Uma demonstração analítica do teorema de Erdös-Kac

Everton Juliano da Silva

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Mestrado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paulo Agozzini Martin

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, fevereiro de 2014

Uma demonstração analítica
do teorema de Erdös-Kac

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 03/04/2014. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Paulo Agozzini Martin (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Adilson Simonis - IME-USP
- Prof. Dr. Fábio Maia Bertato - UNICAMP

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Laurípedes da Silva Lopes e Moisés Jésu da Silva, que sempre estiveram ao meu lado dando-me apoio de todas as formas. Sem eles eu nem teria começado essa magnífica jornada.

A minha namorada, Mariana Nani, que possui uma grande paciência por estar comigo. Devo agradecer e muito a sua atenção, afeto e companheirismo que sempre me acompanha e que tenta fazer de mim um homem melhor.

Ao meu orientador Prof. Dr. Paulo Agozzini Martin, pela dedicação, paciência nas exposições e pelas sugestões para a melhoria desta dissertação. Agradeço também pela sugestão do tema deste trabalho, que eu desconhecia e adorei conhecer.

Aos professores em geral, pois são pessoas que dedicam o seu precioso tempo para nos ensinar e fazer com que os nossos sonhos possam se realizar. Em especial, gostaria de agradecer a Profa. Dr. Zara Issa Abud, A Profa. Dr. Roseli Fernandes, ao Prof. Dr. Ricardo Bianconi e ao Prof. Dr. Raul Antônio Ferraz. Agradeço também ao Prof. Dr. Adilson Simonis e ao Prof. Dr. Fábio Maia Bertato pelas sugestões e correções deste trabalho.

Aos meus colegas e amigos, que me ajudaram a chegar até aqui. Todas as horas que passamos estudando foram essenciais para a minha formação. Em especial, agradeço a Fabiana Rodrigues Alves e Ângelo Chiode, que foram meus primeiros amigos no IME, a Vinícius Morelli pelas notas de aula emprestada e a Francisco de Melo Viríssimo e Marcelo Matheus Gauy, por estarem sempre disponíveis em ajudar.

Agradeço também ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Em teoria dos números, o teorema de Erdös-Kac, também conhecido como o teorema fundamental de teoria probabilística dos números, diz que se $\omega(n)$ denota a quantidade de fatores primos distintos de n, então a sequência de funções de distribuições $\{F_N\}_N$, definidas por $F_N(x) = \frac{1}{N}\#\left\{n \leq N : \frac{\omega(n)-\log\log N}{\sqrt{\log\log N}} \leq x\right\}$, converge uniformemente sobre $\mathbb{R}$ para a distribuição normal padrão. Neste trabalho desenvolvemos todos os teoremas necessários para uma demonstração analítica, que nos permitirá encontrar a ordem de erro da convergência acima.

Palavras chaves: O teorema de Erdös-Kac, a desigualdade de Berry-Esseen, o teorema da continuidade de Lévy, o método de Selberg-Delange, teoria probabilística dos números.

Abstract

In number theory, the Erdös-Kac theorem, also known as the fundamental theorem of probabilistic number theory, states that if $\omega(n)$ is the number of distinct prime factors of n, then the sequence of distribution functions $\{F_N\}_N$, defined by $F_N(x) = \frac{1}{N}\#\left\{n \leq N : \frac{\omega(n)-\log\log N}{\sqrt{\log\log N}} \leq x\right\}$, converges uniformly on $\mathbb{R}$ to the standard normal distribution. In this work we developed all theorems needed to an analytic demonstration, which will allow us to find an order of error of the above convergence.

Keywords: The Erdös-Kac theorem, the Berry-Esseen inequality, the Lévy's continuity theorem, the Selberg-Delange method, probabilistic number theory.

Sumário

Introdução

O Teorema de Erdös-Kac diz que se $\omega(n)$ representa a quantidade de números primos na fatoração de um número natural n sem contar a multiplicidade, então uniformemente para $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ n \leq N : \frac{\omega(n) - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}} \leq x \right\} = \Phi(x), \tag{1}$$

onde

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

é a distribuição normal padrão.

Além disso, a velocidade da convergência do limite acima é da ordem de $\frac{1}{\sqrt{\log\log N}}$, ou seja,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{N} \# \left\{ n \leq N : \frac{\omega(n) - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}} \leq x \right\} - \Phi(x) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{\log\log N}}$$

para alguma constante $C > 0$ e $N \geq 3$.

Neste trabalho faremos uma demonstração analítica do teorema de Erdös-Kac realizando todo o desenvolvimento necessário para sua demonstração, assumindo apenas o conteúdo que se vê em um curso normal de graduação. Para sermos mais explícitos, vamos admitir que o leitor está familiarizado com análise real, análise complexa em uma variável contemplando os principais resultados (teorema dos resíduos, a integral e a fórmula de Cauchy, ...), a integral de Riemann-Stieltjes com suas principais propriedades e um pouco da teoria da transformada de Fourier. A demonstração que faremos possibilitará encontrar a velocidade da convergência citada acima. Erdös e Kac em sua original prova de (1) usaram difíceis métodos de crivos. Uma demonstração probabilística para o resultado é devida a Halberstam [19], que usa o conceito de momentos, ideia sugerida por Kac (veja [18] para mais detalhes).

Analisando friamente, o teorema de Erdös-Kac é apenas um limite, entretanto, suas consequências são enormes. A distribuição normal é sinônimo de aleatoriedade, e assim, este limite está nos dizendo que a teoria dos números está intrinsecamente ligada a teoria das probabilidades. Mais ainda, que existe uma certa aleatoriedade na quantidade de primos de um dado natural n. Após este teorema, consolidou-se uma nova área de pesquisa, a chamada teoria probabilística dos números.

O teorema nos mostra como o valor de $\omega(n)$ varia de acordo com o valor central $\log\log N$. Por exemplo, se $x = 1.3$, então $\Phi(x)$ vale aproximadamente

0.9. Assim, o teorema de Erdös-Kac diz que

$$\frac{1}{N}\#\left\{n \leq N : \frac{\omega(n) - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}} \leq 1.3\right\} \simeq 0.9$$

para N grande.

Daí se N está perto de $e^{e^{100}}$, um número com mais de 10^{43} dígitos,

$$\frac{1}{N}\#\left\{n \leq N : \omega(n) \leq 113\right\} \simeq 0.9.$$

Isto significa que cerca de 90 por cento dos números menores que $e^{e^{100}}$ tem até 113 divisores primos, um número relativamente pequeno.

Para ver o porque (1) poderia ser verdadeiro, observe que se p denota um número primo,

$$\omega(n) = \sum_{p} \delta_p(n), \tag{2}$$

onde $\delta_p(n)$ é 1 se p divide n ou 0 caso contrário. Para um inteiro positivo a, a quantidade de multiplos de a que não excedem N é $\left[\frac{N}{a}\right]$. Logo, se ν_N denota a medida de probabilidade que toma valor $\frac{1}{N}$ para cada $1, \ldots, N$ e zero nos demais inteiros, então

$$v_N\{n : a|n\} = \frac{1}{N}\left[\frac{N}{a}\right],$$

que fica próximo de $\frac{1}{a}$ para N grande. Se $p_1, \ldots, p_k$ são primos distintos, então $p_i|n$ para todo i se, e somente se, $\prod_i p_i|n$. Então a interseção dos k conjuntos $\{n : \delta_{p_i}(n) = 1\}$ tem medida v_N igual a $\frac{1}{N}\left[\frac{N}{\prod_i p_i}\right]$, que, para N grande, se aproxima do produto $\prod_i \frac{1}{N}\left[\frac{N}{p_i}\right]$ de suas individuais medidas v_N. Portanto, se n é escolhido aleatóriamente entre 1 e N, e se N é grande, então as variáveis aleatórias

$$\delta_{p_1}(n), \ldots, \delta_{p_k}(n)$$

são aproximadamentes independentes. Assim, existe uma esperança de que a soma (2) obedecerá o teorema central do limite quando propriamente normalizado. Isso é um tipo plausível de argumento estatístico que levou originalmente a suposição que (1) poderia ser verdadeiro.

No capítulo 1 estudamos alguns conceitos elementares, introduzindo a definição de função aritmética e o estudo de fórmulas assintóticas, com o resultado principal sobre a ordem de crescimento de $\sum_p \frac{1}{p}$, onde a soma é tomada sobre os números primos.

No capítulo 2 estudamos as séries de Dirichlet, principalmente a função $L(s, z, \omega)$, demonstramos a desigualdade probabilística de Berry-Esseen, procuramos uma região livre de zeros da famosa função zeta de Riemann, mostramos o método de Selberg-Delange para a função aritmética $z^{\omega(n)}$ e encerramos o capítulo com uma generalização da função contadora de primos $\pi(x)$ e a demonstração do teorema dos números primos.

No capítulo 3 fazemos o estudo em métodos probabilísticos. Definimos o conceito de densidade, provamos a desigualdade de Turán-Kubilius, definimos a importante noção de função de distribuição e função característica, provamos o teorema da continuidade de Lévy, demonstramos o teorema de Erdös-Kac e finalizamos com algumas generalizações.

1 Conceitos elementares

1.1 Funções aritméticas

Em teoria dos números estamos interessados na distribuição de valores de funções aritméticas $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Uma função aritmética f é aditiva se:

$$f(mn) = f(m) + f(n) \quad \text{se} \quad mdc(m,n) = 1,$$

e f é multiplicativa se:

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{se} \quad mdc(m,n) = 1.$$

Dizemos que f é completamente aditiva ou completamente multiplicativa, respectivamente, quando a condição de coprimalidade pode ser removida.

Obviamente, os valores das funções aritméticas aditivas ou multiplicativas são determinadas pela potência de primos.

Vamos dar dois importantes exemplos. Consideremos as funções contadoras de primos $\omega(n)$ e $\Omega(n)$ de um inteiro positivo n, sem e com multiplicidade respectivamente.

Por definição, temos:

$$\omega(n) = \sum_{p|n} 1 \quad \text{e} \quad \Omega(n) = \sum_{p|n} \nu(n;p),$$

onde $\nu(n;p)$ é o expoente do primo p na única fatoração prima de n:

$$n = \prod_{p} p^{\nu(n;p)},$$

e o produto é tomado sobre p primo. Daqui em diante, a menos de menção em contrário, faremos a convenção que p sempre denotará um número primo.

Exemplo 1.1. *Como* $12 = 2^2 3$, *então* $\omega(12) = 2$ *e* $\Omega(12) = 3$

Claramente, n é primo se e somente se $\Omega(n) = 1$.

Lema 1.2. $\omega(n)$ *é função aritmética aditiva e* $\Omega(n)$ *é uma função aritmética completamente aditiva.*

Demonstração. Sejam $m, n \in \mathbb{N}, mdc(m, n) = 1$. Consideramos a única fatoração (a menos da ordem) de m, n em fatores primos:

$$n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s} \quad \text{e} \quad m = q_1^{r_1} \cdots q_t^{r_t}$$

onde p_i e q_j são primos para todo $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, t$

Como $mdc(m, n) = 1$ então $p_i \neq q_j \ \forall i, j$. Portanto:

$$\omega(nm) = \omega(p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s} q_1^{r_1} \cdots q_t^{r_t}) = s + t$$

$$= \omega(p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}) + \omega(q_1^{r_1} \cdots q_t^{r_t}) = \omega(n) + \omega(m)$$

o que mostra a primeira asserção. Considere agora m, n como acima, mas não necessariamente coprimos. Logo:

$$\Omega(nm) = \Omega(p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s} q_1^{r_1} \cdots q_t^{r_t}) = k_1 + \ldots k_s + r_1 + \ldots + r_t$$

$$= \Omega(p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}) + \Omega(q_1^{r_1} \cdots q_t^{r_t}) = \Omega(n) + \Omega(m)$$

como queríamos. □

Observação 1.3. *$\omega(n)$ não é completamente aditiva pois:*

$$\omega(12) = 2 \neq 3 = \omega(2) + \omega(6).$$

Exemplo 1.4. *Vejamos algumas funções bem conhecidas da teoria dos números.*

$$\textit{A função de Möbius: } \mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\omega(n)} & \textit{se } \omega(n) = \Omega(n) \\ 0 & \textit{caso contrário.} \end{cases} .$$

$$\textit{A função totiente de Euler: } \varphi(n) = \#\{1 \leq a \leq n : mdc(a, n) = 1\}.$$

A função de von Mangoldt:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \textit{se } n = p^m \textit{ para algum } p \textit{ primo, } m \geq 1 \\ 0 & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Propriedades destas e outras funções aritméticas podem ser consultadas em [6]. Nosso objetivo nesse texto ficará concentrado na função $\omega(n)$.

1.2 Fórmulas assintóticas

Quando investigamos funções aritméticas, nem sempre devemos esperar fórmulas exatas. Geralmente, os valores de uma função aritmética $f(n)$ estão bem espalhados. Uma alternativa é tentar entender o crescimento assintótico da função. Consequentemente, nós precisamos de uma notação para tratar os termos de erro. Nós escrevemos:

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{ou} \quad f(x) << g(x)$$

quando existe uma função positiva $g(x)$ e um número real x_0 tal que:

$$|f(x)| \leq kg(x),$$

para alguma constante $k > 0$ e uniformemente para $x > x_0$.

Então isso signfica que a função $f(x)$ não cresce mais rápido do que a função $g(x)$ (a menos de uma constante).

Normalmente, saber exatamente o valor de x_0 não é tão importante. Entretanto neste trabalho, especialmente nas seções (2.3) e (2.4), por vezes estaremos interessados em seu valor. Sempre que isso for relevante, indicaremos no texto.

Vamos a um exemplo. Qual é a ordem de crescimento da série harmônica truncada:

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n}$$

quando $x \to \infty$? Para $n \geq 2$ e $n - 1 \leq t \leq n$, temos:

$$\frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n-1}.$$

Denote por $[x]$ o maior inteiro menor ou igual a x. Então, somando sobre $2 \leq n \leq [x]$, temos:

$$\sum_{n=2}^{[x]} \frac{1}{n} \leq \int_{1}^{[x]} \frac{dt}{t} \leq \sum_{n=1}^{[x]-1} \frac{1}{n}.$$

Agora, como

$$\sum_{n=2}^{[x]} \frac{1}{n} - \int_{1}^{[x]} \frac{dt}{t} \leq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n} - \int_{1}^{[x]} \frac{dt}{t} \leq 1$$

e

$$\int_{1}^{[x]} \frac{dt}{t} - \sum_{n=1}^{[x]-1} \frac{1}{n} \leq 0 \Rightarrow \int_{1}^{[x]} \frac{dt}{t} - \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n} \leq 1$$

então:
$$\left|\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}-\int_1^x\frac{dt}{t}\right|=\left|\sum_{n=1}^{[x]}\frac{1}{n}-\int_1^{[x]}\frac{dt}{t}-\int_{[x]}^x\frac{dt}{t}\right|$$
$$\leq\left|\sum_{n=1}^{[x]}\frac{1}{n}-\int_1^{[x]}\frac{dt}{t}\right|+\int_{[x]}^x\frac{dt}{t}\leq 1+1=2,$$
pois
$$\int_{[x]}^x\frac{dt}{t}\leq\int_{[x]}^x\frac{dt}{[x]}=\frac{x-[x]}{[x]}\leq\frac{1}{[x]}\leq 1.$$

Assim,
$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}-\int_1^x\frac{dt}{t}=O(1).$$

Em outras palavras,
$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}=\int_1^x\frac{dt}{t}+O(1)=\log(x)+O(1). \tag{3}$$

O próximo lema será um resultado auxiliar que nos ajudará posteriormente a entender como a soma dos recíprocos dos números primos crescem. Para prová-lo, vamos assumir aqui o famoso resultado conjecturado por Gauss e provado por Jacques Hadamard e Charles-Jean de La Vallée Poussin:

Teorema 1.5. *(Teorema dos números primos). Se $\pi(x)$ denota a quantidade de números primos menores ou iguais a x, então*
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=1.$$

Este teorema será provado adiante como uma consequência do método de Selberg-Delange.

Lema 1.6.
$$\sum_{p\leq n}\frac{\log p}{p}=\log n+O(1).$$

Demonstração. Sabemos que
$$n!=\prod_{p\leq n}p^{\nu(p;n!)},$$

onde $\nu(p;n!) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]$ (veja [7]). Tomando logarítmos, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n}\log k = \sum_{p\leq n}\nu(p;n!)\log p.$$

Como

$$\frac{n}{p} - 1 \leq \nu(p;n!) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{p^k} = \frac{n}{p-1},$$

temos

$$\sum_{p\leq n}\left(\frac{n}{p}-1\right)\log p \leq \sum_{k=1}^{n}\log k \leq \sum_{p\leq n}\frac{n}{p-1}\log p.$$

Daí

$$\sum_{p\leq n}\frac{\log p}{p} - \frac{1}{n}\sum_{p\leq n}\log p \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k \leq \sum_{p\leq n}\frac{\log p}{p-1},$$

ou seja,

$$-\frac{1}{n}\sum_{p\leq n}\log p \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k - \sum_{p\leq n}\frac{\log p}{p} \leq \sum_{p\leq n}\frac{\log p}{p(p-1)}.$$

Pelo teorema dos números primos, temos:

$$\sum_{p\leq n}\log p \leq \pi(n)\log n << n.$$

Assim

$$\frac{1}{n}\sum_{p\leq n}\log p << 1.$$

Por outro lado,

$$\sum_{p\leq n}\frac{\log p}{p(p-1)} \leq \sum_{N\geq 1}\frac{\log N}{N(N-1)} = O(1)$$

pois $\sum_{N\geq 1}\frac{\log N}{N(N-1)}$ converge comparando com $\sum_{N\geq 1}\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}$.

Vamos estimar $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k$. Temos

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k = \frac{\log n}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log k \leq \frac{\log n}{n} + \frac{1}{n}\int_1^n \log(k)dk$$

$$= \frac{\log n}{n} + \log n - 1 + \frac{1}{n} = \log n + O(1).$$

Portanto a desigualdadade acima nos dá:

$$\sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} = \log n + O(1),$$

como queríamos. $\square$

O que queremos agora é a estimativa:

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + O(1).$$

Para isso, vamos precisar primeiro do lema de Abel:

Lema 1.7. *Seja $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ uma sequência divergente de números reais, e defina para $\alpha_n \in \mathbb{R}$ a função $A(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} \alpha_n$, e seja $f(x)$ uma função real com derivada contínua para $x \geq \lambda_1$. Então:*

$$\sum_{\lambda_n \leq x} \alpha_n f(\lambda_n) = A(x)f(x) - \int_{\lambda_1}^{x} A(u)f'(u)du.$$

Demonstração. Usando a integral de Riemann-Stieltjes, e integrando por partes, obtemos:

$$\int_{\lambda_1}^{x} A(u)f'(u)du = \int_{\lambda_1}^{x} A(u)df(u) = A(x)f(x) - A(\lambda_1)f(\lambda_1) - \int_{\lambda_1}^{x} f(u)dA(u)$$

$$= A(x)f(x) - \alpha_1 f(\lambda_1) - \sum_{\substack{\lambda_n \leq x \\ n \geq 2}} \alpha_n f(\lambda_n) = A(x)f(x) - \sum_{\lambda_n \leq x} \alpha_n f(\lambda_n)$$

como queríamos.

$\square$

Vamos ao lema mais importante dessa seção.

Lema 1.8.

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + O(1).$$

Demonstração. Vamos usar a soma de Abel com

$$f(t) = \frac{1}{\log t}, \quad \text{e} \quad \alpha(n) = \begin{cases} \frac{\log n}{n} & \text{se } n \text{ é primo} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, temos que $A(x) = \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1)$. Daí

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} \frac{1}{\log p} = \frac{A(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{A(u)}{u(\log u)^2} du$$

$$= 1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) + \int_2^x \frac{du}{u \log u} + O\left(\int_2^x \frac{du}{u(\log u)^2}\right).$$

Como

$$\int_2^x \frac{du}{u(\log u)^2} = \left[-\frac{1}{\log u}\right]_2^x = -\frac{1}{\log x} + \frac{1}{\log 2}$$

e

$$\int_2^x \frac{du}{u \log u} = \log \log u \bigg|_2^x = \log \log x - \log \log 2,$$

obtemos

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + O(1).$$

□

Uma consequência dessa fórmula é o fato de que a soma

$$\sum_p \frac{1}{p}$$

diverge. Com efeito, pelo lema acima, existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\log \log x - \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \leq \left| \log \log x - \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right| \leq k.$$

Daí,

$$\log \log x \leq k + \sum_{p \leq x} \frac{1}{p},$$

e como $\log \log x \to \infty$ quando $x \to \infty$, segue que a soma $\sum_p \frac{1}{p}$ diverge.

2 Métodos analíticos

2.1 A função $L(s, z, \omega)$ e a Fórmula de Perron

Nosso estudo de métodos analíticos em teoria dos números começa com a definição de série de Dirichlet:

Definição 2.1. *Dada uma função aritmética $f(n)$, sua série de Dirichlet será a série dada por*

$$L(s, f) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$$

onde $s \in \mathbb{C}$.

Aqui e no restante do trabalho, usaremos a notação $s = \sigma + it = \Re(s) + i\Im(s)$. Salvo menção em contrário, o logarítmo complexo usado é o logarítmo principal, definido em $\mathbb{C} - \{0\}$ e holomorfo em $\mathbb{C} - \{x \in \mathbb{C} : x \leq 0\}$.

Claramente, a convergência da série depende do número complexo s. Por exemplo, se $f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, então $L(s, f) = \zeta(s)$, a função zeta de Riemann, que converge se $\sigma > 1$.

A nossa maior atenção será dada a função aritmética $z^{\omega(n)}$ e sua série de Dirichlet $L(s, z, \omega)$, onde z é um complexo não nulo de módulo menor que 1. É fácil ver que $L(s, z, \omega)$ converge para $\sigma > 1$. Boa parte do nosso esforço consistirá em aumentar esse domínio.

Muitas propriedades das séries de Dirichlet podem ser consultadas em [6]. Nesse texto vamos demonstrar apenas as propriedades necessárias para o andamento deste trabalho.

2.1.1 A binomial generalizada

Antes de começar a estudar a função $L(s, z, \omega)$, precisamos de um resultado preliminar que será muito útil mais a frente. Para isso, vamos usar a definição de binomial generalizada.

Definição 2.2. *Considere $z \in \mathbb{C}$, e $k \in \mathbb{N}$. Definimos a binomial generalizada por:*

$$\binom{z}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k} (z - j + 1).$$

Note que se z for um inteiro negativo, esta fórmula se reduz a clássica fórmula binomial.

Lema 2.3. *Seja $a \in \mathbb{C}, |a| < 1$, e $z \in \mathbb{C}$. Então:*

$$(1-a)^{-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{z+k-1}{k} a^k.$$

Demonstração. Observe que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{z+k-1}{k} a^k = 1 + za + \frac{1}{2!}z(z+1)a^2 + \frac{1}{3!}z(z+1)(z+2)a^3 + \dots$$

Assim, fixado $z \in \mathbb{C}$, considere

$$f(a) = (1-a)^{-z}, |a| < 1.$$

Por definição de exponencial complexa, $(1-a)^{-z} = \exp(-z \log(1-a))$, e como $|a| < 1$, segue que f é holomorfa. Além disso,

$$f'(a) = z(1-a)^{-z-1}$$

$$f''(a) = z(z+1)(1-a)^{-z-2}$$

$$\dots$$

$$f^k(a) = z(z+1)(z+2)\cdots(z+k-1)(1-a)^{-z-k}$$

e escrevendo f em série de Taylor em 0, obtemos

$$f(a) = (1-a)^{-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} a^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\cdots(z+k-1)}{k!} a^k$$

que é exatamente a soma acima. □

2.1.2 O produto de Euler e a função $L(s,z,\omega)$

O próximo lema foi descoberto por Euler em 1737 e é as vezes chamado a versão analítica do teorema fundamental da aritmética.

Lema 2.4. *Assuma que $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$. Se $f(n)$ é uma função aritmética multiplicativa, então:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 + f(p) + f(p^2) + \dots).$$

Demonstração. Pela multiplicatividade de $f(n)$ e a unicidade da fatoração de inteiros, então:

$$\prod_{p\leq x}(1+f(p)+f(p^2)+\dots) = \sum_{\substack{n \\ p|n \Rightarrow p\leq x}} f(n),$$

onde a notação $\sum\limits_{\substack{n \\ p|n \Rightarrow p\leq x}} f(n)$ significa que a soma deve ser tomada sobre todos os n naturais tais que todo divisor primo de n é menor ou igual a x.

Desde que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \sum_{\substack{n \\ p|n \Rightarrow p\leq x}} f(n)\right| \leq \sum_{n>x} |f(n)|,$$

a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$ implica o lema. $\square$

Lema 2.5. *Seja $f(n)$ uma função aritmética multiplicativa. Se*

$$\sum_p \left(\left|\frac{f(p)}{p}\right| + \left|\frac{f(p^2)}{p^2}\right| + \dots\right) < \infty$$

então a sua série de Dirichlet $L(s,f) = \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ é absolutamente convergente, e vale que

$$L(s,f) = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \dots\right).$$

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que a convergência de

$$\sum_p \left(\left|\frac{f(p)}{p}\right| + \left|\frac{f(p^2)}{p^2}\right| + \dots\right)$$

implica na convergência de

$$\prod_p \left(1 + \left|\frac{f(p)}{p}\right| + \left|\frac{f(p^2)}{p^2}\right| + \dots\right).$$

Com efeito, o produto acima converge se, e somente se,

$$\log\left(\prod_p \left(1 + \left|\frac{f(p)}{p}\right| + \left|\frac{f(p^2)}{p^2}\right| + \dots\right)\right)$$

converge. Mas, por continuidade do log,

$$\log\left(\prod_p \left(1 + \left|\frac{f(p)}{p}\right| + \left|\frac{f(p^2)}{p^2}\right| + \dots\right)\right) = \sum_p \log\left(1 + \left|\frac{f(p)}{p}\right| + \left|\frac{f(p^2)}{p^2}\right| + \dots\right)$$

e como $\log(1+x) \leq x$, para todo x positivo, obtemos que a igualdade acima é menor ou igual a

$$\sum_p \left(\left| \frac{f(p)}{p} \right| + \left| \frac{f(p^2)}{p^2} \right| + \dots \right)$$

que converge por hipótese. Logo

$$\prod_p \left(1 + \left| \frac{f(p)}{p} \right| + \left| \frac{f(p^2)}{p^2} \right| + \dots \right)$$

converge. Se $P^+(n)$ denota o maior primo na fatoração de n, então, para todo $x \geq 1$, temos

$$\sum_{n \leq x} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{P^+(n) \leq x} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| = \prod_{p \leq x} \left(1 + \left| \frac{f(p)}{p} \right| + \left| \frac{f(p^2)}{p^2} \right| + \dots \right).$$

E como o produto acima converge, segue que a série de Dirichlet $L(s, f)$ converge absolutamente. Além disso,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} - \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \dots \right) \right| = \left| \sum_{P^+(n) > x} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n > x} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right|$$

e isto implica o lema, pois

$$\sum_{n > x} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \to 0 \text{ quando } x \to \infty,$$

devido a convergência absoluta de $L(s, f)$. $\square$

Considere $z \in \mathbb{C}$, com $0 < |z| \leq 1$. Definimos:

$$L(s, z, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s}, \quad s = \sigma + it.$$

Observe que $L(s, z, \omega)$ está bem definida para $\sigma > 1$ pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \zeta(\sigma),$$

que converge para $\sigma > 1$.

Agora, como $\omega(n)$ é aditiva, a função aritmética $\frac{z^{\omega(n)}}{n^s}$ é multiplicativa. Assim, pelo produto de Euler, temos:

$$L(s,z,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \prod_p \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{p^{sk}}\right) = \prod_p \left(1 + \frac{z}{p^s - 1}\right).$$

Considere $f(n) = \frac{1}{n^s}, s = \sigma + it, \sigma > 1$. Novamente pelo produto de Euler obtemos

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Essa igualdade mostra que $\zeta(s) \neq 0$ se $\sigma > 1$.

Assim, se $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ e $\sigma > 1$, obtemos, pelo lema (2.3):

$$\zeta(s)^z = [\zeta(s)]^z = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-z} = \prod_p \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{z+k-1}{k} p^{-sk}\right).$$

Agora defina para cada p primo e $k \geq 1$,

$$\tau_z(p^k) = \binom{z+k-1}{k}$$

e defina $\tau_z(n), n \in \mathbb{N}$, de tal forma que τ_z seja multiplicativa. Assim, observando que para $|z| \leq 1$ vale que $|\tau_z(p^k)| \leq 1$, segue também $|\tau_z(n)| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, para $\sigma > 1$, segue que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_z(n)}{n^s}$$

é absolutamente convergente. E por (2.4), resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_z(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{z+k-1}{k} p^{-sk}\right) = \zeta(s)^z.$$

Antes de continuar, vamos a dois teoremas que usaremos adiante.

