

Medidas automorfas para aplicações críticas do círculo

Bruno de Almeida Nussenzveig

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA
EM PARCIAL CUMPRIMENTO DOS
REQUISITOS PARA O DIPLOMA DE
MESTRE EM CIÊNCIAS
NA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Edson de Faria

O autor foi financiado pela FAPESP ao longo do desenvolvimento do presente trabalho.

São Paulo, Agosto de 2023

Medidas automorfas para aplicações críticas do círculo.

Essa versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela banca avaliadora durante a defesa da versão original desse trabalho, em 03/08/2023. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Banca Avaliadora

- Prof. Dr. Edson de Faria (orientador) – IME-USP
- Prof. Dr. André Salles de Carvalho – IME-USP
- Prof. Dr. Pablo Andrés Guarino Quiñones – IME-UFF

Agradecimentos

Inicio meus agradecimentos com um pedido de desculpas pela injustiça que cometo com todos e todas que tanto me ajudaram ao longo desse processo, cujos nomes não aparecerão aqui.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro (número de processo 2021/04599-0). Agradeço a meus amigos e amigas, pelas longas conversas, momentos de distração e suporte emocional que me ofereceram durante meu mestrado. Agradeço também a meus amigos e colegas cientistas, que, matemáticos ou não, sempre se fizeram disponíveis para ler meus textos e fazer comentários. Alguns, pelo simples volume de texto que os obriguei a ler, merecem um agradecimento especial, dentre eles Antonio Pedrosa Ferreira, Gabriel Couto Rickli, Gustavo Ferreira e Pietro Morgante de Carvalho.

Gostaria de agradecer a André Muchon Neto e Nelson Orsalino Schuback, por terem me convencido a estudar dinâmica tantos anos atrás, uma escolha que hoje valorizo muito, embora talvez não tenha sido necessariamente o caso nos primeiros meses. Gostaria de também agradecer a Andrés Navas e Michele Triestino, pelos comentários e sugestões que enriqueceram esse trabalho, e a Alejandro Kocsard, pela importante conversa que tive com ele sobre a possibilidade de adaptar seu artigo para o caso crítico, que me levou a um outro caminho do qual colhi mais frutos.

A Pablo Guarino, pelos inúmeros convites para visitar a Universidade Federal Fluminense, por sua inconcebível disposição para passar horas e horas na frente de um quadro negro comigo apesar de sua vida familiar muito mais interessante, e pela simples profundidade com que se envolveu com esse trabalho, meus mais sinceros agradecimentos.

Ao meu orientador, Edson de Faria, não há constante de comparabilidade entre as palavras que posso dizer aqui e a realidade desses últimos quatro anos de iniciação científica e mestrado. Pela independência que sempre fomentou em mim, por sua paciência em incontáveis ocasiões, por sempre se disponibilizar a conversar comigo mesmo quando lhe era bastante inconveniente, por seu apoio e fé na minha produção até em momentos em que eu estava duvidando seriamente de mim mesmo, minha mais profunda gratidão.

Por fim, gostaria de agradecer a meu pai, Paulo, à minha mãe, Monique, e à minha irmã, Júlia, por terem me acompanhado em minha jornada em direção à pessoa que sou hoje. Gostaria de agradecer também a Larissa Kiriliuk Pastrello, por ser o chão sob os meus pés, o céu sobre a minha cabeça e a minha principal fonte de inspiração. E gostaria de fazer um agradecimento muito especial a Herch Moysés Nussenzveig, que foi sempre uma imensa fonte de inspiração, sabedoria e conselhos em todas as etapas de minha trajetória. Profissionalmente físico e biólogo, sua cultura matemática era impressionantemente vasta, e sempre senti seu apoio em uma multitude de vertentes.

Dedico esse trabalho ao meu avô.

Abstract

Nussenzveig, B. **Automorphic measures for critical circle maps**. 2023. x + 52 pages. Dissertation (MSc.) – Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2023.

Let f be a $C^{1+\text{bv}}$ circle diffeomorphism with irrational rotation number. As established by Douady and Yoccoz in the eighties, for any given $s > 0$ there exists a unique *automorphic measure* of exponent s for f . In the present work we show that the same holds for *multicritical circle maps*, and we provide two applications of this result. The first one, is to prove that the space of *invariant distributions of order 1* of any given multicritical circle map is one-dimensional, spanned by the unique invariant measure. The second one, is an improvement over the *Denjoy-Koksma inequality* for multicritical circle maps and absolutely continuous observables.

Keywords: Critical circle maps, automorphic measures, invariant distributions, Denjoy-Koksma inequality.

Resumo

Nussenzveig, B. **Medidas automorfas para aplicações críticas do círculo**. 2023. x + 52 p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Seja f um C^{1+bv} -difeomorfismo do círculo de número de rotação irracional. Como estabelecido por Douady e Yoccoz nos anos 80, para qualquer $s > 0$ dado existe uma única *medida automorfa* de expoente s para f . No presente trabalho, mostramos que o mesmo vale para *aplicações multicríticas do círculo*, e damos duas aplicações desse resultado. A primeira consiste em provar que o espaço das *distribuições invariantes de ordem 1* sob qualquer aplicação multicrítica do círculo é unidimensional, gerado pela única medida invariante. A segunda consiste de um aprimoramento da *desigualdade de Denjoy-Koksma* para aplicações multicríticas do círculo e observáveis absolutamente contínuos.

Palavras-chave: Aplicações críticas do círculo, medidas automorfas, distribuições invariantes, desigualdade de Denjoy-Koksma.

Conteúdo

Lista de Símbolos	v
Lista de Figuras	vii
1 Introdução	1
1.1 Aplicações	2
1.2 Organização do trabalho	3
2 Aplicações Multicríticas do Círculo	4
2.1 Razões cruzadas	4
2.2 O princípio de distorção de Koebe	5
2.3 Combinatória e estimativas reais a priori	6
2.3.1 Dominação e comparabilidade	8
3 Medidas Automorfas	9
4 Existência	12
5 Estimativas para Medidas Automorfas	15
5.1 Estimativas fundamentais de distorção	15
5.2 ω -dominação e comparabilidade	17
6 Ergodicidade e Unicidade	22
6.1 A razão Γ	22
6.2 Ergodicidade	25
6.3 Unicidade	26
7 Consequências para Medidas Automorfas	28
7.1 Dependência contínua	28
7.2 Um teorema ergódico	29
8 Aplicações	34
8.1 Equações cohomológicas e distribuições invariantes	34
8.2 Intervalos errantes e distribuições invariantes	38
8.3 Desigualdade de Denjoy-Koksma aprimorada	40
A Provas das Estimativas de Distorção	43
A.1 Fatos combinatórios	43
A.2 Provas das estimativas	50

Lista de Símbolos

M	variedade suave compacta e orientada
$\text{Diff}^k(M)$	grupo de difeomorfismos de classe C^k da variedade M
$\text{Diff}_+^k(M)$	subgrupo de $\text{Diff}_+^k(M)$ dos difeomorfismos que preservam a orientação
$C^k(M)$	espaço das funções $M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k
$\ \cdot\ _k$	norma C^k em $C^k(M)$
$B(f, C^\ell(M))$	espaço dos C^ℓ -cobordos para uma dinâmica f em M
$\mathcal{D}'_k(M)$	espaço das distribuições em M de ordem até k
$\mathcal{D}'(M)$	espaço das distribuições em M
$\mathcal{D}'_k(f)$	espaço das distribuições de ordem até k invariantes por uma dinâmica f em M
$\mathcal{D}'(f)$	espaço das distribuições invariantes por uma dinâmica f em M
$\langle T, u \rangle$	o valor do funcional linear T aplicado a u
$\mathcal{M}(M)$	espaço das medidas de Radon com sinal finitas em M
$\mathcal{P}(M)$	espaço das medidas de probabilidade de Radon em M
δ_x	massa pontual em x
$L^1(\lambda)$	espaço das funções λ -integráveis para uma medida λ
S^1	o círculo
Id	aplicação identidade de S^1
$[0, x]$	intervalo fechado positivamente orientado de S^1 de extremos $0, x$ (nessa ordem)
a_n	n -ésimo quociente parcial de um número irracional ρ
p_n/q_n	n -ésima melhor aproximação racional de um número irracional ρ
Leb	medida de Lebesgue (Haar) no círculo
$ I $	medida de Lebesgue ou comprimento do intervalo I
$M \Subset T$	o intervalo M tem fecho compacto no interior de T
$[M, T]$	razão cruzada do par de intervalos $M \Subset T$
τ	espaço do intervalo M no intervalo $T \ni M$
R_ρ	rotação rígida do círculo pelo ângulo ρ
f	aplicação multicrítica do círculo
$\mathcal{O}_f(x)$	órbita do ponto x sob a dinâmica f
$\mathcal{O}_f^+(x)$	semi-órbita futura do ponto x sob a dinâmica f
$\rho(f)$	número de rotação de f
μ	única medida de probabilidade de Radon f -invariante
$\text{Crit}(f)$	conjunto de pontos críticos de f
$\text{Crit}^\pm(f)$	reunião das órbitas críticas de f
Λ	complementar de $\text{Crit}^\pm(f)$
N	número de pontos críticos de f
c_j	um ponto crítico de f
d_j	criticalidade do ponto crítico c_j
c	um ponto crítico fixado de f
d	máximo das criticalidades dos pontos críticos de f
$\text{CrD}(f; M, T)$	distorção de razão cruzada de f sobre o par de intervalos $M \Subset T$

$I_n(x)$	intervalo fechado com extremos $x, f^{q_n}(x)$ que contém $f^{q_n+2}(x)$
I_n	$I_n(x)$ para $x = c$, o ponto crítico fixado de f
$\mathcal{P}_n(x)$	n -ésima partição dinâmica associada a x
\mathcal{P}_n	n -ésima partição dinâmica associada ao ponto crítico fixado c
I^k	$f^k(I)$ para um intervalo I
Δ	um átomo de uma partição dinâmica $\mathcal{P}_n(x)$
L, R	átomos de $\mathcal{P}_n(x)$ adjacentes a Δ
Δ^*	$L \cup \Delta \cup R$
$\tilde{\Delta}$	veja a §5.1
$\hat{\Delta}$	veja a §5.1
\mathcal{C}_n	veja o Lema 5.3
$I \succeq J$	o intervalo I domina o intervalo J <i>modulo</i> f
$I \preceq J$	os intervalos I, J são comparáveis <i>modulo</i> f
s	um número real positivo
\mathcal{A}_s	conjunto das medidas f -automorfas de expoente s
ν	uma medida f -automorfa
Σ, Σ_s	a série $\sum_{n=0}^{\infty} (Df^n)^s$
A, A_s	o conjunto dos pontos em que Σ, Σ_s diverge
B	um subconjunto boreliano f -invariante do círculo
$\omega(I)$	a razão $\nu(I \cap B) / I ^s$
$I \succeq_{\omega} J$	o intervalo I ω -domina o intervalo J
$I \sim_{\omega} J$	os intervalos I, J são ω -comparáveis
$\Gamma(I; B)$	a razão $\nu(I \cap B) / \nu(I)$
$n_0(f)$	veja a Observação 5.7
$n_1(f)$	veja a Observação 6.3
μ_s	a única medida f -automorfa de expoente s
$\text{Mult}(S^1)$	espaço das aplicações multicríticas do círculo de número de rotação irracional
μ_{\bullet}	aplicação $(s, f) \mapsto \mu_{s,f}$
$T_{n,s}$	o operador $\phi \mapsto \left[\sum_{i=0}^{n-1} (\phi \circ f^i) (Df^i)^s \right] / \left[\sum_{i=0}^{n-1} (Df^i)^s \right]$
$\underline{\phi}_s, \bar{\phi}_s$	$\liminf_n T_{n,s}\phi, \limsup_n T_{n,s}\phi$

Lista de Figuras

2.1	Na iteração de uma partição dinâmica, intervalos curtos se tornam longos e intervalos longos são repartidos.	7
5.1	Os intervalos Δ^* , $\tilde{\Delta}$ e $\hat{\Delta}$	16
5.2	Posições relativas dos intervalos $I_n, I_{n+1}, I_n^{q_{n+1}-q_n}, I_n^{q_{n+1}}, I_{n+1}^{q_n}, I_{n+1}^{q_{n+1}}, I_n^{2q_{n+1}}, I_{n+1}^{q_n+q_{n+1}}$ quando $a_{n+1} \geq 2$	20
5.3	Posições relativas dos intervalos $I_n, I_{n+1}, I_n^{q_{n+1}-q_n}, I_n^{q_{n+1}}, I_{n+1}^{q_n}, I_{n+1}^{q_{n+1}}, I_n^{2q_{n+1}}, I_{n+1}^{q_n+q_{n+1}}, I_{n+2}, I_{n+2}^{q_{n+1}}, I_{n+2}^{q_{n+1}+q_{n+2}}$ quando $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$	21
A.1	Caso $f^{q_n}(\Delta)$ esteja à direita de Δ , podemos tomar x_0 como o extremo esquerdo de Δ e obter $\hat{K}(x_0) \supset \hat{\Delta}$	44
A.2	As interseções entre $\hat{K}(x_0)$ e seus iterados futuros até $q_{n+1} - 1$, $a_n \geq 7$	46
A.3	A desigualdade da Razão Cruzada nos permite propagar comparabilidade para o passado.	48

Capítulo 1

Introdução

Sistemas dinâmicos unidimensionais suaves podem ser estudados sob várias perspectivas, como sua classificação topológica, suas propriedades de rigidez suave, o comportamento de suas órbitas individuais ou suas propriedades mensuráveis e ergódicas. Uma classe específica de tais sistemas que tem recebido significativa atenção em anos recentes é a classe das *aplicações multicríticas do círculo*.

Uma *aplicação multicrítica do círculo* é um homeomorfismo do círculo $f: S^1 \rightarrow S^1$ de classe C^3 que possui $N \geq 1$ pontos críticos (todos os quais têm *ordem finita*, veja o Capítulo 2). Estamos interessados exclusivamente em aplicações dessa classe sem pontos periódicos, isto é, nas aplicações de número de rotação irracional. A classificação dessas aplicações sob conjugação topológica se deve a Yoccoz [39], que provou que são sempre minimais, logo topologicamente equivalentes a uma rotação do círculo (veja o Teorema 2.4 abaixo). A rigidez suave dessas aplicações – incluindo o passo intermediário conhecido como *rigidez quasi-simétrica* – tem sido objeto de intensa pesquisa nas últimas décadas; é atualmente razoavelmente bem entendido, ao menos no caso unicrítico, devido aos esforços conjuntos de vários matemáticos, veja [4, 7, 13, 14, 15, 18, 19, 24, 25, 34, 35, 36, 37], ou o livro [9] e as referências lá citadas (observamos *en passant* que, bem recentemente, alguns resultados de rigidez para aplicações com *mais de um* ponto crítico foram obtidos, veja [5, 6, 38] e o recente pre-print [16]). O comportamento geométrico de órbitas individuais dessas aplicações foi examinado no artigo recente [11].

Do ponto de vista da medida, aplicações multicríticas do círculo também foram investigadas em detalhe. Tendo número de rotação irracional, essas são unicamente ergódicas. Foi provado por Khanin [23] (veja também [17]) que essa única medida de probabilidade invariante é puramente singular com relação à medida de Lebesgue (Haar) no círculo. Mais tarde, provou-se também (em [8]) que essa medida possui expoente de Lyapunov nulo. Em [10], os autores foram um pouco além e provaram que aplicações multicríticas do círculo não admitem medidas invariantes σ -finitas que sejam absolutamente contínuas com relação a Lebesgue.

No presente trabalho, estamos interessados em estudar outras propriedades ergódicas de aplicações críticas do círculo. A saber, estamos interessados na seguinte pergunta: “Uma aplicação multicrítica do círculo (minimal) pode admitir outras *distribuições* invariantes além de sua única medida de probabilidade invariante?”. A pergunta análoga em um contexto mais geral aparenta ter sido introduzida por Katok (para uma referência robusta, veja [22]). No entanto, nossa principal fonte de inspiração é o notável artigo de Avila e Kocsard [1] em que fornecem uma resposta bastante completa à pergunta análoga no contexto de *difeomorfismos* suaves do círculo.

Aqui, daremos uma resposta (parcial) à pergunta acima ao relacioná-la (seguindo a abordagem criada no artigo [29], de Navas e Triestino) à questão de existência e unicidade das chamadas *medidas automorfas* – para aplicações multicríticas do círculo – uma questão à

qual daremos aqui uma resposta completa.

Dado $s \in \mathbb{R}$, uma *medida automorfa* de expoente s para f é uma medida de probabilidade de Borel ν em S^1 cujo *pullback* $f^*\nu$ é equivalente a ν , com derivada de Radon-Nikodym dada por $(Df)^s$. Esse conceito é o análogo, para mapas unidimensionais reais, do conceito de *medida conforme* introduzida por Sullivan em [32] no contexto de aplicações racionais – que, por sua vez, foi inspirado por um conceito similar introduzido por Patterson [30] e o próprio Sullivan [31] no contexto de grupos Fuchsianos e Kleinianos.

A definição precisa de medida automorfa será dada no Capítulo 3 (Definição 3.1). Nos anos 80, foi provado por Douady e Yoccoz (embora somente publicado anos mais tarde, em [3] – veja também [26]) que, para todo C^{1+bv} -difeomorfismo do círculo f e todo número real s , existe uma única medida automorfa de expoente s para f . No presente trabalho, provaremos o seguinte resultado.

Teorema A (Existência e unicidade de medidas automorfas). *Seja f uma aplicação multicrítica do círculo. Para qualquer $s \geq 0$ existe uma única medida automorfa de expoente s para f . Essa medida não possui átomos, tem suporte total no círculo e é ergódica sob f .*

1.1 Aplicações

No Capítulo 8 do presente trabalho, daremos duas aplicações do Teorema A que descreveremos agora.

Como é usual, para nós, uma *1-distribuição* em S^1 é um funcional linear contínuo definido no espaço das funções $S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 (veja §8.1 para as definições exatas). Como consequência do Teorema A, obtemos o seguinte resultado.

Teorema B (Não há 1-distribuições invariantes). *Seja f uma aplicação multicrítica do círculo de número de rotação irracional e única medida de probabilidade invariante μ . Então o espaço $\mathcal{D}'_1(f)$ das distribuições f -invariantes de ordem até 1 é gerado por μ , isto é,*

$$\mathcal{D}'_1(f) = \mathbb{R}\mu.$$

Em outras palavras, f não admite distribuições invariantes de ordem até 1 diferentes de (um múltiplo escalar de) sua única medida invariante. A prova do Teorema B será dada na seção 8.1, e seguirá a abordagem desenvolvida por Navas e Triestino em [29] para C^{1+bv} -difeomorfismos. Gostaríamos de observar que essa abordagem é aplicável exclusivamente à análise de distribuições invariantes de ordem até 1. Como aplicações multicríticas do círculo são assumidas ao menos C^3 regulares, seria desejável também descartar outras distribuições invariantes de ordem até 3. Infelizmente, não sabemos ainda como fazê-lo. Ademais, se consideramos aplicações multicríticas de classe C^∞ , ou até C^ω , ainda não sabemos como investigar suas distribuições invariantes de ordens mais altas. Sejamos mais precisos: um sistema dinâmico C^∞ é dito *distribucionalmente unicamente ergódico* se admite uma única distribuição invariante a menos de multiplicação por um escalar. Em [1], Avila e Kocsard mostraram que todo C^∞ -difeomorfismo do círculo de número de rotação irracional é distribucionalmente unicamente ergódico. Acreditamos ser esse também o caso para aplicações multicríticas de classe C^∞ mas, como já mencionamos, não possuímos até o presente momento uma estratégia para provar esse resultado. Não obstante, ao melhor de nossos conhecimentos, o Teorema B fornece os primeiros exemplos de dinâmicas sem distribuições invariantes de ordem 1 fora do domínio dos fluxos e difeomorfismos. Por fim, gostaríamos de observar que a condição de ordem finita em cada um dos pontos críticos de f (veja o Capítulo 2 a seguir) é essencial para a prova do Teorema B. Com efeito, vale o seguinte resultado.

Teorema C. *Para qualquer irracional $\rho \in (0, 1)$ dado, existe um homeomorfismo $f: S^1 \rightarrow S^1$ de classe C^∞ , com número de rotação $\rho(f) = \rho$, que admite distribuições invariantes de ordem 1 (diferentes de um múltiplo escalar de sua única medida invariante).*

Os exemplos do Teorema C são aqueles construídos por Hall em [20], veja §8.2 para os detalhes.

Ademais, o Teorema A implica o seguinte aprimoramento da desigualdade de Denjoy-Koksma para observáveis absolutamente contínuos.

Teorema D (Denjoy-Koksma aprimorada). *Seja f uma aplicação multicrítica do círculo de número de rotação irracional ρ e única medida de probabilidade invariante μ , e seja $\phi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ absolutamente contínua. Se $\{q_n\}$ é a sequência dos denominadores das melhores aproximações racionais de ρ , temos que*

$$q_n \left\| \frac{1}{q_n} \sum_{i=0}^{q_n-1} \phi \circ f^i - \int_{S^1} \phi d\mu \right\|_{C^0(S^1)} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \text{ tende ao } \infty.$$

O Teorema D será demonstrada na §8.3, seguindo as mesmas linhas de Avila e Kocsard [1, Section 3] e Navas [28, Section 2] para difeomorfismos do círculo.

1.2 Organização do trabalho

O trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 2, apresentamos uma reunião de tópicos prévios da teoria de aplicações críticas do círculo que serão usados ao longo do texto. No capítulo 3, definimos medidas automorfas de expoente $s \geq 0$ para aplicações críticas f , e exploramos algumas de suas propriedades mais elementares; observamos que, nesse ponto do trabalho, ainda não estará claro que medidas f -automorfas de fato existem. Isso é feito no capítulo 4, no qual provamos que medidas f -automorfas de expoente s de fato existem para todo $s > 0$. No capítulo 5, obtemos estimativas fundamentais para medidas f -automorfas, que esperamos serem de interesse em si em futuros trabalhos. No capítulo 6, fazemos uso de tais estimativas para provar que qualquer medida f -automorfa de expoente positivo é ergódica com respeito a f , e como consequência, obtemos uma prova simples da unicidade presente no enunciado do Teorema A. No capítulo 7, após terminada a demonstração do Teorema A, fazemos uso desse teorema para provar alguns fatos adicionais sobre medidas f -automorfas. Por fim, no capítulo 8, mostramos que o Teorema A implica ambos os Teoremas B e D, e brevemente explicamos a prova do Teorema C. As provas de alguns lemas técnicos na combinatória de aplicações críticas e consequentes estimativas de distorção são postergadas ao apêndice A.

Em uma nota final nessa introdução, observamos que uma parte significativa desse trabalho é extraída de nosso recente artigo científico em estágio de submissão para publicação, disponível como pre-print em [12].

Capítulo 2

Aplicações Multicríticas do Círculo

Nesse capítulo, definimos as aplicações que são o principal objeto de estudo desse trabalho, e enunciaremos alguns resultados prévios que serão usados ao longo do texto. Começamos com a noção de *ponto crítico de ordem finita*.

Definição 2.1. Dizemos que um ponto crítico c de uma aplicação unidimensional f de classe C^3 tem *ordem finita* se existem $d > 1$ (chamado de *grau* de c), uma vizinhança W_c do ponto crítico e um C^3 -difeomorfismo $\phi_c: W_c \rightarrow \phi_c(W_c) \subset \mathbb{R}$ tais que $\phi_c(c) = 0$ e, para todo $x \in W_c$,

$$f(x) = f(c) + \phi_c(x) |\phi_c(x)|^{d-1}.$$

O grau d por vezes é também chamado de ordem ou criticalidade de c .

