Sobre D-espaços

Guilherme Eduardo Pinto

Dissertação apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática
Orientadora: Profª. Drª. Lucia Renato Junqueira

São Paulo
Fevereiro de 2023

Sobre D-espaços

Guilherme Eduardo Pinto

Esta versão da dissertação contém
as correções e alterações sugeridas
pela Comissão Julgadora durante a
defesa da versão original do trabalho,
realizada em 16 de Fevereiro de 2023.

Uma cópia da versão original está
disponível no Instituto de Matemática e
Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão julgadora:

Profª. Drª. Lúcia Renato Junqueira (orientadora) – IME-USP
Prof. Dr. Marcelo Dias Passos – UFBA
Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi – ICMC-USP

Agradecimentos

Há muitas pessoas na vida para agradecer, então serei conciso e não tentarei listar todos. Antes de tudo, obrigado à minha família. Os meus pais, com quem sempre pode contar para me apoiar, meu irmão e Giovana, por serem meus amigos sempre que precisei.

Agradeço aos meus colegas e amigos, aos quais devo minha sanidade.

Agradeço à professora Lúcia, que me apresentou à topologia, me ensinou tanto, teve tanta paciência comigo nos últimos três anos e cuja orientação permitiu que esse trabalho existisse.

Resumo

Guilherme Eduardo Pinto. **Sobre D-espaços**. Dissertação (Mestrado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Esse trabalho tem como foco o estudo dos espaços topológicos chamados de D-espaços. Exploramos resultados clássicos e atuais sobre eles, como por exemplo o de que todo espaço T_1 com base ponto-enumerável é D-espaço e alguns relacionados a outras generalizações de metrizabilidade. Estudamos também resultados relacionados com a questão em aberto de se todo espaço regular de Lindelöf é D-espaços. Apresentamos o exemplo dos subespaços de produtos finitos da reta Sorgenfrey, que é o objeto principal de estudo do primeiro artigo publicado sobre D-espaços.

Depois vemos outras propriedades derivadas da propriedade D. Nosso estudo tem como maior foco as propriedades bD, aD, linearmente D, mas também vemos alguns resultados sobre fortemente D e dualmente discretos. Estudamos um exemplo de aD-espaço que não é D-espaço.

Além disso, estudamos espaços linearmente ordenados e quando espaços GO são D-espaços. Mostramos que eles são sempre dualmente discreto. Por último, exploramos o comportamento das propriedades D, aD, bD e linearmente D em árvores com a topologia dos intervalos.

Palavras-chave: Topologia Geral. Teoria dos Conjuntos. D-espaços.

Abstract

Guilherme Eduardo Pinto. **On D-spaces**. Thesis (Master's). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2023.

This study focuses on a class of topological spaces called D-spaces, or spaces with the D-Property, of which variousresults and exemples were explored. Many questions around this subject remain unanswered, for example if the Lindelöf property or paracompactness implies the D-property.

Keywords: General Topology. Set-Theory. D-spaces.

Sumário

Introdução

O conceito de D-espaço tem a sua origem atribuída às correspondências pessoais entre E. van Douwen e E. Michael durante a década de 1970, onde verificavam sua relação com espaços dispersos e Σ-espaços. A definição foi publicada pela primeira vez em Douwen e Pfeffer, 1979, onde foi verificado que a reta de Sorgenfrey é um D-espaço. Desde a sua primeira aparição, vários estudos foram feitos sobre D-espaços, mas diversas questões levantadas no primeiro artigo ainda permanecem sem respostas.

Um D-espaço é um espaço topológico tal que, ao associarmos a cada ponto uma vizinhança aberta dele, existe um subconjunto sem pontos de acumulação cujas vizinhanças cobrem o espaço. Essa definição tem clara similaridade com as propriedades de recobrimento, inclusive sendo descrita por diversos autores como uma delas. Entretanto ainda não sabemos se, em ZFC, existe algum espaço de Hausdorff subparacompacto que não é D-espaço. Além disso, mantém-se sem resposta a questão principal da teoria dos D-espaços, listada inclusive entre os vinte problemas centrais da topologia conjuntista no artigo Hrušák e Tatch Moore, 2007:

Questão 0.0.1 (Douwen e Pfeffer, 1979)**.** *Todo espaço de Lindelöf (regular) é um D-espaço?*

Na última década houve avanços nessa direção, com a construção de exemplos de que é consistente existir espaços de Lindelöf que não são D-espaços. No entanto, todos os exemplos são espaços de Hausdorff não regulares. Ainda não há exemplo satisfatório em ZFC, sem assumir axiomas extras.

Além das propriedades de recobrimento, há diversas outras relações a serem estudadas sobre D-espaços, como por exemplo, com as funções cardinais *extent* e *número de Lindelöf*. Diversas outras propriedades foram sendo desenvolvidas ao longo do tempo, derivadas dos D-espaços, com suas próprias questões e com resultados que ajudam a entender melhor os D-espaços.

Agora iremos apresentar brevemente a estrutura em que se encontra esse trabalho. Iremos explicitar quando um capítulo tem uma referência principal, mas iremos durante o texto explicitar de onde é cada resultado. Caso seja omitido significa que o resultado foi verificado por nós, mas não é original dos trabalho. Estará explícito caso o resultado seja de nossa autoria. Quando citamos um artigo em uma definição significa mais do que somente que a definição foi primeira apresentada nele, significa também que o artigo é uma referência recomendada sobre o assunto.

No primeiro capítulo apresentamos a definição da propriedade D. Além disso, verificamos alguns resultados sobre ela, subespaços, uniões e exploramos as propriedades dos produtos finitos da reta de Sorgenfrey. Por último apresentamos dois jogos topológicos que se relacionam com D-espaços.

O segundo capítulo apresenta quatro propriedades derivadas dos D-espaços e alguns resultados sobre elas.

O terceiro capítulo tem dois focos principais. Primeiro apresentamos resultados de relações entre D-espaços e generalizações de metrizabilidade (Aurichi, 2009,Douwen, 1992). Após, verificamos a interação de D-espaços (assim como as outras propriedades definidas no capítulo anterior) com propriedades de recobrimento.

O quarto capítulo apresenta a definição de espaços linearmente ordenados e generalizados de ordem. Depois apresentamos uma caracterização de quando eles são D-espaços (Douwen e Lutzer, 1997).

O quinto capítulo explora quando árvores com a topologia dos intervalos são D-espaços (Nyikos, 2011,Gamel, 2011).

Capítulo 1

D-espaços

O conceito de D-espaço foi introduzido no artigo conjunto Douwen e Pfeffer, 1979, inicialmente aplicando à reta de Sorgenfrey e produtos finitos dela, tentando encontrar um exemplo de um espaço subparacompacto que não tem a propriedade D para verificar se essa classe não era equivalente a alguma outra propriedade de recobrimento.

Verificamos que classes importantes para a topologia geral tem a propriedade D, como σ-compacto Hausdorff (1.2.5) e espaços métricos (1.2.12). Também verificamos condições de preservação da propriedade D em produtos, funções e subespaços.

1.1 Noções Preliminares

Iremos, antes de apresentar os D-espaços, fixar algumas notações e conceitos de teoria dos conjuntos e topologia que são a base do trabalho. Seguimos em maior parte os conceitos e notações dos livros Kunen, 1980, Jech, 2003 e Engelking, 1989. O trabalho inteiro é desenvolvido na axiomática ZFC.

Definição 1.1.1. *Para X conjunto e α ordinal e κ cardinal definimos $X^{<\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} X^{\beta}$, $[X]^{\kappa} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid |A| = \kappa\}$ e $[X]^{<\kappa} = \bigcup_{\mu<\kappa}[X]^{\mu}$.*

Definição 1.1.2. *Seja α um ordinal. Definimos* $\mathrm{Lim}(\alpha) = \{\beta < \alpha : \beta \text{ é um ordinal limite}\}$.

Lema 1.1.3 (Pressing-Down)**.** *Sejam κ é cardinal regular não enumerável, $S \subseteq \kappa$ estacionário e $f : S \longrightarrow \kappa$. Se f é regressiva, ou seja, para cada $x > 0$ $f(x) < x$, então existe $\gamma < \kappa$ tal que $f^{-1}[\gamma]$ é estacionário.*

Ao longo do trabalho não iremos assumir nenhuma propriedade de separação dos espaços topológicos, a menos que seja especificado.

Definição 1.1.4. *Dado um espaço topológico (X, τ) e $A \subseteq X$, definimos $\tau(A) = \{V \in \tau : A \subseteq V\}$, caso $A = \{x\}$ unitário, escrevemos $\tau(x)$.*

Definição 1.1.5. *Dado um conjunto X, o espaço $(X, \{\emptyset, X\})$ é chamado de* um espaço caótico *e o espaço $(X, \wp(X))$ é chamado de* um espaço discreto.

Definição 1.1.6. *Um espaço topológico é* compacto *se para todo recobrimento aberto, existe um subrecobrimento finito.*

Comumente o termo compacto (assim como diversas outras propriedades) é reservado a espaços de Hausdorff e essa definição é chamada de quasi-compacta. No entanto, não iremos fazer essa diferença e explicitaremos quando assumimos algum axioma de separação.

Definição 1.1.7. *Para a topologia (X, τ), um conjunto $A \subseteq X$ é dito localmente finito se para todo $x \in X$ existe $V \in \tau(x)$ tal que $V \cap A$ é finito.*

O conjunto $A \subseteq X$ é um fechado discreto se ele é fechado em X e como subespaço ele tem a topologia discreta.

Lema 1.1.8. *Sejam X é espaço topológico e $A \subseteq X$. O conjunto A é fechado discreto em X se, e somente se, A não tem ponto de acumulação em X, ou seja, para todo $x \in X$ existe uma vizinhança aberta V dele tal que $V \cap A \subseteq \{x\}$.*

Além disso, se X é um espaço T_1, então $A \subseteq X$ ser fechado discreto equivale a ser localmente finito.

Lema 1.1.9. *Seja X um espaço topológico. Se $\mathcal{F}$ é uma família finita de subconjuntos fechados discretos de X, então $\bigcup \mathcal{F} \subseteq X$ é fechado discreto.*

Lema 1.1.10. *Se $D \subseteq X$ é um subconjunto fechado discreto, então para todo $F \subseteq D$, F é fechado discreto de X*

1.2 Propriedades Básicas

Essa seção irá apresentar as definições essenciais do trabalho, alguns resultados básicos e exemplos de espaços que são D-espaço.

Definição 1.2.1. *Uma função $\phi\colon X \longrightarrow \tau$ tal que $x \in \phi(x)$ para todo $x \in X$ é uma* open neighbourhood assigment *(ona) em X.*

Na literatura podemos também encontrar a definição alternativa por meio de uma família de abertos indexada por X tal que cada $x \in X$ está no elemento indexado por ele. Iremos dar preferência à notação de função.

Definição 1.2.2. *Dada uma ona ϕ em X e $A \subseteq X$ qualquer, definimos os conjuntos $\phi[A] = \{\phi(a) : a \in A\}$ e $\phi(A) = \bigcup \phi[A] = \bigcup_{a \in A} \phi(a)$.*

Um conjunto $A \subseteq X$ é dito núcleo de *ϕ se $\phi(A) = X$.*

Definição 1.2.3 (Douwen e Pfeffer, 1979)**.** *O espaço topológico X é um* D-espaço *se para toda ϕ ona existe um núcleo de ϕ fechado discreto.*

Quando no referirmos a *propriedade D* queremos dizer "ser D-espaço".

Proposição 1.2.4.

(a) *Todo espaço compacto T_1 é um D-espaço.*

(b) *Todo espaço T_1 finito é D-espaço.*

(c) *Todo espaço discreto é D-espaço.*

(d) *O único espaço caótico que é D-espaço é o unitário.*

Demonstração. **(a)** Se X é Hausdorff compacto e temos ϕ *ona* em X, como $\phi[X]$ é recobrimento aberto de X, existe $Y \subseteq X$ finito tal que $\phi[Y]$ é subrecobrimento. Como X é T_1, Y é um núcleo fechado discreto de ϕ (1.1.8).

O argumento anterior verifica a propriedade **(b)**.

(c) Basta notar que se X é discreto, X é núcleo fechado e discreto de qualquer *ona*.

(d) Notemos que um subconjunto do espaço caótico é fechado se, e só se, ele é ou o espaço inteiro ou vazio.

Um subespaço do espaço caótico é discreto se, e só se, ele é vazio ou se ele é unitário. Como um núcleo de *ona* não pode ser vazio, significa que um espaço caótico que é D-espaço possui um subconjunto fechado discreto não vazio, por consequência ele é o espaço todo e unitário ao mesmo tempo. □

Podemos estender o item **(a)** por meio do seguinte resultado:

Proposição 1.2.5. *Se X é um espaço T_1 σ-compacto, então X é um D-espaço.*

Demonstração. Consideremos a decomposição em compactos $X = \bigcup_{n<\omega} C_n$. Seja uma *ona* ϕ em X, fixemos $D_0 \subseteq C_0$ finito tal que $C_0 \subseteq \phi(D_0)$.

Supondo fixados $D_k \subseteq C_k$ para cada $k < n$, fixamos $D_n \subseteq C_n \setminus \phi(\bigcup_{k<n} D_k)$ finito tal que $C_n \setminus \phi(\bigcup_{k<n} D_k) \subseteq \phi(D_n)$. Caso $C_n \subseteq \phi(\bigcup_{k<n} D_k)$, tomemos $D_n = \emptyset$.

O conjunto $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$ é núcleo fechado discreto de ϕ, pois para cada $n < \omega$ temos que $C_n \subseteq \phi(\bigcup_{k\leq n} D_k) \subseteq \phi(D)$ e para $x \in X$, se tomarmos $n < \omega$ o menor tal que $x \in \phi(D_n)$, então $\phi(D_n)$ é uma vizinhança aberta dele tal que $\phi(D_n) \cap D \subseteq \bigcup_{k\leq n} D_k$ que é finito, assim D é fechado discreto (1.1.8). □

Notemos que esse resultado pode ser obtido como corolário de 3.4.30.

Análogo à relação dos itens **(a)** e **(b)** da proposição 1.2.4, podemos verificar que:

Corolário 1.2.6. *Todo espaço T_1 enumerável é D-espaço.*

De fato, utilizando o seguinte resultado podemos enfraquecer a hipótese do item **(a)**:

Lema 1.2.7. *Todo espaço T_0 compacto tem ponto fechado.*

Teorema 1.2.8. *Todo espaço T_0 compacto é um D-espaço.*

Demonstração. Sejam X um espaço T_0 e compacto, e ϕ uma *ona* nele. Consideremos $X_0 = \{x \in X : \{x\} \subseteq X \text{ é fechado}\}$. Ele não é vazio, pois todo espaço T_0 compacto tem ponto fechado (1.2.7).

Consideremos uma cobertura aberta $\mathcal{A}$ de X_0 em X e $Z = X \setminus \bigcup \mathcal{A}$ subespaço fechado e T_0 de X, supondo por absurdo que ele não é vazio ele tem ponto fechado, que será fechado também em X, mas $Z \cap X_0 = \emptyset$, que é absurdo.

Assim $\mathcal{A}$ é recobrimento de X, logo admite subrecobrimento finito. Logo X_0 é T_1 e compacto.

Segue então que existe $D \subseteq X_0$ finito tal que $\phi(D) \supseteq X_0$. Por argumento análogo ao anterior, teremos que D é núcleo de ϕ. Como a união finita de fechados é fechada, o conjunto $D \subseteq X$ é fechado e todo $F \subseteq D$ também é, logo $D \subseteq X$ é fechado discreto. $\square$

O caso do σ-compacto no entanto não é mais válido:

Exemplo 1.2.9. *Existe um espaço enumerável T_0 que não é um D-espaço.*

Demonstração. Consideremos o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ com a topologia

$$\{\{x \in \mathbb{Z} : x \leq z\} : z \in \mathbb{Z}\} \cup \{\mathbb{Z}, \emptyset\}$$

Notemos que $\overline{\{z\}} = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq z\}$ para cada $z \in \mathbb{Z}$, assim o único fechado discreto é o vazio, logo ele não pode ser um D-espaço. $\square$

Outra classe importante para a topologia são os espaços métricos, que podemos verificar que são também D-espaços.

Muitas vezes iremos querer restringir os abertos considerados pela *ona* a uma base com propriedades que nos interessam, assim consideraremos a seguinte interação entre *ona*s

Definição 1.2.10. *Sejam ϕ e ψ duas onas do espaço topológico X. Dizemos que ψ* é mais fina que *ϕ se para todo $x \in X$ vale $\psi(x) \subseteq \phi(x)$ e nesse caso dizemos $\psi \leq \phi$.*

Dessa definição seguem que: se $\psi \leq \phi$, então o recobrimento aberto $\psi[X]$ é um refinamento de $\phi[X]$ e para todo $A \subseteq X$ vale $\psi(A) \subseteq \phi(A)$. Em particular, se um conjunto é núcleo de ψ, ele é núcleo de ϕ também.

Proposição 1.2.11. *Seja X um espaço topológico com base de abertos $\mathcal{B}$. Então X é um D-espaço se, e somente se, toda ona com valores em $\mathcal{B}$ tem núcleo fechado discreto.*

Demonstração. Seja ϕ *ona* de X. Para cada $x \in X$ fixamos $\psi(x) \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \psi(x) \subseteq \phi(x)$. Temos então definida uma *ona* com valores em $\mathcal{B}$ que é mais fina que ϕ, por consequência se $D \subseteq X$ é núcleo fechado discreto de ψ, então ele também será de ϕ. $\square$

Teorema 1.2.12. *Todo espaço metrizável é um D-espaço*

Demonstração. Suponha (X, τ) um espaço metrizável e consideremos uma base de abertos dele $\mathcal{B} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{B}_n$, onde para cada $n < \omega$ a família $\mathcal{B}_n$ é discreta. Seja ϕ uma *ona* de X com valores em $\mathcal{B}$.

Para cada $x \in X$, seja $n(x) < \omega$ o menor tal que $\phi(x) \in \mathcal{B}_n$

Consideremos para cada $n < \omega$ o conjunto $X_n = \{x \in X : n(x) = n\}$. Notemos que a família $\{X_n : n < \omega,\ X_n \neq \emptyset\}$ é uma partição de X e para cada $n < \omega$ a família de abertos $\phi[X_n]$ é discreta.

Consideremos uma boa ordem $(X, \prec)$ tal que se $m < n < \omega$, $x \in X_m$ e $y \in X_n$ então $x \prec y$ e seja $h : (X, \prec) \longrightarrow \gamma_0$ um isomorfismo de ordem a um ordinal.

Construiremos por recursão transfinita uma γ_0-sequência de subconjuntos enumeráveis $\langle D_\alpha : \alpha < \gamma_0 \rangle$ a fim de que $D = \bigcup_{\alpha<\gamma_0} D_\alpha$ seja núcleo fechado discreto de B.

Passo 0: $D_0 = \emptyset$.

Passo α: Iremos construí-lo recursivamente, ao mesmo tempo que definimos uma função característica χ_α para um conjunto $N_\alpha = \{n < \omega : \chi_\alpha(n) = 1\} \subseteq \omega$ tal que $D_\alpha = \{d_\alpha(n) : n \in N_\alpha\}$.

Queremos que a cada ponto que pegarmos $d_\alpha(n)$ revisitemos ele infinitas vezes a fim de pegar todos os pontos relacionados a ele, a fim disso fixemos uma função bijetora $f : \omega \longrightarrow (\omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\})$ tal que se $f(m) \subseteq f(n)$, então $m \leq n$.

Supondo que para todo $m < n$ já decidimos o valor $\chi_\alpha(m)$ e se $\chi_\alpha(m) = 1$ fixamos $d_\alpha(m) \in X$. Caso $f(n)$ for unitário, definimos $\chi_\alpha(n) = 1$ se, e somente se,

$$W_\alpha(n) = X \setminus \left(\phi(\bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta) \cup \bigcup\{\phi(d_\alpha(m)) : m < n,\ \chi_\alpha(m) = 1\} \right) \neq \emptyset.$$

Se $\chi_\alpha(n) = 1$, definimos $d_\alpha(n)$ é o menor ponto desse conjunto, relativo à ordem $\prec$.

Caso contrário, consideremos $n' < n$ e $j < \omega$ tais que $f(n) = f(n') \cup \{(\mathrm{dom}(f(n')), j)\}$ e definimos $\chi_\alpha(n) = 1$ se, e somente se, $\chi_\alpha(n') = 1$ e

$$\{x \in X_j \cap W_\alpha(n) : d_\alpha(n') \in \phi(x)\} \neq \emptyset.$$

Se $\chi_\alpha(n) = 1$, definimos $d_\alpha(n)$ é o menor ponto desse conjunto, relativo à ordem $\prec$.

Assim terminamos de definir a recursão finita para χ_α e $d_\alpha(n)$ para cada $\chi_\alpha(n) = 1$. Definindo $D_\alpha = \{d_\alpha(n) : n \in N_\alpha\}$ está definido o passo de recursão transfinita.

Considerando $D = \bigcup_{\alpha<\gamma_0} D_\alpha$. Para cada $x \in X$ provemos por indução na ordem $(X, \prec)$ que:

$$x \in \phi(\bigcup_{\alpha \leq h(x)} D_\alpha).$$

Se $x = \min_\prec X$, então da construção temos que $x = d_1(0)$. Supondo que para todo $y \prec x$ temos que:

$$y \in \phi(\bigcup_{\alpha \leq h(y)} D_\alpha).$$

Assumindo que $x \notin \phi(\bigcup_{\alpha<h(x)} D_\alpha)$, então pela construção $x = \min_\prec W_{h(x)}(0) = d_{h(x)}(0)$.

Portanto D é de fato núcleo da *ona* ϕ. Provemos que D é um fechado discreto. Seja $x \in X$, e tomemos $\alpha < \gamma_0$ e $n < \omega$ tal que $d_\alpha(n)$ é o menor elemento de D tal que $x \in \phi(d_\alpha(n))$. Pela construção vale que:

$$D \cap \phi(d_\alpha(n)) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta \cup \{d_\alpha(m) : m \leq n,\ m \in N_\alpha\}$$

Supondo por absurdo que $\phi(x) \cap \bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta \neq \emptyset$, fixemos $\beta < \alpha$ e $m \in N_\beta$ tais que $d_\beta(m)$ é o menor elemento de $D \cap \phi(x)$.

Pela hipótese, temos que $x \in X_{n(x)} \cap W_\beta(m)$, assim existe $k \in N_\beta$ tal que $f(k) = f(m) \cup \{(\mathrm{dom}(f(m)), n(x))\}$, $d_\beta(k) \in X_{n(x)}$ e $d_\beta(m) \in \phi(x) \cap \phi(d_\beta(k))$, e portanto $\phi(x) = \phi(d_\beta(k))$, o que é absurdo, pois $x \notin \phi(D_\beta)$. □

Essa prova foi adaptada da demonstração mais geral presente no artigo conjunto de Arhangel'skii e Raushan Z. Buzyakova, 2002, onde demonstram que todo espaço T_1 com base ponto enumerável é D-espaço. Iremos no capítulo 3 verificar algumas classes que contêm os metrizáveis que implicam a propriedade D.

Um primeiro exemplo verificado em Douwen e Pfeffer, 1979 de um espaço normal que não é D-espaço pode servir de base para algumas questões importantes da propriedade D, iremos então analisá-lo.

Exemplo 1.2.13. *O espaço ω_1 com a topologia dos intervalos usual é um espaço hereditariamente normal que não é D-espaço.*

Demonstração. O espaço é hereditariamente normal, pois se tomarmos $x < y < \omega_1$, então $]x, y]$ é vizinhança aberta de y à qual x não pertence, e $[0, x]$ é vizinhança de x à qual y não pertence, logo é um espaço T_1. Seja $X \subseteq \omega_1$ subespaço. Se $F, K \subseteq X$ são fechados disjuntos não vazios e consideremos que nenhum contem 0, para cada $x \in F$ fixemos $k(x) = \sup\{\alpha < x : \alpha \in K\} < x$ e para cada $y \in K$ fixemos $f(y) = \sup\{\alpha < y : \alpha \in F\}$.

Definindo $A = \bigcup_{x \in F}]k(x), x]$, ele é aberto em ω_1 e contem F, $B = \bigcup_{y \in K}]f(y), y]$ é aberto que contem K. Suponha que $z \in A \cap B$, fixemos $x \in F$ e $y \in K$ tais que $z \in]k(x), x] \cap]f(y), y]$ sem perda de generalidade assumimos que $x < y$, mas então $f(y) < z \leq x < y$ que contradiz a definição de $f(y)$. Logo X é normal

Consideremos a *ona* ϕ em ω_1 definida por $\phi(x) = \{y : y \leq x\}$, para cada $x < \omega_1$. Um subconjunto $D \subseteq \omega_1$ é núcleo de ϕ se, e só se, ele é cofinal e, em particular, é infinito.

Se considerarmos $D \subseteq \omega_1$ infinito, existe um sequência $\langle x_n : n < \omega \rangle$ estritamente crescente em D, assim $\sup_{n<\omega} x_n < \omega_1$ é ponto de acumulação de D. Logo a *ona* ϕ não admite núcleo fechado discreto. □

Observação: Iremos em 4.4.2 verificar de maneira mais geral que ordinais de cofinalidade não enumerável não pode ser um D-espaço. Também vale que todo ordinal com a topologia dos intervalos é hereditariamente normal, como vemos em 4.2.2.

Notemos que o centro da argumentação apresentado no exemplo acima foi que no espaço ω_1 todo fechado discreto é finito, mas ele tem um recobrimento aberto que não admite subrecobrimento finito.

Em outras palavras a contradição se deu por ele ser um espaço enumeravelmente compacto que não é compacto.

Proposição 1.2.14. *Seja X um D-espaço. X é compacto se, e somente se, X é enumeravelmente compacto*

Demonstração. Se X é enumeravelmente compacto, seja um recobrimento aberto $\mathcal{A}$ de X. Para cada $x \in X$ fixemos $A(x) \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A(x)$, assim definimos uma *ona*. Tomemos então o subconjunto fechado discreto $D \subseteq X$ núcleo dessa *ona*.

Se D é finito, então $\{A(d) : d \in D\}$ é um subrecobrimento finito de $\mathcal{A}$. Caso contrário, consideremos $F \subseteq D$ infinito enumerável, e uma enumeração dele $F = \{x_n : n < \omega\}$. Para cada $n < \omega$, definimos $C_n = \{x_m : m > n\}$, que é um conjunto fechado de X. Notemos que $\{C_n : n < \omega\}$ é uma família enumerável de fechados com a propriedade da intersecção finita, mas $\bigcap_{n<\omega} C_n = \emptyset$, que contradiz o espaço ser enumeravelmente compacto.

Portanto D é finito, definindo um subrecobrimento finito de $\mathcal{A}$. Consequentemente, X é compacto. □

Notemos que de maneira mais geral a propriedade D conecta o conceito de subrecobrimentos abertos e subconjuntos fechados discretos. Explicitamente iguala as seguintes funções cardinais

Definição 1.2.15. *Dado um espaço topológico X, o* extent *do espaço é o cardinal*

$$e(X) = \sup\{|D| : D \subseteq X \text{ é fechado discreto}\}$$

O número de Lindelöf *de X é o menor cardinal tal que todo recobrimento aberto admite subrecobrimento dessa cardinalidade, definindo de maneira formal:*

$$\ell(X) = \min\{\kappa : \forall \mathcal{A} \subseteq \tau(\bigcup \mathcal{A} = X \longrightarrow \exists \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(\bigcup \mathcal{B} = X \wedge |\mathcal{B}| = \kappa))\}$$

A fim de estudar o $e(X)$ iremos somente analisar os subconjuntos de cardinalidade regular.

Lema 1.2.16. *Dado o espaço topológico X, vale que:*

$$e(X) = \sup\{|D| : D \subseteq X \text{ é fechado discreto e } |D| \text{ é regular}\}$$

Demonstração. Notemos que segue da definição que:

$$e(X) \geq \sup\{|D| : D \subseteq X \text{ é fechado discreto e } |D| \text{ é regular}\} = \kappa$$

Fixemos uma sequência $\langle \lambda_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ estritamente crescente de cardinais regulares, onde $\gamma = \mathrm{cf}(e(X))$ e $\sup_{\alpha<\gamma} \lambda_\alpha = e(X)$.

Seja $D \subseteq X$ um subconjunto fechado discreto de cardinalidade não regular. Se $|D| = e(X)$, para cada $\alpha < \gamma$, fixemos $D_\alpha \subseteq D$ com cardinalidade λ_α. Como todo subespaço de fechado discreto é fechado discreto (1.1.10) temos que $e(X) = \sup_{\alpha<\gamma} |D_\alpha| \leq \kappa \leq e(X)$.

Se $|D| < e(X)$, então $|D|^+ \leq e(X)$. Existe então $F \subseteq X$ fechado discreto tal que $|F| \geq |D|^+$, tomando subconjunto da F, existe um fechado discreto de cardinalidade $|D|^+$, que é regular e maior que $|D|$. Assim para todo $D \subseteq X$ fechado discreto, verificamos que $|D| \leq \kappa$, e portanto $e(X) \leq \kappa$. □

Proposição 1.2.17. *Se X é um espaço topológico, então $e(X) \leq \ell(X) \leq |X|$*

Demonstração. Seja $D \subseteq X$ é fechado discreto de cardinalidade regular com enumeração $D = \{d_\alpha : \alpha < |D|\}$. Definindo $V_\alpha = X \setminus \{d_\beta : \alpha < \beta < |D|\}$ será um conjunto aberto de X para cada $\alpha < |D|$ e a família $\{V_\alpha : \alpha < |D|\}$ é tal que todo subrecobrimento tem cardinalidade $|D|$.

Assim verificamos que se existe $D \subseteq X$ de cardinalidade κ regular, existe um recobrimento que não admite subrecobrimento de cardinalidade menor que κ.

A fim de verificar que $\ell(X) \leq |X|$ basta notar que se $\mathcal{A}$ é um recobrimento de X, para cada $x \in X$ podemos fixar $A_x \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A_x$ e a família $\{A_x : x \in X\}$ será um subrecobrimento. □

Proposição 1.2.18. *Se X é um D-espaço, então $e(X) = \ell(X)$.*

Demonstração. Queremos então provar que $\ell(X) \leq e(X)$. Suponha $\mathcal{A}$ recobrimento aberto, de cardinalidade $\ell(X)$ tal que se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ com $|\mathcal{B}| < \ell(X)$, então $\mathcal{B}$ não é subrecobrimento de X.

Para cada $x \in X$, fixemos algum $A(x) \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A(x)$, e consideremos a *ona* ϕ definida por $x \mapsto A(x)$. Por ser D-espaço, fixemos $D \subseteq X$ um núcleo fechado discreto de ϕ. A família $\phi[D] \subseteq \mathcal{A}$ é subrecobrimento, logo $|D| \geq \phi[D] = \ell(X)$, e portanto $\ell(X) \leq e(X)$ □

Corolário 1.2.19. *Se X é um D-espaço e $e(X) = \aleph_0$, então X é de Lindelöf.*

Da nossa demonstração da proposição 1.2.18 temos o seguinte resultado:

Corolário 1.2.20. *Se X é um D-espaço não compacto, então existe $D \subseteq X$ fechado discreto tal que $|D| = e(X)$.*

1.3 Subespaços, Funções e Produtos

Apresentaremos algumas condições de preservação da propriedade. Verificaremos que subespaços fechados a preservam (1.3.3). Veremos, também, que a propriedade D é de fato uma invariante topológica (1.3.12).

O exemplo 1.2.13 apresenta uma questão sobre subespaços de D-espaços, pois ω_1 é subespaço aberto e denso de $\omega_1 + 1$ com a topologia dos intervalos, que é compacto Hausdorff, e portanto D-espaço. Quais, então, seriam as propriedades de um subespaço de um D-espaço para garantir que ele também seja D-espaço?

Facilita no estudo de subespaços considerar abertos no espaço onde estão no lugar de abertos no subespaço, então definiremos a seguinte variação de *ona* para subespaços.

Definição 1.3.1. *Para um espaço X e um subconjunto $A \subseteq X$, uma ona* parcial de A em X *é uma função ϕ definida em A, tal que para cada $a \in A$, o valor $\phi(a)$ é uma vizinhança aberta de a em X.*

Um núcleo da *ona* parcial ϕ de A em X *é um subconjunto D de A tal que $\phi(D) = \bigcup_{d \in D} \phi(d) \supseteq A$.*

Lema 1.3.2. *Sejam X espaço topológico e $Y \subseteq X$ subespaço. Se toda ona parcial ϕ de Y sobre X admite $D \subseteq Y$ fechado discreto em X tal que $Y \subseteq \phi(D)$, então Y é um D-espaço. Além disso, se $Y \subseteq X$ é fechado vale a volta*

Demonstração. Considerando ϕ' *ona* em Y definida por $\phi'(x) = \phi(x) \cap Y$, temos que para $D \subseteq Y$, D é núcleo de ϕ' se, e somente se $Y \subseteq \phi(D)$. Temos também que como Y é subespaço, se $D \subseteq X$ é fechado discreto, então ele é fechado discreto em Y. Se Y é fechado, todo fechado dele é fechado em X, logo se D é fechado discreto em Y, ele é também em X. □

Usando o resultado anterior, verificaremos que:

Proposição 1.3.3. *Se X é um D-espaço e $F \subseteq X$ é fechado, então F como subespaço é um D-espaço.*

Demonstração. Seja ϕ uma *ona* parcial de F em X. Considerando a extensão dela a uma *ona* em X por $\psi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \in F \\ X \setminus F, & x \notin F \end{cases}$, podemos tomar uma núcleo fechado discreto $D \subseteq X$ de ψ.

Notemos que para todo $x \in D \setminus F$, vale que $\psi(x) \cap F = \emptyset$. Logo $D \cap F$ é núcleo da *ona* parcial ϕ. □

Como consequência das propriedades 1.2.18 e 1.3.3, teremos o seguinte resultado:

Teorema 1.3.4. *Se X é um D-espaço, então para todo subespaço fechado $F \subseteq X$ vale $e(F) = \ell(F)$.*

A partir desse resultado foi levantado em Raushan Z. Buzyakova, 2004 se isso seria uma maneira de caracterizar D-espaços.

Questão 1.3.5. *Se para todo subespaço fechado $F \subseteq X$ vale que $e(F) = \ell(F)$, então X é um D-espaço?*

A resposta dessa pergunta é negativa, dada pelo exemplo construído em Nyikos, 2011. Apresentamos aqui a construção dele em detalhes na seção 5.3.1

Definição 1.3.6. *Um espaço topológico é* hereditariamente D, *se todo subespaço dele é D-espaço*

Exemplo 1.3.7. *A reta real com a topologia usual é hereditariamente D.*

Temos isso como resultado direto do teorema 1.2.12, na verdade temos que todo espaço metrizável é hereditariamente D.

Exemplo 1.3.8. *O espaço com a topologia da ordem $\omega_1 + 1$ é um compacto hereditariamente normal que não é hereditariamente D.*

Se relacionando com à questão 1.3.5, temos a seguinte pergunta:

Questão 1.3.9. *Se para todo subespaço $Y \subseteq X$ vale que $e(Y) = \ell(Y)$, então X é hereditariamente D?*

O exemplo de Nyikos (5.3.1) também é uma resposta negativa para essa pergunta.

Exemplo 1.3.10 (Burke, 2007)**.** *A imagem contínua de um D-espaço não precisa ser um D-espaço*

Demonstração. Consideremos os espaços ω_1 com a topologia usual e $D(\omega_1)$ o conjunto ω_1 com a topologia discreta. Seja M o subespaço do produto $\omega_1 \times D(\omega_1)$ dos pares (α, β) com $\alpha \leq \beta$. Teremos que $M \cong \bigoplus_{\alpha<\omega_1}(\alpha + 1)$, onde $\alpha + 1$ tem a topologia usual. Então M é metrizável e, por 1.2.12, é D-espaço.

Consideremos a função:

$$\begin{aligned} q : M &\longrightarrow \omega_1 \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \end{aligned}$$

Consideremos ω_1 com a topologia dos intervalos. Essa função é a restrição de uma projeção, logo é contínua. Para cada $\alpha < \omega_1$, existe $\beta < \omega_1$ tal que $\alpha \leq \beta$ e portanto $\alpha \in q[M]$. Para $A \subseteq M$ aberto e $(\alpha, \beta) \in A$, pela definição, se $\alpha > 0$ existe $x < \alpha$ tal que $]x, \alpha] \times \{\beta\} \subseteq A$ e $q\,[]x, \alpha] \times \{\beta\}] =]x, \alpha]$ é aberto, logo a função é aberta.

No entanto $q[M] = \omega_1$ não é um D-espaço (1.2.13). □

Podemos, no entanto, verificar que a propriedades D se preserva por funções contínuas e fechadas.

Proposição 1.3.11. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua fechada sobrejetora entre espaços os topológicos X e Y. Se X é um D-espaço, então Y também é.*

Demonstração. Consideremos uma *ona* ϕ em Y. Definimos um *ona* em X por $\psi(x) = f^{-1}[\phi(f(x))]$ para cada $x \in X$. Seja $F \subseteq X$ um núcleo fechado discreto de ψ. Considerando $D = f[F]$, note que ele é fechado discreto, pois para $A \subseteq D$, existe $B \subseteq F$ tal que $A = f[B]$, B é fechado logo A também é. O conjunto D é núcleo de ϕ, pois $\phi(D) = f[\psi(F)] = Y$. □

Corolário 1.3.12. *A propriedade D é preservada por homeomorfismos.*

Como existem espaços sem a propriedade D e todo espaço discreto é um D-espaço, notemos que a pré-imagem por uma função contínua de um D-espaço, não precisa ser um D-espaço. Entretanto podemos verificar que:

Teorema 1.3.13 (Borges e Wehrly, 1991)**.** *A pré-imagem perfeita de D-espaço T_1 é um D-espaço.*

Iremos demonstrar uma generalização desse teorema

Teorema 1.3.14. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua sobrejetora entre os espaços topológicos X e Y. Se Y é um D-espaço T_1, f é uma função fechada e cada fibra é um D-espaço, então X é D-espaço.*

Demonstração. Seja ϕ uma *ona* em X. Para cada $y \in Y$, definimos $D_y \subseteq f^{-1}[y] = F_y$ fechado discreto tal que $F_y \subseteq \phi(D_y)$. Como $y \notin f[X \setminus \phi(D_y)]$ e f é contínua e fechada, o conjunto

$$V_y = Y \setminus f[X \setminus \phi(D_y)]$$

é uma vizinhança aberta de y. Definimos então uma *ona* $\{V_y : y \in Y\}$ em Y. Seja $E \subseteq Y$ um núcleo fechado discreto dela.

Definimos $D = \bigcup\{D_y : y \in E\}$. Se $x \in X$, existe $y \in E$ tal que $f(x) \in V_y$, então $f(x) \notin f[X \setminus \phi(D_y)]$ e portanto $x \notin X \setminus \phi(D_y)$, ou seja $x \in \phi(D_y) \subseteq \phi(D)$. O conjunto D é núcleo da *ona* ϕ.

Considerando $x \in X$, existe $H \subseteq Y$ vizinhança aberta de $f(x)$ tal que $H \cap E \subseteq \{f(x)\}$. Se $x \notin F_y$ para nenhum $y \in E$, então $f^{-1}[H]$ é vizinhança aberta de x de interseção vazia com D. Caso contrário, seja $G \subseteq X$ vizinhança aberta de x tal que $G \cap D_{f(x)} \subseteq \{x\}$, assim $G \cap f^{-1}[H]$ é uma vizinhança aberta de x de interseção no máximo unitária com D. Portanto D é fechado discreto. □

Notemos que, no teorema acima, a hipótese de Y ser T_1 é utilizada somente para garantir que $f^{-1}[y]$ é fechado. Assim, poderíamos substituí-la por falar que as fibras são fechadas. No entanto, como assumimos a função fechada e sobrejetora, as fibras serem fechadas é equivalente aos unitários de Y serem fechados, que por sua vez equivale a Y ser T_1. Ou seja, a hipótese de Y ser T_1, na demonstração apresentada, é necessária.

Corolário 1.3.15. *Se X é um D-espaço T_1 e C é um espaço compacto, então $X \times C$ é um D-espaço.*

Demonstração. Basta considerar a projeção $\pi : X \times C \longrightarrow X$, pois como C é compacto, ela é fechada. □

Notemos que não podemos substituir C ser compacto por somente D-espaço.

Exemplo 1.3.16 (Alas *et al.*, 2008, construção de Douwen, 1992)**.** *Produto de D-espaço Lindelöf regular com um métrico separável não precisa ser D-espaço.*

Fixemos um conjunto de Bernstein $C \subseteq \mathbb{R}$, ou seja, um conjunto tal que para todo fechado F não enumerável de $\mathbb{R}$ vale que $|C \cap F| = |C \setminus F| = \mathfrak{c}$. Consideremos $(\mathbb{R}, \rho)$ a reta real com a topologia usual e (C, ρ_C) é o subespaço de $(\mathbb{R}, \rho)$. Fixemos uma base aberta enumerável $\{B_n : n < \omega\}$ de ρ_C com $B_0 = C$ e um subconjunto $Q \subseteq C$ que é denso e enumerável.

Definiremos uma topologia σ em C que contem ρ_C e (C, σ) não é D-espaço, mas a topologia τ em $\mathbb{R}$ gerada por $\rho \cup \sigma$ é de Lindelöf regular e tem a propriedade D. De tal maneira, o conjunto $\Delta_C = \{(x, x) : x \in C\} \subseteq (\mathbb{R}, \tau) \times (C, \rho_C)$ será subespaço fechado homeomorfo a (C, σ) e portanto $(\mathbb{R}, \tau) \times (C, \rho_C)$ não pode ser D-espaço.

Para cada $x \in C$ e $n < \omega$ definimos $E(x, n) = \bigcap\{B_m : m \leq n,\ x \in B_m\}$ que está bem definida, pois $x \in B_0$ e $0 \leq n$. Notemos que cada $E(x, n)$ é vizinhança aberta de x e a família $\{E(x, n) : n < \omega\}$ é base local de x para ρ_C. Além disso, para $x, y \in C$ e $n < \omega$ se $x \in E(y, n)$, então $E(x, n) \subseteq E(y, n)$. Definimos também

$$\mathcal{K} = \{K \in \left([C]^{\leq \aleph_0}\right)^{\omega} : |\bigcap_{n<\omega} \overline{K(n)}^{\rho_C}| > \aleph_0\}$$

Nosso objetivo é construir bases locais $\{L(x, n) : n < \omega\}$ tal que $L(x, n) \subseteq E(x, n)$ assim a topologia que elas geram será mais fina que a ρ_C e se $K \in \mathcal{K}$, então a interseção de seus fechos nessa topologia também terá cardinalidade $\mathfrak{c}$, que irá garantir que ela não será um D-espaço.

Consideremos uma $\mathfrak{c}$-sequência $\langle K_\gamma : \gamma < \mathfrak{c}\rangle$ em $\mathcal{K}$ tal que para cada $K \in \mathcal{K}$ vale $|\{\gamma < \mathfrak{c} : K = K_\gamma\}| = \mathfrak{c}$. Fixemos enumeração bijetora $C = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ tal que $Q = \{x_n : n < \omega\}$ e definimos $C_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$.

Para $\gamma < \mathfrak{c}$ e $n < \omega$ temos que $K_\gamma(n)$ é enumerável, assim $\bigcup_{m<\omega} K_\gamma(n)$ também é. Portanto existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $\bigcup_{m<\omega} K_\gamma(n) \subseteq C_\alpha$.

Definimos recursivamente a função injetora $\phi : \mathfrak{c} \longrightarrow \mathfrak{c} \setminus \omega$ por

$$\phi(\gamma) = \min\left(\{\alpha \in \mathfrak{c} \setminus \omega : \bigcup_{m<\omega} K_\gamma(m) \subseteq C_\alpha \wedge x_\alpha \in \bigcap_{m<\omega} \overline{K_\gamma(m)}^{\rho}\} \setminus \{\phi(\beta) : \beta < \gamma\}\right)$$

Afirmação 1.3.17. *A função está bem definida.*

Demonstração. Notemos que basta verificar que:

$$|\{\alpha \in \mathfrak{c} \setminus \omega : \bigcup_{m<\omega} K_\gamma(n) \subseteq C_\alpha \wedge x_\alpha \in \bigcap_{n<\omega} \overline{K_\gamma(n)}^\rho\}| = \mathfrak{c}$$

Fixemos $\beta < \mathfrak{c}$ tal que $\bigcup_{n<\omega} K_\gamma(n) \subseteq C_\beta$, como $|C_\beta| < \mathfrak{c} = |\bigcap_{n<\omega} \overline{K(n)}^{\rho_C}|$, temos que $|\{\alpha > \beta : x_\alpha \in \bigcap_{n<\omega} \overline{K(n)}^{\rho_C}\}| = \mathfrak{c}$ e se $\alpha \geq \beta$, $C_\beta \subseteq C_\alpha$. □

Para cada $\alpha \in \mathfrak{c} \setminus \omega$ escolhemos $s_\alpha : \omega \longrightarrow C_\alpha$ tal que

- Para cada $n < \omega$, $s_\alpha(n) \in E(x_\alpha, n)$;
- $|\{n < \omega : s_\alpha(n) \in Q\}| = \aleph_0$;
- Para cada $m < \omega$ e $\gamma < \mathfrak{c}$, $|\{n < \omega : s_{\phi(\gamma)} \in K_\gamma(n)\}| = \aleph_0$ e $s_{\phi(\gamma)}[\omega] \subseteq Q \cup \bigcup_{n<\omega} K_\gamma(n)$.

Definimos enfim por recursão em $\alpha < \mathfrak{c}$ famílias $\{L(x_\alpha, n) : n < \omega\}$ por:

$$L(x_\alpha, n) = \begin{cases} \{x_\alpha\}, \ \alpha < \omega \\ \{x_\alpha\} \cup \bigcup_{m>n} L(s_\alpha(m), m), \ \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como para todo $\alpha < \mathfrak{c}$ a imagem de s_α está em C_α, temos que para cada $n < \omega$, $s_\alpha(n) = x_\beta$ com $\beta < \alpha$, então a recursão está bem definida. Pela definição teremos que $L(x_\alpha, n) \subseteq C_{\alpha+1}$.

Afirmação 1.3.18. *A família $\{L(x, n) : x \in C, \ n < \omega\}$ é uma base para uma topologia σ em C, e $\rho_C \subseteq \sigma$*

Demonstração. Iremos mostrar por indução em $\alpha < \mathfrak{c}$ que para todo $n < \omega$, e $x \in L(x_\alpha, n)$, existe $m > n$ tal que $L(x, m) \subseteq L(x_\alpha, n)$.

Se $\alpha < \omega$ pela definição $L(x_\alpha, n) = \{x_\alpha\}$, portanto é direto.

Suponha $\alpha \leq \omega$ e para todo $\beta < \alpha$ vale que para todo $n < \omega$ e $x \in L(x_\beta, n)$ existe $m < \omega$ tal que $L(x, m) \subseteq L(x_\beta, n)$. Pela definição, se $x \in L(x_\alpha, n)$, ou $x = x_\alpha$, e então $L(x, n) = L(x_\alpha, n)$, ou existe $m > n$ tal que $x \in L(s_\alpha(k), k)$ e nesse caso, como $s_\alpha(k) \in C_\alpha$, existe $m < \omega$ tal que

$$L(x, m) \subseteq L(s_\alpha(k), k) \subseteq L(x_\alpha, n)$$

Como queríamos.

Assim se $z \in L(x, n) \cap L(y, m)$, então existem $k, l < \omega$ tais que $L(z, k) \subseteq L(x, n)$ e $L(z, l) \subseteq L(y, m)$, $N = k + l$, então

$$L(z, N) \subseteq L(z, k) \cap L(z, l) \subseteq L(x, n) \cap L(y, m)$$

Então a família de fato é uma base para uma topologia, onde $\{L(x, n) : n < \omega\}$ é uma base local de $x \in C$.

A fim de verificar que $\rho_C \subseteq \sigma$, basta provar que para cada $x \in C$ e $n < \omega$ vale que $L(x, n) \subseteq E(x, n)$, como $\{E(x, n) \ : \ n < \omega\}$ é uma base local de x em (C, ρ_C).

Tomando $x = x_\alpha$, faremos por indução em $\alpha < \mathfrak{c}$. Se $\alpha < \omega$, temos definido $L(x, n) = \{x\}$.

Caso contrário, suponha que para todo $\beta < \alpha$ e $j < \omega$ vale $L(x_\beta, j) \subseteq E(x_\beta, j)$. Tomemos $m > n$, então $s_\alpha(m) \in E(x_\alpha, n)$. Assim $L(s_\alpha(m), m) \subseteq E(s_\alpha(m), m) \subseteq E(s_\alpha(m), n) \subseteq E(x, n)$. Portanto pela definição temos $L(x, n) \subseteq E(x, n)$. □

Verifiquemos agora as propriedades que queríamos de (C, σ).

Afirmação 1.3.19. *(C, σ) é um espaço de Hausdorff localmente compacto, localmente enumerável, 0-dimensional e separável*

Demonstração. Iremos provar por indução em $\alpha < \mathfrak{c}$ que para todo $n < \omega$ o conjunto $L(x_\alpha, n)$ é compacto e enumerável.

Se $\alpha < \omega$, $L(x_\alpha, n)$ é unitário e portanto compacto e enumerável.

Se $\alpha \in \mathfrak{c} \setminus \omega$, suponha que para todo $\beta < \alpha$ e $j < \omega$ que $L(x_\beta, j)$ é enumerável e compacto. Como $L(x_\alpha, n) = \{x_\alpha\} \cup \bigcup_{j>n} L(s_\alpha(j), j)$ pela hipótese de indução e $s_\alpha(j) \in C_\alpha$, temos que $L(x_\alpha, n)$ é enumerável.

Se $\mathcal{A}$ é uma cobertura aberta de $L(x_\alpha, n)$, então existe $m < \omega$ e $A \in \mathcal{A}$ tais que $L(x_\alpha, m) \subseteq A$. Segue que

$$L(x_\alpha, n) \setminus A \subseteq \bigcup_{j=n+1}^{m} L(s_\alpha(j), j)$$

União finita de compactos pela hipótese de indução, logo existe $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ finito tal que $L(x_\alpha) \subseteq A \cup \bigcup \mathcal{A}'$. Portanto $L(x_\alpha, n)$ é compacto.

Como (C, σ) é de Hausdorff, todo subespaço compacto é um subconjunto fechado, em particular, para todo $x \in C$ e $n < \omega$ a vizinhança $L(x, n)$ é fechada, logo a base do espaço é de abertos-fechados.

Notemos que para $\alpha \in \mathfrak{c} \setminus \omega$ e $n < \omega$, existe $m > n$ tal que $s_\alpha(m) \in Q \cap L(x_\alpha, n)$, pois s_α foi fixada tal que existem infinitos $j < \omega$ tal que $s_\alpha(j) \in Q$. Portanto Q é denso em (C, σ). □

Afirmação 1.3.20. *Se $K \in \mathcal{K}$, então $|\bigcap_{n<\omega} \overline{K(n)}^{\sigma}| = \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Seja $\gamma < \mathfrak{c}$ tal que $K = K_\gamma$. Para cada $n < \omega$, existe $m > n$ tal que $s_{\phi(\gamma)}(m) \in K_\gamma(n)$. Portanto $x_{\phi(\gamma)} \in \bigcap_{n<\omega} \overline{K_\gamma(n)}^{\sigma}$.

Como existem $\mathfrak{c}$ diferentes γ tais que $K = K_\gamma$ e ϕ é injetor teremos que a interseção dos fechos tem cardinalidade $\mathfrak{c}$. □

Afirmação 1.3.21. *(C, σ) não é de Lindelöf, mas tem extent enumerável.*

Demonstração. Não ser de Lindelöf é consequência dele ser um espaço localmente enumerável que não é enumerável.

Seja $A \subseteq C$ não enumerável, então $|\overline{A}^{\rho_C}| = \mathfrak{c}$. Seja $E \subseteq A$ enumerável tal que $\overline{E}^{\rho_C} = \overline{A}^{\rho_C}$, então a sequência constante E está em $\mathcal{K}$ e portanto $|\overline{E}^{\sigma}| = \mathfrak{c}$, ou seja, E tem ponto de acumulação em respeito a σ, que também será de acumulação de A. Ou seja, todo conjunto não enumerável tem ponto de acumulação. □

Assim teremos $e(C, \sigma) < \ell(C, \sigma)$, logo não é um D-espaço (1.2.18).

Consideremos a família $\tau = \{V \cup A : V \in \rho,\ A \in \sigma\}$. Ela será uma topologia sobre $\mathbb{R}$, pois ρ é uma topologia sobre $\mathbb{R}$, e se $V \in \rho$, então $V \cap C \in \sigma$, que é topologia sobre C.

Afirmação 1.3.22. *$(\mathbb{R}, \tau)$ é Lindelöf regular.*

Demonstração. Notemos que τ é Hausdorff pois $\rho \subseteq \tau$ e ρ é uma topologia de Hausdorff. Notemos também que se $x \in C$, então ele tem vizinhança compacta $L(x, 0)$ e se $x \in \mathbb{R} \setminus C$, temos que $\{]x - 2^{-n}, x + 2^{-n}[: n < \omega\}$ é base local de x.

Como para $Z = \mathbb{R} \setminus C$ temos $\tau_Z = \rho_Z$, ele é de Lindelöf, então se $\mathcal{A} \subseteq \tau$ recobrimento de $\mathbb{R}$, existe subconjunto enumerável $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A} \cap \rho$ que cobre Z. $F = \mathbb{R} \setminus \bigcup \mathcal{A}' \subseteq C$ é fechado relativo a ρ, logo ele é enumerável. Portanto existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ subrecobrimento enumerável. □

Afirmação 1.3.23. *$(\mathbb{R}, \tau)$ é um D-espaço.*

Demonstração. Seja ϕ *ona* de $\mathbb{R}$ tal que $\phi(x) \in \rho$ se $x \notin C$ e $\phi(x) \in \sigma$ se $x \in C$.

