\mathbb{Z}$ *sobre* G *é definida por* $t \cdot a = a^\alpha b^\beta$*,* $t \cdot b = a^\gamma b^\delta$*, com* $\theta = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$*.*

1. *Se* $\text{posto}_{\mathbb{Z}_p}(\theta - I) = 0$ *e* $\det \theta = 1$*, então*

$$\begin{aligned}
H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= \langle [y_1^*] \rangle \oplus \langle [y_2^*] \rangle \oplus \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p, \\
H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= \langle [z_1^*] \rangle \oplus \langle [z_2^*] \rangle \oplus \langle [z_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p, \\
H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_p,
\end{aligned}$$

e os produtos são dados por

$$\begin{aligned}
&[y_1^*]^2 = 0,\\
&[y_2^*]^2 = 0,\\
&[y_3^*]^2 = 0,\\
&[y_1^*] \smile [y_2^*] = [z_3^*],\\
&[y_1^*] \smile [y_3^*] = [z_1^*],\\
&[y_2^*] \smile [y_3^*] = [z_2^*],\\
&[y_1^*] \smile [z_1^*] = 0,\\
&[y_1^*] \smile [z_2^*] = [w^*],\\
&[y_1^*] \smile [z_3^*] = 0,\\
&[y_2^*] \smile [z_1^*] = -[w^*],\\
&[y_2^*] \smile [z_2^*] = 0,\\
&[y_2^*] \smile [z_3^*] = 0,\\
&[y_3^*] \smile [z_1^*] = 0,\\
&[y_3^*] \smile [z_2^*] = 0,\\
&[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*].
\end{aligned}$$

2. *Se* $\operatorname{posto}_{\mathbb{Z}_p}(\theta - I) = 0$ *e* $\det\theta = -1$*, então*

$$\begin{aligned}
H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= \langle [y_1^*]\rangle \oplus \langle [y_2^*]\rangle \oplus \langle [y_3^*]\rangle \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p,\\
H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= \langle [z_1^*]\rangle \oplus \langle [z_2^*]\rangle \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p,\\
H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= 0,
\end{aligned}$$

e os produtos são dados por

$$\begin{aligned}
&[y_1^*]^2 = 0,\\
&[y_2^*]^2 = 0,\\
&[y_3^*]^2 = 0,\\
&[y_1^*] \smile [y_2^*] = 0,\\
&[y_1^*] \smile [y_3^*] = [z_1^*],\\
&[y_2^*] \smile [y_3^*] = [z_2^*].
\end{aligned}$$

3. *Se* $\operatorname{posto}_{\mathbb{Z}_p}(\theta - I) = 1$ *e* $\det\theta = 1$*, então*

$$\begin{aligned}
H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= \langle [u]\rangle \oplus \langle [y_3^*]\rangle \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p,\\
H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= \frac{\langle z_1^*\rangle \oplus \langle z_2^*\rangle}{\operatorname{im}\varphi_2^*} \oplus \langle [z_3^*]\rangle \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p,\\
H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= \langle [w^*]\rangle \cong \mathbb{Z}_p,
\end{aligned}$$

no qual o elemento u é descrito da seguinte forma: sendo

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix} = -\theta^{-1} = \begin{bmatrix} -\delta & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix},$$

se $(1+m_1) \not\equiv 0 \pmod{p}$ *ou* $n_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$, *podemos tomar* $u = -n_1 y_1^* + (1+m_1)y_2^*$ *e, se* $(1+m_1) \equiv n_1 \equiv 0 \pmod{p}$, *tomamos* $u = (1+n_2)y_1^* - m_2 y_2^*$. *Supondo, sem perda de generalidade, que* $u = -n_1 y_1^* + (1+m_1)y_2^*$, *temos* $[u]^2 = [y_3^*]^2 = 0$, $[u] \smile [y_3^*] = [-n_1 z_1^* + (1+m_1)z_2^*] \in \dfrac{\langle z_1^* \rangle \oplus \langle z_2^* \rangle}{\operatorname{im} \varphi_2^*}$, $[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*]$ *e* $[y_3^*] \smile \xi = 0$ *para todo* $\xi \in \dfrac{\langle z_1^* \rangle \oplus \langle z_2^* \rangle}{\operatorname{im} \varphi_2^*}$.

4. *Se* $\operatorname{posto}_{\mathbb{Z}_p}(\theta - I) = 1$ *e* $\det \theta = -1$, *então*

$$\begin{aligned} H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= \langle [u] \rangle \oplus \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p, \\ H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= \frac{\langle z_1^* \rangle \oplus \langle z_2^* \rangle}{\operatorname{im} \varphi_2^*} \cong \mathbb{Z}_p, \\ H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= 0, \end{aligned}$$

em que u *é descrito como no caso anterior e supondo, sem perda de generalidade, que* $u = -n_1 y_1^* + (1+m_1)y_2^*$, *temos* $[u]^2 = [y_3^*]^2 = 0$, $[u] \smile [y_3^*] = [-n_1 z_1^* + (1+m_1)z_2^*] \in \dfrac{\langle z_1^* \rangle \oplus \langle z_2^* \rangle}{\operatorname{im} \varphi_2^*}$.

5. *Se* $\operatorname{posto}_{\mathbb{Z}_p}(\theta - I) = 2$ *e* $\det \theta = 1$, *então*

$$\begin{aligned} H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_p, \\ H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= \langle [z_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_p, \\ H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_p, \end{aligned}$$

com $[y_3^*]^2 = 0$ *e* $[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*]$.

6. *Se* $\operatorname{posto}_{\mathbb{Z}_p}(\theta - I) = 2$ *e* $\det \theta = -1$, *então*

$$\begin{aligned} H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_p, \\ H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= 0, \\ H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= 0, \end{aligned}$$

com $[y_3^*]^2 = 0$.

Demonstração: Em primeiro lugar, notamos que, se $\zeta \in H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$, então $\zeta^2 = 0$. De fato, temos

$$\zeta^2 = (-1)^{1 \cdot 1} \zeta^2 \Leftrightarrow 2\zeta^2 = 0 \Leftrightarrow \zeta^2 = 0,$$

pois $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) \cong \bigoplus \mathbb{Z}_p$ e p é ímpar.

Em segundo lugar, notamos também que, para efetuar os cálculos dos produtos, podemos usar as equações (3.43), (3.46) e (3.47), bastando reduzi-las módulo p.

Quando $\operatorname{posto}_{\mathbb{Z}_p}(\theta - I) = 0$ e $\det \theta = 1$, é fácil ver que os geradores dos grupos $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$, $H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$ e $H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$ são exatamente os dados no enunciado, de modo que os produtos são calculados imediatamente. Os cálculos para o caso em que $\operatorname{posto}_{\mathbb{Z}_p}(\theta - I) = 0$ e $\det \theta = -1$ é análogo, com a observação que $[z_3^*] = 0$ em $H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$.

Quando $\operatorname{posto}_{\mathbb{Z}_p}(\theta - I) = 1$, a descrição do elemento u vem imediatamente da matriz

$$[\varphi_2^*] = \begin{bmatrix} 1+m_1 & n_1 & 0 \\ m_2 & 1+n_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e os produtos são calculados usando diretamente as equações (3.43), (3.46) e (3.47). Notamos ainda que

$$\operatorname{im}\varphi_2^* = \langle (1+m_1)z_1^* + m_2 z_2^* \rangle$$

se $(1+m_1) \not\equiv 0 \pmod{p}$ ou $m_2 \not\equiv 0 \pmod{p}$ e

$$\operatorname{im}\varphi_2^* = \langle n_1 z_1^* + (1+n_2)z_2^* \rangle$$

caso contrário.

Quando $\text{posto}_{\mathbb{Z}_p}(\theta - I) = 2$, o homomorfismo φ_2^* é injetor e sua imagem é $\langle z_1^* \rangle \oplus \langle z_2^* \rangle$. Portanto, se $\det\theta = 1$, temos

$$\begin{aligned} H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_p, \\ H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= \langle [z_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_p, \\ H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) &= \langle [w^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_p, \end{aligned}$$

e $[y_3^*] \smile [z_3^*] = [w^*]$ segue diretamente de (3.46). Quando $\det\theta = -1$, então $H^1(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) = \langle [y_3^*] \rangle \cong \mathbb{Z}_p$ e $H^2(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) = H^3(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) = 0$.

■

Observações finais:

1. As técnicas usadas neste capítulo também podem nos permitir determinar a estrutura multiplicativa em $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, M)$ para coeficientes não triviais M, uma vez fixada a matriz θ.

2. Recentemente, fomos informados que o anel de cohomologia $H^*(G \rtimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$ foi determinado por J. Hillman, por métodos completamente distintos, os quais utilizam propriedades geométricas (ver [Hil]).

Capítulo 4

Cohomologia de certos grupos virtualmente cíclicos

4.1 Introdução

Dizemos que o grupo G é *virtualmente cíclico* se G contém um subgrupo cíclico de índice finito. Esta definição portanto, inclui todos os grupos finitos e, se G é infinito, existe uma sequência exata de grupos

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

com Q finito. De fato, se $A \cong \mathbb{Z}$ é um subgrupo de G, a intersecção de A com seus conjugados é um subgrupo cíclico de G com índice finito, logo podemos supor sem perda de generalidade que A é normal em G. O seguinte teorema é encontrado em [Wal67] e nos dá informação sobre os grupos infinitos virtualmente cíclicos:

Teorema 4.1 (Wall) *Seja G um grupo. São equivalentes:*

1. *G é infinito virtualmente cíclico;*
2. *Existe um subgrupo normal finito F de G tal que $\dfrac{G}{F} \cong \mathbb{Z}$ ou $\dfrac{G}{F} \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.*

No primeiro caso, quando $G/F \cong \mathbb{Z}$, dizemos que G é do *tipo I* e quando $G/F \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ dizemos que G é do *tipo II*. Quando G é do tipo I, existe uma sequência exata de grupos

$$1 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 1 ,$$

o que implica $G \cong F \rtimes \mathbb{Z}$, e quando G é do tipo II, existe uma sequência exata de grupos

$$1 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1 ,$$

e neste caso prova-se em [GG11] que existem G_1 e G_2 finitos tais que $G \cong G_1 *_F G_2$, com $(G_1 : F) = (G_2 : F) = 2$.

Neste capítulo, estaremos interessados em grupos G, infinitos e virtualmente cíclicos, que possuam as seguintes características:

- Se G é do tipo I, então o grupo finito F do Teorema 4.1 possui cohomologia periódica;
- Se G é do tipo II, então os grupos finitos G_1 e G_2 do Teorema 4.1 possuem cohomologia periódica.