Dessa forma local segue imediatamente a seguinte estimativa (veja [9, chapter 5]).

Proposição 2.2. *Seja c um ponto crítico de ordem d de uma aplicação unidimensional f de classe C^3 . Existe um intervalo $U = U_c \subset W_c$ que contém c tal que, para qualquer intervalo não-vazio $J \subset U$ e $x \in J$,*

$$Df(x) \leq 3d \frac{|f(J)|}{|J|}. \quad (2.1)$$

Definição 2.3. Uma *aplicação multicrítica do círculo* é um homeomorfismo do círculo de classe C^3 e que preserva a orientação com um número finito de pontos críticos, todos os quais têm ordem finita.

Sendo um homeomorfismo do círculo que preserva a orientação, uma aplicação multicrítica do círculo f possui um número de rotação bem definido. Focaremos no caso em que f não apresenta órbitas periódicas (i.e., $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$). Notavelmente, esses mapas não possuem intervalos errantes. Mais precisamente, temos o seguinte resultado fundamental.

Teorema 2.4. *Seja f uma aplicação multicrítica do círculo de número de rotação irracional ρ . Então f é topologicamente conjugada à rotação rígida R_ρ , i.e., existe um homeomorfismo $h: S^1 \rightarrow S^1$ tal que $h \circ f = R_\rho \circ h$.*

O Teorema 2.4 foi provado por Yoccoz em [39], veja também [9, chapter 6].

2.1 Razões cruzadas

Dados dois intervalos $M \subset T \subset S^1$ com M tendo fecho compacto no interior de T (denotado por $M \Subset T$), denotemos por L e R as duas componentes conexas de $T \setminus M$. Definimos a *razão cruzada* do par M, T por

$$[M, T] = \frac{|L| |R|}{|L \cup M| |M \cup R|} \in (0, 1).$$

Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$ uma aplicação contínua, e seja $U \subset S^1$ um aberto tal que $f|_U$ seja um homeomorfismo sobre sua imagem. Se $M \subset T \subset U$ são intervalos, com $M \Subset T$, a *distorção de razão cruzada* do mapa f sobre o par de intervalos (M, T) é definida como a razão

$$\text{CrD}(f; M, T) = \frac{[f(M), f(T)]}{[M, T]}.$$

Usaremos a seguinte regra da cadeia para distorção de razão cruzada de iterados.

$$\text{CrD}(f^j; M, T) = \prod_{i=0}^{j-1} \text{CrD}(f; f^i(M), f^i(T)). \quad (2.2)$$

Dada uma família de intervalos \mathcal{F} de S^1 e um inteiro positivo m , dizemos que \mathcal{F} possui *multiplicidade de interseção limitada por m* se cada $x \in S^1$ pertence a no máximo m elementos distintos de \mathcal{F} .

Teorema 2.5 (Desigualdade da Razão Cruzada). *Dada uma aplicação multicrítica do círculo f , existe uma constante $C_0 = C_0(f) > 1$, que depende somente de f , com a seguinte propriedade. Se $M_i \Subset T_i \subset S^1$, em que i percorre um conjunto finito de índices \mathcal{I} , são intervalos do círculo tais que a família $\{T_i : i \in \mathcal{I}\}$ tem multiplicidade de interseção limitada por m , então*

$$\prod_{i \in \mathcal{I}} \text{CrD}(f; M_i, T_i) \leq C_0^m. \quad (2.3)$$

A Desigualdade da Razão Cruzada foi obtida originalmente por Świątek em [33]. Estimativas similares foram obtidas anteriormente por Yoccoz em [39], em direção à prova do Teorema 2.4 (veja [27, chapter IV] e [9, chapter 5] para uma discussão aprofundada).

2.2 O princípio de distorção de Koebe

Dados dois intervalos $M \subset T \subset S^1$ com M tendo fecho compacto no interior de T , recorde que denotamos por L e R as componentes conexas de $T \setminus M$. O *espaço de M em T* é definido como o número

$$\tau = \min \left\{ \frac{|L|}{|M|}, \frac{|R|}{|M|} \right\}. \quad (2.4)$$

Dados intervalos M, T com $M \Subset T$ e $k \geq 1$ tais que $f^k : T \rightarrow f^k(T)$ é um C^1 -difeomorfismo sobre sua imagem, é possível estimar a distorção de f^k em M independentemente de k , desde que as imagens intermediárias $T, f(T), \dots, f^{k-1}(T)$ satisfaçam uma condição fraca de somabilidade e o espaço de $f^k(M)$ em $f^k(T)$ seja limitado por baixo independentemente de k . Esse é o conteúdo do princípio de distorção de Koebe, e como é de se esperar, é um resultado de importância fundamental no controle do comportamento geométrico de grandes iterados do mapa f .

Lema 2.6 (Princípio de distorção de Koebe). *Para cada $\ell, \tau > 0$ e cada aplicação multicrítica do círculo $f : S^1 \rightarrow S^1$, existe uma constante $K = K(\ell, \tau, f) > 1$ com a seguinte propriedade. Se $k \geq 1$, $M \Subset T \subset S^1$ são intervalos tais que $T, f(T), \dots, f^{k-1}(T)$ não contêm nenhum ponto crítico de f ,*

$$\sum_{j=0}^{k-1} |f^j(T)| \leq \ell \quad (2.5)$$

e o espaço de $f^k(M)$ em $f^k(T)$ é no mínimo τ , então

$$K^{-1} \leq \frac{Df^k(x)}{Df^k(y)} \leq K \quad \text{para quaisquer } x, y \in M. \quad (2.6)$$

Uma prova do princípio de distorção de Koebe é dada em [27, p. 295].

Observação 2.7. Para nós, a seguinte observação elementar relacionando a hipótese de somabilidade do princípio de distorção de Koebe com multiplicidade de interseção será crucial: se a família $T, f(T), \dots, f^{k-1}(T)$ tem multiplicidade de interseção limitada por m , então vale a (2.5) com $\ell = m$. Essa observação também é válida no contexto mais geral de medidas de Borel finitas em S^1 : se ν é uma medida de Borel finita no círculo, $m \geq 1$ e \mathcal{F} é uma família de intervalos do círculo com multiplicidade de interseção limitada por m , então

$$\sum_{I \in \mathcal{F}} \nu(I) \leq m \nu(S^1).$$

Observação 2.8. O conceito de espaço definido acima tem a seguinte relação interessante com a razão cruzada que se mostrará relevante no Apêndice A. Dados intervalos $M \Subset T \subset S^1$, seja τ o espaço de M em T . Então, como mostra um cálculo padrão,

$$[M, T] \leq (1 + \tau^{-1})^{-1}$$

Como $t \mapsto (1 + t^{-1})^{-1}$ é crescente, segue que de uma cota inferior para $[M, T]$ imediatamente obtemos uma cota inferior para o espaço de M em T .

2.3 Combinatória e estimativas reais a priori

Pelo resto deste texto, $f: S^1 \rightarrow S^1$ será uma aplicação multicrítica do círculo (de classe C^3 e) de número de rotação irracional. Ademais, $N \geq 1$ será o número de pontos críticos de f , $\text{Crit}(f) = \{c_1, \dots, c_N\}$ será o conjunto de pontos críticos de f , e d_1, \dots, d_N suas criticalidades correspondentes.

Seja ρ o número de rotação de f . Como é bem sabido, ρ possui uma expansão em fração contínua infinita unicamente determinada, de forma

$$\rho(f) = [a_0, a_1, \dots] = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Truncando a expansão no nível $n - 1$, obtemos uma sequência de racionais p_n/q_n , os *convergentes* do irracional ρ .

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}] = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_{n-1}}}}}$$

É bem conhecido da teoria de aproximação diofantina que os p_n/q_n são, de certa forma, as melhores aproximações possíveis de ρ por racionais, no seguinte sentido:

$$\text{Se } 0 < q < q_n \text{ então } \left| \rho - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| \rho - \frac{p}{q} \right|, \quad \text{para todo } p \in \mathbb{Z}.$$

A sequência dos numeradores satisfaz

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 1, \quad p_{n+1} = a_n p_n + p_{n-1} \quad \text{para } n \geq 1.$$

Analogamente, a sequência de denominadores, que chamamos de *tempos de retorno*, satisfaz

$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_0, \quad q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1} \quad \text{para } n \geq 1.$$

Para cada $x \in S^1$ e $n \geq 0$, seja $I_n(x)$ o intervalo fechado com extremos x e $f^{q_n}(x)$ contendo $f^{q_{n+2}}(x)$ (observe que $I_n(x)$ não contém nenhum outro iterado $f^j(x)$ com $1 \leq j \leq q_n - 1$). Denotaremos $I_n^j(x) = f^j(I_n(x))$ para quaisquer j e n .

Lema 2.9. *Para cada $n \geq 0$ e $x \in S^1$, a coleção de intervalos*

$$\mathcal{P}_n(x) = \{f^i(I_n(x)) : 0 \leq i \leq q_{n+1} - 1\} \cup \{f^j(I_{n+1}(x)) : 0 \leq j \leq q_n - 1\}$$

forma uma partição do círculo (modulo extremos), dita a n -ésima partição dinâmica associada ao ponto x . Os intervalos da forma $f^i(I_n(x))$ são ditos longos, e os intervalos da forma $f^j(I_{n+1}(x))$ são ditos curtos.

Para uma prova do lema anterior, veja [9, chapter 6]. A nomenclatura de intervalos *longos* e *curtos* advém das partições correspondentes à rotação, em que os intervalos longos têm de fato comprimento maior que os intervalos curtos.

Observe que, para cada n , a partição $\mathcal{P}_{n+1}(x)$ é um refinamento não-estrito de $\mathcal{P}_n(x)$ (veja a figura 2.1 a seguir): os intervalos curtos de $\mathcal{P}_n(x)$ se tornam intervalos longos em $\mathcal{P}_{n+1}(x)$, enquanto cada um dos intervalos longos de $\mathcal{P}_n(x)$ são particionados em um intervalo curto a nível $n+1$ (um iterado de $I_{n+2}(x)$) e a_{n+1} intervalos longos a nível $n+1$ (iterados de $I_{n+1}(x)$ entre q_n e $q_{n+2} - 1$). Por outro lado, a partição $\mathcal{P}_{n+2}(x)$ é um refinamento estrito de $\mathcal{P}_n(x)$.

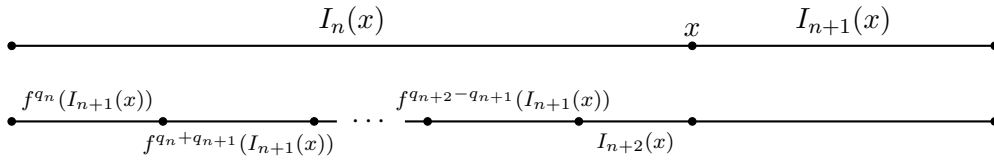


Figura 2.1: Na iteração de uma partição dinâmica, intervalos curtos se tornam longos e intervalos longos são repartidos.

Teorema 2.10 (Estimativas reais *a priori*). *Existe uma constante $C = C(f) > 1$, dependendo somente de f , tal que o seguinte é válido para cada ponto crítico c de f . Para todo $n \geq 0$ e para qualquer par $I, J \in \mathcal{P}_n(c)$ de átomos adjacentes, temos*

$$C^{-1} |J| \leq |I| \leq C |J|. \quad (2.7)$$

Observe que, para uma rotação rígida e qualquer $x \in S^1$, temos $|I_n| = a_{n+1} |I_{n+1}| + |I_{n+2}|$. Se $a_{n+1} \gg 1$, então o comprimento de I_n é muito maior do que o de I_{n+1} . Assim, mesmo para rotações rígidas, estimativas reais *a priori* não são em geral válidas.

O Teorema 2.10 foi obtido por Herman [21], a partir de estimativas devido a Świątek [33]. Uma prova detalhada pode ser encontrada em [9, chapter 6].

O Teorema 2.10 tem a seguinte consequência (veja [9, chapter 8]).

Lema 2.11. *Existe $C_1 = C_1(f) > 0$ tal que, para quaisquer $x \in S^1$ e $n \geq 0$, temos $Df^{q_n}(x) \leq C_1$.*

Uma outra consequência dos estimativas reais *a priori* que se mostrará útil adiante (veja o capítulo 4) é a seguinte.

Lema 2.12 (Expoente de Lyapunov nulo). *Seja μ a única medida de probabilidade f -invariante. Então $\log Df \in L^1(\mu)$, e ademais,*

$$\int_{S^1} \log Df d\mu = 0.$$

Para uma prova do Lema 2.12, veja [9, section 8.3].

2.3.1 Dominação e comparabilidade

Para simplificar tanto o entendimento quanto futuros cálculos envolvendo as estimativas reais *a priori*, introduzimos as noções de dominação e comparabilidade *modulo* f de intervalos.

Dados dois intervalos do círculo I, J , diremos que I *domina* J *modulo* f , e denotaremos $I \geq J$, se existe uma constante $K > 1$ que depende somente de f tal que $|J| \leq K|I|$. Se tanto $I \geq J$ quanto $J \geq I$ (i.e. se existe $K = K(f) > 1$ tal que $K^{-1}|I| \leq |J| \leq K|I|$), diremos que I e J são *comparáveis modulo* f (denotado por $I \asymp J$).

Assim, o Teorema 2.10 afirma precisamente que átomos adjacentes de uma partição dinâmica associada a um ponto crítico são sempre comparáveis.

Observe que nenhuma das relações de dominação e comparabilidade de intervalos *modulo* f é transitiva: se somos dados uma cadeia de dominação $I_1 \geq I_2 \geq \dots \geq I_k$, só podemos dizer que $I_1 \geq I_k$ se o comprimento k da cadeia é limitado por uma constante que depende somente de f (analogamente para comparabilidade).

Capítulo 3

Medidas Automorfas

Nesse capítulo, definimos medidas automorfas de expoente não-negativo para aplicações multicríticas do círculo. Provamos que essas medidas têm suporte total no círculo (Proposição 3.3) e são não-atômicas (Lema 3.4).

Definição 3.1 (Medidas automorfas). Seja $s \geq 0$. Uma *medida automorfa de expoente s para f* , ou medida f -automorfa de expoente s , é uma medida de probabilidade de Radon ν em S^1 tal que, para toda função contínua $\phi \in C^0(S^1)$,

$$\int_{S^1} \phi d\nu = \int_{S^1} (\phi \circ f) (Df)^s d\nu. \quad (3.1)$$

Denotamos o conjunto de medidas f -automorfas de expoente s por \mathcal{A}_s .

Equivalentemente (veja a Proposição 3.2 abaixo), uma medida de probabilidade de Radon ν em S^1 é f -automorfa de expoente s se, e somente se, a medida *pullback* $f^*\nu$ é equivalente a ν , com derivada de Radon-Nikodym

$$\frac{df^*\nu}{d\nu} = (Df)^s.$$

Observe que desconsideramos a possibilidade de expoentes negativos, i.e. $s < 0$. Enquanto medidas automorfas de expoente negativo são um conceito perfeitamente válido e, de fato, sempre existem no caso de C^1 -difeomorfismos, estas são significativamente mais difíceis de tratar no caso crítico. De fato, se $s < 0$, então $(Df)^s$ é ilimitada em qualquer vizinhança de um ponto crítico de f , e portanto, não é possível assumir que $(\phi \circ f) (Df)^s$ será ν -integrável para quaisquer $\phi \in C^0(S^1)$ e ν medida de probabilidade de Radon em S^1 .

Também observamos que a noção de medidas automorfas é perfeitamente válida em qualquer dimensão, desde que a derivada unidimensional $Df(x)$ seja substituída pelo Jacobiano de f em x , i.e. o módulo do determinante da matriz $Df(x)$. Como mencionamos na introdução, para sistemas unidimensionais complexos essa é precisamente a noção de *medida conforme* introduzida por Sullivan em [32]. Nesse trabalho, no entanto, iremos evidentemente nos restringir ao caso unidimensional real.

Observe que, no caso $s = 0$, uma medida f -automorfa de expoente 0 é simplesmente uma medida de probabilidade f -invariante. Assim, o caso $s = 0$ é bem entendido, e o Teorema A nesse caso é precisamente a afirmação de que f (como qualquer homeomorfismo do círculo que preserva a orientação com número de rotação irracional) é unicamente ergódica. Consequentemente, no decorrer desse texto, focaremos no caso $s > 0$.

Pelo resto desse capítulo, sejam $s > 0$ e $\nu \in \mathcal{A}_s$ fixados.

Proposição 3.2. Para quaisquer $\phi \in L^1(\nu)$ e $n \geq 1$, $(\phi \circ f^n)(Df^n)^s \in L^1(\nu)$ e

$$\int_{S^1} \phi d\nu = \int_{S^1} (\phi \circ f^n)(Df^n)^s d\nu. \quad (3.2)$$

Demonstração. Observe que a (3.2) vale trivialmente se ϕ é contínua: basta aplicar a (3.1) indutivamente.

Se $\phi \geq 0$ é semicontínua por baixo, existe uma sequência crescente $\{\phi_k\} \subset C^0(S^1)$, com $\phi_k \geq 0$ para todo k , convergindo monotonicamente a ϕ . Consequentemente, $(\phi_k \circ f^n)(Df^n)^s \rightarrow (\phi \circ f^n)(Df^n)^s$ monotonicamente (pois $U_n: u \mapsto (u \circ f^n)(Df^n)^s$ é um operador positivo). Assim, pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\int_{S^1} (\phi \circ f^n)(Df^n)^s d\nu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{S^1} (\phi_k \circ f^n)(Df^n)^s d\nu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{S^1} \phi_k d\nu = \int_{S^1} \phi d\nu \quad (3.3)$$

Se $\phi \in L^1(\nu)$, $\phi \geq 0$, então (como ν é de Radon e U_n é linear, positivo e preserva semicontinuidade por baixo),

$$\begin{aligned} \int_{S^1} \phi d\nu &= \inf \left\{ \int_{S^1} \psi d\nu \mid \psi \geq \phi \text{ é semicontínua por baixo} \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_{S^1} U_n \psi d\nu \mid \psi \geq \phi \text{ é semicontínua por baixo} \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_{S^1} \psi d\nu \mid \psi \geq U_n \phi \text{ é semicontínua por baixo} \right\} \\ &= \int_{S^1} (\phi \circ f^n)(Df^n)^s d\nu \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde usamos a (3.3).

Finalmente, para $\phi \in L^1(\nu)$ geral, basta aplicar o resultado anterior às partes positiva e negativa de ϕ . ■

Assim, como prometido, $f^*\nu$ é equivalente a ν , com derivada de Radon-Nikodym dada por $(Df)^s$. Ademais, para todo $n \geq 1$ vale

$$\frac{d(f^n)^*\nu}{d\nu} = (Df^n)^s$$

Em particular, observe que, sob iteração, a ν -medida de um boreliano $A \subset S^1$ tem comportamento dado pela seguinte regra:

$$\nu(f^n(A)) = \int_A (Df^n)^s d\nu, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (3.5)$$

Proposição 3.3. *A medida ν tem suporte total no círculo.*

Demonstração. Visto que a medida *pullback* $f^*\nu$ é equivalente a ν , conjuntos ν -nulos são aplicados sob f em conjuntos ν -nulos (veja a (3.5) acima). Mas, como f é topologicamente conjugada a uma rotação irracional, a órbita positiva de um intervalo aberto eventualmente cobre o círculo, e segue que esse intervalo há de ter ν -medida positiva. ■

Denotamos por

$$\text{Crit}^\pm(f) = \bigcup_{j=1}^N \mathcal{O}_f(c_j)$$

a união das órbitas críticas de f , e seu complemento $S^1 \setminus \text{Crit}^\pm(f)$ por Λ . Observe que Λ é um boreliano f -invariante e seu complemento é enumerável (mas denso!).

Lema 3.4. *A medida ν não possui átomos. Em particular, Λ possui ν -medida total no círculo.*

Demonstração. Argumentando por contradição, suponha que existe algum $x_0 \in S^1$ tal que $\nu(\{x_0\}) = \delta > 0$, e observe que a (3.5) implica que

$$\nu(\{x_0\}) = \nu(\{f^{-n}(x_0)\}) (Df^n(f^{-n}(x_0)))^s \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, x_0 não pode estar na órbita futura de nenhum ponto crítico de f . Ademais, como ν é uma medida de probabilidade e f não possui órbitas periódicas,

$$1 \geq \sum_{n=0}^{\infty} \nu(\{f^{-n}(x_0)\}) = \delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(Df^n(f^{-n}(x_0)))^s} \geq \delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(Df^{q_n}(f^{-q_n}(x_0)))^s}.$$

No entanto, do Lema 2.11, temos $Df^{q_n}(f^{-q_n}(x_0)) \leq C_1$ para todo $n \geq 0$. Assim, obtemos

$$1 \geq \delta \sum_{n=0}^{\infty} C_1^{-s} = \infty,$$

que é a contradição desejada. ■

Capítulo 4

Existência

Nesse capítulo mostramos que, para todo $s > 0$, \mathcal{A}_s é não-vazio (a parte de existência do Teorema A). Ao longo de todo o capítulo, s será um número positivo fixado.

Definimos $\Sigma: S^1 \rightarrow [0, \infty]$ por

$$\Sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (Df^n(x))^s. \quad (4.1)$$

Observe que se $f^k(x) \in \text{Crit}(f)$ para algum $k \geq 0$, então $\Sigma(x) < \infty$, pois é simplesmente uma soma finita. Consequentemente, existe um subconjunto denso de S^1 (a união das órbitas passadas dos pontos críticos de f) no qual Σ é finita. No entanto, como mostra o próximo lema, há pontos do círculo em que Σ diverge. Recorde que estamos denotando ao longo de todo o texto a única medida de probabilidade f -invariante por μ .

Lema 4.1. $\Sigma = \infty$ em μ -quase todo ponto.

Demonstração. Mostraremos que o conjunto

$$A := \{x \in \Lambda \mid \Sigma(x) = \infty\} \quad (4.2)$$

tem μ -medida total. Para tanto, primeiro note que, para todo $x \in S^1$,

$$\Sigma(x) = 1 + (Df(x))^s \Sigma(f(x)).$$

Segue que A é f -invariante, e portanto, pela ergodicidade de μ , é suficiente mostrar que $\mu(A) > 0$.

Para cada $n \geq 0$, $(Df^n)^s \in C^2(S^1)$, logo podemos aplicar a desigualdade de Jensen para obter

$$\log \left(\int_{S^1} (Df^n)^s d\mu \right) \geq \int_{S^1} \log (Df^n)^s d\mu = s \sum_{i=0}^{n-1} \int_{S^1} \log Df \circ f^i d\mu.$$

Como μ é f -invariante,

$$\log \left(\int_{S^1} (Df^n)^s d\mu \right) \geq s \sum_{i=0}^{n-1} \int_{S^1} \log Df d\mu = 0, \quad (4.3)$$

onde usamos o Lema 2.12. Assim,

$$\int_{S^1} (Df^n)^s d\mu \geq 1$$

para todo $n \geq 0$, o que implica, em particular, que

$$\int_{S^1} \sum_{k=0}^{n-1} (Df^{q_k})^s d\mu \geq n \quad (4.4)$$

para todo $n \geq 1$.

Argumentamos por contradição. Suponha que $\mu(A) = 0$; então Σ deve ser finita em μ -quase todo ponto. Para cada $m \geq 1$, seja

$$X_m := \{ x \in S^1 \mid \Sigma(x) \leq m \} . \quad (4.5)$$

Como estamos assumindo que Σ é finita μ -q.t.p.,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(X_m) = 1. \quad (4.6)$$

Seja $0 < \epsilon < C_1^{-s}$, em que $C_1 = C_1(f)$ é a constante do Lema 2.11. Da (4.6), existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \geq m_0$, $\mu(S^1 \setminus X_m) \leq \epsilon$.