Tomando Z como no anterior, temos que existe $D_0 \subseteq Z$ fechado discreto no subespaço tal que $Z \subseteq \phi(D_0)$. Notemos que $C \in \tau$, logo D_0 é fechado discreto para τ. Tomando $F = \mathbb{R} \setminus \phi(D_0)$ ele será enumerável, primeiro enumerável, normal e localmente compacto, logo ele é metrizável e portanto D-espaço (1.2.12). Tomemos $D_1 \subseteq F$ fechado discreto tal que $F \subseteq \phi(D_1)$.

Assim $D_0 \cup D_1$ é núcleo fechado discreto de ϕ. □

Definindo o conjunto $\Delta_C = \{(x, x) : x \in C\}$, se $(x, y) \in (\mathbb{R}, \tau) \times (C, \rho_C) = (M, \lambda)$ tal que $(x, y) \notin \Delta_C$, se $x \neq y$, como $(\mathbb{R}, \rho)$ é Hausdorff, existe vizinhança aberta de (x, y) que é disjunta de Δ_C. Se $x = y$, então $(x, y) \in \Delta_C$, logo provamos que $\Delta_C \subseteq M$ é fechado.

Afirmação 1.3.24. *$(\Delta_C, \lambda_{\Delta_C})$ é homeomorfo a (C, σ).*

Demonstração. Consideremos a função bijetora $h : \Delta_C \longrightarrow C$ definida por $h(x, x) = x$. Notemos que $h^{-1}[A] = A \times C \cap \Delta_C$, logo é h contínua pois $\sigma \subseteq \tau$. Notemos que $A \times B \cap \Delta_C = (A \cap B)^2 \cap \Delta_C$, assim se $A \in \tau$ e $B \in \rho_C$, temos que $A \cap B \in \sigma$, logo h é aberta. Então a função h é homeomorfismo. □

Portanto $(\Delta_C, \lambda_{\Delta_C})$ é um subespaço fechado do produto de um espaço métrico separável (C, ρ_C) com um D-espaço regular de Lindelöf $(\mathbb{R}, \tau)$ que não é D-espaço. Logo o produto não é um D-espaço (1.3.3).

1.4 Teoremas de Adição

Essa seção se dedica a explorar da união de espaços com a propriedade D.

Proposição 1.4.1. *Seja X espaço topológico tal que $X = Y \cup Z$, onde Y e Z são D-espaços e Y é fechado. Então X é um D-espaço.*

Demonstração. Seja ϕ *ona* de X. Tomamos $D_0 \subseteq Y$ fechado discreto tal que $Y \subseteq \phi(D_0)$ e $D_1 \subseteq Z \setminus \phi(D_0)$ fechado e discreto (no subespaço Z) tal que $Z \setminus \phi(D_0) \subseteq \phi(D_1)$. Definimos $D = D_0 \cup D_1$, claramente é núcleo de ϕ. Seja $x \in X$, se $x \in \phi(D_0)$ então, como $D_0 \subseteq X$ é fechado discreto e $\phi(D_0) \cap D = D_0$, existe vizinhança aberta de x, H tal que $H \cap D \subseteq \{x\}$; caso contrário seja A vizinhança aberta de x tal que $A \cap D_1 \subseteq \{x\}$ - D_1 é fechado discreto no subespaço Z, onde x está - então $H = A \setminus D_0$ é vizinhança aberta de x tal que $H \cap D \subseteq \{x\}$. Logo D é fechado discreto. □

Questão 1.4.2 (Arhangel'skii, 2005). *Se $X = Y \cup Z$ é um espaço T_1 (de Hausdorf, regular ou de Tychonoff), onde Y e Z são subespaços com a propriedade D, então X é um D-espaço?*

Essa pergunta recebeu uma resposta parcial em Soukup e Szeptycki, 2013, onde é construído um exemplo usando o princípio $\diamond$ de um espaço de Hausdorff que é a união de dois subespaços com a propriedade D, mas que não é um D-espaço.

Proposição 1.4.3. *Se X é um espaço topológico para a qual existe uma família $\{F_n : n < \omega\}$ de subespaços fechados de X tal que $X = \bigcup_{n<\omega} F_n$ e, para cada $n < \omega$, F_n como subespaço é um D-espaço. Então X é um D-espaço.*

Demonstração. Seja ϕ uma *ona* de X, iremos construir recursivamente $\langle D_n : n < \omega \rangle$ tal que

1. $D_n \subseteq F_n$ é fechado discreto;
2. $F_n \subseteq \bigcup_{m\leq n} \phi(D_m)$;
3. $D_n \cap \phi(D_m) = \emptyset$ para $m < n$.

Assim teremos que o conjunto $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$ por *(2.)* que será núcleo de ϕ. Se $x \in \phi(D_n)$, então pelo item *(1.)*, e que a união de finitos fechados discretos é um subconjunto fechado discreto (1.1.9), temos que $H_x = X \setminus (\bigcup_{m\leq n} D_m \setminus \{x\})$ é uma vizinhança aberta de x. Assim teremos pelo item *(3.)* que $\phi(D_n) \cap H_x$ é uma vizinhança aberta de x tal que:

$$(\phi(D_n) \cap H_x) \cap D \subseteq \{x\}$$

Logo D é um núcleo fechado discreto de ϕ.

A recursão começa com ϕ_{F_0} *ona* parcial de F_0 induzida por ϕ. Seja então $D_0 \subseteq F_0$ núcleo fechado discreto de ϕ_{F_0}. Assumindo fixados D_m para cada $m < n$, definimos $K_n = F_n \setminus \phi(\bigcup_{m<n} D_m)$ subespaço fechado de um D–espaço, logo é D-espaço. Se $K_n = \emptyset$ tomamos $D_n =$, caso contrário, tomamos D_n núcleo fechado discreto da *ona* parcial ϕ_{K_n} de K_n induzida pela ϕ.

Pelo lema 1.3.2, como F_0 e cada K_n são fechados, os conjuntos D_n são fechados discretos de X, e como definimos D_n como núcleo da *ona* parcial respectiva, seguem as propriedades *(2.)* e *(3.)*. □

Notemos então que segue de 1.4.3 e 1.3.3 que:

Corolário 1.4.4. *Se X é D-espaço, todo subespaço F_σ dele é D–espaço.*

Vimos que se X for a união enumerável de compactos, basta que ele seja T_1 para que satisfaça a propriedade D, ou seja, os subespaços não precisam ser fechados. Perguntamos então se poderíamos repetir uma argumentação similar para união finita de D-espaços, ou mesmo enumerável. Qualquer exemplo finito ou enumerável que não é D-espaço é um exemplo que para valer essa propriedade, ao menos precisamos assumir T_1.

Acerca da união de D-espaços, uma questão é se ele preservaria $e(X) = \ell(x)$, que verificamos que vale no caso de número de Lindelöf regular em 2.2.15. Alternativamente, podemos examinar se ele preserva a equivalência entre enumeravelmente compacto e compacidade.

Questão 1.4.5 (Arhangel'skii, 2004). *Se X é a união de dois (enumeráveis) subespaços com a propriedade D e que é enumeravelmente compacto, então X é compacto?*

Apresentamos uma resposta positiva dessa pergunta em 2.2.13, utilizando uma propriedade relacionada aos D-espaços.

Proposição 1.4.6. *Se $\{(X_s, \tau_s) : s \in S\}$ família de D-espaços. Então $X = \bigoplus_{s\in S} X_s$ é um D-espaço*

Demonstração. Como $\bigcup_{s\in S} \tau_s$ é base da topologia de X, podemos considerar que $\phi(x) \in \tau_s$ se $x \in X_s$. Então $\phi_{|_s}$ é *ona* em X_s, tomemos $D_s \subseteq X_s$ um núcleo fechado discreto dela. O conjunto $\bigcup_{s\in S} D_s$ é um núcleo fechado discreto de ϕ. □

1.5 Exemplo Original

Iremos aqui explorar o exemplo inicial apresentado em Douwen e Pfeffer, 1979, e resultados posteriores. Eles mostram que todo produto finito de retas de Sorgenfrey são D-espaços (1.5.24). Caux, 1981 verifica ainda que esses espaços são hereditariamente D-espaço, ou seja, todo subespaços deles é um D-espaço (1.5.24).

Definição 1.5.1 (Sorgenfrey, 1947)**.** *A* reta de Sorgenfrey*, à qual nos referiremos pela letra $\mathbb{S}$, é o espaço topológico sobre o conjunto dos reais com a topologia que tem como base a família*

$$\{[x, y[: x, y \in \mathbb{R} \wedge x < y\}$$

Notemos que se $x < y$ na reta real, para todo $z \in]x, y[$, vale que $[z, y[\subseteq]x, y[$, consequentemente todo aberto na topologia usual é também aberto da reta de Sorgenfrey.

Ela foi introduzida em Sorgenfrey, 1947 como um exemplo de um espaço Hausdorff paracompacto cujo produto topológico com si mesmo não é normal, e portanto não é paracompacto. Desde então ela se tornou um dos mais importantes contraexemplos da toplogia geral.

Em Douwen e Pfeffer, 1979 foi estudada se era um D-espaço, com a possibilidade de ser um espaço de Lindelöf regular que não é D-espaço.

Lema 1.5.2. *Sejam $\alpha < \omega_1$ e uma sequência crescente $\langle x_\beta : \beta < \alpha\rangle$ em $\mathbb{R}$. Então o conjunto $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ é fechado discreto em $\mathbb{S}$.*

Demonstração. Para $x \in \mathbb{S}$, se $\forall\beta < \alpha(x_\beta \leq x)$, então $[x, +\infty[$ é vizinhança de x que encontra no máximo um elemento de $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$. Caso contrário, fixemos $\beta(x) < \alpha$ o menor tal que $x < x_{\beta(x)}$, assim teremos que $[x, x_{\beta(x)}[$ é vizinhança de x que encontra no máximo um elemento de $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$, que seria $x_{\beta(x)-1}$ se existir $\beta(x) - 1$. □

Vamos também reduzir o problema ao subespaço $\mathbb{I} = [0, 1[\subseteq \mathbb{S}$, pois assim teremos as seguintes propriedades:

Lema 1.5.3. *Se $A \subseteq \mathbb{I}$ não vazio, então* $\inf A \in \mathbb{I}$ *e se A é fechado, então* $\inf A \in A$.

Demonstração. O conjunto A é limitado inferiormente por 0, logo ele possui ínfimo, que será maior ou igual a 0. Seja $a = \inf A$, então para todo $b > a$, existe $x \in A$ tal que $a \leq x < b$, e portanto $A \cap [a, b[\neq \emptyset$. Segue que a é ponto de aderência de A. □

Essa mudança está justificada pois:

Lema 1.5.4. *O espaço $\mathbb{S}$ é um D-espaço se, e somente se, $\mathbb{I}$ é um D-espaço.*

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{Z}$, o subespaço $[z, z+1[\subseteq \mathbb{S}$ é aberto e homeomorfo a $\mathbb{I}$. Notemos também que $\{[z, z+1[: z \in Z\}$ é uma partição de $\mathbb{S}$, logo vale que

$$\mathbb{S} = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}} [z, z+1[\cong \bigoplus_{n<\omega} \mathbb{I}$$

Notemos que $\{[z, z+1[: z \in Z\}$ ser uma partição implica que $\mathbb{I}$ é fechado. Logo a equivalência segue de 1.3.3 e 1.4.6. □

Lema 1.5.5. *$\mathbb{I}$ é um D-espaço.*

Demonstração. Consideremos uma *ona* qualquer em $\mathbb{I}$ ϕ. A fim da construção que faremos definimos $\phi(1) = \emptyset$ Iremos definir por recursão uma sequência $\langle x_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$, da seguinte maneira

- x_0=0;
- Para $\alpha < \omega_1$, se $\bigcup_{\beta<\alpha} \phi(x_\beta) = \mathbb{I}$, então $x_\alpha = 1$. Caso contrário, $x_\alpha = \min(\mathbb{I} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \phi(x_\beta))$.

Notemos que se $x_\alpha = 1$, para algum $\alpha < \omega_1$, então para todo $\beta \geq \alpha$, $x_\beta = 1$. Notemos também que se $x_\alpha < 1$, então $x_\alpha < x_\beta$ para todo $\beta > \alpha$. Portanto, se para $\gamma \leq \omega_1$ vale que $x_\alpha < 1$ para todo $\alpha < \gamma$, então $\langle x_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ é estritamente crescente. Se existisse uma ω_1-sequência estritamente crescente na reta real, então, ao tomar o fecho dela, teríamos um subespaço na reta homeomorfo ao espaço ω_1 com a topologia da ordem, que não é de Lindelöf, o que seria um absurdo. Logo existe $\alpha < \omega_1$ tal que $x_\alpha = 1$. Fixemos $\gamma < \omega_1$ o menor tal que $x_\gamma = 1$.

Portanto $\{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$ é núcleo fechado discreto de ϕ. □

Teorema 1.5.6. *O espaço $\mathbb{S}$ é um D-espaço.*

Notemos que essa prova envolve somente algumas das propriedades de $\mathbb{I}$, iremos então definir uma classe de espaços onde o análogo da prova acima se aplicará.

Definição 1.5.7. *Um espaço topológico X é dito* GLS *(generalized left-separated) se ele admite uma relação binária reflexiva $\leq$, tal que*

1. *$\mapsto x = \{y \in X : x \leq y\} \subseteq X$ é aberto;*
2. *Todo fechado não vazio de X tem elemento $\leq$-minimal.*

Teorema 1.5.8. *Todo espaço GLS T_1 é um D-espaço.*

Demonstração. Sejam X um espaço GLS e $\leq$ a relação que verifica a propriedade. Consideremos uma *ona* qualquer ϕ em X, e a refinamos para ψ definida por

$$\psi(x) = \phi(x) \cap \mapsto x,\ x \in X$$

Consideremos ∞ um ponto que não é elemento de X, e definimos $\psi(\infty) = \emptyset$. Seja $\kappa = |X|^+$, definimos recursivamente $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ por:

- Para cada $\alpha < \kappa$, se $\bigcup_{\beta<\alpha} \psi(x_\beta) = X$, definimos $x_\alpha = \infty$. Caso contrário, fixamos x_α um dos $\leq$-minimais de $X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \psi(x_\beta)$.

Notemos que se para $\alpha < \kappa$, $x_\alpha = \infty$, então $x_\beta = \infty$ para todo $\beta \geq \alpha$. Notemos também que se $\alpha < \kappa$ é tal que $x_\alpha \neq \infty$, então $x_\alpha \neq x_\beta$ para todo $\beta < \kappa$ distinto de α. Portanto, como $\kappa > |X|$, existe $\alpha < \kappa$ tal que $x_\alpha = \infty$, fixemos $\gamma < \kappa$ o menor que satisfaz isso.

Considere $D = \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$, pela definição de γ ele é núcleo de ψ, e portanto é núcleo de ϕ. Como é núcleo, basta verificarmos que $\psi(x) \cap D = \{x\}$ para todo $x \in D$ a fim de provar que D é fechado discreto. Seja $\alpha < \gamma$, para todo $\beta < \alpha$, como $x_\alpha \notin \bigcup_{\mu<\alpha} \psi(x_\mu)$, em particular $x_\alpha \in X \setminus \bigcup_{\mu<\beta} \psi(x_\mu)$, onde x_β é minimal, logo $x_\alpha \not\leq x_\beta$, e assim $x_\beta \notin \psi(x_\alpha)$. Pela definição temos que se $\alpha < \beta < \gamma$, $x_\beta \notin \psi(x_\alpha)$.

Logo $x_\beta \in \psi(x_\alpha)$ se, e somente se, $\beta = \alpha$, verificando que D é um núcleo fechado discreto, pois para todo $x \in X$ existe $\alpha < \gamma$ tal que $x \in \psi(x_\alpha)$ que será uma vizinhança que encontra somente um elemento de D. □

Como verificado em Lutzer, 1972 toda potência finita (e a enumerável) de espaços retas de Sorgenfrey é subparacompacta, então foi estudada a possibilidade dessas potências serem exemplos de espaços de Hausdorff subparacompactos que não são D-espaços.

Verifiquemos então que:

Teorema 1.5.9. *Para $n \in \mathbb{N}$, o espaço $\mathbb{I}^n$ é GLS.*

Demonstração. Quando $n = 1$ é já verificamos. Para $x \in \mathbb{I}^n$, usaremos a notação $x = \langle x(0), ..., x(n-1)\rangle$. Definimos $\leq$ relação em $\mathbb{I}^n$ por

$$x \leq y \leftrightarrow x(j) \leq y(j) \forall j < n$$

Ela é uma ordem parcial, logo é reflexiva e transitiva. Temos também que

$$\{y \in \mathbb{I} : x \leq y\} = \Pi_{j<n}[x(j), 1[$$

É um conjunto aberto.

Seja $C \subseteq \mathbb{I}^n$ $\leq$-cadeia não vazia. Para cada $j < n$, fixemos $m(j) = \sup\{x(j) : x \in C\} \in \mathbb{I}$ e $m = \langle m(j) : j < n\rangle \in \mathbb{I}^n$. Claramente m é cota inferior de C. Basta então verificar $m \in \overline{C}$. Para $\varepsilon > 0$ e para cada $j < n$, temos $x^j \in C$ tal que $x^j(j) \in [m(j), m(j)+\varepsilon[$. Como C é cadeia, existe $k < n$, tal que x^k é o menor de todos. Por construção, para cada $j < n$, $m(j) \leq x^k(j) \leq x^j(j) < m(j) + \varepsilon$. Logo $x^k \in \Pi_{j<n}[m(j), m(j)+\epsilon[$. Portanto $m \in \overline{C}$.

Assim se $F \subseteq \mathbb{I}$ é um fechado, pelo anterior toda $\leq$-cadeia tem cota inferior em F, assim pelo lema de Zorn existe um elemento $\leq$-minimal de F. □

Como resultado obtemos:

Teorema 1.5.10. *Para $n \in \mathbb{N}$, o espaço $\mathbb{I}^n$ é um D-espaço.*

Consequentemente teremos

Teorema 1.5.11. *Para $n \in \mathbb{N}$, o espaço $\mathbb{S}^n$ é um D-espaço.*

Demonstração. Basta notar que $\mathbb{S}^n$ é a soma topológica de cópias de $\mathbb{I}^n$ por

$$\mathbb{S}^n = \bigoplus\{[z_0, z_0+1[\times \ldots \times [z_{n-1}, z_{n-1}+1[: \langle z_i : i < n\rangle \in \mathbb{Z}^n\}$$

Segue então que ele é um D-espaço da proposição 1.4.6. □

No entanto, essa linha de argumentação não vale para subespaços da reta de Sorgenfrey, pois como apontado em DOUWEN e PFEFFER, 1979, subespaço dos irracionais da reta de Sorgenfrey $T = \mathbb{S} \cap \mathbb{P}$ não é GLS.

O artigo DOUWEN e PFEFFER, 1979 faz referência a um artigo que os mesmos autores estavam preparando, onde teria a prova que todo subespaço da reta de Sorgenfrey é um D-espaço. No entanto, não há qualquer referência de que esse artigo foi de fato publicado, de maneira que não encontramos uma prova de tal fato na literatura. Segue aqui uma demonstração dele desenvolvida por nós, baseada demonstração de que *todo GOS paracompacto é D-espaço* (4.4.1) feita em DOUWEN e LUTZER, 1997.

A fim de simplificar as contas, vejamos que podemos reduzir a nossa demonstração para o subespaço $\mathbb{I}$, análogo aos anteriores:

Lema 1.5.12. *A reta de Sorgenfrey é hereditariamente D se, e somente se, o subespaço $\mathbb{I}$ é hereditariamente D.*

Demonstração. Se $\mathbb{S}$ é hereditariamente D, por definição todo subespaço de $\mathbb{I}$ é também subespaço de $\mathbb{S}$, e portanto D-espaço.

Se $X \subseteq \mathbb{S}$ é subespaço, então como $\mathbb{S}$ é a soma de subespaços homeomorfos a $\mathbb{I}$ o espaço X é a soma topológica de subespaços de $\mathbb{I}$, e portanto também será um D-espaço. □

Consideremos $X \subseteq \mathbb{I}$ e uma *ona* parcial básica ϕ de X em $\mathbb{I}$, ou seja, para todo $x \in X$ existe $f(x) \in]x, 1[$ tal que $\phi(x) = [x, f(x)[$.

Definição 1.5.13. *Seja $Y \subseteq X$ subconjunto tal que $\phi(Y) = Y$. Um par (D, δ) é dito ϕ-*aceitável *a Y se:*

1. *$D \subseteq Y$ e $\delta : D \longrightarrow \wp(Y)$ onde para cada $d \in D$, $d \in \delta(d) = [d, g_\delta(d)[$ com $d < g_\delta(d) \leq f(d)$;*
2. *Para cada $d, d' \in D$ distintos $\delta(d) \cap \delta(d') = \emptyset$;*
3. *Se para $x \in Y$, temos $\phi(x) \cap \delta(D) \neq \emptyset$, então $x \in \delta(D)$.*

Seguem direto da definição que se (D, δ) é um par ϕ-aceitável a Y, então $\delta(D)$ é aberto e fechado e D é fechado discreto em Y.

Lema 1.5.14. *Sejam um subconjunto aberto e fechado $Y \subseteq X$ tal que $\phi(Y) = Y$ e um ponto dele p. Então existe um par (D, δ) ϕ-aceitável a Y com $p \in D$.*

Demonstração. Definimos $D_0 = \{p\}$. Por recursão finita construímos $\langle D_n : n < \omega \rangle$ com:

Fixado D_n conjunto não vazio, definimos

$$A_n = \{y \in Y : \forall d \in D_n (y < d) \wedge \phi(y) \cap D_n \neq \emptyset\}, \; a_n = \inf A_n$$

Se $A_n = \emptyset$, então $D_m = \emptyset$ para todo $m > n$, caso contrário definimos

- Se $a_n \in A_n$, definimos $D_{n+1} = \{a_n\}$
- Se $a_n \in Y \setminus A_n$, fixamos $b_n \in \phi(a_n) \cap A_n$ qualquer e definimos $D_{n+1} = \{a_n, b_n\}$
- Se $a_n \notin X$, fixamos um sequência estritamente decrescente contida em A_n $\langle c_n(j) : j < \omega \rangle$ tal que $\inf_{j<\omega} c_n(j) = a_n$ e definimos $D_{n+1} = \{c_n(j) : j < \omega\}$

Notemos que cada nível D_n não vazio é fechado em X, tem máximo e se $n < m < \omega$, então $\inf D_n > \max D_m$. $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$. Definimos δ por

- $\delta(p) = \phi(p)$
- Se $D_{n+1} = \{a_n\}$, então $\delta(a_n) = [a_n, \inf D_n[$
- Se $D_{n+1} = \{a_n, b_n\}$, então $\delta(a_n) = [a_n, b_n[$ e $\delta(b_n) = [b_n, \inf D_n[$
- Se $D_{n+1} = \{c_n(j) : j < \omega\}$, então $\delta(c_n(0)) = [c_n(0), \inf D_n[$ e $\delta(c_n(j+1)) = [c_n(j+1), c_n(j)[$.

A função δ tem valores vizinhanças abertas contidas nas definidas por ϕ. Notemos que se $d < d'$ ambos em D, então $\sup \delta(d) \leq d'$, ou seja, $\delta(d) \cap \delta(d') = \emptyset$.

Seja $x \in Y$. Se $x > z$ para todo $z \in \delta(D)$, então vale que $\delta(D) \cap \phi(x) = \emptyset$.

Se não existe $d \in D$ tal que $x \leq d$, então $x \geq p$. Se $x \notin \delta(p)$, então $x \geq f(p)$, e $\phi(x) \cap \phi(p) = \emptyset$.

Se existe $d \in D$ tal que $x < d$ e existe $z \in \delta(D)$ tal que $z < x$, então se $z \in \delta(d')$, $d' < x < d$. Então tomando $n < \omega$ tal que $d' \in D_n$, então para todo $m > n$ se $y \in D_m$, então $y < x$. Portanto fixemos $k < \omega$ o maior tal que existe $d \in D_k$ maior que x. Se existe $d' \in D_k$ tal que $d' < x$, então $x \in \delta(D_k)$, caso contrário, então $x \in \delta(D_{k+1})$.

Se $x < z$ para todo $z \in \delta(D)$ e $\phi(x) \cap \delta(D) \neq \emptyset$, fixemos $N < \omega$ o menor tal que $\phi(x) \cap \delta(D_N) \neq \emptyset$, notemos que pela construção isso implica que $\phi(x) \cap D_N \neq \emptyset$. Portanto $x \in A_N$, mas isso implica que existe $z \in D_{N+1}$ menor que x.

Logo se $x \in Y$ tal que $\phi(x) \cap \delta(D) \neq \emptyset$, então $x \in \delta(D)$. Ou seja, (D, δ) é ϕ-aceitável a Y, como queríamos. □

Lema 1.5.15. *Existe um par ϕ-aceitável a X maximal em respeito à inclusão das funções.*

Demonstração. Pelo lema anterior sabemos que existe um par ϕ-aceitável a X. Seja uma cadeia de pares ϕ-aceitáveis a X, ou seja $\mathcal{C} = \{(D_s, \delta_s) : s \in S\}$ tal que para $s, s' \in S$ ou $\delta_s \subseteq \delta_{s'}$ ou $\delta_{s'} \subseteq \delta_s$.

A união $\delta = \bigcup_{s\in S} \delta_s$ é uma função bem definida com domínio $D = \bigcup_{s\in S} D_s$. Notemos que (D, δ) satisfazem a propriedade (1.) de ser aceitável. Se $d, d' \in D$, então existe $s \in S$ tal que $d, d' \in D_s$, e portanto $\delta(d) = \delta_s(d)$ e $\delta(d') = \delta_s(d')$, assim o par satisfaz a propriedade (2.). Consideremos $x \in X$ e $d \in D$ tais que $\phi(x) \cap \delta(d) \neq \emptyset$, tomando $s \in S$ tal que $d \in D_s$, temos que $x \in \delta_s(D_s) \subseteq \delta(D)$. Logo (D, δ) é ϕ-aceitável a X.

Podemos, portanto, aplicar o lema de Zorn nessa ordem para determinar que existe um par (D, δ) ϕ-aceitável a X maximal. □

Lema 1.5.16. *Se um par ϕ-aceitável a X não cobre X, então ele admite extensão própria.*

Demonstração. Suponha um par (D, δ) ϕ-aceitável a X tal que $X \setminus \delta(D) \neq \emptyset$. Se fixarmos $p \in X \setminus \delta(D)$, o lema 1.5.14 garante que existe um par (E, ε) ϕ-aceitável a $X \setminus \delta(D)$ tal que $p \in E$.

A fim de verificar $(D \cup E, \delta \cup \varepsilon)$ é ϕ-aceitável a X, basta ver que se $x \in X$ é tal que $\phi(x) \cap (\delta(D) \cup \varepsilon(E))$, então se $\phi(x) \cap \delta(D)$, por de aceitável a X, $x \in \delta(D)$. Caso contrário, $x \in X \setminus \delta(D)$ e $\phi(x) \cap \varepsilon(E) \neq \emptyset$, que por sua vez implica $x \in \varepsilon(E)$. □

Teorema 1.5.17. *Seja $X \subseteq \mathbb{I}$, então X é um D-espaço.*

Demonstração. Seja ψ uma *ona* de X, como $\mathcal{B} = \{[x, y[: 0 \leq x < y < 1,\ x, y \in X\}$ é base de abertos de X, fixamos $x \in \phi(x) \in \mathcal{B}$ para cada $x \in X$ tal que $\phi(x) \subseteq \psi(x)$.

Tomemos (D, δ) um ϕ-aceitável a X maximal. Então $X = \delta(D) \subseteq \phi(D) \subseteq \psi(D)$, ou seja, D é núcleo fechado discreto de ψ. $\square$

Então levantaram se $\mathbb{S}^2$ seria um D-espaço, ou se o quadrado do subespaço dos irracionais seria D-espaço. Iremos aqui apresentar a demonstração de que todo produto finito de retas de Sorgenfrey é hereditariamente D-espaço, baseada na feita em Caux, 1981

Antes, algumas definições que serão importantes para a construção, assim como lemas.

Definição 1.5.18. *Para $n \in \mathbb{N}$, $X \subseteq \mathbb{S}^n$, $p \in X$, $i < \omega$, $k < n$ definimos*

- $l(p, i, k) = \min\{l \in \mathbb{Z} : p(k) < l2^{-i}\}$, $M(p, i, k) = l(p, i, k)2^{-i}$
- $X(p, i) = \{x \in X : \forall m < n(p(m) \leq x(m) < M(p, i, m))\} =$
  $= [p(0), M(p, i, 0)[\times \ldots \times [p(n-1), M(p, i, n-1)[$
- *Uma função ϕ definida em X tal que para cada $x \in X$, $\phi(x) \in \{X(x, j) : j < \omega\}$ é chamada de ona* centrada.
- *Para ona centrada ϕ definimos $i_\phi(p) = \min\{j < \omega : \phi(p) = X(p, j)\}$.*
- *Para ona centrada ϕ, definimos a* função miolo *dela ϕ^0 por*

$$\phi^0(x) = \{z \in X : \forall m < n(x(m) < z(m) < M(x, i_\phi(x), m))\}, \quad x \in X$$

Notemos que como definido $\{X(p, i) : x \in X, \ i < \omega\}$ é base de abertos do espaço X.

Lema 1.5.19. *Consideremos uma ona centrada ϕ em $X \subseteq \mathbb{S}^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $p \in X$.*

(i) *Se $x \in \phi^0(p)$ e $i_\phi(p) \leq i_\phi(x)$, então $\phi(x) \subseteq \phi^0(p)$;*

(ii) *Se $x \in \phi^0(p)$, $y \in \phi(p)$ tal que para todo $k < n$ temos $y(k) < x(k)$ e $i_\phi(y) \leq \phi(p)$, então $x \in \phi^0(y)$.*

Demonstração. Fixemos $j = i_\phi(x) - i_\phi(p) \geq 0$. **(i)**: Para cada $m < n$, temos que $M(p, i_\phi(p), m) = (l(p, i_\phi(p), m)2^j)2^{-i_\phi(x)}$. Logo como $x(m) < M(p, i_\phi(p), m)$, então $M(x, i_\phi(x), m) \leq M(p, i_\phi(p), m)$. Portanto de fato $\phi(x) \subseteq \phi^0(p)$.

(ii): Análogo ao argumento anterior, teremos que $M(p, i_\phi(p), m) \leq M(y, i_\phi(y), m)$ e $x(m) < M(p, i_\phi(p), m)$. Portanto $x \in \phi^0(y)$. $\square$

Lema 1.5.20. *Seja $n \in \mathbb{N}$ maior que 1 e suponha que para todo $k < n$ o espaço $\mathbb{S}^k$ é hereditariamente D. Se ϕ é uma ona centrada em $X \subseteq \mathbb{S}^n$ e temos um subconjunto fechado F em X tal que $\phi^0(F) \cap F = \emptyset$, então existe um conjunto fechado discreto $D \subseteq F$ tal que $\phi(D) \supseteq F$.*

Demonstração. Tomemos n, X, F, ϕ como no enunciado. Fixemos algumas notações, para $x, y \in X$, o conjunto $[x : y] = \{k < n : x(k)k = y(k)\}$, o conjunto $T(x) = \{z \in F : z \neq x, \ x \in \phi(z)\}$ e $n(x) = \min\{|[x : z]| : z \in T(x)\}$.

Tomemos o subconjunto $D_0 = \{x \in F : T(x) = \emptyset\}$. Para todo $z \in F$, $\phi(z) \cap D_0 \subseteq \{z\}$, assim D_0 é fechado discreto. Logo se $F \subseteq \phi(D_0)$, já verificamos a propriedade.

Supondo o contrário, definimos $F_1 = F \setminus \phi(D_0) \neq \emptyset$. É claro que para cada $x \in F_1$ temos $T(x) \neq \emptyset$ e $n(x) \geq 1$. Considerando

$$\mathcal{C} = \{T \subseteq T(x) : \forall p, q \in T((p = q \vee [x:p] \neq [x:q]) \wedge |[x:q]| = n(x))\} \neq \emptyset$$

Tomando $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ uma $\subseteq$-cadeia, $\bigcup \mathcal{A} \subseteq T(x)$, para $p, q \in \bigcup \mathcal{A}$, seja $A \in \mathcal{A}$ tal que $p, q \in A$, então se $p \neq q$ claramente vale que $[x:p] \neq [x:q]$ e os dois tem a mesma cardinalidade, logo $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{C}$. Portanto pelo lema de Zorn fixemos um $T'(x) \in \mathcal{C}$ $\subseteq$-maximal.

Como o conjunto das partes de n é finito, $T'(x)$ também será. Definimos então $\mathcal{O}(x) = \phi(x) \cap \bigcap_{z \in T'(x)} \phi(z)$ e $\Delta(x) = \{[x:y] : y \in T'(x)\}$.

Afirmação 1.5.21. *Se $p, x \in F_1$ e $p \in \mathcal{O}(x)$ e $y \in T'(x)$. Então $[p:y] \subseteq [x:y]$ e $n(p) \leq |[p:y]| \leq |[x:y]| = n(x)$.*

Podemos verificá-la notando que $p \in \phi(y)$, logo $y \in T(p)$ e assim $n(p) \leq |[p:y]|$. Para cada $k < n$, por conta de ϕ ser centrada, temos $y(k) \leq x(k) \leq p(k)$, logo $[p:y] \subseteq [x:y]$.

Definimos $j_1 = \max\{n(x) : x \in F_1\}$ e $G_1 = \{x \in F_1 : n(p) = j_1\}$. Se $x \in F_1 \setminus G_1$ e $p \in F_1 \cap \mathcal{O}(x)$, então pela afirmação anterior $n(p) \leq n(x) < j_1$, logo $\mathcal{O}(x) \cap G_1 = \emptyset$. Assim G_1 é fechado.

Como $\{\Delta(x) : x \in G_1\}$ é finito, podemos fixar $p_1 \in G_1$ tal que $\Delta(p_1)$ é $\subseteq$-minimal dessa família. Definimos $H_1 = \{p \in G_1 : \Delta(p) = \Delta(p_1)\}$.

Seja $x \in G_1 \setminus H_1$ e $p \in G_1 \cap \mathcal{O}(x)$, $n(x) = n(p) = j_1$, então, pela afirmação 1.5.21, $[p:y] = [x:y]$ para todo $y \in T'(x)$. Logo existe $z \in T'(p)$ tal que $[p:z] = [p:y]$, caso contrário $T'(p) \cup \{y\} \in \mathcal{C}$, que contradiz $T'(p)$ ser maximal. Portanto $\Delta(x) \subseteq \Delta(p)$.

Considerando que $\Delta(p_1)$ é minimal, $\Delta(x) \neq \Delta(p_1)$ e $\Delta(x) \subseteq \Delta(p)$, então $p \notin H_1$. Caso contrário, $\Delta(x) \subsetneq \Delta(p) = \Delta(p_1)$, que é um absurdo.

Logo H_1 é fechado, pois $H_1 \cap \mathcal{O}(x)$ para todo $x \in G_1 \setminus H_1$ e G_1 é fechado.

Consideremos a relação de equivalência em H_1 definida por $x \equiv y$ se, e só se, para todo $k \in \bigcup \Delta(p_1)$ vale que $x(k) = y(k)$. Considerando $\mathcal{P}_1$ a partição derivada de $\equiv$.

Se $x \not\equiv y$, então seja $k \in \bigcup \Delta(p_1)$ tal que, sem perda de generalidade, $x(k) < y(k)$. Consideremos os abertos definidos $A = \{z \in X : z(k) < y(k)\}$ e $B = \{z \in X : z(k) > x(k)\}$, temos que se $p \equiv x$, então $p \in A \setminus B$ e se $q \equiv y$, então $q \in B \setminus A$. Dessa maneira se $P \in \mathcal{P}_1$, temos que $P \subseteq X$ é fechado.

A menos de permutações, podemos assumir que $\Delta(p_1) = \{0, \ldots, j_1\}$. Consideremos a projeção:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-j_1} \\ x &\longmapsto (x(j_1), \ldots, x(n-1)), \end{aligned}$$

Ela é uma função contínua e aberta.

Para cada A, consideremos π_A a restrição da projeção. Pela definição da equivalência, π_A é uma função injetora, como é restrição, ela será contínua e aberta na imagem. Portanto $\pi_A : A \longrightarrow \pi[A]$ é um homeomorfismo.

Logo, pela hipótese de que $\mathbb{S}^m$ é hereditariamente D para todo $m < n$, A é um D-espaço. Fixemos $D(A) \subseteq A$ núcleo fechado discreto de ϕ.

Consideremos $D(H_1) = \bigcup_{A \in \mathcal{P}_1} D(A)$ que será um conjunto tal que $\phi(D(H_1)) \supseteq H_1$.

Suponha por absurdo que existe $x \in H_1$ ponto de acumulação de $D(H_1)$. Seja $A \in \mathcal{P}_1$ tal que $x \in A$. Como $D(A)$ é fechado discreto, existe $p \in \mathcal{O}(x) \cap D(H_1) \setminus D(A)$. Fixando $y \in T'(x)$ tal que existe $k \in [x:y] \in \Delta(p_1)$ com $x(k) \neq p(k)$, logo $[x:y] \setminus [p:y] \neq \emptyset$, que contradiz a afirmação 1.5.21. Logo $\mathcal{O}(x) \cap D(H_1) \subseteq D(A)$ e $D(H_1)$ é fechado discreto.

Se $G_1 \nsubseteq \phi(D(H_1))$, seja $G_2 = G_1 \setminus \phi(D(H_1))$. Definimos $p_2 \in G_2$ análogo a $p_1 \in G_1$, e $H_2 = \{x \in G_2 : \Delta(x) = \Delta(p_2)\}$. Os argumentos anteriores podem ser replicados de maneira análoga a fim de construir $D(H_2) \subseteq H_2$ fechado discreto tal que $H_2 \subseteq \phi(D(H_2))$.

De fato podemos repetir recursivamente para obter $G_{l+1} = G_l \setminus \phi(D(H_l))$, p_{l+1}, H_{l+1} e $D(H_{l+1})$. É fácil ver que se $m \neq k$ e $G_m \neq \emptyset \neq G_k$, então $\Delta(p_k) \neq \Delta(p_m)$, logo existe $l \in \mathbb{N}$, tal que $G_l \subseteq \phi(D(H_l))$. Caso contrário, definimos para cada $l \in \mathbb{N}$ um $p_l \in X$ e, como $p_l \notin H_m$ se $l \neq m$, a família $\{\Delta(p_l) : l \in \mathbb{N}\}$ é infinita, mas ela está contida em $\wp(\wp(n))$, que é finita.

Fixando $l \in \mathbb{N}$ onde $G_l \subseteq \phi(D(H_l))$, definimos:

$$D_1 = D(H_1) \cup \ldots \cup D(H_l)$$

Esse conjunto é fechado discreto e $G_1 \subseteq \phi(D_1)$

Definindo recursivamente, suponha que fixamos F_l e $D_l \subseteq F_l$, se $F_{l+1} = F_l \setminus \phi(D_l) \neq \emptyset$, então definimos j_{l+1}, G_{l+1}, D_{l+1} nele de maneira análoga à feita de j_1, G_1 e D_1 em F_1. Notemos que como $G_l \subseteq \phi(D_l)$, então, caso $F_{l+1} \neq \emptyset$, temos que $j_{l+1} < j_l$. Logo existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $F_l \subseteq \phi(D_l)$, caso contrário, teríamos uma sequência estritamente decrescente e infinita nos naturais.

O conjunto $D = D_0 \cup \ldots \cup D_l$ é fechado discreto e $F \subseteq \phi(D)$. $\square$

Lema 1.5.22. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $X \subseteq \mathbb{S}^n$ e uma ona centrada ϕ em X. Se $A \subseteq X$ é tal que $\{i_\phi(x) : x \in A\} \subseteq \{i\}$ e $\overline{A} \subseteq \phi^0(A)$. Então existe um conjunto enumerável, fechado discreto $D \subseteq A$ tal que $\phi^0(D) = \phi^0(A)$*

Demonstração. Notemos que $\phi^0[A]$ é uma família de abertos do subespaço X em $\mathbb{R}^n$ com a topologia usual, que é hereditariamente Lindelöf, logo existe $E \subseteq A$ enumerável tal que $\phi^0(E) = \phi^0(A)$.

Fixemos uma enumeração $E = \{p_n : n < \omega\}$. Definimos uma sequência $\langle n_m : m < \omega \rangle$ recursivamente por $n_m = \min\{n < \omega : \phi^0(p_n) \nsubseteq \bigcup_{k<m} \phi^0(p_{n_k})\}$. Considerando o conjunto $D = \{p_{n_m} : m < \omega\}$, teremos que $\phi^0(D) = \phi^0(E) = \phi^0(A)$.

Suponha por absurdo $x \in \overline{A}$ ponto de acumulação de D. Fixemos $m < \omega$ o menor tal que $x \in \phi^0(p_{n_m})$. Logo existe $k > m$ tal que $p_{n_k} \in \phi^0(p_{n_m})$, mas como $i_\phi(p_{n_k}) = i_\phi(p_{n_m})$, pelo lema 1.5.19 temos que $\phi^0(p_{n_k}) \subseteq \phi^0(p_{n_m})$, que contradiz a definição de n_k.

Logo D é de fato fechado discreto como queríamos. $\square$

Lema 1.5.23. *Seja $n \in \mathbb{N}$ maior que 1 e suponha que para todo $k < n$ o espaço $\mathbb{S}^k$ é hereditariamente D. Sejam $X \subseteq \mathbb{S}^n$, uma ona centrada nele ϕ, um conjunto fechado $F \subseteq X$ e $A \subseteq X$ tal que $\{i_\phi(x) : x \in A\} \subseteq \{\min\{i_\phi(y) : y \in F\}\} = \{M\}$. Então existe um subconjunto $D \subseteq F$ fechado discreto tal que $A \subseteq \phi(D)$.*

Demonstração. Se $\overline{A} \subseteq \phi^0(A)$, vale o lema anterior. Se $\phi^0(F) \cap F = \emptyset$, vale o lema 1.5.20.

Seja $G(A) = \overline{A} \setminus \phi^0(A)$. Suponha que existam $x, y \in G(A)$ com $y \in \phi^0(x)$. Logo $x \in \overline{A} \setminus A$, assim fixemos $z \in \phi(x) \cap A$ tal que para todo $m < n$ vale que $z(m) < y(m)$. Por 1.5.19, $y \in \phi^0(z) \cap A$, que contradiz a hipótese de $y \in G(A)$. Segue que $G(A) \cap \phi^0(G(A)) = \emptyset$.

Logo pelo lema 1.5.20, fixemos $D(A) \subseteq G(A)$ fechado discreto tal que $\phi(D(A)) \supseteq G(A)$. Iremos fazer por recursão transfinita $\langle V_\alpha, G_\alpha, D_\alpha : \alpha < |A|^+\rangle$

- $V_0 = A,\ G_0 = G(A),\ D_0 = D(A)$
- $V_\alpha = A \setminus \phi(\bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta)$. Se $V_\alpha = \emptyset$, então $G_\alpha = D_\alpha = \emptyset$.
  Se $\overline{V_\alpha} \subseteq \phi^0(V_\alpha)$, pelo lema anterior, fixemos $D_\alpha \subseteq V_\alpha$ enumerável fechado discreto tal que $V_\alpha \subseteq \phi(D_\alpha)$ e definimos $G_\alpha = D_\alpha$.
  Caso contrário, $G_\alpha = \overline{V_\alpha} \setminus \phi^0(V_\alpha)$, notemos que $G_\alpha \cap \phi^0(G_\alpha) = \emptyset$, por argumento análogo ao de $G(A)$. Logo pelo lema 1.5.20 fixemos $D_\alpha \subseteq G_\alpha$ fechado discreto tal que $G_\alpha \subseteq \phi(D_\alpha)$.

Notemos que se $V_\alpha \neq \emptyset$ para $\alpha < |A|^+$, temos que $A \cap \phi(D_\alpha) \setminus \phi(\bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta) \neq \emptyset$. Dessa maneira, como estamos pegando subconjuntos de A, tem que existir $\gamma < |A|^+$ tal que $V_\gamma = \emptyset$. Caso contrário, para cada $\alpha < |A|^+$, fixemos $d_\alpha \in A \cap \phi(D_\alpha) \setminus \phi(\bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta)$, então $\{d_\alpha : \alpha < |A|^+\} \subseteq A$, mas tem cardinalidade maior que $|A|$. Fixemos $\lambda = \min\{\gamma < |A|^+ : V_\gamma = \emptyset\}$.

Notemos que se $\alpha + 1 < \lambda$, então $V_\alpha \nsubseteq \phi(D_\alpha)$ e, portanto, $G_\alpha = \overline{V_\alpha} \setminus \phi^0(V_\alpha)$.

Tomemos $D = \bigcup_{\alpha<\lambda} D_\alpha$. Pela definição de λ e de V_λ, notemos que $A \subseteq \phi(D)$. Dados $\beta < \alpha < \lambda$, temos que $D_\alpha \subseteq \overline{V_\alpha} \subseteq F \setminus \phi(\bigcup_{\gamma<\alpha} D_\gamma)$, em particular, $D_\alpha \cap \phi(D_\beta) = \emptyset$.

Notemos que se $p \in \phi(D_\alpha)$ é ponto de acumulação de D, então podemos fixar $p_\gamma \in D_\gamma$ para cada $\gamma < \alpha$ tais que p é ponto de acumulação do conjunto $\{p_\gamma : \gamma < \alpha\}$.

Sejam $\gamma < \beta < \alpha < \lambda$, então por uma observação anterior $D_\gamma \subseteq \overline{V_\gamma} \setminus \phi^0(V_\gamma)$. Ou seja, $p_\gamma \notin \phi^0(V_\gamma)$, no entanto $p_\beta \in \phi^0(V_\gamma)$. Caso contrário, como $V_\beta \subseteq V_\gamma$, teríamos que $p_\beta \in G_\gamma$, mas $D_\beta \cap G_\gamma \subseteq D_\beta \cap \phi(D_\gamma) = \emptyset$.

Supondo por absurdo que p é ponto de acumulação de $\{p_\gamma : \gamma < \alpha\}$. Fixemos $\gamma < \beta < \alpha$, tais que $p_\gamma, p_\beta \in X(p, M)$ e para todo $k < n$ temos $p_\gamma(k) > p_\beta(k)$ e portanto $p_\gamma \in X(p_\beta, M)$. Tomemos $x \in V_\gamma \cap A$ tal que $p_\beta \in \phi^0(x)$. Então por 1.5.19 $X(p_\beta, M) \subseteq \phi^0(x)$, mas então $p_\gamma \in \phi^0(V_\gamma)$, que é absurdo.

Portanto D é fechado discreto, como queríamos. □

Teorema 1.5.24 (Caux, 1981)**.** *Toda potência finita de retas de Sorgenfrey é hereditariamente D.*

Demonstração. Provaremos por indução em $n \in \mathbb{N}$ que o espaço $\mathbb{S}^n$ é hereditariamente D. O caso $n = 1$ já foi verificado.

Assumindo que para um determinado $n \in \mathbb{N}$, para todo $k < n$ o espaço $\mathbb{S}^k$ é hereditariamente D, tomemos $X \subseteq \mathbb{S}^n$ subespaço e ψ *ona* nele. Como $\{X(p, i) : p \in X,\ i < \omega\}$ é base de X, fixemos uma *ona* centrada ϕ tal que para todo $x \in X$, $\phi(x) \subseteq \psi(x)$.

Para cada $i < \omega$, definimos $X_i = \{x \in X : i_\phi(x) = i\}$, e construímos recursivamente uma sequência $\langle D_i : i < \omega\rangle$ por se $X_i = \emptyset,\ D_i = \emptyset$. Caso contrário, aplicamos o lema 1.5.23 de maneira a definir $D_i \subseteq X \setminus \phi(\bigcup_{j<i} D_j)$ fechado discreto tal que $X_i \setminus \phi(\bigcup_{j<i} D_j) \subseteq \phi(D_i)$.

O conjunto $D = \bigcup_{i<\omega} D_i$ é núcleo de ϕ, e consequentemente de ψ. Se $x \in X_i$, então $x \in \phi(\bigcup_{j\le i} D_j)$ e $\phi(\bigcup_{j\le i} D_j) \cap D = \bigcup_{j\le i} D_j$ união finita de fechados discretos, logo D é fechado discreto, como queríamos. □

A questão que restava sobre a potência infinita foi respondida por:

Teorema 1.5.25 (Patrakeev, 2021)**.** *A potência topológica $\mathbb{S}^\omega$ é um D-espaço.*

Iremos omitir a demonstração, por seu caráter técnico que envolve argumentações fora do escopo deste trabalho.

1.6 Jogos para a propriedade D

Em sua tese de doutorado Aurichi, 2009 propõe dois jogos que capturam a essência de diversas demonstrações de que um espaço é um D-espaço. Em particular e respectivamente, as demonstrações de que σ-compacto T_1 é sempre D (1.2.5) e que metrizável é sempre D (1.2.12) e, por mais que nenhum dos dois caracterizem a propriedade D pela existência de estratégias vencedoras, eles são ferramentas úteis e nos oferecem resultados importantes. Os próximos resultados aparecem na tese.

Definição 1.6.1. *Dado o espaço topológico X, o* Jogo das *onas* Parciais *(JONAP) é entre os dois jogadores N e C seguindo:*

N_0 *: Escolhe $Y_0 \subseteq X$ qualquer e ϕ_0 uma ona parcial de Y_0 sobre X, tal que $\phi_0(Y_0) = X$.*

C_0 *: Escolhe $D_0 \subseteq Y_0$ fechado discreto em X.*

N_j *: Escolhe $Y_j \subseteq X \setminus \bigcup_{k<j} \phi_k(D_k)$ e ϕ_j uma ona parcial de Y_j sobre X tal que $X \setminus \bigcup_{k<j} \phi_k(D_k) \subseteq \phi_j(Y_j)$ e é compatível para toda ϕ_k com $k < j$. Notemos que se necessário Y_j e ϕ_j podem ser vazias.*

C_j *: Escolhe $D_j \subseteq Y_j$ fechado discreto em X.*

Com $j < \omega$. Ao fim das ω rodadas, o jogador C vence se, e só se, $\bigcup_{j<\omega} \phi_j(D_j) = X$. Caso contrário, N é o vencedor.

Proposição 1.6.2. *Dado uma partida de JONAP no espaço X na notação acima, se C é vencedor, então $\bigcup_{j<\omega} D_j$ é fechado discreto.*

Demonstração. Seja $x \in X$, fixemos $n < \omega$ o menor tal que $x \in \phi_n(D_n)$. Notemos que $\phi_n(D_n) \cap \bigcup_{j<\omega} D_j \subseteq \bigcup_{j\leq n} D_j$, pois $D_j \subseteq Y_j$, fixando para cada $j \leq n$ um $H_j \in \tau$ vizinhança de x tal que $H_j \cap D_j \subseteq \{x\}$, $\phi_n(D_n) \cap H_0 \cap \ldots \cap H_n$ é vizinhança de x que separa ele de $\bigcup_{j<\omega} D_j$. □

Proposição 1.6.3. *Se N não tem estratégia vencedora para JONAP sobre X, então X é um D-espaço.*

Demonstração. Seja uma *ona* sobre X, ϕ. Definiremos uma estratégia de N por meio de $\phi_0 = \phi$ e ϕ_j é a ϕ restrita a $X \setminus \phi(\bigcup_{k<j} D_k)$. Assim por hipótese essa estratégia não é vencedora, logo existe $\langle D_j : j < \omega \rangle$ um jogo de C que vence contra essa estratégia.

Pela definição do jogo e a proposição anterior, $D = \bigcup_{j<\omega} D_j$ é núcleo fechado discreto de ϕ. □

Proposição 1.6.4. *Se X é σ-compacto T_1, então C tem estratégia vencedora na JONAP sobre X.*

Demonstração. Seja o recobrimento de X por subespaços compactos $\{C_n : n < \omega\}$. Definimos uma estratégia de C por, no passo j, fixar $D_j \subseteq Y_j$ finito tal que $\phi_j(D_j) \supseteq C_j \setminus \bigcup_{k<j} \phi_k(D_k)$, que é válido como $C_j \setminus \bigcup_{k<j} \phi_k(D_k)$ é subespaço fechado de compacto.

Pela definição para cada $n < \omega$, $K_n \subseteq \bigcup_{j \leq n} \phi_j(D_j)$, assim $X = \bigcup_{j<\omega} \phi_j(D_j)$, como queríamos. □

Exemplo 1.6.5. *Existe um D-espaço Hausdorff onde N tem estratégia vencedora na JONAP sobre ele.*

Demonstração. Consideremos o espaço $X = \omega^\omega$ com a topologia do produto. Esse espaço é completamente metrizável, logo é um D-espaço.

Para cada $n < \omega$, tomemos o conjunto $A_n = \{y_j^n : j < \omega\}$ onde $y_j^n \in \omega^\omega$ é definido por

$$y_j^n(m) = \begin{cases} n+1, & m < j \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Tomemos também para cada $n, j < \omega$ o aberto $\phi(y_j^n) = \{x \in \omega^\omega : x(n) \leq n+j+1\}$. É claro que $y_j^n \in \phi(y_j^n)$ e se $n < m$ temos que $\phi(A_n) \cap A_m = \emptyset$. Temos também que $y_j^n \xrightarrow{j \to \omega} c_{n+1}$ função constante $n+1$. Definimos agora uma estratégia para N:

N$_0$: $Y_0 = A_0$ e ϕ_0 é ϕ restrito ao A_0;

C$_0$: Por A_0 formar uma sequência convergente, o D_0 escolhido terá que ser finito, consideramos $J_0 = \{j < \omega : y_j^0 \in D_0\}$ finito e definimos $k_0 = \max J_0 + 1$;

C$_n$: Como $Y_n = A_m$ para algum $m < \omega$, então fixamos analogamente ao anterior um $k_n < \omega$;

N$_{n+1}$: $Y_{n+1} = A_{k_n+1}$ e ϕ_{n+1} é ϕ restrito a Y_{n+1}.

