Teoria de Nielsen de raízes para aplicações equivariantes

Hildebrane Augusto dos Santos

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Peter N-S Wong

Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro do CNPq e da CAPES

- São Paulo, fevereiro de 2009 -

Teoria de Nielsen de raízes para aplicações equivariantes

Este exemplar corresponde à redação final
da tese de doutorado devidamente
corrigida e defendida por
Hildebrane Augusto dos Santos
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 18 de março de 2009.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Peter N-S Wong (Orientador) - Bates College
Profa. Dra. Fernanda Soares P. Cardona - IME-USP
Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi - UNESP-Rio Claro
Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo - DM-UFCar
Prof.Dr. Ozíride Manzoli Neto - ICMC-USP-São Carlos

À minha família

Agradecimentos

À minha família, pelo amor e pela torcida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Peter Wong sou imensamente grata pela dedicação, incentivo e apoio constantes na orientação deste trabalho, sem os quais, obviamente, não teria condições de concluí-lo. Foi uma grande satisfação poder contar com sua longa experiência.

À Profa. Dra. Fernanda Cardona meus agradecimentos por sua permanente solicitude em todas as fases do projeto, pela imensa paciência e por brindar-me com uma colaboração importante para este trabalho, dosando as críticas com comentários de incentivo.

À Profa. Dra. Lucília Borsari e à Profa. Dra. Natalia Viana Bedoya agradeço as ricas sugestões a esse trabalho.

Aos Professores do Departamento de Matemática do IME, em especial, ao Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves e ao Prof. Dr. Jorge Hiratuka.

Ao Leonardo, pela amizade sempre sincera.

À Fernanda, amiga de todas as horas, pela solidariedade e amizade compartilhadas todo esse tempo.

À Andréia, Patrícia e Fernandinha pelo companheirismo e encorajamento nas horas mais difíceis.

Aos meus colegas do grupo de Topologia Algébrica, em particular, aos alunos Paulo, Anderson, Toninho e Gustavo pelo convívio e pela rica troca de idéias matemáticas.

À Susan e a Laura, pelo carinho e atenção.

À Georgette Dumais, à Profa. Dra. Maria Ortiz e ao Prof. Dr. Eduardo Muslip do Bates College pela calorosa recepção em Lewiston, pela amizade e apoio constantes. Meu muito obrigada por todos os momentos compartilhados.

À todas as pessoas que colaboraram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho consiste de duas partes. Na primeira, desenvolvemos uma teoria de Nielsen equivariante para raízes de G-aplicações. Consideramos aplicações $f : X \to Y$ equivariantes entre G-espaços topológicos Hausdorff, conexos, normais, localmente conexos por caminhos e semilocalmente simplesmente conexos, onde G é um grupo topológico. Na segunda parte, estudamos a questão da realização do G-número de Nielsen de raízes quando este é zero.

Palavras-chave: Número de Nielsen de raízes, número de Reidemeister de raízes, G-número de Nielsen de raízes, G-número de Reidemeister de raízes, revestimento de Hopf.

Abstract

This work consists of two parts. In the first one, we develop an equivariant Nielsen root theory for G-maps. We consider equivariant maps $f : X \to Y$ between Hausdorff, connected, normal, locally path connected and semilocally simply connected G-spaces, where G is a topological group. In the second part, we study the question of the realization of G-Nielsen root number when it is zero.

Keywords: Nielsen root number, Reidemeister root number, G-Nielsen root number, G-Reidemeister root number, Hopf covering map.

Conteúdo

Introdução

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre n-variedades diferenciáveis fechadas orientadas e seja $a \in Y$ um valor regular. O grau topológico de Brouwer, $degf$, é uma contagem algébrica do conjunto $f^{-1}(a)$. Em 1930, H. Hopf generalizou este grau para aplicações entre variedades que não são necessariamente orientáveis, utilizando a teoria de Nielsen de raízes como base para a sua teoria do grau (vide [H]). Seguindo o trabalho de J. Nielsen na teoria de ponto-fixo, Hopf introduziu uma relação de equivalência no conjunto $f^{-1}(a)$ e definiu um número de Nielsen de raízes (de f em a), denotado por, $N(f, a)$, que é um limitante inferior para a cardinalidade de $f^{-1}(a)$, e constitui um invariante homotópico. Hopf mostrou que se $degf = 0$ então $N(f, a) = 0$. Embora seja possível definir $N(f, a)$, mesmo quando X e Y não são variedades topológicas, é usualmente muito difícil (quando possível) calcular este número com tal generalidade.

F. Wecken, no início de 1940, mostrou que para auto-aplicacões de uma variedade compacta triangulável de dimensão pelo menos três, o número de Nielsen de ponto-fixo, o qual é um limitante inferior para o número de pontos-fixos, pode ser realizado na classe de homotopia da aplicação dada, isto é, existe uma aplicação homotópica à aplicação dada cujo número de pontos-fixos é exatamente o número de Nielsen (de ponto-fixo). Em particular, quando o número de Nielsen de ponto-fixo é zero a aplicação dada é deformável para ser livre de ponto-fixo. Em 1955, H. Schirmer [S] provou um teorema tipo Wecken para coincidências de duas aplicações entre variedades fechadas orientáveis e trianguláveis de mesma dimensão. Quando o contra-domínio é uma variedade, a teoria de Nielsen de raízes é um caso especial da teoria de Nielsen de coincidência, onde uma das aplicações é a aplicação constante. Logo, se $f : X \to Y$ é uma aplicação entre n-variedades fechadas orientáveis e trianguláveis então se $N(f, a) = 0$, existe uma aplicação $h : X \to Y$ homotópica a f tal que $h^{-1}(a) = \emptyset$.

Influenciado pela teoria de ponto-fixo de Nielsen, R. Brooks [B], em 1967, estendeu a teoria de Nielsen de raízes para espaços mais gerais e definiu a noção de essencialidade de uma classe de raízes sem usar índice. Uma classe de raízes é inessencial se ela "desaparece" por alguma homotopia de f e é essencial caso contrário. O número de Nielsen (geométrico) de raízes é definido como o número de classes de raízes essenciais. A teoria de Nielsen de raízes ganhou muita atenção nos últimos anos (p. ex. [BS]), enquanto que a propriedade Wecken para raízes não tem sido muito estudada em situações onde os espaços não são variedades ou são variedades de dimensões diferentes. Um dos primeiros artigos nessa direção foi [GW], onde D. Gonçalves e P. Wong provaram, em 2005, que se X é um espaço topológico compacto e conexo por caminhos e Y é uma n-variedade topológica (conexa por caminhos mas não necessariamente compacta), então o número de Nielsen de raízes ser nulo é suficiente para garantir a existência de uma aplicação livre de raízes.

Em [W4], P. Wong definiu o G-número de Nielsen de raízes, denotado por $N_G(f, a) = 0$, para G-aplicações $f : X \to Y$, G é um grupo de Lie compacto e X e Y são G-ENRs compactos. Um dos objetivos deste trabalho é provar uma versão equivariante de [GW], ou seja, sob que condições $N_G(f, a) = 0$ garante a existência de uma G-aplicação livre de raízes que é G-homotópica a f?

Outro problema em qualquer tipo de teoria de Nielsen é o cálculo do número de Nielsen. Para o cálculo do número de Nielsen de raíz, a ferramenta mais importante é o número de Reidemeister de raízes $R(f, a)$, que é, por definição, a cardinalidade do conjunto $\pi_1(Y, f(x))/f_\sharp\pi_1(X, x)$. Este número, definido por R. Brooks [B1], coincide com a cardinalidade de $\eta^{-1}(y)$, para qualquer $y \in Y$, onde $\eta : \hat{Y} \to Y$ é o revestimento de Hopf para f (vide [B3]).

O G-número de Reidemeister de raízes, $R_G(f, a)$, também foi definido por P. Wong em 1999 [W4], utilizando os espaços de revestimento universais de X e de Y. Usando a principal ferramenta deste trabalho, que é o revestimento de Hopf para f, daremos uma outra definição de $R_G(f, a)$ e mostraremos sua relação com os números $N_G(f, a)$ e $R(f, a)$.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1, são apresentados alguns resultados básicos sobre grupos de transformação e será feita uma exposição dos fatos essenciais sobre teoria de Nielsen de raízes.

No capítulo 2, desenvolvemos a teoria de Nielsen equivariante para raízes de G-aplicações $f : X \to Y$. Definimos uma G-ação no espaço de revestimento de Hopf de Y. Em seguida, damos uma interpretação de essencialidade para G-classes de raízes, a qual é uma versão equivariante do Teorema (3.4) de [B3]. Definimos o G-número de Reidemeister de raíz, usando revestimento de Hopf, o qual mostraremos ser um limitante superior para o G-número de Nielsen de raízes.

No capítulo 3 são apresentados os resultados obtidos na realização do número de Nielsen equivariante, quando este é zero.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo serão fixadas terminologia e notações, e serão apresentados, sem demonstração, alguns resultados fundamentais de ação de grupos e da teoria de Nielsen de raízes para referência futura. Para as demonstrações e uma discussão em detalhes dos resultados, referimos o leitor aos livros [Br], [B3], [Ka], [K] e [tD].

Todo espaço topológico será assumido como sendo normal, Hausdorff, conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo, todas as aplicações são contínuas e as variedades topológicas (espaços paracompactos localmente euclidianos) serão consideradas sem bordo. O termo **G-espaço** significa G-espaço topológico à esquerda, isto é, um espaço X munido de uma ação (contínua) $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx$.

1.1 Ação de Grupos

Nesta seção, introduziremos a terminologia e alguns resultados básicos sobre ação de grupos. Sejam G um grupo topológico e X um G-espaço. A **órbita** de um elemento $x \in X$ é o conjunto $G(x) = \{gx \in X \mid g \in G\}$. O conjunto $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ é um subgrupo de G, chamado o **grupo de isotropia** (ou **estabilizador**) do ponto $x \in X$. Dizemos que a G-ação em X é

(1) **trivial** se $G_x = G$ para todo $x \in X$.

(2) **livre** se $G_x = \{e\}$ para todo $x \in X$, onde e denota o elemento identidade de G.

(3) **semi-livre** se $G_x = G$ ou $G_x = \{e\}$ para todo $x \in X$.

(4) **transitiva** se existe um única órbita, a saber, o espaço X.

Dados dois G-espaços X e Y, uma aplicação $f : X \to Y$ é chamada **G-aplicação** ou **aplicação equivariante** se $f(gx) = gf(x)$, para qualquer $g \in G$ e $x \in X$. Convém observarmos que será usada a mesma notação para as G-ações em X e em Y.

Um subconjunto A de um G-espaço X é **G-invariante** se $gA = A$ para todo $g \in G$.

Denote por X/G o conjunto cujos elementos são as órbitas $G(x)$ em X. Considere a aplicação natural $X \to X/G$ que leva cada elemento $x \in X$ em sua órbita $G(x)$. Então X/G munido da topologia quociente é chamado **espaço de órbitas** de X (com respeito a G).

Observação 1.1.1. Em geral X/G não é uma variedade topológica. (Vide [tD], Exercício 3, p.19).

O próximo resultado pode ser encontrado em ([Br], Proposição 4.1, p.40).

Proposição 1.1.2. *Se G é compacto, então a aplicação $G/G_x \to G(x)$ definida por $gG_x \mapsto gx$ é um homeomorfismo.*

Para todo subgrupo H de G, denotaremos por NH o normalizador de H em G e por $WH = NH/H$ o grupo de Weyl de H em G.

A classe de conjugação de H será denotada por (H) e será chamada **órbita do tipo** H. Um subgrupo K de G é um **subconjugado** de H, se existir $g \in G$ tal que gKg^{-1} é um subgrupo de H. Uma órbita do tipo H é chamada um **tipo de isotropia** de X se H aparece como um subgrupo de isotropia de algum ponto $x \in X$. Note que se $K \in (H)$, então $K = gHg^{-1}$, para algum $g \in G$ e assim, K aparece como o subgrupo de isotropia de $gx \in X$. Isto ocorre pois $G_{gx} = gG_xg^{-1}$, para todo $x \in X$ e $g \in G$ (vide [Br], p.35).

Para cada subgrupo H de G,

(1) $X_H = \{x \in X \mid G_x = H\}$ é o conjunto dos pontos de isotropia H.

(2) $X_{(H)} = GX_H = \{x \in X \mid (G_x) = (H)\}$.

(3) $X^H = \{x \in X \mid hx = x, \forall\, h \in H\} = \{x \in X \mid H \subset G_x\}$ é chamado o **conjunto dos pontos fixos por H**.

(4) $X^{(H)} = GX^H = \{x \in X^K \mid K \in (H)\}$.

A demonstração do teorema a seguir pode ser encontrada em ([Ka], Teorema 1.46, p.31).

Teorema 1.1.3. *Se X é um G-espaço Hausdorff, então X^H é fechado em X para qualquer $H \subset G$.*

Se H_i é subconjugado a H_j escrevemos $(H_i) \leq (H_j)$. Suponha que X tenha um conjunto finito de tipos de isotropias $\{(H_i)\}_{i=1}^k$. Podemos definir uma ordenação admissível em $\{(H_i)\}_{i=1}^k$ tal que $(H_j) \leq (H_i)$ implica $i \leq j$ (vide [Ka], Lema 1.80, p.51). Existe, então, uma filtração associada $X_1 \subset X_2 \subset ... \subset X_k = X$ de G-espaços X_i, onde $X_1 = X_{(H_1)}$, $X_i = \{x \in X \mid (G_x) = (H_j) \text{ para algum } j \leq i\}$, além disso, temos a seguinte igualdade $X_{(H_i)} = X_i - X_{i-1}$.

1.2 G-Espaço Induzido

Sejam G um grupo topológico e H um subgrupo de G. Dado um H-espaço X, podemos construir um G-espaço associado a X como segue.

Construção. Como X é um H-espaço, defina uma H-ação em $G \times X$ por $(h, (g, x)) \mapsto (gh^{-1}, hx)$. O espaço de órbitas desta H-ação é denotado por $G \times_H X$. A H-órbita de (g, x) será denotada por $[g, x]$. Defina a G-ação

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times_H X & \longrightarrow & G \times_H X \\ (g', [g, x]) & \longmapsto & [g'g, x] \end{array}$$

A G-ação em $G \times_H X$ definida acima é chamada **G-ação induzida** e $G \times_H X$ é chamado de **G-espaço induzido**.

O próximo resultado pode ser encontrado em ([Ka], Lema 1.93, p.60).

Lema 1.2.1. *Sejam G um grupo compacto e X um T_1, G-espaço. Se X possui um único tipo de isotropia (H), então $G_x = H$ para todo $x \in X^H$. Ou seja, $X_H = X^H$.*

Corolário 1.2.2. *Nas condições do lema anterior, WH atua livremente em X^H.*

O teorema a seguir pode ser encontrado em ([Br], p.89). Daremos uma idéia da demonstração do corolário (1.2.6), pois a extensão de uma WH-aplicação para uma G-aplicação será usada na proposição (3.2.4) do capítulo 3.

