Continuidade de atratores para uma família de perturbações altamente oscilatórias do quadrado

Bianca Paolini Lorenzi

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro do CAPES

São Paulo, 15 de Agosto de 2023

Continuidade de atratores para uma família de perturbações altamente oscilatórias do quadrado

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 07/07/2023. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Antonio Luiz Pereira (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Marcone Corrêa Pereira - IME - USP
- Prof. Dra. Gleiciane da Silva Aragão - UNIFESP
- Prof. Dra. Simone Mazzini Bruschi - UNB
- Prof. Dra. Pricila da Silva Barbosa - UTFPR

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira, que me acompanha desde a Iniciação Científica, um grande exemplo de atenção, dedicação e conhecimento.

Ao colega Jean Carlos Nakasato, pelo desprendimento em me ajudar e por suas contribuições.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional, paciência e força.

A Marcelo Veronez Tola, pelo companheirismo, encorajamento, suporte, e amor.

Aos meus tios Maria Aparecida Lorenzi Lúcio e José Geraldo Lúcio por sempre estarem ao meu lado.

Resumo

Consideramos uma família de problemas parabólicos semilineares

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), & x \in \Omega_\epsilon, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial N}(x,t) = g(u(x,t)), & x \in \partial\Omega_\epsilon, t > 0, \end{cases}$$

onde $a > 0$, Ω é o quadrado unitário, $\Omega_\epsilon = h_\epsilon(\Omega)$, h_ϵ é uma família de difeomorfismos, os quais convergem para a identidade de Ω na norma $C^{0,\alpha}$, $0 \leq \alpha < 1$, mas não na norma C^1 e, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções reais. Sob determinadas hipóteses, mostramos que o problema limite é dado por

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial N}(x,t) = g(u(x,t))\mu, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases}$$

em que μ é essencialmente o limite do determinante jacobiano do difeomorfismo $h_\epsilon : \partial\Omega \to \partial h_\epsilon(\Omega)$. Demonstramos que o problema está bem posto para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, $\epsilon_0 > 0$, em um espaço de fase conveniente, que o semigrupo associado possui um atrator global $\mathcal{A}_\epsilon$ e, que a família $\{\mathcal{A}_\epsilon\}_{0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0}$ é contínua em $\epsilon = 0$.

Palavras-chave: equações parabólicas, perturbação de domínio, domínio Lipschitz, atrator global, continuidade de atratores.

Abstract

We consider the family of semilinear parabolic problems

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), & x \in \Omega_\epsilon, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial N}(x,t) = g(u(x,t)), & x \in \partial\Omega_\epsilon, t > 0, \end{cases}$$

where $a > 0$, Ω is the unit square, $\Omega_\epsilon = h_\epsilon(\Omega)$, h_ϵ is a family of diffeomorphisms which converge to the identity of Ω in $C^{0,\alpha}$ - norm, $0 \leq \alpha < 1$, but not in the C^1 - norm and, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are real functions. Under appropriate hypothesis, we show that the limiting problem is given by

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial N}(x,t) = g(u(x,t))\mu, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases}$$

where μ is essentially the limit of the jacobian determinant of the diffeomorphism $h_\epsilon : \partial\Omega \to \partial h_\epsilon(\Omega)$. We prove that the problem is well posed for $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, $\epsilon_0 > 0$, in a suitable phase space, the associated semigroup has a global attractor $\mathcal{A}_\epsilon$ and the family $\{\mathcal{A}_\epsilon\}_{0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0}$ is continuous at $\epsilon = 0$.

Keywords: parabolic equations, perturbation of the domain, Lipschitz domains, global attractor, continuity of attractors.

Sumário

Introdução

Considerações iniciais

A modelagem matemática de uma grande variedade de fenômenos - físicos, químicos, biológicos e econômicos envolve o estudo de equações diferenciais parciais de forma que a compreensão dessas equações permita eventualmente interpretar e mesmo prever eventos futuros, impactando diretamente nas escolhas do homem em seu meio social.

Ocorre que raramente é possível resolver explicitamente um problema contendo equações diferenciais parciais, isto é, exibir uma função matemática que satisfaça tal equação. Neste ponto, se faz necessária uma outra abordagem, por meio da chamada Teoria Qualitativa ou Geométrica das equações diferenciais.

A partir desta teoria, é possível deduzir importantes propriedades da solução, como, por exemplo, o comportamento assintótico, a limitação ou não das soluções, a existência de atratores e etc. De fato, o objetivo é descrever a geometria das soluções, predominando questões de estabilidade. Não podemos esquecer que os modelos obtidos são aproximações da situação real e possuem erros. Assim, é fundamental mostrar que os modelos são robustos, ou seja, apresentam certa estabilidade por perturbações em parâmetros determinados.

No presente trabalho, propomo-nos a estudar um problema do tipo parabólico submetido à variação de seu domínio de definição. O tema de perturbação de contorno para problemas com valor de fronteira em equações diferenciais parciais já foi estudado por diversos autores, sob pontos de vista distintos.

Uma das primeiras dificuldades encontradas em problemas de perturbação de domínio é que os espaços de funções variam conforme as regiões se alteram. Então, precisamos ser capazes de comparar as soluções de um problema parabólico em diferentes regiões. Em [12], Henry desenvolveu uma espécie de cálculo diferencial no qual a variável independente é a região de referência inicial onde os problemas de valor de contorno são considerados. Para isto, o problema original que estava posto no domínio perturbado é transformado, por mudança de variáveis, em um problema no domínio fixo. Assim, com essa metodologia, conseguimos trabalhar em espaços de funções que não variam quando o domínio é perturbado.

Tal método foi utilizado, por exemplo, em [18], trabalho no qual os autores estudam a família de problemas semilineares parabólicos com condição de fronteira de Neumann:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), \;\; x \in \Omega_h, t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial N}(x,t) = g(u(x,t)), \;\; x \in \partial\Omega_h, t > 0, \end{cases}$$

onde a é uma constante positiva, Ω é uma região aberta limitada de classe C^2 em $\mathbb{R}^n$, $\Omega_h = h(\Omega)$, h é uma família de difeomorfismos que converge para a identidade de Ω na norma C^2 e $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções reais satisfazendo condições de regularidade, crescimento e dissipatividade convenientes. Prova - se que os atratores variam continuamente com relação a perturbações h para h suficientemente próximo da identidade em Ω.

Já em [1] e [2], os autores utilizam uma outra técnica para comparar funções definidas em espaços diferentes e preservar os domínios variando, a técnica dos operadores de extensão. Em [1], estuda - se o comportamento das soluções de uma equação elíptica com condições de fronteira não - lineares do tipo:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x,u) \;\text{ em }\; \Omega_\epsilon\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial N} + g(x,u) = 0 \;\text{ em }\; \partial\Omega_\epsilon\,, \end{cases} \tag{1}$$

quando a fronteira do domínio oscila muito rapidamente à medida que o parâmetro ϵ converge a 0. Considera - se $\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$, $0 \le \epsilon \le \epsilon_0$, uma família de domínios suaves uniformemente limitados que satisfazem $\Omega_\epsilon \to \Omega$ e $\partial\Omega_\epsilon \to \partial\Omega$ no sentido de Hausdorff e $f, g : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas em ambas as variáveis e de classe C^2 na segunda, onde U é um domínio suave limitado e fixo contendo Ω_ϵ para todo $0 \le \epsilon \le \epsilon_0$. A equação limite é dada por :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x,u) \;\text{ em }\; \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial N} + \gamma(x) g(x,u) = 0 \;\text{ em }\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

onde $\gamma \in L^\infty(\partial\Omega)$ e $\gamma \ge 1$. Os autores obtém a convergência das soluções do problema (1) para as soluções do problema limite (2) e também a convergência de autovalores e autofunções da linearização em torno de soluções de equilíbrio.

Em [2], os autores continuam a análise iniciada em [1] do comportamento das soluções da equação elíptica com condições de fronteira não - lineares do tipo :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x,u) \ \text{ em } \ \Omega_\epsilon\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial N} + g(x,u) = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega_\epsilon\,, \end{cases} \tag{3}$$

quando a fronteira do domínio apresenta um comportamento altamente oscilatório conforme o parâmetro ϵ tende a 0. As hipóteses são essencialmente as mesmas de [1], exceto pelo fato de que, neste trabalho, os autores tratam do caso em que $\partial\Omega_\epsilon$ é expressa em cartas locais como uma deformação Lipschitz de $\partial\Omega$ - como em [1], mas com constante de Lipschitz *não* uniformemente limitada em ϵ e a não - linearidade g é fortemente dissipativa. Obtém - se como problema limite:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x,u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Os autores demonstram a convergência das soluções de (3) para as soluções do problema limite (4).

Motivação

A motivação principal para este trabalho foi estender os resultados obtidos em [4], em que os autores tratam um problema de perturbação de contorno para um problema semilinear parabólico dissipativo quando se tem convergência C^1 das perturbações para a identidade do domínio original. Prova - se que os atratores variam continuamente com relação a um certo parâmetro. No que segue, faremos uma breve descrição do problema em [4], uma vez que estudaremos basicamente a mesma equação com uma hipótese mais fraca. Como veremos, será necessário alterar o problema, de acordo com a particular família de difeomorfismos h_ϵ para obter a convergência para um problema limite, por sua vez também modificado.

Seja Ω o quadrado unitário em $\mathbb{R}^2$, a uma constante positiva, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções reais e consideremos a seguinte família de problemas parabólicos semilineares com condições de fronteira de Neumann não - lineares:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), \ \ x \in \Omega_\epsilon, t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial N}(x,t) = g(u(x,t)), \ \ x \in \partial\Omega_\epsilon, t > 0, \end{cases} \tag{5}$$

onde $\Omega_\epsilon = h_\epsilon(\Omega)$ e h_ϵ é a família de difeomorfismos de ordem m, para todo $m \geq 1$, dados por

$$h_\epsilon(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + x_2\epsilon\sin(x_1/\epsilon^\alpha)) \tag{6}$$

com $0 < \alpha < 1$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Notemos que a equação acima foi tratada em [18], mas neste trabalho, como comentamos, Ω é de classe C^2 e as perturbações h convergem para a identidade de Ω, i_Ω, na norma C^2. Em [4], temos um domínio Lipschitz e a convergência de h_ϵ para i_Ω se dá na norma C^1 e, não na norma C^2.

Não é difícil verificar que $v(\cdot,t)$ é uma solução de (5) na região perturbada Ω_ϵ se, e somente se, $u(\cdot,t) = h_\epsilon^* v(\cdot,t)$ (isto é, $u(x,t) = v(h_\epsilon(x),t)$) satisfaz:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), \ \ x \in \Omega, t > 0, \\ h_\epsilon^* \dfrac{\partial}{\partial N_{\Omega_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) = g(u(x,t)), \ \ x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \tag{7}$$

em espaços apropriados, sendo

$$h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x) = \Delta_{\Omega_\epsilon}(u \circ h_\epsilon^{-1})(h_\epsilon(x))$$

e

$$h_\epsilon^* \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u(x) = \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_{h_\epsilon}}} (u \circ h_\epsilon^{-1})(h_\epsilon(x)).$$

Em [4], os autores consideram o operador perturbado $A_\epsilon = -h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} + aI$ em (7) definido na região fixa Ω com h_ϵ^* e h_ϵ^{*-1} isomorfismos em espaços adequados. O operador A_ϵ é setorial em $L^2(\Omega)$ com domínio

$$D(A_\epsilon) = \left\{ u \in H^2(\Omega) \,|\, h_\epsilon^* \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u = 0, \text{ em } \partial\Omega \right\}.$$

Se $u \in D(A_\epsilon)$, utilizando integração por partes e denotando Jh_ϵ o determinante da matriz jacobiana $[h_\epsilon]_x = \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right]_{i,j=1}^2$, obtemos

$$< A_\epsilon u, \psi >_{-1,1} = \int_\Omega (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u)(x) \cdot \left(h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} \frac{\psi}{|Jh_\epsilon|} \right)(x) |Jh_\epsilon(x)| \, dx + a \int_\Omega u(x)\psi(x) \, dx. \tag{8}$$

Como (8) está bem definida para qualquer $u \in H^1(\Omega)$, isso permite estabelecer uma extensão de A_ϵ com valores em $H^{-1}(\Omega)$ por esta expressão. Tal extensão também é setorial e, continuaremos a denotá - la como A_ϵ.

Chamando X_ϵ^α e $\tilde{X}_\epsilon^\alpha$ os espaços fracionários associados aos operadores definidos em $L^2(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$, respectivamente, temos que $X_\epsilon^{\alpha-\frac{1}{2}} = \tilde{X}_\epsilon^\alpha$ para $1/2 \leq \alpha \leq 1$ e, por abuso de notação, escrevemos ainda $X_\epsilon^{\alpha-\frac{1}{2}}$ no lugar de $\tilde{X}_\epsilon^\alpha$ para $0 \leq \alpha \leq 1/2$. Demonstra - se que as escalas $\{X_\epsilon^\alpha, -1/2 \leq \alpha \leq 1/2\} = \{\tilde{X}_\epsilon^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1\}$ não mudam quando ϵ varia. Mais precisamente, as normas desses espaços são equivalentes, uniformemente em ϵ.

Agora, supondo que $u(\cdot,t)$ é solução de (7) em Ω, multiplicando por $\phi \in H^1(\Omega)$, escreve - se o problema em sua forma fraca em um domínio fixo :

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_t(x,t)\phi(x)dx &= -\int_\Omega h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1}(u)(x,t) \, h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} \left(\frac{\phi}{|Jh_\epsilon|} \right)(x) |Jh_\epsilon(x)| dx \\ &- \int_\Omega au(x,t)\phi(x)dx + \int_\Omega f(u(x,t))\phi(x)dx \\ &+ \int_{\partial\Omega} g(u(x,t))\phi(x) \frac{|J_{\partial\Omega} h_\epsilon|}{|Jh_\epsilon|}(x) d\sigma(x), \end{aligned}$$

onde $J_{\partial\Omega} h_\epsilon$ denota o determinante jacobiano do difeomorfismo $h_\epsilon : \partial\Omega \to \partial h_\epsilon(\Omega)$.

Mostra - se também que o operador $(A_\epsilon)_\beta$ em X_ϵ^β, obtido pela restrição de A_ϵ ao domínio $X_\epsilon^{\beta+1}$, é setorial para $-1/2 \leq \beta \leq 0$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

De posse dessas considerações, é possível estabelecer o problema perturbado (7) como um problema abstrato em uma escala fixa de espaços de Banach $\{X^\beta, -1/2 \leq \beta \leq 0\}$,

$$\begin{cases} u_t + (A_\epsilon)_\beta u = (H_\epsilon)_\beta u, \;\; t > t_0, \\ u(t_0) = u_0 \in X^\eta, \end{cases} \tag{9}$$

onde $(H_\epsilon)_\beta = H(\cdot, \epsilon) = (F_\epsilon)_\beta + (G_\epsilon)_\beta : X^\eta \to X^\beta$, $0 \;\leq\; \eta \;\leq\; \beta + 1$,

•$(F_\epsilon)_\beta = F(\cdot, \epsilon) : X^\eta \to X^\beta$ dado por:

$$< F(u, \epsilon), \phi >_{\beta, -\beta} = \int_\Omega f(u)\, \phi\, dx, \; \forall \phi \in X^{-\beta}.$$

•$(G_\epsilon)_\beta = G(\cdot, \epsilon) : X^\eta \to X^\beta$ definido por:

$$< G(u, \epsilon), \phi >_{\beta, -\beta} = \int_{\partial\Omega} g(\gamma(u))\, \gamma(\phi) \left| \frac{J_{\partial\Omega} h_\epsilon}{J h_\epsilon} \right| d\sigma(x), \; \forall \phi \in X^{-\beta},$$

com γ a função traço.

Os autores em [4] fazem as seguintes hipóteses sobre as não - linearidades f e g:

(H1) $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e existem números reais $\lambda_1 > 0$ e $L_1 > 0$ tais que:

$$|\, f(u_1) - f(u_2)\,| \;\leq\; L_1\,(\,1 + |\,u_1\,|^{\lambda_1} + |\,u_2\,|^{\lambda_1}\,)\,|\,u_1 - u_2\,|, \; \forall u_1,\, u_2 \in \mathbb{R}.$$

(H2) $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e existem números reais $\lambda_2 > 0$ e $L_2 > 0$ tais que:

$$|\, g(u_1) - g(u_2)\,| \;\leq\; L_2\,(\,1 + |\,u_1\,|^{\lambda_2} + |\,u_2\,|^{\lambda_2}\,)\,|\,u_1 - u_2\,|, \; \forall u_1,\, u_2 \in \mathbb{R}.$$

(H3) Suponhamos que existem constantes $c_0, d_0, d_0^{'}$ tais que,

$$\lim_{|\,u\,| \to \infty} \sup \frac{f(u)}{u} \;\leq\; c_0$$

e,

$$\lim_{|\,u\,| \to \infty} \sup \frac{g(u)}{u} \;\leq\; d_0^{'}.$$

(H4) e, se $d_0 > d_0^{'}$, o primeiro autovalor μ_1 do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + (a - c_0)u = \mu u \;\text{em}\, \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial N_\Omega} = d_0 u \;\text{em}\, \partial\Omega \end{cases}$$

é positivo.

Com as hipóteses (H1) - (H4), o problema (9) é bem colocado, suas soluções são globalmente definidas e admite atrator global. Assumindo algumas propriedades adicionais sobre as não - linearidades e que os equilíbrios são hiperbólicos numa vizinhança de 0, tem - se a continuidade da família de atratores em X^η, η em um intervalo conveniente.

Resultados e organização do trabalho

A ideia neste trabalho é considerar o mesmo problema semilinear parabólico tratado em [4] no quadrado unitário em $\mathbb{R}^2$, mas sob hipóteses mais fracas.

A princípio, nos propusemos a investigar o que ocorre quando estabelecemos $\alpha = 1$ em (6), um caso crítico, pois não temos a convergência das perturbações h_ϵ em (6) para a identidade de Ω na norma C^1. Neste ponto, porém, constatamos que os operadores A_ϵ não convergem ao operador A em $H^{-1}(\Omega)$. De fato, observamos que os A_ϵ convergem para diferentes operadores dependendo da particular família de transformações utilizada para perturbar o domínio original.

Agora, obter a convergência, em algum sentido, dos operadores perturbados com condições de fronteira de Neumann oblíquas para o operador Laplaciano de Neumann é um passo muito importante em trabalhos como o nosso. As nossas h_ϵ, menos regulares do que o usual, distorcem o volume, prejudicando tal convergência. Isso nos sugeriu multiplicar o operador Laplaciano pelo Jh_ϵ, o determinante jacobiano de h_ϵ, e conseguimos corrigir tal distorção. Com efeito, notamos que este novo operador trata - se do Laplaciano na região perturbada munida de uma métrica "com peso" $Jh_\epsilon dx$.

Consideramos, então, em vez de (5), uma família de problemas modificados com o novo operador sendo o Laplaciano na métrica "com peso":

$$\begin{cases} u_t(x,t) = Jh_\epsilon(h_\epsilon^{-1}(x))(\Delta_{\Omega_\epsilon} u(x,t) - au(x,t)) + f(u(x,t)), & x \in \Omega_\epsilon, t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial N}(x,t) = g(u(x,t)), & x \in \partial\Omega_\epsilon, t > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Nessa formulação, obtivemos a convergência dos operadores A_ϵ para A no sentido da norma do resolvente, resultado central que é empregado em vários pontos do trabalho, incluindo a convergência dos espectros e do semigrupo linear e a continuidade das soluções e dos atratores.

Além disso, a convergência das perturbações para a identidade de Ω na norma C^1 é utilizada em [4] para garantir, dentre outras coisas, a continuidade das não - linearidades em $\epsilon = 0$. Em nosso trabalho, usamos a teoria de convergência em média para provar tal resultado. Vale ressaltar que grande parte da dificuldade em nosso problema advém também do fato do domínio original não ser suave de forma que muitos resultados encontrados na literatura não podem ser utilizados.

No que segue, sob essa hipótese de convergência mais fraca e empregando a técnica desenvolvida em [12], provamos a existência de soluções locais e globais, a existência de atratores globais e a continuidade destes atratores para o problema limite:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), & x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial N}(x,t) = g(u(x,t))\mu, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \tag{11}$$

onde μ pode ser interpretado como o limite de $|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|$ quando ϵ converge a 0. As hipóteses sobre as não - linearidades f e g são essencialmente as mesmas de [4], exceto pela condição (H4), que apresenta algumas modificações e, também, pela necessidade de se fazer mais uma hipótese para provar a continuidade dos equilíbrios.

A organização do trabalho é a seguinte:

• No Capítulo 1, fazemos um breve resumo dos pré - requisitos mais importantes.

• No Capítulo 2, descrevemos o problema com o qual trabalhamos, que é basicamente (5) com Ω o quadrado unitário em $\mathbb{R}^2$, h_ϵ uma família de perturbações do quadrado, que depende do parâmetro ϵ e converge para a identidade de Ω em um sentido a ser precisado. Com a metodologia desenvolvida em [12], fazemos uma espécie de mudança de variáveis, deixando o domínio Ω fixo e perturbando o operador Laplaciano, obtendo $-h_\epsilon^* \Delta h_\epsilon^{*-1} + aI$. Diante da não convergência destes operadores para o operador não perturbado $-\Delta + aI$ em $H^{-1}(\Omega)$, reescrevemos o problema a partir do uso de uma medida com peso, que nos permite provar um tipo de convergência conveniente aos nossos objetivos : a convergência no sentido do resolvente. Além disso, verificamos que os operadores nesssa nova abordagem são setoriais em $L^2(\Omega)$ e em $H^{-1}(\Omega)$ e mostramos também que o "novo" operador perturbado é igual ao operador de Laplace - Beltrami na variedade riemanniana Ω com a métrica dada pelo pull - back da métrica canônica no domínio perturbado.

• No Capítulo 3, estabelecemos o problema semilinear parabólico (10) como um problema abstrato numa escala fixa de espaços, de acordo com a nova abordagem introduzida no Capítulo 2. Demonstramos a existência e unicidade de soluções locais e, depois, globais para tal problema sob algumas hipóteses de regularidade, crescimento e dissipatividade para as não - linearidades f e g. Também provamos a continuidade das soluções no ponto $\epsilon = 0$ usando fundamentalmente a convergência dos resolventes obtida no Capítulo 2. E, mostramos que o problema limite é dado por (11)

• No Capítulo 4, demonstramos a existência de atratores globais para (10) em espaços de potências fracionárias X^η com η adequado. A partir da existência de um funcional de Lyapunov, obtemos a limitação uniforme em ϵ da família de atratores em $H^1(\Omega)$. Utilizando tal limitação e a continuidade das soluções provada no Capítulo 3, temos a semicontinuidade superior dos atratores. Supondo hipóteses adicionais sobre f e g e que os equilíbrios são todos hiperbólicos com $\epsilon = 0$, mostramos também a continuidade dos equilíbrios em X^η. Além disso, provamos a continuidade das variedades locais e, como consequência, a semicontinuidade inferior dos atratores.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, expomos os principais resultados que embasam o trabalho. Nas quatro primeiras seções, introduzimos notações e algumas propriedades de espaços de Sobolev definidos em domínios Lipschitz, principalmente o Teorema de Imersões e o Teorema do Traço. Nas seções de cinco à sete, recordamos as convergências forte, fraca, fraca* e em média, noções de diferenciabilidade e o Teorema das Funções Implícitas. Na oitava seção, apresentamos a metodologia desenvolvida por Henry em [12] para tratar problemas de perturbação de contorno. A nona seção traz a teoria de convergência no sentido do resolvente para operadores auto - adjuntos e de perturbação de um operador auto - adjunto. Na décima seção, por sua vez, temos a convergência no sentido do "gap" de operadores fechados. Na décima primeira, enunciamos um lema que estabelece isomorfismos entre imagens de projeções. Nas três seções seguintes, descrevemos um pouco sobre operadores setoriais, semigrupos analíticos gerados por tais operadores, suas potências fracionárias e resultados sobre a existência de solução para um problema abstrato envolvendo operadores setoriais e sobre a existência e continuidade de atratores globais. Na última seção, lembramos algumas definições e resultados sobre variedades riemannianas.

1.1 Definições e notações básicas

Esta seção contém algumas notações e definições básicas utilizadas ao longo do trabalho. Para os espaços de funções, recorremos a Necas [16] e para as propriedades na fronteira de subconjuntos do $\mathbb{R}^n$, Grisvard [9].

Denotaremos um ponto x do espaço Euclidiano n - dimensional $\mathbb{R}^n$ por $x = (x_1, ..., x_n)$. Dado um multi - indíce $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, escreveremos $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ e,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_1}^{\alpha_1} ... \frac{\partial}{\partial x_n}^{\alpha_n}.$$

Usaremos também a seguinte notação para as derivadas parciais:

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \; D^{\alpha} = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n}.$$

Seja f uma função m - diferenciável em $x \in \mathbb{R}^n$. A derivada m - ésima em x, $D^m f(x)$, pode ser considerada como um polinômio homogêneo de grau m : $h \mapsto D^m f(x) h^m$ em $\mathbb{R}^n$ ou como uma forma m - linear simétrica ou, ainda, como uma coleção de derivadas parciais:

$$D^m f(x) = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \; : \; |\alpha| = m \right\}.$$

A norma $|D^m f(x)|$ é dada por

$$max_{|h| \leq 1} |D^m f(x) h^m|, \text{ ou equivalentemente, } max_{|\alpha| = m} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f(x) \right|.$$

Seja Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ sua fronteira e, $\overline{\Omega}$, o seu fecho. Se Ω é um aberto conexo do $\mathbb{R}^n$, k um inteiro ou $k = \infty$ e $0 \leq \mu \leq 1$, $C^{k,\mu}(\overline{\Omega})$ é o conjunto de todas as funções cujas derivadas de ordem $\leq k$ são μ - holderianas no fecho de Ω. Se $\mu = 0$, as funções e suas derivadas de ordem $\leq k$ são contínuas em $\overline{\Omega}$ e escrevemos simplesmente $C^k(\overline{\Omega})$. Se $k < \infty$, munimos $C^k(\overline{\Omega})$ com a seguinte norma,

$$\| f \|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} max_{x \in \overline{\Omega}} |D^{\alpha}(f(x))|$$

e, $C^{k,\mu}(\overline{\Omega})$ com

$$\| f \|_{C^{k,\mu}(\overline{\Omega})} = \| f \|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha| = k} \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|D^{\alpha} f(x) - D^{\alpha} f(y)|}{|x - y|^{\mu}}.$$

Chamemos também $C^k(\Omega)$ (respectivamente, $C^{k,\mu}(\Omega)$) o conjunto de todas as funções contínuas (respectivamente, μ - holderianas) com suas derivadas de ordem $\leq k$ em Ω e $C_c^{\infty}(\Omega)$ o conjunto das funções C^{∞} com suporte compacto em Ω.

Quando possível, muitos autores consideram a fronteira $\partial\Omega$ como sendo localmente o gráfico de uma função ϕ. Desta forma, as propriedades de $\partial\Omega$ são especificadas através daquelas para

ϕ, por exemplo, continuidade, diferenciabilidade, propriedade de Lipschitz e etc. Um autor que adota este ponto de vista é Necas [16].

Definição 1.1.1 (Definição 1.2.1.1, [9]) *Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que a sua fronteira $\partial\Omega$ é contínua (respectivamente Lipschitz, continuamente diferenciável, de classe $C^{k,1}$, m - vezes continuamente diferenciável) se, para cada $x \in \partial\Omega$, existe uma vizinhança V de x em $\mathbb{R}^n$ e novas coordenadas ortogonais $\{y_1, ..., y_n\}$ tais que*

i) V é um hipercubo nas novas coordenadas:

$$V = \{(y_1, ..., y_n) \mid -a_j \leq y_j \leq a_j, 1 \leq j \leq n\};$$

ii) existe uma função contínua ϕ (respectivamente Lipschitz, continuamente diferenciável, de classe $C^{k,1}$, m - vezes continuamente diferenciável) definida em V':

$$V' = \{(y_1, ..., y_{n-1}) \mid -a_j \leq y_j \leq a_j, 1 \leq j \leq n-1\}$$

e tal que $|\phi(y')| \leq \frac{a_n}{2}$ para todo $y' = (y_1, ..., y_{n-1}) \in V'$, $\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V \mid y_n < \phi(y')\}$ e $\partial\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V \mid y_n = \phi(y')\}$.

Em outras palavras, em uma vizinhança de $x \in \partial\Omega$, Ω está abaixo do gráfico de ϕ e, consequentemente, $\partial\Omega$ é o gráfico de ϕ.

Para finalizar a seção, se $\lambda \in \mathbb{R}$, escreveremos $\Re(\lambda)$ para a parte real de λ.

1.2 Espaços de Sobolev

Esta seção apresenta algumas definições sobre espaços de Sobolev, conforme Grisvard [9]. Abordamos, primeiramente, o caso de espaços de Sobolev sobre $\mathbb{R}^n$ e, em seguida, sobre um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Também expomos alguns resultados relativos a imersões de espaços de Sobolev, considerando um subconjunto aberto limitado e conexo do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Lipschitz, tal como em Necas [16].

Sejam $s = m + \sigma$, um número real com m sua parte inteira e $0 \leq \sigma < 1$, a fracionária e p um número real tal que $1 < p < \infty$.

Definição 1.2.1 *Denotemos por $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as distribuições definidas em $\mathbb{R}^n$, tais que*

(i) $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para $|\alpha| \leq m$ quando $s = m$ é um inteiro não negativo,

(ii) $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ *e,*

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}} dxdy < +\infty$$

para $|\alpha| = m$ *se* $s = m + \sigma$ *é não negativo e não inteiro.*

Como de costume, $L^p(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de todas as funções mensuráveis u tais que $|u|^p$ é integrável em $\mathbb{R}^n$. Definimos uma norma em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\| u \|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

no caso (i) e, por

$$\| u \|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \| u \|^p_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha| = m} \iint\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}} dxdy \right\}^{\frac{1}{p}}$$

no caso (ii).

Definição 1.2.2 *Para* $s < 0$, *denotamos por* $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ *o espaço dual de* $W^{-s,q}(\mathbb{R}^n)$, *onde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Quando $p = 2$, escrevemos $H^s(\mathbb{R}^n)$ no lugar de $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$.

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Agora, desejamos estender as últimas noções com o objetivo de definir espaços de Sobolev em Ω. Um modo de fazer isso é reproduzir tais definições, restringindo o domínio de integração (substituindo $\mathbb{R}^n$ por Ω):

Definição 1.2.3 *Denotemos por* $W^{s,p}(\Omega)$ *o conjunto de todas as distribuições definidas em* Ω, *tais que*

(i) $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, *para* $|\alpha| \leq m$ *quando* $s = m$ *é um inteiro não negativo,*

(ii) $u \in W^{m,p}(\Omega)$ *e,*

$$\iint\limits_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}} dxdy < +\infty$$

para $|\alpha| = m$ *se* $s = m + \sigma$ *é não negativo e não inteiro.*

Definimos uma norma em $W^{s,p}(\Omega)$ por

$$\| u \|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

no caso (i) e, por

$$\| u \|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left\{ \| u \|^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = m} \iint\limits_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}} dxdy \right\}^{\frac{1}{p}}$$

no caso (ii).

Definição 1.2.4 *Para $s > 0$, denotemos por $\mathring{W}^{s,p}(\Omega)$ o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{s,p}(\Omega)$.*

Definição 1.2.5 *Para $s < 0$, denotemos por $W^{s,p}(\Omega)$ o espaço dual de $\mathring{W}^{-s,q}(\Omega)$ onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Teorema 1.2.6 *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Lipschitz. Então, $\frac{\partial}{\partial x_j}$ é um operador linear contínuo de $W^{s,p}(\Omega)$ em $W^{s-1,p}(\Omega)$ a menos que $s = 1/p$.*

Demonstração: Ver [9], Teorema 1.4.4.6.

Antes de enunciar um importante resultado envolvendo imersões entre espaços de espaços de Sobolev, recordemos que, dados dois espaços de Banach B_1 e B_2, dizemos que B_1 está imerso em B_2 algebricamente e topologicamente, $B_1 \hookrightarrow B_2$, se cada elemento de B_1 é também um elemento de B_2 e, vale que para todo $x \in B_1$, $\| x \|_{B_2} \leq c \| x \|_{B_1}$ para alguma constante positiva c.

Teorema 1.2.7 *Sejam Ω um aberto limitado conexo de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Lipschitz, $p \geq 1$, $kp > n$ e denotemos*

$$\mu = \begin{cases} = k - \frac{n}{p}, \; se\, k - \frac{n}{p} < 1; \\ < 1, \; se\, k - \frac{n}{p} = 1; \\ = 1 \; se\, k - \frac{n}{p} > 1, \end{cases}$$

Então, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [16], Teorema 2.3.8.

1.3 Teorema do traço para domínios com fronteira Lipschitz

Nesta seção, nos concentramos em uma versão do Teorema do Traço para subconjuntos abertos limitados do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Lipschitz, conforme Grisvard [9] e Necas [16].

Para o caso de um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz, então, na notação da Definição 1.1.1, um vetor normal exterior unitário é dado por

$$\nu(y', \phi(y')) = \frac{\{-\partial_1\phi(y'), ..., -\partial_{n-1}\phi(y'), 1\}}{\sqrt{1 + \partial_1\phi(y')^2 + ... + \partial_{n-1}\phi(y')^2}} \text{ q.s.}$$

para $y' \in V'$. Esse campo de vetores pode ser estendido para todo V definindo - o independentemente de x_n. Usando partição da unidade, definimos um campo de vetores em uma vizinhança de $\overline{\Omega}$ tal que ν é a normal exterior unitária quase sempre em $\partial\Omega$. Notemos que quando $\partial\Omega$ é de classe $C^{k,1}$, ν é um campo de vetores de classe $C^{k-1,1}$. Neste ponto, denotemos por γ o operador $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$, onde u é uma função suave.

Teorema 1.3.1 *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^{k,1}$. Suponha que $s - 1/p$ não é um inteiro, $s \leq k+1, s - 1/p = l + \sigma, 0 < \sigma < 1, l$ um inteiro não negativo. Então, a aplicação*

$$u \mapsto \left\{\gamma u, \gamma\frac{\partial u}{\partial \nu}, ..., \gamma\frac{\partial^l u}{\partial \nu^l}\right\},$$

definida para $u \in C^{k,1}(\overline{\Omega})$, tem uma única extensão contínua como um operador de

$$W^{s,p}(\Omega) \text{ em } \prod_{j=0}^{l} W^{s-j-1/p,p}(\partial\Omega).$$

Demonstração: Ver [9], Teorema 1.5.1.2.

Teorema 1.3.2 *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz. Então, a aplicação $u \mapsto \gamma u$, que está definida para $u \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, tem uma única extensão contínua como um operador de $W^{1,p}(\Omega)$ em $W^{1,1-1/p}(\partial\Omega)$.*

Demonstração: Ver [9], Teorema 1.5.1.3.

Teorema 1.3.3 *Sejam Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Lipschitz, $p \geq 1, kp < n, 1/q = 1/p - (1/(n-1)) \times (kp-1)/p$. Então, existe exatamente uma aplicação $\gamma : W^{k,p}(\Omega) \to L^q(\partial\Omega)$ tal que se $u \in C^\infty(\overline{\Omega}), \gamma u = u$.*

Demonstração: Ver [16], Teorema 2.4.7.

1.4 Problemas de segunda ordem em domínios convexos

Esta seção traz um resultado muito útil em Grisvard [9] acerca da sobrejetividade de $(A+\lambda)$, onde A é um operador diferencial com determinadas propriedades convenientes e $\lambda > 0$.

No que segue, vamos considerar Ω um subconjunto aberto, limitado e convexo de $\mathbb{R}^n$ e um operador A dado por

$$Au = \sum_{i,j}^{n} \partial_i(a_{ij}\partial_j u)$$

com $a_{ij} = a_{ji} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Supomos que $-A$ é fortemente elíptico, ou seja, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq -\alpha|\xi|^2$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Lema 1.4.1 *Se Ω é um subconjunto aberto, limitado e convexo de $\mathbb{R}^n$, então Ω tem fronteira Lipschitz.*

Demonstração: Ver [9], Corolário 1.2.2.3.

Teorema 1.4.2 *Seja Ω um subconjunto aberto, limitado e convexo do $\mathbb{R}^n$. Então, para cada $f \in L^2(\Omega)$ e para cada $\lambda > 0$, existe uma única $u \in H^2(\Omega)$ que é solução de*

$$-\sum_{i,j}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}\partial_i u \partial_j v dx + \lambda \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} fv dx \tag{1.1}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$.

Demonstração: Ver [9], Teorema 3.2.1.3.

A identidade (1.1) é a forma fraca do problema de Neumann para a equação

$$Au + \lambda u = f \,\text{em}\, \Omega$$

juntamente com a condição de fronteira

$$\sum_{i,j}^{n} \nu_i \gamma(a_{ij}\partial_j u) = 0 \,\text{q.s. em}\, \partial\Omega$$

uma vez que $\partial\Omega$ é Lipschitz e $a_{ij}\partial_j u \in H^1(\Omega)$.

1.5 Convergência forte, fraca, fraca* e em média

Nesta seção, recordamos alguns tipos de convergência de sequências em espaços de Banach e introduzimos a noção de convergência para a média segundo Cioranescu e Donato [7]. Esta última, em particular, mostrou - se essencial no estudo realizado neste trabalho.

Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e X' seu espaço dual topológico, ou seja, o conjunto das aplicações lineares e contínuas de X em $\mathbb{R}$. Seja $x' \in X'$. Vamos denotar por $< x', x >_{X',X}$ a imagem $x'(x)$ de $x \in X$. Recordamos que

Definição 1.5.1 *Uma sequência $\{x_n\} \in X$ converge fortemente para x se e, somente se,*

$$\| x_n - x \| \to 0.$$

Definição 1.5.2 *Uma sequência $\{x_n\} \in X$ converge fracamente para x se e, somente se,*

$$\forall x' \in X', < x', x_n >_{X',X} \to < x', x >_{X',X} .$$

A notação para convergência fraca é $x_n \rightharpoonup x$ em X.

Definição 1.5.3 *Uma sequência* $\{x'_n\} \in X'$ *converge fracamente* para* x' *se e, somente se,*

$$< x'_n, x >_{X',X} \to < x', x >_{X',X}, \forall x \in X.$$

A notação para a convergência fraca é* $x'_n \rightharpoonup x'$ *fraco* em* X'.

Exemplo 1.5.4 *Se* Ω *é um subconjunto aberto, limitado do* $\mathbb{R}^n$*, uma vez que* $[L^1(\Omega)]' = L^\infty(\Omega)$*,* $u_n \rightharpoonup u$ *fracamente* em* $L^\infty(\Omega)$ *é equivalente à*

$$\int_\Omega u_n \varphi dx \to \int_\Omega u\varphi dx, \ \forall \varphi \in L^1(\Omega).$$

A seguir, vamos denotar por Y o intervalo em $\mathbb{R}^n$ definido por

$$Y =]0, l_1[\times \cdots \times]0, l_n[,$$

onde $l_1, ..., l_n$ são números positivos dados.

Definição 1.5.5 *Sejam* Y *como acima e* f *uma função definida quase sempre em* $\mathbb{R}^n$. *A função* f *é chamada* Y *- periódica se, e somente se,*

$$f(x + kl_i e_i) = f(x) \ q.s. \ em \ \mathbb{R}^n, \ \forall k \in \mathbb{Z}, \ \forall i \in \{1, ..., n\},$$

onde $\{e_1, ..., e_n\}$ *é a base canônica do* $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.5.6 *Sejam* Ω *um subconjunto aberto, limitado do* $\mathbb{R}^n$ *e* f *uma função em* $L^1(\Omega)$. *O valor médio de* f *em* Ω *é o número real* $\mathcal{M}_\Omega(f)$ *dado por*

$$\mathcal{M}_\Omega(f) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(y) dy.$$

Teorema 1.5.7 *Sejam* $1 \le p \le +\infty$ *e* f *uma função* Y *- periódica em* $L^p(Y)$. *Estabeleçamos*

$$f_\epsilon(x) = f\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \ q.s. \ em \ \mathbb{R}^n.$$

Então, se $p < +\infty$,

$$f_\epsilon \rightharpoonup M_Y(f) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(y) dy \ fracamente \ em \ L^p(\omega), \ quando \ \epsilon \to 0$$

para qualquer subconjunto aberto limitado ω *de* $\mathbb{R}^n$.
Se $p = \infty$,

$$f_\epsilon \rightharpoonup M_Y(f) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(y) dy \ fracamente^* \ em \ L^\infty(\mathbb{R}^n), \ quando \ \epsilon \to 0.$$

Demonstração: Ver [7], Teorema 2.6.

Observação 1.5.8 *A segunda afirmação do Teorema 1.5.7 também é válida se substituirmos* $\mathbb{R}^n$ *por um subconjunto aberto, limitado* ω *de* $\mathbb{R}^n$.

1.6 Diferenciabilidade

No que segue, relembramos as noções de diferenciabilidade de Gateaux e de Fréchet, conforme Rall [19].

Definição 1.6.1 *Sejam X, Y espaços de Banach, $O \subset X$ aberto, $f : O \to Y$, $p \in O$,*

(i)f é Gateaux diferenciável (ou G - diferenciável) em p com G - derivada $\delta f(p, \cdot) : X \to Y$ se, para cada $q \in X$,

$$\lim_{t \to 0 \in \mathbb{R}} \frac{f(p+tq) - f(p) - t\delta f(p,q)}{t} = 0.$$

(ii)f é Fréchet diferenciável (ou F - diferenciável) em p com F - derivada $f'(p) : X \to Y$ se $f'(p)$ é um operador linear limitado e

$$\lim_{q \to 0 \in X} \frac{\| f(p+q) - f(p) - f'(p)q \|}{\| q \|} = 0.$$

Proposição 1.6.2 *Sejam X e Y espaços normados e $f : X \to Y$. Suponhamos que a derivada de Gateaux de f, $\delta f : X \to \mathcal{L}(X, Y)$ e δf seja contínua em x. Então, existe a derivada de Fréchet f' e é contínua em x.*

Demonstração: Ver [19], Proposição 2.8.

1.7 Teorema da Função Implícita

Nesta seção, recordamos o Teorema da Função Implícita como enunciado em Loomis e Sternberg [14].

Teorema 1.7.1 *Sejam V, W e X espaços de Banach, $A \times B$ um subconjunto aberto de $V \times W$ e $G : A \times B \to X$ uma aplicação contínua com $\frac{\partial G}{\partial \beta}$ também contínua, $\beta \in B$. Suponha que $(\alpha, \beta) \in A \times B$ é tal que $G(\alpha, \beta) = 0$ e $\frac{\partial G}{\partial \beta}(\alpha, \beta)$ é inversível. Então, existem bolas abertas, M e N, em torno de α e β, respectivamente, tais que para cada $\xi \in M$, existe único $\eta \in N$ satisfazendo $G(\xi, \eta) = 0$. A função F unicamente definida próximo à (α, β) pela condição $G(\xi, F(\xi)) = 0$ é contínua.*

Demonstração: Ver [14], capítulo 4, Teorema 9.3.

1.8 Cálculo diferencial de perturbações de contorno

Descrevemos a seguir um método desenvolvido por Daniel Henry em [12] para tratar problemas de variação de contorno, segundo o qual a variável independente é o domínio. Além disso, expomos alguns resultados relacionados importantes para o trabalho.

Consideremos um operador diferencial linear matricial formal:

$$Lu(x) = (u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x), ...),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

com a quantidade de termos que for necessária. Dada uma função f de várias variáveis, podemos definir um operador diferencial não linear formal por

$$v(x) = f(x, Lu(x)),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Mais precisamente, suponhamos que $L(u)(\cdot)$ assume valores em $\mathbb{R}^p$ e $f(x,\lambda)$ está definida para (x,λ) em algum aberto G de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Para subconjuntos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos F_Ω por

$$F_\Omega(u)(x) = f(x, Lu(x))$$

para funções u suficientemente suaves em Ω tais que $(x, Lu(x)) \in G$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Por exemplo, se f é contínua, Ω é limitado e L envolve derivadas de ordem $\leq m$, então F_Ω está definida em um aberto de $C^m(\Omega)$ (talvez vazio) com valores em $C^0(\Omega)$.

Seja $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ um mergulho de classe C^m, isto é, um difeomorfismo sobre a sua imagem $h(\Omega)$ de classe C^m. Definimos a composição ou pull - back h^* de h por:

$$h^*u(x) = u \circ h(x) = u(h(x)), x \in \Omega,$$

onde u é uma função definida em $h(\Omega)$.

Proposição 1.8.1 [1] *A aplicação*

$$\begin{aligned} h^* : C^m(h(\Omega)) &\to C^m(\Omega) \\ u &\mapsto u \circ h \end{aligned}$$

é um isomorfismo com inversa $h^{*-1} = (h^{-1})^*$.

A mesma proposição é válida em outros espaços de função como, por exemplo, espaços de Sobolev.

Para um tal mergulho h de uma região limitada Ω, $F_{h(\Omega)}$ tem um domínio aberto $D(F_{h(\Omega)}) \subset C^m(h(\Omega))$ e,

[1]Ver Pereira, M. C. (2001). Aplicações do Teorema de Transversalidade à genericidade em alguns problemas de contorno elíptico. Dissertação. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2001.

$$F_{h(\Omega)} : D(F_{h(\Omega)}) \subset C^m(h(\Omega)) \to C^0(h(\Omega))$$

é o que denominamos de forma Euleriana do operador diferencial não - linear formal $v \mapsto f(\cdot, Lv(\cdot))$ em $h(\Omega)$, enquanto

$$h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} : h^* D(F_{h(\Omega)}) \subset C^m(\Omega) \to C^0(\Omega)$$

é a forma Lagrangeana do mesmo operador diferencial não - linear formal. Iguais termos são empregados relativamente a outros espaços de funções.

A forma Euleriana é frequentemente mais natural e simples para fazer cálculos, a forma Lagrangeana é usada para provar teoremas. De fato, ambas são utilizadas e são, essencialmente, equivalentes. A vantagem da forma Lagrangeana é que ela atua em espaços que não dependem de h, facilitando o uso de teoremas, por exemplo, o Teorema da Função Implícita. Agora, precisamos garantir a diferenciabilidade de

$$(h, u) \mapsto h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1}(u)$$

e calcular suas derivadas em relação a h. Como h^* é linear, a diferenciabilidade em u não é um problema.

Proposição 1.8.2 [2] *Dada uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberta, limitada, de classe C^m, temos que*

$$Diff^m(\Omega) = \left\{ h \in C^m(\Omega, \mathbb{R}^n);\ h \text{ é injetora e } \frac{1}{|Jh|} \text{ é limitado em } \Omega \right\}$$

é um subconjunto aberto de $C^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$, sendo Jh o determinante da matriz jacobiana de h.

Uma topologia pode ser introduzida na coleção de regiões $\{h(\Omega);\ h \in Diff^m(\Omega)\}$, definindo uma sub - base das vizinhaças de um dado Ω por

$$\{\, h(\Omega);\ \| h - i_\Omega \|_{C^m(\Omega, \mathbb{R}^n)} < \epsilon,\ \epsilon > 0 \text{ suficientemente pequeno} \,\}$$

onde i_Ω é a aplicação inclusão. É conhecido que tal topologia é metrizável.[3]

Para $v = h^{*-1}u$, $y = h(x)$, $x \in \Omega$,

$$h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} u(x) = F_{h(\Omega)} v(h(x)) = f(y, Lv(y)) = f(h(x), h^* L h^{*-1} u(x)).$$

[2] Ver Pereira, M. C. (2001). Aplicações do Teorema de Transversalidade à genericidade em alguns problemas de contorno elíptico. Dissertação. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2001.

[3] Ver Micheletti A. M. (1972). Perturbazione dello spectro dell operatore di laplace in relazione ad una variazone del campo. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa 26, 151-169.

Um operador diferencial constante típico é

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)^{\alpha_i}$$

sendo $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, α_i inteiro não negativo. Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}\left(h^*\frac{\partial}{\partial y_i}h^{*-1}u\right)(x) &= \frac{\partial}{\partial y_i}(u \circ h^{-1})(h(x)) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}(h^{-1}(y))\frac{\partial (h^{-1})_j}{\partial y_i}(h(x)) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)(h_x^{-1})_{ji}(x) \qquad (1.2)\end{aligned}$$

donde,

$$h^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha} h^{*-1}u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha} v(y) = \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(h_x^{-1})_{ji}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_i} u(x).$$

Então, se f é C^k ou analítica em G,

$$\begin{aligned} F : C^m(\Omega) \times Diff^m &\to C^0(\Omega) \\ (u,h) &\mapsto h^*F_{h(\Omega)}h^{*-1}(u) = f(h(\cdot), h^*Lh^{*-1}u)\end{aligned}$$

é C^k ou analítica, respectivamente, em seu domínio de definição. Outros espaços de funções podem ser empregados e os resultados de suavidade são basicamente os mesmos.

Frequentemente, quando empregamos esse metódo, faz - se necessário calcular o determinante da matriz jacobiana do difeormorfismo $h : \partial\Omega \to \partial h(\Omega)$, denotado por $J_{\partial\Omega}h$. Vejamos a seguir como este cálculo pode ser feito.

Mais geralmente, sejam $M = \partial\Omega$ e $N = h(\partial\Omega)$, ambos de dimensão $n-1$. Se f é uma função em N a $\mathbb{R}$,

$$\int_N f(y)\, d\omega_N = \int_M f(h(x))\, J_{\partial\Omega}h\, d\omega_M,$$

sendo $d\omega_{\{\cdot\}}$ o elemento de volume em M ou em N e $J_{\partial\Omega}h$ representa a correção do fator de volume. Por outro lado,

$$\int_N f(y)\, d\omega_N = \int_M f(h(x))h^* d\omega_N.$$

Assim, se $p \in M$,

$$(h^* d\omega_N)(p) = J_{\partial\Omega}h(p) d\omega_M(p). \qquad (1.3)$$

Seja $\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ uma base ortonormal de TpM, o espaço tangente a p em M. Usando (1.3),

$$(h^* d\omega_N)(p)(e_1, \cdots, e_{n-1}) = J_{\partial\Omega}h(p) d\omega_M(p)(e_1, \cdots, e_{n-1}) = J_{\partial\Omega}h(p).$$

Agora,

$$(h^* d\omega_N)(p)(e_1, \cdots, e_{n-1}) = d\omega_N(h(p))(h^* e_1, \cdots, h^* e_{n-1}) = \det \begin{pmatrix} Dh_p e_1 \\ \vdots \\ Dh_p e_{n-1} \\ N_q \end{pmatrix},$$

com $q = h(p)$ e N_q o vetor normal a q em N. Observemos que $N_q = \frac{(h^{*-1})^t N_p}{\| (h^{*-1})^t N_p \|}$, pois se $\{f_1, \cdots, f_{n-1}\}$ é uma base ortonormal de TqN, o espaço tangente a q em N,

$$< (h^{*-1})^t N_p, f_i > = < N_p, h^{*-1} f_i > = 0, \quad \forall i = 1, \cdots, n-1,$$

uma vez que h leva um espaço tangente no outro. Daí, encontramos uma expressão muito útil para $J_{\partial\Omega}h$:

$$J_{\partial\Omega}h(p) = \det \begin{pmatrix} Dh_p e_1 \\ \vdots \\ Dh_p e_{n-1} \\ \frac{(h^{*-1})^t N_p}{\| (h^{*-1})^t N_p \|} \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

1.9 Operadores simétricos e auto - adjuntos

No que segue, fazemos um breve apanhado sobre operadores simétricos e auto - adjuntos, segundo Teschl [21] e alguns outros resultados importantes para os nossos objetivos.

Sejam $(X, \| \cdot \|_X)$ e $(Y, \| \cdot \|_Y)$ espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Escreveremos $\mathcal{L}(X, Y)$ para o conjunto de operadores lineares contínuos de X em Y com a norma

$$\| A \|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X = 1} \| Ax \|_Y .$$

No caso em que $X = Y$, denotamos simplesmente $\mathcal{L}(X)$.

