Coincidência de aplicações em fibrados com base S^1 e fibra garrafa de Klein

Weslem Liberato Silva

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, março de 2009

Agradecimentos

A Deus por tudo.

Aos meus pais José Carlos Deus e Silva e Josefina Liberato Silva pelo apoio, principalmente no momento mais delicado da minha dissertação.

A todos os meus familiares que de alguma forma contribuiram para o desenvolvimento desse trabalho.

Ao meu orientador Professor Dr. Daciberg Lima Gonçalves pela ajuda, compreensão e disposição.

À Professora Dra. Regina Maria de Aquino do Departamento de Matemática da UFES pelo incentivo.

À Professora Dra. Lucilia Daruiz Borsari e a Professora Dra. Fernanda Soares Pinto Cardona do IME-USP pelo apoio.

Ao IME-USP pela oportunidade.

À minha namorada Elisângela pela ajuda na dissertação.

Aos meus amigos e colegas do IME-USP, e do CRUSP.

Por fim, ao CNPq pela bolsa concedida.

Resumo

Sejam K, a garrafa de Klein, e $K \to M \xrightarrow{p} S^1$ um fibrado com base S^1 e fibra K. Neste trabalho estudamos o seguinte problema: dadas aplicações $f, g : M \to M$ que preservam fibra sobre S^1, quando o par (f, g) pode ser deformado, por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1, a um par de aplicações $(f^{'}, g^{'}) : M \to M \times_{S^1} M$ livre de coincidência? Responder esta questão é equivalente a estudar a existência de uma secção em um diagrama geométrico, ou equivalentemente estudar a existência de um levantamento envolvendo os grupos fundamentais dos espaços M, $M \times_{S^1} M$ e $M \times_{S^1} M - \Delta$, onde $M \times_{S^1} M$ é o pullback de $p : M \to S^1$ por $p : M \to S^1$ e Δ é a diagonal em $M \times_{S^1} M$. O conjunto das classes de homotopia dos pares (f, g), sobre S^1, tal que (f, g) restrito a fibra K é deformado a um par de aplicações livre de coincidência foi determinado. Apresentamos uma formulação do problema usando um sistema de equações envolvendo as presentações dos grupos acima e decidimos em alguns casos se conseguimos ou não deformar o par (f, g) a um par livre de coincidência com a classe de homotopia de f e de g diferente da identidade.

Palavras-chave: coincidência, fibrados, homotopia que preserva fibra.

Abstract

Let K be the Klein bottle and let $K \to M \xrightarrow{p} S^1$ be a Klein bottle bundle over S^1. In this work we study the following question: given a pair of fiber preserving maps over S^1, when can it be deformed by a fiberwise homotopy over S^1 into a pair of coincidence free fiber preserving maps over S^1, $(f^{'}, g^{'}) : M \to M \times_{S^1} M$? Answering this question is equivalent to study existence of a section in a geometric diagram, or equivalently, to study the existence of a lifting involving the fundamental groups of the spaces M, $M \times_{S^1} M$ and $M \times_{S^1} M - \Delta$, where $M \times_{S^1} M$ is the pullback of $p : M \to S^1$ by $p : M \to S^1$ and Δ is the diagonal in $M \times_{S^1} M$. The set of the homotopy classes of pairs (f, g) over S^1 such that (f, g) restricted to the fiber K can be deformed into a pair of coincidence free maps has been determined. We present a formulation for the problem using a system of equations involving presentations of the given groups and then we decide in some cases if we can deform (f, g) to a pair of concidence free maps where the homotopy classes of f and g are different from the identity.
Keywords: coincidence, fiber bundle, fiberwise homotopy.

Sumário

Introdução

Dados uma fibração $M \xrightarrow{p} B$ e aplicações $f, g : M \to M$ que preservam fibra sobre B, a pergunta é se (f, g) pode ser deformado, por uma homotopia que preserva fibra sobre B, a um par de aplicações $(f^{'}, g^{'})$ livre de coincidência. Esse problema é motivado pelo caso em que $f = Id$, nesse caso, a pergunta é se podemos deformar a aplicação g por uma homotopia que preserva fibra sobre B a uma aplicação livre de ponto fixo, que tem sido considerado por vários autores dentres eles veja [3], [7], [8] e [9].

Consideremos um par de aplicações $(f, g) : M \to M \times_{S^1} M$, onde M é um fibrado sobre o círculo S^1 e a fibra é uma superfície fechada S. Esses fibrados são obtidos do espaço $S \times [0, 1]$ identificando os pontos $(x, 0)$ com $(\phi(x), 1)$, onde ϕ é um homeomorfismo da superfície S. Veja o capítulo 1 para mais detalhes desses fibrados. O caso em que $f = Id$ e $S = T$, Toro, ou $S = K$, garrafa de Klein, foram completamente resolvidos em [8] e [9], respectivamente.

Neste trabalho consideramos o caso em que a fibra $S = K$, garrafa de Klein. Denotamos por $M(\phi)$ o espaço total. Investigamos quando um par de aplicações $(f, g) : M(\phi) \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$, que preserva fibra sobre S^1, isto é, $p \circ f = p$, $p \circ g = p$, pode ser deformado, por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1, a um par de aplicações $(f^{'}, g^{'})$ livre de coincidência. O conjunto das classes de homotopia dos pares (f, g) sobre S^1 tal que $(f_{|K}, g_{|K})$ pode ser deformado a um par livre de coincidência é dado pelo teorema 2.1.1, pg. 33.

Esta dissertação está organizada em 4 capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos uma equivalência da nossa questão principal relacionando-a a existência de uma secção. Isso é dado pelo teorema 1.3.1, pg.11. Mostramos que encontrar essa secção é equivalente a encontrar um levantamento num diagrama algébrico. Essa é a proposição 1.3.4, pg.11. Também apresentamos alguns resultados sobre a garrafa de Klein e fibrados com base S^1 e fibra K. Esses resultados incluem o número de Nielsen de um par de aplicações da garrafa de Klein e o grupo fundamental dos espaços $M(\phi)$, $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ e $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta$, onde Δ é a diagonal em $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$, pullback de $p : M(\phi) \to S^1$ por $p : M(\phi) \to S^1$.

No segundo capítulo, classificamos todos os K-fibrados sobre S^1. Essa é a proposição 2.1.2, pg.27. Também obtivemos presentações para os grupos fundamental de $M(\phi)$, $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ e $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta$.

No terceiro capítulo, apresentamos uma condição necessária e suficiente para a existência do levantamento do diagrama 1.4. Essas condições estão relacionadas a existência de soluções de um sistema de equações que envolvem as presentações dos grupos acima.

No quarto capítulo, obtivemos alguns resultados no seguinte contexto: dado um par de aplicações (f, g), com a classe de homotopia de f diferente da identidade, exibimos exemplos onde não conseguimos deformar o par (f, g) a um par de aplicações livre de coincidência. Também exibimos exemplos onde conseguimos deformar o par (f, g) a um par livre de coincidência.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Teoria de Coincidência

Nesta seção apresentaremos noções da teoria de coincidência.

Sejam $f, g : X \to Y$ aplicações entre CW complexos finitos. Denotemos por $Coin(f, g)$ o conjunto $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$.

Suponha que x_1 e x_2 pertençam a $Coin(f, g)$. Então dizemos que x_1 e x_2 são *Nielsen equivalentes* com respeito a f e g se existe um caminho $\sigma : [0, 1] \to X$ tal que $\sigma(0) = x_1$, $\sigma(1) = x_2$ e $f \circ \sigma$ é homotópica a $g \circ \sigma$ relativo aos pontos finais.

Temos que a relação definida acima é uma relação de equivalência. Assim o conjunto $Coin(f, g)$ está particionado em classes de equivalência dessa relação, chamadas de classes de coincidência.

Uma classe de coincidência $\mathcal{F}$ é dita essencial se dado x pertencente a $\mathcal{F}$ e homotopias $\{f_t\}$, $\{g_t\}$ de $f = f_0$ e $g = g_0$ existir $x^{'}$ pertencente a $Coin(f_1, g_1)$ e um caminho $\gamma : [0, 1] \to X$ com $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = x^{'}$ tal que $f_t \circ \gamma$ é homotópico a $g_t \circ \gamma$ relativo aos pontos finais. Dizemos que x pertencente a $\mathcal{F}$ está $\{f_t\}, \{g_t\}-$ relacionado a uma coincidência de f_1 e g_1.

O número Nielsen coincidência $N(f, g)$ de f e g é definido como sendo o número de classes de coincidência essenciais. Temos que $N(f, g)$ é um invariante homotópico, finito, e é um limitante inferior para o conjunto $Coin(f', g')$ das aplicações f', g' homotópicas a f e g respectivamente. Para uma melhor descrição do assunto veja [11] e [21]. Nesse trabalho usamos a teoria de coincidência definida em [2].

1.2 Grupo

Sejam A e G grupos com presentações dadas por $A =< Y|S >$ e $G =< X|R >$. Seja

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{l} \tilde{G} \xrightarrow{v} G \longrightarrow 1$$

uma extensão fixada de G por A.

Sejam $\tilde{Y} = \{\tilde{y} = l(y)|y \in Y\}$ e $\tilde{S} = \{\tilde{s}|s \in S\}$ o conjunto das palavras em $\tilde{Y}$ obtida de S trocando y por $\tilde{y}$ quando ele aparecer.

Para cada $x \in X$ escolhemos $\tilde{x}$ pertencente a $\tilde{G}$ tal que $v(\tilde{x}) = x$. Tomemos $\tilde{X} = \{\tilde{x}|x \in X\}$ onde $\tilde{x}$ foi escolhido anteriormente.

Consideremos também para cada $r \in R$ a palavra $\tilde{r}$ em $\tilde{X}$ obtida de r trocando x por $\tilde{x}$. Agora v anula cada $\tilde{r}$, pois por hipótese temos $v(\tilde{x}) = x$. Portanto, para cada $r \in R$ temos que $\tilde{r} \in Ker(v) = Im(l)$. Como $Im(l)$ é gerado pelo conjunto $\tilde{Y}$ então, cada $\tilde{r}$ pode ser escrito como uma palavra, digamos v_r, em $\tilde{y}$. Coloquemos $\tilde{R} = \{\tilde{r}v_r^{-1}|r \in R\}$.

Como $Im(l)$ é um subgrupo normal de $\tilde{G}$, então cada conjugado $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{x}^{-1}$, onde $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, pertence a $Im(l)$. Portanto, $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{x}^{-1}$ é uma palavra $w_{x,y}$ em $\tilde{y}$. Coloquemos $\tilde{T} = \{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{x}^{-1}w_{x,y}^{-1}|x \in X, y \in Y\}$.

Teorema 1.2.1. *Com a notação acima temos que o grupo $\tilde{G}$ possui a seguinte presentação $\tilde{G} =< \tilde{X}, \tilde{Y}|\tilde{R}, \tilde{S}, \tilde{T} >$.*

A demonstração do teorema acima se encontra no capítulo 13 de [13].

1.3 O problema geral.

Seja (F, M, S^1, p) um fibrado onde, M, F são variedades fechadas, e sejam $f, g : M \to M$ aplicações que preservam fibra sobre S^1, isto é, $p \circ f = p$, $p \circ g = p$. Queremos saber:

quando o par (f,g) pode ser deformado sobre S^1 a um par de aplicações $(f^{'},g^{'})$ livre de coincidência, por uma homotopia que preserva fibra ?

Nesta seção daremos uma formulação desse problema através de um diagrama geométrico e depois através de um diagrama algébrico. Trabalharemos com a formulação algébrica do problema. Começaremos definindo alguns espaços que foram utilizados neste trabalho.

Seja $M \times_{S^1} M \to M$ o pullback de $p : M \to S^1$ por $p : M \to S^1$. Esse espaço é dado por $M \times_{S^1} M = \{(x,y) \in M \times M | p(x) = p(y)\}$. De [20], temos que a inclusão $M \times_{S^1} M - \Delta \hookrightarrow M \times_{S^1} M$, onde Δ é a diagonal em $M \times_{S^1} M$, pode ser trocada por uma fibração $q : E_{S^1}(M) \to M \times_{S^1} M$, cuja fibra sobre um ponto b_0 denotaremos por $\mathcal{F}$, tal que $\pi_n(E_{S^1}(M)) \approx \pi_n(M \times_{S^1} M - \Delta)$. Aqui temos $E_{S^1}(M) = \{(x,\omega) \in B \times A^I | i(x) = \omega(0)\}$, onde $A = M \times_{S^1} M$, $B = M \times_{S^1} M - \Delta$ e q é dada por $q(x,\omega) = \omega(1)$.

A seguinte proposição relaciona o nosso problema com um diagrama geométrico.

Proposição 1.3.1. *Com a notação acima temos que o par de aplicações $(f,g) : M \to M \times_{S^1} M$ pode ser deformado a um par de aplicações $(f^{'},g^{'})$ livre de coincidência, por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 se, e somente se, existir uma aplicação $h : M \to M \times_{S^1} M - \Delta$ que torna o diagrama abaixo homotópico comutativo.*

$$\begin{tikzcd} & M \times_{S^1} M - \Delta \arrow[d, hook, "i"] \\ M \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "(f,g)"'] & M \times_{S^1} M \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Demonstração.

$(\Rightarrow)$ Suponha que exista uma homotopia $H = (F,G) : M \times I \to M \times_{S^1} M$ tal que; $p \circ H_t(x) = p(x)\ \forall x \in M,\ \forall t \in I$; com $H_0(x) = (f(x), g(x)$ e $H_1(x) = (f^{'}(x), g^{'}(x))$, onde $f^{'}(x) \neq g^{'}(x)\ \forall x \in M$.

Defina $h : M \to M \times_{S^1} M$ por $h(x) = (f^{'}(x), g^{'}(x))$. Como $p \circ f^{'}(x) = p(x)$, $p \circ g^{'}(x) = p(x)$, e $f^{'}(x) \neq g^{'}(x)\ \forall x \in M$ então, $h(x)$ pertence a $M \times_{S^1} M - \Delta$.

($\Leftarrow$) Suponha que exista $h : M \to M \times_{S^1} M - \Delta$, com $h(x) = (\alpha(x), \beta(x))$, e uma homotopia $H : M \times I \to M \times_{S^1} M$ que torna o diagrama acima comutativo. Temos $\alpha(x) \neq \beta(x)$, $\forall x \in M$. Supondo $H_0 = (f, g)$ e $H_1 = (i \circ \alpha, i \circ \beta)$ então obtemos o resultado, já que $i \circ \alpha(x) \neq i \circ \beta(x)$, $\forall x \in M$. $\square$

Podemos trocar o diagrama acima por um diagrama que também é uma equivalência do nosso problema, que é dado pelo teorema abaixo.

Teorema 1.3.1. *Um par de aplicações $(f, g) : M \to M \times_{S^1} M$, sobre S^1 pode ser deformado a um par de aplicações $(f^{'}, g^{'})$ livre de coincidência, por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 se, e somente se, existir uma secção σ no diagrama abaixo:*

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[d] \\ & E_{S^1}(f,g) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & E_{S^1}(M) \arrow[d, "q"] \\ M \arrow[r, "1"] \arrow[ur, dashed, "\sigma"] & M \arrow[r, "(f,g)"] & M \times_{S^1} M \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

onde $p_1 : E_{S^1}(f, g) \to M$ é a fibração induzida de q por (f, g).

Demonstração.

Se existir σ no diagrama aicma; então temos uma aplicação $\theta : M \to E_{S^1}(M)$ dada por $\theta = p_2 \circ \sigma$, e portanto, pela proposição 2.4 de [3] o par de aplicações (f, g) pode ser deformado a um par de aplicações livre de coincidência por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1.

Suponha agora que exista $H : M \times I \to M \times_{S^1} M$ homotopia com $H_1 = (f, g)$ e $H_0 = (f^{'}, g^{'})$, onde $f^{'}(x) \neq g^{'}(x)$ $\forall x \in M$ e $p \circ H = p$.

Temos que $G_0(x) = (H_0(x), c_{H_0(x)})$ pertence a $(M \times_{S^1} M - \Delta) \times (M \times_{S^1} M)^I$, e $q \circ G_0(x) = c_{H_0(x)}(1) = H_0(x)$, onde $c_{H_0(x)}$ é o caminho constante em $M \times_{S^1} M - \Delta$ $\subset M \times_{S^1} M$ dado por $c_{H_0(x)}(t) = H_0(x)$. Como q é uma fibração então existe uma homotopia $G : M \times I \to E_{S^1}(M)$ que levanta H. Logo, existe σ no diagrama acima, basta definir $\sigma(x) = (x, G_1(x))$. Temos que $\sigma(x)$ pertence a $E_{S^1}(f, g)$, pois $q \circ G_1(x) = H_1(x) = (f, g)(x)$. $\square$

Nesta dissertação trabalhamos nesse problema com o espaço M sendo um fibrado sobre S^1 e fibra K, garrafa de Klein. Para isso obtivemos modelos dos fibrados com base S^1 e fibra K usando homeomorfismos de K.

1.3.1 Fibrados com base S^1 e fibra garrafa de Klein.

Seja $\phi : K \to K$ um homeomorfismo que possui um ponto fixo, digamos x_0. Veremos abaixo (demonstração do corolário 1.3.1) que não há perda de generalidade em assumir essa hipótese.

Denotemos por $M(\phi)$ o espaço quociente obtido de $K \times I$ pela relação $(x, 0) \sim (\phi(x), 1)$. Denotaremos um elemento de $M(\phi)$ por $< x, t >$.

Temos que $K \to M(\phi) \xrightarrow{p} S^1$ é um fibrado, localmente trivial, onde a aplicação p é projeção dada por $p(< x, t >) =< t >$. Aqui, estamos considerando S^1 como o espaço quociente obtido de I pela relação $0 \sim 1$.

De fato, podemos escolher abertos $\{U, V\}$ que cobrem S^1. Se um aberto digamos $V \subset S^1$ não contém $< 0 >$ então, a aplicação $\psi : V \times K \to p^{-1}(V)$ definida por; $\psi(< t >, x) =< x, t >$ é um homeomorfismo. Agora, dado um aberto $U \subset S^1$ contendo $< 0 >$, então U pode ser visto como $U = U_1 \cup U_2$, onde $U_1 = [0, \epsilon)$, e $U_2 = (1 - \delta, 1]$. Assim, basta definir $\psi : U \times K \to p^{-1}(U)$ por

$$\psi(< t >, x) = \begin{cases} < x, t >, & se \quad t \in U_1 \\ < \phi^{1-t}(x), 1 - t >, & se \quad t \in U_2 \end{cases}$$

e $\psi' : p^{-1}(U) \to U \times K$ por

$$\psi'(< x, t >) = \begin{cases} (< t >, x), & se \quad t \in U_1 \\ (< t >, \phi^{-t}(x)), & se \quad t \in U_2 \end{cases}$$

onde $\phi^0 = Id$. Temos que ψ e ψ' estão bem definidas são contínuas e uma é inversa da outra. Portanto, ψ é um homeomorfismo e $p \circ \psi(< t >, x) =< t >$.

Proposição 1.3.2. *Sejam $\phi_1, \phi_2 : K \to K$ dois homeomorfismos. Então, $M(\phi_1)$ é homeomorfo a $M(\phi_2)$ por um homeomorfismo que preserva fibra sobre S^1 se, e somente se, ϕ_1 é isotópico a um conjugado de ϕ_2.*

Demonstração.

($\Leftarrow$) Suponha que exista uma isotopia $H : K \times I \to K$ e um homeomorfismo $h : K \to K$, tal que $H_0(x) = \phi_1(x)$, $H_1(x) = h \circ \phi_2 \circ h^{-1}(x)$ e H_t homemorfismo de K, $\forall t \in I$.

Temos que o homeomorfismo $\theta : K\times I \to K\times I$, definido por $\theta(x,t) = (h^{-1}\circ H_t(x), t)$ induz um homeomorfismo $\bar{\theta} : M(\phi_1) \to M(\phi_2)$, dado por $\bar{\theta}(< x,t >) =< \theta(x,t) >$, pois: $\theta(x, 0) = (h^{-1} \circ H_0(x), 0) = (h^{-1} \circ \phi_1(x), 0)$.
$\theta(\phi_1(x), 1) = (h^{-1} \circ H_1 \circ \phi_1(x), 1) = (h \circ h^{-1} \circ \phi_2 \circ h^{-1} \circ \phi_1(x), 1) = (\phi_2 \circ h^{-1} \circ \phi_1(x), 1)$.

Portanto, em $M(\phi_2)$ temos $\theta(x, 0) \sim \theta(\phi_1(x), 1)$.

Também temos $p\circ\bar{\theta}(< x,t >) = p(< h^{-1}\circ H_t(x), t >) =< t >= p(< x,t >)$. Assim, $\bar{\theta}$ preserva fibra.

($\Rightarrow$) Seja $\psi : M(\phi_1) \to M(\phi_2)$ um homeomorfismo que preserva fibra sobre S^1. Disso, temos que ψ é da forma $\psi(< x,t >) =< \psi_t(x), t >$, onde para cada t, ψ_t é um homeomorfismo.

Devemos ter $\psi(< x, 0 >) =< \psi_0(x), 0 >= \phi(< \phi_1(x), 1 >) =< \psi_1 \circ \phi_1(x), 1 >$, pois temos $(x, 0) \sim (\phi_1(x), 1)$ em $M(\phi_1)$. Como $(\psi_0(x), 0) \sim (\phi_2\circ\psi_0(x), 1)$ em $M(\phi_2)$ então, devemos ter $\psi_1 \circ \phi_1 = \phi_2 \circ \psi_0$, ou seja, $\psi_1 = \phi_2 \circ \psi_0 \circ \phi_1^{-1}$.

Defina $H : K \times I \to K$ por $H_t(x) = \psi_0^{-1} \circ \psi_t \circ \phi_1(x)$. Temos que H é uma isotopia. Além disso, temos $H_0(x) = \psi_0^{-1} \circ \psi_0 \circ \phi_1(x) = \phi_1(x)$ e $H_1(x) = \psi_0^{-1} \circ \psi_1 \circ \phi_1(x) = \psi_0^{-1} \circ \phi_2 \circ \psi_0 \circ \phi_1^{-1} \circ \phi_1(x) = \psi_0^{-1} \circ \phi_2 \circ \psi_0(x)$. $\square$

Da proposição acima, podemos classificar os fibrados $M(\phi)$ por classes de isotopias de homeomorfismos de K. Faremos isso no próximo corolário. No capítulo 2, apresentaremos uma classificação mais detalhada dos fibrados $M(\phi)$.

Corolário 1.3.1. *As classes dos K - fibrados sobre S^1 são classificadas por classes de conjugação de classes de isotopia de homeomorfismos de K que preservam ponto base.*

Demonstração.

Seja $\phi : K \to K$ um homeomorfismo com $\phi(x_1) = y_1$. Pelo lema 5.4 do capítulo 5 de [19] temos que existe um homeomorfismo $h : K \to K$ isotópico a identidade, tal que $h(y_1) = x_1$. Seja $H : K \times I \to K$ isotopia entre h e Id com $H_0 = h$ e $H_1 = Id$.

Definindo $G : K \times I \to K$ por $G_t(x) = H_t(\phi(x))$, temos que G é uma isotopia entre $h \circ \phi$ e ϕ. Observemos que $h \circ \phi(x_1) = h(y_1) = x_1$.

Portanto, todo homeomorfismo $\phi : K \to K$ é isotópico a um homeomorfismo que preserva ponto base. Agora, pela proposição acima, obtemos o corolário. $\square$

Como a fibra K, garrafa de Klein, é uma superfície com característica de Euler igual a zero, então pelas proposições abaixo, que são demonstradas para esse caso, nosso problema se reduz a construir uma secção sobre o $2-$ esqueleto de $M(\phi)$. Temos que $M(\phi)$ é um CW-complexo, pois é quociente do CW-complexo $P = K \times I$ pelo sub CW-complexo Q dado por $Q = \{(x, 0) \sim (\phi(x), 1) | x \in K\}$.

Proposição 1.3.3. *Se $M = M(\phi)$, então existe uma secção σ no diagrama (1.2) sobre M se, e somente se, ela existir sobre o $2-$esqueleto.*

A demonstração da proposição acima está em [8], proposição 1.5.

Antes de enunciar a próxima proposição vamos enunciar o teorema 4.3.1, página 265 de [1].

Teorema 1.3.2. *(Critério para 2-extendabilidade) Seja (X, L) um CW-complexo relativo, $p : \tilde{X} \to X$ uma fibração com fibra $F \subset \tilde{X}$. Consideremos X, L e F conexos por caminhos. Uma seção $u : L \to \tilde{L}$, $\tilde{L} = p^{-1}(L)$, pode ser extendida a uma secção u' sobre o 2-esqueleto $X_2 = L \cup X^2$ exatamente quando $i_\# : \pi_1(F) \to \pi_1(\tilde{X})$ é injetor e quando existir um homomorfismo θ que torna o seguinte diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\tilde{L}) \arrow[r] & \pi_1(\tilde{X}) \arrow[dr, "p_\#"] & \\
\pi_1(L) \arrow[r] \arrow[u, "u_\#"] & \pi_1(X) \arrow[r, "Id"] \arrow[u, "\theta"] & \pi_1(X)
\end{tikzcd}$$

Podemos escolher u' tal que $u'_{\#} = \theta$.

Dado $q : E \to Y$ uma fibração com fibra F conexa por caminhos e $f : X \to Y$ uma aplicação então formamos o pullback geométrico $E^* = \{(x,y) \in X \times E | f(x) = q(y)\}$.

$$\begin{tikzcd} E^* \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"] & E \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Podemos também formar o pullback algébrico $\pi_1(X) \sqcup \pi_1(E) = \{(\alpha,\beta) \in \pi_1(X) \times \pi_1(E) |\ f_{\#}(\alpha) = q_{\#}(\beta)\}$. Temos que se i_1, dado pela sequência de homotopia da fibração q

$$\longrightarrow \pi_1(F) \xrightarrow{i_1} \pi_1(E) \xrightarrow{q_{\#}} \pi_1(Y) \longrightarrow$$

é injetor, então temos que $\pi_1(E^*)$ é isomorfo a $\pi_1(X) \sqcup \pi_1(E)$. De fato, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(F) \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & \pi_1(E^*) \arrow[r, "q_{1\#}"] \arrow[d, "(q_{1\#}, q_{2\#})"', "\approx"] & \pi_1(X) \arrow[d, "Id"] \\ \pi_1(F) \arrow[r, "i_2"] & \pi_1(X) \sqcup \pi_1(E) \arrow[r, "p_1"] & \pi_1(X) \end{tikzcd}$$

As aplicações são definidas por $i_2(\beta) = (1, i_1(\beta))$ e $p_1(\alpha,\beta) = \alpha$.

A seguinte proposição dá uma equivalência entre o nosso problema e encontrar um levantamento num diagrama algébrico.

Proposição 1.3.4. *Existe uma secção σ no diagrama (1.2) sobre o $2-$esqueleto de $M(\phi)$ se, e somente se, o seguinte diagrama admite um levantamento ψ :*

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(\mathcal{F}) \simeq \pi_2(K, K - x_0) \arrow[d] \\ & \pi_1(E_{S^1}(M(\phi))) \arrow[d, "q_{\#}"] \\ \pi_1(M(\phi)) \arrow[r, "(f,g)_{\#}"'] \arrow[ur, dashed, "\psi"] & \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)) \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Demonstração.

Primeiro observemos que existe um homomorfismo ψ que torna o diagrama abaixo comutativo se, e somente se, existe um homomorfismo θ que torna o diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(E_{S^1}(f,g)) \arrow[r, "p_{2\#}"] \arrow[d, "p_{1\#}"] & \pi_1(E_{S^1}(M(\phi))) \arrow[d, "q_{\#}"] \\
\pi_1(M(\phi)) \arrow[r, "Id"] \arrow[ur, dashed, "\theta"] & \pi_1(M(\phi)) \arrow[r, "(f,g)_\#"'] \arrow[ur, dashed, "\psi"] & \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi))
\end{tikzcd}$$

Pela observação feita acima desta proposição temos que $\pi_1(E_{S^1}(f,g))$ é isomorfo a $\pi_1(M(\phi)) \sqcup \pi_1(E_{S^1}(M(\phi)))$. Portanto, se existir ψ, então basta definir $\theta(x) = (x, \psi(x))$.

Suponhamos que exista uma secção σ no diagrama (1.2), logo existe $\theta = \sigma_\#$ no diagrama acima, e portanto, existe ψ.

Agora, suponhamos que temos um homomorfismo ψ dado no enunciado do teorema, pela observação acima existe um homomorfismo θ que torna o diagrama comutativo. Pelo teorema 1.3.2 existe uma secção σ no diagrama (1.2). $\square$

Observemos que nosso problema é equivalente ao problema algébrico dado pela proposição 1.3.4. Dessa forma, devemos então calcular os homomorfismos e os grupos do diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] \\
 & \pi_1(\mathcal{F}) \simeq \pi_2(K, K - x_0) \arrow[d] \\
 & \pi_1(E_{S^1}(M(\phi))) \simeq \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta) \arrow[d, "q_\#"'] \\
\pi_1(M(\phi)) \arrow[r, "(f,g)_\#"'] \arrow[ur, dashed, "\psi"] & \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)) \arrow[d] \\
 & 1
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

Consideremos $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ o pullback de $p : M(\phi) \to S^1$ por $p : M(\phi) \to S^1$ e $p_i : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) \to M(\phi), i = 1, 2$, as projeções na primeira e segunda coordenadas, respectivamente.

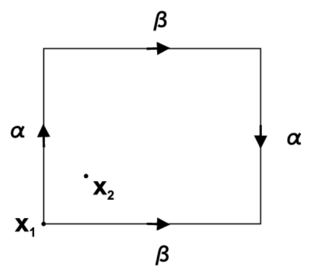
Temos que, se $(< x, t_1 >, < y, t_2 >)$ pertence a $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ então, temos $p(< x, t_1 >) = p(< y, t_2 >)$, ou seja, $< t_1 >=< t_2 >$. Se $t_i \neq 0, 1$, $i = 1, 2$ então, temos $< t_i >= t_i$ e nesse caso, deveremos ter $t_1 = t_2$. Se $t_i = 0$ ou 1 então, temos $< t_i >= \{0, 1\}$. Mas em $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ temos $< x, 0 >=< \phi(x), 1 >$ portanto, nesse caso podemos considerar $t_1 = t_2$. Assim, $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ é dado pelos pares da forma $(< x, t >, < y, t >)$, onde x, y pertence a K.

A partir de agora, calcularemos os grupos dados no diagrama (1.4). Inicialmente demonstraremos um lema que usaremos no decorrer do texto.

Lema 1.3.1. *Dados x_1, x_2 pertencentes a K então temos, $\pi_1(K, K - x_2, x_1) = 1$.*

Demonstração.

Dado $f : (D^1, \partial D^1, s_0) \to (K, K - x_2, x_1)$ um caminho em K. Tomemos um caminho $\gamma : D^1 \to K - x_2$ ligando x_1 a $f(1)$, ponto final da curva f.



Garrafa de Klein

O caminho fechado $f * \gamma^{-1}$ pertence a $\pi_1(K, x_1) =< \alpha, \beta | \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1 >$, logo $f * \gamma^{-1} = \gamma_K$, onde γ_K é um caminho da forma $\alpha^m \beta^n$, como veremos no final desse capítulo. Observemos que γ_K não intersecta x_2. Portanto, temos $f \sim \gamma_K * \gamma$, e o caminho $\gamma_K * \gamma$ não intersecta x_2, ou seja, em $\pi_1(K, K - x_2, x_1)$ existe apenas uma classe de caminho. $\square$

O grupo $\pi_2(K, K - x_0)$ é dado pela sequência longa de homotopia do par $(K, K - x_0)$.

De fato, como K é $K(\pi,1)$, então temos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \to \pi_2(K, K-x_0) \to \pi_1(K-x_0) \xrightarrow{j_\#} \pi_1(K) \to 1$$

Logo, $\pi_2(K, K-x_0)$ é isomorfo ao kernel de $j_\#$. Sabemos que $\pi_1(K) =< a, b | abab^{-1} = 1 >$ e $\pi_1(K-x_0) =< \bar{a}, \bar{b} >$. Portanto, $\pi_2(K, K-x_0)$ é isomorfo a $N(R)$, onde $N(R)$ é o menor subgrupo normal de $\pi_1(K-x_0)$ contendo $R = \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}$.

Para calcularmos os grupos $\pi_1(M(\phi))$, $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi))$ usaremos as proposições abaixo.

Proposição 1.3.5. *A sequência exata curta:*

$$1 \to \pi_1(K) \to \pi_1(M(\phi)) \to \pi_1(S^1) \to 1,$$

cinde, e a ação $\mathbb{Z} \to Aut(\pi_1(K))$ que vem da secção $s_0 : S^1 \to M(\phi)$ dada por $s_0(< t >) =< x_0, t >$ é dada por $c.\alpha = c\alpha c^{-1} = \phi_\#(\alpha)$, onde $c = p_\# < s_0 >$ é o gerador de $\pi_1(S^1)$. Portanto, $\pi_1(M(\phi)) \cong \pi_1(K) \rtimes \mathbb{Z}$ produto semi-direto.

Demonstração.

Sabemos que $K \xrightarrow{i} M(\phi) \xrightarrow{p} S^1$ é um fibrado, como S^1 é paracompacto, então p é uma fibração. Da fibração $K \xrightarrow{i} M(\phi) \xrightarrow{p} S^1$ e do fato de S^1 ser $K(\pi,1)$ obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \pi_1(K) \xrightarrow{i_\#} \pi_1(M(\phi)) \xrightarrow{p_\#} \pi_1(S^1) \longrightarrow 1$$

Como $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ é livre, então a sequência acima cinde. Logo, podemos concluir, usando o teorema *V*.9.16 capítulo 5 de [5], que $\pi_1(M(\phi)) \cong \pi_1(K) \rtimes \mathbb{Z}$ produto semi-direto.

Agora, consideremos a aplicação $s_0 : S^1 \to M(\phi)$ dada por $s_0(< t >) =< x_0, t >$, onde x_0 é um ponto de K, tal que $\phi(x_0) = x_0$. Temos $p \circ s_0(< t >) = p(< x_0, t >) =< t >$. Portanto, s_0 é uma secção. Também temos que $p_\#(< s_0 >) = c$ é um gerador de $\pi_1(S^1)$. Em relação a essa secção temos a seguinte ação:

$$\pi_1(S^1) \xrightarrow{\Gamma} Aut(\pi_1(K))$$
$$c \mapsto \theta_0(c)$$

onde, $\theta_0(c)(\rho) =< s_0 > \rho < s_0 >^{-1}$.

Consideremos também o caminho $\gamma : I \longrightarrow K \times I$ dado por $\gamma(t) = (x_0, t)$. Temos que o laço obtido pela justaposição dos caminhos $\gamma * (\phi(\alpha), 1) * \gamma^{-1}$ é homotópico ao laço $(\phi(\alpha), 0)$. De fato, a homotopia entre esses caminhos é dada a seguir:

$$H(t,s) = \begin{cases} \gamma(3t) = (x_0, 3t) & se \quad 0 \leq t \leq \frac{s}{3} \\ (\phi(\alpha), s) & se \quad \frac{s}{3} \leq t \leq \frac{3-s}{3} \\ \gamma(3(1-t)) = (x_0, 3(1-t)) & se \quad \frac{3-s}{3} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

onde $s \in I$. Temos $H(t, 0) = (\phi(\alpha), 0)$ e $H(t, 1) = \gamma * (\phi(\alpha), 1) * \gamma^{-1}$.

No espaço quociente $M(\phi)$ obtemos $< \gamma * (\alpha, 0) * \gamma^{-1} >=< \gamma * (\phi(\alpha), 1) * \gamma^{-1} >=< (\phi(\alpha), 0) >$, e isso nos leva a concluir que $c\alpha c^{-1} = \phi_\#(\alpha)$. Observe que na última igualdade usamos c no lugar de $< s_0 >$, fizemos isso para simplificar a notação. $\square$

Observemos que, pela proposição acima, um conjunto de geradores para $\pi_1(M(\phi))$ é dado por $\{i_\#(\alpha), i_\#(\beta), (s_0)_\#(c)\}$, que é representado pelas classes de caminhos $\{< \alpha(t), 0 >, < \beta(t), 0 >, < x_0, t >\}$. Pelo teorema 1.2.1 e da ação dada na proposição acima, temos que, $\pi_1(M(\phi))$ tem a seguinte presentação $\pi_1(M(\phi)) =< \alpha, \beta, c | \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1, c\alpha c^{-1} = \phi_\#(\alpha),\ c\beta c^{-1} = \phi_\#(\beta) >$.

Proposição 1.3.6. *O grupo fundamental $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi))$ é isomorfo ao produto semidireto $\pi_1(K) \rtimes \pi_1(M(\phi))$ e a ação $\pi_1(M(\phi)) \rightarrow Aut(\pi_1(K))$ que vem da secção $s_1 : \pi_1(M(\phi)) \rightarrow \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi))$ dada por $s_1 = (s_0 \circ p, 1_{M(\phi)})_\#$ é dada por $\beta.\alpha = \beta\alpha\beta^{-1} = p_\#(\beta) \cdot \alpha$. A última ação é a que vem do fibrado $p : M(\phi) \longrightarrow S^1$, isto é, a ação é dada pela composição :*

$$\pi_1(M(\phi)) \xrightarrow{p_\#} \pi_1(S^1) \xrightarrow{\Gamma} Aut(\pi_1(K)).$$

Se denotarmos por c o gerador de $\pi_1(S^1)$ então, $\Gamma(c) = \phi$, tal que, se $p_\#(\beta) = c^k$ então, $p_\#(\beta) \circ \alpha = \phi(\alpha)^k$.

Demonstração.

Da fibração $p_2 : M(\phi)\times_{S^1} M(\phi) \longrightarrow M(\phi)$ dada por $p_2(< x,t >, < y,t >) = < y,t >$ e do fato de $M(\phi)$ ser $K(\pi,1)$, obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \to \pi_1(K) \xrightarrow{i_{1\#}} \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)) \xrightarrow{p_{2\#}} \pi_1(M(\phi)) \to 1$$

onde, $i_{1\#}$ é a induzida da aplicação $i_1 : K \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ dada por $i_1(x) = (< x, 0 >, < x_0, 0 >)$.

A sequência acima cinde, pois $p_{2\#} \circ s_1 = Id$. Assim, concluimos que $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi))$ é isomorfo a $\pi_1(K) \rtimes \pi_1(M(\phi))$.

Assim, a ação que vem da secção s_1 é dada por:

$$\pi_1(M(\phi)) \longrightarrow Aut(\pi_1(K))$$
$$\beta \mapsto \theta_1(\beta)$$

onde, $\theta_1(\beta)(\rho) = s_1(\beta)\rho s_1(\beta)^{-1}$ é a conjugação por $s_1(\beta)$.