Teorema 1.2.3. *Sejam G um grupo compacto e X um G-espaço Hausdorff. Se X tem um único tipo de isotropia (H), então a aplicação $G \times_{NH} X^H \to X$, dada por $[g, x] \mapsto gx$, é um G-homeomorfismo.*

Corolário 1.2.4. *Nas condições do teorema anterior, a inclusão $X^H \subset X$ induz um homeomorfismo $X^H/N \to X/G$.*

Corolário 1.2.5. *Nas condições do teorema (1.2.3), a aplicação $(G/H) \times_{WH} X^H \to X$, definida por $[gH, x] \mapsto gx$, é um G-homeomorfismo.*

Corolário 1.2.6. *Com as hipóteses de (1.2.3), seja Y um G-espaço. Existe uma correspondência entre G-aplicações $X \to Y$ e WH-aplicações $X^H \to Y^H$.*

Demonstração. Seja $f : X^H \to Y^H$ uma WH-aplicação. Defina $\psi : (G/H) \times_{WH} X^H \to (G/H) \times_{WH} Y^H$ por $[gH, x] \mapsto [gH, f(x)]$. Pelo corolário (1.2.5), as aplicações $\xi : X \to (G/H) \times_{WH} X^H$ e $\rho : (G/H) \times_{WH} Y^H \to Y$ são G-homeomorfismos. Agora, defina $f' : X \to Y$ como a composição $\rho\psi\xi$. Então, para $x \in X^H$, $f'(gx) = gf(x)$ tal que $f'|X^H = f$. $\square$

1.3 G-Fibração

Agora, vejamos a definição de G-homotopia. Dizemos que as G-aplicações $f_0, f_1 : X \to Y$ são **G-homotópicas** se existe uma G-aplicação, chamada **G-homotopia de** f_0 **a** f_1, $F : X \times I \to Y$ tal que $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$ e $gF(x, t) = F(gx, t)$, para todo $x \in X$ e $t \in I$. A G-ação em $I = [0, 1]$ é trivial.

Seja $p : E \to B$ uma G-aplicação. Dizemos que p possui a **G-Propriedade do Levantamento de Homotopia** (G-PLH) se, dado um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[d, mapsto] & Z \times \{0\} \arrow[r, "k"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
(z,0) & Z \times I \arrow[r, "F"'] & B
\end{tikzcd}$$

de G-aplicações, existe uma G-aplicação $\bar{F} : Z \times I \to E$ tal que $p\bar{F} = F$ e $\bar{F}i_0 = k$. Uma **G-fibração** é uma G-aplicação $p : E \to B$ satisfazendo a G-PLH para todo G-espaço Z.

1.4 Teoria de Nielsen de Raízes

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação entre espaços topológicos e seja $a \in Y$ um ponto arbitrário. Uma **raiz** da equação $f(x) = a$ é um ponto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = a$.

Definição 1.4.1. *Duas raízes x_0 e x_1 de f em a são **Nielsen equivalentes**, $x_0 \sim x_1$, se existe um caminho $c : I \to X$ de x_0 para x_1 tal que $fc \simeq \bar{a}$* rel$\{0, 1\}$, onde $\bar{a}$ denota o caminho constante em a.

Esta relação é de equivalência e separa o conjunto das raízes em subconjuntos disjuntos, chamados **classes de Nielsen de raízes** de f em a. O próximo resultado é demonstrado em ([K], Teorema 3.4, p.126) e em ([B3], Corolário 3.6, p.380).

Lema 1.4.2. *Seja $f : X \to Y$ e $a \in Y$. Se X é compacto então existe apenas um número finito de classes de raízes. Além disso, toda classe de raízes é compacta.*

Agora, seja $\{f_t : X \to Y\}$ uma homotopia começando em f. A próxima definição relaciona as raízes de $f = f_0$ com as raízes de f_1. Dizemos que uma raiz x_0 de f em a está $\{f_t\}$**-relacionada** com a raiz x_1 de f_1 em a, denotada por $x_0\{f_t\}x_1$, se existe um caminho c em X de x_0 para x_1 tal que o laço $\{f_t \circ c(t)\}$ é homotópico, com extremos fixos, ao caminho constante em a. Logo, se $x_0, x_1 \in f^{-1}(a)$ então $x_0 \sim x_1$ se, e somente se, x_0 está relacionado a x_1 pela homotopia constante em f. Pode-se mostrar (vide [K], Teorema 4.2, p.128) que se $\{f_t\}$ é uma homotopia começando em f e se uma raiz em um classe de raízes α de f está $\{f_t\}$-relacionada a uma raiz da classe α_1 de f_1, então qualquer raiz em α está $\{f_t\}$-relacionada à uma raiz de α_1. Em outras palavras, a relação $x_0\{f_t\}x_1$ induz uma correspondência de α para α_1 sob $\{f_t\}$, que é denotada por $\alpha\{f_t\}\alpha_1$.

Definição 1.4.3. *Se uma classe de raízes α de f corresponde a uma classe de raízes α_1 de f_1, ou seja $\alpha\{f_t\}\alpha_1$, para toda homotopia $\{f_t\}$ começando em f, então α é chamada* ***essencial****.*

Em outras palavras, uma classe de raízes é **inessencial** se ela "desaparece" por alguma homotopia de f. O número de classes de raízes essenciais é chamado **número de Nielsen de raízes** de f em a e será denotado por $N(f, a)$.

Se Y é uma variedade, então o número de Nielsen de raízes $N(f, a)$ independe do ponto $a \in Y$, isto é, $N(f, a) = N(f, b)$ para todo $a, b \in Y$. (Ver [B3], Corolário 2.22, p.388).

O próximo resultado pode ser encontrado em ([K], Teorema 4.4, p.129).

Lema 1.4.4. *O número de Nielsen de raízes é um invariante homotópico, isto é, se f e g são aplicações homotópicas, então $N(f, a) = N(g, a)$.*

Note que $N(f, a) \leq MR[f, a]$, onde $MR[f, a] = \min\{\#\mathrm{g}^{-1}(\mathrm{a}) \mid \mathrm{g} \in [\, f\,]\}$. Aqui, $[\ ]$ significa classe de homotopia e $\#g^{-1}(a)$ denota o número de elementos de $g^{-1}(a)$. Observe ainda que, pelo lema (1.4.2), segue que $0 \leq N(f, a) < \infty$.

Agora, veremos uma interpretação de Nielsen equivalência e $\{f_t\}$-relação usando espaços de revestimento.

A aplicação f induz um homomorfismo $f_\# : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ de grupos fundamentais. Como a imagem de $f_\#$ é um subgrupo de $\pi_1(Y)$, existe uma aplicação de revestimento $\eta : \widehat{Y} \to Y$ tal que $\eta_\# \pi_1(\widehat{Y}) = f_\# \pi_1(X)$. Logo, podemos levantar f através de η para $\hat{f} : X \to \widehat{Y}$ fazendo o seguinte diagrama comutar.

$$\begin{tikzcd} & \widehat{Y} \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[ur, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

A aplicação $\hat{f}$ será chamada **levantamento de Hopf** de f e η é um **revestimento de Hopf** para f. Note que se $\eta : \widehat{Y} \to Y$ é um revestimento de Hopf para f, então η também é um revestimento de Hopf para qualquer aplicação homotópica a f.

O próximo teorema pode ser encontrado em ([B2], Lema 1 e Lema 2) e em ([B3], Teorema 3.4, p.379).

Teorema 1.4.5. *Sejam $f : X \to Y$ uma aplicação, $a \in Y$ um ponto arbitrário, $\eta : \widehat{Y} \to Y$ um revestimento de Hopf para f e $\hat{f} : X \to \widehat{Y}$ levantamento de Hopf de f por η. Suponha $\{f_t : X \to Y\}$ uma homotopia começando em f e seja $\{\hat{f}_t : X \to \widehat{Y}\}$ seu levantamento através de η começando em $\hat{f}$. Então*

(1) *As raízes x_0, $x_1 \in f^{-1}(a)$ são Nielsen equivalentes se, e somente se, $\hat{f}(x_0) = \hat{f}(x_1)$.*

(2) *Uma raiz $x_0 \in f^{-1}(a)$ está $\{f_t\}$-relacionada a uma raiz x_1 de f_1 em a se, e somente se, $\hat{f}(x_0) = \hat{f}_1(x_1)$.*

O teorema acima diz que, para cada $\hat{y} \in \hat{\eta}^{-1}(a)$, o conjunto $\hat{f}^{-1}(\hat{y})$ é uma classe de Nielsen de raízes, se for não-vazio. Além disso, a classe de raízes $\hat{f}^{-1}(\hat{y})$ é essencial se, e somente se, $\hat{f}_1^{-1}(\hat{y}) \neq \emptyset$ para toda aplicação $\hat{f}_1 : X \to \widehat{Y}$ homotópica a $\hat{f}$.

A seguir, veremos a definição do número de Reidemeister de raízes e que este número constitui um limitante superior para o número de Nielsen de raízes.

No teorema (1.4.5), vimos que o conjunto das classes de raízes está em correspondência com um subconjunto de $\eta^{-1}(a)$ e, portanto, está em correspondência com um subconjunto de $\eta^{-1}(y)$ para qualquer $y \in Y$. Pode-se mostrar, usando a teoria de espaços de revestimento, que para qualquer $x \in X$, o grupo $\pi_1(Y, f(x))$ atua transitivamente na fibra de $f(x)$ e o grupo de isotropia do ponto $\hat{f}(x) \in \widehat{Y}$ é $\eta_{\#}\pi_1(\widehat{Y}, \hat{f}(x))$. Então a cardinalidade de $\eta^{-1}(f(x))$ é o índice do subgrupo $\eta_{\#}\pi_1(\widehat{Y}, \hat{f}(x))$ em $\pi_1(Y, f(x))$.

Como η é um revestimento de Hopf para f, então $\eta_{\#}\pi_1(\widehat{Y}, \hat{f}(x)) = f_{\#}\pi_1(X, x)$, e portanto, o conjunto das classes de Nielsen de raízes está em correspondência com um subconjunto do conjunto de classes laterais $\pi_1(Y, f(x))/f_{\#}\pi_1(X, x)$. O número destas classes laterais é, portanto, um limitante superior para o número de classes de raízes, e conseqüentemente, é um limitante superior para $N(f, a)$, o número de classes de raízes essenciais.

A discussão acima motiva a seguinte definição (vide [B1]).

Definição 1.4.6. *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação e seja $a \in Y$. O **número de Reidemeister de raízes** de f em a é definido por $R(f, a) := [\pi_1(Y) : f_{\#}\pi_1(X)] = \#\eta^{-1}(a)$.*

O próximo teorema é uma ferramenta importante para o cálculo do número de Nielsen de raízes. (Ver [B1] ou ([B3], p.388)).

Teorema 1.4.7. *Suponha $f : X \to Y$ uma aplicação, X um espaço compacto, Y uma variedade e $a \in Y$. Então $N(f, a) = 0$ ou $N(f, a) = R(f, a)$. Conseqüentemente, se $R(f, a) = \infty$ então $N(f, a) = 0$.*

Agora, considere uma classe de raízes α de f em a. O **índice de raiz** de α com respeito a f é o homomorfismo em homologia singular $\omega(f, \alpha) = f_* \circ e_*^{-1} \circ i_* : H_*(X) \to H_*(Y, Y - a)$ induzido por

$$X \overset{i}{\hookrightarrow} (X, X - \alpha) \overset{e}{\hookleftarrow} (N, N - \alpha) \xrightarrow{f} (Y, Y - a)$$

onde N é uma vizinhança fechada de α que não contém outras raízes de f, exceto as de α. A aplicação e é uma excisão e $H_*(X)$ denota $\bigoplus_{k=0} H_k(X)$. Deste modo, R. Brooks provou o seguinte resultado (vide [B1], Corolário 2, Teorema 2).

Teorema 1.4.8. *Sejam X e Y variedades compactas conexas (não necessariamente de mesma dimensão) com Y orientável e seja $a \in Y$. Para quaisquer classes de raízes α e β de f em a, temos então que $\omega(f,\alpha) = \omega(f,\beta)$. Além disso, se f possui uma classe de raízes essencial, então todas as classes de raízes são essenciais e $N(f,a) = R(f,a)$.*

Observação 1.4.9. A recíproca deste teorema não é verdadeira. A aplicação de Hopf $p : S^3 \to S^2$ possui uma única classe de raízes, a qual é essencial com índice zero. De fato, como S^2 é simplesmente conexa, então todas as raízes de p estão na mesma classe de raízes α, cujo índice $\omega(p,\alpha)$ é o homomorfismo nulo. A demonstração de que p não é homotópica a uma aplicação constante pode ser encontrada em ([Hu], Proposição 5.1, p.67).

Capítulo 2

Teoria de Nielsen Equivariante

Neste capítulo, descrevemos parte da teoria de Nielsen de raízes para aplicações equivariantes desenvolvida por P. Wong, em seu importante artigo de 1999 [W4]. Em todo este capítulo iremos considerar X e Y G-espaços, com as propriedades descritas no capítulo 1. Sejam $f : X \to Y$ uma G-aplicação, $a \in Y^G = \{y \in Y \mid gy = y, \forall\, g \in G\} \neq \emptyset$ e $f^{-1}(a) \neq \emptyset$.

Após uma breve exposição sobre G-classes de raízes na seção 2.1, o conceito de G-número de Nielsen de raízes, $N_G(f, a)$, é definido na seção 2.2, onde também serão apresentados alguns exemplos dos números de Nielsen $N(f, a)$ e $N_G(f, a)$. Na seção 2.3, definimos uma G-ação no espaço de revestimento de Hopf $\widehat{Y}$ de Y, o que tornará o revestimento de Hopf $\eta : \widehat{Y} \to Y$ para f e o levantamento $\hat{f} : X \to \widehat{Y}$ (e, portanto, todos os levantamentos) de f aplicações equivariantes.

Uma versão equivariante do teorema (1.4.5) será demonstrada na seção 2.3. A seção 2.5 apresenta uma definição do G-número de Reidemeister de raízes, abordando o conceito de revestimento de Hopf. Tal definição difere da original, dada por P. Wong em [W4], onde foi usado espaços de revestimento universais de X e de Y.

2.1 G-Classes de Nielsen de raízes

No que faremos a seguir, vamos utilizar o conceito de G-classe de Nielsen de raízes apresentado em [W4]. Primeiramente, observemos que se x_0 é uma raiz da G-aplicação f em $a \in Y^G \neq \emptyset$, então os elementos da órbita de x_0, $G(x_0)$, também são raízes de f. De fato, $f(gx_0) = gf(x_0) = ga = a$, para qualquer $g \in G$.

Definição 2.1.1. *Dizemos que duas raízes x_0 e x_1 de f em a são* ***G-Nielsen equivalentes*** *se*

(*i*) *$x_0 = gx_1$, para algum $g \in G$ ou*

(*ii*) *Existe um caminho $c : I \to X$ de x_0 para gx_1, para algum $g \in G$, tal que $fc \simeq \bar{a}$ $\text{rel}\{0,1\}$, onde $\bar{a}$ é o caminho constante em a.*

Lema 2.1.2. *A G-Nielsen relação definida acima é uma relação de equivalência e será denotada por $x_0 \sim_G x_1$. Logo $f^{-1}(a)$ é separado em subconjuntos disjuntos.*

Demonstração. Sejam $x, y, z \in f^{-1}(a)$.