Dizemos que um grupo finito G possui *cohomologia periódica* se existe um inteiro positivo d e um elemento $u \in H^d(G, \mathbb{Z})$ tal que

$$u \smile \_\_ : H^n(G, M) \to H^{n+d}(G, M)$$

seja um isomorfismo para todo $n \geq 1$. Os grupos que possuem cohomologia periódica são completamente caracterizados pelo Teorema de Suzuki-Zassenhaus, o qual pode ser encontrado em [AM04]:

Teorema 4.2 (Suzuki-Zassenhaus) *Os grupos finitos G que possuem cohomologia periódica pertencem a uma das famílias descritas na tabela abaixo:*

Família	*Definição*	*Condições*
1	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b$	$\mathrm{mdc}(a, b) = 1$
2	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\beta (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})$	$\mathrm{mdc}(a, b) = \mathrm{mdc}(ab, 2) = 1$
3	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\gamma (\mathbb{Z}_b \times T_i)$	$\mathrm{mdc}(a, b) = \mathrm{mdc}(ab, 6) = 1$
4	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\tau (\mathbb{Z}_b \times O_i^*)$	$\mathrm{mdc}(a, b) = \mathrm{mdc}(ab, 6) = 1$
5	$(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b) \times SL_2(\mathbb{F}_p)$	$\mathrm{mdc}(a, b) = \mathrm{mdc}(ab, p(p^2 - 1)) = 1$
6	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\mu (\mathbb{Z}_b \times TL_2(\mathbb{F}_p))$	$\mathrm{mdc}(a, b) = \mathrm{mdc}(ab, p(p^2 - 1)) = 1$

Existe o interesse em estudar a cohomologia dos grupos infinitos de cohomologia periódica, em particular dos virtualmente cíclicos. Neste capítulo, estudaremos a cohomologia de $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_{2n} *_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z}_{2n} \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_{2n}$, que são grupos do tipo II, e do grupo $(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b) \rtimes \mathbb{Z}$, que é do tipo I e obtida a partir da primeira família no Teorema de Suzuki-Zassenhaus.

4.2 O anel de cohomologia de $G = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$

Seja $G = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Explicitamente, sendo s um gerador de $\mathbb{Z}$ e t um gerador de $\mathbb{Z}_2$, temos $G = \{(s^m, t^n) \ : \ m, n \in \mathbb{Z}\}$ com operação dada por

$$(s^{m_1}, t^{n_1}) \cdot (s^{m_2}, t^{n_2}) = (s^{m_1 + (-1)^{n_1} m_2}, t^{n_1 + n_2}).$$

Para o grupo G, exibiremos uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo, calcularemos os grupos de cohomologia $H^*(G, \mathbb{Z})$ e também a estrutura multiplicativa em $H^*(G, \mathbb{Z})$ dada pelo produto cup.

Para construirmos uma resolução de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, novamente usaremos as ideias contidas em [Wal61], que foram resumidas no Lema 1.12 e no Teorema 1.13. Apliquemos estes resultados à extensão

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1.$$

Uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-módulo trivial é

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}\mathbb{Z} \xrightarrow{s-1} \mathbb{Z}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

enquanto que uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_2$-módulo trivial é periódica de período 2 dada por

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{t+1} \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

O módulo $A_{r,s}$ do Lema 1.12 é dado por $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}G$ para $r = 0, 1$ e zero para $r > 1$. Obtemos então o seguinte diagrama, em que os homomorfismos d_1 são os do Lema 1.12 e devem ser construídos:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}G \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & \mathbb{Z}G \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "d_1"] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2 \arrow[d, "t+1"] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}G \arrow[r, "d_0"'] \arrow[d, "d_1"'] & \mathbb{Z}G \arrow[r, "\varepsilon"'] \arrow[d, "d_1"] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2 \arrow[d, "t-1"] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}G \arrow[r, "d_0"'] & \mathbb{Z}G \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2 \arrow[d, "\varepsilon"] \\
 & & & \mathbb{Z} \arrow[d] \\
 & & & 0
\end{tikzcd}$$

Devemos construir os quatro homomorfimos d_1 do diagrama, sendo que pela periodicidade da resolução de $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_2$ os homomorfismos d_1 que ocorrem acima destes (e não são mostrados no diagrama) são os mesmos que os quatro mostrados acima.

Inicialmente, calculemos d_0 e ε. Observando o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\mathbb{Z} \arrow[r, "1\otimes(s-1)"] \arrow[d, "\cong", no head] & \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\mathbb{Z} \arrow[r, "1\otimes\varepsilon"] \arrow[d, "\cong", no head] & \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \arrow[d, "\cong", no head] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}G \arrow[r, "d_0"'] & \mathbb{Z}G \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

é imediato verificar que o homomorfismo d_0 é dado por $d_0((1, 1)) = (s, 1) - (1, 1)$ e que $\varepsilon\colon \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}_2$ é dado por $\varepsilon((s^m, t^n)) = t^n$.

Calculemos então os quatro homomorfismos d_1. Em cada um dos itens abaixo, reproduzimos a parte do diagrama (4.1) que contém os quatro homomorfismos d_1 que queremos calcular.

1. $$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, dotted, no head] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2 \arrow[d, dotted, no head] \\
0 \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, "d_1"] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2 \arrow[d, dotted, no head] \\
0 \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2
\end{tikzcd}$$

   Este d_1 deve satisfazer $\varepsilon \circ d_1 = (t-1) \circ \varepsilon$, o que ocorre se definirmos $d_1((1, 1)) = (1, t) - (1, 1)$.

2. $$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, dotted, no head] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2 \arrow[d, dotted, no head] \\
0 \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, "d_1"] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, dotted, no head] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2 \arrow[d, dotted, no head] \\
0 \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2
\end{tikzcd}$$

Sendo $d_1((1,1)) = k \in \mathbb{Z}G$, devemos ter $d_0(k) + d_1 d_0((1,1)) = 0 \Leftrightarrow d_0(k) = -d_1((s,1) - (1,1)) \Leftrightarrow d_0(k) = -(s,t) + (s,1) + (1,t) - (1,1)$, que é satisfeita se definirmos $k = d_1((1,1)) = (s,t) + (1,1)$.

3. $$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, "d_1"] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2 \arrow[d, dotted, no head] \\
0 \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, dotted, no head] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2 \arrow[d, dotted, no head] \\
0 \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2
\end{tikzcd}$$

   Este d_1 deve satisfazer $\varepsilon \circ d_1 = (t+1) \circ \varepsilon$, o que ocorre se definirmos $d_1((1,1)) = (1,t) + (1,1)$.

4. $$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, "d_1"] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, dotted, no head] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2 \arrow[d, dotted, no head] \\
0 \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, dotted, no head] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2 \arrow[d, dotted, no head] \\
0 \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}G \arrow[r, dotted, no head] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_2
\end{tikzcd}$$

   Sendo $d_1((1,1)) = k \in \mathbb{Z}G$, devemos ter $d_0(k) + d_1 d_0((1,1)) = 0 \Leftrightarrow d_0(k) = -d_1((s,1) - (1,1)) \Leftrightarrow d_0(k) = -(s,t) - (s,1) + (1,t) + (1,1)$, que é satisfeita se definirmos $k = d_1((1,1)) = (s,t) - (1,1)$.

Tendo calculado os homomorfimos d_1, não é difícil ver que $d_2 = 0$ satisfaz as condições do Lema 1.12, e é claro que $d_k = 0$ para $k > 2$. Assim, usando o Teorema 1.13, obtemos a seguinte resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial:

Proposição 4.3 *Uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial é dada por*

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

em que $P_0 \cong \mathbb{Z}G$ é o módulo livre gerado por α_0 e, para $n \geq 1$, $P_n \cong \mathbb{Z}G \oplus \mathbb{Z}G$ é o módulo livre gerado pelos elementos α_n e β_n Os homomorfismos ε e d_n são definidos por

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\alpha_0) &= 1, \\
d_1(\alpha_1) &= ((s,1) - (1,1))\alpha_0, \\
d_1(\beta_1) &= ((1,t) - (1,1))\alpha_0, \\
d_{2k}(\alpha_{2k}) &= ((s,t) + (1,1))\alpha_{2k-1} + ((s,1) - (1,1))\beta_{2k-1}, \quad \textit{se } k \geq 1, \\
d_{2k}(\beta_{2k}) &= ((1,t) + (1,1))\beta_{2k-1}, \quad \textit{se } k \geq 1, \\
d_{2k+1}(\alpha_{2k+1}) &= ((s,t) - (1,1))\alpha_{2k} + ((s,1) - (1,1))\beta_{2k}, \quad \textit{se } k \geq 1, \\
d_{2k+1}(\beta_{2k+1}) &= ((1,t) - (1,1))\beta_{2k}, \quad \textit{se } k \geq 1.
\end{aligned}$$

Observamos que a resolução acima, exceto pelo módulo P_0 e pelo homomorfismo d_1, é periódica de período 2. De posse dessa resolução, podemos então calcular os grupos $H^*(G,\mathbb{Z})$, sendo $\mathbb{Z}$ o G-módulo trivial:

Teorema 4.4 *Os grupos de cohomologia $H^*(G,\mathbb{Z})$ são dados por*

$$H^k(G,\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \textit{se } k = 0, \\ 0, & \textit{se } k \textit{ é ímpar}, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, & \textit{se } k \geq 2 \textit{ e } k \textit{ é par.} \end{cases}$$

Além disso, um gerador para $H^0(G,\mathbb{Z})$ é a classe do homomorfismo α_0^* e um par de geradores para o grupo $H^{2k}(G,\mathbb{Z})$, para $k \geq 1$, são as classes dos homomorfismos α_{2k}^* e β_{2k}^*, em que os elementos α_n, β_n são aqueles definidos na Proposição 4.3.

Demonstração: Aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\_\_,\mathbb{Z})$ à resolução livre obtida na Proposição 4.3, obtemos

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0,\mathbb{Z}) \xrightarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\mathbb{Z}) \xrightarrow{d_2^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_2,\mathbb{Z}) \xrightarrow{d_3^*}$$

$$\xrightarrow{d_3^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_3,\mathbb{Z}) \xrightarrow{d_4^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_4,\mathbb{Z}) \xrightarrow{d_5^*} \cdots$$

Em primeiro lugar, temos $d_1^* = 0$. De fato, se $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0,\mathbb{Z})$, então $(d_1^*u)(\alpha_1) = u(d_1(\alpha_1)) = u((s,1)\alpha_0 - \alpha_0) = 0$, pois $\mathbb{Z}$ é um módulo trivial. Analogamente, $(d_1^*u)(\beta_1) = 0$. Portanto $H^0(G,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_0,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Um gerador para $H^0(G,\mathbb{Z})$ é a classe do homomorfismo α_0^*.

