

**Estudo dos pontos fixos de funções n -valuadas em superfícies
e cálculos explícitos para o caso do toro**

Janaina de Santana Santos

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Pura

Orientador: Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, dezembro de 2022

Estudo dos pontos fixos de funções n -valuadas em superfícies e cálculos explícitos para o caso do toro

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 16/02/2023. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves - IME-USP
- Prof. Dr. Daniel Ventrúsculo - DM-UFSCar
- Prof. Dr. Vinicius Casteluber Laass - IME-UFBA

Agradecimentos

Primeiramente eu gostaria de agradecer a mim mesma por não ter sucumbido estando completamente sozinha durante 6 meses morando de favor numa kitnet numa cidade sem conhecer ninguém e no meio de uma pandemia (sem falar do depois). Dito isto, eu espero que quando eu for escrever os agradecimentos da minha tese, eu tenha lembranças mais felizes para rememorar.

Agora vamos, de fato, aos agradecimentos.

Gostaria de agradecer aos professores da UFBA que me ajudaram principalmente quando eu não estava mais ligada ao programa. Em especial, gostaria de agradecer a Maikel pelo cuidado e zelo quando soube do corte das bolsas PICME. Gostaria de agradecer em especial também a Vinicius, que merecia um prêmio por já ter me ajudado em tantos momentos; muito obrigada pelo cuidado pessoal e também acadêmico, pelos ensinamentos e pela paciência.

Gostaria de agradecer à OBMEP por todas as oportunidades que me permitiram estar aqui hoje. Gostaria de agradecer ao meu orientador Daciberg por todo o ensinamento e paciência ao longo desses anos.

Gostaria de agradecer aos meus amigos da UFBA (e de Salvador, em geral), pelas lembranças que vocês me permitiram ter e que até hoje rasgam o peito (de um jeito bom). Em particular, gostaria de agradecer a Raquel pela kitnet emprestada, mas não só pela kitnet emprestada, até porque a gente vai dividir sala quando passarmos no mesmo concurso; gostaria de agradecer a Ramon por sempre me ajudar com as traduções, me salvando em pôster since 2018; gostaria de agradecer a Victor pela parceria e acolhimento constantes e, por fim, gostaria de agradecer a Rock (*meu pai*) pelo cuidado que só um pai poderia ter e pela loucura característica de um irmão mais velho.

Gostaria de agradecer a Maély pela paciência e carinho, pelo cheirinho reconfortante e por existir na minha vida, me fazendo perceber que às vezes deixar alguém entrar pela porta não é algo ruim.

Gostaria de agradecer aos meus pais por fazerem seu melhor. Amo vocês.

Por fim, gostaria de agradecer à CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

SANTOS, J. S. **Estudo dos pontos fixos de funções n -valuadas em superfícies e cálculos explícitos para o caso do toro.** 2022. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

O principal objetivo deste trabalho é estudar a teoria de ponto fixo para funções n -valuadas definidas em superfícies, com foco no caso particular do toro. Trazemos um apanhado da teoria de ponto fixo para funções usuais, definindo as principais ferramentas dessa teoria. Definimos funções n -valuadas e exploramos os resultados obtidos ao associar essas multifunções a espaços de configuração. Apresentamos resultados gerais acerca dos pontos fixos de funções n -valuadas em superfícies, usando grupos de tranças, e aplicamos estes resultados para analisar os pontos fixos de funções a 2 valores split no toro. Exploramos exemplos nesse sentido e também provamos que a esfera é Wecken para funções n -valuadas.

Palavras-chave: índice, função n -valuada, ponto fixo, propriedade de Wecken, número de Nielsen.

Abstract

Santos, J. S. **Study of fixed points of n -valued maps on surfaces and explicit calculations for the torus case.** 2022. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

The main purpose of this work is to study the fixed point theory of n -valued maps of surfaces, focusing on the particular case of the torus. We bring an overview of fixed point theory of single-valued maps, defining the main tools of this theory. We define n -valued maps and explore the results obtained by associating these multifunctions with configuration spaces. We present general results about the fixed points of n -valued maps, using braids groups and applying these results to analyze the fixed points of 2-valued split maps of torus. We explore examples along these lines and also prove that the sphere \mathbb{S}^2 is Wecken for n -valued maps.

Keywords: index, n -valued map, fixed point, Wecken property, Nielsen number.

Sumário

1	Pré-requisitos	3
1.1	Tranças e espaços de configuração	3
1.1.1	Tranças geométricas	3
1.1.2	Tranças como elementos de π_1	6
1.2	Produto semi-direto e extensão de grupos	7
1.3	Fibrações e a sequência de Fadell-Neuwirth	10
1.4	Espaços do tipo $K(\pi, 1)$	12
1.5	Espaços ENR	13
1.6	Fibrados na esfera	14
2	Índice de ponto fixo e número de Nielsen	17
2.1	Índice para espaços ENR	17
2.2	Número de Lefschetz	22
2.3	Pontos fixos e número de Nielsen	24
2.3.1	\mathbb{S}^2 é Wecken	26
2.3.2	\mathbb{T}^2 é Wecken	27
3	Funções n-valuadas	33
3.1	Introdução	33
3.2	Funções n -valuadas e espaços de configuração	35
3.3	Pontos fixos e raízes de funções n -valuadas	38
3.4	Número de Nielsen para funções n -valuadas	44
4	Propriedade de Wecken para funções n-valuadas na esfera	53
4.1	O caso $n \geq 3$	53
4.2	O caso $n = 2$	54
5	Pontos fixos de funções a 2 valores split no toro	59
5.1	Os grupos $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$, $P_2(\mathbb{T}^2)$ e $B_2(\mathbb{T}^2)$	59
5.1.1	O grupo $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$	60
5.1.2	O grupo $P_2(\mathbb{T}^2)$	67
5.1.3	O grupo $B_2(\mathbb{T}^2)$	71
5.2	Caracterização das funções 2-ordenadas no Toro	73
5.3	Funções a 2 valores split que se deformam livres de pontos fixos	81
5.3.1	Primeiros exemplos	81

5.3.2 Mais Exemplos	86
Referências Bibliográficas	95

Introdução

A teoria de ponto fixo vem sendo estudada desde longa data. Dentro dessa teoria, o índice de ponto fixo, o número de Lefschetz e o número de Nielsen são ferramentas que foram desenvolvidas para estudar a existência e o comportamento dos pontos fixos de funções na classe de homotopia $[f]$, sendo $f : X \rightarrow X$ uma função contínua e X um espaço topológico com certas propriedades. O número de Nielsen de f , denotado por $N(f)$, se mostra uma das ferramentas mais interessantes dessa teoria. Como $N(f)$ é o inteiro não negativo que limita inferiormente o número de pontos fixos das funções homotópicas a f , faz sentido questionar sob quais condições o espaço X possui a propriedade de que toda f se deforma homotopicamente a uma aplicação com exatamente $N(f)$ pontos fixos. Quando X possui essa propriedade, ele é chamado de *espaço de Wecken*.

Uma função n -valuada é uma multifunção contínua $f : X \multimap Y$ que associa a cada ponto $x \in X$ um conjunto $\phi(x) \subset Y$ de cardinalidade exatamente n , para $n > 1$. Quando existem funções contínuas $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow Y$ tais que $\phi(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ para todo $x \in X$, dizemos que ϕ é uma função split. A teoria de ponto fixo para funções n -valuadas vem sendo bastante estudada nos últimos anos. Em [30], Schirmer define o número de Nielsen para funções n -valuadas. Nesse mesmo artigo é dada uma fórmula para o cálculo do número de Nielsen de funções n -valuadas split. Em [9], Brown e Gonçalves desenvolvem uma correspondência entre as funções n -valuadas de X em Y e as funções contínuas de X em $D_n(Y)$, o n -ésimo espaço de configuração não ordenado de Y . Ainda nesse artigo, temos o *Splitting Characterization Theorem*, que permite determinar se ϕ é split analisando o homomorfismo induzido nos grupos fundamentais de X e de $D_n(Y)$. Com essas ferramentas, foram desenvolvidos diversos resultados relacionados ao estudo dos pontos fixos de funções a n valores. Em [9] foi provado que a esfera é Wecken para funções n -valuadas.

O primeiro capítulo desta dissertação aborda alguns assuntos que são pré-requisitos para uma boa compreensão dos capítulos posteriores. Trazemos noções gerais acerca dos grupos de tranças e algumas de suas propriedades. Introduzimos certos espaços que serão utilizados posteriormente e também definimos algumas construções algébricas, como a extensão de grupos. É esperado do leitor uma certa familiaridade com alguns tópicos tais como apresentação de grupos, grupos de homologia com coeficientes racionais e grupos de homotopia em alta dimensão.

No Capítulo 2, abordamos as ferramentas de ponto fixo para funções simples. Definimos índice, número de Lefschetz e número de Nielsen. Exploramos a propriedade do ponto fixo e a propriedade de Wecken. Por fim, provamos que o toro e a esfera são espaços de Wecken.

No Capítulo 3 estudamos as funções n -valuadas e suas propriedades. Inicialmente, introduzimos os primeiros conceitos e depois passamos a estudar essas multifunções utilizando sua relação com os espaços de configuração. Resultados acerca de pontos fixos e raízes dessas multifunções são relacionados com certos grupos de tranças. Na última seção desse capítulo, definimos o número de Nielsen de uma função n -valuada.

No Capítulo 4, estudamos a propriedade de Wecken para funções n -valuadas na esfera. Usando propriedades dos grupos de tranças na esfera e certos fibrados na esfera, mostramos que \mathbb{S}^2 é um espaço de Wecken para funções n -valuadas.

No último capítulo desta dissertação, aplicamos os resultados apresentados no Capítulo 3 a fim de estudar os pontos fixos de funções a 2 valores split no toro. Na primeira seção, obtemos apresentações para os grupos $P_2(\mathbb{T}^2)$, $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ e $B_2(\mathbb{T}^2)$. Usando estas apresentações, estudamos na segunda seção as classes de homotopia das funções 2-valuadas no toro. Por fim, na última seção deste capítulo, estudamos exemplos de funções a 2 valores split no toro que se deformam livres de

pontos fixos. Apresentamos resultados que nos fornecem exemplos até então não catalogados.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste primeiro capítulo abordaremos alguns assuntos base que serão necessários para o desenvolvimento desta dissertação.

1.1 Tranças e espaços de configuração

Os grupos de tranças foram primeiramente estudados por Artin em [1], onde foram definidos os grupos de tranças no plano. Posteriormente, em [15], foram definidos os grupos de tranças em espaços topológicos arbitrários como sendo os grupos fundamentais de seus espaços de configuração. Nesta dissertação, grupos de tranças serão ferramentas bastante utilizadas. Diante disso, esta seção se faz necessária para introduzir tais conceitos e os principais resultados relacionados. Em toda esta seção n é um inteiro positivo.

1.1.1 Tranças geométricas

Começamos com a definição de uma n -trança numa superfície conexa e sem bordo que denotaremos por M .

Definição 1.1.1. Sejam $x_1, \dots, x_n \in M$ pontos distintos. Definimos uma n -trança em M como sendo uma n -upla $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ de caminhos $a_i : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ que satisfazem:

1. Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i(0) = (x_i, 0)$ e existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_i(1) = (x_j, 1)$.
2. Para todo $t \in [0, 1]$, o conjunto $\{a_1(t), \dots, a_n(t)\}$ possui n pontos distintos.
3. Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e $t \in [0, 1]$, vale que $a_i(t) = (m, t)$.

Cada caminho a_i é chamada de i -ésima corda. Quando n for qualquer ou estiver implícito iremos chamar uma n -trança apenas de trança.

Se, ao invés de considerarmos uma superfície qualquer M na definição anterior, considerarmos o plano \mathbb{R}^2 , a definição dada coincide com a definição de Artin de uma n -trança no plano.

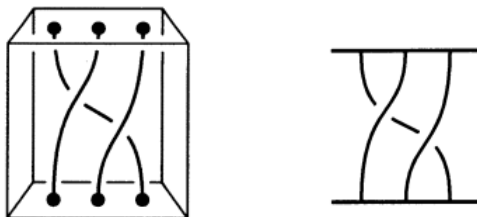


Figura 1.1: Duas formas de representar uma mesma 3-trança no plano.

Ao considerarmos a imagem dos caminhos que compõem uma n -trança como a própria n -trança, podemos visualizar geometricamente esses objetos. Tranças no plano podem ser representadas no

cubo unitário \mathbb{E}^3 ou como suas projeções no quadrado unitário \mathbb{E}^2 , como pode ser visto na Figura 1.1.

Tranças em outras superfícies também têm mais de uma maneira de serem representadas, uma vez que essas superfícies podem ser obtidas de mais de uma maneira via homeomorfismos. A esfera, por exemplo, pode ser obtida como um quociente do quadrado unitário \mathbb{E}^2 pela relação \sim que identifica $(0, y)$ com $(y, 0)$ e $(1, y)$ com $(y, 1)$; ela pode também ser obtida pela compactificação de Alexandroff $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Podemos visualizar n -tranças na esfera como caminhos em $[0, 1] \times (\mathbb{E}^2 / \sim)$ ou como caminhos em $\mathbb{R}^3 \setminus (D_1 \cup D_2)$, sendo D_1 e D_2 duas bolas abertas de \mathbb{R}^3 com fechos disjuntos.

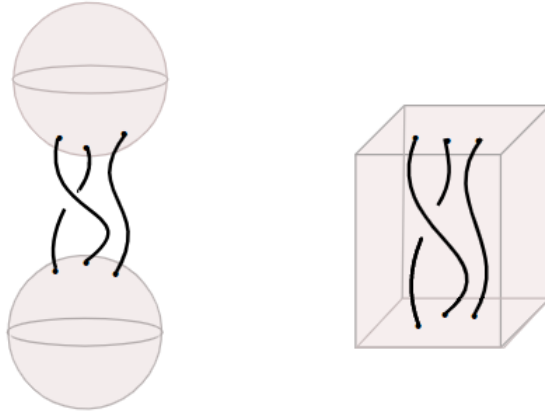


Figura 1.2: Duas formas de representar uma mesma 3-trança na esfera, sendo à direita o cubo com identificações induzidas por \sim .

Em geral, sempre podemos representar uma n -trança numa superfície M como um conjunto de n caminhos em $[0, 1] \times (P / \sim)$, em que P / \sim é a representação de M como o polígono P com lados identificados via \sim . Esta representação, porém, pode ser ainda mais simplificada. Para poder representar tranças no toro de forma mais simples, iremos introduzir um objeto geométrico que chamaremos de *disco com duas alças*.

Consideramos o toro \mathbb{T}^2 como sendo o quadrado unitário quocientado pela relação que associa $(0, y)$ a $(1, y)$ e $(y, 0)$ a $(y, 1)$. Pelo processo de corte e colagem (Figura 1.3), ao retirar um disco aberto D^2 do toro, obtemos o disco com duas alças, que denotaremos também por $\mathbb{T}^2 \setminus D^2$.

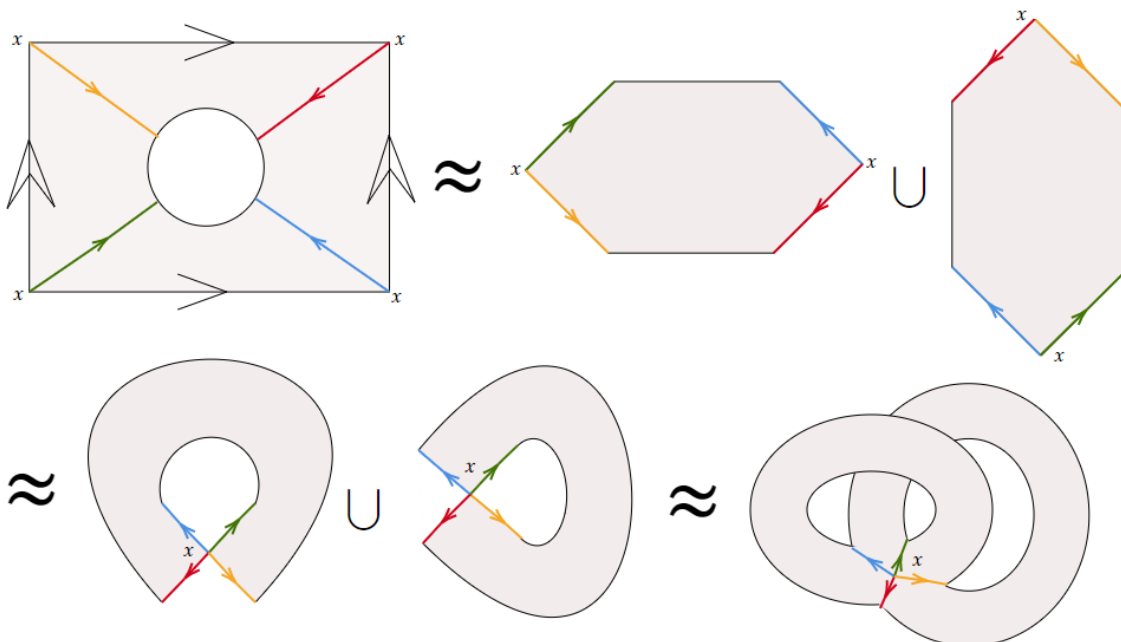


Figura 1.3: Processo de corte e colagem para a obtenção do disco com duas alças.

Como resultado final consideramos a Figura 1.4, na qual destacamos os pontos x_1 e x_2 . Na figura 1.5 representamos uma 2-trança no toro, o caminho com ponto inicial x_1 sendo a primeira corda e o caminho com ponto inicial x_2 sendo a segunda corda.



Figura 1.4: Espaço que chamaremos de disco com duas alças, ou simplesmente de $\mathbb{T}^2 \setminus D^2$.

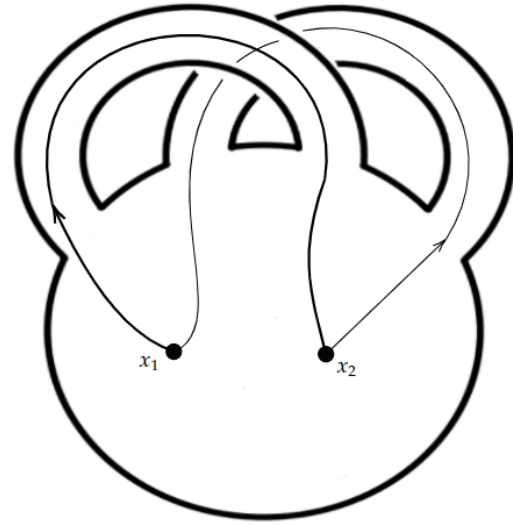


Figura 1.5: Representação de uma 2-trança no toro.

Na verdade, podemos generalizar essa forma de visualizar tranças para superfícies que são somas conexas de toros ou de planos projetivos (neste último caso com genus maior ou igual a 2). Não iremos abordar essa generalização, o leitor interessado pode consultar [31].

Note que, dada uma n -trança $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ em M , é possível associá-la a um elemento do grupo de permutações S_n ao considerar a permutação $\tau_\alpha : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ que é obtida ao associar i a j se $a_i(1) = (x_j, 1)$. A 2-trança da figura 1.5, por exemplo, está associada ao elemento $(12) \in S_2$. Se uma trança α é associada ao elemento trivial de S_n , dizemos que α é uma trança pura.

Podemos definir uma operação no conjunto das n -tranças de M da seguinte forma: dadas duas tranças $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ e $\beta = (b_1, \dots, b_n)$, definimos $\alpha\beta = ((ab)_1, \dots, (ab)_n)$, em que $(ab)_i(t) = a_i * b_{\tau_\alpha(i)}(t)$, sendo $*$ a concatenação de caminhos.

Para obter um grupo a partir do conjunto das n -tranças de S , precisamos da seguinte relação:

Definição 1.1.2. Dadas duas n -tranças $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ e $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ que estão associadas à mesma permutação, dizemos que α e β são equivalentes se para todo $i = 1, \dots, n$ existe homotopia $H_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S \times [0, 1]$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $H_i(\cdot, 0) = a_i$ e $H_i(\cdot, 1) = b_i$;
2. para cada $s \in [0, 1]$, temos que $h_s = (H_1(\cdot, s), \dots, H_n(\cdot, s))$ é uma n -trança.

De fato, esta relação é uma relação de equivalência e o conjunto das classes de equivalência das n -tranças em S forma um grupo com o produto induzido pela operação definida anteriormente (que se torna associativo). Este grupo é denotado por $B_n(M, \{x_1, \dots, x_n\})$ (veremos posteriormente que esse grupo não depende dos pontos $\{x_1, \dots, x_n\}$ tomados, mas, por hora, iremos utilizar essa notação). O elemento trivial de $B_n(M, \{x_1, \dots, x_n\})$ é a classe de equivalência da trança cujas cordas são caminhos com a primeira coordenada constante e a segunda coordenada sendo a identidade em $[0, 1]$. Em geral, a classe de equivalência $[\alpha]$ de uma n -trança α é denotada simplesmente por α . Com efeito, um mesmo elemento α de $B_n(M, \{x_1, \dots, x_n\})$ pode ter mais de uma representação geométrica, sendo que cada uma delas pode ser obtida a partir de outra por homotopias.

As n -tranças que estão associadas à permutação trivial são chamadas *tranças puras* e formam um subgrupo de $B_n(M, \{x_1, \dots, x_n\})$ denotado por $P_n(M, \{x_1, \dots, x_n\})$. Este subgrupo é obtido

como sendo o kernel do homomorfismo $\tau_n : B_n(M, \{x_1, \dots, x_n\}) \longrightarrow S_n$ que associa α a τ_α . Assim, se denotarmos por ρ_n a inclusão $P_n(M, \{x_1, \dots, x_n\}) \hookrightarrow B_n(M, \{x_1, \dots, x_n\})$, temos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow P_n(M, \{x_1, \dots, x_n\}) \xrightarrow{\rho_n} B_n(M, \{x_1, \dots, x_n\}) \xrightarrow{\tau_n} S_n \longrightarrow 1. \quad (1.1)$$

1.1.2 Tranças como elementos de π_1

Como mencionado no início da seção, uma outra maneira de definir os grupos de tranças é usando a noção de espaço de configuração. Para fazer essa construção, tomando Y espaço topológico qualquer, definimos:

Definição 1.1.3. O conjunto de todas as n -uplas ordenadas de pontos distintos de Y

$$F_n(Y) = \{(y_1, \dots, y_n) \in Y^n = Y \times Y \times \dots \times Y \mid y_i \neq y_j \text{ se } i \neq j\}$$

é chamado de n -ésimo espaço de configuração ordenado de Y .

Uma vez que $F_n(Y) \subset Y^n = Y \times Y \times \dots \times Y$, consideramos $F_n(Y)$ com a topologia induzida pela topologia de Y^n . Note que $F_1(Y) = Y$. O grupo S_n age livremente em $F_n(Y)$ da seguinte forma: se $\tau \in S_n$, então

$$\tau(y_1, \dots, y_n) = (y_{\tau(1)}, \dots, y_{\tau(n)}). \quad (1.2)$$

Definição 1.1.4. Definimos o n -ésimo espaço de configuração não-ordenado de Y como sendo o espaço de órbitas da ação descrita anteriormente

$$D_n(Y) = F_n(Y)/S_n.$$

Naturalmente, consideramos $D_n(Y)$ com a topologia quociente, de modo que, para a aplicação quociente $\pi : F_n(Y) \longrightarrow D_n(Y)$, um subconjunto W de $D_n(Y)$ é aberto se, e somente se, a pré-imagem $\pi^{-1}(W)$ é aberta em $F_n(Y)$. Assumindo Y espaço de Hausdorff, temos que a projeção $\pi : F_n(Y) \longrightarrow D_n(Y)$ é um recobrimento de $n!$ folhas.

Fixando o inteiro n , se tomarmos um outro inteiro $m > 0$, podemos considerar o subgrupo $S_m \times S_n \leq S_{m+n}$ agindo livremente em $F_{m+n}(Y)$ da seguinte forma: se $\tau \in S_m$ e $\sigma \in S_n$, então

$$(\tau, \sigma)(y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_{m+n}) = (\tau(y_1, \dots, y_m), \sigma(y_{m+1}, \dots, y_{m+n})),$$

sendo as ações $\tau(y_1, \dots, y_m)$ e $\sigma(y_{m+1}, \dots, y_{m+n})$ definidas como em (1.2). Denotamos o espaço das órbitas desta ação por $D_{m,n}(Y)$ e o consideramos com a topologia quociente. Temos que a projeção $\pi_{m,n} : F_{m+n}(Y) \longrightarrow D_{m,n}(Y)$ é um recobrimento de $m! \times n!$ folhas. Sendo $S_m \times S_n$ subgrupo de S_{m+n} , temos também o recobrimento $D_{m,n}(Y) \longrightarrow D_{m+n}(Y)$. Observe ainda que $D_{m,n}(Y)$ pode ser visto como um subespaço de $D_m(Y) \times D_n(Y)$.

Para o caso particular em que Y é uma superfície conexa e sem bordo M , temos que $F_n(M)$ é variedade conexa de dimensão $2n$, logo é conexo por caminhos. Desse modo, os espaços $D_n(M)$ e $D_{m,n}(M)$ também são conexos por caminhos.

Para Y variedade conexa de dimensão $k \geq 2$, temos a seguinte definição:

Definição 1.1.5. Se $Q = \{q_1, \dots, q_m\} \subset Y$ é um subconjunto com m pontos distintos quaisquer de M , então

$$F_{m,n}(Y) = F_n(Y \setminus Q_m)$$

é o espaço de configuração da variedade Y perfurada m vezes.

O tipo de homotopia de $F_{m,n}(Y)$ independe dos pontos em Q_m , uma vez que se $Q'_m = \{q'_1, \dots, q'_m\}$ é um outro subconjunto de m pontos distintos em Y , então $Y \setminus Q_m$ e $Y \setminus Q'_m$ são espaços homeomorfos e, por consequência, $F_n(Y \setminus Q_m)$ e $F_n(Y \setminus Q'_m)$ são espaços homeomorfos.

Sendo Q_0 o conjunto vazio, temos $F_{0,n}(Y) = F_n(Y)$. Além disso, da definição, segue que $F_{m,1}(Y) = Y \setminus Q_m$.

Para M superfície conexa, temos o seguinte resultado:¹

Teorema 1.1.1. Seja $x_0 = (x_1, \dots, x_n) \in F_n(M)$. Então os grupos $B_n(M, \{x_1, \dots, x_n\})$ e $\pi_1(D_n(M), [x_0])$ são isomorfos.

Como $D_n(M)$ é conexo por caminhos, seu grupo fundamental independe do ponto base, de modo que o grupo $B_n(M, \{x_1, \dots, x_n\})$ também não depende da escolha dos pontos na definição de uma n -trança em M . Assim, denotamos $B_n(M, \{x_1, \dots, x_n\})$ simplesmente por $B_n(M)$. Como corolário deste resultado, temos que:

Teorema 1.1.2. Os grupos $P_n(M, \{x_1, \dots, x_n\})$ e $\pi_1(F_n(M), x_0)$ são isomorfos.

Como $F_n(M)$ é conexo por caminhos, podemos escrever simplesmente $P_n(M) = \pi_1(F_n(M))$.

Denotando por $B_{m,n}(M)$ o grupo fundamental de $D_{m,n}(M)$, temos que $B_{m,n}(M)$ é um subgrupo de $B_{m+n}(M)$ conhecido como subgrupo das tranças intermediárias, sendo os elementos de $B_{m,n}(M)$ tranças com $m+n$ cordas cujas permutações estão associadas a elementos de $S_m \times S_n \leq S_{m+n}$. Note que a aplicação $(i_{m,n})_{\#} : B_{m,n}(M) \rightarrow B_m(M) \times B_n(M)$ induzida pela inclusão natural $i_{m,n} : D_{m,n}(M) \rightarrow D_m(M) \times D_n(M)$ é um epimorfismo. Dada uma trança de $B_{m,n}(M)$, podemos associá-la a uma trança de $B_m(M)$ ao ignorar as n últimas cordas e a uma trança de $B_n(M)$ ao ignorar as m primeiras cordas.

Apresentações para os grupos de tranças em superfícies podem ser encontradas em [5], [6] e [31].

1.2 Produto semi-direto e extensão de grupos

Nesta seção, definiremos produto semi-direto e extensão de grupos. Essas ferramentas são amplamente utilizadas para se obter apresentações de grupos de tranças em superfícies. Na Seção 5.1 precisaremos obter apresentações para os grupos $P_2(\mathbb{T}^2)$, $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ e $B_2(\mathbb{T}^2)$ e utilizaremos essas ferramentas. Seguimos [26] como referência principal.

Sejam A e G grupos e $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ um homomorfismo. Considere o produto cartesiano $K = A \times G$, com a operação binária

$$(a, g)(b, g') = (a\alpha_g(b), gg'), \quad (1.3)$$

em que $\alpha_g := \alpha(g)$. Vejamos que essa operação faz de K um grupo.

Como o homomorfismo α define uma ação de G em A dada por

$$g(a) = \alpha_g(a), \quad a \in A, g \in G,$$

temos que

$$\alpha_g(ab) = \alpha_g(a)\alpha_g(b), \quad \alpha_{gg'}(a) = \alpha_g(\alpha_{g'}(a)), \quad \alpha_{\mathbf{1}}(a) = a, \quad (1.4)$$

para $a, b \in A$; $g, g' \in G$ e $\mathbf{1}$ sendo o elemento neutro de G . Assim as propriedades observadas em (1.4) garantem a associatividade da operação e que $(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_G)$ é o elemento neutro deste grupo. Além disso, temos que

$$(a, g)^{-1} = (\alpha_{g^{-1}}(a^{-1}), g^{-1}).$$

Definição 1.2.1. O grupo K construído é chamada de *produto semidireto* de A por G com respeito a α e é denotado por $A \rtimes_{\alpha} G$. Quando não houver ambiguidade em relação a α , diremos apenas que K é o produto semidireto de A por G e escreveremos $A \rtimes G$.

¹Uma demonstração detalhada desse resultado pode ser encontrada em [27].

Como motivação para a definição de uma extensão de grupos, consideramos os monomorfismos

$$\begin{aligned} \mu: A &\longrightarrow K \\ a &\longmapsto (a, \mathbf{1}_G) \end{aligned} \quad (1.5)$$

e

$$\begin{aligned} \eta: G &\longrightarrow K \\ g &\longmapsto (\mathbf{1}_A, g). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Em que $\mathbf{1}_A$ e $\mathbf{1}_G$ são os elementos neutros de A e G , respectivamente. Esses monomorfismos nos permitem considerar A como um subgrupo normal de K com complemento G ao identificar A e G com suas imagens em K , isto é,

$$A \triangleleft K, \quad G \leq K, \quad A \cap G = \{(\mathbf{1}_G, \mathbf{1}_A)\}, \quad AG = K. \quad (1.7)$$

Observamos que produto direto é um caso particular do produto semidireto quando a ação $\alpha: G \longrightarrow \text{Aut}(A)$ é trivial e a operação definida em (1.3) é a operação do produto direto $A \times G$.

Definição 1.2.2. Dizemos que o grupo \tilde{G} é uma *extensão* do grupo G pelo grupo A se existem homomorfismos $l: A \longrightarrow \tilde{G}$ e $v: \tilde{G} \longrightarrow G$ tais que a seguinte sequência é exata curta

$$\mathbf{1} \longrightarrow A \xrightarrow{l} \tilde{G} \xrightarrow{v} G \longrightarrow \mathbf{1}, \quad (1.8)$$

isto é, vale que

$$\text{Ker}(l) = \{\mathbf{1}\}, \quad \text{Im}(l) = \text{Ker}(v), \quad \text{Im}(v) = G. \quad (1.9)$$

Passamos agora a descrever um método para encontrar a apresentação de uma extensão dos grupos A e G a partir das apresentações de A e G conhecidas. Suponhamos que

$$A = \langle Y \mid \mathcal{S} \rangle \quad \text{e} \quad G = \langle X \mid \mathcal{R} \rangle. \quad (1.10)$$

Considere o conjunto

$$\tilde{Y} = \{\tilde{y} = l(y) \mid y \in Y\}.$$

Uma vez que cada palavra $s \in \mathcal{S}$ é escrita em termo dos geradores $y \in Y$, podemos obter, a partir de cada $s \in \mathcal{S}$, uma palavra \tilde{s} em termos dos elementos $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ ao trocar cada y por \tilde{y} . Assim, temos o conjunto

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{\tilde{s} \mid s \in \mathcal{S}\}.$$

Por (1.9), cada elemento $x \in X$ satisfaz $x = v(\tilde{x})$ para algum $\tilde{x} \in \tilde{G}$. Fixando \tilde{x} para cada $x \in X$, obtemos o conjunto

$$\tilde{X} = \{\tilde{x} \mid x \in X\}.$$

Para cada palavra $r \in \mathcal{R}$, considere a palavra \tilde{r} obtida em termos dos elementos de \tilde{X} ao trocar cada x por \tilde{x} . Como $v(\tilde{r}) = \mathbf{1}$, por (1.9), temos que $\tilde{r} \in \text{Im}(l)$. Uma vez que $\text{Im}(l)$ é gerado pelo conjunto \tilde{Y} , cada \tilde{r} pode ser escrita como uma palavra em termo dos elementos de \tilde{Y} . Seja v_r tal palavra. Considere o conjunto

$$\tilde{\mathcal{R}} = \{\tilde{r}v_r^{-1} \mid r \in \mathcal{R}\}.$$

Por fim, como $\text{Im}(l) \triangleleft \tilde{G}$, cada conjugado $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{x}^{-1}$, para $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, é um elemento de $\text{Im}(l)$ e, portanto, pode ser reescrito como uma palavra em termo dos elementos de \tilde{Y} . Seja $w_{x,y}$ tal palavra. Considere

$$\tilde{\mathcal{T}} = \{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{x}^{-1}w_{x,y}^{-1} \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Seguindo estas notações, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.2.1. O grupo \tilde{G} possui a seguinte apresentação:

$$\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \mid \tilde{\mathcal{R}}, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mathcal{T}} \rangle. \quad (1.11)$$

Demonstração. Denotaremos por D o grupo cuja apresentação é dada em (1.11). Buscamos um isomorfismo entre D e \tilde{G} . Pela construção feita, todas as relações de D são válidas em \tilde{G} . Assim, existe um homomorfismo $\theta : D \rightarrow \tilde{G}$ definido nos geradores de forma natural, isto é:

$$\begin{aligned} \theta : D &\longrightarrow \tilde{G} \\ \tilde{x} &\longmapsto \tilde{x} \\ \tilde{y} &\longmapsto \tilde{y}. \end{aligned}$$

A restrição de θ aos elementos de \hat{Y} induz um homomorfismo

$$\begin{aligned} \theta_1 : \langle \tilde{Y} \rangle &\longrightarrow \text{Im}(l) \cong A \\ \tilde{y} &\longmapsto y. \end{aligned}$$

Uma vez que cada relação $s \in \mathcal{S}$ de A é mantida em $\langle \tilde{Y} \rangle \leq D$ pela aplicação inversa (que envia cada y para o respectivo \tilde{y}), esta aplicação é um homomorfismo e temos que θ_1 é um isomorfismo. Pela natureza do conjunto de relações $\tilde{\mathcal{T}}$ presente em D , vale que $\langle \tilde{Y} \rangle$ é subgrupo normal de D . Como $\theta(\langle \tilde{Y} \rangle) \leq \text{Im}(l)$, está bem definido o homomorfismo

$$\begin{aligned} \theta_2 : D/\langle \tilde{Y} \rangle &\longrightarrow \tilde{G}/\text{Im}(l) \cong G \\ [\tilde{x}] &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Como o conjunto de relações \mathcal{R} de G são válidas em $D/\langle \tilde{Y} \rangle$ graças às relações do conjunto $\tilde{\mathcal{R}}$, a aplicação inversa (que leva cada x para a classe de equivalência $[x]$) é um homomorfismo e, portanto, θ_2 é um isomorfismo. Assim, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{1} & \longrightarrow & A & \xrightarrow{l} & \tilde{G} & \xrightarrow{v} & G & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ & & \theta_1 \uparrow & & \theta \uparrow & & \theta_2 \uparrow & & \\ \mathbf{1} & \longrightarrow & \langle \tilde{Y} \rangle & \xrightarrow{i} & D & \xrightarrow{q} & D/\langle \tilde{Y} \rangle & \longrightarrow & \mathbf{1}, \end{array}$$

sendo i a inclusão e q a projeção natural. Uma vez que a sequência superior e a sequência inferior são exatas, usando o Lema dos Cinco, concluímos esta demonstração. □

Usando as propriedades destacadas em (1.7), construímos o bem definido homomorfismo

$$\begin{aligned} \bar{\eta} : K &\longrightarrow G \\ (a, g) &\longmapsto g \end{aligned} \tag{1.12}$$

e, usando ainda o homomorfismo μ definido em (1.5), obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$\mathbf{1} \longrightarrow A \xrightarrow{\mu} K \xrightarrow{\bar{\eta}} G \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Diante disso, o produto semidireto é um caso particular de extensão de grupos quando $\tilde{G} = K$ da Definição 1.2.1.

Ao aplicarmos a Proposição 1.2.1 a um produto semidireto, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 1.2.1. Sejam $G = \langle X \mid \mathcal{R} \rangle$ e $A = \langle Y \mid \mathcal{S} \rangle$ grupos e $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ um homomorfismo tal que $\alpha_x(y) = w_{x,y}$, onde $w_{x,y}$ é uma palavra em termo dos elementos de Y^\pm , para $x \in X$ e $y \in Y$. Então o produto semidireto $A \rtimes_\alpha G$ possui a apresentação

$$A \rtimes_\alpha G = \langle X, Y, \mid \mathcal{R}, \mathcal{S}, \{xyx^{-1}w_{x,y}^{-1} \mid x \in X, y \in Y\} \rangle.$$

Demonstração. De acordo com a notação introduzida no início desta seção, para este caso particular temos $\tilde{x} = (\mathbf{1}, x)$ e $\tilde{y} = (y, \mathbf{1})$. As palavras v_r que são obtidas são triviais pela natureza de sua

construção neste caso. Além disso, temos

$$\tilde{x}\tilde{y}\tilde{x}^{-1} = (\mathbf{1}, x)(y, \mathbf{1})(\mathbf{1}, x^{-1}) = (\alpha_x(y), \mathbf{1}) = (w_{x,y}, \mathbf{1}).$$

Assim, usando a identificação $x = \tilde{x}$ e $y = \tilde{y}$, obtemos este resultado. \square

1.3 Fibrações e a sequência de Fadell-Neuwirth

Nesta seção, definiremos uma fibração e veremos que a partir dos espaços definidos na seção 1.1 é possível construir exemplos de fibrações. Esses exemplos serão bastante utilizados ao longo desta dissertação. Veremos ainda que a partir de uma fibração é possível construir, usando a sequência longa de homotopia, a sequência de Fadell-Neuwirth.

Definição 1.3.1. Sejam E e B espaços topológicos e $p : E \rightarrow B$ uma aplicação contínua. Dizemos que p é uma *fibração* se p possui a *propriedade de levantamento de homotopia* para complexos CW, isto é, dado Y complexo CW, uma homotopia $H : Y \times [0, 1] \rightarrow B$ e uma função $f : Y \rightarrow E$ satisfazendo $p \circ f = H(\cdot, 0)$, existe $\tilde{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow E$ que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & B. \end{array}$$

O espaço B é chamado de *espaço base* e o espaço E é chamado de *espaço total*. Para cada $b \in B$, $p^{-1}(b)$ é a *fibra* de b .

Definição 1.3.2. Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação contínua e F um espaço topológico. Dizemos que p é uma *fibração localmente trivial* com fibra típica F se as seguintes condições são satisfeitas:

1. Para cada $x \in B$, o espaço $p^{-1}(x)$ é homeomorfo a F ;
2. Para cada $x \in B$ existe vizinhança U de x e um homeomorfismo $\theta : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\theta} & p^{-1}(U) \\ \searrow p_U & & \swarrow p \\ & U & \end{array}$$

sendo p_U a projeção na primeira coordenada. Cada homeomorfismo θ é chamado de *trivialização local*.

Quando o espaço B for paracompacto, vale que uma fibração localmente trivial é uma fibração². Note que um recobrimento é um caso particular de fibração localmente trivial.

Em [14] é provado que se M é uma variedade conexa de dimensão $k \geq 2$, então, para $n \geq 2$ e $1 \leq r < n$, a projeção

$$p_r : \begin{array}{ccc} F_{m,n}(M) & \longrightarrow & F_{m,r}(M) \\ (x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_r) \end{array} \quad (1.13)$$

é uma fibração localmente trivial com fibra típica $F_{m+r,n-r}(M)$. Podemos também definir a projeção nas últimas r coordenadas. Essa fibração é chamada de fibração de Fadell-Neuwirth. Em particular,

²[34, (7.13)].

temos que a projeção na primeira coordenada $p_1 : F_{n+1}(M) \rightarrow M$ é uma fibração localmente trivial com fibra típica $F_{1,n}(M)$.

Denotando por $\pi_{m,n}$ e π_m as projeções induzidas pelas ações de $S_m \times S_n$ em F_{m+n} e de S_m em F_m , respectivamente, temos que $p_m : F_{m+n}(M) \rightarrow F_m(M)$ induz uma aplicação \bar{p}_m que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} F_{m+n}(M) & \xrightarrow{p_m} & F_m(M) \\ \pi_{m,n} \downarrow & & \downarrow \pi_m \\ D_{m,n}(M) & \xrightarrow{\bar{p}_m} & D_m(M). \end{array}$$

Para cada $x \in D_m(M)$, vale que

$$\bar{p}_m^{-1}(x) = \pi_{m,n}((\pi_{S_m} \circ p_m)^{-1}(x)).$$

Como p_m é fibração localmente trivial, para cada ponto $x \in D_m(M)$ consideramos um aberto U de $F_m(M)$ que contém um único elemento de $\pi^{-1}(x)$ e que satisfaz as condições da definição 1.3.2. Sendo $F_{m,n}(M)$ a fibra típica de p_m , o homeomorfismo entre $U \times F_{m,n}(M)$ e $p_m^{-1}(U)$ induz um homeomorfismo entre $\bar{p}_m^{-1}(\pi_m(U))$ e $\pi_m(U) \times \pi_n(F_n(Y \setminus Q_m))$. Assim, a projeção

$$\begin{array}{ccc} \bar{p}_{m,n} : & D_{m,n}(M) & \longrightarrow D_m(M) \\ & ([x_1, \dots, x_m], [(x_{m+1}, \dots, x_{m+n})]) & \longmapsto [x_1, \dots, x_m] \end{array} \quad (1.14)$$

é fibração localmente trivial. Em particular, temos que $\bar{p}_{1,n} : D_{1,n}(M) \rightarrow M$ é fibração.

Dada uma fibração localmente trivial $p : E \rightarrow B$ com fibra típica F , existem homomorfismos $d_k : \pi_k(B, b) \rightarrow \pi_k(F, e)$ tais que a seguinte sequência é exata

$$\dots \longrightarrow \pi_{k+1}(B) \xrightarrow{d_{k+1}} \pi_k(F, e) \xrightarrow{i_k} \pi_k(E, e) \xrightarrow{p_k} \pi_k(B, b) \xrightarrow{d_k} \pi_{k-1}(F, e) \longrightarrow \dots,$$

onde i_k é a função induzida pelo mergulho de F em E que pode ser visto como uma inclusão e p_k é a aplicação induzidas pela projeção. Esta sequência é conhecida como sequência exata de homotopia de p . Se considerarmos a fibração localmente trivial (1.13) em que $Y = M$ é uma superfície compacta, essa sequência nos permite provar o seguinte resultado:

Proposição 1.3.1. Se M é uma superfície compacta e $m \geq 1$, então, para $i \geq 2$, vale que

$$\pi_i(F_{m,n}(M)) = 1.$$

Além disso, se $\chi(M) \leq 0$, então essa relação também é válida para $m = 0$.

Demonstração. Provaremos a primeira afirmação por indução em n . Lembramos que se $m \geq 1$, então $F_{m,1}(S^2) = S^2 - Q_m$ é homeomorfo ao disco perfurado $m - 1$ vezes e $F_{m,1}(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{R}P^2 - Q_m$ é homeomorfo à faixa de Möbius perfurada $m - 1$ vezes. Além disso, se $\chi(M) \leq 0$, temos que $F_{m,1}(M) = M - Q_m$ tem o esmo tipo de homotopia de um grafo. Assim, $\pi_i(F_{m,1}(M)) = 1$ se $i \geq 2$ e vale a afirmação para $n = 1$. Suponhamos agora que

$$\pi_i(F_{m,n-1}(M)) = 1$$

para $i \geq 2$ e $m \geq 1$ qualquer. Graças à sequência longa de homotopia de $p : F_{m,n}(M) \rightarrow F_{m,1}(M)$, temos

$$\dots \longrightarrow \pi_{i+1}(F_{m+1,n-1}) = 1 \longrightarrow \pi_i(F_{m,n}) \longrightarrow \pi_i(F_{m,1}) \longrightarrow \pi_i(F_{m+1,n-1}) = 1 \longrightarrow \dots,$$

onde omitimos M para simplificar notação, obtemos $\pi_i(F_{m,n}(M)) = 0$ para $i \geq 2$ e $m \geq 1$ qualquer.

Para provar a segunda afirmação, recordamos que, se $\chi(M) \leq 0$, então

$$\pi_i(M) = \pi_i(\mathbb{R}^2) = 1$$

para $i \geq 2$, uma vez que \mathbb{R}^2 é recobrimento universal de M . Assim $\pi_i(F_{0,1}(M)) = \pi_i(M)$ é trivial se $i \geq 2$. Usando a sequência longa de homotopia de $p : F_{0,n}(M) \rightarrow F_{0,1}(M)$

$$\dots \longrightarrow \pi_{i+1}(F_{0,1}) \longrightarrow \pi_i(F_{1,n-1}) \longrightarrow \pi_i(F_{0,n}) \longrightarrow \pi_i(F_{0,1}) \longrightarrow \dots,$$

obtemos que $\pi_i(F_n(M)) \cong \pi_i(F_{1,n-1}(M))$ é trivial para $i \geq 2$. □

Com este resultado, podemos concluir que a sequência longa de homotopia da projeção definida em (1.13) para $Y = M$ com característica de Euler não positiva é a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \pi_1(F_{m+r,n-r}(M)) \longrightarrow \pi_1(F_{m,n}(M)) \longrightarrow \pi_1(F_{m,r}(M)) \longrightarrow 1 \quad (1.15)$$

conhecida como sequência de Fadell-Neuwirth.

Observação 1.3.1. Note que se substituirmos M por \mathbb{R}^2 , o resultado da Proposição 1.3.1 segue de forma análoga e vale que $\pi_i(F_{m,n}(\mathbb{R}^2)) = 1$.

1.4 Espaços do tipo $K(\pi, 1)$

Nesta seção, definiremos os espaços do tipo $K(\pi, 1)$. Veremos que existe uma correspondência entre as funções definidas nestes espaços e os homomorfismos entre os grupos fundamentais. O fato de que certos espaços de configuração são espaços do tipo $K(\pi, 1)$ será amplamente usado em diversas demonstrações nesta dissertação.

Definição 1.4.1. Dizemos que um espaço topológico conexo por caminhos X é um espaço do tipo $K(\pi, 1)$ se X possui recobrimento universal contrátil.

Recordamos que se $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X$ é recobrimento universal, então $\pi_i(X) = \pi_i(\tilde{X})$ para $i \geq 2$. Assim, a Proposição 1.3.1 nos diz que, se $\chi(M) \leq 0$, então $\pi_i(\widetilde{F_{m,n}(M)})$ é trivial para $i \geq 2$. Como $\pi_1(\widetilde{F_{m,n}(M)})$ também é trivial, pelo Teorema de Whitehead³, vale que $(\widetilde{F_{m,n}(M)})$ é contrátil e, portanto, $F_{m,n}(M)$ é $K(\pi, 1)$. Como $F_n(M)$ e $F_{m+n}(M)$ são recobrimentos de $D_n(M)$ e $D_{m,n}(M)$, respectivamente, também temos que estes espaços são $K(\pi, 1)$. Pela Observação 1.3.1, também vale que os espaços de configuração do plano são espaços $K(\pi, 1)$.

Sejam X e Y espaços compactos. Denotando por $[X, Y]_0$ o conjunto das classes de homotopia pontuada das funções de X em Y que levam $x_0 \in X$ em $y_0 \in Y$, temos que o grupo $\pi_1(Y, y_0)$ age neste conjunto e o espaço das órbitas obtido é o conjunto $[X, Y]$ das classes de homotopia livre das funções de X em Y ([34, (1.11)]).

O próximo resultado, nos fornece uma caracterização de $[X, Y]_0$ quando Y é um espaço do tipo $K(\pi, 1)$.

Proposição 1.4.1. Seja X um complexo CW conexo e Y um espaço do tipo $K(\pi, 1)$. Então todo homomorfismo $\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ é induzido por uma aplicação $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ que é única a menos de homotopia que fixa o ponto base x_0 .

Demonstração. A demonstração desta proposição consiste em construir para cada homomorfismo $\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ uma função $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ tal que $f_{\#} = \varphi$ e depois verificar que qualquer outra função que também induz φ é homotópica a f com ponto base x_0 fixado. Dividiremos a prova em dois casos, primeiro analisando o caso em que X possui apenas uma 0-célula e depois analisando o caso em que X possui mais de uma 0-célula.

No caso em que X possui apenas uma 0-célula, este será o ponto base x_0 e definiremos $f(x_0) = y_0$. Se e^1 é uma 1-célula de X , temos que o fecho de e^1 é um representante geométrico de algum elemento

³[22, Theorem 4.5].

de $\pi_1(X, x_0)$ que denotaremos por $[e^1]$. Diante disso, definimos a imagem do fecho de e^1 via f como sendo uma representação geométrica do elemento $\varphi([e^1])$. Sendo $i : X^1 \rightarrow X$ a inclusão do 1-esqueleto de X em X , temos que $\varphi \circ i_{\#} = f_{\#}$, uma vez que $\pi_1(X^1, x_0)$ é gerado pelas 1-células de X . Note que para estender essa função às 2-células de X , precisamos que a aplicação de colagem $\psi : \mathbb{S}^1 \rightarrow X^1$ de uma dada 2-célula e^2 seja tal que $f\psi$ é nulo-homotópica. Vejamos que isso sempre ocorre. Tomando $s_0 \in \mathbb{S}^1$ como ponto base e α um caminho em X^1 tal que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = \psi(s_0)$, podemos considerar a concatenação de caminhos $\alpha \cdot \psi \cdot \alpha^{-1}$ como a representação geométrica de um elemento de $\pi_1(X^1, x_0)$. Denotando tal elemento por $[\psi]$, note que a condição de $f\psi$ ser nulo-homotópica é equivalente à condição de o elemento $f_{\#}([\psi])$ ser nulo em $\pi_1(Y, y_0)$. Como $i_{\#}([\psi]) = 0$, pois provem de uma função de colagem, vale que $f_{\#}([\psi]) = \phi_{\#}([\psi])$ e f pode ser estendida às 2-células. É possível estender f indutivamente às n -células, para $n > 2$, pois as aplicações de colagem $\psi : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ são tais que a composição $f\psi : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow Y$ se levanta ao recobrimento universal de Y , sendo ele contrátil, vale que esse levantamento é nulo-homotópico, logo $f\psi$ também é nulo-homotópica.