(1) (Reflexiva) $x \sim_G x$, $\forall\, x \in f^{-1}(a)$, pois $x = ex$.

(2) (Simétrica) Suponha que $x \sim_G y$. Então temos dois casos a considerar.

   (*i*) $x = gy$ para algum $g \in G$. Então $y = g^{-1}x$.

   (*ii*) Existe um caminho $c : I \to X$ de x a gy, para algum $g \in G$, tal que $fc \simeq \bar{a}$ $\text{rel}\{0,1\}$. Considere o caminho $d = g^{-1}c^{-1} : I \to X$, que é dado por $d(t) = g^{-1}c(1-t)$. Logo, $d(0) = g^{-1}c(1) = (g^{-1}g)y = y$, $d(1) = g^{-1}c(0) = g^{-1}x$ e $f(d(t)) = f(g^{-1}c(1-t)) = g^{-1}f(c(1-t)) \simeq g^{-1}\bar{a}(1-t) = g^{-1}a = a$.

   Portanto, em ambos os casos, temos que $y \sim_G x$.

(3) (Transitiva) Suponha que $x \sim_G y$ e $y \sim_G z$. Temos quatro possibilidades.

(i) Se $x = g_1 y$ e se $y = g_2 z$, para alguns $g_1, g_2 \in G$, então $x = (g_1 g_2)z$. Logo, $x \sim_G z$.

(ii) Se $x = g_1 y$, para algum $g_1 \in G$, e se existe um caminho $c : I \to X$ de y para $g_2 z$, para algum $g_2 \in G$, tal que $fc \simeq \bar{a}$ rel$\{0, 1\}$, então considere o caminho $d(t) = g_1 c(t)$ em X. Note que d começa em x, termina em $g_1 g_2 z$ e $fd \simeq \bar{a}$ rel$\{0, 1\}$. Assim, $x \sim_G z$.

(iii) Se existe um caminho $c : I \to X$ de x para $g_1 y$, para algum $g_1 \in G$, tal que $fc \simeq \bar{a}$ rel$\{0, 1\}$ e se $y = g_2 z$, para algum $g_2 \in G$, então o próprio caminho c de x a $(g_1 g_2)z$ satisfaz a definição de G-Nielsen equivalência. Logo, $x \sim_G z$.

(iv) Se existirem caminhos $c, d : I \to X$ com $c(0) = x$, $c(1) = g_1 y$, $d(0) = y$ e $d(1) = g_2 z$, para alguns $g_1, g_2 \in G$, tais que $fc \simeq \bar{a}$ rel$\{0, 1\}$ e $fd \simeq \bar{a}$ rel$\{0, 1\}$, então o caminho $h = c * g_1 d : I \to X$ dado por

$$h(t) = (c * g_1 d)(t) = \begin{cases} c(2t), \ 0 \leq t \leq 1/2 \\ g_1 d(2t - 1), \ 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

satisfaz $h(0) = x, h(1) = g_1 g_2 z$ e $fh \simeq \bar{a}$ rel$\{0, 1\}$. Portanto, $x \sim_G z$. □

As classes de equivalência dadas pelo lema acima, em $f^{-1}(a)$, são chamadas **G-classes de Nielsen de raízes** de f em a.

Segue da definição (2.1.1) que, se α é uma classe de raízes de f (esquecendo a G-equivariância), então existe uma única G-classe de raízes $\mathcal{R}$ tal que $\alpha \subset \mathcal{R}$. Se X é compacto, então pelo lema (1.4.2), o número de classes de raízes é finito. Logo, existe somente um número finito de G-classes de raízes. Portanto, $f^{-1}(a)$ é particionado em G-classes de raízes, disjuntas duas a duas, $\mathcal{R}_1, ..., \mathcal{R}_m$, onde cada G-classes de raízes é uma união disjunta de classes de raízes. Por outro lado, $\mathcal{R}_j$ é uma união disjunta de G-órbitas de raízes, para cada $j = 1, ..., m$.

2.2 G-Número de Nielsen de Raízes

O objetivo desta seção é definir, conforme [W4], o G-número de Nielsen de raízes e mostrar sua invariância por G-homotopias.

Seja $\{f_t : X \to Y\}$ uma G-homotopia começando em f.

Definição 2.2.1. *Uma raiz x_0 de f em a está $\{f_t\}_G$-**relacionada** a uma raiz x_1 de f_1 em a, $x_0\{f_t\}_G x_1$, se existe um caminho $c : I \to X$ de x_0 para gx_1, para algum $g \in G$ tal que o laço $\{f_t \circ c(t)\}$ é homotópico, com extremos fixos, ao caminho constante em a, isto é, $\bar{a}$.*

Portanto, se $x_0\{f_t\}_G x_1$ então $x_0\{f_t\}gx_1$, para algum $g \in G$.

Assim como no caso não-equivariante, a $\{f_t\}_G$-relação, dada pela definição acima, induz uma correspondência entre as G-classes de raízes de $f = f_0$ e de f_1. Este fato será provado a seguir.

Lema 2.2.2. *Sejam $x_0 \in f^{-1}(a)$ e $x_1 \in {f_1}^{-1}(a)$ tais que $x_0\{f_t\}_G x_1$. Considere as G-classes de raízes $\mathcal{R}_0$ de f e $\mathcal{R}_1$ de f_1 contendo x_0 e x_1, respectivamente. Então*

(1) $x_0' \in \mathcal{R}_0 \Leftrightarrow x_0'\{f_t\}_G x_1$.

(2) $x_1' \in \mathcal{R}_1 \Leftrightarrow x_0\{f_t\}_G x_1'$.

Demonstração. Segue da definição (2.1.1) que existe uma única classe de raízes α_i em $\mathcal{R}_i$ tal que $x_i \in \alpha_i$, $i = 0, 1$. Como $x_0\{f_t\}_G x_1$ então existe um caminho $c : I \to X$ de x_0 para hx_1, para algum $h \in G$, tal que $\{f_t \circ c(t)\} \simeq \bar{a}$ rel$\{0, 1\}$, ou seja, $x_0\{f_t\}hx_1$.

(1) ($\Rightarrow$) Como x_0 e $x_0' \in \mathcal{R}_0$, temos duas possibilidades.

   (i) $x_0 = gx_0'$, para algum $g \in G$. Neste caso, considere o caminho $g^{-1}c : I \to X$ de $g^{-1}x_0 = x_0'$ para $(g^{-1}h)x_1$. Logo, $\{f_t \circ g^{-1}c(t)\} \simeq \bar{a}$ rel$\{0, 1\}$. Então $x_0'\{f_t\}_G x_1$.

(ii) Se existe um caminho $d : I \to X$ de x_0 para gx_0', para algum $g \in G$, tal que $f \circ d \simeq \bar{a}$ rel$\{0, 1\}$, então $gx_0' \in \alpha_0$. Como $x_0\{f_t\}hx_1$, então $gx_0'\{f_t\}hx_1$. Portanto $x_0'\{f_t\}_G x_1$.

(1) ($\Leftarrow$) Como $x_0'\{f_t\}_G x_1$, então $x_1\{{f_t}^{-1}\}gx_0'$, para algum $g \in G$. Por outro lado, $x_1\{{f_t}^{-1}\}h^{-1}x_0$, logo gx_0' e $h^{-1}x_0$ pertencem a mesma classe de raízes de f, ou seja , $gx_0' \sim h^{-1}x_0$. Mas gx_0', $x_0' \in G(x_0')$ e x_0, $h^{-1}x_0 \in G(x_0) \subset \mathcal{R}_0$. Portanto $x_0' \in \mathcal{R}_0$.

Analogamente, pode-se provar (2). $\square$

Vamos denotar por $\mathcal{R}_0\{f_t\}_G\mathcal{R}_1$ a correspondência entre as G-classes de raízes $\mathcal{R}_0$ e $\mathcal{R}_1$.

Definição 2.2.3. *Uma G-classe de raízes $\mathcal{R}$ de f é* ***essencial*** *se dada qualquer G-homotopia $\{f_t : X \to Y\}$ começando em f, $\mathcal{R}$ está $\{f_t\}_G$-relacionada a uma G-classe de raízes de f_1. Caso contrário, $\mathcal{R}$ é chamada* ***inessencial****.*

O **G-*número de Nielsen de raízes*** *de f em a é definido como sendo o número de G-classes de raízes essenciais e será denotado por $N_G(f, a)$.*

Se X é um espaço compacto, segue da definição (2.1.1) e do lema (1.4.2) que $0 \leq N_G(f, a) < \infty$.

Agora, observe que, $\#\{G\text{-classes de raízes}\} \leq \#\{\text{classes de raízes}\}$. Entretanto, esta desigualdade não é verdadeira se considerarmos G-classes de raízes essenciais e classes de raízes essenciais, conforme veremos no exemplo (2.2.4).

Exemplo 2.2.4. Vide [W3], Exemplo 7.1, p.41.

Considere $S^2 = S^3/S^1$ como um espaço de classes e seja $[e] \in S^2$ a classe do elemento identidade e no grupo de Lie compacto conexo S^3. Suponha $h = id : S^2 \to S^2$ a aplicação identidade e $f : S^3 \to S^2$ a aplicação dada por $f(z) = z^{-1}h(zS^1) = eS^1 = [e]$, ou seja, f é a aplicação constante em $[e]$.

Considere a S^1-ação livre $k \cdot z = zk^{-1}$ em S^3 e a S^1-ação (não-livre) $k * zS^1 = (kz)S^1$ em S^2.

Como f é uma aplicação constante e S^2 é um espaço simplesmente conexo, segue que S^3 é a única classe de raízes de f, a qual é inessencial. Logo $N(f, [e]) = 0$.

Agora, observe que, f é uma S^1-aplicação. Pelo Lema (1.2) de [W5], $\omega_{S^1}(f, S^3) = L(h)$, onde $\omega_{S^1}(f, S^3)$ é um número inteiro chamado índice de raiz equivariante da S^1-classe de raízes S^3, com respeito a f, o qual é definido em [W3]. De modo usual, $L(h)$ denota número de Lefschetz de h. Como $\omega_{S^1}(f, S^3) \neq 0$, pois $L(h) = 2$, então a S^1-classe de raízes S^3 é essencial. Portanto $N_{S^1}(f, [e]) = 1$. $\square$

Exemplo 2.2.5. Sejam $\mathbb{R}P^2$ o plano projetivo e $f : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ a aplicação identificação. Denote por $n = (0, 0, 1)$ e $s = (0, 0, -1)$ os pólos norte e sul, respectivamente, de S^2 e seja $a = \{n, s\} = f(\{n, s\}) \in \mathbb{R}P^2$. Então as únicas raízes de f em a são n e s.

Seja c um caminho em S^2 de n a s. Logo, fc é um laço em a, cuja classe de homotopia com extremos fixos é um gerador do grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}P^2, a) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Assim, n e s não são Nielsen equivalentes, ou seja, f possui exatamente duas classes de raízes, a saber, $\{n\}$ e $\{s\}$. Agora, seja N uma vizinhança fechada de n contida no hemisfério norte aberto de S^2 e seja $f' : (N, N - n) \to (f(N), f(N) - a)$ uma aplicação induzida por f. Considere as aplicações

$$S^2 \overset{i}{\hookrightarrow} (S^2, S^2 - n) \overset{e}{\hookleftarrow} (N, N - n) \overset{f'}{\to} (f(N), f(N) - a) \overset{e'}{\hookrightarrow} (\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^2 - a)$$

onde e, e' são excisões. Como f é uma aplicação de revestimento, f' é um homeomorfismo. Logo, e, e' e f' induzem isomorfismos em homologia (estamos considerando os coeficientes em $\mathbb{Z}$). Agora, note que, a inclusão i induz um isomorfismo na dimensão 2. Portanto o índice de raiz

$$\omega_2(f, \{n\}; \mathbb{Z}) = {e'}_2 \circ {f'}_2 \circ e_2^{-1} \circ i_2 : H_2(S^2; \mathbb{Z}) \to H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^2 - a; \mathbb{Z})$$

é um isomorfismo não-trivial. Assim, concluímos que a classe de raiz $\{n\}$ é essencial. Analogamente prova-se também que $\{s\}$ é essencial, e portanto, $N(f, a) = 2$.

Agora, considere a ação antípoda de $\mathbb{Z}_2$ em S^2 e a $\mathbb{Z}_2$-ação trivial em $\mathbb{R}P^2$. Então f é equivariante e o conjunto de pontos-fixos por $\mathbb{Z}_2$ é $(\mathbb{R}P^2)^{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{R}P^2$. Como as raízes n e s de f em a estão na mesma órbita, f possui uma única $\mathbb{Z}_2$-classe de raízes $\mathcal{R} = \{n\} \cup \{s\}$. Portanto, $\mathcal{R}$ é essencial, pois as classes de raízes $\{n\}$ e $\{s\}$ são essenciais; logo $N_{\mathbb{Z}_2}(f, a) = 1$. $\square$

O próximo lema mostra que se f e f' são G-aplicações G-homotópicas, então $N_G(f, a) = N_G(f', a)$.

Lema 2.2.6. *O G-número de Nielsen de raízes, $N_G(f, a)$, é um invariante por G-homotopias.*

Demonstração. Seja $\{f_t : X \to Y\}$ uma G-homotopia começando em f e seja $\mathcal{R}$ uma G-classe de raízes essencial de f. Então existe uma G-classe de raízes $\mathcal{R}_1$ de f_1 em a tal que $\mathcal{R}\{f_t\}_G\mathcal{R}_1$. Pelo lema (2.2.2), $\mathcal{R}_1$ é única. Mostremos que $\mathcal{R}_1$ é essencial, isto é, se $\{h_t\}$ é uma G-homotopia começando em f_1, deve existir uma G-classe de raízes $\mathcal{R}_2$ de h_1 tal que $\mathcal{R}_1\{h_t\}_G\mathcal{R}_2$.

Agora, vamos determinar $\mathcal{R}_2$ como segue. Como $\mathcal{R}$ é essencial, então existe uma G-classe de raízes $\mathcal{R}_2$ de h_1 tal que $\mathcal{R}(\{f_t\}\{h_t\})_G\mathcal{R}_2$. Como $\mathcal{R}_1\{{f_t}^{-1}\}_G\mathcal{R}$, segue que $\mathcal{R}_1({f_t}^{-1}\{f_t\}\{h_t\})_G\mathcal{R}_2$. Portanto, $\mathcal{R}_1\{h_t\}_G\mathcal{R}_2$. $\square$

Note que $N_G(f, a) \leq MR_G[f, a] = \min\{\#\mathrm{k}^{-1}(\mathrm{a}) \mid \mathrm{k} \in [\,f\,]\}$, onde k é tomada dentre todas as G-aplicações G-homotópicas a f.

Observação 2.2.7. Se $G = \{e\}$, então $N_G(f, a)$ se reduz ao número de Nielsen de raízes $N(f, a)$ de [B1].

