Álgebras de Hopf como álgebras de Frobenius: uma forma de obter a Equação de Classe

Henrique Sbarai dos Santos

Dissertação apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática
Orientadora: Profª. Drª. Lucia Satie Ikemoto Murakami

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CNPq.

São Paulo
18 de Dezembro de 2023

Álgebras de Hopf como álgebras de Frobenius: uma forma de obter a Equação de Classe

Henrique Sbarai dos Santos

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 18 de Dezembro de 2023.

Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão julgadora:

Profª. Drª. Lucia Satie Ikemoto Murakami (orientadora) – IME-USP
Prof. Dr. Eliezer Batista – UFSC
Prof. Dr. Gilson Reis dos Santos Filho – Sem universidade

Para todas as noites viradas que
permitiram a existência deste texto:

"Mas vou ficar aqui até que o dia amanheça.
Vou esquecer de mim, e você, se puder, não me esqueça."
(Skank)

Agradecimentos

Para ser justo, meus agradecimentos têm que se estender a toda a sociedade que me permitiu estudar numa universidade pública e a todos aqueles que cruzaram meu caminho, contribuindo, de uma forma ou de outra, para eu ser quem sou hoje. No entanto, queria separar as próximas linhas para agradecer a algumas pessoas específicas que foram essenciais na minha jornada até aqui. De forma alguma isso vai quitar a dívida que tenho com cada um, mas é o mínimo que eu posso fazer.

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a todos que participaram da minha banca: os membros da comissão julgadora, que, com seus comentários extremamente valiosos, permitiram lapidar este trabalho e enriquecer ainda mais a minha experiência; e meus amigos, professores e familiares que me transmitiram muito carinho ao prestigiar esse momento tão especial para mim, ao se esforçar ao máximo para conseguir entender minimamente o que eu estava falando.

Em particular, agradeço à professora Lucia, que me acompanha desde o segundo ano da minha graduação. A companhia e a força que me deu durante o período de quarentena foram fundamentais para manter minha motivação nesse período tão complicado. Foi muito gratificante realizar esse trabalho ao lado de alguém que admiro tanto e que sempre se dedicou para fornecer a melhor ajuda possível. Obrigado, professora, por ter me guiado e me orientado por todo esse caminho.

Na realidade, seja na escola, no IME ou em cursos extras, eu tive muita sorte com relação aos meus professores. Devo muito não só a meus professores de matemática, que me transmitiram essa paixão que me trouxe até aqui, mas a todos, que, independente da área, contribuíram enormemente com meu desenvolvimento. Para personificar esses agradecimentos com um nome, escolhi meu professor de violão, Leonardo, que me acompanha desde antes de algum x aparecer nas minhas aulas de matemática. Teria sido impossível lidar com um mestrado durante a pandemia sem ter a música como válvula de escape. Obrigado, professor, por tantos ensinamentos e pela amizade formada em meio às partituras.

Por falar em amizade, não posso deixar de agradecer aos grandes amigos que o IME colocou no meu caminho: Beatriz e Diego. Nossas experiências juntos e nossas conversas malucas (alô, Banach-Tarski?) fizeram a USP se tornar minha segunda casa, e o amor que

eu sinto por esse lugar foi costurado pelas mãos desses dois. Obrigado, amigos, por terem acolhido um menino perdido no primeiro dia de aula e terem ajudado ele a crescer sem abandonar o coração de criança.

Nesse percurso de crescimento, tive o enorme prazer de contar com meus três grandes mestres: Felipe, João e Wagner. Por mais que a diferença de idade entre todos nós não supere 7 meses, os três sempre foram meus grandes exemplos e foram fundamentais na formação do meu caráter e da minha personalidade. A amizade inabalável que temos há mais de uma década é o que me fez acreditar que eu estava no caminho certo mesmo nos períodos mais conturbados dessa viagem. Obrigado, irmãos que a vida me deu, por me permitirem crescer ao lado de vocês e aprender a abraçar minha essência.

Para finalizar, queria agradecer às duas pessoas mais especiais de todas.

Primeiramente, Wilson, meu avô, que infelizmente não conseguiu esperar eu me formar. Vô, espero estar honrando o seu sobrenome. Queria muito que você, mestre de obras, tivesse visto eu me tornar mestre em matemática. Carrego você comigo sempre e faço tudo para te orgulhar.

Por fim, Neusa, minha mãe, que sempre entregou o que tinha e não tinha para permitir que eu chegasse aqui hoje. 99% do suor sobre estas páginas é seu e não conheço palavras o suficiente para agradecer por tudo o que você faz por mim, então dedico cada palavra desta dissertação a você para pelo menos tentar começar a agradecer.

Resumo

Henrique Sbarai dos Santos. **Álgebras de Hopf como álgebras de Frobenius: uma forma de obter a Equação de Classe**. Dissertação (Mestrado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Esta dissertação apresenta uma introdução às álgebras de Frobenius e sua utilização no estudo das álgebras de Hopf de dimensão finita. A discussão sobre álgebras de Frobenius é feita majoritariamente com os teoremas de Brauer-Nesbitt-Nakayama, mas é ampliada para alguns resultados referentes aos módulos sobre essas álgebras. Uma breve introdução sobre álgebras de Hopf é feita para, em seguida, podermos relacionar a teoria clássica dessa área com a teoria das álgebras de Frobenius. A partir da relação entre esses conceitos, estudamos uma demonstração da fórmula de Radford para a antípoda e resultados sobre semissimplicidade das álgebras de Hopf, introduzimos uma teoria de caracteres para álgebras de Hopf e combinamos esses resultados na demonstração do principal resultado deste texto: a Equação de Classe de Kac e Zhu. Apresentamos duas aplicações dessa equação de classe, como, por exemplo, a caracterização de álgebras de Hopf de dimensão prima sobre corpos algebricamente fechados e de característica zero. Por fim, aproveitamos a teoria de caracteres apresentada para estudar generalizações de resultados clássicos da teoria de caracteres de grupos finitos para essa nova teoria.

Palavras-chave: álgebras de Frobenius. álgebras de grupos. álgebras de Hopf. álgebras semissimples. equação de classe. teoria de caracteres.

Abstract

Henrique Sbarai dos Santos. **Hopf algebras as Frobenius algebras: a way of obtaining the Class Equation**. Thesis (Master's). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2023.