Mas então, das (4.4), (4.5) e do Lema 2.11, temos que, para quaisquer $n \geq 1$ e $m \geq m_0$,

$$\begin{aligned} n &\leq \int_{S^1} \sum_{k=0}^{n-1} (Df^{q_k})^s d\mu = \int_{X_m} \sum_{k=0}^{n-1} (Df^{q_k})^s d\mu + \int_{S^1 \setminus X_m} \sum_{k=0}^{n-1} (Df^{q_k})^s d\mu \\ &\leq \int_{X_m} \Sigma d\mu + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{S^1 \setminus X_m} (Df^{q_k})^s d\mu \leq m \mu(X_m) + n C_1^s \mu(S^1 \setminus X_m) \\ &\leq m + n C_1^s \epsilon, \end{aligned} \quad (4.7)$$

o que implica que $m \geq n(1 - C_1^s \epsilon)$. Como $1 - C_1^s \epsilon > 0$, a contradição aparece ao deixar $n \rightarrow \infty$ mantendo m fixo. \blacksquare

Na verdade, a única coisa que requeriremos do conjunto A para a prova a seguir é o fato que este é não-vazio, o que certamente segue do Lema 4.1.

Prova do Teorema A, existência. Considere a função Σ e o conjunto A do Lema 4.1. Seja $x \in A$ fixado e, para cada $n \geq 1$, seja

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{q_n-1} (Df^i(x))^s .$$

Considere a medida de probabilidade atômica em S^1 dada por

$$\mu_{s,x,n} := \frac{1}{S_n(x)} \sum_{i=0}^{q_n-1} (Df^i(x))^s \delta_{f^i(x)} .$$

Por compacidade na topologia fraca-* do conjunto $\mathcal{P}(S^1)$ de medidas de probabilidade de Radon no círculo (Teorema de Alaoglu), existem uma sequência crescente $(n_k) \subset \mathbb{N}$ e $\mu_{s,x} \in \mathcal{P}(S^1)$ tais que, para toda $\phi \in C^0(S^1)$,

$$\int_{S^1} \phi d\mu_{s,x,n_k} \longrightarrow \int_{S^1} \phi d\mu_{s,x} .$$

Em particular, como $(\phi \circ f)(Df)^s \in C^0(S^1)$,

$$\int_{S^1} (\phi \circ f)(Df)^s d\mu_{s,x,n_k} \longrightarrow \int_{S^1} (\phi \circ f)(Df)^s d\mu_{s,x}$$

para toda $\phi \in C^0(S^1)$. Afirmamos que $\mu_{s,x}$ é f -automorfa de expoente s . De fato, para todos $k \geq 1$ e $\phi \in C^0(S^1)$, temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{S^1} [\phi - (\phi \circ f)(Df)^s] d\mu_{s,x,n_k} \right| \\ &= \frac{1}{S_{n_k}(x)} \left| \sum_{i=0}^{q_{n_k}-1} (Df^i(x))^s [\phi(f^i(x)) - \phi(f^{i+1}(x))(Df(f^i(x)))^s] \right| \\ &= \frac{1}{S_{n_k}(x)} |\phi(x) - \phi(f^{q_{n_k}}(x))(Df^{q_{n_k}}(x))^s| \\ &\leq \|\phi\|_{C^0} [1 + (Df^{q_{n_k}}(x))^s] \frac{1}{S_{n_k}(x)} \leq \|\phi\|_{C^0} (1 + C_1^s) \frac{1}{S_{n_k}(x)}, \end{aligned}$$

em que usamos o Lema 2.11. Consequentemente,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{S^1} \phi d\mu_{s,x} - \int_{S^1} (\phi \circ f)(Df)^s d\mu_{s,x} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{S^1} [\phi - (\phi \circ f)(Df)^s] d\mu_{s,x,n_k} \right| \\ &\leq \|\phi\|_{C^0} (1 + C_1^s) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{S_{n_k}(x)} = 0, \end{aligned}$$

pois $x \in A$. Assim, $\mu_{s,x}$ é f -automorfa de expoente s , o que conclui a prova. ■

Observação 4.2. Em [3], Douady e Yoccoz provam a parte de existência Teorema A no contexto de difeomorfismos através de outra abordagem. Primeiro, definem um operador contínuo $U_{s,f}: \mathcal{M}(S^1) \rightarrow \mathcal{M}(S^1)$ no espaço $\mathcal{M}(S^1)$ de medidas de Radon com sinal finitas no círculo (equipado com a topologia fraca-*) por

$$\int_{S^1} \phi d(U_{s,f}\nu) := \frac{1}{\int_{S^1} (Df)^s d\nu} \int_{S^1} (\phi \circ f)(Df)^s d\nu.$$

Evidentemente, o operador $U_{s,f}$ mantém invariante o conjunto compacto convexo $\mathcal{P}(S^1)$ de medidas de probabilidade de Radon no círculo. Os autores então fazem uso do Teorema de Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff para concluir que $U_{s,f}$ possui um ponto fixo $\mu_s \in \mathcal{P}(S^1)$, e através de algumas estimativas, concluem que esse ponto fixo μ_s há de ser f -automorfo de expoente s .

Infelizmente, essa abordagem falha no caso crítico. De fato, se $\nu = \delta_c$ é uma massa pontual em um ponto crítico c de f , então $U_{s,f}\nu$ não está bem-definido, pois

$$\int_{S^1} (Df)^s d\nu = (Df(c))^s = 0.$$

Ademais, se retiramos de $\mathcal{P}(S^1)$ as massas pontuais nos pontos críticos de f , perdemos compacidade, que é essencial para a aplicação do Teorema de Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff.

Capítulo 5

Estimativas para Medidas Automorfas

No atual capítulo, nos aprofundamos na estrutura fina das medidas f -automorfas de expoente $s > 0$. Por todo o capítulo, $s > 0$ e $\nu \in \mathcal{A}_s$ são fixados, e B denotará um boreliano f -invariante qualquer.

No que segue, a razão

$$\frac{\nu(I \cap B)}{|I|^s} \quad (5.1)$$

em que I é um intervalo, terá um papel fundamental. Correspondentemente, atribuiremos a ela uma notação especial:

$$\omega(I) := \frac{\nu(I \cap B)}{|I|^s}. \quad (5.2)$$

O seguinte teorema é o principal resultado do capítulo.

Teorema 5.1. *Existe uma constante $K = K(f, s) > 1$ com a seguinte propriedade. Para qualquer ponto crítico c de f , n suficientemente grande e $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{P}_n(c)$, temos:*

(a) *Se Δ_1, Δ_2 são ambos átomos longos ou ambos átomos curtos de $\mathcal{P}_n(c)$, então*

$$K^{-1} \omega(\Delta_2) \leq \omega(\Delta_1) \leq K \omega(\Delta_2). \quad (5.3)$$

(b) *Se Δ_1 é um átomo curto e Δ_2 é um átomo longo de $\mathcal{P}_n(c)$, então*

$$\omega(\Delta_1) \leq K \omega(\Delta_2). \quad (5.4)$$

5.1 Estimativas fundamentais de distorção

Nesse ponto, precisamos introduzir um pouco de notação. Pelo restante desse texto, c denotará um ponto crítico de f (fixado), e escreveremos simplesmente \mathcal{P}_n no lugar de $\mathcal{P}_n(c)$ e I_n no lugar de $I_n(c)$. Ademais, se $I \subset S^1$ é um intervalo, escreveremos I^k significando $f^k(I)$. Para qualquer $n \geq 0$ e qualquer átomo $\Delta \in \mathcal{P}_n$, denotaremos por Δ^* a união de Δ com seus dois átomos adjacentes, L e R , em \mathcal{P}_n . Por exemplo, se $\Delta = I_n$, então

$$\Delta^* = I_{n+1} \cup I_n \cup I_n^{q_n}.$$

Também denotaremos por $\tilde{\Delta}$ o seguinte intervalo. Primeiro, decomponha Δ como uma reunião de átomos de \mathcal{P}_{n+2} e sejam L_1, R_1 os átomos extremos à esquerda e à direita de \mathcal{P}_{n+2} nessa decomposição, respectivamente; definimos $\tilde{\Delta} = L_2 \cup \Delta \cup R_2$, onde L_2, R_2 são os átomos

de \mathcal{P}_{n+2} adjacente à esquerda a L_1 e adjacente à direita a R_1 , respectivamente. Por exemplo, se $\Delta = I_n$, então

$$\tilde{\Delta} = I_{n+3} \cup I_n \cup I_{n+2}^{q_n}. \quad (5.5)$$

Finalmente, denotaremos por $\hat{\Delta}$ o seguinte intervalo. Se $\Delta^* = L \cup \Delta \cup R$, $L^* = (L)_2 \cup L \cup \Delta$ e $R^* = \Delta \cup R \cup (R)_2$, definimos

$$\hat{\Delta} = (L)_2^* \cup \Delta \cup (R)_2^* = (L)_3 \cup (L)_2 \cup L \cup \Delta \cup R \cup (R)_2 \cup (R)_3 \supset \Delta^*. \quad (5.6)$$

Por exemplo, se $\Delta = I_n$ e $a_n \geq 5$, então

$$\hat{\Delta} = I_n^{q_{n+1}-2q_n} \cup I_n^{q_{n+1}-q_n} \cup I_{n+1} \cup I_n \cup I_n^{q_n} \cup I_n^{2q_n} \cup I_n^{3q_n}.$$

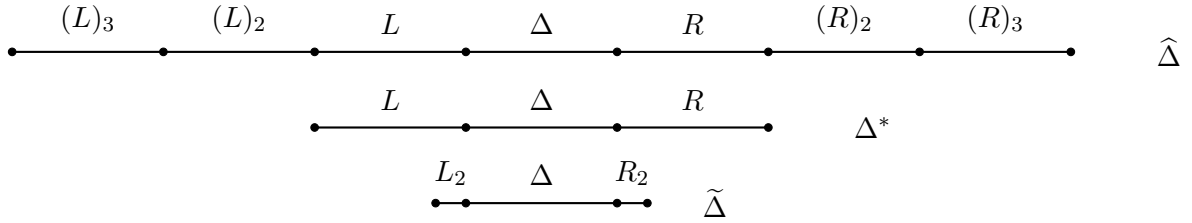


Figura 5.1: Os intervalos Δ^* , $\tilde{\Delta}$ e $\hat{\Delta}$.

Evidentemente, se n é pequeno, é possível que \mathcal{P}_n tenha no máximo 7 átomos, e nesse caso teríamos $\hat{\Delta} = S^1$. Assim, quando trabalhando com $\hat{\Delta}$, assumiremos que n é suficientemente grande para que $\hat{\Delta}$ seja um intervalo próprio.

Com vista a obter estimativas de distorção necessárias para o resto desse trabalho, serão necessários os seguintes fatos combinatórios, cujas provas postergamos ao apêndice A.

Recorde do capítulo 2 que, dada uma família finita \mathcal{F} de intervalos em S^1 e um inteiro positivo m , dizemos que \mathcal{F} tem multiplicidade de interseção limitada por m se cada $x \in S^1$ pertence a no máximo m intervalos distintos de \mathcal{F} .

Lema 5.2. *Sejam $n \geq 0$ e $\Delta \in \mathcal{P}_n$. Então:*

- (a) a coleção $\{f^k(\Delta^*)\}_{k=0}^{q_{n+1}-1}$ tem multiplicidade de interseção limitada por 3;
- (b) a coleção $\{f^k(\tilde{\Delta})\}_{k=0}^{q_{n+1}-1}$ tem multiplicidade de interseção limitada por 3;
- (c) a coleção $\{f^k(\hat{\Delta})\}_{k=0}^{q_{n+1}-1}$ tem multiplicidade de interseção limitada por 8.

Também precisaremos da seguinte consequência das estimativas reais *a priori*.

Lema 5.3. *Existe uma constante $C_2 = C_2(f) \geq C > 1$ com a seguinte propriedade. Para $n \geq 0$, seja*

$$\mathcal{C}_n := \{I_n^j\}_{j=0}^{2q_{n+1}} \cup \{I_{n+1}^k\}_{k=0}^{q_n+q_{n+1}}$$

o conjunto dos átomos de \mathcal{P}_n , acrescido de suas imagens futuras sob f até a iterada $q_{n+1}+1$. Então, para quaisquer $J_1, J_2 \in \mathcal{C}_n$ que possuam um extremo em comum,

$$C_2^{-1} |J_1| \leq |J_2| \leq C_2 |J_1|. \quad (5.7)$$

Os seguintes dois lemas contêm as estimativas de distorção necessárias para o desenvolvimento do restante desse trabalho. Suas provas são aplicações padrão do princípio de distorção de Koebe, com os Lemas 5.2 e 5.3 garantindo que as hipóteses correspondentes de somabilidade e espaço são satisfeitas. Mais uma vez, postergamos suas provas ao apêndice A.

Lema 5.4. *Existe uma constante $B_0 = B_0(f) > 1$ com a seguinte propriedade. Se $\Delta \in \mathcal{P}_n$ e $0 \leq j < k \leq q_{n+1} + 1$ são tais que os intervalos $f^j(\tilde{\Delta}), f^{j+1}(\tilde{\Delta}), \dots, f^{k-1}(\tilde{\Delta})$ não contêm nenhum ponto crítico de f , então a aplicação $f^{k-j}: f^j(\Delta) \rightarrow f^k(\Delta)$ possui distorção limitada por B_0 , isto é,*

$$B_0^{-1} \leq \frac{Df^{k-j}(x)}{Df^{k-j}(y)} \leq B_0 \quad \text{para quaisquer } x, y \in f^j(\Delta).$$

Lema 5.5. *Existe uma constante $B_1 = B_1(f) > 1$ com a seguinte propriedade. Se $\Delta \in \mathcal{P}_n$ e $0 \leq j < k \leq q_{n+1}$ são tais que os intervalos $f^j(\hat{\Delta}), f^{j+1}(\hat{\Delta}), \dots, f^{k-1}(\hat{\Delta})$ não contêm nenhum ponto crítico de f , então a aplicação $f^{k-j}: f^j(\Delta^*) \rightarrow f^k(\Delta^*)$ possui distorção limitada por B_1 , isto é,*

$$B_1^{-1} \leq \frac{Df^{k-j}(x)}{Df^{k-j}(y)} \leq B_1 \quad \text{para quaisquer } x, y \in f^j(\Delta^*).$$

Observamos que $\hat{\Delta}$ e o Lema 5.5 não serão mencionados no restante desse capítulo, mas terão papel fundamental no capítulo seguinte.

5.2 ω -dominação e comparabilidade

Com vista a simplificar o enunciado e a prova dos próximos resultados desse capítulo, introduzimos as noções de ω -dominação e ω -comparabilidade entre intervalos (compare à §2.3.1). Se $I, J \subset S^1$ são intervalos, diremos que I ω -domina J (denotado por $I \succeq J$) se existe uma constante $K = K(f, s) > 1$ (dependendo somente de f e s , mas não de ν ou B) tal que

$$\omega(J) \leq K\omega(I). \quad (5.8)$$

Analogamente, diremos que I, J são ω -comparáveis (denotado por $I \sim J$) se $I \succeq J$ e $J \succeq I$; isto é, se existe uma constante $K = K(f, s) > 1$ tal que

$$K^{-1}\omega(I) \leq \omega(J) \leq K\omega(I). \quad (5.9)$$

Outro conceito de suma importância será o de *tempo crítico de tipo 1*.

Definição 5.6. Sejam $\Delta \in \mathcal{P}_n$, $0 \leq k < q_{n+1}$. Diremos que k é um *tempo crítico de tipo 1* para Δ se $f^k(\tilde{\Delta}) \cap \text{Crit}(f) \neq \emptyset$.

Visto que f possui N pontos críticos c_1, \dots, c_N e a coleção $\left\{ f^k(\tilde{\Delta}) \right\}_{k=0}^{q_{n+1}-1}$ possui multiplicidade de interseção limitada por 3 (veja o Lema 5.2), segue que, para quaisquer $n \geq 0$ e $\Delta \in \mathcal{P}_n$, há no máximo $3N$ tempos críticos de tipo 1 para Δ .

Observação 5.7. É uma consequência imediata da minimalidade de f que existe um nível $n_0 = n_0(f) \in \mathbb{N}$, que depende somente de f , tal que, para quaisquer $n \geq n_0$, $\Delta \in \mathcal{P}_n$ e $0 \leq k < q_{n+1}$ um tempo crítico de tipo 1 para Δ , temos que: (i) $f^k(\tilde{\Delta})$ contém um *único* ponto crítico de f ; e (ii) $f^k(\tilde{\Delta}) \subset U$, onde U é o intervalo ao redor do ponto crítico de f em $f^k(\tilde{\Delta})$ da Proposição 2.2.

O próximo lema nos diz o comportamento das razões $\omega(I)$ à medida que iteramos f enquanto nos mantemos (combinatorialmente) distantes dos pontos críticos de f :

Lema 5.8. *Sejam $n \geq 0$ e $\Delta \in \mathcal{P}_n$. Então, para qualquer intervalo $I \subset \Delta$ e $0 \leq j < k \leq q_{n+1} + 1$ tais que os intervalos $f^j(\tilde{\Delta}), \dots, f^{k-1}(\tilde{\Delta})$ não contêm nenhum ponto crítico de f ,*

$$B_0^{-s} \omega(I^j) \leq \omega(I^k) \leq B_0^s \omega(I^j). \quad (5.10)$$

Demonstração. De fato, pelo Lema 5.4, a distorção de f^{k-j} em Δ^j é limitada por B_0 . Pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in I^j$ tal que

$$Df^{k-j}(z) = \frac{|I^k|}{|I^j|}.$$

Assim, para qualquer $x \in \Delta^j \supset I^j$,

$$B_0^{-1} \frac{|I^k|}{|I^j|} \leq Df^{k-j}(x) \leq B_0 \frac{|I^k|}{|I^j|}. \quad (5.11)$$

Da (3.5), obtemos

$$\omega(I^k) = |I^k|^{-s} \int_{I^j \cap B} (Df^{k-j}(x))^s d\nu(x)$$

e portanto, da (5.11), temos

$$B_0^{-s} \frac{|I^k|^s}{|I^j|^s} |I^k|^{-s} \nu(I^j \cap B) \leq \omega(I^k) \leq B_0^s \frac{|I^k|^s}{|I^j|^s} |I^k|^{-s} \nu(I^j \cap B)$$

que é a (5.10). ■

O próximo resultado é agora um corolário imediato do Lema 5.8:

Corolário 5.9. *Sejam $n \geq 0$, $\Delta \in \mathcal{P}_n$, e sejam $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r < q_{n+1}$ os tempos críticos de tipo 1 para Δ . Então, para qualquer intervalo $I \subset \Delta$,*

- (a) I, I^1, \dots, I^{k_1} são dois-a-dois ω -comparáveis;
- (b) Para $1 \leq j < r$, $I^{k_j+1}, I^{k_j+2}, \dots, I^{k_{j+1}}$ são dois-a-dois ω -comparáveis;
- (c) $I^{k_r+1}, \dots, I^{q_{n+1}}$ são dois-a-dois ω -comparáveis,

com a mesma constante $K(f, s) = B_0^s$.

Para prosseguir, precisamos estudar o comportamento de ω perto do conjunto crítico de f . Para tanto, recorde-se que $d > 1$ denota o máximo das criticalidades dos pontos críticos de f .

Lema 5.10. *Sejam $n \geq n_0$ (da Observação 5.7), $\Delta \in \mathcal{P}_n$, e $I \subset \Delta$ um intervalo.*

- (a) Se $0 \leq j < q_{n+1}$ é um tempo crítico de tipo 1 para Δ , $I^j \succeq I^{j+1}$ com constante $K(f, s) = (3d)^s$;
- (b) se $0 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq q_{n+1}$, $I^{\ell_1} \succeq I^{\ell_2}$, com constante $K(f, s) = (3dB_0)^{4Ns}$.

Demonstração. Observe que a parte (a) e o Corolário 5.9 juntos implicam (b), pois é possível ligar I^{ℓ_1} a I^{ℓ_2} por uma cadeia de ω -dominação da seguinte forma: sejam $\ell_1 \leq k_i < \dots < k_m < \ell_2$ os tempos críticos de tipo 1 para Δ entre ℓ_1 e ℓ_2 . Então

$$I^{\ell_1} \sim I^{k_i} \succeq I^{k_{i+1}} \sim I^{k_{i+1}} \succeq \dots \sim I^{k_m} \succeq I^{k_{m+1}} \sim I^{\ell_2}.$$

Como há não mais que $6N + 2$ átomos nessa cadeia, segue que $I^{\ell_1} \succeq I^{\ell_2}$. Para determinar a constante de ω -dominação, começamos com $K(f, s) = 1$ e seguimos ao longo da cadeia, multiplicando por B_0^s para cada \sim e por $(3d)^s$ para cada \succeq . Há $m - i + 2$ \sim 's e $m - i + 1$ \succeq 's, logo (visto que $m - i + 1 \leq 3N$) podemos tomar

$$K(f, s) = (3dB_0)^{4Ns} \geq (3d)^{(m-i+1)s} B_0^{(m-i+2)s}.$$

Assim, resta somente provar (a).

Observe que, da equação (3.5),

$$\omega(I^{j+1}) = \frac{\int_{I^j \cap B} (Df)^s d\nu}{|I^{j+1}|^s} = \frac{|I^j|^s}{|I^{j+1}|^s} \frac{\int_{I^j \cap B} (Df)^s d\nu}{|I^j|^s}. \quad (5.12)$$

Agora, a Proposição 2.2 implica que

$$(Df(x))^s \leq (3d)^s \frac{|I^{j+1}|^s}{|I^j|^s} \quad \text{para todo } x \in I^j. \quad (5.13)$$

Combinando as (5.12) e (5.13), obtemos

$$\omega(I^{j+1}) \leq (3d)^s \omega(I^j) \quad (5.14)$$

o que prova (a). ■

Antes de prosseguir com a demonstração do Teorema 5.1, precisaremos de um lema que afirma, essencialmente, que *átomos longos ω -dominam átomos curtos*. Para simplificar as provas desse lema e do Teorema 5.1 a seguir, denotaremos todas as constantes de ω -dominação por $K = K(f, s)$.

Lema 5.11. *Sejam $n \geq n_0$, $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{P}_n \cup \{I_n^{q_{n+1}}, I_{n+1}^{q_n}\}$. Se Δ_1 é um átomo longo (ou $I_n^{q_{n+1}}$) e Δ_2 , um átomo curto (ou $I_{n+1}^{q_n}$), de \mathcal{P}_n , então $\Delta_1 \succeq \Delta_2$. Ademais, se $a_{n+1} \geq 2$ ou $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$, então $\Delta_1^{k_1} \succeq \Delta_2^{k_2}$ para quaisquer $0 \leq k_1, k_2 \leq q_{n+1}$.*

Demonstração. Separamos a prova em duas partes: (i) que $\Delta_1 \succeq \Delta_2$; e (ii) que $\Delta_1^{k_1} \succeq \Delta_2^{k_2}$ se $a_{n+1} \geq 2$ ou $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$.

Para provar (i), observe que, do Lema 5.10, temos que $\Delta_1 \succeq I_n^{q_{n+1}}$ e $I_{n+1} \succeq \Delta_2$. Assim, (i) seguirá se provarmos que $I_n^{q_{n+1}} \succeq I_{n+1}$. Como $I_n^{q_{n+1}} \supset I_{n+1}$ (e portanto $\nu(I_{n+1}) \leq \nu(I_n^{q_{n+1}})$), isso é uma consequência do fato que esses dois intervalos possuem comprimentos comparáveis (veja [9, Proposition 6.1]).

