Teoria isomorfa dos espaços de Banach $C_0(K, X)$

Leandro Candido Batista

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Elói Medina Galego

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq (processo 142423/2011-4) e da CAPES

São Paulo, Novembro de 2012

Teoria isomorfa dos espaços de Banach
$C_0(K, X)$

Esta tese contém as correções e alterações
sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa
realizada por Leandro Candido Batista em 12/11/2012.
O original encontra-se disponível no Instituto de
Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Elói Medina Galego - IME-USP
- Prof. Dr. Valentin Raphael Henri Ferenczi - IME-USP
- Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui - UNICAMP
- Prof. Dr. Antonio Roberto da Silva - UFRJ
- Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi - ICMC-USP

Agradecimentos

Ao longo deste trabalho muitos foram os que de alguma forma me ajudaram e encorajaram a alcançar o seu término. Por essa razão, desejo expressar os meus sinceros agradecimentos:

Ao Professor Doutor Elói Medina Galego, meu orientador, pela competência científica, pela disponibilidade, pela amizade e generosidade reveladas ao longo deste período.

Aos membros da Comissão Julgadora pelas valiosas sugestões que contribuiram de forma significativa para o enriquecimento deste trabalho.

À minha amada esposa, Rita Cavalcanti, pelo inestimável apoio familiar, pela paciência e compreensão reveladas ao longo destes anos.

À minha família, meus pais Joaquim e Vera e meu irmão Leonardo, pelo enorme carinho e incentivo.

Ao Professor Doutor Daniel Victor Tausk pela valiosa ajuda sanando minhas inúmeras dúvidas sempre com brilhantismo e bom humor.

Aos Professores, Aleksander Pełczyński, Yoav Benyamini e Krzysztof Jarosz, por suas inestimáveis opiniões, sugestões e interesse pelo trabalho.

Aos grandes amigos, André Pierro de Camargo, Cesar Adriano Batista e Renato Alessandro Martins, pelo apoio.

Ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo pela oportunidade.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pelo apoio financeiro.

Mais uma vez, a todos os meus sinceros agradecimentos.

Resumo

Para um espaço localmente compacto de Hausdorff K e um espaço de Banach X, denotamos por $C_0(K, X)$ o espaço de todas as funções a valores em X contínuas sobre K que se anulam no infinito, munido da norma do supremo. No espírito do clássico teorema de Banach-Stone 1937, estabelecemos que se $C_0(K_1, X)$ é isomorfo a $C_0(K_2, X)$, onde X é um espaço de Banach de cotipo finito e tal que X é separável ou X^* tem a propriedade de Radon-Nikodým, então ou K_1 e K_2 são ambos finitos ou K_1 e K_2 tem a mesma cardinalidade. Trata-se de uma extensão vetorial de um resultado de Cengiz 1978, o caso escalar $X = \mathbb{R}$ ou $X = \mathbb{C}$.

Demonstramos também que se K_1 e K_2 são intervalos compactos de ordinais e X é um espaço de Banach de cotipo finito, então a existência de um isomorfismo T de $C(K_1, X)$ em $C(K_2, X)$ com $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$ implica que uma certa soma topológica finita de K_1 é homeomorfa a alguma soma topológica finita de K_2. Mais ainda, se X^n não contém subespaço isomorfo a X^{n+1} para todo $n \in \mathbb{N}$, então K_1 é homeomorfo a K_2. Em outras palavras, obtemos um teorema tipo Banach-Stone vetorial que é uma extensão de um teorema de Gordon de 1970 e ao mesmo tempo uma extensão de um teorema de Behrends e Cambern de 1988. Mostramos que se existe um isomorfismo T de $C(K_1)$ em um subespaço de $C(K_2, X)$ com $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$, então a cardinalidade do α-ésimo derivado de K_2 ou é finita ou é maior do que a cardinalidade do α-ésimo derivado de K_1, para todo ordinal α.

Em seguida, seja n um inteiro positivo, Γ um conjunto infinito munido da topologia discreta e X um espaço de Banach de cotipo finito. Estabelecemos que se o n-ésimo derivado de K for não vazio, então a distância de Banach-Mazur entre $C_0(K, X)$ e $C_0(\Gamma, X)$ é maior ou igual a $2n + 1$. Também demonstramos que para quaisquer inteiros positivos n e k, a distância de Banach-Mazur entre $C([1, \omega^n k], X)$ e $C_0(\mathbb{N}, X)$ é exatamente $2n + 1$. Estes resultados fornecem extensões vetoriais para alguns teoremas de Cambern de 1970.

Para um ordinal enumerável α, denotando por $C(\alpha)$ o espaço de Banach das funções contínuas no intervalo de ordinal $[1, \alpha]$, obtemos cotas superiores $H(n, k)$ e cotas inferiores $G(n, k)$ para as distâncias de Banach-Mazur entre os espaços $C(\omega)$ e $C(\omega^n k)$, $1 \leq n, k < \omega$, verificando $H(n, k) - G(n, k) < 2$. Estas estimativas fornecem uma resposta para uma questão de Bessaga e Pełczyński de 1960 sobre as distâncias de Banach-Mazur entre $C(\omega)$ e cada um dos espaços $C(\alpha)$, $\omega \leq \alpha < \omega^\omega$.

Palavras-chave: Espaços de Banach, Espaços de funções contínuas a valores vetoriais, Isomorfismos, Teorema de Banach-Stone, Distâncias de Banach-Mazur.

Abstract

For a locally compact Hausdorff space K and a Banach space X, we denote by $C_0(K, X)$ the space of X-valued continuous functions on K which vanish at infinity, endowed with the supremum norm. In the spirit of the classical 1937 Banach-Stone theorem, we prove that if $C_0(K_1, X)$ is isomorphic to $C_0(K_2, X)$, where X is a Banach space having finite cotype and such that X is separable or X^* has the Radon-Nikodým property, then either K_1 and K_2 are finite or K_1 and K_2 have the same cardinality. It is a vector-valued extension of a 1978 Cengiz result, the scalar case $X = \mathbb{R}$ or $X = \mathbb{C}$.

We also prove that if K_1 and K_2 are compact ordinal spaces and X is Banach space having finite cotype, then the existence of an isomorphism T from $C(K_1, X)$ onto $C(K_2, X)$ with $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$ implies that some finite topological sum of K_1 is homeomorphic to some finite topological sum of K_2. Moreover, if X^n contains no subspace isomorphic to X^{n+1} for every $n \in \mathbb{N}$, then K_1 is homeomorphic to K_2. In other words, we obtain a vector-valued Banach-Stone theorem which is an extension of a 1970 Gordon theorem and at same time an improvement of a 1988 Behrends and Cambern theorem. We show that if there is an embedding T of a $C(K_1)$ into $C(K_2, X)$ with $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$, then the cardinality of the α-th derivative of K_2 is either finite or greater than the cardinality of the α-th derivative of K_1, for every ordinal α.

Next, let n be a positive integer, Γ an infinite set with the discrete topology and X is a Banach space having finite cotype. We prove that if the n-th derivative of K is not empty, then the Banach Mazur distance between $C_0(K, X)$ and $C_0(\Gamma, X)$ is greater than or equal to $2n + 1$. Thus, we also show that for every positive integers n and k, the Banach Mazur distance between $C([1, \omega^n k], X)$ and $C_0(\mathbb{N}, X)$ is exactly $2n+1$. These results provide vector-valued versions of some 1970 Cambern theorems.

For a countable ordinal α, writing $C(\alpha)$ for the Banach space of continuous functions on the interval of ordinal $[1, \alpha]$, we give lower bounds $H(n, k)$ and upper bounds $G(n, k)$ on the Banach-Mazur distances between $C(\omega)$ and $C(\omega^n k)$, $1 \leq n, k < \omega$, such that $H(n, k) - G(n, k) < 2$. These estimates provide an answer to a 1960 Bessaga and Pełczyński question on the Banach-Mazur distances between $C(\omega)$ and each of the $C(\alpha)$ spaces, $\omega \leq \alpha < \omega^\omega$

Keywords: Banach spaces, Spaces of vector-valued continuous functions, Isomorphisms, Banach-Stone Theorem, Banach-Mazur distances.

Sumário

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	o conjunto dos números naturais.
$\mathbb{Q}$	o conjunto dos números racionais.
$\mathbb{R}$	o conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^+$	o conjunto dos números reais positivos.
$\mathbb{C}$	o conjunto dos números complexos.
$\mathbb{K}$	o conjunto $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$[0,1]$	o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$.
$[1,\alpha]$	o conjunto dos ordinais $\{\gamma : 1 \leq \gamma \leq \alpha\}$ munido da topologia da ordem.
ω	o primeiro ordinal infinito.
ω_1	o primeiro ordinal não enumerável.
$\|K\|$	a cardinalidade de um conjunto K.
$K_1 \dot{\cup} K_2$	a união disjunta dos conjuntos K_1 e K_2.
$K_1 \approx K_2$	os espaços topológicos K_1 e K_2 são homeomorfos.
B_X	a bola unitária fechada de um espaço normado X.
S_X	a esfera unitária de um espaço normado X.
$B_r(x)$	a bola aberta de centro x e raio r.
$\mathcal{L}(X,Y)$	o espaço dos operadores lineares contínuos de X em Y.
X^*	o espaço $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$.
$X \oplus Y$	o espaço $X \times Y$ munido da norma $\\|(x,y)\\| = \max\{\\|x\\|, \\|y\\|\}$.
l_∞^n	o espaço $\mathbb{K}^n$ munido da norma do máximo.
$C_0(K,X)$	espaço das funções contínuas de K em X que se anulam no infinito, munido da norma do supremo.
$C_0(K)$	o espaço $C_0(K,\mathbb{K})$.
$C(K,X)$	o espaço $C_0(K,X)$ se K é compacto.
$C(K)$	o espaço $C(K,\mathbb{K})$.
$C(\alpha)$	o espaço $C([1,\alpha])$, $\omega \leq \alpha < \omega_1$.
c	o espaço $C(\omega)$.
c_0	o espaço $C_0(\mathbb{N})$.
$\mathcal{B}(K)$	a menor σ-álgebra de subconjuntos de um espaço topológico K contendo todos os abertos de K.
$\mathrm{rcabv}\,(K,X)$	o espaço de Banach das medidas vetoriais $\mu : \mathcal{B}(K) \to X$ regulares, σ-aditivas e de variação limitada, munido da norma da variação.

$\mathbb{1}_A$	a função característica de um conjunto A.
$X \sim Y$	os espaços de Banach X e Y são isomorfos .
$X \overset{\lambda}{\sim} Y$	existe um isomorfismo linear sobrejetor T de X em Y tal que $\|T\|\|T^{-1}\| < \lambda$, para algum $1 < \lambda < \infty$.
$X \hookrightarrow Y$	o espaço de Banach Y contém um subespaço isomorfo a X.

Introdução

Neste trabalho estudamos alguns aspectos da teoria isomorfa dos espaços de Banach $C_0(K, X)$. Um desses aspectos remonta ao clássico teorema de Banach-Stone:

Teorema (Banach-Stone)**.** *Sejam K_1 e K_2 espaços compactos de Hausdorff. Se $C(K_1)$ e $C(K_2)$ são isometricamente isomorfos, então K_1 e K_2 são homeomorfos.*

Este resultado, obtido em 1932 por Banach [4] para compactos métricos e estendido em 1937 por Stone [50] para espaços compactos, foi generalizado em 1965 por Amir [3] para espaços compactos e, de forma independente, em 1967 por Cambern [13] para espaços localmente compactos. O resultado estabelece que se K_1 e K_2 são espaços localmente compactos de Haudorff e T é um isomorfismo linear sobrejetor de $C_0(K_1)$ em $C_0(K_2)$, se $\|T\|\|T^{-1}\| < 2$, então K_1 e K_2 são homeomorfos.

O teorema de Banach-Stone também foi generalizado para a classe dos espaços de Banach $C_0(K, X)$. Para espaços de Banach reais, a maior generalização até o presente momento, foi obtida em 1988 e é devida a Behrends e Cambern [6]. O resultado propõe que se X é *uniformemente não-quadrado*, ver [33, Definição 1.1], existe $1 < \lambda \leq 2$ tal que se K_1 e K_2 são espaços localmente compactos de Haudorff e T é um isomorfismo linear sobrejetor de $C_0(K_1, X)$ em $C_0(K_2, X)$ com $\|T\|\|T^{-1}\| < \lambda$, então K_1 e K_2 são homeomorfos.

No que se refere às relações conjuntísticas preservadas entre espaços localmente compactos de Hausdorff K_1 e K_2 sob um isomorfismo sobrejetor T de $C_0(K_1)$ em $C_0(K_2)$, um resultado não trivial obtido em 1978 por Cengiz [16], que de certa forma pode ser considerado uma *versão fraca* do teorema de Banach-Stone, estabelece que se os espaços $C_0(K_1)$ e $C_0(K_2)$ são isomorfos, então K_1 e K_2 têm a mesma cardinalidade.

Os resultados de Cengiz [16], Behrends e Cambern [6] sugerem o seguinte problema:

Problema. Sejam X um espaço de Banach uniformemente não-quadrado, K_1 e K_2 espaços localmente compactos de Hausdorff. Suponha que $C_0(K_1, X)$ e $C_0(K_2, X)$ sejam isomorfos. Nessas condições o que pode ser dito sobre as cardinalidades de K_1 e K_2?

No Capítulo 2 respondemos completamente esta questão, mais ainda, obtemos um resultado envolvendo uma classe mais geral de espaços de Banach, os espaços de *cotipo finito*, ver [21, p. 218].

Ainda nesta linha de pesquisa devemos recordar um resultado de Gordon de 1970, ver [31]. Para uma certa classe de espaços compactos, o autor estabelece outra extensão para o Teorema de Banach-Stone. Mais precisamente, se K_1 e K_2 são compactos métricos enumeráveis e T é um isomorfismo linear sobrejetor de $C(K_1)$ em $C(K_2)$ com $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$, então K_1 e K_2 são homeomorfos.

No Capítulo 3, inspirado em Gordon [31], buscamos extensões de seu resultado para $C(K, X)$, onde K é um compacto homeomorfo a um intervalo de ordinal e X é um espaço de Banach. Nosso objetivo é resolver o seguinte problema:

Problema. Sejam K_1 e K_2 espaços compactos métricos enumeráveis e X um espaço de Banach de cotipo finito. Suponha existir um isomorfismo sobrejetor T de $C(K_1, X)$ em $C(K_2, X)$ com $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$. Nestas condições, o que pode ser dito a respeito de K_1 e K_2? Para algum desses espaços X seria possível concluir que K_1 e K_2 são homeomorfos?

No Capítulo 4 abordamos outro aspecto da teoria isomorfa dos espaços de Banach $C_0(K, X)$. Desta vez, dado um isomorfismo sobrejetor T de $C_0(K_1)$ em $C_0(K_2)$, sabendo que os espaços K_1 e K_2 não são homeomorfos procuramos quantificar a distorção $\|T\|\|T^{-1}\|$. Estudamos inicialmente o caso $K_2 = \mathbb{N}$. Nesse sentido, voltamos nossa atenção para um tabalho de Cambern de 1968, ver [14], no qual foi estabelecido que a distância de Banach-Mazur entre os espaços c e c_0 é exatamente 3. Recorde que para espaços de Banach isomorfos X e Y a distância de Banach-Mazur é definida por

$$\mathrm{d}(X, Y) = \inf_{T} \left\{\|T\|\|T^{-1}\|\right\}$$

onde T percorre todos os isomorfismos sobrejetores de X em Y. O resultado de Cambern [14] sugere o seguinte problema:

Problema. Quais são os valores de $\mathrm{d}(C([1, \omega^n k]), c_0)$, $1 \leq n, k < \omega$?

Mais geralmente, se Γ é um espaço topológico discreto e K é um espaço localmente compacto de Hausdorff não discreto, a intuição sugere que um isomorfimo sobrejetor T de $C_0(K)$ em $C_0(\Gamma)$ deve *"destruir"* os pontos de acumulação de K e, por isso, é razoável pensar que $\|T\|\|T^{-1}\|$ cresce conforme aumenta a altura de K. De fato, no Capítulo 4 demonstramos que para um espaço de Banach X de cotipo finito, se T é um isomorfismo sobrejetor de $C_0(K, X)$ em $C_0(\Gamma, X)$ e se o n-ésimo derivado de K for não vazio, então $\|T\|\|T^{-1}\| \geq 2n + 1$. Também apresentamos uma solução completa para o problema anterior.

No Capítulo 5, seguindo a mesma linha de trabalho do Capítulo 4, estudamos os espaços de Banach $C(\alpha)$, $\omega \leq \alpha < \omega_1$. A classificação isomorfa destes espaços foi obtida em 1960 por Bessaga e Pełczyński [7]. Eles estabeleceram que se $\omega \leq \alpha \leq \beta < \omega_1$, então $C(\alpha)$ é isomorfo a $C(\beta)$ se e somente se existe $1 \leq n < \omega$ tal que $\alpha^n \leq \beta < \alpha^{n+1}$. Na ocasião, também foram obtidas estimativas para as distâncias de Banach-Mazur entre estes espaços: $n \leq \mathrm{d}(C(\alpha), C(\beta)) \leq 4^{n+3}$.

Bessaga e Pełczyński [7, p. 59] consideram o problema de se obter funções $G, H : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ satisfazendo

$$\sup(H(n)/G(n)) < \infty \quad \text{e} \quad G(n) \leq \mathrm{d}(C(\alpha), C(\beta)) \leq H(n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Inspirado em resultados de Cambern [14] e utilizando técnicas desenvolvidas no Capítulo 4, apresentamos estimativas como acima para o caso $\alpha = \omega$. Estas estimativas nos levam a conjecturar os valores exatos das distâncias de Banach-Mazur entre os espaços $C(\omega)$ e $C(\omega^n k)$, $1 \leq n, k < \omega$.

Capítulo 1

Medidas vetoriais e integração vetorial

1.1 Introdução

Nosso objetivo neste capítulo é reunir algumas ferramentas técnicas necessárias para abordar o estudo de funcionais lineares definidos sobre espaços de funções a valores vetoriais. Vamos apresentar algumas definições e propriedades básicas em teoria de medidas vetoriais e espaços de funções contínuas que serão utilizadas ao longo deste trabalho. Para um estudo mais detalhado sobre estes tópicos recomendamos [20], [22] e [23].

1.2 Medidas Vetoriais

Em princípio, utilizaremos a notação e a terminologia para teoria de medida e teoria de espaços de Banach que podem ser encontradas em [20] e [35]. Iniciamos com a seguinte definição:

Definição 1.1. Sejam K um conjunto não vazio, $\mathcal{A}$ uma álgebra de subconjuntos de K e X um espaço normado. Uma função $\mu : \mathcal{A} \to X$ é denominada *medida vetorial finitamente aditiva* se verificar para quaisquer $A, B \in \mathcal{A}$, com $A \cap B = \emptyset$,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Uma função $\mu : \mathcal{A} \to X$ é denominada *medida vetorial σ-aditiva* se para toda sequência $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos mutuamente disjuntos de $\mathcal{A}$ com união em $\mathcal{A}$, verificar

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Observação 1.2. Estaremos focados principalmente em medidas vetoriais σ-aditivas definidas em σ-álgebras. Contudo, o conceito de medida finitamente aditiva é fundamental na investigação de operadores lineares definidos sobre espaços de funções a valores vetoriais. Por simplicidade e sem possibilidade de confusão, por *medida vetorial* estaremos nos referindo tanto a uma medida finitamente aditiva quanto a uma medida σ-aditiva nas condições da Definição 1.1.

Um par ordenado (K, Σ), onde K é um conjunto e Σ é uma σ-álgebra sobre K, será chamado espaço mensurável.

Muitos dos resultados obtidos neste trabalho dependem do conceito de *variação* que recordaremos em seguida.

Definição 1.3. Sejam (K, Σ) um espaço mensurável, X um espaço de Banach e $\mu : \Sigma \to X$ uma medida vetorial. A *variação* de μ é a aplicação $|\mu|$ definida sobre Σ por

$$|\mu|(A) = \sup \sum_{k=1}^{n} \|\mu(A_k)\|, \ A \in \Sigma,$$

onde o supremo é tomado sob todas as partições finitas $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de A em Σ. Sempre que uma medida vetorial μ satisfizer $|\mu|(K) < \infty$, diremos que μ tem *variação limitada*.

Proposição 1.4. *Sejam (K, Σ) um espaço mensurável e X um espaço de Banach. Se $\mu : \Sigma \to X$ é uma medida vetorial de varição limitada e σ-aditiva (finitamente aditiva), sua variação $|\mu| : \Sigma \to \mathbb{R}$ é uma medida positiva e σ-aditiva (finitamente aditiva). Mais ainda, $|\mu|$ é a menor de todas as medidas positivas que cumprem $\mu(A) \leq |\mu|(A)$ para todo $A \in \Sigma$.*

Demonstração. Claramente $|\mu|(A) \geq 0$ para todo $A \in \Sigma$ e $|\mu|(A) \leq |\mu|(B)$ sempre que $A, B \in \Sigma$ e $A \subseteq B$.

Vamos verificar o caso em que μ é σ-aditiva. Para μ finitamente aditiva, a demonstração pode ser obtida com um argumento análogo.

Seja $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos mutuamente disjuntos de Σ. Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $\{B_1^i, \ldots, B_{n_i}^i\}$ uma partição de A_i em Σ satisfazendo

$$\sum_{j=1}^{n_i} \|\mu(B_j^i)\| \geq |\mu|(A_i) - \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Então, para qualquer subconjunto finito $J \subset \mathbb{N}$ podemos escrever

$$|\mu|\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq |\mu|\left(\bigcup_{i\in J} A_i\right) \geq \sum_{i\in J}\left(\sum_{j=1}^{n_i} \|\mu(B_j^i)\|\right) \geq \sum_{i\in J} |\mu|(A_i) - \epsilon.$$

Isso implica

$$|\mu|\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(A_i).$$

Por outro lado, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, seja $\{B_1, \ldots, B_n\}$ uma partição de $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ verificando

$$\sum_{j=1}^{n} \|\mu(B_j)\| \geq |\mu|\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \epsilon.$$

Claramente, para cada $i \in \mathbb{N}$, a coleção $\{A_i \cap B_1, \ldots, A_i \cap B_n\}$ forma uma partição de A_i em Σ. Podemos escrever

$$\|\mu(B_j)\| = \|\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B_j)\right)\| = \|\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap B_j)\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\mu(A_i \cap B_j)\|, \ 1 \leq j \leq n.$$

Consequentemente

$$|\mu|\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \epsilon \leq \sum_{j=1}^{n} \|\mu(B_j)\| \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} \|\mu(A_i \cap B_j)\|\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(A_i).$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, deduzimos que

$$|\mu|\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(A_i).$$

Para a segunda parte, seja λ outra medida positiva satisfazendo $\|\mu(A)\| \leq \lambda(A)$ para todo $A \in \Sigma$. Então, dada uma partição $\{A_1, \ldots, A_n\}$ arbitrária de A em Σ, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) = \lambda(A),$$

logo,

$$|\mu|(A) \leq \lambda(A).$$

□

1.3 Integração vetorial

Apresentaremos brevemente nesta seção um conceito simples de integração vetorial que terá um papel importante em nosso trabalho. Trata-se de um conceito de integração sobre medidas vetoriais a valores em duais de espaços normados. Para um estudo mais detalhado sobre este tópico recomendamos [22].

Nesta seção e ao longo deste trabalho, para um conjunto arbitrário A, denotaremos por $\mathbb{1}_A$ a função característica de A.

Definição 1.5. Sejam (K, Σ) um espaço mensurável e X um espaço de Banach. Uma função $f : K \to X$ será chamada de *simples* se existirem $v_1, \ldots, v_n \in X$ e $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ tais que

$$f = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}.$$

Observação. É possível verificar que toda função simples $f : K \to X$ pode ser escrita como

$$f = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \mathbb{1}_{A_i},$$

onde $v_1, \ldots, v_n \in X$ e $A_1, \ldots, A_n$ formam uma partição de K em Σ.

Para um espaço mensurável (K, Σ) e um espaço de Banach X, o conjunto de todas as funções simples de K em X, munido das operações usuais de adição de funções e multiplicação de função por escalar, é um espaço vetorial. A aplicação $f \mapsto \|f\| = \sup_{x \in K} \|f(x)\|$ define uma norma sobre este espaço. Este espaço normado será denotado por $\mathcal{S}(\Sigma, X)$.

Definição 1.6. Sejam (K, Σ) um espaço mensurável e X um espaço de Banach. Dizemos que uma função $f : K \to X$ é *mensurável* se existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{S}(\Sigma, X)$ tal que $f_n \to f$ pontualmente.

Teorema 1.7. *Sejam (K, Σ) um espaço mensurável e X um espaço de Banach. Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções de K em X, mensuráveis e convergindo pontualmente a f, então o limite f é mensurável.*

Demonstração. Ver N. Dinculeanu [22, Teorema 10, p. 6]. □

Medidas vetoriais a valores em duais topológicos de espaços normados desempenham papel fundamental no estudo de funcionais lineares contínuos sobre espaços de funções a valores vetoriais. A este tipo de medida dedicaremos nosso subsequente estudo neste capítulo.

Para um espaço de Banach X denotamos X^* seu dual topológico, i.e., o espaço de todos os funcionais lineares contínuos em X. A dualidade entre X^* e X será denotada por $\langle v^*, v\rangle$, $\langle v, v^*\rangle$ ou $v^*(v)$.

Proposição 1.8. *Sejam (K, Σ) um espaço mensurável e X um espaço de Banach. Se $\mu : \Sigma \to X^*$ é uma medida vetorial de variação limitada, então*

$$|\mu|(A) = \sup \left| \sum_{i=1}^{n} \langle \mu(A_i), v_i \rangle \right|, \; A \in \Sigma,$$

onde o supremo é tomado sob todas as partições finitas $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de A em Σ e $v_1, \ldots, v_n \in B_X$.

Demonstração. Fixe $A \in \Sigma$ arbitrário. Da definição de variação temos

$$|\mu|(A) \geq \sup \left| \sum_{i=1}^{n} \langle \mu(A_i), v_i \rangle \right|.$$

Resta apenas demonstrar a desigualdade contrária. Fixe $\epsilon > 0$ e uma partição qualquer $\{B_1, \ldots, B_m\}$ de A. Para cada $1 \leq j \leq m$ existe $u_j \in B_X$ satisfazendo

$$\|\mu(B_j)\| - \frac{\epsilon}{m} \leq \langle \mu(B_j), u_j \rangle.$$

Então

$$\sum_{j=1}^{m} \|\mu(B_j)\| - \epsilon \leq \sum_{j=1}^{m} \langle \mu(B_j), u_j \rangle \leq \sup \left| \sum_{i=1}^{n} \langle \mu(A_i), v_i \rangle \right|$$

e deduzimos que

$$|\mu|(A) \leq \sup \left| \sum_{i=1}^{n} \langle \mu(A_i), v_i \rangle \right| + \epsilon.$$

Por $\epsilon > 0$ ser arbitrário concluímos que

$$|\mu|(A) \leq \sup \left| \sum_{i=1}^{n} \langle \mu(A_i), v_i \rangle \right|.$$

□

Sejam (K, Σ) um espaço mensurável e $\mu : \Sigma \to X^*$ uma medida vetorial de variação limitada. Para cada $f = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \in \mathcal{S}(\Sigma, X)$ defina

$$S_\mu f = \sum_{i=1}^{n} \langle \mu(A_i), v_i \rangle. \tag{1.1}$$

Em virtude de μ ser finitamente aditiva, o valor de $S_\mu f$ independe da particular representação de f como uma função simples. Não é difícil verificar que a fórmula (1.1) define um funcional linear contínuo em $\mathcal{S}(\Sigma, X)$ e que, de acordo com a Proposição 1.8, verifica

$$\|S_\mu\| = |\mu|(K).$$

Denotando por $\mathcal{M}(\Sigma, X)$ o completamento de $\mathcal{S}(\Sigma, X)$, espaço cujos os elementos serão denominados *funções totalmente mensuráveis*, o funcional S_μ admite uma única extensão de mesma norma a $\mathcal{M}(\Sigma, X)$ que será denotada por

$$\int f d\mu,\ f \in \mathcal{M}(\Sigma, X).$$

Da mesma forma, dado $A \in \Sigma$, a aplicação $\mu_A(B) = \mu(B \cap A)$, define uma medida sobre Σ. O funcional linear associado a μ_A tem norma $|\mu|(A)$ e pode ser denotado

$$\int_A f d\mu = \int f d\mu_A,\ f \in \mathcal{M}(\Sigma, X).$$

Se $A, B \in \Sigma$ são disjuntos, então $\mu_{A\cup B} = \mu_A + \mu_B$. Com a notação acima podemos escrever

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int f d\mu_{A\cup B} = \int f d\mu_A + \int f d\mu_B = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu,\ f \in \mathcal{M}(\Sigma, X).$$

No caso escalar, no qual $X = \mathbb{R}$ ou $X = \mathbb{C}$, para funções totalmente mensuráveis a integração definida acima coincide com a integração abstrata usual desenvolvida em teoria da medida. A proposição seguinte combina esses dois conceitos.