Como $p \circ p_1 = p \circ p_2$, então temos o diagrama abaixo comutativo.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1(K) \arrow[r, "i_{1\#}"] \arrow[d, "Id"] & \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)) \arrow[r, "p_{2\#}"] \arrow[d, "p_{1\#}"] & \pi_1(M(\phi)) \arrow[r] \arrow[d, "p_\#"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1(K) \arrow[r, "i_\#"] & \pi_1(M(\phi)) \arrow[r, "p_\#"] & \pi_1(S^1) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Assim, como $s_{0\#} \circ p_\# = p_{1\#} \circ s_1$, então temos $\theta_1(\beta) = \theta_0(p_\#(\beta))$. $\square$

Calcularemos $\pi_1(M(\phi)\times_{S^1} M(\phi) - \Delta)$ na proposição abaixo, que também é satisfeita para toda superfície fechada S diferente de S^2 e RP^2.

Proposição 1.3.7. *O grupo fundamental $\pi_1(M(\phi)\times_{S^1} M(\phi) - \Delta)$ é isomorfo ao produto semi-direto $\pi_1(K \times K - \Delta) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ para alguma ação θ.*

Demonstração.

Temos que a projeção na segunda coordenada $p_2 : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) \to M(\phi)$ é uma fibração. De fato, a aplicação $p : M(\phi) \to S^1$ é uma fibração, e p_2 sendo o pullback de fibrações é uma fibração. Agora, da proposição 2.1 de [3] temos que $p_{2|} : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta \to M(\phi)$, onde Δ é a diagonal em $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$, é uma fibração.

Como a composta de fibrações é fibração, então $p \circ p_{2|} : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta \to S^1$ é uma fibração. Usando a sequência exata de homotopia da fibração acima, e o fato de S^1 ser $K(\pi, 1)$, então obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \to \pi_1(K \times K - \Delta) \to \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta) \xrightarrow{p \circ p_{2|\#}} \mathbb{Z} \to 1$$

Como $\mathbb{Z}$ é livre, então a sequência acima cinde. Portanto, $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta)$ é isomorfo ao produto semi-direto $\pi_1(K \times K - \Delta) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ para alguma ação θ. $\square$

No capítulo 2, daremos uma presentação para cada um dos grupos do diagrama 1.4.

1.4 Os geradores de $\pi_1(K)$ e o número de Nielsen do par $(f,g): K \to K$.

Consideremos em $\mathbb{R}^2$ a relação de equivalência que é gerada pelas seguintes relações: $(x,y) \sim (x, y+1)$ e $(x,y) \sim (x+1, 1-y)$. O espaço quociente é a garrafa de Klein K. Fixado um ponto x_0 em K, então temos que $\pi_1(K, x_0)$ é um grupo em dois geradores, α e β, com relação $\alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1$.

Observemos que cada elemento de $\pi_1(K, x_0)$ pode ser representado por uma palavra da forma $\alpha^r\beta^s$ onde, r, s pertencem a $\mathbb{Z}$. Isso segue da igualdade $\beta^m\alpha^n = \alpha^{(-1)^m n}\beta^m$ onde, $m, n \in \mathbb{Z}$. Essa igualdade segue das igualdades $\alpha^n = \beta(\alpha^{-1})^n\beta^{-1}$ e $\beta^m\alpha = \alpha^{(-1)^m}\beta^m$, válidas para quaisquer m, n pertencente a $\mathbb{Z}$, as mesmas são demonstradas usando indução.

Usando o fato acima, obtemos que, dois elementos w_1, w_2 pertencentes a $\pi_1(K)$, satisfazem a relação $w_1w_2w_1w_2^{-1} = 1$ se, e somente se, (w_1, w_2) é da forma $w_1 = 1$ e $w_2 = \alpha^p\beta^{2q}$, ou $w_1 = \alpha^r$ e $w_2 = \alpha^p\beta^{2q+1}$. Para mostrarmos isso escreveremos $w_1 = \alpha^r\beta^s$ e $w_2 = \alpha^p\beta^u$.

De $w_1w_2w_1w_2^{-1} = 1$, temos $\alpha^r\beta^s\alpha^p\beta^u\alpha^r\beta^s\beta^{-u}\alpha^{-p} = 1$ e disso, obtemos $\alpha^r\alpha^{(-1)^s p}\beta^s\beta^u\alpha^r\beta^s\beta^{-u}\alpha^{-p} = 1$, que implica $\alpha^{r+(-1)^s p}\beta^{s+u}\alpha^r\beta^{s-u}\alpha^{-p} = 1$. Daí temos

$\alpha^{r+(-1)^s p}\alpha^{(-1)^{s+u}r}\beta^{2s}\alpha^{-p} = 1$, e, então $\alpha^{r+(-1)^s p}\alpha^{(-1)^{s+u}r}\alpha^{-p}\beta^{2s} = 1$. Disso, obteremos $r + (-1)^s p + (-1)^{s+u} r - p = 0$ e $2s = 0$, que é equivalente a $r(1 + (-1)^u) = 0$ e $s = 0$.

Se $u = 2q$, então teremos $r = 0$. Daí resulta $w_1 = 1$ e $w_2 = \alpha^p\beta^{2q}$. Por outro lado, se $u = 2q + 1$, então teremos $w_1 = \alpha^r$ e $w_2 = \alpha^p\beta^{2q+1}$.

Se w_1 e w_2 são dados pela maneira acima, podemos mostrar que eles satisfazem $w_1w_2w_1w_2^{-1} = 1$.

Suponha que $f : K \to K$ é uma aplicação contínua. Calcularemos o homomorfismo $f_\# : \pi_1(K) \to \pi_1(K)$. De $\alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1$ obtemos $f_\#(\alpha\beta\alpha\beta^{-1}) = 1$ e, logo $f_\#(\alpha)f_\#(\beta)f_\#(\alpha)f_\#(\beta)^{-1} = 1$. Denotando por $w_1 = f_\#(\alpha)$, $w_2 = f_\#(\beta)$ e usando a observação feita no parágrafo anterior, podemos concluir que, se $f : K \to K$ é uma aplicação contínua, então $f_\# : \pi_1(K) \to \pi_1(K)$ é um homomorfismo da forma:

$$\begin{cases} Tipo1; & f_\#(\alpha) = 1, \quad f_\#(\beta) = \alpha^p\beta^{2q} \\ Tipo2; & f_\#(\alpha) = \alpha^r, \quad f_\#(\beta) = \alpha^p\beta^{2q+1}, \end{cases}$$

em geral não distinguiremos entre os dois tipos de homomorfismos.

Dada uma aplicação $f : K \to K$ com $f_\# : \pi_1(K) \to \pi_1(K)$ dado por $f_\#(\alpha) = \alpha^r$, $f_\#(\beta) = \alpha^s\beta^t$, denotaremos $f_\#$ por $f(s,r,t)$, onde s, r, t são dados pelas potência de α e β como foi dado acima. Com essa notação, temos o seguinte resultado, cuja demontração está em [2].

Teorema 1.4.1. *Se $f_1, f_2 : K \to K$ são aplicações contínuas com $f_{i\#} = f_i(s_i, r_i, t_i)$, $i = 1, 2$, então $N(f_1, f_2) = |t_1 - t_2| max\{|r_1|, |r_2|\}$.*

Também temos a seguinte proposição cuja demonstração se encontra em [12].

Proposição 1.4.1. *Se $f_1, f_2 : K \to K$ são aplicações contínuas tal que $N(f_1, f_2) = 0$, então podemos deformar o par (f_1, f_2) a um par (g_1, g_2) livre de coincidência.*

No próximo capítulo apresentaremos uma classificação dos fibrados com base S^1 e fibra K. Em seguida daremos uma presentação para $\pi_1(M(\phi))$, $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi))$ e $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta)$, onde Δ é a diagonal em $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$.

Capítulo 2

Reduções na garrafa de Klein.

2.1 Classificação dos $K-$fibrados sobre S^1.

Nessa seção, usaremos alguns homeomorfismos para descrever todos os $K-$fibrados sobre S^1 sob uma isotopia que preserva fibra.

Tomemos em $\mathbb{R}^2$ a relação de equivalência gerada pelas seguintes relações: $(x, y) \sim (x, y+1)$ e $(x, y) \sim (x+1, 1-y)$. O espaço quociente é a garrafa de Klein K. Denotaremos por (x, y) e $[(x, y)]$ os elementos de $\mathbb{R}^2$ e de K, respectivamente.

Seja $\phi : K \to K$ um homeomorfismo tal que $\phi([(0,0)]) = [(0,0)] = x_2$.

Como no capítulo anterior, consideraremos $M(\phi)$ o espaço quociente de $K \times [0,1]$, pela relação $([(x,y)], 0) \sim (\phi([(x,y)], 1)$. A classe do elemento $([(x,y)], t)$ no quociente será denotada por $< [(x,y)], t >$.

Como vimos, no primeiro capítulo, o espaço $M(\phi)$ é um fibrado sobre o círculo S^1, onde a fibra é a garrafa de Klein K. A aplicação projeção $p : M(\phi) \to S^1$, é dada por $p(< [(x,y)], t >) =< t >$, onde $< t > \in [0,1]/_{0\sim 1} \simeq S^1$.

Consideremos agora a questão levantada no capítulo anterior. Sejam $f_1, f_2 : M(\phi) \to M(\phi)$ aplicações sobre S^1, isto é $p \circ f_1 = p$, $p \circ f_2 = p$. Quando que (f_1, f_2) pode ser deformado a um par de aplicações (g_1, g_2) livre de coincidência por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 ?

Primeiramente, analisaremos o que acontece com as restrições das aplicações f_1, f_2 à fibra K. Para isso, denotemos por $f_{i|_K}(s_i, r_i, t_i) : \alpha \to \alpha^{r_i}, \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{t_i}$, $i = 1, 2$ o homomorfismo induzido das aplicações $f_{i|_K}$ no grupo fundamental da fibra K e por $\phi_p(\epsilon, \eta) : \alpha \to \alpha^{\epsilon}, \beta \to \alpha^p\beta^{\eta}$, o isomorfismo induzido de um homeomorfismo $\phi : K \to K$ no grupo fundamental da fibra K.

O seguinte lema será útil para demonstrarmos algumas proposições.

Lema 2.1.1. *Se* $\pi_1(K, x_2) =< \alpha, \beta | \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1 >$, *então temos*

$$(\alpha^r\beta^s)^t = \begin{cases} \alpha^{\frac{t}{2}[r(1+(-1)^s)]}\beta^{st}, & \textit{se } t \textit{ é par} \\ \alpha^{\frac{t-1}{2}[r(1+(-1)^s)]+r}\beta^{st}, & \textit{se } t \textit{ é ímpar} \end{cases}$$

para quaisquer $s, r, t \in \mathbb{Z}$.

Demonstração.

Na última seção, do primeiro capítulo, vimos que $\beta^n\alpha^m = \alpha^{(-1)^n m}\beta^n$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$. Usaremos esse fato para demonstrar o lema.

Temos $(\alpha^r\beta^s)^t = \underbrace{\alpha^r\beta^s \ldots \alpha^r\beta^s}_{t-vezes}$, mas $\alpha^r\beta^s\alpha^r\beta^s = \alpha^r(\alpha^{(-1)^s})^r\beta^{2s}$. Portanto, temos que se t é par e s é ímpar, então $(\alpha^r\beta^s)^t = \beta^{st} = \alpha^{\frac{t}{2}[r(1+(-1)^s)]}\beta^{st}$. Agora, se t é par e s é par, então $(\alpha^r\beta^s)^t = \alpha^{rt}\beta^{st} = \alpha^{\frac{t}{2}[r(1+(-1)^s)]}\beta^{st}$.

Suponha agora que t é ímpar. Como $t - 1$ é par, então podemos usar o caso já feito. Se s é ímpar, obtemos $(\alpha^r\beta^s)^t = \alpha^r\beta^s(\alpha^r\beta^s)^{t-1} = \alpha^r\beta^s\beta^{s(t-1)} = \alpha^r\beta^{st} = \alpha^{\frac{t-1}{2}[r(1+(-1)^s)]+r}\beta^{st}$. Se s é par, então temos $(\alpha^r\beta^s)^t = \alpha^r\beta^s(\alpha^r\beta^s)^{t-1} = \alpha^r\beta^s\alpha^{r(t-1)}\beta^{s(t-1)}$ $= \alpha^r\alpha^{r(t-1)}\beta^s\beta^{s(t-1)} = \alpha^{r(t-1)+r}\beta^{st} = \alpha^{\frac{t-1}{2}[r(1+(-1)^s)]+r}\beta^{st}$. $\square$

Temos $\phi_p(\epsilon, \eta) : \pi_1(K, x_2) \to \pi_1(K, x_2)$. Como $\phi_p(\epsilon, \eta)$ é um isomorfismo, então temos a seguinte restrição sobre ϵ e η dada no lema abaixo.

Lema 2.1.2. *Se* $\phi_p(\epsilon, \eta) : \pi_1(K, x_2) \to \pi_1(K, x_2)$ *é um isomorfismo então devemos ter* $\epsilon = \pm 1$ *e* $\eta = \pm 1$.

Demonstração.

Consideremos $\pi_1(K, x_2) =< \alpha, \beta | \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1 >$. Do lema anterior temos:

$$(\alpha^p\beta^\eta)^t = \begin{cases} \alpha^{\frac{t}{2}[p(1+(-1)^\eta)]}\beta^{\eta t}, & \text{se t é par} \\ \alpha^{\frac{t-1}{2}[p(1+(-1)^\eta)]+p}\beta^{\eta t}, & \text{se t é ímpar} \end{cases}$$

Vimos anteriormente que todo elemento em $\pi_1(K, x_2)$ pode ser escrito na forma $\alpha^s\beta^t$, onde $s, t \in \mathbb{Z}$. Disso e da equação acima obtemos:

$$\phi_p(\epsilon, \eta)(\alpha^s\beta^t) = (\alpha^\epsilon)^s(\alpha^p\beta^\eta)^t = \begin{cases} \alpha^{\epsilon s + \frac{t}{2}[p(1+(-1)^\eta)]}\beta^{\eta t}, & \text{se t é par} \\ \alpha^{\epsilon s + \frac{t-1}{2}[p(1+(-1)^\eta)]+p}\beta^{\eta t}, & \text{se t é ímpar} \end{cases}$$

Portanto, devemos ter $\eta = \pm 1$. De fato, se $\eta \neq \pm 1$, então temos $\eta t \neq \pm 1$ $\forall t$ pertencente a $\mathbb{Z}$. Assim, não existem $s, t \in \mathbb{Z}$ tais que $\phi_p(\epsilon, \eta)(\alpha^s\beta^t) = \beta^{\pm 1}$, ou seja, o elemento $\beta^{\pm 1}$ não pertence a imagem de $\phi_p(\epsilon, \eta)$, o que é um absurdo, pois $\phi_p(\epsilon, \eta)$ é um isomorfismo. Portanto devemos ter $\eta = \pm 1$.

Substituindo $\eta = \pm 1$ na equação acima obtemos:

$$\phi_p(\epsilon, \eta)(\alpha^s\beta^t) = (\alpha^\epsilon)^s(\alpha^p\beta^\eta)^t = \begin{cases} \alpha^{\epsilon s}\beta^{\eta t}, & \text{se t é par} \\ \alpha^{\epsilon s + p}\beta^{\eta t}, & \text{se t é ímpar.} \end{cases}$$

Logo, devemos ter $\epsilon = \pm 1$. De fato, se $\epsilon \neq \pm 1$, então temos $\epsilon s \neq \pm 1$ $\forall s$ pertencente a $\mathbb{Z}$. Observemos que não existem $s, t \in \mathbb{Z}$ tais que $\phi_p(\epsilon, \eta)(\alpha^s\beta^t) = \alpha^{\pm 1}$, pois, se isso acontecesse, teríamos $\alpha^{\pm 1} = \phi_p(\epsilon, \eta)(\alpha^s\beta^t) = (\alpha^\epsilon)^s(\alpha^p\beta^\eta)^t =$

$$= \begin{cases} \alpha^{\epsilon s}\beta^{\eta t}, & \text{se t é par} \\ \alpha^{\epsilon s + p}\beta^{\eta t}, & \text{se t é ímpar} \end{cases}$$

e assim, teríamos $\eta t = 0$, e portanto $t = 0$, ou seja, t é par. Desse modo, deveríamos ter $\epsilon s = \pm 1$, mas isso contradiz a hipótese. Assim, temos que o elemento $\alpha^{\pm 1}$ não pertence a imagem de $\phi_p(\epsilon, \eta)$, o que é um absurdo, pois $\phi_p(\epsilon, \eta)$ é um isomorfismo, logo devemos ter $\epsilon = \pm 1$. $\square$

A próxima proposição nos ajudará a classificar os fibrados $M(\phi)$ sobre S^1.

Proposição 2.1.1. *O número de classes conjugadas de isomorfismos de* $\pi_1(K, x_2)$ *é quatro e um conjunto de representantes é dado por* $\{\phi_0(1,1), \phi_0(1,-1), \phi_1(1,1), \phi_1(1,-1)\}$.

Demonstração.

Pelo lema 2.1.2 temos $\epsilon = \pm 1$ e $\eta = \pm 1$, logo os isomorfismos são da forma $\phi_p(\pm 1, \pm 1)$. Sejam α e β os geradores de $\pi_1(K, x_2)$. Considerando $p = 0, 1$ temos as seguintes conjungações

$$\phi_0(1,1) = \beta\phi_0(-1,1)\beta^{-1},$$

$$\phi_0(1,-1) = \beta\phi_0(-1,-1)\beta^{-1},$$

$$\phi_1(1,1) = \alpha\beta\phi_1(-1,1)\beta^{-1}\alpha^{-1},$$

$$\phi_1(1,-1) = \alpha\beta\phi_1(-1,-1)\beta^{-1}\alpha^{-1}.$$

Agora, $\phi_0(1,1)$ e $\phi_0(1,-1)$ não são conjugados. De fato, se existisse $\alpha^m\beta^n$ em $\pi_1(K, x_2)$ tal que, $\phi_0(1,1) = \alpha^m\beta^n\phi_0(1,-1)\beta^{-n}\alpha^{-m}, \quad m, n \in \mathbb{Z}$, então teríamos $\phi_0(1,1)(x) = \alpha^m\beta^n\phi_0(1,-1)(x)\ \beta^{-n}\alpha^{-m}, \quad \forall x$ pertencente a $\pi_1(K, x_2)$.

Tomando $x = \alpha$ na relação acima, obteremos $\alpha = \alpha^m\beta^n\alpha\beta^{-n}\alpha^{-m} = \alpha^m\alpha^{(-1)^n}\beta^n\beta^{-n}$ $\alpha^{-m} = \alpha^m\alpha^{(-1)^n}\alpha^{-m} = \alpha^{(-1)^n}$. Logo n deve ser par, digamos $n = 2k$.

Agora, tomando $x = \beta$ obteremos $\beta = \alpha^m\beta^n\beta^{-1}\beta^{-n}\alpha^{-m} = \alpha^m\beta^{-1}\alpha^{-m} = \alpha^m\alpha^m\beta^{-1}$. Portanto, temos $\beta^2 = \alpha^{2m}$.

Das equações acima, devemos ter $\alpha^m\beta^n = \alpha^m\beta^{2k} = \alpha^m(\beta^2)^k = \alpha^m(\alpha^{2m})^k = \alpha^m\alpha^{2mk} = \alpha^{m+2km}$. Portanto, devemos ter $m = n = 0$, que implica $\alpha^m\beta^n = 1$, e portanto $\phi_0(1,1)(x) = \phi_0(1,-1)(x) \quad \forall x$ pertencente a $\pi_1(K, x_2)$, que é um absurdo. Logo $\phi_0(1,1)$ e $\phi_0(1,-1)$ não são conjugados.

Analogamente, mostramos que os isomorfismos $\phi_0(1,1), \phi_0(1,-1), \phi_1(1,1)$ e $\phi_1(1,-1)$ não são conjugados.

Se $p \neq 0, 1$ então, $\phi_p(\pm 1, \pm 1)$ é conjugado de um dos elementos do conjunto $\{\phi_0(1,1), \phi_0(1,-1), \phi_1(1,1), \phi_1(1,-1)\}$. As relações são:

$$\phi_{2q}(1,1) = \alpha^q\phi_0(1,1)\alpha^{-q}$$

$$\phi_{2q}(1,-1) = \alpha^q\phi_0(1,-1)\alpha^{-q}$$

$$\phi_{2q}(-1,1) = \alpha^q\phi_0(-1,1)\alpha^{-q}$$

$$\phi_{2q}(-1,-1) = \alpha^q \phi_0(-1,-1)\alpha^{-q}$$

para todo $q \in \mathbb{Z}$.

$$\phi_{2q+1}(1,1) = \alpha^q \beta^2 \phi_1(1,1)\beta^{-2}\alpha^{-q}$$

$$\phi_{2q+1}(1,-1) = \alpha^q \beta^2 \phi_1(1,-1)\beta^{-2}\alpha^{-q}$$

$$\phi_{2q+1}(-1,1) = \alpha^q \beta^2 \phi_1(-1,1)\beta^{-2}\alpha^{-q}$$

$$\phi_{2q+1}(-1,-1) = \alpha^q \beta^2 \phi_1(-1,-1)\beta^{-2}\alpha^{-q}$$

para todo $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. $\square$

Com a ajuda da proposição acima, classificaremos os fibrados $M(\phi)$ sobre S^1 e fibra K. A classificação está na próxima proposição. Nessa proposição usaremos a mesma notação $\phi_p(\epsilon,\eta)$ para um homeomorfismo de K e seu induzido no grupo fundamental de K.

Proposição 2.1.2. *Se $M(\phi_p(\epsilon,\eta))$ é um fibrado sobre S^1 e fibra K então temos:*

(1) $\pi_1(M(\phi_p(\epsilon,\eta)),\mathbf{0}) = \langle \alpha,\beta,c_0 | \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1, c_0\alpha c_0^{-1} = \alpha^{\epsilon}, c_0\beta c_0^{-1} = \alpha^p\beta^{\eta}\rangle$, *onde* $\mathbf{0} =< [(0,0)] >$

(2) *Existem quatro classes de isotopias de homeomorfismos de K, onde um conjunto de representantes é dado por $\{\phi_0(1,1), \phi_1(1,1), \phi_0(1,-1), \phi_1(1,-1)\}$.*

(3) *Para cada homeomorfismo $\phi : K \to K$, $M(\phi)$ é homeomorfo sobre S^1 a algum $M(\phi_p(1,\eta))$, onde $\phi_p(1,\eta)$ é dado pelo item 2. Os $M(\phi_p(1,\eta))$'s não são homeomorfos para quaisquer dois diferentes $\phi_p(1,\eta)$ dado pelo item 2.*

Demonstração.

Parte (1)

Pela proposição 1.3.5, obtemos que $\pi_1(M(\phi_p(\epsilon,\eta)),\mathbf{0}) \cong \pi_1(K) \rtimes \mathbb{Z}$ e da ação $\mathbb{Z} \to Aut(\pi_1(K))$ obtemos $c_0\alpha c_0^{-1} = \phi_p(\epsilon,\eta)(\alpha) = \alpha^{\epsilon}$, e $c_0\beta c_0^{-1} = \phi_p(\epsilon,\eta)(\beta) = \alpha^p\beta^{\eta}$. Portando, $\pi_1(M(\phi_p(\epsilon,\eta)),\mathbf{0})$ é dado pela maneira acima.

Parte (2)

Como K é uma superfície, então se existir uma homotopia entre dois homeomorfismos de K, ϕ e ψ, então existe uma isotopia entre ϕ e ψ. Como K é $K(\pi,1)$ então pelo teorema (4.3), do capítulo V, de [20] a aplicação $\varphi : [K;K] \longrightarrow Hom(\pi_1(K), \pi_1(K))$, onde $\varphi([\theta]) = \theta_\#$, é um isomorfismo. Assim, podemos identificar as classes cujo representante pertence ao conjunto $\{\phi_0(1,1), \phi_0(1,-1), \phi_1(1,1), \phi_1(1,-1)\}$ com as classes de isotopia de K.

Parte (3)

Dado $\phi : K \to K$ homeomorfismo, então pela parte (2) temos que ϕ é isotópico a algum $\phi_p(1,\eta)$ e, portanto, pela proposição 1.3.2 temos que $M(\phi)$ é homeomorfo a $M(\phi_p(1,\eta))$. Assim, obtemos a primeira parte de (3).

Agora, usando as relações dos grupos $\pi_1(M(\phi_p(1,\eta)),0)$ mostramos que eles não são isomorfos para quaisquer dois $\phi_p(1,\eta)$ diferentes dados pela parte (2).

De fato, tomemos $\phi_0(1,-1)$ e $\phi_1(1,1)$ como exemplo. Se existisse $f : \pi_1(M(\phi_0(1,-1)),0) \to \pi_1(M(\phi_1(1,1)),0)$ isomorfismo, então denotando por $\bar{\alpha} = f(\alpha)$, $\bar{\beta} = f(\beta)$, $\bar{c_0} = f(c_0)$, e usando as relações desses grupos dadas anteriormente, obteremos duas presentações para $\pi_1(M(\phi_1(1,1)),0)$ que são dadas, respectivamente por: $< \alpha, \beta, c_0 | \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1, c_0\alpha c_0^{-1} = \alpha, c_0\beta c_0^{-1} = \alpha\beta >$, e $< \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{c_0} | \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\alpha}\bar{\beta}^{-1} = 1, \bar{c_0}\bar{\alpha}\bar{c_0}^{-1} = \bar{\alpha}, \bar{c_0}\bar{\beta}\bar{c_0}^{-1} = \bar{\beta}^{-1} >$, mas isso não pode acontecer devido as duas últimas relações dadas nas presentações. Portanto, $\pi_1(M(\phi_0(1,-1)),0)$ e $\pi_1(M(\phi_1(1,1)),0)$ não podem ser isomorfos. Da mesma forma, fazemos para os outros grupos.

Assim, temos que os fibrados $M(\phi_p(1,\eta))$ não podem ser homeomorfos para quaisquer dois $\phi_p(1,\eta)$ diferentes dados pela parte (2). $\square$

Pelo resultado acima, e pelo corolário 1.3.1, concluimos que existem quatro fibrados $M(\phi)$ sobre S^1, a menos de homeomorfismo. Esses fibrados são da forma $M(\phi_p(1,\eta))$, $p = 0, 1$ e $\eta = \pm 1$. Pelo resto dessa seção estudaremos a forma de um homomorfismo de $\pi_1(M(\phi_p(1,\eta)))$ em $\pi_1(M(\phi_p(1,\eta)))$.

Proposição 2.1.3. *Sejam $f_1, f_2 : M(\phi) \to M(\phi)$ aplicações tais que $(f_{i|_K})_\# = f_{i|_K}(s_i, r_i, t_i)$, $i = 1, 2$. Suponhamos que o par (f_1, f_2) seja deformado, por uma homotopia que preserva fibra, a um par de aplicações (g_1, g_2) livre de coincidência sobre*

S^1. Então, o número de Nielsen $N(f_{1|_K}, f_{2|_K})$ de f_1 e f_2 restritas a fibra K é zero, e disso decorre que $f_{i|_K}(s_i, r_i, t_i)$ é da forma $f_{i|_K}(s_i, 0, t_i)$ ou $f_{i|_K}(s_i, r_i, t)$, para cada $i = 1, 2$.

Demonstração.

Se o par (f_1, f_2) é deformado a um par (g_1, g_2) livre de coincidência sobre S^1, então o par $(f_{1|_K}, f_{2|_K})$ é deformado ao par livre de coincidência $(g_{1|_K}, g_{2|K})$. Se o número de Nielsen $N(f_{1|_K}, f_{2|_K})$ fosse diferente de zero, então $(g_{1|_K}, g_{2|_K})$ por ser uma deformação de $(f_{1|_K}, f_{2|_K})$, deveria possuir pelo menos um ponto de coincidência, o que é um absurdo. Portanto, devemos ter $N(f_{1|_K}, f_{2|_K}) = 0$.

Pelo teorema 1.4.1 temos $0 = N(f_{1|_K}, f_{2|_K}) = |t_1 - t_2| max\{|r_1|, |r_2|\}$. Portanto, devemos ter $r_1 = r_2 = 0$ ou $t_1 = t_2$. □

Com a notação da proposição acima observemos que se o número de Nielsen $N(f_{1|_K}, f_{2|_K})$ é diferente de zero, então não é possível deformar o par (f_1, f_2) a um par de aplicações (g_1, g_2) livre de coincidência. Portanto, de agora em diante vamos sempre supor que o número de Nielsen $N(f_{1|_K}, f_{2|_K})$ é zero.

Denotemos por $f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i}) : \pi_1(M(\phi_q(1, \eta))) \to \pi_1(M(\phi_q(1, \eta)))$ o homomorfismo que leva

$$\begin{aligned} \alpha &\longmapsto \alpha^{r_i} \\ \beta &\longmapsto \alpha^{s_i}\beta^{t_i} \quad , \\ c_0 &\longmapsto \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}c_0 \end{aligned}$$

para cada $i = 1, 2$. Veremos que devido as relações no grupo $\pi_1(M(\phi_q(1, \eta)))$, $r_i, s_i, t_i, c_{1i}, c_{2i}$ devem satisfazer algumas equações. Essas equações são dadas pela proposição abaixo.

Proposição 2.1.4. *Sejam $f_i : M(\phi_q(1, \eta)) \to M(\phi_q(1, \eta))$ aplicações sobre S^1, onde $q \in \{0, 1\}$ e $\eta = \pm 1$. Se o número de Nielsen $N(f_{1|_K}, f_{2|_K})$ é zero, então $f_{1\#}, f_{2\#} : \pi_1(M(\phi_q(1, \eta))) \to \pi_1(M(\phi_q(1, \eta)))$ possui a forma $f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, $i = 1, 2$, onde:*

i) $(-1)^{c_{2i}} r_i = r_i$

ii) $2c_{1i}(\frac{1-(-1)^{t_i}}{2}) = s_i[(\eta)^{(\frac{1+(-1)^{t_i}}{2})} - (-1)^{c_{2i}}] + q[r_i - (-1)^{c_{2i}}(\frac{1-(-1)^{t_i}}{2})]$

iii) $t_1 = t_2$ *ou* $r_i = 0$, *para cada* $i = 1, 2$.

Reciprocamente, dados homomorfismos $f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i}) : \pi_1(M(\phi_q(1,\eta)) \longrightarrow \pi_1(M(\phi_q(1,\eta)))$, *com* $q \in \{0,1\}$, $\eta = \pm 1$, *com* $(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i}, q)$ *satisfazendo as condições i), ii) e iii) acima, então existem aplicações* $f_i : M(\phi_q(1,\eta)) \to M(\phi_q(1,\eta))$ *sobre* S^1 *tais que* $f_{i\#} = f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, $i = 1, 2$ *e o número de Nielsen* $N(f_{1_{|K}}, f_{2_{|K}})$ *é zero.*

Demonstração.

Como $f_i : M(\phi_q(1,\eta)) \to M(\phi_q(1,\eta))$ são aplicações sobre S^1, ou seja, $p \circ f_i = p$, então para cada $i = 1, 2$, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \pi_1(K) & \xrightarrow{i_\#} & \pi_1(M(\phi_q(1,\eta))) & \xrightarrow{p_\#} & \pi_1(S^1) & \longrightarrow & 1 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f_i|_K)_\#} & & \downarrow{\scriptstyle f_{i\#}} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & \pi_1(K) & \xrightarrow{i_\#} & \pi_1(M(\phi_q(1,\eta))) & \xrightarrow{p_\#} & \pi_1(S^1) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Como o número de Nielsen $N(f_1|_K, f_2|_K)$ é zero, então da proposição anterior obtemos que $(f_i|_K)_\#$ é da forma $f_i(s_i, r_i, t_i)$ para alguns $s_i, r_i, t_i \in \mathbb{Z}$ satisfazendo $r_i = 0$, $i = 1, 2$ ou $t_1 = t_2$.

Do diagrama comutativo temos $f_{i\#}(i_\#(\alpha)) = i_\#((f_i|_K)_\#(\alpha))$ que implica $f_{i\#}(\alpha) = (f_i|_K)_\#(\alpha) = \alpha^{r_i}$. Analogamente, obtemos $f_{i\#}(\beta) = (f_i|_K)_\#(\beta) = \alpha^{s_i}\beta^{t_i}$. Agora, como $\pi_1(M(\phi_q(1,\eta))) \cong \pi_1(K) \rtimes \pi_1(S^1)$, então temos que $f_{i\#}(c_0) = \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}{c_0}^{\lambda_i}$ para alguns $c_{1i}, c_{2i}, \lambda_i \in \mathbb{Z}$. Da igualdade $p_\# \circ f_{i\#}(c_0) = p_\#(c_0)$ obtemos $c_0^{\lambda_i} = c_0$, e assim devemos ter $\lambda_i = 1$. Portanto, temos que $f_{i\#}$ é da forma $f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$.

Demonstraremos agora, as equações *i)* e *ii)*.

Vimos que $\pi_1(M(\phi_q(1,\eta))) =< \alpha, \beta, c_0; \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1, c_0\alpha c_0^{-1} = \alpha, c_0\beta c_0^{-1} = \alpha^q\beta^\eta >$, pela proposição 2.1.2. Assim, devemos ter $f_{i\#}(c_0\alpha c_0^{-1}) = f_{i\#}(\alpha)$ e $f_{i\#}(c_0\beta c_0^{-1}) = f_{i\#}(\alpha^q\beta^\eta)$. Pelo Lema 2.1.1 temos

$$(\alpha^r\beta^s)^t = \begin{cases} \alpha^{\frac{t}{2}[r(1+(-1)^s)]}\beta^{st}, & \text{se t é par} \\ \alpha^{\frac{t-1}{2}[r(1+(-1)^s)]+r}\beta^{st}, & \text{se t é ímpar} \end{cases}$$

para quaisquer $s, r, t \in \mathbb{Z}$.

De $f_{i\#}(c_0\alpha c_0^{-1}) = f_{i\#}(\alpha)$ obtemos

$$\begin{aligned} \alpha^{r_i} &= \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}c_0\alpha^{r_i}c_0^{-1}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\ &= \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}\alpha^{r_i}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\ &= \alpha^{c_{1i}}(\alpha^{(-1)^{c_{2i}}})^{r_i}\beta^{c_{2i}}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\ &= (\alpha^{(-1)^{c_{2i}}})^{r_i} \end{aligned}$$

e, portanto, $(-1)^{c_{2i}}r_i = r_i$.

Temos $q = 0, 1$ e $\eta = \pm 1$. De $f_\#(c_0\beta c_0^{-1}) = f_\#(\alpha^q\beta^\eta)$ obtemos

$$\begin{aligned} (\alpha^{r_i})^q(\alpha^{s_i}\beta^{t_i})^\eta &= \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}c_0\alpha^{s_i}\beta^{t_i}c_0^{-1}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\ &= \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}c_0\alpha^{s_i}c_0^{-1}c_0\beta^{t_i}c_0^{-1}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\ &= \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}\alpha^{s_i}(\alpha^q\beta^\eta)^{t_i}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}}. \end{aligned}$$

Se t_i é par, então da igualdade acima obtemos

$$\begin{aligned} \alpha^{qr_i}\alpha^{(\eta-1)s_i+s_i}\beta^{\eta t_i} &= \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}\alpha^{s_i}\beta^{\eta t_i}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\ &= \alpha^{c_{1i}}(\alpha^{(-1)^{c_{2i}}})^{s_i}\beta^{c_{2i}}\beta^{\eta t_i}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\ &= \alpha^{c_{1i}}(\alpha^{(-1)^{c_{2i}}})^{s_i}\alpha^{-c_{1i}}\beta^{\eta t_i} \\ &= (\alpha^{(-1)^{c_{2i}}})^{s_i}\beta^{\eta t_i}. \end{aligned}$$

Logo, $s_i[\eta - (-1)^{c_{2i}}] + qr_i = 0$.

Se t_i é ímpar, então obtemos

$$\begin{aligned} \alpha^{qr_i}\alpha^{s_i}\beta^{\eta t_i} &= \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}\alpha^{s_i}\alpha^q\beta^{\eta t_i}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\ &= \alpha^{c_{1i}}(\alpha^{(-1)^{c_{2i}}})^{s_i+q}\beta^{c_{2i}}\beta^{\eta t_i}\beta^{-c_{2i}}\alpha^{-c_{1i}} \\ &= \alpha^{c_{1i}}(\alpha^{(-1)^{c_{2i}}})^{s_i+q}\alpha^{c_{1i}}\beta^{\eta t_i}. \end{aligned}$$

Portanto $2c_{1i} = s_i[1 - (-1)^{c_{2i}}] + q[r_i - (-1)^{c_{2i}}]$.

Dos resultados acima segue as equações $i)$ e $ii)$. Demonstraremos agora, a recíproca.

Para cada $i = 1, 2$, sejam dados homomorfismos $f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i}) : \pi_1(M(\phi_q(1, \eta)) \longrightarrow \pi_1(M(\phi_q(1, \eta)))$, com $q \in \{0, 1\}$, $\eta = \pm 1$, e com $(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i}, q)$ satisfazendo as condições $i)$, $ii)$ e $iii)$. Vimos que o homomorfismo acima possui a forma

$$\begin{aligned} \alpha &\longmapsto \alpha^{r_i} \\ \beta &\longmapsto \alpha^{s_i}\beta^{t_i} \\ c_0 &\longmapsto \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}c_0, \end{aligned}$$

para cada $i = 1, 2$.

Observemos que $p_\# \circ f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i}) = p_\#$. De fato, $p_\# \circ f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})(\alpha) = p_\#(\alpha^{r_i}) = 0 = p_\#(\alpha)$, pois $p(< [(x, y)], t >) =< t >$. Da mesma maneira, temos $p_\# \circ f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})(\beta) = p_\#(\beta)$ e $p_\# \circ f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})(c_0) = p_\#(c_0)$.

Como todos os espaços são $K(\pi, 1)$, então pelo teorema (4.3) do capítulo V de [20] a aplicação $\varphi : [M(\phi_p(1, \eta)); M(\phi_p(1, \eta))] \longrightarrow Hom(\pi_1(M(\phi_p(1, \eta))), \pi_1(M(\phi_p(1, \eta))))$, onde $\varphi([\theta]) = \theta_\#$, é um isomorfismo. Portanto, para cada $i = 1, 2$ existe $g_i : M(\phi_q(1, \eta)) \to M(\phi_q(1, \eta))$ e uma homotopia $H_i : (M(\phi_q(1, \eta)) \times I, x_1 \times I) \to (S^1, 1)$ tal que $H_i(x, 0) = p \circ g_i(x)$ e $H_i(x, 1) = p(x)$ e $g_{i\#} = f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$.

