Homologia de Álgebras Pseudocompactas

as fronteiras da conjectura de Han

Guilherme da Costa Cruz

Dissertação apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Kostiantyn Iusenko

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

São Paulo
Junho de 2023

Homologia de Álgebras Pseudocompactas

as fronteiras da conjectura de Han

Guilherme da Costa Cruz

Esta versão da dissertação contém
as correções e alterações sugeridas
pela Comissão Julgadora durante a
defesa da versão original do trabalho,
realizada em 16 de Junho de 2023.

Uma cópia da versão original está
disponível no Instituto de Matemática e
Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão julgadora:

Prof. Dr. Kostiantyn Iusenko (orientador) – IME-USP
Profª. Drª. Dessislava Hristova Kochloukova – IMECC-UNICAMP
Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez – ICMC-USP

Ficha catalográfica elaborada com dados inseridos pelo(a) autor(a)
Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

```
Cruz, Guilherme da Costa
   Homologia de Álgebras Pseudocompactas: as fronteiras da
conjectura de Han / Guilherme da Costa Cruz; orientador,
Kostiantyn Iusenko. - São Paulo, 2023.
   145 p.


   Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação
em Matemática / Instituto de Matemática e Estatística
/ Universidade de São Paulo.
   Bibliografia
   Versão corrigida


   1. Álgebra Homológica. 2. Anéis e Álgebras Associativos. 3.
Teoria de Representações. I. Iusenko, Kostiantyn. II. Título.
```

Bibliotecárias do Serviço de Informação e Biblioteca
Carlos Benjamin de Lyra do IME-USP, responsáveis pela
estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Maria Lúcia Ribeiro CRB-8/2766; Stela do Nascimento Madruga CRB 8/7534.

Agradecimentos

Wouldn't it be nice, if you win
To know you couldn't have gotten there on your own?
Wouldn't it be nice, if you lose
To value a choir to sing the blues, with you?
— Erlend Øye & Eirik Glambek Bøe

À minha mãe e ao meu pai, por terem me fornecido minha educação basilar, a qual me é impossível mensurar sua importância.

Ao Guilherme e ao Heitor, pela companhia nos caminhos da graduação.

Ao André, por me mostrar a importância da história nas ciências.

Ao Kostia, por nos estimular à troca de ideias, seja em nosso pequeno seminário online durante a quarentena, em nossas reuniões híbridas durante seu período na Ucrânia ou na organização de seminários no IME.

Ao Roger e ao Mateus, por todas as reuniões.

Enfim, a todos agradeço pelas conversas.

Resumo

Guilherme da Costa Cruz. **Homologia de Álgebras Pseudocompactas: *as fronteiras da conjectura de Han***. Dissertação (Mestrado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Esta dissertação possui como fio condutor a seguinte conjectura, proposta por Y. Han em 2006 e ainda não solucionada, acerca de álgebras de dimensão finita: se a dimensão da homologia de Hochschild é finita, então a dimensão global também é finita.

Assim, iniciamos o texto com um capítulo introdutório sobre os dois conceitos de Álgebra Homológica — e algumas das ferramentas da área — que concernem a conjectura. Em seguida, apresentamos um panorama considerável dos métodos utilizados para se tratar do problema e detalhamos as diversas respostas parciais obtidas ao longo nas últimas décadas. Tais trabalhos podem ser enquadrados em dois tipos. O primeiro deles está relacionado em encontrar exemplos que satisfazem o problema — por exemplo, sua validade já foi verificada para álgebras comutativas, monomiais e de grupos. Em uma segunda direção, mostrou-se mais recentemente que certas extensões de álgebras preservam a conjectura de Han.

Em seguida, propomos tratar o problema por meio de um terceiro ponto de vista: investigar, além do mundo das álgebras de dimensão finita, limites superiores para o reino das álgebras que satisfazem a propriedade acima. Para tanto, buscamos estudar a homologia de álgebras pseudocompactas, isto é, álgebras topológicas que são limites de álgebras de dimensão finita. Em especial, mostramos que certos resultados sobre a dimensão global de álgebras de dimensão finita continuam válidos nesse mundo e verificamos que a conjectura de Han é válida para certas classes de álgebras de grupos profinitos.

Palavras-chave: homologia de Hochschild; dimensão global; álgebras pseudocompactas; conjectura de Han; grupos profinitos; álgebras associativas.

Abstract

Guilherme da Costa Cruz. **Homology of Pseudocompact Algebras: *the frontiers of Han's conjecture***. Thesis (Master's). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2023.

The main thread of this dissertation is the following unsolved conjecture, proposed by Y. Han in 2006, concerning finite-dimensional algebras: if Hochschild homology dimension if finite, then global dimension is also finite.

The text begins with an introductory chapter about both concepts of Homological Algebra concerning Han's conjecture. We then present a considerable overview of the methods used to address the problem and we give details on the various partial answers obtained over the past decades. Such works can be classified in two types. The first one is concerned in finding examples satisfying the conjecture - which have been seen to include commutative, monomial, Koszul, and group algebras. In a second direction, it has been shown, more recently, that certain extensions of algebras preserves Han's conjecture.

Next, we propose to address the problem through a third viewpoint: to investigate, beyond the finite-dimensional scope, upper bounds for the realm of algebras satisfying it. To do so, we chose to study the homology of pseudocompact algebras, that is, topological algebras which are given by a limit of finite-dimensional algebras. In particular, we show that certain results about the global dimension of finite-dimensional algebras remain valid in this world, and we verify that Han's conjecture holds for certain classes of profinite group algebras.

Keywords: Hochschild homology; global dimension; pseudocompact algebras; Han's conjecture; profinite groups; associative algebras.

Sumário

Apêndices

Introdução

É bastante conhecido que os primeiros conceitos de homologia e cohomologia surgiram no estudo de espaços topológicos e variedades dentro do contexto que chamamos hoje de Topologia Algébrica. Pode-se dizer que as primeiras ideias surgiram ainda no século XIX com os trabalhos de B. Riemann (1851) e E. Betti (1871). Eles buscaram definir conceitos de conectividade de superfícies e medir isso a partir de certos números, hoje conhecidos como números de Betti. Na nomenclatura atual, eles correspondem aos postos dos grupos de homologia (singular) de um espaço topológico e, intuitivamente, representam as quantidades de "buracos" do espaço topológico. Outro antigo resultado que enxergamos, hoje, a partir de conceitos homológicos é o teorema das sizígias de Hilbert (1890), que trata da "aproximação" de módulos sobre anéis de polinômios por meio de módulos livres. Ainda no século XIX, não pode-se deixar o citar o "Analysis Situs" de H. Poincaré (1895), artigo que marca o nascimento da Topologia Algébrica. Nesse trabalho, a palavra "homologia" é utilizada para se referir a certas relações entre algumas variedades de mesma dimensão. Uma delas seria a relação $V_1 + \ldots + V_k \sim 0$, que busca expressar que as $(n-1)$-variedades V_i formam a borda de uma certa n-variedade. Após essa publicação, diversos avanços foram dados na área recém-formada e a homologia continuou sendo usada como importante ferramente no estudo de espaços topológicos. Durante a década de 1920, foi observado (por exemplo, por E. Noether (1925)) que a homologia nos fornece uma estrutura de grupo abeliano. Isso lançou uma nova luz à teoria e, possivelmente, foi o passo inicial para o surgimento de uma área independente focada nos aspectos algébricos da teoria.

Entre os anos 1940 e 1955, homologia e cohomologia também passaram a ser aplicadas em algumas estruturas algébricas: a saber, grupos, álgebras associativas e álgebras de Lie. Nessa mesma época, J. Leray também definiu a chamada cohomologia de feixes [Wei99, p.797], utilizada tanto em Topologia Algébrica quanto em Geometria Algébrica. Nesse mesmo período, uma indispensável companheira da Álgebra Homológica também estava dando seus primeiros passos: a Teoria de Categorias. Hoje em dia, é quase impensável conceber a teoria homológica sem a linguagem de Categorias. Por exemplo, dois dos conceitos mais básicos da área, Ext e Tor, são funtores. Além disso, a utilização de diagramas, que é essencial para a formulação dos diversos conceitos homológicos (complexos de cadeia, módulos projetivos, sequências exatas, etc.) é largamente utilizada nessa teoria: do ponto de vista de Categorias, as características de um objeto não são dadas pelo objeto em si e, sim, pelas suas relações com outros objetos, através das conhecidas propriedades universais. Por outro lado, pode-se dizer que a Álgebra Homológica também foi crucial para o surgimento da teoria de Categorias, visto que S. Mac Lane e S. Eilenberg tratavam de um problema mais concreto de cohomologia quando chegaram à ideia geral de funtores e categorias, devidamente formulada num artigo de 1945 [Ea11, p.195]. Alguns anos antes, em 1942, eles haviam introduzido um conceito de funtor e também nomearam Ext pela primeira vez [Wei99, p.803]. Apesar disso, Ext ainda não era visto explicitamente como um um funtor, mas, sim, como um grupo.

Após esse período de formação e experimentação da (co)homologia em alguns contextos diferentes, temos, no ano de 1956, um importante marco para a área: a publicação do livro "Homological Algebra" de H. Cartan e S. Eilenberg. As diferentes teorias criadas anteriormente são, finalmente, englobadas e unificadas a partir de uma teoria geral de (co)homologia, garantindo um sólido firmamento da então inaugurada área de pesquisa. Para tanto, eles introduziram, pela primeira vez, conceitos como os de módulos projetivos e de funtores derivados, além das notações Ext^n e Tor_n [Wei99, p.813].

Dentre as tantas teorias de homologia que surgiram durante e após esse desenvolvimento, podemos citar: a cohomologia de de Rham (introduzida em 1931), que possui diversas aplicações no estudo geométrico de variedades suaves; a cohomologia de Galois (década de 1950) e a cohomologia *étale* (1960), bastante utilizadas em Geometria Algébrica e Teoria dos Números; a cohomologia de André-Quillen (entre 1967 e 1974), que surge no ambiente de Álgebra Comutativa; a (co)homologia cíclica (década de 1980), que generaliza a cohomologia de de Rham dentro do contexto de geometria não-comutativa.

Outra importante teoria homológica, e que será o foco do deste trabalho, é a (co)homologia de Hochschild, que foi definida, pela primeira vez, em 1945 [Hoc45][1]. Ela pode ser definida de uma forma mais sintética utilizando os funtores Ext e Tor, o que foi feito no livro de Cartan e Eilenberg [CE56, p.169]: explicitamente, sendo A uma álgebra e M um A-bimódulo, seus n-ésimo grupos de homologia e de cohomologia de Hochschild são dados, respectivamente, por

$$HH_n(A, M) = \mathrm{Tor}_n^{A\otimes A^{op}}(M, A) \quad \text{e} \quad HH^n(A, M) = \mathrm{Ext}^n_{A\otimes A^{op}}(A, M).$$

No entanto, também levando em conta que tais funtores ainda não estavam tão bem estabelecidos no ano da publicação de G. Hochschild, sua definição na época foi dada explicitando um complexo de cocadeias com seu devido operador de cobordo.

Durante a década de 1980, através do desenvolvimento da chamada geometria não-comutativa por Alain Connes [Con94], torna-se possível uma interpretação geométrica para os grupos de homologia de Hochschild: seus elementos correspondem a formas diferenciais. Outra noção geométrica que pode ser caracterizada por meio da homologia de Hochschild é a de suavidade de álgebras comutativas. Assim, através dessa teoria, podemos analisar como tais conceitos se comportam no mundo não-comutativo.

Além dessas aplicações, sabe-se que os grupos de cohomologia de graus 0, 1 e 2 medem, respectivamente, a comutatividade, a semissimplicidade e as extensões de uma álgebra. Em especial, no caso de grau 2, isso permite entender as deformações de uma álgebra. Por exemplo, se $HH^2(A, A) = 0$, então a álgebra A é rígida, ou seja, ela basicamente não pode ser deformada. Em outro aspecto, tal (co)homologia, munida a técnicas de geometria

[1] Para ser mais preciso, o artigo de G. Hochschild citado define somente os grupos de cohomologia, deixando os grupos de homologia de lado.

algébrica, também possui aplicações no estudo de representações. Em mais detalhes, para cada módulo M, pode-se definir através da cohomologia de Hochschild uma variedade algébrica, cujas propriedades geométricas podem codificar características relevantes do ponto de vista da teoria de Representações [Wit19, Chapter 8] (veja também [Cib88]).

Além dos funtores derivados, outra importante noção homológica introduzida no livro de H. Cartan e S. Eilenberg foi a de dimensão global projetiva de um anel — que pode ser interpretada como uma medida de o quão longe um anel está de ser semissimples. Durante a década de 1950, houve uma profusão de publicações — como na série de dez artigos publicados na revista *Nagoya Mathematical Journal* com o nome de "On the Dimension of Modules and Algebras" [Aus55; ENN56; Aus57; Kap58] — que estavam focadas em entender as dimensões homológicas e como propriedades de anéis poderiam ser entendidas a partir delas. Tais esforços trouxeram algumas recompensas valiosas: por exemplo, trabalhos de M. Auslander, D. Buchsbaum e J.-P. Serre puderam resolver diversos problemas acerca de anéis anéis regulares — que possuem um papel crucial em Geometria Algébrica. Ainda sobre dimensões homológicas, H. Bass publicou em 1960 [Bas60, p. 487] o que é hoje, provavelmente, o mais antigo problema em aberto de Álgebra Homológica: a conjectura da dimensão finitista.

Durante a década de 1970, P. Gabriel forneceu um ambiente concreto para o estudo de álgebras de dimensão finita: aljavas (i.e. grafos orientados). Ele mostrou que toda álgebra de dimensão finita poderia ser associada — sem grande perda para o estudo de seus módulos — a um quociente de uma álgebra de caminhos [Gab80, §4.3]. Possivelmente estimulado por tais resultados, surgiu um certo interesse na computação da (co)homologia de Hochschild dessas álgebras, o que ficou claro na influente publicação de D. Happel [Hap89], na qual cruciais resultados anteriores de C. Cibils também foram apresentados.

Um dos focos desta dissertação reside essencialmente em uma observação feita nesse artigo [Hap89, §1.4]: se uma álgebra possui dimensão global finita, então sua cohomologia de Hochschild é nula para graus suficientemente grandes; o que se pode dizer sobre a recíproca? Uma resposta para a pergunta apenas foi encontrada em 2005, quando Buchweitz, Green, Madsen e Solberg [BGMS05] publicaram um contraexemplo. Durante esse tempo, foram realizados importantes trabalhos sobre a homologia: provou-se, para álgebras comutativas, que o anulamento da homologia de Hochschild é equivalente à finitude da dimensão global; E. Sköldberg [Sko99] forneceu computações de dois tipos de quocientes de álgebras de caminhos; e outros também contribuíram para o estudo da homologia cíclica — que é intrinsecamente conectada à de Hochschild. Levando tudo isso em consideração, e após notar que o contraexemplo é bem comportado em relação à homologia, Y. Han [Han06, 3.4] propôs que a questão de Happel fosse reformulada para a homologia. Isto é, ele propôs a seguinte conjectura: uma álgebra possui dimensão global finita se, e somente se, sua homologia de Hochschild é anulada em graus suficientemente grandes.

Já são sabidas algumas respostas parciais para a conjectura: como citado acima, sabe-se que ela é válida para álgebras comutativas; no mesmo artigo em que a propôs, Y. Han também provou que ela é verdadeira para álgebras monomiais [Han06, Thm 2]; artigos mais recentes também mostraram que a classe das álgebras que satisfazem a conjectura de Han é fechada por extensões "limitadas" [CLMS22; IM21].

Como pode-se notar no parágrafo anterior, dentre as maneiras usadas para tratar um problema, algo bastante comum é tratar da pergunta para casos particulares e, nesse sentido, exemplos tornam-se essenciais. Uma maneira de encontrar novos exemplos e obter uma nova luz ao problema seria buscando generalizá-lo ou reformulá-lo para um novo contexto. Nesse sentido, a fim de generalizar propriedades de álgebras de dimensão finita, uma classe bastante natural a ser considerada é a das álgebras pseudocompactas, que são dadas por limites (inversos) de álgebras de dimensão finita. Por exemplo, enquanto o conjunto dos polinômio de grau menor que um número natural fixado formam álgebras de dimensão finitas, o limite delas nos dá o conjunto das séries de potência, que contém todos os anteriores e possui dimensão infinita. Outros exemplos importantes dessa classe de álgebras são dadas a partir de limites de álgebras de grupos kG e de álgebras de caminhos kQ, nos fornecendo as chamadas álgebras de grupos e de caminhos completas.

Uma motivação mais geral para o estudo de álgebras pseudocompactas está no fato de que elas possuem um comportamento similar ao dos grupos profinitos (i.e. limites inversos de grupos finitos), que possuem uma rica teoria. Historicamente, podemos dizer que eles surgiram primeiro: apesar de que uma abordagem mais sistemática só tenha ocorrido durante a década de 1960, exemplos de grupos profinitos são estudados desde o início do século XX. Enquanto isso, o estudo de álgebras pseudocompactas foi inaugurado pelos trabalhos de P. Gabriel [Gab62] e A. Brumer [Bru66].

Estrutura e objetivos da dissertação

No primeiro capítulo, descrevemos as bases de Álgebra Homológica necessárias para tratarmos da conjectura de Han. Isso é feito em três partes: na primeira, tratamos de conceitos fundamentais como objetos projetivos, funtores derivados e Morita-equivalência; na segunda, veremos a definição da dimensão global e como ela se comporta através de vários exemplos; na terceira, apresentamos os grupos de (co)homologia de Hochschild e suas propriedades básicas.

No capítulo seguinte, discorremos sobre algumas classes de anéis que possuem caracterizações através de conceitos de Álgebra Homológica. Outras dessas classes foram compiladas no apêndice A. Em especial, sintetizamos diversas caracterizações de anéis comutativos suaves, sendo que algumas delas foram estabelecidas somente nas décadas de 1990 e 2000. Tais anéis serão utilizados no capítulo 3, no qual abordamos sobre a conjectura de Han e os mais diversos avanços feitos até hoje para respondê-la. Em particular, compilamos em tabelas todas as álgebras, até onde sabemos, que satisfazem a conjectura e as extensões de álgebras que a preservam. Quando possível, apresentamos as demonstrações para alguns casos, exemplificando também alguns métodos de computação da homologia de Hochschild.

Finalmente, abordamos no capítulo 4 sobre a homologia de álgebras pseudocompactas. Inicialmente, apresentamos sua definição e as maneiras de utilizar conceitos homológicos nesse mundo algébrico-topológico. Em seguida, generalizamos resultados sobre a dimensão global que tornam legítimo o estudo da conjectura de Han nesse mundo. Enfim, mostramos que, apesar de ser possível construir um contraexemplo, ela é válida para alguns exemplos pertinentes.

Como conclusão, apresentamos na discussão final alguns problemas que nasceram naturalmente deste estudo e não foram resolvidos, mas que poderiam ser tratados em pesquisas futuras.

Tendo em mente a extensão do texto, propomos algumas trilhas rápidas de leitura a depender do interesse do leitor. Primeiramente, nota-se que o capítulo 1 contém basicamente preliminares para o restante da dissertação; assim, o leitor que já conhece os conceitos de dimensão global e de homologia de Hochschild poderá pulá-lo. Em seguida:

- Para conhecer somente os resultados mais "originais" da dissertação acerca de álgebras pseudocompactas, leia as seções 3.1, 4.1, 4.3 e 4.4.
- Caso o interesse esteja no estudo da homologia de Hochschild e, em especial, da conjectura de Han para álgebras de dimensão finita, basta ler o capítulo 3.
- Para entender como ferramentas homológicas podem ser utilizadas na teoria de anéis (comutativos ou não), leia o capítulo 2 e o apêndice A. Neste caso, a seção 1.3 é pouco utilizada.

Terminologia e Notações

Ao longo desta dissertação, assumimos que todo anel (e, em particular, toda álgebra) é associativo com unidade.

Em definições e teoremas, palavras entre parênteses são utilizadas, em geral, para dizer que elas são opcionais.

A palavra "bilateral" será omitida quando falarmos sobre anéis bilateralmente artinianos ou noetherianos ou sobre ideais bilaterais. Omitiremos, também, as palavras "à esquerda" ou "à direita" quando for indiferente o lado de um módulo.

Para definir funções, utilizaremos frequentemente o seguinte: quando um conjunto for denotado por uma letra maiúscula (e.g. A), um elemento genérico desse conjunto será denotado pela letra minúscula correspondente (e.g. a ou a').

Além disso, utilizaremos as seguintes notações como padrão:

- R é um anel arbitrário.
- $J(R)$ é o radical de Jacobson de R.
- R-*Mod* (resp. *Mod*-R) é a categoria de R-módulos à esquerda (resp. à direita).
- R-*mod* e *mod*-R denotam as categorias de módulos finitamente gerados.
- Módulos arbitrários de um anel serão usualmente denotados por M, N, L e K.
- k é um anel comutativo de coeficientes, mas muitas vezes assumiremos — e o leitor que preferir sempre poderá assumir — que k é um corpo.
- Se k for um corpo, k^{alg} denotará o fecho algébrico de k.
- A é uma k-álgebra.

- $\otimes$ denota o tensor sobre k, i.e. $\otimes = \otimes_k$.

Quando necessário, novas notações e suposições serão elencadas no início de alguns capítulos ou seções.

Capítulo 1

Homologia de Álgebras Associativas

Neste capítulo, buscamos apresentar de maneira geral as duas noções homológicas que estão envolvidas na proposição da conjectura de Han: a dimensão global e a homologia de Hochschild. Para tanto, registramos, na primeira seção, alguns dos preliminares necessários, como as noções de módulos projetivos, injetivos e planos, dos funtores Ext e Tor e de equivalência de Morita.

Buscando ser mais abrangentes, tratamos sempre que possível de categorias abelianas — ainda que seja possível trabalhar com Álgebra Homológica em ambientes não-abelianos, veja [nLa23]. Um dos motivos disso é que, no capítulo final, iremos tratar de uma categoria que não é exatamente igual à categoria de módulos de um anel. Mesmo assim, para facilitar a leitura, o leitor que desejar poderá sempre assumir que uma categoria abeliana é simplesmente uma categoria de módulos.

As referências básicas utilizadas para esse capítulo são os livros de Cartan e Eilenberg [CE56], de Weibel [Wei94] e de Lam [Lam99].

1.1 Conceitos de Álgebra Homológica

Começaremos definindo categorias abelianas, as quais nos fornecem o ambiente adequado para se definir sequências exatas e provar propriedades cruciais para o desenvolvimento de teorias homológicas, como o lema dos 5, o lema da serpente e tantos outros.

Definição 1.1.1. Uma categoria $\mathcal{A}$ é *abeliana* se satisfaz as seguintes propriedades:

- $\mathcal{A}$ possui objeto zero, produtos finitos e coprodutos finitos;
- todo morfismo em $\mathcal{A}$ possui núcleo e conúcleo;
- todo monomorfismo é um núcleo e todo epimorfismo é um conúcleo.

Proposição 1.1.2. *Se $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana, então:*

a) *$\mathcal{A}$ é aditiva, i.e.* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N)$ *é um grupo abeliano para todos* M,N *e a composição de morfismos respeita a soma de morfismos.*

b) *O produto finito coincide com o coproduto finito.*

c) *Todo morfismo* f *pode ser fatorado unicamente como composição* $f = i \circ p$ *de um monomorfismo* i *e um epimorfismo* p*. Além disso,* $i = \ker(\operatorname{coker} f)$ *e* $p = \operatorname{coker}(\ker f)$*.*

Demonstração. [Bor94b, 1.2.4, 1.5.5, 1.6.4]. □

Utilizando a última propriedade, podemos definir a imagem $\mathrm{Im}(f)$ de um morfismo $f : M \to N$ como o objeto dado por $\ker(\operatorname{coker} f)$ ou, equivalentemente, por $\operatorname{coker}(\ker f)$. Isso nos diz essencialmente que, em categorias abelianas, vale o teorema do isomorfismo $\mathrm{Im}(f) \cong M/\ker(f)$.

Definição 1.1.3. Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Um *complexo de cadeias* é uma família de objetos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ em $\mathcal{A}$ munida de morfismos $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ que satisfazem $\partial_n\partial_{n+1} = 0$. Tais morfismo serão chamados de *mapas de bordo*. O n-ésimo grupo de *homologia* desse complexo é definido por

$$H_n(C_*, \partial) = \frac{\ker(\partial_n)}{\mathrm{Im}(\partial_{n+1})}.$$

Dualmente, um *complexo de cocadeias* é uma família de objetos $\{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ em $\mathcal{A}$ munida de morfismos $d^n : C^n \to C^{n+1}$ que satisfazem $d^n d^{n-1} = 0$. Tais morfismos serão chamados de *diferenciais*. O n-ésimo grupo de *cohomologia* desse complexo é definido por

$$H^n(C^*, d) = \frac{\ker(d^n)}{\mathrm{Im}(d^{n-1})}.$$

Em categorias abelianas gerais, o quociente possui uma definição em termos de propriedades universais que depende dos morfismo envolvidos. Assim, acreditamos ser legítimo dizer que a definição de (co)homologia acima necessite de uma maior precisão. Para tanto, consulte [Rui].

Observação 1.1.4. Acima, utilizamos a terminologia "mapas de bordo" para tratar de complexo de cadeias, pois eles, de fato, são dados pelo bordo de simplexos no caso da homologia singular de um espaço topológico. No caso de complexos de cocadeia, a nossa motivação para o uso do termo "diferencial" vem do complexo da cohomologia de de Rham. Vale ressaltar que, muitas vezes, este último termo é utilizado para tratar indiscriminadamente de complexos de cadeia ou de cocadeia.

Definição 1.1.5. Uma *sequência exata* é um complexo de cadeias (C_*, ∂) satisfazendo $H_n(C_*) = 0$ para todo n; ou seja, $\ker(\partial_n)$ coincide com $\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ para todo n.

Agora, definiremos os conceitos de funtores derivados, que nos fornecem um processo consideravelmente geral de se obter uma (co)homologia. Foi essa construção que permitiu H. Cartan e S. Eilenberg a unificar as teorias de (co)homologia de grupos, álgebras associativas e álgebras de Lie definidas durante a década de 1940.

Antes disso, necessitamos dos conceitos de objetos projetivos e injetivos. Do ponto de vista homológico, podemos dizer que módulos desse tipo são os tijolos da categoria de módulos de um anel.

Definição 1.1.6. [CE56, p. 6] Um objeto P de uma categoria $\mathcal{C}$ é dito *projetivo* se satisfaz a seguinte propriedade: para todo epimorfismo $f : M \to N$ e todo morfismo $g : P \to N$, existe um morfismo $h : P \to M$ tal que $fh = g$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, two heads, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Dualmente, um objeto I de uma categoria $\mathcal{C}$ é dito *injetivo* se satisfaz a seguinte propriedade: para todo monomorfismo $f : N \to M$ e todo morfismo $g : N \to I$, existe um morfismo $h : M \to I$ tal que $hf = g$.

$$\begin{tikzcd} I & \\ N \arrow[u, "g"] \arrow[r, hook, "f"'] & M \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

Um modo mais preciso de dizer que os dois conceitos da definição acima são duais é o seguinte: um objeto é projetivo em $\mathcal{C}$ se, e somente se, ele é injetivo na categoria oposta $\mathcal{C}^{op}$ (onde as flechas dos morfismos são invertidos).

Precisaremos de tais objetos para construir o que chamamos de *resoluções projetivas* (resp. *injetivas*) de um objeto M, o que é simplesmente uma sequência exata da forma

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

$$(\text{resp. } 0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots).$$

onde cada objeto P_i é projetivo (resp. cada I^j é injetivo). Quando tais resoluções existem para todo objeto de uma categoria, dizemos que ela *possui suficientes projetivos* (resp. *injetivos*).

Seja $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor covariante exato à direita entre categorias abelianas. Assuma, também, que $\mathcal{A}$ possui suficientes projetivos. Os funtores derivados à esquerda de F, denotados por $L_iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ($i \geqslant 0$), são definidos da seguinte forma: tomando uma resolução projetiva $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de $M \in \mathcal{A}$, definimos

$$L_iF(M) = H_i(F(P_*))$$

Caso o funtor F seja contravariante, podemos assumir que ele é covariante quando o consideramos partindo da categoria oposta $\mathcal{A}^{op}$. Nesse caso, devemos supor que $\mathcal{A}$ possui suficientes injetivos para obter uma resolução projetiva em $\mathcal{A}^{op}$.

Se o funtor F for exato à esquerda e $\mathcal{A}$ possuir suficientes injetivos (ou suficientes projetivos caso F seja contravariante), então definimos os funtores derivados à direita de F, denotados por $R^iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ($i \geqslant 0$), da seguinte forma: tomando uma resolução injetiva

$(I^n)_{n\geqslant 0}$ de $M \in \mathcal{A}$, defina

$$R^iF(M) = H^i(F(P_*))$$

Alternativamente, podemos defini-lo a partir da seguinte identidade $R^iF = (L_iF^{op})^{op}$, onde F^{op} é o funtor oposto induzido $F^{op} : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}^{op}$.

Duas propriedades que seguem da definição são:

- $L_0F \cong F$ e $R^0F \cong F$.
- Se P é projetivo (resp. I é injetivo), então $L_iF(P) = 0$ (resp. $R^iF(I) = 0$) para todo $i > 0$.
- Se F é um funtor exato, então $L_iF = 0$ e $R^iF = 0$ para todo $i > 0$.

Uma aspecto interessante dos funtores derivados é que, a partir de uma sequência exata curta $0 \to K \to L \to N \to 0$ em $\mathcal{A}$, temos induzida as sequências exatas longas:

$$\cdots \to L_1F(K) \to L_1F(L) \to L_1F(N) \to L_0F(K) \to L_0F(L) \to L_0F(N) \to 0$$

$$0 \to R^0F(N) \to R^0F(L) \to R^0F(K) \to R^1F(N) \to R^1F(L) \to R^1F(K) \to \cdots$$

Para mais detalhes sobre funtores derivados, como a independência da definição em relação à escolha das resoluções projetivas e injetivas, a demonstração da sequência longa induzida e sobre a universalidade dos funtores, consulte [Wei94, §2.4, 2.5].

Aqui estaremos focados apenas nos dois exemplos mais comuns de funtores derivados, o Ext e o Tor, que são os funtores derivados do Hom e do tensor respectivamente. Em mais detalhes:

Definição-proposição 1.1.7. Seja $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana com suficientes projetivos e injetivos. Se $M, N \in \mathcal{A}$, definimos $\mathrm{Ext}^n(M, N)$ ($n \geqslant 0$) como o grupo abeliano dado pelos seguintes objetos isomorfos:

$$R^n(\mathrm{Hom}(M, -))(N) \cong H^n(\mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}(P_*, I^*))) \cong R^n(\mathrm{Hom}(-, N))(M)$$

onde P_* é uma resoluções projetiva de M e I^* é resolução injetiva de N e $\mathrm{Tot}(-)$ denota o complexo total de um bicomplexo, veja [Wei94, p. 8].

Agora, sendo $M \in Mod\text{-}R$ e $N \in R\text{-}Mod$, definimos $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$ ($n \geqslant 0$) como

$$L_n(M \otimes_R -)(N) \cong H_n(\mathrm{Tot}(P_* \otimes_R Q_*)) \cong L_n(- \otimes_R N)(M),$$

onde Q_* é uma resolução projetiva de N.

As demonstrações dos isomorfismos enunciados acima podem ser conferidas em [Wei94, §2.7].

A razão para a utilização da notação $\mathrm{Ext}^n(M, N)$ é o fato de que, no caso de módulos, tais grupos estão em correspondência com classes de equivalência das n-extensões de M por N, isto é, sequências exatas da forma

$$0 \to N \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to M \to 0$$

Já no caso do Tor, pode-se ver que ele está fortemente conectado com a noção de torção de grupos abelianos, veja [Wei94, §3.1].

Como já percebemos, os funtores derivados de um funtor exato é trivial. A seguir, veremos uma boa propriedade de funtores exatos.

Lema 1.1.8 (Funtor exato preserva funtores derivados)**.** *Seja $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor covariante entre as categorias abelianas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Seja, também, $\mathcal{C}$ mais uma categoria abeliana e $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ um funtor (aditivo) exato.*

- *Se F é exato à direita e T é covariante, então $T(L_nF) \cong L_n(TF)$.*
- *Se F é exato à direita e T é contravariante, então $T(L_nF) \cong R^n(TF)$.*
- *Se F é exato à esquerda e T é covariante, então $T(R^nF) \cong R^n(TF)$.*
- *Se F é exato à esquerda e T é contravariante, então $T(R^nF) \cong L_n(TF)$.*

Demonstração. Este é um detalhamento do exercício 2.4.2 de Weibel [Wei94]. Provaremos o primeiro item, enquanto que os outros podem ser deduzidos de maneira análoga. Sendo P_* uma resolução projetiva de um objeto M de $\mathcal{A}$, basta provarmos o isomorfismo natural $H_n(TF(P_*)) \cong TH_n(F(P_*))$ ou, em outras palavras, que a homologia comuta com funtores exatos. Isso segue do fato de que funtores exatos preservam núcleos (em inglês, *kernels*) e conúcleos, cf. [Bor94b, Prop. 1.8.5]. Desse modo, para todo complexo de cadeias (C_*, ∂), temos que:

$$H_n(T(C_*)) = \operatorname{coker}\Big(\operatorname{Im}(T\partial_{n+1}) \to \ker(T\partial_n)\Big) = T\Big(\operatorname{coker}(\operatorname{Im}(\partial_{n+1}) \to \ker(\partial_n))\Big). \qquad \square$$

Na demonstração acima, vimos que funtores exatos comutam com os funtores de homologia. Na verdade, como veremos agora, o mesmo pode ser provado quando consideramos um *bifuntor* exato.

Teorema 1.1.9 (Fórmula de Künneth)**.** *Seja $T : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}$ um funtor (aditivo) covariante e exato à direita em ambas coordenadas. Assuma que as categorias abelianas $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ possuam projetivos suficientes e que $\mathcal{A}$ possua coprodutos arbitrários.*

Se $L_1(T)(M, N) = 0$ para todos $M \in \mathcal{A}_1, N \in \mathcal{A}_2$ (e.g. T é exato), então

$$T(H_*(X_1), H_*(X_2)) \cong H_* \operatorname{Tot}(T(X_1, X_2))$$

onde X_1 e X_2 são complexos de cadeia em $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ respectivamente e Tot *indica o complexo total de um bicomplexo.*

Demonstração. Isso é uma reformulação do teorema 7.2 do livro de Cartan e Eilenberg [CE56, Chap. IV] no contexto de categorias abelianas. Os detalhes dessa generalização foram desenvolvidos na dissertação de Fluch [Flu04, Thm 3.19, Prop. 4.1]. $\square$

Corolário 1.1.10. *Dadas as k-álgebras A e B com k semissimples, vale que*

$$\operatorname{Tor}_n^{A \otimes B}(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2) \cong \bigoplus_{i+j=n} \operatorname{Tor}_i^A(M_1, N_1) \otimes \operatorname{Tor}_j^B(M_2, N_2).$$

onde M_1 e N_1 são A-módulos e M_2 e N_2 são B-módulos.

Demonstração. Primeiramente, esclarecemos que $- \otimes -$ é exato sempre que k é semissimples. Agora, sendo P_*^1 e P_*^2 resoluções projetivas de N_1 e N_2 respectivamente, vale que $P_*^1 \otimes P_*^2$ é resolução $(A \otimes B)$-projetiva de $N_1 \otimes N_2$, cf. [CE56, IX: Cor. 2.7]. Assim, obtemos os seguintes isomorfismos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tor}_n^{A\otimes B}(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2) &\cong H_n((M_1 \otimes M_2) \otimes_{A\otimes B} (P_*^1 \otimes P_*^2)) \\
&\cong H_n((M_1 \otimes_A P_*^1) \otimes (M_2 \otimes_B P_*^2)) \\
&\cong \bigoplus_{i+j=n} H_i(M_1 \otimes_A P_*^1) \otimes H_j(M_2 \otimes_A P_*^2) \\
&\cong \bigoplus_{i+j=n} \operatorname{Tor}_i^A(M_1, N_1) \otimes \operatorname{Tor}_j^B(M_2, N_2),
\end{aligned}$$

sendo que aplicamos o teorema anterior com $T = (- \otimes -)$ no penúltimo isomorfismo. □

Como já foi observado, os módulos injetivos e projetivos formam uma base da teoria de funtores derivados. A seguir, realizamos uma compilação das diferentes caracterizações desses módulos.

Proposição 1.1.11. *As seguintes afirmações são equivalentes sobre um objeto P de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$:*

(1) P é projetivo.

(2) A sequência exata curta $0 \to M \to N \to P \to 0$ cinde (em inglês, splits) para todos $M, N \in \mathcal{A}$.

(3) $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(P, M) = 0$ para todo $M \in \mathcal{A}$.

(4) O funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -)$ é exato.

No caso em que $\mathcal{A}$ é uma categoria de R-módulos, temos mais uma equivalência:

(5) P é somando direto de um R-módulo livre L.

Observação 1.1.12. Um modo de enunciar uma afirmação similar à equivalência (5) para categorias mais gerais seria assumindo que $\mathcal{A}$ possui um gerador G (veja definição 1.1.21). Assim, poderíamos afirmar que P é projetivo se, e somente se, $G \twoheadrightarrow P$ cinde para todo gerador G.

Como apresentado abaixo, as quatro primeiras equivalências acima podem ser dualizadas para o caso de injetivos. Mesmo assim, tais módulos possuem caracterizações particulares, como é o caso do critério de Baer, que foi provado mesmo antes da introdução dos módulos projetivos.

Proposição 1.1.13. *As seguintes afirmações são equivalentes sobre um objeto I de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$:*

(1) I é injetivo.

(2) A sequência exata curta $0 \to I \to M \to N \to 0$ cinde para todos $M, N \in \mathcal{A}$.

(3) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M,I)=0$ *para todo* $M\in\mathcal{A}$.

(4) O funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,I)$ *é exato.*

No caso em que $\mathcal{A}=R$*-Mod, temos ainda as equivalências:*

(5) (Critério de Baer) Para todo ideal à esquerda J *de* R*, todo morfismo* $J\to I$ *pode ser estendido a um morfismo* $R\to I$.

(6) $\mathrm{Ext}^1_R(R/J,I)=0$ *para todo ideal à esquerda* J *de* R.

Demonstração parcial. (1) $\iff$ (5): A implicação $\implies$ segue diretamente da definição aplicada ao monomorfismo $J\hookrightarrow R$. Para a recíproca, veja [Wei94, 2.3.1].

(5) $\iff$ (6): Aplicando $\mathrm{Hom}_R(-,I)$ à sequência exata $0\to J\to R\to R/J\to 0$, obtemos a seguinte sequência exata:

$$0\to\mathrm{Hom}_R(R/J,I)\to\mathrm{Hom}_R(R,I)\xrightarrow{\phi}\mathrm{Hom}_R(J,I)\to\mathrm{Ext}^1_R(R/J,I)\to 0$$

pois $\mathrm{Ext}^1_R(R,I)=0$. Agora, o critério de Baer é equivalente a dizer que o morfismo ϕ é sobrejetor para todo J, o que é equivalente a dizer que $\mathrm{Ext}^1_R(R/J,I)=0$. □

Como visto acima, o funtor $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ é exato quando P é projetivo, o que nos diz que o Ext aplicado em P possui um comportamento trivial. De forma análoga, podemos pensar nos módulos que tem um comportamento trivial em relação ao Tor. Tais módulos são chamados de *planos* (em inglês, *flat*) e são caracterizados pelas propriedades abaixo.

Proposição 1.1.14. *Dado um* R*-módulo à esquerda* M *com uma sequência exata curta* $0\to K\to L\to M\to 0$ *tal que* L *livre, valem as seguintes equivalências:*

(1) M *é plano, i.e.* $-\otimes_R M$ *é um funtor exato*

(2) $M^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *é um* R*-módulo à direita injetivo*

(3) O mapa natural $I\otimes_R M\to IM$ *é injetor (ou um isomorfismo) para todo ideal à direita* I *de* R

(4) $\mathrm{Tor}^R_1(M,R/I)=0$ *para todo ideal à direita* I *de* R.

(5) Toda sequência exata curta $0\to N'\to N\to M\to 0$ *é pura*[1].

(6) A sequência exata $0\to K\to L\to M\to 0$ *é pura.*

(7) Para todo $\{x_1,\cdots,x_n\}\subseteq K$*, existe* $f\in\mathrm{Hom}_R(L,K)$ *tal que* $f\iota(x_j)=x_j\ \forall j$*, onde* $\iota: K\hookrightarrow L$.

(8) Para todo $x\in K$*, existe* $f\in\mathrm{Hom}_R(L,K)$ *tal que* $f\iota(x)=x$*, onde* $\iota: K\hookrightarrow L$.

Demonstração. Para as quatro primeiras equivalências, consulte [Wei94, Prop. 3.2.4], onde é utilizado o critério de Baer. Para as duas caracterizações seguintes, veja [Lam99, 4.8.5, 4.8.6] e, para as duas últimas, veja [Oso73, Thm. 1.33]. □

---

[1] Isso significa que a sequência permanece exata ao aplicarmos o tensor $X\otimes_R -$ para qualquer R-módulo à direita X.

A penúltima caracterização acima pode ser interpretada da seguinte forma: um módulo M é plano se, e somente se, a sequência exata curta $0 \to K \to L \to M \to 0$ cinde apenas para os submódulos finitamente gerados de K. Desse modo, não é surpreendente que temos os próximos dois resultados

Proposição 1.1.15. *Se todo submódulo finitamente gerado de um R-módulo M é plano, então M é plano.*

Esboço da demonstração. Isso segue dos seguintes fatos:

- Todo módulo é limite direto de seus submódulos finitamente gerados.
- Limite direto de módulos planos é um módulo plano.

O segundo item pode ser deduzido do fato de que o limite direto de módulos preserva monomorfismos, cf. [Wei94, Thm 2.6.15]. □

Da demonstração acima, segue que um limite módulos livres é sempre plano. Na verdade, pode-se provar que todo módulo plano é dessa forma, veja [Lam99, 4.34].

Para enunciarmos o próximo resultado, lembramos que um R-módulo M é *finitamente apresentável* se $M \cong R^n/Q$ para algum R-módulo finitamente gerado Q ou, equivalentemente, se ele pode ser inserido numa sequência exata da $R^m \to R^n \to M \to 0$ para alguns $m, n \geqslant 0$.

Lema 1.1.16. *Todo R-módulo projetivo é plano. A recíproca é válida se M é finitamente apresentável.*

Demonstração. A primeira afirmação pode ser deduzida através de diversas caracterizações: por exemplo, ao notar que todo somando de módulo livre L satisfaz $L \otimes_R -$ é exato ou que todo módulo projetivo satisfaz $\mathrm{Tor}_1^R(N, P) = 0$ para todo N.

Alternativamente, tome uma sequência curta $0 \to K \to L \to M \to 0$ para um módulo M com L livre. Se M for projetivo, então existe uma cisão (em inglês, um *splitting*) $f : L \to K$ e, portanto, M é plano pela caracterização (7). Reciprocamente, assuma que K é gerado por uma quantidade finita de elementos $x_1, \cdots, x_n$ e que M é plano. A mesma caracterização nos garante que a sequência exata curta cinde e M é, portanto, um somando de um módulo livre.

Uma demonstração alternativa pode ser conferida em [Wei94, Thm 3.2.7] □

Uma característica importante dos módulos planos é que eles podem substituir o papel dos módulos projetivos na definição de Tor. Isto é, para calcularmos $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$, podemos utilizar resoluções de M ou de N por módulos planos ao invés de resoluções projetivas, veja [Wei94, Lemma 3.2.8].

Note que, no caso em que R é comutativo, os grupos Tor^R e Ext_R também são R-módulos. Abaixo, veremos que eles comutam com o tensor por R-álgebras planas.

Proposição 1.1.17. *Seja $\phi : R \to S$ um morfismo entre as álgebras comutativas R e S tal que S é R-plano.*

$$S \otimes_R \mathrm{Tor}_n^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_n^S(M \otimes_R S, S \otimes_R N)$$

Se R é noetheriano e M é um R-módulo finitamente gerado, então

$$S \otimes_R \operatorname{Ext}^n_R(M, N) \cong \operatorname{Ext}^n_S(S \otimes_R M, S \otimes_R N)$$

Demonstração. Primeiramente, usando que $S \otimes_R -$ é exato, obtemos pelo lema 1.1.8, que

$$S \otimes_R \operatorname{Tor}^R_n(M, N) = S \otimes_R L_n(M \otimes_R -)(N) \cong L_n(S \otimes_R M \otimes_R -)(N) = \operatorname{Tor}^R_n(S \otimes_R M, N)$$

Agora, tomando uma resolução R-projetiva P_* de N, temos que $S \otimes_R P_*$ também é resolução S-projetiva de $S \otimes_R N$. De fato, se P é somando de um R-módulo livre L, então $S \otimes_R P$ é somando do S-módulo livre $S \otimes_R L$. Com isso,

$$\operatorname{Tor}^R_n(S \otimes_R M, N) = H_n(S \otimes_R M \otimes_R P_*) \cong H_n(S \otimes_R M \otimes_S S \otimes_R P_*) = \operatorname{Tor}^S_n(S \otimes_R M, S \otimes_R N)$$

Para obter o resultado para o Ext, basta repetir o mesmo processo notando o isomorfismo abaixo quando M é finitamente apresentável

$$S \otimes_R \operatorname{Hom}_R(M, N) \cong \operatorname{Hom}_S(S \otimes_R M, S \otimes_R N),$$

veja [Wei94, pp. 75–76]. $\square$

O isomorfismo acima pode ser utilizado, em especial, quando $S = S^{-1}R$ é alguma localização de R.

Equivalência de Morita

Um dos objetivos desta dissertação está em entender como conceitos homológicos são utilizados para entender propriedades de uma álgebra associativa A. Como os objetos da Álgebra Homológica são essencialmente A-módulos, muitas dessas propriedades dependem somente da categoria de módulos. Assim, acabamos não distinguindo duas álgebras cujas categorias de módulos são equivalentes. Isso nos leva a propor a seguinte pergunta: o quanto de informação está sendo perdida através dessa aproximação? Até o final dessa seção, buscaremos apresentar um teorema de Morita que nos fornece um bom entendimento nessa direção. Para mais detalhes sobre a teoria de Morita, veja [Lam99, Chapter 7].

Definição 1.1.18. Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre duas categorias induz uma função $F_{X,Y} : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, $X, Y \in \mathcal{C}$. Dizemos que

- F é *fiel* se $F_{X,Y}$ é injetora para todos X, Y.
- F é *pleno* (em inglês, *full*) se $F_{X,Y}$ é sobrejetora para todos X, Y.

Definição-proposição 1.1.19. Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma *equivalência de categorias* se satisfaz alguma das condições equivalentes:

(1) Existe um funtor "inverso" $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ com isomorfismos naturais $FG \cong 1_{\mathcal{D}}$ e $GF \cong 1_{\mathcal{C}}$.

(2) F é fiel, pleno e todo objeto D de $\mathcal{D}$ é isomorfo a algum objeto da forma $F(C)$, $C \in \mathcal{C}$.

(3) F é fiel, pleno e possui um adjunto à esquerda G que é fiel e pleno.

Demonstração. [Bor94a, Prop. 3.4.3] □

Corolário 1.1.20. *Se $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é uma equivalência entre categorias abelianas, então F é um funtor exato.*

Demonstração. Pela (demonstração da) proposição acima, temos que F possui um adjunto à esquerda G que é uma equivalência de categorias. Desse modo, também vemos que F é adjunto à esquerda de G. Assim, o resultado segue do seguinte fato: se F possui um adjunto à esquerda (resp. à direita), então F é exato à esquerda (resp. à direita). □

Definição-proposição 1.1.21. Dizemos que um R-módulo à esquerda P é um *gerador* se satisfaz as seguintes condições equivalentes:

(1) Todo $M \in R\text{-}Mod$ é quociente de alguma soma direta $\oplus_i P$.

(2) $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ é um funtor fiel

(3) $\mathrm{tr}(P) = R$, onde $\mathrm{tr}(P) := \sum_{f \in \mathrm{Hom}_R(P,R)} f(P)$.

(4) R é somando direto de $\oplus_{i=1}^{n} P$ para algum n.

Demonstração. [Lam99, 18.8] □

Observação 1.1.22. A caracterização (2) acima é utilizada para definir geradores em categorias gerais.

Definição 1.1.23. Um gerador de R-*Mod* que é projetivo e finitamente gerado é chamado de *progerador.*

Teorema-definição 1.1.24 (Morita)**.** *Sobre dois anéis R e S, as afirmações abaixo são equivalentes:*

(1) As categorias de módulos $Mod\text{-}R$ e $Mod\text{-}S$ são equivalentes.

(2) Existe um progerador $P \in Mod\text{-}R$ tal que $S \cong \mathrm{End}_R(P)$.

(3) Existem bimódulos $P \in S\text{-}Bimod\text{-}R$ e $Q \in R\text{-}Bimod\text{-}S$ tais que $P \otimes_R Q \cong S$ e $Q \otimes_S P \cong R$.

Nesse caso, dizemos que R e S são Morita-equivalentes.

Demonstração parcial. (1) ⇒ (2): Tome uma equivalência de categorias $F : Mod\text{-}S \to Mod\text{-}R$. Dado que S é um progerador de $Mod\text{-}S$, pode-se provar que $F(S)$ também é um progerador em $Mod\text{-}R$. Desse modo, temos os isomorfismos de anéis $\mathrm{End}_R(F(S)) \cong \mathrm{End}_S(S) \cong S$, sendo que o segundo isomorfismo é dado por $f \mapsto f(1)$.

(2) ⇒ (3): Tomando o progerador P de $Mod\text{-}R$, podemos dar a ele uma estrutura de S-R-bimódulo através do isomorfismo $S \cong \mathrm{End}_R(P)$ e que $\mathrm{End}_R(P)$ age em P à esquerda:

$$s \cdot p := s(p), \quad s \in \mathrm{End}_R(P), \quad p \in P$$

Agora, o bimódulo "inverso" de P é definido por $Q := \mathrm{Hom}_R(P, R)$, com as seguintes ações de R e de $\mathrm{End}_R(P) \cong S$:

$$(r \cdot q)(p) := rq(p)$$
$$(q \cdot s)(p) := (q \circ s)(p)$$

Utilizando que P é um gerador, prova-se o isomorfismo de R-bimódulos $Q \otimes_S P \cong R$, enquanto que o isomorfismo $P \otimes_R Q \cong S$ segue de P ser um projetivo finitamente gerado.

(3) ⇒ (1): O seguinte par de funtores formam uma equivalência de categorias:

$$- \otimes_S P : \mathit{Mod}\text{-}S \to \mathit{Mod}\text{-}R \qquad - \otimes_R Q : \mathit{Mod}\text{-}R \to \mathit{Mod}\text{-}S,$$

pois $(- \otimes_S P) \otimes_R Q \cong - \otimes_S (P \otimes_R Q) \cong - \otimes_S S \cong \mathrm{id}_{\mathit{Mod}\text{-}S}$. □

Observação 1.1.25. Usando a última caracterização, podemos notar que Morita-equivalência não é alterada se considerarmos módulos à esquerda ou à direita. Em mais detalhes, vale que R-*Mod* é equivalente a S-*Mod* se, e somente se, *Mod*-R e *Mod*-S são equivalentes.

Exemplo 1.1.26.
1. Se e é um idempotente de R tal que $ReR = R$, então R é Morita-equivalente a eRe por meio do progerador eR de R-*Mod*, cf. [Lam99, §18.E]. Em particular, podemos aplicar esse resultado quando R é a álgebra de matrizes $M_n(S)$ para algum anel S e $e = E_{11}$. Desse modo, concluímos que $M_n(S)$ é Morita-equivalente a S para todo $n \geqslant 1$.
2. Se R é um anel artiniano (ou, mais geralmente, semiperfeito), então podemos escolher um sistema de idempotentes primitivos ortogonais $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ de R de modo que $e_1R, \cdots, e_nR$ é um conjunto completo das isoclasses de projetivos f.g. indecomponíveis. Chamamos $e = e_1 + \cdots + e_n$ de um *idempotente básico* e $R^b := eRe$ de o *anel básico associado a* R. Pelo item acima (veja [Lam01, 25.6]), vale que R é Morita-equivalente a eRe através do progerador eR de R-*Mod*.
3. Como será apresentado mais à frente (veja teorema 3.4.3), toda álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado é Morita-equivalente a um quociente de uma álgebra de caminhos.

1.2 Dimensões Homológicas

A conjectura de Han é uma equivalência entre duas noções homológicas acerca de álgebras associativas. Nesta seção, apresentaremos o primeiro deles: a dimensão global.

Definição 1.2.1. [CE56, pp. 109, 111, 122] Seja M um objeto em uma categoria abeliana $\mathcal{A}$.

1. Se $\mathcal{A}$ possui suficientes projetivos, definimos a *dimensão projetiva* de M, , denotada por $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(M)$, como o menor $n \in \mathbb{N}$ para o qual M possui uma resolução projetiva P_* de comprimento n:
$$0 \to P_n \to \ldots \to P_0 \to M \to 0.$$
2. Se $\mathcal{A}$ possui suficientes injetivos, definimos a *dimensão injetiva* de M, denotada por

$\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(M)$, como o menor $n \in \mathbb{N}$ para o qual M possui uma resolução injetiva I^* de comprimento n:

$$0 \to M \to I^0 \to \dots \to I^n \to 0.$$

3. Se $\mathcal{A} = R\text{-}Mod$ ou $\mathcal{A} = Mod\text{-}R$, definimos a *dimensão plana* (ou *dimensão fraca*) de M, denotada por $\mathrm{fd}_R(M)$, como o menor $n \in \mathbb{N}$ para o qual M possui uma resolução por módulos planos F_* de comprimento n:

$$0 \to F_n \to \dots \to F_0 \to M \to 0.$$

Se não existirem resoluções finitas como acima, dizemos que as dimensões são infinitas.

Proposição 1.2.2. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana com suficientes projetivos. Sobre um objeto M de $\mathcal{A}$, são equivalentes:*

(1) $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(M) \leqslant n$.

(2) $\mathrm{Ext}^i(M, N) = 0$ *para todo $i > n$ e todo $N \in \mathcal{A}$.*

(3) $\mathrm{Ext}^{n+1}(M, N) = 0$ *para todo $N \in \mathcal{A}$.*

(4) $\mathrm{Ext}^n(M, -) : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ *é um funtor exato à direita.*

(5) Para toda sequência exata $0 \to X_n \to P_{n-1} \dots \to \dots \to P_0 \to M \to 0$ tal que cada P_i é projetivo para $i = 0, \cdots, n-1$, vale que X_n também é projetivo.

Esboço da demonstração. Sempre podemos construir uma resolução projetiva de M da forma do item (5). Lembrando, ainda, que $\mathrm{Ext}^i(M, N)$ é calculado a partir de uma resolução projetiva de M, obtemos as implicações (5) $\implies$ (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3).

A implicação (3) $\implies$ (4) segue diretamente da sequência exata longa do $\mathrm{Ext}^*(M, -)$. Para obtermos a implicação restante (4) $\implies$ (5), basta provarmos que $\mathrm{Hom}(X_n, -)$ é exato à direita. Desse modo, tomando um epimorfismo $N \twoheadrightarrow N'$, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(P_{n-1}, N) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Hom}(X_n, N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^n(M, N) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
\mathrm{Hom}(P_{n-1}, N') \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X_n, N') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n(M, N') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Para provar que as linhas são exatas, note que o caso $n = 1$ é o início da sequência exata longa induzida por $\mathrm{Hom}(-, N)$, enquanto que o caso geral pode ser provado indutivamente ao quebrar a resolução de M em duas partes exatas menores $0 \to X_n \to P_{n-1} \to P'_{n-1} \to 0$ e $0 \to P'_{n-1} \to P_{n-2} \dots \to \dots \to P_0 \to M \to 0$. Além disso, os morfismos das colunas à esquerda e à direita são epimorfismos, porque P_{n-1} é projetivo e estamos assumindo que $\mathrm{Ext}^n(M, -)$ é exato à direita. Desse modo, o morfismo da coluna central também é um epimorfismo. □

De forma análoga, é possível de se provar resultados parecidos para a dimensão injetiva e a dimensão plana (usando Tor ao invés de Ext), veja [Wei94, §4.1]. Usando isso, podemos definir um dos principais invariantes homológicos desta dissertação.

Definição-corolário 1.2.3. [CE56, p. 111] Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana com suficientes projetivos e injetivos. A sua *dimensão global (projetiva)*, denotada por gl.dim($\mathcal{A}$), é definida pelo seguinte comum valor

$$\begin{aligned}\sup\{\mathrm{pd}(M): M \in \mathcal{A}\} &= \sup\{n: \mathrm{Ext}^n(M,N) \neq 0 \text{ para alguns } M, N \in \mathcal{A}\}\\ &= \sup\{\mathrm{id}(M): M \in \mathcal{A}\}\end{aligned}$$

No caso em que $\mathcal{A} = R\text{-}Mod$ (resp. $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}{-}R$), ela é chamada de *dimensão global à esquerda* (resp. *à direita*) de R e a denotamos por l.gl.dim(R) (resp. r.gl.dim(R)). Quando ambas dimensões coincidem, ela será denotada simplesmente por gl.dim(R).

De forma similar, introduzimos a dimensão obtida a partir das dimensões planas, ou equivalentemente a partir do Tor.

Definição 1.2.4. A *dimensão global fraca* (ou *plana*) de um anel R, denotada por w.gl.dim(R), é definida pelo seguinte comum valor

$$\sup\{\mathrm{fd}(M): M \in Mod\text{-}R\} = \sup\{n: \mathrm{Tor}_n^R(M,N) \neq 0 \text{ para alguns } M \in Mod\text{-}R, N \in R\text{-}Mod\}$$

Segue do corolário 1.1.20 que duas categorias abelianas equivalentes possuem as mesmas dimensões globais. Em particular, se R é Morita-equivalente a S, então suas dimensões globais (à esquerda, à direita e fraca) são iguais.

