Anéis de quocientes graduados de anéis graduados por grupoide

Zaqueu Cristiano Moreira

Dissertação apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Javier Sánchez Serdà

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro através do processo nº 2021/14132-2, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)

São Paulo
Fevereiro de 2024

Anéis de quocientes graduados de anéis graduados por grupoide

Zaqueu Cristiano Moreira

Esta versão da dissertação contém
as correções e alterações sugeridas
pela Comissão Julgadora durante a
defesa da versão original do trabalho,
realizada em 21 de Fevereiro de 2024.

Uma cópia da versão original está
disponível no Instituto de Matemática e
Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão julgadora:

Prof. Dr. Vitor de Oliveira Ferreira – Universidade de São Paulo (USP)
Profª. Drª. Mercedes Siles Molina – Universidad de Málaga (UMA)
Profª. Drª. Dolors Herbera Espinal – Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)

Ficha catalográfica elaborada com dados inseridos pelo(a) autor(a)
Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

```
Moreira, Zaqueu Cristiano
   Anéis de quocientes graduados de anéis graduados por
grupoide / Zaqueu Cristiano Moreira; orientador, Javier
Sánchez Serdà. - São Paulo, 2024.
   226 p.


   Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação
em Matemática / Instituto de Matemática e Estatística
/ Universidade de São Paulo.
   Bibliografia
   Versão corrigida


   1. Teoria de anéis graduados por grupoide. I. Serdà,
Javier Sánchez. II. Título.
```

Bibliotecárias do Serviço de Informação e Biblioteca
Carlos Benjamin de Lyra do IME-USP, responsáveis pela
estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Maria Lúcia Ribeiro CRB-8/2766; Stela do Nascimento Madruga CRB 8/7534.

Dedico este trabalho ao Senhor Jesus,
a quem devo tudo que tenho e sou.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter enviado seu filho Jesus Cristo para morrer por mim, me salvar e me dar de seu Espírito Santo para estar comigo para sempre.

Agradeço a minha família por sempre me incentivar em meus estudos.

Agradeço meu orientador, Prof. Javier Sánchez Serdà por ter aceitado me orientar e por tudo que tem me ensinado até aqui. Agradeço-o também por ter me indicado o tema da presente dissertação, no qual gostei muito de trabalhar.

Agradeço todos os alunos, professores e funcionários do IME-USP que contribuíram de alguma forma para minha vida pessoal ou acadêmica.

Agradeço a FAPESP pelo apoio financeiro durante a realização desse trabalho.

Resumo

Zaqueu Cristiano Moreira. **Anéis de quocientes graduados de anéis graduados por grupoide**. Dissertação (Mestrado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2024.

Neste trabalho, estudamos os anéis de quocientes à direita (à esquerda, simétrico) graduados maximal e de Martindale de anéis graduados por grupoide. Para definirmos e provarmos propriedades desses anéis de quocientes graduados, generalizamos vários conceitos e resultados da Teoria de Anéis e da Teoria de Anéis Graduados por Grupo para o contexto graduado por grupoide, alguns dos quais ainda não existiam na literatura. Caracterizamos quando o anel de quocientes à direita graduado maximal é anel gr-regular de von Neumann e quando é anel gr-semissimples. Motivados pelo exemplo de categorias pré-aditivas pequenas, definimos o que seriam as categorias de quocientes à direita (à esquerda, simétrica) maximal e de Martindale de uma categoria pré-aditiva.

Palavras-chave: Anel graduado por grupoide. Anel de quocientes graduado maximal. Anel de quocientes graduado de Martindale.

Abstract

Zaqueu Cristiano Moreira. **Graded rings of quotients of groupoid graded rings**. Thesis (Master's). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2024.

In this work, we study the graded maximal and the graded Martindale right (left, symmetric) rings of quotients of groupoid graded rings. In order to define and prove properties of these graded rings of quotients, we generalized several concepts and results from Ring Theory and Group Graded Ring Theory to the groupoid graded context, some of which did not exist in the literature yet. We characterize when the graded maximal right ring of quotients is a von Neumann gr-regular ring and when it is a gr-semisimple ring. Motivated by the example of small preadditive categories, we defined what would be the maximal and the Martindale right (left, symmetric) category of quotients of a preadditive category.

Keywords: Groupoid graded ring. Graded maximal ring of quotients. Graded Martindale ring of quotients.

Lista de abreviaturas

.resp	respectivamente
CCA	condição de cadeias ascendentes
CCD	condição de cadeias descendentes

Lista de símbolos

$\mathbb{Z}$	o conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Z}_{>0}$	o conjunto dos números inteiros positivos
$\mathbb{Q}$	o conjunto dos números racionais
$\mathcal{C}_0$	classe dos objetos da categoria $\mathcal{C}$
$\mathcal{C}(A,B)$	conjunto dos morfismos $A \to B$ na categoria $\mathcal{C}$
Γ_0	conjunto dos idempotentes do grupoide Γ
$\mathrm{M}_I(A)$	anel das matrizes $I \times I$ sobre o anel A com finitas entradas não nulas
A^{op}	anel oposto do anel A
M_R	um módulo à direita sobre o anel R
${}_RM$	um módulo à esquerda sobre o anel R
$\mathrm{r.ann}_R(a)$	o anulador à direita do elemento a de um módulo à direita
$\mathrm{r.ann}_R(X)$	o anulador à direita do subconjunto X de um módulo à direita
$\mathrm{l.ann}_R(a)$	o anulador à esquerda do elemento a de um módulo à esquerda
$\mathrm{l.ann}_R(X)$	o anulador à esquerda do subconjunto X de um módulo à esquerda
$N \leq_{\mathrm{gr}} M$	N é um submódulo graduado de M
$N \leq_{\text{gr-ess}} M$	N é um submódulo gr-essencial de M
$N \leq_{\text{gr-den}} M$	N é um submódulo gr-denso de M

$\mathrm{E}(M)$	envolvente injetiva do módulo M
$\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$	envolvente gr-injetiva do módulo graduado M
$\tilde{\mathrm{E}}(M)$	envolvente racional do módulo M
$\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$	envolvente gr-racional do módulo graduado M
$\mathrm{rad}(A)$	o radical de Jacobson do anel A
$\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$	o radical de Jacobson graduado do anel graduado R
$\mathrm{sing}(M)$	o submódulo singular do módulo M
$\mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(M)$	o submódulo gr-singular do módulo graduado M
$\mathrm{soc}^{\mathrm{gr}}(M)$	o gr-socle do módulo graduado M
$\mathrm{u.dim}(M)$	dimensão uniforme do módulo M
$\mathrm{gr\text{-}u.dim}(M)$	dimensão gr-uniforme do módulo graduado M
$\Gamma_0\text{-}\mathrm{u.dim}(M)$	dimensão Γ_0-uniforme do módulo graduado M
$\mathrm{U}(A)$	o conjunto dos elementos inversíveis do anel unitário A
$\mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R)$	o conjunto dos elementos gr-inversíveis do anel graduado R
$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{max}}(A)$	anel de quocientes à direita maximal do anel A
$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{gr\text{-}max}}(R)$	anel de quocientes à direita graduado maximal do anel graduado R
$\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{max}}(A)$	anel de quocientes à esquerda maximal do anel A
$\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{gr\text{-}max}}(R)$	anel de quocientes à esquerda graduado maximal do anel graduado R
$\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{max}}(A)$	anel de quocientes simétrico maximal do anel A
$\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{gr\text{-}max}}(R)$	anel de quocientes simétrico graduado maximal do anel graduado R
$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(A)$	anel de quocientes à direita de Martindale do anel A
$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{gr\text{-}Mart}}(R)$	anel de quocientes à direita graduado de Martindale do anel graduado R
$\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{Mart}}(A)$	anel de quocientes à esquerda de Martindale do anel A
$\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{gr\text{-}Mart}}(R)$	anel de quocientes à esquerda graduado de Martindale do anel graduado R
$\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(A)$	anel de quocientes simétrico de Martindale do anel A
$\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{gr\text{-}Mart}}(R)$	anel de quocientes simétrico graduado de Martindale do anel graduado R
$\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$	a família dos ideais à direita gr-densos do anel graduado R
$\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$	a família dos ideais à esquerda gr-densos do anel graduado R
$\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$	a família dos ideais graduados de R que são gr-densos em R_R
$\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$	a família dos ideais graduados de R que são gr-densos em ${}_RR$
$\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})$	a categoria de quocientes à direita maximal de $\mathcal{C}$
$\mathcal{Q}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})$	a categoria de quocientes à esquerda maximal de $\mathcal{C}$
$\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})$	a categoria de quocientes simétrica maximal de $\mathcal{C}$
$\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})$	a categoria de quocientes à direita de Martindale de $\mathcal{C}$
$\mathcal{Q}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})$	a categoria de quocientes à esquerda de Martindale de $\mathcal{C}$
$\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})$	a categoria de quocientes simétrica de Martindale de $\mathcal{C}$

Sumário

Introdução

É bem conhecido que todo domínio comutativo possui um corpo de frações contendo ele, por exemplo $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Em Álgebra é útil incluir um anel em um novo anel com melhores propriedades. Um exemplo paradigmático disto é a técnica de localização comutativa. Em álgebra não comutativa nem sempre é possível a construção de anéis de frações, mas a localização de Ore fornece condições necessárias e suficientes em um anel não comutativo para a existência de uma localização semelhante à localização comutativa. A teoria geral de anéis de quocientes, devida principalmente a Findlay, Lambek e Utumi, surgiu para poder construir anéis de "frações" para uma classe maior de anéis. Por exemplo, o anel de quocientes à direita maximal, definido primeiramente em (Utumi, 1956), existe para qualquer anel associativo com unidade. Esta teoria então mostra um apelo mais universal e, além disso, existem teoremas que caracterizam quando esse anel de quocientes à direita maximal é regular de von Neumann e quando é semissimples. O anel de quocientes à direita de Martindale foi definido em (Martindale, 1969), para anéis primos, e em (Amitsur, 1972) para anéis semiprimos. Em (Passman, 1987), foi estudado o anel de quocientes simétrico de Martindale de anéis primos. Seguindo a ideia de (Passman, 1987), em (Jespers e Wauters, 1988) os autores definem os anéis de quocientes à direita, à esquerda e simétrico graduados maximal e de Martindale de um anel graduado por grupo e, consequentemente, para qualquer anel associativo com unidade. Nosso objetivo com este trabalho é generalizar esta teoria dos anéis de quocientes maximal e de Martindale para o contexto graduado por grupoide (Cala *et al.*, 2022) tendo como principais referências (Lam, 1999, §13 e §14) (para o caso não graduado) e (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012) (para o caso graduado por grupo). Observamos que, no contexto graduado por grupoide, os anéis estudados são sempre associativos mas não necessariamente tem unidade. Isto em certos momentos traz dificuldades para generalizarmos certos conceitos e/ou resultados da Teoria de Anéis (graduados por grupo) para o contexto graduado por grupoide.

No Capítulo 1, apresentamos as definições básicas e resultados preliminares contendo, por exemplo, definições e alguns exemplos de grupoides e anéis/módulos graduados por grupoide. Também apresentamos os homomorfismos com grau, anéis de matrizes graduados, produto direto graduado e os conceitos de fidelidade em componentes homogêneas.

No Capítulo 2, estudamos alguns tópicos em teoria de anéis graduados por grupoide, onde apresentamos as definições e resultados necessários para construir os anéis de quocientes graduados que precisamos e provar resultados interessantes sobre eles. As seções deste capítulo incluem anéis gr-simples, anéis gr-primos, anéis gr-semiprimos, gr-domínios, anéis com gr-divisão, anéis gr-semissimples, anéis gr-regulares de von Neumann, radical de Jacobson graduado, módulos gr-injetivos, gr-essencialidade, envolvente gr-injetiva, gr-densidade, envolvente gr-racional, gr-singularidade, módulos quase gr-injetivos, dimensão gr-uniforme, anéis gr-locais, módulos fortemente gr-indecomponíveis e teoria de idempotentes homogêneos. Neste capítulo, não nos limitamos a apenas provar os resultados da forma como precisamos, mas tentamos obter versões mais gerais possíveis destes resultados, sem sobrecarregar o texto.

No Capítulo 3, estudamos os anéis de quocientes à direita (à esquerda) e simétrico graduados maximal e de Martindale de anéis graduados por grupoide. Neste capítulo, definimos esses anéis de quocientes graduados e estudamos algumas propriedades deles como, por exemplo, quando eles são iguais ao anel base, as relações com os correspondentes anéis de quocientes no caso unitário e o que acontece quando tomamos anéis graduados que são obtidos a partir de outros (e.g., através de anéis de matrizes, produto direto graduado, anel de grupoide, restrição do suporte). Também apresentamos as definições do que seriam as categorias de quociente à direita (à esquerda) e simétrica maximal e de Martindale de categorias pré-aditivas e resultados para categorias pequenas obtidos através do exemplo do anel de uma categoria pré-aditiva pequena. Destacamos as seções onde caracterizamos quando o anel de quocientes à direita graduado maximal é gr-regular de von Neumann e quando é gr-semissimples.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos as definições e resultados básicos necessários para o bom desenvolvimento dos capítulos seguintes. A maioria dos resultados deste capítulo será usado nos seguintes sem referência a este.

1.1 Grupoides

Definição 1.1.1. Um *grupoide* Γ é um conjunto munido de uma operação unária $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ (chamada inversão) e uma operação binária parcialmente definida $(\gamma, \delta) \mapsto \gamma\delta$ (chamada composição) tais que

(i) se $\gamma\sigma$ e $\sigma\tau$ estão definidos então $(\gamma\sigma)\tau$ e $\gamma(\sigma\tau)$ estão definidos e são iguais;

(ii) o *domínio* $d(\sigma) := \sigma^{-1}\sigma$ e o *range* $r(\sigma) := \sigma\sigma^{-1}$ estão definidos para todo $\sigma \in \Gamma$;

(iii) para cada $\sigma \in \Gamma$, $\sigma d(\sigma)$ e $r(\sigma)\sigma$ estão definidos e $r(\sigma)\sigma = \sigma = \sigma d(\sigma)$;

(iv) $\sigma\tau$ está definido se, e somente se, $d(\sigma) = r(\tau)$.

(Em outras palavras, Γ é uma categoria pequena em que todo morfismo é isomorfismo.)

O seguinte resultado traz algumas propriedades básicas de grupoides.

Lema 1.1.2. *Seja Γ um grupoide e $\sigma, \tau \in \Gamma$. Temos que:*

(1) $d(\sigma^{-1}) = r(\sigma)$ *e* $r(\sigma^{-1}) = d(\sigma)$.

(2) $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$.

(3) *Se $\sigma\tau$ está definido então $d(\sigma\tau) = d(\tau)$ e $r(\sigma\tau) = r(\sigma)$.*

(4) *Se $\tau\sigma = d(\sigma)$ ou $\sigma\tau = r(\sigma)$ então $\tau = \sigma^{-1}$.*

(5) *$\sigma\tau$ está definido se, e somente se, $\tau^{-1}\sigma^{-1}$ está definido.*

(6) *Se $\sigma\tau$ está definido então $(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$.*

(7) *$d(\sigma)$ e $r(\sigma)$ são idempotentes.*

(8) *Se $e \in \Gamma$ é idempotente então $e^{-1} = e = d(e) = r(e)$.*

Demonstração. (1) Segue de $\sigma^{-1}\sigma$ e $\sigma\sigma^{-1}$ estarem definidos.

(2) Usando (1), temos que

$$(\sigma^{-1})^{-1} = (\sigma^{-1})^{-1}d((\sigma^{-1})^{-1}) = (\sigma^{-1})^{-1}d(\sigma) = (\sigma^{-1})^{-1}\sigma^{-1}\sigma = d(\sigma^{-1})\sigma = r(\sigma)\sigma = \sigma\,.$$

(3) Como $\sigma\tau$ e $\tau d(\tau)$ estão definidos, segue que está definido $(\sigma\tau)d(\tau) = \sigma(\tau d(\tau))$. Logo, $d(\sigma\tau) = r(d(\tau))$. Mas $r(d(\tau)) = d(\tau)$ pois $\tau d(\tau)$ está definido. Analogamente, como $\sigma\tau$ e $r(\sigma)\sigma$ estão definidos, temos definidos $r(\sigma)(\sigma\tau) = (r(\sigma)\sigma)\tau$ e segue que $r(\sigma\tau) = d(r(\sigma))$. Mas $d(r(\sigma)) = r(\sigma)$ pois $r(\sigma)\sigma$ está definido.

(4) Se $\tau\sigma = d(\sigma)$ então

$$\tau = \tau d(\tau) = \tau r(\sigma) = \tau\sigma\sigma^{-1} = d(\sigma)\sigma^{-1} = r(\sigma^{-1})\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\,.$$

Se $\sigma\tau = r(\sigma)$ então

$$\tau = r(\tau)\tau = d(\sigma)\tau = \sigma^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1}r(\sigma) = \sigma^{-1}d(\sigma^{-1}) = \sigma^{-1}\,.$$

(5) Segue imediatamente de (1).

(6) Se $\sigma\tau$ está definido então, por (3),

$$(\sigma\tau)(\tau^{-1}\sigma^{-1}) = \sigma r(\tau)\sigma^{-1} = \sigma d(\sigma)\sigma^{-1} = \sigma\sigma^{-1} = r(\sigma) = r(\sigma\tau)$$

e o resultado segue de (4).

(7) Temos

$$d(\sigma) = \sigma^{-1}\sigma = \sigma^{-1}r(\sigma)\sigma = \sigma^{-1}\sigma\sigma^{-1}\sigma = (\sigma^{-1}\sigma)^2 = (d(\sigma))^2\,.$$

e

$$r(\sigma) = \sigma\sigma^{-1} = \sigma d(\sigma)\sigma^{-1} = \sigma\sigma^{-1}\sigma\sigma^{-1} = (\sigma\sigma^{-1})^2 = (r(\sigma))^2\,.$$

(8) Suponha que $e^2 = e$. Então ee está definido e segue que $d(e) = r(e)$. Temos então

$$e = r(e)e = d(e)e = e^{-1}ee = e^{-1}e = d(e)\,.$$

Por fim, como $ee = e = d(e)$, segue de (4) que $e = e^{-1}$. ∎

Em vista dos itens (7) e (8) do Lema 1.1.2, temos a seguinte:

Definição 1.1.3. Se Γ é um grupoide, denotamos por

$$\Gamma_0 := \{d(\sigma) : \sigma \in \Gamma\} = \{r(\sigma) : \sigma \in \Gamma\}$$

o conjunto dos elementos *idempotentes* de Γ.

Exemplos 1.1.4. (1) Todo grupo G é um grupoide com suas operações de multiplicação e inversão. Neste caso, $r(g) = d(g) = e_G$ para todo $g \in G$ e $G_0 = \{e_G\}$.

(2) Se X é um conjunto não vazio então $X \times X$ é grupoide via $(x,y)(y,z) := (x,z)$ e $(x,y)^{-1} := (y,x)$ para todos $x,y,z \in X$. Temos aqui $r((x,y)) = (x,x)$ e $d((x,y)) = (y,y)$ para todos $x,y \in X$. Portanto, o conjunto de idempotentes de $X \times X$ é a diagonal $\{(x,x) : x \in X\}$.

(3) Vamos combinar e generalizar os dois exemplos anteriores. Sejam X um conjunto não vazio e G um grupo. Definimos em $X \times G \times X$ a seguinte estrutura de grupoide: para cada $x,y,z \in X$ e $g,h \in G$ fazemos $(x,g,y)(y,h,z) := (x,gh,z)$ e $(x,g,y)^{-1} := (y,g^{-1},x)$. Então $r((x,g,y)) = (x,e_G,x)$, $d((x,g,y)) = (y,e_G,y)$ para todos $x,y \in X$, $g \in G$ e o conjunto de idempotentes de $X \times G \times X$ é $\{(x,e_G,x) : x \in X\}$. Destacamos que, de acordo com (Brown, 1987, p. 125), todo grupoide é união de subgrupoides isomorfos a grupoides da forma apresentada neste exemplo. Note que o exemplo (1) é obtido fazendo X um conjunto unitário e o exemplo (2) é obtido fazendo G ser o grupo trivial.

(4) Temos ainda outra generalização do exemplo (1). Seja $\{G_i : i \in I\}$ uma família de grupos e Γ a união disjunta dos G_i $(i \in I)$. Definindo a composição de elementos se, e somente se, eles estão no mesmo grupo G_i, podemos aproveitar as operações de cada grupo para fazer de Γ um grupoide com $r(g_i) = d(g_i) = e_{G_i}$ para todos $i \in I$, $g_i \in G_i$ e com $\Gamma_0 = \{e_{G_i} : i \in I\}$. ■

Definição 1.1.5. Para cada grupoide Γ e $e,f \in \Gamma_0$, denotamos

$$e\Gamma := \{\gamma \in \Gamma : r(\gamma) = e\}, \qquad \Gamma f := \{\gamma \in \Gamma : d(\gamma) = f\},$$

$$e\Gamma f := \{\gamma \in \Gamma : r(\gamma) = e, d(\gamma) = f\}.$$

Em especial, $e\Gamma e$ é chamado o *grupo de isotropia* associado a e. Além disso, para $X, Y \subseteq \Gamma$ e $\gamma, \delta \in \Gamma$ definimos os seguintes subconjuntos de Γ:

$$\begin{aligned} X^{-1} &:= \{\alpha^{-1} \colon \alpha \in X\}, \\ \gamma X &:= \{\gamma\alpha \colon \alpha \in X \text{ com } d(\gamma) = r(\alpha)\}, \\ X\delta &:= \{\alpha\delta \colon \alpha \in X \text{ com } d(\alpha) = r(\delta)\}, \\ XY &:= \{\alpha\beta : \alpha \in X, \beta \in Y \text{ e } d(\alpha) = r(\beta)\}, \\ \gamma X \delta &:= \{\gamma\alpha\delta \colon \alpha \in X \text{ com } d(\gamma) = r(\alpha) \text{ e } d(\alpha) = r(\delta)\}. \end{aligned}$$

Definição 1.1.6. Dizemos que o grupoide Γ é *conexo* se $e\Gamma f \neq \emptyset$ para todos $e,f \in \Gamma_0$. Isto é, dados $e,f \in \Gamma_0$, existe $\sigma \in \Gamma$ tal que $r(\sigma) = e$ e $d(\sigma) = f$.

Durante todo o texto, a menos de menção contrária, Γ denotará um grupoide.

1.2 Grupos abelianos graduados por grupoide

Definição 1.2.1. Um grupo abeliano G é dito ser Γ-*graduado* se existe uma família $\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de subgrupos abelianos de G tal que $G = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$.

Exemplos de grupos abelianos Γ-graduados são os anéis Γ-graduados e os módulos

Γ-graduados sobre um anel Γ-graduado, os quais serão introduzidos nas duas próximas seções. Portanto, convém fixarmos algumas notações e nomenclaturas gerais.

Definição 1.2.2. Se $X = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ é um grupo abeliano Γ-graduado então

(i) para cada $\gamma \in \Gamma$, X_γ é denominada a *componente homogênea de grau* γ *de* X e seus elementos não nulos são chamados *homogêneos de grau* γ;

(ii) para cada $\gamma \in \Gamma$, escrevemos $\deg(x) = \gamma$ quando $0 \neq x \in X_\gamma$;

(iii) para cada $x \in X$ escrevemos $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ com $x_\gamma \in X_\gamma$ (e só finitos deles não nulos) e denominamos x_γ a *componente homogênea de grau* γ *de* x;

(iv) definimos o conjunto $h(X) := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ dos *elementos homogêneos* de X;

(v) definimos o *suporte* de X por $\operatorname{supp}(X) := \{\gamma \in \Gamma : X_\gamma \neq \{0\}\}$ e o *suporte* de $x \in X$ por $\operatorname{supp}(x) := \{\gamma \in \Gamma : x_\gamma \neq 0\}$;

(vi) quando $\sigma, \tau \in \Gamma$ são tais que $d(\sigma) \neq r(\tau)$ (ou seja, $\sigma\tau$ não está definido), convencionamos que $X_{\sigma\tau} := \{0\}$.

Definição 1.2.3. Dados X, Y dois grupos abelianos Γ-graduados, um homomorfismo de grupos $g : X \to Y$ é dito ser um *gr-homomorfismo* se $g(X_\sigma) \subseteq Y_\sigma$ para todo $\sigma \in \Gamma$. Se, além disso, g é bijetor então g é chamado um *gr-isomorfismo* de grupos, dizemos que X é *gr-isomorfo* a Y (como grupos abelianos Γ-graduados) e escrevemos $X \cong_{\mathrm{gr}} Y$.

1.3 Anéis graduados por grupoide

Durante todo o trabalho, anéis sempre são considerados associativos, mas não necessariamente com unidade.

Definição 1.3.1. Um anel R é dito ser Γ-*graduado* se existe uma família $\{R_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de subgrupos aditivos de R tal que $R = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma$ e, para todos $\sigma, \tau \in \Gamma$,

$$R_\sigma R_\tau \subseteq \begin{cases} R_{\sigma\tau}, & \text{se } \sigma\tau \text{ está definido} \\ \{0\}, & \text{se } \sigma\tau \text{ não está definido} \end{cases}.$$

Além disso, R é dito ser Γ_0-*unital*[1] se, para cada $e \in \Gamma_0$, o anel R_e tem unidade 1_e e, para cada $\gamma \in \Gamma$ e $a_\gamma \in R_\gamma$, temos $1_{r(\gamma)} a_\gamma = a_\gamma = a_\gamma 1_{d(\gamma)}$.

Neste texto estaremos interessados apenas em anéis Γ-graduados Γ_0-unitais e, portanto, a menos de menção contrária, sempre que falarmos em um anel Γ-graduado estamos assumindo que ele é Γ_0-unital.

Exemplos 1.3.2. (1) Claramente todo anel com unidade graduado por grupo é um anel graduado por grupoide. Mais geralmente, se I é um conjunto não vazio

[1] Em (Cala *et al.*, 2022), tais anéis são chamados *object unital*.

e, para cada $i \in I$, R_i é um anel com unidade graduado pelo grupo G_i então $R := \bigoplus_{i \in I} R_i$ é graduado pelo grupoide união disjunta dos grupos G_i, $i \in I$ via $R_{g_i} := (R_i)g_i$ quando $g_i \in G_i$.

(2) Suponha que R é um anel com suficientes idempotentes, isto é, existe um conjunto $\{e_i : i \in I\}$ de idempotentes dois a dois ortogonais de R tais que $R = \bigoplus_{i \in I} Re_i = \bigoplus_{i \in I} e_i R$ (Fuller, 1976). Então R é um anel $I \times I$-graduado via $R_{(i,j)} := e_i R e_j$ para todos $i, j \in I$. Note que e_i é a unidade do anel $R_{(i,i)}$ para cada $i \in I$.

(3) Sejam A um anel com unidade e I um conjunto não vazio. Considere o anel $\mathrm{M}_I(A)$ das matrizes $I \times I$ com entradas em A das quais apenas finitas são não nulas. Então $\mathrm{M}_I(A)$ tem estrutura natural de anel $I \times I$-graduado via $\mathrm{M}_I(A)_{(i,j)} := AE_{ij}$ onde E_{ij} denota a matriz elementar com 1 na entrada (i, j) e 0 nas demais.

(4) Seja A um anel com unidade. Definimos o *anel de grupoide* $A[\Gamma]$ como segue. Seja $A[\Gamma]$ o A-módulo à esquerda livre com base Γ. Definindo

$$(a\gamma)(b\delta) := \begin{cases} (ab)(\gamma\delta), & \text{se } \gamma\delta \text{ está definido} \\ \{0\}, & \text{se } \gamma\delta \text{ não está definido} \end{cases},$$

para todos $a, b \in A$ e $\gamma, \delta \in \Gamma$, temos que $A[\Gamma]$ é um anel Γ-graduado via $A[\Gamma]_\sigma := A\sigma$ para todo $\sigma \in \Gamma$. Note que podemos obter o exemplo anterior através da identificação natural entre $\mathrm{M}_I(A)$ e $A[I \times I]$.

(5) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena, isto é, os objetos de $\mathcal{C}$ formam um conjunto e, para todo par de objetos A, B de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ tem estrutura de grupo aditivo tal que a composição de morfismos é bilinear. Denote o conjunto de objetos de $\mathcal{C}$ por $\mathcal{C}_0$ e escreva $\mathcal{C}(A, B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$. Podemos definir o *anel da categoria* $\mathcal{C}$ como sendo [2]

$$R[\mathcal{C}] := \bigoplus_{A,B \in \mathcal{C}_0} \mathcal{C}(A, B)$$

onde, dados morfismos f e g, o produto fg é definido como sendo $f \circ g$ se a composição é possível e 0 em caso contrário. O anel (possivelmente sem unidade) $R[\mathcal{C}]$ possui uma estrutura natural de anel graduado pelo grupoide $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$ via

$$R[\mathcal{C}]_{(A,B)} := \mathcal{C}(B, A),$$

para todos $A, B \in \mathcal{C}_0$.

(6) Agora seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena e G um grupo. Suponha que

[2] Em (Mitchell, 1972, p. 9) o que é chamado de categoria aditiva aqui é chamado de categoria pré-aditiva. Porém, alertamos que o anel de categoria aqui não é o mesmo de (Mitchell, 1972, Section 7), mas sim o que é chamado *Gabriel functor ring* em (Facchini, 2019, p. 123) e é denotado por $\mathbf{Z}[\mathcal{C}]$ em (Gabriel, 1962, p. 346).

$\mathcal{C}$ é G-graduada, ou seja, cada conjunto de morfismos tem uma estrutura de grupo aditivo G-graduado e, para cada $A, B, C \in \mathcal{C}_0$, a composição é $\mathbb{Z}$-bilinear e induz um homomorfismo

$$\mathcal{C}(B,C) \otimes \mathcal{C}(A,B) \to \mathcal{C}(A,C)$$

de grupos abelianos G-graduados (i.e., preservando graus). Então $R[\mathcal{C}]$ é também graduado pelo grupoide $\mathcal{C}_0 \times G \times \mathcal{C}_0$ via

$$R[\mathcal{C}]_{(A,g,B)} := \mathcal{C}(B,A)_g,$$

para todos $A, B \in \mathcal{C}_0$ e $g \in G$.

Segue imediatamente da definição de categoria pré-aditiva que, usando os morfismos identidade $I_A \in \mathcal{C}(A,A)$ $(A \in \mathcal{C}_0)$, $R[\mathcal{C}]$ tanto neste exemplo como no anterior é Γ_0-unital. ■

Observação 1.3.3. Se I é um conjunto não vazio e G é um grupo então todo anel $I \times G \times I$-graduado R é o anel de uma categoria pré-aditiva pequena G-graduada. De fato, basta considerar a categoria $\mathcal{C}$ cujo conjunto de objetos é I e, dados $i, j \in I$, tem-se $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(i,j) := \bigoplus_{g \in G} R_{(j,g,i)}$. Em particular, todo anel $I \times I$-graduado é o anel de uma categoria pré-aditiva pequena. Portanto, estudar os anéis graduados por grupoides da forma $I \times I$ e $I \times G \times I$ (I conjunto, G grupo) significa estudar os anéis de categorias. ■

Como vimos nos exemplos acima, anéis graduados por grupoide podem não possuir unidade. Mas temos o seguinte resultado.

Lema 1.3.4. *Seja R um anel Γ-graduado. Então R possui unidade se, e somente se, $1_e \neq 0$ só para finitos $e \in \Gamma_0$.*

Demonstração. Suponha que $1_e \neq 0$ só para finitos $e \in \Gamma_0$. Então, para cada $\gamma \in \Gamma$ e $a \in R_\gamma$, temos

$$\left(\sum_{e \in \Gamma_0} 1_e\right) a = 1_{r(\gamma)} a = a = a 1_{d(\gamma)} = a \left(\sum_{e \in \Gamma_0} 1_e\right)$$

e segue que $\sum_{e \in \Gamma_0} 1_e$ é a unidade de R.

Reciprocamente, suponha que R possui unidade. Por (Lundström, 2004, Proposition 2.1.1), o grupoide $\Gamma' := \{\sigma \in \Gamma : 1_{d(\sigma)}, 1_{r(\sigma)} \neq 0\}$ é tal que $|\Gamma'_0| < \infty$. Logo, $1_e \neq 0$ só para finitos $e \in \Gamma_0$. ■

Definição 1.3.5. Seja R um anel Γ-graduado. Um ideal à direita (resp. à esquerda) U de R é dito ser um *ideal à direita* (resp. *à esquerda*) *graduado* se $U = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (U \cap R_\gamma)$ ou, equivalentemente, U é gerado por elementos homogêneos de R. Um *ideal graduado* *de* R é um ideal bilateral de R que é, simultaneamente, um ideal à direita graduado e um ideal à esquerda graduado de R.

Usando ideais graduados, podemos construir novos anéis graduados. De fato, se R é um anel Γ-graduado e U é um ideal graduado de R então o anel quociente R/U é Γ-graduado via $(R/U)_\gamma := \dfrac{R_\gamma + U}{U}$ para cada $\gamma \in \Gamma$.

Outra forma de produzir um anel Γ-graduado a partir de outros é através do *produto direto graduado*, definido como segue.

Definição 1.3.6. Seja $\{R_j : j \in J\}$ uma família de anéis Γ-graduados. Então denotamos por

$$\prod_{j\in J}^{gr} R_j$$

o anel Γ-graduado cuja componente homogênea de grau $\gamma \in \Gamma$ é o grupo aditivo

$$\prod_{j\in J} (R_j)_\gamma.$$

É fácil ver que isto define um produto direto na categoria dos anéis Γ-graduados e que coincide com o produto direto de anéis se J é finito.

No caso não graduado, o produto direto de uma família de anéis coincide com sua soma direta se, e somente se, a família é finita. No caso graduado por grupoide esta equivalência não é verdadeira, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 1.3.7. Seja $\{R_i : i \in I\}$ uma família infinita de anéis com unidade. Cada R_i é um anel $I \times I$-graduado via $R_i = (R_i)_{(i,i)}$ e temos

$$\prod_{k\in I}^{gr} R_k = \bigoplus_{(i,j)\in I\times I} \left(\prod_{k\in I} (R_k)_{(i,j)}\right) = \bigoplus_{i\in I} \left(\prod_{k\in I} (R_k)_{(i,i)}\right) = \bigoplus_{k\in I} R_k.$$

■

O Exemplo 1.3.7 nos motiva a seguinte:

Definição 1.3.8. Diremos que uma família $\{R_j : j \in J\}$ de anéis Γ-graduados é *somável* se $\prod_{j\in J}^{gr} R_j = \bigoplus_{j\in J} R_j$.

O resultado a seguir dá caracterizações de famílias somáveis e foi provado em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 5.2).

Lema 1.3.9. *Seja* $\{R_j : j \in J\}$ *uma família de anéis* Γ*-graduados. São equivalentes.*

(1) *A família* $\{R_j : j \in J\}$ *é somável.*

(2) *O conjunto* $\{j \in J : (R_j)_\sigma \neq 0\}$ *é finito para todo* $\sigma \in \Gamma$.

(3) *O conjunto* $\{j \in J : (R_j)_e \neq 0\}$ *é finito para todo* $e \in \Gamma_0$. ■

Observação 1.3.10. O Lema 1.3.9 nos diz que uma família $\{R_j : j \in J\}$ de anéis Γ-graduados é somável se, e somente se, $\bigoplus_{j\in J} R_j$ é um anel Γ_0-unital. ∎

Definição 1.3.11. Seja R um anel Γ-graduado e S um subanel de R. Dizemos que S é um *subanel graduado* de R se $S = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(S \cap R_\gamma)$.

Definição 1.3.12. Dados R, S anéis Γ-graduados, um *gr-homomorfismo de anéis* é um homomorfismo de anéis $\varphi : R \to S$ que é também um gr-homomorfismo de grupos abelianos Γ-graduados e satisfaz $\varphi(1_e^R) = 1_e^S$ para todo $e \in \Gamma_0$, onde 1_e^R (resp. 1_e^S) denota a unidade do anel R_e (resp. S_e). Se $\varphi : R \to S$ é um gr-homomorfismo de anéis Γ-graduados bijetor então dizemos que φ é um *gr-isomorfismo de anéis*, R é gr-isomorfo a S como anéis Γ-graduados e denotamos $R \cong_{\mathrm{gr}} S$.

Observação 1.3.13. É fácil ver que se $\varphi : R \to S$ é um gr-homomorfismo de anéis Γ-graduados então $\ker\varphi$ é um ideal graduado de R e $\operatorname{im}\varphi$ é um subanel graduado de S. ∎

A seguinte versão dos Teoremas do Isomorfismo e da Correspondência se verifica de forma totalmente análoga ao caso graduado por grupo.

Teorema 1.3.14. *Sejam R, S anéis Γ-graduados, U um ideal graduado de R e $\varphi : R \to S$ um gr-homomorfismo de anéis.*

(1) *Se $U = \ker\varphi$ então $R/U \cong_{\mathrm{gr}} \operatorname{im}\varphi$ via $a + U \mapsto \varphi(a)$ para cada $a \in R$.*

(2) *Os ideais graduados de R/U são precisamente os da forma $\{a + U : a \in U'\}$ onde U' é algum ideal graduado de R contendo U.* ∎

Definição 1.3.15. Sejam S e S' dois anéis Γ-graduados e suponha que R é subanel graduado de S e de S'. Dizemos que S e S' são *gr-isomorfos sobre* R se existir um gr-isomorfismo de anéis $S \to S'$ cuja restrição a R é a função identidade.

Definição 1.3.16. Sejam R um anel Γ-graduado, $\gamma \in \Gamma$ e $0 \neq a \in R_\gamma$. Se $b \in R_{\gamma^{-1}}$ é tal que $ab = 1_{r(\gamma)}$ (resp. $ba = 1_{d(\gamma)}$) então diremos que a é *gr-inversível à direita* (resp. *à esquerda*) e b é um *gr-inverso à direita* (resp. *à esquerda*) de a. Se $b \in R_{\gamma^{-1}}$ é tal que $ab = 1_{r(\gamma)}$ e $ba = 1_{d(\gamma)}$ então diremos que a é *gr-inversível*, que b é o *gr-inverso* de a e denotaremos $a^{-1} := b$. O conjunto dos elementos gr-inversíveis de R será denotado por $\mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R)$.

Observação 1.3.17. Note que se R é um anel Γ-graduado, $\gamma \in \Gamma$, $0 \neq a \in R_\gamma$ e $b, c \in R_{\gamma^{-1}}$ são tais que $ab = 1_{r(\gamma)}$ e $ca = 1_{d(\gamma)}$ então $c = c1_{r(\gamma)} = cab = 1_{d(\gamma)}b = b$. Logo, um elemento é gr-inversível se, e somente se, ele é gr-inversível à direita e à esquerda. Além disso, o gr-inverso é sempre único. ∎

Observação 1.3.18. Um elemento em um anel Γ-graduado pode ser gr-inversível (à direita e/ou à esquerda) mas não inversível (à direita e/ou à esquerda) e vice-versa. De fato, seja A um anel com unidade e considere $R := \mathrm{M}_2(A)$ com $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$-graduação natural. A matriz elementar E_{11} é gr-inversível mas não é inversível em R. Por outro lado, a matriz identidade é inversível em R mas não é gr-inversível (pois não é um elemento homogêneo de R).

O contexto dirá se a^{-1} denota o inverso ou o gr-inverso de a. ■

A seguir, apresentamos outro tipo de elemento de um anel Γ-graduado também será útil nos capítulos seguintes.

Definição 1.3.19. Dado R anel Γ-graduado, um *idempotente homogêneo* de R é um elemento $i \in \mathrm{h}(R)$ tal que $i^2 = i$.

Observação 1.3.20. Observe que se i é um idempotente homogêneo não nulo de R então $\deg i$ é um idempotente de Γ, ou seja, $i \in R_e$ para algum $e \in \Gamma_0$. ■

Note que um anel Γ-graduado R pode ter muitos elementos nilpotentes. De fato, $a^2 = 0$ sempre que $a \in R_\gamma$ e $r(\gamma) \neq d(\gamma)$.

Definição 1.3.21. Dizemos que um anel Γ-graduado R é *gr-reduzido* se, para todos $\gamma \in \Gamma$ e $0 \neq a \in R_\gamma$ com $r(\gamma) = d(\gamma)$ temos $a^2 \neq 0$.

1.4 Módulos graduados

Definição 1.4.1. Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita unital (isto é, $MR = M$). Dizemos que M é Γ-*graduado* se existe uma família $\{M_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de subgrupos aditivos de M tal que $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ e, para todos $\sigma, \tau \in \Gamma$,

$$M_\sigma R_\tau \subseteq \begin{cases} M_{\sigma\tau}, & \text{se } \sigma\tau \text{ está definido} \\ \{0\}, & \text{se } \sigma\tau \text{ não está definido} \end{cases}.$$

Um submódulo N de M é dito ser um *submódulo graduado* (e denotamos por $N \leq_{\mathrm{gr}} M$) se $N = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} N_\gamma$ é um R-módulo à direita Γ-graduado onde $N_\gamma := N \cap M_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$ (ou, equivalentemente, se $n_{\gamma_1} + \cdots + n_{\gamma_t} \in N$ com $n_{\gamma_i} \in M_{\gamma_i}$ e $\gamma_i \neq \gamma_j$ para cada $i, j = 1, ..., t$ distintos, então $n_{\gamma_i} \in N$ para todo $i = 1, ..., t$).

Analogamente, definimos *R-módulos à esquerda Γ-graduados* e seus *submódulos graduados*.

Definição 1.4.2. Sejam R e S anéis Γ-graduados. Dizemos que M é um (S, R)-*bimódulo* Γ-*graduado* se M é um R-módulo à direita Γ-graduado e um S-módulo à esquerda Γ-graduado tal que $(sm)r = s(mr)$ para todos $m \in M$, $r \in R$ e $s \in S$.

Claramente todo ideal à direita (resp. à esquerda) graduado de um anel Γ-graduado R é um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado e, de fato, um submódulo graduado de R_R (resp. ${}_RR$). E todo ideal graduado de R é um (R, R)-bimódulo Γ-graduado.

Observação 1.4.3. Considere o anel associativo comutativo

$$\mathcal{Z} := \bigoplus_{e\in\Gamma_0} \mathbb{Z}$$

Γ-graduado via

$$\mathcal{Z}_\gamma = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } \gamma \in \Gamma_0 \\ 0, & \text{se } \gamma \notin \Gamma_0 \end{cases}.$$

Todo grupo abeliano Γ-graduado é um $\mathcal{Z}$-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado e vice-versa. De fato, seja X um grupo abeliano Γ-graduado. Então, considerando X como $\mathbb{Z}$-módulo à direita (resp. à esquerda), fazemos de X um $\mathcal{Z}$-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado via

$$x_\gamma \cdot (n_e)_{e\in\Gamma_0} := x_\gamma n_{d(\gamma)} \quad (\text{resp. } (n_e)_{e\in\Gamma_0} \cdot x_\gamma := n_{r(\gamma)} x_\gamma),$$

para todos $\gamma \in \Gamma$, $x_\gamma \in X_\gamma$ e $(n_e)_{e\in\Gamma_0} \in \mathcal{Z}$. ■

Destacamos dois tipos de ideais (à direita) graduados que são construídos a partir de elementos de um módulo graduado e serão importantes nos capítulos seguintes.

Definição 1.4.4. Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado, N um submódulo graduado de M e $y \in \mathrm{h}(M)$. Denotamos por $y^{-1}N$ (resp. Ny^{-1}) [3] o ideal à direita (resp. à esquerda) graduado $\{r \in R : yr \in N\}$ (resp. $\{r \in R : ry \in N\}$).

Definição 1.4.5. Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado. Se $X \subseteq M$, definimos o *anulador* de X em M por $\mathrm{r.ann}_R(X) := \{a \in R : Xa = 0\}$ (resp. $\mathrm{l.ann}_R(X) := \{a \in R : aX = 0\}$). Se $m \in \mathrm{h}(M)$, temos um ideal à direita (resp. à esquerda) graduado de R definido por $\mathrm{r.ann}_R(m) := \mathrm{r.ann}_R(\{m\})$ (resp. $\mathrm{l.ann}_R(m) := \mathrm{l.ann}_R(\{m\})$).

Observação 1.4.6. Se M é R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado então $\mathrm{r.ann}_R(M)$ (resp. $\mathrm{l.ann}_R(M)$) é um ideal graduado de R. ■

Observe que se R é um anel Γ-graduado e $\{M_j : j \in J\}$ é uma família de R-módulos à direita (resp. à esquerda) Γ-graduados então a soma direta $M := \bigoplus_{j\in J} M_j$ também é um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado via $M_\gamma := \bigoplus_{j\in J} (M_j)_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$.

Definição 1.4.7. Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. Dizemos que N é um *somando direto graduado* de M se existe $X \leq_{\mathrm{gr}} M$ tal que $M = N \oplus X$.

Idempotentes homogêneos ajudam a descrever todos os somandos diretos graduados de R_R e ${}_RR$.

Lema 1.4.8. *Sejam R um anel Γ-graduado e $e \in \Gamma_0$. Os somandos diretos graduados de $R(e)$ (resp. $(e)R$) são precisamente os submódulos graduados da forma iR (resp. Ri) para algum idempotente $i \in R_e$.*

Demonstração. Suponha que X, Y são submódulos graduados de $R(e)$ tais que $R(e) = X \oplus Y$. Sejam $i \in X_e$ e $j \in Y_e$ tais que $1_e = i + j$. Temos que i é um

[3] Também denotado $(N : y)$ em (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012).

idempotente de R_e pois

$$i = 1_e i = i^2 + ji \implies i - i^2 = ji \in X \cap Y = 0 \implies i^2 = i\,.$$

Além disso,

$$x \in X \implies x = 1_e x = ix + jx \implies x - ix = jx \in X \cap Y = 0 \implies x = ix \in iR\,.$$

Reciprocamente, se i é um idempotente de R_e então é fácil ver que $R(e) = iR \oplus (1_e - i)R$.

O caso com $(e)R$ se prova de maneira totalmente análoga. ■

Além de somas diretas, quocientes também ajudam a produzir novos módulos graduados. De fato, se R é um anel Γ-graduado, M é um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado e $N \leq_{\text{gr}} M$ então o módulo quociente M/N é Γ-graduado via $(M/N)_\gamma := \dfrac{M_\gamma + N}{N}$ para cada $\gamma \in \Gamma$.

A seguir apresentamos o importante conceito de shift de um módulo graduado. Em alguns autores, por exemplo, (Năstăsescu e Van Oystaeyen, 2004), (Cala *et al.*, 2022) e (Lundström, 2004), o shift é chamado de *suspension*. Aqui, adotaremos a nomenclatura de (Hazrat, 2016) e (Dăscălescu *et al.*, 2023).

Definição 1.4.9. Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado e $\sigma \in \Gamma$. Para cada $\gamma \in \Gamma$, seja $M(\sigma)_\gamma := M_{\sigma\gamma}$ (resp. $((\sigma)M)_\gamma := M_{\gamma\sigma}$). O *shift por σ de M* é o R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado

$$M(\sigma) := \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} M(\sigma)_\gamma$$
$$(\text{resp. } (\sigma)M := \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} ((\sigma)M)_\gamma)\,.$$

Observação 1.4.10. Se R é um anel Γ-graduado, M é um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado e $\sigma \in \Gamma$ então $\operatorname{supp}(M(\sigma)) \subseteq d(\sigma)\Gamma$ (resp. $\operatorname{supp}((\sigma)M) \subseteq \Gamma r(\sigma)$). ■

A seguinte propriedade de shifts de módulos será muito utilizada. Para uma versão do resultado para módulos à esquerda, veja (Cala *et al.*, 2022, Proposition 10(a)).

Lema 1.4.11. *Dado R um anel Γ-graduado, seja M um R-módulo à direita Γ-graduado. Para cada $\sigma \in \Gamma$, as componentes homogêneas de $M(\sigma)$ são as componentes homogêneas de $M(r(\sigma))$, e vice-versa. Em particular, $M(\sigma)$ e $M(r(\sigma))$ coincidem como R-módulos.*

Demonstração. Se $\gamma \in \operatorname{supp}(M(\sigma))$ então $r(\gamma) = d(\sigma)$ e, portanto, $M(\sigma)_\gamma = M_{\sigma\gamma} = M(r(\sigma))_{\sigma\gamma}$ é uma componente homogênea de $M(r(\sigma))$. Reciprocamente, se $\gamma \in \operatorname{supp}(M(r(\sigma)))$ então $r(\gamma) = r(\sigma)$ e segue que $M(r(\sigma))_\gamma = M_\gamma = M_{\sigma\sigma^{-1}\gamma} = M(\sigma)_{\sigma^{-1}\gamma}$ é uma componente homogênea de $M(\sigma)$. ■

Observação 1.4.12. Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado, $y \in \mathrm{h}(M)$ e $N \leq_{\mathrm{gr}} M$. Se $\gamma := \deg y$ então $yr = 0$ para todo $r \in 1_e R$ com $e \in \Gamma_0 \setminus \{d(\gamma)\}$. Neste caso, $(y^{-1}N)(e) = (\mathrm{r.ann}_R(y))(e) = R(e)$ para todo $e \in \Gamma_0 \setminus \{d(\gamma)\}$. ■

Observação 1.4.13. Note que se R é um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado então $M = \bigoplus_{e\in\Gamma_0} M(e)$ (resp. $M = \bigoplus_{e\in\Gamma_0}(e)M$). Esta decomposição será muito importante e motiva a definição a seguir. ■

Definição 1.4.14. Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado. Definimos $\Gamma_0'(M) := \{e \in \Gamma_0 : M(e) \neq 0\}$ (resp. $\Gamma_0'(M) := \{e \in \Gamma_0 : (e)M \neq 0\}$).

O seguinte lema diz respeito a $\Gamma_0'(R_R)$.

Lema 1.4.15. *Seja R um anel Γ-graduado. Para cada $e \in \Gamma_0$, temos*

$$1_e \neq 0 \iff R_e \neq \{0\} \iff R(e) \neq \{0\} \iff (e)R \neq \{0\}\,.$$

Demonstração. Basta notar que, para cada $e \in \Gamma_0$, R_e é anel com unidade 1_e e $R(e)$ (resp. $(e)R$) é R-módulo à direita (resp. à esquerda) gerado por 1_e. ■

O Lema 1.4.15 mostra que $\Gamma_0'(R_R) = \Gamma_0'({}_RR)$ e nos motiva a seguinte definição.

Definição 1.4.16. Para um anel Γ-graduado R, denotamos $\Gamma_0'(R_R) = \Gamma_0'({}_RR)$ por

$$\Gamma_0'(R) := \{e \in \Gamma_0 : 1_e \neq 0\} = \{e \in \Gamma_0 : R_e \neq 0\} = \{e \in \Gamma_0 : R(e) \neq 0\}$$

ou, simplesmente, Γ_0' quando estiver claro o anel Γ-graduado R.

O seguinte resultado é consequência imediata dos Lemas 1.3.4 e 1.4.15.

Corolário 1.4.17. *Um anel Γ-graduado R possui unidade se, e somente se, $\Gamma_0'(R)$ é finito.* ■

Definição 1.4.18. Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$. Definimos $M(\Delta_0) := \bigoplus_{e\in\Delta_0} M(e)$ (resp. $(\Delta_0)M := \bigoplus_{e\in\Delta_0}(e)M$).

Observe que se R é um anel Γ-graduado e M é um R-módulo à direita Γ-graduado então $M = M(\Gamma_0) = M(\Gamma_0'(M))$.

Definição 1.4.19. Sejam R um anel Γ-graduado e M, N dois R-módulos à direita (resp. à esquerda) Γ-graduados. Um *gr-homomorfismo de módulos* $g : M \to N$ é um homomorfismo de módulos que também é um gr-homomorfismo de grupos abelianos Γ-graduados. Um gr-homomorfismo de módulos bijetor é chamado um *gr-isomorfismo de módulos*. Dizemos que M e N são gr-isomorfos (denotando isso por $M \cong_{\mathrm{gr}} N$) se existir um gr-isomorfismo de módulos $M \to N$. Denotamos por $\mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, N)$ o grupo abeliano dos gr-homomorfismos de módulos $g : M \to N$ e, em particular, temos um anel $\mathrm{End}_{\text{gr-}R}(M) := \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, M)$.

Observação 1.4.20. Note que se R é um anel Γ-graduado e M, N são dois R-módulos à direita Γ-graduados então

$$\mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, N) \cong \prod_{e \in \Gamma_0} \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M(e), N(e))$$

via o homomorfismo de anéis $h \mapsto (h|_{M(e)})_{e \in \Gamma_0}$.

E não é díficil ver que se $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, N)$ então $\ker g$ é um submódulo graduado de M e $\mathrm{im}\, g$ é um submódulo graduado de N. ■

Temos a seguinte versão dos Teoremas do Isomorfismo e da Correspondência que se verifica de forma totalmente análoga ao caso graduado por grupo.

Teorema 1.4.21. *Sejam R um anel Γ-graduado, M, N dois R-módulos à direita Γ-graduados, L um submódulo graduado de M e $g : M \to N$ um gr-homomorfismo de módulos.*

(1) *Se $L \subseteq \ker g$ então existe um único gr-homomorfismo de módulos $\overline{g} : M/L \to N$ tal que $g = \overline{g} \circ \pi$ onde $\pi : M \to M/L$ denota a projeção canônica.*

(2) *Se $L = \ker g$ então $M/L \cong_{\text{gr}} \mathrm{im}\, g$ via $m + L \mapsto g(m)$ para cada $m \in M$.*

(3) *Os submódulos graduados de M/L são precisamente os da forma P/L onde $P \leq_{\text{gr}} M$ e $P \supseteq L$.* ■

Definição 1.4.22. Sejam R um anel Γ-graduado, M e M' dois R-módulos à direita (resp. à esquerda) Γ-graduados e suponha que N é um submódulo graduado de M e de M'. Dizemos que M e M' são *gr-isomorfos sobre N* se existir um gr-isomorfismo de R-módulos $M \to M'$ cuja restrição a N é a função identidade.

1.5 Anel oposto graduado

Uma boa forma de passar resultados de módulos à direita para resultados em módulos à esquerda é através do anel oposto.

Definição 1.5.1. Seja $R = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma$ um anel Γ-graduado. Definimos o *anel oposto graduado* R^{op} como segue. R^{op} coincide com R como grupo aditivo. Dados $a, b \in R^{op}$, definimos $a \cdot^{op} b := ba$. Fazemos de R^{op} um anel Γ-graduado via $(R^{op})_\gamma := R_{\gamma^{-1}}$ para cada $\gamma \in \Gamma$.

Observação 1.5.2. Para qualquer anel Γ-graduado R, R^{op} é, de fato, um anel Γ-graduado pois

$$(R^{op})_\gamma \cdot^{op} (R^{op})_\delta = R_{\delta^{-1}} R_{\gamma^{-1}} \subseteq R_{\delta^{-1}\gamma^{-1}} = R_{(\gamma\delta)^{-1}} = (R^{op})_{\gamma\delta}$$

para todos $\gamma, \delta \in \Gamma$. Além disso, é fácil ver que $(R^{op})^{op} = R$. ■

Exemplos 1.5.3. (1) Se A é um anel com unidade e I é um conjunto não vazio então é fácil ver que $(\mathrm{M}_I(A))^{op} = \mathrm{M}_I(A^{op})^t$, o anel das transpostas das matrizes em

$\mathrm{M}_I(A^{op})$.

(2) Seja A um anel com unidade. Podemos definir o grupoide oposto Γ^{op} que é igual a Γ como conjunto, tem a mesma operação de inversão e $\gamma \cdot^{op} \delta$ está definido se, e somente se, $d(\delta) = r(\gamma)$ e, neste caso, $\gamma \cdot^{op} \delta := \delta\gamma$. É imediato verificar que se A é um anel com unidade então $(A[\Gamma])^{op}$ é o anel de grupoide $A^{op}[\Gamma^{op}]$.

(3) Se $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena então claramente $(R[\mathcal{C}])^{op} = R[\mathcal{C}^{op}]$, o anel da categoria oposta $\mathcal{C}^{op}$.

(4) Se $\{R_j : j \in J\}$ é uma família de anéis Γ-graduados e $R = \prod_{j\in J}^{gr} R_j$ então $R^{op} = \prod_{j\in J}^{gr} (R_j)^{op}$. De fato,

$$(R^{op})_\gamma = R_{\gamma^{-1}} = \prod_{j\in J} (R_j)_{\gamma^{-1}} = \prod_{j\in J} ((R_j)^{op})_\gamma = \left(\prod_{j\in J}^{gr} (R_j)^{op}\right)_\gamma ,$$

para cada $\gamma \in \Gamma$. ■

Definição 1.5.4. Seja $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ um anel Γ-graduado e $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ um R-módulo à esquerda Γ-graduado. Construímos o R^{op}-módulo à direita Γ-graduado M^{op} como segue. M^{op} coincide com M como grupo aditivo. Dados $m \in M^{op}$ e $r \in R^{op}$, definimos $m \cdot^{op} r := rm$. Consideramos em M^{op} a Γ-graduação dada por $(M^{op})_\gamma := M_{\gamma^{-1}}$ para cada $\gamma \in \Gamma$.

Observação 1.5.5. Claramente, se R é um anel Γ-graduado e M um R-módulo à esquerda Γ-graduado então M^{op} é um R^{op}-módulo à direita e, de fato, é Γ-graduado pois

$$(M^{op})_\gamma \cdot^{op} (R^{op})_\delta = R_{\delta^{-1}} M_{\gamma^{-1}} \subseteq M_{\delta^{-1}\gamma^{-1}} = M_{(\gamma\delta)^{-1}} = (M^{op})_{\gamma\delta}$$

para todos $\gamma, \delta \in \Gamma$. ■

Também fazemos o processo "reverso":

Definição 1.5.6. Se $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ é um anel Γ-graduado e $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ um R-módulo à direita Γ-graduado, definimos o R^{op}-módulo à esquerda Γ-graduado M^{op} da seguinte forma: M^{op} coincide com M como grupo aditivo e sua estrutura de R^{op}-módulo à esquerda é dada por $r \cdot^{op} m := mr$ para todos $m \in M^{op}$ e $r \in R^{op}$. Dessa forma, M^{op} é um R^{op}-módulo à esquerda Γ-graduado via $(M^{op})_\gamma := M_{\gamma^{-1}}$ para cada $\gamma \in \Gamma$.

Observação 1.5.7. É fácil ver que se R é um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita (resp. esquerda) Γ-graduado então $(M^{op})^{op} = M$.

Uma verificação imediata também mostra que se I é um ideal à direita (resp. à esquerda) graduado de R então I^{op} é um ideal à esquerda (resp. à direita) graduado de R^{op}. ■

Outro fato de fácil verificação é que se R é um anel Γ-graduado, M é um R-módulo à direita (resp. esquerda) Γ-graduado e $\sigma \in \Gamma$ então $(\sigma)(M^{op}) = (M(\sigma^{-1}))^{op}$ (resp.

$(M^{op})(\sigma) = ((\sigma^{-1})M)^{op})$. Em particular, $(e)(M^{op}) = (M(e))^{op}$ (resp. $(M^{op})(e) = ((e)M)^{op}$) e $(\Delta_0)(M^{op}) = (M(\Delta_0))^{op}$ (resp. $(M^{op})(\Delta_0) = ((\Delta_0)M)^{op}$) para todos $e \in \Gamma_0$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$.

1.6 Homomorfismos com grau

Definição 1.6.1. Suponha que R é um anel Γ-graduado e M, N são dois R-módulos à direita (resp. à esquerda) Γ-graduados. Dado $\gamma \in \Gamma$, dizemos que um homomorfismo de R-módulos à direita (resp. à esquerda) $g : M \to N$ é um *homomorfismo de grau* γ se $g(M_\sigma) \subseteq N_{\gamma\sigma}$ (resp. $g(M_\sigma) \subseteq N_{\sigma\gamma}$) para todo $\sigma \in \Gamma$. Para cada $\gamma \in \Gamma$, $\mathrm{HOM}_R(M, N)_\gamma$ denotará o grupo abeliano dos homomorfismos $g : M \to N$ de grau γ. Podemos então definir o grupo abeliano Γ-graduado $\mathrm{HOM}_R(M, N) := \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathrm{HOM}_R(M, N)_\gamma$. Denotamos $\mathrm{END}_R(M) := \mathrm{HOM}_R(M, M)$.

Observação 1.6.2. É fácil ver que se R é um anel Γ-graduado e M, N são dois R-módulos à direita Γ-graduados então

$$\mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, N) \hookrightarrow \prod_{e \in \Gamma_0} \mathrm{HOM}_R(M, N)_e$$

via $h \mapsto (h_e)_{e \in \Gamma_0}$ onde $h_e = h$ em $M(e)$ e $h_e = 0$ em $M(f)$ para todo $e \neq f \in \Gamma_0$. ■

O resultado a seguir segue imediatamente da definição. Veja também (Cala *et al.*, 2022, Proposition 13(c)).

Lema 1.6.3. *Sejam R um anel Γ-graduado, M, N e P três R-módulos à direita (resp. à esquerda) Γ-graduados e $\gamma, \sigma \in \Gamma$. Sejam $g \in \mathrm{HOM}_R(M, N)_\gamma$ e $h \in \mathrm{HOM}_R(N, P)_\sigma$. Se $\sigma\gamma$ (resp. $\gamma\sigma$) está definido então $h \circ g : M \to P$ é um homomorfismo de grau $\sigma\gamma$ (resp. $\gamma\sigma$). Caso contrário, $h \circ g = 0$.* ■

O seguinte resultado sobre núcleo e imagem de homomorfismos com grau será muito utilizado.

Lema 1.6.4. *Sejam R um anel Γ-graduado, M e N dois R-módulos à direita Γ-graduados, $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}_R(M, N)_\gamma$. Então $\ker g \supseteq \bigoplus_{e \in \Gamma_0 \setminus \{d(\gamma)\}} M(e)$ e $\operatorname{im} g \subseteq N(r(\gamma))$.*

Demonstração. Para a primeira inclusão, note que se $e \in \Gamma_0 \setminus \{d(\gamma)\}$ então

$$g(M(e)) = g\left(\bigoplus_{\alpha \in e\Gamma} M_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in e\Gamma} g(M_\alpha) \subseteq \sum_{\alpha \in e\Gamma} N_{\gamma\alpha} = 0\,.$$

A segunda inclusão segue de

$$g(M) = g\left(\bigoplus_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in \Gamma} g(M_\alpha) \subseteq \sum_{\alpha \in \Gamma} N_{\gamma\alpha} = N(r(\gamma))\,.$$ ■

Definição 1.6.5. Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado e $e \in \Gamma_0$. Considerando a decomposição $M = \bigoplus_{e\in\Gamma_0} M(e)$ (resp. $M = \bigoplus_{e\in\Gamma_0}(e)M$), denotamos por $\mathbb{1}_e$ a projeção canônica $M \to M(e)$ (resp $M \to (e)M$). É fácil ver que $\mathbb{1}_e \in \mathrm{END}_R(M)_e$.

Proposição 1.6.6. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado. Então $\mathrm{END}_R(M)$ é um anel Γ-graduado com $g \cdot h := g \circ h$ (resp. $g \cdot h := h \circ g$) para todos $g, h \in \mathrm{END}_R(M)$ em que, para cada $e \in \Gamma_0$, o anel $\mathrm{END}_R(M)_e$ tem unidade $\mathbb{1}_e$.*

Demonstração. Começamos com o caso "à direita". Sabemos que $\mathrm{END}_R(M) = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{END}_R(M)_\gamma$ e, pelo Lema 1.6.3, temos $\mathrm{END}_R(M)_\gamma \mathrm{END}_R(M)_\delta \subseteq \mathrm{END}_R(M)_{\gamma\delta}$ para todos $\gamma, \delta \in \Gamma$. Em particular, $\mathrm{END}_R(M)$ é um anel. Segue facilmente do Lema 1.6.4 que, para cada $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{END}_R(M)_\gamma$, temos $\mathbb{1}_{r(\gamma)} \circ g = g = g \circ \mathbb{1}_{d(\gamma)}$. Logo, $\mathrm{END}_R(M)$ é um anel Γ-graduado em que $\mathbb{1}_e$ é a unidade do anel $\mathrm{END}_R(M)_e$ para cada $e \in \Gamma_0$.

O caso "à esquerda" segue da natural identificação entre $\mathrm{END}_R M$ e $(\mathrm{END}_{R^{op}} M^{op})^{op}$ provada em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 3.5). ■

Observação 1.6.7. Se R é um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado então segue imediatamente da definição de $\mathrm{END}_R(M)$ que M é um $\mathrm{END}_R(M)$-módulo à esquerda (resp. à direita) Γ-graduado via $g \cdot m := g(m)$ (resp. $m \cdot g := (m)g$) para todos $m \in M$ e $g \in \mathrm{END}_R(M)$. ■

Um módulo e seu anel de endomorfismos com grau têm a seguinte importante relação.

Lema 1.6.8. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado. Então $\Gamma_0'(M) = \Gamma_0'(\mathrm{END}_R(M))$.*

Demonstração. Basta notar que, para cada $e \in \Gamma_0$, temos

$$M(e) \neq 0 \text{ (resp. } (e)M \neq 0) \iff \mathbb{1}_e \neq 0 \iff \mathrm{END}_R(M)_e \neq 0\,. \qquad ■$$

A Proposição a seguir será utilizada com frequência e é uma pequena generalização de um resultado de (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 3.2).

Proposição 1.6.9. *Se R é um anel Γ-graduado então temos um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados:*

$$R \longrightarrow \mathrm{END}(R_R)$$

que corresponde $a \in R$ com o homomorfismo multiplicação à esquerda por a. Mais ainda, para cada $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$, temos que

$$\bigoplus_{e,f\in\Delta_0} 1_e R 1_f \cong_{\mathrm{gr}} \mathrm{END}_R(R(\Delta_0)).$$

Demonstração. Considere

$$\begin{aligned} \phi : R &\longrightarrow \mathrm{END}(R_R) \\ a &\longmapsto m_a \end{aligned}$$

onde $m_a : R \longrightarrow R$ é o homomorfismo de R-módulos à direita dado pela multiplicação à esquerda por a. Note que se $a \in R_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$) então m_a é homomorfismo de grau γ e, portanto, ϕ está bem definida e é gr-homomorfismo de grupos abelianos Γ-graduados. Além disso, $m_{ab} = m_a \circ m_b$ para todos $a, b \in R$ e $m_{1_e} = \mathbb{1}_e$ para cada $e \in \Gamma_0$. Logo, ϕ é gr-homomorfismo de anéis.

Temos que ϕ é injetor, pois se $0 \neq a \in R$ então, tomando uma componente homogênea não nula a_γ de a, obtemos $m_a(1_{d(\gamma)}) = a1_{d(\gamma)} \neq 0$ e, portanto, $\phi(a) = m_a \neq 0$. A sobrejetividade de ϕ segue do fato que, se $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{END}(R_R)_\gamma$ então $g(R_\alpha) \subseteq R_{\gamma\alpha}$, para todo $\alpha \in \Gamma$, de onde temos que $g(a) \neq 0$ implica $a \in R(d(\gamma))$. Neste caso, $g(a) = g(1_{d(\gamma)}a) = g(1_{d(\gamma)})a = m_{g(1_{d(\gamma)})}(a)$. Logo, $g = m_{g(1_{d(\gamma)})} = \phi(g(1_{d(\gamma)}))$.

Agora, se $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$ então, pelo que acabamos de provar, temos um gr-homomorfismo de anéis injetor

$$\begin{aligned} \phi' : \bigoplus_{e,f \in \Delta_0} 1_e R 1_f &\longrightarrow \mathrm{HOM}_R(R(\Delta_0), R) \\ a &\longmapsto m_a|_{R(\Delta_0)}. \end{aligned}$$

Resta mostrar que se $a \in R_\gamma$ com $r(\gamma), d(\gamma) \in \Delta_0$ então $m_a(R(\Delta_0)) \subseteq R(\Delta_0)$. De fato, para cada $\alpha \in \Gamma$ com $r(\alpha) \in \Delta_0$, temos $m_a(R(\Delta_0)_\alpha) = m_a(R_\alpha) \subseteq R_{\gamma\alpha} \subseteq R(r(\gamma)) \subseteq R(\Delta_0)$. ■

Os próximos dois resultados tratam de gr-inversão de endomorfismos com grau.

Lema 1.6.10. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado, $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{END}_R(M)_\gamma$. Se g é gr-inversível à esquerda (resp. à direita) no anel Γ-graduado $\mathrm{END}_R(M)$ então $g|_{M(d(\gamma))} : M(d(\gamma)) \to M(r(\gamma))$ é injetor (resp. sobrejetor).*

Demonstração. Suponha que g é gr-inversível à esquerda e seja $h \in \mathrm{END}_R(M)_{\gamma^{-1}}$ tal que $hg = \mathbb{1}_{d(\gamma)}$. Se $m \in M(d(\gamma))$ e $g(m) = 0$ então $m = \mathbb{1}_{d(\gamma)}(m) = hg(m) = 0$. Logo, $g|_{M(d(\gamma))}$ é injetor.

Agora, suponha que g é gr-inversível à direita e seja $h \in \mathrm{END}_R(M)_{\gamma^{-1}}$ tal que $gh = \mathbb{1}_{r(\gamma)}$. Para cada $m \in M(r(\gamma))$ temos $h(m) \in M(d(\gamma))$ (pelo Lema 1.6.4) e $m = \mathbb{1}_{r(\gamma)}(m) = gh(m) \in \operatorname{im} g$. Logo, $g|_{M(d(\gamma))} : M(d(\gamma)) \to M(r(\gamma))$ é sobrejetor. ■

Corolário 1.6.11. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado, $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{END}_R(M)_\gamma$. São equivalentes:*

(1) *g é gr-inversível em $\mathrm{END}_R(M)$.*

(2) *$g|_{M(d(\gamma))} : M(d(\gamma)) \to M(r(\gamma))$ é bijetor.*

(3) $\ker g = \bigoplus_{e \in \Gamma_0 \setminus \{d(\gamma)\}} M(e)$ e $\operatorname{im} g = M(r(\gamma))$.

Demonstração. (1) $\implies$ (2): Segue imediatamente do Lema 1.6.10.

(2) $\implies$ (1): Suponha que $h : M(r(\gamma)) \to M(d(\gamma))$ é a função inversa de $g|_{M(d(\gamma))} : M(d(\gamma)) \to M(r(\gamma))$. Definindo $h(M(e)) = 0$ para todo $r(\gamma) \neq e \in \Gamma_0$, é fácil ver que obtemos $h \in \mathrm{END}_R(M)_{\gamma^{-1}}$. Além disso, gh é a função identidade em $M(r(\gamma))$ e é a função nula em $M(e)$ para todo $r(\gamma) \neq e \in \Gamma_0$, ou seja, $gh = \mathbb{1}_{r(\gamma)}$. Semelhantemente, $hg = \mathbb{1}_{d(\gamma)}$.

(2) $\iff$ (3): Segue imediatamente do Lema 1.6.4. ∎

O próximo resultado diz respeito a shifts de módulos e será muito útil. Para uma versão mais geral, veja (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 3.2).

Proposição 1.6.12. *Sejam R um anel Γ-graduado, M, N dois R-módulos à direita Γ-graduados e $\sigma, \tau \in \Gamma$. Para cada $\gamma \in \Gamma$, temos*

(1)
$$\mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, N(\gamma)) = \mathrm{HOM}_R(M, N)_\gamma \cong \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M(\gamma^{-1}), N)$$
e o isomorfismo acima é uma identidade se $M = M(\gamma^{-1})$ como conjuntos.

(2)
$$\mathrm{HOM}_R(M(\tau), N(\sigma))_\gamma \cong \mathrm{HOM}_R(M, N)_{\sigma\gamma\tau^{-1}},$$
e o isomorfismo acima é uma identidade se $M = M(\tau)$ como conjuntos.

Demonstração. (1) Se $g : M \longrightarrow N$ é um homomorfismo de R-módulos à direita então, para cada $\alpha \in \Gamma$, temos

$$g(M_\alpha) \subseteq N(\gamma)_\alpha \iff g(M_\alpha) \subseteq N_{\gamma\alpha}$$

e, portanto, obtemos a igualdade do enunciado.

Considere agora a função

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{HOM}_R(M, N)_\gamma &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M(\gamma^{-1}), N) \\ g &\longmapsto g|_{M(\gamma^{-1})} \end{aligned}$$

que está bem definida, pois se $g \in \mathrm{HOM}_R(M, N)_\gamma$ então, para todo $\alpha \in \Gamma$,

$$g\left(M(\gamma^{-1})_\alpha\right) = g(M_{\gamma^{-1}\alpha}) \subseteq N_{\gamma\gamma^{-1}\alpha} = N_\alpha.$$

Pelo Lema 1.4.11, $M(\gamma^{-1}) = M(d(\gamma))$ como conjuntos e segue que

$$M = M(\gamma^{-1}) \oplus \bigoplus_{\substack{e \in \Gamma_0 \\ e \neq d(\gamma)}} M(e)$$

como R-módulos. Pelo Lema 1.6.4, se $g, g' \in \mathrm{HOM}_R(M, N)_\gamma$ coincidem em $M(\gamma^{-1})$ então $g = g'$, ou seja, φ é injetora. Além disso, todo $h \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M(\gamma^{-1}), N)$ pode ser estendido a um homomorfismo de R-módulos $g : M \to N$ fazendo $g(M(e)) = 0$ para todo $e \in \Gamma_0 \setminus \{d(\gamma)\}$. Tal g tem grau γ pois, para todo $\alpha \in \Gamma$,

$$g(M_{\gamma^{-1}\alpha}) = g\left(M(\gamma^{-1})_\alpha\right) \subseteq N_\alpha = N_{\gamma\gamma^{-1}\alpha}.$$

Logo, φ é sobrejetora e, portanto, é um isomorfismo. Claramente φ é a função identidade se $M = M(\gamma^{-1})$ como conjuntos.

(2) Primeiramente, suponha que $\sigma\gamma\tau^{-1}$ não está definido, isto é, $r(\gamma) \neq d(\sigma)$ ou $d(\gamma) \neq d(\tau)$. Seja $f \in \mathrm{HOM}_R(M(\tau), N(\sigma))_\gamma$. Então, para cada $\alpha \in \Gamma$ tal que $r(\alpha) = d(\tau)$, temos

$$f(M(\tau)_\alpha) \subseteq N(\sigma)_{\gamma\alpha} = N_{\sigma\gamma\alpha} = 0,$$

de onde obtemos que $f(M(\tau)) = 0$ e portanto $f = 0$. Isso mostra que $\mathrm{HOM}_R(M(\tau), N(\sigma))_\gamma = \{0\} = \mathrm{HOM}_R(M, N)_{\sigma\gamma\tau^{-1}}$.

Agora, suponha que $\sigma\gamma\tau^{-1}$ está definido, isto é, $r(\gamma) = d(\sigma)$ e $d(\gamma) = d(\tau)$. Então, usando o item (1), obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{HOM}_R(M(\tau), N(\sigma))_\gamma &= \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M(\tau), N(\sigma)(\gamma)) \\ &\cong \mathrm{HOM}_R(M, N(\sigma\gamma))_{\tau^{-1}} \\ &= \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, N(\sigma\gamma)(\tau^{-1})) \\ &= \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, N(\sigma\gamma\tau^{-1})) \\ &= \mathrm{HOM}_R(M, N)_{\sigma\gamma\tau^{-1}}. \end{aligned}$$

E, pelo item (1), no lugar do isomorfismo acima temos uma identidade se $M = M(\tau)$ como conjuntos. ■

Observação 1.6.13. Com a Proposição 1.6.12 é fácil ver que se R é um anel Γ-graduado, M, N são dois R-módulos à direita Γ-graduados e $g \in \mathrm{HOM}_R(M, N)_\gamma$ então $\ker g$ é um submódulo graduado de M e $\operatorname{im} g$ é um submódulo graduado de N. ■

1.7 Anéis de matrizes graduados

Dados conjuntos I, J não vazios, denotamos por $(X_{ij})_{ij}$ o conjunto das matrizes cuja entrada na linha $i \in I$ e coluna $j \in J$ é um elemento do conjunto X_{ij}. Escreveremos $(x_{ij})_{ij} \in (X_{ij})_{ij}$ para denotar que $(x_{ij})_{ij}$ é uma matriz cuja entrada na linha $i \in I$ e coluna $j \in J$ é $x_{ij} \in X_{ij}$.

Se X e I são conjuntos então denotaremos $X^I := \{\overline{x} = (x_i)_{i \in I} : x_i \in X \text{ para todo } i \in I\}$.

Os anéis de matrizes considerados aqui foram introduzidos e estudados no artigo (Cristiano *et al.*, 2024, Section 3).

A seguir, apresentamos algumas definições técnicas que serão úteis na definição dos anéis de matrizes graduados (não necessariamente de tamanho finito).

Definição 1.7.1. Seja R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e $\Sigma \in \mathcal{P}(\Gamma)$. Definimos $M(\Sigma) := \bigoplus_{\sigma\in\Sigma} M(\sigma)$ (quando $M = R$, escrevemos $R(\Sigma) := R_R(\Sigma)$).

Observe que se $r(\sigma) = f$ para algum $\sigma \in \Sigma$ e $f \in \Gamma_0 \setminus \Gamma_0'(M)$ então $M(\sigma) = \{0\}$. Portanto, se $\Sigma' = \{\sigma \in \Sigma : r(\sigma) \in \Gamma_0'(M)\}$ então $M(\Sigma) = M(\Sigma')$.

Definição 1.7.2. Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Dizemos que $\Sigma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ é *r-único para M* se $\{r(\sigma) : \sigma \in \Sigma\} \subseteq \Gamma_0'(M)$ e, para cada $e \in \Gamma_0'(M)$, existe no máximo um $\sigma \in \Sigma$ tal que $r(\sigma) = e$. Equivalentemente, $\Sigma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ é r-único para M se a função $\sigma \mapsto r(\sigma)$ define uma injeção $\Sigma \to \Gamma_0'(M)$.

Esta condição implica que, para $\sigma, \tau, \rho, \lambda \in \Sigma$, a igualdade $\sigma\gamma\tau^{-1} = \rho\delta\lambda^{-1}$ só é válida quando $\mathrm{END}(M)_{\sigma\gamma\tau^{-1}} = \{0\}$, ou quando

$$\sigma = \rho,\ \tau = \lambda \text{ e } \gamma = \delta\,.$$

Definição 1.7.3. Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Dizemos que $\Sigma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ é *r-único cheio para M* se a correspondência $\sigma \mapsto r(\sigma)$ define uma bijeção $\Sigma \to \Gamma_0'(M)$. Em outras palavras, Σ é um subconjunto r-único para M que satisfaz a condição a seguir: para cada $e \in \Gamma_0'(M)$ existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $r(\sigma) = e$.

Definição 1.7.4. Dizemos que $\Sigma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ é *d-único* se, para cada $e \in \Gamma_0$, existe no máximo um $\sigma \in \Sigma$ com $d(\sigma) = e$.

Note que na definição de conjunto d-único não mencionamos nenhum módulo graduado, diferentemente da definição de conjunto r-único.

Definição 1.7.5. Sejam I um conjunto não vazio e $\overline{\Sigma} = (\Sigma_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\Gamma)^I$ uma sequência de subconjuntos não vazios. Dizemos que $\overline{\Sigma}$ é *d-finita* se, para cada $e \in \Gamma_0$, o conjunto

$$\{i \in I\colon d(\sigma) = e \text{ para algum } \sigma \in \Sigma_i\}$$

é finito.

Definição 1.7.6. Dado um anel Γ-graduado R, dizemos que a sequência $\overline{\Sigma} = (\Sigma_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\Gamma)^I$ é *matricial para R* se, para cada $i \in I$, Σ_i for d-único e r-único para R e $\overline{\Sigma}$ for d-finita. A sequência $\overline{\Sigma}$ é chamada *totalmente matricial para R* se for matricial para R e Σ_i for r-único cheio para R para todo $i \in I$.

Definição 1.7.7. Sejam R um anel Γ-graduado, I um conjunto não vazio e $\overline{\Sigma}$ uma sequência matricial para R. Seja $\mathrm{M}_I(R)$ o conjunto das matrizes $I \times I$ com apenas um número finito de entradas não nulas em R. Para cada $\gamma \in \Gamma$, considere o subconjunto $\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})_\gamma$ de $\mathrm{M}_I(R)$ onde

$$\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})_\gamma = \left\{(a_{ij}) \in \mathrm{M}_I(R) \mid a_{ij} \in R_{\Sigma_i\gamma\Sigma_j^{-1}}\right\}\,.$$

Observe que cada $\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})_\gamma$ é um subgrupo aditivo de $\mathrm{M}_I(R)$. Definimos

$$\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}) := \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})_\gamma\,.$$

Sejam $i, j \in I$. Se $a \in R_{\sigma_i\gamma\tau_j^{-1}}$ para certos $\gamma \in \Gamma$, $\sigma_i \in \Sigma_i$ e $\tau_j \in \Sigma_j$ com $d(\sigma_i) = r(\gamma)$ e $d(\gamma) = d(\tau_j)$ então a matriz cuja entrada (i, j) é a e todas as outras entradas são zero será denotada por aE_{ij}. Observe que $aE_{ij} \in \mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})_\gamma$. Em especial, definimos as *matrizes unitárias* E^e_{ij} como segue: se $e \in \Gamma'_0(R)$ e existem $\sigma_i \in \Sigma_i, \tau_j \in \Sigma_j$ tais que $r(\sigma_i) = r(\tau_j) = e$ então $E^e_{ij} := 1_e E_{ij} \in \mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})_{\sigma_i^{-1}\tau_j}$.

Proposição 1.7.8. *Sejam R um anel Γ-graduado e $\overline{\Sigma} = (\Sigma_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\Gamma)^I$ uma sequência matricial para R. Temos:*

(1) $\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}) = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})_\gamma$.

(2) *O produto em $\mathrm{M}_I(R)$ induz um produto em $\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})$ que mune $\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})$ de uma estrutura natural de anel Γ-graduado com as unidades $\mathbb{I}_e := \sum_{\substack{i\in I\\ \sigma_i\in\Sigma_i e}} E^{r(\sigma_i)}_{ii} \in \mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})_e$ para cada $e \in \Gamma_0$.*

(3) *Se $\overline{\Sigma}$ é totalmente matricial para R então $\mathrm{M}_I(R) = \mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})$ como anéis e, portanto, $\mathrm{M}_I(R)$ pode ser munido de uma estrutura de anel Γ-graduado.*

Demonstração. (1) e (2) são provados de forma totalmente análoga ao que foi feito para o anel $\mathrm{CFM}_I(R)(\overline{\Sigma})$ em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 3.3).

(3) foi demonstrado em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 3.3). ■

A próxima Proposição mostra que os anéis de matrizes graduados acima definidos correspondem a anéis de endomorfismos com grau.

Definição 1.7.9. Seja R um anel Γ-graduado. Sejam I, J conjuntos não vazios e $\{M_j : j \in J\}$, $\{N_i : i \in I\}$ famílias de R-módulos à direita Γ-graduados. Defina $M = \bigoplus_{j\in J} M_j$ e $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$. Para cada $\gamma \in \Gamma$, denotaremos por $\mathbb{H}_{I\times J}(M, N)_\gamma$ o conjunto das matrizes $I \times J$ de colunas finitas $(f_{ij})_{ij}$ onde $f_{ij} \in \mathrm{HOM}(M_j, N_i)_\gamma$ para cada $(i, j) \in I \times J$. Claramente cada $\mathbb{H}_{I\times J}(M, N)_\gamma$ é um grupo aditivo e, portanto,

$$\mathbb{H}_{I\times J}(M, N) = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{H}_{I\times J}(M, N)_\gamma$$

é um grupo abeliano Γ-graduado.

Observação 1.7.10. Dados $F = (f_{ij}) \in \mathbb{H}_{J\times J}(M, M)_\gamma$ e $G = (g_{ij}) \in \mathbb{H}_{J\times J}(M, M)_\delta$, temos

$$FG = (h_{ij}) \in \mathbb{H}_{J\times J}(M, M)_{\gamma\delta}$$

onde $h_{ij} = \sum_{k\in J} f_{ik} g_{kj}$. Observe que a matriz cuja entrada (j, j) é $\mathbb{1}_{je}$ (o elemento identidade de $\mathrm{END}(M_j)_e$) para cada j e zero em qualquer outra entrada é o elemento unidade do anel $\mathbb{H}_{J\times J}(M,M)_e$. ■

O resultado a seguir e seus três corolários foram provados em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 3.4).

Proposição 1.7.11. *Seja R um anel Γ-graduado. Sejam I, J conjuntos não vazios, $\{M_j : j \in J\}$ e $\{N_i : i \in I\}$ duas famílias de R-módulos à direita Γ-graduados e defina $M = \bigoplus_{j\in J} M_j$, $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$. Suponha que, para todo $j \in J$ e $g \in \mathrm{h}(\mathrm{HOM}(M_j, N))$, existe um $I_g \subseteq I$ finito tal que $\operatorname{im} g \subseteq \bigoplus_{i\in I_g} N_i$. Considere as inclusões naturais $\rho_j : M_j \to M$, $\rho'_i : N_i \to N$ e as projeções naturais $\pi_j : M \to M_j$, $\pi'_i : N \to N_i$ para cada $i \in I$, $j \in J$. Temos:*

(1) *A aplicação natural*

$$\mathrm{HOM}(M,N) \to \mathbb{H}_{I\times J}(M,N), \quad f \mapsto (\pi'_i f \rho_j)_{ij}\,,$$

é um gr-isomorfismo de grupos aditivos Γ-graduados.

(2) *A aplicação natural*

$$\mathrm{END}(M) \to \mathbb{H}_{J\times J}(M,M), \quad f \mapsto (\pi_i f \rho_j)_{ij}\,,$$

é um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados.

(3) *Se, além disso, para cada $e \in \Gamma_0$, existe $J_e \subseteq J$ finito tal que $M(e) = \bigoplus_{j\in J_e} M_j(e)$ então $\mathbb{H}_{I\times J}(M,N)$ consiste de matrizes com apenas um número finito de entradas não nulas.* ■

Seguem três resultados que são consequência da Proposição 1.7.11.

Corolário 1.7.12. *Sejam R um anel Γ-graduado, I um conjunto não vazio e $\{M_i : i \in I\}$ uma família de R-módulos à direita Γ-graduados tais que $\mathrm{HOM}(M_j, M_i) = 0$ para distintos $i, j \in I$. Considere $M := \bigoplus_{i\in I} M_i$. Então $\mathrm{END}(M) \cong_{gr} \prod_{i\in I}^{gr} \mathrm{END}(M_i)$.* ■

Corolário 1.7.13. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e $\overline{\Sigma} = (\Sigma_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\Gamma)^I$ uma sequência de subconjuntos de Γ. Definindo*

$$M(\overline{\Sigma}) = \bigoplus_{i\in I} M(\Sigma_i)\,,$$

temos:

(1) *Se $\overline{\Sigma}$ é matricial para $\mathrm{END}(M)$ então*

$$\mathrm{END}(M(\overline{\Sigma})) \cong_{gr} \mathrm{M}_I(\mathrm{END}(M))(\overline{\Sigma})\,.$$

Se, além disso, $\overline{\Sigma}$ é totalmente matricial para $\mathrm{END}(M)$ então $\mathrm{END}(M(\overline{\Sigma}))$ é isomorfo a $\mathrm{M}_I(\mathrm{END}(M))$ como anéis graduados (com a graduação induzida de $\mathrm{M}_I(\mathrm{END}(M))(\overline{\Sigma})$).

(2) *Se* $\overline{\Sigma}$ *é matricial para* R *então*

$$\mathrm{END}(R(\overline{\Sigma})) \cong_{gr} \mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})\,.$$

Se, além disso, $\overline{\Sigma}$ *é totalmente matricial para* R *então* $\mathrm{END}(R(\overline{\Sigma}))$ *é isomorfo a* $\mathrm{M}_I(R)$ *como anéis graduados (com a graduação induzida de* $\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})$*).* ■

Antes de apresentar o próximo resultado, precisaremos de algumas notações.

Definição 1.7.14. Seja $\overline{\Sigma} = (\Sigma_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\Gamma)^I$ uma sequência de subconjuntos. Quando $\Sigma_i = \{\sigma_i\}$ para todo $i \in I$, ou seja, quando cada Σ_i, $i \in I$, consiste de um único elemento, denotaremos a sequência por $\overline{\sigma} = (\sigma_i)_{i\in I}$. Se $\overline{\Sigma}$ for finito, digamos $\overline{\Sigma} = (\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n)$ então usualmente escreveremos $\mathrm{M}_n(R)(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ em vez de $\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})$ para cada anel Γ-graduado R. Da mesma forma, quando $\overline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, escreveremos $\mathrm{M}_n(R)(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Corolário 1.7.15. *Seja* I *um conjunto não vazio,* $e \in \Gamma_0$ *e* $\overline{\sigma} = (\sigma_i)_{i\in I} \in (e\Gamma)^I$*. Então*

(1) *Seja* M *um* R*-módulo à direita* Γ*-graduado com* $M = M(e)$*. Se* $\overline{\sigma}$ *é d-finita então* $\overline{\sigma}$ *é totalmente matricial para* $\mathrm{END}(M)$ *e, portanto,*

$$\mathrm{END}(M(\overline{\sigma})) \cong_{gr} \mathrm{M}_I(\mathrm{END}(M))(\overline{\sigma}) = \mathrm{M}_I(\mathrm{END}(M)),$$

onde a última igualdade é de anéis.

(2) *Suponha que* $\mathrm{supp}(R) \subseteq e\Gamma e$*. Se* $\overline{\sigma}$ *é d-finita então* $\overline{\sigma}$ *é totalmente matricial para* R *e, portanto,*

$$\mathrm{END}(R(\overline{\sigma})) \cong_{gr} \mathrm{M}_I(R)(\overline{\sigma}) = \mathrm{M}_I(R)\,,$$

onde a última igualdade é de anéis. ■

O Lema a seguir mostra que é o anel oposto graduado de um anel de matrizes graduado também é um anel de matrizes graduado. A prova pode ser encontrada em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 3.5).

Lema 1.7.16. *Seja* R *um anel* Γ*-graduado e* $\overline{\Sigma} = (\Sigma_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\Gamma)^I$*. Se* $\overline{\Sigma}$ *é matricial para* R*, então* $\overline{\Sigma}$ *é matricial para* R^{op} *e*

$$\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})^{op} \cong_{gr} \mathrm{M}_I(R^{op})(\overline{\Sigma})$$

via o homomorfismo definido pela transposição de matrizes. ■

O resultado a seguir caracteriza os ideais graduados de um anel de matrizes graduado.

Proposição 1.7.17. *Seja* R *um anel* Γ*-graduado e* $\overline{\Sigma} = (\Sigma_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\Gamma)^I$ *uma sequência totalmente matricial para* R*. Então os ideais graduados de* $\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})$ *são da forma* $\mathrm{M}_I(U)$ *para algum ideal graduado* U *de* R*.*

Demonstração. Seja V um ideal graduado de $\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})$. Fixe $i_0 \in I$ e considere

$$U := \{a \in R : aE_{i_0 i_0} \in V\}\,.$$

É fácil ver que U é um ideal graduado de R. Vejamos que $V = \mathrm{M}_I(U)$. Seja $(a_{ij})_{ij} \in \mathrm{h}(V)$. Para cada $i, j \in I$, se $\gamma_{ij} = \deg a_{ij}$, temos

$$a_{ij}E_{ij} = E_{ii}^{r(\gamma_{ij})}(a_{ij})_{ij}E_{jj}^{d(\gamma_{ij})} \in V \Longrightarrow a_{ij}E_{i_0i_0} = E_{i_0i}^{r(\gamma_{ij})}(a_{ij}E_{ij})E_{ji_0}^{d(\gamma_{ij})} \in V \Longrightarrow a_{ij} \in U\,.$$

Logo, $V \subseteq \mathrm{M}_I(U)$.

Reciprocamente, seja $(a_{ij})_{ij} \in \mathrm{h}(\mathrm{M}_I(U))$. Para cada $i, j \in I$, se $\gamma_{ij} = \deg a_{ij}$, temos

$$a_{ij} \in U \implies a_{ij}E_{i_0i_0} \in V \implies a_{ij}E_{ij} = E_{ii_0}^{r(\gamma_{ij})}(a_{ij}E_{i_0i_0})E_{i_0j}^{d(\gamma_{ij})} \in V\,.$$

Logo $(a_{ij})_{ij} = \sum_{i,j\in I} a_{ij}E_{ij} \in V$. ∎

1.8 Fidelidade em componentes homogêneas

Nesta seção introduzimos um conceito que será muito útil para relacionar algumas propriedades do anel Γ-graduado R com as dos anéis R_e e 1_eR1_e ($e \in \Gamma_0$). Trata-se de duas generalizações do conceito definido em (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Definition 7(1), (p. 536)).

Definição 1.8.1. Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado, $\gamma \in \Gamma$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$. Dizemos que M é

(1) γ-*fiel* se para todo $0 \neq m \in \mathrm{h}(M(r(\gamma)))$ existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq mr \in M_\gamma$.

(2) Δ_0-*fiel* se para todo $0 \neq m \in \mathrm{h}(M)$ existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq mr \in \bigoplus_{e\in\Delta_0} M1_e$.

Dizemos que R é γ-*fiel à direita* (resp. Δ_0-*fiel à direita*) se R_R é γ-fiel (resp. Δ_0-fiel).

Definição 1.8.2. Sejam R um anel Γ-graduado, N um R-módulo à esquerda Γ-graduado, $\gamma \in \Gamma$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$. Dizemos que N é

(1) γ-*fiel* se para todo $0 \neq n \in \mathrm{h}((d(\gamma))N)$ existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq rn \in N_\gamma$.

(2) Δ_0-*fiel* se para todo $0 \neq n \in \mathrm{h}(N)$ existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq rn \in \bigoplus_{e\in\Delta_0} 1_eN$.

Dizemos que R é γ-*fiel à esquerda* (resp. Δ_0-*fiel à esquerda*) se ${}_RR$ é γ-fiel (resp. Δ_0-fiel).

Definição 1.8.3. Um anel Γ-graduado R é dito ser γ-*fiel* (resp. Δ_0-*fiel*) se for γ-fiel (resp. Δ_0-fiel) à direita e à esquerda.

Observação 1.8.4. Note que se R é um anel Γ-graduado e M é um R-módulo à direita Γ-graduado, temos que

(1) Se M é γ-fiel (resp. Δ_0-fiel) então todo submódulo graduado de M também é.

(2) Se M é γ-fiel então $M(r(\gamma))$ é $\{d(\gamma)\}$-fiel. E vale a recíproca se $\Gamma = I \times I$ para algum conjunto não vazio I.

(3) Se M é γ-fiel e $d(\gamma) \in \Delta_0 \subseteq \Gamma_0$ então $M(r(\gamma))$ é Δ_0-fiel.

(4) Uma soma direta de R-módulos à direita γ-fiéis (resp. Δ_0-fiéis) também é γ-fiel (resp. Δ_0-fiel).

(5) M é γ-fiel (resp. Δ_0-fiel) se, e somente se, M^{op} é γ^{-1}-fiel (resp. Δ_0-fiel).

(6) Se $\operatorname{supp}(M) \subseteq e\Gamma e$ para certo $e \in \Gamma_0$ então M é $\{e\}$-fiel.

(7) Se $M(e)$ é $\{e\}$-fiel para todo $e \in \Delta_0$ então $M(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel.

(8) R é Δ_0-fiel ($\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$) se, e somente se, para cada $0 \neq a \in \mathrm{h}(R)$, existem $r, s \in \mathrm{h}(R)$ tais que $o \neq sar \in \bigoplus_{e,f\in\Delta_0} 1_e R 1_f$. ■

Observação 1.8.5. Note também que as seguintes afirmações são equivalentes para um anel Γ-graduado R e $e \in \Gamma'_0(R)$:

(1) R é $\{e\}$-fiel à direita.