Proposição 1.9. *Sejam (K, Σ) um espaço mensurável e $\mu : \Sigma \to X^*$ uma medida vetorial de variação limitada. Para cada $f \in \mathcal{M}(\Sigma, X)$ temos*

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int \|f(x)\| d|\mu|(x).$$

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{M}(\Sigma, X)$. Se f é simples, suponha $f = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$ onde $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ são mutuamente disjuntos. Então

$$\begin{aligned}\left|\int f d\mu\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \langle \mu(A_i), v_i\rangle\right| \leq \sum_{i=1}^n |\langle \mu(A_i), v_i\rangle| \leq \sum_{i=1}^n \|\mu(A_i)\| \|v_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|v_i\| |\mu|(A_i) = \int \|f(x)\| d|\mu|(x).\end{aligned}$$

Para o caso geral, seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{S}(\Sigma, X)$ convergindo uniformemente a f. Da continuidade do funcional $g \mapsto \int g d\mu$ temos

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\int f_n d\mu\right| = \left|\int f d\mu\right| \tag{1.2}$$

e como claramente $(\|f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\|f\|$ podemos escrever

$$\lim_{n\to+\infty} \int \|f_n(x)\| d|\mu|(x) = \int \|f(x)\| d|\mu|(x). \tag{1.3}$$

Já verificamos a proposição para funções simples. Assim,

$$\left|\int f_n d\mu\right| \leq \int \|f_n(x)\| d|\mu|(x),\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Combinando as relações (1.2), (1.3) e (1.4) temos

$$\left|\int f d\mu\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\int f_n d\mu\right| \leq \lim_{n\to+\infty}\int \|f_n(x)\| d\,|\mu|\,(x) = \int \|f(x)\| d\,|\mu|\,(x).$$

□

1.4 Representação de funcionais em $C_0(K, X)$

Nossa meta nesta seção é apresentar um breve estudo sobre funcionais lineares definidos em determinados espaços de funções contínuas. Como veremos na sequência, este estudo está intimamente ligado com o conceito de integração apresentado na Seção 1.3.

Definição 1.10. Sejam K um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff e X um espaço de Banach. Dizemos que uma função $f : K \to X$ se anula no infinito se para cada $\epsilon > 0$ existe um compacto $J \subset K$ tal que $\|f(x)\| < \epsilon$ para todo $x \in K \setminus J$.

Para um espaço localmente compacto de Hausdorff K e um espaço de Banach X, o conjunto de todas as funções contínuas $f : K \to X$ que se anulam no infinito, munido das operações usuais de adição de funções e multiplicação de função por escalar, formam um espaço vetorial, mais ainda, a aplicação $f \mapsto \|f\| = \sup_{x\in K}\|f(x)\|$ define uma norma completa sobre este espaço. Este espaço de Banach será denotado por $C_0(K, X)$. Se X for $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, este espaço será denotado por $C_0(K)$. Quando K for compacto estes espaços serão denotados por $C(K, X)$ e $C(K)$ respectivamente.

Observação 1.11. Sejam K um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff não compacto, $\overline{K} = K \,\dot{\cup}\, \{\infty\}$ o compactificado de Aleksandrov de K e X um espaço de Banach. O espaço $C_0(K, X)$ pode ser identificado de maneira natural com o subespaço de $C(\overline{K}, X)$ das funções contínuas $f : \overline{K} \to X$ satisfazendo $f(\infty) = 0$.

Teorema 1.12 (Lema de Urysohn)**.** *Sejam K um espaço localmente compacto de Hausdorff, U um aberto em K, $F \subset U$ e F é compacto. Então existe $f \in C_0(K)$ tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in K$, $f(x) = 1$ se $x \in F$ e $f(x) = 0$ se $x \in K \setminus U$.*

Demonstração. Se K for compacto, por K ser de Hausdorff, então K é normal. Podemos aplicar o Lema de Urysohn para espaços topológicos normais [25, Teorema 1.5.11] e concluir que existe $f \in C(K)$ tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in K$, $f(x) = 1$ se $x \in F$ e $f(x) = 0$ se $x \in K \setminus U$.

Se K for não compacto, como na Observação 1.11, identificamos o espaço $C_0(K)$ com o subespaço de $C(\overline{K})$ das funções contínuas $f : \overline{K} \to \mathbb{K}$ satisfazendo $f(\infty) = 0$. Por K ser localmente compacto de Hausdorff, seu compactificado de Aleksandrov $\overline{K}$ é normal. Por $F \subset K$ ser compacto, o conjunto F é fechado em $\overline{K}$. Podemos aplicar novamente o [25, Teorema 1.5.11] e obter uma função $f \in C(\overline{K})$ tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in \overline{K}$, $f(x) = 1$ se $x \in F$ e $f(x) = 0$ se $x \in \overline{K} \setminus U$. Por $f(\infty) = 0$, temos que $f \in C_0(K)$.

□

Para um espaço topológico K, a menor σ-álgebra contendo todos os abertos de K é chamada *σ-álgebra de Borel* e será denotada por $\mathcal{B}(K)$. Os elementos de $\mathcal{B}(K)$ serão chamados de *borelianos* de K. Uma medida vetorial ou escalar μ definida sobre $\mathcal{B}(K)$ será chamada de *medida de Borel*.

Para medidas de Borel, um conceito fundamental em nosso trabalho é o de regularidade que recordaremos em seguida.

Definição 1.13. Seja K um espaço topológico. Uma medida positiva $\mu : \mathcal{B}(K) \to \mathbb{R}$ será denominada *regular* se para todo boreliano B, satisfizer

$$\mu(B) = \inf\{\mu(U) : B \subset U,\ U \text{ é aberto}\} = \sup\{\mu(L) : L \subset B,\ L \text{ é compacto}\}.$$

Se μ for uma medida vetorial de Borel, diremos que μ é regular quando $|\mu|$ for regular no sentido acima.

Sejam K um espaço localmente compacto de Hausdorff e X um espaço de Banach. O conjunto de todas medidas $\mu : \mathcal{B}(K) \to X$ regulares, σ-aditivas e de variação limitada, munido das operações usuais de adição de medidas e multiplicação de medida por escalar, é um espaço vetorial. A aplicação $\mu \mapsto \|\mu\| = |\mu|(K)$ define uma norma completa sobre este espaço que será denotado por $\mathrm{rcabv}(K, X)$. Se X for $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ este espaço será denotado simplesmente por $\mathrm{rcabv}(K)$.

Observação 1.14. Por simplicidade, para um espaço topológico K localmente compacto de Hausdorff estaremos assumindo de maneira implícita a σ-álgebra $\mathcal{B}(K)$. Também por simplicidade, para o espaço mensurável $(K, \mathcal{B}(K))$ e um espaço de Banach X, o espaço das funções simples mensuráveis munido da norma do supremo, introduzido na Seção 1.3, será denotado por $\mathcal{S}(K, X)$ e seu completamento por $\mathcal{M}(K, X)$.

Proposição 1.15. *Sejam K um espaço localmente compacto de Hausdorff e X um espaço de Banach. Para toda função $f \in C_0(K, X)$ existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{S}(K, X)$ convergindo uniformemente a f e tal que $\|f_n\| \leq \|f\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja $f \in C_0(K, X)$ e sem perda de generalidade vamos supor que $\|f\| = 1$. Fixado $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto $L_n = \{x \in K : \|f(x)\| \geq \frac{1}{n}\}$ que é não vazio e compacto, pois a função f é contínua e se anula no infinito. Para cada $x \in L_n$ defina

$$U_x = f^{-1}\left(B_{\frac{1}{n}}(f(x))\right).$$

Note-se que $\{U_x : x \in K\}$ é um recobrimento aberto de L_n. Por compacidade, existem pontos distintos $x_1, \ldots, x_m \in L_n$ tais que

$$L_n \subset U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_m}.$$

Em seguida, para cada $1 \leq i \leq m$ defina

$$A_i = U_{x_i} \setminus \bigcup_{j<i} U_{x_j} \quad \text{e} \quad f_n = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) \cdot \mathbb{1}_{A_i}.$$

Para cada $x \in K$, se $x \in K \setminus (U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_m})$, então $x \notin L_n$ e $f_n(x) = 0$, logo

$$\|f(x) - f_n(x)\| = \|f(x)\| < \frac{1}{n}.$$

Por outro lado, se $x \in U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_m}$, então existe um único $1 \leq i \leq m$ tal que $x \in A_i$. Temos

$$\|f(x) - f_n(x)\| = \|f(x) - f(x_i)\| < \frac{1}{n}.$$

Portanto $\|f - f_n\| \leq \frac{1}{n}$ e dessa forma, podemos construir uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples convergindo uniformemente a f. Mais ainda, segue imediatamente da construção de cada f_n que $\|f_n\| \leq \|f\|$.

□

Teorema 1.16. *Sejam K um espaço localmente compacto de Hausdorff e $\mu \in \mathrm{rcabv}(K, X^*)$. Para cada aberto $U \subseteq K$ seja $\mathcal{F}_U = \{f \in C_0(K, X) : \|f\| \leq 1$ e $f(x) = 0$ se $x \in K \setminus U\}$. Então*

$$|\mu|(U) = \sup_{\mathcal{F}_U} \left| \int f d\mu \right|.$$

Demonstração. Seja $U \subseteq K$ um aberto não vazio. Dado $\epsilon > 0$, de acordo com a Proposição 1.8, existe uma função simples $g = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$, onde $v_1, \ldots, v_n \in B_X$ e $A_1, \ldots, A_n$ formam uma partição de U em $\mathcal{B}(K)$, satisfazendo

$$|\mu|(U) < \frac{\epsilon}{2} + \left|\sum_{i=1}^{n} \langle \mu(A_i), v_i \rangle\right| = \frac{\epsilon}{2} + \left|\int g d\mu\right|. \tag{1.5}$$

Devido à regularidade de $|\mu|$, existem abertos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ e compactos $J_1, J_2, \ldots, J_n$ satisfazendo

$$J_i \subset A_i \subset U_i \subset U \quad \text{e} \quad |\mu|(U_i \setminus J_i) < \frac{\epsilon}{2n(\|v_i\| + 1)}, \quad 1 \le i \le n.$$

Aplicando o Lema de Urysohn 1.12, podemos obter funções $h_i \in C_0(K)$, $1 \le i \le n$, tais que $0 \le h_i(x) \le 1$ para todo $x \in K$, $h_i(x) = 1$ se $x \in J_i$ e $h_i(x) = 0$ se $x \in K \setminus U_i$. Como os compactos $J_1, \ldots, J_n$ são mutuamente disjuntos, as funções $h_1, \ldots, h_n$ podem ser escolhidas com suportes mutuamente disjuntos. Defina $h : K \to X$ por

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot h_i(x).$$

Claramente $h \in \mathcal{F}_U$. Utilizando a Proposição 1.9 podemos escrever

$$\begin{aligned}
\left|\int g d\mu - \int h d\mu\right| &= \left|\int (g - h) d\mu\right| \le \int \|g - h\| d|\mu| \le \sum_{i=1}^{n} \left(\|v_i\| \int \left|\mathbb{1}_{A_i} - h_i\right| d|\mu|\right) \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \left(\|v_i\| \int \mathbb{1}_{(U_i \setminus K_i)} d|\mu|\right) \le \sum_{i=1}^{n} (\|v_i\| \cdot |\mu|(U_i \setminus K_i)) \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \frac{\|v_i\| \epsilon}{2n(\|v_i\| + 1)} < \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Então, retomando a relação (1.5), deduzimos

$$|\mu|(U) < \frac{\epsilon}{2} + \left|\int g d\mu\right| < \epsilon + \left|\int h d\mu\right| \le \epsilon + \sup_{\mathcal{F}_U} \left|\int f d\mu\right|.$$

Por ϵ ser arbitrário, resulta

$$|\mu|(U) \le \sup_{\mathcal{F}_U} \left|\int f d\mu\right|.$$

Por outro lado, fixe $f \in \mathcal{F}_U$ arbitrária. Se f não for a função nula, podemos supor sem perda de generalidade que $\|f\| = 1$. Neste caso, seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{S}(K, X)$, construída como na demonstração da Proposição 1.15, que converge uniformemente a f e que satisfaz $\|f_n\| \le 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, por $f_n(x) = 0$ se $x \in K \setminus U$, podemos escrever $f_n = \sum_{i=1}^{r_n} v_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$, onde $v_1, \ldots, v_{r_n} \in B_X$ e $A_1, \ldots, A_{r_n}$ formam uma partição de U em $\mathcal{B}(K)$. Assim,

$$\left|\int f_n d\mu\right| = \left|\sum_{i=1}^{r_n} \langle \mu(A_i), v_i \rangle\right| \le |\mu|(U).$$

Passando-se ao limite na expressão acima para n tendendo ao infinito obtemos

$$\left|\int f d\mu\right| \leq |\mu|(U).$$

Por $f \in \mathcal{F}_U$ ser arbitrária, temos

$$\sup_{\mathcal{F}_U}\left|\int f d\mu\right| \leq |\mu|(U)$$

.

□

Para um espaço localmente compacto de Hausdorff K e um espaço de Banach X, de acordo com a Proposição 1.15, temos $C_0(K,X) \subset \mathcal{M}(K,X)$. Assim, dado um funcional linear contínuo φ sobre $C_0(K,X)$, por uma aplicação do teorema Hahn-Banach, φ se estende a um funcional linear contínuo $\overline{\varphi}$ sobre $\mathcal{M}(K,X)$ de mesma norma. Note-se que ao funcional $\overline{\varphi}$ podemos associar a aplicação $\mu : \mathcal{B}(K) \to X^*$ definida para cada $A \in \mathcal{B}(K)$ e cada $v \in X$ por

$$\langle \mu(A), v\rangle = \overline{\varphi}(\mathbb{1}_A \cdot v).$$

Não é difícil verificar que μ é uma medida vetorial finitamente aditiva e que satisfaz

$$\|\varphi\| = |\mu|(K) \quad \text{e} \quad \overline{\varphi}(f) = \int f d\mu,\ f \in C_0(K,X). \tag{1.6}$$

Naturalmente, a extensão $\overline{\varphi}$ não está univocamente determinada assim como a medida μ correspondente. Para medidas escalares, o clássico *Teorema de Representação de Riesz* [45, Teorema 6.19] estabelece que o dual de $C_0(K)$ pode ser identificado com $\mathrm{rcabv}(K)$ via teoria de integração. Um resultado de I. Singer determina que dentre todas as medidas μ que cumprem (1.6) existe uma única em $\mathrm{rcabv}(K,X^*)$. Trata-se de uma extensão do Teorema de Representação de Riesz para os espaços $C_0(K,X)$.

Teorema 1.17 (Representação de Riesz-Singer)**.** *Existe um isomorfismo isométrico entre* $C_0(K,X)^*$ *e* $\mathrm{rcabv}(K,X^*)$*, onde cada funcional* $\varphi \in C_0(K,X)^*$ *e a medida* $\mu \in \mathrm{rcabv}(K,X^*)$ *correspondente se relacionam pela seguinte fórmula integral*

$$\varphi(f) = \int f d\mu\ ,\ f \in C_0(K,X),$$

com $\|\varphi\| = |\mu|(K)$.

Para a demonstração deste teorema, no caso em que K é compacto, recomendamos [32] e também [48, Lema 1.6, p. 193]. Para K localmente compacto, o teorema pode ser obtido do caso compacto como explicado em [11, p. 2]. Para uma demonstração detalhada do caso localmente compacto recomendamos [40].

Observação 1.18. A demonstração original do Teorema 1.17 descoberta por I. Singer em [49] é incompleta. Este resultado, até onde sabemos, foi completado pela primeira vez por J. Gil de Lamadrid em [30].

1.5 O Teorema de Radon-Nikodým

Nesta seção apresentaremos um teorema tipo Radon-Nikodým para medidas vetoriais. Este resultado terá importantes aplicações nos subsequentes capítulos.

Sejam (K, Σ) um espaço mensurável e X um espaço de Banach. Recordamos que uma medida vetorial $\mu : \Sigma \to X$ é *absolutamente contínua* com relação a uma medida positiva $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ e escrevemos $\mu \ll \lambda$, se

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} \mu(A) = 0.$$

Observação. Devemos notar que $\mu \ll \lambda$ *não* significa que $\mu(A) = 0$ sempre que $\lambda(A) = 0$, a menos que μ e λ sejam ambas σ-aditivas.

Recordamos em seguida um teorema clássico, [45, Teorema 6.10].

Teorema 1.19 (Radon-Nikodým)**.** *Sejam $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ uma medida positiva e σ-aditiva, $\mu : \Sigma \to \mathbb{K}$ uma medida σ-aditiva de variação limitada satisfazendo $\mu \ll \lambda$. Então existe uma função $\gamma : K \to \mathbb{K}$ mensurável, integrável e satisfazendo*

$$\mu(A) = \int_A \gamma d\lambda \quad e \quad |\mu|(A) = \int_A |\gamma| d\lambda, \;\; A \in \Sigma.$$

Para medidas vetoriais $\mu : \Sigma \to X$ sabemos que não existem, em geral, densidades γ mensuráveis satisfazendo conclusão semelhante a do Teorema 1.19, isto só ocorre quando X tem a *propriedade de Radon-Nikodým.*

Um espaço de Banach X tem a propriedade de Radon-Nikodým (ou P.R.N.) se para qualquer espaço mensurável (K, Σ), qualquer medida positiva e σ-aditiva $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ e qualquer medida vetorial σ-aditiva de variação limitada $\mu : \Sigma \to X$ tal que $\mu \ll \lambda$, existir uma função $\gamma : K \to X$ mensurável, Bochner integrável e que verifica, para todo $A \in \Sigma$, a relação

$$\mu(A) = \int_A \gamma d\lambda. \text{ (Bochner)}$$

Exemplos de espaços de Banach com essa propriedade são: espaços reflexivos [20, Corolário 13, p. 76] e espaços duais separáveis [20, Teorema 1, p. 79].

Inspirado em [22, Teorema 34, p. 37], apresentaremos uma versão do teorema de Radon-Nikodým para medidas a valores em X^* sem a imposição dos espaços envolvidos possuirem a propriedade de Radon-Nikodým. Todavia, a densidade γ obtida é apenas w^*-mensurável.

Definição 1.20. Sejam (K, Σ) um espaço mensurável e X um espaço de Banach. Dizemos que uma função $f : K \to X^*$ é w^*-mensurável se para todo $v \in X$ a função numérica

$$x \mapsto \langle f(x), v\rangle$$

for mensurável no sentido usual.

Recordamos que uma propriedade $P(x)$ definida para cada $x \in K$ é dita verdadeira μ-qs ou *μ-quase sempre* se o conjunto $N = \{x \in K : P(x) \text{ é falsa}\}$ está contido em algum $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$.

Teorema 1.21. *Sejam K um espaço localmente compacto de Hausdorff, X um espaço de Banach separável e $\mu \in \mathrm{rcabv}(K, X^*)$. Existe uma função $\gamma : K \to X^*$ w^*-mensurável, tal que $\|\gamma(x)\| = 1$ para todo $x \in K$ e que verifica*

$$\langle \mu(A), u\rangle = \int_A \langle \gamma(x), u\rangle d|\mu|(x), \;\; A \in \mathcal{B}(K) \; e \; u \in X.$$

Demonstração. Para cada $v \in X$ defina a aplicação $\mu_v : \mathcal{B}(K) \to \mathbb{K}$ por

$$\mu_v(A) = \langle \mu(A), v\rangle, \;\; A \in \mathcal{B}(K).$$

Claramente $\mu_v \in \text{rcabv}(K)$ e $\mu_v \ll |\mu|$. De acordo com o Teorema de Radon-Nikodým 1.19, existe uma função $\gamma_v : K \to \mathbb{K}$ mensurável, integrável e satisfazendo

$$\mu_v(A) = \int_A \gamma_v d|\mu| \ \text{ e } \ |\mu_v|(A) = \int_A |\gamma_v| d|\mu|, \ A \in \mathcal{B}(K). \tag{1.7}$$

Seja $\mathcal{N}(v) = \{x \in K : |\gamma_v|(x) > \|v\|\}$ e defina para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto

$$A_n = \left\{ x \in K : |\gamma_v|(x) \geq \|v\| + \frac{1}{n} \right\}.$$

Temos $\mathcal{N}(v) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e

$$\left(\|v\| + \frac{1}{n}\right) |\mu|(A_n) \leq \int_{A_n} |\gamma_v| d|\mu| = |\mu_v|(A_n) \leq \|v\| \cdot |\mu|(A_n), \ n \in \mathbb{N}.$$

Então, $|\mu|(A_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e deduzimos que $|\mu|(\mathcal{N}(v)) = 0$.

Concluímos que para cada $v \in X$ existe uma função mensurável $\gamma_v : K \to \mathbb{K}$ que verifica (1.7), um boreliano $\mathcal{N}(v)$ com $|\mu|(\mathcal{N}(v)) = 0$ e vale

$$|\gamma_v|(x) \leq \|v\|, \ x \in K \setminus \mathcal{N}(v). \tag{1.8}$$

Para cada $u, v \in X$ e $a, b \in \mathbb{K}$ temos

$$\mu_{au+bv} = a\mu_u + b\mu_v.$$

Então, para cada $A \in \mathcal{B}(K)$ vale a relação

$$\int_A \gamma_{au+bv} d|\mu| = \mu_{au+bv}(A) = a\mu_u(A) + b\mu_v(A) = \int_A (a\gamma_u + b\gamma_v) d|\mu|$$

e portanto

$$\gamma_{au+bv}(x) = a\gamma_u(x) + b\gamma_u(x), \ \mu\text{-qs.} \tag{1.9}$$

Podemos fixar um boreliano $\mathcal{M}(a, b, u, v)$ tal que $|\mu|(\mathcal{M}(a, b, u, v)) = 0$ de forma que a relação (1.9) se verifique para todo $x \in K \setminus \mathcal{M}(a, b, u, v)$.

Em seguida, seja $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência densa em X. Denote por $\mathbb{K}_\mathbb{Q}$ o corpo $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$, conforme X seja um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ respectivamente e seja X_0 o espaço normado gerado sobre $\mathbb{K}_\mathbb{Q}$ por $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$. Claramente, X_0 é enumerável e denso em X.

Defina

$$\mathcal{N} = \bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{K}_\mathbb{Q} \\ u,v\in X_0}} (\mathcal{N}(au + bv) \cup \mathcal{M}(a, b, u, v))$$

e observe que $\mathcal{N} \in \mathcal{B}(K)$ e $|\mu|(\mathcal{N}) = 0$.

Para cada $v \in X_0$ vamos redefinir γ_v em $\mathcal{N}$ por 0. Assim, quaisquer que sejam $u, v \in X_0$ e $a, b \in \mathbb{K}_\mathbb{Q}$, as relações (1.8) e (1.9) são verdadeiras em todo K.

Para cada $x \in K$ considere $\varphi_x : X_0 \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi_x(v) = \gamma_v(x), \ v \in X_0.$$

Em virtude de (1.8) e (1.9) serem verdadeiras em todo K, a função φ_x é linear e contínua em X_0. Portanto, o funcional φ_x admite uma única extensão de mesma norma a X e que por simplicidade também será denotada por φ_x.

Defina a função $\gamma : K \to X^*$ como $\gamma(x) = \varphi_x$, $x \in K$.

Para demonstrar que γ é w^*-mensurável fixe $u \in X$ arbitrário e seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X_0 convergindo a u. Para cada $n \in \mathbb{N}$, por construção, a aplicação

$$x \mapsto \varphi_x(u_n) = \gamma_{u_n}(x)$$

é mensurável. Consequentemente, a aplicação

$$x \mapsto \langle \gamma(x), u\rangle = \varphi_x(u) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_x(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \gamma_{u_n}(x)$$

é mensurável, pois trata-se de um limite pontual de funções mensuráveis.

Em seguida, fixe $A \in \mathcal{B}(K)$ e $u \in X$ arbitrários. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X_0 convergindo a u. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [45, Teorema 1.34] obtemos

$$\begin{aligned}\langle \mu(A), u\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \langle \mu(A), u_n\rangle = \lim_{n\to+\infty} \mu_{u_n}(A) = \lim_{n\to+\infty} \int_A \gamma_{u_n}(x) d|\mu|(x) \qquad (1.10)\\ &= \int_A \lim_{n\to+\infty} \gamma_{u_n}(x)d|\mu|(x) = \int_A \varphi_x(u)d|\mu|(x) = \int_A \langle \gamma(x), u\rangle d|\mu|.\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\langle \mu(A), u\rangle = \int_A \langle \gamma(x), u\rangle d|\mu|(x),\ A \in \mathcal{B}(K) \text{ e } u \in X. \qquad (1.11)$$

Vamos verificar agora que a função γ pode ser redefinida em um conjunto de medida nula de modo a satisfazer, além da relação (1.11), $\|\gamma(x)\| = 1$ para todo $x \in K$.

Seja $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência densa em S_X. Por $x \mapsto \langle \gamma(x), e_n\rangle$ ser mensurável para todo n, decorre que

$$x \mapsto \|\gamma(x)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle \gamma(x), e_n\rangle|$$

é mensurável. De acordo com (1.11) temos

$$|\langle \mu(A), e_n\rangle| = \left|\int_A \langle \gamma(x), e_n\rangle d|\mu|(x)\right| \le \int_A \|\gamma(x)\|d|\mu|(x),\ A \in \mathcal{B}(K) \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Deduzimos que

$$|\mu|(A) \le \int_A \|\gamma(x)\|d|\mu|(x),\ A \in \mathcal{B}(K).$$

Por outro lado, em virtude de $\|\gamma(x)\| \le 1$ para todo $x \in K$, temos

$$\int_A \|\gamma(x)\|d|\mu|(x) \le |\mu|(A),\ A \in \mathcal{B}(K).$$

Consequentemente

$$|\mu|(A) = \int_A \|\gamma(x)\|d|\mu|(x),\ A \in \mathcal{B}(K). \qquad (1.12)$$

Por (1.12), inferimos que $\|\gamma(x)\| = 1$, $|\mu|$-qs. Assim, podemos redefinir γ em um conjunto de medida nula de modo a satisfazer $\|\gamma(x)\| = 1$ para todo $x \in K$.

□

O Teorema 1.21 é verdadeiro sob condições mais gerais e sem a hipótese de X ser separável. A demonstração envolve o uso de *Teoria de Lifting* e pode ser encontrada em [20, Teorema 5, p. 269], veja também [15, Teorema 1.5.3, p.22]. Para benefício do leitor enunciaremos, sem demonstração, este resultado.

Teorema 1.22. *Sejam (K, Σ) um espaço mensurável, $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ uma medida positiva, σ-aditiva e completa, $\mu : \Sigma \to X^*$ uma medida σ-aditiva e de varição limitada tal que $\mu \ll \lambda$. Então existe uma função $\gamma : K \to X^*$ w^*-mensurável verificando as seguintes condições:*

(a) A função $x \to \|\gamma(x)\|$ é mensurável e integrável com respeito a λ.

(b) Para todo $v \in X$ e todo $A \in \Sigma$

$$\langle \mu(A), v \rangle = \int_A \langle \gamma(x), v \rangle d\lambda(x).$$

(c) Para todo $A \in \Sigma$

$$|\mu|(A) = \int_A \|\gamma(x)\| d\lambda(x).$$

Proposição 1.23. *Sejam K um espaço localmente compacto de Hausdorff e X um espaço de Banach. Se X é separável ou X^* tem a propriedade de Radon-Nikodým, então para cada $\mu \in$ $\mathrm{rcabv}(K, X^*)$ existe uma função $\gamma : K \to X^*$ w^*-mensurável verificando as seguintes condições:*

(a) $\|\gamma(x)\| = 1$ para todo $x \in K$

(b) Para toda $f \in C_0(K, X)$, a função $x \mapsto \langle \gamma(x), f(x) \rangle$ é mensurável

(c) Para toda $f \in C_0(K, X)$

$$\int f d\mu = \int \langle \gamma(x), f(x) \rangle d|\mu|(x).$$

Mais ainda, no caso em que X^* tem a propriedade de Radon-Nikodým, γ pode ser escolhida mensurável.

Demonstração. Se X for separável, de acordo com o Teorema 1.21, existe uma função $\gamma : K \to X^*$ w^*-mensurável, tal que $\|\gamma(x)\| = 1$ para todo $x \in K$ e verificando

$$\langle \mu(A), v \rangle = \int_A \langle \gamma(x), v \rangle d|\mu|(x), \ A \in \mathcal{B}(K) \text{ e } v \in X. \tag{1.13}$$

Se X tem a propriedade de Radon-Nikodým, em virtude de $\mu \ll |\mu|$, existe por definição uma função $\gamma : K \to X^*$ mensurável, Bochner integrável e que verifica, para todo $A \in \mathcal{B}(K)$,

$$\mu(A) = \int_A \gamma d|\mu|. \text{ (Bochner)}$$

Observe que a relação (1.13) também é verdadeira neste caso. Mais ainda, de acordo com [20, Teorema 4.(iv), p. 46], vale

$$|\mu|(A) = \int_A \|\gamma(x)\| d|\mu|(x), \ A \in \mathcal{B}(K)$$

e decorre que $\|\gamma(x)\| = 1$, $|\mu|$-qs. Assim, podemos redefinir γ em um conjunto de medida nula de modo a satifazer, além da relação (1.13), $\|\gamma(x)\| = 1$ para todo $x \in K$.

Para ambos os casos, X é separável ou X^* tem a propriedade de Radon-Nikodým, seja $f \in C_0(K, X)$ arbitrária. De acordo com a Proposição 1.15, podemos fixar uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{S}(K, X)$ convergindo uniformemente a f e tal que $\|f_n\| \leq \|f\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Claramente, para todo $n \in \mathbb{N}$, a aplicação $x \mapsto \langle \gamma(x), f_n(x) \rangle$ é mensurável. Consequentemente,

$$x \mapsto \langle \gamma(x), f(x) \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle \gamma(x), f_n(x) \rangle$$

é mensurável, pois trata-se de um limite pontual de funções mensuráveis.