2.3 Levantamento da G-ação em Y

Sejam $x_0 \in f^{-1}(a)$ e $\eta : \widehat{Y} \to Y$ uma aplicação de revestimento correspondendo ao subgrupo $f_{\#}\pi_1(X, x_0)$ em $\pi_1(Y, a)$. Seja $\hat{f} : X \to \widehat{Y}$ um levantamento de f através de

η, isto é, $f = \eta\hat{f}$. Denote por $\mathcal{D}(\eta) = \{\delta : \widehat{Y} \to \widehat{Y} \text{ homeomorfismo} \mid \eta\delta = \eta\}$ o grupo das transformações de revestimento de η.

Considere o grupo $\Gamma_G(\widehat{Y}) = \{\hat{g} \in \mathrm{Homeo}(\widehat{Y}) \mid \eta\hat{g} = g\eta$, para algum $g \in G\}$, onde g é visto como um homeomorfismo de Y induzido pela G-ação em Y.

$$\begin{tikzcd}
\widehat{Y} \arrow[r, "\hat{g}"] \arrow[d, "\eta"'] & \widehat{Y} \arrow[d, "\eta"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Assim obtemos a seguinte sequência exata

$$1 \to \mathcal{D}(\eta) \xhookrightarrow{i} \Gamma_G(\widehat{Y}) \xrightarrow{p} G \to 1 \tag{2.1}$$

onde i é a inclusão e $p(\hat{g}) = g$ é a projeção.

A seguir, veremos que f induz um homomorfismo de grupos $\varphi : G \to \Gamma_G(\widehat{Y})$. De fato, seja $x_0 \in X$. Então existe um único levantamento $\varphi(g)$ de g tal que $\varphi(g)\hat{f}(x_0) = \hat{f}(gx_0)$. Como $\hat{f}g$, $\varphi(g)\hat{f} : X \to \widehat{Y}$ são levantamentos da mesma aplicação $fg = gf : X \to Y$ e coincidem no ponto x_0, então pela unicidade da propriedade de levantamento, segue que $\hat{f}g = \varphi(g)\hat{f}$.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dd, "\hat{f}"] & & X \arrow[dl, "1_X"] \arrow[dd, "\hat{f}"] \\
X \arrow[rr, "g"] \arrow[dd, "f"'] & & X \arrow[dd, "f"] & \\
& \widehat{Y} \arrow[rr, dashed, "\varphi(g)"] \arrow[dl, "\eta"'] & & \widehat{Y} \arrow[dl, "\eta"] \\
Y \arrow[rr, "g"] & & Y &
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Observemos que a aplicação φ aqui definida poderia ser indexada por f, mas essa indexação não é suficiente, como veremos nas páginas 24 e 29. A notação ideal seria $\varphi_{(f,\eta,\hat{f})}$, mas optamos por denotar tal aplicação apenas por φ.

Lema 2.3.1. *A aplicação $\varphi : G \to \Gamma_G(\widehat{Y})$ é um homomorfismo de grupos.*

Demonstração. $\varphi(g_1g_2)\hat{f} = \hat{f}(g_1g_2) = (\hat{f}g_1)g_2 = (\varphi(g_1)\hat{f})g_2 = \varphi(g_1)(\hat{f}g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)\hat{f}$, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$. Como $\varphi(g_1g_2)$ e $\varphi(g_1)\varphi(g_2)$ são levantamentos de g_1g_2, então pelo discutido acima, $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$. $\square$

Note que $p\varphi(g) = g$, para todo $g \in G$, logo a sequência (2.1) cinde. Então φ é injetora e $\Gamma_G(\widehat{Y}) \simeq \mathcal{D}(\eta) \rtimes G$, isto é, $\Gamma_G(\widehat{Y})$ é o produto semi-direto de $\mathcal{D}(\eta)$ e G.

Vamos, agora, definir uma G-ação em $\widehat{Y}$ e provar que $\hat{f} : X \to \widehat{Y}$ e $\eta : \widehat{Y} \to Y$ são aplicações equivariantes.

Definição 2.3.2. *Para todo $g \in G$ e $\hat{y} \in \widehat{Y}$, defina uma G-ação em $\widehat{Y}$ por*

$$\begin{array}{ccc} G \times \widehat{Y} & \longrightarrow & \widehat{Y} \\ (g, \hat{y}) & \longmapsto & g \cdot \hat{y} = \varphi(g)(\hat{y}) \end{array}$$

Lema 2.3.3. *As aplicações $\hat{f} : X \to \widehat{Y}$ e $\eta : \widehat{Y} \to Y$ são equivariantes.*

Demonstração. Com efeito, para todo $g \in G$, $x \in X$ e $\hat{y} \in \widehat{Y}$, temos que $\hat{f}(gx) = \hat{f}g(x) = \varphi(g)\hat{f}(x) = g \cdot \hat{f}(x)$ e $\eta(g \cdot \hat{y}) = \eta(\varphi(g)\hat{y}) = g\eta(\hat{y})$. $\square$

Para o que faremos em seguida, precisaremos mostrar que η é uma G-fibração. Para isso, considere o seguinte diagrama de G-espaços e G-aplicações.

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[ddd] & Z \times \{0\} \arrow[r, "k"] \arrow[ddd, "i_0"'] & \widehat{Y} \arrow[ddd, "\eta"] \\
& & \\
& & \\
(z,0) & Z \times I \arrow[r, "F"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Como η é uma fibração, pois é uma aplicação de revestimento, existe uma homotopia $\bar{F} : Z \times I \to \widehat{Y}$ de k tal que $\eta\bar{F} = F$. Note que $g\bar{F}, \bar{F}g : Z \times I \to \widehat{Y}$ são levantamentos da mesma aplicação $gF = Fg$ e coincidem em todos os pontos de $Z \times \{0\}$. Logo, $g\bar{F} = \bar{F}g$, ou seja, $\bar{F}$ é uma G-aplicação e, portanto η é uma G-fibração.

Teorema 2.3.4. *Se $f' : X \to Y$ é G-homotópica a f, então estas aplicações induzem a mesma G-ação no espaço de revestimento de Hopf $\widehat{Y}$ de Y.*

Demonstração. Primeiramente, fixe em $\widehat{Y}$ a G-ação dada pela aplicação φ (induzida por f, η e $\hat{f}$) como na definição (2.3.2). Seja $\hat{f}' : X \to \widehat{Y}$ um levantamento de f' através de $\eta : \widehat{Y} \to Y$. Como η é uma G-fibração, então os levantamentos $\hat{f}'$ e $\hat{f}$ de f' e f, respectivamente, são G-aplicações G-homotópicas.

Observe que, f' também induz um homomorfismo de grupos $\varphi' : G \to \Gamma_G(\widehat{Y})$ tal que, para cada $g \in G$, $\varphi'(g)$ é o único levantamento de g tal que $\hat{f}'g = \varphi'(g)\hat{f}'$ como levantamento de $f'g = gf'$ através de η. Logo, segue da definição (2.3.2), que $g * \hat{y} = \varphi'(g)\hat{y}$ também é uma G-ação em $\widehat{Y}$. Além disso, pelo lema (2.3.3), $\hat{f}'$ e η são G-aplicações com esta nova ação $*$ em $\widehat{Y}$.

Note que, a aplicação $\hat{f}' : X \to \widehat{Y}$ é equivariante com ambas as G-ações $\cdot$ e $*$ em $\widehat{Y}$, induzidas, respectivamente, por φ e φ'. Então $g * \hat{f}'(x) = \varphi'(g)\hat{f}'(x) = \hat{f}'g(x) = g \cdot \hat{f}'(x) = \varphi(g)\hat{f}'(x)$, para todo $g \in G$, $x \in X$. Logo, $\varphi'(g)\hat{f}'(x) = \varphi(g)\hat{f}'(x)$, para todo $g \in G$, $x \in X$. Então, para todo $g \in G$, temos que $\varphi'(g) = \varphi(g)$, pois as aplicações $\varphi'(g)$, $\varphi(g) : \widehat{Y} \to \widehat{Y}$ são levantamentos da mesma aplicação $g : Y \to Y$ e coincidem em todos os pontos de $\hat{f}'(X)$. Portanto, as G-ações $*$ e $\cdot$, induzidas por φ' e φ, respectivamente, coincidem. Ou seja, $\varphi' = \varphi : G \to \Gamma_G(\widehat{Y})$. □

Mais especificamente, o teorema acima mostra que todas as aplicações na classe de G-homotopia da f induzem a mesma G-ação no espaço de revestimento de Hopf $\widehat{Y}$ de Y.

O próximo passo é estabelecer uma versão equivariante do teorema (1.4.5) e, assim, caracterizar as G-classes de raízes de f em termos de um levantamento de Hopf desta aplicação.

Proposição 2.3.5. *Sejam $f : X \to Y$ uma G-aplicação e $a \in Y^G \neq \emptyset$. Suponha $\{f_t : X \to Y\}$ uma G-homotopia começando em f e seja $\{\hat{f}_t : X \to \widehat{Y}\}$ um levantamento de $\{f_t\}$ através de $\eta : \widehat{Y} \to Y$. Então*

(1) *As raízes x_0 e x_1 de f em a são G-Nielsen equivalentes se, e somente se, $\hat{f}(x_0) = g \cdot \hat{f}(x_1)$, para algum $g \in G$.*

(2) *Uma raiz $x_0 \in f^{-1}(a)$ está $\{f_t\}_G$-relacionada a uma raiz x_1 de f_1 em a se, e somente se, $\hat{f}(x_0) = g \cdot \hat{f}_1(x_1)$, para algum $g \in G$.*

Demonstração. (1)($\Rightarrow$) Primeiro, suponha que $x_0 \sim_G x_1$. Então existem duas possibilidades.

(i) Se $x_0 = gx_1$, para algum $g \in G$, então $\hat{f}(x_0) = \hat{f}(gx_1) = \varphi(g)\hat{f}(x_1) = g \cdot \hat{f}(x_1)$.

(ii) Se existe um caminho $c : I \to X$ de x_0 para gx_1, para algum $g \in G$ tal que $fc \simeq \bar{a}$ rel$\{0,1\}$, então $x_0 \sim gx_1$. Logo, pelo teorema (1.4.5), $\hat{f}(x_0) = \hat{f}(gx_1)$; conseqüentemente, temos que $\hat{f}(x_0) = g \cdot \hat{f}(x_1)$.

($\Leftarrow$) Agora, suponha que $\hat{f}(x_0) = g \cdot \hat{f}(x_1)$, para algum $g \in G$. Então $\hat{f}(x_0) = \varphi(g)\hat{f}(x_1) = \hat{f}(gx_1)$. Logo, segue do teorema (1.4.5) que x_0 e gx_1 pertencem a mesma classe de raízes de f e, portanto, estão na mesma G-classe de raízes.

(2)($\Rightarrow$) Seja $x_0\{f_t\}_G x_1$. Então existe um caminho $c : I \to X$ de x_0 para gx_1, para algum $g \in G$ tal que $\{f_t \circ c(t)\} \simeq \bar{a}$ rel$\{0,1\}$. Logo, $x_0\{f_t\}gx_1$ e, pelo teorema (1.4.5), temos então que $\hat{f}(x_0) = \hat{f}_1(gx_1) = g \cdot \hat{f}_1(x_1)$.

($\Leftarrow$) Se $\hat{f}(x_0) = g \cdot \hat{f}_1(x_1)$, para algum $g \in G$, então $\hat{f}(x_0) = \hat{f}_1(gx_1)$, pois $\hat{f}_1$ é equivariante. Portanto, pelo teorema (1.4.5), segue que $x_0\{f_t\}gx_1$, o que implica que $x_0\{f_t\}_G x_1$. □

Portanto, as G-classes de raízes de Nielsen são os conjuntos não-vazios da forma $\hat{f}^{-1}(G(\hat{y}))$, para cada $\hat{y} \in \eta^{-1}(a)$.

Corolário 2.3.6. *Nas mesmas hipóteses da proposição (2.3.5), sejam $x_0 \in f^{-1}(a)$ e $\mathcal{R}$ a G-classe de raízes contendo x_0. Então o número de classes de raízes contidas em $\mathcal{R}$ é exatamente a cardinalidade da órbita $G(\hat{f}(x_0))$.*

Demonstração. Segue imediatamente dos resultados (1.4.5) e (2.3.5). □

Corolário 2.3.7. *Nas mesmas hipóteses da proposição (2.3.5), para qualquer* $\hat{y} \in \eta^{-1}(a)$*, uma* G*-classe de raízes* $\hat{f}^{-1}(G(\hat{y}))$ *é essencial se, e somente se,* $\hat{f}_1^{-1}(G(\hat{y})) \neq \emptyset$ *para qualquer* G*-homotopia* $\{\hat{f}_t\}$ *começando em* $\hat{f}$*.* □

Já vimos que $N_G(f, a)$ é um invariante por G-homotopias em (2.2.6). No entanto, este resultado também pode ser obtido do corolário (2.3.7) acima.

Tendo em vista a definição (2.3.2) da G-ação em $\widehat{Y}$, é natural surgir a seguinte pergunta: fixado um levantamento $\hat{f} : X \to \widehat{Y}$ de f, qual ação em $\widehat{Y}$ torna uma transformação de revestimento $\delta : \widehat{Y} \to \widehat{Y}$ equivariante?

Para responder a essa pergunta, seja $\delta \in \mathcal{D}(\eta)$. Então $\delta\hat{f} : X \to \widehat{Y}$ é um levantamento de $f : X \to Y$ através de $\eta : \widehat{Y} \to Y$. Logo, f induz um homomorfismo de grupos $\varphi_\delta : G \to \Gamma_G(\widehat{Y})$ tal que para cada $g \in G$, $\varphi_\delta(g)$ é o único levantamento de g satisfazendo $\varphi_\delta(g)\delta\hat{f} = \delta\hat{f}g$ como levantamento de $gf = fg$ através de η.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dd, "\delta\hat{f}"' near end] & & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dd, "\delta\hat{f}"] \\
X \arrow[rr, "g"] \arrow[dd, "f"'] & & X \arrow[dd, "f" near start] & \\
& \widehat{Y} \arrow[rr, dashed, "\varphi_\delta(g)"] \arrow[dl, "\eta"'] & & \widehat{Y} \arrow[dl, "\eta"] \\
Y \arrow[rr, "g"] & & Y &
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Defina a seguinte G-ação em $\widehat{Y}$: $(g, \hat{y}) \longmapsto g \circ_\delta \hat{y} = \varphi_\delta(g)(\hat{y})$.
Como $\varphi_\delta(g)\delta\hat{f} \overset{(2.3)}{=} \delta\hat{f}g$, então $\delta^{-1}\varphi_\delta(g)\delta\hat{f} = \hat{f}g \overset{(2.2)}{=} \varphi(g)\hat{f}$, e assim, $\delta^{-1}\varphi_\delta(g)\delta = \varphi(g)$. Ou seja, as ações $\cdot$ e $\circ_\delta$, dadas por φ e φ_δ respectivamente, são conjugadas por δ. Logo, para todo $g \in G$ e $\hat{y} \in \widehat{Y}$, temos que $\delta(g \cdot (\hat{y})) = \delta\varphi(g)(\hat{y}) = \varphi_\delta(g)\delta(\hat{y}) = g \circ_\delta \delta(\hat{y})$. Portanto, com a notação utilizada acima, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 2.3.8. *As transformações de revestimento* $\delta : (\widehat{Y}, \cdot) \to (\widehat{Y}, \circ_\delta)$ *são equivariantes.*

2.4 Relação entre classes e G-classes de raízes

Retomando o discutido na seção 2.1, descreveremos com mais detalhes as G-classes de raízes. A exposição desta seção baseia-se na seção 2.2 de [Fa], onde foram estudadas G-classes de coincidências e classes de coincidências locais.