Teorema 2.6. *Dada duas funções $F(s)$ e $G(s)$ representadas pelas séries de Dirichlet*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

e

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s},$$

sendo ambas absolutamente convergêntes para $\sigma > 1$*. Então, para* $\sigma > 1$*, nós temos:*

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$$

onde $h = f * g$ *é a convolução de Dirichlet de* f *e* g *definida por*

$$h(n) := \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Demonstração. Considere $s = \sigma + it$, onde $\sigma > 1$. Assim

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)g(m)}{(nm)^s}.$$

Por causa da convergência absoluta, nós podemos rearranjar os termos sem alterar a soma. Assim, podemos coletar aqueles termos em que mn é uma constante, digamos k. Os possíveis valores de k são $1, 2, 3, \ldots$, então

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{mn=k} f(n)g(m) \right) k^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(k)}{k^s}.$$

onde $h(k) = \sum_{mn=k} f(n)g(m) = (f * g)(k)$ e isso prova o teorema. □

Teorema 2.7. *Sejam* f *e* g *duas funções aritméticas multiplicativas. Então*

$$h(n) = (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

também é multiplicativa.

Demonstração. Sejam n_1 e n_2 naturais tal que $mdc(n_1, n_2) = 1$. Então se d divide n_1n_2, existem naturais d_1 e d_2 com $mdc(d_1, d_2) = 1$ tal que $d = d_1d_2$ e d_i divide $n_i, i = 1, 2$. Portanto:

$$h(n_1n_2) = \sum_{d|n_1n_2} f(d)g\left(\frac{n_1n_2}{d}\right) = \sum_{d_1d_2|n_1n_2} f(d_1d_2)g\left(\frac{n_1n_2}{d_1d_2}\right)$$

$$= \sum_{d_1d_2|n_1n_2} f(d_1)f(d_2)g\left(\frac{n_1}{d_1}\right)g\left(\frac{n_2}{d_2}\right)$$

$$= \sum_{d_1|n_1} \left(\sum_{d_2|n_2} f(d_1)f(d_2)g\left(\frac{n_1}{d_1}\right) g\left(\frac{n_2}{d_2}\right)\right)$$

$$= \sum_{d_1|n_1} f(d_1)g\left(\frac{n_1}{d_1}\right) \sum_{d_2|n_2} f(d_2)g\left(\frac{n_2}{d_2}\right) = h(n_1)h(n_2).$$

$\square$

Definimos agora a função G dada por:

$$G(s,z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_z(n)}{n^s},$$

onde $b_z = z^{\omega} * \tau_{-z}$, ou seja:

$$b_z(n) = (z^{\omega} * \tau_{-z})(n) := \sum_{d|n} z^{\omega(d)}\tau_{-z}\left(\frac{n}{d}\right).$$

Daí

$$G(s,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_z(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{\omega(d)}}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_{-z}(n)}{n^s}$$
$$= \prod_p \left(1 + \frac{z}{p^s - 1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^z. \tag{4}$$

Ou seja

$$G(s,z) = L(s,z,\omega)\zeta(s)^{-z}.$$

Vamos mostrar que G está bem definida para $\sigma > \frac{1}{2}$, ou seja, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_z(n)}{n^s}$ é absolutamente convergente para $\sigma > \frac{1}{2}$ e $|z| \leq 1$. Como z^{ω} e τ_{-z} são multiplicativas, segue que b_z é multiplicativa. Além disso:

$$b_z(p) = \sum_{d|p} z^{\omega(d)}\tau_{-z}\left(\frac{p}{d}\right) = z^{\omega(1)}\tau_{-z}(p) + z^{\omega(p)}\tau_{-z}(1) = \tau_{-z}(p) + z^{\omega(p)}$$

$$= \binom{-z}{1} + z = -z + z = 0.$$

Por outro lado, se $k > 1$

$$b_z(p^k) = \sum_{d|p^k} z^{\omega(d)}\tau_{-z}\left(\frac{p^k}{d}\right)$$

$$= z^{\omega(p^k)}\tau_{-z}(1) + z^{\omega(p^{k-1})}\tau_{-z}(p) + z^{\omega(p^{k-2})}\tau_{-z}(p^2) + \cdots + z^{\omega(1)}\tau_{-z}(p^k)$$

$$= z\tau_{-z}(1) + z\tau_{-z}(p) + z\tau_{-z}(p^2) + \cdots + z\tau_{-z}(p^{k-1}) + \tau_{-z}(p^k)$$

$$z\left[1 + \binom{-z}{1} + \binom{-z+1}{2} + \ldots + \binom{-z+k-2}{k-1}\right] + \binom{-z+k-1}{k}$$

$$= z\left[1 + (-z) + \frac{1}{2!}(-z)(-z+1) + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}(-z)(-z+1)\cdots(-z+k-2)\right]$$

$$+\frac{1}{k!}(-z)(-z+1)\cdots(-z+k-1).$$

Assim, se $|z| \leq 1$ segue:

$$|b_z(p^k)| \leq \overbrace{[1 + 1 + \ldots 1]}^{k\ vezes} + 1 = k + 1.$$

Logo, para $k \geq 2$,

$$|b_z(p^k)| \leq k + 1 \leq 2(2^{\frac{k}{2}}).$$

Nessas condições e para $\sigma > \frac{1}{2}$ temos:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{b_z(p^k)}{p^{ks}} \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2(2^{\frac{k}{2}})}{p^{k\sigma}} = 2\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{p^{\sigma}}\right)^k = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{p^{\sigma}}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{p^{\sigma}}\right)^k =$$

$$= \left(\frac{4}{p^{2\sigma}}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{p^{\sigma}}}\right).$$

Desde que $\sigma > \frac{1}{2}$, temos que existe $\delta > 0$, que não depende do primo p, tal que $1 - \frac{\sqrt{2}}{p^{\sigma}} \geq \delta > 0$. Assim $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{p^{\sigma}}\right)^{-1} \leq \delta^{-1}$. Logo, para $\sigma > \frac{1}{2}$, temos:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{b_z(p^k)}{p^{ks}} \right| \leq \frac{4\delta^{-1}}{p^{2\sigma}}.$$

Assim,

$$\sum_{p} \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{b_z(p^k)}{p^{ks}} \right| \leq \sum_{p} \frac{4\delta^{-1}}{p^{2\sigma}} << 1.$$

Portanto, pelo lema (2.5), segue que para $\sigma > \frac{1}{2}$,

$$|G(s,z)| << 1. \tag{5}$$

Isso mostra que $G(s,z)$ está bem definda para $\sigma > \frac{1}{2}$. Portanto,

$$L(s,z,\omega) = G(s,z)\zeta(s)^z$$

tem uma continuação analítica para qualquer região livre de zeros de $\zeta(s)$, com $\sigma > \frac{1}{2}$, cobrindo o semi plano de convergência absoluta $\sigma > 1$.

2.1.3 A fórmula de Perron

A fórmula de Perron será o ponto de partida do método de Selberg Delange em (3.4).

Lema 2.8. *Sejam $c, y > 0$. Então:*

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{y^s}{s}ds = \begin{cases} 0 & se\ 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2} & se\ y = 1 \\ 1 & se\ y > 1 \end{cases}$$

Demonstração. Primeiro vamos supor $y = 1$. Assim, obtemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{1}{s}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{T}\frac{i}{c+it}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{1}{c+it}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{c-it}{c^2+t^2}ds = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{T}\frac{c}{c^2+t^2}ds$$

$$= \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{t}{c}\right)\Bigg|_0^T = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{T}{c}\right) \to \frac{1}{2}$$

quando $T \to \infty$.

Suponhamos agora que $0 < y < 1$ e considere $r > c$.
Pelo teorema de Cauchy, obtemos:

$$\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{y^s}{s}ds = \left\{\int_{c-iT}^{r-iT} + \int_{r-iT}^{r+iT} + \int_{r+iT}^{c+iT}\right\}\frac{y^s}{s}ds$$

Vamos estimar as integrais do lado direito:

$$\int_{c\pm iT}^{r\pm iT}\frac{y^s}{s}ds << \frac{1}{T}\int_c^r y^\sigma d\sigma << \frac{y^c}{T|\log(y)|}.$$

Com efeito:

$$\left|\int_{c\pm iT}^{r\pm iT}\frac{y^s}{s}ds\right| = \left|\int_c^r\frac{y^{t\pm iT}}{t\pm iT}dt\right| \le \int_c^r\frac{y^t}{|t\pm iT|}dt \le \frac{1}{T}\int_c^r\frac{y^t}{|\frac{t}{T}\pm i|}dt$$

$$\le \frac{1}{T}\int_c^r y^t dt = \frac{1}{T}\frac{y^t}{\log y}\Bigg|_c^r = \frac{1}{T\log y}(y^r - y^c) = \frac{1}{T|\log y|}(y^c - y^r) \le \frac{y^c}{T|\log y|}$$

como queríamos.

Na outra integral:

$$\int_{r-iT}^{r+iT} \frac{y^s}{s} ds << \frac{y^r}{r} + y^r \log T.$$

Com efeito:

$$\left| \int_{r-iT}^{r+iT} \frac{y^s}{s} ds \right| \leq \int_{-T}^{T} \left| \frac{y^{r+it}}{r+it} \right| dt = \int_{-T}^{T} \frac{y^r}{\sqrt{r^2+t^2}} dt$$

$$= 2\int_{0}^{T} \frac{y^r}{\sqrt{r^2+t^2}} dt = 2\left[\int_{0}^{1} \frac{y^r}{\sqrt{r^2+t^2}} dt + \int_{1}^{T} \frac{y^r}{\sqrt{r^2+t^2}} dt \right]$$

$$\leq 2\left[\int_{0}^{1} \frac{y^r}{r} dt + \int_{1}^{T} \frac{y^r}{t} dt \right] = 2\left[\frac{y^r}{r} + y^r \log T \right].$$

Daí, fazendo $r = T$ e $T \to \infty$, temos o resultado.

Vamos ao último caso, $y > 1$

Considere $r > 0$ e γ o caminho retangular, no sentido anti-horário, definido pelos vértices: $-r \pm iT$ e $c \pm iT$. Observe que a origem está dentro desse retângulo. Logo, pelo teorema dos resíduos, temos:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{y^s}{s} ds = \operatorname{res}\left(\frac{y^s}{s}, 0 \right) = \lim_{s \to 0} s \frac{y^s}{s} = 1.$$

Logo:

$$\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds = 2\pi i - \int_{c+iT}^{-r+iT} \frac{y^s}{s} ds - \int_{-r+iT}^{-r-iT} \frac{y^s}{s} ds - \int_{-r-iT}^{c-iT} \frac{y^s}{s} ds.$$

Novamente, vamos estimar cada uma das integrais:

$$\left| \int_{c\pm iT}^{-r\pm iT} \frac{y^s}{s} ds \right| = \left| \int_{-r\pm iT}^{c\pm iT} \frac{y^s}{s} ds \right| = \left| \int_{-r}^{c} \frac{y^{t\pm iT}}{t \pm iT} dt \right| \leq \int_{-r}^{c} \frac{y^t}{|t \pm iT|} dt$$

$$\leq \frac{1}{T} \int_{-r}^{c} y^t dt = \frac{1}{T \log y} (y^c - y^{-r}) \leq \frac{1}{T \log y} y^c.$$

Na integral restante, temos:

$$\left| \int_{-r+iT}^{-r-iT} \frac{y^s}{s} ds \right| = \left| \int_{-r-iT}^{-r+iT} \frac{y^s}{s} ds \right| \leq \int_{-T}^{T} \left| \frac{y^{-r+it}}{-r+it} \right| dt \leq 2\left[\frac{y^{-r}}{r} + y^{-r} \log T \right]$$

Portanto, as três integrais estimadas acima vão a zero quando fazemos $r = T$ e $T \to \infty$. Logo, temos:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds = 1.$$

$\square$

Lema 2.9. *Para $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:*

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\exp(i\alpha u) - \exp(-i\alpha u)}{iu} du = sgn(\alpha) 2\pi,$$

onde $sgn(\alpha) = 0$ se $\alpha = 0$ e $sgn(\alpha) = \frac{\alpha}{|\alpha|}$ se $\alpha \neq 0$.

Demonstração. Se $\alpha = 0$ a igualdade é trivial. Logo podemos supor $\alpha \neq 0$. Fazendo a mudança de variáveis $v = iu$, temos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\exp(i\alpha u) - \exp(-i\alpha u)}{iu} du = \frac{1}{2\pi i} \int_{-iT}^{iT} \frac{\exp(\alpha v) - \exp(-\alpha v)}{v} dv.$$

A expressão dentro do integrando possui uma singularidade removível. Logo, pelo teorema de Cauchy, temos, para algum $c > 0$,

$$\int_{-iT}^{iT} \frac{\exp(\alpha v) - \exp(-\alpha v)}{v} dv$$

$$= \left\{ \int_{-iT}^{c-iT} + \int_{c-iT}^{c+iT} + \int_{c+iT}^{iT} \right\} \frac{\exp(\alpha v) - \exp(-\alpha v)}{v} dv.$$

Temos:

$$\left| \int_{-iT}^{c-iT} \frac{\exp(\alpha v) - \exp(-\alpha v)}{v} dv \right| \leq \int_{0}^{c} \left| \frac{\exp(\alpha(t - iT)) - \exp(-\alpha(t - iT))}{t - iT} \right| dt$$

$$\leq \int_{0}^{c} \frac{\exp(\alpha t) + \exp(-\alpha t)}{|t - iT|} dt \to 0 \text{ quando } T \to \infty.$$

Analogamente,

$$\int_{c+iT}^{iT} \frac{\exp(\alpha v) - \exp(-\alpha v)}{v} dv \to 0 \text{ quando } T \to \infty.$$

Na integral restante, temos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\exp(\alpha v) - \exp(-\alpha v)}{v} dv = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{[\exp(\alpha)]^v}{v} - \frac{[\exp(-\alpha)]^v}{v} dv.$$

Pelo lema (2.8), quando $T \to \infty$, a integral acima converge para:

$$\begin{cases} 1 = \frac{\alpha}{|\alpha|} \text{ se } \alpha > 0 \\ -1 = \frac{\alpha}{|\alpha|} \text{ se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Em todo o caso, segue:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\exp(i\alpha u) - \exp(-i\alpha u)}{iu} du = sgn(\alpha),$$

e assim provamos o lema. $\square$

Finalmente,

Teorema 2.10. *(Fórmula de Perron) Suponha que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ converge absolutamente para $\sigma = c$. Então, para x real positivo com $x \notin \mathbb{N}$*

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \frac{x^s}{s} ds. \tag{6}$$

e para arbitrário x real positivo:

$$\int_0^x \sum_{n \leq u} f(n) du = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds. \tag{7}$$

Demonstração. Suponha x real positivo e $x \notin \mathbb{N}$. Assim:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \frac{x^s}{s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = \sum_{n \leq x} f(n)$$

desde que pelo lema (2.8), vale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = 1, \text{ se } n < x$$

e

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = 0, \text{ se } n > x.$$

Aqui, a mudança entre a integral e a soma é permitida pois a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ é absolutamente e uniformemente convergente para $\sigma = c$ (para mais detalhes, veja [5]). Para mostrar a fórmula (7), suponhamos ainda que x é um número real positivo e que $x \notin \mathbb{N}$. Vamos aplicar (6) com $f(n)n^w, w \geq 0$ em vez de f, dessa forma:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \frac{x^{s+w}}{s+w} ds = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{n^w}{n^{s+w}}\right) \frac{x^w}{s+w} ds$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^w \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{s+w} \frac{ds}{s+w}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^w \frac{1}{2\pi i} \int_{c+w-i\infty}^{c+w+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = \sum_{n \leq x} f(n) n^w.$$

Por outro lado,

$$\sum_{n\leq x} f(n)x^w = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}\frac{x^{s+w}}{s}ds.$$

Assim,

$$\sum_{n\leq x} f(n)(x^w - n^w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}\left[-\frac{x^{s+w}}{s+w}+\frac{x^{s+w}}{s}\right]ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}\frac{wx^{s+w}}{s(s+w)}ds.$$

Observe que essa fórmula se mantém para $x \in \mathbb{N}$. Assim, de agora em diante, podemos assumir que x possa ser um natural também. Note que:

$$\int_0^x \sum_{n\leq u} f(n)du = \sum_{n\leq x} f(n)\int_n^x du = \sum_{n\leq x} f(n)(x-n).$$

Assim, fazendo $w = 1$ resulta:

$$\int_0^x \sum_{n\leq u} f(n)du = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds.$$

e isso mostra (7) e o teorema. □

Uma aplicação imediata. Para cada $0 < |z| \leq 1$ e $c > 1$, temos:

$$\int_0^x \sum_{n\leq u} z^{\omega(n)}du = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{\omega(n)}}{n^s}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L(s,z,\omega)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds \tag{8}$$

Nosso grande trabalho no método de Selberg Delange, será estimar a fórmula acima. Voltaremos a isso mais tarde.

2.2 Desigualdade de Berry-Esseen

2.2.1 A transformada de Fourier

A desigualdade de Berry-Esseen nos será útil para descobrir o erro na fórmula de Kac-Erdös. Nossa demonstração seguirá de perto [1], a menos de uma desigualdade que aparentemente está incorreta, e, neste passo, seguiremos um caminho diferente. É importante salientar que a desigualdade de Berry-Esseen não é necessária para demonstrar que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ n \leq N : \frac{\omega(n) - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}} \leq x \right\} = \Phi(x).$$

Nesta seção, faremos uso das definições e dos resultados principais da teoria da transformada de Fourier. Para uma melhor compreensão sobre o assunto, recomendamos [4] ou [5]. Por completude, vamos explicitar o que será usado.

Definição 2.11. (1) *Dada uma função real $f(t)$ integrável e limitada sobre $\mathbb{R}$, definimos sua transformada de Fourier por*

$$\mathcal{F}(f)[\tau] = \hat{f}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\tau x) f(x) dx.$$

(2) *Se $\hat{f}(\tau)$ for integrável e limitada em $\mathbb{R}$, definimos a transformada inversa de Fourier dada por*

$$\overline{\mathcal{F}}(\hat{f})[a] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ita) \hat{f}(t) dt.$$

(3) *Dadas f e g funções integráveis e limitadas sobre $\mathbb{R}$, definimos o produto de convolução pela expressão*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy.$$

Agora, nas hipóteses de (1), temos nos pontos onde f é contínua que vale

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ita) \hat{f}(t) dt.$$

e por fim,

Teorema 2.12. *Se f e g satisfazem as hipóteses em (1) e se f for contínua em $\mathbb{R}$ então*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).$$

2.2.2 Teoremas preliminares

Essa seção se destina a preparar o caminho para a demonstração da desigualdade de Berry-Esseen. Começamos com um lema.

Lema 2.13. *A transformada de Fourier de*

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}\right)^2$$

é

$$\hat{\chi}(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\tau x)\chi(x)dx = \max(1-\tau, 0).$$

Demonstração. Vamos aplicar a transformada inversa de fourier e verificar que ela é a função χ definida acima. Por definição, temos:

$$\overline{\mathcal{F}}(\hat{\chi})[a] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ita)\hat{\chi}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \exp(ita)(1-|t|)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0} \exp(ita)(1+t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1} \exp(ita)(1-t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1} \exp(-ita)(1-t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1} \exp(ita)(1-t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1} \exp(-ita) - t\exp(-ita) + \exp(ita) - t\exp(ita)dt$$

$$= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{1} \cos(at) - t\cos(at)dt = \frac{2}{2\pi}\left[\frac{\sin(at)}{a} - \frac{t\sin(at)}{a} - \frac{\cos(at)}{a^2}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{2\pi}\left[\frac{1-\cos(a)}{a^2}\right] = \frac{4}{2\pi}\frac{\sin^2(\frac{a}{2})}{a^2} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\frac{a}{2}}\right)^2.$$

□

O próximo lema é um resultado bem conhecido em análise.

Lema 2.14. *Para $\alpha > 0$, temos:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(\alpha u)}{\alpha u}\right)^2 du = \frac{\pi}{\alpha}.$$

Demonstração. Como a função $\left(\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}\right)^2$ é absolutamente integrável em $\mathbb{R}$, podemos calcular a integral imprópria de uma maneira conveniente. Integrando por partes, obtemos:

$$\int_{-T}^{T}\left(\frac{\sin(\alpha u)}{\alpha u}\right)^2 du = \left[\frac{-(\sin(\alpha u)^2)}{\alpha^2 u}\right]_{-T}^{T} + \int_{-T}^{T}\frac{2\sin(\alpha u)\cos(\alpha u)}{\alpha u}dt.$$

Observe que:

$$\lim_{T\to\infty}\left[\frac{-(\sin(\alpha u)^2)}{\alpha^2 u}\right]_{-T}^{T} = 0.$$

Por outro lado,

$$\int_{-T}^{T}\frac{2\sin(\alpha u)\cos(\alpha u)}{\alpha u}dt = \int_{-T}^{T}\frac{\sin(2\alpha u)}{\alpha u}du$$

$$= \int_{-T}^{T}\frac{\exp(2\alpha ui) - \exp(-2\alpha ui)}{2\alpha ui}du.$$

Pelo lema (2.9), segue:

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\exp(2\alpha ui) - \exp(-2\alpha ui)}{2\alpha ui}du = \frac{sgn(2\alpha)\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\alpha}$$

pois $\alpha > 0$.

□

Teorema 2.15. *Seja g uma função integrável e limitada sobre $\mathbb{R}$. Suponha que exista um número real positivo T tal que:*

$$\sup_{x\leq y\leq x+\frac{1}{T}}\{g(y) - g(x)\} \leq K < \infty \tag{9}$$

e

$$\hat{g}(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\tau x)g(x)dx = 0, \ \ \textit{para } |\tau| \leq T. \tag{10}$$

Então temos:

$$||g||_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)| \leq 16K.$$

Demonstração. Suponha que o teorema vale para $T = 1$. Vamos mostrar que vale para qualquer T. Considere g como na hipótese do teorema e considere:

$$h(x) = g\left(\frac{x}{T}\right).$$

Daí:

$$\sup_{x\leq y\leq x+1}\{h(y)-h(x)\} = \sup_{\frac{x}{T}\leq\frac{y}{T}\leq\frac{x}{T}+\frac{1}{T}}\left\{g\left(\frac{y}{T}\right)-g\left(\frac{x}{T}\right)\right\}\leq K<\infty.$$

Por definição, temos:

$$\hat{h}(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\tau x)h(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\tau x)g\left(\frac{x}{T}\right)dx$$

$$= T\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\tau Tx)g(y)dy.$$

Como $|\tau T|\leq T$ para $|\tau|\leq 1$, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\tau Ty)g(y)dy = 0.$$

Assim

$$\hat{h}(\tau) = 0, \text{ para } |\tau|\leq 1.$$

Logo, por hipótese, $||h||_\infty \leq 16K$. Mas $||h||_\infty = ||g||_\infty$ e isso mostra o caso geral. Logo, para demonstrar o teorema, podemos supor $T=1$. Por (10), temos que:

$$\hat{g}(\tau)\hat{\chi}(\tau) = 0, \tau\in\mathbb{R}, \tag{11}$$

para qualquer função integrável χ tendo transformada de Fourier com suporte contido em $[-1,1]$. Considere:

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(\frac{\tau}{2})}{\frac{\tau}{2}}\right)^2.$$

Pelo lema (2.13),

$$\hat{\chi}(\tau) = \max(1-|\tau|,0).$$

Por (11), temos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(x-t)\chi(t)dt = 0, t\in\mathbb{R}. \tag{12}$$

Considere:

$$I = \int_{|t|>5}\chi(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|>5}\left(\frac{\sin(\frac{\tau}{2})}{\frac{\tau}{2}}\right)^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_{t>5}\left(\frac{\sin(\frac{\tau}{2})}{\frac{\tau}{2}}\right)^2 dt$$

$$\leq \frac{4}{\pi}\int_{t>5}\frac{1}{t^2}dt = \frac{4}{\pi}\left[\frac{-1}{t}\right]_5^{\infty} = \frac{4}{5\pi}. \tag{13}$$

Seja $0 < \epsilon < 1$ um número real fixado e seja $\theta = \pm 1$ de modo que:

$$||g||_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}}\{\theta g(x)\}.$$

Portanto, pela definição de supremo, existe algum $x_0 = x_0(\epsilon)$ tal que:

$$\theta g(x_0) \geq (1-\epsilon)||g||_\infty.$$

Aplicando (12) com $x = x_0 - 5\theta$ e tendo em consideração (13), temos:

$$0 = \theta\int_{-\infty}^{\infty} g(x_0 - t - 5\theta)\chi(t)dt$$

$$= \theta\int_{-5}^{5} g(x_0)\chi(t)dt - \theta\int_{-5}^{5}[g(x_0) - g(x_0 - t - 5\theta)]\chi(t)dt$$

$$+\theta\int_{|t|>5} g(x_0 - t - 5\theta)\chi(t)dt \geq (1-\epsilon)(1-I)||g||_\infty - 10K(1-I) - I||g||_\infty,$$

onde usamos o fato que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(\frac{\tau}{2})}{\frac{\tau}{2}}\right)^2 dt = 1$$

e que para $|t| \leq 5$, temos

$$\theta[g(x_0) - g(x_0 - t - 5\theta)] \leq \sup_{x\leq y\leq x+10}\{g(y) - g(x)\} \leq 10K,$$

pois se $\theta = 1$:

$$\theta[g(x_0) - g(x_0 - t - 5\theta)] = g(x_0) - g(x_0 - t - 5) \leq \sup_{x\leq y\leq x+10}\{g(y) - g(x)\}$$

e se $\theta = -1$:

$$\theta[g(x_0) - g(x_0 - t - 5\theta)] = g(x_0 - t + 5) - g(x_0) \leq \sup_{x\leq y\leq x+10}\{g(y) - g(x)\}.$$

Daí

$$((1-\epsilon)(1-I) - I)||g||_\infty \leq 10K(1-I).$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ temos:

$$||g||_\infty \leq \frac{10K(1-I)}{1-2I} \leq 16K$$

pois $I \leq \frac{4}{5\pi}$ e assim $\frac{10(1-I)}{1-2I} \leq 16$. □

Mais uma vez precisaremos conhecer a transformada de Fourier de uma específica função.

Lema 2.16. *Sejam $T, \epsilon > 0$. Então a transformada de Fourier de:*

$$\alpha(t) = \frac{2}{\pi\epsilon t^2}\sin\left(\frac{\epsilon t}{2}\right)\sin\left(\frac{(2T+\epsilon)t}{2}\right)$$

é a função trapezoidal:

$$\hat{\alpha}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\tau x)\alpha(x)dx = \begin{cases} 1 & se\ |\tau| \leq T \\ \frac{T+\epsilon-|\tau|}{\epsilon} & se\ T < |\tau| \leq T+\epsilon \\ 0 & se\ |\tau| > T+\epsilon \end{cases}.$$

Demonstração. Vamos aplicar a transformada inversa de Fourier em $\hat{\alpha}(\tau)$ e verificar que ela é a função α. Por definição, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{F}}[a] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ita)\hat{\alpha}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-T-\epsilon}^{T+\epsilon}\exp(ita)\hat{\alpha}(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-T-\epsilon}^{-T}\frac{\exp(ita)}{\epsilon}[T+\epsilon+t]dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\exp(ita)dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{T}^{T+\epsilon}\frac{\exp(ita)}{\epsilon}[T+\epsilon-t]dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{T}^{T+\epsilon}\frac{\exp(-ita)}{\epsilon}[T+\epsilon-t]dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\cos(ta)dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{T}^{T+\epsilon}\frac{\exp(ita)}{\epsilon}[T+\epsilon-t]dt \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_{T}^{T+\epsilon}\frac{[T+\epsilon-t]}{\epsilon}\cos(at)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\cos(at)dt \\
&= \frac{\cos(aT) - \epsilon a\sin(aT) - \cos(a(\epsilon+T))}{\pi\epsilon a^2} + \frac{\sin(aT)}{\pi a} \\
&= \frac{\cos(aT) - \cos(a(\epsilon+T))}{\pi\epsilon a^2} = \frac{2\sin(\frac{\epsilon a}{2})\sin[\frac{a}{2}(2T+\epsilon)]}{\pi\epsilon a^2} = \alpha(a)
\end{aligned}$$

onde usamos a relação:

$$\cos(2a) - \cos(2b) = 2\sin(b-a)\sin(b+a).$$

□

O próximo teorema é uma extensão do teorema (2.15) para funções g tal que não necessariamente ocorre $\hat{g}(\tau) = 0$ para $|\tau| \leq T$.

Teorema 2.17. *Seja g uma função integrável e limitada sobre $\mathbb{R}$. Suponha que exista um número real $T > 0$ tal que:*

$$\sup_{x \leq y \leq x + \frac{1}{T}} \{g(y) - g(x)\} \leq K < \infty.$$

Então:

$$||g||_\infty \leq 16K + 6 \int_{-T}^{T} |\hat{g}(\tau)| d\tau.$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e considere a função:

$$\alpha(t) = \frac{2}{\pi \epsilon t^2} \sin\left(\frac{\epsilon t}{2}\right) \sin\left(\frac{(2T + \epsilon)t}{2}\right),$$

cuja transformada de Fourier é, pelo lema (2.16), a função trapezoidal:

$$\hat{\alpha}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\tau| \leq T \\ \frac{T + \epsilon - |\tau|}{\epsilon} & \text{se } T < |\tau| \leq T + \epsilon \\ 0 & \text{se } |\tau| > T + \epsilon \end{cases}.$$

Considere f dada por:

$$f(t) = (g * \alpha)(t),$$

ou seja, a convolução de g com α. Logo $\hat{f} = \hat{g}\hat{\alpha}$ tem suporte compacto ($\hat{\alpha}(\tau) = 0$ se $|\tau| > T + \epsilon$).