Além disso, para todo $x \in K$ e todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$|\langle \gamma(x), f_n(x) \rangle| \leq \|\gamma(x)\| \|f_n(x)\| \leq \|f\|.$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [45, Teorema 1.34] obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \int \langle \gamma(x), f_n(x) \rangle d|\mu|(x) = \int \langle \gamma(x), f(x) \rangle d|\mu|(x). \tag{1.14}$$

Em seguida, fixe $n \in \mathbb{N}$. Podemos supor que

$$f_n = \sum_{i=1}^{r_n} v_i \cdot \mathbb{1}_{B_i},$$

onde $B_1, \ldots, B_n$ é uma partição de K em $\mathcal{B}(K)$. Utilizando a relação (1.13) escrevemos

$$\begin{aligned} \int f_n d\mu &= \sum_{i=1}^{r_n} \langle \mu(B_i), v_i \rangle = \sum_{i=1}^{r_n} \int_{B_i} \langle \gamma(x), v_i \rangle d|\mu|(x) \\ &= \sum_{i=1}^{r_n} \int \mathbb{1}_{B_i}(x) \cdot \langle \gamma(x), v_i \rangle d|\mu|(x) = \sum_{i=1}^{r_n} \int \langle \gamma(x), v_i \cdot \mathbb{1}_{B_i}(x) \rangle d|\mu|(x) \\ &= \int \langle \gamma(x), \sum_{i=1}^{r_n} v_i \cdot \mathbb{1}_{B_i}(x) \rangle d|\mu|(x) = \int \langle \gamma(x), f_n(x) \rangle d|\mu|(x). \end{aligned}$$

Concluímos que

$$\int f_n d\mu = \int \langle \gamma(x), f_n(x) \rangle d|\mu|(x), \; n \in \mathbb{N}. \tag{1.15}$$

Combinando as relações (1.14) e (1.15) e utilizando a continuidade do funcional linear $f \mapsto \int f d\mu$ obtemos

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu = \lim_{n \to \infty} \int \langle \gamma(x), f_n(x) \rangle d|\mu|(x) = \int \langle \gamma(x), f(x) \rangle d|\mu|(x).$$

□

Capítulo 2

Sobre isomorfismos entre espaços de Banach $C_0(K, X)$ e a cardinalidade de K

2.1 Introdução

Dado um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff K e um espaço de Banach X denotamos por $C_0(K, X)$ o espaço das funções contínuas de K em X que se anulam no infinito, munido da norma do supremo. Se X for $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, este espaço será denotado por $C_0(K)$. Se K for compacto estes espaços serão denotados por $C(K, X)$ e $C(K)$ respectivamente.

Definição 2.1. Sejam X e Y espaços de Banach. Um *isomorfismo* de X em Y é um operador linear $T : X \to Y$ contínuo, injetor e com imagem fechada. O número $\|T\|\|T^{-1}\|$ será denominado *distorção* de T.

Dados espaços de Banach X e Y, se existir um isomorfismo sobrejetor de X em Y, diremos que X e Y são isomorfos e escreveremos $X \sim Y$. Para enfatizar que existe um isomorfismo sobrejetor com distorção estritamente menor que λ, para algum $1 < \lambda < \infty$, escreveremos $X \overset{\lambda}{\sim} Y$. Se existir um isomorfismo sobrejetor $T : X \to Y$ com distorção $\|T\|\|T^{-1}\| = 1$ diremos que X e Y são isometricamente isomorfos.

Para espaços topológicos compactos de Hausdorff K_1 e K_2, o clássico teorema de Banach-Stone afirma que se $C(K_1)$ e $C(K_2)$ forem isometricamente isomorfos, então K_1 e K_2 são homeomorfos (mais simplesmente, $K_1 \approx K_2$). Este resultado foi obtido por S. Banach [4] para compactos métricos e estendido por M. H. Stone [50] para compactos de Hausdorff. De forma independente, em [3] e [13], este resultado foi generalizado como se segue:

Teorema 2.2 (Amir-Cambern)**.** *Sejam K_1 e K_2 espaços localmente compactos de Hausdorff. Então*

$$C_0(K_1) \overset{2}{\sim} C_0(K_2) \Longrightarrow K_1 \approx K_2.$$

Quando K_1 é compacto e K_2 é não compacto, foi estabelecido por Cambern [9] que 2 é a melhor constante para o teorema acima. Para o caso no qual K_1 e K_2 são compactos este fato foi estabelecido por Cohen [18].

Surge em seguida a questão sobre quais relações topológicas são preservadas sob a existência de um isomorfismo sobrejetor $T : C_0(K_1) \to C_0(K_2)$ com $\|T\|\|T^{-1}\| \leq n$. Um fato interessante e não trivial estabelecido por Cengiz [16], sem a hipótese de limitação sobre a distorção, é uma *versão fraca* do Teorema 2.2 que apresentaremos em seguida. A cardinalidade de um conjunto K será denotada por $|K|$.

Teorema 2.3 (Cengiz)**.** *Sejam K_1 e K_2 espaços localmente compactos de Hausdorff. Então*

$$C_0(K_1) \sim C_0(K_2) \Longrightarrow |K_1| = |K_2|.$$

O teorema de Banach-Stone foi também generalizado para espaços de funções contínuas assumindo valores em um espaço de Banach. Para espaços de Banach reais, a maior generalização até então é devida a Behrends e Cambern, veja [6]. Para mais generalizações vetoriais do Teorema 2.2 veja também [34].

Teorema 2.4 (Behrends-Cambern)**.** *Seja X um espaço de Banach uniformemente não-quadrado. Então existe $1 < \lambda \leq 2$ tal que para quaisquer espaços localmente compactos de Hausdorff K_1 e K_2,*

$$C_0(K_1, X) \overset{\lambda}{\sim} C_0(K_2, X) \Longrightarrow K_1 \approx K_2.$$

Recordamos que um espaço de Banach X é *uniformemente não-quadrado*, ver [33], se existir $0 < \delta$ tal que

$$x,\ y \in B_X \Longrightarrow \left\| \frac{x-y}{2} \right\| \leq 1-\delta \quad \text{ou} \quad \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1-\delta.$$

Como exemplos de espaços de Banach uniformemente não quadrados destacamos os espaços l_p, $1 < p < \infty$, ver [17]. Por outro lado, é simples verificar que c_0 e l_1 não possuem essa propriedade.

Os teoremas 2.3 e 2.4 sugerem, de maneira natural, o seguinte problema:

Problema 2.5. Sejam X um espaço de Banach *uniformemente não-quadrado*, K_1 e K_2 espaços localmente compactos de Hausdorff tais que

$$C_0(K_1, X) \sim C_0(K_2, X).$$

Nessas condições o que pode ser dito sobre as cardinalidades de K_1 e K_2?

Neste capítulo daremos uma resposta completa a esta questão. Demonstraremos um resultado mais geral no que diz respeito a isomorfismos entre espaços $C_0(K, X)$. Devemos recordar, ver [38] ou [21, p. 218], a seguinte definição:

Definição 2.6. Dizemos que um espaço de Banach $X \neq \{0\}$ tem cotipo finito se existir $2 \leq q < \infty$ e uma constante $\kappa > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ e para toda sequência de vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in X$, vale

$$(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \kappa \left(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) v_i \|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $r_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ denotam as *funções de Rademacher*, definidas por

$$r_i(t) = \text{sign}(\sin 2^i \pi t).$$

Observação 2.7. Note-se que cotipo finito é uma propriedade estável sob isomorfismos sobrejetores, i.e., para espaços de Banach X e Y, se X tem cotipo finito e $X \sim Y$, então Y tem cotipo finito.

Inspirado por [16] vamos demonstrar a seguinte extensão vetorial do Teorema 2.3.

Teorema 2.8. *Seja X um espaço de Banach de cotipo finito. Se X é separável ou se X^* tem a propriedade de Radon-Nikodým, então para quaisquer espaços localmente compactos de Hausdorff K e J temos*

$$C_0(K, X) \sim C_0(J, X) \Longrightarrow |K|\,|J| < \omega_0 \quad \textit{ou} \quad |K| = |J|\,.$$

O Teorema 2.8 pode, em um certo sentido, ser considerado uma *versão fraca* do Teorema 2.4 e fornece imediatamente uma solução para o Problema 2.5. De fato, recorde que um espaço de Banach X é *uniformemente convexo*, ver [17], se para todo $0 < \epsilon \leq 2$ existe $0 < \delta$ verificando

$$x,\ y \in B_X \ \text{ e } \ \|x-y\| \geq \epsilon \Longrightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1-\delta.$$

Por [12, Lema 1] e [21, Teorema 14.1, p. 283], se X é uniformemente convexo então tem cotipo finito. De acordo com um resultado de P. Enflo [24], todo espaço uniformemente não quadrado admite uma norma equivalente uniformemente convexa. Assim, ver Observação 2.7, se X é uniformemente não quadrado então X tem cotipo finito. Um resultado devido a R. C. James [33, Teorema 1.1] afirma que se X é uniformemente não-quadrado então é reflexivo, logo, X^* é reflexivo e, segundo um teorema devido a Pettis [20, Corolário 13, p. 76], tem a propriedade de Radon-Nikodým.

Observação 2.9. Segue diretamente das definições que se X é uniformemente convexo, então X é uniformemente não quadrado. Destacamos que a recíproca não é verdadeira. De fato, considere o espaço

$$X_{2,\lambda} = (l_2, \|\cdot\|_{2,\lambda}), \ 1 < \lambda < \sqrt{2},$$

onde $\|x\|_{2,\lambda} = \max\{\|x\|_2, \ \lambda \cdot \|x\|_\infty\}$. É fácil verificar que $X_{2,\lambda}$ é um espaço de Banach uniformemente não quadrado. Por outro lado, $X_{2,\lambda}$ *não* é uniformemente convexo pois existem x, $y \in S_{X_{2,\lambda}}$ tais que

$$x \neq y \quad \text{e} \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq 1.$$

Note-se que o Teorema 2.8 cobre os casos l_1 e $X = l_p(\Gamma)$, onde Γ é um conjunto discreto arbitrário e $1 < p < \infty$. Não sabemos responder quando as asserções deste teorema permanecem verdadeiras para o caso remanescente $X = l_1(\Gamma)$, onde Γ é um conjunto não enumerável.

O clássico teorema de Milyutin [44, Teorema 21.5.10] mostra que não podemos remover a hipótese de cotipo finito no caso em que X é separável. De fato, a conclusão do Teorema 2.8 não vale para uma classe muito grande de espaços de Banach separáveis. Por exemplo, de acordo com [41, Teorema 1], considere a família dos espaços mutuamente não isomorfos $C([0,1], l_p)$ com $1 \leq p < \infty$. Para todo compacto métrico enumerável K temos

$$C(K, C([0,1], l_p)) \sim C(K \times [0,1], l_p) \sim C([0,1] \times [0,1], l_p) \sim C([0,1], C([0,1], l_p)).$$

Mais ainda, recordando que para todo conjunto não enumerável Γ o espaço $C_0(\Gamma)^* = l_1(\Gamma)$ tem a propriedade de Radon-Nikodým, ver [20, Corolário 8, p. 83], e vale a relação

$$C_0(\mathbb{N}, C_0(\Gamma)) \sim C_0(\Gamma) \sim C_0(\Gamma, C_0(\Gamma)),$$

concluímos que a hipótese de cotipo finito no Teorema 2.8 também não pode ser removida no caso em que X^* tem a propriedade de Radon-Nikodým.

Organizamos este capítulo do seguinte modo. Na Seção 2.2 vamos estabelecer alguns resultados sobre espaços de Banach de cotipo finito que serão necessários na demonstração do Teorema 2.8. Na Seção 2.3 demonstraremos um resultado envolvendo funções w^*-mensuráveis que nos permitirá fornecer uma prova unificada do Teorema 2.8 para os dois casos distintos: X é separável ou X^* tem a propriedade de Radon-Nikodým.

Na Seção 2.4 vamos estabelecer um lema envolvendo funções *semicontínuas inferiormente* associadas a operadores lineares de $C_0(K_1, X)$ em $C_0(K_2, X)$ e finalmente na Seção 2.5 demonstraremos o Teorema 2.8.

2.2 Sobre espaços $C_0(K, X)$, X de cotipo finito

Nesta seção vamos estabelecer alguns resultados auxiliares sobre espaços de Banach de cotipo finito. Um ingrediente fundamental na demonstração destes resultados é o Teorema 1.17 (Representação de Riesz-Singer).

Proposição 2.10. *Sejam X um espaço de Banach de cotipo finito, K e J espaços localmente compactos de Hausdorff. Seja T um isomorfismo de $C_0(K,X)$ em $C_0(J,X)$ e defina para cada $y \in J$ o conjunto*

$$K_y = \{x \in K : |T^* (\varphi \cdot \delta_y)| (\{x\}) > 0 \textit{ para algum } \varphi \in S_{X^*}\},$$

onde δ_y denota a medida de Dirac concentrada em y. Então

(a) K_y é enumerável para todo $y \in J$.

(b) Se J é infinito e para cada $x \in K$ existir algum $y \in J$ tal que $x \in K_y$, então $|K| \leq |J|$.

Demonstração. **(a)** Assumiremos que K_y é não enumerável para algum $y \in J$ e mostraremos que esta suposição implica uma contradição.

Com efeito, sob esta suposição, existe algum $0 < \epsilon < 1$ tal que

$$\{x \in K : |T^* (\varphi \cdot \delta_y)| (\{x\}) > \epsilon \text{ para algum } \varphi \in S_{X^*}\}$$

é infinito.

Por X ter cotipo finito $2 \leq q < \infty$, de acordo com a Definição 2.6, existe uma constante $Q > 0$ tal que para qualquer sequência de vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m \in X$, se $0 < \delta \leq \|v_i\|$ para cada $1 \leq i \leq m$, existe uma escolha apropriada de escalares $r_i = \pm 1$ verificando

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} r_i \cdot v_i \right\| \geq \delta \cdot Q \cdot \sqrt[q]{m}. \tag{2.1}$$

Fixe $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\epsilon \cdot Q \cdot \sqrt[q]{n} > 2\|T\|$. Fixe também pontos distintos $x_1, \ldots, x_n \in K$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in S_{X^*}$ tais que

$$\|T^* (\varphi_i \cdot \delta_y) (\{x_i\})\| = |T^* (\varphi_i \cdot \delta_y)| (\{x_i\}) > \epsilon, \ 1 \leq i \leq n.$$

Existem vetores $v_1, \ldots, v_n$ na bola unitária de X verificando

$$\langle T^* (\varphi_i \cdot \delta_y) (\{x_i\}), v_i \rangle > \epsilon \ , \ 1 \leq i \leq n. \tag{2.2}$$

Devido à regularidade das medidas $T^* (\varphi_i \cdot \delta_y)$ podemos fixar $U_1, \ldots, U_n$, vizinhanças mutuamente disjuntas de $x_1, \ldots, x_n$ respectivamente, satisfazendo

$$|T^* (\varphi_i \cdot \delta_y)| (U_i \setminus \{x_i\}) \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.3}$$

Aplicando o Lema de Urysohn 1.12, podemos encontrar funções $h_i \in C_0(K)$ com $0 \leq h_i(x) \leq 1$ para todo $x \in K$, $h_i(x_i) = 1$ e $h_i(x) = 0$ se $x \in K \setminus U_i$. Defina $f_i \in C_0(K,X)$ por $f_i = v_i \cdot h_i$. Então, das relações (2.2) e (2.3),

$$\begin{aligned}
\|Tf_i(y)\| &\geq |\langle \varphi_i, Tf_i(y) \rangle| = \left| \int f_i dT^* (\varphi_i \cdot \delta_y) \right| \\
&\geq |\langle T^* (\varphi_i \cdot \delta_y) (\{x_i\}), v_i \rangle| - \left| \int f_i dT^* (\varphi_i \cdot \delta_y) - \langle T^* (\varphi_i \cdot \delta_y) (\{x_i\}), v_i \rangle \right| \\
&> \epsilon - \left| \int f_i dT^* (\varphi_i \cdot \delta_y) - \int_{x_i} f_i dT^* (\varphi_i \cdot \delta_y) \right| \\
&\geq \epsilon - |T^* (\varphi_i \cdot \delta_y)| (U_i \setminus \{x_i\}) \geq \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

De acordo com (2.1) existe uma escolha apropriada de escalares $r_i = \pm 1$ tais que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot Tf_i\,(y) \right\| \geq \frac{\epsilon \cdot Q \cdot \sqrt[q]{n}}{2}. \tag{2.4}$$

Em virtude de $U_i \cap U_j = \varnothing$, se $i \neq j$, e $\|f_i\| \leq 1$, $1 \leq i \leq n$, temos

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot f_i \right\| \leq 1.$$

Por (2.4) e pela escolha de ϵ,

$$\|T\| \geq \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot f_i\right) \right\| \geq \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot f_i\right)(y) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot Tf_i\,(y) \right\| > \|T\|,$$

o que é uma contradição.

(b) Segue de nossa hipótese que

$$K = \bigcup_{y \in J} K_y.$$

De acordo com o item (a), o conjunto K_y é enumerável para todo $y \in K$. Portanto $|K| \leq |Y|$.

$\square$

A soma direta de espaços de Banach X e Y munida da norma do máximo será denotada $X \oplus Y$. Especificamente, $X \oplus Y$ denota o espaço $X \times Y$ munido da norma $\|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Por questão de simplicidade, denotaremos por X^n a soma direta de n cópias de X, munida da norma do máximo.

Recordamos o seguinte resultado:

Teorema 2.11 (Samuel)**.** *Sejam X e Y espaços de Banach. Então X ou Y contém um subespaço isomorfo a c_0 se e somente se $X \oplus Y$ contém um subespaço isomorfo a c_0.*

Demonstração. Ver C. Samuel [46, Teorema 1].

$\square$

Observe que o Teorema 2.8, no caso em que K ou J são finitos, é consequência imediata do seguinte resultado:

Proposição 2.12. *Sejam X um espaço de Banach de cotipo finito e K um espaço topológico de Hausdorff finito. Então para todo espaço localmente compacto de Hausdorff J vale*

$$C_0(K,X) \sim C_0(J,X) \Longrightarrow |J| < \omega_0.$$

Demonstração. Por K ser finito e discreto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$X^n \sim C_0(K,X) \sim C_0(J,X).$$

Então J deve ser finito. Do contrário, $C_0(J,X)$, e consequentemente X^n, contém um subespaço isomorfo a c_0. De acordo com o Teorema 2.11, X contém um subespaço isomorfo a c_0 o que contradiz a hipótese de X ter cotipo finito.

$\square$

2.3 Sobre funções w^*-mensuráveis

Nesta seção apresentaremos um resultado envolvendo funções w^*-mensuráveis que será fundamental na demonstração do principal resultado deste capítulo. Recordamos que dado um espaço mensurável (K, Σ) e um espaço de Banach X, uma função $\gamma : K \to X^*$ é w^*-mensurável se para todo $v \in X$ a função numérica $y \mapsto \langle \gamma(y), v \rangle$ for mensurável no sentido usual.

Proposição 2.13. *Sejam X um espaço de Banach, J um espaço localmente compacto de Hausdorff, $\mu \in \mathrm{rcabv}(J)$ e $\gamma : J \to X^*$ uma função tal que $\|\gamma(y)\| = 1$ para todo $y \in J$. Com relação à σ-álgebra de Borel de J, suponha que*

(a) X é separável e γ é w^*-mensurável ou

(b) γ é mensurável.

Então para cada $\epsilon > 0$ existe um compacto $J_0 \subset J$ tal que $|\mu|(J \setminus J_0) \leq \epsilon$ e para cada $v \in X$ a restrição da função numérica $y \mapsto \langle \gamma(y), v \rangle$ a J_0 é contínua.

Demonstração. **(a)** Considere a esfera S_{X^*} munida da topologia fraca*. Seja $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência densa em S_{X^*} e defina

$$\mathrm{d}(\psi, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle \psi, v_n \rangle - \langle \varphi, v_n \rangle|, \quad \psi, \varphi \in S_{X^*}.$$

Demonstra-se que d é uma métrica que induz a topologia de S_{X^*}.

Fixe $\epsilon > 0$ arbitrário. Para cada $n \in \mathbb{N}$, por $\gamma(J) \subseteq S_{X^*}$ e por S_{X^*} ser compacto na topologia fraca*, ver [26, Teorema 3.37, p. 99], podemos recobrir $\gamma(J)$ com uma coleção finita de bolas abertas $\{U_1, \ldots, U_{r_n}\}$ de raio $\frac{1}{2n}$, onde r_n é o menor inteiro positivo para o qual existe tal coleção.

Para cada $1 \leq i \leq r_n$ suponha

$$U_i = \left\{ \psi \in S_{X^*} : \mathrm{d}(\psi, \varphi_i) < \frac{1}{2n} \right\}$$

e considere a função $\eta_i : J \to \mathbb{R}$ definida por

$$\eta_i(y) = \mathrm{d}(\gamma(y), \varphi_i), \; y \in J.$$

Por γ ser w^*-mensurável, η_i é mensurável pois se trata de um limite pontual de funções mensuráveis. Mais ainda, por

$$\eta_i^{-1}([0, \frac{1}{2n}[) = \gamma^{-1}(U_i),$$

deduzimos que $\gamma^{-1}(U_i)$ é um boreliano para todo $1 \leq i \leq r_n$. Então, se

$$A_i = U_i \setminus \bigcup_{j<i} U_j \quad \text{e} \quad B_i = \gamma^{-1}(A_i), \; 1 \leq i \leq r_n,$$

podemos concluir que $B_1, \ldots, B_{r_n}$ são borelianos mutuamente disjuntos satisfazendo

$$J = \bigcup_{1 \leq i \leq r_n} B_i.$$

Devido à regularidade de $|\mu|$ existe para cada $1 \leq i \leq r_n$, um compacto não vazio $L_i \subset B_i$ satisfazendo

$$|\mu| (B_i \setminus L_i) \leq \frac{\epsilon}{r_n \cdot 2^n}.$$

Para cada $1 \leq i \leq r_n$ fixe $y_i \in L_i$ e defina

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^{r_n} \gamma(y_i) \cdot \mathbb{1}_{L_i}.$$

Em virtude de $L_1, \ldots, L_{r_n}$ serem mutuamente disjuntos, se $y \in L_1 \cup \ldots \cup L_{r_n}$ então

$$\mathrm{d}(\gamma(y), \gamma_n(y)) < \frac{1}{n}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $K_n = L_1 \cup \ldots \cup L_{r_n}$. Observe que

$$|\mu|\,(J \setminus K_n) = |\mu| \left((\bigcup_{1 \leq i \leq r_n} B_i) \setminus K_n \right) = \sum_{i=1}^{r_n} |\mu|\,(B_i \setminus L_i) \leq \frac{\epsilon}{2^n}$$

e que a restrição de γ_n a K_n é contínua.

Defina $J_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Temos

$$|\mu|(J \setminus J_0) = |\mu| \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (J \setminus K_n) \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|\,(J \setminus K_n) \leq \epsilon.$$

Por construção, a sequência $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, restrita a J_0, converge uniformemente, na métrica d, para a restrição de γ a J_0. Assim, considerando sobre X^* a topologia fraca*, a restrição de γ a J_0 é contínua. De forma equivalente, para cada $v \in X$, a restrição da função numérica $y \mapsto \langle \gamma(y), v \rangle$ a J_0 é contínua.

(b) Se a função γ é mensurável, então existe uma sequência de funções simples $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo pontualmente a γ. Dado $\epsilon > 0$, o Teorema de Egorov [22, Teorema 42, p. 18] fornece um conjunto mensurável $N \subset J$ tal que $|\mu|(N) \leq \frac{\epsilon}{2}$ e a sequência $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a γ uniformemente sobre $J \setminus N$, na métrica induzida pela norma.

Dado $n \in \mathbb{N}$ suponha

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^{r_n} v_i \cdot \mathbb{1}_{B_i},$$

onde $v_1, \ldots, v_{r_n}$ são vetores em X e $B_1, \ldots, B_{r_n}$ são borelianos não vazios, mutuamente disjuntos e verificam

$$J = \bigcup_{1 \leq i \leq r_n} B_i.$$

Devido à regularidade de $|\mu|$ podemos encontrar para cada $1 \leq i \leq r_n$, um compacto $L_i \subset B_i \setminus N$ verificando

$$|\mu|\,((B_i \setminus N) \setminus L_i) \leq \frac{\epsilon}{r_n \cdot 2^{n+1}}.$$

Defina $K_n = L_1 \cup \ldots \cup L_{r_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Temos

$$|\mu|\,((J \setminus N) \setminus K_n) = |\mu| \left((\bigcup_{1 \leq i \leq r_n} (B_i \setminus N)) \setminus K_n \right) = \sum_{i=1}^{r_n} |\mu|\,((B_i \setminus N) \setminus L_i) \leq \frac{\epsilon}{2^{n+1}},$$

e claramente a restrição de γ_n a K_n é contínua.

Defina $J_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Então

$$|\mu|\left((J \setminus N) \setminus J_0\right) = |\mu| \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} ((J \setminus N) \setminus K_n) \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|((J \setminus N) \setminus K_n) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Resulta que

$$|\mu|\left(J \setminus J_0\right) = |\mu|\left((J \setminus N) \setminus J_0\right) + |\mu|(N \setminus J_0) \leq \epsilon.$$

Por construção, a sequência $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, restrita ao compacto J_0, converge uniformemente, na métrica induzida pela norma, para a restrição da função γ a J_0, logo, a restrição de γ a J_0 é contínua. Concluímos que para cada $v \in X$, a restrição da função numérica $y \mapsto \langle \gamma(y), v \rangle$ a J_0 é contínua.

□

2.4 Sobre funções semicontínuas inferiormente

Nesta seção apresentaremos um resultado envolvendo funções semicontínuas inferiormente que será utilizado posteriormente. Recordamos que uma função f a valores reais é denominada *semicontínua inferiormente* se o conjunto $f^{-1}\left(]r, +\infty[\right)$ for aberto para todo $r \in \mathbb{R}$, ver [47, Definição 6.3.1].

Lema 2.14. *Sejam X um espaço de Banach, K e J espaços localmente compactos de Hausdorff, S um operador linear contínuo de $C_0(K,X)$ em $C_0(J,X)$ e γ uma função de J em X^* satisfazendo $\|\gamma(y)\| = 1$ para todo $y \in J$ e tal que para todo $v \in X$ a função numérica $y \mapsto \langle \gamma(y), v \rangle$ é contínua. Então para cada aberto $U \subset K$ a função*

$$y \longmapsto \left|S^*\left(\gamma(y) \cdot \delta_y\right)\right|(U)$$

é semicontínua inferiormente.

Demonstração. De início, observe que para cada $f \in C_0\left(K, X\right)$ a função

$$y \longmapsto \left| \int f dS^*\left(\gamma(y) \cdot \delta_y\right) \right| = |\langle \gamma(y), Sf(y) \rangle|$$

é contínua. De fato, dado $f \in C_0\left(K, X\right)$ fixe $y_0 \in J$. Em virtude de $\|\gamma(y)\| = 1$ para todo $y \in J$, vale

$$\begin{aligned} |\langle \gamma(y), Sf(y) \rangle - \langle \gamma(y_0), Sf(y_0) \rangle| &= |\langle \gamma(y), Sf(y) - Sf(y_0) \rangle + \langle \gamma(y) - \gamma(y_0), Sf(y_0) \rangle| \\ &\leq \|Sf(y) - Sf(y_0)\| + |\langle \gamma(y) - \gamma(y_0), Sf(y_0) \rangle| \,. \end{aligned}$$

A relação acima e a continuidade das funções $y \mapsto \langle \gamma(y), Sf(y_0) \rangle$ e $Sf : J \to X$ implicam a continuidade da função $y \mapsto |\langle \gamma(y), Sf(y) \rangle|$.

Em seguida, dado um aberto $U \subset K$, considere a coleção

$$\mathcal{F}_U = \left\{ f \in C_0\left(K, X\right) : \|f\| \leq 1 \text{ e } f(x) = 0 \text{ para todo } x \in K \setminus U \right\}.$$

Como visto acima, $y \mapsto |\langle \gamma(y), Sf(y) \rangle|$ é contínua para todo $f \in \mathcal{F}_U$. Portanto

$$y \longmapsto \sup_{\mathcal{F}_U} \left| \int f dS^*\left(\gamma(y) \cdot \delta_y\right) \right|$$

é semicontínua inferiormente.

Por uma aplicação do Teorema 1.16 concluímos que a função

$$y \longmapsto \sup_{\mathcal{F}_U} \left| \int f dS^* \left(\gamma(y) \cdot \delta_y\right) \right| = \left| S^* \left(\gamma(y) \cdot \delta_y\right)\right| (U)$$

é semicontínua inferiormente.

□

2.5 Demonstração do Teorema 2.8

Finalmente, demonstraremos o principal resultado deste capítulo.

Demonstração do Teorema 2.8. Podemos assumir, de acordo com a Proposição 2.12, que K e J são ambos infinitos. Demonstraremos que $|K| \le |J|$ e então, devido à simetria dos argumentos, também teremos $|J| \le |K|$.

Vamos aplicar o item (b) da Proposição 2.10 para provar que $|K| \le |J|$. Bastará estabelecer que para cada $x \in K$ existe algum $y \in J$ tal que $x \in K_y$.

Por contradição, suponha existir $x \in K$ tal que para cada $y \in J$ e para cada $\varphi \in S_{X^*}$

$$\left| T^* \left(\varphi \cdot \delta_y\right)\right| (\{x\}) = 0. \tag{2.5}$$

Fixe $\Phi \in S_{X^*}$ e considere a medida vetorial $\mu_x \in \mathrm{rcabv}(J, X^*)$ definida por

$$\mu_x = \left(T^{-1}\right)^* \left(\Phi \cdot \delta_x\right).$$

De acordo com a Proposição 1.23 existe uma função w^*-mensurável $\gamma : J \to X^*$, que é mensurável quando X^* tem a propriedade de Radon-Nikodým, tal que $\|\gamma(y)\| = 1$ para todo $y \in J$ e que verifica a relação

$$\int f d\mu_x = \int \langle \gamma(y), f(y) \rangle d|\mu_x|(y), \;\; f \in C_0(J, X). \tag{2.6}$$

Em seguida, fixe $\epsilon > 0$ satisfazendo

$$\epsilon < \min \left\{ |\mu_x|(J), \;\; \frac{1}{2(\|T\| + |\mu_x|\,(J))} \right\}.$$

Aplicando a Proposição 2.13, obtemos um compacto $J_0 \subseteq J$ tal que

$$|\mu_x|\,(J \setminus J_0) \le \epsilon \tag{2.7}$$

e para cada $v \in X$ a restrição da função numérica $y \mapsto \langle \gamma(y), v \rangle$ a J_0 é contínua.