Se $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\mathbb{Z})$, então $(d_2^*u)(\alpha_2) = u((s,t)\alpha_1 + \alpha_1 + (s,1)\beta_1 - \beta_1) = 2u(\alpha_1)$, e $(d_2^*u)(\beta_2) = u((1,t)\beta_1 + \beta_1) = 2u(\beta_1)$. Assim, usando o isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, podemos identificar o homomorfismo $d_2^*\colon \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, que é dado por $d_2^*(x,y) = (2x,2y)$, para todos $x,y \in \mathbb{Z}$. Como este homomorfismo é injetor, segue que $H^1(G,\mathbb{Z}) = 0$.

Por uma razão análoga à que ocorreu com d_1^*, temos $d_3^* = 0$, portanto $H^2(G,\mathbb{Z}) \cong \dfrac{\ker d_3^*}{\mathrm{im}\, d_2^*} = \dfrac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}\oplus 2\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Um par de geradores para o grupo $H^2(G,\mathbb{Z})$ são as classes dos homomorfismos α_2^* e β_2^*.

Dada a periodicidade da resolução obtida, o teorema segue.

■

Procedemos agora à obtenção de uma homotopia de contração para a resolução livre P dada pela Proposição 4.3, que nos permitirá construir uma aproximação da diagonal $\Delta\colon P \to P\otimes P$.

Lema 4.5 *Uma homotopia de contração para a resolução dada na Proposição 4.3 é dada pelos homomorfismos de grupos abelianos*

$$\begin{aligned} s_{-1}&\colon \mathbb{Z} \to P_0,\\ s_n&\colon P_n \to P_{n+1}, \end{aligned}$$

dados por

$$\begin{aligned}
s_{-1}(1) &= \alpha_0,\\
s_0((s^k,1)\alpha_0) &= \frac{\partial(s^k,1)}{\partial(s,1)}\alpha_1,\\
s_0((s^k,t)\alpha_0) &= \frac{\partial(s^k,1)}{\partial(s,1)}\alpha_1 + (s^k,1)\beta_1,\\
s_n((s^k,1)\alpha_n) &= 0,\\
s_n((s^k,1)\beta_n) &= 0,\\
s_n((s^k,t)\alpha_n) &= (s^{k-1},1)\alpha_{n+1},\\
s_n((s^k,t)\beta_n) &= (s^k,1)\beta_{n+1}.
\end{aligned}$$

Demonstração: A verificação de que $d_1 s_0 + s_{-1}\varepsilon = \mathrm{id}_{P_0}$ procede de modo idêntico ao da demonstração da Proposição 1.10. Resta-nos então verificar que $d_2s_1+s_0d_1 = \mathrm{id}_{P_1}$, $d_3s_2+s_1d_2 = \mathrm{id}_{P_2}$ e $d_4s_3 + s_2d_3 = \mathrm{id}_{P_3}$, dada a periodicidade da resolução livre obtida na Proposição 4.3.

Temos

$$d_2s_1((s^k,1)\alpha_1) + s_0d_1((s^k,1)\alpha_1) = s_0((s^{k+1},1)\alpha_0 - (s^k,1)\alpha_0) = (s^k,1)\alpha_1,$$

$$d_2s_1((s^k,1)\beta_1) + s_0d_1((s^k,1)\beta_1) = s_0((s^k,t)\alpha_0 - (s^k,1)\alpha_0) = (s^k,1)\beta_1,$$

$$\begin{aligned} d_2s_1((s^k,t)\alpha_1) + s_0d_1((s^k,t)\alpha_1) = (s^k,t)\alpha_1 + (s^{k-1},1)\alpha_1 + (s^k,1)\beta_1 - (s^{k-1},1)\beta_1 + \\ \frac{\partial(s^{k-1},1)}{\partial(s,1)}\alpha_1 + (s^{k-1},1)\beta_1 - \frac{\partial(s^k,1)\alpha_1}{\partial(s,1)}\alpha_1 - (s^k,1)\beta_1 = (s^k,t)\alpha_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_2s_1((s^k,t)\beta_1) + s_0d_1((s^k,t)\beta_1) = (s^k,t)\beta_1 + (s^k,1)\beta_1 + \\ +\frac{\partial(s^k,1)}{\partial(s,1)}\alpha_1 - \frac{\partial(s^k,1)}{\partial(s,1)}\alpha_1 - (s^k,1)\beta_1 = (s^k,t)\beta_1, \end{aligned}$$

o que mostra que $d_2s_1 + s_0d_1 = \mathrm{id}_{P_1}$. Também temos

$$\begin{aligned} d_3s_2((s^k,1)\alpha_2) + s_1d_2((s^k,1)\alpha_2) = s_1((s^{k+1},t)\alpha_1 + (s^k,1)\alpha_1 + (s^{k+1},1)\beta_1 - (s^k,1)\beta_1) = \\ = (s^k,1)\alpha_2, \end{aligned}$$

$$d_3s_2((s^k,1)\beta_2) + s_1d_2((s^k,1)\beta_2) = s_1((s^k,1)\beta_1 + (s^k,1)\beta_1) = (s^k,1)\beta_2,$$

$$\begin{aligned} d_3s_2((s^k,t)\alpha_2) + s_1d_2((s^k,t)\alpha_2) = (s^k,t)\alpha_2 - (s^{k-1},1)\alpha_2 + (s^k,1)\beta_2 - (s^{k-1},1)\beta_2 + \\ +(s^{k-1},1)\alpha_2 + (s^{k-1},1)\beta_2 - (s^k,1)\beta_2 = (s^k,t)\alpha_2 \end{aligned}$$

e

$$d_3s_2((s^k,t)\beta_2) + s_1d_2((s^k,t)\beta_2) = (s^k,t)\beta_2 - (s^k,1)\beta_2 + (s^k,1)\beta_2 = (s^k,t)\beta_2,$$

logo $d_3s_2 + s_1d_2 = \mathrm{id}_{P_2}$. Finalmente, temos também

$$d_4s_3((s^k,1)\alpha_3) + s_2d_3((s^k,1)\alpha_3) = s_2((s^{k+1},t)\alpha_2) = (s^k,1)\alpha_3,$$

$$d_4s_3((s^k,1)\beta_3) + s_2d_3((s^k,1)\beta_3) = s_2((s^k,t)\beta_2) = (s^k,1)\beta_3,$$

$$\begin{aligned} d_4s_3((s^k,t)\alpha_3) + s_2d_3((s^k,t)\alpha_3) = (s^k,t)\alpha_3 + (s^{k-1},1)\alpha_3 + (s^k,1)\beta_3 - (s^{k-1},1)\beta_3 - \\ -(s^{k-1},1)\alpha_3 + (s^{k-1},1)\beta_3 - (s^k,1)\beta_3 = (s^k,t)\alpha_3 \end{aligned}$$

e

$$d_4s_3((s^k,t)\beta_3) + s_2d_3((s^k,t)\beta_3) = (s^k,t)\beta_3 + (s^k,1)\beta_3 - (s^k,1)\beta_3 = (s^k,t)\beta_3,$$

mostrando que $d_4s_3 + s_2d_3 = \mathrm{id}_{P_3}$.

■

A obtenção da aproximação da diagonal $\Delta\colon P \to P \otimes P$ é imediata a partir das Proposições 1.16 e 1.17 uma vez que temos a homotopia de contração da resolução.

Proposição 4.6 *Uma aproximação da diagonal $\Delta\colon P \to P \otimes P$ para a resolução obtida na Proposição 4.3 é dada parcialmente por*

$$
\begin{aligned}
\Delta_0 &\colon P_0 \to (P \otimes P)_0 \\
&\quad \Delta_0(\alpha_0) = \alpha_0 \otimes \alpha_0, \\
\Delta_{0n} &\colon P_n \to P_0 \otimes P_n \quad \textit{(para } n \geq 1\textit{)} \\
&\quad \Delta_{0n}(\alpha_n) = \alpha_0 \otimes \alpha_n, \\
&\quad \Delta_{0n}(\beta_n) = \alpha_0 \otimes \beta_n, \\
\Delta_{1n} &\colon P_{n+1} \to P_1 \otimes P_n \quad \textit{(para } n \geq 1\textit{)} \\
&\quad \Delta_{1n}(\alpha_{n+1}) = \alpha_1 \otimes (s,t)\alpha_n + (s,1)\beta_1 \otimes (s,t)\alpha_n + \alpha_1 \otimes (s,1)\beta_n, \\
&\quad \Delta_{1n}(\beta_{n+1}) = \beta_1 \otimes (1,t)\beta_n, \\
\Delta_{2n} &\colon P_{n+2} \to P_2 \otimes P_n \quad \textit{(para } n \geq 1\textit{)} \\
&\quad \Delta_{2n}(\alpha_{n+2}) = \alpha_2 \otimes \alpha_n + \beta_2 \otimes \alpha_n + \alpha_2 \otimes (1,t)\beta_n, \\
&\quad \Delta_{2n}(\beta_{n+2}) = \beta_2 \otimes \beta_n.
\end{aligned}
$$