Sejam $f_0, f_1 : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ aplicações que induzem o mesmo homomorfismo entre os grupos fundamentais. Vale que as restrições X^1 são homotópicas com ponto base x_0 fixado. Para estender essa função $\tilde{H} : X^1 \times [0, 1] \cup X \times \{0, 1\} \rightarrow Y$ a uma homotopia $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, precisamos estendê-la às n -células $e^n \times (0, 1)$ de $X \times [0, 1]$. Podemos fazer isso de maneira indutiva e análoga ao que foi feito anteriormente, uma vez que $e^n \times (0, 1)$ tem dimensão $n + 1 > 2$, as aplicações de colagem $\psi : \mathbb{S}^n \rightarrow X^{n-1} \times [0, 1]$ são tais que a composição $f\psi : \mathbb{S}^n \rightarrow Y$ se levanta ao recobrimento universal de Y , sendo ele contrátil, vale que esse levantamento é nulo-homotópico, logo $f\psi$ também é nulo-homotópica. Assim obtemos uma homotopia $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ entre f_0 e f_1 que fixa ponto base.

O caso em que X possui mais de uma 0-célula é parecido com o anterior, porém com alguns passos extras. Assim, faremos a demonstração até o ponto em que ela segue de forma análoga ao que foi feito anteriormente. Devemos considerar o grafo $T \subset X$ como sendo um grafo contrátil que possui o maior número possível de 0-células, sendo uma dessas 0-células x_0 . Definimos $f|_T$ como sendo a função constante em y_0 . Temos que cada 1-célula e^1 em $X - T$ determina um elemento de $\pi_1(X, x_0)$ que será denotado por $[e^1]$. Assim, definimos a imagem do fecho de e^1 como sendo um representante geométrico de $\varphi([e^1])$. Dessa forma, temos f definida em X^1 e o procedimento de estendê-la às n -células para $n \geq 2$ segue de forma análoga ao que foi feito anteriormente. Para verificar que duas funções $f_0, f_1 : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ que induzem o mesmo homomorfismo são homotópicas com ponto base fixado, devemos considerar uma homotopia $F : X^1 \times [0, 1] \rightarrow X^1$ tal que $F(x, 0) = x$ para todo $x \in X^1$, $F(x', 1) = x_0$ se $x' \in T$ e $F(x_0, t) = x_0$ para todo $t \in [0, 1]$. Note que a composição $f_0|_{X^1} \circ F$ é uma homotopia entre $f_0|_{X^1}$ e uma função $g_0 : X^1 \rightarrow Y$ que leva T em y_0 e a composição $f_1|_{X^1} \circ F$ é uma homotopia entre $f_1|_{X^1}$ e uma função $g_1 : X^1 \rightarrow Y$ que leva T em y_0 . Como g_0 e g_1 induzem o mesmo homomorfismo que $f_0|_{X^1}$ e $f_1|_{X^1}$ no grupo fundamental de X^1 , vale que g_0 e g_1 são homotópicas. Temos então uma homotopia entre $f_0|_{X^1}$ e $f_1|_{X^1}$ e essa homotopia pode ser estendida a uma homotopia entre f_0 e f_1 usando o argumento do caso anterior. \square

Em outras palavras, este teorema nos garante que, se X é conexo por caminhos e Y é $K(\pi, 1)$, existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto $[X, Y]_0$ e o conjunto $\text{Hom}(\pi_1(X), \pi_1(Y))$ dos homomorfismos entre os grupos fundamentais dos respectivos espaços. Usaremos esse resultado para analisar classes de homotopias de funções com contradomínio em espaços de configuração.

1.5 Espaços ENR

Nesta seção faremos um breve apanhado acerca dos espaços ENR. Estes espaços serão necessários para a definição de índice de ponto fixo que faremos na Seção 2.1.

Definição 1.5.1. Um subespaço $X \subset Y$ é dito um *retrato de vizinhança* em Y se existe uma vizinhança aberta $U \subset Y$ de X tal que X é retrato de U , isto é, existe uma função $r : U \rightarrow X$,

chamada retração, satisfazendo $ri = \text{Id}_X$, onde $i : X \rightarrow U$ é a inclusão e Id_X é a identidade em X .

Segue diretamente da definição que todo aberto U de um espaço topológico Y é retrato de vizinhança em Y .

Definição 1.5.2. Dizemos que um espaço X é um retrato de vizinhança euclidiana (ou simplesmente ENR) se X é homeomorfo a um retrato de vizinhança em \mathbb{R}^n , para algum n .

As variedades compactas e os complexos simpliciais finitos são os principais exemplos de espaços ENR.

Lema 1.5.1. Seja X um espaço ENR. Se $U \subset Y$ é um retrato de vizinhança em Y , então U também é ENR.

Demonstração. Sendo U retrato de vizinhança em Y , existe aberto U' de Y e uma retração $r_1 : U' \rightarrow U$ que satisfaz

$$r_1 \circ i_U = \text{Id}_U.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $Y \subset \mathbb{R}^n$ para algum n . Como Y é ENR, existe aberto Y' de \mathbb{R}^n e retração $r_2 : Y' \rightarrow Y$ que satisfaz

$$r_2 \circ i_Y = \text{Id}_Y.$$

Consideramos o aberto $V = r_2^{-1}(U') \subset Y'$ e a composição

$$r = r_1 \circ r_2|_V : V \rightarrow U.$$

Note que a inclusão $i : U \rightarrow V$ pode ser obtida como sendo a composição $i_U \circ i_{U'}$. Sendo $i_{U'}$ restrição da inclusão i_Y , temos que

$$r \circ i = r_1 \circ r_2|_V \circ i_{U'} \circ i_U = r_1 \circ \text{Id}_{U'} \circ i_U = \text{Id}_U.$$

De modo que r é uma retração que torna U um espaço ENR. □

1.6 Fibrados na esfera

Nesta seção, introduziremos alguns conceitos que serão utilizados na Seção 4.2. O nosso objetivo aqui é apenas introduzir o necessário para a construção que será feita posteriormente, por isso não nos aprofundaremos em outros exemplos e definições.

Definição 1.6.1. Se $p : E \rightarrow B$ é uma fibração localmente trivial com fibra típica F , então a terna (E, p, B) será chamada de fibrado.

O fibrado tangente da esfera, que denotaremos por τ , é a terna $(T\mathbb{S}^2, p, \mathbb{S}^2)$, em que

$$T\mathbb{S}^2 = \{(x, w) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \mid \langle x, w \rangle = 0\}$$

e a projeção $p : T\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é dada por $p(x, w) = x$. Assim, para cada $x \in \mathbb{S}^2$, $p^{-1}(x) = T_x$ é homeomorfo ao espaço vetorial de dimensão 2 formado pelos vetores perpendiculares a x em \mathbb{R}^3 . O fibrado normal da esfera, que denotaremos por ν , é a terna $(N\mathbb{S}^2, q, \mathbb{S}^2)$, em que

$$N\mathbb{S}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \mid y = rx \text{ para algum } r \in \mathbb{R}\}$$

e a projeção $q : N\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é dada por $q(x, rx) = x$. Assim, para cada $x \in \mathbb{S}^2$, $q^{-1}(x) = N_x$ é homeomorfo ao espaço vetorial de dimensão 1 formado pelos vetores múltiplos de x . A Figura 1.6 ilustra esses dois fibrados.

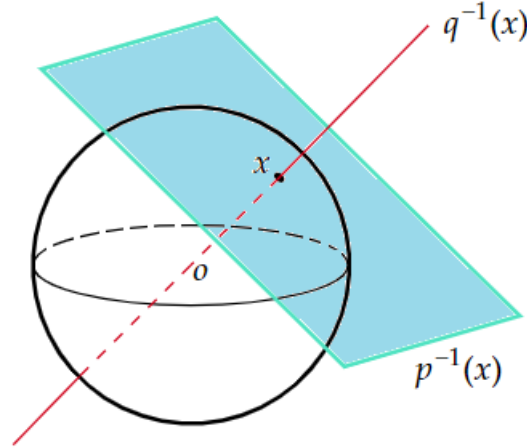


Figura 1.6: Fibras de τ e ν calculadas sobre um mesmo ponto x .

Definição 1.6.2. Dados dois fibrados $\xi_1 = (E_1, p_1, B)$ e $\xi_2 = (E_2, p_2, B)$ com o mesmo espaço base B , definimos a *soma Whitney*

$$\xi_1 \oplus \xi_2$$

como sendo o fibrado $(E_1 \oplus E_2, \tilde{p}, B)$, onde $E_1 \oplus E_2$ é o conjunto dos pontos $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ que satisfazem $p_1(x_1) = p_2(x_2)$ e \tilde{p} é a projeção definida por

$$\tilde{p}(x_1, x_2) = p_1(x_1) = p_2(x_2).$$

A fibra $\tilde{p}^{-1}(b)$ sobre $b \in B$ é simplesmente $p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b)$.

Como exemplo, podemos considerar a soma Whitney $\nu \oplus \tau = (NS^2 \oplus TS^2, h, S^2)$ com fibra típica $N_x \times T_x$ homeomorfa a \mathbb{R}^3 . Denotamos cada elemento $((x, w), (x, rx)) \in NS^2 \oplus TS^2$ simplesmente por $(x, (w, rx))$ a fim de simplificar notação.

Definição 1.6.3. Um isomorfismo entre os fibrados (E_1, p_1, B) e (E_2, p_2, B) é um homeomorfismo $u : E_1 \rightarrow E_2$ que satisfaz $p_1 = p_2 \circ u$. Quando existe tal isomorfismo dizemos que (E_1, p_1, B) e (E_2, p_2, B) são isomorfos.

Consideramos o fibrado $(B \times F, p, B)$, em que a projeção p é dada por $p(b, f) = b$. Um fibrado (E, \tilde{p}, B) será dito trivial se ele for isomorfo a $(B \times F, p, B)$. Definindo

$$\begin{aligned} u : NS^2 \oplus TS^2 &\longrightarrow S^2 \times \mathbb{R}^3 \\ (x, (rx, w)) &\longmapsto (x, rx + w), \end{aligned} \tag{1.16}$$

temos que $\nu \oplus \tau$ é um fibrado trivial, uma vez que, fixado $x \in S^2$, cada ponto de \mathbb{R}^3 está contido em um único plano perpendicular ao vetor x , ou seja, cada ponto de \mathbb{R}^3 pode ser escrito de forma única como soma de um vetor perpendicular a x e um múltiplo de x . Note que o fibrado τ não é trivial, pois qualquer tentativa de construir um homeomorfismo entre TS^2 e $S^2 \times \mathbb{R}^2$ falha na continuidade.

Definição 1.6.4. Um fibrado (E', p', B') é um sub-fibrado de (E, p, B) se $E' \subset E$, $B' \subset B$ e $p' = p|_{E'}$.

Os fibrados τ e ν podem ser vistos como sub-fibrados do fibrado trivial $(S^2 \times \mathbb{R}^3, h, S^2)$. Se considerarmos $S(NS^2 \oplus TS^2)$ como o subconjunto de $NS^2 \oplus TS^2$ dos pontos $(x, (rx, w))$ que satisfazem $\|rx + w\| = 1$, temos que $(S(NS^2 \oplus TS^2), \bar{p}, S^2)$ é um fibrado trivial sendo a fibra típica S^2 .

Definição 1.6.5. Uma *seção* de um fibrado (E, p, B) é uma aplicação contínua $s : B \rightarrow E$ que satisfaz $p \circ s = 1_B$, isto é, para cada $b \in B$, temos que $s(b) \in p^{-1}(b)$.

As seções de um fibrado trivial $(B \times F, p, B)$ são da forma $s(b) = (b, f(b))$ em que $f : B \rightarrow F$ está unicamente definida por s . Assim, cada seção de um fibrado trivial (E, p', B) com fibra típica F está unicamente associada a uma função $f_s : B \rightarrow F$ que depende unicamente do isomorfismo de fibrados $u : B \times F \rightarrow E$ e de s .

Finalizamos esta seção com uma construção que permite obter fibrados na esfera \mathbb{S}^2 . Consideramos \mathbb{S}^2 como a união do hemisfério norte S_+ e do hemisfério sul S_- , onde identificamos o equador $S_+ \cap S_-$ com a esfera \mathbb{S}^1 de forma natural. Dada uma aplicação contínua

$$\kappa : \mathbb{S}^1 \rightarrow GL_2(\mathbb{R}),$$

em que $GL_2(\mathbb{R})$ é o grupo das matrizes 2×2 inversíveis, consideramos E_κ o quociente da união disjunta

$$S_+ \times \mathbb{R}^2 \amalg S_- \times \mathbb{R}^2$$

obtida ao identificar $(x, v) \in \partial(S_+) \times \mathbb{R}^2$ com $(x, \kappa(x)v) \in \partial(S_-) \times \mathbb{R}^2$. A projeção natural

$$p_\kappa : E_\kappa \rightarrow \mathbb{S}^2$$

faz da terna $(E_\kappa, p_\kappa, \mathbb{S}^2)$ um fibrado. A aplicação κ é chamada de *mapa de transição*.

Na verdade, essa construção pode ser generalizada para uma esfera de dimensão qualquer e $n \geq 1$, mas nosso interesse aqui está restrito ao caso $n = 2$.

Capítulo 2

Índice de ponto fixo e número de Nielsen

Neste capítulo, buscamos trazer uma breve introdução à Teoria de Ponto Fixo para funções simples. Tal teoria é bastante extensa, por isso, o que buscamos aqui é uma motivação para o que é discutido na seção 3.4. As principais referências para este capítulo são os livros [7] e [18]. Algumas definições e resultados das duas primeiras seções podem ser encontrados para espaços mais simples em [22] e [33].

2.1 Índice para espaços ENR

O índice de ponto fixo de uma função surge como uma tentativa de contar seu número de pontos fixos. Nesta seção iremos definir o índice de ponto fixo para uma terna (M, f, U) , em que $f : U \rightarrow M$ é uma aplicação contínua, $U \subset M$ é um aberto, o conjunto dos pontos fixos $\text{Fix}(f) = \{x \in U \mid f(x) = x\}$ é um compacto e M é um espaço ENR. Faremos isso definindo primeiramente o índice para ternas (\mathbb{R}^n, g, V) , em que $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, $V \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e o conjunto $\text{Fix}(g) = \{x \in V \mid g(x) = x\}$ é um compacto, e depois estendendo esse resultado para as ternas (M, f, U) mencionadas.

Se $V \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua tal que $\text{Fix}(g)$ é compacto, dizemos que (\mathbb{R}^n, g, V) é uma terna admissível. Observe que se $i : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ denota a aplicação inclusão, temos que

$$(i - g)^{-1}(0) = \text{Fix}(g).$$

Assim, podemos definir o índice de ponto fixo para ternas admissíveis, como se segue.

Definição 2.1.1. Dada uma terna admissível (\mathbb{R}^n, g, V) , denotaremos por K o compacto $\text{Fix}(g)$. Seja D uma bola fechada com centro na origem tal que $K \subset D$. Considere a composição

$$\begin{aligned} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) &\xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D) \xrightarrow{i_*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) \\ &\xrightarrow{\cong} H_n(V, V - K) \xrightarrow{(i-g)_*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde i_* é induzida da inclusão canônica, o primeiro isomorfismo segue do fato de $\mathbb{R}^n - 0$ é retrato por deformação de $\mathbb{R}^n - D$ e o segundo isomorfismo é obtido por excisão¹ ao extrair $\mathbb{R}^n - V$. Recordamos que $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \cong \mathbb{Z}$. Assim, esta composição é da forma

$$x \mapsto I(\mathbb{R}^n, g, V) \cdot x$$

para todo $x \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$, sendo $I(\mathbb{R}^n, g, V)$ o único inteiro que determina o homomorfismo dado pela composta. Este inteiro é chamado de *índice de ponto fixo* de g e também pode ser

¹O Teorema da Excisão pode ser encontrado em [22, Theorem 2.20].

denotado simplesmente por $I(g)$.

Observação 2.1.1. Note que se g é a aplicação constante num ponto do domínio, então K consiste nesse único ponto, as funções $(i - g), i : (V, V - K) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ são homotópicas e todos os homomorfismos da definição anterior são identidade, logo $I(g) = 1$. Uma consequência ainda mais direta da definição é que se g não possui pontos fixos, então $I(g) = 0$.

Destacaremos algumas propriedades desse índice que nos auxiliarão na definição de um índice para espaços ENR. A primeira propriedade não será demonstrada, sua prova utiliza a fórmula de *Künneth* e pode ser consultada em [18]. As demais propriedades serão aqui demonstradas.

Proposição 2.1.1. (Multiplicatividade) Sejam (\mathbb{R}^n, g, V) e (\mathbb{R}^m, g', V') duas ternas admissíveis e considere $g \times g' : V \times V' \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Então vale que

$$\text{Fix}(g \times g') = \text{Fix}(g) \times \text{Fix}(g') \text{ e}$$

$$I(g \times g') = I(g) \cdot I(g').$$

Proposição 2.1.2. (Localização) Se (\mathbb{R}^n, g, V) é uma terna admissível e W é um aberto tal que $K = \text{Fix}(g) \subset W \subset V$, então temos

$$I(\mathbb{R}^n, g, V) = I(\mathbb{R}^n, g|_W, W).$$

Demonstração. Por excisão, temos que $j_* : H_n(W, W - K) \rightarrow H_n(V, V - K)$ é isomorfismo. Além disso, $(i - g|_W) = (i - g) \circ j$, de modo que $(i - g|_W)_* = (i - g)_* \circ j_*$ e o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} & H_n(V, V - K) & \\ \cong \nearrow & \uparrow & \searrow (i-g)_* \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) & j_* \cong & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \\ \cong \searrow & \uparrow & \nearrow (i-g|_W)_* \\ & H_n(W, W - K) & \end{array}$$

Assim, as composições no diagrama (2.1) serão equivalentes ao definir $I(\mathbb{R}^n, g, V)$ e $I(\mathbb{R}^n, g|_W, W)$. \square

Proposição 2.1.3. (Aditividade) Seja (\mathbb{R}^n, g, V) uma terna admissível. Suponhamos que $V = \bigcup_{i=1}^r V_i$, onde cada V_i é um aberto. Seja $g_i = g|_{V_i}$. Suponhamos que $\text{Fix}(g_i)$ é compacto para cada i e $\text{Fix}(g_i) \cap \text{Fix}(g_j) = \emptyset$ se $i \neq j$. Então $\text{Fix}(g) = \bigcup_{i=1}^r \text{Fix}(g_i)$ e

$$I(\mathbb{R}^n, g, V) = \sum_{i=1}^r I(\mathbb{R}^n, g_i, V_i).$$

Demonstração. Temos que $x \in \text{Fix}(g)$ se, e somente se, existe V_i tal que $x \in V_i$ e $g_i(x) = x$, logo vale a igualdade $\text{Fix}(g) = \bigcup_{i=1}^r \text{Fix}(g_i)$. Para provar a segunda igualdade, denotemos $K_i = \text{Fix}(g_i)$.

Considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) & \xrightarrow{\cong} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D) & \xrightarrow{i_*} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) \\
 \downarrow \{Id\} & & \downarrow \{Id\} & & \downarrow \{K'_{i_*}\} \\
 \oplus H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) & \xrightarrow{\cong} & \oplus H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D) & \xrightarrow{\oplus i_*} & \oplus H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K_i) \\
 & & & & \xrightarrow{\cong} H_n(V, V - K) \xrightarrow{(i-g)_*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \\
 & & & & \uparrow \{K_{i_*}\} \quad \uparrow \{\oplus Id\} \\
 & & \xrightarrow{\cong} \oplus H_n(V_i, V_i - K_i) & \xrightarrow{(i-g_i)_*} & \oplus H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)
 \end{array}$$

onde os somatórios são para $i = 1, \dots, r$, em que $\{Id\}$ denota a aplicação cujas componentes são todas iguais à identidade, $\{\oplus Id\}$ denota a aplicação que soma os elementos em cada coordenada, $\{K_{i_*}\}$ denota a aplicação que está definida em cada coordenada pela aplicação induzida da inclusão canônica e $\{K'_{i_*}\}$ denota o isomorfismo obtido graças ao fato de K ser união disjunta dos K_i 's. A comutatividade do diagrama vale porque K é união disjunta dos K_i 's e V é união disjunta dos V_i 's. Note que a linha superior do diagrama equivale à composição (2.1), logo define $I(\mathbb{R}^n, g, V)$, enquanto que a linha inferior define $I(\mathbb{R}^n, g_i, V_i)$. Assim, as composições no diagrama determinam que vale a segunda igualdade.

□

Proposição 2.1.4. (Invariância homotópica) Seja $g_t : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma homotopia tal que (\mathbb{R}^n, g_t, V) é uma terna admissível para todo $t \in [0, 1]$ e a união

$$\bigcup_{t \in [0, 1]} \{\text{Fix}(g_t)\}$$

é um subconjunto compacto. Então

$$I(\mathbb{R}^n, g_0, V) = I(\mathbb{R}^n, g_1, V).$$

Demonstração. Denotemos $\text{Fix}(g_i) = K_i$ para $i = 0, 1$ e $K = \bigcup_{t \in [0, 1]} \{\text{Fix}(g_t)\}$. Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K_0) & \xrightarrow{\cong} & H_n(V, V - K_0) & & \\
 & \nearrow i_* & & & \uparrow i_{0*} & \searrow (i-g_0)_* & \\
 H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D) & \xrightarrow{i_*} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) & \xrightarrow{\cong} & H_n(V, V - K) & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \\
 & \searrow i_* & & & \downarrow i_{1*} & \nearrow (i-g_1)_* & \\
 & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K_1) & \xrightarrow{\cong} & H_n(V, V - K_1) & &
 \end{array}$$

Como g_0 e g_1 são homotópicas, temos que $i - g_0$ e $i - g_1$ são homotópicas, de modo que as funções $(i - g_0)i_{0*}, (i - g_1)i_{1*} : (V, V - K) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ são homotópicas e $(i - g_0)_*i_{0*} = (i - g_1)_*i_{1*}$. Note que isso faz do diagrama comutativo, uma vez que as demais composições são naturais. Como o caminho superior é equivalente ao caminho inferior, aplicando isso ao diagrama (2.1), temos que calcular $I(\mathbb{R}^n, g_0, V)$ é o mesmo que calcular $I(\mathbb{R}^n, g_1, V)$.

□

Proposição 2.1.5. (Comutatividade) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $U' \subset \mathbb{R}^m$ dois abertos e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicações contínuas. Então para as aplicações compostas

$$gf : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

e

$$fg : V' \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

sendo $V = f^{-1}(U')$ e $V' = g^{-1}(U)$, vale que os espaços $\text{Fix}(gf)$ e $\text{Fix}(fg)$ são homeomorfos. Ainda, se estes conjuntos forem compactos, temos também que

$$I(fg) = I(gf).$$

Demonstração. Para provar a primeira afirmação, note que a restrição de f ao conjunto $\text{Fix}(gf)$ e a restrição de g ao conjunto $\text{Fix}(fg)$ são funções contínuas. Além disso, se $x \in \text{Fix}(gf)$, então $gf(x) = x$, o que implica em $fgf(x) = f(x)$, isto é, $f(x) \in \text{Fix}(fg)$. Por outro lado, se $x' \in \text{Fix}(fg)$, então $fg(x') = x'$, o que implica em $gfg(x') = g(x')$, isto é $g(x') \in \text{Fix}(gf)$. Diante disso, as restrições consideradas são inversa uma da outra e vale que os espaços $\text{Fix}(gf)$ e $\text{Fix}(fg)$ são homeomorfos.

Supondo agora que estes conjuntos são compactos, iremos provar a segunda afirmação. Recordamos que a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é também compacto e que o conjunto que forma o gráfico de uma função contínua com domínio compacto é também compacto. Definimos

$$\begin{aligned} \gamma : V \times V' &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\longmapsto (g(y), f(x)). \end{aligned}$$

Consideramos a homotopia

$$\begin{aligned} \Gamma : V \times V' \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (x, y, t) &\longmapsto (tgf(x) + (1-t)g(y), f(x)) \end{aligned}$$

que satisfaz $\Gamma_0 = \gamma$ e $\Gamma_1 = (gf(x), f(x))$. Note que para $t \in [0, 1]$ fixado, vale que

$$\text{Fix}(\Gamma_t) = \{(x, y); x \in \text{Fix}(gf), y = f(x)\}.$$

Assim, $\text{Fix}(\Gamma) = \bigcup_{t \in [0, 1]} \{\text{Fix}(\Gamma_t)\}$ é um conjunto compacto, pois é gráfico de uma função com domínio compacto, e, portanto, $I(\gamma) = I(\Gamma_1)$ graças à propriedade de invariância de homotopia. Por outro lado, Γ_1 pode ser vista como a restrição de uma aplicação δ definida em $V \times \mathbb{R}^m$ com a mesma lei e, pela propriedade de localização, $I(\delta) = I(\Gamma_1)$. Consideramos a homotopia

$$\begin{aligned} \Gamma' : V \times \mathbb{R}^m \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (x, y, t) &\longmapsto (gf(x), (1-t)f(x)) \end{aligned}$$

que satisfaz $\Gamma'_0 = \delta$ e $\Gamma'_1(x, y) = (gf(x), 0)$. Para $t \in [0, 1]$ fixado, temos que

$$\text{Fix}(\Gamma'_t) = \{(x, y); x \in \text{Fix}(gf), y = (1-t)f(x)\}$$

é gráfico de uma aplicação contínua com domínio $\text{Fix}(gf)$ compacto compacto, logo é compacto. Além disso, temos que $\bigcup_{t \in [0, 1]} \{\text{Fix}(\Gamma'_t)\}$ é o gráfico da aplicação

$$\begin{aligned} \text{Fix}(gf) \times [0, 1] &\longrightarrow V \\ (x, t) &\longmapsto (1-t)f(x), \end{aligned}$$

logo também é compacto. Assim, pela invariância homotópica e pela multiplicatividade, temos

$$I(\gamma) = I(\Gamma'_1) = I(gf),$$

uma vez que o índice de uma aplicação constante em um ponto do domínio é 1 (Observação 2.1.1). Com raciocínio análogo, considerando as homotopias

$$(x, y) \mapsto (g(y), tfg(y) + (1-t)f(x)) \text{ e } (x, y) \mapsto ((1-t)g(y), fg(y))$$

se demonstra que

$$I(\gamma) = I(fg)$$

o que conclui a demonstração. \square

Conhecidas as propriedades principais do índice para funções em \mathbb{R}^n , podemos começar o processo de estender essa definição para funções em espaços ENR. A partir de agora, o conceito de ternas admissíveis será mais amplo. Diremos que uma terna (X, f, U) é admissível se $U \subset X$ é um aberto, $f : U \rightarrow X$ é uma aplicação contínua e $\text{Fix}(f)$ é um subconjunto compacto.

Seja Y espaço topológico, $U \subset Y$ um subconjunto aberto e $h : U \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Se h se fatora numa composição $\beta\alpha : U \rightarrow Y$, onde $\alpha : U \rightarrow V$ e $\beta : V \rightarrow Y$, para algum aberto V de \mathbb{R}^n , podemos considerar a composição

$$\alpha\beta : \beta^{-1}(U) \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

e, uma vez que $\beta^{-1}(U) \subset V$ é aberto de \mathbb{R}^n , supondo que $\text{Fix}(\alpha\beta)$ é compacto, faz sentido definir

$$I(Y, h, U) = I(\mathbb{R}^n, \alpha\beta, \beta^{-1}(U)).$$

Veremos que quando Y for um espaço ENR, tal fatoração sempre existe e o índice definido dependerá apenas de h e não da fatoração escolhida.

Proposição 2.1.6. Seja Y um espaço ENR, $U \subset Y$ um aberto e $h : U \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Então:

- (a) para algum $n > 0$, existe aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ e aplicações $\alpha : U \rightarrow V$ e $\beta : V \rightarrow Y$ tais que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{h} & Y \\ & \searrow \alpha & \nearrow \beta \\ & & V \end{array}$$

- (b) se $\text{Fix}(h)$ é compacto, o índice de

$$\alpha\beta : \beta^{-1}(U) \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

está definido e independe da fatoração de h .

Demonstração. Para demonstrar (a), primeiro observe que o Lema 1.5.1 garante que U é ENR. Assim, a menos de homeomorfismo, podemos supor $U \subset \mathbb{R}^n$ para algum n e considerar um aberto $V' \subset \mathbb{R}^n$ tal que existe retração r satisfazendo

$$\begin{array}{ccccc} & & Id_U & & \\ & \frown & & \searrow & \\ U & \xrightarrow{i} & V' & \xrightarrow{r} & U \end{array}$$

Tomando $\alpha = i$, $\beta = hr$ e considerando $V = V'$, temos a fatoração desejada.

Agora, seja $U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} Y$ uma outra fatoração de h , onde V é um aberto de \mathbb{R}^m . Consideramos a retração $r : V' \rightarrow U$ anteriormente definida. Temos as aplicações contínuas

$$\alpha r : V' \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$$

$$i\beta : \beta^{-1}(U) \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^n$$

e as composições

$$i\beta \circ \alpha r : (\alpha r)^{-1}(\beta^{-1}(U)) \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^n$$

$$\alpha r \circ i\beta : (i\beta)^{-1}(V') \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m.$$

Usando a Proposição 2.1.5, obtemos

$$\text{Fix}(\alpha\beta) = \text{Fix}(\alpha r \circ i\beta) \approx \text{Fix}(i\beta \circ \alpha r) = \text{Fix}(ihr) = \text{Fix}(h)$$

e, supondo $\text{Fix}(h)$ compacto, obtemos também

$$I(\alpha\beta) = I(ihr),$$

o que conclui a demonstração de (b), uma vez que $I(ihr)$ depende apenas de h e do fato de Y ser ENR. \square

Finalmente, podemos definir o índice para funções em espaços ENR, como segue:

Definição 2.1.2. Seja (Y, h, U) uma terna admissível, onde Y é um espaço ENR. Nas condições da Proposição 2.1.6, definimos

$$I(Y, h, U) = I(\mathbb{R}^n, \alpha\beta, \beta^{-1}(U)).$$

Quando não houver ambiguidade, denotaremos o índice de h apenas por $I(h)$. Quando x for um ponto fixo isolado de h , usaremos a notação $I(h, x)$.

Observe que, se $Y = \mathbb{R}^n$, podemos tomar o aberto $V = U$ e as aplicações $\alpha = Id_U$, $\beta = h$. Neste caso, as definições 2.1.1 e 2.1.2 coincidem. Logo, a Definição 2.1.2 de fato estende a Definição 2.1.1. Como é de se esperar, as propriedades do índice definido anteriormente se mantêm válidas com essa nova definição. Na verdade, é possível definir uma teoria de índice usando as propriedades como axiomas. Falaremos sobre isso ao fim da seção, pois precisamos ainda da definição de número de Lefschetz.

2.2 Número de Lefschetz

Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Uma vez que \mathbb{Q} é corpo, podemos considerar $H_i(X; \mathbb{Q})$ como espaço vetorial sobre \mathbb{Q} . Se X for tal que $H_i(X; \mathbb{Q})$ é de dimensão finita (como espaço vetorial sobre \mathbb{Q}) e $H_j(X; \mathbb{Q}) = 0$ para j suficientemente grande, então para cada i podemos considerar o homomorfismo induzido

$$f_i : \begin{array}{ccc} H_i(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H_i(X, \mathbb{Q}) \\ \sum_{j=1}^n a_j e_j & \longmapsto & \sum_{j=1}^n a_j f_i(e_j), \end{array}$$

em que $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base de $H_i(X; \mathbb{Q})$. Neste caso, podemos considerar o traço da matriz associada a f_i , $\text{tr}(f_i)$ e definir o *Número de Lefschetz* de f da seguinte forma:

Definição 2.2.1. O número de Lefschetz de $f : X \rightarrow X$ é dado por ²

$$L(f) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{tr}(f_i). \quad (2.2)$$

Se X é um espaço ENR compacto, temos que $H_i(X; \mathbb{Q})$ é de dimensão finita (como espaço vetorial sobre \mathbb{Q}) e $H_j(X; \mathbb{Q}) = 0$ para j suficientemente grande. Desse modo, está bem definido o número de Lefschetz para funções em espaços ENR compactos.

O próximo teorema é conhecido como Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz. Sua demonstração pode ser encontrada em [12, Theorem 7.8]. Uma demonstração para o caso particular em que X é uma variedade fechada pode ser encontrado em [33].

Teorema 2.2.1. (Lefschetz) Se X é um complexo simplicial finito e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação tal que $L(f) \neq 0$, então f tem pelo menos um ponto fixo.

²Em [7] o número de Lefschetz é definido usando os grupos de cohomologia sobre um corpo F , já em [22], ele é definido usando a parte livre de torção dos grupos de homologia integral.

Os complexos simpliciais X que satisfazem $L(f) \neq 0$ para toda $f : X \rightarrow X$ são exemplos de espaços com a propriedade ponto fixo que definimos logo abaixo.

Definição 2.2.2. Dizemos que um espaço X possui a *propriedade do ponto fixo* se dada qualquer função $f : X \rightarrow X$, temos que $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$.

Como mencionamos anteriormente, se $f : X \rightarrow X$ não possuir pontos fixos, temos que o índice de f será 0. De modo que o teorema anterior sugere uma relação entre o índice de uma função e o seu número de Lefschetz. A princípio, $I(X, f, X)$ e $L(f)$ poderiam não se relacionar, uma vez que $I(f)$ é um inteiro e $L(f)$ é um racional, porém o próximo resultado garante que estes dois números coincidem quando estamos no contexto do espaços ENR compactos.

Teorema 2.2.2. (Lefschetz-Hopf) Seja X um espaço ENR compacto e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Então

$$L(f) = I(X, f, X).$$

A demonstração deste Teorema será aqui omitida, o leitor interessado pode encontrá-la em [7].

Este Teorema tem diversas aplicações, uma delas é o corolário abaixo que nos permite calcular o índice de uma aplicação que induz o homomorfismo identidade nos grupos de Homologia.

Corolário 2.2.1. Se X é um espaço ENR compacto e $f : X \rightarrow X$ induz a identidade nos grupos de homologia de X , então

$$I(X, f, X) = \chi(X),$$

sendo $\chi(X)$ a característica de Euler de X .

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.2, $L(f) = I(f)$, de modo que é suficiente provar que $L(f) = \chi(X)$. Como f induz a identidade em $H_i(X)$, temos que $\text{tr}(f_i)$ coincide com a dimensão de $H_i(X, \mathbb{Q})$ como espaço vetorial sobre \mathbb{Q} . Assim, a fórmula (2.2) coincide com uma das fórmulas que calculam a característica de Euler de X . \square

Encerramos esta seção observando que as propriedades do índice servem para caracterizá-lo, isto é, podemos utilizar uma axiomatização para definir uma teoria de índice em uma classe de espaços.

Considere \mathcal{C} uma classe de espaços conexos X tais que $H_j(X; \mathbb{Q}) = 0$ para j suficientemente grande e $H_i(X; \mathbb{Q})$ de dimensão finita como espaço vetorial sobre \mathbb{Q} para todo i . Diremos que uma terna (X, f, U) é \mathcal{C} -admissível se $X \in \mathcal{C}$, $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua, $U \subset X$ é um aberto e f não tem ponto fixo na fronteira de U .

Definição 2.2.3. Uma teoria de índice em \mathcal{C} é uma função ι que associa cada terna \mathcal{C} -admissível a um número racional satisfazendo as seguintes propriedades:

Axioma 1 (Localização) Se (X, f, U) e (X, g, U) são duas ternas \mathcal{C} -admissíveis satisfazendo $f|_U = g|_U$, então

$$\iota(X, f, U) = \iota(X, g, U).$$

Axioma 2 (Aditividade) Se (X, f, U) é uma terna \mathcal{C} -admissível e U_1, \dots, U_n são abertos de U , dois a dois disjuntos, tais que f não tem ponto fixo em $U - \bigcup_{i=1}^n U_i$, então

$$\iota(X, f, U) = \sum_{i=1}^n \iota(X, f, U_i).$$

Axioma 3 (Homotopia) Seja $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ uma homotopia. Se (X, f_t, U) é uma terna admissível para todo $t \in [0, 1]$, onde $f_t = F(\cdot, t)$, então

$$\iota(X, f_0, U) = \iota(X, f_1, U).$$

Axioma 4 (Comutatividade) Sejam $X, Y \in \mathcal{C}$ e $g : X \rightarrow Y$ e $f : Y \rightarrow X$ aplicações tais que a terna (X, gf, U) é admissível, então a terna $(Y, fg, g^{-1}(U))$ é admissível e

$$\iota(X, gf, U) = \iota(Y, fg, g^{-1}(U)).$$

Axioma 5 (Normalização) Se $X \in \mathcal{C}$ e $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua, então

$$\iota(X, f, X) = L(f).$$

No caso em que \mathcal{C} representa a classe dos espaços ENR compactos, F. E. Browder provou em [11] que $\iota = I$ é a única teoria de índice para esses espaços, isto é, qualquer outra função que associa cada terna \mathcal{C} -admissível a um número racional satisfazendo os axiomas anteriores é na verdade a função I definida na seção anterior.

2.3 Pontos fixos e número de Nielsen

Nesta seção definiremos o número de Nielsen de uma função $f : X \rightarrow X$, onde X é um espaço ENR. Veremos que o número de Nielsen é uma cota inferior para o número de pontos fixos de f , sendo portanto uma boa ferramenta para contá-los. Por fim, iremos mostrar que a esfera e no toro são espaços com uma propriedade especial chamada propriedade de Wecken.

Se $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua e $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ é um caminho em X , a composição $f\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ também é um caminho em X . Diante disso, definimos a seguinte relação no conjunto dos pontos fixos de f usando caminhos:

Definição 2.3.1. Dizemos que dois pontos $x, y \in \text{Fix}(f)$ são equivalentes, e denotamos por $x \sim y$, se existe um caminho $\lambda : [0, 1] \rightarrow X$ que satisfaz $\lambda(0) = x, \lambda(1) = y$ e $\lambda \simeq f\lambda \text{ rel}\{0, 1\}$.

Note que esta relação, de fato, é uma relação de equivalência em $\text{Fix}(f)$. As classes de equivalência dessa relação serão chamadas de *classes de Nielsen* da aplicação f . Para definir o número de Nielsen de uma aplicação, precisamos primeiro definir um índice para as classes de Nielsen. Iremos, portanto, nos restringir aos espaços ENR. Com base na construção feita na seção anterior, definimos:

Definição 2.3.2. Se F é uma classe de Nielsen da aplicação f , o índice $i(F)$ da classe F é igual a $I(X, f|_U, U)$, onde U é um aberto qualquer de X que satisfaz $U \cap \text{Fix}(f) = F$.

Observe que o índice de uma classe de Nielsen está bem definido graças à propriedade de localização.

Definição 2.3.3. Dizemos que uma classe de Nielsen F é essencial se $i(F) \neq 0$.

Definição 2.3.4. O número de Nielsen de uma função f é definido como sendo o número de classes essenciais dessa função. Este número será denotado por $N(f)$.

Observação 2.3.1. Como consequência direta da definição, temos que se f não possui pontos fixos, então $N(f) = 0$.

Observação 2.3.2. Se $N(f) = 0$, então todas as classes de Nielsen de f têm índice nulo e como as classes de Nielsen de f são disjuntas, usando as propriedades de aditividade e de normalização, temos que $L(f) = 0$.

A princípio, o número de Nielsen de uma aplicação pode ser infinito. Iremos então restringir ainda mais a classe dos espaços a qual X pertence para obter $N(f) < \infty$.

Proposição 2.3.1. Seja X um complexo simplicial finito. Se F é uma classe de Nielsen da função $f : X \rightarrow X$, então F é um aberto de $\text{Fix}(f)$. Além disso, o número de classes de Nielsen de f é finito.

A demonstração desse resultado envolve uma propriedade topológica dos espaços métricos, por isso, antes de demonstrá-lo iremos recordar essa propriedade.

Se X é um espaço com métrica d e \mathcal{U} é uma cobertura de X por abertos, existe $\varepsilon > 0$ chamado número de Lebesgue de \mathcal{U} que satisfaz a seguinte condição:

- dados $x, y \in X$ tais que $d(x, y) < \varepsilon$, existe aberto de \mathcal{U} que contém x e y .

Demonstração da Proposição 2.3.1. Considere X mergulhado em \mathbb{R}^n para algum n . Definimos em X a seguinte métrica:

$$d(x, y) = \text{Inf}_{\gamma \in C[x, y]} \rho(\gamma),$$

sendo $C[x, y]$ o conjunto de todos os caminhos diferenciáveis por partes em X ligando x a y e ρ a função que calcula o comprimento de um caminho em \mathbb{R}^n . Seja \mathcal{U} uma cobertura aberta de X por abertos contráteis e ε o número de Lebesgue associado a essa cobertura.

Primeiro vamos provar que F é aberto de $\text{Fix}(f)$, faremos isso ao mostrar que dois pontos de $\text{Fix}(f)$ suficientemente próximos estão na mesma classe de Nielsen. Como X é compacto e f é contínua, vale que f é uniformemente contínua. Assim, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta$, então $d(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$. Considere $\delta_1 = \min\{\delta, \varepsilon/2\}$. Se $x, y \in \text{Fix}(f)$ são tais que $d(x, y) < \delta_1$, por definição, existe caminho γ ligando x a y tal que $\rho(\gamma) < \delta_1$, logo $d(x, \gamma(t)) < \delta_1$ para todo $t \in [0, 1]$. Pela continuidade uniforme, $d(f(x), f(\gamma(t))) < \varepsilon/2$ para todo $t \in [0, 1]$ e, por consequência, vale que

$$d(\gamma(t_1), f(\gamma(t_2))) \leq d(x, \gamma(t_1)) + d(f(x), f(\gamma(t_2))) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

para $t_1, t_2 \in [0, 1]$. Assim, os caminhos γ e $f\gamma$ estão contidos num mesmo aberto $U \in \mathcal{U}$. Sendo U contrátil, temos que $\gamma \simeq f\gamma$ rel $\{0, 1\}$ e $x \sim y$, ou seja, x e y estão na mesma classe de Nielsen de f .

Pelo que foi provado, o conjunto das classes de Nielsen forma uma cobertura aberta de $\text{Fix}(f)$, sendo estes abertos dois a dois disjuntos. Como $\text{Fix}(f)$ um conjunto compacto, essa cobertura deve ser finita, o que conclui a demonstração da proposição. □

Verificar que duas funções homotópicas possuem o mesmo número de Nielsen não é uma tarefa simples. Diante disso, iremos apenas enunciar este resultado. Indicamos ao leitor interessado consultar [7, Cap VI, Seção E].

Teorema 2.3.1. Seja X um espaço ENR e $f, g : X \longrightarrow X$ duas funções homotópicas. Então

$$N(f) = N(g).$$

Note que esse teorema nos garante que se uma função f é homotópica a uma função g livre de pontos fixos, então $N(f) = 0$.

Uma vez definido o número de Nielsen de uma função f e sabendo que este número não varia na classe de funções homotópicas a f , é natural questionar quando podemos tomar $g \in [f]$ tal que g possui exatamente $N(f)$ pontos fixos. A essa propriedade daremos um nome especial.

Definição 2.3.5. Seja X um espaço topológico e $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua. Dizemos que f possui a *propriedade de Wecken* se existe g homotópica a f com exatamente $N(f) = N(g)$ pontos fixos. Quando toda aplicação $f : X \longrightarrow X$ possuir a propriedade de Wecken, diremos que X é um *espaço de Wecken*.

Em geral, calcular o número de Nielsen de uma função não é algo simples, porém os espaços que analisaremos a seguir fornecem uma relação clara entre uma função e seu número de Nielsen. Algumas das relações observadas aqui serão também utilizadas na investigação da propriedade de Wecken para funções n -valuadas.

2.3.1 \mathbb{S}^2 é Wecken

Para verificar que a esfera é um espaço de Wecken, primeiro buscaremos uma relação entre uma função $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ e seu número de Nielsen. Lembramos que funções de \mathbb{S}^2 em \mathbb{S}^2 são unicamente definidas pelo seu grau. Por [22] *Lemma 2.49*, vale que se $\deg f = m$, então $f_2 : H_2(\mathbb{S}^2, \mathbb{Q}) \rightarrow H_2(\mathbb{S}^2, \mathbb{Q})$ é a multiplicação por m . Além disso, temos que $H_0(\mathbb{S}^2, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ e $H_1(\mathbb{S}^2, \mathbb{Q}) = 0$. Graças ao próximo lema, esta caracterização será suficiente para obter o número de Nielsen de uma função na esfera.

Lema 2.3.1. Seja X um espaço ENR simplesmente conexo e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Se $L(f) = 0$, então $N(f) = 0$ e se $L(f) \neq 0$, então $N(f) = 1$.

Demonstração. Sendo X simplesmente conexo, caminhos com mesmo ponto inicial e mesmo ponto final são homotópicos. Logo existe uma única classe de pontos fixos em $\text{Fix}(f)$, qualquer que seja f . Denotando essa única classe por F , temos que $i(F) = I(X, f, X)$. Pelo Axioma 5 (Normalização), temos que $L(f) = i(F)$. Concluimos então que se $L(f) = 0$, F não é classe essencial e $N(f) = 0$, e se $L(f) \neq 0$, F é classe essencial e $N(f) = 1$. □

Aplicando o Lema 2.3.1 ao caso particular $X = \mathbb{S}^2$, temos que o número de Lefschetz de uma aplicação $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é dado por

$$L(f) = 1 + \deg(f), \quad (2.3)$$

e, portanto, temos

$$N(f) = \begin{cases} 0, & \text{se } \deg(f) = -1, \\ 1, & \text{se } \deg(f) \neq -1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Assim, para verificar que \mathbb{S}^2 é Wecken precisamos mostrar:

- (i) existe aplicação de grau -1 livre de pontos fixos;
- (ii) se $n \neq -1$ é um inteiro, existe aplicação de grau n com apenas um ponto fixo.

Para mostrar (i), basta considerar a aplicação antípoda $x \mapsto -x$, já que seu grau é -1 e ela não possui pontos fixos.

Para mostrar (ii), primeiro consideramos o caso $n = 0$. Se tomarmos f_0 a aplicação constante no polo sul, temos que $\deg f_0 = 0$ e f_0 possui apenas um ponto fixo. O caso $n \neq 0$ é mais delicado. Para construir uma função $f_n : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ de grau n com um único ponto fixo, recordamos que \mathbb{S}^2 pode ser obtida pela compactificação de Alexandroff $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ e que \mathbb{S}^2 pode também ser obtida como suspensão de \mathbb{S}^1 . Além disso, se uma função de \mathbb{S}^2 é obtida como suspensão de uma função de \mathbb{S}^1 , então essas funções possuem o mesmo grau (Ver [22], *Proposition 2.33*).

Iremos definir f_n primeiro para n ímpar e depois para n par. As definições precisam ser distintas para que tenhamos continuidade, mas as análises posteriores serão análogas.

Considere a aplicação

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$$

que associa a cada número real x um ângulo $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ que satisfaz $\tan(\alpha) = x$. Para n ímpar, definimos

$$f_n : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$$

por $f_n(\infty) = \infty$ e para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ por

$$f_n(x, y) = \begin{cases} (\tan(n \cdot \arctan(x)), y + 1), & \text{se para todo } k \in \mathbb{Z} \quad n \cdot \arctan(x) \neq k\pi + \pi/2 \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que se $|x| \rightarrow \pm\infty$, como n é ímpar, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot \arctan(x) \rightarrow k\pi + \pi/2$.³ Além

³Como $\arctan(x) \rightarrow \pm\pi/2$ se $|x| \rightarrow \pm\infty$, caso n fosse par, teríamos $n \cdot \arctan(x) \rightarrow k\pi$ e haveria descontinuidade.

disso, se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot \arctan(x) \rightarrow k\pi + \pi/2$, temos que $\tan(n \cdot \arctan(x)) \rightarrow \infty$. Assim, vale a continuidade de f_n .

Temos que $\text{Fix}(f_n) = \{\infty\}$. Vejamos que $\deg(f_n) = n$.

Como \mathbb{S}^1 pode ser identificada com o conjunto $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, temos que f_n é homotópica à suspensão da função

$$f_n|_{A_1} : A_1 \longrightarrow A_2,$$

sendo

$$A_1 = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$$

$$A_2 = \{(x, 1); x \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}.$$

Assim, o grau de f_n coincide com o grau da restrição $f_n|_{A_1}$. Para verificar que o grau desta restrição é n , analisaremos o número de voltas que ela dá. Para isso, precisamos saber quantos pontos $(x, 0) \in A_1$ satisfazem $f_n(x, 0) = \infty$. Como \arctan é sobrejetora no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, basta saber quantos valores k pode assumir para que tenhamos

$$-|n|\pi/2 < k\pi + \pi/2 < |n|\pi/2.$$

Note que se $|n| = 2m + 1$ esse valores são $-m, \dots, 0, \dots, m - 1$. Assim, existem ao todo $|n|$ pontos de A_1 que são levados em ∞ via f_n , logo são dadas $|n|$ voltas. O sentido das voltas depende de como a aplicação $a \mapsto \tan(na)$ se comporta nos intervalos

$$](-m)\pi + \pi/2, (-m + 1)\pi + \pi/2[, \dots ,](m - 2)\pi + \pi/2, (m - 1)\pi + \pi/2[,$$

isto é, depende apenas do sinal de n e temos $\deg f_n = n$.