Pela fórmula inversa,

$$f(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(its) \hat{f}(t) dt.$$

Daí

$$|f(s)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)| dt = \frac{1}{2\pi} ||\hat{f}||_1.$$

Portanto:

$$||f||_\infty \leq \frac{1}{2\pi} ||\hat{f}||_1.$$

Como:

$$||\hat{f}||_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\tau)\hat{\alpha}(\tau)| d\tau = \int_{-T-\epsilon}^{T+\epsilon} |\hat{g}(\tau)||\hat{\alpha}(\tau)| d\tau$$

$$\leq \int_{-T-\epsilon}^{T+\epsilon} |\hat{g}(\tau)|d\tau,$$

temos

$$||f||_\infty \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-T-\epsilon}^{T+\epsilon} |\hat{g}(\tau)|d\tau,$$

e como

$$\sup_{x\leq y\leq x+\frac{1}{T}} \{g(y)-f(y)-[g(x)-f(x)]\} \leq K+2||f||_\infty,$$

então, aplicando o teorema (2.15) a $g-f$, obtemos:

$$||g||_\infty \leq ||g-f||_\infty + ||f||_\infty \leq 16K + 33||f||_\infty$$

$$\leq 16K + \frac{33}{2\pi}\int_{-T-\epsilon}^{T+\epsilon} |\hat{g}(\tau)|d\tau \leq 16K + 6\int_{-T-\epsilon}^{T+\epsilon} |\hat{g}(\tau)|d\tau.$$

O resultado segue fazendo $\epsilon \to 0$. □

2.2.3 A desigualdade de Berry-Esseen

Vamos agora demonstrar a desigualdade probabilística de Berry-Esseen. O teorema que vamos demonstrar está na linguagem de funções de distribuições. Para mais detalhes sobre esse teorema, tanto quanto sua roupagem probabilística, recomendamos a leitura de [3]. Aqui vamos usar o teorema de Fubini, que pode ser consultado em [5].

Nós dizemos que $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função de distribuição se F é não decrescente, contínua a direita e satisfaz

$$F(-\infty)=0,\ F(\infty)=1.$$

Aqui estamos cometendo um abuso de notação: As igualdades acima na verdade são tomadas nos respectivos limites.

A função característica de f, denotada por φ_F, é dada pela transformada de Fourier-Stieltjes:

$$\varphi_F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\tau z)dF(z).$$

Estamos finalmente prontos para:

Teorema 2.18. *(Berry - Esseen). Sejam F, G funções de distribuições com respectivas funções caractertísticas φ_F e φ_G. Suponha que G é diferenciável e que G' é limitada sobre $\mathbb{R}$. Então, para todo $T>0$,*

$$||F-G||_\infty \leq 16\frac{||G'||_\infty}{T} + 6\int_{-T}^{T}\left|\frac{\varphi_F(\tau)-\varphi_G(\tau)}{\tau}\right|d\tau.$$

Demonstração. Escrevemos $H = F - G$ e para todo $0 < \epsilon < 1$, definimos:

$$H_\epsilon(x) = -\int_0^\infty \exp(-\epsilon t) dH(x-t) = \exp(-\epsilon x)\int_{-\infty}^x \exp(\epsilon t) dH(t). \tag{14}$$

A igualdade acima é valida fazendo uma mudança de variáveis. Afirmação: H_ϵ é integrável. Com efeito, por Fubini, temos:

$$\int_{-\infty}^\infty H_\epsilon(x)dx = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^x \exp(-\epsilon x)\exp(\epsilon t)dH(t)dx$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \int_t^\infty \exp(-\epsilon x + \epsilon t)dxdH(t) = \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{\exp(-\epsilon x+\epsilon t)}{-\epsilon}\right]_t^\infty dH(t)$$

$$= \frac{1}{\epsilon}\int_{-\infty}^\infty dH(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{-\infty}^\infty dF(t) - \frac{1}{\epsilon}\int_{-\infty}^\infty dG(t) = 0,$$

pois:

$$\int_{-\infty}^\infty dG(t) = \int_{-\infty}^\infty dF(t) = 1.$$

Logo, podemos calcular a sua transformada de Fourier, que usando Fubini, é dada por:

$$\hat{H}_\epsilon(\tau) = \int_{-\infty}^\infty \exp(-i\tau x)H_\epsilon(x)dx = \int_{-\infty}^\infty \int_t^\infty \exp(-i\tau x - \epsilon x + \epsilon t)dxdH(t)$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{\exp(-i\tau x - \epsilon x + \epsilon t)}{-i\tau - \epsilon}\right]_t^\infty dH(t) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(-i\tau x)}{i\tau+\epsilon}dH(t)$$

$$\frac{1}{i\tau+\epsilon}\left[\int_{-\infty}^\infty \exp(-i\tau x)dF(t) - \int_{-\infty}^\infty \exp(-i\tau x)dG(t)\right] = \frac{\varphi_F(-\tau)-\varphi_G(-\tau)}{i\tau+\epsilon}.$$

A segunda igualdade em (14) nos dá, por integração por partes:

$$H_\epsilon(x) = \exp(-\epsilon x)[\exp(\epsilon t)H(t)]_{-\infty}^x - \epsilon\exp(-\epsilon x)\int_{-\infty}^x \exp(\epsilon t)H(t)dt$$

$$= H(t) - \epsilon\exp(-\epsilon x)\int_{-\infty}^x \exp(\epsilon t)H(t)dt. \tag{15}$$

Vamos mostrar agora que para x fixado, temos:

$$\lim_{\epsilon\to 0} H_\epsilon(x) = H(x).$$

Com efeito, como $H(t) = F(t) - G(t)$ e $0 \leq F(t), G(t) \leq 1$, temos que $||H||_\infty \leq 1$ e como $H(-\infty) = 0$, temos que existe $R > 0$ tal que se $t < -R$ então $|H(t)| \leq \epsilon$. Fixemos $x \in \mathbb{R}$. Posso supor $-R < x$. Daí:

$$\left| \int_{-\infty}^{x} \exp(\epsilon t) H(t) dt \right| \leq \left| \int_{-\infty}^{-R} \exp(\epsilon t) H(t) dt \right| + \left| \int_{-R}^{x} \exp(\epsilon t) H(t) dt \right|$$

$$\leq \epsilon \int_{-\infty}^{-R} \exp(\epsilon t) dt + \int_{-R}^{x} \exp(\epsilon t) dt \leq \epsilon \int_{-\infty}^{-R} \exp(\epsilon t) dt + \exp(\epsilon x) \int_{-R}^{x} dt$$
$$= \exp(-\epsilon R) + \exp(\epsilon x) x - \exp(\epsilon x) R \leq M.$$

para algum $M > 0$ com $0 < \epsilon < 1$. Assim, a integral do lado direito de (15) é limitada. Portanto,

$$\lim_{\epsilon \to 0} H_\epsilon(x) = H(x).$$

Escrevemos $\alpha = ||G'||_\infty$. Pelo teorema do valor médio, para algum $c \in \mathbb{R}$, temos:

$$\frac{G(x+y) - G(x)}{y} = G'(c) \leq ||G'||_\infty = \alpha.$$

Logo, lembrando que F é não-decrescente, temos para $x \in \mathbb{R}, y > 0$:

$$H(x+y) - H(x) = F(x+y) - F(x) - G(x+y) + G(x) \geq -\alpha y.$$

Considere

$$S(x) = \epsilon \exp(-\epsilon x) \int_{-\infty}^{x} \exp(\epsilon t) H(t) dt$$

$$= \epsilon \exp(-\epsilon x) \int_{-\infty}^{x} \exp(\epsilon t) F(t) dt - \epsilon \exp(-\epsilon x) \int_{-\infty}^{x} \exp(\epsilon t) G(t) dt$$
$$= S_F(x) - S_G(x),$$

onde

$$S_F(x) = \epsilon \exp(-\epsilon x) \int_{-\infty}^{x} \exp(\epsilon t) F(t) dt$$

e

$$S_G(x) = \epsilon \exp(-\epsilon x) \int_{-\infty}^{x} \exp(\epsilon t) G(t) dt.$$

Temos, para $x \in \mathbb{R}$ e $y > 0$

$$S_F(x) - S_F(x+y)$$

$$= \epsilon \exp(-\epsilon x) \int_{-\infty}^{x} \exp(\epsilon t) F(t) dt - \epsilon \exp(-\epsilon x - \epsilon y) \int_{-\infty}^{x+y} \exp(\epsilon t) F(t) dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \epsilon \exp(-\epsilon x) \left[\int_{-\infty}^{x} \exp(\epsilon t) F(t) dt - \exp(-\epsilon y) \int_{-\infty}^{x+y} \exp(\epsilon t) F(t) dt \right] \\
&= \epsilon \exp(-\epsilon x) \Bigg[\int_{-\infty}^{x} \exp(\epsilon t) F(t) dt - \exp(-\epsilon y) \int_{-\infty}^{x} \exp(\epsilon t) F(t) dt \\
&\qquad - \exp(-\epsilon y) \int_{x}^{x+y} \exp(\epsilon t) F(t) dt \Bigg] \\
&\geq \epsilon \exp(-\epsilon x) \Bigg[- \exp(-\epsilon y) \int_{x}^{x+y} \exp(\epsilon t) F(t) dt \Bigg].
\end{aligned}
$$

Como

$$
\int_{x}^{x+y} \exp(\epsilon t) F(t) dt \leq \int_{x}^{x+y} \exp(\epsilon(x+y)) dt = \exp(\epsilon(x+y)) y,
$$

temos:

$$
\begin{aligned}
&\epsilon \exp(-\epsilon x) \Bigg[- \exp(-\epsilon y) \int_{x}^{x+y} \exp(\epsilon t) F(t) dt \Bigg] \\
&\geq -\epsilon \exp(\epsilon(-x-y)) \exp(\epsilon(x+y)) y = -\epsilon y.
\end{aligned}
$$

Logo:

$$
S_F(x) - S_F(x+y) \geq -\epsilon y.
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
S'_G(x) &= \frac{d}{dx} \Bigg\{ \epsilon \exp(-\epsilon x) \int_{-\infty}^{x} \exp(\epsilon t) G(t) dt \Bigg\} \\
&= \epsilon \Bigg[G(x) - \epsilon \exp(-\epsilon x) \int_{-\infty}^{x} \exp(\epsilon t) G(t) dt \Bigg].
\end{aligned}
$$

Assim, $|S'_G(x)| \leq 2\epsilon$ pois

$$
\begin{aligned}
\left| \epsilon \exp(-\epsilon x) \int_{-\infty}^{x} \exp(\epsilon t) G(t) dt \right| &\leq \epsilon \exp(-\epsilon x) \int_{-\infty}^{x} \exp(\epsilon t) dt \\
&= \exp(-\epsilon x) [\exp(\epsilon t)]_{-\infty}^{x} = 1.
\end{aligned}
$$

Que resulta

$$
||S'_G||_\infty \leq 2\epsilon.
$$

Logo, pelo teorema do valor médio, sabemos que existe um número real c tal que

$$
S_G(x+y) - S_G(x) = S'_G(c) y,
$$

e pela estimativa acima, obtemos

$$S_G(x+y) - S_G(x) \geq -2\epsilon y.$$

Portanto,

$$S(x) - S(x+y) = S_F(x) - S_F(x+y) + S_G(x+y) - S_G(x) \geq -\epsilon y - 2\epsilon y = -3\epsilon y.$$

Substituindo em (15), temos:

$$\begin{aligned} H_\epsilon(x+y) - H_\epsilon(x) &= H(x+y) - H(x) + S(x) - S(x+y) \\ &\geq -\alpha y - 3\epsilon y = -y(\alpha + 3\epsilon) \geq -\frac{\alpha + 3\epsilon}{T}, \end{aligned}$$

desde que $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leq y \leq \frac{1}{T}$. Em outras palavras, obtemos:

$$-H_\epsilon(x+y) - (-H_\epsilon(x)) \leq \frac{\alpha + 3\epsilon}{T}.$$

Aplicando o teorema (2.17) para $-H_\epsilon$ com $K = \frac{\alpha+3\epsilon}{T}$, obtemos para $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |H_\epsilon(x)| &\leq 16\frac{(\alpha + 3\epsilon)}{T} + 6\int_{-T}^{T} \left| \frac{\varphi_F(-\tau) - \varphi_G(-\tau)}{\epsilon + i\tau} \right| d\tau \\ &\leq 16\frac{(\alpha + 3\epsilon)}{T} + 6\int_{-T}^{T} \left| \frac{\varphi_F(-\tau) - \varphi_G(-\tau)}{\tau} \right| d\tau \\ &= 16\frac{(\alpha + 3\epsilon)}{T} + 6\int_{-T}^{T} \left| \frac{\varphi_F(\tau) - \varphi_G(\tau)}{\tau} \right| d\tau, \end{aligned}$$

e mandando $\epsilon \to 0$, resulta:

$$|H(x)| \leq 16\frac{||G'||_\infty}{T} + 6\int_{-T}^{T} \left| \frac{\varphi_F(\tau) - \varphi_G(\tau)}{\tau} \right| d\tau,$$

e por fim, obtemos:

$$||H||_\infty = ||F - G||_\infty \leq 16\frac{||G'||_\infty}{T} + 6\int_{-T}^{T} \left| \frac{\varphi_F(\tau) - \varphi_G(\tau)}{\tau} \right| d\tau.$$

$\square$

2.3 Região livre de zeros de $\zeta(s)$

Em (3.1), vimos que a função $L(s, z, \omega)$ tem uma continuação analítica para qualquer região livre de zeros de $\zeta(s)$, cobrindo o semiplano $\sigma > \frac{1}{2}$. Nosso trabalho nesse capítulo será encontrar uma região em que $\zeta(s)$ não possua zeros, a esquerda da linha $\sigma = 1$. Para isso, precisamos de uma continuação analítica de $\zeta(s)$. Vamos denotar $[x]$ o maior inteiro menor ou igual a x.

Lema 2.19. *Se $s = \sigma + it, \sigma > 1$ então:*

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+1}}dx.$$

Isso nos dá uma continuação analítica de $\zeta(s)$ no semiplano $\sigma > 0$, exceto para um polo simples em $s = 1$.

Demonstração. Vamos usar o lema de Abel (lema (1.7)). Com as notações do lema, fazendo $\alpha_n = 1$ e $f(n) = \frac{1}{n^s}$, temos:

$$A(x) = \sum_{n\leq x} \alpha_n = [x].$$

Daí

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{[x]}{x^s} + \int_1^x \frac{[u]}{u^{s+1}}du.$$

Como

$$s\int_1^\infty \frac{u}{u^{s+1}}du = s\int_1^\infty \frac{1}{u^s}du = \frac{s}{1-s}\left[\frac{1}{u^{s-1}}\right]_1^\infty = \frac{s}{s-1}$$

e

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{[x]}{x^s}\right| \leq \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^\sigma} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\sigma-1}} = 0,$$

segue

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s} = \frac{s}{s-1} + s\int_1^\infty \frac{[u]-u}{u^{s+1}}du = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+1}}dx.$$

$\square$

Vamos agora repetir a demonstração acima para $x = N \in \mathbb{N}$. Temos para $\sigma > 0$:

$$\sum_{n\leq N}\frac{1}{n^s} = \frac{N}{N^s} + s\int_1^N \frac{[u]}{u^{s+1}}du$$

e

$$s\int_1^N \frac{u}{u^{s+1}}du = \frac{s}{(1-s)}\frac{1}{N^{s-1}} - \frac{s}{1-s}.$$

Assim

$$\sum_{n\leq N}\frac{1}{n^s} = \frac{N}{N^s} + \frac{s}{(1-s)}\frac{1}{N^{s-1}} + \frac{s}{s-1} + \int_1^N \frac{[u]-u}{u^{s+1}}du.$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \frac{s}{s-1} + s\int_1^\infty \frac{[u]-u}{u^{s+1}}dx \\
&= \frac{s}{s-1} + s\int_1^N \frac{[u]-u}{u^{s+1}}dx + s\int_N^\infty \frac{[u]-u}{u^{s+1}}dx \\
&= \frac{s}{s-1} + \sum_{n\leq N}\frac{1}{n^s} - \frac{N}{N^s} - \frac{s}{(1-s)}\frac{1}{N^{s-1}} - \frac{s}{s-1} + s\int_N^\infty \frac{[u]-u}{u^{s+1}}dx \\
&= \sum_{n\leq N}\frac{1}{n^s} - N^{1-s} + \frac{sN^{1-s}}{s-1} + s\int_N^\infty \frac{[u]-u}{u^{s+1}}dx \\
&= \sum_{n\leq N}\frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} + s\int_N^\infty \frac{[u]-u}{u^{s+1}}dx.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\zeta(s) = \sum_{n\leq N}\frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} + s\int_N^\infty \frac{[u]-u}{u^{s+1}}dx. \tag{16}$$

Como

$$\left|s\int_N^\infty \frac{[u]-u}{u^{s+1}}dx\right| \leq \frac{|s|}{\sigma}\left[\frac{-1}{u^\sigma}\right]_N^\infty = \frac{|s|}{\sigma}\frac{1}{N^\sigma} \leq N^{-\sigma}\left(1+\frac{|s|}{\sigma}\right),$$

obtemos

$$\zeta(s) = \sum_{n\leq N}\frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} + O\left(N^{-\sigma}\left(1+\frac{|s|}{\sigma}\right)\right). \tag{17}$$

em que a constante implícita tem valor igual a 1.

Teorema 2.20. *Seja* $0 < \alpha < 1$. *Então:*

$$|\zeta(s)| \leq \frac{7}{3}\frac{|t|^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)},$$

para $\sigma \geq \alpha$ *e* $|t| \geq 1$.

Demonstração. Por (17), temos:

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n\leq N} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{|s-1|} + N^{-\sigma} + N^{-\sigma}\frac{|s|}{\sigma}.$$

Daí, como $\sigma \geq \alpha$, segue:

$$\sum_{n\leq N} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n\leq N} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \sum_{1<n\leq N} \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \int_1^N \frac{1}{x^\alpha}dx = 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^N =$$

$$= 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{N^{\alpha-1}} - 1\right] = 1 + \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} < \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Assim

$$|\zeta(s)| \leq \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{N^{1-\sigma}}{|t|} + N^{-\sigma} + N^{-\sigma}\frac{|s|}{\sigma} \leq \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} + N^{1-\sigma} + N^{-\sigma} + N^{-\sigma}\frac{(\sigma+|t|)}{\sigma}$$

$$= \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} + N^{1-\sigma} + 2N^{-\sigma} + N^{-\sigma}\frac{|t|}{\sigma} \leq \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} + N^{1-\alpha} + 2N^{-\alpha} + N^{-\alpha}\frac{|t|}{\alpha}$$

$$= N^{1-\alpha}\left[\frac{1}{1-\alpha} + 1 + \frac{2}{N} + \frac{|t|}{N\alpha}\right] = N^{1-\alpha}\left[\frac{1}{1-\alpha} + 1 + \frac{2\alpha+|t|}{N\alpha}\right]$$

$$= \frac{N^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}\left[\alpha + \alpha(1-\alpha) + \frac{(2\alpha+|t|)(1-\alpha)}{N}\right].$$

Escolhendo $N = [|t|]$, o menor inteiro menor ou igual a $|t|$, temos que:

$$\frac{(2\alpha+|t|)}{[|t|]} \leq 2\alpha + 2 = 2(1+\alpha).$$

Assim:

$$|\zeta(s)| \leq \frac{N^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}\left[\alpha + \alpha(1-\alpha) + 2(1+\alpha)(1-\alpha)\right]$$

$$= \frac{N^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}\left\{-3\alpha^2 + 2\alpha + 2\right\} \leq \frac{|t|^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}\left\{-3\alpha^2 + 2\alpha + 2\right\}.$$

O máximo da função $g(\alpha) = -3\alpha^2 + 2\alpha + 2$ é obtido para $\alpha = \frac{1}{3}$ e vale $\frac{7}{3}$, e isso prova o teorema. $\square$

Do teorema acima, tomando:

$$\alpha = \alpha(t) = 1 - \frac{1}{\log(|t|+1)}, \text{ se } |t| \geq 2,$$

obtemos para $\sigma \geq \alpha$,

$$|\zeta(s)| \leq \frac{7}{3}\frac{|t|^{\frac{1}{\log(|t|+1)}}}{\alpha}(\log(|t|+1)).$$

Como

$$|t|^{\frac{1}{\log(|t|+1)}} = \exp^{\frac{1}{\log(|t|+1)}\log|t|} < e, \forall |t| \geq 2,$$

e

$$\alpha(t) \geq \alpha(2), \forall |t| \geq 2,$$

segue

$$|\zeta(s)| \leq \frac{7}{3}\frac{e}{\alpha(2)}(\log(|t|+1)).$$

Em outras palavras, para $|t| \geq 2$ e $\sigma \geq \alpha(t) = 1 - \frac{1}{\log(|t|+1)}, vale:$

$$|\zeta(s)| << \log(|t|+1). \tag{18}$$

Além disso, se truncarmos $\sigma \leq c$, para alguma constante $c > \alpha(2)$, podemos supor que a estimativa acima vale também na região $|t| \geq 1$ e $\alpha(2) \leq \sigma \leq c$. Essa mesma consideração vale para o corolário abaixo.

Corolário 2.21. *Para $|t|$ suficientemente grande e $\sigma > 1 - \frac{1}{\log(|t|+1)}$, temos*

$$|\zeta'(s)| << (\log(|t|+1))^2.$$

Demonstração. Pela fórmula de Cauchy,

$$\zeta'(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{\zeta(s+z)}{z^2}dz.$$

Tome $r = \frac{1}{\log(|t|+1)}$. Observe que

$$\zeta(s+z) << \log(|t|+1).$$

Portanto,

$$|\zeta'(s)| << \int_{|z|=r}\frac{\log(|t|+1)}{r^2}|dz| << \frac{\log(|t|+1)}{r} = (\log(|t|+1))^2.$$

□

O próximo lema nos ajudará a mostrar que $\zeta(s)$ não tem zeros para $\sigma = 1$.

Lema 2.22.

$$\zeta(\sigma)^3|\zeta(\sigma + it)|^4|\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1, \forall \sigma > 1.$$

Demonstração. Para $\sigma > 1$, temos:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \exp\left(\sum_p - \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\right).$$

E como

$$\log(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots, \text{ para } |x| < 1,$$

segue

$$\zeta(s) = \exp\left(\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-sk}}{k}\right).$$

Agora, como

$$p^{-sk} = p^{-\sigma k} \exp(-tki \log p) = p^{-\sigma k}[\cos(tk \log p) - i \sin(tk \log p)],$$

resulta

$$|\zeta(s)| = \exp\left(\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(tk \log p)}{kp^{\sigma k}}\right).$$

Desde que

$$0 \leq 2(1 + \cos(\theta))^2 = 2(1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) = 2 + 4\cos(\theta) + 2\cos^2(\theta)$$

$$= 3 + 4\cos(\theta) - \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) + 2\cos^2(\theta) = 3 + 4\cos(\theta) + \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

$$= 3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta),$$

então

$$\zeta(\sigma)^3|\zeta(\sigma + it)|^4|\zeta(\sigma + 2it)|$$

$$= \exp\left(\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 + 4\cos(tk \log p) + \cos(2tk \log p)}{kp^{\sigma k}}\right) \geq 1.$$

□

Corolário 2.23.

$$\zeta(1 + it) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0.$$

Demonstração. por (16), temos

$$\zeta(s)=\sum_{n\leq N}\frac{1}{n^s}+\frac{N^{1-s}}{s-1}+s\int_N^\infty\frac{[u]-u}{u^{s+1}}dx.$$

Escolhendo $N=1$:

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{s-1}+s\int_1^\infty\frac{[u]-u}{u^{s+1}}dx.$$

Como $\int_1^\infty\frac{|[u]-u|}{u^{\sigma+1}}dx$ converge para $\sigma>0$, resulta que

$$\lim_{s\to1}(s-1)\zeta(s)=1.$$

Assim, $s=1$ é um polo com resíduo igual a 1. Portanto, podemos escrever

$$\zeta(s)=\frac{H_1(s)}{s-1},\ \text{com } H_1(s) \text{ holomorfa em } \sigma>0\ .$$

Assumindo que $\zeta(1+it)$ tem um zero para $t=t_0\neq0$, então podemos escrever:

$$\zeta(s)^4=(s-(1+it_0))^4H_2(s)$$

para alguma função $H_2(s)$ holomorfa em $\sigma>0, s\neq1$. E como $\zeta(1+2it_0)$ não tem polo em $\sigma=1$, segue:

$$\zeta(\sigma)^3\zeta(\sigma+it_0)^4\zeta(\sigma+2it_0)=\frac{H_1^3(\sigma)}{(\sigma-1)^3}(\sigma-1)^4H_2(\sigma+it_0)\zeta(\sigma+2it_0)$$

$$=(\sigma-1)H_1^3(\sigma)H_2(\sigma+it_0)\zeta(\sigma+2it_0)\to0$$

fazendo $\sigma\to1^+$, o que contradiz o lema anterior. □

Pode ser mostrado que o corolário anterior é equivalente ao teorema dos números primos (veja [8]). Um refinamento do argumento da prova do corolário (2.23), resulta uma estimativa um pouco melhor de $\zeta(1+it)$. Para $|t|\geq1$ e $1<\sigma<2$, por (16) temos:

$$\zeta(\sigma)<<(\sigma-1)^{-1}.$$

Como

$$17+24\cos(\alpha)+8\cos(2\alpha)=(3+4\cos(\alpha))^2\geq0,\forall\alpha\in\mathbb{R},$$

então uma estimativa análoga a do lema (2.22) resulta

$$\zeta(\sigma)^{17}|\zeta(\sigma+it)|^{24}|\zeta(\sigma+2it)|^8\geq1,\forall\sigma>1.$$

Pela estimativa (18), obtemos

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|} \leq \zeta(\sigma)^{\frac{17}{24}}|\zeta(\sigma+2it)|^{\frac{1}{3}} << (\sigma-1)^{\frac{-17}{24}}(\log(|t|+1))^{\frac{1}{3}}.$$

Mais ainda, pelo corolário (2.21):

$$\zeta(1+it)-\zeta(\sigma+it) = -\int_1^\sigma \zeta'(u+it)du << |\sigma-1|(\log(|t|+1))^2. \qquad (19)$$

Daí

$$|\zeta(1+it)| \geq |\zeta(\sigma+it)| - c_1(\sigma-1)(\log(|t|+1))^2$$
$$\geq c_2(\sigma-1)^{\frac{17}{24}}(\log(|t|+1))^{\frac{-1}{3}} - c_1(\sigma-1)(\log(|t|+1))^2,$$

para certas constantes positivas c_1, c_2 e $|t| \geq 1$. Escolhendo uma constante $B > 0$ tal que:

$$A := c_2 B^{\frac{17}{24}} - c_1 B > 0$$

e colocando $\sigma = 1 + \frac{B}{(\log(|t|+1))^8}$, nós obtemos:

$$|\zeta(1+it)| \geq c_2(B(\log(|t|+1))^{-8})^{\frac{17}{24}}(\log(|t|+1))^{\frac{-1}{3}}$$
$$-c_1(B(\log(|t|+1))^{-8})(\log(|t|+1))^2$$
$$= c_2 B^{\frac{17}{24}}(\log(|t|+1))^{-6} - c_1 B(\log(|t|+1))^{-6} = \frac{A}{(\log(|t|+1))^6}.$$

Isso também nos dá ainda uma estimativa a esquerda da linha $\sigma = 1$. Para demonstrar o lema abaixo, vamos usar um fato conhecido, de que os primeiros zeros não triviais da função zeta estão ligeiramente afastados do eixo σ. Veja por exemplo [9].

Lema 2.24. *Existe uma constante positiva δ tal que*

$$\zeta(s) \neq 0, \ \textit{para } \sigma \geq 1 - \delta\min\{1, (\log(|t|+1))^{-8}\}, t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Pelo produto de Euler, vemos que $\zeta(s) \neq 0$ se $\sigma > 1$. Do corolário (2.23) segue que $\zeta(1+it) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0$. Portanto, falta estimar em alguma região para $\sigma < 1$. Pela fórmula (18), a estimativa (19) se mantém para:

$$1 - \delta(\log(|t|+1))^{-8} \leq \sigma \leq 1, \text{ e } |t| \geq 1.$$

onde $\delta > 0$ é uma constante positiva tal que $A - c_1\delta > 0$. Vamos considerar primeiro que $|t| \geq e-1$. Assim, σ está na região

$$1 \geq \sigma \geq 1 - \delta\min\{1, (\log(|t|+1))^{-8}\} = 1 - \delta(\log(|t|+1))^{-8}.$$

Nessas condições,

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq |\zeta(1+it)| + c_1(\sigma-1)(\log(|t|+1))^2$$

$$\geq \frac{A}{(\log(|t|+1))^6} - c_1\delta(\log(|t|+1))^{-8}(\log(|t|+1))^2 = \frac{A-c_1\delta}{(\log(|t|+1))^6} > 0$$

e isso resulta a região livre de zeros do lema para $|t| \geq e-1$. Agora se $|t| \leq e-1$, obtemos

$$1 \geq \sigma \geq 1-\delta$$

e nessa região a função $\zeta(s)$ não possui zeros pelo comentário antes do lema. $\square$

2.4 O método de Selberg-Delange

O método de Selberg-Delange que vamos descrever aqui nos dá uma estimativa da soma truncada de $z^{\omega(n)}$, com $0 < |z| \leq 1$. O método é o cerne da demonstração do teorema de Kac-Erdös apresentada no capítulo (4). É possível estender esse método para outras funções aritméticas, veja por exemplo [1].

