Complexidade de módulos

Silvana Kameyama

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTASTÍCA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos

São Paulo, abril de 2012

Complexidade de módulos

Essa é a versão final da dissertação
da aluna Silvana Kameyama.

Comissão Julgadora:

- Eduardo do Nascimento Marcos - IME-USP
- Marcelo Lanzilotta - Universidad de la Republica, Uruguai
- Sônia Maria Fernandes - DMA-UFV

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, antes de tudo, a Deus por estar sempre presente na minha vida, me dando força e equilíbrio para sobrepor todos os obstáculos.

Gostaria de agradecer também a minha família por preencherem os meus dias com amor, alegrias e algumas brigas (para sair um pouco da rotina). Em especial, queria agradecer a minha mãe por ajudar a fazer de mim a pessoa que sou hoje, pelo companheirismo e pela paciência. Sei que dei muito trabalho. E a minha irmã, que aguentou minhas ligações de desespero, quando parecia que as coisas não andavam, e proporcionou momentos de sonoras risadas, que me fizeram relaxar.

Agradeço também ao meu orientador, Eduardo, pela paciência durante esses anos. Sei que não é fácil ter uma aluna, que trabalha, estuda e tem milhões de problemas pessoais, mas você sempre me cobrou, quando era necessário, e sempre me compreendeu e incentivou, quando as coisas estavam difíceis.

Quero agradecer, ainda, a minha professora/"mãe"Sônia. Sem você não teria chegado até aqui. Obrigada por acreditar em mim.

E, finalmente, gostaria de agradecer a todos os meus amigos. Especialmente, a Paula, que direta ou indiretamente, me incentivou, e me fez ver que eu não era um caso perdido. Ao pessoal da salinha de mestrado, André, Bruno, Big, Cleber, Diego, Dylene, Maurício, Gustavo, e tantos outros, por me ajudarem, de alguma forma, a passar por todos os desafios do mestrado. E a minha amiga, Flavia, que com seu espírito alegre, me deu forças para dar os últimos passos.

Resumo

A complexidade de um módulo M, sobre uma álgebra de dimensão finita R, é a medida do crescimento da dimensão de suas sizigias. No nosso trabalho, estudamos esse conceito, nos concentrando muito mais no caso das álgebras autoinjetiva. Relacionamos esse crescimento com o comportamento da componente do carcás de Auslander-Reiten, a qual o módulo M pertence. Em particular, estudamos, com bastante cuidado, o caso em que a complexidade é 1, o que significa que a dimensão das sizigias são eventualmente constante. Surpreendentemente, o comportamento de todos os módulos numa mesma componente é muito parecido.

Palavras-chave: álgebras de Artin, álgebras autoinjetivas, complexidade, números Betti, resoluções projetivas, carcás de Auslander-Reiten, sequências de Auslander-Reiten.

Abstract

The complexity of a module M under a finite dimensional algebra R is the measure of the growth of its syzygies' dimension. In our work, we study this concept concentrating on the case of the selfinjective algebras. We relate this growth with the behavior of the Auslander-Reiten component containing this module. In particular, we study, carefully, the case in which the complexity is 1. Surprisingly, the behavior of every module in the same component as M is very similar.

Keywords: Artin algebras, selfinjective algebras, complexity, Betti numbers, projectives resolutions, Auslander-Reiten quiver, Auslander-Reiten sequences.

Sumário

Introdução

Começaremos este trabalho com alguns resultados preliminares, que serão importantes para o bom entendimento dos resultados referentes a complexidades de módulos finitamente gerados. Assim, no capítulo 1, daremos algumas definições elementares sobre álgebras e módulos, trabalharemos alguns resultados da Teoria de Categorias e da Teoria de Representações.

No capítulo 2, estudaremos os carcases de Auslander-Reiten. Estaremos interessados em caracterizar as componentes em que aparecem módulos τ-periódicos. Para isso, caracterizaremos, primeiramente, os diagramas de Dynkin (finitos e infinitos) e de Euclides, usando as noções de função subaditiva, função aditiva e matriz de Cartan. Essa caracterização será feita no teorema:

Seja C uma matriz de Cartan conexa e d uma função subaditiva para C.

1. *Então, C é um diagrama de Dynkin, um diagrama Euclidiano ou um dos $A_\infty^\infty, A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$.*
2. *Se d não é aditiva, então C é um diagrama de Dynkin ou A_∞.*
3. *Se d é ilimitado, então C é A_∞.*

As definições de matriz de Cartan, função subaditiva, função aditiva, diagramas de Dynkin e Euclidiano, $A_\infty^\infty, A_\infty, B_\infty, C_\infty$ e D_∞, noções presentes no teorema acima, encontram-se no capítulo 2.

A seguir, estudaremos os carcases de Riedtmann. Definiremos para esse tipo de carcás as classes de Cartan, e sobre estas, as funções subaditivas e aditivas. E através do teorema abaixo caracterizaremos os carcases de Riedtmann, que possuírem um vértice periódico.

A classe de Cartan de uma componente do carcás de Auslander-Reiten de uma álgebra de Artin contendo módulos periódicos é ou um diagrama de Dynkin ou A_∞.

Estaremos, particularmente, interessados naqueles carcases de Riedtmann da forma $\mathbb{Z}A_\infty$, pois estes nos possibilitarão definir os tubos estáveis, componentes do carcás de Auslander-Reiten, que possuem módulos τ-periódicos.

No capítulo 3, iniciaremos nosso estudo de complexidade de módulos (finitamente gerados). Primeiramente, estudaremos algumas propriedades, principalmente daqueles módulos que a complexidade são somas diretas de outros módulos, e a relação entre as complexidades dos módulos que estão em uma mesma sequência exata curta. Mostraremos que, sobre uma álgebra autoinjetiva, os módulos presentes em um carcás de Auslander-Reiten têm a mesma complexidade. Seguiremos, então, estudando o comportamento das sequências de Auslander-Reiten, quando aplicamos nela a sizigia (proposição 3.9). Para isso, apresentaremos as definições de morfismos e módulos Ω-perfeitos. Em seguida, provaremos que os carcases de Auslander-Reiten de muitas álgebras autoinjetivas têm módulos não-projetivos eventualmente Ω-perfeitos (proposição 3.13). Além disso, provaremos na proposição 3.16 que se um módulo C sobre uma álgebra de Artin autoinjetiva tem complexidade igual a 1, $\tau^n C$ é Ω-perfeito, para algum $n \geq 0$. Na proposição 3.14, estabeleceremos as condições para termos

$$\beta_n(B) = \beta_n(A) + \beta_n(C), \text{ para todo } n \geq 0,$$

quando A, B, C forem tais que $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ é uma sequência exata. E, por fim, na proposição 3.19, estabeleceremos o número de R-módulos indecomponíveis do termo do meio de uma sequência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow \tau C \xrightarrow{(f_1, f_2, \ldots, f_t)^T} E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_t \xrightarrow{(g_1, g_2, \ldots, g_t)} C \longrightarrow 0\,,$$

quando R for uma álgebra de Artin autoinjetiva, e $\beta_n(C) = 1$, para n suficientemente grande.

No capítulo 4, nos concentraremos nos módulos que possuem números Betti limitados. Ou seja, estudaremos os módulos que possuem complexidade igual a 1. Um invariante muito importante para esse estudo é $\beta(C)$, com C um módulo de complexidade igual a 1, definido como o máximo entre os $\beta_k(C)$, para todo $k \geq 0$. Observe que podemos falar do máximo dos números Betti, por estes serem limitados. Veremos o comportamente das sequências de Auslander-Reiten que possuem esses módulos de complexidade 1, o que acontece com seus morfismos (proposição 4.9) e o número de módulos indecomponíveis em seu termo do meio (proposição 4.2 e teorema 4.10). Nosso principal resultado é o teorema 4.11 enunciado abaixo.

Seja R uma álgebra de Artin autoinjetiva e $\mathcal{C}$ uma componente regular do carcás de Auslander-Reiten, que contém um módulo de complexidade 1. *Então, $\mathcal{C}$ é um tubo estável ou uma componente do tipo $\mathbb{Z}A_\infty$.*

No último capítulo, estudaremos as sequências de Auslander-Reiten e as componentes do carcás de Auslander-Reiten, que contém módulos com números Betti eventualmente constantes ou eventualmente periódicos. No teorema 5.7, considerando R uma álgebra de Artin autoinjetiva e $\mathcal{C}$ uma componente regular do carcás de Auslander-Reiten da álgebra R, que contém módulos com números Betti eventualmente constantes, mostramos que existe uma família infinita $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ de módulos em $\mathcal{C}$, que possuem números Betti constantes $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que a sequência $\{b_n\}$ é estritamente crescente, e os R-módulos M_n estão sobre τ-órbitas diferentes.

Observação:
A noção de unicidade é muito importante na Matemática. Contudo, muitas vezes, essa unicidade não implica que um único objeto exista satisfazendo certa condição. Através do isomorfismo, dois ou mais objetos podem satisfazer tal condição, e ainda sim, temos a garantia de uma unicidade, uma vez que o isomorfismo preserva as propriedades de um objeto. Assim, observe a seguinte definição.

Definição 0.1 *Seja A um objeto, que satisfaz determinada condição. Dizemos que A é único, a menos de isomorfismo, se toda vez que tivermos B, que satisfaz a mesma condição, existir um isomorfismo, que leva A em B.*

Encontraremos exemplos de objetos únicos, a menos de isomorfismo, no decorrer desse trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo, trataremos daqueles resultados mais elementares, cujas aplicações serão importantes na demonstração de resultados futuros. Usaremos alguns conceitos básicos (como por exemplo, espaços vetorias, anéis, ideais, corpos etc.), que não serão definidos neste trabalho, porém podem ser facilmente encontrados em [11], [10] e [5].

1.1 Álgebras e Módulos

Nessa seção, enunciaremos as definições relativas a estruturas álgebricas e aplicações, que serão de extrema importância nesse trabalho. Vamos começar com a definição de álgebra.

Definição 1.1 *Seja k um corpo. Uma k-*álgebra *R é um anel com um elemento identidade, denotado por 1, tal que*

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b),$$

para todo $\lambda \in k$ e para todo $a, b \in R$. Note que a k-álgebra R tem uma estrutura de k-espaço vetorial.

Uma k-álgebra R é dita *de dimensão finita*, se a dimensão $\dim_k R$ do k-espaço vetorial R é finita.

Sobre uma k-álgebra R podemos definir uma estrutura algébrica denominada *módulo.*

Definição 1.2 *Seja R uma k-álgebra. Um R-*módulo à esquerda *é um par $(M, \cdot)$, onde M é um k-espaço vetorial e a aplicação $\cdot : R \times M \to M$, definida por $(\alpha, m) \mapsto \alpha m$, é uma operação binária que satisfaz as seguintes condições:*

1. $\alpha(m_1 + m_2) = \alpha m_1 + \alpha m_2$;

2. $(\alpha + \beta)m = \alpha m + \beta m$;

3. $(\alpha\beta)m = \alpha(\beta m)$;

4. $1m = m$;

5. $\alpha(\lambda m) = (\lambda\alpha)m = \lambda(\alpha m)$

para todo $m_1, m_2 \in M$, $\alpha, \beta \in R$ *e* $\lambda \in k$.

Analogamente, podemos definir um R-módulo à direita.

Um k-subespaço vetorial N de um R-módulo à esquerda M é um *R-submódulo* de M se $\alpha n \in N$, para todo $n \in N$, e para todo $\alpha \in R$. Um súbmódulo próprio N de M é *maximal*, se não existe um submódulo L de M, tal que $N \subsetneq L \subsetneq M$. Dizemos que um R-módulo M é *finitamente gerado*, se existem elementos $m_1, m_2, \ldots, m_s$, tais que qualquer elemento m de M pode ser escrito da forma $m = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \ldots + \alpha_s m_s$, para $\alpha_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Definiremos a seguir uma aplicação entre R-módulos.

Definição 1.3 *Sejam M e N R-módulos à esquerda. Um* morfismo entre R-módulos (ou homomorfismo entre R-módulos ou R-homomorfismo) *é uma aplicação $f : M \to N$ tal que $f(\alpha m_1 + \beta m_2) = \alpha f(m_1) + \beta f(m_2)$, para todo $m_1, m_2 \in M$ e para todo $\alpha, \beta \in R$.*

Um R-homomorfismo é dito um *monomorfismo*, se é injetivo. Um R-homomorfismo é dito um *epimorfismo*, se é sobrejetivo. E um R-homomorfismo é um *isomorfismo*, se for um monomorfismo e um epimorfismo simultaneamente. Dizemos que M e N são *isomorfos*, e escrevemos $M \simeq N$, quando existe um isomorfismo $f : M \to N$. Um R-homomorfismo $f : M \to M$ é chamado de *endomorfismo*.

O conjunto $\hom_R(M, N)$ de todos os R-homomorfismos de M em N é um k-espaço vetorial, devido à multiplicação por escalar $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$, dado por $(\lambda f)(m) = f(\lambda m)$, para todo $f \in \hom_R(M, N)$, $\lambda \in k$ e $m \in M$. O k-espaço vetorial $EndM = \hom_R(M, M)$ de todos os R-endomorfismos de qualquer R-módulo à esquerda M é uma k-álgebra associativa, se definirmos sua multiplicação como a composição das aplicações de M em M. Nesse caso, a aplicação identidade 1_M é o elemento identidade de $EndM$.

Considerando um R-homomorfismo $f : M \to N$, podemos definir submódulos de M e N. Vejamos a seguinte definição.

Definição 1.4 *Seja $f : M \to N$ um morfismo de R-módulos.*

1. *O módulo $Nucf = \{m \in M | f(m) = 0\}$ é chamado de* núcleo de f.

2. *O módulo $Imf = \{f(m) \in N | m \in M\}$ é chamado* imagem de f.

3. *O módulo $Conucf = N/Imf$ é chamada de* conúcleo de f.

A seguir, definiremos algumas classes de módulos, que desempenham um papel importante na Teoria de Representações.

Definição 1.5 *Um R-módulo M é chamado* indecomponível*, se é não-nulo e M não possui nenhuma decomposição em soma direta $M \simeq N \oplus L$, onde L e N são submódulos próprios de M.*

(Definição e propriedades de somas diretas ver [10], capítulo 6, seção 6.6.)

Definição 1.6 *Sejam k um corpo algebricamente fechado e R um a k-álgebra de dimensão finita.*

1. *Um R-módulo à esquerda P é* projetivo*, se, para qualquer epimorfismo $h : M \to N$, a aplicação induzida* $\hom_R(P, h) : \hom_R(P, M) \to \hom_R(P, N)$ *é sobrejetora, isto é, para qualquer epimorfismo $h : M \to N$ e qualquer $f \in \hom_R(P, N)$, existe um morfismo $f' \in \hom_R(P, M)$, tal que o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "f'"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "h"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

2. *Um R-módulo à esquerda I é* injetivo*, se, para qualquer monomorfismo $u : L \to M$, a aplicação induzida* $\hom_R(u, I) : \hom_R(M, I) \to \hom_R(L, I)$ *é sobrejetora, isto é, para qualquer monomorfismo $u : L \to M$ e qualquer $g \in \hom_R(L, I)$, existe $g' \in \hom_R(M, I)$, tal que o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, "g'"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

3. *Um R-módulo à esquerda é* simples*, se S é não-nulo, e os únicos submódulos de S são o submódulo zero e o próprio S. Um módulo M é* semisimples*, se M é uma soma direta de módulos simples.*

Enunciaremos a seguir as definições de *radical* e de *socle* de um módulo M.

Definição 1.7 *Sejam k um corpo algebricamente fechado e R uma k-ágebra de dimensão finita. Seja também M um R-módulo à esquerda. O* radical de Jacobson JM de M *é a interseção de todos os submódulos maximais de M.*

Definição 1.8 *Sejam k um corpo algebricamente fechado e R uma k-ágebra de dimensão finita. Seja também M um R-módulo à esquerda. O* socle de M *é o submódulo de M gerado por todos os submódulos simples de M. Este é um módulo semisimples, e será denotado por $socM$*

Suponhamos que R é uma k-álgebra de dimensão finita. Se M é um R-módulo à esquerda finitamente gerado, então existe uma cadeia $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n = M$ de submódulos de M, tal que o módulo M_{j+1}/M_j é simples, para todo $j = 0, 1, ..., n-1$. Qualquer cadeia com essa propriedade é chamada de *série de composição* de M.

Teorema 1.9 *(Jordan-Hölder) Se R é uma k-álgebra de dimensão finita e*

$$\begin{gathered} \{0\} = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n = M, \\ \{0\} = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_m = M \end{gathered}$$

são duas séries de composição de um R-módulo à esquerda finitamente gerado M, então $n = m$. Além disso, existe uma permutação σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que, para qualquer $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, existe um R-isomorfismo $M_{j+1}/M_j \simeq N_{\sigma(j+1)}/N_{\sigma(j)}$.

Prova: Ver [6]. ■

Dada uma série de composição, os fatores $M_1/M_0, \ldots, M_n/M_{n-1}$ são chamados *fatores de composição*, e n, o *comprimento* do módulo M. Este último será denotado por $c(M)$.

Definiremos, a seguir, as álgebras de Artin.

Definição 1.10 *Seja R uma k-álgebra, onde k é um anel comutativo artiniano. Dizemos que R é uma* álgebra de Artin*, se R é finitamente gerada como R-módulo.*

Nesse trabalho, consideraremos as álgebras de dimensão finita sobre um corpo, que são um exemplo de álgebras de Artin.

1.2 Categorias e Funtores

A Teoria de Categorias e Funtores desempenha um papel importante na Teoria de Representações de Álgebras. Frequentemente, vê-se ferramentas dessa primeira auxiliando o desenvolvimento e as demonstrações dos resultados da segunda. Por esse motivo, estudaremos nessa seção um pouco dessa teoria, que será muito importante no decorrer desse trabalho. Começaremos pela definição de categorias.

Definição 1.11 *Uma* categoria $\boldsymbol{C}$ *consiste de*

1. *Uma classe ob$\boldsymbol{C}$ de objetos, usualmente denotados por A, B, C, etc.*

2. *Para cada par ordenado de objetos (A, B), um conjunto $\hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$ (ou, simplesmente $\hom(A, B)$, se C é claro), cujos elementos são chamados morfismos com domínio A e codomínio B.*

3. *Para cada tripla ordenada de objetos (A, B, C), uma aplicação $(f, g) \mapsto gf$ de $\hom(A, B) \times \hom(B, C)$ em $\hom(A, C)$.*

Os objetos e os morfismos satisfazem as seguintes condições:

C1 *Se $(A, B) \neq (C, D)$, então $\hom(A, B)$ e $\hom(C, D)$ são disjuntos.*

C2 *(Associatividade) Se $f \in \hom(A, B)$, $g \in \hom(B, C)$ e $h \in \hom(C, D)$, então $(hg)f = h(gf)$.*

C3 *(Unidade) Para cada objeto A, temos um elemento $1_A \in \hom(A, A)$, tal que $f1_A = f$, para todo $f \in \hom(A, B)$, e $1_A g = g$, para todo $g \in \hom(B, A)$.*

Um exemplo de categoria é dado pelos módulos à esquerda sobre uma álgebra R. Essa categoria é denotada por $ModR$. Seus objetos consistem dos R-módulos à esquerda, e seu conjunto de morfismos dos R-homomorfismos entre esses módulos.

Temos ainda as noções de subcategoria e subcategoria plena, que serão definidas a seguir.

Definição 1.12 *Uma categoria* $\boldsymbol{D}$ *é dita uma* subcategoria *de* $\boldsymbol{C}$*, se* $ob\boldsymbol{D}$ *é uma subclasse de* $ob\boldsymbol{C}$*, e para qualquer* $A, B \in ob\boldsymbol{D}$, $\hom_{\boldsymbol{D}}(A,B) \subset \hom_{\boldsymbol{C}}(A,B)$*. É necessário também que* 1_A*, para* $A \in ob\boldsymbol{D}$*, e o produto de morfismos para* $\boldsymbol{D}$ *sejam os mesmos que para* $\boldsymbol{C}$*.*

Definição 1.13 *Seja* $\boldsymbol{D}$ *uma subcategoria da categoria* $\boldsymbol{C}$*. Dizemos que essa subcategoria* $\boldsymbol{D}$ *é* plena*, se* $\hom_{\boldsymbol{D}}(A,B) = \hom_{\boldsymbol{C}}(A,B)$*, para todo* $A, B \in \boldsymbol{D}$*.*

Descreveremos agora alguns exemplos importantes.

Exemplos 1.14 *$modR$ é a categoria dos módulos à esquerda finitamente gerados sobre uma álgebra artiniana R. Esta é uma subcategoria plena da categoria $ModR$ dos R-módulos à esquerda. Seus objetos são os R-módulos finitamente gerados, e seus morfismos são os R-homomorfismos entre eles.*

Exemplos 1.15 *$\mathcal{P}(R)$ é a categoria plena dos R-módulos finitamente gerados projetivos. Seus objetos consistem dos R-módulos finitamente gerados projetivos, e como no exemplo anterior, seus morfismos são os R-homomorfismos entre eles.*

Exemplos 1.16 *Seja R uma álgebra de Artin. Denotamos por $indR$ uma subcategoria plena de $modR$, cujos objetos são representantes escolhidos das classes de isomorfismos dos módulos indecomponíveis em $modR$.*

Na matemática, a noção de dualidade é bastante explorada. Na Teoria de Categorias, não poderia ser diferente. Em muitas das discussões que faremos, essa será uma ferramenta muito importante. Portanto, daremos, a seguir, a definição de categoria dual (ou categoria oposta).

Definição 1.17 *Seja* $\boldsymbol{C}$ *uma categoria. Definimos a* categoria $\mathbf{C}^{op}$ dual *de* $\boldsymbol{C}$ *da seguinte maneira*

1. $ob\boldsymbol{C}^{op} = ob\boldsymbol{C}$;

2. *para* $A, B \in ob\boldsymbol{C}^{op}$, $\hom_{\boldsymbol{C}^{op}}(A,B) = \hom_{\boldsymbol{C}}(B,A)$;

3. *se* $f \in \hom_{\boldsymbol{C}^{op}}(A,B)$ *e* $g \in \hom_{\boldsymbol{C}^{op}}(B,C)$*, então* gf *(em* $\boldsymbol{C}^{op}$*)* $= fg$ *(em* $\boldsymbol{C}$*);*

4. 1_A *é como em* $\boldsymbol{C}$.

Pictoricamente, temos o seguinte: se $A \xrightarrow{f} B$ em $\mathbf{C}$, então $A \xleftarrow{f} B$ em $\mathbf{C}^{op}$, e se

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

é comutativo em $\mathbf{C}$, então

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "f"'] \\ & C \arrow[ul, "h"] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

é comutativo em $\mathbf{C}^{op}$.

Daremos agora a definição de funtor covariante.

Definição 1.18 *Se* $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ *são categorias, um* funtor covariante F *de* $\boldsymbol{C}$ *em* $\boldsymbol{D}$ *consiste de*

1. *Uma associação* $A \mapsto FA$ *de* ob$\boldsymbol{C}$ *em* ob$\boldsymbol{D}$.

2. *Para todo par de objetos* (A, B) *de* $\boldsymbol{C}$, *uma aplicação* $f \mapsto F(f)$ *de* $\hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$ *em* $\hom_{\boldsymbol{D}}(FA, FB)$.

Além disso, é preciso que as seguintes condições sejam satisfeitas:

F1 *Se* gf *é definida em* $\boldsymbol{C}$, *então* $F(gf) = F(g)F(f)$.

F2 $F(1_A) = 1_{FA}$.

A condição $F1$ afirma que qualquer diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h"'] & C \end{tikzcd}$$

em $\mathbf{C}$ é levado no diagrama comutativo em $\mathbf{D}$

$$\begin{tikzcd} & FB \arrow[d, "F(g)"] \\ FA \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[r, "F(h)"'] & FC \end{tikzcd}$$

Também temos a definição de funtor contravariante.

Definição 1.19 *Se* $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ *são categorias, um* funtor contravariante F *de* $\boldsymbol{C}$ *em* $\boldsymbol{D}$ *consiste de*

1. *Uma associação* $A \mapsto FA$ *de* ob$\boldsymbol{C}$ *em* ob$\boldsymbol{D}$.

2. *Para todo par de objetos* (A, B) *de* $\boldsymbol{C}$*, uma aplicação* $f \mapsto F(f)$ *de* $\hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$ *em* $\hom_{\boldsymbol{D}}(FB, FA)$*.*

Além disso, é preciso que as seguintes condições sejam satisfeitas:

F'1 *Se* gf *é definida em* $\boldsymbol{C}$*, então* $F(gf) = F(f)F(g)$*.*

F'2 $F(1_A) = 1_{FA}$*.*

Dualmente, a condição $F'1$ afirma que qualquer diagrama

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dd, "g"] \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \\ & C \end{tikzcd}$$

é levado no diagrama comutativo em **D**

$$\begin{tikzcd} & FB \arrow[dl, "F(f)"'] \\ FA & \\ & FC \arrow[ul, "F(h)"] \arrow[uu, "F(g)"'] \end{tikzcd}$$

Observemos que podemos definir, também, um funtor contravariante entre as categorias **C** e **D** como um funtor covariante F que vai de $\mathbf{C}^{op}$ em **D**.

A definição seguinte traz a construção do produto de duas categorias. Considerando essa construção, podemos definir um funtor chamado de *bifuntor*.

Definição 1.20 *Sejam* $\boldsymbol{C}$ *e* $\boldsymbol{D}$ *categorias. O* produto $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}$ *dessas categorias é a categoria, cujos objetos são os pares* (A, B) *com* $A \in Ob\boldsymbol{C}$ *e* $B \in Ob\boldsymbol{D}$*, e os morfismos* $h : (A, B) \to (A', B')$ *são os pares* $h = (h_1, h_2)$*, onde* $h_1 \in \hom_{\boldsymbol{C}}(A, A')$ *e* $h_2 \in \hom_{\boldsymbol{D}}(B, B')$*. A composição em* $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}$ *é definida por* $(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1h_1, g_2h_2)$*, para todo* $h_1 \in \hom_{\boldsymbol{C}}(A, A')$*,* $g_1 \in \hom_{\boldsymbol{C}}(A', A'')$*,* $h_2 \in \hom_{\boldsymbol{D}}(B, B')$ *e* $g_2 \in \hom_{\boldsymbol{D}}(B', B'')$*. Qualquer funtor* $F : \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C'}$ *é chamado um* bifuntor*.*

Introduziremos a seguir a definição de transformação natural.

Definição 1.21 *Sejam* F *e* G *funtores de* $\boldsymbol{C}$ *em* $\boldsymbol{D}$*. Definimos uma* transformação natural η *de* F *em* G *como a aplicação, que atribui a todo objeto* A *em* $\boldsymbol{C}$ *um morfismo* $\eta_A \in \hom_{\boldsymbol{D}}(FA, GA)$*, tal que, para quaisquer objetos* A, B *de* $\boldsymbol{C}$ *e qualquer* $f \in \hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$*, o retângulo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & FA \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & GA \arrow[d, "G(f)"] \\ B & FB \arrow[r, "\eta_B"] & GB \end{tikzcd}$$

é comutativo. Além disso, se todo η_A é um isomorfismo, para todo A, então η é chamado um isomorfismo natural.

Dizemos que as categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são isomorfas, se existem funtores $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, tais que $GF = 1_{\mathbf{C}}$ e $FG = 1_{\mathbf{D}}$.

Um exemplo de categorias isomorfas são as categorias dos A-módulos finitamente gerados à esquerda (modA) e dos A^{op}-módulos finitamente gerados à direita, com A um anel. Se M é um A-módulo à esquerda, M se torna um A^{op}-módulo à direita, definindo-se $xa = ax$, para $x \in M$ e $a \in A^{op} = A$ (como conjuntos). Analogamente, qualquer A^{op}-módulo à direita se torna um A-módulo à esquerda pelo processo reverso. É claro também que um homomorfismo de M em N, M e N como A-módulos à esquerda, é um homomorfismo de M em N, M e N como A^{op}-módulos à direita.

O conceito de isomorfismo de categorias é um tanto restrito. Assim, daremos a noção de equivalência de categorias.

Definição 1.22 *Sejam $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ categorias. Dizemos que $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ são* categorias equivalentes, *se existem funtores $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ e $G : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$, tais que $GF \simeq 1_{\boldsymbol{C}}$ e $FG \simeq 1_{\boldsymbol{D}}$, onde $\simeq$ denota o isomorfismo natural de funtores.*

Notemos que isomorfismo de categorias implica em equivalência de categorias.

A seguir, temos as definições de funtores fiel, pleno e denso, através das quais, teremos um importante resultado sobre equivalência de categorias.

Definição 1.23 *Um funtor covariante $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ é dito* fiel *se, para todo par de objetos (A, B) em $\boldsymbol{C}$ a aplicação $f \mapsto F(f)$ de $\hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$ em $\hom_{\boldsymbol{D}}(FA, FB)$ é injetiva.*

Definição 1.24 *Um funtor covariante $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ é dito* pleno *se, para todo par de objetos (A, B) em $\boldsymbol{C}$ a aplicação $f \mapsto F(f)$ de $\hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$ em $\hom_{\boldsymbol{D}}(FA, FB)$ é sobrejetiva.*

Definição 1.25 *Um funtor $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ é chamado* denso *se, para qualquer objeto Y de $\boldsymbol{D}$, existem um objeto X em $\boldsymbol{C}$ e um isomorfismo $F(X) \simeq Y$.*

A proposição seguinte é de extrema importância na teoria de categoria e funtores, e sua demonstração pode ser encontrada em [11](proposição 1.3).

Proposição 1.26 *Seja F um funtor de $\boldsymbol{C}$ em $\boldsymbol{D}$. Então F é uma equivalência se, e somente se, F é fiel, pleno e denso.* ■

Nosso objetivo, agora, será definir categorias quocientes, que será de grande importância para a definição do Transladado de Auslander-Reiten. Para tal, precisaremos das seguintes definições. A primeira pode ser encontrada em [2], e a seguinte, em [1].

Definição 1.27 *Uma categoria $\boldsymbol{C}$ é* pré aditiva, *se, para cada par (A, B) em $\boldsymbol{C}$, o conjunto de morfismos $\hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$ é um grupo abeliano, e a composição de morfismos $\hom_{\boldsymbol{C}}(A, B) \times \hom_{\boldsymbol{C}}(B, C) \to \hom_{\boldsymbol{C}}(A, C)$ é bilinear. Se, além disso, para qualquer conjunto finito de objetos $\{A_1, ..., A_n\}$, existir uma soma direta $A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ em $\boldsymbol{C}$, a categoria $\boldsymbol{C}$ é* aditiva.

Definição 1.28 *Seja k um corpo. Uma categoria $\boldsymbol{C}$ é uma k-*categoria *se, para cada par $A, B \in Ob\boldsymbol{C}$, o conjunto* $\hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$ *é dotado de uma estrutura de k-espaço vetorial, tal que a composição de morfismos é uma aplicação k-bilinear.*

Definição 1.29 *Seja $\boldsymbol{C}$ uma k-categoria. Uma classe $\mathcal{I}$ de morfismos de $\boldsymbol{C}$ é um* ideal bilateral *em $\boldsymbol{C}$, se $\mathcal{I}$ tem as seguintes propriedades:*

1. *para cada $A \in Ob\boldsymbol{C}$, o morfismo nulo $0_A \in \hom_{\boldsymbol{C}}(A, A)$ pertence a $\mathcal{I}$;*
2. *se $f, g : A \to B$ são morfismos em $\mathcal{I}$ e $\alpha, \beta \in k$, então $f\alpha + g\beta \in \mathcal{I}$;*
3. *se $f \in \mathcal{I}$ e g é um morfismo em $\boldsymbol{C}$, tal que a composição gf é definida, então $gf \in \mathcal{I}$; e*
4. *se $f \in \mathcal{I}$ e h é um morfismo em $\boldsymbol{C}$, tal que a composição fh é definida, então $fh \in \mathcal{I}$.*

Equivalentemente, um ideal bilateral $\mathcal{I}$ de $\mathbf{C}$ pode ser visto como um subfuntor

$$\mathcal{I}(-,-) \subseteq \hom_{\mathbf{C}}(-,-) : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to Modk$$

do bifuntor $\hom_{\mathbf{C}}(-,-)$, que leva cada par (A, B) de objetos A, B de $\mathbf{C}$ em um k-submódulo $\mathcal{I}(A, B)$ de $\hom_{\mathbf{C}}(A, B)$ tal que:

1. se $f \in \mathcal{I}(A, B)$ e $g \in \hom_{\mathbf{C}}(B, C)$, então $gf \in \mathcal{I}(A, C)$; e
2. se $f \in \mathcal{I}(A, B)$ e $h \in \hom_{\mathbf{C}}(X, A)$, então $fh \in \mathcal{I}(X, B)$.