Para n par, definimos

$$f_n : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$$

por $f_n(\infty) = \infty$ e para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ por

$$f_n(x, y) = \begin{cases} (\tan(n \cdot \arctan(x) + \pi/2), y + 1), & \text{se para todo } k \in \mathbb{Z} \quad n \cdot \arctan(x) \neq k\pi \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que se $|x| \rightarrow \pm\infty$, como n é par, então $n \cdot \arctan(x) \rightarrow k\pi$ para algum inteiro k .⁴ Além disso, se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot \arctan(x) \rightarrow k\pi$, temos que $\tan(n \cdot \arctan(x) + \pi/2) \rightarrow \infty$. Assim, vale a continuidade de f_n .

Como $\text{Fix}(f_n) = \{\infty\}$, resta ver que $\deg(f_n) = n$. A análise é feita de forma análoga ao caso em que n é ímpar, a diferença é que precisamos saber quantos valores k pode assumir para que tenhamos

$$-|n|\pi/2 < k\pi < |n|\pi/2.$$

Escrevendo $|n| = 2m$, temos que k pode assumir os valores $-m + 1, \dots, 0, \dots, m - 1$ e são dadas $|n|$ voltas. Neste caso a análise do comportamento de $a \mapsto \tan(na + \pi/2)$ precisa ser feita nos intervalos

$$](-m + 1)\pi, (-m + 2)\pi[, \dots ,](m - 2)\pi, (m - 1)\pi[$$

e temos $\deg f_n = n$.

Desta forma, concluímos (ii) e vale que \mathbb{S}^2 é um espaço de Wecken.

2.3.2 \mathbb{T}^2 é Wecken

No caso do toro também existe uma relação entre o número de Lefschetz de uma função e seu número de Nielsen. Na verdade o que veremos é que, se $f : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ é contínua, então

⁴Como $\arctan(x) \rightarrow \pm\pi/2$ se $|x| \rightarrow \pm\infty$, caso n fosse ímpar, teríamos $n \cdot \arctan(x) \rightarrow k\pi + \pi/2$ e haveria descontinuidade.

$$|L(f)| = N(f).$$

Recordamos que \mathbb{R}^2 é o recobrimento universal de \mathbb{T}^2 obtido através da ação de $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ em \mathbb{R}^2 dada por

$$\begin{aligned} \alpha : \quad \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((m, n), (a, b)) &\longmapsto (m + a, n + b), \end{aligned}$$

ou seja, \mathbb{T}^2 é o espaço de órbita \mathbb{R}^2/α e a aplicação de recobrimento $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\alpha$ é dada por $p(x) = [x]$, se $x \in \mathbb{R}^2$. Como o toro é um espaço do tipo $K(\pi, 1)$, pelo que foi provado na Seção 1.4, duas funções $f, f' : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ são homotópicas com ponto base fixado se, e somente se, os homomorfismos induzidos nos grupos fundamentais $f_{\#}, f'_{\#} : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ são iguais. Assim, a classe de homotopia pontuada de f está unicamente definida pela matriz de $f_{\#}$ (com coeficientes inteiros) em relação à base canônica de $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

Lema 2.3.2. Seja $f : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ uma aplicação contínua tal que a classe $[f] \in [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2]_0$ está associada ao homomorfismo induzido a nível de grupo fundamental $f_{\#} : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ que satisfaz

$$[f_{\#}] = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix}.$$

Então vale que

$$L(f) = \det \begin{pmatrix} m-1 & p \\ n & q-1 \end{pmatrix} = 1 - (m+q) + mq - np.$$

Demonstração. Para provar esse lema, primeiro note que

$$H_i(\mathbb{T}^2; \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{se } i = 0, 2, \\ \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & \text{se } i = 1. \end{cases}$$

Assim, $H_0(\mathbb{T}^2; \mathbb{Q})$ como espaço vetorial sobre \mathbb{Q} tem dimensão 1, com o elemento da base sendo o gerador de $H_0(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}$; $H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Q})$ como espaço vetorial sobre \mathbb{Q} tem dimensão 2, com os elementos da base sendo os geradores de $H_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $H_2(\mathbb{T}^2; \mathbb{Q})$ como espaço vetorial sobre \mathbb{Q} tem dimensão 1, com o elemento da base sendo o gerador de $H_2(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{T}^2$. Como \mathbb{T}^2 é conexo, temos que $f_0(1) = 1$. Como $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ é abeliano, $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong H_1(\mathbb{T}^2)$, de modo que

$$[f_1] = [f_{\#}] = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix}$$

e $\text{tr}(f_1) = m + q$. Resta então verificar que $f_2(1) = mq - np$. Para isso, considere a aplicação $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\bar{f}(a, b) = (ma + pb, na + qb).$$

A induzida desta aplicação no espaço das órbitas $\tilde{f} : \mathbb{R}^2/\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^2/\alpha$ é homotópica a f (com ponto base fixado), uma vez que as matrizes dos homomorfismos induzidos coincidem na base canônica de $\pi_1(\mathbb{T}^2)$. Como $|\det[\bar{f}]|$ calcula a área do losango com vetores base (m, n) e (p, q) , para $x \in \mathbb{R}^2$, $|\det[\bar{f}]|$ é a cardinalidade de $\tilde{f}^{-1}([x])$. Já o sinal de $\det[\bar{f}]$ determina se houve troca de orientação. Assim, temos que $f_2(1) = \det[\bar{f}] = mq - np$ e o resultado está provado. \square

Seja $f : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ aplicação contínua tal que

$$[f_{\#}] = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix}$$

em relação à base canônica de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Pelo Lema 2.3.2, temos que

$$L(f) = \det \begin{pmatrix} m-1 & p \\ n & q-1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Para provar que \mathbb{T}^2 é Wecken, mostraremos que existe $g \in [f]$ que possui $N(f)$ pontos fixos. Faremos isso primeiro analisando o caso em que $L(f) = 0$ e depois o caso em que $L(f) \neq 0$.

Suponhamos que $L(f) = 0$. Construiremos g homotópica a f livre de pontos fixos.

Fixamos ε um número irracional e definimos

$$\begin{aligned} \bar{g}: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) &\longmapsto (ma + pb + \varepsilon, na + qb). \end{aligned}$$

Note que \bar{g} induz uma aplicação $g: \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ que satisfaz

$$[g\#] = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix} = [f\#].$$

Logo, f e g são homotópicas. Para finalizar esta primeira parte da prova, vejamos que g não possui pontos fixos. Por absurdo, suponhamos que existe $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$[x] = g([x]) = [\bar{g}(x)],$$

isto é, $\bar{g}(a, b) - (a, b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Sejam $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ satisfazendo

$$ma + pb + \varepsilon - a = k_1$$

e

$$na + qb - b = k_2.$$

Assim, temos

$$(m - 1)a + pb = -\varepsilon + k_1 \tag{2.6}$$

e

$$na + (q - 1)b = k_2. \tag{2.7}$$

Como $L(f) = 0$, usando (2.5), podemos assumir que existe $r \in \mathbb{Q}$ satisfazendo

$$r(n, q - 1) = (m - 1, p).$$

Logo, por (2.6) e (2.7), temos

$$rk_2 = rna + r(q - 1)b = (m - 1)a + pb = -\varepsilon + k_1 \tag{2.8}$$

e, portanto,

$$\varepsilon = k_1 - rk_2 \tag{2.9}$$

é um número racional, o que é um absurdo. Concluimos assim que g não possui pontos fixos.

Se supormos que $N(f) = 0$, usando a Observação 2.3.2, temos que $L(f) \neq 0$. Aplicando a primeira parte desta prova, temos que f se deforma livre de pontos fixos. Assim, podemos afirmar que se $N(f) = 0$, então f se deforma livre de ponto fixo.

Suponhamos agora que $L(f) \neq 0$. Construiremos g homotópica a f com $|L(f)|$ pontos fixos.

Como

$$L(f) = \det \begin{pmatrix} m - 1 & p \\ n & q - 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

a transformação linear $G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada pela matriz na base canônica

$$\begin{pmatrix} m - 1 & p \\ n & q - 1 \end{pmatrix}$$

é isomorfismo. Considere

$$\begin{aligned} \tilde{g}: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) &\longmapsto (ma + pb, na + qb). \end{aligned}$$

Note que a função induzida por \tilde{g} no espaço das órbitas $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é homotópica a f , pois

$$[g\#] = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix} = [f\#].$$

Para concluir a segunda parte, vejamos que g possui exatamente $|L(f)|$ pontos fixos. Seja $x = [(a, b)]$ um ponto fixo de g . Assim, como mencionado na primeira parte, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ satisfazendo o sistema

$$\begin{cases} (m-1)a + pb = k_1 \\ na + (q-1)b = k_2. \end{cases} \quad (2.10)$$

Desse modo, os pontos fixos de g são as classes dos pontos em \mathbb{R}^2 que são solução do sistema (2.10) para algum par de inteiros k_1 e k_2 , isto é,

$$[(a, b)] \in \text{Fix}(g) \iff (a, b) \in G^{-1}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}).$$

Além disso, duas soluções (a_1, b_1) e (a_2, b_2) do sistema (2.10) estão na mesma classe se, e somente se, $(a_1, b_1) - (a_2, b_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. De modo que, neste caso, temos

$$G(a_1, b_1) - G(a_2, b_2) \in G(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}),$$

o que implica que o número de soluções não equivalentes é no máximo a ordem do grupo quociente

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \text{Im}(G|_{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}).$$

Como G é isomorfismo, em particular G é sobrejeção, daí o número de pontos fixos é exatamente a ordem do grupo quociente

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \text{Im}(G|_{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}).$$

Temos que $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é base de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $\{(m-1, n), (p, q-1)\}$ é uma base de $\text{Im}(G|_{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}})$, logo, a ordem do grupo quociente é dada por⁵

$$|\det(G)| = |L(f)|.$$

Assim, provamos que g tem exatamente $|L(f)|$ pontos fixos.

Vamos analisar quantos elementos possui cada classe de Nielsen da função g definida anteriormente.

Sejam $x, y \in \text{Fix}(g)$ na mesma classe de Nielsen. Por definição, existe caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$ satisfazendo

$$\gamma \cong g \circ \gamma \text{ rel } \{0, 1\}.$$

Seja $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ e $\tilde{\gamma}$ levantamento de γ com ponto inicial \tilde{x} . Então o caminho

$$\tilde{g}\tilde{\gamma} - \tilde{g}(\tilde{x}) + \tilde{x}$$

em \mathbb{R}^2 tem ponto inicial \tilde{x} e é um levantamento de $g\gamma$, pois

$$p(\tilde{g}\tilde{\gamma}(t) - \tilde{g}(\tilde{x}) + \tilde{x}) = \gamma(t) - g(x) - x = \gamma(t).$$

Diante disso,

$$\tilde{\gamma} \cong \tilde{g}\tilde{\gamma} - \tilde{g}(\tilde{x}) - \tilde{x} \text{ rel } \{0, 1\}$$

o que implica em

$$\tilde{\gamma}(1) = \tilde{g}\tilde{\gamma}(1) - \tilde{g}(\tilde{x}) + \tilde{x}.$$

⁵Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [32, Theorem 1.12].

Logo,

$$(\tilde{g} - Id)(\tilde{\gamma}(1) - \tilde{x}) = 0.$$

Como $\tilde{g} - Id = G$ é aplicação injetora, temos que

$$\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}.$$

Assim, $\tilde{x} \in p^{-1}(y)$ e, portanto, temos $x = y$. Diante disso, cada classe de Nielsen de g possui um único ponto.

Por fim, vamos analisar os índices dos pontos fixos de g .

Sejam $x, y \in \text{Fix}(g)$. Considere o homeomorfismo

$$\begin{aligned} h_{x,y} : \mathbb{T}^2 &\longrightarrow \mathbb{T}^2 \\ a &\longmapsto yx^{-1}a \end{aligned}$$

que leva x em y . Como o número de pontos fixos de g é finito, podemos tomar $U \subset \mathbb{T}^2$ vizinhança aberta de x que satisfaz

$$U \cap \text{Fix}(g) = \{x\}$$

e

$$h_{x,y}(U) \cap \text{Fix}(g) = \{y\}.$$

Diante disso, temos

$$i(\{x\}) = I(\mathbb{T}^2, g, U) = I(\mathbb{T}^2, g(h_{x,y}^{-1} \circ h_{x,y}), U)$$

e

$$i(\{y\}) = I(\mathbb{T}^2, g, h_{x,y}(U)).$$

Pela propriedade de comutatividade, temos

$$I(\mathbb{T}^2, gh_{x,y}^{-1}h_{x,y}, U) = I(\mathbb{T}^2, h_{x,y}gh_{x,y}^{-1}, h_{x,y}(U)).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} h_{x,y}gh_{x,y}^{-1}(a) &= yx^{-1}g(y^{-1}xa) \\ &= yx^{-1}g(y^{-1})g(x)g(a) \\ &= g(a). \end{aligned}$$

Assim

$$i(\{x\}) = I(\mathbb{T}^2, gh_{x,y}^{-1}h_{x,y}, U) = I(\mathbb{T}^2, g, h_{x,y}(U)) = i(\{y\}),$$

isto é, os pontos fixos de g têm o mesmo índice (necessariamente não nulo, pois se fossem nulos, teríamos $N(f) = 0$ e graças à Observação 2.3.2, teríamos $L(f) = 0$, absurdo.).

Com efeito, a função g construída possui $|L(f)|$ pontos fixos, cada um deles pertencendo a uma única classe de Nielsen, sendo essas classes com o mesmo índice $I(F)$. Pela propriedade de localização e pela propriedade de normalização, temos

$$L(f) = I(F)|L(f)|,$$

logo $I(f) = \pm 1$ e $N(f) = |L(f)|$. Assim, podemos afirmar que se $N(f) \neq 0$, então vale a propriedade de Wecken para f , o que conclui a prova de que o toro é Wecken.

Como consequência do que foi discutido na demonstração da propriedade de Wecken para o toro, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.3.2. Seja $f : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ uma aplicação contínua tal que a classe $[f] \in [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2]_0$ está associada ao homomorfismo induzido a nível de grupo fundamental $f_{\#} : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ que satisfaz

$$[f_{\#}] = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix}.$$

Então vale que

$$N(f) = \left| \det \begin{pmatrix} m-1 & p \\ n & q-1 \end{pmatrix} \right|.$$

Capítulo 3

Funções n -valuadas

Uma multifunção $\phi : X \multimap Y$ é uma aplicação que associa cada ponto $x \in X$ um conjunto $\phi(x) \subset Y$ não vazio. Quando cada um desses subconjuntos possuir um único elemento iremos nos referir a esta função como *função simples* ou apenas, da forma usual, como função. As funções simples aqui trabalhadas serão sempre contínuas, de modo que omitiremos esse termo quando não houver ambiguidade. Neste Capítulo, estudaremos um caso particular de multifunção, a função n -valuada. Veremos como relacionar uma função n -valuada a uma função simples através do espaço de configuração do contradomínio e veremos alguns resultados que decorrem dessa associação para espaços com propriedades particulares. Por fim, desenvolveremos a teoria de Nielsen para funções n -valuadas.

3.1 Introdução

Nesta primeira seção, trazemos uma introdução às funções n -valuadas. Consideramos X e Y espaços topológicos.

Definição 3.1.1. Dizemos que a multifunção $\phi : X \multimap Y$ é *semi-contínua superiormente* se, para cada $x \in X$, o conjunto $\phi(x)$ é fechado e se, para cada aberto $V \subset Y$, o conjunto $\{x \in X \mid \phi(x) \subset V\}$ é aberto.

Definição 3.1.2. Dizemos que a multifunção $\phi : X \multimap Y$ é *semi-contínua inferiormente* se, para cada aberto $V \subset Y$, o conjunto $\{x \in X \mid \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$ é aberto.¹

Quando $\phi : X \multimap Y$ for semi-contínua inferiormente e superiormente diremos que $\phi : X \multimap Y$ é *multicontínua*.

Definição 3.1.3. Chamaremos uma multifunção $\phi : X \multimap Y$ multicontínua que associa a cada $x \in X$ exatamente n valores não ordenados em Y de *função n -valuada* ou *função a n -valores*.

Sempre que falarmos de uma função n -valuada estaremos assumindo $n \geq 2$.

Definição 3.1.4. Uma *homotopia* entre duas funções n -valuadas $\phi_0, \phi_1 : X \multimap Y$ é uma função n -valuada $H : X \times I \multimap Y$ tal que $\phi_0 = H(\cdot, 0)$ e $\phi_1 = H(\cdot, 1)$. Por conveniência, usaremos a notação ϕ_t para nos referir à função $H(\cdot, t)$.

Definição 3.1.5. Dizemos que a função n -valuada $\phi : X \multimap Y$ é *split* se existem funções simples $f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow Y$ tais que $\phi(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ para todo $x \in X$ e escrevemos $\phi = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. Denotaremos por $\text{Spl}(X, Y, n)$ o conjunto das funções n -valuadas split de X em Y .

¹Quando Y é um espaço de Hausdorff, a semi-continuidade inferior implica na semi-continuidade superior. Em [10], *Proposition 2.1*, temos uma demonstração desse resultado.

Aqui, ao definir uma função n -valuada, assumimos sua multicontinuidade. Porém, nos textos de referência, há uma diferenciação entre uma função que assume n valores no contradomínio mas não é necessariamente multicontínua (*n -valued function*) e uma função que assume n valores no contradomínio e é intrinsecamente multicontínua (*n -valued map*). Em [17, Proposition 42], é provado que se Y é Hausdorff, toda multifunção $\phi : X \multimap Y$ que satisfaz $\phi(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ para todo $x \in X$, sendo $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow Y$ contínuas, é uma função multicontínua.

Podemos relacionar uma função n -valuada ϕ e uma função simples f através da noção de coincidência do par (ϕ, f) . Quando f é a função identidade ou uma função constante, tal noção se torna ainda mais interessante.

Definição 3.1.6. Seja $\phi : X \multimap Y$ uma função n -valuada e $f : X \rightarrow Y$ uma função simples. O conjunto de coincidência do par (ϕ, f) é $\text{Coin}(\phi, f) = \{x \in X \mid f(x) \in \phi(x)\}$. Se $X = Y$ e $f = \text{Id}_X$, então $\text{Coin}(\phi, \text{Id}_X) = \{x \in X \mid x \in \phi(x)\}$ é o conjunto de pontos fixos de ϕ e é denotado por $\text{Fix}(\phi)$. Se f é a função constante c_{y_0} no ponto $y_0 \in Y$, então $\text{Coin}(\phi, c_{y_0}) = \{x \in X \mid y_0 \in \phi(x)\}$ é o conjunto de raízes de ϕ em y_0 .

Definição 3.1.7. Uma multifunção $\phi : X \multimap X$ é chamada de *Fix-finita* se o conjunto $\text{Fix}(\phi)$ é finito.

Definição 3.1.8. Para uma homotopia $H : X \times I \multimap X$ entre funções a n valores, definimos $\text{Fix}(H) = \{(x, t) \in X \times I \mid x \in H(x, t)\}$.

O próximo lema segue diretamente de [28, Lemma 4]. Este resultado é usado na demonstração do *Splitting Lemma*, lema que nos dá uma primeira caracterização de funções split.

Lema 3.1.1. Se $\phi : X \multimap Y$ é uma função n -valuada, onde X é um espaço de Hausdorff simplesmente conexo, então o grafo de ϕ definido por $\Gamma_\phi = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \phi(x)\}$ possui exatamente n componentes conexas. Além disso, a projeção $p : \Gamma_\phi \rightarrow X$, definida por $p(x, y) = x$, é um recobrimento.

Lema 3.1.2. (*Splitting Lema*) Sejam X e Y espaços de Hausdorff compactos. Suponha que X é simplesmente conexo. Se $\phi : X \multimap Y$ é uma função n -valuada, então ϕ é split.

Demonstração. Pelo Lema 3.1.1, o grafo Γ_ϕ possui n componentes, digamos K_1, \dots, K_n . Pela continuidade de ϕ , temos que cada projeção induzida $p_i = p|_{K_i} : K_i \rightarrow X$ é uma sobrejeção. Além disso, como ϕ assume n valores em Y , temos que $p_i^{-1}(x)$ possui um único elemento. Definimos então funções simples contínuas $f_i : X \rightarrow Y$ por $f_i(x) = p_Y \circ p_i^{-1}(x)$, para $i = 1, \dots, n$, onde p_Y é a projeção na coordenada de Y . Logo, $\phi = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. □

Recordamos que um espaço X é dito ter a *propriedade do ponto fixo* se, para qualquer função simples $f : X \rightarrow X$, vale que f possui ao menos um ponto fixo. Uma extensão dessa noção para funções a n valores é formalizada na seguinte definição:

Definição 3.1.9. Dizemos que o espaço X possui a *propriedade do ponto fixo para funções n -valuadas* se toda função n -valuada de X em X possui ao menos um ponto fixo.

Teorema 3.1.1. Seja X um espaço Hausdorff compacto e simplesmente conexo com a propriedade do ponto fixo. Então, toda função n -valuada $\phi : X \multimap X$ possui ao menos n pontos fixos, de modo que X possui a propriedade do ponto fixo para funções n -valuadas.

Demonstração. Pelo Lema 3.1.2, ϕ é split, isto é, existem funções simples $f_i : X \rightarrow X$, com $i = 1, \dots, n$, tais que $\phi(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ para todo $x \in X$. Como cada f_i possui ao menos um ponto fixo e $f_j(x) \neq f_i(x)$ se $j \neq i$, temos que ϕ possui ao menos n pontos fixos. □

3.2 Funções n -valuadas e espaços de configuração

Queremos associar funções n -valuadas de X em Y a funções simples indo de X em $D_n(Y)$ com o objetivo de facilitar o estudo de seus pontos fixos. Nesta seção, iremos introduzir este contexto e obter os primeiros resultados relacionados.

Como foi mencionado na Seção 1.1, o grupo fundamental de $D_n(Y)$ é $B_n(Y)$, o grupo de tranças com n cordas em Y , e o grupo fundamental de $F_n(Y)$ é $P_n(Y)$, o subgrupo de $B_n(Y)$ formado pelas tranças puras.

Começamos esta seção com algumas definições.

Definição 3.2.1. Uma função $\Phi : X \rightarrow D_n(Y)$ será chamada de *função n -não-ordenada*, e uma função $\Psi : X \rightarrow F_n(Y)$ será chamada de *função n -ordenada*. Quando $X = Y$ dizemos que Φ é uma função n -não-ordenada em X e Ψ é uma função n -ordenada em X .

Notemos que, para cada função $\Psi : X \rightarrow F_n(Y)$, existem funções simples $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow Y$ tais que $\Psi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ e $f_i(x) \neq f_j(x)$ se $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ para todo $x \in X$.

Definição 3.2.2. Dada $\Phi : X \rightarrow D_n(Y)$, $x \in X$ é dito uma *coincidência do par* (Φ, f) se existem $(x_1, \dots, x_n) \in F_n(Y)$ e $j \in \{1, \dots, n\}$ tais que $\Phi(x) = \pi(x_1, \dots, x_n)$ e $f(x) = x_j$, sendo $\pi : F_n(Y) \rightarrow D_n(Y)$ o recobrimento mencionado na Seção 1.1. O conjunto de coincidência do par (Φ, f) será denotado por $\text{Coin}(\Phi, f)$. Se $X = Y$ e $f = \text{Id}_X$, então $\text{Coin}(\Phi, \text{Id}_X)$ é chamado de *conjunto dos pontos fixos de Φ* e é denotado por $\text{Fix}(\Phi)$. Se f é a função constante c_{y_0} no ponto $y_0 \in Y$, então $\text{Coin}(\Phi, c_{y_0})$ é o conjunto das *raízes* de Φ em y_0 .

Definição 3.2.3. Dada $\Psi : X \rightarrow F_n(Y)$, o *conjunto de coincidências do par* (Ψ, f) é definido por $\text{Coin}(\Psi, f) = \{x \in X \mid f(x) = p_j \circ \Psi(x) \text{ para algum } 1 \leq j \leq n\}$, sendo $p_j : F_n(Y) \rightarrow Y$ a projeção na j -ésima coordenada. Se $X = Y$ e $f = \text{Id}_X$, então $\text{Coin}(\Psi, \text{Id}_X) = \{x \in X \mid x = p_j \circ \Psi(x) \text{ para algum } 1 \leq j \leq n\}$ é chamado de *conjunto dos pontos fixos de Ψ* e é denotado por $\text{Fix}(\Psi)$. Se f é a função constante c_{y_0} no ponto $y_0 \in Y$, então $\text{Coin}(\Psi, c_{y_0}) = \{x \in X \mid y_0 = p_j \circ \Psi(x) \text{ para algum } 1 \leq j \leq n\}$ é o conjunto das *raízes* de Ψ em y_0 .

Se $\phi : X \rightarrow Y$ é uma função n -valuada, temos uma função n -não-ordenada $\Phi : X \rightarrow D_n(Y)$ associada a ϕ ao definir $\Phi(x) = \{\phi(x)\}$. A princípio, Φ poderia ser uma função simples não contínua, todavia, veremos mais adiante que, quando se está trabalhando em espaços métricos, a associação entre funções n -valuadas e funções (contínuas) n -não-ordenadas é biunívoca.

O próximo resultado é um teorema técnico que nos permitirá provar o teorema subsequente. Para enunciá-lo precisamos fazer algumas considerações. Dado um espaço métrico Y com métrica d , consideramos \mathcal{K}' como sendo a família de conjuntos compactos não vazios de Y equipada com a topologia induzida pela métrica de Haurdorff d_H que é definida por

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b)\}, \quad (3.1)$$

em que $A, B \in \mathcal{K}'$.

Teorema 3.2.1. [4, Chapter VI, Section 6, Theorem 1] Sejam X e Y espaços métricos, seja \mathcal{K}' a família de conjuntos compactos não vazios de Y , seja $\Gamma : X \rightarrow Y$ uma multifunção tal que para todo $x \in X$, $\Gamma(x) \in \mathcal{K}'$ e $\Gamma(x) \neq \emptyset$. Então Γ é multicontínua se, e somente se, ela induz uma função simples contínua de X em \mathcal{K}' .

Como mencionado na Seção 1.1, $F_n(Y)$ é equipado com a topologia induzida pela inclusão $F_n(Y) \subset Y^n$ e $D_n(Y)$ é equipado com a topologia quociente usando a função quociente $\pi : F_n(Y) \rightarrow D_n(Y)$. Um subconjunto W de $D_n(Y)$ é aberto se, e somente se, a sua pré-imagem $\pi^{-1}(W)$ é um aberto de $F_n(Y)$. Sendo Y um espaço métrico com métrica d , temos que $D_n(Y)$ é um subconjunto de \mathcal{K}' , logo, $D_n(Y)$ assume a topologia induzida da métrica de Hausdorff.

Se $z, w \in D_n(Y)$, então existem $(z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \in F_n(Y)$ tais que $z = \pi(z_1, \dots, z_n)$ e $w = \pi(w_1, \dots, w_n)$ e temos

$$d_H(z, w) = \max\left\{\max_{1 \leq i \leq n} d(z_i, w), \max_{1 \leq i \leq n} d(w_i, z)\right\},$$

sendo $d(z_i, w) = \min_{1 \leq i \leq n} d(z_i, w_j)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Usando essas considerações e o Teorema 3.2.1, provamos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.2. Sejam X e Y espaços métricos e n um inteiro positivo. Uma função a n valores $\phi : X \multimap Y$ é multicontínua se, e somente se, a função associada $\Phi : X \rightarrow D_n(Y)$ é contínua.

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.1, é suficiente mostrar que o conjunto $D_n(Y)$ equipado com a topologia induzida pela métrica de Haurdorff d_H é isomorfo ao espaço de configuração $D_n(Y)$ equipado com a topologia quociente, ou equivalente, mostrar que um subconjunto de D_n é aberto com respeito à topologia induzida pela métrica de Hausdorff se, e somente se, é aberto com respeito à topologia quociente. Seja $y \in D_n(Y)$ e seja $(y_1, \dots, y_n) \in F_n(Y)$ tal que $\pi(y_1, \dots, y_n) = y$.

Começamos verificando que uma bola aberta da topologia quociente contém uma bola aberta da topologia de Hausdorff, ambas com os mesmos centros. Tomamos U_1, \dots, U_n bolas abertas em Y cujos centros são y_1, \dots, y_n , respectivamente. Sem perda de generalidade, assumimos que tais bolas têm o mesmo raio $\varepsilon > 0$ e que elas são duas a duas disjuntas. Considere agora uma bola aberta $U_H \subset D_n(Y)$ pela métrica de Hausdorff com raio ε cujo centro é y . Seja $z \in U_H$ e considere $(z_1, \dots, z_n) \in F_n(Y)$ tal que $\pi(z_1, \dots, z_n) = z$. Suponha que $z \notin \pi(U_1 \times \dots \times U_n)$. Então existe uma bola U_i tal que $z_j \notin U_i$ para todo $j = 1, \dots, n$. Logo $d(y_i, z) \geq \varepsilon$ e, pela definição de d_H , segue que $d_H(y, z) \geq \varepsilon$, o que contradiz a escolha de z . Portanto, $z \in \pi(U_1 \times \dots \times U_n)$. Para finalizar, faremos o contrário. Vamos considerar a bola aberta U_H de raio $\varepsilon > 0$ e centro y com a métrica de Hausdorff d_H . Mostraremos que existem bolas abertas $U_1, \dots, U_n \subset Y$ cujos centros são y_1, \dots, y_n , respectivamente, tais que o subconjunto dos elementos $z \in D_n(Y)$, sendo $z = \pi(z_1, \dots, z_n)$ para algum $(z_1, \dots, z_n) \in F_n(Y)$, onde cada U_i contém exatamente um ponto de $\{z_1, \dots, z_n\}$ é um subconjunto de U_H . Defina $\delta > 0$ como sendo o mínimo entre ε e as distâncias $d(y_i, y_j)/2$ para todo $j \neq i$. Para $j = 1, \dots, n$, considere U_j sendo uma bola aberta em Y de raio δ com respeito a d e cujo centro é y_j . Note que $U_i \cap U_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Assim, para $z = \{z_1, \dots, z_n\} \in \pi(U_1, \dots, U_n)$, cada U_j contém exatamente um ponto de $\{z_1, \dots, z_n\}$, digamos z_j . Portanto, para todo $j = 1, \dots, n$, vale que $d(z_j, y) = d(z_j, y_j) < \delta$ e $d(y_j, z) = d(y_j, z_j) < \delta$. Por fim, pela definição de d_H , $d_H(y, z) < \delta < \varepsilon$ e, portanto, $z \in U_H$. □

O Corolário deste resultado nos fornece uma relação entre a classe de homotopia livre das funções n -valuadas em X e a classe de homotopia livre das funções n -não-ordenadas em X .

Corolário 3.2.1. Se X e Y são espaços métricos, o conjunto das classes de homotopia livre das funções n -valuadas de X em Y está em correspondência biunívoca com o conjunto $[X, D_n(Y)]$ das classes de homotopia livre das funções simples de X em $D_n(Y)$.

Demonstração. Uma vez que $X \times I$ é também um espaço métrico, aplicamos o Teorema 3.2.2 às funções n -valuadas de $X \times I$ em Y . De modo que duas funções n valuadas $\phi_0, \phi_1 : X \multimap Y$ são homotópicas se, e somente se, as funções correspondentes $\Phi_0, \Phi_1 : X \rightarrow D_n(Y)$ são homotópicas. □

Para construir uma relação entre o conjunto das classes de homotopia livre das funções n -valuadas split e o conjunto das funções n -ordenadas, precisamos da seguinte definição:

Definição 3.2.4. Se $\phi : X \multimap Y$ é uma função a n valores e $\Phi : X \rightarrow D_n(Y)$ é a função n -não-ordenada associada a ela, então a função $\widehat{\Phi} : X \rightarrow F_n(Y)$ é dita um levantamento de ϕ se o

seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} & & F_n(Y) \\ & \nearrow \widehat{\Phi} & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\Phi} & D_n(Y). \end{array}$$

Observação 3.2.1. Se $\phi = \{f_1, \dots, f_n\} : X \multimap Y$ é split, então ϕ admite um levantamento $\widehat{\Phi} = (f_1, \dots, f_n)$. Qualquer que seja esse levantamento $\widehat{\Phi}$, vale que $\text{Fix}(\widehat{\Phi}) = \text{Fix}(\Phi)$ e, além disso, $\widehat{\Phi}$ determina um conjunto ordenado de n funções simples $(f_1 = p_1 \circ \widehat{\Phi}, \dots, f_n = p_n \circ \widehat{\Phi})$ de X em Y tais que $f_i(x) \neq f_j(x)$ para todo $x \in X$ e $1 \leq i < j \leq n$. Reciprocamente, um conjunto ordenado de n funções simples (f_1, \dots, f_n) de X em Y para o qual $f_i(x) \neq f_j(x)$ se $x \in X$ e $1 \leq i < j \leq n$ determina uma função n -ordenada $\Psi : X \rightarrow F_n(Y)$, definida por $\Psi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, e uma função split $\phi = \{f_1, \dots, f_n\} : X \multimap Y$, tais que Ψ é levantamento de ϕ . Em suma, uma função a n valores ϕ é split se, e somente se, existe um levantamento $\widehat{\Phi}$ de ϕ .

Como visto na seção 1.1, o grupo de permutação S_n age livremente em $F_n(Y)$ permutando as coordenadas. De modo que tal grupo também age nas n -uplas de funções entre X e $F_n(Y)$. Portanto, a restrição de tal ação no conjunto $F_n(Y)^X$ das funções n -ordenadas é também livre.

Teorema 3.2.3. Sejam X e Y espaços métricos. O conjunto $\text{Spl}(X, Y, n)$ das funções a n valores split de X em Y está em correspondência biunívoca com as órbitas do conjunto $F_n(Y)^X$ das funções simples de X em $F_n(Y)$ pela ação de S_n em $F_n(Y)^X$.

Demonstração. Seja $\phi \in \text{Spl}(X, Y, n)$. Pela Observação 3.2.1, existe levantamento $\widehat{\Phi} : X \rightarrow F_n(Y)$ de ϕ , isto é, $\widehat{\Phi}$ é tal que $\Phi = \pi \circ \widehat{\Phi}$. Se $\widehat{\Phi} = (f_1, \dots, f_n)$, os outros levantamentos de ϕ são obtidos pela ação do grupo das transformações de Deck do espaço de recobrimento, sendo este grupo S_n , temos que tais levantamentos são da forma $(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(n)})$, onde $\sigma \in S_n$. Temos assim uma correspondência biunívoca entre $\text{Spl}(X, Y, n)$ e o espaço de órbitas $F_n(Y)^X/S_n$. □

Encerramos esta seção com um teorema que classifica as classes de homotopia livre das funções n -valuadas split em termos das classes de homotopia livre das funções n -ordenadas. Este teorema será bastante útil para estudar propriedades homotópicas das funções n -valuadas split.

Teorema 3.2.4. Sejam X e Y espaços métricos e $\phi_0, \phi_1 : X \multimap Y$ funções a n valores homotópicas. Se ϕ_0 é split, então ϕ_1 também é split. Assim, o conjunto $\text{Spl}(X, Y, n)/\sim$ das classes de homotopia das funções n -valuadas split de X em Y está em correspondência biunívoca com as órbitas do conjunto $[X, F_n(Y)]$ pela ação de S_n que é induzida da ação de S_n em $F_n(Y)^X$.

Demonstração. Naturalmente, a função $\pi : F_n(Y) \rightarrow D_n(Y)$ induz uma função $\widehat{\pi} : [X, F_n(X)] \rightarrow [X, D_n(Y)]$ definida por $\widehat{\pi}(\Psi) = [\pi \circ \Psi]$ para qualquer função n -ordenada $\Psi : X \rightarrow F_n(Y)$. Dadas duas funções n -valuadas de X em Y homotópicas, se a primeira é split, pela Observação 3.2.1, ela possui um levantamento de X em $F_n(Y)$ e, pela Definição 3.2.4 e pela propriedade de levantamento de um recobrimento, a segunda também admite um levantamento. Para provar a segunda parte, primeiro note que existe uma sobrejeção $f : F_n(Y)^X \rightarrow \text{Spl}(X, Y, n)$ dada por $f(g) = \pi \circ g$, que induz uma sobrejeção $\bar{f} : [X, F_n(Y)] \rightarrow \text{Spl}(X, Y, n)/\sim$ no conjunto de classes de homotopia correspondente. Portanto, se $\Psi_1, \Psi_2 \in F_n(Y)^X$ são duas funções n -ordenadas que são homotópicas via uma homotopia H e se $\sigma \in S_n$, então as funções $\sigma(\Psi_1)$ e $\sigma(\Psi_2)$ são homotópicas via a homotopia $\sigma \circ H$. Temos, assim, a função quociente $q : [X, F_n(Y)] \rightarrow [X, F_n(Y)]/S_n$. Vejamos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} [X, F_n(Y)] & & \\ \downarrow q & \searrow \bar{f} & \\ [X, F_n(Y)]/S_n & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Spl}(X, Y, n)/\sim \end{array}$$

onde \bar{f} é definida por $\bar{f}([g]) = [f(g)]$. Ora, se $g, h \in F_n(Y)^X$ são tais que $q([g]) = q([h])$, então existe $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma[g] = [h]$ e, portanto, $\bar{f}(\sigma[g]) = [\sigma f(h)] = \bar{f}([h]) = [f(h)]$. Da definição de $\text{Spl}(X, Y, n)$, temos que $[\sigma f(g)] = [f(g)]$, logo $[f(g)] = [f(h)]$ e vale a afirmação. Por construção, a função \bar{f} é sobrejetora, resta mostrar que ela é injetora. Sejam $g, h \in F_n(Y)$ tais que $\bar{f}([g]) = \bar{f}([h])$. Então $[f(g)] = [f(h)]$ e, portanto, $f(g)$ e $f(h)$ são homotópicas via uma homotopia $H : X \times I \rightarrow D_n(Y)$, onde $H(\cdot, 0) = f(g)$ e $H(\cdot, 1) = f(h)$. Vale que H se levanta a uma homotopia $\tilde{H} : X \times I \rightarrow F_n(Y)$ tal que $\tilde{H}(\cdot, 0) = g$ e $\tilde{H}(\cdot, 1)$ é um levantamento de $f(h)$. Como h é também um levantamento de $f(h)$, existe $\sigma \in S_n$ tal que $f(h) = \sigma(h)$. Como g é homotópica a $f(h)$, g é homotópica a $\sigma(h)$ e, assim, $q([g]) = q([\sigma(h)]) = q([h])$ da definição de q , o que finalizada a prova da injetividade de \bar{f} . \square

3.3 Pontos fixos e raízes de funções n -valuadas

Nesta seção, iremos usar a relação encontrada na seção anterior entre funções n -valuadas e funções simples com contradomínio em espaços de configuração para determinar quando uma função n -valuada se deforma livre de pontos fixos, isto é, quando existe alguma função n -valuada sem pontos fixos na sua classe de homotopia livre. Analisaremos também quando uma função n -valuada se deforma livre de raízes, isto é, quando existe alguma função n -valuada livre de raízes na sua classe de homotopia livre.

Proposição 3.3.1. Seja X um espaço métrico e $\phi : X \rightarrow X$ uma função n -valuada split que se deforma livre de pontos fixos. Então um levantamento $\hat{\Phi} : X \rightarrow F_n(Y)$ de ϕ é escrito da forma $\hat{\Phi} = (f_1, \dots, f_n)$, sendo cada $f_i : X \rightarrow X$ uma função simples que se deforma numa livre de pontos fixos, para cada $i = 1, \dots, n$.

Demonstração. Como ϕ é split, existe levantamento $\hat{\Phi} = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow F_n(X)$ de ϕ . Pelo Teorema 3.2.1, existe homotopia $H : X \times I \rightarrow D_n(X)$ tal que $H(\cdot, 0) = \hat{\Phi}$ e $H(\cdot, 1)$ é livre de pontos fixos. Pela propriedade de levantamento de homotopia ([22, Proposition 1.30]), existe levantamento $\tilde{H} : X \times I \rightarrow F_n(Y)$ de H tal que $\tilde{H}(\cdot, 0) = \hat{\Phi}$ e $\tilde{H}(\cdot, 1)$ é livre de pontos fixos. Portanto, $\tilde{H}(\cdot, 1)$ é da forma (f'_1, \dots, f'_n) , sendo cada f'_i livre de pontos fixos para $i = 1, \dots, n$, donde segue o resultado. \square

Veremos no Capítulo 4 que se $X = \mathbb{S}^2$, a recíproca deste resultado é válida. O caso em que $X = \mathbb{T}^2$ se mostra mais complexo, de modo que precisamos adicionar certas hipóteses para obter a recíproca, estudaremos isso na última seção do Capítulo 5.

O próximo resultado nos garante que questionar se uma função n -valuada split se deforma livre de ponto fixo é equivalente a questionar se qualquer de seus levantamentos se deforma livre de ponto fixo.

Proposição 3.3.2. Seja $\phi : X \rightarrow X$ uma função n -valuada split, sendo X um espaço métrico. Então ϕ se deforma em $\text{Spl}(X, X, n)$ a uma função n -valuada livre de ponto fixo se, e somente se, qualquer levantamento $\hat{\Phi} = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow F_n(X)$ de ϕ pode ser deformado em $F_n(X)$ numa função livre de ponto fixo $\hat{\Phi}' = (f'_1, \dots, f'_n) : X \rightarrow F_n(X)$. Em particular, para todo $1 \leq i \leq n$, existe uma homotopia $H_i : X \times I \rightarrow X$ entre f_i e f'_i , sendo f'_i livre de ponto fixo e $H_j(x, t) \neq H_k(x, t)$ para todo $1 \leq j < k \leq n, x \in X$ e $t \in [0, 1]$.

Demonstração. (\implies) Suponhamos que ϕ é homotópica em $\text{Spl}(X, X, n)$ à função n -valuada $\phi' : X \rightarrow X$ livre de ponto fixo. Consideramos as funções n -não-ordenadas $\Phi, \Phi' : X \rightarrow D_n(X)$ associadas a ϕ e ϕ' , respectivamente. Pelo Corolário 3.2.1, temos que Φ e Φ' são homotópicas. Considerando a aplicação $\hat{\pi} : [X, F_n(X)] \rightarrow [X, D_n(X)]$ induzida pelo recobrimento $\pi : F_n(X) \rightarrow D_n(X)$, dado um levantamento $\hat{\Phi}$ de ϕ , existe levantamento $\hat{\Phi}'$ de ϕ' tal que $\hat{\Phi}' \in [\hat{\Phi}]$, sendo $\hat{\Phi}'$ livre de ponto fixo.

(\Leftarrow) Seja $\widehat{\Phi} = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow F_n(X)$ um levantamento qualquer de ϕ . Supondo que $\widehat{\Phi}$ se deforma numa função n -valuada livre de ponto fixo $\widehat{\Phi}' : X \rightarrow F_n(X)$ através da homotopia $H : X \times [0, 1] \rightarrow F_n(X)$, temos que $\pi \circ H : X \times [0, 1] \rightarrow D_n(X)$ é uma homotopia entre as funções n -não-ordenadas $\widehat{\Phi}$ (associada a ϕ) e $\pi \circ \widehat{\Phi}'$. Pelo Corolário 3.2.1, ϕ e a função n -valuada associada a $\pi \circ \widehat{\Phi}'$ são homotópicas, como $\pi \circ \widehat{\Phi}'$ é livre de ponto fixo e isso conclui o resultado. \square

O teorema abaixo, além de estender o resultado do Lema 3.1.2 para funções n -valuadas definidas em espaços métricos, nos fornece condições algébricas para determinar se uma função n -valuada é split.

Teorema 3.3.1. (*Splitting Characterization Theorem*) Seja $\phi : X \rightarrow Y$ uma função n -valuada entre espaços métricos, sendo X conexo e localmente conexo por caminhos. Então ϕ é split se, e somente se, a imagem de $\Phi_{\#} : \pi_1(X) \rightarrow B_n(Y)$ está contida na imagem do homomorfismo inclusão $\pi_{\#} : P_n(Y) \rightarrow B_n(Y)$ induzida pelo recobrimento $\pi : F_n(Y) \rightarrow D_n(Y)$.

Demonstração. Se ϕ é split, existe levantamento $\widehat{\Phi} = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow F_n(Y)$ de ϕ , isto é, $\pi \circ \widehat{\Phi} = \Phi$ é a função n -não-ordenada associada a ϕ . Daí $\pi_{\#} \circ \widehat{\Phi}_{\#} = \Phi_{\#}$ é o homomorfismo induzido a nível de grupo fundamental e temos $\text{Im}(\Phi_{\#}) \subset \text{Im}(\pi_{\#})$. A recíproca é válida pois o critério de levantamento ([22, Proposition 1.33]) garante um levantamento para ϕ e isso é suficiente para que ela seja split graças à Observação 3.2.1. \square

Se X e Y são espaços métricos tais que qualquer homomorfismo de $\pi_1(X)$ em $B_n(Y)$ é trivial, então o Teorema 3.3.1 garante que toda função a n valores de X em Y é split. Vale então o seguinte corolário do Teorema 3.3.1:

Corolário 3.3.1. Seja X um espaço métrico simplesmente conexo com a propriedade do ponto fixo. Então, toda função n -valuada $\phi : X \rightarrow X$ possui ao menos n pontos fixos, de modo que X possui a propriedade do ponto fixo para funções a n valores.

Demonstração. Seja $\phi : X \rightarrow X$ uma função n -valuada. Como X é simplesmente conexo, temos que $\pi_1(X)$ é trivial e o homomorfismo $\Phi_{\#} : \pi_1(X) \rightarrow B_n(X)$ induzido pela função n -não-ordenada Φ associada a ϕ é trivial. Pelo Teorema 3.3.1, temos que ϕ é split e podemos considerar um levantamento $\widehat{\Phi} = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow F_n(X)$ de ϕ . Como X possui a propriedade do ponto fixo, cada $f_i : X \rightarrow X$ possui ao menos um ponto fixo e eles são distintos, pois $f_i(x) \neq f_j(x)$ se $i \neq j$. Para concluir o resultado basta observar que a união desses pontos fixos forma o conjunto de pontos fixos de ϕ . \square

Como mencionado na Seção 1.1, se X é uma variedade sem bordo, as projeções $\bar{p}_{1,n} : D_{1,n}(X) \rightarrow X$ (1.14) e $\bar{p}_{1,n} : F_{n+1}(X) \rightarrow X$ (1.13) são fibrações. Isso nos permitirá, para o caso em que X é uma variedades sem bordo, obter condições necessárias e suficientes para que funções n -valuadas se deformem livres de ponto fixo.

Proposição 3.3.3. Seja X um espaço métrico e $\phi : X \rightarrow X$ uma função n -valuada. Se ϕ pode ser deformada numa função n -valuada livre de pontos fixos, então existe uma função $\Theta : X \rightarrow D_{1,n}(X)$ tal que o seguinte diagrama é comutativo a nível de homotopia:

$$\begin{array}{ccc}
 & & D_{1,n}(X) \\
 & \nearrow \Theta & \downarrow i_{1,n} \\
 X & \xrightarrow{Id_X \times \Phi} & X \times D_n(X),
 \end{array} \tag{3.2}$$

sendo $i_{1,n} : D_{1,n} \rightarrow X \times D_n(X)$ a inclusão natural. Reciprocamente, se X é uma variedade sem bordo e existe uma função $\Theta : X \rightarrow D_{1,n}(X)$ tal que o diagrama (3.2) comuta a nível de homotopia, então a função n -valuada $\phi : X \rightarrow X$ se deforma em uma função a n valores livre de ponto fixo.

Demonstração. Suponhamos primeiro que ϕ se deforma numa função a n valores ϕ' livre de ponto fixo. Diante disso, a função n -não-ordenada Φ' associada a ϕ' é livre de ponto fixo. Basta então definir $\Theta : X \rightarrow D_{1,n}(X)$ por $\Theta(x) = (x, \Phi'(x))$. Suponhamos agora que existe $\Theta : X \rightarrow D_{1,n}(X)$ que faz o diagrama (3.2) comutar a nível de homotopia. Compondo Θ com a projeção $\bar{p}_{1,n} : D_{1,n}(X) \rightarrow X$ na primeira coordenada, obtemos uma função de X em X homotópica à identidade. Seja $H : X \times I \rightarrow X$ tal homotopia entre $H_0 = \bar{p}_{1,n} \circ \Theta$ e $H_1 = \text{Id}_X$. Uma vez que $\bar{p}_{1,n} : D_{1,n}(X) \rightarrow X$ é uma fibração e Θ é um levantamento da restrição H_0 , H se levanta a uma homotopia $\tilde{H} : X \times I \rightarrow D_{1,n}(X)$. Como a restrição \tilde{H}_1 satisfaz $\bar{p}_{1,n} \circ \tilde{H}_1 = \text{Id}_X$, a função que ignora a primeira coordenada da imagem de \tilde{H}_1 é uma função n -não-ordenada sem pontos fixos e, assim, pelo Corolário 3.2.1, basta considerar a função n -valuada associada a ela. \square

Como as funções n -valuadas split têm propriedades particulares, faz sentido analisar esse caso em especial. Assim, temos o análogo do resultado anterior para o caso das funções split.

Proposição 3.3.4. Seja X um espaço métrico e $\phi : X \rightarrow X$ uma função n -valuada split. Se ϕ pode ser deformada em uma função n -valuada livre de pontos fixos e $\hat{\Phi} : X \rightarrow F_n(X)$ é um levantamento de ϕ , então existe uma função $\hat{\Theta} : X \rightarrow F_{n+1}(X)$ tal que o seguinte diagrama comuta a nível de homotopia:

$$\begin{array}{ccc}
 & & F_{n+1}(X) \\
 & \nearrow \hat{\Theta} & \downarrow \hat{i}_{n+1} \\
 X & \xrightarrow{\text{Id}_X \times \hat{\Phi}} & X \times F_n(X),
 \end{array} \tag{3.3}$$

onde $\hat{i}_{n+1} : F_{n+1}(X) \rightarrow X \times F_n(X)$ é a inclusão natural. Reciprocamente, se X é uma variedade sem bordo e existe uma função $\hat{\Theta} : X \rightarrow F_{n+1}(X)$ tal que o diagrama (3.3) comuta a nível de homotopia, então a função a n valores split $\phi : X \rightarrow X$ se deforma numa função livre de ponto fixo através de funções split.