Para cada $y \in J$ defina

$$\Gamma_y = \left| T^* \left(\gamma(y) \cdot \delta_y\right)\right|.$$

Por nossa suposição em (2.5) temos $\Gamma_y(\{x\}) = 0$ para todo $y \in J$.

Seja $\{U_i : i \in I\}$ a coleção de todas as vizinhanças abertas de x, dirigida sob a ordem parcial da inclusão reversa, i.e., $i \le j$ se e somente se $U_j \subseteq U_i$. Defina para cada $i \in I$ o seguinte conjunto mensurável:

$$C_i = \overline{\left\{ y \in J_0 : \Gamma_y \left(\overline{U_i}\right) \le \epsilon \right\}}.$$

Em virtude de $\Gamma_y(\{x\}) = 0$ para todo $y \in J_0$ e devido à regularidade de cada uma das medidas Γ_y temos

$$J_0 = \bigcup_{i \in I} C_i.$$

Para completar a demonstração do Teorema 2.8 precisamos verificar duas afirmações referentes às medidas Γ_y e μ_x.

Afirmação 1. $\Gamma_y(K) = \sup_{i\in I} \Gamma_y\left(K \setminus \overline{U_i}\right)$, $y \in J$.

Claramente $\sup_{i\in I} \Gamma_y\left(K \setminus \overline{U_i}\right) \leq \Gamma_y(K)$. Precisamos apenas verificar a desigualdade contrária.

Fixe $y \in J$. Em virtude de $\Gamma_y(\{x\}) = 0$ vale $\Gamma_y(K \setminus \{x\}) = \Gamma_y(K)$. Dado $\delta > 0$ arbitrário, devido à regularidade de Γ_y, existe um compacto $K_0 \subset K \setminus \{x\}$ que verifica

$$\Gamma_y(K) < \delta + \Gamma_y(K_0).$$

Por K ser um espaço localmente compacto de Hausdorff, existe algum aberto V de fecho compacto tal que

$$K_0 \subset V \subset \overline{V} \subset K \setminus \{x\}.$$

Por $\{U_i\}_{i\in I}$ consistir de todas as vizinhanças abertas de x. Existe $i_0 \in I$ tal que $U_{i_0} = K \setminus \overline{V}$. Temos $K_0 \subset K \setminus \overline{K \setminus \overline{V}} = K \setminus \overline{U_{i_0}}$ e portanto

$$\sup_{i\in I} \Gamma_y\left(K \setminus \overline{U_i}\right) \leq \Gamma_y(K) < \delta + \Gamma_y(K_0) \leq \delta + \Gamma_y\left(K \setminus \overline{U_{i_0}}\right) \leq \delta + \sup_{i\in I} \Gamma_y\left(K \setminus \overline{U_i}\right).$$

Por $\delta > 0$ ser arbitrário, deduzimos que

$$\Gamma_y(K) = \sup_{i\in I} \Gamma_y\left(K \setminus \overline{U_i}\right).$$

Isso estabelece a Afirmação 1.

Afirmação 2. $|\mu_x|(J_0) = \sup_{i\in I} |\mu_x|(C_i)$.

Observe que a coleção $\{C_i\}_I$ é dirigida sob ordem parcial da inclusão direta, i.e., $i \leq j$ se e somente se $C_i \subseteq C_j$. Então é possível obter uma sequência $i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq \ldots$ satisfazendo

$$C_{i_1} \subseteq C_{i_2} \subseteq C_{i_3} \ldots \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} |\mu_x|(C_{i_n}) = \sup_{i\in I} |\mu_x|(C_i). \tag{2.8}$$

Seja $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{i_n}$. As relações em (2.8) implicam

$$|\mu_x|(C) = \lim_{n\to\infty} |\mu_x|(C_{i_n}) = \sup_{i\in I} |\mu_x|(C_i).$$

Para estabelecer a Afirmação 2 demonstraremos que $|\mu_x|(J_0) = |\mu_x|(C)$. É suficiente, tendo em vista a regularidade $|\mu_x|$, verificar que $|\mu_x|(L) = 0$ para qualquer compacto $L \subseteq J_0 \setminus C$. É útil observar que para qualquer compacto $L \subseteq J_0 \setminus C$ vale

$$|\mu_x|(C_i \cap L) = 0, \; i \in I. \tag{2.9}$$

De fato, dado $i \in I$ seja $n \in \mathbb{N}$ arbitrário. Existe $j \in I$ tal que $i \leq j$ e $i_n \leq j$. Então

$$\begin{aligned} |\mu_x|(C) \geq |\mu_x|(C_j) &= |\mu_x|(C_j \cap L) + |\mu_x|(C_j \cap (J_0 \setminus L)) \\ &\geq |\mu_x|(C_i \cap L) + |\mu_x|(C_{i_n}), \end{aligned}$$

pois $C_{i_n} \subset C_j \cap (J_0 \setminus L)$. Passando-se ao limite na expressão acima para n tendendo ao infinito obtemos $|\mu_x|(C_i \cap L) = 0$.

Seja $L \subseteq J_0 \setminus C$ um compacto e suponha $|\mu_x|(L) > 0$. Defina

$$M = \sup_{y \in L} \Gamma_y(K).$$

Temos $M \leq \|T\| < \infty$, pois para cada $y \in L$ vale

$$\Gamma_y(K) = |T^*(\gamma(y) \cdot \delta_y)|(K) = \|T^*(\gamma(y) \cdot \delta_y)\| \leq \|T\|.$$

Seja $R : C_0(J, X) \to C(J_0, X)$ a restrição natural a J_0 e considere o operador linear $S = R \circ T : C_0(K, X) \to C(J_0, X)$. Recorde que $\|\gamma(y)\| = 1$ para todo $y \in J_0$ e para todo $v \in X$ a função $y \mapsto \langle \gamma(y), v \rangle$ é contínua em J_0. Aplicando o Lema 2.14, deduzimos que para todo conjunto aberto $U \subset K$, a função

$$y \longmapsto |S^*(\gamma(y) \cdot \delta_y)|(U) = |T^*(\gamma(y) \cdot \delta_y)|(U) = \Gamma_y(U),$$

definida em J_0, é semicontínua inferiormente. Então, para cada $i \in I$ o conjunto

$$A_i = \left\{ y \in L : \Gamma_y\left(K \setminus \overline{U_i}\right) > M - \epsilon \right\}$$

é aberto em L. Mais ainda, para cada $y \in A_i$ temos

$$\Gamma_y(K) = \Gamma_y\left(K \setminus \overline{U_i}\right) + \Gamma_y\left(\overline{U_i}\right) > M - \epsilon + \Gamma_y\left(\overline{U_i}\right).$$

Consequentemente,

$$\Gamma_y\left(\overline{U_i}\right) < \epsilon - M + \Gamma_y(K) \leq \epsilon.$$

Concluímos que $A_i \subset L \cap C_i$, $i \in I$, e então, por consequência de (2.9), $|\mu_x|(A_i) = 0$, $i \in I$.

Seja $y \in L$ tal que $\Gamma_y(K) > M - \epsilon$. De acordo com a Afirmação 1 existe $i_0 \in I$ tal que $\Gamma_y\left(K \setminus \overline{U_{i_0}}\right) > M - \epsilon$. Então $y \in A_{i_0}$ e segue que $F_0 = L \setminus A_{i_0}$ é um subconjunto fechado e próprio de L satisfazendo

$$|\mu_x|(F_0) = |\mu_x|(L).$$

Seja $\mathcal{G}$ a coleção de todos os subconjuntos fechados próprios $F \subset L$ com $\mu(F) = \mu(L)$. Tal coleção, como acabamos de ver, é não vazia. Mais ainda, a relação $F_1 \leq F_2$ se e somente se $F_2 \subseteq F_1$ é uma ordem parcial sobre $\mathcal{G}$.

Fixe $\mathcal{C} = \{F_i : i \in \Lambda\}$ um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{G}$. Observe que $\mathcal{C}$ é uma coleção de fechados no compacto L com a propriedade da interseção finita e portanto

$$F = \bigcap_{i \in \Lambda} F_i \neq \varnothing.$$

Se $|\mu_x|(F) < |\mu_x|(L)$, então devido à regularidade de $|\mu_x|$, existe $U \subset L$, aberto em L, contendo F e verificando

$$|\mu_x|(F) \leq |\mu_x|(U) < |\mu_x|(L).$$

Dessa forma, $\{F_i \setminus U : i \in \Lambda_0\}$ é uma coleção de subconjuntos fechados de L com a propriedade da interseção finita e com interseção vazia. Isto contradiz o fato de L ser compacto. Então, $|\mu_x|(F) = |\mu_x|(L)$ e F é uma cota superior de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{G}$.

Concluímos que todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{G}$ tem cota superior em $\mathcal{G}$. De acordo com o Lema de Zorn [47, p. 36], existe em $\mathcal{G}$ um elemento maximal F_{max}.

Repetindo todo o processo acima, desta vez com

$$M = \sup_{y \in F_{max}} \Gamma_y(K) \quad \text{e} \quad A_i = \left\{ y \in F_{max} : \Gamma_y\left(K \setminus \overline{U_i}\right) > M - \epsilon \right\}$$

é possível obter um subconjunto fechado próprio $F_0 \subset F_{max}$ verificando

$$|\mu_x|(F_0) = |\mu_x|(F_{max}) = |\mu_x|(L),$$

o que contradiz a maximalidade de F_{max}. Resulta que $|\mu_x|(L) = 0$ e isso estabelece a Afirmação 2.

Vamos agora retomar a demonstração do Teorema 2.8.

Seja $v \in X$ tal que $\|v\| = 1$ e $\frac{1}{2} < \langle \Phi, v \rangle$. Aplicando o Lema de Urysohn 1.12, podemos fixar funções $h_i \in C_0(K)$, $i \in I$, tais que $0 \leq h_i \leq 1$, $h_i(x) = 1$ e $h_i(z) = 0$ se $z \in K \setminus U_i$. Defina $f_i \in C_0(K, X)$ por $f_i = v \cdot h_i$. Recordando a definição de μ_x escrevemos

$$\frac{1}{2} < \langle \Phi, f_i(x) \rangle = \int f_i d(\Phi \cdot \delta_x) = \int T f_i d\left((T^{-1})^* (\Phi \cdot \delta_x) \right) = \int T f_i d\mu_x.$$

Então, de acordo com a relação (2.6), vale

$$\frac{1}{2} < \int T f_i d\mu_x = \int \langle \gamma(y), T f_i(y) \rangle d|\mu_x|(y), \ i \in I. \tag{2.10}$$

Vamos dividir esta integral em três partes. Por $\|\gamma(y)\| = 1$ para todo $y \in J$ e por (2.7) deduzimos

$$\left| \int_{J \setminus J_0} \langle \gamma(y), T f_i(y) \rangle d|\mu_x|(y) \right| \leq \|T\| \, |\mu_x|(J \setminus J_0) \leq \|T\| \epsilon. \tag{2.11}$$

Por outro lado, para cada $y \in J_0$ e $i \in I$,

$$|\langle \gamma(y), T f_i(y) \rangle| = \left| \int T f_i d\gamma(y) \cdot \delta_y \right| = \left| \int f_i dT^*(\gamma(y) \cdot \delta_y) \right| \leq \Gamma_y \left(\overline{U_i} \right). \tag{2.12}$$

Recorde que para cada $v \in X$, a restrição da função $y \mapsto \langle \gamma(y), v \rangle$ a J_0 é contínua e que $\|\gamma(y)\| = 1$ para cada $y \in J$. Demonstra-se, como no Lema 2.14, que $y \mapsto |\langle \gamma(y), T f_i(y) \rangle|$, $i \in I$, é contínua em J_0. Então, sempre que $y \in C_i$, ver (2.12), temos $|\langle \gamma(y), T f_i(y) \rangle| \leq \epsilon$ e podemos escrever

$$\left| \int_{C_i} \langle \gamma(y), T f_i(y) \rangle d|\mu_x|(y) \right| \leq \int_{C_i} |\langle \gamma(y), T f_i(y) \rangle| \, d|\mu_x|(y) \leq \epsilon \, |\mu_x|(J). \tag{2.13}$$

Reunindo as relações (2.11), (2.13) e utilizando novamente o fato de $\|\gamma(y)\| = 1$ para todo $y \in J$ temos para cada $i \in I$,

$$\begin{aligned} \int \langle \gamma(y), T f_i(y) \rangle d|\mu_x|(y) &= \int_{J \setminus J_0} + \int_{J_0 \setminus C_i} + \int_{C_i} \langle \gamma(y), T f_i(y) \rangle d|\mu_x|(y) \\ &\leq \epsilon \|T\| + \left| \int_{J_0 \setminus C_i} \langle \gamma(y), T f_i(y) \rangle d|\mu_x|(y) \right| + \epsilon \, |\mu_x|(J) \\ &\leq \epsilon \left(\|T\| + |\mu_x|(J) \right) + \|T\| \left(|\mu_x|(J_0) - |\mu_x|(C_i) \right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Finalmente, combinando as relações (2.10),(2.14) e utilizando a Afirmação 2, concluímos que

$$\frac{1}{2} \leq \epsilon \left(\|T\| + |\mu_x|(J) \right).$$

Isto contradiz a escolha de ϵ.

□

Capítulo 3

Sobre isomorfismos entre espaços de Banach $C(K, X)$ com distorção menor que 3

3.1 Introdução

Retomando o resultado de Amir e Cambern, o Teorema 2.2 do capítulo anterior, no caso particular onde K_1 e K_2 são espaços compactos, por desconhecer isomorfismos sobrejetores $T : C(K_1) \to C(K_2)$ com $2 \leq \|T\|\|T^{-1}\| < 3$, Amir conjecturou que K_1 e K_2 seriam homeomorfos se $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$. Mais precisamente, o número 2 poderia substituído por 3 no Teorema 2.2, ver [3]. Reforçando esta conjectura, ver [31], Gordon estabeleceu:

Teorema 3.1 (Gordon). *Sejam K_1 e K_2 espaços compactos métricos enumeráveis. Então*

$$C(K_1) \overset{3}{\sim} C(K_2) \Longrightarrow K_1 \approx K_2.$$

Entretanto, Cohen [18] provou ser falsa a conjectura de Amir para a classe dos espaços compactos métricos não enumeráveis. Em outras palavras, existem compactos métricos K_1 e K_2 não homeomorfos e um isomorfismo sobrejetor $T : C(K_1) \to C(K_2)$ com $\|T\|\|T^{-1}\| = 2$. Para a construção de diversos exemplos veja [19].

Inspirado no trabalho de Gordon [31], buscamos neste capítulo extensões em $C(K, X)$, onde K é um compacto homeomorfo a um intervalo de ordinal e X é um espaço de Banach, para os teoremas de Amir-Cambern 2.2, Gordon 3.1 e Behrends-Cambern 2.4. Estes resultados sugerem a seguinte pergunta natural:

Problema 3.2. Sejam K_1 e K_2 espaços compactos métricos enumeráveis. Suponha existir um espaço de Banach X de cotipo finito, tal que

$$C(K_1, X) \overset{3}{\sim} C(K_2, X).$$

Nestas condições, o que pode ser dito a respeito de K_1 e K_2? Para algum desses espaços X é possível concluir que $K_1 \approx K_2$?

A dificuldade em se obter uma solução para este problema e também extensões vetoriais para o Teorma de Amir-Cambern 2.2 pode ser resumida na seguinte proposição:

Proposição 3.3. *Para cada $\epsilon > 0$ existe um espaço de Banach X de cotipo finito tal que para cada compacto métrico enumerável K existe um compacto métrico enumerável J satisfazendo*

$$C(K, X) \overset{1+\epsilon}{\sim} C(J, X) \quad e \quad K \not\approx J.$$

Demonstração. Fixe $1 < p < \infty$ tal que $\sqrt[p]{2} < 1 + \epsilon$. Seja $l_p \oplus l_p$ a soma direta de duas cópias de l_p com a noma do máximo. Defina o operador $T : l_p \to l_p \oplus l_p$, para cada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$, por

$$T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = ((x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, (x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}).$$

É fácil verificar que T é um isomorfismo sobrejetor que satisfaz

$$\|T\|\|T^{-1}\| = \sqrt[p]{2} < 1 + \epsilon.$$

Seja K um compacto métrico enumerável. A partir do isomorfismo acima, de maneira natural, é possível construir um isomorfismo de $C(K, l_p)$ em $C(K, l_p \oplus l_p)$ com distorção estritamente menor que $1 + \epsilon$.

Pelo clássico teorema de Mazurkiewicz e Sierpiński, ver [39] ou [47, Teorema 8.6.10], K é homeomorfo a um intervalo de ordinal $[1, \omega^\alpha m]$ com $0 \leq \alpha < \omega_1$ e $1 \leq m < \omega$. Podemos substituir $C(K, l_p)$ por $C([1, \omega^\alpha m], l_p)$ e $C(K, l_p \oplus l_p)$ por $C([1, \omega^\alpha m], l_p \oplus l_p)$ pois estes espaços são isometricamente isomorfos. Dessa forma,

$$C([1, \omega^\alpha m], l_p) \overset{1+\epsilon}{\sim} C([1, \omega^\alpha m], l_p \oplus l_p). \tag{3.1}$$

Naturalmente vale a relação

$$C([1, \omega^\alpha m], l_p \oplus l_p) = C([1, \omega^\alpha m], l_p) \oplus C([1, \omega^\alpha m], l_p) = C([1, \omega^\alpha 2m], l_p). \tag{3.2}$$

Fixe $J = [1, \omega^\alpha 2m]$. Combinando (3.2) e (3.1) obtemos

$$C(K, l_p) = C([1, \omega^\alpha m], l_p) \overset{1+\epsilon}{\sim} C([1, \omega^\alpha 2m], l_p) = C(J, l_p)$$

e de acordo com [47, Proposição 8.6.9], $K \not\approx J$.

□

Contudo, é possível obter respostas para o Problema 3.2. O primeiro resultado nos permite deduzir que para intervalos compactos de ordinais K_1 e K_2, uma particular soma topológica de espaços K_1 é homeomorfa a uma particular soma topológica de espaços K_2. Mais precisamente, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.4. *Sejam X um espaço de Banach de cotipo finito, α e β ordinais quaisquer e $1 \leq m, n < \omega$. Então*

$$C([1, \omega^\alpha m], X) \overset{3}{\sim} C([1, \omega^\beta n], X) \Longrightarrow \alpha = \beta.$$

No teorema acima, de acordo com a Proposição 3.3, não podemos concluir que $m = n$ em geral. Também não sabemos se o número 3 pode ser substituido por 4 nem mesmo no caso escalar, onde $X = \mathbb{R}$ ou $X = \mathbb{C}$. Contudo, impondo certa restrição geométrica ao espaço de Banach X podemos obter um novo resultado. Por simplicidade, denotaremos por X^n a soma direta de n cópias de um espaço de Banach X, munida da norma do máximo.

Teorema 3.5. *Seja X um espaço de Banach de cotipo finito tal que X^n não contenha cópia de X^{n+1} para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, para quaisquer intervalos compactos de ordinais K_1 e K_2,*

$$C(K_1, X) \overset{3}{\sim} C(K_2, X) \Longrightarrow K_1 \approx K_2.$$

Observe que qualquer espaço vetorial de dimensão finita X não trivial verifica a condição geométrica do Teorema 3.5. Em particular, se K_1 e K_2 são intervalos de ordinais enumeráveis e $X = \mathbb{R}$ ou $X = \mathbb{C}$, por [47, Teorema 8.6.10], o Teorema 3.5 coincide com o Teorema 3.1. Este resultado permite, para certos espaços compactos K_1 e K_2 e certos espaços de Banach X, substituir $1 < \lambda \leq 2$ por 3 no Teorema 2.4.

Os resultados obtidos neste capítulo são baseados nas noções de derivado, compactos dispersos e altura. Estes conceitos serão apresentados na sequência.

Definição 3.6. Seja K um espaço topológico. Para um número ordinal α, o *α-derivado de Cantor-Bendixson* de K, $K^{(\alpha)}$ é definido por indução transfinita: $K^{(0)} = K$, $K^{(1)}$ é o conjunto dos pontos não isolados de K e

$$K^{(\alpha)} = \begin{cases} \left(K^{(\beta)}\right)^{(1)} & \text{se } \alpha = \beta + 1; \\ \bigcap_{\beta<\alpha} K^{(\beta)} & \text{se } \alpha \text{ é um ordinal limite.} \end{cases}$$

Definição 3.7. Um espaço topológico compacto K é chamado de *disperso* se todo subconjunto fechado $L \subset K$ tem um ponto isolado em L.

Observação. Um compacto K é disperso se e somente se $K^{(\alpha)} = \varnothing$ para algum ordinal α. De fato, se K não fosse disperso, existiria um *conjunto perfeito* não vazio $L \subset K$ (i.e., um conjunto fechado tal que todos seus pontos são de acumulação em L). Então $L \subset K^{(\alpha)}$ para todo ordinal α e consequentemente $K^{(\alpha)} \neq \varnothing$. Por outro lado, se $K^{(\alpha)} \neq \varnothing$ para todo α, fixe um ordinal α_0 satisfazendo $K^{(\alpha_0)} = K^{(\alpha_0+1)}$. Claramente $K^{(\alpha_0)}$ é um subconjunto perfeito de K e portanto K não é disperso por definição.

Definição 3.8. Se K for um compacto disperso, o menor ordinal α tal que $K^{(\alpha)} = \varnothing$ será chamado de *altura* de K e será denotado por $\mathrm{ht}(K)$.

As técnicas desenvolvidas neste capítulo permitem também obter uma extensão a valores vetoriais de outro resultado de Gordon em [31]. Um teorema sobre a estabilidade da cardinalidade dos α-derivados dos compactos K_1 e K_2 via um isomorfismo entre os espaços $C(K_1, X)$ e $C(K_2, X)$ com distorção estritamente menor que 3.

Teorema 3.9. *Sejam X um espaço de Banach de cotipo finito, K_1 e K_2 compactos de Hausdorff. Então*

$$C(K_1, X) \overset{3}{\sim} C(K_2, X) \Longrightarrow |K_1^{(\alpha)}| = |K_2^{(\alpha)}|$$

para todo ordinal α, diferente de $-1 + \mathrm{ht}(K_2)$ no caso em que K_2 é disperso.

Todos os resultados acima são consequências do estudo sobre isomorfismos de espaços $C(K_1)$ em espaços $C(K_2, X)$ com distorção menor que 3, onde K_1 e K_2 são espaços compactos de Hausdorff e X é um espaço de Banach de cotipo finito. Este estudo será apresentado na Seção 3.2. Na Seção 3.3 demonstraremos os Teoremas 3.4, 3.5 e 3.9.

Na Seção 3.4 apresentaremos uma coleção consistindo de 2^{ω_0} espaços de Banach separáveis de dimensão infinita satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.5. Em contraste com a Proposição 3.3, cada um desses espaços contém cópia complementada de algum l_p, $1 \leq p < \infty$.

3.2 Sobre isomorfismos de $C(K_1)$ em espaços $C(K_2, X)$

Vamos desenvolver nesta seção um resultado fundamental para as demonstrações dos teoremas deste capítulo. Precisamos enriquecer nossa terminologia com mais algumas definições.

Sejam K_1 e K_2 espaços topológicos. Denotaremos por $\Lambda : K_1 \rightrightarrows K_2$ uma função definida em K_1 e assumindo valores nas partes de K_2, mais precisamente, $\Lambda(x) \subset K_2$ para todo $x \in K_1$. A possibilidade de que $\Lambda(x) = \varnothing$ para algum $x \in K_1$ será admitida. Para um estudo mais detalhado sobre esta classe de funções recomendamos [8].

Definição 3.10. Sejam K_1 e K_2 espaços topológicos e uma função $\Lambda : K_1 \rightrightarrows K_2$ como acima.

(a) O *gráfico* da função Λ, denotado por Graf, é o conjunto

$$\mathrm{Graf}(\Lambda) = \{(x, y) \in K_1 \times K_2 : y \in \Lambda(x)\}.$$

(b) A *imagem* da função Λ, denotada por $R(\Lambda)$, é a projeção de $\mathrm{Graf}(\Lambda)$ sobre a segunda coordenada

$$R(\Lambda) = \{y \in K_2 : \text{ Existe } x \in K_1 \text{ tal que } y \in \Lambda(x)\}.$$

(c) A *imagem inversa* de um conjunto $F \subset K_2$, denotada por $\Lambda^{-1}(F)$, é definida por

$$\Lambda^{-1}(F) = \{x \in K_1 : \Lambda(x) \cap F \neq \varnothing\}.$$

Observação. Naturalmente o gráfico $\mathrm{Graf}(\Lambda)$ caracteriza a função Λ, i.e., $\mathrm{Graf}(\Lambda_1) = \mathrm{Graf}(\Lambda_2)$ se e somente se $\Lambda_1(x) = \Lambda_2(x)$ para todo x.

Teorema 3.11. *Sejam X um espaço de Banach de cotipo finito, K_1 e K_2 espaços topológicos compactos de Hausdorff. Suponha existir um isomorfismo T de $C(K_1)$ em $C(K_2, X)$ com $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$. Então*

(a) Se K_2 for disperso então K_1 é disperso e $\mathrm{ht}(K_1) \leq \mathrm{ht}(K_2)$.

(b) Para todo ordinal α, $K_2^{(\alpha)}$ é finito ou $|K_1^{(\alpha)}| \leq |K_2^{(\alpha)}|$.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $\|f\| \leq \|Tf\|$ para cada $f \in C_0(K_1)$, pois do contrário podemos simplesmente substituir T pelo isomorfismo $\|T^{-1}\|\ T$ que claramente possui estas propriedades. Em seguida, fixamos $\epsilon = (1 - \|T\|/3)/2$ e definimos para cada $x \in K_1$ os conjuntos

$$\mathcal{F}_x = \{f \in C(K_1) : 0 \leq f \leq 1 \text{ e } f(x) > \|T\|/3\},$$
$$\Lambda_x = \{y \in K_2 : \|Tf(y)\| \geq \epsilon \text{ para cada } f \in \mathcal{F}_x\}.$$

Para demonstrar os itens (a) e (b) do teorema precisamos verificar três afirmações referentes aos conjuntos Λ_x.

Afirmação 1. Λ_x é um conjunto fechado e não vazio para todo $x \in K_1$.

De fato, Λ_x é a interseção de uma coleção de conjuntos fechados e portanto é fechado. Para demonstrar que é não vazio vamos verificar que esta coleção de fechados tem a propriedade da interseção finita. Sejam $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}_x$ e fixe $g = \min_{1 \leq i \leq n} f_i$. Então $g \in \mathcal{F}_x$ e para cada $1 \leq i \leq n$ vale

$$\|1 + 2g - 2f_i\| \leq 1.$$

Em virtude de

$$\|T(1 + 2g)\| \geq \|1 + 2g\| > 1 + 2\|T\|/3,$$

existe um ponto $y \in K_2$ tal que

$$\|T(1 + 2g)(y)\| > 1 + 2\|T\|/3.$$

Mostraremos que $\|Tf_i(y)\| \geq \epsilon$ para todo i. De fato, se isso fosse falso para algum $1 \leq i \leq n$ então

$$\begin{aligned} \|T\| &\geq \|T(1 + 2g - 2f_i)\| \geq \|T(1 + 2g - 2f_i)(y)\| \\ &\geq \|T(1 + 2g)(y)\| - 2\|Tf_i(y)\| > 1 + 2\|T\|/3 - 2\epsilon \end{aligned}$$

o que contradiz a escolha de ϵ.

Afirmação 2. Seja $\Lambda : K_1 \rightrightarrows K_2$ definida, para todo $x \in K_1$, por $\Lambda(x) = \Lambda_x$. Então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\Lambda^{-1}(y)| \leq m$ para todo $y \in K_2$.

Sejam $y \in K_2$ e $x_1, \ldots, x_n$ elementos distintos de $\Lambda^{-1}(y)$. Aplicando o Lema de Urysohn 1.12 podemos fixar funções $f_i \in \mathcal{F}_{x_i}$, $1 \leq i \leq n$, com suportes mutuamente disjuntos e satisfazendo

$$\|Tf_i(y)\| \geq \epsilon.$$

Por hipótese, X tem cotipo finito $2 \leq q < \infty$. Segue da Definição 2.6 que existe uma constante $Q > 0$ tal que para quaisquer vetores $v_1, v_2, \ldots, v_p$ em X, sempre que $0 < \delta \leq \|v_i\|$ para cada $1 \leq i \leq p$, existe uma escolha apropriada de escalares $r_i = \pm 1$ verificando

$$\delta \cdot Q \cdot \sqrt[q]{p} \leq \left\| \sum_{i=1}^{p} r_i \cdot v_i \right\|. \tag{3.3}$$

Dessa forma, em virtude de $0 < \epsilon \leq \|Tf_i(y)\|$ para cada $1 \leq i \leq n$, existe uma escolha apropriada de escalares $r_i = \pm 1$ satisfazendo

$$\epsilon \cdot Q \cdot \sqrt[q]{n} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot Tf_i(y) \right\|.$$

Como as funções f_i têm suportes mutuamente disjuntos, vale $\|\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot f_i\| \leq 1$. Então

$$\epsilon \cdot Q \cdot \sqrt[q]{n} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot Tf_i(y) \right\| = \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot f_i \right)(y) \right\| \leq \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot f_i \right) \right\| \leq \|T\| \leq 3$$

e consequentemente $n \leq \left(\frac{3}{\epsilon Q}\right)^q$. Podemos concluir que se m é um inteiro positivo tal que $\left(\frac{3}{\epsilon Q}\right)^q < m$, então $|\Lambda^{-1}(y)| \leq m$ para todo $y \in K_2$.

Afirmação 3. A imagem $R = R(\Lambda)$ é um subconjunto fechado de K_1 e $K_1^{(\alpha)} \subset \Lambda^{-1}(R^{(\alpha)})$ para todo ordinal α.