Para cada $i = 1, 2$, $G_i : (M(\phi_q(1, \eta)) \times 0, x_1 \times I) \to (M(\phi_q(1, \eta)), x_2)$, definida por $G_i(x, 0) = g_i(x)$ e $G_i(x_1 \times I) = x_2$ torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(M(\phi_q(1, \eta)) \times 0, x_1 \times I) \arrow[r, "G_i"] \arrow[d, "i"'] & (M(\phi_q(1, \eta)), x_2) \arrow[d, "p"] \\
(M(\phi_q(1, \eta)) \times I, x_1 \times I) \arrow[r, "H_i"'] \arrow[ur, dashed, "L_i"] & (S^1, 1)
\end{tikzcd}$$

onde x_i representa o ponto $< x_i, 0 >$ em $M(\phi_p(1, \eta))$, para cada $i = 1, 2$. Assim, temos $p(< x_i, 0 >) =< 0 >=< 1 >$.

Já vimos que $p : (M(\phi_q(1, \eta)), x_2) \to (S^1, 1)$ é uma fibração, daí segue que para cada $i = 1, 2$ existe $L_i : (M(\phi_q(1, \eta)) \times I, x_1 \times I) \to (M(\phi_q(1, \eta)), x_2)$, levantamento de H_i, tal que $p \circ L_i = H_i$.

Observemos que $f_i = L_i(-, 1) : (M(\phi_q(1, \eta)), x_1) \to (M(\phi_q(1, \eta)), x_2)$ é sobre S^1, e o homomorfismo induzido pelas aplicações f_1, f_2, no grupo fundamental, coincide com $f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$. De fato, $p \circ f_i = p \circ L_i(-, 1) = H_i(-, 1) = p$ e $f_{i\#} = L_i(-, 1)_\# = g_{i\#} = f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$. Como $(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i}, q)$ satisfazem as equações $i)$, $ii)$, $iii)$ e $f_{i\#} = f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, então o número de Nielsen $N(f_{1|_K}, f_{2|_K})$ é zero. Com isso, terminamos a proposição. $\square$

Para facilitar cálculos futuros, explicitaremos os homomorfismos induzido pelo par de aplicações $(f_1, f_2) : M(\phi_p(1, \eta)) \to M(\phi_p(1, \eta))$, no grupo $\pi_1(M(\phi_p(1, \eta)))$.

Teorema 2.1.1. *Sejam $(f_1, f_2) : M(\phi_q(1, \eta)) \to M(\phi_q(1, \eta))$ aplicações sobre S^1, onde $q \in \{0, 1\}$ e $\eta = \pm 1$. Se o número de Nielsen $N(f_{1_{|K}}, f_{2_{|K}})$ de f_1, f_2 restritas a fibra é zero, então $f_{i\#} : \pi_1(M(\phi_q(1, \eta))) \to \pi_1(M(\phi_q(1, \eta)))$ é dado pelas tabelas abaixo, onde na primeira tabela temos o caso $t_1 = t_2 = t$, e na segunda tabela, temos o caso $r_1 = r_2 = 0$.*

Caso I	*I*.1) $f_i(s_i, r_i, 2l, c_{1i}, 2k_i) : \alpha \to \alpha^{r_i},\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l},\ c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
	I.2) $f_i(0, 0, 2l, c_{1i}, 2k_i + 1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \beta^{2l},\ c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i+1}c_0$
	I.3) $f_i(s_i, r_i, 2l + 1, 0, 2k_i) : \alpha \to \alpha^{r_i},\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},\ c_0 \to \beta^{2k_i}c_0$
$\phi_0(1, 1)$	*I*.4) $f_i(s_i, 0, 2l + 1, s_i, 2k_i + 1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},\ c_0 \to \alpha^{s_i}\beta^{2k_i+1}c_0$
Caso II	*II*.1) $f_i(s_i, 0, 2l, c_{1i}, 2k_i) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l},\ c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
	II.2) $f_i(0, 0, 2l, c_{1i}, 2k_i + 1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \beta^{2l},\ c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i+1}c_0$
	II.3) $f_i(s_i, 2c_{1i} + 1, 2l + 1, c_{1i}, 2k_i) : \alpha \to \alpha^{2c_{1i}+1},\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},$
$\phi_1(1, 1)$	$c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
Caso III	*III*.1) $f_i(s_i, r_i, 2l, c_{1i}, 2k_i) : \alpha \to \alpha^{r_i},\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l},\ c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
	III.2) $f_i(0, 0, 2l, c_{1i}, 2k_i + 1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \beta^{2l},\ c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i+1}c_0$
	III.3) $f_i(s_i, r_i, 2l + 1, 0, 2k_i) : \alpha \to \alpha^{r_i},\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},\ c_0 \to \beta^{2k_i}c_0$
$\phi_0(1, -1)$	*III*.4) $f_i(s_i, 0, 2l + 1, s_i, 2k_i + 1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},\ c_0 \to \alpha^{s_i}\beta^{2k_i+1}c_0$
Caso IV	*IV*.1) $f_i(s_i, 2s_i, 2l, c_{1i}, 2k_i) : \alpha \to \alpha^{2s_i},\ \beta \to \alpha_{s_i}\beta^{2l},\ c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
	IV.2) $f_i(0, 0, 2l, c_{1i}, 2k_i + 1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \beta^{2l},\ c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i+1}c_0$
	IV.3) $f_i(s_i, 2c_{1i} + 1, 2l + 1, c_{1i}, 2k_i) : \alpha \to \alpha^{2c_{1i}+1},\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},$
$\phi_1(1, -1)$	$c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$

Na tabela acima, temos $r_i, s_i, c_{1i}, k_i, l \in \mathbb{Z}$.

Caso I	$I.1)$	$f_i(s_i, 0, 2l_i, c_{1i}, 2k_i) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l_i},\ c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
	$I.2)$	$f_i(0, 0, 2l_i, c_{1i}, 2k_i + 1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \beta^{2l_i},\ c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i+1}c_0$
	$I.3)$	$f_i(s_i, 0, 2l_i + 1, 0, 2k_i) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l_i+1},\ c_0 \to \beta^{2k_i}c_0$
$\phi_0(1,1)$	$I.4)$	$f_i(s_i, 0, 2l_i + 1, s_i, 2k_i + 1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l_i+1},\ c_0 \to \alpha^{s_i}\beta^{2k_i+1}c_0$
Caso II	$II.1)$	$f_i(s_i, 0, 2l_i, c_{1i}, 2k_i) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l_i},\ c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
	$II.2)$	$f_i(0, 0, 2l_i, c_{1i}, 2k_i + 1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \beta^{2l_i},\ c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i+1}c_0$
$\phi_1(1,1)$		
Caso III	$III.1)$	$f_i(s_i, 0, 2l_i, c_{1i}, 2k_i) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l_i},\ c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
	$III.2)$	$f_i(0, 0, 2l_i, c_{1i}, 2k_i + 1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \beta^{2l_i},\ c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i+1}c_0$
	$III.3)$	$f_i(s_i, 0, 2l_i + 1, 0, 2k_i) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l_i+1},\ c_0 \to \beta^{2k_i}c_0$
$\phi_0(1,-1)$	$III.4)$	$f_i(s_i, 0, 2l_i + 1, s_i, 2k_i + 1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l_i+1},\ c_0 \to \alpha^{s_i}\beta^{2k_i+1}c_0$
Caso IV	$IV.1)$	$f_i(0, 0, 2l_i, c_{1i}, 2k_i) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l_i},\ c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
	$IV.2)$	$f_i(s_i, 0, 2l_i, c_{1i}, 2k_i + 1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \beta^{2l_i},\ c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i+1}c_0$
$\phi_1(1,-1)$		

Na tabela acima temos $s_i, c_{1i}, k_i, l_i \in \mathbb{Z}$.

As tabelas acima são dadas para cada $i = 1, 2$. Portanto, os pares $(f_{1\#}, f_{2\#})$ são combinações de cada um dos casos, em cada tabela. Por exemplo, na primeira tabela, no caso I, temos 16 possibilidades. Como $Coin(f_1, f_2) = Coin(f_2, f_1)$, então podemos reduzir os casos a serem analizados.

Demonstração.

A demonstração dessa proposição se faz usando as relações (i), (ii) e $iii)$ dadas pela proposição 2.1.4. $\square$

Na próxima seção calcularemos o grupo $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_i, 0 >)), i = 1, 2$, que pertence ao diagrama 1.4.

2.2 Cálculo de $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_i, 0 >)), i = 1, 2$.

Sejam $\phi : K \to K$ um homeomorfismo e $x_2 = [(0, 0)]$ pertencente a K. Denotemos por $x_1 = [(q_1, q_2)]$ um ponto de K para q_1 e q_2 pequenos. Sabemos que $\phi(x_2) = x_2$. Podemos escolher ϕ também satisfazendo $\phi(x_1) = x_1$.

Como ϕ é um homeomorfismo e $\phi(x_2) = x_2$, então existe V vizinhança do ponto x_2 e um disco pequeno $D \subset V$ tal que $\phi(D) \subset V$. Portanto, em V podemos definir o grau de ϕ, veja [17]. Como ϕ é homeomorfismo, então temos que o grau de ϕ é 1 ou -1. Portanto, podemos supor que ϕ é a identidade ou a reflexão em torno de um eixo que passa no centro de D. Desse modo, existe um ponto x_1 diferente de x_2 tal que $\phi(x_1) = x_1$.

Vimos, no primeiro capítulo, que a aplicação $p_1 : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) \to M(\phi)$ dada por $p_1(< x, t >, < y, t >) =< x, t >$ é uma fibração com fibra $K = p_1^{-1}(< x_2, 0 >)$. Como $M(\phi)$ é $K(\pi, 1)$, então temos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \to \pi_1(K, x_i) \xrightarrow{l_\#} \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_i, 0 >)) \xrightarrow{(p_1)_\#} \pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) \to 1$$

onde, $l_\#$ é o homomorfismo induzido pela aplicação $l : K \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$, dada por $l(x) = (< x_2, 0 >, < x, 0 >)$, e $(p_1)_\#$ é o homomorfismo induzido pela aplicação p_1.

A sequência exata curta acima, vem da sequência exata de homotopia da fibração p_1. A sequência cinde, pois a fibração p_1 admite uma secção que é aplicação $s_1^i : M(\phi) \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ dada por $s_1^i(< x, t >) = (< x, t >, < x_i, t >)$.

Agora, definiremos um conjunto explícito de geradores para $\pi_1(K, x_i)$. Para isso, começaremos escolhendo um conjunto de elementos de $\pi_1(K - x)$. Esse conjunto também será usado na próxima seção.

Sejam ρ_{11}, ρ_{12} e ρ_{21}, ρ_{22} os elementos de $\pi_1(K - x_2, x_1)$ e $\pi_1(K - x_1, x_2)$, definidos como em [16]. Os ρ_{ij} estão representados na figura abaixo.

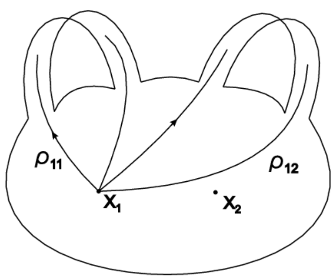


Fig.1. As tranças ρ_{11} e ρ_{12}

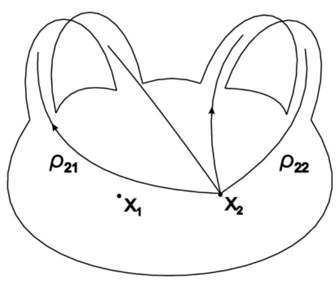
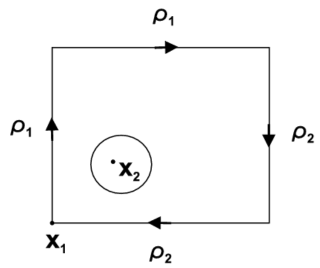


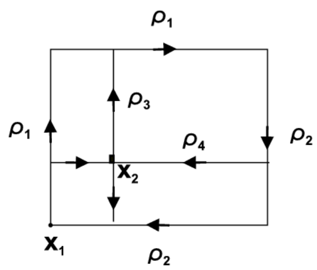
Fig.2. As tranças ρ_{21} e ρ_{22}

As figuras acima, surgem observando que, se retirarmos de K um disco D de raio pequeno, em torno de x_2, então $K - \{D\}$ pode ser pensado como um disco colado com duas faixas "torcidas", exatamente como está na figura.

Da mesma maneira, fazemos retirando um disco de raio pequeno em torno de x_1, porém, nesse caso, consideremos os elementos ρ_3, ρ_4, representados nas figuras abaixo.



Garrafa de Klein



Garrafa de Klein

Denotemos por ρ_{ij} os elementos de $\pi_1(K, x_i)$ que são imagem pela inclusão $K - x_j \hookrightarrow K$ dos ρ_{ij} definidos acima. Observemos que em $\pi_1(K, x_i)$ temos $\rho_{i1}^2 \rho_{i2}^2 = 1$.

Consideremos as presentações $\pi_1(K, x_i) =< a_i, b_i | a_i b_i a_i b_i^{-1} = 1 >$, onde $a_i = \rho_{i1}\rho_{i2}$, $b_i = \rho_{i2}^{-1}$ e $\pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) =< \alpha, \beta, c_0 | \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1, c_0\alpha c_0^{-1} = \alpha^{\epsilon}, c_0\beta c_0^{-1} = \alpha^p \beta^{\eta} >$, onde $\eta = \pm 1$ e $p \in \{0, 1\}$.

Observemos que para cada presentação de $\pi_1(K, x_i)$, escolhida acima, temos um conjunto de laços $\{\alpha, \beta, c_0\}$ que são geradores de $\pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >)$. Quando $i = 1$, α e β começam no ponto x_1 já quando $i = 2$ eles começam no ponto x_2. Aqui, para efeito de notação, não faremos distinção entre os dois casos.

Denotemos por $\alpha_1, \beta_1, c_{01}, u_1, v_1$ respectivamente, as classes de homotopia dos laços dados pelos pares de laços $(\alpha(t),<x_1,0>),(\beta(t),<x_1,0>),(c_0(t),<x_1,t>),(<x_2,0>,a_1(t)),(<x_2,0>,b_1(t))$. Observemos que como $\phi(x_1)=x_1$, então $<x_1,t>$ é um laço em $M(\phi)$. Da mesma forma, denotaremos por $\alpha_2,\beta_2,c_{02},u_2,v_2$ as classes de homotopia dos laços dados, respectivamente, pelos pares de laços $(\alpha(t),<x_2,0>),(\beta(t),<x_2,0>),(c_0(t),c_0(t)),(<x_2,0>,a_2(t)),(<x_2,0>,b_2(t))$.

Com a notação acima, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.2.1. *Seja $\phi_p(1,\eta)$ um dos quatro casos dado pelo teorema 2.1.1 e $\alpha_i,\beta_i,c_{0i},u_i,v_i$ os elementos em $\pi_1(M(\phi)\times_{S^1} M(\phi),(<x_2,0>,<x_i,0>))$ definidos acima. Então, temos $\pi_1(M(\phi)\times_{S^1}M(\phi),(<x_2,0>,<x_i,0>)) =<\alpha_i,\beta_i,c_{0i},u_i,v_i|u_iv_iu_iv_i^{-1}=1,\alpha_i\beta_i\alpha_i\beta_i^{-1}=1,c_{0i}\alpha_ic_{0i}^{-1}\alpha_i^{-1}=1,c_{0i}\beta_ic_{0i}^{-1}\beta_i^{-\eta}\alpha_i^{-p}=1,\alpha_iu_i\alpha_i^{-1}=u_i,\alpha_iv_i\alpha_i^{-1}=v_i,\beta_iu_i\beta_i^{-1}=u_i,\beta_iv_i\beta_i^{-1}=v_i,c_{0i}u_ic_{0i}^{-1}=u_i,c_{0i}v_ic_{0i}^{-1}=u_i^pv_i^\eta>$, para cada $i=1,2$.*

Demonstração.

A demonstração desse teorema consiste em aplicar o teorema 1.2.1, pois já conhecemos as presentações de $\pi_1(M(\phi),<x_2,0>)$ e de $\pi_1(K,x_i)$.

Pelas observações feitas antes do enunciado do teorema, temos $a_2:I\to K$ dado por $a_2=\rho_{21}\rho_{22}$, $b_2:I\to K$ dado por $b_2=\rho_{22}^{-1}$, $\alpha,\beta,c_0:I\to M(\phi)$ dados por $\alpha(t)=<a_2(t),0>,\beta(t)=<b_2(t),0>$ e $c_0(t)=<x_2,t>$.

Seja $s_1^i:M(\phi)\to M(\phi)\times_{S^1} M(\phi)$, a secção da fibração

$$K \xrightarrow{l} M(\phi)\times_{S^1} M(\phi) \xrightarrow{p_1} M(\phi)$$

dada por $s_1^i(<x,t>)=(<x,t>,<x_i,t>)$.

Notemos que $\alpha_i,\beta_i,c_{0i},u_i,v_i:I\to M(\phi)\times_{S^1}M(\phi)$ são dados por $\alpha_i(t)=s_1^i(\alpha(t))=(\alpha(t),<x_i,0>),\beta_i(t)=s_1^i(\beta(t))=(\beta(t),<x_i,0>)$ e

$$c_{0i}(t)=s_1^i(c_0(t))=\begin{cases}(c_0(t),<x_1,t>) & \text{se i=1}\\ (c_0(t),c_0(t)) & \text{se i=2}\end{cases}$$

onde, p_1 é a fibração dada anteriormente.

Também temos $u_i(t)=l(a_i(t))=(<x_2,0>,<a_i(t),0>)$ e $v_i(t)=l(b_i(t))=(<x_2,0>,<b_i(t),0>)$, onde $l(x)=(<x_2,0>,<x,0>)$.

Como $\{a_i(t), b_i(t)\}$, é um conjunto gerador de $\pi_1(K, x_i)$, $\{\alpha(t), \beta(t), c_0(t)\}$, um conjunto gerador de $\pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >)$ e $p_1(\alpha_i(t)) = \alpha(t), p_1(\beta_i(t)) = \beta(t), p_1(c_{0i}(t)) = c_{0i}(t)$, então pelo teorema 1.2.1, temos que $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_i, 0 >))$ é gerado pelo conjunto $\{l(a_i(t)), l(b_i(t)), s_1^i(\alpha(t)), s_1^i(\beta(t)), s_1^i(c_0(t))\}$ com algumas relações, essas são dadas pelos cálculos abaixo.

Considerando as classes dos caminhos acima temos

$$\begin{aligned}
u_i v_i u_i v_i^{-1} &= < u_i(t) >< v_i(t) >< u_i(t) >< v_i^{-1}(t) > \\
&= l_\#(< a_i(t) >) l_\#(< b_i(t) >) l_\#(< a_i(t) >) l_\#(< b_i^{-1}(t) >) \\
&= l_\#(a_i) l_\#(b_i) l_\#(a_i) l_\#(b_i^{-1}) \\
&= l_\#(a_i b_i a_i b_i^{-1}) \\
&= l_\#(1) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_i \beta_i \alpha_i \beta_i^{-1} &= < \alpha_i(t) >< \beta_i(t) >< \alpha_i(t) >< \beta_i^{-1}(t) > \\
&= (s_1^i)_\#(< \alpha(t) >)(s_1^i)_\#(< \beta(t) >)(s_1^i)_\#(< \alpha(t) >)(s_1^i)_\#(< \beta^{-1}(t) >) \\
&= (s_1^i)_\#(\alpha)(s_1^i)_\#(\beta)(s_1^i)_\#(\alpha)(s_1^i)_\#(\beta^{-1}) \\
&= (s_1^i)_\#(\alpha\beta\alpha\beta^{-1}) \\
&= (s_1^i)_\#(1) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{0i} \alpha_i c_{0i}^{-1} \alpha_i^{-\epsilon} &= (s_1^i)_\#(c_0)(s_1^i)_\#(\alpha)(s_1^i)_\#(c_0^{-1})(s_1^i)_\#(\alpha^{-\epsilon}) \\
&= (s_1^i)_\#(c_0 \alpha c_0^{-1} \alpha^{-\epsilon}) \\
&= (s_1^i)_\#(1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_{0i}\beta_i c_{0i}^{-1}\beta_i^{-\eta}\alpha_i^{-p} &= (s_1^i)_\#(c_0)(s_1^i)_\#(\beta)(s_1^i)_\#(c_0^{-1})(s_1^i)_\#(\beta^{-\eta})(s_1^i)_\#(\alpha^{-p}) \\ &= (s_1^i)_\#(c_0\beta c_0^{-1}\beta^{-\eta}\alpha^{-p}) \\ &= (s_1^i)_\#(1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Temos que a aplicação $h : M(\phi)\times_{S^1} M(\phi) \to M(\phi\times\phi)$ dada por $h(<x,t>,<y,t>) = <x,y,t>$ é um homeomorfismo, onde $M(\phi\times\phi)$ é o espaço quociente obtido de $K\times K\times I$ pela relação $(x,y,0)\sim((\phi\times\phi)(x,y),1) = (\phi(x),\phi(y),1)$.

De fato, h está bem definida. Se $(<w_1,t_1>,<z_1,t_1>) = (<w_2,t_2>,<z_2,t_2>)$, então devemos ter $<w_1,t_1>=<w_2,t_2>$ e $<z_1,t_1>=<z_2,t_2>$. Se $t_1\neq 0$, então pela definição das relações de equivalência devemos ter $t_1=t_2$, $w_1=w_2$ e $z_1=z_2$. Agora, se $t_1=0$, então devemos ter $t_2=0,1$. Se $t_2=0$, então acabamos. Se $t_2=1$, então devemos ter $w_2=\phi(w_1)$ e $z_2=\phi(z_1)$. Como $(w_1,z_1,0)\sim(\phi(w_1),\phi(z_1),1)$, então temos $<w_1,z_1,t_1>=<w_2,z_2,t_2>$, e logo h está bem definida.

Da mesma forma, temos a aplicação $g : M(\phi\times\phi)\to M(\phi)\times_{S^1} M(\phi)$ definida por $g(<x,y,t>) = (<x,t>,<y,t>)$ a qual está bem definida. Usando a topologia quociente de $M(\phi)$ e $M(\phi\times\phi)$ podemos mostrar que h e g são contínuas. Como $h\circ g = Id$, $g\circ h = Id$, então temos que h é um homeomorfismo.

Assim, para cada $i=1,2$, os laços $\alpha_i,\beta_i,c_{0i},u_i,v_i$ podem ser vistos em $M(\phi\times\phi)$ como $\alpha_i(t) =<a_2(t),x_i,0>$, $\beta_i(t) =<b_2(t),x_i,0>$,

$$c_{0i}(t) = \begin{cases} <x_2,x_1,t> & \text{se i=1} \\ <x_2,x_2,t> & \text{se i=2} \end{cases}$$

$u_i(t) =<x_2,a_i(t),0>$ e $v_i(t) =<x_2,b_i(t),0>$. Esses laços também podem ser vistos como classes de caminhos no pullback $(K\times I)\times(K\times I)$ de $q\circ\pi : K\times I\to S^1$ por $q\circ\pi$, onde $\pi : K\times I\to M(\phi)$ dada por $\pi(x,t) =<x,t>$, é a projeção natural, e q é dada por $q(<x,t>) =<t>$.

De fato, $\alpha_i(t)$ pode ser visto como $(\pi\times\pi)((a_2(t),0),(x_i,0))$, analogamente, para os outros laços.

Consideremos em $(K \times I) \times (K \times I)$ os caminhos $\delta_i : I \to (K \times I) \times (K \times I)$ dado por $\delta_i(t) = ((a_2(t), 0), (x_i, 0))$ e $\theta_1^i : I \to (K \times I) \times (K \times I)$ dado por $\theta_1^i(t) = ((x_2, 0), (a_i(t), 0))$. Temos que $< \delta_i >=< (a_2(t), 0), (x_i, 0) >=< a_2(t), x_i, 0 >= \alpha_i$, da mesma forma, temos que $< \theta_1^i >=< (x_2, 0), (a_i(t), 0) >=< x_2, a_i(t), 0 >= u_i$. Daí, temos que $\alpha_i u_i \alpha_i^{-1} =< \delta_i \theta_1^i \delta_i^{-1} >$.

Sabemos que se X, Y são espaços topológicos, então $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \approx \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. Disso segue que laços em $X \times \{y_0\}$ e em $\{x_0\} \times Y$ representam elementos comutativos em $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$.

Da observação acima, temos que os pares $((a_2(t), 0), (x_i, 0))$, $((x_2, 0), (a_i(t), 0))$ de laços são comutativos sob uma homotopia em $(K \times I) \times (K \times I)$, ou seja, $\delta_i \theta_1^i \delta_i^{-1}$ é homotópico a θ_1^i. Portanto, $\alpha_i u_i \alpha_i^{-1} =< \delta_i \theta_1^i \delta_i^{-1} >=< \theta_1^i >= u_i$.

Analogamente, considerando o caminho $\theta_2^i : I \to (K \times I) \times (K \times I)$ dado por $\theta_2^i(t) = ((x_2, 0), (b_i(t), 0))$, temos $< \theta_2^i >=< ((x_2, 0), (b_i(t), 0)) >=< x_2, b_i(t), 0 >= v_i$ e, logo $\alpha_i v_i \alpha_i^{-1} =< \delta_i \theta_2^i \delta_i^{-1} >$. Como $\delta_i \theta_2^i \delta_i^{-1}$ é homotópico a θ_2^i, então obtemos $< \delta_i \theta_2^i \delta_i^{-1} >=< \theta_2^i >$ e, portanto $\alpha_i v_i \alpha_i^{-1} =< \delta_i \theta_2^i \delta_i^{-1} >=< \theta_2^i >= v_i$.

Semelhantemente, tomando o caminho $\delta_i^{'} : I \to (K \times I) \times (K \times I)$ dado por $\delta_i^{'}(t) = ((b_2(t), 0), (x_i, 0))$ teremos $< \delta_i^{'} >=< ((b_2(t), 0), (x_i, 0)) >=< b_2(t), x_i, 0 >= \beta_i$ e, portanto $\beta_i u_i \beta_i^{-1} =< \delta_i^{'} \theta_1^i (\delta_i^{'})^{-1} >$. Como $\delta_i^{'} \theta_1^i (\delta_i^{'})^{-1}$ é homotópico a θ_1^i, então temos $< \delta_i^{'} \theta_1^i (\delta_i^{'})^{-1} >=< \theta_1^i >$ e, portanto $\beta_i u_i \beta_i^{-1} = < \delta_i^{'} \theta_1^i (\delta_i^{'})^{-1} >= < \theta_1^i >= u_i$.

Similarmente, temos $\beta_i v_i \beta_i^{-1} =< \delta_i^{'} \theta_2^i (\delta_i^{'})^{-1} >$. Como $\delta_i^{'} \theta_2^i (\delta_i^{'})^{-1}$ é homotópico a θ_2^i, então obtemos $< \delta_i^{'} \theta_2^i (\delta_i^{'})^{-1} >=< \theta_2^i >$ e, portanto $\beta_i v_i \beta_i^{-1} =< \delta_i^{'} \theta_2^i (\delta_i^{'})^{-1} >=< \theta_2^i >= v_i$.

Agora, consideremos o caminho $\lambda_i : I \to (K \times I) \times (K \times I)$ dado por

$$\lambda_i(t) = \begin{cases} ((x_2, t), (x_1, t)) & \text{se i=1} \\ ((x_2, t), (x_2, t)) & \text{se i=2} \end{cases}$$

e $\psi_1^i : I \to (K\times I)\times(K\times I)$ dado por $\psi_1^i(t) = ((x_2,1),(\phi(a_i(t)),1))$. Temos

$$<\lambda_i(t)>= \begin{cases} <((x_2,t),(x_1,t))>= & <x_2,x_1,t>= \quad c_{01}(t) \quad \text{se i=1} \\ <((x_2,t),(x_2,t))>= & <x_2,x_2,t>= \quad c_{02}(t) \quad \text{se i=2,} \end{cases}$$

ou seja, $<\lambda_i(t)>= c_{0i}(t)$.

Como $(x_2, a_i(t), 0) \sim (x_2, \phi(a_i(t)), 1)$, em $M(\phi\times\phi)$, então temos que $u_i =<\psi_1^i>$ logo, obtemos $c_{0i}u_ic_{0i}^{-1} =<\lambda_i\psi_1^i\lambda_i^{-1}>$.

Da mesma forma, como fizemos no final da prova da proposição 1.3.5, podemos mostrar que $\lambda_i((\phi\times\phi)(x_2,a_i),1)\lambda_i^{-1}$ é homotópico a $((\phi\times\phi)(x_2,a_i),0)$, e, portanto, que $\lambda_i\psi_1^i\lambda_i^{-1}$ é homotópico a $l(\phi(a_i(t)))$. Assim, temos $<\lambda_i\psi_1^i\lambda_i^{-1}>=<l(\phi(a_i(t)))>$.

No pullback $M(\phi)\times_{S^1} M(\phi)$ temos $l(\phi(a_i(t))) = (<x_2,0>,<\phi(a_i(t)),0>)$. Como $M(\phi\times\phi)$ é homeomorfo a $M(\phi)\times_{S^1} M(\phi)$, então podemos olhar a classe de $l(\phi(a_i(t)))$ em $M(\phi\times\phi)$. Temos $<l(\phi(a_i(t)))>=<x_2,\phi(a_i(t)),0> =<x_2,(a_i(t))^{\epsilon},0> = u_i^{\epsilon}$, portanto temos $c_{0i}u_ic_{0i}^{-1} =<l(\phi(a_i(t)))>= u_i^{\epsilon}$.

Semelhantemente, tomando o caminho $\psi_2^i : I \to (K\times I)\times(K\times I)$ dado por $\psi_2^i(t) = ((x_2,1),(\phi(b_i(t)),1))$, temos $c_{0i}v_ic_{0i}^{-1} =<\lambda_i\psi_2^i\lambda_i^{-1}>$. Como $\lambda_i\psi_2^i\lambda_i^{-1}$ é homotópico a $l(\phi(b_i(t)))$, então $<\lambda_i\psi_2^i\lambda_i^{-1}>=<l(\phi(b_i(t)))>= u_i^pv_i^{\eta}$ e, portanto, $c_{0i}v_ic_{0i}^{-1} =<l(\phi(b_i(t)))>= u_i^pv_i^{\eta}$.

Desse modo, obtemos todas as relações dadas no teorema 1.2.1. Portanto, pelo teorema 1.2.1, $\pi_1(M(\phi)\times_{S^1} M(\phi), (<x_2,0>,<x_i,0>))$ possui a presentação dada no enunciado do teorema. $\square$

Agora, passaremos ao cálculo de $\pi_1(M(\phi)\times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (<x_2,0>,<x_1,0>))$, usaremos nesta seção as mesmas notações da seção anterior.

2.3 Cálculo de $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$.

Vamos novamente tomar $x_2 = [(0,0)]$, $x_1 = [(0,q)]$ para q pequeno e $K = \mathbb{R}^2/\sim$ onde, $(x,y) \sim (x, y+1)$ e $(x,y) \sim (x+1, 1-y)$. Seja $\phi : K \to K$ um homeomorfismo tal que $\phi(x_i) = x_i$ para $i = 1, 2$.

Para calcular $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$ consideraremos a fibração:

$$(K - x_2, x_1) \xrightarrow{j_2} (M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \xrightarrow{(p_{1|})} (M(\phi), < x_2, 0 >)$$

onde, $j_2 : K - x_2 \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta$ é dada por $j_2(y) = (< x_2, 0 >, < y, 0 >)$ e $p_{1|} : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta \to M(\phi)$ é dada por $p_{1|}(< x, t >, < y, t >) =< x, t >$, com $x \neq y$.

Da sequência acima, obtemos a sequência exata de homotopia da fibração $p_{1|}$. Como $M(\phi)$ é $K(\pi, 1)$, então obtemos a seguinte sequência exata curta:

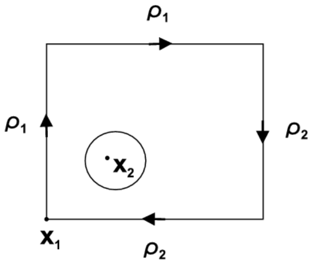
$$1 \longrightarrow \pi_1(K - x_2, x_1) \xrightarrow{j_{2\#}}$$

$$\longrightarrow \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \xrightarrow{(p_{1|})_\#}$$

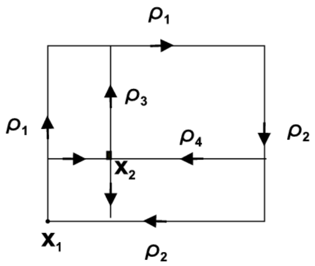
$$\longrightarrow \pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) \longrightarrow 1$$

Consideraremos as seguintes presentações: $\pi_1(K - x_2, x_1) =< \bar{a}, \bar{b} >$, onde $< \bar{a}, \bar{b} >$ é o grupo livre gerado pelo conjunto $\{\bar{a}, \bar{b}\}$, $\bar{a} = \rho_{11}\rho_{12}$, $\bar{b} = \rho_{12}^{-1}$ e $\pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) =< \alpha, \beta, c_0 | \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1, c_0\alpha c_0^{-1} = \alpha^\epsilon, c_0\beta c_0^{-1} = \alpha^p\beta^\eta >$, onde $\eta = \pm 1$ e $p \in \{0, 1\}$.

Os ρ_{ij} são definidos como na seção anterior, e ainda, podemos supor que a inclusão dos ρ_{2i} em K, não intersecta o ponto x_1 e que a inclusão dos ρ_{1i} em K, não intersecta o ponto x_2, para $i = 1, 2$. Para isso, basta considerar os geradores como na figura abaixo.



Garrafa de Klein



Garrafa de Klein

Os caminhos $\alpha, \beta, c_0 : I \to M(\phi)$ são dados por $\alpha =< \rho_{21}\rho_{22}, 0 >, \beta =< \rho_{22}^{-1}, 0 >$ e $c_0 =< x_2, t >$.

Observemos que estamos usando a mesma notação tanto para os ρ_{ij} em $K - x_i$, quanto para sua inclusão K.

Consideremos os elementos $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c_0}, \tilde{a}, \tilde{b} : I \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta$ dados por $\tilde{\alpha} = (\alpha, < x_1, 0 >), \tilde{\beta} = (\beta, < x_1, 0 >), \tilde{c_0} = (c_0, < x_1, t >), \tilde{a} = (< x_2, 0 >, \bar{a})$ e $\tilde{b} = (< x_2, 0 >, \bar{b})$.

Como os ρ_{ij} não intersecta x_j, então temos que os elementos $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c_0}, \tilde{a}$ e $\tilde{b}$ pertencem a $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta$. Notemos ainda que $(p_{1|})_\#(\tilde{\alpha}) = \alpha, (p_{1|})_\#(\tilde{\beta}) = \beta, (p_{1|})_\#(\tilde{c_0}) = c_0, j_{2\#}(\bar{a}) = \tilde{a}$ e $j_{2\#}(\bar{b}) = \tilde{b}$.

Pelo teorema 1.2.1 existe uma presentação para o grupo $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$ que é a seguinte:

$\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) =< \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c_0}, \tilde{a}, \tilde{b} | \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1} = w_1(\tilde{a}, \tilde{b})$, $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-\epsilon} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b})$, $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-\eta}\tilde{\alpha}^{-p} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b})$, $\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1} = w_4(\tilde{a}, \tilde{b})$, $\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} = w_5(\tilde{a}, \tilde{b})$, $\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1} = w_6(\tilde{a}, \tilde{b})$, $\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1} = w_7(\tilde{a}, \tilde{b})$, $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = w_8(\tilde{a}, \tilde{b})$, $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = w_9(\tilde{a}, \tilde{b}) >$, onde $w_j(\tilde{a}, \tilde{b}), j = 1, \ldots, 9$ são palavras em $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$.

Demonstraremos agora o teorema que caracteriza $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$, para o caso em que ϕ é um dos $\phi_p(1, \eta)$, dados no teorema 2.1.1.

Teorema 2.3.1. *Seja $\phi_p(1, \eta)$ um homeomorfismo que é dado por um dos quatro casos no teorema 2.1.1 e sejam $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c_0}, \tilde{a}, \tilde{b}$ os elementos de $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$ definidos acima, então temos:*

$\pi_1(M(\phi)\times_{S^1} M(\phi)-\Delta,(<x_2,0>,<x_1,0>)) =<\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{c_0},\tilde{a},\tilde{b}|\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}=w_1(\tilde{a},\tilde{b})$, $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-\epsilon}=w_2(\tilde{a},\tilde{b})$, $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-\eta}\tilde{\alpha}^{-p}=w_3(\tilde{a},\tilde{b})$, $\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}=w_4(\tilde{a},\tilde{b})$, $\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}=w_5(\tilde{a},\tilde{b})$, $\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}=w_6(\tilde{a},\tilde{b})$, $\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}=w_7(\tilde{a},\tilde{b})$, $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}=w_8(\tilde{a},\tilde{b})$, $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}=w_9(\tilde{a},\tilde{b})>$, *onde* $w_j(\tilde{a},\tilde{b}), j=1,\ldots,9$ *são palavras em* $\tilde{a}$ *e* $\tilde{b}$ *dadas pelas tabelas abaixo;*

$\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}=B=\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$
$\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}=B\tilde{a}B^{-1}$
$\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}=B(\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1})B^{-1}$
$\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}=\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}$
$\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}=\tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b}$

(2.1)

e

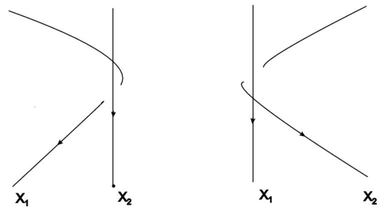
Caso I $\phi_0(1,1)$	$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}=\tilde{\alpha}$ $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}=\tilde{a}$	$\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}=\tilde{\beta}$ $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}=\tilde{b}$
Caso II $\phi_1(1,1)$	$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}=\tilde{\alpha}$ $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}=\tilde{a}$	$\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}=B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}=\tilde{b}\tilde{a}^{-1}$
Caso III $\phi_0(1,-1)$	$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}=B^{-1}\tilde{\alpha}$ $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}=\tilde{a}B^{-1}$	$\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}=\tilde{\beta}^{-1}$ $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}=B\tilde{b}^{-1}B^{-1}$
Caso IV $\phi_1(1,-1)$	$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}=B^{-1}\tilde{\alpha}$ $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}=\tilde{a}B^{-1}$	$\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}=\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}$ $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}=B\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}$

(2.2)

Demonstração.

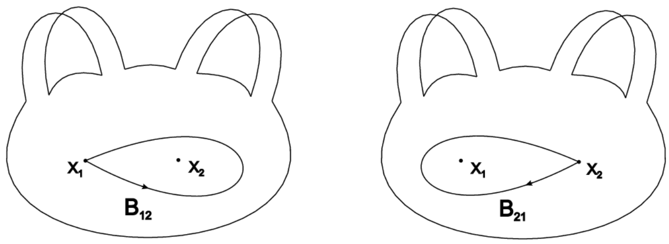
Afim de simplificar, denotaremos por $\bar{\alpha}=\rho_{21}\rho_{22}$ e $\bar{\beta}=\rho_{22}^{-1}$. Como antes, temos $\bar{a}=\rho_{11}\rho_{12}$ e $\bar{b}=\rho_{12}^{-1}$. Temos que $(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\alpha}\bar{\beta}^{-1},x_1)=(\rho_{21}\rho_{22}\rho_{22}^{-1}\rho_{21}\rho_{22}\rho_{22},x_1)=(\rho_{21}^2\rho_{22}^2,x_1)$ é homotópico a $(x_2,\rho_{11}^2\rho_{12}^2)=(x_2,\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1})$, segue daí a seguinte relação: $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}=(\alpha\beta\alpha\beta^{-1},<x_1,0>)=(<\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\alpha}\bar{\beta}^{-1},0>,<x_1,0>)=(<x_2,0>,<\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1},0>)=\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$.