Segue a definição de categorias quocientes.

Definição 1.30 *Dado um ideal bilateral $\mathcal{I}$ em uma k-categoria aditiva $\boldsymbol{C}$, definimos a* categoria quociente *$\boldsymbol{C}/\mathcal{I}$ como a categoria cujos objetos são os mesmos de $\boldsymbol{C}$, e o espaço de morfismos entre A e B em $\boldsymbol{C}/\mathcal{I}$ é o espaço quociente* $\hom_{\boldsymbol{C}/\mathcal{I}}(A, B) = \hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)/\mathcal{I}(A, B)$ *de* $\hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$ *sobre o subespaço $\mathcal{I}(A, B)$.*

1.3 Alguns pré-requisitos necessários

A partir de agora, assumiremos k como um corpo algebricamente fechado.
Começaremos com algumas definições.

Definição 1.31 *Seja R uma k-álgebra de dimensão finita. Sejam A, B, C R-módulos à esquerda, e sejam f, g homomorfismos de A em B e de B em C, respectivamente. Então, o diagrama*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

é exato*, se $Im(f) = Nuc(g)$.*

Se $n \geq 2$, o diagrama

$$\textbf{(1)} \quad A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n$$

de R-módulos e homomorfismos é dito ser exato *em A_i, $i = 1, 2, ..., n-1$, se o diagrama*

$$\textbf{(2)} \quad A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1}$$

é exato para cada i. O diagrama (1) é uma sequência exata*, se é exato em cada módulo A_i, $i = 1, 2, ..., n-1$. Do mesmo modo, um diagrama infinito*

$$A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} \dots$$

de R-módulos à esquerda e homomorfismos é dito ser exato *em A_i, $i \geq 1$, se o diagrama (2) é exato; e é uma sequência exata, se é exato em todos os módulos A_i, $i \geq 1$. De modo análogo, definimos para*

$$\dots \xrightarrow{f_{-(n-1)}} A_{-n} \xrightarrow{f_{-n}} \dots \xrightarrow{f_{-3}} A_{-2} \xrightarrow{f_{-2}} A_{-1} \xrightarrow{f_{-1}} A_0$$

e

$$\dots \xrightarrow{f_{-(n-1)}} A_{-n} \xrightarrow{f_{-n}} \dots \xrightarrow{f_{-3}} A_{-2} \xrightarrow{f_{-2}} A_{-1} \xrightarrow{f_{-1}} A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} \dots.$$

Um diagrama da forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

que é exato em A, B e C é chamado uma *sequência exata curta.*

Seja R uma álgebra de dimensão finita. Sejam $f : A \to B$ um R-monomorfismo e $g : B \to C$ um R-epimorfismo. Dizemos que f é um *monomorfismo que cinde*, se existe $f' : B \to A$ tal que $f'f = 1_A$. E dizemos que g é um *epimorfismo que cinde*, se existe $g' : C \to B$ tal que $gg' = 1_C$.

Uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

é chamada uma *sequência exata que cinde* se o submódulo $Imf = f(A)$ é um somando direto de B. A proposição seguinte estabelece critérios para que uma sequência cinda.

Proposição 1.32 *As seguintes condições são equivalentes para sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 :$$

1. *a sequência cinde;*

2. *f é um monomorfismo que cinde;*

3. *g é um epimorfismo que cinde.*

Prova: Primeiramente, vamos provar que *1* implica em *2*. Suponhamos, assim, que a sequência

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

cinde. Isso quer dizer que Imf é somando direto de B, ou seja, $B = Imf \oplus N$, com $N \subset B$. Então, $b \in B$ pode ser escrito, de forma única, como a soma $b = y + n$, com $y \in Imf$ e $n \in N$. Como $y \in Imf$ e f é um monomorfismo, existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Definamos $f' : B \to A$ como $f'(b) = x$. Afirmamos que f' está bem definido. De fato, suponhamos que existam $x, x' \in A$, tais que $f'(b) = x$ e $f'(b) = x'$. Pela construção acima, segue que $b = f(x) + n$ e $b = f(x') + n$, e, daí, $f(x) = f(x')$. Como f é um monomorfismo, $x = x'$.

Vamos mostrar agora que f' é um R-homomorfismo. Sejam $b_1, b_2 \in B$, onde $b_i = f(x_i) + n_i$, com $x_i \in A$ e $n_i \in N$, para $i = 1, 2$. Aplicando f' em $b_1 + b_2$, temos que

$$f'(b_1 + b_2) = f'(f(x_1) + n_1 + f(x_2) + n_2) = f'((f(x_1) + f(x_2)) + (n_1 + n_2)) = \\ f'(f(x_1 + x_2) + (n_1 + n_2)) = x_1 + x_2 = f'(b_1) + f'(b_2).$$

Agora, sejam $b = f(x) + n \in B$, com $x \in A$ e $n \in N$, e $\alpha \in R$. Aplicando f' em αb, temos que

$$f'(\alpha b) = f'(\alpha(f(x) + n)) = f'(\alpha f(x) + \alpha n) = f'(f(\alpha x) + \alpha n) = \alpha x = \alpha f'(b).$$

Portanto, f' é R-homomorfismo.

Afirmamos ainda que $N = Nucf'$. De fato, seja $n \in N$, tal que $n = b - f(x)$, com $b \in B$ e $x \in A$. Aplicando f' em n, obtemos

$$f'(n) = f'(b - f(x)) = f'(b) - f'(f(x)) = x - x = 0.$$

Logo, $n \in Nucf'$, e $N \subseteq Nucf'$.

Além disso, se $x \in Imf \cap Nucf'$, temos que existe $a \in A$, tal que $f(a) = x$ e $f'(x) = 0$. Assim, $0 = f'(x) = f'(f(a)) = a$, o que implica que $x = f(a) = f(0) = 0$. Logo, $Imf \cap Nuc' = \{0\}$, e como $B = Imf \oplus N$, $N = Nuc'$.

Por fim, vamos mostrar que $f'f = 1_A$. Apliquemos, então, $f'f$ em $x \in A$. Assim, como $b = f(x) + n$, segue que

$$f'f(x) = f'(b - n) = f'(b) - f'(n) = x - 0 = x,$$

o que encerra a demonstração de *2*.

Agora, vamos mostrar que *2* implica em *3*. Seja $c \in C$. Como g é um epimorfismo, existe $b \in B$, tal que $g(b) = c$. Afirmamos que o elemento $b - f(f'(b))$ depende unicamente do elemento c e não da escolha de b. De fato, seja b_1 outro elemento de B, tal que $g(b_1) = c$. Então, $b - b_1 \in Nucg = Imf$. Digamos que $b - b_1 = f(a)$, com $a \in A$. Segue que $f(f'(b - b_1)) = f(f'(f(a))) = f(a) = b - b_1$, o que implica que $b - f(f'(b)) = b_1 - f(f'(b_1))$.

Façamos $g'(c) = b - f(f'(b))$, que está bem definido, por causa das observações acima, e mostremos que g' é um monomorfismo, tal que $gg' = 1_C$.

Primeiramente, vamos mostrar que g' é um R-homomorfismo. Sejam $c_1, c_2 \in C$, tais que $g'(c_i) = b_i + f(f'(b_i))$, para $i = 1, 2$, e seja também $\lambda \in R$. Observemos que, como $g(b_1) = c_1$ e $g(b_2) = c_2$, pela definição de g', temos que

$$g(b_1 + \lambda b_2) = g(b_1) + g(\lambda b_2) = g(b_1) + \lambda g(b_2) = c_1 + \lambda c_2.$$

Segue, então, que

$$\begin{gathered} g'(c_1 + \lambda c_2) = \\ b_1 + \lambda b_2 + f(f'(b_1 + \lambda b_2)) = \\ b_1 + \lambda b_2 + f(f'(b_1)) + f(f'(\lambda b_2)) = \\ b_1 + \lambda b_2 + f(f'(b_1)) + \lambda f(f'(b_2)) = \\ b_1 + f(f'(b_1)) + \lambda b_2 + \lambda f(f'(b_2)) = \\ b_1 + f(f'(b_1)) + \lambda[b_2 + f(f'(b_2))] = \\ g'(c_1) + \lambda g'(c_2) \end{gathered}$$

Portanto, g' é um R-homomorfismo, como queríamos demonstrar.

A seguir, vamos mostrar que g' é um monomorfismo. Assim, suponhamos que c é um elemento de C, tal que $g'(c) = 0$. Logo, pela definição de g', $b - f(f'(b)) = 0$, para algum $b \in B$. Ou seja, $f(f'(b)) = b$, para algum $b \in B$. Como $g(b) = c$, pela construção de g', segue que

$$c = g(b) = g(f(f'(b))) = 0(f'(b)) = 0,$$

o que prova que g' é um monomorfismo.

Vamos provar, enfim, que $gg' = 1_C$. Apliquemos, então, gg' em $c \in C$. Daí,

$$g(g'(c)) = g(b - f(f'(b))) = g(b) - g(f(f'(b))) = g(b) - 0(f'(b)) = g(b) - 0 = g(b) = c.$$

Portanto, g é um epimorfismo que cinde, como queríamos demonstrar.

Finalmente, vamos mostrar que *3* implica em *1*. Suponhamos que g é um epimorfismo que cinde. Então, existe $g' : C \to B$ R-homomorfismo, tal que $gg' = 1_C$. Queremos mostrar que a sequência

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

cinde. Para isso, vamos mostrar que $Imf = Nucg$ é um somando direto de B.

Seja $X = g'(C)$. Façamos $B = X \oplus B/X$. Observemos que $g(g'(C)) = C$, o que implica que $g(X) = C$. Logo, $X \nsubseteq Nucg$. Além disso, $X \cap Nucg = \{0\}$. De fato, suponhamos que $x \in X \cap Nucg$. Então, existe $c \in C$, tal que $g'(c) = x$ e $g(x) = 0$, o que implica que $gg'(c) = g(x) = 0$. Logo, $c = 0$, e, portanto, $x = g'(c) = g'(0) = 0$.

Vamos mostrar, então, que $B/X = Nucg$.

Assim, seja $b = g'(c) + y$, com $y \in B/X$. Logo, temos que

$$\begin{aligned} g(b) = gg'(c) + g(y) \Rightarrow \\ c = c + g(y) \Rightarrow \\ g(y) = c - c \Rightarrow \\ g(y) = 0 \end{aligned}$$

Daí, $y \in Nucg$, e $B/X \subseteq Nucg$. Como $X \cap Nucg = \{0\}$, segue que $B/X = Nucg$. ■

Como consequência da proposição anterior, temos que, quando f é um monomorfismo que cinde, $B = Imf \oplus Nucf' \simeq A \oplus Nucf'$. Além disso, quando g é um epimorfismo que cinde $B = Img' \oplus Nucg \simeq C \oplus Nucg$.

Temos, ainda, que quando a seguinte sequência

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow Conucf \longrightarrow 0,$$

é exata, com f que cinde, $B \simeq A \oplus Conucf$. E quando temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow Nucg \longrightarrow B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

com g que cinde, $B \simeq Nucg \oplus C$.

A definição seguinte trata dos idempotentes de uma álgebra de dimensão finita.

Definição 1.33 *Seja R uma álgebra de dimensão finita.*

1. *Um elemento $e \in R$ é chamado* idempotente*, se $e^2 = e$.*
2. *Os idempotentes $e_1, e_2 \in R$ são chamados de* ortogonais*, se $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$.*
3. *O idempotente não-nulo e é dito* primitivo*, se e não pode ser escrito como uma soma $e = e_1 + e_2$, onde e_1 e e_2 são idempotentes ortogonais não-nulos de R.*

Toda álgebra R tem dois idempotentes triviais 0 e 1. Se o idempotente e de R é não-trivial, então $1 - e$ é também um idempotente não-trivial. Além disso, os idempotentes e e $1 - e$ são ortogonais. Além disso, existe uma decomposição não-trivial de R-módulos à esquerda ${}_RR = Re \oplus R(1 - e)$. Reciprocamente, se ${}_RR = M_1 \oplus M_2$ é uma decomposição não-trivial de R-módulos e $1 = e_1 + e_2$, $e_i \in M_i$, então e_1, e_2 formam um par de idempotentes ortogonais de R, e $M_i = Re_i$ é indecomponível se, e somente se, e_i é primitivo.

Como a álgebra R é de dimensão finita, o módulo ${}_RR$ admite uma decomposição em soma direta ${}_RR = P_1 \oplus ... \oplus P_t$, onde $P_1, ..., P_t$ são ideais indecomponíveis à esquerda de R. Segue da discussão anterior que $P_1 = Re_1$,..., $P_t = Re_t$, onde $e_1, ..., e_t$ são idempotentes ortogonais (dois a dois) primitivos de R, tais que $1 = e_1 + ... + e_t$. Reciprocamente, todo conjunto de idempotentes com as propriedades anteriores induz uma decomposição ${}_RR = P_1 \oplus ... \oplus P_t$, com ideais indecomponíveis à esquerda $P_1 = Re_1$, ..., $P_t = Re_t$.

Observemos que os R-módulos simples são da forma P_i/JP_i, para todo $i = 1, ..., t$.

Definição 1.34 *Seja R uma álgebra de dimensão finita, e seja M um R-módulo à esquerda. Definimos uma* resolução projetiva *como sendo uma sequência exata*

$$P_\bullet : \qquad \ldots \longrightarrow P_n \xrightarrow{h_n} P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} M \longrightarrow 0\ ,$$

onde P_j é um R-módulo projetivo à esquerda, para todo $j \geq 0$.

Agora, se M admite a seguinte resolução projetiva de comprimento finito m

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow P_{m-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0\ ,$$

dizemos que a *dimensão projetiva* de M é igual ou menor que m. Se, além disso, M não admite uma resolução projetiva de comprimento menor que m, então dizemos que M tem *dimensão projetiva* igual a m, e escrevemos $pdM = m$. No entanto, se M não admite uma resolução projetiva de comprimento finito, como a descrita acima, dizemos que a *dimensão projetiva* de M é infinita, e escrevemos $pdM = \infty$.

Definição 1.35 *Seja R uma álgebra arbitrária. Para um R-módulo fixo C, considere a categoria $ModR/C$, cujos objetos são R-morfismos $f : B \to C$, e onde um morfismo $g : f \to f'$ de $f : B \to C$ em $f' : B' \to C$ é um R-morfismo $g : B \to B'$ tal que*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & C \\ B' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

comuta. Quando os morfismos descritos acima estão sobre R-módulos finitamente gerados, temos a subcategoria $modR/C$.

Dizemos que $f : B \to C$ *é* minimal à direita*, se todo morfismo* $g : f \to f$ *é um automorfismo.*

Analogamente, temos a definição de um morfismo minimal à esquerda.

Definição 1.36 *Para um R-módulo A fixo, considere a categoria* $ModR\backslash A$*, cujos objetos são R-morfismos* $f : A \to B$*, e onde um morfismo* $g : f \to f'$ *de* $f : A \to B$ *em* $f' : A \to B'$ *é um R-morfismo* $g : B \to B'$*, tal que*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & B \arrow[dl, "g"] \\ B' & \end{tikzcd}$$

comuta. Quando os morfismos descritos acima estão sobre R-módulos finitamente gerados, temos a subcategoria $modR\backslash A$*. Dizemos que um morfismo* $f : A \to B$ *de R-módulos é* minimal à esquerda*, se para todo* $g : B \to B$*, com* $gf = f$*,* g *for um automorfismo.*

Segue o seguinte teorema sobre epimorfismos minimais (Ver [2]).

Teorema 1.37 *Sejam B e C módulos sobre R, com R uma álgebra de Artin. Consideremos* $f : B \to C$ *um epimorfismo. Então, existe um único epimorfismo minimal* $f' : B \to C$ *tal que* $\hom(f, f')$ *é diferente de zero. Este epimorfismo minimal* f' *é chamado de versão minimal de* f.

A próxima definição trata de um epimorfismo minimal bastante importante.

Definição 1.38 *Sejam R uma álgebra de dimensão finita e M um R-módulo à esquerda. Seja também* $f : P \to M$ *um epimorfismo com P projetivo. Dizemos que f é uma* cobertura projetiva*, se f é minimal à direita.*

Os seguintes teoremas tratam de propriedades de uma cobertura projetiva de um módulo M finitamente gerado.

Teorema 1.39 *Seja R uma álgebra de dimensão finita. Sejam também P e M R-módulos finitamente gerados, com P projetivo. Então, um epimorfismo* $f : P \to M$ *é uma cobertura projetiva de M se, e somente se,* $Nucf \subset JP$.

Teorema 1.40 *Seja R uma álgebra de Artin, e seja M um módulo em* $modR$*. Então, temos o seguinte:*

1. *Existe uma cobertura projetiva* $f : P \to M$.

2. *Quaisquer duas coberturas projetivas* $f_1 : P_1 \to M$ *e* $f_2 : P_2 \to M$ *são isomorfos em* $modR/M$.

Prova: Ver [2]. ■

Usando esse conceito de cobertura projetiva, podemos definir o seguinte.

Definição 1.41 *Seja R uma álgebra de dimensão finita. Considere M um R-módulo finitamente gerado.*

1. *Uma sequência exata*

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

em $modR$ *é chamada de* apresentação projetiva minimal *de M, se os R-homomorfismos $p_0 : P_0 \to M$ e $p_1 : P_1 \to Nucp_0$ são coberturas projetivas.*

2. *Uma sequência exata*

$$P_\bullet : \qquad \ldots \longrightarrow P_n \xrightarrow{h_n} P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} M \longrightarrow 0$$

em $modR$ *é chamada uma* resolução projetiva minimal *de M, se $h_j : P_j \to Imh_j$ é uma cobertura projetiva, para todo $j \geq 0$, assim como $h_0 : P_0 \to M$. Por 1.40, $P_\bullet$ é única, a menos de isomorfismo.*

Para o lema 1.43, lembremos do seguinte fato, cuja demonstração é simples e deixada ao leitor.

Proposição 1.42 *Sejam R uma álgebra de Artin e M um R-módulo. Então, $JM = \bigcap Nucf$, onde f percorre todos os morfismos com domínio em M e contradomínio em um S simples.* ■

Lema 1.43 *Sejam R uma álgebra de Artin e M um R-módulo finitamente gerado. Considere N um R-módulo tal que $N \subset M$. Então, $N \subset JA$ se, e somente se, para todo $f : M \to S$ com S simples, temos que $f|_N = 0$, ou seja, $N \subset Nucf$.*

Prova: Suponhamos que $N \subset JM$. Consideremos o homomorfismo $f : M \to S$, com S um módulo simples. Por definição, $JM = \bigcap_{i=1}^{n} M_i$, onde M_i é maximal em M. Assim, como S é simples, $Nucf$ é maximal em M. Daí, $JM \subset Nucf$. Mas, $N \subset JM$. Portanto, $N \subset Nucf$.

Reciprocamente, suponhamos que, para todo $f : M \to S$, com S simples, $f|_N = 0$, ou seja, $N \subset Nucf$. Já que S é simples, temos que $Nucf$ é um submódulo maximal de M, para todo morfismo f. Logo, $JM = \bigcap Nucf$. Como, pela hipótese, $N \subset Nucf$, para todo f, segue que $N \subset \bigcap Nucf$, e daí, $N \subset JM$. ■

Para o próximo resultado, precisaremos da seguinte definição.

Definição 1.44 *Seja R uma k-álgebra com $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais e primitivos. A álgebra R é chamada de* básica, *se $Re_i \ncong Re_j$, para todo $i \neq j$.*

Lema 1.45 *Seja R uma k-álgebra de dimensão finita básica, onde k é um corpo algebricamente fechado, e seja $\{e_1, ..., e_t\}$ um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos. Considere $P = \bigoplus_{i=1}^{t} P_i$, onde $P_i = Re_i$, para todo $i = 1, ..., t$ e $S = \bigoplus_{j=1}^{t} S_j$, onde $\{S_j; j = 1, ..., t\}$ é um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismos dos R-módulos simples. Então,* $\dim_k \hom(P, S) = t$.

Prova: Se P é indecomponível, então $dim \hom(P, S) = 1$. Agora, se $P = \bigoplus_{i=1}^{t} P_i$, então $\hom(P, S) \simeq \sum_{i=1}^{t} \dim \hom(P_i, S) = t$. ■

Proposição 1.46 *Seja R uma álgebra arbitrária. Se A é um R-módulo simples e $f : A \to B$ é um monomorfismo, então $A \nsubseteq JB$ se, e somente se, f cinde.*

Prova: Suponhamos, primeiro, que $A \nsubseteq JB$. Então, existem S um R-módulo simples e $h : B \to S$, tal que $A \nsubseteq Nuch$. Além disso, h é um epimorfismo, pois S é simples. Consideremos a composição

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} S .$$

Como $A \nsubseteq Nuch$, $hf \neq 0$. Mas, A e S são simples. Então, hf é um isomorfismo, ou seja, $A \simeq S$. Assim, $hf = 1_A$ e, portanto, f cinde.

Finalmente, suponhamos que $f : A \to B$ cinde. Então, $B \simeq A \oplus Conucf$. Como A é simples, $Conucf$ é maximal em B, o que implica que $JB \subseteq Conucf$. Logo, $A \cap JB = \{0\}$, e, portanto, $A \nsubseteq JB$. ■

Em uma resolução projetiva minimal de um R-módulo finitamente gerado M, é possível contar a quantidade de somandos indecomponíveis dos módulos projetivos que aparecem na resolução. Quem cumpre essa função são os *Números Betti* definidos a seguir.

Definição 1.47 *Sejam R uma álgebra de dimensão finita e M um R-módulo finitamente gerado. Seja*

$$\ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva minimal de M. Então, o i-ésimo número Betti *de M, $\beta_i(M)$, é igual ao número de somandos indecomponíveis de P_i, para todo $i \geq 0$.*

Temos, assim, o seguinte lema.

Lema 1.48 *Sejam k um corpo algebricamente fechado, R uma álgebra básica sobre k, A um R-módulo e $S = \bigoplus_{i \in I} S_i$ R-módulo, tal que $\{S_i\}_{i \in I}$ é um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismos dos R-módulos simples. Então,* $\dim Ext^i(A, S) = \beta_i(A)$, *para todo i .*

Prova: Consideremos uma resolução projetiva minimal do R-módulo A

$$\cdots \longrightarrow P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0.$$

Aplicando o funtor $\hom(-, S)$ na resolução projetiva minimal de A, obtemos a seguinte sequência exata longa

$$0 \longrightarrow \hom(P_0, S) \xrightarrow{d_1^*} \hom(P_1, S) \xrightarrow{d_2^*} \cdots \xrightarrow{d_{i-1}^*} \hom(P_{i-1}, S)$$
$$\xrightarrow{d_i^*} \hom(P_i, S) \xrightarrow{d_{i+1}^*} \hom(P_{i+1}, S) \longrightarrow \cdots$$

onde $d_i^* = \hom(d_i, S)$, para todo i.

Segue, do lema 1.43, que $JP_i \subset Nuc(\hom(P_i, S))$, para todo i, pois a resolução projetiva é minimal, d_{i+1}^* é o morfismo nulo, para todo i. Assim, para $i \geq 1$, temos que

$$Ext^i(P_i, S) = \frac{Nucd_{i+1}^*}{Imd_i^*} = Nucd_{i+1}^* = \hom(P_i, S).$$

Considerando $P_i = P_0^i \oplus P_1^i \oplus ...P_t^i$ a decomposição do R-módulo projetivo P_i em somandos indecomponíveis, temos que $\hom(P^i, S) \simeq \bigoplus_{j=0}^{t} \hom(P_j^i, S)$.

Assim, $\dim \hom(P_i, S) = t + 1$. E, portanto, $\dim Ext^i(P_i, S) = t + 1 = \beta_i(A)$, para todo i.

■

O lema e a proposição a seguir tratam de determinadas cadeias de composições de homomorfismos arbitrariamente longas.

Lema 1.49 *Seja R uma álgebra de Artin. Seja $n \in \mathbb{N}$, e para cada $i \in \mathbb{Z}$, seja A_i um R-módulo indecomponível com $c(A_i) \leq n$. Seja também $f_i : A_i \to A_{i+1}$ um não-isomorfismo, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Então, $c(Im(f_{i+2^m-2}...f_i)) \leq max\{n - m, 0\}$, para cada $m \in \mathbb{N}$.*

Prova: A prova desse lema será feita por indução sobre m.

Suponhamos $m = 1$, e consideremos $f_i : A_i \to A_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Como f_i não é um isomorfismo, segue que f_i não é um monomorfismo, ou f_i não é um epimorfismo. No primeiro caso, $c(Imf_i) \leq c(A_i) - 1$, e, no segundo caso, $c(Imf_i) \leq c(A_{i+1}) - 1$. Logo, temos $c(Imf_i) \leq n - 1 \leq max\{n - 1, 0\}$.

Suponhamos, agora, que o lema está provado para um natural m, e consideremos

$$f_{i+2^{m+1}-2}...f_{i+2^m} f_{i+2^m-1} f_{i+2^m-2}...f_i : A_i \to A_{i+2^{m+1}-1}.$$

Escrevendo $f = f_{i+2^m-1}$, $g = f_{i+2^m-2}...f_i$ e $h = f_{(i+2^m)+2^m-2}...f_{i+2^m}$, temos a seguinte sequência de morfismos

$$A_i \xrightarrow{g} A_{i+2^m-1} \xrightarrow{f} A_{i+2m} \xrightarrow{h} A_{i+2^{m+1}-1}.$$

Suponha que $c(Im(hfg)) \nleq max\{n-m-1, 0\}$, isto é, $c(Im(hfg)) \geq n-m > 0$. Provaremos que isso implica que $f = f_{i+2^m-1}$ é um isomorfismo, o que nos leva a uma contradição.

Pela hipótese de indução, temos que $c(Img) \leq max\{n - m, 0\}$ e $c(Imh) \leq max\{n - m, 0\}$. Além disso, temos que

$$c(Im(hfg)) \leq min\{c(Img), c(Im(fg)), c(Im(hf)), c(Imh)\} \leq max\{n - m, 0\}.$$

Logo, temos que

$$c(Im(hfg)) = c(Im(hf)) = c(Imh) = c(Im(fg)) = c(Img) = n - m > 0.$$

Agora, $h|_{Im(fg)} : Im(fg) \to Imh$ é um isomorfismo, uma vez que $Im(hfg) \subset Imh$, e os módulos têm o mesmo comprimento. Assim, segue que $A_{i+2^m} \simeq Im(fg) \oplus Nuch$. Como, pela hipótese, A_{i+2^m} é indecomponível, e $l(Im(fg)) = n - m > 0$, $Nuch = \{0\}$. Isso implica que $Im(fg) = A_{i+2^m}$, e daí, f é um epimorfismo.

Por fim, consideremos $hf|_{Img} : Img \to Im(hf)$. Novamente, como $Im(hfg) \subset Im(hf)$, e os módulos têm o mesmo comprimento, temos que $hf|_{Img}$ é um isomorfismo. Assim, segue que $A_{i+2^m-1} = Img \oplus Nuc(hf)$. Como $c(Img) = n - m > 0$, e A_{i+2^m-1} é indecomponível, $Nuc(hf) = \{0\}$, o que implica que f é um monomorfismo. Logo, $f = f_{i+2^m-1}$ é um isomorfismo, contradizendo a hipótese.

Podemos concluir, pois, que $c(Im(hfg)) \leq max\{n - (m+1), 0\}$, o que completa a prova.
■

Agora, temos condições de provar o seguinte resultado, que é conhecido como lema de Harada-Sai.

Proposição 1.50 (Harada-Sai) *Seja R uma álgebra de Artin. Se $f_i : A_i \to A_{i+1}$ são não-isomorfismos entre R-módulos indecomponíveis A_i, para $i = 1, 2, ..., 2^n - 1$, e $c(A_i) \leq n$, para todo i, então $f_{2^n-1} \ldots f_1 = 0$.*

Prova: Considere a composição de morfismos $f_{2^n-1} \ldots f_i$. Vamos mostrar que a imagem dessa composição é nula. Pelo lema acima, temos que

$$c(Im(f_{2^n-1} \ldots f_i)) \leq max\{n - n, 0\} = 0.$$

Logo, $Im(f_{2^n-1} \ldots f_i) = \{0\}$, como queríamos demonstrar. ■

Observa a seguinte definição.

Definição 1.51 *Seja R uma álgebra arbitrária. Sejam B e C dois R-módulos. Dizemos que $g : B \to C$ é um* morfismo que quase cinde à direita *se*

1. *não é um epimorfismo que cinde e*

2. *qualquer morfismo $v : V \to C$ que não é um epimorfismo que cinde se fatora através de g, isto é, para todo morfismo de R-módulos $v : V \to C$ que não é um epimorfismo que cinde, existe $v' : V \to B$, tal que $gv' = v$. Ou seja, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "v'"'] \arrow[d, "v"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

é comutativo.

A seguinte definição é dual.

Definição 1.52 *Seja R uma álgebra arbitrária. Sejam A e B dois R-módulos. Dizemos que $f : A \to B$ é um* morfismo que quase cinde à esquerda *se*

1. *não é um monomorfismo que cinde e*

2. *qualquer morfismo $u : A \to U$ que não é um monomorfismo que cinde se fatora através de f, isto é, para todo morfismo de R-módulos $u : A \to U$ que não é um monomorfismo que cinde, existe $u' : B \to U$, tal que $u'f = u$. Ou seja, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[dl, "u'"] \\ U & \end{tikzcd}$$

   é comutativo.

Uma aplicação g é dita ser um *morfismo poço*, se ela é um morfismo que quase cinde à direita e é minimal à direita. Dualmente, uma aplicação f é dita ser um *morfismo fonte*, se é um morfismo que quase cinde à esquerda e é minimal à esquerda.

Podemos definir agora as sequências de Auslander-Reiten. Muitos autores as chamam de *sequências que quase cindem*.

Definição 1.53 *Dada uma álgebra R, consideremos a seguinte sequência exata de R-módulos finitamente gerados*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \,.$$

Dizemos que essa é uma sequência de Auslander-Reiten *se:*

1. *f é um morfismo fonte e*

2. *g é um morfismo poço.*

Enunciaremos, a seguir, a definição de um morfismo irredutível.

Definição 1.54 *Seja R uma álgebra arbitrária. Sejam B e C dois R-módulos. Um morfismo $g : B \to C$ é chamado de* irredutível, *se*

1. *g não é nem um monomorfismo que cinde, nem um epimorfismo que cinde e*

2. *se $g = ts$ para alguns $s : B \to X$ e $t : X \to C$, então ou s é um monomorfismo que cinde, ou t é um epimorfismo que cinde.*

O lema seguinte será uma ferramenta muito importante em resultados futuros.

Lema 1.55 *Seja*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta que não cinde em modR.

1. *O homomorfismo $f : L \to M$ é irredutível se, e somente se, para todo homomorfismo $v : V \to N$, existe $v_1 : V \to M$ tal que $v = gv_1$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd} & & & V \arrow[dl, dashed, "v_1"'] \arrow[d, "v"] & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} ,$$

ou existe $v_2 : M \to V$ tal que $g = vv_2$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} & & & V \arrow[d, "v"] & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dashed, "v_2"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

2. *O homomorfismo $g : M \to N$ é irredutível se, e somente se, para todo homomorfismo $u : L \to U$, existe $u_1 : M \to U$ tal que $u = u_1 f$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, "u_1"] & N \arrow[r] & 0 \\ & U & & & \end{tikzcd} ,$$

ou existe $u_2 : U \to M$ tal que $f = u_2 u$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\ & U \arrow[ur, dashed, "u_2"'] & & & \end{tikzcd} .$$

Prova: Ver [1], capítulo IV, lema 1.7. ■

A proposição 1.56 será necessária na demonstração da proposição 1.57, que caracteriza as sequências de Auslander-Reiten que possuem um somando projetivo-injetivo no termo do meio.

Proposição 1.56 *Seja R uma álgebra de Artin e seja C um R-módulo indecomponível. Então, um morfismo $g : B \to C$ é irredutível se, e somente se, existe algum morfismo $g' : B' \to C$ tal que o morfismo induzido $(g, g') : B \oplus B' \to C$ é um morfismo poço.*

Prova: Suponhamos, primeiramente, que $g : B \to C$ é irredutível. Como C é indecomponível, existe um único, a menos de isomorfismo em $modR/C$, morfismo poço. Seja $h : E \to C$ tal morfismo. Já que g não é um epimorfismo que cinde, pela definição de morfismo que quase cinde à direita, g se fatora através de h, isto é, $g = hf$ para algum $f : B \to E$. Como h não é um epimorfismo que cinde, pela irredutibilidade de g, f é um monomorfismo que cinde. Assim, temos que a seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} E \longrightarrow Conucf \longrightarrow 0$$

cinde, e daí, $E \simeq B \oplus B'$, onde $B' = Conucf$.