This Master's thesis presents an introduction to Frobenius algebras and their use in the study of finite-dimensional Hopf algebras. The discussion about Frobenius algebras is mostly based on the Brauer-Nesbitt-Nakayama theorems, but it is also expanded to some results concerning the modules over these algebras. A brief introduction to Hopf algebras is provided in order to establish a connection between the classical theory of this field and the theory of Frobenius algebras. By exploring the relation of these concepts, we study a proof of Radford's formula for the antipode and some results on the semisimplicity of Hopf algebras, introduce a character theory for Hopf algebras, and combine these results on the proof of the main result of this text: the Class Equation of Kac and Zhu. We present two applications of this class equation, e.g. the characterization of Hopf algebras of prime dimension over algebraically closed fields of characteristic zero. Lastly, we make use of the presented character theory to study generalizations of classical results from the character theory of finite groups to this new theory.

Keywords: Frobenius algebras. group algebras. Hopf algebras. semisimple algebras. class equation. character theory.

Lista de Símbolos

$\mathbb{k}$	Um corpo qualquer.
$\dim_{\mathbb{k}}$	Dimensão como $\mathbb{k}$-espaço vetorial.
$\mathfrak{m}_A$	Aplicação multiplicação da álgebra A.
μ_A	Aplicação unidade da álgebra A.
id_A	Aplicação identidade no conjunto A.
$\mathrm{Alg}(A, B)$	Conjunto dos homomorfismos de álgebras de A em B.
$\mathrm{Hom}_A(M, N)$	Conjunto dos homomorfismos de A-módulos de M em N.
$\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(A, B)$	Conjunto das aplicações $\mathbb{k}$-lineares de A em B.
A^*	Espaço dual de A.
f^*	Aplicação transposta de f.
$M^\perp$	Anulador de M.
$\mathrm{Mod}\, A$	Categoria dos A-módulos à direita.
$\mathrm{mod}\, A$	Categoria dos A-módulos à direita finitamente gerados.
A^{op}	Álgebra oposta de A.
$\mathrm{rad}\, M$	Radical de Jacobson de M.
$(\mid)$	Forma bilinear.
$\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{k})$	Conjunto das matrizes $n \times m$ sobre $\mathbb{k}$.
$\mathbb{M}_n(\mathbb{k})$	Conjunto das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{k}$.
Id_n	Matriz identidade em $\mathbb{M}_n(\mathbb{k})$.
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$	Conjunto das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{k}$ inversíveis.
$\mathrm{proj}\, A$	Categoria dos A-módulos à direita finitamente gerados e projetivos.
$\mathrm{inj}\, A$	Categoria dos A-módulos à direita finitamente gerados e injetivos.
$\mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V)$	Conjunto das aplicações $\mathbb{k}$-lineares sobre o $\mathbb{k}$-espaço V.

Δ_C	Comultiplicação da coálgebra C.
ε_C	Counidade da coálgebra C.
τ	Aplicação twist.
$\langle f, x\rangle$	Avaliação do funcional linear f no elemento x.
$*$	Produto de convolução.
S_H	Antípoda da álgebra de Hopf H.
$\overline{S_H}$	Inversa da antípoda de H pela composição.
ρ_M	Estrutura de comódulo de M.
$M^{\mathrm{co}\, H}$	Subespaço de coinvariantes de M.
$\int_H^l$	Conjunto dos integrais à esquerda de H.
$\int_H^r$	Conjunto dos integrais à direita de H.
$\bullet$	Multiplicação da coálgebra matricial.
$\mathcal{Z}(H)$	Centro de H.
Tr	Função traço.
$G(H)$	Conjunto dos elementos grouplike de H.
χ_M	Caracter de M.
ω_M	Caracter central de M.
$[A : M]_\beta$	Índice de M.
Irr H	Conjunto completo de H-módulos finitamente gerados e irredutíveis não isomorfos.
$R(H)$	Álgebra de representação de H.
V^H	Subespaço de invariantes de V.
$D(H)$	Drinfeld double de H.
$\bowtie$	Produto bicruzado.
$\mathfrak{C}_i$	Classe de conjugação.
$\overline{\mathfrak{C}_i}$	Soma de classes.
η_i	Soma de classes normalizada.
LKer_V	Núcleo à esquerda de V.

Sumário

Introdução

O uso de caracteres de grupos abelianos finitos remonta aos trabalhos de Gauss no início do século XIX, mas a generalização desse conceito para grupos finitos não necessariamente abelianos só se deu com F.Frobenius em 1896. Essa *Teoria de Caracteres* permitiu a demonstração de grandes resultados da *Teoria de Grupos Finitos*, como o *Teorema* $p^a q^b$ *de Burnside*, e foi precursora da *Teoria de Representações*, que nos proporciona uma das principais maneiras para se entender apropriadamente os grupos finitos e foi fundamental para a classificação dos grupos finitos simples. (O leitor interessado pode encontrar mais sobre a história da Teoria de Representações em [Lam98a] e [Lam98b].)

Ao se estudar *álgebras de grupos finitos*, temos que tais álgebras fazem parte de uma família mais ampla de álgebras, as chamadas *álgebras de Frobenius*. Historicamente, a primeira aparição de tais álgebras deu-se justamente em um artigo de 1903 de Frobenius ([Fro03]) em que ele relacionou a equivalência de duas representações específicas de álgebras de dimensão finita sobre um corpo com a existência de uma matriz especial. Nas décadas subsequentes, Brauer, Nesbitt e Nakayama encontraram uma série de caracterizações para esse conceito, esclarecendo um pouco mais a estrutura dessa família de álgebras. Uma delas é a existência de um isomorfismo de módulos entre o módulo regular da álgebra base e seu dual. No entanto, essa é uma propriedade muito conhecida das *álgebras de Hopf* de dimensão finita que emerge do *Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf*.

As álgebras de Hopf, por sua vez, surgem em um trabalho sobre topologia algébrica de H.Hopf em 1941. Em 1969, M.Sweedler apresenta a primeira abordagem puramente algébrica desse tema e, em 1986, essa área começa a ser vista com ainda mais interesse após a introdução do conceito de *grupos quânticos* por V.Drinfeld. Um resultado surpreendente que foi encontrado durante o desenvolvimento da teoria sobre essas álgebras é uma generalização do *Teorema de Maschke*, clássico da Teoria de Representações de Grupos. Isso fomenta o interesse em buscar outros resultados que possam ser generalizados para essas álgebras.