Demonstração. Suponhamos primeiro que ϕ se deforma numa função a n valores livre de ponto fixo. Pela Proposição 3.3.2, o levantamento $\hat{\Phi} = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow F_n(X)$ de ϕ pode ser deformado em $F_n(X)$ numa função livre de ponto fixo $\hat{\Phi}' = (f'_1, \dots, f'_n) : X \rightarrow F_n(X)$. Basta então definir $\hat{\Theta} : X \rightarrow F_{n+1}(X)$ por $\hat{\Theta}(x) = (x, \hat{\Phi}'(x))$. Suponhamos agora que existe $\hat{\Theta} : X \rightarrow F_{n+1}(X)$ que faz o diagrama (3.3) comutar a nível de homotopia. Compondo $\hat{\Theta}$ com a projeção $\bar{p}_1 : F_{n+1}(X) \rightarrow X$ na primeira coordenada, obtemos uma função de X em X homotópica à identidade. Seja $H : X \times I \rightarrow X$ tal homotopia entre $H_0 = \bar{p}_1 \circ \hat{\Theta}$ e $H_1 = \text{Id}_X$. Uma vez que $\bar{p}_1 : F_{n+1}(X) \rightarrow X$ é uma fibração e $\hat{\Theta}$ é um levantamento da restrição H_0 , H se levanta a uma homotopia $\tilde{H} : X \times I \rightarrow F_{n+1}(X)$. Como a restrição \tilde{H}_1 satisfaz $\bar{p}_1 \circ \tilde{H}_1 = \text{Id}_X$, a função projeção nas n últimas coordenadas da imagem de \tilde{H}_1 é uma função n -ordenada sem pontos fixos homotópica a $\hat{\Phi}$ e, assim, concluímos esta demonstração. \square

Lembramos que se X é uma superfície compacta sem bordo com característica de Euler não positiva, os espaços $D_{1,n}(X)$ e $F_{n+1}(X)$ são espaços do tipo $K(\pi, 1)$, logo existe relação entre as classes de homotopia livre e os homomorfismos induzidos nos grupos fundamentais, como mencionado na Seção 1.4. Diante disso, podemos levar o problema geométrico de deformação em livre de ponto fixo para um problema algébrico nos grupos fundamentais dos espaços de configuração envolvidos.

Teorema 3.3.2. Seja X uma superfície compacta sem bordo tal que $\chi(X) \leq 0$ e $\phi : X \multimap X$ uma função a n valores.

- (a) ϕ se deforma numa função a n valores livre de pontos fixos se, e somente se, existe um homomorfismo $\varphi : \pi_1(X) \longrightarrow B_{1,n}(X)$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc}
 & & B_{1,n}(X) \\
 & \nearrow \varphi & \downarrow (i_{1,n})_{\#} \\
 \pi_1(X) & \xrightarrow{(Id_X \times \Phi)_{\#}} & \pi_1(X) \times B_n(X),
 \end{array} \tag{3.4}$$

onde $(i_{1,n})_{\#} : B_{1,n}(X) \longrightarrow \pi_1(X) \times B_n(X)$ é induzida pela inclusão natural $i_{1,n} : D_{1,n}(X) \longrightarrow X \times D_n(X)$.

- (b) Se ϕ é split e $\widehat{\Phi}$ é um levantamento de ϕ , então ϕ pode ser deformada numa função n -valuada livre de pontos fixos se, e somente se, existe um homomorfismo $\widehat{\varphi} : \pi_1(X) \longrightarrow P_{n+1}(X)$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc}
 & & P_{n+1}(X) \\
 & \nearrow \widehat{\varphi} & \downarrow (\widehat{i}_{n+1})_{\#} \\
 \pi_1(X) & \xrightarrow{(Id_X \times \widehat{\Phi})_{\#}} & \pi_1(X) \times P_n(X),
 \end{array} \tag{3.5}$$

onde $(\widehat{i}_{n+1})_{\#} : P_{n+1}(X) \longrightarrow \pi(X) \times P_n(X)$ é induzida pela inclusão natural $\widehat{i}_{n+1} : F_{n+1} \longrightarrow X \times F_n(X)$.

Demonstração. (a) Para provar a “volta”, note que, pela Proposição 3.3.3, o diagrama (3.4) implica na existência do diagrama (3.2), sendo a homotopia com ponto base fixado e $\varphi = \Theta_{\#}$ o homomorfismo induzido por Θ a nível de grupo fundamental, logo, a Proposição 3.3.3 conclui esta parte. Para provar a “ida”, primeiro usamos a Proposição 3.3.3 e obtemos o diagrama (3.2). Assim, as funções $i_{1,n} \circ \Theta$ e $Id_X \times \Phi$ são homotópicas, porém a homotopia não necessariamente preserva ponto base, de modo que se considerarmos o diagrama (3.4) como o induzido em grupo fundamental do diagrama (3.2), então diagrama (3.4) é comutativo a menos de conjugação. Seja $\delta \in \pi_1(X) \times B_n(X)$ tal que $(i_{1,n})_{\#} \circ \varphi(\alpha) = \delta(Id \times \Phi)_{\#}(\alpha)\delta^{-1}$ para todo $\alpha \in \pi_1(X)$ e seja $\widehat{\delta} \in B_{1,n}(X)$ um elemento tal que $(i_{1,n})_{\#}(\widehat{\delta}) = \delta$. Consideramos o isomorfismo $\varphi' : \pi_1(X) \longrightarrow B_{1,n}(X)$ definido por $\varphi'(\alpha) = \widehat{\delta}^{-1}\varphi(\alpha)\widehat{\delta}$ para todo $\alpha \in \pi_1(X)$. Assim, obtemos o diagrama (3.4) ao trocar φ por φ' .

(b) Usando o Teorema 1.4.1, temos que o diagrama (3.5) implica na existência do diagrama (3.3), sendo a homotopia com ponto base fixado e $\widehat{\varphi} = \widehat{\Theta}_{\#}$ o homomorfismo induzido por $\widehat{\Theta}$ a nível de grupo fundamental. Por fim, a Proposição 3.3.4 conclui esta parte. Para provar a “ida”, primeiro usamos a Proposição 3.3.4 e obtemos o diagrama (3.3). Assim, as funções $\widehat{i}_{1,n} \circ \widehat{\Theta}$ e $Id_X \times \widehat{\Phi}$ são homotópicas, porém a homotopia não necessariamente preserva ponto base, de modo que o diagrama (3.5) é comutativo a menos de conjugação. Seja $\varepsilon \in \pi_1(X) \times P_n(X)$ tal que $(\widehat{i}_{1,n})_{\#} \circ \widehat{\varphi}(\alpha) = \varepsilon(Id \times \widehat{\Phi})_{\#}(\alpha)\varepsilon^{-1}$ para todo $\alpha \in \pi_1(X)$, e seja $\widehat{\varepsilon} \in P_{n+1}(X)$ um elemento tal que $(\widehat{i}_{1,n})_{\#}(\widehat{\varepsilon}) = \varepsilon$. Consideramos o isomorfismo $\widehat{\varphi}' : \pi_1(X) \longrightarrow P_{n+1}(X)$ definido por $\widehat{\varphi}'(\alpha) = \widehat{\varepsilon}^{-1}\widehat{\varphi}(\alpha)\widehat{\varepsilon}$ para todo $\alpha \in \pi_1(X)$. Assim, obtemos o diagrama (3.5) ao trocar $\widehat{\varphi}$ por $\widehat{\varphi}'$. \square

Passamos agora ao problema de decidir quando uma função n -valuada se deforma livre de raízes. De modo análogo ao que ocorre na Proposição 3.3.3, o caso em que X é uma variedade sem bordo,

nos permite obter condições necessárias e suficientes para que uma função n -valuada se deforme livre de raízes.

Proposição 3.3.5. Sejam X e Y espaços métricos, $\phi : X \multimap Y$ uma função n -valuada e $y_0 \in Y$ um ponto base. Se ϕ pode ser deformada em uma função n -valuada livre de raízes em y_0 , então existe uma função $\Theta : X \longrightarrow D_n(Y \setminus \{y_0\})$ tal que o seguinte diagrama é comutativo a nível de homotopia:

$$\begin{array}{ccc}
 & & D_n(Y \setminus \{y_0\}) \\
 & \nearrow \Theta & \downarrow i_n \\
 X & \xrightarrow{\Phi} & D_n(Y),
 \end{array} \tag{3.6}$$

Reciprocamente, se Y é uma variedade sem bordo e existe uma função $\Theta : X \longrightarrow D_n(Y \setminus \{y_0\})$ tal que o diagrama (3.6) é comutativo a nível de homotopia, então ϕ se deforma numa função n -valuada livre de raízes em y_0 .

Demonstração. Suponhamos primeiro que ϕ se deforma numa função n -valuada ϕ' livre de raízes, isto é, $y_0 \notin \phi'(x)$ para todo $x \in X$. Diante disso, a função n -não-ordenada Φ' associada a ϕ' é livre de raízes, isto é, qualquer que seja $(x_1, \dots, x_n) \in F_n(X)$ tal que $\Phi'(x) = \pi(x_1, \dots, x_n)$, vale que $y_0 \neq x_i$, para todo $x \in X$ e $1 \leq i \leq n$. Basta então tomarmos Θ como sendo a própria Φ' uma vez que $\text{Im}(\Phi') \subset D_n(Y \setminus \{y_0\})$. Suponhamos agora que existe $\Theta : X \longrightarrow D_n(Y \setminus \{y_0\})$ que faz o diagrama (3.6) comutar a nível de homotopia, isto é, as funções $i_n \circ \Theta$ e Φ são homotópicas. Pelo Corolário 3.2.1, ϕ é homotópica a uma função n -valuada θ tal que $y_0 \notin \theta(x)$ para todo $x \in X$ e, portanto, θ é livre de raízes em y_0 . □

No caso das funções n -valuadas split, temos o análogo da Proposição 3.3.4 para raízes.

Proposição 3.3.6. Sejam X e Y espaços métricos, $\phi : X \multimap Y$ uma função n -valuada split e $y_0 \in Y$ um ponto base. Se ϕ pode ser deformada em uma função n -valuada livre de raízes em y_0 , então existe uma função $\hat{\Theta} : X \longrightarrow F_n(Y \setminus \{y_0\})$ e um levantamento $\hat{\Phi}$ de ϕ tais que o seguinte diagrama é comutativo a nível de homotopia:

$$\begin{array}{ccc}
 & & F_n(Y \setminus \{y_0\}) \\
 & \nearrow \hat{\Theta} & \downarrow \hat{i}_n \\
 X & \xrightarrow{\hat{\Phi}} & F_n(Y),
 \end{array} \tag{3.7}$$

Reciprocamente, se Y é uma variedade sem bordo e existe uma função $\hat{\Theta} : X \longrightarrow F_n(Y \setminus \{y_0\})$ tal que o diagrama (3.7) é comutativo a nível de homotopia, então ϕ se deforma através de funções split numa função n -valuada split livre de raízes.

Demonstração. Suponhamos primeiro que ϕ se deforma numa função n -valuada ϕ' livre de raízes, isto é, $y_0 \notin \phi'(x)$ para todo $x \in X$. Temos que as funções n -não-ordenadas associadas Φ e Φ' são homotópicas. Considerando a aplicação $\hat{\pi} : [X, F_n(X)] \longrightarrow [X, D_n(X)]$ induzida pelo recobrimento $\pi : F_n(X) \longrightarrow D_n(X)$, dado um levantamento $\hat{\Phi}$ de ϕ , existe levantamento $\hat{\Phi}'$ de ϕ' tal que $\hat{\Phi}' \in [\hat{\Phi}]$, como ϕ' é livre de raízes, temos que $\text{Im}(\hat{\Phi}') \subset F_n(Y \setminus \{y_0\})$. Assim, basta definir $\hat{\Theta} : X \longrightarrow F_n(Y \setminus \{y_0\})$ por $\hat{\Theta}(x) = \hat{\Phi}'(x)$. Suponhamos agora que existe $\hat{\Theta} : X \longrightarrow F_n(Y \setminus \{y_0\})$ que faz o diagrama (3.7) comutar a nível de homotopia, isto é, as funções $\hat{i}_n \circ \hat{\Theta}$ e $\hat{\Phi}$ são homotópicas. Assim, as funções n -não-ordenadas $\hat{i}_n \circ \hat{\Theta} \circ \pi$ e $\hat{\Phi}\pi = \Phi$ são homotópicas. Como $\hat{i}_n \circ \hat{\Theta} \circ \pi$ é livre de raízes e as respectivas funções n -valuadas são homotópicas, concluímos o resultado. □

Utilizando as duas últimas proposições, podemos provar um resultado análogo ao Teorema 3.3.2 para o caso de raízes. Este resultado será utilizado no Capítulo 5 para encontrar exemplos de funções n -valuadas que se deformam livre de ponto fixo, uma vez que se deformar livre de ponto fixo será equivalente a se deformar livre de raízes para o caso das funções n -valuadas split definidas no toro.

Teorema 3.3.3. Sejam X e Y superfícies compactas sem bordo tais que $\chi(X) \leq 0$ e $y_0 \in Y$.

- (a) Uma função n -valuada $\phi : X \rightarrow Y$ se deforma livre de raízes em y_0 se, e somente se, existe um homomorfismo $\varphi : \pi_1(X) \rightarrow B_n(Y \setminus \{y_0\})$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc}
 & & B_n(Y \setminus \{y_0\}) \\
 & \nearrow \varphi & \downarrow (i_n)_\# \\
 \pi_1(X) & \xrightarrow{\Phi_\#} & B_n(Y),
 \end{array} \tag{3.8}$$

onde $(i_n)_\# : B_n(Y \setminus \{y_0\}) \rightarrow B_n(Y)$ é induzida pela inclusão natural $i_n : D_n(Y \setminus \{y_0\}) \rightarrow X \times D_n(Y)$.

- (b) Uma função n -valuada split $\phi : X \rightarrow Y$ se deforma livre de raízes se, e somente se, existe um levantamento $\widehat{\phi} : X \rightarrow F_n(Y)$ de ϕ e um homomorfismo $\widehat{\varphi} : \pi_1(X) \rightarrow P_n(Y \setminus \{y_0\})$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc}
 & & P_n(Y \setminus \{y_0\}) \\
 & \nearrow \widehat{\varphi} & \downarrow (\widehat{i}_n)_\# \\
 \pi_1(X) & \xrightarrow{\widehat{\Phi}_\#} & P_n(Y),
 \end{array} \tag{3.9}$$

onde $(\widehat{i}_n)_\# : P_n(Y \setminus \{y_0\}) \rightarrow P_n(Y)$ é induzida pela inclusão natural $\widehat{i}_n : F_n(Y \setminus \{y_0\}) \rightarrow F_n(Y)$.

Demonstração. (a) Para provar a “volta”, note que, pela Proposição 3.3.5, o diagrama (3.8) implica na existência do diagrama (3.6), sendo a homotopia com ponto base fixado e $\varphi = \Theta_\#$ o homomorfismo induzido por Θ a nível de grupo fundamental, logo, a Proposição 3.3.5 conclui esta parte. Para provar a “ida”, primeiro usamos a Proposição 3.3.5 e obtemos o diagrama (3.6). Assim, as funções $i_n \circ \Theta$ e Φ são homotópicas, porém a homotopia não necessariamente preserva ponto base, de modo que o diagrama (3.8) é comutativo a menos de conjugação. Seja $\delta \in B_n(Y)$ tal que $(i_n)_\# \circ \varphi(\alpha) = \delta(\Phi)_\#(\alpha)\delta^{-1}$ para todo $\alpha \in \pi_1(X)$, e seja $\widehat{\delta} \in B_n(Y \setminus \{y_0\})$ um elemento tal que $(i_n)_\#(\widehat{\delta}) = \delta$. Consideramos o isomorfismo $\varphi' : \pi_1(X) \rightarrow B_n(Y \setminus \{y_0\})$ definido por $\varphi'(\alpha) = \widehat{\delta}^{-1}\varphi(\alpha)\widehat{\delta}$ para todo $\alpha \in \pi_1(X)$. Assim, obtemos o diagrama (3.8) ao trocar φ por φ' .

(b) Usando o Teorema 1.4.1, temos a existência do diagrama (3.9) implica na existência do diagrama (3.7), sendo a homotopia com ponto base fixado e $\widehat{\varphi} = \widehat{\Theta}_\#$ o homomorfismo induzido por $\widehat{\Theta}$ a nível de grupo fundamental. Por fim, a Proposição 3.3.6 conclui esta parte. Para provar a “ida”, primeiro usamos a Proposição 3.3.6 e obtemos o diagrama (3.7). Assim, as funções $\widehat{i}_n \circ \widehat{\Theta}$ e $\widehat{\Phi}$ são homotópicas, porém a homotopia não necessariamente preserva ponto base, de modo que o diagrama (3.9) é comutativo a menos de conjugação. Seja $\varepsilon \in P_n(Y)$ tal que $(\widehat{i}_n)_\# \circ \widehat{\varphi}(\alpha) = \varepsilon(\widehat{\Phi})_\#(\alpha)\varepsilon^{-1}$ para todo $\alpha \in \pi_1(X)$, e seja $\widehat{\varepsilon} \in P_n(Y \setminus \{y_0\})$ um elemento tal que $(\widehat{i}_n)_\#(\widehat{\varepsilon}) = \varepsilon$. Consideramos o isomorfismo $\widehat{\varphi}' : \pi_1(X) \rightarrow P_n(Y \setminus \{y_0\})$ definido por $\widehat{\varphi}'(\alpha) = \widehat{\varepsilon}^{-1}\widehat{\varphi}(\alpha)\widehat{\varepsilon}$ para todo $\alpha \in \pi_1(X)$. Assim, obtemos o diagrama (3.9) ao trocar $\widehat{\varphi}$ por $\widehat{\varphi}'$.

□

3.4 Número de Nielsen para funções n -valuadas

O objetivo desta seção é definir o número de Nielsen para as funções n -valuadas. Para isso, precisamos ter uma definição de índice de ponto fixo para estas funções e precisamos de uma relação entre seus pontos fixos. Iremos desenvolver tais ferramentas nos restringindo ao caso em que as funções n -valuadas estão definidas em um poliedro compacto $|K|$ que é a realização de um complexo simplicial finito K . Uma vez que complexos simpliciais finitos são espaços ENR, a definição de índice para funções simples estudada no Capítulo 2 será útil para definir o índice para funções n -valuadas. Parte dos resultados aqui apresentados terão suas demonstrações omitidas por serem muito técnicas ou extensas. Todos estes resultados com suas respectivas demonstrações podem ser encontrados em [29] e [30].

Definimos a distância $\bar{d}(\phi, \psi)$ entre duas multifunções $\phi, \psi : X \multimap |K|$ por

$$\bar{d}(\phi, \psi) = \sup\{d_H(\phi(x), \psi(x)) \mid x \in X\},$$

onde d_H é a métrica de Hausdorff definida por

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b)\},$$

sendo d a métrica baricêntrica e $A, B \subset |K|$. A seguinte desigualdade decorre das definições anteriores:

$$d(x, A) \leq d(x, B) + d_H(A, B). \quad (3.10)$$

O primeiro resultado desta seção nos permitirá definir o índice de uma função n -valuada. Sua demonstração pode ser encontrada em [29]. Dizemos que uma multifunção $\phi : X \multimap X$ é *Fix-finita* quando o conjunto $\text{Fix}(\phi)$ for finito.

Teorema 3.4.1. (*Fix-finite approximation of n valued multifunctions*) Seja $|K|$ um poliedro compacto e $\phi : |K| \multimap |K|$ uma função n -valuada. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma função n -valuada $\phi' : |K| \multimap |K|$ com as seguintes propriedades:

1. ϕ' é Fix-finita;
2. os pontos fixos de ϕ' estão contidos em simplexos maximais de $|K|$;
3. $\bar{d}(\phi, \phi') < \varepsilon$.

Neste contexto, a função ϕ' encontrada no Teorema 3.4.1 será chamada de *aproximação Fix-finita de ϕ* .

Primeiro definiremos o índice de um ponto fixo isolado com uma vizinhança euclidiana. Posteriormente, estenderemos essa definição para funções n -valuadas em poliedros compactos.

Seja $\phi : |K| \multimap |K|$ uma função n -valuada e x um ponto fixo isolado de ϕ que está contido no interior de um simplexo maximal σ . Pelo Lema 3.1.2, a restrição $\phi|_{\bar{\sigma}}$ é split. Logo, $\phi|_{\bar{\sigma}}$ admite levantamento $\widehat{\Phi} = (f_1, \dots, f_n) : |K| \rightarrow F_n(|K|)$ tal que $f_j(x) = x$ para algum $1 \leq j \leq n$. Nessas condições, temos as seguintes definições:

Definição 3.4.1. O índice de um ponto fixo isolado x da função n -valuada ϕ é definido por $\text{Ind}(\phi, x) = I(f_j, x)$, sendo $I(f_j, x)$ a definição de índice para funções simples feita na seção 2.1.

Definição 3.4.2. Se ϕ é Fix-finita em um aberto $U \subset |K|$, digamos $\text{Fix}(\phi) \cap U = \{x_1, \dots, x_n\}$, e todos os pontos fixos contidos nesse aberto estão localizados nos interiores de simplexos maximais, então definimos o índice de ponto fixo de ϕ em U como sendo

$$\text{Ind}(\phi, U) = \sum_{i=1}^n I(\phi, x_i).$$

Se $\text{Fix}(\phi) \cap U = \emptyset$, então definimos $\text{Ind}(\phi, U) = 0$.

Note que quando $n = 1$, ou seja, quando ϕ é uma função simples, o índice definido coincide com a definição para funções simples.

O lema a seguir garante que $\text{Ind}(\phi, U)$ é um invariante por homotopia, sua demonstração pode ser encontrada em [30].

Lema 3.4.1. Seja $U \subset |K|$ aberto e $\phi, \psi : |K| \rightarrow |K|$ funções n -valuada Fix-finitas em U , cujos pontos fixos em U estão localizados nos interiores de simplexos maximais. Seja $H : \bar{U} \times I \rightarrow |K|$ uma homotopia n -valuada entre $\phi_0 = \phi|_{\bar{U}}$ e $\phi_1 = \psi|_{\bar{U}}$ tal que $\text{Fix}(H) \cap (\partial U \times I) = \emptyset$, onde ∂U representa o bordo de U e \bar{U} o fecho de U . Então $\text{Ind}(\phi, U) = \text{Ind}(\psi, U)$.

Definição 3.4.3. Dizemos que duas funções n -valuadas $\phi_0, \phi_1 : |K| \rightarrow |K|$ são ε -homotópicas se existe uma homotopia $H : |K| \times I \rightarrow |K|$ entre ϕ_0 e ϕ_1 tal que $\bar{d}(H_s, H_t) < \varepsilon$ quaisquer que sejam $s, t \in [0, 1]$.

Definição 3.4.4. Seja $\phi : X \rightarrow |K|$ uma função n -valuada. Definimos

$$\gamma(\phi) = \inf\{d(\gamma_j, \gamma_i) \mid \gamma_j, \gamma_i \in \phi(x), x \in X, \gamma_j \neq \gamma_i\}.$$

O lema a seguir, juntamente com o Teorema 3.4.1, será fundamental para estendermos a definição de índice para funções n -valuadas, sua demonstração pode ser encontrada em [30].

Lema 3.4.2. Seja $A \subset |K|$ um subconjunto fechado e $\phi : A \rightarrow |K|$ uma função n -valuada. Dado $0 < \varepsilon < \gamma(\phi)/2$, existe $0 < \delta \leq \varepsilon$ tal que toda função n -valuada $\psi : A \rightarrow |K|$ com $\bar{d}(\phi, \psi) < \delta$ é ε -homotópica a ϕ .

Chamaremos uma terna $(|K|, \phi, x)$ de *admissível* se $\phi : |K| \rightarrow |K|$ é uma função n -valuada em um poliedro compacto e U é um aberto de $|K|$ tal que $\text{Fix}(\phi) \cap \partial U = \emptyset$. Definiremos o índice $\text{Ind}(\phi, U)$ para uma terna admissível $(|K|, \phi, U)$. Suponhamos primeiro que $U \neq \emptyset$. Considere $\varepsilon' = \inf\{d(x, \phi(x)) \mid x \in \partial U\}$ e $\varepsilon = \min\{\varepsilon', \gamma(\phi)\} > 0$. Pelo Lema 3.4.2, para $\frac{\varepsilon}{2}$, existe $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$ tal que toda função n -valuada $\psi : A \rightarrow |K|$ com $\bar{d}(\phi, \psi) < \delta$ é $\frac{\varepsilon}{2}$ -homotópica a ϕ . Pelo Teorema 3.4.1, para $\frac{\delta}{2}$, existe $\phi' : |K| \rightarrow |K|$ função a n valores Fix-finita cujos pontos fixos estão contidos nos interiores de simplexos maximais de $|K|$ e $\bar{d}(\phi, \phi') < \frac{\delta}{2}$. Usando (3.10), para $x \in \partial U$, temos que

$$d(x, \phi'(x)) \geq d(x, \phi(x)) - d_H(\phi(x), \phi'(x)) \geq \varepsilon - \bar{d}(\phi, \phi') \geq \varepsilon - \frac{\delta}{2} > 0.$$

De modo que ϕ' não possui pontos fixos em ∂U . Logo, $\text{Ind}(\phi', U)$ está definido. Se ϕ_1 é uma outra função n -valuada satisfazendo as mesmas condições que ϕ' , como $\bar{d}(\phi', \phi) < \frac{\delta}{2}$ e $\bar{d}(\phi_1, \phi) < \frac{\delta}{2}$, temos que $\bar{d}(\phi', \phi_1) < \delta$ e, portanto, $\phi_0 = \phi'$ e ϕ_1 são $\frac{\varepsilon}{2}$ -homotópicas. Seja H tal homotopia. Para todo $(x, t) \in |K| \times I$, vale que

$$d_H(\phi(x), \phi_t(x)) \leq d_H(\phi(x), \phi'(x)) + d_H(\phi'(x), \phi_t(x)) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Diante disso, se $(x, t) \in \partial U \times I$, então

$$d(x, \phi_t(x)) \geq d(x, \phi(x)) - d_H(\phi(x), \phi_t(x)) \geq \varepsilon - \frac{3\varepsilon}{4} > 0,$$

de modo que $\text{Fix}(H) \cap (\partial U \times I) = \emptyset$ e, pelo Lema 3.4.1 vale que $\text{Ind}(\phi', U) = \text{Ind}(\phi_1, U)$. Nessas condições, temos a seguinte definição:

Definição 3.4.5. Para uma terna admissível $(|K|, \phi, U)$, em que $U \neq \emptyset$, definimos o *índice dos pontos fixos de ϕ em U* por

$$\text{Ind}(\phi, U) = \text{Ind}(\phi', U).$$

Se $U = \emptyset$, definimos simplesmente $\text{Ind}(\phi, \emptyset) = 0$.

A definição acima de índice de ponto fixo para uma função n -valuada satisfaz alguns dos axiomas de índice de pontos fixos para funções simples. São eles:

Teorema 3.4.2. (*Localização*) Sejam $(|K|, \phi, U)$ e $(|K|, \psi, U)$ duas ternas admissíveis e $\phi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in \bar{U}$. Então $\text{Ind}(\phi, U) = \text{Ind}(\psi, U)$.

Demonstração. Assumiremos que $U \neq \emptyset$. Sejam

$$\varepsilon' = \inf\{d(x, \phi(x)) \mid x \in \partial U\} = \inf\{d(x, \psi(x)) \mid x \in \partial U\}$$

e

$$\varepsilon'' = \min\{\varepsilon', \gamma(\phi), \gamma(\psi)\} > 0.$$

Pelo Lema 3.4.2, existe $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon''}{2}$ tal que quaisquer duas funções n -valuadas com domínio \bar{U} e contradomínio $|K|$ cuja distância é menor que δ são $\frac{\varepsilon''}{2}$ -homotópicas. Usando o Teorema 3.4.1, obtemos funções $\phi', \psi' : |K| \rightarrow |K|$ que são aproximações Fix-finitas de ϕ e de ψ satisfazendo

$$\bar{d}(\phi, \phi') < \frac{\delta}{2} \text{ e } \bar{d}(\psi, \psi') < \frac{\delta}{2}.$$

Assim, as restrições $\phi'|_{\bar{U}}$ e $\psi'|_{\bar{U}}$ são $\frac{\varepsilon}{2}$ -homotópicas. Seja $H' : \bar{U} \times I \rightarrow |K|$ tal homotopia. Então para todo $(x, t) \in \partial U \times I$

$$\begin{aligned} d(x, \phi'_t) &\geq d(x, \phi(x)) - d_H(\phi(x), \phi'(x)) - d_H(\phi'(x), \phi'_t(x)) \\ &\geq \varepsilon'' - \frac{\delta}{2} - \frac{\varepsilon''}{2} > 0, \end{aligned}$$

de modo que H' é livre de ponto fixo em $\partial U \times I$ e, pelo Lema 3.4.1, $\text{Ind}(\phi, U) = \text{Ind}(\psi, U)$. \square

Teorema 3.4.3. (*Aditividade*) Seja $(|K|, \phi, U)$ uma terna admissível e U_1, U_2, \dots, U_s abertos de U dois a dois disjuntos tais que ϕ não possui pontos fixos em $\bar{U} - \bigcup_{j=1}^s U_j$. Então

$$\text{Ind}(\phi, U) = \sum_{j=1}^s \text{Ind}(\phi, U_j).$$

Demonstração. Seleccionamos $0 < \eta \leq \gamma(\phi)$ tal que $d(x, \phi(x)) \geq \eta$ para todo $x \in \bar{U} - \bigcup_{j=1}^s U_j$ e escolhemos uma aproximação Fix-finita ϕ' de ϕ tal que $\text{Ind}(\phi, U) = \text{Ind}(\phi', U)$, de acordo com a Definição 3.4.5, e $\bar{d}(\phi, \phi') < \eta$. Então, usando a desigualdade (3.10), $x \in \bar{U} - \bigcup_{j=1}^s U_j$ implica que

$$d(x, \phi'(x)) \geq d(x, \phi(x)) - d_H(\phi(x), \phi'(x)) > 0,$$

e segue que

$$\text{Ind}(\phi, U) = \text{Ind}(\phi', U) = \sum_{j=1}^s \text{Ind}(\phi', U_j) = \sum_{j=1}^s \text{Ind}(\phi, U_j).$$

\square

Teorema 3.4.4. (*Homotopia*) Seja $H : |K| \times I \rightarrow |K|$ uma homotopia entre as funções n -valuadas ϕ_0 e ϕ_1 tal que $(|K|, \phi_t, U)$ é uma terna admissível para todo $t \in [0, 1]$. Então $\text{Ind}(\phi_0, U) = \text{Ind}(\phi_1, U)$.

Demonstração. Pela compacidade de I , é suficiente provar que para toda terna admissível $(|K|, \phi, U)$ existe $\delta > 0$ tal que se $(|K|, \psi, U)$ é admissível e $\bar{d}(\phi, \psi) < \delta$, então $\text{Ind}(\phi, U) = \text{Ind}(\psi, U)$. Tomamos, então, uma terna admissível $(|K|, \phi, U)$ e consideramos $\varepsilon' = \inf\{d(x, \phi(x)) \mid x \in \partial U\}$ e $\varepsilon = \min\{\varepsilon', \gamma(\phi)\} > 0$. Pelo Lema 3.4.2, existe $\delta > 0$ tal que quaisquer duas funções n -valuadas em $|K|$ com distância menor que δ são $\frac{\varepsilon}{4}$ -homotópicas. Se as aproximações Fix-finitas ϕ' e ψ' de ϕ e ψ são tais que $\text{Ind}(\phi, U) = \text{Ind}(\phi', U)$, $\text{Ind}(\psi, U) = \text{Ind}(\psi', U)$, como na Definição 3.4.5, e $\bar{d}(\phi, \phi') < \delta$

e $\bar{d}(\psi, \psi') < \delta$, então $\bar{d}(\phi, \psi) < \delta$ implica que ϕ' e ψ' são $\frac{3\varepsilon}{4}$ -homotópicas. Seja $H' : |K| \times I \rightarrow |K|$ tal homotopia. Para todo $(x, t) \in \partial U \times I$, usando a desigualdade (3.10) temos

$$d(x, \phi'_t(x)) \geq d(x, \phi'(x)) - d_H(\phi'(x), \phi'_t(x)) \geq \varepsilon - \frac{3\varepsilon}{4} > 0,$$

de modo que, usando o Teorema 3.4.1, obtemos

$$\text{Ind}(\phi, U) = \text{Ind}(\phi', U) = \text{Ind}(\psi, U) = \text{Ind}(\psi, U).$$

□

Os dois próximos corolários estendem para as funções n -valuadas resultados já conhecidos para funções simples.

Corolário 3.4.1. Se $(|K|, \phi, U)$ é uma terna admissível e $\text{Ind}(\phi, U) \neq 0$, então ϕ possui ao menos um ponto fixo em U .

Demonstração. Supondo que ϕ não possui pontos fixos em \bar{U} , vejamos que $\text{Ind}(\phi, U) = 0$. Se $U = \emptyset$, aplicando o axioma da aditividade (Teorema 3.4.3) aos abertos disjuntos $U = U_1 = U_2 = \emptyset$, temos

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\phi, \emptyset) &= \text{Ind}(\phi, \emptyset) + \text{Ind}(\phi, \emptyset) \\ &= 2 \cdot \text{Ind}(\phi, \emptyset). \end{aligned}$$

Logo, $\text{Ind}(\phi, \emptyset) = 0$. Agora, supondo $U \neq \emptyset$ e tomando $U_1 = \emptyset \subset U$. Como não há pontos fixos em $U - U_1 = U$, podemos aplicar o axioma da aditividade (Teorema 3.4.3) e, assim, obtemos

$$\text{Ind}(\phi, U) = \text{Ind}(\phi, \emptyset) = 0.$$

□

Corolário 3.4.2. Se $\phi : |K| \rightarrow |K|$ é uma função a n valores e $\text{Ind}(\phi, |K|) \neq 0$, então toda função a n valores $\psi : |K| \rightarrow |K|$ homotópica a ϕ possui ao menos um ponto fixo.

Com a definição de índice para funções a n valores em poliedros, somos capazes de dar os primeiros passos para desenvolver uma Teoria de Nielsen para tais multifunções.

Dada uma função a n valores $\phi : |K| \rightarrow |K|$ e um caminho $p : I \rightarrow |K|$, o Lema 3.1.2 nos garante que a composição $\phi \circ p$ é split e, pela Observação 3.2.1, existe um levantamento $\hat{\Phi}_p = (g_1, \dots, g_n) : I \rightarrow F_n(|K|)$ de $\phi \circ p$. Diante disso, podemos definir uma relação de equivalência em $\text{Fix}(\phi)$. Usaremos a notação $p \simeq p' \text{ rel}\{0, 1\}$ para denotar dois caminhos $p, p' : I \rightarrow |K|$ que são homotópicos com extremos fixos.

Definição 3.4.6. Dada uma função a n valores $\phi : |K| \rightarrow |K|$ e $x, x' \in \text{Fix}(\phi)$, dizemos que x e x' são ϕ -equivalentes se existe um caminho $p : I \rightarrow |K|$ e um levantamento $\hat{\Phi}_p = (g_1, \dots, g_n) : I \rightarrow F_n(|K|)$ de $\phi \circ p$ tais que, para algum $1 \leq j \leq n$, $p(0) = g_j(0) = x$, $p(1) = g_j(1) = x'$, e $p \simeq g_j \text{ rel}\{0, 1\}$.

Chamaremos as classes de equivalência definidas acima de *classes de ponto fixo de ϕ* . Note que se $n = 1$, isto é, se ϕ é uma função simples, a definição acima é análoga à feita no Capítulo 2 para se definir o número de Nielsen para uma função simples. O teorema abaixo garante que o número de classes de ponto fixo para cada função é finito, sua demonstração é técnica, envolvendo os mesmos argumentos que o caso particular $n = 1$ e pode ser encontrada em [30] consultando-se também [7].

Teorema 3.4.5. Seja $\phi : |K| \rightarrow |K|$ uma função a n valores. Então o número de classes de ponto fixo de ϕ é finito.

Pelo Teorema 3.4.5, dada F classe de ponto fixo de $\phi : |K| \rightarrow |K|$, podemos tomar um aberto $U \subset |K|$ tal que $(|K|, \phi|_U, U)$ é uma terna admissível e $\text{Fix}(\phi) \cap \bar{U} = F$. Diante disso, temos a seguinte definição:

Definição 3.4.7. O índice de uma classe de ponto fixo F é definido por

$$\text{Ind}(F) = \text{Ind}(\phi, U).$$

De fato, essa definição não depende do aberto U tomado. Suponhamos que U e V são abertos distintos que podem ser tomados na Definição 3.4.7. Se $x \in U \setminus (U \cap V)$, então $x \in U$ e $x \notin V$, de modo que $x \notin F$ e, pelo axioma de aditividade (Teorema 3.4.3) temos que $\text{Ind}(\phi, U) = \text{Ind}(\phi, U \cap V)$. De forma análoga, verificamos que $\text{Ind}(\phi, U \cap V) = \text{Ind}(\phi, V)$. Assim, o índice de uma classe de ponto fixo está bem definido.

Definição 3.4.8. Quando $\text{Ind}(F) \neq 0$ dizemos que F é uma classe de ponto fixo essencial. O número de Nielsen $N(\phi)$ da função a n valores $\phi : |K| \multimap |K|$ é definido como sendo o número de classes de ponto fixo essenciais de ϕ .

O seguinte teorema decorre da Definição anterior.

Teorema 3.4.6. Seja $\phi : |K| \multimap |K|$ uma função a n valores. Então ϕ possui ao menos $N(\phi)$ pontos fixos.

Para provar que o número de Nielsen de uma função a n valores é um invariante por homotopia iremos utilizar alguns lemas, mas, antes de enunciá-los e demonstrá-los, precisamos esclarecer as notações que serão usadas em breve.

Dada $H : |K| \times I \multimap |K|$ uma homotopia entre funções a n valores, a função a n valores $\tilde{H} : |K| \times I \rightarrow |K| \times I$ é definida por $\tilde{H}(x, t) = (\phi_t(x), t)$, e a t -fatia do conjunto $A \subset |K| \times [0, 1]$ é o subconjunto de $|K|$ definido por $A_t = \{x \in |K| \mid (x, t) \in A\}$.

Lema 3.4.3. Seja $\phi : |K| \multimap |K|$ uma função a n valores, $x, x' \in \text{Fix}(\phi)$ e $p, p' : I \rightarrow |K|$ dois caminhos homotópicos com extremos fixos tais que $p(0) = p'(0) = x$ e $p(1) = p'(1) = x'$. Se existe levantamento $\hat{\Phi}_p = (g_1, \dots, g_n)$ de $\phi \circ p$ tal que $g_1 \simeq p \text{ rel}\{0, 1\}$, então existe levantamento $\hat{\Phi}_{p'} = (g'_1, \dots, g'_n)$ de $\phi \circ p'$ tal que $g'_1 \simeq p' \text{ rel}\{0, 1\}$.

Demonstração. Seja $H : I \times I \rightarrow |K|$ uma homotopia tal que para todo $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= p(s), & H(s, 1) &= p'(s) \\ H(0, t) &= x, & H(1, t) &= x'. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1.2, a composição $\phi \circ H$ é split. Uma vez que $\phi \circ H(s, 0) = \phi \circ p(s)$, podemos supor que o levantamento $\hat{\Phi}_H = (f_1, \dots, f_n) : I \times I \rightarrow |K|$ de $\phi \circ H$ é tal que $f_j(s, 0) = g_j(s)$ para todo $s \in [0, 1]$ e $j = 1, \dots, n$, e definimos $g'_j : I \rightarrow |K|$ por $g'_j(s) = f_j(s, 1)$. Como, para todo $t \in [0, 1]$, temos

$$\begin{aligned} f_1(0, t) &= g_1(0) = g'_1(0) = x \\ f_1(1, t) &= g_1(1) = g'_1(1) = x' \end{aligned}$$

então f_1 é homotopia com extremos fixos entre os caminhos g_1 e g'_1 e, portanto, $g'_1 \simeq p' \text{ rel}\{0, 1\}$. \square

Lema 3.4.4. Seja $H : |K| \times I \multimap |K|$ uma homotopia entre funções a n valores e F uma classe de ponto fixo de \tilde{H} . Então, para cada $t \in [0, 1]$, vale que F_t é o conjunto vazio ou F_t é a única classe de ponto fixo de ϕ_t .

Demonstração. Dado $t \in [0, 1]$, é suficiente mostrar que dois pontos (x, t) e (y, t) são \tilde{H} -equivalentes se, e somente se, x e y são H_t -equivalentes. Começamos assumindo que (x, t) e (y, t) são dois pontos \tilde{H} -equivalentes. Desse modo, existe $p : I \rightarrow |K| \times I$ e um levantamento $\hat{\Phi}_p = (g_1, \dots, g_n)$ de $\phi \circ p$ tal $g_1(0) = p(0) = (x, t)$, $g_1(1) = p(1) = (y, t)$ e $g_1 \simeq p \text{ rel}\{0, 1\}$. Escrevemos $p(s) = (p'(s), p''(s))$ e consideramos o caminho $\bar{p} : I \rightarrow |K| \times I$ definido por $\bar{p}(s) = (p'(s), t)$. Note que

$$\begin{aligned} F : I \times I &\rightarrow |K| \times I \\ (s, h) &\mapsto (p'(s), h \cdot p''(s) + (1 - h)t) \end{aligned}$$

é uma homotopia entre os caminhos p e \bar{p} . Pelo Lema 3.4.3, existe levantamento $\widehat{\Phi}_{\bar{p}} = (g'_1, \dots, g'_n)$ de $\phi \circ \bar{p}$ tal que $g'_1 \simeq \bar{p} \text{ rel}\{0, 1\}$. Se $p_1 : |K| \times I \rightarrow |K|$ é a projeção na primeira coordenada, temos que $p_1(x, t) = x, p_1(y, t) = y$ e $p_1 \circ \bar{p} = p'$. Portanto, se definirmos $\bar{g}_j : I \rightarrow |K|$ por $\bar{g}_j(s) = p_1 \circ g'_j(s)$ para $j = 1, \dots, n$, então

$$\phi_t \circ p' = p_1 \circ \tilde{H} \circ \bar{p} = \{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n\}.$$

De modo que $(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n)$ é um levantamento de $\phi_t \circ p'$. Como $g'_1 \simeq \bar{p} \text{ rel}\{0, 1\}$ implica que $\bar{g}_1 \simeq p' \text{ rel}\{0, 1\}$, vale que x e y são t -equivalentes.

Suponhamos agora que x e y são H_t equivalentes. Assim, existe caminho $q : I \rightarrow |K|$ e um levantamento (h_1, \dots, h_n) de $\phi_t \circ q$ tal que $h_1(0) = q(0) = x, h_1(1) = q(1) = y$ e $h_1 \simeq q \text{ rel}\{0, 1\}$. Definimos um caminho $q' : I \rightarrow I \times |K|$ por $q'(s) = (q(s), t)$ e funções $h'_j : I \rightarrow |K| \times I$ por $h'_j(s) = (h_j(s), t)$ para $j = 1, \dots, n$. Então $\tilde{H} \circ q' = \{h'_1, \dots, h'_n\}$ e existe levantamento (h'_1, \dots, h'_n) de $\tilde{H} \circ q'$ tal que $h'_1 \simeq q' \text{ rel}\{0, 1\}$ e, portanto, (x, t) e (y, t) são \tilde{H} -equivalentes. □

Lema 3.4.5. Seja $H : |K| \times I \rightarrow |K|$ uma homotopia entre funções a n valores e F' uma classe de ponto fixo de ϕ_t , para um $t \in [0, 1]$ fixado. Então existe uma única classe de ponto fixo F de \tilde{H} tal que $F' = F_t$.

Demonstração. Se $x \in F'$, temos que $(x, t) \in \text{Fix}(\tilde{H})$. Seja $F \ni (x, t)$ classe de ponto fixo de \tilde{H} . Pelo Lema 3.4.4, temos que $F_t = F'$. □

Lema 3.4.6. Seja $H : |K| \times I \rightarrow |K|$ uma homotopia entre funções a n valores e F uma classe de ponto fixo de \tilde{H} . Então $\text{Ind}(F_0) = \text{Ind}(F_1)$.

Demonstração. Uma vez que I é compacto, é suficiente mostrar que para todo $r \in [0, 1]$ existe $\eta > 0$ tal que $s \in [0, 1]$ e $|r - s| < \eta$ implica em $\text{Ind}(F_r) = \text{Ind}(F_s)$.

Escolhemos um subconjunto aberto $U \subset |K| \times I$ tal que $F \subset U$ e $\bar{U} \cap \text{Fix}(\tilde{H}) = F$. Se $r \in [0, 1]$ então $F_r \subset U_r$ e $\bar{U}_r \cap \text{Fix}(\phi_r) = F_r$, daí $\text{Ind}(F_r) = \text{Ind}(\phi_r, U_r)$. O conjunto $A = p_1(F) - U_r$ é compacto e $A \cap \text{Fix}(\phi_r) = \emptyset$, de modo que podemos escolher $\xi > 0$ tal que $d(x, \phi_r(x)) > \xi$ para todo $x \in A$. Diante disso, H é uniformemente contínua em $A \times I$ e, portanto, existe $\eta > 0$ tal que se $|r - s| < \eta$ então $d_H(\phi_r(x), \phi_s(x)) < \xi$ para todo $x \in A$, e, usando a desigualdade (3.10), temos

$$d(x, \phi_s(x)) \geq d(x, \phi_r(x)) - d_H(\phi_r(x), \phi_s(x)) > 0.$$

Logo $A \cap \text{Fix}(\phi_s) = \emptyset$. Como $F_s \subset p_1(F)$ e $F_s \cap A = \emptyset$, temos $F_s \subset U_r$. Temos ainda que $\bar{U} \cap \text{Fix}(\tilde{H}) = F$, de modo que $\bar{U}_r \cap \text{Fix}(\phi_s) = F_s$ e $\text{Ind}(F_s) = \text{Ind}(\phi_s, U_r)$. Definimos agora a homotopia $H^{r,s} : |K| \times I \rightarrow |K|$ entre ϕ_r e ϕ_s por $H^{r,s}(x, t) = (H(x, (1-t)r + ts))$. Portanto, $\text{Fix}(H^{r,s}) \cap \partial U_r = \emptyset$ para todo $t \in [0, 1]$, e, assim, segue do axioma de homotopia (Teorema 3.4.4) que

$$\text{Ind}(F_r) = \text{Ind}(\phi, U_r) = \text{Ind}(\phi_s, U_r) = \text{Ind}(F_s)$$

□

Temos então o resultado que garante a invariância do número de Nielsen aqui definido.

Teorema 3.4.7. Seja $H : |K| \times I \rightarrow |K|$ um homotopia entre as funções a n valores ϕ_0 e ϕ_1 . Então $N(\phi_0) = N(\phi_1)$.

Demonstração. Pelo Lema 3.4.5, cada classe de ponto fixo de ϕ_0 é a 0-fatia de uma classe de ponto fixo F de \tilde{H} . Pelo Lema 3.4.6, temos que $\text{Ind}(F_0) = \text{Ind}(F_1)$, de modo que F_0 é essencial se F_1 é essencial e $N(\phi_0) \leq N(\phi_1)$. Analogamente, cada classe de ponto fixo de ϕ_1 é a 1-fatia de uma classe de ponto fixo F' de \tilde{H} , de modo que $\text{Ind}(F'_1) = \text{Ind}(F'_0)$ e $N(\phi_1) \leq N(\phi_0)$. O que conclui a demonstração. □

Para finalizar esta seção, trazemos um resultado que nos dá alguns corolários que ilustram o cálculo do número de Nielsen para algumas funções especiais. Dizemos que a função simples $f : X \rightarrow Y$ é uma *seleção* da multifunção $\phi : X \multimap Y$ se $f(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in X$. Uma função n -valuada que possui a função identidade como seleção é chamada de *identidade n -valuada*.

Teorema 3.4.8. Se a função a n valores $\phi : |K| \multimap |K|$ possui uma seleção f , então $N(\phi) = N(f) + N(\psi)$, sendo $\psi : |K| \multimap |K|$ a função a $(n - 1)$ valores definida por $\psi(x) = \phi(x) - \{f(x)\}$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Temos que ψ assume $n - 1$ valores no contradomínio, além disso, vale sua multi-continuidade. Note que $\text{Fix}(\phi)$ é a união disjunta de $\text{Fix}(f)$ e $\text{Fix}(\psi)$. Vejamos quais as relações entre ϕ -, f - e ψ - equivalência: Sejam $x, x' \in \text{Fix}(\phi)$ e $p : I \rightarrow |K|$ um caminho tal que $p(0) = x$ e $p(1) = x'$. Pelo Lema 3.1.2 e pela Observação 3.2.1, temos os levantamentos

$$\widehat{\Phi}_p = (g_1, \dots, g_n) \text{ e } \widehat{\Psi}_p = (g_1, \dots, g_{n-1})$$

de $\phi \circ p$ e $\psi \circ p$, respectivamente. Se $x, x' \in \text{Fix}(f)$ e x, x' são ϕ -equivalentes, então $f \circ p(0) = x$ implica que $g_j(0) \neq x$ para $j = 1, \dots, n - 1$, de modo que g_j e p não podem ser caminhos homotópicos com extremos fixados e, portanto, $g_j \simeq p \text{ rel}\{0, 1\}$, isto é, x e x' são f -equivalentes. Como a f -equivalência de x e de x' implica na ϕ -equivalência, temos que x e x' são f -equivalentes se, e somente se, são ϕ -equivalentes. Analogamente, podemos provar que x e x' são ϕ -equivalentes se, e somente se, são ψ -equivalentes. Se $x \in \text{Fix}(f)$ e $x' \in \text{Fix}(\psi)$, então $f \circ p(1) \neq x'$ e $g_j(0) \neq x$ para $j = 1, \dots, n - 1$ e, portanto, x e x' não podem ser ϕ -equivalentes. Diante disso, o conjunto das classes de ponto fixo de ϕ é a união disjunta dos conjuntos das classes de ponto fixo de f e de ψ . Resta mostrar que uma classe de ponto de ϕ é essencial se, e somente se, ela é uma classe de ponto fixo essencial de f ou de ψ . Primeiro assumimos que F é uma classe de ponto fixo de ϕ tal que $F \subset \text{Fix}(f)$ e tomamos U um aberto tal que $F \subset U$ e $\text{Fix}(\phi) \cap \overline{U} = F$. Então $\text{Fix}(\psi) \cap \overline{U} = \emptyset$ e, portanto, $d(x, \psi(x)) \geq \xi$ para todo $x \in \overline{U}$ e algum $\xi > 0$. Seja $\delta > 0$ obtido como na construção feita para a definição de índice numa terna admissível (Definição 3.4.5), e f' e ψ' as Fix-finitas aproximações de f e ψ obtidas pelo Teorema 3.4.1 tais que $\bar{d}(f, f') < \eta$ e $\bar{d}(\psi, \psi') < \eta$, sendo $\eta = \min\{\frac{\delta}{2}, \xi, \frac{\gamma(\phi)}{2}\}$. Então a multifunção ϕ' dada por $\phi'(x) = \{f'(x) \cup \psi'(x)\}$ para todo $x \in |K|$ é uma função a n valores e é uma aproximação Fix-finita de ϕ . Como $\text{Fix}(\psi') \cap \overline{U} = \emptyset$, segue que

$$\text{Ind}(F) = \text{Ind}(\phi, U) = \text{Ind}(\phi', U) = \text{Ind}(f', U) = \text{Ind}(f, U),$$

de modo que F é uma classe de ponto fixo essencial de ϕ se, e somente se, é uma classe de ponto fixo essencial de f . A prova para o caso em que $F \subset \text{Fix}(\psi)$ é análoga e por isso será omitida. \square

O corolário a seguir, que nos fornece uma fórmula para o Número de Nielsen de uma função a n valores, é uma forte ferramenta a ser utilizada nos capítulos finais desta dissertação. Em [16] encontramos uma fórmula análoga para o caso em que ϕ não é split e está definida em uma variedade compacta, orientável e sem bordo.