Agora, nos dedicamos à prova de (ii). Do Lema 5.10, obtemos que $\Delta_1^{k_1} \succeq I_n^{2q_{n+1}-1}$ e $I_{n+1} \succeq \Delta_2^{k_2}$. Aplicando um dentre os Lemas 5.8 e 5.10, a depender se $I_n^{2q_{n+1}-1} \cap \text{Crit}(f) = \emptyset$ ou não, obtemos $I_n^{2q_{n+1}-1} \succeq I_n^{2q_{n+1}}$, do que segue que $\Delta_1^{k_1} \succeq I_n^{2q_{n+1}}$. Assim, é suficiente mostrar que $I_n^{2q_{n+1}} \succeq I_{n+1}$.

Consideramos primeiro o caso $a_{n+1} \geq 2$. Para esse fim, observe da Figura 5.2 que

$$I_n^{2q_{n+1}} = I_{n+1}^{q_{n+1}} \cup I_{n+1} \cup [I_n \setminus (I_{n+1}^{q_n} \cup I_{n+1}^{q_n+q_{n+1}})] \quad (5.15)$$

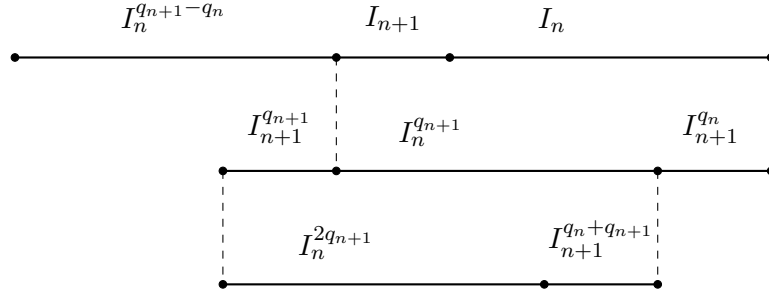


Figura 5.2: Posições relativas dos intervalos I_n , I_{n+1} , $I_n^{q_{n+1}-q_n}$, $I_n^{q_{n+1}}$, $I_{n+1}^{q_{n+1}}$, $I_n^{q_n}$, $I_{n+1}^{q_n}$, $I_n^{2q_{n+1}}$, $I_{n+1}^{q_n+q_{n+1}}$ quando $a_{n+1} \geq 2$.

com uniões disjuntas *modulo* extremos. Assim, $I_n^{2q_{n+1}} \supset I_{n+1}$, do que segue que

$$\omega(I_{n+1}) \leq \left(\frac{|I_n^{2q_{n+1}}|}{|I_{n+1}|} \right)^s \omega(I_n^{2q_{n+1}}). \quad (5.16)$$

Agora, usamos as estimativas reais *a priori* para estimar $\frac{|I_n^{2q_{n+1}}|}{|I_{n+1}|}$. Da (5.15), temos:

$$\begin{aligned} \frac{|I_n^{2q_{n+1}}|}{|I_{n+1}|} &= \frac{|I_{n+1}^{q_{n+1}}|}{|I_{n+1}|} + \frac{|I_{n+1}|}{|I_{n+1}|} + \frac{|I_n|}{|I_{n+1}|} - \frac{|I_{n+1}^{q_n}|}{|I_{n+1}|} - \frac{|I_{n+1}^{q_n+q_{n+1}}|}{|I_{n+1}|} \\ &< \frac{|I_{n+1}^{q_{n+1}}|}{|I_{n+1}|} + 1 + \frac{|I_n|}{|I_{n+1}|} \\ &\leq C + 1 + C = 1 + 2C < 3C \end{aligned} \quad (5.17)$$

pois $I_{n+1}^{q_{n+1}}, I_{n+1}$ são átomos adjacentes de \mathcal{P}_{n+1} , I_n, I_{n+1} são átomos adjacentes de \mathcal{P}_n e $C > 1$. Substituindo a (5.17) na (5.16), obtemos

$$\omega(I_{n+1}) \leq (3C)^s \omega(I_n^{2q_{n+1}}) \quad (5.18)$$

o que prova que $I_n^{2q_{n+1}} \supseteq I_{n+1}$.

Por fim, consideramos o caso $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$. Observe da Figura 5.3 que $I_n^{2q_{n+1}} \supset I_{n+2}^{q_{n+1}}$ e $I_{n+1} \subset I_{n+2}^{q_{n+1}} \cup I_{n+2}^{q_{n+1}+q_{n+2}}$; do Lema 5.10, $I_{n+2}^{q_{n+1}} \supseteq I_{n+2}^{q_{n+1}+q_{n+2}}$. Aplicando as estimativas reais *a priori* e o Lema 5.3, obtemos

$$I_n^{2q_{n+1}} \supseteq I_{n+2}^{q_{n+1}} \supseteq I_{n+2}^{q_{n+1}} \cup I_{n+2}^{q_{n+1}+q_{n+2}} \supseteq I_{n+1}$$

o que termina a prova. ■

Enquanto esperamos que o Teorema 5.1 se provará de utilidade mais ampla em trabalhos futuros, para nossos fins será necessário o seguinte resultado mais forte, que claramente implica o Teorema 5.1.

Teorema 5.12. *Existe uma constante $B_2 = B_2(f, s) > 1$ com a seguinte propriedade. Para quaisquer $n \geq n_0$ e $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{P}_n$, vale:*

(a) *Se Δ_1, Δ_2 são ambos átomos longos ou ambos átomos curtos de \mathcal{P}_n , então*

$$B_2^{-1} \omega(\Delta_2) \leq \omega(\Delta_1) \leq B_2 \omega(\Delta_2). \quad (5.19)$$

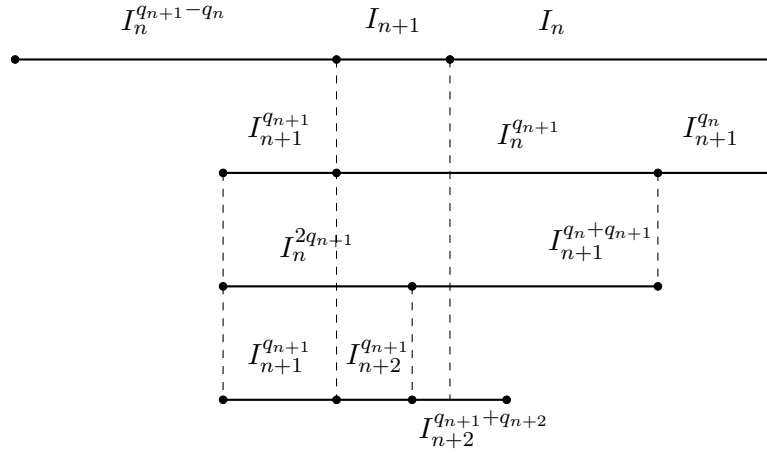


Figura 5.3: Posições relativas dos intervalos I_n , I_{n+1} , $I_n^{q_{n+1}-q_n}$, $I_{n+1}^{q_{n+1}}$, $I_n^{q_{n+1}}$, $I_{n+1}^{q_n}$, $I_n^{2q_{n+1}}$, $I_{n+1}^{q_n+q_{n+1}}$, I_{n+2} , $I_{n+1}^{q_{n+1}}$, $I_{n+2}^{q_{n+1}}$, $I_{n+2}^{q_{n+1}+q_{n+2}}$ quando $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$.

(b) Se Δ_1 é um átomo curto e Δ_2 é um átomo longo de \mathcal{P}_n , então

$$\omega(\Delta_1) \leq B_2 \omega(\Delta_2). \quad (5.20)$$

Ademais, se $a_{n+1} \geq 2$ ou $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$, então Δ_1, Δ_2 podem ser respectivamente substituídos nas desigualdades acima por iterados $\Delta_1^{k_1}, \Delta_2^{k_2}$, $0 \leq k_1, k_2 \leq q_{n+1} + 1$.

Demonstração. Observe que (b) é precisamente o conteúdo do Lema 5.11. Ademais, como todos os átomos curtos de \mathcal{P}_n se tornam átomos longos em \mathcal{P}_{n+1} , basta provar (a) para Δ_1, Δ_2 longos.

Suponha que Δ_1, Δ_2 são ambos átomos longos de \mathcal{P}_n . Separamos a prova em duas partes:

(i) que $\Delta_1 \sim \Delta_2$; e (ii) que $\Delta_1^{k_1} \sim \Delta_2^{k_2}$ se $a_{n+1} \geq 2$ ou $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$.

Começamos por (i). É suficiente mostrar que Δ_1 ω -domina Δ_2 , pois então a ω -comparabilidade dos dois segue de uma simples troca de papéis. Uma vez mais, do Lema 5.10, $\Delta_1 \succeq I_n^{q_{n+1}}$ e $I_n \succeq \Delta_2$. Como $I_n \subset I_n^{q_{n+1}} \cup I_{n+1}^{q_n}$, $I_n^{q_{n+1}} \succeq I_{n+1}^{q_n}$ (pelo Lema 5.11) e esses intervalos possuem comprimentos dois-a-dois comparáveis, concluímos que $I_n^{q_{n+1}} \succeq I_n$. Isso termina a prova de (i).

A prova de (ii) é essencialmente a mesma: temos que $\Delta_1^{k_1} \succeq I_n^{2q_{n+1}}$ e $I_n \succeq \Delta_2^{k_2}$, logo basta mostrar que $I_n^{2q_{n+1}} \succeq I_n$. Mas $I_n \subset I_n^{2q_{n+1}} \cup I_{n+1}^{q_n+q_{n+1}} \cup I_{n+1}^{q_n}$ e (do Lema 5.11)

$$I_n^{2q_{n+1}} \succeq I_{n+1}^{q_n} \succeq I_{n+1}^{q_n+q_{n+1}}. \quad (5.21)$$

Assim, como esses intervalos possuem comprimentos dois-a-dois comparáveis, concluímos que $I_n^{2q_{n+1}} \succeq I_n$. Isso termina a prova de (ii). ■

Capítulo 6

Ergodicidade e Unicidade

No atual capítulo, provamos que medidas automorfas de expoente positivo para aplicações multicríticas do círculo de número de rotação irracional são ergódicas (Teorema 6.8 abaixo). Como consequência, obteremos a parte de unicidade do Teorema A (observamos que a condição de ordem finita sobre os pontos críticos de f é crucial para garantir a unicidade, veja o §8.2). Em particular, a medida de Lebesgue é a única medida f -automorfa de expoente 1 (Corolário 6.9).

Também mostramos que a unicidade continua válida (a menos de um escalar) no contexto de funcionais lineares contínuos em $C^0(S^1)$ (Corolário 6.10). Como veremos no §8, o Corolário 6.10, aplicado à medida de Lebesgue ($s = 1$), é o principal passo na prova do Teorema B.

6.1 A razão Γ

Primeiro, introduzimos um pouco de notação. Fixe algum $s > 0$ e seja $\nu \in \mathcal{A}_s$. Para um intervalo $I \subset S^1$ e um boreliano f -invariante $B \subset S^1$, denotaremos por $\Gamma(I; B)$ a razão

$$\Gamma(I; B) := \frac{\nu(I \cap B)}{\nu(I)}. \quad (6.1)$$

Observe que $\Gamma(I; B)$ pode ser expresso como o quociente de duas razões ω com respeito a I e diferentes conjuntos invariantes: no numerador, tomamos B como o conjunto f -invariante, e no denominador, tomamos S^1 como o conjunto invariante.

Por analogia direta com o Lema 5.8, obtemos assim o seguinte resultado:

Lema 6.1. *Sejam $n \geq 0$ e $\Delta \in \mathcal{P}_n$. Então, para qualquer intervalo $I \subset \Delta^*$ e quaisquer $0 \leq j < k \leq q_{n+1}$ tais que os intervalos $f^j(\widehat{\Delta}), \dots, f^{k-1}(\widehat{\Delta})$ não contêm nenhum ponto crítico de f , o seguinte vale para qualquer boreliano f -invariante $B \subset S^1$:*

$$B_1^{-2s} \Gamma(I^j; B) \leq \Gamma(I^k; B) \leq B_1^{2s} \Gamma(I^j; B). \quad (6.2)$$

Definição 6.2. Sejam $\Delta \in \mathcal{P}_n$, $0 \leq k < q_{n+1}$. Diremos que k é um *tempo crítico de tipo 2* para Δ se $f^k(\widehat{\Delta}) \cap \text{Crit}(f) \neq \emptyset$.

Como f possui N pontos críticos c_1, \dots, c_N e a coleção $\{f^k(\widehat{\Delta})\}_{k=0}^{q_{n+1}-1}$ possui multiplicidade de interseção limitada por 8 (Lema 5.2), segue que, para quaisquer $n \geq 0$ e $\Delta \in \mathcal{P}_n$, há no máximo $8N$ tempos críticos de tipo 2 para Δ .

Observação 6.3. Em analogia direta com a Observação 5.7, existe um nível $n_1 = n_1(f) \geq n_0(f) \in \mathbb{N}$, dependendo somente de f , tal que, para quaisquer $n \geq n_1$, $\Delta \in \mathcal{P}_n$ e $0 \leq k < q_{n+1}$ um tempo crítico de tipo 2 para Δ , temos que: (i) $f^k(\widehat{\Delta})$ contém um *único* ponto crítico de f ;

e (ii) $f^k(\widehat{\Delta}) \subset U$, onde U é o intervalo ao redor do ponto crítico de f em $f^k(\widehat{\Delta})$ da Proposição 2.2.

Com esses conceitos em mente, o próximo corolário se torna uma consequência imediata do Lema 6.1:

Corolário 6.4. *Sejam $n \geq 0$, $\Delta \in \mathcal{P}_n$, e sejam $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r < q_{n+1}$ os tempos críticos de tipo 2 para Δ . Então, para qualquer intervalo $I \subset \Delta$, o seguinte vale para qualquer boreliano f -invariante $B \subset S^1$:*

(a) Para quaisquer $0 \leq j, \ell \leq k_1$,

$$B_1^{-2s} \Gamma(I^j; B) \leq \Gamma(I^\ell; B) \leq B_1^{2s} \Gamma(I^j; B); \quad (6.3)$$

(b) (6.3) também vale para quaisquer $k_i + 1 \leq j, \ell \leq k_{i+1}$, $1 \leq i < r$;

(c) (6.3) também vale para quaisquer $k_r + 1 \leq j, \ell \leq q_{n+1}$.

‘

Como fizemos no Lema 5.10, agora nos dedicamos ao problema de entender o comportamento de Γ perto de um ponto crítico de f .

Lema 6.5. *Existe uma constante $B_3 = B_3(f, s) > 1$ com a seguinte propriedade. Sejam $n \geq n_1$, $\Delta \in \mathcal{P}_n$. Assuma que n é tal que um dentre $a_{n+1} \geq 2$ e $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$ ocorre. Então o seguinte vale para todo boreliano f -invariante $B \subset S^1$: se $0 \leq j < q_{n+1}$ é um tempo crítico de tipo 2 para Δ ,*

$$\Gamma(f^{j+1}(\Delta^*); B) \leq B_3 \Gamma(f^j(\Delta^*); B). \quad (6.4)$$

Observação 6.6. Observe as hipóteses sobre a combinatória de f no nível n : $a_{n+1} \geq 2$ ou $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$. Essas são necessárias para permitir o uso da versão mais forte do Teorema 5.12.

Demonstração. Começamos com a seguinte observação (veja o Lema 5.3): para cada um dos átomos I de \mathcal{P}_n que compõem $\widehat{\Delta}$ e $0 \leq k \leq q_{n+1}$, temos $I^k \asymp f^k(\Delta^*)$. Observe também que

$$((L)_3 \cup (L)_2 \cup \widetilde{L}) \cap (\widetilde{R} \cup (R)_2 \cup (R)_3) = \emptyset$$

e portanto (veja a Observação 6.3) não pode ser que ambos $f^j((L)_3 \cup (L)_2 \cup \widetilde{L})$ e $f^j(\widetilde{R} \cup (R)_2 \cup (R)_3)$ contêm um ponto crítico de f . Como o outro caso é idêntico, assumimos, sem perda de generalidade, que

$$f^j((L)_3 \cup (L)_2 \cup \widetilde{L}) \cap \text{Crit}(f) = \emptyset.$$

Agora, como não há dois átomos curtos de \mathcal{P}_n adjacentes, um dentre $L, (L)_2$ é longo; uma vez mais, como o outro caso é essencialmente idêntico, assumimos, sem perda de generalidade, que $(L)_2$ é um átomo longo de \mathcal{P}_n . Analogamente, um dentre Δ, R é um átomo longo de \mathcal{P}_n e podemos assumir, sem perda de generalidade, que R é também um átomo longo de \mathcal{P}_n .

Segue então como simples consequência do Teorema 5.12 que $(L)_2^j \sim f^j(\Delta^*)$ e $(L)_2^{j+1} \sim f^{j+1}(\Delta^*)$. Isto é, existe uma constante $K_0 = K_0(f, s) > 1$ tal que

$$\begin{aligned}
K_0^{-1} \frac{\nu((L)_2^j \cap B)}{|(L)_2^j|^s} &\leq \frac{\nu(f^j(\Delta^*) \cap B)}{|f^j(\Delta^*)|^s} \leq K_0 \frac{\nu((L)_2^j \cap B)}{|(L)_2^j|^s}, \\
K_0^{-1} \frac{\nu((L)_2^j)}{|(L)_2^j|^s} &\leq \frac{\nu(f^j(\Delta^*))}{|f^j(\Delta^*)|^s} \leq K_0 \frac{\nu((L)_2^j)}{|(L)_2^j|^s}, \\
K_0^{-1} \frac{\nu((L)_2^{j+1} \cap B)}{|(L)_2^{j+1}|^s} &\leq \frac{\nu(f^{j+1}(\Delta^*) \cap B)}{|f^{j+1}(\Delta^*)|^s} \leq K_0 \frac{\nu((L)_2^{j+1} \cap B)}{|(L)_2^{j+1}|^s}, \\
K_0^{-1} \frac{\nu((L)_2^{j+1})}{|(L)_2^{j+1}|^s} &\leq \frac{\nu(f^{j+1}(\Delta^*))}{|f^{j+1}(\Delta^*)|^s} \leq K_0 \frac{\nu((L)_2^{j+1})}{|(L)_2^{j+1}|^s}.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
K_0^{-2} \Gamma((L)_2^j; B) &\leq \Gamma(f^j(\Delta^*); B) \leq K_0^2 \Gamma((L)_2^j; B), \\
K_0^{-2} \Gamma((L)_2^{j+1}; B) &\leq \Gamma(f^{j+1}(\Delta^*); B) \leq K_0^2 \Gamma((L)_2^{j+1}; B).
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Agora, como $f^j(\widetilde{(L)_2})$ não contém pontos críticos de f , do Lema 5.4 e do Teorema do Valor Médio,

$$B_0^{-1} \frac{|(L)_2^{j+1}|}{|(L)_2^j|} \leq Df(y) \leq B_0 \frac{|(L)_2^{j+1}|}{|(L)_2^j|} \quad \text{para todo } y \in (L)_2^j. \tag{6.7}$$

Assim,

$$\Gamma((L)_2^{j+1}; B) = \frac{\int_{(L)_2^j \cap B} (Df)^s d\nu}{\int_{(L)_2^j} (Df)^s d\nu} \leq \frac{B_0^s \left(\frac{|(L)_2^{j+1}|}{|(L)_2^j|} \right)^s \int_{(L)_2^j \cap B} d\nu}{B_0^{-s} \left(\frac{|(L)_2^{j+1}|}{|(L)_2^j|} \right)^s \int_{(L)_2^j} d\nu} = B_0^{2s} \Gamma((L)_2^j; B). \tag{6.8}$$

Combinando a (6.6) e a (6.8), obtemos:

$$\Gamma(f^{j+1}(\Delta^*); B) \leq K_0^2 \Gamma((L)_2^{j+1}; B) \leq K_0^2 B_0^{2s} \Gamma((L)_2^j; B) \leq B_0^{2s} K_0^4 \Gamma(f^j(\Delta^*); B) \tag{6.9}$$

que é a (6.4), com $B_3 := B_0^{2s} K_0^4$. ■

Combinando o Corolário 6.4 e o Lema 6.5, obtemos o seguinte.

Corolário 6.7. *Existe uma constante $B_4 = B_4(f, s) > 1$ com a seguinte propriedade. Sejam $n \geq n_1$, $\Delta \in \mathcal{P}_n$. Assuma que n é tal que $a_{n+1} \geq 2$ ou $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$. Então, para qualquer boreliano f -invariante $B \subset S^1$ e quaisquer $0 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq q_{n+1}$,*

$$\Gamma(f^{\ell_2}(\Delta^*); B) \leq B_4 \Gamma(f^{\ell_1}(\Delta^*); B). \tag{6.10}$$

6.2 Ergodicidade

Estamos agora em condições de provar a ergodicidade de ν com respeito a f .

Teorema 6.8 (Ergodicidade). *Seja $s > 0$ e seja $\nu \in \mathcal{A}_s$ uma medida f -automorfa de expoente s . Então ν é ergódica com respeito a f .*

Demonstração. Seja $B \subset S^1$ um boreliano f -invariante tal que $\nu(B) < 1$. Nosso objetivo será provar que necessariamente temos $\nu(B) = 0$. Para $x \in S^1$, considere a família

$$\mathcal{V}(x) = \{ \Delta^* \mid n \geq 0, \Delta \in \mathcal{P}_n, x \in \Delta \}$$

de triplas de átomos adjacentes das partições dinâmicas \mathcal{P}_n tais que x pertence ao átomo central da tripla. À medida que n cresce, as triplas de nível n nessa família convergem a x mantendo espaço (no sentido do capítulo 2) em ambos os lados (pelas estimativas reais *a priori*). Se $x \in \Lambda$, então existe um único átomo $\Delta_n(x) \in \mathcal{P}_n$ que contém x , e x pertence ao seu interior. Portanto, para $x \in \Lambda$, $\mathcal{V}(x)$ contém precisamente uma tripla $(\Delta_n^*(x))$ de cada nível $n \geq 0$.

Visto que $\Lambda \setminus B$ tem ν -medida positiva, afirmamos que para todo $\epsilon > 0$ dado existem $x \in \Lambda \setminus B$ e $n_2 \geq n_1(f) \geq n_0(f)$ tais que, para todo $n \geq n_2$,

$$\Gamma(\Delta_n^*(x); B) = \frac{\nu(\Delta_n^*(x) \cap B)}{\nu(\Delta_n^*(x))} < \epsilon. \quad (6.11)$$

De fato, observe que como ν não possui átomos e tem suporte total no círculo (veja o capítulo 3), a aplicação $h: S^1 \rightarrow S^1$ dada por $h(x) = \int_{[0,x]} d\nu$ é um homeomorfismo do círculo, que identifica a medida ν com a medida de Lebesgue em S^1 . Assim, a existência de um ponto x satisfazendo a (6.11) segue do conhecido Teorema de Densidade de Lebesgue.

Agora, alguns comentários necessários sobre a combinatória de f precisam ser feitos. Se ρ é o número de rotação de f , $\rho = [a_0, a_1, \dots]$, então ou temos $a_n = 1$ para todo n suficientemente grande, ou $a_n \geq 2$ ocorre infinitas vezes. Em ambos os casos, podemos escolher $n \geq n_2$ tal que ou $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$ (no primeiro caso) ou $a_{n+1} \geq 2$ (no segundo caso). Fixamos assim algum nível $n \geq n_2$ que satisfaz uma dessas condições, de forma que tanto a (6.11) quanto o Corolário 6.7 valham simultaneamente.