Proposição 2.4.1. *Seja α uma classe de raízes contida em uma G-classe de raízes $\mathcal{R}$ e seja $x_0 \in \alpha$. Se β é outra classe de raízes em $\mathcal{R}$, disjunta de α, então $\beta = g\alpha$, para algum $g \in G$.*

Demonstração. Para todo $g \in G$, mostremos que $g\alpha$ é uma classe de raízes contida em $\mathcal{R}$. De fato, Sejam y_0, $y_1 \in g\alpha$. Então existem x_0, $x_1 \in \alpha$ tais que $y_0 = gx_0$ e $y_1 = gx_1$. Como x_0, $x_1 \in \alpha$, existe um caminho $c : I \to X$ de x_0 para x_1 satisfazendo $fc \simeq \bar{a}$ rel$\{0,1\}$. Considere o caminho $d = gc : I \to X$ de $gx_0 = y_0$ para $gx_1 = y_1$. Logo, $fd \simeq \bar{a}$ rel$\{0,1\}$. Assim, $g\alpha$ está contido em uma classe de raízes de f, digamos γ. Seja, agora, $z \in \gamma$. Mostremos que $z \in g\alpha$. Como $g\alpha \subset \gamma$, existem $x \in g\alpha$ e um caminho $k : I \to X$ de x para z tal que $fk \simeq \bar{a}$ rel$\{0,1\}$. Como $x \in g\alpha$, então existe $y \in \alpha$ tal que $x = gy$. Considere o caminho $g^{-1}k : I \to X$. Logo, $g^{-1}k(0) = g^{-1}x = y \in \alpha$, $g^{-1}k(1) = g^{-1}z$ e $fg^{-1}k \simeq \bar{a}$ rel$\{0,1\}$. Portanto, $g^{-1}z \in \alpha$, ou seja, $z \in g\alpha$. Então $g\alpha$ é uma classe de raízes. Agora, note que, $x_0 \in \alpha \subset \mathcal{R}$, $gx_0 \in g\alpha$ e os pontos x_0 e gx_0 estão na mesma órbita, então segue da definição (2.1.1) que $g\alpha \subset \mathcal{R}$.

Suponha α e β classes de raízes disjuntas em $\mathcal{R}$. Se tal classe β não existir, então $\alpha = \mathcal{R}$.

Seja $x_1 \in \beta$. Então, pelo teorema (1.4.5), $\hat{f}(x_0) \neq \hat{f}(x_1)$. Entretanto, a proposição (2.3.5) nos diz que $\hat{f}(x_0)$ e $\hat{f}(x_1)$ pertencem à mesma órbita, ou seja, existe $g \in G$ tal que $\hat{f}(x_1) = g \cdot \hat{f}(x_0) = \hat{f}(gx_0)$. Logo, x_1 e gx_0 pertencem à mesma classe de raízes. Portanto, $\beta = g\alpha$. $\square$

Agora, considere o conjunto $G_\alpha^{x_0} = \{g \in G | gx_0 \in \alpha\}$. Pode-se mostrar (o que não o faremos aqui) que $G_\alpha^{x_0}$ é um subgrupo de G.

Lema 2.4.2. *$G_\alpha^{x_0}$ independe do ponto $x_0 \in \alpha$ escolhido.*

Demonstração. Seja $x_1 \neq x_0 \in \alpha$. Mostremos que $G_\alpha^{x_0} = G_\alpha^{x_1}$. Seja $g \in G_\alpha^{x_0}$, então $gx_0 \in \alpha$. Como gx_0, $x_1 \in \alpha$, existe um caminho $c : I \to X$ de gx_0 para x_1 tal que $fc \simeq \bar{a}$ rel$\{0,1\}$. Além disso, x_0, $x_1 \in \alpha$, então existe um caminho $d : I \to X$ tal que $d(0) = x_0$, $d(1) = x_1$ e $fd \simeq \bar{a}$ rel$\{0,1\}$.

Seja $gd^{-1}*c : I \to X$. Logo, $gd^{-1}*c(0) = gx_1$, $gd^{-1}*c(1) = x_1 \in \alpha$ e $f(gd^{-1}*c) \simeq \bar{a}$ rel$\{0,1\}$. Então $gx_1 \in \alpha$, ou seja, $g \in G_\alpha^{x_1}$, e portanto, $G_\alpha^{x_0} \subset G_\alpha^{x_1}$. Analogamente prova-se que $G_\alpha^{x_1} \subset G_\alpha^{x_0}$. $\square$

Em vista do lema anterior, passaremos a denotar $G_\alpha^{x_0}$ por G_α.

Lema 2.4.3. *Sejam α e $g\alpha$ classes de raízes contidas na mesma G-classe de raízes $\mathcal{R}$. Então G_α e $G_{g\alpha}$ são conjugados.*

Demonstração. Sejam $x_0 \in \alpha$ e $g' \in G_{g\alpha}$. Então $g'gx_0 \in g\alpha$. Logo, existe um caminho $c : I \to X$ de gx_0 para $g'gx_0$ tal que $fc \simeq \bar{a}$ rel$\{0,1\}$. Considere o caminho $d = g^{-1}c : I \to X$. Então $d(0) = x_0 \in \alpha$, $d(1) = g^{-1}g'gx_0$ e $fd \simeq \bar{a}$ rel$\{0,1\}$. Logo, $g^{-1}g'gx_0 \in \alpha$ e assim, $g^{-1}g'g \in G_\alpha$. Portanto, $g^{-1}G_{g\alpha}g \subset G_\alpha$. De modo análogo prova-se a inclusão contrária. $\square$

Considere o conjunto das classes laterais $G/G_\alpha = \{H_1, H_2, ..., H_i, ...\}$, onde $H_1 = G_\alpha$. Denote por h_i um elemento de H_i, $i = 1, 2, ...$

Lema 2.4.4. *A classe de raízes $h_i\alpha$ independe da escolha do elemento $h_i \in H_i$, $i \in \{1, 2, ...\}$.*

Demonstração. Sejam h_1 e $h_2 \in H_i = g_iG_\alpha$, para algum $i \in \{1, 2, ...\}$, onde $g_i \in G$. Logo, $h_1 = g_i\bar{g}$ e $h_2 = g_i\bar{\bar{g}}$ com $\bar{g}$ e $\bar{\bar{g}} \in G_\alpha$. Então $h_1\alpha = g_i\bar{g}\alpha = g_i\alpha = g_i\bar{\bar{g}} = h_2\alpha$. $\square$

Lema 2.4.5. *Seja $\mathcal{R}$ a G-classe de raízes contendo a classe de Nielsen de raízes α e seja $x_0 \in \alpha$. Então $\mathcal{R} = \bigcup_i h_i\alpha$.*

DEMONSTRAÇÃO. Primeiro, mostremos que $\mathcal{R} \subset \bigcup_i h_i\alpha$. Seja $y \in \mathcal{R}$. Então temos duas possibilidades.

(*i*) $y = gx_0$, para algum $g \in G$. Neste caso, seja H_i a classe de G/G_α contendo g. Logo, $y \in g\alpha$.

(*ii*) Existe um caminho $c : I \to X$ de y para $g'x_0$, para algum $g' \in G$ tal que $fc \simeq \bar{a}$ rel{0,1}. Então $y \in g'\alpha$, pois $g' \in H_i$ para algum i.

Observe que a inclusão $\bigcup_i h_i\alpha \subset \mathcal{R}$ decorre da proposição (2.4.1) e da definição (2.1.1). Note ainda que, pela definição (1.4.1), esta reunião é disjunta. □

Finalmente, vamos relacionar os resultados acima e a G-ação definida no espaço de revestimento $\widehat{Y}$ (vide definição 2.3.2).

Proposição 2.4.6. *Seja G um grupo cíclico de ordem prima. Então $G_{\hat{y}} = G$ ou $G_{\hat{y}} = \{e\}$, para qualquer $\hat{y} \in \eta^{-1}(a) \cap \hat{f}(X)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como G é um grupo cíclico de ordem prima, então G não possui subgrupos próprios. Portanto, para qualquer classe de raízes α de f, $G_\alpha = G$ ou $G_\alpha = \{e\}$. Seja $x_0 \in \alpha \subset \mathcal{R}$. Se $G_\alpha = G$, então $g\alpha = \alpha = \mathcal{R}$, para todo $g \in G$. Logo, pelo corolário (2.3.6), $\#G(\hat{f}(x_0)) = 1$, ou seja, $G(\hat{f}(x_0)) = \hat{f}(x_0)$. Então, $G_{\hat{f}(x_0)} = G$. Mas se $G_\alpha = \{e\}$, então para todo $g \neq e \in G$, as classes de raízes α e $g\alpha$ são disjuntas. Assim, a cardinalidade da órbita $G(\hat{f}(x_0))$ é exatamente a cardinalidade de G, pelo corolário (2.3.6). Portanto, $G_{\hat{f}(x_0)} = \{e\}$. □

2.5 O G-número de Reidemeister de raízes

Nosso primeiro objetivo, nesta seção, é definir o G-número de Reidemiester $R_G(f,a)$ usando, como principal ferramenta, o revestimento de Hopf $\eta : \widehat{Y} \to Y$ para $f : X \to Y$. Para encerrarmos esta seção, veremos alguns exemplos dos números $R(f,a)$ e $R_G(f,a)$ e provaremos que $R_G(f,a)$ é um limitante superior para $N_G(f,a)$.

Considere a restrição da G-ação, definida em $\widehat{Y}$, ao conjunto $\eta^{-1}(a)$. Como η é equivariante e $a \in Y^G \neq \emptyset$, então $\eta^{-1}(a)$ é um G-conjunto. Lembremos que, pela proposição (2.3.5), o conjunto das G-classes de raízes está em correspondência com um subconjunto de G-órbitas $G(\hat{y})$ em $\eta^{-1}(a)$. Assim, o número de tais G-órbitas é, portanto, um limitante superior para o número de G-classes de raízes essenciais de f em a. Sendo assim, temos a seguinte definição.

Definição 2.5.1. *O* G***-número de Reidemeister*** *de f é o número de G-órbitas $G(\hat{y})$, onde $\hat{y} \in \eta^{-1}(a)$.*

Convém observarmos que $R_G(f,a)$ não depende da escolha do ponto a, mas ainda precisamos mostrar que $R_G(f,a)$ independe da escolha do revestimento de Hopf para f. Para isso, seja $\tilde{\eta} : \widetilde{Y} \to Y$ outra aplicação de revestimento associado ao subgrupo $f_{\#}\pi_1(X,x_0) \subseteq \pi_1(Y,a)$, onde $x_0 \in f^{-1}(a)$. Seja ainda $\tilde{f} : X \to \widetilde{Y}$ um levantamento de f relativamente a $\tilde{\eta}$ (isto é, $f = \tilde{\eta}\tilde{f}$). Então $\tilde{\eta}_{\#}\pi_1(\widetilde{Y}, \tilde{f}(x_0)) = f_{\#}\pi_1(X,x_0) = \eta_{\#}\pi_1(\widehat{Y}, \hat{f}(x_0))$, e portanto, existe um homeomorfismo $\psi : \widehat{Y} \to \widetilde{Y}$ tal que $\tilde{\eta}\psi = \eta$ e $\psi(\hat{f}(x_0)) = \tilde{f}(x_0)$.

$$\begin{tikzcd} \widehat{Y} \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\eta"'] & & \widetilde{Y} \arrow[dl, "\tilde{\eta}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Note que, a aplicação η induz um homomorfismo de grupos $\bar{\varphi} : G \to \Gamma_G(\widetilde{Y})$ tal que, para cada $g \in G$, $\bar{\varphi}(g)$ é o único levantamento de g por $\tilde{\eta}$ (isto é, $\tilde{\eta}\bar{\varphi}(g) = g\tilde{\eta}$) tal que $\bar{\varphi}(g)\psi = \psi\varphi(g)$ como levantamento de $g\eta = \eta\varphi(g)$. Assim sendo, $\widetilde{Y}$ torna-se um G-espaço com a ação $g \circ \tilde{y} := \bar{\varphi}(g)(\tilde{y})$, para todo $\tilde{y} \in \widetilde{Y}, g \in G$. Então, $\psi : \widehat{Y} \to \widetilde{Y}$ e $\tilde{\eta} : \widetilde{Y} \to Y$ serão G-aplicações.

$$
\begin{tikzcd}
& \widehat{Y} \arrow[rr, "\varphi(g)"] \arrow[dl, "1_{\widehat{Y}}"'] \arrow[dd, "\psi"] & & \widehat{Y} \arrow[dl, "1_{\widehat{Y}}"] \arrow[dd, "\psi"] \\
\widehat{Y} \arrow[rr, "\varphi(g)"] \arrow[dd, "\eta"'] & & \widehat{Y} \arrow[dd, "\eta"] & \\
& \widetilde{Y} \arrow[rr, dashed, "\tilde{\varphi}(g)"] \arrow[dl, "\tilde{\eta}"'] & & \widetilde{Y} \arrow[dl, "\tilde{\eta}"] \\
Y \arrow[rr, "g"'] & & Y &
\end{tikzcd}
\tag{2.4}
$$

No entanto, a aplicação $f : X \to Y$ também induz um homomorfismo de grupos $\tilde{\varphi} : G \to \Gamma_G(\widetilde{Y})$ tal que, para cada $g \in G$, existe um único levantamento $\tilde{\varphi}(g)$ de g através de $\tilde{\eta}$ (ou seja, $\tilde{\eta}\tilde{\varphi}(g) = g\tilde{\eta}$) satisfazendo $\tilde{\varphi}(g)\tilde{f} = \tilde{f}g$ como levantamento de $gf = fg$. Portanto, podemos definir outra G-ação em $\widetilde{Y}$, que será denotada por $g * \tilde{y} := \tilde{\varphi}(g)(\tilde{y})$, para todo $\tilde{y} \in \widetilde{Y}$, $g \in G$. Logo, $\tilde{f} : X \to \widetilde{Y}$ e $\tilde{\eta} : \widetilde{Y} \to Y$ tornam-se G-aplicações.

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dd, "\tilde{f}"] & & X \arrow[dl, "1_X"] \arrow[dd, "\tilde{f}"] \\
X \arrow[rr, "g"] \arrow[dd, "f"'] & & X \arrow[dd, "f"] & \\
& \widetilde{Y} \arrow[rr, dashed, "\tilde{\varphi}(g)"] \arrow[dl, "\tilde{\eta}"'] & & \widetilde{Y} \arrow[dl, "\tilde{\eta}"] \\
Y \arrow[rr, "g"] & & Y &
\end{tikzcd}
\tag{2.5}
$$

Tendo em vista os conceitos apresentados acima, vamos mostrar que o número de órbitas em $\eta^{-1}(a)$, com a G-ação dada por φ, é o mesmo do que o número de órbitas em $\tilde{\eta}^{-1}(a)$, com a ação dada por $\tilde{\varphi}$. É importante observar que ambos os homomorfismos φ e $\tilde{\varphi}$ são induzidos por f e, além disso, $\psi\varphi(g)\hat{f} \overset{(2.2)}{=} \psi\hat{f}g = \tilde{f}g \overset{(2.5)}{=} \tilde{\varphi}(g)\tilde{f} = \tilde{\varphi}(g)\psi\hat{f}$. Então $\psi\varphi(g) = \tilde{\varphi}(g)\psi$, ou seja, $\varphi(g) = \psi\tilde{\varphi}(g)\psi^{-1}$.