Corolário 3.4.3. Seja $\phi : |K| \multimap |K|$ uma função split que possui levantamento $\widehat{\Phi} = (f_1, \dots, f_n)$. Então

$$N(\phi) = \sum_{j=1}^n N(f_j). \quad (3.11)$$

Demonstração. Como $\phi = \{f_1, \dots, f_n\}$, cada f_i é uma seleção de ϕ . Assim, ao aplicar o Teorema 3.4.8 n vezes, de forma indutiva, obtemos a expressão (3.11). \square

Finalizamos este capítulo com mais dois corolários do Teorema 3.4.8.

Corolário 3.4.4. Se $\phi : |K| \multimap |K|$ é uma função a n valores constantes, isto é, tal que $\phi(x) = \phi(y)$ quaisquer que sejam $x, y \in |K|$, então $N(\phi) = n$.

Demonstração. Sejam $x_1, \dots, x_n \in |K|$ tais que $\phi(x) = \{x_1, \dots, x_n\}$ para todo $x \in |K|$. Temos que $\widehat{\Phi} = (c_{x_1}, \dots, c_{x_n})$ é um levantamento de ϕ , sendo $c_{x_i} : |K| \rightarrow |K|$ a aplicação constante em x_i , para $i = 1, \dots, n$. Pela Observação 2.1.1, temos que $N(c_{x_i}) = 1$ e, portanto, segue do Corolário 3.4.3 que $N(\phi) = n$. \square

Corolário 3.4.5. Se $\phi : |K| \multimap |K|$ é uma identidade n -valuada, então $N(\phi) = 0$ se $\chi(K) = 0$ e $N(\phi) = 1$ se $\chi(K) \neq 0$, sendo $\chi(K)$ a característica de Euler de K .

Demonstração. Suponha que $\phi(x) = \{x, a_1^x, \dots, a_{n-1}^x\}$ para todo $x \in |K|$. Considere $\phi' : |K| \multimap |K|$ função a $(n-1)$ -valores definida por $\phi'(x) = \{a_1^x, \dots, a_{n-1}^x\}$. Note que ϕ' não possui pontos fixos, logo $N(\phi') = 0$. Pelo Teorema 3.4.8, temos que

$$N(\phi) = N(Id_K) + N(\phi') = N(Id_K).$$

Como Id_K induz o homomorfismo identidade nos grupos de homologia, o Corolário 2.2.1 nos diz que

$$I(Id_K) = \chi(X).$$

Assim, a classe $X = \text{Fix}(Id_K)$ é essencial se $\chi(K) \neq 0$, o que implica em $N(\phi) = 1$, e é não essencial se $\chi(K) = 0$, o que implica em $N(\phi) = 0$. \square

Capítulo 4

Propriedade de Wecken para funções n -valuadas na esfera

Neste capítulo iremos mostrar que a esfera \mathbb{S}^2 é Wecken para funções n -valuadas. Em [16], foram apresentados resultados nesse sentido para funções n -valuadas quando $n \geq 3$ e para alguns tipos de funções 2-valuadas. Em [9], foram apresentados resultados completos e independentes que provam que a propriedade de Wecken é válida para todas as funções n -valuadas na esfera. Aqui tentamos mesclar as duas técnicas para provar a propriedade. Na primeira seção provamos a propriedade para as funções a n valores com $n \geq 3$ e na segunda seção provamos a propriedade para as funções a 2 valores.

4.1 O caso $n \geq 3$

O primeiro resultado desta seção pode ser encontrado em [13] como um Corolário. Este resultado nos ajudará a classificar as classes de homotopia livre das funções n -valuadas na esfera.

Lema 4.1.1. $\pi_2(F_n(\mathbb{S}^2))$ é trivial se $n \geq 3$.

Lema 4.1.2. Se $n \geq 3$, então o conjunto de classes de homotopia de funções n -valuadas em \mathbb{S}^2 possui um único elemento.

Demonstração. Pelo Corolário 3.2.1, é suficiente determinar o número de elementos do conjunto $[\mathbb{S}^2, D_n(\mathbb{S}^2)]$. Lembramos que $[\mathbb{S}^2, D_n(\mathbb{S}^2)]$ pode ser obtido como espaço das órbitas de $[\mathbb{S}^2, D_n(\mathbb{S}^2)]_0 \cong \pi_2(D_n(\mathbb{S}^2))$ pela ação de $\pi_1(D_n(\mathbb{S}^2))$. Pelo Lema 4.1.1, vale que

$$\pi_2(D_n(\mathbb{S}^2)) \cong \pi_2(F_n(\mathbb{S}^2)) \cong 1.$$

Assim, $[\mathbb{S}^2, D_n(\mathbb{S}^2)]$ possui um único elemento, sendo este a classe de homotopia da aplicação constante. □

Graças a essa classificação, a propriedade de Wecken para funções n -valuadas na esfera, sendo $n \geq 3$, se resume à propriedade para funções a n valores constantes.

Teorema 4.1.1. Se $n \geq 3$, então toda função n -valuada em \mathbb{S}^2 possui a propriedade de Wecken.

Demonstração. Seja $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma função n -valuada, em que $n \geq 3$. Pelo Lema 4.1.2, ϕ é homotópica a uma função a n valores constantes ψ . Assim, pelo Corolário 3.4.4, vale que $N(\phi) = N(\psi) = n$. Como $\text{Fix}(\psi) = \psi(x)$, para $x \in \mathbb{S}^2$ qualquer, e $|\psi(x)| = n$, concluímos que vale a propriedade de Wecken para ϕ . □

4.2 O caso $n = 2$

O caso das funções a 2 valores na esfera precisa de uma análise mais cautelosa. Sendo \mathbb{S}^2 um espaço simplesmente conexo, pelo Lema 3.1.2, temos que toda função n -valuda na esfera é split. Assim, se $\phi : \mathbb{S}^2 \multimap \mathbb{S}^2$ é uma função a 2 valores na esfera, existem $f_0, f_1 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tais que $\phi = \{f_0, f_1\}$. Analisando as relações entre os graus de f_0 e f_1 , obtemos o seguinte resultado:

Lema 4.2.1. Se $\phi = \{f_0, f_1\} : \mathbb{S}^2 \multimap \mathbb{S}^2$ é uma função a 2 valores, então $\deg(f_0) = -\deg(f_1)$.

Demonstração. Como $f_0(x) \neq f_1(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$, podemos considerar o menor arco em \mathbb{S}^2 que conecta $f_0(x)$ e $-f_1(x)$. Seja $\alpha_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$ o caminho com velocidade constante que tem como imagem o arco conectando $f_0(x)$ a $-f_1(x)$. Consideramos a homotopia

$$\begin{aligned} H : \mathbb{S}^2 \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (x, t) &\longmapsto \alpha_x(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

entre f_0 e $-f_1$. Daí, $\deg(f_0) = \deg(-f_1) = -\deg(f_1)$. □

O Lema 4.2.1 nos permite fazer a seguinte definição:

Definição 4.2.1. Se $\phi = \{f_0, f_1\} : \mathbb{S}^2 \multimap \mathbb{S}^2$ é uma função 2-valuada e $\deg(f_0) = d$, definimos o grau de ϕ como sendo o inteiro não negativo $\deg(\phi) = |d|$.

Para classificar as classes de homotopia livre das funções a 2 valores na esfera, precisamos do seguinte lema técnico:

Lema 4.2.2. A aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^2 &\longrightarrow F_2(\mathbb{S}^2) \\ x &\longmapsto (x, -x), \end{aligned}$$

é uma equivalência de homotopia.

Demonstração. Considerando

$$\begin{aligned} g : F_2(\mathbb{S}^2) &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_1, \end{aligned}$$

temos que $g \circ f = Id_{\mathbb{S}^2}$. Como

$$f \circ g(x_1, x_2) = (x_1, -x_1)$$

em que $x_1 \neq x_2$, podemos considerar o menor arco em \mathbb{S}^2 que liga os pontos $-x_1$ e x_2 . Denotando por α_{x_1} o caminho com velocidade constante que tem como imagem o arco conectando $-x_1$ a x_2 , temos que

$$\begin{aligned} H : F_2(\mathbb{S}^2) \times [0, 1] &\longrightarrow F_2(\mathbb{S}^2) \\ ((x_1, x_2), t) &\longmapsto ((x_1, \alpha_{x_1}(t))), \end{aligned}$$

é uma homotopia entre $f \circ g$ e $Id_{F_2(\mathbb{S}^2)}$. □

Proposição 4.2.1. Sejam $\phi, \psi : \mathbb{S}^2 \multimap \mathbb{S}^2$ funções a 2 valores. Então ϕ e ψ são homotópicas se, e somente se, $\deg(\phi) = \deg(\psi)$.

Demonstração. Pelo Corolário 3.2.1, podemos considerar o conjunto das classes de homotopia das funções 2-valuadas em \mathbb{S}^2 como sendo $[\mathbb{S}^2, D_2(\mathbb{S}^2)]$. Pelo Lema 4.2.2, temos que a aplicação f lá definida é uma equivalência de homotopia. Como f satisfaz

$$\pi \circ f(x) = \pi \circ f(-x),$$

sendo $\pi : F_2(\mathbb{S}^2) \rightarrow D_2(\mathbb{S}^2)$ recobrimento, existe uma equivalência de homotopia induzida entre os espaços $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ e $D_2(\mathbb{S}^2)$. Portanto, $[\mathbb{S}^2, D_2(\mathbb{S}^2)]$ está em bijeção com $[\mathbb{S}^2, \mathbb{R}\mathbb{P}^2]$. Dada uma aplicação contínua $a : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2$, existem dois levantamentos $\tilde{a}, -\tilde{a} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ de a . Suponha que $H : \mathbb{S}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ é uma homotopia que satisfaz $H(\cdot, 0) = a$ e $H(\cdot, 1) = b$, em que $b : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ possui levantamentos $\tilde{b}, -\tilde{b} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Se $\tilde{H} : \mathbb{S}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$ é um levantamento de H tal que $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{a}$, então $\tilde{H}(\cdot, 1) = \tilde{b}$ ou $\tilde{H}(\cdot, 1) = -\tilde{b}$. Como as classes de homotopia de funções simples na esfera são determinadas pelo grau, temos que $\deg(\tilde{a}) = \deg(\tilde{b})$ ou $\deg(\tilde{a}) = \deg(-\tilde{b}) = -\deg(\tilde{b})$. Assim, a classe de homotopia de a é determinada pelo número natural

$$|\deg(\tilde{a})| = |\deg(-\tilde{a})|.$$

□

Uma vez que a classe de homotopia de uma função 2-valuada é determinada pelo seu grau, para verificar que a propriedade de Wecken vale para as funções 2-valuadas em \mathbb{S}^2 , é suficiente exibir, para cada $d \in \mathbb{Z}$, uma função 2-valuada $\phi_d : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ de grau $|d|$ possuindo $N(\phi_d)$ pontos fixos.

Observação 4.2.1. Se $\phi = \{f_0, f_1\} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma função 2-valuada de grau 1, sem perda de generalidade, podemos supor que $\deg(f_0) = 1$ e $\deg(f_1) = -1$. Assim, a relação estabelecida em (2.4), nos diz que $N(f_0) = 1$ e $N(f_1) = 0$. Usando o Corolário 3.4.3, obtemos $N(\phi) = 1$. Por outro lado, se o grau de ϕ for $|d| \neq 1$, sem perda de generalidade, podemos supor que $\deg(f_0) = d \neq -1$ e $\deg(f_1) = -d \neq -1$ e, pela relação estabelecida em (2.4), obtemos $N(f_0) = 1 = N(f_1)$, o que implica em $N(\phi) = 2$.

Proposição 4.2.2. Se $d \in \{-1, 0, 1\}$, então existe função 2-valuada $\phi = \{f_0, f_1\} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ de grau $|d|$ com exatamente $N(\phi)$ pontos fixos.

Demonstração. Se $d = 0$, pela Observação 4.2.1, precisamos exibir uma função 2-valuada de grau 0 com dois pontos fixos. Considere $\phi_0 = \{f_S, f_N\}$, em que $f_S : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é a aplicação constante no polo sul, denotado por S , e $f_N : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é a aplicação constante no polo norte, denotado por N . Vale que $\deg(f_S) = \deg(f_N) = 0$, logo $\deg(\phi_0) = 0$. Como $\text{Fix}(\phi) = \{S, N\}$, ϕ_0 é aplicação desejada.

Se $|d| = 1$, pela Observação 4.2.1, precisamos exibir uma função 2-valuada de grau 1 com um único ponto fixo. Considere $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ como sendo uma deformação da identidade em \mathbb{S}^2 que satisfaz $|f(x) - x| < \pi/2$ e que possui um único ponto fixo. Tal função pode ser construída a partir de um campo de vetores na esfera com um único ponto de singularidade, como ilustrado pela Figura 4.1. Como $|f(x) - x| < \pi/2$, temos que $f(x) \neq -x$ e, portanto, $-f(x) \neq x$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$.

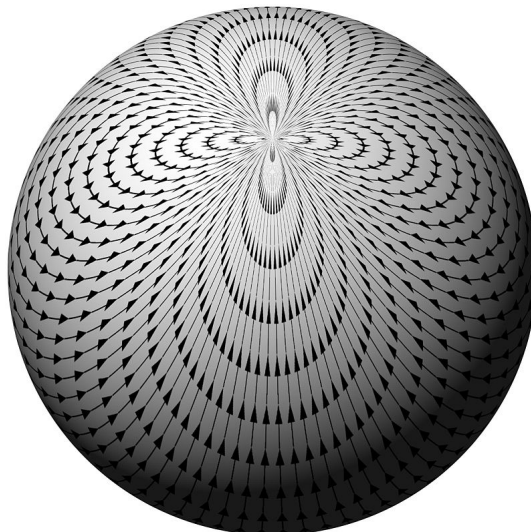


Figura 4.1: Campo de vetores na esfera com um único ponto de singularidade.

Assim, $-f$ não possui pontos fixos. Como f é uma deformação da identidade, vale que $\deg(f) = 1$ e, portanto, $\deg(-f) = -1$. Considerando $\phi_1 = \{f, -f\}$, temos a função 2-valuada desejada. \square

Para demonstrar a próxima proposição, iremos utilizar os conceitos estudados na Seção 1.6 para construir funções 2-valuadas de grau $|d| \geq 2$ com dois pontos fixos.

Proposição 4.2.3. Para cada inteiro d satisfazendo $|d| \geq 2$, existe função a 2 valores $\phi_d = \{f_0, f_1\}$ tal que $\deg(\phi_d) = |d|$ e ϕ_d possui exatamente $N(\phi_d) = 2$ pontos fixos.

Demonstração. Começamos por considerar o fibrado trivial $(S(NS^2 \oplus TS^2), \bar{p}, S^2)$ construído na Seção 1.6. Dada uma seção

$$s : S^2 \longrightarrow S(NS^2 \oplus TS^2),$$

podemos associá-la a uma função $f_s : S^2 \longrightarrow S^2$, uma vez que este fibrado é trivial. Observe que a seção constante

$$s_{(1, \mathbf{0})} : S^2 \longrightarrow NS^2 \oplus TS^2 \\ x \longmapsto (x, (1, \mathbf{0})),$$

sendo $\mathbf{0} \in T_x$ o vetor nulo, é associada à aplicação identidade Id_{S^2} , uma vez que $u(x, (1, \mathbf{0})) = (x, 1 \cdot x + \mathbf{0}) = (x, x)$, como definido em (1.16).

Para os próximos passos, cada ponto $x \in S^2$ será escrito como $x = (t, v')$, sendo $-1 \leq t \leq 1$ e $v' = (1 - t^2)^{1/2}v$ tal que $v \in S^1 = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Dessa forma, estamos descrevendo cada ponto da esfera pela soma $v_1 + v_2$, em que v_1 é um múltiplo do vetor $(0, 0, 1)$ e v_2 é perpendicular ao vetor $(0, 0, 1)$ (a Figura 4.2 ilustra essa descrição). Note que essa descrição é única.

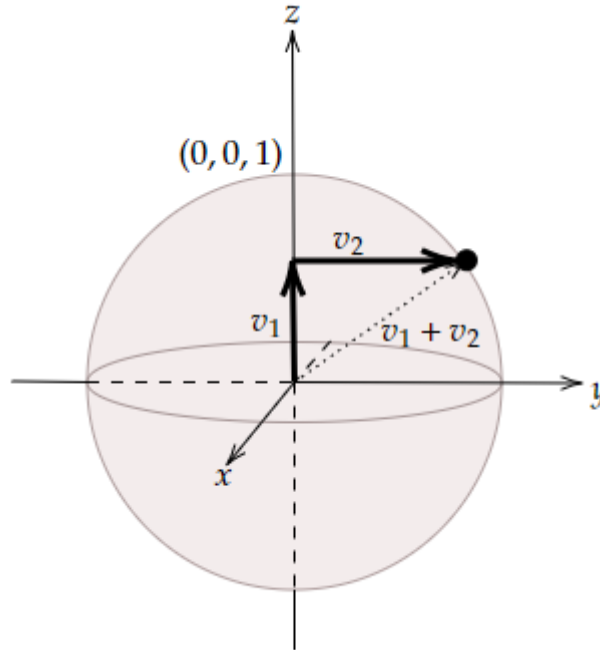


Figura 4.2: Em destaque na esfera um ponto que pode ser descrito como $v_1 + v_2$.

De acordo com esta notação, definimos o hemisfério norte de S^2 por

$$S_+ = \{(t, v') \in S^2 \mid t \geq 0\}$$

e o hemisfério sul por

$$S_- = \{(t, v') \in S^2 \mid t \leq 0\}.$$

Para definir as seções s_0 e s_1 tais que $f_{s_0} = f_0$ e $f_{s_1} = f_1$, precisaremos de trivializações

$$\theta_+ : p^{-1}(S_+) \longrightarrow S_+ \times \mathbb{R}^2$$

e

$$\theta_- : p^{-1}(S_-) \longrightarrow S_- \times \mathbb{R}^2$$

tais que quando consideramos o espaço \mathbb{R}^2 como subespaços de \mathbb{R}^3 gerado por $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0)$, temos que θ_+ preserva a base no polo norte $(1, \mathbf{0})$ e θ_- preserva a base no polo sul $(-1, \mathbf{0})$. Essas trivializações nos fornecem bases (no sentido de espaço vetorial) para cada fibra T_x . A Figura 4.3 ilustra um exemplo de par (θ_+, θ_-) .

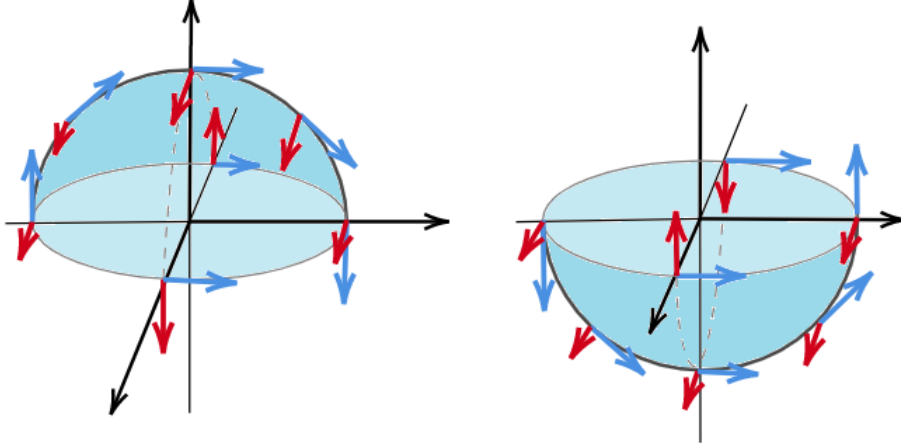


Figura 4.3: Vetores em vermelho representam o gerador e_1 e vetores em azul representam o gerador e_2 .

Seja $\kappa : \mathbb{S}^1 \longrightarrow O(\mathbb{R}^2)$ o mapa de transição que satisfaz

$$\kappa(v)\theta_+(x)v = \theta_-(x)v$$

para $v \in \mathbb{S}^1$, onde $O(\mathbb{R}^2) \subset GL_2(\mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes 2×2 com determinante ± 1 . Seja ainda $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $\deg(g) = d + 1$, isto é, g dá $d + 1$ voltas e torno da origem de \mathbb{R}^2 . Definimos s_0 e s_1 da seguinte forma: para $v' \in \mathbb{S}^1$, $0 \leq t \leq 1$ e $x = (t, (1 - t^2)^{1/2}v)$, temos

$$(1 \oplus \theta_+(x)) \circ p_2 \circ s_0(t, (1 - t^2)^{1/2}v) = (t, (1 - t^2)^{1/2}g(v))$$

$$(1 \oplus \theta_+(x)) \circ p_2 \circ s_1(t, (1 - t^2)^{1/2}v) = (-t, -(1 - t^2)^{1/2}g(v))$$

e para $-1 \leq t \leq 0$, temos

$$(1 \oplus \theta_-(x)) \circ p_2 \circ s_0(t, (1 - t^2)^{1/2}v) = (t, (1 - t^2)^{1/2}\kappa(v)g(v))$$

$$(1 \oplus \theta_-(x)) \circ p_2 \circ s_1(t, (1 - t^2)^{1/2}v) = (-t, -(1 - t^2)^{1/2}\kappa(v)g(v)),$$

sendo $p_2(x, (r, w)) = (r, w)$. Note que $s_0(x) = s_1(x)$ se, e somente se,

$$(t, (1 - t^2)^{1/2}g(v)) = (-t, -(1 - t^2)^{1/2}g(v))$$

ou

$$(t, (1 - t^2)^{1/2}\kappa(v)g(v)) = (-t, -(1 - t^2)^{1/2}\kappa(v)g(v)),$$

de modo que $s_0(x) \neq s_1(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$. Além disso,

$$s_0(x) = (x, (1, \mathbf{0})) \iff x = (1, \mathbf{0})$$

e

$$s_1(x) = (x, (-1, \mathbf{0})) \iff x = (-1, \mathbf{0}).$$

Portanto, o polo norte $(1, \mathbf{0})$ é o único ponto fixo de f_{s_0} e o polo sul é o único ponto fixo de f_{s_1} .

Em uma vizinhança tão pequena quanto se queira de $(1, \mathbf{0})$, a trivialização θ_+ provoca um sutil deformação nas imagens de e_1 e e_2 . Assim, nessa vizinhança, a função f_{s_0} pode ser descrita em certas coordenadas pela aplicação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 que leva $r \cdot v$, sendo $r \geq 0$ e $v \in \mathbb{S}^1$, para $r \cdot v + r \cdot g(v)$, de modo que seu único ponto fixo é $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$. Portanto, o índice de f_{s_0} é igual ao grau da aplicação $-g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ que coincide com o grau de g , isto é,

$$\deg(-g) = \deg(g) = d + 1.$$

Usando o Teorema 2.2.2 e a relação (2.3), obtemos

$$L(f_{s_0}) = I(f_{s_0}) = 1 + \deg(g) \implies \deg(f_{s_0}) = d$$

e, por consequência,

$$\deg(f_{s_1}) = -d,$$

pelo Lema 4.2.1. Assim, as funções $f_0 = f_{s_0}$ e $f_1 = f_{s_1}$ são tais que $\phi_d = \{f_0, f_1\}$ possui grau $|d|$ e dois pontos fixos.

□

Diante da discussão feita neste capítulo está provado o seguinte resultado:

Teorema 4.2.1. A esfera \mathbb{S}^2 é Wecken para funções n -valuadas, isto é, toda função n -valuada $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é homotópica a uma função n -valuada possuindo $N(\phi)$ pontos fixos.

Capítulo 5

Pontos fixos de funções a 2 valores split no toro

Na Seção 3.3 vimos alguns resultados que nos permitem analisar se uma função n -valuada se deforma livre de pontos fixos ou livre de raízes estudando os grupos fundamentais dos espaços de configuração em que ela está definida. Neste capítulo aplicaremos tais resultados no caso das funções a 2 valores split no Toro.

5.1 Os grupos $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$, $P_2(\mathbb{T}^2)$ e $B_2(\mathbb{T}^2)$

A princípio, o item (b) do Teorema 3.3.2 poderia ser usado para obter exemplos de funções a 2 valores split no toro que se deformam livres de pontos fixos, porém o que faremos é utilizar a relação entre raízes e pontos fixos e o item (b) do Teorema 3.3.3 para obter tais exemplos. Diante disso, ao invés de estudarmos os grupos $P_3(\mathbb{T}^2)$ e $\pi_1(\mathbb{T}^2) \times P_2(\mathbb{T}^2)$ (utilizados no Teorema 3.3.2) iremos estudar os grupos $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ e $P_2(\mathbb{T}^2)$ (utilizados do Teorema 3.3.3). Para caracterizar as funções a 2 valores no toro precisaremos ainda estudar o grupo $B_2(\mathbb{T}^2)$. Assim, dedicaremos a primeira seção deste capítulo ao estudo destes três grupos. Encontraremos apresentações algébricas destes grupos que estarão relacionadas entre si, o que facilitará a aplicação do Teorema 3.3.3. Para obter estas apresentações algébricas, estudaremos as tranças geométricas com duas cordas em \mathbb{T}^2 e em $\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}$. Este estudo geométrico será feito no disco com duas alças, espaço que foi introduzido na seção 1.1, obtido ao se retirar um disco do toro.

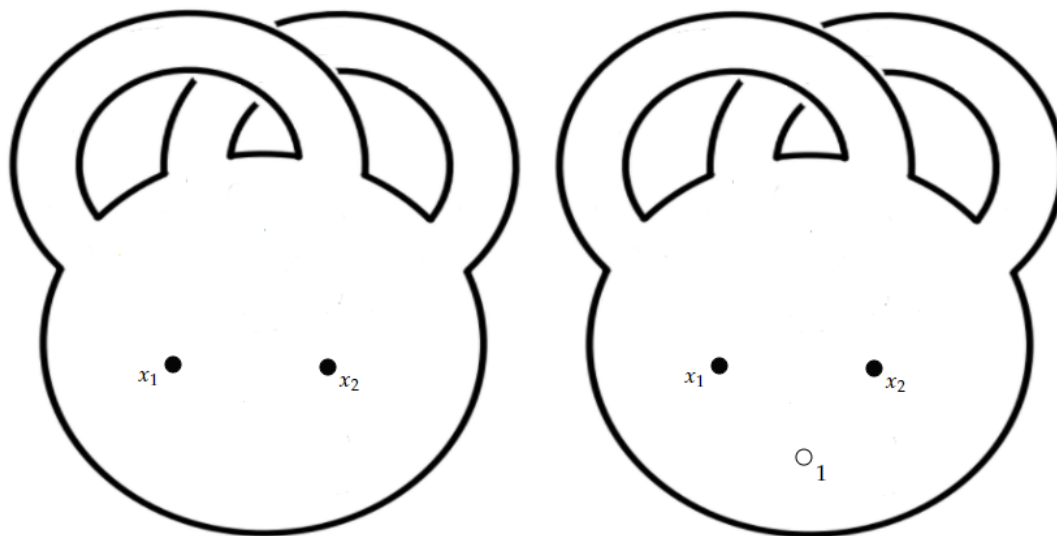


Figura 5.1

Como iremos estudar apenas os grupos $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$, $P_2(\mathbb{T}^2)$ e $B_2(\mathbb{T}^2)$, iremos considerar $\mathbb{T}^2 \setminus D^2$ com dois pontos base x_1 e x_2 . Para o estudo de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$ é necessário ainda considerar $\mathbb{T}^2 \setminus D^2$ retirando-se o ponto 1, sendo que $\overline{D^2} \cap \{1\} = \emptyset$. A Figura 5.1 ilustra os espaços que usaremos.

Os laços (respectivamente caminhos) com ponto base (respectivamente ponto inicial) x_1 ilustrarão o comportamento da primeira corda e os laços (respectivamente caminhos) com ponto base (respectivamente ponto inicial) x_2 ilustrarão o comportamento da segunda corda.

Observe que ao identificar por um ponto o bordo do primeiro (respectivamente do segundo) espaço na Figura 5.1 obtemos o Toro (respectivamente o Toro menos o ponto 1). Desse modo, se α é um laço com ponto base em x_i , para $i = 1, 2$, e existem: um caminho γ que liga x_i a um ponto no bordo da figura, e um laço $\tilde{\alpha}$ com imagem completamente contida no bordo da figura tais que os caminhos $\gamma\tilde{\alpha}\gamma^{-1}$ e α são homotópicos, então o laço α é trivial em \mathbb{T}^2 .

No que se segue, para u e v elementos de um grupo G , denotaremos o *comutador* $uvu^{-1}v^{-1}$ de u e v por $[u, v]$ e o *subgrupo comutador* de G por $\Gamma_2(G)$. Se A é um subgrupo de G , então $\langle\langle A \rangle\rangle_G$ denotará o fecho normal de A em G e $\langle A \rangle$ denotará o subconjunto gerado por A .

5.1.1 O grupo $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$

Começamos o estudo de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ visualizando geometricamente certos elementos de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$, isto é, tranças com duas cordas em $\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}$, na Figura 5.2. Note que as tranças $\rho_{11}, \rho_{12}, B_{12}$ e \bar{B} possuem a segunda corda constante e as tranças ρ_{21}, ρ_{22} e B' possuem a primeira corda constante.

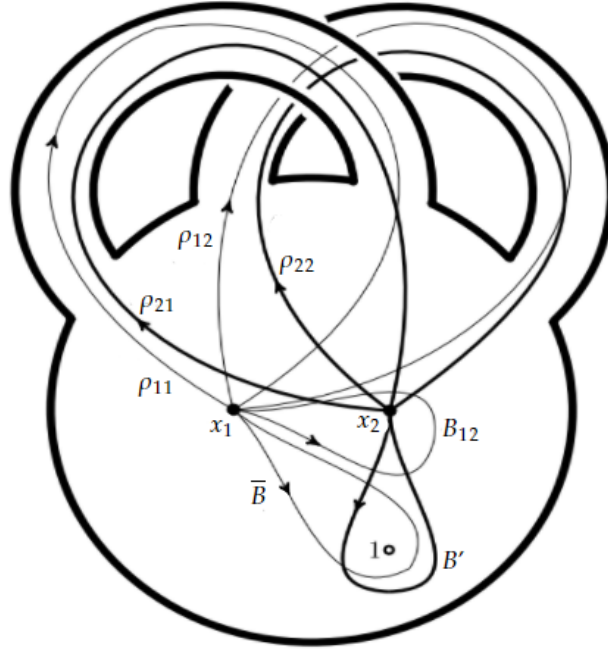


Figura 5.2

Veremos adiante que tais elementos formam um conjunto gerador de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$. Considerando a projeção

$$\begin{aligned} p_2 : F_{1,2}(\mathbb{T}^2) &\longrightarrow F_{1,1}(\mathbb{T}^2) \\ (y_1, y_2) &\longmapsto y_2 \end{aligned}$$

com fibra típica $F_{2,1}(\mathbb{T}^2)$, obtemos a seguinte sequência exata curta de Fadell-Neuwirth:

$$1 \longrightarrow P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1, x_2\}, x_1) \xrightarrow{i\#} P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2)) \xrightarrow{(p_2)\#} P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, x_2) \longrightarrow 1. \quad (5.1)$$

Podemos descrever $(p_2)\#$ geometricamente como a aplicação que associa cada trança com duas cordas em $\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}$ à sua segunda corda (que pode ser vista como um caminho em $\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}$ com

ponto base x_2). Já $i_{\#}$ pode ser descrita como a aplicação que associa um caminho em $\mathbb{T}^2 \setminus \{1, x_2\}$ com ponto base x_1 à trança com primeira corda sendo este caminho e a segunda corda sendo o caminho constante em x_2 . Note que o kernel

$$K = P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1, x_2\}, x_1) \cong \pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1, x_2\})$$

de $(p_2)_{\#}$ é o grupo livre em três geradores e o quociente

$$Q = \frac{P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))}{(p_2)_{\#}(P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1, x_2\}, x_1))} \cong P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, x_2) \cong \pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$$

é o grupo livre em dois geradores. Construiremos uma apresentação de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ como extensão de Q por K , seguindo o passo-a-passo descrito na Seção 1.2.

Como cada um dos elementos de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$ são representados na Figura 5.2 com uma corda constante, ao ignorar tal corda, obtemos laços que representam elementos de $\pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1, x_2\}, x_1)$ (no caso das tranças $\rho_{11}, \rho_{12}, B_{12}$ e \bar{B}) ou de $\pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, x_2)$ (no caso das tranças ρ_{12}, ρ_{22} e B'). Diante desta observação, cometendo certo abuso, usaremos a notação que foi dada para uma trança na Figura 5.2 para designar também o laço que é obtido dela ao ignorar a corda fixa, isto é, sua imagem por $(p_2)_{\#}$ ou sua pré-imagem por $i_{\#}$. Assim, $\rho_{11}, \rho_{12}, B_{12}$ e \bar{B} denotarão elementos de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$ e também elementos de $\pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1, x_2\}, x_1)$ e ρ_{21}, ρ_{22} e B' denotarão elementos de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$ e também elementos de $\pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, x_2)$. Sempre deixaremos claro em qual grupo o elemento estará sendo considerado para evitar ambiguidade. Diante disso, podemos considerar K com os geradores $\rho_{11}, \rho_{12}, B_{12}$ e \bar{B} , e Q com os geradores ρ_{21}, ρ_{22} e B' . A Figura 5.3 ilustra um laço que representa o elemento $[\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}]B_{12}^{-1}\bar{B}^{-1}$ em $\pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1, x_2\}, x_1)$. Já a Figura 5.4 ilustra um laço que representa o elemento $[\rho_{21}, \rho_{22}^{-1}]B'^{-1}$ em $\pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, x_2)$. Note que estes laços são homotópicos aos laços triviais nos respectivos espaços.

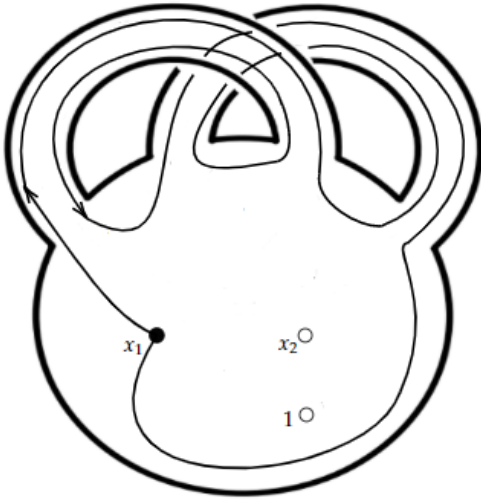


Figura 5.3: Representante do elemento $[\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}]B_{12}^{-1}\bar{B}^{-1}$ em K .

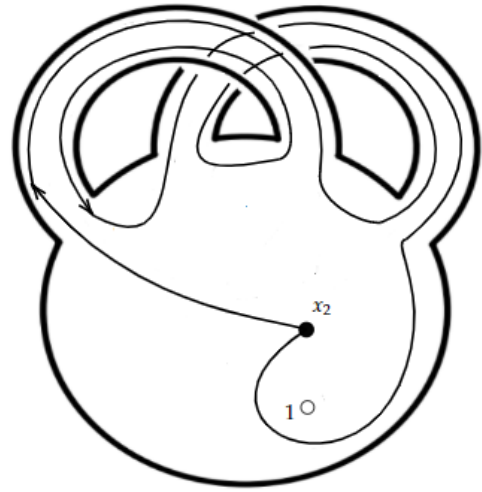


Figura 5.4: Representante do elemento $[\rho_{21}, \rho_{22}^{-1}]B'^{-1}$ em Q .

Assim, tomamos as seguintes apresentações para os grupos K e Q :

$$K = \langle \rho_{11}, \rho_{12}, B_{12}, \bar{B} \mid [\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}]B_{12}^{-1}\bar{B}^{-1} = \mathbf{1} \rangle, \quad (5.2)$$

$$Q = \langle \rho_{21}, \rho_{22}, B' \mid [\rho_{21}, \rho_{22}^{-1}]B'^{-1} = \mathbf{1} \rangle. \quad (5.3)$$

Com efeito, um conjunto de geradores de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$ é formado pela união

$$\{\rho_{11}, \rho_{12}, B_{12}, \bar{B}\} \cup \{\rho_{21}, \rho_{22}, B'\},$$

sendo estes elementos as tranças representadas na Figura 5.2), ou seja, elementos de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$. Para determinar as relações válidas neste grupo segundo o processo de extensão, devemos considerar três tipos de relações ocorrendo em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$. O primeiro tipo de relação é obtido a partir das relações dadas na apresentação de K ao enxergar estas relações como produtos em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$. Como há apenas uma relação em K , temos a seguinte relação em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$:

$$[\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}]B_{12}^{-1}\bar{B}^{-1} = 1.$$

O segundo tipo de relação é obtido ao enxergar as relações de Q como produtos de elementos em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$ que são imagem de alguém em K . Como em Q há apenas uma relação, basta analisar o produto $[\rho_{21}, \rho_{22}^{-1}]B'^{-1}$ como elemento de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$. A Figura 5.5 ilustra uma homotopia entre tranças que representam os elementos $[\rho_{21}, \rho_{22}^{-1}]B'^{-1}$ e B_{12} . Assim, temos a relação

$$[\rho_{21}, \rho_{22}^{-1}]B'^{-1} = B_{12}$$

em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$.

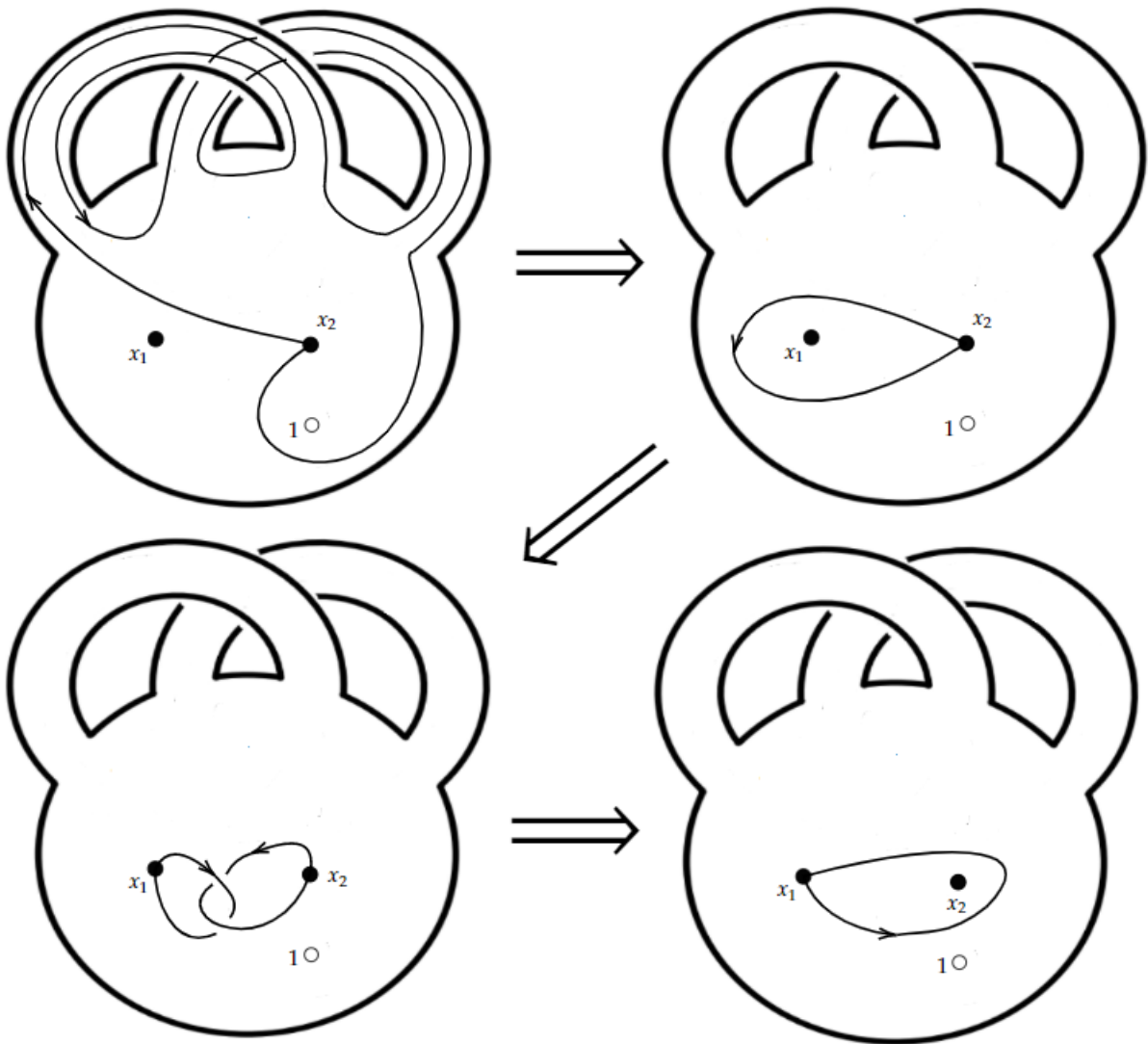


Figura 5.5: Tranças em $\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}$ que representam os elementos $[\rho_{21}, \rho_{22}^{-1}]B'^{-1}$ e B_{12}

O terceiro e último tipo de relação é obtido ao conjugar (em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$) os elementos $\{\rho_{11}, \rho_{12}, B_{12}, \bar{B}\}$ pelos elementos $\{\rho_{21}, \rho_{22}, B'\}$ e obter elementos que são imagem de alguém em K . Não ilustraremos todas essas relações, pois algumas são diretas ou análogas a outras.

A Figura 5.6 ilustra a relação obtida ao conjugar ρ_{11} por ρ_{22} .

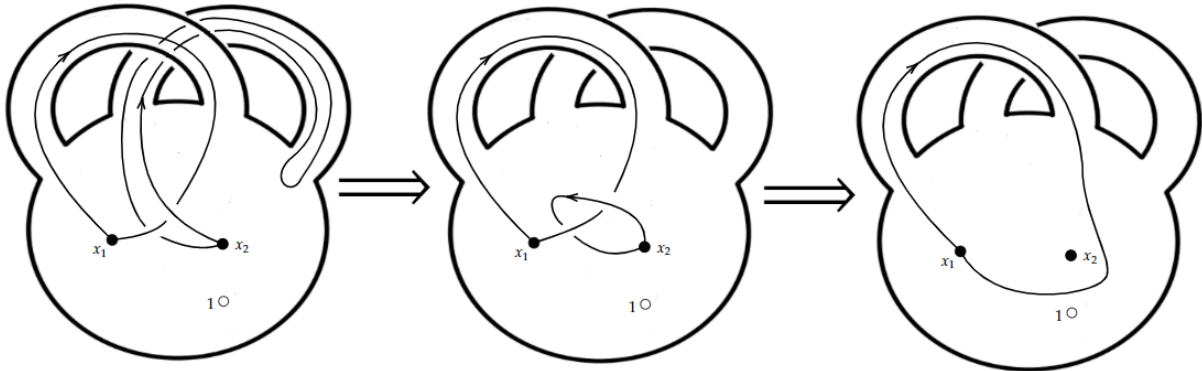


Figura 5.6: Homotopia entre as tranças que representam os elementos $\rho_{22}\rho_{11}\rho_{22}^{-1}$ e $\rho_{11}B_{12}^{-1}$.

A Figura 5.7 ilustra a relação obtida ao conjugar ρ_{12} por ρ_{21} .

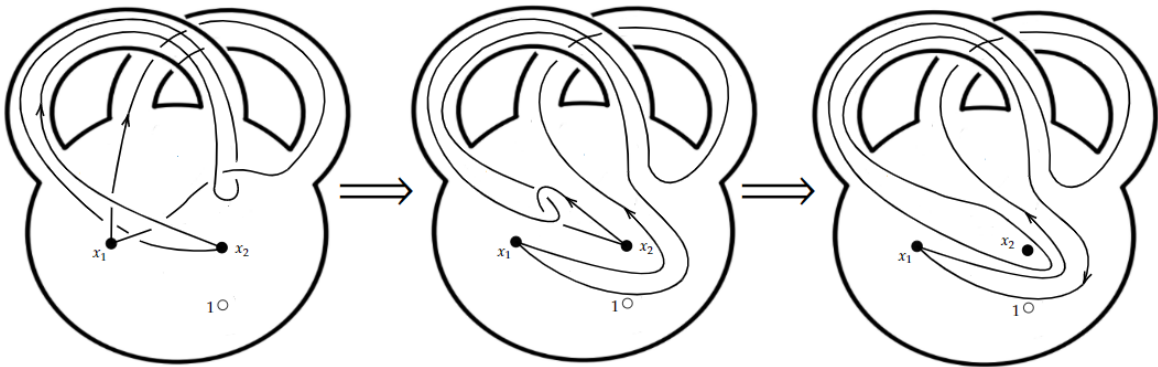


Figura 5.7: Homotopia entre as tranças que representam os elementos $\rho_{21}\rho_{12}\rho_{21}^{-1}$ e $B_{12}\rho_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}\rho_{11}B_{12}^{-1}$.

A Figura 5.8 ilustra a relação obtida ao conjugar B_{12} por ρ_{21} .

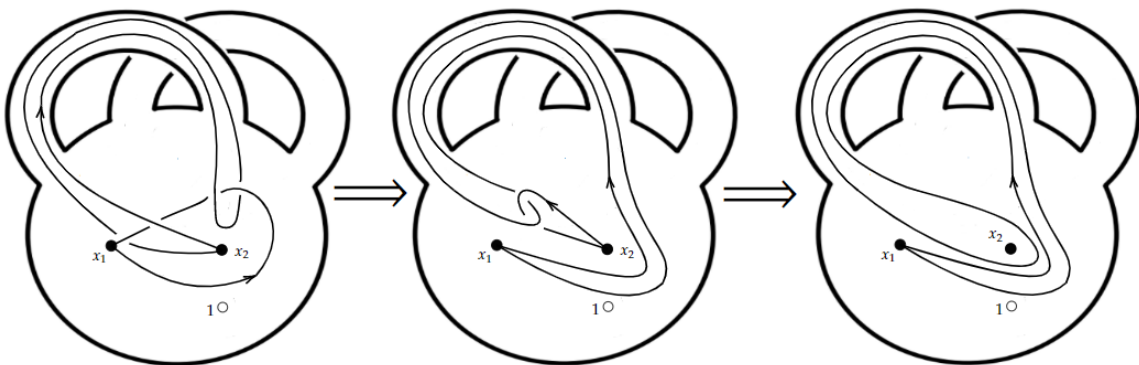


Figura 5.8: Homotopia entre as tranças que representam os elementos $\rho_{21}B_{12}\rho_{21}^{-1}$ e $B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}\rho_{11}B_{12}^{-1}$.

Assim, obtemos a seguinte apresentação para o grupo $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$:

- geradores: $\rho_{11}, \rho_{12}, B_{12}, \bar{B}, \rho_{21}, \rho_{22}$ e B' .
- relações:

(a) $[\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}]B_{12}^{-1}\bar{B}^{-1} = 1$.

- (b) $[\rho_{21}, \rho_{22}^{-1}]B'^{-1} = B_{12}$.
- (c) $\rho_{21}\rho_{11}\rho_{21}^{-1} = B_{12}\rho_{11}B_{12}^{-1}$.
- (d) $\rho_{22}\rho_{11}\rho_{22}^{-1} = \rho_{11}B_{12}^{-1}$.
- (e) $B'\rho_{11}B'^{-1} = \rho_{11}$.
- (f) $\rho_{21}\rho_{12}\rho_{21}^{-1} = B_{12}\rho_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}\rho_{11}B_{12}^{-1}$.
- (g) $\rho_{22}\rho_{12}\rho_{22}^{-1} = B_{12}\rho_{12}B_{12}^{-1}$.
- (h) $B'\rho_{12}B'^{-1} = \rho_{12}$.
- (i) $\rho_{21}B_{12}\rho_{21}^{-1} = B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}\rho_{11}B_{12}^{-1}$
- (j) $\rho_{22}B_{12}\rho_{22}^{-1} = B_{12}\rho_{12}^{-1}B_{12}\rho_{12}B_{12}^{-1}$
- (k) $B'B_{12}B'^{-1} = B_{12}^{-1}\bar{B}^{-1}B_{12}\bar{B}B_{12}$
- (l) $\rho_{21}\bar{B}\rho_{21}^{-1} = \bar{B}$
- (m) $\rho_{22}\bar{B}\rho_{22}^{-1} = \bar{B}$
- (n) $B'\bar{B}B'^{-1} = B_{12}^{-1}\bar{B}B_{12}$

Essa apresentação pode ser simplificada, como veremos na próxima proposição.