Demonstração: O cálculo de Δ_0 é imediato. Também é imediato, a partir da Proposição 1.17, que $\Delta_{01}(\alpha_1) = \alpha_0 \otimes \alpha_1$ e $\Delta_{01}(\beta_1) = \alpha_0 \otimes \beta_1$. Supondo que $\Delta_{0n}(\alpha_n) = \alpha_0 \otimes \alpha_n$ e $\Delta_{0n}(\beta_n) = \alpha_0 \otimes \beta_n$ para um certo $n \geq 1$ e denotando por $\pi_{ij}\colon (P \otimes P)_{i+j} \to P_i \otimes P_j$ a projeção, temos, de acordo com a Proposição 1.17,

$$
\begin{aligned}
\Delta_{0(n+1)}(\alpha_{n+1}) &= \pi_{0(n+1)}\tilde{s}_n \Delta_n d_{n+1}(\alpha_{n+1}) \\
&= \pi_{0(n+1)}\tilde{s}_n \Delta_{0n}((s,t)\alpha_n \pm \alpha_n + (s,1)\beta_n - \beta_n) \\
&= \pi_{0(n+1)}\tilde{s}_n((s,t)\alpha_0 \otimes (s,t)\alpha_n \pm \alpha_0 \otimes \alpha_n + (s,1)\alpha_0 \otimes (s,1)\beta_n - \alpha_0 \otimes \beta_n) \\
&= \alpha_0 \otimes \alpha_{n+1}, \\
\Delta_{0(n+1)}(\beta_{n+1}) &= \pi_{0(n+1)}\tilde{s}_n \Delta_n d_{n+1}(\beta_{n+1}) \\
&= \pi_{0(n+1)}\tilde{s}_n \Delta_{0n}((1,t)\beta_n \pm \beta_n) \\
&= \pi_{0(n+1)}\tilde{s}_n((1,t)\alpha_0 \otimes (1,t)\beta_n \pm \alpha_0 \otimes \beta_n) \\
&= \alpha_0 \otimes \beta_{n+1},
\end{aligned}
$$

o que prova que $\Delta_{0n}(\alpha_n) = \alpha_0 \otimes \alpha_n$ e $\Delta_{0n}(\beta_n) = \alpha_0 \otimes \beta_n$ para todo $n \geq 1$. Quanto aos homomorfismo Δ_{1n} e Δ_{2n}, temos

$$
\begin{aligned}
\Delta_{1n}(\alpha_{n+1}) &= \pi_{1n}\tilde{s}_n \Delta_n d_{n+1}(\alpha_{n+1}) \\
&= \pi_{1n}\tilde{s}_n \Delta_{0n}((s,t)\alpha_n \pm \alpha_n + (s,1)\beta_n - \beta_n) \\
&= \pi_{1n}\tilde{s}_n((s,t)\alpha_0 \otimes (s,t)\alpha_n \pm \alpha_0 \otimes \alpha_n + (s,1)\alpha_0 \otimes (s,1)\beta_n - \alpha_0 \otimes \beta_n) \\
&= \alpha_1 \otimes (s,t)\alpha_n + (s,1)\beta_1 \otimes (s,t)\alpha_n + \alpha_1 \otimes (s,1)\beta_n, \\
\Delta_{1n}(\beta_{n+1}) &= \pi_{1n}\tilde{s}_n \Delta_n d_{n+1}(\beta_{n+1}) \\
&= \pi_{1n}\tilde{s}_n \Delta_{0n}((1,t)\beta_n \pm \beta_n) \\
&= \pi_{1n}\tilde{s}_n((1,t)\alpha_0 \otimes (1,t)\beta_n \pm \alpha_0 \otimes \beta_n) \\
&= \beta_1 \otimes (1,t)\beta_n
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta_{2n}(\alpha_{n+2}) &= \pi_{2n}\tilde{s}_{n+1}\Delta_{n+1}d_{n+2}(\alpha_{n+2}) \\
&= \pi_{2n}\tilde{s}_{n+1}\Delta_{1n}((s,t)\alpha_{n+1} \pm \alpha_{n+1} + (s,1)\beta_{n+1} - \beta_{n+1}) \\
&= \pi_{2n}\tilde{s}_{n+1}((s,t)\alpha_1 \otimes \alpha_n + (1,t)\beta_1 \otimes \alpha_n + (s,t)\alpha_1 \otimes (1,t)\beta_n \pm \\
&\qquad \pm \alpha_1 \otimes (s,t)\alpha_n \pm (s,1)\beta_1 \otimes (s,t)\alpha_n \pm \alpha_1 \otimes (s,1)\beta_n + \\
&\qquad + (s,1)\beta_1 \otimes (s,t)\beta_n - \beta_1 \otimes (1,t)\beta_n) \\
&= \alpha_2 \otimes \alpha_n + \beta_2 \otimes \alpha_n + \alpha_2 \otimes (1,t)\beta_n, \\
\Delta_{2n}(\beta_{n+2}) &= \pi_{2n}\tilde{s}_{n+1}\Delta_{n+1}d_{n+2}(\beta_{n+2}) \\
&= \pi_{2n}\tilde{s}_{n+1}((1,t)\beta_1 \otimes \beta_n \pm \beta_1 \otimes (1,t)\beta_n) \\
&= \beta_2 \otimes \beta_n.
\end{aligned}$$

■

Teorema 4.7 *No anel $H^*(G,\mathbb{Z})$,*

$$[\beta_2^*] \smile \underline{\quad}: H^{2k}(G,\mathbb{Z}) \to H^{2k+2}(G,\mathbb{Z})$$

é um isomorfismo que leva $[\alpha_{2k}^*]$ e $[\beta_{2k}^*]$ em $[\alpha_{2k+2}^*]$ e $[\beta_{2k+2}^*]$, respectivamente, se $k \geq 1$. Os elementos $[\alpha_{2k}^*]$ e $[\beta_{2k}^*]$ são os geradores de $H^{2k}(G,\mathbb{Z})$, de acordo com o Teorema 4.4.

Demonstração: Sabemos, pelo Teorema 4.4, que um par de geradores para o grupo $H^{2k}(G,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ é $[\alpha_{2k}^*]$, $[\beta_{2k}^*]$. A Proposição 4.6 nos permite então calcular, usando o isomorfismo $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
(\beta_2^* \smile \alpha_{2k}^*)(\alpha_{2k+2}) &= (\beta_2^* \times \alpha_{2k}^*)(\Delta_{2(2k)}(\alpha_{2k+2})) \\
&= (\beta_2^* \times \alpha_{2k}^*)(\alpha_2 \otimes \alpha_{2k} + \beta_2 \otimes \alpha_{2k} + \alpha_2 \otimes (1,t)\beta_{2k}) = 1 \otimes 1, \\
(\beta_2^* \smile \alpha_{2k}^*)(\beta_{2k+2}) &= (\beta_2^* \times \alpha_{2k}^*)(\Delta_{2(2k)}(\beta_{2k+2})) \\
&= (\beta_2^* \times \alpha_{2k}^*)(\beta_2 \otimes \beta_{2k}) = 0,
\end{aligned}$$

logo $[\beta_2^*] \smile [\alpha_{2k}^*] = [\alpha_{2k+2}^*]$. Analogamente, temos

$$\begin{aligned}
(\beta_2^* \smile \beta_{2k}^*)(\alpha_{2k+2}) &= 0, \\
(\beta_2^* \smile \beta_{2k}^*)(\beta_{2k+2}) &= 1 \otimes 1,
\end{aligned}$$

logo $[\beta_2^*] \smile [\beta_{2k}^*] = [\beta_{2k+2}^*]$. Logo

$$[\beta_2^*] \smile \underline{\quad}: H^{2k}(G,\mathbb{Z}) \to H^{2k+2}(G,\mathbb{Z})$$

é um isomorfismo que leva $[\alpha_{2k}^*]$ e $[\beta_{2k}^*]$ em $[\alpha_{2k+2}^*]$ e $[\beta_{2k+2}^*]$, respectivamente, se $k \geq 1$.

■

4.3 O anel de cohomologia de $G = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_{2n}$

Consideraremos nesta seção o grupo $G = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_{2n} \cong \mathbb{Z}_{2n} *_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z}_{2n}$, que é um grupo do tipo II um pouco mais geral que o da seção anterior. Para o cálculo de seu anel de cohomologia, será mais simples utilizarmos a sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre ao invés de utilizarmos o método da aproximação da diagonal de uma resolução projetiva. Não é claro o grau de dificuldade para se obter a cohomologia de G usando os métodos da seção anterior.

Denotando por s um gerador de $\mathbb{Z}$ e por t um gerador de $\mathbb{Z}_{2n}$, a ação $\theta \colon \mathbb{Z}_{2n} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ é dada por $\theta(t)(s) = s^{-1}$.

A sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre associada à sequência exata

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_{2n} \longrightarrow 1$$

para a cohomologia de G com coeficientes $\mathbb{Z}$ é tal que $E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{Z}_{2n}, H^q(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}))$. Como $\mathbb{Z}$ é livre, sabemos que $E_2^{p,q}$ só pode ser não nulo para $q = 0$ ou $q = 1$.

Considere a resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-módulo trivial

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}\mathbb{Z} \xrightarrow{s-1} \mathbb{Z}\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Para determinarmos a ação de $\mathbb{Z}_{2n}$ sobre $H^q(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, procuramos homomorfismos τ_0 e τ_1 tais que

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}\mathbb{Z} \arrow[r, "s-1"] \arrow[d, "\tau_1"'] & \mathbb{Z}\mathbb{Z} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\tau_0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}\mathbb{Z} \arrow[r, "s-1"'] & \mathbb{Z}\mathbb{Z} \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

seja comutativo e satisfaçam $\tau_0(sx) = (\theta(t)(s))\tau_0(x) = s^{-1}\tau_0(x)$, $\tau_1(sx) = (\theta(t)(s))\tau_1(x) = s^{-1}\tau_1(x)$, o que ocorre ao definirmos $\tau_0(1) = 1$ e $\tau_1(1) = -s^{-1}$. Logo, as induzidas

$$\begin{aligned} \tau_0^* &\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \quad \text{e} \\ \tau_1^* &\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

são tais que, fazendo a identificação $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, τ_0^* é a identidade e τ_1^* é a multiplicação por -1. Portanto

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(\mathbb{Z}_{2n}, \mathbb{Z}), & \text{se } q = 0, \\ H^p(\mathbb{Z}_{2n}, \tilde{\mathbb{Z}}), & \text{se } q = 1, \end{cases}$$

em que $\mathbb{Z}$ denota o $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_{2n}$-módulo trivial e $\tilde{\mathbb{Z}}$ denota o $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_{2n}$-módulo não trivial. Assim, a partir da resolução livre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_{2n}$-módulo trivial

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}\mathbb{Z}_{2n} \xrightarrow{N_{2n}} \mathbb{Z}\mathbb{Z}_{2n} \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}\mathbb{Z}_{2n} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \tag{4.2}$$

em que $N_{2n} = 1 + t + \cdots + t^{2n-1}$, obtemos

$$E_2^{p,0} = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p = 0, \\ 0, & \text{se } p \text{ é ímpar}, \\ \mathbb{Z}_{2n}, & \text{se } p = 2k,\ k > 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad E_2^{p,1} = \begin{cases} 0, & \text{se } p \text{ é par}, \\ \mathbb{Z}_{2n}, & \text{se } p \text{ é ímpar}. \end{cases}$$

Assim, $E_2 = E_\infty$ e temos imediatamente que $H^k(G, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ para $k = 0$ e $H^k(G, \mathbb{Z}) = 0$ para k ímpar. Ainda, para $k > 0$, temos uma sequência exata de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{2n} \longrightarrow H^{2k}(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}_{2n} \longrightarrow 0. \tag{4.3}$$