Tomemos $z \in \omega^\omega$ definido por $z(n) = k_n + 1 + n$ $(n < \omega)$. Para cada $n < \omega$ e $j \in J_n$, temos que $j + 1 < k_n + 1$ então $j + 1 + n < k_n + 1 + n = z(n)$, assim $z \notin \phi(y_j^n)$. Portanto $z \notin \phi(\bigcup_{n<\omega} D_n)$. A estratégia delineada é então vencedora. □

Definição 1.6.6. *Dado o espaço topológico X, o Jogo Estrela nele é entre dois jogadores N e C seguindo:*

C_0 : Escolhe $x_0 \in X$

N_0 : Escolhe $S_0 \subseteq X$ tal que $x_0 \in S_0$ e uma ona parcial ϕ_0 sobre S_0

C_γ : Escolhe $x_\gamma \in X \setminus \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$

N_γ : Escolhe $S_\gamma \subseteq X$ tal que $x_\gamma \in S_\gamma$ e uma ona parcial ϕ_γ sobre S_γ compatível com ϕ_α para todo $\alpha < \gamma$.

- *No início de cada rodada são checadas três condições de fim de jogo na seguinte ordem:*
  - **(a)** ***Condição S***: *N perde se $\overline{\{x_\alpha : \alpha < \gamma\}} \nsubseteq \bigcup_{\alpha<\gamma} S_\alpha$*
  - **(b)** *C perde se $\{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$ tem ponto de acumulação.*
  - **(c)** *C ganha se $\bigcup_{\alpha<\gamma} \phi_\alpha(x_\alpha) = X$.*

Esse jogo tem ponto de parada, pois não é possível ter $|X|^+$ rodadas sem umas das condições de fim de jogo acontecer.

Proposição 1.6.7. *Se N não tem estratégia vencedora para o Jogo Estrela sobre X, então X é um D-espaço.*

Demonstração. Suponha que X não é um D-espaço e tomemos uma *ona* ϕ que não admite núcleo fechado discreto. Definimos estratégia de N por no passo γ, com x_γ escolhido por C, tomamo $S_\gamma = \{x \in X : x_\gamma \in \phi(x)\}$ e ϕ_γ é ϕ restrito a S_γ. Essa é uma estratégia obviamente válida.

Seja ξ o nível que alguma das condições de fim foi verificada. Suponha que $x \in X$ é ponto de acumulação de $\{x_\alpha : \alpha < \xi\}$, então fixemos $\beta < \xi$ o menor tal que $x_\beta \in \phi(x)$. Pela construção $x \in S_\beta$, assim o jogo não satisfaz a Condição S. Se $\phi(\{x_\alpha : \alpha < \xi\}) = \bigcup_{\alpha<\xi} \phi_\alpha(x_\alpha) = X$, então por hipótese $\{x_\alpha : \alpha < \xi\}$ tem ponto de acumulação. Portanto a condição (c) não pode ocorrer sem a condição (b), garantindo que N vence.

Definimos portanto uma estratégia vencedora para N. □

Definição 1.6.8. *Para uma rodada válida γ no Jogo Estrela sobre o espaço X, dizemos que ela é fechada se*

- $\{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$ *é fechado discreto;*
- $x_\alpha \notin \phi(x_\beta)$ *para todo par* $\beta < \alpha < \gamma$*;*
- $\bigcup_{\alpha<\gamma} \phi_\alpha(x_\alpha) \supseteq \bigcup_{\alpha<\gamma} S_\alpha$.

O jogador C tem estratégia parcial se para toda rodada fechada γ e $x \notin \bigcup_{\alpha<\gamma} \phi_\alpha(x_\alpha)$ existe uma rodada fechada $\eta > \gamma$ satisfazendo $\{x_\alpha : \gamma \leq \alpha < \eta\} \cap \bigcup_{\alpha<\gamma} \phi_\alpha(x_\alpha) = \emptyset$ e $x = x_\gamma$.

Teorema 1.6.9. *Na linguagem acima, se C tem uma estratégia parcial, então ele tem uma estratégia vencedora.*

Demonstração. A estratégia para C é: na rodada α, se C está no meio de uma estratégia parcial, ele a segue. Caso contrário α é fechada, claramente ele não pode satisfazer as condições (a) e (b) de fim de jogo, se satisfaz (c) o jogo acabou e C venceu, se não fixemos $x \notin \bigcup_{\alpha<\gamma} \phi_\alpha(x_\alpha)$ e escolhemos uma estratégia parcial para capturar x. Por indução, se C seguir essa estratégia ele não pode perder, como o jogo eventualmente acaba, C vence. □

Mais a frente iremos utilizar o jogo estrela, mas com uma adaptação, mas notemos que os resultados continuam valendo:

Definição 1.6.10. *Dado um espaço topológico X e uma base $\mathcal{B}$ dele, definimos o Jogo Estrela em $\mathcal{B}$, pelo jogo estrela usual, mas as onas parciais que o jogador N escolhe estão limitadas a onas básicas.*

Considerando a proposição 1.2.11, podemos ver que a argumentação da proposição 1.6.7 pode ser adaptada a fim de verificar que:

Proposição 1.6.11. *Se N não tem estratégia vencedora para o Jogo Estrela em $\mathcal{B}$ sobre X, então X é um D-espaço.*

Notemos que toda estratégia vencedora de N para o Jogo Estrela em $\mathcal{B}$ é uma estratégia vencedora no jogo estrela usual. Notemos também que uma estratégia vencedora de C no jogo estrela usual é uma estratégia vencedora no jogo estrela em $\mathcal{B}$.

As noções de rodada parcial e estratégia são as mesmas, e como um jogo estrela em $\mathcal{B}$ é em particular um jogo estrela, teremos que:

Teorema 1.6.12. *Se C tem uma estratégia parcial no jogo estrela em $\mathcal{B}$, então ele tem uma estratégia vencedora.*

Notemos que o jogo estrela usual pode ser considerado o jogo estrela em $\mathcal{B}$, quando $\mathcal{B}$ é a família de todos os abertos.

Questão 1.6.13. *Existe algum espaço com base $\mathcal{B}$ tal que o jogo estrela não é equivalente ao jogo estrela em $\mathcal{B}$?*

Capítulo 2

Propriedades Relacionadas

A fim de se entender melhor a propriedade D, diversas outras propriedades foram definidas baseadas nela. A primeira que apareceu na literatura são os espaços *dualmente discretos* no artigo Douwen e Pfeffer, 1979. Iremos aqui apresentar algumas delas, assim como alguns resultados importantes e conceitos associados que serão usados mais à frente no trabalho.

Nosso foco esteve nas propriedades aD e linearmente D, para as quais temos um texto mais completo. Apresentamos ainda dualmente discreto e fortemente D, pois são conceitos que usaremos depois. Porém, não estudamos essas propriedades mais a fundo.

Observemos ainda que existem várias outras propriedades que não estão inclusas nesse trabalho. Por exemplo transitivamente D (Liang-Xue Peng, 2008[1]) e os espaços dualmente $\mathcal{P}$ (R. Z. Buzyakova *et al.*, 2007).

Ao fim desse capítulo temos um diagrama com todas as relações conhecidas entre as propriedades trabalhadas.

2.1 Propriedade aD

O artigo de Borges e Wehrly, 1991 utiliza uma propriedade que associa cada recobrimento aberto com núcleo de uma *ona*, aproximando aspectos da propriedade D com propriedades de recobrimento. No artigo, Arhangel'skii, 2005, ela é chamada de propriedade bD.

Definição 2.1.1. *Um espaço é um bD-*espaço *se todo recobrimento aberto admite uma ona nele com núcleo localmente finito.*

Segue da definição que:

Proposição 2.1.2. *Se X é um bD-espaço, então $e(X) = \ell(X)$.*

A prova é análoga à feita para o caso D-espaço. (1.2.18)

[1] Nesse artigo o autor chama a propriedade de linearmente D, mas depois esse nome começou a se referir a outra propriedade e essa ficou conhecida como transitivamente D.

Teorema 2.1.3 (Borges e Wehrly, 1991)**.** *Todo espaço subparacompacto é um bD-espaço.*

Esse resultado na verdade é consequência de todo subparacompato satisfazer a seguinte propriedade:

Definição 2.1.4. *Um espaço topológico é irredutível se todo recobrimento aberto admite refinamento aberto que não admite subrecobrimento próprio. Isso equivale a que todo recobrimento de abertos $\{V_s : s \in S\}$ admite uma família discreta de fechados $\{F_t : t \in T\}$ com $T \subseteq S$, $F_t \subseteq V_t$ e $\{V_t : t \in T\}$ é subrecobrimento.*

Assim segue do seguinte lema:

Lema 2.1.5. *Todo espaço irredutível é um bD-espaço.*

Demonstração. Sejam X um espaço irredutível e $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ um recobrimento aberto de X. Consideremos $B \subseteq A$ e uma família discreta de fechados $\{F_\beta : \beta \in B\}$ tais que $F_\beta \subseteq U_\beta$ e $\{U_\beta : \beta \in B\}$ é subrecobrimento. Para cada $\beta \in B$, fixemos um ponto $x_\beta \in F_\beta$ e definimos $\phi(x_\beta) = U_\beta$. Portanto o conjunto $D = \{x_\beta : \beta \in B\}$ é localmente finito e definimos uma *ona* parcial ϕ nele tal que $\phi(D) = X$. □

Podemos ainda verificar que todo espaço θ-refinável é um bD-espaço (3.4.12). Além disso podemos verificar que, sob hipótese T_1, a propriedade bD é uma caracterização dos espaço irredutíveis.

Proposição 2.1.6. *Se X é um espaço T_1, então ser irredutível e bD-espaço são equivalentes*

Demonstração. Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ recobrimento aberto de X, tomemos $D \subseteq X$ localmente finito (e portanto fechado discreto) e $\phi : D \longrightarrow \mathcal{U}$ *ona* parcial tal que $\phi(D) = X$. Sendo $B = \{\beta \in A : \exists d \in D(\phi(d) = U_\beta)\}$, definimos para cada $\beta \in B$, o conjunto fechado $F_\beta = \{d \in D : \phi(d) = U_\beta\}$. Verificamos que a família $\{F_\beta : \beta \in B\}$ é discreta, pois se $x \in X$, então existe uma vizinhança V de x tal que $V \cap D \subseteq \{x\}$. Logo $F_\beta \cap V \neq \emptyset$ se, e somente se, $x \in F_\beta$ e a família é dois a dois disjunta. □

Notemos no entanto que T_1 não pode ser omitido.

Exemplo 2.1.7 (Arhangel'skii, 2005)**.** *Existe um bD-espaço T_0 que não é irredutível.*

Demonstração. Consideramos em ω a seguinte topologia

$$\{{}^{\leftarrow}x : x < \omega\} \cup \{\omega\}$$

, onde ${}^{\leftarrow}x = \{y \in \omega : y < x\}$. Todo conjunto é localmente finito nessa topologia, logo todo subespaço dele é bD

Notemos que nenhum recobrimento $\mathcal{A}$ contido em $\{{}^{\leftarrow}x : x < \omega\}$ é minimal, pois ele terá que ser infinito e se $x \in \omega$ é tal que ${}^{\leftarrow}x \in \mathcal{A}$, então existe $y > x$ com ${}^{\leftarrow}y \in \mathcal{A}$. Logo $\mathcal{A} \setminus \{{}^{\leftarrow}x\}$ é um subrecobrimento.

Notemos ainda que todo refinamento de $\{{}^{\leftarrow}x : x < \omega\}$ é um subrecobrimento, ou seja, ele não admite refinamento aberto minimal. □

Proposição 2.1.8. *Se X é um D-espaço, então X é um bD-espaço.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ recobrimento aberto de X. Fixe $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{A}$ *ona* qualquer. Pela propriedade D, tomemos $D \subseteq X$ núcleo fechado discreto de φ. Assim $\phi = \varphi_{|_D}$ é a função que queríamos. □

A equivalência entre D-espaços e bD-espaços não vale, pois:

Exemplo 2.1.9. *Existe um bD-espaço hereditariamente normal que tem um subespaço fechado que não tem a propriedade bD.*

Demonstração. Consideremos o conjunto $X = \omega_1 \cup (\omega_1 \times \omega_1)$ e definimos uma topologia nele como segue: Para $\alpha, \beta < \omega_1$, o par (α, β) é isolado, ou seja $\{(\alpha, \beta)\}$ é aberto. Se α não é limite em ω_1, então ele também é isolado. Se α é limite definimos para cada $\gamma < \alpha$

$$V(\gamma, \alpha) =]\gamma, \alpha] \cup \{(x, y) : \gamma \leq x < y \leq \alpha\}.$$

Notemos que se $V(\gamma_0, \alpha_0) \cap V(\gamma_1, \alpha_1) \neq \emptyset$, então $\gamma = \max\{\gamma_0, \gamma_1\} < \min\{\alpha_0, \alpha_1\} = \alpha$ e nesse caso a interseção é igual a $V(\gamma, \alpha)$.

Assim teremos uma base para um topologia bem definida. Notemos que $\omega_1 \subseteq X$ é fechado, a topologia de subespaço é a dos intervalos e $e(\omega_1) < \ell(\omega_1)$, portanto ω_1 não é um bD-espaço.

A fim de verificar que é de Hausdorff, tomemos $\alpha_0 < \alpha_1 < \omega$. Se $\alpha_0 = 0$, então $\{\alpha_0\} \cap V(\alpha_0, \alpha_1) = \emptyset$. Caso contrário, $V(0, \alpha_0) \cap V(\alpha_0, \alpha_1) = \emptyset$.

Seja $\alpha < \omega_1$ e $0 \leq x < y < \omega_1$. Se $y < \alpha$, então $(x, y) \notin V(y, \alpha)$. Se $y > \alpha$, então $(x, y) \notin V(0, \alpha)$. Se $y = \alpha$ e α é limite, então $(x, y) \notin V(x + 1, \alpha)$. Se α não é limite, (x, y) e α são isolados.

Na verdade X é hereditariamente normal. Seja $Y \subseteq X$ um subespaço. Tomemos $F, K \subseteq Y$ subconjuntos fechados disjuntos. Como ω_1 é subespaço de X e pela demonstração de que ele é hereditariamente normal (1.2.13), existem $U, V \subseteq \omega_1$ abertos disjuntos tais que $F \cap \omega_1 \subseteq U$ e $K \cap \omega_1 \subseteq V$.

Para cada $\alpha \in F$, fixemos $\gamma(\alpha) < \alpha$ tal que $]\gamma(\alpha), \alpha] \subseteq U$. Para cada $\beta \in K$, fixemos $\gamma(\beta) < \beta$ tal que $]\gamma(\beta), \beta] \subseteq V$. Definimos os abertos em Y

$$A = Y \cap \bigcup_{\alpha \in F} (V(\gamma(\alpha), \alpha) \setminus K) \cup (F \setminus \omega_1) \text{ e } B = Y \cap \bigcup_{\beta \in K} (V(\gamma(\beta), \beta) \setminus F) \cup (K \setminus \omega_1).$$

Eles são disjuntos, $F \subseteq A$ e $K \subseteq B$.

Vamos verificar que X é um espaço bD. Seja $\mathcal{A}$ um recobrimento aberto de X. Para cada $p \in X$, fixamos $A(p) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in A(p)$ e para cada $\alpha < \omega_1$ ordinal limite tomemos $g(\alpha) < \alpha$ tal que $V(g(\alpha), \alpha) \subseteq A(\alpha)$.

Pelo lema do Pressing-Down (1.1.3), seja $S \subseteq \mathrm{Lim}(\omega_1)$ e $\gamma_0 < \omega_1$ tais que para todo $\alpha \in S$, temos que $g(\alpha) = \gamma_0$.

Seja $D = \{(\gamma_0, \alpha) : \alpha \in S\}$ e definimos $\phi(\gamma_0, \alpha) = A(\alpha)$. Notemos que pela definição de S, temos que $[\gamma_0 + 1, \omega_1[\subseteq \phi(D)$.

Seja $\beta \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$, se $\beta \leq \gamma_0$, então $V(0, \beta) \cap D = \emptyset$, pois para todo $\alpha \in S$, temos que $\beta < \alpha$. Se $\beta > \gamma_0 + 1$, então $V(\gamma_0 + 1, \beta) \cap D = \emptyset$, pois $\gamma_0 < \gamma_0 + 1$.

Logo $D \subseteq X$ é fechado discreto.

Usando a topologia de subespaço $[0, \gamma_0]$ é compacto, logo tomemos um subconjunto finito $F \subseteq [0, \gamma_0]$ tal que $[0, \gamma_0] \subseteq \bigcup_{x \in F} A(x)$, e definimos $\phi(x) = A(x)$ para cada $x \in F$.

Note que o conjunto $D \cup F \subseteq X$ é fechado discreto e $\omega_1 \subseteq \phi(D \cup F)$. Tomemos $E = X \setminus \phi(D \cup F)$ e para cada $x \in E$ definimos $\phi(x) = A(x)$. O conjunto E é fechado discreto, pois $\phi(D \cup F)$ é aberto e $E \subseteq \omega_1 \times \omega_1$, que é um subespaço discreto de X.

Portanto $D \cup F \cup E$ é fechado discreto e definimos uma *ona* parcial ϕ nele com valores em $\mathcal{A}$ tal que $\phi(D \cup F \cup E) = X$ Logo X é bD-espaço, mas tem um subespaço fechado que não é um bD-espaço. □

Notemos que o exemplo construído em 1.2.9 é um bD-espaço, pois o conjunto $\{z \in \mathbb{Z} : z \geq 0\}$ é localmente finito e ele será núcleo de qualquer recobrimento.

Na verdade, todo espaço topológico enumerável é um bD-espaço, pois:

Teorema 2.1.10. *Se X é um espaço topológico e $\{C_n : n < \omega\}$ é uma família de subespaços compactos tais que $X = \bigcup_{n<\omega} C_n$, então X é um bD-espaço.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ um recobrimento aberto de X. Construiremos por recursão uma sequência $\langle D_n : n < \omega \rangle$ onde cada $D_n \subseteq C_n$ é finito e para cada $n < \omega$ uma *ona* parcial ϕ_n em D_n com valores em $\mathcal{A}$ da seguinte forma:

Supondo fixados D_m e ϕ_m para cada $m < n$, notemos que $C_n \setminus \bigcup_{m<n} \phi_m(D_m)$ é subespaço fechado de um compacto. Logo existe $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$ finito minimal que cobre ele. Para cada $A \in \mathcal{A}_n$, fixamos $d_A \in C_n \cap A \setminus \bigcup_{m<n} \phi_m(D_m)$ de maneira que se $A, B \in \mathcal{A}_n$ são distintos, então $d_A \neq d_B$.

Definimos $D_n = \{d_A : A \in \mathcal{A}_n\}$ e $\phi_n(d_A) = A$. Caso $C_n \subseteq \bigcup_{m<n} \phi_m(D_m)$, consideramos $\mathcal{A}_n = D_n = \phi_n = \emptyset$. Definimos o conjunto $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$ e a *ona* parcial nele $\phi = \bigcup_{n<\omega} \phi_n$

Pela definição teremos que para cada $x \in X$, se $n < \omega$ é tal que $x \in C_n$, então existe $m \leq n$ tal que $x \in \phi_m(D_m)$ e $\phi_m(D_m) \cap D \subseteq \bigcup_{k \leq m} D_k$, que é finito. Portanto $\phi(D) = X$ e D é localmente finito. □

No entanto, notemos que a estratégia usada acima e a usada para verificar que a união de subespaços fechados com a propriedade D é um D-espaço não vale para verificar que a união enumerável de bD-espaços tem a propriedade bD, pois ela utiliza tomar subespaços fechados que mantém a propriedade.

Questão 2.1.11. *Um espaço T_1 que é a união de finitos subespaços fechados com a propriedade bD é um bD-espaço?*

Entretanto, podemos verificar no caso dos subespaços serem abertos e fechados:

Proposição 2.1.12. *Seja $\{X_s : s \in S\}$ uma família de espaços topológicos. O espaço $X = \bigoplus_{s \in S} X_s$ é um bD-espaço se, e somente se, o espaço X_s tem a propriedade bD para cada $s \in S$.*

Demonstração. Se X é um bD-espaço e $Z \subseteq X$ é um subconjunto aberto e fechado, seja $\mathcal{A}$ um recobrimento aberto de Z. Consideremos $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X \setminus Z\}$ recobrimento aberto de X, e portanto tomemos ϕ uma *ona* em X com valores em $\mathcal{B}$ e $D \subseteq X$ núcleo localmente finito de ϕ.

Notemos que se $x \in D \setminus Z$ e $A \in \mathcal{A}$, então $x \notin A$, e portanto $\phi(x) = X \setminus Z$. Segue que $Z \subseteq \phi(D \cap Z)$ e os valores de ϕ restrita a Z estão em $\mathcal{A}$.

Se X é a soma topológica de uma família de bD-espaços, consideremos $\mathcal{A}$ recobrimento aberto de X. Para cada $s \in S$ seja $\mathcal{A}_s = \{A \cap X_s : A \in \mathcal{A}\}$, recobrimento aberto de X_s. Então fixemos ϕ_s *ona* em X_s com valores em $\mathcal{A}_s$ e $D_s \subseteq X_s$ núcleo localmente finito de ϕ_s.

Como o conjunto $D = \bigcup_{s \in S} D_s$ é localmente finito em cada componente, ele é localmente finito em X. Para cada $s \in S$ e $x \in X_s$, fixamos $\phi(x) = A \in \mathcal{A}$ tal que $\phi_s(x) = A \cap X_s$. Então ϕ é uma *ona* em X com valores em $\mathcal{A}$ e D é núcleo dela. □

Baseado nesses resultados a propriedade aD foi definida em Arhangel'skii e Raushan Z. Buzyakova, 2002.

Definição 2.1.13. *Um espaço topológico X é um aD-*espaço *se para todo $F \subseteq X$ fechado e $\mathcal{A}$ cobertura aberta de F, existe $D \subseteq F$ localmente finito e $\phi : D \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $d \in \phi(d)$ para cada $d \in D$ e $\phi(D) \supseteq F$.*

Segue da definição que a propriedade aD equivale a todo subespaço fechado dele ser bD-espaço. Notemos também que:

Proposição 2.1.14. *Se X é um D-espaço, então ele é um aD-espaço.*

Lema 2.1.15. *Se todo subespaço fechado de X é irredutível, então X é um aD-espaço.*

Teorema 2.1.16 (Arhangel'skii, 2005)**.** *Seja X um espaço T_1, são equivalentes:*

(i) *X tem a propriedade aD.*

(ii) *Todo subespaço fechado de X é irredutível.*

Para essa caracterização é necessário o T_1, pois o espaço 2.1.7 é um aD-espaço que não é irredutível.

Como resultado da sua definição e de 2.1.2 temos que:

Proposição 2.1.17. *Se X é um aD-espaço, então $e(F) = \ell(F)$, para todo $F \subseteq X$ fechado.*

No entanto a volta não vale pelo exemplo de Nyikos (5.3.1) e pelo teorema 5.4.2, que são mostrados na seção das árvores.

Notemos que pela definição temos que:

Proposição 2.1.18. *Se X é um aD-espaço, então todo subespaço fechado de X tem a propriedade aD.*

Proposição 2.1.19. *Se X é um espaço topológico para o qual existe uma família $\{F_n : n < \omega\}$ tal que $F_n \subseteq X$ é um subespaço fechado com a propriedade aD para cada $n < \omega$ e $X = \bigcup_{n<\omega} F_n$, então X é um aD-espaço.*

Demonstração. Notemos que se $F \subseteq X$ é fechado, então $F \cap F_n$ é um subespaço com a propriedade aD para cada $n < \omega$. Portanto basta provar que X é um bD-espaço, que seguirá para todo subespaço fechado dele.

Seja $\mathcal{A}$ um recobrimento aberto de X. Definimos recursivamente $K_n = F_n \setminus \bigcup_{m<n} \phi_m(D_m)$ subespaço fechado de F_n. Logo fixamos ϕ_n uma *ona* parcial de K_n com valores em $\mathcal{A}$ e um núcleo dela $D_n \subseteq K_n$ que é localmente finito.

Definimos $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$ e $\phi = \bigcup_{n<\omega} \phi_n$ *ona* parcial de D com valores em $\mathcal{A}$.

Sejam $x \in X$ e $n < \omega$ tal que $x \in F_n$. Pela construção existe $m \leq n$ tal que $x \in \phi_m(D_m)$ e $\phi_m(D_m) \cap D \subseteq \bigcup_{k \leq m} D_k$, que é localmente finito.

Logo $\phi(D) = X$ e D é localmente finito. $\square$

Questão 2.1.20. *Se X é um espaço T_1 onde todos os subespaços fechados são irredutíveis, então ele é um D-espaço?*

Em outras palavras

Questão 2.1.21. *Se X é um espaço T_1, então as propriedades D e aD são equivalentes?*

Temos uma resposta parcial. Em Soukup, 2011, Soukup mostra que assumindo $\diamondsuit^*$ podemos construir um *aD*-espaço que não é *D*-espaço. A propriedade $\diamondsuit^*$ é assumir que existe uma $\diamondsuit^*$-sequência.

Definição 2.1.22. *Uma $\diamondsuit^*$-sequência é uma sequência $\langle \mathcal{A}_\alpha : \alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1) \rangle$ tal que para cada $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$, $\mathcal{A}_\alpha$ é um subconjunto enumerável de $[\alpha]^{\aleph_0}$. Além disso, para todo $Z \subseteq \omega_1$, o conjunto $\{\alpha < \omega_1 : Z \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha\}$ contém um fechado ilimitado de ω_1.*

Podemos ainda fazer essa pergunta para hereditariamente Lindelöf:

Questão 2.1.23. *Seja X um espaço T_1. Se ele é hereditariamente aD (equivalentemente bD ou irredutível), então ele é hereditariamente D?*

Exemplo 2.1.24 (Soukup, 2011). *Assuma $\diamondsuit^*$. Existe um espaço localmente enumerável, localmente compacto, 0-dimensional Hausdorff de cardinalidade $\aleph_1$ que não é um D-espaço.*

Demonstração. Seja $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)\}$ uma $\diamondsuit^*$-sequência.

Fixemos o conjunto $X = \omega_1 \times \omega_1$, e definimos $X_\alpha = \{\alpha\} \times \omega_1$ e $X_{<\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$ para cada $\alpha < \omega_1$. Para cada $A \subseteq X$ e $\alpha < \omega_1$, definimos $A_{|_\alpha} = \{\beta < \omega_1 : (\alpha, \beta) \in A\}$ e $\pi(A) = \{\gamma < \omega_1 : A_{|_\gamma} \neq \emptyset\}$.

Dizemos que $A \subseteq X$ vai até $\alpha < \omega_1$ se existe ordenação de $A = \{(\alpha_n, \beta_n) : n < \omega\}$ tal que $\langle \alpha_n : n < \omega \rangle$ é um sequência crescente em ω_1 com supremo α e $A \subseteq X_{<\alpha}$.

Afirmação 2.1.25. *Existe uma família $\{A_\alpha^n : \alpha < \omega_1,\ n < \omega\}$ tal que*

1. *$A_\alpha^n \in [X]^{\aleph_0}$ para cada $\alpha < \omega_1,\ n < \omega$.*
2. *$A_\alpha = \bigcup_{n<\omega} A_\alpha^n$ vai até α.*
3. *Para todo $Y \subseteq X$ tal que $|\pi(Y)| = \aleph_1$, existe um conjunto club $C \subseteq \omega_1$ tal que para todo $\alpha \in C$ existe $n < \omega$ com $A_\alpha^n \subseteq Y$.*

Demonstração. Fixemos uma bijeção $\Phi : \omega_1 \times \omega_1 \longrightarrow \omega_1$, tal que para cada $\alpha < \omega_1$ vale que

$$\Phi[(\alpha + 1) \times (\alpha + 1)] \setminus \Phi[\alpha \times \alpha] = (\omega \cdot (\alpha + 1)) \setminus (\omega \cdot \alpha).$$

Definimos também para cada $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$ a família

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha = \{\Phi^{-1}[A] : A \in \mathcal{A}_{\omega\cdot\alpha},\ \sup \pi[\Phi^{-1}[A]] = \alpha.\}$$

Seja $\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha$ é infinito e uma enumeração dele por $\{B_n : n < \omega\}$. Para cada $n < \omega$ fixamos recursivamente sequências $\langle x_j^n : j < \omega \rangle \subseteq \pi[B_n]$ estritamente crescentes com supremo α e $x_{j+1}^n < x_j^{n+1}$ para todo $j < \omega$.

Para cada $n, j < \omega$ fixemos β_j^n tal que $(x_j^n, \beta_j^n) \in B_n$ e consideramos $A_\alpha^n = \{(x_j^n, \beta_j^n) : j < \omega\}$.

Se $\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha$ é finito não vazio, enumeramos $\{B_0, ..., B_k\}$ e construímos A_α^n de maneira análoga à anterior para cada $n \leq k$. Para $n > k$, $A_\alpha^n = A_\alpha^k$.

Se $\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha$ é vazio, fixamos A_α um conjunto que vai a α qualquer e $A_\alpha^n = A_\alpha$ para todo $n < \omega$.

Notemos então que para todas as definições temos que para cada $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$ e $n < \omega$ valem que $A_\alpha^n \in [X]^{\aleph_0}$, $A_\alpha = \bigcup_{k<\omega} A_\alpha^k$ vai a α e para cada $B \in \widetilde{\mathcal{A}}_\alpha$, existe $k < \omega$ tal que $A_\alpha^k \subseteq B$.

Provaremos que essa família satisfaz as propriedades desejadas. Seja $Y \subseteq X$ tal que $|\pi[Y]| = \aleph_1$. Para cada $\alpha \in \pi[Y]$, fixemos $b_\alpha = \max\{\alpha, \min Y_{|\alpha}\}$.

Seja $Z = \bigcup_{\alpha\in\pi[Y]} Y \cap (\{\alpha\} \times (b_\alpha + 1))$.

Se considerarmos o conjunto $C_0 = \{\alpha < \omega_1 : Z \cap X_{<\alpha} \subseteq \alpha \times \alpha\}$, ele será fechado, pois para $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$ temos que $Z \cap X_{<\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha}(Z \cap X_{<\beta})$. Considerando $\alpha < \omega_1$, tomemos $\alpha_0 \in \pi[Y]$ tal que $\alpha \leq \alpha_0$. Recursivamente definimos $\alpha_{n+1} = b_{\alpha_n}$. Temos então $\gamma = \sup_{n<\omega} \alpha_n \in C_0$.

Fixemos um conjunto club $C_1 \subseteq \omega_1$ tal que para todo $\alpha \in C_1$ temos $\alpha \cap \Phi[Z] \in \mathcal{A}_\alpha$. Como o conjunto $\{\alpha < \omega_1 : \omega \cdot \alpha = \alpha\}$ é club, então $C_2 = \{\alpha < C_1 : \omega \cdot \alpha = \alpha\}$ é club. Assim como o conjunto $C = \{\alpha \in C_0 \cap C_2 : \alpha$ é ponto limite de $\pi(Y)\}$.

Seja $\alpha \in C$. Pela definição vale que $Z \cap X_{<\alpha} \subseteq \alpha \times \alpha$, $\omega \cdot \alpha = \alpha$ e $\alpha \cap \Phi[Z] \in \mathcal{A}_\alpha$. Assim $\Phi[Z \cap X_{<\alpha}] = \alpha \cap \Phi[Z] \in \mathcal{A}_{\omega\cdot\alpha}$ e como $\alpha \in \mathrm{acc}(Z)$, sabemos que $\alpha = \sup \pi[Z \cap X_{<\alpha}]$. Portanto $Z \cap X_{<\alpha} \in \widetilde{\mathcal{A}}_\alpha$. Assim existe $n < \omega$ tal que $A_\alpha^n \subseteq Z \cap X_{<\alpha} \subseteq Y$. $\square$

Fixemos $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$ uma família quase disjunta maximal $\mathcal{M}_\alpha \subseteq [A_\alpha]^{\aleph_0}$ tal que para todo $n < \omega$ e $M \in \mathcal{M}_\alpha$ temos $|M \cap A_\alpha^n| = \aleph_0$.

Iremos construir recursivamente $\langle \tau_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que τ_α é uma topologia em $X_{<\alpha}$ para cada $\alpha < \omega_1$, se $\beta < \alpha$ então $\tau_\beta = \tau_\alpha \cap \wp(X_{<\beta})$ e valem

1. Se $\beta < \alpha$, o conjunto X_β é fechado discreto em $X_{<\alpha}$ e $X_{<\beta}$ é aberto.
2. Se o conjunto A vai até $\beta < \alpha$, então ele tem ponto de acumulação relativo a τ_α em X_β.
3. Para cada $n < \omega$ e $\beta < \alpha$, então $X_\beta \subseteq \overline{A_\beta^n}^{\tau_\alpha}$.
4. O espaço (X, τ_α) é localmente enumerável, localmente compacto, 0-dimensional e Hausdorff.
5. Para todo $\beta < \alpha$ e $x \in X_\beta$, existe $G \in \tau_\alpha$ tal que $G \cap X_\beta = \{x\}$.
6. Se $\beta_0 < \beta_1 < \alpha$, então $]\beta_0, \beta_1] \times \omega_1$ é aberto e fechado em τ_α.

Suponha que para $\gamma < \omega_1$, estão fixados $\langle \tau_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ tal que para cada $\alpha < \gamma$ estão satisfeitas as propriedades 1 a 6.

Se $\gamma \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$, então definimos τ_γ como a topologia gerada por $\bigcup_{\alpha<\gamma} \tau_\alpha$, que é uma base de uma topologia em $X_{<\gamma}$. Como foi criado a partir das uniões, se C é aberto (fechado) para algum τ_α com $\alpha < \gamma$, então ele será aberto (fechado) em τ_γ. Logo τ_γ satisfaz as propriedades 1, 5 e 6.

Pela hipótese de $\tau_\beta = \tau_\alpha \cap \wp(X_{<\beta})$, notemos que satisfaz 2 e 3. Notemos que se $A \subseteq X_{<\alpha}$ para $\alpha < \gamma$, então $\overline{A}^{\tau_\gamma} \subseteq X_{<\alpha+1}$, então teremos que vale a propriedade 4.

Se $\gamma = \alpha + 1$ e $\alpha \notin \mathrm{Lim}(\omega_1)$, τ_γ é a topologia gerada por $\tau_\alpha \cup \wp(X_\alpha)$. Teremos que $\langle \tau_\alpha : \alpha \leq \gamma \rangle$ satisfaz as propriedades 1 a 6.

Se $\gamma = \alpha + 1$, com $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$, enumeramos $\{F \subseteq X_{<\alpha} \setminus A_\alpha : F$ vai até $\alpha\} = \{F_\alpha^\beta : \beta < \omega_1\}$. Nesse caso iremos construir recursivamente uma sequência $\langle \rho_\alpha^\beta : \beta < \omega_1 \rangle$ onde ρ_α^β é uma topologia em $X_\alpha \cup \{(\alpha,\delta)\colon \delta \leq \beta\}$ que satisfaz as propriedades 1 a 6 e ρ^β_α é subespaço de ρ^δ_α se $\beta < \delta$. Se β é limite, então ρ^β_α é a toplogia gerada por $\bigcup_{\delta<\beta}\rho^\delta_\alpha$. Para o caso β não limite iremos mostrar alguns resultados antes.

Afirmação 2.1.26. *Se o conjunto A vai até α, então A é completamente discreto em τ_α.*

Demonstração. Consideremos a ordenação de $A = \{(\alpha_n,\beta_n) : n < \omega\}$ tal que $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ e $\sup_{n<\omega}\alpha_n = \alpha$.

Seja $G_0 = X_{<\alpha_0+1}$ e para cada $n < \omega$ tal que $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, $G_{n+1} =]\alpha_n, \alpha_{n+1}] \times \omega_1$. A família de abertos $\{G_n : n = 0 \vee (n < \omega \wedge \alpha_n < \alpha_{n+1})\}$ é discreta, cobre A e cada elemento contem finitos pontos de A. Como τ_α é de Hausdorff, podemos tomar uma família discreta de abertos que cobre A e cada elemento contem exatamente um ponto de A. $\square$

Afirmação 2.1.27. *Seja $(T\cup S,\sigma)$ um espaço de Hausdorff localmente enumerável, localmente compacta e 0-dimensional, onde $T \in \sigma$ e S é enumerável. Seja $D \subseteq T \setminus S$ enumerável fechado e discreto em σ e completamente discreto no subespaço T. Seja $r \notin T \cup S$. Então existe uma topologia ρ em $T \cup S \cup \{r\}$ que é localmente enumerável, localmente compacta, 0-dimensional e Hausdorff, onde σ é subespaço de ρ, o conjunto D converge a r e r não é ponto de acumulação de S.*

Demonstração. Seja uma enumeração $D = \{d_n : n < \omega\}$ e fixemos uma família discreta $\{G_n : n < \omega\}$ em T tal que G_n é vizinhança aberta de d_n para cada $n < \omega$.

Para cada $n < \omega$, tomemos $\{B^j_n : j < \omega\}$ uma base de d_n, onde, para cada $j < \omega$, o aberto B^j_n é enumerável e compacto, com $B^{j+1}_n \subsetneq B^j_n \subseteq G_n$.

Para cada $s \in S$ fixemos U_s uma vizinhança de s que é aberta, enumerável e compacta tal que $D \cap U_s = \emptyset$ e a função $g_s : \omega \longrightarrow \omega$, onde $g_s(n) = \min\{m < \omega : U_s \cap B^{g(n)}_n = \emptyset\}$. Como S é enumerável, existe $g \in \omega^\omega$ tal que para todo $s \in S$ o conjunto $\{n < \omega : g(n) < g_s(n)\}$ é finito.

Para cada $n < \omega$, definimos $B_n = \{r\} \cup \bigcup_{m=n}^{\infty} B^{g(n)}_n$. Assim, definimos ρ a topologia gerada por $\sigma \cup \{B_n : n < \omega\}$.

Segue da definição que σ é um subespaço de ρ. Como a família $\{G_n : n < \omega\}$ é discreta em T, para cada $t \in T$ existe $n < \omega$ tal que $t \notin \overline{B_n}$. Para $s \in S$, existe $n < \omega$, tal que para todo $m \geq n$, $g_s(m) \leq g(m)$, de tal maneira que $U_s \cap B_n = \emptyset$. Portanto é de Hausdorff.

Pela construção, temos que para cada $n < \omega$ B_n é compacto enumerável. Logo $(T \cup S \cup \{r\}, \rho)$ é um espaço localmente enumerável, localmente compacto e 0-dimensional.

Como para cada $n < \omega$ vale que $\{d_m : m > n\} \subseteq B_n$, então temos que D converge a r, que não é ponto de acumulação de S. $\square$

Suponha para $\beta < \omega_1$, ρ^β_α fixado. Tomamos $\rho^{\beta+1}_\alpha$ uma topologia dada pela afirmação anterior, considerando $T = X_{<\alpha}$, $S = \{(\alpha,\delta)\colon \delta < \beta\} \cup (A_\alpha \setminus M^\beta_\alpha)$, $r = \{(\alpha,\beta)\}$, $\sigma = \rho^\beta_\alpha$ Se F^β_α tem ponto de acumulação em ρ^β_α, então $D = M^\beta_\alpha$. Caso contrário, $D = M^\beta_\alpha \cup F^\beta_\alpha$.

Definimos τ_α a topologia gerada por $\bigcup_{\beta<\omega_1}\rho^\beta_\alpha$. Análogo ao caso limite, podemos verificar que τ_α definido como acima de fato satisfaz as propriedade de 1 a 6.

Definimos τ como sendo a topologia gerada por $\bigcup_{\alpha<\omega_1}\tau_\alpha$. Ela é uma topologia localmente enumerável, localmente compacto, 0-dimensional Hausdorff

Afirmação 2.1.28. *Seja $F \subseteq X$ que vai até $\alpha < \omega_1$. Então existe $\beta < \omega_1$ tal que $(\alpha,\beta) \in \overline{F}$. Alternativamente, se $G \in \tau$ e para algum $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$ vale que $X_\alpha \subseteq G$, então existe $\delta < \alpha$ tal que $]\delta,\alpha] \times \omega_1 \subseteq G$.*

Demonstração. Tomemos $\beta < \omega_1$, tal que $F = F^\beta_\alpha$. Se $\overline{F} \cap \{(\alpha,\delta) : \delta < \beta\} = \emptyset$, então pela definição $M^\beta_\alpha \cup F^\beta_\alpha$ converge a (α,β). Nesse caso (α,β) é ponto de acumulação de F. $\square$

Notemos que se D é um fechado discreto de τ, então nenhum subconjunto dele pode ir até um $\alpha < \omega_1$ e portanto $|\pi[D]| \leq \aleph_0$.

Se considerarmos a *ona* $\phi(\alpha,\beta) = X_{<\alpha+1}$, um conjunto D é núcleo dela se, e só se, $\pi[D]$ é ilimitado em ω_1. Logo ela não aceita um núcleo fechado discreto. Portanto X não é um D-espaço.

Notemos que para $Z \subseteq X$, se $|\pi[Z]| \leq \aleph_0$, então $Z = \bigcup_{\alpha\in\pi[Z]} Z \cap X_\alpha$ é a união de enumeráveis subespaços fechados discretos, logo Z é um D-espaço.

Se $Z \subseteq X$ é um fechado tal que $|\pi[Z]| = \aleph_1$, então tomamos um club $C \subseteq \omega_1$ tal que para todo $\alpha \in C$ existe $n < \omega$ tal que $A^n_\alpha \subseteq Z$. Como $X_\alpha \subseteq \overline{A^n_\alpha}$, temos que $C \times \omega_1 \subseteq Z$.

Consideremos uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de Z, queremos mostrar que existe um refinamento dela aberto que cobre Z, mas nenhum subconjunto próprio dele cobre Z. Para este fim, podemos considerar um refinamento de $\mathcal{U}$ que é uma *ona* $\mathcal{V} = \{V(x) : x \in Z\}$. Tomemos um conjunto $C \subseteq \omega_1$ club tal que $C \times \omega_1 \subseteq Z$ e para cada $\alpha \in C$ fixemos $G_\alpha = \bigcup_{x\in Z\cap X_\alpha} V(x)$. Fixemos então para cada $\alpha \in C$, $f(\alpha) < \alpha$ tal que $]f(\alpha),\alpha] \times \omega_1 \subseteq G_\alpha$. Aplicando o teorema do Pressing-Down na f, fixemos $S \subseteq \omega_1$ estacionário e $\delta < \omega_1$, tal que para todo $\alpha \in S$, $]\delta,\alpha] \times \omega_1 \subseteq G_\alpha$.

Tomemos $\delta_0 > \delta$ tal que $X_{\delta_0} \subseteq Z$. Definimos $S_0 = S \setminus (\delta_0 + 1)$. Para cada $\alpha \in S_0$, fixemos $d_\alpha \in X_\alpha$ tal que $(\delta_0,\alpha) \in V(d_\alpha)$. Definimos $V_0(d_\alpha) = (V(d_\alpha) \setminus (\{\delta_0\} \times S_0)) \cup \{(\delta_0,\alpha)\}$. Temos que $\mathcal{V}_0 = \{V_0(d_\alpha) : \alpha \in S_0\}$ é uma família de abertos.

Como S_0 é estacionário e $S_0 \subseteq \pi[\bigcup \mathcal{V}_0]$, então existe $\gamma < \omega_1$ tal que $F = Z \setminus \bigcup \mathcal{V}_0 \subseteq \gamma \times \omega_1$, logo F é um D-espaço. Assim tomemos um refinamento aberto $\mathcal{V}_1$ de $\mathcal{V}$ a F tal que nenhum subconjunto próprio cobre F. A família $\mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1$ é um refinamento aberto de $\mathcal{U}$ que cobre Z, mas nenhum subconjunto próprio dele cobre Z, assim provamos que Z é irredutível.

Logo todo subespaço fechado de X é irredutível e segue que X é um aD-espaço. $\square$

Notemos que os argumentos usados na demonstração de 1.4.3 podem ser adaptados a fim de verificar que:

Proposição 2.1.29. *Seja X um espaço topológico. Se existe uma família $\{F_n : n < \omega\}$ de subespaços fechados de X tal que $X = \bigcup_{n<\omega} F_n$ e F_n como subespaço é um aD-espaço para cada $n < \omega$, então X é um aD-espaço.*

Considerando o resultado 2.1.12, segue que:

Proposição 2.1.30. *Se $\{(X_s,\tau_s) : s \in S\}$ é uma família de aD-espaços, então $X = \bigoplus_{s\in S} X_s$ é um aD-espaço*

Observando que todo D-espaço é aD-espaço e que ω_1 com a topologia da ordem (1.2.13) não é bD-espaço, pois $e(\omega_1) < \ell(\omega_1)$, temos que o exemplo 1.3.10 mostra que a imagem aberta de um D-espaço não precisa ser nem bD-espaço.

Notemos também que o espaço (C,σ) do exemplo 1.3.16 tem extent enumerável, mas não é de Lindelöf, assim o produto não é um aD-espaço.

Proposição 2.1.31. *Se X é um bD-espaço e C é um espaço compacto, então $X \times C$ é um bD-espaço.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ um recobrimento aberto básico de $X \times C$. Para cada $x \in X$ fixemos $\mathcal{A}_x \subseteq \mathcal{A}$ finito minimal tal que $\{x\} \times C \subseteq \mathcal{A}_x$.

Consideremos para cada $x \in X$, $\mathcal{A}_x = \{U_x(k) \times V_x(k) : k < n_x\}$ e $B_x = \bigcap_{k<n_x} U_x(k)$. Seja ϕ uma *ona* em X com valores em $\{B_x : x \in X\}$ e $D \subseteq X$ núcleo localmente finito de ϕ.

Para cada $d \in D$, tomemos $h(d) \in X$ tal que $\phi(d) = B_{h(d)}$ e para cada $k < n_{h(d)}$ fixemos $y_d(k) \in d \in Y$ tal que $(d, y_d(k)) \in U_{h(d)}(k) \times V_{h(d)}(k) = \psi(d, y_d(k))$. Tal $y_d(k)$ existe pois para cada $k < n_{h(d)}$, existe $y_d(k) \in C$ tal que $(h(d), y_d(k)) \in U_{h(d)}(k) \times V_{h(d)}(k)$. Assim $(d, y_d(k)) \in B_{h(d)} \times V_{h(d)}(k)$.

A família $F = \{(d, y_d(k)) : d \in D,\ k < n_{h(d)}\}$ é localmente finita, pois se $(x, y) \in X \times C$, seja $A \subseteq X$ vizinhança de x tal que $A \cap D$ é finito. Então

$$A \times C \cap F \subseteq \{(d, y_d(k)) : d \in D \cap A,\ k < n_{h(d)}\},$$

que é um conjunto finito.

Consideremos ψ definida como uma *ona* parcial de F com valores em $\mathcal{A}$.

Seja $(x, y) \in X \times C$, tomando $d \in D$ tal que $x \in \phi(d)$, então $(x, y) \in B_{h(d)} \times \bigcup_{k<n_{h(d)}} V_{h(d)}(k)$, assim existe k tal que $(x, y) \in \psi(d, y_d(k))$. □

Obervação: Nesse demonstração usamos que se tratava do espaço inteiro e não de um subespaço, pois foi necessário que cada $V_{h(d)}(k)$ encontrasse algum elemento de $\{d\} \times C$, mas se fosse um subespaço Z, poderia ser que $\{d\} \times C \cap Z$ é mais estreito que $\{x\} \times C \cap Z$. Assim não poderíamos garantir que no final de fato é um recobrimento do espaço, pois haveria a possibilidade de $\{h(d)\} \times C \cap Z$ não ser coberta por $\psi(\{d\} \times C \cap Z)$. Portanto essa linha argumentativa não vale para preservar a propriedade *aD*.

2.2 Linearmente D

A definição de linearmente D foi introduzida em Guo e Junnila, 2010 como uma generalização de D-espaços, que ajuda no estudo de uniões de D-espaços, assim como a sua ligação com Lindelöf (3.3.12), além de ter propriedades próprias interessantes.

Definição 2.2.1. *Uma família $\mathcal{A}$ é* linear *se para todos $A, B \in \mathcal{A}$, vale que ou $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.*

Definição 2.2.2. *Uma família linear $\mathcal{A}$ é* trivial *se ela admite elemento máximo, ou seja, $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{A}$.*

Definição 2.2.3. *Seja uma família linear $\mathcal{A}$ em X. Um conjunto $B \subseteq X$ é $\mathcal{A}$-*grande *se $B \not\subseteq A$ para todo $A \in \mathcal{A}$.*

Definição 2.2.4. *Uma ona ϕ do espaço X é dita* linear *quando a família $\phi[X]$ é linear.*

Definição 2.2.5 (Guo e Junnila, 2010)**.** *Um espaço X é* linearmente D *se toda ona linear tem núcleo fechado discreto.*

Segue da definição que a propriedade D implica linearmente D, pois se trata de um caso particular.

Notemos que o exemplo 2.1.24 é de um espaço de Tychonoff aD que não é linearmente D, pois a *ona* usada para verificar que não é D-espaço era uma *ona* linear. Ainda não há um exemplo em ZFC de um aD-espaço Hausdorff que não é linearmente D.

Notemos também que os exemplos de 1.2.9 e 1.2.13 também não são linearmente D.

Valem para linearmente D alguns resultados simples de preservação:

Proposição 2.2.6. *Se X é um espaço linearmente D e $F \subseteq X$ fechado, então F é um subespaço linearmente D.*

Demonstração. Tomando $F \subseteq X$ como no enunciado, seja ϕ uma *ona* linear qualquer de F. Se definirmos a função em X,

$$\psi(x) = \begin{cases} X \setminus F; & \text{se } x \notin F \\ \phi(x) \cup (X \setminus F); & \text{se } x \in F \end{cases}.$$

A ψ é uma *ona* linear. Seja então $D \subseteq X$ núcleo fechado discreto de ψ, então $D \cap F$ é núcleo fechado discreto de ϕ. □

Proposição 2.2.7. *Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma função fechada, contínua e sobrejetora, e X é linearmente D, então Y também é.*

Demonstração. Seja ϕ uma *ona* linear de Y, definimos uma função ψ em X por $\psi(x) = f^{-1}[\phi(f(x))]$ para cada $x \in X$. Essa função é uma *ona* linear em X, tomemos então $D \subseteq X$ núcleo fechado discreto dela. Como f é uma função fechada $f[D]$ é núcleo fechado discreto de ϕ. □

Teorema 2.2.8 (Guo e Junnila, 2010)**.** *Se X é um espaço T_1, são equivalentes:*

(i) *X é linearmente D;*

(ii) *Para todo recobrimento aberto $\mathcal{A}$ linear não trivial, existe $D \subseteq X$ fechado discreto que é $\mathcal{A}$-grande;*

(iii) *Se $A \subseteq X$ tem cardinalidade κ regular não enumerável, existe $B \subseteq X$ fechado discreto tal que para todo conjunto aberto U que contem B vale que $|U \cap A| = \kappa$;*

(iv) *Se $A \subseteq X$ tem cardinalidade κ regular não enumerável, ou existe ponto de acumulação completo de A, ou existe $D \subseteq X$ fechado discreto de cardinalidade κ e uma família de subconjuntos de A dois a dois disjuntos $\{A_d : d \in D\}$ tal que $d \in \overline{A_d}$.*

Demonstração. **(i)** $\longrightarrow$ **(ii)**: Seja $\mathcal{A}$ um recobrimento aberto linear de X não trivial. Como $(\mathcal{A}, \subseteq)$ é uma ordem linear, existe uma κ-sequência $\langle A_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ estritamente crescente e cofinal em $\mathcal{A}$ para κ cardinal regular.

Para cada $x \in X$, fixemos $\alpha(x) = \min\{\alpha < \kappa : x \in A_\alpha\}$. Definimos então a *ona* linear $\phi(x) = A_{\alpha(x)}$. Tomemos $D \subseteq X$ núcleo fechado discreto da ϕ. Notemos então que $\{\alpha(d) : d \in D\} \subseteq \kappa$ é ilimitado, e portanto, para cada $A \in \mathcal{A}$, existe $d \in D$ tal que $A \subsetneq A_{\alpha(d)}$. Logo $d \notin A$, ou seja, D é $\mathcal{A}$-grande.

(ii) $\longrightarrow$ (iv): Seja $A \subseteq X$ de cardinalidade κ regular não enumerável. Fixemos uma enumeração $A = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Para cada $\alpha < \kappa$ definimos o aberto $U_\alpha = X \setminus \overline{\{a_\gamma : \gamma \in]\alpha, \kappa[\}}$. Consideremos a família linear não trivial de abertos $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

Se $\mathcal{U}$ não é recobrimento de X, existe $p \notin \bigcup_{\alpha<\kappa} U_\alpha$ que será ponto de acumulação de $\{a_\gamma : \gamma \in]\alpha, \kappa[\}$ para cada $\alpha < \gamma$. Portanto p é ponto de acumulação completo de A. Caso contrário, como κ é regular, existiria $V \subseteq X$ vizinhança de p para a qual $V \cap A \subseteq \{a_\gamma : \gamma < \alpha\}$ para algum $\alpha < \kappa$.

Se $\mathcal{U}$ é recobrimento aberto, então tomemos $F \subseteq X$ fechado discreto $\mathcal{U}$-grande. Para cada $\alpha < \kappa$ definimos recursivamente $d_\alpha \in F$ e γ_α da seguinte maneira: tomemos $d_\alpha \in F \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} U_{\gamma_\beta}$ qualquer e definimos $\gamma_\alpha < \kappa$ o menor ordinal tal que $d_\alpha \in U_\gamma$.

Definimos $D = \{d_\alpha : \alpha < \kappa\}$ e para cada $\alpha < \kappa$ definimos $A_\alpha = \{a_\gamma : \gamma \in] \sup_{\beta<\alpha} \gamma_\beta, \gamma_\alpha[\}$.

(iv) $\longrightarrow$ (iii): Notemos que o conjunto D seria o fechado discreto que queríamos.

(iii) $\longrightarrow$ (i): Seja ϕ uma *ona* linear de X, consideremos que a cofinalidade de $(\phi[X], \subseteq)$ seja κ. Então existe um conjunto $S = \{s_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq X$ núcleo de ϕ e se $\alpha < \beta < \kappa$, então $\phi(s_\alpha) \subsetneq \phi(s_\beta)$. Recursivamente construímos $t_\alpha \in X$ para cada $\alpha < \kappa$ fixando

$$t_\alpha \in X \setminus \phi(\{s_\beta : \beta \leq \alpha\} \cup \{t_\beta : \beta < \alpha\}).$$

Assim $T = \{t_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é também núcleo de ϕ, mas se $\alpha < \beta < \kappa$, então $t_\beta \notin \phi(t_\alpha)$.