Proposição 5.1.1. O grupo $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$ admite a seguinte apresentação:

- geradores: u, v, B, x e y .
- relações:

- (a) $xux^{-1} = u$.
- (b) $xvx^{-1} = v[v^{-1}, u]B^{-1}[u, v^{-1}]$.
- (c) $xBx^{-1} = u[v^{-1}, u]B[u, v^{-1}]u^{-1}$.
- (d) $yuy^{-1} = v[v^{-1}, u]Buv^{-1}$.
- (e) $yvy^{-1} = v$.
- (f) $yBy^{-1} = v[v^{-1}, u]B[u, v^{-1}]v^{-1} = uvu^{-1}Buv^{-1}u^{-1}$.

Em particular, $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$ é isomorfo ao produto semi-direto do grupo livre de rank 3 gerado por $\{u, v, B\}$ pelo grupo livre de rank 2 gerado por $\{x, y\}$, $\mathbb{F}_3(u, v, B) \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}_2(x, y)$.

Demonstração. Para provar esta proposição exibiremos um isomorfismo entre a apresentação geométrica de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ que foi obtida com a técnica de extensão de grupos e a apresentação dada na Proposição 5.1.1.

Consideramos a aplicação que é definida nos geradores da Proposição 5.1.1 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 B &\longmapsto \bar{B} \\
 u &\longmapsto \rho_{11} \\
 v &\longmapsto \rho_{12} \\
 x &\longmapsto \rho_{11}B_{12}^{-1}\rho_{21} \\
 y &\longmapsto \rho_{12}B_{12}^{-1}\rho_{22}.
 \end{aligned}$$

Vejam que esta aplicação é de fato um homomorfismo. Primeiro note que a relação (a) de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ nos garante que

$$B_{12} = \bar{B}^{-1}[\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}]. \quad (5.4)$$

Usando a relação (c) em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$, temos que

$$\rho_{11}B_{12}^{-1}\rho_{21}\rho_{11}\rho_{21}^{-1}B_{12}\rho_{11}^{-1} = \rho_{11},$$

logo a relação (a) da Proposição 5.1.1 é preservada por essa aplicação. Usando a relação (f) em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ e (5.4), temos que

$$\rho_{11}B_{12}^{-1}\rho_{21}\rho_{12}\rho_{21}^{-1}B_{12}\rho_{11}^{-1} = \rho_{11}\rho_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12} = \rho_{12}[\rho_{12}^{-1}, \rho_{11}]\bar{B}^{-1}[\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}],$$

logo a relação (b) da Proposição 5.1.1 é preservada pela aplicação. Usando a relação (l) em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ e (5.4), temos que

$$\rho_{11}B_{12}^{-1}\rho_{21}\bar{B}\rho_{21}^{-1}B_{12}\rho_{11}^{-1} = \rho_{11}B_{12}^{-1}\bar{B}B_{12}\rho_{11}^{-1} = \rho_{11}[\rho_{12}^{-1}, \rho_{11}]\bar{B}[\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}]\rho_{11}^{-1},$$

logo a relação (c) da Proposição 5.1.1 é preservada por essa aplicação. Usando a relação (d) em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ e (5.4), temos que

$$\rho_{12}B_{12}^{-1}\rho_{22}\rho_{11}\rho_{22}^{-1}B_{12}\rho_{12}^{-1} = \rho_{12}B_{12}^{-1}\rho_{11}\rho_{12}^{-1} = \rho_{12}[\rho_{12}^{-1}, \rho_{11}]\bar{B}\rho_{11}\rho_{12}^{-1},$$

logo a relação (d) da Proposição 5.1.1 é preservada por essa aplicação. Usando a relação (g) em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$, temos que

$$\rho_{12}B_{12}^{-1}\rho_{22}\rho_{12}\rho_{22}^{-1}B_{12}\rho_{12}^{-1} = \rho_{12},$$

logo a relação (e) da Proposição 5.1.1 é preservada por essa aplicação. Usando a relação (m) em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ e (5.4), temos que

$$\rho_{12}B_{12}^{-1}\rho_{22}\bar{B}\rho_{22}^{-1}B_{12}\rho_{12}^{-1} = \rho_{12}B_{12}^{-1}\bar{B}B_{12}\rho_{12}^{-1} = \rho_{11}\rho_{12}\rho_{11}^{-1}\bar{B}\rho_{11}\rho_{12}^{-1},$$

logo a relação (f) da Proposição 5.1.1 é preservada por essa aplicação. Portanto a aplicação definida é, de fato, um homomorfismo. Mais ainda, este homomorfismo é sobrejetor, uma vez que as relações (a) e (b) em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ implicam que

$$\begin{aligned} B^{-1}[u, v^{-1}] &\mapsto \bar{B}^{-1}[\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}] = B_{12} \\ B^{-1}[u, v^{-1}]u^{-1}x &\mapsto \bar{B}^{-1}[\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}]\rho_{11}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1}\rho_{21} = \rho_{21} \\ B^{-1}[u, v^{-1}]v^{-1}y &\mapsto \bar{B}^{-1}[\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}]\rho_{12}^{-1}\rho_{12}B_{12}^{-1}\rho_{22} = \rho_{22} \\ u^{-1}x(y^{-1}v[v^{-1}, u]B)x^{-1}uv^{-1}y &\mapsto B_{12}^{-1}[\rho_{21}, \rho_{22}^{-1}] = B', \end{aligned}$$

de modo que podemos definir uma aplicação inversa. Para finalizar a demonstração, iremos verificar que essa aplicação inversa está bem definida, ou seja, que ela é um homomorfismo de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ na apresentação da Proposição 5.1.1. Vejamos que as relações em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ são mantidas pela aplicação inversa. Podemos verificar que a relação (a) em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ é mantida apenas observando como a aplicação inversa está definida nos geradores de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$. Uma vez que a relação (b) em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ pode ser reescrita como $B_{12}^{-1}[\rho_{21}, \rho_{22}^{-1}]B'$, também é suficiente observar como a aplicação inversa está definida nos geradores de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$. Usando a relação (a) da Proposição 5.1.1, temos que

$$B^{-1}[u, v^{-1}]u^{-1}xux^{-1}u[v^{-1}, u]B = B^{-1}[u, v^{-1}]u[v^{-1}, u]B,$$

de modo que a relação (c) em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ é mantida. Usando a relação (d) da Proposição 5.1.1, temos que

$$B^{-1}[u, v^{-1}]v^{-1}yuy^{-1}v[v^{-1}, u]B = u[v^{-1}, u]B,$$

de modo que a relação (d) em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ é mantida. Usando a relação (b) da Proposição 5.1.1, temos que

$$B^{-1}[u, v^{-1}]u^{-1}xvx^{-1}u[v^{-1}, u]B = B^{-1}[u, v^{-1}]vu^{-1}B^{-1}[u, v^{-1}]u[v^{-1}, u]B,$$

de modo que a relação (f) em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ é mantida. Usando a relação (e) da Proposição 5.1.1, temos que

$$B^{-1}[u, v^{-1}]v^{-1}yvy^{-1}v[v^{-1}, u]B = B^{-1}[u, v^{-1}]v[v^{-1}, u]B,$$

de modo que a relação (g) em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ é mantida. Usando a relação (c) da Proposição 5.1.1,

temos que

$$B^{-1}[u, v^{-1}]u^{-1}xBx^{-1}u[v^{-1}, u]B = B,$$

de modo que a relação (l) em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ é mantida. Usando a relação (f) da Proposição 5.1.1, temos que

$$B^{-1}[u, v^{-1}]v^{-1}yBy^{-1}v[v^{-1}, u]B = B,$$

de modo que a relação (m) em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ é mantida. Para verificar que as relações (i) e (j) são mantidas é preciso mostrar que os geradores x e y da Proposição 5.1.1 comutam com o elemento $B^{-1}[u, v^{-1}]$. De fato, temos que:

$$xB^{-1}[u, v^{-1}]x^{-1} = xB^{-1}x^{-1}[xux^{-1}, xv^{-1}x^{-1}] = B^{-1}[u, v^{-1}] \quad (5.5)$$

e

$$yB^{-1}[u, v^{-1}]y^{-1} = yB^{-1}y^{-1}[yuy^{-1}, yv^{-1}y^{-1}] = B^{-1}[u, v^{-1}]. \quad (5.6)$$

Assim,

$$B^{-1}[u, v^{-1}]u^{-1}xB^{-1}[u, v^{-1}]x^{-1}u[v^{-1}, u]B = B^{-1}[u, v^{-1}]u^{-1}B^{-1}[u, v^{-1}]u[v^{-1}, u]B,$$

e

$$B^{-1}[u, v^{-1}]v^{-1}yB^{-1}[u, v^{-1}]y^{-1}v[v^{-1}, u]B = B^{-1}[u, v^{-1}]v^{-1}B^{-1}[u, v^{-1}]v[v^{-1}, u]B,$$

de modo que são mantidas as relações (i) e (j). Para verificar que as relações (e) e (h) são mantidas, primeiro observamos que valem as seguintes relações na apresentação da Proposição 5.1.1:

$$\begin{aligned} yBy^{-1} = yuy^{-1}xu^{-1}x^{-1} &\implies yu^{-1}By^{-1} = xux^{-1} \implies \mathbf{y^{-1}uy = B^{-1}u} \\ xvu^{-1}Bux^{-1} = v &\implies xv[v^{-1}, u]Bux^{-1} = xyuy^{-1}vx^{-1} = uv \implies u^{-1}yuy^{-1}v = \mathbf{vu^{-1}Bu = x^{-1}vx}. \end{aligned}$$

Denotando o elemento $B^{-1}[u, v^{-1}]$ por Δ , reescrevemos as relações destacadas como:

$$y^{-1}uy = \Delta v^{-1}uv \quad (5.7)$$

e

$$x^{-1}vx = u^{-1}v\Delta^{-1}u. \quad (5.8)$$

Utilizando as relações (a), (b), (d) e (e) da Proposição 5.1.1, as relações (5.7) e (5.8) e o fato de que x e y comutam com Δ , temos que:

$$\begin{aligned} u^{-1}xy^{-1}v[v^{-1}, u]Bx^{-1}uv^{-1}y &= u^{-1}(xv)y^{-1}\Delta^{-1}u(x^{-1}v^{-1})y \\ &= vu^{-1}\Delta(xv^{-1})(y^{-1}u)x^{-1}y \\ &= u^{-1}\Delta(xv^{-1})uvy^{-1}x^{-1}y \\ &= v^{-1}(xv)y^{-1}x^{-1}y \\ &= v^{-1}uvu^{-1}\Delta xy^{-1}x^{-1}y \\ &= [v^{-1}, u]\Delta[x, y^{-1}] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Portanto

$$[x, y^{-1}]u[y^{-1}, x] = \Delta^{-1}[u, v^{-1}]u[v^{-1}, u]\Delta, \quad (5.10)$$

$$[x, y^{-1}]v[y^{-1}, x] = \Delta^{-1}[u, v^{-1}]v[v^{-1}, u]\Delta \quad (5.11)$$

e podemos perceber que a aplicação inversa preserva as relações (e) e (h). Resta verificar que as relações (k) e (n) são preservadas pela aplicação inversa. Como a aplicação inversa leva B_{12} em Δ , usando (5.9) e o fato de que Δ comuta com x e com y , temos que:

$$[v^{-1}, u]\Delta[x, y^{-1}]\Delta[y^{-1}, x]\Delta^{-1}[u, v^{-1}] = [v^{-1}, u]\Delta[u, v^{-1}] = \Delta^{-1}B^{-1}\Delta B\Delta,$$

de modo que a relação (k) é preservada. Usando (5.9), (5.10) e (5.11), temos que:

$$[x, y^{-1}][u, v^{-1}][y^{-1}, x] = \Delta^{-1}[u, v^{-1}]\Delta.$$

Usando também a comutatividade de Δ com os geradores x e y e a igualdade $B = [u, v^{-1}]\Delta^{-1}$, temos que:

$$\begin{aligned} B'\bar{B}B'^{-1} &\mapsto [v^{-1}, u]\Delta[x, y^{-1}]B[y^{-1}, x]\Delta^{-1}[u, v^{-1}] \\ &\mapsto [v^{-1}, u]\Delta[x, y^{-1}][u, v^{-1}]\Delta^{-1}[y^{-1}, x]\Delta^{-1}[u, v^{-1}] \\ &\mapsto \Delta^{-1}[u, v^{-1}]. \end{aligned}$$

O que prova que a relação (n) é mantida.

Provamos então que a aplicação definida anteriormente é um isomorfismo. Pela natureza da apresentação dada na Proposição 5.1.1 e pelo que foi demonstrado na seção 1.2, podemos afirmar que $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$ é isomorfo ao produto semi-direto do grupo livre de rank 3 gerado por $\{u, v, B\}$ pelo grupo livre de rank 2 gerado por $\{x, y\}$. □

5.1.2 O grupo $P_2(\mathbb{T}^2)$

O primeiro passo para encontrar uma apresentação para o grupo $P_2(\mathbb{T}^2)$ é observar que a inclusão de $F_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ em $F_2(\mathbb{T}^2)$ induz um homomorfismo sobrejetor

$$\alpha : P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}) \longrightarrow P_2(\mathbb{T}^2).$$

Geometricamente, α associa os caminhos em $\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}$ que compõem uma trança de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ a eles mesmos vistos como caminhos em \mathbb{T}^2 . Dessa forma, a imagem por α de uma trança não trivial pode ser trivial. Analisando as imagens dos geradores geométricos $\rho_{11}, \rho_{12}, B_{12}, \bar{B}, \rho_{21}, \rho_{22}$ e B' de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$, podemos observar que \bar{B} e B' estão no kernel de α , como ilustrado pela Figura 5.9.

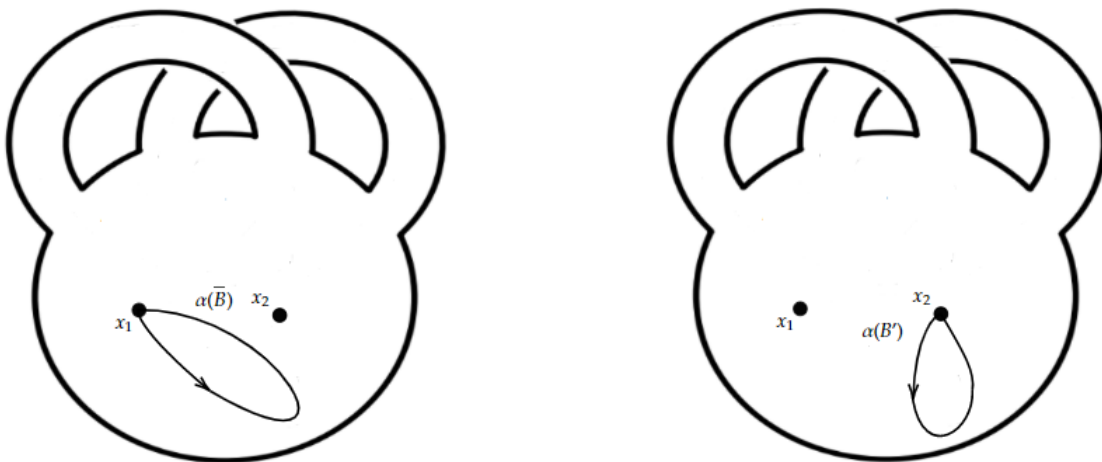


Figura 5.9: À esquerda caminhos que realizam $\alpha(\bar{B})$ e à direita caminhos que realizam $\alpha(B')$.

O próximo lema nos garante que o kernel de α coincide com o fecho normal do subgrupo gerado por \bar{B} e B' . A fim de simplificar notação, representaremos a imagem de um elemento via α utilizando o mesmo símbolo que o representa, distinguindo, quando houver ambiguidade, se estamos olhando o elemento em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ ou em $P_2(\mathbb{T}^2)$.

Lema 5.1.1. $\text{Ker}(\alpha) = \langle\langle \bar{B}, B' \rangle\rangle_{P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})}$.

Demonstração. Como foi observado anteriormente, os geradores \bar{B} e B' pertencem ao kernel de α o que implica em

$$\langle\langle \bar{B}, B' \rangle\rangle_{P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})} \subset \text{Ker}(\alpha).$$

Resta mostrar a inclusão inversa. Para isso, consideramos o seguinte diagrama (que provaremos ser comutativo):

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{1} & \longrightarrow & \text{Ker}(\bar{\alpha}) & \longrightarrow & P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1, x_2\}, x_1) & \overset{\bar{\alpha}}{\dashrightarrow} & P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{x_2\}, x_1) & \longrightarrow & \mathbf{1} \\
& & \uparrow \tau|_{\text{Ker}(\bar{\alpha})} & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau' & & \\
\mathbf{1} & \longrightarrow & \text{Ker}(\alpha) & \longrightarrow & P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2)) & \xrightarrow{\alpha} & P_2(\mathbb{T}^2, (x_1, x_2)) & \longrightarrow & \mathbf{1} \\
& & \uparrow s & \nearrow (p_2)_\#|_{\text{Ker}(\alpha)} & \downarrow (p_2)_\# & & \downarrow (p'_2)_\# & & \\
\mathbf{1} & \longrightarrow & \text{Ker}(\alpha') & \longrightarrow & P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, x_2) & \xrightarrow{\alpha'} & P_1(\mathbb{T}^2, x_2) & \longrightarrow & \mathbf{1} \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & &
\end{array} \tag{5.12}$$

O diagrama (5.12) é construído da seguinte forma:

- O homomorfismo sobrejetor $\alpha' : P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, x_2) \longrightarrow P_1(\mathbb{T}^2, x_2)$ é induzido pela inclusão $i' : \mathbb{T}^2 \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{T}^2$.
- A coluna da direita é uma sequência exata curta de Fadell-Neuwirth, onde $p'_2 : F_2(\mathbb{T}^2) \longrightarrow \mathbb{T}^2$ é a projeção na segunda coordenada e τ' é interpretada como a inclusão.
- A coluna do meio é a sequência (5.1), onde o homomorfismo $\tau : P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1, x_2\}, x_1) \longrightarrow P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$ é interpretado como a inclusão.

Considerando a apresentação dada em (5.3) para o grupo $P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, x_2)$, podemos reescrever a relação existente em (5.3) para o grupo $P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, x_2)$ como $[\rho_{21}, \rho_{22}^{-1}] = B'$. Como $\alpha'(B') = \mathbf{1}$, podemos considerar $P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, x_2)$ como o grupo livre nos geradores $\{\rho_{21}, \rho_{22}\}$ e $P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, x_2)$ como o grupo abeliano livre nos geradores $\{\rho_{21}, \rho_{22}\}$. Assim, o homomorfismo α' pode ser interpretado como o homomorfismo abelianizador $\text{Ab} : F_2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ e vale que

$$\text{Ker}(\alpha') = \Gamma_2(P_1(\mathbb{T}^2, x_2)).$$

Interpretando α' como a projeção canônica de $P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, x_2)$ no seu quociente pelo fecho normal do elemento $[\rho_{21}, \rho_{22}^{-1}]$ em $P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, x_2)$, temos que

$$\text{Ker}(\alpha') = \langle\langle [\rho_{21}, \rho_{22}^{-1}] \rangle\rangle_{P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, x_2)}.$$

Assim, usando a relação de $P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, x_2)$, temos que

$$\text{Ker}(\alpha') = \langle\langle B' \rangle\rangle_{P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, x_2)}. \tag{5.13}$$

Sendo $P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, x_2)$ um grupo livre, temos que o subgrupo $\text{Ker}(\alpha')$ também é livre. A comutatividade do quadrado no canto inferior direito no diagrama (5.12) é uma consequência do seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
F_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}) & \xrightarrow{l} & F_2(\mathbb{T}^2) \\
\downarrow p_2 & & \downarrow p'_2 \\
F_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}) & \xrightarrow{l'} & F_1(\mathbb{T}^2),
\end{array}$$

em que $l : F_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}) \longrightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$ é induzida pela inclusão l' . Dado $x \in P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1, x_2\})$, temos que

$$\alpha\tau(x) \in \text{Ker}((p'_2)_\#) = \text{Im}(\tau')$$

pela comutatividade do quadrado no canto direito inferior e pelas sequências exatas curtas das duas últimas colunas. Este fato nos permite definir

$$\bar{\alpha} : P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1, x_2\}, x_1) \longrightarrow P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{x_2\}, x_1)$$

que faz o quadrado superior direito comutar. Sendo $\{\rho_{11}, \rho_{12}, B_{12}, \bar{B}\}$ um conjunto gerador de $P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1, x_2\}, x_1)$, pela comutatividade do diagrama, temos que $\bar{\alpha}$ leva os elementos ρ_{11}, ρ_{12} e B_{12} (considerados como elementos de $P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1, x_2\}, x_1)$) para os mesmos representantes geométricos (considerados como elementos de $P_1(\mathbb{T} \setminus \{x_2\}, x_1)$), e leva \bar{B} para o elemento trivial. Em particular, $\bar{\alpha}$ é sobrejetor. Considerando $P_1(\mathbb{T} \setminus \{1, x_2\}, x_1)$ como o grupo livre de rank 3 gerado por $\{\rho_{11}, \rho_{12}, B_{12}\}$ e $P_1(\mathbb{T} \setminus \{x_2\}, x_1)$ com a apresentação

$$P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{x_2\}, x_1) = \langle \rho_{11}, \rho_{12}, B_{12} \mid [\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}] = B_{12} \rangle.$$

O homomorfismo $\bar{\alpha}$ pode então ser interpretado como a projeção canônica de $P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{1, x_2\}, x_1)$ no seu quociente pelo subgrupo

$$\langle \langle [\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}] B_{12}^{-1} \rangle \rangle_{P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{x_2\}, x_1)}.$$

Usando a relação (a) da primeira apresentação de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$, e usando o fato que as tranças $\rho_{11}, \rho_{12}, \bar{B}$ e B_{12} têm a segunda corda constante em x_2 temos que $\bar{B} = [\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}] B_{12}^{-1}$ em $P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{x_2\}, x_1)$ e, portanto, temos:

$$\text{Ker}(\bar{\alpha}) = \langle \langle \bar{B} \rangle \rangle_{P_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{x_2\}, x_1)}.$$

Pela exatidão das duas primeiras linhas do diagrama (5.12), o homomorfismo

$$\tau|_{\text{Ker}(\bar{\alpha})} : \text{Ker}(\bar{\alpha}) \longrightarrow \text{Ker}(\alpha)$$

está bem definido e é injetor, pois τ o é. Pela exatidão das duas últimas linhas do diagrama (5.12), o homomorfismo

$$(p_2)_\#|_{\text{Ker}(\alpha)} : \text{Ker}(\alpha) \longrightarrow \text{Ker}(\alpha')$$

está bem definido e é sobrejetor, pois, por (5.13), cada elemento $x \in \text{Ker}(\alpha')$ pode ser escrito como produto de conjugados de B' e de seu inverso pelos elementos de $\langle \rho_{21}, \rho_{22} \rangle$. Esta expressão, considerada como elemento de $P_2(\mathbb{T} \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$, pertence ao kernel de α e sua imagem por $(p_2)_\#$ é igual a x . Pela exatidão da segunda coluna do diagrama (5.12), temos que $\text{Im}(\tau|_{\text{Ker}(\bar{\alpha})}) \subset \text{Ker}((p_2)_\#|_{\text{Ker}(\alpha)})$. Reciprocamente, se $z \in \text{Ker}((p_2)_\#|_{\text{Ker}(\alpha)})$, então $z \in \text{Ker}((p_2)_\#) = \text{Im}(\tau)$, também pela exatidão da segunda coluna do diagrama (5.12). Assim, existe $y \in P_1(\mathbb{T} \setminus \{1, x_2\}, x_1)$ tal que $\tau(y) = z$. Como $\bar{\alpha}(y) = \alpha(\tau(y)) = \alpha(z) = \mathbf{1}$, temos que $y \in \text{Ker}(\bar{\alpha})$. Isto prova que $\text{Im}(\tau|_{\text{Ker}(\bar{\alpha})}) \supset \text{Ker}((p_2)_\#|_{\text{Ker}(\alpha)})$ e, portanto, a primeira coluna é exata.

Por fim, como $\text{Ker}(\alpha')$ é livre, tomamos uma base infinita formada por conjugados de B' por certos elementos de $P_1(\mathbb{T} \setminus \{1\}, x_2)$. Portanto, existe uma seção $s : \text{Ker}(\alpha') \longrightarrow \text{Ker}(\alpha)$ para $(p_2)_\#|_{\text{Ker}(\alpha)}$ que consiste em levar cada um destes conjugados (considerados como elementos de $\text{Ker}(\alpha')$) para ele mesmo (considerado como elemento de $\text{Ker}(\alpha)$). Desse modo, a sequência da primeira coluna cinde e podemos escrever $\text{Ker}(\alpha)$ como produto semidireto de $\tau(\text{Ker}(\bar{\alpha}))$, o qual está contido em $\langle \langle \bar{B} \rangle \rangle_{P_2(\mathbb{T} \setminus \{1\})}$, por $s(\text{Ker}(\alpha'))$, o qual está contido em $\langle \langle B' \rangle \rangle_{P_2(\mathbb{T} \setminus \{1\})}$. Portanto, $\text{Ker}(\alpha)$ está contido no subgrupo $\langle \langle \bar{B}, B' \rangle \rangle_{P_2(\mathbb{T} \setminus \{1\})}$. □

Observação 5.1.1. Com este resultado, podemos obter uma apresentação geométrica de $P_2(\mathbb{T}, (x_1, x_2))$ a partir da apresentação geométrica de $P_2(\mathbb{T} \setminus \{1\}, (x_1, x_2))$ apenas trocando os geradores \bar{B} e B' pelo elemento trivial. Esta apresentação será útil mais adiante para verificar algumas relações em $B_2(\mathbb{T}, (x_1, x_2))$. Desse modo, uma apresentação de $P_2(\mathbb{T}, (x_1, x_2))$ é dada por:

- geradores: $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{22}$ e B_{12} .

• relações:

- (a) $[\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}] = B_{12}$.
- (b) $\rho_{21}\rho_{11}\rho_{21}^{-1} = B_{12}\rho_{11}B_{12}^{-1}$.
- (c) $\rho_{22}\rho_{11}\rho_{22}^{-1} = \rho_{11}B_{12}^{-1}$.
- (d) $\rho_{21}\rho_{12}\rho_{21}^{-1} = B_{12}\rho_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}\rho_{11}B_{12}^{-1}$.
- (e) $\rho_{22}\rho_{12}\rho_{22}^{-1} = B_{12}\rho_{12}B_{12}^{-1}$.
- (f) $\rho_{21}B_{12}\rho_{21}^{-1} = B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}\rho_{11}B_{12}^{-1}$.
- (g) $\rho_{22}B_{12}\rho_{22}^{-1} = B_{12}\rho_{12}^{-1}B_{12}\rho_{12}B_{12}^{-1}$.

O Lema 5.1.1 nos permite demonstrar a próxima proposição que fornece uma apresentação de $P_2(\mathbb{T}^2)$.

Proposição 5.1.2. O grupo $P_2(\mathbb{T}^2, (x_1, x_2))$ admite a seguinte apresentação:

• geradores: u, v, x e y .

• relações:

- (a) $xux^{-1} = u$ e $yuy^{-1} = u$.
- (b) $xvx^{-1} = v$ e $yvy^{-1} = v$.
- (c) $xyx^{-1} = y$.

Em particular, $P_2(\mathbb{T}^2, (x_1, x_2))$ é isomorfo ao produto direto do grupo livre de rank 2 gerado por $\{u, v\}$ e do grupo abeliano livre de rank 2 gerado por $\{x, y\}$, $\mathbb{F}_2(u, v) \times \mathbb{Z}^2(x, y)$.

Demonstração. Primeiro recordamos que o isomorfismo construído na demonstração da Proposição 5.1.1 satisfaz:

$$\begin{aligned} u^{-1}xy^{-1}v[v^{-1}, u]Bx^{-1}uv^{-1}y &\longmapsto B' \\ B &\longmapsto \bar{B}. \end{aligned}$$

Como $P_2(\mathbb{T}^2)$ é isomorfo ao quociente de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ pelo kernel de α , para obter uma apresentação de $P_2(\mathbb{T}^2)$ a partir da apresentação de $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ dada na Proposição 5.1.1, basta associar os elementos B e $u^{-1}xy^{-1}v[v^{-1}, u]Bx^{-1}uv^{-1}y$ ao elemento trivial na apresentação da Proposição 5.1.1. Primeiro, associando B ao elemento neutro em $P_2(\mathbb{T}^2)$, temos os geradores u, v, x, y , as relações (c) e (f) da Proposição 5.1.1 se tornam triviais em $P_2(\mathbb{T}^2)$ e as relações (a), (b), (d) e (e) da Proposição 5.1.1 geram as relações (a) e (b) em $P_2(\mathbb{T}^2)$. Além disso, reescrevemos

$$u^{-1}xy^{-1}v[v^{-1}, u]Bx^{-1}uv^{-1}y = u^{-1}xy^{-1}uvu^{-1}x^{-1}uv^{-1}y.$$

Assim, associando $u^{-1}xy^{-1}uvu^{-1}x^{-1}uv^{-1}y$ ao elemento neutro e usando as relações (a) e (b) já válidas em $P_2(\mathbb{T}^2)$, obtemos

$$\mathbf{1} = u^{-1}xy^{-1}uvu^{-1}x^{-1}uv^{-1}y = u^{-1}xy^{-1}ux^{-1}y = xy^{-1}x^{-1}y$$

que pode ser reescrita como a relação (c). Portanto, a primeira parte da proposição está provada. Pela natureza da apresentação dada na Proposição 5.1.2 e pelo que foi demonstrado na seção 1.2, podemos afirmar que $P_2(\mathbb{T}^2, (x_1, x_2))$ é isomorfo ao produto direto do grupo livre de rank 2 gerado por $\{u, v\}$ pelo grupo abeliano livre de rank 2 gerado por $\{x, y\}$, $\mathbb{F}_2(u, v) \times \mathbb{Z}^2$. □

Observação 5.1.2. Usando as proposições 5.1.1 e 5.1.2, as duas últimas colunas do diagrama (5.12) podem ser reescritas, a menos de isomorfismo, da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mathbb{F}_3(u, v, B) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{F}_3(u, v, B) \rtimes \mathbb{F}_2(x, y) & \xrightarrow{(p_2)\#} & \mathbb{F}_2(x, y) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \bar{\alpha} & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha' \\
 1 & \longrightarrow & \mathbb{F}_2(u, v) & \xrightarrow{\tau'} & \mathbb{F}_2(u, v) \times \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{(p_2')\#} & \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 1,
 \end{array}$$

sendo $\alpha(u) = (u, (0, 0))$, $\alpha(v) = (v, (0, 0))$, $\alpha(B) = (\mathbf{1}, (0, 0))$, $\alpha(x) = (\mathbf{1}, (1, 0))$ e $\alpha(y) = (\mathbf{1}, (0, 1))$.

5.1.3 O grupo $B_2(\mathbb{T}^2)$

Para obter uma apresentação do grupo $B_2(\mathbb{T}^2)$, primeiro recordamos que a sequência exata curta (1.1) para o caso particular $Y = \mathbb{T}^2$ e $n = 2$ é:

$$1 \longrightarrow P_2(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\rho_2} B_2(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\tau_2} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1. \tag{5.14}$$

Usando esta sequência e a apresentação de $P_2(\mathbb{T}^2, (x_1, x_2))$ dada na Proposição 5.1.2, encontraremos uma apresentação de $B_2(\mathbb{T}^2, (x_1, x_2))$ como extensão de \mathbb{Z}_2 por $P_2(\mathbb{T}^2)$.

Proposição 5.1.3. O grupo $B_2(\mathbb{T}^2, (x_1, x_2))$ admite a seguinte apresentação:

- geradores: u, v, x, y e σ .
- relações:
 - (a) $xux^{-1} = u$ e $yuy^{-1} = u$.
 - (b) $xvx^{-1} = v$ e $yvy^{-1} = v$.
 - (c) $xyx^{-1} = y$.
 - (d) $\sigma^2 = [u, v^{-1}]$.
 - (e) $\sigma x \sigma^{-1} = x$ e $\sigma y \sigma^{-1} = y$.
 - (f) $\sigma u \sigma^{-1} = [u, v^{-1}]u^{-1}x$ e $\sigma v \sigma^{-1} = [u, v^{-1}]v^{-1}y$

Demonstração. Em $B_2(\mathbb{T}^2, (x_1, x_2))$ consideramos σ_1 como sendo a trança representada na Figura 5.10. Note que σ_1 permuta os pontos base e que $\sigma_1^2 \in P_2(\mathbb{T}^2, (x_1, x_2))$.

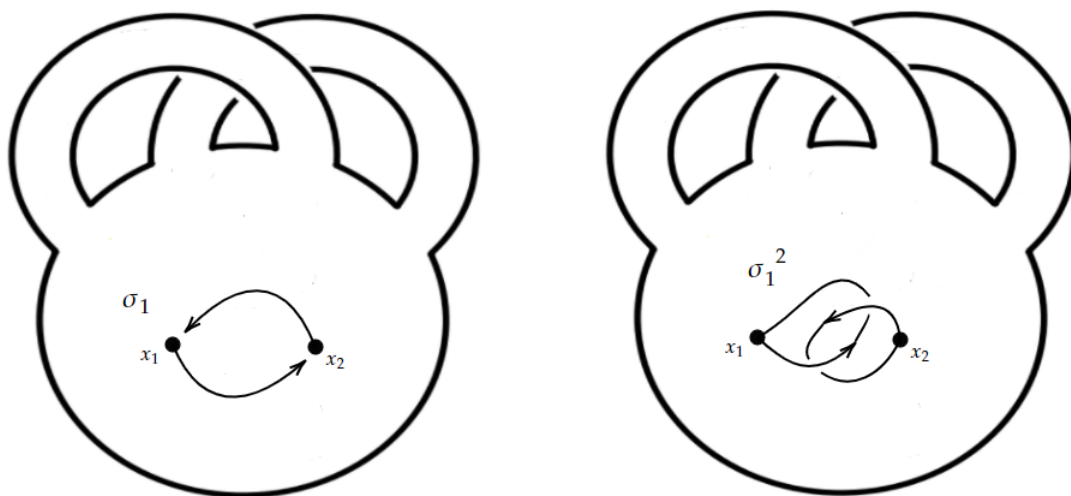


Figura 5.10: Representações das tranças σ_1 e σ_1^2 .

Como σ_1 permuta os pontos base, temos que $\tau_2(\sigma_1) = \bar{1} \in \mathbb{Z}_2$. Geometricamente, cada trança pura com duas cordas no toro é levada por ρ_2 para o mesmo representante geométrico. Assim, podemos usar a mesma notação para representar um gerador de $P_2(\mathbb{T}^2)$ e sua imagem por ρ_2 .

Denotando σ_1 por σ , temos o conjunto $\{u, v, x, y, \sigma\}$ como conjunto gerador de $B_2(\mathbb{T}^2)$. As relações (a),(b) e (c) da Proposição 5.1.3 decorrem das relações válidas em $P_2(\mathbb{T}^2)$ pela Proposição 5.1.2, elas formam o primeiro conjunto de relações obtidas pelo processo de extensão. A Figura 5.11 ilustra a equivalência entre as tranças σ_1^2 e $[\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}]$. Com isso a relação (d) da Proposição 5.1.3 é obtida.

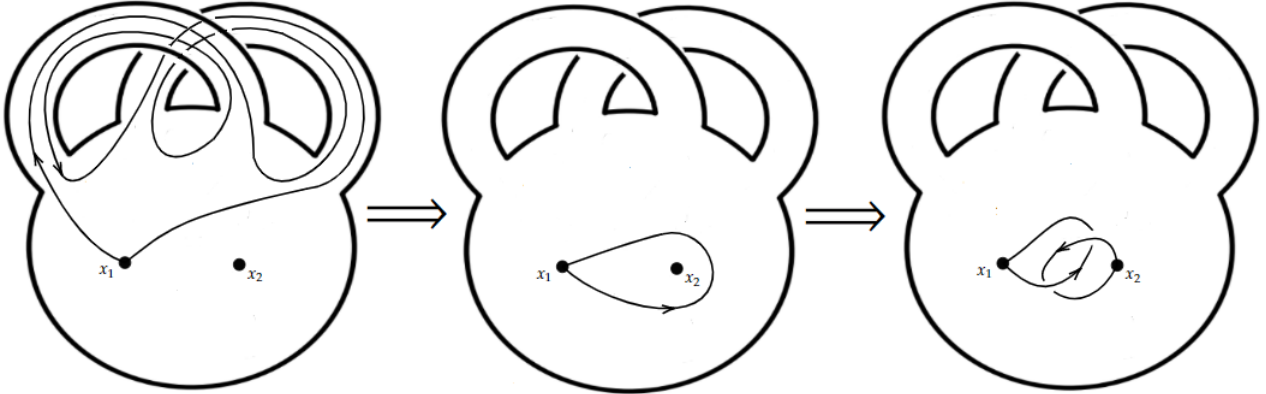


Figura 5.11: *Equivalência entre as tranças σ_1^2 e $[\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}]$*

Para obter as demais relações, precisamos conjugar os geradores de $P_2(\mathbb{T}^2)$ por σ . Utilizaremos a correspondência entre a apresentação algébrica e a geométrica de $P_2(\mathbb{T}^2, (x_1, x_2))$ estabelecida ao longo desta seção. Para analisar as conjugações $\sigma u \sigma^{-1}$ e $\sigma v \sigma^{-1}$, primeiro observamos que $\sigma_1 \rho_{1j} \sigma_1^{-1} = \rho_{2j}$ (a Figura 5.12 ilustra para $j = 1$, o caso $j = 2$ é análogo).

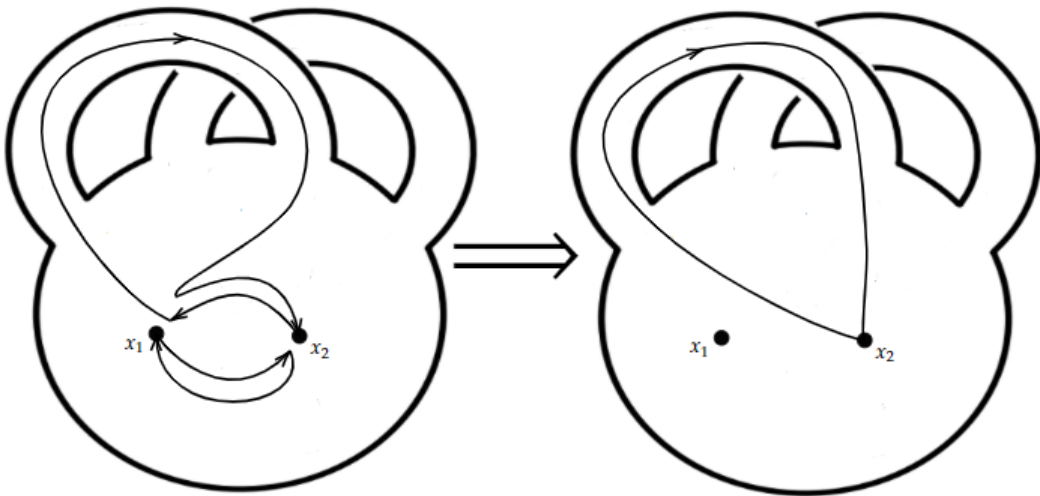


Figura 5.12: *Representação das tranças equivalentes $\sigma_1 \rho_{11} \sigma_1^{-1}$ e ρ_{21} .*

Utilizando a relação (a) da apresentação geométrica de $P_2(\mathbb{T}^2, (x_1, x_2))$ dada na Observação 5.1.1, temos que

$$[\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}] \rho_{1j}^{-1} \rho_{1j} B_{12}^{-1} \rho_{2j} = \rho_{2j} = \sigma_1 \rho_{1j} \sigma_1^{-1}. \quad (5.15)$$

Quando $j = 1$, o produto geométrico (5.15) corresponde à relação algébrica $\sigma u \sigma^{-1} = [u, v^{-1}] u^{-1} x$ e, quando $j = 2$, ele corresponde à relação $\sigma v \sigma^{-1} = [u, v^{-1}] v^{-1} y$. Portanto, vale a relação (f) da Proposição 5.1.3. Para analisar as conjugações $\sigma x \sigma^{-1}$ e $\sigma y \sigma^{-1}$, primeiro observamos na Figura 5.10 que a trança B_{12} e a trança σ_1^2 são equivalentes. Assim, utilizando ainda a relação (5.15), para $j = 1, 2$, temos:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \rho_{1j} B_{12}^{-1} \rho_{2j} \sigma_1^{-1} &= \sigma_1 \rho_{1j} \sigma_1^{-1} B_{12}^{-1} \sigma_1^{-1} \rho_{2j} \sigma_1^{-1} \\ &= \rho_{2j} B_{12}^{-1} B_{12} \rho_{1j} B_{12}^{-1} \\ &= \rho_{2j} \rho_{1j} B_{12}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Utilizando as relações (f) e (b) dadas na Observação 5.1.1, temos que

$$\rho_{21}B_{12}^{-1}\rho_{21}^{-1} = (B_{12}\rho_{11}^{-1}B_{12}^{-1})\rho_{11}B_{12}^{-1} = \rho_{21}\rho_{11}^{-1}\rho_{21}^{-1}\rho_{11}B_{12}^{-1}$$

o que implica em

$$\rho_{21}\rho_{11}B_{12}^{-1} = \rho_{11}B_{12}^{-1}\rho_{21} \quad (5.17)$$

Por outro lado, Utilizando as relações (g) e (e) dadas na Observação 5.1.1, temos que

$$\rho_{22}B_{12}^{-1}\rho_{22}^{-1} = (B_{12}\rho_{12}^{-1}B_{12}^{-1})\rho_{12}B_{12}^{-1} = \rho_{22}\rho_{12}^{-1}\rho_{22}^{-1}\rho_{12}B_{12}^{-1}$$

o que implica em

$$\rho_{22}\rho_{12}B_{12}^{-1} = \rho_{12}B_{12}^{-1}\rho_{22}. \quad (5.18)$$

Como vale (5.1.3) e (5.1.3), para $j = 1, 2$, temos que

$$\rho_{2j}\rho_{1j}B_{12}^{-1} = \rho_{1j}B_{12}^{-1}\rho_{2j}.$$

Assim, por (5.16), temos

$$\sigma_1\rho_{1j}B_{12}^{-1}\rho_{2j}\sigma_1^{-1} = \rho_{1j}B_{12}^{-1}\rho_{2j},$$

que é o equivalente geométrico da relação algébrica (e) da Proposição 5.1.3 e isso conclui a demonstração. \square

Observação 5.1.3. Vimos que o grupo das tranças puras com duas cordas no toro é isomorfo ao grupo $\mathbb{F}_2(u, v) \times \mathbb{Z}^2$, desse modo, cada elemento de $P_2(\mathbb{T}^2)$ pode ser escrito da forma $(w, (pq))$ para algum $w \in \mathbb{F}_2(u, v)$ e $p, q \in \mathbb{Z}$. Esse mesmo elemento pode ainda ser escrito da forma wx^py^q usando os geradores e as relações da Proposição 5.1.2. Como $P_2(\mathbb{T}^2)$ é subgrupo de $B_2(\mathbb{T}^2)$, em certos momentos da próxima seção, faremos um abuso de notação ao escrever um elemento de $B_2(\mathbb{T}^2)$ que também é elemento de $P_2(\mathbb{T}^2)$ da forma $(w, (pq))$ e operá-lo com elementos de $B_2(\mathbb{T}^2)$ que não estão em $P_2(\mathbb{T}^2)$. Uma vez que conjugando um elemento de $P_2(\mathbb{T}^2)$ por σ obtemos um elemento de $P_2(\mathbb{T}^2)$, as relações (e) e (f) da proposição anterior podem ser reescritas como

$$(e') \quad \sigma(\mathbf{1}, (1, 0))\sigma^{-1} = (\mathbf{1}, (1, 0)) \text{ e } \sigma(\mathbf{1}, (0, 1))\sigma^{-1} = (\mathbf{1}, (0, 1)).$$

$$(f') \quad \sigma(u, (0, 0))\sigma^{-1} = ([u, v^{-1}]u^{-1}, (1, 0)) \text{ e } \sigma(v, (0, 0))\sigma^{-1} = ([u, v^{-1}]v^{-1}, (0, 1)).$$

5.2 Caracterização das funções 2-ordenadas no Toro

Nesta seção, descreveremos as classes de homotopia (pontuada e não pontuada) das funções 2-ordenadas em \mathbb{T}^2 usando a estrutura dos grupos $B_2(\mathbb{T}^2)$ e $P_2(\mathbb{T}^2)$ estudadas na seção anterior. Nosso principal objetivo é encontrar uma relação entre as classes de homotopia de funções a 2 valores split no toro e as classes de homotopia das funções 2-ordenadas em \mathbb{T}^2 .

Proposição 5.2.1. O conjunto $[\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]_0$ das classes de homotopia com ponto base das funções 2-ordenadas em \mathbb{T}^2 está em correspondência biunívoca com o conjunto de pares ordenados de $P_2(\mathbb{T}^2)$ que comutam entre si.

Demonstração. Consideramos x_0 ponto base de \mathbb{T}^2 , (y_0, z_0) ponto base de $F_2(\mathbb{T}^2)$ e $\Psi : \mathbb{T}^2 \rightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$ uma função 2-ordenada que satisfaz $\Psi(x_0) = (y_0, z_0)$. Tomamos um laço μ em \mathbb{T}^2 como sendo a representação geométrica do elemento e_1 da base de $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ e um laço λ como sendo a representação geométrica do elemento e_2 da base de $\pi_1(\mathbb{T}^2)$. As restrições de Ψ a μ e a λ nos fornecem um par de tranças geométricas com duas cordas em \mathbb{T}^2 . O par $(\Psi_{\#}(e_1), \Psi_{\#}(e_2))$ de elementos de $P_2(\mathbb{T}^2)$ obtido através do isomorfismo induzido $\Psi_{\#} : \pi_1(\mathbb{T}^2) \rightarrow P_2(\mathbb{T}^2)$ é um invariante na classe de homotopia com ponto base da função Ψ , pois $F_2(\mathbb{T}^2)$ é do tipo $K(\pi, 1)$, além disso, as tranças $\Psi_{\#}(e_1)$ e $\Psi_{\#}(e_2)$ comutam, uma vez que os elementos e_1 e e_2 comutam. Reciprocamente, dado

um par de tranças (α, β) de $P_2(\mathbb{T}^2)$, consideramos $f_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$ e $f_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$ como representações geométricas de α e de β , respectivamente, ou seja, $\alpha = [f_1]$ e $\beta = [f_2]$. Diante disso, definimos uma função geométrica com domínio $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ (soma wedge de dois círculos) e contradomínio $F_2(\mathbb{T}^2)$ enviando cada $x \in \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ para $f_1(x)$ se x pertence à primeira cópia de \mathbb{S}^1 e para $f_2(x)$ se x pertence à segunda cópia de \mathbb{S}^1 . Supondo que α e β comutam entre si, podemos estender esta função a uma função de \mathbb{T}^2 em $F_2(\mathbb{T}^2)$. \square

Utilizando a relação entre as classes de homotopia pontuada e homotopia livre mencionada na Seção 1.4, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 5.2.1. O conjunto $[\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]$ das classes de homotopia das funções 2-ordenadas em \mathbb{T}^2 está em correspondência biunívoca com o conjunto de pares ordenados conjugados de $P_2(\mathbb{T}^2)$ que comutam entre si, isto é, dois pares (α_1, β_1) e (α_2, β_2) de elementos de $P_2(\mathbb{T}^2)$ que comutam entre si são levados na mesma classe de homotopia livre de funções 2-ordenadas em \mathbb{T}^2 se existe $\delta \in P_2(\mathbb{T})$ tal que $\delta\alpha_1\delta^{-1} = \alpha_2$ e $\delta\beta_1\delta^{-1} = \beta_2$.

Demonstração. Para caracterizar $[\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]$ utilizando a Proposição 5.2.1, vamos analisar a ação de $P_2(\mathbb{T}^2)$ no conjunto dos pares de elementos de $P_2(\mathbb{T}^2)$ que comutam entre si. Mais uma vez estaremos considerando \mathbb{T}^2 com ponto base x_0 e $F_2(\mathbb{T}^2)$ com ponto base (y_0, z_0) . Sejam (α_1, β_1) e (α_2, β_2) pares de elementos em $P_2(\mathbb{T}^2)$ que comutam entre si associados às classes de funções $[\Psi], [\Psi'] \in [\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]_0$, respectivamente. Se existe uma homotopia livre $H : \mathbb{T}^2 \times [0, 1] \rightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$ entre Ψ e Ψ' , temos que $H(x_0, \cdot)$ é um laço em $F_2(\mathbb{T}^2)$ com ponto base (y_0, z_0) , isto é, $H(x_0, \cdot)$ é um elemento de $P_2(\mathbb{T}^2)$. Denotando tal elemento por δ , temos que $\delta^{-1}\alpha_1\delta = \alpha_2$ e $\delta^{-1}\beta_1\delta = \beta_2$, o que caracteriza a ação de $P_2(\mathbb{T}^2)$ nos pares de elementos de $P_2(\mathbb{T}^2)$ que comutam entre si. \square

Podemos obter um resultado análogo à Proposição 5.2.1 para a classe de homotopia pontuada das funções 2-não-ordenadas no toro. A demonstração da próxima Proposição será, portanto, omitida, uma vez que pode ser obtida a partir da demonstração da Proposição 5.2.1 ao trocar $F_2(\mathbb{T}^2)$ por $D_2(\mathbb{T}^2)$, $P_2(\mathbb{T}^2)$ por $B_2(\mathbb{T}^2)$ e tomar $[(y_0, z_0)]$ como ponto base de $D_2(\mathbb{T}^2)$.

Proposição 5.2.2. O conjunto $[\mathbb{T}^2, D_2(\mathbb{T}^2)]_0$ das classes de homotopia com ponto base das funções a 2-não-ordenadas em \mathbb{T}^2 está em correspondência biunívoca com o conjunto de pares ordenados de $B_2(\mathbb{T}^2)$ que comutam entre si.

Como corolário, temos:

Corolário 5.2.2. O conjunto $[\mathbb{T}^2, D_2(\mathbb{T}^2)]$ das classes de homotopia das funções 2-não-ordenadas em \mathbb{T}^2 está em correspondência biunívoca com o conjunto de pares ordenados conjugados de $B_2(\mathbb{T}^2)$ que comutam entre si, isto é, dois pares (α_1, β_1) e (α_2, β_2) de elementos de $B_2(\mathbb{T}^2)$ que comutam entre si são associados na mesma classe de homotopia de funções 2-ordenadas em \mathbb{T}^2 se existe $\delta \in B_2(\mathbb{T})$ tal que $\delta\alpha_1\delta^{-1} = \alpha_2$ e $\delta\beta_1\delta^{-1} = \beta_2$.