Para verificar essa afirmação considere o gráfico da função Λ

$$\mathrm{Graf}(\Lambda) = \{(x, y) \in K_1 \times K_2 : y \in \Lambda_x\}.$$

Seja $((x_i, y_i))_{i \in I}$ uma rede em $\mathrm{Graf}(\Lambda)$ convergindo a (x, y). Dado $f \in \mathcal{F}_x$ então $f(x) > \|T\|/3$ e, por continuidade, existe $i_0 \in I$ tal que $f(x_i) > \|T\|/3$ para cada $i \geq i_0$. Portanto $f \in \mathcal{F}_{x_i}$ para todo $i \geq i_0$. Em virtude de $y_i \in \Lambda_{x_i}$ temos $\|Tf(y_i)\| \geq \epsilon$ para cada $i \geq i_0$ e por continuidade $\|Tf(y)\| \geq \epsilon$. Deduzimos que $(x, y) \in \mathrm{Graf}(\Lambda)$ e isso demonstra que $\mathrm{Graf}(\Lambda)$ é fechado. Em particular o conjunto $R = R(\Lambda)$, que é a projeção de $\mathrm{Graf}(\Lambda)$ sobre a segunda coordenada, também é fechado.

Vamos demonstrar por indução transfinita que $K_1^{(\alpha)} \subset \Lambda^{-1}(R^{(\alpha)})$, ou seja, que $\Lambda_x \cap R^{(\alpha)} \neq \varnothing$ para todo $x \in K_1^{(\alpha)}$.

Se $\alpha = 0$ então $\Lambda_x \subset R$ e, de acordo com a Afirmação 1, $\Lambda_x \cap R^{(0)} = \Lambda_x \neq \varnothing$ para todo $x \in K_1$.

Agora, assuma que α é um ordinal limite e fixe $x \in K_1^{(\alpha)}$. Da hipótese de indução, para todo $\beta < \alpha$ temos

$$\Lambda_x \cap R^{(\beta)} \neq \varnothing.$$

Estes conjuntos formam uma coleção decrescente de compactos não vazios e portanto tem interseção não vazia. Temos

$$\Lambda_x \cap R^{(\alpha)} = \Lambda_x \cap (\bigcap_{\beta<\alpha} R^{(\beta)}) = \bigcap_{\beta<\alpha} (\Lambda_x \cap R^{(\beta)}) \neq \varnothing.$$

Em seguida, suponha que $\alpha = \delta+1$. Dado $x \in K_1^{(\alpha)}$ existe uma rede $(x_i)_{i\in I}$ no conjunto $K_1^{(\delta)} \setminus \{x\}$ convergindo a x. Aplicando a hipótese de indução, para cada $i \in I$ podemos fixar $y_i \in \Lambda_{x_i} \cap R^{(\delta)}$. Em virtude de $R^{(\delta)}$ ser um conjunto compacto existe uma sub-rede, que denotaremos por $(y_j)_{j\in J}$, convergindo a algum $y \in R^{(\delta)}$. Considere também a sub-rede $(x_j)_{j\in J}$ a qual converge para x. Dessa forma $((x_j, y_j))_{j\in J}$ é uma rede em $\mathrm{Graf}(\Lambda)$ convergindo a (x, y). Concluímos que $y \in \Lambda_x$ pois $\mathrm{Graf}(\Lambda)$ é fechado. Observe que para cada $j_0 \in J$ existe $j \geq j_0$ tal que $y_j \neq y$, pois do contrário seria possível obter infinitos elementos distintos $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots\}$ satisfazendo

$$y \in \bigcap_{1\leq n} \Lambda_{x_{j_n}}$$

o que contradiz a Afirmação 2. Portanto $y \in R^{(\delta+1)}$.

Agora estamos em condições de demonstrar os itens (a) e (b) de nosso teorema.

(a) Da Afirmação 3 deduzimos que se K_2 for disperso então K_1 é disperso e vale a relação

$$\mathrm{ht}(K_1) \leq \mathrm{ht}(R) \leq \mathrm{ht}(K_2).$$

(b) De acordo com a Afirmação 2 existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\Lambda^{-1}(y)| \leq m$ para cada $y \in K_2$. Se para algum ordinal α o conjunto $K_2^{(\alpha)}$ é infinito, então

$$|K_1^{(\alpha)}| \leq |\Lambda^{-1}(R^{(\alpha)})| = |\bigcup_{y\in R^{(\alpha)}} \Lambda^{-1}(y)| \leq |R^{(\alpha)}| \cdot m \leq |K_2^{(\alpha)}|.$$

□

3.3 Demonstrações dos teoremas

Nosso objetivo nesta seção é demonstrar os Teoremas 3.4, 3.5 e 3.9. Iniciamos com o Teorema 3.4.

Demonstração do Teorema 3.4. Seja T um isomorfismo de $C([1, \omega^\alpha m], X)$ em $C([1, \omega^\beta n], X)$ sobrejetor com $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$. O espaço $C([1, \omega^\alpha m], X)$ contém um subespaço isometricamente isomorfo a $C([1, \omega^\alpha m])$, portanto, a restrição de T a este subespaço é um isomorfismo de $C([1, \omega^\alpha m])$ em $C([1, \omega^\beta n], X)$ com distorção estritamente menor que 3. Aplicando o item (a) do Teorema 3.11 deduzimos que

$$\alpha + 1 = \mathrm{ht}([1, \omega^\alpha m]) \leq \mathrm{ht}([1, \omega^\beta n]) = \beta + 1,$$

logo, $\alpha \leq \beta$. Em virtude de T ser um isomorfismo sobrejetor, de maneira análoga verifica-se que $\beta \leq \alpha$.

□

Em seguida, demonstraremos o Teorema 3.9.

Demonstração do Teorema 3.9. Seja T um isomorfismo sobrejetor de $C(K_1, X)$ em $C(K_2, X)$ com distorção $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$. Distinguimos dois casos:

Caso 1: K_2 é disperso. O espaço $C(K_1, X)$ contém um subespaço isometricamente isomorfo a $C(K_1)$, portanto, a restrição de T a este subespaço é um isomorfismo de $C(K_1)$ em $C(K_2, X)$ satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.11. Aplicando o item (a) do Teorema 3.11 deduzimos que K_1 é disperso e $\mathrm{ht}(K_1) \leq \mathrm{ht}(K_2)$. Mais ainda, restringindo T^{-1} a $C(K_2)$ e aplicando novamente o item (a) do Teorema 3.11 podemos concluir que $\mathrm{ht}(K_2) \leq \mathrm{ht}(K_1)$. Logo $\mathrm{ht}(K_2) = \mathrm{ht}(K_1)$.

Se $\alpha > -1 + \mathrm{ht}(K_2)$, então os conjuntos $K_1^{(\alpha)}$ e $K_2^{(\alpha)}$ são ambos vazios e portanto têm a mesma cardinalidade. Por outro lado, se $\alpha < -1+\mathrm{ht}(K_2)$, então $K_1^{(\alpha)}$ e $K_2^{(\alpha)}$ são ambos infinitos. Aplicando o item (b) do Teorema 3.11 duas vezes obtemos $|K_1^{(\alpha)}| = |K_2^{(\alpha)}|$.

Caso 2: K_2 não é disperso. Procendendo como no Caso 1 concluímos que K_1 também não é disperso. Então, para todo ordinal α os conjuntos $K_1^{(\alpha)}$ e $K_2^{(\alpha)}$ são ambos infinitos. Aplicando o item (b) do Teorema 3.11 duas vezes obtemos $|K_1^{(\alpha)}| = |K_2^{(\alpha)}|$. Isto completa a demonstração do Teorema 3.9.

$\square$

Recordamos que um conjunto fechado não vazio $A \subset K$ admite um *operador de extensão simultânea regular* se existe um operador linear contínuo $L : C(A) \to C(K)$ satisfazendo $\|L\| = 1$, $L(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_K$ e

$$Lf|_A = f, \ f \in C(A).$$

É bem conhecido que tais extensões existem sempre que K é metrizável [47, Teorema 21.1.4]. No caso em que K for o intervalo de ordinal $[1, \alpha]$, podemos construir um operador de extensão simultânea regular $L : C(A) \to C(K)$ do seguinte modo. Para cada $f \in C(A)$ definimos, para cada $\beta \leq \alpha$, $Lf(\beta) = f(\gamma)$ onde

$$\gamma = \begin{cases} \inf\{[\beta, \alpha] \cap A\} & \text{se } [\beta, \alpha] \cap A \neq \varnothing, \\ \sup A & \text{se } [\beta, \alpha] \cap A = \varnothing. \end{cases}$$

Demonstra-se, sem dificuldades, que L é um operador de extensão simultânea regular de $C(A)$ em $C([1, \alpha])$, ver [2, Proposição 1.1].

Proposição 3.12. *Sejam X um espaço de Banach de cotipo finito, K_1 e K_2 espaços compactos de Hausdorff, $T : C(K_1, X) \to C(K_2, X)$ um isomorfismo satisfazendo $\|f\| \leq \|Tf\|$ para todo $f \in C(K_1, X)$ e $\|T\| < 3$, $\epsilon = (1 - \|T\|/3)/2$ e $A \subset K_1$ um subconjunto fechado admitindo um operador de extensão simultânea regular. Para todo ordinal α, se $A^{(\alpha)} \neq \varnothing$, então para cada $\gamma \in C(K_1, X)$ verificando $\|\gamma\| = 1$ e $\|\gamma(x)\| = 1$ para todo $x \in A$, existe $y \in K_2^{(\alpha)}$ tal que $\|T\gamma(y)\| \geq \epsilon$.*

Demonstração. Fixe $\gamma \in C(K_1, X)$ tal que $\|\gamma\| = 1$ e $\|\gamma(x)\| = 1$ para todo $x \in A$. Seja $L : C(A) \to C(K_1)$ um operador de extensão simultânea regular e considere o operador $T^A : C(A) \to C(K_2, X)$ definido por

$$T^A f = T(\gamma \cdot Lf).$$

Então $\|T^A\| < 3$ e $\|f\| \leq \|T^A f\|$ para todo $f \in C(A)$. De fato, para cada $x \in A$

$$\|T^A f\| = \|T(\gamma \cdot Lf)\| \geq \|\gamma \cdot Lf\| \geq \|\gamma(x) \cdot f(x)\| = |f(x)|.$$

Fixe $\epsilon_A = (1 - \|T^A\|/3)/2$. Nessas condições, como na prova do Teorema 3.11, para todo $x \in A$ podemos definir os conjuntos $\mathcal{F}_x^A$, Λ_x^A e uma função $\Lambda^A : A \rightrightarrows K_2$ com imagem $R_A = R(\Lambda^A) \subseteq K_2$

associados ao operador T^A. De acordo com a Afirmação 3 no referido teorema, para todo número ordinal α temos

$$A^{(\alpha)} \subset (\Lambda^A)^{-1}(R_A^{(\alpha)}).$$

Em particular, se $A^{(\alpha)} \neq \varnothing$, então existe um $y \in R_A^{(\alpha)} \subset K_2^{(\alpha)}$ tal que

$$\|T\gamma(y)\| = \|T^A \mathbb{1}_A(y)\| \geq \epsilon_A \geq \epsilon.$$

□

Estamos agora em condições de demonstrar o Teorema 3.5.

Demonstração do Teorema 3.5. Seja T um isomorfismo sobrejetor de $C(K_1, X)$ em $C(K_2, X)$ com $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$. Se K_1 e K_2 são intervalos compactos de ordinais, por [47, Teorema 8.6.5], existem ordinais α, β e $1 \leq n, m < \omega$ tais que

$$K_1 \approx [1, \omega^\alpha n] \ \text{ e } \ K_2 \approx [1, \omega^\beta m].$$

Aplicando o Teorema 3.4 obtemos $\alpha = \beta$. Precisamos verificar que $m = n$. Substituindo o operador T por $\|T^{-1}\|\ T$ se necessário, vamos supor que $\|f\| \leq \|Tf\|$ para cada $f \in C(K_1, X)$.

Em virtude de K_1 ser um compacto de Hausdorff disperso, K_1 é totalmente desconexo e portanto é zero-dimensional, i. e., possui uma base constituída apenas de conjuntos aberto-fechados, ver [47, Proposição 8.2.2].

Escreva $K_1^{(\alpha)} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Por K_1 ser de Hausdorff, os pontos $x_1, \ldots, x_n$ podem ser separados por abertos mutuamente disjuntos; por K_1 ser zero-dimensional, podemos diminuir estes conjuntos abertos para conjuntos abertos-fechados. Obtemos dessa forma conjuntos abertos-fechados $U_1, \ldots, U_n$ mutuamente disjuntos satisfazendo $x_j \in U_j$ para todo $1 \leq j \leq n$. Para cada $1 \leq j \leq n-1$ defina $A_j = U_j$ e A_n como o conjunto complementar da reunião de $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$. Assim, os conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ são abertos-fechados mutuamente disjuntos tais que $x_j \in A_j$ e

$$K_1 = \bigcup_{j=1}^{n} A_j.$$

Em seguida, identificamos X^n e X^m com $C(K_1^{(\alpha)}, X)$ e $C(K_2^{(\alpha)}, X)$ respectivamente. Associamos a cada $z = (z_1, \ldots, z_n) \in X^n$ a função

$$\gamma_z = \sum_{j=1}^{n} z_j \cdot \mathbb{1}_{A_j} \in C(K_1, X).$$

Observe que $\|\gamma_z\| = \|z\|$, $z \in X^n$. Considere a aplicação $S : X^n \to X^m$ definida por

$$S(z) = T\gamma_z|_{K_2^{(\alpha)}}, \ z \in X^n.$$

Claramente S é um operador linear e verifica $\|S\| \leq \|T\|$. Seja $z = (z_1, \ldots, z_n) \in B_{X^n}$ e, sem perda de generalidade, suponha que $\|z\| = \|z_1\| = 1$.

Fixe $\epsilon = (1 - \|T\|/3)/2$. Aplicando a Proposição 3.12 com $A = A_1$ e $\gamma = \gamma_z$, concluímos que existe um $y \in K_2^{(\alpha)}$ tal que

$$\|Sz\| \geq \|Sz(y)\| = \|T\gamma_z(y)\| \geq \epsilon.$$

Deduzimos que para todo $z \in X^n$ vale

$$\epsilon\|z\| \leq \|Sz\| \leq \|T\|\|z\|.$$

Por hipótese, X^m não contém subespaço isomorfo a X^{m+1} e isso nos permite concluir que $n \leq m$. Demonstra-se de maneira análoga que $m \leq n$.

□

3.4 Considerações finais

Apresentaremos nesta seção uma coleção de espaços de Banach X satisfazendo as condições do Teorema 3.5, i.e, X tem cotipo finito e X^n não contém subespaço isomorfo a X^{n+1} para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente, qualquer espaço de dimensão finita não trivial possui essa propriedade e nosso objetivo é obter exemplos de dimensão infinita. Para exibir tais exemplos devemos recordar algumas definições e alguns teoremas. As definições apresentadas nesta seção pode ser encontradas em [1], [27] e [28].

Para espaços de Banach X e Y, denotamos por $\mathcal{L}(X,Y)$ o espaço de todos os operadores lineares contínuos de X em Y.

Definição 3.13. Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ é denominado

(a) *Fredholm*: se seu núcleo tem dimensão finita e sua imagem tem codimensão finita

(b) *Inessencial*: se para todo $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ o operador $I_X - S \circ T$ for Fredholm, onde I_X denota o operador identidade em X.

(c) *Estritamente Singular*: se não existir supespaço fechado Z de X, de dimensão infinita, tal que a restrição de T a Z seja um isomorfismo sobre sua imagem.

(d) *Improjetivo*: se não existir supespaço fechado Z de X, de dimensão infinita, tal que a restrição de T a Z seja um isomorfismo sobre sua imagem e $T(Z)$ seja um subespaço complementado de Y.

Definição 3.14. Dois espaços de Banach X e Y são *essencialmente incomparáveis* se todo operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ for inessencial.

Definição 3.15. Um espaço de Banach X de dimensão infinita é *hereditariamente indecomponível* (ou H.I.) se nenhum subespaço de X pode ser escrito como direta de dois subespaços fechados de dimensão infinita.

Vamos precisar de alguns teoremas que apresentaremos na sequência.

Teorema 3.16 (Aiena-González)**.** *Sejam X e Y espaços de Banach. Se X é hereditariamente indecomponível, para todo $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, T é improjetivo se e somente se T é inessencial.*

Demonstração. Ver P. Aiena e M. González [1, Teorema 4.11].

□

Teorema 3.17 (Galego)**.** *Se (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) são pares de espaços de Banach essencialmente incomparáveis verificando $X_1 \oplus Y_2 \sim X_2 \oplus Y_1$, então existem m, $n \in \mathbb{N}$ tais que*

$$X_1 \oplus \mathbb{K}^m \sim X_2 \oplus \mathbb{K}^n.$$

Demonstração. Ver E. M. Galego [29, Observação 3.3].

□

Teorema 3.18. *Seja $1 \leq p < \infty$. Todo subespaço de dimensão infinita de l_p contém um subespaço que é isomorfo a l_p.*

Demonstração. Ver J. Lindenstrauss e L. Tzafriri [36, Proposição 2.a.2, p. 53].

□

Teorema 3.19. *Seja $1 \leq p < \infty$. Todo subespaço de dimensão infinita e complementado de l_p é isomorfo a l_p.*

Demonstração. Ver J. Lindenstrauss e L. Tzafriri [36, Teorema 2.a.3, p. 54]

□

Teorema 3.20. *Seja $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ um operador com imagem fechada e tal que $\dim \ker T < \infty$. Seja $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ um operador estritamente singular. Então $T+S$ tem imagem fechada e $\dim \ker T+S < \infty$.*

Demonstração. Ver J. Lindenstrauss e L. Tzafriri [36, Teorema 2.c.10, p. 79].

□

Dados espaços de Banach X e Y, utilizaremos a notação $Y \hookrightarrow X$ para dizer que Y é isomorfo a algum subespaço de X.

Teorema 3.21 (Ferenczi)**.** *Seja $n \in \mathbb{N}$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ seja X_i um espaço de Banach hereditariamente indecomponível. Então não existem espaços de Banach de dimensão infinita $Y_1, \ldots, Y_{n+1}$ tais que*

$$Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_{n+1} \hookrightarrow X_1 \oplus \ldots \oplus X_n.$$

Demonstração. Ver V. Ferenczi [28, Corolário 2].

□

Teorema 3.22 (Samuel)**.** *Sejam X e Y espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$. Então X ou Y contém um subespaço isomorfo a l_p se e somente se $X \oplus Y$ contém um subespaço isomorfo a l_p.*

Demonstração. Ver C. Samuel [46, Teorema 1].

□

Denote por H o espaço de Banach separável uniformemente convexo e hereditariamente indecomponível introduzido por Ferenczi em [27] e para cada $1 \leq p < \infty$ defina

$$H_p = l_p \oplus H.$$

Temos o seguinte resultado:

Proposição 3.23. *Para cada $1 \leq p < \infty$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, H_p^n não contém subespaço isomorfo a H_p^{n+1}. Mais ainda, se $1 \leq p < q < \infty$ então*

$$H_p \nsim H_q.$$

Demonstração. De início, observe que todo operador $S \in \mathcal{L}(H, l_r)$, $1 \leq r < \infty$, é improjetivo. De fato, suponha um subespaço de dimensão infinita Z em H tal que a restrição a Z seja um isomorfismo e $S(Z)$ seja complementado em l_r. De acordo com Teorema 3.19 temos $Z \sim l_r$, o que é um absurdo pois H é hereditariamente indecomponível.

Também pelo fato de H ser hereditariamente indecomponível, segue do Teorma 3.16 que todo operador linear improjetivo $S \in \mathcal{L}(H, l_r)$ é inessencial. Logo, todo operador $S \in \mathcal{L}(H, l_r)$ é inessencial.

Sejam $1 \leq p, q < \infty$. Pelo argumento acima, (l_p, H) e (l_q, H) são pares de espaços de Banach essencialmente incomparáveis. Assim, se $H_p = l_p \oplus H \sim l_q \oplus H = H_q$, pelo Teorema 3.17, existem m, $n \in \mathbb{N}$ tais que

$$l_p \oplus \mathbb{K}^m \sim l_q \oplus \mathbb{K}^n.$$

Deduzimos que $p = q$.

Em seguida, dado $1 \leq p < \infty$, assuma que H_p^n contenha um subespaço isomorfo a H_p^{n+1} para algum $n \in \mathbb{N}$. Nessas condições existe um isomorfismo $T : H^{n+1} \to l_p \oplus H^n$. Seja P a projeção natural de $l_p \oplus H^n$ em l_p.

$$\begin{tikzcd}
H^n & l_p \oplus H^n \arrow[l, "I-P"'] \arrow[r, "P"] & l_p \\
& H^{n+1} \arrow[u, "T"'] \arrow[ul, "(I-T)\circ P"] \arrow[ur, "P\circ T"'] &
\end{tikzcd}$$

Vamos demonstrar que o operador $P \circ T$ é estritamente singular. Com efeito, suponha por absurdo que exista em H^{n+1} um subespaço de dimensão infinita Y tal que a restrição de $P \circ T$ a Y seja um isomorfismo. Então

$$Y \hookrightarrow l_p.$$

De acordo com o Teorema 3.18,

$$l_p \hookrightarrow Y \hookrightarrow H^{n+1}$$

e pelo Teorema 3.22

$$l_p \hookrightarrow H,$$

o que contradiz a hipótese de H ser hereditariamente indecomponível.

Então $P \circ T$ é estritamente singular. Deduzimos, pelo Teorema 3.20, que o operador $(I - P) \circ T : H^{n+1} \to H^n$ tem imagem fechada e seu núcleo é um espaço vetorial de dimensão finita V. Seja W um espaço de Banach tal que $H^{n+1} = W \oplus V$. A restrição de $(I - P) \circ T$ a W é um isomorfismo sobre sua imagem, portanto, H^n contém um subespaço isomorfo a W. Simbolicamente

$$W \hookrightarrow H^n.$$

Seja Z um subespaço de H, tal que $H = V \oplus Z$. Temos

$$H^{n+1} \oplus Z \sim W \oplus V \oplus Z \hookrightarrow H^n \oplus V \oplus Z \sim H^{n+1},$$

o que, de acordo com o Teorema 3.21, é impossível.

$\square$

Capítulo 4

Sobre distâncias de Banach-Mazur entre espaços $C_0(K, X)$ e $C_0(\Gamma, X)$ com Γ discreto

4.1 Introdução

Neste capítulo, nosso principal interesse é estudar a distância de Banach-Mazur entre os espaços $C_0(K, X)$, onde K denota um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff, e os espaços $C_0(\Gamma, X)$, onde Γ denota um conjunto infinito munido da topologia discreta. Recordamos que para espaços de Banach isomorfos X e Y, a distância de Banach-Mazur entre estes espaços é definida por

$$\mathrm{d}(X, Y) = \inf_T \left\{ \|T\| \|T^{-1}\| \right\}$$

onde T percorre todos os isomorfismos sobrejetores de X em Y.

A fonte de nossa pesquisa remonta a Banach. Em 1932, ele afirmou que $\mathrm{d}(c, c_0) \leq 4$; ver [4, p. 181]. Banach chegou a essa conclusão utilizando o seguinte isomorfismo T_λ de c em c_0:

$$T_\lambda(x_1, x_2, x_3, ...) = (\lambda\ x, x_1 - x, x_2 - x, x_3 - x, ...), \tag{4.1}$$

com $\lambda = 1$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x. Uma melhor estimativa para essa distância pode ser obtida de (4.1) fixando-se $\lambda = 2$ a saber: $\mathrm{d}(c, c_0) \leq 3$. Finalmente, em 1968 Cambern [14], veja também [10], calculou o valor exato desta distância:

$$\mathrm{d}(c, c_0) = 3. \tag{4.2}$$

Surge a questão sobre os valores exatos das distâncias de Banach-Mazur entre os espaços $C(K)$, onde K é um compacto de Hausdorff, e o espaço c_0. Pelo clássico teorema de Mazurkiewicz e Sierpiński [47, Teorema 8.6.10] e por um teorema de Bessaga e Pełczyński [7, Teorema 1] deduzimos que se um espaço $C(K)$ é isomorfo a c_0, então K é homeomorfo a um intervalo de ordinal $[1, \omega^n k]$, $1 \leq n, k < \omega$. De maneira natural, temos a seguinte pergunta:

Problema 4.1. Quais são os valores de $\mathrm{d}(C([1, \omega^n k]), c_0)$, $1 \leq n, k < \omega$?

O objetivo do presente capítulo é duplo. Em primeiro lugar, fornecer uma extensão vetorial de (4.2). Em segundo lugar, resolver completamente o Problema 4.1.

Os principais resultados deste capítulo envolvem a noção de derivado, ver Definição 3.6. O primeiro resultado fornece cotas inferiores para distâncias de Banach-Mazur entre certos espaços $C_0(K, X)$. Trata-se de uma generalização do principal resultado de [14], o caso onde $n = 1$ e $X = \mathbb{R}$ ou $X = \mathbb{C}$.

Teorema 4.2. *Sejam $1 \leq n < \omega$, Γ um conjunto infinito munido da topologia discreta, K um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff e X um espaço de Banach de cotipo finito. Então*

$$C_0(K, X) \sim C_0(\Gamma, X) \quad e \quad K^{(n)} \neq \varnothing \Longrightarrow \mathrm{d}(C_0(K, X), C_0(\Gamma, X)) \geq 2n + 1.$$

Para se obter cotas superiores para distâncias mencionadas no Problema 4.1 demonstramos:

Teorema 4.3. *Sejam $1 \leq n, k < \omega$ e X um espaço de Banach. Então*

$$\mathrm{d}(C([1, \omega^n k], X), C_0(\mathbb{N}, X)) \leq 2n + 1.$$

Então, como consequência imediata dos Teoremas 4.2 e 4.3 obtemos a seguinte generalização de (4.2) que ao mesmo tempo resolve o Problema 4.1.

Corolário 4.4. *Sejam $1 \leq n, k < \omega$ e X um espaço de Banach de cotipo finito. Então*

$$\mathrm{d}(C([1, \omega^n k], X), C_0(\mathbb{N}, X)) = 2n + 1.$$

Não sabemos responder quando as asserções do Corolário 4.4 permanecem verdadeiras sem a hipótese de X ser um espaço de Banach de cotipo finito.

O Teorema 4.2 pode ser aplicado para se obter algumas generalizações de resultados clássicos sobre espaços $C_0(\Gamma)$. Por exemplo, é bem conhecido que se um espaço $C(K)$ é isomorfo a um espaço $C_0(\Gamma)$, onde Γ é um conjunto infinito munido da topologia discreta, então $K^{(\omega)} = \varnothing$. Tal resultado pode ser obtido por uma combinação de teoremas de [5], [7] e [43], veja também [37, Teorema 1.1]. Todavia, como consequência imediata do Teorema 4.2, temos a seguinte extensão vetorial deste resultado.

Corolário 4.5. *Sejam Γ um conjunto discreto infinito, K um espaço localmente compacto de Hausdorff e X um espaço de Banach de cotipo finito. Então*

$$C_0(K, X) \sim C_0(\Gamma, X) \Longrightarrow K^{(\omega)} = \varnothing.$$

Demonstração. Seja T um isomorfismo sobrejetor de $C_0(K, X)$ em $C_0(\Gamma, X)$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|T\|\|T^{-1}\| < 2n + 1$. Então, pelo Teorema 4.2, $K^{(n)} = \varnothing$.

□

Utilizando o principal resultado do Capítulo 2, mais precisamente o Teorema 2.8, e o Corolário 4.5, para um espaço de Banach X de cotipo finito, separável ou tal que X^* tem a propriedade de Radon-Nikodým, temos um classificação de todos os compactos de Hausdorff K tais que $C(K, X) \sim C_0(\mathbb{N}, X)$.

Corolário 4.6. *Sejam X um espaço de Banach de cotipo finito e K um compacto de Hausdorff. Se X é separável ou X^* tem a propriedade de Radon-Nikodým, então*

$$C(K, X) \sim C_0(\mathbb{N}, X) \Longrightarrow K \approx [1, \omega^n k], \text{ com } 1 \leq k, n < \omega.$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 2.8, se $C(K, X) \sim C_0(\mathbb{N}, X)$, então K é enumerável. De acordo com [47, Teorema 8.6.10], o compacto K é homeomorfo a um intervalo de ordinal enumerável. De acordo com o Corolário 4.5 temos $K^{(\omega)} = \varnothing$. Consequentemente, $K \approx [1, \omega^n\ k]$ onde $1 \leq k, n < \omega$.

□

Finalmente, o clássico teorema de Milyutin [44, Teorema 21.5.10] mostra que a hipótese de cotipo finito em geral não pode ser removida no Corolário 4.5. De fato,

$$\begin{aligned} C_0(\mathbb{N}, C([0,1])) &\sim C([1,\omega], C([0,1])) \sim C([1,\omega]\times[0,1]) \\ &\sim C([0,1]) \sim C([0,1]\times[0,1]) \sim C([0,1], C[0,1]), \end{aligned}$$

entretanto, $[0,1]^{(\omega)} = [0,1]$.

4.2 Resultados preliminares

Vamos estabelecer nesta seção duas proposições que terão um importante papel na Seção 4.3. Para um espaço de Banach X denotaremos por S_X a esfera unitária de X. Para um subconjunto J de um espaço topológico K denotaremos por $\mathring{J}$ o conjunto dos pontos interiores de J.

Proposição 4.7. *Sejam K um espaço localmente compacto de Hausdorff tal que $K^{(n)} \neq \varnothing$ para algum $1 \leq n < \omega$, $\mathit{\Gamma}$ um conjunto infinito munido da topologia discreta e X um espaço de Banach de cotipo finito. Fixe $v \in S_X$ e $0 < \epsilon < 1$. Se T é um isomorfismo de $C_0(K,X)$ em $C_0(\mathit{\Gamma},X)$ com $\|T^{-1}\| = 1$ então existem pontos $x_1,\dots,x_n \in K$, subconjuntos compactos $J_1,\dots,J_n$ de K e funções $h_1,\dots,h_n$ em $C_0(K)$ satisfazendo:*

(a) $x_i \in \mathring{J}_i \cap K^{(n-i+1)}$, *para* $1 \leq i \leq n$.