Se $\kappa = \aleph_0$, então T é localmente finito e portanto fechado discreto.

Se κ não é enumerável, então tomemos $B \subseteq X$ fechado discreto tal que para toda vizinhança dele U, vale que $|U \cap T| = \kappa$. Assim, B não pode estar contido em algum valor da *ona* e segue que $|\phi(B) \cap T| = \kappa$, mas como ϕ é linear, $T \subseteq \phi(B)$. Como $t_\beta \notin \phi(t_\alpha)$ se $\alpha < \beta$, então B é núcleo de ϕ. □

Com essa caracterização podemos verificar que a união de dois espaços linearmente D é linearmente D. Antes consideremos o seguinte lema:

Lema 2.2.9. *Seja X um espaço T_1 e $\mathcal{A}$ um recobrimento aberto de X. Se $Y \subseteq X$ é um subespaço linearmente D e $\mathcal{A}$-grande, então existe $D \subseteq Y$ fechado discreto (relativo a Y) e $\mathcal{A}$-grande.*

Demonstração. Se Y é $\mathcal{A}$-grande, então $\{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ é um recobrimento aberto linear não trivial de Y, logo existe $D \subseteq Y$ que é grande para esse recobrimento, e portanto é $\mathcal{A}$-grande. □

Teorema 2.2.10 (Guo e Junnila, 2010)**.** *Se X é um espaço T_1 e $Y, Z \subseteq X$ subespaços linearmente D tais que $X = Y \cup Z$, então X é linearmente D.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ um recobrimento linear não trivial de X. Se Y não é $\mathcal{A}$-grande, então fixemos $A \in \mathcal{A}$ tal que $Y \subseteq A$, portanto $Z \setminus A$ é um subespaço fechado de Z e de X. Então $Z \setminus A$ é $\mathcal{A}$-grande, caso contrário existira $B \in \mathcal{A}$ tal que $A \subseteq B$ e $Z \setminus A \subseteq B$, assim $X \subseteq B$. Tomemos $D \subseteq Z \setminus A$ um conjunto fechado discreto $\mathcal{A}$-grande. O conjunto $D \subseteq X$ então é um conjunto $\mathcal{A}$-grande fechado e discreto.

Se Y e Z são $\mathcal{A}$-grandes, tomemos $E \subseteq Y$ fechado discreto $\mathcal{A}$-grande e seja $F = \overline{E}^X \setminus E = \overline{E}^X \cap Z$.

Verificamos que o conjunto $F \subseteq X$ é fechado. Como todo elemento de F é ponto de acumulação de E, se $p \in X$ é ponto de acumulação de F, então p é ponto de acumulação de

E. Assim $p \in \overline{E}^X \setminus E$, pois E é discreto.

Se F não é $\mathcal{A}$-grande, então fixemos $A \in \mathcal{A}$ tal que $F \subseteq A$. Assim $E \setminus A \subseteq X$ é fechado discreto e $\mathcal{A}$-grande. Se F é $\mathcal{A}$-grande, como $F = \overline{E}^X \cap Z$ é subconjunto fechado de Z, existe $G \subseteq F$ fechado discreto que é $\mathcal{A}$-grande.

Como $F \subseteq X$ é fechado, o conjunto $G \subseteq X$ é fechado discreto $\mathcal{A}$-grande.

Logo todo $\mathcal{A}$ admite um conjunto $\mathcal{A}$-grande fechado discreto e, por 2.2.8, X é linearmente D. □

Teorema 2.2.11 (Guo e Junnila, 2010)**.** *Seja X um espaço T_1 linearmente D. X é enumeravelmente compacto se, e somente se, X é compacto.*

Demonstração. Suponha X um espaço linearmente D e enumeravelmente compacto e seja $\mathcal{A}$ recobrimento aberto de X. Suponha por absurdo que $\mathcal{A}$ não admite subrecobrimento finito, então ele não admite subrecobrimento enumerável. Seja $\kappa > \aleph_0$ o menor cardinal tal que existe um subrecobrimento de $\mathcal{A}$ de cardinalidade κ e fixemos $\mathcal{A}' = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{A}$ subrecobrimento.

Consideremos o recobrimento linear $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ onde para cada $\alpha < \kappa$, $B_\alpha = \bigcup_{\beta \leq \alpha} A_\beta$. Como não existe subrecobrimento de $\mathcal{A}$ de cardinalidade menor que κ, $B_\alpha \neq X$ para todo $\alpha < \kappa$. Por X ser linearmente D, existe D um conjunto fechado discreto $\mathcal{B}$-grande, mas por ser enumeravelmente compacto esse conjunto é finito, contradizendo que $\mathcal{B}$ não é trivial. □

Como consequência de todo o espaço ser linearmente D e os teoremas 2.2.10 e 2.2.11, temos a resposta positiva para a versão finita da questão 1.4.5.

Corolário 2.2.12. *Se X é um espaço T_1 enumeravelmente compacto que é a união de finitos subespaços com a propriedade D, então ele é compacto.*

Na verdade podemos responder positivamente a versão enumerável da questão também.

Teorema 2.2.13 (Guo e Junnila, 2010)**.** *Se X é um espaço T_1 enumeravelmente compacto, tal que existe $\{Y_n : n < \omega\}$ família de subespaços de X que são linearmente D com $X = \bigcup_{n<\omega} Y_n$. Então X é compacto.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $\mathcal{A}$ é um recobrimento aberto de X que não admite subrecobrimento finito, e por X ser enumeravelmente compacto, ele também não admite subrecobrimentos enumeráveis.

Seja $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ subrecobrimento de cardinalidade mínima, com $|\mathcal{A}'| = \kappa$, e definimos uma enumeração $\mathcal{A}' = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Para cada $\alpha < \kappa$, tomemos $B_\alpha = \bigcup_{\beta \leq \alpha} A_\beta$ e o recobrimento aberto linear não trivial $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

Notemos que por X ser enumeravelmente compacto, se existisse um subrecobrimento enumerável de $\mathcal{B}$, então $\mathcal{B}$ seria trivial. Pelo teorema 2.2.10 podemos assumir que $Y_n \subseteq Y_{n+1}$ são todos conjuntos $\mathcal{B}$-grandes.

Tomemos $E_0 \subseteq Y_0$ fechado discreto e $\mathcal{B}$-grande. Definindo $F_0 = \overline{E_0}^X \setminus E_0$ um conjunto fechado em X. Caso F_0 não fosse $\mathcal{B}$-grande, consideremos $B \in \mathcal{B}$ tal que $F_0 \subseteq B$. Assim, $E_0 \setminus B \subseteq X$ é $\mathcal{B}$-grande, mas ele fechado e discreto, portanto finito, o que é um absurdo.

Fixemos $N_1 < \omega$ tal que $F_0 \cap Y_{N_1}$ é $\mathcal{B}$-grande. Tomamos então $E_1 \subseteq F_0 \cap Y_{N_1}$ fechado discreto e $\mathcal{B}$-grande. Por um argumento análogo ao anterior, teremos que $F_1 = \overline{E_1}^X \setminus E_1$ é $\mathcal{B}$-grande e existe $N_2 > N_1$ com $F_1 \cap Y_{N_2}$ $\mathcal{B}$-grande.

Definindo por recursão, consideremos fixados $F_0 \supseteq F_1 \supseteq \ldots \supseteq F_n$, todos $\mathcal{B}$-grandes, fechados e $F_k \cap Y_{N_k} = \emptyset$ para cada $k \leq n$. Como $F_n \subseteq X$ é fechado e $\mathcal{B}$-grande, então existe $N_{n+1} > N_n$ tal que $F_n \cap Y_{N_{n+1}}$ é $\mathcal{B}$-grande. Tomemos $E_{n+1} \subseteq F \cap Y_{N_{n+1}}$ fechado discreto $\mathcal{B}$-grande e definimos $F_{n+1} = \overline{E_{n+1}}^X \setminus E_{n+1}$, que será fechado e $\mathcal{B}$-grande.

Assim temos uma sequência de fechados não vazios encaixados com interseção vazia, pois $\bigcap_{n<\omega} F_n \cap \bigcup_{n<\omega} Y_{N_n} = \emptyset$, mas $X = \bigcup_{n<\omega} Y_{N_n}$, o que contradiz X ser enumeravelmente compacto. □

Teorema 2.2.14. *Se X é um espaço T_1 linearmente D e $\ell(X)$ é um cardinal regular, então $e(X) = \ell(X)$.*

Demonstração. Como para X espaço T_1 infinito vale que $e(X) \geq \aleph_0$, se $\ell(X) = \aleph_0$, então $\aleph_0 \leq e(X) \leq \ell(X) = \aleph_0$.

Assumimos então que $\ell(X)$ é um cardinal regular não enumerável.

Seja $\mathcal{A}$ um recobrimento aberto de cardinalidade $\ell(X)$ que não admite subrecobrimento de cardinalidade estritamente menor. Consideremos uma enumeração $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \ell(X)\}$, e para cada $\alpha < \ell(X)$ definimos $B_\alpha = \bigcup_{\beta \leq \alpha} A_\beta$. A família $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < \ell(X)\}$ é um recobrimento aberto linear não trivial.

Seja $C \subseteq X$ de cardinalidade menor que $\ell(X)$ e fixemos para cada $x \in C$ um ordinal $\alpha(x) < \ell(X)$ tal que $x \in B_{\alpha(x)}$. Como $\ell(X)$ é regular, temos que $\gamma = \sup_{x \in C} \alpha(x) < \ell(X)$ e vale que $C \subseteq B_\gamma \in \mathcal{B}$. Logo todo conjunto $\mathcal{B}$-grande tem cardinalidade no mínimo $\ell(X)$. Assumindo X linearmente D, existe um fechado discreto de cardinalidade $\ell(X)$. □

Notemos que a regularidade é essencial, pois existe um espaço regular linearmente Lindelöf que não é Lindelöf (Mishchenko, 1962). Assim ele é um espaço linearmente D, com número de Lindelöf não enumerável, mas extent enumerável.

Corolário 2.2.15. *Se X é um espaço T_1 que é união de finitos subespaços com a propriedade D e $\ell(X)$ é um cardinal regular, então $e(X) = \ell(X)$.*

Baseado na caracterização apresentada em 2.2.8, foram definidas em Guo e Junnila, 2010 as propriedades Δ_1 e Δ_2 com as relações com linearmente D como segue:

Corolário 2.2.16. *Seja X um espaço T_1 consideremos as seguintes propriedades*

Δ_1 *Se $A \subseteq X$ tem cardinalidade regular não enumerável, então ou ele tem ponto de acumulação completo, ou existe um fechado discreto de mesma cardinalidade contido nele.*

Δ_2 *Se $A \subseteq X$ tem cardinalidade regular não enumerável, então ou ele tem ponto de acumulação completo, ou existe um fechado discreto de mesma cardinalidade contido em seu fecho.*

Então a propriedade Δ_1 implica que o espaço é linearmente D, e a propriedade Δ_2 é consequência do espaço ser linearmente D.

Questão 2.2.17 (Guo e Junnila, 2010)**.** *Linearmente D, Δ_1 e Δ_2 são equivalentes?*

Veremos exemplos em ZFC construídos no artigo Soukup, 2011 de espaços de Hausdorff que mostram que essas propriedades são diferentes entre si.

Exemplo 2.2.18 (Soukup, 2011). *Existe um D-espaço Hausdorff localmente enumerável, de cardinalidade $\aleph_1$ que não satisfaz Δ_1*

Demonstração. Consideremos o conjunto $X = \omega_1 \times 2$ e a topologia nele, onde para cada $\alpha < \omega_1$, $\{(\alpha, 0)\}$ é aberto, assim como $\{(0,1)\}$ e a base de abertos de $(\alpha, 1)$ é a família $\{W_\alpha(\beta) : \beta < \alpha\}$, onde

$$W_\alpha(\beta) = \{(\alpha, 1)\} \cup (]\beta, \alpha[\times\{0\}).$$

Tomando $\alpha_0 < \alpha_1 < \omega_1$ e $\beta_0 < \alpha_0$, $\beta_1 < \alpha_1$, temos que $W_{\alpha_0}(\beta_0) \cap W_{\alpha_1}(\beta_1) \subseteq \omega_1 \times 0$, logo de fato ele define uma topologia. Além disso temos que $\{(\alpha_j, 0)\} \cap W_{\alpha_0}(0) = \emptyset$, para $j \in 2$, e $\{(\alpha_0, 0)\} \cap W_{\alpha_1}(\alpha_0) = \emptyset$ e $W_{\alpha_0}(0) \cap W_{\alpha_1}(\alpha_0) = \emptyset$. Logo é um espaço de Hausdorff.

Notemos que, pela definição, esse espaço é localmente enumerável. Além disso, $\omega_1 \times \{0\}$ é subespaço discreto e $\omega_1 \times \{1\}$ é subespaço fechado discreto, logo $X = \omega_1 \times \{0\} \cup \omega_1 \times \{1\}$ é um D-espaço.

Consideremos $A = \omega_1 \times \{0\}$, um subconjunto de cardinalidade regular não enumerável. Se $D \subseteq A$ é infinito, então existe $\alpha < \omega_1$ que é ponto de acumulação de $\{\beta < \omega_1 : (\beta, 0) \in D\}$, assim $(\alpha, 1)$ é ponto de acumulação em X de D. Logo não há fechado discreto infinito contido em A. Portanto X não satisfaz a propriedade Δ_1. □

Observação: Notemos que esse espaço não é nem metaLindelöf, pois se $\mathcal{V}$ é um refinamento aberto de $\{W_\alpha(0) : \alpha < \omega_1\}$, teremos que se $\alpha < \beta < \omega_1$ e $U, V \in \mathcal{V}$ tais que $(\alpha, 1) \in U$ e $(\beta, 1) \in V$, então $U \neq V$, de maneira que poderíamos verificar com o lema do Pressing-Down que $\mathcal{V}$ não pode ser ponto-enumerável.

Exemplo 2.2.19 (Soukup, 2011). *Existe um D-espaço Hausdorff localmente enumerável, localmente compacto, 0-dimensional que não satisfaz Δ_1*

Demonstração. Consideremos $\{C_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ a enumeração da família dos conjuntos que são uniões de finitos intervalos fechados infinitos dois a dois disjuntos de $\mathbb{R}$. Consideremos também $\{Q_\alpha^\beta : \beta < 2^{\aleph_0}\}$ a enumeração para cada $\alpha < 2^{\aleph_0}$ da família dos conjuntos de racionais cujo fecho contem C_α, fixemos uma bijeção $\rho : 2^{\aleph_0} \longrightarrow 2^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0}$ e para cada $\alpha < 2^{\aleph_0}$ fixamos $\rho_0(\alpha), \rho_1(\alpha) < 2^{\aleph_0}$ tal que $\rho(\alpha) = (\rho_0(\alpha), \rho_1(\alpha))$.

Construímos recursivamente $x_\alpha \in C_{\rho_0(\alpha)} \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ para $\alpha < 2^{\aleph_0}$. Para cada $\alpha < 2^{\aleph_0}$, fixemos uma sequência $\langle x_\alpha(n) : n < \omega \rangle$ em $Q_{\rho_0(\alpha)}^{\rho_1(\alpha)}$ que converge a x_α na topologia usual.

Seja $X = \mathbb{R} \times 2$. Consideremos nele uma topologia onde $\{(r, 0)\}$ é aberto para cada $r \in \mathbb{R}$ e se $r \notin \{x_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$, então $\{(r, 1)\}$ também é aberto. Além disso, a base em torno de $(x_\alpha, 1)$, para $\alpha < 2^{\aleph_0}$ é $\{H_\alpha(n) : n < \omega\}$ onde

$$H_\alpha(n) = \{(x_\alpha, 1)\} \cup \{(x_\alpha(m), 0) : m \in [n, \omega[\}.$$

Análogo ao exemplo anterior, temos que de fato isso define um espaço topológico, que será de Hausdorff. Pela definição $H_\alpha(n)$ é enumerável, então o espaço é localemnte enumerável. Além disso para todo $\alpha < 2^{\aleph_0}$ temos que $H_\alpha(0)$ é homeomorfo a $\omega + 1$, portanto é um compacto. Logo X é um espaço de Hausdorff com uma base aberta de compactos enumeráveis.

Notemos também que $\mathbb{R} \times \{1\}$ é fechado discreto e $\mathbb{R} \times \{0\}$ é discreto, logo X é um D-espaço.

Seja $A = \mathbb{R} \times \{0\}$, suponha $B \subseteq A$ não enumerável e o conjunto $B_0 \subseteq \mathbb{R}$, tal que $B = B_0 \times \{0\}$. Considerando a topologia usual da reta real, seja C o conjunto dos pontos isolados no subespaço B_0, portanto C é enumerável. Caso contrário, ela seria um subespaço discreto não enumerável de $\mathbb{R}$, que é absurdo, pois $\mathbb{R}$ é hereditariamente Lindelöf.

Seja $\mathcal{K}$ a família dos subconjuntos maximais de B_0 que são convexos em relação a C, ou seja se $x, y \in K$ e $x \leq y$, então $[x, y] \cap C = \emptyset$. Assim existe $K \in \mathcal{K}$ não enumerável e denso em si mesmo, logo existe $\alpha < 2^{\aleph_0}$ tal que $C_{\rho_0(\alpha)} = \overline{K}$ e $Q^{\rho_1(\alpha)}_{\rho_0(\alpha)} \subseteq \overline{K}$.

Assim, para todo $n < \omega$, temos que $H_\alpha(n) \cap B \neq \emptyset$, logo $(x_\alpha, 1)$ é ponto de acumulação de B. Portanto todo conjunto fechado discreto em A é enumerável, ou seja, X não satisfaz Δ_1. □

Proposição 2.2.20 (Soukup, 2011). *A existência de um D-espaço de Hausdorff localmente enumerável, localmente compacto de cardinalidade estritamente menor que $2^{\aleph_0}$ que não satisfaz Δ_1 é independente de ZFC.*

Consideremos o princípio (t) fraco, que é assumir que existe uma sequência (t) fraca.

Definição 2.2.21. *Uma sequência $\langle x_\alpha : \alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)\rangle$ é (t) fraca se para cada $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$ x_α é uma sequência estritamente crescente de ordinais com $\sup_{n<\omega} x_\alpha(n) = \alpha$. Além disso, para todo $Z \subseteq \omega_1$ ilimitado, existe $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$ tal que $|\{n < \omega : x_\alpha(n) \in Z\}| = \aleph_0$.*

Exemplo 2.2.22. *Assuma (t) fraco. Existe tal espaço.*

Demonstração. Consideremos a sequência (t) fraca, ou seja, $\langle x_\alpha : \alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)\rangle$, onde cada x_α é uma sequência estritamente crescente que converge a α, e para todo $Z \subseteq \omega_1$ ilimitado, existe $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$ tal que $|\{n < \omega : x_\alpha(n) \in Z\}| = \aleph_0$.

Seja $X = \omega_1 \times 2$. Consideremos nele uma topologia onde para todo $\alpha < \omega_1$, $\{(\alpha, 0)\}$ é aberto, assim como $\{(\alpha, 1)\}$, se $\alpha \notin \mathrm{Lim}(\omega_1)$. Além disso, a base do ponto $(\alpha, 1)$ se $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$ é $\{B_\alpha(\beta) : \beta < \alpha\}$ onde

$$B_\alpha(\beta) = \{(\alpha, 1)\} \cup (\{x_\alpha(n) : n < \omega\} \setminus \beta) \times \{0\}.$$

Similar aos anteriores, isso define um espaço topológico de Hausdorff e novamente localmente enumerável. Para cada $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$, notemos que $B_\alpha(0)$ é homeomorfo a $\omega + 1$, portanto é compacto. Logo X é localmente compacto e a base apresentada é composta de fechados abertos.

Notemos também que $\omega_1 \times \{1\}$ é fechado discreto e $\omega_1 \times \{0\}$ é discreto, logo X é um D-espaço.

Seja $A = \omega_1 \times \{0\}$ e suponha $B \subseteq A$ não enumerável. Consideremos também $B_0 \subseteq \omega_1$ tal que $B = B_0 \times \{0\}$. Existe então $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$ tal que $|\{n < \omega : x_\alpha(n) \in B_0\}| = \aleph_0$, logo $(\alpha, 1)$ é ponto de acumulação de B. Portanto todo conjunto fechado discreto de A é enumerável, ou seja, X não satisfaz a propriedade Δ_1. □

Entretanto, se assumirmos que o axioma de Martin vale, então não há um espaço localemnte enumerável, localmente compacto de cardinalidade menor que $2^{\aleph_0}$ que é linearmente

D e não satisfaz Δ_1, ou que satisfaça Δ_2 e não seja linearmente D.

Teorema 2.2.23 (Balogh, 1983). *Assuma MA. Se X é um espaço localmente enumerável, localmente compacto e $|X| < 2^{\aleph_0}$, são equivalentes:*

(i) *X é a união de enumeráveis subconjuntos fechados discretos;*

(ii) *X não admite subespaço que é pré-imagem perfeita de ω_1*

Proposição 2.2.24 (Soukup, 2011). *Assuma MA. Se X é um espaço localmente enumerável, localmente compacto e $|X| < 2^{\aleph_0}$, são equivalentes:*

(i) *X é a união de enumeráveis subconjuntos fechados discretos;*

(ii) *X é um D-espaço*

(iii) *X é linearmente D*

(iv) *X satisfaz Δ_1*

(v) *X satisfaz Δ_2*

Demonstração. Sabemos as implicações **(i)** $\longrightarrow$ **(ii)** $\longrightarrow$ **(iii)** $\longrightarrow$ **(v)** e **(iv)** $\longrightarrow$ **(iii)**.

(i) $\longrightarrow$ **(iv)**: Se $X = \bigcup_{n<\omega} D_n$ e $A \subseteq X$ conjunto de cardinalidade regular não enumerável, então existe $n < \omega$ tal que $A \cap D_n$ tem a mesma cardinalidade de A e é fechado discreto.

(iii) $\longrightarrow$ **(i)**: Suponha $F \subseteq X$ uma pré-imagem perfeita de ω_1 por f. Como ω_1 não é compacto, F também não o é. Seja $E \subseteq F$ infinito. Se a imagem de E é finita, então existe um compacto em F cuja interseção com E é infinito.

Tomemos $A \subseteq E$ infinito enumerável, assim $\overline{f[A]} \subseteq \omega_1$ é compacto, e portanto A está contido em um compacto. Logo há um ponto de acumulação. Assim F é um enumeravelmente compacto que não é compacto.

Por ser localmente enumerável, podemos fixar para cada $x \in X$ uma base pontual de abertos enumerável decrescente $\mathcal{B}_x = \{B_x(n) : n < \omega\}$. Suponha $x \in X$ ponto de acumulação de F, então para cada $n < \omega$, fixemos $x_n \in F \cap B_x(n)$. Mas por argumento similar ao anterior temos $\{x_n : n < \omega\}$ contido em um compacto no F e x é ponto de acumulação desse conjunto, logo $x \in F$.

Como F é enumeravelmente compacto, mas não compacto, ele não pode ser linearmente D, e como F é subespaço fechado de X, o espaço X não pode ser linearmente D.

(v) $\longrightarrow$ **(i)** : Suponha $F \subseteq X$ uma pré-imagem perfeita de ω_1 por f. Verificamos no caso anterior que F é um fechado enumeravelmente compacto, não enumerável. Logo se fixar $A \subseteq F$ de cardinalidade $\aleph_1$, todo $D \subseteq \overline{A}$ não enumerável está contido em F, logo tem ponto de acumulação. □

Exemplo 2.2.25 (Soukup, 2011). *Existe um espaço de Hausdorff localmente enumerável, localmente compacto, 0-dimensional que satisfaz Δ_2, mas não é linearmente D.*

Demonstração. Consideremos $\{C_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$, $\{Q_\alpha^\beta : \beta < 2^{\aleph_0}\}$ e ρ como definidos no exemplo 2.2.19, mas $Q_\alpha^\beta \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ enumerável. Consideremos $h : 2^{\aleph_0} \longrightarrow 2^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0}$ bijeção, com $h(\alpha) = (h_0(\alpha), h_1(\alpha), h_2(\alpha))$. Fixemos uma enumeração do conjunto das funções $F : \omega \longrightarrow 2^{\aleph_0}$ por $\{F_\delta : \delta < 2^{\aleph_0}\}$. Tome uma família quase disjunta $\{M_\delta : \delta < 2^{\aleph_0}\} \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$.

Seja $X = 2^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0}$, para cada $\alpha < 2^{\aleph_0}$ definimos $X_\alpha = \{\alpha\} \times 2^{\aleph_0}$ e $X_{<\alpha} = \alpha \times 2^{\aleph_0}$. Definiremos recursivamente $\langle x_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0} \rangle$, $\langle \tau_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0} \rangle$ tal que para cada $\alpha < 2^{\aleph_0}$, τ_α é uma topologia sobre $X_{<\alpha}$, $x_\alpha \in \mathbb{R}$ e valem

1. $(X_{<\alpha}, \tau_\alpha)$ é localmente enumerável, localmente compacto e 0-dimensional de Hausdorff;
2. Se $\beta < \alpha$, então τ_β é subespaço de τ_α e $\tau_\beta = \tau_\alpha \cap \wp(X_{<\beta})$;
3. Se $(\delta, \gamma) \in X_{<\alpha}$, então existe $G \in \tau_\alpha$ tal que $G \setminus \{(\delta, \gamma)\} \subseteq X_{<\delta}$.
4. Sejam $V \subseteq \mathbb{R}$ um aberto na topologia usual e $\beta < \alpha$, tais que $x_\beta \in V$. Se $(\beta, \gamma) \in X$, existe um G compacto, fechado, aberto, enumerável de τ_α tal que

$$(\beta, \gamma) \in G \subseteq \bigcup \{X_\delta : \delta < 2^{\aleph_0},\ x_\delta \in V\}.$$

Fixamos para cada $\alpha < 2^{\aleph_0}$, $x_\alpha \in C_{h_0(\alpha)} \setminus (\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \mathbb{Q})$.

Se α é limite, então τ_α é a topologia gerada pela base determinada por $\bigcup_{\beta<\alpha} \tau_\beta$. Assim as propriedades 1 a 4 são satisfeitas para τ_α.

Se $\alpha = \gamma + 1$ e x_γ não é ponto de acumulação de $Q_{h_0(\gamma)}^{h_1(\gamma)} \cap \{x_\delta : \delta < \gamma\}$, então τ_α é gerado por $\tau_\gamma \cup \wp(X_\gamma)$. Notemos que a topologia definida ainda satisfaz as propriedades de 1 a 4.

Se $\alpha = \gamma + 1$ e x_γ é acumulação de $Q_{h_0(\gamma)}^{h_1(\gamma)} \cap \{x_\delta : \delta < \gamma\}$, fixemos uma sequência injetora $\langle \gamma(n) : n < \omega \rangle$ em γ tal que $x_{\gamma(n)} \in Q_{h_0(\gamma)}^{h_1(\gamma)}$ para cada $n < \omega$ e a sequência $\langle x_{\gamma(n)} : n < \omega \rangle$ converge a x_γ.

Tomemos uma família $\{(q_n^0, q_n^1) : n < \omega\} \subseteq \mathbb{Q}^2$ tal que para cada $n < \omega$ vale que $q_n^0 < x_{\gamma(n)} < q_n^1$ e se $n \neq m$, $]q_n^0, q_n^1[\cap]q_m^0, q_m^1[= \emptyset$. Chamemos $B_n =]q_n^0, q_n^1[$.

Para cada $\beta < 2^{\aleph_0}$ fixemos uma sequência $\langle G_\beta(n) : n < \omega \rangle$ tal que $G_\beta(n)$ é enumerável, compacto, fechado e aberto em τ_γ com $(\gamma(n), F_{\rho_0(\beta)}(n)) \in G_\beta(n) \subseteq \bigcup \{X_\delta : \delta < 2^{\aleph_0},\ x_\delta \in B_n\}$ para cada $n < \omega$. Notemos que a união $\bigcup_{n<\omega} G_\beta(n)$ é fechada em τ_γ.

A topologia τ_α é definida por τ_γ, e as vizinhanças de (γ, β) são definidas por

$$U(\gamma, \beta, E) = \{(\gamma, \beta)\} \cup \bigcup \{G_\beta(n) : n \in M_\beta \setminus E\},\ \text{onde } E \in [\omega]^{<\aleph_0}.$$

Então de fato definimos uma topologia que satisfaz as propriedades 1 a 4.

Definimos a topologia τ de X usando de base $\bigcup_{\alpha<2^{\aleph_0}} \tau_\alpha$. Pelas propriedades 1 a 4 dos passos de recursão, é fácil ver que ela é de Hausdorff, localmente enumerável, localmente compacta e 0-dimensional.

Seja $A \subseteq X$ de cardinalidade regular não enumerável que não tem ponto de acumulação completa. Definimos $\pi(A) = \{\alpha < 2^{\aleph_0} : A \cap X_\alpha \neq \emptyset\}$ e $\pi_0(A) = \{x_\alpha : \alpha \in \pi(A)\}$. Se $|\pi(A)| < |A|$, então existe $\alpha \in \pi(A)$, tal que $|A \cap X_\alpha| = |A|$ é fechado discreto.

Supondo então que $|\pi(A)| = |A| > \aleph_0$. Portanto existem $\alpha, \beta < 2^{\aleph_0}$ tais que $C_\alpha \subseteq \overline{\pi_0(A)}$ e $Q_\alpha^\beta \subseteq \pi_0(A)$. Definimos

$$D = \{\delta < 2^{\aleph_0} : h_0(\delta) = \alpha,\ h_1(\delta) = \beta,\ \forall \gamma < 2^{\aleph_0}(x_\gamma \in Q_\alpha^\beta \longrightarrow \gamma < \delta)\}.$$

Para $\delta \in D$, temos que $x_\delta \in C_\alpha \subseteq \overline{\pi_0(A) \cap Q_\alpha^\beta}$, assim x_δ é ponto de acumulação de $Q_\alpha^\beta\{x_\gamma : \gamma < \delta\}$, portanto definimos a sequência $\langle \delta(n) : n < \omega \rangle$. Fixemos uma $F : \omega \longrightarrow 2^{\aleph_0}$ tal que $(\gamma(n), F(n)) \in A$. Tomemos $\varepsilon < 2^{\aleph_0}$ tal que $F_\varepsilon = F$.

Se $\gamma < 2^{\aleph_0}$ é tal que $\rho_0(\gamma) = \varepsilon$, então pela construção temos que $(\gamma, \varepsilon) \in \overline{\{(\gamma(n), F(n)) : n < \omega\}}$, logo $\{(\delta, \gamma)\colon \gamma < 2^{\aleph_0},\ \rho_0(\gamma) = \varepsilon\} \subseteq \overline{A}$, que é fechado discreto de cardinalidade $2^{\aleph_0}$.

Portanto X satisfaz a propriedade Δ_2.

Notemos que $\mathcal{A} = \{X_{<\alpha}\colon \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ é um recobrimento aberto linear não trivial tal que se D é $\mathcal{A}$-grande, então $|\pi(D)| = 2^{\aleph_0}$. Pela argumentação anterior, temos que D tem ponto de acumulação.

Logo X não é linearmente D. □

Consideremos o princípio ♣, que é assumir que existe um ♣-sequência.

Definição 2.2.26. *Uma ♣-sequência é uma sequência $\langle x_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)\rangle$ tal que para cada $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$ x_α é um sequência de ordinais estritamente crescente com $\sup_{n<\omega} x_\alpha(n) = \alpha$. Além disso, para cada $Z \subseteq \omega_1$ ilimitado, existe $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$ tal que $\{x_\alpha(n)\colon n < \omega\} \subseteq Z$.*

Exemplo 2.2.27 (Soukup, 2011)**.** *Assuma ♣. Existe um espaço de Hausdorff 0-dimensional de cardinalidade $\aleph_1$ que satisfaz Δ_2, mas não é linearmente D.*

Demonstração. Tomemos uma ♣-sequência $\langle x_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)\rangle$ e uma família quase disjunta $\{M_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ em $[\omega]^{\aleph_0}$ e para cada $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$ e $n \in \mathbb{N}$ fixemos $I_\alpha^0 = [0, x_\alpha(0)]$ e $I_\alpha^n =]x_\alpha(n-1), x_\alpha(n)]$.

Consideremos o conjunto $X = \omega_1 \times \omega_1$. Definimos uma topologia nele por: se $\alpha \notin \mathrm{Lim}(\omega_1)$, então $\{(\alpha, \beta)\}$ é aberto; se é limite, para cada $E \in [\omega]^{<\aleph_0}$ temos uma vizinhança de (α, β) dada por

$$U(\alpha, \beta, E) = \{(\alpha, \beta)\} \cup \bigcup\{I_\alpha^n \times \omega_1\colon n \in M_\beta \setminus E\}.$$

Notemos que de fato esta é uma base bem definida. Sejam $\alpha_0 < \alpha_1 < \omega_1$ ambos limites, $\beta_0, \beta_1 < \omega_1$, $\beta_0 \neq \beta_1$. Existe $N < \omega$ tal que para todo $n > N$, $x_{\alpha_1}(n) > \alpha_0$, assim $U(\alpha_0, \beta_0, \emptyset) \cap U(\alpha_1, \beta_1, N+1) = \emptyset$. Além disso, sendo $E = M_{\beta_0} \cap M_{\beta_1}$ temos que $U(\alpha_0, \beta_0, E) \cap U(\alpha_0, \beta_1, E) = \emptyset$. Logo o espaço é de Hausdorff.

Notemos que pelo argumento anterior, temos que para todo $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$, $\beta < \omega_1$ e $E \subseteq \omega$ finito. Se $x = (\delta, \varepsilon) \in X \setminus U(\alpha, \beta, E)$ e $\delta \geq \alpha$, então existe vizinhança aberto. Se $(\alpha_0, \beta_0) \notin U(\alpha_1, \beta_1, E)$, então existe vizinhança aberta de x, V tal que $V \cap U(\alpha\beta, E) = \emptyset$

Suponha que $\delta < \alpha$, então existe $n \in \omega \setminus (M_\beta \setminus E)$ tal que $\delta \in I_\alpha^n$. Pela construção existe $F \subseteq \omega$ finito tal que $U(\delta, \varepsilon, F) \subseteq I_\alpha^n \subseteq X \setminus U(\alpha, \beta, E)$. Logo ele é 0-dimensional.

Seja $A \subseteq X$ de cardinalidade $\aleph_1$. Definimos $\pi(A) = \{\alpha < \omega_1\colon A \cap X_\alpha \neq \emptyset\}$. Se $|\pi(A)| \leq \aleph_0$, então existe α tal que $|A \cap X_\alpha| = \aleph_1$ e $A \cap X_\alpha$ é fechado discreto. Caso contrário, tomemos o conjunto estacionário $S = \{\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)\colon \forall n < \omega(x_\alpha(n) \in \pi(A))\}$. Logo pela construção é temos que para todo $\alpha \in S$, vale que X_α está contido no conjunto de pontos de acumulação de A e é fechado discreto.

Portanto X satisfaz a propriedade Δ_2.

Considerando o recobrimento aberto linear $\{\alpha \times \omega_1\colon \alpha < \omega_1\}$, temos que $D \subseteq X$ é grande para ele se, e só se, $|\pi(D)| = \aleph_1$, mas pelo que acabamos que verificar D não poderia ser fechado discreto, logo X não é linearmente D. □

Exemplo 2.2.28 (Soukup, 2011)**.** *Assuma ♣ + CH (que equivale a assumir ◇). Existe um espaço de Hausdorff localmente enumerável, localmente compacto 0-dimensional que satisfaz Δ_2, mas não é linearmente D.*

Demonstração. Fixemos $\{F_\delta : \delta < \omega_1\}$ uma enumeração do conjunto das funções de ω a ω_1 e uma bijeção $h : \omega_1 \longrightarrow \omega_1 \times \omega_1$.

Sejam $X = \omega_1 \times \omega_1$, $X_\alpha = \{\alpha\} \times \omega_1$, $X_{<\alpha} = \alpha \times \omega_1$. Recursivamente definimos uma sequência $\langle \tau_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$:

1. $(X_{<\alpha}, \tau_\alpha)$ é um espaço Hausdorff localmente enumerável, localmente compacto e 0-dimensional;
2. Se $\beta < \alpha$, então $\tau_\beta = \{V \cap X_{<\beta} : V \in \tau_\alpha\} = \tau_\alpha \cap \wp(X_{<\beta})$;
3. Se $(\delta, \gamma) \in X_{<\alpha}$, então existe G aberto, fechado enumerável e compacto em τ_α, tal que $G \setminus X_{<\delta} = \{(\delta, \gamma)\}$.

Se $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$, definimos τ_α como a topologia gerada por $\bigcup_{\gamma<\alpha} \tau_\gamma$.

Se $\alpha = \gamma + 1$ e γ é um ordinal sucessor, então definimos τ_α como a topologia gerada por $\tau_\gamma \cup \{\{(\gamma, \beta) : \beta < \omega_1\}\}$.

Sejam $\alpha = \gamma + 1$ e $\gamma \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$. Para cada $\beta < \omega_1$, considerando $h(\beta) = (h_0(\beta), h_1(\beta))$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ fixemos $G_\beta(n) \subseteq]x_\alpha(n-1), \alpha(n)] \times \omega_1$ um aberto, fechado enumerável, compacto de τ_γ tal que $G_\beta(n) \setminus X_{<x_\alpha(n)} = \{(x_\alpha(n), F_{h_0(\beta)}(n))\}$.

A topologia τ_α é gerada por $\tau_\gamma \cup \{H(\alpha, \beta, E) : \beta < \omega_1,\ E \in [\omega]^{<\aleph_0}\}$, onde

$$H(\alpha, \beta, E) = \{(\alpha, \beta)\} \cup \bigcup \{G_\beta(n) : n \in M_\beta \setminus E\}.$$

Análogo ao exemplo anterior, podemos verificar que de fato X é um espaço de Hausdorff. Pela construção, ele é localmente enumerável. Consideremos um recobrimento básico de $H(\alpha, \beta, E)$, pela definição, tem que existir $F \in [\omega]^{<\aleph_0}$ tal que $H(\alpha, \beta, F)$ está no recobrimento, mas então $H(\alpha, \beta, E) \setminus H(\alpha\beta, F) = \bigcup \{G_\beta(n) : n \in F \setminus E\}$ que é a união enumerável de compactos. Portanto $H(\alpha, \beta, E)$ é compacto. Por consequência temos que ele é localmente compacto e 0-dimensional, e satisfaz as propriedades 1 a 3.

Seja τ a topologia em X que tem como base $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \tau_\alpha$. Ela será um espaço de Hausdorff, localmente enumerável, localmente compacto e 0-dimensional.

Seja $A \subseteq X$ tal que $|A| = \aleph_1$. Seja $\pi(A) = \{\alpha < \omega_1 : A \cap X_\alpha \neq \emptyset\}$. Se $|\pi(A)| \leq \aleph_0$, então existe $\alpha < \omega_1$ tal que $A \cap X_\alpha$ não é numerável e é fechado discreto.

Supondo que $\pi(A)$ não é enumerável, seja $S = \{\alpha < \omega_1 : \forall n < \omega(x_\alpha(n) \in \pi(A))\}$, ele é estacionário. Fixemos $\delta < \omega_1$ tal que $(x_\alpha(n), F_\delta(n)) \in A$.

Definimos $C = \{\beta < \omega_1 : h_0(\beta) = \delta\}$ e $K = \{\alpha\} \times C$. Tomando $\beta \in C,\ E \in [\omega]^{<\aleph_0}$, temos que existe $n \in M_\beta \setminus E$ e $(x_\alpha(n), F_\delta(n)) \in H(\alpha, \beta, E)$. Logo todo ponto de K é um ponto de acumulação de A e K é um fechado discreto de cardinalidade $\aleph_1$.

Portanto o espaço satisfaz a propriedade Δ_2.

Considerando $\mathcal{A} = \{\alpha \times \omega_1 : \alpha < \omega_1\}$, um conjunto $\mathcal{A}$-grande D tem que ter $\pi(D)$, não enumerável e pelo argumento anterior não pode ser fechado discreto. Logo X não é linearmente D. □

Notemos que para o caso linearmente D e Δ_2, não está verificado se é de fato independente de ZFC se existe um Hausdorff localmente enumerável, localmente compacto de cardinalidade menor que $2^{\aleph_0}$ que satisfaz Δ_2, mas não é linearmente D.

2.3 Fortemente D

Diversas demonstrações e exemplos de D-espaços utilizam que os abertos da *ona* testemunham que o núcleo é localmente finito. A propriedade *fortemente D*, introduzida em Aurichi, 2011, sintetiza essa ideia.

Definição 2.3.1. *Um espaço topológico é* fortemente D *se para toda ona ϕ existe um núcleo D tal que para cada ponto do espaço x existe um conjunto finito F_x tal que $x \in \bigcap \phi[F_x]$ e $|\bigcap \phi[F_x] \cap D| < \aleph_0$.*

Iremos mostrar alguns resultados verificados em Aurichi, 2011 sobre ela. Seu aspecto mais importante está em como se relaciona com as propriedades de Lindelöf e Menger, que iremos considerar no capítulo 3.

Notemos que pela definição todo espaço T_1 fortemente D é um D-espaço, pois se definirmos uma função $\psi(x) = \bigcap \phi[F_x]$, então ψ é uma *ona* que verifica que o núcleo é fechado discreto. Sem o T_1 não é necessariamente D-espaço, bastando tomar alguém que é finito e não D-espaço. Esse também vale como exemplo de fortemente D que não é linearmente D.

Notemos que o exemplo construído em 1.2.9 é um espaço T_0, aD-espaço e fortemente D, que não é linearmente D nem dualmente discreto.

Notemos que em fortemente D, ao contrário das propriedades anteriores, não podemos considerar que os abertos estão em uma base, nem considerar um refinamento da *ona* a fim de obter o núcleo, tornando essa propriedade mais restritiva que as anteriores:

Proposição 2.3.2. *Um espaço discreto é fortemente D se, e somente se, ele é enumerável.*

Demonstração. Se o espaço é finito, o próprio espaço é um núcleo que testemunha que o espaço é fortemente D para todas as *onas*. Se X é discreto enumerável infinito, consideremos uma *ona* ϕ nele. Fixemos uma enumeração $X = \{x_n : n < \omega\}$. Recursivamente definimos $j(n) = \min\{k < \omega : x_k \notin \bigcup_{m<n} \phi(x_{j(m)})\}$. Se esse conjunto for vazio, paramos a recursão e temos um núcleo finito de ϕ. Caso contrário, definimos $D = \{d_{j(n)} : n < \omega\}$ núcleo de ϕ e para cada $x \in X$, fixamos $n_x = \min\{n < \omega : x \in \phi(d_{j(n)})\}$ e $F_x = \{d_{j(n_x)}\}$. Temos que $F_x \cap D \subseteq \{d_{j(n)} : n \leq n_x\}$, que é finito.

Se X é discreto não enumerável, tomemos uma ordenação $X = \{x_\alpha : \alpha < \gamma + \omega_1\}$ para algum ordinal γ de cardinalidade $|X|$.

Consideremos a *ona* ϕ em X definida por

$$\phi(x_\alpha) = \{x_\beta : \beta \leq \alpha\},\ \alpha < \gamma + \omega_1$$

Notemos que se $D \subseteq X$ é núcleo de ϕ, então $A = \{\alpha : x_\alpha \in D\}$ é cofinal em $\gamma + \omega_1$. Portanto o conjunto $\{\rho < \omega_1 : \gamma + \rho \in A\}$ é cofinal em ω_1, e portanto não enumerável. Seja $S \subseteq A$ infinito enumerável, existe $\alpha \in A$ tal que $\beta \leq \alpha$ para todo $\beta \in S$, e pela definição das vizinhanças, considerando $F_\alpha = \{x \in X : x_\alpha \in \phi(x)\}$ temos que $S \subseteq \bigcap \phi[F_\alpha]$.

Logo X não é um espaço fortemente D. □

Proposição 2.3.3. *Se X é um espaço fortemente D e $F \subseteq X$ é fechado, então F é fortemente D.*

Demonstração. Seja ϕ uma *ona* em F. Consideremos ψ a *ona* em X definida por:

$$\psi(x) = \begin{cases} \phi(x) \cup X \setminus F, & x \in F \\ X \setminus F, & x \notin F \end{cases}$$

Seja $D \subseteq X$ núcleo de ψ e para cada $x \in X$ fixemos F_x finito tal que $x \in \bigcap \psi[F_x]$ e $D \bigcap \psi[F_x]$ é finito.

Pela definição da ψ, temos que $D \cap F$ é núcleo de ϕ e se $x \in F$ também vale que $F_x \subseteq F$, assim F é fortemente D. □

Proposição 2.3.4. *Se X é um espaço σ-compacto, então X é fortemente D.*

Demonstração. Seja ϕ uma *ona* de X. Construímos recursivamente $D_n \subseteq K_n = F_n \setminus \bigcup_{m<n} \phi(D_m)$ finita tal que $K_n \subseteq \phi(D_n)$.

Assim $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$ é núcleo de ϕ. Se $x \in X$, então fixemos $d \in D_n$ tal que $x \in \phi(d)$ Definimos $F_x = \{d\}$, pois $\phi(d) \subseteq \phi(D_n)$ e $\phi(D_n) \cap D \subseteq \bigcup_{m \leq n} D_m$, que é finito. □

Proposição 2.3.5. *Sejam $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua sobrejetora entre os espaços topológicos X e Y. Se X é fortemente D, então Y também é.*

Demonstração. Seja ϕ uma *ona* em Y. Definimos uma *ona* ψ em X por

$$\psi(x) = f^{-1}[\phi(f(x))],\ x \in X.$$

Tomemos $E \subseteq X$ núcleo de ψ e para cada $x \in X$, um conjunto G_x finito tal que $x \in \bigcap \psi[G_x]$ e $\bigcap \psi[G_x] \cap E$ é finito.

Definimos $D = f[E]$, que será núcleo de ϕ, pois para $y \in Y$, existe $x \in E$ tal que $f^{-1}[y] \cap f^{-1}[\phi(f(x))] \neq \emptyset$, assim $y \in \phi(f(x)) \subseteq \phi(D)$.

Para cada $y \in Y$ fixamos um $x(y) \in f^{-1}[y]$ e definimos o conjunto finito $F_y = f[G_{x(y)}]$.

Notemos que para cada $z \in G_{x(y)}$, temos que $x(y) \in \psi(z)$, ou seja, $f^{-1}[y] \cap f^{-1}[\phi(f(z))] \neq \emptyset$. Assim vale $y \in \phi(f(z))$. Seja $z \in D \cap \bigcap \phi[F_y]$. Pelas definições, existe $x \in E$ tal que $f(x) = z$ e para todo $t \in G_{x(y)}$ existe $x_t \in \psi(t)$ tal que $f(x_t) = z$.

Pela definição de $\psi(t)$, se $\psi(t) \cap f^{-1}[z] \neq \emptyset$, então $f^{-1}[z] \subseteq \psi(t)$. Segue que $x \in E \cap \bigcap \psi[G_{x(y)}]$, e portanto $D \cap \bigcap \phi[F_y] = f[E \cap \bigcap \psi[G_{x(y)}]]$, que é finito. □

Como verificado em Aurichi, 2011, propriedade fortemente D apresenta um possível caminho para construir um espaço de Lindelöf que não é um D-espaço, pois

Teorema 2.3.6. *Se existe um espaço T_1 de Lindelöf que não é fortemente D, então existe um espaço T_1 de Lindelöf que não é um D-espaço.*

Soukup e Szeptycki encontraram um exemplo de uma espaço, assumindo o princípio combinatório $\diamondsuit$.

Teorema 2.3.7 (Soukup e Szeptycki, 2019)**.** *Assuma $\diamondsuit$. Existe um espaço T_1 hereditariamente Lindelöf 0-dimensional que não é fortemente D.*

No entanto, os mesmo autores já haviam demonstrado em Soukup e Szeptycki, 2012 que assumindo $\diamondsuit$ existe um espaço de Hausdorff Lindelöf que não é um D-espaço (3.3.3).

2.4 Dualmente Discreto

Dualmente discreto é um enfraquecimento natural da propriedade D. A maioria dos resultados apresentados aqui estão presentes no artigo Alas *et al.*, 2008.

Definição 2.4.1 (Douwen e Pfeffer, 1979)**.** *Um espaço topológico X é dito* dualmente discreto *se toda ona admite núcleo discreto.*

Proposição 2.4.2. *Todo espaço caótico é dualmente discreto.*

Demonstração. Seja X um espaço caótico, então a única *ona* possível nele é a com todos os valores iguais a X, logo qualquer conjunto unitário é núcleo dela e é discreto. □

Segue da definição que:

Proposição 2.4.3. *Todo D-espaço é dualmente discreto.*

A volta no entanto não vale necessariamente O exemplo 1.2.13 é alguém que é normal, dualmente discreto que não é um D-espaço.

Exemplo 2.4.4. *O espaço ω_1 com a topologia dos intervalos é um espaço dualmente discreto que não é D-espaço*

Demonstração. Suponha uma *ona* ϕ em ω_1. Para cada $x < \omega_1$ fixemos $s(x) < x$ o menor ordinal tal que $]s(x), x] \subseteq \phi(x)$. Então temos $s\colon \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ uma função regressiva. Aplicando o Lema do Pressing-Down (1.1.3), tomemos $S \subseteq \omega_1$ estacionário tal que $s[S] = \{\alpha\}$. Para cada $\alpha \in S$, fixemos $suc_S(\alpha) = \min\{\beta \in S : \alpha < \beta\}$. Consideremos $D_1 = \{suc_S(\alpha) : \alpha \in S\} \subseteq S$ cofinal discreto. Então $\omega_1 \setminus \phi(D_1) = {\hookleftarrow}\alpha$ é compacto e portanto existe $D_0 \subseteq {\hookleftarrow}\alpha$ finito tal que ${\hookleftarrow}\alpha \subseteq \phi(D_0)$. Segue que $D_0 \cup D_1$ é um núcleo discreto de ϕ. □

Na verdade, no artigo Alas *et al.*, 2008 é verificado que todo ordinal com a topologia dos intervalos é hereditariamente dualmente discretos. Iremos, entretanto, omitir essa demonstração, pois esse resultado será corolário de outro obtido apresentado em Liang-Xue Peng, 2008, que nessa dissertação é o resultado 4.4.18.

O espaço ω_1 portanto é também um exemplo de um espaço normal, dualmente discreto, enumeravelmente compacto que não é compacto. Na verdade, ele não é de Lindelöf, de maneira que $e(\omega_1) = \aleph_0 < \aleph_1 = \ell(\omega_1)$.

Notemos então que a relação entre o extent e o número de Lindelöf de um espaço dualmente discreto deixa de ser garantida. No lugar começamos a considerar a seguinte função cardinal:

Definição 2.4.5. *Seja X um espaço topológico, o* spread *do espaço é o supremo da cardinalidade dos subespaços discretos de X, ou seja,*

$$s(X) = \sup\{|D| : D \subseteq X \text{ é discreto}\}.$$

Proposição 2.4.6. *Se X é um espaço dualmente discreto e seu spread é infinito, então $s(X) \geq \ell(X)$.*

Demonstração. Se $\ell(X) = \aleph_0$, então por hipótese $s(X) \leq \aleph_0 = \ell(X)$.

Se $\ell(X) > \aleph_0$, então fixemos $\mathcal{A}$ um recobrimento aberto de X de cardinalidade $\ell(X)$ tal que todo subrecobrimento tem a mesma cardinalidade.

Portanto se considerarmos ϕ uma *ona* em X com valores em $\mathcal{A}$, todo núcleo dela tem cardinalidade $\ell(X)$. Assumindo X dualmente discreto, garantimos a existência de um subespaço discreto da cardinalidade $\ell(X)$, como queríamos. □

No entanto não podemos garantir uma igualdade.

Exemplo 2.4.7. *Existe um espaço normal dualmente discreto tal que $\ell(X) < s(X)$.*

Demonstração. Consideremos o conjunto ω_{ω_1} com a topologia dos intervalos. Como foi comentado após os exemplos 1.2.13 e 2.4.4, esse espaço será hereditariamente normal e hereditariamente dualmente discreto.

Notemos que o conjunto $\{\alpha + 1 : \alpha < \omega_{\omega_1}\}$ é discreto e tem cardinalidade $\aleph_{\omega_1}$. Notemos também que ele é enumeravelmente compacto, mas não é compacto. Logo ele não pode ser de Lindelöf.

Seja um recobrimento aberto $\mathcal{A}$ de ω_{ω_1}. Para cada $\alpha < \omega_1$ ordinal limite, fixemos $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ e $s(\alpha) < \alpha$ tais que $]\omega_{s(\alpha)}, \omega_\alpha] \subseteq A(\alpha)$. Pelo lema do Pressing-Down, existem $\gamma < \omega_1$ e $S \subseteq \omega_1$ estacionário tais que para todo $\alpha \in S$, vale que $s(\alpha) = \gamma$. Então $\omega_{\omega_1} \setminus \bigcup_{\alpha \in S} A(\alpha) \subseteq [0, \gamma]$, que é um subespaço compacto. Assim, existe um subrecobrimento de $\mathcal{A}$ de cardinalidade $\aleph_1$.