Os dois últimos corolários são utilizados para demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 5.2.3. Na projeção $\hat{\pi} : [\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)] \rightarrow [\mathbb{T}^2, D_2(\mathbb{T}^2)]$ que é induzida pelo recobrimento $\pi : F_2(\mathbb{T}^2) \rightarrow D_2(\mathbb{T}^2)$, duas classes de homotopia de funções 2-ordenadas em \mathbb{T}^2 são levadas à mesma classe de homotopia de funções 2-não-ordenadas se, e somente se, quaisquer dois pares de tranças que representam estas funções são conjugadas em $B_2(\mathbb{T})$.

Demonstração. (\implies) Sejam $f_1, f_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$ tais que $\hat{\pi}([f_1]) = \hat{\pi}([f_2])$, isto é, as funções 2-não-ordenadas $\pi \circ f_1$ e $\pi \circ f_2$ são livremente homotópicas. Suponhamos que

$$f_{1\#}(e_1) = \alpha_1 \text{ e } f_{1\#}(e_2) = \beta_1$$

e

$$f_{2\#}(e_1) = \alpha_2 \text{ e } f_{2\#}(e_2) = \beta_2.$$

Como π é recobrimento, o homomorfismo induzido $\pi_{\#} : P_2(\mathbb{T}^2) \rightarrow B_2(\mathbb{T}^2)$ é a inclusão e temos

$$(\pi \circ f_1)_{\#}(e_1) = \alpha_1 \text{ e } (\pi \circ f_1)_{\#}(e_2) = \beta_1$$

e

$$(\pi \circ f_2)_{\#}(e_1) = \alpha_2 \text{ e } (\pi \circ f_2)_{\#}(e_2) = \beta_2$$

como elementos de $B_2(\mathbb{T}^2)$. Usando o Corolário 5.2.2, podemos concluir que os pares (α_1, β_1) e (α_2, β_2) são conjugados em $B_2(\mathbb{T}^2)$.

(\Leftarrow) Se (α_1, β_1) e (α_2, β_2) são os pares de elementos em $P_2(\mathbb{T}^2) \subset B_2(\mathbb{T}^2)$ conjugados (por elementos de $B_2(\mathbb{T}^2)$) associados às classes $[f_1], [f_2] \in [\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]$, respectivamente, temos que as classes $[\pi \circ f_1], [\pi \circ f_2] \in [\mathbb{T}^2, D_2(\mathbb{T}^2)]$ também estão associadas aos pares (α_1, β_1) e (α_2, β_2) , respectivamente. Assim, pelo Corolário 5.2.2, temos que $\pi \circ f_1$ e $\pi \circ f_2$ estão na mesma classe de homotopia livre, logo $\widehat{\pi}([f_1]) = \widehat{\pi}([f_2])$. □

Observação 5.2.1. A proposição anterior deixa clara a ação de \mathbb{Z}_2 no conjunto $[\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]$ (mencionada no Teorema 3.2.4). Como cada elemento de $[\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]$ está associado a um conjunto de conjugados de um certo par (α, β) por elementos de $P_2(\mathbb{T}^2)$, o elemento $\bar{0} \in \mathbb{Z}_2$ atua por conjugação associando (α, β) a $(\delta\alpha\delta^{-1}, \delta\beta\delta^{-1})$, para $\delta \in P_2(\mathbb{T}^2)$ e o elemento $\bar{1} \in \mathbb{Z}_2$ atua por conjugação associando (α, β) a $(\delta\alpha\delta^{-1}, \delta\beta\delta^{-1})$, para $\delta \in B_2(\mathbb{T}^2) \setminus P_2(\mathbb{T}^2)$.

Na seção anterior vimos que $P_2(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{F}_2(u, v) \times \mathbb{Z}^2$. Assim, utilizando a Proposição 5.1.2 e os resultados anteriores, podemos expressar algebricamente os elementos dos conjuntos $[\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]_0$ e $[\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]$.

Proposição 5.2.4. O conjunto $[\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]_0$ das classes de homotopia com ponto base das funções 2-ordenadas em \mathbb{T}^2 está em correspondência biunívoca com o conjunto de pares (α, β) de elementos de $\mathbb{F}_2(u, v) \times \mathbb{Z}^2$ da forma $\alpha = (w^r, (a, b)), \beta = (w^s, (c, d))$, sendo $(a, b), (c, d), (r, s) \in \mathbb{Z}^2$ e $w \in \mathbb{F}_2(u, v)$. Podemos, além disso, assumir que w é um elemento primitivo de $\mathbb{F}_2(u, v)$ (isto é, w não é potência de nenhum outro elemento de $\mathbb{F}_2(u, v)$).

Demonstração. Seja (α, β) um par de elementos de $\mathbb{F}_2(u, v) \times \mathbb{Z}^2$ que corresponde a um certo elemento de $[\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]_0$. Temos que $\alpha = (w_1, (a, b))$ e $\beta = (w_2, (c, d))$, sendo w_1 e w_2 palavras em $\mathbb{F}_2(u, v)$ e $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Como α e β comutam, temos que w_1 e w_2 comutam no grupo livre em dois geradores e, portanto, existe uma palavra primitiva $w \in \mathbb{F}_2(u, v)$ e inteiros r e s tais que $w_1 = w^r$ e $w_2 = w^s$. □

Proposição 5.2.5. O conjunto $[\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]$ das classes de homotopia das funções a 2 valores ordenados de \mathbb{T}^2 está em correspondência biunívoca com o conjunto de classes de equivalência dos pares (α, β) de elementos de $\mathbb{F}_2(u, v) \times \mathbb{Z}^2$ com a forma dada na Proposição 5.2.4, onde a classe de equivalência é definida da seguinte forma: os pares de elementos $((w_1^{r_1}, (a_1, b_1)), (w_1^{s_1}, (c_1, d_1)))$ e $((w_2^{r_2}, (a_2, b_2)), (w_2^{s_2}, (c_2, d_2)))$ de $\mathbb{F}_2(u, v) \times \mathbb{Z}^2$ são equivalentes se, e somente se, $(a_1, b_1, c_1, d_1) = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ e uma das seguintes situações ocorre:

- (i) $w_1 = w_2 = \mathbf{1}$;
- (ii) w_1 e w_2 são elementos primitivos e existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tal que w_1 e w_2^ε são conjugados em $\mathbb{F}_2(u, v)$, ainda, $(r_1, s_1) = \varepsilon(r_2, s_2) \neq (0, 0)$.

Demonstração. (\Rightarrow) Por hipótese, temos que existe $(w, (p, q)) \in \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}^2$ tal que

$$(w_2^{r_2}, (a_2, b_2)) = (w, (p, q))(w_1^{r_1}, (a_1, b_1))(w^{-1}, (-p, -q)) = (ww_1^{r_1}w^{-1}, (a_1, b_1))$$

e

$$(w_2^{s_2}, (c_2, d_2)) = (w, (p, q))(w_1^{s_1}, (c_1, d_1))(w^{-1}, (-p, -q)) = (ww_1^{s_1}w^{-1}, (c_1, d_1)).$$

Daí vale que $(a_1, b_1, c_1, d_1) = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ e valem as igualdades

$$w_2^{r_2} = ww_1^{r_1}w^{-1} = (ww_1w^{-1})^{r_1}$$

e

$$w_2^{s_2} = ww_1^{s_1}w^{-1} = (ww_1w^{-1})^{s_1}.$$

De modo que $w_1 \neq \mathbf{1}$ se, e somente se, $w_2 \neq \mathbf{1}$. Suponhamos que $w_1 \neq \mathbf{1}$ e $w_2 \neq \mathbf{1}$. Como w_1 é um elemento primitivo, temos que ww_1w^{-1} também é primitivo e sendo w_2 primitivo, temos que

$$w_2 = ww_1w^{-1} \text{ e } (r_2, s_2) = (r_1, s_1)$$

ou

$$w_2 = ww_1^{-1}w^{-1} \text{ e } (r_2, s_2) = (-r_1, -s_1).$$

(\Leftarrow) Supondo $(a_1, b_1, c_1, d_1) = (a_2, b_2, c_2, d_2)$, se vale (i), podemos tomar $(w, (p, q)) \in \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}^2$ qualquer que obtemos

$$(\mathbf{1}^{r_2}, (a_2, b_2)) = (w, (p, q))(\mathbf{1}^{r_1}, (a_2, b_2))(w^{-1}, (-p, -q))$$

e

$$(\mathbf{1}^{s_2}, (c_2, d_2)) = (w, (p, q))(\mathbf{1}^{s_1}, (c_2, d_2))(w^{-1}, (-p, -q)).$$

Usando o Corolário 5.2.1, temos que os pares

$$((w_1^{r_1}, (a_1, b_1)), (w_1^{s_1}, (c_1, d_1))) \text{ e } ((w_2^{r_2}, (a_2, b_2)), (w_2^{s_2}, (c_2, d_2)))$$

são equivalentes. Se vale (ii), consideramos $w \in \mathbb{F}_2$ que satisfaz $w_1 = ww_2^\varepsilon w^{-1}$ e $p, q \in \mathbb{Z}$ quaisquer. Assim, temos que

$$(w_1^{r_1}, (a_2, b_2)) = ((ww_2^\varepsilon w^{-1})^{r_1}, (a_2, b_2)) = (w, (p, q))(w_2^{r_2}, (a_2, b_2))(w^{-1}, (-p, -q))$$

e

$$(w_1^{s_1}, (c_2, d_2)) = ((ww_2^\varepsilon w^{-1})^{s_1}, (c_2, d_2)) = (w, (p, q))(w_2^{s_2}, (c_2, d_2))(w^{-1}, (-p, -q)).$$

Usando novamente o Corolário 5.2.1, temos que os pares

$$((w_1^{r_1}, (a_1, b_1)), (w_1^{s_1}, (c_1, d_1))) \text{ e } ((w_2^{r_2}, (a_2, b_2)), (w_2^{s_2}, (c_2, d_2)))$$

são equivalentes. □

Para classificar algebricamente em termos de $\mathbb{F}_2(u, v) \times \mathbb{Z}^2$ as classes de homotopia das funções a 2 valores no toro, precisamos de dois lemas técnicos. Para enunciar e demonstrar esses lemas, precisamos destacar algumas ferramentas que serão utilizadas. Consideramos a involução $\Delta \in \text{Aut}(\mathbb{F}_2(u, v))$ que é definida nos geradores de $\mathbb{F}_2(u, v)$ por $\Delta(u) = u^{-1}$ e $\Delta(v) = v^{-1}$. Para simplificar a notação, denotaremos por \hat{w} a imagem da palavra $w \in \mathbb{F}_2(u, v)$ via esse automorfismo. Consideramos a projeção $\gamma : P_2(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathbb{F}_2(u, v)$. Por fim, consideramos $|w|_u$ (respectivamente $|w|_v$) como sendo a soma dos expoentes dos u 's (respectivamente dos v 's) que aparecem na palavra w e $l(w)$ como sendo o tamanho da palavra w .

Lema 5.2.1. Se $w \in \mathbb{F}_2(u, v)$, então são válidas as igualdades:

- (a) $\hat{w} = vu^{-1}\gamma(\sigma w \sigma^{-1})wv^{-1}$,
- (b) $\sigma w \sigma^{-1} = (uv^{-1}\hat{w}vu^{-1}, (|w|_u, |w|_v))$.

Em particular, \widehat{w} é um conjugado de $\gamma(\sigma w \sigma^{-1})$ em $\mathbb{F}_2(u, v)$. Sendo σ o gerador de $B_2(\mathbb{T}^2)$ dado na Proposição 5.1.3.

Demonstração. Pela Proposição 5.1.3, temos as relações

$$\sigma u \sigma^{-1} = [u, v^{-1}] u^{-1} x = uv^{-1} \widehat{u} v u^{-1} x^{|u|_u}$$

e

$$\sigma v \sigma^{-1} = [u, v^{-1}] v^{-1} y = uv^{-1} \widehat{v} v u^{-1} y^{|v|_v}.$$

Assim

$$\gamma(\sigma u \sigma^{-1}) = uv^{-1} \widehat{u} v u^{-1} \text{ e } \gamma(\sigma v \sigma^{-1}) = uv^{-1} \widehat{v} v u^{-1}.$$

Portanto, a igualdade (a) é válida. Como os elementos x e y estão no centro de $P_2(\mathbb{T}^2)$, temos que

$$\sigma w \sigma^{-1} = uv^{-1} \widehat{w} v u^{-1} x^{|w|_u} y^{|w|_v}$$

e, usando a identificação feita na Observação 5.1.3, a igualdade (b) é válida. \square

Lema 5.2.2. Sejam $a, b, w \in \mathbb{F}_2(u, v)$ quaisquer. São válidas as seguintes afirmações:

- (a) Se $ab \in \mathbb{F}_2(u, v)$ é escrita na forma reduzida. Então $ab = \widehat{b}\widehat{a}$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{F}_2(u, v)$ e $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a = (\widehat{\lambda}\lambda)^s \widehat{\lambda} \text{ e } b = (\lambda\widehat{\lambda})^r \lambda. \quad (5.19)$$

- (b) Os elementos w e \widehat{w} são conjugados em $\mathbb{F}_2(u, v)$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{F}_2(u, v)$ e existe $l \in \mathbb{Z}$ tais que

$$w = (\lambda\widehat{\lambda})^l. \quad (5.20)$$

Demonstração. Se $a = (\widehat{\lambda}\lambda)^s \widehat{\lambda}, b = (\lambda\widehat{\lambda})^r \lambda$, então

$$ab = (\widehat{\lambda}\lambda)^s \widehat{\lambda} (\lambda\widehat{\lambda})^r \lambda = (\widehat{\lambda}\lambda)^s (\lambda\widehat{\lambda})^r \widehat{\lambda}\lambda = (\widehat{\lambda}\lambda)^r (\widehat{\lambda}\lambda)^s \widehat{\lambda}\lambda = (\widehat{\lambda}\lambda)^r \widehat{\lambda} (\lambda\widehat{\lambda})^s \lambda = \widehat{b}\widehat{a}$$

e vale a “volta” de (a). Se $w = (\lambda\widehat{\lambda})^l$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}_2(u, v)$, então

$$\widehat{w} = (\widehat{\lambda}\lambda)^l = (\widehat{\lambda}\lambda)^l \widehat{\lambda} (\widehat{\lambda})^{-1} = \widehat{\lambda} (\lambda\widehat{\lambda})^l (\widehat{\lambda})^{-1} = \widehat{\lambda} (w) (\widehat{\lambda})^{-1}$$

e vale a “volta” de (b).

A prova da “ida” de (a) será feita simultaneamente à prova da “ida” de (b). Ambas serão feitas por indução no tamanho k das palavras ab e w . Uma vez provado que as idas de (a) e (b) valem para $l(ab) < k$ e $l(w) < k$, isso irá implicar que a ida de (a) vale para $l(ab) = k$ e que a ida de (b) vale para $l(w) = k$. Organizamos a demonstração passo a passo para melhor compreensão. Antes de iniciá-la, precisamos fazer algumas observações. Como ab está na forma reduzida, as palavras a e b não são inversas uma da outra, logo ab é a palavra vazia se, e somente se, a e b são triviais e, nesse caso, o resultado segue trivialmente. O resultado também segue trivialmente se w for a palavra vazia, logo, assumimos que ab e w são não triviais e estão nas formas reduzidas. Denote por (E1) a equação $ab = \widehat{b}\widehat{a}$ e por (E2) a equação $\widehat{w} = \theta w \theta^{-1}$, onde $\theta \in \mathbb{F}_2(u, v)$. Se a e b satisfazem (E1), temos que $\widehat{b}\widehat{a}$ também está na forma reduzida, pois $l(ab) = l(\widehat{b}\widehat{a})$. Observe que se $z \in \mathbb{F}_2(u, v)$, então $|z|_u = -|\widehat{z}|_u$ e $|z|_v = -|\widehat{z}|_v$, logo se a e b satisfazem (E1), temos

$$-|\widehat{a}\widehat{b}|_u = |ab|_u = |\widehat{b}\widehat{a}|_u = 0 \text{ e } -|\widehat{a}\widehat{b}|_v = |ab|_v = |\widehat{b}\widehat{a}|_v = 0,$$

e se w satisfaz (E2), temos

$$-|w|_u = |\widehat{w}|_u = |\theta w \theta^{-1}|_u = |\theta|_u + |w|_u - |\theta|_u = |w|_u = 0 \quad (5.21)$$

e

$$|\widehat{w}|_v = |\theta w \theta^{-1}|_v = |\theta|_u + |w|_v - |\theta|_v = |w|_v = 0, \quad (5.22)$$

logo $l(ab)$ e $l(w)$ são números pares. Como estamos assumindo $w \neq 1$, temos que $\theta \neq 1$. Feitas estas observações, podemos iniciar a prova por indução em $k = l(w) = l(ab)$.

- **Se $k \leq 4$ e vale (E1), então existem $r, s \in \mathbb{Z}$ e $\lambda \in \mathbb{F}_2(u, v)$ que satisfazem (5.19):** Observe que k não pode ser igual a 2. Se $k = 4$ e vale (E1), então $l(a) \neq 1$, pois nesse caso existiria $b' \in \mathbb{F}_2(u, v)$ tal que ab' é a forma reduzida de b , portanto, ab não estaria na forma reduzida. De forma análoga, podemos concluir que $l(b) \neq 1$, logo $l(a) = l(b) = 2$ e $a = \widehat{b}$. Tomando $r = s$ e $\lambda = b$, temos que vale (5.19).
- **Se $k \leq 4$ e vale (E2), então existem $l \in \mathbb{Z}$ e $\lambda \in \mathbb{F}_2(u, v)$ que satisfazem (5.20):** Usando (5.21) e (5.22), podemos concluir que $k \neq 2$. Se $k = 4$ e vale (E2), usando (5.21) e (5.22), podemos concluir que $w = u^\varepsilon v^\varepsilon u^{-\varepsilon} v^{-\varepsilon}$ ou $w = v^\varepsilon u^\varepsilon v^{-\varepsilon} u^{-\varepsilon}$, para $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, logo, vale (5.20) ao tomarmos $l = 1$, $\lambda = u^\varepsilon v^\varepsilon$ para o primeiro caso e $\lambda = v^\varepsilon u^\varepsilon$ para o segundo caso.
- **Passo de indução para o item (a):** Suponhamos que para algum $k \geq 4$ vale que se $l(ab) < k$, então (E1) implica (5.19) e se $l(w) < k$, então (E2) implica (5.20). Queremos provar que se $l(ab) = k$, então (E1) implica (5.19). Suponhamos que a e b satisfazem (E1) e $l(ab) = k$. Se $l(a) = l(b)$, então $b = \widehat{a}$ e é suficiente tomar $r = s = 0$ e $\lambda = b$ para que a condição (5.19) seja satisfeita. Assumimos então que $l(a) \neq l(b)$. Como (E1) pode ser reescrita como $ba = \widehat{a}\widehat{b}$, podemos assumir (alterando o formato de (E1) se necessário) que $l(a) < l(b)$. Devemos então considerar dois casos:

- (i) **$l(a) \leq l(b)/2$:** Como ambos os lados da igualdade (E1) estão na forma reduzida, temos que existe $b_1 \in \mathbb{F}_2(u, v)$ tal que $b = \widehat{a}b_1\widehat{a}$ está na forma reduzida. Fazendo essa substituição em (E1), obtemos $a\widehat{a}b_1\widehat{a} = \widehat{a}b_1a\widehat{a}$, logo $\widehat{a}b_1 = \widehat{b}_1a$ está escrita na forma reduzida. Note que esta equação é do mesmo formato de (E1), logo, podemos aplicar a hipótese de indução nela, já que $l(\widehat{a}b_1) < l(b) < l(ab)$. Assim, existe $\lambda \in \mathbb{F}_2(u, v)$ e $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $\widehat{a} = (\widehat{\lambda}\lambda)^s \widehat{\lambda}$ e $b_1 = (\lambda\widehat{\lambda})^r \lambda$. Portanto $a = (\lambda\widehat{\lambda})^s \lambda$ e

$$b = \widehat{a}b_1\widehat{a} = (\widehat{\lambda}\lambda)^s \widehat{\lambda} (\lambda\widehat{\lambda})^r \lambda (\widehat{\lambda}\lambda)^s \widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}\lambda)^{2s+r+1} \widehat{\lambda},$$

o que prova a “ida” de (a) para este caso.

- (ii) **$l(b)/2 \leq l(a) \leq l(b)/2$:** Como ambos os lados da igualdade (E1) estão na forma reduzida, temos que existe $b_1 \in \mathbb{F}_2(u, v)$ tal que $b_1 \neq 1$ e $b = \widehat{a}b_1\widehat{a}$ está na forma reduzida. Fazendo a essa substituição em (E1), obtemos $a\widehat{a}b_1 = \widehat{a}b_1\widehat{a}$ que é equivalente a $\widehat{a}b_1\widehat{a}^{-1} = \widehat{b}_1$. Observe que esta equação tem o formato de (E2) e podemos aplicar a hipótese de indução uma vez que $l(\widehat{b}_1) < l(b) < l(ab) = k$. Portanto, existe $\lambda \in \mathbb{F}_2(u, v)$ e $l \in \mathbb{Z}$ tais que $b_1 = (\lambda\widehat{\lambda})^l$. Como $b_1 \neq 1$, vale que $\lambda\widehat{\lambda} \neq 1$ e $l \neq 0$. Vejamos que $\lambda\widehat{\lambda}$ pode ser escolhido como sendo um elemento primitivo de $\mathbb{F}_2(u, v)$. Para provar isso, suponhamos que $\lambda\widehat{\lambda}$ não é um elemento primitivo. Como $\mathbb{F}_2(u, v)$ é o grupo livre em dois geradores, o centralizador de $\lambda\widehat{\lambda}$ em $\mathbb{F}_2(u, v)$ é cíclico infinito, gerado pelo elemento primitivo v . Daí, trocando v por v^{-1} se necessário, temos que existe $s \geq 2$ tal que $\lambda\widehat{\lambda} = v^s$. Assim $b_1 = v^{sl}$ e substituindo isso na relação $\widehat{a}b_1\widehat{a}^{-1} = \widehat{b}_1$, temos que $\widehat{v}^{sl} = \widehat{a}v^{sl}\widehat{a} = (\widehat{a}v\widehat{a})^{sl}$ e, portanto, $\widehat{v} = \widehat{a}v\widehat{a}$ que é uma expressão na forma de (E2). Como $l(v) < l(b_1) < k$, aplicando a hipótese de indução e usando o fato de que v é primitivo, existe $\gamma \in \mathbb{F}_2(u, v)$ tal que $v = \gamma\widehat{\gamma}$. Portanto $b_1 = (\gamma\widehat{\gamma})^{sl}$, sendo $\gamma\widehat{\gamma}$ primitivo, logo podemos escolher o elemento $\lambda\widehat{\lambda}$ como sendo primitivo. Substituindo b_1 por $(\lambda\widehat{\lambda})^l$ na relação $\widehat{a}b_1\widehat{a}^{-1} = \widehat{b}_1$, temos que

$$(\widehat{a}\lambda\widehat{\lambda}\widehat{a}^{-1})^l = \widehat{a}(\lambda\widehat{\lambda})^l\widehat{a}^{-1} = \widehat{(\lambda\widehat{\lambda})}^l = (\widehat{\lambda}\lambda)^l,$$

sendo $\lambda\widehat{\lambda}$ primitivo. Novamente pelo argumento de que $\mathbb{F}_2(u, v)$ é o grupo livre em dois geradores, segue que $\widehat{a}\lambda\widehat{\lambda}\widehat{a}^{-1} = \widehat{\lambda}\lambda = \widehat{\lambda}\lambda\widehat{\lambda}^{-1}$, logo $\widehat{\lambda}^{-1}\widehat{a}\lambda\widehat{\lambda} = \widehat{\lambda}\widehat{\lambda}^{-1}\widehat{a}$ e temos que $\widehat{\lambda}^{-1}\widehat{a}$

pertence ao centralizador de $\lambda\hat{\lambda}$. Como $\lambda\hat{\lambda}$ é elemento primitivo, existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $\hat{\lambda}^{-1}\hat{a} = (\lambda\hat{\lambda})^t$, logo $\hat{a} = \hat{\lambda}(\lambda\hat{\lambda})^t = (\hat{\lambda}\lambda)^t\hat{\lambda}$, $a = (\lambda\hat{\lambda})^t\lambda$ e $b = \hat{a}b_1 = \hat{\lambda}(\lambda\hat{\lambda})^{t+l} = (\hat{\lambda}\lambda)^{t+l}\hat{\lambda}$, isto é, vale (5.19) também para este caso e concluímos a demonstração da “ida” de (a).

- **Passo de indução para o item (b):** Suponhamos que para algum $k \geq 4$ vale que se $l(ab) < k$, então (E1) implica (5.19) e se $l(w) < k$, então (E2) implica (5.20). Queremos provar que se $l(w) = k$, então (E2) implica (5.20). Suponhamos que $l(w) = k$ e que existe $\theta \in \mathbb{F}_2(u, v)$ tal que $\hat{w} = \theta w \theta^{-1}$. Se $\theta = 1$, então $w = \hat{w}$, absurdo. Assim podemos supor $\theta \neq 1$ e como $l(w) = l(\hat{w})$, existe cancelamento na expressão $\theta w \theta^{-1}$. Tomando a inversa da relação $\hat{w} = \theta w \theta^{-1}$ caso necessário, podemos supor que existe cancelamento entre θ e w . Assim, existem $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{F}_2(u, v)$ tais que $\theta = \theta_1 \theta_2$ está escrito na forma reduzida e o cancelamento entre θ e w é maximal, isto é, se $w_1 = \theta_2 w$ está escrita na forma reduzida, então $\theta_1 w_1$ está escrita na forma reduzida. Note que $l(w_1) = l(w) - l(\theta_2)$. Seja $l(\theta) = n$ e $l(\theta_2) = r$. Iremos considerar dois casos:

- (i) $r = n$: Neste caso o cancelamento ocorre apenas entre θ e w . Como $\theta = \theta_1 \theta_2$, temos que $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = \theta$ e $w = \theta^{-1} w_1$, logo

$$l(w) = l(\theta^{-1} w_1) \leq l(\theta^{-1}) + l(w_1) = n + l(w) - n = l(w).$$

Diante disso, $l(\theta^{-1} w_1) = l(\theta^{-1}) + l(w_1)$ e, portanto, $w = \theta^{-1} w_1$ está escrita na forma reduzida, bem como $\hat{w} = \hat{\theta}^{-1} \hat{w}_1$. Assim, $\hat{\theta}^{-1} \hat{w}_1 = \hat{w} = \theta w \theta^{-1} = w_1 \theta^{-1}$, logo

$$l(\hat{w}) = l(w_1 \theta^{-1}) \leq l(w_1) + l(\theta^{-1}) = l(\hat{w}) - n + n = l(\hat{w}).$$

Diante disso, $l(w_1 \theta^{-1}) = l(w_1) + l(\theta^{-1})$ e, portanto, $\hat{w} = w_1 \theta^{-1}$ também está escrita na forma reduzida. Temos então que $\hat{\theta}^{-1} \hat{w}_1 = w_1 \theta$. Observe que esta equação tem o formato de (E1) e podemos aplicar a hipótese de indução pois $l(w_1 \theta^{-1}) = l(\theta^{-1} w_1) = l(w) = k$. Assim, existe $\lambda \in \mathbb{F}_2(u, v)$ e $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $w_1 = (\hat{\lambda}\lambda)^s \hat{\lambda}$ e $\theta^{-1} = (\hat{\lambda}\lambda)^r \lambda$. Portanto, $w = \theta^{-1} w_1 = (\hat{\lambda}\lambda)^r \lambda (\hat{\lambda}\lambda)^s \hat{\lambda} = (\hat{\lambda}\lambda)^{r+s+1}$, o que conclui a “ida” do item (b) para este caso.

- (ii) $r < n$: Neste caso, há cancelamento entre θ e w e entre w e θ^{-1} . Tomando a inversa em ambos os lados da equação (E2) caso necessário, podemos supor que há menos cancelamentos entre θ e w do que entre w e θ^{-1} ou que essas quantidades são iguais. Assim, existem $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3 w_2 \in \mathbb{F}_2(u, v)$ tais que $\theta = \theta'_1 \theta'_2 \theta'_3$, $w = \theta'_3{}^{-1} w_2 \theta'_2 \theta'_3$ e $\hat{w} = \theta'_1 \theta'_2 w_2 \theta'_1{}^{-1}$, todas as expressões escritas nas formas reduzidas. Como $l(w) = l(\hat{w})$, temos que $l(\theta'_3{}^{-1} w_2 \theta'_2 \theta'_3) = l(\theta'_1 \theta'_2 w_2 \theta'_1{}^{-1})$ e segue que $l(\theta'_1) = l(\theta'_3)$. Como $\hat{w} = \theta'_1 \theta'_2 w_2 \theta'_1{}^{-1}$, podemos escrever $w = \hat{\theta}'_1 \hat{\theta}'_2 \hat{w}_2 \hat{\theta}'_1{}^{-1}$ na forma reduzida e concluir que $\hat{\theta}'_1 = \hat{\theta}'_3{}^{-1}$ e $w_2 \theta'_2 = \hat{\theta}'_2 \hat{w}_2$ escritas nas formas reduzidas. Note que esta última equação está no formato de (E1) e podemos aplicar a hipótese de indução, pois $l(w_2 \theta'_2) \leq l(w) = k$. Assim, existe $\lambda \in \mathbb{F}_2(u, v)$ e $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $w_2 = (\hat{\lambda}\lambda)^s \hat{\lambda}$ e $\theta'_2 = (\lambda\hat{\lambda})^r \lambda$. Assim, temos

$$w = \theta'_3{}^{-1} w_2 \theta'_2 \theta'_3 = \theta'_3{}^{-1} (\hat{\lambda}\lambda)^{r+s+1} \theta'_3 = (\theta'_3{}^{-1} \lambda \hat{\theta}'_3 \hat{\theta}'_3{}^{-1} \hat{\lambda} \theta'_3)^{r+s+1}$$

e tomando $\gamma = \theta'_3{}^{-1} \lambda \hat{\theta}'_3$, temos $w = (\gamma \hat{\gamma})^{r+s+1}$, o que conclui a demonstração da “ida” de (b) e também a demonstração do lema. □

Observação 5.2.2. Pelo Teorema 3.2.4, o conjunto das classes de homotopia das funções a 2 valores split em \mathbb{T}^2 está em correspondência biunívoca com as órbitas do conjunto $[\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]$ pela ação de \mathbb{Z}_2 que é induzida da ação de \mathbb{Z}_2 em $F_2(\mathbb{T}^2)$. Assim, para caracterizar a classe de equivalência de $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$ em $[\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]/\mathbb{Z}_2$, primeiro usamos o Corolário 5.2.1 que descreve a classe de f em $[\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]$ e depois usamos a Proposição 5.2.3, que descreve a ação de \mathbb{Z}_2 em $[\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]$.

Portanto, a classe de equivalência de f em $[\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]/\mathbb{Z}_2$ é caracterizada pelo conjunto dos elementos que são obtidos ao conjugar o par $((w^r, (a, b)), (w^s, (c, d)))$ por elementos de $B_2(\mathbb{T}^2)$, sendo $(w^r, (a, b)) = f_{\#}(e_1)$ e $(w^s, (c, d)) = f_{\#}(e_2)$.

Finalmente, temos a proposição que classifica algebricamente, em termos de $\mathbb{F}_2(u, v) \times \mathbb{Z}^2$, as classes de homotopia livre das funções a 2 valores split no toro.

Proposição 5.2.6. Seja $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ uma função 2-valuada split e $\widehat{\Phi} : \mathbb{T}^2 \rightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$ um levantamento de ϕ que é determinado pelo par $((w^r, (a, b)), (w^s, (c, d)))$, como descrito na Proposição 5.2.4. Seja \mathcal{O}_ϕ o conjunto dos conjugados deste par pelos elementos de $B_2(\mathbb{T}^2)$. Então \mathcal{O}_ϕ é formado pela união dos conjuntos $\mathcal{O}_\phi^{(1)}$ e $\mathcal{O}_\phi^{(2)}$, sendo $\mathcal{O}_\phi^{(1)}$ o subconjunto de pares da forma $((w_1^r, (a, b)), (w_1^s, (c, d)))$, em que w_1 é um conjugado de w em $\mathbb{F}_2(u, v)$, e $\mathcal{O}_\phi^{(2)}$ é o subconjunto de pares da forma $((w_2^r, (a + r|w|_u, b + r|w|_v)), (w_2^s, (c + s|w|_u, d + s|w|_v)))$, em que w_2 é um conjugado de \widehat{w} em $\mathbb{F}_2(u, v)$.

Demonstração. Para calcular \mathcal{O}_ϕ , precisamos determinar os conjugados do par $((w^r, (a, b)), (w^s, (c, d)))$ por elementos de $B_2(\mathbb{T}^2)$. Se β é uma trança em $B_2(\mathbb{T}^2)$, então β pode ser vista como o produto de σ^ε por uma traça de $P_2(\mathbb{T}^2)$, para $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Assim, iremos analisar os conjugados do par $((w_1^r, (a, b)), (w_1^s, (c, d)))$ pelos elementos do tipo $\sigma^\varepsilon z$ para $z \in P_2(\mathbb{T}^2)$. Suponhamos que $z = (w_0, (p, q)) \in \mathbb{F}_2(u, v) \times \mathbb{Z}^2$, podemos escrever também $z = w_0 x^p y^q$ para deixar claro que estamos considerando $P_2(\mathbb{T}^2)$ como um subgrupo de $B_2(\mathbb{T}^2)$. Se $\varepsilon = 0$, obtemos

$$z(w^r, (a, b))z^{-1} = (w_0 w^r w_0^{-1}, (a, b)) \text{ e } z(w^s, (c, d))z^{-1} = (w_0 w^s w_0^{-1}, (c, d)),$$

isto é, um elemento em $\mathcal{O}_\phi^{(1)}$. Se $\varepsilon = 1$, então conjugar $(w^r, (a, b))$ por σz é o mesmo que conjugar $(w_0 w^r w_0^{-1}, (a, b))$ por σ , o mesmo vale para $(w^s, (c, d))$. Diante disso, usando o item (b) do Lema 5.2.1, obtemos

$$\begin{aligned} \sigma(w_0 w^r w_0^{-1}, (a, b))\sigma &= (uv^{-1}w_0 w^r w_0^{-1}vu^{-1}, (a + |w_0 w^r w_0^{-1}|_u, b + |w_0 w^r w_0^{-1}|_v)) \\ &= (uv^{-1}w_0 w^r w_0^{-1}vu^{-1}, (a + |w^r|_u, b + |w^r|_v)) \\ &= (uv^{-1}w_0 w^r w_0^{-1}vu^{-1}, (a + r|w|_u, b + s|w|_v)), \end{aligned}$$

isto é, um elemento em $\mathcal{O}_\phi^{(2)}$. □

Com efeito, a classe de homotopia livre da função a 2 valores split $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ está unicamente associada ao conjunto \mathcal{O}_ϕ , isto é, ϕ e ψ são funções a 2 valores split no toro livremente homotópicas se, e somente se, $\mathcal{O}_\phi = \mathcal{O}_\psi$. Note que a ação mencionada na observação 5.2.2 pode ser descrita da seguinte forma: se ϕ está associada a $[(\alpha, \beta)]$, como na Proposição 5.2.5, o elemento $\bar{0} \in \mathbb{Z}_2$ age em $[\phi] \in [\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]$ associando $[(\alpha, \beta)]$ a $\mathcal{O}_\phi^{(1)} = [(\alpha, \beta)]$ e o elemento $\bar{1} \in \mathbb{Z}_2$ age em $[\phi] \in [\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]$ associando $[(\alpha, \beta)]$ a $\mathcal{O}_\phi^{(2)}$. A próxima proposição mostra que essa ação não é livre, pois pode ocorrer que $\mathcal{O}_\phi^{(1)} = \mathcal{O}_\phi^{(2)} = \mathcal{O}_\phi$.

Proposição 5.2.7. Seja $f = (f_1, f_2) : \mathbb{T}^2 \rightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$ uma função 2-ordenada determinada pelo par $((w^r, (a, b)), (w^s, (c, d)))$. Consideramos $g = (f_2, f_1) : \mathbb{T}^2 \rightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$ e $\widehat{\pi} : [\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)] \rightarrow [\mathbb{T}^2, D_2(\mathbb{T}^2)]$ a projeção definida na demonstração do Teorema 3.2.4. Então, $\widehat{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}([f])) = \{[f], [g]\}$. Além disso, $[f] = [g]$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{F}(u, v)$ e $l \in \mathbb{Z}$ tais que $w = (\lambda \widehat{\lambda})^l$.

Demonstração. Sejam $\alpha = [f], \beta = [g] \in [\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]$. Como $f = (f_1, f_2)$ e $g = (f_2, f_1)$, temos que $\widehat{\pi}(\alpha) = \widehat{\pi}(\beta)$ e α e β são os dois únicos elementos que se projetam por $\widehat{\pi}$ em $\widehat{\pi}(\alpha)$. Vejamos então sob quais condições $\alpha = \beta$. Suponhamos que f é tal que

$$f_{\#}(e_1) = (w^r, (a, b)) \text{ e } f_{\#}(e_2) = (w^s, (c, d)).$$

Como $\widehat{\pi}(\alpha) = \widehat{\pi}(\beta)$, usando as proposições 5.2.3 e 5.2.6, temos que g é determinada por um par em \mathcal{O}_ϕ , sendo ϕ a função a 2 valores no toro que possui f como levantamento. Como g é obtida de f pela ação do elemento $\widehat{1} \in \mathbb{Z}_2$ em $F_2(\mathbb{T}^2)^{\mathbb{T}^2}$, β também é obtida pela ação do elemento $\widehat{1} \in \mathbb{Z}_2$ em $[\mathbb{T}^2, F_2(\mathbb{T}^2)]$, de modo que β está associada a $\mathcal{O}_\phi^{(2)}$. Assim, em particular, existe $g' \in \beta$ que satisfaz

$$g'_{\#}(e_1) = (\widehat{w}^r, (a + r|w|_u, b + r|w|_v)) \text{ e } g'_{\#}(e_2) = (\widehat{w}^s, (c + s|w|_u, d + s|w|_v))$$

(neste caso estamos tomando $w_2 = \widehat{w}$). Então $\alpha = \beta$ se, e somente se, os pares $(f_{\#}(e_1), f_{\#}(e_2))$ e $(g'_{\#}(e_1), g'_{\#}(e_2))$ são conjugados por um elemento de $P_2(\mathbb{T}^2)$. Isso ocorre se, e somente se, w e \widehat{w} são conjugados em $\mathbb{F}_2(u, v)$ e $r|w|_u = s|w|_u = r|w|_v = s|w|_v = 0$. Uma vez que se $w = \widehat{w}$, então

$$-|\widehat{w}|_u = |w|_u = |\widehat{w}|_u = 0 \text{ e } -|\widehat{w}|_v = |w|_v = |\widehat{w}|_v = 0,$$

essa condição se resume a w e \widehat{w} serem conjugados em $\mathbb{F}_2(u, v)$. Pelo item (b) do Lema 5.2.2, isso é equivalente à existência de $\lambda \in \mathbb{F}_2(u, v)$ e $l \in \mathbb{Z}$ que satisfazem $w = (\lambda\widehat{\lambda})^l$. □

5.3 Funções a 2 valores split que se deformam livres de pontos fixos

Nesta seção, trazemos alguns exemplos de funções a 2 valores split em \mathbb{T}^2 com número de Nielsen zero que se deformam livre de pontos fixos. Estudaremos a relação entre raízes e pontos fixos a fim de utilizar o Teorema 3.3.3 e os grupos estudados na seção 5.1.

5.3.1 Primeiros exemplos

Começamos esta subseção com um resultado que nos dá uma fórmula para o número de Nielsen de uma função a 2 valores split no toro utilizando Corolário 3.4.3 e a Proposição 2.3.2.

Proposição 5.3.1. Seja $\phi : \mathbb{T}^2 \multimap \mathbb{T}^2$ uma função a 2 valores split. Seja ainda $\widehat{\Phi} = (f_1, f_2) : \mathbb{T}^2 \rightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$ um levantamento de ϕ tal que $\widehat{\Phi}_{\#}(e_1) = (w^r, (a, b))$ e $\widehat{\Phi}_{\#}(e_2) = (w^s, (c, d))$, onde $(r, s) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0)$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ e $w \in \mathbb{F}_2(u, v)$. Então, o número de Nielsen de ϕ é dado por

$$N(\phi) = \left| \det \begin{pmatrix} a-1 & c \\ b & d-1 \end{pmatrix} \right| + \left| \det \begin{pmatrix} rm+a-1 & sm+c \\ rn+b & sn+d-1 \end{pmatrix} \right|,$$

sendo $(m, n) = Ab(w) \in \mathbb{Z}^2$, em que $Ab : \mathbb{F}_2(u, v) \rightarrow \mathbb{Z}^2$ associa u a $(1, 0)$ e v a $(0, 1)$.

Demonstração. Pelo Corolário 3.4.3, temos que

$$N(\phi) = N(f_1) + N(f_2).$$

Para calcular $N(f_i)$, para $i = 1, 2$, utilizando a Proposição 2.3.2, precisamos da matriz M_i do homomorfismo $f_{i\#} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ induzido por f_i no grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$ com base $\{e_1, e_2\}$. Se considerarmos $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ com ponto base x_1 , com auxílio da Figura 5.2, note que, para $i = 1, 2$, e_i pode ser tomado como sendo a imagem da trança ρ_{1i} pela projeção $p_{1\#} : P_2(\mathbb{T}^2, (x_1, x_2)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2, x_1)$ induzida da projeção $p_1 : F_2(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathbb{T}^2$ na primeira coordenada. De modo análogo, se considerarmos $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ com ponto base x_2 , temos que e_i , pode ser tomado como sendo a imagem da trança ρ_{2i} pela projeção $p_{2\#} : P_2(\mathbb{T}^2, (x_1, x_2)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2, x_2)$ induzida da projeção $p_2 : F_2(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathbb{T}^2$ na segunda coordenada. Recordamos que na demonstração da Proposição 5.1.2, as tranças ρ_{11} e ρ_{12} de $P_2(\mathbb{T}^2, (x_1, x_2))$ são associadas aos elementos u e v de $\mathbb{F}_2(u, v) \times \mathbb{Z}^2$, respectivamente, já as tranças $\rho_{11}B_{12}^{-1}\rho_{21}$ e $\rho_{12}B_{12}^{-1}\rho_{22}$ de $P_2(\mathbb{T}^2, (x_1, x_2))$ são associadas aos elementos $x = (1, 0)$ e $y = (0, 1)$ de $\mathbb{F}_2(u, v) \times \mathbb{Z}^2$, respectivamente. Se denotarmos por $w(\rho_{11}, \rho_{12})$ a trança obtida de $w \in \mathbb{F}_2(u, v)$ usando o isomorfismo da Proposição 5.1.2, podemos escrever as imagens de e_1 e e_2 via $\widehat{\Phi}_{\#}$ em termo dos geradores geométricos de $P_2(\mathbb{T}^2)$. Desse modo, temos

$$\widehat{\Phi}_{\#}(e_1) = (w(\rho_{11}, \rho_{12}))^r (\rho_{11}B_{12}^{-1}\rho_{21})^a (\rho_{12}B_{12}^{-1}\rho_{22})^b,$$

$$\widehat{\Phi}_{\#}(e_2) = (w(\rho_{11}, \rho_{12}))^s (\rho_{11} B_{12}^{-1} \rho_{21})^c (\rho_{12} B_{12}^{-1} \rho_{22})^d.$$

Como $\widehat{\Phi} = (f_1, f_2)$, temos que $f_i = p_i \circ \widehat{\Phi}$ e, portanto, $f_{i\#} = p_{i\#} \circ \widehat{\Phi}_{\#}$. Assim, ao considerar $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ com ponto base x_1 , temos

$$f_{1\#}(e_1) = (p_{1\#}(\rho_{11})p_{1\#}(\rho_{12}))^r p_{1\#}(\rho_{11})^a p_{1\#}(\rho_{11})^b = e_1^{rm+a} e_2^{rn+b}, \quad (5.23)$$

$$f_{1\#}(e_2) = (p_{1\#}(\rho_{11})p_{1\#}(\rho_{12}))^s p_{1\#}(\rho_{11})^c p_{1\#}(\rho_{11})^d = e_1^{sm+c} e_2^{sn+d}, \quad (5.24)$$

pois $Ab(w) = (m, n)$. De forma análoga, agora tomando $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ com ponto base x_2 , temos

$$f_{2\#}(e_1) = p_{1\#}(\rho_{21})^a p_{1\#}(\rho_{22})^b = e_1^a e_2^b, \quad (5.25)$$

$$f_{2\#}(e_2) = p_{1\#}(\rho_{12})^c p_{1\#}(\rho_{22})^d = e_1^c e_2^d. \quad (5.26)$$

Diante disso,

$$M_1 = \begin{pmatrix} rm + a & sm + c \\ rn + b & sn + d \end{pmatrix} \text{ e } M_2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Usando a Proposição 2.3.2, temos que

$$N(f_{1\#}) = \left| \det \begin{pmatrix} a-1 & c \\ b & d-1 \end{pmatrix} \right| \text{ e } N(f_{2\#}) = \left| \det \begin{pmatrix} rm+a-1 & sm+c \\ rn+b & sn+d-1 \end{pmatrix} \right|,$$

donde segue o resultado. □

Uma vez que $\widehat{\Phi} = (f_1, f_2)$, pela Proposição 3.3.1, se ϕ se deforma numa função a 2 valores livre de pontos fixos, então f_1 e f_2 se deformam em funções livres de pontos fixos. Porém, se f_1 e f_2 se deformam livres de pontos fixos, não temos garantia de que o mesmo ocorre com ϕ , já que as homotopias obtidas para f_1 e f_2 podem não ser livres de coincidência. Graças à fórmula obtida na Proposição 5.3.1 e a ao fato de o toro ser Wecken, temos condições necessárias e suficientes para que f_1 e f_2 se deformem livres de pontos fixos.

Teorema 5.3.1. Seja $\widehat{\Phi} = (f_1, f_2) : \mathbb{T}^2 \rightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$ um levantamento da função a 2 valores split $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, tal que $\widehat{\Phi}_{\#}(e_1) = (w^r, (a, b))$ e $\widehat{\Phi}_{\#}(e_2) = (w^s, (c, d))$, onde $Ab(w) = (m, n)$, $(r, s) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0)$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ e $w \in \mathbb{F}_2(u, v)$. Então f_1 e f_2 se deformam em funções livres de pontos fixos se, e somente se, ao menos uma das seguintes condições é válida:

- (a) os pares $(a-1, b)$, $(c, d-1)$ e (m, n) pertencem a um subgrupo cíclico de \mathbb{Z}^2 ;
- (b) $s(a-1, b) = r(c, d-1)$.

Demonstração. Pelo Corolário 3.4.3, $N(\phi) = 0$ se, e somente, se $N(f_1) = N(f_2) = 0$. Como o toro é Wecken, temos que f_i se deforma livre de pontos fixos, para $i = 1, 2$, se, e somente se, $N(f_i) = 0$. Assim, usando a Proposição 5.3.1, temos que f_1 e f_2 se deformam livres de pontos fixos se e somente se

$$0 = \left| \det \begin{pmatrix} a-1 & c \\ b & d-1 \end{pmatrix} \right| + \left| \det \begin{pmatrix} a-1 & sm \\ b & sn \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} rm & c \\ rn & d-1 \end{pmatrix} \right|,$$

isto é, se, e somente se, valem

$$\det \begin{pmatrix} a-1 & c \\ b & d-1 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.27)$$

e

$$s \det \begin{pmatrix} a-1 & m \\ b & n \end{pmatrix} + r \det \begin{pmatrix} m & c \\ n & d-1 \end{pmatrix} = 0. \quad (5.28)$$

Note que a condição (5.27) é equivalente a os pares $(a-1, b)$ e $(c, d-1)$ serem proporcionais.

Primeiro suponhamos que as condições (5.27) e (5.28) são válidas, isto é, f_1 e f_2 se deformam livres de pontos fixos. Se um dos determinantes em (5.28) se anula, então o outro determinante também se anula e nesse caso temos os pares $(a-1, b)$, $(c, d-1)$ e (m, n) pertencendo a um subgrupo cíclico de \mathbb{Z}^2 isomorfo a \mathbb{Z} , isto é, vale o item (a) do Teorema. Por outro lado, se nenhum dos determinantes em (5.28) se anulam, então os pares (m, n) e $(a-1, b)$ não são proporcionais, bem como os pares (m, n) e $(c, d-1)$. Sendo os pares $(a-1, b)$ e $(c, d-1)$ proporcionais, nenhuma combinação linear desses pares será proporcional a (m, n) . Uma vez que

$$\begin{aligned} s \det \begin{pmatrix} a-1 & m \\ b & n \end{pmatrix} + r \det \begin{pmatrix} m & c \\ n & d-1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} s(a-1) & m \\ sb & n \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} rc & m \\ r(d-1) & n \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} s(a-1) - rc & m \\ sb - r(d-1) & n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

podemos reescrever a condição (5.28) como

$$\det \begin{pmatrix} s(a-1) - rc & m \\ sb - r(d-1) & n \end{pmatrix} = 0. \tag{5.29}$$

Assim, necessariamente a primeira coluna dessa matriz é trivial, isto é, $s(a-1, b) = r(c, d-1)$, que é justamente o item (b) do teorema.

Reciprocamente, se vale o item (a) do Teorema, então as condições (5.27) e (5.28) são satisfeitas, uma vez que todos os determinantes envolvidos serão nulos. Se vale o item (b), como r e s não são ambos nulos, vale a condição (5.27) e reescrevendo a condição (5.28) como (5.29), temos que a condição também é válida. □

Se $\psi : X \rightarrow Y$ é uma função n -valuada, lembramos que uma raiz de ψ com respeito a um ponto base $y_0 \in Y$ é um ponto $x \in X$ que satisfaz $y_0 \in \psi(x)$. Lembramos também que, se $X = Y$, o ponto $x \in X$ é um ponto fixo de ψ se $x \in \psi(x)$. Para relacionar raízes e pontos fixos de funções split no toro, devemos primeiro considerar a correspondência que associa a função n -valuada $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ à função n -valuada $\phi_0 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ em que $\phi_0(x) = \{x_1x^{-1}, \dots, x_nx^{-1}\}$ se $\phi(x) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Note que essa correspondência é biunívoca. Se ϕ é split, temos que existem funções contínuas $f_1, \dots, f_n : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ livres de coincidência tais que $\phi(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$, logo $\phi(x) = \{f_1(x)x^{-1}, \dots, f_n(x)x^{-1}\}$ o que faz de ϕ_0 também split e, portanto, a correspondência restrita às funções split também é uma bijeção. O próximo lema implica que o problema de decidir se uma função n -valuada se deforma livre de pontos fixos é equivalente ao problema de decidir se uma função n -valuada se deforma livre de raízes. Denotemos por 1 o ponto base de \mathbb{T}^2 .