(2) Para cada I ideal à direita graduado não nulo de R, temos $I \cdot R(e) \neq 0$.

(3) Para cada I ideal à direita graduado não nulo de R, temos $I1_e \neq 0$.

(4) Para cada $a \in \mathrm{h}(R)$, temos $aR1_e \neq 0$. ■

O próximo resultado ajuda a pensar em exemplos de fidelidade em componentes homogêneas.

Definição 1.8.6. Seja R um anel Γ-graduado. Dizemos que R é um anel *fortemente* Γ*-graduado* se, para cada $\sigma, \tau \in \Gamma$ com $d(\sigma) = r(\tau)$, temos $R_\sigma R_\tau = R_{\sigma\tau}$.

Lema 1.8.7. *Sejam R um anel fortemente Γ-graduado, $\gamma \in \Gamma$, $e, f \in \Gamma_0$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$. Então:*

(1) $r(\gamma) \in \Gamma'_0(R) \iff \gamma \in \operatorname{supp}(R) \iff d(\gamma) \in \Gamma'_0(R)$.

(2) *R é γ-fiel para todo $\gamma \in \operatorname{supp}(R)$.*

(3) *$R(e)$ é $\{f\}$-fiel e $(f)R$ é $\{e\}$-fiel se $1_e R 1_f \neq 0$.*

(4) *$R(e)$ e $(e)R$ são Δ_0-fiéis se $\bigoplus_{e'\in\Delta_0} 1_e R 1_{e'} \neq 0$ ou $\bigoplus_{e'\in\Delta_0} 1_{e'} R 1_e \neq 0$.*

(5) *R é Δ_0-fiel se $\Delta_0 \cap \Gamma'_0(R) \neq \emptyset$ e Γ é conexo.*

Demonstração. (1) Segue imediatamente de $R_{r(\gamma)} = R_\gamma R_{\gamma^{-1}}$ e $R_{d(\gamma)} = R_{\gamma^{-1}} R_\gamma$.

(2) Suponha que $\gamma \in \operatorname{supp}(R)$. Por (1), $r(\gamma), d(\gamma) \in \Gamma'_0(R)$. Seja $0 \neq a \in \mathrm{h}(R(r(\gamma)))$ e $\alpha := \deg a \in r(\gamma)\Gamma$. Então

$$0 \neq a = a1_{d(\alpha)} \in aR_{d(\alpha)} = aR_{\alpha^{-1}\gamma} R_{\gamma^{-1}\alpha}$$

e segue que $aR_{\alpha^{-1}\gamma} \neq 0$. Logo, existe $r \in R_{\alpha^{-1}\gamma}$ tal que $0 \neq ar \in R_\gamma$. Analogamente, se $0 \neq b \in \mathrm{h}((d(\gamma))R)$ e $\beta := \deg b \in \Gamma d(\gamma)$ então

$$0 \neq b = 1_{r(\beta)} b \in R_{r(\beta)} b = R_{\beta\gamma^{-1}} R_{\gamma\beta^{-1}} b \implies R_{\gamma\beta^{-1}} b \neq 0.$$

(3) Se $\sigma \in e\Gamma f \cap \text{supp}(R)$ então R é σ-fiel por (2) e, portanto, $R(r(\sigma))$ é $\{d(\sigma)\}$-fiel e $(d(\sigma))R$ é $\{r(\sigma)\}$-fiel.

(4) Por (1), temos que, para todo $\sigma \in \Gamma$, $\sigma \in \text{supp}(R)$ se, e somente se, $\sigma^{-1} \in \text{supp}(R)$. Logo, $\bigoplus_{e' \in \Delta_0} 1_e R 1_{e'} \neq 0$ se, e somente se, $\bigoplus_{e' \in \Delta_0} 1_{e'} R 1_e \neq 0$. O resultado então segue de (3).

(5) Suponha que Γ é conexo e $e' \in \Delta_0 \cap \Gamma_0'(R)$. Então, para cada $e \in \Delta_0$, tomando $\sigma \in e\Gamma e'$, temos de (1) que $\sigma, \sigma^{-1} \in \text{supp}(R)$ e, portanto, $1_e R 1_{e'} \neq 0$ e $1_{e'} R 1_e \neq 0$. Agora, basta aplicar (4). ■

Observação 1.8.8. Para facilitar a escrita, durante o texto adotaremos a seguinte notação para um anel Γ-graduado R, um R-módulo à direita Γ-graduado M e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$:

$$1_{\Delta_0} R 1_{\Delta_0} := \bigoplus_{e,f \in \Delta_0} 1_e R 1_f\,,$$

$$M 1_{\Delta_0} := \bigoplus_{e \in \Delta_0} M 1_e\,.$$

Note que se $e \in \Gamma_0$ então $1_e R 1_e = 1_{\{e\}} R 1_{\{e\}}$ e $M 1_e = M 1_{\{e\}}$.

Para compreensão dos resultados onde trataremos de fidelidade em componentes homogêneas é fundamental observarmos que M_γ é um $R_{d(\gamma)}$-módulo à direita e $M 1_{\Delta_0}$ é um $1_{\Delta_0} R 1_{\Delta_0}$-módulo à direita Γ-graduado. ■

Lema 1.8.9. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado, N um submódulo graduado de M, $\gamma \in \Gamma$, $e \in \Gamma_0$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$.*

(1) *Se M é γ-fiel então $N(r(\gamma)) \neq 0 \iff N_\gamma \neq 0$.*

(2) *Se M é Δ_0-fiel então $N \neq 0 \iff N 1_{\Delta_0} \neq 0$.*

(3) *Suponha que $\gamma \in e\Gamma e$, M é γ-fiel e denote $1_e N 1_e := \bigoplus_{\sigma \in e\Gamma e} N_\sigma$. Então $N(e) \neq 0 \iff 1_e N 1_e \neq 0 \iff N_\gamma \neq 0$.*

Demonstração. Nos itens (1) e (2), ($\Longleftarrow$) é óbvio e ($\Longrightarrow$) segue imediatamente da respectiva definição de fidelidade em componentes homogêneas.

Para o item (3), basta notar que $M(e)$ é $\{e\}$-fiel e $1_e N 1_e = N(e) 1_e$. ■

Corolário 1.8.10. *Sejam $e \in \Gamma_0$ e R anel e-fiel à direita. Sejam I ideal à direita graduado de R e K ideal à direita de R_e. Então*

(1) *$I(e) \neq 0 \iff I_e \neq 0$.*

(2) *$K \neq 0 \iff KR \neq 0$.*

Demonstração. O item (1) segue imediatamente do Lema 1.8.9(1).

(2) segue de (1) pois $K = (KR)_e$ e $KR(e) = KR$. ■

Corolário 1.8.11. *Sejam R anel Γ-graduado e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$ tal que $R(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel. Sejam I ideal à direita graduado de R e K ideal à direita graduado de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$. Então*

(1) $I(\Delta_0) \neq 0 \iff 1_{\Delta_0}I1_{\Delta_0} \neq 0$.

(2) $K \neq 0 \iff KR \neq 0$.

Demonstração. O item (1) segue imediatamente do Lema 1.8.9(2) pois $1_{\Delta_0}I1_{\Delta_0} = I(\Delta_0)1_{\Delta_0}$.

(2) segue de (1) pois $K = 1_{\Delta_0}(KR)1_{\Delta_0}$ e $(KR)(\Delta_0) = KR$. ■

Corolário 1.8.12. *Sejam R anel Γ-graduado e $e \in \Gamma_0$ tal que $R(e)$ é $\{e\}$-fiel. Sejam I ideal à direita graduado de R e K ideal à direita graduado de 1_eR1_e. Então*

(1) $I(e) \neq 0 \iff 1_eI1_e \neq 0$.

(2) $K \neq 0 \iff KR \neq 0$. ■

A seguinte propriedade será muito útil para estendermos homomorfismos. A prova do item (1) é inspirada em parte da demonstração de (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Theorem 14 (p. 559)).

Proposição 1.8.13. *Sejam R um anel Γ-graduado, M e N dois R-módulos à direita Γ-graduados, $\gamma \in \Gamma$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$.*

(1) *Suponha que N é γ-fiel, $\alpha \in \Gamma d(\gamma)$ e $g : M_\alpha \to N_\gamma$ é um homomorfismo de $R_{d(\gamma)}$-módulos à direita. Então*

$$\begin{aligned} \tilde{g} : M_\alpha R &\longrightarrow N(r(\gamma)) \\ \sum_i m_i r_i &\longmapsto \sum_i g(m_i) r_i \end{aligned}$$

é um homomorfismo de R-módulos à direita de grau $\gamma\alpha^{-1}$.

(2) *Suponha que N é Δ_0-fiel e $g : M1_{\Delta_0} \to N1_{\Delta_0}$ é um homomorfismo de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulos à direita de grau $\sigma \in \Gamma$. Então*

$$\begin{aligned} \tilde{g} : M1_{\Delta_0}R &\longrightarrow N \\ \sum_i m_i r_i &\longmapsto \sum_i g(m_i) r_i \end{aligned}$$

é um homomorfismo de R-módulos à direita de grau σ.

Demonstração. (1) Vejamos que $\tilde{g}$ está bem definido. Suponha que $\sum_i m_i r_i = 0$ com $m_i \in M_\alpha$ e $r_i \in \mathrm{h}(R)$. Podemos supor que todos os r_i estão na mesma componente homogênea de R. Temos então $\sum_i g(m_i) r_i \in \mathrm{h}(N(r(\gamma)))$. Suponha, por absurdo, que $\sum_i g(m_i) r_i \neq 0$. Como N é γ-fiel, existe $a \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq \sum_i g(m_i) r_i a \in N_\gamma$. Tomando i_0 tal que $g(m_{i_0}) r_{i_0} a \neq 0$, vemos que $r_{i_0} a \in R_{d(\gamma)}$ e, portanto, $r_i a \in R_{d(\gamma)}$

para todo i. Logo,

$$\sum_i g(m_i)r_i a = \sum_i g(m_i r_i a) = g\left(\sum_i m_i r_i a\right) = 0\,,$$

uma contradição. Logo $\tilde{g}$ está bem definido e segue imediatamente que é um homomorfismo de R-módulos à direita. Além disso, para cada $\beta \in \Gamma$,

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left((M_\alpha R)_\beta\right) &= \tilde{g}(M_\alpha R_{\alpha^{-1}\beta}) \\ &\subseteq g(M_\alpha)R_{\alpha^{-1}\beta} \\ &\subseteq N_\gamma R_{\alpha^{-1}\beta} \\ &\subseteq N_{\gamma\alpha^{-1}\beta}\end{aligned}$$

e, portanto, $\tilde{g}$ tem grau $\gamma\alpha^{-1}$.

(2) Vejamos que $\tilde{g}$ está bem definido. Suponha que $\sum_i m_i r_i = 0$ com $m_i \in M1_{\Delta_0}$ e $r_i \in \mathrm{h}(R)$. Podemos supor que todos os $m_i r_i$ estão na mesma componente homogênea de M e $r_i \in 1_{\Delta_0}R$ para todo i. Temos então $\sum_i g(m_i)r_i \in \mathrm{h}(N)$. Suponha, por absurdo, que $\sum_i g(m_i)r_i \neq 0$. Como N é Δ_0-fiel, existe $a \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq \sum_i g(m_i)r_i a \in N1_{\Delta_0}$. Tomando i_0 tal que $g(m_{i_0})r_{i_0}a \neq 0$, vemos que $r_{i_0}a \in 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ e, portanto, $r_i a \in 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ para todo i. Logo,

$$\sum_i g(m_i)r_i a = \sum_i g(m_i r_i a) = g\left(\sum_i m_i r_i a\right) = 0\,,$$

uma contradição. Logo $\tilde{g}$ está bem definido e segue imediatamente que é um homomorfismo de R-módulos à direita e é de grau σ. ■

Corolário 1.8.14. *Sejam R um anel Γ-graduado, $e \in \Gamma_0$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$.*

(1) *Se R é e-fiel à direita, K é um ideal à direita de R_e e $g : K \to R_e$ é um homomorfismo de R_e-módulos à direita então*

$$\begin{aligned}\tilde{g} : KR &\longrightarrow R(e) \\ \sum_i k_i r_i &\longmapsto \sum_i g(k_i)r_i\end{aligned}$$

é um homomorfismo de R-módulos à direita de grau e.

(2) *Se $R(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel, K é um ideal à direita graduado de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ e $g : K \to 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ é um homomorfismo de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulos à direita de grau σ então*

$$\begin{aligned}\tilde{g} : KR &\longrightarrow R(\Delta_0) \\ \sum_i k_i r_i &\longmapsto \sum_i g(k_i)r_i\end{aligned}$$

é um homomorfismo de R-módulos à direita de grau σ.

(3) *Se $R(e)$ é $\{e\}$-fiel, K é um ideal à direita graduado de 1_eR1_e e $g : K \to 1_eR1_e$ é um homomorfismo de 1_eR1_e-módulos à direita de grau $\sigma \in e\Gamma e$ então*

$$\begin{aligned}\tilde{g} : KR &\longrightarrow R(e)\\ \sum_i k_i r_i &\longmapsto \sum_i g(k_i) r_i\end{aligned}$$

é um homomorfismo de R-módulos à direita de grau $\sigma \in e\Gamma e$.

Demonstração. (1) Basta aplicar a Proposição 1.8.13(1) para $M = KR$, $N = R_R$ e $\gamma = \alpha = e$.

(2) Basta aplicar a Proposição 1.8.13(2) para $M = KR$ e $N = R(\Delta_0)$.

(3) Segue imediatamente de (2) para $\Delta_0 = \{e\}$. ■

Capítulo 2

Tópicos em teoria de anéis graduados por grupoide

Neste capítulo são desenvolvidos os conceitos de teoria de anéis e módulos graduados por grupoide necessários para o trabalho.

2.1 Anéis gr-simples, gr-primos e gr-semiprimos

Definição 2.1.1. Dizemos que um anel Γ-graduado R é *gr-primo* se satisfaz as condições da Proposição a seguir.

Proposição 2.1.2. *Seja R um anel Γ-graduado. São equivalentes:*

(1) *Se $a, b \in \mathrm{h}(R)$ e $aRb = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.*

(2) *Se I, J são ideais à direita graduados de R e $IJ = 0$ então $I = 0$ ou $J = 0$.*

(3) *Se I, J são ideais à esquerda graduados de R e $IJ = 0$ então $I = 0$ ou $J = 0$.*

(4) *Se I, J são ideais graduados de R e $IJ = 0$ então $I = 0$ ou $J = 0$.*

Demonstração. (1) $\implies$ (2) (resp. (1) $\implies$ (3)): Suponha que vale (1) e sejam I, J ideais à direita (resp. à esquerda) graduados não nulos de R. Vejamos que $IJ \neq 0$. Tome $0 \neq a \in \mathrm{h}(I)$ e $0 \neq b \in \mathrm{h}(J)$. Por (1), existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $arb \neq 0$. Como $ar \in I$ e $b \in J$ (resp. $a \in I$ e $rb \in J$), segue que $IJ \neq 0$.

(2) $\implies$ (4) (resp. (3) $\implies$ (4)): É imediato.

(4) $\implies$ (1): Suponha que vale (4) e sejam $a, b \in \mathrm{h}(R)$ tais que $aRb = 0$. Então $I := RaR$ e $J := RbR$ são ideais graduados de R tais que $IJ = RaRbR = 0$. Por (4), temos $I = 0$ ou $J = 0$, isto é, $a = 0$ ou $b = 0$. ■

Definição 2.1.3. Dizemos que um anel Γ-graduado R é *gr-semiprimo* se satisfaz as condições da Proposição a seguir.

Proposição 2.1.4. *Seja R um anel Γ-graduado. São equivalentes:*

(1) *Se $a \in \mathrm{h}(R)$ e $aRa = 0$ então $a = 0$.*

(2) *Se I é um ideal à direita graduado de R e $I^2 = 0$ então $I = 0$.*

(3) *Se I é um ideal à esquerda graduado de R e $I^2 = 0$ então $I = 0$.*

(4) *Se I é um ideal graduado de R e $I^2 = 0$ então $I = 0$.*

Demonstração. Basta repetir a demonstração da Proposição 2.1.2 tomando $I = J$ e $a = b$. ■

Definição 2.1.5. Seja R um anel Γ-graduado não nulo. Dizemos que R é anel *gr-simples* se os únicos ideais graduados de R são $\{0\}$ e R.

Observação 2.1.6. Claramente, valem as seguintes implicações

$$R \text{ é anel gr-simples} \implies R \text{ é anel gr-primo} \implies R \text{ é anel gr-semiprimo}$$

para cada anel Γ-graduado R. ■

A seguir, exemplos de anéis gr-simples, gr-primos e gr-semiprimos obtidos através de anéis de grupoide.

Exemplos 2.1.7. Seja A um anel com unidade.

(1) Se A é anel simples e Γ é conexo então $A[\Gamma]$ é um anel gr-simples. De fato, suponha que A é simples, Γ é conexo e $0 \neq a\sigma \in A[\Gamma]$. Como $a \neq 0$, existem $r_i, s_i \in A$ tais que $1_A = \sum_i s_i a r_i$. Além disso, para cada $e \in \Gamma_0$, existe $\alpha \in d(\sigma)\Gamma e$ e, portanto, $1_A e = \sum_i (s_i \alpha^{-1}\sigma^{-1}) a\sigma (r_i \alpha)$. Logo, todo ideal graduado de $A[\Gamma]$ que contém $a\sigma$ também contém todas as unidades de $A[\Gamma]$.

(2) Se A é anel primo e Γ é conexo então $A[\Gamma]$ é um anel gr-primo. Para ver isso, tome $a\sigma, b\tau \in A[\Gamma] \setminus \{0\}$. Se A é primo então existe $r \in A$ tal que $arb \neq 0$ e, se Γ é conexo, existe $\gamma \in d(\sigma)\Gamma r(\tau)$. Neste caso, $(a\sigma)(r\gamma)(b\tau) \neq 0$.

(3) Se A é anel semiprimo então $A[\Gamma]$ é um anel gr-semiprimo. De fato, se A é semiprimo e $0 \neq a\sigma \in A[\Gamma]$ então, tomando $r \in A$ tal que $ara \neq 0$, temos $(a\sigma)(r\sigma^{-1})(a\sigma) \neq 0$. ■

Observação 2.1.8. Todo produto direto graduado de anéis gr-semiprimos também é um anel gr-semiprimo. Também é claro que o produto direto de dois ou mais anéis Γ-graduados não é gr-primo. ■

Temos o seguinte resultado sobre anuladores de ideais graduados em anéis gr-semiprimos/gr-primos.

Lema 2.1.9. *Seja R um anel Γ-graduado e I um ideal graduado de R.*

(1) *Se R é anel gr-semiprimo então $\mathrm{l.ann}_R(I) = \mathrm{r.ann}_R(I) =: \mathrm{ann}_R(I)$.*

(2) *Se R é anel gr-primo e $I \neq 0$ então $\mathrm{ann}_R(I) = 0$.*

Demonstração. (1) $I \cdot \mathrm{l.\,ann}_R(I)$ e $\mathrm{r.\,ann}_R(I) \cdot I$ são ideais graduados de R tais que $(I \cdot \mathrm{l.\,ann}_R(I))^2 = (\mathrm{r.\,ann}_R(I) \cdot I)^2 = 0$. Se R é gr-semiprimo então $I \cdot \mathrm{l.\,ann}_R(I) = \mathrm{r.\,ann}_R(I) \cdot I = 0$ e segue que $\mathrm{l.\,ann}_R(I) \subseteq \mathrm{r.\,ann}_R(I)$ e $\mathrm{r.\,ann}_R(I) \subseteq \mathrm{l.\,ann}_R(I)$.

(2) I e $\mathrm{ann}_R(I)$ são ideais graduados de R tais que $I \cdot \mathrm{ann}_R(I) = 0$. Se R é gr-primo e $I \neq 0$ então $\mathrm{ann}_R(I) = 0$. ■

Definição 2.1.10. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma categoria

(1) *semiprima* se, para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A, B)$, existe $g \in \mathcal{C}(B, A)$ tal que $f \circ g \circ f \neq 0$.

(2) *prima* se, para cada $A, B, C, D \in \mathcal{C}_0$, $0 \neq f_1 \in \mathcal{C}(C, D)$ e $0 \neq f_2 \in \mathcal{C}(A, B)$, existe $g \in \mathcal{C}(B, C)$ tal que $f_1 \circ g \circ f_2 \neq 0$.

(3) *simples* se $\mathcal{C}$ tem um objeto não nulo e, para cada $A, B, X \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A, B)$, existem $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $g_1, ..., g_n \in \mathcal{C}(X, A)$ e $h_1, ..., h_n \in \mathcal{C}(B, X)$ tais que $I_X = \sum_{j=1}^{n} h_j \circ f \circ g_j$.

Observação 2.1.11. Se $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena então é fácil ver que $\mathcal{C}$ é uma categoria simples (resp. prima, semiprima) se, e somente se, $R[\mathcal{C}]$ é um anel gr-simples (resp. gr-primo, gr-semiprimo). ■

Usando ideais em categorias pré-aditivas podemos dar definições alternativas às anteriores.

Definição 2.1.12. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva. Um *ideal à direita* (resp. *à esquerda*) $\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}$ consiste de subgrupos aditivos $\mathcal{I}(A, B)$ de $\mathcal{C}(A, B)$ para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$ tais que, para todos $A, B, C \in \mathcal{C}_0$, $g \in \mathcal{I}(A, B)$ e $h \in \mathcal{C}(C, A)$ (resp. $h \in \mathcal{C}(B, C)$), temos $g \circ h \in \mathcal{I}(C, B)$ (resp. $h \circ g \in \mathcal{I}(A, C)$). Dizemos que $\mathcal{I}$ é um *ideal* de $\mathcal{C}$ se $\mathcal{I}$ é um ideal à direita de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{I}$ é um ideal à esquerda de $\mathcal{C}$.

Observação 2.1.13. É fácil ver que se $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena e $\mathcal{I}$ é um ideal à direita (resp. ideal à esquerda, ideal) de $\mathcal{C}$ então $I := \bigoplus_{A,B \in \mathcal{C}_0} \mathcal{I}(A, B)$ é um ideal à direita (resp. ideal à esquerda, ideal) graduado de $R[\mathcal{C}]$ via $I_{(A,B)} := \mathcal{I}(B, A)$ para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$. Reciprocamente, se $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena e I é um ideal à direita (resp. ideal à esquerda, ideal) graduado de $R[\mathcal{C}]$ então temos um ideal à direita (resp. ideal à esquerda, ideal) $\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}$ onde $\mathcal{I}(A, B) := I_{(B,A)}$ para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$. ■

Com isso, obtemos o seguinte:

Lema 2.1.14. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva. Então $\mathcal{C}$ é uma categoria*

(1) *semiprima se, e somente se, para cada $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ ideais não nulos de $\mathcal{C}$ temos $\mathcal{I}\mathcal{J} \neq 0$.*

(2) *prima se, e somente se, para cada $\mathcal{I}$ ideal não nulo de $\mathcal{C}$ temos $\mathcal{I}\mathcal{I} \neq 0$.*

(3) *simples se, e somente se, $\mathcal{C}$ é o único ideal não nulo de $\mathcal{C}$.* ■

Note que o terceiro item do Lema anterior é a definição de categoria pré-aditiva simples de (Facchini, 2019, p. 219).

A Proposição a seguir produz exemplos de categorias simples/primas/semiprimas. Precisaremos do seguinte Lema.

Lema 2.1.15. *Sejam A um anel com unidade, P, Q dois A-módulos à direita projetivos finitamente gerados e $f : P \to Q$ um homomorfismo não nulo de A-módulos à direita. Então existem homomorfismos de A-módulos à direita $a : A \to P$ e $b : Q \to A$ tais que $b \circ f \circ a \neq 0$.*

Demonstração. Como P_A e Q_A são projetivos finitamente gerados, existem $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, um epimorfismo $\pi_P : A^n \to P$ e um monomorfismo $\iota_Q : Q \to A^m$. Então $0 \neq \iota_Q \circ f \circ \pi_P : A^n \to A^m$. Logo, existem homomorfismos $j : A \to A^n$ e $p : A^m \to A$ tais que $p(\iota_Q f \pi_P)j \neq 0$. Portanto, os homomorfismos procurados são $a := \pi_P \circ j$ e $b := p \circ \iota_Q$. ■

Proposição 2.1.16. *Seja A um anel com unidade. Denote por* proj-A *a categoria dos A-módulos à direita projetivos finitamente gerados e seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria plena não nula de* proj-A*. Temos que:*

(1) *Se A é anel simples então $\mathcal{C}$ é uma categoria simples.*

(2) *Se A é anel primo então $\mathcal{C}$ é uma categoria prima.*

(3) *Se A é anel semiprimo então $\mathcal{C}$ é uma categoria semiprima.*

Demonstração. (1) Isto foi provado em (Facchini, 2019, Theorem 7.5).

(2) Sejam $P, Q, P', Q' \in \mathcal{C}_0$, $0 \neq f \in \mathcal{C}(P, Q)$ e $0 \neq f' \in \mathcal{C}(P', Q')$. Pelo Lema 2.1.15, existem homomorfismos de A-módulos à direita $a : A \to P$, $b : Q \to A$, $a' : A \to P'$ e $b' : Q' \to A$ tais que $0 \neq b \circ f \circ a \in \mathrm{End}(A_A)$ e $0 \neq b' \circ f' \circ a' \in \mathrm{End}(A_A)$. Se $\mathrm{End}(A_A) \cong A$ é um anel primo então existe $h \in \mathrm{End}(A_A)$ tal que $(b'f'a')h(bfa) \neq 0$. Neste caso, $a'hb \in \mathcal{C}(Q, P')$ é tal que $f'(a'hb)f \neq 0$ e segue que $\mathcal{C}$ é uma categoria prima.

(3) Basta aplicar a prova de (2) para $P = P'$, $Q = Q'$ e $f = f'$. ■

Em (Facchini, 2019, Theorem 7.5) foi mostrado que, de fato, toda categoria simples é equivalente a uma subcategoria plena não nula de proj-A para algum anel simples A.

Seguem alguns resultados sobre gr-simplicidade/gr-primalidade/gr-semiprimalidade em certos subanéis graduados de um anel Γ-graduado R.

Proposição 2.1.17. *Seja R um anel Γ-graduado e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$ com $\Delta_0 \cap \Gamma_0'(R) \neq \emptyset$. Temos que:*

(1) *Se R é anel gr-simples então $1_{\Delta_0} R 1_{\Delta_0}$ é anel gr-simples.*

(2) *Se R é anel gr-primo então $1_{\Delta_0} R 1_{\Delta_0}$ é anel gr-primo.*

(3) *Se R é anel gr-semiprimo então $1_{\Delta_0} R 1_{\Delta_0}$ é anel gr-semiprimo.*

Demonstração. (1) Suponha que R é anel gr-simples e seja $0 \neq a \in \mathrm{h}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$. Então RaR é um ideal graduado não nulo de R e, portanto, $RaR = R$. Fixe $e \in \Delta_0$. Temos $1_e \in RaR$ e segue que existem $r_1, ..., r_n, s_1, ..., s_n \in \mathrm{h}(R)$ tais que $1_e = \sum_{i=1}^{n} s_i a r_i$. Então $r_1, ..., r_n, s_1, ..., s_n \in \mathrm{h}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$ e, portanto, $1_e \in (1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})a(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$. Logo, $(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})a(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}) = 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ e segue que $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ é anel gr-simples.

(2) Suponha que R é anel gr-primo e sejam $0 \neq a, b \in \mathrm{h}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$. Então existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $arb \neq 0$. Como $d(\deg a), r(\deg b) \in \Delta_0$, segue que $r \in \mathrm{h}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$. Logo, $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ é gr-primo.

(3) Segue o mesmo raciocínio de (2), tomando $a = b$. ■

Com raciocínio análogo ao da Proposição 2.1.17, obtemos o seguinte:

Corolário 2.1.18. *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria simples (resp. prima, semiprima) então toda subcategoria plena não nula de $\mathcal{C}$ também é.* ■

Os exemplos a seguir mostram que não temos uma versão da Proposição 2.1.17 para os anéis R_e ($e \in \Gamma_0$) mesmo no caso graduado por grupo.

Exemplos 2.1.19. (1) [Inspirado em (Hazrat, 2016, Subsection 1.4.1)] Sejam K um anel com divisão e G um grupo não trivial. Considere K com G-graduação trivial e sejam $\sigma, \tau \in G$ tais que $\sigma \neq \tau$. Como K é gr-simples segue que $\mathrm{M}_2(K)(\sigma, \tau)$ também é (Proposição 1.7.17). Mas $\mathrm{M}_2(K)(\sigma, \tau)_e = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$ não é anel primo.

(2) Seja A um anel com unidade semiprimo. Então $R := \dfrac{A[x]}{\langle x^2 \rangle}$ é um anel $\mathbb{Z}$-graduado gr-semiprimo com $R_0 = A + \langle x^2 \rangle$ e $R_1 = Ax + \langle x^2 \rangle$. Então $\mathrm{M}_2(R)(1, 0)$ é um anel gr-semiprimo (pela Proposição 1.7.17), mas $\mathrm{M}_2(R)(1, 0)_0 = \begin{pmatrix} R_0 & R_1 \\ 0 & R_0 \end{pmatrix}$ não é um anel semiprimo. ■

A seguir apresentamos alguns resultados relacionando os conceitos abordados nesta seção com fidelidade em componentes homogêneas.

Lema 2.1.20. *As seguintes afirmações valem para um anel Γ-graduado R.*

(1) *Se R é anel gr-simples então, para cada $e \in \Gamma'_0(R)$ e $0 \neq a \in \mathrm{h}(R)$, existem $r, s \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq sar \in R_e$.*

(2) *Se R é anel gr-primo então, para todo $e \in \Gamma'_0(R)$, R é $\{e\}$-fiel.*

(3) *Se R é anel gr-semiprimo então, para todo $e \in \Gamma'_0(R)$, $R(e)$ e $(e)R$ são $\{e\}$-fiéis.*

Demonstração. (1) Segue do fato que se R é anel gr-simples, $e \in \Gamma'_0(R)$ e $0 \neq a \in \mathrm{h}(R)$ então $0 \neq 1_e \in RaR$.

(2) Se R é anel gr-primo, $e \in \Gamma'_0(R)$ e $0 \neq a \in \mathrm{h}(R)$ então $aR1_e \neq 0$ e $1_eRa \neq 0$.

(3) Quando R é anel gr-semiprimo, $e, f \in \Gamma'_0(R)$ e $0 \neq a \in \mathrm{h}(1_eR1_f)$, temos que $aRa \neq 0$ e, portanto, $aR1_e \neq 0$ e $1_fRa \neq 0$. ■

Proposição 2.1.21. *As seguintes afirmações valem para um anel Γ-graduado R.*

(1) *Se, para cada $e \in \Gamma_0'(R)$, R é $\{e\}$-fiel e 1_eR1_e é anel gr-simples então R é anel gr-simples.*

(2) *Se existe $e \in \Gamma_0'(R)$ tal que R é $\{e\}$-fiel e 1_eR1_e é anel gr-primo então R é anel gr-primo.*

(3) *Se, para cada $e \in \Gamma_0'(R)$, $R(e)$ (resp. $(e)R$) é $\{e\}$-fiel e 1_eR1_e é anel gr-semiprimo então R é anel gr-semiprimo.*

Demonstração. (1) Suponha que, para cada $e \in \Gamma_0'(R)$, R é $\{e\}$-fiel e 1_eR1_e é anel gr-simples. Seja I um ideal graduado não nulo de R e fixe $e \in \Gamma_0'(R)$. Como R é $\{e\}$-fiel, segue que $1_eI1_e \neq 0$. Portanto $1_eI1_e = 1_eR1_e$ pela gr-simplicidade de 1_eR1_e. Em particular, $1_e \in I$. Como $e \in \Gamma_0'(R)$ foi arbitrário, obtemos $I = R$. Logo, R é anel gr-simples.

(2) Suponhamos que $e \in \Gamma_0'(R)$ é tal que R é $\{e\}$-fiel e 1_eR1_e é anel gr-primo. Tome $a, b \in \mathrm{h}(R) \setminus \{0\}$. Como R é $\{e\}$-fiel, existem $r, r', s, s' \in \mathrm{h}(R)$ tais que $0 \neq r'ar, s'bs \in 1_eR1_e$. Da gr-primalidade de 1_eR1_e, obtemos $r'ar(1_eR1_e)s'bs \neq 0$. Em particular, $ar(1_eR1_e)s'b \neq 0$ e, portanto, $aRb \neq 0$. Logo, R é gr-primo.

(3) Suponha que, para cada $e \in \Gamma_0'(R)$, $R(e)$ (resp. $(e)R$) é $\{e\}$-fiel e 1_eR1_e é anel gr-semiprimo. Sejam $e, f \in \Gamma_0'(R)$ e $0 \neq a \in \mathrm{h}(1_eR1_f)$. Como $R(e)$ é $\{e\}$-fiel (resp. $(f)R$ é $\{f\}$-fiel) existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq ar \in 1_eR1_e$ (resp. $ra \in 1_fR1_f$). Como 1_eR1_e (resp. 1_fR1_f) é gr-semiprimo, temos $ar(1_eR1_e)ar \neq 0$ (resp. $ra(1_fR1_f)ra \neq 0$). Em particular, $ar(1_eR1_e)a \neq 0$ (resp. $a(1_fR1_f)ra \neq 0$) e segue que $aRa \neq 0$. Logo, R é gr-semiprimo. ∎

2.2 Gr-domínios e anéis com gr-divisão

Definição 2.2.1. Seja R um anel Γ-graduado não nulo. Dizemos que R é um *gr-domínio* se, para todos $\gamma, \delta \in \Gamma$ com $d(\gamma) = r(\delta)$ e $0 \neq a \in R_\gamma$, $0 \neq b \in R_\delta$, temos que $ab \neq 0$.

Exemplos 2.2.2. São exemplos de gr-domínios:

(1) O anel de matrizes $R = \mathrm{M}_I(A)$, onde A é um domínio com unidade.

(2) O anel de grupoide $R = A[\Gamma]$, onde A é um domínio com unidade.

(3) O anel de categoria $R[\mathcal{C}]$ se $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena não nula em que todo morfismo não nulo é monomorfismo e epimorfismo. ∎

Claramente, todo subanel graduado de um gr-domínio também é um gr-domínio.

Observação 2.2.3. Diferentemente do caso graduado por grupo, gr-domínios podem não ser gr-primos. De fato, se D é um domínio (com unidade) então $R := D \oplus D$ é um gr-domínio $\{1,2\} \times \{1,2\}$-graduado via $R_{(1,1)} = D \oplus 0$ e $R_{(2,2)} = 0 \oplus D$. Note que neste caso $R_{(1,1)}$ e $R_{(2,2)}$ são ideais graduados não nulos de R cujo produto é zero. Este é um exemplo de gr-domínio gr-semiprimo, mas nem todo gr-domínio é gr-semiprimo. De fato, se D é um domínio, $\Gamma := \{1,2\} \times \{1,2\}$ e $R := \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$ com Γ-graduação natural temos que R é um gr-domínio mas $E_{12}RE_{12} = 0$. ■

Temos as seguintes caracterizações de um gr-domínio gr-semiprimo.

Lema 2.2.4. *Seja R um gr-domínio. São equivalentes:*

(1) *R é gr-semiprimo.*

(2) *$R(e)$ é $\{e\}$-fiel para todo $e \in \Gamma_0'(R)$.*

(3) *$(e)R$ é $\{e\}$-fiel para todo $e \in \Gamma_0'(R)$.*

(4) *Para todos $e, f \in \Gamma_0$, $1_e R 1_f \neq 0 \iff 1_f R 1_e \neq 0$.*

Demonstração. (1) $\implies$ (2), (3): Foi provado no Lema 2.1.20(3).

(2), (3) $\implies$ (4): Segue da definição de fidelidade em componentes homogêneas.

(4) $\implies$ (1): Se $\gamma \in \Gamma$, $0 \neq a \in R_\gamma$ e vale (4) então existe um $0 \neq b \in 1_{d(\gamma)} R 1_{r(\gamma)}$ e, como R é gr-domínio, obtemos $aba \neq 0$. ■

Corolário 2.2.5. *Se R é um gr-domínio fortemente Γ-graduado então R é um anel gr-semiprimo.*

Demonstração. Segue dos Lemas 1.8.7(3) e 2.2.4. ■

Sempre conseguimos decompor um gr-domínio gr-semiprimo como soma direta de gr-domínios gr-primos, conforme o resultado a seguir.

Proposição 2.2.6. *Seja R um gr-domínio gr-semiprimo. Temos:*

(1) *$e \sim f \iff 1_e R 1_f \neq 0$ define uma relação de equivalência em $\Gamma_0'(R)$.*

(2) *Para cada classe de equivalência $[e] \in \Gamma_0'(R)/\sim$, $1_{[e]} R 1_{[e]}$ é um ideal graduado não nulo de R e, além disso, $(1_{[e]} R 1_{[e]})(1_{[f]} R 1_{[f]}) = \{0\}$ quando $[e] \neq [f] \in \Gamma_0'(R)/\sim$.*

(3) *$R = \bigoplus_{[e] \in \Gamma_0'(R)/\sim} 1_{[e]} R 1_{[e]}$ e $1_{[e]} R 1_{[e]}$ é um gr-domínio gr-primo para cada classe de equivalência $[e] \in \Gamma_0'(R)/\sim$.*

(4) *R é gr-primo se, e somente se, $\Gamma_0'(R)/\sim$ tem uma única classe de equivalência.*

Demonstração. (1) Claramente, $\sim$ é reflexiva. A simetria de $\sim$ segue do item (4) do Lema 2.2.4. A transitividade segue de R ser gr-domínio.

(2) Basta mostrar que $(1_{[e]} R 1_{[e]})(1_{[e]} R 1_{[e]}) \subseteq 1_{[e]} R 1_{[e]}$ e $(1_{[e]} R 1_{[e]})(1_{[f]} R 1_{[f]}) = 0$ sempre que $e, f \in \Gamma_0'(R)$ com $[e] \neq [f]$. Portanto, fixe distintos $[e], [f] \in \Gamma_0'(R)/\sim$. Dados $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ tais que $r(\gamma), d(\gamma), r(\gamma'), d(\gamma') \in [e]$, temos $R_\gamma R_{\gamma'} \subseteq R_{\gamma\gamma'} \subseteq 1_{[e]} R 1_{[e]}$. Isso mostra que $(1_{[e]} R 1_{[e]})(1_{[e]} R 1_{[e]}) \subseteq 1_{[e]} R 1_{[e]}$. Agora seja $\delta \in \Gamma$ tal que $r(\delta), d(\delta) \in [f]$.

Se tivéssemos $R_\gamma R_\delta \neq 0$, teríamos $R_{\gamma\delta} \neq 0$ e, portanto, $1_{r(\gamma)} R 1_{d(\delta)} \neq 0$ e consequentemente $e \sim r(\gamma) \sim d(\delta) \sim f$, uma contradição. Portanto, $R_\gamma R_\delta = 0$ para todos $\gamma, \delta \in \Gamma$ tais que $r(\gamma), d(\gamma) \in [e]$ e $r(\delta), d(\delta) \in [f]$. Ou seja, $(1_{[e]} R 1_{[e]})(1_{[f]} R 1_{[f]}) = 0$.

(3) Como $[e]\Gamma[e] \cap [f]\Gamma[f] = \emptyset$ se $e \nsim f$ e $\operatorname{supp} R \subseteq \bigcup_{[e] \in \Gamma_0'(R)/\sim} [e]\Gamma[e]$, obtemos que $R = \bigoplus_{[e] \in \Gamma_0'(R)/\sim} 1_{[e]} R 1_{[e]}$.

Fixe $e \in \Gamma_0$ e mostremos agora que $1_{[e]} R 1_{[e]}$ é gr-primo. Sejam $\gamma, \delta \in [e]\Gamma[e]$ e $a \in R_\gamma$, $b \in R_\delta$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Provemos que $a(1_{[e]} R 1_{[e]})b \neq 0$. Primeiro observe que $d(\gamma) \sim e \sim r(\delta)$. Portanto, existe um elemento homogêneo não nulo $x \in 1_{d(\gamma)} R 1_{r(\delta)}$. Como R é um gr-domínio, segue que $axb \neq 0$, como queríamos.

(4) Segue imediatamente de (2) e (3). ■

Definição 2.2.7. Para cada gr-domínio gr-semiprimo R, a relação de equivalência no item (1) da Proposição 2.2.6 será chamada a *relação de gr-primalidade em* $\Gamma_0'(R)$.

Gr-domínios se comportam com fidelidade em componentes homogêneas da seguinte forma.

Proposição 2.2.8. *As seguintes afirmações valem para um anel* Γ*-graduado* R*.*

(1) *Se, para cada* $e \in \Gamma_0'(R)$*,* R *é* e*-fiel e* R_e *é domínio então* R *é um gr-domínio.*

(2) *Se, para cada* $e \in \Gamma_0'(R)$*,* $R(e)$ *e* $(e)R$ *são* $\{e\}$*-fiéis e* $1_e R 1_e$ *é gr-domínio então* R *é um gr-domínio.*

Demonstração. (1) Suponha que, para cada $e \in \Gamma_0'(R)$, R é e-fiel e R_e é domínio. Sejam $a, b \in \mathrm{h}(R) \setminus \{0\}$ com $d(\deg a) = r(\deg b) =: e$. Como R é e-fiel à direita, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq br \in R_e$. Como R é e-fiel à esquerda, existe $s \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq sa \in R_e$. Então $sabr \neq 0$, pois R_e é domínio. Em particular, $ab \neq 0$. Portanto, R é um gr-domínio.

(2) Suponha que, para cada $e \in \Gamma_0'(R)$, $R(e)$ e $(e)R$ são $\{e\}$-fiéis e $1_e R 1_e$ é gr-domínio. Sejam $a, b \in \mathrm{h}(R) \setminus \{0\}$ com $d(\deg a) = r(\deg b) =: e$. Como $R(e)$ é $\{e\}$-fiel, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq br \in 1_e R 1_e$. Como $(e)R$ é $\{e\}$-fiel, existe $s \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq sa \in 1_e R 1_e$. Então $sabr \neq 0$, pois $1_e R 1_e$ é gr-domínio. Em particular, $ab \neq 0$ e segue que R é um gr-domínio. ■

Passamos agora a um tipo especial de gr-domínio.

Definição 2.2.9. Um anel Γ-graduado não nulo D será chamado um *anel com gr-divisão* se todo elemento homogêneo não nulo de D for gr-inversível.

Observação 2.2.10. Todo anel com gr-divisão D é um gr-domínio gr-semiprimo. De fato, dados $\gamma, \delta \in \Gamma$ com $d(\gamma) = r(\delta)$ e elementos $a \in D_\gamma$, $b \in D_\delta$, se $ab = 0$ e $b \neq 0$ então $0 = abb^{-1} = a 1_{d(\gamma)} = a$. Além disso, se $0 \neq c \in \mathrm{h}(D)$ então $0 \neq c = cc^{-1}c \in cDc$. Mas existem anéis com gr-divisão que não são gr-primos. Basta tomarmos um anel com divisão K e temos que $R := K \oplus K$ é um anel com gr-divisão $\{1,2\} \times \{1,2\}$-graduado via $R_{(1,1)} = K \oplus 0$ e $R_{(2,2)} = 0 \oplus K$, mas $R_{(1,1)}$ e $R_{(2,2)}$ são ideais graduados não nulos de R cujo produto é zero. ■

Observação 2.2.11. É importante notar que se D é um anel com gr-divisão e $a, b \in \mathrm{h}(D)$ são tais que $ab \neq 0$, então $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Note também que D é um anel com gr-divisão se, e somente se, todo elemento homogêneo não nulo de D é gr-inversível à direita (resp. à esquerda). De fato, se $0 \neq a \in R_\gamma$, $b \in R_{\gamma^{-1}}$ é um gr-inverso à direita de a e $c \in R_\gamma$ é um gr-inverso à direita de b então $c = 1_{r(\gamma)}c = (ab)c = a(bc) = a1_{d(\gamma)} = a$ e segue que $ba = 1_{d(\gamma)}$, ou seja, a é gr-inversível. O caso à esquerda é análogo. ■

Definição 2.2.12. Diremos que uma categoria pré-aditiva não nula $\mathcal{C}$ é uma *categoria com divisão* se todo morfismo não nulo de $\mathcal{C}$ é inversível.

Exemplo 2.2.13. Pelo Lema de Schur, um exemplo de categoria com divisão é uma categoria de módulos simples sobre um dado anel com unidade. ■

Observação 2.2.14. Claramente, uma categoria pré-aditiva pequena $\mathcal{C}$ é uma categoria com divisão se, e somente se, $R[\mathcal{C}]$ é um anel com gr-divisão. ■

O seguinte resultado é consequência imediata da Proposição 2.2.6.

Proposição 2.2.15. *Seja D um anel com gr-divisão e considere a relação de gr-primalidade $\sim$ em $\Gamma'_0(D)$. Então:*

(1) *Para cada classe de equivalência $[e] \in \Gamma'_0(D)/\sim$, $1_{[e]}D1_{[e]}$ é um ideal graduado não nulo de D e, além disso, $(1_{[e]}D1_{[e]})(1_{[f]}D1_{[f]}) = \{0\}$ quando $[e] \neq [f] \in \Gamma'_0(D)/\sim$.*

(2) *$D = \bigoplus_{[e]\in\Gamma'_0(D)/\sim} 1_{[e]}D1_{[e]}$ e $1_{[e]}D1_{[e]}$ é um anel com gr-divisão gr-simples para cada classe de equivalência $[e] \in \Gamma'_0(D)/\sim$.*

(3) *São equivalentes:*

   (*i*) *D é gr-primo*

   (*ii*) *D é gr-simples*

   (*iii*) *$\Gamma'_0(D)/\sim$ possui uma única classe de equivalência.* ■

O próximo resultado foi provado em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 4.1) e descreve anéis com gr-divisão gr-primos usando anéis com divisão graduados por grupo e anéis de matrizes graduados.

Teorema 2.2.16. *Seja D um anel com gr-divisão gr-primo. Fixe $e \in \Gamma'_0(D)$ e defina $H = 1_eD1_e$. Então H é um anel $e\Gamma e$-graduado com gr-divisão e $D \cong_{gr} \mathrm{M}_{\Gamma'_0(D)}(H)(\overline{\sigma})$ onde $\overline{\sigma} = (\sigma_f)_{f\in\Gamma'_0(D)} \in \prod_{f\in\Gamma'_0(D)} \mathrm{supp}(1_eD1_f)$.*

Reciprocamente, sejam $e \in \Gamma_0$, H um anel $e\Gamma e$-graduado com gr-divisão e $\overline{\sigma} \in \prod_{f\in\Delta_0} e\Gamma f$ para certo $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$. Então $D := \mathrm{M}_{\Delta_0}(H)(\overline{\sigma})$ é um anel com gr-divisão gr-primo tal que $\Gamma'_0(D) = \Delta_0$. ■

Temos o seguinte resultado relacionando anéis com gr-divisão e fidelidade em componentes homogêneas.

Proposição 2.2.17. *As seguintes afirmações valem para um anel Γ-graduado D.*

(1) *D é um anel com gr-divisão se, e somente se, para cada $e \in \Gamma_0'(D)$, D é e-fiel à direita (resp. à esquerda) e D_e é um anel com divisão.*

(2) *D é um anel com gr-divisão se, e somente se, para cada $e \in \Gamma_0'(D)$, $D(e)$ (resp. $(e)D$) é $\{e\}$-fiel e 1_eD1_e é um anel com gr-divisão.*

Demonstração. (1) Seja D um anel com gr-divisão. Claramente, D_e é um anel com divisão para todo $e \in \Gamma_0'(D)$. Além disso, para cada $e, f \in \Gamma_0'(D)$ e $0 \neq a \in \mathrm{h}(1_eD1_f)$, temos $0 \neq 1_e = aa^{-1} \in D_e$ e $0 \neq 1_f = a^{-1}a \in D_f$ e, portanto, D é e-fiel à direita e f-fiel à esquerda.

Reciprocamente, suponha que, para cada $e \in \Gamma_0'(D)$, D é e-fiel à direita (resp. à esquerda) e D_e é um anel com divisão. Sejam $e, f \in \Gamma_0'(D)$ e $0 \neq a \in \mathrm{h}(1_eD1_f)$. Então existe $b \in \mathrm{h}(D)$ tal que $0 \neq ab \in D_e$ (resp. $0 \neq ba \in D_f$). Como D_e (resp. D_f) é um anel com divisão, existe $u \in D_e$ (resp. $u \in D_f$) tal que $abu = 1_e$ (resp. $uba = 1_f$). Logo, todo elemento homogêneo não nulo de D é gr-inversível à direita (resp. à esquerda) e segue que D é um anel com gr-divisão.

(2) Seja D um anel com gr-divisão. Para cada $e \in \Gamma_0'(D)$, segue de (1) que $D(e)$ (resp. $(e)D$) é $\{e\}$-fiel e, claramente, 1_eD1_e é um anel com gr-divisão.

Reciprocamente, suponha que para cada $e \in \Gamma_0'(D)$, $D(e)$ (resp. $(e)D$) é $\{e\}$-fiel e 1_eD1_e é um anel com gr-divisão. Sejam $e, f \in \Gamma_0'(D)$ e $0 \neq a \in \mathrm{h}(1_eD1_f)$. Como $D(e)$ é $\{e\}$-fiel (resp. $(f)D$ é $\{f\}$-fiel), existe $b \in \mathrm{h}(D)$ tal que $0 \neq ab \in 1_eD1_e$ (resp. $0 \neq ba \in 1_fD1_f$). Como 1_eD1_e (resp. 1_fD1_f) é um anel com gr-divisão, existe $u \in \mathrm{h}(1_eD1_e)$ (resp. $u \in \mathrm{h}(1_fD1_f)$) tal que $abu = 1_e$ (resp. $uba = 1_f$). Logo, todo elemento homogêneo não nulo de D é gr-inversível à direita (resp. à esquerda) e, portanto, D é um anel com gr-divisão. ■

Agora, nosso objetivo é mostrar que o comportamento dos módulos graduados sobre anéis com gr-divisão no caso graduado por grupoide é semelhante ao do contexto graduado por grupo.

Definição 2.2.18. Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Considere uma sequência de elementos homogêneos $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_{\gamma_i}$ onde $(\gamma_i)_{i\in I}$ é uma sequência de elementos de Γ. Um elemento homogêneo $x \in M_\sigma$ é dito ser uma *combinação linear genuína* de $(x_i)_{i\in I}$ se existir $(a_i) \in \bigoplus_{i\in I} R_{\gamma_i^{-1}\sigma}$ tal que $x = \sum_{i\in I} x_i a_i$. Dizemos que $(x_i)_{i\in I}$ é *pseudo-linearmente independente* se a única sequência $(a_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} 1_{d(\gamma_i)}R$ tal que $\sum_{i\in I} x_i a_i = 0$ é $(a_i)_{i\in I} = 0$ ou, equivalentemente, se a única sequência $(a_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} \mathrm{h}(1_{d(\gamma_i)}R)$ tal que $\sum_{i\in I} x_i a_i = 0$ é $(a_i)_{i\in I} = 0$, ou ainda, se a única combinação linear genuína de $(x_i)_{i\in I}$ que é igual a $0 \in M$ é com $a_i = 0$ para todo $i \in I$. A sequência $(x_i)_{i\in I}$ é uma *pseudo-base* de M se $(x_i)_{i\in I}$ gera M como um R-módulo e é pseudo-linearmente independente. Se M tem uma pseudo-base, dizemos que M é um R-módulo *pseudo-livre*.

Módulos da forma $\bigoplus_{i\in I} R(\sigma_i)$ foram chamados *free* em (Lundström, 2004) e *free by suspension* em (Cala *et al.*, 2022). No resultado a seguir, provado em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 3.1), vemos a propriedade universal desses módulos e que eles são (gr-isomorfos a) o que acabamos de chamar de módulos pseudo-livres.

Proposição 2.2.19. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Considere uma sequência de elementos homogêneos $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_{\gamma_i}$ onde $(\gamma_i)_{i\in I}$ é uma sequência de elementos de Γ. São equivalentes:*

(1) *$(x_i)_{i\in I}$ é uma pseudo-base de M.*

(2) *Para cada $x \in M$, existe uma única sequência $(a_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} 1_{d(\gamma_i)}R$ tal que*

$$x = \sum_{i\in I} x_i a_i.$$

(3) *Cada elemento homogêneo $x \in M$ pode ser expresso de forma única como uma combinação linear genuína de $(x_i)_{i\in I}$. Isto é, para cada $\sigma \in \Gamma$ e $x \in M_\sigma$, existe uma única sequência $(a_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} R_{\gamma_i{}^{-1}\sigma}$ tal que*

$$x = \sum_{i\in I} x_i a_i.$$

(4) *Para cada R-módulo à direita N e sequência $(y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} N1_{d(\gamma_i)}$, existe um único homomorfismo de R-módulos $f\colon M \to N$ tal que $f(x_i) = y_i$ para cada $i \in I$.*

(5) *Para cada R-módulo à direita Γ-graduado N e sequência de elementos homogêneos $(y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} N_{\gamma_i}$, existe um único $f \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, N)$ tal que $f(x_i) = y_i$ para cada $i \in I$.*

(6) *Para cada $\sigma \in \Gamma$, R-módulo à direita Γ-graduado N e sequência $(y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} N_{\sigma\gamma_i}$, existe um único $f \in \mathrm{HOM}(M, N)_\sigma$ tal que $f(x_i) = y_i$ para cada $i \in I$.*

(7) *Existe um único gr-isomorfismo*

$$\varphi : M \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} R(\gamma_i{}^{-1})$$

tal que $\varphi(x_i) = 1_{d(\gamma_i)}$ para todo $i \in I$. ■

Segue imediatamente da condição (7) na Proposição 2.2.19 que:

Corolário 2.2.20. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Então M é um R-módulo pseudo-livre se, e somente se, para cada $e \in \Gamma_0$, $M(e)$ é um R-módulo pseudo-livre.* ∎

Vale a pena notar que o R-módulo $R = \bigoplus_{e\in\Gamma_0} R(e)$ é pseudo-livre, com pseudo-base $\{1_e\}_{e\in\Gamma_0'(R)}$. Além disso, para cada $\sigma \in \Gamma$ tal que $r(\sigma) \in \Gamma_0'(R)$, $R(\sigma)$ é pseudo-livre com a pseudo-base formada por $1_{r(\sigma)}$.

A prova do Teorema a seguir é muito parecida com a do contexto graduado por grupo (Hazrat, 2016, Section 1.4) e está detalhada em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 4.2).

Teorema 2.2.21. *Seja D um anel com gr-divisão e M um D-módulo à direita Γ-graduado. Então*

(1) *M é pseudo-livre.*

(2) *Qualquer sequência pseudo-linearmente independente de M pode ser estendida a uma pseudo-base de M.*

(3) *Quaisquer duas pseudo-bases de M têm a mesma cardinalidade.* ∎

Observação 2.2.22. Se D é um anel com gr-divisão então todo D-módulo à direita Γ-graduado tem uma pseudo-base pelo Teorema 2.2.21(1). Ao contrário do contexto graduado por grupo (Balaba e Mikhalëv, 2018, Teorema 3.3), a recíproca não é verdadeira. Trataremos dessa situação na próxima seção. Veja (Cristiano *et al.*, 2024, Section 7). ∎

Do Teorema 2.2.21(2) e da Proposição 2.2.19(6) temos o seguinte.

Corolário 2.2.23. *Sejam D um anel com gr-divisão e M, N dois D-módulos à direita Γ-graduados. Para cada $(\gamma_i)_{i\in I} \in \Gamma^I$, $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_{\gamma_i}$ sequência pseudo-linearmente independente, $\sigma \in \Gamma$ e $(y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} N_{\sigma\gamma_i}$, existe $g \in \mathrm{HOM}_D(M,N)_\sigma$ tal que $g(x_i) = y_i$ para todo $i \in I$.* ∎

Observação 2.2.24. Seja D um anel com gr-divisão e M um D-módulo à direita Γ-graduado. Pode-se mostrar que se uma sequência de elementos homogêneos $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_{\gamma_i}$ gera M então existe um subconjunto $J \subseteq I$ tal que $(x_i)_{i\in J}$ é uma pseudo-base de M. De fato, basta tomar qualquer subsequência $(x_i)_{i\in J}$ máxima entre as subsequências de $(x_i)_{i\in I}$ que são pseudo-linearmente independentes. ∎

Definição 2.2.25. Pelo Teorema 2.2.21, cada módulo graduado M sobre um anel com gr-divisão D tem uma pseudo-base e quaisquer duas pseudo-bases têm o mesmo número de elementos. Tal cardinalidade será chamada de *pseudo-dimensão* de M e será denotada por $\mathrm{pdim}_D(M)$.

A seguinte propriedade da pseudo-dimensão foi provada em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 4.2).

Corolário 2.2.26. *Seja D um anel com gr-divisão e M um D-módulo à direita Γ-graduado. Se N é um submódulo graduado de M então* $\operatorname{pdim}_D(N) + \operatorname{pdim}_D(M/N) = \operatorname{pdim}_D(M)$. ■

2.3 Anéis gr-semissimples

Definição 2.3.1. Seja R um anel Γ-graduado. Dizemos que um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado S é *gr-simples* se $S \neq 0$ e seus únicos submódulos graduados são $\{0\}$ e S.

Uma consequência imediata da definição e do Lema 1.4.11 é a seguinte.

Lema 2.3.2. *Se S é um R-módulo à direita gr-simples, então existe $e \in \Gamma_0$ tal que $S = S(e)$. Além disso, $S(\sigma)$ é gr-simples para cada $\sigma \in e\Gamma$.* ■

O Lema 2.3.2 nos sugere que a definição de módulo gr-simples pode ser restritiva demais e nos motiva a seguinte definição.

Definição 2.3.3. Dado R um anel Γ-graduado, dizemos que um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado S é Γ_0-*simples* se $S(e)$ (resp. $(e)S$) é R-módulo gr-simples para todo $e \in \Gamma'_0(S)$.

O resultado a seguir relaciona gr-simplicidade em módulos com fidelidade em componentes homogêneas.

Lema 2.3.4. *Sejam R um anel Γ-graduado, S um R-módulo à direita Γ-graduado gr-simples, $\gamma \in \Gamma$, $e \in \Gamma_0$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$. Temos que:*

(1) *Se $S_\gamma \neq 0$ então S é γ-fiel e S_γ é $R_{d(\gamma)}$-módulo à direita simples.*

(2) *Se $S1_{\Delta_0} \neq 0$ então S é Δ_0-fiel e $S1_{\Delta_0}$ é $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulo à direita gr-simples.*

(3) *Se $S1_e \neq 0$ então S é $\{e\}$-fiel e $S1_e$ é 1_eR1_e-módulo à direita gr-simples.*

Demonstração. (1) Se $0 \neq a \in S(r(\gamma))_\alpha$ então $aR = S$ e $0 \neq S_\gamma = (aR)_\gamma = aR_{\alpha^{-1}\gamma}$. Portanto, S é γ-fiel.

Se $0 \neq a \in S_\gamma$ e $b \in S_\gamma$ então $b \in aR$ implica que $b \in (aR)_\gamma = aR_{d(\gamma)}$. Logo, S_γ é $R_{d(\gamma)}$-módulo à direita simples.

(2) Se $\alpha \in \operatorname{supp}(S1_{\Delta_0})$ então, por (1), S é α-fiel e segue que $S = S(r(\alpha))$ é $\{d(\alpha)\}$-fiel. Mas, como $d(\alpha) \in \Delta_0$, segue que $\{d(\alpha)\}$-fidelidade implica Δ_0-fidelidade.

Se $0 \neq a \in \mathrm{h}(S1_{\Delta_0})$ e $b \in S1_{\Delta_0}$ então $b \in aR$ implica que $b \in (aR)1_{\Delta_0} = a(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$. Logo, $S1_{\Delta_0}$ é $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulo gr-simples.

(3) Basta aplicar (2) para $\Delta_0 = \{e\}$. ■

Uma forma usual de estudar módulos simples é a menos de isomorfismo. No caso graduado, temos algo semelhante. Inspirados na ideia de (Dăscălescu *et al.*, 2023, p. 395), temos a seguinte.

Definição 2.3.5. Dado um anel Γ-graduado R, dizemos que dois R-módulos à direita Γ-graduados M e N *estão na mesma classe de isoshift* se existir $\Sigma \subseteq \Gamma$ tal que Σ é r-único cheio para N, Σ^{-1} é r-único cheio para M e $M \cong_{\mathrm{gr}} N(\Sigma)$. Note que isso define uma relação de equivalência para R-módulos à direita Γ-graduados.

Observe que, pelo Lema 2.3.2, dois módulos à direita gr-simples M e N estão na mesma classe de isoshift se, e somente se, existir $\sigma \in \Gamma$ tal que $M \cong_{\mathrm{gr}} N(\sigma)$. O Lema 2.3.6 nos dirá que dois R-módulos gr-simples S e S' estão na mesma classe de isoshift se, e somente se, $\mathrm{HOM}_R(S, S') \neq 0$. Em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 5.1), é provado o seguinte resultado, caracterizando quando dois módulos gr-simples estão na mesma classe de isoshift.

Lema 2.3.6. *Sejam R um anel Γ-graduado e S, S' dois R-módulos à direita gr-simples. São equivalentes.*

(1) *S e S' não estão na mesma classe de isoshift.*

(2) $\mathrm{HOM}(S, S') = 0$.

(3) $\mathrm{HOM}_R\left(\bigoplus_{j\in J} S(\sigma_j), \bigoplus_{i\in I} S'(\sigma'_i)\right) = \{0\}$ *para todos* $(\sigma_j)_{j\in J} \in \Gamma^J$ *e* $(\sigma'_i)_{i\in I} \in \Gamma^I$. ■

A seguir, temos um resultado análogo ao Lema de Schur no contexto graduado por grupoide, o qual foi provado em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 5.1).

Teorema 2.3.7. *Sejam R um anel Γ-graduado, S um R-módulo à direita Γ_0-simples, $D := \mathrm{END}_R(S)$ e $\Gamma'_0 := \Gamma'_0(D) = \Gamma'_0(S)$. Então*

(1) *D é um anel com gr-divisão.*

(2) *Considere a relação de gr-primalidade $\sim$ definida em Γ'_0. Então $e \sim f$ em Γ'_0 se, e somente se, $S(e)$ e $S(f)$ estão na mesma classe de isoshift.*

(3) *Existe uma bijeção entre $\Gamma'_0/\sim$ e as classes de isoshift de $\{S(e) : e \in \Gamma'_0\}$ que envia cada $[e] \in \Gamma'_0/\sim$ para a classe de isoshift de $S(e)$.*

(4) *D é um anel gr-primo (resp. gr-simples) se, e somente se, todos os $S(e)$ estão na mesma classe de isoshift para cada $e \in \Gamma'_0$.* ■

Corolário 2.3.8. *Se R é um anel Γ-graduado e S é um R-módulo à direita gr-simples então $D := \mathrm{END}_R(S)$ é um anel com gr-divisão e $\mathrm{supp}(D) \subseteq e\Gamma e$, onde $e \in \Gamma_0$ é tal que $S = S(e)$.* ■

Módulos gr-simples possuem a seguinte propriedade interessante, que também foi provada em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 5.1).

Proposição 2.3.9. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Suponha que $M = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n = T_1 \oplus \cdots \oplus T_m$ onde $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $S_1, ..., S_n, T_1, ..., T_m$ são submódulos graduados gr-simples de M. Então $n = m$ e existe uma permutação π de $\{1, ..., n\}$ tal que $S_i \cong_{gr} T_{\pi(i)}$ para cada $i = 1, ..., n$.* ■

Definição 2.3.10. Seja R um anel Γ-graduado. Dizemos que um R-módulo à direita Γ-graduado M é *gr-semissimples* se M é uma soma direta de submódulos gr-simples.

Diremos que R é *anel gr-semissimples à direita* se R_R for um R-módulo gr-semissimples. Se R^{op} é um anel gr-semissimples à direita então diremos que R é um *anel gr-semissimples à esquerda*.

Observação 2.3.11. Não é difícil verificar que um módulo à direita Γ-graduado M é gr-semissimples se, e somente se, para todo $e \in \Gamma_0$, $M(e)$ é gr-semissimples. ■

Anéis gr-semissimples foram estudados nos artigos (Cala *et al.*, 2022) e (Cristiano *et al.*, 2024).

Proposição 2.3.12. *Todo anel gr-semissimples à direita (resp. à esquerda) é gr-semiprimo.*

Demonstração. Seja R um anel gr-semissimples à direita e seja $0 \neq a \in \mathrm{h}(R)$. Por (Cala *et al.*, 2022, Proposition 53(i)), existe $X \leq_{\text{gr}} R_R$ tal que $R_R = aR \oplus X$. Em particular, se $\gamma := \deg a$ então existem $b \in R_{\gamma^{-1}}$ e $x \in X_{r(\gamma)}$ tais que $1_{r(\gamma)} = ab + x$. Então, $a = 1_{r(\gamma)}a = aba + xa$. Como $a \neq 0$ e $a \neq xa$, segue que $aba \neq 0$.

Se R é um anel gr-semissimples à esquerda então R^{op} é um anel gr-semissimples à direita e segue do que acabamos de provar que R^{op} é gr-semiprimo. Claramente, R^{op} é gr-semiprimo se, e somente se, R é gr-semiprimo. ■

Usaremos o Lema 2.3.4 para relacionarmos gr-semissimplicidade com fidelidade em componentes homogêneas.

Proposição 2.3.13. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado gr-semisimples, $\gamma \in \Gamma$, $e \in \Gamma_0$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$. Temos que:*

(1) *Se $M_\gamma \neq 0$ então M é γ-fiel e M_γ é $R_{d(\gamma)}$-módulo à direita semissimples.*

(2) *Se $M1_{\Delta_0} \neq 0$ então M é Δ_0-fiel e $M1_{\Delta_0}$ é $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulo à direita gr-semissimples.*

(3) *Se $M1_e \neq 0$ então M é $\{e\}$-fiel e $M1_e$ é 1_eR1_e-módulo à direita gr-semissimples.*

Demonstração. Escreva $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$ onde cada S_i é um submódulo gr-simples de M.

(1) Se $M_\gamma \neq 0$ então, pelo Lema 2.3.4(1), M é soma direta de R-módulos γ-fiéis e $M_\gamma = \bigoplus_{i \in I}(S_i)_\gamma$ é uma soma direta de $R_{d(\gamma)}$-módulos à direita simples.

(2) Se $M1_{\Delta_0} \neq 0$ então, pelo Lema 2.3.4(2), M é soma direta de R-módulos Δ_0-fiéis e $M1_{\Delta_0} = \bigoplus_{i \in I}(S_i)1_{\Delta_0}$ é uma soma direta de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulos à direita gr-simples.

(3) Segue de (2) para $\Delta_0 = \{e\}$. ■

Corolário 2.3.14. *Sejam R um anel gr-semisimples à direita (resp. à esquerda), $e \in \Gamma_0$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$. Temos que:*

(1) *R_e é anel semissimples e $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ é anel gr-semissimples à direita (resp. à esquerda).*

(2) *Se* $e \in \Gamma'_0(R)$ *então* R *é* e*-fiel à direita (resp. à esquerda).*

(3) *Se* $\Delta_0 \cap \Gamma'_0(R) \neq \emptyset$ *então* R *é* Δ_0*-fiel à direita (resp. à esquerda).*

Demonstração. Provaremos apenas o caso "à direita". O caso "à esquerda" é obtido usando o anel R^{op}.

(1) Basta aplicar a Proposição 2.3.13(1) para $M = R_R$ e a Proposição 2.3.13(2) para $M = R(\Delta_0)$.

(2) e (3) Seguem da Proposição 2.3.13 para $M = R_R$. ∎

Observação 2.3.15. A recíproca do Corolário 2.3.14(1) nem sempre é verdade. De fato, tome k um anel com unidade semissimples, $\Gamma := \{1,2\} \times \{1,2\}$ e $R := \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & k \end{pmatrix}$ com Γ-graduação natural. Temos que $R_{(i,i)} \cong k$ é semissimples para cada $i = 1, 2$. Mas note que R não é gr-semissimples à direita nem à esquerda pois R não é gr-semiprimo. ∎

O Corolário a seguir mostra um caso onde vale a recíproca do Corolário 2.3.14(1). Lembre que, como uma consequência do Teorema de Wedderburn-Artin para anéis graduados por grupo, um anel graduado por grupo é gr-semissimples à direita se, e somente se, é gr-semissimples à esquerda. Da mesma forma, a semissimplicidade em anéis com unidade não tem lado.

Lema 2.3.16. *Sejam* R *um anel* Γ*-graduado,* $e \in \Gamma_0$ *e* $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$*.*

(1) *Quando* R *é* e*-fiel à direita (resp. à esquerda) temos que* $R(e)$ *(resp.* $(e)R$*) é* R*-módulo gr-semissimples se, e somente se,* R_e *é anel semissimples.*

(2) *Quando* $R(\Delta_0)$ *(resp.* $(\Delta_0)R$*) é* Δ_0*-fiel temos que* $R(\Delta_0)$ *(resp.* $(\Delta_0)R$*) é* R*-módulo gr-semissimples se, e somente se,* $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ *é anel gr-semissimples à direita (resp. à esquerda).*

(3) *Quando* $R(e)$ *(resp.* $(e)R$*) é* $\{e\}$*-fiel temos que* $R(e)$ *(resp.* $(e)R$*) é* R*-módulo gr-semissimples se, e somente se,* 1_eR1_e *é anel gr-semissimples.*

Demonstração. Provaremos apenas a versão "à direita" do enunciado. O caso "à esquerda" é obtido aplicando o caso "à direita" para o anel R^{op}.

(1) Suponha que R_e é anel semissimples. Escreva $R_e = \bigoplus_{i \in I} S_i$ onde cada S_i é R_e-módulo à direita simples e $1_e = s_1 + \cdots + s_n$ onde $s_i \in S_i = s_iR_e$ para cada $i = 1, ..., n$. Mostremos que s_iR é R-módulo gr-simples para cada $i = 1, ..., n$. Seja $0 \neq a \in s_iR$. Se R é e-fiel à direita então existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq ar \in R_e$ e, portanto, $0 \neq ar \in (s_iR)_e = s_iR_e$. Logo, $arR_e = s_iR_e$ e, portanto, $s_i \in arR_e \subseteq aR$, de onde $aR = s_iR$. Logo, $R(e) = \sum_{i=1}^{n} s_iR$ é gr-semissimples por (Cala *et al.*, 2022, Lemma 51) (para $N = 0$).

A recíproca segue da Proposição 2.3.13(1) para $M = R(e)$ e $\gamma = e$.

(2) Suponha que $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ é anel gr-semissimples à direita e fixe $e \in \Delta_0$. Escreva $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0} = \bigoplus_{i\in I} S_i$ onde cada S_i é $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulo à direita gr-simples e $1_e = s_1 + \cdots + s_n$ onde $s_i \in S_i = s_i(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$ para cada $i = 1, ..., n$. Mostremos que s_iR é R-módulo gr-simples para cada $i = 1, ..., n$. Seja $0 \neq a \in s_iR$. Se $R(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel então existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq ar \in 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ e, portanto, $0 \neq ar \in 1_{\Delta_0}(s_iR)1_{\Delta_0} = s_i(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$. Logo, $ar(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}) = s_i(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$ e, portanto, $s_i \in ar(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}) \subseteq aR$, de onde $aR = s_iR$. Logo, a decomposição $1_e = s_1 + \cdots + s_n$ nos dá que $R(e) = \sum_{i=1}^{n} s_iR$ é gr-semissimples por (Cala *et al.*, 2022, Lemma 51). Como $e \in \Delta_0$ foi arbitrário, segue que $R(\Delta_0) = \bigoplus_{e\in\Delta_0} R(e)$ é gr-semissimples.

A recíproca segue da Proposição 2.3.13(2) para $M = R(\Delta_0)$.

(3) Segue de (2) para $\Delta_0 = \{e\}$. ∎

Corolário 2.3.17. *As seguintes afirmações valem para um anel Γ-graduado R:*

(1) *Suponha que R é e-fiel à direita (resp. à esquerda) para todo $e \in \Gamma_0'(R)$. Então R é anel gr-semissimples à direita (resp. à esquerda) se, e somente se, para todo $e \in \Gamma_0$, R_e é anel semissimples.*

(2) *Suponha que $R(e)$ (resp. $(e)R$) é $\{e\}$-fiel para todo $e \in \Gamma_0'(R)$. Então R é anel gr-semissimples à direita (resp. à esquerda) se, e somente se, para todo $e \in \Gamma_0$, 1_eR1_e é anel gr-semissimples.* ∎

Com o Corolário 2.3.17, podemos obter uma demonstração alternativa do seguinte resultado de (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 5.4).

Corolário 2.3.18. *Um anel Γ-graduado R é gr-semissimples à direita se, e somente se, é gr-semissimples à esquerda.*

Demonstração. Pela Proposição 2.3.12, todo anel gr-semissimples à direita (resp. à esquerda) é gr-semiprimo. Pelo Lema 2.1.20(3) se R é um anel gr-semiprimo então $R(e)$ e $(e)R$ são $\{e\}$-fiéis para cada $e \in \Gamma_0'(R)$. O resultado então segue do Corolário 2.3.17(2). ∎

Observação 2.3.19. De agora em diante, tendo em vista o Corolário 2.3.18, teremos a liberdade de abandonar os adjetivos "esquerda" e "direita" e falar apenas sobre *anéis gr-semissimples*. ∎

Definição 2.3.20. Seja R um anel Γ-graduado. Dizemos que um R-módulo à direita Γ-graduado M é

(1) *gr-artiniano* se M satisfaz a condição de cadeias descendentes (CCD) para submódulos graduados, isto é, não existe uma cadeia infinita estritamente decrescente de submódulos graduados de M.

(2) *gr-noetheriano* se M satisfaz a condição de cadeias ascendentes (CCA) para submódulos graduados, isto é, não existe uma cadeia infinita estritamente crescente de submódulos graduados de M.

Observe que se M for gr-artiniano ou gr-noetheriano então $M(e) \neq 0$ apenas para um número finito de $e \in \Gamma_0$. Portanto, como no caso da gr-simplicidade de módulos, isso nos motiva a seguinte definição.

Definição 2.3.21. Seja R um anel Γ-graduado. Dizemos que um R-módulo à direita Γ-graduado M é Γ_0-*artiniano* (resp. Γ_0-*noetheriano*) se $M(e)$ é R-módulo gr-artiniano (resp. gr-noetheriano) para todo $e \in \Gamma_0$.

Observação 2.3.22. Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. É fácil ver que se M é gr-artiniano (resp. gr-noetheriano) então N e M/N são gr-artinianos (resp. gr-noetherianos). ■

Nesta seção, estamos particularmente interessados em gr-artinianidade em anéis graduados.

Definição 2.3.23. Seja R um anel Γ-graduado. Diremos que R é *anel* Γ_0-*artiniano* (resp. Γ_0-*noetheriano*) *à direita* se R_R é R-módulo Γ_0-artiniano (resp. Γ_0-*noetheriano*). Se R^{op} é um anel Γ_0-artiniano (resp. Γ_0-noetheriano) à direita então diremos que R é um *anel* Γ_0-*artiniano* (resp. Γ_0-*noetheriano*) *à esquerda.*

A próxima Proposição, provada em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 5.3), fornece um exemplo importante dos conceitos abordados nesta seção.

Proposição 2.3.24. *Seja D um anel com gr-divisão e $\overline{\Sigma} = (\Sigma_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\Gamma)^I$ uma sequência matricial para D. Considere o anel Γ-graduado $R := \mathrm{M}_I(D)(\overline{\Sigma})$. Temos:*

1. *$\mathcal{F} := \{E_{ii}^{r(\sigma_i)}R : i \in I, \sigma_i \in \Sigma_i\}$ é uma família de R-módulos à direita Γ-graduados gr-simples. Analogamente, $\mathcal{F}' := \{RE_{ii}^{r(\sigma_i)} : i \in I, \sigma_i \in \Sigma_i\}$ é uma família de R-módulos à esquerda gr-simples.*

2. *Dados $i, j \in I$, $\sigma_i \in \Sigma_i$ e $\tau_j \in \Sigma_j$ temos que $E_{ii}^{r(\sigma_i)}R$ e $E_{jj}^{r(\tau_j)}R$ estão na mesma classe de isoshift se, e somente se, $1_{r(\sigma_i)}D1_{r(\tau_j)} \neq 0$.*

3. *Para cada $i \in I$ e $\sigma \in \Sigma_i$ temos*

$$\mathrm{END}_R(E_{ii}^{r(\sigma)}R(\sigma^{-1})) \cong_{gr} 1_{r(\sigma)}D1_{r(\sigma)}.$$

4. $R = \bigoplus_{S\in\mathcal{F}} S = \bigoplus_{T\in\mathcal{F}'} T.$

5. *R é um anel gr-semissimples.*

6. *Se D é um anel gr-primo então R é um anel gr-simples.* ■

Os próximos três resultados relacionam os conceitos definidos nesta seção e foram provados ao longo de (Cristiano *et al.*, 2024, Section 5).

Lema 2.3.25. *Seja R um anel gr-semissimples e suponha que $\{S_i : i \in I\}$ é uma família de R-submódulos à direita graduados gr-simples de R tal que $R = \bigoplus_{i\in I} S_i$. Então:*

(1) *Cada R-módulo à direita Γ-graduado gr-simples é gr-isomorfo a um shift de algum S_i.*

(2) *Para cada $e \in \Gamma_0$, existe um subconjunto finito $I_e \subseteq I$ tal que $R(e) = \bigoplus_{i \in I_e} S_i$.*

(3) *R é anel Γ_0-artiniano à direita.* ■

Lema 2.3.26. *As seguintes afirmações valem para um anel Γ-graduado R.*

(1) *Se R é anel Γ_0-artiniano à direita então, para cada $e \in \Gamma_0$, $R(e) = 0$ ou $R(e)$ contém um ideal à direita graduado minimal de R.*

(2) *Se R é anel gr-simples e possui um ideal à direita graduado minimal $S = S(e)$ para certo $e \in \Gamma_0$, então existe uma sequência d-finita $(\sigma_i)_{i \in I} \in (e\Gamma)^I$ tal que $R_R \cong_{\mathrm{gr}} \bigoplus_{i \in I} S(\sigma_i)$. Em particular, neste caso R é um anel gr-semissimples.* ■

Teorema 2.3.27. *Suponha que R é um anel gr-simples. São equivalentes:*

(1) *R é anel gr-semissimples.*

(2) *R é anel Γ_0-artiniano à direita.*

(3) *R possui um ideal à direita graduado minimal.*

Também vale a equivalência da versão esquerda das afirmações anteriores. ■

Agora, o seguinte resultado é consequência imediata do Teorema 2.3.27.

Corolário 2.3.28. *Seja R um anel gr-simples. Então R é um anel Γ_0-artiniano à direita se, e somente se, R é um anel Γ_0-artiniano à esquerda.* ■

Observação 2.3.29. De agora em diante, tendo em vista o Corolário 2.3.28, teremos a liberdade de abandonar os adjetivos “esquerda” e “direita” e falar apenas sobre *anéis Γ_0-artinianos gr-simples.* ■

Em (Cristiano *et al.*, 2024, Section 5), prova-se uma versão graduada por grupoide do Teorema de Wedderburn-Artin.

Antes de apresentarmos a estrutura dos anéis Γ_0-artinianos gr-simples, precisamos da seguinte definição.

Definição 2.3.30. Dados um anel com gr-divisão D e um D-módulo à direita Γ-graduado V, dizemos que V tem *dimensão Γ_0-finita (sobre D)* se $V(e)$ tem pseudo-dimensão finita para todo $e \in \Gamma_0$.

A caracterização a seguir foi provada em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 5.3).

Teorema 2.3.31. *As afirmações a seguir são equivalentes para um anel Γ-graduado R.*

(1) *R é anel Γ_0-artiniano gr-simples.*

(2) *Existem* $e \in \Gamma_0$, *um anel com gr-divisão* D *e uma sequência d-finita* $\overline{\sigma} := (\sigma_i)_{i \in I} \in (e\Gamma)^I$ *tais que* $\operatorname{supp}(D) \subseteq e\Gamma e$ *e*

$$R \cong_{\text{gr}} \mathrm{M}_I(D)(\overline{\sigma}).$$

(3) *Existem um anel com gr-divisão gr-primo* D *e uma sequência* $\overline{\Sigma} := (\Sigma_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(\Gamma)^I$ *matricial para* D *tais que*

$$R \cong_{\text{gr}} \mathrm{M}_I(D)(\overline{\Sigma}).$$

(4) *Existem um anel com gr-divisão* D, $e \in \Gamma_0$ *e um* D*-módulo à direita* Γ*-graduado* V *de dimensão* Γ_0*-finita sobre* D *tais que* $\operatorname{supp}(D) \subseteq e\Gamma e$ *e*

$$R \cong_{\text{gr}} \mathrm{END}_D(V).$$

(5) *Existem um anel com gr-divisão gr-primo* D *e um* D*-módulo à direita* Γ*-graduado* V *de dimensão* Γ_0*-finita sobre* D *tais que*

$$R \cong_{\text{gr}} \mathrm{END}_D(V).$$

■

Observação 2.3.32. (1) No Teorema 2.3.31(2), se R tem unidade então $I = \bigcup_{e \in \Gamma_0'(R)} \{i \in I : d(\sigma_i) = e\}$ é finito.

(2) Em (Cristiano *et al.*, 2024, Section 6), é apresentada outra prova do Teorema 2.3.31 usando uma versão graduada por grupoide do Teorema da Densidade de Chevalley-Jacobson. De fato, obtem-se um resultado um pouco mais forte, para anéis graduados que não são necessariamente Γ_0-unitais. ■

A unicidade da representação matricial dada pelo Teorema 2.3.31(2) foi estudada em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 5.5) onde obteve-se o Teorema a seguir.

Teorema 2.3.33. *Sejam* $e, e' \in \Gamma_0$, D, D' *anéis com gr-divisão satisfazendo* $\operatorname{supp}(D) \subseteq e\Gamma e$, $\operatorname{supp}(D') \subseteq e'\Gamma e'$ *e* $\overline{\sigma} := (\sigma_i)_{i \in I} \in (e\Gamma)^I$, $\overline{\delta} := (\delta_i)_{i \in I'} \in (e'\Gamma)^{I'}$ *sequências d-finitas. Então* $\mathrm{M}_I(D)(\overline{\sigma}) \cong_{\text{gr}} \mathrm{M}_{I'}(D')(\overline{\delta})$ *se, e somente se, existem uma bijeção* $\pi : I \to I'$ *e* $\tau \in e'\Gamma e$ *tais que* $D' \cong_{\text{gr}} \mathrm{M}_1(D)(\tau^{-1})$ *e* $\delta_{\pi(i)} \in \tau(\operatorname{supp} D)\sigma_i$ *para cada* $i \in I$. ■

Temos o seguinte resultado relacionando anéis Γ_0-artinianos gr-simples e fidelidade em componentes homogêneas.

Proposição 2.3.34. *As seguintes afirmações valem para um anel* Γ*-graduado* R.

(1) *Se* R *é anel* Γ_0*-artiniano gr-simples então* $1_{\Delta_0} R 1_{\Delta_0}$ *é anel* Δ_0*-artiniano gr-simples para todo* $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$ *com* $\Delta_0 \cap \Gamma_0'(R) \neq \emptyset$.

(2) *Se, para todo* $e \in \Gamma_0'(R)$, R *é* $\{e\}$*-fiel e* $1_e R 1_e$ *é anel gr-artiniano gr-simples então* R *é anel* Γ_0*-artiniano gr-simples.*

Demonstração. (1) Sejam R um anel Γ_0-artiniano gr-simples e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$ tal que $\Delta_0 \cap \Gamma'_0(R) \neq \emptyset$. Pelo Teorema 2.3.27, R é um anel gr-semissimples. Então, segue da Proposição 2.1.17(1) e do Corolário 2.3.14(1) que $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ é anel gr-simples e gr-semissimples. Pelo Teorema 2.3.27, $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ é anel Δ_0-artiniano gr-simples.

(2) Suponha que, para todo $e \in \Gamma'_0(R)$, R é $\{e\}$-fiel e 1_eR1_e é anel gr-artiniano gr-simples. Então segue da Proposição 2.1.21(1) que R é anel gr-simples. Para cada $e \in \Gamma_0$, temos que $R(e)$ é $\{e\}$-fiel e 1_eR1_e é anel gr-semissimples. Portanto, R é anel gr-semissimples pelo Corolário 2.3.17(2). Do Teorema 2.3.27 temos que R é anel Γ_0-artiniano gr-simples. ∎

O próximo resultado, provado em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 5.4), mostra que o conceito de família somável é importante para o estudo de anéis gr-semissimples.

Proposição 2.3.35. *Seja $\{R_j : j \in J\}$ uma família somável de anéis gr-semissimples. Então $R := \prod^{gr}_{j\in J} R_j$ é um anel gr-semissimples.* ∎

Em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 5.4), foi provada a seguinte versão do Teorema de Wedderburn-Artin, caracterizando os anéis gr-semissimples.

Teorema 2.3.36. *As seguintes afirmações são equivalentes para um anel Γ-graduado R.*

(1) *R é um anel gr-semissimples.*

(2) *Existe $(e_j)_{j\in J} \in (\Gamma_0)^J$ e, para cada $j \in J$, um anel com gr-divisão D_j satisfazendo $\operatorname{supp}(D_j) \subseteq e_j\Gamma e_j$ e uma sequência d-finita $\overline{\sigma}_j := (\sigma_{jk})_{k\in K_j} \in (e_j\Gamma)^{K_j}$ tais que a família $\{\mathrm{M}_{K_j}(D_j)(\overline{\sigma}_j) : j \in J\}$ é somável e*

$$R \cong_{\mathrm{gr}} \prod^{gr}_{j\in J} \mathrm{M}_{K_j}(D_j)(\overline{\sigma}_j).$$

(3) *Existe um conjunto J e, para cada $j \in J$, um anel com gr-divisão gr-primo D_j e uma sequência $\overline{\Sigma}_j := (\Sigma_{jk})_{k\in K_j} \in \mathcal{P}(\Gamma)^{K_j}$ matricial para D_j tais que a família $\{\mathrm{M}_{K_j}(D_j)(\overline{\Sigma}_j) : j \in J\}$ é somável e*

$$R \cong_{\mathrm{gr}} \prod^{gr}_{j\in J} \mathrm{M}_{K_j}(D_j)(\overline{\Sigma}_j).$$

(4) *Existe uma família somável $\{R_j : j \in J\}$ de anéis Γ_0-artinianos gr-simples tais que*

$$R \cong_{\mathrm{gr}} \prod^{gr}_{j\in J} R_j.$$

∎

Observação 2.3.37. (1) No Teorema 2.3.36(2), a cardinalidade do conjunto J é o número de classes de isoshift de R-módulos à direita Γ-graduados gr-simples e, portanto, está unicamente determinado por R. Além disso, se R tem unidade então J e os K_j ($j \in J$)

são finitos. Esses fatos foram provados ao longo de (CRISTIANO *et al.*, 2024, Section 5).

(2) Note que o item (4) do Teorema 2.3.36 fornece uma outra prova da Proposição 2.3.12 pois diz que todo anel gr-semissimples é um produto direto graduado de anéis gr-semiprimos. ■

O resultado a seguir foi provado em (CRISTIANO *et al.*, 2024, Subsecion 5.5) e, junto com o Teorema 2.3.33, fornece um resultado de unicidade da decomposição no Teorema 2.3.36(2) para um anel gr-semissimples.

Teorema 2.3.38. *Sejam $\{R_j : j \in J\}$ e $\{T_j : j \in J'\}$ famílias somáveis de anéis gr-simples. Então $\prod_{j\in J}^{gr} R_j \cong_{\mathrm{gr}} \prod_{j\in J'}^{gr} T_j$ se, e somente se, existe uma bijeção $\pi : J \to J'$ tal que $R_j \cong_{\mathrm{gr}} T_{\pi(j)}$ para cada $j \in J$.* ■

Para mais detalhes sobre a definição a seguir, veja (MITCHELL, 1972, p. 18-19) e (CRISTIANO *et al.*, 2024, Subsections 8.3 and 8.4).

Definição 2.3.39. Seja $\mathcal{C}$ um categoria pré-aditiva e considere a categoria $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{A}b)$ dos funtores contravariantes aditivos $\mathcal{C} \to \mathcal{A}b$. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma

(1) *categoria semissimples (à direita)* se, para cada $A \in \mathcal{C}_0$, o funtor $\mathcal{C}(-, A)$ é um objeto semissimples na categoria $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{A}b)$.

(2) *categoria artiniana à direita* se, para cada $A \in \mathcal{C}_0$, o funtor $\mathcal{C}(-, A)$ é um objeto artiniano na categoria $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{A}b)$.

Se $\mathcal{C}$ é categoria artiniana à direita e simples, diremos simplesmente que $\mathcal{C}$ é uma *categoria artiniana simples.*

Em (CRISTIANO *et al.*, 2024, Subsections 8.3 and 8.4), foram provadas as seguintes caracterizações de uma categoria semissimples pequena e de categorias artinianas simples pequenas.

Proposição 2.3.40. *Seja $\mathcal{C}$ um categoria pré-aditiva pequena. São equivalentes:*

(1) *$\mathcal{C}$ é uma categoria semissimples.*

(2) *$R[\mathcal{C}]$ é anel gr-semissimples.*

(3) *Todo objeto de $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{A}b)$ é semissimples.*

(4) *Existem uma família $\{D_j : j \in J\}$ de anéis com divisão e uma função $n : J \times \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que, para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$, $\sum_{j\in J} n(j, A) < \infty$ e existe um isomorfismo de grupos aditivos*

$$\varphi_{(A,B)} : \mathcal{C}(A, B) \longrightarrow \prod_{j\in J} \mathrm{M}_{n(j,B)\times n(j,A)}(D_j)$$

de modo que todos estes isomorfismos são compatíveis com produtos, isto é, $\varphi_{(A,B)}(fg) = \varphi_{(C,B)}(f) \cdot \varphi_{(A,C)}(g)$, para todos $f \in \mathcal{C}(C, B)$, $g \in \mathcal{C}(A, C)$. ■

Proposição 2.3.41. *Seja $\mathcal{C}$ um categoria pré-aditiva pequena e considere o grupoide $\mathcal{G} := \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$. São equivalentes:*

(1) *$\mathcal{C}$ é uma categoria artiniana simples.*

(2) *$\mathcal{C}$ é uma categoria semissimples e simples.*

(3) *$R[\mathcal{C}]$ é anel $\mathcal{G}_0$-artiniano gr-simples.*

(4) *Existe um anel com divisão D e uma função $n : \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$, existe um isomorfismo de grupos aditivos*

$$\varphi_{(A,B)} : \mathcal{C}(A, B) \longrightarrow \mathrm{M}_{n(B)\times n(A)}(D)$$

de modo que todos estes isomorfismos são compatíveis com produtos, isto é, $\varphi_{(A,B)}(fg) = \varphi_{(C,B)}(f) \cdot \varphi_{(A,C)}(g)$, para todos $f \in \mathcal{C}(C, B)$, $g \in \mathcal{C}(A, C)$. ■

Agora nos voltamos para uma classe especial de anéis gr-semissimples que é peculiar do contexto graduado por grupoide e foi introduzida em (Cristiano *et al.*, 2024, Section 7).

Definição 2.3.42. Dizemos que o anel Γ-graduado R é um *anel pfm* (do inglês *pseudo-free module ring*) se todo R-módulo à direita Γ-graduado é pseudo-livre.

Exemplo 2.3.43. Pelo Teorema 2.2.21(1), anéis com gr-divisão são anéis pfm. ■

O próximo resultado é importante na caracterização dos anéis pfm e foi provado em (Cristiano *et al.*, 2024, Section 7).

Lema 2.3.44. *Seja $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ um anel Γ-graduado. Temos:*

(1) *Se R é um anel pfm então R é um anel gr-semissimples.*

(2) *Reciprocamente, suponha que R seja um anel gr-semissimples. Então R é um anel pfm se, e somente se, todo R-módulo à direita gr-simples é pseudo-livre.* ■

Observação 2.3.45. O Lema 2.3.44 nos diz que as seguintes implicações valem para um anel Γ-graduado R:

$$R \text{ é anel com gr-divisão} \implies R \text{ é um anel pfm} \implies R \text{ é anel gr-semissimples}\,.$$

O exemplo a seguir mostra que nenhuma das recíprocas vale. ■

Exemplos 2.3.46. Seja D um anel com divisão.

(1) Suponha que $\Gamma = \{e\}$ é o grupo(ide) trivial. Se $n \geq 2$, então $R = \mathrm{M}_n(D)$ é um anel Γ-graduado gr-semissimples que não é um anel pfm pois $E_{11}R$ não é um R-módulo livre.

(2) Suponha que Γ é o grupoide $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$. Considere D como um anel com gr-divisão Γ-graduado com suporte concentrado em $(1, 1)$. Defina

$$R = \mathrm{M}_3(D)((1, 1), (1, 1), (1, 2)).$$

Então

$$R_{(1,1)} = \begin{bmatrix} D & D & 0 \\ D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_{(2,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D & D & 0 \end{bmatrix}, \quad R_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}.$$

As unidades de R são

$$\mathbb{I}_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{11} + E_{22}, \quad \mathbb{I}_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{33}.$$

Por um lado, o anel Γ-graduado R não é um anel com gr-divisão pois o elemento homogêneo $E_{11} \in R_{(1,1)}$ não é gr-inversível. De fato, não existe $T \in R$ tal que $E_{11}T = \mathbb{I}_{(1,1)}$. Por outro lado, R é um anel gr-semissimples pelo Teorema 2.3.31(2). Agora, $S := E_{33}R = R((2,2))$ é R-módulo gr-simples (Proposição 2.3.24(1)), pseudo-livre (Proposição 2.2.19(7)) e é tal que

$$\begin{aligned} R &= E_{11}R \oplus E_{22}R \oplus E_{33}R \\ &= E_{13}R \oplus E_{23}R \oplus E_{33}R \\ &\cong_{\mathrm{gr}} S((2,1)) \oplus S((2,1)) \oplus S. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Por (2.3.1) e o Lema 2.3.25(1), todo R-módulo à direita gr-simples é gr-isomorfo a um shift de S. Segue de (Cala *et al.*, 2022, Proposition 59) que todo R-módulo à direita Γ-graduado é gr-isomorfo a uma soma direta de shifts de S e, portanto, é pseudo-livre. ■

Observação 2.3.47. Ressaltamos que, no Exemplo 2.3.46(2), $\mathcal{B}_1 = \{\mathbb{I}_{(1,1)}\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{E_{13}, E_{23}\}$ são duas pseudo-bases do R-módulo graduado $S = R((1,1))$. Assim, não temos unicidade da cardinalidade das pseudo-bases de R-módulos graduados sobre anéis pfm e, consequentemente, sobre anéis gr-semissimples. Conforme (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 7.2), tal unicidade caracteriza os anéis com gr-divisão, mas é possível definir um invariante semelhante à dimensão para os anéis pfm, a chamada *gr-simple dimension.* ■

O próximo resultado foi demonstrado em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 7.1) e caracteriza os anéis pfm gr-primos. É possível usá-lo para fornecer uma caracterização dos anéis pfm não necessariamente gr-primos, pois já sabemos que os anéis pfm são gr-semissimples e os anéis gr-semissimples são produtos de famílias somáveis de anéis Γ_0-artinianos gr-simples (pelo Teorema 2.3.36).