Portanto $\ell(\omega_{\omega_1}) = \aleph_1 < \aleph_{\omega_1} = s(\omega_{\omega_1})$. □

Muitos dos resultados sobre a preservação da propriedade D podem ser adaptados para dualmente discreto

Ao analisar subespaços, temos o análogo de 1.3.2:

Lema 2.4.8. *Um subespaço $Y \subseteq X$ é dualmente discreto se, e somente se, toda ona parcial dele tem núcleo discreto.*

Demonstração. Sejam ϕ uma *ona* de Y e ψ uma *ona* parcial de Y em X tais que para todo $y \in Y$ vale que $\phi(y) = \psi(y) \cap Y$. Para $D \subseteq Y$, ele será núcleo de ϕ se, e somente se, ele é núcleo de ψ. Além disso, D ser discreto independe de quem consideramos ele ser subespaço. □

Proposição 2.4.9. *Todo subespaço fechado de um espaço dualmente discreto é dualmente discreto.*

Demonstração. Sejam X um espaço dualmente discreto e $F \subseteq X$ fechado. Se ϕ é uma *ona* parcial de F em X, podemos considerar ψ uma *ona* de X definida por:

$$\psi(x) = \begin{cases} \phi(x); & x \in F \\ X \setminus F; & x \notin F \end{cases}$$

Se $D \subseteq X$ é núcleo discreto de ψ, como $\psi(D \setminus F) \subseteq X \setminus F$, então $D \cap F$ é núcleo discreto de ϕ. $\square$

Proposição 2.4.10. *Se X é espaço topológico para o qual existe uma família $\{F_n : n < \omega\}$ tal que $F_n \subseteq X$ é um subespaço fechado e dualmente discreto para cada $n < \omega$, e $X = \bigcup_{n<\omega} F_n$ Então X é dualmente discreto.*

Demonstração. Seja ϕ uma *ona* de X. Construiremos recursivamente o núcleo $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$ por:

Tome $D_0 \subseteq F_0$ discreto tal que $F_0 \subseteq \phi(D_0)$. Construídos $D_0, ..., D_n$, fixamos $D_{n+1} \subseteq F_{n+1} \setminus \phi(D_0 \cup ... \cup D_n) = K_{n+1}$ discreto, núcleo da *ona* parcial de K_{n+1} definida pela restrição de ϕ. Se $K_n = \emptyset$, basta definir $D_n = \emptyset$.

Pela construção temos que $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$ é núcleo de ϕ. Para $d \in D_n$, consideremos a vizinhança aberta de d, $H = X \setminus \bigcup_{m<n} F_m$. Como $\phi(d) \cap D \subseteq \bigcup_{m\leq n} D_m$, $\phi(d) \cap H \subseteq D_n$, que é discreto. $\square$

Notemos que para o caso geral não podemos deixar de assumir que cada F_n é fechado pois:

Exemplo 2.4.11. *Existe um espaço T_0 enumerável que não é dualmente discreto.*

Demonstração. Notemos que um conjunto não vazio é discreto no espaço descrito em 1.2.9 se, e somnete se, ele é unitário Logo existe uma *ona* que não admite núcleo discreto. $\square$

Levantam-se então questões análogas às da propriedade D sobre a união de dualmente discretos T_1 (Hausdorff ou de Tychonoff).

Análogo ao caso da propriedade D, podemos verificar que:

Proposição 2.4.12. *Se $\{(X_s, \tau_s) : s \in S\}$ é uma família de espaços dualmente discretos. Então $\bigoplus_{s\in S} X_s$ é dualmente discreto.*

Proposição 2.4.13. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ função contínua sobrejetora. Se Y é dualmente discreta e f é fechada tal que cada fibra é dualmente discreta, então X é dualmente discreto.*

Demonstração. Seja ϕ uma *ona* sobre X. Para cada $y \in Y$, fixemos $D_y \subseteq f^{-1}[y]$ núcleo discreto da *ona* parcial definida pela restrição de ϕ.

O conjunto $X \setminus \phi(D_y)$ é um fechado disjunto de $f^{-1}[y]$, assim se definirmos a função ψ em Y por:

$$\psi(y) = Y \setminus f[X \setminus \phi(D_y)],$$

ela será uma *ona* de Y. Fixemos $E \subseteq Y$ núcleo discreto de ψ. Definimos $D = \bigcup\{D_y : y \in E\}$.

Seja $x \in X$. Tomando algum $y \in E$ tal que $f(x) \in \psi(y)$, pela definição teremos que $x \notin X \setminus \phi(D_y)$. Portanto $x \in \phi(D)$. O conjunto D é, então, núcleo de ϕ.

Seja $x \in D$. Fixemos $H \subseteq Y$ vizinhança aberta de $f(x)$ tal que $H \cap E = \{f(x)\}$. Dessa maneira, o conjunto $V = f^{-1}[H]$ é uma vizinhança aberta de x tal que $V \cap D \subseteq D_{f(x)}$, que é discreto. Logo existe uma vizinhança aberta A de x tal que $A \cap D = \{x\}$.

Portanto D é núcleo discreto de ϕ. $\square$

Proposição 2.4.14. *Seja X um espaço topológico com base $\mathcal{B}$. Então X é dualmente discreto se, e somente se, toda ona com valores em $\mathcal{B}$ tem núcleo discreto.*

Capítulo 3

Metrizabilidade e Propriedades de Recobrimento

Iremos nessa seção explorar as diversas relações que a propriedade D e propriedades relacionadas apresentadas anteriormente têm com espaços relacionados aos metrizáveis e com as propriedades de recobrimento.

Já vimos, por exemplo, que todo espaço metrizável é (hereditariamente) D-espaço (1.2.12). Vimos também relações com espaços compactos, σ-compacto e enumeravelmente compactos.

3.1 Propriedades de Base

Nessa seção iremos generalizar o resultado de que todo metrizável é D-espaço (1.2.12). Como comentado no teorema 1.2.12, uma argumentação análoga à usada nele prova uma afirmação mais geral. Antes, definimos a propriedade ponto-enumerável.

Definição 3.1.1. *Dados uma família de conjuntos $\mathcal{A}$ e um conjunto C,* a ordem de $\mathcal{A}$ em C *é o cardinal* $\operatorname{ord}(C, \mathcal{A}) = |\{A \in \mathcal{A} : C \cap A \neq \emptyset\}|$. *Para $C = \{x\}$, chamamos* $\operatorname{ord}(x, \mathcal{A}) = \operatorname{ord}(C, \mathcal{A})$ a ordem da família no ponto x.

Definição 3.1.2. *Uma base $\mathcal{B}$ de um espaço topológico é* ponto-enumerável *se para todo ponto do espaço x, vale que* $\operatorname{ord}(x, \mathcal{B}) = |\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}| \leq \aleph_0$

Teorema 3.1.3 (Arhangel'skii e Raushan Z. Buzyakova, 2002)**.** *Todo espaço T_1 com base ponto-enumerável é um D-espaço.*

Como comentado quando definimos, o jogo estrela (1.6.6) foi baseado nessa demonstração e podemos usá-lo para generalizar mais esse resultado.

Consideremos a seguinte propriedade de base:

Definição 3.1.4. *Dado um espaço topológico X, uma base $\mathcal{B}$ é* ω-uniforme *se para todo $B \in \mathcal{B}$ e $x \in B$, o conjunto $\{A \in \mathcal{B} : x \in A \not\subseteq B\}$ é enumerável.*

Notemos que uma base $\mathcal{B}$ ponto-enumerável é sempre ω-uniforme.

Iremos provar usando o jogo estrela que todo espaço com uma base ω-uniforme tem a propriedade D.

Teorema 3.1.5 (Aurichi, 2009). *Se X é um espaço T_1 com uma base ω-uniforme $\mathcal{B}$, então X é um D-espaço.*

Demonstração. Definiremos uma estratégia parcial para C no jogo estrela em $\mathcal{B}$, assim seguirá de 1.6.12 que o espaço é um D-espaço. Como ter base ω-uniforme é uma propriedade hereditária basta provar que se tomarmos $x \in X$ existe uma rodada fechada que cobre x, pois assim para uma hipotética rodada fechada γ e $x \notin \bigcup_{\alpha<\gamma} \phi_\alpha(x_\alpha)$, basta aplicar a mesma linha de argumentação no subespaço $X \setminus \bigcup_{\alpha<\gamma} \phi_\alpha(x_\alpha)$.

Iremos fazer de forma similar ao caso metrizável (1.2.12), mas só precisaremos fazer o passo de recursão finita, ou seja iremos definir uma sequência de pontos $\langle x_n : n < \omega\rangle$ de maneira a retornar a cada ponto escolhido anteriormente infinitas vezes, para esgotar os elementos da base que interessam.

Para isso, consideremos a enumeração que preserva ordem do conjunto de potências de primos

$$\{p_l : l \in \mathbb{N}\} = \{p^m : p, m \in \mathbb{N},\ p \text{ é primo}\}$$

É possível que para determinados pontos escolhidos os elementos a serem considerados já foram esgotados, mas ainda não terminamos a recursão, portanto iremos construir junto com a estratégia de C uma sequência estritamente crescente $\langle l(n) : n \in \mathbb{N}\rangle$.

Fixado $x \in X$, o primeiro passo de C é tomar $x_1 = x$ e definimos $l(1) = 1$ Na rodada $n+1 \in \mathbb{N}$, considerando as escolhas de C_k como x_k, as escolhas de N_k como $S_k \subseteq X$ e ϕ_k *ona* parcial com valores em $\mathcal{B}$ para cada $k \le n$, podemos fixar uma enumeração

$$\{B_j^k : j < \omega\} = \{B \in \mathcal{B} : x_k \in B \not\subseteq \phi_k(x_k)\}.$$

Supondo fixados também $l(k)$ tal que $l(m) < l(k)$ se $m < k \le n$, seja

$$L_n = \{l \in \mathbb{N} : l > l(n),\ l \text{ satisfaz as proprieaddes (1) e (2)}\}.$$

1. $p_l = p^i$ para um $p \in \mathbb{N}$ primo e $i \le n$.
2. Existem $m \le n$, $z \in S_m$ e $j < \omega$ tais que $B_j^i = \phi_m(z)$ e $z \notin \bigcup_{k\le n} \phi_k(x_k)$.

Se $L_n \neq \emptyset$, tomamos $l(n+1) = \min L_n$, tomando j_0 o menor natural tal que existem $m \le n$ e $z \in S_m \setminus \bigcup_{k\le n} \phi_k(x_k)$ tal que $\phi_m(z) = B_j^i$. Nesse caso o movimento do jogador C é escolher x_{n+1} algum z que satisfaça a frase anterior.

Se $L_n = \emptyset$, para cada $i \le n$ existe um primo p tal que $p^i > p_{l(n)}$. Logo se $z \in S_i$, por absurdo suponha que $z \notin \bigcup_{k\le n} \phi_k(x_k)$. Então existe $j < \omega$ tal que $B_j^i = \phi_i(z)$, mas se $l \in \mathbb{N}$ é tal que $p^i = p_l$, então l satisfaz as propriedades (1) e (2), segue que $l \in L_n$, o que é absurdo.

Logo no caso de $L_n = \emptyset$, a rodada $n+1$ é fechada.

Notemos que como estamos definindo somente rodadas finitas, a única condição de parada que podemos satisfazer é a (c) que garante que C ganha. Alternativamente, podemos considerar $L_n = \emptyset$ uma condição de parada nesse contexto, pois ela define uma rodada fechada.

Caso tenhamos definido ω rodadas e $\langle l(n) : n \in \mathbb{N}\rangle$, só precisamos checar a condição (b), pois as duas outras garantem vitória de C. Supondo que $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ e, por absurdo, que $x \in S_m$ é ponto de acumulação de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Tomemos então $k \in \mathbb{N}$ tal que

$x_k \in \phi_m(x)$ e $j < \omega$ tal que $\phi_m(x) = B^k_j$.

Seja p o j-ésimo primo. Considerando $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_{l(n)} \geq p^k$, significa que até o passo n tivemos j oportunidades de retornar a $\{B^k_s : s < \omega\}$, e portanto $x \in \bigcup_{M \leq n} \phi_M(x_M)$. No entanto, $\bigcup_{M \leq n} \phi_M(x_M) \cap D$ é finito por definição, o que contradiz x ser ponto de acumulação.

Notemos que foi verificado também que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \subseteq \phi(D)$, e portanto é uma rodada fechada, como queríamos. □

Corolário 3.1.6. *Sejam X um espaço T_1 e $\mathcal{B}$ uma base de abertos dele. X é um D-espaço se qualquer uma dessas propriedades valem:*

(i) *$\mathcal{B}$ é uma base σ-discreta;*

(ii) *$\mathcal{B}$ é uma base localmente enumerável;*

(iii) *$\mathcal{B}$ é uma base ponto enumerável.*

Corolário 3.1.7. *Todo espaço metrizável é D-espaço.*

Similar às propriedades de bases, a noção de desenvolvimento de um espaço é uma abstração da base $\{B(x, 2^{-n}) : x \in X,\ n < \omega\}$ de um espaço métrico, que generaliza a metrizabilidade.

Definição 3.1.8. *Seja X um espaço topológico, um* desenvolvimento *em X é uma sequência de recobrimentos abertos $\langle \mathcal{B}_n : n < \omega \rangle$ tal que para cada $x \in X$ a família $\{\mathrm{st}(x, \mathcal{B}_n) : n < \omega\}$ é uma base local de x.*

Teorema 3.1.9 (Aurichi, 2009). *Todo espaço T_1 com desenvolvimento é um D-espaço*

Demonstração. Consideremos X um espaço T_1 com desenvolvimento $\langle \mathcal{B}_n : n < \omega \rangle$. Seja ϕ um *ona* em X. Para cada $n < \omega$, fixemos $X_n = \{x \in X : \mathrm{st}(x, \mathcal{B}_n) \subseteq \phi(x)\}$. Iremos recursivamente para cada $n < \omega$ definir conjuntos fechados discretos $D_n \subseteq X_n$ tais que $X_n \subseteq \phi(\bigcup_{m \leq n} D_m)$. Assim $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$ será um núcleo fechado discreto de ϕ.

Para $n < \omega$ supomos que foram fixados D_m para cada $m < n$. Consideremos uma enumeração $X_n = \{x_n(\alpha) : \alpha < |X_n|\}$. Se $X_n \subseteq \phi(\bigcup_{m<n} D_m)$, então $D_n = \emptyset$. Caso contrário construiremos recursivamente uma sequência crescente $\langle \alpha_\xi : \xi < |X_n|^+ \rangle$ onde $\alpha_\xi \leq |X_n|$ que definirá o conjunto $D_n = \{x_n(\alpha_\xi) : \xi < |X_n|^+,\ \alpha_\xi < |X_n|\}$.

Fixemos $\alpha_0 = \min\{\alpha < |X_n| : x_n(\alpha) \notin \phi(\bigcup_{m<n} D_m)\}$. Supondo fixados α_γ para cada $\gamma < \xi$ tais que $X_n \subseteq \phi(\bigcup_{m<n} D_m) \cup \phi(\{x_n(\alpha_\eta) : \eta < \gamma,\ \alpha_\eta < |X_n|\})$ se vale que $\alpha_\gamma = |X_n|$.

Caso valha que

$$X_n \subseteq \phi(\bigcup_{m<n} D_m) \cup \phi(\{x_n(\alpha_\gamma) : \gamma < \xi,\ \alpha_\gamma < |X_n|\}),$$

definimos $\alpha_\xi = |X_n|$. Caso contrário, notemos que $\alpha_\gamma < |X_n|$ para todo $\gamma < \xi$. Fixemos

$$\alpha_\xi = \min\{\alpha < |X_n| : x_n(\alpha) \notin \phi(\bigcup_{m<n} D_m) \cup \phi(\{x_n(\alpha_\gamma) : \gamma < \xi\})\}.$$

Notemos que se $\gamma < \xi < |X_n|^+$ com $\alpha_\xi < |X_n|$, então $\alpha_\gamma < \alpha_\xi$. Além disso, por cardinalidade, existe $\mu_n < |X_n|^+$ o menor cardinal tal que $\alpha_{\mu_n} = |X_n|$. Nesse caso $D_n = \{x_n(\alpha_\gamma) : \gamma < \mu_n\}$

e

$$X_n \subseteq \phi(\bigcup_{m \leq n} D_m),$$

como queríamos.

Notemos então que com a construção recursiva de D_n feita, teremos que $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$ é um núcleo de ϕ. Teremos também que a construção garante que $\phi(D_n) \cap D \subseteq \bigcup_{m \leq n} D_m$ para cada $n < \omega$, logo basta verificar que cada D_m é fechado discreto.

Sejam $n < \omega$ e $x \in X$. Suponha que $\mathrm{st}(x, \mathcal{B}_n) \cap D_n \neq \emptyset$. Fixe $\gamma < \mu_n$ o menor ordinal tal que $x_n(\alpha_\gamma)$ está nessa interseção e $B \in \mathcal{B}_n$ tal que $x_n(\alpha_\gamma), x \in B$. Notemos que, pela definição de X_n, teremos que $B \subseteq \phi(x_n(\alpha_\gamma))$. Seja $\xi < \mu_n$ tal que $x_n(\alpha_\xi) \in B$, então pela definição de γ temos que $\xi \geq \gamma$. Logo chegamos a uma contradição, pois $x_n(\xi) \in B \subseteq \phi(x_n(\gamma))$ e, pela definição, $x_n(\xi) \notin \phi(x_n(\gamma))$.

Logo para cada $x \in X$, se $B \in \mathcal{B}_n$ é tal que $x \in B$, então $B \cap D_n$ é no máximo unitário. Por X ser T_1, D é fechado discreto. □

Proposição 3.1.10. *Se um espaço tem base enumerável, então ele é fortemente D.*

Demonstração. Seja X um espaço topológico com uma base de abertos $\mathcal{B} = \{B_n : n < \omega\}$. Considerando ϕ uma *ona* em X, tomemos para cada $x \in X$ seu índice

$$i(x) = \min\{n < \omega : x \in B_n \subseteq \phi(x)\}.$$

Definiremos recursivamente $\langle x_n : n < \omega \rangle$ tal que $x_n \notin \phi(x_m)$ se $m < n$ e para todo $x \in X$ existe $n < \omega$ tal que $B_{i(x)} \subseteq \phi(x_n)$. Assim teremos um núcleo de ϕ tal que a própria *ona* verifica ser localmente finito.

Supondo que para cada $m < n$ estão fixados $x_m \in X$, se $F_n = X \setminus \phi(\{x_m : m < n\}) = \emptyset$, então encontramos um núcleo finito de ϕ. Caso contrário, consideremos $I_n = \{i(x) : x \in F_n\} \neq \emptyset$ e fixemos $x_n \in F_n$ tal que $i(x_n) = \min I_n$.

Se em nenhum momento durante a recursão construímos um núcleo finito, consideremos $D = \{x_n : n < \omega\}$. Notemos que para $n < \omega$ vale que $I_{n+1} \subseteq I_n \setminus \{\min I_n\}$. Assim para cada $i < \omega$, existe $n < \omega$ tal que $i \notin I_n$ e portanto se $x \in X$ tal que $i = i(x)$, temos que $x \notin F_n$.

Seja $x \in X$, então existe $n < \omega$ tal que $i(x) \notin I_n$, por consequência $x \in \phi(\{x_m : m < n\})$. Assim D é núcleo de ϕ e fixando $m < \omega$ tal que $x \in \phi(x_m)$, definindo $F_x = \{x_m\}$, teremos $x \in \bigcap \phi[F_x]$ e $\bigcap \phi[F_x] \cap D \subseteq \{x_k : k \leq m\}$, que é finito. □

Corolário 3.1.11. *Todo espaço metrizável separável é fortemente D.*

3.2 Quocientes e Simetrizáveis

Estão verificados então que espaços metrizáveis e outras propriedades relacionadas de base são sempre D. Dedicamos essa seção para explorar os resultados do artigo Burke, 2007 a cerca de uma outra propriedade similar aos metrizáveis e ao estudo das imagens de espaços metrizáveis. Notemos que o exemplo 1.3.10 é a soma topológica de espaços enumeráveis, logo ele é um espaço metrizável e a função definida é um quociente. Portanto o quociente de um metrizável não precisa ser um D-espaço.

Dado um espaço X metrizável e uma função quociente aberta $q: X \longrightarrow Y$, sabemos que se $\mathcal{B}$ é base de X, então $q^*(\mathcal{B}) = \{q[B] : B \in \mathcal{B}\}$ é uma base de Y. Portanto se conseguirmos garantir que $q^*(\mathcal{B})$ é ponto-enumerável, então Y será um D-espaço.

Lema 3.2.1 (Burke, 2007). *Se X é um espaço topológico com base $\mathcal{B}$ ponto enumerável e $q: X \longrightarrow Y$ é uma função quociente aberta, são equivalentes:*

(i) *Para todo $y \in Y$,* $\operatorname{ord}(q^{-1}[y], \mathcal{B}) \leq \aleph_0$;

(ii) *Para todo $y \in Y$, o subespaço $q^{-1}[y] \subseteq X$ é separável.*

Além disso, nesse caso $q^*(\mathcal{B})$ é uma base ponto-enumerável de Y.

Demonstração. **(i)⟶(ii)**: Se **(i)**, então, como $\{B \cap q^{-1}[y] : B \in \mathcal{B}\}$ é base de $q^{-1}[y]$, ele será segundo enumerável e portanto separável.

(ii)⟶(i): Seja $D_y \subseteq q^{-1}[y]$ denso enumerável. Então $\operatorname{ord}(q^{-1}[y], \mathcal{B}) = \operatorname{ord}(D_y, \mathcal{B}) \leq \aleph_0$. □

Definição 3.2.2. *Uma função contínua sobrejetora entre espaços topológicos $f: X \longrightarrow Y$ é um s-mapa se para todo $y \in Y$ o subespaço $q^{-1}[y] \subseteq X$ é separável.*

Segue do lema 3.2.1 que:

Proposição 3.2.3. *A imagem de um espaço metrizável por um s-mapa quociente e aberto é um D-espaço.*

Iremos provar que não precisamos assumir que o quociente seja aberto. A fim de fazê-lo iremos trabalhar com a noção de base fraca de um espaço.

Definição 3.2.4. *Para um conjunto X, uma família $\mathcal{W} \subseteq \wp(X)$ é uma* base fraca sobre X *se existe uma coleção $\{\mathcal{W}_x : x \in X\}$ tal que $\mathcal{W} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{W}_x$, para cada $x \in X$ a família $\mathcal{W}_x$ é fechada por interseção finita e $x \in \bigcap \mathcal{W}_x$.*

Definição 3.2.5. *Se $\mathcal{W}$ é uma base fraca sobre o conjunto X, definimos a família*

$$\tau(\mathcal{W}) = \{U \subseteq X : \forall x \in U \exists B \in \mathcal{W}_x (B \subseteq U)\}$$

Proposição 3.2.6. *Dada uma base fraca $\mathcal{W}$ sobre X, a família $\tau(\mathcal{W})$ é uma topologia em X.*

Demonstração. Notemos que $X, \emptyset \in \tau(\mathcal{W})$. Seja $U, V \in \tau(\mathcal{W})$ e $x \in U \cap V$, fixemos então $B, C \in \mathcal{W}_x$ tais que $B \subseteq U$ e $C \subseteq V$, logo $B \cap C \in \mathcal{W}_x$ e $B \cap C \subseteq U \cap V$.

Para $\mathcal{A} \subseteq \tau(\mathcal{W})$ e $x \in \bigcup \mathcal{A}$, fixemos $U \in \mathcal{A}$ tal que $x \in U$. Assim, se $B \in \mathcal{W}_x$ é tal que $B \subseteq U$, então $B \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. □

Definição 3.2.7. *Dado um espaço topológico (X, τ), dizemos que uma família $\mathcal{W}$ é* uma base fraca de τ *se $\mathcal{W}$ é uma base fraca sobre X e $\tau = \tau(\mathcal{W})$. Dada $\mathcal{W}$ uma base fraca sobre X,* uma vizinhança fraca do ponto $x \in X$ *é um conjunto $A \subseteq X$ tal que existe $B \in \mathcal{W}_x$ contido em A.*

Definição 3.2.8. *Dado um espaço topológico X, um conjunto $F \subseteq X$ é* sequencialmente fechado *se todo ponto ao qual uma sequência contida em F converge é elemento de F. O espaço topológico é* sequencial *se um conjunto é fechado se, e somente se, ele é sequencialmente fechado.*

Proposição 3.2.9. *Seja (X, τ) um espaço topológico sequencial. Definindo para cada $x \in X$ a família $\mathcal{W}_x$ por $U \in \mathcal{W}_x$ se, e somente se, $x \in U$ e para cada sequência $\langle x_n : n < \omega \rangle$ que converge a x existe $n < \omega$ tal que $x_m \in U$ para todo $m > n$. Então $\mathcal{W} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{W}_x$ é uma base fraca de τ.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $U, V \in \mathcal{W}_x$. Notemos que toda sequência que converge a x está eventualmente na interseção $U \cap V$, logo $U \cap V \in \mathcal{W}_x$. Além disso, segue da definição que $x \in \bigcap \mathcal{W}_x$.

Note que $\tau \subseteq \mathcal{W}$, pois X é sequencial. Considerando $U \in \tau(\mathcal{W})$, suponha, por absurdo, que U não é aberto. Logo existe uma sequência $\langle x_n : n < \omega \rangle$ contida em $X \setminus U$ que converge a $x \in U$. No entanto, existe $B \in \mathcal{W}_x$ tal que $B \subseteq U$ e $n < \omega$ tal que $x_n \in B \subseteq U$ que contradiz a escolha da sequência. □

Assim, quando X é um espaço sequencial, consideraremos sempre essa base fraca e suas vizinhanças fracas.

Definição 3.2.10. *Dado um espaço sequencial X, uma família $\mathcal{W} \subseteq \wp(X)$ é* um w-sistema do espaço *se para todo aberto $U \subseteq X$ e $x \in U$, existe $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$ tal que $x \in \bigcap \mathcal{U}$ e $\bigcup \mathcal{U}$ é uma vizinhança fraca de x contida em U.*

Lema 3.2.11. *Sejam X e Y espaços topológicos. Se X é sequencial e existe uma aplicação quociente $q: X \longrightarrow Y$, então Y é sequencial.*

Demonstração. Vamos verificar que todo fechado de Y é sequencialmente fechado. Seja $A \subseteq Y$ um conjunto que não é fechado, então $q^{-1}[A]$ não é fechado em X. Portanto existe uma sequência $\langle x_n : n < \omega \rangle$ contida em $q^{-1}[A]$ que converge a $x \in X \setminus q^{-1}[A]$.

Então a sequência $\langle q(x_n) : n < \omega \rangle \subseteq A$ converge a $q(x) \in Y \setminus A$. Ou seja, A não é fechado sequencialmente □

Proposição 3.2.12 (Burke, 2007). *Se $q: X \longrightarrow Y$ é uma aplicação quociente, onde Y é um espaço de Hausdorff sequencial e $\mathcal{B}$ é base de abertos de X, então $q^*(\mathcal{B})$ é um w-sistema de Y.*

Demonstração. Seja um aberto $U \subseteq Y$ e consideremos um ponto dele $x \in U$. Consideremos a família $\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq q^{-1}[U],\ B \cap q^{-1}[x] \neq \emptyset\}$ e $\mathcal{U} = q^*(\mathcal{C})$.

Notemos que $x \in \bigcap \mathcal{U}$ e $\bigcup \mathcal{U} \subseteq U$. Seja uma sequência $\langle x_n : n < \omega \rangle$ em Y que converge a x. Suponha por absurdo que, para todo $n < \omega$, existe $m > n$ tal que $x_m \notin \bigcup \mathcal{U}$. Então existe um subsequência $\langle y_n : n < \omega \rangle$ tal que $y_n \notin \bigcup \mathcal{U}$ para todo $n < \omega$.

Como Y é um espaço de Hausdorff, temos que $F = \{y_n : n < \omega\} \cup \{x\} \subseteq Y$ é fechado. Portanto $q^{-1}[F] \subseteq X$ é um subconjunto fechado e $q^{-1}[F] = q^{-1}[\{y_n : n < \omega\}] \cup q^{-1}[x]$. Notemos que se $z \in q^{-1}[x]$, então existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $z \in B$, logo $B \in \mathcal{C}$. Portanto $q^{-1}[x] \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Se $z \in q^{-1}[\{y_n : n < \omega\}]$ e $B \in \mathcal{B}$ tal que $z \in B$, então, como $q(z) \notin \mathcal{U}$, temos que $B \notin \mathcal{C}$. Portanto $q^{-1}[\{y_n : n < \omega\}] \cap \bigcup \mathcal{C} = \emptyset$.

Assim, $q^{-1}[\{y_n : n < \omega\}]$ é fechado e $\{y_n : n < \omega\} \subseteq Y$ é fechado, o que contradiz a sequência $\langle y_n : n < \omega \rangle$ convergir a x.

Segue que $\bigcup \mathcal{U}$ é vizinhança fraca de x, e assim $q^*(\mathcal{C})$ é de fato um w-sistema de Y. □

Notemos que não podemos omitir que Y é um espaço de Hausdorff, pois:

Exemplo 3.2.13 (Burke, 2007). *Existem uma base $\mathcal{B}$ de um espaço métrico X, um espaço de Hausdorff Y e uma função quociente tais que $q^*(\mathcal{B})$ não é um w-sistema de Y.*

Demonstração. Consideremos o subespaço do plano euclidiano

$$X = \{(k, 2^{-n}) : k, n < \omega\} \cup (\omega \times \{0\}).$$

Consideremos a partição $\mathcal{P}$ de X nos conjuntos para $n, m \in \mathbb{N}$

$$H_n = \{(k, 2^{-n}) : k \in \mathbb{N}\}, \ A_m = \{(0, 2^{-m}), (m, 0)\}.$$

Definimos o quociente do espaço X por essa partição por

$$\begin{aligned} q : X &\longrightarrow X/\mathcal{P}. \\ H_n \ni x &\longmapsto x_n \\ A_m \ni x &\longmapsto p_m \end{aligned}$$

Seja $W \subseteq X/\mathcal{P}$ uma vizinhança aberta de p_0. Como $q^{-1}[W]$ é vizinhança aberta de $(0, 0)$, existe $N < \omega$ tal que $(0, 2^{-n}) \in q^{-1}[W]$ para todo $n > N$ e portanto $(n, 0) \in q^{-1}[W]$. Analogamente existe $M < \omega$ tal que $(n, 2^{-k}) \in q^{-1}[W]$ para todo $k > M$, assim $\{x_k : k > M\} \subseteq W$. Notemos então que $\langle x_n : n < \omega \rangle$ converge a p_0.

Se considerarmos a base do espaço X como

$$\mathcal{B} = \{\{(k, 2^{-n})\} : k, n < \omega\} \cup \{\{(k, 0)\} \cup \{(k, 2^{-n}) : n > N\} : N < \omega\} e$$

e a construção presente na proposição 3.2.12, então $\bigcup \mathcal{U} \subseteq \{p_m : m < \omega\}$ de maneira que existe uma sequência convergente a p_0 que nunca está contida em algum conjunto dessa forma. $\square$

Notemos que da proposição 3.2.12 e por um argumento análogo ao usado no lema 3.2.1, segue o resultado:

Lema 3.2.14 (Burke, 2007). *Seja um s-mapa quociente $q : X \longrightarrow Y$, onde Y é um espaço sequencial de Hausdorff e $\mathcal{B}$ é base ponto-enumerável de X. Então $q^*(\mathcal{B})$ é um w-sistema de Y ponto-enumerável.*

Teorema 3.2.15 (Burke, 2007). *Todo espaço de Hausdorff sequencial com w-sistema ponto-enumerável é um D-espaço.*

Demonstração. Seja $\mathcal{W}$ um w-sistema ponto-enumerável do espaço de Hausdorff sequencial X. Tomemos uma *ona* ϕ de X. Para cada $x \in X$ fixemos $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{W}$ tal que $x \in \bigcap \mathcal{U}_x$ e $\bigcup \mathcal{U}_x \subseteq \phi(x)$ é vizinhança fraca de x. Para cada $p \in X$ enumeremos o conjunto

$$\mathcal{H}_p = \{W \in \bigcup_{x \in X} \mathcal{U}_x : p \in W\} = \{H_p(n) : n < \omega\}.$$

Para $H \in \bigcup_{p \in X} \mathcal{H}_p$, determinamos o conjunto de centros de H por $c(H) = \{x \in H : H \in \mathcal{U}_x\}$ e para $p \in X$ os co-centrados em p por $C(p) = \bigcup\{c(H) : H \in \mathcal{H}_p\}$.

Construímos recursivamente a sequência $\langle D_\alpha : \alpha < |X|^+ \rangle$ como segue.

Se $\bigcup_{\beta<\alpha}\phi(D_\beta) = X$, então $D_\alpha = \emptyset$. Caso contrário, fixemos $z_\alpha \in X \setminus O_\alpha$, onde $O_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha}\phi(D_\beta)$. Iremos definir recursivamente $\langle F^n_\alpha : n < \omega\rangle$ onde cada $F^n_\alpha \subseteq X \setminus O_\alpha$ é finito.

Defina $F^0_\alpha = \{z_\alpha\}$. Para cada $x \in F^n_\alpha$ definimos

$$R(x) = C(x) \setminus (\phi(F^n_\alpha) \cup O_\alpha).$$

Definimos $E^n_\alpha = \{x \in F^n_\alpha : R(x) \neq \emptyset\}$. Caso $E^n_\alpha = \emptyset$ então definimos $F^m_\alpha = F^n_\alpha$ para todo $m > n$. Se $x \in E^n_\alpha$, seja $k(x,n) = \min\{n, |\{H \in \mathcal{H}_x : R(x) \cap c(H) \neq \emptyset\}|\}$ e sejam $j_1 < \ldots < j_{k(x,n)}$ os menores naturais tal que $R(x) \cap c(H_x(j)) \neq \emptyset$. Fixemos para cada $i \leq k(x,n)$ um elemento $z(x,j) \in R(x) \cap c(H_x(j))$.

Tomemos então o conjunto

$$F^{n+1}_\alpha = F^n_\alpha \cup \{z(x,j_i) : x \in E^n_\alpha,\ 1 \leq i \leq k(x,n)\}.$$

Definimos $D_\alpha = \bigcup_{n<\omega} F^n_\alpha$, que será enumerável.

Notemos que $\{D_\alpha : \alpha < |X|^+\}$ é dois a dois disjunta, logo podemos fixar $\mu < |X|^+$ o menor ordinal tal que $D_\mu = \emptyset$, ou seja, $O_\mu = X$. Logo $D = \bigcup_{\alpha<\mu} D_\alpha$ é núcleo de ϕ.

Segue da construção que $D_\alpha \cap O_\alpha = \emptyset$ para todo $\alpha < \mu$ e $\phi(F^n_\alpha) \cap F^k_\alpha \subseteq F^n_\alpha$ se $n < k < \omega$. Notemos que $C(x) \subseteq O_{\alpha+1}$ se $x \in F^n_\alpha$, pois para construir D_α iremos escolher até $\aleph_0$ vezes o menor elemento de $\mathcal{H}_x$ que ainda não teve todos os centros cobertos.

A fim de verificar que D é fechado discreto, suponhamos por absurdo que existe uma sequência injetora $\langle x_n : n < \omega\rangle$ contida em D que converge a um ponto x. Seja α o menor ordinal tal que $x \in \phi(D_\alpha)$ e seja $N < \omega$ o menor número natural tal que exista $z \in F^N_\alpha$ com $x \in \phi(z)$

Como $\phi(z) \cap \bigcup \mathcal{U}_x$ é vizinhança fraca de x, a menos de subsequências, podemos assumir $x_n \in \phi(z) \cap \bigcup \mathcal{U}_x$ para todo $n < \omega$. Pelas considerações que fizemos, temos que $x_n \in F^N_\alpha \cup \bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta$ para todo $n < \omega$. Além disso F^N_α é finito, portanto podemos assumir que $x_n \in \bigcup_{\{} \beta < \alpha\} D_\beta$. Considerando $\beta < \alpha$ tal que $x_0 \in D_\beta$, temos que $\mathcal{H}_{x_0} \cap \mathcal{U}_x \neq \emptyset$. Segue que $x \in C(x_0) \subseteq O_{\beta+1}$, o que contradiz que α é o menor ordinal com $x \in O_\alpha$. □

Corolário 3.2.16. *Um quociente Hausdorff por um s-mapa de um espaço metrizável é D-espaço.*

Outro enfraquecimento possível de espaço metrizável são os simetrizáveis:

Definição 3.2.17. *Dado um conjunto X, uma função*

$$\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

é uma simétrica *se para todo $x, y \in X$, $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ e $\rho(x,y) = 0$ se, e somente se $x = y$. Dados um conjunto X e uma função simétrica ρ, definimos uma topologia por: para $A \subseteq X$ não vazio*

$$A \text{ é fechado} \iff \inf\{\rho(x,y) : y \in A\} > 0 \text{ para todo } x \in X \setminus A$$

A família dos complementares de um fechado definido acima é uma topologia, pois se A e B são fechados e $x \in X \setminus (A \cup B)$, então $\inf\{\rho(x,y) : y \in A \cup B\} = \min\{\inf\{\rho(x,y) : y \in A\}, \inf\{\rho(x,y) : y \in B\}\} > 0$. Se $\mathcal{C}$ é uma família de fechados como descritos acima e $x \in X \setminus \bigcap \mathcal{C}$, fixemos $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \notin C$, então temos que $\inf\{\rho(x,y) : y \in A \cup B \bigcap \mathcal{C}\} \geq$

$\inf\{\rho(x,y) : y \in C\} > 0$

Notemos que todo finito é fechado, logo essa topologia é T_1. Para $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, $B_\rho(x,\varepsilon) = \{y \in X : \rho(x,y) < \varepsilon\}$ não é necessariamente aberto, mas $\mathcal{B} = \{B_\rho(x,2^{-n}) : x \in X,\ n < \omega\}$ é uma base fraca dessa topologia. De maneira que $U \subseteq X$ é aberto se, e somente se, para todo $x \in U$ existe $n < \omega$ tal que $B_\rho(x,2^{-n}) \subseteq U$.

Definição 3.2.18. *Um espaço topológico (X,τ) é um* espaço simetrizável *se existe uma função simétrica ρ sobre X tal que a topologia gerada por ela coincide com τ.*

Teorema 3.2.19 (Burke, 2007)**.** *Todo espaço simetrizável é (hereditariamente) D-espaço.*

Demonstração. Fixemos X um conjunto com ρ uma função simétrica e consideramos a topologia em X gerada por ρ.

Notemos que o subespaço de um espaço simetrizável é, em si, simetrizável pela restrição da função simétrica. Portanto se provarmos que todo simetrizável é D-espaço, a hereditariedade segue.

Tomemos uma *ona* ϕ de X. Para cada $x \in X$, fixemos $n(x) < \omega$ tal que $B_\rho(x,2^{-n(x)}) \subseteq \phi(x)$. Para cada $n < \omega$ seja $I_n = \{x \in X : n(x) = n\}$, e suponha que ele não é vazio. Consideremos uma boa ordem $(X,\preceq)$ tal que para todo $n < \omega$ vale que $x \precneq y$, se $x \in I_n$ e $y \in I_{n+1}$.

Construiremos recursivamente uma sequência $\langle J_n : n < \omega\rangle$ tal que $J_n \subseteq I_n$. Assumindo fixado J_m para todo $m < n$, iremos recursivamente definir $\langle x_n(\alpha) : \alpha < |I_n|^+\rangle$ como segue.

Se $I_n \subseteq \bigcup_{m<n}\phi(J_m) \cup \bigcup_{\beta<\alpha}\phi(x_n(\beta))$, então $x_\alpha = p$, onde p é um conjunto que não é elemento de X, que servirá de indicador que já capturamos todos os pontos que queríamos. Caso contrário $x_\alpha(n) = \min_\preceq I_n \setminus (\bigcup_{m<n}\phi(J_m) \cup \bigcup_{\beta<\alpha}\phi(x_n(\beta)))$.

Existe um menor $\gamma_n < |I_n|^+$ tal que $x_n(\gamma_n) = p$ e definimos $J_n = \{x_n(\alpha) : \alpha < \gamma_n\}$.

Seja $D = \bigcup_{n<\omega} J_n$. Pela construção, D é núcleo da ϕ.

Seja $d \in D$. Para todo $m > n(d)$, $J_m \cap \phi(d) = \emptyset$. Se $x \in D$ tal que $n(x) \leq n(d)$ e $x \in B_\rho(d,2^{-n(d)})$, então $d \in B_\rho(x,2^{-n(x)}) \subseteq \phi(x)$. Mas, pela construção de D, se $d \in \phi(x)$ e $x \in \phi(d)$, então que $d = x$. Assim $B_\rho(d,2^{-n(d)}) \cap D = \{d\}$.

Seja $x \in X \setminus D$, fixemos $y = \min\{z \in D : x \in \phi(z)\}$. Para $z \in D$, se $y \precneq z \in D$, então $z \notin \phi(y)$. Se $z \precneq y$, então $B_\rho(z,2^{-n(y)}) \subseteq B_\rho(z,2^{-n(z)})$. Assim se $z \in B_\rho(y,2^{-n(y)})$, então $y \in \phi(z)$, o que contradiz a construção de D. Logo $B_\rho(y,2^{-n(y)}) \cap D = \{y\}$ e $x \notin \phi(z)$, portanto $z \notin B_\rho(x,2^{-n(y)})$.

Notemos que $W = \phi(x) \cap B_\rho(x,2^{-n(y)})$ é vizinhança fraca de x tal que $W \cap D = \{y\}$. Como X é T_1 existe uma vizinhança fraca H de x tal que $H \cap D = \emptyset$.

Com isso verificamos que todo ponto de $X \setminus (D \setminus \{d\})$ tem uma vizinhança fraca disjunta de $D \setminus \{d\}$, assim esse conjunto é fechado. Logo D é fechado discreto. □

Corolário 3.2.20 (Burke, 2007)**.** *Um quociente de fibras compactas de um metrizável é hereditariamente D-espaço.*

Demonstração. Seja (X,d) um espaço métrico, Y um espaço topológico e $q : X \longrightarrow Y$ uma aplicação quociente tal que, para todo $y \in Y$, o subespaço $q^{-1}[y] \subseteq X$ é compacto.

Definimos a função

$$\begin{aligned}\rho\colon Y\times Y &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) &\longmapsto \rho(x,y)=d(q^{-1}[x],q^{-1}[y])=\inf\{d(a,b)\colon q(a)=x,\ q(b)=y\}.\end{aligned}$$

Essa função é simétrica, porque $q^{-1}[x]$ e $q^{-1}[y]$ são compactos disjuntos se $x \neq y$. Se $F \subseteq Y$ é fechado, seja $y \in Y \setminus F$, temos que $q^{-1}[F] \subseteq X$ é fechado. Então $\varepsilon = \inf\{d(a,b) : a \in q^{-1}[y],\ b \in q^{-1}[F]\} > 0$, assim $B_\rho(y,\varepsilon) \cap F = \emptyset$. Logo todo fechado na topologia de Y é fechado na topologia simetrizável.

Seja $F \subseteq Y$ tal que para todo $y \in Y \setminus F$, existe $\varepsilon_y > 0$ tal que $B_\rho(y,\varepsilon_y) \cap F\cap = \emptyset$, assim $B_d(x,\varepsilon_{q(x)}) \cap q^{-1}[F] = \emptyset$ para todo $x \in X \setminus q^{-1}[F]$. Portanto $q^{-1}[F] \subseteq X$ é fechado e segue que $F \subseteq Y$ é fechado. □

3.3 Lindelöf

Desde a sua primeira aparição, a propriedade D tem sido comparada com propriedades de recobrimento. Inclusive no próprio artigo Douwen e Pfeffer, 1979 ele é introduzido como uma propriedade de recobrimento.

Antes de verificarmos as outras propriedades de recobrimento, notemos que se um espaço tem alguma das propriedades estudadas nesse trabalho, então ele é compacto se, e somente se, ele é enumeravelmente compacto.

Teorema 3.3.1. *Se X é um espaço T_1 enumeravelmente compacto, então são equivalentes:*

(i) *X é um espaço fortemente D;*

(ii) *X é um D-espaço;*

(iii) *X é um aD-espaço;*

(iv) *X é um bD-espaço;*

(v) *X é linearmente D*

(vi) *X é compacto.*

Demonstração. Sob T_1 já sabemos que **(vi)** $\longrightarrow$ **(i)** $\longrightarrow$ **(ii)** $\longrightarrow$ **(iii)** $\longrightarrow$ **(iv)**

Seja X um bD-espaço T_1 enumeravelmente compacto. Tomemos um recobrimento aberto $\mathcal{A}$ e fixemos uma *ona* nele ϕ qualquer. Ela tem núcleo localmente finito D, logo ele é finito e assim $\phi[D] \subseteq \mathcal{A}$ é subrecobrimento finito.

O item **(v)** é o teorema 2.2.11. □

Um problema apresentado no artigo original e que se mantém sem resposta até hoje é:

Questão 3.3.2 (Douwen e Pfeffer, 1979)**.** *Todo espaço (regular) de Lindelöf tem a propriedade D?*

A reposta parcial mais aproximada até o momento é o exemplo:

Teorema 3.3.3 (Soukup e Szeptycki, 2012). *Assuma $\diamondsuit$. Existe um espaço X de Hausdorff hereditariamente Lindelöf de cardinalidade $\aleph_1$ que não é um D-espaço. Além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$, sua potência X^n também é de Lindelöf.*

Iremos explorar como a propriedade de Lindelöf se relaciona com as outras propriedades estudadas.

Teorema 3.3.4. *Um espaço regular é de Lindelöf se, e somente se, ele é um bD-espaço e tem extent enumerável.*

Demonstração. Notemos que ser de Lindelöf implica que seu extente é enumerável. Todo espaço regular de Lindelöf é paracompacto, então em particual é irredutível.

Ser bD-espaço implica que $e(x) = \ell(X)$, logo se o extent é enumerável, seu número de Lindelöf também é. □

Notemos que regular Lindelöf implica aD, que também implica bD. Portanto vale:

Proposição 3.3.5. *Se X é um espaço regular de extent enumerável, são equivalentes*

(i) *X é um aD-espaço;*

(ii) *X é um bD-espaço;*

(iii) *X é um espaço de Lindelöf.*

Proposição 3.3.6 (Borges e Wehrly, 1991). *Se X é um bD-espaço CWH e ccc, então ele é de Lindelöf.*

Demonstração. Suponha que X é ccc. Se $\mathcal{A}$ é um recobrimento aberto, então existe uma *ona* $\phi : X \longrightarrow \mathcal{A}$ com núcleo localmente finito (fechado discreto) D. Tomemos uma família discreta $\{H_d : d \in D\}$ de abertos $d \in H_d$ para cada $d \in D$. Por ccc essa família é enumerável, e portanto D também é. Assim $\phi[D] \subseteq \mathcal{A}$ é subrecobrimento enumerável. □

Como consequência temos que:

Proposição 3.3.7 (Borges e Wehrly, 1991). *Todo espaço CWHausdorff de Moore com a propriedade ccc é metrizável separável.*

Demonstração. Todo espaço T_1 com desenvolvimento é um D-espaço (3.1.9), logo todo espaço de Moore é um bD-espaço. Pelo resultado 3.3.6 teremos que o espaço é de Moore e Lindelöf, assim será metrizável (Bing, 1951) □

Questão 3.3.8. *Existe um aD-espaço de Hausdorff e de Lindelöf que não é D-espaço?*

Uma generalização que utilizaremos de espaços de Lindelöf são os linearmente Lindelöf.

Definição 3.3.9. *Um espaço topológico é linearmente de Lindelöf se, e somente se, todo recobrimento aberto linear admite subrecobrimento linear.*

Caso o espaço seja T_1 linearmente Lindelöf equivale a dizer que todo subconjunto de cardinalidade regular não enumerável tem ponto de acumulação completa.

Proposição 3.3.10. *Se X é um espaço T_1 linearmente Lindelöf, logo ele é linearmente D.*

Demonstração. Seja uma *ona* linear ϕ. Se $\phi[X]$ tem subrecobrimento finito, então ele tem núcleo unitário. Caso contrário, tomemos uma sequência $\langle A_n : n < \omega \rangle$ em $\phi[X]$ estritamente crescente relativa à inclusão que cobre X.

Para cada $n < \omega$ fixemos $x_n \in A_{n+1} \setminus A_n$. O conjunto $D = \{x_n : n < \omega\}$ é fechado discreto, pois $X = \bigcup_{n<\omega} A_n$ e $A_n \cap D = \{x_m : m < n\}$ finito. Notemos também que por $\phi[X]$ ser linear e $x_n \in \phi(x_n) \setminus A_n$, temos que $A_n \subseteq \phi(x_n)$ para cada $n < \omega$. Portanto D é núcleo da ϕ. □

Corolário 3.3.11. *Todo espaço T_1 de Lindelöf é linearmente D.*

Teorema 3.3.12 (Guo e Junnila, 2010)**.** *Se X é um espaço T_1, ele é linearmente Lindelöf se, e somente se, ele é linearmente D e tem extent enumerável.*

Demonstração. Se X é um espaço T_1 linearmente D de extent enumerável, então para $\mathcal{A}$ um recobrimento aberto linear existe um conjunto enumerável que é $\mathcal{A}$-grande. Assim $\mathcal{A}$ tem um surecobrimento enumerável. □

Notemos que T_1 é necessário, pois o espaço enumerável descrito em 1.2.9 não é linearmente D.

Lema 3.3.13 (Aurichi, 2011)**.** *Todo espaço T_1 fortemente D é linearmente Lindelöf.*

Demonstração. Sejam $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ um recobrimento linear bem-ordenado e κ um cardinal regular.

Para cada $x \in X$ fixemos $\alpha(x) < \kappa$ o menor ordinal tal que $x \in A_{\alpha(x)}$. Tomemos ϕ a *ona* definida por $\phi(x) = A_{\alpha(x)}$. Por X ser fortemente D e notando que para $x, y \in X$ se $x \in \phi(y)$ então $\phi(x) \subseteq \phi(y)$, fixemos $D \subseteq X$ núcleo de ϕ tal que para cada $x \in X$ vale que $\phi(x) \cap D$ é finito.

Portanto o conjunto $\{\alpha(d) : d \in D\}$ tem tipo de ordem no máximo ω e ele é cofinal de κ, logo $\kappa \leq \omega$. Assim, o espaço é linearmente Lindelöf. □

Por consequência temos que:

Corolário 3.3.14. *Todo espaço T_1 fortemente D é de Lindelöf.*

Demonstração. Todo espaço fortemente D é linearmente Lindelöf, logo tem extent enumerável e é um D-espaço. Portanto $\aleph_0 = e(X) = \ell(X)$. □

Questão 3.3.15 (Aurichi, 2011)**.** *Todo D-espaço (regular) de Lindelöf é fortemente D?*

O exemplo construído em 3.3.3 seria então um exemplo de que é consistente a existência de um espaço de Hausdorff Lindelöf que não é fortemente D. Posteriormente os mesmo autores modificaram o exemplo a fim de obter o seguinte resultado

Teorema 3.3.16 (Soukup e Szeptycki, 2019)**.** *Assuma $\diamondsuit$. Existe um espaço 0-dimensional de Hausdorff, hereditariamente Lindelöf, que não é fortemente D.*

Notemos que como corolário de 3.1.11 e 3.3.14 temos que:

Teorema 3.3.17. *Um espaço metrizável é fortemente D se, e somente se, ele é separável.*

3.4 Outras Propriedades de Recobrimento

As questões em aberto relacionadas à ligação entre propriedade D e as propriedades de recobrimento não se limitam aos espaços de Lindelöf, como por exemplo temos:

Questão 3.4.1 (Douwen e Pfeffer, 1979)**.** *Todo espaço de Hausdorff paracompacto é um D-espaço?*

Iremos aqui listar propriedades que serão exploradas nessa seção, assim como resultados delas que serão utilizados.

Definição 3.4.2. *(X, τ) é θ-refinável se, e somente se, todo recobrimento aberto $\mathcal{U}$ admite família de refinamentos abertos $\{\mathcal{G}_n : n < \omega_0\}$ tal que para cada $x \in X$ existe $n < \omega_0$ tal que $0 < ord(x, \mathcal{G}_n) < \aleph_0$*

Definição 3.4.3. *A definição de fracamente θ-refinável é similar, mas $\mathcal{G}_n$ não precisa ser recobrimento.*

$\delta\theta$-refinável a ordem no ponto pode ser infinito enumerável.

Definição 3.4.4. *Um espaço topológico é irredutível se todo recobrimento aberto admite refinamento aberto que não admite subrecobrimento próprio. Isso equivale a que todo recobrimento de abertos $\{V_s : s \in S\}$ admite uma família discreta de fechados $\{F_t : t \in T\}$ com $T \subseteq S$, $F_t \subseteq V_t$ e $\{V_t : t \in T\}$ é subrecobrimento.*

Definição 3.4.5. *Um espaço topológico X é semiestratificável se existe uma sequência de funções $\subseteq$-monótonas $\langle F_n : n < \omega_0\rangle$ com $F_n : \tau \longrightarrow \tau^*$ tal que $F_n(A) \subseteq A$ e para cada $A \in \tau$, $A = \bigcup_{n<\omega_0} F_n(A)$.*

Definição 3.4.6. *Um espaço topológico é subparacompacto se todo recobrimento aberto admite refinamento σ-discreto de fechados.*

Definição 3.4.7. *Seja $\mathcal{A}$ um recobrimento aberto de um espaço topológico X. Um recobrimento aberto $\mathcal{B}$ de X é* um refinamento acolchoado de *$\mathcal{A}$ se para todo $B \in \mathcal{B}$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\overline{B} \subseteq A$.*

Teorema 3.4.8. *Um espaço regular é paracompacto se, e somente se, todo recobrimento aberto dele admite um refinamento acolchoado.*

Definição 3.4.9. *Um espaço topológico X é um p-espaço se ele é de Tychonoff e em βX existe uma sequência de famílias de abertos $\langle \mathcal{A}_n : n < \omega_0\rangle$ tal que $\bigcup\bigcup_{n<\omega_0} \mathcal{A}_n \supseteq X$ e para cada $x \in X$ temos que $\bigcap_{n<\omega_0} st(x, \mathcal{A}_n) \subseteq X$.*

Definição 3.4.10. *Um espaço topológico X é um M-espaço se existe uma sequência de recobrimentos abertos dele $\langle \mathcal{A}_n : n < \omega_0\rangle$ tal que se temos uma família enumerável de subconjuntos de X com a PIF $\mathcal{C}$ com um ponto $p \in X$ e $n < \omega_0$ tais que $st(p, \mathcal{A}_n) \in \mathcal{C}$, então $\bigcap\{\overline{C} : C \in \mathcal{C}\} \neq \emptyset$.*

Essa definição equivale a dizer que existe uma função contínua fechada dele a um metrizável com fibras enumeravelmente compactas.