Como $\psi : \widehat{Y} \to \widetilde{Y}$ é um homeomorfismo, a condição $\tilde{\eta}\psi = \eta$ significa que ψ induz, para cada $y \in Y$, uma bijeção da fibra $\eta^{-1}(y)$ sobre a fibra $\tilde{\eta}^{-1}(y)$; logo, tais fibras têm a mesma cardinalidade. Além disso, como ψ é equivariante, dado $\hat{y} \in \eta^{-1}(y)$ arbitrário, existe uma bijeção entre as órbitas $G(\hat{y}) = \{g \cdot \hat{y} \mid g \in G\} = \{\varphi(g)(\hat{y}) \mid g \in G\}$ e

$G(\psi(\hat{y})) = \{g \circ \psi(\hat{y}) \mid g \in G\} = \{\bar{\varphi}(g)\psi(\hat{y}) \mid g \in G\} = \{\psi\varphi(g)(\hat{y}) \mid g \in G\}$. Portanto, o número de órbitas em $\eta^{-1}(a)$, com a ação $\cdot$ dada por φ, é o mesmo do que o número de órbitas em $\tilde{\eta}^{-1}(a)$, com a ação $\circ$ dada por $\bar{\varphi}$.

Agora, note que, $\bar{\varphi}(g)\tilde{f} = \bar{\varphi}(g)\psi\hat{f} \overset{(2.4)}{=} \psi\varphi(g)\hat{f} \overset{(2.2)}{=} \psi\hat{f}g = \tilde{f}g \overset{(2.5)}{=} \tilde{\varphi}(g)\tilde{f}$. Então $\bar{\varphi}(g) = \tilde{\varphi}(g) : \tilde{Y} \to \tilde{Y}$, pois ambos são levantamentos da aplicação $g : Y \to Y$ e coincidem em $\tilde{f}(X)$. Portanto, as ações $\circ$ e $*$, induzidas respectivamente por $\bar{\varphi}$ e $\tilde{\varphi}$, coincidem. Portanto, o G-número de Reidemeister $R_G(f,a)$ está bem definido, conforme queríamos demonstrar.

Como conseqüência da teoria desenvolvida neste capítulo, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.5.2. *Sejam $f : X \to Y$ uma G-aplicação e $a \in Y^G \neq \emptyset$. Considere um revestimento de Hopf $\eta : \widehat{Y} \to Y$ para f e seja $\hat{f} : X \to \widehat{Y}$ um levantamento de Hopf de f por η. Então*

(1) *f tem no máximo $R_G(f,a)$ G-classes de Nielsen de raízes.*

(2) *$N_G(f,a) \leq R_G(f,a)$.*

(4) *$R_G(f,a) \leq R(f,a)$.*

(4) *Se G é finito e $R(f,a) = \infty$, então $R_G(f,a) = \infty$.* □

Observação 2.5.3. Se $G = \{e\}$, então $R_G(f,a)$ se reduz ao número de Reidemeister $R(f,a)$ de [B1].

Antes de encerrarmos esta seção, convém apresentarmos alguns exemplos que ilustrem os cálculos dos números $R(f,a)$ e $R_G(f,a)$.

Exemplo 2.5.4. Considere a ação de $\mathbb{Z}_2 \simeq \{-1,1\}$ em S^1 dada por $-1 \cdot e^{\theta i} = e^{-\theta i}$. Sejam $f : S^1 \to S^1$ a $\mathbb{Z}_2$-aplicação definida por $f(e^{\theta i}) = e^{-\theta i}$ e $a = -1$. A aplicação de revestimento correspondendo ao subgrupo $f_{\#}\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ é a aplicação identidade $id : S^1 \to S^1$. Então $R(f,a) = R_{\mathbb{Z}_2}(f,a) = 1$. $\square$

Exemplo 2.5.5. No exemplo (2.2.4) foi dada a S^1-aplicação $f : S^3 \to S^2 = S^3/S^1$ constante em $a = [e]$, a classe do elemento identidade e no grupo de Lie compacto conexo S^3. Como S^2 é simplemente conexo, todo espaço de revestimento sobre S^2 é equivalente ao espaço de revestimento trivial, isto é, $id : S^2 \to S^2$. Logo, $R(f,a) = R_{\mathbb{Z}_2}(f,a) = 1$. $\square$

Exemplo 2.5.6. Usaremos a mesma aplicação dada no exemplo (2.2.5). Então, seja $f : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ a projeção natural e considere a ação antípoda de $\mathbb{Z}_2 \simeq \{-1,1\}$ em S^2 e trivial em $\mathbb{R}P^2$. Como S^2 é simplesmente conexo, então S^2 é o espaço de revestimento universal sobre $\mathbb{R}P^2$ relativo a f. Logo, $R(f) = 2$.

Para calcularmos $R_{\mathbb{Z}_2}(f)$, precisamos definir o homomorfismo $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \Gamma_{\mathbb{Z}_2}(S^2)$ que induz a $\mathbb{Z}_2$-ação no revestimento S^2. Vimos na seção 2.3 (vide páginas 19 e 20) que φ é injetora e o grupo $\Gamma_{\mathbb{Z}_2}(S^2)$ é definido por

$$\Gamma_{\mathbb{Z}_2}(S^2) = \{\hat{g} \in \text{Homeo}(S^2) \mid f\hat{g} = gf \text{ para algum } g \in \mathbb{Z}_2\}$$

Além disso, $\Gamma_{\mathbb{Z}_2}(S^2) \cong \mathcal{D}(f) \rtimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2$. Lembremos que para cada $g \in \mathbb{Z}_2$, $\varphi(g)$ é o único levantamento de g tal que $\varphi(g)\hat{f} = \hat{f}g$ como levantamento de $fg = gf$, onde $\hat{f}$ denota um levantamento de f.

Observe que, as aplicações identidade $id : S^2 \to S^2$ e antípoda $A : S^2 \to S^2$ são levantamentos de f (relativamente a f). Primeiramente, considere id como levantamento de f. Então $\varphi(g) = g$, ou seja, para todo $x \in S^2$, segue que $\varphi(1)(x) = x$ e $\varphi(-1)(x) = -x$.

Agora, seja A o levantamento de f. Logo, $\varphi(g)A = Ag$, e portanto, para todo $x \in S^2$ temos que $\varphi(1)(-x) = -x$ e $\varphi(-1)(-x) = x$.

Como φ é injetora, segue que $\mathbb{Z}_2$ também atua antipodalmente em S^2. Portanto, $R_{\mathbb{Z}_2}(f) = 1$. $\square$

Exemplo 2.5.7. Sejam $X = Y = S^1 \times S^1 \times S^1$ e $G = \mathbb{Z}_3 = \langle \xi \rangle$. Considere a $\mathbb{Z}_3$-ação em $S^1 \times S^1 \times S^1$ dada por $\xi(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) = (e^{i\theta_3}, e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$. Então $Y^{\mathbb{Z}_3} = \{(e^{i\theta}, e^{i\theta}, e^{i\theta}) \mid e^{i\theta} \in S^1\}$. Seja $a \in Y^{\mathbb{Z}_3}$.

Seja $f : S^1 \times S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1 \times S^1$ a aplicação constante em a. Logo, f é $\mathbb{Z}_3$-equivariante. Note que, como f é constante em a, então o revestimento associado ao subgrupo $f_\# \pi_1(S^1 \times S^1 \times S^1)$ é o revestimento universal $\eta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1 \times S^1$. Portanto, $R(f, a) = \eta^{-1}(a) = \infty$ e pelo teorema 2.5.2(4), segue que $R_{\mathbb{Z}_3}(f, a) = \infty$. $\square$

Capítulo 3

Propriedade Wecken Equivariante

O primeiro a trabalhar com a realização do número de Nielsen (de ponto-fixo) foi Franz Wecken [We], que em 1941-2 publicou uma série de artigos atacando este problema. Por essa razão, este capítulo leva seu nome.

Usando a teoria desenvolvida no capítulo 2, mostraremos alguns resultados da realização do número de Nielsen equivariante de raízes, quando este é zero.

Uma importante motivação para este trabalho foi o Teorema 3 de [W4], no qual P. Wong mostrou que se uma G-aplicação $f : X \to Y$ entre G-variedades diferenciáveis fechadas orientáveis e de mesma dimensão tem grau zero, isto é, $\deg f = 0$, então $N_G(f, a) = 0$ (sob algumas hipóteses apropriadas sobre a G-ação em X e em Y). A diferença crucial entre o Teorema 3 de [W4] e os resultados apresentados neste capítulo, é que, X será considerado como um G-espaço topológico e Y uma G-varidade topológica. Conforme mencionamos na introdução deste trabalho, a propriedade Wecken para raízes não tem sido muito estudada em situações onde os espaços não são variedades ou são variedades de dimensões diferentes.

3.1 G-ANR e G-ANE

Sejam G um grupo finito e M um G-espaço topológico. Considere uma órbita $G(x)$ em M, onde $x \in M$ e, seja V um espaço vetorial euclidiano no qual G_x opera ortogonalmente. Então um **tubo linear** sobre $G(x)$ em M é um G-mergulho topológico sobre uma vizinhança aberta de $G(x)$ da forma $G \times_{G_x} V \to M$. Então um G-tubo sobre $G(x)$ pode ser visto como um par $T = (T, r)$, onde T é uma vizinhança aberta invariante de $G(x)$ e $r : T \to G(x)$ é uma G-retração. (Vide [M], p.483).

Dizemos que uma G-ação é **localmente suave** (locally smooth) se existe um tubo linear sobre cada órbita do espaço. Neste caso, o conjunto dos pontos fixos por G, M^G, é uma subvariedade topológica de M. Observemos que esta definição, apesar de utilizar a nomenclatura "localmente suave", não se refere a aplicações e espaços diferenciáveis. Para as demonstrações e uma discussão em detalhes dos resultados, referimos o leitor aos livros [Br] e [tD].

Um **G-par** (metrizável) é um par (M, B), onde M é um G-espaço (metrizável) e B é um G-subespaço fechado de M.

Sejam (M, B) um G-par e $k : B \to M$ uma G-aplicação. Uma G-aplicação $\bar{k} : U \to M$ é uma **G-NE** (G-neighbourhood extension) de k se U é uma vizinhança invariante de B e $\bar{k}|B = k$.

Um G-espaço M é um **G-ANE** (G-absolute neighbourhood extensor) se, para todo G-par metrizável (X, A) e toda G-aplicação $k : A \to M$, existe uma G-NE $\bar{k} : U \to M$ de k.

Seja (M, B) um G-par. O G-espaço B é um **G-NR** (G-neighbourhood retract) de M se existe uma G-retração $r : U \to B$ de uma vizinhança invariante U de B em M.

Um G-espaço B é um **G-ANR** (G-absolute neighbourhood retract) se B é metrizável e, se B é um G-subespaço fechado de um G-espaço metrizável M, então B é um G-NR de M.

Veremos agora alguns resultados, apresentados em [A] e em [M], que serão utilizados na demonstração da proposição (3.2.5). O teorema (3.1.1) é provado em ([M], Teorema

8.8, p.501) e a teorema (3.1.2) pode ser encontrado em ([A], Teorema 14, p.530).

Teorema 3.1.1. *Toda G-variedade localmente suave é um G-ANR.*

Teorema 3.1.2. *Sejam G um grupo compacto e M um G-espaço metrizável. Então M é um G-ANR se, e somente se, M é um G-ANE.*

O resultado a seguir é o lema de Urysohn equivariante. Vide ([M], Lema 6.12, p.496)

Lema 3.1.3. *Se A e B são G-subconjuntos fechados disjuntos de um G-espaço normal M, então existe uma aplicação equivariante $f : M \to I$ tal que $f(A) = 0$ e $f(B) = 1$.*

3.2 Propriedade Wecken Equivariante

Iniciaremos a apresentação dos principais resultados deste trabalho supondo algumas hipóteses sobre o espaço Y.

Proposição 3.2.1. *Sejam G um grupo finito e $f : X \to Y$ uma G-aplicação entre dois espaços conexos por caminhos. Suponha X compacto e Y uma n-variedade topológica. Seja $a \in Y^G \neq \emptyset$ e suponha Y simplesmente conexo. Se $N_G(f, a) = 0$, então f é G-homotópica a uma G-aplicação livre de raízes.*

Demonstração. Seja $\eta : \widehat{Y} \to Y$ o revestimento correspondo ao subgrupo $f_{\#}\pi_1(X)$ em $\pi_1(Y)$. Sendo Y simplesmente conexo, então todo espaço de revestimento sobre Y é equivalente ao espaço de revestimento trivial $id : Y \to Y$. Portanto, η é um homeomorfismo. Além disso, existe uma única G-classe de raízes $\mathcal{R} = f^{-1}(a)$ de f. Se $N_G(f, a) = 0$, então $\mathcal{R}$ é inessencial. Logo, f é G-homotópica a uma G-aplicação f' tal que $\mathcal{R}$ não está relacionada a nenhuma raiz de f'. Seja $\hat{a} \in \eta^{-1}(a)$. Então existe um levantamento $\hat{f}' : X \to \widehat{Y}$ de f' através de η tal que $\hat{a} \notin \hat{f}'(X)$, ou seja, $\hat{f}'^{-1}(\hat{a}) = \emptyset$. Deste modo, concluímos que $f'^{-1}(a) = \emptyset$. $\square$

Lema 3.2.2. *Suponha $\pi_1(Y) < \infty$ e suponha que o espaço de revestimento de Hopf de Y seja o próprio Y. Então se $N_G(f,a) = 0$, existe uma G-aplicação livre de raízes que é G-homotópica a f.*

Demonstração. Sabemos, da teoria de espaços de revestimentos, que $\pi_1(Y)$ atua transitivamente na fibra $\eta^{-1}(a)$, onde η é o revestimento de Hopf para f. Então $\eta^{-1}(a) \cong \pi_1(Y)/\eta_\#\pi_1(Y)$. Mas pelo teorema do isomorfismo, $\pi_1(Y) \cong \eta_\#\pi_1(Y)$, ou seja, η é um homeomorfismo. Logo, utilizando a parte final da demonstração da proposição (3.2.1), o resultado segue. $\square$

Nos próximos resultados sobre a realização do G-número de Nielsen, quando este é zero, vamos assumir algumas condições sobre a G-ação no espaço de revestimento $\widehat{Y}$.

Suponha que a G-ação em X, Y e em $\widehat{Y}$ seja localmente suave.