De uma forma muito interessante, podemos utilizar a linguagem da teoria das álgebras de Frobenius para encontrar uma *Equação de Classe* para álgebras de Hopf semissimples sobre corpos algebricamente fechados e de característica zero, que generaliza resultados como o fato de a ordem de cada classe de conjugação e a dimensão de cada módulo simples sobre uma álgebra de grupo dividirem a ordem do grupo base. Essa equação de classe foi encontrada originalmente por G.I.Kac no contexto de anéis de grupos em 1972 e, posteriormente, foi reformulada por Y.Zhu em [Zhu94] para o contexto de álgebras de Hopf semissimples. Por esse motivo, iremos chamá-la de *Equação de Classe de Kac e Zhu*.

O objetivo principal deste texto é apresentar o material necessário para demonstrar esse resultado utilizando a linguagem das álgebras de Frobenius. Aproveitamos também para estudar algumas propriedades interessantes sobre essas álgebras e a relação delas com as álgebras de Hopf.

Essa equação de classe é muito relevante pois permitiu avanços importantes na teoria das álgebras de Hopf, como o primeiro resultado no caminho do programa de classificação das álgebras de Hopf semissimples.

Este texto está estruturado da seguinte maneira:

1. No primeiro capítulo, apresentamos alguns conceitos e resultados preliminares que serão necessários ao longo do texto. A maioria deve ser de conhecimento de qualquer um que já tenha estudado Teoria de Anéis e Módulos, então serve mais como uma recordação. Contudo, o estudo sobre módulos semissimples e as estruturas chamadas de *top* e *socle* é feito com um pouco mais de atenção.
2. O segundo capítulo é inteiramente dedicado às álgebras de Frobenius e às álgebras simétricas. Começamos apresentando as caracterizações encontradas por Brauer, Nesbitt e Nakayama como uma espécie de abordagem "histórica" para nos familiarizarmos com os conceitos e, em seguida, exploramos duas estruturas que surgem dessas caracterizações: o *homomorfismo de Frobenius* e o *automorfismo de Nakayama*. Essas aplicações serão muito úteis mais adiante no texto. Além disso, estudamos alguns resultados muito interessantes sobre as álgebras de Frobenius. O primeiro deles nos diz que as classes de módulos injetivos e de módulos projetivos sobre uma álgebra de Frobenius coincidem. Isso é provado mostrando-se que álgebras de Frobenius são *álgebras autoinjetivas*. Outra nomenclatura utilizada para referir-se às álgebras autoinjetivas é a de *álgebras quase-Frobenius*. Assim, damos continuidade ao texto mostrando que as álgebras autoinjetivas "quase são álgebras de Frobenius", no sentido de que a categoria dos módulos sobre álgebras autoinjetivas e a categoria dos módulos sobre álgebras de Frobenius são equivalentes, isto é, álgebras autoinjetivas e álgebras de Frobenius são *Morita-equivalentes*.
3. O terceiro capítulo é a preparação para conectarmos álgebras de Hopf com álgebras de Frobenius, então apresentamos alguns conceitos e resultados básicos sobre álgebras de Hopf. Nele, também demonstramos o Teorema de Maschke generalizado para álgebras de Hopf e, em sua última seção, estudamos um pouco sobre coálgebras matriciais, que serão utilizadas como ferramentas no capítulo seguinte.

4. No quarto capítulo, fazemos as conexões entre as álgebras de Frobenius e as álgebras de Hopf. Começamos apresentando a demonstração de que álgebras de Hopf de dimensão finita são Frobenius. Em seguida, estudamos o homomorfismo de Frobenius no contexto das álgebras de Hopf e utilizamos isso para demonstrar a *Fórmula de Radford para a antípoda*. Essa fórmula nos permite apresentar uma caracterização para álgebras de Hopf simétricas e nos auxilia na discussão que se segue para encontrar uma caracterização para álgebras de Hopf semissimples, que será fundamental para demonstrar a Equação de Classe.
5. O quinto capítulo será onde apresentaremos essa demonstração. Primeiramente, desenvolvemos um breve estudo sobre caracteres generalizados para álgebras de Hopf, seguindo as ideias apresentadas por M.Lorenz em [Lor11]. Em seguida, demonstramos a Equação de Classe de Kac e Zhu e aplicamos esse resultado para demonstrar alguns resultados para grupos finitos, como que a dimensão de todo módulo simples sobre uma álgebra de grupo divide a ordem desse grupo. Aproveitamos para estudar também a caracterização das álgebras de Hopf de dimensão prima sobre corpos algebricamente fechados e de característica zero e uma outra aplicação da Equação de Classe apresentada por H.Schneider em [Sch01]. Por fim, nos baseamos nos trabalhos de M.Cohen e S.Westreicht para definir a *tabela de caracteres* generalizada para álgebras de Hopf semissimples e apresentar a generalização de uma série de resultados clássicos da Teoria de Representações de Grupos Finitos.
6. No sexto e último capítulo, concluímos o texto discutindo brevemente mais alguns caminhos que poderiam ser seguidos para dar continuidade às pesquisas descritas nesta dissertação.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Para o bom entendimento deste texto, é necessário o conhecimento prévio básico sobre *álgebras* e *módulos*. Resultados básicos podem ser encontrados em [AW99]. Os conceitos de *módulos com condição de cadeia*, módulos *projetivos* e *injetivos* e o *Teorema de Krull-Schmidt*, por sua vez, podem ser encontrados no capítulo 3 de [Jac89]. Já os conceitos de módulos *simples* e *semissimples*, bem como o *Teorema de Wedderburn-Artin* podem ser encontrados nos capítulos 2 e 3 de [Lam01]. Por fim, também utilizaremos conceitos básicos de *representações de álgebras*, *categorias de módulos* e *equivalência de Morita*, que podem ser encontrados nos capítulos 1 e 2 de [SY11].

Aproveitamos, então, este capítulo inicial para fixar algumas notações e definições enquanto relembramos alguns desses conceitos, sem entrar em muitos detalhes.

Na primeira seção, apresentamos duas definições equivalentes para álgebras que serão utilizadas ao longo de todo o texto conforme for mais conveniente. Na segunda, listamos algumas referências para quem tiver necessidade de revisar resultados sobre as teorias de módulos e de representações de álgebras, além de fazer uma breve discussão sobre *módulos duais*. Na terceira seção, relembramos as definições de módulos *projetivos* e *injetivos*, bem como a propriedade de dualidade que existe entre eles. Na quarta seção, introduzimos alguns conceitos da *Teoria de Categorias* e resultados que serão ferramentas úteis para demonstrar os teoremas sobre álgebras autoinjetivas no capítulo seguinte.