Teorema 2.3.48. *Seja R um anel Γ-graduado. São equivalentes:*

(1) *R é um anel pfm gr-simples.*

(2) *R é um anel pfm gr-primo.*

(3) *Existem $e_0, e \in \Gamma_0$, um anel com gr-divisão D satisfazendo* $\mathrm{supp}(D) \subseteq e_0\Gamma e_0$ *e*

uma sequência d-finita $\overline{\sigma} := (\sigma_i)_{i \in I} \in (e_0\Gamma)^I$ *tais que*

$$R \cong_{\mathrm{gr}} \mathrm{M}_I(D)(\overline{\sigma})$$

e $I_e := \{i \in I : d(\sigma_i) = e\}$ *tem exatamente um único elemento.*

(4) R *é anel gr-simples e existe* $e \in \Gamma_0$ *tal que* $R(e)$ *é* R*-módulo gr-simples.*

(5) *Existe* $e \in \Gamma_0$ *tal que* $R(e)$ *é* R*-módulo gr-simples e* R_R *é gr-isomorfo a uma soma direta de shifts de* $R(e)$*.*

(6) R *é anel* Γ_0*-artiniano gr-simples e existe* $e \in \Gamma_0$ *tal que* R_e *é anel com divisão.* ■

Em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 7.1), também é provada a seguinte caracterização dos anéis pfm não necessariamente gr-primos. Ressaltamos que os itens (2) e (6) do Teorema 2.3.49 implicam que R é um anel pfm se, e somente se, todo R-módulo à esquerda Γ-graduado é pseudo-livre. Em outras palavras, ser "pfm à direita" é sinônimo de "pfm à esquerda" para anéis Γ-graduados.

Teorema 2.3.49. *Seja* R *um anel* Γ*-graduado. São equivalentes:*

(1) R *é um anel pfm.*

(2) *Existe família* $\{K_j : j \in J\}$ *de conjuntos não vazios,* $(e_j)_{j\in J}, (f_j)_{j \in J} \in (\Gamma_0)^J$ *e, para cada* $j \in J$*, existe um anel com gr-divisão* D_j *satisfazendo* $\mathrm{supp}(D_j) \subseteq e_j\Gamma e_j$ *e uma sequência d-finita* $\overline{\sigma}_j := (\sigma_{jk})_{k \in K_j} \in (e_j\Gamma)^{K_j}$ *tais que a família* $\{\mathrm{M}_{K_j}(D_j)(\overline{\sigma}_j) : j \in J\}$ *é somável,*

$$R \cong_{\mathrm{gr}} \prod_{j \in J}^{gr} \mathrm{M}_{K_j}(D_j)(\overline{\sigma}_j)$$

e, para cada $j \in J$*, o conjunto* $K_{j,f_j} := \{k \in K_j : d(\sigma_{jk}) = f_j\}$ *tem exatamente um elemento e* $\{j' \in J : K_{j',f_j} \neq \emptyset\} = \{j\}$*.*

(3) *Existem família somável* $\{R_j : j \in J\}$ *de anéis pfm gr-primos e* $(f_j)_{j \in J} \in (\Gamma_0)^J$ *tais que*

$$R \cong_{\mathrm{gr}} \prod_{j \in J}^{gr} R_j$$

e, para cada $j \in J$*,* $R(f_j)$ *é* R*-módulo gr-simples e* $R_j(f_j) \neq 0$*.*

(4) *Existe família somável* $\{R_j : j \in J\}$ *de anéis gr-simples e* $(f_j)_{j \in J} \in (\Gamma_0)^J$ *tais que*

$$R \cong_{\mathrm{gr}} \prod_{j \in J}^{gr} R_j$$

e, para cada $j \in J$*,* $R(f_j)$ *é* R*-módulo gr-simples e* $R_j(f_j) \neq 0$*.*

(5) *Existe* $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0'(R)$ *tal que* $R(\Delta_0)$ *é* R*-módulo* Γ_0*-simples e* R_R *é gr-isomorfo a uma soma direta de shifts de elementos de* $\{R(e) : e \in \Delta_0\}$*.*

(6) *Existe uma família somável* $\{R_j : j \in J\}$ *de anéis* Γ_0*-artinianos gr-simples e*

$(f_j)_{j\in J} \in (\Gamma_0)^J$ tais que

$$R \cong_{\mathrm{gr}} \prod_{j\in J}^{gr} R_j$$

e, para cada $j \in J$, R_{f_j} é anel com divisão e $(R_{j'})_{f_j} = 0$ sempre que $j' \in J \setminus \{j\}$. ■

A seguir, exploramos quando $R[\mathcal{C}]$ ($\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena) é um anel pfm, relacionando com o conceito de funtores livres definido em (Mitchell, 1972, p. 17-18).

Definição 2.3.50. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}b$ um funtor contravariante aditivo. Diz-se que $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F(A_i)$ ($\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{C}_0$) é uma sequência de *geradores de F* se, para cada $A \in \mathcal{C}_0$ e $x \in F(A)$, existe $(\lambda_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{C}(A, A_i)$ tal que $x = \sum_{i\in I} F(\lambda_i)(x_i)$. Quando, para cada $A \in \mathcal{C}_0$ e $x \in F(A)$ a sequência $(\lambda_i)_{i\in I}$ é única, diz-se que $(x_i)_{i\in I}$ é uma *base de F* e que F é *livre*.

Em outras palavras, o funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}b$ é livre com base $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F(A_i)$ se, e somente se, a transformação natural

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i\in I} \mathcal{C}(-, A_i) &\longrightarrow F \\ I_{A_i} &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Ao relacionar funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}b$ livres com $R[\mathcal{C}]$-módulos pseudo-livres, provou-se em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 8.5) o seguinte resultado.

Teorema 2.3.51. *As afirmações a seguir são equivalentes para uma categoria pré-aditiva pequena $\mathcal{C}$.*

(1) *Todo funtor contravariante aditivo $\mathcal{C} \to \mathcal{A}b$ é livre.*

(2) *$R[\mathcal{C}]$ é um anel pfm.*

(3) *Existem um conjunto J, uma família $\{A_j : j \in J\}$ de objetos de $\mathcal{C}$, uma família $\{D_j : j \in J\}$ de anéis com divisão e uma função $n : J \times \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que, para cada $j \in J$, $n(j, A_j) = 1$ e $\mathcal{C}(A_j, A_j) \cong D_j$ e, para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$, $\sum_{j\in J} n(j, A) < \infty$ e*

$$\mathcal{C}(A, B) \cong \prod_{j\in J} \mathrm{M}_{n(j,B)\times n(j,A)}(D_j)$$

como grupos abelianos e todos estes isomorfismos são compatíveis com produtos, isto é, $\varphi_{(A,B)}(fg) = \varphi_{(C,B)}(f) \cdot \varphi_{(A,C)}(g)$, para todos $f \in \mathcal{C}(C, B)$, $g \in \mathcal{C}(A, C)$. ■

Corolário 2.3.52. *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria com divisão pequena então todo funtor contravariante aditivo $\mathcal{C} \to \mathcal{A}b$ é livre.* ■

O resultado a seguir foi obtido em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 7.3) e fornece mais caracterizações de anéis com gr-divisão, que resultam da nossa versão do Teorema de Wedderburn-Artin. Além disso, uma comparação do Teorema 2.3.53(5) e do Teorema 2.3.49(2) esclarece a diferença entre anéis com gr-divisão e anéis pfm.

Teorema 2.3.53. *Seja R um anel Γ-graduado. São equivalentes:*

(1) *R é um anel com gr-divisão.*

(2) *R_R é R-módulo Γ_0-simples.*

(3) *R é anel gr-semissimples e $1_e R 1_e$ é anel com gr-divisão para todo $e \in \Gamma_0'(R)$.*

(4) *R é anel gr-semissimples e R_e é anel com divisão para todo $e \in \Gamma_0'(R)$.*

(5) *Existem uma família $\{K_j : j \in J\}$ de conjuntos não vazios, uma sequência de idempotentes $(e_j)_{j\in J} \in (\Gamma_0)^J$, uma família $\{D_j : j \in J\}$ de anéis com gr-divisão e, para cada $j \in J$, uma sequência $\overline{\sigma}_j := (\sigma_{jk})_{k\in K_j} \in (e_j\Gamma)^{K_j}$ tais que, para cada $j \in J$, temos $\operatorname{supp}(D_j) \subseteq e_j\Gamma e_j$, os conjuntos $K_{j,e} := \{k \in K_j : d(\sigma_{jk}) = e\}$ e $J_e := \{j \in J : K_{j,e} \neq \emptyset\}$ ($e \in \Gamma_0$) têm no máximo um elemento e*

$$R \cong_{\mathrm{gr}} \prod_{j\in J}^{gr} \mathrm{M}_{K_j}(D_j)(\overline{\sigma}_j).$$

(6) *Existe família $\{R_j : j \in J\}$ de anéis com gr-divisão gr-primos tais que temos uma decomposição*

$$R = \bigoplus_{j\in J} R_j$$

e $\operatorname{supp}(R_j) \cap \operatorname{supp}(R_{j'}) = \emptyset$ para todos $j, j' \in J$ distintos. ■

O seguinte Corolário também foi provado em (Cristiano *et al.*, 2024, Subsection 7.3).

Corolário 2.3.54. *Seja R um anel Γ-graduado. São equivalentes:*

(1) *R é um anel com gr-divisão.*

(2) *R é um anel pfm e, para cada $e \in \Gamma_0'(R)$, todo $1_e R 1_e$-módulo à direita $e\Gamma e$-graduado é gr-livre (como um módulo graduado por grupo).*

(3) *R é um anel pfm e, para cada $e \in \Gamma_0'(R)$, todo R_e-módulo à direita é livre.* ■

Observação 2.3.55. A equivalência (1) $\iff$ (2), no Corolário 2.3.54, generaliza a equivalência válida no contexto graduado por grupo, pois se Γ é um grupo então $e\Gamma e = \Gamma$ e $1_e R 1_e = R$ onde e denota a identidade do grupo Γ. ■

2.4 Anéis gr-regulares de von Neumann e o radical de Jacobson graduado

Definição 2.4.1. Dizemos que um anel Γ-graduado R é *gr-regular de von Neumann* se para todo $a \in \mathrm{h}(R)$ temos $a \in aRa$. Ou, equivalentemente, para cada $\gamma \in \Gamma$ e $a \in R_\gamma$ existe $r \in R_{\gamma^{-1}}$ tal que $a = ara$.

Exemplo 2.4.2. Todo anel gr-semissimples é gr-regular de von Neumann. De fato, seja R um anel gr-semissimples, $\gamma \in \Gamma$ e $a \in R_\gamma$. Temos de (Cala *et al.*, 2022, Proposition 56) que existe um ideal à direita graduado U de R tal que $R = aR \oplus U$. Logo, existem $r \in R_{\gamma^{-1}}$ e $x \in U_{r(\gamma)}$ tais que $1_{r(\gamma)} = ar + x$ e, portanto, $a = ara + xa$, de onde $a - ara = xa \in aR \cap U = \{0\}$.

Note também que se R é um anel gr-regular de von Neumann então R é gr-semiprimo, $1_{\Delta_0} R 1_{\Delta_0}$ é anel gr-regular de von Neumann para todo $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$ e R_e é anel regular de von Neumann para todo $e \in \Gamma_0$. ■

Definição 2.4.3. Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ é *regular de von Neumann* se, para todos $A, B \in \mathcal{C}_0$ e $g \in \mathcal{C}(A, B)$, existe $g' \in \mathcal{C}(B, A)$ tal que $g \circ g' \circ g = g$.

O resultado a seguir apresenta uma família de exemplos de categorias regulares de von Neumann.

Proposição 2.4.4. *Seja A um anel com unidade regular de von Neumann. Denote por* proj-A *a categoria dos A-módulos à direita projetivos finitamente gerados e seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria plena de* proj-A. *Então $\mathcal{C}$ é uma categoria regular de von Neumann.*

Demonstração. Sejam $P, Q \in \mathcal{C}_0$ e $f \in \mathcal{C}(P, Q)$. Como P_A é projetivo finitamente gerado, existem $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ e um epimorfismo de A-módulos $\pi : A^n \to P$. Então $\operatorname{im}(f \circ \pi)$ é um submódulo finitamente gerado de Q. Por (Goodearl, 1979, Theorem 1.11), existe um submódulo X de Q tal que $Q = \operatorname{im}(f \circ \pi) \oplus X$. Em particular, $\operatorname{im}(f \circ \pi)$ é um A-módulo à direita projetivo e segue que a sequência exata

$$0 \longrightarrow \ker(f \circ \pi) \longrightarrow A^n \xrightarrow{f \circ \pi} \operatorname{im}(f \circ \pi) \longrightarrow 0$$

cinde. Logo, existe um homomorfismo $\tilde{g} : \operatorname{im}(f \circ \pi) \to A^n$ tal que $f \circ \pi \circ \tilde{g} = \mathrm{id}_{\operatorname{im}(f \circ \pi)}$. Estenda $\tilde{g}$ a um homomorfismo $g : Q \to A^n$ fazendo $g(X) := 0$. Então, $(f \circ \pi) \circ g \circ (f \circ \pi) = f \circ \pi$. Como π é epimorfismo, segue que $f \pi g f = f$. Logo, $\pi \circ g \in \mathcal{C}(Q, P)$ é tal que $f \circ \pi \circ g \circ f = f$. Portanto, $\mathcal{C}$ é uma categoria regular de von Neumann. ■

Observação 2.4.5. Quando $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena, $\mathcal{C}$ é regular de von Neumann se, e somente se, $R[\mathcal{C}]$ é anel gr-regular de von Neumann. ■

Na maioria das vezes que considerarmos anéis gr-regulares de von Neumann, eles aparecerão em conexão com o radical de Jacobson graduado definido como segue.

Definição 2.4.6. Seja R um anel Γ-graduado não nulo. Dizemos que um ideal à direita graduado M de R é *gr-maximal* se M é maximal no conjunto dos ideais à direita graduados próprios de R. Definimos o *radical de Jacobson* Γ*-graduado* de R (e denotamos por $\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$) como a intersecção de todos os ideais à direita gr-maximais de R. Convencionamos que $\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(0) := 0$.

Observação 2.4.7. Note que M é um ideal à direita gr-maximal do anel Γ-graduado R se, e somente se, existe $e \in \Gamma_0$ tal que $M(f) = R(f)$ para todo $f \in \Gamma_0 \setminus \{e\}$ e $M(e)$ é submódulo gr-maximal de $R(e)$ (isto é, um elemento maximal no conjunto de todos os R-submódulos graduados próprios de $R(e)$). Além disso, uma fácil aplicação do

Lema de Zorn garante a existência de ideais à direita gr-maximais em R e, portanto, o radical de Jacobson graduado está bem definido e é um ideal à direita graduado de R. ∎

Os resultados referentes ao radical de Jacobson graduado nesta seção são baseados nos obtidos pelo doutorando Wellington Marques de Souza (IME-USP).

A seguinte propriedade do radical de Jacobson graduado será muito importante.

Proposição 2.4.8. *Seja R um anel Γ-graduado, $\gamma \in \Gamma$ e $a \in R_\gamma$. São equivalentes:*

(1) $a \in \operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$.

(2) $1_{r(\gamma)} - ax$ *é inversível à direita em* $R_{r(\gamma)}$ *para todo* $x \in R_{\gamma^{-1}}$.

(3) $Sa = 0$ *para todo* R*-módulo à direita gr-simples* S.

Demonstração. (1) $\implies$ (2): Seja $x \in R_{\gamma^{-1}}$. Então $(1_{r(\gamma)} - ax)R$ é um R-submódulo graduado de $R(r(\gamma))$. Suponha, por absurdo que $a \in \operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ mas $1_{r(\gamma)} - ax$ não é inversível à direita em $R_{r(\gamma)}$. Então $(1_{r(\gamma)} - ax)R \neq R(r(\gamma))$ e, portanto, existe um ideal à direita gr-maximal M de R tal que $M(e) = R(e)$ para todo $e \in \Gamma_0 \setminus \{r(\gamma)\}$ e $(1_{r(\gamma)} - ax)R \subseteq M$. Temos assim $1_{r(\gamma)} - ax \in M$ e $ax \in \operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R) \subseteq M$ de onde obtemos $1_{r(\gamma)} \in M$. Logo, $M(r(\gamma)) = R(r(\gamma))$ e segue que $M = R$, uma contradição.

(2) $\implies$ (3): Suponha, por absurdo, que vale (2) e existe um R-módulo à direita gr-simples S tal que $Sa \neq 0$. Seja $s \in \mathrm{h}(S)$ tal que $sa \neq 0$. Como S é gr-simples, temos que $saR = S$. Então, tomando $x \in R_{\gamma^{-1}}$ tal que $s = sax$ e $u \in R_{r(\gamma)}$ tal que $(1_{r(\gamma)} - ax)u = 1_{r(\gamma)}$, temos

$$s = s1_{r(\gamma)} = s(1_{r(\gamma)} - ax)u = (s - sax)u = 0\,,$$

uma contradição.

(3) $\implies$ (1): Seja M um ideal à direita gr-maximal de R. Se $M(r(\gamma)) = R(r(\gamma))$ então já temos $a \in M$. Suponha $M(r(\gamma)) \neq R(r(\gamma))$. Então $M(r(\gamma))$ é um R-submódulo gr-maximal de $R(r(\gamma))$ e segue que $\dfrac{R(r(\gamma))}{M(r(\gamma))}$ é um R-módulo gr-simples. De fato, se X é um R-sumbódulo graduado não nulo de $\dfrac{R(r(\gamma))}{M(r(\gamma))}$ e $\overline{r} \in \mathrm{h}(X)$ então, como $M(r(\gamma)) + rR = R(r(\gamma))$ obtemos $1_{r(\gamma)} \in M(r(\gamma)) + rR$ e, portanto, $\overline{1_{r(\gamma)}} \in \overline{r}R \subseteq X$. Se vale (3) então $\dfrac{R(r(\gamma))}{M(r(\gamma))}a = 0$ e segue que $\overline{a} = \overline{1_{r(\gamma)}}a = 0$, ou seja, $a \in M(r(\gamma))$. Logo, $a \in M$ para todo ideal à direita gr-maximal M de R. ∎

As condições (2) e (3) da Proposição 2.4.8 produzem os dois Corolários a seguir.

Corolário 2.4.9. *Se R é um anel Γ-graduado e $e \in \Gamma_0$ então* $\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R)_e = \operatorname{rad}(R_e)$ *e* $1_e \operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R) 1_e = \operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(1_e R 1_e)$. ∎

Corolário 2.4.10. *Se R é um anel Γ-graduado então $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ é um ideal graduado de R.*

Demonstração. Usando a caracterização dada pelo item (3) da Proposição 2.4.8 temos:

$$\begin{aligned}\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R) &= \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(R_\gamma \cap \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R))\\ &= \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\left(R_\gamma \cap \bigcap_{S_R \text{ gr-simples}} \mathrm{r.ann}_R(S)\right)\\ &= \bigcap_{S_R \text{ gr-simples}} \mathrm{r.ann}_R(S)\,.\end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ é uma intersecção de ideais graduados de R. ■

Com o Corolário 2.4.10 conseguimos a seguinte variante da Proposição 2.4.8.

Proposição 2.4.11. *Seja R um anel Γ-graduado, $\gamma \in \Gamma$ e $a \in R_\gamma$. São equivalentes:*

(1) $a \in \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$.

(2) $1_{r(\gamma)} - yax$ *é inversível em* $R_{r(\gamma)}$ *para todos* $x, y \in \mathrm{h}(R)$ *tais que* $yax \in R_{r(\gamma)}$.

Demonstração. (1) $\implies$ (2): Sejam $a \in \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ e $x, y \in \mathrm{h}(R)$ tais que $yax \in R_{r(\gamma)}$. Pelo Corolário 2.4.10, $yax \in \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ e segue da Proposição 2.4.8 que existe $u \in R_{r(\gamma)}$ tal que $(1_{r(\gamma)} - yax)u = 1_{r(\gamma)}$. Novamente pela Proposição 2.4.8 temos que $u = 1_{r(\gamma)} - (-yax)u$ é inversível à direita em $R_{r(\gamma)}$. Logo, $1_{r(\gamma)} - yax$ é inversível.

(2) $\implies$ (1): Basta usar (2) para $y = 1_{r(\gamma)}$ e aplicar a Proposição 2.4.8. ■

Corolário 2.4.12. *Se R é um anel Γ-graduado então $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ é o maior ideal graduado J de R tal que $1_e + J_e \subseteq \mathrm{U}(R_e)$ para todo $e \in \Gamma_0$.* ■

Uma das principais relações entre os anéis gr-regulares de von Neumann e o radical de Jacobson graduado está no resultado a seguir.

Corolário 2.4.13. *Se R é um anel gr-regular de von Neumann então $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R) = 0$. Em particular, se R é um anel gr-semissimples então $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R) = 0$.*

Demonstração. Suponha que R é anel gr-regular de von Neumann e sejam $\gamma \in \Gamma$ e $a \in \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)_\gamma$. Tome $x \in R_{\gamma^{-1}}$ tal que $a = axa$. Pela Proposição 2.4.11 temos $1_{r(\gamma)} - ax \in \mathrm{U}(R_{r(\gamma)})$. Logo,

$$a = (1_{r(\gamma)} - ax)^{-1}(1_{r(\gamma)} - ax)a = (1_{r(\gamma)} - ax)^{-1}(a - axa) = 0\,.$$ ■

Observação 2.4.14. Note que se $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena então $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R[\mathcal{C}])_{(A,B)} = J(B, A)$ para todo $A, B \in \mathcal{C}_0$, onde J denota o radical de Jacobson de $\mathcal{C}$, conforme (MITCHELL, 1972, p. 21). ■

Com raciocínio análogo ao do Corolário 2.4.13, obtemos o seguinte:

Corolário 2.4.15. *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria regular de von Neumann e J é o radical de Jacobson de $\mathcal{C}$ então $J = 0$.* ∎

Definição 2.4.16. Diremos que um anel Γ-graduado R é *Jacobson gr-semissimples* se $\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R) = 0$.

O seguinte resultado dá mais exemplos de anéis Jacobson gr-semissimples.

Proposição 2.4.17. *Para cada anel Γ-graduado R, temos que $R/\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ é um anel Jacobson gr-semissimples.*

Demonstração. Pelo Teorema da Correspondência temos que os ideais à direita gr-maximais de $R/\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ são da forma $M/\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ onde M é ideal à direita gr-maximal de R. Logo,

$$\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}\left(\frac{R}{\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R)}\right) = \frac{\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R)}{\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R)} = 0\,.$$ ∎

Temos a seguinte relação entre anéis gr-semissimples e anéis Jacobson gr-semissimples.

Proposição 2.4.18. *Seja R um anel Γ-graduado. São equivalentes:*

(1) *R é anel gr-semissimples.*

(2) *R é anel Jacobson gr-semissimples e Γ_0-artiniano à direita (resp. à esquerda).*

Demonstração. Provaremos apenas o caso "à direita". O caso "à esquerda" segue do caso "à direita" aplicado ao anel R^{op}.

(1) $\implies$ (2): Segue do Lema 2.3.25(3) e do Corolário 2.4.13.

(2) $\implies$ (1): Suponha que R é Jacobson gr-semissimples e Γ_0-artiniano à direita. Primeiramente vejamos que se $e \in \Gamma_0'(R)$ e I é um R-submódulo graduado não nulo de $R(e)$ então existem S gr-simples e $X \leq_{\mathrm{gr}} I$ tais que $I = S \oplus X$. De fato, como $R(e)$ é gr-artiniano, I contém um R-submódulo graduado minimal S. Como S é gr-simples e $\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R) = 0$, existe um ideal à direita gr-maximal M de R tal que $S \cap M = 0$ (caso contrário, $S \cap \operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R) = S$). Então $R(e) = S \oplus M(e)$ pela maximalidade de M e segue que $I = S \oplus (I \cap M(e))$.

Suponha, por absurdo, que R não é anel gr-semissimples. Pelo Lema 2.3.25(2), existe $e \in \Gamma_0'(R)$ tal que $R(e)$ não é R-módulo gr-semissimples. Pelo raciocínio do parágrafo anterior, existem S_1 gr-simples e $X_1 \leq_{\mathrm{gr}} R(e)$ tais que $R(e) = S_1 \oplus X_1$. Como $R(e)$ não é gr-simples, temos $X_1 \neq 0$ e segue que existem S_2 gr-simples e $X_2 \leq_{\mathrm{gr}} X_1$ tais que $X_1 = S_2 \oplus X_2$. Como $S_2 \neq 0$, temos $X_1 \supsetneq X_2$. Prosseguindo indutivamente, obtemos uma cadeia estritamente decrescente

$$X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq X_3 \supsetneq \cdots\,,$$

contradizendo que $R(e)$ é gr-artiniano. ∎

Proposição 2.4.19. *Se R é um anel Jacobson gr-semissimples então R é um anel gr-semiprimo.*

Demonstração. Suponha que R é um anel Γ-graduado que não é gr-semiprimo. Então existem $\gamma \in \Gamma$ e $0 \neq a \in R_\gamma$ tal que $aRa = 0$. Para cada $x \in R_{\gamma^{-1}}$ temos

$$(1_{r(\gamma)} - ax)(1_{r(\gamma)} + ax) = 1_{r(\gamma)} - axax = 1_{r(\gamma)}$$

e, portanto, $1_{r(\gamma)} - ax$ é inversível à direita em $R_{r(\gamma)}$. Segue da Proposição 2.4.8 que $a \in \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$. Logo, $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R) \neq 0$. ■

Definição 2.4.20. Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado não nulo. Dizemos que um submódulo graduado N de M é *gr-maximal* se N é maximal no conjunto de todos os submódulos graduados próprios de M. Definimos o radical de Jacobson Γ-graduado de M, denotado por $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(M)$, como a intersecção de todos os submódulos graduados gr-maximais de M. Convencionamos que $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(0_R) := 0$.

Segue da definição e do Corolário 2.4.12 que $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R) = \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R_R) = \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}({}_RR)$.

Definição 2.4.21. Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado não nulo. Dizemos que um submódulo graduado N de M é Γ_0-*maximal* se, para todo $e \in \Gamma_0$, $N(e)$ é submódulo gr-maximal de $M(e)$.

Com essas últimas definições, temos as seguintes propriedades do radical de Jacobson graduado.

Proposição 2.4.22. *Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Então*

(1) *Para todo $e \in \Gamma_0$, $(\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(M))(e) = \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(M(e))$.*

(2) *$\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(M)$ é a intersecção de todos os submódulos Γ_0-maximais de M.*

(3) *$\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R) = \bigoplus_{e \in \Gamma_0} \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R(e))$.*

(4) *Para todo $e \in \Gamma_0'(R)$, $1_e \notin \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$.*

Demonstração. (1) Para cada $e \in \Gamma_0'(M)$, temos

$$\begin{aligned}
(\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(M))(e) &= \left(\bigcap\{N : N \text{ é submódulo gr-maximal de } M\}\right)(e) \\
&= \bigcap\{N(e) : N \text{ é submódulo gr-maximal de } M\} \\
&= \bigcap\{N(e) : N \text{ é submódulo gr-maximal de } M \text{ e } N(e) \neq M(e)\} \\
&= \bigcap\{X : X \text{ é submódulo gr-maximal de } M(e)\} \\
&= \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(M(e)).
\end{aligned}$$

(2) Como todo submódulo Γ_0-maximal está contido em um submódulo gr-maximal, segue que $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(M)$ contém a intersecção de todos os submódulos Γ_0-maximais de M. Para vermos a outra inclusão, seja N um submódulo Γ_0-maximal de M. Por (1), temos que

$$(\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(M))(e) = \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(M(e)) \subseteq N(e)$$

para todo $e \in \Gamma_0$ e segue que $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(M) \subseteq N$.

(3) Segue imediatamente de (1).

(4) Segue de (3) e do fato que, para todo $e \in \Gamma_0'(R)$, 1_e não pertence a nenhum submódulo gr-maximal de $R(e)$ e, portanto, $1_e \notin \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R(e))$. ■

2.5 Módulos gr-injetivos

Definição 2.5.1. Seja R um anel Γ-graduado e I um R-módulo à direita Γ-graduado. Dizemos que I é *gr-injetivo* se, para todos R-módulos à direita Γ-graduados M, N e $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N, M)$, $j \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N, I)$ com g injetor, existe $h \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, I)$ tal que $hg = j$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"'] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Esta é a definição natural de módulos gr-injetivos, mas podemos dar semelhantes, como segue.

Proposição 2.5.2. *Seja R um anel Γ-graduado e I um R-módulo à direita Γ-graduado. São equivalentes:*

(1) *I é gr-injetivo.*

(2) *Para todos R-módulos à direita Γ-graduados M, N, $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N, M)$, $j_\gamma \in \mathrm{HOM}_R(N, I)_\gamma$ com g injetor, existe $h_\gamma \in \mathrm{HOM}_R(M, I)_\gamma$ tal que $h_\gamma g = j_\gamma$.*

(3) *Para todos R-módulos à direita Γ-graduados M, N e $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N, M)$, $j \in \mathrm{HOM}_R(N, I)$ com g injetor, existe $h \in \mathrm{HOM}_R(M, I)$ tal que $hg = j$.*

(4) *Para todos R-módulos à direita Γ-graduados M, N, $\gamma, \delta \in \Gamma$ com $d(\gamma) = d(\delta)$ e $g_\delta \in \mathrm{HOM}_R(N, M)_\delta$, $j_\gamma \in \mathrm{HOM}_R(N, I)_\gamma$ com g_δ injetor, existe $h \in \mathrm{HOM}_R(M, I)_{\gamma\delta^{-1}}$ tal que $hg_\delta = j_\gamma$.*

Demonstração. (1) $\implies$ (2): Suponha que vale (1), $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N, M)$ é injetor e $j_\gamma \in \mathrm{HOM}_R(N, I)_\gamma$. Como $g|_{N(\gamma^{-1})} \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N(\gamma^{-1}), M(\gamma^{-1}))$ e $j_\gamma|_{N(\gamma^{-1})} \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N(\gamma^{-1}), I)$, existe $h \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M(\gamma^{-1}), I)$ tal que $hg|_{N(\gamma^{-1})} = j|_{N(\gamma^{-1})}$. Então, usando o mesmo raciocínio da prova da Proposição 1.6.12(1), estendemos h a um $h_\gamma \in \mathrm{HOM}_R(M, I)_\gamma$ definindo $h_\gamma = 0$ em $M(e)$ para todo $e \in \Gamma_0 \setminus \{d(\gamma)\}$.

(2) $\implies$ (3): Para obter (3) basta aplicar (2) a cada componente homogênea não nula de j e somar os h_γ's obtidos.

(3) $\implies$ (2): Suponha que vale (3) e sejam $\gamma \in \Gamma$, $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N, M)$, $j_\gamma \in \mathrm{HOM}_R(N, I)_\gamma$ com g injetor. Por (3), existe $h \in \mathrm{HOM}_R(M, I)$ tal que $hg = j_\gamma$. Escreva $h = \sum_{\sigma \in \Gamma} h_\sigma$ com $h_\sigma \in \mathrm{HOM}_R(M, I)_\sigma$ para cada $\sigma \in \Gamma$. Dados $\alpha \in \Gamma$ e $n_\alpha \in N_\alpha$, temos que

$$I_{\gamma\alpha} \ni j_\gamma(n_\alpha) = \sum_{\sigma \in \Gamma} (h_\sigma g)(n_\alpha)$$

e, portanto, $j_\gamma(n_\alpha) = (h_\gamma g)(n_\alpha)$. Logo, $h_\gamma g = j_\gamma$.

(2) $\implies$ (4): Suponha que vale (2), $\gamma, \delta \in \Gamma$ com $d(\gamma) = d(\delta)$, $g_\delta \in \mathrm{HOM}_R(N, M)_\delta$ é injetor e $j_\gamma \in \mathrm{HOM}_R(N, I)_\gamma$. Considerando $g_\delta \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N, M(\delta))$, existe $h_\gamma \in \mathrm{HOM}_R(M(\delta), I)_\gamma$ tal que $h_\gamma g_\delta = j_\gamma$. Usando o mesmo raciocínio da prova da Proposição 1.6.12(1), podemos estender h_γ a um $h \in \mathrm{HOM}_R(M, I)_{\gamma\delta^{-1}}$ definindo $h = 0$ em $M(e)$ para todo $e \in \Gamma_0 \setminus \{r(\delta)\}$.

(4) $\implies$ (1): Suponha que vale (4) e $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N, M)$, $j \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N, I)$ com g injetor. Fixe $e \in \Gamma_0$. Como $g|_{N(e)} \in \mathrm{HOM}_R(N(e), M(e))_e$ e $j|_{N(e)} \in \mathrm{HOM}_R(N(e), I)_e$, existe $h_e \in \mathrm{HOM}_R(M(e), I)_e = \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M(e), I(e))$ tal que $h_e g|_{N(e)} = j|_{N(e)}$. Agora basta tomar $h := \bigoplus_{e \in \Gamma_0} h_e \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, I)$. ■

Os próximos dois resultados mostram como gr-injetividade se comporta com somas diretas e produtos diretos graduados, semelhantemente ao caso não graduado.

Proposição 2.5.3. *Seja R um anel Γ-graduado e $\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família de R-módulos à direita Γ-graduados gr-injetivos. Então $I := \prod_{\lambda \in \Lambda}^{gr} I_\lambda$ é gr-injetivo.*

Demonstração. Tome R-módulos à direita Γ-graduados M, N e $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N, M)$, $j \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N, I)$ com g injetor. Fixe $\lambda \in \Lambda$ e considere a projeção canônica $\pi_\lambda \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(I, I_\lambda)$. Como $\pi_\lambda \circ j \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N, I_\lambda)$, existe $h_\lambda \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, I_\lambda)$ tal que $h_\lambda g = \pi_\lambda j$. Então $h := (h_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, I)$ é tal que $hg = (h_\lambda g)_{\lambda \in \Lambda} = (\pi_\lambda j)_{\lambda \in \Lambda} = j$. Logo, I é gr-injetivo. ■

Proposição 2.5.4. *Seja R um anel Γ-graduado e I um R-módulo à direita Γ-graduado gr-injetivo. Então todo somando direto graduado de I também é gr-injetivo.*

Demonstração. Seja X um somando direto graduado de I. Tome R-módulos à direita Γ-graduados M, N e $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N, M)$, $j \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N, X)$ com g injetor. Como $j \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N, I)$, existe $h \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, I)$ tal que $hg = j$. Considere $\pi \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(I, X)$ a projeção canônica de I em X. Então $\pi \circ h \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, X)$ é tal que $(\pi h)g = \pi j = j$. Logo, X é gr-injetivo. ■

Como consequência da Proposição 2.5.4, obtemos que a gr-injetividade se comporta bem com shifts conforme a seguinte:

Proposição 2.5.5. *Seja R um anel Γ-graduado e I um R-módulo à direita Γ-graduado. São equivalentes:*

(1) *I é gr-injetivo.*

(2) *$I(\sigma)$ é gr-injetivo para todo $\sigma \in \Gamma$.*

(3) *$I(e)$ é gr-injetivo para todo $e \in \Gamma_0$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.5.4, basta mostrarmos que (3) $\Longrightarrow$ (1). Mas isto se verifica usando o item (4) da Proposição 2.5.2, pois, pelo Lema 1.6.4, $\mathrm{HOM}_R(X, I)_\alpha = \mathrm{HOM}_R(X, I(r(\alpha)))_\alpha$ para todo R-módulo à direita Γ-graduado X e $\alpha \in \Gamma$. ∎

Temos a seguinte versão do Critério de Baer.

Teorema 2.5.6. *Seja R um anel Γ-graduado e I um R-módulo à direita Γ-graduado. São equivalentes:*

(1) *I é gr-injetivo.*

(2) *Para todos U ideal à direita graduado de R e $\varphi \in \mathrm{HOM}_R(U, I)$ existe $\psi \in \mathrm{HOM}_R(R, I)$ tal que $\psi|_U = \varphi$.*

(3) *Para todos U ideal à direita graduado de R, $\gamma \in \Gamma$ e $\varphi \in \mathrm{HOM}_R(U, I)_\gamma$ existe $\psi \in \mathrm{HOM}_R(R, I)_\gamma$ tal que $\psi|_U = \varphi$.*

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2): Basta usar a caracterização de gr-injetividade dada pelo item (3) da Proposição 2.5.2.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Segue o mesmo raciocínio da prova de (3) $\Longrightarrow$ (2) na Proposição 2.5.2.

(3) $\Longrightarrow$ (1): A prova se assemelha muito a de (iii)⇒(i) em (Lundström, 2004, Proposition 3.5.2) e a de (Goodearl e Warfield, 2004, Proposition 5.1). Suponha que vale (3) e sejam M e N dois R-módulos à direita Γ-graduados, $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N, M)$ injetor e $j \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N, I)$. Considere o conjunto

$$\chi := \{(N', h') : \operatorname{im} g \subseteq N' \leq_{\text{gr}} M,\ h' \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(N', I) \text{ e } h'g = j\}.$$

Note que $(\operatorname{im} g, jg^{-1}) \in \chi$. Ordenamos χ parcialmente com

$$(N', h') \leqslant (N'', h'') \quad \Longleftrightarrow \quad N' \subseteq N'' \text{ e } h''|_{N'} = h'.$$

Seja $\{(N_i, h_i)\}_{i \in I}$ uma cadeia em χ. Então $N' := \bigcup_{i \in I} N_i$ é um submódulo graduado de M contendo $\operatorname{im} g$ e

$$\begin{aligned} h' : \quad N' &\longrightarrow I \\ n \in N_i &\longmapsto h_i(n) \end{aligned}$$

é um gr-homomorfismo satisfazendo $h'g = j$. Portanto, $(N', h') \in \chi$ é uma cota superior de $\{(N_i, h_i)\}_{i \in I}$. Podemos então aplicar o Lema de Zorn e obter um elemento maximal $(N_0, h_0) \in \chi$. Se mostrarmos que $N_0 = M$ então a gr-injetividade de I estará provada. Suponha, por absurdo, que $N_0 \subsetneq M$ e tome $x \in \mathrm{h}(M) \setminus N_0$. Considere o ideal à direita graduado $U := x^{-1}N_0 = \{r \in R : xr \in N_0\}$ e defina

$$\begin{aligned} \varphi : U &\longrightarrow I \\ r &\longmapsto h_0(xr). \end{aligned}$$

Note que $\varphi \in \mathrm{HOM}_R(U, I)_\gamma$, onde $\gamma := \deg x$. Por (3), existe $\psi \in \mathrm{HOM}_R(R, I)_\gamma$ estendendo φ. Considere agora o R-módulo à direita Γ-graduado $N_1 := N_0 + xR$ e

$$\begin{aligned} h_1 : \quad N_1 &\longrightarrow I \\ y + xr &\longmapsto h_0(y) + \psi(r). \end{aligned}$$

h_1 está bem definido pois se $y + xr = y' + xr'$ $(y, y' \in N_0, r, r' \in R)$ então $x(r - r') = y' - y \in N_0$ de onde obtemos

$$\begin{aligned} h_0(y') - h_0(y) &= h_0(y' - y) \\ &= h_0(x(r - r')) \\ &= \varphi(r - r') \\ &= \psi(r - r') \\ &= \psi(r) - \psi(r')\,. \end{aligned}$$

Claramente, h_1 é um homomorfismo de R-módulos à direita. De fato, h_1 é um gr-homomorfismo pois, para cada $\alpha \in \Gamma$, temos

$$h_1\left((N_1)_\alpha\right) = h_1\left((N_0)_\alpha + xR_{\gamma^{-1}\alpha}\right) \subseteq h_0\left((N_0)_\alpha\right) + \psi(R_{\gamma^{-1}\alpha}) \subseteq I_\alpha + I_{\gamma\gamma^{-1}\alpha} \subseteq I_\alpha.$$

Como $\operatorname{im} g \subseteq N_0$ e $h_1 = h_0$ em N_0, segue que $h_1 g = h_0 g = j$. Logo $(N_1, h_1) \in \chi$. Mas $N_0 \subsetneq N_1$ e $h_1|_{N_0} = h_0$ contrariam a maximalidade de (N_0, h_0). ∎

Temos a seguinte relação entre gr-injetividade e fidelidade em componentes homogêneas.

Proposição 2.5.7. *Sejam R um anel Γ-graduado, I um R-módulo à direita Γ-graduado, $\gamma \in \Gamma$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$. Temos:*

(1) *Se I é γ-fiel e $I(r(\gamma))$ é gr-injetivo então I_γ é um $R_{d(\gamma)}$-módulo injetivo.*

(2) *Se I é Δ_0-fiel e gr-injetivo então $I1_{\Delta_0}$ é um $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulo gr-injetivo.*

Demonstração. (1) Suponha que I é γ-fiel e $I(r(\gamma))$ é gr-injetivo. Vamos usar o Critério de Baer para mostrar que I_γ é injetivo. Seja K um ideal à direita de $R_{d(\gamma)}$ e $g : K \to I_\gamma$ um homomorfismo de $R_{d(\gamma)}$-módulos à direita. Então KR é um ideal à direita graduado de R e, pela Proposição 1.8.13(1) (para $M = KR$, $N = I$ e $\alpha = d(\gamma)$),

$$\begin{aligned} \tilde{g} : KR &\longrightarrow I(r(\gamma)) \\ \sum_i k_i r_i &\longmapsto \sum_i g(k_i) r_i \end{aligned}$$

é um homomorfismo de R-módulos à direita de grau γ. Como $I(r(\gamma))$ é gr-injetivo, temos do Teorema 2.5.6 que $\tilde{g}$ se estende a um $h \in \mathrm{HOM}_R(R, I(r(\gamma)))_\gamma$. Como $h(R_{d(\gamma)}) \subseteq I_\gamma$, segue que $h|_{R_{d(\gamma)}} : R_{d(\gamma)} \to I_\gamma$ é uma extensão de g, como queríamos.

(2) Suponha que I é Δ_0-fiel e gr-injetivo. Vamos usar o Teorema 2.5.6 para mostrar que $I1_{\Delta_0}$ é gr-injetivo como $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulo. Seja K um ideal à direita graduado de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ e $g : K \to I1_{\Delta_0}$ um homomorfismo de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulos à direita de grau $\sigma \in \Gamma$. Então KR é um ideal à direita graduado de R e, pela Proposição 1.8.13(2) (para $M = KR$ e $N = I$),

$$\begin{aligned} \tilde{g} : KR &\longrightarrow I \\ \sum_i k_i r_i &\longmapsto \sum_i g(k_i) r_i \end{aligned}$$

é um homomorfismo de R-módulos à direita de grau σ. Como I é gr-injetivo, temos do Teorema 2.5.6 que $\tilde{g}$ se estende a um $h \in \mathrm{HOM}_R(R, I)_\sigma$. Como $h(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}) \subseteq I1_{\Delta_0}$, segue que $h|_{1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}} : 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0} \to I1_{\Delta_0}$ é uma extensão de g. Pelo Teorema 2.5.6, $I1_{\Delta_0}$ é gr-injetivo. ■

Durante o restante desta seção, fixamos um anel Γ-graduado R e queremos ver que todo R-módulo à direita Γ-graduado é submódulo graduado de um R-módulo gr-injetivo. Vamos seguir o roteiro de (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Subsection 4.1).

Considere o anel Γ-graduado

$$\mathcal{Z} := \bigoplus_{e \in \Gamma_0} \mathbb{Z}$$

e lembre que todo grupo abeliano Γ-graduado é um $\mathcal{Z}$-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado, como vimos na Observação 1.4.3. Considere também o grupo abeliano

$$D := \bigoplus_{e \in \Gamma_0} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Γ-graduado via

$$D_\gamma = \begin{cases} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \text{se } \gamma \in \Gamma_0 \\ 0, & \text{se } \gamma \notin \Gamma_0 \end{cases}.$$

Dado um R-módulo à direita Γ-graduado M, obtemos um R-módulo à esquerda Γ-graduado

$$M^* := \mathrm{HOM}_{\mathcal{Z}}({}_{\mathcal{Z}}M,\ {}_{\mathcal{Z}}D)$$

via

$$\begin{aligned} ag : M &\to D \\ m &\mapsto g(ma) \end{aligned}$$

para todos $a \in R, g \in \mathrm{HOM}_{\mathcal{Z}}({}_{\mathcal{Z}}M,\ {}_{\mathcal{Z}}D)$ (veja Cala *et al.*, 2022, Proposition 17(a)).

Analogamente, dado um R-módulo à esquerda Γ-graduado N, obtemos um R-módulo à direita Γ-graduado

$$N^* := \mathrm{HOM}_{\mathcal{Z}}(N_{\mathcal{Z}}, D_{\mathcal{Z}})$$

via

$$\begin{aligned} ga : N &\to D \\ n &\mapsto g(an) \end{aligned}$$

para todos $a \in R, g \in \mathrm{HOM}_{\mathcal{Z}}(N_{\mathcal{Z}}, D_{\mathcal{Z}})$ (veja Cala *et al.*, 2022, Proposition 17(b)).

A principal propriedade de D que estamos interessados é a seguinte

Lema 2.5.8. *D é um $\mathcal{Z}$-módulo à direita (resp. à esquerda) gr-injetivo.*

Demonstração. Vamos usar o nosso Critério de Baer para provar o caso à direita. O caso à esquerda segue de $D^{op} = D$, já que $\mathrm{supp}(D) = \Gamma_0$. Sejam U ideal à direita graduado não nulo de $\mathcal{Z}$, $\gamma \in \Gamma$ e $\varphi \in \mathrm{HOM}_{\mathcal{Z}}(U, D)_\gamma$. Note que $U = \bigoplus_{e\in\Gamma_0} U_e$ e $\varphi(U_e) \subseteq D_{\gamma e}$ para cada $e \in \Gamma_0$. Logo, podemos supor $\gamma \in \Gamma_0$ e $U_\gamma \neq 0$ (caso contrário, $\varphi = 0$). Como U_e é ideal de $\mathbb{Z}$ para todo $e \in \Gamma_0$, tome $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $U_\gamma = n\mathbb{Z}$. Seja $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\overline{q} = \varphi(n) \in D_\gamma$. Então $\varphi|_{U_\gamma}$ se estende a

$$\begin{aligned} \psi_\gamma : \mathcal{Z}_\gamma &\to D_\gamma \\ 1 &\mapsto \overline{q/n}. \end{aligned}$$

Como $\varphi(U_e) = 0$ para todo $e \neq \gamma$, podemos estender ψ_γ a um $\psi \in \mathrm{HOM}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{Z}, D)_\gamma$ fazendo $\psi = 0$ nas demais componentes homogêneas de $\mathcal{Z}$. ■

Os dois resultados a seguir lembram propriedades do espaço dual e operador transposto em Álgebra Linear.

Lema 2.5.9. *Se M é um R-módulo à direita Γ-graduado então*

$$\begin{aligned} \Phi : M &\longrightarrow (M^*)^* \\ m &\longmapsto \Phi(m) : M^* \to D \\ &\qquad\qquad g \mapsto g(m) \end{aligned}$$

é um gr-homomorfismo injetor de R-módulos à direita Γ-graduados.

Demonstração. Primeiramente note que se $\alpha, \gamma \in \Gamma$ e $m \in M_\gamma$, $g \in (M^*)_\alpha$ então

$$\Phi(m)(g) = g(m) \in D_{\gamma\alpha},$$

de onde $\Phi(m) \in ((M^*)^*)_\gamma$. Logo, Φ está bem definido e é um gr-homomorfismo de grupos aditivos Γ-graduados.

Φ é homomorfismo de R-módulos à direita pois, para todos $m \in M$, $a \in R$ e $g \in M^*$ temos

$$\Phi(ma)(g) = g(ma) = (ag)(m) = \Phi(m)(ag) = (\Phi(m)a)(g).$$

Por fim, vejamos que Φ é injetor. Sejam $m \in \mathrm{h}(M) \setminus 0$ e $\gamma := \deg(m)$. Se m tem ordem finita $z \in \mathbb{N}$ no grupo abeliano M, defina $q = \dfrac{1}{z}$. Caso contrário, defina $q = \dfrac{1}{2}$. Considere o homomorfismo

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z}m &\longrightarrow D_{r(\gamma)} \\ m &\longmapsto \overline{q} \end{aligned}$$

que é um elemento de $\mathrm{HOM}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}m, {}_{\mathbb{Z}}D)_{\gamma^{-1}}$. Pelo Lema 2.5.8, g se estende a um $g' \in (M^*)_{\gamma^{-1}}$. Então

$$\Phi(m)(g') = g'(m) = \overline{q} \neq 0$$

nos diz que $\Phi(m) \neq 0$. ∎

Lema 2.5.10. *Se $\varphi : N \longrightarrow P$ é um gr-homomorfismo sobrejetor entre R-módulos à esquerda Γ-graduados então*

$$\begin{aligned} \varphi^* : P^* &\longrightarrow N^* \\ g &\longmapsto \varphi^*(g) : N \to D \\ &\qquad\qquad n \mapsto g(\varphi(n)) \end{aligned}$$

é um gr-homomorfismo injetor de R-módulos à direita Γ-graduados.

Demonstração. Sejam $\alpha, \gamma \in \Gamma$ e $n \in N_\alpha$, $g \in (P^*)_\gamma$. Então

$$\varphi^*(g)(n) = g(\varphi(n)) \subseteq g(P_\alpha) \subseteq D_{\gamma\alpha},$$

de onde $\varphi^*(g) \in (N^*)_\gamma$. Assim, φ^* está bem definido e é um gr-homomorfismo de grupos aditivos Γ-graduados.

φ^* é homomorfismo de R-módulos à direita pois, para todos $n \in N$, $a \in R$ e $g \in P^*$ temos

$$\varphi^*(ga)(n) = (ga)(\varphi(n)) = g(a\varphi(n)) = g(\varphi(an)) = \varphi^*(g)(an) = (\varphi^*(g)a)(n).$$

Por fim, vejamos que φ^* é injetor. Seja $0 \neq g \in P^*$. Tome $p \in P$ tal que $g(p) \neq 0$ e $n \in N$ tal que $p = \varphi(n)$. Então

$$\varphi^*(g)(n) = g(\varphi(n)) = g(p) \neq 0.$$

Logo, $\varphi^*(g) \neq 0$. ∎

Damos agora o principal passo em direção ao último objetivo desta seção.

Proposição 2.5.11. *Se F é um R-módulo à esquerda Γ-graduado pseudo-livre então F^* é R-módulo à direita gr-injetivo.*

Demonstração. Vamos usar o Critério de Baer (Teorema 2.5.6). Sejam U um ideal à direita graduado de R, $\gamma \in \Gamma$ e $\varphi \in \mathrm{HOM}_R(U, F^*)_\gamma$.

Seja $\{x_j : j \in J\}$ uma pseudo-base de F. Para cada $j \in J$, seja $\sigma_j := \deg(x_j)$. Considere o subgrupo aditivo Γ-graduado UF de F. Temos bem definido o seguinte homomorfismo de grupos aditivos

$$\begin{aligned} g: \qquad UF &\longrightarrow D \\ \sum_{j \in J} u_j x_j &\longmapsto \sum_{j \in J} \varphi(u_j)(x_j) \qquad \left((u_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} U1_{r(\sigma_j)} \right). \end{aligned}$$

Note que, para cada $j \in J$, $u_j \in U1_{r(\sigma_j)}$ e $\alpha \in \Gamma$, temos

$$\deg(u_j) = \alpha\sigma_j^{-1} \Longrightarrow \varphi(u_j) \in (F^*)_{\gamma\alpha\sigma_j^{-1}} \Longrightarrow \varphi(u_j)(x_j) \in D_{\gamma\alpha\sigma_j^{-1}\sigma_j} = D_{\gamma\alpha}.$$

Portanto, $g((UF)_\alpha) \subseteq D_{\gamma\alpha}$ para todo $\alpha \in \Gamma$. Logo, $g \in \mathrm{HOM}_{\mathcal{Z}}(UF, D_{\mathcal{Z}})_\gamma$. Pela gr-injetividade de $D_{\mathcal{Z}}$ (Lema 2.5.8), existe $g' \in \mathrm{HOM}_{\mathcal{Z}}(F, D_{\mathcal{Z}})_\gamma = (F^*)_\gamma$ estendendo g. Podemos então considerar o seguinte homomorfismo de grau γ entre R-módulos à direita

$$\begin{aligned} \psi : R &\longrightarrow F^* \\ a &\longmapsto g'a\,. \end{aligned}$$

Para todos $u \in U$, $j \in J$ e $a_j \in R1_{r(\sigma_j)}$ temos

$$\psi(u)(a_j x_j) = (g'u)(a_j x_j) = g'(ua_j x_j) = \varphi(ua_j)(x_j) = ((\varphi(u)a_j)(x_j) = \varphi(u)(a_j x_j).$$

Logo, $\psi(u) = \varphi(u)$ para todo $u \in U$, ou seja, ψ estende φ. ■

Teorema 2.5.12. *Se M é R-módulo à direita Γ-graduado então M é submódulo graduado de um R-módulo à direita gr-injetivo.*

Demonstração. Considere o R-módulo à esquerda pseudo-livre

$$F := \bigoplus_{0 \neq g \in \mathrm{h}(M^*)} (\deg(g)^{-1})R$$

e o seguinte homomorfismo de R-módulos à esquerda:

$$\begin{aligned} \varphi : \qquad F &\longrightarrow M^* \\ (a_g)_g &\longmapsto \sum_g a_g g\,. \end{aligned}$$

φ é um gr-homomorfismo. De fato, para cada $\gamma \in \Gamma$, se $(a_g)_g \in F_\gamma$ então, para todo $0 \neq g \in \mathrm{h}(M^*)$, temos $a_g \in R_{\gamma \deg(g)^{-1}}$ e, portanto, $a_g g \in (M^*)_\gamma$. Vejamos que φ é sobrejetor. Dados $\sigma \in \operatorname{supp}(M^*)$ e $0 \neq h \in (M^*)_\sigma$, defina $(a_g)_g \in F_\sigma$ por

$$a_g = \begin{cases} 1_{r(\sigma)}, & \text{se } g = h \\ 0, & \text{se } g \neq h \end{cases}.$$

Então temos

$$h = 1_{r(\sigma)}h = \varphi((a_g)_g) \in \operatorname{im}\varphi.$$

Pelo Lema 2.5.10, obtemos um gr-homomorfismo de R-módulos à direita injetor $\varphi^* : (M^*)^* \longrightarrow F^*$. Então, tomando $\Phi : M \longrightarrow (M^*)^*$ como no Lema 2.5.9, obtemos um gr-homomorfismo de R-módulos à direita injetor $\varphi^* \circ \Phi : M \longrightarrow F^*$. Agora, basta aplicar a Proposição 2.5.11 a qual nos diz que F^* é R-módulo à direita gr-injetivo. ■

Observação 2.5.13. Pelo Teorema 2.5.12, se N é um R-módulo à esquerda Γ-graduado então N^{op} é submódulo graduado de um R^{op} módulo à direita Γ-graduado gr-injetivo. Ou seja, todo R-módulo à esquerda Γ-graduado é submódulo graduado de um R-módulo à esquerda gr-injetivo. ■

Vale também citar a seguinte caracterização de gr-injetividade que segue do Teorema 2.5.12 e cuja prova é baseada na do caso não graduado (Goodearl e Warfield, 2004, Corollary 5.5).

Corolário 2.5.14. *Seja M um R-módulo à direita Γ-graduado. Então M é gr-injetivo se, e somente se, M é somando direto graduado de todo R-módulo à direita Γ-graduado que o contém como submódulo graduado.*

Demonstração. Suponha que M é submódulo graduado de certo R-módulo Γ-graduado X. Se M é gr-injetivo então o gr-homomorfismo identidade $M \to M$ se estende a um gr-homomorfismo $g : X \to M$. Daí obtemos $X = M \oplus \ker g$.

Reciprocamente, suponha que M é somando direto graduado de todo R-módulo à direita Γ-graduado que o contém. Usando o Teorema 2.5.12, tome I um R-módulo à direita gr-injetivo do qual M é submódulo graduado. Pela hipótese, M é somando direto graduado de I. Pela Proposição 2.5.4, M é gr-injetivo. ■

2.6 Gr-essencialidade

Definição 2.6.1. Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. Dizemos que N é *gr-essencial* em M (ou M é *extensão gr-essencial* de N) e denotamos por $N \leq_{\text{gr-ess}} M$ se $N \cap X \neq 0$ para todo submódulo graduado não nulo X de M. Se I é um ideal à direita graduado de R e $I_R \leq_{\text{gr-ess}} R_R$, dizemos que I é um *ideal à direita gr-essencial* de R. Se para todo P satisfazendo $N \leq_{\text{gr-ess}} P \leq_{\text{gr}} M$ tivermos $P = N$, diremos que N é *gr-essencialmente fechado em M*. Um R-módulo à direita Γ-graduado que não possui extensões gr-essenciais próprias é chamado *gr-essencialmente fechado.*

Observação 2.6.2. Note que $N \leq_{\text{gr-ess}} M$ se, e somente se, para todo $0 \neq m \in \mathrm{h}(M)$ existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq mr \in \mathrm{h}(N)$. De fato, se $N \leq_{\text{gr-ess}} M$ então para todo

$0 \neq m \in \mathrm{h}(M)$ temos $N \cap mR \neq 0$. E, reciprocamente, se para todo $0 \neq m \in \mathrm{h}(M)$ existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq mr \in \mathrm{h}(N)$ então $N \cap mR \neq 0$ para todo $0 \neq m \in \mathrm{h}(M)$ e, portanto, $N \cap X \neq 0$ para todo submódulo graduado não nulo X de M. ∎

Segue imediatamente que

Lema 2.6.3. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. São equivalentes:*

(1) $N \leq_{\text{gr-ess}} M$.

(2) $N(\sigma) \leq_{\text{gr-ess}} M(\sigma)$ *para todo* $\sigma \in \Gamma$.

(3) $N(e) \leq_{\text{gr-ess}} M(e)$ *para todo* $e \in \Gamma_0$.

Demonstração. (1) $\implies$ (2): Suponha $N \leq_{\text{gr-ess}} M$ e seja $\sigma \in \Gamma$ tal que $M(\sigma) \neq 0$. Dado, $0 \neq m \in \mathrm{h}(M(\sigma))$ existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq mr \in \mathrm{h}(N)$. Mas $m \in M(\sigma)$ implica $mr \in N \cap M(\sigma) = N(\sigma)$. Logo, $N(\sigma) \leq_{\text{gr-ess}} M(\sigma)$.

(2) $\implies$ (3): Imediato.

(3) $\implies$ (1): Suponha que $0 \neq m \in \mathrm{h}(M)$. Então existe $e \in \Gamma_0$ tal que $m \in M(e)$. Como $N(e) \leq_{\text{gr-ess}} M(e)$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq mr \in \mathrm{h}(N(e)) \subseteq \mathrm{h}(N)$. Portanto, $N \leq_{\text{gr-ess}} M$. ∎

Corolário 2.6.4. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado gr-essencial de M. Então $\Gamma_0'(N) = \Gamma_0'(M)$.*

Demonstração. Para cada $e \in \Gamma_0$, temos do Lema 2.6.3 que $N(e) \leq_{\text{gr-ess}} M(e)$ e, portanto, $N(e) = 0$ se, e somente se, $M(e) = 0$. ∎

Também temos a seguinte caracterização de gr-essencialidade.

Proposição 2.6.5. *Seja R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. Então $N \leq_{\text{gr-ess}} M$ se, e somente se, para todo $0 \neq m \in M$ existe $r \in R$ tal que $0 \neq mr \in N$. Em particular, quando R tem unidade, $N \leq_{\text{gr-ess}} M$ se, e somente se, N é um submódulo essencial de M.*

Demonstração. Uma das implicações segue da Observação 2.6.2.

Suponha então que $N \leq_{\text{gr-ess}} M$. Vamos seguir a ideia de (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Proposition 15 (p. 542)). Seja $0 \neq m \in M$. Escreva $m = m_1 + \cdots m_t$ para certos $0 \neq m_i \in M_{\gamma_i}$ $(i = 1, ..., t)$ com $\gamma_1, ..., \gamma_t \in \Gamma$ dois a dois distintos. É suficiente mostrarmos que, para todo $1 \leq k \leq t$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq (m_1 + \cdots + m_k)r \in N$. Para isso, usamos indução em k. O caso $k = 1$ segue da Observação 2.6.2 pois $m_1 \in \mathrm{h}(M)$. Suponha agora que $1 < k \leq t$ é tal que vale a afirmação para $k - 1$. Pela hipótese de indução, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq (m_1 + \cdots + m_{k-1})r \in N$. Se $m_k r = 0$ então obtemos a afirmação para k. Caso contrário, existe $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq m_k r r' \in \mathrm{h}(N)$ e, neste caso,

$$(m_1 + \cdots + m_k)rr' = (m_1 + \cdots + m_{k-1})rr' + m_k rr' \in N \setminus \{0\}.$$ ∎

A seguir, definiremos essencialidade em categorias pré-aditivas.

Definição 2.6.6. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva e $\mathcal{I}$ um ideal à direita (resp. à esquerda) de $\mathcal{C}$. Diremos que $\mathcal{I}$ é um *ideal à direita* (resp. *à esquerda*) *essencial* de $\mathcal{C}$ se, para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$ e $g \in \mathcal{C}(A, B)$ (resp. $g \in \mathcal{C}(B, A)$), existem $D \in \mathcal{C}_0$ e $h \in \mathcal{C}(D, A)$ (resp. $h \in \mathcal{C}(A, D)$) tais que $0 \neq g \circ h \in \mathcal{I}(D, B)$ (resp. $0 \neq h \circ g \in \mathcal{I}(B, D)$).

Observação 2.6.7. É fácil ver que se $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena e $\mathcal{I}$ é um ideal à direita (resp. à esquerda) essencial de $\mathcal{C}$ então $I := \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}_0\times\mathcal{C}_0} \mathcal{I}(B, A)$ é um ideal à direita (resp. à esquerda) gr-essencial de $R[\mathcal{C}]$. Reciprocamente, se $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena e I é um ideal à direita (resp. à esquerda) gr-essencial de $R[\mathcal{C}]$ então temos um ideal à direita (resp. esquerda) essencial $\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}$ onde $\mathcal{I}(A, B) := I_{(B,A)}$ para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$. ■

Os próximos quatro resultados trazem propriedades de gr-essencialidade semelhante as de essencialidade. As provas seguem de perto as do contexto não graduado (Goodearl e Warfield, 2004, Chapter 5).

Proposição 2.6.8. *Seja R um anel Γ-graduado.*

(1) *Sejam M, N e P três R-módulos à direita Γ-graduados tais que $P \leq_{\text{gr}} N \leq_{\text{gr}} M$. Então $P \leq_{\text{gr-ess}} M$ se, e somente se, $P \leq_{\text{gr-ess}} N$ e $N \leq_{\text{gr-ess}} M$.*

(2) *Para cada $i = 1, ..., n$, seja M_i um R-módulo à direita Γ-graduado e N_i um submódulo graduado de M_i. Se $N_i \leq_{\text{gr-ess}} M_i$ para todo $i = 1, ..., n$ então $N_1 \cap \cdots \cap N_n \leq_{\text{gr-ess}} M_1 \cap \cdots \cap M_n$.*

(3) *Para cada $i \in I$, seja M_i um R-módulo à direita Γ-graduado e N_i um submódulo graduado de M_i. Se $N_i \leq_{\text{gr-ess}} M_i$ para todo $i \in I$ então $\bigoplus_{i\in I} N_i \leq_{\text{gr-ess}} \bigoplus_{i\in I} M_i$.*

(4) *Sejam M um R-módulo à direita Γ-graduado e $\{N_i : i \in I\}, \{M_i : i \in I\}$ duas famílias de submódulos graduados de M. Se $\sum_{i\in I} N_i$ é direta e $N_i \leq_{\text{gr-ess}} M_i$ para todo $i \in I$, então $\sum_{i\in I} M_i$ é direta e $\bigoplus_{i\in I} N_i \leq_{\text{gr-ess}} \bigoplus_{i\in I} M_i$.*

Demonstração. (1) Se $P \leq_{\text{gr-ess}} M$ então segue imediatamente da definição que $P \leq_{\text{gr-ess}} N$ e $N \leq_{\text{gr-ess}} M$.

Suponha então que $P \leq_{\text{gr-ess}} N$ e $N \leq_{\text{gr-ess}} M$. Seja X um submódulo graduado não nulo de M. Como $N \leq_{\text{gr-ess}} M$, temos $N \cap X \neq 0$. Portanto $N \cap X$ é um submódulo graduado não nulo de N e segue de $P \leq_{\text{gr-ess}} N$ que $P \cap N \cap X \neq 0$. Em particular, $P \cap X \neq 0$. Logo, $P \leq_{\text{gr-ess}} M$.

(2) Por indução, basta provar o caso $n = 2$. Suponha que $N_1 \leq_{\text{gr-ess}} M_1$, $N_2 \leq_{\text{gr-ess}} M_2$ e seja X um submódulo graduado não nulo de $M_1 \cap M_2$. Em particular, $0 \neq X \leq_{\text{gr}} M_2$ e segue, de $N_2 \leq_{\text{gr-ess}} M_2$, que temos $N_2 \cap X \neq 0$. Como $N_1 \leq_{\text{gr-ess}} M_1$ e $N_2 \cap X$ é um submódulo graduado não nulo de M_1, temos $N_1 \cap N_2 \cap X \neq 0$. Logo, $N_1 \cap N_2 \leq_{\text{gr-ess}} M_1 \cap M_2$.

(3) Começamos com o caso $I = \{1, 2\}$. Suponha que $N_1 \leq_{\text{gr-ess}} M_1$, $N_2 \leq_{\text{gr-ess}} M_2$ e $0 \neq m \in \mathrm{h}(M_1 \oplus M_2)$. Então $m = (m_1, m_2)$ com $m_1 \in \mathrm{h}(M_1)$ e $m_2 \in \mathrm{h}(M_2)$. Se $m_1 = 0$, temos $0 \neq m \in N_1 \oplus M_2$. Se $m_1 \neq 0$ então, como $N_1 \leq_{\text{gr-ess}} M_1$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq m_1 r \in N_1$. Dessa forma, $0 \neq mr \in N_1 \oplus M_2$. Logo, $N_1 \oplus M_2 \leq_{\text{gr-ess}} M_1 \oplus M_2$. De forma análoga, obtem-se que $M_1 \oplus N_2 \leq_{\text{gr-ess}} M_1 \oplus M_2$. Por (2), temos

$$N_1 \oplus N_2 = (N_1 \oplus M_2) \cap (M_1 \oplus N_2) \leq_{\text{gr-ess}} M_1 \oplus M_2 \,.$$

Por indução, obtemos o resultado para I finito. Agora suponha que I é um conjunto qualquer e $N_i \leq_{\text{gr-ess}} M_i$ para todo $i \in I$. Seja X um submódulo graduado não nulo de $\bigoplus_{i \in I} M_i$. Então existe um subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $X \cap \left(\bigoplus_{i \in J} M_i \right) \neq 0$. Como $\bigoplus_{i \in J} N_i \leq_{\text{gr-ess}} \bigoplus_{i \in J} M_i$, temos $\left(\bigoplus_{i \in J} N_i \right) \cap X \neq 0$. Logo, $\bigoplus_{i \in I} N_i \leq_{\text{gr-ess}} \bigoplus_{i \in I} M_i$.

(4) Suponha que $\sum_{i \in I} N_i$ é direta e $N_i \leq_{\text{gr-ess}} M_i$ para todo $i \in I$. Por (3), só precisamos mostrar que, para todo subconjunto finito $J \subseteq I$, a soma $\sum_{i \in J} M_i$ é direta. Usaremos indução em $|J|$. Para o caso $J = \{1, 2\}$, segue de (2) que $0 \neq N_1 \cap N_2 \leq_{\text{gr-ess}} M_1 \cap M_2$ e, portanto, $M_1 \cap M_2 = 0$. Agora, suponha que $J = \{1, ..., n\}$ para algum $n > 2$ e a soma $\sum_{i=1}^{n-1} M_i$ é direta. Por (3), temos $\bigoplus_{i=1}^{n-1} N_i \leq_{\text{gr-ess}} \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$. Por (2), $0 = \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} N_i \right) \cap N_n \leq_{\text{gr-ess}} \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \right) \cap M_n$ e segue que $\left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \right) \cap M_n = 0$, ou seja, $\sum_{i=1}^{n} M_i$ é direta. ■

Proposição 2.6.9. *Sejam R um anel Γ-graduado, M e N dois R-módulos à direita Γ-graduados, $g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ e P um submódulo graduado gr-essencial de N.*

1. *Se $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, N)$ ou $g \in \mathrm{HOM}_R(M, N)_\gamma$ para algum $\gamma \in \Gamma$ então $g^{-1}(P) \leq_{\text{gr-ess}} M$.*
2. *Se $g \in \mathrm{HOM}_R(M, N)$ então $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} g_\gamma^{-1}(P) \leq_{\text{gr-ess}} M$.*
3. *Para todo $y \in \mathrm{h}(N)$, $y^{-1} P \leq_{\text{gr-ess}} R_R$.*
4. *Para todos $\gamma \in \Gamma$ e $y \in N_\gamma$, $\{r \in R(d(\gamma)) : yr \in P\} \leq_{\text{gr-ess}} R(d(\gamma))$.*

Demonstração. (1) Suponha que $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, N)$ ou $g \in \mathrm{HOM}_R(M, N)_\gamma$ para algum $\gamma \in \Gamma$. Note que, em ambos os casos, $g^{-1}(P)$ é um submódulo graduado de M. Seja X um submódulo graduado não nulo de M. Se $g(X) = 0$ então já temos $g^{-1}(P) \cap X = X \neq 0$. Caso contrário, $P \leq_{\text{gr-ess}} N$ implica que $P \cap g(X) \neq 0$ e obtemos $g^{-1}(P) \cap X \neq 0$. Logo, $g^{-1}(P) \leq_{\text{gr-ess}} M$.

(2) Primeiramente note que, para $g \in \mathrm{HOM}_R(M, N)$, $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} g_\gamma^{-1}(P) = \bigcap_{\gamma \in \mathrm{supp}(g)} g_\gamma^{-1}(P)$ é uma intersecção finita. Logo, pela Proposição 2.6.8(2), basta mostrar que

$g_\gamma^{-1}(P) \leq_{\text{gr-ess}} M$ para todo $\gamma \in \operatorname{supp}(g)$. Mas isto segue de (1).

(3) Segue do item (1) pois, para cada $\gamma \in \Gamma$ e $y \in N_\gamma$, temos que $\{r \in R : yr \in P\} = g^{-1}(P)$ onde

$$\begin{aligned} g : R &\longrightarrow N \\ r &\longmapsto yr\,. \end{aligned}$$

(4) Segue de (3) e do Lema 2.6.3 pois $\{r \in R(d(\gamma)) : yr \in P\} = (y^{-1}P)(d(\gamma))$. ■

Proposição 2.6.10. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M.*

(1) *A família $\{Y \leq_{\text{gr}} M : N \cap Y = 0\}$ possui algum elemento maximal P.*

(2) *Se P é como no item anterior então $N \oplus P \leq_{\text{gr-ess}} M$ e $\dfrac{N \oplus P}{P} \leq_{\text{gr-ess}} \dfrac{M}{P}$.*

(3) *N é somando direto graduado de um submódulo gr-essencial de M.*

Demonstração. O item (1) é uma fácil aplicação do Lema de Zorn. O item (3) segue imediatamente de (2).

Mostremos que vale (2). Suponha que P é maximal em $\{Y \leq_{\text{gr}} M : N \cap Y = 0\}$ e X é um submódulo graduado de M tal que $(N \oplus P) \cap X = 0$. Então $N \cap (P \oplus X) = 0$ e segue da maximalidade de P que $P \oplus X = P$, ou seja, $X = 0$. Logo, $N \oplus P \leq_{\text{gr-ess}} M$. Suponha agora que C é um submódulo graduado não nulo de $\dfrac{M}{P}$. Então existe X submódulo graduado de M contendo P propriamente tal que $C = \dfrac{X}{P}$. Pela maximalidade de P temos que $N \cap X \neq 0$. Portanto, $\dfrac{N \oplus P}{P} \cap \dfrac{X}{P} \neq 0$. Logo, $\dfrac{N \oplus P}{P} \leq_{\text{gr-ess}} \dfrac{M}{P}$. ■

Corolário 2.6.11. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Então M é gr-semissimples se, e somente se, M não possui submódulos gr-essenciais próprios.*

Demonstração. Se M é gr-semissimples então, por (Cala *et al.*, 2022, Proposition 56), todo submódulo graduado de M é um somando direto graduado de M. Logo, o único submódulo gr-essencial de M é M.

Reciprocamente, se M não possui submódulos gr-essenciais próprios então o item (3) da Proposição 2.6.10 nos diz que todo submódulo graduado de M é um somando direto graduado de M. Logo, M é gr-semissimples por (Cala *et al.*, 2022, Proposition 56). ■

Encerramos esta seção relacionando a gr-essencialidade com fidelidade em componentes homogêneas. As provas dos resultados a seguir são semelhantes às do caso graduado por grupo (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, p.543).

Proposição 2.6.12. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. Suponha que M é γ-fiel para certo $\gamma \in \Gamma$. Temos que:*

(1) *$N(r(\gamma))$ é gr-essencial em $M(r(\gamma))$ como R-módulos se, e somente se, N_γ é essencial em M_γ como $R_{d(\gamma)}$-módulos.*

(2) *Se N é gr-essencial em M como R-módulos então N_γ é essencial em M_γ como $R_{d(\gamma)}$-módulos.*

Demonstração. (1) Suponha que $N(r(\gamma)) \leq_{\text{gr-ess}} M(r(\gamma))$ e seja K um $R_{d(\gamma)}$-submódulo à direita não nulo de M_γ. Então KR um R-submódulo graduado não nulo de $M(r(\gamma))$ e segue que $N(r(\gamma)) \cap KR \neq 0$. Pelo Lema 1.8.9(1), temos $0 \neq (N(r(\gamma)) \cap KR)_\gamma = N_\gamma \cap K$. Portanto, N_γ é $R_{d(\gamma)}$-submódulo essencial de M_γ.

Reciprocamente, suponha que N_γ é essencial em M_γ como $R_{d(\gamma)}$-módulos e seja P um R-submódulo graduado não nulo de $M(r(\gamma))$. Pelo Lema 1.8.9(1), temos $P_\gamma \neq 0$. Então P_γ é um $R_{d(\gamma)}$-submódulo à direita não nulo de M_γ e segue que $N_\gamma \cap P_\gamma \neq 0$. Logo, $N(r(\gamma)) \cap P \neq 0$ e, portanto, $N(r(\gamma)) \leq_{\text{gr-ess}} M(r(\gamma))$.

(2) Segue de (1) e do Lema 2.6.3. ■

Corolário 2.6.13. *Sejam $e \in \Gamma_0$ e R um anel Γ-graduado e-fiel à direita. Sejam I ideal à direita graduado de R e K ideal à direita de R_e. Então*

(1) *$I(e) \leq_{\text{gr-ess}} R(e)$ se, e somente se, I_e é ideal à direita essencial de R_e.*

(2) *K é ideal à direita essencial de R_e se, e somente se, $KR \leq_{\text{gr-ess}} R(e)$ se, e somente se, $KR \oplus R(\Gamma_0 \setminus \{e\})$ é ideal à direita gr-essencial de R.*

Demonstração. O item (1) segue imediatamente da Proposição 2.6.12.

A primeira equivalência de (2) segue de (1) pois $K = (KR)_e$ e $KR(e) = KR$.

A segunda equivalência de (2) segue do Lema 2.6.3. ■

Em (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Note 4 (p. 543)) se vê como a hipótese de e-fidelidade é imprescindível no Corolário 2.6.13 já no caso graduado por grupo.

Proposição 2.6.14. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. Suponha que M é Δ_0-fiel para certo $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$. Então N é gr-essencial em M como R-módulos se, e somente se, $N1_{\Delta_0}$ é gr-essencial em $M1_{\Delta_0}$ como $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulos.*

Demonstração. Suponha que $N \leq_{\text{gr-ess}} M$ e seja K um $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-submódulo à direita graduado não nulo de $M1_{\Delta_0}$. Então KR um R-submódulo graduado não nulo de M e segue que $N \cap KR \neq 0$. Pelo Lema 1.8.9(2), temos $0 \neq (N \cap KR)1_{\Delta_0} = N1_{\Delta_0} \cap K$. Portanto, $N1_{\Delta_0}$ é $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-submódulo gr-essencial de $M1_{\Delta_0}$.

Reciprocamente, suponha que $N1_{\Delta_0}$ é gr-essencial em $M1_{\Delta_0}$ como $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulos e seja P um R-submódulo graduado não nulo de M. Pelo Lema 1.8.9(2), temos que $P1_{\Delta_0}$ é um $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-submódulo à direita graduado não nulo de $M1_{\Delta_0}$. Portanto, $N1_{\Delta_0} \cap P1_{\Delta_0} \neq 0$ e segue que $N \cap P \neq 0$. Logo, $N \leq_{\text{gr-ess}} M$. ■

Corolário 2.6.15. *Sejam R anel Γ-graduado e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$ tal que $R(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel. Sejam I ideal à direita graduado de R e K ideal à direita graduado de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$. Então*

(1) *$I(\Delta_0) \leq_{\text{gr-ess}} R(\Delta_0)$ se, e somente se, $1_{\Delta_0}I1_{\Delta_0}$ é ideal à direita gr-essencial de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$.*

(2) *K é ideal à direita gr-essencial de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ se, e somente se, $KR \leq_{\text{gr-ess}} R(\Delta_0)$ se, e somente se, $KR \oplus R(\Gamma_0 \setminus \Delta_0)$ é ideal à direita gr-essencial de R.*

Demonstração. O item (1) segue imediatamente da Proposição 2.6.14 pois $1_{\Delta_0}I1_{\Delta_0} = I(\Delta_0)1_{\Delta_0}$.

A primeira equivalência de (2) segue de (1) pois $K = 1_{\Delta_0}(KR)1_{\Delta_0}$ e $(KR)(\Delta_0) = KR$.

A segunda equivalência de (2) segue do Lema 2.6.3. ■

Corolário 2.6.16. *Sejam R anel Γ-graduado e $e \in \Gamma_0$ tal que $R(e)$ é $\{e\}$-fiel. Sejam I ideal à direita graduado de R e K ideal à direita graduado de 1_eR1_e. Então*

(1) *$I(e) \leq_{\text{gr-ess}} R(e)$ se, e somente se, 1_eI1_e é ideal à direita gr-essencial de 1_eR1_e.*

(2) *K é ideal à direita gr-essencial de 1_eR1_e se, e somente se, $KR \leq_{\text{gr-ess}} R(e)$ se, e somente se, $KR \oplus R(\Gamma_0 \setminus \{e\})$ é ideal à direita gr-essencial de R.* ■

Combinando as Proposições 2.6.12 e 2.6.14 temos o seguinte

Corolário 2.6.17. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. Suponha que $e \in \Gamma_0$, $\gamma \in e\Gamma e$ e M é γ-fiel. Denote $1_eN1_e := \bigoplus_{\sigma \in e\Gamma e} N_\sigma$. São equivalentes:*

(1) *$N(e)$ é gr-essencial em $M(e)$ como R-módulos Γ-graduados.*

(2) *1_eN1_e é gr-essencial em 1_eM1_e como 1_eR1_e-módulos $e\Gamma e$-graduados.*

(3) *N_γ é essencial em M_γ como R_e-módulos.*

Demonstração. Basta notar que M ser γ-fiel implica que $M(r(\gamma))$ é $\{d(\gamma)\}$-fiel e usar que $r(\gamma) = d(\gamma) = e$ e $1_eN1_e = N(e)1_e$. ■

Proposição 2.6.18. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado, N um submódulo graduado de M, $e \in \Gamma_0$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$.*

(1) *Se $N(e) \leq_{\text{gr-ess}} M(e)$ então, para todo $\gamma \in e\Gamma$ temos que N é γ-fiel $\iff$ M é γ-fiel.*

(2) *Se $N \leq_{\text{gr-ess}} M$ então N é Δ_0-fiel $\iff$ M é Δ_0-fiel.*

Demonstração. (1) Suponha que $N(e) \leq_{\text{gr-ess}} M(e)$, $\gamma \in e\Gamma$ e N é γ-fiel. Seja $0 \neq m \in \mathrm{h}(M(e))$. Como $N(e) \leq_{\text{gr-ess}} M(e)$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq mr \in \mathrm{h}(N(e))$. Como N é γ-fiel, existe $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq mrr' \in N_\gamma$. Logo, $rr' \in \mathrm{h}(R)$ é tal que $0 \neq mrr' \in M_\gamma$. Portanto, M é γ-fiel.

(2) Suponha que $N \leq_{\text{gr-ess}} M$ e N é Δ_0-fiel. Seja $0 \neq m \in \mathrm{h}(M)$. Como $N \leq_{\text{gr-ess}} M$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq mr \in \mathrm{h}(N)$. Como N é Δ_0-fiel, existe $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq mrr' \in N1_{\Delta_0}$. Logo, $rr' \in \mathrm{h}(R)$ é tal que $0 \neq mrr' \in M1_{\Delta_0}$. Portanto, M é Δ_0-fiel. ■

2.7 Envolvente gr-injetiva

Agora vamos em direção a obter a envolvente gr-injetiva de um módulo graduado. Nos basearemos no roteiro de (Lam, 1999, §3D).

Lema 2.7.1. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Então M é gr-injetivo se, e somente se, M não tem extensões gr-essenciais próprias.*

Demonstração. Suponha que M é gr-injetivo e seja E uma extensão gr-essencial de M. Pelo Corolário 2.5.14, M é somando direto graduado de E e, portanto, $M = E$.

Reciprocamente, suponha que M é gr-essencialmente fechado. Pelo Teorema 2.5.12, existe um R-módulo à direita gr-injetivo I tal que M é submódulo graduado de I. Pela Proposição 2.6.10, existe um submódulo graduado P de I tal que $\dfrac{M \oplus P}{P} \leq_{\text{gr-ess}} \dfrac{I}{P}$. Como $M \cong_{\text{gr}} \dfrac{M \oplus P}{P}$, segue que $I = M \oplus P$. Agora, segue da Proposição 2.5.4 que M é gr-injetivo. ■

Lema 2.7.2. *Sejam R um anel Γ-graduado, M, N dois R-módulos à direita Γ-graduados e E uma extensão gr-essencial de M. Se $g' : E \to N$ é um gr-homomorfismo tal que $g'|_M$ é injetor então g' é injetor. Em particular, se N é gr-injetivo então todo gr-homomorfismo injetor $g : M \to N$ se estende a um gr-homomorfismo injetor $g' : E \to N$.*

Demonstração. Se $g'|_M$ é injetor então, como $\ker g' \leq_{\text{gr}} E$, $M \cap \ker g' = 0$ e $M \leq_{\text{gr-ess}} E$ segue que $\ker g' = 0$. Se N é gr-injetivo então todo gr-homomorfismo $g : M \to N$ se estende a um $g' \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(E, N)$ e, pelo que acabamos de provar, se g é injetor então g' também é injetor. ■

Lema 2.7.3. *Sejam R um anel Γ-graduado, I um R-módulo à direita gr-injetivo e M um submódulo graduado de I. Então M possui uma extensão gr-essencial maximal entre todas as contidas em I. Além disso, tal extensão é maximal entre todas as extensões gr-essenciais de M.*

Demonstração. Considere o conjunto

$$\mathcal{F} := \{X \leq_{\text{gr}} I : M \leq_{\text{gr-ess}} X\}.$$

Pelo Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ possui um elemento maximal E. Suponha, por absurdo, que exista E'_R extensão gr-essencial de M tal que $E \subsetneq E'$. Pela Proposição 2.6.8(1), $E \leq_{\text{gr-ess}} E'$. Então, pelo Lema 2.7.2, a inclusão $E \hookrightarrow I$ se estende a um gr-homomorfismo injetor $g : E' \to I$. Logo, $E' \cong_{\text{gr}} g(E') \subseteq I$. Mas isto implica que $g(E')$ é submódulo graduado de I tal que $M \leq_{\text{gr-ess}} g(E')$ e $E \subsetneq g(E')$, uma contradição com a maximalidade de E em $\mathcal{F}$. Portanto, E é extensão gr-essencial maximal de M. ■

Teorema 2.7.4. *Sejam R um anel Γ-graduado, E um R-módulo à direita Γ-graduado e M um submódulo graduado de E. São equivalentes:*

(1) *E é extensão gr-essencial maximal de M.*

(2) *E é gr-injetivo e E é extensão gr-essencial de M.*

(3) *E é minimal entre os gr-injetivos dos quais M é submódulo graduado.*

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2): Se E é extensão gr-essencial maximal de M então, por transitividade da gr-essencialidade (Proposição 2.6.8(1)), E não possui extensões gr-essenciais próprias. Então E é gr-injetivo, pelo Lema 2.7.1.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Suponha que vale (2), M é submódulo graduado de um gr-injetivo I_R e $I \subseteq E$. Como E é gr-injetivo, segue do Corolário 2.5.14 que I é somando direto graduado de E, digamos $E = I \oplus X$ para algum submódulo graduado X de E. Como $M \subseteq I$, temos $M \cap X = 0$. Então $M \leq_{\text{gr-ess}} E$ implica que $X = 0$, ou seja, $I = E$.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Suponha que vale (3). Pelo Lema 2.7.3, $\{X \leq_{\text{gr}} E : M \leq_{\text{gr-ess}} X\}$ tem um elemento maximal E', o qual também é uma extensão gr-essencial maximal de M. Pela transitivade da gr-essencialidade e o Lema 2.7.1, E' é gr-injetivo. Como $E' \subseteq E$, segue da hipótese que $E' = E$. ■

Definição 2.7.5. Sejam R um anel Γ-graduado, E um R-módulo à direita Γ-graduado e M um submódulo graduado de E de modo que estão satisfeitas as afirmações do Teorema 2.7.4. Então dizemos que E é uma *envolvente gr-injetiva* (ou *envelope gr-injetivo*) de M.

O Lema 2.7.3 nos diz que todo módulo graduado tem uma envolvente gr-injetiva. O resultado a seguir nos diz que ela é única a menos de gr-isomorfismo.

Proposição 2.7.6. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e E, E' duas envolventes gr-injetivas de M. Então E e E' são gr-isomorfos sobre M.*

Demonstração. Como E é gr-injetivo e $M \leq_{\text{gr-ess}} E'$, segue do Lema 2.7.2 que a inclusão $M \hookrightarrow E$ se estende a um gr-homomorfismo injetor $g : E' \to E$. Logo $g(E') \cong_{\text{gr}} E$ e, portanto, $g(E')$ é gr-injetivo. Mas $g(E') \subseteq E$ e então segue de (3) no Teorema 2.7.4 que $g(E') = E$. Portanto, g é um gr-isomorfismo. ■

Em vista da Proposição 2.7.6, denotaremos a envolvente gr-injetiva de um módulo graduado M por

$$\mathrm{E}^{\text{gr}}(M).$$

Observação 2.7.7. Se R possui unidade então $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) \subseteq \mathrm{E}(M)$, a envolvente injetiva de M, pois $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ é extensão essencial de M pela Proposição 2.6.5. Mas pode ocorrer $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) \neq \mathrm{E}(M)$, pois $\mathrm{E}(M)$ pode não ser graduado ou M pode não ser submódulo graduado de $\mathrm{E}(M)$. ■

Vejamos algumas propriedades de envolventes gr-injetivas.

Corolário 2.7.8. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado.*

(1) *Se M é submódulo graduado de um R-módulo gr-injetivo I então I contém uma cópia de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$.*

(2) *Se N é extensão gr-essencial de M então N é submódulo graduado de uma cópia de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$. De fato, $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(N) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$.*

(3) *Se N é submódulo graduado de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ contendo M então $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(N) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$.*

Demonstração. (1) Imediato do Lema 2.7.3.

(2) Se $M \leq_{\text{gr-ess}} N$ então, por transitividade, $M \leq_{\text{gr-ess}} \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(N)$. Como $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(N)$ também é gr-injetivo, segue do Teorema 2.7.4 que $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(N)$ é uma envolvente gr-injetiva de M.

(3) Se $M \leq_{\text{gr}} N \leq_{\text{gr}} \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ então segue da Proposição 2.6.8(1) que $M \leq_{\text{gr-ess}} N$ e basta aplicar (2). ■

Corolário 2.7.9. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Então*

(1) $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M(\sigma)) = (\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))(\sigma)$, *para todo* $\sigma \in \Gamma$.

(2) $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) = \bigoplus_{e \in \Gamma_0} \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M(e))$.

Demonstração. (1) Como $M \leq_{\text{gr-ess}} \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$, do Lema 2.6.3 obtemos que $M(\sigma) \leq_{\text{gr-ess}} (\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))(\sigma)$ para todo $\sigma \in \Gamma$. Pelo Corolário 2.7.8(2), temos

$$\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M(\sigma)) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}((\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))(\sigma)) = (\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))(\sigma),$$

onde a última igualdade segue da gr-injetividade de $(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))(\sigma)$.

(2) Pelo item anterior, temos

$$\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) = \bigoplus_{e \in \Gamma_0} (\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))(e) = \bigoplus_{e \in \Gamma_0} \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M(e)). \qquad ■$$

Mais geralmente, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.7.10. *Sejam R um anel Γ-graduado e $M_1, ..., M_n$ R-módulos à direita Γ-graduados. Então* $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M_i)$.

Demonstração. Pela Proposição 2.6.8(3), $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \leq_{\text{gr-ess}} \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M_i)$ e, pela Proposição 2.5.3, $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M_i)$ é gr-injetivo. ■

O resultado a seguir relaciona envolventes (gr-)injetivas com fidelidade em componentes homogêneas.

Proposição 2.7.11. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado, $\gamma \in \Gamma$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$. Temos:*

(1) *Se M é γ-fiel então* $\mathrm{E}(M_\gamma) = (\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))_\gamma$.

(2) *Se M é Δ_0-fiel então* $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M1_{\Delta_0}) = (\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))1_{\Delta_0}$.

Demonstração. (1) Suponha que M é γ-fiel. Pela Proposição 2.6.18(1), temos que $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ é γ-fiel. Então, pela Proposição 2.6.12(1), M_γ é essencial em $(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))_\gamma$. E, pela Proposição 2.5.7(1), $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)_\gamma$ é $R_{d(\gamma)}$-módulo injetivo. Logo, $\mathrm{E}(M_\gamma) = (\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))_\gamma$.

(2) Suponha que M é Δ_0-fiel. Pela Proposição 2.6.18(2), $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ também é Δ_0-fiel e segue da Proposição 2.6.14 que $M1_{\Delta_0} \leq_{\text{gr-ess}} (\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))1_{\Delta_0}$. E, pela Proposição 2.5.7(2), $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)1_{\Delta_0}$ é $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulo gr-injetivo. Logo, $\mathrm{E}(M1_{\Delta_0}) = (\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))1_{\Delta_0}$. ■

Também temos o seguinte resultado em relação a suporte finito, cuja prova é baseada na de (Năstăsescu e Van Oystaeyen, 2004, Proposition 8.3.4).

Proposição 2.7.12. *Seja R um anel Γ-graduado. Temos:*

(1) *Se R tem suporte finito então $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ também tem suporte finito.*

(2) *Se $R(e)$ tem suporte finito para todo $e \in \Gamma_0$ então $1_e\,\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)1_f$ tem suporte finito para todos $e, f \in \Gamma_0$.*

Demonstração. Primeiramente, notemos que se $\sigma \in \mathrm{supp}(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R))$ e $0 \neq x \in \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)_\sigma$ então, tomando $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq xr \in R$, temos que $\sigma = \alpha\beta^{-1}$, onde $\alpha := \sigma \deg(r) \in \mathrm{supp}(R)$ e $\beta := \deg(r) \in \mathrm{supp}(R)$.

(1) Se $\mathrm{supp}(R)$ é finito então

$$\mathrm{supp}(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)) \subseteq \{\sigma\tau^{-1} : \sigma, \tau \in \mathrm{supp}(R)\}$$

é finito.

(2) Se $\mathrm{supp}(R(e))$ é finito para todo $e \in \Gamma_0$, então

$$\mathrm{supp}(1_e\,\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)1_f) \subseteq \{\sigma\tau^{-1} : \sigma \in \mathrm{supp}(R(e)), \tau \in \mathrm{supp}(R(f))\}$$

é finito para todo $e, f \in \Gamma_0$. ■

2.8 Gr-densidade

Definição 2.8.1. Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. Dizemos que N é *gr-denso* em M (ou M é *extensão gr-racional* de N) e denotamos por $N \leq_{\text{gr-den}} M$ se, para todos $0 \neq x \in \mathrm{h}(M)$ e $y \in \mathrm{h}(M)$ existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $yr \in \mathrm{h}(N)$. Se I é um ideal à direita graduado de R e $I_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$, dizemos que I é um *ideal à direita gr-denso* de R. Se R é subanel graduado de um anel Γ-graduado S então dizemos que S é um *anel de quocientes à direita* Γ*-graduado* de R quando $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$. Dizemos que I é um *ideal à esquerda gr-denso* de R se I^{op} é ideal à direita gr-denso de R^{op} e que S é um *anel de quocientes à esquerda* Γ*-graduado* de R se S^{op} é um anel de quocientes à direita graduado de R^{op}.

Observação 2.8.2. (1) É fácil ver que $N \leq_{\text{gr-den}} M$ implica $N \leq_{\text{gr-ess}} M$.

(2) Note que na definição de gr-densidade poderíamos ter colocado $0 \neq x \in M_\alpha, y \in M_\beta$ com $d(\alpha) = d(\beta)$. De fato, quando $d(\alpha) \neq d(\beta)$ temos $x1_{d(\alpha)} = x \neq 0$ e $y1_{d(\alpha)} = 0 \in N$. Outra definição equivalente seria $x(y^{-1}N) \neq 0$, para todos $x, y \in \mathrm{h}(M)$.

(3) Também é imediato da definição que se $N \leq_{\text{gr-den}} M$ então $N(\sigma) \leq_{\text{gr-den}} M(\sigma)$ para todo $\sigma \in \Gamma$. Mas, diferentemente do que ocorre com a gr-injetividade e a gr-essencialidade, não vale a recíproca como mostra o exemplo a seguir (inspirado em Lam, 1999, Example 8.3(3)). ■

Exemplo 2.8.3. Considere o grupoide $\Gamma := \{1,2\} \times \{1,2\}$, um inteiro $n > 1$ e os seguintes grupos aditivos de matrizes

$$R := \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & 0 \end{pmatrix}, \quad N := \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & 0 \end{pmatrix}.$$

Cada $X \in \{R, M, N\}$ é um grupo aditivo Γ-graduado cuja componente homogênea de grau $(i,j) \in \Gamma$ é o subconjunto formado pelas matrizes cuja entrada (k,l) é 0 para todo $(k,l) \in \Gamma \setminus \{(i,j)\}$. Mais precisamente, é fácil ver que R é um anel Γ-graduado, M é um R-módulo à direita Γ-graduado e N é um submódulo graduado de M. Note que $N((1,1)) \leq_{\text{gr-den}} M((1,1))$ pois $\mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z}$-submódulo denso de $\mathbb{Q}$. Como $N((2,2)) = M((2,2))$, segue que $N(e) \leq_{\text{gr-den}} M(e)$ para todo $e \in \Gamma_0$. Mas não ocorre $N \leq_{\text{gr-den}} M$. De fato, tome $x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \overline{1} & 0 \end{pmatrix} \in M_{(2,1)} \setminus \{0\}$ e $y = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ \overline{0} & 0 \end{pmatrix} \in M_{(1,1)}$. Para cada $r = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \in R$ temos que

$$yr \in N \implies \frac{1}{n} z_1 \in \mathbb{Z} \implies n | z_1 \implies \overline{1} z_1 = \overline{0} \implies xr = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \overline{z_1} & 0 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Logo, não existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $yr \in N$. ■

A propriedade a seguir será útil.