Observe que a coleção $\{f^i(\Delta_n^*(x))\}_{i=0}^{q_{n+1}}$ cobre o círculo e possui multiplicidade de interseção limitada por 4 (veja o Lema 5.2), logo

$$\begin{aligned} \nu(B) &= \nu \left(\bigcup_{i=0}^{q_{n+1}} f^i(\Delta_n^*(x)) \cap B \right) \leq \sum_{i=0}^{q_{n+1}} \nu(f^i(\Delta_n^*(x)) \cap B) \\ &= \sum_{i=0}^{q_{n+1}} \nu(f^i(\Delta_n^*(x))) \Gamma(f^i(\Delta_n^*(x)); B) \end{aligned} \quad (6.12)$$

e também

$$\sum_{i=0}^{q_{n+1}} \nu(f^i(\Delta_n^*(x))) \leq 4 \quad (6.13)$$

(veja a Observação 2.7).

Do Corolário 6.7,

$$\Gamma(f^i(\Delta_n^*(x)); B) \leq B_4 \Gamma(\Delta_n^*(x); B) \quad (6.14)$$

e portanto, substituindo as desigualdades (6.14), (6.13) e (6.11) na (6.12):

$$\begin{aligned} \nu(B) &\leq \sum_{i=0}^{q_{n+1}} \nu(f^i(\Delta_n^*(x))) \Gamma(f^i(\Delta_n^*(x)); B) \leq B_4 \Gamma(\Delta_n^*(x); B) \sum_{i=0}^{q_{n+1}} \nu(f^i(\Delta_n^*(x))) \\ &\leq 4 B_4 \frac{\nu(\Delta_n^*(x) \cap B)}{\nu(\Delta_n^*(x))} < 4 B_4 \epsilon. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Deixando $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos $\nu(B) = 0$.

Segue que não há boreliano f -invariante $B \subset S^1$ tal que $0 < \nu(B) < 1$, o que prova que ν é ergódica. ■

6.3 Unicidade

Nessa seção, mostramos que a ergodicidade de todas as medidas f -automorfas de expoente positivo de fato implica que existe uma única medida f -automorfa de expoente s para cada $s > 0$. Também estendemos essa unicidade a medidas com sinal finitas (i.e. funcionais lineares contínuos em $C^0(S^1)$).

Prova do Teorema A, unicidade. Argumentando por contradição, suponha que há $s > 0$ tal que \mathcal{A}_s contém duas medidas distintas, μ_s, ν . Primeiro, suponha que $\nu \ll \mu_s$, e seja $\psi \in L^1(\mu_s)$ a derivada de Radon-Nikodym

$$\psi = \frac{d\nu}{d\mu_s}.$$

Então, para toda $\phi \in C^0(S^1)$,

$$\begin{aligned} \int_{S^1} \phi \psi d\mu_s &= \int_{S^1} \phi d\nu = \int_{S^1} (\phi \circ f) (Df)^s d\nu = \int_{S^1} (\phi \circ f) (Df)^s \psi d\mu_s \\ &= \int_{S^1} (\phi \circ f) ((\psi \circ f^{-1}) \circ f) (Df)^s d\mu_s \\ &= \int_{S^1} \phi (\psi \circ f^{-1}) d\mu_s, \end{aligned}$$

logo $\psi \circ f = \psi$ em μ_s -quase todo ponto, i.e. ψ é μ_s -quase certamente f -invariante. Mas, do Teorema 6.8, μ_s é ergódica para f , do que segue que ψ deve ser μ_s -quase certamente constante. Como $\int_{S^1} \psi d\mu_s = \nu(S^1) = 1$, concluímos que $\psi = 1$ μ_s -q.t.p., e portanto, $\mu_s = \nu$, contradizendo nossa hipótese de que μ_s, ν são distintas.

Por fim, se ν não é absolutamente contínua com respeito a μ_s , seja $\rho = \frac{1}{2}(\mu_s + \nu)$. Então $\rho \in \mathcal{A}_s$ (pois \mathcal{A}_s é convexo, como é simples verificar) e $\mu_s \ll \rho, \nu \ll \rho$. Portanto, do caso anterior, devemos ter $\mu_s = \rho = \nu$, mais uma vez em contradição à nossa hipótese de que μ_s, ν são distintas. ■

Assim, temos agora uma prova completa do Teorema A. No que segue, para $s > 0$, denotaremos a única medida f -automorfa de expoente s por μ_s .

Como a medida de Lebesgue é sempre f -automorfa de expoente 1, temos a seguinte consequência imediata do Teorema A:

Corolário 6.9. *A medida de Lebesgue no círculo é a única medida f -automorfa de expoente 1.*

Agora, provamos que a unicidade dada pelo Teorema A (e em particular, pelo Corolário 6.9) continua verdadeira (a menos de um escalar) no contexto de funcionais lineares contínuos em $C^0(S^1)$:

Corolário 6.10. *Seja $s > 0$. Se $L \in C^0(S^1)^*$ é tal que*

$$\langle L, \phi \rangle = \langle L, (\phi \circ f)(Df)^s \rangle \quad (6.16)$$

para toda $\phi \in C^0(S^1)$, então

$$L = \langle L, 1 \rangle \mu_s. \quad (6.17)$$

Demonstração. Reproduzimos a prova quase *ipsis verbis* de [3]. Do Teorema de Representação de Riesz, existe uma única medida de Radon com sinal finita ν em S^1 tal que

$$\langle L, \phi \rangle = \int_{S^1} \phi d\nu$$

para toda $\phi \in C^0(S^1)$. Portanto, basta mostrar que

$$\nu = \nu(S^1) \mu_s. \quad (6.18)$$

Primeiro, suponha que ν é positiva. Então $\tilde{\nu} := \frac{\nu}{\nu(S^1)} \in \mathcal{A}_s$, logo

$$\nu = \nu(S^1) \tilde{\nu} = \nu(S^1) \mu_s.$$

Agora, para o caso geral, seja $\nu = \nu_+ - \nu_-$ a decomposição de Jordan de ν . Desejamos mostrar que

$$\begin{aligned} \int_{S^1} \phi d\nu_+ &= \int_{S^1} (\phi \circ f)(Df)^s d\nu_+, \\ \int_{S^1} \phi d\nu_- &= \int_{S^1} (\phi \circ f)(Df)^s d\nu_- \end{aligned} \quad (6.19)$$

para toda $\phi \in C^0(S^1)$. Como o operador linear $U_s: C^0(S^1) \rightarrow C^0(S^1)$ dado por

$$U_s(\psi) = (\psi \circ f)(Df)^s$$

é positivo, para toda $\phi \in C^0(S^1)$ com $\phi \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \int_{S^1} \phi d\nu_+ &= \sup_{0 \leq \psi \leq \phi} \int_{S^1} \psi d\nu = \sup_{0 \leq \psi \leq \phi} \int_{S^1} (\psi \circ f)(Df)^s d\nu \\ &= \sup_{0 \leq \psi \leq U_s(\phi)} \int_{S^1} \psi d\nu = \int_{S^1} U_s(\phi) d\nu_+ \end{aligned} \quad (6.20)$$

e analogamente para ν_- . Segue que as (6.19) valem para toda $\phi \in C^0(S^1)$ com $\phi \geq 0$; por linearidade, continuam valendo para toda $\phi \in C^0(S^1)$. Assim, aplicando o primeiro caso a ν_+, ν_- , obtemos

$$\nu = \nu_+ - \nu_- = \nu_+(S^1) \mu_s - \nu_-(S^1) \mu_s = \nu(S^1) \mu_s$$

que termina a prova. ■

Observação 6.11. Segue da (6.17) que quaisquer funcionais lineares contínuos $L \in C^0(S^1)^*$ satisfazendo a (6.16) possuem um *sinal definido*: se $L = L_+ - L_-$ é sua decomposição de Jordan, então $L_+ = 0$ ou $L_- = 0$, a depender se $\langle L, 1 \rangle$ é negativo, positivo ou nulo (e nesse último caso, $L = 0$).

Capítulo 7

Consequências para Medidas Automorfas

Nesse capítulo, investigamos algumas consequências notáveis do Teorema A para medidas automorfas sob uma aplicação multicrítica do círculo de número de rotação irracional.

7.1 Dependência contínua

Nessa seção, obteremos o seguinte resultado como consequência imediata do Teorema A. Tomamos inspiração do argumento dado em [3, Proposition 3]. Por essa seção somente, f não denotará mais uma aplicação multicrítica do círculo fixada. No que segue, consideramos o espaço $\text{Mult}(S^1)$ das aplicações multicríticas do círculo de número de rotação irracional, munido da topologia que herda como subconjunto do monoide $\text{End}^1(S^1)$ de C^1 -endomorfismos do círculo. Consideramos também o espaço $\mathcal{P}(S^1)$ das medidas de probabilidade de Radon no círculo, munido de sua topologia fraca-* como subespaço do dual de $C^0(S^1)$. Por fim, consideramos a aplicação $\mu_\bullet: [0, \infty) \times \text{Mult}(S^1) \rightarrow \mathcal{P}(S^1)$ dada por $(s, f) \mapsto \mu_{s,f}$, a (única) medida f -automorfa de expoente s .

Corolário 7.1 (Dependência contínua de $\mu_{s,f}$ com respeito a s e f). *Sejam $\{s_n\} \subset [0, \infty)$, $\{f_n\} \subset \text{Mult}(S^1)$, $s \in [0, \infty)$, $f \in \text{Mult}(S^1)$ tais que $s_n \rightarrow s$ (na topologia usual) e $f_n \rightarrow f$ (na topologia C^1). Então*

$$\mu_{s_n, f_n} \longrightarrow \mu_{s, f} \quad (7.1)$$

na topologia fraca-*. Isto é, a aplicação μ_\bullet é contínua.

Demonstração. Como os espaços em questão são todos metrizáveis (logo primeiro-contáveis), é de fato suficiente provar a afirmação acima que versa sobre convergência de seqüências.

Suponha por absurdo que a seqüência $\mu_n := \mu_{s_n, f_n}$ não converge a $\mu_{s, f}$ na topologia fraca-*. Então existem $\phi \in C^0(S^1)$ e $\epsilon > 0$ tais que

$$A := \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \left| \int_{S^1} \phi d\mu_n - \int_{S^1} \phi d\mu_{s, f} \right| \geq \epsilon \right\} \quad (7.2)$$

é um conjunto infinito.

Defina

$$\omega_A := \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{\mu_n \mid n \in A, n \geq k\}}; \quad (7.3)$$

afirmamos que ω_A é não-vazio. Com efeito, seja

$$X = \{\mu_n \mid n \in A\}. \quad (7.4)$$

Temos dois casos a considerar. Se X é infinito, então X possui um ponto de acumulação (pela compacidade de $\mathcal{P}(S^1)$), que evidentemente pertence a ω_A . Se X é finito, então existe algum subconjunto infinito $B \subset A$ tal que $\mu_n = \mu_m$ para quaisquer $n, m \in B$; nesse caso, essa medida comum associada a B pertence a ω_A .

Seja então $\nu \in \omega_A$, de forma que existe uma sequência crescente $(n_k) \subset A$ tal que $\mu_{n_k} \rightarrow \nu$ na topologia fraca-*. Seja $\eta > 0$ fixado. Assim, para qualquer $\psi \in C^0(S^1)$, existe $k_0 = k_0(\psi) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \int_{S^1} \psi d\mu_{n_k} - \int_{S^1} \psi d\nu \right| < \frac{\eta}{3} \quad (7.5)$$

para todo $k \geq k_0$.

Observe que, como $s_n \rightarrow s$ na topologia usual e $f_n \rightarrow f$ na topologia C^1 , temos que, para qualquer $\psi \in C^0(S^1)$,

$$(\psi \circ f_n) (Df_n)^{s_n} \longrightarrow (\psi \circ f) (Df)^s \quad (7.6)$$

uniformemente. Assim, dada $\psi \in C_0(S^1)$, existe $m_0 = m_0(\psi) \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $\rho \in \mathcal{P}(S^1)$,

$$\left| \int_{S^1} [(\psi \circ f_m) (Df_m)^{s_m} - (\psi \circ f) (Df)^s] d\rho \right| < \frac{\eta}{3} \quad (7.7)$$

para todo $m \geq m_0$.

Portanto, dada qualquer $\psi \in C^0(S^1)$,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{S^1} [\psi - (\psi \circ f) (Df)^s] d\nu \right| \\ & \leq \left| \int_{S^1} \psi d\nu - \int_{S^1} \psi d\mu_{n_k} \right| + \left| \int_{S^1} \psi d\mu_{n_k} - \int_{S^1} (\psi \circ f) (Df)^s d\mu_{n_k} \right| \\ & \quad + \left| \int_{S^1} (\psi \circ f) (Df)^s d\mu_{n_k} - \int_{S^1} (\psi \circ f) (Df)^s d\nu \right| \\ & < \frac{\eta}{3} + \left| \int_{S^1} [(\psi \circ f_{n_k}) (Df_{n_k})^{s_{n_k}} - (\psi \circ f) (Df)^s] d\mu_{n_k} \right| + \frac{\eta}{3} \\ & < \eta, \end{aligned} \quad (7.8)$$

desde que escolhamos $k \geq \max \{k_0(\psi), k_0((\psi \circ f)(Df)^s)\}$ tal que $n_k \geq m_0(\psi)$. Concluimos que ν é f -automorfa de expoente s ; pela unicidade do Teorema A, segue que $\nu = \mu_{s,f}$. Assim, como $\mu_{n_k} \rightarrow \nu = \mu_{s,f}$ na topologia fraca-*,

$$\left| \int_{S^1} \phi d\mu_{n_k} - \int_{S^1} \phi d\mu_{s,f} \right| < \epsilon \quad (7.9)$$

para todo k suficientemente grande. Visto que $(n_k) \subset A$, isso contradiz a definição de A .

Assim, está provado que a sequência $\mu_n = \mu_{s_n, f_n}$ converge a $\mu_{s,f}$ na topologia fraca-*, o que conclui a prova do corolário. \blacksquare

7.2 Um teorema ergódico

O objetivo dessa seção é provar a seguinte versão do Teorema Ergódico de Birkhoff, adaptado para o contexto de medidas automorfas.

Teorema 7.2 (Um Teorema Ergódico para medidas automorfas). *Dados $s > 0$ e $\phi \in L^1(\mu_s)$, considere a sequência de funções $\{T_{n,s}\phi\}_{n \geq 1}$ dada por*

$$T_{n,s}\phi = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (\phi \circ f^i) (Df^i)^s}{\sum_{i=0}^{n-1} (Df^i)^s}. \quad (7.10)$$

Então

$$T_{n,s}\phi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{S^1} \phi d\mu_s \quad (7.11)$$

em μ_s -quase todo $x \in S^1$.

Observação 7.3. Observe que, colocando $s = 0$, obtemos a conclusão do Teorema Ergódico de Birkoff para a medida de probabilidade f -invariante μ .

Nosso caminho em direção à prova do Teorema 7.2 se inicia com o seguinte lema, análogo do Lema 4.1.

Lema 7.4. *Seja $\Sigma_s: S^1 \rightarrow [0, \infty]$ dada por*

$$\Sigma_s = \sum_{n=0}^{\infty} (Df^n)^s, \quad (7.12)$$

e seja

$$A_s = \{x \in \Lambda \mid \Sigma_s(x) = \infty\}. \quad (7.13)$$

Então $\mu_s(A_s) = 1$.

Demonstração. Como μ_s é ergódica para f (Teorema A) e A_s é f -invariante (veja a prova do Lema 4.1), é suficiente mostrar que $\mu_s(A_s) > 0$.

Observe que $\int_{S^1} (Df^n)^s d\mu_s = 1$ para todo $n \geq 0$, logo

$$\int_{S^1} \sum_{k=0}^{n-1} (Df^{q_k})^s d\mu_s = n \quad (7.14)$$

para todo $n \geq 1$. O resto da prova segue as mesmas linhas da prova do Lema 4.1, *mutatis mutandis*. ■

Corolário 7.5. *Dada $\phi \in L^1(\mu_s)$, $\phi \geq 0$, sejam*

$$\underline{\phi}_s = \liminf_{n \rightarrow \infty} T_{n,s}\phi, \quad \bar{\phi}_s = \limsup_{n \rightarrow \infty} T_{n,s}\phi. \quad (7.15)$$

Temos que $\underline{\phi}_s, \bar{\phi}_s$ são μ_s -quase certamente constantes, e ademais,

$$\underline{\phi}_s \leq \int_{S^1} \phi d\mu_s \leq \bar{\phi}_s \quad (7.16)$$

em μ_s quase todo ponto.

Demonstração. É simples ver que a segunda parte segue da primeira, uma vez que se $\underline{\phi}_s, \bar{\phi}_s$ são μ_s -quase certamente constantes, então

$$\underline{\phi}_s = \int_{S^1} \underline{\phi}_s d\mu_s \leq \int_{S^1} \phi d\mu_s \leq \int_{S^1} \bar{\phi}_s d\mu_s = \bar{\phi}_s \quad (7.17)$$

μ_s -q.t.p. Observe também que, tendo em vista a ergodicidade de μ_s com respeito a f , é suficiente mostrar que $\underline{\phi}_s, \bar{\phi}_s$ são μ_s -quase certamente f -invariantes.

Ora, dados $n \geq 1$ e $x \in A_s$, temos que

$$\begin{aligned} (T_{n,s}\phi \circ f)(x) &= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^{i+1}(x)) (Df^i(f(x)))^s}{\sum_{i=0}^{n-1} (Df^i(f(x)))^s} = \frac{\sum_{i=1}^n \phi(f^i(x)) (Df^i(x))^s}{\sum_{i=1}^n (Df^i(x))^s} \\ &= \left(\frac{\sum_{i=0}^n \phi(f^i(x)) (Df^i(x))^s}{\sum_{i=0}^n (Df^i(x))^s} - \frac{\phi(x)}{\sum_{i=0}^n (Df^i(x))^s} \right) \frac{\sum_{i=0}^n (Df^i(x))^s}{\sum_{i=0}^n (Df^i(x))^s - 1} \\ &= \left(T_{n+1,s}\phi(x) - \frac{\phi(x)}{\sum_{i=0}^n (Df^i(x))^s} \right) \frac{\sum_{i=0}^n (Df^i(x))^s}{\sum_{i=0}^n (Df^i(x))^s - 1}. \end{aligned}$$

Assim, tomando o limite e observando que $\Sigma_s(x) = \infty$,

$$(\underline{\phi}_s \circ f)(x) = \underline{\phi}_s(x), \quad (\bar{\phi}_s \circ f)(x) = \bar{\phi}_s(x), \quad (7.18)$$

donde concluímos que $\underline{\phi}_s, \bar{\phi}_s$ são μ_s -quase certamente f -invariantes. Segue então da ergodicidade de μ_s para f que $\underline{\phi}_s, \bar{\phi}_s$ são μ_s -quase certamente constantes (sendo que, do que sabemos até o momento, podemos ter $\underline{\phi}_s = -\infty$ ou $\bar{\phi}_s = +\infty$ μ_s -q.t.p.). ■

Em decorrência do Corolário 7.5, o Teorema 7.2 seguirá se provarmos que

$$\underline{\phi}_s = \bar{\phi}_s \quad (7.19)$$

em μ_s -quase todo $x \in S^1$.

Para provar o Teorema 7.2, adaptamos a estratégia exposta em [2] para o caso de medidas automorfias. Começamos citando um lema de Análise (para uma prova, veja [2, Lemma 4.5.4]), o qual fará uso da seguinte definição.

Definição 7.6. Seja a_1, \dots, a_m uma sequência finita de números reais, e seja $1 \leq k \leq m$. Dizemos que $a_n, 1 \leq n \leq m$, é um k -líder nessa sequência se, para algum $1 \leq p \leq k$,

$$a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p-1} \geq 0.$$

O lema de Análise do qual faremos uso é o seguinte.

Lema 7.7. Para todo $1 \leq k \leq m$, a soma de todos os k -líderes na sequência a_1, \dots, a_m é não-negativa.

Munidos do lema anterior, provaremos a seguinte versão do Teorema Ergódico Maximal para medidas automorfias.

Lema 7.8 (Um teorema ergódico maximal para medidas automorfias). *Sejam $\phi \in L^1(\mu_s)$ e $X \subset A_s$ um conjunto f -invariante. Defina*

$$B := \left\{ x \in X \mid \text{para algum } n \geq 0, \sum_{i=0}^n \phi(f^i(x)) (Df^i(x))^s \geq 0 \right\}.$$

Então $\int_B \phi d\mu_s \geq 0$.

Demonstração. Para cada $k \geq 0$, seja $S_{k,s}\phi$ dada por

$$S_{k,s}\phi(x) = \sum_{i=0}^k \phi(f^i(x)) (Df^i(x))^s$$

Evidentemente, $S_{k,s}\phi \in L^1(\mu_s)$. Ademais, observe que, para $x \in X$ e $j \geq 0$,

$$\sum_{i=j}^{j+k} \phi(f^i(x)) (Df^i(x))^s = (Df^j(x))^s S_{k,s}\phi(f^j(x)). \quad (7.20)$$

Defina os conjuntos

$$B_n := \{ x \in X \mid \text{para algum } 0 \leq k \leq n, S_{k,s}\phi(x) \geq 0 \}$$

para $n \geq 0$. Então $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$; pelo Teorema da Convergência Dominada, basta mostrar que $\int_{B_n} \phi d\mu_s \geq 0$ para todo $n \geq 0$.

Sejam $n, m \geq 1$ fixados, e denote por $s_n(x)$ a soma dos n -líderes na sequência finita

$$\phi(x), \phi(f(x)) (Df(x))^s, \dots, \phi(f^{n+m-1}(x)) (Df^{n+m-1}(x))^s$$

para cada $x \in X$. Do Lema 7.7, $s_n \geq 0$.

Para cada $0 \leq j \leq m+n-1$, seja

$$C_j := \{x \in X \mid \phi(f^j(x)) (Df^j(x))^s \text{ é } n\text{-líder em } \phi(x), \dots, \phi(f^{n+m-1}(x)) (Df^{n+m-1}(x))^s\}.$$

Usando a (7.20), um simples cálculo mostra que, para cada $j \leq m-1$, $C_j = f^{-j}(C_0)$, i.e., $\mathbf{1}_{C_j} = \mathbf{1}_{C_0} \circ f^j$. Assim,

$$s_n = \sum_{j=0}^{m+n-1} (\phi \circ f^j) (Df^j)^s \mathbf{1}_{C_j} = \sum_{j=0}^{m-1} (\phi \mathbf{1}_{C_0} \circ f^j) (Df^j)^s + \sum_{j=m}^{m+n-1} (\phi \circ f^j) (Df^j)^s \mathbf{1}_{C_j}. \quad (7.21)$$

Como $s_n \geq 0$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_X s_n d\mu_s = \sum_{j=0}^{m-1} \int_X (\phi \mathbf{1}_{C_0} \circ f^j) (Df^j)^s d\mu_s + \sum_{j=m}^{m+n-1} \int_X (\phi \circ f^j) (Df^j)^s \mathbf{1}_{C_j} d\mu_s \\ &\leq m \int_{C_0} \phi d\mu_s + \sum_{j=m}^{m+n-1} \int_{S^1} (|\phi| \circ f^j) (Df^j)^s d\mu_s \\ &= m \int_{C_0} \phi d\mu_s + n \|\phi\|_1. \end{aligned}$$

Mas

$$C_0 = \left\{ x \in X \mid \sum_{i=0}^{p-1} \phi(f^i(x)) (Df^i(x))^s \geq 0 \text{ para algum } 1 \leq p \leq n \right\} = B_{n-1},$$

logo $\int_{B_{n-1}} \phi d\mu_s \geq -\frac{n}{m} \|\phi\|_1$. Tomando o limite $m \rightarrow \infty$, obtemos

$$\int_{B_{n-1}} \phi d\mu_s \geq 0.$$

Como $n \geq 1$ era qualquer, isso conclui a prova. ■

Estamos agora em condições de provar o Teorema 7.2.