Antes de estarmos prontos para a demonstração de Selberg-Delange, vamos assumir a representação clássica da função gama, que para $\Re(z) > 0$ é definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} \exp(-u) du$$

e por continuação analítica em todo o plano complexo exceto para polos simples em $z = 0, -1, -2, \ldots$. Para essa e outras propriedades da função gama, veja [10].

Para a demonstração do lema abaixo, cometeremos o abuso de notação que $\frac{1}{\Gamma(z)} = 0$ se $z = 0, -1, -2, \ldots$.

Lema 2.25. *(Fórmula de Hankel) Denote por $\mathcal{H}$ o caminho fechado formado pelo círculo $|s| = r > 0$, excluindo o ponto $s = -r$, junto com duas cópias de semilinhas $(-\infty, -r]$ com respectivos argumentos $\pm\pi$. Então, para qualquer complexo z,*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}} s^{-z} \exp(s) ds. \tag{20}$$

Além disso, se $\mathcal{H}(x)$ denota a parte de $\mathcal{H}$ que está localizada no plano $\sigma > -x$, então, uniformemente para $x > 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}(x)} s^{-z} \exp(s) ds = \frac{1}{\Gamma(z)} + O\left((2e)^{\pi|z|} \Gamma(1 + |z|) \exp\left(\frac{-x}{2} \right) \right).$$

Demonstração. Claramente, a integral em (20) é absolutamente e uniformemente convergente para todo z. Assim, ela define uma função inteira de z que, pelo cálculo de resíduos, não depende do raio r. Agora, quando $\Re(z) < 1$, temos para $|s| = r$ que a integral sobre a circunferência vale:

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\theta})^{-z} e^{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \right| &= \left| \frac{r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r^{-z} e^{-zi\theta} e^{re^{i\theta}} e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{r^{1-\Re(z)}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\Im(z)\theta} e^{r\cos\theta} d\theta.\end{aligned}$$

Daí, como $\Re(z) < 1$, a integral acima tende para zero quando r tende a zero. No caminho com argumento $-\pi$, obtemos $\sigma^{-z} = |\sigma|^{-z} e^{i\pi z}$ e quando r tende a zero, a integral sobre este caminho vale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0}|\sigma|^{-z}e^{i\pi z}e^{\sigma}d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}\sigma^{-z}e^{i\pi z}e^{-\sigma}d\sigma.$$

Por outro lado, no caminho de argumento π, obtemos $(-\sigma)^{-z} = |\sigma|^{-z}e^{-i\pi z}$ e sua integral tende para

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}\sigma^{-z}e^{-i\pi z}e^{-\sigma}d\sigma$$

quando r tende a zero.

Somando resulta:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}[e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}]\sigma^{-z}e^{-\sigma}d\sigma = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sigma^{-z}e^{-\sigma}d\sigma$$

$$= \frac{\sin(\pi z)}{\pi}\Gamma(1-z) = \frac{1}{\Gamma(z)}.$$

Aqui, nós usamos a identidade conhecida:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Isso prova a primeira fórmula para $\Re(z) < 1$ e por continuação analítica para arbitrário z. Agora nós vamos considerar a integral sobre o contorno truncado $\mathcal{H}(x)$, com $x > 1$. Escrevendo $s = \rho(\pm i\pi) = \sigma + it$, obtemos

$$|s^{-z}e^{s}| = |e^{-z\log s}e^{s}| = |e^{-z(\log|s|\pm i\pi)}e^{\sigma+it}| = |e^{-z\log|s|}e^{\mp zi\pi}e^{\sigma}|$$

$$= |e^{-\Re(z)\log|s|}e^{\pm\Im(z)\pi}e^{\sigma}| \le e^{|z|\log|s|}e^{|z|\pi}e^{\sigma} = (|s|e^{\pi})^{|z|}e^{\sigma} = (\rho e^{\pi})^{|z|}e^{-\rho}.$$

Observe que

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\mathcal{H}} - \int_{\mathcal{H}(x)}\right\}s^{-z}\exp(s)ds$$

é a integral sobre duas semilinhas $(-\infty, -x]$ de argumentos $\pm\pi$, desde que $r < 1$ (que podemos supor, pois a integral independe do raio). Assim, pela estimativa acima, temos:

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\mathcal{H}} - \int_{\mathcal{H}(x)}\right\}s^{-z}\exp(s)ds << \exp(\pi|z|)\int_{x}^{\infty}\rho^{|z|}e^{-\rho}d\rho$$

$$= \exp(\pi|z|)\int_{x}^{\infty}\rho^{|z|}e^{-\frac{\rho}{2}}e^{-\frac{\rho}{2}}d\rho \le \exp(\pi|z|)\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\int_{x}^{\infty}\rho^{|z|}e^{-\frac{\rho}{2}}d\rho$$

$$\leq \exp\left(\pi|z| - \frac{x}{2}\right)\int_0^\infty \rho^{|z|}e^{-\frac{\rho}{2}}d\rho = 2^{|z|+1}\exp\left(\pi|z| - \frac{x}{2}\right)\int_0^\infty t^{|z|}e^{-t}dt$$
$$= 2\cdot 2^{|z|}\exp\left(\pi|z| - \frac{x}{2}\right)\Gamma(1+|z|),$$

onde fizemos a mudança de variáveis $\rho = 2t$, e isso prova o lema. $\square$

Finalmente, estamos prontos para o método de Selberg-Delange. Ele consiste em uma grande quantidade de estimativas junto com uma ideia brilhante usando o teorema de Cauchy.

Teorema 2.26. *Existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que uniformemente para x suficientemente grande, $N \geq 0$ e $0 < |z| \leq 1$*

$$\sum_{n\leq x} z^{\omega(n)} = x(\log x)^{z-1}\left[\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k} + O\left(\left(\frac{c_2N+1}{\log x}\right)^{N+1} + \exp\left(-c_1\sqrt[16]{\log x}\right)\right)\right]$$

onde

$$\lambda_k(z) = \frac{1}{\Gamma(z-k)}\sum_{h+j=k}\frac{\gamma_j(z)}{h!j!}\left[\frac{d^h}{ds^h}L(s,z,\omega)\zeta(s)^{-z}\right]_{s=1}$$

e

$$\gamma_j(z) = \frac{j!}{2\pi i}\oint_{|s-1|=r}\frac{1}{s}((s-1)\zeta(s))^z\frac{ds}{(s-1)^{j+1}}.$$

É possível trocar $\sqrt[16]{\log x}$ por $\sqrt{\log x}$, bastando melhor um pouco a região livre de zeros da função zeta. Veja por exemplo [1].

Demonstração. Em vista de nossas observações sobre a função:

$$G(s,z) = L(s,z,\omega)\zeta(s)^{-z},$$

segue que

$$L(s,z,\omega) = G(s,z)\zeta(s)^z$$

pode ser analiticamente continuada para qualquer região, com $\sigma > \frac{1}{2}$, livre de zeros de $\zeta(s)$, cobrindo o semiplano $\sigma > 1$. Daí, o lema (2.24) implica que $L(s,z,\omega)$ é analítica na região:

$$\sigma \geq 1 - \delta\min\{1, (\log(|t|+1))^{-8}\}, \tag{21}$$

onde δ é uma constante pequena. Para $0 < |z| \leq 1$, temos para alguma constante $k > 0$:

$$|\zeta(s)^z| = |e^{z\log(\zeta(s))}| = |e^{z(\log|\zeta(s)|+i\theta_s)}| = e^{\Re(z)\log|\zeta(s)|}e^{-\Im(z)\theta_s}$$

$$<< e^{\Re(z)\log(k\log(|t|+1))} = (k\log(|t|+1))^{\Re(z)}$$
$$<< (\log(|t|+1))^{\Re(z)} \leq \log(|t|+1) << (|t|+1)^{\epsilon},$$

para algum $0 < \epsilon < 1$ com $|t| \geq 3$. Aqui vale uma consideração de o porquê a última desigualdade vale. Considere $f(t) = \log(t+1) - k_1(t+1)^{\epsilon}$, definida para $t \geq 0$, k_1 é qualquer constante maior do que 1 e $\epsilon = \frac{1}{k_1}$. Daí $f'(t) = \frac{1-(t+1)^{\epsilon}}{t+1} \leq 0, \forall t \geq 0$. Logo f é decrescente e vale: $\log(t+1) - k_1(t+1)^{\epsilon} \leq f(0) = -k_1 \leq 0$. Portanto $\log(t+1) \leq k_1(t+1)^{\epsilon}$.

Outro detalhe importante, se σ está em um intervalo "longe"de 1, podemos supor que a estimativa sobre $\zeta(s)^z$ acima vale para todo $t \geq 0$. Outro ponto é que se σ está em um intervalo qualquer e t está um pouco afastado de 0, podemos supor também que a estimativa acima vale nessa região (só usar compacidade e aumentar a constante implícita).

Mais ainda, usando (5), $L(s,z,\omega)$ satisfaz a estimativa:

$$L(s,z,\omega) = G(s,z)\zeta(s)^z << (|t|+1)^{\epsilon}, \forall t \geq 0, \sigma \geq 1 - \delta\min\{1, (\log(|t|+1))^{-8}\},$$

desde que valha também os detalhes citados acima.

Definindo $c := 1 + \frac{1}{\log x}$, nós encontramos para $T > 1$ e $\gamma(t) = c + it, t \in [T, \infty)$

$$\left|\int_{c+iT}^{c+i\infty} L(s,z,\omega)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds\right| = \left|\int_{T}^{\infty} L(\gamma(t),z,\omega)\frac{x^{\gamma(t)+1}}{\gamma(t)(\gamma(t)+1)}dt\right|$$
$$\leq \int_T^{\infty} \frac{(|t|+1)^{\epsilon}x^{c+1}}{|c+it||c+1+it|}dt \leq x^{c+1}\int_T^{\infty}\frac{(|t|+1)^{\epsilon}}{t^2}dt << x^{c+1}\int_T^{\infty} t^{\epsilon-2}dt$$
$$= \frac{x^{c+1}}{\epsilon-1}\left[t^{\epsilon-1}\right]_T^{\infty} = \frac{x^{c+1}}{1-\epsilon}T^{\epsilon-1} << x^{2+\frac{1}{\log x}}T^{\epsilon-1} = ex^2T^{\epsilon-1} << x^2T^{\epsilon-1}.$$

Analogamente,

$$\int_{c-i\infty}^{c-iT} L(s,z,\omega)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds << x^2T^{\epsilon-1}.$$

Portanto, nós deduzimos de (8):

$$\int_0^x \sum_{n\leq u} z^{\omega(n)}du = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L(s,z,\omega)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} L(s,z,\omega)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds + O(x^2T^{\epsilon-1}). \tag{22}$$

Se estimarmos $L(s,z,\omega)$ diretamente como acima, estariamos cometendo um erro, pois c se aproximaria de 1 quando $x \to \infty$ e dessa forma, a estimativa não seria uniforme para x grande. Por isso, usando o teorema de Cauchy, vamos calcular essa integral em um camindo diferente. Denote por $\mathcal{C}$ esse caminho que vamos definir em três partes a seguir:

• Considere contorno truncado de Hankel em volta de $s = 1$, com raio $r = \frac{1}{2\log x}$, juntando as partes lineares de $1 - \frac{1}{2}\delta$ até $1 - r$. Vamos denotar essa parte por Γ;

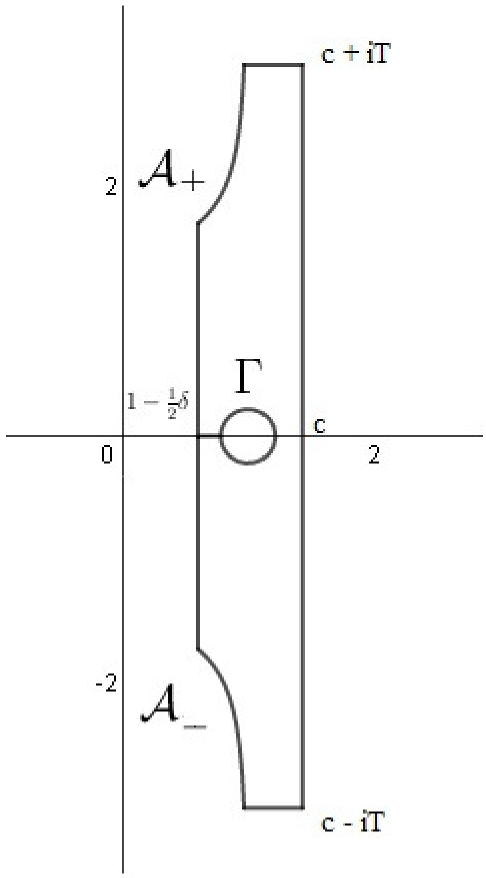
• Os arcos $\mathcal{A}_{\pm}$ definidos por:

$$\sigma = \sigma(t) = 1 - \frac{1}{2}\delta \min\{1, (\log(|t| + 1))^{-8}\},$$

para $0 < |t| \leq T$;

• e os segmentos lineares $[\sigma(T) \pm iT, c \pm iT]$.

Veja a figua abaixo:



Aqui, deixe x ser suficientemente grande tal que Γ esteja contido na região:

$$\sigma \geq 1 - \frac{\delta}{2} \min\{1, (\log(|t| + 1))^{-8}\}.$$

Aplicando o teorema de Cauchy, obtemos:

$$\int_{c-iT}^{c+iT} L(s,z,\omega)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds = \int_{\mathcal{C}} L(s,z,\omega)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds, \tag{23}$$

desde que o integrando é analítico em (21). Vamos mostrar agora que o termo principal da integral acima está no contorno Γ.

Temos para $\gamma(t) = t + iT, t \in [\sigma(T), c]$, $c = 1 + \frac{1}{\log x}$:

$$\left|\int_{\sigma(T)+iT}^{c+iT} L(s,z,\omega)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds\right| = \left|\int_{\sigma(T)}^{c} L(\gamma(t),z,\omega)\frac{x^{\gamma(t)+1}}{\gamma(t)(\gamma(t)+1)}dt\right|$$

$$<< \int_{\sigma(T)}^{c} \frac{(t+1)^{\epsilon}x^{1+t}}{|t+iT||t+1+iT|}dt \leq x^{1+c}T^{-2}(1+c)^{\epsilon}[c-\sigma(T)]$$

$$<< x^2T^{-2}2^{\epsilon}[c-\sigma(T)] = x^2T^{-2}\left[\frac{1}{\log x} + \frac{1}{2}\delta\min\{1, (\log(T+1))^{-8}\}\right]$$

$$\leq x^2T^{-2}\left[2 + \frac{1}{2}\delta\right] << x^2T^{-2} << x^2T^{\epsilon-2}.$$

Analogamente:

$$\int_{\sigma(T)-iT}^{c-iT} L(s,z,\omega)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds << x^2T^{\epsilon-2}.$$

No arco $\mathcal{A}_+$, temos $\gamma(t) = \sigma(t) + it, t \in (0,T]$. Observe que se $t \in (0, e-1]$ então:

$$\sigma'(t) = 0,$$

e se $t \in (e-1, T]$ então

$$\sigma'(t) = \frac{4\delta}{(\log(t+1))^7}\frac{1}{t+1} \leq 4\delta.$$

Em todo o caso, $|\gamma'(t)| \leq 4\delta + 1 << 1$. Daí

$$\int_{\mathcal{A}_+} L(s,z,\omega)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds << \int_0^T \frac{(t+1)^{\epsilon}x^{\sigma(t)+1}}{|\sigma(t)+it||\sigma(t)+1+it|}dt$$

$$= \int_0^{e-1} \frac{(t+1)^{\epsilon}x^{\sigma(t)+1}}{|\sigma(t)+it||\sigma(t)+1+it|}dt + \int_{e-1}^{T} \frac{(t+1)^{\epsilon}x^{\sigma(t)+1}}{|\sigma(t)+it||\sigma(t)+1+it|}dt.$$

Como $\sigma(t) = 1 - \frac{1}{2}\delta$ para $t \in (0, e-1)$ então:

$$\int_0^{e-1} \frac{(t+1)^{\epsilon}x^{\sigma(t)+1}}{|\sigma(t)+it||\sigma(t)+1+it|}dt \leq \int_0^{e-1} \frac{(t+1)^{\epsilon}x^{2-\frac{\delta}{2}}}{\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\left(1-\frac{\delta}{2}\right)}dt$$

$$<< x^{2-\frac{\delta}{2}} << x^{\sigma(T)+1}.$$

Por outro lado,

$$\int_{e-1}^{T} \frac{(t+1)^{\epsilon} x^{\sigma(t)+1}}{|\sigma(t)+it||\sigma(t)+1+it|} dt \leq x^{\sigma(T)+1} \int_{e-1}^{T} \frac{(t+1)^{\epsilon}}{t^2} dt$$

$$<< x^{\sigma(T)+1} \int_{e-1}^{T} (t+1)^{\epsilon-2} dt \leq x^{\sigma(T)+1} \int_{0}^{T} (t+1)^{\epsilon-2} dt$$

$$= \frac{x^{\sigma(T)+1}}{\epsilon-1} \left[(t+1)^{\epsilon-1}\right]_0^T = \frac{x^{\sigma(T)+1}}{1-\epsilon} \left[1-(T+1)^{\epsilon-1}\right] << x^{\sigma(T)+1},$$

pois $\epsilon < 1$. Portanto

$$\int_{\mathcal{A}_+} L(s,z,\omega) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds << x^{\sigma(T)+1}.$$

O caso $\mathcal{A}_-$ é análogo. Daí, tomando $T = \exp\left(\sqrt[16]{\frac{\delta}{2-2\epsilon} \log x}\right)$, obtemos:

$$T^{\epsilon-1} = \exp\left(-\sqrt[16]{\frac{(1-\epsilon)^{31}\delta}{2} \log x}\right)$$

e

$$x^{\sigma(T)-1} = x^{\frac{-\delta}{2(\log(T+1))^8}} = \exp\left(\frac{-\delta}{2(\log(T+1))^8} \log x\right)$$

$$= \exp\left(\frac{-\delta}{2\left(\frac{\log(T+1)}{\log T}\right)^8 (\log T)^8} \log x\right) = \exp\left(\frac{-\delta}{2\left(\frac{\log(T+1)}{\log T}\right)^8} \frac{\log x}{\left(\sqrt[16]{\frac{\delta}{2-2\epsilon} \log x}\right)^8}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{-\delta}{2\left(\frac{\log(T+1)}{\log T}\right)^8} \frac{\log x}{\sqrt{\frac{\delta}{2-2\epsilon}}\sqrt{\log x}}\right) = \exp\left(\frac{-\delta}{2\left(\frac{\log(T+1)}{\log T}\right)^8} \frac{\sqrt{\log x}}{\sqrt{\frac{\delta}{2-2\epsilon}}}\right) << T^{\epsilon-1}.$$

Assim, o erro considerável nas fórmulas acima é $x^2 T^{\epsilon-1}$. Logo, por (22) e por (23) , obtemos:

$$\int_0^x \sum_{n \leq u} z^{\omega(n)} du = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L(s,z,\omega) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds + O\left(x^2 \exp(-c_3 \sqrt[16]{\log x})\right), \quad (24)$$

onde $c_3 = \sqrt[16]{\frac{(1-\epsilon)^{31}\delta}{2}}$. A partir de agora, o nosso trabalho é estimar a integral sobre Γ acima. Claramente, a integral

$$l(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L(s,z,\omega) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds$$

em (24) é uma função infinitamente diferenciável para $x > 0$, e, em particular, temos:

$$l'(x) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L(s,z,\omega)\frac{x^s}{s}ds \tag{25}$$

e

$$l''(x) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L(s,z,\omega)x^{s-1}ds,$$

pois, pelo teorema de Cauchy, as integrais acima não dependem de r. Nosso trabalho agora é estimar $l'(x)$ e $l''(x)$.

Pelo caracterização de ζ para $\sigma > 0$ (veja o lema (2.19)) e pelo fato de os primeiros zeros da função ζ estarem afastados do semi eixo $\sigma > 0$, a função:

$$\frac{1}{s}((s-1)\zeta(s))^z$$

é analítica em $|s-1| < 1$, e assim, possui uma expansão em série:

$$Z(s,z) := \frac{1}{s}((s-1)\zeta(s))^z = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\gamma_j(z)}{j!}(s-1)^j, \tag{26}$$

que, pela fórmula de Cauchy,

$$\gamma_j(z) = \frac{j!}{2\pi i}\oint_{|s-1|=r_1}\frac{1}{s}((s-1)\zeta(s))^z\frac{ds}{(s-1)^{j+1}}.$$

Para qualquer $0 < r_1 < 1$. Usando a caracterização da função zeta dada pelo lema (2.19), obtemos

$$(s-1)\zeta(s) = s + s(s-1)\int_1^\infty \frac{[u]-u}{u^{s+1}}du.$$

Observe que se $v \in \mathbb{C}$ é não nulo, então $|v^z| = |v|^{\Re(z)}e^{-\Im(z)\theta_v} << |v|$. Portanto,

$$|((s-1)\zeta(s))^z| << |((s-1)\zeta(s))| \leq |s|(1+|s-1|)\int_1^\infty \frac{1}{u^{\sigma+1}}du = |s| + \frac{|s||s-1|}{\sigma}.$$

Definindo $r_1 = \frac{1}{1+\epsilon}$ e observando que na região $|s-1| = r_1$ segue que $\sigma \geq 1-r_1$, temos

$$\frac{\gamma_j(z)}{j!} << \oint_{|s-1|=r_1}\left(1+\frac{r_1}{\sigma}\right)\frac{1}{r_1^{j+1}}|ds| \leq \oint_{|s-1|=r_1}\left(1+\frac{r_1}{1-r_1}\right)\frac{1}{r_1^{j+1}}|ds|$$

$$= \oint_{|s-1|=r_1}\left(\frac{1}{1-r_1}\right)\frac{1}{r_1^{j+1}}|ds| << \left(\frac{1}{1-r_1}\right)\frac{1}{r_1^{j+1}}r_1 = \left(\frac{1}{1-r_1}\right)\frac{1}{r_1^{j}}$$

$$<< \frac{1}{r_1^j} = (1+\epsilon)^j.$$

Logo

$$\frac{\gamma_j(z)}{j!} << (1+\epsilon)^j.$$

Pela expressão (26), segue para $s \in \Gamma$, que

$$L(s,z,\omega) = s\frac{G(s,z)Z(s,z)}{(s-1)^z} = s\frac{G(s,z)}{(s-1)^z}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\gamma_j(z)}{j!}(s-1)^j.$$

Daí, como

$$|(s-1)^z| = e^{\Re(z)\log|s-1|}e^{-\Im(z)\theta_s},$$

e na região $|s-1| \leq \frac{1}{2}$ (observe que Γ está contido nessa região a partir de algum x suficientemente grande), segue que $|s-1|(1+\epsilon) \leq \delta_1 < 1$, logo

$$|Z(s,z)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}(1+\epsilon)^j|s-1|^j = \sum_{j=0}^{\infty}((1+\epsilon)|s-1|)^j \leq \sum_{j=0}^{\infty}\delta_1^j \leq \frac{1}{1-\delta_1}.$$

Lembrando que

$$|G(s,z)| << 1$$

para $\sigma > \frac{1}{2}$, segue para $s \in \Gamma$

$$|L(s,z,\omega)| \leq \frac{|s|}{(1-\delta_1)}\frac{e^{\Im(z)\theta_s}}{e^{\Re(z)\log|s-1|}} << \frac{1}{e^{\Re(z)\log|s-1|}}$$

$$= \frac{1}{|s-1|^{\Re(z)}} \leq \frac{1}{|s-1|} \leq \frac{1}{r}.$$

Se $s \in \Gamma$, então

$$|x^{s-1}| = x^{\Re(s)-1} \leq x^{1+\frac{1}{2\log x}-1} = x^{\frac{1}{2\log x}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

Consequentemente, temos:

$$l''(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} L(s,z,\omega)x^{s-1}ds << \frac{1}{r}r = 1. \tag{27}$$

Pelo fato da função $G(s,z)$ ser holomorfa para $\sigma > \frac{1}{2}$, a fórmula (26) implica pelo produto de séries para $s \in \Gamma$:

$$G(s,z)Z(s,z) = G(s,z)\frac{((s-1)\zeta(s))^z}{s} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(z)(s-1)^k,$$

com

$$g_k(z) = \sum_{h+j=k} \frac{\gamma_j(z)}{j!} \frac{G^{(h)}(1,z)}{h!} = \sum_{h+j=k} \frac{1}{k!} \binom{k}{j} \gamma_j(z) G^{(h)}(1,z)$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{h+j=k} \binom{k}{j} \gamma_j(z) \left[\frac{d^h}{ds^h} L(s,z,\omega)\zeta(s)^{-z} \right]_{s=1} = \Gamma(z-k)\lambda_k(z),$$

onde

$$\lambda_k(z) = \frac{1}{\Gamma(z-k)} \frac{1}{k!} \sum_{h+j=k} \binom{k}{j} \gamma_j(z) \left[\frac{d^h}{ds^h} L(s,z,\omega)\zeta(s)^{-z} \right]_{s=1}.$$

Daí, pela fórmula de Cauchy,

$$g_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u-1|=\delta} G(u,z) Z(u,z) \frac{du}{(u-1)^{k+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u-1|=\delta} G(u,z) \frac{((u-1)\zeta(u))^z}{u} \frac{du}{(u-1)^{k+1}}.$$

Desde que $G(s,z)Z(s,z)$ é holomorfa no disco $|s-1| \leq \delta$ e nessa região vale

$$G(s,z), Z(s,z) << 1,$$

obtemos pela estimativa de Cauchy:

$$g_k(z) << \frac{1}{\delta^k}. \tag{28}$$

Observando que Γ está contido no disco $|s-1| \leq \frac{1}{2}\delta$ para x suficientemente grande, nós temos sobre o contorno truncado de Hankel Γ e para $N \geq 0$

$$G(s,z) \frac{((s-1)\zeta(s))^z}{s} = \sum_{k=0}^{N} g_k(z)(s-1)^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} g_k(z)(s-1)^k,$$

e como

$$\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} g_k(z)(s-1)^k \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|s-1|^k}{\delta^k} = \frac{|s-1|^{N+1}}{\delta^{N+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} << \frac{|s-1|^{N+1}}{\delta^{N+1}},$$

podemos escrever:

$$G(s,z) \frac{((s-1)\zeta(s))^z}{s} = \sum_{k=0}^{N} g_k(z)(s-1)^k + O\left(\frac{|s-1|^{N+1}}{\delta^{N+1}} \right).$$

Assim, para $s \in \Gamma$

$$L(s,z,\omega) = G(s,z)\zeta(s)^z = \frac{s}{(s-1)^z} G(s,z) \frac{((s-1)\zeta(s))^z}{s}$$

$$= \frac{s}{(s-1)^z} \left[\sum_{k=0}^{N} g_k(z)(s-1)^k + O\left(\frac{|s-1|^{N+1}}{\delta^{N+1}} \right) \right].$$

Daí, obtemos

$$l'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma L(s,z,\omega) \frac{x^s}{s} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{k=0}^{N} g_k(z)(s-1)^{k-z} x^s + \frac{x^s}{(s-1)^z} O\left(\frac{|s-1|^{N+1}}{\delta^{N+1}} \right) ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{N} g_k(z) \int_\Gamma (s-1)^{k-z} x^s ds + O(\delta^{-N} R(x)), \tag{29}$$

onde

$$R(x) := \int_\Gamma \frac{|s-1|^{N+1}}{|(s-1)^z|} |x^s||ds|.$$

Temos:

$$|(s-1)^{-z}| = e^{-\Re(z)\log|(s-1)|} e^{\Im(z)\theta_s} = |s-1|^{-\Re(z)} e^{\Im(z)\theta_s} << |s-1|^{-\Re(z)}.$$

Daí

$$R(x) << \int_{1-\frac{\delta}{2}}^{1-r} (1-\sigma)^{N+1-\Re(z)} x^\sigma d\sigma + x^{1+r} r^{N+2-\Re(z)}.$$

Fazendo $u = (1-\sigma)\log x$, segue que:

$$\int_{1-\frac{\delta}{2}}^{1-r} (1-\sigma)^{N+1-\Re(z)} x^\sigma d\sigma = -\int_{\frac{\delta}{2}\log x}^{\frac{1}{2}} \frac{u^{N+1-\Re(z)}}{(\log x)^{N+2-\Re(z)}} e^{\log x - u} du$$

$$= x(\log x)^{\Re(z)-2-N} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\delta}{2}\log x} u^{N+1-\Re(z)} e^{-u} du,$$

e

$$x^{1+r} r^{N+2-\Re(z)} = x^{1+\frac{1}{2\log x}} \frac{1}{(2\log x)^{N+2-\Re(z)}} = e^{\frac{1}{2}} x \frac{(\log x)^{\Re(z)-2-N}}{2^{N+2-\Re(z)}}.$$

Então:

$$R(x) << x(\log x)^{\Re(z)-2-N} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^{N+1-\Re(z)} e^{-u} du + 2^{-N} \right).$$