O próximo resultado pode ser encontrado no artigo Borges e Wehrly, 1991

Teorema 3.4.11. *Para o espaço topológico X, são equivalentes:*

- *X é paracompacto e p-espaço;*
- *X é paracompacto e M-espaço;*
- *X é a pré-imagem perfeita de um espaço metrizável.*

Teorema 3.4.12 (Boone, 1975)**.** *Todo espaço θ-refinável é irredutível.*

Um resultado que relaciona propriedades conhecidas de recobrimento é:

Teorema 3.4.13 (Douwen e Pfeffer, 1979)**.** *Todo espaço de Hausdorff localmente compacto e subparacompacto é um D-espaço.*

Demonstração. Seja X espaço como na hipótese do teorema. Considere uma *ona* ϕ tal que $\overline{\phi(x)}$ é compacto para cada $x \in X$. Seja $\langle \mathcal{H}_n : n < \omega \rangle$ com $\mathcal{H}_n$ família discreta de fechados para cada $n < \omega$ com $\bigcup_{n<\omega} \mathcal{H}_n$ refinamento de $\phi[X]$. Assim, $\mathcal{H}_n$ é uma família discreta de compactos e portanto $\bigcup \mathcal{H}_n$ é um D-espaço fechado em X. Portanto $X = \bigcup_{n<\omega}(\bigcup \mathcal{H}_n)$ é um D-espaço. □

Notemos que podemos substituir no teorema acima, localmente compacto Hausdorff por: T_1 e existe uma *ona* cujo fecho de cada vizinhança é um D-espaço.

Veremos que um D-espaço, mesmo com outras propriedades, não é necessariamente paracompacto.

Exemplo 3.4.14. *Existe D-espaço Hausdorff localmente compacto fracamente θ-refinável (3.4.3) que não é $\delta\theta$-refinável, portanto não é paracompacto.*

Demonstração. Iremos seguir para as propriedades de recobrimento a demonstração presente em Burke, 1984 (exemplo 4.5).

Consideremos uma família *m.a.d* $\mathcal{A}$ de ω_1. Definimos o conjunto $\psi(\mathcal{A}) = \omega_1 \cup \mathcal{A}$ e a família

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in \omega_1\} \cup \{\{A\} \cup (A \setminus F) : A \in \mathcal{A},\ F \in [\omega_1]^{<\aleph_0}\}$$

Notemos que $\omega_1 \setminus \bigcup \mathcal{A} < \aleph_0$, pois caso contrário $\mathcal{A} \cup \{\omega_1 \setminus \bigcup \mathcal{A}\}$ seria uma família quase disjunta que contem $\mathcal{A}$. Assim $\mathcal{A}$ não pode ser enumerável. Notemos que $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia em $\psi(\mathcal{A})$. Sejam $A, B \in \mathcal{A}$ distintos, então $U = \{A\} \cup A \setminus (A \cap B)$ é vizinhança aberta de A e $V = \{B\} \cup B \setminus (A \cap B)$ é vizinhança de B tais que $U \cap V = \emptyset$. Se $x < \omega_1$, então $\{x\}$ e $\{A\} \cup (A \setminus \{x\})$ são abertos disjuntos. Portanto ele é um espaço de Hausdorff.

Afirmação 3.4.15. *$\psi(\mathcal{A})$ é localmente compacto*

Demonstração. Se $x \in \omega_1$, então $\{x\}$ é uma vizinhança compacta. Se $A \in \mathcal{A}$, então $\{A\} \cup A$ é vizinhança compacta de A, pois para $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $\{A\} \cup A \subseteq \bigcup \mathcal{V}$, existe $F \subseteq A$ finito tal que $V = \{A\} \cup A \setminus F \in \mathcal{V}$ e $\{A\} \cup A \setminus V = F$ finito. □

Afirmação 3.4.16. *$\psi(\mathcal{A})$ é fracamente θ-refinável.*

Demonstração. Seja $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $\bigcup \mathcal{U} = \psi(\mathcal{A})$. $\mathcal{G}_0 = \{\{x\} : x \in \omega_1\}$ é família de abertos e, para cada $A \in \mathcal{A}$, fixemos $F_A \subseteq A$ tal que $\{A\} \cup A \setminus F_A \in \mathcal{U}$ Seja $\mathcal{G}_1 = \{\{A\} \cup A \setminus F_A : A \in \mathcal{A}\}$. Notemos que $ord(x, \mathcal{G}_0) = 1$ para $x \in \omega_1$ e $ord(A, \mathcal{G}_1) = 1$ se $A \in \mathcal{A}$. Assim o espaço é fracamente θ-refinável. □

Afirmação 3.4.17. *$\psi(\mathcal{A})$ é D-espaço*

Demonstração. Como $\mathcal{A} \subseteq \psi(\mathcal{A})$ é fechado discreto, $\omega_1 \subseteq \psi(\mathcal{A})$ é discreto e $\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cap \omega_1$, por 1.4.1, segue que $\psi(\mathcal{A})$ é D-espaço. □

Afirmação 3.4.18. *$\psi(X)$ não é $\delta\theta$-refinável*

Demonstração. Consideremos o recobrimento aberto $\mathcal{U} = \{\{A\} \cup \omega_1 : A \in \mathcal{A}\}$ e por absurdo suponha que exista $\{\mathcal{G}_n : n < \omega\}$ uma família de refinamentos abertos de $\mathcal{U}$ tal que para cada $x \in \psi(\mathcal{A})$ existe $n < \omega$ com $ord(x, \mathcal{G}_n) \leq \aleph_0$. Definimos $F_n = \{x \in \omega : ord(x, \mathcal{G}_n) \leq \aleph_0\}$ para cada $n < \omega$ e $\omega_1 = \bigcup_{n<\omega} F_n$. Logo podemos fixar $N < \omega$ tal que $|F_N| = \aleph_1$.

Se existirem no máximo finitos $A \in \mathcal{A}$ tais que $|F_N \cap A| = \aleph_0$, então o conjunto dos pontos de F_N que não encontra nenhum desses A é não enumerável. Assim poderíamos tomar $B \subseteq F_N$ infinito enumerável tal que $B \cap A$ é finito para todo $A \in \mathcal{A}$, o que contradiz que $\mathcal{A}$ é *m.a.d.* Portanto peguemos $\{A_n : n < \omega\} \subseteq \mathcal{A}$ todos distintos tal que $A_n \cap F_N$ é infinito para cada $n < \omega$.

Definimos $C = \bigcup_{n<\omega} A_n \cap F_N$ e $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A} : |A \cap C| = \aleph_0\}$. Notemos que $A_n \in \mathcal{C}$ para cada $n < \omega$. Suponha por absurdo que $|\mathcal{C}| = \aleph_0$ e fixemos uma enumeração $\mathcal{C} = \{C_n : n < \omega\}$. Como para cada $n < \omega$ temos $|C_n \cap C| = \aleph_0$ e $|C_n \cap \bigcup_{j<n} C_j| < \aleph_0$, fixamos $c_n \in C_n \cap C \setminus \bigcup_{j<n} C_j$.

O conjunto $D = \{c_n : n < \omega\}$ é infinito e $D \subseteq C$. Logo se $A \in \mathcal{A}$ tem interseção com D infinita, então $A \in \mathcal{C}$, que por sua vez implica que existe $n < \omega$ com $A = C_n$, mas então para todo $j > n$ temos $c_j \notin A$. Portanto $\mathcal{A} \cup \{D\}$ é uma família quase disjunta, que é absurdo. Logo $\mathcal{C}$ não é enumerável

Para cada $D \in \mathcal{C}$ fixemos $G(D) \in \mathcal{G}_N$ com $D \in G(D)$, logo $G(D) \subseteq \{D\} \times \omega_1$ e portanto são todos distintos. Fixemos para cada $D \in \mathcal{C}$, $F(D) \subseteq D$ finito tal que $D \setminus F(D) \subseteq G(D)$, logo $G(D) \cap C \neq \emptyset$. Como C é enumerável, existe $c \in C$ tal que $|\{D \in \mathcal{C} : c \in G(D)\}| \geq \aleph_1$, logo $ord(c, \mathcal{G}_N) \geq \aleph_1$ mas $c \in F_N$, onde $\mathcal{G}_N$ deveria ser ponto-enumerável, o que é um absurdo. □

Por fim notemos que a única das demonstrações onde foi necessário que ela fosse maximal, ao invés de simplesmente uma família quase disjunta, foi a última. □

Em particular verificamos que existe um espaço normal com a propriedade D que não é paracompacto.

Consideraremos agora um fortalecimento de normalidade que garantirá que todo D-espaço é paracompacto.

Definição 3.4.19. *O espaço topológico é* monotonicamente normal *se ele é T_1 e existe uma função ψ que associa cada par ponto-vizinhança aberta (x, V) a um aberto $\psi(x, V)$ tal que para todo $x \in V \in \tau$ e $y \in W \in \tau$*

$$x \in \psi(x, V) \subseteq V, \;\; \psi(x, V) \cap \psi(y, W) \neq \emptyset \longrightarrow (x \in W \vee y \in V).$$

Proposição 3.4.20 (Borges e Wehrly, 1991)**.** *Seja X um D-espaço monotonicamente normal, então ele é paracompacto.*

Demonstração. Consideremos a função ψ que verifica que ele é monotonicamente normal. Seja $\mathcal{A}$ recobrimento aberto, fixemos uma *ona* $\phi : X \longrightarrow \mathcal{A}$. Definimos uma *ona* ν por $\nu(x) = \psi(x, \phi(x))$ e tomemos D um núcleo fechado discreto dela.

A família $\nu[D]$ é um refinamento aberto de $\mathcal{A}$, pois

$$\nu(D) = X \text{ e } \nu(x) = \psi(x, \phi(x)) \subseteq \phi(x) \in \mathcal{A}.$$

Consideremos um subconjunto qualquer $F \subseteq D$. Se $x \notin \phi(F)$ e $\psi(x, X \setminus F) \cap \nu(d) \neq \emptyset$ para $d \in D$, então ou $d \notin F$ ou $x \in \phi(d)$. Logo $\psi(x, X \setminus F) \cap \nu(F) = \emptyset$.

Assim teremos $\overline{\nu(F)} \subseteq \phi(F)$. Portanto $\nu[D]$ é um refinamento acolchoado de $\mathcal{A}$ (3.4.8). Logo X é paracompacto. □

Proposição 3.4.21 (Guo e Junnila, 2010). *Todo espaço T_1 $\delta\theta$-refinável (3.4.3) é linearmente D.*

Demonstração. Sejam X um espaço T_1 $\delta\theta$-refinável e $A \subseteq X$ um subconjunto de cardinalidade κ regular não enumerável e suponha que A não tem ponto de acumulação completa.

Para cada $x \in X$, fixemos uma vizinhança aberta do ponto U_x tal que $|U_x \cap A| < \kappa$. Seja $\langle \mathcal{G}_n : n < \omega \rangle$ uma sequência de refinamentos abertos de $\{U_x : x \in X\}$ tal que para cada $x \in X$ existe $n(x) < \omega$ tal que $\operatorname{ord}(x, \mathcal{G}_{n(x)}) \leq \aleph_0$. Fixemos $N < \omega$ tal que $B = \{x \in A : n(x) = N\}$ tem cardinalidade κ.

Considerando a família $\{Z \subseteq B : \forall x \in B (Z \cap \operatorname{st}(x, \mathcal{G}_N) = \{x\})\}$ que não é vazia e vale o lema de Zorn, fixemos então D $\subseteq$-maximal dela. Como $\mathcal{G}_N$ é um recobrimento aberto, temos que D é fechado discreto.

Verificamos que $B \subseteq \operatorname{st}(D, \mathcal{G}_N)$. Caso contrário se $x \in B \setminus \operatorname{st}(D, \mathcal{G}_N)$, então $\operatorname{st}(x, \mathcal{G}_N) \cap D = \emptyset$, o que contradiz D maximal. Como para cada $G \in \mathcal{G}_N$, vale que $|G \cap B| < \kappa$, dado que $\mathcal{G}_N$ refina $\{U(x) : x \in X\}$, a família $\{G \in \mathcal{G}_N : G \cap D \neq \emptyset\}$ tem cardinalidade no mínimo κ.

Portanto $\kappa \leq |\{G \in \mathcal{G}_N : G \cap D \neq \emptyset\}| \leq |D| \cdot \aleph_0$. Assim $|D| = \kappa$, como queríamos. □

Iremos verificar que a união de dois subespaços paracompactos, quando o espaço é regular, é um aD-espaço.

Lema 3.4.22. *Se $\mathcal{F} = \{F_s : s \in S\}$ é uma família localmente finita de fechados no espaço X, então existe um subrecobrimento minimal.*

Demonstração. Suponha $\mathcal{C}$ uma cadeia de subrecobrimentos de $\mathcal{F}$. Seja $x \in X$, tomemos U vizinhança aberta de x tal que $T = \{s \in S : F_s \cap U\} = \{s \in S : x \in F_s\}$ é finito. Por absurdo suponha que $\bigcap \mathcal{C}$ não é subrecobrimento de X, então fixemos $x \in X$ tal que $F_t \notin \bigcap \mathcal{C}$ para cada $t \in T$. Portanto existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $F_t \notin C$ para todos $t \in T$, mas assim $x \notin \bigcup C$, o que contradiz C ser um subrecobrimento, logo podemos aplicar o lema de Zorn. □

Proposição 3.4.23 (Arhangel'skii e Raushan Z. Buzyakova, 2002). *Sejam X um espaço regular e $Y, Z \subseteq X$ subespaços tais que $X = Y \cup Z$. Se Y e Z são paracompactos, então X é um aD-espaço.*

Demonstração. Notemos que, por 2.1.29, basta provar que $\overline{Y}$ é um aD-espaço, portanto podemos assumir que $Y \subseteq X$ é denso. Além disso, se $F \subseteq X$ é fechado então $F = (F \cap$

$Y) \cup (F \cap Z)$, e pelas respectivas preservações por fechados, teremos que, por generalidade, basta provar que X é bD.

Seja $\mathcal{A}$ um recobrimento aberto de X. Tomemos $\mathcal{B}$ um recobrimento aberto de X tal que $\{\overline{B}: B \in \mathcal{B}\}$ refina $\mathcal{A}$. Como Y é paracompacto, fixemos $\mathcal{C}$ uma família de abertos em X que cobre Y, é localmente finito em Y e para todo $C \in \mathcal{C}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq B$. Notemos que por Y ser denso, se H é um aberto em X tal que $H \cap Y$ verifica que ele é localmente finito, então $\{C \in \mathcal{C}: C \cap H \neq \emptyset\}$ é finito.

Seja $\mathcal{U} = \{U \subseteq X : U \text{ é aberto}, |\{C \in \mathcal{C} : C \cap U \neq \emptyset\}| < \aleph_0\}$. Note que $Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Definimos $K = X \setminus \bigcup \mathcal{U}$, que é um aD-espaço por ser subespaço fechado de Z. Fixemos então $D \subseteq K$ núcleo fechado discreto de uma *ona* parcial $\phi: K \longrightarrow \mathcal{B}$.

Temos que $F = X \setminus \phi(D) \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ é um fechado. Tomemos $\mathcal{C}' = \{C \in \mathcal{C}: \overline{C} \cap F \neq \emptyset\}$. Seja $x_0 \in F$, então $x_0 \notin K$ e existe $U \in \mathcal{U}$ vizinhança de x_0. Como $Y \subseteq F$ é denso e $\mathcal{C}$ cobre Y, $x_0 \in \overline{\bigcup \mathcal{C}}$. Portanto $x_0 \in \overline{\bigcup\{C \in \mathcal{C}: C \cap U \neq \emptyset\}} = \bigcup\{\overline{C}: C \in \mathcal{C},\ C \cap U \neq \emptyset\}$.

Assim $F \subseteq \bigcup\{\overline{C} : C \in \mathcal{C}'\}$. Considerando o recobrimento fechado localmente finito $\{F \cap \overline{C}: C \in \mathcal{C}'\}$ de F. Podemos considerar $\mathcal{K}$ subrecobrimento minimal dele (por 3.4.22). Para cada $K \in \mathcal{K}$, fixemos $x_K \in K \setminus \bigcup(\mathcal{K} \setminus \{K\})$ e $A_K \in \mathcal{A}$ tal que $K \subseteq A_k$.

Definindo $\phi(x_K) = A_k$, temos que $X = \phi(\{x_K : K \in \mathcal{K}\} \cup D)$, e notemos que $\{x_K : K \in \mathcal{K}\} \cup D$ é localmente finito. □

Por indução teremos que

Proposição 3.4.24 (Arhangel'skii e Raushan Z. Buzyakova, 2002)**.** *Se X é um espaço regular e $Y_0, \dots, Y_n \subseteq X$ são subespaços paracompactos tais que $X = Y_0 \cup \dots \cup Y_n$, então X é um aD-espaço.*

Logo vale o seguinte resultado sobre a união finita de espaço paracompactos:

Corolário 3.4.25. *Sejam X um espaço regular e $Y_0, \dots, Y_n \subseteq X$ subespaços paracompactos tais que $X = Y_0 \cup \dots \cup Y_n$. Se X é enumeravelemnte compacto, então ele é compacto. Para todo $F \subseteq X$ subespaço fechado vale que $e(F) = \ell(F)$.*

Dos teoremas 3.4.11 e 1.3.13 e considerando que todo metrizável é D-espaço, temos que:

Corolário 3.4.26 (Borges e Wehrly, 1991)**.** *Todo espaço p-paracompacto é um D-espaço*

Corolário 3.4.27 (Borges e Wehrly, 1991)**.** *Seja um M-espaço X. São equivalentes:*

(i) *X é paracompacto;*

(ii) *X é um D-espaço;*

(iii) *X é subparacompacto.*

Demonstração. Consideremos a caracterização de M-espaço por função, ou seja, fixemos um espaço metrizável M e uma função contínua fechada $f : X \longrightarrow M$ tal que para todo $p \in M$ o subespaço $f^{-1}[p] \subseteq X$ é enumeravelmente compacto.

Notemos que paracompacto, subparacompacto e a propriedade D são propriedades hereditárias para fechados. Além disso, as três implicam que ser enumeravelmente compacto implica ser compacto. Portanto as hipóteses **(i)**, **(ii)** e **(iii)** implicam que f é uma função perfeita com imagem metrizável e portanto paracompacta e D. Essas três propriedades são preservadas pré-imagem perfeita, logo assumindo qualquer uma das três implica as outras duas. □

Definição 3.4.28. *Seja X um espaço topológico. O* jogo de Menger *é um jogo entre os jogadores I e II que segue da seguinte maneira. Para cada rodada $n < \omega$, o jogador I escolhe um recobrimento aberto $\mathcal{A}_n$ de X e depois o jogador II escolhe $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}_n$ subconjunto finito.*

Ao fim de ω rodadas, jogador II ganha se, e somente se, $\bigcup\bigcup_{n<\omega} \mathcal{B}_n = X$. Caso contrário, o jogador I ganha.

Teorema 3.4.29. *Um espaço topológico é de Menger se, e somente se, o jogador I não tem estratégia vencedora no jogo de Menger.*

Por meio do JONAP 1.6.1 podemos verificar que:

Teorema 3.4.30 (Aurichi, 2009)**.** *Todo espaço T_1 de Menger tem a propriedade D.*

No entanto podemos verificar algo ainda mais forte:

Teorema 3.4.31 (Aurichi, 2011)**.** *Todo espaço T_1 de Menger é fortemente D.*

Demonstração. Seja X um espaço T_1 de Menger. Seja ϕ uma *ona* em X, iremos usá-la a fim de construir uma estratégia para o jogador I do jogo de Menger 3.4.28, assim haverá um jogo seguindo essa estratégia no qual o jogador II ganha.

A primeira jogada I_0 é o recobrimento $\phi[X]$. Cada jogada do jogador II pode ser identificada por $\phi[D_n]$ para um conjunto finito $D_n \subseteq X \setminus \phi(\bigcup_{m<n} D_m)$. A jogada I_{n+1} é

$$\phi[X \setminus \phi(\bigcup_{m\leq n} D_m)] \cup \{\phi(\bigcup_{m\leq n} D_m)\}.$$

Consideremos $\langle D_n : n < \omega \rangle$ uma sequência definida por um jogo onde II ganha, ou seja, $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$ é núcleo de ϕ. Para cada $x \in X$, tomemos $n < \omega$ tal que $x \in \phi(D_n)$. Fixando $d \in D_n$ tal que $x \in \phi(d)$, temos que $D \cap \phi(d) \subseteq \bigcup_{m\leq n} D_m$, que é finito. Logo o espaço é fortemente D. □

Capítulo 4

Espaços Linearmente Ordenados

Espaços linearmente ordenados são os espaços topológicos que tem a topologia gerada por uma ordem linear (4.2). O artigo Lutzer, 1980 contém diversos resultados e noções importantes sobre esses espaços. Os objetivos dessa seção são apresentar o resultado de Douwen e Lutzer, 1997, que mostra a equivalência de da propriedade D e diversas outras propriedades de recobrimento para espaços linearmente ordenados (4.4.1), e provar que todo espaço linearmente ordenado é hereditariamente dualmente discreto (4.4.18).

As primeiras três seções apresentam preliminares sobre os espaço linearmente ordenados e os espaços GO, sendo somente na ultima seção os resultados relativos à propriedade D.

4.1 Ordens Lineares

Iremos estabelecer algumas notações importantes para o resto do capítulo, assim como apresentar resultados sobre a estrutura de ordem utilizados durante o trabalho. Para entender melhor essa estrutura o livro sobre teoria de conjuntos Jech, 2003 apresenta propriedades.

Definição 4.1.1. *Dado um conjunto P, uma relação binária $\leq$ sobre P é* uma ordem parcial *se:*

- **(Reflexiva)** *Para todo $x \in P$ vale que $x \leq x$;*
- **(Antissimétrica)** *Se $x, y \in P$ tais que $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$;*
- **(Transitiva)** *Se $x, y, z \in P$ tais que $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.*

Iremos também considerar ordens estritas, que explicitaremos quando for o caso.

Definição 4.1.2. *Uma ordem parcial $\leq$ sobre um conjunto P é* uma ordem linear *se todos $x, y \in P$ são comparáveis, ou seja, vale $(x \leq y) \vee (y \leq x)$.*

Iremos nos referir ao par $(P, \leq)$ como ordem (linear), ao invés de sempre escrever $\leq$ uma ordem (linear) sobre o conjunto P.

Definição 4.1.3. *Dada uma ordem parcial (linear)* $(P, \leq)$ *e* $A \subseteq P$*, a* sub-ordem *em* A *é a ordem parcial (linear)* $\leq_A$ *definida por*

$$a \leq_A b \leftrightarrow a \leq b \text{ e } a, b \in A$$

Definição 4.1.4. *Dada uma ordem parcial* $(P, \leq)$ *um conjunto* $A \subseteq P$ *é* uma cadeia *se* $\leq_A$ *é uma ordem linear.*

Definição 4.1.5. *Dada uma ordem linear* $(P, \leq)$*, um subconjunto* $A \subseteq P$ *é:*

- cofinal (coinicial) *se para todo* $x \in X$ *existe* $a \in A$ *tal que* $x \leq a$ *(*$a \leq x$*).*
- convexo *se para todo* $a, b \in A$*, se* $x \in X$ *tal que* $a \leq x \leq b$*, então* $x \in A$*.*
- seção final (inicial) *se* A *é convexo e cofinal (coinicial).*

Definição 4.1.6. *Dada uma ordem parcial* $(P, \leq)$ *e* $x \in P$ *definimos:*

- $^{\mapsto}x = \{z \in X : x \leq z\}$ *e* $^{\rightarrow}x = {}^{\mapsto}x \setminus \{x\}$
- $^{\leftarrow\!\shortmid}x = \{z \in X : z \leq x\}$ *e* $^{\leftarrow}x = {}^{\leftarrow\!\shortmid}x \setminus \{x\}$

Definição 4.1.7. *Dada uma ordem linear* $(P, \leq)$ *consideremos* $<$ *a ordem estrita associada. Sejam* $x \in P$*,* $A, B \subseteq P$*. Dizemos que* $A < B$ *se para todo* $a \in A$ *e* $b \in B$ *vale que* $a < b$*. Dizemos que* $A < x$ *(*$x < A$*) se* $A < \{x\}$ *(*$\{x\} < A$*).*

Uma estrutura essencial para o estudo de espaços linearmente ordenados são os gaps da ordem.

Definição 4.1.8. *Dada uma ordem linear* $(P, \leq)$*, o par* $u = (A, B)$ *é* um gap *se* $A \cup B = L$*,* $A < B$*,* A *não tem máximo e* B *não tem mínimo. Nesse caso escreveremos* $^{\leftarrow}u = A$ *e* $^{\rightarrow}u = B$*.*

Suponha que $A \subseteq P$ seja uma seção inicial sem supremo em P, então o par $(A, P \setminus A)$ é um gap. Analogamente, se B é seção final sem ínfimo, $(P \setminus B, B)$ é gap. A observação contrária também vale. Ou seja, se (A, B) é gap, então A é seção inicial sem supremo e B é seção final sem ínfimo.

Notemos que, de acordo com a definição que estamos trabalhando, se P não tem máximo, então $(P, \emptyset)$ é gap (supremo) e se não tem mínimo $(\emptyset, P)$ é gap (ínfimo). Esses são os gaps extremos.

Definição 4.1.9. *Uma ordem linear* $(L, \leq)$ *é* densa *se para* $x < y$ *existe* $z \in {}^{\rightarrow}x \cap {}^{\leftarrow}y =]x, y[_<$.

Um subconjunto é denso em si mesmo *se ele como sub-ordem é denso.*

$A \subseteq L$ *é* denso em $(L, \leq)$ *se* $]x, y[_< \cap A \neq \emptyset$ *para todo* $x < y$*.*

Definição 4.1.10. *Uma ordem linear é* contínua *se todo gap dela é extremo. Ela é* completa *se ela não possui gaps e é dita* completa de Dedekind *se ela é densa e completa.*

Definição 4.1.11. *Seja* $\mathbb{L} = (L, \leq)$ *ordem linear. Definimos* $\mathbb{L}^+ = L \cup \{u : u \text{ é gap de } \mathbb{L}\}$ *e definimos a ordem linear completa nele por* $u, v \in \mathbb{L}^+$*,* $u \leq^+ v$ *se, e somente se, vale:*

- $u, v \in L$ *e* $u \leq v$*, ou*
- $u, v \notin L$ *e* $^{\leftarrow}u \subseteq {}^{\leftarrow}v$*, ou*

- *$u \in L$, $v \notin L$ e $u \in {}^{\leftarrow}v$, ou*
- *$u \notin L$, $v \in L$ e $v \in {}^{\rightarrow}u$.*

Notemos que se $\mathbb{L}$ é denso, então $\mathbb{L}^+$ é completo de Dedekind.

Definição 4.1.12. *Sejam $u <^+ v$, os intervalos com eles de extremos em $\mathbb{L}^+$ serão referidos como $[u, v]^+$, $]u, v[^+$, $[u, v[^+$, e tomamos os intervalos em $\mathbb{L}$ como $[u, v] = [u, v]^+ \cap L$ por exemplo.*

Definimos $\sup(\mathbb{L}) = \max(\mathbb{L}^+)$ *e* $\inf(\mathbb{L}) = \min(\mathbb{L}^+)$.

Na seção 4.3 iremos estudar os subespaços de espaços linearmente ordenados e para isso iremos definir uma estrutura que atua como gap no subconjunto de uma ordem linear, mas não necessariamente é um gap na sub-ordem.

Definição 4.1.13. *Sejam $(L, \leq)$ ordem linear e $X \subseteq L$. O par (A, B) tal que $A \cup B = X$ e $A < B$ é* um pseudo gap *se acontece um dos três casos:*

- (Gap na Sub-ordem) *Se A tem supremo a em L, então $a \notin X$, e se B tem ínfimo b em L, então $b \notin X$. Esse caso é exatamente quando o par é gap na sub-ordem $(X, \leq_X)$.*
- (pseudo gap à esquerda) *B tem mínimo b, que não é supremo de A.*
- (pseudo gap à direita) *A tem máximo A, que não é ínfimo de B.*

Exemplo 4.1.14. *Considere $(\mathbb{R}, <)$ a ordem usual.*

- *Considere o conjunto $X = [0, 1[\cup]1, 2]$, o par $([0, 1[,]1, 2])$ é um gap na subordem de X.*
- *Considere o conjunto $X = [0, 1[\cup [2, 3]$, o par $([0, 1[, [2, 3])$ é um pseudo gap à esquerda de X em $\mathbb{R}$. Notemos que como sub-ordem 2 é supremo de $[0, 1[$ em X.*

Lema 4.1.15. *Seja $\mathbb{L}$ uma ordem linear sem máximo. Existe γ ordinal e uma γ-sequência $\langle x_\beta : \beta < \gamma \rangle$ estritamente crescente em $\mathbb{L}$ cofinal, ou seja, para todo $x \in L$ existe $\beta < \gamma$ tal que $x < x_\beta$.*

Demonstração. Construiremos por recursão. Fixemos $x_0 \in L$ qualquer. Assumindo que temos a α-sequência estritamente crescente $\langle x_\beta : \beta < \alpha \rangle$. Se ela é cofinal, $\alpha = \gamma$ e ela é a sequência que queríamos. Caso contrário, fixemos $x_\alpha \in L \setminus (\bigcup_{\beta<\alpha} {}^{\leftarrow\!\!\dashv} x_\beta)$, e $\langle x_\beta : \beta < \alpha + 1 \rangle$ é estritamente crescente.

Assumindo que para todo $\mu < \alpha$, temos $\langle x^\mu_\beta : \beta < \mu \rangle$ estritamente crescente tal que se $\lambda < \mu < \alpha$ então $x^\lambda_\lambda = x^\mu_\lambda$, ou seja, a λ-sequência é seção inicial da μ-sequência. Definimos $\langle x^\beta_\beta : \beta < \alpha \rangle$ α-sequência estritamente crescente.

Notemos que a recursão acima está bem definida e eventualmente se exaure, pois se para nenhum $\alpha < |L|^+$ chegarmos em uma α-sequência cofinal, nós teríamos o passo $\alpha = |L|^+$ definido com $\langle x_\beta : \beta < \alpha \rangle$ estritamente crescente, em particular ela é injetora, mas assim teríamos um subconjunto de L de cardinalidade estritamente maior, que é um absurdo.

Portanto existe $\alpha < |L|^+$ tal que a α-sequência é confinal. □

Definição 4.1.16. *Dada $\mathbb{L}$ uma ordem linear sem elemento máximo, a sua* cofinalidade *é o menor ordinal α tal que existe α-sequência cofinal nela, que denotamos por $\underrightarrow{\mathrm{cf}}(\mathbb{L})$. Se $\mathbb{L}$ tem* *máximo definimos* $\underrightarrow{\mathrm{cf}}(\mathbb{L}) = 1$. *Analogamente definimos a* coinicialidade *de* $\mathbb{L}$, *denotada por* $\underleftarrow{\mathrm{cf}}(\mathbb{L})$.

Notemos que para uma ordem linear sem elemento máximo $\mathbb{L}$, se α é um ordinal tal que existe uma α-sequência estritamente crescente e cofinal em $\mathbb{L}$, então $\underrightarrow{\mathrm{cf}}(\mathbb{L}) = \mathrm{cf}(\alpha)$. Vale o análogo para a coinicialidade de $\mathbb{L}$.

Definição 4.1.17. *Seja u gap de* $\mathbb{L}$, *definimos a* cofinalidade à esquerda de u *por* $\underrightarrow{\mathrm{cf}}(u) = \underrightarrow{\mathrm{cf}}({}^{\leftarrow}u)$ *como sub-ordem, e a* cofinalidade à direita *por* $\underleftarrow{\mathrm{cf}}(u) = \underleftarrow{\mathrm{cf}}({}^{\rightarrow}u)$.

A seguinte definição apareceu em Gillman e Henriksen, 1954 e é uma maneira de definir fechados discretos em espaços linearmente ordenados, pois uma sequência monótona só poderá ter pontos de acumulação nos ínfimos ou supremos das seções iniciais dela.

Definição 4.1.18. *Sejam* $\mathbb{L}$ *ordem linear,* α *ordinal limite e* $\langle x_\beta : \beta < \alpha \rangle$ α*-sequência em* $\mathbb{L}$ *estritamente crescente (análogo para decrescente). A sequência é* uma Q-sequência *se para todo* $\gamma \leq \alpha$ *limite,* $\{x_\beta : \beta < \gamma\}$ *não tem supremo (ínfimo) em* $\mathbb{L}$.

Definição 4.1.19. *Sejam* $\mathbb{L}$ *ordem linear e u gap de* $\mathbb{L}$.

- *u é um Q-gap à esquerda se existe uma* $\underrightarrow{\mathrm{cf}}(u)$*-sequência cofinal em* ${}^{\leftarrow}u$ *que é Q-sequência. Consideramos o gap ínfimo sempre Q-gap à esquerda*
- *u é um Q-gap à direita se existe uma* $\underleftarrow{\mathrm{cf}}(u)$*-sequência coinicial em* ${}^{\rightarrow}u$ *que é Q-sequência. Consideramos o gap ínfimo sempre Q-gap à direita*
- *u é um Q-gap se ele é Q-gap à esquerda e à direita.*

Notemos que para u gap, se $\underrightarrow{\mathrm{cf}}(u) = \omega$, então ele é Q-gap à esquerda. Para a direita, é análogo.

Um Q-gap então um gap que existem sequências que tendem a ele dos dois lados e que não têm pontos limites.

Definição 4.1.20. *Sejam $A \subseteq \mathbb{L}$ e u um gap em $\mathbb{L}$. Dizemos que u é coberto por A se existem $a <_A b$ tal que $u \in [a,b]^+$. Dizemos que u é coberto por uma família $\mathcal{A}$ se existe $A \in \mathcal{A}$ que cobre u.*

4.2 Topologia dos Intervalos

Definiremos então a topologia em uma ordem linear que é um espaço linearmente ordenado.

Dada uma ordem linear $\mathbb{L} = (L, \leq)$ definimos *a topologia dos intervalos* denominada pela sub-base

$$\{{}^{\leftarrow}x : x \in L\} \cup \{{}^{\rightarrow}x : x \in L\}$$

De maneira equivalente podemos definir pela base

$$\{]x,y[: x < y\} \cup \{[\inf(\mathbb{L}), y[: y > \inf(\mathbb{L})\} \cup \{]x, \sup(\mathbb{L})] : x < \sup(\mathbb{L})\}$$

Notemos que essa topologia é de Hausdorff pois para $x < y$ se existe $z \in L$ tal que $x < z < y$, então $x \in {}^{\leftarrow}z$ e $y \in {}^{\rightarrow}z$, abertos disjuntos. Se não existe, então $x \in {}^{\leftarrow}y$ e $y \in {}^{\rightarrow}x$ são abertos disjuntos.

A topologia dos intervalos será escrita como $\tau(\leq)$.

Definição 4.2.1. *Um espaço topológico* (L, τ) *é* um espaço linearmente ordenado *se existe uma ordem linear* $\leq$ *sobre* X *tal que* $\tau = \tau(\leq)$.

Nesse caso iremos simplificar a notação dizendo que o par $(L, \leq)$ *é um espaço linearmente ordenado.*

Notemos que $p \in L$ é ponto de acumulação de $A \subseteq L$ se, e somente se, $A \cap {}^{\leftarrow}p$ é cofinal em ${}^{\leftarrow}p$ ou $A \cap {}^{\rightarrow}p$ é coinicial em ${}^{\rightarrow}p$.

Portanto uma α-sequência estritamente crescente (ou decrescente) é uma Q-sequência se, e somente se, o conjunto $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ não tem ponto de acumulação.

Teorema 4.2.2. *A topologia é hereditariamente normal.*

Demonstração. Quando tratarmos de espaços generalizados de ordem veremos que se $X \subseteq L$, existe uma espaço linearmente ordenado X^*, tal que X é subespaço fechado (4.3.6). Portanto basta verificar que todo espaço linearmente ordenado é normal, que segue ele ser hereditariamente normal.

Sejam $F, K \subseteq L$ subconjuntos fechados não vazios e disjuntos. Para cada $x \in F$ consideremos I_x a componente convexa de $L \setminus K$ em L tal que $x \in I_x$. Iremos definir $s(x), t(x) \in \mathbb{L}^+$ tais que $I_x \cap F \subseteq [s(x), t(x)] \subseteq \mathbb{L}^+ \setminus K$.

Se I_x não tem supremo, definimos $t(x)$ o gap de L que seria o supremo de I_x e $A_x = {}^{\leftarrow}t(x)$. Se I_x não tem ínfimo, definimos $s(x)$ o gap ínfimo de I_x e $B_x {}^{\rightarrow}s(x)$.

Se $a = \max I_x \in L$, então $a \notin K$ e como para todo $z > a$ existe $y \in K \cap [a, z]$, então a ou é máximo de L ou existe $z \in K$ tal que $z > a$ e $]a, z[= \emptyset$, em ambos os casos definimos $t(x) = a$ e $A_x = {}^{\leftarrow\!\dashv}t(x)$ Se $b = \min I_x$, tomamos analogamente $s(x) = b$ e $B_x = {}^{\mapsto}s(x)$.

Se $a = \sup I_x \in L \setminus I_x$, então existe $t(x) \in I_x$ tal que $F \cap I_x \subseteq {}^{\leftarrow}t(x) = A_x$, caso contrário $a \in F$, o que é absurdo. Se $b = \inf I_x \in L \setminus I_x$, fixamos $s(x) \in I_x$ tal que $F \cap I_x \subseteq {}^{\rightarrow}s(x) = B_x$.

Queremos unir todos os intervalos definidos $A_x \cap B_x$ para encontrar uma vizinhança de F cujo fecho não encontra K, mas devido à escolha feita no caso de ter um supremos que não é máximo, podemos ao uni-los criar um ponto de acumulação. Portanto a fim de evitar esse problema consideramos uma enumeração de $F = \{x_\alpha : \alpha < |F|\}$ e tomamos $E = \{x_\alpha : x_\alpha \notin \bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta\}$.

Definindo o aberto $U = \bigcup\{A_x \cap B_x : x \in E\}$, temos que $F \subseteq U$. Sejam $z \in K$ e J componente convexa de $L \setminus K$ tal que $z \in J$. Se existe $t \in K \cap J \cap {}^{\rightarrow}z$, então $[z, t[\cap \bigcup_{x \in F} I_x = \emptyset$ e tomamos $G = {}^{\leftarrow}t$ Se $z = \max J$, então ou ele é máximo de L ou existe $x \in F$ tal que $z < x$ e $]z, x[= \emptyset$ e nesse caso $G = {}^{\leftarrow\!\dashv}z$. Se $z = \max(K \cap J)$ e existe $r \in J \cap {}^{\rightarrow}z$, se $[z, r[\cap U = \emptyset$, então $G = {}^{\leftarrow}r$. Caso contrário suponha $x \in E$ tal que $A_x \cap B_x \cap [z, r[$, então $z < x$ e $z = \inf I_x$. Fixamos $G = {}^{\leftarrow}s(x)$

Fazendo uma construção análoga para H uma seção final que contém z, teremos que $z \in G \cap H$, mas $G \cap H \cap U = \emptyset$, e portanto $\overline{U} \cap K = \emptyset$. $\square$

Notemos que a existência de gaps influencia diretamente sua topologia

Proposição 4.2.3. *Se $\mathbb{L}$ é completo, então sua topologia é compacta.*

Demonstração. Sejam $\perp$ e $\top$ seu mínimo e máximo respectivamente e $\mathcal{V}$ recobrimento aberto. Considere $A = \{x \in \mathbb{L} : \exists \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}(\text{finito e } [\perp, x] \subseteq \bigcup \mathcal{U})\}$, que claramente não é vazio, como $\perp \in A$.

Seja $a = \sup A \in \mathbb{L}$ e suponha por absurdo que $a < \top$. Seja $V \in \mathcal{V}$ tal que $a \in V$, se $A \cap V = \emptyset$, então $a \in A$ pela sua definição de supremo, caso contrário seja z na interseção e $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ finito que cobre $[\perp, z]$, então $\mathcal{U} \cup \{V\}$ cobre $[\perp, a]$, logo $a \in A$.

Fixemos então $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ finito que cobre $[\perp, a]$. Se a tem sucessor s, é claro que $[\perp, s] = [\perp, a] \cup \{s\}$, então teríamos que $s \in A$, que é absurdo, logo a não tem sucessor. Por consequência, para $U \in \mathcal{U}$ tal que $a \in U$, necessariamente existe $b > a$ tal que $[a, b] \in U$, mas então $b \in A$, absurdo. $\square$

Corolário 4.2.4. *$\mathbb{L}$ é compacto se, e somente se, ele é completo.*

Demonstração. Basta notar que $\mathbb{L}^+$ é um espaço de Hausdorff e $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{L}^+$ é denso, logo se $\mathbb{L}$ é compacto, então ele é um subespaço fechado, por consequência $\mathbb{L} = \mathbb{L}^+$. $\square$

Lema 4.2.5. *Se $\mathbb{L}$ tem máximo e mínimo e $\mathcal{A}$ é uma família de abertos que cobre todos os gaps, então existe subconjunto finito se $\mathcal{A}$ que cobre $\mathbb{L}$.*

Demonstração. Para cada $A \in \mathcal{A}$ definimos $A^+ \subseteq \mathbb{L}^+$ o conjunto A com os gaps cobertos por ele. A^+ é aberto em $\mathbb{L}^+$ e pela hipótese $\{A^+ : A \in \mathcal{A}\}$ é recobrimento aberto de $\mathbb{L}^+$. Assim existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ finito tal que $\{B^+ : B \in \mathcal{B}\}$ é recobrimento de $\mathbb{L}^+$, logo $\mathcal{B}$ é recobrimento de $\mathbb{L}$. $\square$

Notemos que podemos substituir no lema anterior ele ter máximo e mínimo por existem $A \in \mathcal{A}$ seção inicial e $B \in \mathcal{A}$ seção final de $\mathbb{L}$.

Iremos agora mostrar uma caracterização da paracompacidade de um espaço linearmente ordenado por meio de descrever os seus gaps, mas antes verificaremos o seguinte lema

Lema 4.2.6. *Sejam κ cardinal regular não enumerável e $S \subseteq \kappa$ estacionário. Então S com a topologia do subespaço não é meta-Lindelöf.*

Demonstração. Sem perda de generalidade assumimos que $0 \notin S$. Consideremos o recobrimento aberto $\mathcal{V} = \{V_s : s \in S\}$, onde $V_s = {\leftarrow}s \cap S$. Seja $\mathcal{W} = \{W_i : i \in I\}$ refinamento aberto de $\mathcal{V}$. Para cada $s \in S$ fixemos $i(s) \in I$ e $r(s) < s$ tais que $]r(s), s] \cap S \subseteq W_{i(s)}$ e tomemos $t_s \in S$ tal que $W_{i(s)} \subseteq {\leftarrow}t_s$.

Notemos que $r : S \longrightarrow \kappa$ é uma função regressiva, logo pelo lema do Pressing-Down (1.1.3) fixemos $r_0 \in \kappa$ tal que $R = r^{-1}[r_0]$ é estacionário. Como R é cofinal em κ, temos que o conjunto $J = \{i(s) : s \in R\}$ não pode ser enumerável. Fixando $x_0 = \min(S \cap {\rightarrow}r_0)$, temos que para todo $j \in J$ x_0 é elemento de W_j, logo $\mathcal{W}$ não é ponto-enumerável. $\square$

Teorema 4.2.7 (Gillman e Henriksen, 1954). *Seja $\mathbb{L}$ ordem linear com a topologia dos intervalos. São equivalentes:*

(i) *$\mathbb{L}$ é paracompacto;*

(ii) *Todos os gaps de* $\mathbb{L}$ *são* Q*-gaps;*

(iii) *Não existe uma cópia fechada de algum* $S \subseteq \kappa$ *estacionário contida em* $\mathbb{L}$ *para* κ *cardinal regular não enumerável.*

Demonstração.
((**i**)$\longrightarrow$(**ii**)) Suponha u gap de $\mathbb{L}$ que não é Q-gap è esquerda. Seja $\gamma = \underrightarrow{\mathrm{cf}}(u)$ e tomemos uma γ-sequência $\langle x_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ cofinal de u. Fixemos $\lambda_0 < \gamma$ o menor ordinal tal que $\sup_{\alpha<\lambda_0} x_\alpha$ está bem definido.

Consideremos $\mathcal{V} = \{{}^{\leftarrow}x_\alpha : \alpha < \gamma\} \cup \{{}^{\rightarrow}u\}$ que é um recobrimento aberto de $\mathbb{L}$. Vamos verificar que ele não admite refinamento aberto localmente finito. Na verdade vamos verificar que tomando $\mathcal{W}$ um refinamento aberto qualquer de $\mathcal{V}$ existe um ponto x tal que $\mathrm{ord}(x, \mathcal{W}) \geq \gamma$, garantindo que $\mathcal{W}$ não pode ser ponto-finito.

Para isso iremos refinar $\mathcal{W}$ por intervalos de maneira que se uma quantidade κ de intervalos passem por um ponto x, teremos que $\mathrm{ord}(x, \mathcal{W}) \geq \kappa$.

Para cada $x < u$ e $W \in \mathcal{W}$ tal que $x \in W$, tomemos $I(x, W)$ o intervalo maximal tal que $x \in I(x, W) \subseteq W$. Notemos que $W \subseteq {}^{\leftarrow}u$ e $I(x, W)$ é aberto pois W é aberto. Definimos $\mathcal{I} = \{I(x, W) : x \in W \in \mathcal{W}\}$. Se $W \in \mathcal{W}$, $x \in W$ e $z \in I(x, W)$, então notemos que pela definição $I(x, W) = I(z, W)$. Portanto para $z < u$ vale que $\{I(z, W) : W \in \mathcal{W},\ z \in W\} = \{I \in \mathcal{I} : z \in I\}$ e segue que $\mathrm{ord}(z, \mathcal{I}) \leq \mathrm{ord}(z, \mathcal{W})$.

Para cada $\alpha < \gamma$, $\mathcal{I}_\alpha$ é a família dos intervalos de $\mathcal{I}$ que contém x_α e $I_\alpha = \bigcup \mathcal{I}_\alpha$ é um intervalo que contém x_α.

Suponha por absurdo que para todo $\alpha < \gamma$ vale $|\mathcal{I}_\alpha| < \gamma$.

Segue que conjunto $\{z : \exists x < z(]x, z[\in \mathcal{I}_\alpha)\}$ não pode ser cofinal em ${}^{\leftarrow}u$, pois não podemos tomar uma γ-sequência crescente nele. Então podemos fixar $t_\alpha, s_\alpha \in \mathbb{L}^+$ tais que $]t_\alpha, s_\alpha[= I_\alpha$, e teremos $s_\alpha <^+ u$.

Recursivamente tomamos a função $\sigma : \gamma \longrightarrow \gamma$ estritamente crescente, com $\sigma(0) = 0$ e $\sigma(\lambda) = \min\{\alpha < \gamma : \forall \beta < \lambda(s_\beta <^+ x_\alpha)\}$. Portanto a γ-sequência $\langle x_{\sigma(\alpha)} : \alpha < \gamma \rangle$ é cofinal em ${}^{\leftarrow}u$, e como não existe Q-sequência à esquerda de u tomemos $\lambda < \gamma$ tal que $\{x_{\sigma(\alpha)} : \alpha < \lambda\}$ tem supremo $p \in \mathbb{L}$.

Fixemos $]t, s[\in \mathcal{I}$, com $t, s \in \mathbb{L}^+$ tal que $p \in]t, s[$. Então existe $\beta < \lambda$ tal que $x_\beta \in]t, s[$, assim $s \in I_\beta$ e por consequência $s <^+ s_\beta$, mas então $x_{\beta+1} > s$, que contradiz a construção.

Portanto podemos tomar $\alpha < \gamma$ tal que $|\mathcal{I}_\alpha| \geq |\underrightarrow{\mathrm{cf}}(u)|$. Como já comentado $\gamma \leq |\mathcal{I}_\alpha| \leq \mathrm{ord}(x_\alpha, \mathcal{W})$.

Logo verificamos que $\mathcal{W}$ não é nem ponto-enumerável pois se $\gamma = \omega$ qualquer sequência cofinal seria Q-sequência. Se u não é Q-gap à direita é análogo.

((**ii**)$\longrightarrow$(**i**)) Suponha que todo gap é Q-gap. Seja $\mathcal{V}$ recobrimento aberto. Consideremos $F^+ = \{u : u \text{ gap que não é coberto por } \mathcal{V}\}$ e $Z^+ = \mathbb{L}^+ \setminus F^+$ com decomposição em intervalos convexos maximais $\mathcal{I}^+$.

Para cada $I^+ \in \mathcal{I}^+$ seja $I = I^+ \cap \mathbb{L}$. É fácil ver que I tem extremos em gaps não cobertos por $\mathcal{V}$, ou pontos extremais. Assim $\{I : I^+ \in \mathcal{I}^+\}$ é um recobrimento por clopens dois a dois disjuntos de $\mathbb{L}$, logo podemos nos restringir ao problema de achar refinamento aberto localmente finito de $\mathcal{V}$ em cada I.

Fixando $p \in I = [u, v]$, tomamos $I_0 = [u, p]$ e $I_1 = [p, v]$. Se v for gap, seja $\langle y_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ uma Q-sequência cofinal de v com $v_0 = p$ e o gap $w_\lambda = \sup^+_{\alpha<\lambda} y_\alpha <^+ y_\lambda$ para cada $\lambda < \gamma$ limite.

Para cada $\alpha < \gamma$, $[y_\alpha, y_{\alpha+1}]$ é um intervalo tal que todo gap nele é coberto por $\mathcal{V}$, então existe $\mathcal{V}_\alpha \subseteq \mathcal{V}$ finito que cobre $[y_\alpha, y_{\alpha+1}]$. Consideremos a família finita de abertos que cobre $[y_{\alpha+1}, y_{\alpha+2}]$ definida por:

$$\mathcal{W}_{\alpha+1} = \{V\cap]y_\alpha, y_{\alpha+3}[: V \in \mathcal{V}_{\alpha+1}\}$$

Se $\alpha < \gamma$ é limite, pela observação após o lema 4.2.5, consideremos $\mathcal{V}'_\alpha \subseteq \mathcal{V}$ finito que cobre $]w_\alpha, y_\alpha]$, e consideremos a família finita de abertos que cobre $]w_\alpha, v_{\alpha+1}]$

$$\mathcal{W}_\alpha = \{V\cap]w_\alpha, y_{\alpha+2}[: V \in \mathcal{V}_\alpha \cup \mathcal{V}'_\alpha\}$$

Sejam $\alpha < \beta < \gamma$ e $W \in \mathcal{W}_\alpha$, $H \in \mathcal{W}_\beta$ tais que $W \cap H \neq \emptyset$, então $\beta < \alpha + 3$. Portanto $\mathcal{W} = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{W}_\alpha$ é localmente finito.

Se v não for gap basta considerar $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ finito que cobre $[p, v]$. Fazemos uma construção análoga à esquerda de $\mathcal{U}$, e assim $\mathcal{W} \cup \mathcal{U}$ é um refinamento aberto localmente finito de $\mathcal{V}$ em I.

(**(i)**$\longrightarrow$**(iii)**) Segue do lema 4.2.6

(**(iii)**$\longrightarrow$**(ii)**) Seja u gap que não é Q-gap à esquerda. Tomemos $\underrightarrow{\mathrm{cf}}(u) = \gamma$. Seja $\langle y_\alpha : \alpha < \gamma\rangle$ sequência cofinal em u e assumimos que se para $\lambda < \gamma$ limite existe $\sup_{\alpha<\lambda} y_\alpha \in \mathbb{L}$, então y_λ é esse limite.

Definimos $S = \{\lambda < \gamma : \lambda \text{ é limite e } y_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} y_\alpha\}$. Como a sequência não é uma Q-sequência, S não é vazio. Iremos mostrar que $S \subseteq \gamma$ é estacionário.

Seja $C \subseteq \gamma$ fechado ilimitado. Consideremos então a sequência $\langle y_c : c \in C\rangle$. Ela é cofinal em u, logo existe $\lambda \in C$ limite (relativo a C) tal que $\sup_{c\in C\wedge c<\lambda} y_c \in \mathbb{L}$. Notemos que

$$\sup_{c\in C\wedge c<\lambda} y_c = \sup_{\alpha<\lambda} y_\alpha = y_\lambda$$

Assim $\lambda \in C \cap S$, logo é de fato estacionário.

Se considerarmos $f : S \longrightarrow \mathbb{L}$ por $f(\alpha) = y_\alpha$ ele é uma imersão de ordem fechada, e assim $f[S] \subseteq \mathbb{L}$ é fechado e homeomorfo a S. □

4.3 Espaço Generalizado de Ordem

Definição 4.3.1. *Um espaço Hausdorff (X, τ) é* um espaço generalizado de ordem *(ou GO) se existe uma ordem linear $<$ em X tal que para todo $x \in X$ os conjuntos $^{\rightarrow}x$ e $^{\leftarrow}x$ são abertos e existe uma base aberta de τ tal que todo elemento é $<$-convexo. Nesse caso dizemos que a tripla $(X, \tau, <)$ é um espaço GO*

Notemos que se X é o subespaço de um espaço linearmente ordenado $(L, \leq)$, ele será GO com a subordem, pois $\{]x, y[\cap X : x, y \in L\}$ é base de X.

Definição 4.3.2. *Dado $(X, \tau, <)$ um espaço GO, um par (A, B) de abertos em X tal que $X = A \cup B$ e $A < B$ é* um pseudo gap *se A não tem supremo (e por consequência B não tem ínfimo) ou* $\sup A = \inf B$*. Isso equivale a falar que ou A não tem máximo ou B não tem mínimo. Se tivessem, eles seriam sucessores na ordem.*

Proposição 4.3.3. *Seja $\mathbb{L}$ um espaço linearmente ordenado. Um par é pseudo gap de X em $\mathbb{L}$*

se, e somente se, é um pseudo gap em X como um GO.

Demonstração. Suponha (P, Q) pseudo gap de X relativo a $\mathbb{L}$. Se ele é gap na sub-ordem então é claro que nem P tem máximo, nem Q tem mínimo e $P = \bigcup_{p \in P} {}^{\leftarrow}p \cap X$, $Q = \bigcup_{q \in Q} {}^{\rightarrow}q \cap X$ são abertos no subespaço. Se ele é pseudo gap à esquerda, P não tem máximo e existe $t \in \mathbb{L}$ tal que $P < t < \min Q$, assim $P = {}^{\leftarrow}t \cap X$ e $Q = {}^{\rightarrow}t \cap X$ são abertos no subespaço. O caso pseudo gap à direita é análogo. Portanto todo pseudo gap relativo a $\mathbb{L}$ é pseudo gap relativo a subespaço.