Definição 1.9.1 *Seja $(H, <,>)$ um espaço de Hilbert. Um operador linear A em H é uma aplicação linear*

$$A : D(A) \to H$$

onde $D(A)$ é um subconjunto de H denominado domínio de A. Denotamos por $R(A) = \{y \in H ; \exists x \in D(A)$ tal que $Ax = y\}$ o conjunto imagem de A. A é dito densamente definido quando $D(A)$ é denso em H.

Definição 1.9.2 *Um operador linear A é dito simétrico se*

$$< Ax, y > = < x, Ay >, \ \forall x, y \in D(A).$$

Definição 1.9.3 *O operador adjunto A^* de um operador linear densamente definido A é dado por*

$$D(A^*) = \{x \in H \,:\, \exists x^* \in H \text{ tal que } < x, Ay > = < x^*, y >, \forall y \in D(A)\}, \ \ A^*(x) = x^*.$$

Notemos que para os operadores simétricos vale que $A \subset A^*$.

Definição 1.9.4 *Um operador linear A é dito auto - adjunto se $A = A^*$.*

Corolário 1.9.5 *Se A é um operador simétrico em um espaço de Hilbert H tal que $R(A) = H$, então A é auto - adjunto.*

Demonstração: Ver [20] , Corolário 3.12.

Lema 1.9.6 *Sejam $Z \subset W \subset Z^*$ espaços de Hilbert reais e a uma forma bilinear, contínua, simétrica e coerciva em $Z \times Z$. Então, o operador A definido por a, $A : Z \to Z^*$, $u \in Z \mapsto Au \in Z^*$ tal que $(Au)(v) = a(u, v), \forall v \in Z$, é simétrico.*

Demonstração:

Afirmamos que a aplicação $<<, >>: Z^* \times Z^* \to \mathbb{R}$ dada por $<< \phi, \psi >>= \psi(A^{-1}\phi)$ é um produto interno em Z^*. Observamos $<<, >>$ está bem definida pois se a é coerciva, então A é injetor e, do Lema de Lax - Milgram, segue que A é sobrejetor.

Com efeito,

i) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\phi, \varphi, \psi \in Z^*$, então $<< \alpha\phi + \beta\varphi, \psi >>= \psi(A^{-1}(\alpha\phi + \beta\varphi)) = \psi(\alpha A^{-1}(\phi) + \beta A^{-1}(\varphi)) = \alpha\psi(A^{-1}(\phi)) + \beta\psi(A^{-1}(\varphi)) = \alpha << \phi, \psi >> +\beta << \varphi, \psi >>$. E, $<< \phi, \alpha\varphi + \beta\psi >>= (\alpha\varphi + \beta\psi)(A^{-1}\phi) = \alpha\varphi(A^{-1}\phi) + \beta\psi(A^{-1}\phi) >>= \alpha << \phi, \varphi >> +\beta << \phi, \psi >>$. Segue a bilinearidade de $<<, >>$.

ii) Sejam $\phi, \psi \in Z^*$ e $z, \tilde{z} \in Z$ tais que $A(z) = \phi$ e $A(\tilde{z}) = \psi$. Temos, por um lado, $<< \phi, \psi >>= \psi(A^{-1}\phi) = \psi(z) = (A\tilde{z})(z) = a(\tilde{z}, z)$. Por outro, $<< \psi, \phi >>= \phi(A^{-1}\psi) = \phi(\tilde{z}) = (Az)(\tilde{z}) = a(z, \tilde{z})$. Como a é simétrico, por hipótese, $<< \phi, \psi >>= a(\tilde{z}, z) = a(z, \tilde{z}) =<< \psi, \phi >>$. Assim, provamos a simetria de $<<, >>$.

iii) Sejam $\phi \in Z^*$ e $z \in Z$ com $A(z) = \phi$, então $<< \phi, \phi >>\geq 0 \iff \phi(A^{-1}\phi) \geq 0 \iff (Az)(z) \geq 0 \iff a(z, z) \geq 0$, o que é verdadeiro devido a coercividade de a. Além disso, $<< \phi, \phi >>= 0 \iff \phi(A^{-1}\phi) = 0 \iff (Az)(z) = 0 \iff a(z, z) = 0 \iff z = 0$, novamente devido a coercividade de a.

Finalmente, se $u, v \in Z$,

$$
\begin{aligned}
<< Au, v >> &= v(A^{-1}(Au)) \\
&= (A(A^{-1}v))(u) \\
&= a(A^{-1}v, u) \\
&= a(u, A^{-1}v) \\
&= (Au)(A^{-1}v) \\
&= << v, Au >> .
\end{aligned}
$$

E, constatamos que A é simétrico com relação a este produto interno.

■

Lema 1.9.7 *Seja X um espaço normado. Suponha que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família de operadores limitados convergindo para um operador T em $\mathcal{L}(X)$ e que T_n e T admitem inversas para todo $n \in \mathbb{N}$. Se T_n^{-1} e T^{-1} são limitados para todo $n \in \mathbb{N}$, então T_n^{-1} converge para T^{-1} em $\mathcal{L}(X)$.*

Demonstração:

Basta escrever $T_n^{-1} - T^{-1} = T_n^{-1}(T - T_n)T^{-1}$.

■

Definição 1.9.8 *Seja T um operador densamente definido e fechado. O conjunto resolvente de T, $\rho(T)$, é o conjunto de $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o chamado operador resolvente de T em λ, $R_T(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$, existe e é limitado.*

Definição 1.9.9 *O complemento do conjunto resolvente de T é dito o espectro de T, $\sigma(T)$.*

Lema 1.9.10 *Suponha que X é um espaço normado, $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e T são operadores tais que para um certo λ_0, $(T_n - \lambda_0 I)^{-1} \to (T - \lambda_0 I)^{-1}$ em $\mathcal{L}(X)$. Então, $(T_n - \lambda I)^{-1} \to (T - \lambda I)^{-1}$ em $\mathcal{L}(X)$, para todo $\lambda \in \rho(T) \cap \{\cap\rho(T_n) : n \in \mathbb{N}\}$.*

Demonstração:

Seja $\lambda \in \rho(T) \cap \{\cap\rho(T_n) : n \in \mathbb{N}\}$, podemos escrever, somando e subtraindo λ_0:

$$(T - \lambda I)^{-1} = (T - \lambda_0 I)^{-1}(I + (\lambda_0 - \lambda)(T - \lambda_0 I)^{-1})^{-1}$$

desde que o inverso acima exista. Se $|\lambda_0 - \lambda| \parallel (T - \lambda_0 I)^{-1} \parallel < 1 \Leftrightarrow |\lambda_0 - \lambda| < \frac{1}{\|(T-\lambda_0 I)^{-1}\|}$, existe o inverso de $(I + (\lambda_0 - \lambda)(T - \lambda_0 I)^{-1})$. Vale observarmos que $(I + (\lambda_0 - \lambda)(T - \lambda_0 I)^{-1}) = (T - \lambda I)(T - \lambda_0 I)^{-1}$, que é inversível por hipótese.

Analogamente,

$$(T_n - \lambda I)^{-1} = (T_n - \lambda_0 I)^{-1}(I + (\lambda_0 - \lambda)(T_n - \lambda_0 I)^{-1})^{-1}$$

para $|\lambda_0 - \lambda| < \frac{1}{\|(T_n-\lambda_0 I)^{-1}\|}$.

Segue que,

$$\begin{aligned}
(T_n - \lambda I)^{-1} - (T - \lambda I)^{-1} &= (T_n - \lambda_0 I)^{-1}(I + (\lambda_0 - \lambda)(T_n - \lambda_0 I)^{-1})^{-1} \\
&- (T - \lambda_0 I)^{-1}(I + (\lambda_0 - \lambda)(T - \lambda_0 I)^{-1})^{-1} \\
&= ((T_n - \lambda_0 I)^{-1} - (T - \lambda_0 I)^{-1})(I + (\lambda_0 - \lambda)(T - \lambda_0 I)^{-1})^{-1} \\
&+ (T_n - \lambda_0 I)^{-1}((I + (\lambda_0 - \lambda)(T_n - \lambda_0 I)^{-1})^{-1} - (I + (\lambda_0 - \lambda)(T - \lambda_0 I)^{-1})^{-1})
\end{aligned}$$

Desta forma, fica explícita a convergência dos resolventes em λ, uma vez que, $(I + (\lambda_0 - \lambda)(T_n - \lambda_0 I)^{-1})$, $(I + (\lambda_0 - \lambda)(T - \lambda_0 I)^{-1})$ e seus respectivos inversos são operadores limitados e, por hipótese, $(T_n - \lambda_0 I)^{-1} \to (T - \lambda_0 I)^{-1}$, donde pelo Lema 1.9.7, $(I + (\lambda_0 - \lambda)(T_n - \lambda_0 I)^{-1})^{-1} \to (I + (\lambda_0 - \lambda)(T - \lambda_0 I)^{-1})^{-1}$.

■

Teorema 1.9.11 *Seja T um operador fechado inversível em X. Então, o espectro estendido de T (espectro interpretado como um subconjunto do plano complexo estendido) e o espectro estendido de seu inverso T^{-1} são mapeados um sobre o outro através da aplicação no plano complexo estendido $z \mapsto z^{-1}$.*

Demonstração: Ver [13], Teorema 3.6.15.

Lema 1.9.12 *Sejam X, Y espaços de Banach e $T_n : X \to Y$ uma sequência de operadores lineares convergindo fortemente para o operador linear $T : X \to Y$. Suponha que $X_1 \subset X$ é um espaço de Banach com inclusão $i : X_1 \hookrightarrow X$ compacta. Sejam $\tilde{T}_n = T_n \circ i$ e $\tilde{T} = T \circ i$. Então, $\tilde{T}_n \to \tilde{T}$ uniformemente para x em um subconjunto limitado de X_1 (ou seja, na norma de $\mathcal{B}(X_1, Y)$, o espaço dos operadores lineares limitados de X_1 em Y).*

Demonstração: Ver [18], Lema 4.5.

Suponha que $R_{T_n}(\lambda)$ e $R_T(\lambda)$ denotam, respectivamente, os resolventes de uma família de operadores T_n e o resolvente de um operador T no ponto λ. A seguinte identidade:

$$R_{T_n}(\lambda) - R_T(\lambda) = (1 + (\lambda - \lambda_0)R_{T_n}(\lambda))(R_{T_n}(\lambda_0) - R_T(\lambda_0))(1 + (\lambda - \lambda_0)R_T(\lambda)) \tag{1.5}$$

é uma consequência muito útil da primeira equação do resolvente aplicada a cada um desses operadores, a saber:

$$R_S(\lambda_1) - R_S(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)R_S(\lambda_1)R_S(\lambda_2).$$

Com efeito,

$$R_{T_n}(\lambda) - R_T(\lambda) = (1 + (\lambda - \lambda_0)R_{T_n}(\lambda))(R_{T_n}(\lambda_0) - R_T(\lambda_0))(1 + (\lambda - \lambda_0)R_T(\lambda))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$R_{T_n}(\lambda)-R_T(\lambda) = (1+(\lambda-\lambda_0)R_{T_n}(\lambda))R_{T_n}(\lambda_0)(1+(\lambda-\lambda_0)R_T(\lambda))-(1+(\lambda-\lambda_0)R_{T_n}(\lambda))R_T(\lambda_0)(1+(\lambda-\lambda_0)R_T(\lambda))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$R_{T_n}(\lambda)-R_T(\lambda) = (R_{T_n}(\lambda_0)+(R_{T_n}(\lambda)-R_{T_n}(\lambda_0)))(1+(\lambda-\lambda_0)R_T(\lambda))-(1+(\lambda-\lambda_0)R_{T_n}(\lambda))(R_T(\lambda_0)+(R_T(\lambda)-R_T(\lambda_0)))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$R_{T_n}(\lambda) - R_T(\lambda) = R_{T_n}(\lambda)(1 + (\lambda - \lambda_0)R_T(\lambda)) - (1 + (\lambda - \lambda_0)R_{T_n}(\lambda))R_T(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$R_{T_n}(\lambda) - R_T(\lambda) = R_{T_n}(\lambda) - R_T(\lambda).$$

1.9.1 Convergência no sentido do resolvente de operadores auto - adjuntos

Nesta subseção, apresentamos o importante conceito de convergência em termos do resolvente para operadores auto - adjuntos e sua principal consequência para os nossos intuitos. Para tal assunto, recorremos a Oliveira [17] e Teschl [21].

Definição 1.9.13 *Sejam A_n e A operadores auto - adjuntos. Dizemos que*

i) A_n converge para A no sentido da norma do resolvente se $\lim_{n\to\infty} R_{A_n}(\lambda) = R_A(\lambda)$ *e,* *ii)* A_n *converge para* A *no sentido forte do resolvente se* $D(R_A(\lambda)) \subseteq D(R_{A_n}(\lambda))$ *e* $R_{A_n}(\lambda)[x] \to R_A(\lambda)[x]$ *quando* $n \to \infty$,

para todo $\lambda \in (\rho(A)) \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}}\rho(A_n))$.

Proposição 1.9.14 *Se* A_n *converge para* A *no sentido forte ou no sentido da norma do resolvente para algum* $\lambda_0 \in (\rho(A)) \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}}\rho(A_n))$, *então o mesmo vale para todo* $\lambda \in (\rho(A)) \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}}\rho(A_n))$.

Demonstração: Ver [21], Corolário 6.32.

Observação 1.9.15 *Vale comentar que a última proposição segue diretamente da identidade (1.5).*

Teorema 1.9.16 *Suponha que* A_n *e* A *são operadores auto - adjuntos. Se* A_n *converge para* A *no sentido forte do resolvente, então* $\sigma(A) \subseteq \lim_{n\to\infty} \sigma(A_n)$. *Se* A_n *converge para* A *no sentido da norma do resolvente, então* $\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \sigma(A_n)$, *isto é, se* $s_0 \in \sigma(A)$, *então existe uma sequência* s_n *com* $s_n \to s_0$ *e* $s_n \in \sigma(A_n)$, $\forall n$.

Demonstração: Ver [21], Teorema 6.38.

1.9.2 Perturbação de operadores auto - adjuntos

Nesta subseção, expomos um resultado muito útil sobre perturbação de operadores auto - adjuntos, encontrado em Teschl [21].

Definição 1.9.17 *Um operador* B *é dito* A *- limitado ou relativamente limitado com respeito à* A *se* $D(A) \subset D(B)$ *e existem constantes* $a, b \geq 0$ *tais que*

$$\| Bx \| \leq a \| Ax \| + b \| x \|, \quad x \in D(A).$$

O ínfimo das constantes a *para as quais existe uma constante* b *tal que a desigualdade vale é chamado de* A *- limitação de* B.

Teorema 1.9.18 *Suponha que* A *é um operador auto - adjunto e* B *é um operador simétrico com* A *- limitação menor do que 1. Então,* $A + B$, $D(A + B) = D(A)$, *é auto - adjunto.*

Demonstração: Ver [21], Teorema 6.4.

1.10 Convergência generalizada de operadores fechados

No que segue, introduzimos a noção de “gap” conforme Kato [13], que é utilizada para a obtenção de resultados de convergência de partes finitas do espectro.

Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado, $x \in X$ e $S \subset X$, um subconjunto. Denotaremos por $d(x, S)$ a distância de x a S: $d(x, S) = \inf_{y \in S} \| x - y \|$. Recordemos que

Definição 1.10.1 *Sejam X e Y espaços normados. Um operador T de X em Y é dito fechado se o seu gráfico $G(T)$ é um subconjunto fechado de $X \times Y$.*

Definição 1.10.2 *Sejam X e Y espaços de Banach, T e S operadores fechados de X em Y. Estabelecemos,*

$$\delta(T, S) = \delta(G(T), G(S)) = \sup_{(x,y) \in S_{G(T)}} d((x, y), G(s))$$

$$\hat{\delta}(T, S) = \hat{\delta}(G(T), G(S)) = max[\delta(T, S), \delta(S, T)] \tag{1.6}$$

onde $S_{G(T)}$ denota a esfera unitária de $G(T)$. $\hat{\delta}$ será denominado o “gap” entre T e S.

Por vezes, o espectro de um operador fechado T, $\sigma(T)$, contém uma parte limitada $\sigma_1(T)$ separada do restante, $\sigma_2(T)$, de tal modo que uma curva fechada, simples e retificável Γ (ou, mais geralmente, um número finito delas) pode ser desenhada de forma a envolver um subconjunto aberto contendo $\sigma_1(T)$ em seu interior e, $\sigma_2(T)$, em seu exterior. Sejam $P_1(T)$ e $P_2(T)$ as projeções associadas a tais conjuntos, respectivamente,

$$P_1(T) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\zeta - T)^{-1} d\zeta, \quad P_2(T) = I - P_1(T).$$

Chamemos $X_1(T) = P_1(T)X$ e $X_2(T) = P_2(T)X = (I - P_1(T))X$. Então, existe uma decomposição de T de acordo com a decomposição do espaço X, $X = X_1(T) \oplus X_2(T)$, e vale que $\sigma(T|_{X_1(T)}) = \sigma_1(T)$ e $\sigma(T|_{X_2(T)}) = \sigma_2(T)$. O próximo teorema nos traz uma noção de continuidade dessas partes do espectro sob determinadas hipóteses.

Teorema 1.10.3 *Seja T um operador fechado em X e suponhamos que seu espectro $\sigma(T)$ está dividido em duas partes $\sigma_1(T)$ e $\sigma_2(T)$ por uma curva Γ fechada simples retificável (ou um número finito delas) de tal modo que Γ envolve um aberto contendo $\sigma_1(T)$ em seu interior e $\sigma_2(T)$ está em seu exterior. Seja $X = X_1(T) \oplus X_2(T)$ a correspondente decomposição do espaço X.Então, existe um δ dependendo de T e de Γ com as seguintes propriedades: qualquer S operador fechado em X com $\hat{\delta}(S, T) < \delta$ possui espectro $\sigma(S)$ separado por Γ em duas partes $\sigma_1(S)$ e $\sigma_2(S)$. Na decomposição associada, $X = X_1(S) \oplus X_2(S)$, $X_1(S)$ e $X_2(S)$ são isomorfos, respectivamente, à $X_1(T)$ e $X_2(T)$. Em particular, $dimX_1(S) = dimX_1(T)$, $dimX_2(S) = dimX_2(T)$ e ambos, $\sigma_1(S)$ e $\sigma_2(S)$ são não vazios se o mesmo é válido para T.*

Demonstração: Ver [13], Teorema 3.16, capítulo IV.

1.11 Pares de projeções

Descrevemos nesta seção um resultado em Kato [13] que permite comparar as imagens de uma família de projeções.

Como é conhecido, uma projeção em um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é um operador limitado P em X tal que $P^2 = P$.

Lema 1.11.1 *Seja $P(t)$ uma projeção dependendo continuamente de um parâmetro t, o qual varia numa região conexa de números reais ou complexos. Então, as imagens $P(t)X$ para diferentes valores de t são isomorfas entre si. Em particular, $dim P(t)X$ é constante.*

Demonstração: Ver [13], Lema 4.10, capítulo I.

1.12 Operadores setoriais e semigrupos analíticos

Esta seção é dedicada aos operadores setoriais, semigrupos analíticos gerados por esta classe de operadores e alguns conceitos como de invariância sob a ação de um semigrupo, equilíbrio, atrator global e semigrupo assintoticamente compacto. Seguimos de perto Hale [10] e Henry [11].

Definição 1.12.1 *Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores $T(t,x) : X \to X$, $t \geq 0$ é dita um C^r - semigrupo não - linear, $r \geq 0$, se as seguintes hipóteses são satisfeitas:*

(i) $T(0,x) = I(x)$,

(ii) $T(s+t,x) = T(t,x) \circ T(s,x), t \geq 0$ e $s \geq 0$,

(iii) $T(t,x)$ é contínua em t e em x e, suas derivadas de Fréchet com respeito à x até a ordem r também são contínuas para $(t,x) \in [0,\infty) \times X$.

Definição 1.12.2 *Seja B um subconjunto de X. A órbita positiva de um semigrupo $T(t,x)$ por B, $\gamma^+(B)$, é definida por $\gamma^+(B) = \{T(t,x)B\,;\, t \geq 0\}$.*

Definição 1.12.3 *Sejam B e C subconjuntos de X. Dizemos que B atrai C sob a ação do semigrupo $T(t,x)$ se $\lim_{t\to\infty} dist_H(T(t,x)C, B) = 0$. Se existir um $t_0 \geq 0$ tal que $T(t,x)C \subset B$ para todo $t \geq t_0$, dizemos que B absorve C.*

Definição 1.12.4 *Dizemos que um subconjunto B de X é invariante (positivamente invariante) sob a ação de um semigrupo* $T(t,x)$ *se* $T(t,x)B = B$ *para* $t \geq 0$ ($T(t,x)B \subset B$)*. Um conjunto invariante unitário corresponde a um ponto de equilíbrio de* $T(t,x)$*, isto é, um ponto* $x \in X$ *tal que* $T(t,x)x = x$ *para todo* $t \geq 0$.

Definição 1.12.5 *Um ponto de equilíbrio x é dito hiperbólico se o espectro* $\sigma(D_x T(t,x)x)$ *para cada* $t > 0$ *não intercepta o círculo unitário centrado na origem em* $\mathbb{C}$.

Definição 1.12.6 *Um conjunto invariante compacto* $\mathcal{A}$ *é dito um conjunto invariante compacto maximal se todo conjunto invariante compacto de* $T(t,x)$ *está contido em* $\mathcal{A}$*. Um conjunto invariante compacto maximal* $\mathcal{A}$ *é dito ser um atrator global se* $\mathcal{A}$ *atrai cada subconjunto limitado* $B \subset X$.

Definição 1.12.7 *Um semigrupo* $T(t,x)$ *é dito assintoticamente compacto se para qualquer subconjunto não - vazio, fechado e limitado* $B \subset X$*, para o qual* $T(t,x)B \subset B$, $t \geq 0$*, existe um conjunto compacto* $J \subset B$ *que atrai B.*

Definição 1.12.8 *Um operador linear A em um espaço de Banach X é dito um operador setorial se é um operador densamente definido, fechado e tal que para alguns* $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geq 1$ *e algum número real a, o setor:*

$$S_{a,\phi} = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \,|\, \phi \leq |arg(\lambda - a)| \leq \pi,\ \lambda \neq a \,\}$$

está contido no resolvente de A e vale a desigualdade

$$\| \, (\lambda I - A)^{-1} \, \| \leq \frac{M}{|\ \lambda - a\ |}, \forall \lambda \in S_{a,\phi}.$$

Seguem alguns exemplos de operadores setoriais:

Exemplo 1.12.9 *Seja A um operador linear limitado em um espaço de Banach X. Então, A é setorial.*

Exemplo 1.12.10 *Seja A um operador densamente definido em um espaço de Hilbert* $(H, <,>)$*, limitado inferiormente e auto - adjunto. Então, A é setorial.*

Definição 1.12.11 *Um semigrupo linear analítico em um espaço de Banach X é uma família de operadores lineares contínuos em X,* $\{T(t)\}_{t \geq 0}$*, satisfazendo:*

(i) $T(0) = I$, $T(t) \circ T(s) = T(t+s)$*, para* $t \geq 0$ *e* $s \geq 0$,

(ii) $T(t)x \to x$ *quando* $t \to 0^+$*, para cada* $x \in X$,

(iii) A aplicação $t \to T(t)x$ *é real analítica em* $0 < t < \infty$*, para cada* $x \in X$.

Definição 1.12.12 *O gerador infinitesimal L do semigrupo $T(t)$ é definido por*

$$Lx = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(T(t)x - x),$$

sendo $D(L)$ o conjunto dos $x \in X$ para os quais tal limite existe em X.

Observação 1.12.13 *É usual denotar $T(t) = e^{Lt}$.*

Teorema 1.12.14 *Se A é um operador setorial, então -A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$, onde*

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda I + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda,$$

sendo Γ um contorno em $\rho(-A)$ com $arg(\lambda) \to \pm\theta$ quando $\mid \lambda \mid \to \infty$ para algum $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Além disso, e^{-At} pode ser estendido analiticamente a um setor $\{\, t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \mid \arg(t) \mid < \epsilon \,\}$ contendo o eixo real positivo e se $\Re(\sigma(A)) > a$, isto é, $\Re(\lambda) > a$ sempre que $\lambda \in \sigma(A)$, então para $t > 0$:

$$\| e^{-At} \| \leq C_1 e^{-at} \ e \ \| Ae^{-At} \| \leq \frac{C_2}{t}e^{-at},$$

sendo $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ constantes dadas por

$$C_1 = \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma} \mid e^{\mu} \mid \frac{\mid d\mu \mid}{\mid \mu \mid} \ e,$$

$$C_2 = \frac{1+M}{2\pi}\int_{\Gamma} \mid e^{\mu} \mid\mid d\mu \mid,$$

onde M é a constante que aparece na Definição 1.12.8.

Finalmente, $\frac{d}{dt}e^{-At} = -Ae^{-At}$ para $t > 0$.

Demonstração: Ver [11], Teorema 1.3.4.

1.13 Potências fracionárias de operadores setoriais

Nesta seção, definimos as potências fracionárias de operadores setoriais como em Henry [11] e apresentamos suas principais propriedades.

Definição 1.13.1 *Seja A um operador setorial com $\Re(\sigma(A)) > 0$, então para qualquer $\alpha > 0$, definimos:*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-At}dt,$$

onde Γ denota a função Gama dada por $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$.

Teorema 1.13.2 *Se A é um operador setorial em X com $\Re(\sigma(A)) > 0$, então para qualquer $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado em X, injetor, que satisfaz $A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$ sempre que $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Além disso, se $0 < \alpha < 1$,*

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha}(\lambda I + A)^{-1}d\lambda.$$

Demonstração: Ver [11], Teorema 1.4.2.

Definição 1.13.3 *Seja A como no Teorema 1.13.2. Definimos A^{α}, a inversa de $A^{-\alpha}$, para $\alpha > 0$, com $D(A^{\alpha}) = R(A^{-\alpha})$ e $A^0 = I$, onde I é a identidade em X.*

Teorema 1.13.4 *Suponha que A é um operador setorial com $\Re(\sigma(A)) > \delta > 0$. Então, para $\alpha \geq 0$, existe uma constante $0 < C_\alpha < \infty$ tal que*

$$\| A^{\alpha}e^{-At} \| \leq C_\alpha t^{-\alpha}e^{-\delta t},\ t > 0,$$

onde, se C_2 é a constante no Teorema 1.12.14,

$$C_\alpha = \begin{cases} C_2\Gamma(\alpha),\ se\ 0 < \alpha < 1; \\ (C_2 m)^m,\ se\ \alpha = m = 1, 2, 3...; \\ C_m C_\beta 2^{m+\beta},\ se\ \alpha = m + \beta > 1,\ m \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \beta < 1, \end{cases}$$

e, se $0 < \alpha \leq 1$ e $x \in D(A^{\alpha})$,

$$\| (e^{-At} - I)x \| \leq \frac{1}{\alpha}C_{1-\alpha}t^{\alpha} \| A^{\alpha}x \| .$$

Além disso, C_α é limitada para α em qualquer intervalo compacto de $(0, +\infty)$ e C_α depende do setor e da constante M na desigualdade do resolvente para A (C_α é também limitada quando $\alpha \to 0^+$).

Demonstração: Ver [11], Teorema 1.4.3.

Teorema 1.13.5 *Se $0 \leq \alpha \leq 1$ e $x \in D(A)$, então $\| A^{\alpha}x \| \leq C \| Ax \|^{\alpha} \| x \|^{1-\alpha}$, o que implica que $\| A^{\alpha}x \| \leq \alpha\epsilon \| Ax \| + (1-\alpha)C^{\frac{1}{1-\alpha}}\epsilon^{\frac{-\alpha}{(1-\alpha)}} \| x \|$, $\forall \epsilon > 0$, onde $C > 0$ é uma constante independente de α dada por:*

$$C = \frac{4C_1}{\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}},$$

sendo C_1 a constante no Teorema 1.12.14.

Demonstração: Ver [11], Teorema 1.4.4.

Definição 1.13.6 *Se A é um operador setorial em um espaço de Banach X, definimos para cada $\alpha \geq 0$,*

$$X^{\alpha} = D(A_1^{\alpha}),\ \text{com a norma do gráfico},$$
$$\| x \|_\alpha = \| A_1^{\alpha}x \|,\ x \in X^{\alpha},$$

onde $A_1 = A + aI$, *com a escolhido tal que* $\Re(\sigma(A_1)) > 0$.

Teorema 1.13.7 *Se A é um operador setorial em um espaço de Banach X, então* X^α *é um espaço de Banach com a norma* $\|\cdot\|_\alpha$, *para* $\alpha \geq 0$, $X^0 = X$, *e para* $\alpha \geq \beta \geq 0$, X^α *é um subespaço denso de* X^β *com inclusão contínua. Se A tem resolvente compacto, a inclusão* $X^\alpha \subset X^\beta$ *é compacta quando* $\alpha > \beta \geq 0$.

Além disso, se A_1 *e* A_2 *são dois operadores setoriais com mesmo domínio,* $\Re(\sigma(A_j)) > 0$, $j = 1,2$ *e,* $(A_1 - A_2)A_1^{-\alpha}$ *é limitado para algum* $\alpha < 1$, *então se* $X_j^\beta = D(A_j^\beta)$, $(j = 1,2)$, $X_1^\beta = X_2^\beta$ *com normas equivalentes para* $0 \leq \beta \leq 1$ *e esta equivalência depende apenas dos setores e das constantes* M_1 *e* M_2 *na Definição 1.12.8 associados à* A_1 *e* A_2.

Demonstração: Ver [11], Teorema 1.4.8.

Definição 1.13.8 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Dizemos que* Ω *tem a propriedade da extensão* C^m *se existe uma extensão* $E : C_c^m(\overline{\Omega}) \to C_c^m(\mathbb{R}^n)$ *de modo que* $E(\phi)$ *restrita a* $\overline{\Omega}$ *é* ϕ *e para as normas de quaisquer dos espaços* C^ν *ou* $W^{k,q}$ $(0 \leq \nu, k \leq m,\ 1 \leq q < \infty)$, *existe uma constante* $B > 0$ *com,*

$$B^{-1} \| \phi \|_\Omega \leq \| E(\phi) \|_{R^n} \leq B \| \phi \|_\Omega,$$

onde $\|\cdot\|_\Omega$ *denota a norma em* $C^\nu(\Omega)$ *ou* $W^{k,q}(\Omega)$ *e* $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$, *a norma em* $C^\nu(\mathbb{R}^n)$ *ou* $W^{k,q}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.13.9 *Suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um aberto com a propriedade da extensão* C^m *e A é um operador setorial em* $X = L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, *com* $D(A) = X^1 \subset W^{m,p}(\Omega)$ *para algum* $m \geq 1$. *Então, para* $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$X^\alpha \subset W^{k,q}(\Omega), \text{ quando } k - \tfrac{n}{q} < m\alpha - \tfrac{n}{p},\ q \geq p,$$

$$X^\alpha \subset C^\nu(\Omega), \text{ quando } 0 \leq \nu < m\alpha - \tfrac{n}{p}.$$

Demonstração: Ver [11], Teorema 1.6.1.

1.14 Problema abstrato

Esta seção contém resultados sobre existência e unicidade de solução para um problema abstrato envolvendo operadores setoriais e sobre existência e continuidade de atratores globais para semigrupos. Utilizamos como referências Hale [10] e Henry [11].

1.14.1 Teorema de existência e unicidade local

Consideremos a equação não linear:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + Ax = f(t,x), \ t > t_0 \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.7}$$

onde A é um operador setorial tal que as suas potências fracionárias estão bem definidas e, os espaços $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ com a norma do gráfico $\| x \|_\alpha = \| A_1^\alpha x \|$ são definidos para $\alpha \geq 0$. Suponha que $f : U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha \to X$, U um conjunto aberto, $0 \leq \alpha < 1$ e f é localmente Holder contínua em t e localmente Lipschitz em x pertencentes a U. Mais precisamente, se $(t_1, x_1) \in U$, existe uma vizinhança $V \subset U$ de (t_1, x_1), tal que para (t,x), $(s,y) \in V$,

$$\| f(t,x) - f(s,y) \| \leq L(| t - s |^\theta + \| x - y \|_\alpha),$$

para constantes $L > 0$ e $\theta > 0$.

Definição 1.14.1 [4] *Uma solução do problema de Cauchy (1.7) (ou problema de valor inicial) em (t_0, t_1) é uma função contínua $x : [t_0, t_1) \to X$ tal que $x(t_0) = x_0$ e, em (t_0, t_1), temos $(t, x(t)) \in U$, $x(t) \in D(A)$, existe $\frac{dx}{dt}$, a aplicação $t \to f(t, x(t))$ é contínua em $[t_0, t_1)$ e, a equação diferencial é satisfeita em (t_0, t_1).*

Lema 1.14.2 *Se x é uma solução de (1.7) em (t_0, t_1), então*

$$x(t) = e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)} f(s, x(s))ds. \tag{1.8}$$

Reciprocamente, se x é uma função contínua de (t_0, t_1) em X^α com $\int_{t_0}^{t_0+\rho} \| f(s, x(s)) \| ds < \infty$ para algum $\rho > 0$ e se a equação integral (1.8) vale para $t_0 < t < t_1$ então, x é uma solução da equação diferencial (1.7) em (t_0, t_1).

Demonstração: Ver [11], Lema 3.3.2.

Teorema 1.14.3 *Sejam A um operador setorial e $f : U \to X$, U um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times X^\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, f é localmente Holder contínua em t e localmente Lipschitziana em x. Então, para qualquer $(t_0, x_0) \in U$, existe $T = T(t_0, x_0) > 0$ tal que a equação diferencial (1.7) tem uma única solução x em $(t_0, t_0 + T)$ com valor inicial $x(t_0) = x_0$.*

Demonstração: Ver [11], Teorema 3.3.3.

[4] Tal definição se encontra em Hale [10] e é devida à Miklavcic M. (1985). Stability for semilinear equations with non invertible linear operator. Pacific Journal of Mathematics, 118, 199 - 214.

Teorema 1.14.4 *Sejam A e f como no Teorema 1.14.3 e suponhamos que para todo conjunto fechado limitado $B \subset U$, a imagem $f(B)$ é limitada em X. Se x é uma solução de (1.7) em (t_0, t_1) e t_1 é maximal - não existe solução de (1.7) em (t_0, t_2) com $t_2 > t_1$ - então, ou $t_1 = +\infty$ ou existe uma sequência $t_n \to t_1-$ quando $n \to \infty$ tal que $(t_n, x(t_n)) \to \partial U$.*

Demonstração: Ver [11], Teorema 3.3.4.

Teorema 1.14.5 *Sejam A e f como no enunciado do Teorema 1.14.3 e suponhamos também que A tem resolvente compacto e f aplica todos os conjuntos da forma $\mathbb{R}^+ \times B \subset U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$, com B fechado e limitado, em conjuntos limitados de X. Se $x(t; t_0, x_0)$ é a solução da equação diferencial (1.7) em (t_0, ∞) com $\| x(t; t_0, x_0) \|_\alpha$ permanecendo limitada à medida que $t \to +\infty$, então $\{ x(t; t_0, x_0)\}_{t > t_0}$ está em um conjunto compacto em X^α.*

Demonstração: Ver [11], Teorema 3.3.6.

1.14.2 Sistemas gradientes

Definição 1.14.6 *Sejam X um espaço de Banach, $T(t)$ um C^r - semigrupo e E, o conjunto de pontos de equilíbrio de $T(t)$. Definimos para $x \in E$:*

(i) $W^u(x) = \{y \in X \,:\, T(-t)y \text{ está definido para } t \geq 0 \text{ e } T(-t)y \to x \text{ quando } t \to \infty\}$, o conjunto instável de x.

(ii) Se x é um ponto de equilíbrio hiperbólico, existe uma vizinhança U de x tal que $W^u_{loc} \doteq \{y \in W^u(x)\,,\, T(-t)y \in U, t \geq 0\}$ é uma subvariedade de X.

(iii) $W^s(x) = \{y \in X \,:\, T(t)y \to x \text{ quando } t \to \infty\}$ é o conjunto estável de x.

(iv) Se x é um ponto de equilíbrio hiperbólico, existe uma vizinhança U de x tal que $W^s_{loc} \doteq \{y \in W^s(x)\,,\, T(t)y \in U, t \geq 0\}$ é uma subvariedade de X.

Definição 1.14.7 *Um semigrupo fortemente contínuo $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, de classe C^r, com $r \geq 1$, é um sistema gradiente se,*

(i) Cada órbita positiva limitada é pré-compacta.

(ii) Existe uma função de Lyapunov para $T(t)$, isto é, existe uma função contínua $V : X \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

(1) $V(x)$ é limitada inferiormente;

(2) $V(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$;

(3) $V(T(t)x)$ é decrescente em t para cada $x \in X$;

(4) Se x é tal que $T(t)x$ está definida para $t \in \mathbb{R}$ e $V(T(t)x) = V(x)$ para $t \in \mathbb{R}$, então x é um ponto de equilíbrio.

Neste caso, dizemos que $T(t)$ é um C^r - sistema gradiente.

Teorema 1.14.8 *Se $T(t), t \geq 0$, é um sistema gradiente, assintoticamente compacto e o conjunto de equilíbrios E é limitado, então existe um atrator global $\mathcal{A}$ para $T(t)$ e*

$$\mathcal{A} = W^u(E) = \{y \in X \,:\, T(-t)y \text{ está definido para } t \geq 0 \text{ e } T(-t)y \to E \text{ quando } t \to \infty\}.$$

Se X é um espaço de Banach, então $\mathcal{A}$ é conexo. E se, além disso, cada elemento de E é hiperbólico, então E é um conjunto finito e,

$$\mathcal{A} = \cup_{x \in E} W^u(x).$$

Demonstração: Ver [10], Teorema 3.8.5.

Definição 1.14.9 *Uma família de subconjuntos $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de um espaço métrico (X, d) é dita semicontínua superiormente em λ_0 se $dist_H(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) = \sup_{x_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda} d(x_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \to 0$ quando $\lambda \to \lambda_0$. $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua inferiormente em λ_0 se $dist_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_\lambda) = \sup_{x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}} d(x, \mathcal{A}_\lambda) \to 0$ quando $\lambda \to \lambda_0$.*

Lema 1.14.10 *Seja $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de subconjuntos de X.*

i) Se para $\lambda_n \to \lambda_0$, quando $n \to \infty$, temos que toda sequência $\{x_{\lambda_n}\}$ com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$ tem uma subsequência convergente com limite pertencendo a $\mathcal{A}_{\lambda_0}$, então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0. Reciprocamente, se $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0 e $\lambda_n \to \lambda_0$ quando $n \to \infty$, qualquer sequência $\{x_{\lambda_n}\}$ com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$ tem uma subsequência convergente com limite pertencendo a $\mathcal{A}_{\lambda_0}$.

ii) Se $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ é compacto e para qualquer $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ e $\lambda_n \to \lambda_0$ quando $n \to \infty$, existe uma subsequência $\lambda_{n_k} \to \lambda_0$ quando $k \to \infty$, e uma sequência $\{x_{\lambda_{n_k}}\}$ com $x_{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$ que converge para x, então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua inferiormente em λ_0. Reciprocamente, se $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua inferiormente em

λ_0, $\lambda_n \to \lambda_0$ quando $n \to \infty$ e $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$, existe uma subsequência $\lambda_{n_k} \to \lambda_0$ quando $k \to \infty$ e, uma sequência $\{x_{\lambda_{n_k}}\}$ com $x_{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$ que converge para x.

Demonstração: Ver [5], Lema 1.2.2.

Teorema 1.14.11 *Sejam X um espaço de Banach e para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0^*$, $\{T_\epsilon(t)\}_{t\geq 0}$ uma família de semigrupos em X. Suponhamos que as seguintes hipóteses sobre $T_\epsilon(t)$, $\epsilon \in [0, \epsilon_0^*]$, sejam válidas:*

(H1) $T_0(t)$ é um C^1 - sistema gradiente, assintoticamente compacto e as órbitas de conjuntos limitados são limitadas.

(H2) O conjunto E_0 de pontos de equilíbrio de $T_0(t)$ é limitado em X.

(H3) Cada elemento de E_0 é hiperbólico.

(H4) Para cada $\epsilon \neq 0$, $T_\epsilon(t)$ é um C^1 - semigrupo e existe uma vizinhança U_0 de $\mathcal{A}_0$ independente de ϵ tal que $T_\epsilon(t)$ possui um atrator local $\mathcal{A}_\epsilon$ que atrai U_0.

(H5) Se E_ϵ é o conjunto de pontos de equilíbrio de $T_\epsilon(t)$, então existe uma vizinhança W_0 de E_0 tal que $W_0 \cap E_\epsilon = \{\phi_{1,\epsilon}, ..., \phi_{N,\epsilon}\}$ onde cada $\phi_{j,\epsilon}$, $j = 1, ..., N$, é hiperbólico e $\phi_{j,\epsilon} \to \phi_j$ quando $\epsilon \to 0$.

(H6) $d(W^u_{loc}(\phi_j), W^u_{loc}(\phi_{j,\epsilon})) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$.

(H7) Para quaisquer $\eta > 0$, $t_0 > 0, \tau_0 > 0$, existem δ^* e ϵ_0^* tais que

$$\| T_\epsilon(t)y_\epsilon - T_0(t)x \|_X \leq \eta \;\; para \;\; t_0 \leq t \leq \tau_0$$

desde que $x \in \mathcal{A}_0$, $y_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon$, $\| y_\epsilon - x \|_X \leq \delta^*$.

Então, a família de conjuntos $\{\mathcal{A}_\epsilon; 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0^*\}$ é semicontínua inferiormente em $\epsilon = 0$.

Demonstração: Ver [10], Teorema 4.10.8.

1.15 Variedades Riemannianas

Por fim, apresentamos alguns conceitos fundamentais sobre variedades, conforme Gorodski [8], com foco em resultados para variedades riemannianas encontrados em Aubin [3] e Chavel [6].

Seja M um espaço topológico.

Definição 1.15.1 *Uma carta local de M é um par (U, ϕ), onde U é um subconjunto aberto de M e ϕ é um homeormorfismo de U sobre um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Uma carta local $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ introduz coordenadas $(x_1, ..., x_n)$ em U, ou seja, as funções componentes de ϕ.*

Definição 1.15.2 *Um atlas topológico para M é uma família de cartas locais de M, $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$, onde a dimensão n do espaço Euclidiano é fixa, tal que $\cup_\alpha U_\alpha = M$. Se M admite um atlas, dizemos que M é uma variedade topológica.*

Definição 1.15.3 *Um atlas de classe C^k (respectivamente, suave - C^∞) é um atlas cujas cartas locais satisfazem a seguinte condição de compatibilidade:*

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é C^k (respectivamente, suave - C^∞) para todos α, β.

Definição 1.15.4 *Um atlas de classe C^k $\mathcal{A}$ define uma noção de função C^r $(r \leq k)$ em M, isto é, uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é C^r se $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ é C^r para toda carta local $(U, \phi) \in \mathcal{A}$.*

Definição 1.15.5 *Dois atlas de classe C^k $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ para M são equivalentes se as cartas locais de um são compatíveis com as do outro, ou seja, $\psi \circ \phi^{-1}$ é C^k para toda $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$.*

Definição 1.15.6 *Uma estrutura diferenciável C^k em M é uma classe de equivalência $[\mathcal{A}]$ de atlas de classe C^k em M.*

Definição 1.15.7 *Uma variedade diferenciável C^k é uma espaço topológico M, Hausdorff e que admite uma base enumerável, munido de uma estrutura diferenciável C^k $[\mathcal{A}]$.*

Definição 1.15.8 *Sejam M e N variedades diferenciáveis C^k. Uma aplicação $f : M \to N$ é dita diferenciável C^r $(r \leq k)$ se para cada $p \in M$, existem cartas locais (U, ϕ), (V, ψ) de M e N em torno de p e $f(p)$, respectivamente, tais que $f(U) \subset V$ e $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ é C^r.*

Definição 1.15.9 *Seja M uma variedade diferenciável C^k $(k \geq 1)$ de dimensão n e fixe $p \in M$. Suponha que $[\mathcal{A}]$ é um atlas que determina a estrutura diferenciável C^k de M. O espaço tangente de M em p é o conjunto*

T_pM de todos os pares (a, ϕ) - onde $a \in \mathbb{R}^n$ e $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ é uma carta local em torno de p - quocientado pela relação de equivalência

$$(a, \phi) \sim (b, \psi) \text{ se, e somente se, } d(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(a) = b.$$

Vamos denotar a classe de equivalência de (a, ϕ) por $[a, \phi]$. Cada classe de equivalência é denominada um vetor tangente em p.

Notemos que para uma carta local fixa em torno de p, a aplicação

$$a \in \mathbb{R}^n \to [a, \phi] \in T_pM$$

é uma bijeção de modo que podemos transferir a estrutura de espaço vetorial de R^n para T_pM com $dimT_pM = dimM$.

Sejam $(U, \phi = (x_1, ...x_n))$ uma carta local de M e $\{e_1, ..., e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Os vetores coordenados em p com respeito a essa carta são definidos como

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p = [e_i, \phi].$$

Segue que $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\right\}$ é uma base de T_pM.

Definição 1.15.10 *Seja M uma variedade diferenciável C^k $(k \geq 1)$ e $p \in M$ fixo. Para cada vetor tangente $v \in T_pM$ da forma $[a, \phi]$, onde $a \in \mathbb{R}^n$ e (U, ϕ) é uma carta local de M e para cada $f \in C^\infty(U)$, definimos a derivada direcional de f na direção de v como o número real*

$$v(f) = d(f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(a).$$

Definição 1.15.11 *Seja $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^r entre variedades diferenciáveis C^k $(k \geq 1)$. Fixe $p \in M$ e cartas locais (U, ϕ) de M em torno de p e (V, ψ) de N em torno de $q = f(p)$. A diferencial ou mapa tangente de f em p é a aplicação linear $df_p : T_pM \to T_qN$ dada por*

$$[a, \phi] \to [d(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(a), \psi].$$

Definição 1.15.12 *Seja M uma variedade diferenciável C^k. Um campo vetorial é uma aplicação $X : M \to TM = \cup_{p \in M} T_pM$ com $\pi \circ X = id$ onde π é a projeção natural de TM em M: $\pi(v) = p$ se $v \in T_pM$.*

Consideremos a união disjunta $TM = \cup_{p \in M} T_pM$. Podemos tomar os elementos de TM como classes de equivalência de triplas (p, a, ϕ) onde $p \in M$, $a \in \mathbb{R}^n$ e (U, ϕ) é uma carta local de M tal que $p \in U$ e,

$$(p, a, \phi) \sim (q, b, \psi) \text{ se, e somente se, } p = q \text{ e } d(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(a) = b.$$

Existe uma projeção natural $\pi : TM \to M$ dada por $\pi[p, a, \phi] = p$ e, $\pi^{-1}(p) = T_pM$. A seguir, estabeleceremos uma topologia e uma estrutura diferenciável C^k $(k \geq 1)$ em TM, obtendo uma variedade denominada fibrado tangente.

Seja $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ um atlas de classe C^k $(k \geq 1)$ para M. Para cada α, $\phi_\alpha : U_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha)$ é um difeomorfismo e, para cada $p \in U_\alpha$, $d(\phi_\alpha)_p : T_pU_\alpha = T_pM \to \mathbb{R}^n$ é o isomorfismo que leva $[p, a, \phi] \mapsto a$. Defina

$$\tilde{\phi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \phi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n, [p, a, \phi] \mapsto (\phi_\alpha(p), a).$$

Segue que $\tilde{\phi}_\alpha$ é uma bijeção e $\tilde{\phi}_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha))$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{2n}$. Assim, cada sistema de cartas locais $(x_1, ..., x_n)$ em um aberto de M induz um sistema de coordenadas locais $(x_1 \circ \pi, ..., x_n \circ \pi, dx_1, ..., dx_n)$ em $TM|_U$. Neste ponto, podemos falar em campo vetorial suave.

Definição 1.15.13 *Uma métrica Riemanniana em uma variedade suave M associa a cada $p \in M$ um produto interno g_p em T_pM. Tal métrica é C^∞ no seguinte sentido se X e Y são campos de vetores suaves em M, então $g_p(X, Y)$ é uma função real C^∞ em M.*

Definição 1.15.14 *Uma variedade Riemanniana é um par (M, g) onde M é uma variedade diferenciável C^k e g, uma métrica Riemanniana.*

Sem perda de generalidade, no que segue, vamos admitir que M é uma variedade suave.

Definição 1.15.15 *Dada uma função real C^k, f, em (M, g), definimos o gradiente de f, grad f, como sendo o campo vetorial em M para o qual*

$$g(grad f, v) = v(f).$$

para todo $v \in TM$.

Enquanto a diferenciabilidade de funções em variedades é naturalmente determinada pela estrutura diferenciável inerente, a diferenciabilidade de campos vetoriais não é naturalmente determinada mas envolve a escolha de uma conexão, isto é, uma regra que associa a cada $p \in M$, $v \in T_pM$ e campo vetorial C^1 X definido numa vizinhança de p, um vetor $\nabla_v X$ em T_pM satisfazendo

$$\nabla_v(X + Y) = \nabla_v(X) + \nabla_v(Y), \;\; \nabla_v(fX) = v(f)X(p) + f(p)\nabla_v X$$

onde X, Y são campos vetoriais C^1, f é uma função real C^1, todos definidos em uma vizinhança de p. O vetor $\nabla_v X$ é conhecido como a derivada covariante de X com respeito a v.

A métrica Riemanniana determina uma única conexão, chamada conexão de Levi - Civita, quando exige-se que

$$\nabla_v Y - \nabla_v X = [X, Y],$$

com $[,]$ o colchete de Lie, para todos X, Y campos vetoriais C^1 em M.

Definição 1.15.16 *Dado um campo vetorial C^k $X, k \geq 1$, em (M, g), definimos a função real divergência de X, $divX$, como*

$$(divX)(p) = traço(v \to \nabla_v X)$$

onde v varia por T_pM.

Definição 1.15.17 *Para quaisquer campo vetorial $C^k, k \geq 2$, e função f em (M, g), definimos o Laplaciano de f, Δf, como*

$$\Delta f = div(grad f).$$

Agora, para uma dada métrica Riemanniana g, defina:

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \ G = (g_{ij}), \ G^{-1} = (g^{ij}).$$

Então, em coordenadas locais,

$$grad f = \sum_{i,j}\left(g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

e,

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{detG}}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij}\sqrt{detG}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right). \tag{1.9}$$

Capítulo 2

Perturbação do Laplaciano por variação de domínios

Neste capítulo, consideramos o operador linear $(-\Delta + aI) : H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ definido em uma região fixa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com fronteira Lipschitz e $a \in \mathbb{R}$ uma constante positiva. Perturbamos a região fixa Ω por uma família de funções que convergem à identidade de Ω na norma $C^{0,\alpha}$, $0 \leq \alpha < 1$, mas não na norma C^1 e, através da técnica desenvolvida por Henry em [12], passamos a perturbação ao operador e mantemos o domínio fixo. O problema e a metodologia são introduzidos na primeira seção. Na segunda seção, obtemos um resultado de não convergência dos operadores perturbados para o operador original em $H^{-1}(\Omega)$; tal convergência pode ser utilizada para assegurar a convergência do espectro e da porção linear. A terceira seção, então, introduz uma nova abordagem para o problema, por meio da qual garantimos a convergência dos "novos" operadores assim obtidos num sentido conveniente e, demonstramos também que tais operadores são setoriais em espaços adequados. O objetivo do capítulo é de fato atingido na quarta seção, onde a partir de uma convergência específica dos operadores, conseguimos demonstrar a convergência no sentido da norma dos resolventes. Por fim, na quinta e última seção, provamos que o "novo" operador é na verdade o operador de Laplace - Beltrami na variedade riemanniana Ω com uma métrica determinada.