Considerando esse isomorfismo como uma identificação, temos que $h' : B' \to C$, onde $h' = h|_{B'}$, é tal que $(g, h') : B \oplus B' \to C$ é um morfismo poço, uma vez que h é um morfismo poço.

Reciprocamente, suponhamos que $h : E \to C$ é um morfismo poço. Sejam $E = B \oplus B'$ e $g : B \to C$, com $g = h|_B$. Suponhamos que $g = st$, para algum $t : B \to X$ e para algum $s : X \to C$, que não é um epimorfismo que cinde. Então, já que h é um morfismo que quase cinde à direita, existe $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, onde $s = \begin{pmatrix} g & g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ e $g' = h|_{B'}$. Assim, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
B \oplus B' \arrow[dr, "{(g,g')}"'] & X \oplus B' \arrow[l, "{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1_{B'} \end{pmatrix}}"'] \arrow[r, "{\begin{pmatrix} u & 0 \\ v & 1_{B'} \end{pmatrix}}"] \arrow[d, "{(s,g')}"] & B \oplus B' \arrow[dl, "{(g,g')}"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Como $h = (g, g')$ é minimal à direita, $\begin{pmatrix} ut & 0 \\ vt & 1_{B'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & 1_{B'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1_{B'} \end{pmatrix}$ é um isomorfismo. Logo, $ut : B \to B$ é um isomorfismo, mostrando que t é um monomorfismo que cinde. E, portanto, g é irredutível.

■

Proposição 1.57 *Seja*

$$\delta : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \to 0$$

uma sequência de Auslander-Reiten de módulos sobre uma álgebra de dimensão finita. Se B tem um somando indecomponível projetivo-injetivo P, então $c(P) \geq 2$ e δ é isomorfa a sequência

$$\varepsilon : 0 \longrightarrow JP \xrightarrow{(-i,p)^T} P \oplus JP/socP \xrightarrow{(q,j)} \frac{P}{socP} \longrightarrow 0,$$

onde $i : JP \to P$ e $j : JP/socP \to P/socP$ são as inclusões naturais e $p : JP \to JP/socP$ e $q : P \to P/socP$ são os morfismos quocientes naturais.

Prova: Suponhamos que

$$\delta : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \to 0$$

é uma sequência de Auslander-Reiten com $B = P \oplus B'$, onde P é um módulo indecomponível projetivo-injetivo. Sabemos que $i : JP \to P$ é um morfismo poço e $q : P \to P/socP$ é um morfismo fonte, com JP e $P/socP$ indecomponíveis. Segue, então, de 1.56, que $A \simeq JP$ e $C \simeq P/socP$. A sequência δ é, assim, da forma

$$\varepsilon : 0 \longrightarrow JP \xrightarrow{(i,f)^T} P \oplus X \xrightarrow{(q,g)} P/socP \longrightarrow 0,$$

com $f : JP \to X$ e $g : X \to P/socP$. Logo, $c(X) = c(JP) + c(P/socP) - c(P) = c(P) - 2 = c(JP) - 1 = c(P/socP) - 1$, o que implica que f é um epimorfismo e g é um monomorfismo. Como $P/socP$ tem um único submódulo maximal $JP/socP$, temos $g(X) = JP/socP$, e, assim, g pode ser escolhido como a inclusão natural $j : JP/socP \to P/socP$. Portanto, $(q, j) : P \amalg JP/socP \longrightarrow P/socP$ é um morfismo que quase cinde à direita.

Como ε é uma sequência exata e JP é indecomponível, ε quase cinde.

Por fim, afirmamos que $c(P) \geq 2$. De fato, se $c(P) = 1$, então $JP = 0$. Mas, isso implicaria que o R-módulo A da sequência δ é nulo, o que é um absurdo. ■

Estaremos, particularmente, interessados no funtor de Nakayama, que quando definido sobre uma álgebra autoinjetiva possui propriedades bastante úteis para os resultados dos capítulos seguintes. Para começar definiremos o funtor *dualidade*. Assim, consideremos k um corpo, e seja R uma k-álgebra de dimensão finita. O funtor dualidade D é o funtor

$$D : modR^{op} \to modR$$

que leva cada R-módulo à esquerda M em $modR$ no seu k-espaço vetorial $M^* = \hom_k(M, k)$, dotado de uma estrutura de R-módulo à direita, dada por

$$(\varphi r)(m) = \varphi(rm),$$

onde $\varphi \in \hom_k(M, k)$, $r \in R$ e $m \in M$. E, para cada, morfismo de R-módulos $f : M \to N$, o k-homomorfismo dual $D(f) = \hom_k(f, k) : D(N) \to D(M)$ é definido por $\psi \mapsto \psi f$, como mostra o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\psi f"'] & N \arrow[d, "\psi"] \\ & R \end{tikzcd} .$$

Desse modo, é possível definir o *funtor de Nakayama* $\nu : modR \to modR$, que é dado por $\nu(-) = D \circ Hom_R(-, R)$.

Definimos anteriormente a categoria $\mathcal{P}(R)$ dos R-módulos finitamente gerados projetivos. De modo análogo, podemos definir a categoria $\mathcal{I}(R)$ dos R-módulos finitamente gerados injetivos. É claro que seus objetos são os R-módulos injetivos em $modR$, e seus morfismos, os R-homomorfismos entre eles. Considerado isto, podemos seguir para a nossa próxima proposição.

Proposição 1.58 *A restrição do funtor de Nakayama $\nu : modR \to modR$ à subcategoria plena $\mathcal{P}(R)$ de $modR$, cujos objetos são os R-módulos projetivos finitamente gerados, induz uma equivalência entre $\mathcal{P}(R)$ e a subcategoria plena $\mathcal{I}(R)$ de $modR$, cujos objetos são os R-módulos injetivos finitamente gerados. O inverso dessa restrição é dado por $\nu^{-1} = \hom_R(D(R_R), -) : \mathcal{I}(R) \to \mathcal{P}(R)$.*

Prova: Ver [1], capítulo III, proposição 2.10. ■

Definiremos a seguir uma álgebra autoinjetiva.

Definição 1.59 *Uma álgebra de Artin R é dita* autoinjetiva*, se ela é injetiva e projetiva como R-módulo.*

Afirmamos que, quando R é uma álgebra autoinjetiva, o funtor de Nakayama é uma equivalência exata. De fato, seja

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta. Sabemos que, sobre uma álgebra arbitrária, D é um funtor exato, e $\hom_R(-, R)$ é um funtor exato à esquerda. Assim, aplicando o funtor $\hom_R(-, R)$ na sequência exata acima, obtemos a seguinte sequência

$$0 \longrightarrow \hom_R(C, R) \xrightarrow{\hom_R(g,R)} \hom_R(B, R) \xrightarrow{\hom_R(f,R)} \hom_R(A, R) \; ,$$

que é exata à esquerda. Contudo, como R é autoinjetiva, se tivermos $h \in \hom_R(A, R)$, existe $l : B \to R$, que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "l"] & C \arrow[r] & 0 \\ & R & & & \end{tikzcd}$$

comutar.

Logo, o morfismo $\hom_R(f, R) : \hom_R(B, R) \to \hom_R(C, R)$ é um epimorfismo, e a sequência

$$0 \longrightarrow \hom_R(C, R) \xrightarrow{\hom_R(g,R)} \hom_R(B, R) \xrightarrow{\hom_R(f,R)} \hom_R(A, R) \longrightarrow 0$$

é exata. Dessa forma, $\hom_R(-, R)$ é exato, e, portanto, ν é exato.

Além disso, a próxima proposição ([2], proposição$IV.3.4$) nos garante que, quando R é autoinjetiva, o funtor $\hom_R(-, R)$ é uma dualidade.

Proposição 1.60 *Seja R uma álgebra de Artin autoinjetiva. Então, $\hom_R(-, R) : modR \to modR^{op}$ é uma dualidade com inverso dual $\hom_R^{op}(-, R) : mod(R^{op}) \to modR$.*

Assim, como funtores dualidades são fiéis, plenos e densos, segue que a composição de duas dualidades é um funtor fiel, pleno e denso. Logo, ν é um funtor fiel, pleno e denso, quando R é autoinjetiva. Pela proposição 1.26, temos que o funtor ν é uma equivalência.

1.4 Transladado de Auslander-Reiten

Nessa seção, R será sempre uma k-álgebra de dimensão finita.

Consideremos o funtor $\hom_R(-,R) : modR \to modR^{op}$, que denotaremos por $(-)^t$ por uma questão de praticidade. Notemos que se P é um R-módulo projetivo à esquerda, então $(P)^t = \hom_R(P,R)$ é um R-módulo projetivo à direita. De fato, se $P = Re$, com $e \in R$ um idempotente primitivo, então $(P)^t = \hom_R(Re,R) \simeq eR$, e nossa afirmação segue da aditividade de $(-)^t$. Além disso, o homomorfismo avaliação $\varepsilon_M : M \to (M)^{tt}$ definido por $\varepsilon_M(z)(f) = f(z)$, para $z \in M$ e $f \in (M)^t$, é funtorial em M, e é um isomorfismo, sempre que M for projetivo. Assim, o funtor $(-)^t$ induz uma dualidade, também denotada por $(-)^t$, entre as categorias $\mathcal{P}(R)$, de R-módulos finitamente gerados projetivos à esquerda, e a categoria $\mathcal{P}(R^{op})$ de R-módulos finitamente gerados projetivos à direita. Usaremos essa dualidade para definir uma dualidade sobre um certo quociente de $modR$, e essa será chamada de transposição.

Seja, assim, $P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$ uma apresentação projetiva minimal de M, isto é, uma sequência exata tal que $d_0 : P_0 \to M$ e $d_1 : P_1 \to Nucd_0$ são coberturas projetivas. Aplicando o funtor contravariante exato à esquerda $(-)^t$, obtemos uma sequência exata de R-módulos à direita

$$0 \longrightarrow (M)^t \xrightarrow{(d_0)^t} (P_0)^t \xrightarrow{(d_1)^t} (P_1)^t \longrightarrow Conuc(d_1)^t \longrightarrow 0\ .$$

Denotamos o conúcleo $Conuc(d_1)^t$ por TrM, e o chamamos de *transposto* de M.

Observemos que o R-módulo à direita TrM é unicamente determinado a menos de isomorfismo; isso segue do fato de que as coberturas projetivas (e, logo, as apresentações projetivas minimais) são unicamente determinadas a menos de isomorfismos.

Resumiremos através da proposição seguinte as principais propriedades de transposto Tr.

Proposição 1.61 *Seja M um módulo indecomponível em $modR$.*

1. *O R-módulo à direita TrM não possui somandos projetivos.*
2. *M é projetivo se, e somente se, $TrM = 0$. Se M não é projetivo, então TrM é indecomponível e $Tr(TrM) \simeq M$.*
3. *Se M e N são R-módulos indecomponíveis não-projetivos, então $M \simeq N$ se, e somente se, $TrM \simeq TrN$.*
4. *Se M não é projetivo, então a sequência*

$$P_0^t \xrightarrow{d_1^t} P_1^t \longrightarrow TrM \longrightarrow 0$$

induzida da apresentação minimal projetiva $P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$ de M é uma apresentação projetiva minimal do R-módulo à direita TrM.

Prova: 1. Se TrM tem um somando projetivo não-nulo, o homomorfismo d_1^t tem um somando da forma $(0 \to E)$, com E projetivo. Mas, isso implicaria que d_1 tem um somando direto $(E^t \to 0)$, o que contradiz a minimalidade de d_1.

2. Se M é projetivo, então o termo P_1 na apresentação projetiva minimal de M é zero, e, assim, $TrM = 0$. Reciprocamente, se $TrM = 0$, então d_1^t é um epimorfismo que cinde, uma vez que $(P_1)^t$ é projetivo. Assim, d_1 é um monomorfismo que cinde, e M é projetivo.

Para completar a prova de 2 consideremos a apresentação projetiva minimal de TrM

$$P_0^t \xrightarrow{d_1^t} P_1^t \longrightarrow TrM \longrightarrow 0$$

e apliquemos nela o funtor $(-)^t$. Obtemos, assim, o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\varepsilon_{P_1}", "\simeq"'] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\varepsilon_{P_0}", "\simeq"'] & M \arrow[r] & 0 \\
P_1^{tt} \arrow[r, "d_1^{tt}"] & P_0^{tt} \arrow[r, "d_0^{tt}"] & TrTrM \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

com linhas exatas. Logo, existe um isomorfismo $M \simeq TrTrM$, fazendo com que o quadrado direito comute.

3. Se M e N são R-módulos não-projetivos, tais que $M \simeq N$, então temos

$$\begin{tikzcd}
P_1' \arrow[r, "d_1'"] \arrow[d, "\simeq"'] & P_0' \arrow[r, "d_0'"] \arrow[d, "\simeq"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & 0 \\
P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Aplicando $(-)^t$ nas duas apresentações projetivas, obtemos

$$\begin{tikzcd}
P_1'^t \arrow[r, "d_1'^t"] \arrow[d, "\simeq"'] & P_0'^t \arrow[r, "d_0'^t"] \arrow[d, "\simeq"'] & TrN \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & 0\,, \\
P_1^t \arrow[r, "d_1^t"] & P_0^t \arrow[r, "d_0"] & TrM \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e, portanto, $TrM \simeq TrN$.

Analogamente, se prova a volta.

4. Suponhamos que M não é projetivo. Então, $TrM \neq 0$. A sequência

$$P_0^t \xrightarrow{d_1^t} P_1^t \longrightarrow TrM \longrightarrow 0$$

é certamente uma apresentação projetiva do R-módulo à direita TrM. Afirmamos que é minimal. De fato, se não fosse, existiriam as decomposições não-triviais em somas diretas $P_0^t = E_0' \oplus E_0''$, $P_1^t = E_1' \oplus E_1''$ e um isomorfismo $v : E_0'' \to E_1''$, tais que essa sequência seria isomorfa à sequência

$$E_0' \oplus E_0'' \xrightarrow{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}} E_1' \oplus E_1'' \longrightarrow TrM \longrightarrow 0\ ,$$

onde $u : E_0' \to E_1'$ é um homomorfismo de R-módulos à direita. Mas, aplicando $(-)^t$, obteríamos uma apresentação projetiva de M da forma

$$E_1'^t \xrightarrow{u^t} E_0'^t \longrightarrow M \longrightarrow 0\ ,$$

o que contradiz a minimalidade da apresentação projetiva de M. ∎

Mostramos que o transposto Tr leva módulos de $modR$ em módulos de $modR^{op}$, mas não define uma dualidade $modR \to modR^{op}$, uma vez que anula os projetivos. Para que este seja uma dualidade, precisamos anular os projetivos de $modR$ e $modR^{op}$. Assim, descreveremos a seguinte construção.

Para dois R-módulos M, N, seja $\mathcal{P}(M,N)$ o submódulo de $\hom_R(M,N)$ consistindo de todos os homomorfismos, que se fatoram através de um R-módulo projetivo. Afirmamos que esse submódulo define um ideal $\mathcal{P}$ na categoria $modR$. Com efeito, para dois módulos M, N, o conjunto $\mathcal{P}(M,N)$ é um subespaço do k-espaço vetorial $\hom_R(M,N)$. De fato, se $f, f' \in \mathcal{P}(M,N)$, então f e f' podem ser, respectivamente, escritos como $f = hg$, com $g : M \to P$, $h : P \to N$ e P projetivo, e $f' = h'g'$, com $g' : M' \to P'$, $h' : P' \to N'$ e P' projetivo. Logo,

$$f + f' = hg + h'g' = \begin{pmatrix} h & h' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}$$

se fatora através do projetivo $P \oplus P'$. Por outro lado, se $\alpha \in k$ e $f \in \mathcal{P}(M,N)$, então $\alpha f \in \mathcal{P}(M,N)$. Além disso, se $f \in \mathcal{P}(L,M)$ e $g \in \hom_R(M,N)$, então $gf \in \mathcal{P}(L,N)$, e, analogamente, se $f \in \hom_R(L,M)$ e $g \in \mathcal{P}(M,N)$, então $gf \in \mathcal{P}(L,N)$. Portanto, $\mathcal{P}$ é um ideal como queríamos demonstrar.

Consideremos, assim, a categoria quociente $\underline{mod}R = modR/\mathcal{P}$ chamada de *categoria projetivamente estável*. Seus objetos são os mesmos de $modR$, mas o k-espaço vetorial $\underline{\hom}_R(M,N)$ de morfismos de M em N em $\underline{mod}R$ é definido pelo espaço vetorial quociente $\underline{\hom}_R(M,N) = \hom_R(M,N)/\mathcal{P}(M,N)$ de $\hom_R(M,N)$, com a composição de morfismos induzido da composição de $modR$. Existe um funtor $modR \to \underline{mod}R$, que é a identidade sobre os objetos e a associação entre um homomorfismo $f : M \to N$ em $modR$ na sua classe residual modulo $\mathcal{P}(M,N)$ em $\underline{mod}R$.

Dualmente, podemos construir um ideal $\mathcal{I}$ em $modR$, considerando, para cada par (M,N) de R-módulos, o k-subespaço vetorial $\mathcal{I}(M,N)$ de $\hom_R(M,N)$, que consiste de todos os homomorfismos que se fatoram através de um R-módulo injetivo. A categoria quociente $\overline{mod}R = modR/\mathcal{I}$ é chamada de *categoria injetivamente estável*. Seus objetos são os mesmos de $modR$, mas o k-espaço vetorial $\overline{\hom}_R(M,N)$ de morfismos de M em N em $\overline{mod}R$ é dado pelo espaço vetorial $\overline{\hom}_R(M,N) = \hom_R(M,N)/\mathcal{I}(M,N)$ de $\hom_R(M,N)$ com a composição de morfismos induzida de $modR$.

Assim, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.62 *A correspondência $M \to TrM$ induz um funtor dualidade $Tr : \underline{mod}R \to \underline{mod}R^{op}$.*

Prova: Ver [1], capítulo IV, proposição 2.2. ∎

A dualidade definida na proposição anterior é chamada *transposição*. Transforma os R-módulos à esquerda em R-módulos à direita, e vice-versa.

Apesar da transposição Tr ser definida sobre a categoria quociente $\underline{mod}R$ é bastante útil considerar o funtor Tr entre os objetos $modR$ e $modR^{op}$, definido anteriormente.

Considerando, então, $D = \hom_k(-, k)$ a dualidade usual entre R-módulos à esquerda e R-módulos à direita, podemos definir a dualidade induzida $D : \underline{mod}R \to \overline{mod}R^{op}$. E assim, temos a seguinte definição:

Definição 1.63 *Os* translადados de Auslander-Reiten *são definidos como as composições de D com Tr, ou seja, $\tau = DTr$ e $\tau^{-1} = TrD$.*

Observe que o transladado de Auslander-Reiten $\tau : \underline{mod}R \to \overline{mod}R$ é uma equivalência de categorias com inversa $\tau^{-1} : \overline{mod}R \to \underline{mod}R$.

Nesse trabalho, muitas vezes iremos trabalhar com o transladado de Auslander-Reiten sobre módulos que não pertencem a categoria quociente $\underline{mod}R$. Assim, definiremos $\tau : modR \to modR$ como a composição de $Tr : modR \to modR^{op}$, definido anteriormente, e a dualidade usual $D : modR^{op} \to modR$.

Com base no funtor que acabamos de descrever, podemos definir o seguinte.

Definição 1.64 *Seja R uma álgebra de Artin. Um R-módulo indecomponível não-projetivo M é dito* τ-periódico*, se $\tau^n M \simeq M$, para algum $n > 0$.*

Seja R uma álgebra de Artin. Definimos um funtor $\Omega : \underline{mod}R \to \underline{mod}R$, chamado de *funtor syzygy*, da seguinte forma. Para cada M em $modR$, escolhemos uma cobertura projetiva $h : P(M) \to M$, e definimos $\Omega(M)$ como sendo o $Nuch$. Suponhamos que $f : M \to N$ está em $modR$. Então, existe um diagrama comutativo exato

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\Omega(M) \arrow[r, "t"] \arrow[d] & \Omega(N) \arrow[d] \\
P(M) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & P(N) \arrow[d, "h'"] \\
M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

Agora, o morfismo $t : \Omega(M) \to \Omega(N)$, obtido dessa maneira, depende da escolha de g. Se mudarmos g para um morfismo $g' : P(M) \to P(N)$, obtemos um novo morfismo $t' : \Omega(M) \to \Omega(N)$, e $t - t'$ está em $\mathcal{P}(\Omega(M), \Omega(N))$. Dessa forma, temos um morfismo $\hom_R(M, N) \to \underline{\hom}_R(\Omega(M), \Omega(N))$. Já que $f \in \mathcal{P}(M, N)$, segue que $t \in \mathcal{P}(\Omega(M), \Omega(N))$, e obtemos o morfismo $\Omega : \underline{\hom}_R(M, N) \to \underline{\hom}_R(\Omega(M), \Omega(N))$. Assim, temos que a aplicação $\Omega : \underline{mod}R \to \underline{mod}R$, que leva cada módulo M em $\Omega(M)$ e cada morfismo $f : M \to N$ em $\Omega(f) : \Omega(M) \to \Omega(N)$, é um funtor.

No decorrer de todo esse trabalho, estaremos tratando, sobretudo, de álgebras de Artin autoinjetivas. Para tais álgebras, algumas coisas funcionam de forma particular.

Proposição 1.65 *Seja R uma álgebra de dimensão finita autoinjetiva. Então os funtores τ, $\Omega^2\nu$ e $\nu\Omega^2$ de $\underline{modR}$ em $\underline{modR}$ são isomorfos.*

Prova: Seja $P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ uma apresentação projetiva minimal de A em $modR$. Aplicando o funtor $\hom_R(-, R)$, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \hom_R(A, R) \longrightarrow \hom_R(P_0, R) \longrightarrow \hom_R(P_1, R) \longrightarrow TrA \longrightarrow 0,$$

onde TrA é o conúcleo da aplicação $\hom_R(P_0, R) \to \hom_R(P_1, R)$. Em seguida, aplicamos o funtor dualidade D, e obtemos a sequência

$$0 \longrightarrow \tau A \longrightarrow D(\hom_R(P_1, R)) \longrightarrow D(\hom_R(P_0, R)) \longrightarrow D(\hom_R(A, R)) \longrightarrow 0,$$

onde $\tau A = DTrA$.

Como R é autoinjetiva, $D(\hom_R(P_i, R))$ é um R-módulo projetivo, para cada $i = 1, 2$, e $D(\hom_R(P_1, R)) \longrightarrow D(\hom_R(P_0, R)) \longrightarrow D(\hom_R(A, R)) \longrightarrow 0$ é uma apresentação projetiva minimal de $D(\hom_R(A, R)) = \nu(A)$. Logo, segue que $\tau \simeq \Omega^2\nu$.

Vamos mostrar agora que esse isomorfismo é funtorial. Sejam $B \in \underline{modR}$ e $f : A \to B$ um morfismo. Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & \tau A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\tau f"] & \Omega^2\nu(A) \arrow[d, "\Omega^2\nu(f)"] \\ B & \tau B \arrow[r, "\eta_B"] & \Omega^2\nu(B) \end{tikzcd}$$

onde η_A é o isomorfismo entre τA e $\Omega^2\nu(A)$, e η_B é o isomorfismo entre τB e $\Omega^2\nu(B)$.

Observe que

$$\eta_B\tau(f)(\tau A) = \eta_B(\tau B) = \Omega^2\nu(B) = \Omega^2\nu(f)(\Omega^2\nu(A)) = \Omega^2\nu(f)(\eta_A(\tau A)).$$

Logo, o diagrama acima é comutativo, e $\eta : A \mapsto \eta_A$ é um isomorfismo natural. O que implica que $\tau A \simeq \Omega^2\nu(A)$, como queríamos demonstrar.

Finalmente, vamos mostrar que $\Omega^2\nu \simeq \nu\Omega^2$. Consideremos, novamente,

$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

uma apresentação projetiva minimal de A em $modR$. Dessa apresentação, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \Omega^2(A) \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Aplicando o funtor $\hom_R(-, R)$, e, em seguida, o funtor dualidade D, obtemos a sequência

$$\nu\Omega^2(A) \longrightarrow \nu P_1 \longrightarrow \nu P_0 \longrightarrow \nu A \longrightarrow 0,$$

lembrando que $\nu = D(\hom_R(-, R))$.

Como R é autoinjetiva, νP_i é projetivo, para cada $i = 1, 2$, e $\nu P_1 \longrightarrow \nu P_0 \longrightarrow \nu A \longrightarrow 0$ é apresentação projetiva minimal de νA. Logo, $\nu\Omega^2(A) \simeq \Omega^2\nu(A)$.

Vamos mostrar, para finalizar essa demonstração, que esse isomorfismo é funtorial. Sejam, então, $B \in modR$ e f um morfismo de A em B. Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & \nu\Omega^2 A \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "\nu\Omega^2 f"'] & \Omega^2\nu(A) \arrow[d, "\Omega^2\nu(f)"] \\ B & \nu\Omega^2(B) \arrow[r, "\mu_B"] & \Omega^2\nu(B) \end{tikzcd}$$

onde μ_A é o isomorfismo entre $\nu\Omega^2(A)$ e $\Omega^2\nu(A)$, e μ_B é o isomorfismo entre $\nu\Omega^2(B)$ e $\Omega^2\nu(B)$.

Observe que

$$\mu_B\nu\Omega^2(f)\nu\Omega^2(A) = \mu_B\nu\Omega^2(B) = \Omega^2\nu(B) = \Omega^2\nu(f)\Omega^2\nu(A) = \Omega^2\nu(f)\mu_A\nu\Omega^2(A).$$

Logo, o diagrama acima é comutativo, e $\mu : A \mapsto \mu_A$ é um isomorfismo natural. Portanto, $\nu\Omega^2(A) \simeq \Omega^2\nu(A)$ é um isomorfismo funtorial. ■

Assim, o resultado anterior nos garante que se M é um R-módulo não-projetivo e indecomponível e R é autoinjetiva, o transladado de Auslander-Reiten τ é dado por $\tau M = \nu\Omega^2 M$. Temos também, nesse caso, que τ e Ω comutam. De fato, seja

$$0 \longrightarrow \Omega M \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

uma sequência exata, onde P_0 é projetivo e φ é uma cobertura projetiva de M. Aplicando o funtor de Nakayama nessa sequência, temos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \nu\Omega M \longrightarrow \nu P_0 \xrightarrow{\varphi} \nu M \longrightarrow 0\,.$$

Como ν é uma equivalência, νP_0 é projetivo, e $\nu\varphi$ é cobertura projetiva de νM. Assim, $\nu\Omega M = \Omega\nu M$.

1.5 Carcases e Álgebras de Caminho

Um *carcás* $Q = (Q_0, Q_1, i, t)$ é uma quádrupla consistindo de dois conjuntos Q_0 (cujos elementos são chamados de pontos ou vértices) e Q_1 (cujos elementos são chamados de flechas), e duas aplicações $i, t : Q_1 \to Q_0$, que associam a cada flecha $\alpha \in Q_1$ seu início $i(\alpha) \in Q_0$ e seu término $t(\alpha) \in Q_0$, respectivamente. Dizemos que um carcás Q é *finito*, se Q_0 e Q_1 são finitos. Além disso, uma flecha $\alpha \in Q_1$ de início em $a = i(\alpha)$ e término em $b = t(\alpha)$ é denotado por $\alpha : a \to b$. E, um carcás $Q = (Q_0, Q_1, i, t)$ é, normalmente, denotado por $Q = (Q_0, Q_1)$ ou, simplesmente, por Q.

Um carcás pode ser representado pictoricamente, como nos mostra os exemplos abaixo.

Exemplo 1.66 *Consideremos o carcás finito Q, tal que $Q_0 = \{1,2,3,4,5\}$ e $Q_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$. As aplicações i e t são definidas abaixo.*

$$\begin{array}{cc} i : Q_1 \to Q_0 & t : Q_1 \to Q_0 \\ \alpha_1 \mapsto 3 & \alpha_1 \mapsto 1 \\ \alpha_2 \mapsto 2 & \alpha_2 \mapsto 3 \\ \alpha_3 \mapsto 3 & \alpha_3 \mapsto 4 \\ \alpha_4 \mapsto 5 & \alpha_4 \mapsto 4 \end{array}$$

Assim, o carcás Q pode ser representado da seguinte forma

$$\begin{tikzcd} 1 & & & \\ & 3 \arrow[ul, "\alpha_1"'] \arrow[r, "\alpha_3"] & 4 & 5 \arrow[l, "\alpha_4"'] \\ 2 \arrow[ur, "\alpha_2"] & & & \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.67 *Consideremos o carcás finito Q, tal que $Q_0 = \{1,2,3\}$ e $Q_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. As aplicações i e t são definidas abaixo*

$$\begin{array}{cc} i : Q_1 \to Q_0 & t : Q_1 \to Q_0 \\ \alpha_1 \mapsto 2 & \alpha_1 \mapsto 1 \\ \alpha_2 \mapsto 2 & \alpha_2 \mapsto 3 \\ \alpha_3 \mapsto 3 & \alpha_3 \mapsto 2 \end{array}$$

Assim, o carcás Q pode ser representado da seguinte forma

$$\begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l, "\alpha_1"'] \arrow[r, shift left, "\alpha_2"] & 3 \arrow[l, shift left, "\alpha_3"] \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.68 *Consideremos o carcás finito Q, tal que $Q_0 = \{1,2\}$ e $Q_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. As aplicações i e t são definidas abaixo.*

$$\begin{array}{cc} i : Q_1 \to Q_0 & t : Q_1 \to Q_0 \\ \alpha_1 \mapsto 1 & \alpha_1 \mapsto 2 \\ \alpha_2 \mapsto 1 & \alpha_2 \mapsto 2 \\ \alpha_3 \mapsto 2 & \alpha_3 \mapsto 2 \end{array}$$

Assim, o carcás Q pode ser representado da seguinte forma

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift right, "\alpha_2"'] & 2 \arrow[loop right, "\alpha_3"] \end{tikzcd}$$

Definição 1.69 *Seja $Q = (Q_0, Q_1, i, t)$ um carcás. Um* subcarcás *de Q é um carcás $Q' = (Q'_0, Q'_1, i', t')$, onde $Q'_0 \subset Q_0$ e $Q'_1 \subset Q_1$, e i' e t' são as restrições de i e t.*

Diz-se que um subcarcás $Q' = (Q'_0, Q'_1)$ de $Q = (Q_0, Q_1)$ é *pleno*, se Q'_1 é igual ao conjunto de todas as flechas em Q_1, cujos início e término pertencem a Q'_0, isto é, $Q'_1 = \{\alpha \in Q_1 / i(\alpha), t(\alpha) \in Q'_0\}$. Note que um subcarcás pleno é unicamente determinado por seu conjunto de vértices.

Um *caminho* γ de *comprimento* $l \geq 1$, com início em a e término em b, é uma sequência ordenada de flechas $\gamma : \alpha_l ... \alpha_2 \alpha_1$, onde $\alpha_j \in Q_1$ para todo $1 \leq j \leq l$, e $i(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_j) = i(\alpha_{j+1})$, para cada $1 \leq j < l$, e $t(\alpha_l) = b$. Associamos a cada ponto $a \in Q_0$ um caminho de comprimento $l = 0$, chamado de *caminho trivial* em a, e denotado por e_j. Um caminho de comprimento $l \geq i$ é chamado de *ciclo*, se seu início e seu término coincidem. Um ciclo de comprimento 1 é chamado de *laço*.

Se existe um caminho em Q de a em b, então a é dito *antecessor* de b, e b é dito *sucessor* de a. Em particular, se existe uma flecha $a \to b$, então b é chamado de *sucessor direto* de a, e a é chamado de *antecessor direto* de b.

Uma sequência de flechas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ é um *passeio* de a a b, quando $a \in \{i(\alpha_1), t(\alpha_1)\}$, $b \in \{i(\alpha_n), t(\alpha_n)\}$, e para $i = 1, 2, ..., n-1$, α_i e α_{i+1} têm um vértice em comum.

Com base em todas essas definições, temos a seguinte definição de *álgebras de caminho.*

Definição 1.70 *Seja Q um carcás. A* álgebra de caminho *kQ de Q é a k-álgebra, cujo k-espaço vetorial subjacente tem como base o conjunto de todos os caminhos $\gamma : \alpha_l ... \alpha_2 \alpha_1$ de comprimento $l \geq 0$ em Q e tal que o produto de dois vetores da base $\gamma_1 : \alpha_l ... \alpha_2 \alpha_1$, com início em a e término em b, e $\gamma_2 : \beta_k ... \beta_2 \beta_1$, com início em c e término em d, de kQ é definido por*

$$\gamma_1 \gamma_2 = \begin{cases} \alpha_l ... \alpha_2 \alpha_1 \beta_k ... \beta_2 \beta_1, & se \quad a = d \\ 0, & se \quad a \neq d \end{cases}$$

Estendendo por linearidade tal produto a todos os elementos de kQ, define-se uma estrutura de k-álgebra.