Observando que existe uma seção $\mathbb{Z}_{2n} \to \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_{2n}$, a sequência exata de grupos

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_{2n} \longrightarrow \mathbb{Z}_{2n} \longrightarrow 1$$

cinde, portanto (4.3) cinde e

$$H^{2k}(G,\mathbb{Z}) = H^{2k}(\mathbb{Z}_{2n},\mathbb{Z}) \oplus H^{2k-1}(\mathbb{Z}_{2n},\tilde{\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n}.$$

Sabemos que, no anel de cohomologia $H^*(\mathbb{Z}_{2n},\mathbb{Z})$, se $\beta_2 \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}_{2n}}(\mathbb{Z}\mathbb{Z}_{2n},\mathbb{Z})$ é tal que $\beta_2(1) = 1$, então $[\beta_2] \in H^2(\mathbb{Z}_{2n},\mathbb{Z})$ gera $H^2(\mathbb{Z}_{2n},\mathbb{Z})$ e $[\beta_2]^k$ é um gerador de $H^{2k}(\mathbb{Z}_{2n},\mathbb{Z})$. Consideremos agora o produto

$$H^2(\mathbb{Z}_{2n},\mathbb{Z}) \otimes H^{2k-1}(\mathbb{Z}_{2n},\tilde{\mathbb{Z}}) \overset{\smile}{\to} H^{2k+1}(\mathbb{Z}_{2n},\mathbb{Z}\otimes\tilde{\mathbb{Z}}) \cong H^{2k+1}(\mathbb{Z}_{2n},\tilde{\mathbb{Z}}),$$

em que $H^2(\mathbb{Z}_{2n},\mathbb{Z}) \subset H^2(G,\mathbb{Z})$ e $H^{2k-1}(\mathbb{Z}_{2n},\tilde{\mathbb{Z}}) \subset H^{2k}(G,\mathbb{Z})$. Uma aproximação da diagonal para a resolução P dada pela equação (4.2), em que $P_m = \mathbb{Z}\mathbb{Z}_{2n}$, é $\Delta_{pq}\colon P_{p+q} \to P_p \otimes P_q$ definida (veja [Bro82]) por

$$\Delta_{pq}(1) = \begin{cases} 1 \otimes 1, & \text{se } p \text{ é par,} \\ 1 \otimes t, & \text{se } p \text{ é ímpar, } q \text{ é par,} \\ \displaystyle\sum_{0 \le i < j \le m-1} t^i \otimes t^j, & \text{se } p \text{ e } q \text{ são ímpares.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Assim, se $\alpha_{2k} \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}_{2n}}(\mathbb{Z}\mathbb{Z}_{2n},\mathbb{Z})$ é tal que $\alpha_{2k}(1) = 1$, então $[\alpha_{2k}]$ é um gerador do grupo $H^{2k-1}(\mathbb{Z}_{2n},\tilde{\mathbb{Z}})$ e

$$(\beta_2 \smile \alpha_{2k})(1) = \beta_2(1) \otimes \alpha_{2k}(1) = 1 \otimes 1.$$

Portanto, fazendo a identificação $\mathbb{Z}\otimes\tilde{\mathbb{Z}} \cong \tilde{\mathbb{Z}}$, temos que, em $H^*(G,\mathbb{Z})$,

$$[\beta_2] \smile [\alpha_{2k}] = [\alpha_{2k+2}] + \gamma,$$

com $\gamma \in H^{2k+2}(\mathbb{Z}_{2n},\mathbb{Z})$, e a ordem de $[\alpha_{2k+2}]+\gamma$ no grupo abeliano $H^{2k+2}(G,\mathbb{Z})$ é $2n$. Portanto

$$[\beta_2] \smile \underline{}\colon H^{2k}(G,\mathbb{Z}) \to H^{2k+2}(G,\mathbb{Z})$$

é um isomorfismo para todo $k > 0$.

Para passarmos para a estrutura multiplicativa em $H^*(G,\mathbb{Z})$, vamos definir certos elementos baseados no conhecimentos dos produtos em E_∞. Sendo $p\colon \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_{2n} \to \mathbb{Z}_{2n}$ a projeção e $s\colon \mathbb{Z}_{2n} \to \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_{2n}$ a seção, então a sequência

$$\mathbb{Z}_{2n} \xrightarrow{s} \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_{2n} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_{2n}$$

é tal que $ps = \mathrm{id}$, logo temos uma sequência

$$H^{2k}(\mathbb{Z}_{2n},\mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} H^{2k}(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{s^*} H^{2k}(\mathbb{Z}_{2n},\mathbb{Z})$$

tal que $s^*p^* = \mathrm{id}$ para todo $k > 0$. Seja $\tilde{\beta}_2 \in H^2(G,\mathbb{Z})$ definido por $\tilde{\beta}_2 = [\beta_2]$, de modo que $\tilde{\beta}_2^k$ é um gerador de $H^{2k}(\mathbb{Z}_{2n},\mathbb{Z}) \subset H^{2k}(G,\mathbb{Z})$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $p^*(\tilde{\beta}_2^k) = \tilde{\beta}_2^k$, logo $s^*(\tilde{\beta}_2^k) = \tilde{\beta}_2^k$.

Seja $\tilde{\alpha}_2 \in H^2(G,\mathbb{Z})$ um elemento tal que o par $\tilde{\beta}_2$, $\tilde{\alpha}_2$ gere $H^2(G,\mathbb{Z})$ e tal que $s^*(\tilde{\alpha}_2) = 0$. Para $k \ge 2$, definimos

$$\tilde{\alpha}_{2k} = \tilde{\beta}_2^{\,k-1} \smile \tilde{\alpha}_2 \in H^{2k}(G,\mathbb{Z}).$$

Com esta definição, temos $s^*(\tilde{\alpha}_{2k}) = s^*(\tilde{\beta_2}^{k-1} \smile \tilde{\alpha}_2) = s^*(\tilde{\beta_2}^{k-1}) \smile s^*(\tilde{\alpha}_2) = 0$. Além disso, pela estrutura multiplicativa em E_∞, temos, para $k, j > 0$,

$$\tilde{\alpha}_{2k} \smile \tilde{\alpha}_{2j} = x\tilde{\beta}_2^{k+j}$$

para algum $x \in \mathbb{Z}$. Mas a igualdade acima implica que

$$s^*(x\tilde{\beta}_2^{k+j}) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

logo $\tilde{\alpha}_{2k} \smile \tilde{\alpha}_{2j} = 0$.

Resumimos os resultados desta seção no seguinte teorema:

Teorema 4.8 *Seja $G = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_{2n}$. Os grupos de cohomologia $H^*(G, \mathbb{Z})$ são dados por*

$$H^k(G, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k \text{ é ímpar}, \\ \mathbb{Z}_{2n} \oplus \mathbb{Z}_{2n}, & \text{se } k \text{ é par e positivo.} \end{cases}$$

Além disso, existem $\tilde{\beta}_2, \tilde{\alpha}_2 \in H^2(G, \mathbb{Z})$ que geram $H^2(G, \mathbb{Z})$ e tais que, para todo $k > 0$, o grupo $H^{2k}(G, \mathbb{Z})$ é gerado pelos elementos

$$\tilde{\beta}_2^k \quad e \quad \tilde{\alpha}_{2k} = \tilde{\beta_2}^{k-1} \smile \tilde{\alpha}_2.$$

Com estas definições, temos que

$$\tilde{\beta}_2 \smile \underline{} \colon H^{2k}(G, \mathbb{Z}) \to H^{2k+2}(G, \mathbb{Z})$$

é um isomorfismo para todo k positivo e para o qual as imagens de $\tilde{\beta}_2^k$ e $\tilde{\alpha}_{2k}$ são, respectivamente, $\tilde{\beta}_2^{k+1}$ e $\tilde{\alpha}_{2(k+1)}$. Finalmente, $\tilde{\alpha}_{2k} \smile \tilde{\alpha}_{2j} = 0$ para k e j positivos.

4.4 O anel de cohomologia de $G = (\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$

Nesta seção daremos continuidade ao trabalho desenvolvido em [Soa08], no qual foram calculados os grupos de cohomologia do grupo $G = (\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ com coeficientes $\mathbb{Z}$ triviais. Determinaremos nesta seção também a estrutura multiplicativa dada pelo produto cup.

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, e seja $G = (\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$. O grupo $\mathbb{Z}_b$ age sobre $\mathbb{Z}_a$ de acordo com $\alpha\colon \mathbb{Z}_b \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_a)$ em que $\alpha(1_b)(1_a) = r \cdot 1_a$ (portanto devemos ter $r^b \equiv 1 \pmod{a}$), e o grupo $\mathbb{Z}$ age sobre $\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b$ de acordo com $\theta\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b)$, em que $\theta(1)(1_a) = c_a \cdot 1_a$ e $\theta(1)(1_b) = c \cdot 1_a + c_b \cdot 1_b$. Os inteiros c, c_a e c_b são escolhidos conforme [GG05].

Se considerarmos a sequência exata de grupos

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_a \longrightarrow (\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b) \longrightarrow \mathbb{Z}_b \longrightarrow 1,$$

a sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre para a cohomologia de $\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b$ com coeficientes $\mathbb{Z}$ é tal que

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{Z}_b, H^q(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbb{Z}_a \rtimes \mathbb{Z}_b, \mathbb{Z}).$$

Sendo assim, a fim de determinarmos $H^*(\mathbb{Z}_a \rtimes \mathbb{Z}_b, \mathbb{Z})$, temos que determinar como $\mathbb{Z}_b$ age sobre $H^q(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})$. Em primeiro lugar, como podemos encontrar em [HS97], temos

$$H^n(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0, \\ \mathbb{Z}_a, & \text{se } n > 0 \text{ é par}, \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar}, \end{cases} \quad \text{e} \quad H^n(\mathbb{Z}_b, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0, \\ \mathbb{Z}_b, & \text{se } n > 0 \text{ é par}, \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar}. \end{cases}$$

Ainda, se o gerador de $\mathbb{Z}_b$ age sobre $H^{2k}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_a$ através da multiplicação por um inteiro s, prova-se em [AM04] que

$$H^j(\mathbb{Z}_b, \mathbb{Z}_a) = \begin{cases} \mathbb{Z}_\delta, & \text{se } j = 0, \\ 0, & \text{se } j \neq 0, \end{cases}$$

em que $\delta = \text{mdc}(s-1, a)$. Vejamos então como $H^{2k}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})$ é um $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_b$-módulo. A aplicação $\alpha = \alpha(1_b) \colon \mathbb{Z}_a \to \mathbb{Z}_a$ induz $\alpha^* \colon H^{2k}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}) \to H^{2k}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})$. Usando a notação $\mathbb{Z}_a = \langle t \mid t^a = 1 \rangle$, considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_a \arrow[r, "N_a"] \arrow[d, "\tau_2"] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_a \arrow[r, "t-1"] \arrow[d, "\tau_1"] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_a \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\tau_0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\text{id}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_a \arrow[r, "N_a"'] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_a \arrow[r, "t-1"'] & \mathbb{Z}\mathbb{Z}_a \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pela comutatividade do quadrado da direita, devemos ter $\tau_0(tx) = \alpha(t)\tau_0(x) = t^r\tau(x)$ e $(\varepsilon \circ \tau_0)(1) = \varepsilon(1) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon(\tau_0(1)) = 1$. Tomamos então $\tau_0(t^k) = t^{rk}$ (na verdade, basta definir $\tau_0(1) = 1$).