2.1 Introdução: o problema e a redução a um domínio fixo

Sejam $\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$ o quadrado unitário, um domínio com fronteira Lipschitz, a uma constante positiva, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções reais e consideremos a seguinte família de problemas parabólicos semilineares com condições de fronteira de Neumann não - lineares:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), \ \ x \in \Omega_\epsilon, t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial N}(x,t) = g(u(x,t)), \ \ x \in \partial\Omega_\epsilon, t > 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

sendo $\Omega_\epsilon = h_\epsilon(\Omega)$ e $h_\epsilon : \Omega \to \mathbb{R}^2$ uma família de difeomorfismos dados por

$$h_\epsilon(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + \varphi(x_2, \epsilon)\sin(x_1/\epsilon)), \ \ 0 < \epsilon \leq \epsilon_0, \ \ \epsilon_0 > 0, \tag{2.2}$$

com $\varphi(x_2, \epsilon)$ regular o suficiente e tal que

(i) $\varphi(0, \epsilon) = 0$,

(ii) $\varphi(1, \epsilon) = \epsilon$,

(iii) $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \to 0$ uniformemente em $x_2 \in [0,1]$ quando $\epsilon \to 0$ e,

(iv) $\left\|\varphi(x_2,\epsilon)^2 \frac{1}{\epsilon^2}\right\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$.

A Figura 2.1 ilustra a imagem de Ω pela perturbação h_ϵ.

Por exemplo, a função $\varphi(x_2, \epsilon) = x_2\epsilon^{2-x_2}$ atende a essas hipóteses.

Com efeito,

(i) $\varphi(0, \epsilon) = 0 \cdot \epsilon^{2-0} = 0$.

(ii) $\varphi(1, \epsilon) = 1 \cdot \epsilon^{2-1} = \epsilon$.

(iii) $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2, \epsilon) = \epsilon^{2-x_2} - x_2\epsilon^{2-x_2}\ln(\epsilon)$, que converge a zero uniformemente quando ϵ tende a zero, lembrando que $0 \leq x_2 \leq 1$.

(iv) $\left\|\varphi(x_2,\epsilon)^2 \frac{1}{\epsilon^2}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_0^1 x_2^4\epsilon^{4-4x_2}dx_2 = \frac{3\epsilon^4-3}{128\ln(\epsilon)^5} - \frac{1}{4\ln(\epsilon)} - \frac{1}{4\ln(\epsilon)^2} - \frac{3}{16\ln(\epsilon)^3} - \frac{3}{32\ln(\epsilon)^4}$, termo que converge a zero quando ϵ tende a zero.

É importante notarmos que as perturbações h_ϵ em (2.2), diferentemente do que ocorre no trabalho [4], não convergem para a identidade de Ω, id_Ω, na norma $C^1(\Omega)$. Para tanto, basta verificarmos que $\frac{\partial(x_2+\varphi(x_2,\epsilon)\sin(x_1/\epsilon))}{\partial x_1} = \varphi(x_2,\epsilon)\cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}$, e tal derivada não tende a zero. É possível mostrar que h_ϵ convergem para id_Ω na norma $C^0(\Omega)$, quando ϵ converge a zero, usando o Teorema do Valor Médio e as condições (i) e (iii) sobre $\varphi(x_2, \epsilon)$. Se $0 < \tilde{x}_2 < x_2$,

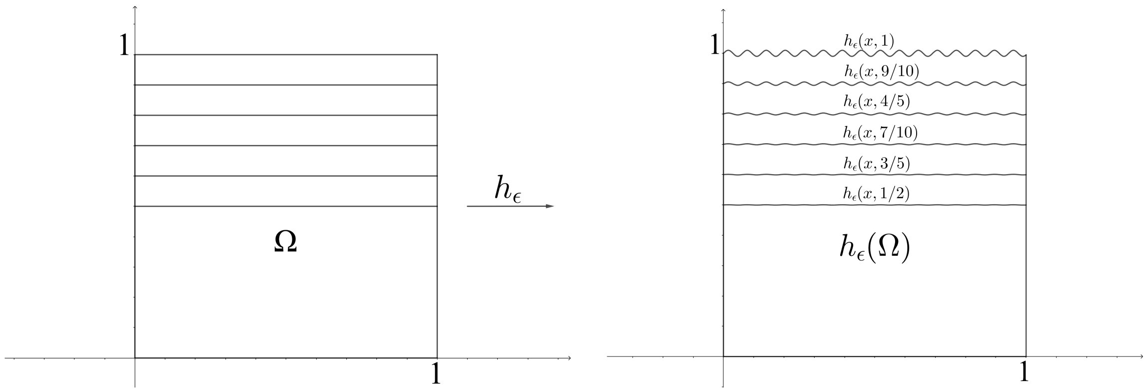

Figura 2.1: Imagem do quadrado unitário pela perturbação h_ϵ.

$$\begin{aligned}
\| h_\epsilon(x_1,x_2) - id_\Omega(x_1,x_2) \|_{C^0(\Omega)} &= \| (0, \varphi(x_2,\epsilon)\sin(x_1/\epsilon)) \|_{C^0(\Omega)} \\
&= \max_{(x_1,x_2)\in\Omega} |\varphi(x_2,\epsilon)\sin(x_1/\epsilon)| \\
&\leq \max_{(x_1,x_2)\in\Omega} |\varphi(x_2,\epsilon)| \\
&\leq \max_{(x_1,x_2)\in\Omega} |\varphi(x_2,\epsilon) - \varphi(0,\epsilon)| \\
&\leq \max_{(x_1,x_2)\in\Omega} \left| \frac{\partial\varphi(\tilde{x}_2,\epsilon)}{\partial x_2} \right| |x_2| \\
&\leq \max_{(x_1,x_2)\in\Omega} \left| \frac{\partial\varphi(\tilde{x}_2,\epsilon)}{\partial x_2} \right| \\
&\to 0, \ \text{quando} \ \epsilon \to 0.
\end{aligned}$$

De fato, h_ϵ convergem para id_Ω na norma $C^{0,\alpha}(\Omega)$ para $0 \leq \alpha < 1$. Isso porque, se $0 < \alpha < 1$,

$$\begin{aligned}
\| h_\epsilon - id_\Omega \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} &= \| h_\epsilon - id_\Omega \|_{C^0(\Omega)} + \sup_{(x_1,x_2)\neq(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\in\Omega} \frac{|(h_\epsilon - id_\Omega)(x_1,x_2) - (h_\epsilon - id_\Omega)(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)|}{|(x_1,x_2) - (\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)|^\alpha} \\
&= \| h_\epsilon - id_\Omega \|_{C^0(\Omega)} + \sup_{(x_1,x_2)\neq(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\in\Omega} \frac{|(0,\varphi(x_2,\epsilon)\sin(x_1/\epsilon)) - (0,\varphi(\tilde{x}_2,\epsilon)\sin(\tilde{x}_1/\epsilon))|}{|(x_1,x_2) - (\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)|^\alpha} \\
&= \| h_\epsilon - id_\Omega \|_{C^0(\Omega)} + \sup_{(x_1,x_2)\neq(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\in\Omega} \frac{|\varphi(x_2,\epsilon)\sin(x_1/\epsilon) - \varphi(\tilde{x}_2,\epsilon)\sin(\tilde{x}_1/\epsilon)|}{|(x_1,x_2) - (\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)|^\alpha} \\
&\leq \| h_\epsilon - id_\Omega \|_{C^0(\Omega)} + \sup_{(x_1,x_2)\neq(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\in\Omega} \frac{|\epsilon(\sin(x_1/\epsilon) - \sin(\tilde{x}_1/\epsilon))|}{|(x_1,x_2) - (\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)|^\alpha} \\
&\leq \| h_\epsilon - id_\Omega \|_{C^0(\Omega)} + \sup_{(x_1,x_2)\neq(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\in\Omega} \frac{2\epsilon}{|(x_1,x_2) - (\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)|^\alpha}.
\end{aligned}$$

Observamos que $v(\cdot,t)$ satisfaz (2.1) em Ω_ϵ se, e somente se, $u(\cdot,t) = h_\epsilon^*(v(\cdot,t))$ (isto é, $u(x,t) =$

$v(h_\epsilon(x),t))$ verifica:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), \;\; x \in \Omega, t > 0, \\ h_\epsilon^* \dfrac{\partial}{\partial N_{\Omega_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) = g(u(x,t)), \;\; x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) = \Delta_{\Omega_\epsilon}(u \circ h_\epsilon^{-1})(h_\epsilon(x))$ e $h_\epsilon^* \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u(x) = \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_{h_\epsilon}}}(u \circ h_\epsilon^{-1})(h_\epsilon(x))$.

No que segue, verificaremos que (2.3) não converge para o problema no domínio fixo quando ϵ tende a 0. E mais, o limite depende da particular família de difeomorfismos h_ϵ considerada. Isso ocorre, pois quando trazemos o problema para o domínio fixo, introduzimos a distorção gerada pela família. Posteriormente, demonstraremos que, a partir de uma modificação apropriada, a nova família de problemas assim obtida de fato converge para o problema no domínio original com um determinado fator multiplicando a não - linearidade g. Tal mudança é feita de modo que o pull - back do operador Laplaciano gere o Laplaciano Riemanniano, como demonstraremos no fim deste capítulo.

Se $h_\epsilon(x) = h_\epsilon(x_1,x_2) = ((h_\epsilon)_1(x),(h_\epsilon)_2(x)) = (y_1,y_2) = y$, de acordo com a expressão (1.2) na Seção 8 do primeiro capítulo, obtemos para $i = 1,2$:

$$\left(h_\epsilon^* \frac{\partial}{\partial y_i} h_\epsilon^{*-1} u\right)(x) = \sum_{j=1}^{2} b_{ij}^\epsilon(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x),$$

com b_{ij}^ϵ a i,j entrada da inversa transposta da matriz jacobiana de h_ϵ:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-\varphi(x_2,\epsilon) cos(x_1/\epsilon)\dfrac{1}{\epsilon}}{1 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon) sin(x_1/\epsilon)} \\ 0 & \dfrac{1}{1 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon) sin(x_1/\epsilon)} \end{pmatrix},$$

isto é,

$$b_{11}^\epsilon = 1, \quad b_{12}^\epsilon = \frac{-\varphi(x_2,\epsilon) cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}}{1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon) sin(x_1/\epsilon)}, \quad b_{21}^\epsilon = 0, \quad b_{22}^\epsilon = \frac{1}{1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon) sin(x_1/\epsilon)}. \tag{2.4}$$

Consideremos o operador em $H^{-1}(\Omega)$[1],

$$A_\epsilon := (-h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} + aI)$$

com domínio $D(A_\epsilon) = H^1(\Omega)$. Denotaremos por A o operador não perturbado $(-\Delta_\Omega + aI)$.

[1] É importante salientar que estamos denotando o dual topológico de $H^1(\Omega)$ como $H^{-1}(\Omega)$, apesar da Definição 1.2.5.

2.2 A não convergência dos operadores perturbados para A

O objetivo desta seção é mostrar que, em geral, os operadores A_ϵ não convergem fortemente ao operador A quando considerados em $H^{-1}(\Omega)$. Mais exatamente, existem $u, \psi \in H^1(\Omega)$ tais que $< A_\epsilon u, \psi >_{-1,1} \nrightarrow < Au, \psi >_{-1,1}$ quando $\epsilon \to 0$. De fato, observamos que o operador limite dos A_ϵ depende da particular transformação h_ϵ e não apenas de suas imagens $\Omega_\epsilon = h_\epsilon(\Omega)$; diferentes famílias de difeomorfismos $\{h_\epsilon\}_{\epsilon \geq 0}$, com as mesmas imagens, geram limites distintos.

Apenas como ilustração e por simplicidade dos cálculos, primeiramente vamos considerar o operador h_ϵ em (2.2) com $\varphi(x_2, \epsilon) = x_2\epsilon$, função que satisfaz tão somente as hipóteses (i) à (iii) acima listadas. A inversa transposta da matriz jacobiana de h_ϵ nesse caso é:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-x_2cos(x_1/\epsilon)}{1+\epsilon sin(x_1/\epsilon)} \\ 0 & \dfrac{1}{1+\epsilon sin(x_1/\epsilon)} \end{pmatrix}$$

e podemos escrever o operador perturbado como $A_\epsilon = C_\epsilon + aI + L_\epsilon$, onde

$$C_\epsilon = -div\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2},\ (b_{12}^2 + b_{22}^2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + b_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)$$

e L_ϵ é o operador diferencial de primeira ordem:

$$L_\epsilon = \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_{12}\frac{\partial b_{12}}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2},$$

com b_{ij} definidos conforme as expressões em (2.4).

A parte divergente na forma fraca é dada pelas integrais:

$$\begin{aligned}
\langle C_\epsilon u,\ \psi\rangle_{-1,1} &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x)dx && (2.5)\\
&+ \int_\Omega \frac{-x_2cos(x_1/\epsilon)}{1+\epsilon sin(x_1/\epsilon)}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x)dx && (2.6)\\
&+ \int_\Omega \frac{-x_2cos(x_1/\epsilon)}{1+\epsilon sin(x_1/\epsilon)}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)dx && (2.7)\\
&+ \int_\Omega \frac{x_2^2cos^2(x_1/\epsilon)}{(1+\epsilon sin(x_1/\epsilon))^2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)dx && (2.8)\\
&+ \int_\Omega \frac{1}{(1+\epsilon sin(x_1/\epsilon))^2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)dx. && (2.9)
\end{aligned}$$

Enquanto a outra parte (de primeira ordem) do operador é dada por:

$$\begin{aligned}
\langle L_\epsilon u,\ \psi\rangle_{-1,1} &= \int_\Omega -\frac{cos(x_1/\epsilon)}{1+\epsilon sin(x_1/\epsilon)}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\psi(x)dx && (2.10)\\
&+ \int_\Omega \frac{x_2cos^2(x_1/\epsilon)}{(1+\epsilon sin(x_1/\epsilon))^2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x)dx. && (2.11)
\end{aligned}$$

Sejam $C_\epsilon^{'}$ o operador dado pela soma dos termos (2.5) e (2.9) e Δ_Ω, o laplaciano em $H^{-1}(\Omega)$ com domínio $H^1(\Omega)$ e condição de fronteira de Neumann homogênea. Temos que:

$$\begin{aligned}\langle (C_\epsilon^{'} - (-\Delta_\Omega))u, \psi\rangle_{-1,1} &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x)dx + \int_\Omega \frac{1}{(1+\epsilon sin(x_1/\epsilon))^2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)dx \\ &- \int_\Omega -\Delta_\Omega u(x)\psi(x)dx \\ &= \int_\Omega \left(\frac{1}{(1+\epsilon sin(x_1/\epsilon))^2} - 1\right)\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)dx\end{aligned}$$

e,

$$\int_\Omega \left|\left(\frac{1}{(1+\epsilon sin(x_1/\epsilon))^2} - 1\right)\right|\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)\right| dx \leq C(\epsilon)\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right\|_{L^2(\Omega)},$$

onde $C(\epsilon)$ é uma constante que converge a zero quando ϵ tende a zero afinal, $1 + \epsilon sin(x_1/\epsilon) \to 1$ uniformemente quando $\epsilon \to 0$. Portanto, o operador $C_\epsilon^{'}$ converge para $-\Delta_\Omega$ em $\mathcal{L}(H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$.

Quanto a (2.6) e (2.7), ambas as integrais tendem a zero, pois $cos(x_1/\epsilon)$ converge a zero fraco* em $L^\infty(\mathbb{R})$ pelo Teorema de Convergência na Média (Ver o Teorema 1.5.7). Com efeito, é suficiente estudarmos uma delas, no caso, (2.7),

$$\int_\Omega \frac{-x_2 cos(x_1/\epsilon)}{1+\epsilon sin(x_1/\epsilon)}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)dx = \int_0^1 cos(x_1/\epsilon)\left(\int_0^1 \frac{-x_2}{1+\epsilon sin(x_1/\epsilon)}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)dx_2\right)dx_1.$$

Para aplicar o Teorema de Convergência na Média, devemos verificar que a função

$$\varphi_\epsilon(x_1) = \int_0^1 \frac{-x_2}{1+\epsilon sin(x_1/\epsilon)}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)dx_2$$

está em $L^1(0,1)$.

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\int_0^1 \frac{-x_2}{1+\epsilon sin(x_1/\epsilon)}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)dx_2dx_1\right| &\leq \int_0^1\int_0^1 \left|\frac{-x_2}{1+\epsilon sin(x_1/\epsilon)}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)\right| dx_2dx_1 \\ &\leq \int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)\right| dx_2dx_1 \\ &\leq \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

usando que $0 \leq x_2 \leq 1$ e a convergência uniforme em ϵ de $1 + \epsilon sin(x_1/\epsilon)$ para 1, o que nos mostra que $\varphi_\epsilon(x_1)$ é integrável em $(0,1)$. Notemos que $\varphi_\epsilon(x_1)$ converge para

$$\int_0^1 -x_2\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)dx_2,$$

de modo que a dependência em ϵ de $\varphi_\epsilon(x_1)$ não interfere na convergência de (2.7) para zero.

Agora, (2.8) é igual a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{x_2^2 cos^2(x_1/\epsilon)}{(1+\epsilon sin(x_1/\epsilon))^2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{x_2^2}{(1+\epsilon sin(x_1/\epsilon))^2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)dx \qquad (2.12)\\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{x_2^2 cos(2x_1/\epsilon)}{(1+\epsilon sin(x_1/\epsilon))^2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)dx. \qquad (2.13)\end{aligned}$$

Observamos que

$$(2.12) \to \frac{1}{2}\int_\Omega x_2^2 \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)dx,$$

usando novamente que $1+\epsilon sin(x_1/\epsilon) \to 1$ uniformemente quando $\epsilon \to 0$. E, (2.13) converge a zero por um raciocínio análogo ao empregado para as integrais (2.6) e (2.7).

Com relação às integrais na expressão de L_ϵ, vemos que (2.10) tende a zero pelo argumento de convergência na média já utilizado, mas com (2.11) não ocorre o mesmo:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{x_2 cos^2(x_1/\epsilon)}{(1+\epsilon sin(x_1/\epsilon))^2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x)dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{x_2}{(1+\epsilon sin(x_1/\epsilon))^2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x)dx \qquad (2.14)\\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{x_2 cos(2x_1/\epsilon)}{(1+\epsilon sin(x_1/\epsilon))^2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x)dx. \qquad (2.15)\end{aligned}$$

A integral em (2.15) converge a zero, pois $cos(2x_1/\epsilon)$ converge fraco* a zero em $L^\infty(\mathbb{R})$ e, assim, o argumento é semelhante ao utilizado para as integrais (2.6) e (2.7). Porém,

$$(2.14) \to \frac{1}{2}\int_\Omega x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x)dx$$

afinal, o denominador em (2.14) converge uniformemente à 1.

Reunindo essas considerações, encontramos que na forma fraca,

$$\langle A_\epsilon u, \psi\rangle_{-1,1} \to \langle(-\Delta_\Omega + aI)u, \psi\rangle_{-1,1} + \frac{1}{2}\int_\Omega x_2^2 \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x)dx. \qquad (2.16)$$

Importante notar que a soma das integrais em (2.16) de fato não é nula em geral: tomemos, por exemplo, $\psi(x_1,x_2) = C$ uma função constante e $u(x_1,x_2) = \cos(\pi x_2)$, ambas ψ e u estão em $H^1(\Omega)$. Então, a primeira integral é zero e a segunda,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x)dx &= \frac{-C\pi}{2}\int_\Omega x_2 \sin(\pi x_2)dx_2dx_1\\ &= \frac{-C\pi}{2}\int_0^1 x_2\sin(\pi x_2)dx_2\\ &= \frac{-C\pi}{2}\frac{1}{\pi}\\ &= \frac{-C}{2}.\end{aligned}$$

Neste ponto, vamos considerar uma outra perturbação do domínio dada por $h_\epsilon(x_1,x_2) = (x_1, x_2 + x_2\epsilon^{2-x_2}sin(x_1/\epsilon))$. Como já observamos, a função $\varphi(x_2,\epsilon) = x_2\epsilon^{2-x_2}$ satisfaz as hipóteses (i) à (iv) mencionadas no início do capítulo.

Nesse caso, a inversa transposta da matriz jacobiana de h_ϵ é a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-x_2\epsilon^{1-x_2}cos(x_1/\epsilon)}{1+\epsilon^{2-x_2}sin(x_1/\epsilon) - x_2\epsilon^{2-x_2}ln(\epsilon)sin(x_1/\epsilon)}\\ 0 & \dfrac{1}{1+\epsilon^{2-x_2}sin(x_1/\epsilon) - x_2\epsilon^{2-x_2}ln(\epsilon)sin(x_1/\epsilon)}\end{pmatrix}$$

e, $Jh_\epsilon = 1 + \epsilon^{2-x_2} sin(x_1/\epsilon) - x_2\epsilon^{2-x_2} ln(\epsilon) sin(x_1/\epsilon)$, o determinante da matriz jacobiana de h_ϵ.

$$\begin{aligned}
\langle A_\epsilon u, \psi\rangle_{-1,1} &= \int_\Omega (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u)(x) \cdot (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} \psi)(x) dx + a \int_\Omega u(x)\psi(x) dx \\
&+ \int_\Omega (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u)(x) \cdot (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} Jh_\epsilon)(x) \frac{1}{Jh_\epsilon(x)} \psi(x) dx.
\end{aligned}$$

Vejamos a primeira e a terceira parcelas:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u)(x) \cdot (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} \psi)(x) dx &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x) dx \\
&+ \int_\Omega \frac{-x_2\epsilon^{1-x_2} cos(x_1/\epsilon)}{Jh_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x) dx \\
&+ \int_\Omega \frac{-x_2\epsilon^{1-x_2} cos(x_1/\epsilon)}{Jh_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x) dx \\
&+ \int_\Omega \frac{(x_2\epsilon^{1-x_2} cos(x_1/\epsilon))^2}{(Jh_\epsilon)^2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x) dx \\
&+ \int_\Omega \frac{1}{(Jh_\epsilon)^2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x) dx
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u)(x) \cdot (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} Jh_\epsilon)(x) \frac{\psi(x)}{Jh_\epsilon(x)} dx &= \int_\Omega \frac{-2\epsilon^{2-x_2} ln(\epsilon) sin(x_1/\epsilon)}{(Jh_\epsilon)^3} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x) dx \\
&+ \int_\Omega \frac{x_2\epsilon^{2-x_2} ln^2(\epsilon) sin(x_1/\epsilon)}{(Jh_\epsilon)^3} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x) dx \\
&+ \int_\Omega \frac{\epsilon^{1-x_2} cos(x_1/\epsilon)}{Jh_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\psi(x) dx \\
&+ \int_\Omega \frac{-x_2\epsilon^{1-x_2} ln(\epsilon) cos(x_1/\epsilon)}{Jh_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\psi(x) dx \\
&+ \int_\Omega \frac{2x_2\epsilon^{3-2x_2} ln(\epsilon) cos(x_1/\epsilon) sin(x_1/\epsilon)}{(Jh_\epsilon)^2} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\psi(x) dx \\
&+ \int_\Omega \frac{-x_2^2\epsilon^{3-2x_2} ln^2(\epsilon) cos(x_1/\epsilon) sin(x_1/\epsilon)}{(Jh_\epsilon)^2} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\psi(x) dx \\
&+ \int_\Omega \frac{-x_2\epsilon^{2-2x_2} cos^2(x_1/\epsilon)}{(Jh_\epsilon)^2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x) dx \\
&+ \int_\Omega \frac{x_2^2\epsilon^{2-2x_2} ln(\epsilon) cos^2(x_1/\epsilon)}{(Jh_\epsilon)^2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x) dx \\
&+ \int_\Omega \frac{-2x_2^2\epsilon^{4-3x_2} ln(\epsilon) cos^2(x_1/\epsilon) sin(x_1/\epsilon)}{(Jh_\epsilon)^3} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x) dx \\
&+ \int_\Omega \frac{x_2^3\epsilon^{4-3x_2} ln^2(\epsilon) cos^2(x_1/\epsilon) sin(x_1/\epsilon)}{(Jh_\epsilon)^3} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x) dx.
\end{aligned}$$

Notemos que, como $Jh_\epsilon = 1 + \epsilon^{2-x_2} sin(x_1/\epsilon) - x_2\epsilon^{2-x_2} \ln(\epsilon) sin(x_1/\epsilon) \to 1$ uniformemente, podemos omitir este termo na análise destas integrais. Por simplicidade então, vamos trabalhar com os numeradores apenas.

Observando as integrais que compõe a primeira parcela, o que desejamos é verificar que, exceto pela primeira e a última, as demais vão a zero quando ϵ converge a zero. Tomemos $\psi \in H^1(\Omega)$, com $\max_{x\in\overline{\Omega}} |\psi(x)| \leq K$ e $\max_{x\in\overline{\Omega}} \left|\dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}\right| \leq K'$ para $i = 1, 2$,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left| x_2\epsilon^{1-x_2} cos(x_1/\epsilon)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)\right| dx &\leq K' \int_\Omega \left|\epsilon^{1-x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right| dx \\
&\leq K' \left(\int_\Omega \epsilon^{2(1-x_2)} dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq K' \left(\frac{1-\epsilon^2}{-2\ln(\epsilon)}\right)^{1/2} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\to 0 \text{ quando } \epsilon \to 0.
\end{aligned}
$$

E, de forma análoga,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left| (x_2\epsilon^{1-x_2} cos(x_1/\epsilon))^2\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)\right| dx &\leq K' \int_\Omega \left|\epsilon^{2(1-x_2)}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right| dx \\
&\leq K' \left(\int_\Omega \epsilon^{4(1-x_2)} dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq K' \left(\frac{1-\epsilon^4}{-4\ln(\epsilon)}\right)^{1/2} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\to 0 \text{ quando } \epsilon \to 0.
\end{aligned}
$$

Tais considerações nos mostram que a primeira e a segunda parcelas convergem às seguintes integrais:

$$
\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx + a\int_\Omega u(x)\psi(x)dx.
$$

Agora, quanto as integrais que formam a terceira parcela,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left| 2\epsilon^{2-x_2}\ln(\epsilon) sin(x_1/\epsilon)\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x)\right| dx &\leq 2K \int_\Omega \left|\epsilon^{2-x_2} ln(\epsilon)\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right| dx \\
&\leq 2K \left(\int_\Omega \epsilon^{2(2-x_2)}\ln^2(\epsilon) dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq 2K \left(\frac{\epsilon^2\ln(\epsilon)-\epsilon^4\ln(\epsilon)}{-2}\right)^{1/2} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\to 0 \text{ quando } \epsilon \to 0.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left| x_2\epsilon^{2-x_2} ln^2(\epsilon) sin(x_1/\epsilon)\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x)\right| dx &\leq K\int_\Omega \left|\epsilon^{2-x_2} ln^2(\epsilon)\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right| dx \\
&\leq K\left(\int_\Omega \epsilon^{2(2-x_2)} ln^4(\epsilon) dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq K\left(\frac{\epsilon^2\ln^3(\epsilon)-\epsilon^4\ln^3(\epsilon)}{-2}\right)^{1/2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\to 0 \text{ quando } \epsilon\to 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left| \epsilon^{1-x_2} cos(x_1/\epsilon)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\psi(x)\right| dx &\leq K\int_\Omega \left|\epsilon^{1-x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right| dx \\
&\leq K\left(\int_\Omega \epsilon^{2(1-x_2)} dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq K\left(\frac{1-\epsilon^2}{-2\ln(\epsilon)}\right)^{1/2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\to 0 \text{ quando } \epsilon\to 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left| 2x_2\epsilon^{3-2x_2}\ln(\epsilon) cos(x_1/\epsilon) sin(x_1/\epsilon)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\psi(x)\right| dx &\leq 2K\int_\Omega \left|\epsilon^{3-2x_2}\ln(\epsilon)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right| dx \\
&\leq 2K\left(\int_\Omega \epsilon^{2(3-2x_2)}\ln^2(\epsilon) dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq 2K\left(\frac{\epsilon^2\ln(\epsilon)-\epsilon^6\ln(\epsilon)}{-4}\right)^{1/2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\to 0 \text{ quando } \epsilon\to 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left| x_2^2\epsilon^{3-2x_2}\ln^2(\epsilon) cos(x_1/\epsilon) sin(x_1/\epsilon)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\psi(x)\right| dx &\leq K\int_\Omega \left|\epsilon^{3-2x_2} ln^2(\epsilon)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right| dx \\
&\leq K\left(\int_\Omega \epsilon^{2(3-2x_2)}\ln^4(\epsilon) dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq K\left(\frac{\epsilon^2\ln^3(\epsilon)-\epsilon^6\ln^3(\epsilon)}{-4}\right)^{1/2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\to 0 \text{ quando } \epsilon\to 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left| x_2\epsilon^{2-2x_2}cos^2(x_1/\epsilon)\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x)\right| dx &\leq K\int_\Omega \left|\epsilon^{2-2x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right| dx \\
&\leq K\left(\int_\Omega \epsilon^{2(2-2x_2)}dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq K\left(\frac{1-\epsilon^4}{-4\ln(\epsilon)}\right)^{1/2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\to 0 \text{ quando } \epsilon \to 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left| 2x_2^2\epsilon^{4-3x_2}\ln(\epsilon)cos^2(x_1/\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x)\right| dx &\leq 2K\int_\Omega \left|\epsilon^{4-3x_2}ln(\epsilon)\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right| dx \\
&\leq 2K\left(\int_\Omega \epsilon^{2(4-3x_2)}\ln^2(\epsilon)dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq 2K\left(\frac{\epsilon^2\ln(\epsilon)-\epsilon^8\ln(\epsilon)}{-6}\right)^{1/2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\to 0 \text{ quando } \epsilon \to 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left| x_2^3\epsilon^{4-3x_2}\ln^2(\epsilon)cos^2(x_1/\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x)\right| dx &\leq K\int_\Omega \left|\epsilon^{4-3x_2}ln^2(\epsilon)\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right| dx \\
&\leq K\left(\int_\Omega \epsilon^{2(4-3x_2)}ln^4(\epsilon)dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq K\left(\frac{\epsilon^2\ln^3(\epsilon)-\epsilon^8\ln^3(\epsilon)}{-6}\right)^{1/2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\to 0 \text{ quando } \epsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Restam duas integrais a serem analisadas :

$$\int_\Omega -x_2\epsilon^{1-x_2}ln(\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\psi(x)dx$$

e

$$\int_\Omega x_2^2\epsilon^{2-2x_2}ln(\epsilon)cos^2(x_1/\epsilon)\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\psi(x)dx.$$

Consideremos, por exemplo, $\psi(x_1,x_2) = C$ uma constante e $u(x_1,x_2) = x_2$. Então, a primeira integral é nula e, a segunda é igual à:

$$\int_\Omega x_2^2\epsilon^{2-2x_2}ln(\epsilon)cos^2(x_1/\epsilon)\,C\,dx = \int_\Omega x_2^2\epsilon^{2-2x_2}ln(\epsilon)\frac{1}{2}cos(2x_1/\epsilon)\,C\,dx_1dx_2 + \int_\Omega x_2^2\epsilon^{2-2x_2}ln(\epsilon)\frac{1}{2}\,C\,dx_1dx_2.$$

Vemos que para a primeira parcela pode ser aplicado raciocínio análogo à (2.6) ou (2.7) e, portanto, converge a zero. Quanto à segunda, afirmamos que converge a $\frac{-C}{4}$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega x_2^2 \epsilon^{2-2x_2} ln(\epsilon)\frac{1}{2}C\,dx_1dx_2 &= \frac{C}{2}\left(\frac{-\epsilon^{2-2x_2}}{2}x_2^2\Big|_0^1 + \int_0^1 \epsilon^{2-2x_2}x_2dx_2\right)\\
&= \frac{C}{2}\left(\frac{-1}{2} + \frac{\epsilon^{2-2x_2}}{-2\ln(\epsilon)}x_2\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\epsilon^{2-2x_2}}{2\ln(\epsilon)}dx_2\right)\\
&= \frac{C}{2}\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{-2\ln(\epsilon)} + \frac{\epsilon^{2-2x_2}}{-4\ln^2(\epsilon)}\Big|_0^1\right)\\
&= \frac{C}{2}\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{-2\ln(\epsilon)} + \frac{\epsilon^2-1}{4\ln^2(\epsilon)}\right)\\
&\to \frac{-C}{4}.
\end{aligned}$$

Concluimos, assim, que no caso dessa segunda perturbação, também não temos a convergência do operador A_ϵ para o operador A em $H^{-1}(\Omega)$.

2.3 Uma nova abordagem

Uma etapa importante em trabalhos como o nosso é a aproximação dos operadores $h_\epsilon^*\Delta_{\Omega_\epsilon}h_\epsilon^{*-1}$, com condições de fronteira de Neumann oblíquas convenientes, do operador Laplaciano com condição de fronteira de Neumann nula. Como vimos, porém, nossas h_ϵ, menos regulares do que o usual, comprometem tal convergência.

O operador Laplaciano depende da medida adotada em Ω_ϵ. Então, se tomarmos uma métrica adequada, é possível corrigir esse problema de não - convergência dos operadores. Dessa forma, ao invés de (2.1), vamos considerar uma família de problemas modificados com o novo operador sendo o Laplaciano na métrica com "peso" $Jh_\epsilon(x)dx$, isto é,

$$\begin{cases} u_t(x,t) = Jh_\epsilon(h_\epsilon^{-1}(x))(\Delta_{\Omega_\epsilon}u(x,t) - au(x,t)) + f(u(x,t)), & x \in \Omega_\epsilon, t > 0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial N}(x,t) = g(u(x,t)), & x \in \partial\Omega_\epsilon, t > 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

O operador $Jh_\epsilon(h_\epsilon^{-1}(x))\Delta_{\Omega_\epsilon}$ é, de fato, o Laplaciano em Ω_ϵ munido de uma nova métrica g_{h_ϵ} definida por

$$\langle X, Y\rangle_{h_\epsilon} = \left\langle Jh_\epsilon^{-1}X(y), Y(y)\right\rangle,\ X, Y \in T_y(\Omega_\epsilon),$$

sendo $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ a métrica canônica em Ω_ϵ.

Os coeficientes g_{ij} da nova métrica são dados por

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right\rangle_{h_\epsilon} = Jh_\epsilon^{-1}\left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right\rangle = Jh_\epsilon^{-1}\delta_{ij}.$$

Segue que a matriz $G := (g_{ij}) = Jh_\epsilon^{-1} Id_{\Omega_\epsilon}$ e $detG = (Jh_\epsilon^{-1})^2$. Utilizando (1.9) na Seção 15 do Capítulo 1, temos que a expressão do Laplaciano nessa métrica em coordenadas canônicas é a seguinte:

$$\Delta_{h_\epsilon} v = \frac{1}{Jh_\epsilon^{-1}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{Jh_\epsilon^{-1}} \delta_{ij} Jh_\epsilon^{-1} \frac{\partial v}{\partial y_j}\right) = \frac{1}{Jh_\epsilon^{-1}} \sum_i \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} = \frac{1}{Jh_\epsilon^{-1}} \Delta v.$$

Nosso propósito é demonstrar a existência e continuidade da família de atratores para (2.17) e que (2.17) converge em um determinado sentido para o seguinte problema limite :

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), & x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial N}(x,t) = g(u(x,t))\mu, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \tag{2.18}$$

onde, se I_1, I_2, I_3 e I_4 denotam os quatro segmentos que compõem a fronteira do quadrado, mais exatamente, $I_1 = \{(x_1, 1) \,|\, 0 \le x_1 \le 1\}$, $I_2 = \{(1, x_2) \,|\, 0 \le x_2 \le 1\}$, $I_3 = \{(x_1, 0) \,|\, 0 \le x_1 \le 1\}$, $I_4 = \{(0, x_2) \,|\, 0 \le x_2 \le 1\}$, a constante μ é igual a 1 em I_2, I_3 e I_4 e, $\mu = M_\pi(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{1 + cos^2(y)}dy$, a média da função π - periódica $p(y) = \sqrt{1 + cos^2(y)}$, com $p(x_1/\epsilon) = J_{\partial\Omega} h_\epsilon$ na porção oscilante da fronteira I_1. De fato, mostramos que μ pode ser interpretado essencialmente como o limite de $|J_{\partial\Omega} h_\epsilon|$ quando ϵ converge a 0.

Se $v(\cdot, t)$ é uma solução de (2.17) na região perturbada Ω_ϵ então, para cada ϵ, $u(x,t) = v(h_\epsilon(x), t)$ satisfaz o problema em Ω,

$$\begin{cases} u_t(x,t) = Jh_\epsilon(x)(h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) - au(x,t)) + f(u(x,t)), & x \in \Omega, t > 0, \\ h_\epsilon^* \dfrac{\partial}{\partial N_{\Omega_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) = g(u(x,t)), & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Agora, multiplicando (2.19) por uma função ϕ suave em $\overline{\Omega}$ e, colocando na forma integral,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega u_t(x,t)\phi(x)dx = \int_\Omega h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t)\phi(x) Jh_\epsilon(x)dx - \int_\Omega au(x,t)\phi(x)Jh_\epsilon(x)dx + \int_\Omega f(u(x,t))\phi(x)dx, & x \in \Omega, t > 0, \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} h_\epsilon^* \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u(x,t)\phi(x)d\sigma(x) = \int_{\partial\Omega} g(u(x,t))\phi(x)d\sigma(x), & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Neste ponto, podemos definir uma solução fraca do problema (2.19), transformando a integral $\int_\Omega h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t)\phi(x)Jh_\epsilon(x)dx$ em outra que não contenha derivadas de segunda ordem através do método de integração por partes em Ω_ϵ. Vejamos, se $\phi(x) = \psi(h_\epsilon(x))$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t)\phi(x) J h_\epsilon(x) dx &= \int_\Omega \Delta_{\Omega_\epsilon}(u \circ h_\epsilon^{-1})(h_\epsilon(x), t)\psi(h_\epsilon(x)) J h_\epsilon(x) dx \\
&= \int_{\Omega_\epsilon} \Delta_{\Omega_\epsilon} v(y,t)\psi(y) dy \\
&= -\int_{\Omega_\epsilon} \nabla_{\Omega_\epsilon}(v)(y,t) \cdot \nabla_{\Omega_\epsilon}\psi(y) dy \\
&+ \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial v}{\partial N_{\Omega_\epsilon}}(y,t)\psi(y) d\sigma(y) \\
&= -\int_{\Omega_\epsilon} \nabla_{\Omega_\epsilon}(v)(y,t) \cdot \nabla_{\Omega_\epsilon}\psi(y) dy \\
&+ \int_{\partial\Omega_\epsilon} g(v(y,t))\psi(y) d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Retornando ao domínio fixo,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t)\phi(x) J h_\epsilon(x) dx &= -\int_\Omega \nabla_{\Omega_\epsilon}(u \circ h_\epsilon^{-1})(h_\epsilon(x), t) \nabla_{\Omega_\epsilon}(\phi \circ h_\epsilon^{-1})(h_\epsilon(x)) |J h_\epsilon(x)| dx \\
&+ \int_{\partial\Omega} g(u \circ h_\epsilon^{-1})(h_\epsilon(x), t)(\phi \circ h_\epsilon^{-1})(h_\epsilon(x)) |J_{\partial\Omega} h_\epsilon(x)| d\sigma(x) \\
&= -\int_\Omega h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1}(u)(x,t)\, h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1}\phi(x) |J h_\epsilon(x)| dx \\
&+ \int_{\partial\Omega} g(u(x,t))\phi(x) |J_{\partial\Omega} h_\epsilon(x)| d\sigma(x),
\end{aligned}$$

onde $J_{\partial\Omega} h_\epsilon$ denota o determinante da matriz jacobiana do difeomorfismo $h_\epsilon : \partial\Omega \to \partial h_\epsilon(\Omega)$. Então, a equação (2.20) fica,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_t(x,t)\phi(x) dx &= -\int_\Omega h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1}(u)(x,t)\, h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1}\phi(x) |J h_\epsilon(x)| dx \\
&- \int_\Omega a u(x,t)\phi(x) J h_\epsilon(x) dx + \int_\Omega f(u(x,t))\phi(x) dx \\
&+ \int_{\partial\Omega} g(u(x,t))\phi(x) |J_{\partial\Omega} h_\epsilon(x)| d\sigma(x). \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

A expressão (2.21) pode ser escrita como uma equação abstrata na forma :

$$u_t + A_\epsilon u = H_\epsilon u.$$

Dado $u \in H^1(\Omega)$, podemos interpretá-lo como um elemento de $H^{-1}(\Omega)$ de modo que o lado esquerdo de (2.21) é a derivada em relação à t do seguinte funcional linear definido em $H^1(\Omega)$:

$$\phi \mapsto \int_\Omega u(x,t)\phi(x) dx.$$

E, o lado direito de (2.21) é a soma do funcional linear em $H^1(\Omega)$, $A_\epsilon u$,

$$\phi \mapsto \int_\Omega h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1}(u)(x,t) h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1}\phi(x)|Jh_\epsilon(x)|dx + \int_\Omega au(x,t)\phi(x)|Jh_\epsilon(x)|dx \tag{2.22}$$

com o funcional linear em $H^1(\overline{\Omega})$, $H_\epsilon u$,

$$\phi \mapsto \int_\Omega f(u(x,t))\phi(x)dx + \int_{\partial\Omega} g(u(x,t))\phi(x)|J_{\partial\Omega}h_\epsilon(x)|d\sigma(x).$$

Como veremos na Seção 4 deste capítulo, os operadores A_ϵ definidos em (2.22) se aproximam do operador A no sentido da norma dos resolventes.

Vale observar que, pelas contas acima, se além da nova métrica, multiplicarmos a não linearidade g em (2.19) por um termo conveniente:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = Jh_\epsilon(x)(h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) - au(x,t)) + f(u(x,t)), & x \in \Omega, t > 0, \\ h_\epsilon^* \dfrac{\partial}{\partial N_{\Omega_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) = \dfrac{1}{|J_{\partial\Omega} h_\epsilon(x)|} g(u(x,t)), & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \tag{2.23}$$

temos a convergência de (2.23), em um certo sentido, para o problema original :

$$\begin{cases} u_t(x,t) = h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), & x \in \Omega, t > 0, \\ h_\epsilon^* \dfrac{\partial}{\partial N_{\Omega_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) = g(u(x,t)), & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases}$$

.

2.3.1 Setorialidade dos operadores perturbados

Nesta subseção, demonstramos que os operadores A_ϵ na expressão (2.22) são setoriais em $H^{-1}(\Omega)$. E, também, adicionamos uma condição de fronteira conveniente para defini - los em $L^2(\Omega)$ de modo que os operadores A_ϵ em (2.22) são uma extensão destes últimos. A partir disso, provamos a setorialidade em $L^2(\Omega)$.

Vejamos, para u, $\phi \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \langle A_\epsilon u, \phi \rangle_{-1,1} &= \int_\Omega (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u)(x,t) \cdot (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1}\phi)(x) Jh_\epsilon(x)dx + a\int_\Omega u(x,t)\phi(x)Jh_\epsilon(x)dx && (2.24) \\ &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x)Jh_\epsilon(x)dx + \int_\Omega b_{12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x)Jh_\epsilon(x)dx && (2.25) \\ &+ \int_\Omega b_{12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x)Jh_\epsilon(x)dx + \int_\Omega (b_{12}(x))^2\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x)Jh_\epsilon(x)dx \\ &+ \int_\Omega (b_{22}(x))^2\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x)Jh_\epsilon(x)dx + a\int_\Omega u(x,t)\phi(x)Jh_\epsilon(x)dx. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\langle Au,\phi\rangle_{-1,1} &= \int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla\phi(x)dx + a\int_\Omega u(x,t)\phi(x)dx.\\ &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x)dx + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x)dx + a\int_\Omega u(x,t)\phi(x)dx. \end{aligned}\tag{2.26}$$

Lema 2.3.1 *Os operadores A_ϵ são positivos definidos e auto-adjuntos, vale que $\| A_\epsilon u \|_{H^{-1}(\Omega)} \geq C' \| u \|_{H^1(\Omega)}$ onde $C' > 0$ é uma constante independente de ϵ.*

Demonstração:

Primeiramente, vamos definir, para cada $\epsilon > 0$, uma forma bilinear simétrica contínua $a_\epsilon : H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$a_\epsilon(u,v) = \int_\Omega (h_\epsilon^*\nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1}u)(x,t)\cdot(h_\epsilon^*\nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1}v)(x)Jh_\epsilon(x)dx + a\int_\Omega u(x,t)v(x)Jh_\epsilon(x)dx.$$

Notemos que $A_\epsilon : H^1(\Omega)\subset H^{-1}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ é determinado pela relação:

$$< A_\epsilon u, v >_{-1,1} = a_\epsilon(u,v),\ \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Afirmamos que a_ϵ é coerciva, isto é, existe uma constante $C' > 0$, independente de ϵ, tal que $a_\epsilon(u,u) \geq C' \| u \|^2_{H^1(\Omega)}$ para todo $u \in H^1(\Omega)$.

De fato, a segunda parcela que compõe $a_\epsilon(u,u)$ pode ser majorada inferiormente por $C_2 \| u \|^2_{L^2(\Omega)}$ com C_2 uma constante positiva independente de ϵ, visto que Jh_ϵ converge uniformemente a 1. Analisemos então a primeira parcela,

$$\int_\Omega (h_\epsilon^*\nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1}u)(x,t)\cdot(h_\epsilon^*\nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1}u)(x,t)Jh_\epsilon(x)dx \geq < \begin{pmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{12} & b_{12}^2 + b_{22}^2 \end{pmatrix} \nabla u, \nabla u >_{L^2(\Omega)},$$

com b_{ij} as entradas da inversa transposta da matriz jacobiana de h_ϵ, conforme (2.4). Se verificarmos que a matriz simétrica M que aparece na expressão anterior possui autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2$ positivos, por um resultado conhecido, ela é positiva definida. Para tanto, basta notarmos que a soma dos elementos na diagonal de M, a saber $1 + b_{12}^2 + b_{22}^2$, e o produto dos mesmos, $b_{12}^2 + b_{22}^2$, são positivos.

Segue que a matriz em questão é positiva definida, existe constante positiva C_1 tal que

$$< \begin{pmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{12} & b_{12}^2 + b_{22}^2 \end{pmatrix} \nabla u, \nabla u >_{L^2(\Omega)} \geq C_1 \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Resta constatarmos que C_1 independe de ϵ. Seja $\{v_1, v_2\}$ base ortonormal formada pelos autovetores associados à λ_1 e à λ_2 respectivamente e, $v \in \mathbb{R}$ um vetor. Então, $v = \sum_{i=1}^{2} a_i v_i$ com

$a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ e,

$$\begin{aligned} < Mv, v > &= < a_1\lambda_1 v_1 + a_2\lambda_2 v_2, a_1 v_1 + a_2 v_2 > \\ &= \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 \\ &\geq \min(\lambda_1, \lambda_2)(a_1^2 + a_2^2) \\ &\geq \lambda_1(a_1^2 + a_2^2) \\ &\geq \lambda_1 \parallel v \parallel^2 . \end{aligned}$$

Neste ponto, precisamos determinar os autovalores λ_1 e λ_2:

$$\begin{aligned} det\,([b_{ij}]^t[b_{ij}] - \lambda I) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(b_{12}^2 + b_{22}^2 - \lambda) - b_{12}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda^2 + (-1 - b_{12}^2 - b_{22}^2)\lambda + b_{22}^2 = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo essa equação de segundo grau em λ, encontramos

$$\lambda = \frac{1}{2}\left((1 + b_{12}^2 + b_{22}^2) \pm \sqrt{1 + b_{22}^4 + b_{12}^4 + 2b_{12}^2 - 2b_{22}^2 + 2b_{12}^2 b_{22}^2}\right).$$

Daí,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left((1 + b_{12}^2 + b_{22}^2) - \sqrt{1 + b_{22}^4 + b_{12}^4 + 2b_{12}^2 - 2b_{22}^2 + 2b_{12}^2 b_{22}^2}\right) = \frac{1}{2}(a - b).$$

Agora,

$$\begin{aligned} a^2 &= (1 + b_{12}^2 + b_{22}^2)^2 \\ &= \left(1 + \left(\frac{-\varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}}{1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)}\right)^2 + \left(\frac{1}{1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)}\right)^2\right)^2 \\ &= \frac{1 + 2\left(\varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^4}{\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^4} \\ &+ \frac{2\left(\varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\right)^2\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^2 + \left(\varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\right)^4}{\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^4}. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^4 + 1 + \left(\varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\right)^4}{\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^4} \\ &+ \frac{2\left(\varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\right)^2\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^2 - 2\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^2 + 2\left(\varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\right)^2}{\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^4}. \end{aligned}$$

Assim, $a^2 - b^2 = \frac{4\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^2}{\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^4} = \frac{4}{\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^2}$ donde,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{2}(a-b) \\
&= \frac{1}{2}\frac{(a^2-b^2)}{(a+b)} \\
&= \frac{2}{\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^2}\frac{1}{(a+b)} \\
&\geq \frac{2}{N} = C_1,
\end{aligned}$$

sendo $N > 0$ uma constante independente de ϵ que limita superiormente $(a+b)\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^2$. Logo,

$$\begin{aligned}
< A_\epsilon u, u >_{-1,1} &\geq \; < M\nabla u, \nabla u > + C_2 \parallel u \parallel^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq C_1 \parallel \nabla u \parallel^2_{L^2(\Omega)} + C_2 \parallel u \parallel^2_{L^2(\Omega)} \qquad (2.27) \\
&\geq \min(C_1, C_2) \parallel u \parallel^2_{H^1(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Segue do Lema de Lax - Milgram (ver [9], Lema 2.2.1.1), que A_ϵ é sobrejetor. Somando - se a isso o fato de ser simétrico (conforme Lema 1.9.6), pelo Corolário 1.9.5, concluimos que tal operador é auto - adjunto.

■

Observação 2.3.2 *Notemos que os operadores A_ϵ são também limitados superiormente como operadores de $H^1(\Omega)$ em $H^{-1}(\Omega)$, pois $\parallel A_\epsilon u \parallel_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|\phi\|_{H^1(\Omega)}=1} < A_\epsilon u, \phi >_{-1,1}$ e, pela expressão (2.25),*

$$\begin{aligned}
\langle A_\epsilon u,\, \phi\rangle_{-1,1} &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x)Jh_\epsilon(x)dx + \int_\Omega b_{12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x)Jh_\epsilon(x)dx \\
&+ \int_\Omega b_{12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x)Jh_\epsilon(x)dx + \int_\Omega (b_{12}(x))^2\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x)Jh_\epsilon(x)dx \\
&+ \int_\Omega (b_{22}(x))^2\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x)Jh_\epsilon(x)dx + a\int_\Omega u(x)\phi(x)Jh_\epsilon(x)dx \\
&\leq K\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right\|_{L^2(\Omega)} + KC_{12}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ KC_{12}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right\|_{L^2(\Omega)} + KC_{12}^2\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ KC_{22}^2\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right\|_{L^2(\Omega)} + aK \parallel u \parallel_{L^2(\Omega)}\parallel \phi \parallel_{L^2(\Omega)} \qquad (2.28) \\
&\leq C \parallel u \parallel_{H^1(\Omega)}\parallel \phi \parallel_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

para toda $\phi \in H^1(\Omega)$, *onde* K, C_{12}, C_{22} *são constantes positivas que limitam* Jh_ϵ, b_{12}, b_{22} *independentemente de* ϵ *respectivamente e* C *é uma constante positiva. Portanto,* $\| A_\epsilon u \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \| u \|_{H^1(\Omega)}$.

Observação 2.3.3 *Observemos que considerações análogas àquelas feitas no Lema 2.3.1 e na Observação 2.3.2 também são válidas para o operador não perturbado* A *afinal,*

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle_{-1,1} &= \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx + a \int_\Omega u(x) u(x) dx \\ &= \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)} + a \| u \|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde $\| Au \|_{H^{-1}(\Omega)} \geq D' \| u \|_{H^1(\Omega)}$ *com* D' *uma constante positiva. E,*

$$\begin{aligned} \langle Au, \phi \rangle_{-1,1} &= \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \phi(x) dx + a \int_\Omega u(x) \phi(x) dx \\ &\leq \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} \| \nabla \phi \|_{L^2(\Omega)} + a \| u \|_{L^2(\Omega)} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1 + a) \| u \|_{H^1(\Omega)} \| \phi \|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq D \| u \|_{H^1(\Omega)} \| \phi \|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

para toda $\phi \in H^1(\Omega)$ *e, segue que,* $\| Au \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq D \| u \|_{H^1(\Omega)}$.