Exemplo 1.71 *Seja Q o carcás*

$$1 \xleftarrow{\alpha_1} 2 \xleftarrow{\alpha_2} 3 \xleftarrow{\alpha_3} 4 \xleftarrow{\alpha_4} \cdots \xleftarrow{\alpha_{n-2}} n-1 \xleftarrow{\alpha_{n-1}} n \, .$$

A álgebra de caminho kQ tem uma base finita definida pelos caminhos do carcás Q, e é isomorfa à álgebra de matrizes triangulares inferiores de ordem n

$$\mathbb{T}_n(k) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k & k & k & \cdots & k & 0 \\ k & k & k & \cdots & k & k \end{pmatrix}$$

onde o isomorfismo é induzido pela aplicação k-linear dada por

$$e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$e_{n-1} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_n \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \alpha_{n-1} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Caracterizando as álgebras de caminho kQ, temos o seguinte lema.

Lema 1.72 *Sejam Q um carcás e kQ uma álgebra de caminhos. Então,*

1. *kQ é uma álgebra associativa;*
2. *kQ tem um elemento identidade se, e somente se, Q_0 é finito;*
3. *kQ é de dimensão finita se, e somente se, Q é finito e não tem ciclos.*

Prova:

1. A associatividade da álgebra de caminhos kQ segue, diretamente, da definição da multiplicação dos caminhos, uma vez que esse produto dos elementos da base é a composição de caminhos, que é associativa.

2. Cada caminho trivial e_a, com $a \in Q_0$, é um idempotente de kQ e eles são ortogonais, já que

$$e_a e_a = e_a \text{ e}$$
$$e_a e_b = e_b e_a = 0, \text{ para } a \neq b \text{ e } b \in Q_0.$$

Se Q_0 é finito, $\sum\limits_{a \in Q_0} e_a$ é a identidade de kQ. De fato, seja α uma flecha em kQ, então

$$\alpha \sum_{a \in Q_0} e_a = \alpha e_{i(\alpha)} = \alpha \text{ e } \sum_{a \in Q_0} e_a \alpha = e_{t(\alpha)} \alpha = \alpha.$$

Estende-se por linearidade para os demais elementos de kQ.

Reciprocamente, suponhamos que Q_0 é infinito, e que $1 = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \gamma_i$ é um elemento identidade de kQ, onde λ_i são escalares não-nulos e γ_i são caminhos de Q, para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$. O conjunto Q_0' dos vértices iniciais dos caminhos γ_i tem no máximo m elementos. Logo, Q_0' é um conjunto finito. Seja, então, $a \in Q_0/Q_0'$. Segue que $e_a.1 = 0$, o que é uma contradição.

3. Se Q é infinito, então a base de kQ também o é, e, daí, essa álgebra é de dimensão infinita. Se $\gamma = \alpha_l ... \alpha_2 \alpha_1$ é um ciclo em Q, então, para cada $l \geq 0$, temos uma base $\gamma^l = (\alpha_l ... \alpha_2 \alpha_1)^l$ de kQ, e kQ é de dimensão infinita novamente.

   Reciprocamente, se Q é finito e não possui ciclos, então possui uma quantidade finita de caminhos, e, portanto, kQ é de dimensão finita.

■

Corolário 1.73 *Seja Q um carcás finito. O conjunto $\{e_a / a \in Q_0\}$ de todos os caminhos triviais é um conjunto completo de idempotentes ortogonais e primitivos de kQ.*

Prova: Vimos na prova do lema 1.72 que os caminhos triviais e_a, com $a \in Q_0$ são idempotentes ortogonais de kQ. Vimos também que se Q_0 é finito, $\sum\limits_{a \in Q_0} e_a = 1$ é o elemento identidade de kQ.

Resta mostrar que os caminhos triviais e_a são primitivos. Para isso, vamos mostrar que os únicos idempotentes da álgebra $e_a(kQ)e_a$ são o zero ou e_a. De fato, seja e um idempotente de $e_a(kQ)e_a$. Então, e pode ser escrito na forma $e = \lambda e_a + w$, onde $\lambda \in k$ e w é uma combinação linear de ciclos através de a. A igualdade

$$0 = e^2 - e = (\lambda^2 - \lambda)e_a + (2\lambda - 1)w + w^2$$

nos dá $w = 0$ e $\lambda^2 = \lambda$. Assim, $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Logo, $e = 0$ ou $e = e_a$. ■

Nosso objetivo, agora, será definir um ideal admissível, para que seja possível enunciarmos o Teorema de Gabriel, que associa a uma álgebra de dimensão finita um carcás. Para isso, definiremos, primeiramente, o ideal gerado pelas flechas de um carcás Q.

Definição 1.74 *Denotaremos por $\mathcal{F}$ o ideal bilateral de kQ gerado por todas as flechas de Q, ou seja, gerado por todos os caminhos de comprimento 1 em Q. Esse ideal $\mathcal{F}$ consiste de todos os caminhos de comprimento maior ou igual a 1.*

De posse da definição do ideal $\mathcal{F}$, podemos definir ideal *admissível.*

Definição 1.75 *Um ideal bilateral $\mathcal{I}$ da álgebra de caminho kQ é* admissível, *se existe $m \geq 2$ tal que*

$$\mathcal{F}^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}^2.$$

Segue alguns exemplos de ideais admissíveis e de ideais que não são admissíveis.

Exemplo 1.76 *Para qualquer carcás finito Q e qualquer $m \geq 2$, o ideal $\mathcal{F}^m$ é admissível.*

Exemplo 1.77 *Seja Q o carcás*

$$\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1 & & 4 \arrow[ll, "\lambda"'] \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
& 3 \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

O ideal $\mathcal{I}_1 =< \alpha\beta - \gamma\delta >$ da k-álgebra kQ é admissível, mas $\mathcal{I}_2 =< \alpha\beta - \lambda >$ não o é; De fato, $\alpha\beta - \lambda \notin \mathcal{F}^2$.

Exemplo 1.78 *Seja Q o carcás*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop right, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

O ideal $\mathcal{I} =< \alpha^3 - \alpha^2 >$ não é admissível, pois $\mathcal{F}^m \nsubseteq \mathcal{I}$, para qualquer $m \geq 2$, cuja demonstração será deixada para o leitor.

Enuciaremos, agora, o Teorema de Gabriel.

Teorema 1.79 (Gabriel) *Seja R uma álgebra indecomponível, básica e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k. Então, existe um carcás conexo Q_R e um epimorfismo de álgebras $\varphi : kQ_R \to R$, tal que $Nuc\varphi$ é um ideal admissível de kQ_R. Além disso, o carcás é único, a menos de isomorfismo, com essa propriedade.*

Capítulo 2

Carcás de Auslander-Reiten

Neste capítulo, estaremos interessados em caracterizar os diagramas de Dynkin e de Euclides através das matrizes de Cartan e das funções subaditivas. Estaremos interessados também nos carcases de Riedtmann, que possuem um vértice periódico, e em como são caracterizadas, também através das funções subaditivas. Através disto, definiremos uma componente do carcás de Auslander-Reiten chamada tubo.

Mas vamos, primeiramente, definir o carcás de Auslander-Reiten $A(R)$ de uma álgebra de Artin R. Definamos os vértices do carcás como as classes de isomorfismos dos R-módulos indecomponíveis, e denotamos o vértice em correspondência com um módulo M por $[M]$. Além disso, existe no carcás $A(R)$ uma flecha $[M] \to [N]$ se, e somente se, existe um morfismo irredutível $M \to N$. Atribuimos a esta flecha uma avaliação (m, n), e desta forma, obtemos um carcás avaliado. A flecha tem avaliação (m, n), se existem um morfismo poço $mM \oplus X \to N$, onde M não é somando de X, e um morfismo fonte $M \to nN \oplus Y$, onde N não é somando de Y. Os vértices correspondentes aos módulos projetivos são chamados *vértices projetivos*, e aqueles que correspondem aos módulos injetivos são chamados *vértices injetivos*. Então, τ induz uma aplicação dos vértices não-projetivos nos vértices não-injetivos. Essa aplicação é chamada de *translação* de $A(R)$, e é denotada também por τ. O carcás avaliado $A(R)$ dotado da translação τ é chamado de *carcás de Auslander-Reiten* de R.

A seguir, daremos um exemplo de um carcás de Auslander-Reiten.

Exemplo 2.1 *Seja Q o carcás*

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3$$

e seja kQ a álgebra de caminho do carcás Q sobre o corpo k. Os kQ-módulos indecomponíveis são os módulos simples S_1, S_2 e S_3 correspondendo aos vértices $1, 2$ e 3, respectivamente, as coberturas projetivas P_2 de S_2 e as envolventes injetivas I_1 de S_1 e I_3 de S_3. As sequências de Auslander-Reiten são da forma

$$0 \longrightarrow S_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow I_1 \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow P_2 \longrightarrow I_1 \oplus I_3 \longrightarrow S_2 \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow I_3 \longrightarrow 0\,.$$

Logo, o carcás de Auslander-Reiten é

$$\begin{tikzcd}
{[S_3]} \arrow[dr] & & {[I_1]} \arrow[ll, dashed] \arrow[dr] & \\
& {[P_2]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[S_2]} \arrow[ll, dashed] \\
{[S_1]} \arrow[ur] & & {[I_3]} \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Um módulo indecomponível M é chamado de *estável*, se $\tau^n M \neq 0$ e $\tau^{-n} M \neq 0$, para todo $n \geq 0$. Segue disto a seguinte definição.

Definição 2.2 *Seja $A(R)$ o carcás de Auslander-Reiten da álgebra de Artin R. O subcarcás pleno $A_e(R)$ de $A(R)$ consistido de todas as classes de isomorfismos dos módulos estáveis é chamado* carcás de Auslander-Reiten estável.

Temos também a definição de uma *componente regular* de um carcás de Auslander-Reiten.

Definição 2.3 *Seja R uma k-álgebra. Uma componente conexa $\mathcal{C}$ de $A(R)$ é chamada de* regular*, se $\mathcal{C}$ não contém módulos projetivos nem injetivos.*

Seja R uma álgebra de Artin. Dados A e B em $modR$, definamos $rad_R(A, B)$, o *radical* de $\hom_R(A, B)$, como os morfismos $f \in \hom_R(A, B)$, tais que hfg não é um isomorfismo, para quaisquer $g : X \to A$ e $h : B \to X$, com X um módulo em $indR$. Definamos também, para A e B em $indR$, o grupo abeliano

$$Irr(A, B) = rad_R(A, B)/rad_R^2(A, B)$$

de aplicações irredutíveis.

Se A e B são R-módulos indecomponíveis, então, para cada número natural n, temos que $rad_R^n(A, B)$ é um $End_R(B)$-$End_R(A)^{op}$-subbimódulo do $End_R(B)$-$End_R(A)^{op}$-bimódulo $\hom_R(A, B)$. Observemos que, para cada R-módulo A, o radical de $End_R(A)$, $r_{End_R(A)}$, como um anel e o radical de $\hom_R(A, A)$ na categoria $modR$ coincidem.

Temos, ainda, que, para cada n,

$$r_{End_R(B)} rad_R^n(A, B) \subset rad_R^{n+1}(A, B) \text{ e } rad_R^n(A, B) r_{End_R(A)} \subset rad_R^{n+1}(A, B).$$

Logo, $rad_R^n(A, B)/rad_R^{n+1}(A, B)$ é um T_B-T_A^{op}-bimódulo. Em particular, quando A e B são indecomponíveis, o grupo

$$Irr(A, B) = rad_R(A, B)/rad_R^2(A, B)$$

é um T_B-T_A^{op}-espaço vetorial, onde T_X denota a álgebra de divisão $End_R(X)/r_{End_R(X)}$, para cada $X \in indR$.

Agora, consideremos $f_i \in \hom_R(A, B)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Escreveremos $(f_i) : nA \to B$ para denotar o morfismo dado por

$$(f_i)(a_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a_i), \text{ onde } (a_i) \in nA,$$

e $(f_i)^t : A \to nB$ para denotar o morfismo dado por

$$(f_i)^t(a) = b_j, \text{ com } b_j = f_j(a), \text{ para } j = 1, 2, ..., n.$$

Nosso objetivo é provar que se a flecha $[A] \to [B]$ tem avaliação (a, b), então a é a dimensão de $Irr(A, B)$ como um T_A^{op}-espaço vetorial, e b é a dimensão de $Irr(A, B)$ como um T_B-espaço vetorial.

Começaremos pelo seguinte lema.

Lema 2.4 *Sejam A e B R-módulos indecomponíveis não-isomorfos, e $f_1, f_2, \ldots, f_n$ R-morfismos de A em B. Consideremos $\overline{f_i}$ a classe lateral em $rad_R(A, B)/rad_R^2(A, B)$ do elemento f_i.*

1. *Se o R-morfismo induzido $(f_i) : nA \to B$ é irredutível, então $\{\overline{f_1}, \overline{f_2}, \ldots, \overline{f_n}\}$ é um conjunto de elementos linearmente independentes do T_A^{op}-espaço vetorial $rad_R(A, B)/rad_R^2(A, B)$.*

2. *Se o R-morfismo induzido $(f_i)^t : A \to nB$ é irredutível, então $\{\overline{f_1}, \overline{f_2}, \ldots, \overline{f_n}\}$ é um conjunto de elementos linearmente independentes do T_B-espaço vetorial $rad_R(A, B)/rad_R^2(A, B)$.*

Prova: Vamos provar *1*, e então *2* seguirá por dualidade. Suponhamos que o R-morfismo induzido $(f_i) : nA \to B$ é irredutível, e que $a_1\overline{f_1} + a_2\overline{f_2} + \ldots + a_n\overline{f_n} = 0$, com cada a_1 em T_A^{op}. Agora, levantaremos os elementos a_i a morfismos α_i de A em A. Então, a relação acima afirma que o morfismo $f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + \ldots + f_n\alpha_n$ de A em B está em $rad_R^2(A, B)$. Contudo, se existe i tal que a_i é não-nulo, então o correspondente α_i é um isomorfismo, e assim o morfismo $\alpha = (\alpha_i)^t : A \to nA$, induzido pelo morfismo α_i, é um monomorfismo que cinde.

Como $(f_i) : nA \to B$ é irredutível, existe, pela proposição 1.56, um morfismo $g : A' \to B$, tal que $((f_i), g) : nA \oplus A' \to B$ é um morfismo poço. Mas, isso implica que também existe um morfismo $h : A'' \to B$, onde $A'' \simeq A' \oplus Conuc(\alpha)$, tal que $(f_1\alpha_1 + \ldots + f_n\alpha_n, h) : A \oplus A'' \to B$ é um morfismo poço. Logo, pela proposição 1.56, $f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + \ldots + f_n\alpha_n : A \to B$ é irredutível, e isso contradiz o fato de que $f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + \ldots + f_n\alpha_n$ está em $rad_R^2(A, B)$. Portanto, $\{\overline{f_1}, \overline{f_2}, \ldots, \overline{f_n}\}$ é um conjunto de elementos linearmente independentes no T_A^{op}-espaço vetorial $rad_R(A, B)/rad_R^2(A, B)$. ∎

Estabeleceremos agora a recíproca desse resultado. Sejam $g : X \to B$ um morfismo poço e $X = mA \oplus X'$ uma decomposição de X, onde X' não tem nenhum somando indecomponível isomorfo à A. Sejam $\overline{g_i}$, para $i = 1, 2, \ldots, m$, elementos do T_A^{op}-espaço vetorial $rad_R(A, B)/rad_R^2(A, B)$ correspondentes às coordenadas de g em relação à decomposição de X. Dualmente, sejam $h : A \to Y$ um morfismo fonte e $Y = nB \oplus Y'$ uma decomposição de Y, onde Y' não tem nenhum somando indecomponível isomorfo à B. Sejam $\overline{h_i}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, elementos do T_B-espaço vetorial $rad_R(A, B)/rad_R^2(A, B)$ correspondentes às coordenadas de h em relação à decomposição de Y.

Lema 2.5 *Considerando a notação acima, temos o seguinte.*

1. *O conjunto $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \ldots, \overline{g_m}\}$ gera o T_A^{op}-espaço vetorial $rad_R(A, B)/rad_R^2(A, B)$.*

2. *O conjunto $\{\overline{h_1}, \overline{h_2}, \ldots, \overline{h_n}\}$ gera o T_B-espaço vetorial $rad_R(A, B)/rad_R^2(A, B)$.*

Prova: Vamos provar somente *1*, já que *2* segue por dualidade.

Seja $\overline{f}$ qualquer elemento do T_A^{op}-espaço vetorial $rad_R(A,B)/rad_R^2(A,B)$, onde f é um morfismo de A em B. Então, já que g é um morfismo poço e f não é um isomorfismo, temos que $f = gh$, para algum $h : A \to X$. Considerando a decomposição fixa de $X = mA \oplus X'$ como descrita acima, obtemos $f = (g|_{mA})ph + (g|_{X'})qh$, onde p é a projeção de mA em X e q é a projeção de X' em X. Uma vez que X' não tem somandos isomorfos a A, a aplicação qh está em $rad_R(A,X')$. De fato, suponhamos que $qh \notin rad_R(A,X')$. Então, existe $\pi : X' \to A$, tal que πqh é um isomorfismo. Logo, qh é um monomorfismo que cinde, e daí, $X' \cong A \oplus Conuc(qh)$, ou seja, X' tem um somando isomorfo a A.

Como qh está em $rad_R(A,X')$, temos que $(g|_{X'})qh$ não é irredutível, e por isso essa composição de morfismos está em $rad_R^2(A,B)$. Logo, obtemos que $\overline{f} = \overline{(g|_{mA})ph}$. Usando a decomposição $mA = A \oplus A \oplus \ldots \oplus A$, a aplicação ph corresponde a um conjunto de elementos $\{\alpha_i\}_{i-1}^m \subset End_R(A)^{op}$, tal que $\overline{f} = \sum \overline{\alpha_i g_i}$. ∎

Combinando esses dois últimos lemas, obtemos a seguinte conexão entre a avaliação do carcás $A(R)$ e a dimensão de $Irr(A,B)$ como um T_B-espaço vetorial e como um T_A^{op}-espaço vetorial.

Proposição 2.6 *Sejam A e B R-módulos indecomponíveis, e suponhamos que existe um morfismo irredutível de A em B. Então, temos o seguinte.*

1. *A multiplicidade de A como um somando de M, quando existe um morfismo poço $f : M \to B$, é igual à dimensão de $Irr(A,B)$ como um T_A^{op}-espaço vetorial.*

2. *A multiplicidade de B como um somando de N, quando existe um morfismo fonte $g : A \to N$, é igual à dimensão de $Irr(A,B)$ como um T_B-espaço vetorial.*

2.1 Uma caracterização dos diagramas de Dynkin e de Euclides

Enunciaremos, primeiramente, a definição de *matriz de Cartan*.

Definição 2.7 *Seja I um conjunto de índices. Uma* matriz de Cartan *C sobre I é uma função $C : I \times I \to \mathbb{Z}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *$C_{ii} = 2$, para todo $i \in I$;*

2. *$C_{ij} \leq 0$, para todo $i \neq j$ em I;*

3. *$C_{ij} = 0$ se, e somente se, $C_{ji} = 0$.*

Note que escrevemos C_{ij} ao invés de $C(i,j)$. Note também que a transposta C^t de uma matriz de Cartan C sobre um conjunto I, dada por $c^t_{ij} = c_{ji}$, para todo $i,j \in I$, também é uma matriz de Cartan.

O grafo avaliado subjacente de C tem como vértices os elementos de I, e arestas $\{i,j\}$, para todos os pares $i \neq j$, com $C_{i,j} \neq 0$. Adicionado a cada aresta está o par de números

$$i \xrightarrow{(|C_{ij}|,|C_{ji}|)} j \ ,$$

no caso de $C_{ij}C_{ji} \neq 1$, a avaliação da aresta.

A matriz de Cartan será chamada de *conexa*, se seu grafo subjacente for conexo.

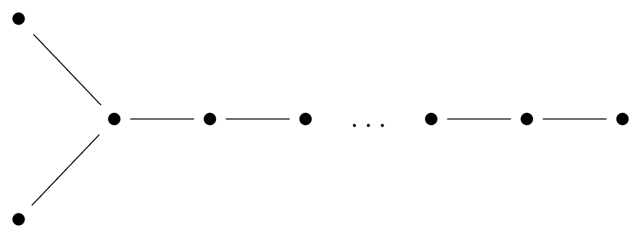
Estamos, particularmente, interessados nos diagramas de Dynkin finitos:

A_n :

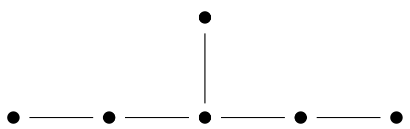
B_n :

C_n :

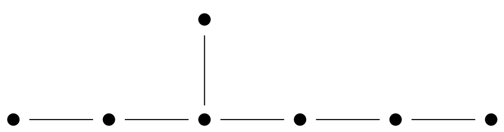
D_n :



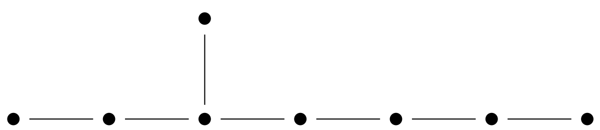
E_6 :



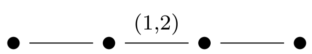
E_7 :



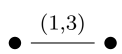
E_8 :



F_4 :

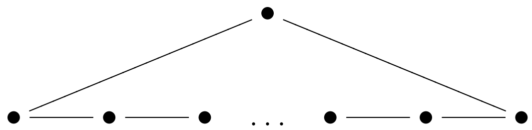


G_2 :



nos diagramas Euclidianos

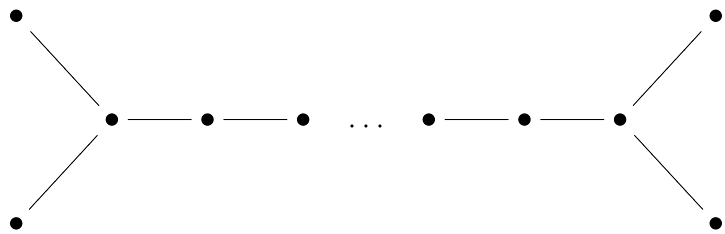
$\tilde{A}_n$:



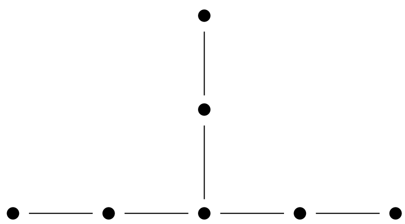
$\tilde{B}_n$:

$\tilde{C}_n$:

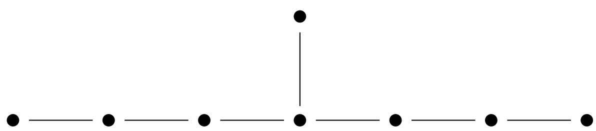
$\tilde{D}_n$:



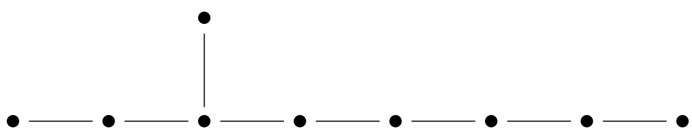
$\tilde{E}_6$:



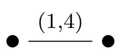
$\tilde{E}_7$:



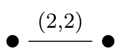
$\tilde{E}_8$:



$\tilde{A}_{11}$:

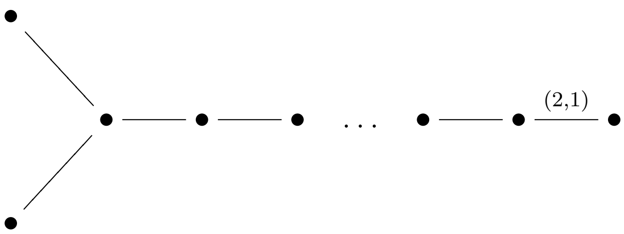


$\tilde{A}_{12}$:

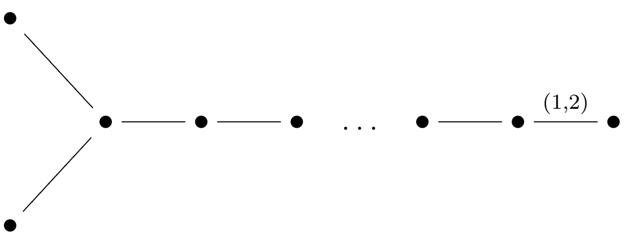


$\tilde{BC}_n$:

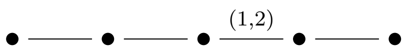
$\tilde{BD}_n$:



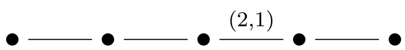
$\tilde{CD}_n$:



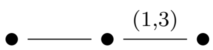
$\tilde{F}_{41}$:



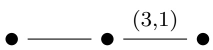
$\tilde{F}_{42}$:



$\tilde{G}_{21}$:



$\tilde{G}_{22}$:



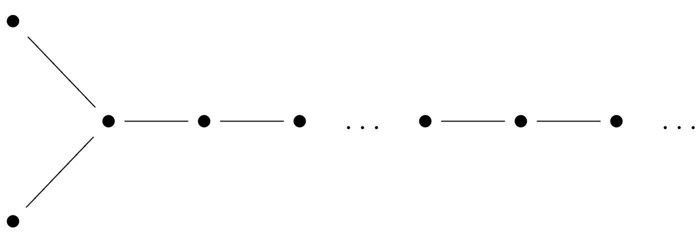
e nos seguintes diagramas de Dynkin infinitos

A_∞ :

B_∞ :

C_∞ :

D_∞ :



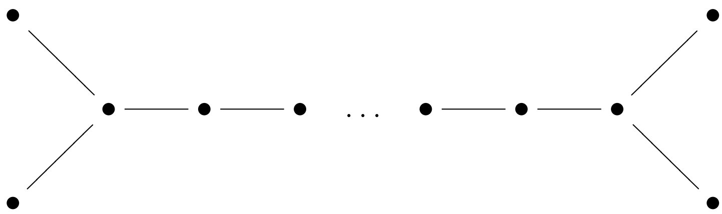
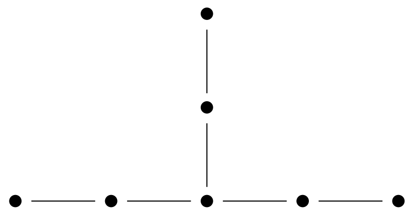
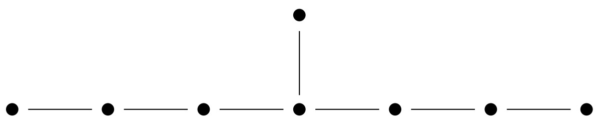
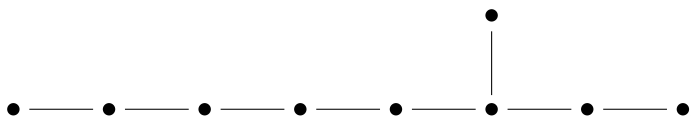
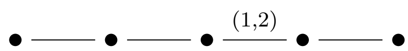
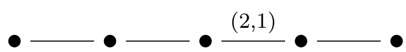
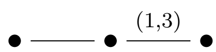
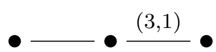
A_∞^∞ :

Definição 2.8 *Seja C uma matriz de Cartan sobre I. Dizemos que a função $d : I \to \mathbb{N}^*$ é* subaditiva, *se satisfaz $\sum_{i \in I} d_i C_{ij} \geq 0$, para todo $j \in I$.*

Novamente, escrevemos d_i ao invés de $d(i)$. Essa função é chamada de *aditiva*, se $\sum_{i \in I} d_i C_{ij} = 0$, para todo $j \in I$. Observemos que no caso de I ser finito, uma função aditiva é também chamada de *raiz nula*. No caso de I ser infinito, a existência de uma função subaditiva implica que, para j fixo, todos, exceto uma quantidade finita de C_{ij}, são zero. Observemos também que se o conjunto de índices I é finito, e fixamos uma ordem em I, podemos escrever C como uma matriz ordinária e d como um vetor. O produto dC pode ser interpretado como um produto de matrizes e visto como um vetor.

Na tabela abaixo, temos listado para todo diagrama Euclidiano C uma função aditiva h. Pode-se provar que qualquer outra função aditiva para C é um múltiplo inteiro desse h. Isto é, dada uma segunda função aditiva h' para C, podemos formar uma combinação linear não-trivial de h e h', que se anula para algum $i \in I$. No entanto, é conhecido que as matrizes de Cartan dos diagramas de Dynkin são regulares, isto é, são invertíveis. Assim, a combinação linear tem que ser a função nula, e, daí, h' é um $\mathbb{Q}$-múltiplo de h. Como $h_i = 1$, para algum $i \in I$, segue que h' ainda tem que ser um $\mathbb{N}$-múltiplo de h.

Tipo	*Diagrama*	h
$\tilde{A}_{11}$	$\bullet \overset{(1,4)}{\text{———}} \bullet$	2 1
$\tilde{A}_{12}$	$\bullet \overset{(2,2)}{\text{———}} \bullet$	1 1
$\tilde{B}_n$	$\bullet \overset{(1,2)}{\text{———}} \bullet \text{———} \bullet \ \ldots \ \bullet \text{———} \bullet \overset{(2,1)}{\text{———}} \bullet$	1 1 ... 1 1
$\tilde{C}_n$	$\bullet \overset{(2,1)}{\text{———}} \bullet \text{———} \bullet \ \ldots \ \bullet \text{———} \bullet \overset{(1,2)}{\text{———}} \bullet$	1 2 ... 2 1
$\widetilde{BC}_n$	$\bullet \overset{(1,2)}{\text{———}} \bullet \text{———} \bullet \ \ldots \ \bullet \text{———} \bullet \overset{(1,2)}{\text{———}} \bullet$	2 2 ... 2 1
$\widetilde{BD}_n$	$\begin{array}{l}\bullet \\ \quad\diagdown \\ \qquad \bullet \text{———} \bullet \text{———} \bullet \ \ldots \ \bullet \text{———} \bullet \overset{(2,1)}{\text{———}} \bullet \\ \quad\diagup \\ \bullet\end{array}$	$\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ 2 ... 2
$\widetilde{CD}_n$	$\begin{array}{l}\bullet \\ \quad\diagdown \\ \qquad \bullet \text{———} \bullet \text{———} \bullet \ \ldots \ \bullet \text{———} \bullet \overset{(1,2)}{\text{———}} \bullet \\ \quad\diagup \\ \bullet\end{array}$	$\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ 2 ... 1

$\tilde{D}_n$		$\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & 1 \\ & 2 & \ldots & & 2 & \\ 1 & & & & & 1 \end{array}$
$\tilde{E}_6$		$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & 2 & & \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array}$
$\tilde{E}_7$		$\begin{array}{ccccccc} & & & 2 & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$
$\tilde{E}_8$		$\begin{array}{cccccccc} & & & & & 3 & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 \end{array}$
$\tilde{F}_{41}$		1 2 3 2 1
$\tilde{F}_{42}$		1 2 3 4 2
$\tilde{G}_{21}$		1 2 1
$\tilde{G}_{22}$		1 2 1

Lema 2.9 *Seja C um diagrama Euclidiano. Então, qualquer função subaditiva para C é aditiva.*

Prova: Seja C^t a transposta de C, assim $C^t_{ij} = C_{ji}$, para todo $i, j \in I$. Como C é um diagrama Euclidiano, C^t também o é. Agora, para todo diagrama Euclidiano, existe uma função aditiva h (veja tabela acima). Seja h tal função para C^t, assim $hC^t = 0$. Seja também d uma função subaditiva para C. Então, $(dC)g^t = d(Cg^t) = 0$. Por hipótese, as componentes de dC são não-negativas, e as de g são positivas. Assim, a igualdade $(dC)g^t = 0$, implica que todas as componentes de dC são nulas, o que significa que d é aditiva. ■

Sejam C e C' duas matrizes de Cartan sobre I e I', respectivamente. Suponhamos que $I' \subseteq I$ e $\mid C'_{ij} \mid \leq \mid C_{ij} \mid$, para todo $i, j \in I'$. Então, dizemos que C' é *menor ou igual a* C. Observemos que os diagramas de Dynkin são menores que os diagramas Euclidianos.