Prova do Teorema 7.2. Para $a < b \in \mathbb{R}$, defina

$$X(a, b) := \{x \in A_s \mid \underline{\phi}_s(x) < a < b < \bar{\phi}_s(x)\}.$$

Como $\underline{\phi}_s$ e $\bar{\phi}_s$ são ambas f -invariantes em A_s , $X(a, b)$ é f -invariante.

Definindo $\psi_1 = \phi - b$, temos que, para todo $x \in X(a, b)$, existe algum $n \geq 0$ tal que

$$\sum_{i=0}^n \psi_1(f^i(x)) (Df^i(x))^s \geq 0$$

(na verdade, há infinitos tais n). Ademais, o fato análogo também vale para $\psi_2 = a - \phi$. Portanto, pelo Lema 7.8, $\int_{X(a,b)} \psi_1 d\mu_s \geq 0$ e $\int_{X(a,b)} \psi_2 d\mu_s \geq 0$. Consequentemente,

$$0 \leq \int_{X(a,b)} (\psi_1 + \psi_2) d\mu_s = \int_{X(a,b)} (a - b) d\mu_s,$$

o que só é possível se $\mu_s(X(a, b)) = 0$.

Agora, seja

$$X = \bigcup \{ X(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b \}$$

Como X é uma união enumerável de conjuntos de μ_s -medida nula, X também tem μ_s -medida nula. Observe que, para qualquer $x \in A_s \setminus X$, $\phi_s(x) = \bar{\phi}_s(x)$. Concluimos que

$$T_{n,s}\phi \longrightarrow \int_{S^1} \phi d\mu_s$$

em μ_s -quase todo $x \in S^1$, como queríamos. ■

Observação 7.9. É simples ver que, no caso de observáveis contínuos $\phi \in C^0(S^1)$, a convergência de $T_{n,s}\phi$ a $\int_{S^1} \phi d\mu_s$ não é somente μ_s -quase certa, mas pontual.

Capítulo 8

Aplicações

Nesse capítulo final, provamos o Teorema B (§8.1), o Teorema C (§8.2) e o Teorema D (§8.3). Com esses objetivos em mente, primeiro revisamos alguns conceitos e resultados básicos sobre distribuições invariantes para sistemas dinâmicos em variedades compactas.

8.1 Equações cohomológicas e distribuições invariantes

Seja M uma variedade suave compacta. Para $0 \leq r \leq \infty$ inteiro, seja $C^r(M)$ o espaço das funções $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , munido de sua topologia C^r . Recorde-se que a topologia C^r faz de $C^r(M)$ um espaço de Banach para r finito e de $C^\infty(M)$ um espaço de Fréchet, e que uma distribuição em M é simplesmente um elemento do espaço dual contínuo $C^\infty(M)^*$; denotaremos o espaço das distribuições em M por $\mathcal{D}'(M)$, e o valor de uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(M)$ agindo sobre uma função $u \in C^\infty(M)$ por $\langle T, u \rangle$.

Suponha que $T \in \mathcal{D}'(M)$ e $0 \leq k < \infty$ são tais que existe $C > 0$ com

$$|\langle T, u \rangle| \leq C \|u\|_k \quad \forall u \in C^\infty(M).$$

Nesse caso, T possui uma única extensão contínua $\tilde{T} \in C^k(M)^*$; dizemos que T tem *ordem no máximo* k . De fato, toda $T \in C^k(M)^*$ é a única extensão contínua de uma distribuição em M de ordem no máximo k . Denotando $C^k(M)^*$ por $\mathcal{D}'_k(M)$, temos a seguinte sequência de inclusões *modulo* extensões únicas:

$$\mathcal{D}'_0(M) \hookrightarrow \mathcal{D}'_1(M) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathcal{D}'(M).$$

Observe que o Teorema de Representação de Riesz naturalmente identifica $\mathcal{D}'_0(M)$ com o espaço $\mathcal{M}(M)$ de medidas de Radon com sinal e finitas em M .

Se $T \in \mathcal{D}'(M)$ pertence a $\mathcal{D}'_k(M)$ para algum k finito, dizemos que T possui ordem finita, e definimos sua ordem como o menor tal k . Uma consequência notável da compacidade de M é que todas as distribuições em M possuem ordem finita, i.e.

$$\mathcal{D}'(M) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}'_k(M).$$

Agora, seja $f: M \rightarrow M$ um C^r -endomorfismo de M , $0 \leq r \leq \infty$.

Definição 8.1 (C^ℓ -cobordo). Sejam $0 \leq \ell \leq \infty$ e $\phi \in C^\ell(M)$. Dizemos que ϕ é um C^ℓ -cobordo para f se a equação cohomológica

$$u \circ f - u = \phi \tag{8.1}$$

possui uma solução $u \in C^\ell(M)$.

Para $0 \leq \ell \leq \infty$ inteiro, o conjunto dos C^ℓ -cobordos para f forma um subespaço vetorial de $C^\ell(M)$, o qual denotaremos por $B(f, C^\ell(M))$.

Definição 8.2 (Distribuição invariante). Dizemos que $T \in \mathcal{D}'_r(M)$ é f -invariante se

$$\langle T, u \circ f \rangle = \langle T, u \rangle \quad (8.2)$$

para toda $u \in C^\infty(M)$.

Observação 8.3. Seja a variedade M o círculo unitário S^1 . Uma medida f -automorfa ν de expoente 1 naturalmente induz uma distribuição f -invariante $T \in \mathcal{D}'_1(S^1)$ através de

$$\langle T, u \rangle = \int_{S^1} u' d\nu$$

para $u \in C^1(S^1)$. De fato, note que

$$\langle T, u \circ f \rangle = \int_{S^1} (u \circ f)' d\nu = \int_{S^1} (u' \circ f) Df d\nu = \int_{S^1} u' d\nu = \langle T, u \rangle.$$

Como é fácil ver, a medida de Lebesgue (que é automorfa de expoente 1 para qualquer homeomorfismo do círculo de classe C^1) induz a distribuição nula $\langle T, u \rangle = 0$. No entanto, medidas automorfas de expoente 1 distintas da medida de Lebesgue induzem distribuições invariantes não-triviais, veja a §8.2 abaixo.

Para todo $0 \leq k \leq r$ inteiro, o conjunto $\mathcal{D}'_k(f)$ de distribuições f -invariantes de ordem no máximo k forma um subespaço vetorial de $\mathcal{D}'_k(M)$. De fato, as equações (8.1) e (8.2) (por extensão única a funções C^k) identificam $\mathcal{D}'_k(f)$ com o anulador (contínuo) de $B(f, C^k(M))$.

Assim, pelo Teorema de Separação de Hahn-Banach,

$$\text{cl}_k B(f, C^k(M)) = \bigcap_{T \in \mathcal{D}'_k(f)} \ker T \quad (8.3)$$

em que cl_k denota fecho na topologia C^k .

Também temos a sequência de inclusões

$$\mathcal{D}'_0(f) \hookrightarrow \mathcal{D}'_1(f) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathcal{D}'_r(f)$$

e também

$$\mathcal{D}'_r(f) = \bigcup_{k=0}^r \mathcal{D}'_k(f). \quad (8.4)$$

A seguinte proposição é uma consequência simples mas crucial (como ficará claro a seguir) da (8.3).

Proposição 8.4. *Seja $f: M \rightarrow M$ um C^r -endomorfismo de uma variedade suave compacta M , $0 \leq r \leq \infty$, e seja μ uma medida de probabilidade de Radon f -invariante em M . Seja $0 \leq k \leq r$ um inteiro. Então*

$$\mathcal{D}'_k(f) = \mathbb{R}\mu$$

se, e somente se, o seguinte ocorre. Para qualquer $\phi \in C^k(M)$ com $\int_M \phi d\mu = 0$, existe uma sequência $\{\phi_n = u_n \circ f - u_n\}_{n \geq 1} \subset B(f, C^k(M))$ de C^k -cobordos para f convergindo a ϕ na topologia C^k .

Munidos do critério anterior, estamos em condições de mostrar que o Teorema A implica o Teorema B. A prova dada a seguir é retirada quase *ipsis verbis* de [29]. Nós a reproduzimos aqui por via de completude, como também para indicar os pedaços da prova em que estimativas dependendo da variação limitada de $\log Df$ para C^{1+bv} -difeomorfismos devem ser substituídas por estimativas apropriadas para aplicações multicríticas do círculo e onde resultados de [3] devem ser substituídos por consequências do Teorema A. Da Proposição 8.4, basta mostrar que o Teorema A implica o seguinte lema.

Lema 8.5. *Seja $u \in C^1(S^1)$ tal que $\int_{S^1} u d\mu = 0$. Então existe uma sequência v_n de funções $S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que*

$$v_n \circ f - v_n \longrightarrow u \quad (8.5)$$

e

$$(v'_n \circ f)Df - v'_n \longrightarrow u' \quad (8.6)$$

uniformemente.

Seja $u \in C^1(S^1)$, $\int_{S^1} u d\mu = 0$, fixada. A construção da sequência v_n do Lema 8.5 seguirá do seguinte fato.

Proposição 8.6. *Existe uma sequência $\{w_n\}_{n \geq 1} \subset C^0(S^1)$ tal que*

$$(w_n \circ f)Df - w_n \longrightarrow u' \quad (8.7)$$

uniformemente e, para todo $n \geq 1$, $\int_{S^1} w_n d\text{Leb} = 0$.

De fato, assuma que a Proposição 8.6 é verdadeira, e para cada $n \geq 1$, defina $v_n: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$v_n(x) = \int_{[0,x]} w_n(y) dy,$$

em que $[0, x]$ é o intervalo fechado positivamente orientado do círculo com extremos $0, x$.

Observe que, como $\int_{S^1} w_n d\text{Leb} = 0$, v_n está bem-definida como função contínua e \mathbb{Z} -periódica de \mathbb{R} em \mathbb{R} (i.e., $v_n \in C^0(S^1)$). Ademais, $v_n \in C^1(S^1)$ e $v'_n = w_n$, logo

$$(v'_n \circ f)Df - v'_n = (w_n \circ f)Df - w_n.$$

Portanto, a Proposição 8.6 implica que a sequência v_n que acabamos de definir satisfaz a (8.6). Resta mostrar que as $v_n \circ f - v_n$ também convergem uniformemente a u .

Bom, para qualquer $x \in S^1$, temos

$$\begin{aligned} v_n(f(x)) - v_n(x) - u(x) &= \int_{[0,f(x)]} w_n(y) dy - \int_{[0,x]} w_n(y) dy \\ &\quad - \left(u(0) + \int_{[0,x]} u'(y) dy \right) \\ &= \int_{[0,x]} [(w_n(f(y))Df(y) - w_n(y)) - u'(y)] dy - c_n \end{aligned} \quad (8.8)$$

em que $c_n := u(0) - \int_{[0,f(0)]} w_n(y) dy$. Assim,

$$\|(v_n \circ f - v_n + c_n) - u\|_{C^0} \leq \|[(w_n \circ f)Df - w_n] - u'\|_{C^0}. \quad (8.9)$$

Agora, da Proposição 8.6, o lado direito da (8.9) converge a 0, logo a sequência $\{v_n \circ f - v_n + c_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente a u . Como μ é f -invariante, segue que

$$c_n = \int_{S^1} (v_n \circ f - v_n + c_n) d\mu \longrightarrow \int_{S^1} u d\mu = 0 \quad (8.10)$$

e podemos concluir que a (8.5) também vale para a sequência $\{v_n\}$. Isso conclui a prova do Lema 8.5, assumindo a Proposição 8.6.

Sabendo que a Proposição 8.6 implica o Lema 8.5 (que, por sua vez, implica o Teorema B), nos dedicamos agora a provar que o Teorema A implica essa proposição. Primeiro, um lema técnico, que consiste da Proposição 8.6 no caso específico $u = f - \text{Id}$.

Lema 8.7. *Existe uma sequência $\{\hat{w}_k\}_{k \geq 1} \subset C^0(S^1)$, com $(\hat{w}_k \circ f)Df - \hat{w}_k$ convergindo uniformemente a $Df - 1$, tal que, para todo $k \geq 1$, $\int_{S^1} \hat{w}_k d\text{Leb} = 0$.*

Demonstração. Para $k \geq 1$, defina $\hat{w}_k \in C^0(S^1)$ por

$$\hat{w}_k = 1 - \frac{1}{q_k} \sum_{i=0}^{q_k-1} Df^i. \quad (8.11)$$

Observe que

$$\int_{S^1} Df^i d\text{Leb} = 1,$$

logo

$$\int_{S^1} \hat{w}_k d\text{Leb} = 1 - \frac{1}{q_k} \sum_{i=0}^{q_k-1} \int_{S^1} Df^i d\text{Leb} = 1 - 1 = 0. \quad (8.12)$$

Ademais,

$$\begin{aligned} & \|[(\hat{w}_k \circ f)Df - \hat{w}_k] - (Df - 1)\|_{C^0} \\ &= \left\| \left[\left(Df - \frac{1}{q_k} \sum_{i=0}^{q_k-1} (Df^i \circ f)Df \right) - 1 + \frac{1}{q_k} \sum_{i=0}^{q_k-1} Df^i \right] - Df + 1 \right\|_{C^0} \\ &= \frac{1}{q_k} \|1 - Df^{q_k}\|_{C^0} \leq \frac{1 + \|Df^{q_k}\|_{C^0}}{q_k}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Agora, do Lema 2.11,

$$\|[(\hat{w}_k \circ f)Df - \hat{w}_k] - (Df - 1)\|_{C^0} \leq \frac{1 + \|Df^{q_k}\|_{C^0}}{q_k} \leq \frac{1 + C_1}{q_k} \rightarrow 0 \quad (8.14)$$

pois $q_k \rightarrow \infty$. As equações (8.14) e (8.12) provam o lema. \blacksquare

Observação 8.8. A principal diferença entre as demonstrações do Lema 8.7 acima (no caso crítico) e o lema correspondente em [29, p. 317] (no caso de difeomorfismos) é o uso do Lema 2.11 para estimar $\|Df^{q_n}\|_{C^0}$, ao invés da conhecida desigualdade de Denjoy (veja [9, Section 3.2]). Além disso, em nosso caso as \hat{w}_k não são somente contínuas, mas C^2 , pois requerimos que f seja ao menos C^3 .

A prova da Proposição 8.6 dada a seguir depende essencialmente do fato crucial que, se $L \in C^0(S^1)^*$ satisfaz

$$\langle L, (\phi \circ f)Df - \phi \rangle = 0 \quad (8.15)$$

para qualquer $\phi \in C^0(S^1)$, então L é um múltiplo (escalar) da medida de Lebesgue. No caso de difeomorfismos, esse fato é consequência de [3, Théorème 1], enquanto no caso crítico, segue do Teorema A (Corolário 6.10).

Prova da Proposição 8.6. A prova resultará de duas afirmações.

Afirmação #1: Existe uma sequência $\{\bar{w}_n\}_{n \geq 1} \subset C^0(S^1)$ tal que

$$(\bar{w}_n \circ f)Df - \bar{w}_n \rightarrow u' \quad (8.16)$$

uniformemente.

De fato, considere o operador linear contínuo $U_1: C^0(S^1) \rightarrow C^0(S^1)$ dado por

$$U_1 w = (w \circ f)Df - w \quad (8.17)$$

e seja M a imagem de U_1 . Se não existe sequência \bar{w}_n satisfazendo a (8.16), então $u' \notin \text{cl}_0 M$, do que concluímos, pelo Teorema de Separação de Hahn-Banach, que existe um funcional linear $L \in C^0(S^1)^*$ tal que L é identicamente nulo em M e $\langle L, u' \rangle = 1$. Mas o fato de L se anular em M é facilmente visto como equivalente à (8.15), logo L deve ser um múltiplo da medida de Lebesgue; isso contradiz o fato que $\int_{S^1} u' d\text{Leb} = 0$ (pois u é \mathbb{Z} -periódica). Assim, uma sequência $\{\bar{w}_n\}_{n \geq 1}$ satisfazendo a (8.16) necessariamente existe. Para cada $n \geq 1$, sejam

$$c_n := \int_{S^1} \bar{w}_n d\text{Leb}, \quad \tilde{w}_n := \bar{w}_n - c_n.$$

e escolha $k_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|c_n| \|[(\hat{w}_{k_n} \circ f)Df - \hat{w}_{k_n}] - (Df - 1)\|_{C^0} \leq 2^{-n}$$

(o Lema 8.7 garante que isso é sempre possível). Por fim, defina

$$w_n := \tilde{w}_n + c_n \hat{w}_{k_n} = \bar{w}_n + c_n(\hat{w}_{k_n} - 1). \quad (8.18)$$

Observe que $\int_{S^1} w_n d\text{Leb} = 0$.

Afirmiação # 2:

$$(w_n \circ f)Df - w_n \longrightarrow u' \quad (8.19)$$

uniformemente. Observe que provar a afirmação # 2 concluirá a prova.

Para provar a afirmação, seja $\epsilon > 0$ qualquer, e escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n_0} < \frac{\epsilon}{2}$ e

$$\|(\bar{w}_n \circ f)Df - \bar{w}_n - u'\|_{C^0} < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $n \geq n_0$.

Segue que, para todo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} & \| (w_n \circ f)Df - w_n - u' \|_{C^0} \\ & \leq \| (\bar{w}_n \circ f)Df - \bar{w}_n - u' \|_{C^0} + |c_n| \| [(\hat{w}_{k_n} - 1) \circ f] Df - (\hat{w}_{k_n} - 1) \|_{C^0} \\ & < \frac{\epsilon}{2} + |c_n| \| [(\hat{w}_{k_n} \circ f)Df - \hat{w}_{k_n}] - (Df - 1) \|_{C^0} \\ & \leq \frac{\epsilon}{2} + 2^{-n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned} \quad (8.20)$$

o que prova a afirmação. ■

Assim, está concluída a prova do Teorema B.

8.2 Intervalos errantes e distribuições invariantes

Antes de prosseguir com a prova do Teorema D, brevemente explicamos porque vale o Teorema C.

Para qualquer irracional dado $\rho \in (0, 1)$, Hall foi capaz de construir em [20] um C^∞ -homeomorfismo $f: S^1 \rightarrow S^1$, com número de rotação $\rho(f) = \rho$, com um intervalo errante I (i.e., I é um intervalo aberto tal que $f^n(I)$ é disjunto de $f^m(I)$ sempre que $n \neq m$ em \mathbb{Z}). Esses exemplos, os chamados *exemplos de Hall*, possuem um único ponto crítico c que

tem ordem *infinita*: as derivadas de f de todas as ordens se anulam em c . Observe que esse ponto crítico necessariamente pertence ao conjunto de Cantor invariante de f (caso contrário, uma perturbação suave suportada no intervalo errante contendo c produziria um C^∞ -difeomorfismo com número de rotação irracional ρ e intervalos errantes, contradizendo o Teorema de Denjoy). Em particular, $f^n: I \rightarrow f^n(I)$ é um difeomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.

A esses exemplos de Hall, aplicamos a seguinte observação geral.

Lema 8.9. *Seja $f: S^1 \rightarrow S^1$ um homeomorfismo que preserva a orientação com um intervalo errante $I \subset S^1$ tal que $f^n: I \rightarrow f^n(I)$ é um C^1 -difeomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$. Então a série*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} Df^n(x)$$

é finita para Lebesgue-quase todo $x \in I$.

Demonstração. Fixe algum $\ell \in \mathbb{N}$, e considere o conjunto

$$A_\ell = \left\{ x \in I \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} Df^n(x) \geq \ell \right\}.$$

Afirmamos que $\text{Leb}(A_\ell) \leq 1/\ell$, onde Leb denota, como antes, a medida de Lebesgue em S^1 . De fato, pelo Teorema da Convergência Monótona (recorde-se aqui que Df é não-negativa em todo o círculo),

$$\int_{A_\ell} \sum_{n \in \mathbb{Z}} Df^n d\text{Leb} \leq \int_I \sum_{n \in \mathbb{Z}} Df^n d\text{Leb} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_I Df^n d\text{Leb}.$$

Mas

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_I Df^n d\text{Leb} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f^n(I)| \leq 1,$$

pois I é um intervalo errante e $f^n: I \rightarrow f^n(I)$ é um C^1 -difeomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim, obtemos

$$\int_{A_\ell} \sum_{n \in \mathbb{Z}} Df^n d\text{Leb} \leq 1,$$

e portanto $\text{Leb}(A_\ell) \leq 1/\ell$ para todo $\ell \geq 1$, como havíamos afirmado. A afirmação claramente implica o lema. ■

Prova do Teorema C. Seja $f: S^1 \rightarrow S^1$ um exemplo de Hall como acima, com um intervalo errante $I \subset S^1$. Escolha algum $x \in I$ tal que $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Df^n(x)$ seja finita (pelo Lema 8.9, essa série é finita em Lebesgue-quase todo x fora do conjunto de Cantor f -invariante). Seguindo [3, Section 3.1], definimos a medida de probabilidade atômica

$$\nu = \frac{1}{S} \sum_{n \in \mathbb{Z}} Df^n(x) \delta_{f^n(x)}.$$

Vê-se imediatamente que ν é f -automorfa de expoente 1 (observe, em particular que a *unicidade* do Teorema A também deixa de valer se removemos a condição de ordem finita nos pontos críticos de f). Agora, consideramos $T \in \mathcal{D}'_1(S^1)$ a distribuição invariante induzida por ν , isto é,

$$\langle T, u \rangle = \int_{S^1} u' d\nu$$

(veja a Observação 8.3 acima). Por fim, para provar que T não é múltipla da única medida de probabilidade f -invariante μ é simples (compare com [29, Section 3]). De fato, seja $u: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , suportada no intervalo errante I , tal que x não é um ponto crítico de u . Então, por um lado, temos

$$\langle T, u \rangle = \int_{S^1} u' d\nu = \frac{1}{S} u'(x) \neq 0.$$

Por outro lado, como o suporte de u é disjunto do conjunto não-errante de f , certamente temos $\int_{S^1} u d\mu = 0$. Isso conclui a prova do Teorema C. ■

8.3 Desigualdade de Denjoy-Koksma aprimorada

Terminamos esse capítulo provando que o Teorema A implica o Teorema D. Na verdade, apresentaremos duas provas diferentes do Teorema D. A primeira é válida somente quando o observável ϕ é de classe C^1 , enquanto a segunda vale no caso geral, i.e. quando ϕ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue. A primeira segue [1, pages 513–514], e decorre da ausência de distribuições invariantes de ordem 1 (obtida no Teorema B), enquanto a segunda segue [28, pages 379–381], e usa somente a ergodicidade da medida de Lebesgue sob uma aplicação multicrítica do círculo (como estabelecido no Teorema 6.8).