Exemplos 1.2.5. Nos três primeiros exemplos abaixo, veremos que alguns tipos de anéis podem ser caracterizados em termos da sua dimensão global. Para mais detalhes, consulte o apêndice A.1.

1. Um anel R é semissimples se, e somente se, todo R-módulo à esquerda (ou à direita) é projetivo (veja teorema A.1.3). Desse modo, R é semissimples precisamente quando gl.dim(A) = 0

2. Um anel que satisfaz w.gl.dim(R) = 0 é chamado de *regular segundo von Neumann.* Por exemplo, isso é válido para produtos arbitrários de corpos $\Pi_I k$.

3. Um anel satisfazendo l.gl.dim(R) $\leqslant 1$ é chamado de *hereditário à esquerda.* Um dos exemplos mais importantes de álgebras hereditárias é dado pelas álgebras de caminhos kQ. Para mais detalhes sobre essas álgebras, veja a seção 3.4.

4. Álgebras noetherianas auto-injetivas (também conhecidas como quase-Frobenius) só possuem duas opções para sua dimensão global: 0 ou ∞, cf. corolário A.2.3. Essa classe de álgebras contém as álgebras de Frobenius A, i.e. álgebras de dimensão finita satisfazendo $A \cong \mathrm{Hom}_k(A,k)$ como A-módulos, que por sua vez contém as álgebras simétricas, i.e. aquelas que satisfazem $A \cong \mathrm{Hom}_k(A,k)$ como A-bimódulos. Para mais detalhes sobre esses anéis, veja o apêndice A.2.

5. Dada uma álgebra de Lie de dimensão finita $\mathfrak{g}$ sobre um corpo k, a dimensão global da sua álgebra envolvente universal $U\mathfrak{g}$ satisfaz

$$\mathrm{gl.dim}(U\mathfrak{g}) = \mathrm{pd}_{U\mathfrak{g}}(k) = \dim_k(\mathfrak{g}),$$

cf. [Wei94, Ex. 7.3.5, Applicaton 7.7.4].

6. Denotamos por $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{V}ect_k)$ a categoria de complexos $\mathbb{Z}_2$-graduados de k-espaços vetoriais. Ela é formada por objetos da forma

$$V_1 \overset{d_1}{\underset{d_0}{\rightleftarrows}} V_0,$$

onde $d_1 d_0 = 0 = d_0 d_1$ e V_1, V_0 são k-espaços vetoriais. Pode-se provar que a dimensão global dessa categoria é infinita.

7. Outro exemplo diferente de categorias de módulos é dado por categorias da forma $\mathcal{A}^I$, que é definida por funtores de um conjunto parcialmente ordenado I para a categoria abeliana $\mathcal{A}$. A dimensão global de algumas dessas categorias pode ser conferida no artigo de Spears [Spe72].

Abaixo, veremos que, para calcular a dimensão global de um anel, basta analisarmos os módulos gerados por um elemento.

Teorema 1.2.6 (Auslander [Aus55, Thm 1])**.** *Dado um anel R, temos que*

$$\text{l.gl.dim}(R) = \sup\{\text{pd}_R(R/I) : \textit{ I é ideal à esquerda de } R\}$$

Como consequência, se $\text{gl.dim}(R) \neq 0$*, então*

$$\text{l.gl.dim}(R) = 1 + \sup\{\text{pd}_R(I) : \textit{ I é ideal à esquerda de } R\}$$

As igualdades análogas são válidas para as dimensão globais à direita e fraca.

Demonstração. [Wei94, p. 94] Para a primeira igualdade, sendo $d = \sup_I\{\text{pd}_R(R/I)\}$, basta provarmos que $\text{id}_R(M) \leqslant d$ para todo R-módulo à esquerda M. Para tanto, tome uma resolução de M

$$0 \to M \to I^0 \to \ldots \to I^{d-1} \to X^d \to 0$$

de modo que cada I^j é injetivo. Assim, para todo ideal I à esquerda de R, temos que $0 = \text{Ext}_R^{d+1}(R/I, M) \cong \text{Ext}_R^1(R/I, X^d)$. Pela caracterização de injetivos 1.1.13, isso nos diz que X^d é injetivo.

Como possuímos uma caracterização similar para módulos planos, a demonstração acima pode ser reproduzida para o caso da dimensão global fraca. A segunda igualdade é obtida ao notar que $\text{pd}_R(R/I) = 1 + \text{pd}_R(I)$ sempre R/I não é R-projetivo. □

Exemplo 1.2.7. Se R é um domínio e todo ideal I à esquerda de R é principal, isto é, $I = Rr$ para algum $r \in R$, então a multiplicação por r nos fornece um isomorfismo de R-módulos $R \cong I$. Desse modo, todo ideal de R é projetivo e, pelo teorema de Auslander, concluímos que $\text{l.gl.dim}(R) \leqslant 1$. Em particular, isso vale para $R = \mathbb{Z}$ ou $R = k[x]$ com k um corpo.

Com o exemplo acima, podemos notar que, a partir de um corpo k — que possui dimensão global zero —, obtemos um anel de dimensão global maior em uma unidade ao introduzir uma variável. Na verdade, veremos agora que esse processo também é válido quando k é um anel qualquer.

Teorema 1.2.8 (Teorema das sizígias de Hilbert)**.** *Dado um anel R, temos que* $\mathrm{l.gl.dim}(R[x_1, \cdots, x_n]) = \mathrm{l.gl.dim}(R) + n$. *As igualdades análogas são válidas para* r.gl.dim *e* w.gl.dim.

Demonstração. Veja [Wei94, Thm 4.3.7]. Para a dimensão global fraca, também pode-se consultar [Jen66, Thm 2]. □

História do teorema. Tal resultado é atribuído a D. Hilbert por conta do *Theorem* III da sua publicação de 1890 [Hil90]. Naturalmente, o enunciado não foi formulado dessa maneira, visto que o artigo é anterior até mesmo à clara introdução do conceito de módulos, feita por volta de 1920. Uma reformulação mais próxima do teorema de D. Hilbert seria a seguinte: seja $A = k[x_1, \cdots, x_n]$ com k um corpo e M um A-módulo graduado e finitamente gerado. Se construirmos uma sequência exata

$$0 \to X_n \to L_{n-1} \ldots \to \ldots \to L_0 \to M \to 0$$

de modo que cada L_i é livre (e finitamente gerado), então X_n (que é chamado de a n-ésima *sizígia* de M) também é livre.

Visto que o conceito de sequências exatas também não existia, D. Hilbert concebe a i-ésima sizígia ($i \geqslant 1$) — que é dada pelo núcleo de $L_{i-1} \to L_{i-2}$ — como certas m_i-uplas de elementos de A (onde $L_{i-1} = A^{m_i}$) que satisfazem um sistema de equações. Desse modo, o resultado é enunciado dizendo que o n-ésimo sistema de equações nunca terá soluções (ou seja, a $(n+1)$-ésima sizígia é o módulo zero!).

Em termos de dimensões homológicas, isso significa que $\mathrm{pd}_A(M) \leqslant n$ para todo M f.g. graduado. Tal forma do teorema é enunciada, por exemplo, no livro de Cartan e Eilenberg [CE56, VIII : Thm 6.5] e é provada através dos complexos de Koszul.

Dentro do contexto de Álgebra Comutativa e Geometria Algébrica, uma outra prova do teorema de Hilbert (sem a necessidade de assumir que o módulo é graduado) foi dada por F.-O. Schreyer na década de 1980 através do uso de bases de Gröbner, veja [BS15].

Um contraexemplo de B. Osofsky (item 6. dos contraexemplos 1.2.13 abaixo) mostra que o teorema de Auslander acima não é válido se considerarmos o supremo das dimensões injetivas ao invés das projetivas. Mesmo assim, tal resultado é válido para dois casos consideráveis de álgebras:

Teorema 1.2.9. [Oso67, Thms B, C] *Se R é perfeito à direita (veja definição A.3.1) ou noetheriano à direita, então:*

$$\mathrm{r.gl.dim}(R) = \sup\{\mathrm{id}(R/I) \mid I \textit{ é ideal à direita de} R\} = \sup\{\mathrm{id}(I) \mid I \textit{ é ideal à direita de} R\}$$

Vejamos, agora, como podemos comparar as dimensões globais projetiva e fraca de um anel. Do fato de que todo módulo projetivo é plano, segue que sempre temos a desigualdade

$$\mathrm{w.gl.dim}(R) \leqslant \min\{\mathrm{l.gl.dim}(R), \mathrm{r.gl.dim}(R)\}$$

Por outro lado, se assumirmos que todo R-módulo plano é projetivo — o que é uma característica dos anéis perfeitos —, obtemos que as duas dimensões globais coincidem. Veremos, agora, que tal conclusão também é válida para anéis noetherianos.

Proposição 1.2.10. *Se R é noetheriano à esquerda e M é R-módulo finitamente gerado à esquerda, então* $\mathrm{pd}_R(M) = \mathrm{fd}_R(M)$.

Demonstração. Como todo módulo projetivo é plano, sempre temos que $\mathrm{fd}(M) \leqslant \mathrm{pd}(M)$. Para a desigualdade contrária, assuma que $\mathrm{fd}(M) \leqslant n$. Como R é noetheriano e M é finitamente gerado, podemos tomar uma resolução de M

$$0 \to X_n \to L_{n-1} \dots \to \dots \to L_0 \to M \to 0$$

de modo que cada L_i é um R-módulo livre finitamente gerado e X_n é finitamente apresentável. Como $\mathrm{fd}(M) \leqslant n$, devemos ter que X_n é plano e, portanto, também é projetivo, cf. lema 1.1.16. Logo, $\mathrm{pd}_R(M) \leqslant n$. □

Unindo a proposição acima ao teorema de Auslander, obtemos a seguinte consequência.

Corolário 1.2.11. *Se R é noetheriano à esquerda (resp. à direita), então*

$$\mathrm{l.gl.dim}(R) = \mathrm{w.gl.dim}(R) \quad (\textit{resp. } \mathrm{r.gl.dim}(R) = \mathrm{w.gl.dim}(R)).$$

Em particular, se R é bilateralmente noetheriano, então

$$\mathrm{l.gl.dim}(R) = \mathrm{w.gl.dim}(R) = \mathrm{r.gl.dim}(R)$$

Dado um cardinal $\aleph_n$, pode-se generalizar o resultado acima através da noção de um anel $\aleph_n$*-noetheriano* à esquerda (resp. à direita), isto é, anéis cujos ideais à esquerda (resp. à direita) são gerados por, no máximo, $\aleph_n$ elementos.

Teorema 1.2.12 ([Oso68], [Oso73, Cor. 2.47])**.** *Se R é um anel $\aleph_n$-noetheriano à esquerda, então* $\mathrm{l.gl.dim}(R) \leqslant \mathrm{w.gl.dim}(R) + n + 1$. *O análogo é válido para a dimensão global à direita. Em particular, se R é bilateralmente $\aleph_n$-noetheriano, então*

$$|\mathrm{l.gl.dim}(R) - \mathrm{r.gl.dim}(R)| \leqslant n + 1.$$

Vale ressaltar que o caso particular $n = 0$ do teorema acima fora obtido anteriormente por Jensen [Jen66]. Um teorema como o acima nos indica que o estudo das dimensões globais podem possuir fortes conexões com questões de Teoria dos Conjuntos. Tal correlação pode ser evidentemente encontrada nos trabalhos de Barbara Osofsky, nos quais são construídos diversos contraexemplos que nos permitem entender os limites de diferentes teorias, veja 2.2.12 e [Lam99, pp. 79, 80, 249, 509, 514, 539]. Um curioso resultado obtido por ela é que a hipótese do contínuo $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ é equivalente a dizer, por exemplo, que o anel $\Pi_{i\in\mathbb{N}}k$, dado pelo produto de corpos k, possui dimensão global 2; ou a dizer que o corpo de frações $\mathbb{R}(x_1, x_2, x_3)$ possui dimensão projetiva igual a 2 como $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$-módulo, veja [Oso73, pp. 60, 65].

Na mesma direção, outra afirmação que pode ser formulada em termos homológicos e é independente dos axiomas de ZFC é a seguinte: todo grupo G satisfazendo $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}) = 0$ é um grupo livre. Isso foi provado por Shelah [She74].

Contraexemplos 1.2.13. Apesar dos resultados acima, que limitam a diferença entre as dimensões globais à direita, à esquerda e fraca, existem exemplos mostrando que elas podem ser arbitrariamente diferentes. Aqui, apresentaremos uma progressão histórica de tais contraexemplos, construídos essencialmente durante a década de 1960.

1. [Kap58] Este foi o primeiro exemplo conhecido de um anel hereditário à direita que não é hereditário à esquerda. Tome V um espaço vetorial de dimensão enumerável (e infinita) sobre um corpo k e seja C a subálgebra (sem unidade) de $\mathrm{End}_k(V)$ das transformações lineares com imagem de dimensão finita. Também, denote por B a álgebra com unidade dada pela produto direto $C \times 1 \cdot k$. O anel desejado é dado por $A = B \otimes B$. Kaplansky mostrou que A é um anel regular segundo von Neumann cujos ideais à direita são todos enumeravelmente gerados e que, portanto, são projetivos. Além disso, foi encontrado um ideal à esquerda (não-enumeravelmente gerado) que não é projetivo para concluir que $\mathrm{l.gl.dim}(A) \geqslant 2$. Pode-se mostrar que, na realidade, vale a igualdade.

2. [Cha61, Prop. 3.1] Sendo S um anel regular segundo von Neumann e que possua um ideal I que não é somando direto de S. (e.g. um produto infinito de corpos), o anel S/I continua sendo regular segundo von Neumann. O anel $R = \begin{bmatrix} S/I & S/I \\ 0 & S \end{bmatrix}$ é semihereditário à esquerda, mas não é semihereditário à direita (definição A.1.12). Veja a prova em [Lam99, 2.34].

3. [Sma65] Seja D um domínio comutativo noetheriano de dimensão global $n > 0$ e $F(D)$ o seu corpo de frações. Além disso, assuma que $F(D)$ possui um D-submódulo M tal que $\mathrm{pd}_D(M) = n$, então o anel $R = \begin{bmatrix} D & F(D) \\ 0 & F(D) \end{bmatrix}$ é noetheriano à direita e satisfaz que $\mathrm{r.gl.dim}(R) = n$ e $\mathrm{l.gl.dim}(R) = n + 1$. Para concluir que $\mathrm{l.gl.dim}(R) \geqslant n + 1$, pode-se mostrar que o ideal à esquerda $M^* = \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem dimensão projetiva n.

   Para um exemplo mais concreto, pode-se tomar $D = \mathbb{Z}$, o que nos fornece um anel hereditário à direita que não é hereditário à esquerda. Nesse caso, pode-se provar ainda que R é semihereditário à esquerda, veja [Lam99, 2.33].

4. [Sma66] Para obter um anel cuja dimensões globais à direita e à esquerda possuam uma diferença de 2, L. Small propôs novamente uma álgebra triangular. Dessa vez, porém, foi utilizada a k-álgebra A de I. Kaplansky do primeiro exemplo, que possui um ideal à esquerda I com $\mathrm{pd}_A(I) = 1$. Explicitamente, foi mostrado que o anel $T = \begin{bmatrix} A & A/I \\ 0 & k \end{bmatrix}$ é hereditário à direita e possui dimensão global à direita 3. De fato vale $\mathrm{gl.dim}(T) \geqslant 3$, pois o A-módulo à esquerda A/I, de dimensão projetiva 2, nos fornece o ideal de T à esquerda (finitamente gerado) $\begin{bmatrix} 0 & A/I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, que possui mesma dimensão projetiva.

5. O exemplo mais simples de um anel comutativo cuja dimensão global é diferente da dimensão fraca que encontramos foi o anel $R = k[x, \mathbb{Q}]$ dos polinômios em uma variável com expoentes racionais não-negativos:

$$\text{gl.dim}(k[x, \mathbb{Q}]) = 2 \qquad \text{w.gl.dim}(k[x, \mathbb{Q}]) = 1.$$

Basta calcularmos a dimensão dos ideais I de R. Seja $C = \{\deg(r) \mid r \in I\}$. Se C admite um mínimo d, então I é um ideal principal gerado por um elemento de grau d e, portanto, é projetivo. Caso contrário, tomando uma sequência $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em I tal que o grau dos polinômios r_i tenham como limite $\inf(C)$, vale que $I = \sum_{i\geqslant 0} r_i R$. Além disso, usando que $k[x, \mathbb{Q}]$ é um domínio de Bézout (i.e. todo ideal f.g. é principal), podemos assumir que r_{i+1} divide r_i para todo i. Desse modo, pode-se construir a seguinte resolução projetiva para I:

$$0 \to \oplus_{i\geqslant 0}(b_i - b_{i+1}\frac{r_i}{r_{i+1}}) \to \oplus_{i\geqslant 0} b_i R \xrightarrow{\nu} \sum_{i\geqslant 0} r_i R \to 0,$$

onde $\{b_i\}$ é uma base sobre R e definimos $\nu(b_i) = r_i$. Prova-se que, de fato, o núcleo de ν é dado pelo termo da esquerda, o qual é livre. Logo, $\text{pd}_R(I) \leqslant 1$ para todo ideal I de R e, portanto, $\text{gl.dim}(R) \leqslant 2$. Para obter a desigualdade contrária, basta notar que o ideal $I = \sum_{n\geqslant 1} x^{1/n} R$ não é projetivo. Com efeito, se I fosse projetivo, então haveria uma cisão de ν dada por $f : I \to \oplus_{n\geqslant 1} b_n R$, onde podemos escrever $f(r) = \sum_{n\geqslant 1} b_n f_n(r)$ com $f_n \in \text{Hom}_R(I, R)$. Agora, a identidade $x^{1/k} f_1(x) = x^{k+1} f_1(x^{1/k})$ para todo $k \geqslant 0$ nos fornece

$$\deg(f_1(x^{1/k})) = \deg(f_1(x)) + \frac{1}{k} - 1 - k \xrightarrow{k\to\infty} -\infty,$$

o que é um absurdo, pois $\deg(f_1(x^{1/k})) \geqslant 0$ para todo $k \geqslant 1$.

O valor da dimensão global fraca também é obtido pelos argumentos acima ao notar que os ideais da forma $\sum_{i\geqslant 0} r_i R$ são planos (pela caracterização (8) em 1.1.14), de modo que a dimensão plana dos ideais de R é, no máximo, 1.

Veja [GM21] para os anéis dessa forma em mais de uma variável.

6. [Oso67, Cor. 2] (ou [Oso73, Prop. 2.62]) Seja Γ um grupo abeliano linearmente ordenado. O anel $k[[x, \Gamma]]$ da séries de potência em uma variável x com expoentes em $\Gamma^+ = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \geqslant 0\}$ é um exemplo de domínio de valorização. Assim, vale que $\text{w.gl.dim}(k[[x, \Gamma^+]]) = 1$. Para todo $n \geqslant 0$, B. Osofsky exibiu um Γ_n de cardinalidade $\aleph_n$ (ou $\aleph_\omega$ se $n = \infty$) adequado para mostrar que a dimensão global de tais anéis podem atingir qualquer valor: $\text{gl.dim}(k[[x, \Gamma_n]]) = n + 2$.

7. [Jat69, Thm 4.10] (veja também [Oso73, pp. 69–70]) Aqui, apresentaremos uma classe de anéis hereditários à esquerda que possuem dimensão global à direita arbitrária.

Sendo Ω um ordinal e D um anel de divisão, denotamos por $D[x_\mu; \alpha_\mu \mid \mu \leqslant \Omega]$ o anel (generalizado) de polinômios torcidos, onde x_μ são as variáveis, α_μ são monomorfismos de anéis $\alpha_\mu : D[x_\nu; \alpha_\nu \mid \nu \leqslant \mu] \to D$ e a multiplicação satisfaz $x_\mu \cdot x_\nu = \alpha_\mu x_\mu$. Desse modo, cada elemento de D se escreve como soma de monômios $a x_{\mu_1} \dots x_{\mu_k}$ com $a \in D$ e $\mu_1 \leqslant \dots \leqslant \mu_k$. Prova-se que tal anel é um domínio de ideais à esquerda principais e, portanto, $\text{l.gl.dim}(R) = 1$.

Além disso, para todo $n \geqslant 1$, tomando Ω como um ordinal de cardinalidade $\aleph_{n-1}$ (ou $\aleph_\omega$ no caso $n = \infty$), existe um anel da forma acima com cardinalidade $\aleph_{n-1}$. Desse modo, pela desigualdade 1.2.12, podemos concluir que r.gl.dim $\leqslant n+1$. Um outro resultado de Osofsky [Oso73, Thm 2.57] nos fornece um ideal de dimensão projetiva n e, como consequência, a desigualdade contrária r.gl.dim $\geqslant n+1$. Tal anel R também pode ser escolhido como sendo local após realizar uma certa localização. Alternativamente, pode-se tomar o anel das séries de potências torcidas $k[[x,\alpha]]$ (com k um corpo infinito), como construído por Cohn [Coh66, §4] para obter um anel local hereditário à esquerda que não o é à direita.

Com isso, pode-se construir anéis cujas dimensão globais à esquerda e à direita atinjam qualquer valor. Em mais detalhes, para $1 \leqslant m < n \leqslant \infty$, tomando o domínio R acima com $\text{r.gl.dim}(R) = n - m + 1$, temos que o domínio noetheriano à esquerda $A = R[x_1, \dots, x_{m-1}]$ satisfaz

$$\text{l.gl.dim}(A) = \text{l.gl.dim}(R) + m - 1 = m \qquad \text{r.gl.dim}(A) = \text{r.gl.dim}(R) + m - 1 = n.$$

Após notar o quão complicado as dimensões homológicas se comportam num mundo mais geral, vejamos alguns dos ótimos resultados que a tornam mais simples no mundo das álgebras de dimensão finita. Na verdade, apresentaremos a seguir um resultado de Auslander que é provado num ambiente levemente mais geral.

Definição 1.2.14. Um anel R é dito **semiprimário** se o seu radical de Jacobson $J(R)$ é nilpotente e se $\overline{R} = R/J(R)$ é um anel semssimples.

Todo anel artiniano (à esquerda ou à direita) é semiprimário, cf. [Lam01, 4.12, 4.14]. Em particular, isso vale para toda álgebra de dimensão finita sobre um corpo. Mesmo assim, muitos anéis noetherianos não são semiprimários:

- Se $J(R) = 0$ e R não é semissimples, então R não é semiprimário. Em particular, os anéis $\mathbb{Z}$ e $k[x]$ não são semiprimários.
- A álgebra das séries de potências $k[[x]]$ sobre um corpo k não é semiprimária, pois $J(k[[x]]) = (x)$ não é nilpotente.

O teorema abaixo nos diz que se um anel semiprimário é noetheriano, então ele é, na verdade, artiniano.

Teorema 1.2.15 (Hopkins-Levitzki, 1939)**.** *Se R é semiprimário, então temos as seguintes equivalências sobre um R-módulo M:*

$$M \text{ é artiniano} \iff M \text{ é noetheriano} \iff M \text{ admite uma série de composição}$$

Em particular, um anel R é artiniano à esquerda se, e somente se, ele é noetheriano à esquerda e semiprimário

Demonstração. [Lam01, 4.15] □

O seguinte resultado de Auslander nos diz que, para obter a dimensão global de um anel semiprimário, apenas precisamos calcular as dimensões projetivas de seus módulos simples.

Teorema 1.2.16. [Aus55] *Se R é um anel semiprimário, então*

$$\text{l.gl.dim}(R) = \text{w.gl.dim}(R) = \text{r.gl.dim}(R).$$

Além disso, usando a notação $\overline{R} = R/J(R)$, são equivalentes:

(1) $\text{gl.dim}(R) < n$

(2) $\text{Ext}_R^n(\overline{R}, \overline{R}) = 0$

(3) $\text{Ext}_R^n(S, S') = 0$ *para todos R-módulos simples S e S'*

(4) $\text{Tor}_n^R(\overline{R}, \overline{R}) = 0$

(5) $\text{Tor}_n^R(S, S') = 0$ *para todos R-módulos simples S e S'*

Munidos do resultado acima, calcularemos a dimensão global de algumas álgebras de dimensão finita construídas através de álgebra de caminhos.

Exemplo 1.2.17. Sendo Q uma aljava (definição 3.4.1) e k um corpo, denote por R_Q o ideal de kQ gerado pelas flechas. Abaixo, analisaremos a dimensão de algumas álgebras "truncadas". Para tanto, basta calcularmos as dimensões projetivas dos módulos simples $S(i)$, que estão em bijeção com os vértices de Q. Denotamos por $P(i)$ o módulo projetivo dado pelos caminhos de kQ que começam no vértice i. A notação A_n é utilizada para a aljava abaixo:

$$A_n \,:\, 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow \cdots \longleftarrow n$$

1. Sendo $n \geqslant 3$ e $I = R_{A_n}^{n-1}$, temos que $\text{gl.dim}(kA_n/I) = 2$. De fato, todo módulo simples $S(i)$ tem dimensão projetiva $\leqslant 2$ pela seguinte resolução projetiva:

   $$0 \to P(1) \to P(i-1) \to P(i) \to S(i) \to 0,$$

   onde $i \geqslant 3$. Repare que $P(1) = S(1)$ e que $\text{pd}(S(2)) = 1$. Pode-se mostrar ainda que tais resoluções são minimais e, portanto, $\text{pd}(S(i)) = 2$ para todo $i \geqslant 3$.

2. Sendo $n \geqslant 2$ e $I = R_{A_n}^2$, temos que $\text{gl.dim}(kA_n/I) = n-1$. Nesse caso, para cada $i \geqslant 1$, temos a seguinte resolução projetiva minimal:

   $$0 \to P(1) \to P(2) \to \cdots \to P(i-1) \to P(i) \to S(i) \to 0$$

   Assim, $\text{pd}(S(i)) = i - 1$ para todo i e $\text{gl.dim}(kA_n/I) = \text{pd}(S(n)) = n - 1$.

3. Sendo Q a aljava abaixo, vale que $\text{gl.dim}(kQ/R_Q^2) = \infty$.

   $$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "b"] & \\ 1 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[ll, "c"] \end{tikzcd}$$

   Para encontrar uma resolução projetiva de $S(i)$, somos forçados a obter uma resolução de comprimento infinito. De fato, a seguinte resolução é minimal:

$$\cdots \to P(1) \to P(3) \to\to P(2) \to P(1) \to S(1) \to 0$$

Pode-se notar nesses exemplos que a dimensão global é infinita precisamente quando a aljava possui um ciclo orientado. Como mostraremos à frente em 3.4.16, isso é um fato relativamente geral.

1.3 (Co)Homologia de Hochschild

Agora, apresentaremos o segundo (e mais complicado) invariante homológico envolvido no enunciado da conjectura de Han: a homologia de Hochschild. Apresentaremos a sua definição tanto em termos de complexos de (co)cadeias como em termos dos funtores Ext e Tor. Em seguida, além de mostrar suas propriedades básicas, veremos como esses grupos de (co)homologia se comportam para alguns exemplos mais simples.

As referências básicas para esta seção são as seguintes: uma introdução palatável da teoria é dada em [Kas06]; os textos clássicos são [Hoc45] e [CE56, Chapter IX]; textos mais recentes e com maior nível de detalhes são [Wei94, Chapter 9], [Lod98] e [Wit19].

Notações: Nesta seção, a menos que se diga o contrário, utilizaremos as seguintes notações:

- M é um A-bimódulo (onde A é uma k-álgebra sobre um anel comutativo k).
- $A^{\otimes 0} = k$ e $A^{\otimes q} = \underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{q \text{ vezes}}$.
- A^{op} é a álgebra oposta, i.e. A com multiplicação invertida.
- A^e é a álgebra envelopante $A \otimes A^{op}$.

Definição 1.3.1. [Hoc45] A *cohomologia de Hochschild* de uma k-álgebra A em relação ao A-bimódulo M, denotada por $HH^n(A, M)$, é a cohomologia do complexo de cocadeias (de k-módulos) abaixo

$$0 \to \operatorname{Hom}_k(A^{\otimes 0}, M) \xrightarrow{\delta_0} \ldots \to \operatorname{Hom}_k(A^{\otimes n}, M) \xrightarrow{\delta_n} \operatorname{Hom}_k(A^{\otimes n+1}, M) \to \ldots \quad ,$$

onde a operador diferencial δ_n é definido por

$$\delta_n(f)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) = a_1 f(a_2 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) +$$
$$+ (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) a_{n+1}$$

Ou seja, $HH^n(A, M) = \ker(\delta_q)/\operatorname{Im}(\delta_{q-1})$ para $n \geqslant 0$. Quando $M = A$, usaremos simplesmente a notação $HH^n(A)$.

Para tentarmos criar uma intuição do tipo de informação que podemos obter através dessa cohomologia, computaremos os casos $n = 0, 1$.

Quando $n = 0$, temos que $HH^0(A, M) = \ker(\delta_0)$, onde $\delta_0 : \operatorname{Hom}_k(k, M) \to \operatorname{Hom}_k(A, M)$ satisfaz $\delta_0(f)(a) = af(1) - f(1)a$. Usando o isomorfismo de k-módulos $\operatorname{Hom}_k(k, M) \cong M$, dado pela função $f \mapsto f(1)$, obtemos que:

$$HH^0(A, M) = \{f \in \operatorname{Hom}_k(k, M) : \ af(1) = f(1)a, a \in A\} \cong \{m \in M : \ am = ma, a \in A\}.$$

Para o grau $n = 1$, temos que $\delta_1 : \operatorname{Hom}_k(A, M) \to \operatorname{Hom}_k(A \otimes A, M)$ é definida por

$$\delta_1(f)(a_1 \otimes a_2) = a_1 f(a_2) - f(a_1 a_2) + f(a_1)a_2.$$

Os elementos do $\ker(\delta_1)$ (os 1-cociclos) são as chamadas de *derivações*, pois satisfazem:

$$f(a_1 a_2) = a_1 f(a_2) + f(a_1)a_2.$$

Os elementos da imagem de δ_0 (os 1-cobordos) são chamados de *derivações internas*, isto é, eles são da forma

$$f = (-) \cdot m - m \cdot (-) \text{ p/ algum } m \in M$$

Resumimos esses dois casos através do seguinte:

Proposição 1.3.2. *Usando as notações $M^A = \{m \in M : \ am = ma\}$ para os elementos de M simétricos pela ação de A,* $\operatorname{Der}(A, M)$ *para o conjunto das derivações em* $\operatorname{Hom}_k(A, M)$ *e* $\operatorname{Inn}(A, M)$ *para as derivações internas, vale que:*

$$HH^0(A, M) \cong M^A \qquad HH^1(A, M) = \frac{\operatorname{Der}(A, M)}{\operatorname{Inn}(A, M)}$$

Em particular, para $M = A$, temos que $HH^0(A) \cong Z(A)$ é o centro de A;

O leitor familiarizado com cohomologia de grupos ou de álgebras de Lie pode ter notado que o resultado acima também aparece de forma similar nesses dois ambientes. Outro fato com a mesma natureza é que a cohomologia de grau $n = 2$ classifica certas extensões de álgebras. Abaixo, tornamos essa afirmação mais precisa.

Definição 1.3.3. Uma *extensão de quadrado nulo de A por M* é uma k-álgebra E munida de um epimorfismo de anéis $E \xrightarrow{\epsilon} A$ tal que $\ker(\epsilon)^2 = 0$ e vale o isomorfismo de A-módulos $\ker(\epsilon) \cong M$.

Proposição 1.3.4. *Existe uma bijeção entre os elementos de $HH^2(A, M)$ e as (classes de equivalência de) extensões de quadrado nulo de A por M que cindem sobre k.*

Agora, vejamos como produzir tal cohomologia através do funtor Ext. Primeiramente, notemos que um A-bimódulo é o mesmo que um $(A \otimes A^{op})$-módulo à esquerda ou à direita através das identificações

$$(a \otimes a') \cdot m = ama' = m \cdot (a' \otimes a), \ \ a, a' \in A, m \in M \tag{1.3.5}$$

Por exemplo, podemos ver o A-bimódulo $C'_n(A) := A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$ como um $(A \otimes A^{op})$-módulo à esquerda através da ação:

$$(a \otimes a') \cdot (a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) = aa_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}a'$$

Lema 1.3.6. *Se A é k-projetivo (resp. k-plano), então $C'_n(A) = A^{\otimes n+2}$ é um $(A \otimes A^{op})$-módulo projetivo (resp. plano) para todo $n \geqslant 0$.*

Demonstração. Primeiramente, para $n = 0$, o resultado é válido, pois $C'_0(A) = A \otimes A$ é isomorfo a $A \otimes A^{op}$ como $(A \otimes A^{op})$-módulos. Agora, se A é k-projetivo, então $A \oplus V = k^I$ para algum cardinal I e algum k-módulo complementar V. Assim, temos os isomorfismos de $(A \otimes A^{op})$-módulos:

$$(A \otimes A^{op})^I \cong A \otimes k^I \otimes A \cong (A \otimes A \otimes A) \oplus (A \otimes V \otimes A)$$

Com isso, $C'_1(A)$ também é $(A \otimes A^{op})$-projetivo. Podemos repetir o mesmo processo para $C'_n(A)$ após notar que $A^{\otimes n}$ é k-projetivo para todo n. Isso segue do fato de que $\mathrm{Hom}_k(P \otimes Q, -)$ é funtor exato para todos k-módulos projetivos P e Q, o que vale pela adjunção Tensor-Hom

$$\mathrm{Hom}_k(P, \mathrm{Hom}(Q, -)) \cong \mathrm{Hom}_k(P \otimes Q, -).$$

Para concluir que $C'_q(A)$ é k-plano, notemos o isomorfismo dos funtores abaixo

$$\begin{aligned} - \otimes_{A \otimes A^{op}} A \otimes (A^{\otimes n} \otimes A) &\cong - \otimes_k A^{\otimes n} \\ - \otimes_{A \otimes A^{op}} a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} &\mapsto (- \cdot (a_0 \otimes a_{n+1})) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \end{aligned}$$

Logo, se $- \otimes_k A$ é um funtor exato, então $- \otimes_{A \otimes A^{op}} C'_n(A)$ também é. □

A importância de $C'_q(A)$ é que ela nos fornecerá uma resolução projetiva de A. Para tanto, definamos, para $0 \leqslant i \leqslant n$, o morfismo de A-bimódulos:

$$\begin{aligned} d_i : C'_n(A) &\to C'_{n-1}(A) \\ a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1} &\mapsto a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1} \end{aligned}$$

Lema 1.3.7. *Denotando $b'_n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$, temos que a sequência abaixo é exata:*

$$\ldots \xrightarrow{b'_{n+1}} C'_n(A) \xrightarrow{b'_n} \ldots \xrightarrow{b'_2} C'_1(A) \xrightarrow{b'_1} C'_0(A) = A \otimes A \xrightarrow{\mu} A \to 0,$$

onde μ é o mapa de multiplicação $a \otimes a' \mapsto aa'$.

Esboço da demonstração. Utilize as igualdades $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ com $i < j$ para concluir que os morfismos formam um complexo.

Defina o mapa de A-módulos $s : C'_n(A) \to C'_{n+1}(A)$ por $a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \mapsto 1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$ e note as igualdades $d_0 s = \mathrm{id}$ e $d_i s = s d_{i-1}$ para $i > 0$. Conclua que s é uma homotopia entre a identidade e o mapa nulo, ou seja, vale que $b's + sb' = \mathrm{id}$. □

Usando a notação $C^q(A, M) = \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes q}, M)$, temos o isomorfismo (de k-módulos):

$$\begin{aligned} \psi : C^q(A, M) &\to \mathrm{Hom}_{A \otimes A^{op}}(C'_q(A), M) \\ \psi(f)(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{q+1}) &= a_0 f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_q) a_{q+1} \end{aligned}$$

Através desse isomorfismo, podemos transportar o diferencial δ_k para formar um novo complexo de cocadeias (isomorfo):

$$\delta'_q := \psi\delta_q\psi^{-1} : \operatorname{Hom}_{A\otimes A^{op}}(C'_q(A), M) \to \operatorname{Hom}_{A\otimes A^{op}}(C'_{q+1}(A), M)$$

Lema 1.3.8. *O diferencial δ'_q acima satisfaz que $\delta'_q(f) = f \circ b'_{q+1}$ para todo f. Em outras palavras, temos $\delta' = \operatorname{Hom}_k(b', M)$.*

Demonstração. Basta realizar as contas:

$$\delta'_q(f)(a_0 \otimes ... \otimes a_{q+2}) = a_0(\delta_q\psi^{-1}f)(a_1 \otimes ... \otimes a_{q+1})a_{q+2},$$

onde:

$$\begin{aligned}(\delta_q\psi^{-1}f)(a_1 \otimes ... \otimes a_{q+1}) = a_1 f(1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_{q+1} \otimes 1) + \\ \sum_{i=1}^{q}(-1)^i f(1 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_i a_{i+1} \otimes ... \otimes a_{q+1} \otimes 1) \\ + (-1)^{q+1} f(1 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_q \otimes 1)a_{q+1}\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}\delta'_q(f)(a_0 \otimes ... \otimes a_{q+2}) = f(a_0a_1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_{q+1} \otimes a_{q+2}) + \\ \sum_{i=1}^{q}(-1)^i f(a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_i a_{i+1} \otimes ... \otimes a_{q+1} \otimes a_{q+2}) \\ + (-1)^{q+1} f(a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_q \otimes a_{q+1}a_{q+2})\end{aligned}$$

□

Proposição 1.3.9. [CE56, IX : §6] *Se A é k-projetivo, então $HH^n(A, M) \cong \operatorname{Ext}^n_{A\otimes A^{op}}(A, M)$ para todo A-bimódulo M.*

Demonstração. Usando os três lemas acima, concluímos que o complexo de cocadeias $(\operatorname{Hom}_{A\otimes A^{op}}(C'_*(A), M), \delta')$:

- é isomorfo ao complexo da cohomologia de Hochschild definido em 1.3.1
- é dado aplicando o funtor $\operatorname{Hom}_{A\otimes A^{op}}(-, M)$ à resolução $(A\otimes A^{op})$-projetiva $(C'_*(A), b')$ de A.

Assim, pelo primeiro item, a homologia desse complexo é isomorfa a $HH^n(A, M)$ e, pelo segundo, é isomorfa a $\operatorname{Ext}^n_{A\otimes A^{op}}(A, M)$. □

De forma dual, podemos definir os grupos de homologia através do Tor.

Definição 1.3.10. [CE56, p. 169] Assuma que A é uma k-álgebra k-plana. A *homologia de Hochschild* de A em relação a um A-bimódulo M é dada por

$$HH_n(A, M) = \operatorname{Tor}_n^{A\otimes A^{op}}(M, A) \cong \operatorname{Tor}_n^{A\otimes A^{op}}(A, M), \ n \geqslant 0$$

Na definição acima, é equivalente, de fato, considerar M à esquerda ou à direita no Tor, pois as identificações na equação 1.3.5 nos garantem que temos um isomorfismo natural $M \otimes_{A\otimes A^{op}} N \cong N \otimes_{A\otimes A^{op}} M$ para todos A-bimódulos M e N.

De modo inverso ao feito para a cohomologia, pode-se utilizar a resolução k-plana $(C'_*(A), b')$ de A para obter um complexo-padrão para a homologia de Hochschild. A parte crucial é notar o isomorfismo de k-módulos:

$$\begin{aligned} M \otimes_{A\otimes A^{op}} (A \otimes A^{\otimes n} \otimes A) &\cong M \otimes A^{\otimes n} \\ m \otimes_{A\otimes A^{op}} a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} &\mapsto (m \cdot (a_0 \otimes a_{n+1})) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \end{aligned}$$

Proposição 1.3.11. *A homologia de Hochschild é dada pelo complexo de cadeias (de k-módulos)*

$$0 \xleftarrow{b_0} M \xleftarrow{b_1} \dots \xleftarrow{b_n} M \otimes A^{\otimes n} \xleftarrow{b_{n+1}} M \otimes A^{\otimes n+1} \leftarrow \dots \quad ,$$

onde mapa de bordo b_n é dado por

$$\begin{aligned} b_n(m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = ma_1 \otimes \dots \otimes a_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n + \\ + (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

Esse complexo é denotado por $(C_*(A, M), b)$ e é chamado de complexo-padrão de Hochschild.

Equivalentemente, ao considerar M como $(A \otimes A^{op})$-módulo à esquerda, obtemos o seguinte complexo alternativo para o cálculo da homologia de Hochschild:

$$0 \xleftarrow{b_0} M \xleftarrow{b_1} \dots \xleftarrow{b_n} A^{\otimes n} \otimes M \xleftarrow{b_{n+1}} A^{\otimes n+1} \otimes M \leftarrow \dots \quad ,$$

onde o mapa de bordo b_n é dado por

$$\begin{aligned} b_n(a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes m) = a_2 \otimes \dots \otimes ma_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_1 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n \otimes m + \\ + (-1)^n a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1} \otimes a_n m \end{aligned}$$

Observação 1.3.12. Dentro da teoria de operades, que estuda objetos capazes de codificar diversas estruturas algébricas, pode-se ver que a homologia do operade *Ass*, que codifica as álgebras associativas, coincide com a homologia de Hochschild, veja [LV12, Prop. 9.1.6].

Proposição 1.3.13. *Usando a notação $[M, A]$ para o k-submódulo de M gerado pelos elementos da forma $ma - am$, onde $a \in A$ e $m \in M$, vale que $HH_0(A, M) \cong M/[A, M]$.*

Demonstração. Temos que $HH_0(A, M) = M/\mathrm{Im}(b_1)$, sendo que $b_1 : M \otimes A \to M$ satisfaz $b_1(m \otimes a) = ma - am$. □

Como pode ser notado acima, necessitamos da hipótese de A ser k-plano (resp. k-projetivo) para que as definições da (co)homologia através dos complexos explícitos coincidam com a dada pelos funtores Ext e Tor. Caso o interesse seja trabalhar sobre um corpo k, tal exigência é inofensiva. Para o caso geral, essa hipótese pode ser eliminada ao utilizar os funtores Tor e Ext relativos, veja [Wei94, Lemma 9.1.3] e [Hoc56].

Proposição 1.3.14. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $HH_n(-) : \mathrm{Alg}_k \to k$-Mod é um funtor da categoria de k-álgebras para a categoria de k-módulos.*

Demonstração. Isso pode ser provado através do complexo-padrão da homologia $(C_*(A), b)$. Se $g : A \to B$ é um morfismo de k-álgebras, então podemos definir o mapa

$$\begin{aligned} g^{\otimes} : A^{\otimes n+1} &\to B^{\otimes n+1} \\ a_0 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto g(a_0) \otimes \cdots \otimes g(a_n) \end{aligned}$$

Uma conta direta mostra que $g^{\otimes}$ é um morfismo entre os complexos $(C_*(A), b)$ e $(C_*(B), b)$, isto é, que comuta com os mapas de bordo b. Com isso, temos uma função induzida entre os grupos de homologias. $\square$

A propriedade acima não é válida para os grupos de cohomologia. Isso ocorre, pois não temos uma forma natural de definir um morfismo entre $\mathrm{Hom}_k(A, A)$ e $\mathrm{Hom}_k(B, B)$ a partir de um morfismo entre as k-álgebras A e B. Por exemplo, em grau 0, temos que o centro $Z(-) \cong HH^0(-)$ não é um funtor. De fato, tomando as álgebras

$$A = \frac{k[x]}{(x^2)} \qquad B = \frac{k\langle x, y\rangle}{(x^2, y^2, xy + yx)}$$

sobre um corpo k, podemos definir funções $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} A$ de modo que $\pi i = \mathrm{id}_A$. No entanto, visto que $Z(A) = A$ e $Z(B) = k$ (quando $\mathrm{char}(k) \neq 2$), concluímos que $Z(-)$ não pode satisfazer $Z(\pi)Z(i) = \mathrm{id}_{Z(A)}$. Isso mostra que não há um modo natural de definir $Z(f)$ para um morfismo de álgebras f; por exemplo, a imagem da restrição de $f : A \to B$ para $Z(A)$ não necessariamente está contida em $Z(B)$.

Exemplos 1.3.15. Agora, veremos como a homologia de Hochschild se comporta para alguns exemplos simples. Com exceção do primeiro item, todos eles são calculados usando a definição por meio do funtor Tor.

1. No caso trivial em que $A = k$, pode-se ver que o complexo-padrão $C_n(k, M)$ é isomorfo ao seguinte complexo

$$0 \leftarrow M \xleftarrow{0} M \xleftarrow{1} M \xleftarrow{0} M \xleftarrow{1} M \xleftarrow{0} \cdots$$

Logo, $HH_0(k, M) = k$ e $HH_n(k, M) = 0$ para todo $n > 0$. O mesmo comportamento é válido para a cohomologia.

2. (Álgebras de polinômios) Notando que $k[x] \otimes k[x] \cong k[x, y]$ e usando o isomorfismo $k[x] \cong k[x, y]/(x - y)$, temos que uma resolução de $A = k[x]$ através de $(A \otimes A^{op})$-módulos livres é:

$$0 \to k[x, y] \xrightarrow{\cdot(x-y)} k[x, y] \to k[x] \to 0$$

Aplicando $k[x] \otimes_{k[x,y]} -$, notamos que a homologia de Hochschild é dada pelo complexo:

$$0 \to k[x] \xrightarrow{0} k[x] \to 0$$

Logo, $HH_0(k[x]) = HH_1(k[x]) = k[x]$ e $HH_n(k[x]) = 0$ para $n \geqslant 2$.

3. (Álgebras simétricas, [Lod98, 3.2.2]) Sendo V um k-módulo plano, denote por $S(V)$ (também denotada por $\mathrm{Sym}(V)$) a álgebra simétrica sobre V. Isto é, a álgebra graduada dada pelo seguinte quociente da álgebra tensorial $S(V)_n = V^{\otimes n}/\sim$ com a relação de equivalência $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \sim v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$ para toda permutação $\sigma \in S_n$. No caso em que V é livre de dimensão n, então $S(V) \cong k[x_1, \cdots, x_n]$.

   Para todo $n \geqslant 0$, temos que $HH_n(S(V)) \cong S(V) \otimes \Lambda^n(V)$, onde $\Lambda^*(V)$ denota a álgebra exterior. No caso de $k[x_1, \cdots, x_n]$ sobre um corpo k, isso pode ser provado utilizando o item acima junto à propriedade do produto tensorial 1.3.16 abaixo.

4. (Álgebra tensorial, [Wei94, Prop. 9.1.6]) Sendo V um k-módulo, a álgebra tensorial $T(V)$ é definida como a álgebra graduada $T(V)_n = V^{\otimes n}$ de modo que a multiplicação é dada pela concatenação de produtos tensoriais. Ela satisfaz

$$HH_n(T(V)) \cong \begin{cases} \oplus_{n\geqslant 0} V^{\otimes n}/(1-\tau)V^{\otimes n}, & n = 0 \\ \oplus_{n\geqslant 1}\{v \in V^{\otimes n} \mid v = \tau(v)\}, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases},$$

   onde $\tau : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ é o operador cíclico $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto v_n \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1}$.

5. (Álgebras de polinômios truncadas, [Kas06, 5.9]) Se k é um corpo e $A = k[x]/(p)$ para algum polinômio p, então os grupos de homologia $HH_n(A)$ são dados pela homologia do seguinte complexo:

$$\ldots \xrightarrow{p'\cdot} A \xrightarrow{0} A \xrightarrow{p'\cdot} A \xrightarrow{0} A \to 0,$$

   onde $p'\cdot$ representa o mapa de multiplicação pela derivada (formal) p'. Também, temos que $HH_n(A) \cong HH^n(A)$, pois A é auto-injetiva simétrica, veja 1.3.19 e [Lam99, 3.15A, 16.55] .

   Em particular quando $p = x^m$, obtemos que, se $\mathrm{char}(k) \nmid m$, então

$$HH_n\left(\frac{k[x]}{(x^m)}\right) \cong \begin{cases} k[x]/(x^m), & n = 0 \\ k[x]/(x^{m-1}), & n > 0 \end{cases}.$$

   Se $\mathrm{char}(k) \mid m$, então $HH_n(k[x]/(x^m)) \cong k[x]/(x^m)$ para todo $n \geqslant 0$.

A seguir, faremos uma compilação das propriedades básicas da (co)homologia de Hochschild.

Proposição 1.3.16. *Sejam A e B duas k-álgebras e $n \geqslant 0$.*

1. *(Mudança do anel base) Dado um morfismo de anéis comutativos $k \to \ell$, a ℓ-álgebra $A_\ell = A \otimes \ell$ satisfaz $HH_n(A_\ell, M) \cong HH_n(A, M)$ para todo A_ℓ-bimódulo M.*

2. *(Produto direto) Para todo $(A \times B)$-bimódulo M, temos que*

$$HH_n(A \times B, M) \cong HH_n(A, AMA) \oplus HH_n(B, BMB),$$

onde usamos a notação $AMA = (1_A, 0) \cdot M \cdot (1_A, 0)$ e $BMB = (0, 1_B)M(0, 1_B)$.

3. *(Localização) Se S é um conjunto multiplicativo central em A, então: $HH_n(S^{-1}A) \cong S^{-1}HH_n(A)$*

4. *(Produto tensorial) Se k é semissimples, então*

$$HH_n(A \otimes B, M \otimes N) \cong \bigoplus_{i+j=n} HH_i(A, M) \otimes HH_j(B, N)$$

para todos A-bimódulo M e B-bimódulo N.

As duas primeiras propriedades também são válidas para os grupos de cohomologia $HH^n(A, M)$. A quarta propriedade também é válida com a seguinte hipótese adicional: k é um corpo e A ou B possui dimensão finita sobre k.

Demonstração. O primeiro item pode ser provado a partir dos complexos explícitos da (co)homologia de Hochschild aplicando os isomorfismos $M \otimes_\ell A_\ell^{\otimes_\ell n} \cong M \otimes_k A$ e $\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M) \cong \mathrm{Hom}_\ell(A_\ell^{\otimes_\ell n}, M)$.

Os três itens seguintes podem ser provados a partir de propriedades dos funtores Ext e Tor. Provaremos apenas o quarto item, enquanto que os outros podem ser conferidos em [Wei94, Thm 9.1.8]. Para o segundo item, também vale notar que $M = AMA \oplus BMB$.

Usando o isomorfismo de álgebras $(A \otimes B)^e = A^e \otimes B^e$, o quarto item é consequência do corolário 1.1.10:

$$HH_n(A \otimes B, M \otimes M') \cong \mathrm{Tor}_n^{(A\otimes B)^e}(M \otimes M', A \otimes B) \cong \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Tor}_i^{A^e}(M, A) \otimes \mathrm{Tor}_j^{B^e}(M', B)$$

□

Proposição 1.3.17 (Morita-invariância)**.** *Sejam A e B duas k-álgebras k-planas. Se A e B são Morita-equivalentes, então $HH_n(A) \cong HH_n(B)$ e $HH^n(A) \cong HH^n(B)$.*

Ideia da demonstração. Através do teorema de Morita 1.1.24, temos um progerador P de *Mod-A* e Q um progerador de *Mod-B* que induzem o seguinte par de equivalências entre as categorias de bimódulos

$$F = P \otimes_A - \otimes_A Q : \ A\text{-}Bimod \to B\text{-}Bimod$$

$$G = Q \otimes_B - \otimes_B P : \ B\text{-}Bimod \to A\text{-}Bimod.$$

Usando que P e Q são projetivos tanto como A-módulos quanto como B-módulos (veja [Wei94, Lemma 9.5.4]), pode-se provar que esses funtores:

- são exatos: de fato, eles são composições de funtores exatos.

- levam bimódulo projetivo em projetivo: isso segue de [CE56, IX : Prop. 2.3]

Com isso, ao tomar uma resolução $(A \otimes A^{op})$-projetiva P_* de um A-bimódulo M, obtemos uma resolução $(B \otimes B^{op})$-projetiva $F(P_*)$ de $F(M)$. Assim, o resultado segue da interpretação da (co)homologia de Hochschild através de Tor e Ext.

$$HH_n(B, F(M)) = H_n(F(A) \otimes_{B \otimes B^{op}} F(P_*)) \cong FH_n(A \otimes_{A \otimes A^{op}} P_*) \cong HH_n(A, M)$$

Podemos usar argumentos análogos para obter o resultado para a cohomologia, veja [Ben91b, Thm 2.11.1]. Uma demonstração feita a partir do complexo-padrão de Hochschild pode ser conferida em [Wei94, Thm 9.5.6]. □

Repare que, ao focarmos somente na cohomologia de grau zero $HH^0(A) = Z(A)$, obtemos uma consequência interessante — que também pode ser provada diretamente através do teorema de Morita: duas álgebras Morita-equivalentes possuem centros isomorfos. Logo, Morita-equivalência é o mesmo que isomorfismo para álgebras comutativas.

Observação 1.3.18. Vale ressaltar que uma generalização da Morita-invariância foi provada por D. Happel no contexto de álgebras de dimensão finita [Hap89, §4.2] — explicitamente as cohomologias de A e B coincidem quando A é "inclinável" (em inglês, *tiltable*) até B. Isso foi mostrado num cenário mais geral (que inclui qualquer k-álgebra k-plana) por J. Rickard [Ric91, Prop. 2.5] após fornecer uma profunda caracterização da propriedade inclinante para anéis em geral [Ric91, Thm 1.1]. Em mais detalhes, ele provou que B é inclinável até A se, e somente se, suas categorias derivadas são equivalentes. De modo similar, é possível provar que a homologia de Hochschild também é invariante por equivalências derivadas, cf. [Kel96, Thm 2.2].

Proposição 1.3.19. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k. Se A é auto-injetiva simétrica*[2]*, então $HH_n(A) \cong HH^n(A)$.*

Demonstração. Uma álgebra simétrica A é caracterizada pela propriedade $A \cong \mathrm{Hom}_k(A, k)$ como A-bimódulos. Assim:

$$HH^n(A) = \mathrm{Ext}^n_{A \otimes A^{op}}(A, A) \cong \mathrm{Ext}^n_{A \otimes A^{op}}(A, \mathrm{Hom}_k(A, k))$$

Usando [Ben91a, Prop. 2.8.5] e que k é k-injetivo, deduzimos que

$$HH^n(A) \cong \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Tor}^n_{A \otimes A^{op}}(A, A), k) = \mathrm{Hom}_k(HH_n(A), k).$$

Com isso, cada grupo de cohomologia é o dual do grupo de homologia. Logo, eles são isomorfos quando A é de dimensão finita. □

Observação 1.3.20. Não conhecemos nenhum contraexemplo para a recíproca da proposição acima.

---

[2] Tal conceito não deve ser confundido com a álgebra simétrica $\mathrm{Sym}(V)$ dada por um espaço vetorial V, que é isomorfa a $k[x_1, \dots, x_n]$ se $\dim_k(V) = n$. Mesmo assim, a proposição é não-intencionalmente também válida para essas álgebras.

Antes de finalizarmos este capítulo introdutório, apenas apresentaremos um objeto importante para o estudo da homologia de Hochschild de álgebras comutativas.

Sendo A uma k-álgebra comutativa, o A-módulo de diferenciais de Kähler é denotado por Ω^1_A e possui a seguinte apresentação: para cada elemento $a \in A$, temos um gerador da que está submetido às seguintes relações: $d\lambda = 0$ para todo $\lambda \in k$ e

$$d(a + a') = d(a) + d(a') \quad d(aa') = ad(a') + d(a)a'.$$

Sendo $\mu : A \otimes A$ a função de multiplicação $a \otimes a' \mapsto aa'$, pode-se provar que $\ker(\mu)$ é gerado como A-módulo pelos elementos da forma $1 \otimes a - a \otimes 1$. Através dele, pode-se obter os seguintes isomorfismos de A-módulos, cf. [Wei94, 9.2.4]:

$$HH_1(A) \cong \Omega^1_A \cong \frac{ker \mu}{(\ker \mu)^2},$$

onde o segundo isomorfismo é dado por $da \mapsto (1 \otimes a - a \otimes 1)$.

Capítulo 2

Anéis com caracterizações homológicas

Uma das principais qualidades da Álgebra Homológica está em fornecer uma nova visão de alguns objetos de estudo da Matemática. Aqui, buscamos apresentar alguns anéis que podem ser caracterizados a partir de conceitos homológicos, seja em termos de características da sua categoria de módulos ou utilizando grupos de (co)homologia como os de Hochschild.

Neste capítulo, apresentaremos apenas três tipos de anéis, que serão utilizados no capítulo seguinte, enquanto que muitos outros exemplos poderão ser conferidos no apêndice. Na primeira seção, veremos o caso das álgebras separáveis, que estarão bastante presentes nas hipóteses dos teoremas que circundam a conjectura de Han. Nas duas seções seguintes, apresentaremos dois exemplos de álgebras comutativas, que são essenciais para um bom entendimento da demonstração da conjectura de Han nesse caso.

2.1 Álgebras Separáveis

Suposição: Nesta seção, k sempre será um corpo.

Antes de introduzirmos o conceito de álgebras separáveis, lembremos que um polinômio irredutível $f(x) \in k[x]$ é separável se todas as suas raízes tem multiplicidade 1 em k^{alg} ou, equivalentemente, se sua derivada é diferente do polinômio nulo. Assim, dizemos que uma extensão algébrica de corpos $\ell \supseteq k$ é *separável* se o polinômio minimal de cada elemento de ℓ for separável.

Proposição 2.1.1. *Sobre uma extensão de corpos finita $K \supseteq k$, são equivalentes:*

(1) $K \supseteq k$ é uma extensão separável

(2) O anel $K \otimes \ell$ é reduzido — i.e. 0 é seu único elemento nilpotente — para toda extensão (finita) $\ell \supseteq k$.

(3) O anel $K \otimes \ell$ é semissimples para toda extensão (finita) $\ell \supseteq k$.