Lema 2.10 *Sejam C e C' duas matrizes de Cartan diferentes, com C' menor que C. Seja d uma função subaditiva para C. Então, $d\mid_{I'}$ é uma função subaditiva para C', mas não é aditiva.*

Prova: Seja $j \in I'$, então

$$2d_j \geq \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} d_i \mid C_{ij} \mid \geq \sum_{\substack{i\in I'\\ i\neq j}} d_i \mid C_{ij} \mid \geq \sum_{\substack{i\in I'\\ i\neq j}} d_i \mid C'_{ij} \mid$$

mostra que $d\mid_{C'}$ é subaditiva.

Se I' é subconjunto próprio de I, então existe $l \in I \setminus I'$. Assim, sendo $j \in I'$, segue que

$$\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} d_i \mid C_{ij} \mid > \sum_{\substack{i\in I'\\ i\neq j}} d_i \mid C_{ij} \mid.$$

Logo, $d\mid_{C'}$ não é aditiva. Se $\mid C'_{ij} \mid < \mid C_{ij} \mid$, para algum i, j em I', então

$$\sum_{\substack{i\in I'\\ i\neq j}} d_i \mid C_{ij} \mid > \sum_{\substack{i\in I'\\ i\neq j}} d_i \mid C'_{ij} \mid.$$

Novamente, $d\mid_{C'}$ não é aditiva. ■

Lema 2.11 *Toda função subaditiva para qualquer um dos $A_\infty^\infty, B_\infty, C_\infty$ ou D_∞ é aditiva e limitada.*

Prova: Consideremos, primeiramente, A_∞^∞. Podemos assumir $I = \mathbb{Z}$, com arestas $\{i, i+1\}$.

Dada $d : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, existe algum $i \in \mathbb{Z}$, no qual d assume seu mínimo. Mas a subaditividade significa que

$$2d_i \geq d_{i-1} + d_{i+1},$$

que combinado com

$$d_{i-1} \geq d_i, d_{i+1} \geq d_i$$

nos dá

$$d_{i-1} = d_i = d_{i+1}.$$

Por indução, vemos que d é constante.

Para escrevermos uma função subaditiva d, usaremos o diagrama avaliado e anexaremos a cada vértice i os números d_i.

No caso B_∞,

$$d: \qquad d_0 \text{ --- } d_1 \text{ --- } d_2 \text{ --- } d_3 \quad \ldots,$$

e obtemos de d uma função subaditiva sobre A_∞^∞, isto é

$$\ldots \quad d_2 \text{ --- } d_1 \text{ --- } d_0 \text{ --- } d_1 \text{ --- } d_2 \quad \ldots.$$

No caso C_∞, obtemos de

$$d_0 \overset{(2,1)}{\text{ --- }} d_1 \text{ --- } d_2 \text{ --- } d_3 \quad \ldots,$$

uma função subaditiva sobre A_∞^∞, isto é

$$\dots \quad d_2 \text{ —— } d_1 \text{ —— } 2d_0 \text{ —— } d_1 \text{ —— } d_2 \quad \dots .$$

No caso D_∞, obtemos de

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
d_0 \arrow[dr] & & & & \\
& d_1 \arrow[r] & d_2 \arrow[r] & d_3 & \dots \\
d_0' \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd},$$

uma função subaditiva sobre A_∞^∞, isto é

$$\dots \quad d_2 \text{ —— } d_1 \text{ —— } d_0 + d_0' \text{ —— } d_1 \text{ —— } d_2 \quad \dots .$$

Em todos os três casos, a função obtida sobre A_∞^∞ tem que ser constante, assim, d é aditiva e limitada. ■

Assim, existem as funções aditivas óbvias sobre $A_\infty^\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$. Vamos listá-las abaixo.

Diagrama	d
$A_\infty^\infty: \quad \dots \bullet \text{——} \bullet \text{——} \bullet \dots$	$\dots\ 1\ 1\ 1\ 1\ \dots$
$B_\infty: \quad \bullet \overset{(1,2)}{\text{——}} \bullet \text{——} \bullet \ \dots \ \bullet \text{——} \bullet \text{——} \bullet \ \dots$	$1\ 2\ 2\ 2\ \dots\ 2\ 2\ \dots$
$C_\infty: \quad \bullet \overset{(2,1)}{\text{——}} \bullet \text{——} \bullet \ \dots \ \bullet \text{——} \bullet \text{——} \bullet \ \dots$	$1\ 1\ 1\ \dots\ 1\ 1\ \dots$
$D_\infty: \quad \begin{tikzcd}[arrows=dash] \bullet \arrow[dr] & & & & & & & & \\ & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet & \dots & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet & \dots \\ \bullet \arrow[ur] & & & & & & & & \end{tikzcd}$	$\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\ 2\ 2\ \dots\ 2\ 2\ \dots$

Lema 2.12 *Dada qualquer matriz de Cartan C, uma das seguintes alternativas é verdadeira:*

1. *C é um diagrama de Dynkin finito.*

2. *C é um dos $A_\infty^\infty, A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$.*

3. *Existe um diagrama Euclidiano, que é menor que C.*

Prova: Suponhamos que não exista nenhum diagrama Euclidiano que seja menor que C. Vamos mostrar, então, que valem *1* ou *2*. Para isso, vamos analisar cada um dos diagramas Euclidianos, afim de traçar um perfil de C. Considerando $\tilde{A}_n$, podemos dizer que C é um carcás conexo e sem ciclos. Considerando $\tilde{A}_{11}$ e $\tilde{A}_{12}$, verificamos que todas as arestas são do tipo

$$\bullet \frac{\quad}{} \bullet \;,\; \bullet \frac{(2,1)}{\quad} \bullet \text{ ou } \bullet \frac{(3,1)}{\quad} \bullet .$$

Considerando $\tilde{G}_{21}$ e $\tilde{G}_{22}$, se a aresta $\bullet \frac{(3,1)}{\quad} \bullet$ aparecer, então $C \simeq G_2$.

Considerando $\tilde{B}_n$, $\tilde{C}_n$ e $\tilde{BC}_n$, C tem no máximo uma aresta da forma $\bullet \frac{(2,1)}{\quad} \bullet$.

Considerando $\tilde{BD}_n$ e $\tilde{CD}_n$, se existir uma aresta da forma $\bullet \frac{(2,1)}{\quad} \bullet$, então,

$$C = \cdots \frac{\quad}{} \bullet \frac{\quad}{} \bullet \frac{(2,1)}{\quad} \bullet \frac{\quad}{} \cdots .$$

Considerando $\tilde{F}_{41}$ e $\tilde{F}_{42}$, a existência dessa aresta força $C \simeq B_n, C_n, B_\infty$ ou C_∞. Do contrário, C é um carcás conexo e sem ciclos, com aresta sem avaliação.

Considerando $\tilde{D}_n$, C tem no máximo um ponto de ramificação.

Considerando $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ e $\tilde{E}_8$, temos que $C \simeq E_6, E_7$ ou E_8, o que completa a prova.

■

Teorema 2.13 *Sejam C uma matriz de Cartan conexa e d uma função subaditiva para C.*

1. *Então, C é um diagrama de Dynkin finito, um diagrama Euclidiano ou um dos $A_\infty^\infty, A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$.*

2. *Se d não é aditiva, então C é um diagrama de Dynkin finito ou A_∞.*

3. *Se d é ilimitado, então C é A_∞.*

Prova: Se C não é nem um diagrama de Dynkin finito, nem um dos $A_\infty^\infty, A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$, então existe um diagrama Euclidiano C' que é menor que C.

Agora, se $C' \neq C$, então $d\,|_{C'}$ não pode ser aditiva, de acordo com o lema 2.10. Mas, isso é uma contradição, uma vez que $d\,|_{C'}$ tem que ser aditiva, pelo lema 2.9. Logo, *1* está provado.

Se d não é aditiva, então, pelos lemas 2.9 e 2.11, C não pode ser nenhum dos diagramas Euclidianos nem $A_\infty^\infty, B_\infty, C_\infty$ e D_∞, o que prova *2*.

Se d é ilimitado, então I tem que ser infinito, e, pelo lema 2.11, somente A_∞ satisfaz essa condição. ■

Para qualquer diagrama Euclidiano, vimos que existe uma função aditiva. Restringindo essas funções à subdiagramas próprios, obtemos, para todos os diagramas de Dynkin, funções subaditivas, que não podem ser aditivas (pelo lema 2.10). Assim, os diagramas de Dynkin são as únicas matrizes de Cartan sobre um conjunto de índices finito, para as quais existem funções subaditivas que não são aditivas. Essa caracterização dos diagramas de Dynkin se deve a Vinberg.

Para A_∞, existem ambas funções aditivas e funções subaditivas, que não são aditivas. Por exemplo,

$$1 \frac{\quad}{} 2 \frac{\quad}{} 3 \frac{\quad}{} 4 \frac{\quad}{} 5 \frac{\quad}{} \ldots \text{ e}$$

$$2 \frac{\quad}{} 4 \frac{\quad}{} 5 \frac{\quad}{} 6 \frac{\quad}{} 7 \frac{\quad}{} \ldots,$$

sendo a primeira aditiva e a segunda subatidiva, mas não aditiva. De fato, seja $I = \mathbb{N}^*$. Vamos considerar o diagrama A_∞ enumerado da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} \bullet & \text{——} & \bullet & \text{——} & \bullet & \text{——} & \bullet & \text{——} & \dots \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & . \end{array}$$

Nosso objetivo, primeiramente, será construir a matriz de Cartan de A_∞. De acordo com a definição 2.7, temos que, para todo $i \in I$, $C_{ii} = 2$. Agora, como existem arestas dos vértices 1 ao 2, do 2 ao 3, do 3 ao 4 e assim por diante, ou seja, do vértice i ao $i+1$, para todo $i \in I$, $C_{i,i+1} \neq 0$. Além disso, nenhuma das arestas tem avaliação, o que implica que $C_{i,i+1}C_{i+1,i} = 1$. E como, pela definição 2.7, $C_{ij} \leq 0$, para todo $i \neq j$ em I, segue que $C_{i,i+1} = -1$ e $C_{i+1,i} = -1$. Como não existem arestas, além das já mencionadas, $C_{ij} = 0$, para todo i, j não consecutivos.

Agora, mostraremos que a função

$$d: \qquad 1 \text{——} 2 \text{——} 3 \text{——} 4 \text{——} 5 \text{——} \dots$$

é aditiva, ou seja, mostraremos que a igualdade $\sum\limits_{i \in I} d_i C_{ij} = 0$, para todo $j \in I$, é verdadeira para a função d descrita acima e para a matriz de Cartan C do diagrama infinito A_∞. Observemos que $d_i = i$, para todo $i \in I$. Mas, uma vez que $C_{ij} = 0$, sempre que i, j não são consecutivos, temos que

$$\sum_{i \in I} d_i C_{ij} = d_j C_{j,j} + d_{j+1} C_{j+1,j} + d_{j+2} C_{j+2,j} = j.(-1) + (j+1).2 + (j+2).(-1) =$$
$$-j + 2j + 2 - j - 2 = 0,$$

para todo $j \geq 1$.

Consideremos, agora, a função

$$d': \qquad 2 \text{——} 4 \text{——} 5 \text{——} 6 \text{——} 7 \text{——} \dots,$$

de I em $\mathbb{N}^*$. Vamos mostrar primeiramente que d' é subaditiva. Observemos que $d'_1 = 2$ e $d'_i = i + 2$, para todo $i \geq 2$. Assim, para $j =\geq 2$, temos que

$$\sum_{i \in I} d'_i C_{ij} = d'_j C_{j,j} + d'_{j+1} C_{j+1,j} + d'_{j+2} C_{j+2,j} = j(-1) + (k+2)2 + (k+3)(-1) =$$
$$-k - 1 + 2k + 4 - k - 3 = 0,$$

já que $C_{ij} = 0$, sempre que i, j não são consecutivos. No entanto, para $j = 2$, segue que

$$\sum_{i \in I} d'_i C_{i2} = d'_1 C_{1,2} + d'_2 C_{22} + d'_3 C_{32} = 2(-1) + 4.2 + 5(-1) = -2 + 8 - 5 = 1 > 0.$$

Logo, $\sum\limits_{i \in I} d'_i C_{ij} \geq 0$, para todo $j \geq 1$.

Finalmente, não existem funções aditivas para um diagrama de Dynkin C, uma vez que C é uma matriz regular. Assim, os diagramas Euclidianos são as únicas matrizes de Cartan sobre conjuntos de índices finitos com funções aditivas. Essa caracterização dos diagramas Euclidianos é devido a Vinberg (ver [18]) e Berman-Moody-Wonenburger (ver [3]).

2.2 Carcás de Riedtmann ou Carcás de Translação

Nesta seção, introduziremos o conceito de carcás de Riedtmann, também conhecido como carcás de translação, que tem um papel muito importante no estudo do carcás de Auslander-Reiten para álgebras autoinjetivas.

Para um carcás $Q = (Q_0, Q_1)$, com Q_0 o conjunto de vértices e Q_1 o conjunto de flechas, sempre assumiremos que não existem ciclos nem flechas duplas.

Seja $x \in Q_0$. Denotaremos por x^+ o conjunto dos sucessores imediatos de x, ou seja, $x^+ = \{y \in Q_0/\text{existe uma flecha } x \to y\}$. E denotaremos por x^- é o conjunto dos predecessores imediatos de x, u seja, $x^- = \{y \in Q_0/\text{existe uma flecha } y \to x\}$. Assim, temos a seguinte definição.

Definição 2.14 *Sejam $Q = (Q_0, Q_1)$ um carcás. Chamamos o carcás Q de* localmente finito, *quando os conjuntos x^+ e x^- são finitos, para todo $x \in Q_0$.*

Seja $Q = (Q_0, Q_1)$ um carcás. Seja $\tau : Q_0' \to Q_0$ uma função injetora, onde Q_0' é um subconjunto de Q_0 e $(\tau x)^+ = x^-$, para todo $x \in Q_0'$, isto é, os sucessores de τx são os predecessores de x. Assim, dada uma flecha $\alpha : y \to x$, existe uma única flecha $\tau x \to y$, e essa flecha será denotada por $\sigma\alpha$.

Definição 2.15 *Um* carcás de Riedtmann $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \tau)$ *é definido por um carcás* (Δ_0, Δ_1) *e uma função injetora $\tau : \Delta_0' \to \Delta_0$, como definida acima.*

Um carcás de Riedtmann é chamado de *estável*, quando τ é definido sobre todos os elementos de Δ_0, e é também sobrejetor. Um vértice x de um carcás de Riedtmann Δ será chamado *periódico*, se $\tau^n x = x$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Estaremos interessados em carcases de Riedtmann estáveis contendo elementos periódicos.

Exemplo 2.16 *Seja Q um carcás conexo e sem ciclos. Definamos $\mathbb{Z}Q$ da seguinte forma: seus vértices são os elementos de $\mathbb{Z} \times Q_0$, e dada uma flecha $\alpha : x \to y$, existem flechas $(n, \alpha) : (n, x) \to (n, y)$ e $\sigma(n, \alpha) : (n + 1, y) \to (n, x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Finalmente, seja $\tau(n, \alpha) = (n + 1, \alpha)$. Note que assim obtemos um carcás de Riedtmann estável.*

Seja $Q = (Q_0, Q_1)$ um carcás. Uma função $a : Q_1 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ será chamada de *avaliação*, e o carcás $Q = (Q_0, Q_1, a)$, um *carcás avaliado*. A imagem de $\alpha : x \to y$ será denotado por (a_α, a'_α) ou por (a_{xy}, a'_{xy}).

Se Q é um carcás avaliado, podemos associá-lo a uma matriz de Cartan $C = C(Q)$ sobre o conjunto de índices Q_0 da seguinte forma:

$$C_{xx} = 2, \text{ para } x \in Q_0;$$
$$C_{xy} = -a_{xy} - a'_{yx}, \text{ para } x \neq y \text{ em } Q_0,$$

onde $a_{xy} = 0 = a'_{xy}$, no caso de não haver nenhuma flecha entre os vértices x e y.

No caso de estarmos lidando com um carcás avaliado, conexo e sem ciclos $Q = (Q_0, Q_1)$, então Q e C juntos determinam a avaliação.

Um *carcás de Riedtmann avaliado* $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \tau, a)$ é dado por um carcás de Riedtmann $(\Delta_0, \Delta_1, \tau)$ e uma avaliação a para (Δ_0, Δ_1), tal que $a_{\sigma\alpha} = a'_\alpha$, $a'_{\sigma\alpha} = a_\alpha$, para todo $\alpha : x \to y$, com $x \in \Delta_0'$.

Exemplo 2.17 *Seja (Q_0, Q_1, a) um carcás avaliado, conexo e sem ciclos. Definamos sobre $\mathbb{Z}(Q_0, Q_1)$ uma avaliação por $a_{(n,\alpha)} = a_\alpha$ e $a'_{(n,\alpha)} = a'_\alpha$. Esse carcás de Riedtmann avaliado é denotado por $\mathbb{Z}(Q_0, Q_1, a)$.*

Chamamos $C(Q)$ de *classe de Cartan* de Δ, quando Δ é isomorfo a $\mathbb{Z}Q/G$, para algum um carcás conexo e sem ciclos Q, e para algum grupo de automorfismos G. A classe de Cartan de Δ é unicamente determinada por Δ.

Proposição 2.18 *Sejam Q e Q' carcases avaliados, conexos e sem ciclos. Então, $\mathbb{Z}Q$ e $\mathbb{Z}Q'$ são isomorfos se, e somente, as matrizes de Cartan $C(Q)$ e $C(Q')$ são isomorfas. Além disso, dado qualquer carcás de Riedtmann avaliado estável Δ, existe um carcás avaliado, conexo e sem ciclos Q e um grupo G de automorfismos de $\mathbb{Z}Q$, tal que Δ é isomorfo a $\mathbb{Z}Q/G$.*

Prova: A primeira parte do resultado segue da própria definição da matriz de Cartan $C(Q)$ (e $C(Q')$).

Agora, se $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \tau, a)$ é um carcás de Riedtmann avaliado estável, e $(\Delta_0, \Delta_1, \tau) = \mathbb{Z}(Q_0, Q_1)/G$, para algum carcás conexo e sem ciclos (Q_0, Q_1), então usando a projeção de $\mathbb{Z}(Q_0, Q_1)$ em $(\Delta_0, \Delta_1, \tau)$, a avaliação de Δ induz uma avaliação sobre $\mathbb{Z}(Q_0, Q_1)$, também denotada por a, de forma que $\mathbb{Z}(Q_0, Q_1)$ se torna um carcás de Riedtmann avaliado.

A inclusão canônica de (Q_0, Q_1) em $\mathbb{Z}(Q_0, Q_1)$, dada por $x \mapsto (0, x)$, dota (Q_0, Q_1) de uma avaliação, novamente denotada por a, o que faz com que $(\Delta_0, \Delta_1, \tau, a) = \mathbb{Z}(Q_0, Q_1, a)/G$. ■

Vamos definir agora uma função subaditiva para Δ um carcás de Riedtmann avaliado.

Definição 2.19 *Seja $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \tau, a)$ um carcás de Riedtmann avaliado. Uma* função subaditiva *l para Δ é uma função $l : \Delta \to \mathbb{N}$, que satisfaz*

$$l(x) + l(\tau x) \geq \sum_{y \in x^-} l(y) a'_{yx},$$

para todo $x \in \Delta'_0$. Tal função é chamada de aditiva*, quando temos uma igualdade, para todo $x \in \Delta'_0$.*

Seja Q um carcás conexo e sem ciclos. Consideremos $\mathbb{Z}Q$ um carcás de Riedtmann estável definido através de Q. Uma *translação* é um automorfismo sobre $\mathbb{Z}Q$ da forma $(m, y) \mapsto (m + q, y)$.

Consideremos também o seguinte lema sobre automorfismos.

Lema 2.20 *Seja $\varphi : \mathbb{Z}Q \to \mathbb{Z}Q$ um automorfismo. Então, φ leva um subconjunto da forma $\mathbb{Z} \times \{x\}$ nele mesmo.*

Podemos agora provar o seguinte.

Teorema 2.21 *Seja $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \tau, a)$ um carcás de Riedtmann estável avaliado, que é conexo, e contém um vértice periódico. Suponhamos que exista uma função subaditiva l para Δ.*

1. *Então, a classe de Cartan de Δ é ou um diagrama de Dynkin, um digrama Euclidiano, ou um dos $A_\infty, A_\infty^\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$.*

2. *Se l não é aditiva, então a classe de Cartan de Δ é um diagrama de Dynkin ou A_∞.*

3. *Se l é ilimitado, então a classe de Cartan de Δ é A_∞.*

Prova: Primeiramente, note que a existência de uma função subaditiva implica que Δ é localmente finito.

Vamos mostrar que qualquer vértice de Δ tem que ser periódico, isto é, $\tau^n x = x$, para algum $n \geq 0$. Agora,

$$\tau^n(x^+) = (\tau^n(x))^+ = x^+$$

mostra que τ^n induz uma permutação sobre o conjunto finito x^+, e, assim, τ^{nm} é a identidade sobre x^+, para algum $m > 0$. Logo, qualquer $y \in x^+$ também é periódico. Analogamente, qualquer vértice $y \in x^-$ é periódico. Além disso, usando τ, podemos alcançar qualquer outro vértice de Δ, uma vez que assumimos que Δ é conexo.

Pela proposição 2.18, existem Q um carcás avaliado, conexo e sem ciclos , e G um grupo de autorfismos de $\mathbb{Z}Q$, tais que Δ é isomorfo a $\mathbb{Z}Q/G$. Suponhamos que C seja a matriz de Cartan de Q. Podemos supor que $Q = \{0\} \times Q$ está imerso em $\mathbb{Z}Q$. Assim, denotemos a aplicação correspondente

$$Q \to \mathbb{Z}Q \to \Delta$$

por $u \mapsto \bar{u}$, com $u \in Q$ e $\bar{u} \in \Delta$.

Pela definição de C, temos

$$C_{uv} = \begin{cases} 2, & \text{se} \quad u = v \\ -a_{\bar{u}\bar{v}} & \text{se} \quad u \to v \\ -a'_{\bar{v}\bar{u}} & \text{se} \quad v \to u \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Suponhamos agora que existe uma função subaditiva l para Δ. Consideraremos primeiro, os casos onde existe um número fixo n, tal que $\tau^n x = x$, para todos os vértices x de Δ. Isso é claramente verdadeiro no caso de Q ser finito. De l, obtemos uma função subaditiva τ-invariante d para Δ, dada por

$$d(x) = \sum_{i=0}^{n-1} l(\tau^i x).$$

Observemos que a função d é aditiva se, e somente se, l o é. Além disso, $\tau^n x = x$ mostra que $d(x) = d(\tau x)$. Então,

$$\begin{aligned}
2d(x) &= d(x) + d(\tau x) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} l(\tau^i x) + \sum_{i=0}^{n} l(\tau^i x) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} [l(\tau^i x) + l(\tau(\tau^i x))] \\
&\geq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{y \in (\tau^i x)^-} l(y) a'_{y,\tau^i x} \\
&= \sum_{z \in x^-} \sum_{i=0}^{n-1} l(\tau^i z) a'_{z,x} \\
&= \sum_{z \in x^-} d(z) a'_{z,x}
\end{aligned}$$

onde escrevemos $y \in (\tau^i x)^- = \tau^i(x^-)$ na forma $y = \tau^i z$, e usamos que $a'_{\tau^i z, \tau^i x} = a'_{z,x}$, para todo x, z. Logo, d é uma função subaditiva τ-invariante para Δ, que é aditiva se l for aditiva.

Consideremos agora a aplicação composta $Q \to \Delta \to \mathbb{N}$, dada por $u \mapsto d(\bar{u})$. Note que $(\bar{u})^-$ é a união disjunta de $\{\bar{v}/v \in u^-\}$ e $\{\tau\bar{v}/v \in u^+\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
2d(\bar{u}) &\geq \sum_{z \in (\bar{u})^-} d(z) a'_{z,\bar{u}} \\
&= \sum_{v \in (\bar{u})^-} d(\bar{v}) a'_{\bar{v}\bar{u}} + \sum_{v \in (\bar{u})^+} d(\bar{v}) a'_{\tau\bar{v},\bar{u}} \\
&= \sum_{v \in (\bar{u})^-} d(\bar{v}) a'_{\bar{v}\bar{u}} + \sum_{v \in (\bar{u})^+} d(\bar{v}) a'_{\bar{u}\bar{v}} \\
&= -\sum_{v \in (\bar{u})^-} d(\bar{v}) C^t_{vu} - \sum_{v \in (\bar{u})^+} d(\bar{v}) C^t_{vu} \\
&= -\sum_{v \neq u} d(\bar{v}) C^t_{vu}.
\end{aligned}$$

Obtemos dessa forma uma função subaditiva para C^t, que é aditiva ou ilimitada, se l for aditiva ou ilimitada, respectivamente. Assim, a existência de uma função subaditiva l para Δ implica que C tem que ser um diagrama de Dynkin, diagrama Euclidiano ou um dos A_∞, A_∞^∞, B_∞, C_∞, D_∞. No caso de l ser aditiva, C deve ser de Dynkin ou A_∞. E no caso de l ser ilimitada, C tem que ser da forma A_∞.

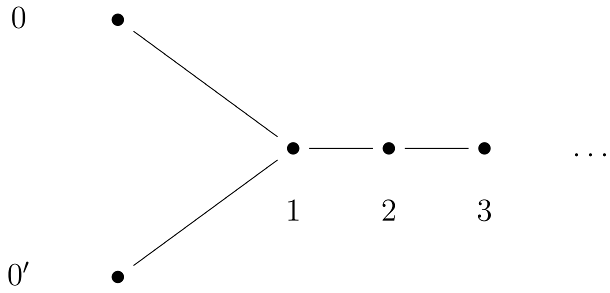
Finalmente, estudaremos o caso no qual temos, para todo vértice x de Δ, apenas um número $n(x)$, dependendo de x, com $\tau^{n(x)}(x) = x$. Consideremos Q infinito. Assim, escolhendo um subdiagrama finito Q' de Q, temos Δ' o carcás de Riedtmann gerado por Q', e vemos que Q' tem que ser um diagrama de Dynkin ou um diagrama Euclidiano. Como consequência disso, Q somente pode ser um dos A_∞, A_∞^∞, B_∞, C_∞, D_∞.

Afirmamos que para Q do tipo A_∞, A_∞^∞, B_∞, C_∞ ou D_∞, qualquer grupo de automorfismo G de $\mathbb{Z}Q$ contendo um elemento g com $g(n, x) = (n + p, x)$, para algum $(n, x) \in \mathbb{Z}Q$ e algum $p \geq 1$, tem que conter uma translação. Nos casos A_∞, B_∞ e C_∞, usamos a seguinte numeração

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \cdots \\
0 & & 1 & & 2 & & 3 & &
\end{array}$$

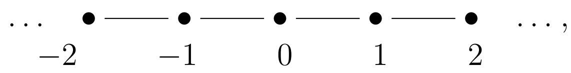
dos vértices de Q. Qualquer automorfismo de $\mathbb{Z}Q$ leva um subconjunto da forma $\mathbb{Z} \times \{x\}$ nele mesmo. Se agora $g(n, x) = (n+p, x)$, para algum (n, x), então também todos os vizinhos (m, y) de (n, x) satisfarão $g(m, y) = (m + p, y)$.

Analogamente para D_∞, usamos a numeração



Então, os subconjuntos $\mathbb{Z} \times \{0, 0'\}$ e $\mathbb{Z} \times \{x\}$, com $x \geq 1$, são levados neles mesmos por qualquer automorfismo. Se $g(n, x) = (n + p, x)$, para algum (n, x), então também $g(m, y) = (m + p, y)$ para todos os vizinhos (m, y) de (n, x), com $y \geq 1$. Se $(m, 0)$ é um vizinho de $(n, 1)$, e $g(n, 1) = (n + p, 1)$, então podemos concluir que $g^2(m, 0) = (m + 2p, 0)$. De qualquer modo, g^2 é uma translação.

Finalmente, consideremos o caso A_∞^∞, e usemos a numeração



onde podemos assumir que $g(n, 0) = (n + p, 0)$, para alguns n, p. Se $(m, 1)$ é um vizinho de $(n, 0)$, então $g(m, 1) = (m + p, 1)$, e g é uma translação, ou $g(m, 1) = (m + p, -1)$, e pelo menos g^2 é uma translação.

Logo, vimos que em todos os casos existe um número fixo q, com $\tau^q z = z$, para todos os vértices em Δ, e daí, estamos no caso anterior, e o teorama está provado. ■

Uma álgebra de Artin R é dita *de tipo de representação finita*, ou de tipo finito, se existe apenas um número finito de objetos indecomponíveis em $modR$.

Considerando essa definição, temos o seguinte importante teorema, conhecido como Teorema de Auslander. Usaremos esse resultado, na demonstração do teorema 2.23, que é consequência imediata do teorema 2.21.

Teorema 2.22 (Auslander) *Sejam R uma álgebra de Artin indecomponível e $\mathcal{C}$ uma componente de $indR$, tal que o comprimento dos objetos em $\mathcal{C}$ é limitado. Então, R é de tipo de representação finita e $\mathcal{C} = indR$.*

Prova: Ver [2], capítulo VI, teorema 1.4. ■

Teorema 2.23 *A classe de Cartan de uma componente do carcás de Auslander-Reiten de uma álgebra de Artin contendo módulos periódicos é ou um diagrama de Dynkin finito ou A_∞.*

Prova: Note que o carcás de Auslander-Reiten é sempre localmente finito.

Consideremos uma componente $\mathcal{C}$ de $A_e(R)$ contendo um módulo periódico, e seja c uma função comprimento ordinária. Observe que c é subaditiva. Além disso, c é aditiva sobre $\mathcal{C}$ se, e somente se, $\mathcal{C}$ é também uma componente do carcás de Auslander-Reiten $A(R)$.

Podemos assumir que R é conexa. Agora, se c não é aditiva sobre $\mathcal{C}$, então a classe de Cartan de $\mathcal{C}$ somente pode ser um diagrama de Dynkin ou A_∞, pela parte *2* do teorema 2.21.

Se, por outro lado, c é aditiva, então R não pode ser de tipo de representação finita, já que existe uma componente do carcás de Auslander-Reiten sem módulos projetivos, que é $\mathcal{C}$. Mas, então c não pode ser limitada sobre $\mathcal{C}$ pelo terorema 2.22. Assim, podemos aplicar o item *3* do teorema 2.21, e concluir que a classe de Cartan de $\mathcal{C}$ é A_∞. ■

Como uma primeira aplicação do teorema anterior, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.24 *Seja R uma álgebra de Artin de tipo de representação finita. Seja $\mathcal{C}$ uma componente conexa do carcás de Auslander-Reiten estável $A_e(R)$ da álgebra R. Então, a classe de Cartan de $\mathcal{C}$ é um diagrama de Dynkin.*

Prova: Temos somente que excluir o caso de a classe de Cartan de $\mathcal{C}$ ser A_∞. Mas, esse caso é impossível, uma vez que, para qualquer grupo de automorfismos G, $\mathbb{Z}A_\infty/G$ tem uma quantidade infinita de pontos. ■

Observemos a seguinte definição.

Definição 2.25 *Seja $\mathcal{C}$ uma componente de Auslander-Reiten de uma álgebra de Artin R. Dizemos que $\mathcal{C}$ é quasi-serial, se*

1. *$\mathcal{C}$ não possui módulos projetivos nem injetivos;*

2. *$0 \longrightarrow X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{k} Y_i \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ é uma sequência de Auslander-Reiten em $\mathcal{C}$, então $k \leq 2$ e $k = 2$, com $c(Y_1) \leq c(Y_2)$, implica que $c(Y_1) < c(X) < c(Y_2)$.*

Podemos agora provar o seguite resultado, que também é uma aplicação do teorema 2.23.