Lema 2.8.4. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado gr-denso de M. Então, para todos $0 \neq x \in \mathrm{h}(M)$ e $y_1, ..., y_n \in \mathrm{h}(M)$ existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $y_1 r, ..., y_n r \in \mathrm{h}(N)$.*

Demonstração. Aplicando a definição de gr-densidade para x e y_1, obtemos $r_1 \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr_1 \neq 0$ e $y_1 r_1 \in \mathrm{h}(N)$. Aplicando agora para xr_1 e $y_2 r_1$, existe $r_2 \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr_1 r_2 \in \mathrm{h}(R)$ e $y_2 r_1 r_2 \in \mathrm{h}(N)$. Prosseguindo indutivamente, obteremos finalmente um $r_n \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr_1 \cdots r_{n-1} r_n \neq 0$ e $y_n r_1 \cdots r_{n-1} r_n$. Então $r := r_1 \cdots r_n \in \mathrm{h}(R)$ é tal que $xr \neq 0$ e, para cada $1 \leq i \leq n$, $y_i r = (y_i r_1 \cdots r_i) r_{i+1} \cdots r_n \in NR \subseteq N$. ∎

Semelhantemente a gr-essencialidade, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.8.5. *Seja R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. Então $N \leq_{\text{gr-den}} M$ se, e somente se, para todos $0 \neq x \in M$ e $y \in M$ existe $r \in R$ tal que $xr \neq 0$ e $yr \in N$. Em particular, quando R tem unidade, $N \leq_{\text{gr-den}} M$ se, e somente se, N é um submódulo denso de M.*

Demonstração. Uma das implicações segue imediatamente da definição de gr-densidade.

Suponha então que $N \leq_{\text{gr-ess}} M$. Vamos nos basear no raciocínio da prova de (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Proposition 26 (p. 546)). Sejam $0 \neq x \in M$ e $y \in M$. Escreva $x = x_1 + \cdots + x_k$ para certos $0 \neq x_i \in M_{\gamma_i}$ $(i = 1, ..., k)$ com $\gamma_1, ..., \gamma_k \in \Gamma$ dois a dois distintos. Se $y = 0$ então basta tomarmos $r = 1_{d(\gamma_1)}$. Suponha que $y \neq 0$ e escreva $y = y_1 + \cdots + y_l$ para certos $0 \neq y_j \in M_{\delta_j}$ $(j = 1, ..., l)$ com $\delta_1, ..., \delta_l \in \Gamma$ dois a dois distintos. É suficiente mostrarmos que, para todos $m \in \mathrm{h}(M)$ e $1 \leq j \leq l$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $mr \neq 0$ e $(y_1 + \cdots + y_j)r \in N$. Para isso, usamos indução em j. O caso $j = 1$ segue da definição de gr-densidade. Suponha agora que $1 < j \leq l$ é tal que vale a afirmação para $j - 1$. Dado $m \in \mathrm{h}(M)$, pela hipótese de indução, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $mr \neq 0$ e $(y_1 + \cdots + y_{j-1})r \in N$. Como $N \leq_{\text{gr-den}} M$, existe $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $mrr' \neq 0$ e $y_j rr' \in \mathrm{h}(N)$. Então $rr' \in \mathrm{h}(R)$ é tal que $mrr' \neq 0$ e

$$(y_1 + \cdots + y_j)rr' = (y_1 + \cdots + y_{j-1})rr' + y_j rr' \in N\,.$$

Portanto, a indução está provada. Finalmente, aplicamos o que acabamos de provar para $m = x_1$ e $j = l$, obtendo $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $x_1 r \neq 0$ (logo, $xr \neq 0$) e $yr \in N$. ∎

Corolário 2.8.6. *Sejam R e S anéis Γ-graduados tais que R tem unidade e é subanel graduado de S. Então S é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R se, e somente se, S tem unidade e é um anel de quocientes à direita de R.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.6.4, se S é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R então $\Gamma'_0(S) = \Gamma'_0(R)$ e segue do Corolário 1.4.17 que S também tem unidade. A equivalência segue imediatamente da Proposição 2.8.5. ∎

Em (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Example 6 (p. 546)), vê-se um exemplo de um anel de quocientes que não é anel de quocientes graduado.

Conseguimos definir análogos de ideais densos e anéis de quocientes para categorias pré-aditivas.

Definição 2.8.7. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva e $\mathcal{I}$ um ideal à direita (resp. à esquerda) de $\mathcal{C}$. Diremos que $\mathcal{I}$ é um *ideal à direita* (resp. *à esquerda*) *denso* de $\mathcal{C}$ se, para cada $A, B, C \in \mathcal{C}_0$, $0 \neq g_1 \in \mathcal{C}(A, B)$ e $g_2 \in \mathcal{C}(A, C)$ (resp. $0 \neq g_1 \in \mathcal{C}(B, A)$ e $g_2 \in \mathcal{C}(C, A)$), existem $D \in \mathcal{C}_0$ e $h \in \mathcal{C}(D, A)$ (resp. $h \in \mathcal{C}(A, D)$) tais que $g_1 \circ h \neq 0$ e $g_2 \circ h \in \mathcal{I}(D, C)$ (resp. $h \circ g_1 \neq 0$ e $h \circ g_2 \in \mathcal{I}(C, D)$).

Observação 2.8.8. É fácil ver que se $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena e $\mathcal{I}$ é um ideal à direita (resp. à esquerda) denso de $\mathcal{C}$ então $I := \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}_0\times\mathcal{C}_0} \mathcal{I}(B, A)$ é um ideal à direita (resp. à esquerda) gr-denso de $R[\mathcal{C}]$. Reciprocamente, se $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena e I é um ideal à direita (resp. à esquerda) gr-denso de $R[\mathcal{C}]$ então temos um ideal à direita (resp. esquerda) denso $\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}$ onde $\mathcal{I}(A, B) := I_{(B,A)}$ para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$. ■

Definição 2.8.9. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias pré-aditivas. Dizemos que $\mathcal{C}$ é *subcategoria pré-aditiva* de $\mathcal{D}$ se $\mathcal{C}$ é subcategoria de $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}(A, B)$ é subgrupo aditivo de $\mathcal{D}(A, B)$ e $\mathcal{C}(A, A)$ é subanel de $\mathcal{D}(A, A)$ para todos $A, B \in \mathcal{C}_0$. Se $\mathcal{C}$ é uma subcategoria pré-aditiva de $\mathcal{D}$ com $\mathcal{C}_0 = \mathcal{D}_0$ então diremos que $\mathcal{D}$ é *categoria de quocientes à direita* (resp. *à esquerda*) de $\mathcal{C}$ se, para cada $A, B, C \in \mathcal{C}_0$, $0 \neq g_1 \in \mathcal{D}(A, B)$ e $g_2 \in \mathcal{D}(A, C)$ (resp. $0 \neq g_1 \in \mathcal{D}(B, A)$ e $g_2 \in \mathcal{D}(C, A)$), existem $D \in \mathcal{C}_0$ e $h \in \mathcal{C}(D, A)$ (resp. $h \in \mathcal{C}(A, D)$) tais que $g_1 \circ h \neq 0$ e $g_2 \circ h \in \mathcal{C}(D, C)$ (resp. $h \circ g_1 \neq 0$ e $h \circ g_2 \in \mathcal{C}(C, D)$).

Observação 2.8.10. Novamente, é fácil verificar que se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias pré-aditivas pequenas então $\mathcal{D}$ é categoria de quocientes à direita (resp. à esquerda) de $\mathcal{C}$ se, e somente se, $R[\mathcal{D}]$ é anel de quocientes à direita (resp. à esquerda) $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$-graduado de $R[\mathcal{C}]$. ■

Temos também as seguintes propriedades de gr-densidade cujas provas são semelhantes as de densidade (LAM, 1999, §8A).

Proposição 2.8.11. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado, N e N' dois submódulos graduados de M e P um submódulo graduado de N.*

(1) *Se $N \leq_{\text{gr-den}} M$ e $N' \leq_{\text{gr-den}} M$ então $N \cap N' \leq_{\text{gr-den}} M$.*

(2) *$P \leq_{\text{gr-den}} M \iff P \leq_{\text{gr-den}} N$ e $N \leq_{\text{gr-den}} M$.*

Demonstração. (1) Suponha que N e N' são gr-densos em M e sejam $x, y \in \mathrm{h}(M)$, $x \neq 0$. Como $N \leq_{\text{gr-den}} M$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $yr \in \mathrm{h}(N)$. Agora, usando que $N' \leq_{\text{gr-den}} M$, obtemos $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xrr' \neq 0$ e $yrr' \in \mathrm{h}(N')$ (logo, $yrr' \in \mathrm{h}(N \cap N')$).

(2) ($\Longrightarrow$) é imediato da definição. Vejamos ($\Longleftarrow$). Suponha que $P \leq_{\text{gr-den}} N \leq_{\text{gr-den}} M$ e sejam $x, y \in \mathrm{h}(M)$, $x \neq 0$. Como $N \leq_{\text{gr-den}} M$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $yr \in \mathrm{h}(N)$. Por outro lado, $N \leq_{\text{gr-ess}} M$ nos dá $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq xrr' \in \mathrm{h}(N)$. Por fim, de $P \leq_{\text{gr-den}} N$ obtemos $s \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xrr's \neq 0$ e $yrr's \in \mathrm{h}(P)$. Logo, $P \leq_{\text{gr-den}} M$. ■

Anéis de quocientes graduados também tem uma propriedade parecida com a da Proposição 2.8.11(2). A prova segue o raciocínio do caso não graduado (Lam, 2007, Exercise 13.10).

Proposição 2.8.12. *Sejam R, S e T anéis Γ-graduados tais que R é subanel graduado de S e S é subanel graduado de T. Então T é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R se, e somente se, T é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de S e S é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R.*

Demonstração. Queremos mostrar que

$$R_R \leq_{\text{gr-den}} T_R \iff S_S \leq_{\text{gr-den}} T_S \text{ e } R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R\,.$$

A implicação ($\Longrightarrow$) segue imediatamente da definição. Suponha então que $S_S \leq_{\text{gr-den}} T_S$ e $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$. Sejam $x, y \in \mathrm{h}(T)$, $x \neq 0$. Como $S_S \leq_{\text{gr-den}} T_S$, existe $s \in \mathrm{h}(S)$ tal que $xs \neq 0$ e $ys \in S$. De $S_S \leq_{\text{gr-ess}} T_S$, obtemos um $s' \in \mathrm{h}(S)$ tal que $0 \neq xss' \in \mathrm{h}(S)$. Agora, como $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xss'r \neq 0$ e $yss'r \in R$. Novamente de $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$, obtemos um $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xss'rr' \neq 0$ e $ss'rr \in R$. Logo, $ss'rr' \in \mathrm{h}(R)$ é tal que $xss'rr' \neq 0$ e $yss'rr' \in R$. Portanto, $R_R \leq_{\text{gr-den}} T_R$. ■

A seguinte caracterização de gr-densidade será muito útil.

Proposição 2.8.13. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. São equivalentes:*

(1) $N \leq_{\text{gr-den}} M$.

(2) $\mathrm{HOM}_R\left(\dfrac{M}{N}, \mathrm{E}^{\text{gr}}(M)\right) = 0$.

(3) $\mathrm{HOM}_R\left(\dfrac{P}{N}, M\right) = 0$ *para todo R-módulo à direita Γ-graduado P satisfazendo* $N \leq_{\text{gr}} P \leq_{\text{gr}} M$.

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2): Suponha, por absurdo, que $N \leq_{\text{gr-den}} M$ e existam $\gamma \in \Gamma$ e $0 \neq g \in \mathrm{HOM}_R\left(M/N, \mathrm{E}^{\text{gr}}(M)\right)_\gamma$. Como $\operatorname{im} g$ é submódulo graduado de $\mathrm{E}^{\text{gr}}(M)$ e $M \leq_{\text{gr-ess}} \mathrm{E}^{\text{gr}}(M)$, temos $M \cap \operatorname{im} g \neq 0$. Seja $0 \neq x \in \mathrm{h}(M) \cap \operatorname{im} g$ e tome $y \in \mathrm{h}(M)$ tal que $x = g(\pi(y))$ onde $\pi : M \to M/N$ é a projeção canônica. Como $N \leq_{\text{gr-den}} M$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $yr \in N$. Mas então

$$xr = g(\pi(y))r = g(\pi(yr)) = g(0) = 0,$$

uma contradição.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Suponha que $N \leq_{\text{gr}} P \leq_{\text{gr}} M$ e $\mathrm{HOM}_R\left(P/N, M\right) \neq 0$. Então existem $\gamma \in \Gamma$ e $0 \neq g \in \mathrm{HOM}_R\left(P/N, M\right)_\gamma$. Portanto, $0 \neq g \circ \pi \in \mathrm{HOM}_R(P, \mathrm{E}^{\text{gr}}(M))_\gamma$ onde $\pi : P \to P/N$ é a projeção canônica. Como $\mathrm{E}^{\text{gr}}(M)$ é gr-injetivo, $g \circ \pi$ se estende a um $0 \neq h \in \mathrm{HOM}_R(M, \mathrm{E}^{\text{gr}}(M))_\gamma$. Como $h(N) = g(\pi(N)) = 0$, temos do Teorema do Isomorfismo um $0 \neq \overline{h} \in \mathrm{HOM}_R(M/N, \mathrm{E}^{\text{gr}}(M))_\gamma$, negando (2).

(3) $\Longrightarrow$ (1): Suponha, por absurdo, que vale (3) mas N não é submódulo gr-denso de M. Ou seja, existem $x, y \in \mathrm{h}(M)$ tais que $x \neq 0$ e para todo $r \in \mathrm{h}(R)$ temos que $yr \in N$ implica $xr = 0$. Sejam $\gamma := \deg(x)$ e $\delta := \deg(y)$. Como vimos na Observação 2.8.2(2) temos $d(\gamma) = d(\delta)$. Considere

$$\begin{aligned} g : N + yR &\longrightarrow M \\ n + yr &\longmapsto xr\,. \end{aligned}$$

A função g está bem definida pois, para todos $n, n' \in \mathrm{h}(N)$, $\alpha \in \Gamma$ e $r, r' \in R_\alpha$, temos

$$n + yr = n' + yr' \implies y(r - r') = n' - n \in N \implies x(r - r') = 0.$$

Além disso, $g \in \mathrm{HOM}_R(N + yR, M)_{\gamma\delta^{-1}}$ pois, para todo $\alpha \in \Gamma$, temos

$$n + yr \in (N + yR)_\alpha \implies r \in R_{\delta^{-1}\alpha} \implies xr \in M_{\gamma\delta^{-1}\alpha}.$$

Como $g(N) = 0$, obtemos do Teorema do Isomorfismo um $\overline{g} \in \mathrm{HOM}_R\left(\dfrac{N + yR}{N}, M\right)_{\gamma\delta^{-1}}$. Por (3), $\overline{g} = 0$. Então

$$x = x1_{d(\gamma)} = x1_{d(\delta)} = g(y1_{d(\delta)}) = g(y) = \overline{g}(\overline{y}) = 0,$$

uma contradição. ■

Procedendo de forma análoga a (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) na demonstração da Proposição 2.8.13 obtemos o seguinte.

Corolário 2.8.14. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. Se $N \leq_{\text{gr-den}} M$ então:*

(1) $\mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}\left(\dfrac{M}{N}, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right) = 0$.

(2) $\mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}\left(\dfrac{P}{N}, M\right) = 0$ *para todo submódulo graduado P_R de M contendo N.* ■

Outra caracterização de gr-densidade, desta vez relacionando-a com a gr-essencialidade, é a seguinte.

Lema 2.8.15. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. São equivalentes:*

(1) $N \leq_{\text{gr-den}} M$.

(2) $N \leq_{\text{gr-ess}} M$ *e para todos $0 \neq x \in \mathrm{h}(N)$ e $0 \neq y \in \mathrm{h}(M)$ existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $yr \in \mathrm{h}(N)$.*

Demonstração. Só precisamos provar que (2) $\Longrightarrow$ (1). Suponha que vale (2) e sejam $x, y \in \mathrm{h}(M)$, $x \neq 0$. Como $N \leq_{\text{gr-ess}} M$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq xr \in \mathrm{h}(N)$. Se $yr = 0$ então já temos $yr \in N$. Se $yr \neq 0$ então, pela hipótese, existe $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xrr' \neq 0$ e $yrr' \in N$. Logo, $N \leq_{\text{gr-den}} M$. ■

Vamos agora nos concentrar em anéis de quocientes graduados e gr-densidade para ideais à direita graduados. Os dois resultados a seguir generalizam (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Lemma 1 (p. 546)).

Proposição 2.8.16. *Seja S um anel Γ-graduado e R um subanel graduado de S de modo que $R_R \leq_{\text{gr-ess}} S_R$. Temos:*

1. *Se K é um ideal à direita graduado não nulo de S então $K \cap R$ é um ideal à direita graduado não nulo de R.*
2. *Se I é um ideal à direita graduado não nulo de R então IS é um ideal à direita graduado não nulo de S.*
3. *Se K é um ideal à direita graduado de S então $K \cap R \leq_{\text{gr-ess}} K_R$ e $(K \cap R)S \leq_{\text{gr-ess}} K_S$.*
4. *Se K é um ideal à direita graduado de S tal que $K \cap R \leq_{\text{gr-ess}} R_R$ então $K_S \leq_{\text{gr-ess}} S_S$.*
5. *Se I é um ideal à direita gr-essencial de R então IS é um ideal à direita gr-essencial de S.*

Demonstração. (1) Seja K um ideal à direita graduado de S. Claramente $K \cap R$ é um ideal à direita graduado de R. Além disso, $K \cap R \neq 0$ se $K \neq 0$, pois $R_R \leq_{\text{gr-ess}} S_R$.

(2) Seja I um ideal à direita graduado de R. IS é claramente um ideal à direita graduado de S e é não nulo se $I \neq 0$, pois $I \subseteq IS$.

(3) Seja K um ideal à direita graduado não nulo de S. Tomando $0 \neq x \in \mathrm{h}(K)$, como $R_R \leq_{\text{gr-ess}} S_R$ e K é ideal à direita de S, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq xr \in K \cap R$. Logo, $K \cap R \leq_{\text{gr-ess}} K_R$ e segue imediatamente que $(K \cap R)S \leq_{\text{gr-ess}} K_S$.

(4) Suponha que $K \cap R \leq_{\text{gr-ess}} R_R$. Como $R_R \leq_{\text{gr-ess}} S_R$, temos $K \cap R \leq_{\text{gr-ess}} S_R$. Então, como $K \cap R \leq_{\text{gr}} K_R \leq_{\text{gr}} S_R$, segue da Proposição 2.6.8(1) que $K_R \leq_{\text{gr-ess}} S_R$. Logo, é imediato da definição de gr-essencialidade que $K_S \leq_{\text{gr-ess}} S_S$.

(5) Seja I um ideal à direita gr-essencial de R e $0 \neq x \in \mathrm{h}(S)$. Como $R_R \leq_{\text{gr-ess}} S_R$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq xr \in \mathrm{h}(R)$. Como $I_R \leq_{\text{gr-ess}} R_R$, existe $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq xrr' \in I \subseteq IS$. Logo, $I_S \leq_{\text{gr-ess}} S_S$. ■

Proposição 2.8.17. *Seja R um anel Γ-graduado e S um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R. Temos:*

1. *Se K é um ideal à direita graduado não nulo de S então $K \cap R \leq_{\text{gr-den}} K_R$.*
2. *Se I é um ideal à direita graduado não nulo de R então $I_R \leq_{\text{gr-den}} IS \cap R$.*
3. *Se K é um ideal à direita graduado de S então $K_S \leq_{\text{gr-ess}} S_S \iff K \cap R \leq_{\text{gr-ess}} R_R$.*
4. *Se K é um ideal à direita graduado de S então $K_S \leq_{\text{gr-den}} S_S \iff K \cap R \leq_{\text{gr-den}} R_R$.*
5. *Se I é um ideal à direita graduado de R então $I_R \leq_{\text{gr-ess}} R_R \iff IS \leq_{\text{gr-ess}} S_S$.*

(6) *Se I é um ideal à direita graduado de R então* $I_R \leq_{\text{gr-den}} R_R \iff IS \leq_{\text{gr-den}} S_S$.

(7) *Se I, J são ideais à direita graduados de R tais que $I \cap J = 0$ então $IS \cap JS = 0$.*

(8) *Se $\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma família de ideais à direita graduados de R que estão em soma direta então* $\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) S = \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda S\right)$.

Demonstração. (1) Suponha que K é um ideal à direita graduado não nulo de S. Sejam $x, y \in \mathrm{h}(K)$, $x \neq 0$. Como $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $yr \in R$. Mas K ideal à direita de S e, portanto, $yr \in K$ também.

(2) Sejam $x, y \in \mathrm{h}(IS \cap R)$, $x \neq 0$. Escreva $y = \sum_{t=1}^{n} i_t s_t$ com $i_t \in \mathrm{h}(I)$ e $s_t \in \mathrm{h}(S)$ para todo $t = 1, ..., n$. Como $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$, segue do Lema 2.8.4 que existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $s_t r \in R$ para todo $t = 1, ..., n$. Logo, $yr = \sum_{t=1}^{n} i_t s_t r \in I$.

(3) Pela Proposição 2.8.16(4), basta provar ($\Longrightarrow$). Suponha que $K_S \leq_{\text{gr-ess}} S_S$ e seja $0 \neq x \in \mathrm{h}(R)$. Tome $s \in \mathrm{h}(S)$ tal que $0 \neq xs \in \mathrm{h}(K)$. Como $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xsr \neq 0$ e $sr \in R$. Como $R_R \leq_{\text{gr-ess}} S_R$, existe $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq xsrr' \in R$. Então $srr' \in \mathrm{h}(R)$ é tal que $0 \neq xsrr' \in K \cap R$. Logo, $K \cap R \leq_{\text{gr-ess}} R_R$.

(4) ($\Longrightarrow$) Suponha que $K_S \leq_{\text{gr-den}} S_S$ e sejam $x, y \in \mathrm{h}(R)$, $x \neq 0$. Tome $s \in \mathrm{h}(S)$ tal que $xs \neq 0$ e $ys \in K$. Como $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xsr \neq 0$ e $sr \in R$. Como K é ideal à direita de S temos $ysr \in K \cap R$. Logo, $K \cap R \leq_{\text{gr-den}} R_R$.

($\Longleftarrow$) Segue o mesmo raciocínio da prova da Proposição 2.8.16(4).

(5) Suponha que I é um ideal à direita graduado de R. Pela Proposição 2.8.16(5), só precisamos provar ($\Longleftarrow$). Suponha que $IS \leq_{\text{gr-ess}} S_S$ e seja $0 \neq x \in \mathrm{h}(S)$. Tome $s \in \mathrm{h}(S)$ tal que $0 \neq xs \in IS$. Escreva $xs = \sum_{t=1}^{n} i_t s_t$ com $i_t \in \mathrm{h}(I)$ e $s_t \in \mathrm{h}(S)$ para todo $t = 1, ..., n$. Como $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$, segue do Lema 2.8.4 que existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xsr \neq 0$, $sr \in \mathrm{h}(R)$ e $s_t r \in R$ para todo $t = 1, ..., n$. Logo, $0 \neq xsr = \sum_{t=1}^{n} i_t s_t r \in I$.

(6) Basta combinar (4) para $K = IS$, (2) e a Proposição 2.8.11(2).

(7) Suponha que I, J são ideais à direita graduados de R tais que $IS \cap JS \neq 0$. Seja $0 \neq x \in \mathrm{h}(IS \cap JS)$. Escreva $x = \sum_{t=1}^{n} i_t s_t = \sum_{l=1}^{m} j_l s'_l$ com $i_t \in \mathrm{h}(I)$, $s_t \in \mathrm{h}(S)$ para todo $t = 1, ..., n$ e $j_l \in \mathrm{h}(J)$, $s'_l \in \mathrm{h}(S)$ para todo $l = 1, ..., m$. Como $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$, segue do Lema 2.8.4 que existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $s_t r \in R$ para todo $t = 1, ..., n$ e existe $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xrr' \neq 0$ e $s'_l rr' \in R$ para todo $l = 1, ..., m$. Logo, $xr = \sum_{t=1}^{n} i_t s_t r \in I$ e $xrr' = \sum_{l=1}^{m} j_l s'_l rr' \in J$. Portanto, $0 \neq xrr' \in I \cap J$.

(8) Suponha que $\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma família de ideais à direita graduados

de R que estão em soma direta. Apenas precisamos verificar que $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda S$ é direta. Para isso, basta mostrarmos que $I_1S + \cdots + I_nS$ é direta para todos $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $\{I_1, ..., I_n\} \subseteq \{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Mas isto segue de uma aplicação indutiva de (7) pois $(I_1 \oplus \cdots \oplus I_t) \cap I_{t+1} = 0$ para todo $t = 1, ..., n-1$. ■

O resultado a seguir será muito importante no capítulo seguinte e a prova se baseia na do caso não graduado (Lam, 1999).

Proposição 2.8.18. *Sejam R um anel Γ-graduado e I, J dois ideais à direita graduados de R.*

(1) *$I_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$ se, e somente se, $\mathrm{l.ann}(y^{-1}I) = 0$ para todo $y \in \mathrm{h}(R)$.*

(2) *Se $I_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$ então $\mathrm{l.ann}(I) = 0$.*

(3) *Se $I_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$ e $J_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$ então $(IJ)_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$.*

(4) *Quando I é um ideal graduado de R temos $I_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$ se, e somente se, $\mathrm{l.ann}(I) = 0$.*

Demonstração. (1) Suponha que $I_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$ e sejam $y \in \mathrm{h}(R)$ e x um elemento homogêneo de $\mathrm{l.ann}(y^{-1}I)$. Então, para todo $r \in \mathrm{h}(R)$, temos que

$$yr \in I \implies r \in y^{-1}I \implies xr = 0.$$

Logo, $x = 0$.

Reciprocamente, suponha que $\mathrm{l.ann}(y^{-1}I) = 0$ para todo $y \in \mathrm{h}(R)$. Sejam $x, y \in \mathrm{h}(R)$, $x \neq 0$. Como $x \notin \mathrm{l.ann}(y^{-1}I)$, existe um elemento homogêneo $r \in y^{-1}I$ (ou seja, $yr \in I$) tal que $xr \neq 0$.

(2) Suponha, por absurdo, que $I_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$ e $\mathrm{l.ann}(I) \neq 0$. Seja $0 \neq x \in \mathrm{h}(\mathrm{l.ann}(I))$. Como $I_R \leq_{\text{gr-ess}} R_R$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq xr \in \mathrm{h}(I)$. Agora, como $I_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$, existe $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xrr' \neq 0$ e $rr' \in I$, contradizendo que $x \in \mathrm{l.ann}(I)$.

(3) Suponha que $I_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$, $J_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$ e sejam $x, y \in \mathrm{h}(R)$, $x \neq 0$. Como $I_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $yr \in I$. Como $J_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$, segue de (2) que existe $r' \in \mathrm{h}(J)$ tal que $xrr' \neq 0$. Então $rr' \in \mathrm{h}(R)$ é tal que $xrr' \neq 0$ e $yrr' \in IJ$. Logo IJ é ideal à direita gr-denso de R.

(4) Suponhamos que I é ideal graduado de R. Uma das implicações segue de (2). Por outro lado, como $I \subseteq y^{-1}I$ para todo $y \in \mathrm{h}(R)$, segue que se $\mathrm{l.ann}(I) = 0$ então $\mathrm{l.ann}(y^{-1}I) \subseteq \mathrm{l.ann}(I) = 0$ para todo $y \in \mathrm{h}(R)$. Então segue de (1) que $\mathrm{l.ann}(I) = 0$ implica $I_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$. ■

Também temos as seguintes caracterizações de anéis de quocientes à direita graduados. A prova do próximo Lema segue a de (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Proposition 28 (p. 547)).

Lema 2.8.19. *Seja S um anel Γ-graduado e R um subanel graduado de S. Então $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$ se, e somente se, para todo $0 \neq s \in \mathrm{h}(S)$ temos $s^{-1}R \leq_{\text{gr-den}} R_R$ e $s(s^{-1}R) \neq 0$.*

Demonstração. Suponha que $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$ e fixe $0 \neq s \in \mathrm{h}(S)$. Então, dados $x, y \in \mathrm{h}(R)$ com $x \neq 0$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $syr \in R$ (ou seja, $yr \in s^{-1}R$). Isto mostra que $s^{-1}R \leq_{\text{gr-den}} R_R$. Além disso, como $R_R \leq_{\text{gr-ess}} S_R$, existe $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq sr' \in R$. Logo, $0 \neq sr' \in s(s^{-1}R)$.

Reciprocamente, suponha que $s^{-1}R \leq_{\text{gr-den}} R_R$ e $s(s^{-1}R) \neq 0$ para todo $0 \neq s \in \mathrm{h}(S)$. Sejam $x, y \in \mathrm{h}(R)$, $x \neq 0$. Então existe $r \in \mathrm{h}(x^{-1}R)$ tal que $xr \neq 0$. E, como $y^{-1}R \leq_{\text{gr-den}} R_R$, existe $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xrr' \neq 0$ e $rr' \in y^{-1}R$. Mas este último significa que $yrr' \in R$. ■

Proposição 2.8.20. *Sejam R e S aneis Γ-graduados. Então S é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:*

(*i*) *R é subanel graduado de S.*

(*ii*) *Para cada $s \in \mathrm{h}(S)$ existe um ideal à direita gr-denso D de R tal que $sD \subseteq R$.*

(*iii*) *Se $s \in \mathrm{h}(S)$, D é um ideal à direita gr-denso de R e $sD = 0$ então $s = 0$.*

Demonstração. Começamos verificando que se S é um anel de quocientes à direita graduado de R então temos $(i) - (iii)$. A condição (i) segue da definição. A condição (ii) segue do Lema 2.8.19 pois se $0 \neq s \in \mathrm{h}(S)$ então $s^{-1}R$ é um ideal à direita gr-denso de R tal que $s(s^{-1}R) \subseteq R$. Para ver (iii), suponha que $s \in \mathrm{h}(S)$, D é um ideal à direita gr-denso de R e $sD = 0$. Se tivéssemos $s \neq 0$ então, como $R_R \leq_{\text{gr-ess}} S_R$, existiria $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq sr \in R$. Logo, de $D_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$, obteríamos um $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $srr' \neq 0$ e $rr' \in D$, uma contradição com $sD = 0$. Logo S satisfaz (iii).

Reciprocamente, suponha que S satisfaz $(i) - (iii)$. Por (i), precisamos provar que $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$. Sejam $x, y \in \mathrm{h}(S)$, com $x \neq 0$. Por (ii), existe um ideal à direita gr-denso D de R tal que $yD \subseteq R$. Por (iii), temos $xD \neq 0$ e, portanto, existe $r \in \mathrm{h}(D)$ tal que $xr \neq 0$. Como $yr \in yD \subseteq R$, segue que $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$. ■

O resultado a seguir é consequência imediata da Proposição 2.8.20 e das nossas definições de anéis de quocientes à esquerda graduados e ideais à esquerda gr-densos.

Corolário 2.8.21. *Sejam R e S aneis Γ-graduados. Então S é um anel de quocientes à esquerda Γ-graduado de R se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:*

(*i*) *R é subanel graduado de S.*

(*ii*) *Para cada $s \in \mathrm{h}(S)$ existe um ideal à esquerda gr-denso D de R tal que $Ds \subseteq R$.*

(*iii*) *Se $s \in \mathrm{h}(S)$, D é um ideal à esquerda gr-denso de R e $Ds = 0$ então $s = 0$.* ■

Outra consequência da Proposição 2.8.20 é que anéis de quocientes graduados herdam algumas propriedades do anel base, conforme os dois resultados a seguir.

Proposição 2.8.22. *Sejam R um anel Γ-graduado gr-simples (resp. gr-primo, gr-semiprimo) e S um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R. Se D é um ideal à direita gr-denso de R e T é um subanel graduado de S tal que $D \subseteq T$ então T é anel gr-simples (resp. gr-primo, gr-semiprimo).*

Demonstração. Sejam D um ideal à direita gr-denso de R e T um subanel graduado de S tais que $D \subseteq T$.

Suponha que R é anel gr-simples e U é um ideal graduado não nulo de T. Tome $0 \neq s \in \mathrm{h}(U)$. Pela Proposição 2.8.20, existe D_s ideal à direita gr-denso de R tal que $sD_s \subseteq R$. Como $s \neq 0$ e $D \cap D_s$ é ideal à direita gr-denso de R, temos da Proposição 2.8.20 que

$$0 \neq s(D \cap D_s) \subseteq sD \cap sD_s \subseteq sT \cap sD_s \subseteq U \cap R$$

e, portanto $U \cap R = R$. Isto nos diz que $1_e \in U$ para todo $e \in \Gamma_0'(R) = \Gamma_0'(S)$ e segue que $U = T$.

Suponha agora que R é anel gr-primo e sejam I_1, I_2 ideais graduados não nulos de T. Tome $0 \neq s_k \in I_k$ para cada $k = 1, 2$. Pela Proposição 2.8.20, existem D_1 e D_2 ideais à direita gr-densos de R tais que $s_1D_1, s_2D_2 \subseteq R$. Como, para cada $k = 1, 2$, $s_k \neq 0$ e $D \cap D_k$ é ideal à direita gr-denso de R, segue da Proposição 2.8.20 que

$$0 \neq s_k(D \cap D_k) \subseteq s_kD \cap s_kD_k \subseteq s_kT \cap s_kD_k \subseteq I_k \cap R$$

e, portanto $I_1I_2 \supseteq (I_1 \cap R)(I_2 \cap R) \neq 0$.

O caso gr-semiprimo se prova como no caso gr-primo ao fazer $I_1 = I_2$. ∎

Corolário 2.8.23. *Se R é um anel Γ-graduado gr-simples (resp. gr-primo, gr-semiprimo) então todo anel de quocientes à direita Γ-graduado de R também é.* ∎

A Proposição 2.8.20 também nos ajuda a obter os dois resultados a seguir.

Proposição 2.8.24. *Sejam R um anel Γ-graduado, S um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R e $\varphi : S \to S$ um gr-homomorfismo de anéis. Se $\varphi(r) = r$ para todo $r \in R$ então φ é a função identidade de S. Em particular, se $\varphi, \psi : S \to S$ são gr-isomorfismos de anéis que coincidem em R então $\varphi = \psi$.*

Demonstração. Suponha que $\varphi(r) = r$ para todo $r \in R$ e seja $s \in \mathrm{h}(S)$. Pela Proposição 2.8.20, existe D ideal à direita gr-denso de R tal que $sD \subseteq R$. Então, para cada $d \in D$, temos

$$\varphi(s)d = \varphi(s)\varphi(d) = \varphi(sd) = sd\,,$$

ou seja, $(\varphi(s) - s)D = 0$. A Proposição 2.8.20 agora nos diz que $\varphi(s) = s$. ∎

A prova do resultado a seguir se baseia na de (Beidar *et al.*, 1996, Lemma 2.1.14)

Proposição 2.8.25. *Sejam R um anel Γ-graduado, S um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R e U um submódulo graduado de S_R. Se $g \in \mathrm{HOM}_R(U, S)_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$)*

então $\tilde{g} \in \mathrm{HOM}_S(US, S)_\gamma$ *onde* $\tilde{g}\left(\sum_i u_i s_i\right) = \sum_i g(u_i)s_i$ *para todos* $u_i \in U$ *e* $s_i \in S$.

Demonstração. Basta mostrarmos que $\tilde{g}$ está bem definido. Sejam $u_1, ..., u_n \in \mathrm{h}(U)$ e $s_1, ..., s_n \in \mathrm{h}(S)$ tais que $\sum_{i=1}^{n} u_i s_i = 0$. Pela Proposição 2.8.20, para cada $i = 1, ..., n$, existe D_i ideal à direita gr-denso de R tal que $s_i D_i \subseteq R$. Então, pela Proposição 2.8.11(1), $D := \bigcap_{i=1}^{n} D_i$ é um ideal à direita gr-denso de R tal que $s_i D \subseteq R$ para todo $i = 1, ..., n$. Logo, para cada $d \in D$, temos

$$\left(\sum_{i=1}^{n} g(u_i)s_i\right) d = \sum_{i=1}^{n} g(u_i)s_i d = \sum_{i=1}^{n} g(u_i s_i d) = g\left(\sum_{i=1}^{n} u_i s_i d\right) = g(0d) = 0\,.$$

Portanto, $\left(\sum_{i=1}^{n} g(u_i)s_i\right) D = 0$ e segue da Proposição 2.8.20 que $\sum_{i=1}^{n} g(u_i)s_i = 0$. ∎

A seguinte propriedade de anéis de quocientes graduados será muito útil no Capítulo 3.

Proposição 2.8.26. *Sejam R um anel Γ-graduado e S um anel de quocientes à direita graduado de R. Para D um ideal à direita graduado de R e U um R-submódulo à direita graduado de S temos:*

(1) *Se $U_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$ e $s \in \mathrm{h}(S)$ então $s^{-1}U$ é um ideal à direita gr-denso de R.*

(2) *Se $D_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$ e $s \in \mathrm{h}(S)$ então $s^{-1}D$ é um ideal à direita gr-denso de R.*

Demonstração. (1) Suponha $U_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$. Sejam $s \in \mathrm{h}(S)$ e $x, y \in \mathrm{h}(R)$ com $x \neq 0$. Como $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $syr \in U$ (ou seja, $yr \in s^{-1}U$).

(2) Como $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$, segue da Proposição 2.8.11(2) que $D_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$ se, e somente se, $D_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$. Então (2) segue de (1). ∎

O próximo resultado também será útil no Capítulo 3 e trata de homomorfismos e ideais à direita gr-densos. A prova do item (1) é baseada na de (Passman, 1977, Part 4, Lemma 5.2(v)) e o item (2) pode ser visto como uma generalização da Proposição 2.8.26.

Proposição 2.8.27. *Sejam R um anel Γ-graduado, S um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R e I, D dois ideais à direita graduados de R com $D_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$. Para cada $g \in \mathrm{HOM}(I_R, S_R)$ temos:*

(1) *Se $S = R$ e $g(I \cap D) = 0$ então $g = 0$.*

(2) $g_\gamma^{-1}(D) \leq_{\text{gr-den}} I_R$ *para todo* $\gamma \in \Gamma$ *e* $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} g_\gamma^{-1}(D) \leq_{\text{gr-den}} I_R$

Demonstração. (1) Suponha que $S = R$ e $g(I \cap D) = 0$. Tome $x \in \mathrm{h}(I)$. Note que $x(x^{-1}D) \subseteq I \cap D$. Logo, $0 = g(x(x^{-1}D)) = g(x)(x^{-1}D)$ e, portanto, $g(x) \in$

l. $\mathrm{ann}_R(x^{-1}D)$. Pela Proposição 2.8.18(1) temos $g(x) = 0$. Como $x \in \mathrm{h}(I)$ foi arbitrário, segue que $g = 0$.

(2) Sejam $x, y \in \mathrm{h}(I)$, $x \neq 0$ e $\gamma \in \Gamma$. Pela Proposição 2.8.11(2), temos $D_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$ e, portanto, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $g_\gamma(y)r \in D$. Então $g_\gamma(yr) \in D$, ou seja, $yr \in g_\gamma^{-1}(D)$. Logo, $g_\gamma^{-1}(D) \leq_{\text{gr-den}} I_R$. Por fim, se $g = 0$ então $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} g_\gamma^{-1}(D) = I$ e se $g \neq 0$ então $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} g_\gamma^{-1}(D) = \bigcap_{\gamma\in\mathrm{supp}(g)} g_\gamma^{-1}(D) \leq_{\text{gr-den}} I_R$, pela Proposição 2.8.11(1). ∎

A seguir estudamos a gr-densidade quando temos fidelidade em componentes homogêneas, conforme foi feito no caso graduado por grupo em (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Subsection 3.4).

Proposição 2.8.28. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. Para $\gamma \in \Gamma$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$, temos:*

1. *Se M é γ-fiel e $N(r(\gamma))$ é gr-denso em $M(r(\gamma))$ como R-módulos então N_γ é denso em M_γ como $R_{d(\gamma)}$-módulos.*
2. *Se M é Δ_0-fiel então N é gr-denso em M como R-módulos $\iff$ $N1_{\Delta_0}$ é gr-denso em $M1_{\Delta_0}$ como $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulos.*

Demonstração. (1) Suponha que M é γ-fiel, $N(r(\gamma)) \leq_{\text{gr-den}} M(r(\gamma))$ e sejam $x, y \in M_\gamma$, $x \neq 0$. Como $x, y \in \mathrm{h}(M(r(\gamma)))$, existe $a \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xa \neq 0$ e $ya \in N$. Como M é γ-fiel, existe $a' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq xaa' \in M_\gamma$. Em particular, $\deg(aa') = d(\gamma)$. Logo, $yaa' \in N \cap M_\gamma = N_\gamma$. Portanto, N_γ é denso em M_γ.

(2) Suponha que M é Δ_0-fiel.

($\Longrightarrow$): Suponha $N \leq_{\text{gr-den}} M$ e sejam $x, y \in \mathrm{h}(M1_{\Delta_0})$, $x \neq 0$. Como $x, y \in \mathrm{h}(M)$, existe $a \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xa \neq 0$ e $ya \in N$. Como M é Δ_0-fiel, existe $a' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq xaa' \in M1_{\Delta_0}$. Em particular, $r(\deg aa'), d(\deg aa') \in \Delta_0$ e segue que $yaa' \in N \cap M1_{\Delta_0} = N1_{\Delta_0}$. Logo, $N1_{\Delta_0}$ é gr-denso em $M1_{\Delta_0}$.

($\Longleftarrow$): Suponha que $N1_{\Delta_0} \leq_{\text{gr-den}} M1_{\Delta_0}$ e sejam $x, y \in \mathrm{h}(M)$, $x \neq 0$. Como M é Δ_0-fiel, existe $a \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq xa \in M1_{\Delta_0}$. Logo, $ya \in M1_{\Delta_0}$ e, portanto, existe $r \in \mathrm{h}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$ tal que $xar \neq 0$ e $yar \in N1_{\Delta_0} \subseteq N$. Portanto, $N \leq_{\text{gr-den}} M$. ∎

As seguintes consequências da Proposição 2.8.28 serão muito úteis no Capítulo 3.

Corolário 2.8.29. *Sejam R um anel Γ-graduado, I um ideal à direita gr-denso de R, $e \in \Gamma_0$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$.*

1. *Se R é e-fiel à direita então I_e é ideal à direita denso de R_e.*
2. *Se $R(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel então $1_{\Delta_0}I1_{\Delta_0}$ é ideal à direita gr-denso de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$.*
3. *Se $R(e)$ é $\{e\}$-fiel então 1_eI1_e é ideal à direita gr-denso de 1_eR1_e.* ∎

Corolário 2.8.30. *Sejam R um anel Γ-graduado, S um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R, $e \in \Gamma_0$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$.*

(1) *Se* R *é* e*-fiel à direita então* S_e *é um anel de quocientes à direita de* R_e*.*

(2) *Se* $R(\Delta_0)$ *é* Δ_0*-fiel então* $1_{\Delta_0}S1_{\Delta_0}$ *é um anel de quocientes à direita graduado de* $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$*.*

(3) *Se* $R(e)$ *é* $\{e\}$*-fiel então* 1_eS1_e *é um anel de quocientes à direita* $e\Gamma e$*-graduado de* 1_eR1_e*.*

Demonstração. Segue das Proposições 2.6.18 e 2.8.28. ∎

Em (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Note 6 (p. 548)), temos um exemplo que mostra que a hipótese de e-fidelidade no Corolário 2.8.30(1) não pode ser omitida.

Também temos a seguinte consequência da Proposição 2.8.28(2).

Corolário 2.8.31. *Sejam* R *um anel* Γ*-graduado,* $e \in \Gamma_0$ *e* $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$*.*

(1) *Se* $R(\Delta_0)$ *é* Δ_0*-fiel e* K *é um ideal à direita gr-denso de* $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ *então* $KR \leq_{\text{gr-den}} R(\Delta_0)$*.*

(2) *Se* $R(e)$ *é* $\{e\}$*-fiel e* K *é um ideal à direita gr-denso de* 1_eR1_e *então* $KR \leq_{\text{gr-den}} R(e)$*.*

Demonstração. Para (1), basta aplicar a Proposição 2.8.28(2) para $M = R(\Delta_0)$ e $N = KR$. (2) segue de (1) para $\Delta_0 = \{e\}$. ∎

2.9 Envolvente gr-racional

Nesta seção fixamos R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado, $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ a envolvente gr-injetiva de M e $H := \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))$. Queremos ver que M possui uma extensão gr-racional maximal (e única a menos de gr-isomorfismo sobre M). Esta seção pode ser vista como uma versão graduada de (Lam, 1999, §8B).

Definição 2.9.1. Definimos o seguinte subconjunto da envolvente gr-injetiva de M:

$$\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M) := \{x \in \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) : \forall g \in \mathrm{h}(H),\, g(M) = 0 \implies g(x) = 0\}.$$

Lema 2.9.2. $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$ *é um submódulo graduado de* $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ *e contém* M*.*

Demonstração. Claramente $M \subseteq \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$. $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$ é um submódulo de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ pois, para todos $x, x' \in \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$ e $r \in R$ temos

$$g(M) = 0 \implies g(x + x'r) = g(x) + g(x')r = 0,$$

para todo $g \in \mathrm{h}(H)$. Para vermos que $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$ é submódulo graduado de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$, considere uma soma finita $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma \in \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$ com $x_\gamma \in \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Para todo $g \in \mathrm{h}(H)$, temos

$$g(M) = 0 \implies \sum_{\gamma\in\Gamma} g(x_\gamma) = g(x) = 0 \implies g(x_\gamma) = 0, \, \forall\gamma \in \Gamma.$$

Logo, $x_\gamma \in \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$ para todo $\gamma \in \Gamma$. ∎

O resultado a seguir diz que $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$ é a maior extensão gr-racional de M dentro de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$.

Proposição 2.9.3. *Seja M' um submódulo graduado de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ que contém M. Então*

$$M \leq_{\text{gr-den}} M' \iff M' \subseteq \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$$

Demonstração. Suponhamos que $M' \subseteq \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$. Pela transitividade da gr-densidade (Proposição 2.8.11(2)), para provar que $M \leq_{\text{gr-den}} M'$ basta mostrar que $M \leq_{\text{gr-den}} \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$. Pela Proposição 2.8.13, isto equivale a mostrar que

$$\mathrm{HOM}_R\left(\frac{\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)}{M}, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M))\right) = 0.$$

Do Corolário 2.7.8(3), temos $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$. Sejam $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}_R\left(\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)/M, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right)_\gamma$. Considere a projeção canônica $\pi : \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M) \to \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)/M$. Então $g\circ\pi \in \mathrm{HOM}(\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M), \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))_\gamma$. Como $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ é gr-injetivo, $g\circ\pi$ se estende a um $g' \in H_\gamma$. Então

$$\begin{aligned} g'(M) = g(\pi(M)) = 0 &\implies g'(\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)) = 0 \\ &\implies g(\operatorname{im}\pi) = 0 \\ &\implies g = 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que $M \leq_{\text{gr-den}} M'$. Então $M \leq_{\text{gr-ess}} M'$ e segue de Corolário 2.7.8(2) que $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M') = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$. Pela Proposição 2.8.13, $\mathrm{HOM}_R\left(M'/M, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right) = 0$. Sejam $\gamma \in \Gamma$ e $g \in H_\gamma$ tais que $g(M) = 0$. Então

$$\begin{aligned} \overline{g} : \frac{M'}{M} &\longrightarrow \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) \\ \overline{x} &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$

é um elemento de $\mathrm{HOM}_R\left(M'/M, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right)_\gamma = 0$ e seque que $g(M') = 0$. Portanto,

$$M' \subseteq \{x \in \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) : \forall g \in \mathrm{h}(H), \, g(M) = 0 \implies g(x) = 0\} = \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M).$$ ∎

Teorema 2.9.4. *Seja P uma extensão gr-racional de M. Então existe um único $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(P, \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M))$ estendendo a inclusão $M \hookrightarrow \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$. Além disso, tal g é injetor.*

Demonstração. Como $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ é gr-injetivo e $M \leq_{\text{gr-ess}} P$, o Lema 2.7.2 nos diz que a inclusão $M \hookrightarrow \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ se estende a um gr-homomorfismo injetor $g : P \to$

$\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$. Claramente $M \leq_{\text{gr-den}} g(P)$ e segue da Proposição 2.9.3 que $g(P) \subseteq \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$. Agora suponha que exista outro $g_1 \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(P, \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M))$ estendendo a inclusão $M \hookrightarrow \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$. Pelo Lema 2.7.2, g_1 é injetor. Então temos bem definido o seguinte gr-homomorfismo

$$\begin{aligned} g' : g_1(P) &\longrightarrow \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M) \\ g_1(p) &\longmapsto g_1(p) - g(p)\,. \end{aligned}$$

Como $g'(M) = 0$, temos um gr-homomorfismo

$$\overline{g'} : \frac{g_1(P)}{M} \to \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$$

dado por $\overline{g'}(\overline{x}) := g'(x)$ para todo $x \in g_1(P)$. Mas, como $M \leq_{\text{gr-den}} \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$ e $M \leq_{\mathrm{gr}} g_1(P) \leq_{\mathrm{gr}} \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$, o Corolário 2.8.14(2) nos dá $\mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(g_1(P)/M, \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)) = 0$. Logo, $g' = 0$ e segue que $g_1 = g$. ■

Corolário 2.9.5. *$\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$ é a única extensão gr-racional maximal de M a menos de gr-isomorfismo sobre M.*

Demonstração. Segue facilmente do Teorema 2.9.4 que $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$ é uma extensão gr-racional maximal de M. Seja P outra extensão gr-racional maximal de M. Pelo Teorema 2.9.4, existe um (único) $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(P, \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M))$ injetor estendendo a inclusão $M \hookrightarrow \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$. Então $P \cong_{\mathrm{gr}} g(P)$ e segue que $g(P)$ é extensão gr-racional maximal de M. Então, como $g(P) \subseteq \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$, segue que $g(P) = \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$ e, portanto, g é um gr-isomorfismo. ■

Em vista do Corolário 2.9.5, diremos que $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$ é a *envolvente gr-racional* (ou *envelope gr-racional*) de M.

Observação 2.9.6. Se R possui unidade então $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M) \subseteq \tilde{\mathrm{E}}(M)$, a envolvente racional de M, pois $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$ é extensão racional de M pela Proposição 2.8.5. Mas pode ocorrer $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M) \neq \tilde{\mathrm{E}}(M)$, pois $\tilde{\mathrm{E}}(M)$ pode não ser graduado ou M pode não ser submódulo graduado de $\tilde{\mathrm{E}}(M)$. ■

O resultado a seguir é muito semelhante ao Corolário 2.7.9. Note que as igualdades viram apenas inclusões.

Proposição 2.9.7. (1) $\left(\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)\right)(\sigma) \subseteq \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M(\sigma))$, *para todo* $\sigma \in \Gamma$.

(2) $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M) \subseteq \bigoplus_{e \in \Gamma_0} \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M(e))$.

Demonstração. (1) Seja $\sigma \in \Gamma$. Como $M \leq_{\text{gr-den}} \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$, segue que

$$M(\sigma) \leq_{\text{gr-den}} \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)(\sigma) \subseteq \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)(\sigma) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M(\sigma)).$$

Da Proposição 2.9.3, obtemos $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)(\sigma) \subseteq \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M(\sigma))$.

(2) Por (1), temos

$$\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M) = \bigoplus_{e\in\Gamma_0} \left(\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)\right)(e) \subseteq \bigoplus_{e\in\Gamma_0} \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M(e)). \qquad \blacksquare$$

Também temos o seguinte resultado.

Proposição 2.9.8. (1) *Se R tem suporte finito então $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ também tem suporte finito.*

(2) *Se $R(e)$ tem suporte finito para todo $e \in \Gamma_0$ então $1_e \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R)1_f$ tem suporte finito para todos $e, f \in \Gamma_0$.*

Além disso, (1) *e* (2) *continuam valendo se trocarmos $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ por qualquer anel de quocientes à direita Γ-graduado S de R.*

Demonstração. (1) e (2) são consequência imediata da Proposição 2.7.12 pois $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R) \subseteq \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$.

A parte final do enunciado segue do Teorema 2.9.4, do qual obtemos que se S é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R então S_R é gr-isomorfo a um submódulo à direita graduado de $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R)$. $\blacksquare$

Podemos dar outra descrição da envolvente gr-racional, sem usar o anel H.

Proposição 2.9.9.

$$\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M) = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \{y \in \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)_\gamma : \forall x \in \mathrm{h}(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)), x \neq 0 \implies x(y^{-1}M) \neq 0\}.$$

Demonstração. Sejam $\gamma \in \Gamma$ e $y \in \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)_\gamma$ tais que, para todo $x \in \mathrm{h}(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))\setminus\{0\}$, temos $x(y^{-1}M) \neq 0$. Seja $g \in \mathrm{h}(H)$ tal que $g(M) = 0$. Se tivéssemos $g(y) \neq 0$ então teríamos $g(y)(y^{-1}M) \neq 0$, ou seja, existiria $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $g(y)r \neq 0$ e $yr \in M$. Mas então $g(y)r = g(yr) \in g(M) = 0$, uma contradição. Logo $g(y) = 0$. Isto mostra que $y \in \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$.

Reciprocamente, tome $y \in \mathrm{h}(\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M))$. Seja $0 \neq x \in \mathrm{h}(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))$. Como $M \leq_{\text{gr-ess}} \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq xr \in \mathrm{h}(M)$. Agora, como $M \leq_{\text{gr-den}} \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$, existe $s \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xrs \neq 0$ e $yrs \in M$, ou seja, $0 \neq xrs \in x(y^{-1}M)$. $\blacksquare$

Observação 2.9.10. Com a mesma ideia da demonstração acima, usando a Proposição 2.8.5, verifica-se que

$$\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M) = \{y \in \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) : \forall x \in \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M), x \neq 0 \implies x(y^{-1}M) \neq 0\}\,.$$

$\blacksquare$

Definição 2.9.11. Dizemos que M é *gr-racionalmente completo* se $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M) = M$.

Exemplos 2.9.12. São exemplos de módulos gr-racionalmente completos:

(1) os módulos gr-injetivos ($M = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) \supseteq \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$ implica $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M) = M$);

(2) as envolventes gr-racionais ($\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)) \subseteq \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$ por transitividade). ∎

Vamos agora tentar entender como a gr-racionalidade se relaciona com somas diretas.

Lema 2.9.13. *Sejam M_1, M_2 dois R-módulos à direita Γ-graduados. Então*

$$\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M_1 \oplus M_2) \subseteq \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M_1) \oplus \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M_2)\,.$$

Em particular, se M_1 e M_2 são gr-racionalmente completos então $M_1 \oplus M_2$ é gr-racionalmente completo.

Demonstração. Seja $y \in \mathrm{h}(\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M_1 \oplus M_2))$. Então $y \in \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M_1 \oplus M_2) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M_1) \oplus \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M_2)$ (pela Proposição 2.7.10). Logo, $y = (y_1, y_2)$ com $y_i \in \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M_i)$ $(i = 1, 2)$. Vejamos que $y_1 \in \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M_1)$. Seja $0 \neq x_1 \in \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M_1)$. Então $0 \neq (x_1, 0) \in \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M_1 \oplus M_2)$. Pela Proposição 2.9.9, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $(x_1, 0)r \neq 0$ e $yr \in M_1 \oplus M_2$. Em particular, $x_1 r \neq 0$ e $y_1 r \in M_1$, ou seja, $0 \neq x_1 r \in x_1(y_1^{-1} M_1)$. Pela Proposição 2.9.9, temos $y_1 \in \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M_1)$. De forma análoga, mostra-se que $y_2 \in \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M_2)$. Logo, $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M_1 \oplus M_2) \subseteq \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M_1) \oplus \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M_2)$. ∎

A recíproca da última afirmação do Lema 2.9.13 não vale em geral, já no caso não graduado como pode ser visto em (Lam, 1999, (8.21)). Por outro lado, a Proposição 2.9.7(2) nos dá o seguinte.

Corolário 2.9.14. *Se $M(e)$ é gr-racionalmente completo para todo $e \in \Gamma_0$ então M é gr-racionalmente completo.* ∎

Agora, vamos dar uma caracterização de módulos gr-racionalmente completos via extensões de homomorfismos.

Proposição 2.9.15. *São equivalentes:*

(1) *M é gr-racionalmente completo.*

(2) *Sempre que B é um R-módulo à direita Γ-graduado e A é um submódulo graduado de B satisfazendo $\mathrm{HOM}_R\left(\dfrac{B}{A}, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right) = 0$, temos que qualquer $g \in \mathrm{HOM}_R(A, M)_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ se estende a um $g' \in \mathrm{HOM}_R(B, M)_\gamma$.*

(3) *Sempre que B é um R-módulo à direita Γ-graduado e A é um submódulo graduado de B satisfazendo $\mathrm{HOM}_R\left(\dfrac{B}{A}, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right) = 0$, temos que qualquer $g \in \mathrm{HOM}_R(A, M)$ se estende a um $g' \in \mathrm{HOM}_R(B, M)$.*

(4) *Sempre que B é um R-módulo à direita Γ-graduado e A é um submódulo graduado de B satisfazendo $\mathrm{HOM}_R\left(\dfrac{B}{A}, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right) = 0$, temos que qualquer $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(A, M)$ se estende a um $g' \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(B, M)$.*

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2): Suponha que M é gr-racionalmente completo, $A \leq_{\mathrm{gr}} B$, $\mathrm{HOM}_R\,(B/A, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)) = 0$, $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}_R(A, M)_\gamma$. Como $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ é gr-injetivo, g se estende a um $g' \in \mathrm{HOM}_R(B, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))_\gamma$. Então basta provar que $g'(B) \subseteq M$. Por

(1), basta mostrar que $M \leq_{\text{gr-den}} M + g'(B)$. Pela Proposição 2.8.13, isto é equivalente a

$$\mathrm{HOM}\left(\frac{M+g'(B)}{M}, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M+g'(B))\right) = 0\,.$$

Note que, como $M \leq_{\text{gr}} M + g'(B) \leq_{\text{gr}} \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$, segue da Proposição 2.6.8(1) que $M \leq_{\text{gr-ess}} M + g'(B)$ e, portanto, do Corolário 2.7.8(2), segue que $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M + g'(B)) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$. Considere o seguinte homomorfismo sobrejetor de grau γ:

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &\longrightarrow \frac{M+g'(B)}{M} \\ \bar{b} &\longmapsto \overline{g'(b)}\,. \end{aligned}$$

Como $\mathrm{HOM}_R\left(\frac{B}{A}, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right) = 0$, segue que $\mathrm{HOM}\left(\frac{M+g'(B)}{M}, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right) = 0$, como queríamos.

(2) $\implies$ (3): Se prova como em (2) $\implies$ (3) na Proposição 2.5.2.

(3) $\implies$ (2): Se prova como em (3) $\implies$ (2) na Proposição 2.5.2.

(2) $\implies$ (4): Suponha que vale (2) e sejam $A \leq_{\text{gr}} B$ com $\mathrm{HOM}_R\left(\frac{B}{A}, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right) = 0$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(A, M)$. Fixe $e \in \Gamma_0$ e denote por g_e a restrição de g a $A(e)$. Note que $g_e \in \mathrm{HOM}_R(A(e), M)_e$. Como $\frac{B(e)}{A(e)} \cong_{\text{gr}} \frac{B}{A}(e)$, segue da Proposição 1.6.12(2) que

$$\mathrm{HOM}_R\left(\frac{B(e)}{A(e)}, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right) \cong_{\text{gr}} \mathrm{HOM}_R\left(\frac{B}{A}(e), \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right) \cong_{\text{gr}} \mathrm{HOM}_R\left(\frac{B}{A}, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right)\mathbb{1}_e = 0.$$

Portanto, segue de (2) que g_e se estende a um $g'_e \in \mathrm{HOM}_R(B(e), M)_e$. Então, é fácil ver que $g' := \bigoplus_{e\in\Gamma_0} g'_e$ é um elemento de $\mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(B, M)$ e estende g.

(4) $\implies$ (1): Como vimos na prova da Proposição 2.9.3, temos

$$\mathrm{HOM}_R\left(\frac{\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)}{M}, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right) = 0.$$

Então segue de (4) que a identidade $\mathrm{id}_M \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(M, M)$ se estende a um $g' \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M), M)$. Pelo Lema 2.7.2, g' é injetor. Mas isto só é possível se $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M) = M$. ■

Observação 2.9.16. As extensões g' nos itens (2)–(4) da Proposição 2.9.15 são únicas. De fato, se g_1 é outra extensão de g em (2) ou (3) então obtemos um homomorfismo

$$\begin{aligned} \overline{g' - g_1} : \frac{B}{A} &\longrightarrow \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) \\ \bar{b} &\longmapsto g'(b) - g_1(b)\,. \end{aligned}$$

Como $\mathrm{HOM}_R\left(B/A, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right) = 0$, segue que $g_1 = g'$. Semelhantemente, se g_1 é outra extensão de g em (4) então, para cada $e \in \Gamma_0$, obtemos o seguinte homomorfismo de grau e:

$$\begin{aligned} \overline{g'_e - g_1|_{B(e)}} : \frac{B}{A}(e) &\longrightarrow \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) \\ \bar{b} &\longmapsto g'(b) - g_1(b)\,. \end{aligned}$$

Estendendo $\overline{g'_e - g_1|_{B(e)}}$ a B/A (definindo seu valor como zero nos demais somandos diretos de B/A), segue de $\mathrm{HOM}_R\left(B/A, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right)_e = 0$ que $g_1|_{B(e)} = g'_e$. ■

Corolário 2.9.17. (1) *Sempre que B é um R-módulo à direita Γ-graduado, A é um submódulo graduado de B satisfazendo $\mathrm{HOM}_R\left(\frac{B}{A}, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right) = 0$ e $\gamma \in \Gamma$, temos que qualquer $g \in \mathrm{HOM}_R(A, \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M))_\gamma$ se estende unicamente a um $g' \in \mathrm{HOM}_R(B, \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M))_\gamma$.*

(2) *Se N é um submódulo gr-denso de M e $\gamma \in \Gamma$, temos que qualquer $g \in \mathrm{HOM}_R(N, \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M))_\gamma$ se estende unicamente a um $g' \in \mathrm{HOM}_R(M, \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M))_\gamma$.*

(3) *Se P é uma extensão gr-racional de M e $\gamma \in \Gamma$, temos que qualquer $g \in \mathrm{HOM}_R(M, \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M))_\gamma$ se estende unicamente a um $g' \in \mathrm{HOM}_R(P, \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M))_\gamma$.*

(4) *Qualquer $g \in \mathrm{HOM}_R(M, \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M))_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$) se estende unicamente a um $g' \in \mathrm{END}_R(\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M))_\gamma$.*

E todos os itens acima continuam valendo se trocarmos $g, g' \in \mathrm{HOM}_R(,)_\gamma$ por $g, g' \in \mathrm{HOM}_R(,)$ ou por $g, g' \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(,)$.

Demonstração. (1) segue da Proposição 2.9.15 e de $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M)$ ser gr-racionalmente completo.

(2) e (3) seguem de (1) e da Proposição 2.8.13.

(4) é imediato de (3). ■

Mais uma consequência da Proposição 2.9.15 é o seguinte Corolário, cuja prova é inspirada na de (Lam, 2007, Exercise 8.11).

Corolário 2.9.18. *Suponha que $\{M_i : i \in I\}$ é uma família de R-módulos à direita Γ-graduados gr-racionalmente completos tais que $M = \prod_{i \in I}^{gr} M_i$. Então M é gr-racionalmente completo.*

Demonstração. Sejam $A \leq_{\mathrm{gr}} B$ tais que $\mathrm{HOM}_R\left(\frac{B}{A}, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)\right) = 0$ e tome $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(A, M)$. Fixe $i \in I$ e considere a projeção canônica $p_i : M \to M_i$. Então $p_i \circ g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(A, M_i)$. Como $M = M_i \oplus \left(\prod_{i \neq j \in I} M_j\right)$, segue da Proposição 2.7.10 que $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M_i)$ é um somando direto graduado de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$. Logo, $\mathrm{HOM}_R\left(\frac{B}{A}, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M_i)\right) = 0$.

Como M_i é gr-racionalmente completo, segue da Proposição 2.9.15, que $p_i \circ g$ se estende a um $g_i' \in \operatorname{Hom}_{\text{gr-}R}(B, M_i)$. Então é claro que

$$\begin{aligned} g' : B &\longrightarrow M \\ b &\longmapsto (g_i'(b))_{i\in I} \end{aligned}$$

é um gr-homomorfismo estendendo g. Provamos então a condição (4) na Proposição 2.9.15 para M e segue que M é gr-racionalmente completo. ■

2.10 Gr-singularidade

Definição 2.10.1. Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. O *submódulo gr-singular* de M é definido como

$$\operatorname{sing}^{\text{gr}}(M) := \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\{m \in M_\gamma : \operatorname{r.ann}(m) \leq_{\text{gr-ess}} R_R\}$$

e dizemos que M é *gr-nãosingular* (resp. *gr-singular*) se $\operatorname{sing}^{\text{gr}}(M) = 0$ (resp. $\operatorname{sing}^{\text{gr}}(M) = M$). Também dizemos que R é anel *gr-nãosingular à direita* se R_R for *gr-nãosingular*. Diremos que R é anel gr-nãosingular à esquerda se R^{op} é anel gr-nãosingular à direita.

Observação 2.10.2. Se R tem unidade e $\operatorname{sing}(M)$ denota o submódulo singular de M então

$$\operatorname{sing}^{\text{gr}}(M) = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\{m \in M_\gamma : \operatorname{r.ann}(m) \leq_{\text{gr-ess}} R_R\} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\operatorname{sing}(M)\cap M_\gamma$$

é o maior submódulo graduado de M contido em $\operatorname{sing}(M)$. Em (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Example 4 (p. 545)) encontramos um exemplo de um anel $\mathbb{Z}_2$-graduado R tal que $\operatorname{sing}^{\text{gr}}(R_R) \subsetneq \operatorname{sing}(R_R)$. ■

Observação 2.10.3. Pela Observação 1.4.12 e o Lema 2.6.3 temos que

$$\operatorname{sing}^{\text{gr}}(M) := \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\{m \in M_\gamma : \operatorname{r.ann}(m)(d(\gamma)) \leq_{\text{gr-ess}} R(d(\gamma))\}.,$$

para cada R-módulo à direita Γ-graduado M. ■

O submódulo gr-singular de R_R tem as três seguintes propriedades.

Lema 2.10.4. *Sejam R um anel Γ-graduado e $a \in \operatorname{h}(R)$. Então $a \in \operatorname{sing}^{\text{gr}}(R_R)$ se, e somente se, existe um ideal à direita gr-essencial U de R tal que $a \in \operatorname{l.ann}(U)$. Em particular, R é anel gr-nãosingular à direita se, e somente se, para todo ideal à direita gr-essencial U de R temos $\operatorname{l.ann}(U) = 0$.*

Demonstração. Se $a \in \operatorname{sing}^{\text{gr}}(R_R)$ então $U := \operatorname{r.ann}(a)$ é um ideal à direita gr-essencial de R tal que $aU = 0$. Reciprocamente, se U é um ideal à direita gr-essencial de R tal que $a \in \operatorname{l.ann}(U)$ então $\operatorname{r.ann}(a) \leq_{\text{gr-ess}} R_R$ pois $U \subseteq \operatorname{r.ann}(a)$. ■

Lema 2.10.5. *Se R é um anel Γ-graduado então* $\mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ *é um ideal graduado de R.*

Demonstração. Como $\mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ é um ideal à direita graduado de R só precisamos verificar que $\mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ é ideal à esquerda. Sejam $a \in \mathrm{h}(\mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R))$ e $r \in \mathrm{h}(R)$. Pelo Lema 2.10.4, existe um ideal à direita gr-essencial U de R tal que $a \in \mathrm{l.ann}(U)$. Então $ra \in \mathrm{l.ann}(U)$ e segue novamente do Lema 2.10.4 que $ra \in \mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R)$. ■

Lema 2.10.6. *Um anel Γ-graduado R é gr-nãosingular à direita se, e somente se, para cada $0 \neq a \in \mathrm{h}(R)$, existe $0 \neq x \in \mathrm{h}(R)$ tal que, para todo $r \in \mathrm{h}(R)$, temos $axr = 0 \implies xr = 0$.*

Demonstração. Para um anel Γ-graduado R temos abaixo que $(i) \iff (i+1)$ para cada $i = 1, 2, 3$.

(1) $\mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R) = 0$.

(2) para todo $a \in \mathrm{h}(R)$, $\mathrm{r.ann}_R(a)$ não é gr-essencial em R_R.

(3) para todo $a \in \mathrm{h}(R)$, existe $0 \neq x \in \mathrm{h}(R)$ tal que $\mathrm{r.ann}_R(a) \cap xR = 0$.

(4) para todo $a \in \mathrm{h}(R)$, existe $0 \neq x \in \mathrm{h}(R)$ tal que, para todo $r \in \mathrm{h}(R)$, se $xr \in \mathrm{r.ann}_R(a)$ então $xr = 0$. ■

A importância dos anéis gr-nãosingulares nos motiva definirmos um conceito correspondente em categorias pré-aditivas.

Definição 2.10.7. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva, $A, B \in \mathcal{C}_0$ e $g \in \mathcal{C}(A, B)$. Definimos o *anulador à direita* de g como o ideal à direita $\mathrm{r.ann}_{\mathcal{C}}(g)$ de $\mathcal{C}$ consistindo de, para cada $C, D \in \mathcal{C}_0$, $\mathrm{r.ann}_{\mathcal{C}}(g)(C, D) = \mathcal{C}(C, D)$ se $D \neq A$ e $\mathrm{r.ann}_{\mathcal{C}}(g)(C, A) = \{h \in \mathcal{C}(C, A) : g \circ h = 0\}$. Analogamente definimos o ideal à esquerda $\mathrm{l.ann}_{\mathcal{C}}(g)$ de $\mathcal{C}$ chamado o *anulador à esquerda* de g.

Definição 2.10.8. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva. Definimos o *ideal singular à direita* de $\mathcal{C}$ como sendo o ideal $\mathrm{sing}_d(\mathcal{C})$ onde, para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$,

$$\mathrm{sing}_d(\mathcal{C})(A, B) := \{g \in \mathcal{C}(A, B) : \mathrm{r.ann}_{\mathcal{C}}(g) \text{ é ideal à direita essencial de } \mathcal{C}\}.$$

Semelhantemente, definimos o *ideal singular à esquerda* $\mathrm{sing}_e(\mathcal{C})$. Se $\mathrm{sing}_d(\mathcal{C})$ (resp. $\mathrm{sing}_e(\mathcal{C})$) é o ideal nulo então dizemos que $\mathcal{C}$ é uma categoria nãosingular à direita (resp. à esquerda).

Analogamente ao Lema 2.10.6, se verifica o seguinte resultado.

Lema 2.10.9. *Uma categoria pré-aditiva $\mathcal{C}$ é nãosingular à direita se, e somente se, para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A, B)$, existe $C \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq g \in \mathcal{C}(C, A)$ tal que, para todo $D \in \mathcal{C}_0$ e $h \in \mathcal{C}(D, C)$, temos $f \circ g \circ h = 0 \implies g \circ h = 0$.* ■

O seguinte resultado dá um exemplo de categoria nãosingular à direita.

Proposição 2.10.10. *Seja A um anel com unidade nãosingular à direita. Denote por* proj-A *a categoria dos A-módulos à direita projetivos finitamente gerados e seja $\mathcal{C}$*

uma subcategoria plena de proj-A *com* $A_A \in \mathcal{C}_0$. *Então* $\mathcal{C}$ *é uma categoria nãosingular à direita.*

Demonstração. Sejam $P, Q \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(P,Q)$. Pelo Lema 2.1.15, existem homomorfismos $a : A \to P$ e $b : Q \to A$ tais que $0 \neq b \circ f \circ a \in \mathrm{End}(A_A)$. Como $\mathrm{End}(A_A) \cong A$ é anel nãosingular à direita, existe $0 \neq g \in \mathrm{End}(A_A)$ tal que

$$\forall t \in \mathrm{End}(A_A),\ bfagt = 0 \implies gt = 0\,. \tag{2.10.1}$$

Em particular,

$$g \circ \mathrm{id}_A = g \neq 0 \underset{(2.10.1)}{\implies} bfag\,\mathrm{id}_A \neq 0 \implies ag \neq 0\,.$$

Suponha, por absurdo, que $\mathrm{r.ann}_{\mathcal{C}}(f)$ é essencial em $\mathcal{C}$. Então existem $P' \in \mathcal{C}_0$ e $h \in \mathcal{C}(P', A)$ tal que $0 \neq agh \in \mathrm{r.ann}_{\mathcal{C}}(f)(P', P)$. Em particular, $fagh = 0$. Novamente pelo Lema 2.1.15, existem homomorfismos $c : A \to P'$ e $d : P \to A$ tais que $0 \neq d(agh)c \in \mathrm{End}(A_A)$. Note que $hc \in \mathrm{End}(A_A)$ e, portanto,

$$fagh = 0 \implies bfaghc = 0 \underset{(2.10.1)}{\implies} ghc = 0 \implies daghc = 0\,,$$

uma contradição. Logo, $f \notin \mathrm{sing}_d(\mathcal{C})$. ∎

Observação 2.10.11. Se $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena então

$$\mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(R[\mathcal{C}]_{R[\mathcal{C}]}) = \bigoplus_{A,B \in \mathcal{C}_0} \mathrm{sing}_d(\mathcal{C})(A,B)\,.$$

Logo $\mathcal{C}$ é uma categoria nãosingular à direita se, e somente se, $R[\mathcal{C}]$ é um anel gr-nãosingular à direita. ∎

O submódulo gr-singular também se comporta bem com shifts.

Proposição 2.10.12. *Sejam* R *um anel* Γ*-graduado e* M *um* R*-módulo à direita* Γ*-graduado. Então*

(1) $\mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(M(\sigma)) = (\mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(M))\,(\sigma)$, *para todo* $\sigma \in \Gamma$.

(2) $\mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(M) = \bigoplus_{e \in \Gamma_0} \mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(M(e))$.

(3) *M é gr-nãosingular (resp. gr-singular) se, e somente se, $M(e)$ é gr-nãosingular (resp. gr-singular) para todo $e \in \Gamma_0$.*

Demonstração. (1) Para cada $\sigma \in \Gamma$, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(M(\sigma)) &= \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \{m \in M_{\sigma\gamma} : \mathrm{r.ann}(m) \leq_{\text{gr-ess}} R_R\} \\ &= \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (\mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(M))_{\sigma\gamma} \\ &= (\mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(M))(\sigma)\,. \end{aligned}$$

(2) Segue imediatamente de (1).

(3) Segue de (2). ■

O próximo resultado nos diz como se relacionam submódulos gr-singulares com submódulos graduados.

Lema 2.10.13. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. Então*

(1) $\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(N) = N \cap \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M)$.

(2) *N é gr-singular se, e somente se, $N \subseteq \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M)$.*

(3) *todo submódulo graduado de um módulo gr-nãosingular (resp. gr-singular) é gr-nãosingular (resp. gr-singular).*

Demonstração. (1) Para cada $\gamma \in \Gamma$, como $N_\gamma = N_\gamma \cap M_\gamma$, segue que

$$\begin{aligned}(\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(N))_\gamma &= \{n \in N_\gamma : \mathrm{r.ann}(n) \leq_{\text{gr-ess}} R_R\} \\ &= N_\gamma \cap \{m \in M_\gamma : \mathrm{r.ann}(m) \leq_{\text{gr-ess}} R_R\} \\ &= (N \cap \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M))_\gamma\,.\end{aligned}$$

(2) e (3) Seguem imediatamente de (1). ■

Observação 2.10.14. Note que o Lema 2.10.13(1) nos diz que $\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(N) \subseteq \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M)$. Isto pode ser generalizado assim: Se M, M' são dois R-módulos à direita Γ-graduados e $g : M \to M'$ é um gr-homomorfismo ou um homomorfismo de grau $\gamma \in \Gamma$ então $g(\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M)) \subseteq \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M')$. De fato, basta notar que se $m \in \mathrm{h}(M)$ então $\mathrm{r.ann}(m) \subseteq \mathrm{r.ann}(g(m))$ e o resultado segue da transitividade da gr-essencialidade (Proposição 2.6.8(1)). Esse fato ajuda a provar o próximo Lema. ■

Lema 2.10.15. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado, N um submódulo gr-essencial de M, $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}_R(M/N, M)_\gamma$. Temos que:*

(1) *M/N é um R-módulo gr-singular.*

(2) *Se M é gr-nãosingular e $g|_{\frac{M}{N}(d(\gamma))}$ é injetor então $N(d(\gamma)) = M(d(\gamma))$.*

Demonstração. (1) Sejam $\sigma \in \Gamma$, $x \in M_\sigma$ e considere $\overline{x} \in (M/N)_\sigma$. Vejamos que $\mathrm{r.ann}_R(\overline{x}) \leq_{\text{gr-ess}} R_R$. Seja $0 \neq a \in \mathrm{h}(R)$. Se $xa = 0$ então $0 \neq a1_{d(\deg a)} \in \mathrm{r.ann}_R(\overline{x})$. Se $xa \neq 0$ então, como $xa \in \mathrm{h}(M)$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq xar \in N$ e segue que $0 \neq ar \in \mathrm{r.ann}_R(\overline{x})$.

(2) Temos $g(M/N) = g(\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M/N)) \subseteq \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M)$. Portanto, se M é gr-nãosingular e $g|_{\frac{M}{N}(d(\gamma))}$ é injetor então

$$g\left(\frac{M}{N}\right) = 0 \implies g\left(\frac{M}{N}(d(\gamma))\right) = 0 \implies \frac{M}{N}(d(\gamma)) = 0 \implies M(d(\gamma)) \subseteq N\,. \quad ■$$

A gr-singularidade também é importante para conectar a gr-densidade com a gr-essencialidade, conforme o resultado a seguir, inspirado em (Lam, 1999, Proposition 8.7(3) and Corollary 8.9).

Teorema 2.10.16. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M.*

(1) *Quando $N \leq_{\text{gr-ess}} M$ temos que N é gr-nãosingular se, e somente se, M é gr-nãosingular.*

(2) *Quando N ou M é gr-nãosingular temos que $N \leq_{\text{gr-ess}} M$ se, e somente se, $N \leq_{\text{gr-den}} M$.*

(3) *R é anel gr-nãosingular à direita se, e somente se, todo ideal à direita gr-essencial de R é gr-denso em R_R.*

Demonstração. (1) Pelo Lema 2.10.13(3), se M é gr-nãosingular então N é gr-nãosingular. Agora suponha que $N \leq_{\text{gr-ess}} M$ e N é gr-nãosingular. Pelo Lema 2.10.13(1), temos $N \cap \operatorname{sing}^{\text{gr}}(M) = 0$. Como $N \leq_{\text{gr-ess}} M$, segue que $\operatorname{sing}^{\text{gr}}(M) = 0$.

(2) Suponha que N ou M é gr-nãosingular e que $N \leq_{\text{gr-ess}} M$. Vejamos que $N \leq_{\text{gr-den}} M$. Sejam $x, y \in \mathrm{h}(M)$, $x \neq 0$. Pela Proposição 2.6.9(3), $y^{-1}N$ é um ideal à direita gr-essencial de R. Por (1), M é gr-nãosingular e segue que

$$x \notin \operatorname{sing}^{\text{gr}}(M) \implies y^{-1}N \nsubseteq \operatorname{r.ann}(x) \implies x(y^{-1}N) \neq 0.$$

Logo, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $yr \in N$.

(3) Uma das implicações segue imediatamente de (2). Suponha então que todo ideal à direita gr-essencial de R é gr-denso em R_R. Suponha, por absurdo, que exista $0 \neq x \in \mathrm{h}(\operatorname{sing}^{\text{gr}}(R_R))$ e seja $\gamma := \deg x$. Como $\operatorname{r.ann}(x)$ é ideal à direita gr-essencial de R, segue que $\operatorname{r.ann}(x) \leq_{\text{gr-den}} R_R$ e, portanto, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $1_{d(\gamma)}r \in \operatorname{r.ann}(x)$. Mas $x1_{d(\gamma)}r = xr \neq 0$, uma contradição. Logo, $\operatorname{sing}^{\text{gr}}(R_R) = 0$. ■

As duas Proposições a seguir serão provadas conforme o caso graduado por grupo (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Proposition 22 (p. 545)).

Proposição 2.10.17. *Sejam S um anel Γ-graduado e R um subanel graduado de S tal que $R_R \leq_{\text{gr-ess}} S_R$.*

(1) $\operatorname{sing}^{\text{gr}}(S_R) \subseteq \operatorname{sing}^{\text{gr}}(S_S)$.

(2) *Se S é anel gr-nãosingular à direita então R é anel gr-nãosingular à direita.*

Demonstração. (1) Seja $s \in \mathrm{h}(\operatorname{sing}^{\text{gr}}(S_R))$. Como $\operatorname{r.ann}_R(s) \leq_{\text{gr-ess}} R_R$, segue da Proposição 2.8.16(5) que $\operatorname{r.ann}_R(s)S \leq_{\text{gr-ess}} S_S$. Mas $\operatorname{r.ann}_R(s)S = (R \cap \operatorname{r.ann}_S(s))S \subseteq \operatorname{r.ann}_S(s)$ e então $\operatorname{r.ann}_S(s) \leq_{\text{gr-ess}} S_S$. Isto mostra que $\operatorname{sing}^{\text{gr}}(S_R) \subseteq \operatorname{sing}^{\text{gr}}(S_S)$.

(2) Segue de (1) e do Teorema 2.10.16(1). ■

Trocando gr-essencialidade por gr-densidade conseguimos melhorar a Proposição 2.10.17 da seguinte forma:

Proposição 2.10.18. *Seja R um anel Γ-graduado e S um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R. Então*

(1) $\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(S_R) = \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(S_S)$.

(2) *S é anel gr-nãosingular à direita se, e somente se, R é anel gr-nãosingular à direita.*

Demonstração. (1) Pela Proposição 2.10.17(1), basta mostrarmos que $\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(S_S) \subseteq \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(S_R)$. Seja $s \in \mathrm{h}(\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(S_S))$. Como $\mathrm{r.ann}_S(s) \leq_{\text{gr-ess}} S_S$, segue da Proposição 2.8.17(3) que $\mathrm{r.ann}_R(s) = R \cap \mathrm{r.ann}_S(s) \leq_{\text{gr-ess}} R_R$ e, portanto, $s \in \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(S_R)$.

(2) Segue de (1) e do Teorema 2.10.16(1). ■

Também temos a seguinte consequência do Teorema 2.10.16(2) e da Proposição 2.9.3.

Corolário 2.10.19. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado gr-nãosingular. Então $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$.* ■

O resultado a seguir relaciona a gr-singularidade com fidelidade em componentes homogêneas e segue o mesmo raciocínio de (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Proposition 24 (p. 545)).

Proposição 2.10.20. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado, $e \in \Gamma_0$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$.*

(1) *Se R é e-fiel à direita então, para todo $\gamma \in \Gamma e$, $\operatorname{sing}(M_\gamma) = (\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M))_\gamma$ como R_e-módulos.*

(2) *Se $R(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel então $\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M1_{\Delta_0}) = (\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M))1_{\Delta_0}$ como $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulos Γ-graduados.*

Demonstração. (1) Suponha que R é e-fiel à direita e seja $\gamma \in \Gamma e$.

Seja $x \in \operatorname{sing}(M_\gamma)$, isto é, $\mathrm{r.ann}_{R_e}(x)$ é ideal à direita essencial de R_e. Pelo Corolário 2.6.13(2), temos $(\mathrm{r.ann}_{R_e}(x))R \leq_{\text{gr-ess}} R(e)$. Mas

$$\begin{aligned}(\mathrm{r.ann}_{R_e}(x))R &= \{r \in R_e : xr = 0\}R \\ &\subseteq \{r \in R(e) : xr = 0\} \\ &= (\mathrm{r.ann}_R(x))(e)\,.\end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{r.ann}_R(x) \leq_{\text{gr-ess}} R_R$ pela Observação 2.10.3 e segue que $x \in \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M)$.

Reciprocamente, seja $x \in (\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M))_\gamma$, isto é, $x \in M_\gamma$ e $\mathrm{r.ann}_R(x) \leq_{\text{gr-ess}} R_R$. Em particular, $(\mathrm{r.ann}_R(x))(e) \leq_{\text{gr-ess}} R(e)$. Pelo Corolário 2.6.13(1), $(\mathrm{r.ann}_R(x))_e$ é ideal à direita essencial de R_e. Como

$$\begin{aligned}(\mathrm{r.ann}_R(x))_e &= \{r \in R : xr = 0\} \cap R_e \\ &= \{r \in R_e : xr = 0\} \\ &= \mathrm{r.ann}_{R_e}(x)\,,\end{aligned}$$

segue que $x \in \operatorname{sing}(M_\gamma)$.

(2) Suponha que $R(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel.

Seja $x \in \mathrm{h}(\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M1_{\Delta_0}))$, isto é, $\mathrm{r.ann}_{1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}}(x)$ é ideal à direita gr-essencial de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$. Pelo Corolário 2.6.15(2), temos $(\mathrm{r.ann}_{1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}}(x))R \leq_{\text{gr-ess}} R(\Delta_0)$. Mas

$$\begin{aligned}(\mathrm{r.ann}_{1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}}(x))R &= \{r \in 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0} : xr = 0\}R \\ &\subseteq \{r \in R(\Delta_0) : xr = 0\} \\ &= (\mathrm{r.ann}_R(x))(\Delta_0)\,.\end{aligned}$$

Como $\deg(x) \in \Delta_0$, segue do Lema 2.6.3 que $\mathrm{r.ann}_R(x) \leq_{\text{gr-ess}} R_R$ e $x \in \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M)1_{\Delta_0}$.

Reciprocamente, seja $x \in \mathrm{h}(\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M)1_{\Delta_0})$, isto é, $x \in \mathrm{h}(M1_{\Delta_0})$ e $\mathrm{r.ann}_R(x) \leq_{\text{gr-ess}} R_R$. Pelo Lema 2.6.3, $(\mathrm{r.ann}_R(x))(\Delta_0) \leq_{\text{gr-ess}} R(\Delta_0)$ e segue do Corolário 2.6.15(1) que $1_{\Delta_0}(\mathrm{r.ann}_R(x))1_{\Delta_0}$ é ideal à direita gr-essencial de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$. Como

$$\begin{aligned}1_{\Delta_0}(\mathrm{r.ann}_R(x))1_{\Delta_0} &= 1_{\Delta_0}\{r \in R : xr = 0\}1_{\Delta_0} \\ &= \{r \in 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0} : xr = 0\} \\ &= \mathrm{r.ann}_{1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}}(x)\,,\end{aligned}$$

obtemos $x \in \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M1_{\Delta_0})$. ■

Corolário 2.10.21. *Sejam R um anel Γ-graduado, $e \in \Gamma_0$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$.*

(1) *Se R é e-fiel à direita então R é anel gr-nãosingular à direita $\Longrightarrow$ R_e é anel nãosingular à direita $\Longleftrightarrow$ $R(e)$ é R-módulo gr-nãosingular.*

(2) *Se $R(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel então R é anel gr-nãosingular à direita $\Longrightarrow$ $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ é anel gr-nãosingular à direita $\Longleftrightarrow$ $R(\Delta_0)$ é R-módulo gr-nãosingular.*

(3) *Se $R(e)$ é $\{e\}$-fiel então R é anel gr-nãosingular à direita $\Longrightarrow$ 1_eR1_e é anel gr-nãosingular à direita $\Longleftrightarrow$ $R(e)$ é R-módulo gr-nãosingular.*

Demonstração. (1) Suponha que R é e-fiel à direita. Da Proposição 2.10.20(1) temos $\operatorname{sing}(R_{eR_e}) = (\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R))_e$. Logo,

$$\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R) = 0 \implies \operatorname{sing}(R_{eR_e}) = (\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R))_e = 0\,.$$

E segue do Lema 1.8.9(1) e da Proposição 2.10.12(1) que

$$(\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R))_e = 0 \iff (\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R))(e) = 0 \iff \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R(e)) = 0\,.$$

(2) Suponha que $R(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel. Pela Proposição 2.10.20(2), $\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R1_{\Delta_0}) = (\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R))1_{\Delta_0}$ e, pela Proposição 2.10.12(1), $\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R1_{\Delta_0}(\Delta_0)) = (\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R1_{\Delta_0}))(\Delta_0)$ como $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulos. Logo, se $\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R) = 0$ então $\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R1_{\Delta_0}) = 0$ e

$$\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}((1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})_{1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}}) = \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R1_{\Delta_0}(\Delta_0)) = (\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R1_{\Delta_0}))(\Delta_0) = 0\,.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}((1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})_{1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}}) = 0 &\iff \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R1_{\Delta_0}(\Delta_0)) = 0 \\
&\iff (\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R1_{\Delta_0}))(\Delta_0) = 0 \\
&\iff (\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R)1_{\Delta_0})(\Delta_0) = 0 \\
&\iff (\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R))(\Delta_0)1_{\Delta_0} = 0 \\
&\iff (\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R))(\Delta_0) = 0 \\
&\iff \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R(\Delta_0)) = 0\,,
\end{aligned}$$

onde a quinta equivalência segue do Lema 1.8.9(2) e a sexta equivalência segue da Proposição 2.10.12(1).

(3) Segue de (2) para $\Delta_0 = \{e\}$. ■

2.11 Módulos quase gr-injetivos

Muitos dos resultados que precisaremos sobre módulos gr-injetivos podem ser provados, de uma forma mais geral, para módulos quase gr-injetivos.

Definição 2.11.1. Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Dizemos que M é *quase gr-injetivo* (ou simplesmente *gr-QI*) se para cada $L \leq_{\mathrm{gr}} M$, $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}_R(L, M)_\gamma$ existe um $g' \in \mathrm{END}_R(M)_\gamma$ tal que $g'|_L = g$.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, dashed, "g'"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

É fácil ver que M é gr-QI se, e somente se, para cada $L \leq_{\mathrm{gr}} M$ e $g \in \mathrm{HOM}_R(L, M)$ existe um $g' \in \mathrm{END}_R(M)$ tal que $g'|_L = g$.

Exemplos 2.11.2. (1) Claramente, todo módulo gr-injetivo é gr-QI.

(2) A envolvente gr-racional de qualquer módulo gr-nãosingular é gr-QI (Corolário 2.10.19).

(3) Todo módulo gr-semissimples é gr-QI. De fato, todo submódulo graduado L de um módulo gr-semissimples M é um somando direto graduado de M (Cala *et al.*, 2022, Proposition 56) e, neste caso, qualquer $g \in \mathrm{h}(\mathrm{HOM}_R(L, M))$ se estende a um $g' \in \mathrm{END}_R(M)$ definindo g' como 0 no outro somando direto. ■

Segue imediatamente do Critério de Baer graduado (Teorema 2.5.6) que R_R é gr-QI se, e somente, se R_R é gr-injetivo. Mais geralmente, temos o seguinte resultado, que é baseado em (Lam, 1999, Remark 6.71(2)).

Proposição 2.11.3. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e suponha que existe um gr-homomorfismo injetor $\varphi : R_R \to M_R$. Então M é gr-QI se, e somente, se M é gr-injetivo.*

Demonstração. Vamos supor que M é gr-QI e usar o Critério de Baer graduado (Teorema 2.5.6) para ver que M é gr-injetivo. Sejam U ideal à direita graduado de R, $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}_R(U, M)_\gamma$. Como $\varphi(U)$ é submódulo graduado de M, temos que $g \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{HOM}_R(\varphi(U), M)_\gamma$ se estende a um $g' \in \mathrm{END}_R(M)_\gamma$. Então g' é tal que $g'(\varphi(u)) = g(u)$ para todo $u \in U$, ou seja, $g' \circ \varphi \in \mathrm{HOM}_R(R, M)_\gamma$ é uma extensão de g a R. Segue do Teorema 2.5.6 que M é gr-injetivo. ∎

A seguir temos uma generalização de (Lam, 1999, Proposition 6.73).

Proposição 2.11.4. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado gr-QI. Então todo somando direto graduado de M também é gr-QI. Em particular, $M(\sigma)$ é gr-QI para todo $\sigma \in \Gamma$.*

Demonstração. Suponha que $M = N \oplus N'$ onde N e N' são submódulos graduados de M. Sejam $L \leq_{\mathrm{gr}} N$, $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}_R(L, N)_\gamma$. Considerando $g \in \mathrm{HOM}_R(L, M)_\gamma$, existe $g' \in \mathrm{END}_R(M)_\gamma$ tal que $g'|_L = g$. Então a projeção canônica $\pi : M \to M/N$ é tal que $\pi \circ g'|_N \in \mathrm{END}_R(N)$ é extensão de g a N. Portanto, N é gr-QI. ∎

Corolário 2.11.5. *Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado gr-QI. Para cada $L \leq_{\mathrm{gr}} M$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(L, M)$ existe $g' \in \mathrm{End}_{\text{gr-}R}(M)$ tal que $g'|_L = g$.*

Demonstração. Sejam $L \leq_{\mathrm{gr}} M$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(L, M)$. Fixe $e \in \Gamma_0$. Como $g|_{L(e)} \in \mathrm{HOM}_R(L(e), M(e))_e$ e $M(e)$ é gr-QI (pela Proposição 2.11.4), existe $g'_e \in \mathrm{END}_R(M(e))_e$ tal que g'_e estende $g|_{L(e)}$. Então $g' := \bigoplus_{e \in \Gamma_0} g'_e \in \mathrm{End}_{\text{gr-}R}(M)$ é tal que g' estende g. ∎

O resultado a seguir é baseado em (Lam, 1999, Theorem 6.74) e nos ajudará a obter envolventes quase gr-injetivas.

Proposição 2.11.6. *Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Então M é gr-QI se, e somente se, M é invariante por todo elemento de $\mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))$.*

Demonstração. Suponhamos que M é invariante por todo elemento de $\mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))$. Sejam $L \leq_{\mathrm{gr}} M$, $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}_R(L, M)_\gamma$. Pela gr-injetividade de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$, podemos estender g a um $\tilde{g} \in \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))_\gamma$. Como $\tilde{g}(M) \subseteq M$, segue que $g' := \tilde{g}|_M \in \mathrm{END}_R(M)_\gamma$ estende g. Logo, M é gr-QI.

Reciprocamente, suponhamos que M é gr-QI e seja $g \in \mathrm{h}(\mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)))$. Então

$$L := \{m \in M : g(m) \in M\}$$

é um submódulo graduado de M. Como $g|_L \in \mathrm{h}(\mathrm{HOM}_R(L, M))$ temos que $g|_L$ se estende a um $g' \in \mathrm{h}(\mathrm{END}_R(M))$. Pela gr-injetividade de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$, podemos estender g' a um $\tilde{g} \in \mathrm{h}(\mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)))$. Suponha, por absurdo, que $(\tilde{g} - g)(M) \neq 0$. Como $M \leq_{\text{gr-ess}} \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$, temos $M \cap (\tilde{g} - g)(M) \neq 0$. Então seja $0 \neq m \in M \cap (\tilde{g} - g)(M)$ e $m' \in M$ tal que $m = (\tilde{g} - g)(m')$. Temos

$$g(m') = \tilde{g}(m') - m = g'(m') - m \in M$$

e segue que $m' \in L$. Logo,

$$m = \tilde{g}(m') - g(m') = g'(m') - g'(m') = 0\,,$$

uma contradição. Portanto, $(\tilde{g} - g)(M) = 0$ e segue que, para todo $m \in M$, temos

$$g(m) = \tilde{g}(m) = g'(m) \in M\,. \qquad \blacksquare$$

Observação 2.11.7. (1) Denotando $H := \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))$, a Proposição 2.11.6 pode reenunciada como M é gr-QI se, e somente se, M é um (H, R)-subbimódulo graduado de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$.