A quinta seção contém discussões relevantes para a demonstração de resultados no capítulo seguinte e, portanto, é onde focamos maior atenção neste capítulo. Começamos apresentando a definição e alguns resultados sobre o *radical de Jacobson* e, com isso, definimos os módulos denominados *top* e *socle*. Ambos esses módulos são semissimples, mas a demonstração da semissimplicidade de top não é imediata, então precisamos apresentar uma série de resultados para conseguir garantir essa propriedade. Em seguida, demonstramos a propriedade de dualidade que existe entre esse módulos e estudamos a categoria de módulos sobre o quociente de uma álgebra por seu radical. Por fim, estudamos mais algumas propriedades sobre esses módulos que serão importantes no estudo das álgebras autoinjetivas.

1.1 Álgebras sobre corpos

O conceito mais básico deste texto, sobre o qual falaremos em toda sua extensão, é o de *álgebras sobre corpos*. Trabalharemos com duas definições diferentes de acordo com o que for mais conveniente. Enquanto falarmos apenas sobre álgebras de Frobenius, a definição tradicional algébrica será suficiente, mas, ao introduzirmos os conceitos referentes a álgebras de Hopf, será imprescindível a utilização da definição a partir de diagramas comutativos.

Comecemos então vendo essas definições, bem como entendendo a equivalência entre elas. Para isso, fixe $\Bbbk$ um corpo. (Atente-se que, para nós, todo anel será associativo e com unidade.)

Definição 1.1.1: Uma *álgebra sobre o corpo* $\Bbbk$, ou uma $\Bbbk$-*álgebra*, é um anel A com uma estrutura adicional de $\Bbbk$-espaço vetorial compatível com a multiplicação do anel, isto é, tal que, dados $\lambda \in \Bbbk$ e $a, b \in A$, temos

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

e $1_\Bbbk 1_A = 1_A$, em que $1_\Bbbk$ é a unidade do corpo e 1_A é a unidade do anel. A álgebra A é dita *comutativa* se, para todos $a, b \in A$, $ab = ba$.

Dizemos também que uma $\Bbbk$-álgebra A é de *dimensão finita* se a dimensão de A como $\Bbbk$-espaço vetorial é finita. Denotaremos esta dimensão por $\dim_\Bbbk A$ ou, quando não houver ambiguidade sobre o corpo, simplesmente $\dim A$.

Note que, dada uma $\Bbbk$-álgebra A, sua multiplicação é uma aplicação bilinear $A \times A \to A$ dada por $(a, b) \mapsto ab$ para todos $a, b \in A$. Pela propriedade universal do produto tensorial[1], temos que essa aplicação está associada a uma aplicação linear $\mathfrak{m} : A \otimes A \to A$ de forma que $\mathfrak{m}(a \otimes b) = ab$ para todos $a, b \in A$.

Com isso, temos que a associatividade da multiplicação garante a comutatividade do diagrama abaixo, em que $\mathrm{id} = \mathrm{id}_A$ representa a aplicação identidade em A.

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathfrak{m} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \mathfrak{m}"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mathfrak{m}"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mathfrak{m}"'] & A \end{tikzcd}$$

[1] Essa propriedade universal será frequentemente utilizada ao longo do texto sem ser mencionada.

Considerando a unidade da álgebra, também podemos definir uma aplicação $\mu : \Bbbk \to A$ por $\mu(\lambda) = \lambda 1_A$, ou seja, estamos identificando os elementos do corpo base com elementos da álgebra. Com essa notação, temos que a existência da unidade de A e a compatibilidade do produto por escalar com a multiplicação garantem comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dd, "\mathfrak{m}"] & \\
\Bbbk \otimes A \arrow[ur, "\mu \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\sim"'] & & A \otimes \Bbbk \arrow[ul, "\mathrm{id} \otimes \mu"'] \arrow[dl, "\sim"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, esses diagramas descrevem completamente a estrutura da álgebra. Assim, podemos reescrever a definição de álgebra da seguinte forma:

Definição 1.1.2: Uma *álgebra sobre o corpo* $\Bbbk$, ou uma $\Bbbk$-*álgebra*, é um $\Bbbk$-espaço vetorial A equipado com duas aplicações $\Bbbk$-lineares, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_A : A \otimes A \to A$, chamada de *multiplicação*, e $\mu = \mu_A : \Bbbk \to A$, chamada de *unidade*, de forma que os diagramas abaixo sejam comutativos:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathfrak{m} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \mathfrak{m}"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mathfrak{m}"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mathfrak{m}"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dd, "\mathfrak{m}"] & \\
\Bbbk \otimes A \arrow[ur, "\mu \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\sim"'] & & A \otimes \Bbbk \arrow[ul, "\mathrm{id} \otimes \mu"'] \arrow[dl, "\sim"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

O isomorfismo $\Bbbk \otimes A \xrightarrow{\sim} A$ é dado pela multiplicação por escalar $\lambda \otimes a \mapsto \lambda a$, para todos $\lambda \in \Bbbk$ e $a \in A$. Fazemos o análogo com $A \otimes \Bbbk \xrightarrow{\sim} A$.

Denotaremos $ab := \mathfrak{m}(a \otimes b)$ para todos $a, b \in A$. Assim, a álgebra A é dita *comutativa* se, para todos $a, b \in A$, $ab = ba$ ou, equivalentemente, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} \circ \tau$, com $\tau \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(A \otimes A)$ dado por $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ (tal aplicação é chamada de *aplicação twist*).

Abaixo, apresentamos o exemplo das *álgebras de grupo*, que será um exemplo recorrente ao longo do texto.

Exemplo 1.1.3 (Álgebra de Grupo)**:** Sejam $\Bbbk$ um corpo e G um grupo finito. Considere $\Bbbk G$ o $\Bbbk$-espaço vetorial de base G, isto é,

$$\Bbbk G = \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g g \;\middle|\; \lambda_g \in \Bbbk, \text{ com apenas um número finito de } \lambda_g \text{ não nulos} \right\}.$$

Podemos definir a soma em $\Bbbk G$ por

$$\sum_{g\in G}\lambda_g g+\sum_{g\in G}\gamma_g g:=\sum_{g\in G}(\lambda_g+\gamma_g)g.$$

Definimos a multiplicação em $\Bbbk G$ por

$$\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G}\gamma_h h\right)=\sum_{g,h\in G}\lambda_g\gamma_h gh=\sum_{\sigma\in G}\alpha_\sigma\sigma,\ \text{em que } \alpha_\sigma=\sum_{gh=\sigma}\lambda_g\gamma_h.$$

Com essas operações e a estrutura de $\Bbbk$-espaço vetorial, $\Bbbk G$ é uma $\Bbbk$-álgebra, denominada *álgebra de grupo*.