Observe que, como $|\Re(z)| \leq 1$, então

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} u^{N+1-\Re(z)} e^{-u} du \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} u^{N} e^{-u} du << \int_{\frac{1}{2}}^{1} u^{N} du = \left.\frac{u^N}{N+1}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{N+1} - \frac{1}{2^{N+1}(N+1)} \leq 1.$$

Daí

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^{N+1-\Re(z)} e^{-u} du \leq \int_{1}^{\infty} u^{N+1-\Re(z)} e^{-u} du + 1 \leq \int_{1}^{\infty} u^{N+2} e^{-u} du + 1$$

$$\leq \int_{0}^{\infty} u^{N+2} e^{-u} du + 1 = \Gamma(N+3) + 1 << \Gamma(N+3).$$

Agora, como

$$\sum_{k=1}^{n} \log k = \log n + \sum_{k=1}^{n-1} \log k \leq \log n + \int_{1}^{n} \log x dx$$

$$= \log n + n \log n - n + 1 = n \log n - n + O(\log n).$$

E desde que a função Γ estende a função fatorial, temos para $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(n+1) = n! = \exp(n \log n - n + O(\log n)).$$

Assim, para $n \geq 3$, e para alguma constante positiva $k \geq 1$,

$$\log \Gamma(n+1) \leq |n \log n - n| + k \log n.$$

Logo

$$\Gamma(n+1) \leq e^{n \log n - n} n^k = n^n e^{-n} n^k = n^{n-k} e^{-n} \leq n^{n-1}.$$

Daí, para todo $N \geq 1$, temos:

$$\Gamma(N+2+1) << (N+2)^{N+1} \leq (c_4 N + 1)^{N+1},$$

onde c_4 é alguma constante positiva. Daqui em diante, $c_i, i \in \mathbb{N}$, representam constantes positivas maiores que 1. Observe que, aumentando a constante implicita, podemos supor que a estima acima vale para $N = 0$. Portanto,

$$R(x) << x(\log x)^{\Re(z)-2-N}(c_4 N + 1)^{N+1} = x(\log x)^{\Re(z)-1} \left(\frac{c_4 N + 1}{\log x}\right)^{N+1}.$$

Para simplificar a fórmula (29), precisamos de estimativas sobre a integral. Fazendo a mudança de variáveis $w = (s-1)\log x$, e usando a notação do lema (2.25), ou seja, $\mathcal{H}(x)$ é o contorno truncado de Hankel para $\sigma > -x$, resulta que a nova região é o contorno truncado de Hankel para $\sigma > -\frac{\delta}{2}\log x$, e que da a volta na origem com raio igual a $\frac{1}{2}$. Dai, pela estimativa do lema (2.25), obtemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(s-1)^{k-z}x^s ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{H}\left(\frac{\delta}{2}\log x\right)} \frac{e^{w+\log x}w^{k-z}}{(\log x)^{k-z}}\frac{dw}{\log x}$$

$$= x(\log x)^{z-1-k}\int_{\mathcal{H}\left(\frac{\delta}{2}\log x\right)} w^{k-z}e^w dw$$

$$= x(\log x)^{z-1-k}\left(\frac{1}{\Gamma(z-k)} + O\left((2e)^{\pi|k-z|}\Gamma(1+|k-z|)\exp\left(\frac{-\delta}{4}\log x\right)\right)\right).$$

Temos:

$$\exp\left(\frac{-\delta}{4}\log x\right) = x^{\frac{-\delta}{4}}$$

e

$$(2e)^{\pi|k-z|} \leq (2e)^{\pi|k|+\pi|z|} << (2e)^{\pi|k|}.$$

Por outro lado,

$$\Gamma(1+|k-z|) = \int_0^\infty s^{|k-z|}e^{-s}ds.$$

Observe que:

$$\int_0^1 s^{|k-z|}e^{-s}ds \leq \int_0^1 s^{|k-z|}ds \leq \int_0^1 ds = 1$$

e

$$\int_1^\infty s^{|k-z|}e^{-s}ds \leq \int_1^\infty s^{k+1}e^{-s}ds \leq \int_0^\infty s^{k+1}e^{-s}ds$$
$$= \Gamma(k+2) << (k+1)^k$$

para todo $K \geq 0$. Assim

$$(2e)^{\pi|k-z|}\Gamma(1+|k-z|) << (2e)^{\pi|k|}(k+1)^k << (c_5k+1)^k.$$

O que permite reescrever a fórmula acima como:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(s-1)^{k-z}x^s ds = x(\log x)^{z-1-k}\left(\frac{1}{\Gamma(z-k)} + O\left((c_5k+1)^k x^{\frac{-\delta}{4}}\right)\right).$$

Portanto, o termo mais importante em (29) é:

$$\sum_{k=0}^{N} g_k(z) \int_{\Gamma} (s-1)^{k-z} x^s ds$$

$$= \sum_{k=0}^{N} g_k(z) \left[x(\log x)^{z-1-k} \left(\frac{1}{\Gamma(z-k)} + O\Big((c_5 k + 1)^k x^{\frac{-\delta}{4}} \Big) \Big) \right]$$

$$= x(\log x)^{z-1} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k} + O \overbrace{\left(\sum_{k=0}^{N} |g_k(z)| \Big(\frac{c_5 k + 1}{\log x} \Big)^k x^{\frac{-\delta}{4}} \right)}^{E_N} \right),$$

onde

$$E_N = x^{\frac{-\delta}{4}} \sum_{k=0}^{N} |g_k(z)| \Big(\frac{c_5 k + 1}{\log x} \Big)^k << x^{\frac{-\delta}{4}} \sum_{k=0}^{N} \Big(\frac{c_5 k + 1}{\delta \log x} \Big)^k$$

$$\leq x^{\frac{-\delta}{4}} \sum_{k=0}^{N} c_5^k \Big(\frac{k+1}{\delta \log x} \Big)^k \leq x^{\frac{-\delta}{4}} c_5^N \sum_{k=0}^{N} \Big(\frac{k+1}{\delta \log x} \Big)^k.$$

Desde que:

$$\frac{(k+1)^k}{k! 5^k} \to 0$$

quando $k \to \infty$, segue que $(k+1)^k << k! 5^k$ para todo $k \geq 0$. Daí

$$x^{\frac{-\delta}{4}} c_5^N \sum_{k=0}^{N} \Big(\frac{k+1}{\delta \log x} \Big)^k << x^{\frac{-\delta}{4}} c_5^N \sum_{k=0}^{N} k! \Big(\frac{5}{\delta \log x} \Big)^k$$

$$= x^{\frac{-\delta}{4}} c_5^N \Big(\frac{5}{\delta \log x} \Big)^N \Big(\frac{\delta \log x}{5} \Big)^N \sum_{k=0}^{N} k! \Big(\frac{\delta \log x}{5} \Big)^{-k}$$

$$= x^{\frac{-\delta}{4}} \Big(\frac{5 c_5}{\delta \log x} \Big)^N \sum_{k=0}^{N} k! \Big(\frac{\delta \log x}{5} \Big)^{N-k}$$

$$\leq x^{\frac{-\delta}{4}} \Big(\frac{c_6}{\log x} \Big)^N \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{(N-k)!} \Big(\frac{\delta \log x}{5} \Big)^{N-k}.$$

Observe que:

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(N-k)!} \Big(\frac{\delta \log x}{5} \Big)^{N-k} \frac{1}{x^{\frac{5\delta}{24}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n}{5^n n!} \frac{(\log x)^n}{x^{\frac{5\delta}{24}}}.$$

Vamos mostrar que a soma acima do lado direito converge. Considere:

$$f_n(x) = \frac{b^n}{n!}\frac{(\log x)^n}{x^a},$$

onde $b = \frac{\delta}{5}$ e $a = \frac{5\delta}{24}$. Assim:

$$f_n'(x) = \frac{b^n}{n!}\left[\frac{n(\log x)^{n-1}x^{a-1} - a(\log x)^n x^{a-1}}{x^{2a}}\right] = \frac{b^n}{n!}\frac{(\log x)^n}{x^{a+1}}\left[\frac{n}{\log x} - a\right].$$

Daí

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow \log x = \frac{n}{a} \Leftrightarrow x = e^{\frac{n}{a}}.$$

Daí, analisando os sinais, vemos que f_n tem um máximo em $x = e^{\frac{n}{a}}$. Assim:

$$f_n(x) \leq M_n := f_n(e^{\frac{n}{a}}) = \frac{b^n}{n!}\left(\frac{n}{a}\right)^n \frac{1}{e^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \frac{n^n}{n!e^n} = \left(\frac{\delta}{5}\frac{24}{5\delta}\right)^n \frac{n^n}{n!e^n} = \left(\frac{24}{25}\right)^n \frac{n^n}{n!e^n}.$$

Pelo teste da raiz,

$$\sqrt[n]{\left(\frac{24}{25}\right)^n \frac{n^n}{n!e^n}} = \frac{24}{25}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}e} \to \frac{24}{25} < 1.$$

Portanto a série $\sum M_n$ converge. Logo, $\sum f_n(x)$ converge uniformemente pelo M-teste de Weierstrass. Assim, existe $M > 0$ tal que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n}{5^n n!}\frac{(\log x)^n}{x^{\frac{5\delta}{24}}} \leq M, \forall x \geq 3.$$

Logo

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(N-k)!}\left(\frac{\delta \log x}{5}\right)^{N-k} \frac{1}{x^{\frac{5\delta}{24}}} \leq M, \forall x \geq 3, \forall N \geq 0.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
&x^{\frac{-\delta}{4}}\left(\frac{c_6}{\log x}\right)^N \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{(N-k)!}\left(\frac{\delta \log x}{5}\right)^{N-k} \\
&= x^{\frac{-\delta}{24}}\left(\frac{c_6}{\log x}\right)^N N! \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(N-k)!}\left(\frac{\delta \log x}{5}\right)^{N-k} \frac{1}{x^{\frac{5\delta}{24}}} \\
&<< x^{\frac{-\delta}{24}}\left(\frac{c_6}{\log x}\right)^N N! << \frac{1}{\log x} N! \left(\frac{c_6}{\log x}\right)^N
\end{aligned}$$

$$<< \frac{1}{\log x}(N+1)^N \left(\frac{c_6}{\log x}\right)^N << \left(\frac{c_7 N+1}{\log x}\right)^{N+1}.$$

Portanto,

$$E_N << \left(\frac{c_7 N+1}{\log x}\right)^{N+1}.$$

Esse longo cálculo resulta, substituindo em (29), e observando que:

$$\delta^{-N}\left(\frac{c_4+1}{\log x}\right)^{N+1} << \left(\frac{c_8+1}{\log x}\right)^{N+1},$$

$$l'(x) = x(\log x)^{z-1}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k} + O\left(\left(\frac{c_9 N+1}{\log x}\right)^{N+1}\right)\right). \tag{30}$$

Agora estamos prontos para terminar a prova. Aplicando a fórmula (24), com $x+h$ e x, onde $0 < h < \frac{x}{2}$, resulta:

$$\int_x^{x+h} \sum_{n\le u} z^{\omega(n)} du = l(x+h) - l(x) + O\left(x^2 \exp(-c_3 \sqrt[16]{\log x})\right).$$

Observe que

$$\int_0^1 (1-u)l''(x+uh)du = \frac{-l'(x)}{h} + \frac{1}{h^2}[l(x+h)-l(x)].$$

Daí por (27),

$$l(x+h) - l(x) = hl'(x) + h^2 \int_0^1 (1-u)l''(x+uh)du$$

$$<< hl'(x) + O(h^2).$$

Assim,

$$\sum_{n\le x} z^{\omega(n)} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \sum_{n\le x} z^{\omega(n)} du$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \sum_{n\le u} z^{\omega(n)} du + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \sum_{n\le x} z^{\omega(n)} du - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \sum_{n\le u} z^{\omega(n)} du$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \sum_{n\le u} z^{\omega(n)} du + O\left(\frac{L}{h}\right)$$

$$= l'(x) + O\left(\frac{x^2}{h}\exp(-c_3\sqrt[16]{\log x}) + h + \frac{L}{h}\right),$$

onde:

$$L := \int_x^{x+h}\left|\sum_{n\leq x} z^{\omega(n)} - \sum_{n\leq u} z^{\omega(n)}\right| du.$$

Tendo em vista que $|z^{\omega(n)}| \leq 1$, temos:

$$L = \int_x^{x+h}\left|\sum_{x<n\leq u} z^{\omega(n)}\right| du \leq \int_x^{x+h}\sum_{x<n\leq u} 1du = \int_x^{x+h}(u-x)du + O(h)$$

$$= \frac{h^2}{2} + O(h) << h^2.$$

Assim

$$\sum_{n\leq x} z^{\omega(n)} = l'(x) + O\left(\frac{x^2}{h}\exp(-c_3\sqrt[16]{\log x}) + h\right).$$

Assim, por (30), temos:

$$\sum_{n\leq x} z^{\omega(n)} = x(\log x)^{z-1}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k} + O\left(\left(\frac{c_9 N+1}{\log x}\right)^{N+1}\right)\right)$$

$$+O\left(\frac{x^2}{h}\exp(-c_3\sqrt[16]{\log x}) + h\right).$$

Tomando

$$h = x\exp\left(-\frac{c_3}{2}\sqrt[16]{\log x}\right),$$

obtemos

$$\sum_{n\leq x} z^{\omega(n)} = x(\log x)^{z-1}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k} + O\left(\left(\frac{c_9 N+1}{\log x}\right)^{N+1}\right)\right)$$

$$+O\left(x\exp\left(-c_{10}\sqrt[16]{\log x}\right)\right)$$

e assim, modificando as constantes, podemos escrever:

$$\sum_{n\leq x} z^{\omega(n)} = x(\log x)^{z-1}\left[\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k} + O\left(\left(\frac{c_2 N+1}{\log x}\right)^{N+1} + \exp\left(-c_1\sqrt[16]{\log x}\right)\right)\right]$$

e isso encerra o teorema. $\square$

Corolário 2.27.

$$\sum_{n\leq x} z^{\omega(n)} = \lambda(z)x(\log x)^{z-1} + O(x(\log x)^{\Re(z)-2})$$

onde $\lambda(z)$ é uma função inteira com $\lambda(1) = 1$.

Demonstração. Pelo teorema anteior, tomando $N = 0$, temos:

$$\sum_{n\leq x} z^{\omega(n)} = x(\log x)^{z-1}\left(\lambda_0(z) + O\left(\exp(-c_1\sqrt[16]{\log x}) + \frac{1}{\log x}\right)\right), \tag{31}$$

onde

$$\lambda(z) := \lambda_0(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\gamma_0(z)\left[L(s,z,\omega)\zeta(s)^{-z}\right]_{s=1} = \frac{1}{\Gamma(z)}\gamma_0(z)G(1,z).$$

Portanto, $\lambda(z)$ é uma função inteira. Além disso:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty u^{1-1}\exp(-u)du = \int_0^\infty \exp(-u)du = 1.$$

E para $\sigma > 1$, sabemos que

$$G(s,z) = \prod_p \left(1 + \frac{z}{p^s-1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^z$$

e como

$$\prod_p \left(1 + \frac{1}{p-1}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p(p-1)}\right) = \prod_p (1) = 1,$$

temos por continuação analítica que $G(1,1) = 1$. Agora, lembrando que

$$\frac{1}{s}((s-1)\zeta(s))^z = \sum_{j=0}^\infty \frac{\gamma_j(z)}{j!}(s-1)^j,$$

e que para $\sigma > 0, s \neq 1$:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + s\int_1^\infty \frac{[u]-u}{u^{s-1}}du.$$

Então

$$(s-1)\zeta(s) = s + (s-1)s\int_1^\infty \frac{[u]-u}{u^{s-1}}du,$$

que resulta:
$$\frac{1}{s}((s-1)\zeta(s))^z\Big|_{s=1} = 1,$$
e portanto
$$\gamma_0(z) = \frac{1}{s}((s-1)\zeta(s))^z\Big|_{s=1} = 1.$$
Em particular, $\gamma_0(1) = 1$ e segue que $\gamma(1) = 1$. Agora como
$$\frac{\log x}{\exp(-B\sqrt[16]{\log x})} << 1,$$
então, por (31), temos
$$\sum_{n\leq x} z^{\omega(n)} = x(\log x)^{z-1}\left(\lambda(z) + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)$$
$$= x(\log x)^{z-1}\lambda(z) + O(x(\log x)^{\Re(z)-2})$$
como queríamos.

$\square$

2.5 O teorema dos números primos

Como uma generalização da função contadora de primos $\pi(x)$ nós definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\pi_k(x) = \#\{n \leq x : \omega(n) = k\}.$$

Note que a influência de potência de primos $p^j \leq x$ para fixado k é pequena. Por exemplo, se $k = 1$ então

$$\pi_1(x) = \pi(x) + \#\{p^j \leq x : j \geq 2\} = \pi(x) + O(x^{\frac{1}{2}}).$$

Agora vamos provar

Teorema 2.28. *Seja $a_z(n)$ uma função aritmética dependendo de um parâmetro complexo z e com uma expansão em série de potências no disco $|z| \leq 1$*

$$a_z(n) = \sum_0^{\infty} c_k(n) z^k.$$

Seja N um inteiro não negativo. Suponha que existam $N+1$ funções $h_j(z)(0 \leq j \leq N)$, holomorfas para $|z| \leq 1$ e uma quantidade $R_N(x)$, independente de z, tal que para x suficientemente grande e $|z| \leq 1$

$$\sum_{n \leq x} a_z(n) = x(\log x)^{z-1} \left[\sum_{j=0}^{N} \frac{z h_j(z)}{(\log x)^j} + O(R_N(x)) \right].$$

Então para x suficientemente grande e $1 \leq k \leq \log\log x$, nós temos

$$C_k(x) := \sum_{n \leq x} c_x(n) = \frac{x}{\log x} \left[\sum_{j=0}^{N} \frac{Q_{j,k}(\log\log x)}{(\log x)^j} + O\left(\frac{(\log\log x)^k}{k!} R_N(x) \right) \right] \quad (32)$$

com

$$Q_{j,k}(X) := \sum_{m+l=k-1} \frac{1}{m! l!} h_j^{(m)}(0) X^l \qquad (0 \leq j \leq N, k \geq 1).$$

Se supusermos também que $|h_0''(z)| \leq B$ para $|z| \leq 1$, então, uniformemente para x grande, $1 \leq k \leq \log\log x$, temos

$$C_k(x) = \frac{x}{\log x} \frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!} \left[h_0\left(\frac{k-1}{\log\log x} \right) + O\left(\frac{B(k-1)}{(\log\log x)^2} + \frac{\log\log x}{k} R_0(x) \right) \right]. \quad (33)$$

Demonstração. Observe que

$$\sum_{n\leq x} a_z(n) = \sum_{k\geq 0} C_k(x) z^z.$$

Assim, $C_k(x)$ são os coeficientes da série de Taylor da função $\sum_{n\leq x} a_z(n)$. Logo

$$\begin{aligned} C_k(x) &= \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\left(\sum_{n\leq x} a_z(n)\right) \\ &= \frac{x}{\log x}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\left[\sum_{j=0}^{N}\frac{(\log x)^z z h_j(z)}{(\log x)^j} + (\log x)^z E_N(x)\right]_{z=0} \end{aligned}$$

onde $E_N(x) << R_N(x)$.

Pela fórmula de Cauchy obtemos, para algum r pequeno,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{(\log x)^z z h_j(z)}{(\log x)^j}\right]_{z=0} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{(\log x)^z z h_j(z)}{(\log x)^j z^{k+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{(\log x)^z h_j(z)}{(\log x)^j z^k} dz. \end{aligned}$$

Observe que

$$(\log x)^z h_j(z) = \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\log\log x)^m z^m}{m!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{h^{(l)}(0) z^l}{l!}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i z^i$$

onde

$$d_i = \sum_{t=0}^{i}\frac{(\log\log x)^t}{t!}\frac{h^{(i-t)}(0)}{(i-t)!}.$$

Daí, pelo teorema dos resíduos,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{(\log x)^z h_j(z)}{(\log x)^j z^k} dz = d_{k-1} = \sum_{l+m=k-1}\frac{(\log\log x)^l}{l!}\frac{h^{(m)}(0)}{m!} = Q_{j,k}(\log\log x).$$

Por outro lado, escolhendo $r = \frac{k}{\log\log x}$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\left[(\log x)^z E_N(x)\right]_{z=0} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{(\log x)^z E_N(x)}{z^{k+1}} dz \\ << |E_N(x)|\int_{|z|=r}\frac{(\log x)^{\Re(z)}}{|z|^{k+1}}|dz| &= |E_N(x)|\int_{-\pi}^{\pi}(\log x)^{r\cos\theta}\frac{1}{r^k} d\theta \end{aligned}$$

$$= |E_N(x)| \left(\frac{\log\log x}{k}\right)^k \int_{\pi}^{\pi} e^{k\cos\theta} d\theta,$$

pois

$$(\log x)^{r\cos\theta} = e^{r\cos\theta \log\log x} = e^{k\cos\theta}.$$

Daí

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{k\cos\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi} e^{k\cos\theta} d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{k\cos\theta} d\theta + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{k\cos\theta} d\theta.$$

Observe que

$$2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{k\cos\theta} d\theta \leq 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta = 2\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

por outro lado, fazendo a mudança de variáveis $t = \cos\theta$ temos

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{k\cos\theta} d\theta = 2\int_0^1 e^{kt} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leq 2\int_0^1 e^{kt} \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2e^k \int_0^1 e^{-k(1-t)} \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$$

$$= \frac{2e^k}{\sqrt{k}} \int_0^k e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} du \leq \frac{2e^k}{\sqrt{k}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{2e^k}{\sqrt{k}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Portanto,

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\Big[(\log x)^z E_N(x)\Big]_{z=0} << |E_N(x)| \left(\frac{\log\log x}{k}\right)^k \left[e^k k^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$<< |E_N(x)| \frac{(\log\log x)^k}{k!}.$$

onde usamos que

$$\frac{e^k k^{-\frac{1}{2}} k!}{k^k} << 1.$$

Na verdade, a sequência acima converge,

$$\frac{e^k k^{-\frac{1}{2}} k!}{k^k} \to \sqrt{2\pi}$$

quando $k \to \infty$, e é conhecida como fórmula de Stirling. Vamos usá-la algumas vezes neste trabalho.

Logo

$$C_k(x) = \frac{x}{\log x}\left[\sum_{j=0}^{N} \frac{Q_{j,k}(\log\log x)}{(\log x)^j} + O\bigg(\frac{(\log\log x)^k}{k!} R_N(x)\bigg)\right]$$

e isso demonstra a fórmula (32). Usando (32) com $N = 0$, obtemos:

$$C_k(x) = \frac{x}{\log x}\left[Q_{0,k}(\log\log x) + O\left(\frac{(\log\log x)^k}{k!}R_0(x)\right)\right].$$

Quando $k = 1$, a fórmula (33) se reduz a fórmula acima. Logo podemos supor $k \geq 2$. Temos

$$Q_{0,k}(X) = \sum_{m+l=k-1} \frac{1}{m!l!}h_0^{(l)}(0)X^m = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{e^{zX}h_0(z)}{z^k}dz.$$

Escolha $r = \frac{k-1}{X}$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}(z-r)\frac{e^{zX}}{z^k}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{e^{zX}}{z^{k-1}}dz - \frac{r}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{e^{zX}}{z^k}dz$$

$$= \frac{X^{k-2}}{(k-2)!} - r\frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = 0,$$

onde usamos o teorema dos resíduos. Logo, nós vemos que

$$Q_{0,k}(X) = \frac{h_0(r)}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{e^{zX}}{z^k}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}(h_0(z) - h_0(r) - (z-r)h_0'(r))\frac{e^{zX}}{z^k}dz.$$

Observe que

$$\frac{h_0(r)}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{e^{zX}}{z^k}dz = h_0(r)\frac{X^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Por outro lado, note que

$$(z-r)^2\int_0^1 (1-t)h_0''(r+t(z-r))dt$$

$$= (z-r)^2\int_0^1 h_0''(r+t(z-r))dt - (z-r)^2\int_0^1 th_0''(r+t(z-r))dt$$

$$= (z-r)[h_0'(z) - h_0'(r)] - (z-r)\left[h_0'(z) - \frac{h_0(z)-h_0(r)}{z-r}\right]$$

$$= h_0(z) - h_0(r) - (z-r)h_0'(r)$$

e que para cada t com $0 \leq t \leq 1$ e $|z| = r$,

$$|t + t(z-r)| = |r(1-t) + tz| \leq r(1-t) + t|z| = r(1-t) + tr = r \leq 1.$$

Logo, a segunda integral de $Q_{0,k}(X)$ pode ser estimada por:

$$\leq \frac{B}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^2|e^{i\theta}-1|^2 e^{r\cos\theta X} r^{-k} r d\theta = \frac{Br^{3-k}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|e^{i\theta}-1|^2 e^{r\cos\theta X}d\theta$$

$$= \frac{Br^{3-k}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|e^{i\theta}-1|^2 e^{(k-1)\cos\theta}d\theta = \frac{Br^{3-k}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos\theta)e^{(k-1)\cos\theta}d\theta$$

$$= \frac{2Br^{3-k}}{\pi}\int_{0}^{\pi}(1-\cos\theta)e^{(k-1)\cos\theta}d\theta.$$

Observe

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\cos\theta)e^{(k-1)\cos\theta}d\theta \leq 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta = \pi.$$

Por outro lado, novamente fazendo a mudança de variáveis $t = \cos\theta$,

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos\theta)e^{(k-1)\cos\theta}d\theta = \int_0^1 e^{(k-1)t}\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}dt \leq \int_0^1 e^{(k-1)t}\frac{1-t}{\sqrt{1-t}}dt$$

$$= \int_0^1 e^{(k-1)t}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt = \int_0^1 e^{k-1}e^{(k-1)(t-1)}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= e^{k-1}(k-1)^{-\frac{3}{2}}\int_0^{k-1} e^{-u}u^{\frac{1}{2}}du \leq e^{k-1}(k-1)^{-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right).$$

Logo

$$Q_{0,k}(X) = h_0(r)\frac{X^{k-1}}{(k-1)!} + O\left(Br^{3-k}e^{k-1}(k-1)^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Lembrando que $r = \frac{k-1}{X}$ e usando novamente a fórmula de Stirling,

$$Q_{0,k}(X) = h_0(r)\frac{X^{k-1}}{(k-1)!} + O\left(BX^{k-1}e^{k-1}(k-1)^{\frac{1}{2}-k}\frac{(k-1)}{X^2}\right)$$

$$= h_0(r)\frac{X^{k-1}}{(k-1)!} + O\left(B\frac{X^{k-1}}{(k-1)!}\frac{(k-1)}{X^2}\right).$$

Isso resulta

$$C_k(x) = \frac{x}{\log x}\left\{Q_{0,k}(\log\log x) + O\left(\frac{(\log\log x)^k}{k!}R_0(x)\right)\right\}$$

$$= \frac{x}{\log x}\left\{h_0\left(\frac{k-1}{\log\log x}\right)\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\right.$$

$$+O\left(B\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{(k-1)}{(\log\log x)^2}+\frac{(\log\log x)^k}{k!}R_0(x)\right)\Bigg\}$$

$$=\frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\left\{h_0\left(\frac{k-1}{\log\log x}\right)+O\left(B\frac{(k-1)}{(\log\log x)^2}+\frac{\log\log x}{k}R_0(x)\right)\right\}$$

e isso encerra o teorema. $\square$

Corolário 2.29. *Uniformemente para x suficientemente grande e $1 \leq k \leq \log\log x$,*

$$\pi_k(x)=\frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\left\{\lambda\left(\frac{k-1}{\log\log x}\right)+O\left(\frac{k}{(\log\log x)^2}\right)\right\} \tag{34}$$

onde

$$\lambda(z):=\frac{1}{\Gamma(z+1)}\prod_p\left(1+\frac{z}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^z.$$

Demonstração. Considere

$$c_k(n)=\begin{cases}1 & \text{se } \omega(n)=k\\ 0 & \text{caso contrário.}\end{cases}.$$

Logo $\pi_k(x)=C_k(x)=\sum_{n\leq x}c_k(n)$. Defina também $a_z(n)=z^{\omega(n)}$. Do método de Selberg-Delange obtemos

$$\sum_{n\leq x}a_z(n)=\sum_{n\leq x}z^{\omega(n)}=x(\log x)^{z-1}\left[\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k}+O\Big(R_N(x)\Big)\right]$$

onde

$$R_N(x)=\left(\frac{c_2N+1}{\log x}\right)^{N+1}+\exp\left(-c_1\sqrt[16]{\log x}\right)$$

Observe que $R_0(x)<<(\log x)^{-1}$. Logo, escrevendo

$$\lambda(z)=\frac{\lambda_0(z)}{z}=\frac{1}{z}G(1,z)=\frac{1}{\Gamma(z+1)}\prod_p\left(1+\frac{z}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^z,$$

obtemos

$$\pi_k(x)=\frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\left\{\lambda\left(\frac{k-1}{\log\log x}\right)\right.$$
$$\left.+O\left(B\frac{(k-1)}{(\log\log x)^2}+\frac{(\log\log x)}{k}R_0(x)\right)\right\}.$$

Como $R_0(x)<<(\log x)^{-1}$, segue que

$$\pi_k(x)=\frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\left\{\lambda\left(\frac{k-1}{\log\log x}\right)+O\left(\frac{k}{(\log\log x)^2}\right)\right\}$$

$\square$

O corolário acima também pode ser demonstrado como uma consequência do teorema dos números primos por indução sobre k. Veja [17].