Proposição 2.3.4 *Se* $\lambda \leq 0$ *e* $f \in H^{-1}(\Omega)$, *então* $\lambda \in \rho(A_\epsilon)$ *e existe uma constante* $\bar{C} > 0$ *independente de* ϵ *tal que* $\| (A_\epsilon - \lambda)^{-1} f \|_{H^1(\Omega)} \leq \bar{C} \| f \|_{H^{-1}(\Omega)}$.

Demonstração:

Basta provar que

$$\sup_{\| \phi \|_{H^1(\Omega)} = 1} |\langle (A_\epsilon - \lambda) u, \phi \rangle_{-1,1}| \geq C'' \| u \|_{H^1(\Omega)}, \ \forall \lambda \leq 0, \ u \in H^1(\Omega),$$

onde C'' é uma constante positiva independente de ϵ.

Como

$$\sup_{\| \phi \|_{H^1(\Omega)} = 1} |\langle (A_\epsilon - \lambda) u, \phi \rangle_{-1,1}| \geq \left| \left\langle (A_\epsilon - \lambda) u, \frac{u}{\| u \|} \right\rangle_{-1,1} \right|$$

e,

$$\begin{aligned} |\langle (A_\epsilon - \lambda) u, u \rangle_{-1,1}| &= \int_\Omega |(b_{ij})_{ij}(x) \nabla u(x)|^2 Jh_\epsilon(x) dx + a \int_\Omega u^2(x) Jh_\epsilon(x) dx - \lambda \int_\Omega u^2(x) dx \\ &\geq C_1 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + (C_2 - \lambda) \int_\Omega u^2(x) dx \\ &= C'' \| u \|^2_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 são as constantes positivas independentes de ϵ no Lema 2.3.1 e usamos a convergência uniforme de Jh_ϵ para 1, segue que $\| (A_\epsilon - \lambda) u \|_{H^{-1}(\Omega)} \geq C'' \| u \|_{H^1(\Omega)}$. Daí, se $(A_\epsilon - \lambda) u = f$, $f \in H^{-1}(\Omega)$, aplicando isto, temos que $\| (A_\epsilon - \lambda)^{-1} f \|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{C''} \| f \|_{H^{-1}(\Omega)} = \bar{C} \| f \|_{H^{-1}(\Omega)}$.

■

Proposição 2.3.5 *Os operadores $\{A_\epsilon\}_{0\le\epsilon\le\epsilon_0}$ são setoriais com* $\| (A_\epsilon-\lambda)^{-1} \|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega))}\le \frac{\sqrt{2}}{|\lambda-b|}$, $\forall\lambda\in S_{b,\frac{\pi}{4}}$ *e os semigrupos associados $\{T_\epsilon(t)\}_{0\le\epsilon\le\epsilon_0}$ são tais que* $\| T_\epsilon(t) \|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega))}\le Me^{-bt}$ *para alguns $M>1$ e $b>0$ constantes independentes de ϵ.*

Demonstração:

Notemos que pelo Lema 2.3.1, A_ϵ é um operador auto - adjunto e limitado inferiormente por alguma constante positiva b independente de ϵ, para $0\le\epsilon\le\epsilon_0$, além de ser densamente definido. Portanto, de acordo com o Exemplo 1.12.10, A_ϵ é setorial com setor $S_{b,\frac{\pi}{4}}$ e $\| (A_\epsilon-\lambda)^{-1} \|\le \frac{\sqrt{2}}{|\lambda-b|}$, $\forall\lambda\in S_{b,\frac{\pi}{4}}$ (Ver também Exemplo 1.1.3 em [15]).

Pelo Teorema 1.12.14, $-A_\epsilon$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{e^{-A_\epsilon t}\}_{t\ge 0}$ com $\| e^{-A_\epsilon t} \|\le Me^{-bt}$, sendo M uma constante que depende apenas da constante que aparece na desigualdade do resolvente de A_ϵ, $\sqrt{2}$, e também do setor $S_{b,\frac{\pi}{4}}$. Agora, como tal constante e o setor independem de ϵ, obtivemos uma estimativa uniforme para os semigrupos gerados pelos operadores $-A_\epsilon$.

■

Observação 2.3.6 *A partir da desigualdade do resolvente obtida na Proposição 2.3.5, podemos estender a limitação dos operadores resolventes na Proposição 2.3.4 para λ no setor comum $S_{b,\frac{\pi}{4}}$.*

De fato, pela Proposição 2.3.5, $\| (A_\epsilon-\lambda)^{-1} \|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega))}\le \frac{\sqrt{2}}{|\lambda-b|}$, $\forall\lambda\in S_{b,\frac{\pi}{4}}$, $0\le\epsilon\le\epsilon_0$, *de forma que se* $u\in H^{-1}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\| (A_\epsilon-\lambda)^{-1}u \|_{H^1(\Omega)} &= \| A_\epsilon(A_\epsilon-\lambda)^{-1}u \|_{H^{-1}(\Omega)}\\
&= \| (A_\epsilon-\lambda)(A_\epsilon-\lambda)^{-1}u+\lambda(A_\epsilon-\lambda)^{-1}u \|_{H^{-1}(\Omega)}\\
&\le \| u \|_{H^{-1}(\Omega)} + |\lambda|\frac{\sqrt{2}}{|\lambda-b|} \| u \|_{H^{-1}(\Omega)},
\end{aligned}$$

o que implica em

$$\| (A_\epsilon-\lambda)^{-1} \|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega),H^1(\Omega))}\le 1+\frac{|\lambda|\sqrt{2}}{|\lambda-b|},\ \forall\lambda\in S_{b,\frac{\pi}{4}}, 0\le\epsilon\le\epsilon_0.$$

Finalizaremos esta subseção, provando que tais operadores também são setoriais em $L^2(\Omega)$, tomando como domínio o conjunto $\left\{u\in H^2(\Omega)\,|\, h_\epsilon^*\frac{\partial}{\partial N_{\Omega_\epsilon}}h_\epsilon^{*-1}u=0 \text{ em } \partial\Omega\right\}$.

Proposição 2.3.7 *Os operadores A_ϵ são setoriais quando considerados em $L^2(\Omega)$.*

Demonstração:

É suficiente demonstrar que os operadores A_ϵ são auto - adjuntos e limitados inferiormente como operadores em $L^2(\Omega)$, conforme Exemplo 1.12.10. A mesma prova do Lema 2.3.1 nos mostra que tratam-se de operadores positivos definidos afinal, $< A_\epsilon u, u > \geq 0$.

E, como são simétricos, se constatarmos que são sobrejetores, resulta que são auto - adjuntos (veja o Corolário 1.9.5). De acordo com o Teorema 1.4.2, para cada $f \in L^2(\Omega)$, existe um único $u \in H^2(\Omega)$ que é a solução de

$$-\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx + a\int_\Omega uvdx = \int_\Omega \frac{1}{Jh_\epsilon} fvdx,\ \forall v \in H^1(\Omega),$$

desde que a_{ij}'s satisfaçam algumas hipóteses: $a_{ij} = a_{ji} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ e existe $\alpha > 0$ tal que $\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j \leq -\alpha|\xi|^2$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $\xi \in \mathbb{R}^2$. Note que esta expressão trata-se da forma fraca do problema de Neumann para a equação $A_\epsilon u = f$ em Ω e $a_{11} = -1$, $a_{12} = a_{21} = -b_{12}$, $a_{22} = -(b_{12}^2 + b_{22}^2)$.

Quanto a primeira hipótese sobre os a_{ij}'s, temos $a_{12} = a_{21}$ e $a_{ij} \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Agora, a segunda é equivalente a:

$$< [a_{ij}]\xi, \xi > \leq -\alpha|\xi|^2 \Leftrightarrow < [-a_{ij}]\xi, \xi > \geq \alpha|\xi|^2$$

e, já vimos no Lema 2.3.1 que a matriz $[-a_{ij}]$ é positiva definida.

■

2.4 Aproximação dos resolventes

Nesta seção, obtemos resultados centrais para este trabalho sobre a convergência dos resolventes dos A_ϵ e os aplicamos para estudar o comportamento dos espectros e, também, futuramente, dos semigrupos lineares.

Teorema 2.4.1 *Os operadores $(A_\epsilon)_{0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0}$ aproximam o operador A no seguinte sentido: $(A_\epsilon - A)u \to 0$ em $W^{-2,p}(\Omega)$, com $p > 2$, uniformemente para u em subconjuntos limitados de $H^1(\Omega)$.*

Demonstração:

Recordemos que, pelo Teorema de Imersão 1.2.7, $W^{k,p}(\Omega) \subset C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$ para $p \geq 1$, $kp > 2$ e $\mu > 0$ adequado. Usando as expressões em (2.25) e (2.26), encontramos, para $u, \psi \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\langle (A_\epsilon - A)u, \psi\rangle_{-1,1} &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x)(Jh_\epsilon(x)-1)dx && (2.29)\\
&+ \int_\Omega \frac{-\varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}}{1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)Jh_\epsilon(x)dx && (2.30)\\
&+ \int_\Omega \frac{-\varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}}{1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x)Jh_\epsilon(x)dx && (2.31)\\
&+ \int_\Omega \frac{\left(\varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\right)^2}{\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)Jh_\epsilon(x)dx && (2.32)\\
&+ \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)\left(\frac{1}{\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)}-1\right)dx && (2.33)\\
&+ a\int_\Omega u(x)\psi(x)(Jh_\epsilon(x)-1)dx. && (2.34)
\end{aligned}$$

A seguir, analisemos cada uma dessas integrais separadamente considerando $\psi \in W^{2,p}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, $u \in H^1(\Omega)$, $\| u \|_{H^1(\Omega)} \leq L$ e $\| \psi \|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq 1$:

$$\begin{aligned}
|(2.29)| \leq \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x)\right| |(Jh_\epsilon(x)-1)|\,dx &\leq C(\epsilon)\max_{\overline{\Omega}}\left|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x)\right|\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right|dx\\
&\leq C(\epsilon)\left\|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right\|_{C^{0,\mu}(\overline{\Omega})}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^2(\Omega)}|\Omega|\\
&\leq C(\epsilon)\, I_1\,|\Omega|\left\|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right\|_{W^{1,p}(\Omega)}\| u \|_{H^1(\Omega)}\\
&\leq C(\epsilon)\, I_1 I_2\, L|\Omega|\,\| \psi \|_{W^{2,p}(\Omega)}\\
&\leq C(\epsilon)\, I_1 I_2\, L|\Omega|\\
&\to 0\,\text{quando}\,\epsilon \to 0,
\end{aligned}$$

sendo $C(\epsilon) > 0$ uma constante que tende a zero quando ϵ tende a zero devido à convergência para um uniforme em x de Jh_ϵ por hipótese, $I_1 > 0$, a constante de imersão de $W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$ e $I_2 > 0$ vem do fato do operador diferenciação em relação a x_1 ser contínuo de $W^{2,p}(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$, conforme Teorema 1.2.6.

Agora, (2.30) e (2.31) são análogas, bastando estudar uma delas:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left| \frac{-\varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}}{1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)Jh_\epsilon(x)\right| dx &= \int_\Omega |\,cos(x_1/\epsilon)\,| \left|\varphi(x_2,\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right| \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x)\right| dx \\
&\leq \max_{\overline{\Omega}} \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x)\right| \int_\Omega \left|\varphi(x_2,\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right| dx \\
&\leq \left\|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right\|_{C^{0,\mu}(\overline{\Omega})} \left\|\varphi(x_2,\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq I_1 \left\|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right\|_{W^{1,p}(\Omega)} \left\|\varphi(x_2,\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\right\|_{L^2(\Omega)} \parallel u \parallel_{H^1(\Omega)} \\
&\leq I_1 I_3 L \parallel \psi \parallel_{W^{2,p}(\Omega)} \left\|\varphi(x_2,\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq I_1 I_3 L \left\|\varphi(x_2,\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\to 0 \text{ quando } \epsilon \to 0,
\end{aligned}
$$

onde $I_3 > 0$ vem do operador diferenciação em relação à x_2 ser contínuo de $W^{2,p}(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e utilizamos que $\left\|\varphi(x_2,\epsilon)^2\frac{1}{\epsilon^2}\right\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$ implica $\left\|\varphi(x_2,\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\right\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$.

$$
\begin{aligned}
|(2.32)| &\leq \int_\Omega \left| \frac{\left(\varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\right)^2}{\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x)Jh_\epsilon(x)\right| dx \\
&= \int_\Omega \left| \frac{cos(x_1/\epsilon)^2}{\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)}\right| \left|\varphi(x_2,\epsilon)^2\frac{1}{\epsilon^2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right| \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x)\right| dx \\
&\leq \max_{\overline{\Omega}} \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x)\right| \int_\Omega \left|\varphi(x_2,\epsilon)^2\frac{1}{\epsilon^2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right| dx \\
&\leq \left\|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right\|_{C^{0,\mu}(\overline{\Omega})} \left\|\varphi(x_2,\epsilon)^2\frac{1}{\epsilon^2}\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq I_1 \left\|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right\|_{W^{1,p}(\Omega)} \left\|\varphi(x_2,\epsilon)^2\frac{1}{\epsilon^2}\right\|_{L^2(\Omega)} \parallel u \parallel_{H^1(\Omega)} \\
&\leq I_1 I_3 L \parallel \psi \parallel_{W^{2,p}(\Omega)} \left\|\varphi(x_2,\epsilon)^2\frac{1}{\epsilon^2}\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq I_1 I_3 L \left\|\varphi(x_2,\epsilon)^2\frac{1}{\epsilon^2}\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\to 0 \text{ quando } \epsilon \to 0,
\end{aligned}
$$

pois supomos que $\left\|\varphi(x_2,\epsilon)^2\frac{1}{\epsilon^2}\right\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$.

$$
\begin{aligned}
|(2.33)| \leq \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)\right|\left|\left(\frac{1}{\left(1+\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)}-1\right)\right| dx &\leq C'(\epsilon)\max_{\overline{\Omega}}\left|\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x)\right|\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right| dx \\
&\leq C'(\epsilon)\left\|\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right\|_{C^{0,\mu}(\overline{\Omega})}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_{L^2(\Omega)}|\Omega| \\
&\leq C'(\epsilon)\, I_1\, |\Omega| \left\|\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right\|_{W^{1,p}(\Omega)} \| u \|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq C'(\epsilon)\, I_1 I_3\, L\, |\Omega|\, \| \psi \|_{W^{2,p}(\Omega)} \\
&\leq C'(\epsilon)\, I_1 I_3\, L\, |\Omega| \\
&\to 0 \text{ quando } \epsilon \to 0,
\end{aligned}
$$

onde $C'(\epsilon) > 0$ é uma constante que converge a zero quando ϵ tende a zero devido a convergência de Jh_ϵ para um uniformemente em x. Quanto a última integral,

$$
\begin{aligned}
|(2.34)| \leq a\int_\Omega |u(x)\psi(x)||(Jh_\epsilon(x)-1)|\, dx &\leq aC(\epsilon)\max_{\overline{\Omega}}|\psi(x)|\int_\Omega |u(x)| dx \\
&\leq aC(\epsilon)\, \| \psi \|_{C^{0,\eta}(\Omega)} \| u \|_{L^2(\Omega)}\, |\Omega| \\
&\leq aC(\epsilon)\, I_4 |\Omega|\, \| \psi \|_{W^{2,p}(\Omega)} \| u \|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq aC(\epsilon)\, I_4 |\Omega| L \\
&\to 0 \text{ quando } \epsilon \to 0,
\end{aligned}
$$

sendo $I_4 > 0$ referente à imersão $W^{2,p}(\Omega) \subset C^{0,\eta}$ para η adequado, conforme o Teorema 1.2.7.

■

Lema 2.4.2 *Para $\lambda \in S_{b,\frac{\pi}{4}}$, setor comum à família $\{A_\epsilon\}_{0\leq\epsilon\leq\epsilon_0}$, $f \in H^{-1}(\Omega)$, $(A_\epsilon - \lambda)^{-1}f$ converge a $(A-\lambda)^{-1}f$ em $H^s(\Omega)$, $-1 \leq s < 1$ quando ϵ tende a zero.*

Demonstração:

Estabeleçamos $(A_\epsilon - \lambda)^{-1}f = u_\epsilon$ e $(A-\lambda)^{-1}f = u$, u, $u_\epsilon \in H^1(\Omega)$. Como vimos na Observação 2.3.6, $\{u_\epsilon\}_{0\leq\epsilon\leq\epsilon_0}$ é uniformemente limitada e sendo a imersão de $H^1(\Omega)$ em $H^s(\Omega)$ compacta para $-1 \leq s < 1$, $\{u_\epsilon\}_{0\leq\epsilon\leq\epsilon_0}$ admite uma subsequência convergente que continuaremos a denotar por $\{u_\epsilon\}_{0\leq\epsilon\leq\epsilon_0}$; $u_\epsilon \to w$ em $H^s(\Omega)$ quando $\epsilon \to 0$.

Queremos demonstrar que $w = u$. Para tanto, é suficiente provar que $(A-\lambda)w = f$ afinal, $(A-\lambda)$ é injetor. Por um lado, $(A-\lambda)u_\epsilon \to (A-\lambda)w$ em $H^{s-2}(\Omega)$, $\forall\lambda \leq 0$.

Agora, $(A-\lambda)u_\epsilon = (A_\epsilon-\lambda)u_\epsilon + (A-A_\epsilon)u_\epsilon = f + (A-A_\epsilon)u_\epsilon \to f$ em $W^{-2,p}(\Omega)$ quando $\epsilon \to 0$ pelo Teorema 2.4.1. Por unicidade do limite, $(A-\lambda)w = f$ e, concluimos que $w = u$.

∎

O próximo teorema nos diz que, de fato, é possível obter uma convergência dos resolventes em norma:

Teorema 2.4.3 *Para $\lambda \in S_{b,\frac{\pi}{4}}$, setor comum à família $\{A_\epsilon\}_{0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0}$, $\beta < 1$, $0 \leq s < 1$, $\| (A_\epsilon - \lambda)^{-1} - (A - \lambda)^{-1} \|_{\mathcal{L}(H^{-\beta}(\Omega), H^s(\Omega))} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$ e, tal convergência é uniforme em λ para λ em conjuntos compactos.*

Demonstração:

Para $\lambda \in S_{b,\frac{\pi}{4}}$, provamos no Lema 2.4.2 que $(A_\epsilon - \lambda)^{-1} f \to (A - \lambda)^{-1} f$ em $H^s(\Omega)$, $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$, $0 \leq s < 1$.

Suponhamos que seja falsa a tese. Então, existe uma sequência $(f_\epsilon)_\epsilon \subset H^{-\beta}(\Omega)$ com $\| f_\epsilon \|_{H^{-\beta}(\Omega)} \leq 1$ e $\| (A_\epsilon - \lambda)^{-1} f_\epsilon - (A - \lambda)^{-1} f_\epsilon \|_{H^s(\Omega)} \geq \delta$, para $\delta > 0$.

Como $H^{-\beta}(\Omega)$ está compactamente imerso em $H^{-1}(\Omega)$, podemos encontrar uma subsequência convergente, $f_\epsilon \to f$ em $H^{-1}(\Omega)$, mantendo a notação.

Agora,

$$
\begin{aligned}
\| (A_\epsilon - \lambda)^{-1} f_\epsilon - (A - \lambda)^{-1} f_\epsilon \|_{H^s(\Omega)} &\leq \| (A_\epsilon - \lambda)^{-1} f_\epsilon - (A_\epsilon - \lambda)^{-1} f \|_{H^s(\Omega)} \\
&+ \| (A_\epsilon - \lambda)^{-1} f - (A - \lambda)^{-1} f \|_{H^s(\Omega)} \\
&+ \| (A - \lambda)^{-1} f - (A - \lambda)^{-1} f_\epsilon \|_{H^s(\Omega)} .
\end{aligned}
$$

Ocorre que o lado direito da desigualdade imediatamente acima vai a zero, usando a Observação 2.3.6 e o Lema 2.4.2, gerando uma contradição, pois o lado esquerdo não tende a zero por hipótese.

Empregando argumentos de compacidade e a continuidade dos resolventes em λ, obtemos que tal convergência é uniforme em λ para λ em conjuntos compactos de $S_{b,\frac{\pi}{4}}$.

∎

Observação 2.4.4 *Notemos que a convergência em norma dos operadores resolventes $(A_\epsilon - \lambda)^{-1} : H^{-\beta}(\Omega) \to H^s(\Omega)$ para o operador resolvente $(A - \lambda)^{-1} : H^{-\beta}(\Omega) \to H^s(\Omega)$ com $\beta < 1$ e $0 \leq s < 1$ pode ser obtida também combinando-se o Lema 2.4.2 com o resultado enunciado no Lema 1.9.12.*

Em outras palavras, pelo Lema 2.4.2, A_ϵ converge a A no sentido forte do resolvente em $H^{-1}(\Omega)$ e o Teorema 2.4.3 nos diz que A_ϵ converge a A no sentido da norma do resolvente considerando, por exemplo, os operadores em $L^2(\Omega)$ com valores neste espaço, usando a nomenclatura presente na Seção 9 do primeiro capítulo. Terminamos a seção com uma consequência muito útil desse fato, a convergência dos autovalores:

Teorema 2.4.5 *Vale que $\sigma(A) = \lim_{\epsilon\to 0}\sigma(A_\epsilon)$, ou ainda, $\sigma(A)$ é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que existe sequência $\lambda_\epsilon \to \lambda$ com $\lambda_\epsilon \in \sigma(A_\epsilon)$.*

Demonstração: Veja o Teorema 1.9.16.

Observação 2.4.6 *É importante notarmos que as autofunções relativas ao operador em $H^{-1}(\Omega)$ estão todas em $H^2(\Omega)$, ou seja, os autovalores não mudam. Isso porque, dado $u \in H^1(\Omega)$, temos que $u \in L^2(\Omega)$ e de acordo com o Teorema 1.4.2, o problema $(-\Delta + \eta)u = \lambda u$ admite única solução em $H^2(\Omega)$. Então, u deve estar em $H^2(\Omega)$.*

2.5 Interpretação de A_ϵ como operador de Laplace - Beltrami

Veremos que o operador A_ϵ é, na verdade, a forma fraca do operador de Laplace - Beltrami em Ω com a métrica μ obtida pelo pull - back da métrica canônica em Ω_ϵ. Note que, para cada perturbação do domínio através de h_ϵ, temos uma métrica diferente. Para simplificar a notação, por ora, omitiremos a dependência em ϵ.

Consideremos $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^2$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial y_i}\right\}_{i=1}^2$ bases de $T_{(\cdot)}\Omega$ e $T_{h(\cdot)}\Omega_h$, respectivamente, e g_{ij} os coeficientes da métrica μ no sistema de coordenadas canônico:

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle_\mu = \left\langle \sum_{k=1}^2 [h_x]^t_{ik}\frac{\partial}{\partial y_k}, \sum_{l=1}^2 [h_x]^t_{jl}\frac{\partial}{\partial y_l}\right\rangle = [h_x]^t_{ik}[h_x]^t_{jk}$$

onde, a matriz $A = [h_x] = [\frac{\partial h_i}{\partial x_j}]^2_{i,j=1}$ é a seguinte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon} & 1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon) \end{pmatrix}.$$

Observamos que $g_{ij} = [A^tA]_{ij}$ com

$$[A^tA] = \begin{pmatrix} 1 + \left(\varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\right)^2 & \varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right) \\ \varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right) & \left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^2 \end{pmatrix},$$

cujo determinante é $(detA)^2 = Jh^2$, Jh o determinante da matriz Jacobiana $[h_x]$. E, $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1} =$

$$[A^{-1}(A^t)^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-\varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}}{1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)} \\ \dfrac{-\varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}}{1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)} & \dfrac{\left(\varphi(x_2,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\right)^2 + 1}{\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(x_1/\epsilon)\right)^2} \end{pmatrix}$$

que é exatamente a matriz:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{12}^2 + b_{22}^2 \end{pmatrix},$$

com b_{ij} definidos em (2.4).

A expressão do operador de Laplace - Beltrami $\tilde{\Delta}$ na métrica μ em coordenadas x_1, x_2, de acordo com a equação (1.9) na última seção do primeiro capítulo, é dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} u &= \frac{1}{Jh} \sum_{i=1}^{2} \partial_i \left(\sum_{j=1}^{2} g^{ij} Jh \, \partial_j u \right) \\ &= b_{22} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(g^{11} \frac{1}{b_{22}} \frac{\partial u}{\partial x_1} + g^{12} \frac{1}{b_{22}} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + b_{22} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(g^{21} \frac{1}{b_{22}} \frac{\partial u}{\partial x_1} + g^{22} \frac{1}{b_{22}} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Assim, para $\phi \in L^2(\Omega, \mu)$, conforme [3], Definição 1.73,

$$\begin{aligned} < -\tilde{\Delta} u, \phi >_{L^2(\Omega,\mu)} &= -\int_\Omega \frac{1}{Jh} \sum_{i=1}^{2} \partial_i \left(\sum_{j=1}^{2} g^{ij} Jh \, \partial_j u \right) \phi Jh \, dx \\ &= \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{2} g^{ij} Jh \, \partial_j u \right) \left(\sum_{i=1}^{2} \partial_i \phi \right) dx \qquad (2.35) \\ &- \int_{\partial\Omega} \phi \left(\sum_{j=1}^{2} g^{ij} Jh \partial_j u \right) \tilde{N} \, d\tilde{V}. \end{aligned}$$

Precisamos, neste ponto, calcular a normal $\tilde{N}$ na métrica μ. De fato, o que desejamos é que a condição de fronteira $h^* \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_h}} h^{*-1}(u) = 0$ seja igual ao produto interno nulo entre o gradiente de u na métrica μ, $\tilde{\nabla} u$, e a normal $\tilde{N}$, isto é, $< \tilde{\nabla} u, \tilde{N} >_\mu = 0$ na métrica dada, simplificando, dessa forma, as contas na aplicação do Teorema do Divergente.

Sejam τ_h um vetor tangente ao bordo de Ω_h; $\tau_h = \sum_{j=1}^{2} a_j \frac{\partial}{\partial y_j}$ e, N_h a normal unitária, $N_h = \sum_{j=1}^{2} (N_h)_j \frac{\partial}{\partial y_j}$. Sabemos que $< \tau_h, N_h > = 0$, ou seja, $\sum_{j=1}^{2} a_j (N_h)_j = 0$. Então, $h^* \tau_h h^{*-1}$ é vetor tangente ao bordo de Ω.

Com efeito, suponhamos $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função suave com $f_{|\partial\Omega}$ constante. Segue que $f \circ h^{-1}$ é constante em $\partial\Omega_h$. Assim, $(h^* \tau_h h^{*-1})(f) = \tau_h (f \circ h^{-1})(h(x)) = 0$.

Escrevamos $h^* \tau_h h^{*-1}$ na base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} : 1 \leq j \leq 2 \right\}$:

$$(h^* \tau_h h^{*-1})(x) = \left(h^* \sum_{i=1}^{2} a_i \frac{\partial}{\partial y_i} h^{*-1} \right)(x) = \sum_{i=1}^{2} a_i \left(h^* \frac{\partial}{\partial y_i} h^{*-1} \right)(x) = \sum_{i=1}^{2} a_i \left(\sum_{j=1}^{2} b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)(x).$$

Analogamente,

$$\left(h^* \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_h}} h^{*-1} \right)(x) = \left(h^* \sum_{i=1}^{2} (N_h)_i \frac{\partial}{\partial y_i} h^{*-1} \right)(x) = \sum_{i=1}^{2} (N_h)_i \left(h^* \frac{\partial}{\partial y_i} h^{*-1} \right)(x) = \sum_{i=1}^{2} (N_h)_i \left(\sum_{j=1}^{2} b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)(x).$$

A nova condição de fronteira é, portanto, $\sum_{i=1}^{2}(N_h)_i(\sum_{j=1}^{2} b_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j})(x) = 0$. Resta constatarmos que, abreviadamente, $(N_h)_i b_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$ é a normal na métrica μ. Consideremos o vetor $h^*\tau_h h^{*-1}$ com $\tau_h \in T_{\partial\Omega_h}$. Basta mostrarmos que $< (N_h)_i b_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}, h^*\tau_h h^{*-1} >_\mu = 0$. Agora,

$$
\begin{aligned}
\left\langle (N_h)_i b_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}, a_k b_{kl}\frac{\partial}{\partial x_l}\right\rangle_\mu &= g_{jl}(N_h)_i b_{ij} a_k b_{kl} \\
&= b_{ij}[h_x^t]_{jk}[h_x]_{kl} b_{kl}(N_h)_i a_k \\
&= \delta_{ik}[h_x]_{kl} b_{kl}(N_h)_i a_k \\
&= \delta_{ik}[h_x^t]_{lk} b_{kl}(N_h)_i a_k \\
&= \delta_{ik}\delta_{ll}(N_h)_i a_k \\
&= (N_h)_i a_i \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Comparando as expressões (2.25) e (2.35), vemos que a primeira integral que compõe o operador linear A_ϵ acima definido é a forma fraca do operador de Laplace - Beltrami na variedade riemanniana (Ω, μ). De fato, trata -se de um resultado mais geral :

Teorema 2.5.1 *Sejam Ω um aberto no $\mathbb{R}^n$ e uma família de operadores $\{A'_\epsilon\}_\epsilon$ em $H^{-1}(\Omega)$ definidos pela expressão :*

$$
< A'_\epsilon u, \phi >_{-1,1} = \int_\Omega (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u)(x,t) \cdot (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1}\phi)(x) J h_\epsilon(x) dx, \quad u, \phi \in H^1(\Omega), \tag{2.36}
$$

com $\{h_\epsilon\}_\epsilon$ uma família de difeomorfismos de classe $C^m(\Omega)$, tais que $h_\epsilon : \Omega \to \Omega_\epsilon = h_\epsilon(\Omega)$.

Então, A'_ϵ é a forma fraca do operador de Laplace - Beltrami na variedade riemanniana dada pelo domínio Ω com a métrica obtida a partir do pull - back da métrica canônica no domínio perturbado Ω_ϵ.

Demonstração:

É suficiente constatarmos que (2.35) é exatamente igual a (2.36) no caso geral. Por um lado, como $g^{ij} = [A^{-1}]_{il}[(A^t)^{-1}]_{lj} = \sum_l b_{li} b_{lj}$,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{n} g^{ij} J h_\epsilon(x)\, \partial_j u\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i \phi\right) dx &= \int_\Omega \sum_i \sum_j \sum_l b_{li} b_{lj} \partial_j u \partial_i \phi J h_\epsilon(x) dx \\
&= \int_\Omega \sum_l \sum_j \sum_i b_{li} b_{lj} \partial_j u \partial_i \phi J h_\epsilon(x) dx \\
&= I.
\end{aligned}
$$

Agora, por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u)(x) \cdot (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} \phi)(x) J h_\epsilon(x) dx \\
= &\int_\Omega \left(\sum_j b_{1j} \frac{\partial u}{\partial x_j}, ..., \sum_j b_{nj} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \cdot \left(\sum_i b_{1i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, ..., \sum_i b_{ni} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) J h_\epsilon(x) dx \\
= &\int_\Omega \left(\left(\sum_j b_{1j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \left(\sum_i b_{1i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + ... + \left(\sum_j b_{nj} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \left(\sum_i b_{ni} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \right) J h_\epsilon(x) dx \\
= &\int_\Omega \left(\sum_j \left(\sum_i b_{1i} b_{1j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} + ... + \sum_j \left(\sum_i b_{ni} b_{nj} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) J h_\epsilon(x) dx \\
= &\int_\Omega \sum_l \sum_j \sum_i b_{li} b_{lj} \partial_j u \partial_i \phi J h_\epsilon(x) dx \\
= &\; I.
\end{aligned}
$$

■

Outra observação importante é que o operador definido por

$$
< B_\epsilon u, \phi >_\mu = \int_\Omega (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u)(x,t) \cdot (h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} \phi)(x) J h_\epsilon(x) dx + a \int_\Omega u(x,t) \phi(x) J h_\epsilon(x) dx \qquad (2.37)
$$

é uma extensão auto - adjunta do operador $-h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} + aI$ ao espaço $H^{-1}(\Omega, \mu)$ com domínio $H^1(\Omega, \mu)$. Com efeito, vejamos que $-h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} + aI$ é auto - adjunto em $L^2(\Omega, \mu)$. Sejam $u, \phi \in D(h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1})$,

$$
\begin{aligned}
< -h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u, \phi >_\mu &= -\int_\Omega h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t)\phi(x) J h_\epsilon(x) dx \\
&= -\int_\Omega \Delta_{\Omega_\epsilon}(u \circ h_\epsilon^{-1})(h_\epsilon(x),t)\psi(h_\epsilon(x)) J h_\epsilon(x) dx \\
&= -\int_{\Omega_\epsilon} \Delta_{\Omega_\epsilon} v(y,t)\psi(y) dy \\
&= \int_{\Omega_\epsilon} \nabla_{\Omega_\epsilon} v(y,t) \nabla_{\Omega_\epsilon}\psi(y) dy - \int_{\Omega_\epsilon} div_{\Omega_\epsilon}(\nabla_{\Omega_\epsilon} v(y,t)\psi(y)) dy \\
&= \int_{\Omega_\epsilon} \nabla_{\Omega_\epsilon} v(y,t) \nabla_{\Omega_\epsilon}\psi(y) dy - \int_{\partial\Omega_\epsilon} \psi(y) \frac{\partial v}{\partial N_{\Omega_\epsilon}}(y,t) d\sigma(y) \\
&= \int_{\Omega_\epsilon} \nabla_{\Omega_\epsilon} v(y,t) \nabla_{\Omega_\epsilon}\psi(y) dy \\
&= -\int_{\Omega_\epsilon} v(y,t)\Delta_{\Omega_\epsilon}\psi(y) dy + \int_{\Omega_\epsilon} div_{\Omega_\epsilon}(\nabla_{\Omega_\epsilon}\psi(y) v(y,t)) dy \\
&= -\int_{\Omega_\epsilon} v(y,t)\Delta_{\Omega_\epsilon}\psi(y) dy + \int_{\partial\Omega_\epsilon} v(y,t) \frac{\partial \psi}{\partial N_{\Omega_\epsilon}}(y) d\sigma(y) \\
&= -\int_{\Omega_\epsilon} v(y,t)\Delta_{\Omega_\epsilon}\psi(y) dy \\
&= -\int_\Omega (u \circ h_\epsilon^{-1})(h_\epsilon(x),t)\Delta_{\Omega_\epsilon}(\phi \circ h_\epsilon^{-1})(h_\epsilon(x)) J h_\epsilon(x) dx \\
&= -\int_\Omega u(x,t) h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1}\phi(x) J h_\epsilon(x) dx \\
&= < u, -h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1}\phi >_\mu,
\end{aligned}
$$

o que prova que $-h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1}$ é simétrico em $L^2(\Omega,\mu)$. Consequentemente, $-h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} + aI$ é simétrico em $L^2(\Omega,\mu)$. E, como demonstramos na Proposição 2.3.7, tal operador é sobrejetor. Utilizando o Corolário 1.9.5, concluimos que $-h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} + aI$ é auto - adjunto em $L^2(\Omega,\mu)$.

Capítulo 3

Formulação abstrata e existência de solução

O objetivo deste capítulo é colocar (2.18) e (2.19) em uma forma abstrata em uma escala fixa de espaços de Banach, considerando as perturbações h_ϵ em (2.2). Sob certas hipóteses para as não - linearidades f, g em (2.18) e (2.19), demonstramos a existência e unicidade de soluções locais e globais para o problema abstrato. Para tanto, tivemos como fundamento o que foi feito em [4] e [18].

3.1 O problema abstrato em uma escala de espaços de Banach

Denotemos por $\tilde{X}^\alpha_\epsilon$ (respectivamente X^α_ϵ) os domínios das potências fracionárias dos operadores A_ϵ definidos em $H^{-1}(\Omega)$ (respectivamente em $L^2(\Omega)$). Sabemos que são espaços de Banach, $\tilde{X}^0_\epsilon = H^{-1}(\Omega)$ ($X^0_\epsilon = L^2(\Omega)$), $\tilde{X}^1_\epsilon = H^1(\Omega)$ ($X^1_\epsilon = \left\{u \in H^2(\Omega) \,|\, h^*_\epsilon \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_\epsilon}} h^{*-1}_\epsilon u = 0 \,\text{em}\, \partial\Omega\right\}$), $\tilde{X}^\alpha_\epsilon$ (X^α_ϵ) está compactamente contido em $\tilde{X}^\beta_\epsilon$ (X^β_ϵ) quando $\alpha > \beta \geq 0$ e $X^\alpha_\epsilon \subset H^{2\alpha}(\Omega)$. Notemos que $X^{\alpha-\frac{1}{2}}_\epsilon = \tilde{X}^\alpha_\epsilon$ para $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$. Por abuso de notação, escreveremos ainda $X^{\alpha-\frac{1}{2}}_\epsilon$ em vez de $\tilde{X}^\alpha_\epsilon$ se $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$. E, chamemos simplesmente $\tilde{X}^\alpha$ e X^α os espaços fracionários associados ao operador não perturbado A definido em $H^{-1}(\Omega)$ e em $L^2(\Omega)$, respectivamente.

Teorema 3.1.1 *Para $\frac{-1}{2} \leq \beta \leq 0$, definimos o operador $(A_\epsilon)_\beta : X^{\beta+1}_\epsilon \subset X^\beta_\epsilon \to X^\beta_\epsilon$, $(A_\epsilon)_\beta = A_\epsilon \mid_{X^{\beta+1}_\epsilon}$.*

Então, $(A_\epsilon)_\beta$ é setorial, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Além disso, é possível estabelecer um setor e uma constante na desigualdade do resolvente comuns aos operadores $(A_\epsilon)_\beta$, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$; $\| (\lambda - (A_\epsilon)_\beta)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X_\epsilon^\beta)} \leq \frac{M}{|\lambda - b|}$, $\forall \lambda \in S_{b,\phi}$ com $M > 1$, $b > 0$ e $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Demonstração:

Seja $\beta = -1/2 + \delta$ com $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}$. Temos que $(A_\epsilon)_\beta = (A_\epsilon)^{-\delta}(A_\epsilon)(A_\epsilon)^\delta$, em particular, $A_\epsilon = (A_\epsilon)_{-\frac{1}{2}}$.

Agora, $(A_\epsilon)^\delta$ é uma isometria de X_ϵ^β $(= \tilde{X}_\epsilon^{\beta+\frac{1}{2}})$ em $X_\epsilon^{\frac{-1}{2}}$ $(= \tilde{X}_\epsilon^0)$. Com efeito, se $x \in \tilde{X}_\epsilon^{\beta+\frac{1}{2}}$,

$$\| (A_\epsilon)^\delta x \|_{\tilde{X}_\epsilon^0} = \| (A_\epsilon)^{\beta+\frac{1}{2}} x \| = \| x \|_{\tilde{X}_\epsilon^{\beta+\frac{1}{2}}} .$$

Daí, $(A_\epsilon)^{-\delta}$ é uma isometria de $X_\epsilon^{-\frac{1}{2}}$ em X_ϵ^β. De fato, $(A_\epsilon)^\delta$ é uma isometria de $X_\epsilon^{\beta+1}$ em $X_\epsilon^{\frac{1}{2}}$, pois $(A_\epsilon)^\delta = (A_\epsilon)^{-\frac{1}{2}} \circ (A_\epsilon)^{\beta+1}$. E, de $\| (\lambda - (A_\epsilon)^{-\delta}(A_\epsilon)(A_\epsilon)^\delta)^{-1} \| = \| (A_\epsilon)^\delta \| \| (\lambda - A_\epsilon)^{-1} \| \| (A_\epsilon)^{-\delta} \| = \| (\lambda - A_\epsilon)^{-1} \|$, a setorialidade é preservada; $(A_\epsilon)_\beta$ é setorial, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$.

Como vimos na Proposição 2.3.5, a família $\{A_\epsilon\}_{0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0}$ possui um setor comum $S_{b,\phi}$ para $b > 0$, $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ e vale que $\| (A_\epsilon - \lambda)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X_\epsilon^{-\frac{1}{2}})} \leq \frac{M}{|\lambda - b|}$, $\forall \lambda \in S_{b,\phi}$, onde $M > 1$. Então, para $\lambda \in S_{b,\phi}$, $x \in X_\epsilon^\beta$,

$$\begin{aligned}
\| (\lambda - (A_\epsilon)_\beta)^{-1} x \|_{X_\epsilon^\beta} &= \| (\lambda - A_\epsilon)^{-1} x \|_{X_\epsilon^\beta} \\
&= \| (A_\epsilon)^{\beta+\frac{1}{2}} (\lambda - A_\epsilon)^{-1} x \|_{X_\epsilon^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \| (\lambda - A_\epsilon)^{-1} (A_\epsilon)^{\beta+\frac{1}{2}} x \|_{X_\epsilon^{-\frac{1}{2}}} \\
&\leq \frac{M}{|\lambda - b|} \| (A_\epsilon)^{\beta+\frac{1}{2}} x \|_{X_\epsilon^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{M}{|\lambda - b|} \| x \|_{X_\epsilon^\beta} .
\end{aligned}$$

Logo, $\| (\lambda - (A_\epsilon)_\beta)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X_\epsilon^\beta)} \leq \frac{M}{|\lambda - b|}$, $\forall \lambda \in S_{b,\phi}$.

■

A seguir, mostraremos a equivalência de normas dos espaços fracionários $\tilde{X}_\epsilon^\alpha$ e $\tilde{X}^\alpha$ para $0 \leq \alpha \leq 1$, isto é, no intervalo entre $H^1(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$.

Teorema 3.1.2 *Para $0 \leq \alpha \leq 1$, $\| u \|_{\tilde{X}_\epsilon^\alpha} \leq K_1 \| u \|_{\tilde{X}^\alpha} \leq K_2 \| u \|_{\tilde{X}_\epsilon^\alpha}$, com K_1 e K_2 constantes positivas independentes de ϵ. Em outras palavras, $\tilde{X}_\epsilon^\alpha = \tilde{X}^\alpha$ com normas equivalentes, uniformemente em ϵ.*

Demonstração:

A priori, pela Observação 2.3.2, podemos escrever $\| A_\epsilon u \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \| u \|_{H^1(\Omega)}$ com $C > 0$ independente de ϵ. Por outro lado, pelo Lema 2.3.1, $\| A_\epsilon u \|_{H^{-1}(\Omega)} \geq C' \| u \|_{H^1(\Omega)}$, onde $C' > 0$ é uma constante independente de ϵ. E também, da Observação 2.3.3, temos $\| Au \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq D \| u \|_{H^1(\Omega)}$ e $\| Au \|_{H^{-1}(\Omega)} \geq D' \| u \|_{H^1(\Omega)}$, D e D' constantes positivas.

Além disso, sendo tais operadores positivos definidos e auto - adjuntos, pelo Teorema 16.1 em [22], os domínios das potências fracionárias de ordem α, $0 < \alpha < 1$, coincidem isometricamente com os espaços de interpolação $[H^{-1}(\Omega), D(A_\epsilon)]_\alpha$ e $[H^{-1}(\Omega), D(A)]_\alpha$.

Agora, de acordo com o Teorema 1.15, [22], se I denota o operador inclusão, então para $0 < \alpha < 1$,

$$\| I \|_{\mathcal{L}([\tilde{X}^0_\epsilon,\tilde{X}^1_\epsilon]_\alpha,[\tilde{X}^0,\tilde{X}^1]_\alpha)} \leq \| I \|^{1-\alpha}_{\mathcal{L}(\tilde{X}^0_\epsilon,\tilde{X}^0)} \| I \|^{\alpha}_{\mathcal{L}(\tilde{X}^1_\epsilon,\tilde{X}^1)} .$$

Como $\tilde{X}^0_\epsilon = \tilde{X}^0 = H^{-1}(\Omega)$, basta estimarmos $\| I \|_{\mathcal{L}(\tilde{X}^1_\epsilon,\tilde{X}^1)}$, lembrando que $\tilde{X}^1_\epsilon = D(A_\epsilon)$ e $\tilde{X}^1 = D(A)$.

$$\| Iu \|_{\tilde{X}^1} = \| u \|_{D(A)} = \| Au \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq D \| u \|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{D}{C'} \| A_\epsilon u \|_{H^{-1}(\Omega)} = \frac{D}{C'} \| u \|_{D(A_\epsilon)} = \frac{D}{C'} \| u \|_{\tilde{X}^1_\epsilon} .$$

Assim, $\| I \|_{\mathcal{L}(\tilde{X}^1_\epsilon,\tilde{X}^1)} \leq \frac{D}{C'}$ e,

$$\| u \|_{[\tilde{X}^0,\tilde{X}^1]_\alpha} \leq \left(\frac{D}{C'}\right)^\alpha \| u \|_{[\tilde{X}^0_\epsilon,\tilde{X}^1_\epsilon]_\alpha} .$$

A desigualdade contrária é obtida analogamente.

■

As considerações na Seção 3 do Capítulo 2 nos permitem escrever (2.18) e (2.19) como um problema abstrato em uma escala fixa de espaços de Banach $\{X^\beta, -\frac{1}{2} \leq \beta \leq 0\}$,

$$\begin{cases} u_t + (A_\epsilon)_\beta u = (H_\epsilon)_\beta u, \quad t > t_0, \\ u(t_0) = u_0 \in X^\eta, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $(H_\epsilon)_\beta = H(\cdot, \epsilon) = (F_\epsilon)_\beta + (G_\epsilon)_\beta : X^\eta \to X^\beta$, $0 \leq \eta < \beta + 1$,

•$(F_\epsilon)_\beta = F(\cdot, \epsilon) : X^\eta \to X^\beta$, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, dado por:

$$< F(u,\epsilon), \phi >_{\beta,-\beta} = \int_\Omega f(u)\, \phi \, dx, \; \forall \phi \in X^{-\beta}. \tag{3.2}$$

•$(G_\epsilon)_\beta = G(\cdot, \epsilon) : X^\eta \to X^\beta$, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, definido por:

$$< G(u,\epsilon), \phi >_{\beta,-\beta} = \int_{\partial\Omega} g(\gamma(u))\, \gamma(\phi)\, |J_{\partial\Omega} h_\epsilon| \, d\sigma(x), \; \forall \phi \in X^{-\beta}, \; 0 < \epsilon < \epsilon_0, \tag{3.3}$$

e,

$$
\begin{aligned}
< G(u,0), \phi >_{\beta,-\beta} &= \int_{I_1} g(\gamma(u))\gamma(\phi) M_\pi(p) d\sigma(x) + \int_{I_2} g(\gamma(u))\gamma(\phi) d\sigma(x) \\
&+ \int_{I_3} g(\gamma(u))\gamma(\phi) d\sigma(x) + \int_{I_4} g(\gamma(u))\gamma(\phi) d\sigma(x), \ \forall \phi \in X^{-\beta}, \ \epsilon = 0,
\end{aligned}
$$

sendo γ a função traço, $I_1 = \{ (x_1, 1) \,|\, 0 \le x_1 \le 1 \}$, $I_2 = \{ (1, x_2) \,|\, 0 \le x_2 \le 1 \}$, $I_3 = \{ (x_1, 0) \,|\, 0 \le x_1 \le 1 \}$, $I_4 = \{ (0, x_2) \,|\, 0 \le x_2 \le 1 \}$ e, $M_\pi(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{1 + cos^2(y)} dy$, a média da função π - periódica $p(y) = \sqrt{1 + cos^2(y)}$, com $p(x_1/\epsilon) = J_{\partial\Omega} h_\epsilon$ na porção oscilante da fronteira.

3.2 Existência de soluções locais

Demonstramos a seguir, com algumas hipóteses sobre as funções f e g, que o problema abstrato (3.1) possui solução local. E, ao final da seção, obtemos a continuidade do semigrupo linear no ponto $\epsilon = 0$ em X^η, com η em um intervalo conveniente.

Para provar que o problema (3.1) está bem posto localmente, admitiremos as seguintes condições de regularidade e crescimento para f e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(i) $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e existem números reais $\lambda_1 > 0$ e $L_1 > 0$ tais que:

$$
| f(u_1) - f(u_2) | \le L_1 (1 + | u_1 |^{\lambda_1} + | u_2 |^{\lambda_1}) | u_1 - u_2 |, \ \forall u_1, \ u_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.4}
$$

(ii) $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e existem números reais $\lambda_2 > 0$ e $L_2 > 0$ tais que:

$$
| g(u_1) - g(u_2) | \le L_2 (1 + | u_1 |^{\lambda_2} + | u_2 |^{\lambda_2}) | u_1 - u_2 |, \ \forall u_1, \ u_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.5}
$$

Lema 3.2.1 *Suponha que f satisfaz (3.4) e $\beta + 1 > \eta > \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\lambda_1+1)}$. Então, a aplicação $(F_\epsilon)_\beta = F(\cdot, \epsilon) : X^\eta \to X^\beta$ está bem definida para $0 \le \epsilon \le \epsilon_0$ e, é limitada em conjuntos limitados de X^η, uniformemente em ϵ.*

Demonstração:

Sejam $u \in X^\eta$ e $\phi \in X^{-\beta}$,

$$
\begin{aligned}
| < F(u,\epsilon), \phi >_{\beta,-\beta} | &\le \int_\Omega | f(u) - f(0) | | \phi | dx + \int_\Omega | f(0) | | \phi | dx \\
&\le L_1 \int_\Omega | u | | \phi | dx + L_1 \int_\Omega | u |^{\lambda_1+1} | \phi | dx + \int_\Omega | f(0) | | \phi | dx \\
&\le L_1 \| u \|_{L^2(\Omega)} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} + L_1 \| u^{\lambda_1+1} \|_{L^2(\Omega)} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} + \| f(0) \|_{L^2(\Omega)} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} \\
&\le L_1 \| u \|_{L^2(\Omega)} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} + L_1 \| u \|^{\lambda_1+1}_{L^{2(\lambda_1+1)}(\Omega)} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} + \| f(0) \|_{L^2(\Omega)} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} \\
&\le L_1 K_1 K_2 \| u \|_{X^\eta} \| \phi \|_{X^{-\beta}} + L_1 K_1 K_3^{\lambda_1+1} \| u \|^{\lambda_1+1}_{X^\eta} \| \phi \|_{X^{-\beta}} + K_1 \| f(0) \|_{L^2(\Omega)} \| \phi \|_{X^{-\beta}},
\end{aligned}
$$

onde K_1, K_2 e $K_3 > 0$ são as constantes de imersão de, respectivamente, $X^{-\beta} \subset L^2(\Omega)$, $X^\eta \subset L^2(\Omega)$ e $X^\eta \subset L^{2(\lambda_1+1)}(\Omega)$. As duas primeiras são imediatas uma vez que $0 \leq -\beta \leq \frac{1}{2}$ e $0 \leq \eta \leq \beta+1$ e para a terceira, ver o Teorema 1.13.9.

Portanto, se $u \in X^\eta$ e $\phi \in X^{-\beta}$,

$$\| F(u,\epsilon) \|_{X^\beta} \leq L_1 K_1 K_2 \| u \|_{X^\eta} + L_1 K_1 K_3^{\lambda_1+1} \| u \|_{X^\eta}^{\lambda_1+1} + K_1 \| f(0) \|_{L^2(\Omega)},$$

o que nos mostra que $(F_\epsilon)_\beta$ está bem definida e é limitada em conjuntos limitados de X^η, uniformemente em ϵ.