Na linguagem do produto tensorial, isso é equivalente a definir aplicações lineares $\mathfrak{m}:\Bbbk G\otimes\Bbbk G\to\Bbbk G$ tal que $\mathfrak{m}(g\otimes h)=gh$ e $\mu:\Bbbk\to\Bbbk G$ tal que $\mu(1_G)=1_G$.

1.2 Módulos e Representações de Álgebras

Como já mencionamos, o conhecimento de alguns conceitos e resultados relacionados à *Teoria de Módulos* será fundamental. Vamos relembrar alguns deles nesta e nas próximas seções. Abaixo, por exemplo, fixamos as notações para *homomorfismos de álgebras* e *homomorfismos de módulos*.

Definição 1.2.1: Dadas duas $\Bbbk$-álgebras A e B, denotaremos o conjunto dos homomorfismos de álgebras de A em B por $\mathrm{Alg}(A,B)$.

Agora, dados uma $\Bbbk$-álgebra A e dois A-módulos à esquerda (ou à direita) M e N, denotaremos por $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ o conjunto dos homomorfismos $M\to N$ de A-módulos à esquerda (ou à direita). Explicitaremos o lado por qual ocorre a ação quando for necessário e não estiver subentendido. No caso de M ser um A-módulo à esquerda, escreveremos ${}_AM$, enquanto, se for um A-módulo à direita, escreveremos M_A.

Será útil, de agora em diante, começar a utilizar um pouco de teoria de categorias para não carregar tanto nossa notação. Assim, para uma $\Bbbk$-álgebra A, denotaremos por $\mathrm{Mod}\,A$ a categoria dos A-módulos à direita, isto é, a categoria em que os objetos são A-módulos à direita, os morfismos são homomorfismos de A-módulos e a composição de morfismos é a composição usual de funções. Além disso, denotaremos por $\mathrm{mod}\,A$ a subcategoria plena de $\mathrm{Mod}\,A$ cujos objetos são os A-módulos à direita de dimensão finita sobre $\Bbbk$. Considerando A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, temos que $\mathrm{mod}\,A$ é a categoria de todos os A-módulos à direita finitamente gerados. (Por mais que estejamos focando, nesse primeiro momento, em módulos à direita, valem os resultados análogos para módulos à esquerda).

Um exemplo que merece um pouco mais de atenção neste capítulo preliminar é o de *módulo dual*. Considerando A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$ e M um módulo em mod A, podemos munir o espaço dual $M^* := \mathrm{Hom}_\Bbbk(M, \Bbbk)$ com a estrutura de A-módulo à esquerda dada por

$$(a \cdot \varphi)(m) = \varphi(ma),$$

em que $\varphi \in M^*$, $m \in M$ e $a \in A$.

Por outro lado, se M é um A-módulo à esquerda, vamos considerar a estrutura de A-módulo à direita de M^* dada por

$$(\varphi \cdot a)(x) = \varphi(ax), \tag{1.1}$$

para $\varphi \in M^*$, $x \in M$ e $a \in A$.

Assim, com a estrutura adequada, diremos que M^* é o *módulo dual* do módulo M.

Podemos também definir o conceito de *bidual* de um módulo M, que seria $M^{**} = (M^*)^*$. No entanto, no nosso contexto de módulos de dimensão finita, temos que o bidual nada mais é do que o próprio módulo com uma nova "roupagem", isto é:

Lema 1.2.2: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e M um módulo em mod A. Então, $M \cong M^{**}$ como A-módulos à direita.

Demonstração: Como M tem dimensão finita, temos que $\Phi : M \to M^{**}$ definido por $\Phi(x) = \phi_x$, em que $\phi_x : M^* \to \Bbbk$ é dado por $\phi_x(f) = f(x)$, é um isomorfismo de $\Bbbk$-espaços vetoriais.

Tome $x \in M$, $a \in A$ e $f \in M^* = \mathrm{Hom}_\Bbbk(M, \Bbbk)$. Dessa forma,

$$\Phi(xa)(f) = f(xa) = (a \cdot f)(x) = \Phi(x)(a \cdot f) = (\Phi(x) \cdot a)(f).$$

Logo, $\Phi(xa) = \Phi(x) \cdot a$ e Φ é um isomorfismo de A-módulos à direita. ■

Observação 1.2.3: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e $f : M \to N$ um homomorfismo em mod A. Definimos $f^* : N^* \to M^*$ por $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$, para todos $\varphi \in N^*$, e chamamos f^* de *aplicação transposta* de f.

Mais adiante, será interessante fazer uma passagem natural entre um módulo e seu bidual. Para isso, observe que, denotando por $\Phi : M \to M^{**}$ e $\Psi : N \to N^{**}$ os isomorfismos de A-módulos à direita definidos como no Lema 1.2.2, para todo homomorfismo $f : M \to N$ como acima, temos $\Psi \circ f = (f^*)^* \circ \Phi$.

Vamos estudar agora um pouco do comportamento do dual. Começaremos verificando o que acontece com somas diretas e quocientes e, por fim, o que acontece com os *módulos simples* e seus duais.

Proposição 1.2.4: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e M e N módulos em mod A. Então, $M^* \oplus N^* \cong (M \oplus N)^*$.

Demonstração: Um tal isomorfismo é dado por $\psi : M^* \oplus N^* \to (M \oplus N)^*$ definido como

$$\begin{aligned} \psi(f,g) : M \oplus N &\to \Bbbk \\ (m,n) &\mapsto f(m) + g(n) \end{aligned}$$

para cada par $(f,g) \in M^* \oplus N^*$. ■

Agora, se M é um módulo em mod A, definimos, para cada submódulo N de M, o *anulador* de N

$$N^\perp = \{f \in M^* \,|\, f(n) = 0 \;\forall n \in N\},$$

que é um submódulo de M^*.