Demonstração. Começamos pela implicação (1) $\implies$ (2). Pelo teorema do elemento primitivo, se K é extensão separável finita de k, então $K = k[x]/(f)$ para algum polinômio separável f. Além disso, temos que $K \otimes \ell = \ell[x]/(f)$ sendo que podemos escrever f em $\ell[x]$ como produto $f = f_1 \dots f_r$ de fatores f_i's irredutíveis e não divisíveis entre si. Assim, se $p \in \ell[x]$ satisfaz $p^n \in (f)$ — ou seja, é nulo em $\ell[x]/(f)$ —, então $f_i \mid p$ para todo i e, portanto, $p \in (f)$. Para a recíproca, utilizemos a contrapositiva: sendo $\alpha \in K$ um elemento cujo polinômio minimal $m_\alpha(x) \in k[x]$ é inseparável, vejamos que $K \otimes \ell$ não é reduzido sendo ℓ o corpo de raízes de m_α. Com efeito, podemos escrever m_α em $\ell[x]$ da forma $m_\alpha(x) = (x-\beta)^2 q(x)$ para algum $\beta \in \ell$ e temos, também, que $K \otimes \ell$ contém $k(\alpha) \otimes \ell \cong \ell[x]/(m_\alpha)$. Logo, $(x-\beta)q(x)$ nos fornece um elemento não-nulo e nilpotente em $K \otimes \ell$.

A equivalência (2) $\iff$ (3) segue do fato de que, para álgebras de dimensão finita, o radical de Jacobson $J(A)$ é nilpotente [Lam01, 4.12] e vale que A é semissimples se, e somente se, $J(A) = 0$. □

Motivados pela resultado acima, temos que uma possível generalização do conceito de separabilidade para álgebras (de dimensão finita) em geral é a seguinte:

Definição 2.1.2. Uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k é dita *separável* se $A \otimes \ell$ é semissimples para toda extensão de corpos $\ell \supseteq k$.

Também, existem outras possíveis razões para considerar tal conceito. Por exemplo, a referência mais antiga que encontramos introduzindo tal conceito é a de Albert [Alb39, p. 44], o que é feito dentro do contexto do teorema da cisão de Wedderburn — com efeito, separabilidade fornece a hipótese perfeita para tal teorema. Ainda assim, o problema da preservação da semissimplicidade de uma álgebra após a extensão do corpo base também era tratado durante a época, veja [Wae50, §121]. Hoje em dia, podemos encontrar outras utilidades para a noção de álgebras separáveis, em especial quando generalizadas para o caso em que k é apenas um anel comutativo. Para uma apresentação extensiva da teoria de tais álgebras, recomendamos o livro [For17].

Agora, vejamos como tal conceito poder ser caracterizado por meio de propriedades homológicas.

Lema 2.1.3. [CE56, IX: 7.1, 7.3] *Dadas duas k-álgebras A e B sobre um corpo k, vale que:*

a) $\mathrm{pd}_{(A\times B)^e}(A \times B) = \max\{\mathrm{pd}_{A^e}(A), \mathrm{pd}_{B^e}(B)\}$

b) $\mathrm{pd}_{(A\otimes\ell)^e}(A \otimes \ell) = \mathrm{pd}_{A^e}(A)$ *para toda extensão de corpos* $\ell \supseteq k$.

Demonstração. O resultado segue das propriedades da homologia de Hochschild 1.3.16. O primeiro item segue do isomorfismo

$$HH^n(A \times B, M) \cong HH^n(A, {}_AM_A) \oplus HH^n(B, {}_BM_B) \ \ \forall M \in (A\times B)\text{-}\mathit{Bimod},$$

onde ${}_AM_A = (1_A, 0)\cdot M \cdot (1_A, 0)$ e ${}_BM_B = (0, 1_B)\cdot M\cdot(0, 1_B)$. Para o segundo item, o isomorfismo

$$HH_n(A_\ell, M) \cong HH_n(A, M) \ \ \forall M \in A_\ell\text{-}\mathit{Bimod}$$

implica que $\mathrm{pd}_{(A\otimes\ell)^e}(A\otimes\ell) \leqslant \mathrm{pd}_{A^e}(A)$. Para a desigualdade contrária, usemos que existe uma cisão de $k \hookrightarrow \ell$. Assim, para todo A-bimódulo M, podemos considerar o A_ℓ-bimódulo $M \otimes \ell$ de modo que a composição dos morfismos

$$HH^n(A, M) \to HH^n(A, M \otimes \ell) \to HH^n(A, M)$$

é igual à identidade. Assim, se o grupo de cohomologia $HH^n(A_\ell, M \otimes \ell) \cong HH^n(A, M \otimes \ell)$ for nulo, então $HH^n(A, M)$ também é nulo. ☐

Teorema 2.1.4. *As seguintes afirmações são equivalentes para dizer que uma álgebra A sobre um corpo k é separável:*

(1) A é projetivo como $(A \otimes A^{op})$-módulo.

(2) O epimorfismo $\mu : A \otimes A^{op} \to A$ $(a \otimes b \mapsto ab)$ cinde como morfismo em $(A \otimes A^{op})$-Mod.

(3) $HH^1(A, M) = 0$ para todo A-bimódulo M.

(4) $A \otimes A^{op}$ é semissimples.

(5) $A \otimes A^{op}$ é noetheriana e A é plano como $(A \otimes A^{op})$-módulo.

(6) A tem dimensão finita sobre k e $A \otimes \ell$ é semissimples para toda extensão $\ell \supseteq k$.

(7) A tem dimensão finita sobre k e $A \otimes k^{\mathrm{alg}}$ é semissimples.

Demonstração. A equivalência entre os três primeiros itens segue das diferentes caracterizações de módulo projetivo 1.1.11. A implicação (1) $\Longrightarrow$ (4) segue da desigualdade abaixo, que será provada mais adiante no contexto de álgebras pseudocompactas (corolário 4.3.14):

$$\text{gl.dim}(A \otimes \Gamma) \leqslant \mathrm{pd}_{A\otimes A^{op}}(A) \text{ para toda álgebra } \Gamma \text{ semissimples.}$$

De fato, de A ser $(A \otimes A^{op})$-projetivo, concluímos que A é semissimples ao tomar $\Gamma = k$ e, em sequência, deduzimos que $A \otimes A^{op}$ é semissimples ao tomar $\Gamma = A^{op}$.

A implicação (4) $\Longrightarrow$ (5) é clara, enquanto que (5) $\Longrightarrow$ (1) segue da proposição 1.2.10.

Para ver que, a propriedade (1) implica em A ter dimensão finita, consulte [Wei94, Lemma 9.2.12]. Com isso, a implicação (1) $\Longrightarrow$ (6) também segue da desigualdade acima ao tomar $\Gamma = \ell$. Visto que (6) $\Longrightarrow$ (7) é uma tautologia, só nos resta provar (7) $\Longrightarrow$ (1). Para tanto, podemos usar o teorema de Wedderburn-Artin para deduzir que $A \otimes k^{alg}$ é uma soma direta de álgebras de matrizes $M_{n_i}(k^{alg})$. Verificando que tais álgebras são projetivas como $M_{n_i}(k^{alg})$-bimódulos (veja [Wei94, Lemma 9.2.10]) e usando o lema acima, obtemos que

$$\mathrm{pd}_{A^e}(A) = \mathrm{pd}_{(A\otimes k^{alg})^e}(A \otimes k^{alg}) = \max_i \{\mathrm{pd}_{M_{n_i}(k^{alg})^e}(M_{n_i}(k^{alg}))\} = 0.$$ ☐

Histórico do teorema. Assumindo A de dimensão finita, a equivalência (3) $\Leftrightarrow$ (6) foi provada no artigo de 1945 de G. Hochschild's 1945 [Hoc45, Thm 4.1], mostrando como sua cohomologia poderia ser útil para entender propriedades de uma álgebra. Uma prova usando como ferramenta o funtor Ext foi dada por Cartan e Eilenberg [CE56, IX: Thm 7.9, 7.10], onde também é demonstrada a equivalência com o item (4). O fato de que a propriedade (1) implica em A possuir dimensão finita foi mostrado por Rosenberg e Zelinsky [RZ56].

O primeiro item passou a ser considerado a definição mais adequada de separabilidade quando k é um anel comutativo, veja [AG60]. Já a propriedade do item (5) foi analisada sem a hipótese de $A \otimes A^{op}$ ser noetheriana por Villamayor [Vil59], que provou ser equivalente a "localmente separável" em alguns casos.

Exemplo 2.1.5. 1. Se G é um grupo finito e k é um corpo cuja característica não divide a ordem de G, então $k[G]$ é separável sobre k. Isso segue da existência do idempotente

$$e = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \otimes g^{-1} \in k[G] \otimes k[G]^{op}$$

Tal elemento satisfaz $\mu(e) = 1$ e $(g \otimes 1)e = (1 \otimes g)e$ para todo $g \in G$. Com isso, podemos definir o mapa de $k[G]$-bimódulos $\sigma : k[G] \to k[G] \otimes k[G]^{op}$ determinado por $\sigma(1) = e$ e notar que ele é uma cisão de $\mu : k[G] \otimes k[G]^{op} \to k[G]$.

2. Sendo A uma k-álgebra de dimensão finita, dizemos que k é um *corpo de cisão* para A quando $A/J(A)$ é um produto de matrizes sobre k, veja [Lam01, 7.7]. Isso é válido, por exemplo, quando $A = kQ/I$ é um quociente admissível de uma álgebra de caminhos. Com isso, $A/J(A)$ é separável nesses casos.

Sabemos diretamente da definição que toda álgebra separável é semissimples. Assim, podemos nos perguntar quando que vale a recíproca. Como veremos a seguir, a resposta para isso está em considerar corpos perfeitos. Fundamentalmente por essa razão, alguns resultados do próximo capítulo não serão válidos sem a suposição de que k é perfeito.

Definição-proposição 2.1.6. Um corpo k é *perfeito* se satisfaz as seguintes condições equivalentes:

(1) Toda extensão algébrica (ou finita) de k é separável.

(2) Todo polinômio irredutível em $k[x]$ é separável.

(3) $\mathrm{char}(k) = 0$ ou a função $a \mapsto a^p$ é sobrejetora quando $\mathrm{char}(k) = p > 0$.

Demonstração. A equivalência entre os dois primeiros itens segue simplesmente do fato que todo polinômio irredutível é minimal para algum elemento algébrico sobre k. Agora, assumindo que $\mathrm{char}(k) = p > 0$, vejamos a partir da hipótese (2) que, para todo $a \in k$, existe $b \in k$ tal que $b^p = a$. Para tanto, note que o polinômio inseparável $f(x) = x^p - a$ não é irredutível em $k[x]$. Tomando uma raiz $\alpha \in k^{alg}$ de f, obtemos que $f(x) = (x - \alpha)^p$ e, portanto, $(x - \alpha)^n$ pertence a $k[x]$ para algum n tal que $1 \leqslant n \leqslant p - 1$. Isso nos garante que o coeficiente de x^{n-1}, dado por $n\alpha$, pertence a k e, como n é inversível em k, concluímos que $\alpha \in k$. Com isso, provamos (2) $\implies$ (3).

Para a recíproca, note que, em característica zero, os polinômios constantes são os únicos com derivada zero. Assim, basta tratar do caso em que $\mathrm{char}(k) = p > 0$. Suponha, por absurdo, que $k[x]$ possui um polinômio irredutível $f(x)$ tal que $f'(x) = 0$, então todo monômio ax^n de $f(x)$ com $p \nmid n$ é nulo, senão anx^{n-1} seria um termo não-nulo de $f'(x)$. Assim, $f(x) = g(x^p)$ para algum polinômio $g = a_n x^n + \ldots + a_0$, $a_i \in k$. Agora, a condição

(3) nos diz que podemos tomar $b_i \in k$ tais que $b_i^p = a_i$, de forma que podemos fatorar o polinômio irredutível $f(x) = (b_n x^n + \ldots + b_0)^p$, uma contradição. □

Desse modo, um corpo que seja finito, algebricamente fechado ou de característica zero sempre será perfeito. De fato, $ax + b$ $(a \neq 0)$ são os únicos polinômios irredutíveis quando $k = k^{alg}$ e a função injetora $a \mapsto a^p \in k$ é sobrejetora quando k é finito.

Proposição 2.1.7. *Um corpo k é perfeito se, e somente se, toda k-álgebra semissimples de dimensão finita é separável.*

Demonstração. Uma álgebra de dimensão finita A é semissimples se, e somente s, $J(A) = 0$. Além disso, $J(A \otimes \ell) = J(A) \otimes \ell$ para toda extensão algébrica separável $\ell \supseteq k$, cf. [Lam01, 5.17]. Assim, quando k é perfeito, vale que $J(A \otimes k^{\mathrm{alg}}) = 0$ para toda álgebra semissimples A. A recíproca segue imediatamente da definição 2.1.6: se k não é perfeito, então existe um corpo ℓ de dimensão finita sobre k que não é separável. □

Tendo em mente a definição de álgebra separável por meio do aniquilamento da homologia de Hochschild e que um corpo de característica zero é sempre perfeito, um teorema análogo ao acima vale para álgebras de Lie. Na realidade, tal resultado, provado na década de 1930, foi uma das motivações para G. Hochschild desenvolver sua teoria, veja [Hoc42].

Para enunciá-lo, notemos apenas que a cohomologia de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ pode ser definida através da seguinte forma

$$H^n(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Ext}^n_{U\mathfrak{g}}(k, M),$$

onde M é $\mathfrak{g}$-módulo e $U\mathfrak{g}$ é a álgebra envolvente universal (em inglês, *enveloping algebra*) de $\mathfrak{g}$.

Teorema 2.1.8 (Primeiro lema de Whitehead, [Whi37])**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica zero:*

$$\mathfrak{g} \text{ é semissimples} \iff H^1(\mathfrak{g}, M) = 0 \;\; \forall M \in \mathfrak{g}\text{-mod com } \dim_k(M) < \infty$$

Demonstração. A implicação $\implies$ pode ser conferida em[Wei94, Cor. 7.8.10]. Para a recíproca, usaremos que $\mathfrak{g}$ é semissimples se, e somente se, $\mathfrak{g}$ não possui ideais abelianos não-nulos. Assim, assuma que $\mathfrak{h}$ é um ideal não-nulo de $\mathfrak{g}$. Usando a hipótese, temos que

$$\mathrm{Ext}^1_{U\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \cong H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})) = 0,$$

cf. [Wei94, Ex. 7.3.5]. Pela interpretação de Ext^1 por meio de extensões, podemos concluir que $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Assim, $H^1(\mathfrak{h}, k)$ é somando direto de $H^1(\mathfrak{g}, k) = 0$, cf. [Wei94, Ex. 7.3.8]. Com isso, obtemos que

$$H^1(\mathfrak{h}, k) \cong \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{h}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], k) = 0,$$

cf. [Wei94, Cor. 7.4.8]. Logo, $\mathfrak{h} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ e, portanto, $\mathfrak{h}$ não pode ser abeliano. □

Vale ressaltar que tal resultado não é válido para nenhum corpo de característica positiva, cf. [Wei94, Ex. 7.8.2]. Outro resultado interessante é o segundo lema de Whitehead[1]: se $\mathrm{char}(k) = 0$ e $\mathfrak{g}$ é semissimples, então $H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$ para todo M. Tal resultado possibilitou uma nova prova para um importante teorema, publicado por E. E. Levi em 1905, que nos diz que toda álgebra de Lie pode ser decomposta por meio de seu radical e de uma subálgebra semissimples, veja [Whi36]. A seguir, também utilizando o anulamento do segundo grau de homologia (de Hochschild), obteremos um resultado análogo para álgebras associativas.

Teorema 2.1.9 (Cisão de Wedderburn)**.** *Para toda álgebra de dimensão finita A tal que $A/J(A)$ é separável, temos o isomorfismo de álgebras $A \cong A/J(A) \oplus J(A)$.*

Ideia da demonstração. Como $A/J(A)$ é separável, temos que $HH^2(A/J(A), M) = 0$ para todo M. Isso significa, pela correspondência 1.3.4, que toda extensão $B \twoheadrightarrow A/J(A)$ cujo núcleo ao quadrado é zero cinde. Mais ainda, pode-se provar que tal extensão cinde sempre que o núcleo é nilpotente. Como $J(A)$ é nilpotente, concluímos que o epimorfismo de álgebras $A \to A/J(A)$ cinde. □

Histórico do teorema. Tal resultado foi provado por Wedderburn [Wed08, Thm 28] simplesmente com a hipótese de que $A/J(A)$ é uma álgebra de divisão — ou "primitiva" na sua nomenclatura. Como pode-se perceber, tal hipótese não está abrangida pelo nosso enunciado e, de fato, o teorema não é válido apenas com ela. Essa brecha em seu enunciado é justificada pela falta de conhecimento na época sobre o comportamento de corpos de característica positiva. Por exemplo, o conceito de extensão separável de corpos só viria a ser introduzido por E. Steinitz alguns anos depois.

Uma formulação mais precisa para o resultado, mas sem citar a separabilidade de $A/J(A)$, foi provada no livro de Dickson [Dic23, p.125] com a hipótese de que o corpo tem característica zero — ou, na terminologia da época, que o corpo não é modular. Tal autor também foi um dos primeiros a utilizar o jargão "teorema principal" para tal resultado, que é a nomenclatura mais encontrada na literatura. Outros, como G. Hochschild, utilizavam o termo "terceiro teorema de estrutura de Wedderburn", sendo que o "primeiro" e o "segundo" se referiam ao que chamamos hoje de teorema de Wedderburn-Artin. Um enunciado como o acima foi dado, por exemplo, em [Deu35, II§11].

G. Hochschild também forneceu uma prova desse resultado através de sua cohomologia [Hoc45, §6]. Para mais detalhes sobre o histórico dos teoremas de estrutura de Wedderburn, consulte [Par85].

Observação 2.1.10. A demonstração e o teorema acima continuam válidos se assumirmos simplesmente que A é artiniana em vez de possuir dimensão finita.

2.2 Anéis Regulares

Nesta seção, apresentaremos um dos principais exemplos de como as ferramentas homológicas acabaram sendo muito úteis dentro da Álgebra Comutativa.

[1] Vale ressaltar que uma recíproca desse resultado só foi provada recentemente [Zus08].

Notação: Nesta seção, todo anel é comutativo. Utilizaremos $(R, \mathfrak{m}, k)$ para denotar um anel local comutativo com único ideal maximal $\mathfrak{m}$ e corpo residual $k = R/\mathfrak{m}$.

Um importante conceito de dimensão de anéis comutativos é o de *dimensão de Krull.* Para um anel comutativo R, ela é definida como o supremo do tamanho das cadeias de ideais primos de R, sendo que a contagem do tamanho é iniciada a partir do zero, isto é, a cadeia

$$\mathfrak{p}_0 0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

possui tamanho n. Ela será denotada por $\dim_{Krull}(R)$.

Um fato relevante é que tal dimensão é a formulação algébrica do conceito geométrico de dimensão. Mais precisamente, se V é uma variedade algébrica afim, então a dimensão de Krull do anel de coordenadas $k[V]$ coincide com a dimensão de V, cf. [Hul03, Cor. 3.24]. Com isso, é natural de se concluir, por exemplo, que $\dim_{Krull}(k[x_1, \cdots, x_n]) = n$. Outra propriedade interessante é que, assumindo que R é noetheriano, vale que R é artiniano precisamente quando $\dim_{Krull}(R) = 0$, cf. [TB15, Teo. 7.3.2].

No que segue, buscaremos responder quando essa dimensão coincide com a dimensão global.

Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel comutativo local noetheriano. O *polinômio de Hilbert-Samuel* $P_\mathfrak{m}(R) \in \mathbb{Q}[x]$ é definido como aquele que satisfaz $P_\mathfrak{m}(R)(n) = \text{len}_R(A/\mathfrak{m}^n)$ para $n \gg 0$, onde a notação $\text{len}_R(M)$ indica o comprimento do R-módulo M. Um teorema sobre a dimensão de Krull nos diz que

$$\begin{aligned}\dim_{Krull}(R) = \deg(P_\mathfrak{m}(R)) &= \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\, r_1, \cdots, r_n \in \mathfrak{m} \text{ t.q. } \text{len}_R(R/(r_1, \cdots, r_n)) < \infty\} \\ &= \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\, r_1, \cdots, r_n \in \mathfrak{m} \text{ t.q. } \sqrt{(r_1, \cdots, r_n)} = \mathfrak{m}\}\end{aligned}$$

cf. [TB15, Teo. 14.3.2] e [Ser00, p. 34]. Uma consequência disso é a seguinte desigualdade

$$\dim_{Krull}(R) \leqslant \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) < \infty. \tag{2.2.1}$$

De fato, nota-se que o termo da direita é igual ao número mínimo de geradores de $\mathfrak{m}$.

Definição 2.2.2. Um anel comutativo local noetheriano $(R, \mathfrak{m}, k)$ é dito *regular* se $\dim_{Krull}(R) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

A motivação para a nomenclatura da definição acima é dada pelo seguinte resultado de Geometria Algébrica.

Proposição 2.2.3. *Seja V uma variedade algébrica afim irredutível e k um corpo. Um ponto $P \in V$ é regular se, e somente se, a localização do anel de coordenadas $k[V]$ em P é regular.*

Demonstração. [Hul03, Corollary 3.29] □

Exemplo 2.2.4. 1. Seja $A_\mathfrak{m}$ a localização de $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ (com k corpo) em relação ao ideal maximal $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$, $a_i \in k$. Vale que $A_\mathfrak{m}$ é regular, pois $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$ é gerado por, no mínimo, n elementos e $A_\mathfrak{m}$ possui uma cadeia de primos de tamanho n dada por $0 \subset (x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \cdots \subset (x_1, \cdots, x_n)$. Isso é ilustrado pelo fato de que o espaço afim $\mathbb{A}^n_k$ é regular em qualquer ponto.

2. O anel das séries de potências $k[[x_1, \cdots, x_n]]$ é local com ideal maximal $\mathfrak{m} = (x_1, \cdots, x_n)$. Pelos mesmos argumentos do item acima, tal anel é regular. Note, também, que ele é noetheriano por uma demonstração análoga ao teorema da Base de Hilbert, cf. [TB15, Teo. 6.2.1].

Do teorema das sizígias de Hilbert, já sabemos que todo anel de polinômios possui dimensão global finita. A seguir, apresentamos o notável resultado de que, na verdade tal propriedade homológica caracteriza os anéis regulares.

Teorema 2.2.5 (Serre-Auslander-Buchsbaum)**.** *Um anel noetheriano comutativo local* $(R, \mathfrak{m}, k)$ *é regular se, e somente se,* $\text{gl.dim}(R) < \infty$. *Nesse caso, vale que*

$$\dim_{Krull}(R) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \text{pd}_R(k) = \text{gl.dim}(R)$$

Demonstração. Veja [Wei94, pp. 110–111] ou [Ser00, pp. 76–77] □

Histórico do teorema. O seguinte relato de 2016 de David Buchsbaum descreve os papéis de algumas pessoas envolvidas para a obtenção desse decisivo teorema:

> “Em 1953-54 E. Artin me pediu para lhe descrever álgebra homológica. Além do Ext e do Tor, eu decidi lhe mostrar a ‘prova homológica’ do Teorema da Base de Hilbert e indiquei que a mesma demonstração mostrava que um anel local regular possui dimensão global finita. Artin então mencionou o problema em aberto da localização, e eu falei que se a recíproca do teorema que eu havia acabado de lhe mostrar fosse verdade, o resultado da localização seria trivial. Ele perguntou se eu conseguiria provar a recíproca, eu disse não, e nós dois concordamos que seria legal prová-la. A questão da fatoração em anéis regulares locais também surgiu naquela conversa, e então eu me propus o objetivo de provar aqueles dois teoremas. Persuadi Auslander a se juntar a mim naquele projeto. Quando Auslander e eu tínhamos quase todos os resultados, e um esboço do fio de desigualdades necessárias, Eilenberg pediu para vê-las, nós as escrevemos para ele e ele foi a Paris com elas. Foi lá que Serre viu o esboço do nosso projeto, e ele nos venceu com a prova final por volta de uma semana (ou o tempo que levou para uma carta aérea viajar de Paris a Princeton). [...] ” (D. Buchsbaum [htt], tradução nossa)

Como mencionado na fala acima, tal teorema nos fornece que toda localização de anéis regulares é regular. Veremos isso abaixo.

Lema 2.2.6. *Seja* $\phi : R \to S$ *um morfismo entre as álgebras comutativas* R *e* S *e tome* $M \in R$*-Mod. Se* S *é* R*-plano, então*

$$\text{pd}_S(S \otimes_R M) \leqslant \text{pd}_R(M) \qquad \text{fd}_S(S \otimes_R M) \leqslant \text{fd}_R(M)$$

Demonstração. Na demonstração da proposição 1.1.17, vimos que uma resolução R-projetiva P_* de um R-módulo M nos fornece a resolução S-projetiva $S \otimes_R P_*$ de $S \otimes_R M$. O mesmo vale para resoluções planas. □

Corolário 2.2.7. *Se R é um anel noetheriano comutativo local regular, então o anel de localização $S^{-1}R$ é regular para qualquer conjunto multiplicativo S.*

Demonstração. Todo $S^{-1}R$-módulo M é isomorfo a $S^{-1}M$ quando vemos M como R-módulo. Desse modo, podemos concluir, pelo lema acima, que $\operatorname{gl.dim}(S^{-1}R) \leqslant \operatorname{gl.dim}(R)$. □

Um resultado como esse, cujo enunciado não depende de conceitos de Álgebra Homológica, ilustra os grandes benefícios que as ferramentas da área podem proporcionar. Sem o uso delas, apenas conhecemos uma demonstração feita para alguns casos especiais por Nagata [Nag58, pp. 415–416]. Outro teorema com a mesma natureza é o seguinte.

Teorema 2.2.8 (Auslander-Buchsbaum)**.** *Se R é um anel noetheriano comutativo local regular, então R é um domínio de fatoração única.*

Comentários sobre a demonstração. O fato de R ser um domínio é um fato mais elementar e pode ser conferido em [Wei94, Prop. 4.4.5] ou [TB15, 14.5.6]. Para concluir que R é de fatoração única, Nagata [Nag58, Prop. 11] provou que basta mostrar tal resultado para anéis com dimensão de Krull 3. Isso foi cumprido por Auslander e Buchsbaum [AB59]. □

Tendo em vista que uma variedade algébrica é regular em todos os pontos se, e somente se, a localização em qualquer ponto é regular, podemos formular uma definição de regularidade para anéis não necessariamente locais. Antes disso, notemos que a localização em ideais maximais se comporta bem em relação a dimensões projetivas.

Lema 2.2.9. *Seja R um anel comutativo. Para todo R-módulo M, vale que*

$$\operatorname{fd}_R(M) = \sup_{\mathfrak{m}}\{\operatorname{fd}_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m})\},$$

onde $\mathfrak{m}$ percorre os ideais maximais de R.

Demonstração. Lembre que $M_\mathfrak{m} = (R \setminus \mathfrak{m})^{-1} \otimes_R M$ e que localização é um funtor exato. Usando o lema 2.2.6, basta provarmos que existe ideal maximal $\mathfrak{m}$ tal que $\operatorname{fd}_R(M) = \operatorname{fd}_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m})$. Para tanto, note que, para todo módulo $M \neq 0$, existe um ideal maximal m tal que $M_\mathfrak{m} \neq 0$. De fato, pode-se tomar um m que contenha o ideal anulador de M. Assim, o resultado segue da proposição 1.1.17 e da caracterização da dimensão plana por meio do Tor. □

O seguinte resultado é uma versão global do teorema de Serre-Auslander-Buchsbaum.

Teorema-definição 2.2.10. *Um anel noetheriano comutativo é dito regular se satisfaz as seguintes condições equivalentes:*

(1) $R_\mathfrak{p}$ *é regular local para todo* $\mathfrak{p}$ *ideal primo (ou maximal) de* R

(2) $\operatorname{pd}_R(\mathfrak{p}) < \infty$ *para todo* $\mathfrak{p}$ *ideal primo (ou maximal) de* R

(3) $\operatorname{pd}_R(M) < \infty$ *para todo* $M \in R$*-mod.*

Nesse caso, vale que

$$\dim_{Krull}(R) = \sup_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(R)} \{\mathrm{gl.dim}(R_{\mathfrak{m}})\} = \mathrm{gl.dim}(R) = \mathrm{findim}(R).$$[2]

Demonstração. A demonstração das equivalências pode ser conferida em [Lam99, 5.94]. Para provar as igualdades, note que a primeira delas segue da igualdade $\dim_{Krull}(R) = \sup_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(R)}\{\dim_{Krull}(R_{\mathfrak{m}})\}$ e do teorema de Serre-Auslander-Buchsbaum; a segunda igualdade segue do lema acima e de que a dimensão global projetiva coincide com a fraca quando o anel é noetheriano; a terceira segue do item (3) e do fato de a dimensão global apenas precisar ser calculada para módulos finitamente gerados. □

Diferentemente do caso local, não podemos concluir, em geral, que todo anel regular possui dimensão global finita (veja o exemplo 3.3.2). Mesmo assim, isso é válido em muitos casos, como verificaremos agora.

Proposição 2.2.11. *Para todo anel noetheriano comutativo R, vale que*

$$\mathrm{gl.dim}(R) < \infty \implies R \text{ é regular.}$$

A recíproca vale se assumirmos uma das seguintes hipóteses:

- *R é semilocal, i.e. R possui uma quantidade finita de ideais maximais;*
- *k é um anel noetheriano com $\dim_{Krull}(k) < \infty$ e R é uma k-álgebra essencialmente finitamente gerada[3] (e.f.g.), i.e. uma localização de uma álgebra finitamente gerada.*

Demonstração. A primeira afirmação segue diretamente da definição, pois $\mathrm{pd}_R(M)$ é menor ou igual a $\mathrm{gl.dim}(R)$ para todo $M \in R$-*Mod*.

Para provar a recíproca, usaremos que, quando R é regular, temos as igualdades

$$\dim_{Krull}(R) = \mathrm{gl.dim}(R) = \sup_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(R)} \{\mathrm{gl.dim}(R_{\mathfrak{m}})\}$$

Agora, no caso em que R é semilocal, o termo da direita é dado pelo supremo de uma quantidade finita e, portanto, é finito, pois $\mathrm{gl.dim}(R_{\mathfrak{m}}) < \infty$ para cada $\mathfrak{m}$ quando R é regular.

Para o segundo caso, basta provar que $\dim_{Krull}(R) < \infty$. A hipótese nos diz que podemos escrever

$$R = S^{-1}(k[x_1, \dots, x_n]/I)$$

para algum conjunto multiplicativo S e algum ideal I de $k[x_1, \dots, x_n]$. Assim, o resultado segue dos seguintes fatos válidos para qualquer anel comutativo R:

- $\dim_{Krull}(k[x_1, \dots, x_n]) = \dim_{Krull}(k) + n$, cf. [TB15, Cor. 14.4.2] ou [Ser00, p. 42];
- $\dim_{Krull}(R/I) \leqslant \dim_{Krull}(R)$ para qualquer ideal I de R, cf. [TB15, Lema 3.1.2];
- $\dim_{Krull}(S^{-1}(R)) \leqslant \dim_{Krull}(R)$ para qualquer localização $S^{-1}(R)$, cf. [TB15, Teo. 4.3.1].

---

[2] Esclarecemos que $\mathrm{findim}(R)$ é a *dimensão finitista pequena*, que é definida por $\mathrm{findim}(R) = \sup\{\mathrm{pd}_R(M) \mid M \in R\text{-}mod,\ \mathrm{pd}_R(M) < \infty\}$.

[3] Também chamada de álgebra essencialmente de tipo finito.

□

Pode-se notar que os conceitos de anel regular não fazem sentido no mundo não-noetheriano. Por exemplo, pode-se ver que nem a desigualdade 2.2.1 é válida se considerarmos o anel de polinômios com expoentes racionais $k[x, \mathbb{Q}]$ (k um corpo) e T sua localização pelo ideal maximal $\mathfrak{m} = \sum_n x^{1/n}R$. Os elementos de T podem ser escritos, de forma única, como $x^\alpha u$ com u invertível em T e $\alpha \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$. Com efeito, escreva um elemento $p \in k[x, \mathbb{Q}]$ como $p = \lambda_n x^{\alpha_n} + \cdots + \lambda_1 x^{\alpha_1} + \lambda_0$, onde $\alpha_{i+1} > \alpha_i$. Se $\lambda_0 \neq 0$, então p é invertível em T; caso contrário, sendo α_i o maior racional tal que $\lambda_i \neq 0$, obtemos que $p = x^{\alpha_i}(\lambda_n x^{\alpha_n - \alpha_i} + \cdots + \lambda_i)$.

Assim, T é um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ satisfazendo $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$. Além disso, pode-se ver que tal ideal é o único ideal primo de R. De fato: se $x^{p/q}$ é um elemento de um ideal primo $\mathfrak{p}$, então $x^{p/iq}$ também o é para todo $i \geqslant 1$. Assim, concluímos que

$$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 0 < 1 = \dim_{Krull}(T)$$

Além disso, como mostrado por Osofsky [Oso69], um teorema como o de Auslander-Buchsbaum 2.2.8 é contundentemente falso nessa generalidade.

Contraexemplo 2.2.12. [Oso73, Prop. 2.37] Sendo $(T, \mathfrak{m}, k)$ o anel local definido logo acima, podemos obter a partir dele o seguinte anel local com divisores de zero:

$$R = \{(a, b) \in T \times T \mid a - b \in \mathfrak{m}\}.$$

Vale que $\text{gl.dim}(R) = 3$ e $\text{w.gl.dim}(R) = 2$.

Ideia da demonstração. Primeiramente, R é um subanel do anel $T \times T$, com multiplicação coordenada-a-coordenada e unidade $(1, 1)$, pois:

$$(a, b), (a', b') \in R \implies aa' - bb' = aa' - ba' + ba' - bb' = (a - b)a' + b(a' - b') \in \mathfrak{m}$$

Para notar que R é local, basta provar que, se a soma $(a, b) + (a', b')$ é invertível em R, então alguns dos somandos (a, b) ou (a', b') é invertível, cf. [Lam01, 19.1]. Usando que tal propriedade é válida para o anel T e denotando os invertíveis de um anel R por $U(R)$, nota-se que:

$$(a + a', b + b') \in U(R) \implies (a \in U(T) \text{ ou } a' \in U(T)) \text{ e } (b \in U(T) \text{ ou } b' \in U(T))$$

Assim, sem perda de generalidade, podemos assumir que $a \in U(T)$, ou seja, podemos escrevê-lo (a menos de um denominador) em $k[x, \mathbb{Q}]$ como $a = \lambda_0 + \cdots + \lambda_n x^{\alpha_n}$ para algum $\lambda_0 \neq 0$. De $a - b \in \mathfrak{m}$, segue que $b = a + x^\alpha u'$ para algum $\alpha > 0$ e $u' \in U(T)$; assim, o termo independente de b é não-nulo e, portanto, b é invertível em T. Logo, (a, b) é invertível em R, como queríamos.

Por conta do teorema de Auslander 1.2.6, basta provar que $\text{pd}_R(I) \leqslant 2$ (resp. $\text{fd}(I) \leqslant 1$) para todo ideal I de R para concluir que $\text{gl.dim}(R) \leqslant 3$ (resp. $\text{w.gl.dim}(R) \leqslant 2$).

Podemos definir o grau de um elemento ux^α de T como sendo $\alpha \in \mathbb{Q}_{\leqslant 0}$. Assim, de forma razoavelmente similar ao caso de $k[x, \mathbb{Q}]$ (veja o item 5. dos contraexemplos 1.2.13), pode-se provar que todo ideal de R é uma soma direta de (no máximo) dois ideais da forma rR (tipo I) ou $\sum_{i=0}^{\infty} r_i R$, onde $r_i = (0, s_i)$ para todo i ou $r_i = (s_i, 0)$ para todo i e os graus de $s_i \in \mathfrak{m}$ são estritamente decrescentes (tipo II). Agora, pela resolução projetiva obtida no caso $k[x, \mathbb{Q}]$, conclui-se que os ideais do segundo tipo tem dimensão projetiva $\leqslant 1$. Ainda, temos a sequência exata

$$0 \to (0 : r) \to R \to rR \to 0$$

onde $(0 : r) = \{s \in R \mid sr = 0\}$ é necessariamente um ideal do tipo II. De fato, usando que T é domínio, pode-se ver que ou $sR \cap (0 : r) = 0$ para todo elemento $s \in R$ ou $(0 : r)$ é da forma $\mathfrak{m} \times 0$. Com isso, concluímos que a dimensão projetiva de rR é $\leqslant 2$. A igualdade é atingida, por exemplo, para o elemento $r = (x, 0)$, pois $(0 : r) = 0 \times \mathfrak{m}$ não é projetivo.[4]

A técnica para calcular a dimensão global fraca é a mesma. No entanto, deve-se notar que os ideais do tipo II são planos, de modo que a dimensão plana de seus ideais é, no máximo, 1. Ainda, verifica-se que nem todo ideal principal é plano, cf. [Oso73, Prop. 2.36]. □

2.3 Álgebras suaves

Outro conceito importante da Álgebra Comutativa é o de álgebras suaves. Veremos que, em muitos casos, isso é equivalente a dizer que a álgebra é regular. Isso faz com que alguns autores utilizem o termo “suave” para álgebras associativas com o intuito de dizer que sua dimensão global é finita. Mesmo assim, como veremos abaixo, tal conceito possui muitas outras ricas caracterizações, e que não devem ser deixadas de lado. Inclusive, é por conta de uma delas que podemos afirmar que a conjectura de Han é válida para álgebras comutativas.

Nesta seção, realizaremos as primeiras definições no ambiente mais geral em que A é k-álgebra comutativa qualquer. Em seguida, apresentaremos as diversas caracterizações no caso em que A é essencialmente finitamente gerada (e.f.g). Por conta disso, muitos autores incluem tal hipótese dentro da definição. Não adotaremos tal convenção.

Definição 2.3.1. Uma k-álgebra comutativa A é dita *suave* (ou 0-*suave*[5]) *sobre* k se satisfizer o seguinte: para toda extensão de k-álgebras comutativas $0 \to N \to C \xrightarrow{\pi} C/N \to 0$ com $N^2 = 0$ e para todo morfismo de álgebras $v : A \to C/N$, existe um morfismo de $u : A \to C$ que levanta v, isto é, $\pi u = v$.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, dashed, "u"'] \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, "\pi"] & C/N \end{tikzcd}$$

[4] Na verdade, isso vale em geral: se R é local e $(0 : r) \neq 0$, então $(0 : r)$ não é projetivo, veja [Oso73, Prop. 2.36].

[5] Em muitos casos, A é considerada com a topologia I-ádica para um certo ideal $I \subset A$. Assim, o termo 0-suave é utilizado para enfatizar que A está sendo considerada como álgebra discreta, o que é o nosso caso.

Aqui elencamos algumas propriedades básicas que são preservadas por álgebras suaves.

Proposição 2.3.2. *Seja A uma k-álgebra comutativa.*

1. *(Transitividade) Se A é suave sobre K e K é suave sobre k, então A é suave sobre k.*
2. *(Localização) Se A é suave sobre k e $S \subseteq A$ é um conjunto multiplicativo, então $S^{-1}A$ é suave sobre k.*
3. *(Mudança da base) Se A é suave sobre k e ℓ é uma k-álgebra, então $A \otimes \ell$ é suave sobre ℓ.*

Demonstração. Veja [Mat70, pp. 201–202]. Para o segundo item, primeiramente, prova-se que $S^{-1}A$ é suave sobre A e, então, usa-se a transitividade. □

No caso em que a álgebra é um corpo, temos que suavidade é equivalente à separabilidade da extensão de corpos. Antes de apresentar esse resultado, vejamos o que queremos dizer por uma extensão de corpos arbitrária ser separável.

Teorema-definição 2.3.3. *Assumindo* $\operatorname{char}(k) = p > 0$, *uma extensão de corpos $K \supseteq k$ é dita separável se satisfizer as seguintes condições equivalentes:*

(1) *Todo subcorpo finitamente gerado da extensão $K \supseteq k$ é uma extensão algébrica separável de $k(t_1, \dots, t_r)$ para alguma base de transcendência $\{t_1, \dots, t_r\}$ de k.*

(2) *O anel $K \otimes_k \ell$ é reduzido para toda extensão (finita) $\ell \supseteq k$.*

(3) *O anel $K \otimes_k k^{p^{-1}}$ é reduzido.*

(4) *(Critério de MacLane) K e $k^{p^{-j}} = \{a \in K^{alg} \mid a^{p^j} \in k\}$ são linearmente disjuntos para algum (ou para todo) $j \geqslant 1$, i.e. o morfismo $K \otimes_k k^{p^{-j}} \to K^{alg}$ dado pelo produto dos tensorandos é injetor.*

Demonstração. Para a implicação (1) $\implies$ (2), note que a hipótese nos permite reduzir aos casos em que $K \supseteq k$ é puramente transcendente ou separável finita. O primeiro caso é claro, pois $K = k(t_1, \dots, t_r)$ satisfaz que $K \otimes \ell = \ell(t_1, \dots, t_r)$ é um corpo; já o caso finito foi provado anteriormente em 2.1.1.

Para ver (2) $\implies$ (3), recomendamos a prova em [Mat87, Thm 26.2].

Além disso, a condição (4) nos garante que $K \otimes_k k^{p^{-1}}$ é isomorfo a $K \cdot k^{p^{-1}}$ e, portanto, é um corpo. Repare que, de fato, podemos assumir $j = 1$, pois vale que $k^{p^{-1}} \subseteq k^{p^{-2}} \subseteq \dots$ Logo, temos que (4) $\implies$ (3).

Assim, só resta provar que (1) ou (2) implicam que K e $k^{p^{-j}}$ são linearmente disjuntos para todo j, o que pode ser conferido em [Jac12, Thm 8.39] ou [Mat87, Thm 26.4]. □

Em característica zero, vale que toda extensão algébrica é separável, então toda extensão de corpos satisfaz o item (1) — e, portanto, o (2). Assim, também dizemos nesse caso que qualquer extensão de corpos é separável. Esse mesmo argumento se aplica a qualquer corpo perfeito, ou seja, temos a seguinte generalização da definição 2.1.6:

Corolário 2.3.4. *Se k é perfeito, então qualquer extensão $K \supset k$ é separável.*

Com tais definições, temos o seguinte:

Teorema 2.3.5. [Mat70, p. 207] *Sendo $K \supset k$ uma extensão de corpos:*

$$K \text{ é suave sobre } k \iff K \supset k \text{ é separável}$$

Agora, notaremos que, no caso em que k é um corpo, uma k-álgebra é suave se, e somente se, ela é "geometricamente regular".

Proposição 2.3.6. *No caso em que k é um corpo e A é uma k-álgebra comutativa e.f.g., as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) A é suave sobre k.

(2) $A_\mathfrak{m}$ é suave sobre k para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$.

(3) $A \otimes \ell$ é regular para toda extensão $\ell \supseteq k$ tal que $\ell^p \subseteq k$.

(4) $A \otimes \ell$ é regular para toda extensão $\ell \supseteq k$, i.e. A é geometricamente regular.

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (4): Pelas propriedades 2.3.2, se A é suave sobre k, então $A \otimes \ell$ é suave sobre ℓ e toda localização de $A \otimes \ell$ é suave. Assim, basta ver que suave implica em regular no caso de álgebras locais, o que é provado em [Mat87, p.216] ou [Wei94, Thm 9.3.11].

A implicação (4) $\Longrightarrow$ (3) é uma tautologia.

(3) $\Longrightarrow$ (2): Do terceiro item segue que $A_\mathfrak{m} \otimes \ell$ é regular para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ com $\ell^p \subseteq k$. Assim, tal implicação segue da demonstração em [Mat87, Thm 28.7], na qual mostra-se que $A_\mathfrak{m}$ é suave em relação à topologia $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$-ádica. Isso é equivalente a ser suave em nosso contexto (discreto) pelo *Corollaire* 1 de [Bou07, p. X.101].

(2) $\Longrightarrow$ (1): Cor. 2 da pág. X.101 de Bourbaki [Bou07]. □

Corolário 2.3.7. *Suponha que k é um corpo perfeito e A é uma k-álgebra comutativa e.f.g.:*

$$A \text{ é suave sobre } k \iff A \text{ é regular}$$

Demonstração. Basta notar que toda extensão satisfazendo $\ell^p \subseteq k$ é (puramente) inseparável. □

O exemplo abaixo mostra que ambos resultados acima não são válidos para álgebras noetherianas em geral.

Exemplo 2.3.8. No exemplo 2.2.4, verificamos que álgebras de séries de potências (sobre um corpo) são regulares. Assim, pelo isomorfismo $\ell \otimes k[[x_1, \cdots, x_n]] \cong \ell[[x_1, \cdots, x_n]]$, concluímos que elas são geometricamente regulares. No entanto, como provado por Tanimoto [Tan84, Thm 3.2], vale que $k[[x_1, \cdots, x_n]]$ é suave sobre um corpo k somente quando $\text{char}(k) = p$ e $|k : k^p| < \infty$. Mesmo assim, é possível ver que elas são suaves em relação à topologia $\mathfrak{m}$-ádica para $\mathfrak{m} = (x_1, \cdots, x_n)$, cf. [Mat87, p. 215].

Uma (co)homologia própria para álgebras comutativas foi definida por D. K. Harrison [Har62] no início da década de 1960 através do complexo de Hochschild. No entanto, tal teoria não foi tão profícua quanto a introduzida independentemente por M. André [And67; And74] e D. Quillen [Qui70] no final da década. Ainda assim, em muitos casos, ambos grupos de cohomologia coincidem.

A seguir, realizaremos uma compilação de diversas caracterizações de álgebras suaves e.f.g. por meio de conceitos homológicos. Uma delas está escrita em termos da cohomologia de André-Quillen e outra da homologia, denotadas respectivamente por $D^1(A|k, M)$ e $D_1(A|k, M)$ para M um A-módulo. Suas definições podem ser encontradas em [Wei94, Seção 8.8] ou [Lod98, §3.5]. Também, pode-se mostrar que $D^1(A|k, M)$ está em bijeção com as extensões (de quadrado nulo) comutativas de A pelo módulo M, cf. [Wei94, Ex. 8.8.4], de modo que $D^1(A|k, M)$ é um submódulo de $HH^2(A, M)$. Mais ainda, pode-se provar que, no caso em que k é um corpo de característica zero, $D^n(A|k, M)$ é um somando direto de $HH^{n+1}(A, M)$ para todo $n \geqslant 0$, e que o mesmo vale para a homologia, veja [Wei94, Cor. 8.8.9].

No teorema seguir, foram utilizadas notações introduzidas na página 36.

Teorema 2.3.9. *Assuma que k é noetheriano e A é uma k-álgebra comutativa e.f.g. e k-plana. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) A é suave sobre k

(2) $D^1(A|k, M) = 0$ para todo A-módulo M

(3) $D_1(A|k, A) = 0$ e Ω^1_A é A-projetivo.

(4) O núcleo de $\mu : A \otimes A \to A$ é localmente um ideal de interseção completa, i.e. a localização $(\ker\mu)_{\mathfrak{m}}$ é gerada por uma sequência $(A \otimes A)_{\mathfrak{m}}$-regular para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A \otimes A$.

(5) (Hochschild-Kostant-Rosenberg) Para todo $n \geqslant 0$ e todo A-módulo M (com estrutura de A-bimódulo dada por $am = ma$), valem os isomorfismos de A-módulos:

$$HH_n(A, M) \cong \Lambda^n_A(\Omega^1_A) \otimes_A M \qquad HH^n(A, M) \cong \operatorname{Hom}_A(\Lambda^n_A(\Omega^1_A), M)$$

No caso em que $M = A$, esses isomorfismos são isomorfismos de álgebras.

(6) $\operatorname{pd}_{A\otimes A}(A) = \operatorname{fd}_{A\otimes A}(A) < \infty$

(7) $HH_i(A) = 0 = HH_j(A)$ para algum grau ímpar $i > 0$ e algum grau par $j > 0$.

(8) $HH_*(A)$ é finitamente gerada como A-álgebra.

(9) Existem um inteiro par s e um ímpar t de modo que $HH^{s+i}(A) = 0 = HH^{t+i}(A)$ para todo i com $0 \leqslant i \leqslant \dim_{Krull}(A)$.

Panorama da demonstração. (1) $\iff$ (2): Esse resultado vale para álgebras comutativas em geral e pode ser conferido em [Lod98, Lemma E.11]. Outra prova é dada em [Wei94, p.313-314], onde se utiliza a identificação de $D^1(A, M)$ com o submódulo de $H^2(A, M)$ dado pelas extensões comutativas (com quadrado nulo) de A pelo módulo M.

(2) $\iff$ (3): [Lod98, Prop. E.3]

(3) $\iff$ (4): é essencialmente feito em [Lod98, Lemmas E.8, E.9]

(4) $\implies$ (5) e (4) $\implies$ (6): Esse resultado foi publicado em 1962 por Hochschild, Kostant e Rosenberg [HKR62, Thm 5.2] no caso em que k é um corpo perfeito e $M = A$. Apresentaremos, aqui, a prova como feita em Loday [Lod98, 3.4.4].

Primeiramente, notemos que basta provar o caso em que A é local. De fato, para mostrar que um homomorfismo de A-módulos $M \to N$ é um isomorfismo, basta que o mapa localizado $M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ seja um isomorfismo para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A. Assim, usando a propriedade de localização da homologia 1.3.16, basta mostrarmos o isomorfismo central abaixo

$$HH_*(A, M)_{\mathfrak{m}} = HH_*(A_{\mathfrak{m}}, M_{\mathfrak{m}}) \cong \Lambda^*(\Omega^1_{A_{\mathfrak{m}}}) \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} = (\Omega^1_A \otimes_A M)_{\mathfrak{m}}$$

Assim, assumiremos que A é local. Através da hipótese (4), tomamos uma sequência regular $x = (x_1, \dots, x_m)$ em $A \otimes A$ geradora de $\ker \mu$. Além disso, o seu comprimento é limitado pelo número de variáveis que geram A sobre k, isto é, escrevendo $A = S^{-1}(k[x_1, \dots, x_n]/I)$, vale que $m \leqslant n$. Com tal sequência, podemos construir o complexo de Koszul $\mathcal{K}(x)$, o qual é, na verdade, uma resolução livre de $A = \dfrac{A \otimes A}{\ker \mu}$ de comprimento m. Com isso, obtemos o item (6):

$$\mathrm{pd}_{A\otimes A}(A) \leqslant \sup_{\mathfrak{m}}\{\mathrm{pd}_{A_{\mathfrak{m}}\otimes A_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}})\} \leqslant n$$

A igualdade $\mathrm{fd}_{A\otimes A} = \mathrm{pd}_{A\otimes A}(A)$ segue de $A \otimes A$ ser noetheriana. Além disso, chegamos que $HH_*(A, M)$ é isomorfo à homologia de $\mathcal{K}(x) \otimes_{A\otimes A} M$.

Para obtermos o item (5), precisamos de mais detalhes sobre $\mathcal{K}(x)$. Sendo $V = (A\otimes A)^{\oplus m}$, ele é isomorfo ao complexo $(\Lambda^*_{A\otimes A}(V), d_x)$ com $d_x : \Lambda^{n+1}(V) \to \Lambda^n(V)$ dado por

$$d_x(v_0 \wedge \dots \wedge v_n) = \sum_{i=0}^{n} x(v_i) v_0 \wedge \dots v_{i-1} \wedge v_{i+1} \dots \wedge v_n,$$

onde $x : V \to \ker \mu$ é a forma linear definida por $x(v) = \sum_i a_i x_i$ para $v = (a_1, \dots, a_m) \in V$. Como $\ker \mu \cdot M = 0$, podemos concluir que $d_x \otimes 1_M = 0$ a partir destas igualdades:

$$(x(v_i) v_0 \wedge \dots \wedge v_n) \otimes_{A\otimes A} m = (v_0 \wedge \dots \wedge v_n) \otimes_{A\otimes A} x(v_i) m = 0.$$

Logo, $HH_n(A, M)$ é isomorfo ao próprio $\Lambda^n_{A\otimes A}(V) \otimes_{A\otimes A} M$. Para finalizar, basta notar os isomorfismos $\Lambda^n_{A\otimes A}(V) \otimes_{A\otimes A} A \cong \Lambda^n_A(A^{\oplus m})$ e

$$\begin{aligned} \Omega^1_A \cong \frac{ker \mu}{(\ker \mu)^2} &\cong A^{\oplus m}, \\ \sum_i a_i x_i &\mapsto (a_i + \ker \mu)_i \end{aligned}$$

sendo que o isomorfismo à esquerda foi visto no fim do primeiro capítulo.

De modo análogo, também pode-se deduzir que $HH^*(A, M)$ é dado por

$\mathrm{Hom}_{A\otimes A}(\mathcal{K}(x), M)$, pois o mapa $\mathrm{Hom}_{A\otimes A}(d_x, M)$ é nulo. Desse modo, basta realizar as devidas identificações entre os módulos.

(5) $\implies$ (7), (9): Isso segue do fato de que $\Lambda^i_A(\Omega^1_A) = 0$ para todo $i > n$, onde n é o número de geradores de Ω^1_A como A-módulo.

(5) $\implies$ (8): Temos que $HH_*(A) \cong \Lambda^*_A(\Omega^1_A)$ é um isomorfismo de álgebras, sendo que a estrutura de álgebra em $HH_*(A)$ é dada pelo produto de embaralhamento, cf. [Lod98, 4.2.7]. Logo, do fato de Ω^1_A ser finitamente gerado, segue que $HH_*(A)$ é gerada por finitos elementos de grau 1.

(6) $\implies$ (7), (8), (9): Isso segue de que $HH_i(A) = 0 = HH^i(A)$ para todo $i > \mathrm{pd}_{A\otimes A}(A)$ e de que $HH_n(A)$ é finitamente gerado como A-módulo para cada n.

(7) $\implies$ (4): isso foi demonstrado em [Rod95]; apesar disso, a caracterização (7) foi provada ser válida primeiramente com a hipótese de k ser corpo em [AV92] e independentemente em [BAC94] (este assumindo ainda que $\mathrm{char}(k) = 0$). Nesse caso, os autores provaram que o item (7) implica que A é geometricamente regular.

(8) $\implies$ (4): veja [AI00]

(9) $\implies$ (4): veja [AI05]. □

Observação 2.3.10. A hipótese sobre A ser k-plano poderia ser remanejada, pois a equivalência entre os três primeiros itens não precisa de tal hipótese e a caracterização (3) já implica que A é plano sobre k [Lod98, Lemma E.14]. Assim, poderíamos reformular algumas equivalências como a seguinte: A é suave sobre k se, e somente se, A é plano sobre k e $\mathrm{fd}_{A\otimes A}(A) < \infty$. Essa equivalência foi formulada por Rodicio [Rod90, Cor. 2] utilizando a caracterização de A ser suave através do mapa $k \to A$ ser, na terminologia do artigo, regular. Esse resultado foi uma das principais motivações para a proposta de uma conjectura que acabou culminando na caracterização (7)

Dentro do contexto de álgebras associativas, o termo “homologicamente suave” é utilizado, muitas vezes, para dizer que uma resolução projetiva de A finita formada por A-bimódulos finitamente gerados. Note que, dentro das hipóteses do teorema, isso é equivalente à caracterização (6).

Pode-se encontrar muitas outras caracterizações de álgebras suaves na literatura que não foram enunciadas acima. Por exemplo, uma caracterização concreta e útil para computações é dada pelo critério do jacobiano, veja [Wei94, Application 9.3.15] ou [Mat70, §29].

Capítulo 3

Respostas para a conjectura de Han ou Como computar a homologia de Hochschild

Nesse capítulo, objetivamos apresentar um panorama do estado da conjectura da Han até os dias de hoje. Para tanto, apresentamos na primeira seção o enunciado preciso da conjectura e alguns resultados que estão intimamente ligados à sua proposição. Em seguida, compilamos por meio da tabela 3.1 todos os exemplos de álgebras (até onde sabemos) que verificam a conjectura. Nas seções seguintes, apresentaremos mais detalhes, em menor ou maior nível, sobre como ela é deduzida para tais exemplos. Em especial, apresentaremos uma demonstração bastante detalhada para os casos das álgebras de grupos finitos (corolário 3.2.10) e das álgebras truncadas (teorema 3.4.16). Ao final, apresentaremos resultados mais recentes que analisam a conjectura de Han a partir do ponto de vista de extensões de álgebras.

Enfim, após a apresentação de diversos trabalhos acerca da conjectura, poderemos ter consciência da variedade de técnicas utilizadas para se calcular a homologia de Hochschild. Por exemplo, veremos que algumas delas se concentram em encontrar modelos minimais concretos de certas álgebras enquanto que outras se baseiam na construção e aplicação de critérios mais gerais da teoria.

Uma versão mais enxuta desse capítulo foi apresentada no artigo [Cru23].

3.1 A conjectura de Han

Suposição: Nesta seção, k sempre será um corpo.

Nesta seção, mostraremos que, dentro do reino de álgebras de dimensão finita, que a homologia de Hochschild de A é concentrada no grau zero sempre que $\mathrm{gl.dim}(A)$ é finita. Desse modo, teremos uma motivação legítima para o enunciado da conjectura de Han. Antes disso, provaremos uma resultado mais elementar e que também é válido para a cohomologia.

Daqui em diante, usaremos a seguinte notação padrão:

Definição 3.1.1. A *dimensão da homologia* (resp. *da cohomologia*) *de Hochschild* de uma álgebra A é definido como

$$\begin{aligned} \text{hh.dim}(A) &:= \sup\{n \in \mathbb{N} \mid HH_n(A) \neq 0\} \\ \text{hch.dim}(A) &:= \sup\{n \in \mathbb{N} \mid HH^n(A) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Se, de algum modo, $HH_n(A) = 0$ (resp. $HH^n(A) = 0$) para todo n, convencionamos que $\text{hh.dim}(A) = 0$ (resp. $\text{hch.dim}(A) = 0$).

Nos resultados a seguir, uma hipótese que será muito utilizada é a de que $A/J(A)$ é separável, o que é sempre verdade quando k é um corpo perfeito. De fato, isso segue da proposição 2.1.7 e do fato de que $A/J(A)$ é semissimples.