■

Lema 3.2.2 *Suponha que f satisfaz (3.4) e sejam p e q conjugados com $\frac{1}{\lambda_1} < p < \infty$. Então, se $\beta + 1 > \eta > \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(\lambda_1+1)}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2p\lambda_1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}\right\}$, a aplicação $(F_\epsilon)_\beta : X^\eta \to X^\beta$ é localmente Lipschitz contínua em u, com constante de Lipschitz independente de ϵ para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$.*

Demonstração:

Sejam u_1, $u_2 \in X^\eta$ e $\phi \in X^{-\beta}$,

$$\begin{aligned}
| < F(u_1,\epsilon) - F(u_2,\epsilon), \phi >_{\beta,-\beta} | &\leq \int_\Omega L_1 (1 + |u_1|^{\lambda_1} + |u_2|^{\lambda_1}) |u_1 - u_2| |\phi| dx \\
&\leq L_1 \left(\int_\Omega (1 + |u_1|^{\lambda_1} + |u_2|^{\lambda_1})^2 |u_1 - u_2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq L_1 \left(\int_\Omega (1 + |u_1|^{\lambda_1} + |u_2|^{\lambda_1})^{2p} dx \right)^{\frac{1}{2p}} \left(\int_\Omega |u_1 - u_2|^{2q} dx \right)^{\frac{1}{2q}} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq L_1 (|\Omega|^{\frac{1}{2p}} + \| u_1^{\lambda_1} \|_{L^{2p}(\Omega)} + \| u_2^{\lambda_1} \|_{L^{2p}(\Omega)}) \| u_1 - u_2 \|_{L^{2q}(\Omega)} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq L_1 (|\Omega|^{\frac{1}{2p}} + \| u_1 \|_{L^{2p\lambda_1}(\Omega)}^{\lambda_1} + \| u_2 \|_{L^{2p\lambda_1}(\Omega)}^{\lambda_1}) \| u_1 - u_2 \|_{L^{2q}(\Omega)} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq L_1 (|\Omega|^{\frac{1}{2p}} + K_4^{\lambda_1} \| u_1 \|_{X^\eta}^{\lambda_1} + K_4^{\lambda_1} \| u_2 \|_{X^\eta}^{\lambda_1}) K_5 \| u_1 - u_2 \|_{X^\eta} K_1 \| \phi \|_{X^{-\beta}},
\end{aligned}$$

onde $K_1 > 0$ é a constante de imersão de $X^{-\beta} \subset L^2(\Omega)$, tal como na demonstração do Lema 3.2.1, e K_4 e $K_5 > 0$ são obtidas pela inclusão de $X^\eta \subset L^{2p\lambda_1}(\Omega)$ e $X^\eta \subset L^{2q}(\Omega)$ respectivamente, dado que $\eta > \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p\lambda_1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}\right\}$ e $p > \frac{1}{\lambda_1}$.

Logo, se u_1 e u_2 pertencem a um subconjunto limitado U de X^η, $\| u \|_{X^\eta} \leq L$, $\forall u \in U$,

$$\| F(u_1,\epsilon) - F(u_2,\epsilon) \|_{X^\beta} \leq L_1 (|\Omega|^{\frac{1}{2p}} + 2K_4^{\lambda_1} L^{\lambda_1}) K_5 K_1 \| u_1 - u_2 \|_{X^\eta},$$

donde $(F_\epsilon)_\beta$ é localmente Lipschitziana em u, com constante de Lipschitz independente de ϵ para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$.

■

Para as propriedades de regularidade de G, precisaremos calcular $|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|$ em cada um dos quatro segmentos de $\partial\Omega$. De acordo com a expressão (1.4) obtida na Seção 8 do Capítulo 1, temos que :

Em $I_1 = \{(x_1, 1) \,|\, 0 \le x_1 \le 1\}$, $e = (1, 0)$ e,

$$J_{\partial\Omega}h_\epsilon(x_1, 1) = \det\begin{pmatrix} \left(1, \varphi(1,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2(1,\epsilon)cos^2(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon^2}}}\left(-\varphi(1,\epsilon)cos(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon}, 1\right) \end{pmatrix} = \sqrt{1+\epsilon^2 cos^2(x_1/\epsilon)\frac{1}{\epsilon^2}} = \sqrt{1+cos^2(x_1/\epsilon)}.$$

Em $I_2 = \{(1, x_2) \,|\, 0 \le x_2 \le 1\}$, $e = (0, 1)$ e,

$$J_{\partial\Omega}h_\epsilon(1, x_2) = \det\begin{pmatrix} \left(0, 1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(1/\epsilon)\right) \\ \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(1/\epsilon))^2}}\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(1/\epsilon), 0\right) \end{pmatrix} = -\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(1/\epsilon)\right).$$

Agora, em $I_3 = \{(x_1, 0) \,|\, 0 \le x_1 \le 1\}$, $e = (1, 0)$,

$$J_{\partial\Omega}h_\epsilon(x_1, 0) = \det\begin{pmatrix} (1,0) \\ (0,1) \end{pmatrix} = 1.$$

Por fim, em $I_4 = \{(0, x_2) \,|\, 0 \le x_2 \le 1\}$, $e = (0, 1)$ e,

$$J_{\partial\Omega}h_\epsilon(0, x_2) = \det\begin{pmatrix} (0,1) \\ (1,0) \end{pmatrix} = -1.$$

Assim,

$$|J_{\partial\Omega}h_\epsilon(x_1, x_2)| = \begin{cases} \sqrt{1+cos^2(x_1/\epsilon)} & (x_1, x_2) \in I_1, \\ 1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(1/\epsilon) & (x_1, x_2) \in I_2, \\ 1 & (x_1, x_2) \in I_3, \\ 1 & (x_1, x_2) \in I_4, \end{cases}$$

onde consideramos ϵ suficientemente pequeno, $0 \le \epsilon \le \epsilon_0$, para que $1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_2,\epsilon)sin(1/\epsilon) \ge 0$, usando a hipótese de que $Jh_\epsilon \to 1$ uniformemente. Notemos que $|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|$ é limitado por uma constante $\overline{K} > 0$ independente de ϵ nesse intervalo.

Lema 3.2.3 *Suponha que g satisfaz (3.5), $\beta + 1 > \eta > \frac{1}{2} - \frac{1}{4(\lambda_2+1)}$ e $-\frac{1}{2} \le \beta < -\frac{1}{4}$. Então, a aplicação $(G_\epsilon)_\beta = G(\cdot, \epsilon) : X^\eta \to X^\beta$ está bem definida para $0 \le \epsilon \le \epsilon_0$ e, é limitada em conjuntos limitados de X^η, uniformemente em ϵ.*

Demonstração:

Sejam $u \in X^{\eta}$, $\phi \in X^{-\beta}$ e $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$,

$$\begin{aligned}
| < G(u,\epsilon), \phi >_{\beta,-\beta} | &\leq \int_{\partial\Omega} | g(\gamma(u)) | | \gamma(\phi) | |J_{\partial\Omega} h_\epsilon| d\sigma(x) \\
&\leq \overline{K}\left(\int_{\partial\Omega} | g(\gamma(u)) - g(\gamma(0)) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) + \int_{\partial\Omega} | g(\gamma(0)) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) \right) \\
&\leq \overline{K} L_2 \int_{\partial\Omega} | \gamma(u) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) \; + \overline{K} L_2 \int_{\partial\Omega} | \gamma(u) |^{\lambda_2+1} | \gamma(\phi) | d\sigma(x) \\
&+ \; \overline{K} \int_{\partial\Omega} | g(\gamma(0)) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) \\
&\leq \overline{K} L_2 \parallel \gamma(u) \parallel_{L^2(\partial\Omega)} \parallel \gamma(\phi) \parallel_{L^2(\partial\Omega)} + \overline{K} L_2 \parallel \gamma(u)^{\lambda_2+1} \parallel_{L^2(\partial\Omega)} \parallel \gamma(\phi) \parallel_{L^2(\partial\Omega)} \\
&+ \; \overline{K} \parallel g(\gamma(0)) \parallel_{L^2(\partial\Omega)} \parallel \gamma(\phi) \parallel_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq \overline{K} L_2 \left(\parallel \gamma(u) \parallel_{L^2(\partial\Omega)} + \parallel \gamma(u) \parallel^{\lambda_2+1}_{L^{2(\lambda_2+1)}(\partial\Omega)} \right) \parallel \gamma(\phi) \parallel_{L^2(\partial\Omega)} \\
&+ \; \overline{K} \parallel g(\gamma(0)) \parallel_{L^2(\partial\Omega)} \parallel \gamma(\phi) \parallel_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq L_2 \overline{K}\, \overline{K_3}\, \overline{K_1} \parallel u \parallel_{X^\eta} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} + L_2 \overline{K}\, \overline{K_2}^{\lambda_2+1}\, \overline{K_1} \parallel u \parallel_{X^\eta} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} \\
&+ \; \overline{K}\, \overline{K_1} \parallel g(\gamma(0)) \parallel_{L^2(\partial\Omega)} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}},
\end{aligned}$$

onde as constantes $\overline{K_1}$, $\overline{K_2}$, $\overline{K_3} > 0$ referem-se ao seguinte: se $s = 2\eta$, então $X^\eta \subset H^s(\Omega)$ e $\gamma : H^s(\Omega) \rightarrow L^{\frac{1}{1-s}}(\partial\Omega)$ (Veja o Teorema 1.3.3), obtendo $\parallel \gamma(\phi) \parallel_{L^2(\partial\Omega)} \leq \overline{K_1} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}}$ desde que $-\beta > \frac{1}{4}$, $\parallel \gamma(u) \parallel_{L^{2(\lambda_2+1)}(\partial\Omega)} \leq \overline{K_2} \parallel u \parallel_{X^\eta}$ para $\eta > \frac{1}{2} - \frac{1}{4(\lambda_2+1)}$ e $\parallel \gamma(u) \parallel_{L^2(\partial\Omega)} \leq \overline{K_3} \parallel u \parallel_{X^\eta}$ com $\eta > \frac{1}{4}$. E, resulta que:

$$\parallel G(u,\epsilon) \parallel_{X^\beta} \leq L_2 \overline{K}\, \overline{K_3}\, \overline{K_1} \parallel u \parallel_{X^\eta} + L_2 \overline{K}\, \overline{K_2}^{\lambda_2+1}\, \overline{K_1} \parallel u \parallel_{X^\eta} + \overline{K}\, \overline{K_1} \parallel g(\gamma(0)) \parallel_{L^2(\partial\Omega)},$$

provando que $(G_\epsilon)_\beta$ está bem definida e é limitada em conjuntos limitados de X^η, uniformemente em ϵ, para $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

Tratemos agora o caso $\epsilon = 0$. Para $u \in X^\eta$ e $\phi \in X^{-\beta}$,

$$
\begin{aligned}
| < G(u,0), \phi >_{\beta,-\beta} | &\leq \int_{I_1} | g(\gamma(u)) | | \gamma(\phi) | M_\pi(p) d\sigma(x) + \int_{I_2} | g(\gamma(u)) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) \\
&+ \int_{I_3} | g(\gamma(u)) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) + \int_{I_4} | g(\gamma(u)) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) \\
&\leq M_\pi(p) \int_{I_1} | g(\gamma(u)) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) + \int_{I_2} | g(\gamma(u)) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) \\
&+ \int_{I_3} | g(\gamma(u)) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) + \int_{I_4} | g(\gamma(u)) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) \\
&\leq M_\pi(p)(L_2 \overline{K_3}\, \overline{K_1} \parallel u \parallel_{X^\eta} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} + L_2 \overline{K_2}^{\lambda_2+1} \overline{K_1} \parallel u \parallel_{X^\eta} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} \\
&+ \overline{K_1} \parallel g(\gamma(0)) \parallel_{L^2(I_1)} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}}) \\
&+ L_2 \overline{K_3}\, \overline{K_1} \parallel u \parallel_{X^\eta} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} + L_2 \overline{K_2}^{\lambda_2+1} \overline{K_1} \parallel u \parallel_{X^\eta} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} \\
&+ \overline{K_1} \parallel g(\gamma(0)) \parallel_{L^2(I_2)} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} \\
&+ L_2 \overline{K_3}\, \overline{K_1} \parallel u \parallel_{X^\eta} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} + L_2 \overline{K_2}^{\lambda_2+1} \overline{K_1} \parallel u \parallel_{X^\eta} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} \\
&+ \overline{K_1} \parallel g(\gamma(0)) \parallel_{L^2(I_3)} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} \\
&+ L_2 \overline{K_3}\, \overline{K_1} \parallel u \parallel_{X^\eta} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} + L_2 \overline{K_2}^{\lambda_2+1} \overline{K_1} \parallel u \parallel_{X^\eta} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} \\
&+ \overline{K_1} \parallel g(\gamma(0)) \parallel_{L^2(I_4)} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}},
\end{aligned}
$$

sendo que as contas são análogas as do caso $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$. Daí,

$$
\begin{aligned}
\parallel G(u,0) \parallel_{X^\beta} &\leq (M_\pi(p) + 3)(L_2 \overline{K_3}\, \overline{K_1} \parallel u \parallel_{X^\eta} + L_2 \overline{K_2}^{\lambda_2+1} \overline{K_1} \parallel u \parallel_{X^\eta}) \\
&+ \overline{K_1}(M_\pi(p) \parallel g(\gamma(0)) \parallel_{L^2(I_1)} + \parallel g(\gamma(0)) \parallel_{L^2(I_2)} + \parallel g(\gamma(0)) \parallel_{L^2(I_3)} + \parallel g(\gamma(0)) \parallel_{L^2(I_4)}).
\end{aligned}
$$

E, segue que, $(G_0)_\beta$ está bem definida e é limitada em conjuntos limitados de X^η.

■

Lema 3.2.4 *Suponha que g satisfaz (3.5) e sejam p e q expoentes conjugados com* $\frac{1}{2\lambda_2} < p < \infty$. *Então, se* $\beta + 1 > \eta > \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{4(\lambda_2+1)}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4p\lambda_2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4q}\right\}$ *e* $-\frac{1}{2} \leq \beta < -\frac{1}{4}$, *a aplicação* $(G_\epsilon)_\beta : X^\eta \to X^\beta$ *é localmente Lipschitz contínua em u, com constante de Lipschitz independente de* ϵ *para* $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$.

Demonstração:

Sejam $u_1,\ u_2 \in X^\eta$, $\phi \in X^{-\beta}$ e $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$,

$$
\begin{aligned}
| & < G(u_1,\epsilon) - G(u_2,\epsilon), \phi >_{\beta,-\beta} | \\
\leq & \int_{\partial\Omega} | g(\gamma(u_1)) - g(\gamma(u_2)) | | \gamma(\phi) | |J_{\partial\Omega} h_\epsilon| d\sigma(x) \\
\leq & \overline{K} L_2 \int_{\partial\Omega} (1 + |\gamma(u_1)|^{\lambda_2} + |\gamma(u_2)|^{\lambda_2}) |\gamma(u_1) - \gamma(u_2)| |\gamma(\phi)| d\sigma(x) \\
\leq & \overline{K} L_2 \left(\int_{\partial\Omega} (1 + |\gamma(u_1)|^{\lambda_2} + |\gamma(u_2)|^{\lambda_2})^2 |\gamma(u_1) - \gamma(u_2)|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \| \gamma(\phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \\
\leq & \overline{K} L_2 \| \gamma(\phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \left(\int_{\partial\Omega} (1 + |\gamma(u_1)|^{\lambda_2} + |\gamma(u_2)|^{\lambda_2})^{2p} d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2p}} \left(\int_{\partial\Omega} |\gamma(u_1) - \gamma(u_2)|^{2q} d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2q}} \\
\leq & \overline{K} L_2 \| \gamma(\phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \| \gamma(u_1) - \gamma(u_2) \|_{L^{2q}(\partial\Omega)} (|\partial\Omega|^{\frac{1}{2p}} + \| \gamma(u_1) \|^{\lambda_2}_{L^{2p\lambda_2}(\partial\Omega)} + \| \gamma(u_2) \|^{\lambda_2}_{L^{2p\lambda_2}(\partial\Omega)}) \\
\leq & \overline{K} L_2 \overline{K_1} \| \phi \|_{X^{-\beta}} \overline{K_5} \| u_1 - u_2 \|_{X^\eta} (|\partial\Omega|^{\frac{1}{2p}} + \overline{K_4}^{\lambda_2} \| u_1 \|^{\lambda_2}_{X^\eta} + \overline{K_4}^{\lambda_2} \| u_2 \|^{\lambda_2}_{X^\eta}),
\end{aligned}
$$

onde usamos um raciocínio semelhante ao do Lema 3.2.3 anterior para estabelecer as desigualdades: $\| \gamma(\phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \overline{K_1} \| \phi \|_{X^{-\beta}}$, se $-\beta > \frac{1}{4}$, $\| \gamma(u) \|_{L^{2p\lambda_2}(\partial\Omega)} \leq \overline{K_4} \| u \|_{X^\eta}$ se $\eta > \frac{1}{2} - \frac{1}{4p\lambda_2}$ e $\| \gamma(u) \|_{L^{2q}(\partial\Omega)} \leq \overline{K_5} \| u \|_{X^\eta}$ desde que $\eta > \frac{1}{2} - \frac{1}{4q}$.

Dessa forma, se $u_1,\ u_2$ estão em um conjunto limitado U de X^η, $\| u \|_{X^\eta} \leq L$, $\forall u \in U$, temos

$$
\| G(u_1,\epsilon) - G(u_2,\epsilon) \|_{X^\beta} \leq \overline{K} L_2 \overline{K_1} (|\partial\Omega|^{\frac{1}{2p}} + 2\overline{K_4}^{\lambda_2} L^{\lambda_2}) \overline{K_5} \| u_1 - u_2 \|_{X^\eta},
$$

com $\overline{K} > 0$ independente de ϵ para $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$. Logo, $(G_\epsilon)_\beta$ é localmente Lipschitz em u com constante de Lipschitz independente de ϵ, para $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

Quanto a $G(u,0)$, analogamente ao caso anterior, temos para $u_1,\ u_2 \in X^\eta$ e $\phi \in X^{-\beta}$,

$$
\begin{aligned}
| & < G(u_1,0) - G(u_2,0), \phi >_{\beta,-\beta} | \\
\leq & \int_{I_1} | g(\gamma(u_1)) - g(\gamma(u_2)) | | \gamma(\phi) | M_\pi(p)\, d\sigma(x) + \int_{I_2} | g(\gamma(u_1)) - g(\gamma(u_2)) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) \\
+ & \int_{I_3} | g(\gamma(u_1)) - g(\gamma(u_2)) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) + \int_{I_4} | g(\gamma(u_1)) - g(\gamma(u_2)) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) \\
\leq & M_\pi(p) L_2 \overline{K_1} \| \phi \|_{X^{-\beta}} \overline{K_5} \| u_1 - u_2 \|_{X^\eta} (|I_1|^{\frac{1}{2p}} + \overline{K_4}^{\lambda_2} \| u_1 \|^{\lambda_2}_{X^\eta} + \overline{K_4}^{\lambda_2} \| u_2 \|^{\lambda_2}_{X^\eta}) \\
+ & L_2 \overline{K_1} \| \phi \|_{X^{-\beta}} \overline{K_5} \| u_1 - u_2 \|_{X^\eta} (|I_2|^{\frac{1}{2p}} + \overline{K_4}^{\lambda_2} \| u_1 \|^{\lambda_2}_{X^\eta} + \overline{K_4}^{\lambda_2} \| u_2 \|^{\lambda_2}_{X^\eta}) \\
+ & L_2 \overline{K_1} \| \phi \|_{X^{-\beta}} \overline{K_5} \| u_1 - u_2 \|_{X^\eta} (|I_3|^{\frac{1}{2p}} + \overline{K_4}^{\lambda_2} \| u_1 \|^{\lambda_2}_{X^\eta} + \overline{K_4}^{\lambda_2} \| u_2 \|^{\lambda_2}_{X^\eta}) \\
+ & L_2 \overline{K_1} \| \phi \|_{X^{-\beta}} \overline{K_5} \| u_1 - u_2 \|_{X^\eta} (|I_4|^{\frac{1}{2p}} + \overline{K_4}^{\lambda_2} \| u_1 \|^{\lambda_2}_{X^\eta} + \overline{K_4}^{\lambda_2} \| u_2 \|^{\lambda_2}_{X^\eta}).
\end{aligned}
$$

Portanto, se $u_1,\ u_2$ estão em um conjunto limitado U de X^η, $\| u \|_{X^\eta} \leq L$, $\forall u \in U$, então

$$
\| G(u_1,0) - G(u_2,0) \|_{X^\beta} \leq (M_\pi(p) + 3) L_2 \overline{K_1} (|\partial\Omega|^{\frac{1}{2p}} + 2\overline{K_4}^{\lambda_2} L^{\lambda_2}) \overline{K_5} \| u_1 - u_2 \|_{X^\eta}
$$

e, concluimos que $(G_0)_\beta$ é localmente Lipschitz em u com constante de Lipschitz independente de ϵ.

■

Teorema 3.2.5 *Suponha que f e g satisfazem (3.4) e (3.5), respectivamente, sejam β e η tais que $-\frac{1}{2} \leq \beta < -\frac{1}{4}$, $\beta + 1 > \eta > \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(\lambda_1+1)}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2p\lambda_1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4(\lambda_2+1)}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4p\lambda_2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4q}\right\}$ (ou $\beta + 1 > \eta > \frac{1}{2} - \delta$ com $\delta = \min\left\{\frac{1}{2(\lambda_1+1)}, \frac{1}{2p\lambda_1}, \frac{1}{4(\lambda_2+1)}, \frac{1}{4p\lambda_2}, \frac{1}{4q}\right\}$), com p e q conjugados, $\max\left\{\frac{1}{2\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_1}\right\} < p < \infty$ e $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Então, a aplicação $(H_\epsilon)_\beta = (F_\epsilon)_\beta + (G_\epsilon)_\beta : X^\eta \to X^\beta$ está bem definida, é limitada em conjuntos limitados de X^η, uniformemente em ϵ, e é localmente Lipschitz contínua em u com constante de Lipschitz independente de ϵ.*

Demonstração:

Tais propriedades para $(H_\epsilon)_\beta$ seguem imediatamente daquelas provadas para $(F_\epsilon)_\beta$ e $(G_\epsilon)_\beta$ nos Lemas 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 e 3.2.4.

■

Lema 3.2.6 *Suponha que f e g satisfazem (3.4) e (3.5), respectivamente, $-\frac{1}{2} \leq \beta < -\frac{1}{4}$ e $\beta + 1 > \eta > \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(\lambda_1+1)}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4(\lambda_2+1)}\right\}$. Então, a aplicação $(H_\epsilon)_\beta = (F_\epsilon)_\beta + (G_\epsilon)_\beta : X^\eta \to X^\beta$ é contínua em ϵ, no ponto $\epsilon = 0$, uniformemente para u em conjuntos limitados de X^η.*

Demonstração:

Como $(H_\epsilon)_\beta = (F_\epsilon)_\beta + (G_\epsilon)_\beta$, analisemos separadamente cada uma das funções que a compõe. Quanto à $(F_\epsilon)_\beta$,

$$< F(u,\epsilon), \phi >_{\beta,-\beta} = \int_\Omega f(u)\,\phi\,dx, \ \forall \phi \in X^{-\beta},$$

não aparecem termos dependendo de ϵ, de modo que a continuidade segue diretamente.

Agora, com relação a $(G_\epsilon)_\beta$, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, para $\phi \in X^{-\beta}$,

$$\begin{aligned}
< G(u,\epsilon), \phi >_{\beta,-\beta} &= \int_{\partial\Omega} g(\gamma(u))\,\gamma(\phi)\,|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|\,d\sigma(x) \\
&= \int_{I_1} g(\gamma(u))\,\gamma(\phi)\,|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|\,d\sigma(x) + \int_{I_2} g(\gamma(u))\,\gamma(\phi)\,|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|\,d\sigma(x) \\
&+ \int_{I_3} g(\gamma(u))\,\gamma(\phi)\,|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|\,d\sigma(x) + \int_{I_4} g(\gamma(u))\,\gamma(\phi)\,|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|\,d\sigma(x) \\
&= < (G_1 + G_2 + G_3 + G_4)(u,\epsilon), \phi >_{\beta,-\beta},
\end{aligned}$$

com G_i, G na porção I_i, $1 \leq i \leq 4$ e,

$$|J_{\partial\Omega} h_\epsilon(x_1,x_2)| = \begin{cases} \sqrt{1+cos^2(x_1/\epsilon)} & (x_1,x_2) \in I_1 = \{(x_1,1), 0 \leq x_1 \leq 1\}, \\ Jh_\epsilon & (x_1,x_2) \in I_2 = \{(1,x_2), 0 \leq x_2 \leq 1\}, \\ 1 & (x_1,x_2) \in I_3 = \{(x_1,0), 0 \leq x_1 \leq 1\}, \\ 1 & (x_1,x_2) \in I_4 = \{(0,x_2), 0 \leq x_2 \leq 1\}. \end{cases}$$

Analisemos a seguir $(G_\epsilon)_\beta$ na parte oscilante da fronteira $I_1 = \{(x_1,1) : 0 \leq x_1 \leq 1\}$, G_1,

$$\int_0^1 g(\gamma(u(x_1,1)))\gamma(\phi(x_1,1))\sqrt{1+cos^2(x_1/\epsilon)}dx_1$$

afinal, em I_3 e I_4, o resultado é imediato, pois não há dependência em ϵ e, na porção I_2 da fronteira temos,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 g(\gamma(u(1,x_2)))\gamma(\phi(1,x_2))Jh_\epsilon(1,x_2)dx_2 - \int_0^1 g(\gamma(u(1,x_2)))\gamma(\phi(1,x_2))dx_2 \right| \\ \leq & \int_0^1 |g(\gamma(u(1,x_2)))|\,|\gamma(\phi(1,x_2))|\,|Jh_\epsilon(1,x_2)-1|dx_2 \\ \leq & \parallel Jh_\epsilon - 1 \parallel_{L^\infty(0,1)} \int_0^1 |g(\gamma(u(1,x_2)))|\,|\gamma(\phi(1,x_2))|\,dx_2 \\ \leq & \parallel Jh_\epsilon - 1 \parallel_{L^\infty(0,1)} (L_2\,\overline{K_3}\,\overline{K_1} \parallel u \parallel_{X^\eta} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} \\ + & L_2\,\overline{K_2}^{\lambda_2+1}\,\overline{K_1} \parallel u \parallel_{X^\eta} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} \\ + & \overline{K_1} \parallel g(\gamma(0)) \parallel_{L^2(I_2)} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}}), \end{aligned}$$

em que utilizamos os cálculos no Lema 3.2.3. Dessa forma, em I_2, vemos que se u em limitados de X^η e $\parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} \leq 1$, como $Jh_\epsilon \to 1$ uniformemente em x quando $\epsilon \to 0$,

$$\parallel G_2(u,\epsilon) - G_2(u,0) \parallel_{X^\beta} \to 0, \text{ quando } \epsilon \to 0,$$

com $< G_2(u,0),\phi >_{\beta,-\beta} = \int_0^1 g(\gamma(u(1,x_2)))\gamma(\phi(1,x_2))dx_2$.

Retomando o estudo em I_1, sabemos que a função $p(x_1) = \sqrt{1+cos^2(x_1)}$ é periódica de período π. Do teorema de convergência na média (ver o Teorema 1.5.7), $p_\epsilon(x_1) = p(x_1/\epsilon)$ é tal que $p_\epsilon \rightharpoonup M_\pi(p)$ fraco* em $L^\infty(0,1)$, isto é,

$$\int_0^1 p_\epsilon(x_1)\,\varphi(x_1)\,dx_1 \to \int_0^1 M_\pi(p)\,\varphi(x_1)\,dx_1, \ \forall \varphi \in L^1(0,1),$$

sendo $M_\pi(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{1+cos^2(y)}dy$. Consequentemente,

$$< G_1(u,\epsilon),\phi >_{\beta,-\beta} \to < G_1(u,0),\phi >_{\beta,-\beta}, \ \forall\, \phi \in X^{-\beta},$$

onde $< G_1(u,0), \phi >_{\beta,-\beta} = \int_0^1 M_\pi(p) g(\gamma(u(x_1,1)))\gamma(\phi(x_1,1))dx_1$.

Além disso, demonstramos que $(G_\epsilon)_\beta$ é limitada em conjuntos limitados de X^η, uniformemente em ϵ, $-\frac{1}{2} \leq \beta < -\frac{1}{4}$. Assim, se $B \subset X^\eta$ é limitado, $\{G_1(u,\epsilon) : u \in B, 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0\}$ é limitado em $X^{\beta'}$ com $\beta' > \beta$ ainda $-\frac{1}{2} \leq \beta' < -\frac{1}{4}$. Daí, como a inclusão de $X^{\beta'} \subset X^\beta$ é compacta e são espaços de Banach, existe uma subsequência $\epsilon_{n_k} \to 0$ tal que $G_1(u, \epsilon_{n_k}) \to z$ em X^β para cada $u \in B$.

Por outro lado, conforme vimos,

$$< G_1(u,\epsilon_{n_k}), \phi >_{\beta,-\beta} \to < G_1(u,0), \phi >_{\beta,-\beta}, \ \forall\, \phi \in X^{-\beta}.$$

Logo, $z = G_1(u,0)$ e, portanto, $G_1(u,\epsilon_{n_k}) \to G_1(u,0)$ em X^β para cada $u \in B$.

Consideremos $\eta' < \eta$ no intervalo conveniente, i a inclusão de X^η em $X^{\eta'}$. Segue que $i(B)$ é um conjunto compacto de $X^{\eta'}$. Dado $\rho > 0$, para $u \in i(B)$, existem vizinhança V_u de u em $X^{\eta'}$ e $\delta_u > 0$ tais que,

$$\| G_1(v,\epsilon) - G_1(v,0) \|_{X^\beta} \leq \rho,$$

se $0 \leq \epsilon \leq \delta_u \leq \epsilon_0$ e $v \in V_u$ afinal,

$$\| G_1(v,\epsilon) - G_1(v,0) \|_{X^\beta} \leq \| G_1(v,\epsilon) - G_1(u,\epsilon) \|_{X^\beta} + \| G_1(u,0) - G_1(v,0) \|_{X^\beta} + \| G_1(u,\epsilon) - G_1(u,0) \|_{X^\beta}$$

e $(G_\epsilon)_\beta$ é contínua em $V_u \times I_0$, $I_0 = [0, \delta_u]$ pequeno intervalo contendo 0. Vale lembrar que $(G_\epsilon)_\beta$ é localmente Lipschitz contínua em u, uniformemente em ϵ.

Como $i(B)$ é compacto, existem $u_1, ..., u_n \in i(B)$ tais que $\cup_{i=1}^n V_{u_i} \supset i(B)$. Seja $\delta = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \delta_{u_i}$. Então, se $0 \leq \epsilon \leq \delta$,

$$\| G_1(v,\epsilon) - G_1(v,0) \|_{X^\beta} \leq \rho, \ \forall\, v \in i(B).$$

Agora, como conjunto $i(B) = B$ e, temos que para $0 \leq \epsilon \leq \delta$,

$$\| G_1(v,\epsilon) - G_1(v,0) \|_{X^\beta} \leq \rho, \ \forall\, v \in B.$$

Logo, reunindo todas as considerações, concluimos que $(H_\epsilon)_\beta$ é contínua em $\epsilon = 0$ uniformemente em u para u em limitados de X^η.

■

Teorema 3.2.7 *Suponhamos que f e g satisfazem (3.4) e (3.5), respectivamente, sejam β e η como no Teorema 3.2.5 e $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Então, para qualquer $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times X^\eta$, o problema (3.1) possui uma única solução local $u(t, t_0, u_0, \epsilon)$ com valor inicial $u(t_0) = u_0$.*

Demonstração:

Já sabemos que $(A_\epsilon)_\beta$ é um operador setorial em X_ϵ^β com domínio $X_\epsilon^{\beta+1}$. De acordo com o Teorema 3.2.5, $(H_\epsilon)_\beta$ está bem definida, é localmente Lipschitz contínua e limitada em limitados. Portanto, a afirmação segue do Teorema 1.14.3.

∎

Proposição 3.2.8 *Se $b > 0$ é tal $\Re(\sigma(A_\epsilon)) > b$, vale a seguinte estimativa para $\alpha \geq 0$, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$,*

$$\| (A_\epsilon)_\beta^\alpha e^{(A_\epsilon)_\beta t} \|_{\mathcal{L}(X^\beta)} \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-bt}, \ t > 0,$$

onde $0 < C_\alpha < \infty$ é uma constante que depende do setor e da constante na desigualdade do resolvente para $\{A_\epsilon\}_{0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0}$.

Demonstração: Segue dos Teoremas 1.13.4 e 3.1.1.

Lema 3.2.9 *Sejam β e η como no Teorema 3.2.7 e, adicionalmente, $\eta < \frac{1}{2}$ e $t > 0$ fixo. Então,*

$$\| (e^{-(A_\epsilon)_\beta t} - e^{-(A)_\beta t}) u \|_{X^\eta} \to 0 \text{ quando } \epsilon \to 0, \textit{ uniformemente para u em limitados de } X^\beta.$$

Demonstração:

Pelo Teorema 3.1.1, é possível estabelecer um setor comum, $S_{b,\phi}$, à família $\{(A_\epsilon)_\beta\}_{0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0}$ e de acordo com a Observação 2.3.6, temos que $\| (\lambda - (A_\epsilon)_\beta)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)} \leq \left(1 + \frac{|\lambda| \sqrt{2}}{|\lambda - b|}\right)$, $\forall \lambda \in S_{b,\phi}, 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Seja Γ um contorno em -$S_{b,\phi}$ com $arg(\lambda) \to \pm\theta$ quando $|\lambda| \to \infty$ para algum $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi - \phi)$. Temos que,

$$\| (e^{-(A_\epsilon)_\beta t} - e^{-(A)_\beta t} u) \|_{X^\eta} = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} ((\lambda + (A_\epsilon)_\beta)^{-1} - (\lambda + (A)_\beta)^{-1}) u \, d\lambda \right\|_{X^\eta}.$$

Consideremos um compacto K em $\mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \leq R$, $\forall \lambda \in K$, com $R > b > 0$. Então,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} ((\lambda + (A_\epsilon)_\beta)^{-1} - (\lambda + (A)_\beta)^{-1}) u \, d\lambda \right\|_{X^\eta} &= \| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \cap K} e^{\lambda t} ((\lambda + (A_\epsilon)_\beta)^{-1} - (\lambda + (A)_\beta)^{-1}) u \, d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus (\Gamma \cap K)} e^{\lambda t} ((\lambda + (A_\epsilon)_\beta)^{-1} - (\lambda + (A)_\beta)^{-1}) u \, d\lambda \, \|_{X^\eta}. \end{aligned}$$

Analisemos, primeiramente, a parcela em $\Gamma \setminus (\Gamma \cap K)$. Seja $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\backslash(\Gamma\cap K)} e^{\lambda t}((\lambda+(A_\epsilon)_\beta)^{-1}-(\lambda+(A)_\beta)^{-1})ud\lambda\right\|_{X^\eta} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma\backslash(\Gamma\cap K)} \|\, ((\lambda+(A_\epsilon)_\beta)^{-1}-(\lambda+(A)_\beta)^{-1})u\,\|_{X^\eta}\,\cdot\\ &\cdot\;\; e^{\Re(\lambda)t}|\,d\lambda\,|\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma\backslash(\Gamma\cap K)} 2\left(1+\frac{|\lambda|\sqrt{2}}{|\lambda-b|}\right)e^{\Re(\lambda)t}|\,d\lambda\,|\,\|\,u\,\|_{X^\beta}\\ &\leq \frac{\tilde{C}}{\pi}\int_{\Gamma\backslash(\Gamma\cap K)} e^{\Re(\lambda)t}|\,d\lambda\,|\,\|\,u\,\|_{X^\beta}\,. \end{aligned}\tag{3.6}$$

onde $\tilde{C}>0$ é uma constante, pois para λ fora do compacto K de raio R suficientemente grande, o quociente $\frac{|\lambda|}{|\lambda-b|}$ pode ser aproximado por uma constante. Com relação a integral que aparece em (3.6), parametrizando a curva Γ pelo comprimento de arco $\gamma:]-\infty,+\infty[\to\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma\backslash(\Gamma\cap K)} e^{\Re(\lambda)t}|\,d\lambda| &\leq \int_{\Gamma} e^{\Re(\lambda)t}|\,d\lambda|\\ &= \left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{+\infty}\right)e^{\Re(\gamma(s))t}ds\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\int_{-x}^{0}+\int_{0}^{x}\right)e^{\Re(\gamma(s))t}ds\\ &= 2\lim_{x\to\infty}\int_{0}^{x} e^{\Re(\gamma(s))t}ds.\end{aligned}$$

Agora, podemos escrever, $\gamma(s)=\gamma(s_0)+\int_{s_0}^{s}\gamma'(t)dt$, com s_0 fixado. Segue que, $\Re(\gamma(s))=\Re(\gamma(s_0))+\int_{s_0}^{s}\Re(\gamma'(t))dt$. Considerando um ângulo θ' tal que $\frac{\pi}{2}<\theta'<\theta$, temos que $\Re(\gamma'(s))\leq -cos(\pi-\theta')$ e, consequentemente, $\Re(\gamma(s))\leq\Re(\gamma(s_0))-cos(\pi-\theta')(s-s_0)$. Isso mostra a convergência da integral de $e^{\Re(\gamma(\lambda))}$ em Γ no infinito e, portanto, se tomarmos R suficientemente grande, a parte da integral em $\Gamma\setminus(\Gamma\cap K)$ fica arbitrariamente pequena, por exemplo, menor do que $\frac{\delta\pi}{\tilde{C}}$ para $\delta>0$ tão pequeno quanto se queira. Daí, obtemos uma limitação por δ, independente de ϵ, em (3.6), considerando, sem perda de generalidade, $\|\,u\,\|_{X^\beta}<1$.

Por fim, examinemos a parcela em $\Gamma\cap K$. Recordemos que, pelo Teorema 2.4.3, $\|\,((\lambda+(A_\epsilon)_\beta)^{-1}-(\lambda+(A)_\beta)^{-1})u\,\|_{X^\eta}\to 0$ quando $\epsilon\to 0$, uniformemente em u em limitados de X^β e em λ para λ em compactos. Segue disso que, podemos limitar, uniformemente em λ e em ϵ, o integrando. De fato, $\|\,(\lambda+(A_\epsilon)_\beta)^{-1}-(\lambda+(A)_\beta)^{-1}\,\|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\eta)}\leq M'$, para $\forall\lambda\in\Gamma\cap K$. E, de $\Re(\lambda)<|\lambda|<R$, temos $e^{\Re(\lambda)t}<e^{Rt}$. Portanto, pelo Teorema de Convergência Dominada, a integral em $\Gamma\cap K$ converge a zero quando ϵ tende a zero.

Tais considerações nos permitem concluir o desejado.

Sabemos que a integral faz sentido devido ao Teorema 1.12.14. Agora, vamos estimá - la de modo que a dependência em t fique explícita. Comecemos por estimar o seguinte,

$$\| (\lambda - (A)_\beta)^{-1}u \|_{X^\eta} = \| (A)_\beta^{\eta-\beta}(\lambda - (A)_\beta)^{-1}u \|_{X^\beta} .$$

Façamos $x = (\lambda + (A)_\beta)^{-1}(A)_\beta^\beta u$. Então, $(A)_\beta^{\eta-\beta}x = (A)_\beta^{\eta-\beta}(\lambda + (A)_\beta)^{-1}(A)_\beta^\beta u = (A)_\beta^\eta(\lambda + (A)_\beta)^{-1}u$ com

$$\begin{aligned}
\| (A)_\beta^\eta(\lambda + (A)_\beta)^{-1}u \|_{X^\beta} &= \| (A)_\beta^{\eta-\beta}(A)_\beta^\beta(\lambda + (A)_\beta)^{-1}u \|_{X^\beta} \\
&\leq C \| (A)_\beta(\lambda + (A)_\beta)^{-1}(A)_\beta^\beta u \|_{X^\beta}^{\eta-\beta} \| (\lambda + (A)_\beta)^{-1}(A)_\beta^\beta u \|_{X^\beta}^{1-\eta+\beta} \\
&\leq C\left(1 + \frac{|\lambda|\sqrt{2}}{|\lambda - b|} \| u \|_{X^{2\beta}}\right)^{\eta-\beta}\left(\frac{\sqrt{2}}{|\lambda - b|} \| u \|_{X^{2\beta}}\right)^{1-\eta+\beta} \\
&\leq C\left(1 + \frac{|\lambda|\sqrt{2}}{|\lambda - b|}\right)^{\eta-\beta} \| u \|_{X^\beta}^{\eta-\beta}\left(\frac{\sqrt{2}}{|\lambda - b|}\right)^{1-\eta+\beta} \| u \|_{X^\beta}^{1-\eta+\beta} \\
&\leq \tilde{C}\frac{|\lambda|^{\eta-\beta}}{|\lambda - b|} \| u \|_{X^\beta},
\end{aligned}$$

onde empregamos o Teorema 1.13.5, C e $\tilde{C}$ constantes positivas.

Vejamos,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \| e^{\lambda t}((\lambda + (A_\epsilon)_\beta)^{-1} - (\lambda + (A)_\beta)^{-1})u \|_{X^\eta} |d\lambda| &\leq 2\int_\Gamma \| e^{\lambda t}(\lambda + (A)_\beta)^{-1}u \|_{X^\eta} |d\lambda| \\
&\leq 2\int_\Gamma |e^{\lambda t}| \| (A)_\beta^{\eta-\beta}(\lambda + (A)_\beta)^{-1}u \|_{X^\beta} |d\lambda| \\
&\leq 2\tilde{C}\int_\Gamma |e^{\lambda t}|\frac{|\lambda|^{\eta-\beta}}{|\lambda - b|} \| u \|_{X^\beta} |d\lambda| \\
&\leq 2\tilde{C}\int_\Gamma |e^{\mu}|\frac{|\mu|^{\eta-\beta}}{|\mu - bt|}\frac{1}{t^{\eta-\beta}}|d\mu| \| u \|_{X^\beta} \qquad (3.7)\\
&\leq \bar{C}\frac{1}{t^{\eta-\beta}} \| u \|_{X^\beta} .
\end{aligned}$$

■

3.3 Existência global das soluções

Nesta seção, demonstramos que as soluções do problema (3.1), dadas pelo Teorema 3.2.7, estão definidas globalmente sob determinadas hipóteses adicionais em f e em g. Além disso, provamos a continuidade das soluções em relação à ϵ, no ponto $\epsilon = 0$, em X^η, com η em um intervalo adequado.

Além das hipóteses anteriores em (3.4) e (3.5), suponhamos que existem constantes c_0, d_0, d_0', com $d_0 > d_0'$, tais que,

$$\lim_{|u|\to\infty} \sup \frac{f(u)}{u} \leq c_0 \tag{3.8}$$

e,

$$\lim_{|u|\to\infty} \sup \frac{g(u)}{u} \leq d_0'. \tag{3.9}$$

E o primeiro autovalor μ_1 do problema

$$\begin{cases} -Jh_\epsilon h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u + (Jh_\epsilon a - c_0)u = \mu u \text{ em } \Omega, \\ h_\epsilon^* \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_\epsilon}} h_\epsilon^{*-1} u = d_0 u \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.10}$$

é maior do que uma constante positiva B independente de ϵ, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$.

Observação 3.3.1 *É importante observarmos que tal hipótese sobre o primeiro autovalor ser maior do que uma constante positiva independente de ϵ é razoável, pois se c_0 e d_0 forem ambos iguais a 0, por exemplo, a desigualdade pode ser obtida usando a limitação inferior do operador A_ϵ como no Lema 2.3.1. Além disso, a desigualdade continua válida se $c_0 < 0$ e $d_0 > 0$ pequeno, pois pelo Teorema 1.5.1.10 em [9], existe uma constante K, independente de ϵ, tal que*

$$\int_{\partial\Omega} |\gamma u|^2 d\sigma \leq K \left[\delta^{\frac{1}{2}} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \delta^{-\frac{1}{2}} \int_\Omega |u|^2 dx \right], \quad \forall u \in H^1(\Omega), \delta \in]0,1[,$$

donde se $d_0 > 0$,

$$-d_0 \int_{\partial\Omega} |\gamma u|^2 d\sigma \geq -d_0 K \left[\delta^{\frac{1}{2}} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \delta^{-\frac{1}{2}} \int_\Omega |u|^2 dx \right], \quad \forall u \in H^1(\Omega), \delta \in]0,1[.$$

Assim, basta que d_0 seja pequeno o suficiente de modo que ainda tenhamos a desigualdade desejada. Notemos também que d_0 pode, inclusive, ser grande se c_0 for negativo com valor absoluto grande. E, c_0 pode ser positivo, desde que pequeno, uma vez que temos a constante a para compensar. Vale recordar que os termos $|Jh_\epsilon|$ e $|J_{\partial\Omega} h_\epsilon|$ são limitados superior e inferiormente.

Observação 3.3.2 *Outro ponto importante é que analisando, essencialmente, a porção oscilante da fronteira I_1 em que $|J_{I_1} h_\epsilon| = \sqrt{1 + cos^2(x_1/\epsilon)}$, temos $1 \leq |J_{I_1} h_\epsilon| \leq \sqrt{2}$, daí se $d_0 > 0$, segue que*

$$-d_0 \int_{\partial\Omega} |u|^2 |J_{\partial\Omega} h_\epsilon| d\sigma \geq -d_0 \int_{\partial\Omega} |u|^2 \sqrt{2} d\sigma.$$

Então, admitindo a continuidade dos autovalores, bastaria supor que o primeiro autovalor do problema com $\epsilon = 0$

$$\begin{cases} -\Delta_\Omega u + (a - c_0)u = \mu u \ em\, \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial N_\Omega} u = d_0 \sqrt{2} u \ em\, I_1 \\ \qquad\quad = d_0 u, \ em\, I_2, I_3, I_4, \end{cases}$$

é maior do que uma constante positiva.

Como o primeiro autovalor de (3.10) satisfaz:

$$\lambda_0(\epsilon) = \inf_{u \in H^1(\Omega)} \frac{< -Jh_\epsilon h_\epsilon^* \Delta_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u + (Jh_\epsilon a - c_0)u, u >}{\| u \|^2_{L^2(\Omega)}}, \tag{3.11}$$

sendo positivo maior do que B, ao desenvolver a expressão em (3.11), encontramos,

$$\begin{aligned} B\int_\Omega u^2 dx \quad &\leq \quad \int_\Omega h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) \cdot h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) Jh_\epsilon(x) dx - d_0 \int_{\partial\Omega} u^2(x,t) J_{\partial\Omega} h_\epsilon(x) dx \\ &+ \quad a\int_\Omega u^2(x,t) Jh_\epsilon(x) dx - c_0 \int_\Omega u^2(x,t) dx. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Para provarmos existência global, trabalharemos no "espaço de energia" natural $H^1(\Omega)$ ($\eta = \frac{1}{2}$ e $\beta < \frac{-1}{4}$).

Lema 3.3.3 *Suponha que valem as hipóteses do Teorema 3.2.7 e f e g satisfazem as condições dissipativas (3.8) e (3.9), respectivamente. Seja $V_\epsilon : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\begin{aligned} V_\epsilon(u) \quad &= \quad \frac{1}{2}\int_\Omega h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) \cdot h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) Jh_\epsilon(x) dx + \frac{a}{2}\int_\Omega u(x,t)^2 Jh_\epsilon(x) dx \\ &- \quad \int_\Omega F(u(x,t))\, dx - \int_{\partial\Omega} G(\gamma(u)) |J_{\partial\Omega} h_\epsilon(x)| dS,\ 0 < \epsilon \leq \epsilon_0, \end{aligned} \tag{3.13}$$

e,

$$\begin{aligned} V_0(u) \quad &= \quad \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla_\Omega u(x,t) \cdot \nabla_\Omega u(x,t) dx + \frac{a}{2}\int_\Omega u(x,t)^2 dx \\ &- \quad \int_\Omega F(u(x,t))\, dx - \int_{I_1} G(\gamma(u)) M_\pi(p) dS - \int_{I_2} G(\gamma(u)) dS - \int_{I_3} G(\gamma(u)) dS - \int_{I_4} G(\gamma(u)) dS, \end{aligned}$$

onde a é um número positivo , F e $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são as primitivas de f e g, respectivamente. Então, se $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, V_ϵ é um funcional de Lyapunov para (3.1) e existem constantes positivas R_1, R_2,$\tilde{R}_1$ e $\tilde{R}_2$ tais que,

$$V_\epsilon(u) \ \leq\ R_1 \| u \|^2_{H^1(\Omega)} + R_2,\ \ \forall u \in H^1(\Omega), \tag{3.14}$$

e,

$$V_\epsilon(u) \ \geq\ \tilde{R}_1 \| u \|^2_{H^1(\Omega)} - \tilde{R}_2,\ \ \forall u \in H^1(\Omega). \tag{3.15}$$

Demonstração:

Comecemos pelo caso $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$. Pela expressão de V_ϵ, usando que F e G são contínuas, vemos que trata-se de uma função contínua e, se u é uma solução de (3.1) em $H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_\epsilon(u(t)) \quad &= \quad \int_\Omega h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) \cdot h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u_t(x,t) Jh_\epsilon(x) dx + a\int_\Omega u(x,t) u_t(x,t) Jh_\epsilon(x)\, dx \\ &- \quad \int_\Omega f(u(x,t)) u_t(x,t)\, dx - \int_{\partial\Omega} g(\gamma(u)) u_t(x,t) |J_{\partial\Omega} h_\epsilon(x)|\, dS \\ &= \quad -\int_\Omega u_t(x,t) u_t(x,t)\, dx \\ &= \quad -\| u_t \|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

onde usamos a formulação fraca do problema. Logo, V_ϵ é decrescente ao longo das soluções de (3.1).

Além disso, se $u(t)$ é uma solução de (3.1) e $V_\epsilon(u(t)) = V_\epsilon(u_0)$, $\forall t \geq 0$, com $u_0 \in H^1(\Omega)$, então

$$\frac{d}{dt}V_\epsilon(u(t)) = \frac{d}{dt}V_\epsilon(u_0) = 0,$$

o que significa que $\| u_t \|^2_{L^2(\Omega)} = 0$ e u é um equilíbrio de (3.1).

Provamos assim que V_ϵ, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, é uma função de Lyapunov para o fluxo gerado por (3.1). Restam as estimativas para V_ϵ.