Para mostrar a homotopia acima, basta observar que as tranças da figura abaixo são homotópicas.



trança σ_1 trança σ_2

Portanto, suas projeções também são. Como as projeções de σ_1 e de σ_2 são, respectivamente $B_{12} = \rho_{11}^2\rho_{12}^2$ e $B_{21}^{-1} = \rho_{21}^2\rho_{22}^2$ representados na figura abaixo, então obtemos o resultado.



Se denotarmos por $B = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$, então pelo resultado acima, teremos $B = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}$.

Para calcular $\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}, \tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}, \tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}$ e $\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}$ consideraremos a seguinte presentação $\pi_1(K, *) =< \rho_1, \rho_2 | \rho_1^2\rho_2^2 = 1 >$.

Como $\mathbb{Z}$ é livre, então a seguinte sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \xrightarrow{i_\#}$$

$$\longrightarrow \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \xrightarrow{(p \circ p_{1|})_\#}$$

$$\longrightarrow \pi_1(S^1, < 0 >) \simeq \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

cinde, onde $i_\#$ é a induzida da aplicação $i : K \times K - \Delta_K \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta$ dada por $i(x, y) = (< x, 0 >, < y, 0 >)$.

Afim de calcular $\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}, \tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}, \tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}$ e $\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}$ como elementos do Kernel de $(p \circ$

$p_{1|})_{\#}$, usando a sequência acima, precisaremos dar uma presentação para $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$, e é o que faremos agora.

2.3.1 Uma presentação para $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$.

Da fibração $p_{1|} : K \times K - \Delta_K \to K$, dada por $p_{1|}(x, y) = x$ e, usando o fato de K ser $K(\pi, 1)$, obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \pi_1(K - x_2, x_1) \stackrel{(i_2)_{\#}}{\longrightarrow} \pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \stackrel{(p_{1|})_{\#}}{\longrightarrow} \pi_1(K, x_2) \longrightarrow 1$$

onde, $i_{2\#}$ é a induzida da aplicação $i_2 : K - x_2 \to K \times K - \Delta_K$ dada por $i_2(x) = (x_2, x)$.

Denotemos por $j_{\#} : \pi_1(K - x_2, x_1) \to \pi_1(K, x_1)$ e por $k_{\#} : \pi_1(K - x_1, x_2) \to \pi_1(K, x_2)$ os homomorfismos induzidos pelas inclusões $j : K - x_2 \to K$ e $k : K - x_1 \to K$, respectivamente.

Temos $\bar{a} = \rho_{11}\rho_{12}, \bar{b} = \rho_{12}^{-1}, \bar{\alpha} = \rho_{21}\rho_{22}$ e $\bar{\beta} = \rho_{22}^{-1}$, onde ρ_{11}, ρ_{12} são os geradores de $\pi_1(K - x_2, x_1)$ e ρ_{21}, ρ_{22} são os geradores de $\pi_1(K - x_1, x_2)$. Sejam $j_{\#}(\rho_{11}) = \rho_1, j_{\#}(\rho_{12}) = \rho_2$, $k_{\#}(\rho_{21}) = \rho_3$ e $k_{\#}(\rho_{22}) = \rho_4$. Os ρ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, são os mesmos definidos na seção anterior. Vimos que os conjuntos $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ e, $\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\}$ também são geradores de $\pi_1(K - x_2, x_1)$ e $\pi_1(K - x_1, x_2)$, respectivamente.

Das observações acima, temos $(p_{1|})_{\#}(\rho_{21}, x_1) = \rho_3$ e $(p_{1|})_{\#}(\rho_{22}, x_1) = \rho_4$. Também temos $(i_2)_{\#}(\rho_{11}) = (x_2, \rho_{11})$ e $(i_2)_{\#}(\rho_{12}) = (x_2, \rho_{12})$, como classe de caminhos.

Agora, podemos usar o teorema 1.2.1 para dar uma presentação para $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$, considerando $\{\rho_{11}, \rho_{12}\}$ e $\{\rho_{21}, \rho_{22}\}$ como geradores de $\pi_1(K - x_2, x_1)$ e $\pi_1(K - x_1, x_2)$, respectivamente.

Consideremos as tranças B_{12} e B_{21} definidas em [16] e já apresentadas na figura acima.

Temos que $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) = \mathcal{P}_2(K)$ é um subgrupo de $\mathcal{B}_2(K)$, o grupo das tranças em K baseado em duas cordas, veja [4]. Usaremos a presentação para $\mathcal{P}_2(K)$ dada em [16].

Usando [16] e a convenção de que o produto cd, de dois elementos em π_1, é a classe de um representante de c, seguida da classe de um represante de d, obtemos a seguinte presentação para $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) =< \rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{22}|$

(1) $B_{12} = \rho_{11}^2 \rho_{12}^2$

(2) $B_{21}^{-1} = \rho_{21}^2 \rho_{22}^2$

(3) $\rho_{21}\rho_{11}\rho_{21}^{-1} = \rho_{11}B_{12}^{-1}$

(4) $\rho_{21}\rho_{12}\rho_{21}^{-1} = B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}\rho_{11}\rho_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1}$

(5) $\rho_{21}B_{12}\rho_{21}^{-1} = B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1}$

(6) $\rho_{22}\rho_{11}\rho_{22}^{-1} = \rho_{11}$

(7) $\rho_{22}\rho_{12}\rho_{22}^{-1} = \rho_{12}B_{12}^{-1}$

(8) $\rho_{22}B_{12}\rho_{22}^{-1} = B_{12}\rho_{12}^{-1}B_{12}^{-1}\rho_{12}B_{12}^{-1}$

(9) $\rho_{21}^{-1}\rho_{11}\rho_{21} = \rho_{11}^2 B_{12}^{-1}\rho_{11}^{-1}$

(10) $\rho_{21}^{-1}\rho_{12}\rho_{21} = \rho_{11}B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}\rho_{12}B_{12}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1}\rho_{11}^{-1}$

(11) $\rho_{21}^{-1}B_{12}\rho_{21} = \rho_{11}B_{12}^{-1}\rho_{11}^{-1}$

(12) $\rho_{22}^{-1}\rho_{11}\rho_{22} = \rho_{11}$

(13) $\rho_{22}^{-1}\rho_{12}\rho_{22} = \rho_{12}^2 B_{12}^{-1}\rho_{12}^{-1}$

(14) $\rho_{22}^{-1}B_{12}\rho_{22} = \rho_{12}B_{12}^{-1}\rho_{12}^{-1} >$.

Do teorema 1.2.1, essas são todas as relações de $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$. $\square$

Agora, se aplicarmos o teorema 1.2.1, para calcular $\pi_1(K \times K - \Delta, (x_2, x_1))$ usando os geradores $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ e $\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\}$, para $\pi_1(K - x_2, x_1)$ e $\pi_1(K - x_1, x_2)$ respectivamente, no lugar dos geradores $\{\rho_{11}, \rho_{12}\}$, $\{\rho_{21}, \rho_{22}\}$, então obteremos outras relações em $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$ que são calculadas usando as relações acima.

Sejam $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ as imagens pela inclusão $k : K - x_1 \to K$ de $\rho_{21}\rho_{22}$ e ρ_{22}^{-1} respectivamente e $\bar{a}, \bar{b}$ as imagens pela inclusão $j : K - x_2 \to K$ de $\rho_{11}\rho_{12}$ e ρ_{12}^{-1} respectivamente. Consideremos ainda as aplicações $i_1(x) = (x, x_1)$ e $i_2(x) = (x_2, x)$

$$\begin{tikzcd}
K & K \times K - \Delta_K \arrow[l, "p_{1|}"'] \arrow[r, "p_{2|}"] & K \\
K - x_1 \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "i_1"] & & K - x_2 \arrow[u, "j"'] \arrow[ul, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

Da fibração $(K - x_2, x_1) \xrightarrow{i_2} (K \times K - \Delta, (x_2, x_1)) \xrightarrow{p_{1|}} (K, x_2)$, obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \pi_1(K - x_2, x_1) \overset{(i_2)_\#}{\longrightarrow} \pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \overset{(p_{1|})_\#}{\longrightarrow} \pi_1(K, x_2) \longrightarrow 1$$

Agora, usando o teorema 1.2.1, obtemos que $\hat{a} = (i_2)_\#(\rho_{11}\rho_{12}), \hat{b} = (i_2)_\#(\rho_{12}^{-1}), \hat{\alpha} = (i_1)_\#(\rho_{21}\rho_{22})$ e $\hat{\beta} = (i_1)_\#(\rho_{22}^{-1})$ são geradores de $(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$. Na nossa notação isso equivale a $\hat{a} = (i_2)_\#(\bar{a}), \hat{b} = (i_2)_\#(\bar{b}), \hat{\alpha} = (i_1)_\#(\bar{\alpha})$ e $\hat{\beta} = (i_1)_\#(\bar{\beta})$.

Lembremos que $i : (K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \to (M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), < x_2, 0 >, < x_1, 0 >)$ a aplicação inclusão é dada por $i(x, y) = (< x, 0 >, < y, 0 >)$. Aplicando o homomorfismo $i_\#$ induzido de i, nos geradores acima, obtemos:

$$i_\#(\hat{\alpha}) = i_\#(\rho_{21}\rho_{22}, x_1) = (< \rho_{21}\rho_{22}, 0 >, < x_1, 0 >) = (\alpha, < x_1, 0 >) = \tilde{\alpha},$$

$$i_\#(\hat{\beta}) = i_\#(\rho_{22}^{-1}, x_1) = (< \rho_{22}^{-1}, 0 >, < x_1, 0 >) = (\beta, < x_1, 0 >) = \tilde{\beta},$$

$$i_\#(\hat{a}) = i_\#(x_2, \rho_{11}\rho_{12}) = (< x_2, 0 >, < \rho_{11}\rho_{12}, 0 >) = (< x_2, 0 >, \bar{a}) = \tilde{a},$$

$$i_\#(\hat{b}) = i_\#(x_2, \rho_{12}^{-1}) = (< x_2, 0 >, < \rho_{12}^{-1}, 0 >) = (< x_2, 0 >, \bar{b}) = \tilde{b}$$

onde, $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{a}$ e $\hat{b}$ são geradores de $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$.

Portanto, se calcularmos as conjugações $\hat{\alpha}\hat{a}\hat{\alpha}^{-1}, \hat{\beta}\hat{a}\hat{\beta}^{-1}, \hat{\alpha}\hat{b}\hat{\alpha}^{-1}, \hat{\beta}\hat{b}\hat{\beta}^{-1}$ e aplicarmos $i_\#$ obteremos as conjugações $\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}, \tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}, \tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}$ e $\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}$. Calcularemos então, as conjugações $\hat{\alpha}\hat{a}\hat{\alpha}^{-1}, \hat{\beta}\hat{a}\hat{\beta}^{-1}, \hat{\alpha}\hat{b}\hat{\alpha}^{-1}, \hat{\beta}\hat{b}\hat{\beta}^{-1}$.

Temos $\hat{\alpha}\hat{a}\hat{\alpha}^{-1} = (i_1)_\#(\rho_{21}\rho_{22})(i_2)_\#(\rho_{11}\rho_{12})(i_1)_\#(\rho_{22}^{-1}\rho_{21}^{-1})$ e assim $\hat{\alpha}\hat{a}\hat{\alpha}^{-1}$ deve ser calculado em $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$, através do produto de caminhos $\rho_{21}\rho_{22}\rho_{11}\rho_{12}\rho_{22}^{-1}\rho_{21}^{-1}$.

Usando as relações (3),(4),(5),(6) e (7), temos

$$\begin{aligned}
\rho_{21}\rho_{22}\rho_{11}\rho_{12}\rho_{22}^{-1}\rho_{21}^{-1} &= \rho_{21}\rho_{22}\rho_{11}\rho_{22}^{-1}\rho_{22}\rho_{12}\rho_{22}^{-1}\rho_{21}^{-1} \\
&= \rho_{21}\rho_{11}\rho_{12}B_{12}^{-1}\rho_{21}^{-1} \\
&= \rho_{21}\rho_{11}\rho_{21}^{-1}\rho_{21}\rho_{12}\rho_{21}^{-1}\rho_{21}B_{12}^{-1}\rho_{21}^{-1} \\
&= \rho_{11}B_{12}^{-1}B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}\rho_{11}\rho_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1}B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}\rho_{11}B_{12}^{-1} \\
&= B_{12}\rho_{11}\rho_{12}B_{12}^{-1} \\
&= \hat{B}\hat{a}\hat{B}^{-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando $i_\#$ em ambos os lados da igualdade obteremos $\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}B^{-1}$. De maneira análoga a anterior, temos que $\hat{\alpha}\hat{b}\hat{\alpha}^{-1}, \hat{\beta}\hat{a}\hat{\beta}^{-1}$ e $\hat{\beta}\hat{b}\hat{\beta}^{-1}$ devem ser calculados em $\pi_1(K \times K - \Delta_K)$, respectivamente, através dos produtos de caminhos $\rho_{21}\rho_{22}\rho_{12}^{-1}\rho_{22}^{-1}\rho_{21}^{-1}$, $\rho_{22}^{-1}\rho_{11}\rho_{12}\rho_{22}$ e $\rho_{22}^{-1}\rho_{12}^{-1}\rho_{22}$.

Usando as relações (1),(4),(5) e (7), temos

$$\begin{aligned}
\rho_{21}\rho_{22}\rho_{12}^{-1}\rho_{22}^{-1}\rho_{21}^{-1} &= \rho_{21}B_{12}\rho_{12}^{-1}\rho_{21}^{-1} \\
&= \rho_{21}B_{12}\rho_{21}^{-1}\rho_{21}\rho_{12}^{-1}\rho_{21}^{-1} \\
&= B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1}\rho_{21}\rho_{12}^{-1}\rho_{21}^{-1} \\
&= B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1}B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}\rho_{11}\rho_{12}^{-1}\rho_{11}^{-1}B_{12}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1} \\
&= B_{12}\rho_{12}^{-1}\rho_{11}^{-1}B_{12}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1} \\
&= B_{12}\rho_{12}^{-1}\rho_{11}^{-1}\rho_{12}^{-1}\rho_{12}^{-1}\rho_{11}^{-1}B_{12}^{-1} \\
&= \hat{B}(\hat{a}^{-1}\hat{b}\hat{a}^{-1})\hat{B}^{-1}
\end{aligned}$$

Da igualdade acima, obtemos $\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} = B(\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1})B^{-1}$.

Usando as relações (1),(6) e (13), temos

$$\begin{aligned}
\rho_{22}^{-1}\rho_{11}\rho_{12}\rho_{22} &= \rho_{11}\rho_{22}^{-1}\rho_{12}\rho_{22} \\
&= \rho_{11}\rho_{12}^{2}B_{12}^{-1}\rho_{12}^{-1} \\
&= \rho_{11}^{-1}\rho_{12}^{-1} \\
&= \rho_{12}\rho_{12}^{-1}\rho_{11}^{-1}\rho_{12}^{-1} \\
&= \hat{b}^{-1}\hat{a}^{-1}\hat{b}
\end{aligned}$$

Da igualdade acima, obtemos $\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}$.

Usando a relação (13), temos

$$\begin{aligned} \rho_{22}^{-1}\rho_{12}^{-1}\rho_{22} &= \rho_{12}B_{12}\rho_{12}^{-1}\rho_{12}^{-1} \\ &= \hat{b}^{-1}(\hat{B}\hat{b})\hat{b} \end{aligned}$$

Da igualdade acima, obtemos $\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b}$.

Desse modo, obtivemos todas as relações da tabela (2.1) do teorema. Vamos agora calcular as relações dadas na tabela (2.2). Para isso, consideremos a seguinte fibração

$$(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \xrightarrow{i} (M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \xrightarrow{p \circ p_{1|}} S^1$$

onde, $i(x, y) = (< x, 0 >, < y, 0 >)$. Da fibração acima, obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \xrightarrow{i_\#}$$

$$\xrightarrow{i_\#} \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \xrightarrow{p \circ p_{1|\#}} \pi_1(S^1, < 0 >) \simeq \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

A sequência acima cinde visto que $\mathbb{Z}$ é livre. Assim, temos que $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$ é isomorfo ao produto semi-direto $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \rtimes \mathbb{Z}$.

Consideremos o homeomorfismo $h : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) \to M(\phi \times \phi)$, sobre S^1, dado por $h(< x, t >, < y, t >) =< x, y, t >$. Tomando a restrição de h a $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta$, obtemos o seguinte homeomorfismo sobre S^1, $h_| : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta \to M(\phi \times \phi) - h(\Delta)$.

Pelo homeomorfismo acima, os laços $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c_0}, \tilde{a}, \tilde{b}$ podem ser vistos em $M(\phi \times \phi) - h(\Delta)$, como $\tilde{\alpha} =< \bar{\alpha}, x_1, 0 >, \tilde{\beta} =< \bar{\beta}, x_1, 0 >, \tilde{c_0} =< x_2, x_1, t >, \tilde{a} =< x_2, \bar{a}, 0 >$ e $\tilde{b} =< x_2, \bar{b}, 0 >$. Esses laços, podem ser vistos como representantes de classes de laços em $(K \times K - \Delta_K)$ de maneira natural, por exemplo, $\tilde{\alpha}$ seria visto como um par de laços em $K \times K - \Delta_K$, onde $\bar{\alpha}$ é o laço na primeira componente e, x_1 é o laço constante na segunda componente.

Da mesma maneira, como foi feito acima, podemos olhar para os representantes dos laços $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c_0}, \tilde{a}, \tilde{b}$ e interpreta-los da seguinte forma: os laços $\tilde{a}, \tilde{b}$ são elementos na primeira cópia de K em $K \times K$ e os laços $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ são elementos na segunda cópia de K em $K \times K$.

Seja $\phi \times \phi$ um homeomorfismo de $K \times K$. Seja $M((\phi \times \phi)_|)$ o espaço obtido de $K \times K - \Delta \times I$ pela relação $(x, y, 0) \sim ((\phi \times \phi)_|(x, y)), 1)$. Então, temos que $M((\phi \times \phi)_|)$ é homeomorfo a $M(\phi \times \phi) - h(\Delta)$. De fato, a aplicação $g : M(\phi \times \phi) - h(\Delta) \to M((\phi \times \phi)_|)$ definida por $g(< x, y, t >) =< x, y, t >$, com $x \neq y$ é um homeomorfismo.

No espaço $M((\phi \times \phi)_|)$, com a seção $s_0 : S^1 \to M((\phi \times \phi)_|)$ dada por $s_0(t) =< x_2, x_1, t >$, podemos mostrar que

$$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\alpha})$$

$$\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\beta})$$

$$\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{a})$$

$$\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{b}).$$

Observemos que a conjugação acima resulta da ação conjugação de $\mathbb{Z} \to Aut(K \times K - \Delta)$, que vem da seção s_0, da mesma forma como fizemos na proposição 1.3.5.

Pela nossa notação temos

$$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-\epsilon} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha}^{-\epsilon} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b})$$

$$\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-\eta}\tilde{\alpha}^{-p} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\beta})\tilde{\beta}^{-\eta}\tilde{\alpha}^{-p} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b}).$$

Nosso próximo objetivo é calcular $(\phi \times \phi)_{|\#} : \pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \to \pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$. Para isso, faremos algumas considerações.

I) Consideremos o seguinte par de diagramas comutativos;

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(K - x_2, x_1) \arrow[r, "(\phi_|)_\#"] \arrow[d, "j_\#"'] & \pi_1(K - x_2, x_1) \arrow[d, "j_\#"] \\
\pi_1(K, x_1) \arrow[r, "\phi_\#"] & \pi_1(K, x_1)
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(K - x_2, x_1) \arrow[r, "(\phi_|)_\#"] \arrow[d, "(i_2)_\#"'] & \pi_1(K - x_2, x_1) \arrow[d, "(i_2)_\#"] \\
\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \arrow[r, "(\phi\times\phi)_{|\#}"] \arrow[d, "(p_{1|})_\#"'] & \pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1)) \arrow[d, "(p_{1|})_\#"] \\
\pi_1(K, x_2) \arrow[r, "\phi_\#"] & \pi_1(K, x_2)
\end{tikzcd}$$

onde, $j_\#$ é o homomorfismo induzido pela inclusão $j : K - x_2 \to K$, $(i_2)_\#$ é o homomorfismo induzido pela aplicação $i_2 : K - x_2 \to K \times K - \Delta_K$ dada por $i_2(x) = (x_2, x)$ e $(p_{1|})_\#$ é o homomorfismo induzido pela aplicação $p_{1|} : K \times K - \Delta_K \to K$ dada por $p_{1|}(x, y) = x$.

II) Denotando por $\hat{a}, \hat{b}, \hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ os geradores de $\pi_1(K \times K - \Delta_K, (x_2, x_1))$ temos; $i_\#(\hat{a}) = \tilde{a}, i_\#(\hat{b}) = \tilde{b}, i_\#(\hat{\alpha}) = \tilde{\alpha}, i_\#(\hat{\beta}) = \tilde{\beta}$ e $i_{2\#}(\bar{a}) = \hat{a}, i_{2\#}(\bar{b}) = \hat{b}, i_{1\#}(\bar{\alpha}) = \hat{\alpha}, i_{1\#}(\bar{\beta}) = \hat{\beta}$.

III) Consideremos as seguintes identidades:

$$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$$

$$\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$$

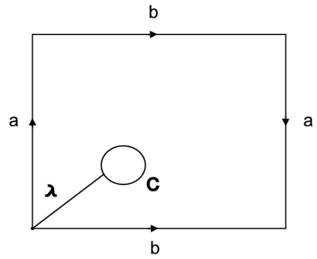
$$\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$$

$$\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}).$$

IV) Denotemos por $\pi_1(K, *) =< a, b | abab^{-1} = 1 >$ e $\pi_1(K - x, *) =< \bar{a}, \bar{b} >$. Se $w_{\bar{a}}, w_{\bar{b}} \in \pi_1(K - x, *)$ são tais que $w_{\bar{a}} w_{\bar{b}} w_{\bar{a}} w_{\bar{b}}^{-1} = \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}$ ou $w_{\bar{a}} w_{\bar{b}} w_{\bar{a}} w_{\bar{b}}^{-1} = \bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1}$, então existe um homeomorfismo $\phi : K \to K$ tal que $(\phi_|)_\# : \pi_1(K - x, *) \to \pi_1(K - x, *)$ aplica $\bar{a} \mapsto w_{\bar{a}}$ e $\bar{b} \mapsto w_{\bar{b}}$.

Daremos um esboço da demonstração da consideração IV acima, no caso em que $w_{\bar{a}}w_{\bar{b}}w_{\bar{a}}{w_{\bar{b}}}^{-1} = \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}$.

Sejam $A = S^1$, $X = D^2$ e $Y = S^1 \vee S^1 \vee \{c \cup \lambda\}$, onde c é um circulo de raio pequeno contido em K e λ é uma aresta ligando o ponto base ao círculo c.



K: Garrafa de Klein

Vamos olhar para $X \cup_f Y$, onde $f : S^1 \to Y$ é dada por $[f] = \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}\lambda c \lambda^{-1}$. Definimos $h : Y \subset X \cup_f Y \to K - \{disco\}$ por $h(\bar{a}) \equiv$ uma curva que representa $w_{\bar{a}}$, $h(\bar{b}) \equiv$ uma curva que representa $w_{\bar{b}}$, $h(\lambda) = \lambda$ e $h(c) = c$. Queremos saber se h se estende para $X \cup_f Y$.

Temos $h_\# \circ f_\# : \pi_1(S^1) \to \pi_1(K - \{disco\})$. Como $\lambda c \lambda^{-1}$ é homotópico a $\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}$, então temos que se d é um gerador de $\pi_1(S^1)$, obtemos $h_\# \circ f_\#(d) = 1$. Portanto, $h \circ f$ se estende para $X = D^2$ e, logo, existe $H : X \cup_f Y \to K - \{disco\}$ que estende h. Temos que H é uma equivalência de homotopia. Logo, H é homotópica a um homeomorfismo $\bar{\phi} : K - \{disco\} \to K - \{disco\}$. Portanto existe $\phi : K \to K$ que estende $\bar{\phi}$. Por construção, temos $(\phi_|)_\#(\bar{a}) = w_{\bar{a}}$ e $(\phi_|)_\#(\bar{b}) = w_{\bar{b}}$.

O caso em que temos $w_{\bar{a}}w_{\bar{b}}w_{\bar{a}}{w_{\bar{b}}}^{-1} = \bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1}$ é análogo ao anterior. $\square$

Agora, usaremos as considerações acima, em cada caso da tabela do teorema 2.1.1, para obtermos a segunda tabela do teorema 2.3.1.

Caso I) $\phi_0(1, 1)$.

Consideremos $\phi : K \to K$ a identidade. Temos $(\phi_|)_\# : \bar{a} \to \bar{a}, \bar{b} \to \bar{b}$.

De I), obtemos $\phi_{\#} = \phi_0(1,1)$, $(\phi \times \phi)_{|\#} : \hat{a} \to \hat{a}, \hat{b} \to \hat{b}$. Portanto, obtemos que $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{a}) = \tilde{a}$ e $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{b}) = \tilde{b}$.

De $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}$ e $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{b}$, obtemos $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0} = \tilde{a}$ e $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{b}$. Logo, $\tilde{c_0}$ comuta com $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{a}^{-1}$ e $\tilde{b}^{-1}$. Sabemos que $B = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$. Disso, temos que $\tilde{c_0}$ também comuta com B.

Usando a primeira identidade de III), $w_2(\tilde{a}, \tilde{b}) = \tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}$, a tabela 2.1 e os fatos acima, temos que $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$ implica $\tilde{c_0}B\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_2(\tilde{a},\ \tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}w_2(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Disso, concluimos que $w_2(\tilde{a}, \tilde{b})$ deve satisfazer $B\tilde{a}B^{-1} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b})B\ \tilde{a}B^{-1}w_2(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$.

Da mesma forma, usando a segunda identidade de III), $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\ \tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, temos $\tilde{c_0}B\tilde{a}^{-1}(\tilde{b}\tilde{a}^{-2})\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}p_2(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Portanto, $w_2(\tilde{a}, \tilde{b})$ deve satisfazer $B\tilde{a}^{-1}(\tilde{b}\tilde{a}^{-2})\tilde{a}B^{-1} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b})B\tilde{a}^{-1}(\tilde{b}\tilde{a}^{-2})\tilde{a}B^{-1}w_2(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Assim, temos que $w_2(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1$ é a solução.

Agora, usaremos a terceira e quarta identidades de III); $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\ \tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$ e $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$; a tabela 2.1 e $w_3(\tilde{a}, \tilde{b}) = \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}$, para encontrar um sistema de equações envolvendo a palavra $w_3(\tilde{a}, \tilde{b})$.

De $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obtemos $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b})$ $\tilde{\beta}\tilde{a}\ \tilde{\beta}^{-1}w_3(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$ que implica $\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}w_3(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Portanto, temos que $w_3(\tilde{a}, \tilde{b})$ deve satisfazer, $\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}w_3(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$.

De $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obtemos $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{\beta}\tilde{b}$ $\tilde{\beta}^{-1}w_3(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$ que implica $\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b}w_3(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Dessa forma, concluimos que $w_3(\tilde{a}, \tilde{b})$ deve satisfazer $\tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b}w_3(\tilde{a}, \tilde{b})^{-1}$. Assim, obtemos que $w_3(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1$ é a solução.

Dos resultados acima, obtemos $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1$ e $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-1} = w_3(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1$. Como $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha}^{-1} = w_2(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1$ e $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\beta})\tilde{\beta}^{-1}$ $= w_3(\tilde{a}, \tilde{w}) = 1$, então obtemos $(\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}$ e $(\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\beta}) = \tilde{\beta}$.

Caso II) $\phi_1(1,1)$.

Da consideração IV), podemos tomar $\phi : K \to K$ tal que $(\phi_|)_\# : \bar{a} \to \bar{a}, \bar{b} \to \bar{b}\bar{a}^{-1}$. Portanto, de I), obtemos $\phi_\# = \phi_1(1,1)$, $(\phi\times\phi)_{|\#} : \hat{a} \to \hat{a}, \hat{b} \to \hat{b}\hat{a}^{-1}$. Assim, temos $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi\times\phi)_{|\#}(\tilde{a}) = \tilde{a}$ e $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi\times\phi)_{|\#}(\tilde{b}) = \tilde{b}\tilde{a}^{-1}$.

De $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{b}\tilde{a}^{-1}$, obtemos $\tilde{b} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0}\tilde{a}^{-1}$, pois $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0} = \tilde{a}$. Logo, temos $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{b}\tilde{a}$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\\
&= B.
\end{aligned}$$

Da identidade $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\ \tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obtemos $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}$ $\tilde{c_0}^{-1} = w_2(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Daí, temos $\tilde{c_0}B\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_2(\tilde{a},\tilde{b})B\tilde{a}B^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$.

Temos $\tilde{c_0}B\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = B\tilde{a}B^{-1}$. Portanto, $w_2(\tilde{a},\tilde{b})$ deve satisfazer $B\tilde{a}B^{-1} = w_2(\tilde{a},\tilde{b})B\tilde{a}B^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$.

Da identidade $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obtemos $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}$ $\tilde{c_0}^{-1} = w_2(\tilde{a},\,\tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$ e, logo, $\tilde{c_0}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_2(\tilde{a},\,\tilde{b})B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}w_2(\tilde{a},$ $\tilde{b})^{-1}$.

Temos $\tilde{c_0}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{a}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}$, portanto, temos que $w_2(\tilde{a},\tilde{b})$ deve satisfazer $B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1} = w_2(\tilde{a},\tilde{b})B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}w_2(\tilde{a},$ $\tilde{b})^{-1}$. Logo, temos que $w_2(\tilde{a},\tilde{b}) = 1$ é a solução.

Nesse caso, temos $w_3(\tilde{a},\tilde{b}) = \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}$. Da identidade $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obtemos $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$ e, portanto, $\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Das relações acima, temos $\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}$

$\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{a}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}$ e

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} &= \tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1} \\
&= B(\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1})B^{-1}.
\end{aligned}$$

Assim, $w_3(\tilde{a},\tilde{b})$ deve satisfazer $\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b})B(\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1})B^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$.

Agora, da identidade $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obtemos a igualdade $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$.

Temos;

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{a}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{a}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1} \\
&= \tilde{a}\tilde{b}^{-1}(B\tilde{b}\tilde{a}^{-2})\tilde{b}\tilde{a}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} &= \tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}B\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1} \\
&= B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1} \\
&= B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}(B\tilde{b}\tilde{a}^{-2})\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1},
\end{aligned}$$

onde $B = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$.

Assim, temos que $w_3(\tilde{a},\tilde{b})$ também deve satisfazer $\tilde{a}\tilde{b}^{-1}(B\tilde{b}\tilde{a}^{-2})\tilde{b}\tilde{a}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b})B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$ $(B\tilde{b}\tilde{a}^{-2})\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Logo, $w_3(\tilde{a},\tilde{b}) = B^{-1}$ é a solução.

Portanto, dos resultados acima, temos $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = w_2(\tilde{a},\tilde{b}) = 1$ e $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b}) = B^{-1}$. Como $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = (\phi\times\phi)_{|\#}(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha}^{-1} = w_2(\tilde{a},\tilde{b}) = 1$ e $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = (\phi\times\phi)_{|\#}(\tilde{\beta})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b}) = B^{-1}$, então temos $(\phi\times\phi)_{|\#}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}$ e $(\phi\times\phi)_{|\#}(\tilde{\beta}) = B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$, onde $B = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$.

Caso III) $\phi_0(1,-1)$.

Da observação IV), podemos tomar $\phi : K \to K$ tal que $(\phi_|)_\# : \bar{a} \to \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1} = \bar{a}\bar{E}^{-1}, \bar{b} \to \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1}\ \bar{a}^{-1} = \bar{E}\bar{b}^{-1}\bar{E}^{-1}$, onde $\bar{E} = \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}$.

De I), obtemos $\phi_\# = \phi_0(1,-1)$, $(\phi \times \phi)_{|\#} : \hat{a} \to \hat{a}\hat{b}\hat{a}^{-1}\hat{b}^{-1}\hat{a}^{-1} = \hat{a}\hat{E}^{-1}, \hat{b} \to \hat{a}\hat{b}\hat{a}\hat{b}^{-1}\hat{a}^{-1}\hat{b}^{-1}\ \hat{a}^{-1} = \hat{E}\hat{b}^{-1}\hat{E}^{-1}$, onde $\hat{E} = \hat{a}\hat{b}\hat{a}\hat{b}^{-1}$.

Portanto, temos $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{a}) = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}$ e $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{b}) = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1} = B\tilde{b}^{-1}B^{-1}$, onde $B = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$.

Das igualdades acima, temos $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}$ e $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = B\tilde{b}B^{-1}$. Agora, como

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}B^{-1} \\
&= \tilde{a}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b}B^{-1} \\
&= \tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}B^{-1} \\
&= B^{-1},
\end{aligned}$$

então temos $\tilde{a} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}B$ e, portanto, temos $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0} = \tilde{a}B^{-1}$. Também temos $\tilde{b} = \tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0} = B^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}B$ e, portanto, $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}^{-1}$ $\tilde{c_0} = B\tilde{b}B^{-1}$. Essa última igualdade implica $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = B\tilde{b}^{-1}B^{-1}$.

Da identidade $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obtemos a relação $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}\ B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_2(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1} = w_2(\tilde{a},\tilde{b})B\tilde{a}B^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Observemos que,

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}B\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{a}.
\end{aligned}$$

Assim, temos que $w_2(\tilde{a},\tilde{b})$ deve satisfazer $\tilde{a} = w_2(\tilde{a},\tilde{b})B\tilde{a}B^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$.

Agora da identidade $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}=(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obtemos a equação $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}=w_2(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}=w_2(\tilde{a},\tilde{b})B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Como

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}\tilde{\alpha}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&\quad \tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}\\
&\quad B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}B\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&\quad \tilde{c_0}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= B^{-1}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}B^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}B^{-1}B\\
&= \tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\\
&= \tilde{b}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\\
&= \tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1},
\end{aligned}$$

então $w_2(\tilde{a},\tilde{b})$ deve satisfazer $\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}=w_2(\tilde{a},\tilde{b})B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Disso, concluimos que $w_2(\tilde{a},\tilde{b})=B^{-1}$ é a solução.

Também, da identidade $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}=(\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obtemos a equação $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}=w_3(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{\beta}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Notemos que,

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{a}B^{-1}.
\end{aligned}$$

Da igualdade acima, obtemos $\tilde{\beta}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}=\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}=\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0}=\tilde{a}B^{-1}B=\tilde{a}$. Portanto, temos $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{\beta}=\tilde{a}B^{-1}$.

Das equações acima, temos que $w_3(\tilde{a},\tilde{b})$ deve satisfazer $\tilde{a}B^{-1}=w_3(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{a}B^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$.

Agora, considerando a identidade $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obtemos $\tilde{c_0}\tilde{\beta}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Observemos que,

$$
\begin{aligned}
\tilde{c_0}\tilde{\beta}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}^{-1} \\
&\quad \tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{b} \\
&\quad \tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= B\tilde{b}B^{-1}B \\
&= B\tilde{b}.
\end{aligned}
$$

Disso, concluimos que $\tilde{\beta}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{c_0}^{-1}B\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = B^{-1}B\tilde{b}^{-1}B^{-1} = \tilde{a}^{-1}\ \tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}$ e, logo, $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta} = B\tilde{b}^{-1}B^{-1}$.

Da igualdade acima, resulta $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta} = B\tilde{b}^{-1}B^{-1}$ que implica $B\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\ \tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}B\tilde{a}^{-1} = B\tilde{b}^{-1}B^{-1}$. Assim, temos $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta} = \tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{a}B^{-1} = \tilde{b}^{-1}B^{-1}$ e, portanto, $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta} = B\tilde{b}$.

Da equações acima, resulta que $w_3(\tilde{a},\tilde{b})$ deve satisfazer $B\tilde{b} = w_3(\tilde{a},\tilde{b})B\tilde{b}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Dessa forma, temos que $w_3(\tilde{a},\tilde{b}) = 1$ é a solução.

Portanto, dos resultados acima, temos $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha}^{-1} = w_2(\tilde{a},\tilde{b}) = B^{-1}$. Assim, temos $(\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\alpha}) = B^{-1}\tilde{\alpha}$. Também, temos $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\beta})\tilde{\beta} = w_3(\tilde{a},\tilde{b}) = 1$. Logo, obtemos $(\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\beta}) = \tilde{\beta}^{-1}$.

Caso IV) $\phi_1(1,-1)$.

Da observação *IV*), podemos tomar $\phi : K \to K$ tal que $(\phi_|)_\# : \bar{a} \to \bar{a}\bar{E}^{-1}, \bar{b} \to \bar{E}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1}$, onde $\bar{E} = \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}$.

De I), obtemos $\phi_\# = \phi_1(1,-1)$, $(\phi \times \phi)_{|\#} : \hat{a} \to \hat{a}\hat{E}^{-1}, \hat{b} \to \hat{E}\hat{b}^{-1}\hat{a}^{-1}$, onde $\hat{E} = \hat{a}\hat{b}\hat{a}\hat{b}^{-1}$. Assim, temos $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{a}) = \tilde{a}B^{-1}$ e $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{b}) = B\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}$, onde $B = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$.

Nesse caso, temos $\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = B\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}$, daí segue que $\tilde{b} = \tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{c_0}$. Das igualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b}B^{-1} \\
&= \tilde{a}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b}B^{-1} \\
&= \tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}B^{-1} \\
&= B^{-1}.
\end{aligned}$$

Segue daí que, $\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0} = B$, e disso obtemos $\tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0} = B^{-1}$. Como $\tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}B$, então temos $\tilde{a} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}B$ e, portanto, $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0} = \tilde{a}B^{-1}$.

Temos então, $\tilde{b} = \tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{c_0} = B^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}B\tilde{a}^{-1}$. Daí, obtemos $\tilde{c_0}^{-1}\ \tilde{b}^{-1}\tilde{c_0} = B\tilde{b}\tilde{a}B^{-1}$, que implica $\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}$.

Usando a identidade $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obteremos $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}$ $B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_2(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Como

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{a}B^{-1}B \\
&= \tilde{a},
\end{aligned}$$

então $w_2(\tilde{a},\tilde{b})$ deve satisfazer $\tilde{a} = w_2(\tilde{a},\tilde{b})B\tilde{a}B^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$.