Proposição 3.1.2. *Se A é uma álgebra de dimensão finita sobre k tal que $A/J(A)$ é separável (e.g. k é um corpo perfeito), então:*

1. $\text{gl.dim}(A) = \text{pd}_{A \otimes A^{op}}(A)$.
2. $\text{gl.dim}(A \otimes A^{op}) = 2 \cdot \text{gl.dim}(A)$.
3. $\text{gl.dim}(A \otimes \ell) = \text{gl.dim}(A)$ *para toda extensão de corpos $\ell \supseteq k$.*

Histórico do teorema. O primeiro item foi obtido, primeiramente, por Ikeda, Nagao e Nakayama [INN54] por meio de um enunciado mais rudimentar, sem a utilização explícita do conceito de dimensão projetiva. Pouco depois, isso foi redemonstrado por Eilenberg [Eil54, Thm II] através de ferramentas homológicas como os funtores Ext e Tor. Vale ressaltar que, na verdade, em ambos artigos acima é obtido que $\text{pd}_{A \otimes A^{op}}(A) = \text{pd}_A(A/J(A))$, mas a igualdade com $\text{gl.dim}(A)$ segue diretamente de resultados do segundo artigo. Poucos anos depois, Auslander [Aus57] obteve uma certa generalização desse resultado para álgebras semiprimárias. Mais recentemente, uma demonstração mais concreta dessa igualdade foi feita por Happel [Hap89, §1.5] no caso em que A é básica e k é algebricamente fechado.

Os dois últimos itens são consequência de um resultado de Auslander [Aus55, Thm 16]. O último item também foi obtido por Jensen e Lenzing [JL82, Thm 2.4]. Tais resultados serão demonstrados mais à frente no ambiente (mais geral) das álgebras pseudocompactas, veja os teoremas 4.3.18 e 4.3.20.

Das definições dos funtores Ext e Tor, pode-se concluir que

$$\text{hh.dim(A)}, \text{hch.dim(A)} \leqslant \text{pd}_{A \otimes A^{op}}(A) \leqslant \text{gl.dim}(A \otimes A^{op}).$$

Com isso, obtemos a seguinte consequência do resultado acima:

Corolário 3.1.3. *Toda álgebra de dimensão finita A sobre k tal que $A/J(A)$ é separável (e.g. k é um corpo perfeito) satisfaz:*

$$\text{gl.dim}(A) < \infty \implies \text{hh.dim}(A) < \infty, \;\; \text{hch.dim}(A) < \infty.$$

Observação 3.1.4. Nos resultados acima, a hipótese de $A/J(A)$ ser separável é realmente necessária: se k não é um corpo perfeito, então ele possui um elemento não-separável $\alpha \in k^{\mathrm{alg}} \setminus k$, de modo que seu polinômio minimal m_α possui derivada nula. Assim, $k(\alpha) = k[x]/(m_\alpha)$ é uma k-álgebra de dimensão finita com $\mathrm{gl.dim}(k(\alpha)) = 0$ (pois ela é um corpo) cuja (co)homologia de Hochschild é sempre não-nula, cf. exemplo 1.3.15:

$$HH^n(k(\alpha)) \cong HH_n(k(\alpha)) \cong k(\alpha) \text{ para todo } n \geqslant 0$$

Para um exemplo mais concreto, pode-se tomar $k = \mathbb{F}_p(t)$ e $\alpha = \sqrt[p]{t}$ para um primo p, de modo que $m_\alpha = x^p - t$. De forma mais geral, também é possível provar que $\mathrm{pd}_{A \otimes A^{op}} = \infty$ sempre que $A/J(A)$ não é separável [Eil54, Thm III].

Agora, veremos que vale um resultado muito mais forte para a dimensão da homologia hh.dim, o qual é consequência essencialmente do seguinte resultado de B. Keller.

Lema 3.1.5. [Kel98, §2.5] *Suponha que A é uma álgebra de dimensão finita sobre k tal que $\overline{A} = A/J(A)$ é um produto de cópias de k. Se* $\mathrm{gl.dim}(A) < \infty$, *então temos o isomorfismo (induzido pela injeção $\overline{A} \hookrightarrow A$) dos grupos de homologia cíclica $HC_n(\overline{A}) \cong HC_n(A)$ para todo* $n \geqslant 0$.

O leitor não familiarizado com Homologia Cíclica não deve se alarmar pelo seu uso no enunciado acima. Os grupos de homologia cíclica possuem uma intrínseca relação com os de Hochschild, dados pela chamada sequência exata longa de Connes:

$$\ldots \to HC_{n+1}(A) \to HC_{n-1}(A) \to HH_n(A) \to HC_n(A) \to HC_{n-2}(A) \to \ldots$$

Por exemplo, para $n = 0$, nós temos o isomorfismo $HC_0(A) \cong HH_0(A)$. Com essa sequência é possível provar, como enunciado abaixo, que nós poderíamos ter substituído HC por HH ao escrever o lema.

Lema 3.1.6. [Lod98, 2.2.3] *Seja $f : A \to A'$ um morfismo de k-álgebras.*

$$f \text{ induz o isomorfismo } HH_*(A) \cong HH_*(A') \iff f \text{ induz o isomorfismo } HC_*(A) \cong HC_*(A')$$

Desses resultados, obtemos a seguinte síntese:

Teorema 3.1.7 (Keller)**.** *Toda álgebra de dimensão finita A sobre k tal que $A/J(A)$ é separável (e.g. k é um corpo perfeito) satisfaz:*

$$\mathrm{gl.dim}(A) < \infty \implies \mathrm{hh.dim}(A) = 0.$$

Demonstração. Fixamos a notação $A_{k^{\mathrm{alg}}} = A \otimes k^{\mathrm{alg}}$. Usando que $A/J(A)$ é separável, deduzimos que $\overline{A_{k^{\mathrm{alg}}}} = A_{k^{\mathrm{alg}}}/J(A_{k^{\mathrm{alg}}})$ é semissimples (sobre um corpo algebricamente fechado) e, portanto, é isomorfa a uma soma direta de álgebras de matrizes $M_n(k^{\mathrm{alg}})$ pelo teorema de Wedderburn-Artin. Com isso, a álgebra básica associada $(A_{k^{\mathrm{alg}}})^b$, que é Morita-equivalente a $A_{k^{\mathrm{alg}}}$, satsifaz as hipóteses do lema 3.1.5.

Agora, da proposição 3.1.2, também sabemos que $\mathrm{gl.dim}(A) = \mathrm{gl.dim}(A_{k^{\mathrm{alg}}})$. Assim, aplicando ambos os lemas acima (e certa Morita-invariância), obtemos que

$$\mathrm{gl.dim}(A) < \infty \implies HH_n(A_{k^{\mathrm{alg}}}) \cong HH_n((A_{k^{\mathrm{alg}}})^b) \cong HH_n\left(\frac{(A_{k^{\mathrm{alg}}})^b}{J(A_{k^{\mathrm{alg}}})^b}\right)$$

Já que o quociente à direita é um produto de cópias de k^{alg}, podemos concluir que a homologia acima é nula para todo $n > 0$. Finalmente, isso também é válido para $HH_n(A)$, pois

$$HH_n(A_{k^{\mathrm{alg}}}) \cong HH_n(A) \otimes k^{\mathrm{alg}} \quad \text{for all } n \geqslant 0$$

pela primeira propriedade da proposição 1.3.16. □

Demonstração alternativa. Quando k é um corpo perfeito, pode-se usar o teorema 3.4.3 e o fato de que quocientes admissíveis de álgebras de caminhos satisfazem a hipótese do resultado de Kelller, cf [ASS06, 2.12]. □

Agora, nós finalmente formularemos a conjectura para corpos perfeitos, o que é simplesmente a recíproca dos resultados provados acima.

Conjectura 3.1.8 (Han)**.** *Se A é uma álgebra de dimensão finita tal que $A/J(A)$ é separável (e.g. k é um corpo perfeito), então são equivalentes:*

(1) $\mathrm{hh.dim}(A) < \infty$

(2) $\mathrm{hh.dim}(A) = 0$

(3) $\mathrm{gl.dim}(A) < \infty$

Dado que a implicação (1) ⇒ (3) é a única que ainda não foi provada e que ela também é estudada para álgebras em geral, nós estabelecemos a seguinte nomenclatura:

Definição 3.1.9. A implicação $\mathrm{hh.dim}(A) < \infty \implies \mathrm{gl.dim}(A) < \infty$ será chamada de *propriedade de Han.* A implicação análoga para cohomologia (i.e $\mathrm{hch.dim}(A) < \infty \implies \mathrm{gl.dim}(A) < \infty$) será chamada de *propriedade de Happel.*

Como álguem pode se perguntar, o teorema de Keller não é válido para a cohomologia. De fato, usando a computação de Happel em [Hap89, §1.6], pode-se tomar até mesmo álgebras de caminhos como contraexemplos: se Q é uma aljava (sem ciclos orientados) tal que seu grafo não é uma árvore, então $HH^1(kQ) \neq 0$. Por exemplo, tomando $Q_1 = (1 \rightrightarrows 2)$ e Q_2 como sendo

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] \arrow[d] \\ 2 \arrow[r] & 3 \end{tikzcd}$$

temos que $HH^1(kQ_1) \cong k^3$ e $HH^1(kQ_2) \cong k$.

Desde a formulação da conjectura de Han, ou mesmo antes dela, a propriedade de Han foi provada para muitas álgebras, as quais estão elencadas na tabela 3.1. Na tabela 3.2 seguinte, estão alguns exemplos de álgebras satisfazendo a propriedade de Happel. Como pode-se notar abaixo, algumas classes de álgebras da primeira tabela (álgebras de grupos e extensões trivias) são de álgebras simétricas, então ambas as propriedades são equivalentes para elas, cf. proposição 1.3.19. Desse modo, apesar de elas também satisfazerem a propriedade de Happel, apenas as registramos na primeira tabela.

Classe de álgebras	**Hipóteses sobre k**	**Referências**
álg. de grupo	-	[Swa60], [Bur85, Thm I.1]
quocientes de álg. de caminhos sem ciclos	-	[ENN56, Cor. 6], [Cib86]
comutativas e.f.g.	-	[AV92], [BAC94]
álg. exteriores	-	[HX06, Thm 2]
monomiais	-	[Han06, Thm 3]
álg. de interseção completa quântica	-	[BE08, Thm 3.1]
N-Koszul	$\mathrm{char}(k) = 0$	[BM09, Thm 4.5]
quocientes homogêneos de álg. de caminhos com laços	$\mathrm{char}(k) = 0$	[BM09, Thm 4.7]
álg. celulares graduadas	$\mathrm{char}(k) = 0$	[BM09, Thm 4.9]
uma generalização de álg. de interseção completa quântica	-	[SV10, Thm I]
álg. locais graduadas com uma certa relação	-	[SV10, Thm II]
álg. de Weyl generalizadas quânticas	$\mathrm{char}(k) = 0$	[SSV13, Thms 1.1, 1.2, 3.3]
extensões triviais de álg. locais	alg. fechado	[BM17, Thm 3.2]
extensões triviais de álg. auto-injetivas	alg. fechado	[BM17, Thm 3.5]
extensões triviais de álg. graduadas	alg. fechado, $\mathrm{char}(k) = 0$	[BM17, Thm 3.9]

Tabela 3.1: *Exemplos conhecidos de álgebras satisfazendo a propriedade de Han. Com exceção das linhas 3, 10 e 12, todas são assumidas como sendo de dimensão finita. A lista está organizada em ordem cronológica das referências.*

Classe de álgebras	**Referência**
comutativas	[AI05, Corollary]
álg. exteriores	[HX06, Thm 3]
truncadas	[XHJ07, Thm 3]
algumas álg. de interseção completa quântica	[BE08, Thm 3.3]
álg. de Weyl generalizadas quânticas	[SSV13, Thms 1.1, 1.2, 3.3]

Tabela 3.2: *Exemplos de álgebras satisfazendo a propriedade de Happel. Com exceção da última classe, todas são assumidas como sendo de dimensão finita sobre um corpo arbitrário. A lista está organizada em ordem cronológica das referências.*

3.2 Álgebras de Grupos

Nessa seção, provaremos a propriedade de Han para álgebras de grupos finitos, à maneira que nos foi comunicada por Eduardo N. Marcos. Isso seguirá essencialmente de dois resultados razoavelmente conhecidos (teoremas 3.2.6 e 3.2.8) da teoria de (co)homologia de Grupos. Para tanto, realizaremos antes uma rápida introdução à (co)homologia de grupos.

No exemplo 2.1.5 vimos que kG é uma álgebra separável sempre que G é um grupo finito e k é um corpo de característica zero. Assim, a propriedade de Han é trivialmente válida nesse caso. No entanto, quando consideramos corpos cuja característica divide a ordem de G, a situação é drasticamente alterada: a dimensão global de kG é infinita. Visto que a conjectura de Han só necessita ser entendida para álgebras com dimensão global infinita, tais álgebras se tornam, pois, um exemplo relevante. Além disso, como pode ser visto abaixo, álgebras associativas bastante comuns podem ser vistas como álgebras de grupos em característica positiva.

Exemplo 3.2.1.

1. Se $\mathrm{char}(k) = p$ e C_{p^s} é o grupo cíclico de ordem p^s, então kC_{p^s} é isomorfo a $k[x]/(x^{p^s})$ pelo isomorfismo $g - 1 \mapsto x$ (onde g é um gerador de C_{p^s}).
2. Se $\mathrm{char}(k) = 2$ e $K_4 = C_2 \times C_2$ é grupo de Klein (de ordem 4), então
$$kK_4 \cong kC_2 \otimes kC_2 \cong \frac{k[x, y]}{(x^2, y^2)}$$
3. Seja D_{2q} o grupo diedral de ordem $4q$, que pode ser definido por geradores e relações como $\langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1, (ab)^q = (ba)^q \rangle$. Se $\mathrm{char}(k) = 2$ e $q = 2^m$, então temos o isomorfismo
$$kD_{2q} \cong \frac{k\langle x, y \rangle}{(x^2, y^2, (xy)^q - (yx)^q)}$$
através do mapa $x \mapsto a - 1$, $y \mapsto b - 1$.

A seguir, definiremos a (co)homologia de grupos, a qual foi a primeira teoria homológica a ser definida sobre uma estrutura algébrica, sendo introduzida por Eilenberg e MacLane [EM47] no início da década de 1940. Para uma referência básica sobre esse tema, recomendamos os livros de Benson [Ben91a; Ben91b].

Sendo k um anel comutativo, G um grupo (não-topológico) e M um kG-módulo, os *grupos de (co)homologia de G em relação a M* podem ser definidos a partir dos funtores Ext e Tor da seguinte forma

$$H_n(G,M) = \mathrm{Tor}_n^{kG}(M,k) \qquad H^n(G,M) = \mathrm{Ext}^n_{kG}(k,M),\ \ n \geqslant 0$$

Para obter um complexo que define a (co)homologia de G, em geral é utilizada a chamada *resolução barra* do módulo trivial k, que definimos abaixo

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} L_2 \xrightarrow{\partial_1} L_1 \xrightarrow{\partial_0} L_0 \xrightarrow{\epsilon} k \to 0$$

onde L_n é definido como o k-módulo livre com base $G^{\times n+1}$ cuja estrutura de kG-módulo é dada pela ação na diagonal $g\cdot(g_0,\cdots,g_n) = (gg_0,\cdots,gg_n)$. Os elementos de L_n também são denotados pela notação barra através das identificações:

$$\begin{aligned}(g_0,\dots,g_n) &= g_0[g_0^{-1}g_1|\cdots|g_{n-1}^{-1}g_n]\\ [g_1|\cdots|g_n] &= (1,g_1,g_1g_2,\dots,g_1\cdots g_n)\end{aligned}$$

No caso em que $n = 0$, o elemento $1 \in G$ é representado pelo símbolo $[\ ]$. Pode-se ver que cada L_n é um kG-módulo livre com base dada pelos elementos $(1,g_1,\dots,g_n)$ ou, equivalentemente, pelos $[g_1|\cdots|g_n]$. Os mapas de bordo ∂_n são dados, em cada uma das notações, por

$$\partial_n(g_0,\dots,g_n) = \sum_{i=0}^{n}(g_0,\dots,g_{i-1},g_{i+1},\dots,g_n)$$

$$\partial_n([g_1|\cdots|g_n]) = g_1[g_2|\cdots|g_n] + \sum_{i=1}^{n-1}[g_1|\cdots|g_ig_{i+1}|\cdots|g_n] + (-1)^n[g_1|\cdots|g_{n-1}]$$

e o mapa $\epsilon :\ kG \to k$ é definido por $\epsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$.

Dessa forma, a (co)homologia de grupos pode ser calculada como

$$H_n(G,M) = H_n(M \otimes_{kG} L_*, 1 \otimes \partial_*)$$

$$H^n(G,M) = H^n(\mathrm{Hom}_{kG}(L_*,M), \mathrm{Hom}_{kG}(\partial_*,M))$$

De forma mais explícita, usando os isomorfismos de k-módulos

$$\begin{aligned} M\otimes_{kG} L_n &\cong M \otimes kG^{\otimes n} & \mathrm{Hom}_{kG}(L_n,M) &\cong \mathrm{Hom}_{Set}(G^n,M),\\ m\otimes g[g_1,\dots,g_n] &\mapsto mg\otimes g_1\otimes\cdots\otimes g_n & f &\mapsto f|_{G^n}\end{aligned}$$

podemos obter os complexo explícitos de Eilenberg-MacLane que definem a (co)homologia de G em relação a M. Eles são denotados por $(C_*(G,M),\partial)$ e $(C^*(G,M),\delta)$ e seus mapas de bordo e diferenciais tem a seguinte fórmula:

$$\partial(m\otimes g_1\otimes\cdots\otimes g_n) = (mg_1\otimes\cdots\otimes g_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(m\otimes\cdots\otimes g_ig_{i+1}\otimes\cdots\otimes g_n)+(-1)^n(m\otimes g_1\otimes\cdots\otimes g_{n-1})$$

$$\delta(f)(g_1,\dots,g_{n+1}) = g_1f(g_2,\dots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} f(g_1,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_{n+1}) + (-1)^{n+1}f(g_1,\dots,g_n)$$

Exemplo 3.2.2. Computemos a homologia $H_*(C_m,k)$ de grupos cíclicos C_m, $m \geqslant 1$. A vantagem desse caso é que podemos construir uma resolução periódica do módulo trivial. Para vermos isso, sendo g um gerador do grupo C_m, defina os morfismos de kC_m-módulos:

$$\begin{aligned} N:\ kC_m &\to kC_m \\ g^i &\mapsto (1-g)g^{i-1} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} T:\ kC_m &\to kC_m \\ g^i &\mapsto 1+\dots+g^{m-1} \end{aligned}$$

Com essa notação, temos a resolução livre

$$\dots \xrightarrow{T} kC_m \xrightarrow{N} kC_m \xrightarrow{T} kC_m \xrightarrow{N} kC_m \xrightarrow{\epsilon} k \to 0,$$

onde ϵ é a projeção usual, dada por $\epsilon(\sum_i a_ig^i) = \sum_i a_i$. Com isso, $H_n(C_m,k)$ é a homologia do complexo

$$\dots \xrightarrow{N\otimes 1} kC_m\otimes_{kC_m} k \xrightarrow{T\otimes 1} kC_m\otimes_{kC_m} k \xrightarrow{N\otimes 1} kC_m\otimes_{kC_m} k \to 0$$

Após alguns cálculos, pode-se concluir que:

$$H_n(C_m,k) = \begin{cases} k, & n=0 \\ k/m\cdot k, & n>0 \text{ ímpar} \\ \{\lambda\in k \mid m\lambda=0\}, & n>0 \text{ par} \end{cases}$$

Logo, para um corpo k, temos apenas dois casos:

- se $\mathrm{char}(k)\nmid m$ (i.e. m é invertível em k), então $H_n(C_m,k)=0$ para todo $n>0$.
- se $\mathrm{char}(k)\mid m$, então $H_n(C_m,k)=k$ para todo $n>0$.

Exemplo 3.2.3. De uma maneira mais rebuscada, podemos calcular a homologia do grupo abeliano livre $G=\mathbb{Z}$. Isso pode ser feito utilizando que a homologia $H_n(G,k)$ de um grupo G é isomorfa à homologia singular $H_n(BG,k)$ do espaço (topológico) classificante BG, veja Benson [Ben91b, Chapter 2]. Assim, utilizando que o espaço classificante de $\mathbb{Z}$ é a esfera S^1, concluímos que

$$H_n(\mathbb{Z},k) = \begin{cases} k, & n=0,1 \\ 0, & n>1 \end{cases}$$

Aqui, estamos interessados, principalmente, no cálculo da (co)homologia com coeficientes em k, um corpo de característica $p>0$. Existem diversas ferramentas para se calcular a (co)homologia mod-p; por exemplo, por meio do espaço classificante, Leary [Lea92] a calculou para certos p-grupos e Huebschmann [Hue89] utilizou sequências espectrais em sua computação para grupos metacíclicos. Outro modo de proceder está em encontrar subgrupos mais simples com (co)homologia isomorfa. Geralmente, tais grupos contém um p-subgrupo de Sylow, como é visto no critério fornecido na proposição 3.8.4 de Benson [Ben91a], que diz que subgrupos de G que "controlam a p-fusão" possuem cohomologia isomorfa à de G. Com tal resultado, pode-se obter o seguinte:

- Sendo D_m o grupo diedral de ordem $2m$ com m ímpar, vale que C_2 controla a 2-fusão em D_m. Assim, temos que $H^n(D_m, k) \cong H^n(C_2, k)$ quando $\mathrm{char}(k) = 2$.
- Quando $\mathrm{char}(k) = 3$, vale que $H^n(A_4, k) \cong H^n(C_3, k)$, pois C_3 controla a 3-fusão do grupo alternado A_4.
- Quando $\mathrm{char}(k) = 3$, vale que $H^n(S_4, k) \cong H^n(S_3, k)$, pois S_3 controla a 3-fusão do grupo simétrico S_4.

Para os grupos de cohomologia de D_m com $m = 2^k$ e de A_4 quando $\mathrm{char}(k) = 2$ e para a cohomologia mod 3 de S_3, consulte [SW99].

O resultado a seguir nos diz que a homologia de grupos se comporta bem em relação a produto direto de grupo. Como consequência, poderemos obter a homologia de grupos abelianos finitamente gerados em geral.

Lema 3.2.4. *Dado um corpo k, grupos G_1 e G_2 e módulos $M_1 \in kG_1$-Mod e $M_2 \in kG_2$-Mod, temos o seguinte isomorfismo para todo $n \geqslant 0$:*

$$H_n(G_1 \times G_2, M_1 \otimes_k M_2) \cong \bigoplus_{i+j=n} H_i(G_1, M_1) \otimes_k H_j(G_2, M_2),$$

onde $M_1 \otimes_k M_2$ é um $k(G_1 \times G_2)$-módulo com a ação $(g_1, g_2) \cdot (m_1 \otimes m_2) = (g_1 m_1) \otimes (g_2 m_2)$.

Ideia da demonstração. Isso é uma consequência da fórmula de Künneth e pode ser provado, usando que $k(G_1 \times G_2) \cong kG_1 \otimes kG_2$, de modo análogo ao feito para o produto tensorial da homologia de Hochschild em 1.3.16. Alternativamente, pode-se conferir a prova para cohomologia de grupos em [Ben91a, 3.5.6]. □

Exemplo 3.2.5. Quando G é abeliano finito, sabemos que G pode ser decomposto como produto de grupos cíclicos:

$$G = C_{m_1} \times \ldots \times C_{m_l},$$

de modo que cada m_i é potência de algum primo e $|G| = \Pi_{i=1}^{l} m_i$. Invocando o lema acima e usando o exemplo 3.2.2 anterior, nós temos que:

- se $\mathrm{char}(k) \nmid |G|$, então $H_n(G, k) = 0$ para todo $n > 0$.
- se $p = \mathrm{char}(k) \mid |G|$, então, após uma certa reordenação, podemos assumir que, para algum $1 \leqslant s \leqslant l$, os inteiros $m_1, \ldots, m_s$ são potências de p e que $p \nmid m_i$ para $i > s$. Assim, para $n > 0$, temos que $H_n(C_{m_i}, k) = 0$ para $i > s$ e, portanto,

$$H_n(G, k) = \bigoplus_{i_1+\cdots+i_s=n} H_{i_1}(C_{m_1}, k) \otimes \cdots \otimes H_{i_s}(C_{m_s}, k) = \bigoplus_{i_1+\ldots+i_s=n} k = k^{\oplus p(n,s)},$$

onde $p(n, s)$ denota o número de partições de n em s parcelas (possivelmente nulas).

Se G é um grupo abeliano finitamente gerado, então $G = \mathbb{Z}^m \times G'$, onde G' é finito e $m \geqslant 0$. Agora, a homologia da parte livre de G é dada por:

$$H_n(\mathbb{Z}^m, k) = \bigoplus_{i_1+\cdots+i_m} H_{i_1}(\mathbb{Z}, k) \otimes \cdots \otimes H_{i_m}(\mathbb{Z}, k) = k^{\oplus\binom{m}{n}},$$

onde $\binom{m}{n}$ é o número combinatorial de maneiras de escolher n elementos (no nosso caso, os i_j's que são iguais a 1) dentro de um conjunto de m elementos.

Com isso, obtemos que $\dim_k(H_n(G, k)) = \sum_{i+j=n} \binom{m}{i} \cdot p(j, s)$.

Agora, estabeleceremos qual é a conexão entre os grupos da homologia de Hochschild e os da homologia de grupos.

Teorema 3.2.6 (Burghelea). *Dado um grupo (não-topológico) G e um anel comutativo k, vale que:*

i. $HH_n(kG) \cong \bigoplus_{x \in Class(G)} H_n(C_G(x), k)$

ii. $HH^n(kG) \cong \prod_{x \in Class(G)} H^n(C_G(x), k)$,

onde $Class(G)$ denota o conjunto das classes de conjugação de G e $C_G(x)$ o centralizador de x em G.

Esse teorema foi demonstrado por D. Burghelea em 1985 para a homologia de Hochschild [Bur85, Thm I.1]. No mesmo artigo, ele também obteve uma fórmula similar para a homologia cíclica. Reproduziremos a demonstração de Weibel [Wei94, Cor. 9.7.5] para a homologia, enquanto que a demonstração para a cohomologia pode ser conferida em [Ben91b, Thm 4.1.3].

Demonstração. A prova desse resultado será feita a partir de conceitos e técnicas de objetos simpliciais, que generalizam em categorias gerais o conceito de simplexo. A primeira observação importante no que concerne a homologia de Hochschild é que toda álgebra A possui um objeto simplicial associado ZA de modo que sua homologia $HH_*(ZA)$ é igual à homologia de Hochschild $HH_*(A)$. No caso da álgebra de grupo $A = kG$, seu objeto simplicial é definido por $k(ZG)$, onde $(ZG)_n = G^{\times n+1}$ $(n \geqslant 0)$ e seus mapas de face $\partial_i : (ZG)_n \to (ZG)_{n-1}$ e de degeneração $\sigma_i : (ZG)_n \to (ZG)_{n+1}$ são definidos por

$$\partial_i(g_0, \cdots, g_n) = \begin{cases} (g_0, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_n), & \text{se } i < n \\ (g_n g_0, \cdots, g_{n-1}), & \text{se } i = n \end{cases}$$
$$\sigma_i(g_0, \cdots, g_n) = (\cdots, g_i, 1, g_{i+1}, \cdots)$$

A homologia de kZG é definida através do complexo (kZG_*, b) com operador de bordo $b = \partial_0 - \cdots + (-1)^n \partial_n$, o que naturalmente coincide com o complexo-padrão de Hochschild para kG. A vantagem de tal abordagem é que podemos decompor ZG através das classes de conjugação de G: para todo $x \in G$, defina o subobjeto $Z(G, x)$ de ZG de modo que $Z(G, x)_n$ é conjunto das n-uplas $(g_0, \cdots, g_n)$ tal que $g_0 \cdots g_n$ é conjugado a x. Assim, denotando por $Class(G)$ o conjunto das classes de conjugação de G, temos que $ZG = \sqcup_{x \in Class(G)} Z(G, x)$.

Aplicando o funtor livre $k[-]$, que leva união disjunta em soma direta (ou, equivalentemente, que preserva coprodutos), e a homologia $HH_*(-)$, obtemos que

$$HH_*(kG) = HH_*(kZG) \cong \bigoplus_{x \in Class(G)} HH_*(kZ(G,x)).$$

Com isso, nosso objetivo está mostrar que $HH_*(kZ(G,x)) \cong H_*(C_G(x),k)$, o que segue de uma sequência de passos:

Passo 1: O objeto $Z(G,x)$ é homotopicamente equivalente a $Z(C_G(x),x)$. Isso pode ser conferido em [Wei94, Prop. 9.7.4].

Passo 2: O objeto $Z(C_G(x),x)$ é isomorfo a $Z(C_G(x),1)$. De fato, de x ser central em $C_G(x)$ segue que $g_0 \cdots g_n \in C_G(x)$ é conjugado a x se, e somente se, $x^{-1}g_0 \cdots g_n$ é conjugado a 1.

Passo 3: $Z(G,1)$ é isomorfo ao objeto BG, que será definido abaixo.

Passo 4: O complexo de kBG é isomorfo ao complexo de Eilenberg-MacLane $C_*(G,k)$ de G em relação a k.

A partir dos passos acima, pode-se concluir o desejado. De fato, utilizando a notação $HH_*(G,x) := HH_*(kZ(G,x))$, podemos concluir que:

$$HH_*(G,x) \cong HH_*(C_G(x),x) \cong HH_*(C_G(x),1) \cong HH_*(kBC_G(x)) \cong H_*(C_G(x),k).$$

Desse modo, basta provarmos os passos 3 e 4. Primeiramente, o objeto simplicial[1] BG é definido de modo que $BG_0 = \{1\}$ e $BG_n = G^{\times n}$ $(n \geqslant 1)$ e os mapas de face e degeneração são dados por

$$\partial_i(g_1,\cdots,g_n) = \begin{cases} (g_2,\cdots,g_n), & \text{se } i = 0 \\ (g_1,\cdots,g_ig_{i+1},\cdots,g_n), & \text{se } 0 < i < n \\ (g_1,\cdots,g_{n-1}), & \text{se } i = n \end{cases}$$
$$\sigma_i(g_1,\cdots,g_n) = (\cdots,g_i,1,g_{i+1},\cdots)$$

Com isso, para todo grupo G, temos um isomorfismo $Z(G,1) \to BG$ dado por $(g_0,\ldots,g_n) \mapsto (g_1,\ldots,g_n)$ com inversa $(g_1,\ldots,g_n) \mapsto ((g_1 \cdots g_n)^{-1}, g_1,\cdots,g_n)$.

Sabendo que o complexo de kBG possui como mapa de bordo $\partial = \sum_i (-1)^i \partial_i : k[G^{\times n}] \to k[G^{\times n-1}]$, o passo 4 segue diretamente das definições e do isomorfismo $k \otimes kG^{\otimes n} \cong kG^{\otimes n}$. $\square$

Como aplicação, podemos computar a homologia de Hochschild para grupo abelianos.

Exemplo 3.2.7. O teorema aplicado ao caso de um grupo abeliano G nos dá o seguinte:

$$HH_n(kG) \cong \oplus_{x \in G} H_n(G,k).$$

[1] Sua notação vem do fato de a realização geométrica de BG ser o espaço classificante de G (no caso em que G é discreto), que é denotado dessa forma, veja [Wei94, Example 8.1.7]

Também, temos que $HH_0(kG) = kG$ (pois kG é comutativa).

1. Pelo exemplo de grupos cíclicos 3.2.2, obtemos a seguinte fórmula explícita quando G é finito e k é um corpo:
   - se $\mathrm{char}(k) \nmid |G|$, então $HH_n(kG) = 0$ para todo $n > 0$.
   - se $p = \mathrm{char}(k) \mid |G|$, então $\dim_k(HH_n(kG)) = |G| \cdot p(n, s)$ para todo $n > 0$, onde s é o número de grupos cíclicos na decomposição de G cuja ordem é potência de p e $p(n, s)$ é o número de partições de n em s parcelas (possivelmente nulas).
2. No caso em que $G = \mathbb{Z}^m$, temos que $kG \cong k[x_1, x_1^{-1}, \cdots, x_m, x_m^{-1}]$. Pelo teorema de Burghelea, obtemos que

$$HH_n(k\mathbb{Z}^m) \cong \oplus_{x \in \mathbb{Z}^m} k^{\binom{m}{n}} \cong k\mathbb{Z}^m \otimes k^{\binom{m}{n}}.$$

   Notando o isomorfismo de espaços vetoriais $k^{\binom{m}{n}} \cong \Lambda^n(k^m)$, repare que isso é um caso particular do teorema de Hochschild-Kostant-Rosenberg 2.3.9. De fato, $k\mathbb{Z}^m$ é suave, pois é uma localização de $k[x_1, \cdots, x_n]$.

Com o teorema de Burghelea, nossa análise pode ser reduzida simplesmente ao estudo da (co)homologia de grupos, que é mais palatável e melhor conhecida. Com efeito, para mostrar que $\mathrm{hh.dim}(kG) = \infty$, basta verificar que a sua homologia de grupos $H_n(G, k)$ é infinita. A seguir, mostraremos que isso é válido para a cohomologia:

Teorema 3.2.8. *Se* $\mathrm{char}(k) = p$ *divide a ordem de* G *e* H *é um* p*-grupo de* G*, então o mapa de restrição*

$$\mathrm{res}_{G,H} : H^n(G, k) \to H^n(H, k)$$

é não-nulo para infinitos valores de n*. Em particular,* $H^n(G, k)$ *é não-nulo para infinitos* n*'s.*

Histórico de demonstrações. Esse resultado foi publicado por R. Swan em 1960 [Swa60] com uma demonstração no contexto geométrico de grupos de Lie. Uma prova álgebrica foi dada por L. Evens em 1963 [Eve63, Thm 3].

A demonstração de Evens se dá através da introdução de uma nova função, chamada de *mapa da norma de Evens*. Tal mapa é uma generalização do mapa *transfer* (também conhecido correstrição), que é definido por meio da indução de módulos. Para o caso do mapa da norma, a indução é substituída pela "indução tensorial" (em inglês, *tensor induction*). Dados $H \leqslant G$ e $t = |G : H|$, o mapa de Evens tem a seguinte aparência (quando n é par):

$$\mathrm{norm}_{H,G} : H^n(H, k) \to H^{tn}(G, k)$$

Os detalhes da construção desse mapa podem ser conferidos no livro de Benson [Ben91b, §4.1] ou no artigo original de Evens. Mesmo assim, com o intuito de fornecer algumas ideias, podemos dizer que um dos ingredientes necessários para defini-lo é o *wreath product*[2] $S_t \wr H$ entre o o grupo t-simétrico S_t e H. Utilizando que existe uma inclusão $i : G \hookrightarrow S_t \wr H$, podemos obter um kG-módulo a partir um kH-módulo.

[2] Não sabemos se existe uma tradução usual desse termo, mas dois possíveis nomes em português seriam produto-grinalda ou produto-minhoca.

Para demonstrarmos o resultado desejado, só necessitamos da seguinte propriedade sobre o mapa da norma.

Lema 3.2.9 (Fórmula de Mackey). *Se G é um grupo finito e $H \leqslant G$ e $\zeta \in H^n(H,k)$, então*

$$(\mathrm{res}_{G,H} \circ \mathrm{norm}_{H,G})(\zeta) = \prod_{HgH} (\mathrm{norm}_{H\cap {}^gH,H} \circ \mathrm{res}_{{}^gH,H\cap {}^gH})(g\zeta),$$

onde ${}^gH = gHg^{-1}$ e HgH percorre representantes das classes bilaterais de H em G

Esboço da demonstração. Veja [Ben91b, Prop. 4.1.2]. □

Um análogo da fórmula acima também existe para o mapa de correstrição [Ben91a, Lemma 3.6.16]. No entanto, ao invés de um produto, há uma soma no lado direito da igualdade, o que nos é algo insuficiente – como poderá se ver na demonstração abaixo.

Esboço da demonstração do teorema 3.2.8. Nos baseamos na demonstração apresentada em [Ben91b, Thm 4.1.3]. Primeiramente, note que basta demonstrar o teorema para o caso em que $H = C_p$ é um subgrupo cíclico de ordem p, pois $\mathrm{res}_{G,C_p} = \mathrm{res}_{H,C_p}\mathrm{res}_{G,H}$. Com isso, podemos garantir a existência de um elemento $\sigma \in H^2(C_p,k)$ que não é nilpotente em $H^*(C_p,k)$, cf. [Ben91a, Cor. 3.5.4]. Além disso, pode-se provar que $\alpha = \sigma^{p-1}$ é invariante por conjugações de elementos de G.

Iremos aplicar a fórmula de Mackey para $H = C_p$ e $\zeta = 1 + \alpha \in H^*(C_p,k)$. Assim, observamos que, para todo $g \in G$,

$$C_p \cap {}^gC_p = \begin{cases} C_p, & \text{se } g \in N_G(C_p) \\ 1, & \text{c.c.} \end{cases},$$

onde $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ é o normalizador de H em G. Com isso, pode-se concluir que

$$\mathrm{res}_{{}^gC_p,C_p\cap {}^gC_p}(g\zeta) = \begin{cases} \zeta, & \text{se } g \in N_G(C_p) \\ 1, & \text{c.c.} \end{cases}.$$

Assim, sendo $|N_G(C_p) : C_p| = p^a s$ com $p \nmid s$, obtemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{G,C_p}\mathrm{norm}_{C_p,G}(1+\alpha) &= \prod_{\substack{C_pgC_p \\ g\in N_G(C_p)}} 1+\alpha \\ &= (1+\alpha)^{p^a s} \\ &= 1 + s\alpha^{p^a} + \ldots + \alpha^{p^a s}. \end{aligned}$$

Logo, conseguimos um elemento não-nulo $s\alpha^{p^a} \in H^{2(p-1)p^a}(C_p,k)$. Substituindo α por α^m com $m = 1,2,\ldots$, obtemos da mesma forma elementos não-nulos de grau $2(p-1)p^a m$ na imagem de res_{G,C_p}. □

Finalmente, podemos provar a propriedade de Han para álgebras de grupos finitos.

Corolário 3.2.10. *Sobre um grupo finito G e um corpo k, temos as seguinte equivalências:*

(1) *A ordem de G não é divisível por* $\operatorname{char}(k)$.

(2) $\operatorname{gl.dim}(kG) = 0$

(3) $\operatorname{gl.dim}(kG) < \infty$

(4) $\operatorname{hh.dim}(kG) = \operatorname{hch.dim}(kG) < \infty$

Demonstração. Primeiramente, devemos notar que kG é uma álgebra simétrica, o que nos diz que $\operatorname{hh.dim}(kG) = \operatorname{hch.dim}(kG)$ (cf. proposição 1.3.19) e que vale (3) $\implies$ (2) (cf. exemplo 1.2.5). Além disso, sabemos do exemplo 2.1.5 que o primeiro item implica que kG é separável. Com isso, valem as implicações (1) $\implies$ (2) e (1) $\implies$ (4). Assim, basta provar as duas implicações abaixo:

(4) $\implies$ (1): Isso é provado pela contrapositiva através dos teoremas desta seção: se $\operatorname{char}(p) > 0$ divide a ordem de G, então $H^n(G, k)(= H^n(C_G(1), k))$ é um somando direto não-nulo de $HH^n(kG)$ para infinitos valores de n. Logo, $\operatorname{hch.dim}(kG) = \infty$.

(2) $\implies$ (1): Esse resultado é a recíproca do teorema de Maschke, o que pode ser provado notando que $J(kG) \neq 0$ quando $\operatorname{char}(k) = p$ divide a ordem de G. De fato, o elemento não-nulo $e = \sum_{g \in G} g$ pertence a $J(kG)$ nesse caso, pois $e^2 = |G|e = 0$. □

3.3 Álgebras Comutativas

A propriedade de Han foi verificada para álgebras comutativas muito antes da própria formulação da conjectura, e isso foi feito num mundo consideravelmente maior do que o de álgebras de dimensão finita. Como veremos abaixo, ela segue das caracterizações de álgebras suaves obtidas por Avramov e Vigué-Poirrier [AV92] e, independentemente, pelo BACH (The Buenos Aires Cyclic Homology Group) [BAC94].

Teorema 3.3.1. *Seja k um corpo perfeito. Sobre uma k-álgebra comutativa A essencialmente finitamente gerada, são equivalentes:*

(1) $\operatorname{gl.dim}(A) < \infty$.

(2) *A é suave sobre k.*

(3) $\operatorname{hh.dim}(A) < \infty$.

(4) $\operatorname{hch.dim}(A) < \infty$.

No caso em que A tem dimensão finita, também temos a equivalência:

(5) $\operatorname{gl.dim}(A) = 0$.

Demonstração. Da proposição 2.2.11, sabemos que $\operatorname{gl.dim}(A)$ é finito se, e somente se, A é regular, o que é equivalente ao fato de A ser suave quando k é perfeito.

As equivalências entre A ser suave e as dimensões da (co)homologia de Hochschild serem finitas são consequência das caracterizações (7) e (9) no teorema 2.3.9.

Agora, vejamos a última equivalência. Para isso, lembre que $\mathrm{gl.dim}(A) = \dim_{Krull}(A)$ quando A é regular, cf. teorema 2.2.10. Assim, a implicação (1) $\Longrightarrow$ (5) segue do fato de a dimensão de Krull ser igual a zero para todo anel artiniano (e, em particular, para toda álgebra de dimensão finita). $\square$

O seguinte exemplo de Nagata mostra que uma álgebra noetheriana suave A pode satisfazer $\mathrm{hh.dim}(A) = \infty = \mathrm{gl.dim}(A)$ quando ela for infinitamente gerada. Desse modo, apesar de a implicação (2) $\Longrightarrow$ (3) não ser válida, não podemos descartar a validade da propriedade de Han para álgebras noetherianas em geral.

Exemplo 3.3.2. [Nag62, p. 203] Seja $A = k[x_1, x_2, \ldots]$ para algum corpo k e tome $\cup_{i=1}^{\infty} I_i$ uma partição do conjunto dos naturais positivos de modo que I_i seja finito e $|I_i| < |I_{i+1}|$ para todo i. Agora, denote por $\mathfrak{p}_i \subset A$ o ideal primo gerado por $\{x_j : j \in I_i\}$, o que nos fornece o conjunto multiplicativo $S = R \setminus \cup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i$. Com isso, a álgebra que desejamos é definida pela localização $R = S^{-1}A$. Note que R é um domínio de integridade, pois A o é. Para notar que R é noetheriana, confira o texto de Nagata. Aqui, focaremos em provar que R é regular.

Primeiramente, repare que todo ideal maximal de R é da forma $\mathfrak{p}_i R$. Isso segue do fato de que um elemento $r \in R$ pertence a um ideal maximal se, e somente se, ele não for inversível. Nesse caso, isso significa que $r \in \mathfrak{p}_i$ para algum i. Além disso, das inclusões $S \subset A \setminus \mathfrak{p}_i$ e $\{x_j : j \notin I_i\} \subset A \setminus \mathfrak{p}_i$, temos que

$$R_{\mathfrak{p}_i R} \cong A_{\mathfrak{p}_i} \cong K_i[x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}]_{\mathfrak{m}_0},$$

onde K_i é o corpo de frações $k(x_j : j \notin I_i)$, $I_i = \{i_1, \ldots, i_n\}$ e $\mathfrak{m}_0$ é o ideal maximal gerado por $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$. Como o anel local acima é regular — geometricamente, isso significa dizer que o espaço afim $\mathbb{A}^n_{K_i}$ é regular em 0 —, podemos concluir, como desejado, que $R_\mathfrak{m}$ é regular para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$. Utilizando o isomorfismo acima, podemos concluir ainda que

$$\mathrm{gl.dim}(R) = \dim_{Krull}(R) \geqslant \sup_i \{\dim_{Krull}(A_{\mathfrak{p}_i})\} = \sup_i |I_i| = \infty.$$

Além disso, vale que R é suave sobre k, pois R é uma localização da álgebra suave $k[x_1, x_2, \cdots]$. Para provar que $\mathrm{hh.dim}(R) = \infty$, basta lembrar que $HH_n(S^{-1}A) \cong S^{-1}HH_*(A)$ e utilizar o item 3. dos exemplos 1.3.15 com $V = \oplus_{n \in \mathbb{N}} k$.

Observação 3.3.3. Pelo teorema 2.2.10, também podemos concluir que o exemplo R acima satisfaz $\mathrm{findim}(R) = \infty$. Isso nos diz que a conjectura finitista não é válida para domínios noetherianos em geral. Já foi mostrado, também, que existem anéis semiprimários que não satisfazem essa conjectura [KK90].

3.4 Quocientes de álgebras de caminhos

Nesta longa seção, buscamos sintetizar alguns dos principais resultados que concernem a homologia de Hochschild de certos quocientes kQ/I de álgebras de caminhos. Começaremos com os casos mais simples em que $I = 0$ e em que a aljava Q não possui ciclos. Em seguida, apresentaremos a computação da homologia de álgebras truncadas em termos de características da aljava. Utilizando isso, poderemos verificar a propriedade de Han para essas álgebras e, mais geralmente, para álgebras monomiais. Ao final, apresentaremos outros exemplos que satisfazem a propriedade de Han e que foram provados por P. Bergh e D. Madsen a partir de técnicas em termos de aljavas. Para detalhes sobre a teoria de álgebras de caminhos e representações de aljavas, recomendamos os substanciais livros de Kirillov Jr [Kir16] e de Assem, Skowronski e Simson [ASS06].

Suposições: Nesta seção, assumimos que toda aljava possui finitos vértices e finitas flechas.

Uma aljava é simplesmente um grafo orientado no qual são permitidos laços e mais de uma flecha entre dois vértices. A seguir, apresentaremos sua definição formal principalmente com o intuito de introduzirmos as notações que serão usadas ao longo da seção.

Definição 3.4.1. Uma *aljava* (em inglês, *quiver*) é um par de conjuntos $Q = (Q_0, Q_1)$ munido de duas funções $s, t : Q_1 \to Q_0$. Os elementos de Q_0 são chamados de *vértices* e os de Q_1 de *flechas*. As funções s, t determinam o início (s abrevia *start* ou *source*) e o término (ou *target*) de cada flecha.

A partir de uma aljava Q, podemos construir sua *álgebra de caminhos* kQ do seguinte modo: sendo kQ_0 e kQ_1 os k-módulos livres gerados por Q_0 e Q_1, defina uma estrutura de kQ_0-bimódulo em kQ_1 por meio das seguintes ações:

$$e \cdot a = \begin{cases} a, & \text{se } s(a) = e \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \qquad a \cdot f = \begin{cases} a, & \text{se } t(a) = f \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases},$$

onde $e, f \in Q_0$ e $a \in Q_1$. Assim, kQ pode ser definida como a álgebra tensorial de kQ_1 sobre kQ_0, isto é,

$$kQ = T_{kQ_0}(kQ_1) = kQ_0 \oplus kQ_1 \oplus (kQ_1 \otimes_{kQ_0} kQ_1) \oplus \dots .$$

Desse modo, a álgebra kQ tem como k-base as concatenações de flechas, que são chamadas de *caminhos*. Quando dois caminhos puderem ser concatenados (i.e. o término de um é o início do outro), então o produto deles é dado pela concatenação; caso eles não possam, então seu produto é igual a 0. Repare que tal álgebra é graduada pelo comprimento de caminhos, i.e. o número de concatenações de flechas. Assim, o conjunto dos caminhos de comprimento j será denotado por Q_j. A unidade em kQ é dada pela soma dos vértices: $1_{kQ} = \sum_{e \in Q_0} e$. Repare que essa unidade só existe quando Q_0 é finito.

Definição 3.4.2. Um *ciclo orientado* em uma aljava Q é um caminho de comprimento positivo cujos vértices inicial e final coincidem. Se tal caminho for apenas uma flecha, então o chamaremos de *laço* (em inglês, *loop*). O conjunto dos ciclos orientados de uma aljava Q será denotado por Q^{cic}

Em geral, a presença de ciclos em uma aljava torna a álgebra de caminhos mais complexa. Por exemplo, kQ é finitamente gerado como k-módulo se, e somente se, sua aljava não possui ciclos orientados.

Álgebras de caminho são de extrema importância no contexto da conjectura de Han, pois o teorema a seguir nos diz que essencialmente ela só precisa ser provada para quocientes de álgebras de caminhos. Por conta disso, muitos autores, como Y. Han e D. Happel, focam seu estudo apenas em álgebras desse tipo.

Teorema 3.4.3. *Assuma que k é um corpo perfeito. Toda k-álgebra de dimensão finita é Morita-equivalente a um quociente (admissível) de uma álgebra de caminhos kQ/I.*

Demonstração. Isso segue de dois fatos:

- Toda álgebra de dimensão finita é Morita-equivalente a uma álgebra básica, cf. exemplo 1.1.26.
- Toda álgebra básica de dimensão finita é isomorfa a um quociente admissível de um álgebra de caminhos.

Sobre um corpo algebricamente fechado, o segundo item é resultado bem conhecido de P. Gabriel, veja [ASS06, §II.3]. Um panorama da demonstração sobre um corpo perfeito pode ser encontrado em [Ben91a, Cor. 4.1.11]. Para uma abordagem mais detalhada, veja [Ber11, Thm 3.12], onde as provas são executadas através da noção de "espécies". □

Agora, começaremos a realizar as computações da homologia de Hochschild. Primeiramente, vejamos o caso onde não há relações.

Proposição 3.4.4. *Sendo k um anel comutativo e Q uma aljava, temos que*

$$HH_n(kQ) \cong \begin{cases} kQ_0 \oplus k(Q^{cic}/C_*), & n = 0, \\ k(Q^{cic}/C_*), & n = 1, , \\ 0, & n \geqslant 2 \end{cases}$$

onde denotamos por Q^{cic}/C_* o conjunto dos ciclos orientados de Q a menos de rotação, isto é, é o conjunto das classes de equivalência dos ciclos $a_1 \cdots a_n$ de Q pela relação $a_1 \cdots a_n \sim a_n a_1 \cdots a_{n-1}$.

Esboço da demonstração. Lembrando do cálculo da homologia de álgebras tensoriais no exemplo 1.3.15, temos que $HH_n(kQ) = 0$ para todo $n \geqslant 2$ e, sendo σ_j a permutação cíclica das flechas de Q_j $\sigma_j(a_1 \ldots a_j) = a_j a_1 \ldots a_{j-1}$, temos que

$$HH_0(kQ) = kQ_0 \oplus \oplus_{j=1}^{\infty} kQ_j/(1-\sigma_j) \cdot kQ_j$$
$$HH_1(kQ) = \oplus_{j=1}^{\infty} \ker((1-\sigma_j) : \ kQ_j \to kQ_j)$$

Da definição de Q^{cic}/C_*, já temos o desejado para a homologia de grau zero, pois $k(Q_j^{cic}/C_*) \cong kQ_j/(id - \sigma_j)(kQ_j)$.

Para obtermos a homologia em grau 1, em primeiro lugar, repare que, se α é um caminho que não é um ciclo, então $\sigma_j(\alpha) = 0$. Assim, $HH_1(kQ)$ é gerado por possíveis combinações lineares de ciclos orientados. Agora, repare que elementos da forma $\alpha^\sigma = (\alpha + \sigma\alpha + \cdots + \sigma^{j-1}\alpha)$, onde $\alpha \in Q_j^{cic}$, pertencem a $\ker(1-\sigma)$, pois $(1-\sigma)(1+\sigma+\cdots+\sigma^{j-1}) = 1-\sigma^j = 0$. Mais ainda, utilizando que os caminhos formam um conjunto l.i. de kQ, pode-se ver que tais elementos geram todo o $\ker(1-\sigma)$. Finalmente, tais geradores são iguais após realizamos uma rotação de α, ou seja: $\alpha^\sigma = \beta^\sigma \iff \alpha = \sigma^i\beta$. Logo, obtemos o isomorfismo desejado: $\ker(1-\sigma_j) \cong k(Q_j^{cic}/C_*)$. □

Como pode-se notar acima, a homologia de kQ é concentrada em grau zero quando Q não possui ciclos orientados. Agora, veremos que, com essa hipótese, as características homológicas de qualquer quociente kQ/I são consideravelmente simples.

Proposição 3.4.5. [ENN56, Thm 8] *Se R é uma anel hereditário semi-primário e $I \subseteq R$ é um ideal bilateral, então* $\mathrm{gl.dim}(R/I) < \infty$*. Em particular, se Q é uma aljava sem ciclos orientados, então* $\mathrm{gl.dim}(kQ/I) < \infty$ *para todo ideal I de kQ.*

Anéis semi-primários com a propriedade acima foram caracterizados por Chase [Cha61, Thm 4.1] lhes dando o nome de anéis *triangulares*.

Pelo resultado acima e o teorema de Keller 3.1.7, já podemos concluir que $\mathrm{hh.dim}(kQ/I) = 0$ quando Q não tem ciclos orientados. No entanto, historicamente esse foi um resultado anterior e, possivelmente, uma motivação para B. Keller obter seu teorema. Levando em conta, também, que a demonstração de C. Cibils desse caso particular é instrutiva e elementar, iremos realizá-la a seguir. Diferentemente das computações usuais, que utilizam uma resolução projetiva adequada de A e calculam a homologia através do funtor Tor, esta prova é feita diretamente a partir do complexo-padrão de Hochschild.

Teorema 3.4.6. [Cib86] *Sejam k um corpo, Q uma aljava sem ciclos orientados e I um ideal de kQ tal que $I \subseteq kQ_{\geqslant 1}$. Vale que*

$$HH_n(kQ/I) = \begin{cases} k^{Q_0}, & n = 0, \\ 0, & n > 0 \end{cases}.$$

Demonstração. O nosso objetivo será encontrar uma soma direta para o complexo de Hochschild de $A = kQ/I$

$$(A^{\otimes n}, b)_{n\geqslant 1} = (A_0^n, b)_{n\geqslant 1} \oplus (C_n, b)_{n\geqslant 1}$$

de tal modo que o primeiro somando seja isomorfo ao complexo de k^{Q_0} e o segundo possua homologia nula (i.e. seja uma sequência exata).

Para definir tais subcomplexos, tome B um subconjunto dos caminhos de kQ que induz uma base em kQ/I como k-espaço vetorial. Note que a hipótese $I \subseteq kQ_{\geqslant 1}$ nos garante que $Q_0 \subseteq B$. Com isso, denote por A_0^n o subespaço de $A^{\otimes n}$ gerado pela base $\Delta Q_0^n = \{e \otimes \ldots \otimes e \mid e \in Q_0\}$ e por C_n o subespaço complementar gerado por $D^n = B^{\otimes n} \setminus \Delta Q_0^n$.

Não é difícil de verificar que (A_0^n, b) é um subcomplexo de $(A^{\otimes n}, b)_n$ isomorfo à soma direta de $|Q_0|$ complexos de Hochschild de k. Desse modo, só nos resta verificar que (C_n, b) é um subcomplexo acíclico de $(A^{\otimes n}, b)_n$.

Primeiramente, tenhamos em mente o seguinte:

Lema 3.4.7. *Escrevendo um caminho a em kQ/I como $a = \sum_{b\in B} \lambda_b b$, vale que $s(a) = s(b)$ e $t(a) = t(b)$ sempre que $\lambda_b \neq 0$.*

Demonstração. Isso segue das igualdades dentro do quociente kQ/I

$$\sum_{b\in B} \lambda_b b = a = s(a)\cdot a \cdot t(a) = \sum_{b\in B} \lambda_b (s(a)\cdot b\cdot t(a))$$

e do fato de B ser uma base de kQ/I. □

Agora, verifiquemos que (C_n, b) é um subcomplexo. Para tanto, basta provar que $b(C_n) \subseteq C_{n-1}$ para todo $n \geqslant 1$. Tomando um elemento $a = a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$ na base D^n, lembre que um modo de escrever b é dado por

$$b(a) = a_2 \otimes \ldots \otimes a_n a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n.$$

Vejamos que cada termo da soma alternada de $b(a)$ pertence a C_n a partir de dois casos:

i. Para algum a_i, vale $a_i \notin Q_0$: assuma, por absurdo, que algum termo de $b(a)$ não pertence a C_n. Assim, a projeção de $a_i a_{i+1}$ ou de $a_{i-1}a_i$ em kQ_0 é não-nula. Ou seja, escrevendo $a_i a_{i+1} = \sum_{b\in B} \lambda_b b (\mathrm{mod} I)$ em termos da base B, temos que $\lambda_e \neq 0$ para algum $e \in Q_0$. Com isso, concluímos pelo lema acima que $s(a_i) = s(e) = t(e) = t(a_{i+1})$, o que contradiz o fato de Q não possuir ciclos orientados.

ii. Todo a_i pertence a Q_0: nesse caso, existem i e j tal que $a_i \neq a_j$ e vale que cada termo de $b(x)$ será nulo ou da forma $\cdots a_i \otimes \cdots \otimes a_j \cdots$.

Por último, iremos verificar que (C_n, b) é uma sequência exata através de uma homotopia explícita $h: C_n \to C_{n+1}$. Para defini-la, tome $a = a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \in D^n$ e note que, como $a_1 \ldots a_n$ não é um ciclo orientado, então a é de um dos tipos abaixo:

Tipo I: Se $t(a_n) \neq s(a_1)$, defina $h(a) = -s(a_1) \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$.

Tipo II: Se $t(a_n) = s(a_1)$ (e, portanto, $a_1 \ldots a_n = 0$), fixe r o menor índice tal que $t(a_r) \neq s(a_{r+1})$ e defina

$$h(a) = (-1)^{r+1} a_1 \otimes \ldots a_r \otimes s(a_{r+1}) \otimes a_{r+1} \otimes \ldots \otimes a_n.$$

Queremos checar que $hb + bh = 1$. Começando com o caso em que a é do tipo I, temos que

$$\begin{aligned} bh(a) &= 0 + a_1 \otimes \ldots a_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i s(a_1) \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n \\ b(a) &= 0 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n \end{aligned}$$

Notando que cada um dos somandos de $b(a)$ também é do tipo I (para o caso $i = 0$, use o lema 3.4.7) e usando que $h(a_1 \otimes \ldots a_i a_{i+1} \ldots \otimes a_n) = -s(a_1) \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \ldots \otimes a_n$, podemos concluir que $hb(a) + bh(a) = a$.