Por (3.8), existem $\varepsilon_f > 0$ e $M(\varepsilon_f) > 0$ tais que $\frac{f(s)}{s} - c_0 \leq \varepsilon_f$ para $|s| > M(\varepsilon_f)$. E, como f é contínua e $|s| \leq M(\varepsilon_f)$ é compacto, vale que $f(s) \leq k_f$ para $|s| \leq M(\varepsilon_f)$, sendo k_f uma constante. Consequentemente, se $s > 0$, $f(s) \leq (\varepsilon_f + c_0)s + k_f$ e,

$$\int_\Omega F(u)\,dx = \int_\Omega \left(\int_0^u f(s)\,ds \right) dx \leq \int_\Omega \left(\int_0^u \varepsilon_f s + c_0 s + k_f\,ds \right) dx \leq \frac{c_0}{2} \int_\Omega |u|^2\,dx + k_0.$$

Podemos repetir o mesmo raciocínio para $s < 0$. E, por (3.9), existem $\varepsilon_g > 0$ e $N(\varepsilon_g) > 0$ tais que $\frac{g(s)}{s} - d_0' \leq \varepsilon_g$ para $|s| > N(\varepsilon_g)$. Analogamente,

$$\int_{\partial\Omega} G(\gamma(u))|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|\,dS \leq \frac{d_0'}{2} \int_{\partial\Omega} |\gamma(u)|^2 |J_{\partial\Omega}h_\epsilon| dS + k_0'.$$

Daí, se $\overline{K} > 0$ é a constante que, como no Lema 3.2.3, limita $|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|$,

$$\begin{aligned}
V_\epsilon(u) &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) \cdot h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) J h_\epsilon(x) dx + \frac{a}{2}\int_\Omega u(x,t)^2 J h_\epsilon(x) dx \\
&+ \frac{|c_0|}{2}\int_\Omega |u|^2 dx + |k_0| + \frac{|d_0'|}{2}\int_{\partial\Omega} |\gamma(u)|^2 |J_{\partial\Omega}h_\epsilon(x)| dS + |k_0'| \\
&\leq \frac{C}{2} \| u \|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{|c_0|}{2} \| u \|^2_{L^2(\Omega)} + |k_0| + \frac{\overline{K}|d_0'|}{2} \| \gamma(u) \|^2_{L^2(\partial\Omega)} + |k_0'| \\
&\leq \frac{C}{2} \| u \|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{|c_0|}{2} \| u \|^2_{L^2(\Omega)} + |k_0| + \frac{\overline{K}|d_0'|}{2} \| u \|^2_{L^2(\Omega)} + |k_0'|,
\end{aligned}$$

em que usamos a Observação 2.3.2. Assim, conseguimos limitar superiormente $V_\epsilon(u)$ pela norma $\| u \|_{H^1(\Omega)}$ e por constantes dependendo essencialmente das não linearidades, para $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

Por outro lado, se λ_0 é o primeiro autovalor de (3.10) e $\lambda_0(\epsilon) > B$, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, por (3.12),

$$\begin{aligned}
B\int_\Omega u^2 dx &\leq \int_\Omega h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) \cdot h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) J h_\epsilon(x) dx - d_0 \int_{\partial\Omega} u^2(x,t) J_{\partial\Omega} h_\epsilon(x) dx \\
&+ a\int_\Omega u^2(x,t) J h_\epsilon(x) dx - c_0 \int_\Omega u^2(x,t) dx.
\end{aligned}$$

Como $d_0 > d_0'$, podemos escolher $d_0'' \neq 0$ tal que

$$d_0 > d_0'' > d_0' \ \text{ e } \left(\frac{d_0}{d_0''} - 1 \right) \frac{C_2 - c_0}{2} + \frac{B}{2} > 0,$$

sendo C_1 e C_2 as constantes que aparecem em (2.27) na demonstração do Lema 2.3.1 e, aplicando tal resultado,

$$\begin{aligned}
V_\epsilon(u) &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega h_\epsilon^*\nabla_{\Omega_\epsilon}h_\epsilon^{*-1}u(x,t)\cdot h_\epsilon^*\nabla_{\Omega_\epsilon}h_\epsilon^{*-1}u(x,t)Jh_\epsilon(x)dx + \frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 Jh_\epsilon(x)dx\\
&- \frac{c_0}{2}\int_\Omega |u|^2dx - \frac{d_0'}{2}\int_{\partial\Omega}|\gamma(u)|^2|J_{\partial\Omega}h_\epsilon(x)|dS - (k_0+k_0')\\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega h_\epsilon^*\nabla_{\Omega_\epsilon}h_\epsilon^{*-1}u(x,t)\cdot h_\epsilon^*\nabla_{\Omega_\epsilon}h_\epsilon^{*-1}u(x,t)Jh_\epsilon(x)dx + \frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 Jh_\epsilon(x)dx\\
&- \frac{c_0}{2}\int_\Omega |u|^2dx - \frac{d_0''}{2}\int_{\partial\Omega}|\gamma(u)|^2|J_{\partial\Omega}h_\epsilon(x)|dS - (k_0+k_0')\\
&= \frac{d_0''}{d_0}\left[\frac{d_0}{d_0''}\frac{1}{2}\int_\Omega h_\epsilon^*\nabla_{\Omega_\epsilon}h_\epsilon^{*-1}u(x,t)\cdot h_\epsilon^*\nabla_{\Omega_\epsilon}h_\epsilon^{*-1}u(x,t)Jh_\epsilon(x)dx + \frac{d_0}{d_0''}\frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 Jh_\epsilon(x)dx\right]\\
&+ \frac{d_0''}{d_0}\left[-\frac{d_0}{d_0''}\frac{c_0}{2}\int_\Omega |u|^2dx - \frac{d_0}{2}\int_{\partial\Omega}|\gamma(u)|^2|J_{\partial\Omega}h_\epsilon(x)|dS - \frac{d_0}{d_0''}(k_0+k_0')\right]\\
&= \frac{d_0''}{d_0}\left[\left(\frac{d_0}{d_0''}-1\right)\frac{1}{2}\int_\Omega h_\epsilon^*\nabla_{\Omega_\epsilon}h_\epsilon^{*-1}u(x,t)\cdot h_\epsilon^*\nabla_{\Omega_\epsilon}h_\epsilon^{*-1}u(x,t)Jh_\epsilon(x)dx\right]\\
&+ \frac{d_0''}{d_0}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega h_\epsilon^*\nabla_{\Omega_\epsilon}h_\epsilon^{*-1}u(x,t)\cdot h_\epsilon^*\nabla_{\Omega_\epsilon}h_\epsilon^{*-1}u(x,t)Jh_\epsilon(x)dx + \left(\frac{d_0}{d_0''}-1\right)\frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 Jh_\epsilon(x)dx\right]\\
&+ \frac{d_0''}{d_0}\left[\frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 Jh_\epsilon(x)dx - \left(\frac{d_0}{d_0''}-1\right)\frac{c_0}{2}\int_\Omega |u|^2dx - \frac{c_0}{2}\int_\Omega |u|^2dx\right]\\
&+ \frac{d_0''}{d_0}\left[-\frac{d_0}{2}\int_{\partial\Omega}|\gamma(u)|^2|J_{\partial\Omega}h_\epsilon(x)|dS - \frac{d_0}{d_0''}(k_0+k_0')\right]\\
&\geq \frac{d_0''}{d_0}\left[\left(\frac{d_0}{d_0''}-1\right)\frac{C_1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx + \left(\left(\frac{d_0}{d_0''}-1\right)\frac{C_2-c_0}{2}+\frac{B}{2}\right)\int_\Omega |u|^2dx - \frac{d_0}{d_0''}(k_0+k_0')\right].
\end{aligned}$$

Assim, $V_\epsilon(u)$ é limitado inferiormente por uma constante positiva dependendo das não linearidades e do primeiro autovalor de (3.10) vezes $\| u \|^2_{H^1(\Omega)}$ mais uma constante que depende das não linearidades, para $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$. Portanto, $|V_\epsilon(u)| \to \infty$ quando $\| u \|_{H^1(\Omega)} \to \infty$, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

Por fim, no caso de $\epsilon = 0$,

$$\begin{aligned}
V_0(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla_\Omega u(x,t)\cdot\nabla_\Omega u(x,t)dx + \frac{a}{2}\int_\Omega u(x,t)^2dx\\
&- \int_\Omega F(u(x,t))\,dx - \int_{I_1} G(\gamma(u))M_\pi(p)dS - \int_{I_2} G(\gamma(u))dS - \int_{I_3} G(\gamma(u))dS - \int_{I_4} G(\gamma(u))dS,
\end{aligned}$$

e,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V_0(u(t)) &= \int_\Omega \nabla_\Omega u(x,t)\cdot\nabla_\Omega u_t(x,t)dx + a\int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)dx \\
&- \int_\Omega f(u(x,t))u_t(x,t)\,dx - \int_{I_1} g(\gamma(u))u_t(x,t)M_\pi(p)dS - \int_{I_2} g(\gamma(u))u_t(x,t)dS \\
&- \int_{I_3} g(\gamma(u))u_t(x,t)dS - \int_{I_4} g(\gamma(u))u_t(x,t)dS \\
&= -\int_\Omega u_t(x,t)u_t(x,t)dx \\
&= -\parallel u_t \parallel^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Segue que V_0 é decrescente ao longo das soluções de (3.1) com $\epsilon = 0$. Se $u(t)$ é uma solução de (3.1) com $\epsilon = 0$ e $V_0(u(t)) = V_0(u_0), \forall t \geq 0$, com $u_0 \in H^1(\Omega)$,

$$
\frac{d}{dt}V_0(u(t)) = \frac{d}{dt}V_0(u_0) = 0,
$$

donde $\parallel u_t \parallel^2_{L^2(\Omega)} = 0$ e u é um equilíbrio de (3.1). Logo, V_0 é um funcional de Lyapunov para o fluxo gerado por (3.1) com $\epsilon = 0$.

Analogamente ao que foi feito acima para $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, temos

$$
\int_\Omega F(u)\,dx \leq \frac{c_0}{2}\int_\Omega |u|^2 dx + k_0
$$

e,

$$
\int_{I_1} G(\gamma(u))\,M_\pi(p)dS + \int_{I_2+I_3+I_4} G(\gamma(u))dS \leq \frac{d_0' M_\pi(p)}{2}\int_{I_1} |\gamma(u)|^2 dS + k_0'' + \frac{d_0'}{2}\int_{I_2+I_3+I_4} |\gamma(u)|^2 dS + k_0'''.
$$

Aplicando, como antes, o Lema 2.3.3,

$$
V_0(u) \leq \frac{D}{2}\parallel u \parallel^2_{H^1(\Omega)} + \frac{|c_0|}{2}\parallel u \parallel^2_{L^2(\Omega)} + |k_0| + \frac{|d_0'|(M_\pi(p)+1)}{2}\parallel u \parallel^2_{L^2(\Omega)} + |k_0''| + |k_0'''|.
$$

Quanto a limitação inferior,

$$
\begin{aligned}
V_0(u(t)) &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla_\Omega u(x,t)\cdot\nabla_\Omega u(x,t)dx + \frac{a}{2}\int_\Omega u(x,t)^2 dx \\
&- \frac{c_0}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{d_0' M_\pi(p)}{2}\int_{I_1} |\gamma(u)|^2 dS - \frac{d_0'}{2}\int_{I_2+I_3+I_4} |\gamma(u)|^2 dS - (k_0 + k_0'' + k_0''') \\
&\geq \frac{d_0''}{d_0}\left[\left(\frac{d_0}{d_0''} - 1\right)\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \left(\left(\frac{d_0}{d_0''} - 1\right)\frac{a - c_0}{2} + \frac{\lambda_0}{2}\right)\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{d_0}{d_0''}(k_0 + k_0'' + k_0''')\right],
\end{aligned}
$$

com d_0'' satisfazendo também:

$$
\left(\left(\frac{d_0}{d_0''} - 1\right)\frac{a - c_0}{2} + \frac{\lambda_0}{2}\right) > 0.
$$

Reunindo tais considerações, encontramos constantes positivas R_1, R_2,$\tilde{R}_1$ e $\tilde{R}_2$, independentes de ϵ para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, tais que valem as desigualdades (3.14) e (3.15).

■

Lema 3.3.4 *Para $V_\epsilon : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido como em (3.13), existem constantes positivas R_1', R_2', tais que,*

$$R_1' |\, V(u) \,| \,\leq\, |\, V_\epsilon\,(u) \,|\, \leq\, R_2' |\, V(u) \,|, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

com $V = V_0$.

Demonstração:

Estudemos cada uma das parcelas que compõe a expressão em (3.13). No caso de

$$\int_\Omega F(u)dx,$$

não há o que fazer. E, com relação a

$$\int_{\partial\Omega} G(\gamma(u)) |J_{\partial\Omega} h_\epsilon(x)| dx,$$

$|J_{\partial\Omega} h_\epsilon|$ pode ser limitado superior e inferiormente independente de ϵ para obter as desigualdades desejadas. Por fim, quanto a

$$\frac{1}{2}\int_\Omega h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) \cdot h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) J h_\epsilon(x) dx + \frac{a}{2}\int_\Omega u(x,t)^2 J h_\epsilon(x) dx,$$

basta aplicar as expressões (2.27) e (2.28) nas demonstrações do Lema 2.3.1 e da Observação 2.3.2, respectivamente.

■

Teorema 3.3.5 *Sejam β, η, f, g tais como no Teorema 3.2.7 e suponha que f e g satisfazem as hipóteses dissipativas (3.8) e (3.9), respectivamente. Então, as soluções de (3.1) estão globalmente definidas.*

Demonstração:

Consideremos primeiramente o caso $\eta = \frac{1}{2}$. Pelo Teorema 3.2.7, para cada $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times H^1(\Omega)$, existe $T = T(t_0, u_0)$ tal que o problema (3.1) tem uma única solução u em $(t_0, t_0 + T)$ com $u(t_0) = u_0$. Sabemos também que $(H_\epsilon)_\beta$ leva limitados de $X^\eta = H^1(\Omega)$ em conjuntos limitados de X^β.

Se $T < \infty$, pelo Teorema 1.14.4, existe uma sequência $t_n \to T^-$ tal que $\| \, u(t_n) \, \|_{H^1(\Omega)} \to \infty$ e, consequentemente, $|V_\epsilon(u(t_n))| \to \infty$, usando (3.15) do Lema 3.3.3, o que é uma contradição com o fato de V_ϵ ser decrescente ao longo das órbitas.

Para os demais casos, se $\eta < \frac{1}{2}$, temos $X^{\frac{1}{2}} \subset X^{\eta}$ e dado $u_0 \in X^{\eta}$, existe uma solução local $u(t)$, $t_0 < t < T$. Por regularidade, para $t_0 < t' < T$, $T_\epsilon(t')u_0 \in X^{\frac{1}{2}}$ e tomando este como ponto inicial u_0', provamos que existe uma solução global passando por u_0'. Segue da unicidade o desejado. Finalmente, se $\eta > \frac{1}{2}$, $X_\epsilon^{\eta} \subset X^{\frac{1}{2}}$ de modo que tomando $u_0 \in X_\epsilon^{\eta}$, u_0 também pertence à $X^{\frac{1}{2}}$ e então, existe uma solução global passando por tal ponto, a qual coincide com a solução local em X_ϵ^{η} por unicidade.

■

Lema 3.3.6 *Se as condições iniciais u_0 do problema (3.1) variam em um limitado de X^{η}, então a solução $u_\epsilon(t)$ permanece num limitado de X^{η} com η tal como no Teorema 3.2.7, uniformemente em ϵ, para $t_0 \leq t \leq T$.*

Demonstração:

Suponhamos $\| u_0 \|_{X^\eta} \leq B$.

Seja $t^* = \sup\{ t \,|\, \| u_\epsilon(t, u_0) \|_{X^\eta} \leq 2B\}$. Tal tempo existe para cada solução u_ϵ por continuidade da mesma. A princípio, $t^* = t^*(\epsilon, u_0)$.

Como $(H_\epsilon)_\beta$ leva limitados de X^η em limitados de X^β, uniformemente em ϵ, temos que $\| (H_\epsilon)_\beta(u) \|_{X^\beta} \leq L$ para $\| u \|_{X^\eta} \leq 2B$. Consequentemente, se $s \in [t_0, t^*]$, $\| (H_\epsilon)_\beta(u_\epsilon(s, u_0)) \|_{X^\beta} \leq L$.

Seja $t \in [0, t^*]$,

$$\begin{aligned}
\| u_\epsilon(t) \|_{X^\eta} &\leq \| e^{-(A_\epsilon)_\beta(t-t_0)} u_0 \|_{X^\eta} + \int_{t_0}^{t} \| e^{-(A_\epsilon)_\beta(t-s)} (H_\epsilon)_\beta(u_\epsilon(s)) \|_{X^\eta} \, ds \\
&\leq e^{-b(t-t_0)} \| u_0 \|_{X^\eta} + \int_{t_0}^{t} C_{\eta-\beta}(t-s)^{-(\eta-\beta)} e^{-b(t-s)} \| (H_\epsilon)_\beta(u_\epsilon(s)) \|_{X^\beta} \, ds \\
&\leq e^{-b(t-t_0)} B + \int_{t_0}^{t} C_{\eta-\beta}(t-s)^{-(\eta-\beta)} e^{-b(t-s)} L ds, \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

onde $C_{\eta-\beta}$ vem da aplicação da Proposição 3.2.8 e b é tal que $Re(\sigma(A_\epsilon)_\beta) > b > 0$. Observemos que é possível tomar um tempo $\bar{t}$ de modo que o lado direito desta expressão em (3.16) é menor do que $2B$ e $\bar{t}$ é uniforme em ϵ e u_0. Segue que $t^* > \bar{t}$.

Façamos a mesma conta, considerando $\eta = 1/2$ e $t = t^*$,

$$\begin{aligned}
\| u_\epsilon(t^*) \|_{X^{\frac{1}{2}}} &\leq \| e^{-(A_\epsilon)_\beta(t^*-t_0)} u_0 \|_{X^{\frac{1}{2}}} + \int_{t_0}^{t^*} \| e^{-(A_\epsilon)_\beta(t^*-s)} (H_\epsilon)_\beta(u_\epsilon(s)) \|_{X^{\frac{1}{2}}} \, ds \\
&\leq C_{\frac{1}{2}-\beta}(t^*-t_0)^{-(\frac{1}{2}-\beta)} e^{-b(t^*-t_0)} \| u_0 \|_{X^\eta} + \int_{t_0}^{t^*} C_{\frac{1}{2}-\beta}(t^*-s)^{-(\frac{1}{2}-\beta)} e^{-b(t^*-s)} \| (H_\epsilon)_\beta(u_\epsilon(s)) \|_{X^\beta} \, ds \\
&\leq C_{\frac{1}{2}-\beta}(t^*-t_0)^{-(\frac{1}{2}-\beta)} e^{-b(t^*-t_0)} B + \int_{t_0}^{t^*} C_{\frac{1}{2}-\beta}(t^*-s)^{-(\frac{1}{2}-\beta)} e^{-b(t^*-s)} L ds,
\end{aligned}$$

tais cálculos nos mostram que u_ϵ está em um limitado de $X^{\frac{1}{2}}$ no instante t^*, o qual, como vimos, independe de ϵ e de u_0.

Agora, devido a expressão (3.15) e ao fato do funcional de Lyapunov ser decrescente ao longo das soluções de (3.1), temos que as soluções permanecem em um limitado de $X^{\frac{1}{2}}$ para todo t. Daí, se $\eta < \frac{1}{2}$, a limitação em X^η é imediata.

No caso de $\eta > \frac{1}{2}$, $X^\eta_\epsilon \subset X^{\frac{1}{2}}$ de modo que a solução está em um limitado de $X^{\frac{1}{2}}$ para todo t. Então, basta refazer os cálculos para a norma $\| u_\epsilon(t) \|_{X^\eta_\epsilon}$ tal como na primeira parte desta demonstração.

■

Teorema 3.3.7 *Suponha que as hipóteses do Teorema 3.2.7 sejam válidas e, adicionalmente, $\eta < \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < \beta$. A função $\epsilon \to u(t, t_0, u_0, \epsilon) = u_\epsilon(t) \in X^\eta$ é contínua em $\epsilon = 0$ uniformemente para u_0 em limitados de X^η e $t_0 \leq t \leq T$.*

Demonstração:

Pelo Teorema 3.2.5, $H(u, 0)$ leva limitados de X^η em limitados de X^β e é localmente Lipschitz contínua em u com constante de Lipschitz L.

Desde que $\| u_\epsilon(s) \|_{X^\eta} \leq K$ e $\| u(s) \|_{X^\eta} \leq K$ em $t_0 \leq s \leq T$, conforme Lema 3.3.6, vamos estimar a diferença entre essas soluções do seguinte modo :

$$\begin{aligned}
\| u_\epsilon(t) - u(t) \|_{X^\eta} \leq & \| (e^{-(A_\epsilon)_\beta(t-t_0)} - e^{-(A)_\beta(t-t_0)})u_0 \|_{X^\eta} + \\
+ & \int_{t_0}^t \| e^{-(A_\epsilon)_\beta(t-s)}((H_\epsilon)_\beta(u_\epsilon(s)) - (H)_\beta(u_\epsilon(s))) \|_{X^\eta} \, ds \\
+ & \int_{t_0}^t \| e^{-(A_\epsilon)_\beta(t-s)}((H)_\beta(u_\epsilon(s)) - (H)_\beta(u(s))) \|_{X^\eta} \, ds \\
+ & \int_{t_0}^t \| (e^{-(A_\epsilon)_\beta(t-s)} - e^{-(A)_\beta(t-s)})(H)_\beta(u(s)) \|_{X^\eta} \, ds.
\end{aligned}$$

Com relação a primeira parcela,

$$\| (e^{-(A_\epsilon)_\beta(t-t_0)} - e^{-(A)_\beta(t-t_0)})u_0 \|_{X^\eta},$$

segue do Lema 3.2.9 que tal expressão converge a zero quando ϵ tende a zero uniformemente em u_0.

Quanto a segunda e a terceira parcelas, se $\Delta_\epsilon = \sup\{\| (H_\epsilon)_\beta(u) - (H)_\beta(u) \|_{X^\beta} \mid \| u \|_{X^\eta} \leq K\}$, aplicando a Proposição 3.2.8,

$$
\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t} \| e^{-(A_\epsilon)_\beta(t-s)}((H_\epsilon)_\beta(u_\epsilon(s)) - (H)_\beta(u_\epsilon(s))) \|_{X^\eta} \, ds \\
\leq & \int_{t_0}^{t} \| (A_\epsilon)_\beta^{\eta-\beta} e^{-(A_\epsilon)_\beta(t-s)}((H_\epsilon)_\beta(u_\epsilon(s)) - (H)_\beta(u_\epsilon(s))) \|_{X^\beta} \, ds \\
\leq & \int_{t_0}^{t} \| (A_\epsilon)_\beta^{\eta-\beta} e^{-(A_\epsilon)_\beta(t-s)} \| \| ((H_\epsilon)_\beta(u_\epsilon(s)) - (H)_\beta(u_\epsilon(s))) \|_{X^\beta} \, ds \\
\leq & \int_{t_0}^{t} C_{\eta-\beta}(t-s)^{\beta-\eta} e^{-b(t-s)} \Delta_\epsilon ds \\
\leq & \; C_{\eta-\beta}\Delta_\epsilon \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\beta-\eta} e^{-b(t-s)} ds.
\end{aligned}
$$

E,

$$
\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t} \| e^{-(A_\epsilon)_\beta(t-s)}((H)_\beta(u_\epsilon(s)) - (H)_\beta(u(s))) \|_{X^\eta} \, ds \\
\leq & \int_{t_0}^{t} \| (A_\epsilon)_\beta^{\eta-\beta} e^{-(A_\epsilon)_\beta(t-s)}((H)_\beta(u_\epsilon(s)) - (H)_\beta(u(s))) \|_{X^\beta} \, ds \\
\leq & \int_{t_0}^{t} \| (A_\epsilon)_\beta^{\eta-\beta} e^{-(A_\epsilon)_\beta(t-s)} \| \| ((H)_\beta(u_\epsilon(s)) - (H)_\beta(u(s))) \|_{X^\beta} \, ds \\
\leq & \int_{t_0}^{t} C_{\eta-\beta}(t-s)^{\beta-\eta} e^{-b(t-s)} L \| u_\epsilon(s) - u(s) \|_{X^\eta} \, ds \\
\leq & \; C_{\eta-\beta} L \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\beta-\eta} e^{-b(t-s)} \| u_\epsilon(s) - u(s) \|_{X^\eta} \, ds.
\end{aligned}
$$

Por fim, a quarta parcela,

$$
\int_{t_0}^{t} \| (e^{-(A_\epsilon)_\beta(t-s)} - e^{-(A)_\beta(t-s)})(H)_\beta(u(s)) \|_{X^\eta} \, ds.
$$

Como $(H)_\beta$ leva limitados de X^η em limitados de X^β, temos a convergência do integrando para zero para cada s de acordo com o Lema 3.2.9. Além disso, da expressão (3.7) neste último resultado, o integrando é limitado por uma função integrável. Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, a convergência desta parcela a zero.

Encontramos então que

$$
\begin{aligned}
\| u_\epsilon(t) - u(t) \|_{X^\eta} \leq & \; C(\epsilon) \| u_0 \|_{X^\eta} + C_{\eta-\beta}\Delta_\epsilon \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\beta-\eta} e^{-b(t-s)} ds \; + \; C'(\epsilon) \\
+ & \; C_{\eta-\beta} L \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\beta-\eta} \| u_\epsilon(s) - u(s) \|_{X^\eta} \, ds,
\end{aligned}
$$

onde $C(\epsilon)$ e $C'(\epsilon)$ são constantes que convergem para zero à medida que ϵ tende à zero devido às considerações acima para a primeira e quarta parcelas, respectivamente. Ou, ainda, podemos escrever

$$\| u_\epsilon(t) - u(t) \|_{X^\eta} \leq C''(\epsilon) + C_{\eta-\beta} L \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\beta-\eta} \| u_\epsilon(s) - u(s) \|_{X^\eta}\, ds,$$

com $C''(\epsilon)$ convergindo a zero quando ϵ tende a zero. Segue da Desigualdade de Gronwall (ver Seção 1.2.1 em Henry, [11]) que $\| u_\epsilon(t) - u(t) \|_{X^\eta} \leq C''(\epsilon)\mathcal{M}$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(C_{\eta-\beta}, L, \beta - \eta, T)$, donde $\| u_\epsilon(t) - u(t) \|_{X^\eta} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$ uniformemente para u_0 em limitados de X^η.

■

Capítulo 4

Existência e continuidade de atratores

Neste último capítulo, provamos a existência e a continuidade dos atratores globais para (2.18) e (2.19) em X^{η}, com η em um intervalo conveniente e h_{ϵ} para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Para tanto, nos embasamos fortemente na convergência dos resolventes obtida no Capítulo 2 e também, no que foi feito em [4] e em [18].

4.1 Existência de atratores globais

Demonstramos nesta seção que $T_{\epsilon,\eta,\beta}(t, t_0, u)$, o fluxo gerado por (3.1), admite um atrator global começando pelo caso $\eta = \frac{1}{2}$.

Lema 4.1.1 *O semigrupo não linear $T_{\epsilon,\eta,\beta}(t)$ gerado por (3.1) com $\eta = \frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2} < \beta < -\frac{1}{4}$ em $X^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$ é um sistema gradiente.*

Demonstração:

Sabemos que V_{ϵ} definido em (3.13) é um funcional de Lyapunov para o semigrupo.

Além disso, $(H_{\epsilon})_{\beta}$ leva subconjuntos limitados de $H^1(\Omega)$ em limitados de X^{β} e como podemos escrever $(A_{\epsilon})_{\beta} = (A_{\epsilon})^{-\delta}(A_{\epsilon})(A_{\epsilon})^{\delta}$, $\beta = -\frac{1}{2} + \delta$, $0 < \delta < \frac{1}{4}$, sendo $(A_{\epsilon})^{\delta}$ uma isometria e A_{ϵ} tem resolvente compacto pela Proposição 2.3.4, segue que $(A_{\epsilon})_{\beta}$ tem resolvente compacto. Assim, de acordo com o Teorema 1.14.5, as órbitas positivas limitadas são pré-compactas.

Logo, temos que $T_{\epsilon,\eta,\beta}(t)$ é um sistema gradiente.

■

Lema 4.1.2 *Suponha que f e g satisfazem as condições do Teorema 3.2.7 e as hipóteses dissipativas (3.8) e (3.9), respectivamente. Então, se ϵ é suficientemente pequeno, o conjunto dos pontos de equilíbrio do sistema gerado por (3.1) é uniformemente limitado em ϵ na norma $H^1(\Omega)$.*

Demonstração:

Os equilíbrios de (3.1) satisfazem, para $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$,

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_\Omega h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u \cdot h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u J h_\epsilon(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(u) u |J_{\partial\Omega} h_\epsilon(x)| \, dS \\ &- a \int_\Omega |u|^2 J h_\epsilon(x) dx + \int_\Omega f(u) u \, dx, \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que utilizamos a equação (2.21), tomando $\phi = u$.

Por (3.8) e (3.9), para qualquer $\delta > 0$, existem constantes M_f e M_g tais que $f(s)s \leq (\delta + c_0)s^2$ se $|s| > M_f$ e $g(s)s \leq (\delta + d_0')s^2$ se $|s| > M_g$. Escolhendo $|s| > M = \max\{M_f, M_g\}$, ambas as desigualdades valem simultaneamente. Além disso, existem constantes C_f, C_g com $f(s)s \leq C_f$ e $g(s)s \leq C_g$ para $|s| \leq M$. Se fizermos $K_\delta = \max\{C_f, C_g\}$ então, para todo $u \in \mathbb{R}$,

$$f(u)u \leq (c_0 + \delta)u^2 + K_\delta \;\text{ e }\; g(u)u \leq (d_0' + \delta)u^2 + K_\delta.$$

Aplicando isso em (4.1) e usando a limitação para $|J_{\partial\Omega} h_\epsilon|$ por $\overline{K}$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u \cdot h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u J h_\epsilon(x) dx &\leq -a \int_\Omega |u|^2 J h_\epsilon(x) dx + (c_0 + \delta) \int_\Omega u^2 dx + K_\delta |\Omega| \\ &+ (d_0' + \delta) \int_{\partial\Omega} u^2 |J_{\partial\Omega} h_\epsilon(x)| dS + K_\delta \overline{K} |\partial\Omega| \\ &= -a \int_\Omega |u|^2 J h_\epsilon(x) dx + (c_0 + \delta) \int_\Omega u^2 dx \\ &+ (d_0' + \delta) \int_{\partial\Omega} u^2 |J_{\partial\Omega} h_\epsilon(x)| dS + K_\delta (|\Omega| + \overline{K} |\partial\Omega|). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Como $\lambda_0(\epsilon)$, o primeiro autovalor de (3.10), é maior do que $B > 0$, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, por hipótese,

$$\begin{aligned} B \int_\Omega u^2 dx &\leq \int_\Omega h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) \cdot h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u(x,t) J h_\epsilon(x) dx - d_0 \int_{\partial\Omega} u^2(x,t) |J_{\partial\Omega} h_\epsilon(x)| dS \\ &+ a \int_\Omega u^2(x,t) J h_\epsilon(x) dx - c_0 \int_\Omega u^2(x,t) dx. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Reunindo as desigualdades (4.2) e (4.3), obtemos

$$\begin{aligned} B \int_\Omega |u|^2 dx &\leq \delta \int_\Omega u^2 dx + (d_0' - d_0 + \delta) \int_{\partial\Omega} u^2 |J_{\partial\Omega} h_\epsilon(x)| dS + K_\delta (|\Omega| + \overline{K} |\partial\Omega|) \\ &\leq \delta \int_\Omega u^2 dx + \overline{K} (d_0' - d_0 + \delta) \int_{\partial\Omega} u^2 dS + K_\delta (|\Omega| + \overline{K} |\partial\Omega|). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Agora, tomando $\delta < \min\{B, d_0 - d_0'\}$ e estabelecendo $l_\delta = \min\{B-\delta, \overline{K}((d_0 - d_0') - \delta)\}$, segue de (4.4) que,

$$\int_\Omega u^2 dx + \int_{\partial\Omega} u^2 dS \leq \frac{K_\delta\,(\,|\Omega| + \overline{K}|\partial\Omega|\,)}{l_\delta}. \tag{4.5}$$

Por fim, empregamos isso em (4.2),

$$\begin{aligned} \int_\Omega h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u \cdot h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u J h_\epsilon(x) dx &\leq (\,c_0 + \delta\,) \int_\Omega u^2 dx + \overline{K}(\,d_0' + \delta\,) \int_{\partial\Omega} u^2 dS + K_\delta\,(\,|\Omega| + \overline{K}|\partial\Omega|\,) \\ &\leq (\,c_0 + \overline{K}d_0' + (1 + \overline{K})\delta\,) \frac{K_\delta\,(\,|\Omega| + \overline{K}|\partial\Omega|\,)}{l_\delta} \\ &+ K_\delta\,(\,|\Omega| + \overline{K}|\partial\Omega|\,), \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde usamos que $a > 0$ e supomos que $(c_0 + \delta)$ e $\overline{K}(d_0' + \delta)$ são ambos positivos. Caso sejam negativos, em (4.6), ficaria apenas a última parcela e se os sinais fossem contrários, manteríamos somente o positivo. Agora, conforme (2.27) no Lema 2.3.1,

$$\int_\Omega h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u \cdot h_\epsilon^* \nabla_{\Omega_\epsilon} h_\epsilon^{*-1} u J h_\epsilon dx \geq C_1 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \tag{4.7}$$

donde segue que,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{C_1}\left((\,c_0 + \overline{K}d_0' + (1 + \overline{K})\delta\,) \frac{K_\delta\,(\,|\Omega| + \overline{K}|\partial\Omega|\,)}{l_\delta} + K_\delta\,(\,|\Omega| + \overline{K}|\partial\Omega|\,) \right). \tag{4.8}$$

O resultado vem de (4.5) e (4.8), observando-se que as constantes presentes nessas estimativas dependem basicamente de $\lambda_0(\epsilon)$, que é maior do que uma constante positiva B independente de ϵ, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, por hipótese.

No caso de $\epsilon = 0$, os equilíbrios verificam:

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_\Omega \nabla_\Omega u(x,t) \cdot \nabla_\Omega u(x,t)\, dx - a \int_\Omega |u(x,t)|^2 dx \\ &+ \int_\Omega f(u(x,t)) u(x,t)\, dx + \int_{I_1} g(u(x,t)) u(x,t) M_\pi(p)\, dS + \int_{I_2+I_3+I_4} g(u(x,t)) u(x,t) dS. \end{aligned}$$

E, como $\lambda_0(0)$ é positivo,

$$\begin{aligned} \lambda_0(0) \int_\Omega u^2 dx &\leq \int_\Omega \nabla_\Omega u(x,t) \cdot \nabla_\Omega u(x,t) dx + a \int_\Omega |u(x,t)|^2 dx \\ &+ -c_0 \int_\Omega u(x,t)^2 dx - d_0 \int_{I_1} u(x,t)^2 M_\pi(p) dS - d_0 \int_{I_2+I_3+I_4} u(x,t)^2 dS. \end{aligned}$$

Notamos que o raciocínio pode ser desenvolvido de forma análoga àquela do caso $\epsilon > 0$.

■

Teorema 4.1.3 *Suponha que f e g satisfazem as condições do Teorema 3.2.7 com $\eta = \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < \beta < -\frac{1}{4}$, e as hipóteses dissipativas (3.8) e (3.9), respectivamente. Então, para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, o fluxo $T_{\epsilon,\frac{1}{2},\beta}(t,u) = T_\epsilon(t,u)$ gerado por (3.1) tem um atrator global em $X^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$.*

Demonstração:

De acordo com o Teorema 1.14.8, basta provar que o semigrupo é assintoticamente compacto. Seja B um conjunto não-vazio, fechado, limitado de $X^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$ com $T_\epsilon(t,u)B \subset B$, $\forall t \geq 0$.

Considere $J = \overline{T_\epsilon(1)B}$. Então, $J \subset B$. Pela propriedade de semigrupo, para $t > 1$, $T_\epsilon(t)B = T_\epsilon(1)T_\epsilon(t-1)B$ e $T_\epsilon(1)T_\epsilon(t-1)B \subset T_\epsilon(1)B \subset J$ donde J atrai B (de fato, absorve). Falta verificarmos que J é compacto.

Se soubermos que J é limitado em $X_\epsilon^{\frac{1}{2}+\delta}$, com $\delta > 0$, então, como a imersão $X_\epsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \subset X_\epsilon^{\frac{1}{2}}$ é compacta e $X_\epsilon^{\frac{1}{2}} = X^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$, resulta que J é um pré-compacto de $H^1(\Omega)$. Somando-se a isso o fato de J ser fechado, temos o desejado.

Sem perda de generalidade, suponhamos $\Re(\sigma((A_\epsilon)_\beta)) > \omega > 0$. Se $j = T_\epsilon(1)b$, $b \in B$ e $\| b \|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq N$,

$$\begin{aligned}
\| j \|_{X_\epsilon^{\frac{1}{2}+\delta}} &\leq \| e^{-(A_\epsilon)_\beta} b \|_{X_\epsilon^{\frac{1}{2}+\delta}} + \left\| \int_0^1 e^{-(A_\epsilon)_\beta(1-s)}(H_\epsilon)_\beta(T_\epsilon(s))\, ds \right\|_{X_\epsilon^{\frac{1}{2}+\delta}} \\
&\leq \| ((A_\epsilon)_\beta)^\delta e^{-(A_\epsilon)_\beta} b \|_{X^{\frac{1}{2}}} + \int_0^1 \| ((A_\epsilon)_\beta)^{1-\delta} e^{-(A_\epsilon)_\beta(1-s)}(H_\epsilon)_\beta(T_\epsilon(s)) \|_{X^{-\frac{1}{2}+2\delta}}\, ds \\
&\leq C_\delta e^{-\omega} \| b \|_{X^{\frac{1}{2}}} + \int_0^1 C_{1-\delta}(1-s)^{-(1-\delta)} e^{-\omega(1-s)} \| (H_\epsilon)_\beta(T_\epsilon(s)) \|_{X^{-\frac{1}{2}+2\delta}}\, ds \\
&\leq C_\delta e^{-\omega} N + C_{1-\delta} L \int_0^1 (1-s)^{-(1-\delta)} e^{-\omega(1-s)} ds,
\end{aligned}$$

onde aplicamos a Proposição 3.2.8 e L vem de $(H_\epsilon)_\beta$ levar limitados de X^η em limitados de X^β conforme Teorema 3.2.5. A última expressão nos mostra que $T_\epsilon(1)B$ é limitado em $X_\epsilon^{\frac{1}{2}+\delta}$ e, portanto, seu fecho, J, também o é.

■

Teorema 4.1.4 *Suponha que estejam satisfeitas as condições do Teorema 3.2.7 e as hipóteses dissipativas (3.8) e (3.9). Então, para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, o semigrupo $T_{\epsilon,\eta,\beta}(t,u)$ gerado por (3.1) tem um atrator global $\mathcal{A}_\epsilon$ em X^η. Além disso, $\mathcal{A}_\epsilon$ não depende de η ou β.*

Demonstração:

Suponhamos primeiro que $\eta = \eta_0 < \frac{1}{2}$ e seja B um limitado de X^η. Podemos admitir que $B = B_R$, a bola aberta de raio R e centro na origem de X^η. Conforme vimos no Teorema 3.2.5, existe N tal que $\| (H_\epsilon)_\beta(u) \|_{X^\beta} < N$ para $\| u \|_{X^\eta} < 2R$. Seja $T(t)u_0 = u(t,t_0,u_0)$ a solução de (3.1) com $\eta = \eta_0$, $u_0 \in B_R$ e seja ω tal que $\Re(\sigma((A_\epsilon)_\beta)) > \omega > 0$. Enquanto $\| u(t,t_0,u_0) \|_{X^\eta} < 2R$, temos pela Fórmula de Variação das Constantes, Lema 1.14.2,

$$\begin{aligned}
\| u(t,t_0,u_0) \|_{X^\eta} &\leq \| ((A_\epsilon)_\beta)^{\eta-\beta} e^{-(A_\epsilon)_\beta (t-t_0)} u_0 \|_{X^\beta} \\
&+ \int_{t_0}^t \| ((A_\epsilon)_\beta)^{\eta-\beta} e^{-(A_\epsilon)_\beta (t-s)} (H_\epsilon)_\beta(u(s)) \|_{X^\beta} \, ds \\
&\leq C_{\eta-\beta}(t-t_0)^{\beta-\eta} e^{-\omega(t-t_0)} \| u_0 \|_{X^\beta} + N C_{\eta-\beta} \int_{t_0}^t (t-s)^{(\beta-\eta)} e^{-\omega(t-s)} ds. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Consideremos $T = \sup\{ t \geq t_0 \,|\, u(s,t_0,u_0) \in B_{2R},\ \forall s \leq t \}$ e $\delta > t_0$ tal que o lado direito desta última expressão (4.9) seja menor do que $2R$, $\forall t \in (t_0, \delta)$. Segue que $T \geq \delta$ e as soluções com condições iniciais na bola de raio R em X^η permanecem na bola de raio $2R$ para $t_0 \leq t \leq T$. Agora,

$$\begin{aligned}
\| u(t,t_0,u_0) \|_{X^{\frac{1}{2}}} &\leq \| e^{-(A_\epsilon)_\beta (t-t_0)} u_0 \|_{X^{\frac{1}{2}}} + \int_{t_0}^t \| e^{-(A_\epsilon)_\beta (t-s)} (H_\epsilon)_\beta(u(s)) \|_{X^{\frac{1}{2}}} \, ds \\
&\leq \| ((A_\epsilon)_\beta)^{\frac{1}{2}-\eta} e^{-(A_\epsilon)_\beta (t-t_0)} u_0 \|_{X^\eta} \\
&+ \int_{t_0}^t \| ((A_\epsilon)_\beta)^{\frac{1}{2}-\beta} e^{-(A_\epsilon)_\beta (t-s)} (H_\epsilon)_\beta(u(s)) \|_{X^\beta} \, ds \\
&\leq C_{\frac{1}{2}-\eta}(t-t_0)^{-(\frac{1}{2}-\eta)} e^{-\omega(t-t_0)} \| u_0 \|_{X^\eta} + N C_{\frac{1}{2}-\beta} \int_{t_0}^t (t-s)^{-(\frac{1}{2}-\beta)} e^{-\omega(t-s)} ds,
\end{aligned}$$

o que significa que $T(t)B_R$ está em um limitado de $X^{\frac{1}{2}}$ para $t_0 < t \leq T$. Pelo Teorema 4.1.3, o atrator global de (3.1) com $\eta = \frac{1}{2}$ atrai $T(t)B_R$ na norma $X^{\frac{1}{2}}$, $t_0 < t < T$. Como $X^{\frac{1}{2}} \subset X^\eta$, $\mathcal{A}_\epsilon$ atrai B_R na norma de X^η. Uma vez que $\mathcal{A}_\epsilon$ é invariante, este deve ser o atrator de (3.1) com $\eta = \eta_0$.

Suponhamos agora, $\frac{1}{2} < \eta = \eta_0 < \beta + 1$. Temos $X^\eta_\epsilon \subset X^{\frac{1}{2}}$ continuamente. Assim, um conjunto limitado B de X^η_ϵ é também limitado em $X^{\frac{1}{2}}$, sendo atraído por $\mathcal{A}_\epsilon$ de (3.1) com $\eta = \frac{1}{2}$ em $X^{\frac{1}{2}}$ sob a ação de $T_{\epsilon,\frac{1}{2},\beta}(t) = T_{\frac{1}{2}}(t)$, o qual coincide com o fluxo em X^η_ϵ. Mostraremos a seguir que $T_{\frac{1}{2}}(t)$ é contínuo de $X^{\frac{1}{2}}$ em X^η_ϵ para $t > 0$.

Sejam u_1, $u_2 \in X^{\frac{1}{2}}$ e $u_i(t,t_0,u_i) = T_{\frac{1}{2}}(t)u_i$, $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
\| u_1(t,t_0,u_1) - u_2(t,t_0,u_2) \|_{X^\eta_\epsilon} &\leq \| e^{-(A_\epsilon)_\beta (t-t_0)} (u_1 - u_2) \|_{X^\eta_\epsilon} \\
&+ \int_{t_0}^t \| e^{-(A_\epsilon)_\beta (t-s)} ((H_\epsilon)_\beta(u_1(s)) - (H_\epsilon)_\beta(u_2(s))) \|_{X^\eta_\epsilon} \, ds \\
&\leq \| ((A_\epsilon)_\beta)^{\eta-\frac{1}{2}} e^{-(A_\epsilon)_\beta (t-t_0)} (u_1 - u_2) \|_{X^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \int_{t_0}^t \| ((A_\epsilon)_\beta)^{\eta-\beta} e^{-(A_\epsilon)_\beta (t-s)} ((H_\epsilon)_\beta(u_1(s)) - (H_\epsilon)_\beta(u_2(s))) \|_{X^\beta} \, ds \\
&\leq C_{\eta-\frac{1}{2}}(t-t_0)^{\frac{1}{2}-\eta} e^{-\omega(t-t_0)} \| u_1 - u_2 \|_{X^{\frac{1}{2}}} \\
&+ L_{\beta,\frac{1}{2}} C_{\eta-\beta} \int_{t_0}^t (t-s)^{\beta-\eta} e^{-\omega(t-s)} \| u_1(s) - u_2(s) \|_{X^{\frac{1}{2}}} \, ds,
\end{aligned}$$

sendo $L_{\beta,\frac{1}{2}}$ a constante de Lipschitz local de $(H_\epsilon)_\beta$.

Aplicando a Desigualdade de Gronwall (veja o Teorema 7.1.1 em Henry, [11]), obtemos

$$\begin{aligned} \| u(t,t_0,u_1) - u(t,t_0,u_2) \|_{X^\eta_\epsilon} &\leq C_{\eta-\frac{1}{2}}(t-t_0)^{-\eta+\frac{1}{2}} e^{-\omega(t-t_0)} \| u_1 - u_2 \|_{X^{\frac{1}{2}}} \\ &+ \gamma \int_{t_0}^{t} E'_{\frac{3}{2}-\eta}(\gamma(t-s)) C_{\eta-\frac{1}{2}}(s-t_0)^{-\eta+\frac{1}{2}} e^{-\omega(s-t_0)} \| u_1 - u_2 \|_{X^{\frac{1}{2}}} \, ds, \end{aligned}$$

onde $\gamma = (L_{\beta,\frac{1}{2}} C_{\eta-\frac{1}{2}} \max_{t \leq s \leq t_0}\{e^{-\omega(t-s)}\}\Gamma(\frac{3}{2}-\eta))^{\frac{1}{\frac{3}{2}-\eta}}$ e $E_{\frac{3}{2}-\eta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n(\frac{3}{2}-\eta)}}{\Gamma(n(\frac{3}{2}-\eta)+1)}$ e, segue a continuidade.

Isso nos permite concluir que se V_δ é uma vizinhança de $\mathcal{A}_\epsilon$ em $X^{\frac{1}{2}}$ que contém $T_{\frac{1}{2}}(t)(B) = T_\eta(t)(B)$, então $T_{\frac{1}{2}}(1)V_\delta$ é uma pequena vizinhança de $\mathcal{A}_\epsilon$ em X^η que contém $T_{\frac{1}{2}}(t+1)B = T_\eta(t+1)B$. Como $\mathcal{A}_\epsilon = T_{\frac{1}{2}}(1)\mathcal{A}_\epsilon \in X^\eta$, este deve ser o atrator de $T_\eta(t)$.

■

4.2 Semicontinuidade superior dos atratores

Nesta seção, provamos que a família de atratores para o fluxo gerado por (3.1) é semicontínua superiormente em X^η, com η em um intervalo conveniente.

Teorema 4.2.1 *Suponha que as hipóteses do Teorema 4.1.4 sejam válidas. Então, a família de atratores* $\{\mathcal{A}_\epsilon \,|\, 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0\}$ *para o fluxo gerado por (3.1) é limitada uniformemente em* $H^1(\Omega)$.

Demonstração:

Pelo Lema 4.1.2, para ϵ suficientemente próximo de 0, o conjunto de pontos de equilíbrio E_ϵ de (3.1) está em uma bola aberta B_R de raio R em $H^1(\Omega)$, R independente de ϵ.

Se $u \in \mathcal{A}_\epsilon$, pelo Teorema 1.14.8, existe t_u tal que $u = T(t_u)u_0$ para algum $u_0 \in B_R$.

Seja V_ϵ o funcional de Lyapunov de (3.1) dado por (3.13). Pelo Lema 3.3.3, temos

$$V_\epsilon(u_0) \leq R_1 \| u_0 \|^2_{H^1(\Omega)} + R_2 \leq R_1 R^2 + R_2.$$

Segue que

$$V_\epsilon(u) \leq V_\epsilon(T(t_u)u_0) \leq V_\epsilon(u_0) \leq R_1 R^2 + R_2.$$

Novamente, do Lema 3.3.3,

$$\| u \|^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\tilde{R}_1}(V_\epsilon(u) + \tilde{R}_2) \leq \frac{1}{\tilde{R}_1}(R_1 R^2 + R_2 + \tilde{R}_2), \quad \forall u \in \mathcal{A}_\epsilon. \tag{4.10}$$

E, tal limitação é válida $\forall u \in \bigcup_{0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0} \mathcal{A}_\epsilon$.

∎

Teorema 4.2.2 *Suponha que as hipóteses do Teorema 4.1.4 sejam válidas e, adicionalmente, $\eta < \frac{1}{2}$. Então, a família de atratores $\{\mathcal{A}_\epsilon \,|\, 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0\}$ do fluxo $T_{\epsilon,\eta,\beta}(t,u)$, gerado por (3.1), é semicontínua superiormente em X^η.*

Demonstração:

Pelo Teorema 4.2.1, $\bigcup_{0\leq\epsilon\leq\epsilon_0}\mathcal{A}_\epsilon$ é limitada uniformemente em $H^1(\Omega)$, consequentemente, também está em um conjunto limitado B de X^η para $\frac{1}{2} - \varsigma < \eta < \frac{1}{2}$, ς pequeno o suficiente de forma a satisfazer as condições do Teorema 3.2.7.

Como o atrator $\mathcal{A}_0$ atrai subconjuntos limitados de X^η sob a ação de $T_{0,\eta,\beta}(t)$, dado $\delta > 0$, existe T grande o suficiente tal que $d(T_{0,\eta,\beta}(T)B, \mathcal{A}_0) \leq \frac{\delta}{2}$.

Agora, devido a continuidade em ϵ no ponto $\epsilon = 0$ (uniformemente em u_0 em limitados de X^η e $t_0 \leq t \leq \tau$) da solução provada no Lema 3.3.7, temos que para ϵ suficientemente próximo de 0, $d(T_{\epsilon,\eta,\beta}(T)B, T_{0,\eta,\beta}(T)B) \leq \frac{\delta}{2}$.

Reunindo ambas as considerações, $d(T_{\epsilon,\eta,\beta}(T)B, \mathcal{A}_0) \leq \delta$. Mas, $T_{\epsilon,\eta,\beta}(T)\mathcal{A}_\epsilon \subset T_{\epsilon,\eta,\beta}(T)B$, donde $d(\mathcal{A}_\epsilon, \mathcal{A}_0) \leq \delta$, como queríamos.

∎

4.3 Continuidade dos equilíbrios

Nesta seção, demonstramos que os equilíbrios são contínuos em $\epsilon = 0$. Comecemos pela semicontinuidade superior, que segue diretamente do resultado análogo para os atratores.

Teorema 4.3.1 *Suponha que as hipóteses do Teorema 4.1.4 sejam válidas e, adicionalmente, $\eta < \frac{1}{2}$. Então, a família de conjuntos de equilíbrio $\{E_\epsilon \,|\, 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0\}$ de (3.1) é semicontínua superiormente em X^η.*

Demonstração:

Seja ϵ_n sequência de números positivos tal que $\epsilon_n \to 0$.

Se mostrarmos que toda sequência (u_{ϵ_n}), com $u_{\epsilon_n} \in E_{\epsilon_n}$, possui uma subsequência convergente com limite pertencente à E_0, então resulta que a família $\{E_\epsilon\,,\, 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0\}$ é semicontínua superiormente (conforme Lema 1.14.10). Vejamos:

Como $u_{\epsilon_n} \in \mathcal{A}_{\epsilon_n}$ e a família de atratores é semicontínua superiormente, existe $(\bar{u}_{\epsilon_n}) \in \mathcal{A}_0$ com $d(u_{\epsilon_n}, \bar{u}_{\epsilon_n}) \to 0$.

Agora, $\mathcal{A}_0$ é compacto donde extraimos uma subsequência convergente $(\bar{u}_{\epsilon_{n_k}})$, $\bar{u}_{\epsilon_{n_k}} \to u_0$, $u_0 \in \mathcal{A}_0$. Segue que $u_{\epsilon_{n_k}} \to u_0$. Resta provarmos que $u_0 \in E_0$.

Vimos que a família de equilíbrios é uniformemente limitada em $H^1(\Omega)$ e, portanto, também o é em X^η. Assim, usando a continuidade da solução em $\epsilon = 0$, uniformemente em limitados de X^η, temos que

$$u_{\epsilon_{n_k}} \to u_0 \Leftrightarrow T_{\epsilon_{n_k},\beta,\eta}(t)u_{\epsilon_{n_k}} \to T_{0,\beta,\eta}u_0 \Leftrightarrow u_{\epsilon_{n_k}} \to T_{0,\beta,\eta}u_0.$$

Pela unicidade do limite, $T_{0,\beta,\eta}u_0 = u_0$ como queríamos.