Pela comutatividade do quadrado do meio, temos $(t-1)\tau_1(x) = \tau_0((t-1)x) = t^r\tau_0(x) - \tau_0(x) \Rightarrow (t-1)\tau_1(1) = t^r - 1$. Definimos então $\tau_1(1) = 1 + t + \cdots + t^{r-1}$.

Finalmente, pela comutatividade do quadrado da direita (recorde que $N_a = 1+t+\cdots+t^{a-1}$), temos $(N_a \circ \tau_2)(1) = (\tau_1 \circ N_a)(1) \Leftrightarrow (1 + t + \cdots + t^{a-1})\tau_2(1) = (1 + t^r + t^{2r} + \cdots + t^{r(a-1)})(1 + t + \cdots + t^{r-1})$, o que nos leva a definir

$$\tau_2(1) = \frac{t^{ra} - 1}{t^r - 1} \cdot \frac{t-1}{t^a - 1} \cdot \frac{t^r - 1}{t - 1} = 1 + t^a + \cdots + t^{a(r-1)}.$$

No nível de cadeia, $\tau_2^* \colon \text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}_a}(\mathbb{Z}\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}) \to \text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}_a}(\mathbb{Z}\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})$ é tal que $\tau_2^*(\varphi(x)) = \varphi(\tau_2(x)) = \varphi((1 + t^a + \cdots + t^{a(r-1)}x) = r\varphi(x)$, pois $\mathbb{Z}$ é módulo trivial. Portanto τ_2^* é a multiplicação por r, e o mesmo ocorre quando passamos para $H^2(\mathbb{Z}\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})$.

Como $H^*(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})$ é gerada pelas potências de um gerador de $H^2(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})$, temos que a ação do gerador de $\mathbb{Z}_b$ sobre $H^{2k}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})$ é a multiplicação por r^k.

Portanto a sequência espectral para a cohomologia de $\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b$ é tal que

$$E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p = q = 0, \\ \mathbb{Z}_{\delta_i}, & \text{se } p = 0 \text{ e } q = 2j \text{ com } i \equiv j \pmod{d}, \\ \mathbb{Z}_b, & \text{se } q = 0 \text{ e } p > 0 \text{ é par}, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{cases}$$

em que $\delta_i = \text{mdc}(r^i - 1, a)$ e $d = \text{ord}_a r = \text{mín}\{\ell \geq 1 \,:\, r^\ell \equiv 1 \pmod{a}\}$. Portanto

$$H^n(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0, \\ \mathbb{Z}_{\delta_i} \oplus \mathbb{Z}_b \cong \mathbb{Z}_{\delta_i b}, & \text{se } n = 2j \text{ com } i \equiv j \pmod{d}, \\ 0, & \text{caso contrário}. \end{cases}$$

Uma vez calculados os grupos $H^*(\mathbb{Z}_a \rtimes \mathbb{Z}_b, \mathbb{Z})$, partimos agora para o cálculo dos grupos $H^*(G, \mathbb{Z})$. A sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre associada à sequência exata de grupos

$$1 \longrightarrow (\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b) \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é tal que

$$E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q} = \begin{cases} H^q(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b, \mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}, & \text{se } p = 0, \\ H^q(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b, \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}, & \text{se } p = 1, \\ 0, & \text{se } p \geq 2, \end{cases} \tag{4.5}$$

pois $H^n(\mathbb{Z}, \underline{}) = 0$ para $n \geq 2$ uma vez que $\mathbb{Z}$ é um grupo livre. Na equação acima, usamos a seguinte notação: para um $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-módulo M qualquer, definimos

$$M^{\mathbb{Z}} = \{m \in M \ : \ z \cdot m = m \quad \forall z \in \mathbb{Z}\},$$
$$M_{\mathbb{Z}} = \frac{M}{\{(z \cdot m - m) \in M \ : \ z \in \mathbb{Z}\}},$$

e a partir da resolução livre

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}\mathbb{Z} \xrightarrow{s-1} \mathbb{Z}\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

fica claro que $H^0(\mathbb{Z}, M) = M^{\mathbb{Z}}$ e $H^1(\mathbb{Z}, M) = M_{\mathbb{Z}}$. Como os termos $E_\infty^{p,q}$ da equação (4.5) são nulos quando q é ímpar, temos então

$$H^n(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} H^n(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b, \mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}, & \text{se } n \text{ é par}, \\ H^n(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b, \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}, & \text{se } n \text{ é ímpar}. \end{cases}$$

Prova-se em [Soa08] que, ao escrevermos

$$H^{2i}(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b) = H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})) \oplus H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})),$$

o grupo $\mathbb{Z}$ age sobre $H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}_{\delta_i}$ através da multiplicação por c_a^i e age sobre $H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}_b$ através da multiplicação por c_b^i. Portanto, se definirmos $A_j = \mathrm{mdc}(c_a^j - 1, \delta_i)$ com $i \equiv j \pmod{d}$ e $B_j = \mathrm{mdc}(c_b^j - 1, b)$, obtemos

$$H^n(G, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1, \\ \mathbb{Z}_{A_j} \oplus \mathbb{Z}_{B_j}, & \text{se } n = 2j \text{ ou } n = 2j + 1 \text{ (e } j > 0), \end{cases} \tag{4.6}$$

pois, para um grupo cíclico finito $\mathbb{Z}_m$ no qual $\mathbb{Z}$ age, temos $(\mathbb{Z}_m)^{\mathbb{Z}} \cong (\mathbb{Z}_m)_{\mathbb{Z}}$.

A fim de determinarmos o anel de cohomologia $H^*(G, \mathbb{Z})$, precisamos de um representante para as classes geradoras de cada um dos grupos $H^n(G, \mathbb{Z})$. Para $n = 0$, denotaremos a classe por 1 (pois é o elemento neutro multiplicativo de $H^*(G, \mathbb{Z})$). Para $n = 1$, um representante para a classe geradora de

$$H^1(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b, \mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}$$

é o homomorfismo $\eta \colon \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b] \to \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b]$-módulos tal que $\eta(1) = 1$. Mais especificamente, se $\tilde{\eta} \colon \mathbb{Z}\mathbb{Z} \to H^0(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b, \mathbb{Z})$ é o $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-homomorfismo tal que $\tilde{\eta}(1) = [\eta]$, então $[\tilde{\eta}]$ gera $H^1(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b, \mathbb{Z}))$, e $[\eta]$ é o elemento neutro em $H^0(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b, \mathbb{Z})$.

Para $n \geq 2$, precisamos de representantes das classes geradoras dos seguintes grupos (para $i > 0$):

1. $H^0(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))) = H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))^{\mathbb{Z}}$
2. $H^0(\mathbb{Z}, H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))) = H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))^{\mathbb{Z}}$
3. $H^1(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))) = H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))_{\mathbb{Z}}$

4. $H^1(\mathbb{Z}, H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))) = H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))_{\mathbb{Z}}$

Em primeiro lugar, vamos obter um representante de

$$H^0(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))) = H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))^{\mathbb{Z}}.$$

Sabemos que $\mathbb{Z}_b$ atua sobre $H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})$ através da multiplicação por $r^i - 1$, logo

$$H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))^{\mathbb{Z}} \cong (\mathbb{Z}_{\delta_i})^{\mathbb{Z}},$$

em que podemos fazer a identificação

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{\delta_i} &= \{\overline{x} \in \mathbb{Z}_a \,:\, r^i x \equiv x \pmod{a}\} = \{\overline{x} \in \mathbb{Z}_a \,:\, x \equiv 0 \pmod{a/\delta_i}\} \\ &= \{\overline{x} \in \mathbb{Z}_a \,:\, x = (ka)/\delta_i, \quad k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{Z}$ age sobre $\mathbb{Z}_{\delta_i}$ através da multiplicação por $c_a^i - 1$, temos então

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}_{\delta_i})^{\mathbb{Z}} &= \{\overline{x} \in \mathbb{Z}_{\delta_i} \,:\, (c_a^i - 1)x \equiv 0 \pmod{a}\} \\ &= \{\overline{x} \in \mathbb{Z}_{\delta_i} \,:\, (c_a^i - 1)x \equiv 0 \pmod{a} \quad \text{e} \quad x = (ka)/\delta_i, \quad k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Logo obtemos a equação $\dfrac{(c_a^i - 1)ka}{\delta_i} \equiv 0 \pmod{a}$, cujas soluções são dadas por

$$k \equiv 0 \left(\text{mód mdc}\left(a, \frac{a(c_a^i - 1)}{\delta_i}\right)\right) \Leftrightarrow k \equiv 0 \left(\text{mód } \frac{a}{\delta_i} \text{mdc}(\delta_i, c_a^i - 1)\right).$$

Assim, um representante para a classe geradora de

$$H^0(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))) = H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))^{\mathbb{Z}} \cong (\mathbb{Z}_{\delta_i})^{\mathbb{Z}}$$

é o homomorfismo $u_a^i \colon \mathbb{Z}\mathbb{Z}_a \to \mathbb{Z}$ dado por

$$u_a^i(1) = \frac{a}{\delta_i} \cdot \frac{\delta_i}{\text{mdc}(\delta_i, (c_a^i - 1))} = \frac{a}{\text{mdc}(\delta_i, c_a^i - 1)}.$$

Mais especificamente, se $\varphi_a^i \colon \mathbb{Z}\mathbb{Z}_b \to H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})$ é o $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_b$-homomorfismo tal que $\varphi_a^i(1) = [u_a^i]$ e se $\tilde{\varphi}_a^i \colon \mathbb{Z}\mathbb{Z} \to H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))$ é o $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-homomorfismo tal que $\tilde{\varphi}_a^i(1) = [\varphi_a^i]$, então $[\tilde{\varphi}_a^i]$ é uma classe geradora de

$$H^0(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))) = H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))^{\mathbb{Z}} \cong (\mathbb{Z}_{\delta_i})^{\mathbb{Z}}.$$

De maneira análoga, obtemos que um representante para a classe geradora de

$$H^0(\mathbb{Z}, H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))) = H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))^{\mathbb{Z}} \cong (\mathbb{Z}_b)^{\mathbb{Z}}$$

é o homomorfismo $u_b^i \colon \mathbb{Z}\mathbb{Z}_a \to \mathbb{Z}$ tal que

$$u_b^i(1) = \frac{b}{\text{mdc}(b, c_b^i - 1)},$$

e definimos $\varphi_b^i \colon \mathbb{Z}\mathbb{Z}_b \to H^0(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})$ e $\tilde{\varphi}_b^i \colon \mathbb{Z}\mathbb{Z} \to H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))$ de modo análogo a φ_a^i e $\tilde{\varphi}_a^i$.