Agora, usando a identidade $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obteremos $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}=w_2(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Também, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}\tilde{\alpha}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&\quad \tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}\\
&\quad B\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}B\tilde{a}^{-1}B\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{a}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}sB^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b}B^{-1}B\\
&= \tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}.
\end{aligned}$$

Então, $w_2(\tilde{a},\tilde{b})$ deve satisfazer $\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}=w_2(\tilde{a},\tilde{b})B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}w_2(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Portanto, $w_2(\tilde{a},\tilde{b})=B^{-1}$ é a solução.

Usando a identidade $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}=(\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{a}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obteremos a igualdade $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}=w_3(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Temos,

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\\
&= \tilde{a}B^{-1}.
\end{aligned}$$

Daí segue $\tilde{\beta}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}=\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}=\tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0}=\tilde{a}B^{-1}B=\tilde{a}$ e, portanto, $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{\beta}=\tilde{a}B^{-1}$. Também, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} &= \tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}\\
&= \tilde{a}B^{-1}.
\end{aligned}$$

Assim $w_3(\tilde{a},\tilde{b})$ deve satisfazer $\tilde{a}B^{-1}=w_3(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{a}B^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$.

Agora, usando a identidade $\tilde{c_0}\tilde{\beta}(\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0})\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = (\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1})\tilde{b}(\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1})$, obteremos a equação $\tilde{c_0}\tilde{\beta}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b})\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Das relações acima, temos a igualdade,

$$\begin{aligned}
\tilde{c_0}\tilde{\beta}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} &= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1} \\
&\quad \tilde{\beta}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b} \\
&\quad \tilde{b}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= \tilde{c_0}\tilde{a}^{-1}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}^{-1}\tilde{c_0}^{-1} \\
&= B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}B^{-1} \\
&= B\tilde{b}B^{-1}.
\end{aligned}$$

Daí concluimos,

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1} &= \tilde{c_0}^{-1}B\tilde{b}B^{-1}\tilde{c_0} \\
&= \tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0} \\
&= B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}B \\
&= \tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos $B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1} = \tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta} = \tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta} = B\tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}$ e, logo, $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta} = \tilde{b}^{-1}B^{-1}$ que implica $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta} = B\tilde{b}$.

Agora, $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\alpha}B\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}$ $B^{-1}B\tilde{a}B^{-1} = BbB^{-1}$.

Assim, $w_3(\tilde{a},\tilde{b})$ deve satisfazer $B\tilde{b}B^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b})B\tilde{b}B^{-1}w_3(\tilde{a},\tilde{b})^{-1}$. Portanto, $w_3(\tilde{a},\tilde{b})$ $= 1$ é a solução.

Como $\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha}^{-1} = w_2(\tilde{a},\tilde{b}) = B^{-1}$, então segue que $(\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\alpha})$ $= B^{-1}\tilde{\alpha}$. Agora, como $\tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\beta})\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1} = w_3(\tilde{a},\tilde{b}) = 1$, então temos $(\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\beta}) = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}$.

Assim, demonstramos todos os casos da tabela 2.2 do teorema 2.3.1. $\square$

Observação 2.3.1. *Notemos que, toda palavra $p(\tilde{a}, \tilde{b})$ pode ser escrita como uma palavra em $w = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}$ e $v = \tilde{a}\tilde{b}$. De fato, $w = v\tilde{a}^{-1}v^{-1}$, daí tiramos $\tilde{a} = v^{-1}w^{-1}v$. Agora, $\tilde{b} = \tilde{a}^{-1}v$, assim obtemos $\tilde{b} = v^{-1}wv^2$.*

Para ajudar a obter resultados no próximo capítulo, será conveniente calcularmos os conjugados dos geradores w e v em relação a $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ e $\tilde{c_0}$. Dessa forma, calcularemos as tabelas abaixo.

$\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1} = B = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$	
$\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}B^{-1}$	$\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{a}\tilde{\alpha} = \tilde{a}B^{-1}\tilde{a}B\tilde{a}$
$\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} = B(\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1})B^{-1}$	$\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{b}\tilde{\alpha} = \tilde{a}B^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}(\tilde{b}B)\tilde{b}\tilde{a}B\tilde{a}^{-1}$
$\tilde{\alpha}B\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}^{-1}(B)\tilde{a}B^{-1}$	$\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha} = \tilde{a}B\tilde{a}^{-1}$
$\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}$	$\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta} = \tilde{a}\tilde{b}(\tilde{a}^{-1})\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}$
$\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b}$	$\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta} = B\tilde{b}$
$\tilde{\beta}B\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}(B^{-1})\tilde{b}$	$\tilde{\beta}^{-1}B\tilde{\beta} = B\tilde{b}(B^{-1})\tilde{b}^{-1}B^{-1}$

(2.3)

Cálculo da tabela 2.3.

Para calcular a tabela 2.3 usaremos os resultados já obtidos na tabela 2.1. Temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}B\tilde{\alpha}^{-1} &= \tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= \tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} \\
&= B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}B^{-1} \\
&= B\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}B^{-1} \\
&= B\tilde{a}^{-1}B\tilde{a}B^{-1}.
\end{aligned}$$

Da igualdade acima, obtemos $\tilde{\alpha}B\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}$, que implica $\tilde{\alpha}B\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}^{-1}$. Assim, $\tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}B\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{a}^{-1} = B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1} = B$. Daí temos que $\tilde{\alpha}\tilde{a}B\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = B$ e, portanto, $\tilde{a}B\tilde{a}^{-1} = \tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}$.

Usando $\tilde{\alpha}B\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}^{-1}$, obtemos $B\tilde{a}^{-1} = \tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha} = \tilde{a}B\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\ \tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}$, que implica $\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha} = \tilde{a}B^{-1}\tilde{a}^{-1}B\tilde{a}^{-1}$ e, portanto, temos $\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{a}\tilde{\alpha} = \tilde{a}B^{-1}\tilde{a}B\tilde{a}^{-1}$.

Agora, da igualdade $\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}$, obtemos $\tilde{b} = \tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\ \tilde{\alpha}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{b}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha} = \tilde{a}B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{b}\tilde{\alpha}\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}$ $B^{-1}\tilde{a}^{-1} = B\tilde{a}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{b}\tilde{\alpha}\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}^{-1}$. Portanto, obtemos $\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{b}\tilde{\alpha} = \tilde{a}B^{-1}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{a}B\tilde{a}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}$ $\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}(\tilde{b}B)\tilde{b}\tilde{a}\ B\tilde{a}^{-1}$. Temos

$$
\begin{aligned}
\tilde{\beta}B\tilde{\beta}^{-1} &= \tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}^{-1} \\
&= \tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta}^{-1} \\
&= \tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{b} \\
&= \tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{b}.
\end{aligned}
$$

Da igualdade acima, concluimos $\tilde{\beta}B\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{b} = \tilde{b}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b} = \tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}$. Daí temos $\tilde{\beta}B = \tilde{a}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{a}$, o que implica $\tilde{a}\tilde{\beta}B\tilde{a}^{-1} = \tilde{\beta}$ e, portanto, $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{\beta} = \tilde{a}B^{-1}$.

Observemos que $\tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{b} = \tilde{a}\tilde{b}$. Disso, obtemos $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{\beta} = \tilde{a}\tilde{b}$. Agora, temos $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{\beta} = \tilde{a}\tilde{b}$ que implica $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta} = \tilde{a}\tilde{b}$ e, assim $\tilde{a}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta} = \tilde{a}\tilde{b}$. Portanto, temos $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta} = B\tilde{b}$. Por fim, temos

$$
\begin{aligned}
\tilde{\beta}^{-1}B\tilde{\beta} &= \tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta} \\
&= \tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{\beta} \\
&= \tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}\tilde{a}B^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1} \\
&= B\tilde{b}B^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma finalizamos os cálculos da tabela 2.3. Passamos à tabela 2.4.

Caso I $\phi_0(1,1)$	$\tilde{c}_0\tilde{\alpha}\tilde{c}_0{}^{-1} = \tilde{\alpha}$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{c}_0 = \tilde{\alpha}$ $\quad \tilde{c}_0\tilde{\beta}\tilde{c}_0{}^{-1} = \tilde{\beta}$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{c}_0 = \tilde{\beta}$ $\tilde{c}_0\tilde{a}\tilde{c}_0{}^{-1} = \tilde{a}$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}\tilde{a}\tilde{c}_0 = \tilde{a}$ $\quad \tilde{c}_0\tilde{b}\tilde{c}_0{}^{-1} = \tilde{b}$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}\tilde{b}\tilde{c}_0 = \tilde{b}$ $\tilde{c}_0 B\tilde{c}_0{}^{-1} = B$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}B\tilde{c}_0 = B$
Caso II $\phi_1(1,1)$	$\tilde{c}_0\tilde{\alpha}\tilde{c}_0{}^{-1} = \tilde{\alpha}$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{c}_0 = \tilde{\alpha}$ $\quad \tilde{c}_0\tilde{\beta}\tilde{c}_0{}^{-1} = \tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{c}_0 = \tilde{\beta}\tilde{\alpha}$ $\tilde{c}_0\tilde{a}\tilde{c}_0{}^{-1} = \tilde{a}$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}\tilde{a}\tilde{c}_0 = \tilde{a}$ $\quad \tilde{c}_0\tilde{b}\tilde{c}_0{}^{-1} = \tilde{b}\tilde{a}^{-1}$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}\tilde{b}\tilde{c}_0 = \tilde{b}\tilde{a}$ $\tilde{c}_0 B\tilde{c}_0{}^{-1} = B$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}B\tilde{c}_0 = B$
Caso III $\phi_0(1,-1)$	$\tilde{c}_0\tilde{\alpha}\tilde{c}_0{}^{-1} = B^{-1}\tilde{\alpha}$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{c}_0 = B^{-1}\tilde{\alpha}$ $\quad \tilde{c}_0\tilde{\beta}\tilde{c}_0{}^{-1} = \tilde{\beta}^{-1}$ $\tilde{c}_0{}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{c}_0 = \tilde{\beta}^{-1}$ $\tilde{c}_0\tilde{a}\tilde{c}_0{}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}\tilde{a}\tilde{c}_0 = \tilde{a}B^{-1}$ $\quad \tilde{c}_0\tilde{b}\tilde{c}_0{}^{-1} = B\tilde{b}^{-1}B^{-1}$ $\tilde{c}_0 B\tilde{c}_0{}^{-1} = B^{-1}$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}B\tilde{c}_0 = B^{-1}$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}\tilde{b}\tilde{c}_0 = B\tilde{b}^{-1}B^{-1}$
Caso IV $\phi_1(1,-1)$	$\tilde{c}_0\tilde{\alpha}\tilde{c}_0{}^{-1} = B^{-1}\tilde{\alpha}$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{c}_0 = B^{-1}\tilde{\alpha}$ $\quad \tilde{c}_0\tilde{\beta}\tilde{c}_0{}^{-1} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}$ $\tilde{c}_0{}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{c}_0 = \tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}$ $\tilde{c}_0\tilde{a}\tilde{c}_0{}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}\tilde{a}\tilde{c}_0 = \tilde{a}B^{-1}$ $\quad \tilde{c}_0\tilde{b}\tilde{c}_0{}^{-1} = B\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}$ $\tilde{c}_0 B\tilde{c}_0{}^{-1} = B^{-1}$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}B\tilde{c}_0 = B^{-1}$ $\quad \tilde{c}_0{}^{-1}\tilde{b}\tilde{c}_0 = B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1}$

(2.4)

Notemos que a tabela 2.4 já foi obtida na demonstração do teorema 2.3.1. Com isso sua demonstração foi finalizada. A seguir temos a tabela 2.5.

$\tilde{\alpha}v\tilde{\alpha}^{-1} = wvw$	$\tilde{\alpha}^{-1}v\tilde{\alpha} = w^{-1}vw^{-1}$
$\tilde{\alpha}w\tilde{\alpha}^{-1} = w$	$\tilde{\alpha}^{-1}w\tilde{\alpha} = w$
$\tilde{\alpha}B\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\alpha}(w^{-1}v^{-1}w^{-1}v)\tilde{\alpha}^{-1}$ $= w^{-1}Bw$	$\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^{-1}(w^{-1}v^{-1}w^{-1}v)\tilde{\alpha}$ $= wBw^{-1}$
$\tilde{\beta}v\tilde{\beta}^{-1} = v$	$\tilde{\beta}^{-1}v\tilde{\beta} = v$
$\tilde{\beta}w\tilde{\beta}^{-1} = v^{-1}w^{-1}v$	$\tilde{\beta}^{-1}w\tilde{\beta} = vw^{-1}v^{-1}$
$\tilde{\beta}B\tilde{\beta}^{-1} = v^{-1}wB^{-1}w^{-1}v$	$\tilde{\beta}^{-1}B\tilde{\beta} = vwB^{-1}w^{-1}v^{-1}$

(2.5)

Cálculo da tabela 2.5.

Temos $B = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1} = v^{-1}w^{-1}vv^{-1}wv^2v^{-1}w^{-1}vv^{-2}w^{-1}v = w^{-1}v^{-1}w^{-1}v$.

A tabela 2.5 é dada pelos cálculos dos conjugados abaixo. Primeiramente, faremos a conjugação em relação a $\tilde{\alpha}$.

$\tilde{\alpha} v \tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1} = B\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1} = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}$ $\tilde{a}^{-1}B^{-1} = \tilde{a}\tilde{b}B^{-1} = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}B^{-1} = \tilde{a}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}B^{-1} = wvw$.

$\tilde{\alpha} w \tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\alpha}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}B^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}B^{-1}\tilde{a}B^{-1} = \tilde{a}B^{-1} = w$.

$\tilde{\alpha} B \tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\alpha} w^{-1}v^{-1}w^{-1}v\tilde{\alpha}^{-1}$. Também, temos $\tilde{\alpha} B \tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}^{-1}B\tilde{a}B^{-1} = w^{-1}Bw$.

$\tilde{\alpha}^{-1} \tilde{v} \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^{-1}\tilde{a}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{b}\tilde{\alpha} = \tilde{a}B^{-1}\tilde{a}B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{b}B\tilde{b}\tilde{a}B\tilde{a}^{-1} = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}B\tilde{a}^{-1}$ $= B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}B\tilde{a}^{-1} = B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}B\tilde{a}^{-1} = B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}B\tilde{a}^{-1} = w^{-1}vw^{-1}$.

$\tilde{\alpha}^{-1} w \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^{-1}aB^{-1}\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^{-1}a\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha} = \tilde{a}B^{-1}\tilde{a}B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}^{-1} = \tilde{a}B^{-1} = w$.

$\tilde{\alpha}^{-1} B \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^{-1}w^{-1}v^{-1}w^{-1}v\tilde{\alpha}$, por outro lado, temos $\tilde{\alpha}^{-1} B \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^{-1}w^{-1}v^{-1}w^{-1}v\tilde{\alpha} =$ $\tilde{\alpha}^{-1}w^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}v^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}w^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}v\tilde{\alpha} = w^{-1}wv^{-1}ww^{-1}w^{-1}vw^{-1} = ww^{-1}v^{-1}w^{-1}vw^{-1} = w$ Bw^{-1}.

Agora, faremos a conjugação em relação a $\tilde{\beta}$.

$\tilde{\beta} v \tilde{\beta}^{-1} = \tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b}\tilde{b} = \tilde{a}\tilde{b} = v$.

$\tilde{\beta} w \tilde{\beta}^{-1} = \tilde{\beta}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}B^{-1}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{b}^{-1}B\tilde{b} = \tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b} =$ $v^{-1}w^{-1}v$.

$\tilde{\beta} B \tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}B^{-1}\tilde{b} = \tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}B^{-1}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b} = v^{-1}wB^{-1}w^{-1}v$.

$\tilde{\beta}^{-1} v \tilde{\beta} = \tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{\beta} = \tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{b}\tilde{\beta} = \tilde{a}B^{-1}B\tilde{b} = \tilde{a}\tilde{b} = v$.

$\tilde{\beta}^{-1} w \tilde{\beta} = \tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{\beta} = \tilde{\beta}^{-1}\tilde{a}\tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}B^{-1}\tilde{\beta} = \tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}B\tilde{b}^{-1}B^{-1} = \tilde{a}\tilde{b}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1} = v$ $w^{-1}v^{-1}$.

$\tilde{\beta}^{-1} B \tilde{\beta} = B\tilde{b}B^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1} = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1} = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}B^{-1}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1} = vwB^{-1}$ $w^{-1}v^{-1}$.

Assim, encerramos os cálculos da tabela 2.5. Passaremos agora aos cálculos da tabela 2.6. Isso se dá conjugando v, w em relação a $\tilde{c}_0$, em cada um dos quatro casos da tabela 2.1.

Caso I $\phi_0(1,1)$	$\tilde{c_0}v\tilde{c_0}^{-1} = v$ $\tilde{c_0}^{-1}v\tilde{c_0} = v$	$\tilde{c_0}w\tilde{c_0}^{-1} = w$ $\tilde{c_0}^{-1}w\tilde{c_0} = w$	$\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} = B$ $\tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0} = B$	
Caso II $\phi_1(1,1)$	$\tilde{c_0}v\tilde{c_0}^{-1} = wv$ $\tilde{c_0}^{-1}v\tilde{c_0} = w^{-1}v$	$\tilde{c_0}w\tilde{c_0}^{-1} = w$ $\tilde{c_0}^{-1}w\tilde{c_0} = w$	$\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} = B$ $\tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0} = B$	
Caso III $\phi_0(1,-1)$	$\tilde{c_0}v\tilde{c_0}^{-1} = v^{-1}$ $\tilde{c_0}^{-1}v\tilde{c_0} = v^{-1}$	$\tilde{c_0}w\tilde{c_0}^{-1} = v^{-1}w^{-1}v$ $\tilde{c_0}^{-1}w\tilde{c_0} = v^{-1}w^{-1}v$	$\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} = B^{-1}$ $\tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0} = B^{-1}$	(2.6)
Caso IV $\phi_1(1,-1)$	$\tilde{c_0}v\tilde{c_0}^{-1} = v^{-1}w^{-1}$ $\tilde{c_0}^{-1}v\tilde{c_0} = v^{-1}w$	$\tilde{c_0}w\tilde{c_0}^{-1} = v^{-1}w^{-1}v$ $\tilde{c_0}^{-1}w\tilde{c_0} = v^{-1}w^{-1}v$	$\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} = B^{-1}$ $\tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0} = B^{-1}$	

Cálculo da tabela 2.6.

Caso I) $\phi_0(1,1)$.

$\tilde{c_0}v\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}\tilde{b} = v.$

$\tilde{c_0}w\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}B^{-1} = w.$

$\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} = B.$

$\tilde{c_0}^{-1}v\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{a}\tilde{b} = v.$

$\tilde{c_0}^{-1}w\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{a}B^{-1} = w.$

$\tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0} = B.$

Caso II) $\phi_1(1,1)$.

$\tilde{c_0}v\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}\tilde{a}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b} = wv.$

$\tilde{c_0}w\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}B^{-1} = w.$

$\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} = B.$

$\tilde{c_0}^{-1}v\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a} = B\tilde{a}^{-1}\tilde{a}\tilde{b} = w^{-1}v.$

$\tilde{c_0}^{-1}w\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{a}B^{-1} = w.$

$\tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0} = B.$

Caso III) $\phi_0(1,-1)$.

$\tilde{c_0}v\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}^{-1}B^{-1} = \tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1} = v.$

$\tilde{c_0}w\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}B = \tilde{a} = v^{-1}w^{-1}v$.

$\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} = B$.

$\tilde{c_0}^{-1}v\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}^{-1}B^{-1} = \tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1} = v^{-1}$.

$\tilde{c_0}^{-1}w\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{a}B^{-1}B = v^{-1}w^{-1}v$.

$\tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0} = B^{-1}$.

Caso IV) $\phi_1(1,-1)$.

$\tilde{c_0}v\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}B\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1} = \tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1} = v^{-1}w^{-1}vv^{-1} = v^{-1}w^{-1}$.

$\tilde{c_0}w\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}B^{-1}\tilde{c_0}^{-1} = \tilde{a}B^{-1}B = \tilde{a} = v^{-1}w^{-1}v$.

$\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1} = B^{-1}$.

$\tilde{c_0}^{-1}v\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{b}\tilde{c_0} = \tilde{a}B^{-1}B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}B^{-1} = \tilde{b}^{-1}B^{-1} = \tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1} = v^{-1}wvv^{-1} = v^{-1}w$.

$\tilde{c_0}^{-1}w\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}B^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{c_0}^{-1}\tilde{a}\tilde{c_0}\tilde{c_0}^{-1}B^{-1}\tilde{c_0} = \tilde{a}B^{-1}B = \tilde{a} = v^{-1}w^{-1}v$.

$\tilde{c_0}^{-1}B\tilde{c_0} = B^{-1}$.

Assim, demonstramos todas as relações das tabelas acima.

Capítulo 3

O problema do levantamento.

Dadas aplicações $f_1, f_2 : M(\phi_p(1,\eta)) \to M(\phi_p(1,\eta))$, sobre S^1, queremos saber quando o par (f_1, f_2) pode ser deformado a um par livre de coincidência, por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1. Pelo diagrama 1.4 e pelos resultados obtidos no capítulo anterior, temos que esse problema é equivalente a existência de um levantamento para o diagrama abaixo, ou seja, (f_1, f_2) pode ser deformado a um par livre de coincidência se, e somente se, existir um levantamento ψ no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] \\
 & \pi_2(K, K - x_2, x_1) \arrow[d, "j_{2\#} \circ \partial_2"] \\
 & \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \arrow[d, "q_\#"] \\
\pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) \arrow[r, "(f_1,f_2)_\#"'] \arrow[ur, dashed, "\psi"] & \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_2, 0 >)) \arrow[d] \\
 & 1
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

onde, $j_{2\#}$ é o homomorfismo induzido pela aplicação

$$j_2 : (K - x_2, x_1) \rightarrow (M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$$

que é dada por $j_2(y) = (< x_2, 0 >, < y, 0 >)$, e o homomorfismo ∂_2 é o homomorfismo de conexão da sequência exata de homotopia do par $(K, K - x_2)$. Essa sequência é dada abaixo:

$$1 \rightarrow \pi_2(K, K - x_2; x_1) \xrightarrow{\partial_2} \pi_1(K - x_2; x_1) \xrightarrow{j_\pi} \pi_1(K; x_1) \rightarrow 1.$$

Temos que o homomorfismo

$$\begin{array}{c} \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \\ \big\downarrow q_\# \\ \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_2, 0 >)) \end{array}$$

é dado pela composição dos seguintes homomorfismos:

$$\begin{array}{c} \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \\ \big\downarrow \kappa \\ \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \\ \simeq \big\downarrow \bar{\nu} \\ \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_2, 0 >)). \end{array}$$

Considerando a aplicação $\nu : I \rightarrow M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ dada por $\nu(t) = (< x_2, 0 >, < \sigma(t), 0 >)$, onde $\sigma : I \rightarrow K$ é um caminho ligando x_2 a x_1 que está dentro de uma pequena vizinhança contendo x_1 e x_2. Temos que o homomorfismo κ no diagrama acima é dado por

$$\kappa = \begin{cases} \tilde{\alpha} \to \alpha_1 \\ \tilde{\beta} \to \beta_1 \\ \tilde{c_0} \to c_{01} \\ \tilde{a} \to u_1 \\ \tilde{b} \to v_1 \end{cases}$$

e, $\bar{\nu}$ é dado por $\bar{\nu}(\eta) = \nu^{-1}\eta\nu$.

Lema 3.0.1. *A sequência vertical do diagrama 3.1 é exata curta.*

Demonstração.

De [3] temos o seguinte isomorfismo:

$$\pi_n(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \overset{h_*}{\approx} \pi_n(K, K - x_2, x_1)$$

Para simplificar denotaremos por $X = M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$, $Y = M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta$ e por $\xi_1 =< x_1, 0 >$, $\xi_2 =< x_2, 0 >$.

Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \pi_2(K, K - x_2, x_1) \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "h_*"] & \pi_1(K - x_2, x_1) \arrow[r, "j_\pi"] \arrow[d, "j_{2\#}"] & \pi_1(K, x_1) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \pi_2(X, Y, (\xi_2, \xi_1)) \arrow[r, "\partial_2'"] & \pi_1(Y, (\xi_2, \xi_1)) \arrow[r, "q_\#"] & \pi_1(X, (\xi_2, \xi_2)) \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Como ∂_2' é injetor e h_* é um isomorfismo, então temos que $j_{2\#} \circ \partial_2 = \partial_2' \circ h_*$ é injetor.

Temos $q_\# \circ (j_{2\#} \circ \partial_2) = q_\# \circ (\partial_2' \circ h_*) = (q_\# \circ \partial_2') \circ h_* = 0$ e, portanto, Im $(j_{2\#} \circ \partial_2) \subset$ Kernel $(q_\#)$.

Se $q_\#(x) = 0$, então existe $y \in \pi_2(X, Y)$, tal que $x = \partial_2'(y)$. Tomando $z = h_*^{-1}(y)$ temos $j_{2\#} \circ \partial_2(z) = \partial_2' \circ h_*(z) = \partial_2'(y) = x$. Portanto, Kernel $(q_\#) \subset Im(j_{2\#} \circ \partial_2)$. $\square$

Agora, calcularemos $\bar{\nu}^{-1} \circ (f_1, f_2)_\#$. Para isso, devemos determinar o homomorfismo $(f_1, f_2)_\#$, onde $f_{i\#} = f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$ é dado pelas tabelas do teorema 2.1.1. O homomorfismo $\bar{\nu}^{-1}$ é dado por $\bar{\nu}^{-1}(\eta) = \nu\eta\nu^{-1}$.

Pela proposição 2.1.2 e pelos teoremas 2.2.1 e 2.3.1, temos

$\pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) = \langle \alpha, \beta, c_0 | \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1, c_0\alpha c_0^{-1} = \alpha^{\epsilon}, c_0\beta c_0^{-1} = \alpha^p\beta^{\eta} \rangle$,

$\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) =< \alpha_1, \beta_1, c_{01}, u_1, v_1 | u_1v_1u_1v_1^{-1} = 1, \alpha_1\beta_1\alpha_1 \beta_1^{-1} = 1, c_{01}\alpha_1c_{01}^{-1}\alpha_1^{-\epsilon} = 1, c_{01}\beta_1c_{01}^{-1}\beta_1^{-\eta}\alpha_1^{-p} = 1, \alpha_1u_1\alpha_1^{-1} = u_1, \alpha_1v_1\alpha_1^{-1} = v_1, \beta_1u_1\beta_1^{-1} = u_1, \beta_1v_1\beta_1^{-1} = v_1, c_{01}u_1c_{01}^{-1} = u_1^{\epsilon}, c_{01}v_1c_{01}^{-1} = u_1^pv_1^{\eta} >$,

$\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) =< \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c_0}, \tilde{a}, \tilde{b} | \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}^{-1} = B,\ \tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\alpha}^{-\epsilon} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha}^{-\epsilon},\ \tilde{c_0}\tilde{\beta}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-\eta}\tilde{\alpha}^{-p} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{\beta})\tilde{\beta}^{-\eta}\tilde{\alpha}^{-p},\ \tilde{\alpha}\tilde{a}\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}B^{-1},\ \tilde{\alpha}\tilde{b}\tilde{\alpha}^{-1} = B\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}B^{-1},\ \tilde{\beta}\tilde{a}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b},\ \tilde{\beta}\tilde{b}\tilde{\beta}^{-1} = \tilde{b}^{-1}(B\tilde{b})\tilde{b},\ \tilde{c_0}\tilde{a}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{a}),\ \tilde{c_0}\tilde{b}\tilde{c_0}^{-1} = (\phi \times \phi)_{|\#}(\tilde{b}) >$ e

$\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_2, 0 >)) =< \alpha_2, \beta_2, c_{02}, u_2, v_2 | u_2v_2u_2v_2^{-1} = 1, \alpha_2\beta_2\alpha_2 \beta_2^{-1} = 1, c_{02}\alpha_2c_{02}^{-1}\alpha_2^{-\epsilon} = 1, c_{02}\beta_2c_{02}^{-1}\beta_2^{-\eta}\alpha_2^{-p} = 1, \alpha_2u_2\alpha_2^{-1} = u_2, \alpha_2v_2\alpha_2^{-1} = v_2, \beta_2u_2\beta_2^{-1} = u_2, \beta_2v_2\beta_2^{-1} = v_2, c_{02}u_2c_{02}^{-1} = u_2^{\epsilon}, c_{02}v_2c_{02}^{-1} = u_2^pv_2^{\eta} >$,
onde, $p \in \{0, 1\}$, $\epsilon = \pm 1$ e $\eta = \pm 1$.

Temos $(f_1, f_2)_{\#}(< \alpha(t) >) =< (f_1, f_2) \circ \alpha(t) >=< f_1 \circ \alpha(t), f_2 \circ \alpha(t)) >$, mas observemos que $(f_1 \circ \alpha(t), f_2 \circ \alpha(t)) \simeq_{\partial I} (f_1 \circ \alpha(t), < x_2, 0 >) * (< x_2, 0 >, f_2 \circ \alpha(t))$.

De fato, como α pertence a $\pi_1(K)$, $\pi_1(K \times K) \approx \pi_1(K) \oplus \pi_1(K)$ e $f_{i\#}(\alpha) = \alpha^{r_i}$ pertence a $\pi_1(K)$, então em $\pi_1(K \times K)$ temos $(f_1 \circ \alpha(t), f_2 \circ \alpha(t)) \simeq_{\partial I} (f_1 \circ \alpha(t), x_2) * (x_2, f_2 \circ \alpha(t))$. Portanto, em $M(\phi)$ temos $(f_1 \circ \alpha(t), f_2 \circ \alpha(t)) \simeq_{\partial I} (f_1 \circ \alpha(t), < x_2, 0 >) * (< x_2, 0 >, f_2 \circ \alpha(t))$.

Como $f_{i\#}(\alpha) = \alpha^{r_i}$, para $i = 1, 2$, então temos

$$\begin{aligned}
(f_1, f_2)_{\#}(< \alpha >) &= < (f_1, f_2) \circ \alpha >=< (f_1 \circ \alpha, f_2 \circ \alpha) > \\
&= < (f_1 \circ \alpha, < x_2, 0 >) >< (< x_2, 0 >, f_2 \circ \alpha) > \\
&= < (\alpha^{r_1}, < x_2, 0 >) >< (< x_2, 0 >, \alpha^{r_2}) > \\
&= \alpha_2^{r_1}u_2^{r_2}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, usando que $f_{i\#}(\beta) = \alpha^{s_i}\beta^{t_i}$, obtemos

$$\begin{aligned}
(f_1, f_2)_\#(<\beta>) &= <(f_1, f_2)\circ\beta> = <(f_1\circ\beta, f_2\circ\beta)> \\
&= <(f_1\circ\beta, <x_2, 0>)><(<x_2,0>, f_2\circ\beta)> \\
&= <(\alpha^{s_1}\beta^{t_1}, <x_2, 0>)><(<x_2,0>, \alpha^{s_2}\beta^{t_2})> \\
&= \alpha_2^{s_1}\beta_2^{t_1}u_2^{s_2}v_2^{t_2}.
\end{aligned}$$

Também temos $(f_1, f_2)_\#(<c_0>) = <(f_1, f_2)\circ c_0> = <(f_1\circ c_0, f_2\circ c_0)>$, mas como $f_{i\#}(c_0) = \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}}c_0$, então temos $(f_1\circ c_0, f_2\circ c_0) = (\alpha^{c_{11}}\beta^{c_{21}}, \alpha^{c_{12}}\beta^{c_{22}}) * (c_0, c_0)$ $\simeq_{\partial I} (\alpha^{c_{11}}, <x_2, 0>) * (<x_2, 0>, \alpha^{c_{12}}) * (\beta^{c_{21}}, <x_2, 0>) * (<x_2, 0>, \beta^{c_{22}}) * (c_0, c_0)$. Portanto, $(f_1, f_2)_\#(c_0) = \alpha_2^{c_{11}}u_2^{c_{12}}\beta_2^{c_{21}}v_2^{c_{22}}c_{02} = \alpha_2^{c_{11}}\beta_2^{c_{21}}u_2^{c_{12}}v_2^{c_{22}}c_{02}$.

A última equivalência acima vem do seguinte caso particular $(\alpha c_0, \beta c_0) = (\alpha, \beta) * (c_0, c_0)$.

De fato, temos $c_0(t) = <x_2, t>$, $\alpha(t) = <\alpha(t), 0>$ e $\beta(t) = <\beta(t), 0>$.

Temos também

$$(\alpha c_0)(t) = \begin{cases} <\alpha(2t), 0> & para \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ <x_2, 2t-1> & para \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$(\beta c_0)(t) = \begin{cases} <\beta(2t), 0> & para \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ <x_2, 2t-1> & para \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$(\alpha, \beta) * (c_0, c_0)(t) =$

$$= \begin{cases} (<\alpha(2t), 0>, <\beta(2t), 0>) & para \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (<x_2, 2t-1>, <x_2, 2t-1>) & para \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e,

$$(\alpha c_0, \beta c_0)(t) = \begin{cases} (<\alpha(2t), 0>, <\beta(2t), 0>) & para \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (<x_2, 2t-1>, <x_2, 2t-1>) & para \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Assim, em qualquer caso, se $f_{i\#} = f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, então $(f_1, f_2)_\#$ é dada por:

$$\begin{cases} \alpha \rightarrow \alpha_2^{r_1} u_2^{r_2} \\ \beta \rightarrow \alpha_2^{s_1} \beta_2^{t_1} u_2^{s_2} v_2^{t_2} \\ c_0 \rightarrow \alpha_2^{c_{11}} \beta_2^{c_{21}} u_2^{c_{12}} v_2^{c_{22}} c_{02} \end{cases}$$

Agora, para $\bar{\nu} : \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \rightarrow \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_2, 0 >))$ temos;

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(\alpha_1) &= \nu^{-1}\alpha_1\nu \\ &= (< x_2, 0 >, < \sigma^{-1}, 0 >)(\alpha, < x_1, 0 >)(< x_2, 0 >, < \sigma, 0 >) \\ &= (\alpha, < x_2, 0 >) \\ &= \alpha_2, \\ \bar{\nu}(\beta_1) &= \nu^{-1}\beta_1\nu \\ &= (< x_2, 0 >, < \sigma^{-1}, 0 >)(\beta, < x_1, 0 >)(< x_2, 0 >, < \sigma, 0 >) \\ &= (\beta, < x_2, 0 >) \\ &= \beta_2, \\ \bar{\nu}(c_{01}) &= \nu^{-1}c_{01}\nu \\ &= (< x_2, 0 >, < \sigma^{-1}, 0 >)(c_0, < x_1, t >)(< x_2, 0 >, < \sigma, 0 >) \\ &= (c_0, < x_2, t >) \\ &= c_{02}, \\ \bar{\nu}(u_1) &= \nu^{-1}u_1\nu \\ &= (< x_2, 0 >, < \sigma^{-1}, 0 >)(< x_2, 0 >, a_1)(< x_2, 0 >, < \sigma, 0 >) \\ &= (< x_2, 0 >, \sigma^{-1}a_1\sigma) \\ &= (< x_2, 0 >, a_2) \\ &= u_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\nu}(v_1) &= \nu^{-1}v_1\nu \\
&= (< x_2, 0 >, < \sigma^{-1}, 0 >)(< x_2, 0 >, b_1)(< x_2, 0 >, < \sigma, 0 >) \\
&= (< x_2, 0 >, \sigma^{-1}b_1\sigma) \\
&= (< x_2, 0 >, b_2) \\
&= v_2.
\end{aligned}$$

Portanto, em todos os casos, se $f_{i\#} = f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, então para o homomorfismo

$\bar{\nu}^{-1} \circ (f_1, f_2)_{\#} : \pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) \to \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$

temos;

$\bar{\nu}^{-1} \circ (f_1, f_2)_{\#}(\alpha) = \bar{\nu}^{-1}(\alpha_2^{r_1} u_2^{r_2}) = \alpha_1^{r_1} u_1^{r_2}$,

$\bar{\nu}^{-1} \circ (f_1, f_2)_{\#}(\beta) = \bar{\nu}^{-1}(\alpha_2^{s_1} \beta_2^{t_1} u_2^{s_2} v_2^{t_2}) = \alpha_1^{s_1} \beta_1^{t_1} u_1^{s_2} v_1^{t_2}$ e

$\bar{\nu}^{-1} \circ (1, f)_{\#}(c_0) = \bar{\nu}^{-1}(\alpha_2^{c_{11}} \beta_2^{c_{21}} u_2^{c_{12}} v_2^{c_{22}} c_{02}) = \alpha_1^{c_{11}} \beta_1^{c_{21}} u_1^{c_{12}} v_1^{c_{22}} c_{01}$.

Agora, para obtermos uma descrição dos homomorfismos do diagrama 3.1 demonstraremos o teorema abaixo.

Teorema 3.0.2. *Sejam $f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, para $i = 1, 2$ homomorfismos dados em cada caso das tabelas do teorema 2.1.1. Sejam α, β, c_0 laços em $M(\phi)$ baseados em $< x_2, 0 >$ dados, respectivamente, por $\alpha =< \rho_{21}\rho_{22}, 0 >, \beta =< \rho_{22}^{-1}, 0 >, c_0(t) =< x_2, t >$ $a_1 = \rho_{11}\rho_{12}, b_1 = \rho_{12}^{-1}$ laços em $K - x_2$ baseados em x_1 e $a_2 = \rho_{21}\rho_{22}$, $b_2 = \rho_{22}^{-1}$ laços em $K - x_1$ baseados em x_2, onde ρ_{ij} são dados nas figuras:*

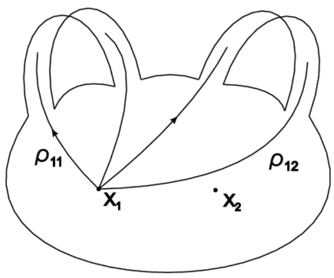


Fig.1. As tranças ρ_{11} e ρ_{12}

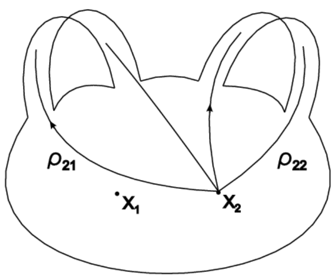


Fig.2. As tranças ρ_{21} e ρ_{22}

Temos:

(1) O homomorfismo

$$(f_1, f_2)_\# : \pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) \to \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_2, 0 >))$$

é dado por:

$$\begin{cases} \alpha \to \alpha_2^{r_1} u_2^{r_2} \\ \beta \to \alpha_2^{s_1} \beta_2^{t_1} u_2^{s_2} v_2^{t_2} \\ c_0 \to \alpha_2^{c_{11}} \beta_2^{c_{21}} u_2^{c_{12}} v_2^{c_{22}} c_{02} \end{cases}$$

(2) O homomorfismo

$$\begin{array}{c} \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \\ \Big\downarrow q_\# \\ \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_2, 0 >)) \end{array}$$

é dado pela seguinte composição de homomorfismos:

$$\begin{array}{c} \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \\ \Big\downarrow \kappa \\ \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >)) \\ \simeq \Big\downarrow \bar{\nu} \\ \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_2, 0 >)) \end{array}$$

onde, $\nu : I \to M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ é dado por $\nu(t) = (< x_2, 0 >, < \sigma(t), 0 >)$, $\sigma : I \to K$ um caminho ligando x_2 a x_1 e o homomorfismo κ é dado da maneira abaixo:

$$\kappa = \begin{cases} \tilde{\alpha} \to \alpha_1 \\ \tilde{\beta} \to \beta_1 \\ \tilde{c_0} \to c_{01} \\ \tilde{a} \to u_1 \\ \tilde{b} \to v_1 \end{cases}$$

Aqui, temos $\bar{\nu}(\eta) = \nu^{-1}\eta\nu$.