■

Para a semicontinuidade inferior, precisaremos de algumas propriedades adicionais das não linearidades. Vamos supor que

$$f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), g \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ e suas derivadas } f' \text{ e } g' \text{ são funções limitadas e Lipschitz.} \quad (4.11)$$

Lema 4.3.2 *Se f satisfaz (4.11), $-\frac{1}{2} \le \beta \le 0$ e $\beta + 1 > \eta > 0$, então a aplicação $F : X^\eta \times \mathbb{R} \to X^\beta$ definida por (3.2) é Gateaux diferenciável em u com derivada de Gateaux $F_u(u,\epsilon) = \frac{\partial F}{\partial u}(u,\epsilon)w$ dada por*

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial u}(u,\epsilon)w, \phi \right\rangle_{\beta,-\beta} = \int_\Omega f'(u)\, w\, \phi\, dx, \ \forall w \in X^\eta, \ \forall \phi \in X^{-\beta}. \quad (4.12)$$

Além disso, $F_u(u,\epsilon)$ é linear e limitada.

Demonstração:

Com efeito, para todos $u, w \in X^\eta$ e $\phi \in X^{-\beta}$,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{t} \left\langle F(u+tw,\epsilon) - F(u,\epsilon) - t\frac{\partial F}{\partial u}(u,\epsilon)w, \phi \right\rangle_{\beta,-\beta} \right| &= \left| \frac{1}{t} \int_\Omega (f(u+tw) - f(u) - tf'(u)w)\, \phi\, dx \right| \\
&\le \frac{1}{|t|} \int_\Omega |f(u+tw) - f(u) - tf'(u)w|\, |\phi|\, dx \\
&\le \frac{1}{|t|} \left(\int_\Omega |f(u+tw) - f(u) - tf'(u)w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} \\
&\le K_1 \frac{1}{|t|} \left(\int_\Omega |f(u+tw) - f(u) - tf'(u)w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \| \phi \|_{X^{-\beta}} \\
&\le K_1 \| \phi \|_{X^{-\beta}} \left(\int_\Omega |(f'(u+\bar{t}w) - f'(u))w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.13)
\end{aligned}$$

onde $K_1 > 0$ é a constante de imersão $X^{-\beta} \subset L^2(\Omega)$ e aplicamos o Teorema do Valor Médio na última passagem com $0 < \bar{t} < t$. O integrando em (4.13) é limitado pela função integrável $4 \| f' \|_\infty^2 w^2$, usando a hipótese (4.11) e, converge a 0 quando $t \to 0$. Segue do Teorema da Convergência Dominada o desejado e,

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u+tw,\epsilon)-F(u,\epsilon)}{t} = \frac{\partial F}{\partial u}(u,\epsilon)w \text{ em } X^{\beta},\ \forall u,w \in X^{\eta}.$$

Portanto, F é Gateaux diferenciável com derivada de Gateaux dada por (4.12). É importante notarmos que supondo (4.11), isto é, $\lambda_1 = 0$ em (3.4), as condições do Lema 3.2.1 estão satisfeitas. Claramente, $\frac{\partial F}{\partial u}(u,\epsilon)$ é linear e é também limitada. De fato, para todos u, $w \in X^{\eta}$ e $\phi \in X^{-\beta}$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \frac{\partial F}{\partial u}(u,\epsilon)w,\phi \right\rangle_{\beta,-\beta}\right| &\le \int_{\Omega} |f^{'}(u)\, w\, \phi\, |dx \\
&\le \parallel f^{'} \parallel_{\infty} \int_{\Omega} |w\,\phi|\, dx \\
&\le \parallel f^{'} \parallel_{\infty} \parallel w \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel \phi \parallel_{L^2(\Omega)} \\
&\le K_1K_2 \parallel f^{'} \parallel_{\infty} \parallel w \parallel_{X^{\eta}} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} .
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial F}{\partial u}(u,\epsilon)w \right\|_{X^{\beta}} \le K_1K_2 \parallel f^{'} \parallel_{\infty} \parallel w \parallel_{X^{\eta}}, \tag{4.14}$$

onde $K_2 > 0$ é a constante de imersão de $X^{\eta} \subset L^2(\Omega)$.

■

A seguir, provaremos que a derivada de Gateaux de $F(u,\epsilon)$ é contínua em u. Para tanto, vamos utilizar o Lema 1.9.12 na Seção 9 do Capítulo 1.

Lema 4.3.3 *Se f satisfaz (4.11), $-\frac{1}{2} \le \beta \le 0$ e $\beta + 1 > \eta > 0$, a derivada de Gateaux de $F(u,\epsilon)$ com relação a u é contínua em u, isto é, a aplicação $u \mapsto \frac{\partial F}{\partial u}(u,\epsilon) \in \mathcal{B}(X^{\eta}, X^{\beta})$ é contínua. Além disso, $\epsilon \mapsto \frac{\partial F}{\partial u}(u,\epsilon)$ é contínua uniformemente em $u \in X^{\eta}$.*

Demonstração:

Sejam $u_n \to u \in X^{\eta}$ e $0 < \tilde{\eta} < \eta \le \beta + 1$. Então, para $w \in X^{\tilde{\eta}}$, $\phi \in X^{\beta}$,

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial u}(u_n,\epsilon) - \frac{\partial F}{\partial u}(u,\epsilon)\right) w,\phi \right\rangle_{\beta,-\beta}\right| &\le \int_{\Omega} |\,(f^{'}(u) - f^{'}(u_n))\, w\, \phi\,|\; dx \\
&\le \left(\int_{\Omega} |\,(f^{'}(u) - f^{'}(u_n))\, w\,|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \parallel \phi \parallel_{L^2(\Omega)} \\
&\le K_1 \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} \left(\int_{\Omega} |\,(f^{'}(u) - f^{'}(u_n))\, w\,|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

onde $K_1 > 0$ é a constante que aparece na demonstração do Lema 4.3.2 referente à imersão de $X^{-\beta}$ em $L^2(\Omega)$. Notemos que o integrando em (4.15) é limitado pela função integrável $4 \parallel f' \parallel_\infty^2 w^2$ e converge a zero quando $u_n \to u \in X^\eta$. Logo, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que a sequência $\frac{\partial F}{\partial u}(u_n, \epsilon)$ converge fortemente a $\frac{\partial F}{\partial u}(u, \epsilon)$ em $B(X^{\tilde{\eta}}, X^\beta)$. Como X^η está compactamente contido em $X^{\tilde{\eta}}$, do Lema 1.9.12, vem que a convergência vale na norma de $\mathcal{B}(X^\eta, X^\beta)$.

Quanto à continuidade em ϵ uniformemente em $u \in X^\eta$, como não há dependência em ϵ, é imediata.

∎

Lema 4.3.4 *Se g satisfaz (4.11), $\beta + 1 > \eta > \frac{1}{4}$ e $-\frac{1}{2} \leq \beta < -\frac{1}{4}$, então a aplicação $G : X^\eta \times \mathbb{R} \to X^\beta$ definida por (3.3) é Gateaux diferenciável em u com derivada de Gateaux $G_u(u, \epsilon) = \frac{\partial G}{\partial u}(u, \epsilon)$ dada por*

$$\left\langle \frac{\partial G}{\partial u}(u, \epsilon) w, \phi \right\rangle_{\beta, -\beta} = \int_{\partial\Omega} g'(\gamma(u))\, \gamma(w)\, \gamma(\phi)\, |J_{\partial\Omega} h_\epsilon|\, d\sigma(x),\ \forall w \in X^\eta,\ \forall \phi \in X^{-\beta},\ 0 < \epsilon \leq \epsilon_0, \quad (4.16)$$

e,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial G}{\partial u}(u, 0) w, \phi \right\rangle_{\beta, -\beta} &= \int_{I_1} g'(\gamma(u))\, \gamma(w)\, \gamma(\phi)\, M_\pi(p)\, d\sigma(x) + \int_{I_2} g'(\gamma(u))\, \gamma(w)\, \gamma(\phi)\, d\sigma(x) \quad (4.17) \\ &+ \int_{I_3} g'(\gamma(u))\, \gamma(w)\, \gamma(\phi)\, d\sigma(x) + \int_{I_4} g'(\gamma(u))\, \gamma(w)\, \gamma(\phi)\, d\sigma(x),\ \forall w \in X^\eta,\ \forall \phi \in X^{-\beta}. \end{aligned}$$

Além disso, $G_u(u, \epsilon)$ é linear e limitada.

Demonstração:

De fato, para todos $u, w \in X^\eta$ e $\phi \in X^{-\beta}$,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{t} \left\langle G(u + tw, \epsilon) - G(u, \epsilon) - t \frac{\partial G}{\partial u}(u, \epsilon) w, \phi \right\rangle_{\beta, -\beta} \right| \\ = & \left| \frac{1}{t} \int_{\partial\Omega} (g(\gamma(u + tw)) - g(\gamma(u)) - t g'(\gamma(u)) \gamma(w))\, \gamma(\phi)\, |J_{\partial\Omega} h_\epsilon|\, d\sigma(x) \right| \\ \leq & \frac{1}{|t|} \int_{\partial\Omega} |g(\gamma(u + tw)) - g(\gamma(u)) - t g'(\gamma(u)) \gamma(w)|\, |\gamma(\phi)|\, |J_{\partial\Omega} h_\epsilon|\, d\sigma(x) \\ \leq & \overline{K} \frac{1}{|t|} \int_{\partial\Omega} |g(\gamma(u + tw)) - g(\gamma(u)) - t g'(\gamma(u)) \gamma(w)|\, |\gamma(\phi)|\, d\sigma(x) \\ \leq & \overline{K} \frac{1}{|t|} \left(\int_{\partial\Omega} |g(\gamma(u + tw)) - g(\gamma(u)) - t g'(\gamma(u)) \gamma(w)|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \parallel \gamma(\phi) \parallel_{L^2(\partial\Omega)} \\ \leq & \overline{K_1}\, \overline{K} \frac{1}{|t|} \left(\int_{\partial\Omega} |g(\gamma(u + tw)) - g(\gamma(u)) - t g'(\gamma(u)) \gamma(w)|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} \\ \leq & \overline{K_1}\, \overline{K} \left(\int_{\partial\Omega} |(g'(\gamma(u + \bar{t} w)) - g'(\gamma(u))) \gamma(w)|^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} \quad (4.18) \end{aligned}$$

onde $\overline{K} = \sup\{|J_{\partial\Omega}h_\epsilon(x)|, x \in \partial\Omega, 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0\}$, $\overline{K_1} > 0$ é a constante devido à continuidade da aplicação traço de $X^{-\beta}$ em $L^2(\partial\Omega)$ desde que $-\beta > \frac{1}{4}$ e, empregamos o Teorema do Valor Médio para obter a última integral com $0 < \bar{t} < t$. O integrando em (4.18) é limitado por uma função integrável, $4 \parallel g' \parallel_\infty^2 |\gamma(w)|^2$, usando a hipótese (4.11), e converge a 0 quando $t \to 0$. Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue o desejado e,

$$\lim_{t\to 0} \frac{G(u+tw,\epsilon) - G(u,\epsilon)}{t} = \frac{\partial G}{\partial u}(u,\epsilon)w \text{ em } X^\beta,\ \forall u, w \in X^\eta.$$

Logo, G é Gateaux diferenciável com derivada de Gateaux dada por (4.16), para $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$. Novamente, vale comentar que supondo (4.11), ou seja, $\lambda_2 = 0$ em (3.5), as condições do Lema 3.2.3 estão satisfeitas. Observamos que $\frac{\partial G}{\partial u}(u,\epsilon)$ é linear e, também, limitada. Isso porque se $u, w \in X^\eta$ e $\phi \in X^{-\beta}$,

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \frac{\partial G}{\partial u}(u,\epsilon)w, \phi \right\rangle_{\beta,-\beta}\right| &\leq \int_{\partial\Omega} |g'(\gamma(u))\gamma(w)\gamma(\phi)|\,|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|\, d\sigma(x) \\
&\leq \overline{K} \parallel g' \parallel_\infty \int_{\partial\Omega} |\gamma(w)\gamma(\phi)|\, d\sigma(x) \\
&\leq \overline{K} \parallel g' \parallel_\infty \parallel \gamma(w) \parallel_{L^2(\partial\Omega)} \parallel \gamma(\phi) \parallel_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq \overline{K_1}\,\overline{K_3}\,\overline{K} \parallel g' \parallel_\infty \parallel w \parallel_{X^\eta} \parallel \phi \parallel_{X^{-\beta}} .
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial G}{\partial u}(u,\epsilon)w \right\|_{X^\beta} \leq \overline{K_1}\,\overline{K_3}\,\overline{K} \parallel g' \parallel_\infty \parallel w \parallel_{X^\eta}, \tag{4.19}$$

onde $\overline{K_3} > 0$ é a constante relativa à continuidade da aplicação traço de X^η em $L^2(\partial\Omega)$ desde que $\eta > \frac{1}{4}$.

O caso $\epsilon = 0$ segue analogamente.

∎

Lema 4.3.5 *Se g satisfaz (4.11), $\beta + 1 > \eta > \frac{1}{4}$ e $-\frac{1}{2} \leq \beta < -\frac{1}{4}$, a derivada de Gateaux de $G(u,\epsilon)$ com relação a u é contínua em u, ou seja, a aplicação $u \mapsto \frac{\partial G}{\partial u}(u,\epsilon) \in \mathcal{B}(X^\eta, X^\beta)$ é contínua. Além disso, $\epsilon \mapsto \frac{\partial G}{\partial u}(u,\epsilon)$ é contínua uniformemente em $u \in X^\eta$.*

Demonstração:

Sejam $u_n \to u \in X^\eta$ e $\frac{1}{4} < \tilde{\eta} < \eta$. Então, para $w \in X^{\tilde{\eta}}$, $\phi \in X^{-\beta}$,

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle\left(\frac{\partial G}{\partial u}(u_n,\epsilon)-\frac{\partial G}{\partial u}(u,\epsilon)\right)w,\phi\right\rangle_{\beta,-\beta}\right| &\leq \int_{\partial\Omega}|(g'(\gamma(u))-g'(\gamma(u_n)))\,\gamma(w)\,\gamma(\phi)\,|\,|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|\,d\sigma(x)\\
&\leq \overline{K}\left(\int_{\partial\Omega}|(g'(\gamma(u))-g'(\gamma(u_n)))\,\gamma(w)|^2 d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{2}}\parallel\gamma(\phi)\parallel_{L^2(\partial\Omega)}\\
&\leq \overline{K}\,\overline{K_1}\parallel\phi\parallel_{X^{-\beta}}\left(\int_{\Omega}|(g'(\gamma(u))-g'(\gamma(u_n)))\,\gamma(w)|^2 d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.20)
\end{aligned}
$$

onde $\overline{K},\overline{K_1}>0$ são as constantes que aparecem na demonstração do Lema 4.3.4 relativas, respectivamente, à limitação de $|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|$ para $x\in\partial\Omega$ e $0\leq\epsilon\leq\epsilon_0$ e à continuidade da aplicação traço de $X^{-\beta}$ em $L^2(\partial\Omega)$. Notemos que o integrando em (4.20) é limitado pela função integrável $4\parallel g'\parallel_\infty^2|\gamma(w)|^2$ e converge a zero quando $u_n\to u\in X^\eta$. Portanto, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que a sequência de operadores $\frac{\partial G}{\partial u}(u_n,\epsilon)$ converge fortemente a $\frac{\partial G}{\partial u}(u,\epsilon)$ em $B(X^{\tilde\eta},X^\beta)$. Como X^η está compactamente contido em $X^{\tilde\eta}$, do Lema 1.9.12, vem que a convergência vale na norma de $\mathcal{B}(X^\eta,X^\beta)$.

Com relação a continuidade em ϵ, é suficiente para nossos propósitos mostrar em $\epsilon=0$.

$$
\begin{aligned}
\left\langle\frac{\partial G}{\partial u}(u,\epsilon)w,\phi\right\rangle_{\beta,-\beta} &= \int_{\partial\Omega}g'(\gamma(u))\,\gamma(w)\,\gamma(\phi)\,|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|\,d\sigma(x)\\
&= \int_{I_1}g'(\gamma(u))\,\gamma(w)\,\gamma(\phi)\,|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|\,d\sigma(x)+\int_{I_2}g'(\gamma(u))\,\gamma(w)\,\gamma(\phi)\,|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|\,d\sigma(x)\\
&+ \int_{I_3}g'(\gamma(u))\,\gamma(w)\,\gamma(\phi)\,|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|\,d\sigma(x)+\int_{I_4}g'(\gamma(u))\,\gamma(w)\,\gamma(\phi)\,|J_{\partial\Omega}h_\epsilon|\,d\sigma(x)\\
&= \left\langle\left(\frac{\partial G_1}{\partial u}+\frac{\partial G_2}{\partial u}+\frac{\partial G_3}{\partial u}+\frac{\partial G_4}{\partial u}\right)(u,\epsilon)w,\phi\right\rangle_{\beta,-\beta},
\end{aligned}
$$

com G_i, G na porção em I_i, $1\leq i\leq 4$. Recordemos que

$$
|J_{\partial\Omega}h_\epsilon(x_1,x_2)|=\begin{cases}\sqrt{1+cos^2(x_1/\epsilon)} & (x_1,x_2)\in I_1=\{(x_1,1)\,|\,0\leq x_1\leq 1\},\\ Jh_\epsilon & (x_1,x_2)\in I_2=\{(1,x_2)\,|\,0\leq x_2\leq 1\},\\ 1 & (x_1,x_2)\in I_3=\{(x_1,0)\,|\,0\leq x_1\leq 1\},\\ 1 & (x_1,x_2)\in I_4=\{(0,x_2)\,|\,0\leq x_2\leq 1\}.\end{cases}
$$

Examinemos a seguir o que ocorre com a parcela de $G_u(u,\epsilon)$ na porção oscilante da fronteira $I_1=\{(x_1,1):0\leq x_1\leq 1\}$, em que

$$
\left\langle\frac{\partial G_1}{\partial u}(u,\epsilon)w,\phi\right\rangle_{\beta,-\beta}=\int_0^1 g'(\gamma(u(x_1,1)))\gamma(w(x_1,1))\gamma(\phi(x_1,1))\sqrt{1+cos^2(x_1/\epsilon)}dx_1
$$

afinal, em I_3 e I_4, é imediato por não haver dependência em ϵ, e na porção I_2, temos

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle\left(\frac{\partial G_2}{\partial u}(u,\epsilon)-\frac{\partial G_2}{\partial u}(u,0)\right)w,\phi\right\rangle_{\beta,-\beta}\right| &\leq \int_0^1 |g^{'}(\gamma(u(1,x_2)))\gamma(w(1,x_2))\gamma(\phi(1,x_2))|(Jh_\epsilon(1,x_2)-1)dx_2\\
&\leq (Jh_\epsilon-1)\int_0^1 |g^{'}(\gamma(u(1,x_2)))\gamma(w(1,x_2))\gamma(\phi(1,x_2))|dx_2\\
&\leq (Jh_\epsilon-1)\parallel g' \parallel_\infty \parallel \gamma(w)\parallel_{L^2(\partial\Omega)}\parallel \gamma(\phi)\parallel_{L^2(\partial\Omega)}\\
&\leq (Jh_\epsilon-1)\overline{K}_1\overline{K}_3 \parallel g'\parallel_\infty \parallel w\parallel_{X^\eta}\parallel \phi\parallel_{X^{-\beta}},
\end{aligned}$$

sendo $\overline{K}_1,\overline{K}_3>0$ as constantes relativas à continuidade da aplicação traço de $X^{-\beta}$ em $L^2(\partial\Omega)$ e de X^η em $L^2(\partial\Omega)$, respectivamente, que aparecem no Lema 4.3.4. Dessa forma, como $Jh_\epsilon \to 1$ uniformemente em x quando $\epsilon\to 0$, em I_2,

$$\left\|\left(\frac{\partial G_2}{\partial u}(u,\epsilon)-\frac{\partial G_2}{\partial u}(u,0)\right)\right\|_{\mathcal{L}(X^\eta,X^\beta)} \to 0, \text{ quando } \epsilon\to 0,$$

uniformemente em u. Isso porque,

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle\left(\frac{\partial G_2}{\partial u}(u,\epsilon)-\frac{\partial G_2}{\partial u}(u,0)\right)w,\phi\right\rangle_{\beta,-\beta}\right| &\leq \int_0^1 |g^{'}(\gamma(u(1,x_2)))\gamma(w(1,x_2))\gamma(\phi(1,x_2))|(Jh_\epsilon(1,x_2)-1)dx_2\\
&\leq \parallel g'\parallel_\infty \int_0^1 |\gamma(w(1,x_2))\gamma(\phi(1,x_2))|(Jh_\epsilon(1,x_2)-1)dx_2
\end{aligned}$$

e, majoramos o lado esquerdo por um termo que converge a zero independentemente de u.

Retornando à análise da porção I_1, sabemos que a função $p(x_1)=\sqrt{1+cos^2(x_1)}$ é periódica de período π. Do teorema de convergência na média (ver o Teorema 1.5.7), $p_\epsilon(x_1)=p(x_1/\epsilon)$ é tal que $p_\epsilon \rightharpoonup M_\pi(p)$ fraco* em $L^\infty(0,1)$, isto é,

$$\int_0^1 p_\epsilon(x_1)\,\varphi(x_1)\,dx_1 \to \int_0^1 M_\pi(p)\,\varphi(x_1)\,dx_1,\ \forall\varphi\in L^1(0,1),$$

sendo $M_\pi(p)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{1+cos^2(y)}dy$. Consequentemente,

$$\left\langle\frac{\partial G_1}{\partial u}(u,\epsilon)w,\phi\right\rangle_{\beta,-\beta} \to \left\langle\frac{\partial G_1}{\partial u}(u,0)w,\phi\right\rangle_{\beta,-\beta},\ \forall\phi\in X^{-\beta},$$

onde $\left\langle\frac{\partial G_1}{\partial u}(u,0)w,\phi\right\rangle_{\beta,-\beta}=\int_0^1 M_\pi(p)g^{'}(\gamma(u(x_1,1)))\gamma(w(x_1,1))\gamma(\phi(x_1,1))dx_1$.

Além disso, pelo Lema 4.3.4, a derivada de Gateaux de $G(u,\epsilon)$ com respeito à u é limitada em conjuntos limitados de X^η, uniformemente em ϵ, $\beta+1\geq\eta>\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}\leq\beta<-\frac{1}{4}$. Assim, se $B\subset X^\eta$ limitado, $\left\{\frac{\partial G_1}{\partial u}(u,\epsilon)w, w\in B,\ 0\leq\epsilon\leq\epsilon_0\right\}$ é limitado em $X^{\beta'}$ com $\beta'>\beta$ ainda $-\frac{1}{2}\leq\beta'<-\frac{1}{4}$. Daí, como a inclusão de $X^{\beta'}\subset X^\beta$ é compacta e são espaços de Banach, existe uma subsequência $\epsilon_{n_k}\to 0$ tal que $\frac{\partial G_1}{\partial u}(u,\epsilon_{n_k})w\to z$ em X^β.

Por outro lado, conforme vimos,

$$\left\langle \frac{\partial G_1}{\partial u}(u,\epsilon_{n_k})w,\phi\right\rangle_{\beta,-\beta} \to \left\langle \frac{\partial G_1}{\partial u}(u,0)w,\phi\right\rangle_{\beta,-\beta}, \ \forall \phi \in X^{-\beta}.$$

Logo, $z = \frac{\partial G_1}{\partial u}(u,0)w$ e, portanto, $\frac{\partial G_1}{\partial u}(u,\epsilon_{n_k})w \to \frac{\partial G_1}{\partial u}(u,0)w$ em X^β para cada $w \in B$.

Consideremos $\eta' < \eta$ no intervalo conveniente, i a inclusão de X^η em $X^{\eta'}$. Segue que $i(B)$ é um conjunto compacto de $X^{\eta'}$. Dado $\rho > 0$, para $w \in i(B)$, existem vizinhança V_w de w em $X^{\eta'}$ e $\delta_w > 0$ tais que,

$$\left\| \frac{\partial G_1}{\partial u}(u,\epsilon)\overline{w} - \frac{\partial G_1}{\partial u}(u,0)\overline{w}\right\|_{X^\beta} \leq \rho,$$

se $0 \leq \epsilon \leq \delta_w \leq \epsilon_0$ e $\overline{w} \in V_w$, pois $(\overline{w},\epsilon) \in V_w \times I_0 \mapsto \frac{\partial G}{\partial u}(u,\epsilon)\overline{w}$ é contínua, I_0 pequeno intervalo contendo 0.

Como $i(B)$ é compacto, existem $w_1, ..., w_n \in i(B)$ tais que $\cup_{i=1}^n V_{w_i} \supset i(B)$. Seja $\delta = \min_{1\leq i\leq n} \delta_{w_i}$. Então, se $0 \leq \epsilon \leq \delta$,

$$\left\| \frac{\partial G_1}{\partial u}(u,\epsilon)\overline{w} - \frac{\partial G_1}{\partial u}(u,0)\overline{w}\right\|_{X^\beta} \leq \rho, \ \forall \overline{w} \in i(B).$$

Agora, como conjunto $i(B) = B$ e, temos que para $0 \leq \epsilon \leq \delta$,

$$\left\| \frac{\partial G_1}{\partial u}(u,\epsilon)\overline{w} - \frac{\partial G_1}{\partial u}(u,0)\overline{w}\right\|_{X^\beta} \leq \rho, \ \forall \overline{w} \in B.$$

E, através de uma justificativa semelhante àquela feita para a porção I_2, mostramos que a convergência em I_1 é independente de u.

Reunindo todas as considerações, concluimos que a derivada de Gateaux de $G(u,\epsilon)$ é contínua em $\epsilon = 0$ uniformemente em $u \in X^\eta$.

∎

Lema 4.3.6 *Se f e g satisfazem (4.11), $\beta + 1 > \eta > \frac{1}{4}$ e $-\frac{1}{2} \leq \beta < -\frac{1}{4}$, então a aplicação $(H_\epsilon)_\beta = (F_\epsilon)_\beta + (G_\epsilon)_\beta : X^\eta \to X^\beta$ é continuamente Fréchet diferenciável com relação a u e a sua derivada $((H_\epsilon)_\beta)_u$ é contínua em $\epsilon = 0$ uniformemente em $u \in X^\eta$.*

Demonstração:

As desigualdades (4.14) e (4.19) mostram que a derivada de Gateaux de $((H_\epsilon)_\beta)_u$ é limitada como aplicação de X^η em X^β. A demonstração segue então reunindo - se os Lemas 4.3.3 e 4.3.5 e a Proposição 1.6.2.

■

Neste ponto, estamos prontos para demonstrar a semicontinuidade inferior dos equilíbrios.

Teorema 4.3.7 *Suponha que f e g satisfazem as condições do Teorema 4.1.4 e também (4.11) e que os equilíbrios de (3.1) com $\epsilon = 0$ são todos hiperbólicos com $1/4 < \eta < 1/2$. Então, a família de conjuntos de equilíbrios $\{E_\epsilon \,|\, 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0\}$ de (3.1) é semicontínua inferiormente em X^η.*

Demonstração:

Observemos que $u \in X^\eta$ é um equilíbrio de (3.1) se, e somente se,

$$\begin{aligned}(A_\epsilon)_\beta u = (H_\epsilon)_\beta u &\iff -(A_\epsilon)_\beta u + (H_\epsilon)_\beta u = 0\\ &\iff -(A_\epsilon)_\beta^{-1}(A_\epsilon)_\beta u + (A_\epsilon)_\beta^{-1}(H_\epsilon)_\beta u = 0\\ &\iff -u + (A_\epsilon)_\beta^{-1}(H_\epsilon)_\beta u = 0.\end{aligned}$$

Consideremos, então, o operador $Z = -I + (A_\epsilon)_\beta^{-1}(H_\epsilon)_\beta : X^\eta \times \mathbb{R} \to X^\eta$, $1/4 < \eta < 1/2$. Queremos aplicar o Teorema das Funções Implícitas, enunciado no Teorema 1.7.1, ao operador Z para demonstrar que dado qualquer equilíbrio $e(\epsilon)$ de (3.1), existe um outro equilíbrio $e(\epsilon')$ "próximo" a ele com ϵ e ϵ' suficientemente próximos. Para tanto, devemos verificar que:

i) Z é contínua em u.

ii) Z é contínua em ϵ.

iii) $\frac{\partial Z}{\partial u}$ é contínua em u.

iv) $\frac{\partial Z}{\partial u}$ é contínua em ϵ.

v) Se $(e, 0)$ é um equilíbrio, $\frac{\partial Z}{\partial u}(e, 0)$ é inversível.

Vejamos,

i) Pelo que fizemos na Proposição 2.3.4, $(A_\epsilon)_\beta^{-1}$ é um operador linear limitado, uniformemente em ϵ, de $H^{-1}(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$ e, consequentemente, também o é como operador de X^β em X^η. E, de acordo com o Teorema 3.2.5, $(H_\epsilon)_\beta$ é localmente Lipschitz contínua em u, com constante de Lipschitz independente de ϵ para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, como aplicação de X^η em X^β. A composição $(A_\epsilon)_\beta^{-1}(H_\epsilon)_\beta$ é, portanto, contínua em u.

ii) Segundo o Teorema 2.4.3, $(A_\epsilon)_\beta^{-1}$ é contínuo em ϵ como operador de $H^{-\gamma}$ em H^r, $-\gamma > -1$, $0 \leq r < 1$. E, pelo Lema 3.2.6, $(H_\epsilon)_\beta$ é contínua em ϵ uniformemente para u em limitados de X^η. Logo, $(A_\epsilon)_\beta^{-1}(H_\epsilon)_\beta$ é contínua em ϵ.

iii) Notemos que $\frac{\partial Z}{\partial u} = -I + \frac{\partial (A_\epsilon)_\beta^{-1}}{\partial u}((H_\epsilon)_\beta)\frac{\partial (H_\epsilon)_\beta}{\partial u} = -I + (A_\epsilon)_\beta^{-1}((H_\epsilon)_\beta)\frac{\partial (H_\epsilon)_\beta}{\partial u}$. De acordo com o Lema 4.3.6, $(H_\epsilon)_\beta$ é continuamente Fréchet diferenciável em u. Somando-se isso à continuidade de $(A_\epsilon)_\beta^{-1}(H_\epsilon)_\beta$ em u, temos que $\frac{\partial Z}{\partial u}$ é contínua em u.

iv) Ainda pelo Lema 4.3.6, a derivada de Fréchet de $(H_\epsilon)_\beta$ é contínua em ϵ uniformemente em $u \in X^\eta$, donde, combinando o item (ii), $\frac{\partial Z}{\partial u}$ é contínua em ϵ como queríamos.

v)Por hipótese, os equilíbrios de (3.1) em $\epsilon = 0$ são todos hiperbólicos, isto é, $\frac{\partial(-(A_\epsilon)_\beta + (H_\epsilon)_\beta)}{\partial u}(e, 0)$ é inversível. Disso segue que $\frac{\partial(-I + (A_\epsilon)_\beta^{-1}(H_\epsilon)_\beta)}{\partial u}(e, 0)$ também é inversível. Isso porque,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial((A_\epsilon)_\beta^{-1}(-(A_\epsilon)_\beta + (H_\epsilon)_\beta))}{\partial u} &= \frac{\partial (A_\epsilon)_\beta^{-1}}{\partial u}(-(A_\epsilon)_\beta + (H_\epsilon)_\beta)\frac{\partial(-(A_\epsilon)_\beta + (H_\epsilon)_\beta)}{\partial u} \\
&= (A_\epsilon)_\beta^{-1}(-(A_\epsilon)_\beta + (H_\epsilon)_\beta)\frac{\partial(-(A_\epsilon)_\beta + (H_\epsilon)_\beta)}{\partial u}.
\end{aligned}
$$

Assim, as condições do Teorema das Funções Implícitas estão satisfeitas e temos que os zeros de $Z(\cdot, \epsilon)$ são dados por uma função contínua $e(\epsilon)$ como queríamos.

■

4.4 Semicontinuidade inferior dos atratores

Por fim, provamos a semicontinuidade inferior dos atratores para o fluxo gerado por (3.1) em X^η, η conveniente.

Teorema 4.4.1 *Suponha que f e g satisfazem as hipóteses do Teorema 4.3.7 e que para ϵ em uma vizinhança V de 0, $e(\epsilon)$ é um equilíbrio hiperbólico de (3.1). Então, a aplicação $(H_\epsilon)_\beta = (F_\epsilon)_\beta + (G_\epsilon)_\beta : X^\eta \to X^\beta$, $\frac{1}{2} > \eta > \frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2} \leq \beta < -\frac{1}{4}$, verifica para $w \in X^\eta$, $\rho > 0$ uma constante,*

i) $(H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon) + w, \epsilon) = (A_\epsilon)_\beta e(\epsilon) + ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon), \epsilon)w + r(w, \epsilon)$, $\forall \epsilon \in V$, *com* $r(0, \epsilon) = 0$.

ii) $\sup_{\|w\|_{X^\eta} \leq \rho} \| r(w, 0) - r(w, \epsilon) \|_{X^\beta} \leq C(\epsilon)$, *com* $C(\epsilon) \to 0$ *quando* $\epsilon \to 0$.

iii) $\| r(w_1,\epsilon) - r(w_2,\epsilon) \|_{X^\beta} \leq k(\rho) \| w_1 - w_2 \|_{X^\eta}$, $\| w_1 \|_{X^\eta} \leq \rho$, $\| w_2 \|_{X^\eta} \leq \rho$, $k(\rho) \to 0$ *quando* $\rho \to 0^+$.

Demonstração:

i) Pelo Lema 4.3.6, $(H_\epsilon)_\beta$ é Fréchet diferenciável com respeito a u e, assim, usando a fórmula de Taylor,

$$\begin{aligned}(H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon)+w,\epsilon) &= (H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon),\epsilon) + ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)w + r(w,\epsilon)\\ &= (A_\epsilon)_\beta e(\epsilon) + ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)w + r(w,\epsilon),\end{aligned}$$

uma vez que se $e(\epsilon)$ é um equilíbrio do problema (3.1), então $(H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon),\epsilon) = (A_\epsilon)_\beta e(\epsilon)$. Segue imediatamente da última igualdade que $r(0,\epsilon) = 0$.

ii) Se $w \in X^\eta$, $\| w \|_{X^\eta} \leq \rho$,

$$\begin{aligned}\| r(w,0) - r(w,\epsilon) \|_{X^\beta} &= \| (H_\epsilon)_\beta(e(0)+w,0) - (H_\epsilon)_\beta(e(0),0) - ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(0),0)w\\ &- (H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon)+w,\epsilon) + (H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon),\epsilon) + ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)w \|_{X^\beta}\\ &\leq \| (H_\epsilon)_\beta(e(0)+w,0) - (H_\epsilon)_\beta(e(0),0)\\ &- (H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon)+w,\epsilon) + (H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon),\epsilon) \|_{X^\beta} \qquad (4.21)\\ &+ \| ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(0),0)w - ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)w \|_{X^\beta}\ . \qquad (4.22)\end{aligned}$$

Vejamos a expressão (4.21), vamos somar e subtrair alguns termos convenientes,

$$\begin{aligned}(4.21) \quad &\leq \| (H_\epsilon)_\beta(e(0)+w,0) - (H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon)+w,0) \|_{X^\beta}\\ &+ \| (H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon)+w,0) - (H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon)+w,\epsilon) \|_{X^\beta}\\ &+ \| (H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon),0) - (H_\epsilon)_\beta(e(0),0) \|_{X^\beta}\\ &+ \| (H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon),\epsilon) - (H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon),0) \|_{X^\beta}\ .\end{aligned}$$

Observemos que a primeira e a terceira parcelas no lado direito da desigualdade acima convergem a 0 quando ϵ tende a 0 devido à continuidade de $(H_\epsilon)_\beta$ em X^η conforme Teorema 3.2.5 e à continuidade dos equilíbrios em ϵ pelos Teoremas 4.3.1 e 4.3.7 . E, a segunda e quarta parcelas também convergem a 0 pelo Lema 3.2.6, lembrando que provamos no Lema 4.1.2 que os equilíbrios de (3.1) formam um conjunto limitado em $H^1(\Omega)$ e, portanto, em X^η.

Quanto a (4.22), basta usar o Lema 4.3.6, ou, mais detalhadamente,

$$
\begin{aligned}
& | < (((H_\epsilon)_\beta)_u(e(0),0) - ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon))w, \phi >_{\beta,-\beta} | \\
= \;& | < (F_u(e(0),0) + G_u(e(0),0) - F_u(e(\epsilon),\epsilon) - G_u(e(\epsilon),\epsilon))w, \phi >_{\beta,-\beta} | \\
\leq \;& | < (F_u(e(0),0) - F_u(e(\epsilon),\epsilon))w, \phi >_{\beta,-\beta} | \qquad (4.23)\\
+ \;& | < (G_u(e(0),0) - G_u(e(\epsilon),\epsilon))w, \phi >_{\beta,-\beta} |. \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

Analisemos (4.23),

$$
\begin{aligned}
| < (F_u(e(0),0) - F_u(e(\epsilon),\epsilon))w, \phi >_{\beta,-\beta} | \;&\leq\; | < (F_u(e(0),0) - F_u(e(0),\epsilon))w, \phi >_{\beta,-\beta} | \qquad (4.25)\\
&+\; | < (F_u(e(0),\epsilon) - F_u(e(\epsilon),\epsilon))w, \phi >_{\beta,-\beta} |. \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

A convergência das expressões em (4.25) e (4.26) para zero se deve à continuidade da derivada de Gateaux de F com relação a ϵ e a u, respectivamente, de acordo com o Lema 4.3.3. É importante recordarmos que os equilíbrios são contínuos em ϵ.

E, (4.24),

$$
\begin{aligned}
| < (G_u(e(0),0) - G_u(e(\epsilon),\epsilon))w, \phi >_{\beta,-\beta} | \;&\leq\; | < (G_u(e(0),0) - G_u(e(0),\epsilon))w, \phi >_{\beta,-\beta} | \\
&+\; | < (G_u(e(0),\epsilon) - G_u(e(\epsilon),\epsilon))w, \phi >_{\beta,-\beta} |.
\end{aligned}
$$

Analogamente, para concluirmos que as expressões tendem a zero, devemos usar a continuidade da derivada de Gateaux de G com relação a ϵ e a u, conforme Lema 4.3.5 .

iii) Se $w_1, w_2 \in X^\eta$, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$,

$$
\begin{aligned}
\| r(w_1,\epsilon) - r(w_2,\epsilon) \|_{X^\beta} \;&=\; \| (H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon)+w_1,\epsilon) - (H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon),\epsilon) - ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)w_1 \\
&-\; (H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon)+w_2,\epsilon) + (H_\epsilon)_\beta(e(\epsilon),\epsilon) + ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)w_2 \|_{X^\beta} \\
&\leq\; \| F(e(\epsilon)+w_1,\epsilon) - F(e(\epsilon),\epsilon) - F_u(e(\epsilon),\epsilon)w_1 \\
&-\; F(e(\epsilon)+w_2,\epsilon) + F(e(\epsilon),\epsilon) + F_u(e(\epsilon),\epsilon)w_2 \|_{X^\beta} \qquad (4.27)\\
&+\; \| G(e(\epsilon)+w_1,\epsilon) - G(e(\epsilon),\epsilon) - G_u(e(\epsilon),\epsilon)w_1 \\
&-\; G(e(\epsilon)+w_2,\epsilon) + G(e(\epsilon),\epsilon) + G_u(e(\epsilon),\epsilon)w_2 \|_{X^\beta} \;. \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

Estimemos (4.27):

$$
\begin{aligned}
& | < F(e(\epsilon) + w_1, \epsilon) - F(e(\epsilon), \epsilon) - F_u(e(\epsilon), \epsilon) w_1 \\
- \ & F(e(\epsilon) + w_2, \epsilon) + F(e(\epsilon), \epsilon) + F_u(e(\epsilon), \epsilon) w_2, \phi >_{\beta, -\beta} | \\
\leq \ & \int_\Omega |(f(e(\epsilon) + w_1) - f(e(\epsilon)) - f'(e(\epsilon)) w_1 - f(e(\epsilon) + w_2) + f(e(\epsilon)) + f'(e(\epsilon)) w_2) \, \phi| \, dx \\
\leq \ & \int_\Omega |(f'(e(\epsilon) + \xi_x) - f'(e(\epsilon)))(w_1 - w_2) \phi| \, dx \\
\leq \ & \left(\int_\Omega |(f'(e(\epsilon) + \xi_x) - f'(e(\epsilon)))(w_1 - w_2)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} \\
\leq \ & K_1 \left(\int_\Omega |(f'(e(\epsilon) + \xi_x) - f'(e(\epsilon)))(w_1 - w_2)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \| \phi \|_{X^{-\beta}} \\
\leq \ & K_1 \left(\int_\Omega (f'(e(\epsilon) + \xi_x) - f'(e(\epsilon)))^{2p} \, dx \right)^{\frac{1}{2p}} \left(\int_\Omega (w_1 - w_2)^{2q} dx \right)^{\frac{1}{2q}} \| \phi \|_{X^{-\beta}} \\
\leq \ & K_1 \left(\int_\Omega (f'(e(\epsilon) + \xi_x) - f'(e(\epsilon)))^{2p} \, dx \right)^{\frac{1}{2p}} \| w_1 - w_2 \|_{L^{2q}(\Omega)} \| \phi \|_{X^{-\beta}} \\
\leq \ & K_1 K_6 \left(\int_\Omega (f'(e(\epsilon) + \xi_x) - f'(e(\epsilon)))^{2p} \, dx \right)^{\frac{1}{2p}} \| w_1 - w_2 \|_{X^\eta} \| \phi \|_{X^{-\beta}} \\
\leq \ & K_1 K_6 \left(\int_\Omega (L_{f'} \xi_x)^{2p} \, dx \right)^{\frac{1}{2p}} \| w_1 - w_2 \|_{X^\eta} \| \phi \|_{X^{-\beta}},
\end{aligned}
$$

onde ξ_x vem da aplicação do Teorema do Valor Médio; para cada $x \in \Omega$, $w_1(x) \leq \xi_x \leq w_2(x)$ ou $w_2(x) \leq \xi_x \leq w_1(x)$, $K_1 > 0$ é a constante de imersão de $X^{-\beta}$ em $L^2(\Omega)$ e $K_6 > 0$ é a constante de imersão de X^η em L^{2q} desde que $q < \frac{1}{1-2\eta}$ (lembrando que $\eta < \frac{1}{2}$), p é o expoente conjugado de q e $L_{f'}$ é a constante de Lipschitz de f'. Assim,

$$
\begin{aligned}
& \| F(e(\epsilon) + w_1, \epsilon) - F(e(\epsilon), \epsilon) - F_u(e(\epsilon), \epsilon) w_1 - F(e(\epsilon) + w_2, \epsilon) + F(e(\epsilon), \epsilon) + F_u(e(\epsilon), \epsilon) w_2 \|_{X^\beta} \\
\leq \ & K_1 K_6 \left(\int_\Omega (L_{f'} \xi_x)^{2p} \, dx \right)^{\frac{1}{2p}} \| w_1 - w_2 \|_{X^\eta} . \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

Agora, o integrando é limitado e, tende a 0 quando ρ converge a 0^+, pois $\| w_1 \|_{X^\eta} \leq \rho$, $\| w_2 \|_{X^\eta} \leq \rho$ e $w_1(x) \leq \xi_x \leq w_2(x)$ ou $w_2(x) \leq \xi_x \leq w_1(x)$. Logo, a integral converge a 0 pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Quanto a (4.28):

$$
\begin{aligned}
& | < G(e(\epsilon)+w_1,\epsilon) - G(e(\epsilon),\epsilon) - G_u(e(\epsilon),\epsilon)w_1 \\
- \ & G(e(\epsilon)+w_2,\epsilon) + G(e(\epsilon),\epsilon) + G_u(e(\epsilon),\epsilon)w_2, \phi >_{\beta,-\beta} | \\
\leq \ & \int_{\partial\Omega} |(g(\gamma(e(\epsilon)+w_1)) - g(\gamma(e(\epsilon))) - g'(\gamma(e(\epsilon)))\gamma(w_1) \\
- \ & g(\gamma(e(\epsilon)+w_2)) + g(\gamma(e(\epsilon))) + g'(\gamma(e(\epsilon)))\gamma(w_2))\,\gamma(\phi)|\,|J_{\partial\Omega}h_\epsilon| d\sigma(x) \\
\leq \ & \int_{\partial\Omega} |(g'(\gamma(e(\epsilon)+\xi_x)) - g'(\gamma(e(\epsilon))))\gamma(w_1-w_2)\gamma(\phi)|\,|J_{\partial\Omega}h_\epsilon| d\sigma(x) \\
\leq \ & \overline{K}\left(\int_{\partial\Omega} |(g'(\gamma(e(\epsilon)+\xi_x)) - g'(\gamma(e(\epsilon))))\gamma(w_1-w_2)|^2 d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{2}} \| \gamma(\phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \\
\leq \ & \overline{K}\,\overline{K_1}\left(\int_{\partial\Omega} |(g'(\gamma(e(\epsilon)+\xi_x)) - g'(\gamma(e(\epsilon))))\gamma(w_1-w_2)|^2 d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{2}} \| \phi \|_{X^{-\beta}} \\
\leq \ & \overline{K}\,\overline{K_1}\left(\int_{\partial\Omega} (g'(\gamma(e(\epsilon)+\xi_x)) - g'(\gamma(e(\epsilon))))^{2\bar{p}} d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{2\bar{p}}} \left(\int_{\partial\Omega} \gamma(w_1-w_2)^{2\bar{q}} dx\right)^{\frac{1}{2\bar{q}}} \| \phi \|_{X^{-\beta}} \\
\leq \ & \overline{K}\,\overline{K_1}\left(\int_{\partial\Omega} (g'(\gamma(e(\epsilon)+\xi_x)) - g'(\gamma(e(\epsilon))))^{2\bar{p}} dx\right)^{\frac{1}{2\bar{p}}} \| \gamma(w_1-w_2) \|_{L^{2\bar{q}}(\partial\Omega)} \| \phi \|_{X^{-\beta}} \\
\leq \ & \overline{K}\,\overline{K_1}\,\overline{K_6}\left(\int_{\partial\Omega} (g'(\gamma(e(\epsilon)+\xi_x)) - g'(\gamma(e(\epsilon))))^{2\bar{p}} dx\right)^{\frac{1}{2\bar{p}}} \| w_1 - w_2 \|_{X^\eta} \| \phi \|_{X^{-\beta}} \\
\leq \ & \overline{K}\,\overline{K_1}\,\overline{K_6}\left(\int_{\partial\Omega} (L_{g'}\gamma(\xi_x))^{2\bar{p}} dx\right)^{\frac{1}{2\bar{p}}} \| w_1 - w_2 \|_{X^\eta} \| \phi \|_{X^{-\beta}},
\end{aligned}
$$

sendo $\overline{K} = \sup\{|J_{\partial\Omega}h_\epsilon(x)|,\ x \in \partial\Omega,\ 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0\}$, $\overline{K_1} > 0$ referente à continuidade da aplicação γ de $X^{-\beta}$ em $L^2(\partial\Omega)$ se $-\beta > \frac{1}{4}$, $\overline{K_6} > 0$ devido à continuidade desta mesma aplicação γ de $X^\eta \subset H^{2\eta}(\Omega)$ em $L^{2\bar{q}}(\partial\Omega)$ desde que $\bar{q} < \frac{1}{2-4\eta}$, ξ_x vem da aplicação do Teorema do Valor Médio; para cada $x \in \Omega$, $w_1(x) \leq \xi_x \leq w_2(x)$ ou $w_2(x) \leq \xi_x \leq w_1(x)$, $\bar{p}$ é o expoente conjugado de $\bar{q}$ e $L_{g'}$ a constante de Lipschitz de g'. Segue que,

$$
\begin{aligned}
& \| G(e(\epsilon)+w_1,\epsilon) - G(e(\epsilon),\epsilon) - G_u(e(\epsilon),\epsilon)w_1 - G(e(\epsilon)+w_2,\epsilon) + G(e(\epsilon),\epsilon) + G_u(e(\epsilon),\epsilon)w_2 \|_{X^\beta} \\
\leq \ & \overline{K}\,\overline{K_1}\,\overline{K_6}\left(\int_{\partial\Omega} (L_{g'}\gamma(\xi_x))^{2\bar{p}} dx\right)^{\frac{1}{2\bar{p}}} \| w_1 - w_2 \|_{X^\eta} .
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

Temos que o integrando é limitado e converge a 0 quando ρ tende a 0 afinal, $\| w_1 \|_{X^\eta} \leq \rho$, $\| w_2 \|_{X^\eta} \leq \rho$ e $w_1(x) \leq \xi_x \leq w_2(x)$ ou $w_2(x) \leq \xi_x \leq w_1(x)$. Portanto, a integral converge a 0 pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Reunindo (4.29) e (4.30), encontramos uma constante $k(\rho)$ tal que

$$
\| r(w_1,\epsilon) - r(w_2,\epsilon) \|_{X^\beta} \leq k(\rho) \| w_1 - w_2 \|_{X^\eta},
$$

com $\| w_1 \|_{X^\eta} \leq \rho,\ \| w_2 \|_{X^\eta} \leq \rho,\ k(\rho) \to 0$ quando $\rho \to 0^+$.

■

Seja V uma vizinhança em torno de 0 tal que $e(\epsilon)$ é um equilíbrio hiperbólico de (3.1) para todo $\epsilon \in V$. Segue que o operador linearizado $L(\epsilon) = (A_\epsilon)_\beta - ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon), \epsilon)$ é um isomorfismo para todo $\epsilon \in V$. Trata - se, também, de um operador setorial como veremos. Para tanto, vamos precisar do seguinte resultado auxiliar.

Lema 4.4.2 *Sejam f, g, β, η tais como no Lema 4.3.6. A derivada de Fréchet $((H_\epsilon)_\beta)_u(u, \epsilon)$ satisfaz para $w \in D((A_\epsilon)_\beta)$:*

$$\| ((H_\epsilon)_\beta)_u(u, \epsilon) w \|_{X^\beta} \leq C\zeta \| (A_\epsilon)_\beta w \|_{X^\beta} + CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \| w \|_{X^\beta}, \ \ \forall \zeta > 0, \tag{4.31}$$

onde C e C' são constantes positivas independentes de ϵ. Em outras palavras, $((H_\epsilon)_\beta)_u(u, \epsilon)$ é dito $(A_\epsilon)_\beta$ limitado.

Demonstração:

Recordemos que $((H_\epsilon)_\beta)_u(u, \epsilon) : X^\eta \to X^\beta$ é um operador limitado, conforme Lemas 4.3.2 e 4.3.4, com constante de limitação $C > 0$ independente de ϵ. Somando-se a isso o Teorema 1.13.5, temos

$$\begin{aligned}
\| ((H_\epsilon)_\beta)_u(u, \epsilon) w \|_{X^\beta} &\leq C \| w \|_{X^\eta} \\
&= C \| (A_\epsilon)_\beta^{\eta-\beta} w \|_{X^\beta} \\
&\leq C\zeta \| (A_\epsilon)_\beta w \|_{X^\beta} + CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \| w \|_{X^\beta},
\end{aligned}$$

para todo $\zeta > 0$ e $C' > 0$ é uma constante que depende somente do setor e da constante na desigualdade do resolvente de $\{(A_\epsilon)_\beta\}_{0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0}$, ambos comuns à família.

■

Teorema 4.4.3 *O operador linearizado $L(\epsilon) = (A_\epsilon)_\beta - ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon), \epsilon) : X^{\beta+1} \subset X^\beta \to X^\beta$, $-\frac{1}{2} \leq \beta < -\frac{1}{4}$, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, é setorial. Além disso, é possível determinar um setor e uma constante na desigualdade do resolvente comuns à família $\{L(\epsilon)\}_{0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0}$.*

Demonstração :

Sabemos que o operador $(A_\epsilon)_\beta : X^{\beta+1} \subset X^\beta \to X^\beta$, $-\frac{1}{2} \leq \beta \leq 0$, é setorial com $\Re(\sigma((A_\epsilon)_\beta)) > 0$ e $((H_\epsilon)_\beta)_u(u, \epsilon) : X^\eta \to X^\beta$, $\beta + 1 \geq \eta > \frac{1}{4}$, é um operador linear limitado. Notemos que $D((A_\epsilon)_\beta) \subset$

$D(((H_\epsilon)_\beta)_u(u,\epsilon))$ e, portanto, $D(L(\epsilon)) = D((A_\epsilon)_\beta)$ donde, $L(\epsilon)$ é densamente definido. Além disso, vemos que $L(\epsilon)$ é um operador fechado, por ser a soma de um operador fechado com um limitado.