(2) Com demonstração totalmente análoga a da Proposição 2.11.6 e usando o Corolário 2.11.5, obtemos que se M é gr-QI então M é invariante por todo elemento de $\mathrm{End}_{\text{gr-}R}(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))$. ■

Temos a seguinte consequência imediata da Proposição 2.11.6.

Corolário 2.11.8. *Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Então M é gr-QI se, e somente se,*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)) &\longrightarrow \mathrm{END}_R(M) \\ g &\longmapsto g|_M \end{aligned}$$

é um gr-homomorfismo sobrejetor de anéis Γ-graduados.

Demonstração. A Proposição 2.11.6 nos diz que M é gr-QI se, e somente se, Φ está bem definida. Quando bem definida, Φ é sobrejetora pela gr-injetividade de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$. ■

Nem sempre a Φ do Corolário 2.11.8 é injetora (LAM, 1999, p. 238-239). Mas temos o seguinte.

Proposição 2.11.9. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado gr-QI tal que $M \leq_{\text{gr-den}} \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$. Então*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)) &\longrightarrow \mathrm{END}_R(M) \\ g &\longmapsto g|_M \end{aligned}$$

é um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados.

Demonstração. Pelo Corolário 2.11.8, basta mostrarmos que Φ é injetora. Como $M \leq_{\text{gr-den}} \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ segue da Proposição 2.9.3 que $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(M) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$. A injetividade de Φ agora segue do Corolário 2.9.17(4). ■

Definição 2.11.10. Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Dizemos que Q é uma *envolvente quase gr-injetiva* (ou simplesmente *envolvente gr-QI*) de M se Q é um R-módulo à direita Γ-graduado minimal com as seguintes propriedades:

(i) M é submódulo graduado de Q;

(ii) Q é gr-QI.

O resultado a seguir mostra que envolventes quase gr-injetivas existem.

Proposição 2.11.11. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e $H := \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M))$. Então*

$$\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{q}}(M) := HM = \sum_{g \in \mathrm{h}(H)} g(M)$$

é uma envolvente gr-QI de M.

Demonstração. M é R-submódulo graduado de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{q}}(M)$ pois se $\gamma \in \Gamma$ e $m \in \mathrm{M}_\gamma$ então

$$m = \mathbb{1}_{r(\gamma)}(m) \in H_{r(\gamma)} M_\gamma \subseteq \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{q}}(M)_\gamma \,.$$

Como $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{q}}(M)$ é R-submódulo graduado de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$, segue do Corolário 2.7.8(3), que $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{q}}(M)) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$. Então $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{q}}(M)$ é invariante por todo elemento de $H = \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{q}}(M)))$ e segue da Proposição 2.11.6 que $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{q}}(M)$ é gr-QI.

Vejamos a minimalidade de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{q}}(M)$. Suponha que $M \leq_{\mathrm{gr}} Q$, Q é gr-QI e $Q \subseteq \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{q}}(M)$. Então Q é R-submódulo graduado de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ e segue do Corolário 2.7.8(3) que $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(Q) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$. Como Q é gr-QI, temos da Proposição 2.11.6 que Q é invariante por todo elemento de $\mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(Q)) = H$. Logo,

$$\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{q}}(M) = HM \subseteq HQ \subseteq Q \,. \qquad \blacksquare$$

Para vermos que $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{q}}(M)$ é a única envolvente quase gr-injetiva de M a menos de gr-isomorfismo sobre M, precisamos do seguinte Lema, baseado em (Lam, 1999, Proposition 6.79 and Corollary 6.80).

Lema 2.11.12. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado gr-QI.*

(1) *Se $\{X_i : i \in I\}$ é uma família de submódulos graduados de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ tal que $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) = \bigoplus_{i \in I} X_i$ então $M = \bigoplus_{i \in I} (M \cap X_i)$.*

(2) *Se N é um submódulo gr-essencialmente fechado em M (isto é, M não contém extensões gr-essenciais próprias de N) então N é um somando direto graduado de M.*

Demonstração. (1) Suponha que $\{X_i : i \in I\}$ é uma família de submódulos graduados de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ tal que $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) = \bigoplus_{i \in I} X_i$. Para cada $i \in I$, seja $\pi_i : \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) \to X_i$ a projeção canônica. Pela Observação 2.11.7(2), como M é gr-QI, temos que $\pi_i(M) \subseteq M$. Então, dado $m \in M$ temos $m = \sum_{i \in I} \pi_i(m) \in \bigoplus_{i \in I} (M \cap X_i)$.

(2) Suponha que N é submódulo gr-essencialmente fechado em M. Pela Proposição 2.6.10(2), existe $P \leq_{\text{gr}} M$ tal que $N \oplus P \leq_{\text{gr-ess}} M$. Pelo Corolário 2.7.8(2) e a Proposição 2.7.10, obtemos

$$\mathrm{E}^{\text{gr}}(M) = \mathrm{E}^{\text{gr}}(N \oplus P) = \mathrm{E}^{\text{gr}}(N) \oplus \mathrm{E}^{\text{gr}}(P)\,.$$

Por (1), temos

$$M = (M \cap \mathrm{E}^{\text{gr}}(N)) \oplus (M \cap \mathrm{E}^{\text{gr}}(P))\,.$$

Como $N \leq_{\text{gr}} M \cap \mathrm{E}^{\text{gr}}(N) \leq_{\text{gr}} \mathrm{E}^{\text{gr}}(N)$, segue da Proposição 2.6.8(1) que $N \leq_{\text{gr-ess}} M \cap \mathrm{E}^{\text{gr}}(N)$. Como $M \cap \mathrm{E}^{\text{gr}}(N) \subseteq M$, temos $N = M \cap \mathrm{E}^{\text{gr}}(N)$ e, portanto, N é somando direto graduado de M. ■

Proposição 2.11.13. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Todo R-módulo à direita Γ-graduado gr-QI que contém M como submódulo graduado também contém uma cópia de $\mathrm{E}^{\text{gr}}_{\text{q}}(M)$ sobre M. Em particular, $\mathrm{E}^{\text{gr}}_{\text{q}}(M)$ é a única envolvente quase gr-injetiva de M a menos de gr-isomorfismo sobre M.*

Demonstração. Suponha que $M \leq_{\text{gr}} Q$ e Q é gr-QI. Uma fácil aplicação do Lema de Zorn nos dá um elemento N maximal em $\{X \leq_{\text{gr}} Q : M \leq_{\text{gr-ess}} X\}$. Segue da transitividade da gr-essencialidade que N é gr-essencialmente fechado em Q. Pelo Lema 2.11.12(2), N é somando direto graduado de Q e segue da Proposição 2.11.4 que N é gr-QI. Como $M \leq_{\text{gr-ess}} N$, segue do Corolário 2.7.8(2) que $\mathrm{E}^{\text{gr}}(N) \cong_{\text{gr}} \mathrm{E}^{\text{gr}}(M)$ sobre M. Se $\psi : \mathrm{E}^{\text{gr}}(N) \to \mathrm{E}^{\text{gr}}(M)$ é um gr-isomorfismo sobre M então

$$\begin{aligned} \Psi : \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\text{gr}}(N)) &\to \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\text{gr}}(M)) \\ g &\mapsto \psi \circ g \circ \psi^{-1} \end{aligned}$$

define um gr-isomorfismo de anéis tal que, para cada $m \in M$ e $g \in \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\text{gr}}(N))$ com $g(m) \in M$, temos $\Psi(g)(m) = g(m)$. Logo,

$$Q' := \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\text{gr}}(N)) \cdot M \cong_{\text{gr}} \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\text{gr}}(M)) \cdot M = \mathrm{E}^{\text{gr}}_{\text{q}}(M)$$

sobre M e segue que Q' é gr-QI. Por outro lado,

$$Q' = \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\text{gr}}(N)) \cdot M \subseteq \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\text{gr}}(N)) \cdot N \subseteq N \subseteq Q,$$

por N ser gr-QI (Proposição 2.11.6). ■

Temos a seguinte relação entre módulos gr-QI e fidelidade em componentes homogêneas.

Proposição 2.11.14. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado, $\gamma \in \Gamma$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$. Temos:*

(1) *Se M é γ-fiel e $M(r(\gamma))$ é gr-QI então M_γ é um $R_{d(\gamma)}$-módulo quase injetivo.*

(2) *Se M é Δ_0-fiel e $M(\Delta_0)$ é gr-QI então $M1_{\Delta_0}$ é um $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulo gr-QI.*

Demonstração. (1) Suponha que M é γ-fiel e $M(r(\gamma))$ é gr-QI. Seja L um submódulo à direita de M_γ e $g : L \to M_\gamma$ um homomorfismo de $R_{d(\gamma)}$-módulos à direita. Então

LR é um submódulo graduado de $M(r(\gamma))$ e, pela Proposição 1.8.13(1),

$$\begin{aligned} \tilde{g} : LR &\longrightarrow M(r(\gamma)) \\ \sum_i l_i r_i &\longmapsto \sum_i g(l_i) r_i \end{aligned}$$

é um homomorfismo de R-módulos à direita de grau $r(\gamma)$. Como $M(r(\gamma))$ é gr-QI, temos que $\tilde{g}$ se estende a um $h \in \mathrm{END}_R(M(r(\gamma)))_{r(\gamma)}$. Como $h(M_\gamma) \subseteq M_\gamma$, segue que $h|_{M_\gamma} : M_\gamma \to M_\gamma$ é uma extensão de g. Logo, M_γ é um $R_{d(\gamma)}$-módulo quase injetivo.

(2) Suponha que M é Δ_0-fiel e $M(\Delta_0)$ é gr-QI. Seja L um submódulo à direita graduado de $M1_{\Delta_0}$ e $g : L \to M1_{\Delta_0}$ um homomorfismo de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulos à direita de grau σ. Então LR é um submódulo graduado de $M(\Delta_0)$ e, pela Proposição 1.8.13(2),

$$\begin{aligned} \tilde{g} : LR &\longrightarrow M(\Delta_0) \\ \sum_i l_i r_i &\longmapsto \sum_i g(l_i) r_i \end{aligned}$$

é um homomorfismo de R-módulos à direita de grau σ. Como $M(\Delta_0)$ é gr-QI, temos que $\tilde{g}$ se estende a um $h \in \mathrm{END}_R(M(\Delta_0))_\sigma$. Como $h(M1_{\Delta_0}) \subseteq M1_{\Delta_0}$, segue que $h|_{M1_{\Delta_0}} : M1_{\Delta_0} \to M1_{\Delta_0}$ é uma extensão de g. Logo, $M1_{\Delta_0}$ é gr-QI. ■

2.12 Dimensão gr-uniforme

Definição 2.12.1. Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Diremos que M tem *dimensão gr-uniforme* $n \in \mathbb{N}$ (e denotamos $\text{gr-u.dim}_R(M) = n$) se M contém uma soma direta de n submódulos graduados não nulos e M não contém uma soma direta de $n+1$ submódulos graduados não nulos. Quando existir tal $n \in \mathbb{N}$, diremos que M tem *dimensão gr-uniforme finita*. Caso contrário, diremos que M tem *dimensão gr-uniforme infinita* (e escreveremos $\text{gr-u.dim}_R(M) = \infty$). Definimos também a *dimensão* Γ_0*-uniforme* de M por $\Gamma_0\text{-u.dim}_R(M) := (\text{gr-u.dim}_R\, M(e))_{e \in \Gamma_0}$. E diremos que M tem *dimensão gr-uniforme* Γ_0*-finita* se $M(e)$ tem dimensão gr-uniforme finita para todo $e \in \Gamma_0$.

Exemplos 2.12.2. Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado.

(0) $\text{gr-u.dim}_R(M) = 0 \iff M = 0$.

(1) Se M é gr-simples então $\text{gr-u.dim}_R(M) = 1$.

(2) Se M é Γ_0-simples então $\Gamma_0\text{-u.dim}_R(M) = (\chi_{\Gamma_0'(M)}(e))_{e \in \Gamma_0}$ onde $\chi_{\Gamma_0'(M)}$ denota a função característica de $\Gamma_0'(M)$. ■

Observação 2.12.3. (1) É evidente que se R é um anel Γ-graduado com unidade e M é um R-módulo à direita Γ-graduado então $\text{gr-u.dim}_R(M) \leq \text{u.dim}_R(M)$ onde $\text{u.dim}_R(M)$ é a dimensão uniforme de M.

(2) Se R é um anel Γ-graduado e M é um R-módulo à direita Γ-graduado de

dimensão gr-uniforme finita então existe um número finito de $e \in \Gamma_0$ tais que $M(e) \neq 0$ (ou seja, $\Gamma'_0(M)$ é finito). Em particular, pelo Corolário 1.4.17, se gr-u.dim$(R_R) < \infty$ então R tem unidade. ■

As duas proposições a seguir relacionam a dimensão gr-uniforme com fidelidade em componentes homogêneas e serão provadas seguindo o raciocínio de (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Propositions 19 and 20 (p. 544)).

Proposição 2.12.4. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado, $\gamma \in \Gamma$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$.*

(1) *Se M é γ-fiel então* $\text{gr-u.dim}_R(M(r(\gamma))) = \text{u.dim}_{R_{d(\gamma)}}(M_\gamma)$.

(2) *Se M é Δ_0-fiel então* $\text{gr-u.dim}_R(M) = \text{gr-u.dim}_{1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}}(M1_{\Delta_0})$.

Demonstração. (1) Suponha que M é γ-fiel.

Se $M(r(\gamma))$ contém uma soma direta $\bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ de submódulos graduados não nulos então, pelo Lema 1.8.9(1), M_γ contém a soma direta $\bigoplus_{i=1}^{n}(N_i)_\gamma$ de $R_{d(\gamma)}$-submódulos não nulos. Logo, $\text{gr-u.dim}_R(M(r(\gamma))) \leq \text{u.dim}_{R_{d(\gamma)}}(M_\gamma)$.

Reciprocamente, suponha que $\bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ é uma soma direta de $R_{d(\gamma)}$-submódulos não nulos de M_γ. Para concluir que $\text{gr-u.dim}_R(M(r(\gamma))) \geq \text{u.dim}_{R_{d(\gamma)}}(M_\gamma)$, basta mostrarmos que $\sum_{i=1}^{n} X_i R$ é direta. Sejam $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\alpha \in \Gamma$ e, para cada $i = 1, ..., n$, sejam $x_i \in X_i$ e $a_i \in R_\alpha$ tais que $x_1a_1 + \cdots + x_na_n = 0$. Se existisse $1 \leq j \leq n$ tal que $x_ja_j \neq 0$ então, como M é γ-fiel e $x_j \in X_j \subseteq M_\gamma$, existiria $r \in \text{h}(R)$ tal que $0 \neq x_ja_jr \in M_\gamma$, de onde obteríamos $r \in R_{\alpha^{-1}}$ e $x_1a_1r + \cdots + x_na_nr = 0$ com $x_ia_ir \in X_i$ para todo $i = 1, ..., n$, contradizendo que os X_i estão em soma direta. Logo, $x_ia_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n$.

(2) Suponha que M é Δ_0-fiel.

Se M contém uma soma direta $\bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ de submódulos graduados não nulos então, pelo Lema 1.8.9(2), $M1_{\Delta_0}$ contém a soma direta $\bigoplus_{i=1}^{n} N_i1_{\Delta_0}$ de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-submódulos graduados não nulos. Logo, $\text{gr-u.dim}_R(M) \leq \text{gr-u.dim}_{1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}}(M1_{\Delta_0})$.

Reciprocamente, suponha que $\bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ é uma soma direta de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-submódulos graduados não nulos de $M1_{\Delta_0}$. Para concluirmos que $\text{gr-u.dim}_R(M) \geq \text{gr-u.dim}_{1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}}(M1_{\Delta_0})$, basta mostrarmos que $\sum_{i=1}^{n} X_iR$ é direta. Sejam $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\alpha \in \Gamma$ e, para cada $i = 1, ..., n$, sejam $x_i \in \text{h}(X_i)$ e $a_i \in \text{h}(R(\Delta_0))$ tais que $x_ia_i \in R_\alpha$ e $x_1a_1 + \cdots + x_na_n = 0$. Se existisse $1 \leq j \leq n$ tal que $x_ja_j \neq 0$ então, como M é

Δ_0-fiel, existiria $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq x_j a_j r \in M1_{\Delta_0}$, de onde obteríamos $r \in R1_{\Delta_0}$ e $x_1 a_1 r + \cdots + x_n a_n r = 0$ com $x_i a_i r \in X_i$ para todo $i = 1, ..., n$, contradizendo que os X_i estão em soma direta. Logo, $x_i a_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n$. ■

Corolário 2.12.5. *Sejam R um anel Γ-graduado, $e \in \Gamma_0$ e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$.*

(1) *Se R é e-fiel à direita então* $\text{gr-u.dim}_R(R(e)) = \text{u.dim}(R_{eR_e})$.

(2) *Se R é Δ_0-fiel à direita então* $\text{gr-u.dim}(R_R) = \text{gr-u.dim}_{1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}}(R1_{\Delta_0})$.

(3) *Se $R(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel então* $\text{gr-u.dim}_R(R(\Delta_0)) = \text{gr-u.dim}((1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})_{1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}})$. ■

Proposição 2.12.6. *Sejam R um anel Γ-graduado e S um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R. Então Γ_0-u.dim$(R_R) = \Gamma_0$-u.dim(S_S).*

Demonstração. Fixe $e \in \Gamma_0$.

Se $R(e)$ contém a soma direta $\bigoplus_{i=1}^{n} I_i$ de R-submódulos graduados não nulos então, pelas Proposições 2.8.16(2) e 2.8.17(8), $S(e)$ contém a soma direta $\bigoplus_{i=1}^{n}(I_i S)$ de S-submódulos graduados não nulos. Logo, $\text{gr-u.dim}_R(R(e)) \leq \text{gr-u.dim}_S(S(e))$.

Reciprocamente, se $S(e)$ contém a soma direta $\bigoplus_{i=1}^{n} K_i$ de S-submódulos graduados não nulos então, pela Proposição 2.8.16(1), $R(e)$ contém a soma direta $\bigoplus_{i=1}^{n}(K_i \cap R)$ de R-submódulos graduados não nulos. Portanto, $\text{gr-u.dim}_R(R(e)) \geq \text{gr-u.dim}_S(S(e))$. ■

Agora, buscamos obter outras caracterizações de $\text{gr-u.dim}_R(M) = n$. Para isso, precisamos dos conceitos de módulos gr-uniformes e gr-indecomponíveis.

Definição 2.12.7. Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado não nulo. Dizemos que M é

- *gr-indecomponível* se, para todos X, Y submódulos graduados de M, temos que $M = X \oplus Y \implies X = 0$ ou $Y = 0$.
- Γ_0-*indecomponível* se $M(e)$ é gr-indecomponível para todo $e \in \Gamma_0'(M)$.
- *gr-uniforme* se, para todos X, Y submódulos graduados não nulos de M, temos $X \cap Y \neq 0$.
- Γ_0-*uniforme* se $M(e)$ é gr-uniforme para todo $e \in \Gamma_0'(M)$.

Observação 2.12.8. Valem as implicações

$$M \text{ é gr-simples} \implies M \text{ é gr-uniforme} \implies M \text{ é gr-indecomponível}$$

e

$$M \text{ é } \Gamma_0\text{-simples} \implies M \text{ é } \Gamma_0\text{-uniforme} \implies M \text{ é } \Gamma_0\text{-indecomponível}$$

para cada módulo à direita Γ-graduado não nulo M. ■

A Proposição a seguir traz algumas propriedades básicas de módulos gr-indecomponíveis e gr-uniformes.

Proposição 2.12.9. *Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Temos:*

(1) *Se M é gr-indecomponível então existe $e \in \Gamma_0$ tal que $M = M(e)$.*

(2) *M é gr-uniforme se, e somente se,* $\text{gr-u.dim}_R(M) = 1$.

(3) *Se M é gr-indecomponível (resp. gr-uniforme) e $M = M(e)$ para certo $e \in \Gamma_0$ então, para todo $\sigma \in e\Gamma$, $M(\sigma)$ é gr-indecomponível (resp. gr-uniforme).*

(4) *Suponha que $M = M(e)$ para certo $e \in \Gamma_0$. Então M é gr-indecomponível se, e somente se, os únicos idempotentes homogêneos de $\text{END}_R(M)$ são 0 e $\mathbb{1}_e$.*

(5) *M é Γ_0-indecomponível se, e somente se, os únicos idempotentes homogêneos de $\text{END}_R(M)$ são 0 e $\mathbb{1}_e$ com $e \in \Gamma'_0(M)$.*

Demonstração. (1) Segue imediatamente de $M = \bigoplus_{e \in \Gamma_0} M(e)$.

(2) É claro.

(3) Segue da correspondência entre os submódulos graduados de $M(\sigma)$ e de $M(r(\sigma))$ $(\sigma \in \Gamma)$ dada pelo Lema 1.4.11.

(4) Suponha que M é gr-indecomponível e seja g um idempotente homogêneo de $\text{END}_R(M)$. Como $M = M(e)$, temos que $g \in \text{END}_R(M)_e$. É fácil ver que $M = \ker g \oplus \operatorname{im} g$. Logo, $\ker g = \{0\}$ ou $\operatorname{im} g = \{0\}$. No último caso, temos $g = 0$. Se $\ker g = \{0\}$ então, para todo $m \in M$, temos $m - g(m) \in \ker g = \{0\}$ e, portanto, $g = \mathbb{1}_e$.

(5) Primeiramente note que, para cada $e \in \Gamma'_0(M)$, a Proposição 1.6.12(2) nos dá $\operatorname{supp} \text{END}_R(M(e)) \subseteq e\Gamma e$ e

$$\text{END}_R(M)_e = \text{HOM}_R(M, M)_e \cong \text{HOM}_R(M(e), M(e))_e = \text{END}_R(M(e))_e \,.$$

Usando isso juntamente com (4), temos que as seguintes afirmações são equivalentes:

- os únicos idempotentes homogêneos de $\text{END}_R(M)$ são 0 e $\mathbb{1}_e$ com $e \in \Gamma'_0(M)$.
- Para cada $e \in \Gamma'_0(M)$, os únicos idempotentes homogêneos de $\text{END}_R(M(e))_e$ são 0 e $\mathbb{1}_e$.
- Para cada $e \in \Gamma'_0(M)$, $M(e)$ é gr-indecomponível.
- M é Γ_0-indecomponível. ■

Módulos gr-uniformes e gr-indecomponíveis se relacionam da seguinte forma (o item (1) segue o raciocínio de (Goodearl e Warfield, 2004, Lemma 5.14) e o item (2) é inspirado em (Lam, 2007, Exercise 6.32)).

Lema 2.12.10. *Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado não nulo. Temos*

(1) *M é gr-uniforme se, e somente se, $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ é gr-indecomponível.*

(2) *Suponha que M é gr-QI. Então M é gr-uniforme se, e somente se, M é gr-indecomponível.*

Demonstração. (1) Suponha que M é gr-uniforme e $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) = X \oplus Y$ onde X e Y são submódulos graduados de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$. Como M é gr-uniforme e $(X \cap M) \cap (Y \cap M) = 0$, temos $X \cap M = 0$ ou $Y \cap M = 0$. Como $M \leq_{\text{gr-ess}} \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$, segue que $X = 0$ ou $Y = 0$. Portanto $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ é gr-indecomponível.

Reciprocamente, suponha que M não é gr-uniforme e sejam X, Y submódulos graduados não nulos de M tais que $X \cap Y = 0$. Pela Proposição 2.7.10 e o Corolário 2.7.8(1), temos

$$\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(X) \subsetneq \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(X) \oplus \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(Y) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(X \oplus Y) \subseteq \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$$

Pelo Corolário 2.5.14, temos que $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(X)$ é um somando direto graduado de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ e, portanto, $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ não é gr-indecomponível.

(2) Suponha que M é gr-QI e não é gr-uniforme. Sejam X, Y submódulos graduados não nulos de M tais que $X \cap Y = 0$. Raciocinando como no parágrafo anterior, obtemos $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(X) \oplus P$ onde $0 \neq P \leq_{\mathrm{gr}} \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$. Como $M \leq_{\text{gr-ess}} \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$, temos $M \cap P \neq 0$, $M \cap \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(X) \neq 0$ e, como M é gr-QI, segue do Lema 2.11.12(1) que

$$M = (M \cap \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(X)) \oplus (M \cap P)$$

não é gr-indecomponível. ∎

O resultado a seguir é consequência imediata do Lema 2.12.10, da Proposição 2.11.4 e do Corolário 2.7.9.

Corolário 2.12.11. *Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado não nulo. Então*

(1) *M é Γ_0-uniforme se, e somente se, $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ é Γ_0-indecomponível.*

(2) *Suponha que M é gr-QI. Então M é Γ_0-uniforme se, e somente se, M é Γ_0-indecomponível.* ∎

Anéis Γ-graduados R tais que R_R é Γ_0-uniforme aparecerão no Capítulo seguinte. Temos uma versão categórica desse conceito.

Definição 2.12.12. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva. Diremos que $\mathcal{C}$ é uma *categoria uniforme à direita* se, para cada $A, B, C \in \mathcal{C}_0$, $0 \neq f \in \mathcal{C}(A, C)$ e $0 \neq g \in \mathcal{C}(B, C)$, existem $D \in \mathcal{C}_0$, $h_1 \in \mathcal{C}(D, A)$ e $h_2 \in \mathcal{C}(D, B)$ tais que $0 \neq f \circ h_1 = g \circ h_2$.

Observação 2.12.13. Não é difícil verificar que para uma categoria pré-aditiva pequena $\mathcal{C}$ temos que $\mathcal{C}$ é uniforme à direita se, e somente se, $R[\mathcal{C}]_{R[\mathcal{C}]}$ é Γ_0-uniforme. ∎

Exemplos de categorias uniformes à direita podem ser extraídos da Proposição a seguir.

Proposição 2.12.14. *Seja A um anel com unidade tal que A_A é A-módulo uniforme. Considere a categoria* mod-A *dos A-módulos à direita e seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria plena de* mod-A *tal que todo objeto de $\mathcal{C}$ é um módulo uniforme e $A_A \in \mathcal{C}_0$. Então $\mathcal{C}$ é uma categoria uniforme à direita.*

Demonstração. Sejam $M, N, X \in \mathcal{C}_0$, $0 \neq f \in \mathcal{C}(M, X)$ e $0 \neq g \in \mathcal{C}(N, X)$. Sejam $m \in M$ e $n \in N$ tais que $f(m) \neq 0$ e $g(n) \neq 0$. Como X_A é uniforme, existem $a, b \in A$ tais que $0 \neq f(m)a = g(n)b$. Considere os homomorfismos de A-módulos à direita $h_1 : A \to M$ e $h_2 : A \to N$ tais que $h_1(1_A) = ma$ e $h_2(1_A) = nb$. Como

$$f \circ h_1(1_A) = f(ma) = f(m)a = g(n)b = g(nb) = g \circ h_2(1_A)\,,$$

segue que $f \circ h_1 = g \circ h_2$. Note que $f \circ h_1(1_A) = f(m)a \neq 0$ e, portanto, $f \circ h_1 \neq 0$. Logo, $\mathcal{C}$ é categoria uniforme à direita. ∎

O próximo lema nos ajudará a obter uma caracterização da dimensão gr-uniforme. A prova segue a mesma ideia do caso não graduado (Goodearl e Warfield, 2004, Lemma 5.16).

Lema 2.12.15. *Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado tal que $M = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ onde $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ e U_i é gr-uniforme para todo $i = 1, ..., n$. Então M não contém uma soma direta de $n+1$ submódulos graduados não nulos, ou seja,* $\text{gr-u.dim}_R(M) = n$.

Demonstração. Vamos usar indução em n.

Se $n = 1$ então M é gr-uniforme e, portanto, não contém uma soma direta de 2 submódulos graduados não nulos.

Suponha que $n > 1$ é tal que vale o Lema para $n - 1$. Considere $M = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ onde U_i é gr-uniforme para todo $i = 1, ..., n$. Suponha, por absurdo, que M contem $N_1 \oplus \cdots \oplus N_{n+1}$ onde cada N_i é submódulo graduado não nulo de M e seja $N := N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$. Fixe $1 \leq i \leq n$. Se tivermos $N \cap U_i = 0$ então a projeção $M \to U_1 \oplus \cdots \oplus \widehat{U_i} \oplus \cdots \oplus U_n$ faz com que $U_1 \oplus \cdots \oplus \widehat{U_i} \oplus \cdots \oplus U_n$ contenha uma cópia de N, contradizendo a hipótese de indução. Logo, $N \cap U_i \neq 0$. Como U_i é gr-uniforme, temos $N \cap U_i \leq_{\text{gr-ess}} U_i$. Logo, pela Proposição 2.6.8(3), temos que

$$(N \cap U_1) \oplus \cdots \oplus (N \cap U_n) \leq_{\text{gr-ess}} U_1 \oplus \cdots \oplus U_n = M\,.$$

Como $(N \cap U_1) \oplus \cdots \oplus (N \cap U_n) \subseteq N$, segue que $N \leq_{\text{gr-ess}} M$. Mas isto é uma contradição com $N \cap N_{n+1} = 0$ e $N_{n+1} \neq 0$. ∎

Temos então a seguinte caracterização da dimensão gr-uniforme, cuja demonstração é semelhante a do caso não graduado (Goodearl e Warfield, 2004, Proposition 5.20).

Teorema 2.12.16. *Seja R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e $n \in \mathbb{N}$. São equivalentes:*

(1) $\text{gr-u.dim}_R(M) = n$.

(2) *M possui um submódulo gr-essencial que é soma direta de n gr-uniformes.*

(3) *$\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ é soma direta de n submódulos gr-indecomponíveis.*

(4) *$\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ é soma direta de n submódulos gr-uniformes.*

Demonstração. (1) $\implies$ (2): Suponha que $\text{gr-u.dim}_R(M) = n$ e M contem a soma direta $N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ onde cada N_i é submódulo graduado não nulo de M. Seja $1 \leq i \leq n$ e vejamos que N_i é gr-uniforme. Se X, Y são submódulos graduados de N_i tais que $X \cap Y = 0$ então M contém a soma direta

$$N_1 \oplus \cdots \oplus N_{i-1} \oplus X \oplus Y \oplus N_{i+1} \oplus \cdots \oplus N_n$$

e segue de (1) que $X = 0$ ou $Y = 0$. Por fim, vejamos que $N_1 \oplus \cdots \oplus N_n \leq_{\text{gr-ess}} M$. Seja X um submódulo graduado de M tal que $X \cap (N_1 \oplus \cdots \oplus N_n) = 0$. Então M contém a soma direta $X \oplus N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ e segue de (1) que $X = 0$.

(2) $\implies$ (3): Suponha que existam $U_1, ..., U_n$ submódulos gr-uniformes de M tais que $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \leq_{\text{gr-ess}} M$. Pelo Corolário 2.7.8(2) e a Proposição 2.7.10 temos que

$$\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(U_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(U_n).$$

Pelo Lema 2.12.10(1) temos que cada $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(U_i)$ é gr-indecomponível.

(3) $\implies$ (4): Segue imediatamente da Proposição 2.11.4 e do Lema 2.12.10(2).

(4) $\implies$ (1): Suponha que existam $U_1, ..., U_n$ submódulos gr-uniformes de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ tais que $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M) = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$. Pelo Lema 2.12.15, $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ (e, portanto, M) não contém uma soma direta de $n+1$ submódulos graduados não nulos. Como M contém a soma direta $(U_1 \cap M) \oplus \cdots \oplus (U_n \cap M)$ de submódulos graduados não nulos, segue que $\text{gr-u.dim}_R(M) = n$. ■

Como consequência, temos o resultado a seguir, que também segue o mesmo raciocínio do caso não graduado (Goodearl e Warfield, 2004, Theorem 5.17).

Corolário 2.12.17. *Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Então M tem dimensão gr-uniforme finita se, e somente se, M não contém uma soma direta infinita de submódulos graduados não nulos.*

Demonstração. É claro que se M tem dimensão gr-uniforme finita então M não contém uma soma direta infinita de submódulos graduados não nulos.

Reciprocamente, suponha que $\text{gr-u.dim}_R(M) = \infty$. Então, pelo Teorema 2.12.16, $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ não é soma direta finita de submódulos gr-indecomponíveis. Em particular, $Y_0 := \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ não é gr-indecomponível e $Y_0 = X_1 \oplus Y_1$ para certos submódulos graduados não nulos X_1, Y_1 de Y_0 com Y_1 não sendo uma soma direta finita de submódulos gr-indecomponíveis. Repetindo o argumento para Y_1 e assim prosseguindo indutivamente, obteremos submódulos graduados não nulos $X_1, Y_1, X_2, Y_2, ..., X_n, Y_n, ...$ de Y_0 tais que, para todo $n \geq 1$, $Y_{n-1} = X_n \oplus Y_n$ e Y_n não é soma direta finita de submódulos gr-indecomponíveis. Note que se $k > n$ então $X_k \subseteq Y_{k-1} \subseteq \cdots \subseteq Y_n$ e segue que

$$X_n \cap \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} X_k \right) \subseteq X_n \cap Y_n = 0 \,.$$

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ é direta. Para cada $n \geq 1$, como $M \leq_{\text{gr-ess}} \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$ e $X_n \neq 0$, segue que $X_n \cap M \neq 0$. Portanto, M contém a soma direta $\bigoplus_{n=1}^{\infty}(X_n \cap M)$ de submódulos graduados não nulos. ■

Observação 2.12.18. Note que se S é um R-módulo Γ_0-simples então S tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita mas se $\Gamma_0'(S)$ é infinito então S é uma soma direta infinita de submódulos graduados não nulos. Por outro lado, se um R-módulo Γ-graduado M não contém uma soma direta infinita de submódulos graduados não nulos então $\Gamma_0'(M)$ é finito e M tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita. ■

O resultado a seguir é consequência imediata do Corolário 2.12.17.

Corolário 2.12.19. *Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Se M é gr-artiniano ou gr-noetheriano então M tem dimensão gr-uniforme finita. Semelhantemente, se M é Γ_0-artiniano ou Γ_0-noetheriano então M tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita. Em particular, se R é anel gr-semissimples então R_R tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita.* ■

Outra consequência imediata do Corolário 2.12.17 é a seguinte caracterização de dimensão gr-uniforme finita.

Corolário 2.12.20. *Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Então M tem dimensão gr-uniforme finita se, e somente se, para cada conjunto infinito $\{m_i : i \in I\}$ de elementos homogêneos não nulos de M existe $(r_i)_{i \in I} \in R^{(I)}$ e $j \in I$ tais que $\sum_{i \in I} m_i r_i = 0$ e $m_j r_j \neq 0$.* ■

O Corolário 2.12.20 nos motiva a seguinte versão categórica de dimensão uniforme finita.

Definição 2.12.21. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva. Diremos que $\mathcal{C}$ tem *dimensão uniforme finita à direita* se, para cada $A \in \mathcal{C}_0$, I conjunto infinito, $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{C}_0$ e $(f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I}(\mathcal{C}(A_i, A) \setminus \{0\})$ existem $D \in \mathcal{C}_0$, $(h_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}(D, A_i)$ e $j \in I$ tais que $\sum_{i \in I} f_i \circ h_i = 0$ e $f_j \circ h_j \neq 0$.

Observação 2.12.22. Segue imediatamente do Corolário 2.12.20 que, para uma categoria pré-aditiva pequena $\mathcal{C}$, temos que $\mathcal{C}$ tem dimensão uniforme finita à direita se, e somente se, $R[\mathcal{C}]_{R[\mathcal{C}]}$ tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita. ■

Exemplo 2.12.23. Segue imediatamente da definição que toda categoria uniforme à direita tem dimensão uniforme finita à direita. ■

A Proposição a seguir traz mais exemplos de categorias com dimensão uniforme finita.

Proposição 2.12.24. *Seja A um anel com unidade tal que A_A tem dimensão uniforme finita. Considere a categoria* mod-A *dos A-módulos à direita e seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria plena de* mod-A *tal que todo objeto de $\mathcal{C}$ é um módulo de dimensão uniforme finita e $A_A \in \mathcal{C}_0$. Então $\mathcal{C}$ tem dimensão uniforme finita à direita.*

Demonstração. Sejam $N \in \mathcal{C}_0$, I um conjunto infinito, $\{M_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{C}_0$ e $(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}(\mathcal{C}(M_i, N) \setminus \{0\})$. Para cada $i \in I$, seja $m_i \in M_i$ tal que $f_i(m_i) \neq 0$. Como N_A tem dimensão uniforme finita, existem $a_i \in A^{(I)}$ e $j \in I$ tais que $\sum_{i\in I} f_i(m_i)a_i = 0$ e $f_j(m_j)a_j \neq 0$. Para cada $i \in I$ considere o homomorfismo de A-módulos à direita $h_i : A \to M_i$ tal que $h_i(1_A) = m_i a_i$. Como $a_i \in A^{(I)}$, temos que $(h_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{C}(A, M_i)$. Além disso, temos

$$\left(\sum_{i\in I} f_i \circ h_i\right)(1_A) = \sum_{i\in I} f_i(m_i a_i) = \sum_{i\in I} f_i(m_i)a_i = 0$$

e

$$f_j \circ h_j(1_A) = f_j(m_j a_j) = f_j(m_j)a_j \neq 0\,.$$

Logo, $\sum_{i\in I} f_i \circ h_i = 0$ e $f_j \circ h_j \neq 0$. Portanto, $\mathcal{C}$ tem dimensão uniforme finita à direita. ■

Apresentamos agora mais três consequências do Teorema 2.12.16. Os dois primeiros resultados são inspirados em (Goodearl e Warfield, 2004, Corollary 5.21).

Corolário 2.12.25. *Sejam R um anel Γ-graduado e $M_1, ..., M_t$ R-módulos à direita Γ-graduados. Então*

$$\text{gr-u.dim}_R(M_1 \oplus \cdots \oplus M_t) = \text{gr-u.dim}_R(M_1) + \cdots + \text{gr-u.dim}(M_t)\,.$$

Demonstração. Segue do Teorema 2.12.16 e da Proposição 2.7.10. ■

Corolário 2.12.26. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. Temos:*

(1) *Se M tem dimensão gr-uniforme finita então N tem dimensão gr-uniforme finita e* $\text{gr-u.dim}_R(N) \leq \text{gr-u.dim}_R(M)$.

(2) *Se M tem dimensão gr-uniforme finita então* $\text{gr-u.dim}_R(N) = \text{gr-u.dim}_R(M) \iff N \leq_{\text{gr-ess}} M$.

(3) *Se N e M/N têm dimensão gr-uniforme finita então M tem dimensão gr-uniforme finita e* $\text{gr-u.dim}_R(M) \leq \text{gr-u.dim}_R(N) + \text{gr-u.dim}_R(M/N)$.

Demonstração. (1) Suponha que $\text{gr-u.dim}(M) < \infty$. Por definição M (e, portanto, N) não contém uma soma direta de $\text{gr-u.dim}(M)+1$ submódulos graduados não nulos. Logo, $\text{gr-u.dim}(N) < \infty$ pelo Corolário 2.12.17 e também temos que $\text{gr-u.dim}(N) < \text{gr-u.dim}(M) + 1$.

(2) Suponha que $\text{gr-u.dim}(M) < \infty$. Por (1) e o Teorema 2.12.16, N contém um submódulo gr-essencial N' que é soma direta de $\text{gr-u.dim}(N)$ submódulos gr-uniformes. Vejamos que $\text{gr-u.dim}(N) = \text{gr-u.dim}(M) \iff N \leq_{\text{gr-ess}} M$.

($\Longrightarrow$): Se $\text{gr-u.dim}(N) = \text{gr-u.dim}(M)$ então M não contém uma soma direta de $\text{gr-u.dim}(N) + 1$ submódulos graduados não nulos e, portanto, N' intersecta não trivialmente todo submódulo graduado não nulo de M, ou seja, $N' \leq_{\text{gr-ess}} M$. Como $N' \subseteq N$, isto implica $N \leq_{\text{gr-ess}} M$.

($\Longleftarrow$): Se $N \leq_{\text{gr-ess}} M$ então, por transitividade, $N' \leq_{\text{gr-ess}} M$ e obtemos do Teorema 2.12.16 que $\text{gr-u.dim}(M) = \text{gr-u.dim}(N)$.

(3) Pela Proposição 2.6.10, existe um submódulo graduado P de M tal que $N \oplus P \leq_{\text{gr-ess}} M$. Suponha que $\text{gr-u.dim}(N) < \infty$ e $\text{gr-u.dim}(M/N) < \infty$. Como $P \cong_{\text{gr}} \dfrac{N \oplus P}{N} \leq_{\text{gr}} \dfrac{M}{N}$, segue de (1) que $\text{gr-u.dim}(P) \leq \text{gr-u.dim}(M/N)$. Pelo Teorema 2.12.16, N (resp. P) contém um submódulo gr-essencial N' (resp P') que é soma direta finita de submódulos gr-uniformes. Então $N' \oplus P'$ é soma direta finita de submódulos gr-uniformes e, pela Proposição 2.6.8(3), é gr-essencial em $N \oplus P$. Por transitividade, obtemos $N' \oplus P' \leq_{\text{gr-ess}} M$ e, portanto, $\text{gr-u.dim}(M) < \infty$ pelo Teorema 2.12.16. Por (2) e o Corolário 2.12.25, temos

$$\begin{aligned} \text{gr-u.dim}(M) &= \text{gr-u.dim}(N \oplus P) \\ &= \text{gr-u.dim}(N) + \text{gr-u.dim}(P) \\ &\leq \text{gr-u.dim}(N) + \text{gr-u.dim}(M/N)\,. \end{aligned}$$

■

Corolário 2.12.27. *Sejam D um anel com gr-divisão, $\overline{\Sigma} := (\Sigma_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(\Gamma)^I$ uma sequência matricial para D e considere $R := \mathrm{M}_I(D)(\overline{\Sigma})$. Então R_R tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita. De fato, $\Gamma_0\text{-u.dim}(R_R) = (|I_e|)_{e \in \Gamma_0}$, onde $I_e := \{i \in I : \Sigma_i e \neq \emptyset\}$ para cada $e \in \Gamma_0$. Além disso, R_R tem dimensão gr-uniforme finita se, e somente se, I é finito e Σ_i é finito para todo $i \in I$.*

Demonstração. Fixe $e \in \Gamma_0$. Temos

$$R(e) = \bigoplus_{\substack{i \in I_e \\ \sigma_i \in \Sigma_i e}} E_{ii}^{r(\sigma_i)} R\,.$$

Para cada $i \in I$ e $\sigma_i \in \Sigma_i e$ temos que $E_{ii}^{r(\sigma_i)} R$ é gr-simples e, portanto, gr-uniforme. Logo $R(e)$ é soma direta de $|I_e|$ submódulos gr-uniformes e segue do Teorema 2.12.16 que $\text{gr-u.dim}_R(R(e)) = |I_e| < \infty$. Por fim, como

$$R_R = \bigoplus_{\substack{i \in I \\ \sigma_i \in \Sigma_i}} E_{ii}^{r(\sigma_i)} R\,,$$

segue do Corolário 2.12.17 que $\text{gr-u.dim}(R_R) < \infty \iff \sum_{i \in I} |\Sigma_i| < \infty$. ■

Agora vamos tentar obter outra caracterização de dimensão gr-uniforme finita. Para isso, precisaremos de uma versão graduada de (Lam, 1999, Definitions 6.16 and 6.21).

Definição 2.12.28. Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. Dizemos que um submódulo graduado C de M é um *gr-complemento a N em M* se C é maximal em $\{X \leq_{\text{gr}} M : X \cap N = 0\}$.

Observação 2.12.29. Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e N um submódulo graduado de M. Note que, pelo Lema de Zorn, todo submódulo graduado C_0 de M tal que $C_0 \cap N = 0$ se estende a um gr-complemento C de N em M e, além disso, $C \oplus N \leq_{\text{gr-ess}} M$. Note também que M é o único gr-complemento a $\{0\}$ em M. ■

Definição 2.12.30. Sejam R um anel Γ-graduado e C um R-módulo à direita Γ-graduado. Dizemos que C é um *gr-complemento em M* (e denotamos $C \leq_{\text{gr-c}} M$) se existir um submódulo graduado N de M tal que C é gr-complemento a N em M.

As provas dos nossos resultados sobre gr-complementos serão inspiradas nas de (Lam, 1999, §6B). Começamos com as seguintes propriedades de gr-complementos.

Lema 2.12.31. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e suponha que $C \leq_{\text{gr}} N \leq_{\text{gr}} M$. Temos:*

(1) *Se $C \leq_{\text{gr-c}} M$ então $C \leq_{\text{gr-c}} N$.*

(2) *Se $C \leq_{\text{gr-c}} N$ e $N \leq_{\text{gr-c}} M$ então $C \leq_{\text{gr-c}} M$.*

Demonstração. (1) Suponha que C é gr-complemento a P em M. Então C é gr-complemento a $P \cap N$ em N. De fato, se $C \subseteq D \leq_{\text{gr}} N$ então

$$D \cap (P \cap N) = 0 \implies D \cap P = 0 \implies C = D\,.$$

(2) Suponha que C é gr-complemento a P em N e N é gr-complemento a L em M. Note que $L \cap P \subseteq L \cap N = 0$. Vejamos que C é gr-complemento a $L \oplus P$ em M. Para isso, seja D um submódulo graduado de M tal que $C \subsetneq D$ e mostremos que $D \cap (L \oplus P) \neq 0$. Se $D \cap P \neq 0$, obtemos o que queremos. Suponha $D \cap P = 0$. Então $(D \cap N) \cap P = 0$ e, como $C \subseteq N$, temos $C \subseteq D \cap N$. Logo, $C = D \cap N$. De $C \neq D$, obtemos um $d \in \text{h}(D) \setminus N$. Como $N \subsetneq N + dR \leq_{\text{gr}} M$, segue que $(N + dR) \cap L \neq 0$. Então existem $n \in \text{h}(N)$, $a \in \text{h}(R)$ e $l \in \text{h}(L)$ tais que

$$n + da = l \neq 0\,. \tag{2.12.1}$$

Se $n \in C$ então $n + da = l \in D \cap L$ e obtemos o que queríamos. Suponha $n \notin C$. Como $C \subsetneq C + nR \leq_{\text{gr}} N$, segue que $(C + nR) \cap P \neq 0$ e então existem $c \in \text{h}(C)$,

$a' \in \mathrm{h}(R)$ e $p \in \mathrm{h}(P)$ tais que

$$c + na' = p \neq 0\,. \tag{2.12.2}$$

Multiplicando a igualdade (2.12.1) por a' a direita e subtraindo da igualdade (2.12.2), vem

$$c - daa' = p - la' \in D \cap (L \oplus P)\,.$$

Como $p - la' \in L \oplus P$ e $p \neq 0$, segue que $p - la' \neq 0$ e obtemos novamente o que queríamos. ■

Conseguimos então a seguinte caracterização de quando a dimensão gr-uniforme é finita.

Teorema 2.12.32. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. São equivalentes:*

(1) *M tem dimensão gr-uniforme finita.*

(2) *Os gr-complementos em M satisfazem CCD.*

(3) *Os gr-complementos em M satisfazem CCA.*

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2): Suponha que existe uma cadeia estritamente decrescente

$$C_0 \supsetneq C_1 \supsetneq C_2 \supsetneq \cdots$$

em que $C_i \leq_{\text{gr-c}} M$ para todo $i \geq 0$. Pelo Lema 2.12.31(1), temos que $C_i \leq_{\text{gr-c}} C_{i-1}$ para todo $i \geq 1$. Suponha que, para cada $i \geq 1$, C_i é gr-complemento a N_i em C_{i-1}. Note que $C_i \neq C_{i-1}$ implica $N_i \neq 0$. Além disso, se $k > i$ então $N_k \subseteq C_{k-1} \subseteq C_i$ e segue que

$$N_i \cap \left(\sum_{k=i+1}^{\infty} N_k \right) \subseteq N_i \cap C_i = 0\,.$$

Logo, $\sum_{i=1}^{\infty} N_i$ é direta e segue do Corolário 2.12.17 que $\text{gr-u.dim}_R(M) = \infty$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Suponha que existe uma cadeia estritamente crescente

$$C_0 \subsetneq C_1 \subsetneq C_2 \subsetneq \cdots$$

em que $C_i \leq_{\text{gr-c}} M$ para todo $i \geq 0$. Pelo Lema 2.12.31(1), temos que, para cada $i \geq 1$, C_{i-1} é gr-complemento a um certo $N_i \neq 0$ em C_i. Para cada $i \geq 1$, se $k < i$ então $N_k \subseteq C_k \subseteq C_{i-1}$ e segue que

$$N_i \cap \left(\sum_{k=1}^{i-1} N_k \right) \subseteq N_i \cap C_{i-1} = 0\,.$$

Logo, $\sum_{i=1}^{\infty} N_i$ é direta. Como $C_0 \cap N_i \subseteq C_{i-1} \cap N_i = 0$ para todo $i \geq 1$, podemos estender

$\bigoplus_{i=1}^{\infty} N_i$ a um D_1 gr-complemento de C_0 em M. Como $N_1 \cap \left(\bigoplus_{i=2}^{\infty} N_i\right) = 0$ e $N_1 \subseteq D_1$, podemos estender $\bigoplus_{i=2}^{\infty} N_i$ a um D_2 gr-complemento de N_1 em D_1. Prosseguindo assim indutivamente, obtemos uma cadeia decrescente

$$D_1 \supseteq D_2 \supseteq D_3 \supseteq \cdots$$

tal que, para todo $k \geq 1$, $\left(\bigoplus_{i=k}^{\infty} N_i\right) \subseteq D_k$ e D_k é gr-complemento de N_{k-1} em D_{k-1} (com $N_0 := C_0$ e $D_0 := M$). Pelo Lema 2.12.31(2), temos que $D_k \leq_{\text{gr-c}} M$ para todo $k \geq 1$. Além disso, para cada $k \geq 1$, temos que $0 \neq N_k \subseteq D_k$ e $N_k \cap D_{k+1} = 0$ implicam que $D_k \neq D_{k+1}$. Logo,

$$D_1 \supsetneq D_2 \supsetneq D_3 \supsetneq \cdots$$

é uma cadeia estritamente decrescente de gr-complementos em M.

(3) $\implies$ (1): Suponha que gr-u.dim$_R(M) = \infty$. Pelo Corolário 2.12.17, M contém uma soma direta infinita $\bigoplus_{i=1}^{\infty} N_i$ de submódulos graduados não nulos. Estenda N_1 a um C_1 gr-complemento de $\bigoplus_{i=2}^{\infty} N_i$ em M. Agora, estenda $C_1 \oplus N_2$ a um C_2 gr-complemento de $\bigoplus_{i=3}^{\infty} N_i$ em M. Prosseguindo dessa forma indutivamente, obtemos uma cadeia

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq C_3 \subseteq \cdots$$

de gr-complementos em M tal que, para cada $k \geq 1$, $C_{k-1} \oplus N_k \subseteq C_k$ e C_k é gr-complemento de $\bigoplus_{i=k+1}^{\infty} N_i$ em M (com $C_0 := 0$). Para cada $k \geq 1$, como $0 \neq N_k \subseteq C_k$ e $N_k \cap C_{k-1} = 0$, segue que $C_{k-1} \neq C_k$. Logo, os gr-complementos em M não satisfazem CCA. ■

Vamos tentar melhorar o Teorema 2.12.32 quando M é gr-injetivo. Precisaremos do Lema a seguir e seu Corolário.

Lema 2.12.33. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e C um submódulo graduado de M. São equivalentes:*

(1) *C é um gr-complemento em M.*

(2) *C é gr-essencialmente fechado em M.*

(3) *$C = X \cap M$ para algum somando direto graduado X de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$.*

Demonstração. (1) $\implies$ (2): Suponha que C é gr-complemento a N em M. Se C' é uma extensão gr-essencial de C contida em M então

$$C \cap (C' \cap N) \subseteq C \cap N = 0 \implies C' \cap N = 0 \implies C = C'.$$

Logo, C não tem extensões gr-essenciais próprias contidas em M.

(2) $\implies$ (3): Como $C \leq_{\text{gr}} M \leq_{\text{gr}} \mathrm{E}^{\text{gr}}(M)$, podemos considerar $\mathrm{E}^{\text{gr}}(C) \subseteq \mathrm{E}^{\text{gr}}(M)$, pelo Corolário 2.7.8(1). Então, pela Proposição 2.6.8(1),

$$C \leq_{\text{gr}} \mathrm{E}^{\text{gr}}(C) \cap M \leq_{\text{gr}} \mathrm{E}^{\text{gr}}(C) \implies C \leq_{\text{gr-ess}} \mathrm{E}^{\text{gr}}(C) \cap M\,.$$

Logo, se C é gr-essencialmente fechado em M, temos $C = \mathrm{E}^{\text{gr}}(C) \cap M$. E, pelo Corolário 2.5.14, obtemos que $\mathrm{E}^{\text{gr}}(C)$ é um somando direto graduado de $\mathrm{E}^{\text{gr}}(M)$.

(3) $\implies$ (1): Suponha que X, Y são submódulos graduados de $\mathrm{E}^{\text{gr}}(M)$ tais que $C = X \cap M$ e $\mathrm{E}^{\text{gr}}(M) = X \oplus Y$. Vejamos que C é gr-complemento a $M \cap Y$ em M. Note que $C \cap (M \cap Y) \subseteq X \cap Y = 0$. Seja D um submódulo graduado de M tal que $C \subsetneq D$ e mostremos que $D \cap (M \cap Y) \neq 0$. Seja $d \in \mathrm{h}(D) \setminus C$. Então $d \in M \setminus (X \cap M)$ implica $d \notin X$. Como $d \in \mathrm{E}^{\text{gr}}(M) = X \oplus Y$, existem $x \in \mathrm{h}(X)$ e $0 \neq y \in \mathrm{h}(Y)$ tais que $d = x + y$. De $M \leq_{\text{gr-ess}} \mathrm{E}^{\text{gr}}(M)$, obtemos um $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq yr \in M$. Logo, $xr = dr - yr \in X \cap M = C \subseteq D$ e segue que $yr = dr - xr \in Y \cap D$. Portanto, $D \cap M \cap Y = D \cap Y \neq 0$, como queríamos. ■

Corolário 2.12.34. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita gr-injetivo e C um submódulo graduado de M. Então C é um gr-complemento em M se, e somente se, C é um somando direto graduado de M.*

Demonstração. Claramente, todo somando direto graduado é um gr-complemento.

Suponha que $C \leq_{\text{gr-c}} M$. Pelo Lema 2.12.33, existe um somando direto graduado X de $\mathrm{E}^{\text{gr}}(M)$ tal que $C = X \cap M$. Como $\mathrm{E}^{\text{gr}}(M) = M$, segue que $C = X \cap M = X$ é um somando direto graduado de M. ■

Segue imediatamente do Teorema 2.12.32 e do Corolário 2.12.34 a seguinte caracterização de dimensão gr-uniforme finita de módulos gr-injetivos.

Corolário 2.12.35. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita gr-injetivo. São equivalentes:*

(1) *M tem dimensão gr-uniforme finita.*

(2) *Os somandos diretos graduados de M satisfazem CCD.*

(3) *Os somandos diretos graduados de M satisfazem CCA.* ■

Nosso último objetivo nesta seção é obter uma outra caracterização de quando R_R tem dimensão gr-uniforme finita se R_R é gr-injetivo. O resultado a seguir é inspirado em (Lam, 1999, Proposition 6.59).

Proposição 2.12.36. *Sejam R um anel Γ-graduado e $e \in \Gamma_0$. São equivalentes:*

(1) *Os somandos diretos graduados de $R(e)$ satisfazem CCA.*

(2) *Os somandos diretos graduados de $(e)R$ satisfazem CCD.*

(3) *R_e não contém um conjunto infinito de idempotentes não nulos dois a dois ortogonais.*

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2): Pelo Lema 1.4.8, basta mostrarmos que se i, i' são idempotentes de R_e então

$$Ri \supsetneq Ri' \implies (1_e - i)R \subsetneq (1_e - i')R\,.$$

Suponha que i, i' são idempotentes de R_e e $Ri \supsetneq Ri'$. Tome $a \in \mathrm{h}(R)$ tal que $i' = ai$. Então $i'i = i'$ e segue que

$$1_e - i = 1_e - i' - i + i'i = (1_e - i')(1_e - i) \implies (1_e - i)R \subseteq (1_e - i')R\,.$$

Além disso, como $Ri \neq Ri'$, temos

$$i \notin Ri' \implies i(1_e - i') \neq 0 \implies 1_e - i' \notin (1_e - i)R \implies (1_e - i)R \neq (1_e - i')R\,.$$

(2) $\Longrightarrow$ (1): De forma totalmente análoga ao que fizemos na implicação anterior, verifica-se que se i, i' são idempotentes de R_e então

$$iR \subsetneq i'R \implies R(1_e - i) \supsetneq R(1_e - i')R\,.$$

O resultado então seguirá do Lema 1.4.8.

(1) $\Longrightarrow$ (3): Suponha que R_e contém um conjunto infinito $\{i_1, i_2, ...\}$ de idempotentes não nulos dois a dois ortogonais. Para cada $n \geq 1$, temos que $c_n := i_1 + \cdots + i_n$ é um idempotente de R_e. Além disso, para cada $n \geq 1$, temos

$$c_{n+1}c_n = (i_1 + \cdots + i_{n+1})(i_1 + \cdots + i_n) = c_n^2 = c_n \implies c_nR \subseteq c_{n+1}R\,.$$

Note que se existir $n \geq 1$ e $a \in \mathrm{h}(R)$ tal que $c_{n+1} = c_na$ então

$$c_n = c_n^2 = c_nc_{n+1} = c_nc_na = c_na = c_{n+1} \implies i_{n+1} = 0\,,$$

um absurdo. Logo

$$c_1R \subsetneq c_2R \subsetneq c_3R \subsetneq \cdots$$

é uma cadeia estritamente ascendente de somandos diretos graduados de $R(e)$ (pelo Lema 1.4.8).

(3) $\Longrightarrow$ (2): Suponha que exista uma cadeia estritamente decrescente de somandos diretos graduados de $(e)R$

$$B_0 \supsetneq B_1 \supsetneq B_2 \supsetneq \cdots\,.$$

Para cada $n \geq 0$, seja A_n um submódulo graduado de $(e)R$ tal que $(e)R = A_n \oplus B_n$. Para cada $n \geq 1$, seja $X_n := A_n \cap B_{n-1}$. É fácil ver que, para todo $n \geq 1$,

$$B_{n-1} = X_n \oplus B_n$$

e, portanto, $X_n \neq 0$. Como $(e)R = A_0 \oplus B_0$, sejam $i_0 \in (A_0)_e$ e $j_0 \in (B_0)_e$ tais que $1_e = i_0 + j_0$. Como $B_0 = X_1 \oplus B_1$, sejam $i_1 \in (X_1)_e$ e $j_1 \in (B_1)_e$ tais que $j_0 = i_1 + j_1$. Prosseguindo desta forma, obteremos $i_1, i_2, ..., j_0, j_1, j_2, ... \in R_e$ tais que $j_0 \in B_0$ e, para todo $n \geq 1$, $i_n \in X_n$, $j_n \in B_n$ e $j_{n-1} = i_n + j_n$. Note que $B_0 = Rj_0$. Vejamos que $X_1 = Ri_1$. Seja $x \in X_1$. Como $x \in B_0 = Rj_0$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $x = rj_0$ e, portanto,

$$x = rj_0 = ri_1 + rj_1 \implies x - ri_1 = rj_1 \in X_1 \cap B_1 = 0 \implies x = ri_1 \in Ri_1 .$$

Agora, vejamos que $B_1 = Rj_1$. Seja $b \in B_1$. Como $b \in B_0 = Rj_0$, existe $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $b = r'j_0$ e, portanto,

$$b = r'j_0 = r'i_1 + r'j_1 \implies b - r'j_1 = r'i_1 \in B_1 \cap X_1 = 0 \implies b = r'j_1 \in Rj_1 .$$

Prosseguindo dessa forma indutivamente, obtemos

$$X_n = Ri_n \quad \text{e} \quad B_n = Rj_n$$

para todo $n \geq 1$. Em particular, $i_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Observe que, dado $n \geq 1$, temos

$$(e)R = A_0 \oplus B_0 = A_0 \oplus X_1 \oplus B_1 = \cdots = A_0 \oplus X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \oplus B_n$$

e

$$1_e = i_0 + j_0 = i_0 + i_1 + j_1 = \cdots = i_0 + i_1 + \cdots + i_n + j_n$$

de onde $\{i_1, ..., i_n\}$ é um conjunto de idempotentes não nulos de R_e dois a dois ortogonais. Logo, $\{i_n : n \geq 1\}$ é um conjunto infinito de idempotentes não nulos de R_e dois a dois ortogonais. ■

Temos então a seguinte consequência do Corolário 2.12.35 e da Proposição 2.12.36.

Corolário 2.12.37. *Seja R um anel Γ-graduado. Temos:*

(1) *Se $e \in \Gamma_0$ e $R(e)$ é gr-injetivo então $\text{gr-u.dim}_R(R(e)) < \infty$ se, e somente se, R_e não contém um conjunto infinito de idempotentes não nulos dois a dois ortogonais.*

(2) *Se R_R é gr-injetivo então R_R tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita se, e somente se, para todo $e \in \Gamma_0$, R_e não contém um conjunto infinito de idempotentes não nulos dois a dois ortogonais.* ■

2.13 Anéis gr-locais e módulos fortemente gr-indecomponíveis

Definição 2.13.1. Dizemos que um anel Γ-graduado não nulo R é *gr-local* se

$$\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (R_\gamma \setminus \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R))$$

é ideal graduado de R.

Exemplo 2.13.2. Claramente todo anel com gr-divisão é um anel gr-local. ■

Temos as seguintes caracterizações de um anel gr-local, inspiradas em (Lam, 2001, Theorem 19.1).

Teorema 2.13.3. *Seja R um anel Γ-graduado não nulo. São equivalentes:*

(1) $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(R_\gamma \setminus \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R)) = \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$.

(2) *R é anel gr-local.*

(3) *Para todo $\gamma \in \Gamma$, $R_\gamma \setminus \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R)$ é subgrupo aditivo de R_γ.*

(4) *Se $\gamma \in \Gamma$, $a, b \in R_\gamma$ e $a + b \in \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R)$ então $a \in \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R)$ ou $b \in \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R)$.*

(5) *Se $e \in \Gamma_0$, $a, b \in R_e$ e $a + b \in \mathrm{U}(R_e)$ então $a \in \mathrm{U}(R_e)$ ou $b \in \mathrm{U}(R_e)$.*

(6) $\dfrac{R}{\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)}$ *é um anel com gr-divisão.*

(7) *Para todo $e \in \Gamma_0'(R)$, $R(e)$ possui um único submódulo graduado gr-maximal.*

(7)' *Para todo $e \in \Gamma_0'(R)$, $(e)R$ possui um único submódulo graduado gr-maximal.*

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (5) é claro.

(5) $\Longrightarrow$ (6): Seja $\overline{0} \neq \overline{a} \in \mathrm{h}(R/\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R))$, digamos $a \in R_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$). Pela Proposição 2.4.22(3), temos que $a \notin \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R(r(\gamma)))$. Logo, existe um submódulo gr-maximal M de $R(r(\gamma))$ tal que $a \notin M$. Então $aR + M = R(r(\gamma))$ e, portanto, existem $r \in R_{\gamma^{-1}}$ e $m \in M_{r(\gamma)}$ tais que $ar + m = 1_{r(\gamma)}$. Se vale (5) então $ar \in \mathrm{U}(R_{r(\gamma)})$ e segue que a é gr-inversível à direita em R. Logo, (5) implica que todo elemento homogêneo não nulo de $R/\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ é gr-inversível à direita.

(6) $\Longrightarrow$ (1): Fixe $\gamma \in \Gamma$. A Proposição 2.4.22(4) nos dá que $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)_\gamma \subseteq R_\gamma \setminus \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R)$. Por outro lado, se $a \notin \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ então $\overline{a}$ é um elemento homogêneo não nulo de $R/\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ e, portanto, (6) implica que existe um $b \in R_{\gamma^{-1}}$ tal que $\overline{a}\overline{b} = \overline{1_{r(\gamma)}}$ e $\overline{b}\overline{a} = \overline{1_{d(\gamma)}}$. Neste caso, pelo Corolário 2.4.12, temos

$$ab - 1_{r(\gamma)} \in \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R) \implies ab = 1_{r(\gamma)} + (ab - 1_{r(\gamma)}) \in \mathrm{U}(R_{r(\gamma)})$$

e

$$ba - 1_{d(\gamma)} \in \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R) \implies ba = 1_{d(\gamma)} + (ba - 1_{d(\gamma)}) \in \mathrm{U}(R_{d(\gamma)})$$

de onde obtemos que a é gr-inversível à direita e à esquerda, ou seja, $a \in \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R)$. Logo, (6) implica que $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)_\gamma = R_\gamma \setminus \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R)$.

Agora vamos provar que (6) $\iff$ (7) usando que, pela Proposição 2.4.22(4) e o Teorema 2.3.53, $\Gamma_0'(R/\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)) = \Gamma_0'(R)$ e temos que (6) equivale a $\dfrac{R}{\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)}(e)$ ser gr-simples para todo $e \in \Gamma_0'(R)$.

(6) $\Longrightarrow$ (7): Sejam $e \in \Gamma_0'(R)$ e M um submódulo graduado gr-maximal de $R(e)$.

Então $\dfrac{M}{\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R(e))}$ é submódulo gr-maximal de

$$\frac{R(e)}{\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R(e))} = \frac{R(e)}{(\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R))(e)} \cong_{\mathrm{gr}} \frac{R}{\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R)}(e)\,,$$

onde a igualdade segue da Proposição 2.4.22(1). Logo, se vale (6) então $\dfrac{M}{\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R(e))} = 0$, ou seja, $M = \operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R(e))$.

(7) $\implies$ (6): Suponha que vale (7) e sejam $e \in \Gamma_0'(R)$ e M o único submódulo graduado gr-maximal de $R(e)$. Pela Proposição 2.4.22(1), temos que $(\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R))(e) = \operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R(e)) = M$. Logo,

$$\frac{R}{\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R)}(e) \cong_{\mathrm{gr}} \frac{R(e)}{(\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R))(e)} = \frac{R(e)}{M}$$

é R-módulo gr-simples. Como isso vale para todo $e \in \Gamma_0'(R) = \Gamma_0'(R/\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R))$, segue que $R/\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ é anel com gr-divisão.

(6) $\iff$ (7)$'$ se prova analogamente a (6) $\iff$ (7). ∎

Por causa do item (5) do Teorema 2.13.3 temos a seguinte caracterização.

Corolário 2.13.4. *Seja R um anel Γ-graduado não nulo. Então R é anel gr-local se, e somente se, para todo $e \in \Gamma_0'(R)$, R_e é anel local. Em particular, para uma categoria pré-aditiva pequena $\mathcal{C}$, temos que $R[\mathcal{C}]$ é anel gr-local se, e somente se, $\mathcal{C}(A, A)$ é anel local para todo objeto não nulo A de $\mathcal{C}$.* ∎

Mais duas consequências do Teorema 2.13.3 são as seguintes.

Corolário 2.13.5. *As seguintes afirmações valem para um anel gr-local R.*

(1) *R tem um único ideal graduado que é maximal com a propriedade de não conter os 1_e com $e \in \Gamma_0'(R)$.*

(2) *Se um elemento homogêneo de R é gr-inversível à direita ou à esquerda então é gr-inversível.*

(3) *Os únicos idempotentes homogêneos de R são 0 e 1_e com $e \in \Gamma_0'(R)$.*

Demonstração. (1) e (2) seguem imediatamente de $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (R_\gamma \setminus \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R)) = \operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$.

(3) Seja i um idempotente homogêneo de R, digamos $i \in R_e$, $e \in \Gamma_0$. Como $i + (1_e - i) = 1_e \in \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R)$, obtemos de (5) no Teorema 2.13.3 que $i \in \mathrm{U}(R_e)$ ou $1_e - i \in \mathrm{U}(R_e)$. Mas $i(1_e - i) = 0$ e segue que $i = 0$ ou $i = 1_e$. ∎

Corolário 2.13.6. *Seja R um anel Γ-graduado não nulo. São equivalentes:*

(1) *R é anel gr-local.*

(2) *$\mathrm{M}_1(R)(\sigma)$ é anel gr-local para todo $\sigma \in \Gamma$ tal que $r(\sigma) \in \Gamma_0'(R)$.*

(3) $1_e R 1_e$ *é anel gr-local para todo* $e \in \Gamma'_0(R)$.

Demonstração. Vamos usar o Corolário 2.13.4.

(1) $\implies$ (2): Suponha que R é anel gr-local e seja $\sigma \in \Gamma$ tal que $r(\sigma) \in \Gamma'_0(R)$. Como $R_{r(\sigma)}$ é anel local, segue que $\mathrm{M}_1(R)(\sigma)_{d(\sigma)}$ é anel local. De $\Gamma'_0(\mathrm{M}_1(R)(\sigma)) = \{d(\sigma)\}$, temos que $\mathrm{M}_1(R)(\sigma)$ é anel gr-local.

(2) $\implies$ (3): Segue de $1_e R 1_e \cong_{\mathrm{gr}} \mathrm{M}_1(R)(e)$ para todo $e \in \Gamma_0$.

(3) $\implies$ (1): Se $1_e R 1_e$ é anel gr-local para todo $e \in \Gamma'_0(R)$ então R_e é anel local para todo $e \in \Gamma'_0(R)$ e, portanto, R é anel gr-local. ■

O resultado a seguir mostra que o nosso conceito de anel gr-local coincide com o de (Hazrat, 2016, Subsection 1.1.8) quando Γ é um grupo.

Proposição 2.13.7. *Seja* R *um anel* Γ*-graduado e* J *o ideal (graduado) de* R *gerado pelo conjunto* $\mathrm{h}(R) \setminus \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R)$. *Então* R *é anel gr-local se, e somente se, para todo* $e \in \Gamma'_0(R)$, $1_e J 1_e \neq 1_e R 1_e$. *Em particular, se* R *tem unidade e é anel local então* $\Gamma'_0(R)$ *tem um único elemento e* R *é anel gr-local.*

Demonstração. Se R é anel gr-local então segue do Teorema 2.13.3 que $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (R_\gamma \setminus \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R)) = \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$. Neste caso, pela Proposição 2.4.22(4),

$$\mathrm{h}(R) \setminus \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R) \subseteq \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R) \implies J \subseteq \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R) \implies \forall e \in \Gamma'_0(R),\ 1_e \notin J\,.$$

Agora suponha que, para todo $e \in \Gamma'_0(R)$, $1_e J 1_e \neq 1_e R 1_e$. Seja $e \in \Gamma'_0(R)$ e M um submódulo gr-maximal de $R(e)$. Note que

$$m \in \mathrm{h}(M) \implies m \notin \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R) \implies m \in \mathrm{h}(R) \setminus \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R) \implies m \in J\,.$$

Portanto, $M \subseteq J(e)$. Como M é gr-maximal em $R(e)$ e $J(e) \neq R(e)$, segue que $M = J(e)$. Logo, $R(e)$ tem um único submódulo gr-maximal. Segue do Teorema 2.13.3 que R é anel gr-local.

Por fim, suponha que R tem unidade (i.e. $\Gamma'_0(R)$ é finito) e é anel local. Então $R \setminus \mathrm{U}(R)$ é um ideal de R. Como $\sum_{e \in \Gamma'_0(R)} 1_e = 1_R \in \mathrm{U}(R)$ segue que existe $e \in \Gamma'_0(R)$ tal que $1_e \in \mathrm{U}(R)$. Mas isto só é possível se $\Gamma'_0(R) = \{e\}$. Então é fácil ver que $\mathrm{h}(R) \cap \mathrm{U}(R) \subseteq \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R)$ e, portanto, $\mathrm{h}(R) \setminus \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(R) \subseteq \mathrm{h}(R) \setminus U(R)$. Logo, $J \subseteq R \setminus U(R) \neq R$ e segue que $1_e J 1_e = J \neq R = 1_e R 1_e$. Pela primeira parte do enunciado, segue que R é anel gr-local. ■

Definição 2.13.8. Seja R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Dizemos que M é *fortemente gr-indecomponível* se $\mathrm{END}_R(M)$ é anel gr-local.

Proposição 2.13.9. *Seja* R *um anel* Γ*-graduado e* M *um* R*-módulo à direita* Γ*-graduado. Temos:*

(1) *Se* M *é fortemente gr-indecomponível então* M *é* Γ_0*-indecomponível.*

(2) *M é fortemente gr-indecomponível se, e somente se, para todo $e \in \Gamma_0'(M)$, $M(e)$ é fortemente gr-indecomponível.*

(3) *Se M é fortemente gr-indecomponível então, para todo $\sigma \in \Gamma$ com $r(\sigma) \in \Gamma_0'(M)$, $M(\sigma)$ é fortemente gr-indecomponível.*

Demonstração. (1) Segue imediatamente da Proposição 2.12.9(5) e do Corolário 2.13.5(3).

Para provar (2) e (3) vamos usar o Corolário 1.7.13(1) que nos dá $\mathrm{END}_R(M(\sigma)) \cong_{\mathrm{gr}} \mathrm{M}_1(\mathrm{END}_R(M))(\sigma)$ para todo $\sigma \in \Gamma$ com $r(\sigma) \in \Gamma_0'(M)$.

(2) Pela Proposição 2.12.9(5) e o Corolário 2.13.6, são equivalentes:

- M é fortemente gr-indecomponível.
- $\mathrm{END}_R(M)$ é anel gr-local.
- Para cada $e \in \Gamma_0'(R)$, $\mathrm{END}_R(M(e)) \cong_{\mathrm{gr}} \mathrm{M}_1(\mathrm{END}_R(M))(e) \cong_{\mathrm{gr}} 1_e \, \mathrm{END}_R(M) 1_e$ é anel gr-local.
- Para cada $e \in \Gamma_0'(R)$, $M(e)$ é fortemente gr-indecomponível.

(3) Se M é fortemente gr-indecomponível então $\mathrm{END}_R(M)$ é anel gr-local e segue do Corolário 2.13.6 que $\mathrm{END}_R(M(\sigma)) \cong_{\mathrm{gr}} \mathrm{M}_1(\mathrm{END}_R(M))(\sigma)$ é anel gr-local quando $r(\sigma) \in \Gamma_0'(M)$. ■

2.14 Idempotentes homogêneos

Aqui estudamos um pouco de teoria de idempotentes homogêneos em anéis graduados por grupoide. Todas as demonstrações nesta seção são baseadas nas do contexto não graduado (Lam, 2001, §21).

Definição 2.14.1. Seja R um anel Γ-graduado e $i \in R$. Dizemos que i é um *idempotente semi-homogêneo* de R se $i = \sum_{e \in \Gamma_0} i_e$ em que, para cada $e \in \Gamma_0$, i_e é um idempotente de R_e.

Observação 2.14.2. Note que idempotentes semi-homogêneos são, de fato, idempotentes. Para os próximos resultados, observe também que se $i = \sum_{e \in \Gamma_0} i_e$ é um idempotente semi-homogêneo de R então $iR = \bigoplus_{e \in \Gamma_0} i_e R$ (resp. $Ri = \bigoplus_{e \in \Gamma_0} R i_e$) é um R-módulo à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado e iRi é um anel Γ-graduado em que $(iRi)_e$ tem unidade i_e para cada $e \in \Gamma_0$. ■

Proposição 2.14.3. *Sejam R um anel Γ-graduado, $i = \sum_{e \in \Gamma_0} i_e$ um idempotente semi-homogêneo de R e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Então*

(1) $\mathrm{HOM}_R(iR, M) \cong_{\mathrm{gr}} Mi$ *como grupos aditivos Γ-graduados via $\theta \mapsto \theta(i)$.*

(2) $\mathrm{END}_R(iR) \cong_{\mathrm{gr}} iRi$ *como anéis Γ-graduados via $\theta \mapsto \theta(i)$.*

Demonstração. (1) Primeiramente note que se $\theta \in \mathrm{HOM}_R(iR, M)$ então $\theta(i) = \theta(i^2) = \theta(i)i \in Mi$ e, para cada $\gamma \in \Gamma$, $\theta_\gamma(i) = \sum_{e \in \Gamma_0} \theta_\gamma(i_e) = \theta_\gamma(i_{d(\gamma)}) \in M_\gamma$. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathrm{HOM}_R(iR, M) &\longrightarrow Mi \\ \theta &\longmapsto \theta(i) \end{aligned}$$

é claramente um gr-homomorfismo injetor de grupos aditivos. Para vermos que esse gr-homomorfismo é sobrejetor, seja $0 \neq m \in \mathrm{h}(Mi)$ e defina

$$\begin{aligned} \theta : iR &\longrightarrow M \\ ir &\longmapsto mr\,. \end{aligned}$$

θ está bem definido pois se $ir = 0$ então $mr \in Mir = 0$. Se $\gamma := \deg m$ então é fácil ver que $\theta \in \mathrm{HOM}_R(iR, M)_\gamma$ e, além disso, $\theta(i) = \sum_{e \in \Gamma_0} \theta(i_e) = \sum_{e \in \Gamma_0} m1_e = m$.

(2) Tomando $M = iR$ em (1), temos um gr-isomorfismo de grupos aditivos Γ-graduados

$$\begin{aligned} \mathrm{END}_R(iR) &\longrightarrow iRi \\ \theta &\longmapsto \theta(i)\,. \end{aligned}$$

Como este gr-isomorfismo leva id_{i_eR} em i_e para cada $e \in \Gamma_0$ e

$$(\theta\theta')(i) = \theta(i\theta'(i)) = \theta(i)\theta'(i)$$

para todos $\theta, \theta' \in \mathrm{END}_R(iR)$, temos $\mathrm{END}_R(iR) \cong_{\mathrm{gr}} iRi$ como anéis Γ-graduados. ■

Proposição 2.14.4. *Sejam R um anel Γ-graduado e $i = \sum_{e \in \Gamma_0} i_e$ um idempotente semi-homogêneo não nulo de R. São equivalentes:*

(1) *iR é Γ_0-indecomponível.*

(2) *iRi não tem idempotentes homogêneos além de 0 e i_e com $e \in \Gamma_0$.*

(3) *Para cada $e \in \Gamma_0$, i_e não se decompõe como $i_e = p + q$ com p e q idempotentes ortogonais não nulos de R_e.*

Demonstração. (1) $\iff$ (2): Segue das Proposições 2.12.9(5) e 2.14.3(2).

(2) $\implies$ (3): Suponha que exista $e \in \Gamma_0$ tal que $i_e = p + q$ com p e q idempotentes ortogonais não nulos de R_e. Então $i_e p = p^2 + qp = p$ e $p i_e = p^2 + pq = p$. Logo, $p = i_e p i_e$ é um idempotente homogêneo não trivial de $i_e R i_e = (iRi)_e$.

(3) $\implies$ (2): Suponha que p é um idempotente homogêneo não trivial de iRi e seja $e := \deg p \in \Gamma_0$. Então p é um idempotente homogêneo não trivial de $i_e R i_e$. Logo, $i_e = p + (i_e - p)$ é uma decomposição de i_e em soma de idempotentes ortogonais não nulos de R_e. ■

Definição 2.14.5. Nas condições da Proposição 2.14.4, se i satisfaz $(1)-(3)$, dizemos que i é um *idempotente semi-homogêneo* Γ_0*-primitivo* de R.

O resultado a seguir é consequência imediata da Proposição 2.14.4.

Corolário 2.14.6. *Sejam R um anel Γ-graduado e i um idempotente homogêneo não nulo de R. São equivalentes:*

(1) *iR é gr-indecomponível.*

(2) *iRi não tem idempotentes homogêneos além de 0 e i.*

(3) *i não se decompõe como $i = p+q$ com p e q idempotentes homogêneos ortogonais não nulos de R.* ■

Definição 2.14.7. Nas condições do Corolário 2.14.6, se i satisfaz $(1)-(3)$, dizemos que i é um *idempotente homogêneo gr-primitivo* de R.

Observação 2.14.8. Note que os idempotentes semi-homogêneos Γ_0-primitivos de R são precisamente as somas finitas de idempotentes homogêneos gr-primitivos de R com graus dois a dois distintos. ■

Proposição 2.14.9. *Sejam R um anel Γ-graduado e i um idempotente semi-homogêneo não nulo de R. São equivalentes:*

(1) *iR é fortemente gr-indecomponível.*

(2) *iRi é anel gr-local.*

Demonstração. Imediato da Proposição 2.14.3(2). ■

Definição 2.14.10. Nas condições da Proposição 2.14.9, se i satisfaz $(1)-(2)$, dizemos que i é um *idempotente semi-homogêneo gr-local* de R.

Também consideraremos a seguinte classe de idempotentes (semi-)homogêneos.

Definição 2.14.11. Seja R um anel Γ-graduado.

(1) Se i é um idempotente homogêneo não nulo de R, dizemos que i é *gr-irredutível à direita* se iR é R-módulo gr-simples.

(2) Se i é um idempotente semi-homogêneo não nulo de R, dizemos que i é Γ_0-*irredutível à direita* se iR é R-módulo Γ_0-simples.

Observação 2.14.12. Note que os idempotentes semi-homogêneos Γ_0-irredutíveis à direita de R são precisamente as somas finitas de idempotentes homogêneos gr-irredutíveis à direita de R com graus dois a dois distintos. ■

Não conseguimos uma caracterização de idempotentes (semi-)homogêneos gr-irredutíveis (resp. Γ_0-irredutíveis) como nos resultados anteriores, mas temos a seguinte consequência imediata do Teorema 2.3.7(1) e da Proposição 2.14.3(2).

Proposição 2.14.13. *Sejam R um anel Γ-graduado e i um idempotente semi-homogêneo Γ_0-irredutível à direita de R. Então iRi é anel com gr-divisão.* ■

Em anéis gr-semiprimos temos um resultado melhor.

Proposição 2.14.14. *Sejam R um anel Γ-graduado gr-semiprimo e $i = \sum_{e \in \Gamma_0} i_e$ um idempotente semi-homogêneo não nulo de R. São equivalentes:*

(1) *iR é Γ_0-simples.*

(2) *iRi é anel com gr-divisão.*

Demonstração. (2) $\implies$ (1): Suponha que iRi é anel com gr-divisão. Seja $e \in \Gamma_0'(iR)$ e vejamos que $(iR)(e) = i_eR$ é gr-simples. Tome $0 \neq x \in \mathrm{h}(i_eR)$ e $a \in \mathrm{h}(R)$ tal que $x = i_ea$. Como R é gr-semiprimo, temos que $xRx \neq 0$. Logo, existe $b \in \mathrm{h}(R)$ tal que $(i_ea)b(i_ea) \neq 0$. Seja u o gr-inverso de i_eabi_e em iRi. Então $i_e = i_eabi_eu \in xR$ e segue que $xR = i_eR$. Logo, i_eR é gr-simples. ■

Observação 2.14.15. Combinando resultados desta seção temos que se i um idempotente semi-homogêneo não nulo de R então

$$i \text{ é } \Gamma_0\text{-irredutível à direita} \implies i \text{ é gr-local} \implies i \text{ é } \Gamma_0\text{-primitivo}\,.$$

Em anéis gr-semissimples valem as recíprocas essas implicações, conforme a Proposição a seguir. ■

Proposição 2.14.16. *Sejam R um anel Γ-graduado gr-semissimples e i um idempotente semi-homogêneo não nulo de R. São equivalentes:*

(1) *i é idempotente semi-homogêneo Γ_0-irredutível à direita.*

(2) *i é idempotente semi-homogêneo gr-local.*

(3) *i é idempotente semi-homogêneo Γ_0-primitivo.*

Demonstração. (3) $\implies$ (1): Por (Cala *et al.*, 2022, Proposition 59), temos que todo submódulo graduado de R_R é gr-semissimples. Logo, todo submódulo gr-indecomponível de R_R é gr-simples. Portanto, se iR é Γ_0-indecomponível então iR é Γ_0-simples. ■

O resultado a seguir relaciona idempotentes semi-homogêneos com o radical de Jacobson graduado.

Proposição 2.14.17. *Sejam R um anel Γ-graduado, $i = \sum_{e \in \Gamma_0} i_e$ um idempotente semi-homogêneo não nulo de R, $J := \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ e $\overline{R} := R/J$. Então $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(iRi) = J \cap iRi = iJi$ e $\dfrac{iRi}{\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(iRi)} \cong_{\mathrm{gr}} \overline{iRi}$.*

Demonstração. Começamos verificando que $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(iRi) \subseteq J \cap iRi$. Sejam $\gamma \in \Gamma$ e $a \in \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(iRi)_\gamma$. Tome $x \in R_{\gamma^{-1}}$. Pela Proposição 2.4.8, $i_{r(\gamma)} - a(ixi)$ é inversível à direita em $(iRi)_{r(\gamma)} = i_{r(\gamma)}Ri_{r(\gamma)}$ e, portanto, existe $u \in (iRi)_{r(\gamma)}$ tal que $(i_{r(\gamma)} - aixi)u = i_{r(\gamma)}$. Então

$$i_{r(\gamma)} = (i_{r(\gamma)} - aixi)u = (1_{r(\gamma)} - aix)i_{r(\gamma)}u = (1_{r(\gamma)} - ax)u\,.$$

Logo,

$$1_{r(\gamma)} = 1_{r(\gamma)} - ax + i_{r(\gamma)}ax = 1_{r(\gamma)} - ax + (1_{r(\gamma)} - ax)uax = (1_{r(\gamma)} - ax)(1_{r(\gamma)} + uax)$$

e, portanto, $1_{r(\gamma)} - ax$ é inversível à direita em $R_{r(\gamma)}$. Segue da Proposição 2.4.8 que $a \in J_\gamma$.

Claramente, $J \cap iRi \subseteq iJi$. Vejamos que $iJi \subseteq \operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(iRi)$. Sejam $\gamma \in \Gamma$ e $a \in (iJi)_\gamma = i_{r(\gamma)}J_\gamma i_{d(\gamma)}$. Tome $x \in (iRi)_{\gamma^{-1}} = i_{d(\gamma)}R_{\gamma^{-1}}i_{r(\gamma)}$. Como $a \in J_\gamma$ e $x \in R_{\gamma^{-1}}$, segue da Proposição 2.4.8 que $1_{r(\gamma)} - ax$ é inversível à direita em $R_{r(\gamma)}$ e, portanto, existe $u \in R_{r(\gamma)}$ tal que $(1_{r(\gamma)} - ax)u = 1_{r(\gamma)}$. Então

$$i_{r(\gamma)} = i_{r(\gamma)}(1_{r(\gamma)} - ax)ui_{r(\gamma)} = (i_{r(\gamma)} - ax)ui_{r(\gamma)} = (i_{r(\gamma)} - ax)i_{r(\gamma)}ui_{r(\gamma)} .$$

Logo, $i_{r(\gamma)} - ax$ é inversível à direita em $i_{r(\gamma)}Ri_{r(\gamma)} = (iRi)_{r(\gamma)}$. Segue da Proposição 2.4.8 que $a \in \operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(iRi)_\gamma$.

Para a parte final do enunciado, considere o natural gr-homomorfismo de anéis Γ-graduados:

$$\begin{aligned} iRi &\longrightarrow \overline{iRi} \\ iri &\longmapsto \overline{iri} \end{aligned}$$

e note que ele é sobrejetor com núcleo $J \cap iRi = \operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(iRi)$. ■

Corolário 2.14.18. *Sejam R um anel Γ-graduado, $i = \sum_{e \in \Gamma_0} i_e$ um idempotente semi-homogêneo não nulo de R e $\overline{R} := R/\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$. São equivalentes:*

(1) *i é idempotente semi-homogêneo gr-local de R.*

(2) *$\bar{i}$ é idempotente semi-homogêneo Γ_0-irredutível à direita de $\overline{R}$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.14.17 e o Teorema 2.13.3, temos que iRi é anel gr-local se, e somente se, $\dfrac{iRi}{\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(iRi)} \cong_{\mathrm{gr}} \overline{iRi}$ é um anel com gr-divisão. Como $\overline{R}$ é Jacobson gr-semissimples, segue da Proposição 2.4.19 que $\overline{R}$ é gr-semiprimo. Então temos da Proposição 2.14.14 que (2) é equivalente a $\overline{iRi}$ ser um anel com gr-divisão. ■

Capítulo 3

Anéis de quocientes graduados de anéis graduados por grupoide

Neste capítulo, buscamos definir e estudar propriedades dos anéis de quocientes (à direita, à esquerda, simétrico) graduados maximal e de Martindale.

3.1 O anel de quocientes graduado maximal

Construiremos o anel de quocientes graduado maximal inspirados no roteiro de (Lam, 1999, §13B) e os ingredientes estão na Proposição a seguir, a qual também generaliza (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Proposition 39(1-3) (p. 553)).

Proposição 3.1.1. *Sejam R um anel Γ-graduado, $I := \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ e $H := \mathrm{END}_R(I)$. Considere I como H-módulo à esquerda Γ-graduado e seja $Q := \mathrm{END}({}_H I)$. Então*

(1) *Temos um gr-homomorfismo de anéis injetor $R \to Q$ que a cada $a \in R$ associa*

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow I \\ i &\longmapsto ia\,. \end{aligned}$$

(2) *Temos um gr-homomorfismo de H-módulos à esquerda sobrejetor*

$$\begin{aligned} \varphi :\ {}_H H &\longrightarrow {}_H I \\ h &\longmapsto \sum_{e \in \Gamma_0} h1_e\,. \end{aligned}$$

Em particular, I é gerado como H-módulo à esquerda por $\{1_e : e \in \Gamma_0\}$.

(3) *Temos o seguinte gr-isomorfismo de R-módulos à direita*

$$\begin{aligned} Q_R &\longrightarrow \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R) \\ q &\longmapsto \sum_{e\in\Gamma_0} 1_e q\,. \end{aligned}$$

Demonstração. (1) Claramente, para todos $\gamma \in \Gamma$ e $a \in R_\gamma$, temos que

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow I \\ i &\longmapsto ia \end{aligned}$$

é um elemento de Q_γ. Além disso, se $a \in R$ e $Ia = 0$ então $Ra = 0$ e segue que $a = 0$. Temos então um gr-homomorfismo de anéis injetor $R \to Q$.

(2) Note que, dado $h \in H$, $\sum_{e\in\Gamma_0} h1_e = \sum_{\gamma\in\Gamma} h_\gamma 1_{d(\gamma)}$ e, portanto, $\varphi(h)$ está bem definido e φ é um gr-homomorfismo de H-módulos à esquerda. Vejamos que φ é sobrejetor. Sejam $\gamma \in \Gamma$ e $i \in I_\gamma$. Então o seguinte homomorfismo de grau γ

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow I \\ a &\longmapsto ia \end{aligned}$$

se estende, pela gr-injetividade de I, a um $h \in H_\gamma$. Em particular, $i = i1_{d(\gamma)} = h(1_{d(\gamma)}) = \varphi(h)$.

(3) Temos que $q \mapsto \sum_{e\in\Gamma_0} 1_e q = \sum_{\gamma\in\Gamma} 1_{r(\gamma)} q_\gamma$ define um gr-homomorfismo de R-módulos à direita $Q \to \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$. Este gr-homomorfismo é injetor pois

$$\sum_{e\in\Gamma_0} 1_e q = 0 \implies Iq \underset{(2)}{=} \left(\sum_{e\in\Gamma_0} H1_e\right) q = H\left(\sum_{e\in\Gamma_0} 1_e q\right) = 0 \implies q = 0.$$

Resta vermos que $\sum_{e\in\Gamma_0} 1_e Q = \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R)$. Sejam $q \in \mathrm{h}(Q)$ e $e \in \Gamma_0$. Então, para todo $h \in \mathrm{h}(H)$, temos

$$h(R) = 0 \implies h1_e = 0 \implies h(1_e q) = (h1_e)q = 0.$$

Portanto, $1_e q \in \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R)$. Reciprocamente, sejam $\sigma \in \Gamma$ e $i \in \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R)_\sigma$. Considere

$$\begin{aligned} q :{}_H I &\longrightarrow {}_H I \\ \sum_{e\in\Gamma_0} h1_e &\longmapsto hi\,. \end{aligned}$$

q está bem definido pela sobrejetividade de φ em (2) e por

$$\begin{aligned} \sum_{e\in\Gamma_0} h1_e = \sum_{e\in\Gamma_0} h'1_e &\implies \sum_{\gamma\in\Gamma} h1_{d(\gamma)} = \sum_{\gamma\in\Gamma} h'1_{d(\gamma)} \\ &\implies h1_{d(\gamma)} = h'1_{d(\gamma)},\ \forall\gamma\in\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow\ h(r) = h'(r),\ \forall r \in R \\
&\Longrightarrow\ (h - h')(R) = 0 \\
&\Longrightarrow\ (h - h')(i) = 0\,,
\end{aligned}$$

para todos $h, h' \in \mathrm{h}(H)$. Então q é um endomorfismo de H-módulos à esquerda e, para cada $\gamma \in \Gamma$, temos

$$\sum_{e\in\Gamma_0} h1_e \in I_\gamma \implies h \in H_\gamma \implies hi \in I_{\gamma\sigma}\,.$$

Logo, $q \in Q_\sigma$. Portanto,

$$i = \mathbb{1}_{r(\sigma)} i = (\mathbb{1}_{r(\sigma)} 1_{r(\sigma)})q = 1_{r(\sigma)} q = \sum_{e\in\Gamma_0} 1_e q\,. \qquad \blacksquare$$

Definição 3.1.2. Sejam R um anel Γ-graduado, $I := \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$, $H := \mathrm{END}(I_R)$ e $Q := \mathrm{END}({}_H I)$. Usando o gr-isomorfismo dado pela Proposição 3.1.1(3), vamos identificar Q com $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R)$. Isto dá a $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ uma estrutura de anel (de quocientes à direita) Γ-graduado estendendo sua estrutura de R-módulo à direita Γ-graduado. Este anel Γ-graduado será chamado o *anel de quocientes à direita Γ-graduado maximal de R* e será denotado por

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)\,.$$

Note que, pela Proposição 3.1.1(3), I é um $(H, \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))$-bimódulo Γ-graduado. Definimos o *anel de quocientes à esquerda Γ-graduado maximal de R* por

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R) := \left(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R^{op})\right)^{op}\,.$$

Observação 3.1.3. Tomando Γ sendo o grupo trivial $\{\cdot\}$, obtemos a definição do anel de quocientes à direita maximal de (Lam, 1999, §13B). $\blacksquare$

O termo "maximal" na definição anterior é justificado pelos dois resultados a seguir.