(3) O homomorfismo do levantamento de $(f_1, f_2)_{\#}$, no diagrama 3.1,

$$\psi : \pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) \to \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$$

existe se, e somente se, podemos encontrar elementos $Z_1, Z_2, Z_3 \in \pi_2(K, K - x_2, x_1)$ e $A, F, C \in \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$, tais que a imagem de α, β e c_0 por ψ sejam

$$\psi = \begin{cases} \alpha \to Z_1 A \;\; com \;\; \kappa(A) = \alpha_1^{r_1} u_1^{r_2} \;\; se \;\; f_{i\#}(\alpha) = \alpha^{r_i} \\ \beta \to Z_2 F \;\; com \;\; \kappa(F) = \alpha_1^{s_1} \beta_1^{t_1} u_1^{s_2} v_1^{t_2} \;\; se \;\; f_{i\#}(\beta) = \alpha^{s_i}\beta^{t_i} \\ c_0 \to Z_3 C \;\; com \;\; \kappa(C) = \alpha_1^{c_{11}} \beta_1^{c_{21}} u_1^{c_{12}} v_1^{c_{22}} c_{01} \;\; se \;\; f_{i\#}(c_0) = \alpha^{c_{1i}}\beta^{c_{2i}} c_0 \end{cases}$$

onde, $i = 1, 2$.

Temos que, se ψ existe, então obtemos $\psi(\alpha\beta\alpha\beta^{-1}) = 1$, $\psi(c_0\alpha c_0^{-1}\alpha^{-\epsilon}) = 1$ e $\psi(c_0\beta c_0^{-1} \beta^{-\eta}\alpha^{-p}) = 1$, onde $p \in \{0, 1\}, \epsilon = \pm 1$ e $\eta = \pm 1$.

Demonstração.

Os casos (1) e (2) já foram feitos antes de enunciarmos o teorema. Vamos então demonstrar (3).

Primeiramente, observemos que se $\psi(\alpha) = x$, então $\kappa(x) = \bar{\nu}^{-1} \circ (f_1, f_2)_{\#}(\alpha) = \alpha_1^{r_1} u_1^{r_2}$ se $f_{\#}(\alpha) = \alpha^{r_i}$. De fato, se $\psi(\alpha) = x$, então de $q_{\#} \circ \psi(\alpha) = (f_1, f_2)_{\#}(\alpha)$ temos $\bar{\nu}\kappa(x) = (f_1, f_2)_{\#}(\alpha)$. Logo, obtemos $\kappa(x) = \bar{\nu}^{-1} \circ (f_1, f_2)_{\#}(\alpha)$. Agora, se $f_{i\#}(\alpha) = \alpha^{r_i}$, então teremos $\kappa(x) = \bar{\nu}^{-1} \circ (f_1, f_2)_{\#}(\alpha) = \bar{\nu}^{-1}(\alpha_2^{r_1} u_2^{r_2}) = \alpha_1^{r_1} u_1^{r_2}$.

Por outro lado, se $\kappa(A) = \alpha_1^{r_1} u_1^{r_2}$, então temos que $xA^{-1} = Z_1$ pertence ao kernel de κ, ou seja, Z_1 pertence a $\pi_2(K, K - x_2; , x_1) =$ kernel de κ.

O que foi feito acima também é feito analogamente para β e c_0.

Suponha que exista o homomorfismo ψ do enunciado do teorema. Logo, temos $\psi(\alpha) = x$, $\psi(\beta) = y$ e $\psi(c_0) = z$. Assim, basta tomar $A = x, F = y, C = z$ e $Z_1 = Z_2 = Z_3 =$ elemento neutro. Portanto, Z_1, Z_2, Z_3 e A, F, C satisfazem as condições acima.

Agora, suponha que existem $Z_1, Z_2, Z_3 \in \pi_2(K, K - x_2, x_1)$ e $A, F, C \in \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta, (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$ satisfazendo a condição da hipótese do teorema. Extendendo ψ por linearidade, então temos que ψ está bem definido em α, β e c_0.

Das relações de $\pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >)$ obtemos as equações abaixo:

$$\begin{cases} \psi(\alpha\beta\alpha\beta^{-1}) = 1 \\ \psi(c_0\alpha c_0^{-1}\alpha^{-\epsilon}) = 1 \\ \psi(c_0\beta c_0^{-1}\beta^{-\eta}\alpha^{-p}) = 1 \end{cases}$$

.$\square$

A seguir, obteremos algumas equações em que Z_1, Z_2, Z_3, A, F, C, devem satisfazer para que exista um levantamento

$\psi : \pi_1(M(\phi), < x_2, 0 >) \to \pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) - \Delta(< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$, em cada um dos casos dado pelo teorema 2.1.1.

Do teorema acima, temos que se $f_{i\#} = f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, então ψ é definido por;

$$\begin{cases} \alpha \to Z_1 A \quad com \quad \kappa(A) = \alpha_1^{r_1} u_1^{r_2} \\ \beta \to Z_2 F \quad com \quad \kappa(F) = \alpha_1^{s_1} \beta_1^{t_1} u_1^{s_2} v_1^{t_2} \\ c_0 \to Z_3 C \quad com \quad \kappa(C) = \alpha_1^{c_{11}} \beta_1^{c_{21}} u_1^{c_{12}} v_1^{c_{22}} c_{01} \end{cases}$$

e, ainda ψ deve satisfazer $\psi(\alpha\beta\alpha\beta^{-1}) = 1, \psi(c_0\alpha c_0^{-1}\alpha^{-\epsilon}) = 1$ e $\psi(c_0\beta c_0^{-1}\beta^{-\eta}\alpha^{-p}) = 1$, onde $p \in \{0, 1\}, \epsilon = \pm 1$ e $\eta = \pm 1$. Logo, existe um levantamento ψ se, e somente se, o sistema abaixo, na variável Z_j, possui uma solução.

$$\begin{cases} Z_1 A Z_2 F Z_1 A F^{-1} Z_2^{-1} & = & 1 \\ Z_3 C Z_1 A C^{-1} Z_3^{-1} (A^{-1} Z_1^{-1})^{\epsilon} & = & 1 \\ Z_3 C Z_2 F C^{-1} Z_3^{-1} (F^{-1} Z_2^{-1})^{\eta} (A^{-1} Z_1^{-1})^{p} & = & 1 \end{cases}$$

Como $\eta = \pm 1$, então temos que $(F^{-1} Z_2^{-1})^{-\eta} = F^{\frac{-\eta-1}{2}} Z_2^{\eta} F^{\frac{1+\eta}{2}}$. Também temos que $p \in \{0, 1\}$, assim temos que $(A^{-1} Z_1^{-1})^p = A^{-p} Z_1^{-p}$.

Portanto, o sistema acima para $\phi_p(1,\eta)$ e $f_i(s_i,r_i,t_i,c_{1i},c_{2i})$, dado na tabela do teorema 2.1.1 é equivalente ao sistema abaixo:

$$(I) \qquad \begin{cases} Z_1(AZ_2A^{-1})(AFAF^{-1})(FA^{-1}Z_1AF^{-1})Z_2^{-1} & = \ 1 \\ Z_3(CZ_1C^{-1})(CAC^{-1}A^{-1})(AZ_3^{-1}A^{-1})Z_1^{-1} & = \ 1 \\ Z_3(CZ_2C^{-1})(CFC^{-1}F^{-\eta}A^{-p})(A^pF^{\eta}Z_3^{-1}F^{-\eta}A^{-p}) & \\ (A^pF^{\frac{\eta-1}{2}}Z_2^{-\eta}F^{\frac{1-\eta}{2}}A^{-p})Z_1^{-p} & = \ 1 \end{cases}$$

De agora em diante, nos referiremos ao sistema (I) como o sistema gerado pela entrada de dados $(A,F,C;s_i,r_i,t_i,(c_{1i},c_{2i}))$, onde $\kappa(A)=\alpha_1^{r_1}u_1^{r_2},\kappa(F)=\alpha_1^{s_1}\beta_1^{t_1}u_1^{s_2}v_1^{t_2}$ e $\kappa(C)=\alpha_1^{c_{11}}u_1^{c_{12}}\beta_1^{c_{21}}v_1^{c_{22}}c_{01}$, com $i=1,2$.

A notação acima, poderia ser simplificada, ou seja, ao invés de escrevermos; sistema gerado pela entrada de dados $(A,F,C;s_i,r_i,t_i,(c_{1i},c_{2i}))$, poderiamos escrever apenas; sistema gerado pela entrada de dados $(A,F,C;s_2,r_2,t_2,(c_{12},c_{22}))$. Isso segue do fato de que a última notação, caracteriza completamente o par de homomorfismos $(f_{1\#},f_{2\#})$ dados no sistema (I).

De fato, suponha que temos um sistema gerado pela entrada de dados $(A',F',C';s_2,$ $r_2,t_2,\ (c_{12},\ c_{22}))$, com $f_{1\#}=f_1(s_1',r_1',t_1',c_{11}',c_{21}')$. Pela nossa notação temos, $f_{2\#}=f_2(s_2,r_2,t_2,c_{12},\ c_{22})$. Agora, das equações $\kappa(A')=\kappa(A)$, $\kappa(F')=\kappa(F)$, $\kappa(C')=\kappa(C)$, obtemos $s_1'=s_1$, $r_1'=r_1$, $t_1'=t_1$, $c_{11}'=c_{11}$ e $c_{21}'=c_{21}$. Assim, temos $f_{1\#}=f_1(s_1,r_1,t_1,c_{11},c_{21})$.

Observemos que no sistema (I) cada equação é um produto de fatores, onde cada fator é um conjugado de Z_i, exceto um. O fator que não é um conjugado de Z_i chamaremos de termo constante da equação, que são respectivamente; $AFAF^{-1},CAC^{-1}A^{-1}$ e $CFC^{-1}F^{-\eta}A^{-p}$.

Como cada variável Z_j pertence ao subgrupo normal $\pi_2(K,K-x_2,x_1)$ de $\pi_1(M(\phi)\times_{S^1}$ $M(\phi)-\Delta,(<x_2,0>,<x_1,0>))$, então todos os fatores, incluindo o termo constante, pertence a $\pi_2(K,K-x_2,x_1)$. Por exemplo, da primeira equação obtemos $AFAF^{-1}=(AZ_2A^{-1})^{-1}\ Z_1^{-1}Z_2(FA^{-1}Z_1AF^{-1})^{-1}$, como o lado direito dessa igualdade pertence a $\pi_2(K,K-x_2,x_1)$, então temos que o termo constante $AFAF^{-1}$ pertence ao subgrupo normal $\pi_2(K, K-x_2, x_1)$. Da mesma forma, mostramos que os outros termos constante pertencem a $\pi_2(K, K-x_2, x_1)$.

O próximo teorema dá uma equivalência ao sistema acima em relação aos elementos A, F, C do sistema. Esse teorema será usado mais adiante para encontrar soluções para o sistema.

Teorema 3.0.3. *Existe solução para algum sistema gerado pela entrada de dados* $(A_1, F_1, C_1;\ s_2, r_2, t_2, (c_{12}, c_{22}))$ *se, e somente se, existir solução para todo sistema gerado pela entrada de dados* $(A, F, C; s_2, r_2, t_2, (c_{12}, c_{22}))$, *onde* $\kappa(A_1) = \kappa(A)$, $\kappa(F_1) = \kappa(F)$ *e* $\kappa(C_1) = \kappa(C)$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponhamos que X_1, X_2 e X_3 seja solução para o sistema gerado pela entrada de dados $(A_1, F_1, C_1; s_2, r_2, t_2, (c_{12}, c_{22}))$, ou seja, suponhamos que temos

$$\begin{cases} X_1A_1X_2F_1X_1A_1F_1^{-1}X_2^{-1} & = & 1 \\ X_3C_1X_1A_1C_1^{-1}X_3^{-1}A_1^{-1}X_1^{-1} & = & 1 \\ X_3C_1X_2F_1C_1^{-1}X_3^{-1}(F_1^{-1}X_2^{-1})^{\eta}(A_1^{-1}X_1^{-1})^{p} & = & 1 \end{cases}$$

Das condições $\kappa(A_1) = \kappa(A)$, $\kappa(F_1) = \kappa(F)$ e $\kappa(C_1) = \kappa(C)$ obtemos $A_1A^{-1} = Y_1, F_1F^{-1} = Y_2$ e $C_1C^{-1} = Y_3$, onde Y_1, Y_2 e Y_3 pertencem ao kernel de κ. Podemos então, escrever $A_1 = Y_1A, F_1 = Y_2F$ e $C_1 = Y_3C$. Substituindo isso no sistema acima obteremos

$$\begin{cases} X_1Y_1AX_2Y_2FX_1Y_1AF^{-1}Y_2^{-1}X_2^{-1} & = & 1 \\ X_3Y_3CX_1Y_1AC^{-1}Y_3^{-1}X_3^{-1}A^{-1}Y_1^{-1}X_1^{-1} & = & 1 \\ X_3Y_3CX_2Y_2FC^{-1}Y_3^{-1}X_3^{-1}(F^{-1}Y_2^{-1}X_2^{-1})^{\eta}(A^{-1}Y_1^{-1}X_1^{-1})^{p} & = & 1 \end{cases}$$

Escrevendo $Z_1 = X_1Y_1, Z_2 = X_2Y_2$ e $Z_3 = X_3Y_3$, temos que Z_1, Z_2 e Z_3 são soluções para o sistema gerado pela entrada de dados $(A, F, C; s_2, r_2, t_2, (c_{12}, c_{22}))$.

($\Leftarrow$) Se existe solução para todo sistema gerado pela entrada de dados $(A, F, C; s_2, r_2, t_2, (c_{12}, c_{22}))$, então em particular existe solução para o sistema gerado pela entrada de dados $(A_1, F_1, C_1; s_2, r_2, t_2, (c_{12}, c_{22}))$. $\square$

Agora, conjugaremos as equações do sistema acima por uma palavra q em $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$.

Não acrescentaremos $\tilde{c_0}$ pois, no caso em que $M(\phi_0(1,1))$, então conjugar, as equações do sistema, por uma palavra em $\tilde{c_0}$ não acrescenta em nada, já que $\tilde{c_0}$ comuta com todos os outros elementos. Quando ϕ é diferente da identidade, então não sabemos o que acrescenta, quando conjugamos as equações do sistema, por uma palavra em $\tilde{c_0}$. Isso será feito num outro momento.

Observemos que, como $\kappa(\tilde{\alpha}) = \alpha_1$, $\kappa(\tilde{\beta}) = \beta_1$, $\kappa(\tilde{a}) = u_1$ e $\kappa(\tilde{b}) = v_1$, então $\kappa(q)$ é uma palavra em α_1, β_1, u_1, e v_1.

Temos que $\kappa(q) = \alpha_1^m \beta_1^n u_1^k v_1^l$, onde $m, n, k, l \in \mathbb{Z}$. Isso segue do fato de que em $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$, α_1 comuta com u_1, v_1 e β_1 comuta com u_1, v_1, e das relações $\alpha_1\beta_1\alpha_1\beta_1^{-1} = 1$ e $u_1v_1u_1v_1^{-1} = 1$. Dessas relações obtemos as relações abaixo:

$$(\alpha_1^r\beta_1^s)^t = \begin{cases} \alpha_1^{\frac{t}{2}[r(1+(-1)^s)]}\beta_1^{st}, & \text{se t é par} \\ \alpha_1^{\frac{t-1}{2}[r(1+(-1)^s)]+r}\beta_1^{st}, & \text{se t é ímpar} \end{cases}$$

$$(u_1^r v_1^s)^t = \begin{cases} u_1^{\frac{t}{2}[r(1+(-1)^s)]}v_1^{st}, & \text{se t é par} \\ u_1^{\frac{t-1}{2}[r(1+(-1)^s)]+r}v_1^{st}, & \text{se t é ímpar} \end{cases},$$

para quaisquer $s, r, t \in \mathbb{Z}$.

A seguir analisaremos o que acontece quando conjugamos o sistema por q através do teorema abaixo.

Teorema 3.0.4. *Seja $\phi = \phi_p(1, \eta)$ um dos quatro casos dados nas tabelas do teorema 2.1.1, onde $p \in \{0, 1\}$ e $\eta = \pm 1$. Seja q uma palavra em $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ tal que $\kappa(q) = \alpha_1^m\beta_1^n u_1^k v_1^l$, onde $m, n, k, l \in \mathbb{Z}$. Então, tomando a conjugação por q nas equações do sistema (I) gerado pela entrada de dados $(A, F, C; s_2, r_2, t_2, (c_{12}, c_{22}))$, obteremos um novo sistema que é gerado pela entrada de dados $(A', F', C'; k[1-(-1)^{t_2}] + (-1)^l s_2,$*

$(-1)^l r_2,\, t_2, k[1-(-1)^{c_{22}+(1-\eta)l}]+(-1)^{c_{22}+l}(\frac{1-(-1)^l}{2})p+(-1)^l c_{12}, (1-\eta)l+c_{22})$, *onde* $A^{'} = qAq^{-1}, F^{'} = qFq^{-1}$ *e* $C^{'} = qCq^{-1}$. *Além disso, temos que se* (Z_1, Z_2, Z_3) *são soluções para o sitema* (I), *então* $(Z_1^{'} = qZ_1q^{-1}, Z_2^{'} = qZ_2q^{-1}, Z_3^{'} = qZ_3q^{-1})$ *são soluções para o novo sistema.*

Demonstração.

Basta calcular $\kappa(A^{'}), \kappa(F') $ e $\kappa(C^{'})$ e analisar as potências de α_1, β_1, u_1 e v_1.

Para calcular $\kappa(A^{'}), \kappa(F')$ e $\kappa(C^{'})$ usaremos as relações de $\pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (< x_2, 0 >, < x_1, 0 >))$.

$$\begin{aligned}
\kappa(A^{'}) = \kappa(qAq^{-1}) &= \alpha_1^m\beta_1^n u_1^k v_1^l \alpha_1^{r_1} u_1^{r_2} v_1^{-l} u_1^{-k}\beta_1^{-n}\alpha_1^{-m} \\
&= \alpha_1^m\beta_1^n\alpha_1^{r_1}\beta_1^{-n}\alpha_1^{-m} u_1^k v_1^l u_1^{r_2} v_1^{-l} u_1^{-k} \\
&= \alpha_1^m\alpha_1^{(-1)^n r_1}\beta_1^n\beta_1^{-n}\alpha_1^{-m} u_1^k u_1^{(-1)^l r_2} v_1^l v_1^{-l} u_1^{-k} \\
&= \alpha_1^{(-1)^n r_1} u_1^{(-1)^l r_2}
\end{aligned}$$

$$\kappa(F^{'}) = \kappa(qFq^{-1}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_1^m\beta_1^n u_1^k v_1^l \alpha_1^{s_1}\beta_1^{t_1} u_1^{s_2} v_1^{t_2} v_1^{-l} u_1^{-k}\beta_1^{-n}\alpha_1^{-m} \\
&= \alpha_1^m\beta_1^n\alpha_1^{s_1}\beta_1^{t_1}\beta_1^{-n}\alpha_1^{-m} u_1^k v_1^l u_1^{s_2} v_1^{t_2} v_1^{-l} u_1^{-k} \\
&= \alpha_1^m\alpha_1^{(-1)^n s_1}\beta_1^n\beta_1^{t_1}\beta_1^{-n}\alpha_1^{-m} u_1^k u_1^{(-1)^l s_2} v_1^l v_1^{t_2} v_1^{-l} u_1^{-k} \\
&= \alpha_1^m\alpha_1^{(-1)^n s_1}\beta_1^{t_1}\alpha_1^{-m} u_1^k u_1^{(-1)^l s_2} v_1^{t_2} u_1^{-k} \\
&= \alpha_1^m\alpha_1^{(-1)^n s_1}\alpha_1^{-(-1)^{t_1} m}\beta_1^{t_1} u_1^k u_1^{(-1)^l s_2} u_1^{-(-1)^{t_2} k} v_1^{t_2} \\
&= \alpha_1^{m[1-(-1)^{t_1}]+(-1)^n s_1}\beta_1^{t_1} u_1^{k[1-(-1)^{t_2}]+(-1)^l s_2} v_1^{t_2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\kappa(C') = \kappa(qCq^{-1}) & \\
&= \alpha_1^m\beta_1^n u_1^k v_1^l \alpha_1^{c_{11}}\beta_1^{c_{21}}u_1^{c_{12}}v_1^{c_{22}}c_{01}v_1^{-l}u_1^{-k}\beta_1^{-n}\alpha_1^{-m} \\
&= \alpha_1^m\beta_1^n\alpha_1^{c_{11}}\beta_1^{c_{21}}u_1^k v_1^l u_1^{c_{12}}v_1^{c_{22}}c_{01}v_1^{-l}c_{01}^{-1}c_{01}u_1^{-k}c_{01}^{-1}c_{01}\beta_1^{-n}c_{01}^{-1}c_{01}\alpha_1^{-m}c_{01}^{-1}c_{01} \\
&= \alpha_1^m\alpha_1^{(-1)^n c_{11}}\beta_1^n\beta_1^{c_{21}}u_1^k u_1^{(-1)^l c_{12}}v_1^l v_1^{c_{22}}(u_1^p v_1^\eta)^{-l}u_1^{-k}(\alpha_1^p\beta_1^\eta)^{-n}\alpha_1^{-m}c_{01} \\
&= \alpha_1^{m+(-1)^n c_{11}}\beta_1^{n+c_{21}}u_1^{k+(-1)^l c_{12}}v_1^{l+c_{22}}(u_1^p v_1^{-\eta})^l u_1^{-k}(\alpha_1^p\beta_1^{-\eta})^n\alpha_1^{-m}c_{01} \\
&= \alpha_1^{m+(-1)^n c_{11}}\beta_1^{n+c_{21}}u_1^{k+(-1)^l c_{12}}v_1^{l+c_{22}}u_1^{(\frac{1-(-1)^l}{2})p}v_1^{-\eta l}u_1^{-k}\alpha_1^{(\frac{1-(-1)^n}{2})p}\beta_1^{-\eta n}\alpha_1^{-m}c_{01} \\
&= \alpha_1^{m+(-1)^n c_{11}}\beta_1^{n+c_{21}}u_1^{k+(-1)^l c_{12}}v_1^{l+c_{22}}u_1^{(\frac{1-(-1)^l}{2})p}u_1^{-(-1)^{-\eta l}k}v_1^{-\eta l}\alpha_1^{(\frac{1-(-1)^n}{2})p} \\
&\quad\ \alpha_1^{-(-1)^{-\eta n}m}\beta_1^{-\eta n}c_{01} \\
&= \alpha_1^{m+(-1)^n c_{11}}\alpha_1^{(-1)^{n+c_{21}}[(\frac{1-(-1)^n}{2})p-(-1)^{-\eta n}m]}\beta_1^{n+c_{21}}\beta_1^{-\eta n}u_1^{k+(-1)^l c_{12}} \\
&\quad\ u_1^{(-1)^{l+c_{22}}[(\frac{1-(-1)^l}{2})p-(-1)^{-\eta l}k]}v_1^{l+c_{22}}v_1^{-\eta l}c_{01} \\
&= \alpha_1^{m+(-1)^n c_{11}}\alpha_1^{(-1)^{n+c_{21}}[(\frac{1-(-1)^n}{2})p-(-1)^{-\eta n}m]}\beta_1^{(1-\eta)n+c_{21}}u_1^{k+(-1)^l c_{12}} \\
&\quad\ u_1^{(-1)^{l+c_{22}}[(\frac{1-(-1)^l}{2})p-(-1)^{-\eta l}k]}v_1^{(1-\eta)l+c_{22}}c_{01} \\
&= \alpha_1^{m[1-(-1)^{(1-\eta)n+c_{21}}]+(-1)^{n+c_{21}}(\frac{1-(-1)^n}{2})p+(-1)^n c_{11}}\beta_1^{(1-\eta)n+c_{21}} \\
&\quad\ u_1^{k[1-(-1)^{(1-\eta)l+c_{22}}]+(-1)^{l+c_{22}}(\frac{1-(-1)^l}{2})p+(-1)^l c_{12}}v_1^{(1-\eta)l+c_{22}}c_{01}
\end{aligned}
$$

□

O próximo corolário, dá uma condição equivalente para encontrarmos um levantamento quando t_1 e t_2 são ímpares.

Corolário 3.0.1. *Com a mesma notação do teorema acima, temos que se* $t_1 = 2l_1 + 1$ *e* $t_2 = 2l_2 + 1$, *então existe um levantamento para os pares de homomorfismos:*

$$(f_1(s_1, r_1, 2l_1 + 1, c_{11}, 2k_1), f_2(s_2, r_2, 2l_2 + 1, c_{12}, 2k_2)),$$

$$(f_1(s_1, r_1, 2l_1 + 1, c_{12}, 2k_1), f_2(s_2, r_2, 2l_2 + 1, c_{12}, 2k_2 + 1)),$$

$$(f_1(s_1, r_1, 2l_1 + 1, c_{12}, 2k_1 + 1), f_2(s_2, r_2, 2l_2 + 1, c_{12}, 2k_2)),$$

$$(f_1(s_1, r_1, 2l_1 + 1, c_{12}, 2k_1 + 1), f_2(s_2, r_2, 2l_2 + 1, c_{12}, 2k_2 + 1)),$$

se, e somente se, existir um levantamento para os seguintes pares de homomorfismos, respectivamente :

$$(f_1(2m+(-1)^n s_1, (-1)^n r_1, 2l_1+1, -(\frac{1-(-1)^n}{2})p+(-1)^n c_{11}, (1-\eta)n+2k_1),$$

$$f_2(2k+(-1)^l s_2, (-1)^l r_2, 2l_2+1, -(\frac{1-(-1)^l}{2})p+(-1)^l c_{12}, (1-\eta)l+2k_2)),$$

$$(f_1(2m+(-1)^n s_1, (-1)^n r_1, 2l_1+1, -(\frac{1-(-1)^n}{2})p+(-1)^n c_{11}, (1-\eta)n+2k_1),$$

$$f_2(2k+(-1)^l s_2, (-1)^l r_2, 2l_2+1, 2k+(\frac{1-(-1)^l}{2})p+(-1)^l c_{12}, (1-\eta)l+2k_2+1)),$$

$$(f_1(2m+(-1)^n s_1, (-1)^n r_1, 2l_1+1, 2m+(\frac{1-(-1)^n}{2})p+(-1)^n c_{11}, (1-\eta)n+2k_1+1),$$

$$f_2(2k+(-1)^l s_2, (-1)^l r_2, 2l_2+1, -(\frac{1-(-1)^l}{2})p+(-1)^l c_{12}, (1-\eta)l+2k_2)),$$

$$(f_1(2m+(-1)^n s_1, (-1)^n r_1, 2l_1+1, 2m+(\frac{1-(-1)^n}{2})p+(-1)^n c_{11}, (1-\eta)n+2k_1+1),$$

$$f_2(2k+(-1)^l s_2, (-1)^l r_2, 2l_2+1, 2k+(\frac{1-(-1)^l}{2})p+(-1)^l c_{12}, (1-\eta)l+2k_2+1)).$$

Demonstração.

Denotemos por $(A', F', C', s_2', r_2', t_2', c_{12}', c_{22}')$ o novo sistema dado pelo teorema 3.0.4. Para demonstrarmos o lema basta calcular $s_2', r_2', t_2', c_{12}'$ e c_{22}'.

Faremos o cálculo para f_2, ou seja, analisaremos os casos em que temos $t_2 = 2l_2+1$ e $c_{22} = 2k_2$ ou $t_2 = 2l_2+1$ e $c_{22} = 2k_2+1$. O caso para f_1 é análogo.

No primeiro caso, temos $t_2 = 2l_2+1$ e $c_{22} = 2k_2$. Nesse caso, temos $s_2' = k[1-(-1)^{t_2}] + (-1)^l s_2 = 2k+(-1)^l s_2$, $r_2' = (-1)^l r_2$, $t_2' = t_2$, $c_{22}' = (1-\eta)l+2k_2$ e,

$c_{12}' = k[1-(-1)^{c_{22}+(1-\eta)l})] + [(-1)^{l+c_{22}}(\frac{1-(-1)^l}{2})]p + (-1)^l c_{12} = [1-(-1)^{2k_2+(1-\eta)l})]k$ $+[(-1)^{l+2k_2}(\frac{1-(-1)^l}{2})]p+(-1)^l c_{12}$. Como η é ímpar, então $(1-\eta)l$ é par. Assim, temos

$[1-(-1)^{2k_2+(1-\eta)l})]k+[(-1)^{l+2k_2}(\frac{1-(-1)^l}{2})]p+(-1)^l c_{12}=[(-1)^l(\frac{1-(-1)^l}{2})]p+(-1)^l c_{12}=(\frac{(-1)^l-(-1)^{2l}}{2})p+(-1)^l c_{12}=-(\frac{1-(-1)^l}{2})p+(-1)^l c_{12}$.

No segundo caso, temos $t_2=2l_2+1$ e $c_{22}=2k_2+1$. Nesse caso, temos $s_2^{'}=k[1-(-1)^{t_2}]+(-1)^l s_2=2k+(-1)^l s_2$, $r_2^{'}=(-1)^l r_2$, $t_2^{'}=t_2$, $c_{22}^{'}=(1-\eta)l+2k_2+1$ e,

$c_{12}^{'}=[1-(-1)^{c_{22}+(1-\eta)l})]k+[(-1)^{l+c_{22}}(\frac{1-(-1)^l}{2})]p+(-1)^l c_{12}=[1-(-1)^{2k_2+1+(1-\eta)l})]k$ $+[(-1)^{l+2k_2+1}(\frac{1-(-1)^l}{2})]p+(-1)^l c_{12}$. Como η é ímpar, então $2k_2+1+(1-\eta)l$ é ímpar, já que $(1-\eta)$ é par. Assim, temos $[1-(-1)^{2k_2+1+(1-\eta)l})]k+[(-1)^{l+2k_2+1}(\frac{1-(-1)^l}{2})]p+(-1)^l c_{12}=2k+[-1(-1)^l(\frac{1-(-1)^l}{2})]p+(-1)^l c_{12}=2k+[(-1)(-1)(\frac{1-(-1)^l}{2})]p+(-1)^l c_{12}=2k+(\frac{1-(-1)^l}{2})p+(-1)^l c_{12}$. $\square$

Do corolário acima, concluímos que quando t_1 e t_2 são ímpares então podemos considerar $s_1, s_2 \in \{0,1\}$ e $r_1, r_2 \geq 0$.

De fato, se $r_2 \geq 0$, então tomando $l=2l_1,\ l_1 \in \mathbb{Z}$, daí teremos $r_2^{'}=(-1)^l r_2=r_2 \geq 0$. Temos $s_2^{'}=2k+(-1)^l s_2=2k+s_2$. Se $s_2=2j,\ j\in\mathbb{Z}$, então basta tomar $k=-j$, e, logo teremos $s_2^{'}=0$. Agora, se $s_2=2j+1,\ j\in\mathbb{Z}$, então tomando $k=-j$, teremos $s_2^{'}=1$.

Se $r_2 \leq 0$, então tomando $l=2l_1+1$, teremos $r_2^{'}=(-1)^l r_2=-r_2\geq 0$. Temos então, $s_2^{'}=2k-s_2$, se $s_2=2j$ ou $s_2=2j+1,\ j\in\mathbb{Z}$, então tomando $k=-j$ obteremos $s_2^{'}=0$ ou 1. O caso para s_1 e r_1 é análogo.

Portanto, no caso em que t_1 e t_2 são ímpares podemos conjugar o sistema (I) por uma palavra q em $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$, tal que $\kappa(q)=\alpha_1^m\beta_1^n u_1^k v_1^l$, onde m,n,k,l são escolhidos da maneira acima, de tal modo a obtermos um sistema gerado pela entrada de dados $(A^{'},F^{'},C^{'};s_2^{'},r_2^{'},t_2^{'},(c_{12}^{'},c_{22}^{'}))$, onde $r_1^{'},r_2^{'}\geq 0$ e $s_1^{'},s_2^{'}\in\{0,1\}$.

Observemos que as soluções do teorema 3.0.4 estão em $\pi_2(K,K-x_2,x_1)=\pi_2$. Agora, olharemos as equações daquele sistema no abelianizado de π_2 que é $(\pi_2)_{ab}=\frac{\pi_2}{[\pi_2,\pi_2]}$.

O objetivo de olhar essas equações no abelianizado $(\pi_2)_{ab}$ é que se elas não possuem solução no abelianizado, então podemos inferir que o sistema original não possui solução. Se o sistema de equações possuir solução no abelianizado, então podemos tentar encontrar uma solução no sistema original.

Para ver se as equações no abelianizado $(\pi_2)_{ab}$ não tem solução, projetaremos o sistema original a um sistema de equações em $\mathbb{Z}$ usando o homomorfismo aumentação $\mathcal{E} : (\pi_2)_{ab} \longrightarrow \mathbb{Z}$ e, a partir daí, decidiremos se o sistema de equações correspondente não tem solução.

Como vimos, no capítulo 3, π_2 é o kernel da aplicação $j_\pi : \pi_1(K - x_2, x_1) =< w, v >\longrightarrow \pi_1(K, x_1) =< \bar{w}, \bar{v} | \bar{w}^{-1}\bar{v}^{-1}\bar{w}^{-1}\bar{v} = 1 >$, onde $\bar{w} = \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1}$ e $\bar{v} = \bar{a}\bar{b}$. Temos $\bar{a} = \bar{v}^{-1}\bar{w}^{-1}\bar{v}$, $\bar{b} = \bar{v}^{-1}\bar{w}\bar{v}^2$ e $\bar{w}^{-1}\bar{v}^{-1}\bar{w}^{-1}\bar{v} = \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}\bar{a}^{-1}\bar{a}\bar{b} = \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}^{-1}$. Denotemos por $B = w^{-1}v^{-1}w^{-1}v$, onde w, v são dados pela observação **??** do capítulo 2.

Teorema 3.0.5. *Para o grupo π_2 temos as seguintes afirmações:*

(1) O homomorfismo abelianização $\mathcal{A} : \pi_2 \to (\pi_2)_{ab}$, é, tal que $\mathcal{A}(p_1(w, v)\ Bp_1(w, v)^{-1}) = \mathcal{A}(p_2(w, v)Bp_2(w, v)^{-1})$, se $[j_\pi(p_1(w, v))] = [j_\pi(p_2(w, v))] = [p(\bar{w}, \bar{v})]$, onde $p_i(w, v)$, $i = 1, 2$ é uma palavra em w, v e, $p(\bar{w}, \bar{v})$ é uma palavra em $\bar{w}, \bar{v}$.

(2) Existe um isomorfismo $(\pi_2)_{ab} \cong \mathbb{Z}[\pi_1(K)]$, onde $\mathbb{Z}[\pi_1(K)]$ é o anel de grupo do grupo fundamental da garrafa de Klein.

Demonstração.

(1) Se $[j_\pi(p_1(w, v))] = [j_\pi(p_2(w, v))]$, então temos $[j_\pi(p_1(w, v)p_2(w, v)^{-1})] = 1$. Portanto, temos $p_1(w, v)p_2(w, v)^{-1} = \lambda(w, v) \in \pi_2$. Disso, temos $p_1(w, v)Bp_1(w, v)^{-1} = \lambda(w, v)[p_2(w, v)\ Bp_2(w, v)^{-1}]\lambda(w, v)^{-1}$, e logo obtemos $\mathcal{A}(p_1(w, v)Bp_1(w, v)^{-1}) = \mathcal{A}(p_2(w, v)Bp_2(w, v)^{-1})$.

(2) O homorfismo $\theta : (\pi_2)_{ab} \to \mathbb{Z}[\pi_1(K)]$ definido por $\theta(\mathcal{A}(B)) = 1.1$ e $\theta(\mathcal{A}(p(w, v)Bp(w, v)^{-1})) = 1.[p(\bar{w}, \bar{v})]$, onde $[p(\bar{w}, \bar{v})] = j_\pi(p(w, v))$, é um isomorfismo.

Por definição, temos que π_2 é gerado pelo conjunto $\{p(w, v)B^t p(w, v)^{-1} | t \in \mathbb{Z}\}$.

Por (1), temos que θ é injetor. Como j_π é sobrejetor, então temos que θ é sobrejetor.

Consideremos $\mathcal{A} : \pi_2 \to (\pi_2)_{ab} \cong \mathbb{Z}(\pi_1(K))$ o homomorfismo abelianização. Como $j_\pi(p(\bar{w}, \bar{v}))$ pertence a $\pi_1(K, x_1)$, então temos que $j_\pi(p(\bar{w}, \bar{v})) = \bar{w}^x \bar{v}^y$ com $x, y \in \mathbb{Z}$. Portanto, pelo isomorfismo acima temos $\theta(\mathcal{A}(p(w,v)B^t p(w,v)^{-1})) = t.(\bar{w}^x \bar{v}^y)$. $\square$

Agora, para estudar o sistema abelianizado, aplicaremos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$ nas equações do sistema. Para simplificar a notação indentificaremos z com $\theta(z)$, onde z e $\theta(z)$ estão na situação do teorema anterior.

Capítulo 4

Reduções e alguns resultados

Dadas aplicações $f_1, f_2 : M(\phi_p(1,\eta)) \to M(\phi_p(1,\eta))$, sobre S^1, então temos homomorfismos $f_{1\#}, f_{2\#} : \pi_1(M(\phi_p(1,\eta))) \to \pi_1(M(\phi_p(1,\eta)))$, que pela nossa notação são dados por $f_1(s_1, r_1, t_1, c_{11}, c_{21})$ e $f_2(s_2, r_2, t_2, c_{12}, c_{22})$, respectivamente.