Para determinarmos um representante para a classe geradora de

$$H^1(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))) = H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))_{\mathbb{Z}} \cong (\mathbb{Z}_{\delta_i})_{\mathbb{Z}},$$

o raciocínio que fizemos acima para determinar o homomorfismo u_a^i mostra que o representante procurado é o homomorfismo $v_a^i\colon \mathbb{Z}\mathbb{Z}_a \to \mathbb{Z}$ dado por

$$v_a^i(1) = \frac{a}{\delta_i}.$$

Similarmente, um representante para a classe geradora de

$$H^1(\mathbb{Z}, H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) = H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))_{\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z}_b)_{\mathbb{Z}}$$

é o homomorfismo $v_b^i\colon \mathbb{Z}\mathbb{Z}_a \to \mathbb{Z}$ dado por

$$v_b^i(1) = 1.$$

Os homomorfismos ψ_a^i, $\tilde{\psi}_a^i$, ψ_b^i e $\tilde{\psi}_b^i$ são definidos de forma análoga a φ_a^i, $\tilde{\varphi}_a^i$, φ_b^i e $\tilde{\varphi}_b^i$.

Finalmente, para calcularmos o produto cup no anel de cohomologia $H^*(G,\mathbb{Z})$, precisaremos de uma aproximação da diagonal $\Delta_n\colon F_n \to (F\otimes F)_n$, em que

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}\mathbb{Z} & \xrightarrow{s-1} & \mathbb{Z}\mathbb{Z} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & & & \\ & & F_1 & & F_0 & & & & \end{array}$$

Esta aproximação da diagonal é dada, usando a Proposição 1.17, por

$$\begin{aligned} \Delta_0\colon F_0 &\to F_0\otimes F_0 \\ \Delta_0(1) &= 1\otimes 1, \\ \Delta_1\colon F_1 &\to (F_1\otimes F_0)\oplus(F_0\otimes F_1) \\ \Delta_1(1) &= \underbrace{1\otimes s}_{F_1\otimes F_0} + \underbrace{1\otimes 1}_{F_0\otimes F_1}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Também precisaremos de uma aproximação da diagonal para a resolução do grupo cíclico $\mathbb{Z}_m = \langle t \mid t^m = 1\rangle$ dada por

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}\mathbb{Z}_m \xrightarrow{N} \mathbb{Z}\mathbb{Z}_m \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}\mathbb{Z}_m \xrightarrow{N} \mathbb{Z}\mathbb{Z}_m \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

em que $N = 1 + t + \cdots + t^{m-1}$. Se definirmos $P_n = \mathbb{Z}\mathbb{Z}_m$, o módulo de dimensão n da resolução, tal aproximação $\Delta_{pq}\colon P_{p+q} \to P_p\otimes P_q$ é dada (veja [Bro82]) por

$$\Delta_{pq}(1) = \begin{cases} 1\otimes 1, & \text{se } p \text{ é par}, \\ 1\otimes t, & \text{se } p \text{ é ímpar, } q \text{ é par}, \\ \displaystyle\sum_{0\le i<j\le m-1} t^i\otimes t^j, & \text{se } p \text{ e } q \text{ são ímpares}. \end{cases} \tag{4.8}$$

Iniciemos com o produto

$$\begin{aligned} &H^0(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) \otimes H^0(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2j}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) \to \\ &\qquad \to H^0(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z})) \otimes H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2j}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) \to \\ &\qquad \to H^0(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}) \otimes H^{2j}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) \to \\ &\qquad \to H^0(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2(i+j)}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))), \end{aligned}$$

em que na composição acima efetuamos os produtos cup em $H^*(\mathbb{Z},\_\_)$, $H^*(\mathbb{Z}_b,\_\_)$ e $H^*(\mathbb{Z}_a,\_\_)$, e fazemos a identificação $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}$. Temos portanto, usando as aproximações da diagonal (4.7) e (4.8),

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\varphi}_a^i \smile \tilde{\varphi}_a^j)(1) &= \tilde{\varphi}_a^i(1)\otimes\tilde{\varphi}_a^j(1) = [\varphi_a^i]\otimes[\varphi_a^j],\\
(\varphi_a^i \smile \varphi_a^j)(1) &= \varphi_a^i(1)\otimes\varphi_a^j(1) = [u_a^i]\otimes[u_a^j],\\
(u_a^i \smile u_a^j)(1) &= u_a^i(1)\otimes u_a^j(1) \mapsto \frac{a^2}{\operatorname{mdc}(\delta_i, c_a^i-1)\operatorname{mdc}(\delta_j, c_a^j-1)},
\end{aligned}
$$

de onde segue que

$$[\tilde{\varphi}_a^i]\smile[\tilde{\varphi}_a^j] = \frac{a\operatorname{mdc}(\delta_{i+j}, c_a^{i+j}-1)}{\operatorname{mdc}(\delta_i, c_a^i-1)\operatorname{mdc}(\delta_j, c_a^j-1)}[\tilde{\varphi}_a^{i+j}].$$

Analogamente, o produto

$$
\begin{aligned}
H^0(\mathbb{Z}, H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) \otimes H^0(\mathbb{Z}, H^{2j}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) &\to\\
\to H^0(\mathbb{Z}, H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z})) \otimes H^{2j}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) &\to\\
\to H^0(\mathbb{Z}, H^{2(i+j)}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}) \otimes H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) &\to\\
\to H^0(\mathbb{Z}, H^{2(i+j)}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z})))&
\end{aligned}
$$

é tal que

$$[\tilde{\varphi}_b^i]\smile[\tilde{\varphi}_b^j] = \frac{b\operatorname{mdc}(b, c_b^{i+j}-1)}{\operatorname{mdc}(b, c_b^i-1)\operatorname{mdc}(b, c_b^j-1)}[\tilde{\varphi}_b^{i+j}].$$

Quanto ao produto

$$
\begin{aligned}
H^0(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) \otimes H^0(\mathbb{Z}, H^{2j}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) &\to\\
\to H^0(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z})) \otimes H^{2j}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) &\to\\
\to H^0(\mathbb{Z}, H^{2j}(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}) \otimes H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) &\to\\
\to H^0(\mathbb{Z}, H^{2j}(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) &= 0,
\end{aligned}
$$

só podemos ter

$$[\tilde{\varphi}_a^i]\smile[\tilde{\varphi}_b^j] = 0.$$

Da mesma forma, os produtos

$$
\begin{aligned}
H^0(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) \otimes H^1(\mathbb{Z}, H^{2j}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) &\to\\
\to H^1(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z})) \otimes H^{2j}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) &\to\\
\to H^1(\mathbb{Z}, H^{2j}(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}) \otimes H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) &\to\\
\to H^1(\mathbb{Z}, H^{2j}(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) &= 0
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
H^0(\mathbb{Z}, H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) \otimes H^1(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2j}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) &\to\\
\to H^1(\mathbb{Z}, H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z})) \otimes H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2j}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) &\to\\
\to H^1(\mathbb{Z}, H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}) \otimes H^{2j}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) &\to\\
\to H^1(\mathbb{Z}, H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^{2j}(\mathbb{Z}_a,\mathbb{Z}))) &= 0
\end{aligned}
$$

só podem ser tais que

$$[\tilde{\varphi}_a^i] \smile [\tilde{\psi}_b^j] = 0, \quad [\tilde{\varphi}_b^i] \smile [\tilde{\psi}_a^j] = 0.$$

O produto

$$\begin{aligned}
H^0(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))) \otimes H^1(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2j}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))) \to& \\
\to H^1(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})) \otimes H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2j}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))) \to& \\
\to H^1(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2i}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}) \otimes H^{2j}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))) \to& \\
\to H^1(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{Z}_b, H^{2(i+j)}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})))&
\end{aligned}$$

é tal que

$$\begin{aligned}
(\tilde{\varphi}_a^i \smile \tilde{\psi}_a^j)(1) &= \tilde{\varphi}_a^i(1) \otimes \tilde{\psi}_a^j(1) = [\varphi_a^i] \otimes [\psi_a^j], \\
(\varphi_a^i \smile \psi_a^j)(1) &= \varphi_a^i(1) \otimes \psi_a^j(1) = [u_a^i] \otimes [v_a^j], \\
(u_a^i \smile v_a^j)(1) &= u_a^i(1) \otimes v_a^j(1) \mapsto \frac{a^2}{\delta_i \operatorname{mdc}(\delta_i, c_a^i - 1)},
\end{aligned}$$

logo

$$[\tilde{\varphi}_a^i] \smile [\tilde{\psi}_a^j] = \frac{a\delta_{i+j}}{\delta_j \operatorname{mdc}(\delta_i, c_a^i - 1)} [\tilde{\psi}_a^{i+j}].$$

Analogamente, o produto

$$\begin{aligned}
H^0(\mathbb{Z}, H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))) \otimes H^1(\mathbb{Z}, H^{2j}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))) \to& \\
\to H^1(\mathbb{Z}, H^{2i}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})) \otimes H^{2j}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))) \to& \\
\to H^1(\mathbb{Z}, H^{2(i+j)}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}) \otimes H^0(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}))) \to& \\
\to H^1(\mathbb{Z}, H^{2(i+j)}(\mathbb{Z}_b, H^0(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z})))&
\end{aligned}$$