Suponha (A, B) pseudo gap de X como GO. Se não existe $<_X$-supremo se A, então (A, B) é um gap na sub-ordem. Se existem $\sup_X A = \inf_X B = p$, suponha $p \in A$, como A é aberto e fechado no subespaço, existe $x \in \mathbb{L}$ tal que $p < x$ e $]p, x[\cap X = \emptyset$ e assim p não é ínfimo de B em $\mathbb{L}$, assim (A, B) é pseudo gap à direita. Se $p \in B$ temos de forma análoga pseudo gap à esquerda. □

Na verdade veremos que a classe dos GO são exatamente, a menos de homeomorfismo, os subespaços de espaços linearmente ordenados.

A fim de verificar isso, iremos definir uma sub-base para $(X, \tau, <)$ análoga à que fizemos para ordens lineares

Proposição 4.3.4. *Se $(X, \tau, <)$ é um espaço GO, o seguinte conjunto é uma sub-base da topologia τ*

$$\{{}^{\rightarrow}x : x \in X\} \cup \{{}^{\leftarrow}x : x \in X\} \cup \{A : (A, B) \text{ é pseudo gap}\} \cup \{B : (A, B) \text{ é pseudo gap}\}$$

Demonstração. A família acima claramente é de abertos. Seja $I \in \tau$ $<$-convexo. Se não existe $<$-supremo de I, então $A_0 = \bigcup_{x \in I} {}^{\leftarrow}x$ e $B_0 = X \setminus A_0$ formam um pseudo gap, visto que se $b \in B_0$, então como b não é supremo de A_0 existe $z < b$ tal que ${}^{\rightarrow}z \subseteq B_0$. Se existe $p = \sup I$, se $p \notin I$, $A_0 = {}^{\leftarrow}p$, se $p \in I$, então $A_0 = {}^{\leftarrow\!|}p$ é aberto e é pseudo gap com $B_0 = {}^{\rightarrow}p$.

Fazendo análise análoga sobre o ínfimo de I, temos B_1 que ou é a seção final de um pseudo gap ou é ${}^{\rightarrow}q$ para algum $q \in X$ tal que $I = A_0 \cap B_1$. Como τ admite base de intervalos, a família é sub-base. □

Dado um espaço GO $(X, \tau, <)$ podemos fazer uma extensão análoga ao $\mathbb{L}^+$ se uma ordem linear, a fim de obter um espaço linearmente ordenado do qual X é subespaço.

Proposição 4.3.5. *Dado um espaço GO $(X, \tau, <)$, definimos o conjunto X^+ a união de X com os seus pseudo gaps. Definimos uma ordem nele $u <^+ v$ se, e somente se, $u < v$ ou u é pseudo gap (A, B) e $v \in B$, ou v é pseudo gap (P, Q) e $u \in P$, ou $u = (A, B)$ e $v = (P, Q)$ pseudo gaps e $A \subsetneq P$.*

$(X^+, <^+)$ é uma ordem linear e X é subespaço de X^+ com a topologia do intervalo.

No entanto, iremos dar preferência ao estudo de outra extensão, que no lugar de transformar os pseudo gaps em pontos, irá transformá-los em gaps, de maneira a podermos analisar quando X será paracompacto.

Definição 4.3.6. *Seja $(X, \tau, <)$ um espaço GO. Consideremos L o conjunto dos elementos $a \in X$ tal que existe um pseudo gap (A, B) com $a = \max A$ e R o conjunto dos $b \in X$ tais que* *existe pseudo gap* (A, B) *tal que* $b = \min B$. *Definimos o conjunto*

$$X^* = X \times \{0\} \cup L \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup R \times \mathbb{Z}_{\leq 0} \subseteq X \times \mathbb{Z}$$

Definimos uma ordem nele por $(x, n) <^* (y, m)$ *se e somente se,* $x < y$ *ou* $x = y$ *e* $n < m$ *com a ordem usual dos inteiros.*

Intuitivamente, para cada pseudo gap que não é gap na ordem adicionamos uma sequência enumerável no lado limitado, a fim de formar um gap.

Proposição 4.3.7. *Seja* $(X, \tau, <)$ *um espaço GO.* X *é homeomorfo a um subespaço fechado de* X^* *com a topologia do intervalo.*

Demonstração. O subconjunto $X \times \{0\} \subseteq X^*$ é fechado, pois se $(x, n) \in X^* \setminus X \times \{0\}$ temos que $n \neq 0$ e $(x, n-1)$ e $(x, n+1)$ são elementos de X^* e $](x, n-1), (x, n+1)[^* = \{(x, n)\}$ é aberto.

Consideremos a função $h : X \longrightarrow X \times \{0\}$ definida por $h(x) = (x, 0)$ para cada $x \in X$. Notemos que ela é bijetora. Consideremos $X \times \{0\}$ como subespaço do espaço linearmente ordenado X^*.

Sejam $x, y \in X$ tais que $x < y$. Pela definição da ordem, para cada $(z, 0) \in X \times \{0\}$ vale que $(z, 0) \in]h(x), h(y)[_{<^*}$ se, e somente se, $z \in]x, y[$. Portanto $h[]x, y[] = X \times \{0\} \cap]h(x), h(y)[$. Segue que h é uma função aberta.

Sejam $(x, n), (y, m) \in X^*$ tais que $(x, n) <^* (y, m)$. Iremos separar nos possíveis valores de n e m:

Se $n \geq 0$, então ${}^{\rightarrow}(x, n) \cap X \times \{0\} = ({}^{\rightarrow}x) \times \{0\}$. Se $m \leq 0$, então ${}^{\leftarrow}(y, m) \cap X \times \{0\} = ({}^{\leftarrow}y) \times \{0\}$.

Se $n < 0$, então existe um pseudo gap (A, B) de X tal que $x = \min B$. Portanto ${}^{\rightarrow}(x, n) \cap X \times \{0\} = B \times \{0\}$. Se $m > 0$, então existe um pseudo gap (A, B) de X tal que $y = \max A$. Portanto ${}^{\leftarrow}(y, m) \cap X \times \{0\} = A \times \{0\}$.

Em todos os casos temos que $](x, n), (y, m)[\cap X \times \{0\} = V \times \{0\}$ para um V aberto em X. Logo h é uma bijeção contínua e aberta entre espaços de Hausdorff. □

Assim sabemos que se X^* é paracompacto, então X também é. Verificaremos que a volta vale usando uma construção similar ao do teorema 4.2.7.

Definição 4.3.8. *Seja* $(X, \tau, <)$ *um espaço GO. Uma* γ*-sequência* $\langle x_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ *crescente em* X *é uma* Q-sequência *se para todo* $\lambda \leq \gamma$ *ordinal limite o conjunto* $C_\lambda = \{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$ *satisfaz uma das duas propriedades:*

- *O conjunto* C_λ *não tem supremo em* X*, ou*
- *Se* $c = \sup C_\lambda$*, então existem um pseudo gap* (A, B) *tal que* $c = \min B$.

Para uma γ-sequência decrescente definimos ser Q-sequência de maneira análoga, por: se c é ínfimo de C_λ, então existe um pseudo gap (A, B) tal que $c = \max A$.

Definição 4.3.9. *Seja* $(X, \tau, <)$ *um espaço GO. Se* (A, B) *é pseudo gap, dizemos que ele é* um Q-pseudo gap *se*

- (A, B) *é gap na ordem e existe* Q*-sequência cofinal de* A *e* Q*-sequência coinicial de* B.

- *(A, B) é pseudo gap à esquerda e existe Q-sequência cofinal de A.*
- *(A, B) é pseudo gap à direita e existe Q-sequência coinicial de B.*

Proposição 4.3.10. *Seja $(X, \tau, <)$ um espaço GO. São equivalentes:*

(i) *(X, τ) é paracompacto;*

(ii) *Todos os pseudo gaps são Q-pseudo gaps;*

(iii) *Não existe uma cópia fechada de algum $S \subseteq \kappa$ estacionário contida em (X, τ) para κ cardinal regular não enumerável.*

Demonstração. Consideremos o espaço linearmente ordenado X^* como definido em 4.3.6. Notemos que se (A, B) é gap em X^*, então ele é um Q-gap se, e somente se, o pseudo gap $(h^{-1}[A], h^{-1}[B])$ é um Q-pseudo gap de X. Logo **(ii)** vale se, e somente se, todo gap de X^* é Q-gap. Por 4.2.7 isso equivale a X^* ser paracompacto e não existir uma cópia fechada de um estacionário em X^*.

Segue então que **(ii)** implica **(i)** e **(iii)**, pois $h[X] \subseteq X^*$ é fechado.

Como todo estacionário $S \subseteq \kappa$ não é paracompacto, temos que **(iii)**implica **(i)**.

A prova de **(iii)** implica **(ii)** é análoga à feita no teorema 4.2.7. □

4.4 Propriedade D

Iremos nessa seção verificar que diversas das propriedades próximas de D são equivalentes à paracompacidade para espaços linearmente ordenados e GO, depois verificaremos que todo espaço linearmente ordenado é hereditariamente dualmente discreto.

4.4.1 Paracompacidade e Propriedade D

Iremos seguir a argumentação apresentada no artigo Douwen e Lutzer, 1997 para provar que um espaço linearmente ordenado é paracompacto se, e somente se, ele é um D-espaço. Além disso verificamos que linearmente D e aD-espaço também são equivalentes a paracompacto para espaços linearmente ordenados.

Teorema 4.4.1. *Seja $\mathbb{L}$ ordem linear com a topologia dos intervalos. São equivalentes*

(i) *$\mathbb{L}$ é paracompacto;*

(ii) *$\mathbb{L}$ é D-espaço;*

(iii) *$\mathbb{L}$ é aD-espaço;*

(iv) *$\mathbb{L}$ é um espaço linearmente D.*

Iremos separar a demonstração desse teorema em lemas, notando que no caso geral sempre vale que todo D-espaço é aD-espaço (2.1.14) e linearmente D (comentário após 2.2.5) e que todo paracompacto é aD-espaço (2.1.16).

Lema 4.4.2. *Seja κ cardinal regular não enumerável e $S \subseteq \kappa$ conjunto estacionário. Então S com a topologia do subespaço de κ não é linearmente D e não é um aD-espaço.*

Demonstração. Consideremos o recobrimento $\mathcal{V} = \{V_s : s \in S\}$ de S, definido por $V_s = {}^{\leftarrow\!\mid}s \cap S$ para cada $s \in S$. Sejam $N \subseteq S$ e $\phi : N \longrightarrow \mathcal{V}$ tal que $x \in \phi(x) = V_{s(x)}$ e $\phi(N) = S$.

Portanto o conjunto $\{s(x) : x \in N\}$ é cofinal em S e por consequência $|N| = \kappa$. Consideremos $F \subseteq \kappa$ o conjunto dos pontos de acumulação de N em κ. F será um fechado ilimitado de κ, pois $N \subseteq \kappa$ é cofinal.

Tomemos $p \in F \cap S$, então é fácil ver que p é ponto de acumulação de N em S. Portanto encontramos um recobrimento aberto que não admite atribuição com núcleo fechado discreto, logo S não é aD-espaço.

Para verificar que S não é linearmente D, basta notar que o recobrimento acima é $\subseteq$-linearmente ordenado, assim qualquer atribuição neles é uma *ona* linear sem núcleo fechado discreto. □

Segue do lema anterior e 4.2.7 que se $\mathbb{L}$ é aD-espaço ou linearmente D, então $\mathbb{L}$ é paracompacto.

Agora iremos provar a implicação mais complexa, cuja demonstração servirá de base para o roteiro de que toda ordem linear é dualmente discreta.

Lema 4.4.3. *Se $\mathbb{L}$ é um espaço linearmente ordenado paracompacto, então ele é um D-espaço.*

Seguiremos a demonstração como feita por Douwen e Lutzer, 1997.

Definição 4.4.4. *Sejam $\mathbb{L}$ um espaço linearmente ordenado, ϕ ona de abertos convexos em $\mathbb{L}$ e $Y \subseteq \mathbb{L}$ tal que $Y = \phi(Y)$.*

*Um par (D, δ) é ϕ-*aceitável a *Y se valem:*

(a) *$D \subseteq Y$, δ é uma ona parcial definida em D de abertos convexos tal que $x \in \delta(x) \subseteq \phi(x)$ para todo $x \in D$.*

(b) *Para cada $x \in D$, $N(x) = \{z \in D : \delta(x) \cap \delta(z) \neq \emptyset\}$ tem no máximo dois elementos.*

(c) *Para cada $x \in Y$, se $\phi(x) \cap \delta(D) \neq \emptyset$, então $x \in \delta(D)$.*

Lema 4.4.5.

1. *$\delta(D) \subseteq Y$ é um fechado e aberto.*
2. *$D \subseteq Y$ é fechado discreto.*

Demonstração. Temos que $\delta(D)$ é aberto, pois para cada $x \in D$, $\delta(x)$ é aberto. Notemos que $Y \setminus \delta(D) = \phi(Y \setminus \delta(D))$ e portanto $\delta(D)$ é fechado em Y.

Seja $x \in Y \setminus \delta(D)$, então $\phi(x) \cap D = \emptyset$. Se $x \in \delta(d)$ para $d \in D$, $\delta(d) \cap D \subseteq N(d)$ que é finito. Como $\mathbb{L}$ é Hausdorff, existe V vizinhança aberta de x tal que $x \in V \subseteq \delta(d)$ e $V \cap N(d) = \emptyset$. Portanto D de fato não tem ponto de acumulação em Y. □

Lema 4.4.6. *Seja ϕ uma ona de abertos convexos em um espaço linearmente ordenado paracompacto $\mathbb{L}$. Seja $Y \subseteq \mathbb{L}$ aberto e fechado tal que $\phi(Y) = Y$. Para cada $p \in Y$ existe um par (D, δ) ϕ-aceitável a Y com $p \in D$.*

Demonstração. Construiremos nosso conjunto D em duas partes, uma crescente $B = D \cap {}^{\mapsto}p$ e uma decrescente $A = C \cap {}^{\leftarrow\!\mid}p$.

O conjunto B será a união de uma família $\{B(n) : n < \omega\}$ tal que $B(n) < B(n+1)$ para cada $n < \omega$ e $B(n)$ é finito ou a imagem de uma Q-sequência crescente. Além disso, se $y \in Y$ é tal que $B(n) < y$ e $\phi(y) \cap \phi(B(n)) \neq \emptyset$, então existe $x \in B(n+1)$ tal que $y \leq x$. Assim, estará garantido que B é fechado, discreto e se $y \in Y$ tal que $y > p$ e $\phi(y) \cap \phi(B)$, então $y \in \phi(B)$.

Definiremos por recursão uma sequência $\langle B(n) : n < \omega \rangle$ de conjuntos $B(n) \subseteq Y \cap {}^{\mapsto}p$ e β uma *ona* parcial de $B = \bigcup_{n<\omega} B(n)$ tal que

1. Para cada $x \in B(n)$, $\beta(x) \subseteq \phi(x)$ é um aberto convexo.
2. $B(0) = \{p\}$ e $\beta(p) = \phi(p)$.
3. Para cada $n < \omega$, $B(n) \subseteq Y$ é bem-ordenado, fechado e discreto.
4. Para cada $n < \omega$, $B(n) < B(n+1)$.
5. Se $x, y \in B$ e $x < y$, então $\beta(x) \subseteq {}^{\leftarrow\!\shortmid}y$ e $\beta(y) \subseteq {}^{\rightarrow}x$.
6. Se $x \in {}^{\mapsto}p \cap Y$ e $\phi(x) \cap \beta(B) \neq \emptyset$, então $x \in \beta(B)$.

Suponha que temos construídos $B(0), \ldots, B(n)$, satisfazendo as propriedades 3 e 4 e $B(0) = \{p\}$.

Se $B(n)$ tem máximo q_n, definimos $B'(n) = \phi(q_n)$. Caso contrário $B'(n) = B(n)$.

Definimos $B''(n) = \{t \in Y : t > B'(n) \wedge \phi(t) \cap B'(n) \neq \emptyset\}$

Se $B''(n) = \emptyset$, então definimos $B(m) = \emptyset$ para todo $m > n$.

Se $B''(n)$ tem elemento máximo b_n, definimos $B(n+1) = \{b_n\}$ que é um subconjunto fechado, discreto, bem-ordenado e que $B(n) < b_n$ pela definição de $B''(n)$.

Se $B''(n)$ tem supremo que não é máximo r_n, como Y é fechado, $r_n \in Y$, fixemos $e_n \in \phi(r_n) \cap B''(n)$ e $B(n+1) = \{e_n, r_n\}$ que satisfaz 3 e 4 com relação aos anteriores.

Se $B''(n) \neq \emptyset$ não tem supremo, então ele é cofinal em um gap. Consideremos então $\langle x_n(\alpha) : \alpha < \gamma_n \rangle$ uma Q-sequência cofinal nesse gap contida em $B''(n)$. Definimos $B(n+1) = \{x_n(\alpha) : \alpha < \gamma_n\}$, que será bem-ordenado, fechado e discreto, pois é uma Q-sequência cofinal no gap.

Portanto construímos a sequência de $B(n)$ que satisfaz 3 e 4.

Para $b \in B$, é fácil ver que por 3 e 4 teremos que ${}^{\leftarrow\!\shortmid}b \cap B \subseteq \mathbb{L}$ é fechado discreto. Assim se tomarmos $x \in B$, ou x é máximo de B ou ele tem sucessor direto em respeito a B. Nos dois casos podemos verificar que se definirmos $\beta'(x)$ a componente convexa de x em $\mathbb{L} \setminus (B \setminus \{b\})$, ele será aberto não vazio e $\beta(x) = \phi(x) \cap \beta'(x)$ é aberto convexo. Então está verificada a propriedade 1.

Notemos que como $B(0) = \{p\}$, por definição $B'(0) = \phi(p)$. Se $B(1) = \emptyset$, então $\beta'(p) = \mathbb{L}$ e $\beta(p) = \phi(p)$. Caso contrário, seja z seu mínimo, que está em $B''(0)$, logo $z > \phi(p)$ e portanto $\phi(p) \subseteq \beta'(p)$. Assim 2 vale.

Como $\beta'(x)$ é componente convexa de $\mathbb{L} \setminus (B \setminus \{x\})$, é trivial que a propriedade 5 vale.

Notemos que $\beta(B)$ é convexo em Y. Seja $x \in Y$ tal que existe $b \in B$ com $p \leq x \leq b$. Consideremos $b = \min(B \cap {}^{\rightarrow}x) \in B(n+1)$, então $x \in \beta'(b)$. É claro que $B(n) < x$. Se $b \in B''(n)$, então existe $b' \in B(n)$ tal que $b' \in \phi(b)$, que é convexo, logo $x \in \phi(b)$. Se $b \notin B''(n)$, então é o caso $B(n+1) = \{e_n, r_n\}$ e $b = r_n$ assim $e_n < x < r_n$ e $e_n \in \phi(r_n)$, que é convexo e portanto $x \in \phi(b)$. Logo $x \in \beta(B)$ se $x \in [p, b] \cap Y$ para algum $b \in B$.

Seja $x \in {}^{\mapsto}p \cap Y$ tal que $\phi(x) \cap \beta(B) \neq \emptyset$. Tomemos $b \in B$ o menor tal que $\phi(x) \cap \beta(b) \neq \emptyset$, e $n < \omega$ com $b \in B(n)$. Suponha que $B < x$. Se $B'(n) = B(n)$, então $B(n)$ não tem máximo e assim tomemos $z \in B(n) \cap {}^{\rightarrow}b$. Pela propriedade 5 existe $y \in \phi(x) \cap {}^{\leftarrow}z$, assim $z \in \phi(x)$. Logo $x \in B''(n)$ e portanto existe elemento de $B(n+1)$ maior que x, que contradiz a hipótese.

Se $B(n)$ tem máximo q_n, então como $b \leq q_n$, $\phi(x) \cap B'(n) \neq \emptyset$ e portanto $x \in B''(n)$ e novamente há alguém em $B(n+1)$ maior que x. Logo existe $z \in B$ tal que $x < z$ e portanto $x \in \beta(B)$. Vale portanto a propriedade 6.

Se considerarmos uma construção análoga para baixo obtemos (A, α) tal que $A \subseteq {}^{\leftarrow\!\rceil}p$ é fechado discreto e $\alpha(a) \subseteq \phi(a)$ para cada $a \in A$ é aberto convexo, se $x, y \in A$ e $x < y$ então $\alpha(x) \subseteq {}^{\leftarrow}y$ e $\alpha(y) \subseteq {}^{\rightarrow}(x)$ e se $x \in {}^{\leftarrow\!\rceil}p \cap Y$ e $\phi(x) \cap \alpha(A) \neq \emptyset$, então $x \in \alpha(A)$.

Portanto $(A \cup B, \alpha \cap \beta)$ é ϕ-aceitável a Y. □

Definição 4.4.7. *Seja ϕ ona convexa de um espaço linearmente ordenado paracompacto $\mathbb{L}$. Definimos a família dos pares ϕ-aceitáveis a X por:*

$$\mathcal{P}(\phi) = \{(E, \epsilon) : (E, \epsilon) \text{ é } \phi\text{-aceitável a } \mathbb{L}\}$$

Consideremos uma ordem parcial nessa família por:

$$(D, \delta) \prec (E, \epsilon) \leftrightarrow \delta \subsetneq \epsilon$$

Lema 4.4.8. *Para ϕ ona convexa de $\mathbb{L}$ espaço linearmente ordenado paracompacto, $\mathcal{P}(\phi)$ tem elemento $\prec$-maximal.*

Demonstração. Pelo resultado anterior $\mathcal{P}(\phi)$ não é vazio. Seja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\phi)$ uma $\prec$-cadeia. Definimos $E = \bigcup \operatorname{dom} \mathcal{C}$ e $\epsilon = \operatorname{im} \mathcal{C}$. Notemos que ϵ é uma *ona* parcial bem definida em E de abertos convexos que refina ϕ. Para todos $x, y, z \in E$, existe $(D, \delta) \in \mathcal{C}$ tal que $x, y, z \in D$. Então se $\epsilon(y)$ e $\epsilon(z)$ encontram $\epsilon(x)$, os três não podem ser distintos, logo $N(x)$ relativo a (E, ϵ) tem até dois elementos. Se $x \in \mathbb{L}$ e $d \in E$ tal que $\phi(x) \cap \epsilon(d) \neq \emptyset$, se tomarmos $d \in D$ tal que $(D, \delta) \in \mathcal{C}$, então $x \in \delta(D) \subseteq \epsilon(E)$. Portanto $(E, \epsilon) \in \mathcal{P}(\phi)$ e é cota superior de $\mathcal{C}$.

Pelo lema de Zorn, existe o maximal. □

Lema 4.4.9. *Para ϕ ona convexa de um espaço linearmente ordenado paracompacto $\mathbb{L}$, se (D, δ) é maximal de $\mathcal{P}(\phi)$, então $\delta(D) = \mathbb{L}$.*

Demonstração. Seja $(D, \delta) \in \mathcal{P}(\phi)$ tal que $\delta(D) \subsetneq \mathbb{L}$. Fixemos $p \in \mathbb{L} \setminus \delta(D)$ e apliquemos o lema 4.4.6 para conseguir (E, ϵ) ϕ-aceitável a $\mathbb{L} \setminus \delta(D)$ com $p \in E$. Notemos que $(D \cup E, \delta \cup \epsilon) \in \mathcal{P}(\phi)$ e portanto (D, δ) não é maximal. □

Demonstração. [Demonstração do Lema 4.4.3] Basta tomarmos (D, δ) um maximal de $\mathcal{P}(\phi)$. Como $\phi(D) \supseteq \delta(D) = \mathbb{L}$, D é núcleo de ϕ e como já vimos D é fechado discreto. □

Podemos na verdade generalizar esse teorema para

Teorema 4.4.10. *Seja $(X, \tau, <)$ espaço GO. São equivalentes*

(i) *(X, τ) é paracompacto;*

(ii) *(X, τ) é D-espaço;*

(iii) *(X, τ) é aD-espaço;*

(iv) *(X, τ) é um espaço linearmente D.*

De fato, para provar que ambos aD e linearmente D implicam a paracompacidade, o mesmo argumento para $S \subseteq \kappa$ vale. Se X é paracompacto, então X^* é paracompacto e por consequência é um D-espaço. Como X é subespaço fechado de X^*, X também é D-espaço.

4.4.2 Dualmente Discreto

Iremos provar que todo espaço linearmente ordenado é hereditariamente dualmente discreto. Esse teorema está provado no artigo Liang-Xue Peng, 2008. Iremos seguir de maneira independente para demonstrar a afirmação, mas há similaridades, pois ambos tem a mesma inspiração.

Então tem resposta positiva a pergunta:

Questão 4.4.11 (Alas *et al.*, 2008). *Todo espaço linearmente ordenado é dualmente discreto?*

Iremos verificar que se todo linearmente ordenado é dualmente discreto, então todo linearmente ordenado é hereditariamente dualmente discreto:

Lema 4.4.12. *Todo espaço GO é dualmente discreto se, e somente se, todo espaço linearmente ordenado é dualmente discreto.*

Demonstração. Notemos que todo espaço linearmente ordenado é um espaço GO, logo basta verificar que se todo espaço linearmente ordenado é dualmente discreto, então todo espaço GO também é.

Seja X um espaço GO, então ele é um subespaço fechado do espaço linearmente ordenado X^* como definido em 4.3.6. Pela propriedade 2.4.9, se X^+ é dualmente discreto, X também será. □

Definição 4.4.13. *Sejam $\mathbb{L}$ espaço linearmente ordenado, φ ona de abertos convexos de $\mathbb{L}$ e $F \subseteq \mathbb{L}$ fechado convexo tal que $F = \varphi(F)$. Chamamos um par (D, δ) de φ-conveniente em F se valem:*

- **(a)** *$D \subseteq F$, δ é uma ona parcial definida em D de abertos convexos tal que $d \in \delta(d) \subseteq \varphi(d)$ para todo $d \in D$.*
- **(b)** *Para cada $d \in D$, vale $\delta(d) \cap D = \{d\}$.*
- **(c)** *Para cada $x \in F$, se $\varphi(x) \cap D \neq \emptyset$, então $x \in \varphi(D)$.*
- **(d)** *$\varphi(D)$ é convexo.*

Pela definição é fácil verificar que se (D, δ) é par φ-conveniente, então D é discreto.

Lema 4.4.14. *Sejam $\mathbb{L}$ espaço linearmente ordenado, φ uma ona de abertos convexos e $F \subseteq \mathbb{L}$ como na definição de par conveniente. Para $p \in F$, existe um par (D, δ) φ-conveniente em F tal que $p \in D$.*

Demonstração. Iremos construir o conjunto D de maneira análoga ao construído em 4.4.6. Entretanto, ao tomar $B(n)$ ele será finito ou uma sequência crescente e discreta cofinal em um gap, no lugar de Q-sequência.

Definiremos $\langle B(n) : n \in \omega\rangle$ recursivamente, $B = \bigcup_{n<\omega} B(n)$ e β definido em B tal que

1. Para cada $x \in B(n)$, $\beta(x) \subseteq \varphi(x)$ aberto convexo.
2. $B(0) = \{p\}$ e $\beta(p) = \varphi(p)$.
3. Para cada $n < \omega$, $B(n) \subseteq Y$ é bem-ordenado discreto.
4. Para cada $n < \omega$, $B(n) < B(n+1)$.
5. Se $x, y \in B$ e $x < y$, então $\beta(x) \subseteq {}^{\leftarrow}y$ e $\beta(y) \subseteq {}^{\rightarrow}x$.
6. Se $x \in {}^{\mapsto}p \cap F$ e $\varphi(x) \cap B \neq \emptyset$, então $x \in \varphi(B)$.
7. $\varphi(B)$ é convexo.

Definimos $B(0) = \{p\}$.

Se $B(n)$ tem supremo $q_n \in X$, então $B'(n) = \varphi(q_n)$, caso contrário $B'(n) = \varphi(B(n))$. Chamemos então $B''(n) = \{t \in F | t > B'(n),\ \varphi(t) \cap B'(n) \neq \emptyset\}$. Agora para definir $B(n+1)$ separamos em casos:

- Se $B''(n) = \emptyset$, então $B(n+1) = \emptyset$.
- Se $B''(n)$ tem maximal b_{n+1}, temos $B(n+1) = \{b_{n+1}\}$ unitário
- Se $B''(n)$ tem supremo $r_{n+1} \notin B''(n)$ que é ponto de acumulação, então escolhemos $t_{n+1} \in \varphi(r_{n+1}) \cap B''(n)$ e definimos $B(n+1) = \{r_{n+1}, t_{n+1}\}$
- Caso contrário, existe $\langle t_\beta : \beta < \gamma_n\rangle$ γ_n-sequência estritamente crescente cofinal tal que $B(n+1) = \{t_\beta : \beta < \gamma_n\}$ é discreto e se tem supremo, ele não é ponto de acumulação.

Claramente as propriedades 3 e 4 estão sendo verificadas.

Tomando $B = \bigcup_{n\in\omega} B(n)$, para cada $b \in B$, seja $M(b) = \mathbb{L} \setminus (\overline{B} \setminus \{b\})$ uma vizinhança aberta de b. Assim $\beta'(b)$, a componente convexa de $M(b)$ entorno de b, é também aberta. Definimos então o aberto $\beta(b) = \varphi(b) \cap \beta'(b)$, que será convexo. Portanto as propriedades 1, 2 e 5 serão verificadas, pois $B(1) > \varphi(p)$.

A fim de verificar que $\varphi(B)$ é convexo, basta verificar que para cada $n < \omega$, $\varphi(B(n))$ é convexo e $\varphi(B(n)) \cap \varphi(B(n+1)) \neq \emptyset$. $\varphi(B(0)) = \varphi(p)$ é convexo. Se $B(n)$ é unitário, $\varphi(B(n))$ é convexo, e se $n > 0$ $b_n \in B''(n-1)$ e por definição $\varphi(b_n) \cap \varphi(B(n-1)) \neq \emptyset$.

Se $B(n) = \{t_n, r_n\}$, então pela definição de r_n e t_n, $t_n \in \varphi(r_n)$, portanto $\varphi(B(n))$ é convexo. Como $t_n \in B''(n-1)$, $\varphi(t_n) \cap \varphi(B(n-1)) \neq \emptyset$

Se $B(n)$ é infinito ao tomarmos $\mu < \lambda < \gamma_n$, pela definição de $B''(n-1)$, existe $x \in \varphi(t_n(\lambda))$ tal que $t < t_n(\mu) < t_n(\lambda)$, logo $t_n(\mu) \in \varphi(t_n(\lambda))$ e portanto $\varphi(B(n))$ é convexo. Como $t_n(0) \in B''(n-1)$, $\varphi(t_n(0)) \cap \varphi(B(n-1)) \neq \emptyset$. Logo vale a propriedade 7.

Como $p \in \varphi(B)$, sabemos que se $p \leq x \notin \varphi(B)$, então ele é maior que todos os elementos desse aberto. Se por absurdo $\varphi(x) \cap B(n) \neq \emptyset$ então por definição $x \in B''(n)$, e assim existe $b \in B(n+1)$ tal que $x \leq b$, que contradiz a hipótese. Logo se $x \in F \cap {}^{\mapsto}p$ tal que $\varphi(x) \cap B \neq \emptyset$, então $x \in \varphi(B)$. Ou seja, a propriedade 6 está verificada.

Definimos analogamente (A, α), mas com a ordem invertida, obtendo:

1. Para cada $n \in \omega$, temos que para todo $x \in A_{n+1}$, $y \in \varphi(A_n)$, $y > x$.
2. $\varphi(A)$ é convexa.
3. Se $x \in F$, $x < p$ tal que $\varphi(x) \cap A \neq \emptyset$, então $x \in \phi(A)$

Notemos então que de fato $(A \cup B, \alpha \cup \beta)$ é φ-conveniente para F, como queríamos. □

Lema 4.4.15. *Dado $\mathbb{L}$ um espaço linearmente ordenado e ϕ uma ona nele, existe um par (D, δ) ϕ-conveniente em $\mathbb{L}$ não vazio e maximal.*

Demonstração. Considerando $\mathcal{D} = \{(D, \delta) : (D, \delta)\ \phi\text{-conveniente em } \mathbb{L}\}$ com a ordem:

$(D, \delta) < \epsilon$ se, e só se, $\delta \subseteq \epsilon$.

Seja $\mathcal{C} = \{(D_s, \delta_s) : s \in S\}$ uma cadeia em $\mathcal{D}$. Definimos $D = \bigcup_{s\in S} D_s$ e $\delta = \bigcup_{s\in S} \delta_s$. A função δ está definida em D inteira de maneira que se $x_0, x_1, x_2 \in \delta(d) \cap D$ para algum $d \in D$ então existe $s \in S$ tal que $x_0, x_1, x_2, d \in D_s$ e $\delta(d) = \delta_s(d)$, logo $|\{x_0, x_1, x_2\}| \leq 2$, ou seja, $|\delta(d) \cap D \setminus \{d\}| \leq 2$. Se $x \in X$ tal que existe $d \in D \cap \phi(x)$, então existe $s \in S$ tal que $d \in D_s \cap \phi(x)$, logo $x \in \phi(D_s) \subseteq \phi(D)$.

Podemos então aplicar o lema de Zorn em $\mathcal{D}$, garantindo a existência de um par maximal. □

Lema 4.4.16. *Se um par (D, δ) ϕ-conveniente em $\mathbb{L}$ é maximal, então D é núcleo de ϕ.*

Demonstração. Por absurdo, suponha $\mathbb{L}\setminus\phi(D) \neq \emptyset$. Consideremos $F_0 = \{x \in \mathbb{L} : \forall z \in \phi(D)\ x < z\}$ e $F_1 = \{x \in \mathbb{L} : \forall z \in \phi(D)\ x > z\}$. Eles serão fechados e convexos, então sejam (E_0, ϵ_0), (E_1, ϵ_1) pares ϕ-convenientes a F_0 e F_1 respectivamente.

Seque que $\phi(E_i)\cap D = \emptyset = \phi(D)\cap E_i$ para $i = 0, 1$, logo $\delta(d)\cap(D\cup E_i) \subseteq D$ e $\epsilon(e)\cap(D\cup E) \subseteq E_i$ para cada $e \in E_i$ e $d \in D$. Os conjuntos $\phi(E_0)$ e $\phi(E_1)$ são convexos e temos que $e_0 < d < e_1$ para cada $e_0 \in E_0$, $d \in D$, $e_1 \in E_1$, então $\phi(E_0) \cap \phi(E_1) = \emptyset$

Se $z \in X$ tal que $\phi(z) \cap D \neq \emptyset$, temos que $z \in \phi(D)$. Se $\phi(z) \cap E_1 \neq \emptyset$ e não intersecta D, significa que $z \in F_1$, logo $z \in \phi(E_1)$. Como vale análogo para E_0, temos que $(E_0 \cup D \cup E_1, \epsilon_0 \cup \delta \cup \epsilon_1)$ é ϕ-conveniente a $\mathbb{L}$ maior que (D, δ) □

Segue então que:

Teorema 4.4.17. *Todo espaço linearmente ordenado é dualmente discreto.*

Demonstração. Se $\mathbb{L}$ é um espaço ordenado e ϕ é uma *ona* convexa em $\mathbb{L}$, existe um par (D, δ) ϕ-conveniente a $\mathbb{L}$ maximal, de maneira que D é núcleo discreto de ϕ. □

Teorema 4.4.18. *Todo espaço GO é dualmente discreto.*

Capítulo 5

Árvores

Nesse capítulo iremos estudar quando árvores com a topologia dos intervalos tem a propriedade D e outras apresentadas anteriormente. As primeiras duas seções são preliminares e notações sobre estruturas de árvores e a topologia que iremos considerar.

Para mais informações sobre a estrutura de árvores recomendamos verificar a seção sobre árvores do livro JECH, 2003 ou o artigo TODORCEVIC, 1984.

5.1 Noções Básicas

Iremos listar nossas definições e notações básicas, assim como alguns resultados preliminares.

Definição 5.1.1. *Seja $(P, \leq)$ uma ordem parcial. Um conjunto $A \subseteq P$ é* uma anticadeia *se para todos $x, y \in A$ distintos vale que $x \nleq y$ e $y \nleq x$.*

Um conjunto $A \subseteq P$ é uma cadeia *se para todos $x, y \in A$ vale que $x \leq y$ ou $y \leq x$*

Definição 5.1.2. *Uma ordem parcial $(T, \leq)$ é* uma árvore *se para cada $t \in T$ a sub-ordem induzida em $\overleftarrow{\,}t = \{s \in T : s \leq t\}$ é uma boa ordem.*

Definição 5.1.3. *Seja uma árvore $(T, \leq)$. Um subconjunto $A \subseteq T$ é* um ramo *se ele é uma cadeia maximal, ou seja, ele é uma cadeia e se $B \subseteq T$ é uma cadeia tal que $A \subseteq B$, então $A = B$.*

Definimos o conjunto dos ramos de T por $\mathcal{B}(T)$.

Notemos que toda cadeia de uma árvore é bem ordenada.

Definição 5.1.4. *Se $(A, <)$ é um conjunto bem-ordenado, o seu* tipo de ordem *será o ordinal* $\mathrm{ot}(A, <)$ *tal que existe um isomorfismo de ordem $h : (A, <) \longrightarrow \mathrm{ot}(A, <)$. Quando a ordem sobre A estiver implícita iremos escrever somente* $\mathrm{ot}(A)$.

Definição 5.1.5. *Seja $(T, \leq)$ uma árvore. Dado um ponto $t \in T$, definimos a sua* altura *como o ordinal* $\mathrm{ht}(t) = \mathrm{ot}(\overleftarrow{\,}t)$. *Para α ordinal, definimos o nível α de T como $T_\alpha = \{t \in T : \mathrm{ht}(t) = \alpha\}$.*

Definimos a altura da árvore *como* $\mathrm{ht}(T) = \min\{\alpha < |T|^+ : T_\alpha = \emptyset\}$.

Notemos que cada nível é uma anticadeia e $T_\alpha \cap T_\beta = \emptyset$ se $\alpha \neq \beta$.

Definição 5.1.6. *Seja $(T, \leq)$ uma árvore. Definimos o cardinal* $\mathrm{ac}(T) = \sup\{|A| : A \subseteq T \text{ é anticadeia.}\}$.

Definição 5.1.7. *Sejam $(T, \leq)$ uma árvore e $t \in T$. Definimos o conjunto de sucessores de t,* $\mathrm{Suc}(t)$*, como o conjunto dos minimais de $^{\rightarrow}t = \{s \in T : t < s\}$.*

Definição 5.1.8. *Uma árvore* tem limites únicos *se, e somente se, para dois $t, s \in T_\alpha$ distintos com α limite os conjuntos de antecessores são distintos, ou seja, existe $r < t$ tal que $r \nless s$.*

Definição 5.1.9. *Uma árvore $(T, \leq)$ é* bem-podada *se ela tem limites único e para cada $\alpha < \beta < \mathrm{ht}(T)$ e $x \in T_\alpha$ existe $y \in T_\beta$ tal que $x < y$.*

Definição 5.1.10. *Uma árvore $(T, \leq)$ é* de Baire*, se para toda família $\langle A_n : n < \omega \rangle$ onde $A_n \subseteq T$ é cofinal na árvore e fechado para cima, ou seja, $t \in A_n \longrightarrow {}^{\mapsto}t \subseteq A_n$ para cada $n < \omega$, vale que $\bigcap_{n<\omega} A_n \subseteq T$ é cofinal na árvore.*

Definição 5.1.11. *Uma árvore $(T, <)$ é especial se existe uma família de anticadeias $\{A_n : n < \omega\}$ de T tal que $T = \bigcup_{n<\omega} A_n$.*

Definição 5.1.12. *Dadas duas ordens parciais $(P, <)$ e $(Q, \prec)$, uma função $h : P \longrightarrow Q$ é uma imersão de ordens entre $(P, <)$ e $(Q, \prec)$ se vale que*

$$p < q \text{ implica que } h(p) \prec h(q).$$

Definição 5.1.13. *Sejam $(T, <)$ uma árvore e $\mathbb{L} = (L, \leq)$ uma ordem linear. A árvore T é $\mathbb{L}$-imersível se existe uma imersão de ordens $h : (T, <) \longrightarrow \mathbb{L}$*

Teorema 5.1.14 (Todorcevic, 1984)**.** *A árvore $(T, <)$ é especial se, e somente se, $(T, <)$ é $\mathbb{Q}$-imersível.*

5.2 Topologia do Intervalo

Iremos definir a topologia dos intervalos na árvore e mostrar alguns resultados relevantes ao nosso estudo delas. Seguiremos resultados que aparecem nos artigos Nyikos, 2011.

A topologia do intervalo em uma árvore é definida pela sub-base

$$\mathcal{B}(T) \cup \{^{\leftarrow}t : t \in T\} \cup \{^{\rightarrow}t : t \in T\}$$

De maneira equivalente podemos definir pela base:

$$\{\{t\} : t \in T_0\} \cup \{]s, t] : s < t\}$$

Notemos que essa topologia é sempre T_1, pois para $t, s \in T$ distintos se $s < t$, então $s \notin {}^{\rightarrow}s$ e $t \in {}^{\rightarrow}s$, além disso $t \notin {}^{\leftarrow}t$ e $s \in {}^{\leftarrow}t$, se eles são incomparáveis, então $s \notin {}^{\leftarrow\!\shortmid}t$ e $t \notin {}^{\leftarrow\!\shortmid}s$.

Proposição 5.2.1. *Seja uma árvore $(T, \leq)$ com a topologia dos intervalos. São equivalentes:*

(i) *T é um espaço de Hausdorff.*

(ii) *T tem limites únicos.*

(iii) *Todo ramo é um subconjunto fechado.*

Demonstração. Suponha que T não seja de limites únicos, ou seja, existem $t, s \in T_\alpha$ distintos com α ordinal limite tais que ${}^{\leftarrow}t = {}^{\leftarrow}s$. Sejam U, V vizinhanças abertas de t e s respectivamente, então existem $r, q < t, s$ tais que $]r, t] \subseteq U$ e $]q, s] \subseteq V$. Como t e s estão em nível limite, existe $p \in {}^{\leftarrow}t$ tal que $p > r, q$ e assim $p \in U \cap V$, logo T não pode ser de Hausdorff.

Suponha que T seja de limites únicos. Tomemos $t, s \in T$ distintos. Se $t < s$ então podemos considerar os abertos ${}^{\mapsfrom}t$ e ${}^{\rightarrow}t$. Se eles são incomparáveis e t é um elemento sucessor, então $\{t\}$ e ${}^{\mapsfrom}s$ são vizinhanças abertas e disjuntas deles. Se eles são incomparáveis e limites, então existe $r < t$ tal que $r \nleq s$, caso contrário existiria $x \leq s$ tal que ${}^{\leftarrow}x = {}^{\leftarrow}t$ e portanto $x = t$. Notemos que $]r, t]$ e ${}^{\mapsfrom}s$ são vizinhanças abertas e disjuntas.

Verificaremos que o ramo ser fechado é equivalente aos outros. Notemos que um ponto $t \in T$ é de acumulação de um ramo b se, e somente se, t é ponto limite e ${}^{\leftarrow}t \subseteq b$. Como b é uma cadeia maximal, existe $x = \min(b \setminus {}^{\leftarrow}t)$. Notemos que ${}^{\leftarrow}x = {}^{\leftarrow}t$. Logo se tem limites únicos, então $t = x \in b$.

Sejam $t, s \in T$ pontos limites tais que ${}^{\leftarrow}t = {}^{\leftarrow}s$. Seja $b \subseteq T$ um ramo tal que $t \in b$. Logo s é ponto de acumulação de b e se b é fechado, então $s \in b$. Como $t \nless s$ e $s \nless t$, vale que $t = s$. □

Iremos verificar alguns resultados que serão uteis no estudo a seguir, principalmente relativos aos subconjuntos fechados discreto nessa topologia.

O seguinte lema servirá para descrever como é um conjunto fechado e discreto na topologia dos intervalos de uma árvore:

Lema 5.2.2. *Sejam $(T, \leq)$ árvore e $D \subseteq T$. São equivalentes:*

(i) *D é fechado discreto na topologia dos intervalos;*

(ii) *Para cada $t \in T$, $\{d \in D : d \leq t\}$ é finito;*

(iii) *Para cada ramo $b \subseteq T$ o conjunto $b \cap D$ ou é finito ou ele é uma ω-sequência cofinal no ramo.*

Demonstração. **((i)⟶(ii))** Suponha que exista $t \in T$ com $D_t = \{d \in D : d \leq t\}$ infinito. Então temos que D_t é uma cadeia em T com tipo de ordem $\gamma = \mathrm{ot}(D_t) \geq \omega$ e tomamos o isomorfismo de ordem $D_t = \langle d_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$. Portanto o conjunto $C = \{z \leq t : z \geq d_n$ para todo $n < \omega\}$ não é vazio e tem elemento mínimo p.

Para todo $z < p$, $z \leq t$ e $z \notin C$ logo existe $n < \omega$ tal que $z < d_n \leq p$, ou seja, p é ponto de acumulação de C. Em particular, p é ponto de acumulação de D.

((ii)⟶(i)) Supondo que D é tal que para todo $t \in T$ D_t é finito, basta notar que toda árvore é T_1 e que ${}^{\mapsfrom}t$ é aberto. Logo D é localmente finito.

((ii)⟶(iii)) Se $b \in \mathcal{B}(T)$ com $b \cap D$ infinito, então tem que ser cofinal, caso contrário, existe $t \in b$ tal que $b \cap D \subseteq \overleftarrow{t} \cap D$. Seja $\alpha = \mathrm{ot}(b \cap D)$, e $\langle d_\beta : \beta < \alpha \rangle$ isomorfismo com $b \cap D$. Para cada $\beta < \alpha$, temos $\overleftarrow{t_\beta} \cap D$ finito, e portanto β é finito, logo $\alpha \leq \omega$.

((iii)⟶(ii)) Seja $t \in T$ e fixe $b \in \mathcal{B}_t(T)$. Se $D \cap b$ finito, então $\overleftarrow{t} \cap D$ também será. Caso contrário, $D \cap b = \langle d_n : n < \omega \rangle$ é estritamente crescente e cofinal em b, logo existe $n < \omega$ tal que $t < d_n$. Portanto $\overleftarrow{t} \cap D \subseteq \{d_m : m \leq n\}$ é finito. □

Corolário 5.2.3. *Seja uma árvore $(T, \leq)$ com a topologia dos intervalos. Se $D \subseteq T$ é um fechado e discreto, então* $\mathrm{ht}(D) \leq \omega$ *como subárvore.*

Lema 5.2.4. *Seja $(T, \leq)$ uma árvore onde existe uma anticadeia infinita. Considerando a topologia dos intervalos, vale a igualdade $e(T) = ac(T)$.*

Demonstração. É fácil ver que toda anticadeia é também um fechado discreto na topologia, assim segue que $ac(T) \leq e(T)$. Se todo fechado discreto é enumerável, então T é *ccc*, completando a igualdade.

Caso contrário, suponha $D \subseteq T$ um subconjunto fechado discreto de cardinalidade $\kappa > \aleph_0$ regular, e consideremos D como subárvore. Então pelo lema 5.2.2 temos que $\mathrm{ht}(D) \leq \omega$ e portanto existe $n < \omega$ com $|D_n| = \kappa$ e D_n é anticadeia.

Pelo lema 1.2.16 verificamos que $e(T) \leq ac(T)$. □

Notemos que $\{\overleftarrow{t} : t \in T\}$ é uma *ona* da árvore $(T, \leq)$ e $D \subseteq T$ é núcleo dela se, e somente se, para todo $t \in T$ existe $d \in D$ tal que $t \leq d$. Assim verifiquemos o seguinte resultado para a existência de um núcleo fechado discreto dela:

Lema 5.2.5 (Nyikos, 2011)**.** *Seja $(T, \leq)$ com a topologia do intervalo. Existe $D \subseteq T$ fechado discreto cofinal na árvore se, e somente se, existe $A \subseteq T$ cofinal na árvore que é a união enumerável de anticadeias.*

Demonstração. Analogamente ao resultado anterior, se D for fechado discreto, teremos $\mathrm{ht}(D) \leq \omega$, assim D já é a união de enumeráveis anticadeias.

Agora assumindo $A = \bigcup_{n<\omega} A_n$ um conjunto cofinal na árvore de T, onde cada A_n é anticadeia, definimos recursivamente $\langle D_n : n \in \omega \rangle$ por $D_0 = A_0$. Se para cada $m < n$ já tivermos definido D_m, então defina

$$D_n = \{d \in A_n : \forall t \in \bigcup_{j=0}^{n} D_j (d \nleq t)\}.$$

Mostraremos que $D = \bigcup D_n$ é um fechado discreto e cofinal na árvore. Seja $t \in T$, fixemos $n < \omega$ o menor tal que existe $a \in A_n$ com $t \leq a$. Então não existe $m < n$ com $b \in A_m$ e $a \leq b$, logo $a \in D_n$. Portanto $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$ é cofinal na árvore.

Dado os mesmos t, n e a é fácil ver que

$$\overleftarrow{t} \cap D \subseteq \overleftarrow{a} \cap D \subseteq \bigcup_{j \leq n} D_j.$$

Como cada D_j é anticadeia e $\overleftarrow{t}$ é cadeia, essa interseção é finita, completando que D é fechado discreto. □

Teorema 5.2.6 (Nyikos, 2011). *Se T é bem podada de altura ω_1, então T é de Baire se, e somente se, não existe $t \in T$ tal que $^{\mapsto}t$ como sub-árvore admite uma família enumerável de anticadeias cuja união é cofinal na árvore.*

Demonstração. Suponha que T é de Baire. Iremos verificar que dados $t \in T$ e $\{A_n : n < \omega\}$ família de anticadeias em $^{\mapsto}t$ a união $\bigcup_{n<\omega} A_n$ não é cofinal na árvore $^{\mapsto}t$.

Para cada $n < \omega$ usaremos A_n para definir um conjunto cofinal na árvore e fechado para cima:

$$V_n = \bigcup \{^{\mapsto}s : s \in T,\ \forall a \in A_n (s \nleq a)\}.$$

Segue da definição que V_n é fechado para cima. Se $x \in T$ e não existe $a \in A_n$ tal que $x \leq a$, então por definição $x \in V_n$. Se $x \in T$ e existe $a \in A_n$ tal que $x \leq a$, então como a árvore tem altura ω_1 e é bem podada, existe $y \in T$ tal que $a < y$. Não existe elemento de A_n maior que y, pois A_n é anticadeia, logo $x < y \in V_n$.

Pela definição de árvore de Baire a interseção $V = \bigcap_{n<\omega} V_n$ é cofinal na árvore. Portanto tomemos $s \in V \cap {}^{\mapsto}t$. Assim $\bigcup_{n<\omega} A_n \cap {}^{\mapsto}s = \emptyset$, que verifica que a união não é cofinal na árvore $^{\mapsto}t$.

Para verificar a outra implicação, suponha que ela não seja de Baire. Ou seja, tomemos $\{V_n : n < \omega\}$ família de cofinais em T fechado para cima tal que $\bigcap_{n<\omega} V_n$ não é cofinal na árvore T.

Seja $t \in T$ tal que $^{\mapsto}t \cap \bigcap_{n<\omega} V_n = \emptyset$. Para cada $n < \omega$, consideremos a anticadeia A_n dos elementos minimais de $V_n \cap {}^{\mapsto}t$. Verificaremos que $\bigcup_{n<\omega} A_n$ é cofinal na árvore $^{\mapsto}t$.

Sendo $s \in {}^{\mapsto}t$, fixemos $n < \omega$ tal que $s \notin V_n$. Como V_n é cofinal na árvore, existe $x \in V_n \cap {}^{\mapsto}s$. Seja a o elemento minimal de V_n que está abaixo de x. Notemos que $a \nleq s$, pois $s \notin V_n$. Assim $s < a \in A_n$.

Portanto $\bigcup_{n<\omega} A_n$ é cofinal na árvore $^{\mapsto}t$. □

Lema 5.2.7. *Suponha $(T, <)$ uma árvore com topologia do intervalo, $A \subseteq T$ e $t \in T$. Então t é ponto de acumulação de A se, e somente se, existe α-sequência crescente cofinal em $^{\leftarrow}t$ contida em A, onde $\alpha = \mathrm{cf}(\mathrm{ot}(^{\leftarrow}t))$.*

Demonstração. Se t não é ponto de acumulação de A, então existe $s < t$ tal que $]s, t[\cap A = \emptyset$. Assim todo α-sequência cofinal em $^{\leftarrow}t$ eventualmente está contida em $]s, t]$ e fora de A.

Suponha que existe uma α-sequência $\langle x_\beta : \beta < \alpha \rangle$ crescente e cofinal em $^{\leftarrow}t$ contida em A. Para todo $s < t$, existe $\beta < \alpha$ tal que $s < x_\beta < t$. Em particular, $A \cap]s, t[\neq \emptyset$. □

Teorema 5.2.8 (Nyikos, 2011). *Seja T árvore. Exatamente uma das seguintes afirmações vale:*

1. *T tem ramo não enumerável ou existe sub-árvore de Suslin*
2. *Todo subconjunto não enumerável de T tem anticadeia de mesma cardinalidade.*

Demonstração. Suponha que todo ramo de T é enumerável e não tem sub-árvore de Suslin e consideremos $S \subseteq T$ de cardinalidade $\kappa > \aleph_0$. Provaremos que existe uma anticadeia $A \subseteq S$ tal que $|A| = \kappa$. Para isso, separemos em quatro casos, a depender do valor de κ.

- **$\kappa = \aleph_1$:** S é uma árvore de cardinalidade $\aleph_1$ de ramos todos enumeráveis, logo S é de Suslin se, e somente se, ela é *ccc*. Por hipótese, existe anticadeia não enumerável.