(b) $J_i \subset \mathring{J}_{i-1}$, *para* $1 < i \leq n$.

(c) $0 \leq h_i \leq 1$, $h_i(x) = 1$ *se* $x \in J_i$, *para* $1 \leq i \leq n$, *e* $h_i(x) = 0$ *se* $x \notin \mathring{J}_{i-1}$ *para* $1 < i \leq n$.

(d) Os conjuntos $G_i = \{y \in \mathit{\Gamma} : \|T(v\cdot h_i)(y)\| \geq \epsilon\}$, $1 \leq i \leq n$, *são não vazios e mutuamente disjuntos.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução em n. Seja $x_1 \in K^{(n)}$ e fixe J_1 uma vizinhança compacta de x_1. Utilizando o Lema de Urysohn 1.12 podemos encontrar $h_1 \in C_0(K)$ com $0 \leq h_1 \leq 1$, $h_1(x) = 1$ se $x \in J_1$. Mais ainda, em virtude de $0 < \epsilon < 1$ e $\|T^{-1}\| = 1$, o conjunto $G_1 = \{y \in \mathit{\Gamma} : \|T(v\cdot h_1)(y)\| \geq \epsilon\}$ é não vazio.

Dado $1 < r < n$, suponha que foram obtidos pontos $x_1,\dots,x_r$, conjuntos compactos $J_1,\dots,J_r$ e funções $h_1,\dots,h_r$ em $C_0(K)$ verificando os itens (a), (b), (c) e (d).

Por K ser um espaço localmente compacto de Hausdorff, é possível encontrar pontos $a_1, a_2, a_3 \dots$ em $(\mathring{J}_r \setminus \{x_r\}) \cap K^{(n-r)}$, subconjuntos abertos mutuamente disjuntos $U_1, U_2, U_3 \dots$ e compactos $L_1, L_2, L_3 \dots$ verificando

$$a_i \in \mathring{L}_i \subset L_i \subset U_i \subset J_r,\ i \in \mathbb{N}.$$

Aplicando o Lema de Urysohn 1.12 podemos obter funções $f_1, f_2, f_3 \dots$ em $C_0(K)$ tais que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_i \leq 1$, $f_i(x) = 1$ se $x \in L_i$ e $f_i(x) = 0$ se $x \notin U_i$. Em virtude de $U_i \cap U_j = \varnothing$ se $i \neq j$, temos $f_i \cdot f_j = 0$ se $i \neq j$.

Seja $G = G_1 \cup \ldots \cup G_r$. Afirmamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{y \in \mathit{\Gamma} : \|T(v\cdot f_m)(y)\| \geq \epsilon\} \cap G = \varnothing. \tag{4.3}$$

Do contrário, supondo $G = \{y_1,\dots,y_s\}$ e denotando

$$\Lambda_i = \{j \in \mathbb{N} : \|T(v\cdot f_j)(y_i)\| \geq \epsilon\},\ 1 \leq i \leq s,$$

temos

$$\mathbb{N} \subseteq \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_s$$

e portanto Λ_l é infinito para algum $1 \leq l \leq s$. Sejam $l_1, l_2, l_3 \ldots$ inteiros distintos em Λ_l.

Por hipótese, X tem cotipo finito $2 \leq q < \infty$. Segue da Definição 2.6 que existe uma constante $Q > 0$ tal que para quaisquer vetores $v_1, v_2, \ldots, v_p$ em X, se $0 < \eta \leq \|v_i\|$ para cada $1 \leq i \leq p$, existe uma escolha apropriada de escalares $r_i = \pm 1$ verificando

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} r_i \cdot v_i \right\| \geq \eta \cdot Q \cdot \sqrt[q]{p}. \tag{4.4}$$

Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon \cdot Q \cdot \sqrt[q]{m} > \|T\|$. De acordo com (4.4), existe uma escolha apropriada de escalares $r_i = \pm 1$ satisfazendo

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} r_i \cdot T(v \cdot f_{l_i})(y_l) \right\| \geq \epsilon \cdot Q \cdot \sqrt[q]{m} > \|T\|.$$

Em virtude de $f_{l_i} \cdot f_{l_j} = 0$ se $i \neq j$ e $\|f_{l_i}\| \leq 1$ para todo i, a função $A = \sum_{i=1}^{m} r_i \cdot v \cdot f_{l_i} \in C_0(K,X)$ verifica $\|A\| \leq 1$. Entretanto,

$$\|T\| \geq \|T(A)\| \geq \left\| T\left(\sum_{i=1}^{m} r_i \cdot v \cdot f_{l_i} \right)(y_l) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} r_i \cdot T(v \cdot f_{l_i})(y_l) \right\| > \|T\|,$$

uma contradição que estabelece nossa afirmação.

Portanto, podemos fixar $m \in \mathbb{N}$ verificando (4.3) e definir $x_{r+1} = a_m$, $J_{r+1} = L_m$, $h_{r+1} = f_m$ e $G_{r+1} = \{y \in \Gamma : \|T(v \cdot f_m)(y)\| \geq \epsilon\}$. É simples verificar que as condições (a), (b), (c) e (d) estão satisfeitas para $r+1$. Isso completa a demonstração.

□

Na proposição seguinte utilizaremos o Teorema 1.17 (Representação de Riesz-Singer) e outros resultados do Capítulo 1.

Proposição 4.8. *Sejam X um espaço de Banach de cotipo finito, K um espaço localmente compacto de Hausdorff, Γ um conjunto infinito munido da topologia discreta e T um isomorfismo de $C_0(K,X)$ em $C_0(\Gamma,X)$. Então, para cada $y \in \Gamma$ e para cada $\eta > 0$ o conjunto*

$$\{x \in K : |T^*(\varphi \cdot \delta_y)|(\{x\}) > \eta \text{ para algum } \varphi \in S_{X^*}\}$$

é finito.

Demonstração. Por contradição assuma que para algum $\eta > 0$ o conjunto

$$\{x \in K : |T^*(\varphi \cdot \delta_y)|(\{x\}) > \eta \text{ para algum } \varphi \in S_{X^*}\}$$

seja infinito.

Por hipótese, X tem cotipo finito $2 \leq q < \infty$. Considere $Q > 0$ exatamente como na demonstração da Proposição 4.7 e $m \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\eta \cdot Q \cdot \sqrt[q]{m} > 2\ \|T\|$. Fixe também pontos distintos $x_1, \ldots, x_m \in K$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in S_{X^*}$ verificando

$$\|T^*(\varphi_i \cdot \delta_y)(\{x_i\})\| = |T^*(\varphi_i \cdot \delta_y)|(\{x_i\}) > \eta,\ 1 \leq i \leq m.$$

Existem em S_X vetores $v_1, \ldots, v_m$ satisfazendo

$$\langle T^*(\varphi_i \cdot \delta_y)(\{x_i\}), v_i \rangle > \eta\ ,\ 1 \leq i \leq m. \tag{4.5}$$

Devido à regularidade das medidas $T^*(\varphi_i \cdot \delta_y)$, $1 \leq i \leq m$, podemos fixar $U_1, \ldots, U_m$, vizinhanças mutuamente disjuntas de $x_1, \ldots, x_m$ respectivamente, tais que

$$|T^*(\varphi_i \cdot \delta_y)|(U_i \setminus \{x_i\}) \leq \frac{\eta}{2}. \tag{4.6}$$

Aplicando o Lema de Urysohn 1.12 podemos encontrar funções $h_i \in C_0(K)$ com $0 \leq h_i(x) \leq 1$ para todo $x \in K$, $h_i(x_i) = 1$ e $h_i(x) = 0$ se $x \in K \setminus U_i$. Defina $f_i \in C_0(K,X)$ por $f_i = v_i \cdot h_i$. Das relações (4.5) e (4.6),

$$\begin{aligned}
\|Tf_i(y)\| &\geq |\langle \varphi_i, Tf_i(y)\rangle| = \left|\int f_i dT^*(\varphi_i \cdot \delta_y)\right| \\
&\geq |\langle T^*(\varphi_i \cdot \delta_y)(\{x_i\}), v_i\rangle| - \left|\int f_i dT^*(\varphi_i \cdot \delta_y) - \langle T^*(\varphi_i \cdot \delta_y)(\{x_i\}), v_i\rangle\right| \\
&> \eta - \left|\int f_i dT^*(\varphi_i \cdot \delta_y) - \int_{x_i} f_i dT^*(\varphi_i \cdot \delta_y)\right| \\
&\geq \eta - |T^*(\varphi_i \cdot \delta_y)|(U_i \setminus \{x_i\}) \geq \frac{\eta}{2}.
\end{aligned}$$

Existe, como em 4.4, uma escolha apropriada de escalares $r_i = \pm 1$ verificando

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} r_i \cdot Tf_i(y)\right\| \geq \frac{\eta \cdot Q \cdot \sqrt[q]{m}}{2}. \tag{4.7}$$

Em virtude de $U_i \cap U_j = \varnothing$, se $i \neq j$, e $\|f_i\| \leq 1$, $1 \leq i \leq m$, temos

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} r_i \cdot f_i\right\| \leq 1.$$

Por (4.7) e pela escolha de m,

$$\|T\| \geq \left\|T\left(\sum_{i=1}^{m} r_i \cdot f_i\right)\right\| \geq \left\|T\left(\sum_{i=1}^{m} r_i \cdot f_i\right)(y)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{m} r_i \cdot Tf_i(y)\right\| > \|T\|,$$

o que é uma contradição.

□

4.3 Cotas inferiores para as distâncias entre $C_0(K,X)$ e $C_0(K,X)$

Nesta seção demonstraremos o principal resultado deste capítulo, o Teorema 4.2.

Demonstração do Teorema 4.2. A prova será obtida por redução ao absurdo em quatro passos.

Passo 1. Neste primeiro passo, assumindo a existência de um isomorfismo sobrejetor T de $C_0(K,X)$ em $C_0(\Gamma,X)$ com distorção $\|T\|\|T^{-1}\| < 2n+1$, construiremos funções especiais α e β em $C_0(\Gamma)$.

Sem perda de generalidade vamos supor que $\|T^{-1}\| = 1$, do contrário podemos simplesmente substituir T pelo isomorfismo $\|T^{-1}\|\ T$ que claramente possui esta propriedade. Desta forma, para cada $f \in C_0(K,X)$ temos $\|f\| \leq \|Tf\|$.

Sejam $0 < \eta,\ \epsilon < 1$ e tais que

$$\|T\| < (2n+1)\ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \quad \text{e} \quad \eta < \min\left\{\epsilon,\ \frac{(2n+1)(1-\epsilon)-\|T\|}{2}\right\}.$$

Fixe $v \in S_X$. Pela hipótese de $K^{(n)} \neq \varnothing$ existem pontos $x_1, \ldots, x_n \in K$, subconjuntos compactos $J_1, \ldots, J_n \subset K$, funções $h_1, \ldots, h_n \in C_0(K)$ e subconjuntos $G_1, \ldots, G_n \subset \Gamma$ verificando os itens (a), (b), (c) e (d) da Proposição 4.7. Para cada $1 \leq i \leq n$ considere

(a) $f_i = v \cdot h_i \in C_0(K,X)$,

(b) $g_i = \mathbb{1}_{G_i} \cdot Tf_i$ onde $\mathbb{1}_{G_i}$ é a função característica de G_i.

Denote por G o conjunto finito $\bigcup_{i=1}^n G_i$. De acordo com a Proposição 4.8

$$H = \bigcup_{y \in G} \{x \in K : |T^*(\varphi \cdot \delta_y)|(\{x\}) \geq \eta \text{ para algum } \varphi \in S_{X^*}\}$$

é finito, então fixamos um ponto $z \in \mathring{J}_n \setminus H$. Seja $v^* \in S_{X^*}$ um funcional satisfazendo $\langle v^*, v\rangle = 1$ e defina a seguinte medida vetorial

$$\mu = (T^{-1})^*(v^* \cdot \delta_z).$$

De acordo com o Teorema 1.22 existe uma função $\gamma : \Gamma \to X^*$ tal que $\|\gamma(y)\| = 1$ para todo $y \in \Gamma$ e

$$\langle \mu(A), u\rangle = \int_A \langle \gamma(y), u\rangle d|\mu|(y),\ \ A \subset \Gamma \ \text{ e } \ u \in X.$$

Mais ainda, analogamente como na Proposição 1.23, demonstra-se que

$$\int f d\mu = \int \langle \gamma(y), f(y)\rangle d\,|\mu|\,(y),\ \ f \in C_0(\Gamma, X). \tag{4.8}$$

Por $\|\gamma(y)\| = 1$, $y \in \Gamma$, e pela escolha do ponto z temos

$$|T^*(\gamma(y) \cdot \delta_y)|(\{z\}) < \eta,\ \ y \in G.$$

Por regularidade, para cada $y \in G$ existe uma vizinhança aberta de z, $U_y \subset J_n$, tal que $|T^*(\gamma(y) \cdot \delta_y)|(U_y) < \eta$. Fixe $U = \bigcap_{y \in G} U_y$.

Aplicando o Lema de Urysohn 1.12, podemos encontrar uma função $h_{n+1} \in C_0(K)$ tal que $0 \leq h_{n+1}(x) \leq 1$ para cada $x \in K$, $h_{n+1}(z) = 1$ e $h_{n+1}(x) = 0$ se $x \in K \setminus U$. Seja $f_{n+1} = v \cdot h_{n+1} \in C_0(K,X)$ e defina funções α, $\beta \in C_0(\Gamma)$, em cada $y \in \Gamma$, por

$$\begin{aligned}
\alpha(y) &= \langle \gamma(y), Tf_{n+1}(y)\rangle, \\
\beta(y) &= \langle \gamma(y), g_1(y) + 2\sum_{i=2}^{n} g_i(y) + 2\ Tf_{n+1}(y)\rangle.
\end{aligned}$$

Passo 2. Vamos demonstrar que $\|\beta\| = \max\{2\ \|\alpha\|, |\beta(y)| : y \in G\}$.

Para cada $y \in G$,

$$\begin{aligned} |\alpha(y)| = |\langle \gamma(y), Tf_{n+1}(y)\rangle| &= \left| \int Tf_{n+1} d(\gamma(y) \cdot \delta_y) \right| \\ &= \left| \int f_{n+1} dT^*(\gamma(y) \cdot \delta_y) \right| \leq |T^*(\gamma(y) \cdot \delta_y)|(U) < \eta < 1. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Seja $y_0 \in \mathit{\Gamma}$ tal que $\|\alpha\| = |\alpha(y_0)|$. Pela relação (4.8) e por $|\mu|(\mathit{\Gamma}) = \|(T^{-1})^*(v^* \cdot \delta_z)\| \leq 1$,

$$\begin{aligned} |\alpha(y_0)| &= |\langle \gamma(y_0), Tf_{n+1}(y_0)\rangle| \geq \left| \int \langle \gamma(y), Tf_{n+1}(y)\rangle d|\mu|(y) \right| \\ &= \left| \int Tf_{n+1} d\mu \right| = \left| \int Tf_{n+1} d(T^{-1})^*(v^* \cdot \delta_z) \right| = \left| \int f_{n+1} d(v^* \cdot \delta_z) \right| \\ &= |\langle v^*, f_{n+1}(z)\rangle| = \langle v^*, v\rangle = 1. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Portanto $y_0 \in \mathit{\Gamma} \setminus G$ e como $\beta(y) = 2\ \alpha(y)$ para todo $y \in \mathit{\Gamma} \setminus G$, o Passo 2 está verificado.

Passo 3. Vamos demonstrar que $\|\beta\| \geq (2n+1) - (2n-1)\epsilon$.

Seja y_0 tal que $\|\beta\| = |\beta(y_0)|$. Utilizando a relação (4.8), podemos escrever

$$\begin{aligned} |\beta(y_0)| &= |\langle \gamma(y_0), g_1(y_0) + 2\sum_{i=2}^{n} g_i(y_0) + 2\ Tf_{n+1}(y_0)\rangle| \\ &\geq \left| \int \langle \gamma(y), g_1(y) + 2\sum_{i=2}^{n} g_i(y) + 2\ Tf_{n+1}(y)\rangle d|\mu|(y) \right| \\ &= \left| \int g_1 + 2\sum_{i=2}^{n} g_i + 2\ Tf_{n+1} dT^{-1^*}(v^* \cdot \delta_z) \right| \\ &= |\langle v^*, T^{-1}g_1(z) + 2\sum_{i=2}^{n} T^{-1}g_i(z) + 2\ f_{n+1}(z)\rangle| \\ &\geq |\langle v^*, f_1(z) + 2\sum_{i=2}^{n+1} f_i(z)\rangle| - |\langle v^*, f_1(z) - T^{-1}g_1(z)\rangle| \\ &- 2\sum_{i=2}^{n} |\langle v^*, f_i(z) - T^{-1}g_i(z)\rangle|. \end{aligned}$$

Como $\|f\| \leq \|Tf\|$, $f \in C_0(K,X)$, temos

$$|\langle v^*, f_i(z) - T^{-1}g_i(z)\rangle| \leq \|f_i - T^{-1}g_i\| \leq \|Tf_i - g_i\| = \|(1 - \mathbb{1}_{G_i}) \cdot Tf_i\| \leq \epsilon,\ 1 \leq i \leq n.$$

Mais ainda, pela definição das funcões f_i, vale

$$\langle v^*, f_i(z)\rangle = \langle v^*, v\rangle = 1,\ 1 \leq i \leq n+1.$$

Portanto,

$$\|\beta\| \geq (2n+1) - (2n-1)\epsilon.$$

Passo 4. Em virtude de $\|\beta\| \geq (2n+1)-(2n-1)\epsilon$, de acordo com o Passo 2, existem duas possibilidades:

(i) $2\ \|\alpha\| \geq (2n+1)-(2n-1)\epsilon$,

(ii) $|\beta(y)| \geq (2n+1)-(2n-1)\epsilon$ para algum $y \in G$.

Mostraremos que ambas as possibilidades implicam uma contradição.

Suponha inicialmente que (i) seja verdadeira. Defina

$$A = T^{-1}g_1 - 2\ f_{n+1}.$$

Recordando que $0 \leq h_{n+1} \leq h_1 \leq 1$ e que $\|f\| \leq \|Tf\|$, $f \in C_0(K,X)$, temos para cada $x \in K$,

$$\begin{aligned}\|T^{-1}g_1(x) - 2\ f_{n+1}(x)\| &\leq \|f_1(x) - 2\ f_{n+1}(x)\| + \|T^{-1}g_1(x) - f_1(x)\| \\ &\leq \|v \cdot h_1(x) - 2v \cdot h_{n+1}(x)\| + \|T^{-1}g_1 - f_1\| \\ &\leq |h_1(x) - 2\ h_{n+1}(x)| + \|g_1 - Tf_1\| \leq 1+\epsilon.\end{aligned}$$

Portanto $\|A\| \leq 1+\epsilon$.
Devido a (4.9) e (4.10) existe $y_0 \in \Gamma \setminus G$ tal que $\|\alpha\| = |\alpha(y_0)|$. Podemos escrever

$$\begin{aligned}|\langle \gamma(y_0), T(A)(y_0)\rangle| &= 2\ |\langle \gamma(y_0), Tf_{n+1}(y_0)\rangle| = 2\ \|\alpha\| \\ &\geq (2n+1)-(2n-1)\epsilon > (2n+1)(1-\epsilon).\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|T\| \geq \|T\left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right)\| > (2n+1)\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}.$$

Isto contradiz a escolha de ϵ.
Em seguida, assuma que (ii) seja verdadeiro. Distinguimos dois casos.

Caso 1. $\|\beta\| = |\beta(y_0)|$ para algum $y_0 \in G_1$. Neste caso, por $G_1, \ldots, G_n$ serem mutuamente disjuntos, temos

$$|\beta(y_0)| = |\langle \gamma(y_0), g_1(y_0) + 2\ Tf_{n+1}(y_0)\rangle| > (2n+1)-(2n-1)\epsilon.$$

Pela escolha de η,

$$\begin{aligned}|\langle \gamma(y_0), g_1(y_0)\rangle| &\geq (2n+1)-(2n-1)\epsilon - 2\ |\langle \gamma(y_0), Tf_{n+1}(y_0)\rangle| \\ &> (2n+1)-(2n-1)\epsilon - 2\ \eta > \|T\|.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|T\| \geq \|Tf_1\| \geq |\langle \gamma(y_0), Tf_1(y_0)\rangle| = |\langle \gamma(y_0), g_1(y_0)\rangle| > \|T\|,$$

o que é uma contradição.

Caso 2. $\|\beta\| = |\beta(y_0)|$ para algum $y_0 \in G_i$, $i > 1$. Mais uma vez, por $G_1, \ldots, G_n$ serem mutuamente disjuntos, temos

$$|\beta(y_0)| = |\langle \gamma(y_0), 2\ g_i(y_0) + 2\ Tf_{n+1}(y_0)\rangle| \geq (2n+1)-(2n-1)\epsilon.$$

Recordando que $\eta < \epsilon$,

$$\begin{aligned} 2\,|\langle\gamma(y_0), g_i(y_0)\rangle| &\geq (2n+1) - (2n-1)\epsilon - 2\,|\langle\gamma(y_0), Tf_{n+1}(y_0)\rangle| \\ &> (2n+1)(1-\epsilon). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Considere a função

$$B_i = T^{-1}g_1 - 2\ f_i.$$

Da relação (4.11) e por $\|\gamma(y_0)\| = 1$,

$$\begin{aligned} \|T(B_i)\| &\geq |\langle\gamma(y_0), T(B_i)(y_0)\rangle| = 2\,|\langle\gamma(y_0), Tf_i(y_0)\rangle| \\ &= 2\,|\langle\gamma(y_0), g_i(y_0)\rangle| > (2n+1)(1-\epsilon). \end{aligned}$$

Por outro lado, lembrando que $0 \leq h_i \leq h_1 \leq 1$ e que $\|f\| \leq \|Tf\|$, $f \in C_0(K,X)$, temos, para cada $x \in K$,

$$\begin{aligned} \|T^{-1}g_1(x) - 2\ f_i(x)\| &\leq \|f_1(x) - 2\ f_i(x)\| + \|T^{-1}g_1(x) - f_1(x)\| \\ &\leq \|v\cdot h_1(x) - 2v\cdot h_i(x)\| + \|T^{-1}g_1 - f_1\| \\ &\leq |h_1(x) - 2\ h_i(x)| + \|g_1 - Tf_1\| \leq 1+\epsilon. \end{aligned}$$

Portanto $\|B_i\| \leq 1+\epsilon$ e deduzimos

$$\|T\| \geq \|T\left(\frac{1}{1+\epsilon}B_i\right)\| > (2n+1)\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon},$$

o que contradiz a escolha de ϵ.

□

4.4 Cotas superiores as para distâncias entre $C([1,\omega^n k],X)$ e $C_0(\mathbb{N},X)$

Nesta seção vamos mostrar como generalizar a fórmula do isomorfismo (4.1) mencionado na introdução. Nosso objetivo é obter cotas superiores para as distâncias de Banach-Mazur entre os espaços $C_0(\mathbb{N},X)$ e $C([1,\omega^n k],X)$, $1 \leq k,n < \omega$, onde X denota um espaço de Banach arbitrário.

Para simplificar nossa notação vamos introduzir uma nova terminologia. Recordamos que cada número ordinal $1 \leq \xi < \omega^\omega$ admite uma única representação na *forma normal de Cantor*, ver [47, p. 153],

$$\xi = \omega^{n_k}m_k + \ldots + \omega^{n_2}m_2 + \omega^{n_1}m_1 \tag{4.12}$$

onde $0 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \omega$ e $1 \leq m_1 < \omega$, $1 \leq m_2 < \omega, \ldots, 1 \leq m_k < \omega$ e $1 \leq k < \omega$.

Definição 4.9. Para um número ordinal $1 \leq \xi < \omega^\omega$, representado na forma normal de Cantor como em (4.12), definimos $\xi^{[0]} = \xi$ e por indução

$$\xi^{[r]} = \begin{cases} \omega^{n_k}m_k + \ldots + \omega^{n_2}m_2 + \omega^{n_1+1} & \text{se } r = 1, \\ \left(\xi^{[r-1]}\right)^{[1]} & \text{se } 1 \leq r < \omega. \end{cases}$$

Observação 4.10. Utilizando a forma normal de Cantor é fácil verificar que cada número ordinal $1 \leq \xi < \omega^n$ admite uma única representação na forma

$$\xi = \omega^{n-1}i_1 + \omega^{n-2}i_2 + \ldots + \omega^{n-(j-1)}i_{j-1} + \omega^{n-j}i_j \tag{4.13}$$

onde $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i_j < \omega$ e $0 \leq i_r < \omega$ se $1 \leq r \leq j-1$.

Essa representação alternativa é mais conveniente para a função $\xi \mapsto \xi^{[1]}$ apresentada na Definição 4.9. Se $1 \leq \xi < \omega^n$ é um ordinal representado na forma (4.13), então

$$\begin{aligned}
\xi^{[1]} &= \omega^{n-1}i_1 + \omega^{n-2}i_2 + \ldots + \omega^{n-(j-1)}(i_{j-1} + 1) \\
\xi^{[2]} &= \omega^{n-1}i_1 + \omega^{n-2}i_2 + \ldots + \omega^{n-(j-2)}(i_{j-2} + 1) \\
&\vdots \\
\xi^{[j-2]} &= \omega^{n-1}i_1 + \omega^{n-2}(i_2 + 1) \\
\xi^{[j-1]} &= \omega^{n-1}(i_1 + 1) \\
\xi^{[j]} &= \omega^n
\end{aligned}$$

Lema 4.11. *Sejam $1 \leq n < \omega$, A e B números reais e X um espaço de Banach. Para cada $f \in C([1, \omega^n], X)$ considere a sequência $(a_\xi)_{1 \leq \xi \leq \omega^n}$,*

$$a_\xi = \begin{cases} A & \textit{se } \xi = \omega^n, \\ B\ \big(f(\xi) - f(\xi^{[1]})\big) & \textit{se } 1 \leq \xi < \omega^n. \end{cases}$$

Então, para cada $\epsilon > 0$ existe somente um número finito de ordinais $1 \leq \xi \leq \omega^n$ satisfazendo $\|a_\xi\| \geq \epsilon$.

Demonstração. Será feita por indução em n. Naturalmente o lema é verdadeiro para $n = 1$. Assuma ser verdadeiro para $n - 1$, com $n \geq 2$, fixe $f \in C([1, \omega^n], X)$ arbitrário e considere a sequência $(a_\xi)_{1 \leq \xi \leq \omega^n}$ como acima.

Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, da continuidade de f, existe $1 \leq m < \omega$ tal que

$$\xi \in]\omega^{n-1}m, \omega^n] \Longrightarrow \|f(\xi) - f(\omega^n)\| < \frac{\epsilon}{2(|B| + 1)}.$$

Se $\xi \in]\omega^{n-1}m, \omega^n[$, então $\xi^{[1]} \in]\omega^{n-1}m, \omega^n]$ e portanto

$$\begin{aligned}
\|a_\xi\| = |B|\|f(\xi) - f(\xi^{[1]})\| &\leq |B| \Big(\|f(\xi) - f(\omega^n)\| + \|f(\xi^{[1]}) - f(\omega^n)\|\Big) \\
&< \frac{|B|\epsilon}{2(|B| + 1)} + \frac{|B|\epsilon}{2(|B| + 1)} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Para cada $1 \leq r \leq m$ defina $g_r \in C([1, \omega^{n-1}], X)$ como

$$g_r(\xi) = f(\omega^{n-1}(r - 1) + \xi),\ 1 \leq \xi \leq \omega^{n-1}.$$

Em seguida, fixe a sequência $(a^r_\xi)_{1 \leq \xi \leq \omega^{n-1}}$,

$$a^r_\xi = \begin{cases} A & \text{se } \xi = \omega^{n-1}, \\ B\ \big(g_r(\xi) - g_r(\xi^{[1]})\big) & \text{se } 1 \leq \xi < \omega^{n-1}. \end{cases}$$

De acordo com a hipótese de indução existe somente um número finito de ordinais $1 \leq \xi \leq \omega^{n-1}$ satisfazendo $\|a^r_\xi\| \geq \epsilon$. Por construção, temos

$$a^r_\xi = a_{\omega^{n-1}(r-1)+\xi},\ 1 \leq \xi < \omega^{n-1}.$$

Deduzimos que para cada $1 \leq r \leq m$ existe somente um número finito de ordinais ξ no intervalo $[\omega^{n-1}(r - 1) + 1, \omega^{n-1}r]$ verificando $\|a_\xi\| \geq \epsilon$. Como $[1, \omega^n]$ é a união dos intervalos $[1, \omega^{n-1}], \ldots, [\omega^{n-1}(m - 1) + 1, \omega^{n-1}m]$ e $[\omega^{n-1}m + 1, \omega^n]$, o lema está demonstrado.

□

Demonstração do Teorema 4.3. De início, observe que

$$C([1, \omega^n k], X) = \underbrace{C([1, \omega^n], X) \oplus \ldots \oplus C([1, \omega^n], X)}_{k},$$
$$C_0(\mathbb{N}, X) = \underbrace{C_0(\mathbb{N}, X) \oplus \ldots \oplus C_0(\mathbb{N}, X)}_{k}.$$

Então, para estabelecer o Teorema 4.3 é suficiente demonstrar que

$$\mathrm{d}(C([1, \omega^n], X), C_0(\mathbb{N}, X)) \leq 2n + 1.$$

Para tanto, vamos construir um isomorfismo sobrejetor $T : C([1, \omega^n], X) \to C_0(\mathbb{N}, X)$ com distorção $\|T\| \, \|T^{-1}\| = 2n + 1$.

Seja $\mathit{\Gamma}_n$ o intervalo de ordinal $[1, \omega^n]$ munido da topologia discreta. Para simplificar a demonstração vamos substituir $C_0(\mathbb{N}, X)$ por $C_0(\mathit{\Gamma}_n, X)$. Estes espaços são isometricamente isomorfos.