Supondo que o número de Nielsen $N(f_{1_{|K}}, f_{2_{|K}})$ é zero, então como vimos no capítulo 3, nosso problema é equivalente a encontrar solução para um sistema de equações. Também vimos, no corolário 3.0.1, que se t_1 e t_2 são ímpares, então podemos supor que $s_1, s_2 \in \{0,1\}$ e $r_1, r_2 \geq 0$. Nesse capítulo decidiremos em alguns casos quando podemos deformar o par (f_1, f_2) a um par livre de coincidência, ou quando não podemos. Vamos mostrar que:

No caso em que $\phi = \phi_0(1,1)$, e $(f_{1\#}, f_{2\#})$ é um dos pares da forma:

$$(f_1(0,0,2l_1+1,0,2k_1), f_2(0,0,2l_2+1,0,2k_2)),$$

$$(f_1(0,0,2l_1+1,0,2k_1), f_2(1,0,2l_2+1,0,2k_2)),$$

$$(f_1(0,0,2l_1+1,0,2k_1+1), f_2(1,0,2l_2+1,0,2k_2)),$$

$$(f_1(0,0,2l_1+1,0,2k_1+1), f_2(1,0,2l_2+1,1,2k_2+1)),$$

então podemos deformar o par $(f_1, f_2) : M(\phi) \to M(\phi)$ a um par livre de coincidência. Agora, se $(f_{1\#}, f_{2\#})$ é da forma:

$$(f_1(1,0,2l_1+1,0,2k_1), f_2(1,0,2l_2+1,1,2k_2+1)),$$

então não podemos deformar.

No caso em que $\phi = \phi_0(1, -1)$, e $(f_{1\#}, f_{2\#})$ é um dos pares da forma:

$$(f_1(0, 0, 2l_1 + 1, 0, 2k_1), f_2(1, 0, 2l_2 + 1, 0, 2k_2)),$$

$$(f_1(0, 0, 2l_1 + 1, 0, 2k_1), f_2(1, 0, 2l_2 + 1, 1, 2k_2 + 1)),$$

$$(f_1(0, 0, 2l_1 + 1, 0, 2k_1 + 1), f_2(1, 0, 2l_2 + 1, 0, 2k_2)),$$

então podemos deformar o par $(f_1, f_2) : M(\phi) \to M(\phi)$ a um par livre de coincidência. Agora, se $(f_{1\#}, f_{2\#})$ é da forma:

$$(f_1(1, 0, 2l_1 + 1, 0, 2k_1), f_2(1, 0, 2l_2 + 1, 0, 2k_2)),$$

então não podemos deformar. Nos casos acima temos que l_1, l_2, k_1 e k_2 pertencem a $\mathbb{Z}$.

Se $\phi = \phi_0(1, 1)$, e $(f_{1\#}, f_{2\#})$ é um dos pares da forma:

$$(f_1(s_1, 1, 2l + 1, 0, 2k_1), f_2(s_2, r_2, 2l + 1, 0, 2k_2)), \; com \;\; k_2 - k_1 > 0,$$

$$(f_1(1, r_1, 2l + 1, 0, 2k_1), f_2(s_2, 0, 2l + 1, 0, 2k_2 + 1)), \; com \;\; r_1 > 0,$$

então não podemos deformar o par $(f_1, f_2) : M(\phi) \to M(\phi)$ a um par livre de coincidência. Nos casos acima temos que $s_1, s_2 \in \{0, 1\}$; l, k_1, k_2, pertencem a $\mathbb{Z}$, e r_1, r_2 são inteiros positivos.

Começaremos fazendo algumas reduções. Do teorema 2.1.1 e do corolário 3.0.1 temos o seguinte resultado:

Corolário 4.0.2. *Dado um par de aplicações* $(f_1, f_2) : M(\phi_p(1, \eta)) \to M(\phi_p(1, \eta))$, *sobre* S^1, *então temos o par de homomorfismos* $(f_1(s_1, r_1, t_1, c_{11}, c_{21}), f_2(s_2, r_2, t_2, c_{12}, c_{22}))$. *Suponha que temos* $t_1 = 2l_1 + 1$ *e* $t_2 = 2l_2 + 1$. *Para estudar o problema de existência de solução do sistema dado pelo teorema 3.0.4 é suficiente resolver o problema gerado pela entrada de dados* $(A, F, C; s_2, r_2, t_2, c_{12}, c_{22})$, *onde os homomorfismos* $f_1(s_1, r_1, t_1, c_{11}, c_{21})$

e $f_2(s_2, r_2, t_2, c_{12}, c_{22})$ *são dados pelas tabelas abaixo. Nessas tabelas denotaremos por* $T.1$ *o caso em que temos* $t_1 = t_2$*, e por* $T.2$ *o caso em que temos* $r_1 = r_2 = 0$.

Caso $T.1$, ou seja, $t_1 = t_2 = 2l + 1$.

Caso I	$I.3)$ $f_i(s_i, r_i, 2l+1, 0, 2k_i) : \alpha \to \alpha^{r_i},\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},\ c_0 \to \beta^{2k_i}c_0$ $I.4)$ $f_i(s_i, 0, 2l+1, s_i, 2k_i+1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},\ c_0 \to \alpha^{s_i}\beta^{2k_i+1}c_0$
$\phi_0(1,1)$	$s_i \in \{0,1\},\ \ r_i \geq 0,\ \ k_i \in \mathbb{Z},\ \ l \in \mathbb{Z},\ \ i \in \{1,2\}$
Caso II	$II.3)$ $f_i(s_i, 2c_{1i}+1, 2l+1, c_{1i}, 2k_i) : \alpha \to \alpha^{2c_{1i}+1},\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},$ $c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
$\phi_1(1,1)$	$s_i \in \{0,1\},\ \ c_{1i} \geq 0,\ \ k_i \in \mathbb{Z},\ \ l \in \mathbb{Z},\ \ i \in \{1,2\}$
Caso III	$III.3)$ $f_i(s_i, r_i, 2l+1, 0, 2k_i) : \alpha \to \alpha^{r_i},\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},\ c_0 \to \beta^{2k_i}c_0$ $III.4)$ $f_i(s_i, 0, 2l+1, s_i, 2k_i+1) : \alpha \to 1,\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},\ c_0 \to \alpha^{s_i}\beta^{2k_i+1}c_0$
$\phi_0(1,-1)$	$s_i \in \{0,1\},\ \ r_i \geq 0,\ \ k_i \in \mathbb{Z},\ \ l \in \mathbb{Z},\ \ i \in \{1,2\}$
Caso IV	$IV.3)$ $f_i(s_i, 2c_{1i}+1, 2l+1, c_{1i}, 2k_i) : \alpha \to \alpha^{2c_{1i}+1},\ \beta \to \alpha^{s_i}\beta^{2l+1},$ $c_0 \to \alpha^{c_{1i}}\beta^{2k_i}c_0$
$\phi_1(1,-1)$	$s_i \in \{0,1\},\ \ c_{1i} \geq 0,\ \ k_i \in \mathbb{Z},\ \ l \in \mathbb{Z},\ \ i \in \{1,2\}$

Caso $T.2$, isto é, $r_1 = r_2 = 0$.

Caso I	$I.3)\quad f_i(s_i,0,2l_i+1,0,2k_i):\alpha\to 1,\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l_i+1},\ c_0\to\beta^{2k_i}c_0$
	$I.4)\quad f_i(s_i,0,2l_i+1,s_i,2k_i+1):\alpha\to 1,\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l_i+1},\ c_0\to\alpha^{s_i}\beta^{2k_i+1}c_0$
$\phi_0(1,1)$	$s_i\in\{0,1\},\ \ l_i\in\mathbb{Z},\ \ k_i\in\mathbb{Z},\ \ i\in\{1,2\}$
Caso III	$III.3)\quad f_i(s_i,0,2l_i+1,0,2k_i):\alpha\to 1,\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l_i+1},\ c_0\to\beta^{2k_i}c_0$
	$III.4)\quad f_i(s_i,0,2l_i+1,s_i,2k_i+1):\alpha\to 1,\ \beta\to\alpha^{s_i}\beta^{2l_i+1},\ c_0\to\alpha^{s_i}\beta^{2k_i+1}c_0$
$\phi_0(1,-1)$	$s_i\in\{0,1\},\ \ l_i\in\mathbb{Z},\ \ k_i\in\mathbb{Z},\ \ i\in\{1,2\}$

Demonstração.

As tabelas acima foram obtidas retirando das tabelas do teorema 2.1.1 os casos em que t_1 ou t_2 é par e usando a redução obtida após corolário 3.0.1. $\square$

Se $f_i(s_i,r_i,t_i,c_{1i},c_{2i})$, $i=1,2$, são os homomorfismos, induzidos pelas aplicações f_1,f_2, em $\pi_1(M(\phi(1,\eta)))$, então do teorema 3.0.3 os termos do sistema de equações (I) podem ser dados por $A=\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}$, $r_i\in\mathbb{Z}$, $F=\tilde{\alpha}^{s_1}\tilde{\beta}^{t_1}w^{s_2}(vw)^{t_2}$ e $C=\tilde{\alpha}^{c_{11}}\tilde{\beta}^{c_{21}}w^{c_{12}}(v\ w)^{c_{22}}\tilde{c_0}$.

De fato, como $\kappa(\tilde{a})=u_1$, $\kappa(\tilde{b})=v_1$, $v=\tilde{a}\tilde{b}$, $w=\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}$ e $u_1v_1u_1v_1^{-1}=1$ em $\pi_1(M(\phi)\times_{S^1}M(\phi),(<x_2,0>,<x_1,0>))$, então temos $\kappa(v)=\kappa(\tilde{a}\tilde{b})=u_1v_1$, $\kappa(w)=\kappa(\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1})=u_1(v_1u_1^{-1}v_1^{-1}u_1^{-1})=u_1$.

Portanto, temos $\kappa(A')=\kappa(\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{a}^{r_2})=\kappa(\tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2})=\alpha_1^{r_1}u_1^{r_2}=\kappa(A)$. Também temos $\kappa(F')=\kappa(\tilde{\alpha}^{s_1}\tilde{\beta}^{t_1}\ w^{s_2}\ (vw)^{t_2})=\alpha_1^{s_1}\beta_1^{t_1}u_1^{s_2}(u_1v_1u_1)^{t_2}=\alpha_1^{s_1}\beta_1^{t_1}u_1^{s_2}v_1^{t_2}=\kappa(F)$. Da mesma forma, obtemos $\kappa(C')=\kappa(\tilde{\alpha}^{c_{11}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\ w^{c_{12}}(vw)^{c_{22}}\tilde{c_0})=\kappa(C)$.

Lema 4.0.2. *Da tabela 2.5 obtemos a seguinte tabela:*

$\tilde{\alpha}^n v^m \tilde{\alpha}^{-n} = (w^n v w^n)^m$	$\tilde{\alpha}^{-n} v^m \tilde{\alpha}^{n} = (w^{-n} v w^{-n})^m$
$\tilde{\alpha}^n w^m \tilde{\alpha}^{-n} = w^m$	$\tilde{\alpha}^{-n} w^m \tilde{\alpha}^{n} = w^m$
$\tilde{\alpha}^n B^m \tilde{\alpha}^{-n} = w^{-n} B^m w^n$	$\tilde{\alpha}^{-n} B^m \tilde{\alpha}^{n} = w^{n} B^m w^{-n}$
$\tilde{\beta}^n v^m \tilde{\beta}^{-n} = v^m$	$\tilde{\beta}^{-n} v^m \tilde{\beta}^{n} = v^m$
$\tilde{\beta}^n w^m \tilde{\beta}^{-n} = v^{-n} w^{(-1)^n m} v^n$	$\tilde{\beta}^{-n} w^m \tilde{\beta}^{n} = v^{n} w^{(-1)^n m} v^{-n}$
$\tilde{\beta}^n B^m \tilde{\beta}^{-n} =$ $= v^{-n} w^{(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})} B^{(-1)^n m} w^{-(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})} v^n$	$\tilde{\beta}^{-n} B^m \tilde{\beta}^{n} =$ $= v^{n} w^{(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})} B^{(-1)^n m} w^{-(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})} v^{-n}$
$\tilde{\beta}^n (w^{-q} v w^{-q})^m \tilde{\beta}^{-n} =$ $= v^{-n} (w^{(-1)^n(-q)} v w^{(-1)^n(-q)})^m v^n$	$\tilde{\beta}^{-n} (w^{-q} v w^{-q})^m \tilde{\beta}^{n} =$ $= v^{n} (w^{(-1)^n(-q)} v w^{(-1)^n(-q)})^m v^{-n}$
$\tilde{\alpha}^q (w^n v w^m)^m \tilde{\alpha}^{-q} = (w^{n+q} v w^{n+q})^m$	

(4.1)

Demonstração.

A tabela acima é obtida usando indução e a tabela 2.5. Calcularemos apenas a conjugação $\tilde{\beta}^n B^m \tilde{\beta}^{-n}$. As outras conjugações são obtidas de modo análogo.

Da tabela 2.5 temos $\tilde{\beta} B \tilde{\beta}^{-1} = v^{-1} w B^{-1} w^{-1} v$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^2 B \tilde{\beta}^{-2} &= \tilde{\beta} v^{-1} w B^{-1} w^{-1} v \tilde{\beta}^{-1} \\
&= \tilde{\beta} v^{-1} \tilde{\beta}^{-1} \tilde{\beta} w \tilde{\beta}^{-1} \tilde{\beta} B^{-1} \tilde{\beta}^{-1} \tilde{\beta} w^{-1} \tilde{\beta}^{-1} \tilde{\beta} v \tilde{\beta}^{-1} \\
&= v^{-1} v^{-1} w^{-1} v v^{-1} w B w^{-1} v v^{-1} w v v \\
&= v^{-2} B v^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^3 B \tilde{\beta}^{-3} &= \tilde{\beta} v^{-2} B v^2 \tilde{\beta}^{-1} \\
&= \tilde{\beta} v^{-2} \tilde{\beta}^{-1} \tilde{\beta} B \tilde{\beta}^{-1} \tilde{\beta} v^2 \tilde{\beta}^{-1} \\
&= v^{-2} v^{-1} w B^{-1} w^{-1} v v^2 \\
&= v^{-3} w B^{-1} w^{-1} v^3.
\end{aligned}$$

Suponha que temos $\tilde{\beta}^k B \tilde{\beta}^{-k} = v^{-k} w^{(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2})} B^{(-1)^k} \ w^{-(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2})} v^k$, para algum inteiro k positivo. Dessa hipótese temos,

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^{k+1}B\tilde{\beta}^{-k-1} &= \tilde{\beta}\tilde{\beta}^{k}B\tilde{\beta}^{-k}\tilde{\beta}^{-1}\\
&= \tilde{\beta}v^{-k}w^{(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2})}B^{(-1)^k}w^{-(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2})}v^{k}\tilde{\beta}^{-1}\\
&= \tilde{\beta}v^{-k}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}w^{(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2})}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}B^{(-1)^k}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}w^{-(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2})}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}v^{k}\tilde{\beta}^{-1}\\
&= v^{-k}v^{-1}w^{(-1)(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2})}vv^{-1}wB^{(-1)(-1)^k}w^{-1}vv^{-1}w^{-(-1)(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2})}vv^{k}\\
&= v^{-k-1}w^{(\frac{-1+(-1)^{k+2}}{2})}wB^{(-1)^{k+1}}w^{-1}w^{-(\frac{-1+(-1)^{k+2}}{2})}v^{k+1}\\
&= v^{-k-1}w^{(\frac{-1+2+(-1)^{k+2}}{2})}B^{(-1)^{k+1}}w^{-(\frac{-1+2+(-1)^{k+2}}{2})}v^{k+1}\\
&= v^{-k-1}w^{(\frac{1+(-1)^{k+2}}{2})}B^{(-1)^{k+1}}w^{-(\frac{1+(-1)^{k+2}}{2})}v^{k+1}.
\end{aligned}$$

Portanto, por indução obtemos que $\tilde{\beta}^{n}B\tilde{\beta}^{-n} = v^{-n}w^{(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})}B^{(-1)^n}\ w^{-(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})}v^{n}$, para todo inteiro n. Daí temos $\tilde{\beta}^{n}B^{m}\tilde{\beta}^{-n} = v^{-n}w^{(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})}B^{(-1)^n m}\ w^{-(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})}v^{n}$, para quaisquer inteiros n, m. $\square$

4.0.2 Aplicando $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}$ nas equações do sistema.

Nessa subseção calcularemos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(AFAF^{-1})$, $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1})$ e $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(CFC^{-1}F^{-\eta}A^{-p})$ em alguns casos.

Lembremos que para $\phi_p(1,\eta)$ e $f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i})$, dados na tabela 2.1 , existe o homomorfismo do levantamento do diagrama 3.1 se, e somente se, o sistema abaixo possui solução:

$$(I)\qquad \begin{cases}
Z_1(AZ_2A^{-1})(AFAF^{-1})(FA^{-1}Z_1AF^{-1})Z_2^{-1} & = 1\\
Z_3(CZ_1C^{-1})(CAC^{-1}A^{-1})(AZ_3^{-1}A^{-1})Z_1^{-1} & = 1\\
Z_3(CZ_2C^{-1})(CFC^{-1}F^{-\eta}A^{-p})(A^{p}F^{\eta}Z_3^{-1}F^{-\eta}A^{-p}) & \\
(A^{p}F^{\frac{\eta-1}{2}}Z_2^{-\eta}F^{\frac{1-\eta}{2}}A^{-p})Z_1^{-p} & = 1,
\end{cases}$$

onde $\kappa(A) = \alpha_1^{r_1}u_1^{r_2}$, $\kappa(F) = \alpha_1^{s_1}\beta_1^{t_1}u_1^{s_2}v_1^{t_2}$ e $\kappa(C) = \alpha_1^{c_{11}}\beta_1^{c_{21}}u_1^{c_{12}}v_1^{c_{22}}c_{01}$.

Sejam $Z_1 = \prod_i w^{u_i}v^{v_i}B^{t_1^i}v^{-v_i}w^{-u_i}$, $Z_2 = \prod_i w^{m_i}v^{n_i}B^{t_2^i}v^{-n_i}w^{-m_i}$, $Z_3 = \prod_i w^{x_i}v^{y_i}B^{t_3^i}v^{-y_i}w^{-x_i}$ e $\bar{t_j} = \sum_i t_j^i$, onde t_j é o expoente de B no i-ésimo fator de Z_j. Observemos que temos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(Z_j) = \bar{t_j}$, onde $j = 1, 2, 3$.

Pelo teorema 3.0.5, os elementos Z_j, $j = 1, 2, 3$, acima, pertencentes a $\pi_2(K, K - x_2, x_1))$, são suficientes para estudarmos as soluções do nosso sistema.

Analisaremos agora, o comportamento de $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$ depois de conjugarmos a variável $Z = w^m v^n B^k v^{-n} w^{-m}$, por $\tilde{\alpha}^q$, $\tilde{\alpha}^{-q}$, $\tilde{\beta}^q$, $\tilde{\beta}^{-q}$ e $\tilde{c}_0$, com $q \in \mathbb{Z}$, em cada um dos casos de $\phi_p(1, \eta)$, onde B é dado por $B = w^{-1}v^{-1}w^{-1}v$. Isso é o que contém a próxima proposição.

Proposição 4.0.1. *Se $Z = w^m v^n B^k v^{-n} w^{-m}$ e $q \in \mathbb{Z}$ então temos*

(1)

$$\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(Z) = k,$$

$$\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}^q Z \tilde{\alpha}^{-q}) = k, \qquad \mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}^{-q} Z \tilde{\alpha}^q) = k,$$

$$\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\beta}^q Z \tilde{\beta}^{-q}) = (-1)^q k \quad e \quad \mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\beta}^{-q} Z \tilde{\beta}^q) = (-1)^q k.$$

(2) Em cada caso de $\phi_p(1, \eta)$, temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{c}_0 Z \tilde{c}_0^{\,-1}) = \eta k$.

Demonstração.

(1) Como $Z = w^m v^n B^k v^{-n} w^{-m}$, então temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(Z) = k$. Usaremos as tabelas 2.5 e 4.1 para demonstrar os outros casos.

Da tabela 4.1, temos $\tilde{\alpha}^q B^k \tilde{\alpha}^{-q} = w^{-q} B^k w^q$. Disso, obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}^q Z \tilde{\alpha}^{-q} &= \tilde{\alpha}^q w^m v^n B^k v^{-n} w^{-m} \tilde{\alpha}^{-q} \\
&= \tilde{\alpha}^q w^m \tilde{\alpha}^{-q} \tilde{\alpha}^q v^n \tilde{\alpha}^{-q} \tilde{\alpha}^q B^k \tilde{\alpha}^{-q} \tilde{\alpha}^q v^{-n} \tilde{\alpha}^{-q} \tilde{\alpha}^q w^{-m} \tilde{\alpha}^{-q} \\
&= w^m (w^q v w^q)^n w^{-q} B^k w^q (w^q v w^q)^{-n} w^{-m}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}^q Z \tilde{\alpha}^{-q}) = k$. Usando a tabela 4.1, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^q Z \tilde{\beta}^{-q} &= \tilde{\beta}^q w^m v^n B^k v^{-n} w^{-m} \tilde{\beta}^{-q} \\
&= \tilde{\beta}^q w^m \tilde{\beta}^{-q} \tilde{\beta}^q v^n \tilde{\beta}^{-q} \tilde{\beta}^q B^k \tilde{\beta}^{-q} \tilde{\beta}^q v^{-n} \tilde{\beta}^{-q} \tilde{\beta}^q w^{-m} \tilde{\beta}^{-q} \\
&= (v^{-q} w^{(-1)^q m} v^q) v^n v^{-q} w^{(\frac{1+(-1)^{q+1}}{2})} B^{(-1)^q k} w^{-(\frac{1+(-1)^{q+1}}{2})} v^q v^{-n} (v^{-q} w^{(-1)^q (-m)} v^q).
\end{aligned}$$

Logo, temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\beta}^q Z \tilde{\beta}^{-q}) = (-1)^q k$. Agora

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}^{-q} Z \tilde{\alpha}^q &= \tilde{\alpha}^{-q} w^m v^n B^k v^{-n} w^{-m} \tilde{\alpha}^q \\
&= \tilde{\alpha}^{-q} w^m \tilde{\alpha}^q \tilde{\alpha}^{-q} v^n \tilde{\alpha}^q \tilde{\alpha}^{-q} B^k \tilde{\alpha}^q \tilde{\alpha}^{-q} v^{-n} \tilde{\alpha}^q \tilde{\alpha}^{-q} w^{-m} \tilde{\alpha}^q \\
&= w^m (w^{-q} v w^{-q})^n w^q B^k w^{-q} (w^{-q} v w^{-q})^{-n} w^{-m}.
\end{aligned}$$

Assim, temos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{\alpha}^{-q}Z\tilde{\alpha}^{q})=k$. Também temos

$$\begin{array}{rcl}\tilde{\beta}^{-q}Z\tilde{\beta}^{q} & = & \tilde{\beta}^{-q}w^{m}v^{n}B^{k}v^{-n}w^{-m}\tilde{\beta}^{q}\\ & = & \tilde{\beta}^{-q}w^{m}\tilde{\beta}^{q}\tilde{\beta}^{-q}v^{n}\tilde{\beta}^{q}\tilde{\beta}^{-q}B^{k}\tilde{\beta}^{q}\tilde{\beta}^{-q}v^{-n}\tilde{\beta}^{q}\tilde{\beta}^{-q}w^{-m}\tilde{\beta}^{q}\\ & = & (v^{q}w^{(-1)^{q}m}v^{-q})v^{n}v^{q}w^{(\frac{1+(-1)^{q+1}}{2})}B^{(-1)^{q}k}w^{-(\frac{1+(-1)^{q+1}}{2})}v^{-q}v^{-n}(v^{q}w^{(-1)^{q}-m}v^{-q}).\end{array}$$

Portanto, temos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{\beta}^{-q}Z\tilde{\beta}^{q})=(-1)^{q}k$.

(2) Usaremos a tabela 2.6 para fazer a demonstração.

Em todos os casos de $\phi_p(1,\eta)$, temos $\tilde{c_0}B\tilde{c_0}^{-1}=B^{\eta}$, logo temos $\tilde{c_0}B^{k}\tilde{c_0}^{-1}=B^{\eta k}$, em todos os casos de $\phi_p(1,\eta)$.

Sendo $a=\frac{-1+\eta}{2}$, então temos $\tilde{c_0}w\tilde{c_0}^{-1}=v^{a}w^{\eta}v^{-a}$ e $\tilde{c_0}v\tilde{c_0}^{-1}=(w^{p}v)^{\eta}$, onde $p\in\{0,1\}$. Assim obtemos

$$\begin{array}{rcl}\tilde{c_0}Z\tilde{c_0}^{-1} & = & \tilde{c_0}w^{m}v^{n}B^{k}v^{-n}w^{-m}\tilde{c_0}^{-1}\\ & = & \tilde{c_0}w^{m}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}v^{n}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}B^{k}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}v^{-n}\tilde{c_0}^{-1}\tilde{c_0}w^{-m}\tilde{c_0}^{-1}\\ & = & (v^{a}w^{\eta m}v^{-a})(w^{p}v)^{\eta m}B^{\eta k}(w^{p}v)^{-\eta n}(v^{a}w^{\eta m}v^{-a})^{-1}.\end{array}$$

Assim, temos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{c_0}Z\tilde{c_0}^{-1})=\eta k$. □

O próxima proposição nos ajudará a fazer alguns cálculos posteriormente.

Proposição 4.0.2. *Se $B=w^{-1}v^{-1}w^{-1}v$, e $p(w,v)$ é uma palavra em w,v, então temos;*

i) $(p(w,v)B^{-1})^{q}=[\prod_{j=1}^{q}p(w,v)^{j}B^{-1}p(w,v)^{-j}]p(w,v)^{q}$, *para q inteiro positivo e portanto, temos que $(p(w,v)B^{-1})^{q}p(w,v)^{-q}$ pertence a π_2, e além disso, temos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}((p(w,v)B^{-1})^{q}p(w,v)^{-q})=-q$, para q inteiro positivo.*

ii) $(Bp(w,v)^{-1})^{q}=p(w,v)^{-q}[\prod_{j=1}^{q}p(w,v)^{q-j+1}Bp(w,v)^{-q+j-1}]$, *para q inteiro positivo e portanto, temos que $p(w,v)^{q}(Bp(w,v)^{-1})^{q}$ pertence a π_2, além disso, temos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(p(w,v)^{q}(Bp(w,v)^{-1})^{q})=q$, para q inteiro positivo.*

iii) $\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1}=\prod_{j=1}^{k}(\tilde{\beta}^{2k-2j+1}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k+2j-1})\ (\tilde{\beta}^{2k-2j}B^{-1}\tilde{\beta}^{-2k+2j})$, *para k inteiro positivo e portanto, temos que $\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1}$ pertence a π_2, e além disso, temos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1})=-2k$. para k inteiro positivo.*

iv) $\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{-1} = \prod_{j=1}^{k}(\tilde{\beta}^{-2j}B\tilde{\beta}^{2j})(\tilde{\beta}^{-2j+1}\tilde{\alpha}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2j-1})$ *, para k inteiro positivo e portanto, temos que $\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{-1}$ pertence a π_2, e além disso, temos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{-1}) = 2k$, para k inteiro positivo.*

Demonstração.

i) Primeiro, notemos que, q é inteiro positivo.

Temos que $(p(w,v)B^{-1})^q = \underbrace{p(w,v)B^{-1}p(w,v)B^{-1}\dots p(w,v)B^{-1}}_{q-vezes} = p(w,v)B^{-1}\,p(w,v)^{-1}\,p(w,v)^2B^{-1}p(w,v)^{-2}p(w,v)^3B^{-1}\dots p(w,v)^{-q+1}p(w,v)^qB^{-1}p(w,v)^{-q}p(w,v)^q =$
$= (p(w,v)B^{-1}p(w,v)^{-1})(p(w,v)^2B^{-1}p(w,v)^{-2})\dots(p(w,v)^qB^{-1}p(w,v)^{-q})p(w,v)^q =$
$= [\prod_{j=1}^{q}(p(w,v)^jB^{-1}p(w,v)^{-j})]p(w,v)^q.$

Portanto, temos $(p(w,v)B^{-1})^qp(w,v)^{-q} = \prod_{j=1}^{q}(p(w,v)^jB^{-1}p(w,v)^{-j})$. Assim, temos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}((p(w,v)B^{-1})^qp(w,v)^{-q}) = -q$.

ii) A demonstração do caso *ii)* é feita da mesma forma como fizemos o caso *i)*. Deste resultado, podemos concluir que $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(p(w,v)^q(Bp(w,v)^{-1})^q) = q$.

iii) Faremos a demonstração usando indução em k.

Temos $\tilde{\beta}^2\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\beta}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1} = (\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1})B^{-1}$. Temos também

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}^4\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-4}\tilde{\alpha}^{-1} &= \tilde{\beta}^2\tilde{\beta}^2\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\beta}^2(\tilde{\beta}^2\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1})\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\beta}^2(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1})B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= (\tilde{\beta}^3\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-3})(\tilde{\beta}^2B^{-1}\tilde{\beta}^{-2})(\tilde{\beta}^2\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1})\\
&= (\tilde{\beta}^3\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-3})(\tilde{\beta}^2B^{-1}\tilde{\beta}^{-2})(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1})B^{-1}.
\end{aligned}$$

Supondo que $\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1} = \prod_{j=1}^{k}(\tilde{\beta}^{2k-2j+1}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k+2j-1})\,(\tilde{\beta}^{2k-2j}B^{-1}\tilde{\beta}^{-2k+2j})$, então temos

$$
\begin{aligned}
\tilde{\beta}^{2(k+1)}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2(k+1)}\tilde{\alpha}^{-1} &= \tilde{\beta}^{2}\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\beta}^{2}(\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1})\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\beta}^{2}\textstyle\prod_{j=1}^{k}(\tilde{\beta}^{2k-2j+1}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k+2j-1})(\tilde{\beta}^{2k-2j}B^{-1}\tilde{\beta}^{-2k+2j})\\
&\quad \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\beta}^{2}\textstyle\prod_{j=1}^{k}(\tilde{\beta}^{2k-2j+1}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k+2j-1})\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\beta}^{2}(\tilde{\beta}^{2k-2j}B^{-1}\\
&\quad \tilde{\beta}^{-2k+2j})\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\beta}^{2}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= [\textstyle\prod_{j=1}^{k}(\tilde{\beta}^{2k+2-2j+1}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k-2+2j-1})(\tilde{\beta}^{2k+2-2j}B^{-1}\\
&\quad \tilde{\beta}^{-2k-2+2j})](\tilde{\beta}^{2}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}^{-1})\\
&= [\textstyle\prod_{j=1}^{k}(\tilde{\beta}^{2(k+1)-2j+1}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2(k+1)+2j-1})(\tilde{\beta}^{2(k+1)-2j}B^{-1}\\
&\quad \tilde{\beta}^{-2(k+1)+2j})](\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1})B^{-1}\\
&= \textstyle\prod_{j=1}^{k+1}(\tilde{\beta}^{2(k+1)-2j+1}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2(k+1)+2j-1})(\tilde{\beta}^{2(k+1)-2j}B^{-1}\\
&\quad \tilde{\beta}^{-2(k+1)+2j}).
\end{aligned}
$$

Portanto, obtemos o resultado por indução.

Usando a proposição 4.0.1, obtemos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1}) = \mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\prod_{j=1}^{k}(\tilde{\beta}^{2k-2j+1}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}$ $\tilde{\beta}^{-2k+2j-1})(\tilde{\beta}^{2k-2j}B^{-1}\tilde{\beta}^{-2k+2j}) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{2k-2j+1}+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{2k-2j}(-1) = -k+(-k) = -2k$.

iv) Esse caso é semelhante ao anterior.

Temos $\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2}\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\beta}^{-2}B\tilde{\beta}^{2}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1} = (\tilde{\beta}^{-2}B\tilde{\beta}^{2})(\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}B^{-1}$ $\tilde{\alpha}\tilde{\beta})$. Também temos

$$
\begin{aligned}
\tilde{\beta}^{-4}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{4}\tilde{\alpha}^{-1} &= \tilde{\beta}^{-2}(\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2}\tilde{\alpha}^{-1})\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\beta}^{-2}(\tilde{\beta}^{-2}B\tilde{\beta}^{2})(\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta})\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\beta}^{-2}(\tilde{\beta}^{-2}B\tilde{\beta}^{2})\tilde{\beta}^{2}\tilde{\beta}^{-2}(\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta})\tilde{\beta}^{2}(\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2}\tilde{\alpha}^{-1})\\
&= (\tilde{\beta}^{-4}B\tilde{\beta}^{4})(\tilde{\beta}^{-3}\tilde{\alpha}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{3})(\tilde{\beta}^{-2}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2}\tilde{\alpha}^{-1})\\
&= [(\tilde{\beta}^{-4}B\tilde{\beta}^{4})(\tilde{\beta}^{-3}\tilde{\alpha}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{3})][\tilde{\beta}^{-2}B\tilde{\beta}^{2})(\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}B^{-1}\ \tilde{\alpha}\tilde{\beta}].
\end{aligned}
$$

Por indução, mostramos que $\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{-1} = \prod_{j=1}^{k}(\tilde{\beta}^{-2j}B\tilde{\beta}^{2j})(\tilde{\beta}^{-2j+1}\tilde{\alpha}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2j-1})$, para k inteiro positivo. Agora usando a proposição 4.0.1 obtemos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{-1}) = \mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\prod_{j=1}^{k}(\tilde{\beta}^{-2j}B\tilde{\beta}^{2j})(\tilde{\beta}^{-2j+1}\tilde{\alpha}^{-1}B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2j-1})) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{2j}+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{-2j+1}(-1) = k+k = 2k$. $\square$

Corolário 4.0.3. *Se k e r são inteiros positivos, então temos*

i) $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{r}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-r}) = -2kr$

ii) $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{r}\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{-r}) = 2kr.$

Demonstração.

i) Da proposição anterior, temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1}) = -2k$. Portanto, temos que $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}[\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1}]\tilde{\alpha}^{-1}) = -2k$. Assim, temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}([\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1}]\tilde{\alpha}[\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}$ $\tilde{\alpha}^{-1}]\tilde{\alpha}^{-1}) = -2k - 2k = (-2k)2$.

Por outro lado, temos que $[\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1}]\tilde{\alpha}[\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\ \tilde{\alpha}^{-1}]\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{2}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-2}$ e portanto $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{2}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-2}) = (-2k)2$.

Suponha que $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{n}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-n}) = -2kn$. Pela proposição anterior, obtemos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{\alpha}^{n}[\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1}]\tilde{\alpha}^{-n}) = -2k$. Logo, temos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}([\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{n}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-n}]\tilde{\alpha}^{n}[\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1}]$ $\tilde{\alpha}^{-n}) = -2kn - 2k$, ou seja, $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}^{n+1}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-(n+1)}) = -2kn - 2k = -2k(n+1)$. Portanto, por indução obtemos o resultado.

ii) Esse item é análogo ao anterior. □

Dado um par de aplicações $(f_1, f_2) : M(\phi_p(1,\eta)) \to M(\phi_p(1,\eta))$, sobre S^1, tal que o número de Nielsen $N((f_1)_{|K}, (f_2)_{|K})$ é zero, então devemos ter $t_1 = t_2$ ou $r_1 = r_2 = 0$, onde r_i e t_i são dados por $f_i(s_i, r_i, t_i, c_{1i}, c_{2i}) : \pi_1(M(\phi_p(1,\eta))) \to \pi_1(M(\phi_p(1,\eta)))$, $i = 1, 2$.

A partir de agora, analisaremos alguns casos onde temos $r_1 = r_2 = 0$, ou seja, o caso $T.2$. Neste caso, temos $A = 1$, e logo obteremos $AFAF^{-1} = 1$, $CAC^{-1}A^{-1} = 1$. Portanto, em qualquer situação que tivermos $CFC^{-1}F^{-\eta}A^{-p} = 1$, obteremos que $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 1$ é uma solução para o sistema (I), portanto existe o levantamento do diagrama 3.1.

Caso $T.2$

$I)$ $\phi_0(1,1)$.

No caso $I.3$, temos os possíveis casos para os pares de homomorfismos $(f_{1\#}, f_{2\#})$:

$$I.3.1 \ \ ,(f_1(s_1,0,2l_1+1,0,2k_1), f_2(s_2,0,2l_2+1,0,2k_2))$$

$$I.3.2 \ \ ,(f_1(s_1,0,2l_1+1,0,2k_1), f_2(s_2,0,2l_2+1,s_2,2k_2+1))$$

$$I.3.3 \ \ ,(f_1(s_1,0,2l_1+1,s_1,2k_1+1), f_2(s_2,0,2l_2+1,0,2k_2))$$

$$I.3.4 \ \ ,(f_1(s_1,0,2l_1+1,s_1,2k_1+1), f_2(s_2,0,2l_2+1,s_2,2k_2+1)),$$

onde $s_i \in \{0,1\}$ e l_i, k_i com $i=1,2$ pertence a $\mathbb{Z}$.

Como estudar coincidência de (f_1, f_2) é o mesmo que estudar coincidência de (f_2, f_1), então os casos $I.3.2$ e $I.3.3$ são equivalentes, assim, basta analisarmos um único caso. Para efeito de cálculos, trabalharemos com o caso que for mais conveniente.

Caso $I.3.1$ com $s_1 = s_2 = 0$.

Nesse caso temos $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1}(vw)^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}(vw)^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Observemos que $\kappa(F) = \kappa(\tilde{\beta}^{t_1}(vw)^{t_2}) = \beta_1^{t_1}(u_1v_1u_1)^{t_2} = \beta_1^{t_1}v_1^{t_2}$, e $\kappa(C) = \kappa(\tilde{\beta}^{c_{21}}(vw)^{c_{22}}\tilde{c_0}) = \beta_1^{c_{21}}(u_1v_1$ $u_1)^{c_{22}}c_{01} = \beta_1^{c_{21}}v_1^{c_{22}}c_{01}$.

Como t_2 é ímpar e c_{22} é par, então temos $\kappa(\tilde{\beta}^{t_1}w^{-1}v^{t_2}) = \beta_1^{t_1}u_1^{-1}(u_1v_1)^{t_2} = \beta_1^{t_1}u_1^{-1}u_1$ $v_1^{t_2} = \beta_1^{t_1}v_1^{t_2} = \kappa(F)$. Também temos $\kappa(\tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}) = \beta_1^{c_{21}}(u_1v_1)^{c_{22}}c_{01} = \beta_1^{c_{21}}v_1^{c_{22}}c_{01} = \kappa(C)$. Portanto, podemos tomar $A=1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1}w^{-1}v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{t_1}w^{-1}v^{t_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t_2}w\tilde{\beta}^{-t_1}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{t_1}w^{-1}v^{t_2}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t_2}w\tilde{\beta}^{-t_1}\\
&= \tilde{\beta}^{t_1}v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}w^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{t_2}v^{-c_{22}}v^{-t_2}w\tilde{\beta}^{-t_1}\\
&= \tilde{\beta}^{t_1}v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}w^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}}w\tilde{\beta}^{-t_1}\\
&= \tilde{\beta}^{t_1}v^{c_{22}}v^{-c_{21}}w^{-1}v^{c_{21}}v^{-c_{22}}w\tilde{\beta}^{-t_1}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}\tilde{\beta}^{t_1}w^{-1}\tilde{\beta}^{-t_1}v^{c_{21}-c_{22}}\tilde{\beta}^{t_1}w\tilde{\beta}^{-t_1}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}v^{-t_1}wv^{t_1}v^{c_{21}-c_{22}}v^{-t_1}w^{-1}v^{t_1}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}-t_1}wv^{t_1+c_{21}-c_{22}}w^{-1}wv^{-t_1}w^{-1}v^{t_1}\\
&= [v^{c_{22}-c_{21}-t_1}, w][w, v^{-t_1}].
\end{aligned}$$

Assim, temos $CFC^{-1}F^{-1} = 1$ se, e somente se, $c_{21} = c_{22}$. Se $c_{21} = c_{22}$, então o sistema possui solução trivial. Logo $2k_1 = 2k_2$ e daí $k_1 = k_2$.