Em seguida, assuma que a é do tipo II com $r = 1$, i.e. $t(a_1) \neq s(a_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} bh(a) =& s(a_2) \otimes \cdots \otimes a_n a_1 - 0 + a_1 \otimes \cdots \otimes a_n + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{i+1} a_1 \otimes s(a_2) \otimes \cdots a_i a_{i+1} \cdots \otimes a_n \\ b(a) =& a_2 \otimes \cdots \otimes a_n a_1 - 0 + \sum_{i=2}^{n-1} a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \end{aligned}$$

O primeiro somando de $b(a) \in C_{n-1}$ é do tipo I e todos os outros são do tipo II com $r = 1$, então obtemos como desejado que

$$hb(a) = -s(a_2) \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n a_1 + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_1 \otimes s(a_2) \otimes \cdots a_i a_{i+1} \cdots \otimes a_n$$

Por fim, consideremos o caso em que a é do tipo II e $r \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} bh(a) =& (-1)^{r+1} a_2 \otimes \cdots a_r \otimes s(a_{r+1}) \otimes a_{r+1} \otimes \cdots \otimes a_n a_1 \\ &+ \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^i (-1)^{r+1} a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes s(a_{r+1}) \otimes a_{r+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ &+ 0 + (-1)^{2(r+1)} a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \\ &+ \sum_{i=r+1}^{n-1} (-1)^{i+1} (-1)^{r+1} a_1 \otimes \cdots \otimes s(a_{r+1}) \otimes a_{r+1} \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \end{aligned}$$

Notando que cada somando de $b(a)$ é do tipo II, obtemos que

$$\begin{aligned} hb(a) =& (-1)^r a_2 \otimes \cdots \otimes a_r \otimes s(a_{r+1}) \otimes a_{r+1} \otimes \cdots \otimes a_n a_1 \\ &+ \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^{r+i} a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \cdots \otimes s(a_{r+1}) \otimes a_{r+1} \otimes \cdots \otimes a_n + 0 \\ &+ \sum_{i=r+1}^{n-1} (-1)^i (-1)^{r+1} a_1 \otimes \cdots \otimes s(a_{r+1}) \otimes a_{r+1} \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \end{aligned}$$

Desse modo, somando os termos $bh(a)$ e $hb(a)$, cancelamos todos os termos com exceção de $(-1)^{2(r+1)} a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$. Finalizamos, assim, a prova de que $hb + bh = 1$. □

Álgebras Truncadas e Monomiais

Nosso objetivo, agora, está em provar a propriedade de Han para as duas classes de álgebras definidas abaixo.

Definição 3.4.8. Uma álgebra A é *monomial* se $A = kQ/I$ é para algum ideal I gerado por caminhos de comprimento $\geqslant 2$. Dizemos que A é *truncada* se $I = R_Q^t$ para algum $t \geqslant 2$.

A seguir, iremos realizar a computação de E. Sköldberg (1999) da homologia de Hochschild de álgebras truncadas. Para começar, precisamos de uma resolução projetiva conveniente.

Lema 3.4.9. [Sko99, Thm 1] *Dada uma álgebra truncada* $A = kQ/R_Q^t$ *e utilizando a notação* $\Gamma^{(n)} = \begin{cases} kQ_{jt}, \text{ se } n = 2j \\ kQ_{jt+1}, \text{ se } n = 2j+1 \end{cases}$*, temos a seguinte de resolução projetiva de* A *como* A*-bimódulo:*

$$\cdots \xrightarrow{d_2} A \otimes_{kQ_0} \Gamma^{(1)} \otimes_{kQ_0} A \xrightarrow{d_1} A \otimes_{kQ_0} \Gamma^{(0)} \otimes_{kQ_0} A \xrightarrow{\epsilon} A \to 0,$$

onde os mapas são definidos por $\epsilon(\alpha \otimes e \otimes \beta) = \alpha e \beta$ *e*

$$\begin{aligned} d_{2j}(\alpha \otimes a_1 \cdots a_{jt} \otimes \beta) &= \sum_{i=1}^{t-1} \alpha a_1 \cdots a_{i-1} \otimes a_i \cdots a_{(j-1)t+i} \otimes a_{(j-1)t+i+1} \cdots a_{jt}\beta \\ &\quad + \alpha a_1 \cdots a_{t-1} \otimes a_n \cdots a_{jt} \otimes \beta \\ d_{2j+1}(\alpha \otimes a_1 \cdots a_{jt+1} \otimes \beta) &= \alpha a_1 \otimes a_2 \cdots a_{jt+1} \otimes \beta - \alpha a_1 \otimes a_2 \cdots a_{jt} \otimes a_{jt+1}\beta \end{aligned}$$

Para os cálculos abaixo, fixemos uma álgebra truncada $A = kQ/(R_Q)^t$. A inspiração para a construção da resolução acima está em aplicar o tensor $- \otimes_{kQ_0} A$ em uma resolução projetiva de kQ_0 obtida por Anick e Green [AG87, Thm 2.7]. Note que $A \otimes_{kQ_0} \Gamma^{(n)} \otimes_{kQ_0} A$ é, de fato, A^e-projetivo, pois temos os isomorfismos

$$A \otimes_{kQ_0} \Gamma^{(n)} \otimes_{kQ_0} A \cong \oplus_\gamma (A \otimes_{kQ_0} \gamma \otimes_{kQ_0} A) \cong \oplus_\gamma (As(\gamma) \otimes_k t(\gamma)A) \cong \oplus_\gamma (A \otimes A^{op}) \cdot (s(\gamma) \otimes t(\gamma)).$$

Assim, tal módulo é, de fato, um somando direto de $A^e = \bigoplus_{e,f \in Q_0} (A \otimes A^{op}) \cdot (e \otimes f)$.

Uma conta direta nos mostra que $d_i d_{i-1} = 0$ para todo i, isto é, que a sequência acima é um complexo. Para provar a exatidão, Sköldberg utiliza um argumento por sequências espectrais que não será reproduzido aqui.

Notação: No que segue durante a computação de A, utilizaremos letras gregas α, β, δ para denotar caminhos de Q, enquanto que γ será utilizada para se referir especificamente aos elementos de $\Gamma^{(*)}$. As flechas de Q serão denotadas por a_i's.

Desse modo, podemos calcular $HH_n(A) = \mathrm{Tor}_n^{A^e}(A, A)$ por meio da homologia do complexo (K_*^A, ∂) abaixo

$$K_n^A = K_n = A \otimes_{A^e} (A \otimes_{kQ_0} \Gamma^{(n)} \otimes_{kQ_0} A) \cong A \otimes_{A^e} (A^e \otimes_{kQ_0^e} \Gamma^{(n)}) \cong A \otimes_{kQ_0^e} \Gamma^{(n)}$$

onde o isomorfismo é dados por $\delta \otimes_{A^e} \alpha \otimes \gamma \otimes \beta \mapsto \beta\delta\alpha \otimes \gamma$. Acompanhando os isomorfismos, obtemos que $\partial = 1 \otimes_{A^e} d$ satisfaz

$$\begin{aligned} \partial_{2j}(\alpha \otimes a_1 \dots a_{jt}) &= \sum_{i=1}^{t} a_{(j-1)t+i+1} \dots a_{jt}\alpha a_1 \dots a_{i-1} \otimes a_i \dots a_{(j-1)t+i} \\ \partial_{2j+1}(\alpha \otimes a_1 \dots a_{jt+1}) &= \alpha a_1 \otimes a_2 \dots a_{jt+1} - a_{jt+1}\alpha \otimes a_2 \dots a_{jt} \end{aligned}$$

Com o intuito de facilitar as contas, iremos encontrar uma decomposição do complexo K_*. Para tanto, note que temos um subcomplexo definido por

$$K_{n,q} = \langle \alpha \otimes \gamma \in K_n \mid \alpha\gamma \text{ tem comprimento } q \text{ em } Q \rangle$$

nos fornecendo a soma direta $(K_*, \partial) = \oplus_{q\geqslant 0}(K_{*,q}, \partial)$. A seguir, veremos que podemos identificar tais termos com os ciclos de Q.

Lema 3.4.10. *Dada $A = kQ/(R_Q)^t$, a função $K_{n,q} \to kQ_q$ definida por $\alpha \otimes \gamma \mapsto \alpha\gamma$ nos fornece os seguintes isomorfismos de k-módulos:*

$$K_{2j,q} \cong \begin{cases} kQ_q^{cic}, & se\ jt \leqslant q < (j+1)t \\ 0, & c.c. \end{cases} \qquad K_{2j+1,q} \cong \begin{cases} kQ_q^{cic}, & se\ jt < q \leqslant (j+1)t \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Demonstração. $K_{2j,q}$ é gerado por elementos da forma $\alpha \otimes_{kQ_0^e} \gamma$ com $\alpha = a_1 \dots a_k$ e $\gamma = a_{k+1} \dots a_{k+jt}$ para algum k satisfazendo $k + jt = q$. Como o tensor é sobre kQ_0^e, temos que

$$\alpha \otimes_{kQ_0^e} \gamma = s(\alpha)\alpha t(\alpha) \otimes_{kQ_0^e} \gamma = \alpha \otimes_{kQ_0^e} t(\alpha)\gamma s(\alpha)$$

Assim, para que tal elemento seja diferente de zero, é necessário assumir que $t(a_i) = s(a_{i+1})$ para todo i e que $t(a_q) = s(a_1)$. Além disso, k deve ser menor que t para que $\alpha \notin (R_Q)^t$.

Com isso, pode-se concluir que a função $\alpha \otimes \gamma \mapsto \alpha\gamma$ é injetora com imagem em kQ_q^{cic} sempre que $0 \leqslant k < t$ e é nula caso contrário. A prova para $K_{2j+1,q}$ é análoga. □

Para esmiuçar ainda mais a decomposição, podemos notar que o mapa ∂ atua sobre $\delta \in kQ_q^{cic}$ por meio de uma permutação cíclica das flechas que compõem δ. Desse modo, relembrando a ação de C_q em Q_q^{cic} dada por $\sigma \cdot (a_1 \dots a_q) = a_q a_1 \dots a_{q-1}$ podemos notar que o complexo $(K_{*,q}, \partial)$ é graduado por Q_q^{cic}/C_q, o conjunto das órbitas de Q_q^{cic}. Ou seja,

$$(K_{*,q}, \partial) = \bigoplus_{\hat{\delta} \in Q_q^{cic}/C_q} (K_{*,\hat{\delta}}, \partial)$$

onde $K_{n,\hat{\delta}}$ é o k-submódulo de kQ_q^{cic} que tem como base a órbita de δ, i.e. $\{\sigma \cdot \delta \mid \sigma \in C_q\}$.

Definição 3.4.11. Um ciclo δ é dito *próprio*[3] se não é possível escrevê-lo como uma potência $\delta = \alpha^i$, com $i \geqslant 2$, de um ciclo α. O conjunto dos ciclos próprios de uma aljava Q é denotado por $Q^{cic.p}$.

Se escrevermos um ciclo como $\delta = a_1 \dots a_q = (a_1 \dots a_r)^{q/r}$ de modo que $a_1 \dots a_r$ seja um ciclo próprio, podemos identificar $K_{n,\hat{\delta}}$ com $k[C_r]$ através do isomorfismo de k-módulos $\sigma^i\delta \mapsto \sigma^i$, onde σ é um gerador de C_r. Por esse ponto de vista, os mapas ∂_{2j} e ∂_{2j+1} passam a ser dados, respectivamente, pela multiplicação por $(1 + \sigma + \dots + \sigma^{t-1})$ e por $1 - \sigma$.

Tendo isso em mente, iremos finalmente calcular a homologia $HH_{n,q}(A) = H_n(K_{*,q}, \partial)$ para um q fixado. Fixe uma escrita de $\delta \in Q_q^{cic}/C_q$ como acima. Realizaremos o cálculo através de dois casos.

Caso 1: q não é múltiplo de t. Escrevendo $q = jt + e$ com $0 < e < t$, sabemos pelo lema 3.4.10 que o complexo $(K_{*,\hat{\delta}}, \partial)$ está concentrado nos graus $(2j+1)$ e $2j$ e, portanto, possui a seguinte forma:

$$0 \to K_{2j+1,\hat{\delta}} = k[C_r] \xrightarrow{1-\sigma} k[C_r] = K_{2j,\hat{\delta}} \to 0$$

[3] Tais ciclos são chamados de básicos por Skoldberg [Sko99, p. 90]. Decidimos seguir a terminologia de Han [Han06, p. 663].

Assim, pela mesma ideia da demonstração da proposição 3.4.4, obtemos que $H_{2j+1}(K_{*,\hat{\delta}}, \partial) = \ker(1-\sigma) \cong k$ e que $H_{2j}(K_{*,\hat{\delta}}, \partial) = \operatorname{coker}(1-\sigma) \cong k$. Logo:

$$HH_{2j+1,q}(A) \cong \bigoplus_{\hat{\delta} \in Q_q^{cic}/C_q} H_{2j+1}(K_{*,\hat{\delta}}, \partial) \cong k^{\oplus |Q_q^{cic}/C_q|} \cong HH_{2j,q}(A).$$

e os outros graus de homologia são nulos.

Caso 2: q é múltiplo de t. Escrevendo $q = jt$, sabemos pelo lema 3.4.10 que o complexo $(K_{*,\hat{\delta}}, \partial)$ está concentrado nos graus $2j$ e $(2j-1)$ e, portanto, possui a seguinte forma:

$$0 \to K_{2j,\hat{\delta}} = k[C_r] \xrightarrow{1+\sigma+\cdots+\sigma^{t-1}} k[C_r] = K_{2j-1,\hat{\delta}} \to 0$$

De acordo com [Sko99, Lemma 1] e utilizando a notação $(t,r) = \mathrm{mdc(t,r)}$, conclui-se que

$$\begin{aligned} H_{2j}(K_{*,\hat{\delta}}, \partial) &= \ker(1+\sigma+\ldots+\sigma^{t-1}) \cong k^{(t,r)-1} \oplus \ker\left(-\cdot\frac{t}{(t,r)} : k \to k\right) \\ H_{2j-1}(K_{*,\hat{\delta}}, \partial) &= \operatorname{coker}(1+\sigma+\ldots+\sigma^{t-1}) \cong k^{(t,r)-1} \oplus \operatorname{coker}\left(-\cdot\frac{t}{(t,r)} : k \to k\right). \end{aligned}$$

Como pode-se notar, os termos acima dependem de r. Desse modo, utilizaremos na soma direta abaixo que os ciclos em Q_q^{cic}/C_q estão em correspondência com os ciclos próprios de tamanho r em Q_r^c/C_r para algum r que divida q. Logo, com a notação $b_r = |Q_r^{cic.p}/C_r|$, concluímos que

$$\begin{aligned} HH_{2j,q}(A) &\cong \bigoplus_{\hat{\delta} \in Q_q^{cic}/C_q} H_{2j}(K_{*,\hat{\delta}}, \partial) \cong \bigoplus_{r|q} \left(k^{(t,r)-1} \oplus \ker\left(-\cdot\frac{t}{(t,r)} : k \to k\right)\right)^{b_r} \\ HH_{2j-1,q}(A) &\cong \bigoplus_{\hat{\delta} \in Q_q^{cic}/C_q} H_{2j-1}(K_{*,\hat{\delta}}, \partial) \cong \bigoplus_{r|q} \left(k^{(t,r)-1} \oplus \operatorname{coker}\left(-\cdot\frac{t}{(t,r)} : k \to k\right)\right)^{b_r} \end{aligned}$$

e os outros graus de homologia são nulos.

Assim, temos finalizado a computação da homologia de uma álgebra truncada geral e podemos sintetizar nossas contas por meio do teorema abaixo.

Teorema 3.4.12. [Sko99, Thm 2] *Seja $A = kQ/(R_Q)^t$ uma álgebra truncada e $q = jt + e$ com $0 \leqslant e < t$. A homologia de Hochschild de A é dada por $HH_n(A) = \oplus_{q \geqslant 0} HH_{n,q}(A)$ com*

$$HH_{n,q}(A) \cong \begin{cases} kQ_0, & se\ n = q = 0 \\ k^{a_q}, & se\ e > 0\ e\ 2j \leqslant n \leqslant 2j+1 \\ \bigoplus_{r|q} \left(k^{(t,r)-1} \oplus \operatorname{coker}(-\cdot \dfrac{t}{(t,r)} : k \to k)\right)^{b_r}, & se\ e = 0\ e\ n = 2j-1 > 0 \\ \bigoplus_{r|q} \left(k^{(t,r)-1} \oplus \ker(-\cdot \dfrac{t}{(t,r)} : k \to k)\right)^{b_r}, & se\ e = 0\ e\ n = 2j > 0 \\ 0, & c.c. \end{cases},$$

onde $(t,r) = \mathrm{mdc(t,r)}$, $a_q = |Q_q^{cic}/C_q|$ *e* $b_r = |Q_r^{cic.p}/C_r|$.

Repare que temos os seguintes critérios para que o cálculo da homologia no caso $e = 0$ seja levemente simplificado:

- Se k é livre de torção como $\mathbb{Z}$-módulo ou $\frac{t}{(t,r)}$ é invertível em k, então $\ker(- \cdot \frac{t}{(t,r)} : k \to k) = 0$.
- $\operatorname{coker}(- \cdot \frac{t}{(t,r)} : k \to k) = 0$ se, e somente se, $\frac{t}{(t,r)}$ é invertível em k.

Agora, aplicaremos o teorema para o caso de ciclos básicos, isto é, aljavas que tem a aparência abaixo

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl] & l \arrow[l] & \\
2 \arrow[dr] & & & l-1 \arrow[ul] \\
 & 3 \arrow[r, dashed, no head] & l-2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Usando a nomenclatura de diagramas de Dynkin, essas aljavas correspondem à aljava $\widehat{A_{l-1}}$ com todas as flechas orientadas no mesmo sentido.

Definição 3.4.13. Um ciclo $a_1 \dots a_k$ é dito *básico* se os vértices $s(a_1), \dots, s(a_k)$ são todos distintos entre si.

Note que todo ciclo básico é próprio, mas a recíproca não é verdadeira. De fato, podemos encontrar ciclos próprios com autointerseções, por exemplo, na aljava formada por um vértice e dois laços.

Corolário 3.4.14. *Sejam k um corpo e $A = kQ/(R_Q)^t$ uma álgebra truncada com Q um ciclo básico de comprimento l. Usando a notação $a(j,l,t) = \left\lfloor \frac{jt+t-1}{l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{jt}{l} \right\rfloor$ para $j \geqslant 0$, temos que*

$$\dim_k(HH_{2j}(A)) = \begin{cases} l + \left\lfloor \dfrac{t-1}{l} \right\rfloor, & se\ j = 0 \\ a(j,l,t), & se\ (j \geqslant 1) \wedge (l \nmid jt) \\ a(j,l,t) + (t,l) - 1, & se\ (j \geqslant 1) \wedge (l \mid jt) \wedge \left(\operatorname{char}(k) \nmid \dfrac{t}{(t,l)}\right) \\ a(j,l,t) + (t,l), & se\ (j \geqslant 1) \wedge (l \mid jt) \wedge \left(\operatorname{char}(k) \mid \dfrac{t}{(t,l)}\right) \end{cases}$$

$$\dim_k(HH_{2j+1}(A)) = \begin{cases} a(j,l,t), & se\ l \nmid (j+1)t \\ a(j,l,t) + (t,l) - 1, & se\ (l \mid (j+1)t) \wedge \left(\operatorname{char}(k) \nmid \dfrac{t}{(t,l)}\right) \\ a(j,l,t) + (t,l), & se\ (l \mid (j+1)t) \wedge \left(\operatorname{char}(k) \mid \dfrac{t}{(t,l)}\right) \end{cases}$$

onde $(t,l) = \operatorname{mdc}(t,l)$ e $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de $x \geqslant 0$.

Demonstração. Primeiramente, repare que do fato de Q possuir apenas um ciclo próprio segue que

$$a_q = \begin{cases} 1, & \text{se } l \mid q \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \qquad b_r = \begin{cases} 1, & \text{se } r = l \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}.$$

Com isso, temos a igualdade $\sum_{q=1}^{m} a_q = \lfloor \frac{m}{l} \rfloor$ para todo $m \geqslant 1$. Além disso, temos que:

$$HH_{2j}(A) = HH_{2j,jt}(A) \oplus \bigoplus_{1 \leqslant e \leqslant t-1} HH_{2j,jt+e}(A)$$
$$HH_{2j+1}(A) = HH_{2j+1,(j+1)t}(A) \oplus \bigoplus_{1 \leqslant e \leqslant t-1} HH_{2j+1,jt+e}(A)$$

O termo $a(j,l,t)$, que aparece em todos os casos, é obtido pelo seguinte

$$\dim_k \Big(\bigoplus_{1 \leqslant e \leqslant t-1} HH_{2j,jt+e}(A) \Big) = \sum_{q=jt+1}^{jt+t-1} a_q = \sum_{q=1}^{jt+t-1} a_q - \sum_{q=1}^{jt} a_q = \left\lfloor \frac{jt+t-1}{l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{jt}{l} \right\rfloor$$

Desse modo, basta encontrarmos a dimensão do primeiro somando para cada j. O caso $j = 0$ é claro, pois $HH_{0,0}(A) = k^{Q_0}$ e $|Q_0| = l$. Repare, também, que $a(0,l,t) = \lfloor \frac{t-1}{l} \rfloor$.

Para o caso $n > 0$, note que $HH_{2j,jt}(A) = 0$ se $l \nmid jt$, pois nesse caso não existe $r \mid jt$ tal que $b_r \neq 0$. E no caso em que $l \mid jt$, obtemos que $HH_{2j,jt}(A) = k^{(t,l)-1} \oplus \operatorname{coker}(\cdot \frac{t}{(t,l)} : k \to k)$. Analogamente, temos que:

$$HH_{2j+1,(j+1)t} = \begin{cases} k^{(t,l)-1} \oplus \ker(- \cdot \frac{t}{(t,l)} : k \to k), & \text{se } r \mid (j+1)t \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Desse modo, finalizamos a prova com a observação abaixo:

$$\operatorname{coker}(- \cdot \frac{t}{(t,l)} : k \to k) = k \iff \Big(\operatorname{char}(k) \mid \frac{t}{(t,l)}\Big) \iff \ker(- \cdot \frac{t}{(t,l)} : k \to k) = k. \quad \square$$

Corolário 3.4.15. *Se $A = kQ/(R_Q)^t$ com Q um ciclo básico de comprimento $l \geqslant 1$, então $HH_n(A) \neq 0$ para infinitos valores tanto pares quanto ímpares de n.*

Demonstração. Sempre temos $a(j,l,t) \geqslant 0$ e, no caso em que $t - 1 \geqslant l$, vale $a(j,l,t) > 0$ para todo $j \geqslant 0$. Assim:

- Se $l \leqslant t - 1$, então $HH_n(A) \neq 0$ para todo $n \geqslant 0$.
- Se $(t,l) \geqslant 2$, então $HH_{2j}(A) \neq 0$ (resp. $HH_{2j+1}(A) \neq 0$) sempre que jt (resp. $(j+1)t$) for múltiplo de l.
- Se $l > t - 1$ e $(t,l) = 1$, escreva $rl + st = 1$ para inteiros r, s. Afirmo que $a(j,l,t) > 0$ sempre que $(j+1-s)t = ml$ para algum $m \geqslant 0$. De fato, temos que

$$a(j,l,t) = \left\lfloor \frac{(j+1-s)t - rl}{l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{jt}{l} \right\rfloor = m - r - \left\lfloor m + \frac{(s-1)t}{l} \right\rfloor.$$

Usando que $-r = (st-1)/l$, podemos provar a afirmação, pois

$$-r > \left\lfloor \frac{st-1}{l} - \frac{t-1}{l} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(s-1)t}{l} \right\rfloor.$$

Logo, vale que $HH_{2j}(A) \neq 0 \neq HH_{2j+1}(A)$ sempre que $(j+1-s)t$ for múltiplo de l.

□

Podemos concluir, enfim, que a propriedade de Han é válida para álgebras truncadas por meio do seguinte resultado.

Teorema 3.4.16. *Sendo k um corpo, valem as seguintes equivalências sobre uma álgebra truncada $A = kQ/(R_Q)^t$:*

(1) $\mathrm{gl.dim}(A) < \infty$.

(2) Q não tem ciclos orientados.

(3) $\mathrm{hh.dim}(A) = 0$.

(4) $\mathrm{hh.dim}(A) < \infty$.

(5) Existe n_0 tal que $HH_n(A) = 0$ para todo n ímpar (ou para todo n par) maior que n_0.

(6) $\mathrm{hch.dim}(A) < \infty$.

Histórico do teorema. A equivalência dos quatro primeiros itens foi provada em [Han06, Thm 4] enquanto que a última é dada em [XHJ07, Thm 3] a partir de resultados de Locateli [Loc99]. O caso $t = 2$ da equivalência (2) $\iff$ (6) também foi provado por Cibils [Cib98]. O seguinte resultado mais fraco havia sido obtido anteriormente por Liu e Zhang [LZ94, Cor. 1]: se $HH_i(A) = 0$ para todo i ímpar, então Q não tem ciclos.

Demonstração. As implicações (2) $\implies$ (1), (2) $\implies$ (3) e (1) $\implies$ (4) foram feitas anteriormente para qualquer quociente. Assim, para obter a equivalência das cinco primeiras afirmações, só nos resta demonstrar (5) $\implies$ (2). Provaremos pela contrapositiva: suponha que Q possui um ciclo orientado e tome Q' o ciclo de menor comprimento em Q. Desse modo, Q' é forçadamente um ciclo básico e a homologia de Hochschild de $B = kQ'/(R_{Q'})^t$ é não-nula para infinitos graus ímpares e pares. Para concluir que o mesmo vale para A, basta invocar o lema 3.4.17 abaixo e notar que $R_{Q'} = R_Q \cap kQ'$. □

Lema 3.4.17. [LZ94, Thm 2] *Se kQ/I é monomial, Q' é uma subaljava conexa de Q e $I' = I \cap kQ'$, então $HH_n(kQ'/I')$ é somando direto de $HH_n(kQ/I)$.*

Agora, apresentaremos o resultado mais geral de que toda álgebra monomial satisfaz a propriedade de Han. Por ser um resultado mais elaborado, iremos apenas dar um panorama da demonstração.

Definição 3.4.18. Seja $A = kQ/I$ uma álgebra monomial e C' um ciclo em Q de comprimento n. Sendo C o ciclo básico de comprimento n com a função natural $f : C \to C' \hookrightarrow Q$, defina kC/I como a álgebra com relações induzidas de A (i.e. um caminho α de C é uma relação se, e só se, $f(\alpha) \in I$). Dizemos que kC/I é uma *álgebra de ciclos sobre A*. Dizemos que kC/I é *minimal* se ela não é recobrimento de nenhuma álgebra de ciclos sobre A menor — ou equivalentemente, se C' é um ciclo próprio em Q.

Teorema 3.4.19. [Han06, Thm 2] *Se A é uma álgebra monomial, então*

$$\dim_k(HH_n(A)) = \sum_Z \dim_k(HH_n(Z)), \quad n > 0$$

onde Z percorre todas as álgebras de ciclos sobre A minimais.

Lema 3.4.20. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k tal que $A/J(A) = \Pi_{i=0}^m k$ e tome $\{e_0, \cdots, e_m\}$ um conjunto completo de idempotentes primitivos de A. Se o radical de $e_0 A$ é projetivo, então $HH_n(A) \cong HH_n(A')$ para todo $n > 0$, onde A' denota a álgebra* $\mathrm{End}_A(e_1 A \oplus \cdots \oplus e_m A)$.

Demonstração. Isso segue de resultados de Igusa e Zacharia [IZ92, Cor. 1.4, Thm 2.3]. Também, deve-se notar que a homologia de A é isomorfa à homologia relativa de $(A, J(A))$ através da sequência exata longa que as relaciona e de $HH_n(A/J(A)) = 0$ para $n > 0$. Além disso, usando a notação $P_i = e_i A$, perceba que a subcategoria plena de Mod-A com objetos $P_1, \cdots, P_m$ é equivalente à subcategoria plena de Mod-A' formada pelos projetos indecomponíveis f.g. de A', os quais são da forma $\mathrm{Hom}_A(P_1 \oplus \cdots P_m, P_i)$ para $i = 1, \cdots, m$. □

Antes de procedermos ao teorema, ilustremos a utilidade do lema por meio de um exemplo.

Exemplo 3.4.21. Sendo Q o ciclo básico com 3 vértices

$$\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dl, "c"'] & \\
1 \arrow[rr, "a"] & & 2 \arrow[ul, "b"']
\end{tikzcd}$$

Defina $A = kQ/(abc)$, pode-se notar que os projetivos $P(2)$ e $P(3)$ de A, associados aos vértice 2 e 3, tem radical projetivo, pois $P(2) \cdot J(A) \cong P(3)$ e $P(3) \cdot J(A) \cong P(1)$. Além disso, a álgebra $A' = \mathrm{End}_A(P(1) \oplus P(2))$ corresponde a retirar o vértice 3 de Q, isto é, $A' \cong kQ'/(ad)$ para Q' a aljava abaixo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, bend right, "a"'] & 2 \arrow[l, bend right, "d"']
\end{tikzcd}$$

Novamente, pode-se ver que o radical de $P(2)$ é projetivo — neste caso, isomorfo a $P(1)$ — e, retirando o vértice 2, obtemos a álgebra $A'' = \mathrm{End}_{A'}(P(1)) \cong k$. Com isso, podemos concluir que $\mathrm{hh.dim}(A) = \mathrm{hh.dim}(A'') = 0$. Repare que isso é consistente com o fato de que $\mathrm{gl.dim}(A) = 2$.

Teorema 3.4.22. [Han06, Thm 3] *Toda álgebra monomial de dimensão finita sobre um corpo satisfaz a propriedade de Han.*

Demonstração. Provemos pela contrapositiva. Assuma que a álgebra monomial $A = kQ/I$ satisfaça $\mathrm{gl.dim}(A) = \infty$, então Q possui um ciclo e, portanto, existe uma álgebra de ciclos sobre A minimal Z tal que $\mathrm{gl.dim}(Z) = \infty$, veja [IZ92, Prop. 3.2]. Utilizando o processo em [IZ92, p. 512], nota-se que, ao retirar todos os vértices e_i da aljava de Z tais que e_iA tem radical projetivo, obtemos uma álgebra Z' que é truncada e dada por um ciclo básico, que satisfaz $\mathrm{hh.dim}(Z') = \infty$ pelo corolário 3.4.15. Por outro lado, do lema e do teorema acima, obtemos que

$$\mathrm{hh.dim}(A) \geqslant \mathrm{hh.dim}(Z) = \mathrm{hh.dim}(Z') = \infty. \qquad \square$$

Vale ressaltar que o caso específico em que a álgebra monomial $A = kQ/I$ é *quadrática* (i.e. em que os geradores de I são caminhos de comprimento 2), também foi computado por E. Sköldberg. Isso foi feito em termos do dual de Koszul $A^! = kQ/J$, onde $J = \{b_1b_2 \in Q_2 \mid b_1b_2 \notin I\}$.

Para tanto, precisamos elucidar mais uma notação. Para dois elementos a, b de A, temos que $[a, b] = ab - ba$ é o comutador usual; enquanto que para elementos de $A^!$ faremos uma pequena alteração: sendo α e β dois caminhos de Q em $A^!$, escrevemos $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - (-1)^{c(\alpha)\cdot c(\beta)}\beta\alpha$, onde $c(\alpha)$ denota o comprimento de α.

Teorema 3.4.23. [Sko99, Cor. 1] *Se A é uma álgebra monomial quadrática sobre um corpo k, então*

$$HH_n(A) \cong \begin{cases} A/[A,A], & \text{se } n = 0 \\ (A^!/[A^!,A^!])_2 \oplus (A/[A,A])_{\geqslant 1}, & \text{se } n = 1 \\ (A^!/[A^!,A^!])_n \oplus (A^!/[A^!,A^!])_{n+1}, & \text{se } n \geqslant 2 \end{cases},$$

onde o subíndice i em $(-)_i$ indica a graduação do espaço pelos caminhos de comprimento i.

Finalizada, enfim, nossa discussão sobre álgebras monomiais, podemos passar agora para exemplos que foram encontrados após a publicação da conjectura Y. Han.

Os exemplos de P. Bergh e D. Madsen:

P. Bergh & D. Madsen publicaram dois artigos [BM09; BM17] em que provam a propriedade de Han para alguns casos de álgebras de dimensão finita. A primeira publicação fornece três exemplo de álgebras graduadas. Suas demonstrações dependem de uma fórmula de K. Igusa — que relaciona a característica de Euler da homologia cíclica relativa com o determinante graduado de Cartan — e os força a adicionar a hipótese de que o corpo base possui característica zero. No segundo artigo, eles provam a conjectura para extensões triviais de três classes diferentes de álgebras.

Em relação ao artigo de 2009, devemos dizer que, aqui, uma k-álgebra de dimensão finita A ser "graduada" significa que ela possui uma $\mathbb{N}$-graduação $A = \oplus_{i\geqslant 0} A_i$ e que seu radical de Jacobson satisfaz $J(A) = \oplus_{i\geqslant 1} A_i$. Esse tipo de $\mathbb{N}$-graduação é chamada de *semissimples* ou *não-trivial* por alguns autores. Além disso, devemos assumir que $A/J(A)(\cong A_0)$ é um produto de cópias de k.

Exemplo 3.4.24. Se kQ é uma álgebra de caminhos, então ela possui uma graduação natural dada pelo comprimento dos caminhos: $kQ = \oplus_{i\geqslant 0} kQ_i$. Também, escreveremos R_Q para denotar o ideal gerado pelas flechas $R_Q = \oplus_{i\geqslant 1} kQ_i$.

1. Se Q não tem ciclos, então $J(kQ)$ coincide com R_Q e kQ_0 é a soma de $|Q_0|$ cópias de k.

2. Para obter quocientes de kQ com as propriedades desejadas, tomamos um ideal admissível (i.e. $R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2$ para algum $m \geqslant 2$). Desse modo, $A = kQ/I$ possui dimensão finita (mesmo quando Q possui ciclos) e $J(A) = R_Q/I$, veja [ASS06, p. 2.12]. Para preservar a graduação de kQ, devemos considerar também que I é *homogêneo*, i.e. que seus geradores são combinações lineares de caminhos com mesmo comprimento. Assim, $A = kQ/I$ possui uma $\mathbb{N}$-graduação semissimples (induzida de kQ) com $A_0 \cong A/J(A) \cong kQ/R_Q \cong k^{\oplus Q_0}$.

3. Se $A/J(A)$ é um produto de cópias de k, então, pelo teorema da cisão de Wedderburn, sabemos que $A = A/J(A) \oplus J(A)$. Desse modo, $A_0 = A/J(A)$, $A_1 = J(A)$ e $A_i = 0$ para $i \geqslant 2$ fornece uma graduação como desejada acima se, e somente se, A é uma álgebra com radical de quadrado nulo (i.e. $J(A)^2 = 0$).

Observação 3.4.25. Se A é uma k-álgebra de dimensão $\leqslant 4$ ou com $J(A)^3 = 0$ e k é um corpo de cisão, então A possui uma $\mathbb{N}$-graduação semissimples. Veja [BBFS92] para um exemplo de álgebra de dimensão 5 e $J(A)^4 = 0$ que não possui tal graduação.

Tendo isso em mente faremos alguns comentários sobre duas das classes de álgebras consideradas no artigo. Sobre a primeira delas, visto que os autores já apresentam sua definição, apenas mencionamos que a noção de álgebras N-Koszul (onde $N \geqslant 2$ é um inteiro) é uma generalização natural da caracterização de álgebras de Koszul dada em [BGS96, Prop. 2.1.3]. O caso usual é recuperado quando $N = 2$. Para mais detalhes e caracterizações de álgebras de Koszul, também pode-se conferir a *survey* de Fröberg [Frö99].

A segunda classe de exemplos é dada pelos quocientes $A = kQ/I$ tais que Q possui um laço e I é ideal admissível homogêneo. O fato de que tais álgebras possuem dimensão global infinita é uma consequência da chamada "conjectura das álgebras sem laços" (em inglês, *no loops conjecture*). Em [Igu90, Cor. 5.6], K. Igusa provou a conjectura para k-álgebras nas quais k é corpo de cisão[4] (veja o exemplo 2.1.5), o que inclui as álgebras do tipo acima e o caso em que k é algebricamente fechado. Desse modo, a propriedade de Han é provada após mostrar que a dimensão da homologia de Hochschild é infinita para essas álgebras.

Teorema 3.4.26. [BM09, Thm 4.7] *Se k é um corpo de característica zero, Q é uma aljava com laços e I é um ideal admissível homogêneo de kQ, então* $\mathrm{hh.dim}(kQ/I) = \infty$.

Restringindo para álgebras locais, isso nos fornece a seguinte consequência, que é muito mais forte do que a propriedade de Han:

Corolário 3.4.27. *Sendo k um corpo de característica zero e $A = kQ/I$ local com I um ideal homogêneo admissível:*

$$\mathrm{hh.dim}(A) < \infty \implies A \cong k$$

Demonstração. Segue de A ser local que 0 e 1 são seus únicos idempotentes, cf. [Lam01, 19.2]. Assim, Q possui apenas um vértice. Além disso, sabemos, pelo teorema acima, que $\mathrm{hh.dim}(A)$ é finita apenas quando A não tem laços. Logo, Q não pode possuir flechas. □

[4] Tendo em mente a construção da aljava de Gabriel (sobre um corpo algebricamente fechado), dizemos que uma álgebra possui um laço se $\mathrm{Ext}^1(S, S) \neq 0$ para algum módulo simples S, veja [Ben91a, p. 4.1.6] ou [ASS06, section II.3]. Naturalmente, se A é uma álgebra de caminhos, isso é equivalente a dizer que sua aljava possui um laço.

Agora, focaremos nossa atenção no segundo artigo de P. Bergh e D. Madsen. Nele, são tratadas *extensões triviais* de álgebras de dimensão finita A pelo seu dual $D(A) := \mathrm{Hom}_k(A, k)$, considerado como um A-bimódulo. Tais são álgebras são denotadas por $T(A) = A \ltimes D(A)$. Sua estrutura de espaço vetorial é definida por $A \oplus D(A)$ e sua multiplicação por

$$(a, f) \cdot (b, g) = (ab, ag + fb), \quad a, b \in A, \ f, g \in D(A).$$

Essas álgebras recebem a palavra "trivial" no nome, porque elas correspondem ao elemento zero do grupo de cohomologia $HH^2(A, D(A))$, veja [Wei94, p.312].

Uma característica notável de extensões triviais é que elas são álgebras simétricas [Lam99, 16.62] com radical de Jacobson dado por $J(A) \oplus D(A)$. Disso concluímos que $\mathrm{gl.dim}(T(A)) = \infty$ sempre que $A \neq 0$, cf. 1.2.5. Desse modo, mais uma vez devemos mostrar que a dimensão da homologia de Hochschild é infinita

Agora, apresentamos um esboço das ideias da prova. Os autores começam apresentando $T(A)$ através de um quociente admissível uma álgebra de caminhos — onde usou-se que o corpo é algebricamente fechado. Além disso, eles utilizaram um critério, provado em colaboração com Y. Han, para concluir que a dimensão da homologia de Hochchild é infinita. Tal critério é baseado um ciclos especiais que podem existir na aljava.

Definição 3.4.28. Um ciclo $a_1 \dots a_n$ de Q ($a_i \in Q_1$, $n \geqslant 2$) é dito *2-truncado* na álgebra kQ/I se $a_i a_{i+1} \in I$ para todo $i \leqslant n-1$ e $a_n a_1 \in I$

Exemplo 3.4.29. Sendo A a álgebra com radical de quadrado nulo $kQ/(R_Q)^2$, temos que todo ciclo em A é 2-truncado.

Teorema 3.4.30. [BM17, Thm 3.1] *Se k é um anel comutativo, Q é uma aljava com um ciclo 2-truncado e I é um ideal admissível de kQ, então* $\mathrm{hh.dim}(kQ/I) = \infty$

Ao analisar a aljava da extensão trivial $T(A)$ foi possível garantir que a propriedade de Han é válida para dois casos consideráveis:

Teorema 3.4.31. [BM17, Thms 3.2 & 3.5] *Assuma que $A = kQ/I$ para um ideal admissível I. Se A é local ou auto-injetiva, então a aljava de $T(A)$ possui um ciclo 2-truncado em $T(A)$. Em particular, vale que* $\mathrm{hh.dim}(T(A)) = \infty$.

Ao final do artigo, a propriedade de Han também foi provada para $T(A)$ quando A é graduada ao utilizar técnicas do artigo de 2009, através do determinante de Cartan.

3.5 Álgebras exteriores e álgebras quânticas

Álgebras exteriores e de interseção completa quântica compartilham algumas propriedade: ambas são álgebras de Frobenius locais. Além disso, os resultados nas referências da tabela 3.1 mostram que as dimensões de suas homologias de Hochschild são ambas infinitas. Desse modo, também vale, pela proposição 3.1.2, que suas dimensões globais são infinitas (quando $A/J(A)$ é separável). Mesmo assim, essa conclusão pode ser obtida (cf. exemplo 1.2.5) do resultado mais elementar de elas serem álgebras de Frobenius que não são semissimples. Agora, definiremos tais álgebras e forneceremos alguns detalhes nessa direção.

Dado um espaço vetorial V sobre um corpo k com base $\{e_1, \dots, e_n\}$, a k-ésima de sua álgebra exterior pode ser definida pelo seguinte quociente:

$$\Lambda^k(V) := \frac{V^{\otimes k}}{\langle e_1 \otimes \dots \otimes e_k - \operatorname{sgn}(\sigma) e_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(k)} \mid \sigma \in S_k \rangle},$$

onde S_k denota o grupo simétrico, das permutações de k elementos. Desse modo, a *álgebra exterior de* V é definida como a álgebra graduada $\Lambda(V) := \oplus_{i=0}^n \Lambda^i(V)$, onde o produto de dois elementos é dado simplesmente pela concatenação do produto tensorial. É possível notar que $\dim_k(\Lambda^i(V)) = \binom{n}{i}$ e, portanto, que $\dim_k(\Lambda(V)) = 2^n$.

Pode-se observar, também, que $J = \oplus_{i=1}^n \Lambda^i(V)$ é o único ideal maximal de $\Lambda(V)$ — que coincide com seu radical de Jacobson — de modo que $\Lambda(V)$ é uma álgebra local. Dualmente, temos que $I_0 = \Lambda^n(V)$ é seu único ideal minimal, já que ele possui dimensão 1 sobre k e, para todo $0 \neq a \in \Lambda(V)$, existe algum $b \in \Lambda(V)$ tal que $0 \neq ab \in \Lambda^n(V)$. Com isso, todo funcional linear $\lambda : \Lambda(V) \to k$ tal que $\lambda(I_0) \neq 0$ satisfaz a seguinte propriedade: para todo ideal $I \neq 0$ de $\Lambda(V)$, vale que $\ker(\lambda) \not\supseteq I$. A existência de tal λ é equivalente a dizer que a álgebra exterior é de Frobenius, veja [Lam99, 3.15]. Usando isso — e que, de $J(\Lambda(V)) \neq 0$, ela não é semissimples — concluímos que a dimensão global de $\Lambda(V)$ é, de fato, infinita.

Agora, vejamos que as mesmas propriedades são satisfeitas pelas álgebras de *interseção completa quântica*, i.e. álgebras da forma

$$A = \frac{k\langle x, y \rangle}{(x^a, xy - qyx, y^b)}$$

para alguns $a, b \geqslant 2$ e $0 \neq q \in k$. Uma motivação para a terminologia de tais álgebras é o fato de elas serem a "versão quântica" de $k[x, y]/(x^a, y^b)$, que são exemplos de anéis de interseção completa no sentido de Álgebra Comutativa. Aqui, a palavra "quântica" significa que a álgebra possui uma certa relação de quase-comutatividade. Tal sentido da palavra foi trazido para a Álgebra após a introdução dos grupos quânticos durante a década de 1980, veja [Dri87]. Em algumas aplicações, o parâmetro q é interpretado como a constante de Planck.

Podemos concluir que tais álgebras são locais (e não são semissimples), pois o ideal $J = (x, y) \subset A$ é seu único ideal maximal. O prova de que elas são álgebras de Frobenius pode ser conferida em [BE08, p.509].

Um dos aspectos mais interessantes dessas álgebras é que o caso $a = 2 = b$ forneceu o primeiro contraexemplo para a propriedade de Happel: em [BGMS05], provou-se que tal álgebra satisfaz $\operatorname{hch.dim}(A) = 2$ quando q não é uma raiz da unidade. Entretanto, como provado por Han [Han06, Prop. 5], a sua homologia não se comporta de maneira patológica. Essa álgebra pode ser vista, pois, como uma das principais motivações para a adaptação da pergunta de Happel a fim de se propor a conjectura de Han. Tendo isso em mente, o artigo de Bergh e Erdmann [BE08] pode ser visto como uma generalização em duas direções. Por um lado, eles mostraram que a propriedade de Han permanece válida para valores arbitrários de a e b e, por outro lado, que a dimensão da cohomologia de Hochschild continua sendo igual a 2 quando q não é uma raiz da unidade. No caso em que q é uma raiz da unidade, é provado que a álgebra satisfaz a propriedade de Happel. Mais recentemente, a cohomologia de Hochschild foi computada de forma mais detalhada no caso em que $a = b$ e q é uma a-ésima raiz da unidade. Nesse caso, vale que $\dim_k(HH^n(A)) = n + 2$ para todo $n \geqslant 0$, veja [EH18].

Dois anos após a publicação de Bergh e Erdmann, a propriedade de Han também foi verificada para uma classe de álgebras que generalizam as de interseção completa quântica [SV10]. Essa classe é composta pelas álgebras finitamente geradas da forma

$$A = \frac{k\langle x_1, \dots, x_n\rangle}{(f_1, \dots, f_p)}, \text{ onde } f_1 \in k[x_1],\ \ f_i \in (x_2, \dots, x_n) \text{ para } i \geqslant 2$$

onde assume-se que a álgebra $B = k[x_1]/(f_1)$ não é suave. Note que álgebras de interseção completa quântica são recuperadas ao tomar $n = 2$, $p = 3$, $f_1 = x^a$, $f_2 = xy - qyx$ e $f_3 = y^b$. O fato de que $k[x]/(x^a)$ $(a \geqslant 2)$ não é suave pode ser deduzido do teorema 3.3.1 ao notar que sua dimensão global (ou de Hochschild) é infinita. Novamente, a propriedade de Han é provada para A após verificar que a dimensão da homologia de Hochschild é infinita.

Álgebras de Weyl: Em comparação com os exemplos acima, essa classe de álgebras é razoavelmente excepcional. A n-ésima álgebra de Weyl (sobre um corpo k) é definida como

$$A_n(k) = k\langle x_1, \theta_1, \cdots, x_n, \theta_n\rangle,$$

submetida às seguintes relações: os x_i's comutam entre si, os θ_i's comutam entre si e $\theta_i x_j - x_j\theta_i = \delta_{ij}$. Assim, tais álgebras são noetherianas, não-comutativas e possuem dimensão infinita. Suas propriedades são consideravelmente distintas dependendo da característica de k: em característica zero, $A_n(k)$ é um domínio simples; mas isso não é verdade quando k possui característica positiva. A dimensão global também é capaz de medir tais diferenças (veja [Rin62] e [Roo72]):

$$\text{gl.dim}(A_n(k)) = \begin{cases} n, & \text{se char}(k) = 0 \\ 2n, & \text{se char}(k) > 0 \end{cases}.$$

Assumindo que $\text{char}(k) = 0$ e $n = 1$, não é difícil de se provar (veja [Kas06, §5.10]) que sua homologia é dada por

$$HH_n(A_1(k)) = \begin{cases} k, & \text{se } n = 2 \\ 0, & \text{se } n \neq 2 \end{cases}.$$

Isso mostra que a desigualdade $\text{hh.dim}(A) > \text{gl.dim}(A)$ pode ocorrer fora do mundo das álgebras de dimensão finita.

No artigo [SSV13], assumindo que $\text{char}(k) = 0$, os autores provaram as propriedades de Han e de Happel para o caso quântico de uma classe de álgebras que generalizam a primeira álgebra de Weyl $A_1(k)$ — enquanto que o caso ordinário não quântico fora tratado dez anos antes [FSS03]. Em mais detalhes, a (co)homologia de Hochschild foi computada para tais álgebras e um critério que determina a finitude de sua dimensão foi obtido. Em resumo, foi provado que

$$\text{gl.dim}(A) < \infty \iff \text{hh.dim}(A) \leqslant 2 \iff \text{hch.dim}(A) \leqslant 2.$$

Foi mostrado ainda que, para a maior parte das álgebras A que satisfazem o acima, temos $\text{gl.dim}(A) = 2$.

3.6 Extensões que preservam a conjectura de Han

Suposição: Nesta seção, k sempre será um corpo.

Recentemente, alguns autores contribuíram para o entendimento da conjectura de Han de uma forma diferente das seções acima. Tendo em mente, por exemplo, um passo indutivo para a prova da conjectura, bastante empenho foi dado na seguinte direção: encontrar extensões de álgebras que preservam a propriedade de Han, ou seja, pares de álgebras $B \subseteq A$ tais que, se B satisfaz a propriedade de Han, então A também a satisfaz. Essas extensões foram resumidas na tabela 3.3. Com tais resultados, podemos construir, a partir dos exemplos anteriores, muitas outras álgebras que satisfazem a propriedade de Han.

Tipo de Extensão	**Hipótese sobre k**	**Referência**
álgebras de quina	perfeito	[CRS21, Thm 2.21]
álgebras E-triangulares	perfeito	[CRS21, Cor. 2.22]
álgebras de quadrado nulo de projetivos	perfeito	[CRS21, Thm 4.8]
limitadas	-	[CLMS22, Thm 4.6]
fortemente proj-limitadas	-	[IM21, Cor. 6.17]

Tabela 3.3: *Extensões de álgebras de dimensão finita que preservam a propriedade de Han. A lista está organizada em ordem cronológica das referências.*

Antes de tecermos comentários sobre as extensões da tabela, provemos um resultado mais elementar:

Proposição 3.6.1. *Se A e B satisfazem a propriedade de Han, então $A \times B$ também satisfaz. Assumindo, ainda, que A e B possuem dimensão finita e que $A/J(A)$ e $B/J(B)$ são separáveis, então $A \otimes B$ também satisfaz a propriedade de Han.*

Demonstração. Para todo par de anéis A e B e todo $(A \times B)$-módulo M, vale que

$$\text{pd}_{A\times B}(M) = \max\{\text{pd}_A((1_A, 0)M), \text{pd}_B((0, 1_B)M\}.$$

Assim, obtemos que $\text{gl.dim}(A \times B) = \max\{\text{gl.dim}(A), \text{gl.dim}(B)\}$. Além disso, dentro das hipóteses do enunciado, vale que $\text{gl.dim}(A \otimes B) = \text{gl.dim}(A) + \text{gl.dim}(B)$, cf. teorema 4.3.20.

Utilizando as propriedades básicas da homologia de Hochschild 1.3.16, obtemos as mesmas igualdades para as dimensões $\text{hh.dim}(A \times B)$ e $\text{hh.dim}(A \otimes B)$. Desse modo, chegamos nas equivalências:

$$\text{hh.dim}(A \times B) < \infty \iff \text{hh.dim}(A), \text{hh.dim}(B) < \infty \iff \text{hh.dim}(A \otimes B) < \infty$$

$$\text{gl.dim}(A \times B) < \infty \iff \text{gl.dim}(A), \text{gl.dim}(B) < \infty \iff \text{gl.dim}(A \otimes B) < \infty$$

□

Álgebras de quadrado nulo: Em [CRS21], os autores definem e analisam *álgebras de quadrado nulo* (em inglês, *null-square algebras*), que são construídas usando duas álgebras A e B, um A-B-bimódulo N e um B-A-bimódulo M. Elas tem a forma

$$\begin{bmatrix} A & N \\ M & B \end{bmatrix},$$

onde a multiplicação de matrizes é dada pelas estruturas de bimódulo de M e de N e pela convenção $mn = nm = 0$ para todos $m \in M, n \in N$. Desse modo, a álgebra acima é uma extensão de $A \times B$.

- Se $N = 0$, então ela é chamada de *álgebra de quina* (em inglês, *corner algebra*).
- Se os bimódulos M e N são projetivos, então ela é chamada de *álgebra de quadrado nulo de projetivos* (em inglês, *null-square projective algebra*).

Dado que o corpo base seja perfeito, foi provado que, se A e B são álgebras de dimensão finita satisfazendo a propriedade de Han, então as extensões dos dois tipos acima também satisfazem a propriedade de Han. Para o caso de álgebras de quina, utilizou-se a proposição 3.6.2 abaixo para que o cálculo de sua homologia fosse reduzida às de A e B.

Proposição 3.6.2. *Dadas álgebras A e B e um A-B-bimódulo M, vale que*

$$HH_n(\begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix}) \cong HH_n(A) \oplus HH_n(B) \quad \forall n \geqslant 0.$$

Demonstração. [Lod98, 1.2.15] ou [CRS21, Thm 2.19] □

Extensões limitas e proj-limitadas: Uma extensão de álgebras $B \subseteq A$ é dita *limitada* se satisfaz:

a) A/B possui dimenensão projetiva finita como B-bimódulo
b) A/B é um B-módulo projetivo à esquerda ou à direita;
c) A/B é nilpotente por tensores sobre B, i.e. $(A/B)^{\otimes_B n} = 0$ para algum n

Após uma série de artigos [CLMS20b; CLMS21; CLMS22], Cibils, Lanzilotta, Marcos e Solotar provaram que, para uma tal extensão, temos que

$$B \text{ satisfaz a propriedade de Han} \iff A \text{ satisfaz a propriedade de Han}$$

(sem a necessidade de assumir A ou B como sendo de dimensão finita). Desse modo, dada uma álgebra, podemos verificar a propriedade de Han associando-lhe uma álgebra mais simples, que pode ser escolhida como sendo maior ou menor[5]. Mais recentemente, esse resultado foi generalizado para extensões “fortemente proj-limitadas”.

Os autores também forneceram certos critérios para reconhecer se certas extensões satisfazem as duas últimas condições da definição, veja [CLMS22, Thms 5.16, 5.20]. Usando-as, alguns exemplos interessantes podem ser dados.

Exemplo 3.6.3. Suponha que A é uma extensão de $B = kQ/I$ (I um ideal admissível) dada pelo acréscimo de flechas à aljava Q e algumas possíveis relações.

1. O caso em que apenas flechas são adicionadas — e nenhuma relação — fora tratado anteriormente em [CLMS20a] e ele pode ser considerado o exemplo motivador para a concepção de extensões limitadas. Nesse caso, A é isomorfa à álgebra tensorial (sobre B) $T_B(N)$ para um certo B-bimódulo projetivo N. Logo, essa extensão satisfaz uma propriedade mais forte do que os dois primeiros itens da definição: A/B é projetivo como B-bimódulo. A última condição também é válida quando A é de dimensão finita.

2. [CLMS22, Example 6.2] Defina $B = kQ$ para a aljava Q abaixo

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[r, "d"] & 3 \\ 5 \arrow[r, "\mu"] & 1 \arrow[r, "b"] & 4 \arrow[u, "c"] \end{tikzcd}$$

   e tome a extensão $A = k\tilde{Q}/J$, onde $\tilde{Q}$ é definido adicionando a flecha $1 \xrightarrow{a} 2$ em Q e $J = \langle da - cb \rangle$. Pode-se provar que essa extensão é limitada. Já que $\tilde{Q}$ não tem ciclos orientados, um dos critérios citados acima nos garante que A/B é nilpotente por tensores sobre B. O fato que A/B tem dimensão projetiva finita como $(B \otimes B^{op})$-módulo segue da proposição 3.1.2:

$$\text{gl.dim}(B \otimes B^{op}) = 2 \cdot \text{gl.dim}(B) = 2.$$

Para provar o resultado, os autores utilizaram a chamada sequência quase exata longa de Jacobi-Zariski, a qual relaciona a homologia de Hochschild (das álgebras A e B) com a homologia de Hochschild relativa (de A com respeito a B). Quando $B \subseteq A$ é limitada, essa sequência se torna exata para graus suficientemente grandes, o que permite concluir que $HH_n(A)$ e $HH_n(B)$ são isomorfos para $n >> 0$, veja [CLMS22, p.52]. Desse modo, Homologia Relativa — uma teoria introduzida por G. Hochschild em 1956 [Hoc56], mas ainda pouco usada para álgebras associativas[6] — é utilizada como uma ferramenta fundamental nas demonstrações. Na verdade, a própria definição de extensões fortemente proj-limitadas — para as quais, agora, direcionamos nossa atenção — é formulada em termos homológicos

[5] Pode parecer estranho pensar que uma álgebra maior é mais simples, mas, como já apontado, sabe-se que extensões triviais de álgebras auto-injetivas satisfazem a propriedade de Han, apesar de não termos uma resposta para as próprias álgebras auto-injetivas. Infelizmente, extensões triviais geralmente não são limitadas.

[6] Sobre esse tema, veja a dissertação (ainda em preparação) de Roger R. Primolan deste mesmo instituto na qual há um enfoque especial no estudo de dimensões homológicas relativas.

relativos.

Definição 3.6.4. Uma extensão $B \subseteq A$ é *fortemente proj-limitada* se satisfaz os itens a) e b) da definição de extensões limitadas e, também:

c) existe algum $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tal que $(A/B)^{\otimes_B n}$ é um B-bimódulo projetivo para todo $n > \overline{n}$.

d) A dimensão projetiva B-relativa de A, visto como A-bimódulo, é finita.

A última condição acima é satisfeita quando A/B é nilpotente por tensores, pois, como pode ser visto em [CLMS21, Prop. 2.3], existe uma resolução projetiva B-relativa de A cujo comprimento é menor do que m se $(A/B)^{\otimes_B m} = 0$. Assim, essa é, de fato, uma generalização da noção de extensões limitadas. Em [IM21, §4.2], são apresentados exemplos que mostram que essa classe é realmente maior que a anterior. Aqui, fornecemos apenas um exemplo mais elementar (e menos interessante).