Com isso, temos o seguinte resultado:

Lema 1.2.5: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, M um módulo em mod A e N um submódulo de M. Dessa forma,

$$\left(\frac{M}{N}\right)^* \cong N^\perp.$$

Demonstração: Temos um isomorfismo $\psi : (M/N)^* \to N^\perp$ definido por

$$\begin{aligned} \psi(f) : M &\to \Bbbk \\ m &\mapsto f(m+N) \end{aligned}$$

para todo $f \in (M/N)^*$. ■

Note que o lema acima nos fornece ainda mais consequências:

Primeiramente, lembre que, se V é um módulo em mod A, então $\dim_\Bbbk V = \dim_\Bbbk V^*$. Logo, o lema anterior nos diz que

$$\dim_\Bbbk N^\perp = \dim_\Bbbk M - \dim_\Bbbk N.$$

Também podemos definir o *anulador* de um A-submódulo S de M^* como

$$S^\perp := \{m \in M \,|\, \varphi(m) = 0 \;\forall \varphi \in S^*\},$$

que é um submódulo de M. Com isso, temos claramente que, se N é um A-submódulo de

M, então $N \subseteq (N^{\perp})^{\perp}$. Além disso, o lema acima nos garante que

$$\left(\frac{M^*}{N^{\perp}}\right)^* \cong (N^{\perp})^{\perp}$$

e, como feito acima,

$$\dim_{\Bbbk}(N^{\perp})^{\perp} = \dim_{\Bbbk} M^* - \dim_{\Bbbk} N^{\perp} = \dim_{\Bbbk} M - (\dim_{\Bbbk} M - \dim_{\Bbbk} N) = \dim_{\Bbbk} N,$$

ou seja, podemos concluir que $N = (N^{\perp})^{\perp}$.

Por fim, vejamos mais um resultado.

Dizemos que um módulo não nulo é *simples* ou *irredutível* se seus únicos submódulos são os triviais. Utilizando o resultado acima, podemos provar que simplicidade é invariante por dualização.

Proposição 1.2.6: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e M um módulo em mod A. Assim, M é simples se, e somente se, M^* é simples (como A-modulo à esquerda).

Demonstração: Se M não for simples, existe um submódulo próprio $N \neq 0$ de M. Assim, como $N \neq M$, então $N^{\perp}$ é um submódulo não nulo de M^* e, como $N \neq 0$, temos que $N^{\perp} \cong (M/N)^*$ é próprio. Com isso, concluímos que M^* também não é simples.

Por outro lado, aplicando o mesmo raciocínio acima, temos que, se M^* não é simples, $M^{**} \cong M$ também não o é. ■

1.3 Módulos Projetivos e Injetivos

Uma das propriedades que demonstraremos posteriormente sobre as álgebras de Frobenius é que as classes de módulos projetivos e injetivos sobre essas álgebras coincidem. Nesta seção, vamos relembrar rapidamente esses conceitos. Comecemos pelas suas definições:

Definição 1.3.1: Seja R um anel. Um R-módulo P é dito *projetivo* se, dados dois R-módulos M e N e um homomorfismo sobrejetor $h \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, para todo $f \in \mathrm{Hom}_R(P, N)$ existe um homomorfismo $g \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$ tal que $f = h \circ g$, ou seja, tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "h"] & N \\ & P \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dashed, "g"] \end{tikzcd}$$

Por outro lado, um R-módulo E é dito *injetivo* se, dados dois R-módulos M e N e um homomorfismo injetor $i \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, para todo $f \in \mathrm{Hom}_R(M, E)$ existe um homomorfismo $g \in \mathrm{Hom}_R(N, E)$ tal que $f = g \circ i$, ou seja, tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & N \arrow[d, dashed, "g"] \\ & E \end{tikzcd}$$

Abaixo, enunciamos alguns resultados clássicos sobre módulos projetivos e módulos injetivos:

Teorema 1.3.2 (Módulos Projetivos)**:** Seja P um R-módulo à esquerda. (Valem resultados análogos para módulos à direita).

1. P é um módulo projetivo (e finitamente gerado) se, e somente se, P é um somando direto de um módulo livre (com base finita).
2. *Teorema das Bases Duais*[2]: P é um módulo projetivo se, e somente se, existe uma família de elementos $\{x_i \,|\, i \in I\} \subseteq P$, juntamente com uma família de homomorfismos $\{\varphi_i \,|\, i \in I\} \subseteq \mathrm{Hom}_R(P, R)$, de forma que, para todo $x \in P$, temos
   (a) $\varphi_i(x) \neq 0$ apenas para uma quantidade finita de $i \in I$;
   (b) $x = \sum\limits_{i \in I} \varphi_i(x) x_i$.

Teorema 1.3.3 (Módulos Injetivos)**:**

1. Todo somando direto de um R-módulo injetivo é injetivo.
2. *Critério de Baer*: Um R-módulo à esquerda (à direita) E é injetivo se, e somente se, todo homomorfismo de R-módulos de I em E, em que I é um ideal à esquerda (à direita) de R, pode ser estendido a um homomorfismo de R em E.

Agora, vamos relembrar a *dualidade* que existe entre esses conceitos, isto é, vamos mostrar que o dual de um módulo projetivo é injetivo e vice-versa. A demonstração é imediata a partir das definições de módulos projetivos e injetivos, mas deixaremos os detalhes registrados para quem precisar relembrar.

Para isso, lembre que todo A-módulo à esquerda é um A^{op}-módulo à direita, em que A^{op} é a *álgebra oposta* de A, ou seja, a álgebra $(A, \mathfrak{m}^{\mathrm{op}}, \mu)$ em que $\mathfrak{m}^{\mathrm{op}} = \mathfrak{m} \circ \tau$.

Proposição 1.3.4: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita.

1. Um módulo E em mod A é injetivo se, e somente se, o módulo E^* em mod A^{op} é projetivo.
2. Um módulo P em mod A é projetivo se, e somente se, o módulo P^* em mod A^{op} é injetivo.

Demonstração: Vamos provar apenas o item (1), pois o (2) é consequência dele já que

[2] Embora não sejam bases propriamente ditas, chamamos os conjuntos $\{x_i \,|\, i \in I\}$ e $\{\varphi_i \,|\, i \in I\}$ de *bases duais de P*.

$(A^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = A$ e, pelo Lema 1.2.2, $E^{**} \cong E$.

Suponha, por um lado, que E seja um módulo injetivo em mod A. Tome dois módulos M e N em mod A^{op} e suponha que exista um homomorfismo sobrejetor $h : M \to N$ de A^{op}-módulos à direita. Note que $h^* : N^* \to M^*$ é injetor pois, se $\varphi \in \ker h^*$, então

$$\{0\} = h^*(\varphi)(M) = \varphi(h(M)) = \varphi(N)$$

ou seja, $\varphi = 0$.