Para cada $f \in C([1, \omega^n], X)$ defina a função $T(f) : \mathit{\Gamma}_n \to X$ por

$$T(f)(\xi) = \begin{cases} 2 \; f(\omega^n) & \text{se } \xi = \omega^n, \\ f(\xi) - f(\xi^{[1]}) & \text{se } 1 \leq \xi < \omega^n. \end{cases}$$

Segue imediatamente por uma aplicação do Lema 4.11, com $A = 2 \; f(\omega^n)$ e $B = 1$, que $T(f) \in C_0(\mathit{\Gamma}_n, X)$ para todo $f \in C([1, \omega^n], X)$. Portanto, T define uma aplicação de $C([1, \omega^n], X)$ em $C_0(\mathit{\Gamma}_n, X)$. Para verificar que T é um operador linear fixe $f_1, f_2 \in C_0(\mathit{\Gamma}_n, X)$ e um escalar λ arbitrário. Temos

$$\begin{aligned} T(\lambda \; f_1 + f_2)(\omega^n) &= 2 \; (\lambda \; f_1 + f_2)(\omega^n) = \lambda \; (2 \; f_1(\omega^n)) + 2 \; f_2(\omega^n) \\ &= \lambda \; T(f_1)(\omega^n) + T(f_2)(\omega^n). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Se $1 \leq \xi < \omega^n$, então

$$\begin{aligned} T(\lambda \; f_1 + f_2)(\xi) &= (\lambda \; f_1 + f_2)(\xi) - (\lambda \; f_1 + f_2)(\xi^{[1]}) \\ &= \lambda \; \Big(f_1(\xi) - f_1(\xi^{[1]})\Big) + \Big(f_2(\xi) - f_2(\xi^{[1]})\Big) \\ &= \lambda \; T(f_1)(\xi) + T(f_2)(\xi). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Deduzimos que T é um operador linear de $C([1, \omega^n], X)$ em $C_0(\mathit{\Gamma}_n, X)$. Esse operador claramente verifica $\|T\| = 2$.

Em seguida, para cada função $g \in C_0(\mathit{\Gamma}_n, X)$, recordando a Observação 4.10, defina a função $S(g) : [1, \omega^n] \to X$ por

$$S(g)(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \; g(\omega^n) & \text{se } \xi = \omega^n, \\ g(\xi) + g(\xi^{[1]}) + \ldots + g(\xi^{[j-2]}) + g(\xi^{[j-1]}) + \frac{1}{2} \; g(\xi^{[j]}) & \text{se } 1 \leq \xi < \omega^n \text{ é como (4.13).} \end{cases}$$

Vamos demonstrar que $S(g)$ é contínua em $[1, \omega^n]$ para cada $g \in C_0(\mathit{\Gamma}_n, X)$. Para tanto, seja $g \in C_0(\mathit{\Gamma}_n, X)$ arbitrário. Dado ξ_0 um ponto não isolado de $[1, \omega^n]$ fixe $\epsilon > 0$ e defina

$$\Lambda_\epsilon = \left\{ 1 \leq \xi \leq \omega^n : \|g(\xi)\| \geq \frac{\epsilon}{n} \right\}.$$

Para benefício do leitor distinguimos dois casos.

Caso 1. $\xi_0 = \omega^n$. Por Λ_ϵ ser finito existe $1 \leq m < \omega$ tal que

$$]\omega^{n-1} m, \omega^n[\; \cap \; \Lambda_\epsilon = \varnothing.$$

Segue da definição de $S(g)$ que se $\xi \in\,]\omega^{n-1}m, \omega^n[$, então

$$\|S(g)(\xi) - S(g)(\omega^n)\| \leq \|g(\xi_1)\| + \ldots + \|g(\xi_s)\|$$

onde $1 \leq s \leq n$ e $\xi = \xi_1 < \ldots < \xi_s < \xi_0$. Logo,

$$\|S(g)(\xi) - S(g)(\omega^n)\| < \epsilon.$$

Caso 2. $1 \leq \xi_0 < \omega^n$. Escreva $\xi_0 = \omega^{n-1}i_1 + \ldots + \omega^{n-j}i_j$ com $1 \leq j < n$, $1 \leq i_j < \omega$ e $0 \leq i_p < \omega$ se $1 \leq p \leq j-1$. Por Λ_ϵ ser finito existe $1 \leq m < \omega$ tal que

$$\Big]\omega^{n-1}i_1 + \ldots + \omega^{n-j}(i_j - 1) + \omega^{n-(j+1)}m,\ \omega^{n-1}i_1 + \ldots + \omega^{n-j}i_j\Big[\ \cap\ \Lambda_\epsilon = \varnothing.$$

Observe que se

$$\xi\ \in\ \Big]\omega^{n-1}i_1 + \ldots + \omega^{n-j}(i_j - 1) + \omega^{n-(j+1)}m,\ \omega^{n-1}i_1 + \ldots + \omega^{n-j}i_j\Big[,$$

então existe $1 \leq s \leq n-j$ tal que $\xi^{[s]} = \xi_0$. Temos, pela definição de $S(g)$,

$$\|S(g)(\xi) - S(g)(\xi_0)\| \leq \|g(\xi_1)\| + \ldots + \|g(\xi_s)\|$$

onde $\xi = \xi_1 < \ldots < \xi_s < \xi_0$. Consequentemente

$$\|S(g)(\xi) - S(g)(\xi_0)\| < \epsilon.$$

Deduzimos que $S(g)$, $g \in C_0(\mathit{\Gamma}_n, X)$, é contínua em $[1, \omega^n]$. Assim, S define uma aplicação de $C_0(\mathit{\Gamma}_n, X)$ em $C([1,\omega^n], X)$.

Vamos verificar que as aplicações $S \circ T$ e $T \circ S$ são, respectivamente, os operadores identidade em $C([1,\omega^n], X)$ e $C_0(\mathit{\Gamma}_n, X)$.

Com efeito, seja $f \in C([1,\omega^n], X)$ arbitrário. Se $\xi = \omega^n$ então

$$S \circ T(f)(\omega^n) = \frac{1}{2}\ T(f)(\omega^n) = f(\omega^n). \tag{4.16}$$

Seja $1 \leq \xi < \omega^n$ representado na forma (4.13). Das definições de S e T podemos escrever

$$\begin{aligned} S \circ T(f)(\xi) &= \sum_{r=0}^{j-1} T(f)(\xi^{[r]}) + \frac{1}{2}\ T(f)(\xi^{[j]}) = \sum_{r=0}^{j-1} \Big(f(\xi^{[r]}) - f(\xi^{[r+1]})\Big) + f(\omega^n) \\ &= (f(\xi) - f(\omega^n)) + f(\omega^n) = f(\xi). \end{aligned}$$

Concluímos que $S \circ T(f) = f$ para cada $f \in C([1,\omega^n], X)$.

Por outro lado, fixe $g \in C_0(\mathit{\Gamma}_n, X)$ arbitrário. Analogamente como em (4.16) demonstra-se que

$$T \circ S(g)(\omega^n) = g(\omega^n).$$

Fixe $1 \leq \xi < \omega^n$ representado na forma (4.13). Das definições de T e S temos

$$T \circ S(g)(\xi) = S(g)(\xi) - S(g)(\xi^{[1]}) = \left(\sum_{r=0}^{j-1} g(\xi^{[r]}) + \frac{1}{2}\ g(\xi^{[j]})\right) - \left(\sum_{r=1}^{j-1} g(\xi^{[r]}) + \frac{1}{2}\ g(\xi^{[j]})\right) = g(\xi).$$

Fica estabelecido que $T \circ S(g) = g$ para cada $g \in C_0(\mathit{\Gamma}_n, X)$ e $S \circ T(f) = f$ para cada

$f \in C([1, \omega^n], X)$, ou seja, S é o operador inverso de T, mais ainda, S é linear e verifica

$$\|S\| = \frac{2n+1}{2}.$$

Portanto, T é um isomorfismo sobrejetor de $C([1, \omega^n], X)$ em $C_0(\Gamma_n, X)$ com distorção

$$\|T\|\|T^{-1}\| = 2n+1.$$

Isto completa nossa demonstração.

$\square$

Capítulo 5

Sobre distâncias de Banach-Mazur entre espaços $C(\omega)$ e $C(\alpha)$, $\omega \leq \alpha < \omega^\omega$

5.1 Introdução

Para um ordinal α, denotamos por $C(\alpha)$ o espaço das funções contínuas no intervalo de ordinal $[1, \alpha]$, $\omega \leq \alpha < \omega_1$. A classificação isomorfa destes espaços é devida a Bessaga e Pełczyński [7]. Eles estabeleceram que se $\omega \leq \alpha \leq \beta < \omega_1$, então $C(\alpha)$ é isomorfo a $C(\beta)$ se e somente se existe $1 \leq n < \omega$ tal que $\alpha^n \leq \beta < \alpha^{n+1}$. Na ocasião, também foram apresentadas estimativas para as distâncias de Banach-Mazur entre estes espaços:

$$n \leq \mathrm{d}(C(\alpha), C(\beta)) \leq 4^{n+3}.$$

Em [7, p. 59], os autores consideram o problema de se obter funções $G, H : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ satisfazendo

$$\sup(H(n)/G(n)) < \infty \quad \text{e} \quad G(n) \leq \mathrm{d}(C(\alpha), C(\beta)) \leq H(n), \ n \in \mathbb{N}.$$

Neste capítulo, apresentaremos estimativas como acima para o caso $\alpha = \omega$. Estaremos focados nas distâncias entre os espaços $C(\omega)$ e $C(\omega^n k)$, $1 \leq n, k < \omega$, e neste sentido, obtemos as seguintes funções $G(n, k)$ e $H(n, k)$ que fornecem respectivamente cotas inferiores e superiores para as distâncias entre os espaços $C(\omega)$ e $C(\omega^n k)$,

$$G(n,k) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, k = 1, \\ 3 & \text{se } n = 1, k > 1, \\ 2n-1 & \text{se } n > 1, k = 1, \\ 2n+1 & \text{se } n > 1, k > 1. \end{cases} \tag{5.1}$$

e

$$H(n,k) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, k = 1, \\ 2+\sqrt{5} & \text{se } n = 1, k > 1, \\ n+\sqrt{(n-1)(n+3)} & \text{se } n > 1, k = 1, \\ n+1+\sqrt{n(n+4)} & \text{se } n > 1, k > 1. \end{cases} \tag{5.2}$$

Estas funções também verificam:

$$H(n, k) - G(n, k) < 2, \ 1 \leq n, k < \omega.$$

Tendo em mente as técnicas desenvolvidas neste trabalho, as funções $H(n, k)$ e $G(n, k)$ sugerem a seguinte conjectura sobre os valores exatos dessas distâncias.

Conjectura 5.1. *Sejam* $1 < n, k < \omega$. *Então*

(a) $\mathrm{d}(C(\omega), C(\omega k))$ *é igual a* 3.

(b) $\mathrm{d}(C(\omega), C(\omega^n))$ *é igual a* $2n-1$, $2n$ *ou* $n+\sqrt{(n-1)(n+3)}$.

(c) $\mathrm{d}(C(\omega), C(\omega^n k))$ *é igual a* $2n+1$, $2n+2$ *ou* $n+1+\sqrt{n(n+4)}$.

Observação 5.2. Para $n = 2$ e $k = 1$ temos

$$3 \leq \mathrm{d}(C(\omega), C(\omega^2)) \leq 2+\sqrt{5}.$$

Seria muito interessante estabelecer o valor exato desta distância. Se $\mathrm{d}(C(\omega), C(\omega^2)) = 3$, então o número 3 é a melhor constante possível no Teorema 3.4. Por outro lado, se $\mathrm{d}(C(\omega), C(\omega^2)) = 2+\sqrt{5}$, temos uma resposta para um problema sugerido por A. Pełczyński em 1968, ver [42, Problema 28, p. 73], que até o presente momento permanece sem resposta. Em nossa notação, o referido problema pode ser descrito como se segue:

Problema 5.3 (Pełczyński)**.** Sejam K_1 e K_2 espaços topológicos compactos de Hausdorff. Se $C(K_1) \sim C(K_2)$ então $\mathrm{d}(C(K_1), C(K_2))$ é um número inteiro?

Organizamos este capítulo do seguinte modo. Na Seção 5.2 vamos apresentar alguns resultados preliminares envolvendo espaços de Banach $C(K)$ onde K é compacto de Hausdorff. Na Seção 5.3, recordando a Definição 3.6, demonstraremos o seguinte resultado:

Teorema 5.4. *Sejam* $1 \leq n < \omega$, *L um espaço compacto de Hausdorff infinito tal que* $L^{(2)} = \varnothing$ *e K um compacto Hausdorff. Então*

$$C(K) \sim C(L) \quad e \quad |K^{(n)}| > |L^{(1)}| \Longrightarrow \mathrm{d}(C(K), C(L)) \geq 2n+1.$$

Por consequência do Teorema 5.4, em virtude de $([1, \omega^n k])^{(n)} = \{\omega^n, \omega^n 2, ..., \omega^n k\}$, $1 \leq n, k < \omega$, temos cotas inferiores para distâncias entre os espaços $C(\omega^n k)$ e $C(\omega)$.

Corolário 5.5. *Sejam* $1 < n, k < \omega$. *Então*

(a) $\mathrm{d}(C(\omega), C(\omega k)) \geq 3$.

(b) $\mathrm{d}(C(\omega), C(\omega^n)) \geq 2n-1$.

(c) $\mathrm{d}(C(\omega), C(\omega^n k)) \geq 2n+1$.

Na Seção 5.4 vamos obter cotas superiores para distâncias entre os espaços $C(\omega^n k)$, $1 \leq n, k < \omega$, e $C(\omega)$. Nossa tarefa é construir isomorfismos sobrejetores de $C(\omega^n k)$ em $C(\omega)$ mantendo algum controle sobre as distorções. Neste sentido demonstramos:

Teorema 5.6. *Sejam* $1 < n, k < \omega$. *Então*

(a) $\mathrm{d}(C(\omega), C(\omega k)) \leq 2+\sqrt{5}$.

(b) $\mathrm{d}(C(\omega), C(\omega^n)) \leq n+\sqrt{(n-1)(n+3)}$.

(c) $\mathrm{d}(C(\omega), C(\omega^n k)) \leq n+1+\sqrt{n(n+4)}$.

Combinando o Corolário 5.5 e o Teorema 5.6 temos as funções $G(n,k)$ e $H(n,k)$ de (5.1) e (5.2).

5.2 Resultados preliminares

Apresentaremos nesta seção dois resultados que terão um importante papel na demonstração do Teorema 5.4.

Proposição 5.7. *Sejam L um espaço compacto de Hausdorff infinito com $L^{(2)} = \varnothing$, K um espaço compacto de Hausdorff e T um isomorfismo sobrejetor de $C(K)$ em $C(L)$ tal que $\|T^{-1}\| = 1$. Suponha $1 < n < \omega$, $x_0 \in K^{(n)}$, K_0 uma vizinhança compacta de x_0, $0 < \epsilon < 1$ e $h_0 \in C(K)$ tais que $0 \leq h_0 \leq 1$, $h_0(x) = 1$ para cada $x \in K_0$ e $|Th_0(y)| < \epsilon$ para cada $y \in L^{(1)}$. Nessas condições existem pontos $x_1, \ldots, x_{n-1} \in K$, subconjuntos compactos $K_1, \ldots, K_{n-1}$ de K e funções $h_1, \ldots, h_{n-1}$ em $C(K)$ verificando:*

(a) $x_i \in \mathring{K}_i \cap K^{(n-i)}$, *para* $0 \leq i \leq n-1$.

(b) $K_i \subset \mathring{K}_{i-1}$, *para* $1 \leq i \leq n-1$.

(c) $0 \leq h_i \leq 1$, $h_i(x) = 1$ *se* $x \in K_i$ *e* $h_i(x) = 0$ *se* $x \notin \mathring{K}_{i-1}$, *para* $1 \leq i \leq n-1$.

(d) Os conjuntos $G_i = \{y \in L : |Th_i(y)| \geq \epsilon\}$, $0 \leq i \leq n-1$, *são conjuntos não vazios de pontos isolados mutuamente disjuntos.*

Demonstração. Em virtude de $\|T^{-1}\| = 1$ e $0 < \epsilon < 1$, o conjunto G_0 é não vazio, mais ainda, é finito. Do contrário, temos $G_0 \cap L^{(1)} \neq \varnothing$ e isso contradiz a hipótese de $|Th_0(y)| < \epsilon$ para todo $y \in L^{(1)}$.

Dado $0 \leq r < n-1$, suponha que foram obtidos pontos $x_0, x_1 \ldots, x_r$, subconjuntos compactos $K_0, K_1 \ldots, K_r$ e funções $h_0, h_1 \ldots, h_r$ em $C(K)$ satisfazendo os itens (a), (b), (c) e (d) acima.

Por K ser um espaço topológico compacto de Hausdorff, é possível encontrar pontos $b_1, b_2, b_3 \ldots$ em $(\mathring{K}_r \setminus \{x_r\}) \cap K^{(n-r-1)}$, subconjuntos abertos mutuamente disjuntos $U_1, U_2, U_3 \ldots$ e compactos $M_1, M_2, M_3 \ldots$ verificando

$$b_i \in \mathring{M}_i \subset M_i \subset U_i \subset K_r, \ i \in \mathbb{N}.$$

Aplicando o Lema de Urysohn 1.12 podemos obter funções $g_1, g_2, g_3, \ldots \in C(K)$ verificando para cada $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq g_i(x) \leq 1$ para todo $x \in K$, $g_i(x) = 1$ se $x \in M_i$ e $g_i(x) = 0$ se $x \notin U_i$. Em virtude de $U_i \cap U_j = \varnothing$ se $i \neq j$, temos $g_i \cdot g_j = 0$ se $i \neq j$. Novamente por $\|T^{-1}\| = 1$ e $0 < \epsilon < 1$ deduzimos que $\{y \in L : |Tg_i(y)| \geq \epsilon\} \neq \varnothing$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Seja $G = G_1 \cup \ldots \cup G_r$. Afirmamos que existe $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{y \in L : |Tg_s(y)| \geq \epsilon\} \cap \left(G \cup L^{(1)}\right) = \varnothing. \tag{5.3}$$

Do contrário, assumindo $G \cup L^{(1)} = \{y_1, \ldots, y_t\}$ e denotando

$$\Gamma_i = \{j \in \mathbb{N} \ : \ |Tg_j(y_i)| \geq \epsilon\}, \ 1 \leq i \leq t,$$

temos

$$\mathbb{N} \ \subseteq \ \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_t$$

e portanto Γ_p é infinito para algum $1 \leq p \leq t$. Sejam $p_1, p_2, p_3 \ldots$ inteiros distintos em Γ_p.

Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon \cdot m > \|T\|$ e para cada $1 \leq i \leq m$ seja r_i um escalar satisfazendo

$$r_i \cdot Tg_{p_i}(y_p) = |Tg_{p_i}(y_p)|.$$

Em virtude de $g_i \cdot g_j = 0$ se $i \neq j$, a função $g = \sum_{i=1}^m r_i \cdot g_{p_i} \in C(K)$ verifica $\|g\| \leq 1$. Entretanto,

$$\begin{aligned} \|T\| \geq \|Tg\| &\geq \left| T\left(\sum_{i=1}^m r_i \cdot g_{p_i}\right)(y_p)\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^m r_i \cdot Tg_{p_i}(y_p)\right| = \sum_{i=1}^m |Tg_{p_i}(y_p)| > \|T\|, \end{aligned}$$

uma contradição que estabelece nossa afirmação.

Finalmente, podemos fixar $s \in \mathbb{N}$ verificando (5.3) e definir $x_{r+1} = b_s$, $K_{r+1} = M_s$, $h_{r+1} = g_s$ e $G_{r+1} = \{y \in L : |Tg_s(y)| \geq \epsilon\}$. É fácil verificar que as condições (a), (b), (c) e (d) estão satisfeitas para $r+1$. Isso completa a demonstração.

□

Lema 5.8. *Sejam L um conjunto compacto de Hausdorff infinito com $L^{(2)} = \varnothing$, K um espaço compacto de Hausdorff e T um isomorfismo de $C(K)$ em $C(L)$. Suponha que $|K^{(n)}| > |L^{(1)}|$ para algum $1 \leq n < \omega$. Então, para cada $\epsilon > 0$ existe $x_0 \in K^{(n)}$, uma vizinhança compacta K_0 de x_0 e uma função $h \in C(K)$ tal que $0 \leq h(x) \leq 1$ para todo $x \in K$, $h(x) = 1$ se $x \in K_0$ e tal que $|Th(y)| < \epsilon$ se $y \in L^{(1)}$.*

Demonstração. Por contradição, suponha $\epsilon > 0$ tal que $|Th(y)| \geq \epsilon$ para algum $y \in L^{(1)}$ sempre que $h \in C(K)$ for tal que $h(x) = 1$ para todo x em um subconjunto fechado K_0 satisfazendo $\mathring{K}_0 \cap K^{(n)} \neq \varnothing$.

Suponha $|L^{(1)}| = m$ e fixe $x_1, \ldots, x_{m+1}$ pontos distintos em $K^{(n)}$ com respectivas vizinhanças compactas disjuntas $A_1, \ldots, A_{m+1}$. Utilizando o Lema de Urysohn 1.12 é possivel encontrar funções $h_i \in C(K)$, $1 \leq i \leq m+1$, tais que $0 \leq h_i(x) \leq 1$ para todo $x \in K$, $h_i(x) = 1$ se $x \in A_i$ e satisfazendo $h_i \cdot h_j = 0$ se $i \neq j$.

Seja l_∞^{m+1} o espaço $\mathbb{K}^{m+1}$ munido da norma do máximo. Para cada $a = (a_1, \ldots, a_{m+1}) \in l_\infty^{m+1}$ associamos a função

$$\gamma_a = \sum_{i=1}^{m+1} a_i \cdot h_i \in C(K).$$

Observe que $\|\gamma_a\| = \|a\|$, $a \in l_\infty^{m+1}$. Identificando, de maneira natural, o espaço $C(L^{(1)})$ com l_∞^m, considere $S : l_\infty^{m+1} \to l_\infty^m$, a aplicação definida por

$$S(a) = T\gamma_a|_{L^{(1)}}, \ a \in l_\infty^{m+1}.$$

Claramente S é um operador linear. De nossa suposição inicial deduzimos que para cada $a \in l_\infty^{m+1}$ existe $y \in L^{(1)}$ verificando

$$\|S(a)\| = |T\gamma_a(y)| \geq \epsilon\|a\|.$$

Portanto, S é um isomorfismo de l_∞^{m+1} em l_∞^m, o que é uma contradição.

□

5.3 Cotas inferiores para as distâncias entre $C(K)$ e $C(L)$, $L^{(2)} = \varnothing$

Utilizando os resultados da Seção 5.2, vamos estabelecer o Teorema 5.4.

Demonstração do Teorema 5.4. Vamos assumir a existência de um isomorfismo sobrejetor T de $C(K)$ em $C(L)$ tal que $\|T\|\|T^{-1}\| < 2n+1$ e obter uma contradição.

Sem perda de generalidade vamos assumir que $\|T^{-1}\| = 1$, pois do contrário podemos simplesmente substituir T pelo isomorfismo $\|T^{-1}\|\ T$ que claramente possui estas propriedades.

Sejam $0 < \eta,\ \epsilon < 1$ verificando

$$\|T\| < (2n+1)\,\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \quad \text{e} \quad \eta < \min\left\{\epsilon, \frac{(2n+1)(1-\epsilon) - \|T\|}{2}\right\}.$$

De acordo com o Lema 5.8 existe $x_0 \in K^{(n)}$, uma vizinhança compacta K_0 de x_0 e uma função $h_0 \in C(K)$ tal que $0 \le h_0(x) \le 1$ para todo $x \in K$, $h_0(x) = 1$ se $x \in K_0$ e tal que $|Th_0(y)| < \epsilon$ se $y \in L^{(1)}$. Relacionados a x_0, K_0, h_0 e $\epsilon > 0$, considere pontos $x_1, \ldots, x_{n-1} \in K$, subconjuntos compactos $K_1, \ldots, K_{n-1} \subset K$, funções $h_1, \ldots, h_{n-1} \in C(K)$ e subconjuntos $G_0, G_1 \ldots, G_{n-1} \subset L$ verificando os itens (a), (b), (c) e (d) da Proposição 5.7.

Defina

$$g_i = \mathbb{1}_{G_i} \cdot Th_i,\ 0 \le i \le n-1,$$

onde $\mathbb{1}_{G_i}$ denota a função característica de G_i. Observe que $g_i \in C(L)$ para cada $0 \le i \le n-1$.

Seja G o conjunto finito $\bigcup_{i=0}^{n-1} G_i$ e para cada $y \in G$ seja δ_y a medida de Dirac concentrada em y. Utilizando o Teorema 1.17 deduzimos que

$$H = \bigcup_{y \in G} \{x \in K : |T^*(\delta_y)|(\{x\}) > \eta\}$$

é um conjunto finito. Existe, portanto, um ponto $z \in \mathring{K}_{n-1} \setminus H$ tal que $|T^*(\delta_y)|(\{z\}) < \eta$ para todo $y \in G$. Devido a regularidade das medidas, podemos encontrar uma vizinhança aberta de z, $U \subset K_{n-1}$, satisfazendo

$$|T^*(\delta_y)|(U) < \eta,\ y \in G.$$

Aplicando o Lema de Urysohn 1.12, podemos fixar uma função $h_n \in C(K)$, tal que $0 \le h_n(x) \le 1$ para todo $x \in K$, $h_n(z) = 1$ e $h_n(x) = 0$ se $x \notin U$. Seja $\alpha \in C(L)$ a função definida por

$$\alpha(y) = g_0(y) + 2\sum_{i=1}^{n-1} g_i(y) + 2\ Th_n(y),\ y \in L.$$

Passo 1. Vamos demonstrar que $\|\alpha\| = \max\{2\ \|Th_n\|, |\alpha(y)| : y \in G\}$.

Para estabelecer este resultado observe que para cada $y \in G$ vale

$$|Th_n(y)| = \left|\int Th_n d\delta_y\right| = \left|\int h_n dT^*(\delta_y)\right| \le |T^*(\delta_y)|(U) < \eta < 1. \tag{5.4}$$

Por outro lado, se $y \mapsto |Th_n(y)|$ atinge seu máximo em $y_0 \in L$, temos, em virtude de $\|T^{-1}\| = 1$,

$$|Th_n(y_0)| = \|Th_n\| \ge 1 \tag{5.5}$$

e consequentemente $y_0 \in L \setminus G$. O Passo 2 fica estabelecido notando-se que $\alpha(y) = 2\ Th_n(y)$ para todo $y \in L \setminus G$.

Passo 2. Vamos demonstrar que $\|\alpha\| \ge (2n+1) - (2n-1)\epsilon$.

Em virtude de $\|T^{-1}\| = 1$,

$$\begin{aligned}
\|\alpha\| &= \|g_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} g_i + 2\ Th_n\| \geq \|T^{-1}g_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} T^{-1}g_i + 2h_n\| \\
&\geq \left|(h_0(z) + 2\sum_{i=1}^{n} h_i(z)) - (h_0(z) - T^{-1}g_0(z)) - 2\sum_{i=1}^{n-1}(h_i(z) - T^{-1}g_i(z))\right| \\
&\geq |h_0(z) + 2\sum_{i=1}^{n} h_i(z)| - |h_0(z) - T^{-1}g_0(z)| - 2\sum_{i=1}^{n-1} |h_i(z) - T^{-1}g_i(z)|.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Como $\|f\| \leq \|Tf\|$, $f \in C(K)$, temos

$$|h_i(z) - T^{-1}g_i(z)| \leq \|h_i - T^{-1}g_i\| \leq \|Th_i - g_i\| = \|(1 - \mathbb{1}_{G_i}) \cdot Th_i\| \leq \epsilon,\ 0 \leq i \leq n-1. \tag{5.7}$$

Combinando (5.6), (5.7) e recordando a definição das funções h_i, deduzimos

$$\|\alpha\| \geq (2n+1) - (2n-1)\epsilon.$$

Passo 3. Em virtude de $\|\alpha\| \geq (2n+1) - (2n-1)\epsilon$, de acordo com o Passo 1, temos duas possibilidades:

(i) $2\ \|Th_n\| \geq (2n+1) - (2n-1)\epsilon$,

(ii) $|\alpha(y)| \geq (2n+1) - (2n-1)\epsilon$ para algum $y \in G$.

Vamos demonstrar que ambas as possibilidades implicam uma contradição.

Suponha inicialmente que (i) seja verdadeira. Fixe

$$A = T^{-1}g_0 - 2\ h_n.$$

Recordando que $0 \leq h_n \leq h_0 \leq 1$ e $\|f\| \leq \|Tf\|$, $f \in C(K)$, temos, para cada $x \in K$,

$$\begin{aligned}
|T^{-1}g_0(x) - 2\ h_n(x)| &\leq |h_0(x) - 2\ h_n(x)| + |T^{-1}g_0(x) - h_0(x)| \\
&\leq 1 + \|T^{-1}g_0 - h_0\| \leq 1 + \|g_0 - Th_0\| \leq 1 + \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto $\|A\| \leq 1 + \epsilon$.

Devido a (5.4) e (5.5) existe $y_0 \in L \setminus G$ tal que $\|Th_n\| = |Th_n(y_0)|$. Podemos escrever

$$|T(A)(y_0)| = 2\ |Th_n(y_0)| = 2\ \|Th_n\| \geq (2n+1) - (2n-1)\epsilon > (2n+1)(1-\epsilon).$$

Consequentemente

$$\|T\| \geq \|T\left(\frac{1}{1+\epsilon}A\right)\| > (2n+1)\ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}.$$

Isto contradiz a escolha de ϵ.

Em seguida, assuma que (ii) seja verdadeiro. Distinguimos dois casos.