Caso $I.3.1$ com $s_1 = 0$, $s_2 = 1$.

Nesse caso, temos $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1}w(vw)^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}(vw)^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Como t_2 é ímpar e c_{22} é par, então podemos tomar $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Da tabela 4.1, temos que $\tilde{\beta}$ comuta com v. Logo, temos $CFC^{-1}F^{-1} = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1}$ $= 1$. Portanto, nesse caso temos que $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 1$ é solução do sistema.

Caso $I.3.2$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

Temos $A = 1$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}w(vw)^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}w(vw)^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Como t_2 e c_{22} são ímpares, então podemos tomar $A = 1$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$, pois $\kappa(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}w(vw)^{t_2}) = \kappa(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2})$ e $\kappa(\tilde{\beta}^{c_{21}}w(vw)^{c_{22}}\tilde{c_0}) = \kappa(\tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0})$. Usando a tabela 4.1 e a proposição 4.0.2, temos

$$
\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{\alpha}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}(wvw)^{-c_{22}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}(wvw)^{-c_{22}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{c_{22}}v^{-c_{21}}(wvw)^{-c_{22}}v^{c_{21}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1})\\
&= v^{c_{22}}v^{-c_{21}}(vB^{-1})^{-c_{22}}v^{c_{21}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1})\\
&= v^{c_{22}}v^{-c_{21}}(Bv^{-1})^{c_{22}}v^{c_{21}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1})\\
&= v^{c_{22}}v^{-c_{21}}v^{-c_{22}}\textstyle\prod_{j=0}^{c_{22}-1}(v^{c_{22}-j}Bv^{-c_{22}+j})v^{c_{21}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1})\\
&= v^{-c_{21}}[\textstyle\prod_{j=0}^{c_{22}-1}(v^{c_{22}-j}Bv^{-c_{22}+j})]v^{c_{21}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}).
\end{aligned}
$$

Como c_{21} é par, então pela proposição 4.0.2, temos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(CFC^{-1}F^{-1}) = c_{22} \pm c_{21}$. Para esse caso aplicaremos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}$ na terceira equação do sistema (I).

Temos

$$
\begin{aligned}
CZ_2C^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}Z_2\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\\
&= v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{c_0}Z_2\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}})v^{-c_{22}},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} FZ_3^{-1}F^{-1} &= \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}Z_3^{-1}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}^{-1} \\ &= \tilde{\alpha}v^{t_2}\tilde{\beta}^{t_1}Z_3^{-1}\tilde{\beta}^{-1}v^{-t_2}\tilde{\alpha}^{-1} \\ &= \tilde{\alpha}v^{t_2}\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}Z_3^{-1}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}^{-1})\tilde{\alpha}v^{-t_2}\tilde{\alpha}^{-1} \\ &= (wvw)^{t_2}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}Z_3^{-1}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}^{-1})(wvw)^{-t_2}. \end{aligned}$$

Pela proposição 4.0.1, temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(CZ_2C^{-1}) = \bar{t_2}$ e $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(FZ_3^{-1}F^{-1}) = \bar{t_3}$.

Aplicando $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$ na terceira equação do sistema, temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(1) = \mathcal{E} \circ \mathcal{A}(Z_3(CZ_2 C^{-1})(CF\,C^{-1}F^{-1})(FZ_3^{-1}F^{-1})Z_2^{-1})$. Pelos resultados acima obtemos $\bar{t_3}+\bar{t_2}+c_{22}\pm c_{21}+\bar{t_3}-\bar{t_2}=0$. Disso resulta $c_{22}\pm c_{21}=-2\bar{t_3}$ que implica $2k_2+1\pm 2k_1=-2\bar{t_3}$, ou seja, $2k_2+1=2(-\bar{t_3}\pm k_1)$, que é um absurdo. Portanto, o sistema não possui solução para o caso $I.3.2$ com $s_1=s_2=1$.

Caso $I.3.3$ com $s_1=0$ e $s_2=1$.

Nesse caso, temos $A=1$, $F=\tilde{\beta}^{t_1}w(vw)^{t_2}$ e $C=\tilde{\beta}^{c_{21}}(vw)^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Como t_2 é ímpar e c_{22} é par, então podemos tomar $A=1$, $F=\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$ e $C=\tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Da tabela 4.1, temos que $\tilde{\beta}$ comuta com v. Assim, como $\tilde{c_0}$ comuta com $\tilde{\beta}$ e v, temos $CFC^{-1}F^{-1} = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1}=1$. Portanto, nesse caso o sistema tem solução trivial. Observemos que esse caso é equivalente ao caso $I.3.2$ com $s_1=1$ e $s_2=0$.

Caso $I.3.3$ com $s_1=s_2=1$.

Esse caso é o simetrico de $I.3.2$ com $s_1=s_2=1$. Portanto, o caso $I.3.3$ não possui solução para $s_1=s_2=1$.

Caso $I.3.4$ com $s_1=0$ e $s_2=1$.

Nesse caso temos $A=1$, $F=\tilde{\beta}^{t_1}w(vw)^{t_2}$ e $C=\tilde{\beta}^{c_{21}}w(vw)^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Como t_2 e c_{22} são ímpares então podemos tomar $A=1$, $F=\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$ e $C=\tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Da tabela 4.1 temos que $\tilde{\beta}$ comuta com v. Assim, temos $CFC^{-1}F^{-1}=\tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1} = 1$. Portanto, nesse caso temos que $Z_1=Z_2=Z_3=1$ é solução do sistema.

Caso $T.2$

$III)\quad \phi_0(1,-1)$.

No caso $III.3$ temos os possíveis casos para os pares de homomorfismos $(f_{1\#}, f_{2\#})$:

$$III.3.1 \ \ ,(f_1(s_1,0,2l_1+1,0,2k_1), f_2(s_2,0,2l_2+1,0,2k_2))$$

$$III.3.2 \ \ ,(f_1(s_1,0,2l_1+1,0,2k_1), f_2(s_2,0,2l_2+1,s_2,2k_2+1))$$

$$III.3.3 \ \ ,(f_1(s_1,0,2l_1+1,s_1,2k_1+1), f_2(s_2,0,2l_2+1,0,2k_2))$$

$$III.3.4 \ \ ,(f_1(s_1,0,2l_1+1,s_1,2k_1+1), f_2(s_2,0,2l_2+1,s_2,2k_2+1)),$$

onde $s_i \in \{0,1\}$ e l_i, k_i com $i = 1,2$ pertence a $\mathbb{Z}$.

Caso $III.3.1$ com $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$.

Nesse caso podemos tomar $A = 1$, $F = \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0}$.

Dessa forma, temos $CFC^{-1}F = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2} \tilde{c_0}^{-1} v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2} = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{\beta}^{-t_1}$ $v^{-t_2}\ v^{-c_{22}} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2}$. Como $\tilde{\beta}$ e v comutam, então obtemos $CFC^{-1}F = 1$. Portanto, nesse caso, o sistema (I) possui solução trivial.

Caso $III.3.1$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

Nesse caso, temos $A = 1$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1} w(vw)^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}(vw)^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Como t_2 é ímpar e c_{22} é par, então podemos tomar $A = 1$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1} v^{t_2}$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0}$. A seguir calcularemos $CFC^{-1}F$. Usando as tabelas 2.4, 2.5, 2.6 e 4.1, temos

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\\
&= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}B^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t_1}v^{-t_2}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\\
&= (v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}B^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}})v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}})v^{-c_{22}}v^{-t_2}(\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1})v^{t_2}\\
&= (v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}B^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}})v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1})\tilde{\alpha}v^{-c_{22}-t_2}(\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1})v^{t_2}\\
&= (v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}B^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}})v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1})(wvw)^{-c_{22}-t_2}\\
&\quad (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1})v^{t_2}\\
&= (v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}B^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}})v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1})(Bv^{-1})^{c_{22}+t_2}\\
&\quad (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1})v^{t_2}\\
&= (v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}B^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}})v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1})v^{-c_{22}-t_2}\\
&\quad [\textstyle\prod_{j=1}^{c_{22}+t_2} v^{c_{22}+t_2-j+1}Bv^{-c_{22}-t_2+j-1}](\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1})v^{t_2}\\
&= (v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}B^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}})v^{c_{22}}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1})v^{-c_{22}}v^{-t_2}\\
&\quad [\textstyle\prod_{j=1}^{c_{22}+t_2} v^{c_{22}+t_2-j+1}Bv^{-c_{22}-t_2+j-1}]v^{t_2}v^{-t_2}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1})v^{t_2}.
\end{aligned}$$

Observemos que $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta} = \tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1} &= \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2l_1-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2l_1+1}\\
&= \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2l_1}\tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta})\tilde{\beta}^{2l_1}\\
&= (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2l_1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}^{2l_1})\tilde{\beta}^{-2l_1}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta})\tilde{\beta}^{2l_1}\\
&= (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2l_1}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}^{2l_1})\tilde{\beta}^{-2l_1}(\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta})\tilde{\beta}^{2l_1}\\
&= (\tilde{\beta}^{-2l_1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2l_1}\tilde{\alpha}^{-1})^{-1}(\tilde{\beta}^{-2l_1-1}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2l_1+1})\\
&= (\tilde{\beta}^{-2l_1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2l_1}\tilde{\alpha}^{-1})^{-1}(\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}^{-1}B\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}).
\end{aligned}$$

Da proposição 4.0.2 temos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{\beta}^{2k}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2k}\tilde{\alpha}^{-1}) = \pm 2k$.

Portanto pela proposição 4.0.2 e pela proposição 4.0.1, temos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}) = \pm 2k_1$ e $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}) = \pm 2l_1 - 1$.

Agora, aplicando $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}$ na terceira equação do sistema obteremos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(Z_3(CZ_2C^{-1})(CFC^{-1}F)\ (F^{-1}Z_3^{-1}F)(F^{-1}Z_2F)) = 0$. Notemos que

$$\begin{aligned}
CZ_2C^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}Z_2\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\\
&= v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{c_0}Z_2\tilde{c_0}^{-1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-c_{22}},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F^{-1}Z_2F &= v^{-t_2}\tilde{\beta}^{-t_1}\tilde{\alpha}^{-1}Z_2\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\\
&= \tilde{\beta}^{-t_1}v^{-t_2}\tilde{\alpha}^{-1}Z_2\tilde{\alpha}v^{t_2}\tilde{\beta}^{t_1}.
\end{aligned}
$$

O caso $F^{-1}Z_3^{-1}F$ é feito de modo análogo ao caso feito acima. Pela proposição 4.0.1 e da equação $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(Z_3(CZ_2C^{-1})(CFC^{-1}F)\ (F^{-1}Z_3^{-1}F)(F^{-1}Z_2F))=0$, obtemos $\bar{t_3}-\bar{t_2}-1\pm 2k_1+c_{22}+t_2\pm 2l_1-1+\bar{t_3}-\bar{t_2}=0$, que implica $t_2=2(\bar{t_2}-\bar{t_3})+2\pm 2k_1-c_{22}\pm 2l_1$, ou seja, $2l_2+1=2(\bar{t_2}-\bar{t_3})+2\pm 2k_1-2k_2\pm 2l_1$, que é um absurdo. Portanto nesse caso o sistema (I) não tem solução.

Caso $III.3.2$ com $s_1=0$ e $s_2=1$

Nesse caso temos $A=1$, $F=\tilde{\beta}^{t_1}w(vw)^{t_2}$ e $C=\tilde{\beta}^{c_{21}}w(vw)^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Como t_2 e c_{22} são ímpares, então podemos tomar $A=1$, $F=\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$ e $C=\tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$.

Como demonstrado no caso acima, temos $CFC^{-1}F=\tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}$ $\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}=\tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{-t_1}v^{-t_2}\ v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$. Como $\tilde{\beta}$ e v comutam, obtemos $CFC^{-1}F=1$. Logo, nesse caso o sistema (I) possui solução trivial. Observemos que esse caso é equivalente ao caso $I.3.3$ com $s_1=1$ e $s_2=0$.

Caso $III.3.3$ com $s_1=0$ e $s_2=1$

Nesse caso podemos tomar $A=1$, $F=\tilde{\beta}^{t_1}v^{t_2}$ e $C=\tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}$. Como demonstrado no caso anterior, temos $CFC^{-1}F=1$. Portanto, nesse caso, o sistema possui solução trivial.

Proposição 4.0.3. *Se $B=w^{-1}v^{-1}w^{-1}v$, e n,q são inteiros positivos com $n>0$, então temos*

i) $(w^nvw^n)^q=[\prod_{j=1}^{q}(v^jB^{-1}v^{-j})(\prod_{i=1}^{n-1}v^iw^iB^{-1}w^{-i}v^{-i})]v^q$

ii) $(w^nvw^n)^{-q}=v^{-q}[\prod_{j=1}^{q}(\prod_{i=1}^{n-1}v^{q+1-j}w^{n-i}B^{-1}w^{-i+n}v^{j-q-1})(v^{q-j+1}B^{-1}v^{-q+j-1})]$.

Portanto, temos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}([(w^nvw^n)^q]v^{-q})=-qn$ e $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(v^q[(w^nvw^n)^{-q}])=qn$.

Demonstração.

Primeiro, observemos que, $wvw=vB^{-1}$. Também temos $w^2vw^2=wvww^{-1}(v^{-1}wvw)w$ $=(vB^{-1})w^{-1}B^{-1}w$.

Suponha que $w^n v w^n = (vB^{-1})(\prod_{i=1}^{n-1} w^{-i}B^{-1}w^i)$. Temos $w^{n+1}vw^{n+1} = (w^n v w^n)$ $w^{-n}v^{-1}wvww^n = (w^n v w^n)(w^{-n}B^{-1}w^n) = (vB^{-1})(\prod_{i=1}^{n-1} w^{-i}B^{-1}w^i)(w^{-n}B^{-1}w^n) =$ $= (vB^{-1})(\prod_{i=1}^{n} w^{-i}B^{-1}w^i)$. Portanto, por indução obtemos $w^n v w^n =$ $(vB^{-1})(\prod_{i=1}^{n-1} w^{-i}B^{-1}w^i)$ para todo inteiro positivo n.

i) Observemos que, $(w^n v w^n)^q = ((vB^{-1})(\prod_{i=1}^{n-1} w^{-i}B^{-1}w^i))^q$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
(w^n v w^n)^q &= \underbrace{(vB^{-1})(\prod_{i=1}^{n-1} w^{-i}B^{-1}w^i)\dots(vB^{-1})(\prod_{i=1}^{n-1} w^{-i}B^{-1}w^i)}_{q-vezes}\\
&= [(vB^{-1}v^{-1})(v(\textstyle\prod_{i=1}^{n-1} w^{-i}B^{-1}w^i)v^{-1})(v^2B^{-1}v^{-2})(v^2(\textstyle\prod_{i=1}^{n-1} w^{-i}B^{-1}w^i)v^{-2})\\
&\quad \dots(v^qB^{-1}v^{-q})(v^q(\textstyle\prod_{i=1}^{n-1} w^{-i}B^{-1}w^i)v^{-q})]v^q\\
&= [(vB^{-1}v^{-1})(\textstyle\prod_{i=1}^{n-1} vw^{-i}B^{-1}w^iv^{-1})(v^2B^{-1}v^{-2})(\textstyle\prod_{i=1}^{n-1} v^2w^{-i}B^{-1}w^iv^{-2})\\
&\quad \dots(v^qB^{-1}v^{-q})(\textstyle\prod_{i=1}^{n-1} v^qw^{-i}B^{-1}w^iv^{-q})]v^q\\
&= [\textstyle\prod_{j=1}^{q}(v^jB^{-1}v^{-j})(\textstyle\prod_{i=1}^{n-1} v^jw^{-i}B^{-1}w^iv^{-j})]v^q.
\end{aligned}$$

ii) Observemos que, $(w^n v w^n)^{-q} = ((vB^{-1})(\prod_{i=1}^{n-1} w^{-i}B^{-1}w^i))^{-q} =$ $((\prod_{i=1}^{n-1} w^{-n+i}Bw^{n-i})(Bv^{-1}))^q$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
(w^n v w^n)^{-q} &= \underbrace{(\prod_{i=1}^{n-1} w^{-n+i}Bw^{n-i})(Bv^{-1})\dots(\prod_{i=1}^{n-1} w^{-n+i}Bw^{n-i})(Bv^{-1})}_{q-vezes}\\
&= v^{-q}[(v^q(\textstyle\prod_{i=1}^{n-1} w^{-n+i}Bw^{n-i})v^{-q})(v^qBv^{-q})\\
&\quad (v^{q-1}(\textstyle\prod_{i=1}^{n-1} w^{-n+i}Bw^{n-i})v^{-q+1})(v^{q-1}Bv^{-q+1})\dots\\
&\quad (v(\textstyle\prod_{i=1}^{n-1} w^{-n+i}Bw^{n-i})v^{-1})(vBv^{-1})]\\
&= v^{-q}[(\textstyle\prod_{i=1}^{n-1} v^qw^{-n+i}Bw^{n-i}v^{-q})(v^qBv^{-q})\\
&\quad (\textstyle\prod_{i=1}^{n-1} v^{q-1}w^{-n+i}Bw^{n-i}v^{-q+1})(v^{q-1}Bv^{-q+1})\dots\\
&\quad (\textstyle\prod_{i=1}^{n-1} vw^{-n+i}Bw^{n-i}v^{-1}))(vBv^{-1})]\\
&= v^{-q}[\textstyle\prod_{j=1}^{q}(\textstyle\prod_{i=1}^{n-1} v^{q+1-j}w^{-n+i}Bw^{n-i}v^{j-q-1})(v^jBv^{-j})].
\end{aligned}$$

Portanto, dos resultados acima obtemos; $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}([(w^nvw^n)^q]v^{-q}) = q(-1-n+1) =$ $-qn$, e $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(v^q[(w^nvw^n)^{-q}]) = q(n-1+1) = qn$. $\square$

Agora, analisaremos alguns casos em que temos $t_1 = t_2$, ou seja, o caso $T.1$. Primeiramente, demonstraremos alguns resultados que nos ajudarão a fazer alguns cálculos.

Proposição 4.0.4. *$\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t}) = t$, para t ímpar.*

Demonstração.

Faremos a demonstração apenas no caso t positivo, o caso em que t é negativo é análogo. Temos $t = 2l + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t} &= \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{2l+1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2l-1} \\ &= \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\beta}^{2l}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2l}\tilde{\beta}^{-1} \\ &= \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}[\tilde{\beta}^{2l}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2l}\tilde{\alpha}^{-1}]\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1} \\ &= B\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}[\tilde{\beta}^{2l}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2l}\tilde{\alpha}^{-1}]\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}. \end{aligned}$$

Pela proposição 4.0.2, temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t}) = \mathcal{E} \circ \mathcal{A}(B\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}[\tilde{\beta}^{2l}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-2l}\tilde{\alpha}^{-1}]\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}) = 1 + 2l = t$. $\square$

Corolário 4.0.4. *Se r é um inteiro positivo e t é ímpar, então temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}^r\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^r\tilde{\beta}^{-t}) = rt$.*

Demonstração.

Pela proposição anterior, obtemos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t}]\tilde{\alpha}^{-1}) = t$. Logo, $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t}]\tilde{\alpha}^{-1}[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t}]) = t + t = 2t$. Como $\tilde{\alpha}[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t}]\tilde{\alpha}^{-1}[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t}] = \tilde{\alpha}^2\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^2\tilde{\beta}^{-t}$, então temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}^2\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^2\tilde{\beta}^{-t}) = 2t$.

Suponha que $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}^n\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^n\tilde{\beta}^{-t}) = nt$. Pela proposição anterior, obtemos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}^n[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t}]\tilde{\alpha}^{-n}) = t$. Portanto, temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}^n[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t}]\tilde{\alpha}^{-n}[\tilde{\alpha}^n\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^n\tilde{\beta}^{-t}]) = t + nt = (n+1)t$, ou seja, temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}^{n+1}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}^{n+1}\tilde{\beta}^{-t}) = (n+1)t$. Por indução obtemos o resultado. $\square$

Proposição 4.0.5. *Para quaisquer inteiros $k, r \geq 0$ temos;*

i) $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}([v^{2k}, w^r]) = 0$,

ii) $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}([v^{2k}, w^{-1}]) = 0$,

iii) $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}([v^{-2k}, w^r]) = 0$ *e*

iv) $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}([v^{2k}, w^{-1}]) = 0$.

Demonstração.

Faremos apenas os casos $i)$ e $ii)$, os outros casos são análogos.

i) De [9], temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}([v^2, w^r]) = 0$, para todo $r \geq 0$.

Agora, $v^4w^rv^{-4}w^{-r} = v^2(v^2w^rv^{-2}w^{-r})v^{-2}\ (v^2w^rv^{-2}w^{-r}) = v^2[v^2, w^r]v^{-2}[v^2, w^r]$. Assim, obtemos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}([v^4, w^r]) = 0$, para todo $r \geq 0$.

Suponha que $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}([v^{2k-2}, w^r]) = 0$, para todo $r \geq 0$. Temos, $v^{2k}w^rv^{-2k}w^{-r} = v^2(v^{2k-2}w^rv^{-2k+2}w^{-r})v^{-2}\ (v^2w^rv^{-2}w^{-r}) = v^2[v^{2k-2}, w^r]v^{-2}[v^2, w^r]$. Portanto, temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}([v^{2k}, w^r]) = 0$. Logo, por indução obtemos o resultado.

ii) De [9], temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}([w^{-1}, v^2]) = 0$. Como $[v^2, w^{-1}][w^{-1}, v^2] = 1$, então obtemos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}([v^2, w^{-1}]) = 0$.

Suponha que $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}([v^{2k-2}, w^{-1}]) = 0$. Temos, $v^{2k}w^{-1}v^{-2k}w = v^2(v^{2k-2}w^{-1}v^{-2k+2}w)v^{-2}$ $(v^2w^{-1}v^{-2}w) = v^2[v^{2k-2}, w^{-1}]v^{-2}[v^2, w^{-1}]$. Assim, $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}([v^{2k}, w^{-1}]) = 0$. Por indução, obtemos o resultado. $\square$

$I)$ Caso $\phi_0(1, 1)$

Nesse caso, temos os possíveis pares para o par de homomorfismos $(f_{1\#}, f_{2\#})$

$$I.3.1, (f_1(s_1, r_1, 2l + 1, 0, 2k_1), f_2(s_2, r_2, 2l + 1, 0, 2k_2))$$

$$I.3.2, (f_1(s_1, r_1, 2l + 1, 0, 2k_1), f_2(s_2, 0, 2l + 1, s_2, 2k_2 + 1))$$

$$I.3.3, (f_1(s_1, 0, 2l + 1, s_1, 2k_1 + 1), f_2(s_2, r_2, 2l + 1, 0, 2k_2))$$

$$I.3.4, (f_1(s_1, 0, 2l + 1, s_1, 2k_1 + 1), f_2(s_2, 0, 2l + 1, s_2, 2k_2 + 1)),$$

onde $s_i \in \{0, 1\},\ \ r_i \geq 0,\ \ k_i \in \mathbb{Z},\ \ l \in \mathbb{Z}$ e $i \in \{1, 2\}$.

Para facilitar a notação, escreveremos $t = 2l + 1$.

Caso $I.3.1$ com $s_1 = s_2 = 0$.

Nesse caso, temos $A = \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}$, $F = \tilde{\beta}^t(vw)^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}(vw)^{c_{22}}\tilde{c}_0$. Como t é ímpar e c_{22} é par, então podemos tomar $A = \tilde{\alpha}^{r_1}w^{r_2}$, $F = \tilde{\beta}^tv^tw$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c}_0$.

Consideraremos $r_1 = 1$ e $c_{22} - c_{21} \geq 0$.

Calcularemos $AFAF^{-1}$, $CAC^{-1}A^{-1}$ e $CFC^{-1}F^{-1}$. A partir daí, aplicaremos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}$ na equações da sistema (I).

$$\begin{aligned}
AFAF^{-1} &= \tilde{\alpha}w^{r_2}\tilde{\beta}^t v^t w\tilde{\alpha}w^{r_2}w^{-1}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t\tilde{\alpha}ww^{r_2}w^{-1}\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}\\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}v^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t}\tilde{\beta}^t w^{r_2}\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}\\
&= w^{r_2}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}(w^{-1}vw^{-1})^t\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}w^{-r_2}v^t v^{-t}\\
&= w^{r_2}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t})\tilde{\beta}^t(w^{-1}vw^{-1})^t\tilde{\beta}^{-t}v^{-t}w^{-r_2}\\
&= w^{r_2}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t})v^{-t}(wvw)^t v^t v^{-t}w^{-r_2}\\
&= w^{r_2}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t})v^{-t}(vB^{-1})^t w^{-r_2}\\
&= w^{r_2}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-t})w^{-r_2}w^{r_2}v^{-t}[(vB^{-1})^t v^{-t}]v^t w^{-r_2}.
\end{aligned}$$

Pela proposição 4.0.2, obtemos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}((vB^{-1})^t v^{-t}) = -t$. Portanto, pela proposição 4.0.4, obtemos $\mathcal{E}\circ\mathcal{A}(AFAF^{-1}) = 0$.

Calcularemos agora, $CAC^{-1}A^{-1}$. Temos,

$$\begin{aligned}
CAC^{-1}A^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\alpha}w^{r_2}\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}w^{r_2}\tilde{\alpha}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-r_2}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}}w^{r_2}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}v^{-c_{22}}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-r_2}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{c_{22}}v^{-c_{21}}w^{r_2}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}(wvw)^{-c_{22}}\tilde{\alpha}v^{c_{21}}w^{-r_2}v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{r_2}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}(wvw)^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}v^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}w^{-r_2}v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{r_2}v^{c_{21}}v^{-c_{21}}(wvw)^{-c_{22}}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}(wvw)^{c_{21}}\tilde{\alpha}w^{-r_2}v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{r_2}(wvw)^{-c_{22}}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}(wvw)^{c_{21}}w^{-r_2}\tilde{\alpha}v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{r_2}(wvw)^{-c_{22}}v^{c_{21}}v^{-c_{21}}(wvw)^{c_{21}}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}w^{-r_2}(wvw)^{-c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{r_2}(wvw)^{c_{21}-c_{22}}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}w^{-r_2}(wvw)^{-c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{r_2}(wvw)^{c_{21}-c_{22}}v^{c_{21}}v^{-c_{21}}w^{-r_2}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}(wvw)^{-c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{r_2}(vB^{-1})^{c_{21}-c_{22}}w^{-r_2}v^{c_{21}}v^{-c_{21}}(vB^{-1})^{-c_{21}}v^{c_{21}}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{r_2}v^{c_{21}-c_{22}}(v^{c_{22}-c_{21}}(Bv^{-1})^{c_{22}-c_{21}})w^{-r_2}((Bv^{-1})^{c_{21}}v^{c_{21}})\\
&\quad (\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1})\\
&= [v^{c_{22}-c_{21}}, w^{r_2}]w^{r_2}(v^{c_{22}-c_{21}}(Bv^{-1})^{c_{22}-c_{21}})w^{-r_2}((Bv^{-1})^{c_{21}}v^{c_{21}})\\
&\quad (\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-1}).
\end{aligned}$$

Como $c_{21} = 2k_1$ e $c_{22} = 2k_2$, então temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}([v^{c_{22}-c_{21}}, w^{r_2}]) = 0$. Pela proposição 4.0.2 e pela propsição 4.0.4, temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1}) = 0 + c_{22} - c_{21} + c_{21} - c_{21} = c_{22} - c_{21}$.

Temos,

$$\begin{aligned}
CFC^{-1}F^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}}v^{c_{22}}\tilde{c_0}\tilde{\beta}^{t}v^{t}w\tilde{c_0}^{-1}v^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-1}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\\
&= v^{c_{22}}v^{t}\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\beta}^{t}wv^{-c_{22}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}w^{-1}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\\
&= v^{c_{22}+t}\tilde{\beta}^{c_{21}+t}wv^{-c_{22}}v^{c_{21}}w^{-1}v^{-c_{21}}\tilde{\beta}^{-c_{21}}v^{-t}\tilde{\beta}^{-t}\\
&= v^{c_{22}+t}v^{-c_{21}-t}w^{-1}v^{c_{21}+t}v^{c_{21}-c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}+t}w^{-1}v^{-c_{21}-t}\tilde{\beta}^{-c_{21}-t}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{-1}v^{c_{21}+t}v^{c_{21}-c_{22}}\tilde{\beta}^{c_{21}+t}w^{-1}v^{-c_{21}-t}\tilde{\beta}^{-c_{21}-t}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{-1}v^{c_{21}+t}v^{c_{21}-c_{22}}v^{-c_{21}-t}wv^{c_{21}+t}v^{-c_{21}-t}\tilde{\beta}^{c_{21}+t}\tilde{\beta}^{-c_{21}-t}\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{-1}v^{c_{21}+t}v^{-c_{22}-t}w\\
&= v^{c_{22}-c_{21}}w^{-1}v^{c_{21}-c_{22}}w\\
&= [v^{c_{22}-c_{21}}, w^{-1}].
\end{aligned}$$

Como $c_{21} = 2k_1$ e $c_{22} = 2k_2$, então temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}([v^{c_{22}-c_{21}}, w^{-1}]) = 0$, ou seja, $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(CFC^{-1}F^{-1}) = 0$.

Aplicando $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$ na primeira equação do sistema não obteremos informação. Agora, se aplicarmos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$ na terceira equação obteremos $\bar{t_3} = 0$. Aplicando $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$ na segunda equação do sistema obteremos; $0 = \mathcal{E} \circ \mathcal{A}(Z_3(CZ_1C^{-1})\,(CAC^{-1}A^{-1})(AZ_3^{-1}A^{-1})Z_1^{-1}) = \bar{t_3} + \bar{t_1} + c_{22} - c_{21} - \bar{t_3} - \bar{t_1}$, e portanto $c_{22} - c_{21} = 0$. Assim, se $c_{22} - c_{21} \neq 0$, então, para esse caso, o sistema não possui solução.

Caso $I.3.1$ com $s_1, s_2 \in \{0, 1\}$.

Nesse caso, temos $A = \tilde{\alpha}^{r_1} w^{r_2}$, $F = \tilde{\alpha}^{s_1} \tilde{\beta}^t w^{s_2} (vw)^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} (vw)^{c_{22}} \tilde{c_0}$. Como t é ímpar e c_{22} é par, então podemos tomar $A = \tilde{\alpha}^{r_1} w^{r_2}$, $F = \tilde{\alpha}^{s_1} \tilde{\beta}^t w^{s_2 - 1} v^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c_0}$.

Consideremos $r_1 = 1$ e $c_{22} - c_{21} \geq 0$.

Com essas considerações teremos, $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1}) = c_{22} - c_{21}$. De fato, A e C são exatamente iguais ao do caso anterior. Assim, aplicando $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$ na segunda equação do sistema obteremos; $0 = \mathcal{E} \circ \mathcal{A}(Z_3(CZ_1C^{-1})\,(CAC^{-1}A^{-1})(AZ_3^{-1}A^{-1})Z_1^{-1}) = \bar{t_3} + \bar{t_1} + c_{22} - c_{21} - \bar{t_3} - \bar{t_1}$, e portanto $c_{22} - c_{21} = 0$. Assim, se $c_{22} - c_{21} \neq 0$, então, para esses casos, o sistema não possui solução.

Caso $I.3.2$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 0$.

Nesse caso, temos $A = \tilde{\alpha}^{r_1}$, $F = \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^t (vw)^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} (vw)^{c_{22}} \tilde{c_0}$. Como t é ímpar e c_{22} é ímpar, então podemos tomar $A = \tilde{\alpha}^{r_1}$, $F = \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^t w^{-1} v^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} w^{-1} v^{c_{22}} \tilde{c_0}$.

Temos;

$$\begin{aligned}
CAC^{-1}A^{-1} &= \tilde{\beta}^{c_{21}} w^{-1} v^{c_{22}} \tilde{c_0} \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{c_0}^{-1} v^{-c_{22}} w \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= v^{-c_{21}} w^{-1} v^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{\beta}^{c_{21}} (w^{r_1} v w^{r_1})^{-c_{22}} w \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= v^{-c_{21}} w^{-1} v^{c_{21}+c_{22}} v^{-c_{21}} (w^{r_1} v w^{r_1})^{-c_{22}} v^{c_{21}} \tilde{\beta}^{c_{21}} w \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= v^{-c_{21}} w^{-1} v^{c_{22}} (w^{r_1} v w^{r_1})^{-c_{22}} v^{c_{21}} v^{-c_{21}} w v^{c_{21}} \tilde{\beta}^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1} \\
&= v^{-c_{21}} w^{-1} v^{c_{22}} (w^{r_1} v w^{r_1})^{-c_{22}} w v^{c_{21}} [\tilde{\beta}^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1}] \\
&= (v^{-c_{21}} w^{-1} [v^{c_{22}} (w^{r_1} v w^{r_1})^{-c_{22}}] w v^{c_{21}}) [\tilde{\beta}^{c_{21}} \tilde{\alpha}^{r_1} \tilde{\beta}^{-c_{21}} \tilde{\alpha}^{-r_1}].
\end{aligned}$$

Pela proposição 4.0.3 e pelo corolário 4.0.3, temos $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}(CAC^{-1}A^{-1}) = r_1(c_{22} - c_{21})$.

Agora, aplicando $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$ na segunda equação do sistema obteremos $0 = \mathcal{E} \circ \mathcal{A}(Z_3(CZ_1 C^{-1})(CAC^{-1}A^{-1})(AZ_3^{-1}A^{-1})\ Z_1^{-1}) = \bar{t_3} + \bar{t_1} + r_1(c_{22} - c_{21}) - \bar{t_3} - \bar{t_1}$. Tomando $r_1 > 0$, então devemos ter $c_{22} - c_{21} = 0$.

Observemos que $c_{22} - c_{21} = 0$ é um absurdo, já que c_{21} é par e c_{22} é ímpar. Assim, para esse caso, o sistema não possui solução.

Caso $I.3.2$ com $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$.

Nesse caso, podemos tomar $A = \tilde{\alpha}^{r_1}$, $F = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^t v^t$ e $C = \tilde{\beta}^{c_{21}} v^{c_{22}} \tilde{c}_0$. Fazendo a conta como no caso anterior obteremos

$$CAC^{-1}A^{-1} \quad = \quad v^{-c_{21}}[v^{c_{22}}(w^{r_1} v w^{r_1})^{-c_{22}}]v^{c_{21}}[\tilde{\beta}^{c_{21}}\tilde{\alpha}^{r_1}\tilde{\beta}^{-c_{21}}\tilde{\alpha}^{-r_1}].$$

Como no caso anterior, temos que aplicando $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$ na segunda equação do sistema obteremos; $0 = \mathcal{E} \circ \mathcal{A}(Z_3(CZ_1C^{-1})\ (CAC^{-1}A^{-1})(AZ_3^{-1}A^{-1})\ Z_1^{-1}) = \bar{t_3} + \bar{t_1} + r_1(c_{22} - c_{21}) - \bar{t_3} - \bar{t_1}$. Tomando $r_1 > 0$, então devemos ter $c_{22} - c_{21} = 0$, mas isso é um absurdo, já que c_{21} é par e c_{22} é ímpar. Assim, para esse caso, o sistema não possui solução.

Outros resultados, serão obtidos em um outro momento.

Referências Bibliográficas

[1] H.J.Baues; *Obstruction Theory,* Lectures Notes, vol.628, Springer-Verlag, 1977.

[2] R. Dobrenko and J. Jezierski; *The coincidence Nielsen number on nonorientable manifolds,* Rocky Mtn.J.Math.,vol.23, Topological methods in non linear functional analysis (1993), 67 -85.

[3] E.Fadell and S.Hussein, *A fixed point theory for fibre-preserving maps* Lectures Notes in Mathematics, vol.886, Springer Verlag, (1981), 49-72.

[4] E.Fadell and S.Husseini; *The Nielsen number on surfaces,* Contemporary Mathematics, vol.**21,** Topological methods in non linear functional analysis (1982), 59-99.

[5] A. Garcia e Y. Lequain; *Elementos de álgebra,* Projeto Euclides , IMPA , 2005.

[6] D.L. Gonçalves; *Coincidence theory,* Handbook of Topological Fixed Point Theory, Springer 2005, 3-42.

[7] D.L.Gonçalves; *Fixed points of S^1-fibrations,* Pacific J. Math. 129 (1987), 297-306.

[8] D.L.Gonçalves, D.Penteado and J.P Vieira; *Fixed Points on Torus Fiber Bundles over the Circle,* Fundamenta Mathematicae, vol.183(1)(2004), 1-38.

[9] D.L.Gonçalves, D.Penteado and J.P Vieira; *Fixed Points on Klein Fiber Bundles over the Circle.*

[10] D.L.Gonçalves e J.C. de Souza Kiihl; *Teoria do índice,* 14^o colóquio brasileiro de matemática, IMPA.

[11] D.L.Gonçalves and M.R.Kelly, *Maps into the torus and minimal coincidence sets for homotopies*, Fundamenta Mathematicae, 172 (2002), 99-106.

[12] D.L.Gonçalves and M.R.Kelly, *Wecken type problems for self-maps of the Klein bottle,* Hindawi Publishing Corporation Fixed Point Theory and Applications, Volume 2006, Article ID 75848, pages 1-15.

[13] D.L.Johnson; *Presentation of groups,* LMS Lectures Notes **22,** Cambridge University Press, (1976).

[14] R.C. Lyndon; *Cohomology theory of groups with a single defining relation,* Annals of Mathematics, vol.52,(3), 1950, 650-665.

[15] R. D. Porter ; *Introduction to fibre bundles;* lecture notes in pure and applied mathematics, vol.31.

[16] G.P.Scott; *Braids groups and the group of homeomorphisms of a surface,* Proc.Camb.Phil.Soc. **68**(1970), 605-617.

[17] R. Skora, *The degree of a map between surfaces*, Math. Ann. 276 (1987), 415-423.

[18] K. Tsai-han; *The theory of fixed point classes,* Springer-Verlag 1987.

[19] J. W. Vick; *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology,* Academic Press.

[20] G. W. Whitehead *Elements of Homotopy Theory,* Springer-Verlag, 1918.

[21] P. Wong *Coincidence Theory for Spaces which Fiber Over a Nilmanifold ,* Hindawi Publishing Corporation Fixed Point Theory and Applications, Volume 2004 , pages 89-95.