Este último resultado nos habilita a demonstrar o teorema dos números primos e ainda dar uma estimativa do erro.

Teorema 2.30. *(Teorema dos números primos)*

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x}\left(1 + O\left(\frac{1}{(\log\log x)^2}\right)\right).$$

Demonstração. Do corolário anterior com $k = 1$ obtemos

$$\pi_1(x) = \frac{x}{\log x}\left\{\lambda(0) + O\left(\frac{1}{(\log\log x)^2}\right)\right\}.$$

Agora,

$$\lambda(0) = \frac{1}{\Gamma(1)}\prod_p 1 = 1,$$

e lembrando que

$$\pi(x) = \pi_1(x) + O(x^{\frac{1}{2}}),$$

obtemos

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x}\left(1 + O\left(\frac{1}{(\log\log x)^2}\right)\right) + O(x^{\frac{1}{2}})$$

Daí

$$\begin{aligned}\frac{\log x}{x}\pi(x) &= 1 + O\left(\frac{1}{(\log\log x)^2}\right) + O\left(\frac{\log x}{x}x^{\frac{1}{2}}\right)\\ &= 1 + O\left(\frac{1}{(\log\log x)^2}\right),\end{aligned}$$

e isto encerra o corolário. $\square$

3 Métodos probabilísticos

3.1 Densidade sobre o conjunto dos inteiros positivos

A partir de agora começaremos um estudo probabilístico das funções aritméticas, e em especial, a função $\omega(n)$. Assumiremos um conhecimento básico em teoria da medida, principalmente o teorema da convergência dominada de Lebesgue (por exemplo, veja [11]).

3.1.1 Densidade

Em relação a funções aritméticas, estamos sempre interessados no conhecimento sobre sua distribuição. Assim, a primeira ideia que temos em métodos probabilísticos é tentar definir uma probabilidade sobre os naturais. Probabilidade no sentido da definição abaixo:

Definição 3.1. *Um espaço de probabilidade é uma tripla* (Ω, β, P)*, consistindo de um conjunto chamado evento certo* Ω *(não vazio), uma* $\sigma-$*álgebra* β *e uma medida de probabilidade* P *, isto é, uma função* $P : \beta \to \mathbb{R}$ *satisfazendo as* 3 *propriedades abaixo:*

$(1) P(\Omega) = 1,$

$(2) P(A) \geq 0 \ \forall A \in \beta,$

$(3) P(\cup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} P(A_n)$ *se* $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j.$

Diremos também que dois eventos $A, B \in \beta$ *são independentes se* $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.

Em matemática, sempre temos o confronto entre intuição e formalismo rigoroso. Intuitivamente, nós esperamos que a probabilidade de escolher aleatoriamente um inteiro e ele ser par é $\frac{1}{2}$, de ser multiplo de 3, $\frac{1}{3}$, e assim sucessivamente. Mas nossa intuição neste caso é falha, como mostra o teorema a seguir:

Teorema 3.2. *Não existe um espaço de probabilidade* $(\mathbb{N}, \beta, P)$*, com a* $\sigma-$*álgebra das partes de* $\mathbb{N}$*,* $\beta = \mathcal{P}(\mathbb{N})$*, tal que:*

$$P(a\mathbb{N}) = \frac{1}{a}, a > 0, \quad \textit{onde} \quad a\mathbb{N} = \{an : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstração. Se $a, b \in \mathbb{N}$ são primos entre si, então $a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N} = ab\mathbb{N}$.

É fácil ver que $a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N} \supseteq ab\mathbb{N}$. Vamos mostrar então que $a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N} \subseteq ab\mathbb{N}$.

Seja $x \in a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N}$. Então existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x = an_1 = bn_2$. Como $mdc(a, b) = 1$, então existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tal que $ar + bs = 1$. Assim:

$$ar + bs = 1 \Rightarrow arx + bsx = x \Rightarrow arbn_2 + bsan_1 = x \Rightarrow ab(rn_2 + sn_1) = x.$$

Assim $x \in ab\mathbb{N}$.

Agora assuma que P é uma medida de probabilidade sobre $\mathbb{N}$, satisfazendo as 3 propriedades acima. Então, se $a, b \in \mathbb{N}$ são coprimos, temos:

$$P(a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N}) = P(ab\mathbb{N}) = \frac{1}{ab} = \frac{1}{a}\frac{1}{b} = P(a\mathbb{N})P(b\mathbb{N}).$$

Por outro lado,

$$P((\mathbb{N} - a\mathbb{N}) \cap (\mathbb{N} - b\mathbb{N})) = P(\mathbb{N} - (a\mathbb{N} \cup b\mathbb{N})) = 1 - P(a\mathbb{N} \cup b\mathbb{N})$$

$$= 1 - P(a\mathbb{N}) - P(b\mathbb{N}) + P(a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N}) = 1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) = P(\mathbb{N} - a\mathbb{N})P(\mathbb{N} - b\mathbb{N}).$$

Logo, $a\mathbb{N}$ e $b\mathbb{N}$ são independentes e seus complementares $\mathbb{N}_a := \mathbb{N} - a\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_b := \mathbb{N} - b\mathbb{N}$ também o são. Mais ainda:

$$P(\mathbb{N}_a \cap \mathbb{N}_b) = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right).$$

Por indução, obtemos para arbitrários $m < x$(observe que $m \in \mathbb{N}_p, \forall p > m)$:

$$P(\{m\}) \leq P\left(\bigcap_{m<p<x} \mathbb{N}_p\right) = \prod_{m<p<x}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Tendo em vista a única fatoração dos inteiros e pela fórmula assintótica (3), obtemos:

$$\prod_{p \leq x}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right) \geq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + O(1).$$

Como

$$1 + r + r^2 + \dots = \frac{1}{1 - r}, \forall\ 0 < r < 1,$$

então

$$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots=\frac{p}{p-1}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots\right)^{-1}=1-\frac{1}{p},$$

que resulta

$$\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\leq\frac{1}{\log x+O(1)}.$$

Portanto,

$$P(\{m\})\leq\frac{k}{\log x+O(1)},\forall x>m,$$

para alguma constante positiva k que só depende de m.

Fazendo $x\to\infty$, obtemos $P(\{m\})=0$. Como m era arbitrário, segue que $P\equiv 0$, o que dá uma contradição com a propriedade 3 da definição de medida de probabilidade. □

Antes de construir uma lei de probabilidade sobre $\mathbb{N}$, com $\beta=\mathcal{P}(\mathbb{N})$, vamos construir a noção de densidade, que esclarecerá essa aparente inconsistência entre intuição e rigor.

Considere uma sequência de números inteiros positivos $(\lambda_n)_{n\geq 0}$. Definimos a densidade $d(A)$ de um subconjunto $A\in\mathbb{N}$ como sendo o limite:

$$d(A)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sum\limits_{\substack{n\in A\\ n\leq x}}\lambda_n}{\sum\limits_{n\leq x}\lambda_n}$$

quando existe. Observe que para cada sequência $(\lambda_n)_{n\geq 0}$, obtemos uma densidade diferente.

Vamos a alguns exemplos:

Exemplo 3.3. *Densidade natural. Tomando* $\lambda_n=1,$ *para todo* n *natural, nós obtemos a chamada densidade natural:*

$$d(A)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\#\{n\leq x:n\in A\}.$$

Agora, fixados $a,b\in\mathbb{N}$, *se* $A=\{n\in\mathbb{N}:n\equiv b \text{ mod } a\}$, *temos:*

$$\#\{n\leq x:n\in A\}=\left[\frac{x}{a}\right]+O(1).$$

Logo, a progressão aritmética $n\equiv b$ *mod* a *tem densidade natural:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\left[\frac{x}{a}\right]+O(1)\right)=\frac{1}{a},$$

Isso demonstra que a nossa intuição está ligada ao conceito de densidade e não de probabilidade. É bom ressaltar que existem subconjuntos de $\mathbb{N}$ que não tem densidade natural. Considere, por exemplo, o subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ formado pelos inteiros positivos n com dígito líder igual a 1 na expansão em base 10. Temos

$$A = \bigcup_{k \geq 0} \{n : 10^k \leq n < 2 \cdot 10^k\}.$$

Escrevendo $A(x) = \#(A \cap [1, x])$, segue que para $m \geq 1$,

$$A(10^m - 1) = \sum_{k=0}^{m-1} 10^k = \frac{1}{9}(10^m - 1),$$

$$A(2 \cdot 10^m - 1) = \frac{1}{9}(10^m - 1) + 10^m = \frac{5}{9}(2 \cdot 10^m - 1) + \frac{4}{9}.$$

Isso nos mostra que existem subsequências $\{n_1\}$ e $\{n_2\}$ tal que $\frac{A(n_1)}{n_1} \to \frac{1}{9}$ e $\frac{A(n_2)}{n_2} \to \frac{5}{9}$. Logo não existe d(A).

Exemplo 3.4. *Densidade logarítmica. Fazendo $\lambda_n = \frac{1}{n}$, temos, quando o limite existe,*

$$d(A) := \lim_{x \to \infty} \frac{\sum\limits_{\substack{n \in A \\ n \leq x}} \frac{1}{n}}{\sum\limits_{n \leq x} \frac{1}{n}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sum\limits_{\substack{n \in A \\ n \leq x}} \frac{1}{n}}{\log x + O(1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\log x} \sum_{\substack{n \in A \\ n \leq x}} \frac{1}{n}.$$

Assim, podemos definir a densidade logarítmica por:

$$\delta(A) := \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\log x} \sum_{\substack{n \in A \\ n \leq x}} \frac{1}{n}.$$

É possível generalizar o método de definição de densidade. Um exemplo, é o caso abaixo:

Exemplo 3.5. *Densidade analítica. Tomando $\lambda_n = n^{-\sigma}, \sigma > 1$, definimos a densidade analítica de uma sequência $A \in \mathbb{N}$ como sendo o limite (quando existe):*

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \frac{1}{\zeta(\sigma)} \sum_{n \in A} \frac{1}{n^\sigma}, \qquad \textit{onde} \qquad \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \ \textit{é a função zeta de Riemann.}$$

Um subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ tem densidade analítica se, e somente se, tem densidade logarítmica, e neste caso elas são iguais. Essa e outras propriedades podem ser consultadas em [1].

3.1.2 Conexão entre a teoria de probabilidades e densidade

Considere $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais positivos e seja $x \in \mathbb{N}$. Vamos definir um espaço de probabilidade da seguinte forma:

Sejam $I_x = \{1, \ldots, x\}$, β a $\sigma-$álgebra das partes de I_x e $P : \beta \to [0,1]$ definida por:

$$P_x(A) = \frac{\sum\limits_{\substack{n\in A\\ n\leq x}} \lambda_n}{\sum\limits_{n\leq x} \lambda_n}, \forall A \in \beta.$$

Observe que P_x é uma lei de probabilidade sobre I_x:

$$P_x(I_x) = \frac{\sum\limits_{\substack{n\in I_x\\ n\leq x}} \lambda_n}{\sum\limits_{n\leq x} \lambda_n} = 1.$$

$$P_x(A) \geq 0, \forall A \in \beta$$

e se $A_1, \ldots, A_N \in \beta$ são dois a dois disjuntos, então:

$$P_x\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \frac{\sum\limits_{\substack{n\in \cup_{i=1}^{N} A_i\\ n\leq x}} \lambda_n}{\sum\limits_{n\leq x} \lambda_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{\substack{n\in A_i\\ n\leq x}} \lambda_n}{\sum\limits_{n\leq x} \lambda_n} = \sum_{i=1}^{N} P_x(A_i)$$

como queríamos.

Portanto, P_x é uma lei de probabilidade sobre I_x e, além disso, temos:

$$\lim_{x\to\infty} P_x(A) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{\substack{n\in A\\ n\leq x}} \lambda_n}{\sum\limits_{n\leq x} \lambda_n} = d(A)$$

desde que o limite exista.

Portanto, toda função de densidade d é o limite de alguma lei de probabilidade. E esse é o motivo de nossa intuição estar ligada ao conceito de densidade, e não de probabilidade.

Exemplo 3.6. *Conexão entre teoria de probablidade e densidade natural. Seja ν_N a lei de probabilidade da distribuição uniforme com peso $\frac{1}{N}$ sobre $\{1, \ldots, N\}$, ou seja,*

$$\nu_N(A) = \sum_{n\in A} \lambda_n, \text{ com } \lambda_n = \frac{1}{N} \text{ se } n \leq N \text{ e } \lambda_n = 0 \text{ caso contrário.}$$

Então, quando o limite existe, temos:

$$\lim_{N\to\infty} \nu_N(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\{n \leq N : n \in A\}.$$

Portanto, a densidade natural de uma sequência é o limite de sua frequência nos N inteiros positivos, quando $N \to \infty$.

Para finalizar, vamos definir uma lei de probabilidade sobre $\mathbb{N}$, com $\beta = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Basta considerar uma sequência de números reais positivos $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ tal que $\sum_{n\geq 1} \lambda_n = k \in \mathbb{R}$ e considerar $P : \beta = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ dada por:

$$P(A) = \frac{\sum\limits_{n\in A} \lambda_n}{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n} = \frac{1}{k}\sum_{n\in A} \lambda_n.$$

A constatação de que isto de fato define um espaço de probabilidade $(\mathbb{N}, \beta, P)$ é imediata. Como a soma acima é convergente para todo subconjunto A, note que os termos mais importantes a serem somados são os primeiros. Logo, o conceito de densidade é mais interessante quando a soma $\sum_n \lambda_n$ é divergente.

3.2 A desigualdade de Turán-Kubilius

Seja $\{X_j\}$ uma sequência de variáveis aleatórias com valor esperado $EX_j = \mu$ e variância $\leq M < \infty$, e seja $\epsilon > 0$. Então a lei fraca dos grandes números diz que

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \mu\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{M}{\epsilon^2 n},$$

que tende com $n \to \infty$ para zero. Esse é um resultado fundamental em teoria de probabilidade, justificando o conceito de frequência em probabilidade. A lei fraca dos grandes números é uma imediata consequência da desigualdade de Chebyshev:

$$P\left(|X - EX| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

que se mantém para qualquer variável aleatória X com variância finita σ^2. Isso significa, em um certo sentido, que a melhor predição para uma variável aleatória é o seu valor esperado. Esta ideia pode ser estendida a funções aritméticas aditivas. Contudo, para um análogo da desigualdade de Chebyshev, nós precisamos da definição abaixo:

Definição 3.7. *Nós definimos para uma função aritmética f:*

$$\mathcal{E}(x; f) = \sum_{p^k \leq x} \frac{f(p^k)}{p^k}\left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

$$\mathcal{D}(x; f) = \left(\sum_{p^k \leq x} \frac{|f(p^k)|^2}{p^k}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se f é a única função no contexto, escreveremos simplesmente $\mathcal{E}(x)$ e $\mathcal{D}(x)$. Essas quantidades podem ser interpretadas como a esperança e o desvio de f. Antes de prosseguirmos, vamos precisar de um lema.

Lema 3.8. *A soma*

$$\sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \frac{1}{p^k}$$

converge quando $x \to \infty$.

Demonstração. Fixado p primo, observe que

$$\sum_{k \geq 2} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{p^2}\sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{p}\frac{1}{p-1} \leq \frac{2}{p^2}.$$

Logo

$$\sum_{\substack{p^k\leq x\\ k\geq 2}} \frac{1}{p^k} \leq \sum_p \sum_{k\geq 2} \frac{1}{p^k} \leq \sum_p \frac{2}{p^2} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^2} < \infty.$$

□

O próximo teorema nos dá uma estimativa para a diferença entre os valores de $f(n), 1 \leq n \leq x$, e seu valor esperado $\mathcal{E}(x; f)$ em termos de seu desvio $\mathcal{D}(x; f)$.

Teorema 3.9. *(Desigualdade de Turán-Kubilius). Existe uma função $\epsilon(x)$ com $\lim_{x\to\infty} \epsilon(x) = 0$ tal que a estimativa:*

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} |f(n) - \mathcal{E}(x)|^2 \leq (2 + \epsilon(x))\mathcal{D}(x)^2,$$

se mantém uniformemente para toda função aritmética aditiva f e x real, $x \geq 2$.

Demonstração. Na sequência, nós denotaremos por q um número primo.

Nós definimos:

$$\epsilon(x) = \frac{4}{x}\left(\sum_{\substack{p^k q^l\leq x\\ p\neq q}} p^k q^l\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{x}\left(\sum_{\substack{p^k\leq x\\ q^l\leq x}} p^{-k} q^l\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vamos mostrar que $\epsilon(x) \to 0$ quando $x \to \infty$. Pelo lema anterior, observe que

$$\sum_{p^k\leq x} p^k = \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p^k\leq x\\ k\geq 2}} \frac{1}{p^k} = \log\log(x) + O(1).$$

Agora, usando o teorema dos números primos, temos:

$$\sum_{q^l\leq x} q^l = \sum_{q\leq x} \sum_{l\leq \frac{\log x}{\log q}} q^l << \sum_{q\leq x} q^{\frac{\log x}{\log q}} = \sum_{q\leq x} x = x\pi(x) << \frac{x^2}{\log x}.$$

pois dado q primo,

$$\sum_{l\leq \frac{\log x}{\log q}} q^l = q^{\left[\frac{\log x}{\log q}\right]} + \sum_{1\leq l\leq \frac{\log x}{\log q}-1} q^l \leq q^{\left[\frac{\log x}{\log q}\right]} + \int_1^{\frac{\log x}{\log q}} q^l dl = q^{\left[\frac{\log x}{\log q}\right]} + \left.\frac{q^l}{\log q}\right|_1^{\frac{\log x}{\log q}}$$

$$= q^{\left[\frac{\log x}{\log q}\right]} + \frac{q^{\frac{\log x}{\log q}}}{\log q} - \frac{q}{\log q} \leq q^{\left[\frac{\log x}{\log q}\right]} + \frac{q^{\frac{\log x}{\log q}}}{\log q} \leq q^{\frac{\log x}{\log q}} + \frac{q^{\frac{\log x}{\log q}}}{\log q} << q^{\frac{\log x}{\log q}},$$

onde a constante implicita não depende de q.

Isso resulta:

$$\sum_{\substack{p^k \le x \\ q^l \le x}} p^{-k} q^l = \sum_{p^k \le x} \sum_{q^l \le x} p^{-k} q^l = \sum_{p^k \le x} p^{-k} \sum_{q^l \le x} q^l << \frac{x^2 \log\log(x)}{\log x}.$$

Mais ainda,

$$\sum_{\substack{p^k q^l \le x \\ p \ne q}} p^k q^l = 2 \sum_{\substack{p^k q^l \le x \\ p < q}} p^k q^l = 2 \sum_{p^k \le x} \left[p^k \sum_{\substack{q^l \le \frac{x}{p^k} \\ q > p}} q^l \right] << \sum_{p^k \le x} \left[p^k \sum_{p < q \le \frac{x}{p^k}} \sum_{q^l \le \frac{x}{p^k}} q^l \right]$$

$$= \sum_{p^k \le x} \left[p^k \sum_{p < q \le \frac{x}{p^k}} \sum_{l \le \frac{\log\left(\frac{x}{p^k}\right)}{\log q}} q^l \right] << \sum_{p^k \le x} \left[p^k \sum_{p < q \le \frac{x}{p^k}} \frac{x}{p^k} \right] = x \sum_{p^k \le x} \sum_{p < q \le \frac{x}{p^k}} 1$$

$$<< x \sum_{p^k \le x} \pi\left(\frac{x}{p^k}\right).$$

E pelo teorema dos números primos, obtemos:

$$x \sum_{p^k \le x} \pi\left(\frac{x}{p^k}\right) << \frac{x^2}{\log x} \sum_{p^k \le x} p^{-k} << \frac{x^2 \log\log(x)}{\log x}.$$

Como:

$$\epsilon(x) = \frac{4}{x} \left(\sum_{\substack{p^k q^l \le x \\ p \ne q}} p^k q^l \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{x} \left(\sum_{\substack{p^k \le x \\ q^l \le x}} p^{-k} q^l \right)^{\frac{1}{2}},$$

obtemos:

$$\epsilon(x) << \left[\frac{\log\log(x)}{\log x} \right]^{\frac{1}{2}},$$

que tende a 0 quando $x \to \infty$.

Vamos à estimativa. Sem perda de generalidade, podemos supor $x \in \mathbb{N}$. Primeiro, vamos assumir que f é real e não negativa. Então:

$$\frac{1}{x} \sum_{n \le x} |f(n) - \mathcal{E}(x)|^2 = \frac{1}{x} \sum_{n \le x} f(n)^2 - 2 \frac{\mathcal{E}(x)}{x} \sum_{n \le x} f(n) + \mathcal{E}(x)^2.$$

Nós temos, pela aditividade de f,

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f(n)^2 = \frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\sum_{\substack{p|n\\ q|n}} f(p^{\nu(n;p)})f(q^{\nu(n;q)})$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\sum_{p|n} f(p^{\nu(n;p)})^2 + \frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\sum_{\substack{p|n\\ q|n\\ p\neq q}} f(p^{\nu(n;p)})f(q^{\nu(n;q)})$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{p^k\leq x}\left[f(p^k)^2 \sum_{\substack{n\leq x\\ \nu(n;p)=k}} 1\right] + \frac{1}{x}\sum_{\substack{p^k q^l\leq x\\ p\neq q}}\left[f(p^k)f(q^l)\sum_{\substack{n\leq x\\ \nu(n;p)=k\\ \nu(n;q)=l}} 1\right].$$

Observe que:

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ \nu(n;p)=k}} 1 = \left[\frac{x}{p^k}\right] - \left[\frac{x}{p^{k+1}}\right] \leq \frac{x}{p^k}.$$

Por outro lado:

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ \nu(n;p)=k\\ \nu(n;q)=l}} 1 = \left[\frac{x}{p^k q^l}\right] - \left[\frac{x}{p^{k+1}q^l}\right] - \left[\frac{x}{p^k q^{l+1}}\right] + \left[\frac{x}{p^{k+1}q^{l+1}}\right],$$

pois:

$$\left[\frac{x}{p^k q^l}\right] = \#\{s\leq x : p^k|s \text{ e } q^l|s\}.$$

As outras frações são análogas. Logo, por contagem, vale a igualdade acima. Daí:

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ \nu(n;p)=k\\ \nu(n;q)=l}} 1 = \left[\frac{x}{p^k q^l}\right] - \left[\frac{x}{p^{k+1}q^l}\right] - \left[\frac{x}{p^k q^{l+1}}\right] + \left[\frac{x}{p^{k+1}q^{l+1}}\right]$$

$$\leq \frac{x}{p^k q^l} - \frac{x}{p^{k+1}q^l} - \frac{x}{p^k q^{l+1}} + \frac{x}{p^{k+1}q^{l+1}} + 2 = \frac{x}{p^k q^l}\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{pq}\right) + 2$$

$$= \frac{x}{p^k q^l}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) + 2.$$

Logo:

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f(n)^2 \leq \frac{1}{x}\sum_{p^k\leq x} f(p^k)^2\frac{x}{p^k} + \frac{1}{x}\sum_{\substack{p^kq^l\leq x\\ p\neq q}} f(p^k)f(q^l)\left[\frac{x}{p^kq^l}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)+2\right]$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{p^k\leq x}\frac{f(p^k)^2}{p^k} + \sum_{\substack{p^kq^l\leq x\\ p\neq q}}\frac{f(p^k)}{p^k}\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{f(q^l)}{q^l}\left(1-\frac{1}{q}\right) + \frac{2}{x}\sum_{\substack{p^kq^l\leq x\\ p\neq q}} f(p^k)f(q^l)$$

$$= \mathcal{D}(x)^2 + \sum_{\substack{p^kq^l\leq x\\ p\neq q}}\frac{f(p^k)}{p^k}\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{f(q^l)}{q^l}\left(1-\frac{1}{q}\right) + \frac{2}{x}\sum_{\substack{p^kq^l\leq x\\ p\neq q}} f(p^k)f(q^l)$$

$$\leq \mathcal{D}(x)^2 + \mathcal{E}(x)^2 + \frac{2}{x}\sum_{\substack{p^kq^l\leq x\\ p\neq q}} f(p^k)f(q^l).$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f(n) = \frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\sum_{p|n} f(p^{\nu(n;p)}) = \frac{1}{x}\sum_{p^k\leq x}\left[f(p^k)\sum_{\substack{n\leq x\\ \nu(n;p)=k}} 1\right],$$

e

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ \nu(n;p)=k}} 1 = \left[\frac{x}{p^k}\right] - \left[\frac{x}{p^{k+1}}\right] \geq \frac{x}{p^k} - \frac{x}{p^{k+1}} - 1 = \frac{x}{p^k}\left(1-\frac{1}{p}\right) - 1.$$

Logo:

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f(n) \geq \frac{1}{x}\sum_{p^k\leq x}\left[f(p^k)\left[\frac{x}{p^k}\left(1-\frac{1}{p}\right)-1\right]\right]$$

$$= \sum_{p^x\leq x}\frac{f(p^k)}{p^k}\left(1-\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{x}\sum_{p^x\leq x} f(p^k) = \mathcal{E}(x) - \frac{1}{x}\sum_{p^x\leq x} f(p^k).$$

Como:

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}|f(n)-\mathcal{E}(x)|^2 = \frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f(n)^2 - 2\frac{\mathcal{E}(x)}{x}\sum_{n\leq x} f(n) + \mathcal{E}(x)^2,$$

então:

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}|f(n)-\mathcal{E}(x)|^2$$

$$\leq \mathcal{D}(x)^2 + \mathcal{E}(x)^2 + \frac{2}{x} \sum_{\substack{p^k q^l \leq x \\ p \neq q}} f(p^k) f(q^l) - 2\mathcal{E}(x) \left[\mathcal{E}(x) - \frac{1}{x} \sum_{p^x \leq x} f(p^k) \right] + \mathcal{E}(x)^2$$

$$= \mathcal{D}(x)^2 + \frac{2}{x} \sum_{\substack{p^k q^l \leq x \\ p \neq q}} f(p^k) f(q^l) + \frac{2\mathcal{E}(x)}{x} \sum_{p^x \leq x} f(p^k).$$

Agora, pela desigualdade de Cauchy-Shwarz, temos:

$$\mathcal{E}(x) \leq \sum_{p^k \leq x} \frac{f(p^k)}{p^{\frac{k}{2}}} p^{-\frac{k}{2}} \leq \left(\sum_{p^k \leq x} \frac{f(p^k)^2}{p^k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{p^k \leq x} p^{-k} \right)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}(x) \left(\sum_{p^k \leq x} p^{-k} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\sum_{p^k \leq x} f(p^k) = \sum_{p^k \leq x} \frac{f(p^k)}{p^{\frac{k}{2}}} p^{\frac{k}{2}} \leq \mathcal{D}(x) \left(\sum_{p^k \leq x} p^k \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\sum_{\substack{p^k q^l \leq x \\ p \neq q}} f(p^k) f(q^l) = \sum_{\substack{p^k q^l \leq x \\ p \neq q}} \frac{f(p^k)}{p^{\frac{k}{2}}} \frac{f(q^l)}{q^{\frac{l}{2}}} p^{\frac{k}{2}} q^{\frac{l}{2}} \leq \mathcal{D}(x)^2 \left(\sum_{\substack{p^k q^l \leq x \\ p \neq q}} p^k q^l \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Que resulta:

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n) - E(x)|^2$$

$$\leq \mathcal{D}(x)^2 + \frac{2}{x} \mathcal{D}(x)^2 \left(\sum_{\substack{p^k q^l \leq x \\ p \neq q}} p^k q^l \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{x} \mathcal{D}(x) \left(\sum_{p^k \leq x} p^{-k} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{D}(x) \left(\sum_{p^k \leq x} p^k \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \mathcal{D}(x)^2 \left[1 + \frac{2}{x} \left(\sum_{\substack{p^k q^l \leq x \\ p \neq q}} p^k q^l \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{x} \left(\sum_{\substack{p^k \leq x \\ q^l \leq x}} p^{-k} q^l \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \mathcal{D}(x)^2 \left[1 + \frac{1}{2} \epsilon(x) \right] \leq \mathcal{D}(x)^2 \left[2 + \epsilon(x) \right],$$

que é a estimativa do teorema. Observe que para funções aritméticas positivas, nós provamos um pouco mais:

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n) - \mathcal{E}(x)|^2 \leq D(x)^2 \left[1 + \frac{1}{2} \epsilon(x) \right].$$

Agora assuma que f é uma função real que toma ambos os sinais. Então definimos as funções multiplicativas $f^{\pm}$ por:

$$f^{+}(p^k) = \max\{f(p^k), 0\}$$

$$f^{-}(p^k) = \max\{-f(p^k), 0\}.$$

Claramente $f = f^{+} - f^{-}$. Desde que $f^{+}f^{-} = 0$, obtemos:

$$f^2 = (f^{+})^2 - (f^{-})^2.$$

E para $1 \leq n \leq x$

$$\mathcal{D}(x; f)^2 = \mathcal{D}(x; f^{+})^2 + \mathcal{D}(x; f^{-})^2,$$

e

$$\begin{aligned}(f(n) - \mathcal{E}(x; f))^2 &= [f^{+}(n) - \mathcal{E}(x; f^{+}) - (f^{-}(n) - \mathcal{E}(x; f^{-}))]^2 \\ &= [f^{+}(n) - \mathcal{E}(x; f^{+})]^2 + [f^{-}(n) - \mathcal{E}(x; f^{-})]^2.\end{aligned}$$

Usando que já provamos para funções positivas, o resultado segue.