Seja $f \in \mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(E^*, N)$. Logo, $f^* \in \mathrm{Hom}_A(N^*, E^{**})$. Como E é injetivo e $E \cong E^{**}$ pelo Lema 1.2.2, então E^{**} é injetivo e, assim, temos que existe $\gamma \in \mathrm{Hom}_A(M^*, E^{**})$ tal que $f^* = \gamma \circ h^*$. Portanto, $(f^*)^* = (h^*)^* \circ \gamma^*$.

Agora, sejam $\Omega : E^* \to (E^*)^{**} = (E^{**})^*$, $\Phi : M \to M^{**}$ e $\Psi : N \to N^{**}$ isomorfismos de A^{op}-módulos à direita como no Lema 1.2.2. Para facilitar a visualização, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E^* \arrow[r, dashed, "\exists g?"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[d, "\Omega"] & M \arrow[r, two heads, "h"] \arrow[d, "\Phi"] & N \arrow[d, "\Psi"] \\
(E^{**})^* \arrow[r, "\gamma^*"'] \arrow[rr, bend right, "(f^*)^*"'] & M^{**} \arrow[r, "(h^*)^*"'] & N^{**}
\end{tikzcd}$$

Portanto, pela Observação 1.2.3, temos $\Psi \circ h = (h^*)^* \circ \Phi$ e $\Psi \circ f = (f^*)^* \circ \Omega$.

Da igualdade $(f^*)^* = (h^*)^* \circ \gamma^*$, temos

$$\begin{aligned} f &= \Psi^{-1} \circ (f^*)^* \circ \Omega = \Psi^{-1} \circ ((h^*)^* \circ \gamma^*) \circ \Omega = \Psi^{-1} \circ (\Psi \circ h \circ \Phi^{-1}) \circ \gamma^* \circ \Omega \\ &= h \circ (\Phi^{-1} \circ \gamma^* \circ \Omega). \end{aligned}$$

Como $\Phi^{-1} \circ \gamma^* \circ \Omega : E^* \to M$ é um homomorfismo de A^{op}-módulos à direita, temos que E^* é um A^{op}-módulo projetivo.

Para provar a recíproca, basta observar que a transposta de um homomorfismo injetor é sobrejetor. Com isso, o resultado desejado segue de forma análoga ao feito acima. Vejamos:

Suponha que $i : M \to N$ seja um homomorfismo injetor em mod A. Vamos mostrar que $i^* : N^* \to M^*$ é sobrejetor.

Seja $\varphi \in M^*$. Como espaço vetorial, temos $M \cong M^*$ e, assim, podemos tomar $\{v_1, \ldots, v_m\}$ base de M e $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ base de M^* de forma que $\xi_j(v_i) = \delta_{ij}$. Portanto, $\varphi = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_m\xi_m$, com $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Bbbk$.

Como i é um homomorfismo injetor, temos então que $\{i(v_1), \ldots, i(v_m)\}$ é linearmente independente em N e, dessa maneira, podemos completar esse conjunto até uma base $\{w_1 = i(v_1), \dots, w_m = i(v_m), w_{m+1}, \dots, w_n\}$ de N.

Seja então $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ uma base de N^* tal que $\zeta_j(w_i) = \delta_{ij}$ e defina $\eta \in N^*$ por $\eta = \alpha_1\zeta_1 + \cdots + \alpha_m\zeta_m$.

Assim, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, temos

$$i^*(\eta)(v_j) = \eta \circ i(v_j) = (\alpha_1\zeta_1 + \cdots + \alpha_m\zeta_m)(i(v_j)) = \alpha_j\zeta_j(i(v_j)) = \alpha_j\xi_j(v_j) = \varphi(v_j).$$

Como $\{v_1, \dots, v_m\}$ é base de M, temos então $i^*(\eta) = \varphi$ e, portanto, i^* é sobrejetor. ∎

1.4 Categorias

Nesta seção, introduziremos alguns conceitos e resultados básicos que serão necessários na Proposição 2.3.1, que nos permitirá definir uma álgebra autoinjetiva no próximo capítulo.

Definição 1.4.1: Para um corpo $\Bbbk$, uma categoria $\mathcal{C}$ é uma $\Bbbk$-*categoria* se, para cada par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$, o conjunto dos morfismos de X em Y, denotado por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, está equipado com uma estrutura de $\Bbbk$-espaço vetorial tal que a composição $\circ$ de morfismos em $\mathcal{C}$ é $\Bbbk$-bilinear.

No caso de $\mathcal{C}$ ser uma $\Bbbk$-categoria, diremos que um objeto M em $\mathcal{C}$ é um *gerador* de $\mathcal{C}$ se, para todo par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$ e para qualquer morfismo não nulo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, existe um morfismo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X)$ tal que $f \circ h \neq 0$.

Claramente, temos que as categorias $\mathrm{Mod}\, A$ e $\mathrm{mod}\, A$ com que estamos trabalhando são $\Bbbk$-categorias se A é uma $\Bbbk$-álgebra.

Nessa notação, temos $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\, A}(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)$ se M e N são módulos em $\mathrm{Mod}\, A$. No caso de M e N serem módulos em $\mathrm{mod}\, A$, como $\mathrm{mod}\, A$ é uma subcategoria plena de $\mathrm{Mod}\, A$, temos $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mod}\, A}(M, N) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\, A}(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)$.

Exemplo 1.4.2: Vejamos que uma $\Bbbk$-álgebra A é um gerador de $\mathrm{Mod}\, A$ e, em particular, se A é de dimensão finita, então A é um gerador de $\mathrm{mod}\, A$.

Dados dois módulos X, Y em $\mathrm{Mod}\, A$ e um morfismo não nulo $f \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$, tome um elemento $x \in X$ com $f(x) \neq 0$. Definindo uma aplicação $l_x : A \to X$ por $l_x(a) = xa$, temos $f \circ l_x \neq 0$, pois $f \circ l_x(1_A) = f(x1_A) = f(x) \neq 0$. Portanto, A é um gerador de $\mathrm{Mod}\, A$.

No caso em que a dimensão de A é finita, A é um módulo na subcategoria $\mathrm{mod}\, A$ de $\mathrm{Mod}\, A$ e, portanto, é claramente um gerador de $\mathrm{mod}\, A$.

Sobre os geradores de uma $\Bbbk$-categoria qualquer, temos o resultado abaixo.

Lema 1.4.3: Seja $\mathcal{C}$ uma $\Bbbk$-categoria e M um objeto de $\mathcal{C}$. Ambas as afirmações abaixo são verdadeiras:

1. Se M é um gerador de $\mathcal{C}$ e X é um objeto de $\mathcal{C}$, então $M \oplus X$ é um gerador de $\mathcal{C}$.
2. Se M^m é um gerador de $\mathcal{C}$ para algum inteiro positivo m, então M é um gerador de $\mathcal{C}$.