Exemplo 3.6.5. Se B é separável (e.g. $B = k$) e $A = B \times B$, então $A/B = B$ não é nilpotente por tensores. No entanto, como $B \otimes B^{op}$ é semissimples, vale que A/B é projetivo como B-bimódulo. Usando que os projetivos B-relativos são os mesmos que os projetivos ordinários quando B é semissimples, concluímos que $B \subseteq A$ é fortemente proj-limitada.

Por fim, vale ressaltar que, mais recentemente, novos resultados sobre a preservação da conjectura de Han por meio de extensões foram apresentados por Cibils, Lanzilotta, Marcos e Solotar [CLMS23].

Capítulo 4

Homologia de álgebras pseudocompactas

Subi a montanha para ficar mais alto que o céu
Desci a montanha para voltar para perto dos meus
Canção de BIKE

Vimos acima duas abordagens para se tratar da conjectura de Han. A primeira está focada em encontrar exemplos que a satisfazem e a segunda em analisar extensões de álgebras que preservam a conjectura. Aqui, propomos uma terceira abordagem: analisar como a propriedade de Han se comporta em mundos de álgebras maiores do que o de dimensão finita, o que já ilustramos ser factível com alguns exemplos noetherianos. Para tanto, escolhemos tratar das álgebras pseudocompactas, que são álgebras topológicas dadas por um limite (inverso) de álgebras de dimensão finita.

Uma das utilidades dessa abordagem é que podemos traçar certos limites para até onde podemos considerar a conjectura. Além disso, a necessidade de criação de novas ferramentas em domínios mais gerais podem acabar sendo úteis ao se voltar para o terreno comum. Um exemplo disso é a noção de extensões fortemente proj-limitadas apresentada acima. Ela foi proposta enquanto os autores trabalhavam com álgebras pseudocompactas e perceberam que a noção de extensão limitada era muita restritiva nesse contexto.

Como veremos a seguir, uma motivação para a adoção de tal nomenclatura é que elas satisfazem uma propriedade próxima da compacidade: são "linearmente" compactas. Vale ressaltar que o termo "pseudocompacto" é utilizado no contexto de espaços topológicos em geral num sentido totalmente diferente do desta dissertação e que é historicamente anterior, veja [Hew48]. De fato, qualquer $\mathbb{R}$-álgebra pseudocompacta — como o próprio $\mathbb{R}$ — não é um espaço pseudocompacto no sentido de Hewitt.

Descrevemos, agora, a estrutura do capítulo. Na primeira seção, definiremos álgebras pseudocompactas a partir de três caracterizações diferentes, de modo que poderemos vê-las tanto a partir de conceitos topológicos quanto algébricos; ao final, forneceremos os principais exemplos dessas álgebras. Na seção seguinte, analisaremos as categorias de módulos de uma álgebra pseudocompacta e mostraremos os resultados básicos que nos permitem estudar homologia sobre essas álgebras. Em seguida, estaremos focados em entender suas dimensões homológicas e provaremos dois resultados sobre a dimensão global que generalizam o caso de álgebras de dimensão finita (teoremas 4.3.18 e 4.3.20). Na quarta e última seção, veremos como a conjectura de Han se comporta no mundo pseudocompacto. Notaremos que a conjectura é falsa em geral, mas que ela é satisfeita para certas álgebras de grupos profinitos (teoremas 4.4.15 e 4.4.19).

As referências básicas sobre álgebras pseudocompactas utilizadas nesse capítulo são: os textos clássicos de Gabriel [Gab62, Chapitre IV] e de Brumer [Bru66]; o livro de grupos profinitos de Ribes e Zalesskii [RZ10]; o texto de natureza introdutória de Iusenko e MacQuarrie [IM22]; a tese de Santos Souza [San22], que trata de categorias de módulos topológicos mais abrangentes; o artigo [VV97].

Notações e suposições: Neste capítulo, k sempre denotará um corpo e A será uma k-álgebra pseudocompacta.

4.1 Álgebras pseudocompactas e Propriedades topológicas

Antes de apresentarmos álgebras pseudocompactas, iremos entender, mais geralmente, sobre as propriedades de espaços vetoriais linearmente compactos. Vale ressaltar que alguns resultados abaixo podem ser provados num contexto mais abrangente, como o de módulos (veja [Zel53]) ou até mesmo de grupos topológicos.

Como forma de esclarecimento, um espaço vetorial é dito topológico se possuir uma topologia em que a soma de vetores e a multiplicação por escalar são contínuas. Da mesma forma, uma k-álgebra é topológica se, além das condições acima, o produto também for contínuo.

Definição 4.1.1. A topologia de um espaço vetorial topológico é chamada de *linear* se o ponto $0 \in V$ possui uma base de abertos dada por subespaços vetoriais de V.

Uma propriedade crucial de espaços vetoriais topológicos — característica dos chamados espaços homogêneos — é que, para todo $v \in V$, a função $w \mapsto v + w$ é um automorfismo de V que leva 0 em v. Isso nos garante, por exemplo, a facilidade de provar diversas propriedades para todo $v \in V$ apenas verificando o ponto 0. Assim, pode-se ver que:

- $\overline{\{v\}}$ é igual a $v + \overline{\{0\}}$
- Todo conjunto unitário $\{v\}$ é fechado se, e somente se, $\{0\}$ é fechado.
- Todo subespaço vetorial aberto $W \leqslant V$ é fechado, pois $V \setminus W = \bigcup_{w' \notin W} w' + W$ é uma união de abertos.

Pelo último item, também concluímos que todo ponto de um espaço vetorial com topologia linear possui uma base de abertos-fechados (em inglês, *clopens*).

Proposição 4.1.2. *Se V é um espaço vetorial com topologia linear, então V é completamente* *regular*[1]*. Além disso, valem as seguintes equivalências:*

(1) V *é* T_0*, i.e.* $\overline{\{v\}} \neq \overline{\{w\}}$ *para todo* $v \neq w$*.*

(2) $\{0\}$ *é fechado, i.e.* V *é* T_1*.*

(3) V *é Hausdorff, i.e.* V *é* T_2*.*

(4) V *é de Tychonoff (ou* $T_{3\frac{1}{2}}$*), i.e.* V *é completamente regular e* T_1*.*

(5) Existe uma família $\mathcal{U}_0$ *de subespaços vetoriais abertos tal que* $\bigcap \mathcal{U}_0 = \{0\}$*.*

Demonstração. Para provar que V é completamente regular, basta usar as bases locais de abertos-fechados em V. Se $v \in V$ e F é um subconjunto fechado de V tal que $v \notin F$, então existe uma vizinhança aberta-fechada U de v tal que $U \cap F = \emptyset$. Desse modo, a função $f : V \to [0,1]$ definida por $f|_U = 0$ e $f|_{V\setminus U} = 1$ satisfaz o desejado.

Agora, vejamos as equivalências. As implicações (4) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (1) são bem conhecidas e válidas para todo espaço topológico. Usando o fato acima, para provar (1) $\Longrightarrow$ (4), basta mostrar que V ser T_0 implica em $\{0\}$ ser fechado. Com efeito, usemos a contrapositiva: suponha que o fecho de $\{0\}$ contém um elemento $v \neq 0$. Assim, vale que $\overline{\{v\}} = v + \overline{\{0\}} = \overline{\{0\}}$, o que implica que V não é T_0.

(5) $\Longrightarrow$ (2): Basta usar que todo subespaço vetorial aberto é fechado e que interseção de fechados é fechado.

(2) $\Longrightarrow$ (5): Seja $\mathcal{U}_0$ uma base de vizinhanças abertas de $0 \in V$ dada por subespaços. Se V é T_1, então vejamos que $\bigcap \mathcal{U}_0 = \{0\}$. Com efeito, para todo $v \neq 0$, existe uma vizinhança $U \in \mathcal{U}_0$ tal que $v \notin U$ e, portanto, $v \notin \bigcap \mathcal{U}_0$. □

O resultado acima também é válido — em partes, com uma prova análoga — para qualquer grupo topológico, veja [Dik, §3.5].

Definição 4.1.3. [Lef42, p. 78] Um espaço vetorial V com topologia linear é *linearmente compacto* se satisfaz o seguinte: para todo família $\mathcal{X}$ de subespaços afins fechados de V satisfazendo $\cap\mathcal{X} = \emptyset$, existe uma subfamília finita $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X}$ tal que $X_1 \cap \dots \cap X_n = \emptyset$.

Exemplo 4.1.4. Todo espaço vetorial de dimensão finita com topologia discreta é linearmente compacto. Um exemplo de dimensão infinita é dado pelo produto arbitrário $\Pi_I k$ de cópias de um corpo k com topologia-produto. Na verdade, pode-se provar que todo espaço vetorial linearmente compacto é isomorfo a um produto dessa forma, veja [San22, Cor. 2.2.3.4].

Lema 4.1.5. *Seja* V *um espaço vetorial com topologia linear Hausdorff e* $W \leqslant V$ *um subespaço.*

- *Se* W *é linearmente compacto, então* W *é fechado.*
- *Se* W *é linearmente compacto, então a sua imagem por um morfismo linear contínuo é linearmente compacta.*

[1] Isto é, para todo ponto $v \in V$ e um fechado F que não contém v, existe função contínua $f : V \to [0,1]$ tal que $f(v) = 0$ e $f|_F = 1$.

- *Quando W é fechado, temos a equivalência: V é linearmente compacto se, e somente se, W e V/W são linearmente compactos.*

Esboço da demonstração. O primeiro item foi provado em [Lef42, II: 27.5]. O segundo item é mostrado de forma análoga ao caso de espaços topológicos compactos. Para o terceiro, é fácil concluir de V ser linearmente compacto que W é linearmente compacto. Notando a projeção $V \to V/W$, também obtemos que V/W é linearmente compacto pelo item anterior. A recíproca pode ser conferida em [Zel53, Prop. 9]. □

Proposição 4.1.6. *Seja V um k-espaço vetorial com topologia linear Hausdorff. Se a dimensão de V sobre k é finita, então sua topologia é discreta. A recíproca vale se V for linearmente compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{U}_0$ a família de subespaços abertos de $0 \in V$ tal que $\bigcap \mathcal{U}_0 = \{0\}$. Da dimensão de V ser finita, segue que existe um subespaço U com dimensão minimal em $\mathcal{U}_0$ que está, pois, contido em cada elemento de $\mathcal{U}_0$. Logo, $\{0\} = U$ é aberto.

Para obter a recíproca, assuma que V seja discreto e possua dimensão infinita, isto é, existe um conjunto linearmente independente infinito $\{v_1, v_2, \dots\}$ em V. Definindo os subespaços afins (fechados) $W_n = v_1 + \dots v_n + \langle v_{n+1}, v_{n+2}, \cdots \rangle$, pode-se deduzir que $\bigcap_n W_n = \varnothing$, $\langle v_{n+1}, v_{n+2}, \cdots \rangle$ é formado somente pelas somas finitas dos v_i's com $i > n$. No entanto, toda interseção de finitos W_n's é não-vazia. Com isso, V não pode ser linearmente compacto. □

Corolário 4.1.7. *Se V é um espaço vetorial linearmente compacto Hausdorff e $W \leqslant V$ é um subespaço, então são equivalentes:*

(1) W é aberto.

(2) W é fechado e V/W é discreto (com a topologia quociente).

(3) W é fechado e $\dim_k(V/W) < \infty$.

Demonstração. Já sabemos que todo subespaço aberto W é fechado. Assim, (2) $\implies$ (1) segue do fato de a projeção $\pi : V \to V/W$ ser contínua e (1) $\implies$ (2) segue de π ser aberta.

A equivalência dos dois últimos itens segue da proposição anterior usando que V/W é linearmente compacto Hausdorff sempre que W é fechado. □

Apenas necessitamos de mais um conceito para a definição de álgebras pseudocompactas.

Definição 4.1.8. Seja V um espaço vetorial topológico. Uma sequência $(v_j)_{j \in J}$ (indexada por um conjunto dirigido J) é *de Cauchy* se, para toda vizinhança aberta V_0 do 0, existe $k_{V_0} \in J$ tal que $v_i - v_j \in V_0$ para todos $i, j \geqslant k_{V_0}$. Um espaço vetorial topológico é dito *completo* se toda sequência de Cauchy é convergente.

A seguinte definição é essencialmente a dada por P. Gabriel em sua tese de doutorado [Gab62, p. 390].

Definição 4.1.9. Uma k-álgebra topológica A é *pseudocompacta* se for completa, Hausdorff e o ponto 0 possuir uma base de abertos dada por ideais I tal que $\dim_k(A/I) < \infty$.

A seguir utilizaremos algumas propriedades do limite inverso (também conhecido como limite projetivo) dado por um sistema inverso $\{X_i\}$ de espaços topológicos Hausdorff. Para uma introdução a esse conceito, referimos o leitor ao primeiro capítulo do livro [RZ10]. Como forma de criar um terreno comum, apenas lembramos que o limite inverso é um caso particular dos limites no sentido de Categorias, definidos por meio de uma propriedade universal — por outro lado, limites diretos são colimites. Um exemplo de limite inverso é o produto (assim como a união é um exemplo de limite direto). Na verdade, no nosso caso, vale que o limite inverso $\varprojlim_i X_i$ é um subespaço fechado de $\prod_i X_i$ com a topologia produto, veja [Lef42, p. 31].

Abaixo, veremos que álgebras pseudocompactas são essencialmente álgebras de "dimensão profinita" ou, alternativamente, álgebras linearmente compactas Hausdorff.

Proposição 4.1.10. *Sobre uma álgebra topológica A, são equivalentes:*

(1) A é pseudocompacta.

(2) A é isomorfa a um limite inverso de álgebras de dimensão finita discretas.

(3) A é linearmente compacta e o zero possui uma base de abertos $\mathcal{I}$ formada por ideais tal que $\cap\mathcal{I} = 0$.

Demonstração. Esse é o resultado análogo ao caso de grupos profinitos [RZ10, Thm 2.1.3].

Para (1) $\implies$ (2): Denotando por $\mathcal{I}$ a base de ideais abertos do 0, temos o sistema inverso $\{A/I \mid I \in \mathcal{I}\}$. Além disso, as projeções $A \to A/I$ nos fornecem um morfismo $\phi : A \to \varprojlim_I A/I$ que pode ser escrito, pensando na inclusão em $\prod_I A/I$, como $\phi(a) = (a + I)_I$. Assim, basta vermos os seguintes:

- ϕ é injetor: o núcleo de ϕ é dado por $\cap\mathcal{I}$, então isso segue de A ser Hausdorff (e da proposição 4.1.2).
- ϕ é sobrejetor: isso segue de A ser completa. De fato, um elemento $(a_I + I)_I$ em $\varprojlim_I A/I$ nos fornece uma sequência de Cauchy $(a_I)_I$ em A que, portanto, converge a um certo $a \in A$. Assim, basta notar que $\phi(a) = (a_I + I)_I$.
- ϕ é aberta: veja [War89, Thm 3.20].

Agora, a partir de (2), podemos escrever $A = \varprojlim_i A_i$ com $\dim_k(A_i) < \infty$. Sendo $\pi_i : A \to A_i$ as projeções naturais, pode-se ver que o conjunto de ideais dado por $\{\ker(\pi_i)\}_i$ forma uma base de abertos. Ainda, verifica-se que $\cap_i \ker(\pi_i) = 0$. Como cada ideal aberto I contém algum $\ker(pi)$, segue que $\dim_k(A/I) \leqslant \dim_k(A/\ker pi_i) < \infty$. Para obtermos, enfim, que (2) $\implies$ (3), basta notar que A é linearmente compacta. Isso segue de A ser subespaço fechado do produto $\prod_i A_i$, o qual é linearmente compacto pelo análogo do teorema de Tychonoff.

(3) $\implies$ (1): Vê-se que A é Hausdorff do fato de $\cap I = 0$ e da proposição 4.1.2. Além disso, pelo corolário 4.1.7, vale que $\dim_k(A/I) < \infty$ para todo ideal I aberto. Assim, basta notar que todo espaço vetorial V linearmente compacto é completo. Para tanto, considere uma sequência de Cauchy $(x_j)_{j\in J}$, isto é: para todo subespaço aberto $U \leqslant V$, existe $k(U) \in J$ tal que $x_{k(U)} + U = \bigcap_{j\geqslant k(U)} x_j + U$. Agora, sendo $\mathcal{B}$ uma base de subespaços abertos do 0, note

que o conjunto $\{x_{k(U)} + U \mid U \in \mathcal{B}\}$ satisfaz a propriedade da interseção finita. Assim, existe um elemento $\overline{x}$ na interseção

$$\bigcap_{U\in\mathcal{B}} x_{k(U)} + U = \bigcap_{U\in\mathcal{B}} \bigcap_{j\geqslant k(U)} x_j + U.$$

Isso significa que $(x_j)_j$ converge a $\overline{x}$. □

Segue diretamente da definição acima (e do corolário 4.1.7) que um ideal I de A é aberto se, e somente se, for de codimensão finita e fechado. Agora, podemos pensar se existe um resultado mais forte do que esse em alguns casos:

Questão 4.1.11. *Seja A uma álgebra pseudocompacta. Todo ideal I de codimensão finita é aberto?*

Tal questão é válida no caso em que A é noetheriana, como provado em [VV97, Cor. 3.13]. O análogo da questão acima para grupos profinitos foi respondido afirmativamente no caso finitamente gerado por Nikolov e Segal [NS03], mas um contraexemplo para o caso geral pode ser conferido em [RZ10, 4.2.12].

Vejamos, finalmente, os principais exemplos de álgebras pseudocompactas.

Exemplo 4.1.12.

1. Toda álgebra de dimensão finita com a topologia discreta é pseudocompacta. Isso segue de ela ser linearmente compacta Hausdorff ou de ser um limite inverso de si mesma.

2. A álgebra pseudocompacta de dimensão infinita mais simples (ou, melhor, semissimples) que podemos construir é o produto arbitrário $\Pi_I k$ de cópias do corpo k com a topologia produto, onde a adição e a multiplicação são definidas coordenada-a-coordenada. Podemos escrevê-la como limite inverso de álgebras de dimensão finita do seguinte modo:
$$\prod_I k = \varprojlim_{J\subset I, |J|<\infty} \prod_J k$$

3. A álgebra das séries de potências (formais) em uma variável $k[[x]]$ é dada pelo limite inverso
$$k[[x]] \, : \, \ldots \to \frac{k[x]}{(x^3)} \to \frac{k[x]}{(x^2)} \to \frac{k[x]}{(x)},$$
cf. [TB15, Prop. 2.1.1]. Seus abertos são gerados pelos ideais (x^n) e, como espaço vetorial topológico, ela é isomorfa ao produto cartesiano $\prod_{n\in\mathbb{N}} k$. O fato de podermos tomar limites de polinômios ilustra que $k[[x]]$ é completa. Por exemplo, a sequência dada por $p_n = 1 + \ldots + x^n$, $n \geqslant 0$, é de Cauchy, pois vale que $p_n - p_{n+1} \in (x^{n+1})$ e ela converge para a série $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$.

4. De forma análoga, a álgebra das séries de potências em mais de uma variável $k[[x_1, \ldots, x_n]]$ também é pseudocompacta. Na verdade, podemos obter, também, um número infinito de variáveis através do seguinte limite inverso:
$$k[[x_1, x_2, x_3, \ldots]] \, : \, \ldots \to \frac{k[x_1, x_2, x_3]}{(x_1^3, x_2^3, x_3^3)} \to \frac{k[x_1, x_2]}{(x_1^2, x_2^2)} \to \frac{k[x_1]}{(x_1)}.$$

Tal exemplo mostra que álgebras pseudocompactas não são noetherianas em geral.

5. Sejam k um corpo e G um grupo profinito, isto é, um grupo que é limite $G = \varprojlim_i G_i$ para alguns grupos finitos discretos G_i. Desse modo, a álgebra completa do grupo G, definida por $k[[G]] = \varprojlim_i k[G_i]$, é pseudocompacta. Pensando funtorialmente, a operação $k[[-]]$ de obter a álgebra completa livre a partir de um grupo profinito é um funtor covariante que preserva coprodutos.

6. Dada uma aljava Q (possivelmente com infinitos vértices e arestas), podemos construir a álgebra de caminhos completa $k[[Q]]$, cf. [IM21, Def. 2.1]. Para tanto, considere inicialmente uma aljava Q com finitos vértices e arestas. Sua álgebra completa possui uma estrutura de espaço vetorial topológico dada por $k[[Q]] = \prod_{n=0}^{\infty} kQ_n$, onde Q_n é o conjunto dos caminhos de comprimento n. Cada kQ_n é discreto e a multiplicação é definida como no caso usual pela concatenação de caminhos. Tomando, agora, uma aljava arbitrária Q, ela pode ser escrita como a união (ou o limite direto) de suas subaljavas finitas Q_i. Assim, definimos a álgebra completa como $k[[Q]] = \varprojlim_i k[[Q_i]]$, a qual é pseudocompacta, pois é limite inverso de álgebras pseudocompactas. Repare que $k[[Q_i]]$ é isomorfa ao quociente de $k[[Q]]$ pelo ideal gerado pelas flechas e vértices de Q que não estão em Q_i. Nesse caso, o funtor $k[[-]]$ que fornece uma álgebra a partir de uma aljava é contravariante.

4.2 Módulos pseudocompactos e Propriedades homológicas

Terminologia e notação: Nesta seção, A será sempre uma álgebra pseudocompacta e, dados dois A-módulos topológicos denotaremos o conjunto de morfismos de A-módulos contínuos por $\mathrm{Hom}_A(M, N)$. Caso queiramos distinguir tal conjunto do formado por morfismos não necessariamente contínuos, utilizaremos respectivamente as notações $\mathrm{Hom}_{Top(A)}(M, N)$ e $\mathrm{Hom}_{A\text{-}Mod}(M, N)$.

Para entendermos álgebras pseudocompactas do ponto de vista homológico, precisamos de módulos que formem uma boa categoria abeliana. Assim, realizamos a definição-proposição abaixo, que pode ser analogamente provada ao caso de álgebras.

Proposição-definição 4.2.1. *Dada uma álgebra pseudocompacta A, um A-módulo topológico M é dito pseudocompacto se satisfizer as equivalências:*

(1) M é completo, Hausdorff e $0 \in M$ possui uma base de abertos $\mathcal{N}$ formada por submódulos de codimensão finita.

(2) M é isomorfo a um limite inverso de A-módulos de dimensão finita discretos.

(3) M é linearmente compacta e o elemento $0 \in M$ possui uma base de abertos $\mathcal{N}$ formada por submódulos tal que $\cap \mathcal{N} = 0$.

Corolário 4.2.2. *Sobre um submódulo $N \leqslant M$ de um A-módulo pseudocompacto M, são equivalentes:*

(1) N é pseudocompacto.

(2) N é linearmente compacto.

(3) N é fechado.

Demonstração. A equivalência entre os dois primeiros itens segue da caracterização (3) acima. A equivalência entre os dois últimos segue das propriedades básicas de espaços linearmente compactos 4.1.5. □

Para que possamos aplicar as ferramentas de Álgebra Homológica sobre módulos pseudocompactos, precisamos garantir que sua categoria tenha algumas propriedades boas. Isso é feito na seguinte proposição.

Proposição 4.2.3. *A categoria A-PcMod dos A-módulos pseudocompactos com morfismos de módulos contínuos:*

- *é uma subcategoria abeliana de A-Mod que preserva sequências exatas.*
- *possui produtos arbitrários (i.e. é completa).*
- *o funtor dado pelo limite inverso é exato.*

Demonstração. Primeiramente, *A-PcMod* é subcategoria de *A-Mod*, pois cada módulo possui apenas uma topologia que o torna pseudocompacto, cf. [Die51, 1.g)]. Para verificarmos que é abeliana, é suficiente notar que a categoria *A-PcMod*

- possui objeto zero: de fato, 0 é objeto zero.
- é uma categoria aditiva: a estrutura aditiva em $\mathrm{Hom}_A(-,-)$ é preservada, pois a soma de morfismos contínuos é contínuo.
- possui produtos arbitrários: o produto de módulos pseudocompactos com a topologia produto é, de fato, pseudocompacto usando a caracterização (3).
- possui coprodutos finitos: segue dos dois itens anteriores.
- preserva núcleos e conúcleos: de fato, para todo $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, temos que o submódulo $\ker(f) = f^{-1}(0)$ é fechado em M e, portanto, é pseudocompacto. Também, vale que o submódulo $\mathrm{Im}(f) \leqslant N$ é pseudocompacto, pois é imagem contínua de um módulo linearmente compacto. Assim, o conúcleo de f, dado por $N/\mathrm{Im}(f)$, é pseudocompacto.

Segue do item acima, também, que uma sequência é exata em *A-PcMod* se, e somente se, é exata em *A-Mod*.

Para o último item, deve-se verificar que, se temos uma sequência exata de sistemas inversos em *A-PcMod* sobre o mesmo conjunto dirigido I

$$0 \to \{L_i\}_{i\in I} \to \{M_i\}_{i\in I} \to \{N_i\}_{i\in I} \to 0,$$

então, após aplicar o limite inverso, obtemos a sequência exata

$$0 \to \varprojlim_I L_i \to \varprojlim_I M_i \to \varprojlim_I N_i \to 0.$$

Isso foi provado em [Gab62, IV: Thm 3] e o seu análogo para grupos profinitos pode ser encontrado em [RZ10, p. 31]. O fato de que o limite inverso preserva monomorfismos é válido para qualquer categoria e pode ser verificado através da sua propriedade universal. □

A proposição acima pode ser sintetizada, na terminologia de Categorias, dizendo que *A-PcMod* satisfaz a propriedade AB5*. Também, é possível verificar que tal categoria é cocompleta (ou que ela satisfaz AB3), isto é, que ela possui coprodutos arbitrários, como afirmado em [MSZ20, p. 9].

Proposição 4.2.4. *Temos as seguintes propriedades sobre a categoria A-PcMod:*

a) O módulo livre dado pelo produto $\prod_i A$ é projetivo em A-PcMod.

b) Todo módulo em A-PcMod é quociente de algum módulo livre.

c) Um módulo em A-PcMod é projetivo se, e somente se, é somando direto de algum produto $\prod_i A$ e seu espaço complementar é fechado.

Em particular, A-PcMod possui suficientes projetivos.

Demonstração. Esboço da demonstração O caso análogo da proposição para grupos profinitos é dada em [RZ10, 5.4.2]. O primeiro item também foi provado em [Bru66, Cor. 1.3]. Repare que o terceiro item é consequência dos dois itens anteriores. O segundo item nos garante que, para todo módulo projetivo $P \in$ *A-PcMod*, temos um epimorfismo (contínuo) de um módulo livre em P, então tal morfismo cinde (continuamente) e P é somando do módulo livre. Reciprocamente, pode-se provar que todo somando de um módulo projetivo é projetivo. Assim, a demonstração é finalizada aplicando o primeiro item. □

A seguir, veremos que outra classe importante de A-módulos topológicos é a de módulos discretos, pois eles possuem uma dualidade com os módulos pseudocompactos.

Lema 4.2.5. *Se D é um A-módulo topológico discreto, então D é a união de seus A-módulos de dimensão finita.*

Demonstração. Seja $\phi_d : A \to D$, com $d \in D$, a função definida por $a \mapsto am$. Como ela é contínua e 0 é aberto em D, vale que o anulador de m dado por $\mathrm{Ann}(d) = \{a \in A \mid ad = 0\} = \phi_d^{-1}(0)$ é aberto em A. Assim, o submódulo gerado por d satisfaz $A \cdot d = (A/\mathrm{Ann}(d)) \cdot d$ e $A/\mathrm{Ann}(d)$ possui dimensão finita. Logo, $D = \cup_{d \in D} Ad$ é uma união de módulos de dimensão finita. □

Proposição 4.2.6. *A categoria A-PcMod é dual à categoria DMod-A dos A-módulos discretos à direita. Em particular, DMod-A possui injetivos suficientes e limites diretos exatos.*

Demonstração. A dualidade é dada pelo funtor contravariante abaixo

$$\mathrm{Hom}_k(-, k) : \textit{A-PcMod} \rightleftarrows \textit{DMod-A}.$$

Como provado no lema anterior, quando D é A-módulo discreto, podemos escrevê-lo como limite direto de módulos de dimensão finita $D = \varinjlim_i D_i$. Usando que, para módulos em geral, Hom comuta com limites diretos na primeira coordenada (veja [Oso73, Prop. 1.7] por exemplo), temos que $\mathrm{Hom}_k(D, k) = \varprojlim \mathrm{Hom}_k(D_i, k)$ e, portanto, esse módulo é pseudocompacto de fato. Além disso, usando o lema 4.2.7 abaixo, segue que

$$\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_k(D, k), k) = \mathrm{Hom}_k(\varprojlim \mathrm{Hom}_k(D_i, k), k) = \varinjlim \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_k(D_i, k), k)).$$

De modo análogo, tomando um módulo pseudocompacto $M = \varprojlim M_i$, tal que $\dim_k(M_i) < \infty$, temos que

$$\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_k(M, k), k) = \mathrm{Hom}_k(\varinjlim \mathrm{Hom}_k(M_i, k), k) = \varprojlim \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_k(M_i, k), k)).$$

Desse modo, a equivalência entre as categorias foi reduzida ao caso de módulos de dimensão finita. Assim, a prova é finalizada após notar os isomorfismos naturais

$$\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_k(M_i, k), k) \cong M_i \quad \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_k(D_i, k), k) \cong D_i.$$

□

Lema 4.2.7. *Tome os sistemas inversos $\{A_i, \phi_{ij}, I\}$ de álgebras pseudocompactas e $\{M_i, f_{ij}, I\}$ de A_i-módulos pseudocompactos de modo que ϕ_{ij} e f_{ij} sejam epimorfismos. Tome, também, um sistema direto $\{N_i, g_{ij}, I\}$ de A_i-módulos discretos. Assumindo que f_{ij} e g_{ij} são compatíveis com ϕ_{ij}, temos que*

$$\varinjlim_i \mathrm{Hom}_{A_i}(M_i, N_i) \cong \mathrm{Hom}_A(\varprojlim_i M_i, \varinjlim_i N_i),$$

onde denotamos $A = \varprojlim_i A_i$.

Demonstração. [Bru66, Lemma A.3] ou [RZ10, 5.1.4]. □

O produto tensorial usual de módulos pseudocompactos não é pseudocompacto em geral. Como exemplo disso, considere a álgebra pseudocompacta $k[[x]]$. Assim, como $k[x] \otimes_k k[y] \cong k[x, y]$, gostaríamos que $k[[x]] \otimes k[[y]]$ fosse isomorfa a $k[[x, y]]$; no entanto, isso só se torna verdade quando tomamos um produto tensorial que leva em conta a topologia das álgebras, o qual definimos a seguir.

Definição 4.2.8. Dados dois A-módulos pseudocompactos M e N à direita e à esquerda respectivamente, uma função contínua $\phi : M \times N \to V$ (onde V é k-módulo pseudocompacto) é um *bimorfismo* se ϕ é morfismo de espaços vetoriais em cada coordenada e $\phi(ma, n) = \phi(m, an)$ para todo $a \in A$. O *produto tensorial completo* entre M e N, denotado por $M \widehat{\otimes} N$ e munido com o bimorfismo $\widehat{\otimes} : M \times N \to M \widehat{\otimes} N$, é definido pela seguinte propriedade universal: se V é um k-módulo pseudocompacto e $\phi : M \times N \to L$ é bimorfismo, então existe único morfismo (de espaços vetoriais topológicos) $\bar{\phi} : M \widehat{\otimes} N \to L$ tal que $\bar{\phi}(m \widehat{\otimes} n) = \phi(m, n)$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{\otimes}"'] & V \\ M \widehat{\otimes} N \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Lema 4.2.9. *A propriedade universal do produto tensorial completo $M\widehat{\otimes}N$ acima só necessita ser verificada para quando V possui dimensão finita.*

Demonstração. Tome um bimorfismo $\varphi : M \times N \to V$ e seja V limite de um sistema inverso $\{V_i, \pi_{ij}\}$ formado por espaços de dimensão finita. Denote, ainda, por φ_i a composição $M \times N \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\pi_i} V_i$. Assumindo que a propriedade universal é verificada em cada V_i, mostraremos que ela é válida para V. Ou seja, sendo $\bar{\varphi}_i : M\widehat{\otimes}N \to V_i$ o único morfismo tal que $\bar{\varphi}_i \circ \widehat{\otimes} = \varphi_i$, construiremos $\bar{\varphi} : M\widehat{\otimes}N \to V$ tal que $\bar{\varphi} \circ \widehat{\otimes} = \varphi$.

Da unicidade de $\bar{\varphi}_i$, segue que as funções $\bar{\varphi}_i$ são compatíveis com o sistema inverso, isto é, que elas comutam no seguinte diagrama para todo i:

$$\begin{tikzcd} M\widehat{\otimes}N \arrow[r, "\bar{\varphi}_j"] \arrow[dr, "\bar{\varphi}_i"'] & V_j \\ & V_i \arrow[u, "\pi_{ij}"'] \end{tikzcd}$$

Assim, pela propriedade universal do limite inverso, temos um único morfismo $\bar{\varphi} : M\widehat{\otimes}N \to V$ tal que $\pi_i\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_i$ para todo i. Desse modo, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, shift left, "\bar{\varphi}\widehat{\otimes}"] \arrow[r, shift right, "\varphi"'] \arrow[dr, "\bar{\varphi}_i"'] & V \arrow[d, "\pi_i"] \\ & V_i \end{tikzcd}$$

Utilizando a unicidade do morfismo $M \times N \to N$, concluímos, enfim, que $\bar{\varphi}\widehat{\otimes} = \varphi$. □

Motivados pelo resultado acima, pode-se pensar se outras propriedades em *A-PcMod* também bastam ser verificadas para módulos de dimensão finita. Esse é o caso, por exemplo, da propriedade universal de módulos projetivos, veja [RZ10, 5.4.1].

A seguir notaremos que o produto tensorial completo em *A-PcMod* comuta com limites inversos.

Lema 4.2.10. *Sejam $\{M_i\}_i$ e $\{N_j\}_j$ sistemas inversos de A-módulos pseudocompactos à esquerda e à direita respectivamente. Vale que*

$$\big(\varprojlim_i M_i\big)\widehat{\otimes}_A\big(\varprojlim_j N_j\big) \cong \varprojlim_{i,j}(M_i\widehat{\otimes}_A N_j)$$

Demonstração. [Bru66, Lemma A.4] ou [RZ10, 5.5.2]. □

Com isso, pode-se deduzir que tal produto de módulos pseudocompactos, de fato, sempre existe, pois, como veremos abaixo, o produto tensorial completo de módulos de dimensão finita coincide com o produto usual.

Proposição 4.2.11. *Vale o isomorfismo $M\widehat{\otimes}N \cong M \otimes N$ se alguma das condições abaixo for satisfeita:*

- *M e N são finitamente gerados como A-módulos.*
- *M ou N é finitamente apresentável como A-módulo.*

Demonstração. A demonstração será feita através da técnica de *dévissage* (em português, desmantelamento), utilizada para deduzir propriedades de A-módulos finitamente apresentáveis a partir do módulo livre A.

Primeiramente, note que o resultado é valido quando $N = A$, pois temos o isomorfismo $m\widehat{\otimes}a \mapsto ma$. Notando que o funtor $M\widehat{\otimes}_A-$ é aditivo, também segue que o resultado é válido para $M = A^k$, $k \geqslant 0$. Agora, se N é finitamente gerado, então temos uma sequência exata $K \to A^k \to M \to 0$ para algum $k \geqslant 0$. Usando que $M\widehat{\otimes}_A-$ é exato à direita (veja [RZ10, 5.5.3]), obtemos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_A K \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes_A A^k \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & M \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \arrow[d, equal] \\
M\widehat{\otimes}_A K \arrow[r] & M\widehat{\otimes}_A A^k \arrow[r] & M\widehat{\otimes}_A N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Note que o isomorfismo central nos diz que o mapa $M \otimes_A N \to M\widehat{\otimes}_A N$ é sobrejetor. Pela mesma razão, se M também for finitamente gerado, então $M \otimes_A K \to M\widehat{\otimes}_A K$ é sobrejetor. Obtemos essa mesma conclusão quando N é finitamente apresentável (e M é arbitrário), pois nesse caso K pode ser escolhido como sendo A^m para algum $m \geqslant 0$. Desse modo, obtemos o isomorfismo desejado pelo lema dos 5. □

Aplicando a mesma técnica da demonstração anterior, obtemos um resultado similar para o funtor $\mathrm{Hom}_A(-,-)$:

Proposição 4.2.12. *Se M é um A-módulo finitamente gerado e N é um A-módulo discreto ou pseudocompacto, então* $\mathrm{Hom}_{Top(A)}(M,N) = \mathrm{Hom}_{A\text{-}Mod}(M,N)$. *Em outras palavras, todo morfismo partindo de um A-módulo finitamente gerado é contínuo.*

Esboço da demonstração. Usando que $\mathrm{Hom}_{Top(A)}(-,N)$ é exato à esquerda e que sempre temos o monomorfismo $\mathrm{Hom}_{Top(A)}(M,N) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{A\text{-}Mod}(M,N)$, pode-se replicar a técnica da demonstração anterior. □

Corolário 4.2.13. *Para todo módulo $M \in A$-Mod finitamente apresentável, podemos associar a M uma topologia que o torna pseudocompacto.*

Demonstração. Dada a sequência exata $A^m \xrightarrow{\phi} A^n \to M \to 0$, vale que ϕ é contínua pelo resultado acima. Desse modo, segue que $M \cong \mathrm{coker}(\phi)$ é pseudocompacto. □

Um exemplo particular, mas relevante, de módulos finitamente gerados (e, na verdade, 1-gerados) são os módulos simples. Como consequência do resultado a seguir, temos que os módulos simples de *A-PcMod* também são simples em *A-Mod*.

Lema 4.2.14. *Todo módulo simples em A-PcMod ou em A-DMod possui dimensão finita. Mais geralmente, um A-módulo pseudocompacto ou discreto tem comprimento finito sobre A se, e somente se, tem dimensão finita sobre k.*

Demonstração. Para módulos pseudocompactos, provaremos a primeira afirmação pela contrapositiva. Com efeito, se M é um módulo pseudocompacto de dimensão infinita, então ele possui um submódulo aberto $N \neq M$ tal que M/N tem dimensão finita. Como N também é fechado, segue que N é um submódulo pseudocompacto não-trivial. No caso em que M é discreto, basta usar o lema 4.2.5.

Um A-módulo M tem comprimento finito se, e somente se, existe uma série de composição

$$0 = M_0 < M_1 < \dots < M_{r-1} < M_r = M$$

de modo que cada fator quociente M_{i+1}/M_i é simples e, portanto, de dimensão finita. Assim, chegamos que M também possui dimensão finita, a qual é igual à soma das dimensão desses fatores. A recíproca segue do fato geral de que todo módulo artiniano e notheriano possui uma série de composição, veja [TB15, Teo. 7.2.4] por exemplo. □

Definição 4.2.15. O *radical de Jacobson* de A, denotado por $J(A)$, é o ideal dado pela interseção de todos os ideais fechados maximais à esquerda (ou à direita) de A.

Lema 4.2.16. *Para todo ideal aberto I de A, existe n tal que $J(A)^n \subseteq I$.*

Demonstração. Sendo $\mathcal{M}$ o conjunto dos ideais maximais à esquerda de A, temos que $J(A/I) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}} (\mathfrak{m} + I)/I$ contém $(J(A) + I)/I = ((\bigcap \mathfrak{m}) + I)/I$. Agora, como A/I tem dimensão finita, existe $n \geqslant 1$ tal que $J(A/I)^n = 0$ (cf. [Lam01, 4.12]) e, portanto, $J(A)^n \subseteq I$. □

Proposição 4.2.17. *Sendo A uma álgebra pseudocompacta, temos as seguintes caracterizações alternativas para seu radical de Jacobson $J(A)$:*

(1) $J(A)$ é igual à interseção dos anuladores de todos A-módulos pseudocompactos simples.

(2) $J(A)$ é o único ideal $I \subseteq A$ tal que I é pronilpotente (i.e. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n = 0$) e A/I é um produto de A-módulos simples.

Demonstração. A primeira caracterização segue da seguinte equivalência: um A-módulo à esquerda (resp. à direita) pseudocompacto S é simples se, e somente se, $S \cong A/I$ para algum ideal fechado I maximal à esquerda (resp. à direita). Isso vale tomando $I = \mathrm{ann}_A(s) = \{a \in A \mid a \cdot s = 0\}$ para algum $0 \neq s \in S$.

Para obtermos a segunda caracterização, note, primeiramente, que $J(A)$ é pronilpotente pelo lema 4.2.16 acima: $\bigcap_n J(A)^n \subseteq \bigcap_{I \lhd_o A} I = \{0\}$. O fato de que $A/J(A)$ é um produto de módulos simples pode ser conferido no item [(10)⊆ (1)] da demonstração de [IM22, Prop 3.2].

Agora, provemos a unicidade. Se I é um ideal de A e S é um módulo pseudocompacto simples, então $I \cdot S$ é igual a 0 ou a S. Agora, no caso em que I é pronilpotente, só pode ocorrer que $I \cdot S = 0$. Assim, dada a caracterização anterior, chega-se que $I \subseteq J(A)$. Obtemos, também, a inclusão oposta ao assumir que A/I é um produto de módulos simples, pois vale nesse caso que $(xA)/I = x \cdot (A/I) = 0$ para todo $x \in J(A)$. □

Apesar de não estar claro na proposição acima, pode-se provar que o radical de Jacobson de uma álgebra pseudocompacta coincide com o radical clássico – no qual a topologia não é levada em conta. Assim, todas as caracterizações usuais de $J(A)$ podem, de fato, ser utilizadas, veja [IM22, Prop. 3.2]. Além disso, podemos utilizá-lo para caracterizar as álgebras pseudocompactas semissimples de forma análoga ao caso de dimensão finita.

Proposição-definição 4.2.18. [IM22, Prop. 3.7] *Uma álgebra pseudocompacta A é chamada de topologicamente semissimples se satisfaz alguma das condições equivalentes abaixo:*

1. *Para todo ideal à esquerda fechado I de A, existe um ideal ideal à esquerda fechado J tal que $A = I \oplus J$.*
2. $J(A) = 0$
3. *Todo A-módulo à esquerda pseudocompacto é projetivo.*
4. *A é limite inverso de álgebras de dimensão finita semissimples.*
5. *A é isomorfa a um produto de álgebras de matrizes $M_{n_i}(D_i)$, onde n_i são inteiros positivos e D_i são álgebras de divisão de dimensão finita.*

Exemplo 4.2.19. Uma versão do teorema de Maschke é válida para grupos profinitos: se $G = \varprojlim_i G_i$ é um grupo profinito tal que cada G_i é finito e k é um corpo cuja característica não divide a ordem de nenhum G_i, então $k[[G]]$ é top. semissimples. Isso segue do fato de $k[[G]]$ ser limite de semissimples ou, usando [IM22, Lemma 3.3], de que $J(k[[G]]) = 0$.

Dado um anel R, podemos construir uma topologia a partir de um ideal I ao tomar como base de abertos do $0 \in R$ os ideais I^n. Essa topologia é conhecida como *I-ádica* e é bem estudada em Álgebra Comutativa, veja [GS71]. Por exemplo, o completamento de $k[x]$ em relação à topologia (x)-ádica nos fornece a álgebra das séries de potências $k[[x]]$. A seguir, verificaremos que, no caso noetheriano, álgebras pseudocompactas possuem topologia $J(A)$-ádica.

Proposição 4.2.20. [VV97, Prop. 3.22] *Se A é uma álgebra pseudocompacta noetheriana à esquerda, então*

i) $A/J(A)$ é uma soma finita de módulos simples de dimensão finita.

ii) A é completa em relação à topologia $J(A)$-ádica.

iii) A topologia de A coincide com a topologia $J(A)$-ádica.

Reciprocamente, se A é uma álgebra noetheriana à esquerda satisfazendo i) e ii), então A é pseudocompacta quando equipada com a topologia $J(A)$-ádica.

Demonstração. Vejamos a primeira afirmação. Do fato de $A/J(A)$ ser topologicamente semissimples noetheriana à esquerda, podemos concluir que $A/J(A)$ é produto finito de módulos simples de dimensão finita. Em particular, $A/J(A)$ tem dimensão finita. Vale o mesmo para $J(A)^n/J(A)^{n+1}$, pois $J(A)^{n+1} = J(J(A)^n)$ quando $J(A)$ é finitamente gerado, cf. [Ben91a, Prop. 1.2.5]. Desse modo, $A/J(A)^n$ tem dimensão finita para todo $n \geqslant 0$. Usando, também, que a questão 4.1.11 é válida no caso noetheriano, concluímos que $J(A)^n$ é aberto para todo n, o que, junto com o lema 4.2.16, nos diz que $J(A)^n$ são abertos básicos de A. Em outras palavras, a topologia de A é $J(A)$-ádica.

Reciprocamente, se A é noetheriana à esquerda podemos novamente concluir de i) que $A/J(A)^n$ tem dimensão finita. Assumindo também que A é completa nessa topologia, concluímos que A é pseudocompacta. $\square$

4.3 Dimensões homológicas

Como A-*PcMod* é uma categoria abeliana com suficientes projetivos, podemos considerar a dimensão projetiva de um A-módulo pseudocompacto assim como caracterizado em 1.2.2. Assim, a *dimensão global de* A como álgebra pseudocompacta pode ser definida como o supremo das dimensões projetivas dos A-módulos $M \in A\text{-}PcMod$, ou seja, é igual a gl.dim(A-*PcMod*).[2] Para caracterizá-la a partir dos funtores derivados, devemos ressaltar que não provamos que A-*PcMod* possui injetivos suficientes. Com isso, e lembrando que A-*DMod* satisfaz essa condição, definimos o funtor Ext como o funtor derivado (à direita) do funtor covariante $\mathrm{Hom}_A(M,-) : A\text{-}DMod \to A\text{-}DMod$ ou do contravariante $\mathrm{Hom}_A(-,N) : A\text{-}PcMod \to k\text{-}DMod$. Do mesmo modo, Tor é o funtor derivado (à esquerda) do funtor $-\widehat{\otimes}_A- : A\text{-}PcMod \to k\text{-}PcMod$. Com isso, os funtores derivados possuem os seguintes domínios e codomínios:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^n_A(-,-) &: A\text{-}PcMod \times A\text{-}DMod \to k\text{-}DMod \\ \mathrm{Tor}^A_n(-,-) &: A\text{-}PcMod \times A\text{-}PcMod \to k\text{-}PcMod \end{aligned}$$

Quando quisermos esclarecer que estamos levando em consideração as categorias pseudocompactas, escreveremos tais funtores como $\mathrm{Ext}_{Top(A)}$ e $\mathrm{Tor}Top(A)$, em contraste com o caso não-topológico, que denotaremos por $\mathrm{Ext}_{A\text{-}Mod}$ e $\mathrm{Tor}^{A\text{-}Mod}$.

Agora, veremos que a dimensão global de álgebras pseudocompactas possui uma caracterização bastante similar à de álgebras de dimensão finita.

Lema 4.3.1. *Se A é pseudocompacta, então todo A-módulo pseudocompacto simples S é somando direto de $\overline{A} = A/J(A)$.*

Demonstração. Como o radical $J(A)$ está contido no anulador de S, cf. 4.2.17, podemos concluir que a projeção $A \to \overline{A}$ nos dá uma estrutura de $\overline{A}$-módulo para S. Além disso, do fato de S ser simples, temos um morfismo de $\overline{A}$-módulos sobrejetor $\overline{A} \to S$ dado por $\bar{a} \to \bar{a}s$, onde $s \neq 0$ é um elemento fixado de S.

Unindo isso ao fato de que $\overline{A}$ é topologicamente semissimples (pois $J(\overline{A}) = 0$), deduzimos, finalmente, que o epimorfismo $\overline{A} \to S$ cinde. $\square$

Proposição 4.3.2. *As seguintes afirmações são equivalentes para um A-módulo à esquerda pseudocompacto M:*

[2] Como veremos no teorema 4.3.5 abaixo, não há necessidade de definir as dimensões globais à esquerda, à direita ou fraca, pois todas coincidem.

(1) $\mathrm{pd}_A(M) < n$

(2) $\mathrm{Ext}^n_A(M, S') = 0$ *para todo A-módulo simples* S'

(3) $\mathrm{Tor}^A_n(S, M) = 0$ *para todo A-módulo à direita simples* S

(4) $\mathrm{Tor}^A_n(A/J(A), M) = 0$

Demonstração. As três primeiras equivalências foram obtidas no corolário 3.2 de Brumer [Bru66]. A implicação (1) $\implies$ (4) vale em geral e segue da definição de Tor através de resoluções projetivas. Assim, basta provar (4) $\implies$ (3), o que segue diretamente do lema acima, pois Tor^A comuta com somas diretas (finitas). □

Proposição 4.3.3. *Se* $\{A_i, \phi_{ij}\}$ *e* $\{M_i, f_{ij}\}$ *são sistemas inversos, respectivamente, de álgebras pseudocompactas e de* A_i*-módulos pseudocompactos tais que* ϕ_{ij} *e* f_{ij} *são sobrejetores. Escrevendo* $A = \varprojlim_i A_i$ *e* $M = \varprojlim_i M_i$*, temos que:*

a) *Se cada* M_i *é* A_i*-projetivo, então* M *é* A*-projetivo.*

b) $\mathrm{pd}_A(M) \leqslant \sup_i\{\mathrm{pd}_A(M_i)\}$.

Demonstração. [Bru66, 3.3, 3.4] □

É razoável de se perguntar se a desigualdade acima seria válida considerando M_i como A_i-módulo. Caso isso fosse verdade, também podemos considerar existência de uma desigualdade análoga para a dimensão global.

Questão 4.3.4. *Com a notação da proposição acima, valem as desigualdades abaixo:*

- $\mathrm{pd}(\varprojlim_i M_i) \leqslant \sup_i\{\mathrm{pd}_{A_i}(M_i)\}$*?*
- $\mathrm{gl.dim}(\varprojlim_i A_i) \leqslant \sup_i\{\mathrm{gl.dim}(A_i)\}$*?*

Note que já sabemos que as perguntas acima são válidas nos casos em que $\mathrm{pd}_{A_i}(M_i) = 0$ e que $\mathrm{gl.dim}(A_i) = 0$ para todo i.

O seguinte resultado mostra que a dimensão global de álgebras pseudocompactas se comporta de forma similar ao caso de álgebras de dimensão finita, o que foi apresentado no teorema 1.2.16.

Teorema 4.3.5. *As seguintes afirmações são equivalentes para uma* k*-álgebra pseudocompacta* A*:*

(1) $\mathrm{gl.dim}(A) < n$

(2) $\mathrm{Ext}^n_A(S, S') = 0$ *para todos os simples* $S \in A$*-PcMod e* $S' \in A$*-DMod.*

(3) $\mathrm{Tor}^A_n(S, S') = 0$ *para todos os simples* $S, S' \in A$*-PcMod.*

(4) $\mathrm{Tor}^A_n(A/J(A), A/J(A)) = 0$

Demonstração. Novamente, os três primeiros itens foram obtidos por Brumer [Bru66, Thm 3.5] e as implicações restantes seguem como na demonstração anterior. □

Agora, veremos que a dimensão global de álgebras pseudocompactas noetherianas coincide com a dimensão global não-topológica.

Proposição 4.3.6. *Se a álgebra pseudocompacta A é noetheriana e $M \in A\text{-}PcMod$ é finitamente gerado, então* $\mathrm{pd}_{A\text{-}PcMod}(M) = \mathrm{pd}_{A\text{-}Mod}(M)$. *Além disso, temos que*

$$\mathrm{Ext}^n_{Top(A)}(M, N) \cong \mathrm{Ext}^n_{A\text{-}Mod}(M, N) \text{ para todo } N \in A\text{-}DMod$$
$$\mathrm{Tor}^n_{Top(A)}(M, N) \cong \mathrm{Tor}^n_{A\text{-}Mod}(M, N) \text{ para todo } N \in A\text{-}PcMod$$

Demonstração. Se $\mathrm{pd}_{A\text{-}PcMod}(M) = m$, então, pela hipótese, M possui uma resolução projetiva $(P_i)_{i \geqslant 0}$ em $A\text{-}PcMod$ de comprimento m formada por módulos finitamente apresentáveis. Como cada P_i é somando direto de um produto finito de A's, segue que tal resolução também é projetiva em $A\text{-}Mod$ e, portanto, que $\mathrm{pd}_{A\text{-}PcMod}(M) \geqslant \mathrm{pd}_{A\text{-}Mod}(M)$.

Além disso, aplicando o resultado 4.2.12, deduzimos que

$$\mathrm{Ext}^n_{Top(A)}(M, N) = \mathrm{Hom}_{Top(A)}(P_n, N) \cong \mathrm{Hom}_{A\text{-}Mod}(P_n, N) = \mathrm{Ext}^n_{A\text{-}Mod}(M, N)$$

As mesmas identidades são obtidas para o Tor aplicando a proposição 4.2.11.

Desse modo, podemos obter a desigualdade contrária $\mathrm{pd}_{A\text{-}PcMod}(M) \leqslant \mathrm{pd}_{A\text{-}Mod}(M)$, pois da existência de algum $N \in A\text{-}DMod$ tal que $\mathrm{Ext}^m_{Top(A)}(M, N) \neq 0$ segue que $\mathrm{pd}_{A\text{-}Mod}(M) \geqslant m$. □

Corolário 4.3.7. *Se a álgebra pseudocompacta A é noetheriana, então as dimensões globais de $A\text{-}PcMod$ e de $A\text{-}Mod$ coincidem.*

Demonstração. Já foi visto que ambas dimensões globais são calculadas pelo supremo dos módulos finitamente gerados. De 4.2.13, também sabemos que todo $M \in A\text{-}mod$ pode ser visto, também, em $A\text{-}PcMod$. Assim, o resultado segue da igualdade $\mathrm{pd}_{A\text{-}PcMod}(M) = \mathrm{pd}_{A\text{-}Mod}(M)$. □

Exemplo 4.3.8. O produto enumerável de corpos $A = \Pi_{n \in \mathbb{N}} k$ é uma álgebra pseudocompacta top. semissimples ou, equivalentemente, sua dimensão global como álgebra pseudocompacta é zero. No entanto, ao desconsiderarmos sua topologia, ela não é semissimples, pois o ideal $I = \oplus_{n \in \mathbb{N}} k$ não possui complementar em A; de fato, todo ideal (não-nulo) de A possui interseção não-nula com I. Na realidade, pode-se provar que a dimensão global de A (não-topológica) é maior ou igual a 2, e vale a igualdade se assumirmos a hipótese do contínuo, cf. [Oso73, Thm 2.51].

Tendo como motivação os resultados anteriores, o exemplo acima e o fato de que $\mathrm{Hom}_{Top(A)}(-, -)$ sempre possui uma injeção em $\mathrm{Hom}_{A\text{-}Mod}(-, -)$, formulamos o seguinte:

Questão 4.3.9. *Para álgebras pseudocompactas A em geral:*

1. *Vale que* $\mathrm{gl.dim}(A\text{-}PcMod) \leqslant \mathrm{gl.dim}(A\text{-}Mod)$*?*
2. *Para todo $n \geqslant 0$, existe um morfismo injetor* $\mathrm{Ext}^n_{Top(A)}(-, -) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^n_{A\text{-}Mod}(-, -)$*?*

Note que uma resposta positiva para a segunda questão, também, responde afirmativamente a primeira.

Teorema 4.3.10. *Sobre uma k-álgebra pseudocompacta A noetheriana comutativa local com corpo residual $K = A/\mathfrak{m}$, são equivalentes:*

(1) $\mathrm{gl.dim}(A) = n < \infty$

(2) A é isomorfa a $K[[x_1, \dots, x_n]]$

Demonstração. Do anel das séries de potências ser regular de dimensão Krull n, segue que sua dimensão global é n pelo teorema de Serre-Auslander-Buchsbaum.

Para a recíproca, lembre que A é completa em relação à topologia $J(A)$-ádica (pela proposição 4.2.20) e aplique o resultado [Ser00, p.80, Thm 10] ou [Mat70, 206, Cor. 2]. □

A fim de analisarmos a necessidade da hipótese de A ser noetheriana no teorema acima, vale ressaltar que não encontramos na literatura exemplos de álgebras pseudocompactas não-noetherianas locais com dimensão global finita — o que também foi observado por Brumer [Bru66, p. 452].

Para tanto, motivados pelo contraexemplo 5. de 1.2.13, propomos tratar da álgebra de séries de potências com expoentes racionais (não-negativos) $k[[x, \mathbb{Q}]]$. De fato, tal álgebra é pseudocompacta, pois podemos construí-la a partir do seguinte limite inverso de álgebras de dimensão finita:

$$k[[x, \mathbb{Q}]] = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \frac{k[x^{1/i} : 1 \leqslant i \leqslant n]}{(x^{n^2/i} : 1 \leqslant i \leqslant n)}$$

Repare que, realmente, obtemos monômios com grau arbitrariamente grande, pois $n^2/n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$. Além disso, tal álgebra é local com ideal maximal $\mathfrak{m} = \sum_n x^{1/n} k[[x, \mathbb{Q}]]$, pois pode-se provar, de forma análoga ao caso de expoentes naturais, que todo elemento fora de $\mathfrak{m}$ é invertível, cf. [TB15, Prop. 2.1.1]. Infelizmente, não conseguimos verificar se a resolução projetiva obtida no caso não-topológico de $k[x, \mathbb{Q}]$ pode ser reformulada para o caso pseudocompacto. O principal entrave reside no fato de somas diretas infinitas não serem módulos pseudocompactos. Desse modo, apenas formulamos a seguinte pergunta.

Questão 4.3.11. *A álgebra pseudocompacta local $k[[x, \mathbb{Q}]]$ possui dimensão global finita?*

Dimensões homológicas de produtos tensoriais

Agora, passaremos a tratar de como a dimensões homológicas se comportam em relação ao produto tensorial. Nosso principal objetivo aqui será generalizar dois resultados de álgebras de dimensão finita que permitem provar a implicação fácil da conjectura de Han, i.e. que $\mathrm{gl.dim}(A) < \infty \implies \mathrm{hh.dim}(A) < \infty$. São eles: $\mathrm{gl.dim}(A \otimes B) = \mathrm{gl.dim}(A) + \mathrm{gl.dim}(B)$ e que $\mathrm{pd}_{A \otimes A^{op}} = \mathrm{gl.dim}(A)$.