Teorema 3.2.3. *Sejam G um grupo finito, X um G-espaço compacto e conexo por caminhos, Y uma G-variedade topológica conexa por caminhos com dim $\widehat{Y} = n \geq 3$. Sejam $f : X \to Y$ uma aplicação equivariante e $a \in Y^G \neq \emptyset$. Suponha que G atue livremente no espaço de revestimento de Hopf $\widehat{Y}$ de Y. Se $N_G(f,a) = 0$, então existe uma G-aplicação livre de raízes $k : X \to Y$ G-homotópica a f.*

Demonstração. Suponha que $f^{-1}(a)$ é não-vazio. Como $N_G(f,a) = 0$, então todas as G-classes de raízes são inessenciais. Seja $\mathcal{R}$ uma G-classe de raízes inessencial de f em a. Logo, f é G-homotópica a uma G-aplicação f' tal que $\mathcal{R}$ não está relacionada a nenhuma raiz de f'. Seja $\hat{a} \in \eta^{-1}(a)$. Então existe um levantamento $\hat{f}' : X \to \widehat{Y}$ de f', através do revestimento de Hopf $\eta : \widehat{Y} \to Y$ para f, tal que $\hat{a} \notin \hat{f}'(X)$. Logo, $G(\hat{a}) \cap \hat{f}'(X) = \emptyset$.

Como $\hat{f}'(X)$ é compacto, existe um número finito de pontos $\hat{y}_1, ..., \hat{y}_m$ em $\eta^{-1}(a) \cap \hat{f}'(X)$. Para todo $g \in G$, temos que $g \cdot \hat{y}_j \in \eta^{-1}(a) \cap \hat{f}'(X)$, $1 \leq j \leq m$, pois η e $\hat{f}'$ são G-aplicações.

Considere as G-órbitas dos pontos $g \cdot \hat{y}_j$, para todo $g \in G$ e $j = 1, ..., m$. Escolha um representante para cada uma destas órbitas. Denote tais G-órbitas por $G(z_1), ..., G(z_l)$, onde z_i é um representante escolhido de $G(z_i)$, $i = 1, ..., l$. Observe que como G é um grupo finito agindo livremente em $\widehat{Y}$, então $\#G(\hat{y}) = \#G$, para todo $\hat{y} \in \widehat{Y}$. Além disso, a aplicação de órbita $p : \widehat{Y} \to \widehat{Y}/G$ é uma aplicação de revestimento.

Seja $c : I \to \widehat{Y}/G$ um caminho simples, isto é, sem auto-interseção, de $p(\hat{a}) = G(\hat{a})$ até $G(z_l)$ passando apenas uma vez pelas órbitas $G(z_1), ..., G(z_{l-1})$. Logo, existe um único caminho $\hat{c} : I \to \widehat{Y}$ levantamento de c por p, isto é, $p\hat{c} = c$ tal que $\hat{c}(0) = \hat{a}$. Além disso, $\hat{c}$ é um caminho simples que passa apenas uma vez por cada órbita $G(\hat{a}), G(z_1), ..., G(z_{l-1}), G(z_l)$ com ponto final $\hat{c}(1) = g \cdot z_l$, para algum $g \in G$ e tal que $\hat{c}(I) \cap g \cdot \hat{c}(I) = \emptyset$, para todo $g \neq e$ onde e denota o elemento identidade de G.

Seja V_c uma vizinhança fechada de c homeomorfa a uma n-bola fechada. Então V_c é contrátil e $p^{-1}(V_c) = \{g \cdot V_{\hat{c}} \mid g \in G\}$, onde $V_{\hat{c}}$ é a vizinhança fechada correspondente de $\hat{c}$. Logo, $p^{-1}(V_c)$ consiste de transladados disjuntos de $V_{\hat{c}}$ por G. Observe que para cada $g \in G$, $g \cdot V_{\hat{c}}$ é uma vizinhança fechada do caminho $g \cdot \hat{c}$. Agora, use $g \cdot \hat{a}$ como o centro de cada bola $g \cdot V_{\hat{c}}$.

Considere $r : V_{\hat{c}} - \{\hat{a}\} \to \partial V_{\hat{c}}$ a projeção radial. Logo, $V_{\hat{c}} - \{\hat{a}\}$ é um retrato forte por deformação para sua fronteira $\partial V_{\hat{c}}$. Agora, para cada $g \in G$, defina $r_g : g \cdot V_{\hat{c}} - \{g \cdot \hat{a}\} \to \partial(g \cdot V_{\hat{c}})$ por $r_g(\hat{w}) = g \cdot (r(g^{-1} \cdot \hat{w}))$. Note que $r_e = r$. Finalmente, defina a G-retração:

$$\bar{r} : \bigcup_{g \in G} g \cdot V_{\hat{c}} - G(\hat{a}) \to \bigcup_{g \in G} \partial(g \cdot V_{\hat{c}})$$

por $\bar{r}(\hat{y}) := r_g(\hat{y})$ para $\hat{y} \in g \cdot V_{\hat{c}}$. Então $\bigcup_{g \in G} g \cdot V_{\hat{c}} - G(\hat{a})$ é um G-retrato forte por deformação para sua fronteira $\bigcup_{g \in G} \partial(g \cdot V_{\hat{c}})$. Seja $\zeta : \widehat{Y} - G(\hat{a}) \to \widehat{Y}$ uma G-aplicação dada por $\zeta(\hat{y}) = \bar{r}(\hat{y})$ se $\hat{y} \in \bigcup_{g \in G} g \cdot V_{\hat{c}} - G(\hat{a})$ e $\zeta(\hat{y}) = \hat{y}$ caso contrário.

Como $G(\hat{a}) \cap \hat{f}'(X) = \emptyset$, pode-se compor $\hat{f}'$ com ζ e assim, $\zeta \hat{f}'(X) \cap \eta^{-1}(a) = \emptyset$. Portanto, a G-aplicação $\eta \zeta \hat{f}'$ não tem raízes em a e, além disso, $\eta \zeta \hat{f}'$ é G-homotópica a f', que por sua vez é G-homotópica a f. Então $\eta \zeta \hat{f}'$ é a G-aplicação desejada. $\square$

Proposição 3.2.4. *Sejam G um grupo finito, $f : X \to Y$ uma aplicação equivariante entre G-espaços conexos por caminhos e $a \in Y^G \neq \emptyset$. Suponha X compacto e Y uma*

G-variedade topológica. Suponha também que G atue no espaço de revestimento de Hopf $\widehat{Y}$ de Y com um único tipo de órbita (H), onde H é um subgrupo fechado de G com $WH = NH/H$ finito e tal que $\widehat{Y}^H$ é conexo por caminhos com $\dim \widehat{Y}^H \geq 3$. Se $N_G(f,a) = 0$ então f é G-homotópica a uma G-aplicação livre de raízes.

Demonstração. Como G atua em $\widehat{Y}$ com um único tipo de órbita (H), então pelo lema (1.2.1) seque que $\widehat{Y}_H = \widehat{Y}^H$. Além disso, cada G-órbita em $\widehat{Y}$ contém um ponto fixado por H. Logo, para cada $\hat{y} \in \widehat{Y}$ existe $g \in G$ tal que $G_{g\cdot\hat{y}} = H$, onde $G_{g\cdot\hat{y}}$ denota o grupo de isotropia do elemento $g\cdot\hat{y}$. Observe ainda que WH é finito e age livremente em $\widehat{Y}_H$, onde a WH-ação é induzida pela G-ação em $\widehat{Y}$, ou seja, $nH * \hat{y} = n \cdot \hat{y} := \varphi(n)(\hat{y})$, para todo $n \in NH \subset G$ e para todo $\hat{y} \in \widehat{Y}^H$.

Suponha que $f^{-1}(a)$ seja não-vazio. Como $N_G(f,a) = 0$, então todas as G-classes de raízes são inessenciais. Seja $\mathcal{R}$ uma G-classe de raízes inessencial de f em a. Logo, f é G-homotópica a uma G-aplicação f' tal que $\mathcal{R}$ não está relacionada a nenhuma raiz de f'. Seja $\hat{a} \in \eta^{-1}(a)$. Então existe um levantamento $\hat{f}' : X \to \widehat{Y}$ de f', através do revestimento de Hopf $\eta : \widehat{Y} \to Y$ para f, tal que $\eta\hat{f}' = f'$ e $G(\hat{a}) \cap \hat{f}'(X) = \emptyset$. Sem perda de generalidade, suponha que $G_{\hat{a}} = H$.

Então, pelo teorema (3.2.3), para cada $nH \in WH$ obtem-se a retração $r_{nH} : nH * V_{\hat{c}} - \{nH * \hat{a}\} \to \partial(nH * V_{\hat{c}})$ dada por $r_{nH}(\hat{w}) = nH * (r(n^{-1}H * \hat{w})) = n \cdot (r(n^{-1} \cdot \hat{w}))$, onde $r : V_{\hat{c}} - \{\hat{a}\} \to \partial V_{\hat{c}}$ é projeção radial. As vizinhanças fechadas $V_{\hat{c}}$, homeomorfas a n-bolas, em $\widehat{Y}^H$ foram obtidas como na demostração do teorema (3.2.3).

Logo, a WH-retração

$$\bar{r} : \bigcup_{nH \in WH} nH * V_{\hat{c}} - WH(\hat{a}) \to \bigcup_{nH \in WH} \partial(nH * V_{\hat{c}})$$

dada por $\bar{r}(\hat{y}) = r_{nH}(\hat{y})$ para $\hat{y} \in nH * V_{\hat{c}}$, garante que $\bigcup_{nH\in WH} nH * V_{\hat{c}} - WH(\hat{a})$ é uma WH-retração forte por deformação para sua fronteira $\bigcup_{nH\in WH} \partial(nH * V_{\hat{c}})$. Então considere a WH-homotopia $F : (\bigcup_{nH\in WH} nH * V_{\hat{c}} - WH(\hat{a})) \times I \to \bigcup_{nH\in WH} nH * V_{\hat{c}} - WH(\hat{a})$ tal que $F(\hat{y}, 0) = \hat{y}$, $F(\hat{y}, 1) = \bar{r}(\hat{y})$ para todo $\hat{y} \in \bigcup_{nH\in WH} nH * V_{\hat{c}} - WH(\hat{a})$ e $F(\hat{w}, t) = \hat{w}$ para todo $\hat{w} \in \bigcup_{nH\in WH} \partial(nH * V_{\hat{c}})$ e $t \in I$. Pelo corolário (1.2.6), F tem uma extensão para uma G-aplicação $F' : (\bigcup_{g\in G} g * V_{\hat{c}} - G(\hat{a})) \times I \to \bigcup_{g\in G} g * V_{\hat{c}} - G(\hat{a})$, onde $F'(g \cdot \hat{y}, t) = g \cdot F(\hat{y}, t)$, $G_{\hat{y}} = gHg^{-1}$ para todo $\hat{y} \in \widehat{Y}^H$.

Seja $\bar{F} : \widehat{Y} - G(\hat{a}) \times I \to \widehat{Y}$ a G-aplicação dada por $\bar{F}(\hat{y}, t) = F'(\hat{y}, t)$ se $\hat{y} \in \bigcup_{g\in G} g * V_{\hat{c}} - G(\hat{a})$ e $\bar{F}(\hat{y}, t) = \hat{y}$ caso contrário.

Denote $\bar{F}(\hat{w}, 1)$ por $\bar{F}_1(\hat{w})$, para todo $\hat{w} \in \widehat{Y} - G(\hat{a})$. Logo, como $G(\hat{a}) \cap \hat{f}'(X) = \emptyset$, pode-se compor as G-aplicações $\hat{f}'$ e $\bar{F}_1$ e obter $\bar{F}_1 \hat{f}'(X) \cap \eta^{-1}(a) = \emptyset$. Portanto, a G-aplicação $\eta\ F_1' \hat{f}'$ não tem raízes em a e é G-homotópica a f', que por sua vez, é G-homotópica a f. $\square$

Proposição 3.2.5. *Sejam G um grupo finito, $f : X \to Y$ uma aplicação equivariante entre G-espaços conexos por caminhos e $a \in Y^G \neq \emptyset$. Suponha X compacto e Y uma G-variedade topológica. Suponha também que G atue semi-livremente no espaço de revestimento de Hopf $\widehat{Y}$ de Y. Além disso, suponha que $\widehat{Y}$ e $\widehat{Y}^G$ sejam conexos por caminhos, dim $\widehat{Y}^G = n \geq 3$ e que a codimensão de $\widehat{Y}^G$ em $\widehat{Y}$ seja pelo menos 2. Então, se $N_G(f, a) = 0$, existe uma G-aplicação livre de raízes G-homotópica a f.*

Demonstração. Primeiramente, note que, como a G-ação em $\widehat{Y}$ é semi-livre, então $\widehat{Y} = \widehat{Y}^G \cup \widehat{Y}_e$. Suponha que $f^{-1}(a)$ seja não-vazio. Seja $\eta : \widehat{Y} \to Y$ o revestimento de Hopf para f e seja $\hat{f} : X \to \widehat{Y}$ um levantamento de f através de η.

Temos dois casos a considerar.

Caso I. $\hat{f}(X) \cap \widehat{Y}^G = \emptyset$.

Como o conjunto $\hat{f}(X) \neq \emptyset$ é fechado em $\widehat{Y}$, que é conexo, então existe um ponto $\hat{b} \in \widehat{Y}_e$ tal que $\hat{b} \notin \hat{f}(X)$. Portanto, pelo teorema (3.2.3), o resultado segue.

Caso II: $\hat{f}(X) \cap \hat{Y}^G \neq \emptyset$.

Como $N_G(f, a) = 0$, então todas as G-classes de raízes são inessenciais. Seja $\mathcal{R}$ uma G-classe de raízes inessencial de f. Logo, f é G-homotópica a uma G-aplicação f' tal que $\mathcal{R}$ não está relacionada a nenhuma raiz de f'. Seja $\hat{f}' : X \to \widehat{Y}$ um levantamento de Hopf de f' por η.

Para o caso II, vamos precisar da seguinte **hipótese adicional**: seja $\hat{a}$ um ponto em $\widehat{Y}$ tal que $\hat{a} \in \widehat{Y}^G \cap \eta^{-1}(a)$ e $\hat{a} \notin \hat{f}'(X)$.

Como $\hat{f}'(X)$ é compacto, existe um número finito de pontos $\hat{y}_1, ..., \hat{y}_m$ em $\eta^{-1}(a) \cap \hat{f}'(X)$. Para todo $g \in G$, temos que $g \cdot \hat{y}_j \in \eta^{-1}(a) \cap \hat{f}'(X)$, $1 \leq j \leq m$, pois η e $\hat{f}'$ são G-aplicações.

Considere as G-órbitas dos pontos $g \cdot \hat{y}_j$, para todo $g \in G$ e $j = 1, ..., m$. Escolha um representante para cada uma destas órbitas. Denote tais G-órbitas por $G(z_1), ..., G(z_l)$, onde z_i é um representante escolhido de $G(z_i)$, $i = 1, ..., l$. Como G atua semi-livremente em $\widehat{Y}$, então os pontos em $\eta^{-1}(a) \cap \hat{f}'(X)$ são particionados em dois conjuntos disjuntos, a saber, aqueles que pertencem a parte fixada por G, $\widehat{Y}^G$, e aqueles que pertecem a parte livre $\widehat{Y} - \widehat{Y}^G = \widehat{Y}_e$.