Teorema 3.1.4. *Sejam R um anel Γ-graduado e S um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R. Então:*

(1) *Existe um único gr-homomorfismo de anéis $g : S \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ estendendo a função identidade de R.*

(2) *g no item (1) é injetor.*

(3) *A estrutura de anel Γ-graduado em $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é a única que estende sua estrutura de R-módulo à direita Γ-graduado.*

Demonstração. (1) e (2): Como $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$, segue do Teorema 2.9.4 que existe um único gr-homomorfismo de R-módulos à direita $g : S \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ estendendo a inclusão $R \hookrightarrow \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ e, além disso, tal g é injetor. Resta verificarmos que g respeita produtos. Sejam $s' \in S_\alpha$ e $s \in S_\beta$ com $d(\alpha) = r(\beta)$. Considere o seguinte homomorfismo de R-módulos à direita de grau $\alpha\beta$

$$\begin{aligned} m : \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) &\longrightarrow \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \\ q &\longmapsto (g(s's) - g(s')g(s))q\,. \end{aligned}$$

Pela gr-injetividade de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$, podemos estender m a um $h \in \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R))_{\alpha\beta}$. Para todo $a \in s^{-1}R = \{x \in R : sx \in R\}$ temos

$$h(a) = m(a) = g(s's)a - g(s')g(s)a = g(s'sa) - g(s')g(sa) = g(s'sa) - g(s')sa = 0.$$

Logo $h(s^{-1}R) = 0$ e então $h|_R$ induz um $\overline{h|_R} \in \mathrm{HOM}_R\left(\dfrac{R}{s^{-1}R}, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)\right)_{\alpha\beta}$ dado por $\overline{h|_R}(\overline{a}) = h(a)$ para todo $a \in R$. Pela Proposição 2.8.26(2), $s^{-1}R \leq_{\text{gr-den}} R_R$ e segue da Proposição 2.8.13 que $\overline{h|_R} = 0$. Portanto, $h(R) = 0$. Em particular,

$$0 = h(1_{d(\beta)}) = m(1_{d(\beta)}) = g(s's) - g(s')g(s)\,.$$

(3) Uma estrutura de anel Γ-graduado em $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ estendendo sua estrutura de R-módulo à direita Γ-graduado faz de $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ um anel de quocientes à direita graduado S de R. Por (1), existe um único gr-homomorfismo $g : S \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ estendo a função identidade de R. Mas, considerando g como um gr-homomorfismo de R-módulos à direita, temos do Teorema 2.9.4 que g é a função identidade de $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R)$. ■

Corolário 3.1.5. *Sejam R um anel Γ-graduado e S um anel de quocientes à esquerda Γ-graduado de R. Então:*

(1) *Existe um único gr-homomorfismo de anéis $g : S \to \mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R)$ estendendo a função identidade de R.*

(2) *g no item (1) é injetor.*

(3) *A estrutura de anel Γ-graduado em $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R)$ é a única que estende sua estrutura de R-módulo à esquerda Γ-graduado.*

Demonstração. Os itens (1) e (2) seguem dos itens (1) e (2) do Teorema 3.1.4 pois a existência de um gr-homomorfismo de anéis $g : S \to \mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R) = \left(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R^{op})\right)^{op}$ estendendo a função identidade de R é equivalente a existência de um gr-homomorfismo de anéis $g : S^{op} \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R^{op})$ estendendo a função identidade de R^{op}.

(3) segue do Teorema 3.1.4(3) pois a estrutura de anel Γ-graduado em $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R^{op})$ é a única que estende sua estrutura de R^{op}-módulo à direita Γ-graduado e, portanto, a estrutura de anel graduado em $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R) = \left(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R^{op})\right)^{op}$ é a única que estende sua estrutura de R-módulo à esquerda Γ-graduado. ■

Agora estudamos algumas relações entre $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ e ideais à direita gr-densos de R, conforme foi feito no caso não graduado em (Lam, 1999, §13C).

Proposição 3.1.6. *Sejam R um anel Γ-graduado e $H := \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R))$. Para D um ideal à direita graduado de R e U um R-submódulo à direita graduado de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ temos:*

(1) *$U_R \leq_{\text{gr-den}} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ se, e somente se, para todo $h \in \mathrm{h}(H)$ tal que $h(U) = 0$ temos $h(R) = 0$.*

(2) *$D_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$ se, e somente se, para todo $h \in \mathrm{h}(H)$ tal que $h(D) = 0$ temos $h(R) = 0$.*

Demonstração. (1) Suponha que $U_R \leq_{\text{gr-den}} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ e $h \in \mathrm{h}(H)$ é tal que $h(U) = 0$. Então $h|_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)}$ induz um $\overline{h|_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)}} \in \mathrm{HOM}_R\left(\frac{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)}{U}, \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)\right)$ dado por $\overline{h|_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)}}(\overline{q}) = h(q)$ para todo $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$. Pelo Corolário 2.7.8(3), temos $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ e segue da Proposição 2.8.13 que $\overline{h|_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)}} = 0$. Portanto $h(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)) = 0$ e, em particular, $h(R) = 0$.

Reciprocamente, suponha que para todo $h \in \mathrm{h}(H)$ tal que $h(U) = 0$ tenhamos $h(R) = 0$. Seja P um R-submódulo à direita graduado de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ contendo U e tome $g \in \mathrm{h}(\mathrm{HOM}_R(P/U, \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)))$. Considere a projeção canônica $\pi : P \to P/U$ e, usando a gr-injetividade de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$, estenda $g \circ \pi : P \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ a um $h \in \mathrm{h}(H)$. Como $h(U) = (g \circ \pi)(U) = 0$, segue que $h(R) = 0$. Então, lembrando que $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ é um $(H, \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))$-bimódulo graduado pela Proposição 3.1.1, temos

$$g(\pi(P)) = h(P) = h\left(\sum_{e \in \Gamma_0} 1_e P\right) = \sum_{e \in \Gamma_0} (h 1_e) P = 0\,.$$

Logo, $g = 0$. Portanto, $\mathrm{HOM}_R(P/U, \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)) = 0$ sempre que $U_R \leq_{\text{gr}} P_R \leq_{\text{gr}} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ e segue da Proposição 2.8.13 que $U_R \leq_{\text{gr-den}} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$.

(2) Como $R_R \leq_{\text{gr-den}} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$, segue da Proposição 2.8.11(2) que $D_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$ se, e somente se, $D_R \leq_{\text{gr-den}} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$. Então (2) segue de (1). ∎

Proposição 3.1.7. *Sejam R um anel Γ-graduado e $H := \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R))$. Suponha que U e U' são dois R-submódulos à direita graduados de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ com $U_R \leq_{\text{gr-den}} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ e considere $(U' : U) := \{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) : qU \subseteq U'\}$. Então*

$$\begin{aligned} (U' : U) &\longrightarrow \mathrm{HOM}_R(U, U') \\ q &\longmapsto U \to U' \\ &\qquad x \mapsto qx\,. \end{aligned}$$

é um gr-isomorfismo de grupos aditivos Γ-graduados.

Demonstração. Claramente temos no enunciado um gr-homomorfismo de grupos aditivos Γ-graduados $(U' : U) \longrightarrow \mathrm{HOM}_R(U, U')$. Resta verificarmos que ele é bijetor.

Para a injetividade, suponha que $q \in (U' : U)$ é tal que $qU = 0$. Como $q \in \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$, segue da Proposição 3.1.1(2), que existe $h \in H$ tal que $q = \sum_{e \in \Gamma_0} h1_e$. Então

$$h(U) = h\left(\sum_{e \in \Gamma_0} 1_e U\right) = \sum_{e \in \Gamma_0} (h1_e)U = qU = 0\,.$$

Como $U_R \leq_{\text{gr-den}} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$, segue da Proposição 3.1.6(1) que $h(R) = 0$ e, portanto, $q = \sum_{e \in \Gamma_0} h1_e = 0$.

Agora, sejam $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}_R(U, U')_\gamma$. Usando a gr-injetividade de $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$, estenda g a um $h \in H_\gamma$ e considere $q := h1_{d(\gamma)} \in \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)_\gamma$. Vejamos que $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$. De fato, para todo $h' \in \mathrm{h}(H)$ tal que $h'(R) = 0$ temos

$$h'(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)) = 0 \implies (h'h)(U) = h'(g(U)) \subseteq h'(U') \subseteq h'(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)) = 0.$$

Então, pela Proposição 3.1.6(1), temos $(h'h)(R) = 0$ e, portanto,

$$h'(q) = h'(h1_{d(\gamma)}) = (h'h)(1_{d(\gamma)}) = 0\,.$$

Então $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ e é tal que, para todo $x \in U$, temos

$$g(x) = h(x) = h\left(\sum_{e \in \Gamma_0} 1_e x\right) = \sum_{e \in \Gamma_0} (h1_e)x = qx\,. \qquad \blacksquare$$

Corolário 3.1.8. *Sejam R um anel Γ-graduado e $H := \mathrm{END}_R(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R))$. Suponha que U e U' são dois R-submódulos à direita graduados de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ com $U_R \leq_{\text{gr-den}} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ e considere $(U' : U) := \{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) : qU \subseteq U'\}$. Então*

(1) *$\mathrm{END}(U_R)$ é gr-isomorfo ao subanel graduado $(U : U)$ de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$.*

(2) *Cada elemento de $\mathrm{HOM}(U_R, R_R)$ é dado por multiplicação à esquerda por algum elemento de $\{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) : qU \subseteq R\}$.*

(3) *Dados $\sigma, \sigma' \in \Gamma$, $U(\sigma) \cong_{\mathrm{gr}} U'(\sigma')$ se, e somente se, existe $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_{\sigma'\sigma^{-1}}$ gr-inversível tal que $U'(\sigma') = qU(\sigma)$.*

Demonstração. (1) Basta aplicar a Proposição 3.1.7 para $U' = U$.

(2) Basta aplicar a Proposição 3.1.7 para $U' = R$.

(3) Note que, para cada $\sigma, \sigma' \in \Gamma$ temos da Proposição 1.6.12(1) que $\mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(U(\sigma), U'(\sigma')) \cong \mathrm{Hom}_{\text{gr-}R}(U, U'(\sigma'\sigma^{-1})) = \mathrm{HOM}_R(U, U')_{\sigma'\sigma^{-1}}$ e então basta usar a Proposição 3.1.7. $\blacksquare$

Definição 3.1.9. Se R é um anel Γ-graduado, denotaremos por $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ (resp. $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$) a família dos ideais à direita (resp. à esquerda) gr-densos de R.

Agora temos todas as condições de apresentar uma caracterização de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$.

Teorema 3.1.10. *Seja R um anel Γ-graduado. Temos um anel Γ-graduado*

$$\overline{R} := \left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)} \mathrm{HOM}(D_R, R_R) \right) \Big/ \sim$$

cuja componente homogênea de grau $\gamma \in \Gamma$ é

$$\overline{R}_\gamma := \left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)} \mathrm{HOM}(D_R, R_R)_\gamma \right) \Big/ \sim$$

onde, dados $D_1, D_2 \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$, $g_1 \in \mathrm{HOM}_R(D_1, R)$ e $g_2 \in \mathrm{HOM}_R(D_2, R)$, temos

- $g_1 \sim g_2 \iff g_1|_{D_1 \cap D_2} = g_2|_{D_1 \cap D_2}$;
- $[g_1] + [g_2] := [g_1|_{D_1 \cap D_2} + g_2|_{D_1 \cap D_2}]$;
- $[g_1] \cdot [g_2] := \left[g_1 \circ \left(g_2|_{\bigcap_{\gamma \in \Gamma} (g_2)_\gamma^{-1}(D_1)} \right) \right]$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) &\longrightarrow \overline{R} \\ q &\longmapsto \begin{bmatrix} \bigcap_{\gamma \in \Gamma} q_\gamma^{-1} R \to R \\ d \mapsto qd \end{bmatrix} \end{aligned}$$

é um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados cuja restrição a R é o gr-isomorfismo canônico $R \to \mathrm{END}(R_R)$.

Demonstração. Primeiramente vejamos que $\sim$ é uma relação de equivalência. Claramente $\sim$ é reflexiva e simétrica. Sejam $D_1, D_2, D_3 \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e $g_i \in \mathrm{HOM}_R(D_i, R)$ $(i = 1, 2, 3)$ tais que $g_1 \sim g_2$ e $g_2 \sim g_3$. Então g_1 e g_2 coincidem em $D_1 \cap D_2$ enquanto g_2 e g_3 coincidem em $D_2 \cap D_3$. Logo, $(g_1 - g_3)(D_1 \cap D_2 \cap D_3) = 0$. Aplicando a Proposição 2.8.27(1) (para $I = D_1 \cap D_3$ e $D = D_2$), obtemos $(g_1 - g_3)(D_1 \cap D_3)$ e, portanto $g_1 \sim g_3$.

Dados $D_1, D_2 \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e $g_i \in \mathrm{HOM}_R(D_i, R)$ $(i = 1, 2)$ suponha que, para cada $i = 1, 2$, $D_i' \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e $g_i' \in \mathrm{HOM}_R(D_i', R)$ são tais que $g_i \sim g_i'$ e vejamos que as operações $[g_1] + [g_2]$ e $[g_1] \cdot [g_2]$ estão bem definidas. Pela Proposição 2.8.11(1), $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e então podemos considerar a classe $[g_1|_{D_1 \cap D_2} + g_2|_{D_1 \cap D_2}]$. Como g_i e g_i' coincidem em $D_i \cap D_i'$ para cada $i = 1, 2$, segue que $g_1 + g_2$ coincide com $g_1' + g_2'$ em $(D_1 \cap D_2) \cap (D_1' \cap D_2')$. Agora vejamos que a multiplicação está bem definida. Pela Proposição 2.8.27(2), temos que $D := \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (g_2)_\gamma^{-1}(D_1) \leq_{\text{gr-den}} D_2$ e segue da Proposição 2.8.11(2) que $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Assim, podemos considerar a classe $[g_1 \circ g_2|_D]$.

Seja $D' := \bigcap_{\gamma\in\Gamma} (g_2')_\gamma^{-1}(D_1')$. Então g_2 coincide com g_2' em $D\cap D'$ pois $D \subseteq D_2$ e $D' \subseteq D_2'$. Como $g_2(D \cap D') \subseteq g_2(D) \subseteq D_1$, $g_2'(D \cap D') \subseteq g_2(D') \subseteq D_1'$ e g_1 coincide com g_1' em $D_1 \cap D_1'$, segue que $g_1 \circ g_2$ e $g_1' \circ g_2'$ coincidem em $D \cap D'$, como queríamos.

Agora, verificamos que $\overline{R}$ é um anel associativo com essas operações. É fácil ver que a adição em $\overline{R}$ é associativa, é comutativa, tem como elemento neutro a classe $[0]$ do homomorfismo nulo $0 \in \mathrm{END}(R_R)$ e o inverso aditivo de $[g]$ é $[-g]$. Ou seja, $(\overline{R}, +)$ é um grupo abeliano. Vejamos que a multiplicação é associativa e distributiva com a adição. Sejam $D_1, D_2, D_3 \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e $g_i \in \mathrm{HOM}_R(D_i, R)$ $(i = 1, 2, 3)$. Então:

- Associatividade:

$$\begin{aligned}
([g_1] \cdot [g_2]) \cdot [g_3] &= \left[g_1 \circ \left(g_2|_{\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(g_2)_\gamma^{-1}(D_1)}\right)\right] \cdot [g_3] \\
&= \left[g_1 \circ g_2 \circ g_3|_{\bigcap_{\sigma\in\Gamma}(g_3)_\sigma^{-1}\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(g_2)_\gamma^{-1}(D_1)\right)}\right] \\
&= \left[g_1 \circ g_2 \circ g_3|_{\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(g_2\circ g_3)_\gamma^{-1}(D_1)}\right] \\
&= [g_1] \cdot ([g_2] \cdot [g_3]),
\end{aligned}$$

pois $\bigcap_{\sigma\in\Gamma} (g_3)_\sigma^{-1}\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} (g_2)_\gamma^{-1}(D_1)\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} (g_2 \circ g_3)_\gamma^{-1}(D_1)$.

- Distributividade à direita:

$$\begin{aligned}
([g_1] + [g_2]) \cdot [g_3] &= [g_1|_{D_1\cap D_2} + g_2|_{D_1\cap D_2}] \cdot [g_3] \\
&= \left[(g_1 + g_2) \circ \left(g_3|_{\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(g_3)_\gamma^{-1}(D_1\cap D_2)}\right)\right] \\
&= \left[(g_1 \circ g_3)|_{\bigcap_{\gamma,\sigma\in\Gamma}(g_3)_\gamma^{-1}(D_1)\cap(g_3)_\sigma^{-1}(D_2)} + (g_2 \circ g_3)|_{\bigcap_{\gamma,\sigma\in\Gamma}(g_3)_\gamma^{-1}(D_1)\cap(g_3)_\sigma^{-1}(D_2)}\right] \\
&= \left[(g_1 \circ g_3)|_{\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(g_3)_\gamma^{-1}(D_1)}\right] + \left[(g_2 \circ g_3)|_{\bigcap_{\sigma\in\Gamma}(g_3)_\sigma^{-1}(D_2)}\right] \\
&= [g_1] \cdot [g_3] + [g_2] \cdot [g_3],
\end{aligned}$$

pois $\bigcap_{\gamma,\sigma\in\Gamma} (g_3)_\gamma^{-1}(D_1) \cap (g_3)_\sigma^{-1}(D_2) \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} (g_3)_\gamma^{-1}(D_1 \cap D_2)$.

- Distributividade à esquerda:

$$\begin{aligned}
[g_3] \cdot ([g_1] + [g_2]) &= [g_3] \cdot [g_1|_{D_1\cap D_2} + g_2|_{D_1\cap D_2}] \\
&= \left[g_3 \circ \left((g_1 + g_2)|_{\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(g_1+g_2)_\gamma^{-1}(D_3)}\right)\right] \\
&= \left[(g_3 \circ g_1)|_{\bigcap_{\gamma,\sigma\in\Gamma}(g_1)_\gamma^{-1}(D_3)\cap(g_2)_\sigma^{-1}(D_3)} + (g_3 \circ g_2)|_{\bigcap_{\gamma,\sigma\in\Gamma}(g_1)_\gamma^{-1}(D_3)\cap(g_2)_\sigma^{-1}(D_3)}\right] \\
&= \left[(g_3 \circ g_1)|_{\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(g_1)_\gamma^{-1}(D_3)}\right] + \left[(g_3 \circ g_2)|_{\bigcap_{\sigma\in\Gamma}(g_2)_\sigma^{-1}(D_3)}\right] \\
&= [g_3] \cdot [g_1] + [g_3] \cdot [g_2],
\end{aligned}$$

pois $\bigcap_{\gamma,\sigma\in\Gamma}(g_1)_\gamma^{-1}(D_3)\cap(g_2)_\sigma^{-1}(D_3)\subseteq\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(g_1+g_2)_\gamma^{-1}(D_3)$.

Vejamos que $\overline{R}=\bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\overline{R}_\gamma$ é um anel Γ-graduado. Claramente, cada $\overline{R}_\gamma$ é um subgrupo aditivo de $\overline{R}$. Para vermos que $\sum_{\gamma\in\Gamma}\overline{R}_\gamma$ é direta, sejam $n\geq 2$, $\gamma_1,...,\gamma_n\in\Gamma$ dois a dois distintos, $D_1,...,D_n\in\mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e $g_i\in\mathrm{HOM}_R(D_i,R)_{\gamma_i}$ $(i=1,...,n)$. Então

$$\begin{aligned}[g_1]+\cdots+[g_n]=[0] &\implies \left[\sum_{i=1}^n g_i|_{D_1\cap\cdots\cap D_n}\right]=[0]\\ &\implies \sum_{i=1}^n g_i|_{D_1\cap\cdots\cap D_n}=0\\ &\implies g_i|_{D_1\cap\cdots\cap D_n}=0,\forall i=1,...,n\\ &\implies g_i=0,\forall i=1,...,n\end{aligned}$$

onde, na penúltima implicação usamos que os γ_i são distintos e na última implicação aplicamos, para cada $i=1,...,n$, a Proposição 2.8.27(1) para $D=D_1\cap\cdots\cap\widehat{D_i}\cap\cdots\cap D_n$, $I=D_i$ e $g=g_i$. O fato que, para todos $\sigma,\tau\in\Gamma$, $\overline{R}_\sigma\overline{R}_\tau\subseteq\begin{cases}\overline{R}_{\sigma\tau}, & \text{se }\sigma\tau\text{ está definido}\\ \{0\}, & \text{se }\sigma\tau\text{ não está definido}\end{cases}$, segue imediatamente do Lema 1.6.3. Agora note que, para cada $e\in\Gamma_0$, o anel $\overline{R}_e$ tem como unidade a classe $[\mathbb{1}_e]$ da projeção $\mathbb{1}_e\in\mathrm{END}(R_R)_e$. Além disso, para cada $\gamma\in\Gamma$, $D\in\mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e $g\in\mathrm{HOM}(D_R,R_R)_\gamma$ temos

$$[g][\mathbb{1}_{d(\gamma)}]=[g\circ\mathbb{1}_{d(\gamma)}|_{\mathbb{1}_{d(\gamma)}^{-1}(D)}]=[g|_D]=[g]=[g|_D]=[\mathbb{1}_{r(\gamma)}\circ g|_{g^{-1}(R)}]=[\mathbb{1}_{r(\gamma)}][g].$$

Portanto, $\overline{R}$ é um anel Γ-graduado.

Por fim, vejamos que Φ é um gr-isomorfismo de anéis. Seja $q\in\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$. Temos um $g\in\mathrm{HOM}_R(R_R,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))$ dado por $g(a)=qa$ para todo $a\in R$. A Proposição 2.8.27(2) nos diz que $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}q_\gamma^{-1}R=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}g_\gamma^{-1}(R)\leq_{\text{gr-den}}R_R$. Logo, $\Phi(q)=[g|_{\bigcap_{\gamma\in\Gamma}q_\gamma^{-1}R}]\in\overline{R}$ e segue que Φ está bem definido. Claramente, Φ é um gr-homomorfismo de anéis Γ-graduados. Se $q\in\mathrm{h}(\ker\Phi)$ então $q(q^{-1}R)=0$ e segue do Lema 2.8.19 que $q=0$. Logo, Φ é injetor. A sobrejetividade de Φ segue do Corolário 3.1.8(2). ■

Observação 3.1.11. O anel de quocientes maximal foi definido pela primeira vez em (Utumi, 1956) como no Teorema 3.1.10. ■

O Teorema 3.1.10 nos ajuda a obter a seguinte caracterização axiomática de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$.

Teorema 3.1.12. *Sejam R e Q anéis Γ-graduados. Existe um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)\to Q$ cuja restrição a R é a função identidade se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:*

(*i*) *R é subanel graduado de Q.*

(*ii*) *Para cada* $q \in \mathrm{h}(Q)$, *existe* $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ *tal que* $qD \subseteq R$.

(*iii*) *Se* $q \in \mathrm{h}(Q)$, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ *e* $qD = 0$ *então* $q = 0$.

(*iv*) *Para cada* $\gamma \in \Gamma$, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ *e* $g \in \mathrm{HOM}(D_R, R_R)_\gamma$, *existe* $q \in Q_\gamma$ *tal que* $g(d) = qd$ *para todo* $d \in D$.

Demonstração. Primeiramente note que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ satisfaz as condições $(i)-(iii)$ pela Proposição 2.8.20 e a condição (iv) pelo Corolário 3.1.8(2). Logo qualquer anel Γ-graduado gr-isomorfo a $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ sobre R também satisfará.

Reciprocamente, suponha que Q satisfaz $(i)-(iv)$. Seja $q \in \mathrm{h}(Q)$. Por (ii), existe $D^q \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tal que $qD^q \subseteq R$. Considere o homomorfismo $m_q \in \mathrm{HOM}_R(D^q, R_R)_{\deg q}$ dado por multiplicação à esquerda por q. Note que se $D' \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ também satisfaz $qD' \subseteq R$ então $\begin{bmatrix} D' \to R \\ d \mapsto qd \end{bmatrix} = [m_q]$ no anel $\overline{R}$ do Teorema 3.1.10. Então temos bem definido um $\varphi : Q \to \overline{R}$ dado por $\varphi(q) = [m_q]$. É fácil ver que φ é um gr-homomorfismo de anéis Γ-graduados. Além disso, φ é injetor por (iii) e é sobrejetor por (iv). Por (i), podemos considerar $\varphi|_R$ e este é precisamente o gr-isomorfismo canônico $R \to \mathrm{END}(R_R)$. Então, compondo φ^{-1} com o gr-isomorfismo Φ do Teorema 3.1.10, obtemos um gr-isomorfismo de anéis $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \to Q$ cuja restrição a R é a função identidade de R. ■

Do Teorema 3.1.12 e da Proposição 2.8.20 obtemos imediatamente a seguinte generalização de (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Proposition 39(10) (p. 553)).

Corolário 3.1.13. *Sejam* R *e* Q *anéis* Γ*-graduados. Existe um gr-isomorfismo de anéis* Γ*-graduados* $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \to Q$ *cuja restrição a* R *é a função identidade se, e somente se,* Q *é um anel de quocientes à direita* Γ*-graduado de* R *e, para cada* $\gamma \in \Gamma$, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ *e* $g \in \mathrm{HOM}(D_R, R_R)_\gamma$, *existe* $q \in Q_\gamma$ *tal que* $g(d) = qd$ *para todo* $d \in D$. ■

Com os resultados anteriores, podemos caracterizar quando $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = R$.

Corolário 3.1.14. *Seja* R *um anel* Γ*-graduado. Então* $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = R$ *se, e somente se, para cada* $\gamma \in \Gamma$, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ *e* $g \in \mathrm{HOM}(D_R, R_R)_\gamma$, *existe* $a \in R_\gamma$ *tal que* $g(d) = ad$ *para todo* $d \in D$. ■

Corolário 3.1.15. *Seja* R *um anel* Γ*-graduado. Se* R_R *é gr-injetivo então* $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = R$. *E vale a recíproca se* R *é anel gr-nãosingular à direita.*

Demonstração. A primeira afirmação segue imediatamente do Corolário 3.1.14 e do Critério de Baer graduado (Teorema 2.5.6). Agora suponha que R é anel gr-nãosingular à direita e $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = R$. Vamos usar o Critério de Baer graduado para provar que R_R é gr-injetivo. Sejam $\gamma \in \Gamma$, U um ideal à direita graduado de R e $g \in \mathrm{HOM}(U_R, R_R)_\gamma$. Pela Proposição 2.6.10, existe um ideal à direita graduado V de R tal que $U \oplus V \leq_{\text{gr-ess}} R_R$. Então, definindo $g(V) = 0$, podemos considerar $g \in \mathrm{HOM}_R(U \oplus V, R_R)_\gamma$. Pelo Teorema 2.10.16(2) temos que $U \oplus V \leq_{\text{gr-den}} R_R$ e segue do Corolário 3.1.14 que g se estende a um elemento de $\mathrm{END}(R_R)_\gamma$. ■

A seguinte caracterização axiomática de $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R)$ mostra a razoabilidade da nossa definição desse anel. Veja (Jespers e Wauters, 1988, Proposition 1.4).

Teorema 3.1.16. *Sejam R e Q anéis Γ-graduados. Existe um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R) \to Q$ cuja restrição a R é a função identidade se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:*

(i) R é subanel graduado de Q.

(ii) Para cada $q \in \mathrm{h}(Q)$, existe $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ tal que $Dq \subsetneq R$.

(iii) Se $q \in \mathrm{h}(Q)$, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ e $Dq = 0$ então $q = 0$.

(iv) Para cada $\gamma \in \Gamma$, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ e $g \in \mathrm{HOM}({}_R D, {}_R R)_\gamma$, existe $q \in Q_\gamma$ tal que $(d)g = dq$ para todo $d \in D$.

Demonstração. A existência de um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R) \to Q$ cuja restrição a R é a função identidade de R é equivalente a existência de um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R^{op}) \to Q^{op}$ cuja restrição a R^{op} é a função identidade de R^{op}. Note também que R e Q satisfazem as condições $(i)-(iv)$ se, e somente se, R^{op} e Q^{op} satisfazem as condições $(i)-(iv)$ do Teorema 3.1.12. Portanto, o resultado segue do Teorema 3.1.12. ∎

A seguinte "versão à esquerda" do Corolário 3.1.13 segue imediatamente do Teorema 3.1.16 e do Corolário 2.8.21.

Corolário 3.1.17. *Sejam R e Q anéis Γ-graduados. Existe um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R) \to Q$ cuja restrição a R é a função identidade se, e somente se, Q é um anel de quocientes à esquerda Γ-graduado de R e, para cada $\gamma \in \Gamma$, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ e $g \in \mathrm{HOM}({}_R D, {}_R R)_\gamma$, existe $q \in Q_\gamma$ tal que $(d)g = dq$ para todo $d \in D$.* ∎

Observação 3.1.18. Se o anel Γ-graduado R tem unidade então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é o maior subanel de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R)$ (o anel de quocientes à direita maximal de R) que é Γ-graduado e tem R como subanel graduado. De fato, pelo Corolário 2.8.6, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um anel de quocientes à direita de R e então podemos considerar $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ como um subanel de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R)$. E, se R é subanel graduado de um anel Γ-graduado Q e Q é subanel de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R)$ então Q é um anel de quocientes à direita de R e, pelo Corolário 2.8.6, Q é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R e segue do Teorema 3.1.4 que $Q \hookrightarrow \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$. Podemos usar o Corolário 3.1.13 para enxergar explicitamente $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ dentro de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R)$, conforme o resultado a seguir, inspirado em (Jespers e Wauters, 1988, Proposition 1.6). ∎

Proposição 3.1.19. *Seja R um anel Γ-graduado com unidade. Então*

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = \bigoplus_{\sigma \in \Gamma} Q_\sigma\,,$$

onde, para cada $\sigma \in \Gamma$,

$$Q_\sigma := \{x \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R) : \textit{existe } D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R) \textit{ tal que } xD_\gamma \subseteq R_{\sigma\gamma} \textit{ para todo } \gamma \in \Gamma\}\,.$$

Demonstração. Seja $Q := \sum_{\sigma \in \Gamma} Q_\sigma$. Pelo Corolário 3.1.13, basta mostrarmos que Q é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R e satisfaz a condição (iv) do Teorema 3.1.12.

Começamos verificando que Q é um anel Γ-graduado. Para vermos que cada Q_σ é subgrupo aditivo de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R)$, sejam $x, y \in Q_\sigma$ e $D^x, D^y \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tais que $xD^x_\gamma, yD^y_\gamma \subseteq R_{\sigma\gamma}$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Então $D := D^x \cap D^y \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ é tal que

$$(x - y)D_\gamma \subseteq xD_\gamma - yD_\gamma \subseteq xD^x_\gamma - yD^y_\gamma \subseteq R_{\sigma\gamma}$$

para todo $\gamma \in \Gamma$. Para vermos que a soma $\sum_{\sigma \in \Gamma} Q_\sigma$ é direta, suponha que $\sigma_1, ..., \sigma_n \in \Gamma$ são dois a dois distintos, $x_i \in Q_{\sigma_i}$ para cada $i = 1, ..., n$ e $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Sejam $D^{x_1}, ..., D^{x_n} \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tais que $x_i D^{x_i}_\gamma \subseteq R_{\sigma_i\gamma}$ para todos $i = 1, ..., n$ e $\gamma \in \Gamma$. Então $D := \bigcap_{i=1}^{n} D^{x_i} \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ é tal que, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $d \in D_\gamma$ temos

$$0 = (x_1 + \cdots + x_n)d = x_1 d + \cdots + x_n d \implies x_i d = 0, \forall i = 1, ..., n\,,$$

pois $x_i d \in R_{\sigma_i\gamma}$ para todo $i = 1, ..., n$ e os σ_i são dois a dois distintos. Logo, $x_i D = 0$ para todo $i = 1, ..., n$. Mas, pela Proposição 2.8.5 temos que D é ideal à direita denso de R e, portanto, aplicando o Teorema 3.1.12 para Γ sendo o grupo trivial segue que $x_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n$. Assim, $Q = \bigoplus_{\sigma \in \Gamma} Q_\sigma$ é um subgrupo aditivo de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R)$. Note que $R_\sigma \subseteq Q_\sigma$ para todo $\sigma \in \Gamma$. Portanto, para mostrarmos que Q é anel Γ-graduado e R é subanel graduado de Q, basta provarmos que $Q_\sigma Q_\tau \subseteq Q_{\sigma\tau}$ para todos $\sigma, \tau \in \Gamma$. Sejam $\sigma, \tau \in \Gamma$, $x \in Q_\sigma$, $y \in Q_\tau$ e $D^x, D^y \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tais que $xD^x_\gamma \subseteq R_{\sigma\gamma}$ e $yD^y_\gamma \subseteq R_{\tau\gamma}$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Considere o seguinte ideal à direita graduado de R

$$D := \{r \in D^y : yr \in D^x\}\,.$$

Vejamos que $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Sejam $a, b \in \mathrm{h}(R)$, $a \neq 0$. Como $D^y \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $ar \neq 0$ e $br \in D^y$. Então, como $ybr \in \mathrm{h}(R)$ e $D^x \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$, existe $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $arr' \neq 0$ e $ybrr' \in D^x$ (isto é, $brr' \in D$). Logo, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Além disso, para cada $\gamma \in \Gamma$ temos

$$xyD_\gamma \subseteq x(R_{\tau\gamma} \cap D^x) = xD^x_{\tau\gamma} \subseteq R_{\sigma\tau\gamma}$$

e, portanto, $xy \in Q_{\sigma\tau}$.

Temos então a seguinte cadeia de subanéis: $R \subseteq Q \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R)$. Logo, Q é um anel de quocientes à direita de R. Pelo Corolário 2.8.6 temos que Q é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R.

Por fim, verificamos a condição (iv) do Teorema 3.1.12. Sejam $\sigma \in \Gamma$, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e $g \in \mathrm{HOM}(D_R, R_R)_\sigma$. Como D é ideal à direita denso de R e $g : D \to R$ é um homomorfismo de R-módulos à direita, segue de (Lam, 1999, Proposition 13.20) que existe $x \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R)$ tal que $g(d) = xd$ para todo $d \in D$. Como $xD_\gamma = g(D_\gamma) \subseteq R_{\sigma\gamma}$ para todo $\gamma \in \Gamma$, segue que $x \in Q_\sigma$. ∎

O anel de quocientes graduado maximal tem a seguinte propriedade de extensão de gr-automorfismos, cuja prova é baseada na do caso não graduado (Lam, 2007, Exercise 13.15).

Teorema 3.1.20. *Seja R um anel Γ-graduado e $\varphi : R \to R$ um gr-isomorfismo de anéis. Então φ se estende unicamente a um gr-isomorfismo de anéis $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$.*

Demonstração. Fixe $q \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))$. Então $q^{-1}R \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$, pela Proposição 2.8.26(2). Defina

$$\begin{aligned} g : \varphi(q^{-1}R) &\longrightarrow R \\ \varphi(r) &\longmapsto \varphi(qr)\,. \end{aligned}$$

Tal g é um homomorfismo de R-módulos à direita pois, para cada $r \in q^{-1}R$ e $a \in R$, temos

$$g(\varphi(r)a) = g(\varphi(r)\varphi(\varphi^{-1}(a))) = g(\varphi(r\varphi^{-1}(a))) = \varphi(qr\varphi^{-1}(a)) = \varphi(qr)a = g(\varphi(r))a\,.$$

Claramente, $\varphi(q^{-1}R) \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e $g \in \mathrm{HOM}_R(\varphi(q^{-1}R), R_R)_{\deg q}$. Pelo Corolário 3.1.13, existe $\psi(q) \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))$ tal que $g(\varphi(r)) = \psi(q)\varphi(r)$ para todo $r \in q^{-1}R$. Note que $\psi(q)$ é único pois se $q' \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é tal que $g(\varphi(r)) = q'\varphi(r)$ para todo $r \in q^{-1}R$ então $(\psi(q) - q')\varphi(q^{-1}R) = 0$ e segue da Proposição 2.8.20 que $\psi(q) - q' = 0$. Note também que se $q \in \mathrm{h}(R)$ então, para cada $r \in q^{-1}R$, temos $g(\varphi(r)) = \varphi(qr) = \varphi(q)\varphi(r)$ e segue que $\psi(q) = \varphi(q)$. Além disso, para cada $q_1, q_2 \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))$ e $r \in (q_1q_2)^{-1}R = q_2^{-1}(q_1^{-1}R)$, temos $q_2r \in q_1^{-1}R$ e, portanto,

$$\varphi(q_1q_2r) = \psi(q_1)\varphi(q_2r) = \psi(q_1)\psi(q_2)\varphi(r)\,.$$

Logo, $\psi(q_1q_2) = \psi(q_1)\psi(q_2)$, para todos $q_1, q_2 \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))$. Então, estendendo ψ aditivamente, obtemos um gr-homomorfismo de anéis $\psi : \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ tal que $\psi|_R = \varphi$. Agora, trocando φ por φ^{-1}, podemos obter um gr-homomorfismo de anéis $\psi' : \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ tal que $\psi'|_R = \varphi^{-1}$. Então $\psi \circ \psi' : \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um gr-homomorfismo de anéis cuja restrição a R é a função identidade e segue da Proposição 2.8.24 que $\psi \circ \psi' = \mathrm{id}_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)}$. Analogamente, $\psi' \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)}$. Portanto, φ se estende ao gr-isomorfismo de anéis $\psi : \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$.

A extensão ψ é única pois se $\psi_1 : \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um gr-homomorfismo de anéis tal que $\psi_1|_R = \varphi$ então $\Psi := \psi_1 \circ \psi^{-1} : \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um gr-homomorfismo de anéis cuja restrição a R é a função identidade e segue novamente da Proposição 2.8.24 que $\Psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)}$, ou seja, $\psi_1 = \psi$. ∎

O próximo resultado segue imediatamente do Corolário 2.8.23.

Proposição 3.1.21. *Se R é um anel Γ-graduado gr-simples (resp. gr-primo, gr-semiprimo) então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ também é.* ∎

Nosso próximo Teorema, inspirado em (Beidar *et al.*, 1996, Proposition 2.1.10), dirá que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é também o anel de quocientes à direita graduado maximal dos anéis graduados "suficientemente próximos" de R e, em particular, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(\cdot)$ é uma operação de fecho. A prova do Lema a seguir é baseada na de (Beidar *et al.*, 1996, Lemma 2.1.9).

Lema 3.1.22. *Sejam R um anel Γ-graduado, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$, Q um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R e S um subanel graduado de Q tal que $D \subseteq S$. Temos:*

(1) *Para cada J ideal à direita graduado de S, $J \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(S) \iff (J \cap R)D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$.*

(2) *Se $I, D' \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e $D' \subseteq S$ então $(I \cap D')S \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(S)$.*

(3) *Se J é ideal à direita graduado de S, $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}_S(J, S)_\gamma$ então $g|_{(J\cap R)D} \in \mathrm{HOM}_R((J \cap R)D, Q)_\gamma$.*

Demonstração. (1) ($\Longrightarrow$): Suponha que $J \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(S)$. Sejam $x, y \in \mathrm{h}(R)$, $x \neq 0$. Pelo Lema 2.8.4, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $xr, yr \in D$. Como $D \subseteq S$ e $J_S \leq_{\text{gr-den}} S_S$, existe $s \in \mathrm{h}(S)$ tal que $xrs \neq 0$ e $yrs \in J$. Pela Proposição 2.8.26(2), $s \in \mathrm{h}(Q)$ implica que $s^{-1}R \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Como $0 \neq xrs \in \mathrm{h}(Q)$ e $D \cap s^{-1}R \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$, segue da Proposição 2.8.20 que existe $r' \in \mathrm{h}(D \cap s^{-1}R)$ tal que $xrsr' \neq 0$. Note que $r' \in D$ e $sr' \in R$. Logo, $yrsr' \in JD \cap DR \subseteq J \cap R$ e $(xr)(sr') \in DR \subseteq D$. Como $0 \neq xrsr' \in R$, segue da Proposição 2.8.18(2) que existe $d \in \mathrm{h}(D)$ tal que $xrsr'd \neq 0$. Então $r(sr')d \in \mathrm{h}(R)$ é tal que $xrsr'd \neq 0$ e $yrsr'd \in (J \cap R)D$. Logo, $(J \cap R)D$ é um ideal à direita gr-denso de R.

($\Longleftarrow$): Suponha agora que $(J \cap R)D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Sejam $x, y \in \mathrm{h}(S)$, $x \neq 0$. Pela Proposição 2.8.26(2), $x^{-1}R, y^{-1}R \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Como $0 \neq x \in \mathrm{h}(Q)$ e $D \cap x^{-1}R \cap y^{-1}R \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$, segue da Proposição 2.8.20 que existe $r \in \mathrm{h}(D \cap x^{-1}R \cap y^{-1}R)$ tal que $xr \neq 0$. Note que $r \in D$ e $xr, yr \in R$. De $(J \cap R)D \leq_{\text{gr-den}} R_R$ obtemos $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xrr' \neq 0$ e $yrr' \in (J \cap R)D$. Então $rr' \in \mathrm{h}(D) \subseteq \mathrm{h}(S)$ é tal que $xrr' \neq 0$ e $yrr' \in (J \cap R)D \subseteq JS = J$. Logo, $J_S \leq_{\text{gr-den}} S_S$.

(2) Sejam $I, D' \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ com $D' \subseteq S$. Então $J := (I \cap D')S$ é um ideal à direita graduado de S. Além disso,

$$(J \cap R)D \supseteq ((I \cap D')D \cap R)D = (I \cap D')D^2 \,.$$

Pela Proposição 2.8.18(3), temos $(I \cap D')D^2 \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e segue que $(J \cap R)D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Por (1), $J \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(S)$.

(3) Sejam J ideal à direita graduado de S e $g \in \mathrm{HOM}_S(J, S)_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$). Fixe $x \in \mathrm{h}((J \cap R)D)$ e $r \in \mathrm{h}(R)$. Pelas Proposições 2.8.26(2) e 2.8.11(1), $D \cap r^{-1}D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Para cada $s \in D \cap r^{-1}D$, temos $s \in D \subseteq S$, $rs \in D \subseteq S$ e, portanto,

$$(g(xr) - g(x)r)s = g(xr)s - g(x)rs = g(xrs) - g(xrs) = 0 \,.$$

Como $g(xr) - g(x)r \in S \subseteq Q$ e $(g(xr) - g(x)r)(D \cap r^{-1}D) = 0$, segue da Proposição 2.8.20 que $g(xr) = g(x)r$. ∎

Teorema 3.1.23. *Sejam R um anel Γ-graduado, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e S um subanel graduado de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ tal que $D \subseteq S$. Então*

(1) $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(S) \cong_{\mathrm{gr}} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ *sobre S.*

(2) $S = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \iff \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(S) = S$.

(3) $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$.

Demonstração. (1) Vejamos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ e S satisfazem $(i)-(iv)$ no Teorema 3.1.12. O item (i) está na hipótese. Agora seja $q \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))$. Pela Proposição 2.8.26(2), $I := q^{-1}D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e, pelo Lema 3.1.22(2), $(I \cap D)S \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(S)$. Como $q(I \cap D)S \subseteq qIS \subseteq DS \subseteq S$, obtemos (ii). Verifiquemos (iii). Suponha que $q \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))$ e $J \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(S)$ são tais que $qJ = 0$. Pelo Lema 3.1.22(1), $(J \cap R)D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Como $q(J \cap R)D \subseteq qJD = 0$, segue da Proposição 2.8.20 que $q = 0$. Para verificarmos (iv), sejam $J \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(S)$, $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}(J_S, S_S)_\gamma$. Pelo Lema 3.1.22, $I := (J \cap R)D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e $h := g|_I \in \mathrm{HOM}_R(I, \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))_\gamma$. Pela Proposição 2.8.27(2), $h^{-1}(R) \leq_{\text{gr-den}} I_R$ e segue da Proposição 2.8.11(2) que $h^{-1}(R) \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Pelo Corolário 3.1.13, como $h|_{h^{-1}(R)} \in \mathrm{HOM}_R(h^{-1}(R), R_R)_\gamma$, existe $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_\gamma$ tal que $h(x) = qx$ para todo $x \in h^{-1}(R)$. Fixe $y \in \mathrm{h}(J)$. Como $J \subseteq S \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$, segue da Proposição 2.8.26(2) que $y^{-1}(h^{-1}(R)) \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e, portanto, $U := D \cap y^{-1}(h^{-1}(R)) \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Para cada $u \in U$, temos $u \in D \subseteq S$, $yu \in h^{-1}(R)$ e

$$g(y)u = g(yu) = h(yu) = qyu\,.$$

Logo, $(g(y) - qy)U = 0$ e segue da Proposição 2.8.20 que $g(y) = qy$, terminando a verificação de (iv).

(2) Por (1), $S = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ se, e somente se, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(S) \cong_{\mathrm{gr}} S$ sobre S. Mas como $S \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(S)$, temos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(S) \cong_{\mathrm{gr}} S$ sobre S se, e somente se, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(S) = S$.

(3) Segue imediatamente de (2). ■

O próximo resultado traz algumas propriedades de anéis graduados situados entre R e $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$. A prova é baseada nas de (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Proposition 39(11, 12) (p. 553)) e (Lam, 1999, Proposition 13.31).

Proposição 3.1.24. *Sejam R um anel Γ-graduado, $I := \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$, $H := \mathrm{END}_R(I)$ e S um subanel graduado de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ contendo R. Então*

(1) *S é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R.*

(2) $\mathrm{HOM}_R(M, I) = \mathrm{HOM}_S(M, I)$ *para todo S-módulo à direita Γ-graduado M.*

(3) $\mathrm{END}(I_S) = H$ *e* $\mathrm{END}(S_R) \cong_{\mathrm{gr}} S$.

(4) *I_S é a envolvente gr-injetiva de S_S.*

Demonstração. (1) Como $R_R \leq_{\mathrm{gr}} S_R \leq_{\mathrm{gr}} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_R$, segue da Proposição 2.8.11(2) que $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$.

(2) Seja M um S-módulo à direita Γ-graduado. Claramente $\mathrm{HOM}_S(M,I) \subseteq \mathrm{HOM}_R(M,I)$. Seja $g \in \mathrm{h}(\mathrm{HOM}_R(M,I))$. Fixados $m \in \mathrm{h}(M)$ e $s \in S$, defina

$$\begin{aligned} h : S &\longrightarrow I \\ x &\longmapsto g(mx) - g(m)x\,. \end{aligned}$$

Claramente $h \in \mathrm{HOM}_R(S,I)_{(\deg g)(\deg m)}$. Como I_R é gr-injetivo, h se estende a um $h' \in H_{(\deg g)(\deg m)}$. Então $s \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ e $h'(R) = h(R) = 0$ implicam que $h'(s) = 0$ e, portanto, $0 = h'(s) = h(s) = g(ms) - g(m)s$. Como $m \in \mathrm{h}(M)$ e $s \in S$ foram arbitrários, segue que $g \in \mathrm{HOM}_S(M,I)$.

(3) Por (2),

$$\mathrm{HOM}_S(I,I) = \mathrm{HOM}_R(I,I) = H \quad \text{e} \quad \mathrm{HOM}_R(S,S) = \mathrm{HOM}_S(S,S) \cong_{\mathrm{gr}} S\,.$$

(4) $S_S \leq_{\text{gr-ess}} I_S$, pois se $0 \neq x \in \mathrm{h}(I)$ então $R_R \leq_{\text{gr-ess}} I_R$ implica que existe $r \in \mathrm{h}(R) \subseteq \mathrm{h}(S)$ tal que $0 \neq xr \in R \subseteq S$. Resta verificarmos que I_S é gr-injetivo. Para isso, vamos usar o Critério de Baer graduado (Teorema 2.5.6). Sejam U um ideal à direita graduado de S e $g \in \mathrm{HOM}_S(U,I)$. Como $g \in \mathrm{HOM}_R(U,I)$ e I_R é gr-injetivo, g se estende a um $g' \in \mathrm{HOM}_R(S,I)$. Por (2), temos $g' \in \mathrm{HOM}_S(S,I)$. ■

A Proposição 3.1.24 também nos ajuda a caracterizar quando $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$, através da seguinte generalização de (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Proposition 39(14) (p. 553)) e (Lam, 1999, Corollary 13.32).

Proposição 3.1.25. *Sejam R um anel Γ-graduado, $I := \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$, $H := \mathrm{END}_R(I)$ e $Q := \mathrm{END}({}_H I)$. São equivalentes:*

(1) $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = I$.

(2) $R_R \leq_{\text{gr-den}} I_R$.

(3) *Temos um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados $\phi : H \to Q$ tal que $\sum_{e\in\Gamma_0} 1_e\phi(h) = \sum_{e\in\Gamma_0} h1_e$ para todo $h \in H$.*

(4) *Temos o seguinte gr-isomorfismo de H-módulos à esquerda Γ-graduados*

$$\begin{aligned} \varphi : H &\longrightarrow I \\ h &\longmapsto \sum_{e\in\Gamma_0} h1_e\,. \end{aligned}$$

(5) *Temos o seguinte gr-isomorfismo de R-módulos à direita Γ-graduados*

$$\begin{aligned} Q &\longrightarrow I \\ q &\longmapsto \sum_{e\in\Gamma_0} 1_e q\,. \end{aligned}$$

(6) $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_R$ *é gr-injetivo.*

(7) *Temos o seguinte gr-isomorfismo de Q-módulos à direita Γ-graduados*

$$\begin{aligned} Q &\longrightarrow I \\ q &\longmapsto \sum_{e\in\Gamma_0} 1_e q\,. \end{aligned}$$

(8) $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)}$ *é gr-injetivo.*

Demonstração. (1) $\iff$ (2): Segue diretamente da Proposição 2.9.3.

(3) $\implies$ (5): Pela Proposição 3.1.1(3), para provar (5) basta mostrar que todo elemento de I é da forma $\sum_{e\in\Gamma_0} 1_e q$ para algum $q \in Q$. Seja $x \in I$. Pela Proposição 3.1.1(2), existe $h \in H$ tal que $x = \sum_{e\in\Gamma_0} h1_e$. Então, se vale (3), temos $x = \sum_{e\in\Gamma_0} 1_e\phi(h)$.

(4) $\iff$ (5): Temos as seguintes equivalências

$$\begin{aligned} (4) &\overset{(*)}{\iff} \varphi \text{ é injetor} \\ &\iff \forall h \in H, \left(\sum_{e\in\Gamma_0} h1_e = 0 \implies h = 0\right) \\ &\iff \forall h \in H, \left(h(R) = 0 \implies h(I) = 0\right) \\ &\iff \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R) = I \\ &\overset{(**)}{\iff} (5)\,, \end{aligned}$$

onde $(*)$ e $(**)$ seguem, respectivamente, dos itens (2) e (3) da Proposição 3.1.1.

$(4) + (5) \implies (3)$: Suponha que (4) e (5) valem. Compondo o gr-isomorfismo de (4) com o inverso do gr-isomorfismo de (5) obtemos um gr-isomorfismo de grupos aditivos Γ-graduados $\phi : H \to Q$ que a cada $h \in H$ associa o (único) $\phi(h) \in Q$ tal que $\sum_{e\in\Gamma_0} h1_e = \sum_{e\in\Gamma_0} 1_e\phi(h)$. Resta vermos que ϕ respeita produtos e unidades. Sejam $h, h' \in H$. Então

$$\sum_{e\in\Gamma_0} 1_e\phi(hh') = \sum_{e\in\Gamma_0} hh'1_e = h\sum_{e\in\Gamma_0} h'1_e = \sum_{e\in\Gamma_0} h1_e\phi(h') = \sum_{e\in\Gamma_0} 1_e\phi(h)\phi(h')$$

e segue de (5) que $\phi(hh') = \phi(h)\phi(h')$. Agora, para cada $f \in \Gamma_0$, denote por $\mathbb{1}^H_f$ e $\mathbb{1}^Q_f$ as unidades de H_f e Q_f, respectivamente. Então

$$\sum_{e\in\Gamma_0} 1_e\phi(\mathbb{1}^H_f) = \sum_{e\in\Gamma_0} \mathbb{1}^H_f 1_e = 1_f = \sum_{e\in\Gamma_0} 1_e\mathbb{1}^Q_f$$

e segue de (5) que $\phi(\mathbb{1}^H_f) = \mathbb{1}^Q_f$.

(1) $\implies$ (6): É imediato.

(6) $\implies$ (5): Se vale (6) então, pelo Teorema 2.7.4 (minimalidade de I), temos $\tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R) = I$ e assim obtemos (5) pela Proposição 3.1.1(3).

(5) $\iff$ (7): É claro.

(7) $\implies$ (8): Segue do fato que, identificando Q com $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ (Proposição 3.1.1(3)), I_Q é gr-injetivo pela Proposição 3.1.24(4).

(8) $\implies$ (1): Se $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)}$ é gr-injetivo então, pela Proposição 3.1.24(4), $I_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)} = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)}) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$. ∎

Como vimos na Proposição 3.1.25, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ se, e somente se, o φ do item (4) é um gr-isomorfismo de H-módulos à esquerda (pela Proposição 3.1.1(2) isto equivale a φ ser injetor). Nem sempre temos $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$, mas sempre podemos ver $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ como um subquociente de H, conforme o resultado a seguir, inspirado em (Lam, 1999, Proposition 13.34).

Proposição 3.1.26. *Sejam R, I, H e φ como na Proposição 3.1.25. Considere o subanel graduado $T := \{h \in H : (\ker\varphi)\cdot h \subseteq \ker\varphi\}$ de H. Então* $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \cong_{\mathrm{gr}} \dfrac{T}{\ker\varphi}$.

Demonstração. Note que, para cada $h \in H$, temos

$$h(R) = 0 \iff \sum_{e\in\Gamma_0} h1_e = 0 \iff h \in \ker\varphi\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) &= \tilde{\mathrm{E}}^{\mathrm{gr}}(R_R)\\ &= \{x \in I : \forall h \in \mathrm{h}(H),\, h(R) = 0 \implies h(x) = 0\}\\ &= \{x \in I : \forall h \in \mathrm{h}(H),\, h \in \ker\varphi \implies h(x) = 0\}\\ &= \{x \in I : (\ker\varphi)\cdot x = 0\}\,.\end{aligned}$$

Portanto, para cada $h \in H$,

$$\begin{aligned}\varphi(h) \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) &\iff (\ker\varphi)\varphi(h) = 0\\ &\iff \varphi((\ker\varphi)h) = 0\\ &\iff (\ker\varphi)h \subseteq \ker\varphi\\ &\iff h \in T\,.\end{aligned}$$

Temos então um gr-homomorfismo sobrejetor (Proposição 3.1.1(2)) de grupos aditivos Γ-graduados $\varphi|_T : T \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$. Agora, basta mostrarmos que $\varphi|_T$ é um gr-homomorfismo de anéis e para isto só precisamos verificar que $\varphi|_T$ respeita produtos. Sejam $h', h \in T$ e $q := \varphi(h) \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$. Então

$$\varphi(h')\varphi(h) = \left(\sum_{e\in\Gamma_0} h'1_e\right) q = h'\left(\sum_{e\in\Gamma_0} 1_e q\right) = h'q = \left(\sum_{e\in\Gamma_0} h'h1_e\right) = \varphi(h'h)\,. \qquad \blacksquare$$

3.1.1 O anel de quocientes graduado maximal de anéis graduados obtidos a partir de outros

Nesta subseção, estudamos o anel de quocientes à direita graduado maximal do produto direto graduado de anéis graduados, dos anéis de matrizes e dos aneís de grupoide, além de resultados sobre fidelidade em componentes homogêneas.

Começamos com o produto direto graduado. No próximo Teorema, temos uma versão graduada por grupoide de (Utumi, 1956, (2.1)).

Lema 3.1.27. *Seja $\{R_j : j \in J\}$ uma família de anéis graduados e considere $R := \prod_{j\in J}^{gr} R_j$. Temos que:*

(1) *Se $D \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ então, para cada $j \in J$, $\pi_j(D) \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R_j)$ onde $\pi : R \to R_j$ é a projeção canônica.*

(2) *Se, para cada $j \in J$, S_j é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R_j, então $\prod_{j\in J}^{gr} S_j$ é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R.*

Demonstração. Para cada $k \in J$, seja $\iota_k : R_k \to R$ a inclusão canônica.

(1) Seja $D \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e fixe $k \in J$. Claramente $\pi_k(D)$ é um ideal à direita graduado de R_k. Sejam $x_k, y_k \in \mathrm{h}(R_k)$, $x_k \neq 0$. Então existe $r = (r_j)_{j\in J} \in \mathrm{h}(R)$ tal que $\iota_k(x_k)r \neq 0$ e $\iota_k(y_k)r \in D$. Como $\iota_k(x_k)r = \iota_k(x_k r_k)$ e $\iota_k(y_k)r = \iota_k(y_k r_k)$, segue que $r_k \in \mathrm{h}(R_k)$ é tal que $x_k r_k \neq 0$ e $y_k r_k = \pi_k(\iota_k(y_k)r) \in \pi_k(D)$. Logo $\pi_k(D)$ é gr-denso em R_k.

(2) Para cada $j \in J$, seja S_j um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R_j e consideremos $S := \prod_{j\in J}^{gr} S_j$. Então R é um subanel graduado de S. Vejamos que $R_R \leq_{\text{gr-den}} S_R$. Sejam $x = (x_j)_{j\in J}, y = (y_j)_{j\in J} \in \mathrm{h}(S)$ com $x \neq 0$. Tome $k \in J$ tal que $x_k \neq 0$. Então existe $r_k \in \mathrm{h}(R_k)$ tal que $x_k r_k \neq 0$ e $y_k r_k \in R_k$. Logo, $r := \iota_k(r_k) \in \mathrm{h}(R)$ é tal que $xr = \iota_k(x_k r_k) \neq 0$ e $yr = \iota_k(y_k r_k) \in R$. ■

Teorema 3.1.28. *Seja $\{R_j : j \in J\}$ uma família de anéis Γ-graduados. Então*

$$\mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}\left(\prod_{j\in J}^{gr} R_j\right) = \prod_{j\in J}^{gr} \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}(R_j)\,.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.1.27(2) temos que $Q := \prod_{j\in J}^{gr} \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}(R_j)$ é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de $R := \prod_{j\in J}^{gr} R_j$. Pelo Corolário 3.1.13, basta mostrarmos que Q cumpre a condição (iv) do Teorema 3.1.12. Para isso, sejam $\gamma \in \Gamma$, $D \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e $g \in \mathrm{HOM}(D_R, R_R)_\gamma$. Para cada $k \in J$, sejam $\pi_k : R \to R_k$ a projeção canônica e $\iota_k : R_k \to R$ a inclusão canônica. Note que $\iota_k \pi_k(D) \subseteq D$, pois se $\alpha \in \Gamma$ e

$x \in D_\alpha$ então $\iota_k\pi_k(x) = x\iota_k(1^{R_k}_{d(\alpha)}) \in D$. Então é fácil ver que

$$\pi_k \circ g \circ \iota_k|_{\pi_k(D)} \in \mathrm{HOM}_{R_k}(\pi_k(D), R_k)_\gamma\,.$$

Além disso,

$$\pi_l \circ g \circ \iota_k|_{\pi_k(D)} = 0$$

se $k \neq l$. De fato, se $k, l \in J$ são distintos, $\alpha \in \Gamma$ e $x \in D_\alpha$, temos

$$\begin{aligned}\pi_l g\iota_k(\pi_k(x)) &= \pi_l g(\iota_k\pi_k(x)\iota_k\pi_k(1_{d(\alpha)}))\\ &= \pi_l(g(\iota_k\pi_k(x))\iota_k\pi_k(1_{d(\alpha)}))\\ &= \pi_l g(\iota_k\pi_k(x))\pi_l\iota_k\pi_k(1_{d(\alpha)})\\ &= 0\,,\end{aligned}$$

pois $\pi_l\iota_k = 0$. Pelo Lema 3.1.27(1) e o Corolário 3.1.13, para cada $k \in J$, existe $q_k \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R_k)_\gamma$ tal que $\pi_k \circ g \circ \iota_k(d_k) = q_k d_k$ para todo $d_k \in \pi_k(D)$. Então $q := (q_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R_j)_\gamma = Q_\gamma$ é tal que, para todo $d \in D$, temos

$$g(d) = \sum_{k,l\in J} \iota_l\pi_l g\iota_k\pi_k(d) = \sum_{k\in J} \iota_k\pi_k g\iota_k\pi_k(d) = \sum_{k\in J} \iota_k(q_k\pi_k(d)) = \sum_{k\in J} \iota_k\pi_k(qd) = qd\,,$$

como queríamos. ■

O Lema a seguir simplifica a prova do próximo Teorema, que generaliza (Utumi, 1956, (2.3)).

Lema 3.1.29. *Seja R um anel Γ-graduado e $\overline{\Sigma} = (\Sigma_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\Gamma)^I$ uma sequência totalmente matricial para R. Temos que:*

(1) *Se $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}\left(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})\right)$ então, para cada $i \in I$, $D_i := \{a \in R : aE_{ii} \in D\}$ é um ideal à direita gr-denso de R e $\{(a_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_I(R) : \forall i \in I,\, a_{ij}E_{ii} \in D\}$ é um ideal à direira gr-denso de $\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})$ contido em D.*

(2) *Se S é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R então $\overline{\Sigma}$ é sequência totalmente matricial para S e $\mathrm{M}_I(S)(\overline{\Sigma})$ é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de $\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})$.*

Demonstração. (1) Seja $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}\left(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})\right)$ e fixe $i \in I$. É claro que D_i é um ideal à direita de R. D_i também é graduado, pois se $a \in D_i$ então, para cada $\gamma \in \mathrm{supp}(a)$, tomando $\sigma_i, \tau_i \in \Sigma_i$ tais que $r(\sigma_i) = r(\gamma)$ e $r(\tau_i) = d(\gamma)$, temos que $a_\gamma E_{ii} = (aE_{ii})_{\sigma_i^{-1}\gamma\tau_i} \in D$ e, portanto, $a_\gamma \in D_i$. Para vermos que $D_i \leq_{\text{gr-den}} R_R$, sejam $x, y \in \mathrm{h}(R)$ com $x \neq 0$. Então existe $(r_{ij})_{ij} \in \mathrm{h}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$ tal que $(xE_{ii}) \cdot (r_{ij})_{ij} \neq 0$ e $(yE_{ii}) \cdot (r_{ij})_{ij} \in D$. Tome $k \in I$ tal que $xr_{ik} \neq 0$ e seja $e := d(\deg r_{ik})$. Como $(yr_{ik})E_{ii} = (yE_{ii}) \cdot (r_{ij})_{ij} \cdot E^e_{ki} \in D$, segue que $yr_{ik} \in D_i$. Portanto, $D_i \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$.

Agora seja $\tilde{D} := \{(a_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_I(R) : \forall i \in I,\, a_{ij} \in D_i\}$ e vejamos que $\tilde{D} \subseteq D$ e $\tilde{D} \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$. Claramente, $\tilde{D}$ é um ideal à direita graduado de $\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})$. $\tilde{D} \subseteq D$, pois se $(a_{ij})_{ij} \in \mathrm{h}(\tilde{D})$ então, para cada $i, j \in I$, tomando $e := d(\deg a_{ij})$, temos $a_{ij}E_{ij} = (a_{ij}E_{ii}) \cdot E^e_{ij} \in D$. Para vermos que $\tilde{D}$ é gr-denso em $\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})$, sejam $(x_{ij})_{ij}, (y_{ij})_{ij} \in \mathrm{h}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$ com $(x_{ij})_{ij} \neq 0$. Sejam $i, j \in I$ tais que $x_{ij} \neq 0$ e considere o conjunto finito $\tilde{I} := \{k \in I : y_{kj} \neq 0\}$. Como $\bigcap_{k \in \tilde{I}} D_k \leq_{\text{gr-den}} R_R$, segue do Lema 2.8.4 que existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $x_{ij}r \neq 0$ e $y_{lj}r \in \bigcap_{k \in \tilde{I}} D_k$ para todo $l \in I$. Em particular, $y_{kj}r \in D_k$ para todo $k \in I$. Logo, $rE_{jj} \in \mathrm{h}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$ é tal que $(x_{ij})_{ij} \cdot (rE_{jj}) \neq 0$ e $(y_{ij})_{ij} \cdot (rE_{jj}) \in \tilde{D}$.

(2) Seja S é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R. Pelo Corolário 2.6.4, temos que $\Gamma'_0(R) = \Gamma'_0(S)$ e, portanto, $\overline{\Sigma}$ é sequência totalmente matricial para S. Vejamos que $\mathrm{M}_I(S)(\overline{\Sigma})$ é um anel de quocientes à direita graduado de $\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})$. Sejam $(x_{ij})_{ij}, (y_{ij})_{ij} \in \mathrm{h}(\mathrm{M}_I(S)(\overline{\Sigma}))$ com $(x_{ij})_{ij} \neq 0$. Tome $i, j \in I$ tais que $x_{ij} \neq 0$. Como $(y_{kj})_{k \in I}$ é uma sequência quase nula, segue do Lema 2.8.4 que existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $x_{ij}r \neq 0$ e $y_{kj}r \in R$ para todo $k \in I$. Então $rE_{jj} \in \mathrm{h}(M_I(R)(\overline{\Sigma}))$ é tal que $(x_{ij})_{ij} \cdot (rE_{jj}) \neq 0$ e $(y_{ij})_{ij} \cdot (rE_{jj}) \in \mathrm{M}_I(R)$. ■

Teorema 3.1.30. *Seja R um anel Γ-graduado e $\overline{\Sigma} = (\Sigma_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(\Gamma)^I$ uma sequência totalmente matricial para R. Então $\overline{\Sigma}$ é sequência totalmente matricial para $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ e*

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}\left(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})\right) = \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))(\overline{\Sigma})\,.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.1.29(2), temos que $\mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))(\overline{\Sigma})$ é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de $\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})$. Então, pelo Corolário 3.1.13, basta mostrarmos que $\mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))(\overline{\Sigma})$ satisfaz a condição (iv) do Teorema 3.1.12. Para isso, sejam $\gamma \in \Gamma$, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$ e $g \in \mathrm{HOM}_{\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})}(D, \mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))_\gamma$. Para cada $i \in I$, seja $D_i := \{a \in R : aE_{ii} \in D\}$ (que é um ideal à direita gr-denso de R, pelo Lema 3.1.29(1)). Para cada $i \in I$ e $d_i \in D_i$, como $g(d_iE_{ii}) = \sum_{e \in \Gamma_0} g(d_iE_{ii}) \cdot E^e_{ii}$, escreva

$$g(d_iE_{ii}) = \sum_{k \in I} g_{ki}(d_i)E_{ki}\,.$$

É fácil ver que isto define, para cada $k \in I$, um homomorfismo de R-módulos à direita $g_{ki} : D_i \to R$. Além disso, para cada $\alpha \in \Gamma$, $d_i \in (D_i)_\alpha$ e $\tau_i, \rho_i \in \Sigma_i$ tais que $r(\tau_i) = r(\alpha)$ e $r(\rho_i) = d(\alpha)$, temos

$$d_iE_{ii} \in D_{\tau_i^{-1}\alpha\rho_i} \implies g(d_iE_{ii}) \in \mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})_{\gamma\tau_i^{-1}\alpha\rho_i} \implies g_{ki}(d_i) \in R_{\sigma_k\gamma\tau_i^{-1}\alpha\rho_i\rho_i^{-1}},$$

onde $\sigma_k \in \Sigma_k$ é tal que $d(\sigma_k) = r(\gamma)$. Logo, $g_{ki} \in \mathrm{HOM}_R(D_i, R)_{\sigma_k\gamma\tau_i^{-1}}$ e segue do Corolário 3.1.13 que existe $q_{ki} \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_{\sigma_k\gamma\tau_i^{-1}}$ tal que $g_{ki}(d_i) = q_{ki}d_i$ para todo $d_i \in D_i$. Note que

$$q_{ki} \neq 0 \implies d(\gamma) = d(\tau_i) \implies q_{ki} \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_{\Sigma_k\gamma\Sigma_i^{-1}}\,.$$

Podemos então considerar a matriz $(q_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})_\gamma$. Então, para cada matriz $(a_{ij})_{ij} \in \tilde{D} := \{(a_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_I(R) : \forall i \in I,\, a_{ij} \in D_i\}$, temos

$$
\begin{aligned}
g((a_{ij})_{ij}) &= g\left(\sum_{i,j\in I} a_{ij}E_{ij}\right)\\
&= \sum_{i,j\in I} g(a_{ij}E_{ij})\\
&= \sum_{e\in\Gamma_0}\sum_{i,j\in I} g(a_{ij}E_{ii})\cdot E^e_{ij}\\
&= \sum_{e\in\Gamma_0}\sum_{i,j,k\in I} g_{ki}(a_{ij})E_{ki}\cdot E^e_{ij}\\
&= \sum_{i,j,k\in I} q_{ki}a_{ij}E_{kj}\\
&= \sum_{k,j\in I}\left(\sum_{i\in I} q_{ki}a_{ij}E_{kj}\right)\\
&= (q_{ij})_{ij}\cdot(a_{ij})_{ij}\,.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 3.1.29(1), $\tilde{D}\subseteq D$ e $\tilde{D}\in\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$. Então, pela Proposição 2.8.27(1), temos $g((a_{ij})_{ij})=(q_{ij})_{ij}\cdot(a_{ij})_{ij}$ para toda $(a_{ij})_{ij}\in D$, como queríamos. ■

Lembre que se A é um anel com unidade então $\mathrm{M}_I(A)$ denota a $I\times I$-graduação natural no anel $\mathrm{M}_I(A)$ e $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{max}}(A)$ é o anel de quocientes à direita maximal de A.

Corolário 3.1.31. *Se A é anel com unidade então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(\mathrm{M}_I(A))=\mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{max}}(A))$.*

Demonstração. Seja A um anel com unidade e considere A como um anel $I\times I$-graduado via $A=A_{(i_0,i_0)}$ para certo $i_0\in I$ fixado. Então, denotando $\overline{\sigma}:=((i_0,i))_{i\in I}\in((i_0,i_0)I\times I)^I$, o Teorema 3.1.30 nos dá

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(\mathrm{M}_I(A))=\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(\mathrm{M}_I(A)(\overline{\sigma}))=\mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(A))(\overline{\sigma})=\mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(A))\,.$$

Mas, como A está graduado pelo grupo trivial $\{(i_0,i_0)\}$, segue que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(A)=\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{max}}(A)$. ■

O próximo Teorema relaciona o anel de quocientes à direita graduado maximal do anel de grupoide $A[\Gamma]$ com o anel de quocientes à direita maximal de A, generalizando (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Proposition 48 (p. 560)).

Lema 3.1.32. *Seja A um anel com unidade. Temos:*

(1) *Se $D\in\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(A[\Gamma])$ então, para cada $e\in\Gamma_0$, $D^e:=\{a\in A: ae\in D\}$ é um ideal à direita denso de A tal que $D(e)=D^e e\Gamma$.*

(2) *Se B é um anel de quocientes à direita de A, então $B[\Gamma]$ é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de $A[\Gamma]$.*

Demonstração. (1) Se D é um ideal à direita graduado de $A[\Gamma]$ e $e\in\Gamma_0$ então claramente $D^e:=\{a\in A: ae\in D\}$ é um ideal à direita de A. Suponha que $D\in\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(A[\Gamma])$. Sejam $x,y\in A$, $x\neq 0$. Fixado $e\in\Gamma_0$, temos $xe,ye\in\mathrm{h}(A[\Gamma])$ com

$xe \neq 0$ e, portanto, existe $t \in \mathrm{h}(A[\Gamma])$ tal que $(xe)t \neq 0$ e $(ye)t \in D$. Sejam $a \in A$ e $\sigma \in \Gamma$ tais que $t = a\sigma$. Então $(xe)(a\sigma) \neq 0$ implica que $xa \neq 0$ e $r(\sigma) = e$. Portanto,

$$(ya)\sigma = (ye)(a\sigma) \in D \implies (ya)e = (ya)\sigma\sigma^{-1} \in D \implies ya \in D^e .$$

Logo D^e é denso em A_A. Por fim, para cada $e \in \Gamma_0$ e cada sequência quase nula $(a_\sigma)_{\sigma\in e\Gamma}$ é fácil ver que $\sum_{\sigma\in e\Gamma} a_\sigma\sigma \in D(e)$ se, e somente se, $a_\sigma \in D^e$ para todo $\sigma \in e\Gamma$.

(2) Suponha que B é um anel de quocientes à direita de A. Sejam $q, q' \in \mathrm{h}(B[\Gamma])$, $q \neq 0$. Sejam $x, y \in B$ e $\gamma, \delta \in \Gamma$ tais que $q = x\gamma$ e $q' = y\delta$. Para verificar gr-densidade, podemos supor $d(\gamma) = d(\delta)$. Como $x \neq 0$ e A_A é denso em B_A, existe $a \in A$ tal que $xa \neq 0$ e $ya \in A$. Então $ad(\gamma) \in \mathrm{h}(A[\Gamma])$ é tal que $q(ad(\gamma)) = (xa)\gamma \neq 0$ e $q'(ad(\gamma)) = (ya)\delta \in A[\Gamma]$. Logo, $B[\Gamma]$ é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de $A[\Gamma]$. ∎

Teorema 3.1.33. *Se A é um anel com unidade então*

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(A[\Gamma]) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(A)[\Gamma] .$$

Demonstração. Seja A um anel com unidade. Pelo Lema 3.1.32(2) temos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(A)[\Gamma]$ é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de $A[\Gamma]$. Portanto, pelo Corolário 3.1.13, resta verificarmos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(A)[\Gamma]$ cumpre a condição (iv) do Teorema 3.1.12. Sejam então $\gamma \in \Gamma$, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(A[\Gamma])$ e $g \in \mathrm{HOM}_{A[\Gamma]}(D, A[\Gamma])_\gamma$. Considere

$$D^{d(\gamma)} := \{a \in A : ad(\gamma) \in D\} ,$$

que é um ideal à direita denso de A pelo Lema 3.1.32(1). Para cada $a \in D^{d(\gamma)}$, como $g(ad(\gamma)) \in A[\Gamma]_\gamma$, escreva $g(ad(\gamma)) = g'(a)\gamma$. É fácil ver que isto define um homomorfismo de A-módulos à direita $g' : D^{d(\gamma)} \to A$. Aplicando o Teorema 3.1.12 para Γ sendo o grupo trivial, obtemos um $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(A)$ tal que $g'(a) = qa$ para todo $a \in D^{d(\gamma)}$. Seja $x \in \mathrm{h}(D)$ e escreva $x = a\sigma$ com $a \in A$ e $\sigma \in \Gamma$. Assim, $q\gamma \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(A)[\Gamma]_\gamma$ é tal que, se $d(\gamma) \neq r(\sigma)$ então $g(x) = 0 = (q\gamma)(a\sigma) = (q\gamma)x$ e se $d(\gamma) = r(\sigma)$ então $ad(\gamma) = a\sigma\sigma^{-1} \in D$ e

$$g(x) = g(a\sigma) = g(ad(\gamma))\sigma = g'(a)\gamma\sigma = (qa)(\gamma\sigma) = (q\gamma)(a\sigma) = (q\gamma)x .$$

Logo $g(x) = (q\gamma)x$ para todo $x \in D$, como queríamos. ∎

Observação 3.1.34. O Corolário 3.1.31 pode ser obtido como consequência do Teorema 3.1.33 pois, para cada anel com unidade A, o anel de matrizes $\mathrm{M}_I(A)$ é naturalmente gr-isomorfo ao anel de grupoide $A[I \times I]$ via $aE_{ij} \mapsto a(i, j)$ para cada $a \in A$ e $i, j \in I$. ∎

Agora, usaremos fidelidade em componentes homogêneas para relacionar $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(1_eR1_e)$ e $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R_e)$ para $e \in \Gamma_0$.

O próximo Teorema generaliza (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Theorem 14 (p. 559)) e traz uma nova condição suficiente, usando somente fidelidade em componentes homogêneas, para que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_e = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R_e)$, $e \in \Gamma_0$.

Lema 3.1.35. *Sejam R um anel Γ-graduado, $e \in \Gamma_0$ tal que R é e-fiel à direita e K um ideal à direita denso de R_e. Se R é anel gr-nãosingular à direita ou R é γ-fiel à esquerda para todo $\gamma \in \operatorname{supp}(1_e R)$ então $D := KR \oplus R(\Gamma_0 \setminus \{e\}) \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$.*

Demonstração. Como K é ideal à direita essencial de R_e, segue do Corolário 2.6.13(2) que $D_R \leq_{\text{gr-ess}} R_R$.

Se R é anel gr-nãosingular à direita então o Teorema 2.10.16(2) nos dá que $D_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$.

Agora, suponha que R é γ-fiel à esquerda para todo $\gamma \in \operatorname{supp}(1_e R)$. Sejam $\sigma, \tau \in \Gamma$, $0 \neq x \in R_\sigma$ e $y \in R_\tau$. Se $r(\tau) \neq e$, $y = 0$ ou $d(\sigma) \neq d(\tau)$ então $1_{d(\sigma)} \in \mathrm{h}(R)$ é tal que $x 1_{d(\sigma)} \neq 0$ e $y 1_{d(\sigma)} \in D$. Suponha então que $0 \neq y \in R(e)$ e $d(\sigma) = d(\tau)$. Logo, $\tau \in \operatorname{supp}(1_e R)$ e $0 \neq x \in \mathrm{h}((d(\tau))R)$. Então R é τ-fiel à esquerda e existe $a \in R_{\tau\sigma^{-1}}$ tal que $0 \neq ax \in R_\tau$. Como R é e-fiel à direita, existe $b \in R_{\tau^{-1}}$ tal que $0 \neq axb \in R_e$. Agora, como $axb, yb \in R_e$, $axb \neq 0$ e K é ideal à direita denso de R_e, existe $r \in R_e$ tal que $axbr \neq 0$ e $ybr \in K$. Logo, $br \in \mathrm{h}(R)$ é tal que $xbr \neq 0$ e $ybr \in D$. Portanto, $D_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$. ∎

Teorema 3.1.36. *Sejam R um anel Γ-graduado e $e \in \Gamma_0$ tais que R é e-fiel à direita. Se R é anel gr-nãosingular à direita ou R é γ-fiel à esquerda para todo $\gamma \in \operatorname{supp}(1_e R)$ então*

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R_e) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_e\,.$$

Demonstração. Como R é e-fiel à direita, segue do Corolário 2.8.30(1) que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_e$ é um anel de quocientes à direita graduado de R_e.

Suponha que R é anel gr-nãosingular à direita ou R é γ-fiel à esquerda para todo $\gamma \in \operatorname{supp}(1_e R)$ e vejamos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_e$ e R_e satisfazem a condição (iv) do Teorema 3.1.12 (para $\Gamma = \{e\}$). Sejam K um ideal à direita denso de R_e e $g : K \to R_e$ um homomorfismo de R_e-módulos à direita. Pelo Corolário 1.8.14(1), temos que

$$\begin{aligned} \tilde{g} : KR &\longrightarrow R(e) \\ \sum_i k_i r_i &\longmapsto \sum_i g(k_i) r_i \end{aligned}$$

é um homomorfismo de R-módulos à direita de grau e. Seja $D := KR \oplus R(\Gamma_0 \setminus \{e\})$ e estenda $\tilde{g}$ a D definindo $\tilde{g}(R(\Gamma_0 \setminus \{e\})) = 0$. Pelo Lema 3.1.35, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Então, como $\tilde{g} \in \mathrm{HOM}(D_R, R_R)_e$, segue do Corolário 3.1.13 que existe $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_e$ tal que $\tilde{g}(d) = qd$ para todo $d \in D$. Em particular, $g(k) = \tilde{g}(k) = qk$ para todo $k \in K$.

Segue do Corolário 3.1.13 (para $\Gamma = \{e\}$) que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R_e) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_e$. ∎

A hipótese de e-fidelidade à direita no Teorema 3.1.36 não pode ser omitida conforme (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Example 10 (p. 560)).

Nosso próximo Teorema relacionará $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ e $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(1_{\Delta_0} R 1_{\Delta_0})$ quando temos Δ_0-fidelidade, $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$.

Lema 3.1.37. *Sejam R um anel Γ-graduado, $e \in \Gamma_0$ tal que $R(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel e K um ideal à direita gr-denso de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$. Se R é anel gr-nãosingular à direita ou $(e')R$ é Δ_0-fiel para todo $e' \in \Gamma_0$ satisfazendo $1_{\Delta_0}R1_{e'} \neq 0$ então $D := KR \oplus R(\Gamma_0 \setminus \Delta_0) \in \mathcal{D}^{\text{gr}}_{\text{d}}(R)$.*

Demonstração. Como K é ideal à direita gr-essencial de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$, segue do Corolário 2.6.15(2) que $D_R \leq_{\text{gr-ess}} R_R$.

Se R é um anel gr-nãosingular à direita então o Teorema 2.10.16(2) nos dá $D_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$.

Agora, suponha que $(e')R$ é Δ_0-fiel para todo $e' \in \Gamma_0$ tal que $\bigoplus\limits_{e \in \Delta_0} 1_e R 1_{e'} \neq 0$. Sejam $\sigma, \tau \in \Gamma$, $0 \neq x \in R_\sigma$ e $y \in R_\tau$. Se $r(\tau) \notin \Delta_0$, $y = 0$ ou $d(\sigma) \neq d(\tau)$ então $1_{d(\sigma)} \in \text{h}(R)$ é tal que $x1_{d(\sigma)} \neq 0$ e $y1_{d(\sigma)} \in D$. Suponha então que $0 \neq y \in R(\Delta_0)$ e $d(\sigma) = d(\tau)$. Logo, $1_{\Delta_0}R1_{d(\tau)} \neq 0$ e $0 \neq x \in \text{h}((d(\tau))R)$. Portanto, $(d(\tau))R$ é Δ_0-fiel e existe $a \in \text{h}(R)$ tal que $0 \neq ax \in 1_{\Delta_0}R1_{d(\tau)}$. Como $R(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel, existe $b \in \text{h}(R)$ tal que $0 \neq axb \in 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$. Agora, como K é ideal à direita gr-denso de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$, $axb, yb \in \text{h}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$ e $axb \neq 0$, segue que existe $r \in \text{h}(R)$ tal que $axbr \neq 0$ e $ybr \in K$. Logo, $br \in \text{h}(R)$ é tal que $xbr \neq 0$ e $ybr \in D$. Portanto, $D_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$. ∎

Teorema 3.1.38. *Sejam R um anel Γ-graduado e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$ tais que $R(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel. Se R é anel gr-nãosingular à direita ou $(e')R$ é Δ_0-fiel para todo $e' \in \Gamma_0$ satisfazendo $1_{\Delta_0}R1_{e'} \neq 0$ então*

$$\mathrm{Q}^{\text{d}}_{\text{gr-max}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}) = 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\text{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_{\Delta_0}\,.$$

Demonstração. Como $R(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel, segue do Corolário 2.8.30(2) que $1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\text{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_{\Delta_0}$ é um anel de quocientes à direita graduado de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$.

Suponha que R é anel gr-nãosingular à direita ou $(e')R$ é Δ_0-fiel para todo $e' \in \Gamma_0$ satisfazendo $1_{\Delta_0}R1_{e'} \neq 0$ e vejamos que $1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\text{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_{\Delta_0}$ e $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ satisfazem a condição (iv) do Teorema 3.1.12. Sejam $K \in \mathcal{D}^{\text{gr}}_{\text{d}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$ e $g : K \to 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ um homomorfismo de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$-módulos à direita de grau $\sigma \in \Gamma$ com $r(\sigma), d(\sigma) \in \Delta_0$. Pelo Corolário 1.8.14(2), temos que

$$\begin{aligned} \tilde{g} : KR &\longrightarrow R(\Delta_0) \\ \sum_i k_i r_i &\longmapsto \sum_i g(k_i) r_i \end{aligned}$$

é um homomorfismo de R-módulos à direita de grau σ. Seja $D := KR \oplus R(\Gamma_0 \setminus \Delta_0)$ e estenda $\tilde{g}$ a D definindo $\tilde{g}(R(\Gamma_0 \setminus \Delta_0)) = 0$. Pelo Lema 3.1.37, $D \in \mathcal{D}^{\text{gr}}_{\text{d}}(R)$. Então, como $\tilde{g} \in \text{HOM}(D_R, R_R)_\sigma$, segue do Corolário 3.1.13 que existe $q \in \mathrm{Q}^{\text{d}}_{\text{gr-max}}(R)_\sigma$ tal que $\tilde{g}(d) = qd$ para todo $d \in D$. Em particular, $g(k) = \tilde{g}(k) = qk$ para todo $k \in K$.

Pelo Corolário 3.1.13, temos $\mathrm{Q}^{\text{d}}_{\text{gr-max}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}) = 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\text{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_{\Delta_0}$. ∎

Corolário 3.1.39. *Sejam R um anel Γ-graduado e $e \in \Gamma_0$ tais que $R(e)$ é $\{e\}$-fiel. Se R é anel gr-nãosingular à direita ou $(e')R$ é $\{e\}$-fiel para todo $e' \in \Gamma_0$ satisfazendo $1_eR1_{e'} \neq 0$ então $\mathrm{Q}^{\text{d}}_{\text{gr-max}}(1_eR1_e) = 1_e\,\mathrm{Q}^{\text{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_e$.* ∎

Corolário 3.1.40. *Se R é um anel Γ-graduado então*

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}\left(\bigoplus_{e\in\Gamma_0} 1_e R 1_e\right) = \bigoplus_{e\in\Gamma_0} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(1_e R 1_e)\,.$$

Demonstração. Note que o anel Γ-graduado $\bigoplus\limits_{e\in\Gamma_0} 1_e R 1_e$ satisfaz todas as hipóteses de fidelidade em componentes homogêneas do Corolário 3.1.39. Então, aplicando o Corolário 3.1.39 para cada $e \in \Gamma_0'(R)$, obtemos

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(1_e R 1_e) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}\left(1_e\left(\bigoplus_{e\in\Gamma_0} 1_e R 1_e\right)1_e\right) = 1_e\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}\left(\bigoplus_{e\in\Gamma_0} 1_e R 1_e\right)1_e$$

para cada $e \in \Gamma_0$. Como $\operatorname{supp} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}\left(\bigoplus\limits_{e\in\Gamma_0} 1_e R 1_e\right) \subseteq \bigcup\limits_{e\in\Gamma_0} e\Gamma e$, o resultado segue. ■

O item (1) do Corolário a seguir mostra que podemos tirar a hipótese de grupo finito em (Năstăsescu e Van Oystaeyen, 2004, Proposition 8.3.5(2)).

Corolário 3.1.41. *Seja R um anel fortemente Γ-graduado. Então*

(1) $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R_e) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_e$, *para todo* $e \in \Gamma_0$.

(2) $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(1_{\Delta_0} R 1_{\Delta_0}) = 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) 1_{\Delta_0}$, *para todo* $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$.

Demonstração. Basta notar que, pelos itens (2) e (4) do Lema 1.8.7, R satisfaz todas as hipóteses de fidelidade em componentes homogêneas nos Teoremas 3.1.36 e 3.1.38. ■

3.1.2 O anel de quocientes graduado maximal de anéis com um ideal à direita gr-denso minimal

Nesta subseção, estudamos $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ quando $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tem um elemento minimal, obtendo um análogo de (Lam, 1999, Theorem 13.22) e (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Corollary 11(4) (p. 557)).

Primeiramente, vamos definir um análogo graduado do socle de um módulo.

Definição 3.1.42. Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Definimos o *gr-socle* de M por

$$\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M) := \sum\{S \leq_{\mathrm{gr}} M : S \text{ é gr-simples}\}\,,$$

convencionando que $\sum \emptyset = \{0\}$.

Temos as seguintes propriedades básicas do gr-socle, a maior parte das quais é inspirada nas do caso não graduado (Lam, 2007, Exercise 6.12 e Lam, 1999, Lemma 7.2(2)).

Lema 3.1.43. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Temos:*

(1) $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M(e)) = (\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M))(e)$, *para todo* $e \in \Gamma_0$.

(2) $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M)$ *é o maior submódulo graduado gr-semissimples de* M.

(3) $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M) = \bigcap\{N \leq_{\mathrm{gr}} M : N \leq_{\text{gr-ess}} M\}$.

(4) *Se* M *é* Γ_0*-artiniano então* $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M) \leq_{\text{gr-ess}} M$.

(5) *Se* N *é submódulo graduado de* M *então* $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(N) = N \cap \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M)$.

(6) *Se* N *é submódulo gr-essencial de* M *então* $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(N) = \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M)$.

(7) $M \cdot \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R) \subseteq \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M)$ *e* $\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M) \cdot \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R) = 0$.

(8) $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ *é um ideal graduado de* R.

(9) $\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R) \subseteq \operatorname{l.ann}_R(\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R))$ *e vale a igualdade se* R *é anel* Γ_0*-artiniano à direita.*

Demonstração. (1) Segue imediatamente do Lema 2.3.2.

(2) A gr-semissimplicidade de $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M)$ segue de (Cala *et al.*, 2022, Lemma 51). Além disso, se $\{S_i : i \in I\}$ é uma família de R-submódulos gr-simples de M então $\bigoplus_{i\in I} S_i \subseteq \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M)$.

(3) Seja $T := \bigcap\{N \leq_{\mathrm{gr}} M : N \leq_{\text{gr-ess}} M\}$. Suponha que $N \leq_{\text{gr-ess}} M$ e seja S um submódulo graduado gr-simples de M. Como $S \neq 0$, segue que $S \cap N \neq 0$. Então, pela gr-simplicidade de S, temos $S \cap N = S$ e, portanto, $S \subseteq N$. Logo, $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M) \subseteq N$. Dessa forma, $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M) \subseteq T$ e, por (2), basta mostrarmos que T_R é gr-semissimples. Seja L um R-submódulo graduado de T. Pela Proposição 2.6.10, existe $P \leq_{\mathrm{gr}} M$ tal que $L \oplus P \leq_{\text{gr-ess}} M$. Logo, $T \subseteq L \oplus P$ e, portanto, $T = L \oplus (T \cap P)$. Por (Cala *et al.*, 2022, Proposition 56), T é gr-semissimples.

(4) Seja N um submódulo graduado não nulo de M. Então, tomando $e \in \Gamma_0$ tal que $N(e) \neq 0$ temos da gr-artinianidade de $M(e)$ que $\{X \leq_{\mathrm{gr}} N(e) : X \neq 0\}$ tem um elemento minimal, o qual é um submódulo gr-simples de M. Logo, $N \cap \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M) \neq 0$.

(5) Seja $N \leq_{\mathrm{gr}} M$. Por (2), $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(N)$ é gr-semissimples e $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(N) \subseteq \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M)$. Logo, $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(N) \subseteq N \cap \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M)$. Por outro lado, $N \cap \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M)$ é gr-semissimples por (2) e (Cala *et al.*, 2022, Corollary 54). Segue novamente de (2) que $N \cap \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M) \subseteq \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(N)$.

(6) Seja $N \leq_{\text{gr-ess}} M$. Por (5), $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(N) = N \cap \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M)$. Por (3), $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M) \subseteq N$ e, portanto, $N \cap \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M) = \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M)$.

(7) A primeira afirmação segue do fato que se S é submódulo gr-simples de R_R e $m \in \mathrm{h}(M)$ então $mS = 0$ ou mS é submódulo gr-simples de M e, portanto, $mS \subseteq \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(M)$. Para a segunda afirmação, note que se $m \in \mathrm{h}(\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(M))$ então $\operatorname{r.ann}_R(m) \leq_{\text{gr-ess}} R_R$ e segue de (3) que $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R) \subseteq \operatorname{r.ann}_R(m)$.

(8) Por (7), $R \cdot \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R) \subseteq \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R)$.

(9) A inclusão $\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R) \subseteq \operatorname{l.ann}_R(\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R))$ segue de (7). Agora, suponha que R é anel Γ_0-artiniano à direita e seja $a \in \mathrm{h}(R)$ tal que $a \cdot \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R) = 0$. Então $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R) \subseteq \operatorname{r.ann}_R(a)$. Por (4), temos $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R) \leq_{\text{gr-ess}} R_R$ e, portanto, $\operatorname{r.ann}_R(a) \leq_{\text{gr-ess}} R_R$. Logo, $a \in \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R)$. Portanto, $\operatorname{l.ann}_R(\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R)) \subseteq \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R)$. ■

Teorema 3.1.44. *Seja R um anel Γ-graduado e suponha que D é um elemento minimal de $\mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$. Então*

(1) *$D \subseteq D'$ para todo $D' \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$.*

(2) *D é ideal à esquerda graduado de $\mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}(R)$.*

(3) *D é ideal graduado de R e contém $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R)$.*

(4) *Temos o seguinte gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados*

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}(R) &\longrightarrow \operatorname{END}(D_R) \\ q &\longmapsto D \to D \\ &\qquad d \mapsto qd\,. \end{aligned}$$

Demonstração. (1) Se $D' \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ então $D \cap D' \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e segue de $D \cap D' \subseteq D$ e a minimalidade de D que $D \cap D' = D$, i.e., $D \subseteq D'$.

(2) Seja $q \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}(R))$. Pela Proposição 2.8.26(2), temos que $q^{-1}D \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$. Por (1), obtemos $D \subseteq q^{-1}D$ e segue que $qD \subseteq D$.

(3) De (2), obtemos que D é ideal graduado de R. Como $D_R \leq_{\text{gr-ess}} R_R$, segue do Lema 3.1.43(3) que $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R) \subseteq D$.

(4) É imediato da Proposição 3.1.7 pois, por (2), $(D : D) = \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}(R)$. ■

Corolário 3.1.45. *Seja R um anel Γ_0-artiniano à direita.*

(1) *$\mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ tem um menor elemento D. Além disso, D é ideal graduado de R, contém $\operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ e é tal que*

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}(R) &\longrightarrow \operatorname{END}(D_R) \\ q &\longmapsto D \to D \\ &\qquad d \mapsto qd \end{aligned}$$

é um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados.

(2) *Se R é anel gr-nãosingular à direita então $S := \operatorname{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ é o menor elemento de $\mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e*

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}(R) &\longrightarrow \operatorname{END}(S_R) \\ q &\longmapsto S \to S \\ &\qquad s \mapsto qs \end{aligned}$$

é um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados.

(3) *Se R é anel gr-simples então* $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = R$.

Demonstração. (1) Pelo Teorema 3.1.44, basta mostrarmos que $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tem um elemento minimal. Seja $e \in \Gamma'_0(R)$. Como $R(e)$ é gr-artiniano, a família

$$\mathcal{F}_e := \{D(e) : D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)\}$$

tem um elemento minimal $D^e(e)$. Considere o ideal à direita graduado $D := \bigoplus_{e \in \Gamma'_0(R)} D^e(e)$ de R. Mostremos que D é um elemento minimal de $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Para vermos que $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$, sejam $x, y \in \mathrm{h}(R)$, $x \neq 0$. Seja $e \in \Gamma_0$ tal que $y \in R(e)$. Podemos supor $e \in \Gamma'_0(R)$ e então, como $D^e \leq_{\text{gr-den}} R_R$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $yr \in D^e$. Mas $y \in R(e)$ implica $yr \in D^e(e) = D(e)$. Portanto, $D_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$. Agora, suponha que $D' \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e $D' \subseteq D$. Para cada $e \in \Gamma'_0(R)$, como $D'(e) \subseteq D(e) = D^e(e)$, segue da minimalidade de $D^e(e)$ em $\mathcal{F}_e$ que $D'(e) = D^e(e)$. Logo, $D' = D$.

(2) Suponha que $\mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R) = 0$. Por (1), basta mostrarmos que $\mathrm{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ contém o menor elemento D de $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Pelo Lema 3.1.43(9), temos $\mathrm{l.ann}_R(\mathrm{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R)) = \mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R) = 0$. Então, pelo Lema 3.1.43(8) e a Proposição 2.8.18(4), temos $\mathrm{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R) \leq_{\text{gr-den}} R_R$ e, portanto, $D \subseteq \mathrm{soc}^{\mathrm{gr}}(R_R)$.

(3) Por (1), $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tem um menor elemento D e D é ideal graduado de R. Se R é anel gr-simples então $D = R$. Neste caso, o Teorema 3.1.44(2) nos diz que R é um ideal à esquerda de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ e, portanto, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \cdot R \subseteq R$. ∎

3.1.3 Quando o anel de quocientes graduado maximal é gr-regular de von Neumann

Nesta subseção buscamos caracterizar os anéis Γ-graduados R tais que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-regular de von Neumann, generalizando o Teorema de Johnson (Lam, 1999, Theorem 13.36), (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Proposition 44 (p. 558)).