Lema 5.3.1. Com a notação anterior, um ponto $x_0 \in \mathbb{T}^2$ é um ponto fixo da função n -valuada $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ se, e somente se, x_0 é uma raiz da função n -valuada $\phi_0 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, isto é, $1 \in \phi_0(x_0)$. Além disso, ϕ se deforma numa função n -valuada ϕ' que possui k pontos fixos se, e somente se, ϕ_0 se deforma numa função n -valuada ϕ'_0 que possui k raízes.

Demonstração. Se x_0 é um ponto fixo de ϕ , temos que $\phi(x_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Assim, $\phi_0(x_0) = \{x_0x_0^{-1}, x_1x_0^{-1}, \dots, x_{n-1}x_0^{-1}\} = \{1, x_1x_0^{-1}, \dots, x_{n-1}x_0^{-1}\}$ e vale que x_0 é raiz de ϕ_0 com relação ao ponto base 1. Reciprocamente, se x_0 é raiz de ϕ_0 , temos que existe $x_i \in \phi(x_0)$ que satisfaz $1 = x_ix_0^{-1}$, logo $x_0 = x_i \in \phi(x_0)$, isto é, x_0 é ponto fixo de ϕ . Suponhamos que ϕ se deforma numa função n -valuada ϕ' que satisfaz $x_i \in \phi'(x_i)$ para $i = 1, \dots, k$ e $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{T}^2$. Assim, para cada $i = 1, \dots, k$ temos que $x_ix_i^{-1} = 1 \in \phi'_0(x_i)$ e, portanto, x_i é raiz de ϕ'_0 . Se $H : \mathbb{T}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ é uma homotopia entre ϕ e ϕ' , temos que $H' : \mathbb{T}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ definida por $H'(x, t) = H(x, t)x^{-1}$ é uma homotopia entre ϕ_0 e ϕ'_0 . Reciprocamente, se ϕ_0 se deforma numa função n -valuada ϕ'_0 que satisfaz $1 \in \phi'_0(x_i)$ para $i = 1, \dots, k$ e $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{T}^2$, então vale que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ existe $\bar{x}_i \in \phi(x_i)$ tal que $\bar{x}_ix_i^{-1} = 1$, isto é $\bar{x}_i = x_i \in \phi(x_i)$. Se $H : \mathbb{T}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ é uma homotopia entre ϕ_0 e ϕ'_0 , temos que $H' : \mathbb{T}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ definida por $H'(x, t) = H(x, t)x$ é uma homotopia entre ϕ e ϕ' . □

Graças a essa relação bem definida entre raízes e pontos fixos, podemos provar resultados relacionados a raízes usando resultados relacionados a pontos fixos e vice-versa.

Proposição 5.3.2. Seja $g : \mathbb{T}^2 \multimap \mathbb{T}^2$ uma função a 2 valores split tal que $g(x) = \{g_1(x), g_2(x)\}$. Se g se deforma homotopicamente a uma função a 2 valores livre de raízes, então cada uma das funções $g_1, g_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ podem ser deformadas homotopicamente a funções livres de raízes.

Demonstração. Se g se deforma numa função a 2-valores livre de raízes, então a função a 2-valores $g' : \mathbb{T}^2 \multimap \mathbb{T}^2$ definida por $g'(x) = \{g_1(x)x, g_2(x)x\}$ se deforma livre de pontos fixos (se usarmos a notação anterior, $g'_0 = g$). Pela Proposição 3.3.1, as funções $g_1 \cdot \text{Id}$ e $g_2 \cdot \text{Id}$ se deformam livres de pontos fixos. Sejam $g'_1, g'_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ livres de pontos fixos tais que $g_1 \cdot \text{Id} \sim g'_1$ e $g_2 \cdot \text{Id} \sim g'_2$. Assim, as funções $g'_1 \cdot \text{Ant}$ e $g'_2 \cdot \text{Ant}$, em que $\text{Ant}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é a função antípoda satisfazendo $\text{Ant}(x) = -x$, são livres de raízes e $g_1 \sim g'_1 \cdot \text{Ant}$ e temos $g_2 \sim g'_2 \cdot \text{Ant}$. \square

A próxima proposição determina condições necessárias e suficientes para que as funções simples que compõem uma função a 2 valores split no toro se deformem livres de raízes, esta proposição será provada usando a Proposição 5.3.1 e a relação entre raízes e pontos fixos.

Proposição 5.3.3. Seja $g : \mathbb{T}^2 \multimap \mathbb{T}^2$ uma função a 2 valores split e seja $\widehat{g} = (g_1, g_2) : \mathbb{T}^2 \rightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$ um levantamento de g que satisfaz $\widehat{g}_\#(e_1) = (w^r, (a', b))$, $\widehat{g}_\#(e_2) = (w^s, (c, d')) \in P_2(\mathbb{T}^2)$, sendo $Ab(w) = (m, n)$, $(r, s) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0)$, $a, b, c, d' \in \mathbb{Z}$ e $w \in \mathbb{F}_2(u, v)$. Então g_1 e g_2 podem ser deformadas livres de raízes se, e somente se ao menos uma das seguintes condições é satisfeita:

- (a) os pares (a', b) , (c, d') e (m, n) pertencem a um subgrupo cíclico de \mathbb{Z}^2 ;
- (b) $s(a', b) = r(c, d')$.

Demonstração. Consideramos as funções $f_1, f_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dadas por $f_1(x) = g_1(x)x$ e $f_2(x) = g_2(x)x$. Temos que g_1 e g_2 se deformam livres de raízes se, e somente se, f_1 e f_2 se deformam livres de pontos fixos. Recordamos a demonstração da Proposição 5.3.1, onde foram obtidas as relações (5.23), (5.24), (5.25) e (5.26) que nos permitem concluir que

$$g_{1\#}(e_1) = e_1^{rm+a'} e_2^{rn+b},$$

$$g_{1\#}(e_2) = e_1^{sm+c} e_2^{sn+d'},$$

e

$$g_{2\#}(e_1) = e_1^{a'} e_2^b,$$

$$g_{2\#}(e_2) = e_1^c e_2^{d'}.$$

Diante disso,

$$f_{1\#}(e_1) = g_{1\#}(e_1)e_1 = e_1^{rm+a'+1} e_2^{rn+b},$$

$$f_{1\#}(e_2) = g_{1\#}(e_2)e_2 = e_1^{sm+c} e_2^{sn+d'+1},$$

e

$$f_{2\#}(e_1) = g_{2\#}(e_1)e_1 = e_1^{a'+1} e_2^b,$$

$$f_{2\#}(e_2) = g_{2\#}(e_2)e_2 = e_1^c e_2^{d'+1}.$$

Assim, se $f : \mathbb{T}^2 \multimap \mathbb{T}^2$ é a função 2-valuada split que possui levantamento $\widehat{f} = (f_1, f_2)$, então f é determinada pelo par $((w^r, (a' + 1, b)), (w^s, (c, d' + 1)))$ de elementos em $P_2(\mathbb{T}^2)$. Pela Proposição 5.3.1, f_1 e f_2 se deformam livres de pontos fixos se, e somente se, ao menos uma dentre as condições (a) e (b) ocorrem. \square

Mencionamos anteriormente que se as funções simples que compõem uma função 2-valuada split no toro se deformam livres de pontos fixos, não temos garantia de que essa função 2-valuada se

deforma livre de pontos fixos. O mesmo ocorre quando consideramos a deformação em livre de raízes, isto é, se as funções simples que compõem uma função 2-valorada split no toro se deformam livres de raízes, não temos garantia de que essa função 2-valorada se deforma livre de raízes. Usando o Teorema 3.3.3 podemos mostrar que se a condição (b) da Proposição 5.3.3 é satisfeita, então a função 2-valorada g pode ser deformada livre de raízes.

Proposição 5.3.4. Se $\hat{\Psi} = (f_1, f_2) : \mathbb{T}^2 \rightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$ é um levantamento da função a 2 valores split $\psi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ que satisfaz $\hat{\Psi}_{\#}(e_1) = (w^r, (a, b))$ e $\hat{\Psi}_{\#}(e_2) = (w^s, (c, d))$, onde $w \in \mathbb{F}_2(u, v)$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ e $(r, s) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0)$ são tais que $s(a, b) = r(c, d)$, então ϕ se deforma numa função a 2 valores livre de raízes.

Demonstração. Denotamos por Γ o maior subgrupo cíclico de \mathbb{Z}^2 que contém o elemento $s(a, b) = r(c, d)$. Seja γ o gerador de Γ . Primeiro suponhamos que s e r são ambos não nulos. Assim, consideramos $l = \text{mdc}(r, s)$ e

$$\gamma = (a_0, b_0) = (l/r)(a, b) = (l/s)(c, d),$$

de modo que

$$(w^r, (a, b)) = w^r x^a y^b = (w^l x^{a_0} y^{b_0})^{r/l}$$

e

$$(w^s, (c, d)) = w^s x^c y^d = (w^l x^{a_0} y^{b_0})^{s/l}$$

são elementos do subgrupo de $P_2(\mathbb{T}^2)$ gerado por $w^l x^{a_0} y^{b_0}$. Agora, seja $z \in P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ um elemento que se projeta em $w^l x^{a_0} y^{b_0}$ pelo homomorfismo $i_{\#} : P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}) \rightarrow P_2(\mathbb{T}^2)$ induzido pela inclusão $i : F_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}) \rightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$. Se definirmos uma aplicação $\varphi : \pi_1(\mathbb{T}^2) \rightarrow P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ por $\varphi(e_1) = z^{r/l}$ e $\varphi(e_2) = z^{s/l}$, esta aplicação é de fato um homomorfismo já que $\varphi(e_1)$ e $\varphi(e_2)$ são elementos que comutam e vale que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & & P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}) \\
 & \nearrow \varphi & \downarrow i_{\#} \\
 \pi_1(\mathbb{T}^2) & \xrightarrow{\hat{\Phi}_{\#}} & P_2(\mathbb{T}^2).
 \end{array} \tag{5.30}$$

Usando o item (b) do Teorema 3.3.3, concluímos a demonstração para este caso. Agora suponhamos que $r = 0$ (respectivamente $s = 0$). Assim, $(a, b) = (0, 0)$ (respectivamente $(c, d) = (0, 0)$) e $(w^r, (a, b))$ (respectivamente $(w^s, (c, d))$) é trivial em $P_2(\mathbb{T}^2)$. Se $z \in P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ é um elemento que se projeta em $(w^s, (c, d))$ (respectivamente em $(w^r, (a, b))$), então definimos o homomorfismo $\varphi : \pi_1(\mathbb{T}^2) \rightarrow P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ por $\varphi(e_1) = 1$ e $\varphi(e_2) = z$ (respectivamente por $\varphi(e_1) = z$ e $\varphi(e_2) = 1$), e temos que o diagrama (5.30) é comutativo. Assim, o resultado segue pelo item (b) do Teorema 3.3.3 também para este caso. \square

Com este resultado, obtemos os primeiros exemplos de funções 2-valoradas split no toro que se deformam livres de pontos fixos.

Teorema 5.3.2. Se $\hat{\Phi} = (f_1, f_2) : \mathbb{T}^2 \rightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$ é um levantamento da função a 2 valores split $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ que satisfaz $\hat{\Phi}_{\#}(e_1) = (w^r, (a, b))$ e $\hat{\Phi}_{\#}(e_2) = (w^s, (c, d))$, onde $w \in \mathbb{F}_2(u, v)$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ e $(r, s) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0)$ são tais que $s(a - 1, b) = r(c, d - 1)$, então ϕ se deforma numa função a 2 valores livre de pontos fixos.

Demonstração. Pela Proposição 5.3.4, a função ψ que satisfaz $\hat{\Psi}_{\#}(e_1) = (w^r, (a - 1, b))$ e $\hat{\Psi}_{\#}(e_2) = (w^s, (c, d - 1))$ se deforma livre de raízes. Como $\phi_0 = \psi$, pela relação estabelecida no Lema 5.3.1 podemos concluir que ϕ se deforma livre de pontos fixos. \square

Como a condição (b) do Teorema 5.3.1 implica que ϕ se deforma livre de pontos fixos, para obter outros exemplos de funções 2-valuadas split no toro que se deformam livres de pontos fixos, precisamos encontrar funções 2-valuadas que satisfaçam apenas a condição (a) desse teorema.

Note que o problema de decidir se uma função 2-valuada split $\phi : \mathbb{T}^2 \dashrightarrow \mathbb{T}^2$ se deforma livre de pontos fixos se resume à existência de um par de elementos que comutam em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ e que se projetam em $\widehat{\Phi}_{0\#}(e_1)$ e $\widehat{\Phi}_{0\#}(e_2)$, sendo $\widehat{\Phi}_{0\#}$ o levantamento de ϕ_0 . O próximo teorema ([16, Theorem 7]) nos fornece mais exemplos de funções a 2 valores split no toro que se deformam livres de pontos fixos. Este resultado, na verdade, será estendido, portanto iremos omitir sua demonstração.

Teorema 5.3.3. Suponhamos que $(a-1, b)$, $(c, d-1)$ e (m, n) pertencem a um subgrupo cíclico de \mathbb{Z}^2 gerado por um elemento $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $p \in \{0, 1\}$ ou $q \in \{0, 1\}$. Dados $r, s \in \mathbb{Z}$, existem $w \in \mathbb{F}_2(u, v)$, uma função a 2 valores split livre de pontos fixos $\phi : \mathbb{T}^2 \dashrightarrow \mathbb{T}^2$ e um levantamento $\widehat{\Phi} = (f_1, f_2) : \mathbb{T}^2 \rightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$ de ϕ tais que $Ab(w) = (m, n)$, $\widehat{\Phi}_{\#}(e_1) = (w^r, (a, b))$ e $\widehat{\Phi}_{\#}(e_2) = (w^s, (c, d))$.

5.3.2 Mais Exemplos

Esta subsecção será dedicada a estender o Teorema 5.3.3. A construção que será feita para estender esse resultado consistirá em obter pares de elementos em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ que comutam. Como esse processo é recursivo, precisamos de dois resultados para isso. O corolário que segue do primeiro resultado sugere um primeiro passo para esse processo. Lembramos que $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\}) = \mathbb{F}_3(u, v, B) \rtimes \mathbb{F}_2(x, y)$ e $P_2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{F}_2(u, v) \times \mathbb{Z}^2(x, y)$.

Proposição 5.3.5. Sejam U, V, A, X e Y elementos de $\mathbb{F}_3(u, v, B) \rtimes \mathbb{F}_2(x, y)$ que satisfazem

- i. $XUX^{-1} = U$.
- ii. $XVX^{-1} = UVU^{-1}A$.
- iii. $XAX^{-1} = A$.
- iv. $YUY^{-1} = VA^{-1}UV^{-1}$.
- v. $YVY^{-1} = V$.
- vi. $YAY^{-1} = A$.

Se $p \in \{0, 1\}$ ou $q \in \{0, 1\}$, então os elementos X^pY^q e U^pV^q comutam.

Demonstração. Por hipótese, segue que, para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned} X^kUX^{-k} &= U \\ X^kVX^{-k} &= U^kV(U^{-1}A)^k \\ X^kAX^{-k} &= A \\ Y^kUY^{-k} &= (VA^{-1})^kUV^{-k} \\ Y^kVY^{-k} &= V \\ Y^kAY^{-k} &= A. \end{aligned}$$

Desse modo, para $p = 0$ ou $q = 0$, o resultado é válido. Resta analisar o caso em que $p = 1$ e $q \in \mathbb{Z}$ e o caso em que $q = 1$ e $p \in \mathbb{Z}$. Se $p = 1$ e $q \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned} XY^qUV^qY^{-q}X^{-1} &= XY^qUY^{-q}V^qX^{-1} \\ &= X(VA^{-1})^qUV^{-q}V^qX^{-1} \\ &= X(VA^{-1})^qX^{-1}U \\ &= (UVU^{-1}AA^{-1})^qU \\ &= UV^q. \end{aligned}$$

Se $q = 1$ e $p \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned}
 X^p Y U^p V Y^{-1} X^{-p} &= X^p Y U^p Y^{-1} V X^{-p} \\
 &= X^p (V A^{-1} U V^{-1})^p V X^{-p} \\
 &= X^p V (A^{-1} U)^p X^{-p} \\
 &= X^p V X^{-p} (A^{-1} U)^p \\
 &= U^p V (U^{-1} A)^p (A^{-1} U)^p \\
 &= U^p V.
 \end{aligned}$$

□

Usando esta proposição temos uma primeira família de elementos que comutam em $P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$.

Corolário 5.3.1. Os elementos $x^p y^q$ e $u^p v^q$ de $\mathbb{F}_3(u, v, B) \rtimes \mathbb{F}_2(x, y)$ comutam se $p \in \{0, 1\}$ ou $q \in \{0, 1\}$.

Demonstração. Usando as igualdades (5.5) e (5.6) e as relações da Proposição 5.1.1, obtemos

$$\begin{aligned}
 x u x^{-1} &= u \\
 x v x^{-1} &= u v u^{-1} B^{-1}[u, v^{-1}] \\
 x B^{-1}[u, v^{-1}] x^{-1} &= B^{-1}[u, v^{-1}] \\
 y u y^{-1} &= v (B^{-1}[u, v^{-1}])^{-1} u v^{-1} \\
 y v y^{-1} &= v \\
 y B^{-1}[u, v^{-1}] y^{-1} &= B^{-1}[u, v^{-1}].
 \end{aligned}$$

Tomando $U = u, V = v, A = B^{-1}[u, v^{-1}], X = x$ e $Y = y$, o resultado segue da proposição anterior. □

Lema 5.3.2. Suponhamos que U, V, A, X e Y são elementos de $\mathbb{F}_3(u, v, B) \rtimes \mathbb{F}_2(x, y)$ que satisfazem

- i. $X U X^{-1} = U$.
- ii. $X V X^{-1} = U V U^{-1} A$.
- iii. $X A X^{-1} = A$.
- iv. $Y U Y^{-1} = V A^{-1} U V^{-1}$.
- v. $Y V Y^{-1} = V$.
- vi. $Y A Y^{-1} = A$.

Então, tomando

$$U' = U V^n, V' = V, X' = X Y^n \text{ e } Y' = Y$$

ou

$$U' = U, V' = U^n V, X' = X \text{ e } Y' = X^n Y,$$

em que $n \in \mathbb{Z}$, as condições i, ii, iii, iv, v e vi são satisfeitas trocando-se U por U' , V por V' , X por X' e Y por Y' , isto é, valem

- i'. $X' U' X'^{-1} = U'$.
- ii'. $X' V' X'^{-1} = U' V' U'^{-1} A$.
- iii'. $X' A X'^{-1} = A$.
- iv'. $Y' U' Y'^{-1} = V' A^{-1} U' V'^{-1}$.

$$v'. Y'V'Y'^{-1} = V'.$$

$$vi'. Y'AY'^{-1} = A.$$

Demonstração. Primeiro tomamos

$$U' = UV^n, V' = V, X' = XY^n \text{ e } Y' = Y.$$

Assim, v' e vi' seguem diretamente de v e vi ao fazer as substituições. Além disso, temos

$$X'V'X'^{-1} = XY^nVY^{-n}X^{-1} = XVX^{-1} = UVU^{-1}A = (UV^n)V(UV^n)^{-1}A = U'V'U'^{-1}A,$$

$$X'AX'^{-1} = XY^nAY^{-n}X^{-1} = A$$

e

$$Y'U'Y'^{-1} = YUV^nY^{-1} = YUY^{-1}V^n = VA^{-1}UV^{-1}V^n = V'A^{-1}U'V'^{-1}.$$

Pela Proposição 5.3.5, temos que os elementos UV^n e XY^n comutam, logo,

$$X'U'X'^{-1} = XY^nUV^nY^{-n}X^{-1} = UV^n = U'.$$

Agora tomamos

$$U' = U, V' = U^nV, X' = X \text{ e } Y' = X^nY.$$

Assim, i' e iii' seguem diretamente de i e iii ao fazer as substituições. Além disso, temos

$$X'V'X'^{-1} = XU^nVX^{-1} = U^nXVX^{-1} = U^nUVU^{-1}A = U'V'U'^{-1}A,$$

$$Y'AY'^{-1} = X^nYAY^{-1}X^{-n} = A$$

e

$$\begin{aligned} Y'U'Y'^{-1} &= X^nYUY^{-1}X^{-n} \\ &= X^nVA^{-1}UV^{-1}X^{-n} \\ &= (X^nVX^{-n})A^{-1}U(X^nV^{-1}X^{-n}) \\ &= U^nV(U^{-1}A)^nA^{-1}U(U^{-1}A)^{-n}V^{-1}U^{-n} \\ &= U^nVA^{-1}U(U^nV)^{-1} \\ &= V'A^{-1}U'V'^{-1} \end{aligned}$$

Por fim, pela Proposição 5.3.5, temos que os elementos U^nV e X^nY comutam, logo,

$$Y'V'Y'^{-1} = X^nYU^nVY^{-1}X^{-n} = U^nV = V'.$$

□

O primeiro passo do processo anteriormente mencionado consiste em considerar

$$U_1 = u, V_1 = v, A = B^{-1}[u, v^{-1}], X_1 = x \text{ e } Y_1 = y.$$

Para $n_1 \in \mathbb{Z}$ qualquer, o Corolário 5.3.1 nos diz que

$$U_1V_1^{n_1} = uv^{n_1} \text{ e } X_1Y_1^{n_1} = xy^{n_1}$$

comutam em $\mathbb{F}_3(u, v, B) \rtimes \mathbb{F}(x, y)$. O $(i + 1)$ -ésimo passo consiste em manter o elemento $A = B^{-1}[u, v^{-1}]$ fixado, escolher $n_i \in \mathbb{Z}$ e considerar

$$U_{i+1} = \begin{cases} U_iV_i^{n_i}, & \text{se } i + 1 \text{ é par;} \\ U_i, & \text{se } i + 1 \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

$$V_{i+1} = \begin{cases} V_i, & \text{se } i + 1 \text{ é par;} \\ U_i^{n_i} V_i, & \text{se } i + 1 \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

$$X_{i+1} = \begin{cases} X_i Y_i^{n_i}, & \text{se } i + 1 \text{ é par;} \\ X_i, & \text{se } i + 1 \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

$$Y_{i+1} = \begin{cases} Y_i, & \text{se } i + 1 \text{ é par;} \\ X_i^{n_i} Y_i, & \text{se } i + 1 \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

O Lema 5.3.2 vai nos garantir que podemos aplicar a Proposição 2.1.5 e obter, para $i + 1$ par, os elementos

$$U_{i+1}^{n_{i+1}} V_{i+1} \text{ e } X_{i+1}^{n_{i+1}} Y_{i+1}$$

comutando em $\mathbb{F}_3(u, v, B) \rtimes \mathbb{F}(x, y)$ e, para $i + 1$ ímpar, os elementos

$$U_{i+1} V_{i+1}^{n_{i+1}} \text{ e } X_{i+1} Y_{i+1}^{n_{i+1}}$$

comutando em $\mathbb{F}_3(u, v, B) \rtimes \mathbb{F}(x, y)$, sendo $n_{i+1} \in \mathbb{Z}$ qualquer. Com efeito, fazendo o segundo passo, obtemos os elementos

$$U_2^{n_2} V_2 = (uv^{n_1})^{n_2} v \text{ e } X_2^{n_2} Y_2 = (xy^{n_1})^{n_2} y$$

comutando em $\mathbb{F}_3(u, v, B) \rtimes \mathbb{F}(x, y)$, para $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ quaisquer. Fazendo o terceiro passo, obtemos os elementos

$$U_3 V_3^{n_3} = uv^{n_1} ((uv^{n_1})^{n_2} v)^{n_3} \text{ e } X_3 Y_3^{n_3} = xy^{n_1} ((xy^{n_1})^{n_2} y)^{n_3}$$

comutando em $\mathbb{F}_3(u, v, B) \rtimes \mathbb{F}(x, y)$, para $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$ quaisquer.

Da forma como é definido esse processo indutivo existe uma relação clara entre esses dois elementos que comutam. O primeiro elemento sendo uma palavra em $\mathbb{F}_3(u, v, B)$ escrita apenas em termos de u e v e o segundo uma palavra em $\mathbb{F}_2(x, y)$ obtida da primeira ao trocar u por x e v por y . Diante disso, focaremos nossa atenção ao elemento que é uma palavra em $\mathbb{F}_3(u, v, B)$.

Definição 5.3.1. Se w é uma palavra de $\mathbb{F}_3(u, v, B)$ obtida indutivamente pelo processo descrito anteriormente usando inteiros n_1, n_2, \dots, n_i , dizemos que w está na i -ésima família por indução em $\{n_1, n_2, \dots, n_i\}$. Quando não estamos interessados nos valores dos inteiros n_1, n_2, \dots, n_i dizemos apenas que w está na i -ésima família.

Vale observar que mesmo usando a notação de conjunto para $\{n_1, n_2, \dots, n_i\}$ temos uma ordenação nesses inteiros. Se tomarmos uma palavra w que está na i -ésima família por indução em $\{m, n\}$ não necessariamente w está na i -ésima família por indução em $\{n, m\}$.

Exemplo 5.3.1. Se fizermos esse processo usando inteiros n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 obtemos:

- uv^{n_1} na 1ª família por indução em $\{n_1\}$;
- $(uv^{n_1})^{n_2} v$ na 2ª família por indução em $\{n_1, n_2\}$;
- $uv^{n_1} ((uv^{n_1})^{n_2} v)^{n_3}$ na 3ª família por indução em $\{n_1, n_2, n_3\}$;
- $(uv^{n_1} ((uv^{n_1})^{n_2} v)^{n_3})^{n_4} (uv^{n_1})^{n_2} v$ na 4ª família por indução em $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$;
- $uv^{n_1} ((uv^{n_1})^{n_2} v)^{n_3} ((uv^{n_1} ((uv^{n_1})^{n_2} v)^{n_3})^{n_4} (uv^{n_1})^{n_2} v)^{n_5}$ na 5ª família por indução em $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$.

Observe que uma mesma palavra pode ser obtida usando diferentes inteiros e assim pertencer a mais de uma família. Por exemplo, temos a palavra $(uv^4)^4 v$ na 2ª família por indução em $\{4, 4\}$ e temos

$$uv^5 ((uv^5)^{-1} v)^{-3} = uv^5 (v^{-5} u^{-1} v)^{-3} = uv^5 v^{-1} (v^{-4} u^{-1})^{-3} v = (uv^4)^4 v$$

na 3ª família por indução em $\{5, -1, -3\}$.

Agora vamos analisar o que ocorre com o abelianizado de uma palavra w que está na i -ésima família por indução em $\{n_1, \dots, n_i\}$. Como tal palavra é escrita apenas em termos de u e v , teremos $Ab(w) = (m, n, 0) \in \mathbb{Z}(u) \times \mathbb{Z}(v) \times \mathbb{Z}(B)$.

Definição 5.3.2. Dizemos que o par $(a_i, b_i) \in \mathbb{Z}^2$ é o abelianizado na i -ésima família para $\{n_1, \dots, n_i\}$ se existe uma palavra w na i -ésima família por indução em $\{n_1, \dots, n_i\}$ tal que $Ab(w) = (a_i, b_i, 0)$. Quando não estamos interessados nos valores dos inteiros n_1, n_2, \dots, n_i dizemos apenas que (a_i, b_i) é um abelianizado na i -ésima família.

Exemplo 5.3.2. Usando as palavras obtidas no Exemplo 5.3.1, temos que:

- $(1, n_1)$ é o abelianizado na 1ª família para $\{n_1\}$;
- $(n_2, n_1n_2 + 1)$ é o abelianizado na 2ª família para $\{n_1, n_2\}$;
- $(n_2n_3 + 1, n_1(n_2n_3 + 1) + n_3)$ é o abelianizado na 3ª família para $\{n_1, n_2, n_3\}$;
- $(n_2(n_3n_4 + 1) + n_4, n_1(n_2(n_3n_4 + 1) + n_4) + n_3n_4 + 1)$ é o abelianizado na 4ª família para $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$;
- $(n_2(n_3(n_4n_5 + 1) + n_5) + n_4n_5 + 1, n_1(n_2(n_3(n_4n_5 + 1) + n_5) + n_4n_5 + 1) + n_3(n_4n_5 + 1) + n_5)$ é o abelianizado na 5ª família para $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$.

O próximo lema oferece uma fórmula para calcular um abelianizado a partir de outros dois. Essa fórmula será aperfeiçoada posteriormente.

Lema 5.3.3. Se (a_{i-2}, b_{i-2}) é o abelianizado na $(i-2)$ -ésima família para $\{n_1, \dots, n_{i-2}\}$ e (a_{i-1}, b_{i-1}) é o abelianizado na $(i-1)$ -ésima família para $\{n_1, \dots, n_{i-2}, n_{i-1}\}$, então, para $n_i \in \mathbb{Z}$ qualquer, temos que

$$(a_i, b_i) = n_i(a_{i-1}, b_{i-1}) + (a_{i-2}, b_{i-2})$$

é o abelianizado na i -ésima família para $\{n_1, \dots, n_{i-2}, n_{i-1}, n_i\}$.

Demonstração. Se i for par, temos que $U_{i-1}V_{i-1}^{n_{i-1}}$ está na $(i-1)$ -ésima família por indução em $\{n_1, \dots, n_{i-2}, n_{i-1}\}$ e $U_{i-2}^{n_{i-2}}V_{i-2}$ está na $(i-2)$ -ésima família por indução em $\{n_1, \dots, n_{i-2}\}$. Como a palavra

$$U_i^{n_i}V_i = (U_{i-1}V_{i-1}^{n_{i-1}})^{n_i}V_{i-1} = (U_{i-1}V_{i-1}^{n_{i-1}})^{n_i}U_{i-2}^{n_{i-2}}V_{i-2}$$

está na i -ésima família por indução em $\{n_1, \dots, n_i\}$, qualquer que seja $n_i \in \mathbb{Z}$, vale que

$$Ab(U_i^{n_i}V_i) = n_i Ab(U_{i-1}V_{i-1}^{n_{i-1}}) + Ab(U_{i-2}^{n_{i-2}}V_{i-2}) = n_i(a_{i-1}, b_{i-1}, 0) + (a_{i-2}, b_{i-2}, 0).$$

De modo análogo, se i for ímpar, temos que $U_{i-1}^{n_{i-1}}V_{i-1}$ está na $(i-1)$ -ésima família por indução em $\{n_1, \dots, n_{i-2}, n_{i-1}\}$ e $U_{i-2}^{n_{i-2}}V_{i-2}$ está na $(i-2)$ -ésima família por indução em $\{n_1, \dots, n_{i-2}\}$. Como a palavra

$$U_i^{n_i}V_i = U_{i-1}(U_{i-1}^{n_{i-1}}V_{i-1})^{n_i} = U_{i-2}^{n_{i-2}}(U_{i-1}^{n_{i-1}}V_{i-1})^{n_i}$$

está na i -ésima família por indução em $\{n_1, \dots, n_i\}$, qualquer que seja $n_i \in \mathbb{Z}$, vale que

$$Ab(U_i^{n_i}V_i) = Ab(U_{i-2}^{n_{i-2}}V_{i-2}) + n_i Ab(U_{i-1}^{n_{i-1}}V_{i-1}) = (a_{i-2}, b_{i-2}, 0) + n_i(a_{i-1}, b_{i-1}, 0).$$

Assim, podemos concluir que (a_i, b_i) pertence ao abelianizado da i -ésima família para $\{n_1, \dots, n_{i-2}, n_{i-1}, n_i\}$. □

Se (a_i, b_i) é o abelianizado na i -ésima família para $\{n_1, \dots, n_i\}$, então a_i pode ser escrito como uma soma de produtos em termos de n_1, \dots, n_i . Diante disso, podemos considerar o inteiro a'_i como a soma de produtos que é obtida trocando-se n_j por n_{j+1} para $j = 1, \dots, i-1$ e fazendo $n_i \in \mathbb{Z}$ qualquer. Analogamente, temos b_i escrito como soma de produtos em termos de n_1, \dots, n_i

e podemos considerar o inteiro b'_i como a soma de produtos que é obtida trocando-se n_j por n_{j+1} para $j = 1, \dots, i - 1$ e fazendo $n_i \in \mathbb{Z}$ qualquer. Por exemplo, o par $(a_3, b_3) = (4, 17)$ pertence ao abelianizado da terceira família em $\{5, -1, -3\}$ e temos

$$\begin{aligned} a_3 &= (-1)(-3) + 1 \\ b_3 &= 5((-1)(-3) + 1) - 3. \end{aligned}$$

Desse modo, para $n_4 \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned} a'_3 &= (-3)n_4 + 1 \\ b'_3 &= -1((-3)n_4 + 1) + n_4. \end{aligned}$$

Lema 5.3.4. Se (a_i, b_i) é o abelianizado na i -ésima família para $\{n_1, \dots, n_i\}$, então, tomando $n_{i+1} \in \mathbb{Z}$ qualquer, temos que

$$(a_{i+1}, b_{i+1}) = (b'_i, n_1 b'_i + a'_i)$$

é o abelianizado da $(i + 1)$ -ésima família para $\{n_1, \dots, n_i, n_{i+1}\}$.

Demonstração. Demonstraremos esse lema por indução. Primeiro observe que se (a_1, b_1) é o abelianizado na 1ª família em $\{n_1\}$ então

$$(a_1, b_1) = (1, n_1).$$

Daí,

$$(a_2, b_2) = (b'_1, n_1 b'_1 + a'_1) = (n_2, n_1 n_2 + 1)$$

é o abelianizado na 2ª família para $\{n_1, n_2\}$. Suponhamos agora que o lema vale para $j \leq i - 1$, vejamos que também vale para $j = i$. Por hipótese,

$$(a_i, b_i) = (b'_{i-1}, n_1 b'_{i-1} + a'_{i-1}) \tag{5.31}$$

e

$$(a_{i-1}, b_{i-1}) = (b'_{i-2}, n_1 b'_{i-2} + a'_{i-2}), \tag{5.32}$$

sendo (a_{i-1}, b_{i-1}) o abelianizado na $(i - 1)$ -ésima família para $\{n_1, \dots, n_{i-1}\}$. Usando o Lema 5.3.3 e as igualdades (5.31) e (5.32), temos que

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= n_{i+1} a_i + a_{i-1} \\ &= n_{i+1} b'_{i-1} + b'_{i-2} \\ &= (n_i b_{i-1} + b_{i-2})' \\ &= b'_i. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_{i+1} &= n_{i+1} b_i + b_{i-1} \\ &= n_{i+1} (n_1 b'_{i-1} + a'_{i-1}) + n_1 b'_{i-2} + a'_{i-2} \\ &= n_1 (n_{i+1} b'_{i-1} + b'_{i-2}) + n_{i+1} a'_{i-1} + a'_{i-2} \\ &= n_1 (n_i b_{i-1} + b_{i-2})' + (n_i a_{i-1} + a_{i-2})' \\ &= n_1 b'_i + a'_i. \end{aligned}$$

O que conclui o resultado. □

Como pôde ser percebido através dos exemplos 5.3.1 e 5.3.2, quanto maior for i , mais complexas serão as palavras na i -ésima família e também as expressões dos abelianizados nessa família. Como

este processo visa estender o Teorema 5.3.3, queremos saber para quais pares (k, h) existe i tal que (k, h) é um abelianizado na i -ésima família. O que faremos nos garantirá a existência de i desde que $k > 0$ e os únicos divisores comuns a k e h sejam 1 e -1 .

Primeiro consideramos (k, h) um par de inteiros positivos primos entre si, usando o algoritmo de Euclides, obtemos inteiros não negativos $m_1, \dots, m_t, r_1, \dots, r_{t-2}$ satisfazendo:

$$\begin{aligned} h &= m_1 k + r_1 \\ k &= m_2 r_1 + r_2 \\ r_1 &= m_3 r_2 + r_3 \\ r_2 &= m_4 r_3 + r_4 \\ &\vdots \\ r_{t-4} &= m_{t-2} r_{t-3} + r_{t-2} \\ r_{t-3} &= m_{t-1} r_{t-2} + 1 \\ r_{t-2} &= m_t. \end{aligned}$$

Vejamos que (k, h) é o abelianizado da t -ésima família para $\{m_1, \dots, m_t\}$. Faremos indução em t . Primeiro observe que se

$$\begin{aligned} h &= m_1 k \\ k &= 1, \end{aligned}$$

então

$$(k, h) = (1, m_1)$$

é o abelianizado na 1^a família para $\{m_1\}$. Como hipótese de indução suponhamos que se (\bar{k}, \bar{h}) é um par de inteiros positivos primos entre si tal que o algoritmo fornece os inteiros $m_1, \dots, m_{t-1}, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_{t-3}$, então (\bar{k}, \bar{h}) é o abelianizado na $(t-1)$ -ésima família para $\{m_1, \dots, m_{t-1}\}$. Assim, consideramos

$$\begin{aligned} \bar{h} &= m_1 \bar{k} + \bar{r}_1 \\ \bar{k} &= m_2 \bar{r}_1 + \bar{r}_2 \\ \bar{r}_1 &= m_3 \bar{r}_2 + \bar{r}_3 \\ \bar{r}_2 &= m_4 \bar{r}_3 + \bar{r}_4 \\ &\vdots \\ \bar{r}_{t-4} &= m_{t-2} \bar{r}_{t-3} + 1 \\ \bar{r}_{t-3} &= m_{t-1}. \end{aligned}$$

Como (\bar{k}, \bar{h}) é o abelianizado na $(t-1)$ -ésima família para $\{m_1, \dots, m_{t-1}\}$, usando o Lema 5.3.4, temos que

$$(\bar{h}', m_1 \bar{h}' + \bar{k}')$$

é o abelianizado na t -ésima família para $\{m_1, \dots, m_{t-1}, m_t\}$.

Note que, para $n_t = m_t$, temos:

$$\begin{aligned} \bar{r}'_{t-3} &= m_t \\ \bar{r}'_{t-4} &= m_{t-1} \bar{r}'_{t-3} + 1 \\ &\vdots \\ \bar{r}'_2 &= m_5 \bar{r}'_3 + \bar{r}'_4 \\ \bar{r}'_1 &= m_4 \bar{r}'_2 + \bar{r}'_3 \\ \bar{k}' &= m_3 \bar{r}'_1 + \bar{r}'_2 \\ \bar{h}' &= m_2 \bar{k}' + \bar{r}'_1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{r}'_{t-3} &= m_t = r_{t-2} \\ \bar{r}'_{t-4} &= m_{t-1}r_{t-2} + 1 = r_{t-1} \\ &\vdots \\ \bar{r}'_2 &= m_5r_4 + r_5 = r_3 \\ \bar{r}'_1 &= m_4r_3 + r_4 = r_2 \\ \bar{k}' &= m_3r_2 + r_3 = r_1 \\ \bar{h}' &= m_2r_1 + r_2 = k \end{aligned}$$

e

$$(\bar{h}', m_1\bar{h}' + \bar{k}') = (k, m_1k + r_1) = (k, h).$$

Portanto (k, h) é o abelianizado da t -ésima família para $\{m_1, \dots, m_t\}$.

Como o algoritmo de Euclides só pode ser usado para números positivos, quando $h < 0$ precisamos do seguinte lema:

Lema 5.3.5. Se (a_i, b_i) é o abelianizado na i -ésima família para $\{n_1, \dots, n_i\}$, então $(a_i, b_i + na_i)$ é o abelianizado na i -ésima família para $\{n_1 + n, \dots, n_i\}$, em que $n \in \mathbb{Z}$ qualquer.

Demonstração. Consideramos (a_{i-1}, b_{i-1}) o abelianizado na $(i-1)$ -ésima família para $\{n_1, \dots, n_{i-1}\}$. Pelo Lema 5.3.4, temos que

$$\begin{cases} a_i = b'_{i-1} \\ b_i = n_1b'_{i-1} + a'_{i-1}. \end{cases}$$

Como

$$(n_1 + n)b'_{i-1} + a'_{i-1} = n_1b'_{i-1} + a'_{i-1} + nb'_{i-1} = b_i + na_i,$$

vale que

$$\begin{cases} a_i = b'_{i-1} \\ b_i + na_i = (n_1 + n)b'_{i-1} + a'_{i-1}. \end{cases}$$

Para concluir o resultado usando o Lema 5.3.4, basta observar que se $(\bar{a}_{i-1}, \bar{b}_{i-1})$ é o abelianizado na $(i-1)$ -ésima família para $\{n_1 + n, n_2, \dots, n_i\}$, então

$$\bar{a}'_{i-1} = a'_{i-1} \text{ e } \bar{b}'_{i-1} = b'_{i-1}$$

□

Voltamos ao caso em que (k, h) é tal que $h < 0, k > 0$ e os únicos divisores comuns a k e h são 1 e -1 . Consideramos n como sendo o menor inteiro tal que $h + nk > 0$. Suponhamos que aplicando o algoritmo ao par $(k, h + nk)$ obtemos $\{m_1, \dots, m_t\}$, isto é, o par $(k, h + nk)$ é o abelianizado na t -ésima família para $\{m_1, \dots, m_t\}$. Pelo lema anterior, temos que

$$(k, h + nk - nk) = (k, h)$$

é o abelianizado na t -ésima família para $\{m_1 - n, m_2, \dots, m_t\}$.

O seguinte resultado segue da construção feita:

Proposição 5.3.6. Se (a_0, b_0) um par de inteiros tais que $a_0 \geq 0$ e os únicos divisores comuns a a_0 e b_0 são 1 e -1 , então existem elementos $w_{u,v} \in F_3(u, v, B), w_{x,y} \in F_2(x, y)$ que comutam em $F_3(u, v, B) \rtimes F_2(x, y)$ e que satisfazem

$$Ab(w_{u,v}) = (a_0, b_0, 0) \text{ e } Ab(w_{x,y}) = (a_0, b_0).$$

Teorema 5.3.4. Suponhamos que $(a-1, b), (c, d-1)$ e (m, n) pertencem a um subgrupo cíclico de \mathbb{Z}^2 gerado por um elemento $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$. Dados $r, s \in \mathbb{Z}$, existem $w \in F_2(u, v)$, uma função a 2

valores split livre de pontos fixos $\phi : \mathbb{T}^2 \dashrightarrow \mathbb{T}^2$ e um levantamento $\widehat{\Phi} = (f_1, f_2) : \mathbb{T}^2 \rightarrow F_2(\mathbb{T}^2)$ de ϕ tais que $Ab(w) = (m, n)$, $\widehat{\Phi}_{\#}(e_1) = (w^r, (a, b))$ e $\widehat{\Phi}_{\#}(e_2) = (w^s, (c, d))$.

Demonstração. Temos que existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $(p, q) = t(a_0, b_0)$ para algum par $(a_0, b_0) \in \mathbb{Z}^2$ satisfazendo as condições da Proposição 5.3.6. Podemos então considerar os elementos $w_{u,v}, w_{x,y} \in \mathbb{F}_3(u, v, B) \rtimes \mathbb{F}_2(x, y)$ que comutam e que satisfazem

$$Ab(w_{u,v}) = (a_0, b_0, 0) \text{ e } Ab(w_{x,y}) = (a_0, b_0).$$

Tomando $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$(a - 1, b) = \lambda_1 t(a_0, b_0),$$

$$(c, d - 1) = \lambda_2 t(a_0, b_0),$$

$$(m, n) = \lambda_3 t(a_0, b_0),$$

e definindo $\varphi : \pi(\mathbb{T}^2) \rightarrow P_2(\mathbb{T}^2 \setminus \{1\})$ por

$$\varphi(e_1) = (w_{u,v})^{\lambda_3 r t} (w_{x,y})^{\lambda_1 t},$$

$$\varphi(e_2) = (w_{u,v})^{\lambda_3 s t} (w_{x,y})^{\lambda_2 t},$$

temos que φ se estende a um homomorfismo e, além disso,

$$i_{\#} \circ \varphi(e_1) = ((w_{u,v})^{\lambda_3 t r}, (a - 1, b)),$$

$$i_{\#} \circ \varphi(e_2) = ((w_{u,v})^{\lambda_3 t s}, (c, d - 1)).$$

Usando o item (b) do Teorema 3.3.3, temos que a função 2-valuada ϕ_0 que possui levantamento $\widehat{\Phi}_0$ satisfazendo $\widehat{\Phi}_{0\#}(e_1) = ((w_{u,v})^{\lambda_3 t r}, (a - 1, b))$ e $\widehat{\Phi}_{0\#}(e_2) = ((w_{u,v})^{\lambda_3 t s}, (c, d - 1))$ se deforma livre de raízes, logo a função 2-valuada ϕ que possui levantamento $\widehat{\Phi}$ satisfazendo $\widehat{\Phi}_{\#}(e_1) = (w^r, (a, b))$ e $\widehat{\Phi}_{\#}(e_2) = (w^s, (c, d))$ para $w = (w_{u,v})^{\lambda_3 t}$ se deforma livre de pontos fixos. □

Referências Bibliográficas

- [1] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*. (German) Abh. Math. Sem. der Uni. Hamburg 4 (1925), 47-72. [3](#)
- [2] E. Artin, *Theory of Braids*. Ann. of Math. (1947), 101-126.
- [3] E. Artin, *Braids and Permutations*. Ann. of Math. (1947), 643-649.
- [4] P. Bellingeri, *On presentations of surface braid groups*. J. Algebra 274 (2004) 543-563. [35](#)
- [5] C. Berge, *Topological spaces*. Oliver e Boyd, Edinburgh and London (1963). [7](#)
- [6] J. S. Birman, *On Braids Groups*. Comm. Pure and Appl. Math. (1969), 41-62. [7](#)
- [7] R. F. Brown, *The Lefschetz Fixed Points Theorem*, Scott Foresman (1971). [17](#), [22](#), [23](#), [25](#), [47](#)
- [8] R. F. Brown, *Fixed Points of n -valued Maps of the Circle*. Bull. Pol. Acad. Sci. Math. (2006), 153-162.
- [9] R. F. Brown; M. Crabb; A. Ericksen; M. Stimpson, *The 2-sphere is Wecken for n -valued maps*. (English Summary) J. Fixed Point Theory Appl. (2019), no. 2, Art. 55, 6 pp. [1](#), [53](#)
- [10] R. F. Brown and D. L. Gonçalves. *On the topology of n -valued maps*. Advances in Fixed Point Theory no. 2 (2018), 255-258. [33](#)
- [11] R. F. Browder. *On the fixed point index for continuous mappings of locally connected spaces*. Summa Brasil. Math. (1960), 183-191. [24](#)
- [12] F. H. Croom. *Basics Concepts of Algebraic Topology*, Springer Verlag, New York (1978). [22](#)
- [13] E. Fadell and J. V. Buskirk, *The Braid Groups of S^2 and E^2* , Duke Math. Journal 29 (1962), 243-257. [53](#)
- [14] E. Fadell and L. Neuwirth, *Configuration spaces*, Math. Scand. (1962), 111-118. [10](#)
- [15] R. H. Fox and L. Neuwirth, *The Braid groups*, Math. Scand. (1962), 111-118. [3](#)
- [16] D. L. Gonçalves and J. Guaschi. *Fixed points of n -valued maps on surfaces and the Wecken property: a configuration space approach*, Science China Mathematics (2017), 1561-1574. [50](#), [53](#), [86](#)
- [17] D. L. Gonçalves and J. Guaschi. *Fixed points of n -valued maps, the fixed point property and the case of surfaces: a braid approach*, Indagationes Mathematicae (2018), 91-124. [34](#)
- [18] D. L. Gonçalves e J. C. S. Kühn. *Teoria de Índices*, 14^o Colóquio Brasileiro de Matemática (1983). [17](#), [18](#)
- [19] D. L. Gonçalves and J. Guaschi. *The roots of the full twist for surface braid groups*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **137** (2004) 307-320.
- [20] D. L. Gonçalves and J. Guaschi. *The classification of the virtually cyclic subgroups of the sphere braid groups*, SpringerBriefs in Mathematics (2013).

- [21] V. L. Hansen, *Braids and Coverings: selected topics*, London Mathematical Society Student Texts **18**, Cambridge University Press (1989).
- [22] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002). [12](#), [17](#), [22](#), [26](#), [38](#), [39](#)
- [23] A. Hatcher, *Vector Bundles and K-Theory*, Version 2.2, November 2017.
- [24] P. J. Hilton, *An Introduction to Homotopy Theory*, Cambridge University Press (1953).
- [25] D. Husemoller. *Fibre Bundles*, Graduate Texts in Math., vol. 20. Springer-Verlag, Heidelberg - New York (1966).
- [26] D. L. Johnson, *Presentations of groups*, London Mathematical Society Student Texts **15**, Cambridge University Press (1976). [7](#)
- [27] V. C. Laass, *Grupos de tranças do espaço projetivo*. Dissertação de Mestrado, ICMC-USP (2011). [7](#)
- [28] B. O'Neill, *Induced homology homomorphism for set-valued maps*, Pacific J. Math. (1957). pp. 1179-1184. [34](#)
- [29] H. Schirmer. *Fix-finite approximations on n -valued multifunctions*, Fund. Math. (1984), 73-80. [44](#)
- [30] H. Schirmer. *An index and a Nielsen number for n -valued multifunctions*, Fund. Math. (1984), 207-219. [1](#), [44](#), [45](#), [47](#)
- [31] G. P. Scott. *Braid groups and the group of homeomorphisms of a surface*, Proc. Camb. Phil. Soc. (1970), 605-617. [5](#), [7](#)
- [32] I. N. Stewart and D. O. Tall. *Algebraic Number Theory*. Chapman and Hall (1979). [30](#)
- [33] J. W. Vick. *Algebraic Number Theory - An Introduction to Algebraic Topology*. Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, second Edition (1973). [17](#), [22](#)
- [34] G. W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*. Graduate Texts in Math., vol. 61. Springer-Verlag, New York (1978). [10](#), [12](#)