Corolário 2.26 *Sejam R uma álgebra de Artin e $\mathcal{C}$ uma componente de $A(R)$ que contém somente módulos periódicos. Então, $\mathcal{C}$ é uma componente quasi-serial.*

Prova: Como estamos lidando com uma componente de $A(R)$, a função comprimento ordinária é aditiva. Assim, a classe de Cartan da componente é A_∞. Mas, isso implica que $\mathcal{C}$ é quasi-serial. ■

2.3 Tubos

Definimos no exemplo 2.16 o carcás de Riedtmann estável $\mathbb{Z}Q$, onde Q é um carcás conexo e sem ciclos. Considerando Q como o carcás infinito

$$A_\infty : \qquad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow \quad \ldots \quad \longrightarrow n-1 \longrightarrow n \longrightarrow n+1 \longrightarrow \quad \ldots$$

obtemos o carcás de Riedtmann infinito $\mathbb{Z}A_\infty$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (1,1) \arrow[dr] & & (0,1) \arrow[dr] & & (-1,1) \arrow[dr] & & (-2,1) \arrow[dr] & & (-3,1) \arrow[dr] & \\
\cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & (1,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (0,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (-1,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (-2,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
 & (2,3) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (1,3) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (0,3) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (-1,3) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (-2,3) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
{} \arrow[ur] & & \vdots \arrow[ur] & & \vdots \arrow[ur] & & \vdots \arrow[ur] & & \vdots \arrow[ur] & & {}
\end{tikzcd}$$

onde $\tau(n,i) = (n+1,i)$, para $n \in \mathbb{Z}$ e $i \geq 1$. Logo, por definição, τ é um automorfismo de $\mathbb{Z}A_\infty$, assim como suas potências τ^r, com $r \in \mathbb{Z}$. Seja r um inteiro positivo fixo, e denotemos por (τ^r) o grupo cíclico infinito dos automorfismos de $\mathbb{Z}A_\infty$ gerado por τ^r. Denotemos por $\mathbb{Z}A_\infty$ o espaço orbital de $\mathbb{Z}A_\infty$ sob a ação de (τ^r). Assim, $\mathbb{Z}A_\infty/(\tau^r)$ é um carcás de Riedtmann, identificando cada ponto (n,i) de $\mathbb{Z}A_\infty$ com o ponto $\tau^r(n,i) = (n+r,i)$, e cada flecha $\alpha : x \to y$ em $\mathbb{Z}A_\infty$ com a flecha $\tau^r : \tau^r x \to \tau^r y$.

Definição 2.27 *Seja $(\mathcal{T},\tau)$ um carcás de Riedtmann.*

1. $(\mathcal{T},\tau)$ *é um* tubo estável de rank $r \geq 1$*, se existe um isomorfismo de carcases de Riedtmann $\tau \simeq \mathbb{Z}A_\infty/(\tau^r)$.*

2. *Um tubo estável de rank $r = 1$ é chamado de* tubo homogêneo*.*

Observe que τ ainda age como um automorfismo sobre um tubo estável de rank r, e por isso os tubos são chamados de estáveis. Além disso, τ^r age como a identidade, o que implica que todos os vértices de $\mathcal{T}$ são τ-periódicos.

Capítulo 3

Complexidade de módulos finitamente gerados

Começaremos esse capítulo com a definição de complexidade de um módulo finitamente gerado. Assim, sejam R uma álgebra de Artin e M um R-módulo finitamente gerado. Dizemos que a *complexidade de M é no máximo n*, ou seja, $cx(M) \leq n$, se $\beta_i(M) \leq ci^{n-1}$, para algum $c \in \mathbb{Q}$ e $i \gg 0$. Dizemos também que a *complexidade de M é n*, $cx(M) = n$, se $cx(M) \leq n$, mas $cx(M) \nleq n-1$.

Observe que dizer que $cx(M) = 0$ é equivalente a dizer que a dimensão projetiva de M é finita; e, ainda, se R é autoinjetiva, M é um R-módulo projetivo. De fato, suponhamos que $cx(M) = 0$. Então, para $i \gg 0$, $\beta_i(M) \leq ci^{-1}$, onde $c \in \mathbb{Q}$. Como $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{c}{i} = 0$, o módulo M tem dimensão projetiva finita. Suponhamos que $pdM = m \geq 1$. Consideremos

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow P_{m-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0\ ,$$

uma resolução projetiva minimal de M. Se R é uma álgebra autoinjetiva, então o R-módulo P_m é também injetivo, e a sequência

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow P_{m-1} \longrightarrow \Omega^{m-1}M \longrightarrow 0$$

cinde. Ou seja, $P_{m-1} \simeq P_m \oplus \Omega^{m-1}M$, e portanto, $\Omega^{m-1}M$ é projetivo. Mas, isso contradiz a hipótese de a dimensão projetiva de M ser igual a $m \geq 1$. Logo, $m = 0$, e M é projetivo.

Agora, $cx(M) = 1$ se, e somente se, a dimensão projetiva de M é infinita, e existe b um número real positivo, tal que $\beta_i(M) \leq b$, para todo $i \geq 0$. Com efeito, como $cx(M) \neq 0$, a dimensão projetiva de M é infinita, pelas observações acima. Além disso, para $i \gg 0$, $\beta_i(M) \leq ci^{1-1} = c$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Assim, temos uma quantidade finita de números Betti que não são limitados por c, digamos $\{\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{i-1}(M)\}$. Façamos, então, $b = max\{c, \beta_0(M), ..., \beta_{i-1}(M)\}$, e daí, $\beta_i(M) \leq b$, para todo $i \geq 0$.

Reciprocamente, suponhamos que a dimensão projetiva de M é infinita, e que existe um número real b, tal que $\beta_i(M) \leq b$, para todo $i \geq 0$. Segue que $\beta_i(M) \leq bi^{1-1}$, para todo $i \geq 0$, e assim, $cx(M) \leq 1$. Como a dimensão projetiva é infinita, pelas obeservações feitas acima, $cx(M) \neq 0$, e logo, $cx(M) = 1$.

O primeiro resultado desse capítulo trata da relação entre as complexidades de uma soma direta de módulos e de seus somandos.

Lema 3.1 *Seja R uma álgebra de Artin, e sejam $M_1, M_2, ..., M_t$ módulos sobre R. Então,* $cx\left(\bigoplus_{i=1}^{t} M_i\right) = max\{cx(M_i); i = 1, 2, ..., t\}$.

Prova: Essa demonstração será feita somente para o caso de $cx(M_i)$ finita, para $i = 1, 2, ..., t$, pois se existir um $j \in \{1, 2, ..., t\}$, tal que $cx(M_j) = \infty$, teremos que $cx\left(\bigoplus_{i=1}^{t} M_i\right) = \infty$, e o resultado estará provado. Assim, vamos supor que a $cx(M_i)$ é finita, para todo $i = 1, 2, ..., t$.

Faremos essa demonstração por indução sobre t. Começaremos supondo que $t = 2$, e que $cx(M_i) = k_i$ para $i = 1, 2$. Então, para $j \gg 0$, existem $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$, tais que $\beta_j(M_1) \leq c_1 j^{k_1-1}$ e $\beta_j(M_2) \leq c_2 j^{k_2-1}$, para $j \gg 0$.

Considere $c = max\{c_1, c_2\}$. Temos, então, que $\beta_j(M_1) \leq cj^{k_1-1}$ e $\beta_j(M_2) \leq cj^{k_2-1}$, para $j \gg 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $k_1 \leq k_2$. Assim, segue que, para $j \gg 0$,

$$\beta_j(M_1 \oplus M_2) = \beta_j(M_1) + \beta_j(M_2) \leq cj^{k_1-1} + cj^{k_2-1} \leq cj^{k_2-1} + cj^{k_2-1} = 2cj^{k_2-1}.$$

Logo, $cx(M_1 \oplus M_2) \leq k_2 = max\{cx(M_1), cx(M_2)\}$.

Vamos supor agora que o resultado é verdadeiro para $t = k$, provaremos que o resultado também é verdadeiro para $t = k+1$. Observemos que $\bigoplus_{i=1}^{k+1} M_i = \left(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i\right) \oplus M_{k+1}$. Pela hipótese de indução, $cx\left(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i\right) = max\{cx(M_i); i = 1, 2, ..., k\}$. Suponhamos que $cx\left(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i\right) = v_1$ e $cx(M_{k+1}) = v_2$. Logo, para $j \gg 0$, existem $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$, tais que $\beta_j\left(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i\right) \leq c_1 j^{v_1-1}$ e $\beta_j(M_{k+1}) \leq c_2 j^{v_2-1}$. Façamos $c = max\{c_1, c_2\}$. Temos, assim, que $\beta_j\left(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i\right) \leq cj^{v_1-1}$ e $\beta_j(M_{k+1}) \leq cj^{v_2-1}$, para $j \gg 0$.

Se $v_1 \leq v_2$, segue que, para $j \gg 0$,

$$\beta_j(\left(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i\right) \oplus M_{k+1}) = \beta_j\left(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i\right) + \beta_j(M_{k+1}) \leq cj^{v_1-1} + cj^{v_2-1} \leq cj^{v_2-1} + cj^{v_2-1} = 2cj^{v_2-1}.$$

Logo, $cx\left(\bigoplus_{i=1}^{k+1} M_i\right) \leq v_2 = max\{cx\left(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i\right), cx(M_{k+1})\} = max\{cx(M_i); i = 1, 2, ..., k+1\}$.

Se $v_2 \leq v_1$, segue que, para $j \gg 0$,

$$\beta_j(\left(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i\right) \oplus M_{k+1}) = \beta_j\left(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i\right) + \beta_j(M_{k+1}) \leq cj^{v_1-1} + cj^{v_2-1} \leq cj^{v_1-1} + cj^{v_1-1} = 2cj^{v_1-1}.$$

Logo, $cx\left(\bigoplus_{i=1}^{k+1} M_i\right) \leq v_1 = max\{cx\left(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i\right), cx(M_{k+1})\} = max\{cx(M_i); i = 1, 2, ..., k+1\}$.

∎

O lema seguinte será necessário na demonstração do lema 3.3.

Lema 3.2 *Seja* $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números reais, tal que existem* $k \in \mathbb{N}$ *e* $c > 0$*, que satisfazem a desigualdade* $\alpha_i \leq ci^k$*, para* $i \gg 0$*. Seja* $\beta_i = \alpha_{i+1}$*. Então,* $\beta_i \leq 2ci^k$*, para* $i \gg 0$*.*

Prova: Como $\beta_i = \alpha_{i+1}$, temos que

$$\beta_i = \alpha_{i+1} \leq c(i+1)^k = ci^k + c\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} i^{k-j}$$

Consideremos $p(i) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} i^{k-j}$ um polinômio em i de grau $k-1$. Assim, $\lim_{i\to\infty} \frac{i^k}{p(i)} = \infty$. Daí, para $i \gg 0$, $p(i) < i^k$, e portanto, $\beta_i = \alpha_{i+1} \leq ci^k + cp(i) \leq 2ci^k$. ∎

O lema 3.3 estabelece uma relação entre as complexidades dos módulos que estão em uma sequência exata curta.

Lema 3.3 *Seja* R *uma álgebra de Artin, e seja* $0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow 0$ *uma sequência exata curta de* R*- módulos. Então, para cada* i*, temos que*

$$cx(A_i) \leq max\{cx(A_j), cx(A_k)\},$$

onde $i, j, k = 1, 2, 3$*.*

Prova: Vamos começar mostrando que $cx(A_1) \leq max\{cx(A_2), cx(A_3)\}$. Podemos assumir que $cx(A_2)$ e $cx(A_3)$ são finitos, pois se assim não fosse, provaríamos a desigualdade acima de maneira trivial. Assim, consideremos $cx(A_2) = k_2$ e $cx(A_3) = k_3$.

Seja S um R-módulo tal que $S = \bigoplus_{i=0}^{t} S_i$, onde $\{S_i; i = 0, 1, ..., t\}$ é um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismos dos R-módulos simples. Pelo lema 1.48, segue que, para $i \gg 0$, existe $c > 0$ tal que

$$\dim Ext^i(A_2, S) \leq ci^{k_2-1}$$
$$\dim Ext^i(A_3, S) \leq ci^{k_3-1}.$$

Suponha que $k = max\{k_2, k_3\}$. Então, temos, para $i \gg 0$,

$$\dim Ext^i(A_2, S) \leq ci^{k-1}$$
$$\dim Ext^i(A_3, S) \leq ci^{k-1}.$$

Considere também a sequência
$0 \longrightarrow \hom(A_3, S) \longrightarrow \hom(A_2, S) \longrightarrow \hom(A_1, S) \longrightarrow Ext^1(A_3, S) \longrightarrow Ext^1(A_2, S) \longrightarrow Ext^1(A_1, S) \longrightarrow \ldots \longrightarrow Ext^{i-1}(A_1, S) \longrightarrow Ext^i(A_3, S) \longrightarrow Ext^i(A_2, S) \longrightarrow Ext^i(A_1, S) \longrightarrow Ext^{i+1}(A_3, S) \longrightarrow \ldots$.

Vamos olhar para os termos da sequência acima como uma sequência $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de acordo com suas posições. Logo, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \hom(A_3, S)$ e assim por diante.

Sabemos, então, pelo lema 3.2, que $\dim Ext^i(A_1, S) \leq 3ci^{k-1}$, uma vez que $\dim Ext^i(A_2, S) \leq ci^{k-1}$, $\alpha_j = Ext^i(A_2, S)$ e $\beta_j = \alpha_{j+1} = Ext^i(A_1, S)$, para algum $j > 0$.

Logo, $cx(A_1) \leq cx(A_2 \oplus A_3) = max\{cx(A_2), cx(A_3)\}$.

Agora, vamos mostrar que $cx(A_2) \leq max\{cx(A_1), cx(A_3)\}$. Podemos assumir que $cx(A_1)$ e $cx(A_3)$ são finitos, pois se assim não fosse, provaríamos a desigualdade acima de maneira trivial. Assim, consideremos $cx(A_1) = k_1$ e $cx(A_3) = k_3$.

Suponhamos que $k = max\{k_1, k_3\}$. Então, para $i \gg 0$, segue que

$$\dim Ext^i(A_1, S) \leq ci^{k-1}$$
$$\dim Ext^i(A_3, S) \leq ci^{k-1}.$$

Pelo lema 3.2, temos que $\dim Ext^i(A_2, S) \leq 2ci^{k-1}$, já que $\dim Ext^i(A_3, S) \leq ci^{k-1}$, $\alpha_{j+1} = Ext^i(A_3, S)$ e $\beta_{j+1} = \alpha_{j+2} = Ext^i(A_2, S)$, para algum $j > 0$. Daí, $cx(A_2) \leq cx(A_1 \oplus A_3) = max\{cx(A_1), cx(A_3)\}$.

Por fim, vamos mostrar que $cx(A_3) \leq max\{cx(A_1), cx(A_2)\}$. Podemos assumir que $cx(A_1)$ e $cx(A_2)$ são finitos, pois se assim não fosse, provaríamos a desigualdade acima de maneira trivial. Assim, consideremos $cx(A_1) = k_1$ e $cx(A_2) = k_2$.

Suponhamos que $k = max\{k_1, k_2\}$. Assim, para $i \gg 0$, segue que $\dim Ext^{i-1}(A_1, S) \leq c(i-1)^{k-1}$. Usando o lema 3.2, obtemos que $\dim Ext^i(A_3, S) \leq 2c(i-1)^{k-1} \leq 2ci^{k-1}$, uma vez que $\dim Ext^i(A_1, S) \leq c(i-1)^{k-1}$, $\alpha_{j-1} = Ext^{i-1}(A_1, S)$ e $\beta_{j-1} = \alpha_j = Ext^i(A_3, S)$, para algum $j > 0$. Logo, $cx(A_3) \leq 2ci^{k-1} = cx(A_1 \oplus A_2) = max\{cx(A_1), cx(A_2)\}$.

■

Corolário 3.4 *Seja R uma álgebra de Artin. Sejam M um R-módulo e $\{S_i; i = 1, ..., t\}$ um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismos dos R-módulos simples. Então, $cx(M) \leq cx\left(\bigoplus_{i=1}^{t} S_i\right) = max\{cx(S_i); i = 1, ..., t\}$.*

Prova: Seja

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow M/S \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de R-módulos, com S um R-módulo simples, o que implica que $S \in \{S_i; i = 1, 2, ..., t\}$. Queremos mostrar que $cx(M) \leq cx\left(\bigoplus_{i=1}^{t} S_i\right) = max\{cx(S_i); i = 1, 2, ..., t\}$. Faremos isso por indução sobre o comprimento de M. Suponhamos, pois, que $c(M) = 1$. Nesse caso, M é um módulo simples, e $cx(M) \leq cx\left(\bigoplus_{i=1}^{t} S_i\right)$.

Suponhamos agora que $cx(A) \leq cx\left(\bigoplus_{i=1}^{t} S_i\right) = max\{cx(S_i); i = 1, 2, ..., t\}$, para todo R-módulo A, tal que $c(A) = k$, e vamos mostrar que essa desigualdade também é verdadeira para módulos com comprimento $k+1$.

Seja, então, M um R-módulo com $c(M) = k+1$. Como S é simples, temos que $c(M/S) = k$. Logo, $cx(M/S) \leq cx\left(\bigoplus_{i=1}^{t} S_i\right) = max\{cx(S_i); i = 1, 2, ..., t\}$. Pelo lema 3.3, $cx(M) \leq max\{cx(M/S), cx(S)\}$.

Vamos supor que $max\{cx(M/S), cx(S)\} = cx(M/S)$, o que implica que $cx(M) \leq cx(M/S)$. Então, $cx(M) \leq cx(M/S) \leq cx\left(\bigoplus_{i=1}^{t} S_i\right)$.

Agora, vamos supor que $max\{cx(M/S), cx(S)\} = cx(S)$, o que implica que $cx(M) \leq cx(S)$. Então, $cx(M) \leq cx(S) \leq cx\left(\bigoplus_{i=1}^{t} S_i\right) = max\{cx(S_i); i = 1, 2, ..., t\}$.

Em ambos os casos, $cx(M) \leq cx\left(\bigoplus_{i=1}^{t} S_i\right) = max\{cx(S_i); i = 1, 2, ..., t\}$, como queríamos demonstrar. ■

Seja R uma álgebra de Artin autoinjetiva. Sabemos que, se $M \in modR$, então $\beta_i(M) = \beta_i(\nu M)$, para todo $n \geq 0$, uma vez que ν é uma equivalência de categorias. Além disso, de acordo com a proposição 1.65, temos que $\tau = \nu\Omega^2$. Assim, para um R-módulo não-projetivo M, $\beta_i(\tau M) = \beta_i(\Omega^2 M)$, para todo $i \geq 0$. Observando a resolução projetiva de M

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\ldots \arrow[r] & P_4 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & & \Omega^2 M \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Omega M \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

temos que

$$\ldots \longrightarrow P_4 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow \Omega^2 M \longrightarrow 0$$

é a resolução projetiva de $\Omega^2 M$. Isso implica que $\beta_0(\Omega^2 M) = \beta_2(M)$, $\beta_1(\Omega^2 M) = \beta_3(M)$, e assim por diante. Ou seja, $\beta_i(\Omega^2 M) = \beta_{i+2}(M)$, para todo $i \geq 0$. Portanto, $\beta_i(\tau M) = \beta_{i+2}(M)$, para todo $i \geq 0$.

Essas observações, juntamente com o lema anterior, nos leva ao seguinte resultado.

Proposição 3.5 *Se R é uma álgebra de Artin autoinjetiva e $\mathcal{C}$ é uma componente do carcás de Auslander-Reiten de R, então os módulos não-projetivos em $\mathcal{C}$ tem a mesma complexidade.*

Prova: Seja M um R-módulo não-projetivo em $\mathcal{C}$. Seja

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma sequência de Auslander-Reiten terminando em M.

Suponha, primeiramente, que $cx(M) = n$. Pela observação anterior, sabemos que $\beta_i(\tau M) = \beta_{i+2}(M)$, para todo $i \geq 0$. Então,

$$\beta_i(\tau M) = \beta_{i+2}(M) \leq c(i+2)^{n-1} = c\left(\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} i^{n-1-p} 2^p\right) = c\left(i^{n-1} + \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n-1}{p} i^{n-1-p} 2^p\right) =$$
$$ci^{n-1} + c\sum_{p=1}^{n-1} \binom{n-1}{p} i^{n-1-p} 2^p$$

para $i \gg 0$, e para algum $c \in \mathbb{Q}$.

Façamos $f(i) = \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n-1}{p} i^{n-1-p} 2^p$. Observe que $f(i)$ é um polinômio de grau $2n-2$. Como $\lim_{i \to \infty} \frac{i^{n-1}}{f(i)} = \infty$, para $i \gg 0$, temos que $i^{n-1} > f(i)$. Logo, para $i \gg 0$,

$$\beta_i(\tau M) \leq ci^{n-1} + cf(i) \leq ci^{n-1} + ci^{n-1} \leq 2ci^{n-1},$$

e daí, $cx(\tau M) \leq n$.

Vamos mostrar, agora, que $cx(\tau M) \nleq n-1$. Faremos isso por contradição. Assim, suponha que $cx(\tau M) \leq n-1$. Então, para $i \gg 0$,

$$\beta_{i+2}(M) = \beta_i(\tau M) \leq ci^{n-2} \leq c(i+2)^{n-2}.$$

O que contradiz a hipótese de $cx(M) = n$. Logo, $cx(\tau M) \nleq n-1$, e, portanto, $cx(\tau M) = n$.

Resta mostrar que se E é um R-módulo não-projetivo, $cx(E) = n$. Suponha, pois, que E é não-projetivo. Pelo lema 3.3, segue que $cx(E) \leq max\{cx(M), cx(\tau M)\}$, o que implica que $cx(E) \leq n$. ■

Podemos observar da proposição acima que, em uma componente regular de um carcás de Auslander-Reiten de uma álgebra autoinjetiva, a complexidade é constante. Em particular, se o conjunto dos números de Betti de um dos módulos na componente for limitado, então o conjunto dos números de Betti de todos os módulos não-projetivos na componente o serão.

Para uma álgebra de Artin autoinjetiva , se

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

é uma sequência de Auslander-Reiten, então existe P um R-módulo indecomponível projetivo tal que

$$0 \longrightarrow \Omega A \longrightarrow \Omega B \oplus P \longrightarrow \Omega C \longrightarrow 0$$

é também uma sequência de Auslander-Reiten.

Em particular, se $f : X \to Y$ é um morfismo irredutível com ambos X e Y não tendo somandos projetivos, e sendo pelo menos um desses módulos indecomponível, então $\Omega f : \Omega X \to \Omega Y$ é também um morfismo irredutível.

Lema 3.6 *Seja R uma álgebra de Artin autoinjetiva. Se*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

é uma sequência de Auslander-Reiten de R-módulos com

$$0 \longrightarrow \Omega A \longrightarrow \Omega B \oplus P \longrightarrow \Omega C \longrightarrow 0$$

uma sequência de Auslander-Reiten, onde P é um R-módulo indecomponível projetivo-injetivo, então $\Omega^2 C$ e τC são R- módulos simples.

Prova: Sabemos, pela proposição 1.57, que se P é um módulo projetivo-injetivo, então a única sequência de Auslander-Reiten na qual P aparece como um somando direto no termo do meio, é da forma

$$0 \longrightarrow JP \longrightarrow P \oplus \frac{JP}{socP} \longrightarrow \frac{P}{socP} \longrightarrow 0.$$

Segue que $\Omega^2 C$ é isomorfo a $socP$, e $\tau C = \nu\Omega^2 C$ é um módulo simples. ■

Apresentaremos agora as definições de morfismos e módulos Ω-perfeitos.

Definição 3.7 *Seja R uma álgebra de Artin autoinjetiva, e seja $f : A \to B$ uma aplicação irredutível, onde A e B são R-módulos indecomponíveis não-projetivos. Dizemos que f é uma* aplicação Ω-perfeita, *se as aplicações induzidas irredutíveis $\Omega^n f : \Omega^n A \to \Omega^n B$ são ou todos monomorfismos, para todo $n \geq 0$, ou todos epimorfismos, para todo $n \geq 0$.*

Definição 3.8 *Seja R uma álgebra de Artin autoinjetiva, e seja C um R-módulo indecomponível não-projetivo. Considere a sequência de Auslander-Reiten terminando em C*

$$0 \longrightarrow \tau C \xrightarrow{(f_1, f_2, \ldots, f_t)^T} E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_t \xrightarrow{(g_1, g_2, \ldots, g_t)} C \longrightarrow 0$$

com cada E_i indecomponível. Dizemos que C é um módulo Ω-perfeito *se*

1. *as aplicações f_i e g_i são Ω-perfeitas, para todo $i = 1, 2, \ldots, t$, e*

2. *para cada $n \geq 0$, $\Omega^n C$ não é um R-módulo simples*

Observemos que, pelo lema 3.6, temos que se C é um módulo Ω-perfeito sobre uma álgebra de Artin autoinjetiva, nenhum somando do termo do meio de uma sequência de Auslander-Reiten terminando em C pode ser projetivo-injetivo. Segue do mesmo argumento, e do fato de τ e Ω comutarem, que para todo $n \geq 0$, o termo do meio de uma sequência de Auslander-Reiten terminando em $\tau^n C$ também não tem um somando projetivo-injetivo. Além disso, $\Omega^n C$ e τ^n são Ω-perfeitos para todo $n \geq 0$, assim como νC.

Proposição 3.9 *Sejam R uma álgebra de Artin autoinjetiva e C um R-módulo indecomponível Ω-perfeito. Consideremos*

$$0 \longrightarrow \tau C \longrightarrow E \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

uma sequência de Auslander-Reiten terminando em C. Então, para cada $n \geq 1$, a sequência

$$0 \longrightarrow \Omega^n \tau C \longrightarrow \Omega^n E \longrightarrow \Omega^n C \longrightarrow 0$$

é também de Auslander-Reiten.

Prova: Como C é Ω-perfeito, $\Omega^n C$ não é simples, para todo $n \geq 0$. Observe que, para $m, n \geq 0$, $\Omega^n \tau^m C$ é simples se, e somente se, $\Omega^{n+2m} C$ é simples, uma vez que ν leva módulo simples em módulo simples. Assim, pelo lema 3.6, o termo do meio da sequência de Auslander-Reiten terminando em $\Omega^n C$ não tem nenhum somando projetivo-injetivo, o que prova o resultado. ■

A proposição 3.10 se aplica a álgebras de Artin arbitrárias.

Proposição 3.10 *Seja R uma álgebra de Artin, e seja* $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *uma sequência exata curta de R-módulos com g irredutível e A não-simples. Então $JA = A \cap JB$, onde J é o radical de Jacobson de R.*

Prova: Como $A \to B$ é um monomorfismo, $JA \subset JB$. Além disso, $JA \subset A$. Assim, $JA \subset A \cap JB$.

Para mostrar a inclusão contrária, o lema 1.43 garante que é suficiente mostrar que, para cada somando direto indecomponível (simples) S de A/JA, $\pi\gamma = 0$, onde $\gamma : A \cap JB \to A$ é a inclusão e $\pi : A \to S$ é a projeção. Ou seja, basta mostrar que $Im\gamma \subset Nuc\pi$.

Seja $i : A \to B$ a inclusão. Como g é irredutível, pelo lema 1.55, ou existe $f : S \to B$ tal que $i = f\pi$, ou existe $h : B \to S$ tal que $\pi = hi$. No entanto, a primeira possibilidade não é possível, pois i é um monomorfismo e π não o é (pois S é simples e A não é simples). Consequentemente,

$$\pi\gamma = hi\gamma = h\beta i'$$

onde $i' : JA \cap B \to JB$ e $\beta : JB \to B$ são as inclusões. Como S é simples, $h\beta = 0$, como queríamos demonstrar. ■

Temos a seguinte consequência desse resultado para álgebras autoinjetivas.

Corolário 3.11 *Seja R uma álgebra de Artin autoinjetiva e seja* $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *uma sequência exata curta de R-módulos com a aplicação g irredutível. Então, a aplicação irredutível induzida $\Omega g : \Omega B \to \Omega C$ é um epimorfismo se, somente se, A não é simples. Se A for simples, então Ωg é um monomorfismo irredutível e existe uma sequência exata induzida*

$$0 \longrightarrow \Omega B \xrightarrow{\Omega g} \Omega C \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

A seguinte definição é bem natural.

Definição 3.12 *Seja R uma álgebra autoinjetiva, e seja C um R-módulo não-projetivo. Dizemos que C é* eventualmente Ω-perfeito, *se $\Omega^n C$ é Ω-perfeito, para algum $n \gg 0$.*

Veremos no próximo resultado que os carcases de Auslander-Reiten de muitas álgebras autoinjetivas têm módulos não-projetivos eventualmente Ω-perfeitos.

Proposição 3.13 *Seja R uma álgebra de Artin autoinjetiva, e seja $\mathcal{C}$ uma componente do carcás de Auslander-Reiten contendo um módulo indecomponível não-projetivo, cuja complexidade é menor que a complexidade de todo R-módulo simples. Então a componente é uma componente regular, e todo módulo em $\mathcal{C}$ é eventualmente Ω-perfeito.*

Prova: Pelo lema 3.3, cada módulo em $\mathcal{C}$ tem complexidade menor que a complexidade de todo R-módulo simples. Se a componente contém um módulo projetivo-injetivo P, então existe uma aplicação irredutível $f : P \to M$, para algum módulo indecomponível M. Isso implica que f é um epimorfismo, e que $Nucf$ é um módulo simples, contradizendo a suposição de que as complexidades de todos os módulos em $\mathcal{C}$ são menores que a complexidade de todo módulo simples.

Suponhamos agora que $g : B \to C$ é um morfismo irredutível com B e C módulos indecomponíveis em $\mathcal{C}$. Suponhamos também que g é um epimorfismo. Então, o argumento anterior também mostra que $Nucg$ não pode ser simples. Pelo corolário 3.11, Ωg é um epimorfismo irredutível, e seu núcleo também não pode ser simples. Repetindo o argumento, concluimos que $\Omega^n g$ é um epimorfismo, para todo $n > 0$. Assim, g é eventualmente Ω-perfeito.

Suponhamos, por fim, que g é um monomorfismo. Ou $\Omega^n g$ é um monomorfismo, para todo $n \geq 0$, ou, para algum $n \geq 0$, $\Omega^n g$ é um epimorfismo irredutível. Mas, a segunda opção não é possível, pois, se fosse, $Nuc\Omega^n g$ seria simples, o que vimos não ser possível.

Logo, em ambos os casos, g é eventualmente Ω-perfeito. Segue, daí, que todo módulo indecomponível em $\mathcal{C}$ é eventualmente Ω-perfeito. ■

Proposição 3.14 *Seja R uma álgebra de Artin autoinjetiva, e seja*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de R-módulos finitamente gerados, onde C é um módulo indecomponível e a aplicação g é irredutível. Suponhamos que ou B é indecomponível e a aplicação g é Ω-perfeita, ou que a sequência é de Auslander-Reiten e C é Ω-perfeito. Então,

1. *A não é simples e B não tem somandos projetivos*

2. *Para todo $n \geq 0$, existe uma sequência exata curta induzida*

$$0 \longrightarrow \Omega^n A \longrightarrow \Omega^n B \xrightarrow{\Omega^n g} \Omega^n C \longrightarrow 0,$$

e a aplicação $\Omega^n g$ é irredutível. Além disso, para cada $n \geq 0$, $\tau^n g$ é um epimorfismo irredutível.

3. *Para cada $n \geq 0$, $\beta_n(B) = \beta_n(A) + \beta_n(C)$.*

Prova: 1. Se

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

é uma sequência de Auslander-Reiten, e C é Ω-perfeito, então, para cada $n \geq 1$,

$$0 \longrightarrow \Omega^n A \longrightarrow \Omega^n B \xrightarrow{\Omega^n g} \Omega^n C \longrightarrow 0$$

é também uma sequência de Auslander-Reiten. Daí, $\Omega^n g$ é um epimorfismo, para todo $n \geq 1$. Em particular, para $n = 1$. Assim, A não é simples pelo corolário 3.11. Além disso, B não tem somandos projetivos. De fato, se B tivesse somandos projetivos, então a sequência

$$0 \longrightarrow \Omega A \longrightarrow \Omega B \oplus P \longrightarrow \Omega C \longrightarrow 0$$

seria de Auslander-Reiten, e, pelo lema 3.6, $\Omega^2 C$ seria simples. Mas, isso não é possível, uma vez que C é Ω-perfeito.

Suponhamos, agora, que g é Ω-perfeito e B é indecomponível. Então, B não tem somandos projetivos, e A não é simples pelo corolário 3.11.

2. Se C é Ω-perfeito e a sequência dada é de Auslander-Reiten, ou se g é Ω-perfeito, temos que

$$0 \longrightarrow \Omega A \longrightarrow \Omega B \xrightarrow{\Omega g} \Omega C \longrightarrow 0$$

é exata com ΩA não simples. Aplicando Ω mais uma vez, obtemos que

$$0 \longrightarrow \Omega^2 A \longrightarrow \Omega^2 B \xrightarrow{\Omega^2 g} \Omega^2 C \longrightarrow 0$$

é ou uma sequência de Auslander-Reiten e $\Omega^2 C$ é Ω-perfeito, se C for Ω-perfeito, ou é uma sequência exata e $\Omega^2 g$ é Ω-perfeito com $\Omega^2 B$ indecomponível, se g for Ω-perfeito. Procedemos por indução, e obtemos, para cada inteiro n, uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \Omega^n A \longrightarrow \Omega^n B \xrightarrow{\Omega^n g} \Omega^n C \longrightarrow 0,$$

onde a aplicação $\Omega^n g$ é irredutível, e $\Omega^n A$ não é simples. Além disso, para cada $n > 0$, temos $J\Omega^n A = \Omega^n A \cap J\Omega^n B$. Para completar a prova, observemos que $\tau = \nu\Omega^2$, e que ν preserva a irredutibilidade das aplicações.