Finalmente, quando f é uma função a valores complexos, nós aplicamos as estimativas acima para a parte real e imaginária de f separadamente e isso resulta o teorema. □

A desigualdade de Turán-Kubilius possui outras variantes:

$$\sum_{n \leq x} \left| f(n) - \sum_{p^k \leq x} \frac{f(p^k)}{p^k} \right|^2 \leq 45x\mathcal{D}^2(x)$$

onde a desigualdade se mantém para qualquer função aritmética aditiva $f(n)$ e número real positivo x, ou

$$\sum_{n \leq x} |f(n) - A(x)|^2 \leq 16xB^2(x)$$

onde $A(x) = \sum_{p \leq x} \frac{f(p)}{p}$ e $B(x) = \left(\sum_{p \leq x} \frac{|f(p)|^2}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$, que se mantém para todo número real x positivo, e qualquer função aritmética aditiva $f(n)$ que satisfaça $f(p^k) = f(p)$, para todo primo p e todo inteiro positivo k. Essas desigualdades, quanto outras considerações podem ser consultadas em [3].

Vamos a um exemplo que será usado no próximo resultado.

Exemplo 3.10.
$$\mathcal{E}(N,\omega) = \log\log N + O(1)$$
e
$$\mathcal{D}(N,\omega)^2 = \log\log N + O(1).$$

Demonstração. Por definição:
$$\mathcal{E}(N,\omega) = \sum_{p^k \le N} \frac{\omega(p^k)}{p^k}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{p^k \le N} \frac{1}{p^k}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{p^k \le N} \frac{1}{p^k} - \sum_{p^k \le N} \frac{1}{p^{k+1}}$$
$$= \log\log N + O(1),$$
e
$$\mathcal{D}(N,\omega)^2 = \sum_{p^k \le N} \frac{|\omega(p^k)|^2}{p^k} = \sum_{p^k \le N} \frac{1}{p^k} = \log\log N + O(1).$$
□

Corolário 3.11. *(Estimativa de Turán)*
$$\frac{1}{N}\sum_{n \le N}(\omega(n) - \log\log(N))^2 \le \log\log N + O(1).$$

Demonstração. A primeira ideia que vem a nossa mente para demonstrarmos esse resultado, é usar diretamente a desigualdade de Turán-Kubilius. Mas infelizmente, as estimativas não são tão boas. O que vamos fazer é seguir a demonstração do teorema anterior e chegar onde queremos.
$$\frac{1}{N}\sum_{n \le N}(\omega(n) - \log\log(N))^2$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{n \le N}\omega(n)^2 - 2\frac{\log\log(N)}{N}\sum_{n \le N}\omega(n) + (\log\log(N))^2.$$

Aproveitando as estimativas da demonstração do teorema anterior, resulta:
$$\frac{1}{N}\sum_{n \le N}\omega(n)^2 \le \mathcal{D}(N)^2 + \mathcal{E}(N)^2 + \frac{2}{N}\sum_{\substack{p^k q^l \le N \\ p \ne q}}\omega(p^k)\omega(q^l)$$
e
$$\frac{1}{N}\sum_{n \le N}\omega(n) \ge \mathcal{E}(N) - \frac{1}{N}\sum_{p^k \le N}\omega(p^k).$$

Logo:

$$\frac{1}{N}\sum_{n\le N}(\omega(n)-\log\log(N))^2 \le \mathcal{D}(N)^2+\mathcal{E}(N)^2+\frac{2}{N}\sum_{\substack{p^kq^l\le N\\ p\neq q}}\omega(p^k)\omega(q^l)$$

$$-2\log\log(N)\left(\mathcal{E}(N)-\frac{1}{N}\sum_{p^k\le N}\omega(p^k)\right)+(\log\log N)^2.$$

Usando novamente a desigualdade de Cauchy-Shwarz, temos:

$$\frac{1}{N}\sum_{n\le N}(\omega(n)-\log\log(n))^2 \le \mathcal{D}(N)^2+\mathcal{E}(N)^2+\frac{2}{N}\mathcal{D}(N)^2\left(\sum_{\substack{p^kq^l\le N\\ p\neq q}}p^kq^l\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+2\frac{\log\log N}{N}\mathcal{D}(N)\left(\sum_{p^k\le N}p^k\right)^{\frac{1}{2}}-2\log\log(N)\mathcal{E}(N)+(\log\log(N))^2.$$

Como $\mathcal{E}(N)=\log\log(N)+O(1)$ então existe $K>0$ tal que

$$|\mathcal{E}(N)-\log\log(N)|<K$$

para N suficientemente grande. Assim, como $K<\mathcal{E}(N)$ para N grande,

$$\frac{1}{N}\sum_{n\le N}(\omega(n)-\log\log(n))^2 \le \mathcal{D}(N)^2+\mathcal{E}(N)^2+\frac{2}{N}\mathcal{D}(N)^2\left(\sum_{\substack{p^kq^l\le N\\ p\neq q}}p^kq^l\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{2}{N}(\mathcal{E}(N)+K)\mathcal{D}(N)\left(\sum_{p^k\le N}p^k\right)^{\frac{1}{2}}-2\log\log(N)\mathcal{E}(N)+(\log\log(N))^2$$

$$\le \mathcal{D}(N)^2\left[1+\frac{4}{N}\left(\sum_{\substack{p^kq^l\le N\\ p\neq q}}p^kq^l\right)^{\frac{1}{2}}\right]+\frac{4}{N}\mathcal{E}(N)\mathcal{D}(N)\left(\sum_{p^k\le N}p^k\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\mathcal{E}(N)^2-2\log\log(N)\mathcal{E}(N)+(\log\log(N))^2$$

$$\le \mathcal{D}(N)^2\left[1+\frac{4}{N}\left(\sum_{\substack{p^kq^l\le N\\ p\neq q}}p^kq^l\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{4}{N}\left(\sum_{p^k\le N}p^{-k}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{p^k\le N}p^k\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$+(\mathcal{E}(N) - \log\log(N))^2 = \mathcal{D}(N)^2[1 + \epsilon(N)] + O(1).$$

Como:

$$\mathcal{D}(N)^2 = \log\log N + O(1)$$

e

$$\epsilon(N) << \left[\frac{\log\log(x)}{\log x}\right]^{\frac{1}{2}},$$

então:

$$\mathcal{D}(N)^2\epsilon(N) << \frac{(\log\log(N))^{\frac{3}{2}}}{(\log(N))^{\frac{1}{2}}} \to 0$$

quando $N \to \infty$. Isso resulta:

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leq N}(\omega(n) - \log\log(n))^2 \leq \mathcal{D}(N)^2 + O(1) = \log\log(N) + O(1).$$

$\square$

A estimativa de Turán, que é muito importante para este trabalho, será usada para ajudar a encontrar o termo de erro no teorema de Kac-Erdös.

3.3 Funções de distribuições e funções características

3.3.1 Funções de distribuições

A partir de agora vamos entender um pouco melhor as chamadas funções de distribuição. Relembrando,

Definição 3.12. *Uma função de distribuição é uma função* $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *não decrescente, contínua a direita e satisfazendo:*

$$F(-\infty) = 0 \quad e \quad F(\infty) = 0. \tag{35}$$

Exemplo 3.13. *Qualquer função escada, contínua a direita satisfazendo* (35) *é uma função de distribuição. Esse é um exemplo simples, mas importante no contexto deste trabalho.*

Exemplo 3.14. *A distribuição normal padrão*

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau$$

é um exemplo de função de distribuição derivável em $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.15. *Considere agora* f *uma função positiva Lebesgue integrável em* $\mathbb{R}$ *tal que* $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. *Definimos o espaço de probabilidade* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$, *onde* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *é a* σ*-álgebra de Borel e* P *é uma medida de probabilidade definida por* $P(A) = \int_A f(t)dt$. *Considere agora* $F(x) = P((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. *Então* F *é uma função de distribuição (absolutamente contínua).*

Exemplo 3.16. *Considere* F *uma função real definida da seguinte forma:* $F(x) = 0$, *se* $x \leq 0$. *Para todo* $k \geq 0$, $F(x) = \frac{1}{2^{k+1}}$ *se* $x \in \left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right)$ *e* $F(x) = 1$ *se* $x \geq 1$. *Portanto,* F *é uma função de distribuição com um número enumerável de descontinuidades.*

Será que poderia existir uma função de distribuição com uma quantidade não enumerável de descontinuidades? A resposta é não, devido a um teorema de análise real:

Teorema 3.17. *Seja* $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *monótona. O conjunto dos pontos de descontinuidade de* f *é enumerável. Além disso, todos os pontos de descontinuidade de* f *são do tipo salto.*

Uma demonstração desse fato pode ser encontrada em [12].

A partir de agora, $\mathcal{C}(F)$ denota os pontos de continuidade de uma função F.

Definição 3.18. *Nós dizemos que uma sequência* $\{F_N\}$ *de funções de distribuições convergem fracamente para uma função* F *se:*

$$\lim_{n\to\infty} F_N(z) = F(z), \forall z \in \mathcal{C}(F),$$

isto é, convergência pontual sobre o conjunto dos pontos de continuidade da função F.

Observe que a convergência pode não ser única, pois não estamos pedindo nada a mais sobre a função F. Se supusermos que F é contínua, teremos unicidade.

Exemplo 3.19. *Considere* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 0 \\ 1 & se\ x \geq 0 \end{cases},$$

$$G(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \leq 0 \\ 1 & se\ x > 0 \end{cases}.$$

Claramente F *é uma função de distribuição. Agora, se definirmos* $F_N = F$ *para todo* N, *obtemos que* F_N *converge fracamente para* F *e também converge fracamente para* G.

3.3.2 Funções Características

Muitas informações sobre uma lei de probabilidade podem ser derivadas pelo estudo das chamadas funções características.

Definição 3.20. *Seja* F *uma função de distribuição. Então sua função característica* $\varphi_F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *é dada pela transformada de Fourier da medida de Stieltjes* $dF(z)$, *ou seja,*

$$\varphi_F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\tau z) dF(z).$$

Observe que φ_F é contínua. Para $T > 0$ temos

$$\left| \int_T^{\infty} \exp(i\tau_1 z) - \exp(i\tau_2 z) dF(z) \right| \leq 2 \int_T^{\infty} dF(z) = 2(1 - F(T)),$$

e se T é suficientemente grande, a estimativa acima é pequena, pois $F(T) \to 1$ quanto $T \to \infty$. Analogamente, temos uma estimativa semelhante em $(-\infty, -T]$.

Por outro lado, em $[-2T, 2T]$, φ_F é uniformemente contínua. Logo, φ_F é uma função uniformemente contínua sobre o eixo real que satisfaz, para $\tau \in \mathbb{R}$,

$$|\varphi_F(\tau)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} dF(z) = 1 = \varphi_F(0).$$

Vamos a um exemplo.

Exemplo 3.21. *Vamos calcular $\varphi_\nu(\tau)$ onde ν é a distribuição uniforme sobre o intervalo $[0,1]$, ou seja:*

$$\nu(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 0 \\ x & se\ 0 \leq x < 1 \\ 1 & se\ x \geq 1 \end{cases}.$$

Pela definição,

$$\varphi_\nu(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\tau z) d\nu(z) = \int_0^1 \exp(i\tau z) d\nu(z) = \int_0^1 \exp(i\tau z) dz$$
$$= \left.\frac{\exp(i\tau z)}{i\tau}\right|_0^1 = \frac{\exp(i\tau) - 1}{i\tau}.$$

O próximo resultado nos ajudará a entender a relação entre função de distribuição e função característica. Para demonstrá-lo, vamos precisar usar o teorema de Fubini:

Teorema 3.22. *Assuma que α é de variação limitada sobre $[a,b]$, para todo $b \geq a$ e seja β de variação limitada sobre $[c,d]$. Se g é contínua sobre $[a,+\infty)X[c,d]$ e se $\int_a^\infty g(x,y)d\alpha(x) = G(y)$ uniformemente sobre $[c,d]$, então G é contínua sobre $[c,d]$ e nós temos*

$$\int_c^d \left[\int_a^\infty g(x,y)d\alpha(x)\right] d\beta(y) = \int_a^\infty \left[\int_c^d g(x,y)d\beta(y)\right] d\alpha(x).$$

Dizer que $\int_a^\infty g(x,y)d\alpha(x) = G(y)$ uniformemente sobre $[c,d]$, significa que $\int_a^\infty g(x,y)d\alpha(x)$ converge ponto a ponto sobre $[c,d]$ e dado $\epsilon > 0$, existe um número $B > 0$, que só depende de ϵ, tal que se $b > B$ então

$$\left|G(y) - \int_a^b g(x,y)d\alpha(x)\right| < \epsilon.$$

Esse e outros resultados semelhantes podem ser consultados em [5].

Com a nossa notação, β será a função identidade e α uma função de distribuição F. Consequentemente, α é de variação limitada sobre $[a,b]$, para todo $b \geq a$.

Estamos prontos para entender a relação entre uma função de distribuição e sua função característica.

Teorema 3.23. *Fórmula de inversão. Seja F uma função de distribuição e seja φ_F sua função característica. Então para $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(F)$, obtemos:*

$$F(\beta) - F(\alpha) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\exp(-i\tau\alpha) - \exp(-i\tau\beta)}{i\tau} \varphi_F(\tau) d\tau.$$

Em particular, uma função de distribuição é univocamente determinada pela sua função característica.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir $\alpha \leq \beta$. Vamos usar o teorema de Fubini citado acima. Considere

$$G_1(\tau) = \frac{\exp(-i\tau\alpha) - \exp(-i\tau\beta)}{i\tau} \int_0^\infty \exp(i\tau w) dF(w),$$

e observe que:

$$|\exp(-i\tau\alpha) - \exp(-i\tau\beta)| \leq |\cos(\tau\alpha) - \cos(\tau\beta)| + |\sin(\tau\beta) - \sin(\tau\alpha)|$$

$$\leq 2|\alpha\tau - \beta\tau|.$$

Portanto, para $b > 0$,

$$\left| G_1(\tau) - \frac{\exp(-i\tau\alpha) - \exp(-i\tau\beta)}{i\tau} \int_0^b \exp(i\tau w) dF(w) \right|$$

$$= \left| \frac{\exp(-i\tau\alpha) - \exp(-i\tau\beta)}{i\tau} \int_b^\infty \exp(i\tau w) dF(w) \right|$$

$$\leq 2|\alpha - \beta| \left| \int_b^\infty \exp(i\tau w) dF(w) \right| \leq 2|\alpha - \beta| \int_b^\infty dF(w) = 2|\alpha - \beta|(1 - F(b)).$$

Consequentemente, $\frac{\exp(-i\tau\alpha) - \exp(-i\tau\beta)}{i\tau} \int_0^\infty \exp(i\tau w) dF(w) = G_1(\tau)$ uniformemente em $[-T, T]$, para todo $T > 0$. Temos um resultado análogo para

$$G_2(\tau) = \frac{\exp(-i\tau\alpha) - \exp(-i\tau\beta)}{i\tau} \int_{-\infty}^0 \exp(i\tau w) dF(w),$$

e, portanto, podemos aplicar o teorema de Fubini. Assim,

$$\int_{-T}^{T} \frac{\exp(-i\tau\alpha) - \exp(-i\tau\beta)}{i\tau} \int_{-\infty}^\infty \exp(i\tau w) dF(w) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \int_{-T}^{T} \frac{\exp(i\tau(w-\alpha)) - \exp(i\tau(w-\beta))}{i\tau} d\tau dF(w).$$

Observe que

$$\exp(ix) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2} + \cos(x), x \in \mathbb{R}.$$

Assim, a integral interna acima é igual a:

$$\frac{1}{2}\int_{-T}^{T} \frac{\exp(i\tau(w-\alpha)) - \exp(-i\tau(w-\alpha)) + 2\cos(\tau(w-\alpha))}{i\tau} d\tau$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-T}^{T} \frac{\exp(i\tau(w-\beta)) - \exp(-i\tau(w-\beta)) + 2\cos(\tau(w-\beta))}{i\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-T}^{T} \frac{\exp(i\tau(w-\alpha)) - \exp(-i\tau(w-\alpha))}{i\tau} d\tau$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-T}^{T} \frac{\exp(i\tau(w-\beta)) - \exp(-i\tau(w-\beta))}{i\tau} d\tau.$$

Pelo lema (2.9), as integrais acima convergem para

$$\pi(sgn(w-\alpha) - sgn(w-\beta)).$$

Agora, se $w < \alpha$, então $sgn(w-\alpha) - sgn(w-\beta) = -1 - (-1) = 0$.
Se $w > \beta$, então $sgn(w-\alpha) - sgn(w-\beta) = 1 - 1 = 0$.
Se $\alpha < w < \beta$, temos $sgn(w-\alpha) - sgn(w-\beta) = 1 - (-1) = 2$.
Assim,

$$\int_{-T}^{T} \frac{\exp(-i\tau\alpha) - \exp(-i\tau\beta)}{i\tau} \varphi_F(\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \pi(sgn(w-\alpha) - sgn(w-\beta)) dF(w) = \int_{\alpha}^{\beta} dF(w) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Se uma função de distribuição G tem a mesma função caracteríscica que F, então a fórmula acima nos dá $F(\beta) - F(\alpha) = G(\beta) - G(\alpha)$ quase sempre (isto é, vale a igualdade no complementar de um conjunto de medida de Lebesgue zero). Daí, fazendo $\alpha \to -\infty$, obtemos $F(\beta) = G(\beta)$ quase sempre. E desde que F e G são ambas contínuas a direita e não decrescentes, nós obtemos $F = G$ e isso termina o teorema. $\square$

Vamos a um exemplo muito importante. Voltaremos a ele mais a frente.

Exemplo 3.24. *A função característica da função normal Φ é dada por:*

$$\varphi_\Phi(\tau) = \exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right).$$

Demonstração. Pela definição,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right) d\tau.$$

Temos também pelas propriedades da integral de Riemann-Stieltjes,

$$\begin{aligned}
\varphi_\Phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\tau z) d\Phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\tau z) \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(\tau z) + i \sin(\tau z)) \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau z) \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) dz,
\end{aligned}$$

desde que $\sin(z)$ é uma função ímpar, sendo que na integral acima, podemos fazer o limite como desejarmos. Derivando e integrando por partes, temos:

$$\begin{aligned}
\varphi_\Phi^{'}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -z \sin(\tau z) \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) dz \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau \cos(\tau z) \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) dz = -\tau \varphi_\Phi(\tau).
\end{aligned}$$

Portanto, a função característica $\varphi_\Phi(\tau)$ é solução da equação diferencial:

$$\frac{y^{'}}{y} = -\tau.$$

Resolvendo, obtemos:

$$\log |\varphi_\Phi(\tau)| = -\int \tau d\tau = \frac{-\tau^2}{2} + c,$$

para alguma constante c.

Tomando a exponencial,

$$\varphi_\Phi(\tau) = k \exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right),$$

para alguma constante k.

Mas $\varphi_\Phi(0) = 1$. Portanto:

$$\varphi_\Phi(\tau) = \exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right).$$

□

O Teorema da continuidade de Lévy relaciona o limite de sequências de funções de distribuições com suas respectivas características. Mas antes de prová-lo, vamos a alguns lemas.

Lema 3.25. *Sejam $h > 0$ e F uma função de distribuição. Então:*

$$G(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} F(t)dt$$

define uma função de distribuição.

Demonstração. Como F é crescente, então G é crescente. A continuidade à direita de G é clara. Falta mostrar que:

$$G(-\infty) = 0 \quad \text{e} \quad G(\infty) = 1.$$

Como $F(-\infty) = 0$ então, dado $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que se $z < -M$, então $F(z) < \epsilon$.

Daí, se $z < -M - h$, temos:

$$G(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} F(t)dt \leq \frac{1}{h}[\epsilon h] = \epsilon.$$

Como $G(z) \geq 0$ para todo z real, temos que $G(-\infty) = 0$.

Agora, como $F(\infty) = 0$, dado $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que se $z > M$ então $1 - F(z) \leq \epsilon$. Em outras palavras, $F(z) \geq 1 - \epsilon$. Assim, para $z \geq M$,

$$G(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} F(t)dt \geq \frac{1}{h}[(1-\epsilon)(z+h-z)] = 1 - \epsilon.$$

Segue que $G(+\infty) \geq 1$. Por outro lado, $F(z) \leq 1$ para todo z real, assim:

$$G(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} F(t)dt \leq \frac{1}{h}[z+h-z] = 1.$$

Logo:

$$G(+\infty) = 1,$$

e isso encerra o lema. □

Lema 3.26. *Para $z \in \mathbb{R}$ e $h > 0$ fixado:*

$$\frac{1}{h}\left\{\int_z^{z+h} - \int_{z-h}^{z}\right\}F(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\frac{\sin(\frac{\tau}{2})}{\frac{\tau}{2}}\right)^2 \exp\left(\frac{-i\tau z}{h}\right)\varphi_F\left(\frac{\tau}{h}\right)d\tau.$$

Demonstração. Considere como no lema anterior

$$G(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} F(t)dt.$$

Aplicando a fórmula de inversão para G, temos:

$$\frac{1}{h}\left\{\int_z^{z+h} - \int_{z-h}^{z}\right\}F(t)dt = G(z) - G(z-h)$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\exp(-i\tau(z-h)) - \exp(-i\tau z)}{i\tau}\varphi_G(\tau)d\tau$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{[\exp(i\tau h) - 1]\exp(-i\tau z)}{i\tau}\varphi_G(\tau)d\tau. \tag{36}$$

Agora,

$$\varphi_G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\tau z)dG(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\tau z)}{h}[F(z+h) - F(z)]dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(z+h) - F(z)}{hi\tau}d(\exp(i\tau z))$$

$$= \frac{F(z+h) - F(z)}{hi\tau}\exp(i\tau z)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\tau z)}{i\tau h}d(F(z+h) - F(z))$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\tau z)}{i\tau h}dF(z+h) + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\tau z)}{i\tau h}dF(z), \tag{37}$$

onde usamos integração por partes e

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{hi\tau}\exp(i\tau z)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Fazendo a mudança de variável $w = z + h$ na primeira integral, temos:

$$\lim_{T_1,T_2\to\infty}\int_{-T_1}^{T_2}\frac{\exp(i\tau z)}{i\tau h}dF(z+h) = \lim_{T_1,T_2\to\infty}\int_{-T_1+h}^{T_2+h}\frac{\exp(i\tau(w-h))}{i\tau h}dF(w)$$

$$= \lim_{T_1,T_2\to\infty}\exp(-i\tau h)\int_{-T_1+h}^{T_2+h}\frac{\exp(i\tau w)}{i\tau h}dF(w) = \frac{\exp(-i\tau h)}{i\tau h}\varphi_F(\tau).$$

Assim, (37) vale:

$$-\frac{\exp(-i\tau h)}{i\tau h}\varphi_F(\tau) + \frac{\varphi_F(\tau)}{i\tau h} = [-\exp(-i\tau h) + 1]\frac{\varphi_F(\tau)}{i\tau h}.$$

Usando a fórmula:
$$\frac{1-\cos(2a)}{2} = \sin^2(a),$$
temos:
$$[-\exp(-i\tau h)+1][\exp(i\tau h)-1] = \exp(i\tau h) - 1 - 1 + \exp(-i\tau h)$$
$$= -2+\cos(\tau h)+i\sin(\tau h)+\cos(\tau h)-i\sin(\tau h) = -2(1-\cos(\tau h)) = -4\sin^2\left(\frac{\tau h}{2}\right).$$

Assim, (36) vale:
$$\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{-4\sin^2(\frac{\tau h}{2})\exp(-i\tau z)}{i\tau}\frac{\varphi_F(\tau)}{i\tau h}d\tau$$
$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{4\sin^2(\frac{\tau h}{2})\exp(-i\tau z)}{\tau^2}\frac{\varphi_F(\tau)}{h}d\tau$$
$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-Th}^{Th}\frac{4\sin^2(\frac{w}{2})\exp(\frac{-iwz}{h})}{w^2}\varphi_F\left(\frac{w}{h}\right)d\tau$$
$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-Th}^{Th}\frac{\sin^2(\frac{w}{2})\exp(\frac{-iwz}{h})}{(\frac{w}{2})^2}\varphi_F\left(\frac{w}{h}\right)d\tau,$$
como queríamos. □

Agora estamos prontos para provar um dos teoremas mais importantes e interessantes deste texto. O teorema da continuidade de Lévy faz uma conexão entre problemas de convergencia fraca de funções de distribuições e convergencia pontual em funções características.

Teorema 3.27. *Teorema da continuidade de Lévy. Sejam $\{F_n\}$ uma sequência de funções de distribuições e $\{\varphi_{F_n}\}$ suas correspondentes funções características. Então F_n converge fracamente para uma função de distribuição F se e somente se $\{\varphi_{F_n}\}$ converge ponto a ponto sobre $\mathbb{R}$ para uma função φ que é contínua em 0. Além disso, nesse caso, φ é a função característica de F e a convergência de φ_{F_n} para $\varphi = \varphi_F$ é uniforme sobre qualquer subconjunto compacto.*

Demonstração. Vamos provar a ida primeiro.

Dado $\epsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que $\int_{|z|>T} dF(z) \leq \frac{\epsilon}{3}$, ou seja:
$$\int_{|z|>T} dF(z) = F(-T) + 1 - F(T) \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Podemos assumir $\pm T \in \mathcal{C}(F)$. Assim, como $F_n(T) \to F(T)$ e $F_n(-T) \to F(-T)$ então existe $n_0 > 0$ tal que se $n > n_0$ então:

$$|F_n(T) - F(T)| \leq \frac{\epsilon}{3} \ \text{ e } \ |F_n(T) - F(T)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Assim, se $n > n_0$ temos:

$$\int_{|z|>T} dF_n(z) = F_n(-T) + 1 - F_n(T)$$

$$= F_n(-T) - F(-T) + F(T) - F_n(T) + F(-T) + 1 - F(T) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Assim:

$$\sup_{n>n_0} \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \left| \int_{|z|>T} \exp(i\tau z) dF_n(z) \right| \leq \sup_{n>n_0} \int_{|z|>T} dF_n(z) \leq \epsilon.$$

Por outro lado,

$$\int_{-T}^{T} \exp(i\tau z) dF_n(z) = \exp(i\tau z) F_n(z) \Big|_{-T}^{T} - i\tau \int_{-T}^{T} F_n(z) \exp(i\tau z) dz$$

$$\to \exp(i\tau z) F(z) \Big|_{-T}^{T} - i\tau \int_{-T}^{T} F(z) \exp(i\tau z) dz = \int_{-T}^{T} \exp(i\tau z) dF(z),$$

onde usamos o teorema da convergência dominada de Lebesgue. Portanto,

$$\varphi_{F_n}(\tau) - \varphi_F(\tau) = \int_{-T}^{T} \exp(i\tau z) dF_n(z) - \int_{-T}^{T} \exp(i\tau z) dF(z) + O(\epsilon) = O(\epsilon).$$

Logo $\varphi_{F_n} \to \varphi_F$ uniformemente sobre qualquer subconjunto compacto. Pela definição de φ_F, sabemos que ela é contínua, e, assim, é contínua em 0 (isso será usado efetivamente na recíproca).

E assim provamos a ida. Vamos mostrar a volta.

Queremos mostrar que se φ_{F_n} converge ponto a ponto para um limite φ contínuo em 0, então F_n converge fracamente para uma função de distribuição F.

Vamos dar um resumo do que será feito. Primeiro, vamos mostrar que existe uma subsequência $\{F_{n_j}\}$ que converge para uma função de distribuição F. Em seguida, mostraremos que $\varphi_{F_{n_j}} = \varphi$. Depois, dada qualquer outra subsequência de $\{F_n\}$ que converge para uma função de distribuição G, então $G = F$. Por fim, mostraremos que a própria $\{F_n\}$ converge para F. Vamos à prova.

Seja $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ um subconjunto denso de $\mathbb{R}$ consistindo de pontos de continuidade para toda F_n. Desde que $F_n(z_k) \in [0,1], \forall n, k$ naturais, então o teorema de Bolzano-Weierstrass nos dá a existência de uma subsequência $\{F_{n_1}(z_1)\}_{n_1}$ de $\{F_n(z_1)\}_n$ que converge. Da mesma forma, existe uma subsequência $\{F_{n_2}(z_2)\}_{n_2}$ de $\{F_{n_1}(z_2)\}_{n_1}$ que converge. Observe que $\{F_{n_2}(z_1)\}_{n_2}$ converge pois é subsequência de $\{F_{n_1}(z_1)\}_{n_1}$ que converge. Repetindo esse processo, conseguimos por indução uma sequência, que vamos denotar por $\{F_{n_j}\}_{n_j}$, que converge em Z.

Considere agora G defnida por: $G(z) = \overline{\lim} F_{n_j}(z), \forall z \in \mathbb{R}$. Como $F_n(z) \leq 1, \forall z \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, temos que $G(z)$ está bem definida. Além disso, se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \leq x_2$, então $F_{n_j}(x_1) \leq F_{n_j}(x_2), \forall j \in \mathbb{N}$. Logo $\overline{\lim}_j F_{n_j}(x_1) \leq \overline{\lim}_j F_{n_j}(x_2)$, ou seja, $G(x_1) \leq G(x_2)$ e concluímos que G é monótona. Assim G possui uma quantidade enumerável de descontínuidades, todas do tipo salto.

Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x_0) = G(x_0) \quad \text{se} \quad x_0 \in \mathcal{C}(G) \quad \text{e} \quad F(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} G(x) \text{ caso contrário.}$$

Ou seja, F é contínua onde G é contínua e F é contínua a direita nos pontos de descontinuidades de G. Como G é monótona (não decrescente), F também é monótona.

Pela definição, $G(z) = \overline{\lim} F_{n_j}(z)$, e como $0 \leq F_n(z) \leq 1$, segue que $0 \leq G(z), F(z) \leq 1$.

Vamos mostrar que F_{n_j} converge fracamente para F. Seja $x \in C(F)$. Queremos: $F(x) = \lim_j F_{n_j}(x)$. Já sabemos que $F(x) = \overline{\lim}_j F_{n_j}(x)$. Queremos $F(x) = \underline{\lim}_j F_{n_j}(x)$. Sejam $\{x_i\}, \{x_k\}$ sequência de pontos em Z que convergem para x com $x_i \leq x \leq x_k, \forall i, k$. Logo $F_{n_j}(x_i) \leq F_{n_j}(x) \leq F_{n_j}(x_k), \forall n_j, i, k$. Como $x_i, x_k \in Z, \forall i, k$ e F_{n_j} é convergente em Z, fazendo $j \to \infty$, temos:

$$G(x_i) = \overline{\lim} F_{n_j}(x_i) = \underline{\lim} F_{n_j}(x_i) \leq \underline{\lim} F_{n_j}(x)$$

$$\leq \underline{\lim} F_{n_j}(x_k) = \overline{\lim} F_{n_j}(x_k) = G(x_k),$$

ou seja, $G(x_i) \leq \underline{\lim} F_{n_j}(x) \leq G(x_k)$. Fazendo $x_i \to x$ e $x_k \to x$, e lembrando que G é contínua em x, temos:

$$G(x) \leq \underline{\lim} F_{n_j}(x) \leq G(x).$$

Logo $F(x) = G(x) = \underline{\lim} F_{n_j}(x)$ como queríamos. Assim, $\{F_{n_j}\}$ é uma sequência de funções de distribuições que converge fracamente para $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, contínua a direita, monótona não decrescente. Vamos mostrar que $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$, que é equivalente a $F(\infty) - F(-\infty) = 1$. Pelo lema anterior,

$$\frac{1}{h}\left\{ \int_0^h - \int_{-h}^0 \right\} F_{n_j}(t)dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(\frac{\sin(\frac{\tau}{2})}{\frac{\tau}{2}} \right)^2 \varphi_{F_{n_j}}\left(\frac{\tau}{h}\right) d\tau.$$

Mandando $j \to \infty$ e usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, resulta:

$$\frac{1}{h}\left\{\int_0^h - \int_{-h}^0\right\} F(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(\frac{\sin(\frac{\tau}{2})}{\frac{\tau}{2}}\right)^2 \varphi_F\left(\frac{\tau}{h}\right) d\tau.$$

Aqui, F é o limite fraco de F_{n_j} e φ é o limite ponto a ponto de $\varphi_{F_{n_j}}$. Mandando $h \to \infty$, temos novamente pelo teorema da convergência dominada e pelo lema (2.14):

$$F(\infty) - F(-\infty) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(\frac{\sin(\frac{\tau}{2})}{\frac{\tau}{2}}\right)^2 \lim_{h\to\infty} \varphi_F\left(\frac{\tau}{h}\right) d\tau$$

$$= \varphi(0) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(\frac{\sin(\frac{\tau}{2})}{\frac{\tau}{2}}\right)^2 d\tau = \varphi(0),$$

pois φ é contínua em 0. Mais ainda, $\varphi(0) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{F_n}(0)$ e como $\varphi_{F_n}(0) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, temos portanto que $F(\infty) - F(-\infty) = 1$. Logo o limite fraco F da sequência F_{n_j} é uma função de distribuição.

Claramente, isso se mantém para qualquer outro limite fraco G. Mas desde que G tem também a função característica φ, e funções de distribuições são unicamente determinadas por suas funções características, nós obtemos $F = G$. Portanto, qualquer subsequência fracamente convergente de $\{F_n\}$ converge para o mesmo limite F. Vamos mostrar que a própria F_n converge para F(só mostramos que existe uma subsequência que converge para F).

Seja $x_0 \in \mathcal{C}(F)$ e seja a um valor de aderência de $\{F_n(x_0)\}$. Logo existe uma subsequência F_{n_k} de F_n tal que $F_{n_k}(x_0) \to a$. Da mesma forma que antes, eu consigo uma subsequência $F_{n_{k_i}}$ de F_{n_k} que converge fracamente para F (toda subsequência fracamente convergente, converge para F). Logo, como $x_0 \in \mathcal{C}(F)$, temos que:

$$\lim_{i\to\infty} F_{n_{k_i}}(x_0) = F(x_0)$$

Mas:

$$\lim_{i\to\infty} F_{n_{k_i}}(x_0) = \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x_0) = a.$$

Logo $a = F(x_0)$. Portanto, $\{F_n(x_0)\}_n$ só tem um valor de aderência. Portanto, $F_n(x_0) \to F(x_0)$ e assim, F_n converge fracamente para F e isso encerra a demonstração. $\square$

3.4 O teorema de Erdös-Kac e generalizações

3.4.1 O teorema de Erdös-Kac

Em 1939, Erdös e Kac publicaram um artigo (veja [13]), sem demonstração, sobre este resultado. No ano seguinte, em 1940, eles publicaram novamente um artigo com a demonstração (veja [14]). Nesta monografia, seguiremos de perto a demonstração que se encontra em [2], que, segundo o autor, a prova segue um pouco a de Rényi e Turán [15], incluindo uma certa modificação devido a Selberg [16], que possibilita obter um pouco mais de conhecimento a respeito da velocidade de convergência para a distribuição normal. Mais ainda, este método se aplica a outros problemas também.

Aqui, vamos usar o teorema da continuidade de Lévy, que nos possibilita trabalhar a convergência em funções características e depois descobrir o seu equivalente em funções de distribuições. A desigualdade de Berry-Esseen nos ajudará a descobrir a velocidade da convergência e mostrar que a convergência é uniforme.

Vamos a um lema.

Lema 3.28. *Se* $|t| \leq 1$ *então* $\cos t - 1 \leq 2\left(\frac{t}{\pi}\right)^2$.

Demonstração. Basta demonstrar para $t \in [0,1]$. Considere:

$$f(t) = 1 - \cos(t) + \frac{2t^2}{\pi^2},$$

definida em $t \in [0,1]$. Assim,

$$f'(t) = \sin(t) + \frac{4}{\pi^2}t.$$

Olhando a série de Taylor da função seno, temos:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots$$

e como $t \in [0,1]$, $\sin t \geq t - \frac{t^3}{3!}$. Daí

$$f'(t) \geq t - \frac{t^3}{3!} + \frac{4}{\pi^2}t = t\left(1 - \frac{t^2}{6} + \frac{4}{\pi^2}\right) \geq 0.$$

Logo f é crescente em $[0,1]$ e como $f(0) = 0$, temos que $f(t) \geq f(0) = 0$, ou seja,

$$\cos t - 1 \leq 2\left(\frac{t}{\pi}\right)^2,$$

como queríamos. □

Seja $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ e $|z| \leq 1$. Pelo corolário (2.27), temos a fórmula assintótica:

$$\sum_{n \leq x} z^{\omega(n)} = \lambda(z)x(\log x)^{z-1} + O(x(\log x)^{\Re(z)-2}), \tag{38}$$

onde $\lambda(z)$ é uma função inteira satisfazendo $\lambda(1) = 1$. Isso implica:

Teorema 3.29. *(Erdös + Kac, 1939, Renyi + Turan, 1957). Uniformemente para $N \geq 3$ e $x \in \mathbb{R}$, temos*

$$\frac{1}{N}\#\left\{n \leq N : \frac{\omega(n) - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}} \leq x\right\} = \Phi(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log\log N}}\right).$$

Demonstração. Defina para $N \geq 3$

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\#\left\{n \leq N : \frac{\omega(n) - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}} \leq x\right\}.$$

Logo, F_N é função de distribuição para todo $N \geq 3$. Denotamos por $\varphi_{F_N}(\tau)$ sua função característica, isto é:

$$\varphi_{F_N}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\tau z) dF_N(z).$$

Como F_N é uma função escada, a integral acima transforma-se em uma soma. Os pontos de descontinuidade de F_N são:

$$x_j = \frac{j - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}},$$

para $j = 1, \ldots, k$, onde k é algum número natural. Veja que a variação de F_N em cada x_j é $\frac{1}{N}\#\{n \leq N : \omega(n) = j\}$, para todo $j = 1, \ldots, k$.

Logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\tau z) dF_N(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{N}\#\{n \leq N : \omega(n) = j\} \exp\left(i\tau \frac{j - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n \leq N} \exp\left(i\tau \frac{\omega(n) - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}}\right),$$

o que resulta

$$\varphi_{F_N}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{n \leq N} \exp\left(i\tau \frac{\omega(n) - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}}\right).$$

Por (38), nós temos uniformemente para $N \geq 3$ e $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leq N}\exp(it\omega(n)) = \lambda(\exp(it))(\log N)^{\exp(it)-1} + O((\log N)^{\cos(t)-2}).$$

Tomando $T = \sqrt{\log\log N}$ e $t = \frac{\tau}{T}$, temos para $|\tau| \leq T$:

$$\exp(T^2(\cos(t)-2)) = [\exp(\log\log N)]^{\cos(t)-2} = (\log N)^{\cos(t)-2}.$$

$$\frac{O(\exp(T^2(\cos(t)-2)))}{\exp(i\tau T)} = O(\exp(T^2(\cos(t)-2))).$$

$$\exp((\exp(it)-1)T^2) = [\exp(\log\log N)]^{\exp(it)-1} = (\log N)^{\exp(it)-1}.$$

Logo, multiplicando a igualdade acima por $\exp(-i\tau T)$, obtemos:

$$\varphi_{F_N}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{n\leq N}\exp\left(\frac{i\tau(\omega(n)-T^2)}{T}\right) = \frac{1}{N}\sum_{n\leq N}\exp\left(\frac{i\tau\omega(n)}{T} - i\tau T\right)$$

$$= \lambda(\exp(it))\exp((\exp(it)-1)T^2 - i\tau T) + O(\exp((\cos t - 2)T^2)). \quad (39)$$

Como $|\lambda(\exp(it))| \leq K$, para alguma constante $K > 0$ (S^1 é compacto), então:

$$\varphi_{F_N}(\tau) << \exp((\cos t - 1)T^2) + \exp(T^2(\cos t - 2))$$

$$<< \exp((\cos t - 1)T^2) << \exp\left(\frac{-2}{\pi^2}t^2T^2\right) = \exp\left(\frac{-2}{\pi^2}\tau^2\right), \quad (40)$$

onde usamos o lema anterior. Vamos usar essa estimativa para grandes valores de τ.

Como:

$$\exp(T^2(\cos t - 2)) = (\log N)^{\cos t - 2} \leq (\log N)^{-1},$$

então

$$O(\exp(T^2(\cos t - 2))) = O((\log N)^{-1}).$$

Desde que $|t| \leq 1$, temos:

$$\exp(it) - 1 = it - \frac{t^2}{2} + O(|t^3|).$$

E como $\lambda(z)$ é uma função inteira com $\lambda(1) = 1$, segue:

$$\lambda(\exp(it)) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{(k)}(1)}{k!}(\exp(it)-1)^k = 1 + O(|t|), \text{ para } |t| \leq 1.$$

Assim, obtemos para $|\tau| \le T^{\frac{1}{3}}$:

$$\exp[(\exp(it)-1)T^2 - i\tau T] = \exp\left[\left(it - \frac{t^2}{2} + O(|t^3|)\right)T^2 - i\tau T\right]$$

$$= \exp\left[\left(i\frac{\tau}{T} - \frac{\tau^2}{2T^2} + O\left(\frac{|\tau|^3}{T^3}\right)\right)T^2 - i\tau T\right] = \exp\left[-\frac{\tau^2}{2} + O\left(\frac{|\tau|^3}{T}\right)\right]$$

$$= \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\exp\left(O\left(\frac{|\tau|^3}{T}\right)\right).$$

Logo

$$\varphi_{F_N}(\tau) = (1 + O(|t|))\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\exp\left(O\left(\frac{|\tau|^3}{T}\right)\right) + O\left(\frac{1}{\log N}\right).$$

Estimando mais,

$$\exp\left(O\left(\frac{|\tau|^3}{T}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{|\tau|^3}{T}\right).$$

Daí

$$\varphi_{F_N}(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)(1 + O(|t|))\left(1 + O\left(\frac{|\tau|^3}{T}\right)\right) + O\left(\frac{1}{\log N}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\left(1 + O\left(\frac{|\tau| + |\tau|^3}{T}\right)\right) + O\left(\frac{1}{\log N}\right). \tag{41}$$

Vamos usar essa fórmula depois para $\frac{1}{\log N} \le |\tau| < T^{\frac{1}{3}}$.
Agora, mandando $N \to \infty$, chegamos, pelo exemplo (3.24), em:

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_{F_N}(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) = \varphi_\Phi(\tau),$$

isto é, a função característica φ_{F_N} converge ponto a ponto para a função característica da distribuição normal. Aplicando o teorema da continuidade de Lévy e observando que Φ é contínua em $\mathbb{R}$, obtemos:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left\{n \le N : \frac{\omega(n) - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}} \le x\right\} = \Phi(x),$$

que é exatamente a fórmula de Kac e Erdös.

Para obter o resultado quantitativo do teorema, nós precisamos estimar mais $\varphi_{F_N}(\tau)$ para valores pequenos de τ.

Quando $|\tau| \leq \frac{1}{\log N}$, então a estimativa trivial $\exp(iy) = 1 + O(y), y \in \mathbb{R}$, resulta em combinação com a desigualdade de Cauchy-Shwarz,

$$\varphi_{F_N}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{n\leq N}\exp\left(i\tau\frac{\omega(n) - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}}\right)$$

$$= 1 + O\bigg(\frac{|\tau|}{TN}\sum_{n\leq N}|\omega(n) - \log\log N|\bigg)$$

$$= 1 + O\bigg(\frac{|\tau|}{TN}\bigg(N\sum_{n\leq N}|\omega(n) - \log\log N|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg).$$

Lembrando que:

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leq N}(\omega(n) - \log\log N)^2 \leq \log\log N + O(1),$$

obtemos para alguma constante K,

$$|\varphi_{F_N}(\tau) - 1| \leq K\frac{|\tau|}{TN}\bigg(N\sum_{n\leq N}|\omega(n) - \log\log N|^2\bigg)^{\frac{1}{2}}$$

$$= K\frac{|\tau|}{T}\bigg(\frac{1}{N}\sum_{n\leq N}|\omega(n) - \log\log N|^2\bigg)^{\frac{1}{2}} << \frac{|\tau|}{T}T = |\tau|.$$

Logo:

$$\varphi_{F_N}(\tau) = 1 + O(|\tau|).$$

Agora, aplicando a desigualdade de Berry-Esseen, e lembrando que:

$$\varphi_\Phi(\tau) = \exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right),$$

temos:

$$||F_N - \Phi||_\infty << \frac{||\Phi'||_\infty}{T} + \int_{-T}^{T}\left|\frac{\varphi_{F_N}(\tau) - \varphi_\Phi(\tau)}{\tau}\right|d\tau$$

$$<< \frac{1}{T} + \int_{-T}^{T}\left|\varphi_{F_N}(\tau) - \exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right)\right|\frac{d\tau}{|\tau|},$$

pois $\Phi'(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right)$, e assim,

$$|\Phi'(\tau)| \leq 1,$$

para todo τ. Logo $||\Phi'||_\infty \leq 1$.

Vamos dividir a integral acima em 3 partes. Para $|\tau| \leq \frac{1}{\log N}$ temos que $\varphi_\Phi(\tau) = 1 + O(|\tau|)$, então:

$$\int_{-\frac{1}{\log N}}^{\frac{1}{\log N}} \left|\varphi_{F_N}(\tau) - \exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right)\right| \frac{d\tau}{|\tau|}$$

$$\leq \int_{-\frac{1}{\log N}}^{\frac{1}{\log N}} \left|\varphi_{F_N}(\tau) - 1\right| + \left|1 - \exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right)\right| \frac{d\tau}{|\tau|} << \int_{-\frac{1}{l\log N}}^{\frac{1}{l\log N}} \left(|\tau| + \frac{\tau^2}{2}\right) \frac{d\tau}{|\tau|}$$

$$\leq \int_{-\frac{1}{\log N}}^{\frac{1}{\log N}} \left(|\tau| + \frac{|\tau|}{2}\right) \frac{d\tau}{|\tau|} << \int_{-\frac{1}{\log N}}^{\frac{1}{\log N}} d\tau << \frac{1}{\log N} << \frac{1}{\log\log N}.$$

A fórmula (41) nos dá:

$$\int_{\pm\frac{1}{\log N}}^{\pm T^{\frac{1}{3}}} \left|\varphi_{F_N}(\tau) - \exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right)\right| \frac{d\tau}{|\tau|}$$

$$<< \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right)\left(\frac{|\tau| + |\tau|^3}{T}\right)\frac{d\tau}{|\tau|} + \int_{\frac{1}{\log N}}^{T^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\log N}\frac{d\tau}{\tau}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right)\left(\frac{1 + \tau^2}{T}\right)d\tau + \int_{\frac{1}{\log N}}^{T^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\log N}\frac{d\tau}{\tau}$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right)\left(1 + \tau^2\right)d\tau + \frac{1}{\log N}\left[\log(T^{\frac{1}{3}}) - \log\left(\frac{1}{\log N}\right)\right] << \frac{1}{T}.$$

Por fim, de (40) temos:

$$\int_{\pm T^{\frac{1}{3}}}^{\pm\infty} \left|\varphi_{F_N}(\tau) - \exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right)\right| \frac{d\tau}{|\tau|} << \left|\int_{\pm T^{\frac{1}{3}}}^{\pm\infty} |\varphi_{F_N}(\tau)| + \exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right)\frac{d\tau}{|\tau|}\right|$$

$$<< \int_{T^{\frac{1}{3}}}^{\infty} \exp\left(\frac{-2}{\pi^2}\tau^2\right)\frac{d\tau}{\tau}.$$

Como

$$\frac{\exp\left(\frac{-2}{\pi^2}\tau^2\right)}{\tau} \leq K\frac{1}{\tau^5},$$

para alguma constante positiva K, segue que

$$\int_{T^{\frac{1}{3}}}^{\infty} \exp\left(\frac{-2}{\pi^2}\tau^2\right)\frac{d\tau}{\tau} \leq \int_{T^{\frac{1}{3}}}^{\infty} \frac{1}{K\tau^5} << \frac{1}{T^{\frac{4}{3}}} << \frac{1}{T}.$$

Portanto, temos:

$$||F_N - \Phi||_\infty << \frac{1}{T} = \frac{1}{\sqrt{\log\log N}},$$

e isso termina o teorema. $\square$

Vamos mostrar agora que o erro na fórmula de Erdös-Kac é ótimo. Observe que o teorema de Erdös-Kac pode ser escrito como

$$\nu_N\left\{n : \frac{\omega(n) - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}} \leq x\right\} = \Phi(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log\log N}}\right). \tag{42}$$

Considere

$$\nu_N\{n : \omega(n) = k\} = \frac{1}{N}\#\{n \leq N : \omega(n) = k\} = \frac{\pi_k(N)}{N}$$

com $k = [\log\log N]$. Lembrando a fórmula (34):

$$\pi_k(x) = \frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\left\{\lambda\left(\frac{k-1}{\log\log x}\right) + O\left(\frac{k}{(\log\log x)^2}\right)\right\}$$

Quando N cresce, $\frac{k-1}{\log\log N}$ tende a 1 e $\lambda(1) = 1$. Por outro lado, $\frac{k}{(\log\log N)^2}$ tende a zero quando N cresce. Vamos denotar

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{se} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Assim, nesta notação,

$$\frac{\pi_k(N)}{N} \sim \frac{1}{\log N}\frac{(\log\log N)^{k-1}}{(k-1)!}$$

Agora,

$$\frac{1}{\log N}\frac{(\log\log N)^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{1}{e^{\log\log N}}\frac{(\log\log N)^{k-1}}{(k-1)!}$$

e pela fórmula de Stirling, obtemos

$$\frac{1}{e^{\log\log N}}\frac{(\log\log N)^{k-1}}{(k-1)!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\log\log N}},$$

ou seja,

$$\nu_N\{n : \omega(n) = k\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\log\log N}}.$$

Considere $R(N)$ o supremo sobre $y \in \mathbb{R}$ do termo de erro da fórmula (42), ou seja

$$R(N) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \left| \nu_N \left\{ n : \frac{\omega(n) - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}} \leq y \right\} - \Phi(y) \right|.$$

Pelo teorema de Erdös-Kac,

$$R(N) << \frac{1}{\sqrt{\log\log N}}.$$

Queremos agora a estimativa inversa. Vamos escrever $\nu_N\{n : \omega(n) = k\}$ como uma diferença de duas frequências do tipo (42). Seja $0 < \epsilon < \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$. Observe

$$\nu_N\{n : \omega(n) \leq k\} = \Phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{\log\log N}}\right) + O(R(N))$$

e

$$\nu_N\left\{n : \omega(n) \leq k - \epsilon\right\} = \Phi\left(\frac{\theta - \epsilon}{\sqrt{\log\log N}}\right) + O(R(N))$$

onde $\theta = k - \log\log N$. Daí

$$\begin{aligned}\nu_N\{n : \omega(n) = k\} &= \nu_N\{n : \omega(n) \leq k\} - \nu_N\left\{n : \omega(n) \leq k - \epsilon\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{\log\log N}}\right) - \Phi\left(\frac{\theta - \epsilon}{\sqrt{\log\log N}}\right) + O(R(N)).\end{aligned}$$

Agora, para algum $c \in \mathbb{R}$,

$$\Phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{\log\log N}}\right) - \Phi\left(\frac{\theta - \epsilon}{\sqrt{\log\log N}}\right) = \Phi'(c)\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{\log\log N}}\right) \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{\log\log N}}.$$

Assim,

$$\frac{\epsilon}{\sqrt{\log\log N}} + O(R(N)) \geq \nu_N\{n : \omega(n) = k\}$$

Lembrando que $\nu_N\{n : \omega(n) = k\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\log\log N}}$, segue

$$\nu_N\{n : \omega(n) = k\} \geq \frac{1}{2\sqrt{2\pi\log\log N}}$$

para N suficientemente grande. Assim,

$$\frac{\epsilon}{\sqrt{\log\log N}} + O(R(N)) \geq \frac{1}{2\sqrt{2\pi\log\log N}}$$

em outras palavas

$$O(R(N)) \geq \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} - \epsilon\right)\frac{1}{\sqrt{\log\log N}}.$$

Portanto,

$$R(N) >> \frac{1}{\sqrt{\log\log N}}$$

e isto demonstra que o erro na fórmula (42) é ótimo.

3.4.2 Lei do limite e resultados mais gerais

Dada uma função aritmética f, nós associamos para cada $N \in \mathbb{N}$, a função de distribuição:

$$F_N(z) = \nu_N\{n \in \mathbb{N} : f(n) \leq z\} = \frac{1}{N}\#\{n \leq N : f(n) \leq z\}.$$

Dizemos que f possui uma função de distribuição limite F se a sequência $\{F_N\}$ definida acima converge fracamente para uma função de distribuição F. Dessa forma, dizemos que f possui a lei do limite. As vezes é interessante considerar uma diferente abordagem no problema da distribuição de valores de uma função aritmética. Mais geralmente, para funções aritméticas aditivas $f(n)$, em vez de estudar o comportamento de F_N definida acima, podemos considerar quando uma renormalização por funções $\alpha(N)$ e $\beta(N)$ podem ser encontradas tal que as frequências

$$\nu_N\left\{n : \frac{f(n) - \alpha(N)}{\beta(N)} \leq x\right\}$$

possuem uma distribuição limite. No teorema de Erdös-Kac,

$$\nu_N\left\{n : \frac{\omega(n) - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}} \leq x\right\} = \Phi(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log\log N}}\right),$$

$\omega(n)$ foi renormalizada com $\alpha(N) = \log\log N$ e $\beta(N) = \sqrt{\log\log N}$.

A publicação original de Erdös-Kac [13] foi enunciada da seguinte forma: Para uma função aditiva f que satisfaz $f(p^k) = f(p)$ para todo $k \geq 1$ e $|f(p)| \leq 1$ para todo primo p, se

$$\alpha(n) = \sum_{p \leq n} \frac{f(p)}{p}$$

e

$$\beta(n) = \sum_{p \leq n} \left(\frac{f(p)^2}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \to \infty \text{ quando } n \to \infty,$$

nós temos

$$\nu_N\left\{n : \frac{f(n) - \alpha(N)}{\beta(N)} \leq x\right\} \to \Phi(x) \text{ quando } N \to \infty.$$

Um primeiro resultado mais geral foi encontrado por Kubilius. Para maiores detalhes, veja [3]:

Teorema 3.30. *Para que*

$$\nu_x \left\{ n : \frac{f(n) - \alpha(x)}{\beta(x)} \leq z \right\} \to \Phi(z) \text{ quando } x \to \infty$$

para uma função aritmética aditiva f, é suficiente que para cada $\epsilon > 0$ fixado,

$$\frac{1}{\beta(x)^2} \sum_{\substack{p \leq x \\ |f(p)| > \epsilon\beta(x)}} \frac{f(p)^2}{p} \to 0 \text{ quando } x \to \infty.$$

O resultado anterior é um caso particular de outro resultado mais geral ainda. Elliott ([3]) faz a definição de classe $\boldsymbol{H}$ e, para estas tais funções de classe $\boldsymbol{H}$ que satisfaçam ainda $f(p^k) = f(p)$ para todo p primo, então existe uma caracterização de quando o limite

$$\nu_x \left\{ n : \frac{f(n) - \alpha(x)}{\beta(x)} \leq z \right\}$$

converge fracamente para alguma função de distribuição. Além disso, a função característica $\varphi(\tau)$ da distribuição limite é dada por

$$\log \varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\tau u} - 1 - i\tau u) u^{-2} dK(u),$$

onde $K(u)$ é alguma função de distribuição tal que

$$\frac{1}{\beta(x)^2} \sum_{\substack{p \leq x \\ f(p) \leq u\beta(x)}} \frac{f(p)^2}{p} \to K(u) \text{ quase sempre.}$$

Todos esses resultados podem ser consultados em Elliott ([3]), vol. II, que possui ainda outros teoremas semelhantes, ou seja, ele estuda outras sequências de funções de distribuições que convergem fracamente. Além disso, ele comenta um pouco sobre a história do teorema de Erdös-Kac.

Todo matemático sabe o quanto Erdös foi um matemático genial. E no resultado desde teorema não foi diferente. Quando Kac foi dar a primeira palestra sobre o teorema tema deste trabalho (que era ainda uma conjectura), Erdös estava na plateia e antes mesmo da apresentação chegar ao fim, ele havia completado a prova. Veja abaixo o fragmento (retirado de [3]) com as próprias palavras do professor Kac:

". . . . If I remember it correctly I first stated (as a conjecture) the theorem on the normal distribution of the number of prime divisors during a lecture in Princeton in March 1939. Fortunately for me and possibly for Mathematics, Erdös was in the audience, and he immediately perked up. Before the lecture was over he had completed the proof, which I could not have done not having been versed in the number theoretic methods, . . . ".

Referências

[1] G. Tenenbaum, *Introduction do analytic and probabilistic number theory*, Cambridge University Press 1995.

[2] J. Steuding, *Probabilistic Number Theory*, Goethe University Frankfurt 2002.

[3] P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic Number Theory I, II*, Springer 1979.

[4] D.G. Figueiredo, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides 2009.

[5] T.M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley 1957.

[6] T.M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer 1976.

[7] F.B. Martinez, C.G. Moreira, N. Saldanha, E. Tengan, *Teoria dos números*, Projeto Euclides 2010.

[8] M. Mendès France, G. Tenenbaum, *The Prime Numbers and their distribution*, AMS 2000.

[9] E. C. Titchmarsh, D. R. Heath-Brown, *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford University Press 1987.

[10] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press 1996.

[11] P. J. Fernandes, *Medida e integração*, Projeto Euclides 2007.

[12] E. L. Lima, *Curso de análise*, Projeto Euclides 2009.

[13] P. Erdös, M. Kac, *On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 25, 1939, 206 - 207.

[14] P. Erdös, M. Kac, *The Gaussian Law of Errors in the Theory of Additive Number Theoretic Functions*, American Journal of Mathematics 62 (1/4), 1940, 738 - 742.

[15] A. Rényi, P. Turán, *On a theorem of Erdös-Kac*, Acta Arith, 1958.

[16] A. Selberg, *Note on a paper by L. G. Sathe*, J. Indian Math. Soc. B. 18, 1954.

[17] G. H. Hardy, E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford, 1938.

[18] P. Billingsley, *On the central limit theorem for the prime divisor function*, Amer. Math. Monthly vol 76, No 2, Feb 1969, 132-139.

[19] H. Halberstam, *On the distribuition of additive number-theoretic functions*, J. London Math. Soc., 30, 1955, 43-53.