Prova do Teorema D para observáveis C^1 . Para qualquer $\phi \in C^1(S^1)$ dada, note que $\phi - \int_{S^1} \phi d\mu$ pertence a $\ker \mu$. Combinando o Teorema B com a Proposição 8.4 obtemos que, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existe $u \in C^1(S^1)$ tal que

$$\left\| (u \circ f - u) - \left(\phi - \int_{S^1} \phi d\mu \right) \right\|_{C^1} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $\tilde{\phi} \in C^1(S^1)$ dada por $\tilde{\phi} = u \circ f - u + \int_{S^1} \phi d\mu$, de forma que $\|\tilde{\phi} - \phi\|_{C^1} \leq \varepsilon/2$. Como μ é f -invariante, temos $\int_{S^1} \tilde{\phi} d\mu = \int_{S^1} \phi d\mu$. Agora, para todo $x \in S^1$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{q_n-1} \phi(f^i(x)) - q_n \int_{S^1} \phi d\mu \right| &\leq \left| \sum_{i=0}^{q_n-1} (\phi - \tilde{\phi})(f^i(x)) - q_n \int_{S^1} (\phi - \tilde{\phi}) d\mu \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=0}^{q_n-1} \tilde{\phi}(f^i(x)) - q_n \int_{S^1} \tilde{\phi} d\mu \right|. \end{aligned}$$

Prosseguimos estimando ambos os termos no lado direito da desigualdade acima. Por um lado, pela desigualdade de Denjoy-Koksma padrão,

$$\left| \sum_{i=0}^{q_n-1} (\phi - \tilde{\phi})(f^i(x)) - q_n \int_{S^1} (\phi - \tilde{\phi}) d\mu \right| \leq \text{var}(\tilde{\phi} - \phi) \leq \|\tilde{\phi} - \phi\|_{C^1} \leq \varepsilon/2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{q_n-1} \tilde{\phi}(f^i(x)) - q_n \int_{S^1} \tilde{\phi} d\mu &= \sum_{i=0}^{q_n-1} \left[u(f^{i+1}(x)) - u(f^i(x)) + \int_{S^1} \phi d\mu \right] - q_n \int_{S^1} \tilde{\phi} d\mu \\ &= u(f^{q_n}(x)) - u(x) + q_n \left(\int_{S^1} \phi d\mu - \int_{S^1} \tilde{\phi} d\mu \right) \\ &= u(f^{q_n}(x)) - u(x). \end{aligned}$$

Em particular,

$$\left| \sum_{i=0}^{q_n-1} \tilde{\phi}(f^i(x)) - q_n \int_{S^1} \tilde{\phi} d\mu \right| \leq \|u\|_{C^1} \|f^{q_n} - \text{Id}\|_{C^0}.$$

Pela minimalidade de f , podemos escolher $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u\|_{C^1} \|f^{q_n} - \text{Id}\|_{C^0} < \varepsilon/2$ para todo $n \geq n_0$. Assim, $\left| \sum_{i=0}^{q_n-1} \phi(f^i(x)) - q_n \int_{S^1} \phi d\mu \right| < \varepsilon$ para todo $x \in S^1$ e todo $n \geq n_0$. Como ε é arbitrário, isso conclui a prova do Teorema D no caso de observáveis C^1 . ■

Apresentaremos agora uma prova do Teorema D que vale em geral, seguindo [28, Section 2]. Com esse propósito em mente, precisaremos do seguinte lema.

Lema 8.10. *Se $v \in L^1(\text{Leb})$ é uma função Lebesgue-integrável no círculo tal que $\int_{S^1} v d\text{Leb} = 0$, então existe uma sequência w_n de funções Lebesgue-integráveis no círculo tais que*

$$\int_{S^1} w_n d\text{Leb} = 0$$

para todo n e

$$(w_n \circ f)Df - w_n \longrightarrow v$$

na norma L^1 .

Demonstração. Considere o operador linear contínuo $U: L^1(\text{Leb}) \rightarrow L^1(\text{Leb})$ dado por $Uw = (w \circ f)Df - w$, e seja M a imagem de U . Primeiro, assuma que $v \notin \text{cl } M$; então, pelo Teorema de Separação de Hahn-Banach, existe $L \in L^1(\text{Leb})^*$ tal que L é identicamente nulo em M e $\langle L, v \rangle = 1$. Identificando $L^1(\text{Leb})^*$ com $L^\infty(\text{Leb})$, existe uma função quase-certamente limitada $\phi \in L^\infty(\text{Leb})$ tal que

$$\langle L, w \rangle = \int_{S^1} \phi w d\text{Leb}$$

para toda $w \in L^1(\text{Leb})$. Mas então, para toda $\psi = Uw \in M$,

$$0 = \int_{S^1} \phi [(w \circ f)Df - w] d\text{Leb} = \int_{S^1} (\phi \circ f^{-1}) w d\text{Leb} - \int_{S^1} \phi w d\text{Leb},$$

onde usamos o fato que a medida de Lebesgue é f -automorfa de expoente 1.

Como a igualdade anterior é válida para toda w Lebesgue-integrável, concluímos que ϕ é f -invariante Leb-quase certamente. Como provamos na Seção 6.2, qualquer aplicação multicrítica do círculo de número de rotação irracional é ergódica com relação à medida de Lebesgue. Consequentemente, ϕ há de ser constante Leb-q.t.p., i.e., existe uma constante β tal que $\phi = \beta$ Leb-q.t.p. Mas então

$$1 = \langle L, v \rangle = \int_{S^1} v \phi d\text{Leb} = \beta \int_{S^1} v d\text{Leb},$$

contradizendo o fato que $v \in \ker \text{Leb}$. Assim, $v \in \text{cl } M$, e existe uma sequência \bar{w}_n de funções L^1 para as quais

$$(\bar{w}_n \circ f)Df - \bar{w}_n \longrightarrow v$$

na norma L^1 .

Agora, considere as funções \hat{w}_k do Lema 8.7: temos que

$$(\hat{w}_k \circ f)Df - \hat{w}_k \longrightarrow Df - 1$$

uniformemente. Se definirmos $c_n := \int_{S^1} \bar{w}_n d\text{Leb}$, então a sequência w_n desejada é dada por

$$w_n := \bar{w}_n - c_n + c_n \hat{w}_{k_n},$$

em que os k_n são escolhidos como na prova da Proposição 8.6. ■

Prova do Teorema D. Para qualquer $\phi \in AC(S^1)$ dada, temos que sua derivada $v := \phi'$ existe em Leb-quase todo ponto, e ademais, $\int_{S^1} v d\text{Leb} = 0$ (pois ϕ é \mathbb{Z} -periódica). Seja $\epsilon > 0$ fixado. Pelo Lema 8.10, existe $w \in L^1(\text{Leb})$, $w \in \ker \text{Leb}$, tal que

$$u := v - [(w \circ f)Df - w] \quad (8.21)$$

satisfaz

$$\int_{S^1} |u| d\text{Leb} \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (8.22)$$

Agora, sejam $\psi, \xi \in AC(S^1)$ dadas por

$$\xi(x) = \int_{[0,x]} u d\text{Leb} - \int_{S^1} \phi d\mu, \quad \psi(x) = \int_{[0,x]} w d\text{Leb},$$

de forma que $\int_{S^1} \xi d\mu = 0$ e

$$\xi = \phi - (\psi \circ f) + \psi - \int_{S^1} \phi d\mu, \quad (8.23)$$

ou equivalentemente,

$$\phi = \xi + (\psi \circ f) - \psi + \int_{S^1} \phi d\mu. \quad (8.24)$$

Por uma soma telescópica, temos que

$$\sum_{i=0}^{q_n-1} \phi \circ f^i - q_n \int_{S^1} \phi d\mu = \sum_{i=0}^{q_n-1} \xi \circ f^i + \psi \circ f^{q_n} - \psi. \quad (8.25)$$

Proseguimos estimando ambos os termos no lado direito da equação acima. Por um lado, pela desigualdade de Denjoy-Koksma usual,

$$\left\| \sum_{i=0}^{q_n-1} \xi \circ f^i \right\|_{C^0} \leq \text{var}(\xi) \leq \|\xi'\|_{L^1(\text{Leb})} = \|u\|_{L^1(\text{Leb})} \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (8.26)$$

Por outro lado, pela minimalidade de f ,

$$\|\psi \circ f^{q_n} - \psi\|_{C^0} \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (8.27)$$

para n suficientemente grande. Pela desigualdade triangular, as equações (8.25)-(8.27) mostram que, para n suficientemente grande,

$$\left\| \sum_{i=0}^{q_n-1} \phi \circ f^i - q_n \int_{S^1} \phi d\mu \right\|_{C^0} \leq \epsilon. \quad (8.28)$$

Como ϵ é arbitrário, isso conclui a prova do Teorema D. ■

Apêndice A

Provas das Estimativas de Distorção

Nesse apêndice, forneceremos as provas de alguns lemas técnicos na combinatória e distorção de aplicações multicríticas do círculo que foram enunciados ao longo do texto (Lemas 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5). As principais ferramentas necessárias serão a Desigualdade da Razão Cruzada e o Princípio de Distorção de Koebe.

A.1 Fatos combinatórios

Recorde-se do Capítulo 2 que, dada uma família de intervalos do círculo \mathcal{F} e um inteiro positivo m , dizemos que \mathcal{F} tem multiplicidade de interseção limitada por m se cada $x \in S^1$ pertence a não mais que m elementos de \mathcal{F} .

Lema 5.2. *Sejam $n \geq 0$ e $\Delta \in \mathcal{P}_n$. Então:*

- (a) a coleção $\{f^k(\Delta^*)\}_{k=0}^{q_{n+1}-1}$ tem multiplicidade de interseção limitada por 3;
- (b) a coleção $\{f^k(\tilde{\Delta})\}_{k=0}^{q_{n+1}-1}$ tem multiplicidade de interseção limitada por 3;
- (c) a coleção $\{f^k(\hat{\Delta})\}_{k=0}^{q_{n+1}-1}$ tem multiplicidade de interseção limitada por 8.

Demonstração. A parte (a) é bem conhecida; e a parte (b) segue de (a), uma vez que $\tilde{\Delta} \subset \Delta^*$. Assim, resta provar a parte (c). Observe que a prova de (c) abaixo pode ser facilmente adaptada para (a).

É uma consequência direta da combinatória de f que $\hat{\Delta} \subset \hat{K}(x_0)$, em que x_0 é um dos extremos de Δ (a depender se $f^{q_n}(\Delta)$ está à esquerda ou à direita de Δ na orientação usual de S^1) e $\hat{K}(x_0)$ é o intervalo fechado com extremos $f^{-3q_n}(x_0)$ e $f^{4q_n}(x_0)$ que contém x_0 (veja a figura A.1 abaixo). Assim, basta verificar que a coleção

$$\left\{f^k(\hat{K}(x_0))\right\}_{k=0}^{q_{n+1}-1} \tag{A.1}$$

possui multiplicidade de interseção limitada por 8.

Como mostra a figura A.1, temos:

$$\hat{\Delta} \subset \hat{K}(x_0) = \bigcup_{j=-3}^3 I_n^{jq_n}(x_0).$$

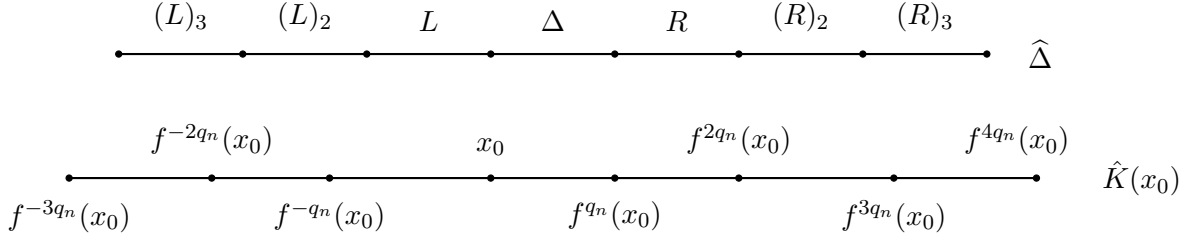


Figura A.1: Caso $f^{q_n}(\Delta)$ esteja à direita de Δ , podemos tomar x_0 como o extremo esquerdo de Δ e obter $\hat{K}(x_0) \supset \hat{\Delta}$.

Observe que, para $0 < k_1 < k_2 < q_{n+1}$,

$$f^{k_1}(\hat{K}(x_0)) \cap f^{k_2}(\hat{K}(x_0)) = f^{k_1} \left(\hat{K}(x_0) \cap f^{k_2-k_1}(\hat{K}(x_0)) \right),$$

e portanto, a multiplicidade de interseção da coleção (A.1) é limitada superiormente pela multiplicidade de interseção da coleção

$$\left\{ f^k(\hat{K}(x_0)) \right\}_{k \in S} \quad (\text{A.2})$$

em que

$$S := \left\{ 0 \leq k < q_{n+1} \mid \hat{K}(x_0) \cap f^k(\hat{K}(x_0)) \neq \emptyset \right\}. \quad (\text{A.3})$$

Sejam $r_1 = \min \{a_n, 7\}$, $r_2 = \min \{a_n, 6\}$. Afirmamos que

$$S = \{0\} \cup \{ \ell q_n \mid 1 \leq \ell \leq r_1 \} \cup \{ q_{n+1} - m q_n \mid 1 \leq m \leq r_2 \}. \quad (\text{A.4})$$

A inclusão \supset é evidente: de fato, se $1 \leq \ell \leq r_1$, então $1 \leq \ell q_n \leq a_n q_n < q_{n-1} + a_n q_n = q_{n+1}$, $4 - \ell \geq -3$ e

$$f^{4q_n}(x_0) = f^{\ell q_n}(f^{(4-\ell)q_n}(x_0)) \in I_n^{3q_n}(x_0) \cap f^{\ell q_n}(\hat{K}(x_0)) \subset \hat{K}(x_0) \cap f^{\ell q_n}(\hat{K}(x_0)). \quad (\text{A.5})$$

Analogamente, se $1 \leq m \leq r_2$, então $q_{n+1} > q_{n+1} - m q_n \geq q_{n+1} - a_n q_n = q_{n-1} \geq 1$, $m - 2 \leq 4$ e

$$\begin{aligned} f^{q_{n+1}-2q_n}(x_0) &= f^{q_{n+1}-mq_n}(f^{(m-2)q_n}(x_0)) \\ &\in I_n^{-3q_n}(x_0) \cap f^{q_{n+1}-mq_n}(\hat{K}(x_0)) \\ &\subset \hat{K}(x_0) \cap f^{q_{n+1}-mq_n}(\hat{K}(x_0)). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Resta mostrar a inclusão \subset , i.e. que se $k \in S$, $k > 0$, então $k = \ell q_n$ para algum $1 \leq \ell \leq r_1$ ou $k = q_{n+1} - m q_n$ para algum $1 \leq m \leq r_2$.

Sejam $k \in S$, $k > 0$, $x_1 = f^{-3q_n}(x_0)$, $x_2 = f^{4q_n}(x_0)$, de forma que $f^k(\hat{K}(x_0))$ é o intervalo fechado com extremos $f^k(x_1)$, $f^k(x_2)$ que contém $f^k(x_0)$. Como $\hat{K}(x_0) \cap f^k(\hat{K}(x_0)) \neq \emptyset$, temos quatro casos a analisar:

- (i) $\hat{K}(x_0) \subset f^k(\hat{K}(x_0))$;
- (ii) $\hat{K}(x_0) \supset f^k(\hat{K}(x_0))$;
- (iii) $f^k(x_2) \notin \hat{K}(x_0)$, $f^k(x_1) \in \hat{K}(x_0)$;
- (iv) $f^k(x_1) \notin \hat{K}(x_0)$, $f^k(x_2) \in \hat{K}(x_0)$.

O caso (i) pode ser imediatamente excluído pois implica que f^{-k} possui um ponto fixo em $f^k(\hat{K}(x_0))$; o caso (ii) pode ser analogamente excluído pois implica que f^k possui um ponto fixo em $\hat{K}(x_0)$.

A afirmação estará provada se mostrarmos que o caso (iii) implica $k = \ell q_n$ para algum $1 \leq \ell \leq r_1$ e que o caso (iv) implica $k = q_{n+1} - m q_n$ para algum $1 \leq m \leq r_2$.

Suponha válido o caso (iii), logo $f^k(x_1) \in \hat{K}(x_0)$. Como

$$\hat{K}(x_0) = \bigcup_{j=0}^6 I_n^{j q_n}(x_1),$$

segue da combinatória de f que os pontos no segmento de órbita futura $\{f^i(x_1)\}_{i=1}^{q_{n+1}-1}$ contidos em $\hat{K}(x_0)$ (um dos quais é $f^k(x_1)$) são precisamente $f^{q_n}(x_1), f^{2q_n}(x_1), \dots, f^{r_1 q_n}(x_1)$. Assim, há de ser $k = \ell q_n$ para algum $1 \leq \ell \leq r_1$.

Agora, suponha válido o caso (iv). Como

$$\hat{K}(x_0) = \bigcup_{j=1}^7 I_n^{-j q_n}(x_2),$$

segue novamente da combinatória de f que os pontos $\{f^i(x_2)\}_{i=1}^{q_{n+1}-1}$ contidos em $\hat{K}(x_0)$ são precisamente $f^{q_{n+1}-r_2 q_n}(x_2), f^{q_{n+1}-(r_2-1)q_n}(x_2), \dots, f^{q_{n+1}-q_n}(x_2)$. Assim, há de ser $k = q_{n+1} - m q_n$ para algum $1 \leq m \leq r_2$, o que conclui a prova da afirmação.

Mostraremos agora que a coleção (A.2) possui multiplicidade de interseção igual a $r_1 + 1 \leq 8$. Para cada $x \in \hat{K}(x_0)$, seja

$$S_x := \left\{ k \in S \mid x \in f^k(\hat{K}(x_0)) \right\}. \quad (\text{A.7})$$

Basta provar que, para cada $x \in \hat{K}(x_0)$, $|S_x| \leq r_1 + 1$.

Seja $L = [f^{-3q_n}(x_0), f^{q_{n+1}+(r_2-3)q_n}(x_0)] \subset \hat{K}(x_0)$ o intervalo fechado com extremos $f^{-3q_n}(x_0), f^{q_{n+1}+(r_2-3)q_n}(x_0)$ que contém $f^{q_{n+2}-3q_n}(x_0)$, e seja

$$R = \hat{K}(x_0) \setminus L = (f^{q_{n+1}+(r_2-3)q_n}(x_0), f^{4q_n}(x_0)].$$

Então, como mostra a figura A.2 no caso $a_n \geq 7$:

- Para cada $x \in L$, $x \in I_n^{(i-3)q_n}(x_0)$, $0 \leq i \leq r_2$, temos

$$S_x = \{0\} \cup \{\ell q_n \mid 1 \leq \ell \leq i\} \cup \{q_{n+1} - m q_n \mid 1 \leq m \leq r_2 - i\},$$

$$\text{logo } |S_x| = r_2 + 1 \leq r_1 + 1;$$

- Para cada $x \in R$, temos

$$S_x = \{0\} \cup \{\ell q_n \mid 1 \leq \ell \leq r_1\},$$

$$\text{logo } |S_x| = r_1 + 1.$$

Assim, a coleção (A.2) possui multiplicidade de interseção igual a $r_1 + 1 \leq 8$, o que conclui a prova. ■

Fizemos uso ao longo do texto da seguinte consequência das estimativas reais *a priori*.

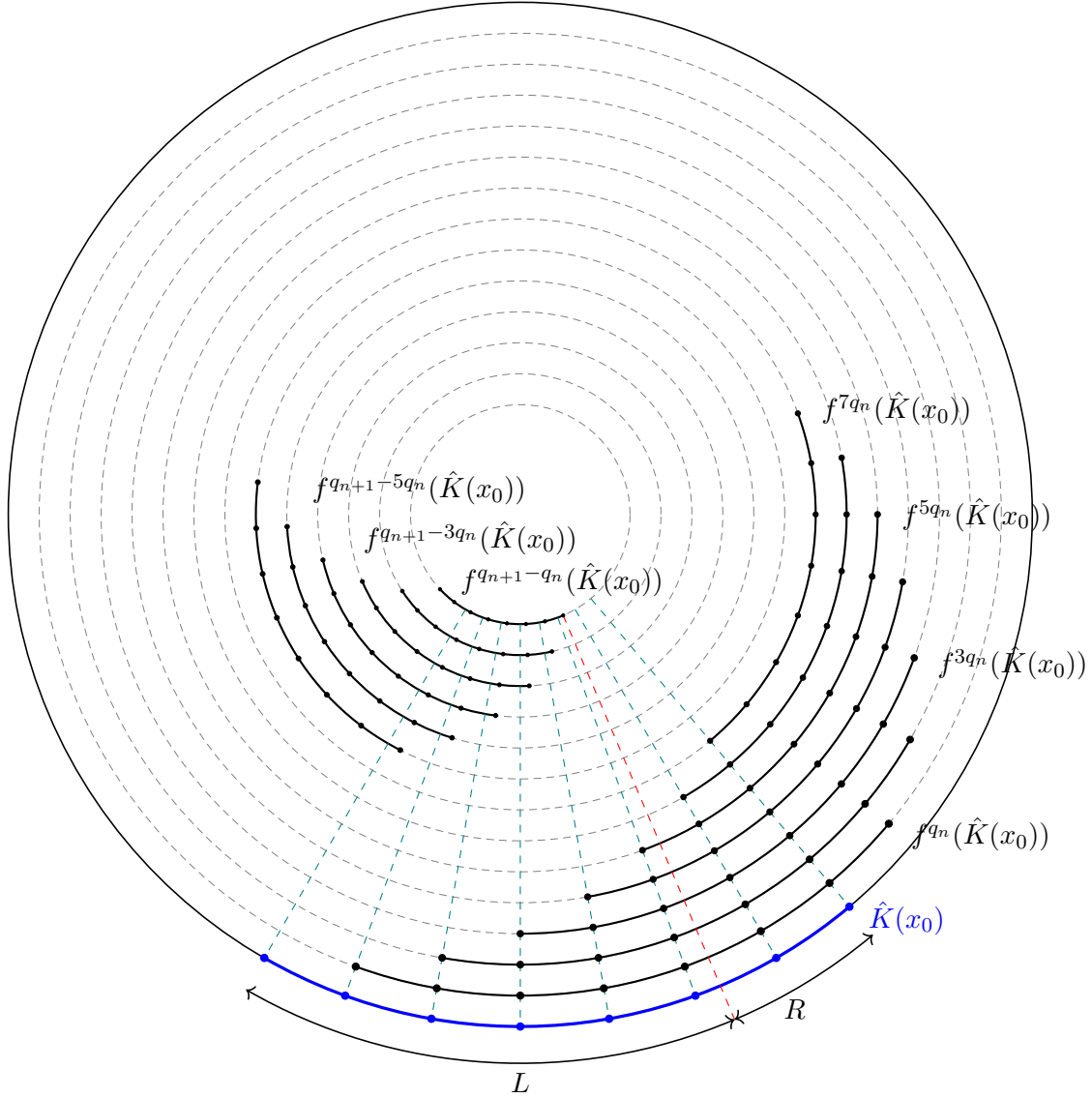


Figura A.2: As interseções entre $\hat{K}(x_0)$ e seus iterados futuros até $q_{n+1} - 1$, $a_n \geq 7$.

Lema 5.3. *Existe uma constante $C_2 = C_2(f) \geq C > 1$ com a seguinte propriedade. Para $n \geq 0$, seja*

$$\mathcal{C}_n := \{I_n^j\}_{j=0}^{2q_{n+1}} \cup \{I_{n+1}^k\}_{k=0}^{q_n+q_{n+1}}$$

o conjunto dos átomos de \mathcal{P}_n , acrescido de suas imagens futuras sob f até a iterada $q_{n+1} + 1$. Então, para quaisquer $J_1, J_2 \in \mathcal{C}_n$ que possuam um extremo em comum,

$$C_2^{-1} |J_1| \leq |J_2| \leq C_2 |J_1|. \quad (5.7)$$

Demonstração. Para provar esse lema, usaremos o seguinte fato (veja [9, Prop. 6.1]): os intervalos $I_n, I_{n+1}, I_n^{q_n}, I_n^{q_{n+1}}, I_{n+1}^{q_n}, I_{n+1}^{q_n+q_{n+1}}$ são dois-a-dois comparáveis, e podemos usar a constante das estimativas reais *a priori* C para essas relações de comparabilidade.