3. Considere o diagrama comutativo, observando que $P(A \oplus B) = P(B) \oplus P$, com P um módulo projetivo.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Omega(A) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega(B) \oplus P \arrow[r, "\Omega g"] \arrow[d] & \Omega(C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P(A) \arrow[r] \arrow[d] & P(A \oplus C) \arrow[r] \arrow[d] & P(C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Mas, pelos itens 1 e 2, $P = 0$, e o resultado está provado.

■

A partir de agora, vamos nos concentrar nas componentes do carcás de Auslander-Reiten das álgebras de Artin autoinjetivas, que contém um módulo de complexidade 1. Nosso intuito será mostrar que sob certas condições $\tau^n C$ é Ω-perfeito.

O próximo resultado trará uma propriedade de carcases finitos, em que há pelo menos uma flecha entre dois vértices distintos. Esse resultado será muito importante para a demonstração da proposição 3.16.

Lema 3.15 *Seja Q um carcás finito que tem n vértices, e suponhamos que existe pelo menos uma flecha entre quaisquer dois vértices em Q. Então, existe um caminho em Q de comprimento maior ou igual a $n - 1$.*

Prova: Suponhamos, sem perda de generalidade, que o máximo dos comprimentos de caminhos em Q é limitado.

Seja

$$\gamma : x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3 \longrightarrow \ldots \longrightarrow x_p$$

um caminho de comprimento maximal. Vamos mostrar que γ é um caminho, que contém todos os vértices de Q, mostrando que se $p < n$, então podemos encontrar um caminho maior.

Suponhamos que $p < n$, e seja U o conjunto dos vértices que não estão em γ. Consideremos u um vértice qualquer em U. Se existe uma flecha de u em x_1, ou uma flecha de x_p em u, então podemos encontrar um caminho mais longo. Assim, vamos supor que toda flecha entre x_1 e u tem u como vértice final. Por hipótese, existe uma flecha entre u e x_2. Se essa flecha for de u em x_2, existe um caminho $\gamma' : x_1 \longrightarrow u \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3 \longrightarrow \ldots \longrightarrow x_p$ de comprimento maior que o comprimento de γ.

Contudo, se tivermos $x_2 \longrightarrow u$, então existe uma flecha entre u e x_3. Se a flecha for de u em x_3, então temos um caminho $\gamma' : x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow u \longrightarrow x_3 \longrightarrow \ldots \longrightarrow x_p$ de comprimento maior que o comprimento de γ. Mas, se tivermos $x_3 \longrightarrow u$, repetimos o raciocínio quanto for necessário. Como o número de vértices é finito, o resultado segue. ■

Como para uma álgebra autoinjetiva, temos que $\tau = \Omega^2\nu$, será útil tratar dos módulos Ω-periódicos. Assim, seja M um módulo indecomponível não-projetivo sobre uma álgebra autoinjetiva R. Dizemos que M é *Ω-periódico*, se $\Omega^m M \simeq M$, para algum $m > 0$.

Proposição 3.16 *Seja R uma álgebra de Artin autoinjetiva, e seja $\mathcal{C}$ uma componente regular do carcás de Auslander-Reiten de R que não é um tubo. Seja $C \in \mathcal{C}$ um módulo de complexidade* 1. *Então, existe um inteiro positivo n, tal que $\tau^n C$ é Ω-perfeito.*

Prova: Aplicando Ω um número finito de vezes se necessário, podemos supor que $\Omega^n C$ não é simples, para todo $n \geq 0$. De fato, se os módulos $\Omega^n C$ são simples para inteiros arbitrariamente grandes, então existiriam dois inteiros positivos i e j, tais que os módulos $\Omega^i C$ e $\Omega^{i+j} C$ são ambos isomorfos a algum simples S. Assim, S é Ω-periódico, com $\Omega^j S \simeq S$, para algum $j > 0$. Como existem somente uma quantidade finita de R-módulos simples não isomorfos, o funtor de Nakayama ν tem ordem finita, quando aplicado a S. Seja k a ordem de ν, onde k é um inteiro positivo. Então, $\nu^k S \simeq S$. Deste modo, $S = \Omega^i C$ é τ-periódico, de algum período n, que divide kj, já que ν e Ω comutam. Assim, temos que $\tau^n \Omega^i C \simeq \Omega^i C$; logo, $\Omega^i \nu^n \Omega^{2n} C \simeq \nu^n \Omega^{2n+i} C \simeq \Omega^i C$, e daí, $C \simeq \tau^n C$, o que implica que, C é τ-periódico. Além disso, a componente tem uma função aditiva (a função comprimento), que não é limitada, pois se fosse, a álgebra seria de tipo representação finita. Logo, esse é um carcás de Riedtmann com uma função aditiva não limitada, e, portanto, é do tipo $\mathbb{Z}A_\infty$, pelo teorema 2.21. Daí, pela proposição 2.18, o carcás é do tipo $\mathbb{Z}A_\infty/\tau^n$, que por definição é um tubo. Como por hipótese $\mathcal{C}$ não é um tubo, obtemos uma contradição. Podemos supor, então, que para cada $n \geq 0$, $\Omega^n C$ não é simples.

Seja

$$0 \longrightarrow \tau C \xrightarrow{(f_1, f_2, \ldots, f_t)^T} E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_t \xrightarrow{(g_1, g_2, \ldots, g_t)} C \longrightarrow 0$$

a sequência de Auslander-Reiten terminando em C, com cada E_i indecomponível. É suficiente mostrar que para cada i, as aplicações irredutíveis f_i e g_i são eventualmente Ω-perfeitas (devido a definição de módulos Ω-perfeitos). Como existem um número finito deles, é suficiente mostrar que se $g : B \to C$ é uma aplicação irredutível com B e C módulos não-projetivos indecomponíveis, então existe um inteiro positivo par n, tal que a aplicação irredutível $\Omega^n g : \Omega^n B \to \Omega^n C$ é Ω-perfeito, quando C tem complexidade 1. Observe que tal n

existe se, e somente se, $\Omega^n g$ é ou um epimorfismo, para $n \gg 0$, ou um monomorfismo, para $n \gg 0$. Suponha que g não é Ω-perfeito. Então, para uma quantidade infinita de inteiros pares positivos j, $\Omega^j g$ são epimorfismos, e $\Omega^{j+1} g$ são monomorfismos. Como vimos no corolário 3.11, a única forma do funtor syzygy levar um epimorfismo irredutível em um monomorfismo irredutível é se o núcleo desse epimorfismo for simples. Logo, temos um número infinito de inteiros positivos $n_1, n_2, ...$, tais que, para cada $i \in \{1, 2, ...\}$, temos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{k_i} \Omega^{n_i} B \xrightarrow{\Omega^{n_i} g} \Omega^{n_i} C \longrightarrow 0 \, ,$$

para algum R-módulo simples S.

Para cada $i \neq j$, temos o seguinte diagrama exato

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S \arrow[r, "k_i"] \arrow[d, equal] & \Omega^{n_i} B \arrow[r, "\Omega^{n_i} g"] & \Omega^{n_i} C \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & S \arrow[r, "k_j"] & \Omega^{n_j} B \arrow[r, "\Omega^{n_j} g"] & \Omega^{n_j} C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e como as aplicações $\Omega^{n_j} g$ e $\Omega^{n_i} g$ são irredutíveis, pelo lema 1.55, existem homomorfismos $f_i^j : \Omega^{n_j} B \to \Omega^{n_i} B$ ou $f_j^i : \Omega^{n_i} B \to \Omega^{n_j} B$, fazendo com que o diagrama esquerdo comute.

Agora, pelo lema 3.15, podemos supor, rearranjando os índices se necessário, que temos uma cadeia arbitrariamente longa de homomorfismos

$$\Omega^{n_1} B \xrightarrow{f_1^2} \Omega^{n_2} B \xrightarrow{f_2^3} \cdots \xrightarrow{f_{m-1}^m} \Omega^{n_m} B \xrightarrow{f_m^{m+1}} \cdots$$

onde, para cada $i \leq j$, $f_i^j k_i = k_j$. A composição $f_m^{m+1} f_{m-1}^m ... f_1^2$ é não-nula, já que compondo-a com k_1, obtemos k_{m+1}.

Como B tem números Betti limitados, existe um limite comum para os comprimentos de todos os seus syzygies, mas acabamos de produzir cadeias arbitrariamente longas de homomorfismos com composições não-nulas entre syzygies (indecomponíveis) de B, e isso não pode acontecer se cada f_{i+1}^i não for um isomorfismo, pela proposição 1.50. Segue que, para algum $i \neq j$, $\Omega^{n_i} B$ é isomorfo a $\Omega^{n_j} B$. Isso significa que B é Ω-periódico.

Mostraremos, agora, que B é também τ-periódico. Isso implicaria que a componente $\mathcal{C}$ é um tubo, pelo argumento usado anteriormante. Teremos, então, uma contradição, e a prova da proposição estará completa. Para mostrar que B é τ-periódico, provaremos que o funtor de Nakayama ν tem ordem finita, quando aplicado a B. Como vimos no início da demonstração, $\nu^k S \simeq S$, para algum inteiro positivo k. Seja n um inteiro positivo, tal que temos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{l} \Omega^n B \xrightarrow{\Omega^n g} \Omega^n C \longrightarrow 0 \, .$$

Mas, ν leva aplicações irredutíveis em aplicações irredutíveis, então, para todos os inteiros múltiplos kt_i e kt_j de k, temos os diagramas exatos induzidos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S \arrow[r] \arrow[d, equal] & \nu^{kt_i} \Omega^n B \arrow[r, "\nu kt_i \Omega^n g"] & \nu^{kt_i} \Omega^{n_i} C \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & S \arrow[r] & \nu^{kt_j} \Omega^n B \arrow[r, "\nu^{kt_j} \Omega^n g"] & \nu^{kt_j} \Omega^n C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Assim, temos, novamente, para cada i e j, homomorfismos h_i^j e h_j^i que fazem o diagrama esquerdo comutar, e obtemos cadeias de homomorfismos de comprimento arbitrário com composições não-nulas entre módulos indecomponíveis de mesmo comprimento que $\nu^{kt_i}\Omega^n B$. Usando a proposição 1.50, o resultado segue. ■

Observe que também provamos que se $B \to C$ é um epimorfismo irredutível entre módulos indecomponíveis sobre uma álgebra autoinjetiva com núcleo simples, então o funtor de Nakayama tem ordem finita sobre B, e, logo, sobre C.

O próximo resultado traz uma propriedade dos módulos Ω-perfeitos de complexidade 1.

Lema 3.17 *Seja R uma álgebra de Artin autoinjetiva, e seja C um módulo Ω-perfeito de complexidade* 1. *Seja*

$$0 \longrightarrow \tau C \xrightarrow{(f_1,f_2,\ldots,f_t)^T} E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_t \xrightarrow{(g_1,g_2,\ldots,g_t)} C \longrightarrow 0$$

uma sequência de Auslander-Reiten terminando em C, com cada E_i indecomponível. Então, para cada $1 \leq i \leq t$, uma das aplicações f_i, g_i é um epimorfismo, e a outra é um monomorfismo.

Prova: Suponhamos que, para algum i, ambos f_i e g_i são epimorfismos (próprios). Então, pela hipótese de que C é Ω-perfeito, para todo $n \geq 0$, $\tau^n f_i$ e $\tau^n g_i$ são epimorfismos. Isso nos leva a uma sequência de epimorfismos próprios

$$\ldots \xrightarrow{\tau^3 f_i \tau^3 g_i} \tau^3 C \xrightarrow{\tau^2 f_i \tau^2 g_i} \tau^2 C \xrightarrow{\tau f_i \tau g_i} \tau C \xrightarrow{f_i g_i} C\,.$$

Como $\tau^n C = \nu^n \Omega^{2n} C$, segue que $\dim \tau^n C = \dim \Omega^{2n} C$. Assim, como $\lim\limits_{n\to\infty} \dim \Omega^{2n} C = \infty$, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dim \tau^n C = \infty$. Mas, isso contradiz a suposição de que a complexidade de C é 1. Logo, ou f_i ou g_i não é um epimorfismo.

Se ambos f_i e g_i são monomorfismos (próprios), para algum i, chegamos em um absurdo de forma análoga, uma vez que C tem comprimento finito. ■

A proposição 3.19 caracteriza o termo do meio de uma sequência de Auslander-Reiten terminando em um módulo Ω-perfeito C, tal que $\beta_n(C) = 1$ para uma quantidade infinita de $n \geq 0$. Antes de enunciarmos e provarmos tal resultado, vamos definir o seguinte.

Definição 3.18 *Seja R uma álgebra de Artin, e seja $0 \longrightarrow \tau C \longrightarrow E \longrightarrow C \longrightarrow 0$ uma sequência de Auslander-Reiten de R-módulos terminando em C. Denotamos por $\alpha(C)$ o número de somandos indecomponíveis de E.*

Proposição 3.19 *Sejam R uma álgebra de Artin autoinjetiva e C um R-módulo indecomponível Ω-perfeito tal que $\beta_n(C) = 1$, para um número infinito de $n \geq 0$. Então $\alpha(C) = 1$*

Prova: Seja

$$0 \longrightarrow \tau C \xrightarrow{(f_1,f_2,\ldots,f_t)^T} E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_t \xrightarrow{(g_1,g_2,\ldots,g_t)} C \longrightarrow 0$$

a sequência de Auslander-Reiten terminando em C, com cada E_i um R-módulo indecomponível, e suponhamos que $t > 1$. Se g_1 é um monomorfismo, então afirmamos que f_1 não pode ser um monomorfismo. Se f_1 fosse um monomorfismo, então $g_1 f_1 : \tau C \to C$ seria um monomorfismo (próprio). Como C é Ω-perfeito, segue que $\tau^n g_1 \tau^n f_1 : \tau^{n+1} C \to \tau^n C$ é um monomorfismo (próprio), para todo $n > 0$. Assim,

$$\ldots \hookrightarrow \tau^n C \hookrightarrow \tau^{n-1} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \tau^2 C \hookrightarrow \tau C \hookrightarrow C.$$

Mas, isso é impossível, uma vez que C tem comprimento finito. Assim, se g_1 é um monomorfismo, f_1 tem que ser um epimorfismo.

Se f_1 é um epimorfismo, então obtemos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow Nucf_1 \longrightarrow \tau C \longrightarrow E_1 \longrightarrow 0.$$

Contudo, como a aplicação $f_1 : \tau C \longrightarrow E_1$ é Ω-perfeita, temos, para cada $i \geq 0$, epimorfismos irredutíveis $\Omega^i f_1 : \Omega^i \tau C \to \Omega^i E_1$. Logo, $\beta_i(Nucf_1) < \beta_i(\tau C)$, para todo $i \geq 0$. Nossa suposição sobre os números Betti implica que, para algum i, $\beta_i(\tau C) = 1$, e isso contradiz a desigualdade anterior.

Suponha, agora, que g_1 é um epimorfismo. Mas, então, a aplicação $(g_1, ..., g_{t-1}) : E_1 \oplus ... \oplus E_{t-1} \to C$ também o é. Isso implica que a aplicação $f_t : \tau C \to E_t$ é também um epimorfismo irredutível, e repetimos o argumento anterior. ■

Capítulo 4

Módulos com Números Betti limitados

Nesse capítulo, trabalharemos somente com módulos, cujos números Betti são limitados. Veremos como se comportam as sequências de Auslander-Reiten que terminam nesses módulos, e caracterizaremos as componentes regulares dos carcases de Auslander-Reiten de álgebras de Artin autoinjetivas, que contém esses módulos.

Seja M um R-módulo com $cx(M) = 1$ e R uma álgebra de Artin autoinjetiva. Lembremos que quando a complexidade de M é igual a 1, existe $b > 0$ tal que, para todo $n \geq 0$, $\beta_n(M) \leq b$. Definamos um importante invariante de M por $\beta(M) = max_{k\geq 0}\{\beta_k(M)\}$. A proposição a seguir trata de algumas das propriedades desse invariante.

Proposição 4.1 *Sejam R uma álgebra de Artin autoinjetiva e M um R-módulo não-projetivo com números Betti limitados. Então, temos o seguinte:*

1. $\beta(\Omega^i M) \leq \beta(M)$, *para todo* $i \geq 0$.
2. $\beta(\tau^n M) \leq \beta(M)$, *para todo* $n \geq 0$.
3. *O comprimento de M é limitado por $\beta(M)c(R)$, onde $c(R)$ denota o comprimento de R.*

Prova:

1. Seja

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{i+1} \arrow[r] \arrow[dr] & P_i \arrow[r] \arrow[dr] & P_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[dr] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & \Omega^{i+1}(M) \arrow[u, hook] & \Omega^i(M) \arrow[u, hook] & & & \Omega(M) \arrow[u, hook] & &
\end{tikzcd}$$

uma resolução projetiva minimal do R-módulo não-projetivo M. Como M não é projetivo, segue que a dimensão projetiva de M é infinita. Assim, temos que

$$\cdots \longrightarrow P_{i+1} \longrightarrow P_i \longrightarrow \Omega^i(M) \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva minimal de $\Omega^i(M)$, para $i \geq 0$. Se uma decomposição em somas diretas de um (ou mais) dos módulos $P_0, P_1, \ldots, P_{i-1}$ tem mais somandos que uma decomposição similar de qualquer um dos módulos $P_i, P_{i+1}, \ldots$, temos que $\beta(\Omega^i M) < \beta(M)$. Se não, $\beta(\Omega^i M) = \beta(M)$. Logo, $\beta(\Omega^i M) \leq \beta(M)$.

2. De *1*, sabemos que $\beta(\Omega^i M) \leq \beta(M)$, para todo $i \geq 0$. Além disso, $\beta_i(\nu M) = \beta_i(M)$, e, logo, $\beta(\nu M) = \beta(M)$. O resultado segue do fato de $\tau = \nu\Omega^2$.

3. Seja $\{e_1, e_2, ..., e_t\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais e primitivos de R. Vamos mostrar primeiramente que $c(\Omega^i M) \leq d.\beta_i(M)$, para todo $i \geq 0$, onde $d = max\{c(Re_j), j = 1, 2, ..., t\}$.

   Para isso, vamos supor a princípio que M é projetivo. Então, $\Omega^i(M) = 0$ e $\beta_i(M) = 0$, para todo $i \geq 1$. E daí, a desigualdade é verdadeira para $i \geq 1$. Agora, se $i = 0$, temos que $P_0 = M$, e assim $c(\Omega^0 M) = c(M) \leq d.\beta_0(M)$.

   Agora, suponhamos que M não é projetivo. Considerando a resolução projetiva minimal de M

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{i+1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_i \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0, \\
& & \Omega^{i+1}(M) \arrow[ur, hook] & & \Omega^i(M) \arrow[ur, hook] & & & & \Omega(M) \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}
$$

   obtemos que $c(\Omega^{i+1}M) + c(\Omega^i M) = c(P_i)$, para $i \geq 0$. Então, como $c(\Omega^{i+1}M) \neq 0$, segue que $c(\Omega^i M) < c(P_i) \leq d.\beta_i(M)$.

   Finalmente, da resolução projetiva minimal de M, temos que $c(\Omega M) + c(M) = c(P_0)$. Como $\Omega M \neq 0$, temos que

$$c(M) < c(P_0) \leq d.\beta_0(M) \leq d.\beta(M) \leq c(R)\beta(M).$$

■

Agora, seja $\mathcal{C}$ um tubo estável ou uma $\mathbb{Z}A_\infty$-componente regular. Vamos supor também que $\mathcal{C}$ não contém nenhum R-módulo simples. Consideremos M um R-módulo indecomponível e $g : L \to M$ um epimorfismo irredutível ambos em $\mathcal{C}$, com L indecomponível. Já que g é um epimorfismo irredutível nessa componente e L é indecomponível, seu núcleo está sobre a borda da componente e, logo, não é simples. Como cada aplicação irredutível induzida τg, e, por conseguinte, $\Omega^2 g$, é também um epimorfismo, vemos que g é Ω-perfeito. Afirmamos que todo módulo em tal componente é Ω-perfeito. De fato, sejam A um módulo indecomponível e

$$0 \longrightarrow \tau A \xrightarrow{(f_1, f_2, ..., f_t)^T} E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_t \xrightarrow{(g_1, g_2, ..., g_t)} A \longrightarrow 0$$

uma sequência de Auslander-Reiten, com cada E_i indecomponível, na componente $\mathcal{C}$. Como a componente não tem módulos simples, segue que, para todo $n \geq 0$, $\Omega^n A$ não é simples. Provaremos que g_i é uma aplicação Ω-perfeita. Faremos isso por contradição. Vamos supor, então, que g_i não é Ω-perfeito. Assim, existe uma quantidade infinita de inteiros positivos j, tais que $\Omega^j g_i$ são epimorfismos e $\Omega^{j+1} g_i$ são monomorfismos. Mas, pelo corolário 3.11, isso só aconteceria se o núcleo da aplicação $\Omega^j g_i$ fosse simples. Contudo, a componente $\mathcal{C}$ não contém módulos simples. Portanto, g_i é um morfismo Ω-perfeito.

Analogamente, provamos que f_i é Ω-perfeito. Logo, pela definição 3.8, A é um módulo Ω-perfeito.

A próxima proposição trata do número de R-módulos indecomponíveis, sobre R uma álgebra autoinjetiva, em uma dada sequência de Auslander-Reiten.

Proposição 4.2 *Seja R uma álgebra de Artin autoinjetiva, e seja C um módulo indecomponível com complexidade 1, que se encontra em uma componente regular $\mathcal{C}$ do carcás de Auslander-Reiten, e tal que $\beta(C)$ é minimal entre os números de Betti dos módulos em $\mathcal{C}$. Suponhamos também que ou $\mathcal{C}$ não é um tubo estável, ou, que se é um tubo estável, não contém módulos simples. Então, $\alpha(C) = 1$.*

Prova: Sem perda de generalidade, podemos supor, pela proposição 3.16 e pelas observações anteriores, que C é um módulo Ω-perfeito. Como $\beta(\tau^n C) \leq \beta(C)$, e como $\beta(C)$ é minimal, temos que $\beta(\tau^n C) = \beta(C)$, para todo $n \geq 0$. Seja

$$0 \longrightarrow \tau C \xrightarrow{(f_1,f_2,\ldots,f_t)^T} E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_t \xrightarrow{(g_1,g_2,\ldots,g_t)} C \longrightarrow 0$$

uma sequência de Auslander-Reiten terminando em C, com cada E_i um R-módulo indecomponível, e suponha que $t > 1$.

Suponhamos que a aplicação f_t é um epimorfismo. Temos, então, a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow Nucf_t \longrightarrow \tau C \xrightarrow{f_t} E_t \longrightarrow 0$$

Mas, como a aplicação $f_t : \tau C \to E_t$ é Ω-perfeita, temos, para cada $i \geq 0$, epimorfismos irredutíveis $\Omega^i \tau C \to \Omega^i E_1$. Logo, $\beta_i(Nucf_t) < \beta_i(\tau C)$, para todo $i \geq 0$.

Pela minimalidade de $\beta(C)$, temos que $\beta(\tau C) = \beta(C)$. assim, obtemos uma contradição à minimalidade de $\beta(C)$ na sua componente, e concluímos que $t = 1$. ■

Seja

$$0 \longrightarrow \tau C \xrightarrow{(f_1,f_2,\ldots,f_t)^T} E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_t \xrightarrow{(g_1,g_2,\ldots,g_t)} C \longrightarrow 0$$

uma sequência de Auslander-Reiten terminando em C um módulo Ω-perfeito de complexidade 1. Nosso objetivo agora será estudar o comportamento das aplicações g_i's na sequência acima. Isso será feito na proposição 4.9. Para chegarmos a tal resultado, estudaremos antes as cadeias de aplicações irredutíveis entre módulos indecomponíveis com composição não-nula.

Proposição 4.3 *Sejam X e C módulos indecomponíveis e $f : X \to C$ uma aplicação não nula, que não é um isomorfismo. Então, ou*

1. *existe uma cadeia finita de aplicações irredutíveis entre módulos indecomponíveis $X \to \ldots \to C$ com composição não nula, ou*

2. *existem cadeias de aplicações irredutíveis $Y \to \ldots \to C$ entre módulos indecomponíveis, com composição não nula, de comprimento arbitrário.*

Prova: Seja $g : B_1 \oplus \ldots \oplus B_t \to C$ uma aplicação poço, onde os B_i são indecomponíveis. Como $f : X \to C$ não é um isomorfismo, existe algum $s : X \to B_1 \oplus \ldots \oplus B_t$ com $gs = f$ (uma vez que g é uma aplicação que quase cinde à direita). Então, $g_i s \neq 0$ para algum i, onde sabemos que $g_i : B_i \to C$ é irredutível. Escolhemos essa aplicação como nossa primeira aplicação. Se $s : X \to B_i$ é um isomorfismo, temos o primeiro caso. Caso contrário, continuamos como antes, para conseguir a conclusão desejada. ■

O lema seguinte é uma aplicação da proposição anterior e da proposição 1.50.

Lema 4.4 *Sejam R uma álgebra de Artin e $\mathcal{C}$ uma componente conexa do carcás de Auslander-Reiten de R. Consideremos $M \in \mathcal{C}$, e suponhamos que existe b tal que todo antecessor de M em $\mathcal{C}$ tem comprimento limitado por b. Então, se X é um R-módulo indecomponível tal que* $\hom_R(X, M) \neq 0$, *$X \in \mathcal{C}$ e X é um antecessor de M.*

Prova: Seja X um R-módulo indecomponível, não isomorfo a M, tal que $\hom_R(X, M) \neq 0$. Pela proposição 4.3, ou temos uma cadeia de aplicações irredutíveis com composição não-nula de X em M passando pelos módulos indecomponíveis, ou existem cadeias arbitrariamente longas de aplicações irredutíveis, que passam, pelos módulos indecomponíveis, com composição não-nula terminando em M. O segundo caso não pode ocorrer pela proposição 1.50, já que os antecessores de M têm comprimento limitado por b. Logo, obtemos uma cadeia finita de aplicações irredutíveis começando em X e terminando em M, cuja composição é não-nula. ■

Observemos o seguinte lema, que trata da relação dos números Betti dos módulos de uma sequência de Auslander-Reiten sob determinadas condições.

Lema 4.5 *Sejam R uma álgebra de Artin autoinjetiva e C um módulo Ω-perfeito indecomponível de complexidade* 1. *Consideremos*

$$0 \longrightarrow \tau C \longrightarrow E_1 \oplus \ldots \oplus E_t \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

uma sequência de Auslander-Reiten terminando em C. Suponhamos que $\beta_i(E_1) > \beta_i(C)$, para todo $i \geq 0$. Então, para todo $i \geq 0$ e $j \geq 2$, $\beta_i(\tau C) > \beta_i(E_j)$. Em particular, temos que $\beta(\tau C) > \beta(E_j)$, para todo $j \geq 2$.

Prova: Pela proposição 3.14, temos que

$$\beta_i(\tau C) + \beta_i(C) = \beta_i(E_1) + \sum_{j=2}^{t} \beta_i(E_j) \Longrightarrow \beta_i(\tau C) = (\beta_i(E_i) - \beta_i(C)) + \sum_{j=2}^{t} \beta_i(E_j)\ .$$

Segue que $\beta_i(\tau C) > \sum_{j=2}^{t} \beta_i(E_j) \geq \beta_i(E_j)$, para todo $j \geq 2$, uma vez que $\beta_i(E_i) - \beta_i(C) > 0$. ■

Enunciaremos a seguir a definição de caminho entre módulos indecomponíveis.

Definição 4.6 *Seja R uma álgebra de Artin. Sejam também M e N R-módulos indecomponíveis. Um* caminho entre M e N *em mod$R$ é uma sequência de morfismos*

$$M \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{t-1}} M_{t-1} \xrightarrow{f_t} N$$

entre módulos indecomponíveis, onde $t \geq 1$ e, para cada $i \in \{1, 2, ..., t\}$, f_i é não-nulo e não é um isomorfismo.

A seguinte definição será usada na demonstração do lema que segue a ela.

Definição 4.7 *Seja R uma álgebra de Artin. Seja C um R-módulo em ind$R$. Então, uma* τ-órbita *de C é a coleção dos módulos indecomponíveis em $\{\tau^i C\}_{i\in\mathbb{Z}}$.*

Lema 4.8 *Sejam R uma álgebra de Artin autoinjetiva e C um R-módulo Ω-perfeito de complexidade 1. Seja ainda*

$$E^k \longrightarrow E^{k-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow E^1 \longrightarrow C,$$

um caminho, onde cada E^i é um módulo indecomponível. Então, $\beta(E^k) \leq \beta(C)$.

Prova: Suponhamos que $E^k \longrightarrow E^{k-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow E^1 \longrightarrow C$ seja um caminho, onde $k \geq 1$, e façamos $E^0 = C$. Vamos supor que os módulos indecomponíveis E^i, com $i = 1, 2, ..., k$, estão na mesma τ-órbita. Então, não há nada a fazer, uma vez que $\beta(\tau M) \leq \beta(M)$, para todo M R-módulo de complexidade 1.

Vamos supor agora que cada E^i está em τ-órbitas diferentes. Sabemos que $E^1 = E_j$, para algum $j = 1, 2, ..., t$. Consideremos as sequências de Auslander-Reiten terminando em E^j

$$0 \longrightarrow \tau E^j \longrightarrow E^{j+1} \oplus \tau E^{j-1} \oplus L_j \longrightarrow E^j \longrightarrow 0$$

onde L_j pode se decompor. Como f_j é um epimorfismo irredutível Ω-perfeito, temos que, para cada i, $\beta_i(\tau C) > \beta_i(E^1)$ (pela proposição 3.14). Logo, obtemos as seguintes desigualdades

$$\beta(E^1) < \beta(\tau C) \leq \beta(C).$$

Assim, se $k = 1$, o resultado já está provado. Mas, o fato de f_j ser um epimorfismo irredutível Ω-perfeito também implica que também o é o epimorfismo irredutível $\tau E^1 \to E^2$.

Por indução, segue que cada aplicação $\tau E^j \to \tau E^{j+1}$ é um epimorfismo irredutível Ω-perfeito. Logo, obtemos, por 3.14, que $\beta_i(E^{j+1}) < \beta_i(\tau E^j)$, para cada i. Segue, também por indução, que

$$\beta(E^k) < \beta(\tau E^{k-1}) \leq \beta(E^{k-1}) < \ldots < \beta(E^1) < \beta(C),$$

como queríamos demonstrar. ■

Podemos provar agora a proposição 4.9, citada anteriormente.

Proposição 4.9 *Sejam R uma álgebra de Artin autoinjetiva e C um módulo Ω-perfeito de complexidade 1, pertencente a uma componente regular do carcás de Auslander-Reiten. Consideremos*

$$0 \longrightarrow \tau C \xrightarrow{(f_1, f_2, \ldots, f_t)^T} E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_t \xrightarrow{(g_1, g_2, \ldots, g_t)} C \longrightarrow 0$$

a sequência de Auslander-Reiten terminando em C. Então, precisamente uma das aplicações g_i é um epimorfismo e todas as outras são monomorfismos.

Prova: Suponhamos que duas das aplicações g_i são epimorfismos, por exemplo g_1 e g_2. Então, também o é a aplicação $(g_2, ..., g_t)$, e, assim, a aplicação f_1 é também um epimorfismo, contradizendo o lema 3.17.

Agora, suponhamos que todas as aplicações g_i são monomorfismos. Então, novamente pelo lema 3.17, todas as aplicações f_i são epimorfismos irredutíveis. Mostraremos que se isso acontece, todos os antecessores de C em sua componente de Auslander-Reiten tem comprimento limitado por $\beta(C)c(R)$. Pelo lema 4.4, isso implicaria que nossa componente contém um R-módulo projetivo, por exemplo a cobertura projetiva de qualquer fator de composição de C, levando a uma contradição, e provando, pois, nossa proposição. Notemos que é suficiente mostrar que se X é um antecessor de C, então $\beta(X) \leq \beta(C)$. Também sabemos que se M é um R-módulo indecomponível de complexidade 1, então $\beta(\tau^k M) \leq \beta(M)$, para todo inteiro não-negativo k. Considerando esse fato, é suficiente provar que se temos um caminho

$$E^k \longrightarrow E^{k-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow E^1 \longrightarrow C,$$

onde cada módulo está em uma τ-órbita diferente, então $\beta(E^k) \leq \beta(C)$, o que já foi provado no lema anterior. Logo, a prova está completa. ■

Consideremos uma sequência de Auslander-Reiten pertencente a uma componente regular, e que termina com um módulo de complexidade 1. Vamos estabelecer, agora, um limite para os somando indecomponíveis do termo do meio dessa sequência.