Sejam $z_1, z_2, ..., z_s \in \hat{f}'(X) \cap \eta^{-1}(a) \cap \widehat{Y}^G$, para algum s tal que $1 \leq s \leq l$. Como $\widehat{Y}^G$ é uma subvariedade fechada de $\widehat{Y}$, obtemos (pelo Lema 1 de [DH]) uma vizinhança fechada D, homeomorfa a uma n-bola fechada, contida em $\hat{Y}^G$ contendo os pontos $\hat{a}$, z_1, z_2,...,z_s. Agora, considerando $\hat{a}$ como o centro de D, obtemos a projeção radial $r : D - \{\hat{a}\} \to \partial D$. Logo, ∂D é um retrato forte por deformação de $D - \{\hat{a}\}$, ou seja, existe uma homotopia $F : (D - \{\hat{a}\}) \times I \to D$ tal que $F(\hat{y}, 0) = \hat{y}$, $F(\hat{y}, 1) = r(\hat{y})$ para todo $\hat{y} \in D - \{\hat{a}\}$ e $F(\hat{w}, t) = \hat{w}$ para todo $\hat{w} \in \partial D$, $t \in I$. Agora, seja $F' : (\widehat{Y}^G - \{\hat{a}\}) \times I \to \widehat{Y}^G$ dada por $F'(\hat{y}, t) = F(\hat{y}, t)$ se $\hat{y} \in D - \{\hat{a}\}$ e $F'(\hat{y}, t) = \hat{y}$ caso contrário.

Pelo teorema (3.1.1), $\widehat{Y}^G$ é um G-ANR. Então $\widehat{Y}^G$ é um G-ANE por (3.1.2). Portanto, existe uma G-vizinhança U de $\widehat{Y}^G$ em $\widehat{Y}$ e existe uma G-aplicação $\bar{F} : U \times I \to \widehat{Y}$ tal que $\bar{F}|(\widehat{Y}^G \times I) = F'$.

Considere os subconjuntos fechados invariantes disjuntos $\widehat{Y} - U$ e $\widehat{Y}^G$ do G-espaço normal $\widehat{Y}$, então pelo lema de Urysohn equivariante, existe uma G-aplicação $\psi : \widehat{Y} \to I$ tal que $\psi(\widehat{Y} - U) = 0$ e $\psi(\widehat{Y}^G) = 1$.

Agora, defina (pois $\widehat{Y}$ é metrizável) a G-aplicação $\bar{\bar{F}} : \widehat{Y} \times I \to \widehat{Y}$ por $\bar{\bar{F}}(\hat{y}, t) = \psi(\hat{y})\bar{F}(\hat{y}, t) + (1 - \psi(\hat{y}))\hat{y}$. Logo, $\bar{\bar{F}}(\hat{y}, t) = \bar{F}(\hat{y}, t)$, para todo $\hat{y} \in \widehat{Y}^G$ e $\bar{\bar{F}}(\hat{y}, t) = \hat{y}$, para $\hat{y} \in \widehat{Y} - U$. Portanto, $\bar{\bar{F}}|U = \bar{F}$ e $\bar{\bar{F}}|\widehat{Y}^G = F'$.

Denote $\bar{\bar{F}}(\hat{y},1)$ por $\bar{\bar{F}}_1(\hat{y})$, para todo $\hat{y} \in \widehat{Y}$ e, seja $\xi = \bar{\bar{F}}_1\hat{f}'$. Então, $\xi(X) \cap \eta^{-1}(a) \subset \widehat{Y}_e$.

Seja $\xi(X) \cap \eta^{-1}(a) = \{G(z_{s+1}), ..., G(z_l)\} \subset \widehat{Y}_e$. Seja $c : I \to \widehat{Y}/G$ um caminho simples no espaço de órbitas $\widehat{Y}/G$ de $p(\hat{a}) = \hat{a}$ para $G(z_k)$, para algum $k \in \{s+1, ..., l\}$. Então existe um levantamento $\hat{c} : I \to \widehat{Y}$ de c por $p : \widehat{Y} \to \widehat{Y}/G$, isto é $p\hat{c} = c$, tal que $\hat{c}(0) = \hat{a}$ e $\hat{c}(1) = g' \cdot z_k$, para algum $g' \in G$. Observe que, como a codimensão de $\widehat{Y}^G$ em $\widehat{Y}$ é pelo menos 2, o caminho $\hat{c}$ pode ser tomado como um caminho simples interceptando $\widehat{Y}^G$ em um único ponto, a saber $\hat{a}$. Além disso, podemos assumir que $\hat{c}$ evita todos os outros pontos de $G(z_{s+1}), ..., G(z_l)$, exceto $g' \cdot z_k$.

Portanto, os caminhos simples $g\hat{c} : I \to \widehat{Y}$ começam em $\hat{a}$ e terminam em um ponto da órbita $G(z_k)$ e são tais que $g\hat{c}(I) \cap \hat{c}(I) = \hat{a}$, para todo $g \in G$, $g \neq e$. Como $\widehat{Y}_e$ é normal e os caminhos $g\hat{c}(I) - \hat{a}$ são fechados em $\widehat{Y}_e$, então eles são separados por vizinhanças abertas disjuntas. Denote por $V'_{g\hat{c}}$ tal vizinhança de $g\hat{c}(I) - g\hat{a}$ em $\widehat{Y}_e$, para cada $g \in G$. Seja $V_{\hat{c}}$ uma vizinhança fechada (homeomorfa a uma bola fechada) de $\hat{c}$ em $\widehat{Y}$ tal que o conjunto $V_{\hat{c}} - \{\hat{a}\}$ está contido no interior de $V'_{\hat{c}}$. Então, $\hat{a} \in \partial V_{\hat{c}}$, $\hat{c}(1) = g' \cdot z_k$ pertence ao interior de $V_{\hat{c}}$, $V_{\hat{c}} \cap \widehat{Y}^G = \hat{a}$ (isto é, $V_{\hat{c}} - \{\hat{a}\} \subset \widehat{Y}_e$) e $V_{\hat{c}} \cap g\hat{c}(I) = \hat{a}$, para todo $g \neq e$ em G. Logo, $p^{-1}(p(V_{\hat{c}})) = \bigcup_{g \in G} g \cdot V_{\hat{c}}$ e $\bigcap_{g \in G} g \cdot V_{\hat{c}} = \{\hat{a}\}$.

Considere a projeção radial $\rho : V_{\hat{c}} - \{\hat{a}\} \to V_{\hat{c}}$, onde todos os raios começam no ponto $\hat{a}$. Então $\rho(g' \cdot z_k) \in \partial V_{\hat{c}}$. Logo, para cada $g \in G$, defina $\rho_g : g \cdot V_{\hat{c}} - \{\hat{a}\} \to g \cdot V_{\hat{c}}$ por $\rho_g(\hat{y}) = g \cdot (\rho(g^{-1} \cdot \hat{y}))$. Seja, agora,

$$\bar{\rho} : \bigcup_{g \in G} g \cdot V_{\hat{c}} - \{\hat{a}\} \longrightarrow \bigcup_{g \in G} g \cdot V_{\hat{c}}$$

a G-aplicação dada por $\bar{\rho}(\hat{y}) = \rho_g(\hat{y})$ para $\hat{y} \in g \cdot V_{\hat{c}}$. Finalmente, defina a G-aplicação $\zeta : \widehat{Y} - \{\hat{a}\} \to \widehat{Y}$ por $\zeta(\hat{y}) = \bar{\rho}(\hat{y})$ se $\hat{y} \in \bigcup_{g \in G} g \cdot V_{\hat{c}} - \{\hat{a}\}$ e $\zeta(\hat{y}) = \hat{y}$ caso contrário. Portanto $\zeta\hat{f}'(X) \cap \eta^{-1}(a) = \{G(z_{s+1}), ..., G(z_{k-1}), G(z_{k+1}), ..., G(z_l)\} \subset \widehat{Y}_e$, onde $s+1 \leq k \leq l$. Repetindo este processo, um número finito de vezes, para eliminar as G-órbitas restantes (que produzem raízes), obtemos uma G-aplicação $\sigma : \widehat{Y} - \{\hat{a}\} \to \widehat{Y}$ tal que $\eta\sigma\hat{f}' : X \to Y$ é G-homotópica a f e é livre de raízes. $\square$

Considerações finais

Em [B1], R. Brooks mostrou que se Y é uma variedade topológica então $N(f,a)=0$ ou $N(f,a)=R(f,a)$. Ou seja, se uma classe de raízes é essencial então todas as classes de raízes são essenciais. Isto nos motiva a perguntar: sob que condições, se uma G-classe de raízes é essencial então todas são? Para responder a essa pergunta, consideremos uma série de resultados, os quais são conseqüências importantes do teorema (3.2.3) e das proposições (3.2.4) e (3.2.5).

Nos lemas a seguir, suponha que a G-ação em X, Y e em $\widehat{Y}$ seja localmente suave.

Lema 3.2.6. *Sejam G um grupo finito, X um G-espaço compacto e conexo por caminhos, Y uma G-variedade topológica conexa por caminhos com $\dim \widehat{Y} = n \geq 3$. Sejam $f : X \to Y$ uma aplicação equivariante e $a \in Y^G \neq \emptyset$. Suponha que G atue livremente no espaço de revestimento de Hopf $\widehat{Y}$ de Y. Se f possui uma G-classe de raízes inessencial, então existe uma G-aplicação livre de raízes G-homotópica a f.*

Demonstração. Segue imediatamente da demonstração do teorema (3.2.3). □

Lema 3.2.7. *Sejam G um grupo finito, $f : X \to Y$ uma aplicação equivariante entre G-espaços conexos por caminhos e $a \in Y^G \neq \emptyset$. Suponha X compacto e Y uma G-variedade topológica. Suponha também que G atue no espaço de revestimento de Hopf $\widehat{Y}$ de Y com um único tipo de órbita (H), onde H é um subgrupo fechado de G com $WH = NH/H$ finito e tal que $\widehat{Y}^H$ é conexo por caminhos com $\dim \widehat{Y}^H \geq 3$. Se f possui uma G-classe de raízes inessencial, então existe uma G-aplicação livre de raízes G-homotópica a f.*

Demonstração. Segue imediatamente da demonstração da proposição (3.2.4). $\square$

Lema 3.2.8. *Sejam G um grupo finito, $f : X \to Y$ uma aplicação equivariante entre G-espaços conexos por caminhos e $a \in Y^G \neq \emptyset$. Suponha X compacto e Y uma G-variedade topológica. Suponha também que G atue semi-livremente no espaço de revestimento de Hopf $\widehat{Y}$ de Y. Além disso, suponha que $\widehat{Y}$ e $\widehat{Y}^G$ sejam conexos por caminhos, dim $\widehat{Y}^G = n \geq 3$ e que a codimensão de $\widehat{Y}^G$ em $\widehat{Y}$ seja pelo menos 2. Se f possui uma G-classe de raízes inessencial, então existe uma G-aplicação livre de raízes G-homotópica a f.*

Demonstração. Segue imediatamente da demonstração da proposição (3.2.5). $\square$

Portanto, concluímos, de cada lema acima, que se f tem uma G-classe de raízes essencial, então todas as G-classes de raízes f são essenciais. Ou seja, $N_G(f, a) = 0$ ou $N_G(f, a) = R_G(f, a)$, nos casos acima.

Nosso próximo objetivo é provar uma versão mais geral da proposição (3.2.5), ou seja, estudar o caso em que G age em $\widehat{Y}$ com um número finito de tipos de isotropias $(H_1), (H_2), ..., (H_k)$. A dificuldade, como pode ser observada na demostração da proposição (3.2.5), vem do fato de que os pontos que contribuem para as raízes podem ter tipos de isotropias diferentes.

Referências Bibliográficas

[A] S. Antonian, *Equivariant embeddings into G-AR's*. Glasnik Math. Ser. III **22** (42) (1987), 503-533.

[BCW] L. Borsari, F. Cardona and P. Wong, *Equivariant Path Fields on Topological Manifolds*, to appear in T.M.N.A.

[Br] G. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*. Academic Press, New York, 1992.

[B] R. Brooks, *Coincidences, Roots and Fixed Points*. Ph.D. thesis, University of California at Los Angeles, Los Angeles, 1967.

[B1] R. Brooks, *Certain subgroups of the fundamental group and the number of roots of* $f(x) = a$. Amer. J. Math. **95** (1973), 720-728.

[B2] R. Brooks, *On the sharpness of the* Δ_1 *and* Δ_2 *Nielsen numbers*. J. Reine Angew. Math. **259** (1973), 101-108.

[B3] R. Brooks, *Nielsen root theory*. Handbook of Topological Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York (2006), 375-431.

[BS] R. Brown and H Schirmer, *Nielsen root theory and Hopf degree theory*. Pacific Journal of Mathematics, **198** (2001), 49-80.

[DH] P. Doyle and J. Hocking, *A decomposition theorem for n-dimensional manifolds*. Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 469-471.

[Fa] P. Fagundes, *Teoria de Coincidência Equivariante e Números de Nielsen Equivariantes*. Tese de Doutorado, USP-São Paulo, 1996.

[GH] J. Guo and P. Heath, *Equivariant coincidence Nielsen numbers*. Topology Appl. **128** (2003), 277-308.

[GW] D. Gonçalves and P. Wong, *Wecken property for roots*. Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 2779-2782.

[H] H. Hopf, *Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, II*. Math. Ann. **102** (1930), 562-623.

[Hu] Sze-Tsen Hu, *Homotopy Theory*. Academic Press, 1959.

[J] B. Jiang, *Lectures on Nielsen Fixed Point Theory*. Contemporary Mathematics **14**, American Mathematical Society, Providence, 1983.

[Ka] K. Kawakubo, *The Theory of Transformation Groups*. Oxford University Press, 1991.

[K] T. Kiang, *The Theory of Fixed Point Classes*. Science Press, Springer, Berlin-Beijing, 1989.

[M] M. Murayama, *On G-ANR's and their G-homotopy types*. Osaka J. Math. **20** (1983), 479-512.

[R] J. Rotman, *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[S] H. Schirmer, *Mindestzahlen von Koinzidenpunkten*. J. Reine Angew. Math. **194** (1955), 21-39.

[tD] T. tom Dieck, *Transformation groups*, Studies in Mathematics **8**, de Gruyter, Berlin, 1987.

[V] J. Vick, *Homology Theory*. 2nd ed, Springer-Verlag, New York, 1994.

[We] F. Wecken, *Fixpunktklassen. I*, Math. Ann. **117** (1941), 659-671; *II* **118** (1942), 216-234; *III* **118** (1942), 544-577.

[W1] P. Wong, *Equivariant Nielsen fixed point theory for G-maps*. Pacific Journal of Mathematics, vol.150 n.**120** (1991), 179-200.

[W2] P. Wong, *Equivariant Nielsen numbers*. Pacific Journal of Mathematics. **159** (1993), 153-175.

[W3] P. Wong, *Fixed point theory for homogeneous spaces*. Amer. J. Math. **120** (1998), 23-42.

[W4] P. Wong, *Equivariant Nielsen theory*. Nielsen theory and Reidemeister torsion. Banach Center Publications **49** (1999), 253-258.

[W5] P. Wong, *Fixed point theory for homogeneous spaces II*. Fund. Mathematicae **186** (2005), 161-175.