- **cf**$(\kappa) > \omega_1$**:** Como S tem ramos todos enumeráveis, então $\mathrm{ht}(S) \leq \omega_1$. Portanto, pela cofinalidade de κ e como $S = \bigcup_{\alpha<\omega_1} S_\alpha$, existe $\alpha < \omega_1$ com $|S_\alpha| = \kappa$, e S_α é anticadeia.
- **cf**$(\kappa) = \omega$**:** Fixe sequência de cardinais regulares estritamente crescente $\langle \rho_n : n < \omega \rangle$ com $\sup_{n<\omega} \rho_n = \kappa$, assumindo que $\rho_0 > \aleph_1$. Definindo para cada $s \in T$ o conjunto $V_s(S) = {}^{\mapsto}s \cap S$ e $X = \{s \in T : |V_s(S)| < \kappa\}$. Iremos analisar em três casos.
  Suponha $|X| = \kappa$ e $\sup\{|V_s(S)| : s \in X\} < \kappa$. Tomemos A o conjunto dos minimais de X, então $X \subseteq \bigcup_{s\in A} V_s(S)$. Logo $|A| = \kappa$ e A é anticadeia.
  Se $|X| = \kappa$ e $\sup\{|V_s(S)| : s \in X\} = \kappa$, então tomando M o conjunto dos minimais de X temos que $\sup\{|V_s(S)| : s \in X\} = \sup\{|V_s(S)| : s \in M\}$. Assim podemos pegar um conjunto $\{t_n : n < \omega\} \subseteq M$, tal que $\rho_n < |V_{t_n}(S)| < \kappa$ para cada $n < \omega$ e $t_n = t_m$ só se $n = m$. Para cada $n < \omega$, pelo segundo caso, podemos fixar $A_n \subseteq V_{t_n}(S)$ anticadeia de cardinalidade ρ_n. $A = \bigcup_{n<\omega} A_n$ é anticadeia de cardinalidade κ.
  Se $|X| < \kappa$, então $|S \setminus X| = \kappa$. Como $\mathrm{ht}(S) \leq \omega_1$, fixemos θ o menor ordinal tal que $M = S_\theta \setminus X$ é infinito. Tomemos $\{t_n : n < \omega\} \subseteq M$ com $t_n = t_m$ só se $n = m$. Então $\rho_n < |V_{t_n}(S)| = \kappa$ para cada $n < \omega$. De maneira análoga ao anterior tomamos $A_n \subseteq V_{t_n}(S)$ anticadeia de cardinalidade ρ_n, e $\bigcup_{n<\omega} A_n$ é anticadeia de cardinalidade κ.
- **cf**$(\kappa) = \omega_1$**:** Será análogo ao caso anterior. Tomemos $\langle \rho_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$, X e $V_s(S)$ como no caso anterior.
  Para o caso $|X| = \kappa$ e $\sup\{|V_s(S)| : s \in X\} < \kappa$ vale exatamente o mesmo argumento. Tanto no caso $\sup\{|V_s(S)| : s \in X\} = \kappa$ como em que $|X| = \kappa$, podemos repetir o argumento, mas tomando $\{t_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq M$ com $\rho_\alpha < |V_{t_\alpha}(S)|$ e definir as A_α para $\alpha < \omega_1$.

O fato dos dois não poderem ocorrer simultaneamente é verificado pois se (1) vale então existe um subconjunto *ccc* de cardinalidade $\aleph_1$. Se T tem ramo não enumerável, então ele tem uma cadeia de cardinalidade $\aleph_1$, que claramente não admite anticadeia não enumerável. Se $S \subseteq T$ é subárvore de Suslin, então $|S| = \aleph_1$ e S é *ccc*, ou seja, não admite anticadeia não enumerável. □

5.3 Propriedade D

O teorema 1.3.4 inspirou a seguinte pergunta proposta por Buzyakova:

Questão 5.3.1 (Raushan Z. Buzyakova, 2004)**.** *Se X é um espaço tal que para todo subespaço $Y \subseteq X$ vale $e(Y) = \ell(Y)$, então X é (hereditariamente) D-espaço?*

Em 2011, Nyikos provou a negativa dessa questão (Nyikos, 2011) mostrando um contra-exemplo com a topologia dos intervalos em uma árvore específica. Nesse artigo, também foram levantadas questões sobre possíveis caracterizações da propriedade D em árvores. Iremos fazer a construção da árvore descrita no artigo, assim como a prova de suas propriedades. Depois, abordaremos questões sobre árvores e propriedades tipo D.

Definição 5.3.2. *Uma árvore é* completa por ramos *se todo ramo dela tem elemento máximo.*

Proposição 5.3.3. *Se a árvore é completa por ramos, então ela é um D-espaço.*

Demonstração. Basta notar que se ela é completa por ramos, então a ordem inversa $<^{-1}$ verifica que ela é GLS. Segue então de 1.5.8 que ela é um D-espaço. □

Como vimos no lema 5.2.5, a existência de determinados subconjuntos fechados discretos implica em outras propriedades da árvore, por exemplo:

Proposição 5.3.4. *Se T é um D-espaço, então existe uma família enumerável de anticadeias cuja união é cofinal na árvore*

Demonstração. Segue como corolário do lema 5.2.5 com o fato que $\{\overleftarrow{t} : t \in T\}$ é uma *ona* da árvore. □

Considerando ainda a mesma *ona*, teremos como corolário de 5.2.1 que

Proposição 5.3.5. *Seja $(T, \leq)$ uma árvore com limites únicos e consideremos a topologia dos intervalos. Se T é um D-espaço, então todo ramo dele ou é limitado ou tem cofinalidade enumerável.*

No entanto, o exemplo de Nyikos verificará que existe uma árvore com limites únicos e ramos todos de enumeráveis que não é um D-espaço.

5.3.1 Exemplo de Nyikos

Nessa seção mostraremos o espaço e suas propriedades como feito originalmente por Nykos (Nyikos, 2011).

Definição 5.3.6. *Seja $E \subseteq \omega_1$ um estacionário co-estacionário. Definimos sua árvore de fechados pelo conjunto $T(E) = \{C \subseteq E : C \subseteq \omega_1 \text{ é fechado}\}$ com a ordem $C_0 \leq C_1$ se, e somente se existe $\alpha < \omega_1$ com $C_0 = C_1 \cap \alpha$.*

Afirmação 5.3.7. *$(T(E), <)$ é uma árvore*

Demonstração. **É de fato uma ordem:** Se $C \in T(E)$ notemos que como E é co-estacionário, C é limitado, então $C = C \cap (\sup C + 1)$ e $C \leq C$. Se $C_0, C_1, C_2 \in T(E)$ com $C_0 = C_1 \cap \alpha$, $C_1 = C_2 \cap \beta$ com $\alpha, \beta < \omega_1$, $C_0 = C_2 \cap \min\{\alpha, \beta\}$. Se $C_0 = C_1 \cap \alpha$ e $C_1 = C_0 \cap \beta$, então $\sup C_0 < \min\{\alpha, \beta\}$ e assim $C_0 = C_1$.

É um árvore: Iremos provar que todo $\mathcal{A} \subseteq \overleftarrow{C}$ para $C \in T(E)$ tem elemento mínimo. Para cada $A \in \mathcal{A}$ fixamos $\alpha_A < \omega_1$ com $A = C \cap \alpha_A$. Tomemos $\alpha = \min_{A \in \mathcal{A}} \alpha_a$, temos que $A_0 = C \cap \alpha \in \mathcal{A}$ é menor que todos os outros elementos de $\mathcal{A}$. Portanto $\overleftarrow{C}$ é bem ordenado. □

Afirmação 5.3.8. *Para $C \in T(E)$ e $b \in \mathcal{B}(T(E))$ temos as seguintes igualdades:*
$\overleftarrow{C} = \{C \cap (\alpha + 1) : \alpha < \max C\}$ *e* $b = \{\bigcup b \cap \alpha + 1 : \alpha < \sup \bigcup b\}$

Demonstração. Seja $F < C$, então $\max F < \max C$ e $F = C \cap (\max F + 1)$. Agora para $\alpha < \max C$, basta provar que $C \cap (\alpha + 1) \in T(E)$. Como $C \subseteq E$, temos direto que $C \cap (\alpha + 1) \subseteq E$, e como C e $\alpha + 1$ são fechados, então $C \cap (\alpha + 1)$ é fechado, de onde segue a segunda igualdade. □

Afirmação 5.3.9. $T(E)_0 = \{\emptyset\}$

Demonstração. Notemos que $\emptyset \subseteq E$ é fechado, logo $\emptyset \in T(E)$ e para $C \in T(E)$ temos que $\emptyset = C \cap 0$. Portanto ele é elemento mínimo de $T(E)$. □

Afirmação 5.3.10. *Para* $C_0, C_1 \in T(E)$, $C_1 \in \mathrm{Suc}(C_0)$ *se, e somente se, existe* $C_1 = C_0 \cup \{\alpha\}$ *para* $\max C_0 < \alpha < \omega_1$.

Demonstração. Suponha que não existe $\alpha > \max C_0$ tal que $C_1 = C_0 \cup \{\alpha\}$. Se $C_0 \not\subseteq C_1$ ou se existe $\alpha \in C_1 \cap (\max C_0 + 1) \setminus C_0$ ou se $C_0 = C_1$, então $C_0 \nless C_1$ e portanto $C_1 \notin \mathrm{Suc}(C_0)$. A única alternativa é que de fato $C_0 < C_1$ e existem $|C_1 \setminus \max C_0| > 1$, mas então se tomarmos $\alpha = \min C_1 \setminus \max C_0$, teremos $C_0 < C_0 \cup \{\alpha\} < C_1$ e assim $C_1 \notin \mathrm{Suc}(C_0)$.

Se $C_1 = C_0 \cup \{\alpha\}$ com $\alpha > \max C_0$, então é trivial que $C_0 < C_1$ e se $C \leq C_1$, ou $C \leq C_0$ ou $C = C_1$. □

Afirmação 5.3.11. *Para* $C \in T(E)$, $\mathrm{ht}(C)$ *é limite se, e somente se* $C = \bigcup^{\leftarrow} C \cup \{\sup(\bigcup^{\leftarrow} C)\}$.

Demonstração. Notemos que $F = \bigcup^{\leftarrow} C \cup \{\sup(\bigcup^{\leftarrow} C)\} \subseteq C$ sempre. Além disso, $C \setminus F \subseteq \{\max C\}$, logo $C \neq F$ se, e só se, $C \in \mathrm{Suc}(F)$. □

Afirmação 5.3.12. *Para* $C \in T(E)$, $\mathrm{ht}(C) = \mathrm{ot}(C)$ *se é finito, caso contrário* $\mathrm{ht}(C) + 1 = \mathrm{ot}(C)$.

Demonstração. Como $<$ é uma relação bem-fundada, provaremos por indução nela essa afirmação. Notemos que $\mathrm{ht}(\emptyset) = 0 = \mathrm{ot}(\emptyset)$. Pelas afirmações anteriores temos que se $C_1 \in \mathrm{Suc}(C_0)$, então $\mathrm{ot}(C_1) = \mathrm{ot}(C_0) + 1 = (\mathrm{ht}(C_0) + 1) + j$ $j \in \{0, 1\}$ dependendo se é finito ou infinito e como é sucessor $\mathrm{ht}(C_1) = \mathrm{ht}(C_0) + 1$. Logo $\mathrm{ht}(C_1) + j = \mathrm{ot}(C_1)$ como queríamos.

Seja $C \in T(E)$ com $\mathrm{ht}(C)$ limite e para todo $F < C$, vale a afirmação. Como visto $C = \bigcup^{\leftarrow} C \cup \{\sup(\bigcup^{\leftarrow} C)\}$, podemos então verificar que $\mathrm{ot}(C) = \sup\{\mathrm{ot}(F) : F < C\} + 1 = \sup\{\mathrm{ht}(F) + j_F : F < C\} + 1 = \mathrm{ht}(C) + 1$. □

Afirmação 5.3.13. *Todo ramo de* $T(E)$ *é ilimitado e enumerável.*

Demonstração. Como E é estacionário para $C \in T(E)$ exite $\alpha \in T(E) \setminus (\max C + 1)$, e assim $(C \cup \{\alpha\}) \in \mathrm{Suc}(C)$, ou seja, $T(E)$ não tem elementos maximais.

Seja $b \in \mathcal{B}(T(E))$, então $\bigcup b \subseteq E$ e seu único ponto de acumulação possível fora dele é $\sup \bigcup b$. Logo se b não fosse enumerável $\bigcup b \subseteq \omega_1$ seria um fechado ilimitado, mas E é co-estacionário. □

Portanto a altura de $T(E)$ é no máximo ω_1. A próxima afirmação provará simultaneamente que a altura é de fato ω_1 e que a árvore é bem podada.

Afirmação 5.3.14. *Para* $\alpha, \gamma < \omega_1$, *existe* $x \subseteq E \setminus \gamma$ *fechado em* ω_1 *com tipo de ordem igual a* $\alpha + 1$.

Assumindo essa afirmação, temos que dado $t \in T(E)$ e $0 < \alpha < \omega_1$, tomamos x como dado na afirmação para $\gamma = \max t$. Então $t < t \cup x \in T(E)$ e $\mathrm{ot}(t \cup x) = \mathrm{ot}(t) + (\alpha + 1)$, logo encontramos uma extensão de t de altura $\mathrm{ot}(t) + \alpha$.

Demonstração. [Demonstração da afirmação 5.3.14] Faremos por indução em α. Para o caso $\alpha = 0$ é trivial. Se $\alpha = \beta + 1$, então tomemos um $y \subseteq E \setminus \gamma$ fechado em ω_1 com tipo de ordem igual a $\beta + 1$. Como E é ilimitado, existe $\lambda \in E \setminus y$. Assim o conjunto $x = y \cup \{\lambda\}$ é fechado e tem tipo de ordem $(\beta + 1) + 1 = \alpha + 1$.

Suponha que $\alpha < \omega_1$ é ordinal limite e que para todo $\beta < \alpha$ vale a afirmação. Consideremos uma sequência crescente cofinal em α, $\langle \alpha_n : n < \omega \rangle$. Iremos construir uma sequência $\langle x_n : n < \omega \rangle$ tal que $x_0 \subseteq E \setminus \gamma$ e para cada $n < \omega$ vale que $x_{n+1} \subseteq E \setminus (\max x_n)$ e x_n tem tipo de ordem $\alpha_n + 1$. No entanto, se simplesmente tomássemos a construção acima, então não estaria garantido que $\sup_{n<\omega} \max x_n \in E$. De maneira que podemos definir uma cadeia sem elemento supremo.

Portanto definimos um fechado ilimitado que irá permitir construir essa sequência sem correr esse risco. Seja

$$C = \{\beta < \omega_1 : \forall \delta < \alpha, \gamma < \beta \exists x \subseteq E \cap \beta \setminus \gamma (\mathrm{ot}(x) = \delta + 1,\ x \text{ é fechado})\}.$$

Verificaremos que $C \subseteq \omega_1$ é um fechado ilimitado. Fixe β é ponto de acumulação de C. Se $\delta < \alpha$ e $\gamma < \beta$, então existe $\lambda \in C$ tal que $\gamma < \lambda < \beta$. Logo existe $x \subseteq E \cap \lambda \setminus \alpha \subseteq E \cap \beta \setminus \alpha$ fechado tal que $\mathrm{ot}(x) = \delta + 1$, assim $\beta \in C$. Portanto C é fechado.

Seja $z < \omega_1$. Para cada $\delta < \alpha,\ \gamma < z$ fixemos $x(\delta, \gamma) \subseteq E \setminus \gamma$ fechado com $\mathrm{ot}(x(\delta, \gamma)) = \delta + 1$ (hipótese de indução). Definimos $\phi^0(z) = \sup\{\max x(\delta, \gamma) : \delta < \alpha, \gamma < z\} + 1 < \omega_1$ e recursivamente $\phi^{n+1}(z) = \phi^0(\phi^n(z))$ para cada $n < \omega$. Notemos que $\phi^{n+1}(z) > \phi^n(z)$. Tomemos $\beta = \sup_{n<\omega} \phi^n(z)$, se $\delta < \alpha$ e $\gamma < \beta$, então existe $n < \omega$ tal que $\gamma < \phi^n(z)$. Então pela definição de $\phi^{n+1}(z)$, temos que $\max x(\delta, \gamma) \le \phi^{n+1} < \beta$. Assim $x(\delta, \gamma) \subseteq E \cap \beta \setminus \gamma$ fechado com tipo de ordem $\delta + 1$, de onde segue que $\beta \in C$. Portanto C é ilimitado.

Então tomemos $\{\beta_n : n < \omega\} \in C \cap E \setminus \gamma$ tal que $\beta_n < \beta_{n+1}$ para cada $n < \omega$ e $\beta = \sup_{n<\omega} \beta_n \in E$. Fixe $x_0 \subseteq E \cap \beta_0 \setminus \gamma$ fechado e com tipo de ordem $\alpha_0 + 1$. Supondo definido x_n com $\sup x_n < \beta_n$, fixamos $x_{n+1} \subseteq E \cap \beta_{n+1} \setminus \beta_n$ fechado e com tipo de ordem igual a α_{n+1}.

Seja $x = \bigcup_{n<\omega} x_n \cup \{\beta\} \subseteq E \setminus \gamma$, com tipo de ordem $\sup_{n<\omega} \alpha_n = \alpha$. O conjunto x é fechado, pois para todo $n < \omega$ vale que $\beta_n < \max x_{n+1} < \beta_{n+1}$. □

Afirmação 5.3.15. *$T(E)$ é uma árvore de Baire.*

Demonstração. Seja $\langle V_n : n < \omega \rangle$ tal que $V_n \subseteq T(E)$ é cofinal na árove e fechado para cima, para cada $n < \omega$. Seja $t \in T(E)$. Queremos construir $t_n \in V_n$ para cada $n < \omega$ tal que $t < t_0$ e para cada $n < \omega$, $t_n < t_{n+1}$ e $\bigcup_{n<\omega} t_n \cup \{\sup \bigcup_{n<\omega} t_n\} \in T(E)$, que será elemento de $\bigcap_{n<\omega} V_n$ e maior que t.

Faremos a construção dessa sequência dentro de um submodelo elementar de $H(\aleph_2)$, onde controlamos esse sup. Seja $\mathcal{N} \prec H(\aleph_2)$ submodelo elementar tal que $E, t \in \mathcal{N}$, além disso, para cada $n < \omega$ $V_n \in \mathcal{N}$ e $\mathcal{N} \cap \omega_1 = \delta \in E$. Seja $\langle \delta_n : n < \omega \rangle$ uma sequência crescente cofinal em δ. Seja $t_0 \in V_0 \cap \mathcal{N}$ tal que $t < t_0$ e $\max t_0 > \delta_0$. Se temos t_n, definimos $t_{n+1} \in V_{n+1} \cap \mathcal{N}$ com $t_n < t_{n_1}$ e $\max t_{n+1} > \delta_{n+1}$. Assim $\sup \bigcup_{n<\omega} t_n = \delta \in E$ e $s = \bigcup_{n<\omega} t_n \cup \{\sup \bigcup_{n<\omega} t_n\} \in T(E)$, com $t < s \in \bigcap_{n<\omega} V_n$. □

Portanto usando a equivalência do Teorema 5.2.6 não existe conjunto cofinal na árvore que é a união enumerável de anticadeias. Portanto, pelo Lema 5.2.5 temos que:

Afirmação 5.3.16. *$T(E)$ não é D-espaço.*

Afirmação 5.3.17. *$T(E)$ não possui sub-árvore de Aronszajn.*

Demonstração. Seja $S \subseteq T(E)$ com cada nível (como sub-árvore) enumerável, queremos provar que $|S| \le \aleph_0$. Para $s \in S$ iremos usar $\mathrm{ht}_S(s)$ para nos referirmos à altura de s relativa a S e $\mathrm{ht}(s)$ para a referente a $T(E)$. É claro que $\mathrm{ht}_S(s) \le \mathrm{ht}(s)$.

Suponha por absurdo que $|S| = \aleph_1$. Definimos a função onde para cada $\xi < \omega_1$ $\alpha(\xi) = \min\{\eta < \omega_1 : \max s < \eta\ \forall s \in S_\xi\}$. Seja a ω_1-sequência definida recursivamente por

$\alpha_0 = 0$, $\alpha_{\nu+1} = \alpha(\alpha_\nu + 1)$ e $\alpha_\lambda = \sup_{\nu<\lambda} \alpha_\nu$ quando $\lambda < \omega_1$ é limite. Então $C = \{\alpha_\nu : \nu < \omega_1\}$ é fechado ilimitado em ω_1, pois a ω_1-sequência é estritamente crescente e o passo limite escolhe o supremo dos anteriores.

Como E é co-estacionário, tomemos $\nu < \omega_1$ ordinal limite tal que $\alpha_\nu \notin E$ e seja $s \in S_{\alpha_\nu}$. Então $\alpha_\nu \leq \max s$, pois $\mathrm{ot}(s) \geq \alpha_\nu + 1$. Pela definição α_ν é limite, então tomemos $\langle \gamma_n : n < \omega \rangle$ sequência crescente cofinal em ν, t_n a seção inicial de t com tipo de ordem $\alpha_{\gamma_n} + 1$.

Para cada $n < \omega$ temos que $\max t_n < \alpha_{\gamma_n+1} \leq \alpha_{\gamma_{n+1}}$. Então $\max t = \sup_{n<\omega} \max t_n \leq \sup_{n<\omega} \alpha_{\gamma_n} = \alpha_\nu$. Logo $\alpha_\nu \in t \subseteq E$, absurdo. □

Temos então como resultado dessa afirmação e o Teorema 5.2.8 que todo subconjunto tem anticadeia de mesma cardinalidade.

Afirmação 5.3.18. *Para cada $Y \subseteq T(E)$, vale que $e(Y) = \ell(Y)$*

5.3.2 Árvores $\mathbb{L}$-imersíveis

Se $(T, <)$ é uma árvore especial, então ela é a união enumerável de anticadeias, assim ela é a união enumerável de subespaços fechados discretos. Portanto toda árvore especial é um D-espaço, na verdade é fácil ver que ela será hereditariamente um D-espaço.

Em seu artigo Nyikos, 2011, Nyikos questiona se ser especial é necessário para hereditariamente D-espaço ou se $\mathbb{R}$-imersível implica D ou hereditariamente D-espaço. Caso implique, ele levanta se essa hipótese seria necessária para hereditariamente D-espaço.

Gamel responde essas perguntas em Gamel, 2011 e depois o resultado foi expandido em 2014 para uma maior classe de árvores no artigo Liang-Xiu Peng e Li, 2014. Iremos aqui apresentar os resultados principais.

Ao longo dessa seção, quando tomarmos $\mathbb{L}_0, \mathbb{L}_1$, duas ordens lineares, seu produto $\mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_1$ será com a ordem lexicográfica das duas ordens. Quando $\mathbb{L}$ é ordem linear e α um ordinal, a potência $\mathbb{L}^\alpha$ será com a ordem lexicográfica.

Teorema 5.3.19. *Toda árvore $\mathbb{R}$-imersível é hereditariamente D-espaço.*

Observação: Se T é uma árvore $\mathbb{L}$-imersível, então toda subárvore também será $\mathbb{L}$-imersível. Entretanto, não bastaria provar que toda árvore $\mathbb{L}$-imersível é D-espaço para verificar a hereditariedade, pois um subespaço de uma árvore não necessariamente tem a topologia dos intervalos dele como subárvore. Na verdade, temos que:

Lema 5.3.20. *Se T é uma árvore e $F \subseteq T$ é um fechado na topologia dos intervalos, então a topologia dos intervalos de F coincide com a sua topologia de subespaço.*

No lugar desse teorema, iremos verificar a seguinte propriedade, que é equivalente

Proposição 5.3.21. *Toda árvore $[0,1]$-imersível é hereditariamente um D-espaço.*

Demonstração. Sejam T uma árvore, $X \subseteq T$ um subespaço de T com a topologia dos intervalos, $\tilde{\phi}$ uma *ona* parcial de X em T de abertos básicos e $\tilde{f} : T \longrightarrow [0,1]$ imersão de ordem. Tomemos ϕ a *ona* de X induzida por $\tilde{\phi}$ e $f = \tilde{f}_{|X}$. Construiremos recursivamente a sequência de subconjunto de X $\langle D_n : n < \omega \rangle$ da seguinte maneira:

- D_0 é o conjunto dos elementos $x \in X$ tais que $x \notin \phi(X \setminus \{x\})$
- Tomando como construídos D_m para todo $m < n$, iremos construir por recursão D_n ponto a ponto até exaurir todas as boas opções. Para isso iremos considerar $(X, \prec)$ uma boa ordem e para cada $n < \omega,\ k < 2^n,\ b \in \mathcal{B}(T)$ a projeção no ramo do k-ésimo intervalo da partição de $[0,1]$ em 2^n intervalos de mesmo intervalo, que será

$$I(b,n,k) = f^{-1}\left[\left]\tfrac{k}{2^n}, \tfrac{k+1}{2^n}\right]\right]$$

  (Se $k = 0$, então na verdade será a pré-imagem de $[0, 2^{-n}]$).
  Para $\alpha < |X|^+$, supondo que definimos $d_\beta(n)$ para cada $\beta < \alpha$, definimos N_α o conjunto de pontos $x \in X$ tais que existem $k_0 < 2^n,\ b_0 \in \mathcal{B}(T)$ tais que valem
  1. $I(b_0, n, k_0) \neq \emptyset$
  2. $f(x) \geq \frac{k_0+1}{2^n}$
  3. $I(b_0, n, k_0) \subseteq \phi(x)$
  4. $I(b_0, n, k_0) \nsubseteq \bigcup_{m<n} \phi(D_m) \cup \bigcup_{\beta<\alpha} \phi(d_\beta(n))$

  Caso $N_\alpha = \emptyset$, completamos $D_n = \{d_\beta(n) : \beta < \alpha\}$ e chamamos $\alpha = \gamma_n$.
  Caso contrário, tomamos $d_\alpha(n) = \min_\prec N_\alpha$ e fixamos $I_\alpha(n) = I(b_\alpha(n), n, k_\alpha(n))$ um intervalo testemunha de $d_\alpha(n) \in N_\alpha$.

Definimos $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$

Vamos verificar que D é núcleo de ϕ. Seja $x \in X$. Se $x \in D_0$, então $x \in \phi(D)$ trivialmente. Caso contrário iremos separar em dois casos distintos dependendo de $f(x)$.

- Se existe um par n, k tal que $f(x) = \frac{k+1}{2^n}$, se $\tilde{\phi}(x) =]s, x]$, existe n', k' tal que $\tilde{f}(s) < \frac{k'}{2^{n'}}$ e $f(x) = \frac{k'+1}{2^{n'}}$, então $x \in I(b, n', k') \subseteq \phi(x)$.
  Notemos que pelas propriedades 1 a 4 da construção de D_n esse intervalo tem que ser coberto por $\phi(\bigcup_{m \leq n'} D_m)$, seja por um $d_\alpha(m)$ diferente de x, ou porque eventualmente $I(b, n', k')$ testemunha que $x \in N_\alpha$ e que ele é o menor. Portanto $x \in \phi(D)$.
- Caso $x \notin D_0$, fixemos $t \in X$ tal que $x \in \phi(t)$ e $x \prec t$, fixemos b ramo que contem os dois, e tomemos n, k tais que

$$\tfrac{k}{2^n} < f(x) \leq \tfrac{k+1}{2^n} < f(t)$$

  Neste caso $x \in I(b, n, k) \subseteq \phi(t)$, e por um argumento similar ao anterior podemos checar que $I(b, n, k) \subseteq \phi(D)$.

Vamos verificar agora que $D \subseteq X$ é fechado discreto.

Por absurdo suponha $t \in X$ ponto de acumulação de D. Como $\mathrm{ht}(t) < \omega_1$, isso equivale a supor que existe sequência crescente $\langle d_n : n < \omega \rangle \subseteq D$ tal que $\sup_{n<\omega} d_n = t$. Como D é núcleo de ϕ, fixemos $d \in D$ tal que $t \in \phi(d)$.

Podemos então supor que $d_n \in \phi(d)$ para todo $n < \omega$. Para cada $n < \omega$ consideremos $d_n = d_{\alpha_n}(m_n)$ da definição de D e $I_n = I_{\alpha_n}(m_n)$. Consideremos também $k < \omega$ tal que $d = d_\alpha(k) \in D_k$.

Podemos supor sem perda de generalidade, por meio de subsequências, que $\langle m_n : n < \omega \rangle$ é (não estritamente) crescente, e se $m_n = m_l$ para $n < l$, então $\alpha_n < \alpha_l$. Portanto, no caso de $n < l$, vale $I_l \nsubseteq \phi(d_n)$ Porém, notemos que, como I_l e I_n compartilham ramo e pela definição em termos de intervalos em $\mathbb{R}$, temos que se $I_l \cap I_n \neq \emptyset$, então $I_l \subseteq I_n$, que é um absurdo.

Logo $\{I_n : n < \omega\}$ é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos em um mesmo ramo.

Podemos então assumir que para todo $n < \omega$, $b_{\alpha_n}(m_n) = b$. Assim para cada nível $m_n = m$ temos no máximo 2^m intervalos distintos. Portanto podemos tomar por subsequência que $\langle m_n : n < \omega \rangle$ é de fato estritamente crescente, e que $\langle I_n : n < \omega \rangle$ é estritamente monotona.

Como b é bem ordenado e $I_n \neq \emptyset$, a sequência dos intervalos não pode ser estritamente decrescente, ou seja, é estritamente crescente. Assim $I_n \subseteq \phi(d)$ para todo $n < \omega$, mas então $m_n < k$ para todo $n < \omega$, o que contradiz que a sequência dos m_n é estritamente crescente.

Portanto, D não admite ponto de acumulação.

Construímos então um núcleo fechado discreto, logo X é um D-espaço como queríamos. □

Iremos agora mostrar alguns resultados que garantem que as potências finitas de $[0, 1]$ preservam o fato de ser D-espaço.

Lema 5.3.22. *Se $(T, <)$ é uma árvore $\mathbb{L}$-imersível com $\mathbb{L}$ ordem linear completa de Dedekind, então existe imersão contínua.*

Demonstração. Seja $f : T \longrightarrow \mathbb{L}$ uma imersão de ordem. Definimos a função $g : T \longrightarrow \mathbb{L}$ por

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & t \text{ é minimal ou sucessor} \\ \sup\{f(s) : s < t\}, & t \text{ é limite} \end{cases}.$$

Sejam $s, t \in T$ tais que $s < t$. Se t é sucessor direto de s, então $g(t) = f(t) > f(s) \leq g(s)$. Caso contrário, considerando $r < t$ e sucessor direto de s, então $g(t) \leq f(r) > f(s) \leq g(s)$. Logo g é uma imersão de ordens.

Sejam $t \in T$ ponto limite e $x, y \in \mathbb{L}$ tais que $x < g(t) < y$. Pela definição existe $s < t$ tal que $x < g(s) < g(t)$. Assim para todo $z \in T$ tal que $s < z \leq t$, temos que $x < f(z) < y$. Portanto g é contínua. □

Teorema 5.3.23. *Sejam $\mathbb{L}$ e $\mathbb{L}'$ ordens lineares tal que $\mathbb{L} \times \mathbb{L}'$ é completa de Dedekind. Se toda árvore $\mathbb{L}$-imersível ou $\mathbb{L}'$-imersível é D-espaço, então toda árvore $\mathbb{L} \times \mathbb{L}'$-imersível é D-espaço.*

Demonstração. Sejam $(T, <)$ árvore, $f : (T, <) \longrightarrow \mathbb{L} \times \mathbb{L}'$ contínua e ϕ uma *ona*. Iremos analisar em quatro casos distintos dependendo dos extremos de $\mathbb{L}'$, com o primeiro servindo de roteiro para os que seguem.

- **$\mathbb{L}'$ tem mínimo e máximo, $\perp$ e $\top$ respectivamente**.
  Defina $R_0 = f^{-1}[\mathbb{L} \times \{\perp\}]$. Suponha $t \in T$ ponto de acumulação de R_0, seja $\langle r_\alpha : \alpha < \mu \rangle \subseteq R_0$ estritamente crescente cofinal em t. Então $f(t) = \sup_{\alpha<\mu} f(r_\alpha) = (a, b)$, e $f(r_\alpha) = (a_\alpha, \perp)$. Note que para todo $\alpha < \mu$ temos $(a_\alpha, \perp) < (a, \perp)$ e portanto $(a, b) \leq (a, \perp)$. Por definição, $b = \perp$, assim $t \in R_0$. Logo R_0 é fechado.
  Como $f_{|R_0} : R_0 \longrightarrow \mathbb{L} \times \{\perp\} \cong \mathbb{L}$ é uma imersão, R_0 é um D-espaço.
  Defina $R_1 = \mathbb{L} \times \{\top\}$. Suponha $t \in T$ ponto de acumulação de R_1, então $F = R_1 \cap {}^{\leftarrow}t$, $t = \sup F$. Para cada $s \in F$ tomemos $f(s) = (a(s), \top)$. Então $a > a(s)$ para todo $s \in F$ e $(a, b) \leq (a, \perp)$. Portanto $t \in R_0$. Segue que R_1 é discreto.
  Logo $R = R_0 \cup R_1$ é um subespaço fechado que é D-espaço. Seja então $D_0 \subseteq R_0$ o núcleo fechado de ϕ em R. Para cada $r \in \mathbb{L}$, seja $R_r = f^{-1}[\{r\} \times \mathbb{L}'] \setminus \phi(D_0)$. Toda α-sequência crescente em $\{r\} \times \mathbb{L}'$ está no formato $\langle (r, b_\beta) : \beta < \alpha \rangle$ e para todo $\beta < \alpha$

$(r, b_\beta) \leq (r, \top)$, logo o supremo dessa sequência está em $\{r\} \times \mathbb{L}'$. Portanto pela continuidade de f, R_r é fechado.

Como a topologia dos intervalos de R_r coincide com a do subespaço e ele é $\mathbb{L}'$-imersível pela restrição de f, ele é D-espaço. Fixemos $D_r \subseteq R_r$ núcleo fechado discreto de ϕ em R_r. Temos que $D = D_0 \cup \bigcup_{\perp < r < \top} D_r \subseteq T$ é núcleo de ϕ. Fixando $x \in T$, se $x \in \phi(D_0)$, temos $\phi(D_0) \cap D = D_0$ que é fechado discreto, então existe $H \subseteq \phi(D_0)$ vizinhança aberta de x tal que $H \cap D \subseteq \{x\}$. Caso contrário, considerando $f(x) = (a, b)$ temos que $x \in R_a$ e $V = f^{-1}\left[\{a\} \times (\mathbb{L}' \setminus \{\perp, \top\})\right]$ é vizinhança aberta de x tal que $V \cap D = D_a$ fechado discreto, logo existe $H \subseteq T$ vizinhança aberta de x tal que $H \cap D \subseteq \{x\}$. Portanto D é fechado discreto.

- **$\mathbb{L}'$ não tem mínimo, mas tem máximo $\top$.**
  Segue a mesma argumentação mas com $R_0 = \emptyset$ e R_1.
- **$\mathbb{L}'$ não tem máximo, mas tem mínimo $\perp$.**
  Similar, mas com $R_1 = \emptyset$.
- **$\mathbb{L}'$ não tem máximo nem mínimo.**
  Similar, com $R_0 = R_1 = \emptyset$. Nesse caso notemos que T como espaço topológico é a soma dos R_r ($r \in \mathbb{L}$) que são D-espaços.

□

Esse resultado no entanto não garante que a árvore será hereditariamente D-espaço, pois para $X \subseteq T$ que não é fechado a sua topologia de subespaço e a sua topologia de subárvore não necessariamente coincidem, assim a imersão não garante que o subespaço $R_0 \cap X$ seja D-espaço.

Teremos então que recorrer a um resultado mais forte

Teorema 5.3.24. *Toda árvore* $[0,1]^\omega$*-imersível é hereditariamente D-espaço.*

Demonstração. [Esboço de Demonstração] A demonstração desse teorema se assemelha à demonstração feita para $[0,1]$-imersível com ajustes na partição. Iremos então explicar as diferenças e esboçar a ideia central.

A principal diferença das duas é que no caso $[0,1]$ usamos para particionar os ramos intervalos $]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$, que não temos de maneira direta na potência infinita. No lugar, iremos considerar para $n, m < \omega$ a família $\mathfrak{I}_{n,m}$ composta pelos intervalos no formato

$$](y_1, ..., y_m, \tfrac{k}{2^n}, 0, 0, ...), (y_1, ..., y_m, \tfrac{k+1}{2^n}, 0, 0, ...)],$$

para $(y_1, ..., y_m) \in [0,1]^m$ e $k < 2^n$ (no caso $k = 0$ consideramos o intervalo fechado). Ou seja, fixamos as m primeiras coordenadas e separamos a $m+1$-ésima coordenada na partição em 2^n partes.

Notemos que $\mathfrak{I}_{n,m}$ não é partição de $[0,1]^\omega$, pois a constante 1 não está em nenhum dos intervalos, mas é também o único ponto que não é coberto por algum $\mathfrak{I}_{n,m}$. Como $f(t)$ é a constante 1 somente se t é maximal, então ele será pego pela definição de D_0. Logo se cobrirmos os intervalos de $\mathfrak{I}_{n,m}$ em T, juntando D_0 teremos coberto a T inteira.

A recursão será construir os $D_m = \bigcup_{n<\omega} D_{m,n}$, onde $D_{m,n}$ é construído analogamente ao D_n do caso $[0,1]$, só que procurando os pontos para os quais existem $k_0 < 2^n$, $b_0 \in \mathcal{B}(T)$ e $y_0 = (y_1, ..., y_m) \in [0,1]^m$ tal que a pré-imagem em b_0 do intervalo de $\mathfrak{I}_{n,m}$ associado a k_0 e

y_0 satisfaz os itens 1 a 4. □

5.4 Outras Propriedades

Exploraremos aqui como as outras propriedades relacionadas a D interagem com árvores com a topologia dos intervalos.

O artigo Nyikos, 2011 cita que toda a árvore com a topologia dos intervalos é dualmente discreto, resultado que atribui a comunicações privadas entre Alan Dow e Roberto Prichardo Mendoza em 2009, no entanto não encontramos nenhuma demonstração publicada.

Vejamos que para árvores com a topologia dos intervalos, as propriedades D, aD e bD equivalem.

Lema 5.4.1. *Seja $(T, \leq)$ uma árvore. Se $D \subseteq T$ é um fechado discreto na topologia dos intervalos e $f : D \longrightarrow T$ é uma função tal que $d \leq f(d)$ para todo $d \in D$, então $f[D] \subseteq T$ é fechado discreto na topologia dos intervalos.*

Demonstração. Para cada $t \in T$, é claro que o conjunto

$$|\{f(d) : d \in D,\ f(d) \leq t\}| \leq |\{d \in D : d \leq t\}|$$

Logo se D é discreto, para cada $t \in T$ o conjunto $\{f(d) : d \in D,\ f(d) \leq t\}$ é finito, e portanto $f[D]$ é fechado discreto. □

Teorema 5.4.2. *Uma árvore tem a propriedade D se, e só se, ela tiver a propriedade bD*

Demonstração. Suponha que T tenha a propriedade bD. Seja uma *ona* básica ϕ, ou seja, $\phi(t) =]s(t), t]$ para t não minimal. Consideremos uma *ona* $\psi : T \longrightarrow \phi[T]$ com núcleo fechado discreto $D \subseteq T$. Para cada $d \in D$ fixemos $f(d) \in T$ tal que $\psi(d) = \phi(f(d))$. Como $d \in \phi(f(d))$, temos que $d \leq f(d)$, e pelo lema anterior $f[D]$ é fechado discreto e é claro que será núcleo de ϕ. □

Como toda árvore é T_1 segue de 2.1.6 que:

Corolário 5.4.3. *Uma árvore tem a propriedade D se, e somente se, ela como espaço topológico é um espaço irredutível*

Teorema 5.4.4. *Toda árvore com limites únicos de Lindelöf é σ-compacta*

Demonstração. Se considerarmos o recobrimento aberto $\{\overleftarrow{t} : t \in T\}$, a propriedade de Lindelöf implica que existe $A \subseteq T$ enumerável tal que $T = \bigcup_{t \in A} \overleftarrow{t}$. Como para cada $t \in T$, $\overleftarrow{t}$ é homeomorfo a um ordinal sucessor e portanto $\overleftarrow{t}$ é compacto. Logo T é a união de uma família enumerável de compactos. □

Por consequência de 1.2.5, temos que:

Corolário 5.4.5. *Toda árvore de Lindelöf é um D-espaço.*

Segue de 3.3.14 que:

Corolário 5.4.6. *Toda árvore fortemente D é σ-compacta*

Podemos caracterizar a propriedade linearmente D em árvores por

Teorema 5.4.7. *Para T árvore de Hausdorff são equivalentes*

(i) *T é linearmente D;*

(ii) *Todo ramo ilimitado de T tem cofinalidade enumerável e não admite subárvore de κ-Suslin onde todo ramo é ilimitado em T para κ cardinal regular não enumerável.*

Demonstração. Como todo ordinal ilimitado de cofinalidade não enumerável não é linearmente D e todo ramo é fechado, então se há um ramo ilimitado de cofinalidade não enumerável, T não é linearmente D. Uma árvore κ-Suslin tem cardinalidade κ, mas nenhum ramo nem anticadeia tem mesma a cardinalidade, logo ela não possui ponto de acumulação completo de si mesma, nem um fechado discreto de mesmo tamanho. Portanto não pode ser linearmente D. Se $S \subseteq T$ é uma subárvore κ-Suslin de T onde todo ramo é ilimitado em T, então $\overline{S} \subseteq T$ é também uma sub-árvore κ-Suslin. Logo se existe tal S, existe uma subárvore de κ-Suslin fechada em T, assim T não é linearmente D.

Agora supondo que **(ii)** vale para a árvore T, tomemos $X \subseteq T$ de cardinalidade regular não enumerável κ. Se, como subárvore, X tem ramo de cardinalidade κ, então existe $b \in \mathcal{B}(T)$ tal que $|b \cap X| = \kappa$. Como $b \cap X$ é bem ordenado, fixemos uma seção inicial dela $C \subseteq b \cap X$ com tipo de ordem κ. A seção inicial C não pode ser ilimitada em b, pois não tem cofinalidade enumerável. Logo existe $\sup C \in b$, que será ponto de acumulação completo de X.

Suponha que X não tem cadeia de cardinalidade κ. Se $\mathrm{ht}(X) < \kappa$, então pela regularidade de κ existe $\alpha < \mathrm{ht}(X)$ tal que $|X_\alpha| = \kappa$. Se $\mathrm{ht}(X) = \kappa$ e existe uma anticadeia $A \subseteq X$ de cardinalidade κ, então A é fechado discreto em T.

Se $\mathrm{ht}(X) = \kappa$ e toda anticadeia de X tem cardinalidade menor que κ, então X é uma sub-árvore de κ-Suslin. Logo $A = \overline{X} \setminus X$ é uma anticadeia de cardinalidade κ. Existe $\{a_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq A$ tal que $\mathrm{ht}(a_\alpha) < \mathrm{ht}(a_\beta)$ para todo $\alpha < \beta < \kappa$. Seja V um aberto que cobre A. Para cada $\alpha < \kappa$ fixemos $s_\alpha < a_\alpha$ tal que $]s_\alpha, a_\alpha] \subseteq V$. Tomemos para cada $\alpha < \kappa$ $x_\alpha \in X \cap]s_{\alpha+1}, x_\alpha]$ tal que $\mathrm{ht}(x_\alpha) > \mathrm{ht}(a_\alpha)$. Então $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq X \cap V$ tem cardinalidade κ.

Os três casos garantem por 2.2.8 que T é linearmente D. □

Corolário 5.4.8. *Seja T uma árvore com limites únicos. T é linearmente D se, e somente se, ele satisfaz a propriedade Δ_2 definido em 2.2.16.*

Demonstração. Considere uma árvore T que satisfaz Δ_2. Seja $b \in \mathcal{B}(T)$ um ramo ilimitado. Supondo por absurdo que sua cofinalidade não é enumerável, tomemos $\langle x_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(b)\rangle$ estritamente crescente e cofinal em b. Então $\{x_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(b)\}$ é um conjunto de cardinalidade regular não enumerável sem ponto de acumulação completo. Além disso, seu fecho está contido em b, onde todo fechado discreto é finito. Logo contradiz que T satisfaz Δ_2.

Supondo por absurdo que exista uma subárvore de κ-Suslin com todo ramo ilimitado em T, podemos assumir que existe uma subárvore fechada de κ-Suslin em T. Assim ela não terá ponto de acumulação completo e todo fechado discreto tem cardinalidade menor que κ. Logo contradiz que T satisfaz Δ_2. □

Proposição 5.4.9. *Se existe uma árvore de Suslin, então existe uma árvore de cardinalidade* $\aleph_1$ *que é um D-espaço, mas não satisfaz* Δ_1 *(2.2.16).*

Demonstração. Seja S uma árvore de Suslin. Considerando T a árvore $S \cup \mathcal{B}(S)$, onde $s < b$ para $s \in S$ se, e somente se, $s \in b$, temos que T é um D-espaço, pois ele é completo por ramos. O subconjunto $S \subseteq T$ não ponto de acumulação completo e seu extent é enumerável. □

Portanto o exemplo de Nyikos, que tem todos ramos enumeráveis e não admite subárvore de Aronszajn, é uma árvore de Hausdorff linearmente D (na verdade satisfaz Δ_1) que não é um D-espaço.

Referências

[Alas *et al.* 2008] Ofelia T. Alas, Lucia R. Junqueira e Richard G. Wilson. “Dually discrete spaces”. Em: *Topology and its Applications* 155 (2008), pgs. 1420–1425 (citado nas pgs. 13, 53, 89).

[Arhangel’skii 2004] Aleksander V. Arhangel’skii. “D-spaces and finite unions”. Em: *Proceedings of the American Mathematical Society* 132.7 (2004), pgs. 2163–2170 (citado na pg. 17).

[Arhangel’skii 2005] Aleksander V. Arhangel’skii. “D-spaces and covering properties”. Em: *Topology and its Applications* 146-147 (2005), pgs. 437–449 (citado nas pgs. 17, 31, 32, 35).

[Arhangel’skii e Raushan Z. Buzyakova 2002] Aleksander V. Arhangel’skii e Raushan Z. Buzyakova. “Addition theorems and D-spaces”. Em: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 43.4 (2002), pgs. 653–663 (citado nas pgs. 7, 35, 57, 72, 73).

[Aurichi 2009] Leandro F. Aurichi. “A influência dos subespaços discretos sobre os espaços topológicos”. Tese de dout. São Paulo, Brasil: Universidade de São Paulo, 2009 (citado nas pgs. 2, 27, 58, 59, 74).

[Aurichi 2011] Leandro F. Aurichi. “D-spaces, separation axioms and covering properties”. Em: *Houston Journal of Mathematics* 37.3 (2011), pgs. 1035–1042 (citado nas pgs. 51, 52, 68, 74).

[Balogh 1983] Zoltan Tibor Balogh. “Locally nice spaces under martin’s axiom”. Em: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 024.1 (1983), pgs. 63–87 (citado na pg. 47).

[Bing 1951] R. H. Bing. “Metrization of topological spaces”. Em: *Canadian Journal of Mathematics* 3 (1951), pgs. 175–186 (citado na pg. 67).

[Boone 1975] J. R. Boone. “On irreducible spaces”. Em: *Bull. Austrl. Math. Soc.* 12 (1975), pgs. 143–148 (citado na pg. 70).

[Borges e Wehrly 1991] Carlos R. Borges e Albert C. Wehrly. “A study of D-spaces”. Em: *Topology Proceedings* 16 (1991), pgs. 7–15 (citado nas pgs. 12, 31, 32, 67, 69, 71, 73).

[Burke 1984] Dennis K. Burke. “Chapter 9 - covering properties”. Em: *Handbook of Set-Theoretic Topology*. Ed. por Kenneth Kunen e Jerry E. Vaughan. Amsterdam: North-Holland, 1984, pgs. 347–422 (citado na pg. 70).

[Burke 2007] Dennis K. Burke. “Weak bases and D-spaces”. Em: *Comment. Math. Univ. Carolina* 48,2 (2007), pgs. 281–289 (citado nas pgs. 11, 60–63, 65).

[R. Z. Buzyakova *et al.* 2007] R. Z. Buzyakova, V. V. Tkachuk e R. G. Wilson. “A quest for nice kernels of neighbourhood assignments”. Em: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 48.4 (2007), pgs. 689–697 (citado na pg. 31).

[Raushan Z. Buzyakova 2004] Raushan Z. Buzyakova. “Hereditary D-spaces of function spaces over compacta”. Em: *Proceedings of the American Mathematical Society* 132.11 (2004), pgs. 3433–3439 (citado nas pgs. 11, 98).

[Caux 1981] Peter de Caux. “Yet another property of the Sorgenfrey plane”. Em: *Topology Proceedings* 6 (1981), pgs. 31–43 (citado nas pgs. 18, 23, 26).

[Douwen 1992] Eric K. van Douwen. “A technique for constructing honest locally compact submetrizable examples”. Em: *Topology and its Applications* 47 (1992), pgs. 179–201 (citado nas pgs. 2, 13).

[Douwen e Lutzer 1997] Eric K. van Douwen e David J. Lutzer. “A note on paracompactness in generalized ordered spaces”. Em: *Proceedings of the American Mathematical Society* 125.4 (1997), pgs. 1237–1245 (citado nas pgs. 2, 21, 75, 85, 86).

[Douwen e Pfeffer 1979] Eric K. van Douwen e Washek F. Pfeffer. “Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces”. Em: *Pacific Journal of Mathematics* 81 (1979), pgs. 371–378 (citado nas pgs. 1, 3, 4, 8, 18, 21, 31, 53, 66, 69, 70).

[Engelking 1989] Ryszard Engelking. *General Topology*. 2ª ed. Sigma Series in Pure Mathematics vol. 6. Helderman-Verlag, 1989 (citado na pg. 3).

[Gamel 2011] Heather C. Gamel. “D-spaces and L-special Trees”. Tese de dout. Columbia, USA: University of South Carolina, 2011 (citado nas pgs. 2, 102).

[Gillman e Henriksen 1954] Leonard Gillman e Melvin Henriksen. “Concerning rings of continuous functions”. Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 77.2 (1954), pgs. 340–362 (citado nas pgs. 78, 80).

[Guo e Junnila 2010] Hongfeng Guo e Heikki Junnila. "On spaces which are linearly D". Em: *Topology and its Applications* 157.1 (2010). Proceedings of the International Conference on Topology and its Applications 2007 at Kyoto; Jointly with 4th Japan Mexico Topology Conference, pgs. 102–107 (citado nas pgs. 40–44, 68, 72).

[Hrušák e Tatch Moore 2007] Michael Hrušák e Justin Tatch Moore. "Chapter 10 - introduction: twenty problems in set-theoretic topology". Em: *Open Problems in Topology II*. Ed. por Elliott Pearl. Amsterdam: Elsevier, 2007, pgs. 111–113 (citado na pg. 1).

[Jech 2003] Thomas Jech. *Set Theory*. 3ª ed. Springer Berlin, Heidelberg, 2003 (citado nas pgs. 3, 75, 93).

[Kunen 1980] K. Kunen. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. Mathematical Programming Study. North-Holland Publishing Company, 1980 (citado na pg. 3).

[Lutzer 1972] David J. Lutzer. "Another property of the Sorgenfrey line". Em: *Compositio Mathematica* 24.3 (1972), pgs. 359–363 (citado na pg. 20).

[Lutzer 1980] David J. Lutzer. "Ordered topological spaces". Em: *Surveys in General Topology*. Ed. por George M. Reed. Academic Press, 1980, pgs. 247–295 (citado na pg. 75).

[Mishchenko 1962] A. S. Mishchenko. "Finally compact spaces". Em: *Doklady Mathematics* 3 (1962), pgs. 1199–1202 (citado na pg. 44).

[Nyikos 2011] Peter J. Nyikos. "D-spaces, trees, and an answer to a problem of Buzyakova". Em: *Topology Proceedings* 38.2 (2011), pgs. 361–373 (citado nas pgs. 2, 11, 94, 96–99, 102, 106).

[Patrakeev 2021] Mikhail Patrakeev. "Reverse induction proof of D property of the countable power of the Sorgenfrey line". Em: *Acta Mth. Hungar.* 165.1 (2021), pgs. 112–133 (citado na pg. 26).

[Liang-Xiu Peng e Li 2014] Liang-Xiu Peng e Hui Li. "A note in D-spaces and L-special trees". Em: *Topology and its Applications* 170 (2014), pgs. 40–52 (citado na pg. 102).

[Liang-Xue Peng 2008] Liang-Xue Peng. "On linear neighborhood assignments and dually discrete spaces". Em: *Topology and its Applications* 155.16 (2008), pgs. 1867–1874 (citado nas pgs. 31, 53, 89).

[Sorgenfrey 1947] R. H. Sorgenfrey. "On the topological product of paracompact spaces." Em: *Bulletin of the American Mathematical Society* 53 (1947), pgs. 631–632 (citado na pg. 18).

[Soukup 2011] Dániel T. Soukup. "Properties D and aD are different". Em: *Topology Proceedings* 38 (2011), pgs. 279–299 (citado nas pgs. 36, 45–47, 49).

[SOUKUP e SZEPTYCKI 2012] Dániel T. SOUKUP e Paul J. SZEPTYCKI. “A counterexample in the theory of D-spaces”. Em: *Topology and its Applications* 159.10 (2012), pgs. 2669–2678 (citado nas pgs. 53, 67).

[SOUKUP e SZEPTYCKI 2013] Dániel T. SOUKUP e Paul J. SZEPTYCKI. “The union of two D-spaces need not be D”. Em: *Fundamenta Mathematicae* 220.10 (2013), pgs. 129–137 (citado na pg. 17).

[SOUKUP e SZEPTYCKI 2019] Dániel T. SOUKUP e Paul J. SZEPTYCKI. “A 0-dimensional, Lindelöf space that is not strongly D”. Em: *Topology and its Applications* 265 (2019), pg. 106832. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864119302585 (citado nas pgs. 52, 68).

[TODORCEVIC 1984] S. TODORCEVIC. “Chapter 6 - trees and linearly ordered sets”. Em: *Handbook of Set-Theoretic Topology*. Ed. por Kenneth KUNEN e Jerry E. VAUGHAN. Amsterdam: North-Holland, 1984, pgs. 235–293 (citado nas pgs. 93, 94).