Teorema 4.10 *Seja R uma álgebra de Artin autoinjetiva, e seja M um R-módulo indecomponível de complexidade* 1*, pertencente a uma componente regular. Então, $\alpha(M) \leq 2$.*

Prova: Se o módulo M é τ-periódico, o resultado segue de 2.21. Então, sem perda de generalidade, podemos supor que a componente, que contém M não é um tubo. Tomando potências suficientes do transladado de Auslander-Reiten τ, podemos supor que o módulo M é Ω-perfeito (proposição 3.16). Consideremos

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus L \longrightarrow M \longrightarrow 0\,,$$

a sequência de Auslander-Reiten terminando em M, onde cada E_i é indecomponível, e L é possivelmente nulo. Aplicando a proposição 4.9, podemos supor que a aplicação irredutível $g_1 : E_1 \to M$ é um epimorfismo.

Aplicando τ na sequência acima, obtemos outra sequência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow \tau^2 M \longrightarrow \tau E_1 \oplus \tau E_2 \oplus \tau E_3 \oplus \tau L \longrightarrow \tau M \longrightarrow 0\,.$$

Como M é Ω-perfeito, $\tau E_1 \to \tau M$ é, novamente, um epimorfismo irredutível.

Agora, consideremos as sequências de Auslander-Reiten terminando em E_2 e E_3

$$0 \longrightarrow \tau E_2 \longrightarrow \tau M \oplus C \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow \tau E_3 \longrightarrow \tau M \oplus D \longrightarrow E_3 \longrightarrow 0\,,$$

onde C e D não são, necessariamente, R-módulos indecomponíveis. Computando os comprimentos sobre as duas primeiras sequências de Auslander-Reiten, obtemos a seguinte igualdade

$$\sum_{i=1}^{3}(c(E_i)+c(\tau E_i))+c(L)+c(\tau L)=c(\tau^2 M)+2c(\tau M)+c(M).$$

Computando os comprimentos sobre as outras duas sequências de Auslander-Reiten, obtemos a seguinte igualdade

$$2c(\tau M)+c(C)+c(D)=c(E_2)+c(E_3)+c(\tau E_2)+c(\tau E_3).$$

Somando essas duas igualdades, e cancelando termos quando possível, temos que

$$c(E_1)+c(\tau E_1)+c(L)+c(\tau L)+c(C)+c(D)=c(\tau^2 M)+c(M).$$

Dessa igualdade, concluímos que

$$c(E_1)+c(\tau E_1)\leq c(\tau^2 M)+c(M).$$

Relembrando que $E_1 \to M$ e $\tau E_1 \to \tau M$ são epimorfismos irredutíveis Ω-perfeitos, vemos que $c(M)+c(\tau M) < c(\tau^2 M)+c(M)$. Como $E_1 \to M$ e $\tau E_1 \to \tau M$ são epimorfismos irredutíveis Ω-perfeitos, segue que $c(M) < c(E_1)$ e $c(\tau M) < c(\tau E_1)$. Assim, $c(M)+c(\tau M) < c(E_1)+c(\tau E_1) \leq c(\tau^2 M)+c(M)$, e, portanto, $c(\tau M) < c(\tau^2 M)$.

Trocando M por $\tau^i M$, o argumento acima mostra que é possível obtermos uma sequência de desigualdades estritas

$$c(\tau M) < c(\tau^2 M) < c(\tau^3 M) < \ldots.$$

Mas, $c(\tau^i M) \leq \beta(M)c(R)$, para cada i, o que nos faz chegar em uma contradição, provando o resultado. ■

O teorema seguinte caracteriza as componentes regulares dos carcases de Auslander-Reiten de uma álgebra de Artin autoinjetiva, que contém um módulo de complexidade 1.

Teorema 4.11 *Sejam R uma álgebra de Artin autoinjetiva e $\mathcal{C}$ uma componente regular do carcás de Auslander-Reiten, que contém um módulo de complexidade* 1*. Então, $\mathcal{C}$ é um tubo estável ou uma componente do tipo $\mathbb{Z}A_\infty$.*

Prova: Se a componente contém um módulo τ-periódico, o resultado já está provado pelo teorema 2.21. Então, vamos supor que não existam módulos τ-periódicos em $\mathcal{C}$. Pelo teorema 4.10, sabemos que se $C \in \mathcal{C}$, então $\alpha(C) \leq 2$. Além disso, inferimos da proposição 4.9, que se o termo do meio de uma sequência de Auslander-Reiten terminando em C tem dois somandos indecomponíveis, então uma das aplicações irredutíveis terminando em C é um epimorfismo, e a outra é um monomorfismo. Pela proposição 4.2, existe algum $M \in \mathcal{C}$ com $\alpha(M)=1$, e tal módulo tem que estar na borda de $\mathcal{C}$. O resultado segue dessas observações. ■

Corolário 4.12 *Seja R uma álgebra de Artin autoinjetiva, e seja C um R-módulo indecomponível pertencente a uma componente regular. Além disso, suponhamos que os números Betti de C são eventualmente iguais a* 1*. Então, $\alpha(C)=1$.*

Prova: Podemos assumir que C é Ω-perfeito e que $\beta(C)=1$. Assim, $\beta(C)$ é minimal na classe dos módulos, que tem números Betti limitados. O resultado segue imediatamente. ■

Capítulo 5

Módulos com Números Betti eventualmente constantes

Estaremos interessados, nesse capítulo, em módulos com números Betti eventualmente constantes pertencentes a um carcás de Auslander-Reiten de uma álgebra de Artin autoinjetiva. Usando a noção de quasi-comprimento, mostraremos que uma componente $\mathcal{C}$ do carcás de Auslander-Reiten, que contém módulos, cujos números Betti são eventualmente constantes, deve ser um tubo estável ou do tipo $\mathbb{Z}A_\infty$.

Assim, começaremos definindo o quasi-comprimento de módulos para as componentes de tipo $\mathbb{Z}A_\infty$ e $\mathbb{Z}A_\infty/<\tau^n>$, ou seja, um tubo estável. Consideremos, então, o diagrama A_∞ enumerado da seguinte forma

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow \quad \dots \quad \longrightarrow n-1 \longrightarrow n \longrightarrow n+1 \longrightarrow \quad \dots$$

Vamos ilustrar uma parte da componente $\mathbb{Z}A_\infty$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & (-3,4) \arrow[dr] & & (-2,4) \arrow[dr] & & (-1,4) \arrow[dr] & & (0,4) \arrow[dr] & & (1,4) \arrow[dr] & \\
\dots \arrow[ur] \arrow[dr] & & (-2,3) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (-1,3) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (0,3) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (1,3) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \dots \\
 & (-2,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (-1,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (0,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (1,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (2,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 {} \arrow[ur] & & (-1,1) \arrow[ur] & & (0,1) \arrow[ur] & & (1,1) \arrow[ur] & & (2,1) \arrow[ur] & & {}
\end{tikzcd}$$

Observemos que os vértices de $\mathbb{Z}A_\infty$ são da forma (z,i), com $z \in \mathbb{Z}$ e $i \in \mathbb{N}$; e os vértices de $\mathbb{Z}A_\infty/<\tau^n>$ são da forma $(\bar{z},i)$, com $\bar{z} \in \mathbb{Z}/(n)$ e $i \in \mathbb{N}$. Então, dizemos que o elemento (z,i) numa componente de tipo $\mathbb{Z}A_\infty$, ou $(\bar{z},i)$ numa componente de tipo $\mathbb{Z}A_\infty/<\tau^n>$ tem *quasi-comprimento* i. Denotamos o quasi-comprimento de um módulo M por $ql(M)$. Segue que todos os módulos na mesma τ-órbita tem quasi-comprimentos iguais. Além disso, os módulos em uma componente de tipo $\mathbb{Z}A_\infty$ ou $\mathbb{Z}A_\infty/<\tau^n>$ de quasi-comprimento 1 estão sobre a borda da componente.

O primeiro resultado estuda uma componente, na qual existe um módulo sobre a borda, cujos números Betti são eventualmente constantes.

Proposição 5.1 *Sejam R uma álgebra de Artin autoinjetiva e $\mathcal{C}$ uma componente regular do carcás de Auslander-Reiten de R, que contém um módulo M, cujos números Betti são eventualmente iguais a b. Além disso, suponhamos que $\alpha(M) = 1$, e que se $\mathcal{C}$ for um tubo estável, não possui nenhum R-módulo simples. Então, todo módulo B em $\mathcal{C}$ tem números Betti eventualmente constantes iguais a $ql(B)b$, onde $ql(B)$ denota o quasi-comprimento de B.*

Prova: Como os números Betti de M são eventualmente constantes, temos que $cx(M) = 1$. Logo, $\mathcal{C}$ é ou um tubo estável ou do tipo $\mathbb{Z}A_\infty$, pelo teorema 4.11. Sem perda de generalidade, podemos também supor que M é Ω-perfeito. Consideremos a seguinte porção de $\mathcal{C}$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \cdots & {[B_4]} \arrow[dr] & & {[\tau^{-1}B_4]} \arrow[dr] & & \\
 & \cdots & {[\tau B_3]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[B_3]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[\tau^{-1}B_3]} \arrow[dr] & \\
 & {[\tau^2 B_2]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[\tau B_2]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[B_2]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[\tau^{-1}B_2]} \\
 & \cdots & {[\tau^2 M]} \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & {[\tau M]} \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & {[M]} \arrow[ur] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Usaremos indução sobre o quasi-comprimento n dos R-módulos B_n da componente $\mathcal{C}$. Consideremos $n = 2$ e $B_1 = M$. Como

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow B_2 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

é a sequência de Auslander-Reiten terminando em M, temos que

$$\beta_i(B_2) = \beta_i(M) + \beta_i(\tau M),$$

para todo i, pela proposição 3.14. Segue que os números Betti de B_2 são eventualmente iguais a $2b$. Assim, como os números Betti de todos os módulos que pertencem a mesma τ-órbita de B_2.

Seja $n \geq 3$, e suponhamos que já mostramos que B_i, assim como todos os módulos em sua τ-órbita, tem números Betti eventualmente iguais a ib, para $i = 2, \dots, n-1$. Vamos mostrar que o resultado também vale para $i = n$. Como $\mathcal{C}$ é uma componente do tipo $\mathbb{Z}A_\infty$ ou um tubo estável, temos que a sequência de Auslander-Reiten terminando em B_{n-1} é

$$0 \longrightarrow \tau B_{n-1} \longrightarrow B_n \oplus \tau B_{n-2} \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0\,.$$

Observe que B_{n-1} e τB_{n-1} têm números Betti eventualmente iguais a $(n-1)b$, e τB_{n-2} tem números Betti eventualmente iguais a $(n-2)b$. Assim, usando a proposição 3.14, segue que

$$\begin{gathered}
\beta_i(B_n) + \beta_i(\tau B_{n-2}) = \beta_i(\tau B_{n-1}) + \beta_i(B_{n-1}) \Leftrightarrow \\
\beta_i(B_n) + (n-2)b = (n-1)b + (n-1)b \Leftrightarrow \\
\beta_i(B_n) + nb - 2b = 2nb - 2b \Leftrightarrow \\
\beta_i(B_n) = 2nb - nb \Leftrightarrow \\
\beta_i(B_n) = nb
\end{gathered}$$

para $i \gg 0$. Logo, B_n (e todos os módulos que pertencem a mesma τ-órbita de B_n) tem números Betti eventualmente iguais a nb, e a prova está completa. ■

A proposição acima mostra que se $\beta(M)$ é minimal em sua componente de Auslander-Reiten e que se, além disso, M tem números Betti eventualmente constantes, então todo módulo na componente de M tem números Betti constantes. Note que a minimalidade de $\beta(M)$ é equivalente a M estar na borda da componente, ou seja $\alpha(M) = 1$, já que o quasi-comprimento dos módulos sobre a borda é igual a 1.

Proposição 5.2 *Seja R uma álgebra de Artin autoinjetiva. Sejam também M, N R-módulos indecomponíveis, cujos números Betti são eventualmente constantes. Suponhamos que M está em uma componente regular $\mathcal{C}$ do carcás de Auslander-Reiten de R que, se for um tubo, não contém módulos simples. Se existe um homomorfismo irredutível $M \to N$, então todo módulo em $\mathcal{C}$ tem números Betti eventualmente constantes.*

Prova: Como os módulos M, N têm números Betti eventualmente constantes, ambos têm complexidade 1. Logo, aplicando τ um número suficiente de vezes, a proposição 3.16 nos deixa supor que M e N são Ω-perfeitos. Também observamos que

$$0 \longrightarrow \tau N \longrightarrow M \oplus M' \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

é a sequência de Auslander-Reiten terminando em N, com M' indecomponível. Como, pela proposição 3.14(3), temos a igualdade $\beta_n(M') = \beta_n(N) + \beta_n(\tau N) - \beta_n(M)$, segue que M' tem números Betti eventualmente constantes. Agora, seja X um R-módulo na componente. Então, $\tau^i X$ está sobre um caminho seccional terminando em N, ou em M, para algum $i \in \mathbb{Z}$. O resultado segue, agora, da aplicação repetida da proposição 3.14(3). ■

Sejam R uma álgebra de Artin autoinjetiva e M um R-módulo finitamente gerado. Dizemos que M tem números Betti *periódicos*, se existe algum inteiro positivo n, tal que $\beta_i(M) = \beta_{i+n}(M)$, para todo $i \geq 0$. Podemos dizer também que M tem números Betti *eventualmente períodicos*, se existem inteiros positivos n e k, tais que $\beta_i(M) = \beta_{i+n}(M)$, para todo $i \geq k$.

Precisaremos também da seguinte definição.

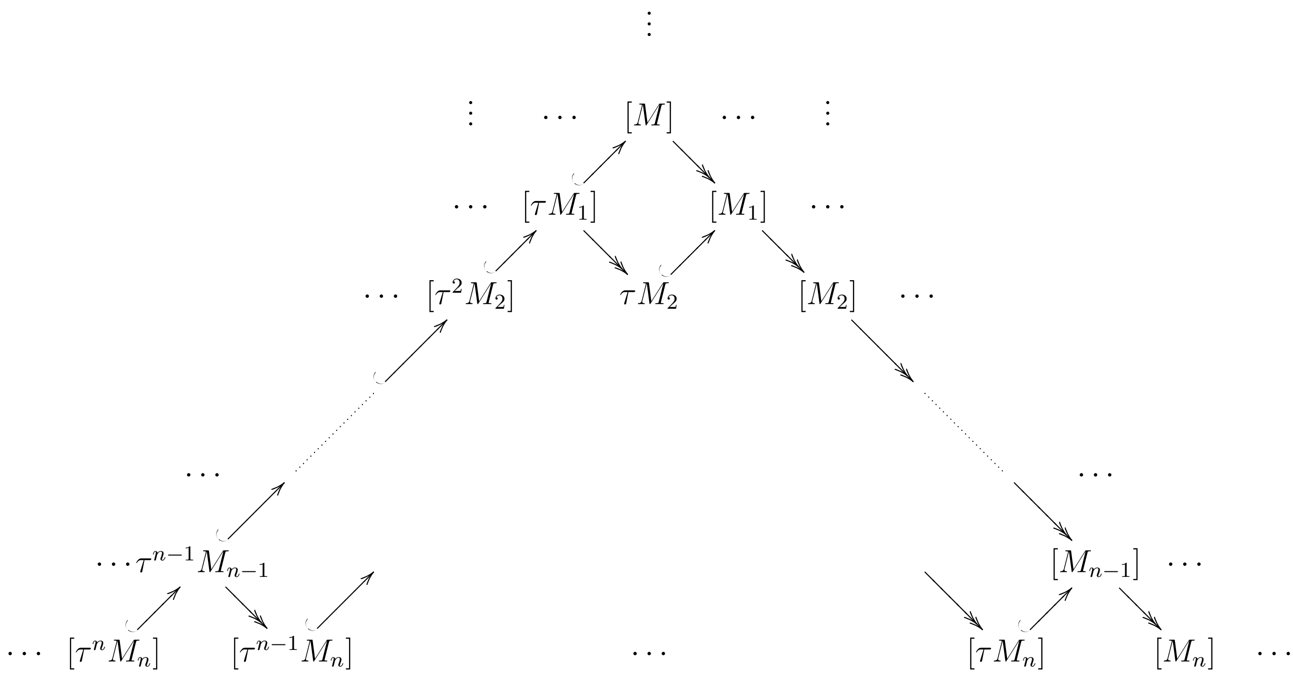
Definição 5.3 *Seja $A(R)$ o carcás de Auslander-Reiten da álgebra de Artin R. Um caminho $M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_t$ é chamado* seccional*, se, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, temos que $\tau M_{i+2} \not\cong M_i$.*

Agora, podemos provar o seguinte resultado.

Proposição 5.4 *Sejam R uma álgebra de Artin autoinjetiva e M um R-módulo indecomponível com números Betti eventualmente constantes, que pertencem a uma componente regular $\mathcal{C}$ do carcás de Auslander-Reiten de R, que se for um tubo, não contém módulos simples. Então, todo módulo em $\mathcal{C}$ tem números Betti eventualmente periódicos. Além disso, o período eventual dos números Betti de um módulo em $\mathcal{C}$ divide $2ql(M)$.*

Prova: Sem perda de generalidade, podemos supor que M é Ω-perfeiro, e que tem números Betti constantes. Se M estiver sobre a borda da componente $\mathcal{C}$, cada módulo tem números Betti constantes pela proposição 5.1.

Suponhamos agora que M não está na borda, e que $ql(M) = n + 1$. Vamos ilustrar uma parte da componente $\mathcal{C}$ contendo o R-módulo M.



Então, existem um caminho seccional de n epimorfismos irredutíveis

$$M \twoheadrightarrow M_1 \twoheadrightarrow M_2 \twoheadrightarrow \ldots \twoheadrightarrow M_{n-1} \twoheadrightarrow M_n\ ,$$

onde M_n está sobre a borda de $\mathcal{C}$, e um caminho seccional de n monomorfismos irredutíveis

$$\tau^n M_n \hookrightarrow \tau^{n-1}M_{n-1} \hookrightarrow \tau^{n-2}M_{n-2} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \tau M_1 \hookrightarrow M\ .$$

Observe que a imagem da composição dos monomorfismos acima é o núcleo do epimorfismo irredutível $M \twoheadrightarrow M_1$. Assim, temos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \tau^n M_n \longrightarrow M \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0\ .$$

Como o epimorfismo $M \to M_1$ é irredutível e M é indecomponível, pela proposição 3.14, segue que

$$\beta_i(\tau^n M_n) + \beta_i(M_1) = \beta_i(M),$$

para todo $i \geq 0$.

Trocando M por M_1, obtemos, de forma análoga,

$$\beta_i(\tau^{n-1} M_n) + \beta_i(M_2) = \beta_i(M_1),$$

para todo $i \geq 0$.

Continuando com as trocas, obtemos

$$\beta_i(\tau^{n-j} M_n) + \beta_i(M_{j+1}) = \beta_i(M_j),$$

para todo $i \geq 0$ e todo $0 \leq j \leq n$. Disso, obtemos a seguinte igualdade

$$\beta_i(M) = \sum_{j=0}^{n} \beta_i(\tau^j M_n),$$

para todo $i \geq 0$. Pela suposição de que M tem números Betti constantes, segue que $\beta_i(M) = \beta_i(\tau M)$, para todo $i \geq 0$, o que implica que

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_i(\tau^j M_n) = \beta_i(M) = \beta_i(\tau M) = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_i(\tau^j M_n),$$

e daí,

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_i(\tau^j M_n) = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_i(\tau^j M_n).$$

Cancelando termos iguais, obtemos

$$\beta_i(\tau^{n+1} M_n) = \beta_i(M_n),$$

para cada $i \geq 0$. Assim, M_n, e portanto, todo módulo sobre a borda, tem números Betti evetualmente periódicos com período que divide $2(n+1)$, uma vez que $\beta_i(\tau M_n) = \beta_{i+2}(M_n)$, para todo $i \geq 0$, e portanto,

$$\beta_i(M_n) = \beta_i(\tau^{n+1} M_n) = \beta_{i+2(n+1)}(M_n),$$

para todo $i \geq 0$.

Sabemos que

$$0 \longrightarrow \tau M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$$

é uma sequência de Auslander-Reiten terminando em M_n. Além disso, M_n é Ω-perfeito. Logo, pela proposição 3.14, segue que

$$\beta_i(M_{n-1}) = \beta_i(\tau M_n) + \beta_i(M_n), \qquad (1)$$

para todo $i \geq 0$.

Temos também que

$$0 \longrightarrow \tau^{n+2} M_n \longrightarrow \tau^{n+1} M_{n-1} \longrightarrow \tau^{n+1} M_n \longrightarrow 0$$

é uma sequência de Auslander-Reiten terminando em $\tau^{n+1} M_n$, também Ω-perfeito. Assim, novamente pela proposição 3.14, segue que

$$\beta_i(\tau^{n+1} M_{n-1}) = \beta_i(\tau^{n+2} M_n) + \beta_i(\tau^{n+1} M_n), \qquad (2)$$

para todo $i \geq 0$.

Como M_n tem números Betti periódicos com período que divide $2(n+1)$, sabemos que

$$\beta_i(\tau^{n+1} M_n) = \beta_{i+2(n+1)}(M_n) = \beta_i(M_n),$$

para todo $i \geq 0$, e

$$\beta_i(\tau^{n+2} M_n) = \beta_{i+2(n+1)}(\tau M_n) = \beta_i(\tau M_n),$$

para todo $i \geq 0$.

De (1) e (2), segue que

$$\beta_i(M_{n-1}) = \beta_i(\tau^{n+1} M_{n-1}) = \beta_{i+2(n+1)}(M_{n-1}),$$

para todo $i \geq 0$. Logo, M_{n-1} tem números Betti eventualmente periódicos, com período que divide $2(n+1)$.

Vamos olhar agora para as sequências de Auslander-Reiten terminando nos módulos M_{n-1} e $\tau^{n+1}M_{n-1}$

$$0 \longrightarrow \tau M_{n-1} \longrightarrow \tau M_n \oplus M_{n-2} \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow \tau^{n+2}M_{n-1} \longrightarrow \tau^{n+2}M_n \oplus \tau^{n+1}M_{n-2} \longrightarrow \tau^{n+1}M_{n-1} \longrightarrow 0\ .$$

Como M_{n-1} e $\tau^{n+1}M_{n-1}$ são Ω-perfeitos, pela proposição 3.14, temos que

$$\beta_i(\tau M_{n-1}) + \beta_i(M_{n-1}) = \beta_i(\tau M_n) + \beta_i(M_{n-2}), \qquad (3)$$

para todo $i \geq 0$, e

$$\beta_i(\tau^{n+2}M_{n-1}) + \beta_i(\tau^{n+1}M_{n-1}) = \beta_i(\tau^{n+2}M_n) + \beta_i(\tau^{n+1}M_{n-2}), \qquad (4)$$

para todo $i \geq 0$.

Sabemos que M_{n-1} e M_n têm números Betti eventualmente periódicos com período que divide $2(n+1)$, então, de (3) e (4), temos que

$$\beta_i(M_{n-2}) = \beta_i(\tau^{n+1}M_{n-2})$$

para todo $i \geq 0$. Isto é, M_{n-2} tem números Betti eventualmente periódicos com período que divide $2(n+1)$.

Prosseguindo com esse argumento, obtemos que todos os módulos M_i, com $i = 1, 2, ..., n$, têm números Betti eventualmente periódicos com período que divide $2(n+1)$, assim como todos os módulos em suas τ-órbitas.

Agora, suponhamos que X é um módulo qualquer em $\mathcal{C}$, ou seja, não está na τ-órbita de nenhum dos módulos M_i. Podemos supor que $\tau^m X$, para algum $m \geq 0$, pertence ao caminho seccional de módulos Ω-perfeitos contendo um módulo Ω-perfeito na τ-órbita de M e terminando em um módulo na τ-órbita de M_1. Então, repetindo o argumento anterior, temos que $\tau^m X$ tem números Betti eventualmente periódicos com período que divide $2(n+1)$. E portanto, X tem números Betti eventualmente periódicos com período que divide $2(n+1)$. ■

Corolário 5.5 *Seja $\mathcal{C}$ uma $\mathbb{Z}A_\infty$-componente do carcás de Auslander-Reiten de uma álgebra de Artin autoinjetiva R. Seja também C um R-módulo Ω-perfeito sobre a borda de $\mathcal{C}$. Se*

$$M_n \twoheadrightarrow M_{n-1} \twoheadrightarrow \ldots \twoheadrightarrow M_1 \twoheadrightarrow C$$

é um caminho seccional de epimorfismos irredutíveis em $\mathcal{C}$, então $\beta_i(M_n) = \sum_{j=0}^{n} \beta_{2j+i}(C)$, para todo $i \geq 0$ e para todo $n \geq 1$.

Prova: Da demonstração da proposição 5.4, temos que

$$\beta_i(M_n) = \sum_{j=0}^{n} \beta_i(\tau^j C),$$

para todo $i \geq 0$, e

$$\beta_i(C) = \beta_i(\tau^j C) = \beta_{i+2j}(C),$$

para todo $i \geq 0$ e $j = 0, 1, ..., n$.

Da combinação dessas duas igualdades, temos o resultado. ■

Como consequência da proposição 5.4 e do corolário 5.5, temos o seguinte.

Proposição 5.6 *Seja R uma álgebra de Artin autoinjetiva. Seja também M um R-módulo indecomponível com $cx(M) = 1$, que pertence a uma componente regular $\mathcal{C}$ do carcás de Auslander-Reiten, que se for um tubo, não contém módulos simples. Suponhamos que o comprimento de um caminho seccional de M a um módulo C sobre a borda da componente é n, isto é, o quasi-comprimento de M é n. Então, M tem números Betti eventualmente constantes se, e somente se, C tem números Betti eventualmente periódicos com período, que divide $2ql(M)$, e para m suficientemente grande , $\sum_{j=0}^{n} \beta_{2j}(\tau^m C) = \sum_{j=0}^{n} \beta_{2j+1}(\tau^m C)$.*

Prova: Sem perda de generalidade, aplicando τ uma quantidade suficiente de vezes, podemos supor que C é Ω-perfeito. Assim, é suficiente mostrar que M tem números Betti constantes se, e somente se, C tem números Betti periódicos com período, que divide $2ql(M)$, e

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_{2j}(C) = \sum_{j=0}^{n} \beta_{2j+1}(C).$$

Assim, como C, podemos supor também que M é Ω-perfeito. Suponhamos que C tem números Betti periódicos, e que também temos a igualdade

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_{2j}(C) = \sum_{j=0}^{n} \beta_{2j+1}(C).$$

Pelo corolário 5.5,

$$\beta_i(M) = \sum_{j=0}^{n} \beta_{2j+i}(C),$$

para todo $i \geq 0$ e para todo $n \geq 1$. Pela periodicidade de C, segue que

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_{2j+i}(C) = \sum_{j=0}^{n} \beta_{2j+s}(C),$$

onde $s = 0$, se i é par, e $s = 1$, se i é ímpar. Como

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_{2j}(C) = \sum_{j=0}^{n} \beta_{2j+1}(C),$$

vemos que M tem números Betti constantes.

Agora, suponhamos que M tem números Betti constantes. Pela prova da proposição 5.4, temos que os números Betti de C são periódicos com período, que divide $2(n+1)$. Resta provar a igualdade, $\sum_{j=0}^{n} \beta_{2j}(C) = \sum_{j=0}^{n} \beta_{2j+1}(C)$. Contudo, pelo corolário 5.5, $\beta_0(M) = \sum_{j=0}^{n} \beta_{2j}(C)$ e $\beta_1(M) = \sum_{j=0}^{n} \beta_{2j+1}(C)$. Como $\beta_0(M) = \beta_1(M)$, a prova está completa. ■

Como consequência da proposição acima, temos o seguinte teorema.

Teorema 5.7 *Seja R uma álgebra de Artin autoinjetiva, e seja $\mathcal{C}$ uma componente regular do carcás de Auslander-Reiten de R, que contém um módulo com números Betti eventualmente constantes. Então,*

1. *existe uma família infinita $\{M^n\}_{n=1}^{\infty}$ de módulos com números Betti constantes $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, isto é, $\beta_i(M^n) = b_n$, para todo $i \geq 0$.*
2. *a sequência $\{b_n\}$ é estritamente crescente.*
3. *os R-módulos M^n estão sobre τ-órbitas distintas.*
4. *existe um inteiro positivo d, tal que, para cada $t \geq 1$, M^t pode ser escolhido tendo números Betti constantes $b_t = td$.*

Prova: Claramente, é suficiente provar a parte *4*. Se existe um módulo com números Betti eventualmente constantes, que pertence à borda de $\mathcal{C}$, o resultado está provado pela proposição 5.1.

Agora, suponhamos que $\mathcal{C}$ contenha um módulo com números Betti eventualmente constantes, que não esteja na borda. A prova da proposição 5.6 mostra que existe um módulo C sobre a borda, que tem números Betti periódicos com período que divide $2(n+1)$, para algum inteiro positivo n. Além disso, $\sum_{j=0}^{n} \beta_{2j}(C) = \sum_{j=0}^{n} \beta_{2j+1}(C)$. Novamente, pela proposição 5.6, obtemos um módulo com números Betti constantes iguais a $\sum_{j=0}^{n} \beta_{2j}(C)$. Mas, os números Betti de C são também periódicos com período $2t(n+1)$, para todo $t \geq 1$. Disso, obtemos a existência de um módulo tendo números Betti constantes iguais a $t(\sum_{j=0}^{n} \beta_{2j}(C))$, devido a $\sum_{j=0}^{tn} \beta_{2j}(C) = \sum_{j=0}^{tn} \beta_{2j+1}(C)$ e da periodicidade dos números Betti de C. Fazendo $d = \sum_{j=0}^{n} \beta_{2j}(C)$, a prova está completa. ■

Referências Bibliográficas

[1] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski, *Elements of the representation Theory of Associative Algebras, 1: Techniques of Representation Theory*, USA, 2006.

[2] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalo, *Representatiom Theory of Artin Alagebras*, Cambrigde University Press.

[3] S. Berman, R. Moody, M. Wonenburger, *Cartan matrices with null roots and finite Cartan matrices*, Indiana Math. J. 21 (1972), 1091 − 1099.

[4] R. Brualdi, *Introductory Combinatorics, 3rd ed.*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999.

[5] H. H. Domingues, G. Iezzi, *Álgebra Moderna*, Editora Atual, São Paulo, 2003.

[6] J. A. Drozd, V. V. Kirichenko, *Finite Dimensional Algebras*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1994.

[7] E. L. Green, D. Zacharia, *Auslander-Reiten components containing modules with bounded Betti numbers*, Transaction of the American Mathematical Society, volume 361, número 8, Agosto de 2009, páginas 4195 − 4214.

[8] E. L. Green, D. Zacharia, *On modules of finite complexity over selfinjective Artin algebras*, Algebras and Representation theory, volume 14, número 5, páginas 857 − 868, 2010.

[9] D. Happel, U. Preiser, C. M. Ringel, *Vinberg's characterization of Dynkin diagram using subadditive functions with application to DTr-periodic modules*, Representation theory, II, Lectures Notes in Math., volume 832, páginas 280 − 294, Springer, Berlin, 1980.

[10] K. Hoffman, R. Kunze, *Linear Algebra*, Second Edition

[11] N.Jacobson, *Basic Algebra II*, USA, 1980.

[12] O. Kerner, D. Zacharia, *Auslander-reiten theory for modules of finite complexity over selfinjective algebras*, preprint, 2009.

[13] H. Krause, *Constucting large modules over artin algebras*, notas de seminário.

[14] I. Reiten, *The use of almost split sequences in the representation theory of Artin algebras*, Representation of algebras (Puebla, 1980), Lectures Notes in Math., volume 944, páginas 29 − 104, Springer, Berlin-New York, 1982.

[15] C. M. Ringel, *Tame algebras and Integral Quadratic Forms*, Lecture Notes in Mathematics, 1099 Spring-Verlag, Berlin, 1984.

[16] D. Simson, A. Skowronski, *Elements of Representation theory of Associative Algebras; Volume 2: Tubes and Concealed Algebras of Euclidean type*, Cambridge University Press, 2007.

[17] T. Toft, *Auslander-Reiten components containing modules of finite complexity*, Norwegian University os Science and Tecnology, Departmenr of Mathematical Sciences, 2011.

[18] E. B. Vinberg, *Discrete linear groups generated by reflections*, Izv. Akad. Nauk SSSR 35 (1971) Transl.: Math. SSSR Izvestija 5 (1971), 1083 – 1119.