O seguinte lema é uma sutil generalização da adjunção Tensor-Hom que é, no entanto, bastante valiosa para demonstrarmos resultados sobre bimódulos.

Lema 4.3.12. *Tome três álgebras pseudocompactas A, B e C e três módulos:*

- *$M \in (A\widehat{\otimes}B)$-PcMod*
- *$N \in C$-PcBimod-A*
- *$L \in (C\widehat{\otimes}B)$-DMod.*

Temos o seguinte isomorfismo natural em relação aos módulos:

$$\mathrm{Hom}_{A\widehat{\otimes}B}(M, \mathrm{Hom}_C(N, L)) \cong \mathrm{Hom}_{C\widehat{\otimes}B}(N\widehat{\otimes}_A M, L)$$

onde a ação de $A\widehat{\otimes}B$-módulo em $f \in \mathrm{Hom}_C(N, L)$ é dada por $((a \otimes b) \cdot f)(n) = b(f(na))$ e de $C\widehat{\otimes}B$ em $N\widehat{\otimes}M$ é dada por $(c\widehat{\otimes}b) \cdot (n\widehat{\otimes}m) = cn\widehat{\otimes}bm$.

Demonstração. O caso não-topológico é dado em [CE56, IX: 2.2] e pode ser provado de modo análogo ao caso da adjunção Tensor-Hom usual. De fato, mostra-se que o isomorfismo (funtorial) é dado pelas funções abaixo, que são inversas uma da outra.

$$\Phi(f) = (n\widehat{\otimes}m \mapsto f(m)(n)), f \in \mathrm{Hom}_{A\widehat{\otimes}B}(M, \mathrm{Hom}_C(N, L))$$
$$\Psi(g) = (m \mapsto [n \mapsto g(n\widehat{\otimes}m)]), g \in \mathrm{Hom}_{C\widehat{\otimes}B}(N\widehat{\otimes}_A M, L)$$

Com isso, basta mostrar que as funções envolvidas acima são contínuas. Isso pode ser feito de modo explícito assim como indicado em [San22, Thm 4.3.2.8] e [Mez98, 1.8].

Alternativamente, podemos mostrar que os isomorfismos são topológicos do fato de os funtores Hom e tensor completo comutarem com limites. Para tanto, escreva os módulos pseudocompactos como limites de módulos discretos de dimensão finita $M = \varprojlim M_i$ e $N = \varprojlim_I N_j$ (e podemos assumir ainda que os morfismos de seus sistemas inversos são epimorfismos). Desse modo, usando que uma função com domínio discreto é sempre contínua, já temos os isomorfismos para todo i, j

$$\mathrm{Hom}_{A\widehat{\otimes}B}(M_i, \mathrm{Hom}_C(N_j, L)) \cong \mathrm{Hom}_{C\widehat{\otimes}B}(N_j\widehat{\otimes}_A M_i, L)$$

Usando ainda que tais isomorfismos são funtoriais, temos induzido o seguinte isomorfismo dos limites diretos

$$\varinjlim_{i,j} \mathrm{Hom}_{A\widehat{\otimes}B}(M_i, \mathrm{Hom}_C(N_j, L)) \cong \varinjlim_{i,j} \mathrm{Hom}_{C\widehat{\otimes}B}(N_j\widehat{\otimes}_A M_i, L)$$

Aplicando os lemas 4.2.7 e 4.2.10 sucessivamente, obtemos o isomorfismo desejado:

$$\mathrm{Hom}_{A\widehat{\otimes}B}(\varprojlim_i M_i, \mathrm{Hom}_C(\varprojlim_j N_j, L)) \cong \mathrm{Hom}_{C\widehat{\otimes}B}(\varprojlim_{i,j} N_j\widehat{\otimes}_A M_i, L). \qquad \square$$

Proposição 4.3.13. *Se A e Γ são duas álgebras pseudocompactas tal que Γ é topologicamente semissimples, então*

$$\mathrm{Ext}^n_{A\widehat{\otimes}A^{op}}(A, \mathrm{Hom}_\Gamma(N, L)) \cong \mathrm{Ext}^n_{\Gamma\widehat{\otimes}A^{op}}(N, L)$$

para todos módulos $N \in \Gamma\widehat{\otimes}A^{op}$-PcMod e $L \in \Gamma\widehat{\otimes}A^{op}$-DMod.

Demonstração. Podemos reproduzir a demonstração da versão não-topólogica, obtida em [CE56, IX: 4.3].

O caso $n = 0$ segue do lema acima com $B = A^{op}$, $C = \Gamma$ e $M = A$:

$$\mathrm{Hom}_{A\widehat{\otimes}A^{op}}(A, \mathrm{Hom}_\Gamma(N, L)) \cong \mathrm{Hom}_{\Gamma\widehat{\otimes}A^{op}}(N, L)$$

Para provar o caso geral, tomemos uma resolução $(\Gamma\widehat{\otimes}A^{op})$-projetiva P_* de N e uma resolução $(\Gamma\widehat{\otimes}A^{op})$-injetiva I_* de L. Usando ainda que Γ é semissimples, pode-se provar que o complexo total de $\mathrm{Hom}_\Gamma(P_*, I_*)$ é uma resolução $A\widehat{\otimes}A^{op}$-injetiva de $\mathrm{Hom}_\Gamma(N, L)$, cf. [CE56, IX: Prop. 2.6a].

Assim,, o resultado é mostrado aplicando o lema acima:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^n_{A\widehat{\otimes}A^{op}}(A, \mathrm{Hom}_\Gamma(N, L)) &= H^n\big(\mathrm{Hom}_{A\widehat{\otimes}A^{op}}(A, \mathrm{Hom}_\Gamma(P_*, I_*))\big) \\
&\cong H^n(\mathrm{Hom}_{\Gamma\widehat{\otimes}A^{op}}(P_*\widehat{\otimes}_A A, I_*)) \\
&\cong H^n(\mathrm{Hom}_{\Gamma\widehat{\otimes}A^{op}}(P_*, I_*)) \\
&= \mathrm{Ext}^n_{\Gamma\widehat{\otimes}A^{op}}(N, L)
\end{aligned}$$ □

Corolário 4.3.14. *Se A é uma álgebra pseudocompacta, então* $\mathrm{gl.dim}(A\widehat{\otimes}\Gamma) \leqslant \mathrm{pd}_{A\widehat{\otimes}A^{op}}(A)$ *para toda Γ top. semissimples. Em particular, se A e B são projetivos, respectivamente, como A-bimódulo e B-bimódulo, então $A\widehat{\otimes}B$ é top. semissimples.*

Demonstração. A desigualdade segue diretamente da caracterização de gl.dim e pd por meio do funtor Ext e de que $\mathrm{gl.dim}(\Gamma\widehat{\otimes}A^{op}) = \mathrm{gl.dim}(A\widehat{\otimes}\Gamma)$.

Agora, assuma que A e B são projetivos como A-bimódulo e B-bimódulo. Tomando $\Gamma = k$, obtemos que A e B são top. semissimples e, portanto, podemos utilizar o resultado para concluir que $\mathrm{gl.dim}(A\widehat{\otimes}B) \leqslant \mathrm{pd}_{A\widehat{\otimes}A^{op}}(A) = 0$. □

Teorema-definição 4.3.15. *Dizemos que uma álgebra pseudocompacta A é topologicamente separável se satisfizer as seguintes condições equivalentes:*

(1) $A\widehat{\otimes}\ell$ é top. semissimples para toda extensão de corpos finita $\ell \supseteq k$.

(2) A é um limite inverso de álgebras separáveis de dimensão finita.

(3) A é projetivo em $(A\widehat{\otimes}A^{op})$-Mod.

(4) $A\widehat{\otimes}A^{op}$ é top. semissimples.

Demonstração. As três primeiras equivalências foram provadas no artigo de Iusenko e MacQuarrie [IM22, Thm 4.3], no qual reduz-se o problema para o caso de dimensão finita. Por exemplo, para provar (2) $\Longrightarrow$ (1) e (2) $\Longrightarrow$ (3), utiliza-se respectivamente que:

a) $(\varprojlim A_i)\widehat{\otimes}\ell = \varprojlim(A_i\widehat{\otimes}\ell)$;

b) A_i ser projetivo como A_i-bimódulo para todo i implica que $A = \varprojlim A_i$ é projetivo como A-bimódulo, cf. 4.3.3.

Além disso, é claro, por 4.2.18, que vale (4) $\implies$ (3). A implicação restante (3) $\implies$ (4) segue do último resultado com $B = A^{op}$. □

O segundo item da definição nos permite obter o seguinte (esperado) resultado a partir do caso de dimensão finita: se k é um corpo perfeito (e.g. char$(k) = 0$, k é finito ou k é algebricamente fechado), então toda álgebra pseudocompacta top. semissimpĺes é top. separável.

Exemplo 4.3.16. Se $G = \varprojlim_i G_i$ um grupo profinito tal que cada G_i é finito e k é um corpo cuja característica não divide a ordem de nenhum G_i, então $k[[G]]$ é top. separável. Isso pode ser visto de $k[[G]]$ ser limite de álgebras separáveis ou, alternativamente, porque $k[[G]]\widehat{\otimes}k[[G]]^{op} \cong k[[G \times G]]$ é semissimples.

Lema 4.3.17. *Seja uma álgebra pseudocompacta A. Se assumirmos que $\Gamma = A/J(A)$ é topologicamente separável, então vale que*

$$\operatorname{Ext}^n_{A\widehat{\otimes}\Gamma^{op}}(-, L) \cong \operatorname{Hom}_{\Gamma\widehat{\otimes}\Gamma^{op}}(\operatorname{Tor}^A_n(\Gamma, -), L)$$

para todo módulo $L \in (\Gamma\widehat{\otimes}\Gamma^{op})$-DMod.

Demonstração. Este é o análogo de [Eil54, Prop 10]. Primeiramente, note que já temos o isomorfismo quando $n = 0$:

$$\operatorname{Hom}_{A\widehat{\otimes}\Gamma^{op}}(-, L) \cong \operatorname{Hom}_{\Gamma\widehat{\otimes}\Gamma^{op}}(\Gamma\widehat{\otimes}_A -), L)$$

De fato, isso segue do lema 4.3.12 tomando $N = \Gamma$, $B = \Gamma^{op}$ e $C = \Gamma$.

Do teorema 4.3.15 acima segue que $\Gamma\widehat{\otimes}\Gamma^{op}$ é top. semissimples. Assim, todo Γ-bimódulo discreto é injetivo, isto é, o funtor contravariante $U = \operatorname{Hom}_{\Gamma\widehat{\otimes}\Gamma^{op}}(-, L)$ é exato para todo $L \in (\Gamma\widehat{\otimes}\Gamma^{op})$-DMod. Assim, sabemos pelo lema 1.1.8 que U preserva funtores derivados:

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\Gamma\widehat{\otimes}\Gamma^{op}}(\operatorname{Tor}^A_n(\Gamma, -), L) &= U(L_n(\Gamma\widehat{\otimes}_A -)) \\ &\cong R^n(U(\Gamma\widehat{\otimes}_A -)) \\ &= R^n(\operatorname{Hom}_{\Gamma\widehat{\otimes}\Gamma^{op}}(\Gamma\widehat{\otimes}_A -, L))\end{aligned}$$

Aplicando o isomorfismo do caso $n = 0$, obtemos enfim que:

$$\operatorname{Hom}_{\Gamma\widehat{\otimes}\Gamma^{op}}(\operatorname{Tor}^A_n(\Gamma, -), L) \cong R^n(\operatorname{Hom}_{A\widehat{\otimes}\Gamma^{op}}(-, L))$$ □

Unindo o lema acima com a proposição 4.3.13 para $M = \Gamma = A/J(A)$, obtemos que

$$\operatorname{Ext}^n_{A\widehat{\otimes}A^{op}}(A, L) \cong \operatorname{Ext}^n_{A\widehat{\otimes}\Gamma^{op}}(\Gamma, L) \cong \operatorname{Hom}_{\Gamma\widehat{\otimes}\Gamma^{op}}(\operatorname{Tor}^A_n(\Gamma, \Gamma), L)$$

para todo módulo $L \in (\Gamma\widehat{\otimes}\Gamma^{op})$-DMod. Munidos de tal isomorfismo, podemos provar um dos principais resultados desta seção, o qual generaliza o caso de álgebras de dimensão finita. Intuitivamente, ele nos diz que A está tão longe de ser semissimples quanto A está longe de ser projetivo como A-bimódulo.

Teorema 4.3.18. *Se A é uma álgebra pseudocompacta tal que $\Gamma = A/J(A)$ é topologicamente separável (e.g. se k é perfeito), então*

$$\mathrm{gl.dim}(A) = \min\{n \mid \mathrm{Tor}^A_{n+1}(\Gamma,\Gamma) = 0\} = \mathrm{pd}_{A\widehat{\otimes}A^{op}}(A).$$

Demonstração. Reformularemos a demonstração de Eilenberg [Eil54, Prop. 12]. A primeira igualdade foi obtida no teorema 4.3.5 e a desigualdade $\mathrm{gl.dim}(A) \leqslant \mathrm{pd}_{A\widehat{\otimes}A^{op}}(A)$ no corolário 4.3.14. Denotando o segundo termo da igualdade por γ, só nos resta provar que $\gamma \geqslant \mathrm{pd}_{A\widehat{\otimes}A^{op}}(A)$.

Assim, assuma que $\mathrm{pd}_{A\widehat{\otimes}A^{op}}(A) \geqslant n$. Segue da proposição 4.3.2 que $\mathrm{Ext}^n_{A\widehat{\otimes}A^{op}}(A,S) \neq 0$ para algum módulo (simples) $S \in (\Gamma\widehat{\otimes}\Gamma^{op})$-*DMod*. Pelo isomorfismo obtido logo acima, podemos concluir que $\mathrm{Tor}^A_n(\Gamma,\Gamma) \neq 0$, ou seja, que $\gamma \geqslant n$. □

Proposição 4.3.19. *Sejam A e B duas álgebras pseudocompactas tais que $\overline{A}\widehat{\otimes}\overline{B}$ seja semissimples, então $J(A\widehat{\otimes}B) = J(A)\widehat{\otimes}B + A\widehat{\otimes}J(B)$.*

Demonstração. Pela proposição 4.2.17, basta verificarmos que $J(A)\widehat{\otimes}B + A\widehat{\otimes}J(B)$ é pronilpotente e que o quociente de $A\widehat{\otimes}B$ por esse ideal é top. semissimples.

A segunda afirmação é exatamente a hipótese do enunciado, pois

$$\frac{A\widehat{\otimes}B}{J(A)\widehat{\otimes}B + A\widehat{\otimes}J(B)} \cong \overline{A}\widehat{\otimes}\overline{B}.$$

Para provar a pronilpotência, escreva os limites $A = \varprojlim_I A/I$ e $B = \varprojlim_J B/J$, onde I e J percorrem uma base de ideais abertos de A e de B respectivamente. Com essa notação, o produto tensorial tem a seguinte apresentação:

$$A\widehat{\otimes}B = \varprojlim_{I,J} \frac{A}{I} \otimes \frac{B}{J} = \varprojlim_{I,J} \frac{A\widehat{\otimes}B}{I\widehat{\otimes}B + A\widehat{\otimes}J}$$

Do lema 4.2.16, sabemos que, para todos I e J, existe $n \in \mathbb{N}$ (que depende de I e J) tal que $J(A)^n \subseteq I$ e $J(B)^n \subseteq J$. Com isso,

$$(J(A)\widehat{\otimes}B + A\widehat{\otimes}J(B))^{2n} \subseteq (J(A)\widehat{\otimes}B)^n + (A\widehat{\otimes}J(B))^n \subseteq I\widehat{\otimes}B + A\widehat{\otimes}J$$

de modo que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (J(A)\widehat{\otimes}B + A\widehat{\otimes}J(B))^n \subseteq \bigcap_{I,J} I\widehat{\otimes}B + A\widehat{\otimes}J.$$

Basta verificar, portanto, que o lado direito da inclusão é igual a $\{0\}$. Isso pode ser feito notando que $\{I\widehat{\otimes}B + A\widehat{\otimes}J\}_{I,J}$ forma um sistema de vizinhanças do $0 \in A\widehat{\otimes}B$. □

Teorema 4.3.20. *Se A e B são duas álgebra pseudocompactas, então*

$$\mathrm{gl.dim}(A\widehat{\otimes}B) \geqslant \mathrm{gl.dim}(A) + \mathrm{gl.dim}(B).$$

A igualdade é obtida se assumirmos que $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são top. separáveis (e.g. se k é perfeito).

Demonstração. Replicaremos os argumentos de Auslander [Aus55, Thm 16].

Aplicando a fórmula de Künneth 1.1.9 (para $T = -\widehat{\otimes}-$), obtemos que

$$\mathrm{Tor}_n^{A\widehat{\otimes}B}(M_1\widehat{\otimes}M_2, N_1\widehat{\otimes}N_2) \cong \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Tor}_i^A(M_1, N_1)\widehat{\otimes}\mathrm{Tor}_j^B(M_2, N_2).$$

para todos módulos $M_1, N_1 \in A\text{-}PcMod$ e $M_2, N_2 \in B\text{-}PcMod$. Assim, caso $\mathrm{gl.dim}(A) + \mathrm{gl.dim}(B)$ seja maior ou igual a n, obtemos módulos satisfazendo

$$\mathrm{Tor}_i^A(M_1, N_1)\widehat{\otimes}\mathrm{Tor}_j^B(M_2, N_2) \neq 0,$$

para alguns i, j tais que $i + j = n$, o que implica que $\mathrm{gl.dim}(A\widehat{\otimes}B) \geqslant n$.

Para obter a igualdade, note que a hipótese adicional – junto ao resultado 4.3.14 – nos permite utilizar a proposição anterior e concluir que

$$\frac{A\widehat{\otimes}B}{J(A\widehat{\otimes}B)} \cong \frac{A}{J(A)}\widehat{\otimes}\frac{B}{J(B)} = \overline{A}\widehat{\otimes}\overline{B}.$$

Assim, do teorema 4.3.5, sabemos que $\mathrm{gl.dim}(A\widehat{\otimes}B) \geqslant n$ se, e somente se,

$$0 \neq \mathrm{Tor}_n^{A\widehat{\otimes}B}(\overline{A}\widehat{\otimes}\overline{B}, \overline{A}\widehat{\otimes}\overline{B}) \cong \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Tor}_i^A(\overline{A}, \overline{A})\widehat{\otimes}\mathrm{Tor}_j^B(\overline{B}, \overline{B})$$

Agora, da soma acima ser não-nula segue que $\mathrm{Tor}_i^A(\overline{A}, \overline{A}) \neq 0$ e $\mathrm{Tor}_j^B(\overline{B}, \overline{B}) \neq 0$ para alguns i, j satisfazendo $i + j = n$, isto é, que $\mathrm{gl.dim}(A) + \mathrm{gl.dim}(B) \geqslant n$. □

Observação 4.3.21. Uma maneira alternativa de obter a desigualdade $\mathrm{gl.dim}(A\widehat{\otimes}B) \leqslant \mathrm{gl.dim}(A) + \mathrm{gl.dim}(B)$ no teorema acima, seria mostrar que isso vale para a dimensão projetiva sobre a envelopante $\mathrm{pd}_{(-)^e}(-)$ (veja [CE56, IX : 7.4]) e, em seguida, usar que tal dimensão coincide com a dimensão global pelo teorema anterior.

4.4 Homologia de Hochschild e a conjectura de Han

Nesta seção, veremos como a conjectura de Han se comporta na classe de álgebras pseudocompactas. Mais detalhadamente, veremos que ela não é satisfeita em geral, assim como mostrado pelo contraexemplo 4.4.4 construído a partir de uma aljava infinita, mas que certas classes de álgebras de grupos profinitos verificam a conjectura.

A homologia de Hochschild para uma k-álgebra pseudocompacta A e um A-bimódulo pseudocompacto é definida de modo análogo ao usual com a diferença de tomar produtos tensoriais completos ao invés do produto tensorial comum. Ou seja, definimos

$$HH_n(A, M) = \mathrm{Tor}_n^{A\widehat{\otimes}A^{op}}(M, A)$$

Equivalentemente, $HH_n(A, M)$ é a homologia do complexo $(C_*(A, M), b)$ abaixo

$$0 \xleftarrow{b_0} M \xleftarrow{b_1} \dots \xleftarrow{b_n} M\widehat{\otimes}A^{\widehat{\otimes}n} \xleftarrow{b_{n+1}} M\widehat{\otimes}A^{\widehat{\otimes}n+1} \leftarrow \dots \quad ,$$

onde a operador de bordo b_n é dado por

$$b_n(m\widehat{\otimes}a_1\widehat{\otimes}\dots\widehat{\otimes}a_n) = ma_1\widehat{\otimes}\dots\widehat{\otimes}a_n + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i m\widehat{\otimes}a_1\widehat{\otimes}\dots\widehat{\otimes}a_ia_{i+1}\widehat{\otimes}\dots\widehat{\otimes}a_n +$$
$$+ (-1)^n a_nm\widehat{\otimes}a_1\widehat{\otimes}\dots\widehat{\otimes}a_{n-1}$$

No caso $M = A$, denotamos tal complexo por $(C_*(A), b)$.

Grande parte das propriedades da homologia de Hochschild não-topológica seguem de argumentos gerais e, portanto, também são válidas nesse contexto. Por exemplo, $HH_n(-)$ é um funtor das k-álgebras pseudocompactas para os k-espaços vetoriais pseudocompactos. Além disso, esse funtor comuta com produtos diretos e com o produto tensorial completo, cf. 1.3.16.

Exemplo 4.4.1. 1. Se A é top. separável (e.g. $A = \Pi_{n\in\mathbb{N}}k$), então $HH_n(A, M) = 0$ para todo M. Isso ilustra que tal homologia, que leva a topologia em consideração, é mais adequada de ser computada para álgebras pseudocompactas. Por exemplo, não conhecemos uma maneira simples de computar a homologia de Hochschild não-topológica de $\Pi_{n\in\mathbb{N}}k$.

2. Analogamente ao caso de polinômios, pode-se provar que $HH_i(k[[x_1, \dots, x_n]]) \cong k[[x_1, \dots, x_n]]\widehat{\otimes}\Lambda^i(k^n)$

3. Verifiquemos que o anel A das séries de potências em infinitas variáveis satisfaz $\text{hh.dim}(k[[x_1, x_2, \cdots]]) = \infty$. Mais ainda, vejamos por indução em n que $HH_n(A) \neq 0$ para todo $n \geqslant 0$. De fato, se $HH_{n-1}(A) \neq 0$, então pelo isomorfismo

$$HH_n(A) = HH_n(k[[x_1]]\widehat{\otimes}k[[x_2, \cdots]]) \cong \bigoplus_{i+j=n} HH_i(k[[x_1]])\widehat{\otimes}HH_j(k[[x_2, \cdots]])$$

obtemos que $HH_1(k[[x_1]])\widehat{\otimes}HH_{n-1}(k[[x_2, \cdots]])$ é um somando direto não-nulo de $HH_n(A)$, pois temos o isomorfismo de álgebras $k[[x_2, \cdots]] \cong k[[x_1, x_2, \cdots]]$.

A seguir, provaremos que a homologia comuta com limites inversos.

Proposição 4.4.2. *Sendo $A = \varprojlim_i A_i$ um limite inverso de álgebras pseudocompactas, vale que $HH_n(A) \cong \varprojlim_i HH_n(A_i)$ para todo $n \geqslant 0$. Em particular,* $\text{hh.dim}(A) \leqslant \sup_i\{\text{hh.dim}(A_i)\}$.

Demonstração. Replicaremos os argumentos do caso de grupos profinitos [RZ10, Prop. 6.5.5]. Denotando o sistema inverso de A por $\{A_i, \phi_{ij}\}$, podemos definir naturalmente, ao tomar o tensor dos mapas ϕ_i, um sistema inverso dos complexos $\{C_*(A_i), \phi_{ij}^{\widehat{\otimes}}\}$. Pela propriedade do limite inverso, temos um morfismo de complexos

$$\Psi_* : C_*(A) \to \varprojlim_i\{C_*(A_i), \phi_{ij}^{\widehat{\otimes}}\}$$

Para cada $n \geqslant 0$, vale que Ψ_n é dada pela função natural $A^{\widehat{\otimes}n+1} \to \varprojlim_i A_i^{\widehat{\otimes}n+1}$. Assim, usando que o tensor comuta com limite pelo lema 4.2.10, tal função é um isomorfismo de complexos.

Desse modo, e utilizando que $\varprojlim$ é um funtor exato, obtemos os seguintes isomorfismos para a homologia:

$$HH_n(A) = H_n(C_*(A)) \cong H_n(\varprojlim_i\{C_*(A_i), \phi_{ij}^{\widehat{\otimes}}\}) \cong \varprojlim_i\{H_n(C_*A_i), H_n(\phi_{ij}^{\widehat{\otimes}})\} = \varprojlim_i HH_n(A_i) \quad \square$$

Apesar de parecer um resultado que reduz a homologia de A para as homologias de A_i, é difícil de usá-lo para computar a homologia, pois os mapas do sistema inverso $\{HH(A_i)\}$ não possuem uma apresentação simples nem são sobrejetores em geral. Isso também nos impede de obter a desigualdade contrária para $\mathrm{hh.dim}(A)$, o que é contundentemente falso: por exemplo, veja o caso das séries de potências, onde temos que $\mathrm{hh.dim}(k[[x]]) = 1$ e $\mathrm{hh.dim}(k[x]/(x^n)) = \infty$ para todo n.

Ainda assim, tal proposição nos permite deduzir uma versão do teorema de Keller 3.1.7 para álgebras pseudocompactas:

Corolário 4.4.3. *Se A é limite de álgebras de dimensão finita A_i tais que* $\mathrm{gl.dim}(A_i) < \infty$ *e $A_i/J(A_i)$ é separável para todo i, então* $\mathrm{hh.dim}(A) = 0$.

Note, no entanto, que a implicação $\mathrm{gl.dim}(A) < \infty \implies \mathrm{hh.dim}(A) = 0$ não é válida para álgebras pseudocompactas em geral, assim como ilustrado pela álgebra $k[[x]]$. Desse modo, ao formularmos a conjectura de Han nesse contexto — para a qual focaremos nossa atenção agora —, devemos apenas considerar se vale a equivalência $\mathrm{gl.dim}(A) < \infty \iff \mathrm{hh.dim}(A) < \infty$. Já sabemos dos resultados principais da seção anterior que a implicação direta é válida (quando k é perfeito). Assim, de fato, estaremos interessados somente na implicação contrária (i.e. a propriedade de Han).

O seguinte exemplo nos diz que ela é falsa mesmo para limites de álgebras de dimensão finita truncadas.

Contraexemplo 4.4.4. [IM21, Remark 6.18] Tomando a aljava infinita abaixo

$$Q\,:\, 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow \cdots,$$

e o ideal $I = R_Q^2$ gerado por caminhos de comprimento dois, a álgebra $A = k[[Q]]/I$ satisfaz

$$\mathrm{gl.dim}(A) = \infty \text{ e } \mathrm{hh.dim}(A) = 0.$$

Com efeito, retomando o exemplo 1.2.17, pode-se mostrar que o A-módulo simples $S(n)$ tem dimensão projetiva $n-1$, o que implica que $\mathrm{gl.dim}(A) = \infty$. Além disso, note que $A = \varprojlim_{n\geqslant 1} kA_n/R_{A_n}^2$ (onde A_n é o diagrama de Dynkin penteado[3]) é um limite de álgebras com dimensão global finita. Assim, pelo corolário 4.4.3, vale que $\mathrm{hh.dim}(A) = 0$.

Apesar do contraexemplo acima, não devemos descartar se ainda existem classes interessantes de álgebras pseudocompactas para as quais a propriedade de Han é válida.

[3] Isto é, todas as suas flechas estão orientadas no mesmo sentido.

Dado que álgebras de grupos finitos satisfazem a propriedade de Han, uma classe bastante natural de considerar é a das álgebras de grupos profinitos $k[[G]]$. Até o final desta seção, estaremos focados nessa classe de álgebras e para a qual provaremos a propriedade de Han no caso em que o grupo G é pró-p ou abeliano finitamente gerado.

Álgebras de grupos profinitos

Notação adicional: Até o final da seção, utilizaremos G para denotar um grupo profinito e p para um número primo.

Um grupo topológico G é *profinito* se é limite inverso de grupos finitos discretos. Equivalentemente, pode-se defini-lo como um grupo compacto Hausdorff totalmente desconexo tal que G/U é finito para todo subgrupo normal aberto de G, cf. [RZ10, Thm 2.1.3]. Pode-se provar ainda que um grupo é profinito se, e somente se, ele é o grupo de Galois de uma extensão de corpos galoisiana (possivelmente, de dimensão infinita), cf. [RZ10, §2.11]. A primeira apresentação sistemática da teoria (inclusive, homológica) de tais grupos foi dada por Serre [Ser65]. Apesar disso, exemplos de grupos profinitos naturalmente já haviam estudados anteriormente, como os inteiros p-ádicos por Hensel [Hen97] e os grupos de Galois por Krull [Kru28]. A referência básica que utilizamos para a teoria de grupos profinitos foi o livro de Ribes e Zalesskii [RZ10].

Exemplo 4.4.5. A seguir, apresentamos alguns exemplos simples de grupos profinitos:

1. O complemento de $\mathbb{Z}$ é dado por $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. O grupo dos inteiros p-ádicos é definido por $\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.
3. Sendo $R = \hat{\mathbb{Z}}$ ou $R = \mathbb{Z}_p$, temos que os grupos lineares $\mathrm{GL}_n(R)$ e $\mathrm{SL}_n(R)$ são profinitos.

Assim como fizemos para álgebras pseudocompactas, muitos dos conceitos de grupos não-topológicos (finitos) podem ser reformulados para o mundo dos grupos profinitos com mínimas alterações, para que sua topologia também seja levada em conta. Por exemplo, do ponto de vista homológico, ao considerar a álgebra de um grupo profinito $G = \varprojlim G_i$ estaremos sempre pensando na álgebra completa $k[[G]] = \varprojlim_i k[[G]]$. Assim, para estabelecer a (co)homologia de um grupo profinito G, devemos considerar um $k[[G]]$-módulo pseudocompacto M e um $k[[G]]$-módulo discreto N para definir o seguinte:

$$H_n(G, M) = \mathrm{Tor}_n^{k[[G]]}(M, k) H^n(G, N) = \mathrm{Ext}^n_{k[[G]]}(k, N), \quad n \geqslant 0$$

Como é usual, também podemos obter sua (co)homologia a partir do complexos (contínuos) de Eilenberg-MacLane, cf. [RZ10, Thm 6.2.4].

Definição 4.4.6. Seja p um número primo. A *p-dimensão cohomológica* de um grupo profinito G é o menor inteiro n tal que $H^i(G, N)_p = 0$ para todo $i > n$ e todo módulo $N \in \hat{\mathbb{Z}}[[G]] - DMod$, sendo que o subíndice $(-)_p$ foi usado para denotar os elementos de $H^i(G, N)$ de ordem p^n para algum n. A *dimensão cohomológica de* G é definida tomando o supremo: $\mathrm{cd}(G) = \sup_p\{\mathrm{cd}_p(G)\}$

Podemos definir a ordem de um grupo profinito ao considerar números "supernaturais", isto é, um produto formal (possivelmente infinito) de primos com expoentes possivelmente infinitos $\Pi_p p^{n(p)}$, onde $n(p) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Assim, a ordem de um grupo profinito $G = \varprojlim_i G_i$, com cada G_i finito, é definida por

$$\#G = \mathrm{mmc}(|G_i|)_i = \Pi_p p^{n(p)}, \text{ onde } n(p) = \sup_i \{n(p,i)\},$$

sendo que $n(p,i)$ é o expoente de p na decomposição de $|G_i| = \Pi_p p^{n(p,i)}$.

Com isso, podemos dizer que um subgrupo fechado H de G é um *p-subgrupo de Sylow* de G se $\#H$ é múltiplo de p e o índice $[G : H]$ não é divisível por p. Nesse contexto, também é possível de se provar os teoremas de Sylow, veja [RZ10, Cor. 2.3.6].

Proposição 4.4.7. *Para todo p primo, sendo G_p um p-subgrupo de Sylow de G, valem as igualdades*

$$\mathrm{cd}_p(G) = \mathrm{cd}_p(G_p) = \mathrm{cd}(G_p) = \mathrm{pd}_{\mathbb{F}_p[[G]]}(\mathbb{F}_p).$$

Em particular, $\mathrm{cd}_p(G) = 0 \iff p \nmid \#G$.

Demonstração. [RZ10, Prop. 7.1.4] e [RZ10, Cor. 7.3.3]. □

Teorema 4.4.8. *[Bru66, Thm 4.1] Se G é um grupo profinito e k é álgebra pseudocompacta comutativa, então* $\mathrm{gl.dim}(k[[G]]) = \mathrm{gl.dim}(k) + \mathrm{cd}_k(G)$, *onde* $\mathrm{cd}_k(G) = \sup_{p \in r(k)} \mathrm{cd}_p(G)$ *com $r(G)$ sendo o conjunto das características dos corpos (de característica positiva) residuais $k/\mathfrak{m}$ para $\mathfrak{m}$ um ideal aberto maximal de k.*

Corolário 4.4.9. *Se G é um grupo profinito e k é um corpo de caracterítica $p > 0$, então* $\mathrm{gl.dim}(k[[G]]) = \mathrm{cd}_p(G) = \mathrm{pd}_{k[[G]]}(k)$.

Demonstração. Isso segue do teorema e da igualdade $\mathrm{pd}_{\mathbb{F}_p[[G]]}(\mathbb{F}_p) = \mathrm{pd}_{k[[G]]}(k)$, que é verificada, pois uma resolução $\mathbb{F}_p[[G]]$-projetiva de $\mathbb{F}_p$ pode ser transformada numa resolução $k[[G]]$-projetiva de k ao aplicar o funtor exato $k \otimes_{\mathbb{F}_p} -$. □

Exemplo 4.4.10. Vejamos dois resultados anteriores que estão englobados nesse teorema.

1. Se $\mathrm{char}(k) \nmid \#G$, então $\mathrm{cd}_p(G) = 0$. Assim, reobtemos o fato de que $k[[G]]$ é top. semissimples nesse caso.
2. Se $\mathrm{char}(k) = p$ e $G = \mathbb{Z}_p$, então

$$k[[G]] = \varprojlim_n k[\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}] \cong \varprojlim k[x]/x^{p^n} \cong k[[x]]$$

Assim, $\mathrm{gl.dim}(k[[x]]) = 1$ segue da igualdade $\mathrm{cd}_p(\mathbb{Z}_p) = 1$, veja [RZ10, Cor. 7.5.2]. Tomando somas diretas finitas de $\mathbb{Z}_p$'s e usando que $k[[G \times H]] = k[[G]]\widehat{\otimes} k[[H]]$, obtemos que $\mathrm{gl.dim}(k[[x_1, \cdots, x_n]]) = n$.

Para podermos verificar a propriedade de Han para grupos profinitos, podemos considerar se poderemos reformular a demonstração de grupos finitos. Para tanto, o primeiro passo está em realizar o análogo do teorema de Burghelea 3.2.6. No entanto, devemos lembrar que a soma direta infinita de espaços pseudocompactos não é, em geral, pseudocompacta. Uma possível ideia para reparar a o resultado seria considerar o produto ao invés da soma, mas como pode-se perceber para o grupo dos inteiros p-ádicos $\mathbb{Z}_p$ em um corpo k de característica p, não deve haver um modo simples de decompor a homologia de Hochschild de $k[[G]]$ por meio das homologias de grupo dos centralizadores de G. De fato, no caso abeliano de $G = \mathbb{Z}_p$, vale que $C_G(x) = G$ para todo $x \in G$ e, ainda, temos os isomorfismos $HH_i(k[[\mathbb{Z}_p]]) \cong k[[\mathbb{Z}_p]]$ e $H_i(\mathbb{Z}_p, k) \cong k$ para $i = 0, 1$; assim, por um lado, obtemos um produto não-enumerável $\Pi_{x\in Class(G)} H_i(C_G(x), k) \cong \Pi_{x\in\mathbb{Z}_p} k$ e, por outro, o produto enumerável (não-isomorfo) dado por $HH_i(k[[\mathbb{Z}_p]]) \cong \Pi_{n\in\mathbb{N}} k$. Aqui, apenas utilizamos que a cardinalidade de $\mathbb{Z}_p$ é não-enumerável —- o que é válido para todo grupo profinito infinito [RZ10, Prop. 2.3.1]. Mas também pode-se provar que o conjunto das classes de conjugação de um grupo profinito infinito é sempre não-enumerável [JN19].

O principal problema para reformular a demonstração do caso discreto reside no fato de que a decomposição de ZG, através das classes de conjugação de G, como união disjunta de $Z(G, x)$ não respeita a topologia de G no caso profinito. Mesmo assim, conseguimos provar o seguinte substituto para o teorema de Burghelea e que é suficiente para nossos interesses.

Teorema 4.4.11. *Sendo G um grupo profinito, há um monomorfismo $H_n(G, k) \hookrightarrow HH_n(k[[G]])$ para todo $n \geqslant 0$.*

Demonstração. Um dos corolários da demonstração do teorema de Burghelea 3.2.6 é que o complexo de grupos de G em relação a k, dado por $C_*(G, k) = (k[[G]]^{\widehat{\otimes} n}, \partial)$, possui um monomorfismo natural no complexo de Hochschild padrão $C_*^{Hoch}(kG) = (k[[G]]^{\widehat{\otimes} n+1}, b)$. Explicitamente, ele pode ser definido por

$$\begin{aligned} \Phi: \ C_n(G, k) &\hookrightarrow C_n^{Hoch}(kG) \\ g_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} g_n &\mapsto (g_1 \cdots g_n)^{-1} \widehat{\otimes} g_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} g_n \end{aligned}$$

Assim, escrevendo $G = \lim_i \{G_i, \varphi_i\}$ como limite de grupos finitos discretos, Φ nos induz mapas de sistemas inversos dos complexos

$$\begin{tikzcd} C_*(G_i, k) \arrow[r, hook, "\Phi_i"] \arrow[d, "\varphi_{ij}^{\widehat{\otimes}}"'] & C_*^{Hoch}(kG_i) \arrow[d, "\varphi_{ij}^{\widehat{\otimes}}"'] \\ C_*(G_i, k) \arrow[r, hook, "\Phi_j"] & C_*^{Hoch}(kG_j) \end{tikzcd}$$

Sabemos, ainda, que Φ induz um monomorfismo na homologia quando G é discreto. De fato, Φ possui uma cisão nesse caso, pois $C_n(G, k) \cong kZ(G, 1)$ é somando direto de $C_n^{Hoch}(kG) \cong kZG$. Desse modo, aplicando o funtor de homologia H_n no diagrama acima, obtemos que o morfismo de sistemas inversos $H_n(\Phi_i): H_n(G_i, k) \to HH_n(kG_i)$ é injetor. Da proposição 4.4.2 e de seu análogo para grupos [RZ10, Prop. 6.5.7], sabemos que as homologias $H_n(G, k)$ e $HH_n(kG)$ são dadas, respectivamente, pelos limites de $H_n(G_i, k)$ e $HH_n(kG_i)$. Desse modo, o resultado segue do fato de o limite inverso $\varprojlim$ preservar monomorfismos. □

Com tal resultado, podemos concluir que a homologia de Hochschild de $k[[G]]$ é não-nula se a homologia de grupos de G em relação a k for não-nula. Isso nos permitirá provar a conjectura de Han para grupos pró-p, pois tais grupos a propriedade especial de possuirem apenas k como módulo simples, como veremos a seguir.

Lema 4.4.12. *Se G é um p-grupo finito e $\mathrm{char}(k) = p$, então, para todo kG-módulo M, o submódulo $M^G = \{m \in M \mid gm = m$ para todo $g \in G\}$ é não-nulo.*

Demonstração. Fixado $m \neq 0$ em M, seja S o subgrupo abeliano de M gerado por $\{gm \mid G\}$, isto é, $S = \{\sum_{g\in G} n_g gm \mid n_g \in \mathbb{F}_p\}$. Defina uma ação de G em S por $h \cdot gm := (hg)m$. Como G é finito, a cardinalidade das órbitas de S dividem a ordem de G, que é igual a p^l para algum $l > 0$. Tomando um conjunto $\{s_0, s_1, \cdots, s_m\}$ de representantes das órbitas de S com $s_0 = 0$, então temos que $|Orb(s_i)| = p^{k_i}$ para algum $k_i \geqslant 0$. Usando ainda que a cardinalidade de S é finita e divisível por p, conclui-se que

$$1 + \sum_{i=1}^{n} p^{k_i} \equiv 0(\mathrm{mod} p)$$

Logo, $k_i = 0$ para algum $i \neq 0$, isto é, existe um elemento $s_i \neq 0$ tal que $g \cdot s_i = s_i$ para todo $g \in G$. □

Proposição 4.4.13. *Se G é um grupo pró-p (i.e. um limite inverso de p-grupos finitos) e $\mathrm{char}(k) = p$, então o módulo trivial k é o único módulo simples tanto em $k[[G]]$-PcMod quanto em $k[[G]]$-DMod.*

Demonstração. [RZ10, Lemma 7.1.5] Primeiramente, notemos com o lema acima que o resultado é válido quando G é um p-grupo finito. De fato, quando M é um kG-módulo simples, obtemos que $M = M^G$ e, portanto, que todo k-subespaço de M é também um submódulo. Logo, para que M não tenha submódulos não-triviais, M deve ter dimensão sobre k igual a 1.

Agora, mostraremos que podemos reduzir a demonstração para o caso finito. Se M é um $k[[G]]$-módulo simples pseudocompacto ou discreto, então sabemos que M é discreto de dimensão finita, cf. 4.2.14. Assim, o subgrupo $U = \cap_m \{g \in G \mid gm = m\}$, onde m percorre uma k-base (finita) de M, é aberto em G. Normalizando U, obtemos o subgrupo aberto normal $V = \cap_{t\in G/U} t^{-1}Ut$. Como $V \subseteq U$ age trivialmente em M, concluímos que M é um módulo simples sobre o p-grupo finito G/V. □

Corolário 4.4.14. *Dado um grupo pró-p G e um corpo k de característica p, temos a seguinte equivalência:*

$$\mathrm{gl.dim}(k[[G]]) < n \iff H_n(G, k) = 0$$

Demonstração. Como vale a igualdade $\mathrm{gl.dim}(k[[G]]) = \mathrm{pd}_{k[[G]]}(k)$, basta utilizar o resultado acima junto à proposição 4.3.2. □

Teorema 4.4.15. *Se k é um corpo e G_p é um grupo pró-p, então $k[[G_p]]$ satisfaz a propriedade de Han.*

Demonstração. Primeiramente, notemos que, se $\mathrm{char}(k) \neq p$, então $k[[G_p]]$ é (topologicamente) separável, cf. 4.3.16. Em particular, vale que

$$\mathrm{gl.dim}(k[[G_p]]) = 0 = \mathrm{hh.dim}(k[[G_p]]).$$

Assim, podemos assumir, agora, que $\mathrm{char}(k) = p$. Para esse caso, provaremos a contrapositiva da propriedade de Han, isto é, começamos assumindo que $\mathrm{gl.dim}(k[[G_p]]) = \infty$. Pelo resultado 4.4.14, sabemos que $H_n(G_p, k) \neq 0$ para todo $n \geqslant 0$. Aplicando o teorema 4.4.11, obtemos que $\mathrm{hh.dim}(k[[G_p]]) = \infty$. □

Agora, iremos provar a propriedade de Han para classes consideráveis de grupos profinitos abelianos, o que seguirá essencialmente de alguns teoremas sobre estrutura de grupos abelianos encontrados no livro de Ribes e Zalesskii [RZ10, §4.3].

Dado um grupo profinito G, denotamos por $\mathrm{tor}(G)$ o *subconjunto de torção* de G, que é dado pelos elementos de G com exponente finito, isto é

$$\mathrm{tor}(G) = \{g \in G \mid g^e = 1 \text{ para algum } e > 1\}$$

Note que tal conjunto é um subgrupo quando G é abeliano, mas nem sempre ele é fechado. De fato, quando G é o produto de todo os cíclicos de ordem um primo $\Pi_p C_p$, temos que $\mathrm{tor}(G) = \oplus_p C_p$. No entanto, para todo grupo abeliano G, pode-se provar que

$$\mathrm{tor}(G) \text{ é fechado em } G \iff \mathrm{tor}(G) \text{ possui um expoente finito } e \text{ (independente dos } g\text{'s)}.$$

De fato, a implicação $\Longleftarrow$ segue do fato de $\mathrm{tor}(G)$ ser, nesse caso, a imagem inversa de $\{1\}$ pela função contínua $g \mapsto g^e$, enquanto que a outra implicação é provada em [RZ10, Lemma 4.3.7].

Teorema 4.4.16. *Seja G um um grupo abeliano pró-p.*

a) Se G é livre de torção, então G é isomorfo a um produto direto de cópias de $\mathbb{Z}_p$.

b) Se G possui um expoente finito e, então G é um produto de grupos cíclicos finitos

$$G \cong \prod_{i=1}^{e} \prod_{m(i)} C_{p^i},$$

onde cada $m(i)$ é um cardinal arbitrário.

c) G pode ser decomposto como

$$G \cong F \oplus \overline{\mathrm{tor}(G)},$$

onde F é um grupo livre de torção.

Demonstração. A prova para os dois primeiros itens pode ser encontrada em [RZ10, Thm 4.3.3, Thm 4.3.8]. O último item segue do fato de que $F = G/\overline{\mathrm{tor}(G)}$ é livre de torção e, portanto, é um grupo pró-p livre pelo primeiro item. Assim, a sequência exata curta abaixo cinde

$$0 \to \overline{\mathrm{tor}(G)} \to G \to G/\overline{\mathrm{tor}(G)} \to 0.$$ □

Corolário 4.4.17. *Se G é um grupo profinito abeliano tal que, para cada primo p,* $\mathrm{tor}(G_p)$ *é fechado (e.g. G_p é finitamente gerado), então*

$$G \cong (\prod_p \prod_{n(p)} \mathbb{Z}_p) \oplus (\prod_p \prod_{i=1}^{e_p} \prod_{m(i,p)} C_{p^i}), \tag{4.4.18}$$

onde $e_p \in \mathbb{N}$ e os índices $n(p)$ e $m(i,p)$ são cardinais arbitrários.

Demonstração. Todo grupo abeliano pode ser decomposto como produto de seus p-grupos de Sylow $G = \Pi_p G_p$, cf. [RZ10, Prop. 2.3.8]. Além disso, a hipótese nos garante que, para cada p, $\mathrm{tor}(G_p)$ possui um expoente finito e_p. Desse modo, basta aplicar o teorema anterior. □

Como não temos conhecimento de um exemplo de grupo pró-p abeliano tal que $\mathrm{tor}(G_p)$ não é fechado em G_p, pensamos que a hipótese do resultado acima é consideravelmente geral. No caso em que G_p é finitamente gerado, pode-se provar mais ainda: $\mathrm{tor}(G_p)$ é finito [RZ10, Thm 4.3.4].

Teorema 4.4.19. *Se G possui a forma 4.4.18 do corolário anterior, então $k[[G]]$ satisfaz a propriedade de Han. Em particular, ela é válida para todo grupo profinito abeliano G satisfazendo alguma das seguintes hipóteses:*

- *G é finitamente gerado*
- $\mathrm{tor}(G)$ *é fechado em G*

Demonstração. Novamente, provaremos a propriedade de Han através da contrapositiva. Assim, assuma que $\mathrm{gl.dim}(k[[G]]) = \infty$, então $\mathrm{char}(k) = p$ para algum primo p e $\mathrm{cd}_p(G_p) = \infty$. Então, G possui como somando direto um produto infinito de $\mathbb{Z}_p$'s ou algum grupo cíclico C_{p^i}. De fato, caso isso não ocorresse, então G_p seria uma soma finita de $\mathbb{Z}_p$'s e sua p-dimensão cohomológica seria finita.

Desse modo, concluímos que $k[[G_p]]$ é da forma $k[[x_1, x_2, \cdots]]\widehat{\otimes}B$ ou $k[C_{p^i}]\widehat{\otimes}B'$ para algumas álgebras pseudocompactas B, B'. Como já sabemos que os tensorandos $k[[x_1, \cdots]]$ e $k[C_{p^i}]$ possuem dimensão de Hochschild infinita (vide 4.4.1), segue que o mesmo é válido para $k[[G_p]]$, pois $HH_*(-)$ comuta com produtos tensoriais. Logo, $\mathrm{hh.dim}(k[[G]]) = \infty$. □

Naturalmente, gostaríamos de ter provado a propriedade de Han para grupos profinitos abelianos em geral. A fim de propor um possível caminho para tal, formulamos abaixo uma questão que, caso fosse respondida afirmativamente, implicaria na propriedade de Han.

Questão 4.4.20. *Se G é um grupo pró-p abeliano, então $\overline{\mathrm{tor}(G)}$ é isomorfo a um produto de grupos cíclicos?*

Discussão Final

Como é esperado num projeto de pesquisa em Matemática, acabamos formulando, ao longo dos últimos dois anos, mais problemas do que pudemos resolver. Desse modo, buscaremos discutir aqui alguns problemas que não foram resolvidos ao longo da dissertação, mas que poderiam ser tratados no futuro. Outros problemas desse tipo também foram registrados ao longo do capítulo anterior como "questões".

Em primeiro lugar, gostaríamos de saber se a propriedade de Han é válida para álgebras de grupos profinitos em geral. Vale lembrar que a hipótese de que $\mathrm{gl.dim}(k[[G]]) = \infty$ apenas nos garante que, para infinitos valores de n, existe algum módulo simples S_n tal que $H_n(G, S_n)$. Para provarmos a propriedade de Han, basta mostrarmos que podemos escolher tais módulos simples como sendo k. Para tanto, bastaria generalizar o teorema 3.2.8, que nos diz que a cohomologia $H^*(G, k)$ é infinita, e realizar seu análogo para a homologia.

Não conseguimos imaginar nenhum caminho para reformular a demonstração de R. Swan, pois ela utiliza fortes propriedades de grupos de Lie compactos (com os quais não possuímos familiaridade). Já a demonstração algébrica de L. Evens assume que o grupo G possui um subgrupo H de índice finito cujo anel de cohomologia contém um elemento não-nilpotente (lembre que podemos escolher H como sendo um grupo cíclico quando G é finito). Desse modo, pensamos que um possível caminho seria começar com grupos virtualmente pró-p:

Conjectura 4.4.21. *Se G é um grupo profinito tal que G_p tem índice finito (i.e. $|G : G_p| < \infty$), então $k[[G]]$ satisfaz a propriedade de Han.*

Justificativa. Acredito que, sendo $t = |G : G_p|$ possamos definir o mapa de Evens "contínuo":

$$\mathrm{norm}_{G_p,G} : H^n(G_p, k) \to H^{nt}(G, k)$$

Além disso, podemos assumir que $\mathrm{char}(k) = p > 0$ e que $\mathrm{gl.dim}(k[[G_p]]) = \mathrm{cd}_p(G) = \mathrm{gl.dim}(k[[G]]) = \infty$. Nesse caso, já sabemos (pelo corolário 4.4.14) que $H_n(G_p, k)$ e $H^n(G_p, k)$ é não-nulo para todo n. Assim, se pudéssemos provar os dois itens abaixo, acredito que poderíamos concluir que $H^n(G, k)$ é não-nulo para infinitos valores de n:

- $H^*(G_p, k)$ possui um elemento não-nilpotente (em um grau > 0) σ.
- A fórmula de Mackey para $1 + \sigma^m$ (para valores de m adequados) nos dá elementos não-nulos na imagem de res_{G,G_p}.

Tendo esses resultados, seria interessante — e parece factível — ver que o resultado análogo também é válido para a homologia.

Acreditamos que uma das questões abordadas na justificativa acima pode ser estudada independentemente do interesse na conjectura de Han, então a formulamos abaixo.

Questão 4.4.22. *Dado um grupo pró-p H tal que $\mathrm{cd}_p(H) = \infty$, é verdade que o anel de cohomologia $H^*(H, \mathbb{F}_p)$ possui um elemento não-nilpotente (em um grau > 0)?*

Como foi notado em 4.4.4, a propriedade de Han não é válida mesmo para uma álgebra pseudocompacta que é limite de álgebras que satisfazem a propriedade de Han. Uma das razões para não conseguirmos construir um contraexemplo como esse para álgebras de grupos profinitos é o fato de que a dimensão global de kG não possui um meio termo quando G é finito:

$$\mathrm{gl.dim}(kG) = 0 \iff \mathrm{gl.dim}(kG) = \infty$$

Desse modo, pensamos que limites de álgebras de dimensão finita que satisfazem tal propriedade deveriam ser melhor estudadas. Isso inclui, por exemplo, as álgebras pseudocompactas comutativas e limites de auto-injetivas. Sobre o primeiro exemplo, já sabemos que a propriedade de Han é válida no caso de dimensão finita e, portanto, seria razoável estudar sua validade no caso pseudocompacto. Utilizando [IM22, Example 3.9], tal análise possivelmente pode ser reduzida ao caso de álgebras locais. Sobre o segundo caso, não possuímos uma resposta mesmo para os casos particulares em dimensão finita de álgebras de Frobenius e simétricas. Mesmo assim, boa parte dos exemplos que satisfazem a propriedade de Han, da tabela 3.1, são álgebras de Frobenius. Desse modo, acreditamos que um maior estudo dessas álgebras de dimensão finita poderia ser bastante conveniente.

Por um outro lado, seria interessante considerar os limites da propriedade de Han em mundos diferentes do pseudocompacto. Por exemplo, visto que o contraexemplo apresentado aqui é gerado por infinitos elementos, poderia ser útil analisarmos (se existirem) contraexemplos da propriedade de Han nas seguintes classes de álgebras: noetherianas, finitamente geradas e artinianas.

Outro possível caminho futuro seria tratar de propriedades mais fracas que a propriedade de Han. Por exemplo, poderia ser verificada validade da implicação $\mathrm{hh.dim}(A) = 0 \implies \mathrm{gl.dim}(A) < \infty$ é válida para toda álgebra de dimensão finita. Tal propriedade poderia ser chamada de propriedade de Han de nível 0. Da mesma maneira, poderíamos considerar a propriedade de Han de nível n_0 para qualquer natural n_0, i.e. $\mathrm{hh.dim}(A) \leqslant n_0 \implies \mathrm{gl.dim}(A) < \infty$. Com essa noção, temos que a propriedade de Han é válida para uma álgebra A se, e somente se, ela é válida para A em todo nível n_0. Da mesma maneira, poderíamos nos perguntar se a propriedade de Happel é válida nos níveis 0 ou 1 — sabemos que ela é falsa a partir do nível 2.

Apêndice A

Mais Anéis com caracterizações homológicas

Terminologia e Notação: O termo finitamente gerado será abreviado por f.g. Dizemos que um módulo é 1-*gerado* se ele for gerado por um elemento. Os anuladores à esquerda e à direita de um subconjunto S de um anel R são denotados, respectivamente, por $\mathrm{ann}_\ell(S)$ e $\mathrm{ann}_\mathrm{r}(S)$. O anulador de um R-módulo M é simplesmente denotado por $\mathrm{ann}(M)$.

A.1 Anéis de dimensão global baixa

Anéis semissimples

Começaremos apresentando os anéis de dimensão global igual a 0.

Definição A.1.1. Um R-módulo M é dito semissimples se todo submódulo de M é um somando direto de M ou, equivalentemente, se M é uma soma direta de R-módulos simples.

Definição-proposição A.1.2. Um anel é dito *semissimples* se satisfaz alguma das seguintes condições equivalentes:

(1) R é semissimples como R-módulo.

(2) Todo R-módulo é semissimples.

Demonstração. A implicação (1) $\implies$ (2) é uma tautologia. Para a recíproca, afirmo que toda soma de módulos semissimples e todo quociente de um módulo semissimples (por um submódulo qualquer) são semissimples. Com isso e a hipótese de que R é semissimples, podemos concluir que todo R-módulo M é semissimples, pois M é isomorfo a um quociente da forma $\oplus_I R/Q$. Assim, basta provarmos a afirmação:

- Uma soma de módulos semissimples é semissimples, pois ela é uma soma de uma soma de módulos simples.
- Sendo M um módulo semissimples e N um submódulo, vejamos que M/N também é semissimples. Um submódulo qualquer de M/N tem a forma M'/N, onde $N \subseteq$

$M' \subseteq M$. Vejamos que esse submódulo é um somando direto; mais detalhadamente, escrevendo a decomposição $M = M' \oplus M''$ para algum submódulo M'', provemos que

$$\frac{M}{N} = \frac{M'}{N} \oplus \frac{M'' + N}{N}.$$

Claramente, M/N é gerado pela soma dos termos da direita. Agora, o fato de que a interseção deles é nula segue das seguintes implicações:

$$\begin{aligned}\frac{M'}{N} \ni m' + N = m'' + N \in \frac{M'' + N}{N} &\Rightarrow m' - m'' \in N \subseteq M' \\ &\Rightarrow m'' \in M' \cap (M'' + N) = N.\end{aligned}$$

□

Teorema A.1.3. *As seguintes afirmações são equivalentes sobre um anel R:*

(1) R é semissimples.

(2) Todo R-módulo 1-gerado é projetivo.

(3) Todo R-módulo é projetivo.

(4) Toda sequência exata curta de R-módulos cinde.

(5) Todo R-módulo é injetivo.

(6) Todo R-módulo 1-gerado é injetivo.

(7) R é artiniano e $J(R) = 0$.

(8) (Wedderburn-Artin) R isomorfo a uma soma de anéis de matrizes $M_n(D)$ onde D é um anel de divisão.

Panorama da demonstração. Das caracterizações de módulos projetivos e injetivos, temos que (3) $\iff$ (4) $\iff$ (5). Agora, (1) $\implies$ (4) segue do fato de todo R-módulo ser soma direta de simples.