A seguir, estimamos a norma $\| (\lambda I - L(\epsilon))^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\beta)}$, para λ apropriado. Para tanto, escreveremos a expressão do resolvente de $L(\epsilon)$ de uma forma conveniente:

$$(\lambda I - L(\epsilon))^{-1} = (\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1}(I - (-((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1} \tag{4.32}$$

e, serão necessários os cálculos abaixo,

$$\begin{aligned}
\| ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1}w \|_{X^\beta} &\leq C\zeta \| (A_\epsilon)_\beta(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1}w \|_{X^\beta} + CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \| (\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1}w \|_{X^\beta} \\
&\leq C\zeta \| (I - \lambda I(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})w \|_{X^\beta} + CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \frac{M}{|\lambda - b|} \| w \|_{X^\beta} \\
&\leq C\zeta\left(1 + |\lambda|\frac{M}{|\lambda - b|}\right) \| w \|_{X^\beta} + CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \frac{M}{|\lambda - b|} \| w \|_{X^\beta} .
\end{aligned}$$

Observemos que utilizamos a desigualdade (4.31), o Teorema 3.1.1 e, para $|\lambda| > R$, R grande o suficiente, podemos dizer que a expressão entre parênteses imediatamente acima pode ser aproximada por uma constante $\tilde{C}$. Daí,

$$\| ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\beta)} \leq C\zeta\tilde{C} + CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \frac{M}{|\lambda - b|}.$$

Assim, desde que $|\lambda|$ grande o suficiente tal que $C\zeta\tilde{C} + CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \frac{M}{|\lambda-b|} < 1$, o operador $I - (-((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1}$ é inversível com

$$\| (I - (-((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\beta)} \leq \left(1 - C\zeta\tilde{C} - CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \frac{M}{|\lambda - b|}\right)^{-1}. \tag{4.33}$$

Empregando (4.33), podemos enfim estimar,

$$\begin{aligned}
\| (\lambda I - L(\epsilon))^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\beta)} &\leq \| (\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\beta)} \| (I - (-((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\beta)} \\
&\leq \frac{M}{|\lambda - b|} \| (I - (-((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\beta)} \\
&\leq \frac{M}{|\lambda - b|}\left(1 - C\zeta\tilde{C} - CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \frac{M}{|\lambda - b|}\right)^{-1} \\
&\leq \frac{\text{constante}}{|\lambda - b|},
\end{aligned}$$

para $\lambda \in S_{b,\phi}$ setor comum à família $\{(A_\epsilon)_\beta\}_{0\leq\epsilon\leq\epsilon_0}$, $|\lambda| > R$ e grande o suficiente de forma que $C\zeta\tilde{C} + CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \frac{M}{|\lambda-b|} < 1$.

Agora, $C\zeta\tilde{C} + CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \frac{M}{|\lambda-b|} < 1 \Leftrightarrow |\lambda| > \frac{CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} M}{1-C\zeta\tilde{C}} - b$. Então, podemos tomar como vértice $a = b - \frac{CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} M}{1-C\zeta\tilde{C}} - \delta$, $\delta > 0$ e ângulo $\psi > \phi$ e tal que os semi-eixos não interceptam a circunferência $|\lambda| = \frac{CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} M}{1-C\zeta\tilde{C}} - b$, supondo $R < \frac{CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} M}{1-C\zeta\tilde{C}} - b$.

Desta forma, fica explícita a setorialidade da família de operadores $\{L(\epsilon)\}_{0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0}$ uniformemente. E mais, a constante na desigualdade do resolvente e o setor obtidos são independentes de ϵ.

■

Teorema 4.4.4 *Para $\lambda \in \cap\{\rho(L(\epsilon)) : 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0\}$, $\frac{1}{2} > \eta > \frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2} < \beta < -\frac{1}{4}$, vale que $\| (\lambda I - L(\epsilon))^{-1} - (\lambda I - L(0))^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)}$ converge a zero quando ϵ tende a zero. Além disso, tal convergência é uniforme para λ em compactos contidos em $\cap\{\rho(L(\epsilon)) : 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0\}$.*

Demonstração:

Utilizando a expressão (4.32), para $w \in X^\beta$:

$$
\begin{aligned}
& \| ((\lambda I - L(\epsilon))^{-1} - (\lambda I - L(0))^{-1}) w \|_{X^\eta} = \| [(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1}(I - (-((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon), \epsilon))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1} \\
- \; & (\lambda I - (A)_\beta)^{-1}(I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0), 0))(\lambda I - (A)_\beta)^{-1})^{-1}] w \|_{X^\eta} \\
\leq \; & \| [(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1} - (\lambda I - (A)_\beta)^{-1}](I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0), 0))(\lambda I - (A)_\beta)^{-1})^{-1} w \|_{X^\eta} \\
+ \; & \| (\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1}[(I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0), 0))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1} - (I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0), 0))(\lambda I - (A)_\beta)^{-1})^{-1}] w \|_{X^\eta} \\
+ \; & \| (\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1}[(I - (-((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon), \epsilon))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1} - (I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0), 0))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1}] w \|_{X^\eta} .
\end{aligned}
$$

Precisamos, então, estudar as três últimas expressões acima e constatar que vão à zero uniformemente para w em limitados de X^β. Vamos denominá-las I, II e III, respectivamente. Quanto à I, notamos que converge a zero em $\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)$, usando o Teorema 2.4.3 e as devidas inclusões entre os espaços fracionários e os espaços de Hilbert. Agora, com relação à II e III, queremos aplicar o Lema auxiliar 1.9.7. Se soubermos que

a) Os operadores $I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0), 0))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1}$, $I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0), 0))(\lambda I - (A)_\beta)^{-1}$ e $I - (-((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon), \epsilon))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1}$ são limitados uniformemente em ϵ e possuem inversos também limitados independentemente de ϵ,

b) $I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0), 0))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1}$ converge para $I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0), 0))(\lambda I - (A)_\beta)^{-1}$ em $\mathcal{L}(X^\beta, X^\beta)$ e,

c) $I - (-((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon), \epsilon))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1}$ converge para $I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0), 0))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1}$ em $\mathcal{L}(X^\beta, X^\beta)$, segue do Lema 1.9.7, a convergência de $(I-(-((H_0)_\beta)_u(e(0),0))(\lambda I-(A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1}$ para $(I-(-((H_0)_\beta)_u(e(0),0))(\lambda I-(A)_\beta)^{-1})^{-1}$ e de $(I-(-((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon))(\lambda I-(A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1}$ para $(I-(-((H_0)_\beta)_u(e(0),0))(\lambda I-(A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1}$ em $\mathcal{L}(X^\beta,X^\beta)$. Vejamos, sobre o item a), demonstramos para o operador $I-(-((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon))(\lambda I-(A_\epsilon)_\beta)^{-1}$ no Teorema 4.4.3, expressão (4.33), os demais são análogos. Para o item b), se C é a constante da limitação de $((H_\epsilon)_\beta)_u$ para $0\le\epsilon\le\epsilon_0$,

$$
\begin{aligned}
& \| [(I-(-((H_0)_\beta)_u(e(0),0))(\lambda I-(A_\epsilon)_\beta)^{-1})-(I-(-((H_0)_\beta)_u(e(0),0))(\lambda I-(A)_\beta)^{-1})]w\|_{X^\beta}\\
= \;& \| ((H_0)_\beta)_u(e(0),0)[(\lambda I-(A_\epsilon)_\beta)^{-1}-(\lambda I-(A)_\beta)^{-1}]w\|_{X^\beta}\\
\le \;& \| ((H_0)_\beta)_u(e(0),0)\|_{\mathcal{L}(X^\eta,X^\beta)}\| (\lambda I-(A_\epsilon)_\beta)^{-1}-(\lambda I-(A)_\beta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\eta)}\| w\|_{X^\beta}\\
\le \;& C\| (\lambda I-(A_\epsilon)_\beta)^{-1}-(\lambda I-(A)_\beta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\eta)}\| w\|_{X^\beta}\\
\to \;& 0 \text{ quando } \epsilon\to 0,
\end{aligned}
$$

aplicando o Teorema 2.4.3. E, com relação ao item c),

$$
\begin{aligned}
& \| [(I-(-((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon))(\lambda I-(A_\epsilon)_\beta)^{-1})-(I-(-((H_0)_\beta)_u(e(0),0))(\lambda I-(A_\epsilon)_\beta)^{-1})]w\|_{X^\beta}\\
= \;& \| [((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)-((H_0)_\beta)_u(e(0),0)](\lambda I-(A_\epsilon)_\beta)^{-1}w\|_{X^\beta}\\
\le \;& \| ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)-((H_0)_\beta)_u(e(0),0)\|_{\mathcal{L}(X^\eta,X^\beta)}\| (\lambda I-(A_\epsilon)_\beta)^{-1}w\|_{X^\eta}\\
\le \;& \| ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)-((H_0)_\beta)_u(e(0),0)\|_{\mathcal{L}(X^\eta,X^\beta)}\| (A_\epsilon)_\beta^{\eta-\beta}(\lambda I-(A_\epsilon)_\beta)^{-1}w\|_{X^\beta}\\
\le \;& \| ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)-((H_0)_\beta)_u(e(0),0)\|_{\mathcal{L}(X^\eta,X^\beta)}\cdot\\
\cdot \;& (\zeta\| (A_\epsilon)_\beta(\lambda I-(A_\epsilon)_\beta)^{-1}w\|_{X^\beta}+C'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}}\| (\lambda I-(A_\epsilon)_\beta)^{-1}w\|_{X^\beta})\\
\le \;& \| ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)-((H_0)_\beta)_u(e(0),0)\|_{\mathcal{L}(X^\eta,X^\beta)}\left(\zeta\left(1+|\lambda|\frac{M}{|\lambda-b|}\right)\| w\|_{X^\beta}+C'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}}\frac{M}{|\lambda-b|}\| w\|_{X^\beta}\right)\\
\le \;& \| ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)-((H_0)_\beta)_u(e(0),0)\|_{\mathcal{L}(X^\eta,X^\beta)}C(\lambda)\| w\|_{X^\beta}\\
\to \;& 0 \text{ quando } \epsilon\to 0,
\end{aligned}
$$

onde usamos o Teorema 1.13.5 e $C(\lambda)$ é uma constante que depende de λ. A convergência para zero se deve a continuidade da derivada de Fréchet de $(H_\epsilon)_\beta$ em u e, também, em $\epsilon=0$ uniformemente para u em X^η de acordo com o resultado no Lema 4.3.6.

Finalmente, reunindo tais considerações, podemos estudar as expressões II e III,

$$
\begin{aligned}
& \| (\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1}[(I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0),0))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1} - (I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0),0))(\lambda I - (A)_\beta)^{-1})^{-1}]w \|_{X^\eta} \\
\leq\ & \| (\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\eta)} \cdot \\
\cdot\ & \| (I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0),0))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1} - (I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0),0))(\lambda I - (A)_\beta)^{-1})^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\beta)} \| w \|_{X^\beta} \\
\leq\ & \| (\lambda I - (A)_\beta)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\eta)} \cdot \\
\cdot\ & \| (I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0),0))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1} - (I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0),0))(\lambda I - (A)_\beta)^{-1})^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\beta)} \| w \|_{X^\beta} \\
\rightarrow\ & 0 \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0,
\end{aligned}
$$

devido aos itens a) e b), ao Lema 1.9.7 e ao Teorema 2.4.3.

$$
\begin{aligned}
& \| (\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1}[(I - (-((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1} - (I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0),0))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1}]w \|_{X^\eta} \\
\leq\ & \| (\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\eta)} \cdot \\
\cdot\ & \| (I - (-((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1} - (I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0),0))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\beta)} \| w \|_{X^\beta} \\
\leq\ & \| (\lambda I - (A)_\beta)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\eta)} \cdot \\
\cdot\ & \| (I - (-((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1} - (I - (-((H_0)_\beta)_u(e(0),0))(\lambda I - (A_\epsilon)_\beta)^{-1})^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta,X^\beta)} \| w \|_{X^\beta} \\
\rightarrow\ & 0 \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0,
\end{aligned}
$$

pelos itens a) e c), o Lema 1.9.7 e o Teorema 2.4.3.

Logo, a princípio, temos a convergência dos resolventes dos operadores linearizados para $\lambda \in S_{b,\phi}$, setor comum à família $\{(A_\epsilon)_\beta\}_{0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0}$, grande o suficiente de modo a fazerem sentido aqueles inversos em a).

De fato, tal convergência é válida para todo λ no resolvente comum a esses operadores. Trata-se de um resultado mais geral, vide Lema 1.9.10. E, a uniformidade da convergência para λ em compactos deste conjunto segue da identidade (1.5), usando a continuidade do resolvente em λ e a convergência dos resolventes para cada λ fixado provada acima.

■

Observemos, através da expressão (4.32), que o operador linearizado possui resolvente compacto. Portanto, seu espectro é puramente discreto, isto é, tal conjunto é constituído somente de autovalores de multiplicidade finita que não se acumulam em um ponto finito (ver Schmudgen, [20]). Isso prova de forma mais simples a setorialidade destes operadores.

No que segue, vamos obter a continuidade do espectro do operador linearizado de dois modos distintos. O primeiro utiliza a chamada convergência no sentido do "gap", discutida na Seção 10 do Capítulo 1. E o segundo, a teoria de perturbação de um operador auto - adjunto conforme a Seção 9 do Capítulo 1 e também, a convergência de operadores auto - adjuntos no sentido da norma do resolvente e suas consequências. Vale salientar a importância de se provar tal continuidade no que diz respeito à demonstração da continuidade em $\epsilon = 0$ das projeções espectrais.

Vemos que, como os resolventes dos operadores linearizados convergem em norma, então tais resolventes também convergem no sentido do "gap".

Agora, fixado $\lambda_0 \in \cap\{\rho(L(\epsilon)) : 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0\}$, consideremos o espaço base X^β decomposto em subespaços Y_1 e Y_2 correspondentes aos conjuntos espectrais $\sigma_1 = \sigma((L(0)-\lambda_0)^{-1}) \cap \{\Re(\lambda) < 0\}$, $\sigma_2 = \sigma((L(0)-\lambda_0)^{-1}) \cap \{\Re(\lambda) > 0\}$. Sejam F_1 e F_2 as projeções espectrais em Y_1 e Y_2, respectivamente.

Se $\bar{\Gamma}$ é uma curva contínua fechada no lado esquerdo do plano envolvendo σ_1 - uma vez que σ_1 é limitado, pelo Teorema 1.10.3, $\sigma_1(\epsilon) = \sigma((L(\epsilon)-\lambda_0 I)^{-1}) \cap \{\Re(\lambda) < 0\}$ também está no interior de $\bar{\Gamma}$ para ϵ pequeno.

E, pelo Teorema 1.9.11, o espectro estendido de $(L(\epsilon)-\lambda_0 I)$ e o espectro estendido do seu inverso $(L(\epsilon)-\lambda_0 I)^{-1}$ são mapeados um no outro pela aplicação : $\varsigma \to \varsigma^{-1}$. O mesmo para $(L(0)-\lambda_0 I)^{-1}$. Da continuidade da aplicação inverso, fora do zero, segue que podemos tomar uma mesma curva contínua e fechada $\tilde{\Gamma}$ envolvendo $\sigma((L(\epsilon)-\lambda_0 I)) \cap \{\Re(\lambda) < 0\}$ para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$.

Finalmente, os espectros dos operadores $L(\epsilon) - \lambda_0$ e $L(\epsilon)$ são transladados um do outro, o que implica que podemos tomar uma mesma curva Γ, contínua e fechada, englobando $\sigma(L(\epsilon)) \cap \{\Re(\lambda) < 0\}$ para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$.

Como comentamos, um outro modo de provar a continuidade em ϵ do espectro do operador linearizado é utilizar o Teorema 1.9.18 que garante que $L(\epsilon)$ é auto - adjunto, dado que $L(\epsilon)$ é essencialmente a soma de um operador auto - adjunto, $(A_\epsilon)_\beta$, com um operador simétrico, $(A_\epsilon)_\beta$ - limitado, $((H_\epsilon)_\beta)_u$ e, portanto, o resultado segue dos Teoremas 4.4.4 e 1.9.16.

Consideremos a decomposição de X^β em subespaços $X_1 = X_1(\epsilon)$ e $X_2 = X_2(\epsilon)$ correspondentes aos conjuntos espectrais $\sigma_1 = \sigma(L(\epsilon)) \cap \{\Re(\lambda) < 0\}$ e $\sigma_2 = \sigma((L(\epsilon)) \cap \{\Re(\lambda) > 0\}$. Sejam $E_1 = E_1(\epsilon)$, $E_2 = E_2(\epsilon)$ as projeções espectrais em X_1 e X_2, respectivamente.

Da teoria, sabemos que

$$E_1(0)x = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma (\lambda - L(0))^{-1} x d\lambda,$$

onde Γ é uma curva fechada contínua no lado esquerdo do plano envolvendo $\sigma_1(L(0))$. Devido à convergência dos espectros dos operadores linearizados, temos que $\sigma_1(L(\epsilon))$ também está no interior de Γ para ϵ suficientemente pequeno. Isso nos permite escrever:

$$E_1(\epsilon)x = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma (\lambda - L(\epsilon))^{-1} x d\lambda.$$

A partir de tais considerações, podemos demonstrar um dos resultados centrais da seção:

Teorema 4.4.5 *A projeção espectral $E_1(\epsilon)$ é contínua em $\epsilon = 0$ em $\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)$ e, $E_2(\epsilon)$ é contínua em $\epsilon = 0$ em $\mathcal{L}(X^\beta)$ e em $\mathcal{L}(X^\eta)$, $\frac{1}{2} > \eta > \frac{1}{4}, -\frac{1}{2} < \beta < -\frac{1}{4}$.*

Demonstração:

Comecemos por $E_1(\epsilon)$. Vamos aplicar a identidade (1.5), demonstrada na Seção 9 do Capítulo 1,

$$
\begin{aligned}
& \| E_1(\epsilon) - E_1(0) \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)} \leq \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \| ((\lambda - L(\epsilon))^{-1} - (\lambda - L(0))^{-1}) \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)} \, d|\lambda| \\
\leq \;& \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \| (I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - L(\epsilon))^{-1})((\lambda_0 - L(\epsilon))^{-1} - (\lambda_0 - L(0))^{-1})(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - L(0))^{-1}) \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)} \, d|\lambda| \\
\leq \;& \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \| (I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - L(\epsilon))^{-1}) \|_{\mathcal{L}(X^\eta, X^\eta)} \| ((\lambda_0 - L(\epsilon))^{-1} - (\lambda_0 - L(0))^{-1}) \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)} \cdot \\
\cdot \;& \| (I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - L(0))^{-1}) \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\beta)} \, d|\lambda| \\
\leq \;& \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma (1 + |\lambda - \lambda_0| \, \| (\lambda - L(0))^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\eta)}) C(\epsilon) (1 + |\lambda - \lambda_0| \, \| (\lambda - L(0))^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta)}) d|\lambda| \\
\leq \;& \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma (1 + \rho R) C(\epsilon) (1 + \rho R') d|\lambda| \\
\to \;& 0 \;\text{ quando }\; \epsilon \to 0,
\end{aligned}
$$

onde $\lambda_0 \in \Gamma$ qualquer, $C(\epsilon)$ vem da convergência dos resolventes dos operadores linearizados em $\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)$ conforme Teorema 4.4.4, ρ se deve ao fato de λ variar num limitado e usamos que Γ é uma curva compacta no resolvente de $L(0)$ de forma que existem constantes R e R' tais que $\| (\lambda - L(0))^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\eta)} \leq R$ e $\| (\lambda - L(0))^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta)} \leq R'$ para $\lambda \in \Gamma$.

Observemos que, a partir do que foi feito acima, $E_1(\epsilon)$ é contínua em $\epsilon = 0$ em $\mathcal{L}(X^\beta)$ e em $\mathcal{L}(X^\eta)$. Como $E_2(\epsilon) = I - E_1(\epsilon)$, temos também a continuidade de $E_2(\epsilon)$ em $\epsilon = 0$ em $\mathcal{L}(X^\beta)$ e em $\mathcal{L}(X^\eta)$.

■

Consideremos os operadores $L(\epsilon)_1 = L(\epsilon)|_{X_1}$ e $L(\epsilon)_2 = L(\epsilon)|_{X_2}$. Temos que $L(\epsilon)_1 : X_1 \to X_1$ é um operador limitado com $\sigma(L(\epsilon)_1) = \sigma_1$ e $L(\epsilon)_2 : D(L(\epsilon)) \cap X_2 \to X_2$ é um operador setorial com $\sigma(L(\epsilon)_2) = \sigma_2$. Para obter a continuidade das variedades instáveis, precisaremos de algumas estimativas envolvendo os semigrupos gerados por tais operadores. Como $((H_\epsilon)_\beta)_u(u, \epsilon)$ é $(A_\epsilon)_\beta$ limitado, usando a expressão (4.31) temos, por um lado, para $w \in D((A_\epsilon)_\beta)$,

$$\begin{aligned}
\| L(\epsilon)w \|_{X^\beta} &= \| (A_\epsilon)_\beta w - ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)w \|_{X^\beta} \\
&\leq \| (A_\epsilon)_\beta w \|_{X^\beta} + \| ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)w \|_{X^\beta} \\
&\leq \| (A_\epsilon)_\beta w \|_{X^\beta} + C\zeta \| (A_\epsilon)_\beta w \|_{X^\beta} + CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \| w \|_{X^\beta} \\
&\leq \| (A_\epsilon)_\beta w \|_{X^\beta} + C\zeta \| (A_\epsilon)_\beta w \|_{X^\beta} + CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \| w \|_{X^{\beta+1}} \\
&\leq \| (A_\epsilon)_\beta w \|_{X^\beta} + C\zeta \| (A_\epsilon)_\beta w \|_{X^\beta} + CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \| (A_\epsilon)_\beta w \|_{X^\beta} \\
&\leq \text{Constante} \| (A_\epsilon)_\beta w \|_{X^\beta} . \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\| (A_\epsilon)_\beta w \|_{X^\beta} &= \| L(\epsilon)w + ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)w \|_{X^\beta} \\
&\leq \| L(\epsilon)w \|_{X^\beta} + \| ((H_\epsilon)_\beta)_u(e(\epsilon),\epsilon)w \|_{X^\beta} \\
&\leq \| L(\epsilon)w \|_{X^\beta} + C\zeta \| (A_\epsilon)_\beta w \|_{X^\beta} + CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \| w \|_{X^\beta}, \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

donde segue que $(1 - C\zeta) \| (A_\epsilon)_\beta w \|_{X^\beta} \leq \| L(\epsilon)w \|_{X^\beta} + CC'\zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \| w \|_{X^\beta}$, sendo $\zeta > 0$ de modo que $C\zeta < 1$. Isso nos mostra que as normas dos espaços fracionários com potência igual a um relativos à $(A_\epsilon)_\beta$ e à $L(\epsilon)$ são equivalentes. De fato, pelo Teorema 1.13.7, as normas dos espaços fracionários com potência entre 0 e 1, relativos a estes operadores, são equivalentes.

Agora, denotemos por $S_{a,\psi}$ um setor comum para a família $\{L(\epsilon)\}_{0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0}$, que existe pelo Teorema 4.4.3. Devido a este mesmo resultado, podemos, para ϵ pequeno, fixar um setor comum $S_{\tilde{a},\psi}$ para $\{L(\epsilon)_2\}_{0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0}$ $(a \leq \tilde{a})$. Se $x \in X^\beta$, Γ é um contorno em $-S_{a,\psi}$ com $|arg(\lambda - a)| \to \pi - \psi$ quando $|\lambda| \to \infty$ e $\tilde{\Gamma}$ é um contorno em $-S_{\tilde{a},\psi}$ com $|arg(\lambda - \tilde{a})| \to \pi - \psi$ quando $|\lambda| \to \infty$,

$$\begin{aligned}
e^{-L(\epsilon)_2 t}x &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}} (\lambda + L(\epsilon)_2)^{-1} x e^{\lambda t} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (\lambda + L(\epsilon)_2)^{-1} x e^{\lambda t} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (\lambda + L(\epsilon))^{-1} E_2(\epsilon) x e^{\lambda t} d\lambda \\
&= e^{-L(\epsilon)t}E_2(\epsilon)x,
\end{aligned}$$

onde usamos que a definição de semigrupo independe do contorno e o fato de que para λ no resolvente de $L(\epsilon)$, $(\lambda - L(\epsilon))^{-1}E_2(\epsilon) = (\lambda - L(\epsilon)_2)^{-1}$.

Segue da teoria de operadores setoriais que se $\Re(\sigma(L(\epsilon)_2)) > \tilde{a} > 0$, então para $t > 0$, $\| e^{-L(\epsilon)_2 t} \|_{\mathcal{L}(X^\beta)} \leq M_2 e^{-\tilde{a}t}$, onde M_2 é uma constante independente de ϵ. E, como $L(\epsilon)e^{-L(\epsilon)_2 t} =$

$L(\epsilon)_2 e^{-L(\epsilon)_2 t}$, temos também que $\| L(\epsilon)e^{-L(\epsilon)_2 t} \|_{\mathcal{L}(X^\beta)} \leq \tilde{M}_2 t^{-1} e^{-\tilde{a}t}$, $\tilde{M}_2$ independente de ϵ. Aplicando o Teorema 1.13.4, temos uma constante $D_2 = D_2(\eta - \beta)$,

$$\begin{aligned} \| e^{-L(\epsilon)_2 t} x \|_{X^\eta} &\leq \| (L(\epsilon))^{\eta-\beta} e^{-L(\epsilon)_2 t} x \|_{X^\beta} \\ &\leq D_2 t^{-\eta+\beta} e^{-\tilde{a}t} \| x \|_{X^\beta} . \end{aligned}$$

Com relação aos operadores $L(\epsilon)_1$, estes são limitados com $\Re(\sigma(L(\epsilon)_1)) < -\bar{a}$, para algum $\bar{a} > 0$, donde $\| e^{-L(\epsilon)_1 t} \|_{\mathcal{L}(X^\beta)} \leq M_1 e^{\bar{a}t}$, $t < 0$, todas as constantes independentes de ϵ devido à existência de um setor e de uma constante na desigualdade do resolvente comuns. Analogamente, podemos escrever, $L(\epsilon)e^{-L(\epsilon)_1 t} = L(\epsilon)_1 e^{-L(\epsilon)_1 t}$, donde $\| L(\epsilon)e^{-L(\epsilon)_1 t} \|_{\mathcal{L}(X^\beta)} \leq \tilde{M}_1 e^{\bar{a}t}$, $\tilde{M}_1$ independente de ϵ. Estimamos a norma $\| e^{-L(\epsilon)_1 t} x \|_{X^\eta}$, utilizando o Teorema 1.13.5 e a equivalência entre as normas um de $(A_\epsilon)_\beta$ e $L(\epsilon)$ demonstrada acima, mais especificamente a expressão (4.35),

$$\begin{aligned} \| e^{-L(\epsilon)_1 t} x \|_{X^\eta} &\leq \| (A_\epsilon)_\beta^{\eta-\beta} e^{-L(\epsilon)_1 t} x \|_{X^\beta} \\ &\leq \zeta \| (A_\epsilon)_\beta e^{-L(\epsilon)_1 t} x \|_{X^\beta} + C' \zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \| e^{-L(\epsilon)_1 t} x \|_{X^\beta} \\ &\leq \frac{\zeta}{(1 - C\zeta)} \| L(\epsilon) e^{-L(\epsilon)_1 t} x \|_{X^\beta} + \left(1 + \frac{C}{(1 - C\zeta)}\right) C' \zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} \| e^{-L(\epsilon)_1 t} x \|_{X^\beta} \\ &\leq \left(\frac{\zeta}{(1 - C\zeta)} \tilde{M}_1 e^{\bar{a}t} + \left(1 + \frac{C}{(1 - C\zeta)}\right) C' \zeta^{\frac{-(\eta-\beta)}{1-(\eta-\beta)}} M_1 e^{\bar{a}t} \right) \| x \|_{X^\beta} \\ &\leq D_1 e^{\bar{a}t} \| x \|_{X^\eta} . \end{aligned}$$

De fato, como X_1 é um subespaço de dimensão finita, todas as normas são equivalentes. Reunindo tais considerações, podemos estabelecer constantes positivas $M = max\{M_1, \tilde{M}_1, M_2, \tilde{M}_2\}$, $b = min\{\tilde{a}, \bar{a}\}$ e $N = max\{D_1, D_2\}$,

$$\| e^{-L(\epsilon)_2 t} \|_{\mathcal{L}(X^\beta)} \leq M e^{-bt} , \| L(\epsilon) e^{-L(\epsilon)_2 t} \|_{\mathcal{L}(X^\beta)} \leq M t^{-1} e^{-bt} , \| e^{-L(\epsilon)_2 t} \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)} \leq N t^{-\eta+\beta} e^{-bt}, \ t \geq 0. \quad (4.36)$$

$$\| e^{-L(\epsilon)_1 t} \|_{\mathcal{L}(X^\beta)} \leq M e^{bt} , \| L(\epsilon) e^{-L(\epsilon)_1 t} \|_{\mathcal{L}(X^\beta)} \leq M e^{bt} , \| e^{-L(\epsilon)_1 t} \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)} \leq N e^{bt} , \ t \leq 0. \quad (4.37)$$

Façamos, a seguir, alguns cálculos para aproximar os semigrupos gerados por $L(\epsilon)_i$ e $L(0)_i$, $i = 1, 2$. Basta estudarmos $L(\epsilon)_2$, o outro é semelhante afinal, o fato de $L(\epsilon)_1$ ser limitado implica que tal operador é setorial também.

$$
\begin{aligned}
& \| e^{-L(\epsilon)_2 t} E(\epsilon)_2 - e^{-L(0)_2 t} E(0)_2 \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)} = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma ((\lambda + L(\epsilon))^{-1} E(\epsilon)_2 - (\lambda + L(0))^{-1} E(0)_2) e^{\lambda t} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)} \\
\leq \;& \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \| ((\lambda + L(\epsilon))^{-1} - (\lambda + L(0))^{-1}) \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)} \| E(0)_2 \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\beta)} |e^{\lambda t}| \, |d\lambda| \\
+ \;& \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \| (\lambda + L(\epsilon))^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)} \| E(\epsilon)_2 - E(0)_2 \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\beta)} |e^{\lambda t}| \, |d\lambda| \\
\leq \;& \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \| (I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - L(\epsilon))^{-1})((\lambda_0 - L(\epsilon))^{-1} - (\lambda_0 - L(0))^{-1})(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - L(0))^{-1}) \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)} \cdot \\
\cdot \;& \| E(0)_2 \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\beta)} |e^{\lambda t}| \, |d\lambda| \\
+ \;& \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \| (\lambda + L(\epsilon))^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)} \| E(\epsilon)_2 - E(0)_2 \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\beta)} |e^{\lambda t}| \, |d\lambda| \\
\leq \;& \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \| (I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - L(\epsilon))^{-1}) \|_{\mathcal{L}(X^\eta, X^\eta)} \| ((\lambda_0 - L(\epsilon))^{-1} - (\lambda_0 - L(0))^{-1}) \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)} \cdot \\
\cdot \;& \| (I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - L(0))^{-1}) \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\beta)} \| E(0)_2 \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\beta)} |e^{\lambda t}| \, |d\lambda| \\
+ \;& \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \| (\lambda + L(\epsilon))^{-1} \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)} \| E(\epsilon)_2 - E(0)_2 \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\beta)} |e^{\lambda t}| \, |d\lambda| \\
\leq \;& \frac{C(\epsilon)}{2\pi} e^{-bt} \int_\Gamma (1 + |\lambda - \lambda_0| D)(1 + |\lambda - \lambda_0| \bar{D}) \| E(0)_2 \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\beta)} |e^{(\lambda + b)t}| \, |d\lambda| \\
+ \;& \frac{C'(\epsilon)}{2\pi} e^{-bt} \int_\Gamma D |e^{(\lambda + b)t}| \, |d\lambda| \\
= \;& C_2(\epsilon) e^{-bt} \qquad (4.38) \\
\to \;& 0 \text{ quando } \epsilon \to 0,
\end{aligned}
$$

sendo $\lambda_0 \in \Gamma$ qualquer, D, $\bar{D}$ constantes positivas independentes de ϵ e $C(\epsilon)$, $C'(\epsilon)$ convergem a 0 quando ϵ tende a 0 devido aos Teoremas 4.4.4 e 4.4.5. De modo similar,

$$
\| e^{-L(\epsilon)_1 t} E(\epsilon)_1 - e^{-L(0)_1 t} E(0)_1 \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\eta)} \leq C_1(\epsilon) e^{-bt} \qquad (4.39)
$$

com $C_1(\epsilon)$ convergindo a 0 quando ϵ tende a 0.

Lema 4.4.6 *Suponha que estão satisfeitas as condições do Teorema 4.4.5. Para $i = 1, 2$, existe uma vizinhança V de 0 e uma família de isomorfismos $\{T_i(\epsilon)\}_{\epsilon \in V}$ em X^β com $T_i(\epsilon) X_i(0) = X_i(\epsilon), T_i(0) = I$, tal que a aplicação $\epsilon \to T_i(\epsilon) \in \mathcal{L}(X^\beta), \mathcal{L}(X^\eta)$ é contínua em 0.*

Demonstração:

Pelo Lema 1.11.1, existe uma família de isomorfismos $\{T_i(\epsilon)\}_{\epsilon \in V}$ tal que $T_i(0) = I$, $T_i(\epsilon) E_i(0) = E_i(\epsilon) T_i(\epsilon)$ com $\| T_i(\epsilon) - T_i(0) \|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\beta)}$ convergindo a zero quando ϵ tende à zero. Em particular, as imagens $E_i(\epsilon) X^\beta$ e $E_i(0) X^\beta$ são isomorfas, sendo mapeadas uma na outra por $T_i(\epsilon)$ e $T_i(\epsilon)^{-1}$. Como a construção desses isomorfismos depende, essencialmente, das projeções $E_i(\epsilon)$ e estas, por sua vez, são contínuas como operadores em X^η, segue que $T_i(\epsilon)$ também são contínuos como operadores neste mesmo espaço.

■

Teorema 4.4.7 *Suponha válidas as hipóteses do Teorema 4.3.7. Existem constantes $\rho > 0$ e $M \geq 1$ tais que para qualquer $\epsilon \in V$, vizinhança de zero:*

i) Existe uma variedade local estável invariante para o fluxo gerado por (3.1) no ponto $e(\epsilon)$:

$$W^s_{loc}(e(\epsilon)) = \left\{ e(\epsilon) + z_0 \in X^\eta \ : \| E_2(0)z_0 \|_{X^\eta} \leq \frac{\varrho}{2M}, \| z(t, t_0, z_0, \epsilon) \|_{X^\eta} \leq \rho \, para \, t \geq t_0 \right\},$$

onde $z(t, t_0, z_0, \epsilon)$ é solução da equação

$$z_t + L(\epsilon)z = r(z, \epsilon), \tag{4.40}$$

para $t \geq t_0$ com valor inicial z_0. Quando $z_0 + e(\epsilon) \in W^s_{loc}(e(\epsilon))$, $\| z(t, t_0, z_0, \epsilon) \|_{X^\eta} \to 0$ quando $t \to \infty$. $W^s_{loc}(e(\epsilon))$ é homeomorfa à bola fechada de raio $\frac{\varrho}{2M}$ em X_2 através da aplicação $E_2(0) \mid_{W^s_{loc}(e(\epsilon))}$.

ii) Existe uma variedade local instável invariante para o fluxo gerado por (3.1) no ponto $e(\epsilon)$:

$$W^u_{loc}(e(\epsilon)) = \left\{ e(\epsilon) + z_0 \in X^\eta \ : \| E_1(0)z_0 \|_{X^\eta} \leq \frac{\varrho}{2M}, \| z(t, t_0, z_0, \epsilon) \|_{X^\eta} \leq \rho \, para \, t \leq t_0 \right\},$$

onde $z(t, t_0, z_0, \epsilon)$ é solução da equação (4.40) para $t \leq t_0$ com valor inicial z_0. Quando $z_0 + e(\epsilon) \in W^u_{loc}(e(\epsilon))$, $\| z(t, t_0, z_0, \epsilon) \|_{X^\eta} \to 0$ quando $t \to -\infty$. $W^u_{loc}(e(\epsilon))$ é homeomorfa à bola fechada de raio $\frac{\varrho}{2M}$ em X_1 através da aplicação $E_1(0) \mid_{W^u_{loc}(e(\epsilon))}$.

iii) Se $\beta(O, Q) = \sup_{o \in O} \inf_{q \in Q} \| q - o \|_{X^\eta}$ para $O, Q \subset X^\eta$, então

$$\beta(W^s_{loc}(e(\epsilon)), W^s_{loc}(e(0))), \beta(W^s_{loc}(e(0)), W^s_{loc}(e(\epsilon)))$$

$$\beta(W^u_{loc}(e(\epsilon)), W^u_{loc}(e(0))), \beta(W^u_{loc}(e(0)), W^u_{loc}(e(\epsilon)))$$

convergem a zero quando ϵ tende a zero.

Demonstração:

As duas primeiras afirmações seguem do Teorema 5.2.1 em Henry, [11]. Com relação à terceira, dado $\varrho > 0$, sejam

$$Y_0 = \left\{ a \in X_2(0) \, ; \, \| a \|_{X^\eta} \leq \frac{\varrho}{2M} \right\}$$

e,

$$Z_0 = \{z : [t_0, \infty] \to X^\eta\,;\ \text{z é contínua}, \sup \| z(t) \|_{X^\eta} \leq \varrho,\ E_2(0)z(t_0) = a,\ a \in Y_0\}.$$

Z_0 é uma bola fechada no espaço $Z = \{z : [t_0, \infty] \to X^\eta\,;$ z é contínua, $E_2(0)z(t_0) = a,\ a \in Y_0\}$ com a norma $\sup_{t\in[t_0,\infty]} \| z(t) \|_{X^\eta}$.

Para cada $a \in Y_0$, consideremos a aplicação $G_a : Z_0 \times V \to Z_0$ definida por

$$G_a(z,\epsilon)(t) = e^{-L(\epsilon)_2(t-t_0)}T_2(\epsilon)a + \int_{t_0}^{t} e^{-L(\epsilon)_2(t-s)}E_2(\epsilon)r(z(s),\epsilon)ds - \int_{t}^{\infty} e^{-L(\epsilon)_1(t-s)}E_1(\epsilon)r(z(s),\epsilon)ds.$$

Vejamos a seguir que $G_a(\cdot,\epsilon) : Z_0 \to Z_0$ é uma contração uniforme em Z_0 para todo $a \in Y_0$. Utilizando as desigualdades em (4.36) e (4.37), o item (iii) do Teorema 4.4.1 e o Teorema 4.4.5,

$$\begin{aligned}
\| G_a(z_1,\epsilon)(t) - G_a(z_2,\epsilon)(t) \|_{X^\eta} \ \leq\ & \int_{t_0}^{t} \| e^{-L(\epsilon)_2(t-s)}E_2(\epsilon)(r(z_1(s),\epsilon) - r(z_2(s),\epsilon)) \|_{X^\eta}\, ds \\
+\ & \int_{t}^{\infty} \| e^{-L(\epsilon)_1(t-s)}E_1(\epsilon)(r(z_1(s),\epsilon) - r(z_2(s),\epsilon)) \|_{X^\eta}\, ds \\
\leq\ & \int_{t_0}^{t} N(t-s)^{-\eta+\beta}e^{-b(t-s)} \| E_2(\epsilon) \|_{\mathcal{L}(X^\beta)} \| r(z_1(s),\epsilon) - r(z_2(s),\epsilon) \|_{X^\beta}\, ds \\
+\ & \int_{t}^{\infty} Ne^{-b(t-s)} \| E_1(\epsilon) \|_{\mathcal{L}(X^\beta)} \| r(z_1(s),\epsilon) - r(z_2(s),\epsilon) \|_{X^\beta}\, ds \\
\leq\ & \int_{t_0}^{t} N(t-s)^{-\eta+\beta}e^{-b(t-s)} \| E_2(\epsilon) \|_{\mathcal{L}(X^\beta)}\, k(\varrho) \| z_1(s) - z_2(s) \|_{X^\eta}\, ds \\
+\ & \int_{t}^{\infty} Ne^{-b(t-s)} \| E_1(\epsilon) \|_{\mathcal{L}(X^\beta)}\, k(\varrho) \| z_1(s) - z_2(s) \|_{X^\eta}\, ds,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[t_0,\infty]} \| G_a(z_1,\epsilon)(t) - G_a(z_2,\epsilon)(t) \|_{X^\eta} \ \leq\ & (k(\varrho)\{\| E_2(0) \|_{\mathcal{L}(X^\beta)} \int_0^\infty N(t-s)^{-\eta+\beta}e^{-b(t-s)}ds \\
+\ & \| E_1(0) \|_{\mathcal{L}(X^\beta)} \int_0^\infty Ne^{-b(t-s)}ds\}) \| z_1(s) - z_2(s) \|_{X^\eta}\ .
\end{aligned}$$

Basta escolhermos $\varrho > 0$ tal que o lado direito dessa desigualdade fique menor do que 1 . Então, para todo $a \in Y_0$ e $\epsilon \in V$, existe um ponto fixo $z(t,t_0,a,\epsilon)$ solução de $z_t + L(\epsilon)z = r(z,\epsilon)$, $t \geq t_0$, com valor inicial,

$$z(t_0,t_0,a,\epsilon) = T_2(\epsilon)a - \int_{t_0}^{\infty} e^{-L(\epsilon)_1(t_0-s)}E_1(\epsilon)r(z(s,t_0,a,\epsilon),\epsilon)ds.$$

Agora, se $\epsilon \in V$, temos

$$
\begin{aligned}
& \| G_a(z,0)(t) - G_a(z,\epsilon)(t) \|_{X^\eta} \\
\leq \; & \| e^{-L(\epsilon)_2(t-t_0)} E_2(\epsilon)(T_2(\epsilon) - T_2(0))a \|_{X^\eta} \\
+ \; & \| (e^{-L(\epsilon)_2(t-t_0)} E_2(\epsilon) - e^{-L(0)_2(t-t_0)} E_2(0))T_2(0)a \|_{X^\eta} \\
+ \; & \left\| \int_{t_0}^{t} (e^{-L(\epsilon)_2(t-s)} E_2(\epsilon) - e^{-L(0)_2(t-s)} E_2(0)) r(z(s),\epsilon) ds \right\|_{X^\eta} \\
+ \; & \left\| \int_{t_0}^{t} e^{-L(0)_2(t-s)} E_2(0)(r(z(s),\epsilon) - r(z(s),0)) ds \right\|_{X^\eta} \\
+ \; & \left\| \int_{t}^{\infty} (e^{-L(\epsilon)_1(t-s)} E_1(\epsilon) - e^{-L(0)_1(t-s)} E_1(0)) r(z(s),\epsilon) ds \right\|_{X^\eta} \\
+ \; & \left\| \int_{t}^{\infty} e^{-L(0)_1(t-s)} E_1(0)(r(z(s),\epsilon) - r(z(s),0)) ds \right\|_{X^\eta} \\
\leq \; & M e^{-b(t-t_0)} \| E_2(\epsilon) \|_{\mathcal{L}(X^\eta)} \| (T_2(\epsilon) - T_2(0)) \|_{\mathcal{L}(X^\eta)} \| a \|_{X^\eta} + C_2(\epsilon) e^{-b(t-t_0)} \| a \|_{X^\eta} \\
+ \; & \sup_{\|z\|_{X^\eta} \leq \varrho} \| (r(z(s),\epsilon) - r(z(s),0)) \|_{X^\beta} \left(\| E_2(0) \|_{\mathcal{L}(X^\beta)} \int_0^\infty N(t-s)^{-\eta+\beta} e^{-b(t-s)} ds \right. \\
+ \; & \left. \| E_1(0) \|_{\mathcal{L}(X^\beta)} \int_0^\infty N e^{-b(t-s)} ds \right) \\
+ \; & C_2(\epsilon) \varrho k(\varrho) \left(\int_0^\infty e^{-b(t-s)} ds \right) + C_1(\epsilon) \varrho k(\varrho) \left(\int_0^\infty e^{-b(t-s)} ds \right),
\end{aligned}
$$

sendo que $\| (T_2(\epsilon) - T_2(0)) \|_{\mathcal{L}(X^\eta)}$, $\sup_{\|z\|_{X^\eta} \leq \varrho} \| (r(z(s),\epsilon) - r(z(s),0)) \|_{X^\beta}$, $C_1(\epsilon)$, $C_2(\epsilon)$ convergem a zero quando $\epsilon \to 0$ em V, aplicando o Teorema 4.4.1, o Lema 4.4.6 e as desigualdades (4.38) e (4.39). Portanto,

$$
\sup_{t \in [0,\infty]} \| G_a(z,0)(t) - G_a(z,\epsilon)(t) \|_{X^\eta} \leq C(\epsilon),
$$

com $C(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$ em V e a função G_a é contínua em $\epsilon = 0$ uniformemente em Y_0. Pelo Teorema da contração de Banach com parâmetros, o ponto fixo $z(t, t_0, a, \epsilon)$ é contínuo em $\epsilon = 0 \in V$. A continuidade nos demais valores de $\epsilon \in V$ pode ser demonstrada de modo similar e, mais simples.

Para cada $\epsilon \in V$, temos, pelo Teorema 5.2.1 em Henry, [11], que $W^s_{loc}(e(\epsilon))$ é a imagem da aplicação $\phi_\epsilon : Y_0 \to X^\eta$ dada por

$$
\phi_\epsilon(a) = T_2(\epsilon)a - \int_{t_0}^{\infty} e^{-L(\epsilon)_1(t_0-s)} E_1(\epsilon) r(z(s, t_0, a, \epsilon), \epsilon) ds,
$$

onde $z(s, t_0, a, \epsilon)$ é a solução da equação $z_t + L(\epsilon)z = r(z, \epsilon)$, $t \geq t_0$ com valor inicial $z(t_0, t_0, a, \epsilon) = \phi_\epsilon(a) = G_a(z, \epsilon)(t_0)$. Segue então que

$$
\| \phi_0(\cdot) - \phi_\epsilon(\cdot) \|_{X^\eta} \to 0 \;\text{ quando }\; \epsilon \to 0 \;\text{ uniformemente em }\; Y_0.
$$

Como $W^s_{loc}(e(\epsilon))$ é a imagem da aplicação ϕ_ϵ,

$$\beta(W^s_{loc}(e(\epsilon)), W^s_{loc}(e(0))) = \sup_{a\in Y_0} \inf_{b\in Y_0} \| \phi_\epsilon(a) - \phi_0(b) \|_{X^\eta} .$$

E, de $\inf_{b\in Y_0} \| \phi_\epsilon(a) - \phi_0(b) \|_{X^\eta} \leq \| \phi_\epsilon(a) - \phi_0(a) \|_{X^\eta}$ para todo $a \in Y_0$, obtemos

$$\beta(W^s_{loc}(e(\epsilon)), W^s_{loc}(e(0))) \leq \sup_{a\in Y_0} \| \phi_\epsilon(a) - \phi_0(a) \|_{X^\eta} \to 0,$$

quando $\epsilon \to 0$ em V. Os demais são análogos.

■

Finalmente, estamos aptos para provar a semicontinuidade inferior dos atratores para o fluxo gerado por (3.1),

Teorema 4.4.8 *Suponha que as hipóteses do Teorema 4.1.4 sejam válidas. Então, a família de atratores* $\{ \mathcal{A}_\epsilon \,|\, 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0 \}$ *do fluxo* $T_{\epsilon,\eta,\beta}(t,u)$*, gerado por (3.1), é semicontínua inferiormente em* X^η*, com* $\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{2}$.

Demonstração:

Basta verificarmos as hipóteses no Teorema 1.14.11. Vejamos,

1) Pelo Lema 4.1.1 e pelo Teorema 4.1.3, a hipótese (H1) é satisfeita.

2) Pelo Lema 4.1.2, a hipótese (H2) é válida.

3) A hipótese (H3) foi admitida no Teorema 4.3.7.

4)Pelos Teoremas 4.1.4 e 4.2.1, a hipótese (H4) é satisfeita.

5)A hipótese (H5) segue dos Teoremas 4.3.1 e 4.3.7.

6)A hipótese (H6) está provada no Teorema 4.4.7.

7)Dos Teoremas 3.3.7 e 4.2.1, segue a hipótese (H7).

■

Referências Bibliográficas

[1] Arrieta, J. M.,Bruschi, S. M.(2007) Rapidly varying boundaries in equations with nonlinear boundary conditions. The case of a Lipschitz deformation. *Mathematical Models and Methods in Apllied Sciences*, vol. 17, n.10, 1555-1585 .

[2] Arrieta,J.M., Bruschi,S.M.(2010) Very rapidly varying boundaries in equations with nonlinear boundary conditions. The case of a non uniformly Lipschitz deformation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, série B, vol. 14, número 2.

[3] Aubin, Thierry. (1998). *Some nonlinear problems in Riemannian geometry* (Springer Monographs in Mathematics). Springer.

[4] Barbosa, P.S., Pereira, A. L., & Pereira, M. C. (2016). Continuity of attractors for a family of C^1 perturbations of the square. *Annali di Matematica*. doi: 10.1007/s10231-016-0620-5

[5] Carvalho, A. N de. (2012). Sistemas dinâmicos não lineares. Recuperado de http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/SDNL2012.pdf.

[6] Chavel, Isaac. (1984) *Eigenvalues in Riemannian Geometry* (Pure and Applied Mathematics). Academic Press.

[7] Cioranescu, D., Donato, P. (2010). *An introduction to homogenization* (Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Vol.17). New York, NY: Oxford University Press.

[8] Gorodski, C. (2020). *Smooth Manifolds* (Compact Textbooks in Mathematics). Birkhauser.

[9] Grisvard, P. (1985) *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman Publishing.

[10] Hale, J. K. (2000). *Asymptotic behavior of dissipative systems* (Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 25). Providence, RI: American Mathematical Society.

[11] Henry, D. B. (1981). *Geometric theory of semilinear parabolic equations* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 840). Springer-Verlag.

[12] Henry, D. B.(2005). *Perturbation of the boundary in boundary-value problems of partial differential equations* (London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 318). New York, NY: Cambridge University Press.

[13] Kato, T. (1980). *Perturbation theory for linear operators*. Springer - Verlag.

[14] Loomis, H., & Sternberg, S. (1990) *Advanced Calculus*. Jones and Bartlett Publishers.

[15] Lorenzi, B. P. (2017). *Uma prova funcional analítica da limitação uniforme de atratores para uma família de problemas parabólicos em* $\mathbb{R}^2$. 80 p. Dissertação (Mestrado em Matemática). Instituto de Matemática e Estátistica, Universidade de São Paulo, 2017.

[16] Necas, J. (2012). *Direct methods in the theory of elliptic equations* (Springer Monographs in Mathematics). Springer.

[17] Oliveira, C. R. de (2009). *Intermediate spectral theory and quantum dynamics*. (Progress in Mathematical Physics, Vol. 54). Birkhauser.

[18] Pereira, A. L., & Pereira, M. C. (2007). Continuity of attractors for a reaction-diffusion problem with nonlinear boundary conditions with respect to variations of the domain. *Journal of Differential Equations, 239*, 343-370.

[19] Rall, L. B. (1971). *Nonlinear functional analysis and applications*. Academic Press.

[20] Schmudgen, K. (2012). *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert spaces*. (Graduate Texts in Mathematics). Springer.

[21] Teschl, G. (2009). *Mathematical methods in quantum mechanics with applications to Schrodinger operators* (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 99). Providence, RI: American Mathematical Society.

[22] Yagi, A. (2010). *Abstract parabolic evolution equations and their applications* (Springer Monographs in Mathematics). Springer.