O primeiro passo é entender o radical de Jacobson graduado de $\mathrm{END}(I)$ onde I é um módulo gr-injetivo. Começamos com o seguinte Lema.

Lema 3.1.46. *Sejam R um anel Γ-graduado, I um R-módulo à direita Γ-graduado e $H := \mathrm{END}_R(I)$. Para cada $\gamma \in \Gamma$, considere $N_\gamma := \{g \in H_\gamma : \ker g \leq_{\text{gr-ess}} I_R\}$. Então $N_\gamma = \{g \in H_\gamma : \ker(g|_{I(d(\gamma))}) \leq_{\text{gr-ess}} I(d(\gamma))\}$ e $N := \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} N_\gamma$ é ideal graduado de H.*

Demonstração. Primeiramente, vejamos que cada N_γ é subgrupo aditivo de H. Sejam $\gamma \in \Gamma$ e $g, g' \in N_\gamma$. Claramente, $\ker g \cap \ker g' \subseteq \ker(g - g')$ e, portanto, $\ker(g - g') \leq_{\text{gr-ess}} I_R$. Agora, verificamos que N é ideal graduado de H. Sejam $\gamma, \delta \in \Gamma$, $g \in N_\gamma$ e $h \in H_\delta$. Como $\ker g \subseteq \ker hg$, segue que $\ker hg \leq_{\text{gr-ess}} I_R$ e, portanto, $hg \in N_{\delta\gamma}$. Por outro lado, a Proposição 2.6.9(1) nos dá que $h^{-1}(\ker g) \leq_{\text{gr-ess}} I_R$. Como $h^{-1}(\ker g) \subseteq \ker gh$, segue que $\ker gh \leq_{\text{gr-ess}} I_R$ e, portanto, $gh \in N_{\gamma\delta}$.

Por fim, para cada $\gamma \in \Gamma$, temos $N_\gamma = \{g \in H_\gamma : \ker(g|_{I(d(\gamma))}) \leq_{\text{gr-ess}} I(d(\gamma))\}$, pois pelos Lemas 1.6.4 e 2.6.3 temos que se $g \in H_\gamma$ então $\ker g \leq_{\text{gr-ess}} I_R$ é equivalente a

$(\ker g)(d(\gamma)) \leq_{\text{gr-ess}} I(d(\gamma))$. Mas $(\ker g)(d(\gamma)) = (\ker g) \cap I(d(\gamma)) = \ker(g|_{I(d(\gamma))})$. ■

Temos o seguinte resultado, baseado em (Lam, 1999, Theorem 13.1).

Proposição 3.1.47. *Sejam R, I, H e N como no Lema 3.1.46 e suponha que I é R-módulo gr-QI. Temos:*

(1) $\operatorname{rad}^{\text{gr}}(H) = N$.

(2) *H/N é anel gr-regular de von Neumann.*

(3) *Se I_R é gr-nãosingular ou gr-semissimples então $N = 0$.*

Demonstração. (1) Sejam $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \operatorname{rad}^{\text{gr}}(H)_\gamma$. Seja X um submódulo graduado de I_R tal que $X \cap \ker g = 0$. Note que, pelo Lema 1.6.4, $X \subseteq I(d(\gamma))$. Então $g|_X : X \to I$ é injetor e temos bem definido o seguinte homomorfismo de grau γ^{-1}:

$$\begin{aligned} \tilde{g} : g(X) &\longrightarrow I \\ g(x) &\longmapsto x\,. \end{aligned}$$

Como I é gr-QI e $g(X) \leq_{\text{gr}} I_R$, $\tilde{g}$ se estende a um $h \in H_{\gamma^{-1}}$. De $g \in \operatorname{rad}^{\text{gr}}(H)_\gamma$, temos que $u := \mathbb{1}_{d(\gamma)} - hg$ é inversível no anel $H_{d(\gamma)}$. Em particular, pelo Corolário 1.6.11, $u|_{I(d(\gamma))}$ é injetor. Logo, para todo $x \in X \subseteq I(d(\gamma))$, temos

$$u(x) = \mathbb{1}_{d(\gamma)}(x) - hg(x) = x - \tilde{g}g(x) = 0 \implies x = 0\,.$$

Portanto, $X = 0$ e segue que $\ker g \leq_{\text{gr-ess}} I_R$, ou seja, $g \in N_\gamma$.

Para vermos que $N \subseteq \operatorname{rad}^{\text{gr}}(H)$ basta, pelo Corolário 2.4.12, verificarmos que $\mathbb{1}_e + N_e \subseteq \mathrm{U}(H_e)$ para todo $e \in \Gamma_0$. Fixe $e \in \Gamma_0$ e seja $g \in N_e$. Note que

$$\ker(g|_{I(e)}) \cap \ker((\mathbb{1}_e + g)|_{I(e)}) = 0\,,$$

pois, para cada $x \in I(e)$, temos que $g(x) = \mathbb{1}_e(x) + g(x) = 0$ implica $x = \mathbb{1}_e(x) = 0$. Como $\ker(g|_{I(e)}) \leq_{\text{gr-ess}} I(e)$, segue que $\ker((\mathbb{1}_e + g)|_{I(e)}) = 0$. Então, como I é gr-QI, existe $h \in H_e$ estendendo o seguinte homomorfismo de grau e:

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}_e + g)(I(e)) &\longrightarrow I \\ (\mathbb{1}_e + g)(x) &\longmapsto x\,. \end{aligned}$$

Ou seja, $h(\mathbb{1}_e + g) = \mathbb{1}_e$. Temos que

$$x \in \ker(h|_{I(e)}) \cap \ker(g|_{I(e)}) \implies x = \mathbb{1}_e(x) = h(\mathbb{1}_e + g)(x) = h(x) + hg(x) = 0\,.$$

Como $\ker(g|_{I(e)}) \leq_{\text{gr-ess}} I(e)$, segue que $\ker(h|_{I(e)}) = 0$. Logo, como $h(\mathbb{1}_e + g)h = h$, $h|_{I(e)}$ é injetor e $h(I(f)) = 0$ para todo $f \in \Gamma_0 \setminus \{e\}$, segue que $(\mathbb{1}_e + g)h = \mathbb{1}_e$ e, portanto, $\mathbb{1}_e + g$ é inversível no anel H_e.

(2) Sejam $\gamma \in \Gamma$, $g \in H_\gamma$ e considere $\overline{g} \in (H/N)_\gamma$. Pela Proposição 2.6.10, existe um submódulo graduado P de I_R tal que $P \oplus \ker g \leq_{\text{gr-ess}} I_R$. Como $P \cap \ker g = 0$,

segue que $g|_P$ é injetor e, portanto, de I_R ser gr-QI, existe $h \in H_{\gamma^{-1}}$ estendendo

$$\begin{aligned} g(P) &\longrightarrow I \\ g(p) &\longmapsto p\,. \end{aligned}$$

Para cada $p \in P$, temos $ghg(p) = g(p)$ e, para cada $x \in \ker g$, temos $ghg(x) = 0 = g(x)$. Logo, $P \oplus \ker g \subseteq \ker(ghg - g)$ e segue que $\ker(ghg-g) \leq_{\text{gr-ess}} I_R$, ou seja, $ghg - g \in N_\gamma$. Então $\overline{g}\overline{h}\overline{g} = \overline{g}$ em H/N. Portanto H/N é anel gr-regular de von Neumann.

(3) Pelo Corolário 2.6.11, se I_R é gr-semissimples então, para todo $\gamma \in \Gamma$, temos $N_\gamma = \{g \in H_\gamma : \ker g = I\} = \{0\}$.

Agora suponha que I_R é gr-nãosingular. Sejam $\gamma \in \Gamma$ e $g \in N_\gamma$. Temos o seguinte homomorfismo injetor de grau γ:

$$\begin{aligned} \overline{g} : \frac{I}{\ker g} &\longrightarrow I \\ \overline{x} &\longmapsto g(x)\,. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.10.15(2), temos $(\ker g)(d(\gamma)) = I(d(\gamma))$ e segue do Lema 1.6.4 que $\ker g = I$, ou seja, $g = 0$. ■

Corolário 3.1.48. *Seja R um anel Γ-graduado tal que R_R é gr-injetivo. Então*

(1) $\operatorname{rad}^{\text{gr}}(R) = \operatorname{sing}^{\text{gr}}(R_R)$.

(2) $\dfrac{R}{\operatorname{rad}^{\text{gr}}(R)}$ *é anel gr-regular de von Neumann.*

(3) *R é anel gr-nãosingular à direita se, e somente se, R é anel gr-regular de von Neumann.*

Demonstração. Sejam $H := \operatorname{END}(R_R)$ e $N := \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \{g \in H_\gamma : \ker g \leq_{\text{gr-ess}} R_R\}$. Considere o seguinte gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados dado pela Proposição 1.6.9:

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow H \\ a &\longmapsto m_a\,, \end{aligned}$$

onde m_a denota o homomorfismo multiplicação à esquerda por a.

(1) Dados $\gamma \in \Gamma$ e $a \in R_\gamma$, temos da Proposição 3.1.47(1) que $\operatorname{rad}^{\text{gr}}(H) = N$ e, portanto,

$$\begin{aligned} a \in \operatorname{rad}^{\text{gr}}(R)_\gamma &\iff m_a \in \operatorname{rad}^{\text{gr}}(H)_\gamma \\ &\iff \ker m_a \leq_{\text{gr-ess}} R_R \\ &\iff \operatorname{r.ann}_R(a) \leq_{\text{gr-ess}} R_R \\ &\iff a \in \operatorname{sing}^{\text{gr}}(R_R)_\gamma\,. \end{aligned}$$

(2) Pela Proposição 3.1.47, temos que $\dfrac{R}{\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R)} \cong_{\mathrm{gr}} \dfrac{H}{\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(H)} = \dfrac{H}{N}$ é anel gr-regular de von Neumann.

(3) Se R é anel gr-regular de von Neumann então segue do Corolário 2.4.13 e de (1) que R é anel gr-nãosingular à direita.

Reciprocamente, se R é anel gr-nãosingular à direita então segue de (1) que $\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(H) \cong_{\mathrm{gr}} \operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R) = 0$. Logo, pela Proposição 3.1.47, temos que $R \cong_{\mathrm{gr}} H = \dfrac{H}{\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(H)}$ é anel gr-regular de von Neumann. ■

Note que o item (1) do Corolário 3.1.48 nos diz também que se R_R é gr-injetivo e $H := \operatorname{END}(R_R)$ então

$$\frac{H}{\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(H)} \cong_{\mathrm{gr}} \frac{R}{\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(R)} \cong_{\mathrm{gr}} \frac{R}{\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R)} .$$

Isto também pode ser visto como consequência do resultado a seguir, que generaliza (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Lemma 11 (p. 558)).

Proposição 3.1.49. *Seja R um anel Γ-graduado, $I := \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ e $H := \operatorname{END}(I_R)$. Então*

(1) $\dfrac{H}{\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(H)} \cong_{\mathrm{gr}} \dfrac{I}{\operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(I_R)}$ *como grupos aditivos Γ-graduados.*

(2) $\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}({}_H I) = \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(I_R)$.

Demonstração. Pela Proposição 3.1.1(2), temos que

$$\begin{aligned} \varphi :\ {}_H H &\longrightarrow {}_H I \\ h &\longmapsto \sum_{e\in\Gamma_0} h1_e \end{aligned}$$

é um gr-homomorfismo de H-módulos à esquerda sobrejetor. Seja $g \in \mathrm{h}(H)$. Como $R_R \leq_{\text{gr-ess}} I_R$, segue da Proposição 2.6.8(2) que $R \cap \ker g \leq_{\text{gr-ess}} \ker g$ e então a Proposição 2.6.8(1) nos dá que

$$\begin{aligned} \ker g \leq_{\text{gr-ess}} I_R &\iff R \cap \ker g \leq_{\text{gr-ess}} I_R \\ &\iff R \cap \ker g \leq_{\text{gr-ess}} R_R \\ &\iff \ker(g|_R) \leq_{\text{gr-ess}} R_R \,. \end{aligned}$$

Mas note que, para cada $a \in R$ temos

$$g(a) = g\left(\sum_{e\in\Gamma_0} 1_e a\right) = \left(\sum_{e\in\Gamma_0} g1_e\right) a = \varphi(g)a \,.$$

Logo, $\ker(g|_R) = \mathrm{r.ann}_R(\varphi(g))$ e segue que

$$\ker g \leq_{\text{gr-ess}} I_R \iff \mathrm{r.ann}_R(\varphi(g)) \leq_{\text{gr-ess}} R_R \iff \varphi(g) \in \operatorname{sing}^{\mathrm{gr}}(I_R) \,.$$

Agora segue da Proposição 3.1.47(1) que $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(H) = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\{g \in H_\gamma : \ker g \leq_{\text{gr-ess}} I_R\}$ e, portanto,

$$\varphi(\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(H)) = \mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(I_R)$$

provando (1).

Para obtermos (2), primeiro note que $\ker\varphi \subseteq \varphi^{-1}(\mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(I_R)) = \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(H)$ e, usando o Teorema da Correspondência para ideais à esquerda graduados, temos

$$\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}\left(\frac{H}{\ker\varphi}\right) = \frac{\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(H)}{\ker\varphi}\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}({}_HI) &= \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(\varphi(H)) \\ &\cong_{\mathrm{gr}} \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}\left(\frac{H}{\ker\varphi}\right) \\ &= \frac{\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(H)}{\ker\varphi} \\ &\cong_{\mathrm{gr}} \varphi(\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(H)) \\ &= \mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(I_R)\,. \end{aligned}$$

■

Chegamos então ao principal resultado desta subseção que, entre outras coisas, diz que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-regular de von Neumann se, e somente se, R é anel gr-nãosingular à direita.

Teorema 3.1.50. *Seja R um anel Γ-graduado, $I := \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ e $H := \mathrm{END}(I_R)$. São equivalentes:*

(1) *R é anel gr-nãosingular à direita.*

(2) *I_R é gr-nãosingular.*

(3) $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}({}_HI) = 0$.

(4) $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(H) = 0$.

(5) *$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-regular de von Neumann.*

Se $(1)-(5)$ estão satisfeitas então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = I$, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \cong_{\mathrm{gr}} H$ e $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é gr-injetivo como $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$-módulo à direita.

Demonstração. (1) $\iff$ (2): Segue do Teorema 2.10.16(1).

(2) $\iff$ (3): Segue imediatamente da Proposição 3.1.49(2).

(2) $\Longrightarrow$ (4): Segue dos itens (1) e (3) da Proposição 3.1.47.

(4) $\Longrightarrow$ (5): Pela Proposição 3.1.1(2), nós temos o seguinte gr-homomorfismo de

H-módulos sobrejetor

$$\begin{aligned} \varphi : {}_H H &\longrightarrow {}_H I \\ h &\longmapsto \sum_{e\in\Gamma_0} h1_e \,. \end{aligned}$$

Como vimos na prova da Proposição 3.1.49, $\varphi(\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(H)) = \mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(I_R)$ e, portanto, $\ker\varphi \subseteq \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(H)$. Logo, se vale (4) então φ é injetor e segue das Proposições 3.1.1(3) e 3.1.25 que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \cong_{\mathrm{gr}} H = \dfrac{H}{\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(H)}$. Então (5) segue da Proposição 3.1.47.

(5) $\Longrightarrow$ (1): Suponha, por absurdo, que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-regular de von Neumann e existe $0 \neq a \in \mathrm{h}(R)$ tal que $\mathrm{r.ann}_R(a) \leq_{\text{gr-ess}} R_R$. Por transitividade, temos $\mathrm{r.ann}_R(a) \leq_{\text{gr-ess}} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_R$. Seja $x \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))$ tal que $a = axa$. Em particular, $xa \neq 0$ e, portanto, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq xar \in \mathrm{r.ann}_R(a)$. Mas então $xar = xaxar = 0$, uma contradição.

Por fim, se vale (4) então vimos que φ é um gr-isomorfismo de H-módulos à esquerda e, portanto, a parte final do enunciado segue da Proposição 3.1.25. ■

Temos também a seguinte consequência do Teorema 3.1.50.

Corolário 3.1.51. *Seja A um anel com unidade nãosingular à direita, I um conjunto não vazio e $R := \mathrm{M}_I(A)$ (resp. $R := A[\Gamma]$). Então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-regular de von Neumann, gr-injetivo como $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$-módulo à direita e $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$.*

Demonstração. Por (Lam, 1999, Theorem (13.36)), temos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(A)$ é anel regular de von Neumann. Então é fácil ver que $\mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(A))$ (resp. $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(A)[\Gamma]$) é um anel gr-regular de von Neumann. O resultado agora segue do Teorema 3.1.50 e do Corolário 3.1.31 (resp. Teorema 3.1.33). ■

Outra consequência do Teorema 3.1.50 é a seguinte caracterização de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ quando R é anel gr-nãosingular à direita, inspirada em (Lam, 1999, Proposition 13.39).

Proposição 3.1.52. *Seja S um anel Γ-graduado e R um subanel graduado de S tal que R é anel gr-nãosingular à direita. São equivalentes:*

(1) $S = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$.

(2) $S_R = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$.

(3) $R_R \leq_{\text{gr-ess}} S_R$ *e* S_S *é gr-injetivo.*

Demonstração. As implicações (1) $\Longrightarrow$ (2) e (1) $\Longrightarrow$ (3) seguem do Teorema 3.1.50.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Segue dos Teoremas 3.1.50 e 3.1.4(3).

(3) $\Longrightarrow$ (1): Suponha que $R_R \leq_{\text{gr-ess}} S_R$ e S_S é gr-injetivo. Pelo Teorema 2.10.16(2), temos que S é um anel de quocientes à direita Γ-graduado de R e, portanto, pelo Teorema 3.1.4, podemos supor sem perda de generalidade que $S \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$. Como

S_S é gr-injetivo, segue do Corolário 2.5.14 que existe um S-submódulo à direita graduado X de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ tal que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = S \oplus X$. Mas $X \cap R \subseteq X \cap S = 0$ e $R_R \leq_{\text{gr-ess}} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ implicam que $X = 0$. ■

Observação 3.1.53. (1) Se R é anel gr-regular de von Neumann então R é anel gr-nãosingular à direita. De fato, suponha que $0 \neq a \in \mathrm{h}(R)$ e $x \in \mathrm{h}(R)$ é tal que $a = axa$. Se $r \in \mathrm{r.ann}_R(a) \cap xaR$ então, tomando $r' \in R$ tal que $r = xar'$, temos $ar' = axar' = ar = 0$ e, portanto, $r = xar' = 0$. Logo $\mathrm{r.ann}_R(a) \cap xaR = 0$ e segue que $\mathrm{r.ann}_R(a)$ não é gr-essencial em R_R.

(2) Se R é um gr-domínio então, para todos $\gamma \in \Gamma$ e $0 \neq a \in R_\gamma$ temos que $\mathrm{r.ann}_R(a) \cap R(d(\gamma)) = 0$ e, portanto, $a \notin \mathrm{sing}^{\mathrm{gr}}(R_R)$. Ou seja, todo gr-domínio é um anel gr-nãosingular à direita. ■

Temos então a seguinte consequência imediata do Teorema 3.1.50.

Corolário 3.1.54. *Se R é um gr-domínio ou um anel gr-regular de von Neumann então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-regular de von Neumann, gr-injetivo como $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$-módulo à direita e $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(R_R)$.* ■

No caso não graduado temos um resultado mais forte que o Corolário 3.1.54: o (Lam, 1999, Corollary (13.38)') diz que se A é um domínio então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(A)$ também é um anel simples. No caso graduado por grupoide isso não é verdade em geral. Por exemplo, se A é um domínio com unidade e Γ é uma união disjunta de dois grupos não triviais então o anel de grupoide $A[\Gamma]$ é um gr-domínio, mas $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(A[\Gamma]) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(A)[\Gamma]$ não é anel gr-simples. Mas temos os seguintes três resultados.

Proposição 3.1.55. *Seja R um anel Γ-graduado. Temos:*

(1) *Se R é um gr-domínio gr-primo então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um anel gr-simples.*

(2) *Se A é um domínio com unidade e Γ é um grupoide conexo então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(A[\Gamma])$ é um anel gr-simples.*

(3) *Se R é um gr-domínio gr-primo e $\overline{\Sigma} = (\Sigma_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\Gamma)^I$ é uma sequência totalmente matricial para R então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$ é um anel gr-simples. Em particular, se A é um domínio com unidade então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(\mathrm{M}_I(A))$ é um anel gr-simples.*

Demonstração. (1) Sejam R um gr-domínio gr-primo e U um ideal graduado não nulo de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$. De $R_R \leq_{\text{gr-ess}} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ e $0 \neq U_R \leq_{\text{gr}} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_R$, obtemos um $0 \neq a \in \mathrm{h}(U \cap R)$. Fixe $e \in \Gamma'_0(R)$. Como R é gr-primo, temos $aR1_e \neq 0$. Tome $b \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq ab \in R1_e$. Como R é gr-domínio, temos $(\mathrm{r.ann}_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)}(ab))(e) \cap R = 0$ e segue de $R_R \leq_{\text{gr-ess}} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ que $(\mathrm{r.ann}_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)}(ab))(e) = 0$. Pelo Corolário 3.1.54, temos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-regular de von Neumann e, portanto, existe $q \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))$ tal que $(ab)q(ab) = ab$. Então

$$ab(1_e - qab) = 0 \implies 1_e - qab \in (\mathrm{r.ann}_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)}(ab))(e) = 0 \implies 1_e = qab \in U\,.$$

Logo, $1_e \in U$ para todo $e \in \Gamma_0'(R) = \Gamma_0'(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))$ e segue que $U = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$. Portanto, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-simples.

(2) Se A é um domínio com unidade então $A[\Gamma]$ é um gr-domínio fortemente Γ-graduado e, portanto, gr-semiprimo. Se, além disso, Γ é conexo então segue da Proposição 2.2.6 que $A[\Gamma]$ é anel gr-primo. O resultado então segue de (1).

(3) Pelo Teorema 3.1.30, temos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}\left(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})\right) = \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))(\overline{\Sigma})$. Portanto, se R é gr-domínio gr-primo então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}\left(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})\right)$ é anel gr-simples por (1) e pela Proposição 1.7.17. ■

Proposição 3.1.56. *Seja R um gr-domínio gr-semiprimo e considere a relação de gr-primalidade $\sim$ em $\Gamma_0'(R)$. Para cada classe de equivalência $[e] \in \Gamma_0'(R)/\sim$,*

$$1_{[e]}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_{[e]} = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}\left(1_{[e]}R1_{[e]}\right)$$

é um anel gr-simples e ideal graduado não nulo de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$.

Demonstração. A igualdade no enunciado segue do Teorema 3.1.38 aplicado a $\Delta_0 := [e] = \{f \in \Gamma_0 : e \sim f\}$ pois $R(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel (pelo Lema 2.2.4) e R é anel gr-nãosingular à direita.

Claramente $1_{[e]}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_{[e]}$ é um ideal graduado não nulo de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$. A gr-simplicidade de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}\left(1_{[e]}R1_{[e]}\right)$ segue das Proposições 2.2.6(3) e 3.1.55(1). ■

Proposição 3.1.57. *Seja R um gr-domínio com $\operatorname{supp} R \subseteq \bigcup_{e\in\Gamma_0} e\Gamma e$. Então*

(1) *Para cada $e \in \Gamma_0$, $1_e\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_e = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(1_eR1_e)$ é um anel gr-simples e ideal graduado de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$.*

(2) *$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel com gr-divisão se, e somente, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-reduzido (isto é, não possui elementos homogêneos nilpotentes não nulos).*

Demonstração. (1) Segue imediatamente da Proposição 3.1.56 pois $[e] = \{e\}$ para todo $e \in \Gamma_0'(R)$.

(2) Claramente, se $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel com gr-divisão então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-reduzido. Então suponha que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-reduzido. Sejam $\gamma, \delta \in \Gamma$ com $d(\gamma) = r(\delta)$ e $a \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_\gamma$, $b \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_\delta$ tais que $ab = 0$. Pelo Corolário 3.1.40, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = \bigoplus_{e\in\Gamma_0} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(1_eR1_e)$ e segue de (1) que $a, b \in 1_e\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_e$, onde $e := d(\gamma) = r(\delta)$. Para todo $q \in 1_e\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_e$, como $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-reduzido e $(bqa)^2 = 0$, temos $bqa = 0$. Então $b1_e\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_ea = 0$. Por (1), temos que $1_e\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_e$ é anel gr-simples e, portanto, gr-primo, de onde segue que $a = 0$ ou $b = 0$. Logo, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um gr-domínio. Pelo Corolário 3.1.54, temos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ também é anel gr-regular de von Neumann. Mas um gr-domínio gr-regular de von Neumann é necessariamente um anel com gr-divisão. ■

3.1.4 Quando o anel de quocientes graduado maximal é gr-semissimples

Nesta subsecão buscamos caracterizar os anéis Γ-graduados R tais que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-semissimples, generalizando para o contexto graduado por grupoide o Teorema de Gabriel (Lam, 1999, Theorem 13.40), (Balaba, Kanunnikov *et al.*, 2012, Theorem 13 (p. 559)).

Começamos com o resultado a seguir que nos dá um caso em que vale a recíproca de (1) na Proposição 2.13.9.

Proposição 3.1.58. *Seja R um anel Γ-graduado e I um R-módulo à direita Γ-graduado gr-QI. Então I é Γ_0-indecomponível se, e somente se, I é fortemente gr-indecomponível.*

Demonstração. Pela Proposição 2.13.9(1) e o Corolário 2.12.11(2) basta mostrarmos que se I é Γ_0-uniforme então I é fortemente gr-indecomponível. Suponha que I é Γ_0-uniforme e vejamos que $H := \mathrm{END}_R(I)$ é anel gr-local. Pelo Teorema 2.13.3, basta mostrarmos que, para cada $\gamma \in \Gamma$, temos $H_\gamma \setminus \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(H) = \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(H)_\gamma$. Fixe $\gamma \in \Gamma$. A inclusão $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(H)_\gamma \subseteq H_\gamma \setminus \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(H)$ segue da Proposição 2.4.22(4). Reciprocamente, seja $g \in H_\gamma \setminus \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(H)_\gamma$. Pela Proposição 3.1.47(1) e o Lema 3.1.46, temos que $\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(H)_\gamma = \{g \in H_\gamma : \ker(g|_{I(d(\gamma))}) \leq_{\text{gr-ess}} I(d(\gamma))\}$ e, portanto, $\ker(g|_{I(d(\gamma))})$ não é gr-essencial em $I(d(\gamma))$. Como $I(d(\gamma))$ é gr-uniforme, segue que $\ker(g|_{I(d(\gamma))}) = 0$. Então, como I é gr-QI, existe $h \in H_{\gamma^{-1}}$ estendendo

$$\begin{aligned} g(I(d(\gamma))) &\longrightarrow I \\ g(x) &\longmapsto x\,, \end{aligned}$$

ou seja, $hg = \mathbb{1}_{d(\gamma)}$. Como $\mathbb{1}_{d(\gamma)} \notin \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(H)$, temos que $h \notin \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(H)$ e, portanto, $\ker(h|_{I(r(\gamma))})$ não é gr-essencial em $I(r(\gamma))$. Como $I(r(\gamma))$ é gr-uniforme, segue que $\ker(h|_{I(r(\gamma))}) = 0$. Logo, $hgh = h$ e $\mathrm{im}\, g \subseteq I(r(\gamma))$ implicam que $gh = \mathbb{1}_{r(\gamma)}$. Portanto, $g \in \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(H)$. Logo, $H_\gamma \setminus \mathrm{U}^{\mathrm{gr}}(H) \subseteq \mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(H)_\gamma$. ■

Para obter o nosso objetivo nesta subseção precisaremos do conceito a seguir.

Definição 3.1.59. Seja R um anel Γ-graduado. Dizemos que R é um *anel gr-semilocal* se $R/\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ é anel gr-semissimples.

Observação 3.1.60. Note que, pelas Proposições 2.4.17 e 2.4.18, R é anel gr-semilocal se, e somente se, $R/\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ é anel Γ_0-artiniano à direita (resp. à esquerda). ■

Exemplos 3.1.61. São exemplos de anéis gr-semilocais:

(1) anéis gr-locais (pelo item (6) do Teorema 2.13.3).

(2) anéis gr-semissimples (pelo Corolário 2.4.13).

(3) anéis Γ_0-artinianos à direita ou à esquerda (veja a Observação anterior). ■

Anéis gr-semilocais tem a seguinte propriedade parecida com a de anéis gr-locais (Corolário 2.13.6).

Proposição 3.1.62. *Seja R um anel Γ-graduado. Então R é anel gr-semilocal se, e somente se, para todo $e \in \Gamma_0$, $1_e R 1_e$ é anel gr-semilocal.*

Demonstração. O anel $\dfrac{R}{\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)}$ é sempre Jacobson gr-semissimples (Proposição 2.4.17) e, portanto, gr-semiprimo pela Proposição 2.4.19. Logo, segue do Lema 2.1.20(3) e do Corolário 2.3.17(2) que $\dfrac{R}{\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)}$ é anel gr-semissimples se, e somente se, para todo $e \in \Gamma_0$, $1_e \left(\dfrac{R}{\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)}\right) 1_e$ é anel gr-semissimples. Agora, basta notar que

$$1_e \left(\frac{R}{\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)}\right) 1_e \cong_{\mathrm{gr}} \frac{1_e R 1_e}{1_e(\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R))1_e} = \frac{1_e R 1_e}{\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(1_e R 1_e)} \,,$$

pelo Corolário 2.4.9. ■

Os dois resultados a seguir conectam a nossa definição de anel gr-semilocal com as definições de anel semilocal (Lam, 2001, Definition (20.1)) e de categoria semilocal (Facchini, 2019, Definition 4.61).

Proposição 3.1.63. *Se R é um anel gr-semilocal então, para todo $e \in \Gamma_0$, R_e é anel semilocal. Vale a recíproca se $\Gamma = I \times I$ para algum conjunto não vazio I.*

Demonstração. Para cada $e \in \Gamma_0$, temos do Corolário 2.4.9

$$\frac{R_e}{\mathrm{rad}(R_e)} = \frac{R_e}{\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)_e} \cong_{\mathrm{gr}} \left(\frac{R}{\mathrm{rad}^{\mathrm{gr}}(R)}\right)_e .$$

Logo, se R é anel gr-semilocal, segue do Corolário 2.3.14(1) que R_e é anel semilocal para todo $e \in \Gamma_0$. Se $\Gamma = I \times I$ onde I é um conjunto não vazio então $R_e = 1_e R 1_e$ para todo $e \in \Gamma_0$ e obtemos a recíproca no enunciado pela Proposição 3.1.62. ■

Corolário 3.1.64. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena com um objeto não nulo. Então $\mathcal{C}$ é uma categoria semilocal se, e somente se, $R[\mathcal{C}]$ é um anel gr-semilocal.*

Demonstração. Pela Proposição 3.1.63, temos que $R[\mathcal{C}]$ é anel gr-semilocal se, e somente se, $\mathcal{C}(A,A) = R[\mathcal{C}]_{(A,A)}$ é anel semilocal para todo $A \in \mathcal{C}_0$. ■

Precisaremos do seguinte resultado sobre anéis gr-semilocais, cuja prova é inspirada em (Lam, 2001, Theorem 23.8).

Teorema 3.1.65. *Sejam R um anel Γ-graduado e M um R-módulo à direita Γ-graduado. Se, para cada $e \in \Gamma_0'(M)$, $M(e)$ é soma direta finita de submódulos fortemente gr-indecomponíveis então $\mathrm{END}_R(M)$ é anel gr-semilocal.*

Demonstração. Seja $H := \mathrm{END}_R(M)$ e fixe $e \in \Gamma_0'(H) = \Gamma_0'(M)$. Suponha que temos uma decomposição

$$M(e) = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \,,$$

onde X_k é um submódulo fortemente gr-indecomponível de $M(e)$ para todo $k = 1, ..., n$. Para cada $k = 1, ..., n$, seja $p_k \in \mathrm{END}_R(M(e))_e$ a projeção canônica de $M(e)$ em X_k e considere o idempotente $p_k \circ \mathbb{1}_e \in H_e$. Então

$$p_1 + \cdots + p_n = id_{M(e)} \implies p_1 \mathbb{1}_e + \cdots + p_n \mathbb{1}_e = id_{M(e)} \mathbb{1}_e = \mathbb{1}_e \,.$$

Fixe $k \in \{1, ..., n\}$. Note que $p_k \mathbb{1}_e$ é a projeção de M no somando direto graduado X_k e, portanto, temos bem definido o seguinte gr-homomorfismo de grupos aditivos:

$$\begin{aligned}(p_k \mathbb{1}_e)H(p_k \mathbb{1}_e) &\longrightarrow \mathrm{END}_R(X_k) \\ g &\longmapsto g|_{X_k} \,.\end{aligned}$$

Este gr-homomorfismo é injetor pois se $g \in (p_k \mathbb{1}_e)H(p_k \mathbb{1}_e)$ e $g|_{X_k} = 0$ então

$$g(M) = (gp_k \mathbb{1}_e)(M) = (gp_k)(M(e)) = \sum_{l=1}^{n} (gp_k)(X_l) = g(X_k) = 0 \,.$$

Este gr-homomorfismo também é sobrejetor pois se $g' \in \mathrm{END}_R(X_k)$ então, estendendo g' a um $g \in H$ definindo $g(m) = 0$ para todo $m \in M \setminus X_k$, temos que $p_k \mathbb{1}_e g p_k \mathbb{1}_e = g$. Como $p_k \mathbb{1}_e|_{X_k}$ é a unidade do anel $\mathrm{END}_R(X_k)_e$, segue que $(p_k \mathbb{1}_e)H(p_k \mathbb{1}_e) \cong_{\mathrm{gr}} \mathrm{END}_R(X_k)$. Então $p_k \mathbb{1}_e$ é um idempotente gr-local de H, pois X_k é fortemente gr-indecomponível. Pelo Corolário 2.14.18, temos que $\overline{p_k \mathbb{1}_e}$ é um idempotente homogêneo gr-irredutível à direita de $\overline{H} := H/\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(H)$. Como $p_1, ..., p_n$ são dois a dois ortogonais, segue que $p_1 \mathbb{1}_e, ..., p_n \mathbb{1}_e$ também são dois a dois ortogonais. Logo,

$$\overline{\mathbb{1}_e} = \overline{p_1 \mathbb{1}_e} + \cdots + \overline{p_n \mathbb{1}_e}$$

é uma decomposição de $\overline{\mathbb{1}_e}$ em soma de idempotentes homogêneos gr-irredutíveis à direita de $\overline{H}$ dois a dois ortogonais. Portanto,

$$\overline{H}(e) = \overline{\mathbb{1}_e}\overline{H} = \overline{p_1 \mathbb{1}_e}\overline{H} \oplus \cdots \oplus \overline{p_n \mathbb{1}_e}\overline{H}$$

é uma decomposição de $\overline{H}(e)$ em soma de direta de submódulos à direita gr-simples e segue que $\overline{H}(e)$ é gr-semissimples. Como $e \in \Gamma_0'(H)$ foi arbitrário, temos que $H/\operatorname{rad}^{\mathrm{gr}}(H) = \overline{H}$ é um anel gr-semissimples, ou seja, H é anel gr-semilocal. ■

Combinando resultados anteriores, temos o seguinte:

Teorema 3.1.66. *Sejam R um anel Γ-graduado, M um R-módulo à direita Γ-graduado e $I := \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M)$. São equivalentes:*

(1) *M tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita.*

(2) *I tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita.*

(3) *Para cada $e \in \Gamma_0'(I)$, $I(e)$ é soma direta finita de submódulos gr-indecomponíveis.*

(4) *Para cada $e \in \Gamma_0'(I)$, $I(e)$ é soma direta finita de submódulos fortemente gr-indecomponíveis.*

Se $(1) - (4)$ estão satisfeitas então $\mathrm{END}_R(I)$ é um anel gr-semilocal.

Demonstração. (1) $\iff$ (3): Pelo Teorema 2.12.16 e o Corolário 2.7.9(1), para cada $e \in \Gamma_0$, temos que $M(e)$ tem dimensão gr-uniforme finita se, e somente se, $I(e) = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(M(e))$ é uma soma direta finita de submódulos gr-indecomponíveis.

(2) $\iff$ (3): Segue do Teorema 2.12.16, pois $I = \mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(I)$.

(3) $\iff$ (4): Segue das Proposições 2.11.4 e 3.1.58, pois $I(e)$ é gr-injetivo (e, portanto, gr-QI) para todo $e \in \Gamma_0$.

Por fim, pelo Teorema 3.1.65, (4) implica que $\mathrm{END}_R(I)$ é anel gr-semilocal. ■

Corolário 3.1.67. *Seja R um anel Γ-graduado tal que R_R é gr-injetivo. São equivalentes:*

(1) *R_R tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita.*

(2) *Para cada $e \in \Gamma_0'(R)$, $R(e)$ é uma soma direta finita de submódulos gr-indecomponíveis.*

(3) *Para cada $e \in \Gamma_0'(R)$, R_e não contém um conjunto infinito de idempotentes não nulos dois a dois ortogonais.*

Se (1) $-$ (3) *estão satisfeitas então R é um anel gr-semilocal.*

Demonstração. A equivalência (1) $\iff$ (3) segue do Corolário 2.12.37(2). Aplicando o Teorema 3.1.66 para $M = I = R_R$, temos (1) $\iff$ (2) e, junto com a Proposição 1.6.9, obtemos a última afirmação do enunciado. ■

Chegamos enfim ao principal resultado desta subseção.

Teorema 3.1.68. *As afirmações a seguir são equivalentes para um anel Γ-graduado R.*

(1) *R é anel gr-nãosingular à direita e R_R tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita.*

(2) *$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-nãosingular à direita e $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)}$ tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita.*

(3) *$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-nãosingular à direita e, para cada $e \in \Gamma_0'(R)$, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_e$ não contém um conjunto infinito de idempotentes não nulos dois a dois ortogonais.*

(4) *$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-regular de von Neumann e, para cada $e \in \Gamma_0'(R)$, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_e$ não contém um conjunto infinito de idempotentes não nulos dois a dois ortogonais.*

(5) *$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-semissimples.*

Demonstração. (1) $\implies$ (2): Segue das Proposições 2.10.18(2) e 2.12.6.

(2) $\implies$ (3): Se existisse $e \in \Gamma_0$ tal que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_e$ contenha um conjunto infinito $\{i_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de idempotentes não nulos dois a dois ortogonais então teríamos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)(e)$ conteria a soma direta infinita $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} i_\lambda\, \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$.

(3) $\implies$ (4): Se vale (3) então, pela Proposição 2.10.18(2), R é anel gr-nãosingular à direita e segue do Teorema 3.1.50 que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-regular de von Neumann.

(4) $\implies$ (5): Suponha (4). Por um lado, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel Jacobson gr-semissimples pelo Corolário 2.4.13. Por outro lado, o Teorema 3.1.50 nos dá que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é gr-injetivo como $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$-módulo à direita e, portanto, segue do Corolário 3.1.67 que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-semilocal. Mas um anel gr-semilocal e Jacobson gr-semissimples necessariamente é um anel gr-semissimples.

(5) $\implies$ (1): Suponha que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-semissimples. Então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-regular de von Neumann e segue do Teorema 3.1.50 que R é anel gr-nãosingular à direita. Além disso, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)}$ tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita pelo Corolário 2.12.19 e segue da Proposição 2.12.6 que R_R tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita. ■

Agora também podemos caracterizar quando $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um anel com gr-divisão.

Teorema 3.1.69. *As seguintes afirmações são equivalentes para um anel Γ-graduado R.*

(1) *R é um gr-domínio e R_R é Γ_0-uniforme.*

(2) *R é anel gr-nãosingular à direita e R_R é Γ_0-uniforme.*

(3) *$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um anel com gr-divisão.*

Demonstração. (1) $\implies$ (2): Segue da Observação 3.1.53(2).

(2) $\implies$ (3): Suponha que vale (2). Pelo Teorema 3.1.68, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-semissimples e, portanto, para cada $e \in \Gamma_0$, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)(e)$ é soma direta finita de submódulos gr-simples (os quais são gr-uniformes). Pela Proposição 2.12.6, temos

$$\text{gr-u.dim}_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)(e) = \text{gr-u.dim}_R R(e) = 1$$

e segue que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)(e)$ é $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$-módulo gr-simples para todo $e \in \Gamma_0'(R)$. Logo, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um anel com gr-divisão pelo Teorema 2.3.53.

(3) $\implies$ (1): Suponha que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um anel com gr-divisão. Então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um gr-domínio e segue que R também é. Também temos, da Proposição 2.12.6 e do Teorema 2.3.53(2), que

$$\text{gr-u.dim}_R R(e) = \text{gr-u.dim}_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)(e) = 1$$

para todo $e \in \Gamma_0$. Logo, para cada $e \in \Gamma_0'(R)$, $R(e)$ é gr-uniforme pela Proposição 2.12.9(2). ■

Encerramos esta subseção com as seguintes consequências dos Teoremas 3.1.68 e 3.1.69.

Corolário 3.1.70. *As seguintes afirmações valem para um anel Γ-graduado R.*

(1) *Se R é anel gr-nãosingular à direita gr-primo e R_R tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel Γ_0-artiniano gr-simples.*

(2) *Se R é anel gr-nãosingular à direita gr-primo, R_R tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita e existe $e \in \Gamma_0$ tal que $R(e)$ é gr-uniforme então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel pfm gr-simples.*

(3) *Se R é um gr-domínio (resp. anel gr-nãosingular à direita) gr-primo e R_R é Γ_0-uniforme então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um anel com gr-divisão gr-simples.*

Demonstração. (1) Suponha que R é anel gr-nãosingular à direita gr-primo e R_R tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita. Pelo Teorema 3.1.68 e a Proposição 3.1.21 temos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um anel gr-semissimples gr-primo e segue do Teorema 2.3.36 que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel Γ_0-artiniano gr-simples.

(2) Suponha agora que R é anel gr-nãosingular à direita gr-primo, R_R tem dimensão gr-uniforme Γ_0-finita e existe $e \in \Gamma_0$ tal que $R(e)$ é gr-uniforme. Por (1) e a Proposição 2.12.6, temos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel Γ_0-artiniano gr-simples e $(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))(e)$ tem dimensão gr-uniforme 1 como $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$-módulo. Como $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é anel gr-semissimples, segue do Lema 2.3.25(2) que $(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))(e)$ é $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$-módulo gr-simples. Pelo Teorema 2.3.48(4), $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um anel pfm gr-simples.

(3) Se R é um gr-domínio (resp. anel gr-nãosingular à direita) gr-primo e R_R é Γ_0-uniforme então, pelo Teorema 3.1.69 e a Proposição 3.1.21 temos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um anel com gr-divisão gr-primo. O resultado agora segue da Proposição 2.2.15(3). ■

3.1.5 Categoria de quocientes maximal

Nesta subseção, tentamos descrever em linguagem de categorias o anel $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R[\mathcal{C}])$ onde $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena.

Uma particularidade dos grupoides da forma $I \times I$ é que todos os módulos unitais são graduados, conforme o resultado a seguir.

Proposição 3.1.71. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena e M um $R[\mathcal{C}]$-módulo à direita unital. Então, para cada $A \in \mathcal{C}_0$, podemos fazer de M um $R[\mathcal{C}]$-módulo à direita $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$-graduado via $M = \bigoplus_{X \in \mathcal{C}_0} M_{(A,X)}$ onde $M_{(A,X)} := MI_X$ para todo $X \in \mathcal{C}_0$.*

Demonstração. Fixe $A \in \mathcal{C}_0$. Como M é unital, temos

$$M = M \cdot R[\mathcal{C}] = M\left(\bigoplus_{X \in \mathcal{C}_0} R[\mathcal{C}]I_X\right) = \bigoplus_{X \in \mathcal{C}_0} MI_X\,.$$

Por fim, note que se $X, Y, Z \in \mathcal{C}_0$ então

$$M_{(A,X)}R_{(Y,Z)} = MI_X\mathcal{C}(Z,Y) = \begin{cases} M\mathcal{C}(Z,X), & \text{se } X = Y \\ 0, & \text{se } X \neq Y \end{cases} \subseteq \begin{cases} MI_Z, & \text{se } X = Y \\ 0, & \text{se } X \neq Y \end{cases}.$$

Logo $M = \bigoplus_{X\in\mathcal{C}_0} M_{(A,X)}$ é um $R[\mathcal{C}]$-módulo à direita $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$-graduado. ∎

Observação 3.1.72. Note que, na Proposição 3.1.71 temos, para cada $A \in \mathcal{C}_0$, uma graduação em M de modo que $M = M((A, A))$. Portanto, M tem tantas $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$-graduações não gr-isomorfas quanto objetos em $\mathcal{C}$. ∎

Para bimódulos temos o seguinte resultado, cuja demonstração é semelhante a da Proposição 3.1.71.

Proposição 3.1.73. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena e M um $(R[\mathcal{C}]$,$R[\mathcal{C}])$-bimódulo unital. Então M é um $(R[\mathcal{C}]$,$R[\mathcal{C}])$-bimódulo $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$-graduado via $M = \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}_0\times\mathcal{C}_0} M_{(A,B)}$ onde $M_{(A,B)} := I_A M I_B$ para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$.* ∎

Corolário 3.1.74. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena. Então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R[\mathcal{C}]) = \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}_0\times\mathcal{C}_0} I_A \,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R[\mathcal{C}]) I_B$ é anel $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$-graduado e tem $R[\mathcal{C}]$ como subanel graduado.*

Demonstração. Primeiramente note que o anel $R[\mathcal{C}]$ não tem divisores de zero à esquerda totais, isto é, para cada $x \in R[\mathcal{C}]$ temos que $xR[\mathcal{C}] = 0$ implica $x = 0$ (por causa dos morfismos identidade de $\mathcal{C}$). Então, por (Utumi, 1956), podemos considerar o anel de quocientes à direita maximal $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R[\mathcal{C}])$, o qual é um $(R[\mathcal{C}]$,$R[\mathcal{C}])$-bimódulo unital. Pela Proposição 3.1.73, temos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R[\mathcal{C}])$ é um $(R[\mathcal{C}]$,$R[\mathcal{C}])$-bimódulo $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$-graduado via $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R[\mathcal{C}])_{(A,B)} := I_A \,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R[\mathcal{C}]) I_B$ para todos $A, B \in \mathcal{C}_0$. Dessa forma, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R[\mathcal{C}])$ é um anel $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$-graduado e tem $R[\mathcal{C}]$ como subanel graduado. ∎

Como consequência, da Observação 3.1.18 temos o seguinte.

Corolário 3.1.75. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva com um número finito de objetos. Então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R[\mathcal{C}]) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R[\mathcal{C}])$.* ∎

Para homomorfismos de anéis temos uma propriedade parecida com a das Proposições 3.1.71 e 3.1.73.

Proposição 3.1.76. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias pré-aditivas pequenas com $\mathcal{C}_0 = \mathcal{D}_0$. Seja $\varphi : R[\mathcal{C}] \to R[\mathcal{D}]$ um homomorfismo de anéis tal que $\varphi(I_A) = I_A$ para todo $A \in \mathcal{C}_0$. Então φ é um gr-homomorfismo de anéis $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$-graduados. Além disso, φ pode ser visto como um funtor covariante aditivo $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que $\varphi(A) = A$ para todo $A \in \mathcal{C}_0$. Reciprocamente, se $\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor covariante aditivo que é a identidade nos objetos de $\mathcal{C}$ então podemos considerar ψ como um gr-homomorfismo de anéis $R[\mathcal{C}] \to R[\mathcal{D}]$. Neste contexto, temos*

(i) $\varphi : R[\mathcal{C}] \to R[\mathcal{D}]$ é um gr-homomorfismo injetor se, e somente se, $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor fiel.

(ii) $\varphi : R[\mathcal{C}] \to R[\mathcal{D}]$ é um gr-homomorfismo sobrejetor se, e somente se, $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor pleno.

(iii) $\varphi : R[\mathcal{C}] \to R[\mathcal{D}]$ é um gr-isomorfismo se, e somente se, $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma equivalência de categorias.

Demonstração. φ é um gr-homomorfismo de anéis pois, para todos $A, B \in \mathcal{C}_0$, temos

$$\begin{aligned} \varphi(R[\mathcal{C}]_{(A,B)}) &= \varphi(I_A R[\mathcal{C}]_{(A,B)} I_B) \\ &= \varphi(I_A)\varphi(R[\mathcal{C}]_{(A,B)})\varphi(I_B) \\ &= I_A \varphi(R[\mathcal{C}]_{(A,B)}) I_B \\ &\subseteq I_A R[\mathcal{D}] I_B \\ &= R[\mathcal{D}]_{(A,B)} . \end{aligned}$$

Assim, φ também pode ser visto como um funtor covariante aditivo $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que $\varphi(A) = A$ para todo $A \in \mathcal{C}_0$. Desse modo, obtemos facilmente os itens (i) e (ii) do enunciado pois φ é gr-homomorfismo injetor (resp. sobrejetor) se, e somente se, $\varphi|_{R[\mathcal{C}]_{(A,B)}}$ é injetor (resp. sobrejetor) para todos $A, B \in \mathcal{C}_0$. O item (iii) segue imediatamente de (i) e (ii) pois $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor denso. ■

A definição a seguir visa traduzir para linguagem de categorias o conceito de homomorfismo com grau entre módulos $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$-graduados.

Definição 3.1.77. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva, $\mathcal{I}$ um ideal à direita (resp. à esquerda) de $\mathcal{C}$ e $X, Y \in \mathcal{C}_0$. Um *morfismo de ideais à direita* (resp. *à esquerda*) *de grau* (X, Y) é um $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ consistindo de, para cada $A \in \mathcal{C}_0$, um homomorfismo de grupos aditivos $F_A : \mathcal{I}(A, Y) \to \mathcal{C}(A, X)$ (resp. $F_A : \mathcal{I}(X, A) \to \mathcal{C}(Y, A)$) tais que para todos $A, B \in \mathcal{C}_0$, $f \in \mathcal{I}(A, Y)$ e $h \in \mathcal{C}(B, A)$ (resp. $f \in \mathcal{I}(X, A)$ e $h \in \mathcal{C}(A, B)$) temos $F_A(f) \circ h = F_B(f \circ h)$ (resp. $h \circ F_A(f) = F_B(h \circ f)$), ou seja, o diagrama da esquerda (resp. direita) comuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "F_A(f)"'] & B \arrow[l, "h"'] \arrow[dl, "F_B(f\circ h)"] \\ X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B & A \arrow[l, "h"'] \\ & Y \arrow[u, "F_A(f)"'] \arrow[ul, "F_B(h\circ f)"] \end{tikzcd}$$

Observação 3.1.78. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena. Suponha que $\mathcal{I}$ é um ideal à direita (resp. à esquerda) de $\mathcal{C}$, $X, Y \in \mathcal{C}_0$ e $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ é um morfismo de ideais à direita (resp. à esquerda) de grau (X, Y). Seja I o ideal à direita (resp. à esquerda) graduado de $R[\mathcal{C}]$ tal que $I_{(A,B)} = \mathcal{I}(B, A)$ para todos $A, B \in \mathcal{C}_0$. Então é fácil ver que $g : I((Y, Y)) \to R[\mathcal{C}]$ (resp. $g : ((X, X))I \to R[\mathcal{C}]$) dado por $g(i) = F_A(i)$ para todos $A \in \mathcal{C}_0$ e $i \in I_{(Y,A)}$ (resp. $i \in I_{(A,X)}$) é um homomorfismo $R[\mathcal{C}]$-módulos à direita (resp. à esquerda) de grau (X, Y). Definindo $g(i) = 0$ para todo $i \in I_{(B,A)}$ com $B \neq Y$ (resp. $i \in I_{(A,B)}$ com $B \neq X$) obtemos $g \in \mathrm{HOM}_{R[\mathcal{C}]}(I, R[\mathcal{C}])_{(X,Y)}$. Reciprocamente, suponha que I é um ideal à direita (resp. à esquerda) graduado de $R[\mathcal{C}]$, $X, Y \in \mathcal{C}_0$ e $g \in \mathrm{HOM}_{R[\mathcal{C}]}(I, R[\mathcal{C}])_{(X,Y)}$. Considere o ideal à direita (resp. à esquerda) $\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}$ com $\mathcal{I}(A, B) := I_{(B,A)}$ para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$. Então temos um $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ morfismo de ideais à direita (resp. à esquerda) de grau (X, Y) onde, para cada $A \in \mathcal{C}_0$, $F_A = g|_{I_{(Y,A)}}$ (resp. $F_A = g|_{I_{(A,X)}}$). ■

Exemplo 3.1.79. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva, $X, Y \in \mathcal{C}_0$ e $f_0 \in \mathcal{C}(Y, X)$. Se $\mathcal{I}$ é um ideal à direita de $\mathcal{C}$ então $\mathcal{I}(-, f_0) : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ é um morfismo de ideais à direita de grau (X, Y) onde, para cada $A \in \mathcal{C}_0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(-, f_0)_A : \mathcal{I}(A, Y) &\longrightarrow \mathcal{C}(A, X) \\ f &\longmapsto f_0 \circ f \,. \end{aligned}$$

Semelhantemente, se $\mathcal{I}$ é um ideal à esquerda de $\mathcal{C}$ então $\mathcal{I}(f_0, -) : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ é um morfismo de ideais à esquerda de grau (X, Y) onde, para cada $A \in \mathcal{C}_0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(f_0, -)_A : \mathcal{I}(X, A) &\longrightarrow \mathcal{C}(Y, A) \\ f &\longmapsto f \circ f_0 \,. \end{aligned}$$

Definimos $\mathcal{I}(-, f_0)$ (resp. $\mathcal{I}(f_0, -)$) também quando $\mathcal{C}$ é subcategoria pré-aditiva de $\mathcal{D}$, $f_0 \in \mathcal{D}(Y, X)$ e, para todos $A \in \mathcal{C}_0$ e $f \in \mathcal{I}(A, Y)$ (resp. $f \in \mathcal{I}(X, A)$), temos que $f_0 \circ f$ (resp. $f \circ f_0$) é um morfismo de $\mathcal{C}$. ■

Agora podemos obter uma versão categórica do Corolário 3.1.13.

Definição 3.1.80. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva. Diremos que uma categoria pré-aditiva $\mathcal{Q}$ é uma *categoria de quocientes à direita* (resp. *à esquerda*) *maximal de* $\mathcal{C}$ se $\mathcal{Q}$ é uma categoria de quocientes à direita (resp. à esquerda) de $\mathcal{C}$ e, para cada $\mathcal{I}$ ideal à direita (resp. à esquerda) denso de $\mathcal{C}$, $X, Y \in \mathcal{C}_0$ e $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ morfismo de ideais à direita (resp. à esquerda) de grau (X, Y), existe $f \in \mathcal{Q}(Y, X)$ tal que $F = \mathcal{I}(-, f)$ (resp. $F = \mathcal{I}(f, -)$).

Observação 3.1.81. Note que a definição acima não exige que a categoria seja pequena. Mas quando a categoria pré-aditiva $\mathcal{C}$ é pequena, conseguimos construir uma categoria de quocientes à direita (resp. à esquerda) maximal de $\mathcal{C}$. De fato, basta considerar a categoria pré-aditiva pequena $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})$ com o mesmo conjunto de objetos que $\mathcal{C}$ e tal que $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})(Y, X) := \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R[\mathcal{C}])_{(X,Y)}$ para cada $X, Y \in \mathcal{C}_0$. Observe que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R[\mathcal{C}]) = R[\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})]$. Então, combinando o Corolário 3.1.13 e o que temos feito nesta subseção, temos que $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})$ é a única categoria de quocientes à direita maximal de $\mathcal{C}$ a menos de um isomorfismo de categorias que é a identidade nos objetos e morfismos de $\mathcal{C}$. Semelhantemente, a categoria pré-aditiva pequena $\mathcal{Q}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})$ tal que $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R[\mathcal{C}]) = R[\mathcal{Q}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})]$ é a única categoria de quocientes à esquerda maximal de $\mathcal{C}$ a menos de um isomorfismo de categorias que é a identidade nos objetos e morfismos de $\mathcal{C}$. ■

O resultado a seguir justifica o termo maximal.

Proposição 3.1.82. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena e $\mathcal{D}$ uma categoria de quocientes à direita (resp. à esquerda) de $\mathcal{C}$. Então existe um único funtor covariante aditivo $\mathcal{D} \to \mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})$ (resp. $\mathcal{D} \to \mathcal{Q}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})$) que é a identidade nos objetos e morfismos de $\mathcal{C}$. Além disso, tal funtor é fiel.*

Demonstração. Como $R[\mathcal{D}]$ é um anel de quocientes à direita (resp. à esquerda) $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$-graduado de $R[\mathcal{C}]$, segue do Teorema 3.1.4 (resp. Corolário 3.1.5) que existe um único gr-homomorfismo de anéis $\varphi : R[\mathcal{D}] \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R[\mathcal{C}])$ (resp. $\varphi : R[\mathcal{D}] \to \mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R[\mathcal{C}])$) estendendo a função identidade do anel $R[\mathcal{C}]$ e, além disso, φ é injetor. Pela Proposição 3.1.76, temos que $\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})$ (resp. $\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{Q}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})$) é o único funtor covariante aditivo que é a identidade nos objetos e morfismos de $\mathcal{C}$ e, além disso, φ é um funtor fiel. ∎

Observação 3.1.83. Podemos provar a Proposição 3.1.82 sem supor que $\mathcal{C}$ é pequena. Para isso, defina para cada $X, Y \in \mathcal{C}_0$ e $f_0 \in \mathcal{D}(Y, X)$ o ideal à direita $f_0^{-1}\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ onde, para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$, $(f_0^{-1}\mathcal{C})(A, B) = \mathcal{C}(A, B)$ se $B \neq Y$ e

$$(f_0^{-1}\mathcal{C})(A, Y) = \{f \in \mathcal{C}(A, Y) : f_0 \circ f \in \mathcal{C}(A, X)\}.$$

Analogamente à Proposição 2.8.26(1), se verifica que $f_0^{-1}\mathcal{C}$ é um ideal à direita denso de $\mathcal{C}$. Também é fácil ver que temos um morfismo $G : f_0^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ de ideais à direita de grau (X, Y) onde, para cada $A \in \mathcal{C}_0$,

$$\begin{aligned} G_A : (f_0^{-1}\mathcal{C})(A, Y) &\longrightarrow \mathcal{C}(A, X) \\ f &\longmapsto f_0 \circ f\,. \end{aligned}$$

Portanto, existe $F(f_0) \in \mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C})(Y, X)$ tal que $G = (f_0^{-1}\mathcal{C})(-, F(f_0))$. Isto define um funtor covariante aditivo $F : \mathcal{D} \to \mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C})$ que é a identidade nos objetos e morfismos de $\mathcal{C}$. Além disso, F é único com essas propriedades e é fiel. Mas não entraremos nos detalhes desta prova pois nos concentraremos em categorias pequenas. ∎

A categoria de quocientes maximal também tem a seguinte propriedade.

Proposição 3.1.84. *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena então*

$$\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C})) = \mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C})\,.$$

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 3.1.23(3). ∎

Agora veremos os Teoremas 3.1.36 e 3.1.38 no caso do anel de uma categoria pré-aditiva pequena, traduzindo seus enunciados para a linguagem de categorias.

Teorema 3.1.85. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena e $X \in \mathcal{C}_0$ tais que, para cada $A \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A, X)$, existe $h \in \mathcal{C}(X, A)$ tal que $f \circ h \neq 0$. Suponha ainda que vale alguma das duas afirmações a seguir:*

(*i*) *$\mathcal{C}$ é categoria nãosingular à direita.*

(*ii*) *Para cada $A \in \mathcal{C}_0$ tal que $\mathcal{C}(A, X) \neq 0$, se $B \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A, B)$ então existe $h \in \mathcal{C}(B, X)$ tal que $h \circ f \neq 0$.*

Então

$$\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C})(X, X) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C}(X, X))\,.$$

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 3.1.36 para $R := R[\mathcal{C}]$ e $e := (X, X)$. ∎

Teorema 3.1.86. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena e $\mathcal{C}'$ uma subcategoria plena de $\mathcal{C}$. Suponha que, para cada $A \in \mathcal{C}_0$, $A' \in \mathcal{C}'_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A, A')$, existem $B' \in \mathcal{C}'_0$ e $h \in \mathcal{C}(B', A)$ tal que $f \circ h \neq 0$. Suponha ainda que vale alguma das duas afirmações a seguir:*

(*i*) *$\mathcal{C}$ é categoria nãosingular à direita.*

(*ii*) *Para cada $A \in \mathcal{C}_0$ tal que $\bigoplus_{A' \in \mathcal{C}'_0} \mathcal{C}(A, A') \neq 0$, se $B \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A, B)$ então existem $B' \in \mathcal{C}'_0$ e $h \in \mathcal{C}(B, B')$ tais que $h \circ f \neq 0$.*

Então $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C}')$ é a subcategoria plena de $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C})$ cujo conjunto de objetos é $\mathcal{C}'_0$.

Demonstração. Segue do Teorema 3.1.38 aplicado ao anel $R := R[\mathcal{C}]$ e ao conjunto de idempotentes $\Delta_0 := \{(A', A') : A' \in \mathcal{C}'_0\}$. ■

Temos o seguinte resultado sobre $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C})$ para certas categorias $\mathcal{C}$.

Proposição 3.1.87. *As seguinte afirmações valem para uma categoria pré-aditiva pequena $\mathcal{C}$.*

(1) *Se $\mathcal{C}$ é categoria semissimples então $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.*

(2) *Se $\mathcal{C}$ é categoria simples (resp. prima, semiprima) então $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C})$ também é.*

(3) *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria prima em que todo morfismo não nulo é epimorfismo e monomorfismo então $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C})$ é uma categoria simples.*

Demonstração. (1) Se $\mathcal{C}$ é categoria semissimples então, pela Proposição 2.3.40, $R[\mathcal{C}]$ é um anel gr-semissimples e segue de (Cala *et al.*, 2022, Proposition 59) que $R[\mathcal{C}]_{R[\mathcal{C}]}$ é gr-injetivo. O resultado então segue do Corolário 3.1.15.

(2) Segue imediatamente da Proposição 3.1.21.

(3) É consequência imediata da Proposição 3.1.55(1). ■

Seguem versões dos Teoremas 3.1.50, 3.1.68 e 3.1.69 e do Corolário 3.1.70 para categorias pré-aditivas pequenas.

Teorema 3.1.88. *As seguintes afirmações valem para uma categoria pré-aditiva pequena $\mathcal{C}$.*

(1) *$\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C})$ é uma categoria regular de von Neumann se, e somente se, $\mathcal{C}$ é uma categoria nãosingular à direita.*

(2) *$\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C})$ é uma categoria semissimples se, e somente se, $\mathcal{C}$ é uma categoria nãosingular à direita e de dimensão uniforme finita à direita.*

(3) *$\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C})$ é uma categoria com divisão se, e somente se, $\mathcal{C}$ é uma categoria uniforme à direita em que todo morfismo não nulo é monomorfismo e epimorfismo.*

(4) *$\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C})$ é uma categoria com divisão se, e somente se, $\mathcal{C}$ é uma categoria uniforme à direita e nãosingular à direita.* ■

Corolário 3.1.89. *As seguintes afirmações valem para uma categoria pré-aditiva pequena $\mathcal{C}$.*

(1) *$\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C})$ é uma categoria artiniana simples se $\mathcal{C}$ é uma categoria prima nãosingular à direita e de dimensão uniforme finita à direita.*

(2) *Todo funtor aditivo* $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C}) \to \mathcal{A}b$ *é livre se* $\mathcal{C}$ *é uma categoria prima nãosingular à direita de dimensão uniforme finita à direita e existe* $X \in \mathcal{C}_0$ *tal que, para cada* $A, B \in \mathcal{C}_0$*,* $0 \neq f \in \mathcal{C}(A,X)$ *e* $0 \neq g \in \mathcal{C}(B,X)$*, temos* $0 \neq f \circ h_1 = g \circ h_2$ *para alguns* $h_1 \in \mathcal{C}(D,A)$*,* $h_2 \in \mathcal{C}(D,B)$ *e* $D \in \mathcal{C}_0$*.*

(3) $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C})$ *é uma categoria com divisão simples se* $\mathcal{C}$ *é uma categoria prima uniforme à direita em que todo morfismo não nulo é monomorfismo e epimorfismo.*

(4) $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C})$ *é uma categoria com divisão simples se* $\mathcal{C}$ *é uma categoria prima uniforme à direita e nãosingular à direita.* ■

3.2 O anel de quocientes graduado de Martindale

Como vimos no Teorema 3.1.10, o anel de quocientes à direita graduado maximal está diretamente relacionado com a família $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. O anel de quocientes estudado na presente seção está relacionado com a família de ideais definida a seguir.

Definição 3.2.1. Se R é um anel Γ-graduado, denotaremos por $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ (resp. $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$) a família dos ideais graduados I de R tais que $I_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$ (resp. ${}_R I \leq_{\text{gr-den}} {}_R R$).

Lembramos que a família $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ (resp. $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$) é fechada para intersecções finitas (Proposição 2.8.11(1)) e para produtos finitos (Proposição 2.8.18(3)). Além disso, pela Proposição 2.8.18(4), $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ (resp. $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$) é o conjunto dos ideais graduados I de R tais que $\mathrm{l.ann}_R(I) = 0$ (resp. $\mathrm{r.ann}_R(I) = 0$). Estes fatos serão usados várias vezes no que segue sem menção direta.

A seguir, definimos o objeto de estudo desta seção.

Definição 3.2.2. Seja R um anel Γ-graduado. Definimos o *anel de quocientes à direita* Γ*-graduado de Martindale de* R por

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) := \{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) : qI \subseteq R \text{ para algum } I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)\}.$$

Definimos o *anel de quocientes à esquerda* Γ*-graduado de Martindale de* R por

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-Mart}}(R) :=& \{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R) : Iq \subseteq R \text{ para algum } I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)\} \\ =& \left(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R^{op})\right)^{op}.\end{aligned}$$

O resultado a seguir mostra que, de fato, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ é um anel (de quocientes à direita) Γ-graduado.

Proposição 3.2.3. *Seja* R *um anel* Γ*-graduado. Então* $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ *é subanel graduado de* $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ *e contém* R*.*

Demonstração. Como $R \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$, é claro que $R \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$. Vejamos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ é subanel graduado de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$. Sejam $q, q' \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ e $I, I' \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$

tais que $qI, q'I' \subseteq R$. Então $I \cap I', I'I \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ são tais que

$$(q+q')(I \cap I') \subseteq qI + q'I' \subseteq R \quad \text{e} \quad qq'(I'I) \subseteq qRI \subseteq qI \subseteq R\,.$$

Logo, $q+q', qq' \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$. Suponha agora que $q = q_1 + \cdots + q_n$ com $q_i \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_{\gamma_i}$ e $\gamma_1, ..., \gamma_n \in \Gamma$ dois a dois distintos. Dado $x \in \mathrm{h}(I)$, temos $q_1x + \cdots + q_nx = qx \in R$. Como R é subanel graduado de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ e $q_1x, ..., q_nx$ são elementos homogêneos de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ com graus dois a dois distintos, segue que $q_1x, ..., q_nx \in R$. Logo, $q_1I, ..., q_nI \subseteq R$ e, portanto, $q_1, ..., q_n \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$. ■

De forma análoga, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.2.4. *Se R é um anel Γ-graduado então $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ é subanel graduado de $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R)$ e contém R.* ■

Semelhantemente ao anel de quocientes graduado maximal, temos a seguinte caracterização do anel de quocientes graduado de Martindale, inspirada em (Lam, 1999, Proposition 14.9).

Teorema 3.2.5. *Seja R um anel Γ-graduado. Temos um anel Γ-graduado*

$$\widehat{R} := \left(\bigcup_{I \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)} \mathrm{HOM}(I_R, R_R) \right) \Big/ \sim$$

cuja componente homogênea de grau $\gamma \in \Gamma$ é

$$\widehat{R}_\gamma := \left(\bigcup_{I \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)} \mathrm{HOM}(I_R, R_R)_\gamma \right) \Big/ \sim$$

onde, dados $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$, $g_1 \in \mathrm{HOM}_R(I_1, R)$ e $g_2 \in \mathrm{HOM}_R(I_2, R)$, temos

- $g_1 \sim g_2 \iff g_1|_{I_1 \cap I_2} = g_2|_{I_1 \cap I_2}$;
- $[g_1] + [g_2] := [g_1|_{I_1 \cap I_2} + g_2|_{I_1 \cap I_2}]$;
- $[g_1] \cdot [g_2] := [g_1 \circ (g_2|_{I_2 I_1})]$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) &\longrightarrow \widehat{R} \\ q &\longmapsto \begin{bmatrix} I \to R \\ x \mapsto qx \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde $I \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ é tal que $qI \subseteq R$, é um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados cuja restrição a R é o gr-isomorfismo canônico $R \to \mathrm{END}(R_R)$.

Demonstração. A verificação de que $\sim$ é uma relação de equivalência e $(\widehat{R},+)$ é um grupo abeliano Γ-graduado segue o mesmo argumento da prova do Teorema 3.1.10. Vejamos que a multiplicação está bem definida. Sejam $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e

$g_i \in \mathrm{HOM}_R(I_i, R)$ $(i = 1, 2)$. Temos $I_2 I_1 \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e $g_2(I_2 I_1) = g_2(I_2)I_1 \subseteq I_1$. Então podemos considerar a classe $[g_1 \circ g_2|_{I_2 I_1}]$. Suponha que, para cada $i \in \{1, 2\}$, $I'_i \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e $g'_i \in \mathrm{HOM}_R(I'_i, R)$ são tais que $g_i \sim g'_i$. Temos que g_2 e g'_2 coincidem em $I_2 \cap I'_2$ e, portanto, coincidem em $I_2 I_1 \cap I'_2 I'_1$. Como $g_2(I_2 I_1) \subseteq I_1$, $g'_2(I'_2 I'_1) \subseteq I'_1$ e g_1 coincide com g'_1 em $I_1 \cap I'_1$, segue que $g_1 \circ g_2$ e $g'_1 \circ g'_2$ coincidem em $I_2 I_1 \cap I'_2 I'_1$, como queríamos.

Agora, verificamos que a multiplicação é associativa e distributiva com a adição. Sejam $I_1, I_2, I_3 \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e $g_i \in \mathrm{HOM}_R(I_i, R)$ $(i = 1, 2, 3)$.

- Associatividade:

$$\begin{aligned}([g_1] \cdot [g_2]) \cdot [g_3] &= [g_1 \circ (g_2|_{I_2 I_1})] \cdot [g_3] \\ &= [g_1 \circ g_2 \circ g_3|_{I_3 I_2 I_1}] \\ &= \left[g_1 \circ (g_2 \circ g_3)|_{(I_3 I_2) I_1}\right] \\ &= [g_1] \cdot ([g_2] \cdot [g_3])\,.\end{aligned}$$

- Distributividade à direita:

$$\begin{aligned}([g_1] + [g_2]) \cdot [g_3] &= [g_1|_{I_1 \cap I_2} + g_2|_{I_1 \cap I_2}] \cdot [g_3] \\ &= \left[(g_1 + g_2) \circ \left(g_3|_{I_3(I_1 \cap I_2)}\right)\right] \\ &= [(g_1 \circ g_3)|_{I_3 I_1 \cap I_3 I_2} + (g_2 \circ g_3)|_{I_3 I_1 \cap I_3 I_2}] \\ &= [(g_1 \circ g_3)|_{I_3 I_1}] + [(g_2 \circ g_3)|_{I_3 I_2}] \\ &= [g_1] \cdot [g_3] + [g_2] \cdot [g_3]\,,\end{aligned}$$

pois $I_3(I_1 \cap I_2) \subseteq I_3 I_1 \cap I_3 I_2$.

- Distributividade à esquerda:

$$\begin{aligned}[g_3] \cdot ([g_1] + [g_2]) &= [g_3] \cdot [g_1|_{I_1 \cap I_2} + g_2|_{I_1 \cap I_2}] \\ &= \left[g_3 \circ (g_1 + g_2)|_{(I_1 \cap I_2) I_3}\right] \\ &= [(g_3 \circ g_1)|_{I_1 I_3 \cap I_2 I_3} + (g_3 \circ g_2)|_{I_1 I_3 \cap I_2 I_3}] \\ &= [(g_3 \circ g_1)|_{I_1 I_3}] + [(g_3 \circ g_2)|_{I_2 I_3}] \\ &= [g_3] \cdot [g_1] + [g_3] \cdot [g_2]\,,\end{aligned}$$

pois $(I_1 \cap I_2) I_3 \subseteq I_1 I_3 \cap I_2 I_3$.

Agora, vejamos que $\widehat{R} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \widehat{R}_\gamma$ é um anel Γ-graduado. A verificação de que, para todos $\sigma, \tau \in \Gamma$, temos $\widehat{R}_\sigma \widehat{R}_\tau \subseteq \widehat{R}_{\sigma\tau}$, é totalmente análoga a da prova do Teorema 3.1.10. Além disso note que, para cada $e \in \Gamma_0$, o anel $\widehat{R}_e$ tem como unidade a classe $[\mathbb{1}_e]$ da projeção $\mathbb{1}_e \in \mathrm{END}(R_R)_e$. E, para cada $\gamma \in \Gamma$, $I \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e $g \in \mathrm{HOM}(I_R, R_R)_\gamma$, temos

$$[g][\mathbb{1}_{d(\gamma)}] = [g \circ \mathbb{1}_{d(\gamma)}|_{RI}] = [g|_I] = [g] = [g|_I] = [\mathbb{1}_{r(\gamma)} \circ g|_{IR}] = [\mathbb{1}_{r(\gamma)}][g].$$

Portanto, $\widehat{R}$ é um anel Γ-graduado.

Por fim, vejamos que Φ é um gr-isomorfismo de anéis. Seja $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$. Se $I, I' \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ são tais que $qI, qI' \subseteq R$ então a Proposição 2.8.27(1) nos diz que

$$\begin{bmatrix} I \to R \\ x \mapsto qx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I' \to R \\ x \mapsto qx \end{bmatrix}.$$

Logo, $\Phi(q)$ está bem definido. Claramente, Φ é um gr-homomorfismo de anéis Γ-graduados. Se $q \in \mathrm{h}(\ker \Phi)$ então, como $qI = 0$, $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ e $I \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$, segue do Teorema 3.1.12 que $q = 0$. Logo, Φ é injetor. A sobrejetividade de Φ segue do fato que se $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e $g \in \mathrm{HOM}_R(I_R, R_R)$ então, pelo Corolário 3.1.13, existe $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ tal que $g(x) = qx$ para todo $x \in I$. Em particular, $qI = g(I) \subseteq R$ e, portanto, $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$. ■

O Teorema 3.2.5 nos ajuda a obter a seguinte caracterização axiomática de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$, que generaliza (Lam, 1999, Proposition 14.24).

Teorema 3.2.6. *Sejam R e Q anéis Γ-graduados. Existe um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) \to Q$ cuja restrição a R é a função identidade se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:*

(i) *R é subanel graduado de Q.*

(ii) *Para cada $q \in \mathrm{h}(Q)$, existe $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tal que $qI \subseteq R$.*

(iii) *Se $q \in \mathrm{h}(Q)$, $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e $qI = 0$ então $q = 0$.*

(iv) *Para cada $\gamma \in \Gamma$, $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e $g \in \mathrm{HOM}(I_R, R_R)_\gamma$, existe $q \in Q_\gamma$ tal que $g(x) = qx$ para todo $x \in I$.*

Demonstração. Primeiramente notemos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ satisfaz as condições $(i) - (iv)$. (i) é claro, (ii) segue da definição e $(iii) - (iv)$ segue de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$, $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R) \subseteq \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e do Teorema 3.1.12. Logo qualquer anel Γ-graduado gr-isomorfo a $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ sobre R também satisfará $(i) - (iv)$.

Reciprocamente, suponha que Q satisfaz $(i) - (iv)$. Seja $q \in \mathrm{h}(Q)$. Por (ii), existe $I^q \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tal que $qI^q \subseteq R$. Considere o homomorfismo $m_q \in \mathrm{HOM}_R(I^q, R)_{\deg q}$ dado por multiplicação à esquerda por q. Note que se $I' \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ também satisfaz $qI' \subseteq R$ então $\begin{bmatrix} I' \to R \\ x \mapsto qx \end{bmatrix} = [m_q]$ no anel $\widehat{R}$ do Teorema 3.2.5. Então temos bem definido um $\varphi : Q \to \widehat{R}$ dado por $\varphi(q) = [m_q]$. É fácil ver que φ é um gr-homomorfismo de anéis Γ-graduados. Além disso, φ é injetor por (iii) e é sobrejetor por (iv). Por (i), podemos considerar $\varphi|_R$ e este é precisamente o gr-isomorfismo canônico $R \to \mathrm{END}(R_R)$. Então, compondo φ^{-1} com o gr-isomorfismo Φ do Teorema 3.2.5, obtemos um gr-isomorfismo de anéis $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) \to Q$ cuja restrição a R é a função identidade de R. ■

Com o mesmo raciocínio da prova do Teorema 3.1.16, temos a seguinte caracterização axiomática de $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-Mart}}(R) = (\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R^{op}))^{op}$, semelhante a (Jespers e Wauters, 1988, Proposition 1.4).

Teorema 3.2.7. *Sejam R e Q anéis Γ-graduados. Existe um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-Mart}}(R) \to Q$ cuja restrição a R é a função identidade se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:*

(*i*) *R é subanel graduado de Q.*

(*ii*) *Para cada $q \in \mathrm{h}(Q)$, existe $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ tal que $Iq \subseteq R$.*

(*iii*) *Se $q \in \mathrm{h}(Q)$, $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ e $Iq = 0$ então $q = 0$.*

(*iv*) *Para cada $\gamma \in \Gamma$, $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ e $g \in \mathrm{HOM}({}_RI, {}_RR)_\gamma$, existe $q \in Q_\gamma$ tal que $(x)g = xq$ para todo $x \in I$.* ■

Também podemos usar o Teorema 3.2.6 para estudar quando ocorre que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) = R$.

Corolário 3.2.8. *Seja R um anel Γ-graduado. Então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) = R$ se, e somente se, para cada $\gamma \in \Gamma$, $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e $g \in \mathrm{HOM}(I_R, R_R)_\gamma$, existe $a \in R_\gamma$ tal que $g(x) = ax$ para todo $x \in I$.* ■

Corolário 3.2.9. *Se R é um anel Γ-graduado tal que R é anel gr-simples ou R_R é gr-injetivo então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) = R$.* ■

O anel de quocientes à direita graduado de Martindale também tem a seguinte propriedade, que segue imediatamente do Corolário 2.8.23 e da Proposição 3.1.24(1).

Teorema 3.2.10. *Se R é um anel Γ-graduado gr-primo (resp. gr-semiprimo) então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ também é.* ■

O resultado a seguir, inspirado em (Lam, 1999, Corollary 14.2), sugere que os anéis de quocientes graduados de Martindale de anéis gr-semiprimos são especiais.

Proposição 3.2.11. *Sejam R um anel gr-semiprimo e I um ideal graduado de R. São equivalentes:*

(1) $\mathrm{ann}_R(I) = 0$.

(2) $I_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$.

(3) ${}_RI \leq_{\text{gr-den}} {}_RR$.

(4) $I_R \leq_{\text{gr-ess}} R_R$.

(5) ${}_RI \leq_{\text{gr-ess}} {}_RR$.

(6) *$I \cap J \neq 0$ para todo J ideal graduado não nulo de R.*

Demonstração. A equivalência (1) $\iff$ (2) segue da Proposição 2.8.18(4) e do Lema 2.1.9(1). De forma análoga se verifica que (1) $\iff$ (3).

As implicações (2) $\implies$ (4) $\implies$ (6) e (3) $\implies$ (5) $\implies$ (6) são óbvias.

Por fim, (6) $\implies$ (1) segue de R ser anel gr-semiprimo e $(I \cap \mathrm{ann}_R(I))^2 = 0$. ■

Corolário 3.2.12. *As seguintes afirmações valem para um anel Γ-graduado R.*

(1) *Se R é anel gr-semiprimo então $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R) = \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R) =: \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}(R)$.*

(2) *Se R é anel gr-semiprimo e I é ideal graduado de R então $I \oplus \mathrm{ann}_R(I) \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}(R)$.*

(3) *Se R é anel gr-primo então $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}(R)$ é o conjunto dos ideais graduados não nulos de R.*

Demonstração. (1) Segue imediatamente da Proposição 3.2.11.

(2) Seja R um anel gr-semiprimo e I um ideal graduado de R. Como $(I \cap \mathrm{ann}_R(I))^2 = 0$, temos que $I \cap \mathrm{ann}_R(I) = 0$. Considere o ideal graduado $X := \mathrm{ann}_R(I \oplus \mathrm{ann}_R(I))$ de R. Note que

$$IX = 0 \implies X \subseteq \mathrm{ann}_R(I) \implies X^2 \subseteq X\,\mathrm{ann}_R(I) = 0\,.$$

Como R é anel gr-semiprimo, temos que $X = 0$ e segue da Proposição 3.2.11 que $I \oplus \mathrm{ann}_R(I) \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}(R)$.

(3) Segue da Proposição 3.2.11 e do Lema 2.1.9(2). ∎

Quando R é anel gr-semiprimo, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ satisfaz propriedades um pouco mais fortes que os itens (*iii*) e (*iv*) do Teorema 3.2.6.

Proposição 3.2.13. *Seja R um anel gr-semiprimo.*

(1) *Sejam $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ e $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}(R)$. Se $qI = 0$ ou $Iq = 0$ então $q = 0$.*

(2) *Sejam I um ideal graduado de R, $\gamma \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}(I_R, R_R)_\gamma$. Então existe $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)_\gamma$ tal que $g(x) = qx$ para todo $x \in I$.*

Demonstração. (1) Só precisamos mostrar que $Iq = 0$ implica $q = 0$. Suponha $Iq = 0$ e tome $I' \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tal que $qI' \subseteq R$. Então

$$I(qI') = (Iq)I' = 0 \implies qI' \subseteq \mathrm{ann}_R(I) = 0 \implies q = 0\,.$$

(2) Pelo Corolário 3.2.12(2), $I \oplus \mathrm{ann}_R(I) \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}(R)$. Estendemos g a $I \oplus \mathrm{ann}_R(I)$ definindo $g(\mathrm{ann}_R(I)) = 0$. Então, pelo Teorema 3.2.6, existe $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)_\gamma$ tal que $g(x) = qx$ para todo $x \in I \oplus \mathrm{ann}_R(I)$. ∎

Nossa próxima Proposição, inspirada em (Lam, 1999, Theorem 14.14), mostrará que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ também é o anel de quocientes à direita graduado de Martindale de certos subaneis graduados de R. Precisaremos do seguinte Lema.

Lema 3.2.14. *Sejam R um anel Γ-graduado, $U \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e T um subanel graduado de R tal que $U \subseteq T$. Temos:*

(1) *Se $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ então $UIU \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(T)$.*

(2) *Se $J \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(T)$ então $UJU \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$.*

(3) *R é um anel gr-simples (resp. gr-primo, gr-semiprimo) se, e somente se, T é um anel gr-simples (resp. gr-primo, gr-semiprimo) e $U \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$.*

Demonstração. (1) Seja $I \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$. Note que $UIU \subseteq URU \subseteq U \subseteq T$ e, portanto, UIU é um ideal graduado de T. Como $I, U \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$, segue da Proposição 2.8.18 que

$$UIU \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R) \implies \mathrm{r.ann}_T(UIU) \subseteq \mathrm{r.ann}_R(UIU) = 0 \implies UIU \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(T)\,.$$

(2) Seja $J \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(T)$. É claro que UJU é ideal graduado de R. Além disso, pela Proposição 2.8.18(4), temos que

$$\begin{aligned} r \in \mathrm{l.ann}_R(UJU) &\implies rUJ \subseteq \mathrm{l.ann}_R(U) = 0 \\ &\implies rU \subseteq \mathrm{l.ann}_T(J) = 0 \\ &\implies r \in \mathrm{l.ann}_R(U) = 0\,. \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{l.ann}_R(UJU) = 0$ e segue que $UJU \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$.

(3) Se R é um anel gr-simples (resp. gr-primo, gr-semiprimo) então T é um anel gr-simples (resp. gr-primo, gr-semiprimo) pela Proposição 2.8.22 e, como R é anel gr-semiprimo, $U \in \mathcal{I}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R)$ pelo Corolário 3.2.12(1).

Para a recíproca, basta notarmos que se I é um ideal graduado não nulo de R então UIU é um ideal graduado de T (como vimos em (1)), $UIU \subseteq RIR = I$ e, se $U \in \mathcal{I}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R)$, temos $UIU \neq 0$. Este último segue de

$$UIU = 0 \implies UI \subseteq \mathrm{l.ann}_R(U) = 0 \implies I \subseteq \mathrm{r.ann}_R(U) = 0\,. \qquad \blacksquare$$

Proposição 3.2.15. *Sejam R um anel Γ-graduado, $U \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e T um subanel graduado de R tal que $U \subseteq T$. Então $\mathrm{Q}_{\text{gr-Mart}}^{\mathrm{d}}(T) \cong_{\mathrm{gr}} \mathrm{Q}_{\text{gr-Mart}}^{\mathrm{d}}(R)$ sobre T.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.23(1), existe um gr-isomorfismo de anéis $\varphi : \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}(T) \to \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}(R)$ que estende a função identidade de T. Basta mostrarmos que $\varphi(\mathrm{Q}_{\text{gr-Mart}}^{\mathrm{d}}(T)) = \mathrm{Q}_{\text{gr-Mart}}^{\mathrm{d}}(R)$.

($\subseteq$): Seja $q \in \mathrm{Q}_{\text{gr-Mart}}^{\mathrm{d}}(T)$ e $J \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(T)$ tal que $qJ \subseteq T$. Pelo Lema 3.2.14(2), temos $UJU \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$. Além disso,

$$\varphi(q)UJU \subseteq \varphi(q)TJT = \varphi(q)J = \varphi(q)\varphi(J) = \varphi(qJ) \subseteq \varphi(T) = T \subseteq R$$

e, portanto, $\varphi(q) \in \mathrm{Q}_{\text{gr-Mart}}^{\mathrm{d}}(R)$.

($\supseteq$): Seja $q \in \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}(T)$ tal que $\varphi(q) \in \mathrm{Q}_{\text{gr-Mart}}^{\mathrm{d}}(R)$. Então existe $I \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ tal que $\varphi(q)I \subseteq R$. Pelo Lema 3.2.14(1), $UIU \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(T)$. Além disso, temos

$$\varphi(qUIU) = \varphi(q)\varphi(UIU) = \varphi(q)UIU \subseteq \varphi(q)RIU = \varphi(q)IU \subseteq RU = U \subseteq T$$

e segue que $qUIU \subseteq T$. Logo, $q \in \mathrm{Q}_{\text{gr-Mart}}^{\mathrm{d}}(T)$. $\blacksquare$

Observação 3.2.16. Note a semelhança entre o Teorema 3.1.23(1) e a Proposição 3.2.15. Mas como aqui T é subanel graduado de R e não de $\mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}(R)$, segue que o último resultado não implica que $\mathrm{Q}_{\text{gr-Mart}}^{\mathrm{d}}(\cdot)$ é uma operação de fecho. De fato, já no caso não graduado, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(\cdot)$ não é uma operação de fecho, de acordo com (Lam, 1999, p. 400). ■

Para o anel de quocientes graduado de Martindale temos a seguinte versão do Teorema 3.1.20.

Proposição 3.2.17. *Sejam R um anel Γ-graduado e $\varphi : R \to R$ um gr-isomorfismo de anéis. Então φ se estende unicamente a um gr-isomorfismo de anéis $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.20, φ se estende a um gr-isomorfismo de anéis $\psi : \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$. Seja $q \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R))$ e $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tal que $qI \subseteq R$. Então $\varphi(I) \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ é tal que

$$\psi(q)\varphi(I) = \psi(q)\psi(I) = \psi(qI) \subseteq \psi(R) = \varphi(R) = R$$

e segue que $\psi(q) \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$. Analogamente, se $q' \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R))$ então $\psi^{-1}(q') \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$. Logo, $\psi|_{\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)} : \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ é um gr-isomorfismo de anéis estendendo φ. A unicidade segue da Proposição 2.8.24. ■

Observação 3.2.18. Note que se o anel Γ-graduado R tem unidade então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(R)$, o anel de quocientes à direita de Martindale de R, pois $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R)$ e todo elemento de $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ é um ideal I de R tal que, pela Proposição 2.8.5, I_R é denso em R_R. ■

Podemos usar o Teorema 3.2.6 para, quando R tem unidade, enxergar explicitamente $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ dentro de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(R)$.

Proposição 3.2.19. *Seja R um anel Γ-graduado com unidade. Então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) = \bigoplus_{\sigma\in\Gamma} Q_\sigma$, onde, para cada $\sigma \in \Gamma$,*

$$Q_\sigma := \left\{x \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(R) : \textit{existe } I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R) \textit{ tal que } xI_\gamma \subseteq R_{\sigma\gamma} \textit{ para todo } \gamma \in \Gamma\right\}.$$

Demonstração. Com raciocínio semelhante ao da prova da Proposição 3.1.19, verifica-se que cada Q_σ é um subgrupo aditivo de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(R)$ contendo R_σ e a soma $\sum_{\sigma\in\Gamma} Q_\sigma$ é direta.

Suponha agora que $\sigma, \tau \in \Gamma$, $x \in Q_\sigma$, $y \in Q_\tau$ e $I, I' \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ são tais que $xI_\gamma \subseteq R_{\sigma\gamma}$ e $yI'_\gamma \subseteq R_{\tau\gamma}$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Então $I'I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ é tal que

$$xy(I'I)_\gamma = xy\left(\sum_{\alpha\beta=\gamma} I'_\alpha I_\beta\right) \subseteq \sum_{\alpha\beta=\gamma} xyI'_\alpha I_\beta \subseteq \sum_{\alpha\beta=\gamma} xR_{\tau\alpha} I_\beta \subseteq \sum_{\alpha\beta=\gamma} xI_{\tau\alpha\beta} = xI_{\tau\gamma} \subseteq R_{\sigma\tau\gamma},$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e, portanto, $xy \in Q_{\sigma\tau}$. Logo, $Q := \bigoplus_{\sigma\in\Gamma} Q_\sigma$ é subanel de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(R)$ e é anel Γ-graduado.

Agora, basta verificarmos que Q satisfaz $(ii)-(iv)$ no Teorema 3.2.6. (ii) segue da definição dos Q_σ. (iii) segue de $Q \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R)$ e de todo elemento de $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ ser um ideal à direita denso de R. (iv) se verifica de forma análoga ao feito na prova da Proposição 3.1.19. ■

3.2.1 O anel de quocientes graduado de Martindale de anéis graduados obtidos a partir de outros

Nesta subseção, procuramos obter resultados análogos aos da Subseção 3.1.1 para $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}$.

Nosso primeiro resultado é sobre o produto direto graduado.

Lema 3.2.20. *Seja $\{R_j : j \in J\}$ uma família de anéis graduados e considere $R := \prod^{gr}_{j\in J} R_j$. Se, para cada $j \in J$, $D_j \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R_j)$ então $\bigoplus_{j\in J} D_j \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$.*

Demonstração. Para cada $j \in J$, seja $D_j \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R_j)$ e considere o ideal à direita graduado $D := \bigoplus_{j\in J} D_j$ de R. Vejamos que $D_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$. Sejam $x = (x_j)_{j\in J}, y = (y_j)_{j\in J} \in \mathrm{h}(R)$ com $x \neq 0$. Tome $k \in J$ tal que $x_k \neq 0$. Então existe $r_k \in \mathrm{h}(R_k)$ tal que $x_k r_k \neq 0$ e $y_k r_k \in D_k$. Logo, $r := \iota_k(r_k) \in \mathrm{h}(R)$, onde $\iota_k : R_k \to R$ é a inclusão canônica, é tal que $xr = \iota_k(x_k r_k) \neq 0$ e $yr = \iota_k(y_k r_k) \in D$. ■

Teorema 3.2.21. *Seja $\{R_j : j \in J\}$ uma família de anéis Γ-graduados. Então*

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}\left(\prod^{gr}_{j\in J} R_j\right) = \prod^{gr}_{j\in J} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R_j)\,.$$

Demonstração. Seja $R := \prod^{gr}_{j\in J} R_j$. Pelo Teorema 3.1.28, temos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = \prod^{gr}_{j\in J} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R_j)$. Então, basta mostrarmos que

$$\left\{q \in \prod^{gr}_{j\in J} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R_j) : \text{existe } I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R) \text{ tal que } qI \subseteq R\right\} = \prod^{gr}_{j\in J} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R_j)\,.$$

$(\supseteq)$: Seja $q = (q_j)_{j\in J} \in \prod^{gr}_{j\in J} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R_j)$. Para cada $j \in J$, seja $I_j \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R_j)$ tal que $q_j I_j \subseteq R_j$. Considere o ideal graduado $I := \bigoplus_{j\in J} I_j$ de R. Pelo Lema 3.2.20, temos que $I_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$, isto é, $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Além disso, I é tal que $qI \subseteq \bigoplus_{j\in J} q_j I_j \subseteq R$.

$(\subseteq)$: Seja $q \in \prod^{gr}_{j\in J} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R_j)$ tal que $qI \subseteq R$ para certo $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Para cada $j \in J$, se $\pi_j : R \to R_j$ é a projeção canônica então, pelo Lema 3.1.27(1), o ideal graduado $\pi_j(I)$ é gr-denso em R_j como R_j-módulo à direita, ou seja, $\pi_j(I) \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$. Como $q_j\pi_j(I) = \pi_j(qI) \subseteq R_j$, segue que $q_j \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R_j)$ para todo $j \in J$. ■

Agora passamos aos anéis de matrizes.

Lema 3.2.22. *Seja R um anel Γ-graduado, $\overline{\Sigma} = (\Sigma_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\Gamma)^I$ uma sequência totalmente matricial para R e U um ideal à direita graduado de R. Então $\mathrm{M}_I(U) \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})) \iff U \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$.*

Demonstração. ($\Longleftarrow$): Suponha que $U \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e sejam $x = (x_{ij})_{ij}, y = (y_{ij})_{ij} \in \mathrm{h}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$ com $x \neq 0$. Tome $i, j \in I$ tais que $x_{ij} \neq 0$. Como $(y_{kj})_{k\in I}$ é uma sequência quase nula, segue do Lema 2.8.4 que existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $x_{ij}r \neq 0$ e $y_{kj}r \in U$ para todo $k \in I$. Então $rE_{jj} \in \mathrm{h}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$ é tal que $x(rE_{jj}) \neq 0$ e $y(rE_{jj}) \in \mathrm{M}_I(U)$. Portanto, $\mathrm{M}_I(U) \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$.

($\Longrightarrow$): Suponha que $\mathrm{M}_I(U) \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$ e sejam $x, y \in \mathrm{h}(R)$ com $x \neq 0$. Fixado $k \in I$, existe $a = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{h}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$ tal que $(xE_{kk})a \neq 0$ e $(yE_{kk})a \in \mathrm{M}_I(U)$. Tomando $l \in I$ tal que $xa_{kl} \neq 0$ temos que $ya_{kl} \in U$. Logo, $U \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. ■

Teorema 3.2.23. *Seja R um anel Γ-graduado e $\overline{\Sigma} = (\Sigma_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\Gamma)^I$ uma sequência totalmente matricial para R. Então $\overline{\Sigma}$ é sequência totalmente matricial para $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ e*

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}\left(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})\right) = \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R))(\overline{\Sigma})\,.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.30, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}\left(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})\right) = \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))(\overline{\Sigma})$ e, portanto, basta mostrarmos que

$$\begin{aligned}\{q \in \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))(\overline{\Sigma}) : \text{existe } V \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})) \text{ tal que } qV \subseteq \mathrm{M}_I(R)\}&\\ = \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R))(\overline{\Sigma})\,.&\end{aligned}$$

($\supseteq$): Seja $q \in \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R))(\overline{\Sigma})$. Para cada $i, j \in I$ tais que $q_{ij} \neq 0$, seja $U_{ij} \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tal que $q_{ij}U_{ij} \subseteq R$. Como só finitas entradas de q são não nulas, segue que $U := \bigcap\limits_{\substack{i,j\in I\\ q_{ij}\neq 0}} U_{ij} \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Considere o ideal graduado $V := \mathrm{M}_I(U)$. Pelo Lema 3.2.22, temos que $V \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$. Para cada $i, j \in I$ tal que $q_{ij} \neq 0$, temos $q_{ij}U \subseteq q_{ij}U_{ij} \subseteq R$ e, portanto, $qV \subseteq \mathrm{M}_I(R)$.