é tal que

$$[\tilde{\varphi}_b^i] \smile [\tilde{\psi}_b^j] = \frac{b}{\operatorname{mdc}(b, c_b^i - 1)} [\tilde{\psi}_b^{i+j}].$$

Finalmente, observando que $[\eta]$ é o elemento neutro em $H^0(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b, \mathbb{Z})$, temos também

$$[\tilde{\varphi}_a^i] \smile [\tilde{\eta}] = \frac{\delta_i}{\operatorname{mdc}(\delta_i, c_a^i - 1)} [\tilde{\psi}_a^i]$$

e

$$[\tilde{\varphi}_b^i] \smile [\tilde{\eta}] = \frac{b}{\operatorname{mdc}(b, c_b^i - 1)} [\tilde{\psi}_b^i].$$

Logo, temos

Teorema 4.9 *Seja $G = (\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$, com $\operatorname{mdc}(a, b) = 1$, em que as ações α e θ são dadas por*

$$\begin{aligned}
\alpha \colon \mathbb{Z}_b &\to Aut(\mathbb{Z}_a) \\
\alpha(1_b)(1_a) &= r \cdot 1_a
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\theta \colon \mathbb{Z} &\to Aut(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b) \\
\theta(1)(1_a) &= c_a \cdot 1_a, \\
\theta(1)(1_b) &= c \cdot 1_a + c_b \cdot 1_b.
\end{aligned}$$

Os grupos $H^*(G, \mathbb{Z})$ são dados por

$$H^n(G, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \textit{se } n = 0 \textit{ ou } n = 1, \\ \mathbb{Z}_{A_j} \oplus \mathbb{Z}_{B_j}, & \textit{se } n = 2j \textit{ ou } n = 2j+1 \textit{ (e } j > 0\textit{),} \end{cases}$$

em que $A_j = \mathrm{mdc}(c_a^j - 1, \delta_j)$, $\delta_j = \mathrm{mdc}(r^j - 1, a)$ e $B_j = \mathrm{mdc}(c_b^i - 1, b)$. Além disso, sendo $[\tilde{\eta}]$ um gerador de $H^1(G, \mathbb{Z})$, $[\tilde{\varphi}_a^i]$ e $[\tilde{\varphi}_b^i]$ geradores de $H^{2i}(G, \mathbb{Z})$ para $i > 0$ (tais que $\left\langle [\tilde{\varphi}_a^i] \right\rangle \cong \mathbb{Z}_{A_i}$ e $\left\langle [\tilde{\varphi}_b^i] \right\rangle \cong \mathbb{Z}_{B_i}$) e sendo $[\tilde{\psi}_a^i]$ e $[\tilde{\psi}_b^i]$ geradores de $H^{2i+1}(G, \mathbb{Z})$ para $i > 0$ (tais que $\left\langle [\tilde{\psi}_a^i] \right\rangle \cong \mathbb{Z}_{A_i}$ e $\left\langle [\tilde{\psi}_b^i] \right\rangle \cong \mathbb{Z}_{B_i}$), temos

$$\begin{aligned}
[\tilde{\varphi}_a^i] \smile [\tilde{\eta}] &= \frac{\delta_i}{\mathrm{mdc}(\delta_i, c_a^i - 1)} [\tilde{\psi}_a^i], \\
[\tilde{\varphi}_b^i] \smile [\tilde{\eta}] &= \frac{b}{\mathrm{mdc}(b, c_b^i - 1)} [\tilde{\psi}_b^i], \\
[\tilde{\varphi}_a^i] \smile [\tilde{\varphi}_a^j] &= \frac{a \, \mathrm{mdc}(\delta_{i+j}, c_a^{i+j} - 1)}{\mathrm{mdc}(\delta_i, c_a^i - 1) \, \mathrm{mdc}(\delta_j, c_a^j - 1)} [\tilde{\varphi}_a^{i+j}], \\
[\tilde{\varphi}_b^i] \smile [\tilde{\varphi}_b^j] &= \frac{b \, \mathrm{mdc}(b, c_b^{i+j} - 1)}{\mathrm{mdc}(b, c_b^i - 1) \, \mathrm{mdc}(b, c_b^j - 1)} [\tilde{\varphi}_b^{i+j}], \\
[\tilde{\varphi}_a^i] \smile [\tilde{\varphi}_b^j] &= 0, \\
[\tilde{\varphi}_a^i] \smile [\tilde{\psi}_a^j] &= \frac{a \delta_{i+j}}{\delta_j \, \mathrm{mdc}(\delta_i, c_a^i - 1)} [\tilde{\psi}_a^{i+j}], \\
[\tilde{\varphi}_b^i] \smile [\tilde{\psi}_b^j] &= \frac{b}{\mathrm{mdc}(b, c_b^i - 1)} [\tilde{\psi}_b^{i+j}], \\
[\tilde{\varphi}_a^i] \smile [\tilde{\psi}_b^j] &= 0, \\
[\tilde{\varphi}_b^i] \smile [\tilde{\psi}_a^j] &= 0.
\end{aligned}$$

Além disso, se $d = \mathrm{ord}_a^r$, $d_{c_a} = \mathrm{ord}_a(c_a)$ e $d_{c_b} = \mathrm{ord}_b(c_b)$, e se definirmos $p = \mathrm{mmc}(d, d_{c_a}, d_{c_b})$, então

$$([\tilde{\varphi}_a^p] + [\tilde{\varphi}_b^p]) \smile \_\_ \colon H^n(G, \mathbb{Z}) \cong H^{n+2p}(G, \mathbb{Z})$$

é um isomorfismo para todo $n \geq 2$.

Demonstração: Tudo o que resta a ser demonstrado diz respeito à periodicidade dos grupos $H^n(G, \mathbb{Z})$. Observando que $r^p \equiv 1 \pmod{a}$, $c_a^p \equiv 1 \pmod{a}$ e $c_b^p \equiv 1 \pmod{b}$, temos

$$\begin{aligned}
\delta_p &= a, \\
\delta_{p+j} &= \delta_j, \\
\mathrm{mdc}(\delta_{p+j}, c_a^{p+j} - 1) &= \mathrm{mdc}(\delta_j, c_a^j - 1), \\
\mathrm{mdc}(b, c_b^{p+j} - 1) &= \mathrm{mdc}(b, c_b^j - 1).
\end{aligned}$$

Logo, as fórmulas que já temos para os produtos mostram que, para todo $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
([\tilde{\varphi}_a^p] + [\tilde{\varphi}_b^p]) \smile [\tilde{\varphi}_a^j] &= [\tilde{\varphi}_a^{p+j}], \\
([\tilde{\varphi}_a^p] + [\tilde{\varphi}_b^p]) \smile [\tilde{\varphi}_b^j] &= [\tilde{\varphi}_b^{p+j}], \\
([\tilde{\varphi}_a^p] + [\tilde{\varphi}_b^p]) \smile [\tilde{\psi}_a^j] &= [\tilde{\psi}_a^{p+j}], \\
([\tilde{\varphi}_a^p] + [\tilde{\varphi}_b^p]) \smile [\tilde{\psi}_b^j] &= [\tilde{\psi}_b^{p+j}],
\end{aligned}$$

provando que

$$([\tilde{\varphi}_a^p] + [\tilde{\varphi}_b^p]) \smile \_\_ \colon H^n(G,\mathbb{Z}) \cong H^{n+2p}(G,\mathbb{Z})$$

é um isomorfismo.

■

Referências Bibliográficas

[AM04] Alejandro Adem e R. James Milgram. *Cohomology of Finite Groups.* Springer, 2004.

[Bro82] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups.* Springer, 1982.

[Eve91] Leonard Evens. *The Cohomology of Groups.* Oxford Mathematical Monographs, 1991.

[FC63] R. H. Fox e R. H. Crowell. *Introduction to Knot Theory.* Ginn and Co., Boston, Mass., 1963.

[FH83] Edward Fadell e Sufian Husseini. The Nielsen number on surfaces. *Topological Methods in nonlinear functional analysis, Contemporary Mathematics*, 21:59–98, 1983.

[GB08] Daciberg Lima Gonçalves e Lucília D. Borsari. The first group (co)homology of a group G with coefficients in some G-modules. *Quaestiones Mathematicae*, 31:89–100, 2008.

[GG05] Daciberg Lima Gonçalves e Marek Golasinski. Spherical space forms — homotopy types and self-equivalences for the groups $\mathbb{Z}_a \rtimes \mathbb{Z}_b$ and $\mathbb{Z}_a \rtimes (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})$. *Topology and its Applications*, 146–147:451–470, 2005.

[GG10] Daciberg Lima Gonçalves e John Guaschi. The Borsuk-Ulam theorem for maps into a surface. *Topology and its Applications*, 157:1742–1759, 2010.

[GG11] Daciberg Lima Gonçalves e John Guaschi. The classification of the virtually cyclic subgroups of the sphere braid groups. *http://arxiv.org/abs/1110.6628*, 2011.

[GO97] Daciberg Lima Gonçalves e Edson de Oliveira. The Lefschetz coincidence number for maps among compact surfaces. *Far East Journal Of Math Science*, 2:147–166, 1997.

[Hat07] Allen Hatcher. *Notes on basic* 3*-manifold topology.* http://www.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3Mfds.pdf, 2007.

[Hil] J. Hillman. Comunicação privada.

[HS97] Peter J. Hilton e U. Stammbach. *A Course in Homological Algebra.* Springer, 1997.

[McC01] John McCleary. *A User's Guide to Spectral Sequences.* Cambridge University Press, 2001.

[Soa08] Márcio de Jesus Soares. *Ações de p-grupos sobre produtos de esferas, cohomologia dos grupos virtualmente cíclicos* $(\mathbb{Z}_a \rtimes \mathbb{Z}_b) \rtimes \mathbb{Z}$ *e* $[\mathbb{Z}_a \rtimes (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})] \rtimes \mathbb{Z}$ *e Cohomologia de Tate.* Tese de Doutorado, USP–São Carlos, 2008.

[Tom05] Satoshi Tomoda. *Cohomology Rings of Certain 4-Periodic Finite Groups.* Tese de Doutorado, University of Calgary, 2005.

[TZ08] Satoshi Tomoda e Peter Zvengrowski. Remarks on the cohomology of finite fundamental groups of 3-manifolds. *Geometry & Topology Monographs*, 14:519–556, 2008.

[Wal61] C. T. C. Wall. Resolutions for extensions of groups. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 57:251–255, 1961.

[Wal67] C. T. C. Wall. Poincare complexes: I. *The Annals of Mathematics*, 86(2):213–245, 1967.

Índice Remissivo