A ideia da prova é a seguinte: (i) se $J \in \mathcal{C}_n$, então existe $\Delta \in \mathcal{P}_n$ tal que $J \subset \Delta^*$ (e ademais, há no máximo três tais Δ); e (ii) se J e Δ são como em (i), então $J \asymp \Delta^*$ (veja §2.3.1). Isso é suficiente para provar o lema pelo seguinte motivo. Se $J_1, J_2 \in \mathcal{C}_n$ possuem um extremo em comum e $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{P}_n$ são tais que $J_1 \subset \Delta_1^*$ e $J_2 \subset \Delta_2^*$, então Δ_1^* e Δ_2^*

necessariamente possuem ao menos um átomo de \mathcal{P}_n em comum. Assim, pelas estimativas reais *a priori*, estes serão comparáveis, do que segue que $J_1 \asymp J_2$. Observamos que, embora não o faremos aqui, um poderia, a princípio, analisar todas as constantes de comparabilidade e derivar uma expressão explícita para C_2 em termos da constante das estimativas reais *a priori* C .

A prova de (i) é simples. Se $J = I_{n+1}^j$, $0 \leq j < q_n$, ou $J = I_n^k$, $0 \leq k < q_{n+1}$, então J é em si um átomo de \mathcal{P}_n , logo podemos tomar $\Delta = J$. Se $J = I_{n+1}^{q_n+j}$, $0 \leq j < q_{n+1}$, então $J \subset I_n^j$, logo podemos tomar $\Delta = I_n^j$. Se $J = I_{n+1}^{q_n+q_{n+1}}$, então $J \subset I_n \cup I_{n+1}$, logo podemos tomar qualquer um dos dois como Δ . Se $J = I_{n+1}^{q_{n+1}+k}$, $0 \leq k < q_n$, então $J \subset I_{n+1}^k \cup I_n^k$, logo podemos tomar qualquer um dos dois como Δ . Se $J = I_{n+1}^{q_{n+1}+q_n+k}$, $0 \leq k < q_{n+1} - q_n$, então $J \subset I_{n+1}^{q_n+k} \cup I_n^{q_n+k} \subset I_n^k \cup I_n^{q_n+k}$, logo podemos tomar $\Delta = I_n^k$ ou $\Delta = I_n^{q_n+k}$. Por fim, se $J = I_n^{2q_{n+1}}$, então $J \subset I_{n+1}^{q_{n+1}} \cup I_n^{q_{n+1}} \subset I_n^{q_{n+1}-q_n} \cup I_{n+1} \cup I_n = (I_{n+1})^*$, logo podemos tomar $\Delta = I_{n+1}$.

Observe que precisamos somente provar (ii) para intervalos de \mathcal{C}_n que não são em si átomos de (pois a afirmação é trivial nesse caso). Primeiro, uma observação: dado $J \in \mathcal{C}_n$, enquanto há de ter (no máximo) três diferentes escolhas de Δ tais que $J \subset \Delta^*$, as triplas de átomos assim obtidas são todas comparáveis; assim, basta provar (ii) para uma das escolhas possíveis de Δ .

Fazemos a seguinte afirmação: para $0 \leq j \leq q_{n+1}$,

$$I_{n+1}^{q_n+j} \asymp I_n^j. \quad (\text{A.8})$$

Prova da afirmação: De um lado, $I_{n+1}^{q_n+j} \subset I_n^j$, logo obtemos imediatamente $I_n^j \geq I_{n+1}^{q_n+j}$. Agora, devemos mostrar que $I_{n+1}^{q_n+j} \geq I_n^j$ também.

Separamos a prova em dois casos: $a_{n+1} = 1$ e $a_{n+1} \geq 2$. Se $a_{n+1} = 1$, então

$$I_n^j = I_{n+1}^{q_n+j} \cup I_{n+2}^j. \quad (\text{A.9})$$

Como $I_{n+1}^{q_n+j}, I_{n+2}^j \in \mathcal{P}_n \cup \{I_{n+1}^{q_{n+2}}, I_{n+2}^{q_{n+1}}\}$, segue do fato que mencionamos no início da prova desse lema (aplicado à partição de nível $n+1$) que

$$I_{n+1}^{q_n+j} \asymp I_{n+2}^j. \quad (\text{A.10})$$

Combinando as (A.9) e (A.10), concluímos que $I_{n+1}^{q_n+j} \asymp I_n^j$ nesse caso.

Tratamos agora do caso $a_{n+1} \geq 2$, e começamos analisando o sub-caso $j = q_{n+1}$. Nesse caso, temos $I_{n+1}^{q_n+j} = I_{n+1}^{q_n+q_{n+1}}$, que é um átomo longo de \mathcal{P}_{n+1} (pois $a_{n+1} \geq 2$) adjacente a $I_{n+1}^{q_n}$. Assim,

$$I_{n+1}^{q_n+q_{n+1}} \asymp I_{n+1}^{q_n} \asymp I_n^{q_{n+1}} \quad (\text{A.11})$$

o que prova a afirmação nesse sub-caso.

Agora, sejam $T = I_{n+1}^{q_{n+1}} \cup I_n^{q_{n+1}}$, $M = I_n^{q_{n+1}} \setminus I_{n+1}^{q_n+q_{n+1}}$, e observe que M tem fecho compacto no interior de T . Sejam L, R as componentes conexas de $T \setminus M$ i.e. $I_{n+1}^{q_{n+1}}$ e $I_{n+1}^{q_n+q_{n+1}}$; assumamos, sem perda de generalidade, que $L = I_{n+1}^{q_{n+1}}$ e $R = I_{n+1}^{q_n+q_{n+1}}$. Provaremos agora o seguinte fato fundamental: a razão cruzada $[M, T]$ é limitado inferiormente por uma constante que depende somente de f .

Decerto, como $I_{n+1}^{q_{n+1}}, I_{n+1}$ são átomos adjacentes de \mathcal{P}_{n+1} ,

$$L \asymp I_{n+1} \asymp I_n^{q_{n+1}} \quad (\text{A.12})$$

do que concluímos que L e T são comparáveis. Da (A.11),

$$R \asymp I_n^{q_{n+1}} \asymp T. \quad (\text{A.13})$$

Como $|T| = |L| + |M| + |R|$ e M contém um átomo de \mathcal{P}_{n+1} adjacente a R , segue que os quatro intervalos M, L, R, T são dois-a-dois comparáveis. Assim, concluímos que existe uma constante $K = K(f) > 0$, dependendo somente de f , tal que

$$[M, T] = [I_n^{q_{n+1}} \setminus I_{n+1}^{q_n+q_{n+1}}, I_{n+1}^{q_{n+1}} \cup I_n^{q_{n+1}}] \geq K \quad (\text{A.14})$$

Passamos agora ao sub-caso $0 \leq j < q_{n+1}$. Como a família $\left\{ f^i(I_{n+1}^j \cup I_n^j) \right\}_{i=0}^{q_{n+1}-j}$ possui multiplicidade de interseção limitada por 3, a Desigualdade da Razão Cruzada (Teorema 2.5) implica que a distorção de razão cruzada de $f^{q_{n+1}-j}$ sobre o par $I_n^j \setminus I_{n+1}^{q_n+j}, I_{n+1}^j \cup I_n^j$ é limitada por C_0^3 , i.e.

$$\frac{[M, T]}{[I_n^j \setminus I_{n+1}^{q_n+j}, I_{n+1}^j \cup I_n^j]} \leq C_0^3. \quad (\text{A.15})$$

Manipulando essa desigualdade, obtemos

$$[I_n^j \setminus I_{n+1}^{q_n+j}, I_{n+1}^j \cup I_n^j] \geq C_0^{-3} [M, T] \geq C_0^{-3} K. \quad (\text{A.16})$$

Assim, a razão cruzada $[I_n^j \setminus I_{n+1}^{q_n+j}, I_{n+1}^j \cup I_n^j]$ é limitado inferiormente por uma constante que depende somente de f . Consequentemente (veja a Observação 2.8), o espaço de $I_n^j \setminus I_{n+1}^{q_n+j}$ em $I_{n+1}^j \cup I_n^j$ é limitado inferiormente por uma constante que depende somente de f ; vê-se facilmente que isso implica que

$$I_{n+1}^{q_n+j} \geq I_n^j \setminus I_{n+1}^{q_n+j}. \quad (\text{A.17})$$

Por fim, combinando a (A.17) com o fato que $|I_n^j| = |I_{n+1}^{q_n+j}| + |I_n^j \setminus I_{n+1}^{q_n+j}|$, obtemos $I_{n+1}^{q_n+j} \geq I_n^j$. Isso conclui a prova da afirmação.

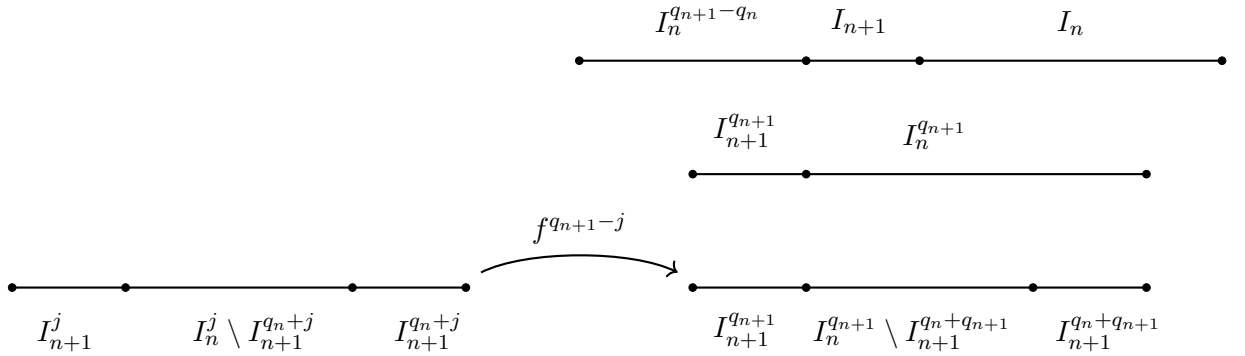


Figura A.3: A desigualdade da Razão Cruzada nos permite propagar comparabilidade para o passado.

Observe que, como I_n^j é sempre comparável a $(I_n^j)^*$ (se $0 \leq j < q_{n+1}$) ou I_n^* (se $j = q_{n+1}$), isso prova que (ii) vale se $J \in \mathcal{C}_n$ é a imagem de um átomo curto de \mathcal{P}_n , i.e. $J = I_{n+1}^i$ para algum $q_n \leq i \leq q_n + q_{n+1}$.

Que (ii) também vale para as imagens de átomos longos de \mathcal{P}_n é uma consequência simples da afirmação anterior. De fato, basta mostrar que, para $0 \leq k \leq q_{n+1}$,

$$I_n^{q_{n+1}+k} \asymp I_n^k. \quad (\text{A.18})$$

Provamos primeiro que $I_n^k \geq I_n^{q_{n+1}+k}$. Se $0 \leq k < q_{n+1}$, então $I_n^{q_{n+1}+k} \subset (I_n^k)^* \asymp I_n^k$, logo $I_n^k \geq I_n^{q_{n+1}+k}$; e quando $k = q_{n+1}$, $I_n^{2q_{n+1}} \subset (I_n)^* \asymp I_n \asymp I_n^{q_{n+1}}$, logo $I_n^{q_{n+1}} \geq I_n^{2q_{n+1}}$ também.

Resta provar que $I_n^{q_{n+1}+k} \geq I_n^k$ também. Mas isso segue imediatamente da afirmação anterior, uma vez que

$$I_n^{q_{n+1}+k} \supset I_{n+1}^k \quad (\text{A.19})$$

e

$$I_{n+1}^k \asymp I_{n+1}^{q_n+k} \asymp I_n^k \quad (\text{A.20})$$

em que a primeira relação de comparabilidade na equação acima segue das estimativas reais *a priori* e a segunda, da afirmação. Isso conclui a demonstração do lema. ■

Do Lema 5.3 derivam os seguintes dois resultados que, em conjunto com o Lema 5.2, estabelecem as condições necessárias para aplicar o princípio de distorção de Koebe na prova dos Lemas 5.4 e 5.5.

Corolário A.1. *Existe $\tau_0 = \tau_0(f) > 0$ com a seguinte propriedade. Se $n \geq 0$, $\Delta \in \mathcal{P}_n$ e $0 \leq k \leq q_{n+1} + 1$, então o espaço de $f^k(\Delta)$ em $f^k(\tilde{\Delta})$ é no mínimo τ_0 .*

Demonstração. Focaremos no caso em que $\Delta = I_n^j$, $0 \leq j < q_{n+1}$, é um átomo longo de \mathcal{P}_n , pois o mesmo argumento se aplica, *mutatis mutandis*, se Δ é curto. De acordo com a (5.5), $\tilde{I}_n = I_{n+3} \cup I_n \cup I_{n+2}^{q_n}$; e como $I_{n+3}^j, I_{n+2}^{q_n+j}$ são ambos átomos de \mathcal{P}_{n+2} (visto que $j < q_{n+1} < q_{n+2}$ e $q_n + j < q_n + q_{n+1} < q_{n+2} < q_{n+3}$) adjacentes a Δ , segue que

$$\tilde{\Delta} = I_{n+3}^j \cup I_n^j \cup I_{n+2}^{q_n+j} \quad (\text{A.21})$$

i.e. $I_{n+3}^j, I_{n+2}^{q_n+j}$ são as componentes de $\tilde{\Delta} \setminus \Delta$. Portanto, basta mostrar que $I_{n+3}^{j+k}, I_{n+2}^{q_n+j+k}$ são ambos comparáveis a I_n^{j+k} .

Focaremos na prova de que $I_{n+3}^{j+k} \asymp I_n^{j+k}$, pois a outra relação de comparabilidade segue de um argumento análogo. Consideramos dois casos: $j+k < q_{n+1}$ e $j+k \geq q_{n+1}$.

Primeiro, suponha que $j+k < q_{n+1}$. Considere os intervalos $I_{n+3}^{j+k}, I_{n+2}^{j+k}, I_{n+1}^{j+k}, I_n^{j+k}$, e observe que todos possuem o extremo em comum $f^{j+k}(c)$ (recorde-se que c é o ponto crítico fixado de f ao qual as partições \mathcal{P}_m estão associadas). Ademais, como um facilmente verifica,

- (i) $I_{n+3}^{j+k} \in \mathcal{C}_{n+2}$;
- (ii) $I_{n+2}^{j+k} \in \mathcal{C}_{n+2} \cap \mathcal{C}_{n+1}$;
- (iii) $I_{n+1}^{j+k} \in \mathcal{C}_{n+1} \cap \mathcal{C}_n$ (é aqui que entra a hipótese $j+k < q_{n+1}$);
- (iv) $I_n^{j+k} \in \mathcal{C}_n$.

Assim, do Lema 5.3 obtemos

$$I_{n+3}^{j+k} \asymp I_{n+2}^{j+k} \asymp I_{n+1}^{j+k} \asymp I_n^{j+k}, \quad (\text{A.22})$$

o que prova que $I_{n+3}^{j+k} \asymp I_n^{j+k}$.

Por fim, se $j+k \geq q_{n+1}$, basta substituir I_{n+1}^{j+k} por $I_{n+1}^{j+k-q_{n+1}}$ na prova do caso anterior. ■

Corolário A.2. *Existe $\tau_1 = \tau_1(f) > 0$ com a seguinte propriedade. Se $n \geq 0$, $\Delta \in \mathcal{P}_n$ e $0 \leq k \leq q_{n+1} + 1$, então o espaço de $f^k(\Delta^*)$ em $f^k(\tilde{\Delta})$ é no mínimo τ_1 .*

A.2 Provas das estimativas

Estamos agora em condições de provar os Lemas 5.4 e 5.5.

Lema 5.4. *Existe uma constante $B_0 = B_0(f) > 1$ com a seguinte propriedade. Se $\Delta \in \mathcal{P}_n$ e $0 \leq j < k \leq q_{n+1} + 1$ são tais que os intervalos $f^j(\tilde{\Delta}), f^{j+1}(\tilde{\Delta}), \dots, f^{k-1}(\tilde{\Delta})$ não contêm nenhum ponto crítico de f , então a aplicação $f^{k-j}: f^j(\Delta) \rightarrow f^k(\Delta)$ possui distorção limitada por B_0 , isto é,*

$$B_0^{-1} \leq \frac{Df^{k-j}(x)}{Df^{k-j}(y)} \leq B_0 \quad \text{para quaisquer } x, y \in f^j(\Delta).$$

Demonstração. De fato, $f^{k-j} \big|_{f^j(\tilde{\Delta})}$ é um difeomorfismo que satisfaz a condição de somabilidade

$$\sum_{i=j}^{k-1} |f^i(\tilde{\Delta})| \leq 4,$$

pois a coleção $\left\{ f^i(\tilde{\Delta}) \right\}_{i=j}^{k-1}$ possui multiplicidade de interseção limitada por 4 (pelo Lema 5.2).

Assim, pelo princípio de distorção de Koebe (Lema 2.6), para todo $\tau > 0$ tal que o espaço de $f^k(\Delta)$ em $f^k(\tilde{\Delta})$ é no mínimo τ existe uma constante $K = K(4, \tau, f) > 1$ tal que a distorção de f^{k-j} em $f^j(\Delta)$ é limitada por K . Segue então do Corolário A.1 que podemos tomar $B_0 = K(4, \tau_0, f) = B_0(f)$. ■

Lema 5.5. *Existe uma constante $B_1 = B_1(f) > 1$ com a seguinte propriedade. Se $\Delta \in \mathcal{P}_n$ e $0 \leq j < k \leq q_{n+1}$ são tais que os intervalos $f^j(\hat{\Delta}), f^{j+1}(\hat{\Delta}), \dots, f^{k-1}(\hat{\Delta})$ não contêm nenhum ponto crítico de f , então a aplicação $f^{k-j}: f^j(\Delta^*) \rightarrow f^k(\Delta^*)$ possui distorção limitada por B_1 , isto é,*

$$B_1^{-1} \leq \frac{Df^{k-j}(x)}{Df^{k-j}(y)} \leq B_1 \quad \text{para quaisquer } x, y \in f^j(\Delta^*).$$

Demonstração. A prova é essencialmente a mesma que a do Lema 5.4, com um diferente limitante superior na multiplicidade de interseção (9 ao invés de 4) e o uso do Corolário A.2 no lugar do Corolário A.1. ■

Bibliografia

- [1] A. Avila and A. Kocsard, *Cohomological equations and invariant distributions for minimal circle diffeomorphisms*, Duke Math. J. **158** (2011), no. 3, 501–536.
- [2] M. Brin and G. Stuck, *Introduction to dynamical systems*, Cambridge University Press, 2002.
- [3] R. Douady and J.-C. Yoccoz, *Nombre de rotation des difféomorphismes du cercle et mesures automorphes (Rotation number of diffeomorphisms of the circle and automorphic measures)*, Regul. Chaotic Dyn. **4** (1999), no. 4, 3–24.
- [4] G. Estevez and E. de Faria, *Real bounds and quasimetric rigidity of multicritical circle maps*, Trans. Am. Math. Soc. **370** (2018), no. 8, 5583–5616.
- [5] G. Estevez and P. Guarino, *Renormalization of bicritical circle maps*, Arnold Math. J. **9** (2023), no. 1, 69–104. MR 4549077
- [6] G. Estevez, D. Smania, and M. Yampolsky, *Renormalization of analytic multicritical circle maps with bounded type rotation numbers*, Bull. Braz. Math. Soc. **53** (2022), no. 3, 1053–1071.
- [7] E. de Faria, *Asymptotic rigidity of scaling ratios for critical circle mappings*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **19** (1999), 995–1035. MR 1709428
- [8] E. de Faria and P. Guarino, *Real bounds and Lyapunov exponents*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **36** (2016), no. 4, 1957–1982.
- [9] ———, *Dynamics of Circle Mappings*, 33o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA Mathematical Publications, 2021.
- [10] ———, *There are no σ -finite absolutely continuous invariant measures for multicritical circle maps*, Nonlinearity **34** (2021), no. 10, 6727–6749.
- [11] ———, *Quasimetric orbit-flexibility of multicritical circle maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems **42** (2022), no. 11, 3271–3310.
- [12] E. de Faria, P. Guarino, and B. Nussenzveig, *Automorphic measures and invariant distributions for circle dynamics*, 2023.
- [13] E. de Faria and W. de Melo, *Rigidity of critical circle mappings. I*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **1** (1999), no. 4, 339–392.
- [14] ———, *Rigidity of critical circle mappings II*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), 343–370. MR 1711394

- [15] I. Gorbovickis and M. Yampolsky, *Rigidity, universality, and hyperbolicity of renormalization for critical circle maps with non-integer exponents*, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **40** (2020), 1282–1334. MR 4082264
- [16] I. Gorbovickis and M. Yampolsky, *Rigidity of analytic and smooth bi-cubic multicritical circle maps with bounded type rotation numbers*, 2021.
- [17] J. Graczyk and G. Świątek, *Singular measures in circle dynamics*, *Comm. Math. Phys.* **157** (1993), 213–230. MR 1244865
- [18] P. Guarino, M. Martens, and W. de Melo, *Rigidity of critical circle maps*, *Duke Math. J.* **167** (2018), no. 11, 2125–2188.
- [19] P. Guarino and W. de Melo, *Rigidity of smooth critical circle maps*, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **19** (2017), no. 6, 1729–1783.
- [20] G. Hall, *A C^∞ Denjoy counterexample*, *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **1** (1981), 261–272.
- [21] M. Herman, *Conjugaison quasi-symétrique des homéomorphismes du cercle à des rotations (Quasisymmetric conjugacy of analytic circle homeomorphisms to rotations)*, 1988.
- [22] A. Katok and E. A. Robinson Jr., *Cocycles, cohomology and combinatorial constructions in ergodic theory*, pp. 107–173, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2001.
- [23] K. Khanin, *Universal estimates for critical circle mappings*, *Chaos* **1** (1991), no. 2, 181–186.
- [24] K. Khanin and A. Teplinsky, *Robust rigidity for circle diffeomorphisms with singularities*, *Invent. Math.* **169** (2007), 193–218. MR 2308853
- [25] D. Khmelev and M. Yampolsky, *The rigidity problem for analytic critical circle maps*, *Mosc. Math. J.* **6** (2006), 317–351. MR 2270617
- [26] W. de Melo and C. Pugh, *The C^1 Brunovsky Hypothesis*, *Journal of Differential Equations* **113** (1994), no. 2, 300–337.
- [27] W. de Melo and S. van Strien, *One-dimensional dynamics*, vol. 25, Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [28] A. Navas, *On conjugates and the asymptotic distortion of one-dimensional C^{1+bv} diffeomorphisms*, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2023), no. 1, 372–405. MR 4530112
- [29] A. Navas and M. Triestino, *On the invariant distributions of C^2 circle diffeomorphisms of irrational rotation number*, *Math. Z.* **274** (2013), no. 1-2, 315–321.
- [30] S. J. Patterson, *The limit set of a Fuchsian group*, *Acta Math.* **136** (1976), no. 3-4, 241–273. MR 450547
- [31] D. Sullivan, *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1979), no. 50, 171–202. MR 556586
- [32] ———, *Conformal dynamical systems*, *Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981)*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 1007, Springer, Berlin, 1983, pp. 725–752. MR 730296
- [33] G. Świątek, *Rational rotation numbers for maps of the circle*, *Commun. Math. Phys.* **119** (1988), no. 1, 109–128.

- [34] M. Yampolsky, *Complex bounds for renormalization of critical circle maps*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **19** (1999), 227–257. MR 1677153
- [35] ———, *The attractor of renormalization and rigidity of towers of critical circle maps*, Comm. Math. Phys. **218** (2001), 537–568. MR 1828852
- [36] ———, *Hyperbolicity of renormalization of critical circle maps*, Publ. Math. IHES **96** (2002), 1–41. MR 1985030
- [37] ———, *Renormalization horseshoe for critical circle maps*, Comm. Math. Phys. **240** (2003), 75–96. MR 2004980
- [38] ———, *Renormalization of bi-cubic circle maps*, C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. **41** (2019), no. 4, 57–83.
- [39] J.-C. Yoccoz, *Il n’y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique. (There are no analytic Denjoy counterexamples)*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I **298** (1984), 141–144.