Caso 1. $\|\alpha\| = |\alpha(y_0)|$ para algum $y_0 \in G_0$. Neste caso, por $G_0, G_1 \ldots, G_{n-1}$ serem mutuamente disjuntos, temos

$$|\alpha(y_0)| = |g_0(y_0) + 2\ Th_n(y_0)| \geq (2n+1) - (2n-1)\epsilon.$$

Pela escolha de η,

$$\begin{aligned} |g_0(y_0)| &\geq (2n+1) - (2n-1)\epsilon - 2\ |Th_n(y_0)| \\ &> (2n+1) - (2n-1)\epsilon - 2\ \eta > \|T\|. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\|T\| \geq \|Th_0\| \geq |Th_0(y_0)| = |g_0(y_0)| > \|T\|,$$

o que é uma contradição.

Caso 2. $\|\alpha\| = |\alpha(y_0)|$ para algum $y_0 \in G_i$, $i > 0$. Por $G_0, G_1 \ldots, G_{n-1}$ serem mutuamente disjuntos, temos

$$|\alpha(y_0)| = |2g_i(y_0) + 2Th_n(y_0)| \geq (2n+1) - (2n-1)\epsilon.$$

Por (5.4) e por $\eta < \epsilon$,

$$2\ |g_i(y_0)| \geq (2n+1) - (2n-1)\epsilon - 2\ |Th_n(y_0)| > (2n+1)(1-\epsilon). \tag{5.8}$$

Considere a função

$$B_i = T^{-1}g_0 - 2\ h_i.$$

Recordando que $0 \leq h_i \leq h_0 \leq 1$ e $\|f\| \leq \|Tf\|$, $f \in C(K)$, temos, para cada $x \in K$,

$$\begin{aligned} |T^{-1}g_0(x) - 2\ h_i(x)| &\leq |h_0(x) - 2\ h_i(x)| + |T^{-1}g_0(x) - h_0(x)| \\ &\leq 1 + \|T^{-1}g_0 - h_0\| \leq 1 + \|g_0 - Th_0\| \leq 1 + \epsilon. \end{aligned}$$

Resulta que $\|B_i\| \leq 1 + \epsilon$. Mais ainda, da relação (5.8) decorre

$$|T(B_i)(y_0)| = 2\ |Th_i(y_0)| = 2\ |g_i(y_0)| > (2n+1)(1-\epsilon).$$

Consequentemente,

$$\|T\| \geq \|T\left(\frac{1}{1+\epsilon}B_i\right)\| > (2n+1)\ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon},$$

o que contradiz a escolha de ϵ.

□

5.4 Cotas superiores para as distâncias entre $C(\omega)$ e $C(\omega^n k)$, $1 \leq n, k < \omega$

O objetivo desta seção é demonstrar o Teorema 5.6. Recordando a Definição 4.9 do capítulo anterior, precisamos do seguinte lema fundamental.

Lema 5.9. *Sejam ordinais $1 \leq n, k < \omega$ e números reais A, B, C, D, E. Para cada $f \in C(\omega^n k)$ considere a sequência $(a_\xi)_{1 \leq \xi \leq \omega^n k}$,*

$$a_\xi = \begin{cases} A & se\ \xi = \omega^n k, \\ B\ \left(f(\xi) - f(\xi^{[1]})\right) & se\ \xi = \omega^n(k-1) + \omega^{n-1}i,\ 1 \leq i < \omega, \\ C\ \left(f(\xi) - f(\xi^{[1]})\right) & se\ \xi\ \in\ \left]\omega^n(k-1) + \omega^{n-1}(i-1), \omega^n(k-1) + \omega^{n-1}i\right[,\ 1 \leq i < \omega, \\ D\ \left(f(\omega^n r) - f(\omega^n k)\right) & se\ \xi = \omega^n r,\ 1 \leq r \leq k-1, \\ E\ \left(f(\xi) - f(\xi^{[1]})\right) & se\ \xi\ \in\ ]\omega^n(r-1), \omega^n r[,\ 1 \leq r \leq k-1. \end{cases}$$

Então para cada $\epsilon > 0$ *existem somente um número finito de ordinais* $1 \leq \xi \leq \omega^n k$ *satisfazendo* $|a_\xi| \geq \epsilon$.

Demonstração. Sejam $f \in C(\omega^n k)$ e $\epsilon > 0$ arbitrários e $(a_\xi)_{1\leq\xi\leq\omega^n k}$ como acima. Considere a função $g \in C(\omega^n)$,

$$g(\xi) = f(\omega^n(k-1)+\xi),\ 1 \leq \xi \leq \omega^n,$$

e a sequência $(b_\xi)_{1\leq\xi\leq\omega^n}$ definida por

$$b_\xi = \begin{cases} A & \text{se } \xi = \omega^n, \\ B\ \big(g(\xi) - g(\xi^{[1]})\big) & \text{se } \xi = \omega^{n-1}i,\ 1 \leq i < \omega, \\ C\ \big(g(\xi) - g(\xi^{[1]})\big) & \text{se } \xi \in \ ]\omega^{n-1}(i-1), \omega^{n-1}i[\,,\ 1 \leq i < \omega. \end{cases}$$

Por consequência do Lema 4.11, existe somente um número finito de ordinais $1 \leq \xi \leq \omega^n$ satisfazendo $|b_\xi| \geq \epsilon$. Em virtude de

$$b_\xi = a_{\omega^n(k-1)+\xi},\ 1 \leq \xi \leq \omega^n,$$

deduzimos que existe somente um número finito de ordinais ξ no intervalo $[\omega^n(k-1)+1,\ \omega^n k]$ satisfazendo $|a_\xi| \geq \epsilon$. Se $k > 1$, para cada $1 \leq r \leq k-1$ defina $h_r \in C(\omega^n)$ como

$$h_r(\xi) = f(\omega^n(r-1)+\xi),\ 1 \leq \xi \leq \omega^n.$$

Em seguida fixe a sequência $(c^r_\xi)_{1\leq\xi\leq\omega^n}$,

$$c^r_\xi = \begin{cases} D\ \ (f(\omega^n r) - f(\omega^n k)) & \text{se } \xi = \omega^n, \\ E\ \ \big(h_r(\xi) - h_r(\xi^{[1]})\big) & \text{se } 1 \leq \xi < \omega^n. \end{cases}$$

Mais uma vez pelo Lema 4.11, para cada $1 \leq r \leq k-1$, existe somente um número finito de ordinais $1 \leq \xi \leq \omega^n$ satisfazendo $|c^r_\xi| \geq \epsilon$. Em virtude de

$$c^r_\xi = a_{\omega^n(r-1)+\xi},\ 1 \leq \xi \leq \omega^n,$$

podemos concluir que para cada $1 \leq r \leq k-1$, existe somente um número finito de ordinais ξ no intervalo $[\omega^n(r-1)+1, \omega^n r]$ satisfazendo $|a_\xi| \geq \epsilon$. Como $[1, \omega^n k]$ é a união dos intervalos $[1, \omega^n]$,. . . ,$[\omega^n(k-2)+1, \omega^n(k-1)]$ e $[\omega^n(k-1)+1, \omega^n k]$, o lema está demonstrado.

□

Estamos agora em condições de demonstrar o Teorema 5.6.

Demonstração do Teorema 5.6. Sejam $\Gamma_{n,k}$, $1 \leq k, n < \omega$, o intervalo de ordinal $]0, \omega^n k[$ munido da topologia discreta, $K_{n,k} = \Gamma_{n,k} \dot\cup \{\omega^n k\}$ o compactificado de Aleksandrov de $\Gamma_{n,k}$. Para simplificar a demonstração vamos substituir o espaço $C(\omega)$ por $C(K_{n,k})$. Estes espaços são claramente isometricamente isomorfos.

Seja $A > 1$. Para cada $f \in C(\omega^n k)$ defina a função $T(f) : K_{n,k} \to \mathbb{K}$ por

$$T(f)(\xi) = \begin{cases} f(\omega^n k) & \text{se } \xi = \omega^n k, \\ A\ f(\xi) - (A-1)\ f(\xi^{[1]}) & \text{se } \xi = \omega^n(k-1) + \omega^{n-1}i,\ 1 \leq i < \omega, \\ \frac{(n-1)A}{A-1}\ \big(f(\xi) - f(\xi^{[1]})\big) + f(\omega^n k) & \text{se } \xi \in \ ]\omega^n(k-1) + \omega^{n-1}(i-1), \omega^n(k-1) + \omega^{n-1}i[\,, \\ & 1 \leq i < \omega, \\ A\ f(\omega^n r) - (A-1)\ f(\omega^n k) & \text{se } \xi = \omega^n r,\ 1 \leq r \leq k-1, \\ \frac{nA}{A-1}\ \big(f(\xi) - f(\xi^{[1]})\big) + f(\omega^n k) & \text{se } \xi \in \ ]\omega^n(r-1), \omega^n r[\,,\ 1 \leq r \leq k-1. \end{cases}$$

Vamos verificar que $T(f) \in C(K_{n,k})$, $f \in C(\omega^n k)$. De fato, dado $f \in C(\omega^n k)$ considere a função

$$F = T(f) - f(\omega^n k).$$

De forma mais explícita

$$F(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi = \omega^n k, \\ A\ \left(f(\xi) - f(\xi^{[1]})\right) & \text{se } \xi = \omega^n(k-1) + \omega^{n-1} i,\ 1 \leq i < \omega, \\ \frac{(n-1)A}{A-1}\ \left(f(\xi) - f(\xi^{[1]})\right) & \text{se } \xi\ \in\ \left]\omega^n(k-1) + \omega^{n-1}(i-1), \omega^n(k-1) + \omega^{n-1} i\right[,\ 1 \leq i < \omega, \\ A\ \left(f(\omega^n r) - f(\omega^n k)\right) & \text{se } \xi = \omega^n r,\ 1 \leq r \leq k-1, \\ \frac{nA}{A-1}\ \left(f(\xi) - f(\xi^{[1]})\right) & \text{se } \xi\ \in\ ]\omega^n(r-1), \omega^n r[,\ 1 \leq r \leq k-1. \end{cases}$$

De acordo com o Lema 5.9, para cada $\epsilon > 0$ existe somente um número de ordinais ξ no intervalo $[1, \omega^n k]$ satisfazendo $|F(\xi)| \geq \epsilon$. Resulta que $T(f)$ é contínua em $\omega^n k$, logo, $T(f) \in C(K_{n,k})$.

De maneira similar a (4.14) e (4.15) no capítulo anterior, demonstra-se que T define um operador linear de $C(\omega^n k)$ em $C(K_{n,k})$. Mais ainda, se $k > 1$, então T verifica

$$\|T\| \leq \max\left\{\frac{2nA}{A-1} + 1, 2A - 1\right\}. \tag{5.9}$$

Se $k = 1$ e $n > 1$, então

$$\|T\| \leq \max\left\{\frac{2(n-1)A}{A-1} + 1, 2A - 1\right\}. \tag{5.10}$$

Em seguida, recordando a Observação 4.10, vamos utilizar o fato de que cada número ordinal $1 \leq \xi < \omega^{n+1}$ admite uma única representação na forma

$$\xi = \omega^n i_0 + \omega^{n-1} i_1 + \ldots + \omega^{n-(j-1)} i_{j-1} + \omega^{n-j} i_j \tag{5.11}$$

onde $0 \leq j \leq n$, $1 \leq i_j < \omega$ e $0 \leq i_r < \omega$ se $0 \leq r \leq j-1$.

Para cada função $g \in C(K_{n,k})$ defina a aplicação $S(g) : [1, \omega^n k] \to \mathbb{K}$ por

$$S(g)(\xi) = \begin{cases} g(\omega^n k) & \text{se } \xi = \omega^n k, \\ \frac{1}{A}\ g(\xi) + \frac{A-1}{A}\ g(\omega^n k) & \text{se } \xi = \omega^n(k-1) + \omega^{n-1} i,\ 1 \leq i < \omega, \\ \frac{1}{A}\ g(\omega^n r) + \frac{A-1}{A}\ g(\omega^n k) & \text{se } \xi = \omega^n r,\ 1 \leq r \leq k-1. \end{cases}$$

Se $\xi\ \in\ \left]\omega^n(k-1) + \omega^{n-1}(i-1), \omega^n(k-1) + \omega^{n-1} i\right[$, $1 \leq i < \omega$, e ξ está representado como (5.11), então

$$S(g)(\xi) = \frac{A-1}{A\ (n-1)} \sum_{s=0}^{j-2} \Big(g(\xi^{[s]}) - g(\omega^n k)\Big) + \frac{1}{A}\ g(\xi^{[j-1]}) + \frac{A-1}{A}\ g(\omega^n k),$$

e se $\xi\ \in\ ]\omega^n(r-1), \omega^n r[$, $1 \leq r \leq k-1$, e ξ está representado como (5.11), então

$$S(g)(\xi) = \frac{A-1}{A\ n} \sum_{s=0}^{j-1} \Big(g(\xi^{[s]}) - g(\omega^n k)\Big) + \frac{1}{A}\ g(\xi^{[j]}) + \frac{A-1}{A}\ g(\omega^n k).$$

Vamos demonstrar que $S(g)$ é contínua em $[1, \omega^n k]$ para cada $g \in C(K_{n,k})$. Para tanto, seja $g \in C(K_{n,k})$ arbitrário. Dado ξ_0 um ponto não isolado de $[1, \omega^n k]$ e $\epsilon > 0$ defina

$$\Lambda_\epsilon = \left\{1 \leq \xi \leq \omega^n k\ :\ |g(\xi) - g(\omega^n k)| \geq \frac{\epsilon}{n}\right\}.$$

Para benefício do leitor distinguimos dois casos.

Caso 1. $\xi_0 = \omega^n k$. Por Λ_ϵ ser um conjunto finito existe $1 \leq m < \omega$ tal que

$$\left]\omega^n(k-1) + \omega^{n-1}m, \omega^n k\right[\;\cap\; \Lambda_\epsilon = \varnothing.$$

Segue da definição de $S(g)$ que se $\xi \in \left]\omega^n(k-1) + \omega^{n-1}m, \omega^n k\right[$, então

$$|S(g)(\xi) - S(g)(\xi_0)| \leq |g(\xi_1) - g(\omega^n k)| + \ldots + |g(\xi_s) - g(\omega^n k)|,$$

onde $1 \leq s \leq n$ e $\xi = \xi_1 < \ldots < \xi_s < \omega^n k$. Portanto

$$|S(g)(\xi) - S(g)(\xi_0)| < \epsilon.$$

Caso 2. $1 \leq \xi_0 < \omega^n k$. Escreva $\xi_0 = \omega^n i_0 + \omega^{n-1} i_1 + \ldots + \omega^{n-j} i_j$, $0 \leq j < n$, onde $0 \leq i_0 \leq k-1$, $1 \leq i_j < \omega$ e $0 \leq i_r < \omega$ se $1 \leq r \leq j-1$. Por Λ_ϵ ser finito existe $1 \leq m < \omega$ tal que

$$\Big]\omega^n i_0 + \omega^{n-1} i_1 + \ldots + \omega^{n-j}(i_j - 1) + \omega^{n-(j+1)}m,\ \omega^n i_0 + \omega^{n-1} i_1 + \ldots + \omega^{n-j} i_j\Big[\;\cap\; \Lambda_\epsilon = \varnothing.$$

Observe que se

$$\xi \in \Big]\omega^n i_0 + \omega^{n-1} i_1 + \ldots + \omega^{n-j}(i_j - 1) + \omega^{n-(j+1)}m,\ \omega^n i_0 + \omega^{n-1} i_1 + \ldots + \omega^{n-j} i_j\Big[,$$

então existe $1 \leq s \leq n-j$ tal que $\xi^{[s]} = \xi_0$. Temos, pela definição de $S(g)$,

$$|S(g)(\xi) - S(g)(\xi_0)| \leq |g(\xi_1) - g(\omega^n k)| + \ldots + |g(\xi_s) - g(\omega^n k)|$$

onde $\xi = \xi_1 < \ldots < \xi_s < \xi_0$. Consequentemente

$$|S(g)(\xi) - S(g)(\xi_0)| < \epsilon.$$

Deduzimos que $S(g)$ é contínua em ξ_0.

Portanto, S define uma aplicação de $C(K_{n,k})$ em $C(\omega^n k)$. Vamos verificar que as aplicações $S \circ T$ e $T \circ S$ são, respectivamente, os operadores identidade em $C(\omega^n k)$ e $C(K_{n,k})$. Com efeito, seja $f \in C(\omega^n k)$ arbitrário. Se $\xi = \omega^n k$, então

$$S \circ T(f)(\omega^n k) = T(f)(\omega^n k) = f(\omega^n k).$$

Se $\xi = \omega^n(k-1) + \omega^{n-1} i$, $1 \leq i < \omega$, então

$$\begin{aligned} S \circ T(f)(\xi) &= \frac{1}{A}\ T(f)(\xi) + \frac{A-1}{A}\ T(f)(\omega^n k) \\ &= \frac{1}{A}\ (A\ f(\xi) - (A-1)\ f(\omega^n k)) + \frac{A-1}{A}\ f(\omega^n k) = f(\xi). \end{aligned}$$

Se $\xi = \omega^n r$, $1 \leq r \leq k-1$, então

$$\begin{aligned} S \circ T(f)(\xi) &= \frac{1}{A}\ T(f)(\omega^n r) + \frac{A-1}{A}\ T(f)(\omega^n k) \\ &= \frac{1}{A}\ (A\ f(\omega^n r) - (A-1)\ f(\omega^n k)) + \frac{A-1}{A}\ f(\omega^n k) = f(\xi). \end{aligned}$$

Se $\xi \in \left]\omega^n(k-1) + \omega^{n-1}(i-1), \omega^n(k-1) + \omega^{n-1} i\right[$, $1 \leq i < \omega$, e ξ está representado como

(5.11), então

$$\begin{aligned}
S \circ T(f)(\xi) &= \frac{A-1}{A(n-1)} \sum_{s=0}^{j-2} \Big(T(f)(\xi^{[s]}) - T(f)(\omega^n k) \Big) + \frac{1}{A}\, T(f)(\xi^{[j-1]}) + \frac{A-1}{A}\, T(f)(\omega^n k) \\
&= \frac{A-1}{A(n-1)} \sum_{s=0}^{j-2} \left(\frac{(n-1)A}{A-1} \, \Big(f(\xi^{[s]}) - f(\xi^{[s+1]}) \Big) \right) + f(\xi^{[j-1]}) \\
&= \Big(f(\xi) - f(\xi^{[j-1]}) \Big) + f(\xi^{[j-1]}) = f(\xi).
\end{aligned}$$

Se $\xi \in \,]\omega^n(r-1), \omega^n r[\,$, $1 \leq r \leq k-1$, e ξ está representado como (5.11), então

$$\begin{aligned}
S \circ T(f)(\xi) &= \frac{A-1}{An} \sum_{s=0}^{j-1} \Big(T(f)(\xi^{[s]}) - T(f)(\omega^n k) \Big) + \frac{1}{A}\, T(f)(\xi^{[j]}) + \frac{A-1}{A}\, T(f)(\omega^n k) \\
&= \frac{A-1}{An} \sum_{s=0}^{j-1} \left(\frac{nA}{A-1} \, \Big(f(\xi^{[s]}) - f(\xi^{[s+1]}) \Big) \right) + f(\xi^{[j]}) \\
&= \Big(f(\xi) - f(\xi^{[j]}) \Big) + f(\xi^{[j]}) = f(\xi).
\end{aligned}$$

Concluímos que $S \circ T(f) = f$ para todo $f \in C(\omega^n k)$.
Por outro lado, fixe $g \in C_0(K_{n,k})$ arbitrário. Se $\xi = \omega^n k$, então

$$T \circ S(g)(\omega^n k) = S(g)(\omega^n k) = g(\omega^n k).$$

Se $\xi = \omega^n(k-1) + \omega^{n-1} i$, $1 \leq i < \omega$, então

$$\begin{aligned}
T \circ S(g)(\xi) &= A\; S(g)(\xi) - (A-1)\; S(g)(\omega^n k) \\
&= A\; \left(\frac{1}{A}\; g(\xi) + \frac{A-1}{A}\; g(\omega^n k) \right) - (A-1)\; g(\omega^n k) = g(\xi).
\end{aligned}$$

Se $\xi = \omega^n r$, $1 \leq r \leq k-1$, então

$$\begin{aligned}
T \circ S(g)(\xi) &= A\; S(g)(\omega^n r) - (A-1)\; S(g)(\omega^n k) \\
&= A\; \left(\frac{1}{A}\; g(\omega^n r) + \frac{A-1}{A}\; g(\omega^n k) \right) - (A-1)\; g(\omega^n k) = g(\xi).
\end{aligned}$$

Se $\xi \in \,\big]\omega^n(k-1) + \omega^{n-1}(i-1), \omega^n(k-1) + \omega^{n-1} i\big[\,$, $1 \leq i < \omega$, e ξ está representado como (5.11), então

$$\begin{aligned}
T \circ S(g)(\xi) &= \frac{(n-1)A}{A-1}\; \Big(S(g)(\xi) - S(g)(\xi^{[1]}) \Big) + S(g)(\omega^n k) \\
&= \frac{(n-1)A}{A-1}\; \left(\frac{A-1}{A(n-1)} \, (g(\xi) - g(\omega^n k)) \right) + g(\omega^n k) = g(\xi).
\end{aligned}$$

Se $\xi \in \,]\omega^n(r-1), \omega^n r[\,$, $1 \leq r \leq k-1$, e ξ está representado como (5.11), então

$$\begin{aligned}
T \circ S(g)(\xi) &= \frac{nA}{A-1}\; \Big(S(g)(\xi) - S(g)(\xi^{[1]}) \Big) + S(g)(\omega^n k) \\
&= \frac{nA}{A-1}\; \left(\frac{A-1}{An} \, (g(\xi) - g(\omega^n k)) \right) + g(\omega^n k) = g(\xi).
\end{aligned}$$

Fica, portanto, estabelecido que $T \circ S(g) = g$ para cada $g \in C(K_{n,k})$ e $S \circ T(f) = f$ para cada $f \in C(\omega^n k)$. Concluímos que S é o operador inverso de T, mais ainda, S é linear e verifica

$$\|S\| \leq 1. \tag{5.12}$$

Se $k > 1$, as relações (5.9) e (5.12) nos permitem escrever

$$\mathrm{d}(C(\omega), C(\omega^n k)) \leq \inf_{1<A} \max \left\{ \frac{2nA}{A-1} + 1, 2A - 1 \right\}. \tag{5.13}$$

Observe que para $A > 1$ a função $f(A) = \frac{2nA}{A-1} + 1$ é estritamente decrescente enquanto que a função $g(A) = 2A - 1$ é estritamente crescente. Assim, o ínfimo em (5.13) é atingido quando $f(A) = g(A)$ e isto acontece quando

$$A = \frac{n + 2 + \sqrt{n(n+4)}}{2}.$$

Portanto

$$\mathrm{d}(C(\omega), C(\omega^n k)) \leq n + 1 + \sqrt{n(n+4)}.$$

Se $k = 1$ e $n > 1$, as relações (5.10) e (5.12) implicam

$$\mathrm{d}(C(\omega), C(\omega^n)) \leq \inf_{1<A} \max \left\{ \frac{2(n-1)A}{A-1} + 1, 2A - 1 \right\}. \tag{5.14}$$

De modo similar ao caso anterior, para $A > 1$ a função $f(A) = \frac{2(n-1)A}{A-1} + 1$ é estritamente decrescente enquanto que a função $g(A) = 2A - 1$ é estritamente crescente. O ínfimo em (5.14) é atingido quando $f(A) = g(A)$, ou seja, quando

$$A = \frac{n + 1 + \sqrt{(n-1)(n+3)}}{2}.$$

Consequentemente

$$\mathrm{d}(C(\omega), C(\omega^n)) \leq n + \sqrt{(n-1)(n+3)}.$$

□

Referências Bibliográficas

[1] P. Aiena, M. González, *On inessential and improjective operators.* Studia Math. 131 (1998), 271–287.

[2] D. Alspach, Y. Benyamini, *Primariness of spaces of continuous functions on ordinals.* Israel J. Math. 27 (1977), 64–92.

[3] D. Amir, *On isomorphisms of continuous function spaces.* Israel J. Math. 3 (1965), 205–210.

[4] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires.* Monografie Matematyczne, Warsaw, 1932.

[5] J. W. Baker, *Dispersed images of topological spaces and uncomplemented subspaces of* $C(X)$. Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973), 309–314.

[6] E. Behrends and M. Cambern, *An isomorphic Banach-Stone theorem.* Studia Math. 90 (1988), 15–26.

[7] C. Bessaga, A. Pełczyński, *Spaces of continuous functions IV*, Studia Math. 19 (1960), 53–62.

[8] R. S. Burachik, A. N. Iusem, *Set-Valued Mappings and Enlargements of Monotone Operators.* Optimization and Its Applications, Volume 8, Springer, New York, (2008).

[9] M. Cambern, *Isomorphisms of* $C_0(Y)$ *onto* $C(X)$. Pacific J. Math. 35 (1970), 307–312.

[10] M. Cambern, *Isomorphisms of* $C_0(Y)$ *with* Y *discrete.* Math. Ann. 188 (1970), 23–25.

[11] M. Cambern, *Isomorphims of spaces of continuous vector-valued functions.* Illinois J. Math. 20 (1976), 1–11.

[12] M. Cambern, *Isomorphisms of spaces of norm-continuous functions.* Pacific J. Math. 116 (1985), 243–254.

[13] M. Cambern, *On isomorphisms with small bound.* Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 1062–1066.

[14] M. Cambern, *On mappings of sequence spaces.* Studia Math. 30 (1968), 73–77.

[15] P. Cembranos and J. Mendoza, *Banach Spaces of Vector-Valued Functions.* Lecture Notes in Mathematics 1676, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[16] B. Cengiz, *On topological isomorphisms of* $C_0(X)$ *and the cardinal number of* X. Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978), 105–108.

[17] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 42 (1936), 396–414.

[18] H. B. Cohen, *A bound-two isomorphism between* $C(X)$ *Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 50 (1975), 215–217.

[19] H. B. Cohen, C.-H. Chu, *Topological conditions for bound-2 isomorphisms of $C(X)$*. Studia Math. 113 (1995), 1–24.

[20] J. Diestel, J.J. Uhl, Jr, *Vector Measures.* Math. Surveys 15, Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[21] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge. *Absolutely Summing Operators.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 43. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[22] N. Dinculeanu. *Vector Integration and Stochastic Integration in Banach Spaces.* Wiley Interscience, 2000.

[23] N. Dinculeanu, *Vector Measures* . Pergamon Press, Berlin, 1967.

[24] P. Enflo, *Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm.* Israel J. Math. 13 (1972), 281–288.

[25] R. Engelking, *General Topology.* Sigma Ser. Pure Math. 6, Heldermann, Berlin, 1989.

[26] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler *Banach Space Theory.* CMS Books in Mathematics, Springer, New York, 2010.

[27] V. Ferenczi, *A uniformly convex hereditarily indecomposable Banach space.* Israel J. Math. 102 (1997), 199–225.

[28] V. Ferenczi, *Hereditarily finitely decomposable Banach spaces.* Studia Math. 123 (1997), 135–149

[29] E. M. Galego, *On solutions to the Schroeder-Bernstein problem for Banach spaces.* Arch. Math. (Basel) 79 (2002), 299–307.

[30] J. Gil de Lamadrid, *Measures and tensors.* Canad. J. Math. 18 (1966), 762–793.

[31] Y. Gordon, *On the distance coefficient between isomorphic function spaces.* Israel J. Math. 8 (1970), 391–397.

[32] W. Hensgen, *A simple proof of Singer's representation theorem.* Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 3211–3212.

[33] R. C. James, *Uniformly non-square Banach spaces.* Ann. Math. 80 (1964), 542–550.

[34] K. Jarosz, *Small isomorphisms of C(X,E) spaces.* Pacific J. Math. 138 (1989), 295–315.

[35] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, *Basics concepts in the geometry of Banach spaces.* em: Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 2001, 1–84.

[36] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I: Sequence Spaces.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 92, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[37] W. Marciszewski. *On Banach spaces $C(K)$ isomorphic to $c_0(\Gamma)$.* Studia Math. 156 (2002), 295–302.

[38] B. Maurey, *Type, cotype and K-convexity.* Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2, 1299–1332, North-Holland, Amsterdam, 2003.

[39] S. Mazurkiewicz, W. Sierpiński, *Contribution à la topologie des ensembles dénombrables.* Fund. Math. 1 (1920), 17–27.

[40] L. Meziani, *On the dual space* $C_0^*(S, X)$. Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) 78 (2009), 153–160.

[41] Oja, È. F. *Complemented spaces that are isomorphic to* l_p *spaces in tensor products and operator spaces.* (Russian) Sibirsk. Mat. Zh. 33 (1992), 115–120; traduzido para o inglês em Siberian Math. J. 33 (1992), 850–855.

[42] A. Pełczyński, *Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions* Dissertationes Math.(Rozprawy Mat.) 58, 1968.

[43] A. Pełczyński, Z. Semadeni, *Spaces of continuous functions (III).* Studia Math. 18 (1959), 211–222.

[44] H. P. Rosenthal, *The Banach space* $C(K)$. Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2, 1547–1602, North-Holland, Amsterdam, 2003.

[45] W. Rudin, *Real and Complex Analysis.* Third Edition, McGraw-Hill International Editions, 1987.

[46] C. Samuel, *Sur la reproductibilite des espaces* l_p. Math. Scand. 45 (1979), 103–117.

[47] Z. Semadeni, *Banach Spaces of Continuous Functions Vol. I.* Monografie Matematyczne, Tom 55. Warsaw, PWN-Polish Scientinfic Publishers, Warsaw, 1971.

[48] I. Singer, *Best approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces.* Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen vol. 171, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1970.

[49] I. Singer, *Linear functionals on the space of continuous mappings of a compact Hausdorff space into a Banach space.* (Russian) Rev. Roum. Math. Pures Appl. 2 (1957), 301–315.

[50] M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology.* Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 375–481.