(2) $\implies$ (1): Isso segue do fato de que, para todo ideal I de R, a sequência exata curta

$$0 \to I \to R \to R/I \to 0$$

cinde sempre que R/I é projetivo.

(6) $\implies$ (1): Isso é um forte resultado de Osofsky [Oso73, Cor. 2.23].

(1) $\iff$ (7): Veja [Lam01, 2.6, 4.14].

(1) $\iff$ (8): Veja [Lam01, §3]. □

Mais caracterizações de anéis semissimples podem ser conferidas em [Lam99, Ex. 3.11, 6.83, Ex. 8.15], onde são utilizadas noções de anéis de Kasch e de módulos quase-injetivos.

Anéis regulares segundo von Neumann

Definição A.1.4. Um R-módulo M à direita é dito *divisível* se, para todo $m \in M$ e todo $r \in R$ tal que $\operatorname{ann}_r(r) \subseteq \operatorname{ann}(m)$, temos que $m \in Mr$.

Todo módulo injetivo é divisível, mas a recíproca nem sempre é verdade.

A seguir, apresentamos a classe de anéis com dimensão global fraca igual a 0.

Teorema-definição A.1.5. *Um anel R é dito* regular segundo von Neumann *se satisfaz alguma das seguintes condições equivalentes:*

(1) *Para todo $r \in R$, existe $x \in R$ tal que $rxr = r$.*

(2) *Todo ideal à esquerda f.g. (ou principal) de R é um somando direto de R.*

(3) *Todo R-módulo é plano.*

(4) *R/I é projetivo para todo ideal f.g. I de R*

(5) *Todo R-módulo é divisível.*

Demonstração. Veja [Wei94, 4.2.9], [Lam01, 4.23] e [Lam99, 3.18]. □

A partir da segunda caracterização, pode-se concluir a seguinte equivalência:

$$R \text{ é noetheriano e regular segundo von Neumann} \iff R \text{ é semssimples}$$

Outro modo de obtê-la é utilizando que, no caso noetheriano, temos a igualdade das dimensões globais fraca e projetiva.

Restingindo-nos ao caso comutativo, temos o seguinte resultado:

Teorema A.1.6. *As seguintes afirmações são equivalentes sobre um anel comutativo R:*

(1) *R é regular segundo von Neumann.*

(2) *R é reduzido (i.e. 0 é seu único elemento nilpotente) e $\dim_{Krull}(R) = 0$.*

(3) *$R_{\mathfrak{m}}$ é um corpo para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R.*

(4) *Todo R-módulo simples é injetivo (ou divisível).*

Demonstração. [Lam99, 3.71, 3.73] □

Um fato curioso sobre tais anéis é o seguinte: dentro da lógica de certos topos booleanos, pode-se provar que anéis comutativos regulares segundo von Neumann equivalem a "corpos", veja [Smi84] ou [Joh77, Prop. 5.6].

Anéis hereditários

Teorema-definição A.1.7. *Um anel R é dito* hereditário à esquerda *se satisfaz alguma das seguintes condições equivalentes:*

(1) *Todo submódulo de um R-módulo à esquerda projetivo é projetivo.*

(2) *Todo ideal à esquerda de R é projetivo.*

(3) l.gl.dim$(R) \leqslant 1$

(4) *Todo quociente de um R-módulo à esquerda injetivo é injetivo.*

Demonstração. (3) $\implies$ (1) : Sendo $X \subseteq P$ um submódulo do módulo projetivo P, temos a sequência exata curta $0 \to X \to P \to P/X \to 0$. Usando que $\mathrm{pd}_R(P/X) \leqslant 1$, concluímos que X é projetivo pela proposição 1.2.2.

(1) $\implies$ (2) : Isso segue de R ser projetivo.

(2) $\implies$ (3) : Da condição (3), temos que $\mathrm{pd}_R(R/I) \leqslant 1$ para todo ideal I. Assim, o resultado segue do teorema de Auslander 1.2.6.

A equivalência (3) $\iff$ (4) pode ser mostrada de maneira dual. Alternativamente, pode-se conferir [Lam99, 3.22]. □

Outra caracterização de anéis hereditários pode ser conferida em [Lam99, Ex. 3.10].

Agora, apresentaremos um importante exemplo de anel da Álgebra Comutativa que é caracterizado pelo conceito acima.

Definição A.1.8. Seja R um domínio comutativo com anel de frações K. Um ideal *fracionário* de R é um R-submódulo I de K tal que $rI \subseteq R$ para algum $r \in R$.

Repare que um ideal de R usual é, em particular, um ideal fracionário. De maneira recíproca, usando que R é um domínio, temos que todo ideal fracionário I é isomorfo ao ideal rI, que está contido em R.

Teorema-definição A.1.9. *Seja R um domínio comutativo com anel de frações K. Dizemos que R é um* domínio de Dedekind *se satisfaz alguma das seguintes condições equivalentes:*

(1) *R é hereditário.*

(2) *Todo R-módulo divisível é injetivo.*

(3) *Todo ideal fracionário I de R é inversível (i.e. $I \cdot J = R$ para algum ideal fracionário J).*

(4) *R é noetheriano, integralmente fechado e* $\dim_{Krull}(R) \leqslant 1$.[1]

(5) *R é noetheriano e $R_{\mathfrak{m}}$ é um domínio de ideais principais*[2] *para todo ideal maximal* $\mathfrak{m}$.

(6) *Todo ideal próprio não-nulo de R é fatorado de maneira única como produto de ideais primos.*

Demonstração. (1) $\iff$ (2): veja [Lam99, 3.24]

(1) $\iff$ (3): Isso segue do fato de que um ideal fracionário é inversível se, e somente se, é projetivo, veja [Jac12, Prop. 10.3].

[1] No caso de domínios, temos que $\dim_{Krull}(R) \leqslant 1$ se, e somente, todo ideal primo não-nulo de R é maximal.

[2] Ou, equivalentemente, um domínio de valorização discreta. Veja caracterizações desse anel em [TB15, Teo. 10.1.6]

Para as demais caracterizações, consulte [Jac12, §10.1-10.2]. □

Anéis semihereditários

Definição A.1.10. Um R-módulo M é *torsionless*[3] se M pode ser mergulhado em um produto direto $\Pi_I R$ para algum conjunto de índices I.

Essa definição não deve ser confundida com a de módulos livre de torção. Uma relação entre eles é a seguinte: se R é um domínio, então todo módulo *torsionless* é livre de torção.

Lema A.1.11. *As seguintes afirmações são equivalentes sobre um anel R:*

(1) $\mathrm{w.gl.dim}(R) \leqslant 1$

(2) Todo submódulo de um R-módulo à esquerda (ou à direita) plano é plano.

(3) Todo ideal à esquerda (ou à direita) de R é plano.

Se assumirmos apenas que todo ideal principal de R é projetivo, obtemos uma classe mais abrangente do que a de anéis semihereditários. Tais anéis são conhecidos como *anéis de Rickart*, veja [Lam99, §7D].

Teorema-definição A.1.12. *Um anel R é dito* semihereditário à esquerda *se satisfaz alguma das seguintes condições equivalentes:*

(1) Todo submódulo f.g. de um R-módulo à esquerda projetivo é projetivo.

(2) Todo ideal à esquerda f.g de R é projetivo.

(3) Todo R-módulo à direita torsionless é plano.

(4) $\mathrm{w.gl.dim}(R) \leqslant 1$ *e R é coerente à esquerda*[4].

(5) Para todo $n \geqslant 1$, o anel de matrizes $M_n(R)$ é de Rickart à esquerda.

Demonstração. [Lam99, 2.30, 4.69, 7.63] □

Pela caracterização (4) e pelo corolário 1.2.11, temos que:

$$R \text{ é noetheriano à direita e semihereditário à esquerda} \implies R \text{ é hereditário à direita}$$

Em particular, anéis com tais propriedades são semihereditários à direita. Pode-se provar que essa conclusão também é válida para anéis semihereditários à esquerda e noetherianos à esquerda, veja [Lam99, 7.6.5].

Teorema-definição A.1.13. *Um domínio comutativo R é um* domínio de Prüfer *se satisfaz alguma das seguintes condições equivalentes:*

(1) R é semihereditário.

[3] Não conhecemos nenhuma tradução óbvia para esse termo sem que haja confusão com a noção de módulos livres de torção.

[4] Isto é, todo ideal à esquerda f.g. de R é finitamente apresentável.

(2) Todo R-módulo livre de torção é plano.

(3) Todo R-módulo f.g. livre de torção é projetivo.

(4) $\text{w.gl.dim}(R) \leqslant 1$

(5) M, N *são R-módulos livres de torção* $\implies$ $M \otimes_R N$ *é livre de torção*

(6) I, J *são ideais de R* $\implies$ $I \otimes_R J$ *é livre de torção*

Demonstração. [Lam99, 2.31, 4.69] □

Outras caracterizações de domínios de Prüfer podem ser encontradas em [Lam99, 7.67] ou na Wikipedia.

Um fato interessante é que, no caso de anéis locais comutativos, temos que a hipótese $\text{w.gl.dim}(R) \leqslant 1$ já implica que R é um domínio, cf. [Oso73, Prop. 2.36].

Exemplo A.1.14. Um domínio é dito *de Bézout* se todo ideal f.g. é principal. Como ideais principais de um domínio sempre são projetivos, temos que todo domínio de Bézout é, em particular, de Prüfer. Assim, pode-se concluir, por exemplo, que o anel de polinômios com expoentes racionais (não-negativos) $k[x, \mathbb{Q}]$ é um domínio de Prüfer e, portanto, que $\text{w.gl.dim}(k[x, \mathbb{Q}]) = 1$.

Uma importância de $k[x, \mathbb{Q}]$ é que seus subanéis fornecem contraexemplos importantes para certas propriedades de domínios comutativos, veja [Got22].

A.2 Anéis auto-injetivos

Nesta seção, realizamos essencialmente um resumo de diversos resultados provados no capítulo 6 do livro de Lam [Lam99].

Terminologia: Dizemos que um anel é lateralmente artiniano (resp. noetheriano) se ele é artiniano (resp. noetheriano) à esquerda ou à direita. Lembre que convencionamos que um anel é artiniano se ele o for tanto à esquerda quanto à direita.

Se um anel R é auto-injetivo (i.e. injetivo como R-módulo), então podemos obter diversas características. Por exemplo:

$$R \text{ é auto-injetivo e hereditário} \iff R \text{ é semissimples}$$

De fato, temos a implicação $\implies$ segue do fato de R/I ser injetivo para todo ideal I de R. Outras características de anéis que acabam sendo equivalentes quando assumimos a auto-injetividade são as de semihereditário e regular sengundo von Neumann. Veja essa e outras equivalências em [Lam99, 7.52].

Antes de apresentarmos as principais classes de anéis auto-injetivos, veremos como um anel noetheriano pode ser caracterizado utilizando a noção de módulos injetivos.

Teorema A.2.1. *As seguintes afirmações são equivalentes sobre um anel R:*

(1) R é noetherinano à direita.

(2) Todo limite direto de R-módulos à direita injetivos é injetivo.

(3) Toda soma direta de R-módulos à direita injetivos é injetiva.

(4) Todo R-módulo à direita injetivo é uma soma direta de submódulos indecomponíveis.

(5) Existe um cardinal α tal que todo R-módulo injetivo é uma soma direta de submódulos de cardinalidade $\leqslant \alpha$.

Demonstração. Veja [Lam99, 3.46, 3.48] □

Teorema-definição A.2.2. *Um anel R é* quase-Frobenius *se satisfaz alguma das seguintes condições equivalentes:*

(1) R é lateralmente noetheriano e injetivo como R-módulo.

(2) R é artiniano e, para todo ideal I à esquerda e todo ideal J à direita, temos que $\operatorname{ann}_r(\operatorname{ann}_\ell(I)) = I$ e $\operatorname{ann}_\ell(\operatorname{ann}_r(J)) = J$

(3) Todo R-módulo injetivo é projetivo.

(4) Todo R-módulo projetivo é injetivo.

(5) R é lateralmente artiniano e, para todo R-módulo simples S, temos que o R-módulo $\operatorname{Hom}_R(S, R)$ é simples ou nulo.

(6) R é artiniano e, para todo R-módulo N, os comprimentos de N e $\operatorname{Hom}_R(N, R)$ são iguais.

Utilizando a quarta caracterização, podemos derivar o seguinte resultado que foi utilizada ao longo da dissertação.

Corolário A.2.3. *Se M é um módulo sobre um anel R quase-Frobenius, então $\operatorname{pd}_R(M) = 0$ ou $\operatorname{pd}_R(M) = \infty$.*

Demonstração. Suponha que M possua uma resolução projetiva de comprimento 1

$$0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

Como P_1 também é injetivo, podemos concluir que a sequência cinde e, portanto, M é projetivo. Podemos proceder de maneira indutiva, para obter a mesma conclusão a partir de qualquer resolução projetiva de M finita. □

Definição A.2.4. Dizemos que um anel R é *de Frobenius* se R é quase-Frobenius e temos o isomorfismo de R-módulos $\overline{R} \cong \operatorname{Hom}_R(\overline{R}, R)$, onde $\overline{R} = R/J(R)$.

Teorema A.2.5. *As seguintes afirmações são equivalentes sobre uma álgebra de dimensão finita A sobre um corpo k:*

(1) A é um anel de Frobenius.

(2) Vale o isomorfismo de A-módulos $A \cong \operatorname{Hom}_k(A, k)$.

(3) Existe uma forma bilinear não-degenerada $B : A \times A \to k$ tal que $B(aa', a'') = B(a, a'a'')$ para todos $a, a', a'' \in A$.

(4) *Existe um funcional linear* $\lambda: A \to k$ *tal que* $I \nsubseteq \ker(\lambda)$ *para todo ideal* $I \neq 0$ *de* R.

(5) A *é quase-Frobenius e* $\dim_k(M) = \dim_k(\mathrm{Hom}_A(M, A))$ *para todo* A*-módulo f.g.* M.

(6) A *é quase-Frobenius e* $\dim_k(I) + \dim_k(\mathrm{ann}_\ell(I)) = \dim_k(A)$ *para todo ideal à direita minimal* I *de* A.

(7) *Para todo ideal à direita* I *e todo ideal à esquerda* J *de* A*, valem as igualdades:*

$$\dim_k(I) + \dim_k(\mathrm{ann}_\ell(I)) = \dim_k(A) = \dim_k(J) + \dim_k(\mathrm{ann}_r(J))$$

Observação A.2.6. O motivo para dizermos que essa álgebras são "de Frobenius" está no fato de que ele foi um dos primeiros a estudar álgebras com a propriedade $A \cong \mathrm{Hom}_k(A, k)$. Basicamente, ele forneceu, em uma publicação de 1903, a seguinte caracterização para tais álgebras : sendo $\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$ uma k-base da álgebra A, escreva

$$\epsilon_i \cdot \epsilon_j = \sum_l c_{lij}\epsilon_l$$

temos que A é de Frobenius se, e somente se, existe $\alpha \in k^n$ e uma matriz não-degenerada P_α com entradas $(P_\alpha)_{ij} = \sum_l \alpha_l c_{lij}$. Para mais detalhes, veja [Lam99, §16G].

Tomando casos particulares de algumas caracterizações de álgebras Frobenius, obtemos outra importante classe de álgebras auto-injetivas.

Teorema-definição A.2.7. *Uma* k*-álgebra de dimensão finita* A *é* simétrica *se satisfaz alguma das seguintes condições equivalentes:*

(1) *Vale o isomorfismo de* A*-bimódulos* $A \cong \mathrm{Hom}_k(A, k)$.

(2) *Existe uma forma bilinear não-degenerada simétrica* $B: A \times A \to k$ *tal que* $B(aa', a'') = B(a, a'a'')$ *para todos* $a, a', a'' \in A$.

(3) *Existe um funcional linear* $\lambda: A \to k$ *tal que* $I \nsubseteq \ker(\lambda)$ *para todo ideal* $I \neq 0$ *de* R *e* $\lambda(aa') = \lambda(a'a)$ *para todos* $a, a' \in A$.

(4) *Vale o isomorfismo de funtores* $\mathrm{Hom}_k(-, k) \cong \mathrm{Hom}_A(-, A)$.

Demonstração. Veja [Lam99, 16.54, 16.71]. □

Exemplo A.2.8. 1. Dado um espaço vetorial V de dimensão n, vimos na seção 3.5 que a álgebra exterior $\Lambda^*(V)$ é de Frobenius. Além disso, vale que $\Lambda^*(V)$ é simétrica se, e somente se, n é ímpar.

2. Toda álgebra de Hopf de dimensão finita é uma álgebra de Frobenius, veja [Koc03, 2.4.12]. Em particular, a álgebra de grupos kG é de Frobenius sempre G é um grupo finito. Mais ainda, pode-se ver que kG é simétrica por meio do funcional linear $\lambda: kG \to k$ definido por $\lambda(\sum_g \alpha_g g) = \alpha_1$.

Álgebras de Frobenius também possuem uma definição com uma natureza mais categorial. Por meio desse ponto de vista, foi provado que álgebras de Frobenius comutativas estão em correspondência com teorias quânticas de campos topológicas (TQFT) de dimensão 2. Para mais detalhes, consulte [Koc03].

Por outro lado, dentro da teoria de operades, álgebras de Frobenius e simétricas podem ser definidas como álgebras de certos operades cíclicos, veja [Val12, p. 16].

A.3 Anéis perfeitos e semiperfeitos

Terminologia: Utilizamos DCC e ACC como abreviações das condições de cadeias descendentes e ascendentes respectivamente. Lembramos que um módulo M é noetheriano (resp. artiniano) se a ACC (resp. a DCC) é satisfeita para submódulos de M.

Anéis perfeitos foram introduzidos por Bass [Bas60], o qual também provou boa parte das equivalências a serem enunciadas a seguir. Vale ressaltar que tal conceito está totalmente desvinculado do de corpo perfeitos. De fato, todo corpo (mesmo que não seja perfeito) é um anel perfeito.

Teorema-definição A.3.1. *Um anel R é dito* perfeito à direita *se satisfaz alguma das seguintes condições equivalentes:*

(1) Todo R-módulo à direita plano é projetivo.

(2) Todo R-módulo à direita possui uma cobertura projetiva.

(3) $R/J(R)$ é semissimples e $J(R)$ é T-nilpotente[5] à direita.

(4) $R/J(R)$ é semissimples e todo R-módulo à direita não-nulo possui um submódulo maximal.

(5) A condição DCC é satisfeita para ideais de R à esquerda principais (ou finitamente gerados).

(6) Para todo R-módulo à direita M, a ACC é satisfeita para os submódulos 1-gerados de M.

Demonstração. Veja [Lam01, 23.18, 23.20, 24.18, 24.25, Ex. 24.7]. □

Usando a primeira caracterização, concluímos que $\mathrm{w.gl.dim}(R) = \mathrm{gl.dim}(R)$ para todo anel perfeito R. Em particular, concluímos, por exemplo, que um anel é semissimples se, e somente se, ele é perfeito à direita e regular segundo von Neumann.

Pela terceira caracterização, vemos que todo anel semiprimário (e, em particular, todo anel artiniano) é perfeito à direita ou à esquerda.

Utilizando a caracterização (5), podemos concluir que:

$$R \text{ é noetheriano à esquerda e perfeito à direita} \iff R \text{ é artiniano à esquerda}$$

[5] Isto é, para toda sequência de elementos $\{r_1, r_2, \cdots\} \subseteq R$, existe um inteiro $n \geqslant 1$ tal que $a_n \cdots a_2 a_1 = 0$.

Considerando a condição (2) apenas para módulos finitamente gerados, obtemos a seguinte generalização da noção de anéis perfeitos.

Teorema-definição A.3.2. *Um anel R é dito* semiperfeito *se satisfaz alguma das seguintes condições equivalentes:*

(1) Todo R-módulo à direita (ou à esquerda) finitamente gerado (ou 1-gerado) possui uma cobertura projetiva.

(2) $R/J(R)$ é semissimples e os idempotentes de $R/J(R)$ podem ser levantados a R.

(3) Existe uma decomposição $1_R = e_1 + \cdots + e_n$, onde o conjunto $\{e_i\}$ é formado por idempotentes ortogonais tais que e_iRe_i é um anel local para todo i.

Demonstração. Veja [Lam01, 23.6, 24.16]. □

Usando a última caracterização, vê-se que todo anel local é semiperfeito. Além disso, no caso em que R é comutativo, obtemos que $e_iRe_i = e_iR$ é local e, portanto, $R = e_1R \oplus \cdots \oplus e_nR$ é uma soma de anéis locais.

Referências

[AB59] Maurice Auslander e D. A. Buchsbaum. "Unique Factorization in Regular Local Rings". Em: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 45.5 (1959), pp. 733–734. DOI: 10.1073/pnas.45.5.733 (ver p. 45).

[AG60] Maurice Auslander e Oscar Goldman. "The Brauer Group of a Commutative Ring". Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 97.3 (1960), pp. 367–409. DOI: 10.2307/1993378 (ver p. 40).

[AG87] David Anick e Edward Green. "On the homology of quotients of path algebras". Em: *Communications in Algebra* 15 (1987), pp. 309–341. DOI: 10.1080/00927878708823422 (ver p. 75).

[AI00] Luchezar L Avramov e Srikanth Iyengar. "Finite generation of Hochschild homology algebras". Em: *Inventiones mathematicae* 140.1 (2000), pp. 143–170. DOI: 10.1007/s002220000051 (ver p. 53).

[AI05] Luchezar L. Avramov e Srikanth Iyengar. "Gaps in Hochschild cohomology imply smoothness for commutative algebras". Em: *Mathematical Research Letters* 12.6 (2005), pp. 789–804. DOI: 10.4310/MRL.2005.v12.n6.a1 (ver pp. 53, 60).

[Alb39] Abraham Adrian Albert. *Structure of algebras*. Vol. 24. American Mathematical Society Colloquium Publications, 1939 (ver p. 38).

[And67] Michel André. *Méthode simpliciale en algèbre homologique et algèbre commutative*. Vol. 32. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 1967. DOI: 10.1007/BFb0077199 (ver p. 51).

[And74] Michel André. *Homologie des algèbres commutatives*. Vol. 206. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin, Heidelberg, 1974. DOI: 10.1007/978-3-642-51449-4 (ver p. 51).

[ASS06] Ibrahim Assem, Andrzej Skowronski e Daniel Simson. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 1: Techniques of Representation Theory*. Vol. 65. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2006. DOI: 10.1017/CBO9780511614309 (ver pp. 58, 70, 71, 83).

[Aus55] Maurice Auslander. "On the Dimension of Modules and Algebras (III): Global Dimension". Em: *Nagoya Mathematical Journal* 9 (1955), pp. 67–77. DOI: 10.1017/S0027763000023291 (ver pp. 3, 20, 26, 56, 113).

[Aus57] Maurice Auslander. "On the Dimension of Modules and Algebras, VI. Comparison of Global and Algebra Dimension". Em: *Nagoya Mathematical Journal* 11 (1957), pp. 61–65. DOI: 10.1017/S002776300000194X (ver pp. 3, 56).

[AV92] Luchezar L. Avramov e Micheline Vigué-Poirrier. "Hochschild homology criteria for smoothness". Em: *International Mathematics Research Notices* 1992.1 (jan. de 1992), pp. 17–25. ISSN: 1073-7928. DOI: 10.1155/S1073792892000035 (ver pp. 53, 59, 68).

[BAC94] BACH (The Buenos Aires Cyclic Homology Group). "A Hochschild homology criterium for the smoothness of an algebra". Em: *Commentarii Mathematici Helvetici* 69 (1994), pp. 163–168. DOI: 10.1007/BF02564480 (ver pp. 53, 59, 68).

[Bas60] Hyman Bass. "Finitistic Dimension and a Homological Generalization of Semi-Primary Rings". Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 95.3 (1960), pp. 466–488. ISSN: 00029947. DOI: 10.2307/1993568 (ver pp. 3, 133).

[BBFS92] Th. Belzner, W. D. Burgess, K. R. Fuller e R. Schulz. "Examples of Ungradable Algebras". Em: *Proceedings of the American Mathematical Society* 114.1 (1992), pp. 1–4. ISSN: 00029939, 10886826. DOI: 10.2307/2159775 (ver p. 83).

[BE08] Petter Bergh e Karin Erdmann. "Homology and cohomology of quantum complete intersections". Em: *Algebra & Number Theory* 2.5 (2008), pp. 501–522. DOI: 10.2140/ant.2008.2.501 (ver pp. 59, 60, 85).

[Ben91a] D. J. Benson. *Representations and Cohomology I.* Vol. 30. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1991. DOI: 10.1017/CBO9780511623615 (ver pp. 35, 61, 63, 67, 71, 83, 104).

[Ben91b] D. J. Benson. *Representations and Cohomology II.* Vol. 31. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1991. DOI: 10.1017/CBO9780511623622 (ver pp. 35, 61, 62, 64, 66, 67).

[Ber11] Carl Fredrik Berg. *Structure Theorems for Basic Algebras.* arXiv preprint. 2011. DOI: 10.48550/ARXIV.1102.1100 (ver p. 71).

[BGMS05] Ragnar-Olaf Buchweitz, Edward L. Green, Dag Madsen e Øyvind Solberg. "Finite Hochschild cohomology without finite global dimension". Em: *Mathematical Research Letters* 12.6 (2005), pp. 805–816. DOI: 10.4310/MRL.2005.v12.n6.a2 (ver pp. 3, 85).

[BGS96] Alexander Beilinson, Victor Ginzburg e Wolfgang Soergel. "Koszul Duality Patterns in Representation Theory". Em: *J. Amer. Math. Soc.* 9 (1996), pp. 473–527. DOI: 10.1090/S0894-0347-96-00192-0 (ver p. 83).

[BM09] Petter Bergh e Dag Madsen. "Hochschild homology and global dimension". Em: *Bulletin of the London Mathematical Society* 41.3 (2009), pp. 473–482. DOI: 10.1112/blms/bdp018 (ver pp. 59, 82, 83).

[BM17] Petter Bergh e Dag Madsen. "Hochschild homology and trivial extension algebras". Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 145.4 (2017), pp. 1475–1480. DOI: 10.1090/proc/13363 (ver pp. 59, 82, 84).

[Bor94a] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 1, Basic Category Theory.* Vol. 50. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1994 (ver p. 16).

[Bor94b] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 2, Categories and Structures.* Vol. 51. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1994. DOI: 10.1017/CBO9780511525865 (ver pp. 8, 11).

[Bou07] N. Bourbaki. *Algèbre commutative: Chapitre 10.* Springer Berlin, Heidelberg, 2007. ISBN: 978-3-540-34394-3. DOI: 10.1007/978-3-540-34395-0 (ver p. 50).

[Bru66] Armand Brumer. "Pseudocompact algebras, profinite groups and class formations". Em: *Journal of Algebra* 4.3 (1966), pp. 442–470. ISSN: 0021-8693. DOI: 10.1016/0021-8693(66)90034-2 (ver pp. 4, 92, 99–101, 106, 108, 117).

[BS15] Christine Berkesch e Frank-Olaf Schreyer. "Syzygies, finite length modules, and random curves". Em: *Commutative algebra and noncommutative algebraic geometry* 1 (2015), pp. 25–52 (ver p. 21).

[Bur85] Dan Burghelea. "The cyclic homology of the group rings." Em: *Commentarii mathematici Helvetici* 60 (1985), pp. 354–365. URL: http://eudml.org/doc/140019 (ver pp. 59, 64).

[CE56] Henri Cartan e Samuel Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton University Press, 1956. DOI: 10.1515/9781400883844 (ver pp. 2, 7, 9, 11, 12, 17, 19, 21, 27, 30, 35, 38, 39, 109, 110, 113).

[Cha61] Stephen U. Chase. "A Generalization of the Ring of Triangular Matrices". Em: *Nagoya Mathematical Journal* 18 (1961), pp. 13–25. DOI: 10.1017/S0027763000002208 (ver pp. 23, 72).

[Cib86] Claude Cibils. "Hochschild homology of an algebra whose quiver has no oriented cycles". Em: *Representation Theory I: Finite Dimensional Algebras*. Vol. 1177. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986, pp. 55–59. DOI: 10.1007/BFb0075258 (ver pp. 59, 72).

[Cib88] Claude Cibils. "On the hochschild cohomology of finite dimensional algebras". Em: *Communications in Algebra* 16.3 (1988), pp. 645–649. DOI: 10.1080/00927878808823591 (ver p. 3).

[Cib98] Claude Cibils. "Hochschild cohomology algebra of radical square zero algebras". Em: *Algebras and modules II: Eighth International Conference on Representations of Algebras, August 4-10, 1996, Geiranger, Norway*. Ed. por Idun Reiten, Sverre O. Smalo e Oyvind Solberg. Vol. 24. CMS Conference Proceedings. American Mathematical Society, 1998, pp. 93–101. URL: https://hal.science/hal-01493750 (ver p. 80).

[CLMS20a] Claude Cibils, Marcelo Lanzilotta, Eduardo N. Marcos e Andrea Solotar. "Deleting or adding arrows of a bound quiver algebra and Hochschild (co)homology". Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 148 (2020), pp. 2421–2432. DOI: 10.1090/proc/14936 (ver p. 89).

[CLMS20b] Claude Cibils, Marcelo Lanzilotta, Eduardo N. Marcos e Andrea Solotar. "Split bounded extension algebras and Han's conjecture". Em: *Pacific Journal of Mathematics* 307 (2020), pp. 63–77. DOI: 10.2140/pjm.2020.307.63 (ver p. 88).

[CLMS21] Claude Cibils, Marcelo Lanzilotta, Eduardo N. Marcos e Andrea Solotar. "Jacobi-Zariski long nearly exact sequences for associative algebras". Em: *Bulletin of the London Mathematical Society* 53.6 (2021), pp. 1636–1650. DOI: 10.1112/blms.12516 (ver pp. 88, 90).

[CLMS22] Claude Cibils, Marcelo Lanzilotta, Eduardo N. Marcos e Andrea Solotar. "Han's conjecture for bounded extensions". Em: *Journal of Algebra* 598 (2022), pp. 48–67. ISSN: 0021-8693. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2022.01.022 (ver pp. 3, 87–89).

[CLMS23] Claude Cibils, Marcelo Lanzilotta, Eduardo N. Marcos e Andrea Solotar. *Strongly stratifying ideals, Morita contexts and Hochschild homology*. 2023. arXiv: 2303.17369 [math.RA] (ver p. 90).

[Coh66] P. M. Cohn. "Hereditary Local Rings". Em: *Nagoya Mathematical Journal* 27.1 (1966), pp. 223–230. DOI: 10.1017/S0027763000012022 (ver p. 25).

[Con94] Alain Connes. *Noncommutative geometry*. San Diego : Academic Press, 1994 (ver p. 2).

[CRS21] Claude Cibils, Maria Julia Redondo e Andrea Solotar. "Han's conjecture and Hochschild homology for null-square projective algebras". Em: *Indiana Univ. Math. J.* 70.2 (2021), pp. 639–668. DOI: 10.1512/iumj.2021.70.8402 (ver pp. 87, 88).

[Cru23] Guilherme C. Cruz. *A Survey on Han's Conjecture*. 2023. arXiv: 2301.07511 [math.KT] (ver p. 55).

[Deu35] Max Deuring. *Algebren*. Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete. 1. Folge. Springer Berlin, Heidelberg, 1935. DOI: 10.1007/978-3-642-91479-9 (ver p. 42).

[Dic23] Leonard Eugene Dickson. *Algebras and their arithmetics*. Vol. 15. University of Chicago Press, 1923. URL: https://archive.org/details/117770259/page/124/mode/2up (ver p. 42).

[Die51] Jean Dieudonné. "Linearly compact spaces and double vector spaces over sfields". English. Em: *American Journal of Mathematics* 73 (1951), pp. 13–19. ISSN: 0002-9327. DOI: 10.2307/2372154 (ver p. 98).

[Dik] Dikran Dikranjan. *Introduction to Topological Groups*. Lecture Notes, versão 26.02.2018. URL: https://users.dimi.uniud.it/~dikran.dikranjan/ITG.pdf (ver p. 93).

[Dri87] V. G. Drinfel'd. *Quantum groups*. Proc. Int. Congr. Math., Berkeley/Calif. 1986, Vol. 1, 798-820. 1987 (ver p. 85).

[Ea11] Pavel Etingof e et al. *Introduction to Representation Theory*. AMS, 2011 (ver p. 2).

[EH18] Karin Erdmann e Magnus Hellstrøm-Finnsen. "Hochschild cohomology of some quantum complete intersections". Em: *Journal of Algebra and Its Applications* 17.11 (2018), p. 1850215. DOI: 10.1142/S0219498818502158 (ver p. 86).

[Eil54] Samuel Eilenberg. "Algebras of cohomologically finite dimension". English. Em: *Commentarii Mathematici Helvetici* 28 (1954), pp. 310–319. ISSN: 0010-2571. DOI: 10.1007/BF02566937 (ver pp. 56, 57, 111, 112).

[EM47] Samuel Eilenberg e Saunders MacLane. "Cohomology Theory in Abstract Groups. I". Em: *Annals of Mathematics* 48.1 (1947), pp. 51–78. DOI: 10.2307/1969215 (ver p. 61).

[ENN56] Samuel Eilenberg, Hirosi Nagao e Tadasi Nakayama. "On the Dimension of Modules and Algebras, IV: Dimension of Residue Rings of Hereditary Rings". Em: *Nagoya Mathematical Journal* 10 (1956), pp. 87–95. DOI: 10.1017/S002776300000009X (ver pp. 3, 59, 72).

[Eve63] Leonard Evens. "A Generalization of the Transfer Map in the Cohomology of Groups". Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 108.1 (1963), pp. 54–65. DOI: 10.2307/1993825 (ver p. 66).

[Flu04] Martin G. Fluch. "*The Künneth Formula in Abelian Categories*". Diss. de mestr. University of Helsinki, 2004 (ver p. 11).

[For17] Timothy J Ford. *Separable algebras*. Vol. 183. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Soc., 2017. DOI: 10.1090/gsm/183 (ver p. 38).

[Frö99] Ralf Fröberg. "Koszul algebras". Em: *Advances in Commutative Ring Theory*. Vol. 205. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, Inc., 1999, pp. 337–351. URL: https://www.researchgate.net/publication/267666758_Koszul_algebras_Veronese_subrings_and_rings_with_linear_resolutions (ver p. 83).

[FSS03] Marco A. Farinati, Andrea L. Solotar e Mariano Suárez-Álvarez. "Hochschild homology and cohomology of generalized Weyl algebras". en. Em: *Annales de l'Institut Fourier* 53.2 (2003), pp. 465–488. DOI: 10.5802/aif.1950 (ver p. 86).

[Gab62] Pierre Gabriel. "Des catégories abéliennes". fr. Em: *Bulletin de la Société Mathématique de France* 90 (1962), pp. 323–448. DOI: 10.24033/bsmf.1583. URL: http://www.numdam.org/articles/10.24033/bsmf.1583/ (ver pp. 4, 92, 94, 99).

[Gab80] Peter Gabriel. "Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras". Em: *Representation Theory I: Proceedings of the Workshop on the Present Trends in Representation Theory, Ottawa, Carleton University, August 13 – 18, 1979*. Ed. por Vlastimil Dlab e Peter Gabriel. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1980, pp. 1–71. DOI: 10.1007/BFb0089778 (ver p. 3).

[GM21] Nathan Geist e Ezra Miller. *Global dimension of real-exponent polynomial rings*. 2021. DOI: 10.48550/ARXIV.2109.04924 (ver p. 24).

[Got22] Felix Gotti. "On semigroup algebras with rational exponents". Em: *Communications in Algebra* 50.1 (2022), pp. 3–18. DOI: 10.1080/00927872.2021.1949018 (ver p. 130).

[GS71] Silvio Greco e Paolo Salmon. *Topics in m-adic Topologies*. Vol. 58. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge. Springer Berlin, Heidelberg, 1971. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-88501-3 (ver p. 104).

[Han06] Yang Han. "Hochschild (Co)Homology Dimension". Em: *Journal of the London Mathematical Society* 73.3 (jun. de 2006), pp. 657–668. DOI: 10.1112/S002461070602299X (ver pp. 3, 59, 76, 80, 81, 85).

[Hap89] Dieter Happel. "Hochschild cohomology of finite–dimensional algebras". Em: *Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin*. Springer Berlin Heidelberg, 1989, pp. 108–126. DOI: 10.1007/BFb0084073 (ver pp. 3, 35, 56, 58).

[Har62] D. K. Harrison. "Commutative Algebras and Cohomology". Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 104.2 (1962), pp. 191–204. DOI: 10.2307/1993575 (ver p. 51).

[Hen97] K.. Hensel. "Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen." Em: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 6 (1897), pp. 83–88. URL: http://eudml.org/doc/144593 (ver p. 116).

[Hew48] Edwin Hewitt. "Rings of Real-Valued Continuous Functions. I". Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 64.1 (1948), pp. 45–99. DOI: 10.2307/1990558 (ver p. 91).

[Hil90] David Hilbert. "Über die Theorie der Algebraischen Formen". Em: *Mathematische Annalen* 36 (1890), pp. 473–534. DOI: 10.1007/BF01208503 (ver p. 21).

[HKR62] G. Hochschild, Bertram Kostant e Alex Rosenberg. "Differential Forms On Regular Affine Algebras". Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 102.3 (1962), pp. 383–408. ISSN: 00029947. DOI: 10.1090/S0002-9947-1962-0142598-8 (ver p. 52).

[Hoc42] G. Hochschild. "Semi-Simple Algebras and Generalized Derivations". Em: *American Journal of Mathematics* 64.1 (1942), pp. 677–694. DOI: 10.2307/2371713 (ver p. 41).

[Hoc45] G. Hochschild. "On the Cohomology Groups of an Associative Algebra". Em: *Annals of Mathematics* 46.1 (1945), pp. 58–67. DOI: 10.2307/1969145 (ver pp. 2, 27, 39, 42).

[Hoc56] G. Hochschild. "Relative Homological Algebra". Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 82.1 (1956), pp. 246–269. ISSN: 00029947. DOI: 10.2307/1992988 (ver pp. 32, 89).

[htt] David Buchsbaum (https://mathoverflow.net/users/94997/david-buchsbaum). *Serre's theorem about regularity and homological dimension*. MathOverflow. (versão: 2016-07-12). URL: https://mathoverflow.net/q/244191 (ver p. 44).

[Hue89] Johannes Huebschmann. "The mod-p cohomology rings of metacyclic groups". Em: *Journal of Pure and Applied Algebra* 60.1 (1989), pp. 53–103. ISSN: 0022-4049. DOI: 10.1016/0022-4049(89)90107-2 (ver p. 63).

[Hul03] Klaus Hulek. *Elementary algebraic geometry*. Vol. 20. Student Mathematical Library. American Mathematical Society, 2003. ISBN: 978-0-8218-2952-3 (ver p. 43).

[HX06] Yang Han e Yunge Xu. "Hochschild (Co)homology of Exterior Algebras". Em: *Communications in Algebra* 35.1 (2006), pp. 115–131. DOI: 10.1080/00927870601041375 (ver pp. 59, 60).

[Igu90] Kiyoshi Igusa. "Notes on the no loops conjecture". Em: *Journal of Pure and Applied Algebra* 69.2 (1990), pp. 161–176. ISSN: 0022-4049. DOI: 10.1016/0022-4049(90)90040-O (ver p. 83).

[IM21] Kostiantyn Iusenko e John MacQuarrie. "Homological properties of extensions of abstract and pseudocompact algebras". Preprint from arXiv:2108.12923. 2021 (ver pp. 3, 87, 90, 97, 115).

[IM22] Kostiantyn Iusenko e John MacQuarrie. "Semisimplicity and separability for pseudocompact algebras". Em: (jul. de 2022). arXiv: 2207.06281 (ver pp. 92, 103, 104, 110, 124).

[INN54] Masatoshi Ikeda, Hiroshi Nagao e Tadashi Nakayama. "Algebras With Vanishing n-Cohomology Groups". Em: *Nagoya Mathematical Journal* 7 (1954), pp. 115–131. DOI: 10.1017/S0027763000018110 (ver p. 56).

[IZ92] Kiyoshi Igusa e Dan Zacharia. "On the cyclic homology of monomial relation algebras". Em: *Journal of Algebra* 151.2 (1992), pp. 502–521. ISSN: 0021-8693. DOI: 10.1016/0021-8693(92)90125-6 (ver pp. 81, 82).

[Jac12] Nathan Jacobson. *Basic Algebra II: Second Edition*. Dover Publications, 2012. ISBN: 9780486135212 (ver pp. 49, 128, 129).

[Jat69] Arun Vinayak Jategaonkar. "A counter-example in ring theory and homological algebra". Em: *Journal of Algebra* 12.3 (1969), pp. 418–440. ISSN: 0021-8693. DOI: 10.1016/0021-8693(69)90040-4 (ver p. 24).

[Jen66] Chr. U. Jensen. "On Homological Dimensions of Rings with Countably Generated Ideals". Em: *Mathematica Scandinavica* 18 (jun. de 1966), pp. 97–105. DOI: 10.7146/math.scand.a-10784 (ver pp. 21, 22).

[JL82] Christian U. Jensen e Helmut Lenzing. "Homological dimension and representation type of algebras under base field extension". Em: *Manuscripta Math* 39 (1982), pp. 1–13. DOI: 10.1007/BF01312441 (ver p. 56).

[JN19] Andrei Jaikin-Zapirain e Nikolay M. Nikolov. "An infinite compact Hausdorff group has uncountably many conjugacy classes". Em: *Proceedings of the American Mathematical Society* 147 (2019), pp. 4083–4089. DOI: 10.1090/proc/14507 (ver p. 118).

[Joh77] P.T Johnstone. "Rings, fields, and spectra". Em: *Journal of Algebra* 49.1 (1977), pp. 238–260. ISSN: 0021-8693. DOI: 10.1016/0021-8693(77)90284-8 (ver p. 127).

[Kap58] Irving Kaplansky. "On the Dimension of Modules and Algebras, X: A Right Hereditary Ring which is not left Hereditary". Em: *Nagoya Mathematical Journal* 13 (1958), pp. 85–88. DOI: 10.1017/S0027763000023527 (ver pp. 3, 23).

[Kas06] Christian Kassel. "Homology and cohomology of associative algebras. A concise introduction to cyclic homology". École thématique. Lecture. Advanced School on Non-commutative Geometry ICTP, Trieste, August 2004, 2006. URL: https://cel.hal.science/cel-00119891 (ver pp. 27, 33, 86).

[Kel96] Bernhard Keller. "Invariance of cyclic homology under derived equivalence". Em: *Representation Theory of Algebras: Seventh International Conference on Representations of Algebras, August 22-26, 1994, Cocoyoc, Mexico*. Vol. 18. American Mathematical Soc. 1996, pp. 353–361 (ver p. 35).

[Kel98] Bernhard Keller. "Invariance and localization for cyclic homology of DG algebras". Em: *Journal of Pure and Applied Algebra* 123.1 (1998), pp. 223–273. ISSN: 0022-4049. DOI: 10.1016/S0022-4049(96)00085-0 (ver p. 57).

[Kir16] A. Kirillov Jr. *Quiver Representations and Quiver Varieties*. Graduate Studies in Mathematics. Volume: 174. American Mathematical Society, 2016 (ver p. 70).

[KK90] Ellen Kirkman e James Kuzmanovich. "Algebras with Large Homological Dimensions". Em: *Proceedings of the American Mathematical Society* 109.4 (1990), pp. 903–906. DOI: 10.2307/2048116. (Acesso em 08/03/2023) (ver p. 69).

[Koc03] Joachim Kock. *Frobenius Algebras and 2-D Topological Quantum Field Theories*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2003. DOI: 10.1017/CBO9780511615443 (ver pp. 132, 133).

[Kru28] W. Krull. "Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen". Em: *Mathematische Annalen* 100 (1928), pp. 687–698. URL: http://eudml.org/doc/159314 (ver p. 116).

[Lam01] T. Y. Lam. *A First Course in Noncommutative Rings*. 2ª ed. Vol. 131. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 2001. DOI: 10.1007/978-1-4419-8616-0 (ver pp. 17, 25, 38, 40, 41, 47, 83, 103, 126, 127, 133, 134).

[Lam99] T. Y. Lam. *Lectures on Modules and Rings*. Vol. 198. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 1999. DOI: 10.1007/978-1-4612-0525-8 (ver pp. 7, 13–17, 22, 23, 33, 46, 84, 85, 126–132).

[Lea92] I. J. Leary. “The mod-p cohomology rings of some p-groups”. Em: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 112.1 (1992), pp. 63–75. DOI: 10.1017/S0305004100070766 (ver p. 63).

[Lef42] S. Lefschetz. *Algebraic Topology*. Vol. 27. Colloquium Publications. American Mathematical Society, 1942 (ver pp. 93–95).

[Loc99] Ana C. Locateli. “Hochschild cohomology of truncated quiver algebras”. Em: *Communications in Algebra* 27.2 (1999), pp. 645–664. DOI: 10.1080/00927879908826454 (ver p. 80).

[Lod98] Jean-Louis Loday. *Cyclic Homology*. 2nd. Vol. 301. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin, Heidelberg, 1998. DOI: 10.1007/978-3-662-11389-9 (ver pp. 27, 33, 51–53, 57, 88).

[LV12] Jean-Louis Loday e Bruno Vallette. *Algebraic operad*. Vol. 346. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin, Heidelberg, 2012. DOI: 10.1007/978-3-642-30362-3 (ver p. 31).

[LZ94] Shaoxue Liu e Pu Zhang. “Hochschild Homology of Truncated Algebras”. Em: *Bulletin of the London Mathematical Society* 26.5 (set. de 1994), pp. 427–430. ISSN: 0024-6093. DOI: 10.1112/blms/26.5.427 (ver p. 80).

[Mat70] Hideyuki Matsumura. *Commutative Algebra*. New York: W. A. Benjamin, 1970 (ver pp. 49, 50, 53, 108).

[Mat87] Hideyuki Matsumura. *Commutative Ring Theory*. Ed. por MilesTranslator Reid. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1987. DOI: 10.1017/CBO9781139171762 (ver pp. 49, 50).

[Mez98] G Mezzetti. “Topological Morita Equivalences Induced by Ideals Generated by Dense Idempotents”. Em: *Journal of Algebra* 201.1 (1998), pp. 167–188. ISSN: 0021-8693. DOI: 10.1006/jabr.1997.7218 (ver p. 109).

[MSZ20] John W. MacQuarrie, Peter Symonds e Pavel A. Zalesskii. “Infinitely generated pseudocompact modules for finite groups and Weiss’ theorem”. English. Em: *Advances in Mathematics* 361 (2020). Id/No 106925, p. 35. ISSN: 0001-8708. DOI: 10.1016/j.aim.2019.106925 (ver p. 99).

[Nag58] Masayoshi Nagata. “A General Theory of Algebraic Geometry Over Dedekind Domains, II: Separably Generated Extensions and Regular Local Rings”. Em: *American Journal of Mathematics* 80.2 (1958), pp. 382–420. DOI: 10.2307/2372791. (Acesso em 07/03/2023) (ver p. 45).

[Nag62] Masayoshi Nagata. *Local rings*. English. Vol. 13. Intersci. Tracts Pure Appl. Math. Interscience Publishers, New York, NY, 1962 (ver p. 69).

[nLa23] nLab authors. *homological category*. https://ncatlab.org/nlab/show/homological+category. Revision 10. Abr. de 2023 (ver p. 7).

[NS03] Nikolay Nikolov e Dan Segal. “Finite index subgroups in profinite groups”. Em: *Comptes Rendus Mathematique* 337.5 (2003), pp. 303–308. ISSN: 1631-073X. DOI: 10.1016/S1631-073X(03)00349-2 (ver p. 96).

[Oso67] B. L. Osofsky. “Global Dimension of Valuation Rings”. Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 127.1 (1967), pp. 136–149. DOI: 10.1090/S0002-9947-1967-0206074-0 (ver pp. 21, 24).

[Oso68] B. L. Osofsky. “Upper Bounds on Homological Dimensions”. Em: *Nagoya Mathematical Journal* 32 (1968), pp. 315–322. DOI: 10.1017/S002776300002674X (ver p. 22).

[Oso69] B. L. Osofsky. “A Commutative Local Ring with Finite Global Dimension and Zero Divisors”. Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 141 (1969), pp. 377–385. ISSN: 00029947. DOI: 10.2307/1995109. (Acesso em 25/02/2023) (ver p. 47).

[Oso73] Barbara L. Osofsky. *Homological dimensions of modules.* Vol. 12. Regional Conference Series in mathematics. American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, 1973 (ver pp. 13, 22, 24, 25, 47, 48, 100, 107, 126, 130).

[Par85] Karen Hunger Parshall. “Joseph H. M. Wedderburn and the Structure Theory of Algebras”. Em: *Archive for History of Exact Sciences* 32.3/4 (1985), pp. 223–349. DOI: 10.1007/BF00348450 (ver p. 42).

[Qui70] Daniel Quillen. “On the (co-) homology of commutative rings”. Em: *Applications of Categorical Algebra.* Vol. 17. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. 1970, pp. 65–87 (ver p. 51).

[Ric91] Jeremy Rickard. “Derived Equivalences As Derived Functors”. Em: *Journal of the London Mathematical Society* s2-43.1 (1991), pp. 37–48. DOI: 10.1112/jlms/s2-43.1.37 (ver p. 35).

[Rin62] George S. Rinehart. “Note on the Global Dimension of a Certain Ring”. Em: *Proceedings of the American Mathematical Society* 13.3 (1962), pp. 341–346. DOI: 10.2307/2034934 (ver p. 86).

[Rod90] Antonio G. Rodicio. “Smooth algebras and vanishing of Hochschild homology”. English. Em: *Commentarii Mathematici Helvetici* 65.3 (1990), pp. 474–477. ISSN: 0010-2571. DOI: 10.1007/BF02566621 (ver p. 53).

[Rod95] Antonio G. Rodicio. “Commutative Augmented Algebras with Two Vanishing Homology Modules”. Em: *Advances in Mathematics* 111.1 (1995), pp. 162–165. ISSN: 0001-8708. DOI: 10.1006/aima.1995.1019 (ver p. 53).

[Roo72] Jan-Erik Roos. “Détermination de la dimension homologique globale des algèbres de Weyl.(French)”. Em: *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l’Académie des Sciences. Séries A et B* 274.1 (1972), A23–A26. URL: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5729564p/f61.item# (ver p. 86).

[Rui] Joshua Ruiter. *Homology in an Abelian Category.* Lecture Notes, October 2019. URL: https://users.math.msu.edu/users/ruiterj2/math/%Documents/Notes%20and%20talks/Homology%5C%20Functor.pdf (ver p. 8).

[RZ10] Luis Ribes e Pavel Zalesskii. *Profinite Groups.* 2nd. Vol. 40. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 2010. DOI: 10.1007/978-3-642-01642-4 (ver pp. 92, 95, 96, 99–102, 114, 116–121).

[RZ56] Alex Rosenberg e Daniel Zelinsky. “Cohomology of Infinite Algebras”. Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 82.1 (1956), pp. 85–98. DOI: 10.2307/1992979 (ver p. 40).

[San22] Ricardo Luiz dos Santos Souza. “Linearly topologized representations of algebras and coalgebras and their applications”. Tese de dout. UFMG, 2022 (ver pp. 92, 93, 109).

[Ser00] Jean-Pierre Serre. *Local Algebra.* Springer Monographs in Mathematics. Original French edition published as volume 11 in the series: Lecture Notes Mathematics, 1965. Springer Berlin, Heidelberg, 2000. DOI: 10.1007/978-3-662-04203-8 (ver pp. 43, 44, 46, 108).

[Ser65] Jean-Pierre Serre. *Cohomologie Galoisienne. Cours au College de France, 1962-1963.* 3ª ed. Vol. 5. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 1965. DOI: 10.1007/978-3-662-21576-0 (ver p. 116).

[She74] Saharon Shelah. "Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions". Em: *Israel Journal of Mathematics* 18 (1974), pp. 243–256. DOI: 10.1007/BF02757281 (ver p. 23).

[Sko99] Emil Skoldberg. "The Hochschild Homology of Truncated and Quadratic Monomial Algebras". Em: *Journal of the London Mathematical Society* 59.1 (fev. de 1999), pp. 76–86. DOI: 10.1112/S0024610799007036 (ver pp. 3, 75–77, 82).

[Sma65] Lance W. Small. "An Example in Noetherian Rings". Em: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 54.4 (1965), pp. 1035–1036. DOI: 10.1073/pnas.54.4.1035 (ver p. 23).

[Sma66] Lance W. Small. "Hereditary Rings". Em: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 55.1 (1966), pp. 25–27. DOI: 10.1073/pnas.55.1.25 (ver p. 23).

[Smi84] Kay Smith. "Commutative Regular Rings and Boolean-Valued Fields". Em: *The Journal of Symbolic Logic* 49.1 (1984), pp. 281–297. DOI: 10.2307/2274110. (Acesso em 12/05/2023) (ver p. 127).

[Spe72] W.T Spears. "Global dimension in categories of diagrams". Em: *Journal of Algebra* 22.2 (1972), pp. 219–222. ISSN: 0021-8693. DOI: 10.1016/0021-8693(72)90142-1 (ver p. 20).

[SSV13] Andrea Solotar, Mariano Suárez-Alvarez e Quimey Vivas. "Hochschild homology and cohomology of Generalized Weyl algebras: the quantum case". Em: *Annales de l'Institut Fourier* 63.3 (2013), pp. 923–956. DOI: 10.5802/aif.2780 (ver pp. 59, 60, 86).

[SV10] Andrea Solotar e Micheline Vigué-Poirrier. "Two classes of algebras with infinite Hochschild homology". Em: *Proceedings of the American Mathematical Society* 138.3 (2010), pp. 861–869. DOI: 10.1090/S0002-9939-09-10168-5 (ver pp. 59, 86).

[SW99] Stephen F. Siegel e Sarah J. Witherspoon. "The Hochschild Cohomology Ring of a Group Algebra". Em: *Proceedings of the London Mathematical Society* 79.1 (jul. de 1999), pp. 131–157. ISSN: 0024-6115. DOI: 10.1112/S0024611599011958 (ver p. 63).

[Swa60] Richard G. Swan. "The nontriviality of the restriction map in the cohomology of groups". Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 11 (1960), pp. 885–887. DOI: 10.1090/S0002-9939-1960-0124050-2 (ver pp. 59, 66).

[Tan84] Hiroshi Tanimoto. "Smoothness of Noetherian rings". Em: *Nagoya Mathematical Journal* 95 (1984), pp. 163–179. DOI: 10.1017/S002776300002105X (ver p. 50).

[TB15] Eduardo Tengan e Herivelto Borges. *Álgebra Comutativa em Quatro Movimentos.* Rio de Janeiro: IMPA (Projeto Euclides), 2015 (ver pp. 43–46, 96, 103, 108, 128).

[Val12] Bruno Vallette. *Algebra+Homotopy=Operad.* 2012. arXiv: 1202.3245 [math.AT] (ver p. 133).

[Vil59] Orlando E Villamayor. "On weak dimension of algebras." Em: *Pacific Journal of Mathematics* 9.3 (1959), pp. 941–951. DOI: 10.2140/pjm.1959.9.941 (ver p. 40).

[VV97] Martine Van Gastel e Michel Van den Bergh. "Graded Modules of Gelfand–Kirillov Dimension One over Three-Dimensional Artin–Schelter Regular Algebras". Em: *Journal of Algebra* 196.1 (1997), pp. 251–282. ISSN: 0021-8693. DOI: 10.1006/jabr.1997.7072 (ver pp. 92, 96, 104).

[Wae50] B. L. van der Waerden. *Modern Algebra, Volume II.* English translation from the second German edition. Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1950 (ver p. 38).

[War89] S. Warner. *Topological Fields.* ISSN. Elsevier Science, 1989. ISBN: 9780080872681 (ver p. 95).

[Wed08] J. H. MacLagan Wedderburn. "On Hypercomplex Numbers". Em: *Proceedings of the London Mathematical Society* s2-6.1 (1908), pp. 77–118. DOI: 10.1112/plms/s2-6.1.77 (ver p. 42).

[Wei94] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra.* Vol. 38. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1994. DOI: 10.1017/CBO9781139644136 (ver pp. 7, 10, 11, 13–15, 18, 20, 21, 27, 32–36, 39, 41, 42, 44, 45, 50, 51, 53, 64, 65, 84, 127).

[Wei99] Charles A. Weibel. "CHAPTER 28 - History of Homological Algebra". Em: *History of Topology.* Ed. por I.M. James. Amsterdam: North-Holland, 1999, pp. 797–836. ISBN: 978-0-444-82375-5. DOI: 10.1016/B978-044482375-5/50029-8 (ver pp. 1, 2).

[Whi36] J. H. C. Whitehead. "On the Decomposition of an Infinitesimal Group". Em: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 32.2 (1936), pp. 229–237. DOI: 10.1017/S0305004100001778 (ver p. 42).

[Whi37] J. H. C. Whitehead. "Certain equations in the algebra of a semi-simple infinitesimal group". Em: *The Quarterly Journal of Mathematics* os-8.1 (jan. de 1937), pp. 220–237. DOI: 10.1093/qmath/os-8.1.220 (ver p. 41).

[Wit19] Sarah J. Witherspoon. *Hochschild cohomology for algebras.* Vol. 204. American Mathematical Society, 2019 (ver pp. 3, 27).

[XHJ07] Yg. Xu, Y. Han e Wf. Jiang. "Hochschild cohomology of truncated quiver algebras". Em: *Science in China Series A: Mathematics* 50 (2007), pp. 727–736. DOI: 10.1007/s11425-007-2085-x (ver pp. 60, 80).

[Zel53] Daniel Zelinsky. "Linearly compact modules and rings". Em: *American Journal of Mathematics* 75 (1953), pp. 79–90. ISSN: 0002-9327. DOI: 10.2307/2372616 (ver pp. 92, 94).

[Zus08] Pasha Zusmanovich. "A Converse to the Second Whitehead Lemma". Em: *Journal of Lie Theory* 18.2 (2008), pp. 295–299. URL: https://www.heldermann-verlag.de/jlt/jlt18/zusmala2e.pdf (ver p. 42).