($\subseteq$): Seja $q \in \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))(\overline{\Sigma})$ tal que $qV \subseteq \mathrm{M}_I(R)$ para certo $V \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$. Pela Proposição 1.7.17, existe U ideal graduado de R tal que $V = \mathrm{M}_I(U)$ e, pelo Lema 3.2.22, $U \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$. Fixe $i, j \in I$. Para cada $x \in U$, temos que $q_{ij}x$ é a entrada (i, j) da matriz $q(xE_{jj}) \in q\,\mathrm{M}_I(U) = qV \subseteq \mathrm{M}_I(R)$ e, portanto, $q_{ij}x \in R$. Logo, $q_{ij}U \subseteq R$ e segue que $q_{ij} \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$. ■

Com prova análoga à do Corolário 3.1.31, temos o seguinte.

Corolário 3.2.24. *Se A é anel com unidade então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(\mathrm{M}_I(A)) = \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{Mart}}(A))$.* ■

Estudamos agora o anel de quocientes graduado de Martindale do anel de grupoide.

Lema 3.2.25. *Sejam A um anel com unidade e D um ideal à direita denso de A. Considere $D[\Gamma] := \bigoplus_{\sigma\in\Gamma} D\sigma$. Então $D[\Gamma] \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(A[\Gamma])$.*

Demonstração. É claro que $D[\Gamma]$ é um ideal à direita graduado de $A[\Gamma]$. Vejamos que $D[\Gamma]_{A[\Gamma]} \leq_{\text{gr-den}} A[\Gamma]_{A[\Gamma]}$. Sejam $x = a\gamma$ e $y = b\delta$ com $a, b \in A$ e $\gamma, \delta \in \Gamma$ tais que $a \neq 0$ e $d(\gamma) = d(\delta)$. Como $a \neq 0$ e D_A é denso em A_A, existe $t \in A$ tal que $at \neq 0$ e $bt \in D$. Então $td(\gamma) \in \mathrm{h}(A[\Gamma])$ é tal que $x(td(\gamma)) = (at)\gamma \neq 0$ e $y(td(\gamma)) = (bt)\delta \in D[\Gamma]$. ■

Teorema 3.2.26. *Seja A um anel com unidade. Então*

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(A[\Gamma]) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(A)[\Gamma]\,.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.33, temos $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(A[\Gamma]) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(A)[\Gamma]$. Portanto, basta mostrarmos que

$$\{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(A)[\Gamma] : \text{existe } I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(A[\Gamma]) \text{ tal que } qI \subseteq A[\Gamma]\} = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(A)[\Gamma]\,.$$

($\supseteq$): Seja $q = \sum_{\sigma\in\Gamma} q_\sigma\sigma \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(A)[\Gamma]$. Para cada $\sigma \in \Gamma$ tal que $q_\sigma \neq 0$, seja I^σ um ideal de A tal que I^σ_A é denso em A_A e $q_\sigma I^\sigma \subseteq A$. Então $I := \bigcap_{\sigma\in\mathrm{supp}(q)} I^\sigma$ é um ideal de A tal que I_A é denso em A_A. Note que $I[\Gamma]$ é um ideal graduado de $A[\Gamma]$ e, pelo Lema 3.2.25, $I[\Gamma] \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(A[\Gamma])$. Para cada $\sigma \in \Gamma$ tal que $q_\sigma \neq 0$, temos $q_\sigma I \subseteq q_\sigma I^\sigma \subseteq A$ e, portanto, $q(I[\Gamma]) \subseteq A[\Gamma]$.

($\subseteq$): Seja $q = \sum_{\sigma\in\Gamma} q_\sigma\sigma \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(A)[\Gamma]$ tal que $qI \subseteq A[\Gamma]$ para certo $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(A[\Gamma])$. Para cada $e \in \Gamma_0$, considere o ideal

$$I^e := \{a \in A : ae \in I\}$$

de A. Pelo Lema 3.1.32(1), I^e é um ideal à direita denso de A para todo $e \in \Gamma_0$. Para cada $\sigma \in \Gamma$ e $a \in I^{d(\sigma)}$ temos

$$\sum_{\tau\in\Gamma d(\sigma)} (q_\tau a)\tau d(\sigma) = \left(\sum_{\tau\in\Gamma} q_\tau\tau\right)(ad(\sigma)) = q(ad(\sigma)) \in qI \subseteq A[\Gamma]$$

e segue que $q_\sigma a \in A$. Logo, $q_\sigma I^{d(\sigma)} \subseteq A$ e temos $q_\sigma \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(A)$ para cada $\sigma \in \Gamma$. ■

Agora, vamos usar fidelidade em componentes homogêneas para estudar relações entre os anéis $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ e $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$ ($\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$).

Lema 3.2.27. *Sejam R um anel Γ-graduado e $\Delta_0 \subseteq \Gamma'_0(R)$ tais que valem as seguintes afirmações:*

(*i*) *Para cada $e' \in \Gamma_0$ tal que $1_{e'}R1_{\Delta_0} \neq 0$, $R(e')$ é Δ_0-fiel.*

(ii) Para cada $e' \in \Gamma_0$ tal que $1_{\Delta_0} R 1_{e'} \neq 0$, $(e')R$ é Δ_0-fiel.

Nessas condições, se $K \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(1_{\Delta_0} R 1_{\Delta_0})$ então $I := RKR \oplus \mathrm{l.\,ann}_R(RKR) \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e $I(\Delta_0) = KR$.

Demonstração. Seja $K \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(1_{\Delta_0} R 1_{\Delta_0})$. Vejamos que $RKR \cap \mathrm{l.\,ann}_R(RKR) = 0$. Primeiramente notemos que, para cada $e' \in \Gamma_0$, vale

$$1_{e'} R 1_{\Delta_0} \neq 0 \implies (\mathrm{l.\,ann}_R(RKR))(e') = 0\,. \tag{3.2.1}$$

De fato, suponha, por absurdo, que $1_{e'} R 1_{\Delta_0} \neq 0$ e $0 \neq a \in \mathrm{h}(\mathrm{l.\,ann}_R(RKR))(e'))$. Por (i), $R(e')$ é Δ_0-fiel e, portanto, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq ar \in R 1_{\Delta_0}$. Note que (ii) implica que $(\Delta_0)R$ é Δ_0-fiel, pois $(e)R$ é Δ_0-fiel para todo $e \in \Delta_0$. Então existe $s \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq sar \in 1_{\Delta_0} R 1_{\Delta_0}$. Como $\mathrm{l.\,ann}_R(RKR)$ é ideal graduado de R,

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{l.\,ann}_R(RKR) &\implies sar \in \mathrm{l.\,ann}_R(RKR) \\ &\implies sarRKR = 0 \\ &\implies sarK = 0 \\ &\implies sar \in \mathrm{l.\,ann}_{1_{\Delta_0} R 1_{\Delta_0}}(K) = 0\,, \end{aligned}$$

uma contradição. Então, para cada $\gamma \in \Gamma$, segue de (3.2.1) que

$$\begin{aligned} (\mathrm{l.\,ann}_R(RKR))_\gamma \neq 0 &\implies (\mathrm{l.\,ann}_R(RKR))(r(\gamma)) \neq 0 \\ &\implies 1_{r(\gamma)} R 1_{\Delta_0} = 0 \\ &\implies (RKR)_\gamma \subseteq 1_{r(\gamma)} RKR = 1_{r(\gamma)} R 1_{\Delta_0} KR = 0\,. \end{aligned}$$

Logo, $RKR \cap \mathrm{l.\,ann}_R(RKR) = 0$ e podemos considerar o ideal graduado $I := RKR \oplus \mathrm{l.\,ann}_R(RKR)$.

Vejamos que $I \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$, isto é, $\mathrm{l.\,ann}_R(I) = 0$. Note que $\mathrm{l.\,ann}_R(I) = \mathrm{l.\,ann}_R(RKR) \cap \mathrm{l.\,ann}_R(\mathrm{l.\,ann}_R(RKR))$. Suponhamos que $0 \neq a \in \mathrm{l.\,ann}_R(RKR)_\sigma$ para certo $\sigma \in \Gamma$ e mostremos que $a \notin \mathrm{l.\,ann}_R(\mathrm{l.\,ann}_R(RKR))$. De forma semelhante ao que fizemos no parágrafo anterior se prova que, para cada $e' \in \Gamma_0$, temos

$$1_{\Delta_0} R 1_{e'} \neq 0 \implies (e')(\mathrm{l.\,ann}_R(RKR)) = 0\,. \tag{3.2.2}$$

Se existisse $0 \neq x \in 1_{d(\sigma)} R 1_{\Delta_0}$ então, como $(\Delta_0)R$ é Δ_0-fiel, existiria $t \in \mathrm{h}(R)$ tal que $0 \neq tx \in 1_{\Delta_0} R 1_{\Delta_0}$ de onde teríamos $0 \neq t \in 1_{\Delta_0} R 1_{d(\sigma)}$ e, por (3.2.2), seguiria que $(d(\sigma))(\mathrm{l.\,ann}_R(RKR)) = 0$, uma contradição. Logo, $1_{d(\sigma)} R 1_{\Delta_0} = 0$ e segue que

$$1_{d(\sigma)} RKR = 1_{d(\sigma)} R 1_{\Delta_0} KR = 0 \implies 1_{d(\sigma)} \in \mathrm{l.\,ann}_R(RKR)\,.$$

Como $a 1_{d(\sigma)} = a \neq 0$, segue que $a \notin \mathrm{l.\,ann}_R(\mathrm{l.\,ann}_R(RKR))$, como queríamos.

Por fim, verifiquemos que $I(\Delta_0) = KR$. De fato, para cada $e \in \Delta_0$, temos $0 \neq 1_e R 1_e \subseteq 1_e R 1_{\Delta_0}$ e segue de (3.2.1) que $(\mathrm{l.\,ann}_R(RKR))(e) = 0$. Logo, $(\mathrm{l.\,ann}_R(RKR))(\Delta_0) = 0$ e temos

$$I(\Delta_0) = (RKR)(\Delta_0) = 1_{\Delta_0} RKR = 1_{\Delta_0} R 1_{\Delta_0} KR = KR\,. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.2.28. *Sejam R um anel Γ-graduado e $\Delta_0 \subseteq \Gamma'_0(R)$ tais que valem as seguintes afirmações:*

(i) Para cada $e' \in \Gamma_0$ tal que $1_{e'}R1_{\Delta_0} \neq 0$, $R(e')$ é Δ_0-fiel.

(ii) Para cada $e' \in \Gamma_0$ tal que $1_{\Delta_0}R1_{e'} \neq 0$, $(e')R$ é Δ_0-fiel.

Então

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}) = 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)1_{\Delta_0}\,.$$

Demonstração. Como (i) implica que $R(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel, segue do Teorema 3.1.38 que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}) = 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_{\Delta_0}$. Portanto, basta mostrarmos que

$$\begin{aligned}\{q \in 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_{\Delta_0} : \text{existe } K \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}) \text{ tal que } qK \subseteq 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}\}& \\ = 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)1_{\Delta_0}\,.&\end{aligned}$$

($\supseteq$): Seja $q \in 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)1_{\Delta_0}$, isto é, $q \in 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_{\Delta_0}$ e existe $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tal que $qI \subseteq R$. Então $1_{\Delta_0}I1_{\Delta_0}$ é ideal graduado de $1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ e segue do Corolário 2.8.29(2) que $1_{\Delta_0}I1_{\Delta_0} \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$. Além disso, $q1_{\Delta_0}I1_{\Delta_0} = qI1_{\Delta_0} \subseteq 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$.

($\subseteq$): Seja $q \in 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_{\Delta_0}$ tal que $qK \subseteq 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ para certo $K \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$. Pelo Lema 3.2.27, temos que $I := RKR \oplus \mathrm{l.ann}_R(RKR) \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e $I(\Delta_0) = KR$. Como $qI = q1_{\Delta_0}I = qKR \subseteq R$, segue que $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$. ■

Não conseguimos uma versão do Lema 3.2.27 com condições de fidelidade em componentes homogêneas de modo que, dados $e \in \Gamma_0$ e K um ideal de R_e que é denso como ideal à direita, obtém um $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tal que $I(e) = KR$. Portanto, não conseguimos uma versão do Teorema 3.2.28 com apenas condições de fidelidade em componentes homogêneas suficientes para que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{Mart}}(R_e) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)_e$ $(e \in \Gamma_0)$. Mas temos o seguinte resultado.

Corolário 3.2.29. *Sejam R um anel Γ-graduado e $e \in \Gamma_0$ tais que valem as seguintes afirmações:*

(i) Para cada $e' \in \Gamma_0$ tal que $1_{e'}R1_e \neq 0$, $R(e')$ é $\{e\}$-fiel.

(ii) Para cada $e' \in \Gamma_0$ tal que $1_eR1_{e'} \neq 0$, $(e')R$ é $\{e\}$-fiel.

(iii) $1_eR1_e = R_e$.

Então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{Mart}}(R_e) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)_e$.

Demonstração. Por (i) e (ii), podemos aplicar o Teorema 3.2.28 para $\Delta_0 := \{e\}$ e, junto com (iii), obter

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)_e = (1_e\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)1_e)_e = (\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(1_eR1_e))_e = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{Mart}}(R_e)\,.$$ ■

Dos itens (3) e (4) do Lema 1.8.7 temos a seguinte consequência do Teorema 3.2.28 e do Corolário 3.2.29.

Corolário 3.2.30. *Se R é anel fortemente Γ-graduado e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0'(R)$ (resp. $e \in \Gamma_0$ tal que $1_e R 1_e = R_e$) então $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(1_{\Delta_0} R 1_{\Delta_0}) = 1_{\Delta_0} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) 1_{\Delta_0}$ (resp. $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{Mart}}(R_e) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)_e$).* ■

Com argumento análogo ao usado no Corolário 3.1.40, obtemos o seguinte.

Corolário 3.2.31. *Temos $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}\left(\bigoplus_{e\in\Gamma_0} 1_e R 1_e\right) = \bigoplus_{e\in\Gamma_0} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(1_e R 1_e)$ para cada anel Γ-graduado R.* ■

O resultado a seguir é uma aplicação do Teorema 3.2.28 para Δ_0 unitário.

Teorema 3.2.32. *Sejam R um anel Γ-graduado tal que, para cada $e, f \in \Gamma_0$ com $1_e R 1_f \neq 0$, temos que $R(e)$ é $\{f\}$-fiel e $(f)R$ é $\{e\}$-fiel. Então*

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}\left(\bigoplus_{e\in\Gamma_0} 1_e R 1_e\right) = \bigoplus_{e\in\Gamma_0} 1_e \, \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) 1_e\,.$$

Demonstração. Fixe $e \in \Gamma_0$. Então, para cada $e' \in \Gamma_0$ tal que $1_e R 1_{e'} \neq 0$, temos que $R(e)$ é $\{e'\}$-fiel e $(e')R$ é $\{e\}$-fiel. Pelo Teorema 3.2.28, temos $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(1_e R 1_e) = 1_e \, \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) 1_e$. O resultado agora segue do Corolário 3.2.31. ■

3.2.2 Categoria de quocientes de Martindale

Assim como fizemos na seção anterior, nesta subseção traduzimos para a linguagem de categorias o que significa $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R[\mathcal{C}])$ onde $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena.

Da Subseção 3.1.5, já temos todas as ferramentas para traduzir a caracterização axiomática dada pelo Teorema 3.2.6 para a linguagem de categorias.

Definição 3.2.33. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva. Diremos que uma categoria pré-aditiva $\mathcal{Q}$ é uma *categoria de quocientes à direita de Martindale* de $\mathcal{C}$ se temos satisfeitas as seguintes condições:

- (i) $\mathcal{C}$ é subcategoria pré-aditiva de $\mathcal{Q}$ com $\mathcal{C}_0 = \mathcal{Q}_0$.
- (ii) Para cada $X, Y \in \mathcal{C}_0$ e $f \in \mathcal{Q}(X,Y)$, existe $\mathcal{I}$ ideal à direita denso de $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{I}$ é ideal de $\mathcal{C}$ e $f \circ h \in \mathcal{C}(A, Y)$ para todos $A \in \mathcal{C}_0$, $h \in \mathcal{I}(A, X)$.
- (iii) Para cada $X, Y \in \mathcal{C}_0$, $f \in \mathcal{Q}(X,Y)$ e $\mathcal{I}$ ideal à direita denso de $\mathcal{C}$, se $\mathcal{I}$ é ideal de $\mathcal{C}$ e $f \circ h = 0$ para todos $A \in \mathcal{C}_0$, $h \in \mathcal{I}(A, X)$ então $f = 0$.
- (iv) Para cada $\mathcal{I}$ ideal à direita denso de $\mathcal{C}$, $X, Y \in \mathcal{C}_0$ e $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ morfismo de ideais à direita de grau (X, Y), se $\mathcal{I}$ é ideal de $\mathcal{C}$ então existe $f \in \mathcal{Q}(Y, X)$ tal que $F = \mathcal{I}(-, f)$.

Observação 3.2.34. A definição acima não exige que a categoria seja pequena. Quando a categoria pré-aditiva $\mathcal{C}$ é pequena, podemos considerar a categoria $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{Mart}}(\mathcal{C})$ com o mesmo conjunto de objetos que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{Mart}}(\mathcal{C})(X,Y) := \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R[\mathcal{C}])_{(Y,X)}$ para cada $X, Y \in \mathcal{C}_0$. Note que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R[\mathcal{C}]) = R[\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{Mart}}(\mathcal{C})]$ e, para cada $X, Y \in \mathcal{C}_0$,

$\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})(X,Y)$ é o conjunto dos morfismos $f \in \mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(\mathcal{C})(X,Y)$ para os quais existe $\mathcal{I}$ ideal à direita denso de $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{I}$ é ideal de $\mathcal{C}$ e $f \circ h \in \mathcal{C}(A,Y)$ para todos $A \in \mathcal{C}_0$, $h \in \mathcal{I}(A,X)$. Raciocinando como fizemos na subseção 3.1.5, é fácil ver que uma categoria pré-aditiva pequena $\mathcal{Q}$ é uma categoria de quocientes à direita de Martindale de $\mathcal{C}$ se, e somente se, existe um gr-isomorfismo de anéis $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R[\mathcal{C}]) \to R[\mathcal{Q}]$ que estende a função identidade de $R[\mathcal{C}]$. Pela Proposição 3.1.76, esta última afirmação é equivalente a existência de um isomorfismo de categorias $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C}) \to \mathcal{Q}$ que é a identidade nos objetos e morfismos de $\mathcal{C}$. Portanto, $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})$ é a única categoria de quocientes à direita de Martindale de $\mathcal{C}$ a menos de um isomorfismo de categorias que é a identidade nos objetos e morfismos de $\mathcal{C}$. Semelhantemente, definimos a categoria de quocientes à esquerda de Martindale $\mathcal{Q}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})$ como a categoria pré-aditiva pequena tal que $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-Mart}}(R[\mathcal{C}]) = R[\mathcal{Q}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})]$. ■

Como consequência do Teorema 3.2.28 e do Corolário 3.2.29, podemos estudar as categorias de quocientes de Martindale de subcategorias plenas.

Teorema 3.2.35. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena e $X \in \mathcal{C}_0$ que satisfazem as seguintes propriedades:*

(i) *Para cada $B \in \mathcal{C}_0$ tal que $\mathcal{C}(X,B) \neq 0$, se $A \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A,B)$ então existe $h \in \mathcal{C}(X,A)$ tal que $f \circ h \neq 0$.*

(ii) *Para cada $A \in \mathcal{C}_0$ tal que $\mathcal{C}(A,X) \neq 0$, se $B \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A,B)$ então existe $h \in \mathcal{C}(B,X)$ tal que $h \circ f \neq 0$.*

Então $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})(X,X) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C}(X,X))$.

Demonstração. Imediato do Corolário 3.2.29 para $R := R[\mathcal{C}]$ e $e := (X,X)$. ■

Teorema 3.2.36. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena e $\mathcal{C}'$ uma subcategoria plena de $\mathcal{C}$. Suponha que:*

(i) *Para cada $B \in \mathcal{C}_0$ tal que $\bigoplus_{A' \in \mathcal{C}'_0} \mathcal{C}(A',B) \neq 0$, se $A \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A,B)$ então existem $X \in \mathcal{C}'_0$ e $h \in \mathcal{C}(X,A)$ tal que $f \circ h \neq 0$.*

(ii) *Para cada $A \in \mathcal{C}_0$ tal que $\bigoplus_{A' \in \mathcal{C}'_0} \mathcal{C}(A,A') \neq 0$, se $B \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A,B)$ então existem $X \in \mathcal{C}'_0$ e $h \in \mathcal{C}(B,X)$ tal que $h \circ f \neq 0$.*

Então $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C}')$ é a subcategoria plena de $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})$ cujo conjunto de objetos é $\mathcal{C}'_0$.

Demonstração. Segue do Teorema 3.2.28 para o anel $R := R[\mathcal{C}]$ e o conjunto de idempotentes $\Delta_0 := \{(A',A') : A' \in \mathcal{C}'_0\}$. ■

Temos as seguintes propriedades de $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}$.

Teorema 3.2.37. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena. Temos:*

(1) *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria simples ou semissimples então $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.*

(2) *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria prima (resp. semiprima) então $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})$ também é.*

Demonstração. (1) Suponha que $\mathcal{C}$ é categoria simples ou semissimples. Então $R[\mathcal{C}]$ é um anel gr-simples ou gr-semissimples. Como a gr-semissimplicidade de $R[\mathcal{C}]$ implica a gr-injetividade de $R[\mathcal{C}]_{R[\mathcal{C}]}$, segue do Corolário 3.2.9 que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R[\mathcal{C}]) = R[\mathcal{C}]$ e, portanto, $\mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

(2) Segue imediatamente do Teorema 3.2.10. ■

3.3 O anel de quocientes simétrico graduado maximal

O anel de quocientes graduado estudado nesta seção tem relação com ambas as famílias de ideais $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}$ e $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}$.

Definição 3.3.1. Seja R um anel Γ-graduado. Definimos o *anel de quocientes simétrico Γ-graduado maximal de R* por

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) := \{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) : Lq \subseteq R \text{ para algum } L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)\}\,.$$

A próxima Proposição mostra que, de fato, $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um anel Γ-graduado e, além disso, contém a intersecção dos anéis de quocientes graduados $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ e $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R)$. Precisaremos da seguinte generalização da Proposição 2.8.26(2).

Lema 3.3.2. *Suponha que R é subanel graduado de um anel Γ-graduado S e $s \in \mathrm{h}(S)$.*

1. *(1) Se $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ é tal que $sD \subseteq R$ então $s^{-1}D' := \{r \in R : sr \in D'\} \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ para todo $D' \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$.*
2. *(2) Se $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ é tal que $Ls \subseteq R$ então $L's^{-1} := \{r \in R : rs \in L'\} \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ para todo $L' \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$.*

Demonstração. (1) Sejam $D, D' \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ com $sD \subseteq R$. Claramente, $s^{-1}D'$ é um ideal à direita graduado de R. Sejam $x, y \in \mathrm{h}(R)$, $x \neq 0$. Como $D_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$, existe $r \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xr \neq 0$ e $yr \in D$. Agora, como $syr \in \mathrm{h}(sD) \subseteq \mathrm{h}(R)$ e $D'_R \leq_{\text{gr-den}} R_R$, existe $r' \in \mathrm{h}(R)$ tal que $xrr' \neq 0$ e $syrr' \in D'$. Logo, $rr' \in \mathrm{h}(R)$ é tal que $xrr' \neq 0$ e $yrr' \in s^{-1}D'$. Portanto $s^{-1}D' \leq_{\text{gr-den}} R_R$.

(2) Basta notar que $L's^{-1} = \{r \in R^{op} : s \cdot^{op} r \in (L')^{op}\}$ e aplicar (1) para R^{op} no lugar de R, $D := L^{op}$ e $D' := (L')^{op}$. ■

Proposição 3.3.3. *Seja R um anel Γ-graduado. Então $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$ é subanel graduado de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ e contém $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R) \cap \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.16, para cada $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R)$ existe $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ tal que $Lq \subseteq R$. Logo, $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R) \cap \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$. Vejamos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$ é subgrupo aditivo graduado de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$. Suponha que $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$ e $q = q_1 + \cdots + q_n$ com $q_i \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_{\gamma_i}$ e $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ dois a dois distintos. Tome $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ tal que $Lq \subseteq R$. Dado $x \in \mathrm{h}(L)$, temos $xq_1 + \cdots + xq_n = xq \in R$.

Como R é subanel graduado de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ e $xq_1, ..., xq_n$ são elementos homogêneos de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ com graus dois a dois distintos, segue que $xq_1, ..., xq_n \in R$. Logo, $Lq_1, ..., Lq_n \subseteq R$ e, portanto, $q_1, ..., q_n \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$. Resta verificarmos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$ é fechado para soma e multiplicação. Sejam $q, q' \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R))$ e $L, L' \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ tais que $Lq, L'q' \subseteq R$. Então $L \cap L' \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ é tal que $(L \cap L')(q + q') \subseteq Lq + L'q' \subseteq R$ e segue que $q + q' \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$. E, pelo Lema 3.3.2(2), $L'q^{-1} \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ é tal que $(L'q^{-1})qq' \subseteq L'q' \subseteq R$ de onde temos $qq' \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$. ∎

O anel de quocientes graduado $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}$ é "maximal" no seguinte sentido.

Teorema 3.3.4. *Sejam R um anel Γ-graduado e S um anel de quocientes à direita e à esquerda Γ-graduado de R. Então existe um único gr-homomorfismo de anéis $g : S \to \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$ estendendo a função identidade de R. Além disso, g é injetor.*

Demonstração. Como S é um anel de quocientes à direita graduado de R, temos do Teorema 3.1.4(1) um gr-homomorfismo de anéis $g : S \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ que estende a função identidade de R. Dado $s \in \mathrm{h}(S)$, como S é um anel de quocientes à esquerda graduado de R, segue do Corolário 2.8.21 que existe $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ tal que $Ls \subseteq R$ e, portanto,

$$Lg(s) = g(L)g(s) = g(Ls) \subseteq g(R) = R$$

de onde $g(s) \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$. Logo, $\operatorname{im} g \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$. A unicidade de g segue do Teorema 3.1.4(1). Já a injetividade de g segue do Teorema 3.1.4(2). ∎

Analogamente à Proposição 3.3.3, podemos mostrar que

$$\{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R) : qD \subseteq R \text{ para algum } D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)\}$$

é um subanel graduado de $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R)$ e contém $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R) \cap \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$. A caracterização a seguir mostrará que esse anel é gr-isomorfo a $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$ sobre R.

Teorema 3.3.5. *Sejam R e Q anéis Γ-graduados. Existe um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) \to Q$ cuja restrição a R é a função identidade se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:*

- (i) *R é subanel graduado de Q.*
- (ii) *Para cada $q \in \mathrm{h}(Q)$, existem $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ e $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tais que $Lq, qD \subseteq R$.*
- (iii) *Para cada $q \in \mathrm{h}(Q)$, $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ e $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$, se $Lq = 0$ ou $qD = 0$ então $q = 0$.*
- (iv) *Para cada $\gamma \in \Gamma$, $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$, $t \in \mathrm{HOM}({}_RL, {}_RR)_\gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}(D_R, R_R)_\gamma$ satisfazendo $(lt)d = l(gd)$ para todos $l \in L$ e $d \in D$, existe $q \in Q_\gamma$ tal que $(l)t = lq$ para todo $l \in L$ e $g(d) = qd$ para todo $d \in D$.*

Demonstração. Começamos verificando que $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$ satisfaz $(i)-(iv)$. A condição (i) está satisfeita pela Proposição 3.3.3. A condição (ii) segue da definição e do Teorema 3.1.12. Vejamos a condição (iii). Se $q \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R))$, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e $qD = 0$, segue do Teorema 3.1.12 que $q = 0$. Suponha que $q \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R))$,

$L \in \mathcal{D}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e $Lq = 0$. Pelo Teorema 3.1.12, existe $D' \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ tal que $qD' \subseteq R$. Então $qD' \subseteq \mathrm{r.ann}_R(L) = \mathrm{l.ann}_{R^{op}}(L^{op})$ e segue da Proposição 2.8.18(2) que $qD' = 0$. Portanto, $q = 0$, pelo Teorema 3.1.12. Agora, verificamos a condição (iv). Suponha que $\gamma \in \Gamma$, $L \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$, $D \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$, $t \in \mathrm{HOM}({}_RL, {}_RR)_\gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}(D_R, R_R)_\gamma$ são tais que $(lt)d = l(gd)$ para todos $l \in L$ e $d \in D$. Pelo Corolário 3.1.13, existe $q \in \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}(R)_\gamma$ tal que $g(d) = qd$ para todo $d \in D$. Logo, $(lt)d = l(gd) = lqd$ para todos $l \in L$, $d \in D$ e, portanto, $((l)t - lq)D = 0$ para todo $l \in L$. Como $(l)t - lq \in \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}(R)$, segue do Teorema 3.1.12 que $(l)t = lq$ para todo $l \in L$. De $Lq = \mathrm{im}\, t \subseteq R$, obtemos que $q \in \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)$. Portanto, $\mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)$ satisfaz $(i) - (iv)$ e segue que qualquer anel Γ-graduado gr-isomorfo a $\mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)$ sobre R também satisfará.

Reciprocamente, seja Q um anel Γ-graduado satisfazendo $(i) - (iv)$. Fixe $\gamma \in \Gamma$ e $q \in Q_\gamma$. Por (ii), existem $L \in \mathcal{D}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e $D \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ tais que $Lq, qD \subseteq R$. Temos então $t \in \mathrm{HOM}({}_RL, {}_RR)_\gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}(D_R, R_R)_\gamma$ dados por $(l)t = lq$ para todo $l \in L$ e $g(d) = qd$ para todo $d \in D$. Note que $(lt)d = (lq)d = l(qd) = l(gd)$ para todos $l \in L$ e $d \in D$. Como $\mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)$ satisfaz (iv), existe $\varphi(q) \in \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)_\gamma$ tal que $(l)t = l\varphi(q)$ para todo $l \in L$ e $g(d) = \varphi(q)d$ para todo $d \in D$. Tal $\varphi(q)$ é único, pois se $q' \in \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)_\gamma$ é tal que $(l)t = lq'$ para todo $l \in L$ então $L(\varphi(q) - q') = 0$ e segue de $\mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)$ satisfazer (iii) que $q' = \varphi(q)$. Vejamos que $\varphi(q)$ independe da escolha de L e D. De fato, se $\tilde{L} \in \mathcal{D}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R)$, $\tilde{D} \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$, $\tilde{L}q, q\tilde{D} \subseteq R$ e $\tilde{q} \in \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)_\gamma$ é tal que $lq = l\tilde{q}$ para todo $l \in \tilde{L}$ e $qd = \tilde{q}d$ para todo $d \in \tilde{D}$ então $(L \cap \tilde{L})(\varphi(q) - \tilde{q}) = 0$. Como $L \cap \tilde{L} \in \mathcal{D}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e $\mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)$ satisfaz (iii), isso implica que $\tilde{q} = \varphi(q)$. Agora, sejam $q' \in Q_\gamma$ e $L' \in \mathcal{D}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R)$, $D' \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ tais que $L'q', q'D' \subseteq R$. Então $(L \cap L')(q + q') \subseteq R$, $(q + q')(D \cap D') \subseteq R$ e, para todos $l \in L \cap L'$ e $d \in D \cap D'$, temos

$$l(q + q') = lq + lq' = l\varphi(q) + l\varphi(q') = l(\varphi(q) + \varphi(q'))\,;$$

$$(q + q')d = qd + q'd = \varphi(q)d + \varphi(q')d = (\varphi(q) + \varphi(q'))d\,.$$

Logo, $\varphi(q + q') = \varphi(q) + \varphi(q')$. Então, estendendo aditivamente, temos um gr-homomorfismo de grupos aditivos Γ-graduados $\varphi : Q \to \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)$. Vejamos que φ respeita produtos. Sejam $q, q' \in \mathrm{h}(Q)$ e $L, L' \in \mathcal{D}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R)$, $D, D' \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ tais que $Lq, L'q', qD, q'D' \subseteq R$. Pelo Lema 3.3.2, $L'q^{-1} \cap L \in \mathcal{D}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e $D' \cap q'^{-1}D \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$. Além disso, $(L'q^{-1} \cap L)(qq') \subseteq R$, $(qq')(D' \cap q'^{-1}D) \subseteq R$ e, para cada $l \in L'q^{-1} \cap L$ e $d \in D' \cap q'^{-1}D$, temos

$$l(qq') = (lq)q' = (lq)\varphi(q') = l\varphi(q)\varphi(q')\,;$$

$$(qq')d = q(q'd) = \varphi(q)(q'd) = \varphi(q)\varphi(q')d\,.$$

Logo, $\varphi(qq') = \varphi(q)\varphi(q')$. Agora note que, para cada $r \in \mathrm{h}(R)$, como $R \in \mathcal{D}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ é tal que $Rr, rR \subseteq R$, segue que $\varphi(r) = r$. Portanto, φ é um gr-homomorfismo de anéis cuja restrição a R é a função identidade. Por (iii), φ é injetor. Para finalizarmos, vejamos que φ é sobrejetor. Sejam $\gamma \in \Gamma$ e $\widehat{q} \in \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)_\gamma$. Como $\mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)$ satisfaz (ii), existem $L \in \mathcal{D}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e $D \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ tais que $L\widehat{q}, \widehat{q}D \subseteq R$. Temos então $t \in \mathrm{HOM}({}_RL, {}_RR)_\gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}(D_R, R_R)_\gamma$ dados por $(l)t = l\widehat{q}$ e $g(d) = \widehat{q}d$ tais que $(lt)d = l(gd)$ para todos $l \in L$ e $d \in D$. Por (iv), existe $q \in Q_\gamma$ tal que $(l)t = lq$ para todo $l \in L$ e $g(d) = qd$ para todo $d \in D$. Logo, $\widehat{q} = \varphi(q)$. ∎

Corolário 3.3.6. *Se R é um anel Γ-graduado então $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$ e $\{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R) : qD \subseteq R$ para algum $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)\}$ são gr-isomorfos sobre R.*

Demonstração. Basta verificar que o anel da direita satisfaz $(i) - (iv)$ no Teorema 3.3.5. Mas isto se verifica de forma totalmente análoga ao que foi feito no primeiro parágrafo da sua prova. ∎

Combinando o Teorema 3.3.5, a Proposição 2.8.20 e o Corolário 2.8.21 também temos a seguinte caracterização axiomática de $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$.

Corolário 3.3.7. *Sejam R e Q anéis Γ-graduados. Existe um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) \to Q$ cuja restrição a R é a função identidade se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:*

(i) Q é um anel de quocientes à direita e à esquerda Γ-graduado de R.

(ii) Para cada $\gamma \in \Gamma$, $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$, $t \in \mathrm{HOM}({}_RL, {}_RR)_\gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}(D_R, R_R)_\gamma$ satisfazendo $(lt)d = l(gd)$ para todos $l \in L$ e $d \in D$, existe $q \in Q_\gamma$ tal que $(l)t = lq$ para todo $l \in L$ e $g(d) = qd$ para todo $d \in D$. ∎

Temos o seguinte resultado sobre quando $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) = R$.

Proposição 3.3.8. *Se R é um anel Γ-graduado tal que R_R é gr-injetivo ou ${}_RR$ é gr-injetivo então $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) = R$.*

Demonstração. Se R_R é gr-injetivo segue do Corolário 3.1.15 que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = R$ e, portanto, $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) = R$. Por outro lado, se ${}_RR$ é gr-injetivo então $R^{op}_{R^{op}}$ é gr-injetivo e temos do Corolário 3.1.15 que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R^{op}) = R^{op}$. Portanto, $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R) = R$ e segue do Corolário 3.3.6 que $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) = R$. ∎

Também temos a seguinte versão do Teorema 3.1.23 para $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}$.

Teorema 3.3.9. *Sejam R um anel Γ-graduado, $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e S um subanel graduado de $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$ tal que $L, D \subseteq S$. Então*

(1) $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(S) \cong_{\mathrm{gr}} \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$ *sobre S.*

(2) $S = \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) \iff \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(S) = S$.

(3) $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)) = \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) = \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}\left(\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}}(R) \cap \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)\right)$.

Demonstração. (1) Pelo Teorema 3.1.23, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(S) \cong_{\mathrm{gr}} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ sobre S e então basta mostrarmos que

$$\{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) : Jq \subseteq S \text{ para algum } J \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(S)\} = \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R).$$

($\supseteq$): Seja $q \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R))$. Pelo Corolário 3.3.7, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um anel de quocientes à esquerda graduado de R. Então, pela Proposição 2.8.26(2), temos

$$(Lq^{-1})^{op} = \{a \in R^{op} : q \cdot^{op} a \in L^{op}\} \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R^{op})$$

e segue do Lema 3.1.22(2) que $(S(Lq^{-1} \cap L))^{op} = ((Lq^{-1})^{op} \cap L^{op}) \cdot^{op} S^{op} \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(S^{op})$. Logo, $J := S(Lq^{-1} \cap L) \in \mathcal{D}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(S)$ é tal que $Jq \subseteq S(Lq^{-1})q \subseteq SL \subseteq S$.

($\subseteq$): Sejam $q \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}(R))$ e $J \in \mathcal{D}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(S)$ tais que $Jq \subseteq S$. Como $L(J \cap R) \subseteq SJ = J$ e $Jq \subseteq S \subseteq \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)$, podemos considerar o seguinte homomorfismo de R-módulos à esquerda de grau $\deg q$

$$\begin{aligned} g : L(J \cap R) &\longrightarrow \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R) \\ x &\longmapsto xq\,. \end{aligned}$$

Como $\mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)$ é um anel de quocientes à esquerda graduado de R, obtemos de forma análoga à Proposição 2.8.27(2) que $g^{-1}(R) \leq_{\text{gr-den}} L(J \cap R)$ como R-módulos à esquerda. Como $J^{op} \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(S^{op})$, segue do Lema 3.1.22(1) que $(L(J \cap R))^{op} = (J^{op} \cap R^{op}) \cdot^{op} L^{op} \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R^{op})$, ou seja, $L(J \cap R) \in \mathcal{D}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R)$. Assim, $g^{-1}(R) \in \mathcal{D}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e é tal que $g^{-1}(R)q = g(g^{-1}(R)) \subseteq R$. Logo, $q \in \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)$.

(2) Se prova com o mesmo raciocínio usado no Teorema 3.1.23(2).

(3) Segue imediatamente de (2) e da Proposição 3.3.3. ■

Dos Corolários 2.8.23 e 3.3.7 temos o seguinte resultado.

Teorema 3.3.10. *Se R é um anel Γ-graduado gr-simples (resp. gr-primo, gr-semiprimo) então $\mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)$ também é.* ■

Temos ainda o seguinte resultado, cuja demonstração é uma adaptação da prova de (Lam, 1999, Proposition 14.12).

Teorema 3.3.11. *Seja R um anel Γ-graduado. Se R é um gr-domínio então $\mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)$ também é.*

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in \Gamma$ tais que $d(\alpha) = r(\beta)$ e $q \in \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)_\alpha$, $q \in \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)_\beta$ tais que $qq' = 0$. Pelo Teorema 3.3.5, existem $L \in \mathcal{D}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e $D \in \mathcal{D}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R)$ tais que $Lq, q'D \subseteq R$. Se R é um gr-domínio então $(Lq)(q'D) = Lqq'D = 0$ implica que $Lq = 0$ ou $q'D = 0$ e segue do Teorema 3.3.5 que $q = 0$ ou $q' = 0$. ■

Temos o seguinte resultado sobre extensão de gr-automorfismos.

Proposição 3.3.12. *Seja R um anel Γ-graduado e $\varphi : R \to R$ um gr-isomorfismo de anéis. Então φ se estende unicamente a um gr-isomorfismo de anéis $\mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R) \to \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R)$.*

Demonstração. O Teorema 3.1.20 nos diz que φ se estende a um gr-isomorfismo de anéis $\psi : \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}(R) \to \mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{d}}(R)$. Seja $q \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}_{\text{gr-max}}^{\mathrm{s}}(R))$ e tome $L \in \mathcal{D}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R)$ tal que $Lq \subseteq R$. Então $\varphi(L) \in \mathcal{D}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R)$ é tal que

$$\varphi(L)\psi(q) = \psi(L)\psi(q) = \psi(Lq) \subseteq \psi(R) = \varphi(R) = R$$

e, portanto, $\psi(q) \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$. Analogamente, se $q' \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R))$ então $\psi^{-1}(q') \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$. Logo, $\psi|_{\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)} : \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) \to \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$ é um gr-isomorfismo de anéis estendendo φ. A unicidade segue da Proposição 2.8.24. ■

Note que se o anel Γ-graduado R tem unidade então $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(R)$ pois $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R)$ e todo elemento de $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ é um ideal à esquerda denso de R. Temos a seguinte relação entre $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$ e $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(R)$ neste caso.

Corolário 3.3.13. *Se R é anel Γ-graduado com unidade então $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) \cong_{\mathrm{gr}} \bigoplus_{\sigma\in\Gamma} Q_\sigma$ como anéis Γ-graduados onde, para cada $\sigma \in \Gamma$,*

(1) *$Q_\sigma := \{x \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(R) :$ existe $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tal que $xD_\gamma \subseteq R_{\sigma\gamma}$ para todo $\gamma \in \Gamma\}$.*

(2) *$Q_\sigma := \{x \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(R) :$ existe $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ tal que $L_\gamma x \subseteq R_{\gamma\sigma}$ para todo $\gamma \in \Gamma\}$.*

(3) *Q_σ é o conjunto dos $x \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(R)$ tais que existem $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ e $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ satisfazendo $L_\gamma x \subseteq R_{\gamma\sigma}$ e $xD_\gamma \subseteq R_{\sigma\gamma}$ para todo $\gamma \in \Gamma$.*

Demonstração. Procedendo de forma análoga ao que fizemos na prova da Proposição 3.1.19, verifica-se que, em cada um dos três itens do enunciado, $Q := \bigoplus_{\sigma\in\Gamma} Q_\sigma$ é anel Γ-graduado e R é subanel graduado de Q. Enxergando $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(R) \hookrightarrow \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R)$ (resp. $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(R) \hookrightarrow \mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\max}(R)$) temos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(R)$ e, portanto, Q é um anel de quocientes à direita (resp. à esquerda) de R. Segue do Corolário 2.8.6 que Q é um anel de quocientes à direita (resp. à esquerda) Γ-graduado de R. Resta então verificarmos (ii) no Corolário 3.3.7. Sejam $\sigma \in \Gamma$, $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$, $t \in \mathrm{HOM}({}_RL, {}_RR)_\sigma$ e $g \in \mathrm{HOM}(D_R, R_R)_\sigma$ satisfazendo $(lt)d = l(gd)$ para todos $l \in L$ e $d \in D$. Como L é um ideal à esquerda denso de R, D é um ideal à direita denso de R, t é um homomorfismo de R-módulos à esquerda e g é um homomorfismo de R-módulos à direita, segue que existe $x \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(R)$ tal que $(l)t = lx$ para todo $l \in L$ e $g(d) = xd$ para todo $d \in D$. Como $\deg t = \deg g = \sigma$ temos $L_\gamma x = (L_\gamma)t \subseteq R_{\gamma\sigma}$ e $xD_\gamma = g(D_\gamma) \subseteq R_{\sigma\gamma}$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Logo, $x \in Q_\sigma$. ■

3.3.1 O anel de quocientes simétrico graduado maximal de anéis graduados obtidos a partir de outros

Aqui, buscamos obter resultados para $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}$ análogos aos da Subseção 3.1.1.

Começamos com os resultados sobre produto direto graduado, anel de matrizes e anel de grupoide.

Teorema 3.3.14. *Seja $\{R_j : j \in J\}$ uma família de anéis Γ-graduados. Então*

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}\left(\prod_{j\in J}^{gr} R_j\right) = \prod_{j\in J}^{gr} \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R_j)\,.$$

Demonstração. Seja $R := \prod_{j\in J}^{gr} R_j$. Então, pelo Teorema 3.1.28, obtemos que

$\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R) = \prod^{gr}_{j\in J} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R_j)$ e basta mostrarmos que

$$\left\{q \in \prod^{gr}_{j\in J} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R_j) : \text{existe } L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R) \text{ tal que } Lq \subseteq R\right\} = \prod^{gr}_{j\in J} \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R_j)\,.$$

($\supseteq$): Seja $q = (q_j)_{j\in J} \in \prod^{gr}_{j\in J} \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R_j)$. Para cada $j \in J$, seja $L_j \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R_j)$ tal que $L_j q_j \subseteq R_j$ e considere $L := \bigoplus_{j\in J} L_j$. Pelo Lema 3.2.20, temos $L^{op} = \bigoplus_{j\in J}(L_j)^{op} \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ e, portanto, $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$. Além disso, $Lq \subseteq \bigoplus_{j\in J} L_j q_j \subseteq R$.

($\subseteq$): Seja $q \in \prod^{gr}_{j\in J} \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R_j)$ tal que $Lq \subseteq R$ para certo $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$. Para cada $j \in J$, se $\pi_j : R \to R_j$ e $\pi_j^{op} : R^{op} \to (R_j)^{op}$ são as projeções canônicas então, pelo Lema 3.1.27(1), temos $(\pi_j(L))^{op} = \pi_j^{op}(L^{op}) \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}((R_j)^{op})$, ou seja, $\pi_j(L) \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R_j)$. Como $\pi_j(L)q_j = \pi_j(Lq) \subseteq R_j$, segue que $q_j \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R_j)$ para todo $j \in J$. ■

Teorema 3.3.15. *Sejam R um anel Γ-graduado e $\overline{\Sigma} = (\Sigma_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\Gamma)^I$ uma sequência totalmente matricial para R. Então $\overline{\Sigma}$ é sequência totalmente matricial para $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$ e*

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}\left(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})\right) = \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R))(\overline{\Sigma})\,.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.30, $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}\left(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})\right) = \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))(\overline{\Sigma})$ e, portanto, basta mostrarmos que

$$\begin{aligned}\{q \in \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))(\overline{\Sigma}) : \text{existe } V \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})) \text{ tal que } Vq \subseteq \mathrm{M}_I(R)\}& \\ = \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R))(\overline{\Sigma})\,.&\end{aligned}$$

($\supseteq$): Seja $q = (q_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R))(\overline{\Sigma})$. Para cada $i, j \in I$ tais que $q_{ij} \neq 0$, seja $L_{ij} \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ tal que $L_{ij}q_{ij} \subseteq R$. Como só finitas entradas de q são não nulas, segue que $L := \bigcap_{\substack{i,j\in I\\ q_{ij}\neq 0}} L_{ij} \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$. Pelo Lema 3.2.22, temos $\mathrm{M}_I(L^{op}) \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$ e, portanto, $V := \mathrm{M}_I(L) = (\mathrm{M}_I(L^{op}))^{op} \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$. Para cada $i, j \in I$ tal que $q_{ij} = 0$, temos $Lq_{ij} \subseteq L_{ij}q_{ij} \subseteq R$ e, portanto, $Vq \subseteq \mathrm{M}_I(R)$.

($\subseteq$): Seja $q = (q_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R))(\overline{\Sigma})$ tal que $Vq \subseteq \mathrm{M}_I(R)$ para certo $V \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$. Com raciocínio totalmente análogo ao do Lema 3.1.29(1), verifica-se que, para cada $i \in I$, $L_i := \{a \in R : aE_{ii} \in V\} \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$. Além disso, dados $i \in I$ e $a \in L_i$, temos $\sum_{j\in I} aq_{ij} = (aE_{ii})q \in Vq \subseteq \mathrm{M}_I(R)$. Logo, $L_i q_{ij} \subseteq R$ e, portanto, $q_{ij} \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$, para todos $i, j \in I$. ■

Com prova análoga à do Corolário 3.1.31, temos o seguinte.

Corolário 3.3.16. *Temos* $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(\mathrm{M}_I(A)) = \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(A))$ *para cada anel com unidade* A. ∎

Teorema 3.3.17. *Seja* A *um anel com unidade. Então*

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(A[\Gamma]) = \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(A)[\Gamma]\,.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.33, temos $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(A[\Gamma]) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(A)[\Gamma]$. Portanto, basta mostrarmos que

$$\{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(A)[\Gamma] : \text{existe } L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(A[\Gamma]) \text{ tal que } Lq \subseteq A[\Gamma]\} = \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(A)[\Gamma]\,.$$

($\supseteq$): Seja $q = \sum_{\sigma\in\Gamma} q_\sigma \sigma \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(A)[\Gamma]$. Para cada $\sigma \in \Gamma$ tal que $q_\sigma \neq 0$, seja L^σ um ideal à esquerda denso de A tal que $L^\sigma q_\sigma \subseteq A$. Então $L := \bigcap_{\sigma\in\mathrm{supp}(q)} L^\sigma$ é um ideal à esquerda denso de A. De forma análoga ao Lema 3.2.25, se verifica que $L[\Gamma] \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(A[\Gamma])$. Além disso, para cada $\sigma \in \Gamma$ tal que $q_\sigma \neq 0$, temos que $Lq_\sigma \subseteq L^\sigma q_\sigma \subseteq A$ e, portanto, $(L[\Gamma])q \subseteq A[\Gamma]$.

($\subseteq$): Seja $q = \sum_{\sigma\in\Gamma} q_\sigma \sigma \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(A)[\Gamma]$ tal que $Lq \subseteq A[\Gamma]$ para certo $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(A[\Gamma])$. Para cada $e \in \Gamma_0$, seja $L^e := \{a \in A : ae \in L\}$. Analogamente ao Lema 3.1.32(1), se verifica que L^e é um ideal à esquerda denso de A para todo $e \in \Gamma_0$. Além disso, para cada $\sigma \in \Gamma$ e $a \in L^{r(\sigma)}$, temos que

$$\sum_{\tau\in r(\sigma)\Gamma} (aq_\tau)r(\sigma)\tau = (ar(\sigma))\left(\sum_{\tau\in\Gamma} q_\tau \tau\right) = (ar(\sigma))q \in Lq \subseteq A[\Gamma] \implies aq_\sigma \in A\,.$$

Logo, $L^{r(\sigma)}q_\sigma \subseteq A$ e, portanto, $q_\sigma \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(A)$ para todo $\sigma \in \Gamma$. ∎

Em seguida, usamos fidelidade em componentes homogêneas para estudar relações entre os anéis $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$, $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$ ($\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$) e $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(R_e)$ ($e \in \Gamma_0$).

Teorema 3.3.18. *Sejam* R *um anel* Γ*-graduado e* $e \in \Gamma_0$ *tais que valem as seguintes afirmações:*

(*i*) *R é e-fiel.*

(*ii*) *R é anel gr-nãosingular à direita ou R é γ-fiel à esquerda para todo* $\gamma \in \mathrm{supp}(1_e R)$.

(*iii*) *R é anel gr-nãosingular à esquerda ou R é α-fiel à direita para todo* $\alpha \in \mathrm{supp}(R1_e)$.

Então

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(R_e) = \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)_e\,.$$

Demonstração. Por (*i*) e (*ii*), segue do Teorema 3.1.36 que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\max}(R_e) = \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_e$.

Então basta mostrarmos que

$$\{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_e : Kq \subseteq R_e \text{ para algum } K \text{ ideal à esquerda denso de } R_e\} \\ = \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)_e\,.$$

($\supseteq$): Seja $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)_e$. Então $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_e$ e existe $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ tal que $Lq \subseteq R$. Como R é e-fiel à esquerda, temos que R^{op} é e-fiel à direita e segue do Corolário 2.8.29(1) que $(L^{op})_e$ é um ideal à direita denso de $(R^{op})_e$. Ou seja, L_e é um ideal à esquerda denso de R_e. Além disso, $L_e q = (Lq)_e \subseteq R_e$.

($\subseteq$): Sejam $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)_e$ e K um ideal à esquerda denso de R_e tais que $Kq \subseteq R_e$. Considere $L := RK \oplus (\Gamma_0 \setminus \{e\})R$. Como $Lq = RKq \subseteq R$, só precisamos mostrar que $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$. Note que K^{op} é um ideal à direita denso de $(R_e)^{op} = (R^{op})_e$, $L^{op} = K^{op}R^{op} \oplus R^{op}(\Gamma_0 \setminus \{e\})$ é um ideal à direita graduado de R^{op} e, por (iii), R^{op} é anel gr-nãosingular à direita ou R^{op} é α^{-1}-fiel à esquerda para todo $\alpha^{-1} \in \operatorname{supp}(1_e R)$. Pelo Lema 3.1.35, temos $L^{op} \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R^{op})$, ou seja, $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$, como queríamos. ■

Teorema 3.3.19. *Sejam R um anel Γ-graduado e $\Delta_0 \subseteq \Gamma'_0(R)$ tais que valem as seguintes afirmações:*

(i) *$R(\Delta_0)$ e $(\Delta_0)R$ são Δ_0-fiéis.*

(ii) *R é anel gr-nãosingular à direita ou $(e')R$ é Δ_0-fiel para todo $e' \in \Gamma_0$ tal que $1_{\Delta_0}R1_{e'} \neq 0$.*

(iii) *R é anel gr-nãosingular à esquerda ou $R(e')$ é Δ_0-fiel para todo $e' \in \Gamma_0$ tal que $1_{e'}R1_{\Delta_0} \neq 0$.*

Então

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}) = 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)1_{\Delta_0}\,.$$

Demonstração. Por (i) e (ii), temos do Teorema 3.1.38 que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}) = 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_{\Delta_0}$. Então basta mostrarmos que

$$\{q \in 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_{\Delta_0} : Kq \subseteq 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0} \text{ para algum } K \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})\} \\ = 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)1_{\Delta_0}\,.$$

($\supseteq$): Seja $q \in 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)1_{\Delta_0}$. Então $q \in 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_{\Delta_0}$ e existe $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ tal que $Lq \subseteq R$. Como $(\Delta_0)R$ é Δ_0-fiel, temos que $R^{op}(\Delta_0)$ é Δ_0-fiel e segue do Corolário 2.8.29(2) que $1_{\Delta_0}L^{op}1_{\Delta_0} \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(1_{\Delta_0}R^{op}1_{\Delta_0})$. Ou seja, $K := 1_{\Delta_0}L1_{\Delta_0} = (1_{\Delta_0}L^{op}1_{\Delta_0})^{op} \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$. Além disso, $Kq = 1_{\Delta_0}Lq \subseteq 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$.

($\subseteq$): Sejam $q \in 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)1_{\Delta_0}$ e $K \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$ tais que $Kq \subseteq 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$. Defina $L := RK \oplus (\Gamma_0 \setminus \Delta_0)R$. Note que $K^{op} \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(1_{\Delta_0}R^{op}1_{\Delta_0})$, $L^{op} = K^{op}R^{op} \oplus R^{op}(\Gamma_0 \setminus \Delta_0)$ é ideal à direita graduado de R^{op} e, por (iii), R^{op} é anel gr-nãosingular à direita ou $(e')R^{op}$ é Δ_0-fiel para todo $e' \in \Gamma_0$ tal que $1_{\Delta_0}R^{op}1_{e'} \neq 0$. Pelo Lema 3.1.37, $L^{op} \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R^{op})$, ou seja, $L \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$. Como $Lq = RKq \subseteq R$, segue que $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$. ■

O Corolário a seguir segue imediatamente dos Teoremas 3.3.18 e 3.3.19 e do Lema 1.8.7.

Corolário 3.3.20. *Se R é um anel fortemente Γ-graduado então*

(1) $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{max}}(R_e) = \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)_e$, *para todo* $e \in \Gamma_0$.

(2) $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(1_{\Delta_0} R 1_{\Delta_0}) = 1_{\Delta_0}\, \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) 1_{\Delta_0}$, *para todo* $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$. ■

Semelhantemente ao Corolário 3.1.40, também obtemos o seguinte.

Corolário 3.3.21. *Temos* $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}\left(\bigoplus_{e\in\Gamma_0} 1_e R 1_e\right) = \bigoplus_{e\in\Gamma_0} \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(1_e R 1_e)$ *para cada anel* Γ-*graduado* R. ■

3.3.2 Categoria de quocientes simétrica maximal

Nesta subseção estudamos $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R[\mathcal{C}])$ em linguagem categórica, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena.

A definição a seguir é uma versão categórica da caracterização de $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}$ dada pelo Corolário 3.3.7.

Definição 3.3.22. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva. Diremos que uma categoria pré-aditiva $\mathcal{Q}$ é uma *categoria de quocientes simétrica maximal* de $\mathcal{C}$ se temos satisfeitas as seguintes condições:

(i) $\mathcal{Q}$ é uma categoria de quocientes à direita e à esquerda de $\mathcal{C}$.

(ii) Para cada $\mathcal{I}$ ideal à direita denso de $\mathcal{C}$, $\mathcal{J}$ ideal à esquerda denso de $\mathcal{C}$, $X, Y \in \mathcal{C}_0$, $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ morfismo de ideais à direita de grau (X, Y) e $G : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ morfismo de ideais à esquerda de grau (X, Y) tais que $G_B(h) \circ g = h \circ F_A(g)$ para todos $A, B \in \mathcal{C}_0$, $g \in \mathcal{I}(A, Y)$, $h \in \mathcal{J}(X, B)$, existe $f \in \mathcal{Q}(Y, X)$ tal que $F = \mathcal{I}(-, f)$ e $G = \mathcal{J}(f, -)$.

Observação 3.3.23. Se $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena e $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})$ é a categoria com os mesmos objetos de $\mathcal{C}$ e tal que $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})(X, Y) := \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R[\mathcal{C}])_{(Y,X)}$ para cada $X, Y \in \mathcal{C}_0$ então $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})$ é a única categoria de quocientes simétrica maximal de $\mathcal{C}$ a menos de um isomorfismo de categorias que é a identidade nos objetos e morfismos de $\mathcal{C}$. Como $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R[\mathcal{C}]) = R[\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})]$, temos que, para cada $X, Y \in \mathcal{C}_0$, $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})(X, Y)$ é o conjunto dos morfismos $f \in \mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})(X, Y)$ para os quais existe um ideal à esquerda denso $\mathcal{J}$ de $\mathcal{C}$ tal que $g \circ f \in \mathcal{C}(X, A)$ para todos $A \in \mathcal{C}_0$, $g \in \mathcal{J}(Y, A)$. O Corolário 3.3.6 nos garante que se $\mathcal{Q}$ é a categoria cujos objetos são os mesmos de $\mathcal{C}$ e, para cada $X, Y \in \mathcal{C}_0$, $\mathcal{Q}(X, Y)$ é o conjunto dos morfismos $f \in \mathcal{Q}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{max}}(\mathcal{C})(X, Y)$ para os quais existe $\mathcal{I}$ ideal à direita denso de $\mathcal{C}$ tal que $f \circ g \in \mathcal{C}(A, Y)$ para todos $A \in \mathcal{C}_0$, $g \in \mathcal{I}(A, X)$ então $\mathcal{Q}$ também é uma categoria de quocientes simétrica maximal de $\mathcal{C}$. ■

A próxima Proposição justifica o termo maximal na definição de $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{max}}$ e se prova de forma totalmente análoga à Proposição 3.1.82, usando o Teorema 3.3.4.

Proposição 3.3.24. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena e $\mathcal{D}$ uma categoria de quocientes à direita e à esquerda de $\mathcal{C}$. Então existe um único funtor covariante aditivo $\mathcal{D} \to \mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(\mathcal{C})$ que é a identidade nos objetos e morfismos de $\mathcal{C}$. Além disso, tal funtor é fiel.* ■

Os dois resultados a seguir seguem dos Teoremas 3.3.18 e 3.3.19 usando o mesmo raciocínio dos Teoremas 3.1.85 e 3.1.86, respectivamente.

Teorema 3.3.25. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena e $X \in \mathcal{C}_0$. Suponha que valem as afirmações a seguir:*

(*i*) *Para cada $A \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A, X)$, existe $h \in \mathcal{C}(X, A)$ tal que $f \circ h \neq 0$.*

(*ii*) *Para cada $A \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(X, A)$, existe $h \in \mathcal{C}(A, X)$ tal que $h \circ f \neq 0$.*

(*iii*) *$\mathcal{C}$ é categoria nãosingular à direita ou, para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A, B)$ tais que $\mathcal{C}(A, X) \neq 0$, existe $h \in \mathcal{C}(B, X)$ tal que $h \circ f \neq 0$.*

(*iv*) *$\mathcal{C}$ é categoria nãosingular à esquerda ou, para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A, B)$ tais que $\mathcal{C}(X, B) \neq 0$, existe $h \in \mathcal{C}(X, A)$ tal que $f \circ h \neq 0$.*

Então $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(\mathcal{C})(X, X) = \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(\mathcal{C}(X, X))$. ■

Teorema 3.3.26. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena e $\mathcal{C}'$ uma subcategoria plena de $\mathcal{C}$. Suponha que valem as afirmações a seguir:*

(*i*) *Para cada $A \in \mathcal{C}_0$, $A' \in \mathcal{C}'_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A, A')$, existem $B' \in \mathcal{C}'_0$ e $h \in \mathcal{C}(B', A)$ tal que $f \circ h \neq 0$.*

(*ii*) *Para cada $A \in \mathcal{C}_0$, $A' \in \mathcal{C}'_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A', A)$, existem $B' \in \mathcal{C}'_0$ e $h \in \mathcal{C}(A, B')$ tal que $h \circ f \neq 0$.*

(*iii*) *$\mathcal{C}$ é categoria nãosingular à direita ou, para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A, B)$ tais que $\bigoplus_{A' \in \mathcal{C}'_0} \mathcal{C}(A, A') \neq 0$, existem $X \in \mathcal{C}'_0$ e $h \in \mathcal{C}(B, X)$ tais que $h \circ f \neq 0$.*

(*iv*) *$\mathcal{C}$ é categoria nãosingular à esquerda ou, para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$ e $0 \neq f \in \mathcal{C}(A, B)$ tais que $\bigoplus_{A' \in \mathcal{C}'_0} \mathcal{C}(A', B) \neq 0$, existem $X \in \mathcal{C}'_0$ e $h \in \mathcal{C}(X, A)$ tais que $f \circ h \neq 0$.*

Então $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(\mathcal{C}')$ é a subcategoria plena de $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(\mathcal{C})$ cujo conjunto de objetos é $\mathcal{C}'_0$. ■

Também temos as seguintes propriedades de $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}$.

Teorema 3.3.27. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena. Temos:*

(1) $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(\mathcal{C})) = \mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(\mathcal{C})$.

(2) *Se $\mathcal{C}$ é categoria semissimples então $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.*

(3) *Se $\mathcal{C}$ é categoria simples (resp. prima, semiprima) então $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(\mathcal{C})$ também é.*

(4) *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria em que todo morfismo não nulo é epimorfismo e monomorfismo então $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\max}(\mathcal{C})$ também é.*

Demonstração. (1) Segue do Teorema 3.3.9(3).

(2) Mesmo raciocínio da prova da Proposição 3.1.87(1), usando a Proposição 3.3.8.

(3) Segue imediatamente do Teorema 3.3.10.

(4) Segue imediatamente do Teorema 3.3.11. ■

3.4 O anel de quocientes simétrico graduado de Martindale

Nosso último anel de quocientes graduado a ser estudado será definido dentro de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ usando a família $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$, assim como usamos $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ para construir $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$ dentro de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$.

Definição 3.4.1. Seja R um anel Γ-graduado. Definimos o *anel de quocientes simétrico* Γ-*graduado de Martindale de* R por

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R) := \{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) : Lq \subseteq R \text{ para algum } L \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)\}\,.$$

O próximo resultado mostra que, de fato, $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ é um anel Γ-graduado e contém $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ e $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-Mart}}(R)$.

Proposição 3.4.2. *Seja R um anel Γ-graduado. Então $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ é subanel graduado de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ e contém $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-Mart}}(R) \cap \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$.*

Demonstração. Primeiramente note que, pelo Teorema 3.2.7, para cada $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ existe $L \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ tal que $Lq \subseteq R$. Logo, $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-Mart}}(R) \cap \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$. A verificação que $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ é subgrupo aditivo Γ-graduado de $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ é totalmente análoga a feita na Proposição 3.3.3. Finalmente, vejamos que $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ é fechado para soma e multiplicação. Sejam $q, q' \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ e $L, L' \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ tais que $Lq, L'q' \subseteq R$. Então $L \cap L', L'L \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ são tais que

$$(L \cap L')(q + q') \subseteq Lq + L'q' \subseteq R \quad \text{e} \quad (L'L)(qq') \subseteq L'Rq' = L'q' \subseteq R\,.$$

Logo, $q + q', qq' \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$. ■

Observação 3.4.3. Note que $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R) \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$ pois $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}}(R)$ e $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R) \subseteq \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$. De fato, temos a seguinte igualdade

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R) = \{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) : Jq, qI \subseteq R \text{ para certos } I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R), J \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)\}\,.$$

Observe também que se R é anel gr-semiprimo então segue do Corolário 3.2.12(1) (e de $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}(R)$ ser fechado para intersecções) que

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R) &= \{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) : Jq, qI \subseteq R \text{ para certos } I, J \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}(R)\}\\ &= \{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) : Iq, qI \subseteq R \text{ para algum } I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}(R)\}\,.\end{aligned}$$

■

Semelhantemente a Proposição 3.4.2, podemos mostrar que

$$\{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-Mart}}(R) : qI \subseteq R \text{ para algum } I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)\}$$

é subanel graduado de $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ e contém $\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-Mart}}(R) \cap \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$. A caracterização axiomática a seguir mostrará que esse anel é gr-isomorfo a $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ sobre R.

Teorema 3.4.4. *Sejam R e Q anéis Γ-graduados. Existe um gr-isomorfismo de anéis Γ-graduados $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R) \to Q$ cuja restrição a R é a função identidade se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:*

(*i*) *R é subanel graduado de Q.*

(*ii*) *Para cada $q \in \mathrm{h}(Q)$, existem $L \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ e $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tais que $Lq, qI \subseteq R$.*

(*iii*) *Para cada $q \in \mathrm{h}(Q)$, $L \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ e $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$, se $Lq = 0$ ou $qI = 0$ então $q = 0$.*

(*iv*) *Para cada $\gamma \in \Gamma$, $L \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$, $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$, $t \in \mathrm{HOM}({}_R L, {}_R R)_\gamma$ e $g \in \mathrm{HOM}(I_R, R_R)_\gamma$ satisfazendo $(lt)x = l(gx)$ para todos $l \in L$ e $x \in I$, existe $q \in Q_\gamma$ tal que $(l)t = lq$ para todo $l \in L$ e $g(x) = qx$ para todo $x \in I$.*

Demonstração. De maneira análoga ao que foi feito na prova do Teorema 3.3.5, se verifica que $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ satisfaz $(i) - (iv)$ e, portanto, qualquer anel Γ-graduado gr-isomorfo a $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ sobre R também satisfaz.

Reciprocamente, seja Q um anel Γ-graduado satisfazendo $(i)-(iv)$. Procedendo de maneira análoga ao que fizemos na prova do Teorema 3.3.5, obtemos um gr-isomorfismo de grupos aditivos Γ-graduados $\varphi : Q \to \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ onde, dado $q \in \mathrm{h}(Q)$ e tomando $L \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$, $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tais que $Lq, qI \subseteq R$, $\varphi(q)$ é o único elemento de $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ satisfazendo $lq = l\varphi(q)$ para todo $l \in L$ e $qx = \varphi(q)x$ para todo $x \in I$. Para vermos que φ respeita produtos, precisamos de um argumento um pouco diferente. Sejam $q, q' \in \mathrm{h}(Q)$ e $L, L' \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$, $I, I' \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ tais que $Lq, L'q', qI, q'I' \subseteq R$. Então $L'L \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ e $I'I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ são tais que $(L'L)(qq') \subseteq L'Rq' = L'q' \subseteq R$, $(qq')(I'I) \subseteq qRI = qI \subseteq R$ e, além disso, para cada $y \in L'L$ e $x \in I'I$, temos

$$y(qq') = (yq)q' = (yq)\varphi(q') = y\varphi(q)\varphi(q')\,;$$

$$(qq')x = q(q'x) = \varphi(q)(q'x) = \varphi(q)\varphi(q')x\,.$$

Logo, $\varphi(qq') = \varphi(q)\varphi(q')$. A verificação que φ é um gr-homomorfismo de anéis cuja restrição a R é a função identidade de R é totalmente análoga ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.3.5. ■

Semelhantemente ao Corolário 3.3.6, temos o seguinte.

Corolário 3.4.5. *Se R é um anel Γ-graduado então $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ e $\{q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-Mart}}(R) : qI \subseteq R$ para algum $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)\}$ são gr-isomorfos sobre R.* ■

A seguir apresentamos um diagrama relacionando todos os anéis de quocientes graduados de um anel Γ-graduado R que foram estudados neste capítulo. No diagrama, $\mathrm{Q}^{\triangle}_{\mathrm{gr}-\square}$ abrevia $\mathrm{Q}^{\triangle}_{\mathrm{gr}-\square}(R)$ por uma questão de espaço, $Q \longrightarrow Q'$ indica que Q é subanel graduado de Q' e $Q \dashrightarrow Q'$ indica que existe um gr-homomorfismo de anéis injetor $Q \to Q'$ que estende a função identidade de R.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}} & & \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}} \\
\mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-Mart}} \arrow[urrr] & & \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}} \arrow[urrr] & & & \\
 & & & & \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}} \arrow[uur] \arrow[uul, dashed] & \\
 & \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}} \arrow[uur] \arrow[uul, dashed] \arrow[urrr] & & & & \\
 & & & & \mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-max}} \cap \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-max}} \arrow[uu] \arrow[uuuul] & \\
 & \mathrm{Q}^{\mathrm{e}}_{\text{gr-Mart}} \cap \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}} \arrow[uu] \arrow[uuuul] \arrow[urrr] & & & & \\
 & & & R \arrow[ull] \arrow[uur] & &
\end{tikzcd}$$

Também temos o seguinte resultado com condições suficientes para que ocorra $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R) = R$.

Proposição 3.4.6. *Se R é um anel Γ-graduado tal que R é anel gr-simples, R_R é gr-injetivo ou ${}_RR$ é gr-injetivo então $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R) = R$.*

Demonstração. Primeiramente, lembre que $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R) \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) \cap \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R)$.

Se R é anel gr-simples então segue do Corolário 3.2.9 que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) = R$ e, portanto, $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R) \subseteq R \cap \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) = R$.

Se R_R é gr-injetivo ou ${}_RR$ é gr-injetivo então segue da Proposição 3.3.8 que $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-max}}(R) = R$ e, portanto, $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R) \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) \cap R = R$. ■

Temos ainda os dois seguintes resultados.

Teorema 3.4.7. *Seja R um anel Γ-graduado. Se R é um gr-domínio (resp. anel gr-primo, anel gr-semiprimo) então $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ também é.*

Demonstração. O caso gr-domínio se prova com argumento totalmente análogo ao da demonstração do Teorema 3.3.11. Já os casos gr-primo e gr-semiprimo seguem do Corolário 2.8.23 e da Proposição 3.1.24(1). ■

Teorema 3.4.8. *Se R é anel gr-semiprimo gr-reduzido então $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ também é.*

Demonstração. Seja R um anel gr-semiprimo gr-reduzido e tome $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)_\gamma$ tal que $r(\gamma) = d(\gamma)$ e $q^n = 0$ para algum $n \geq 1$. Sejam $I, J \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}(R)$ tais que $Jq^{n-1}, q^{n-1}I \subseteq R$. Para cada $x \in I$ e $y \in J$, temos $(q^{n-1}xyq^{n-1})^2 = 0$ e segue que $q^{n-1}xyq^{n-1} = 0$, pois R é anel gr-reduzido. Logo, $q^{n-1}IJq^{n-1} = 0$ e, portanto, $q^{n-1}IJ$ é um ideal à direita graduado de R tal que $(q^{n-1}IJ)^2 = 0$. Como R é anel gr-semiprimo, segue que $q^{n-1}IJ = 0$. Mas $q^{n-1} \in \mathrm{h}(\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R))$ e $IJ \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}(R)$ implicam, pelo Teorema 3.4.4, que $q^{n-1} = 0$. Prosseguindo indutivamente, obtemos $q = 0$. Portanto, $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ é um anel gr-reduzido. ■

O resultado a seguir tem demonstração totalmente análoga à da Proposição 3.3.12, usando a Proposição 3.2.17.

Proposição 3.4.9. *Seja R um anel Γ-graduado e $\varphi : R \to R$ um gr-isomorfismo de anéis. Então φ se estende unicamente a um gr-isomorfismo de anéis $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R) \to \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$.* ■

O seguinte resultado é uma versão da Proposição 3.2.15 para $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}$.

Proposição 3.4.10. *Sejam R um anel Γ-graduado, $U \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$, $V \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ e T um subanel graduado de R tal que $U \subseteq T$ e $V \subseteq T$. Então $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(T) \cong_{\mathrm{gr}} \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ sobre T.*

Demonstração. Pela Proposição 3.2.15, existe um gr-isomorfismo de anéis $\varphi : \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(T) \to \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ que estende a função identidade de T. Basta mostrarmos que $\varphi(\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(T)) = \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$.

($\subseteq$): Seja $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(T)$ e $J \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(T)$ tal que $Jq \subseteq T$. Procedendo de forma análoga ao Lema 3.2.14(2), obtemos $VJV \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$. Note que $VJV \subseteq VRV \subseteq V \subseteq T$ e então

$$VJV\varphi(q) \subseteq \varphi(VJV)\varphi(q) = \varphi(VJVq) \subseteq \varphi(TJTq) = \varphi(Jq) \subseteq \varphi(T) = T \subseteq R$$

e, portanto, $\varphi(q) \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$.

($\supseteq$): Seja $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(T)$ tal que $\varphi(q) \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$. Então existe $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ tal que $I\varphi(q) \subseteq R$. De forma análoga ao Lema 3.2.14(1), temos $VIV \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(T)$. Além disso,

$$\varphi(VIVq) = \varphi(VIV)\varphi(q) = VIV\varphi(q) \subseteq VIR\varphi(q) = VI\varphi(q) \subseteq VR = V \subseteq T$$

e segue que $VIVq \subseteq T$. Logo, $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(T)$. ■

Observação 3.4.11. (1) Se aplicarmos o Teorema 3.4.4 para Γ sendo o grupo trivial $\{\cdot\}$, obtemos a caracterização axiomática de $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(A)$ se A é um anel com unidade (Lam, 1999, Proposition (14.25)).

(2) Se R é um anel Γ-graduado com unidade então $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R) \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(R)$ pois $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R) \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(R)$ e todo elemento de $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ é um ideal de R que é denso como ideal à esquerda. O resultado a seguir relaciona $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ e $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(R)$ neste caso. ■

Corolário 3.4.12. *Se R é um anel Γ-graduado com unidade então $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R) = \bigoplus_{\sigma\in\Gamma} Q_\sigma$ onde, para cada $\sigma \in \Gamma$, Q_σ é o conjunto dos $x \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(R)$ tais que existem $L \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$, $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$ satisfazendo $L_\gamma x \subseteq R_{\gamma\sigma}$ e $xI_\gamma \subseteq R_{\sigma\gamma}$ para todo $\gamma \in \Gamma$.*

Demonstração. Analogamente à prova da Proposição 3.2.19 verifica-se que $Q := \bigoplus_{\sigma\in\Gamma} Q_\sigma$ é anel Γ-graduado e R é subanel graduado de Q. Agora basta verificarmos que Q satisfaz $(ii) - (iv)$ no Teorema 3.4.4. O item (ii) segue da definição de Q. O item (iii) segue de $Q \subseteq \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(R)$ e do fato que todo elemento de $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(R)$ (resp. $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{d}}(R)$) é um ideal de R que é denso como ideal à esquerda (resp. à direita). Já o item (iv) se verifica de forma análoga ao que foi feito na prova do Corolário 3.3.13. ■

3.4.1 O anel de quocientes simétrico graduado de Martindale de anéis graduados obtidos a partir de outros

Assim como fizemos para os outros três anéis de quocientes, dedicamos esta subseção a obter resultados análogos aos da Subseção 3.1.1 para o anel de quocientes $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}$. A demonstração da maioria dos resultados desta subseção é simplificada pelos argumentos de seções anteriores. O Teorema a seguir, por exemplo, tem demonstração totalmente análoga à prova do Teorema 3.3.14.

Teorema 3.4.13. *Temos $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}\left(\prod_{j\in J}^{gr} R_j\right) = \prod_{j\in J}^{gr} \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R_j)$ para cada família $\{R_j : j \in J\}$ de anéis Γ-graduados.* ■

Assim como os outros anéis de quocientes graduados estudados neste capítulo, $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}$ se comporta bem com anéis de matrizes.

Teorema 3.4.14. *Sejam R um anel Γ-graduado e $\overline{\Sigma} = (\Sigma_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\Gamma)^I$ uma sequência totalmente matricial para R. Então $\overline{\Sigma}$ é sequência totalmente matricial para $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ e*

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}\left(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})\right) = \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R))(\overline{\Sigma})\,.$$

Demonstração. Do Teorema 3.2.23 temos $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}\left(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})\right) = \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R))(\overline{\Sigma})$ e, portanto, basta mostrarmos que

$$\{q \in \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R))(\overline{\Sigma}) : \text{existe } V \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma})) \text{ tal que } Vq \subseteq \mathrm{M}_I(R)\} = \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R))(\overline{\Sigma})\,.$$

$(\supseteq)$: Se verifica de forma análoga ao que fizemos na prova do Teorema 3.3.15.

$(\subseteq)$: Seja $q = (q_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R))(\overline{\Sigma})$ tal que $Vq \subseteq \mathrm{M}_I(R)$ para certo $V \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{e}}(\mathrm{M}_I(R)(\overline{\Sigma}))$. Pela Proposição 1.7.17, existe U ideal graduado de R tal que

$V = \mathrm{M}_I(U)$. Com raciocínio análogo ao do Lema 3.2.22, verifica-se que ${}_RU \leq_{\text{gr-den}} {}_RR$, ou seja, $U \in \mathcal{I}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R)$. Para cada $i, j \in I$ e $x \in U$, temos que xq_{ij} é a entrada (i, j) da matriz $(xE_{ii})q \in \mathrm{M}_I(U)q = Vq \subseteq \mathrm{M}_I(R)$ e, portanto, $xq_{ij} \in R$. Logo, $Uq_{ij} \subseteq R$ e segue que $q_{ij} \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ para todos $i, j \in I$. ■

Com provas totalmente análogas às demonstrações do Corolário 3.1.31 e do Teorema 3.3.17, temos o seguinte.

Teorema 3.4.15. *Sejam A um anel com unidade e I um conjunto não vazio. Então*

(1) $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(\mathrm{M}_I(A)) = \mathrm{M}_I(\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(A))$.

(2) $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(A[\Gamma]) = \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(A)[\Gamma]$. ■

O resultado a seguir usa fidelidade em componentes homogêneas para relacionar os anéis $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$ e $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$ quando $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$.

Teorema 3.4.16. *Sejam R um anel Γ-graduado e $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0'(R)$ tais que valem as seguintes afirmações:*

(i) *Para cada $e' \in \Gamma_0$ tal que $1_{e'}R1_{\Delta_0} \neq 0$, $R(e')$ é Δ_0-fiel.*

(ii) *Para cada $e' \in \Gamma_0$ tal que $1_{\Delta_0}R1_{e'} \neq 0$, $(e')R$ é Δ_0-fiel.*

Então

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}) = 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)1_{\Delta_0}\,.$$

Demonstração. O Teorema 3.2.28 nos dá que $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}) = 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)1_{\Delta_0}$. Portanto, basta mostrarmos que

$$\{q \in 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)1_{\Delta_0} : \text{existe } K \in \mathcal{I}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}) \text{ tal que } Kq \subseteq 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}\} = 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)1_{\Delta_0}\,.$$

$(\supseteq)$: Se verifica com raciocínio análogo ao que fizemos na prova do Teorema 3.3.19.

$(\subseteq)$: Seja $q \in 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}_{\text{gr-Mart}}(R)1_{\Delta_0}$ tal que $Kq \subseteq 1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}$ para certo $K \in \mathcal{I}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0})$. Note que $K^{op} \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(1_{\Delta_0}R^{op}1_{\Delta_0})$ e R^{op} satisfaz (i) e (ii) no Lema 3.2.27. Portanto, temos que $I := R^{op}K^{op}R^{op} \oplus \mathrm{l.ann}_{R^{op}}(R^{op}K^{op}R^{op}) \in \mathcal{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{gr}}(R^{op})$ e $I(\Delta_0) = K^{op}R^{op}$. Ou seja, $J := I^{op} = RKR \oplus \mathrm{r.ann}_R(RKR) \in \mathcal{I}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{gr}}(R)$ e $(\Delta_0)J = (I(\Delta_0))^{op} = RK$. Como $Jq = J1_{\Delta_0}q = RKq \subseteq R$, segue que $q \in \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)$. ■

Semelhantemente ao Corolário 3.2.29 temos o seguinte resultado.

Corolário 3.4.17. *Sejam R um anel Γ-graduado e $e \in \Gamma_0$ tais que valem as seguintes afirmações:*

(i) *Para cada $e' \in \Gamma_0$ tal que $1_{e'}R1_e \neq 0$, $R(e')$ é $\{e\}$-fiel.*

(ii) *Para cada $e' \in \Gamma_0$ tal que $1_eR1_{e'} \neq 0$, $(e')R$ é $\{e\}$-fiel.*

(iii) $1_eR1_e = R_e$.

Então $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(R_e) = \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)_e$. ■

O resultado a seguir é consequência do Teorema 3.4.16, do Corolário 3.4.17 e do Lema 1.8.7.

Corolário 3.4.18. *Se R é anel fortemente Γ-graduado e $\Delta_0 \subseteq \Gamma'_0(R)$ (resp. $e \in \Gamma_0$ com $1_eR1_e = R_e$) então $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(1_{\Delta_0}R1_{\Delta_0}) = 1_{\Delta_0}\,\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)1_{\Delta_0}$ (resp. $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{Mart}}(R_e) = \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)_e$).* ■

Com raciocínio análogo ao da prova do Corolário 3.1.40, obtemos o seguinte.

Corolário 3.4.19. *Temos $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}\left(\bigoplus_{e\in\Gamma_0} 1_eR1_e\right) = \bigoplus_{e\in\Gamma_0} \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(1_eR1_e)$ para cada anel Γ-graduado R.* ■

O próximo resultado se prova de forma totalmente análoga ao Teorema 3.2.32.

Teorema 3.4.20. *Sejam R um anel Γ-graduado tal que, para cada $e, f \in \Gamma_0$ com $1_eR1_f \neq 0$, temos que $R(e)$ é $\{f\}$-fiel e $(f)R$ é $\{e\}$-fiel. Então*

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}\left(\bigoplus_{e\in\Gamma_0} 1_eR1_e\right) = \bigoplus_{e\in\Gamma_0} 1_e\,\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R)1_e\,.$$

■

3.4.2 Categoria de quocientes simétrica de Martindale

Agora vamos traduzir $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\text{gr-Mart}}(R[\mathcal{C}])$ para a linguagem categórica, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva pequena.

A definição a seguir é uma versão categórica da caracterização axiomática do Teorema 3.4.4.

Definição 3.4.21. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva. Diremos que uma categoria pré-aditiva $\mathcal{Q}$ é uma *categoria de quocientes simétrica de Martindale* de $\mathcal{C}$ se temos satisfeitas as seguintes condições:

(i) $\mathcal{C}$ é subcategoria pré-aditiva de $\mathcal{Q}$ com $\mathcal{C}_0 = \mathcal{Q}_0$.

(ii) Para cada $X, Y \in \mathcal{C}_0$ e $f \in \mathcal{Q}(X,Y)$, existem $\mathcal{I}$ ideal à direita denso de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{J}$ ideal à esquerda denso de $\mathcal{C}$ tais que $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ são ideais de $\mathcal{C}$, $f \circ g \in \mathcal{C}(A,Y)$ para todos $A \in \mathcal{C}_0$, $g \in \mathcal{I}(A,X)$ e $h \circ f \in \mathcal{C}(X,B)$ para todos $B \in \mathcal{C}_0$, $h \in \mathcal{J}(Y,B)$.

(iii) Para cada $X, Y \in \mathcal{C}_0$, $f \in \mathcal{Q}(X,Y)$ e $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ ideais de $\mathcal{C}$ tais que $\mathcal{I}$ é ideal à direita denso de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{J}$ é ideal à esquerda denso de $\mathcal{C}$, se $f \circ g = 0$ para todos $A \in \mathcal{C}_0$, $g \in \mathcal{I}(A,X)$ ou $h \circ f = 0$ para todos $B \in \mathcal{C}_0$, $h \in \mathcal{J}(Y,B)$ então $f = 0$.

(iv) Para cada $\mathcal{I}$ ideal à direita denso de $\mathcal{C}$, $\mathcal{J}$ ideal à esquerda denso de $\mathcal{C}$, $X, Y \in \mathcal{C}_0$, $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ morfismo de ideais à direita de grau (X,Y) e $G : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ morfismo de ideais à esquerda de grau (X,Y) tais que $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ são ideais de $\mathcal{C}$ e $G_B(h) \circ g = h \circ F_A(g)$ para todos $A, B \in \mathcal{C}_0$, $g \in \mathcal{I}(A,Y)$, $h \in \mathcal{J}(X,B)$, existe $f \in \mathcal{Q}(Y,X)$ tal que $F = \mathcal{I}(-,f)$ e $G = \mathcal{J}(f,-)$.

Observação 3.4.22. Dada uma categoria pré-aditiva pequena $\mathcal{C}$, defina a categoria $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})$ cujos objetos são os mesmos de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})(X,Y) = \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{gr\text{-}Mart}}(R[\mathcal{C}])_{(Y,X)}$ para cada $X, Y \in \mathcal{C}_0$. Note que $\mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{gr\text{-}Mart}}(R[\mathcal{C}]) = R[\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})]$ e, para cada $X, Y \in \mathcal{C}_0$, $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})(X,Y)$ é o conjunto dos morfismos $f \in \mathcal{Q}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})(X,Y)$ para os quais existe um ideal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{J}$ é ideal à esquerda denso de $\mathcal{C}$ e $g \circ f \in \mathcal{C}(X, A)$ para todos $A \in \mathcal{C}_0$, $g \in \mathcal{J}(Y, A)$. Como para as outras categorias de quocientes é fácil ver que uma categoria pré-aditiva pequena $\mathcal{Q}$ é uma categoria de quocientes simétrica de Martindale de $\mathcal{C}$ se, e somente se, existe um isomorfismo de categorias $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C}) \to \mathcal{Q}$ que é a identidade nos objetos e morfismos de $\mathcal{C}$. Também temos, do Corolário 3.4.5, que se $\mathcal{Q}$ é a categoria cujos objetos são os mesmos de $\mathcal{C}$ e, para cada $X, Y \in \mathcal{C}_0$, $\mathcal{Q}(X,Y)$ é o conjunto dos morfismos $f \in \mathcal{Q}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})(X,Y)$ para os quais existe $\mathcal{I}$ ideal de $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{I}$ é ideal à direita denso de $\mathcal{C}$ e $f \circ g \in \mathcal{C}(A, Y)$ para todos $A \in \mathcal{C}_0$, $g \in \mathcal{I}(A, X)$ então $\mathcal{Q}$ é uma categoria de quocientes simétrica de Martindale de $\mathcal{C}$. ■

Temos a seguinte versão categórica do Teorema 3.4.16 e do Corolário 3.4.17.

Teorema 3.4.23. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena.*

(1) *Se X é um objeto de $\mathcal{C}$ satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.2.35 então $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})(X,X) = \mathrm{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C}(X,X))$.*

(2) *Se $\mathcal{C}'$ é uma subcategoria plena de $\mathcal{C}$ satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.2.36 então $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C}')$ é a subcategoria plena de $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})$ cujo conjunto de objetos é $\mathcal{C}'_0$.*

Demonstração. O item (1) segue do Corolário 3.4.17 para $R = R[\mathcal{C}]$ e $e := (X, X)$. Já o item (2) é obtido aplicando o Teorema 3.4.16 para $R = R[\mathcal{C}]$ e o conjunto de idempotentes $\Delta_0 := \{(A', A') : A' \in \mathcal{C}'_0\}$. ■

Também temos as seguintes propriedades de $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}$.

Teorema 3.4.24. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva pequena. Temos:*

(1) *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria simples ou semissimples então $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.*

(2) *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria prima (resp. semiprima) então $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})$ também é.*

(3) *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria em que todo morfismo não nulo é epimorfismo e monomorfismo então $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})$ também é.*

(4) *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria semiprima que não possui endomorfismos nilpotentes não nulos então $\mathcal{Q}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Mart}}(\mathcal{C})$ também é.*

Demonstração. (1) Segue o mesmo raciocínio da prova do Teorema 3.2.37(1), usando a Proposição 3.4.6.

(2) e (3) Seguem imediatamente do Teorema 3.4.7.

(4) É uma versão categórica do Teorema 3.4.8. ■

Referências

[Amitsur 1972] S. A. Amitsur. "On rings of quotients". *Symposia Mathematica* 8 (1972), pp. 149–164 (citado na pg. 1).

[Balaba, Kanunnikov *et al.* 2012] I. N. Balaba, A. L. Kanunnikov e A. V. Mikhalëv. "Quotient rings of graded associative rings. I". *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika* 17.2 (2012). (Tradução em Journal of Mathematical Sciences (N.Y.) **186** (2012), no. 4, 531–577), pp. 3–74 (citado nas pgs. 1, 12, 26, 29, 69, 74, 77, 78, 85, 89, 91, 95, 96, 103, 107, 108, 116, 139, 148, 153, 154, 160–162, 164, 167, 170, 175).

[Balaba e Mikhalëv 2018] I. N. Balaba e A. V. Mikhalëv. "Graded division rings". *Sarajevo Journal of Mathematics* 14.2 (2018), pp. 167–174 (citado na pg. 44).

[Beidar *et al.* 1996] K. I. Beidar, W. S. Martindale III e A. V. Mikhalev. *Rings with generalized identities*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 196. Marcel Dekker Inc., 1996 (citado nas pgs. 93, 151, 152).

[Brown 1987] R. Brown. "From groups to groupoids: a brief survey". *Bulletin of the London Mathematical Society* 19.2 (1987), pp. 113–134 (citado na pg. 5).

[Cala *et al.* 2022] J. Cala, P. Lundström e H. Pinedo. "Graded modules over object-unital groupoid graded rings". *Communications in Algebra* 50.2 (2022), pp. 444–462 (citado nas pgs. 1, 6, 13, 17, 43, 47–49, 56, 60, 69, 70, 77, 110, 137, 165, 185).

[Cristiano *et al.* 2024] Z. Cristiano, W. M. Souza e J. Sánchez. "Groupoid graded semisimple rings" (2024). A ser submetido em breve (citado nas pgs. 9, 18, 20, 21, 23–25, 41, 43, 44, 46, 47, 49–59).

[Dăscălescu *et al.* 2023] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu e L. Năstăsescu. "Graded (quasi-)frobenius rings". *Journal of Algebra* 620 (2023), pp. 392–424 (citado nas pgs. 13, 45).

[Facchini 2019] A. Facchini. *Semilocal Categories and Modules with Semilocal Endomorphism Rings*. Progress in Mathematics, vol. 331. Birkhäuser, 2019 (citado nas pgs. 7, 36, 176).

[Fuller 1976] K. R. Fuller. "On rings whose left modules are direct sums of finitely generated modules". *Proceedings of the American Mathematical Society* 54 (1976), pp. 39–44 (citado na pg. 7).

[Gabriel 1962] P. Gabriel. "Des catégories abéliennes". *Bulletin de la Société Mathématique de France* 90 (1962), pp. 323–448 (citado na pg. 7).

[Goodearl 1979] K. R. Goodearl. *von Neumann Regular Rings*. Monographs and Studies in Mathematics, vol. 4. Pitman, 1979 (citado na pg. 60).

[Goodearl e Warfield 2004] K. R. Goodearl e R. B. Warfield Jr. *An introduction to noncommutative Noetherian rings*. 2ª ed. London Mathematical Society Student Texts, vol. 61. Cambridge University Press, 2004 (citado nas pgs. 67, 73, 75, 118, 120, 121, 123).

[Hazrat 2016] R. Hazrat. *Graded rings and graded Grothendieck groups*. London Mathematical Society Lecture Note Series 435. Cambridge University Press, 2016 (citado nas pgs. 13, 37, 44, 133).

[Hungerford 1980] T. W. Hungerford. *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 73. Springer Verlag, 1980.

[Jespers e Wauters 1988] E. Jespers e P. Wauters. "A general notion of noncommutative krull ring". *Journal of Algebra* 112 (1988), pp. 388–415 (citado nas pgs. 1, 149, 189).

[Lam 1999] T. Y. Lam. *Lectures on Modules and Rings*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 189. Springer Verlag, 1999 (citado nas pgs. 1, 80, 84, 86, 91, 96, 100, 107, 110–113, 125, 128, 139, 141, 142, 150, 153, 154, 156, 164, 167, 168, 172, 173, 175, 187, 189–191, 193, 205, 215).

[Lam 2001] T. Y. Lam. *A First Course in Noncommutative Rings*. 2ª ed. Graduate Texts in Mathematics, vol. 131. Springer Verlag, 2001 (citado nas pgs. 131, 134, 176).

[Lam 2007] T. Y. Lam. *Exercises in Modules and Rings*. Problem Books in Mathematics. Springer Verlag, 2007 (citado nas pgs. 87, 102, 118, 151, 164).

[Lundström 2004] P. Lundström. "The category of groupoid graded modules". *Colloquium Mathematicae* 100.2 (2004), pp. 195–211 (citado nas pgs. 8, 13, 43, 67).

[MARTINDALE 1969] W. S. MARTINDALE. “Prime rings satisfying a generalized polynomial identity”. *Journal of Algebra* 12 (1969), pp. 576–584 (citado na pg. 1).

[MITCHELL 1972] B. MITCHELL. “Rings with several objects”. *Advances in Mathematics* 8 (1972), pp. 1–161 (citado nas pgs. 7, 54, 58, 62).

[NĂSTĂSESCU e VAN OYSTAEYEN 2004] C. NĂSTĂSESCU e F. VAN OYSTAEYEN. *Methods of Graded Rings*. Lecture Notes in Mathematics 1836. Springer-Verlag, 2004 (citado nas pgs. 13, 83, 164).

[PASSMAN 1977] D. S. PASSMAN. *The Algebraic Structure of Group Rings*. John Wiley & Sons, 1977 (citado na pg. 94).

[PASSMAN 1987] D. S. PASSMAN. “Computing the symmetric rings of quotients”. *Journal of Algebra* 105 (1987), pp. 207–235 (citado na pg. 1).

[UTUMI 1956] Y. UTUMI. “On quotient rings”. *Osaka Mathematical Journal* 8.1 (1956), pp. 1–18 (citado nas pgs. 1, 147, 157, 158, 181).

Índice remissivo