Demonstração:

1. Sejam V, W objetos em $\mathcal{C}$ e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$ não nulo. Como M é gerador de $\mathcal{C}$, existe um morfismo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, V)$ tal que $f \circ h \neq 0$. Podemos estender h para um morfismo $\tilde{h} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M \oplus X, V)$ definindo $\tilde{h}(m, x) = h(m)$ para todos $m \in M$ e $x \in X$. Dessa forma, $f \circ \tilde{h} \neq 0$.
2. Sejam V, W objetos em $\mathcal{C}$ e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$ não nulo. Como M^m é gerador de $\mathcal{C}$, existe $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M^m, V)$ tal que $f \circ h \neq 0$. Assim, existe $x = (x_1, \ldots, x_m) \in M^m$ tal que $f(h(x)) \neq 0$. Defina $\tilde{h} : M \to V$ por $\tilde{h}(y) = h(y, x_2, \ldots, x_m)$ para todo $y \in M$. Dessa forma, $\tilde{h} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, V)$ e $f \circ \tilde{h} \neq 0$. ■

Dado um módulo M, dizemos que ele é *indecomponível* se, dados dois submódulos M_1 e M_2 tais que $M = M_1 \oplus M_2$, temos $M_1 = 0$ ou $M_2 = 0$. Com isso, temos um resultado clássico de teoria de módulos: o *Teorema de Krull-Schmidt*, que enunciamos abaixo:

Teorema de Krull-Schmidt: Seja $M \neq 0$ um módulo artiniano e noetheriano. Assim, M contém submódulos indecomponíveis M_i, com $1 \leq i \leq m$, tais que $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$. Além disso, se $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ com M_i e N_j indecomponíveis, então $m = n$ e existe uma permutação $i \mapsto i'$ tal que $M_i \cong N_{i'}$ para todo $1 \leq i \leq m$.

Note que, para A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, todo módulo em mod A é um $\Bbbk$-espaço vetorial de dimensão finita e, portanto, é noetheriano e artiniano.

Lembre que, dada A uma $\Bbbk$-álgebra, dois idempotentes $e_1, e_2 \in A$ são ditos *ortogonais* se $e_1 e_2 = 0 = e_2 e_1$. Além disso, um idempotente $e \in A$ é *primitivo* se $e \neq 0$ e não existirem $e_1, e_2 \neq 0$ idempotentes ortogonais de A tais que $e = e_1 + e_2$. Por fim, 0_A e 1_A são chamados de *idempotentes triviais*.

Temos uma relação entre idempotentes primitivos e módulos indecomponíveis: dados uma $\Bbbk$-álgebra A e um idempotente $e \in A$, temos que e é primitivo se, e somente se, eA é um A-módulo à direita indecomponível.

Com isso, podemos apresentar uma decomposição da $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita A que utilizaremos a seguir.

Proposição 1.4.4: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um conjunto de idempotentes primitivos de A, dois-a-dois ortogonais, com $1_A = e_1 + \cdots + e_n$, então $A_A = e_1 A \oplus \cdots \oplus e_n A$ é soma direta de A-módulos à direita indecomponíveis e projetivos. Além disso, toda decomposição de A_A como soma direta de A-submódulos à direita indecomponíveis é dessa forma.

(Vale o resultado análogo para ${}_AA$.)

Demonstração: A parte da projetividade segue a partir do item (1) do Teorema 1.3.2, enquanto o resto é consequência do Teorema de Krull-Schmidt. ■

Com os resultados anteriores, podemos encontrar um gerador especial para a categoria mod A.

Proposição 1.4.5: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Suponha que $P_1, \ldots, P_m$ é um conjunto completo de módulos projetivos indecomponíveis dois-a-dois não isomorfos em mod A. Tome $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_m$. Então, P é um gerador projetivo de mod A e P é isomorfo ao módulo eA para algum idempotente $e \in A$. Nessas condições, diremos que P é um *gerador projetivo minimal*.

Demonstração: Pela Proposição 1.4.4, temos que existe, de forma única, uma decomposição $A_A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$ de A_A em soma direta de A-módulos à direita indecomponíveis e projetivos, com $e_1, \ldots, e_n$ idempotentes primitivos.

Como $P_1, \ldots, P_m$ são indecomponíveis, temos que todo P_i é isomorfo a um e_jA. Podemos supor que $P_i \cong e_iA$. Dessa forma, $e_1A, \ldots, e_mA$ é um conjunto completo de módulos projetivos indecomponíveis dois-a-dois não isomorfos em mod A.

Assim, temos $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_m \cong e_1A \oplus \cdots \oplus e_mA = eA$, com $e = e_1 + \cdots + e_m$.

Note que A_A é isomorfo a um somando direto de P^r para algum inteiro positivo r. Como vimos no Exemplo 1.4.2, A_A é um gerador de mod A. Assim, pela primeira parte do Lema 1.4.3, temos que P^r é um gerador de mod A e, pela segunda parte, P é gerador de mod A. ■

Por fim, vamos definir o que seria um *cogerador* de uma $\Bbbk$-categoria e estabelecer a relação de dualidade entre geradores e cogeradores.

Definição 1.4.6: Seja $\mathcal{C}$ uma $\Bbbk$-categoria. Um objeto M em $\mathcal{C}$ é chamado de *cogerador* de $\mathcal{C}$ se, para todo par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$ e qualquer morfismo não nulo $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, existe um morfismo $h \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M)$ tal que $h \circ f \neq 0$.

Proposição 1.4.7: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Se M é um gerador de mod A^{op}, então M^* é um cogerador de mod A.

Demonstração: Seja então M um gerador de mod A^{op}. Tome um par X, Y de módulos em mod A e um morfismo não nulo $f \in \operatorname{Hom}_A(X, Y)$.

Dessa forma, temos X^* e Y^* em mod A^{op} e $0 \neq f^* \in \operatorname{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(Y^*, X^*)$. Como M é gerador de mod A^{op}, existe um morfismo $h \in \operatorname{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(M, Y^*)$ tal que $f^* \circ h \neq 0$.

Logo, $0 \neq (f^* \circ h)^* = h^* \circ (f^*)^*$.

Tomando os isomorfismos $\Phi : X \to X^{**}$ e $\Psi : Y \to Y^{**}$ como na Observação 1.2.3, temos então que

$$0 \neq h^* \circ (f^*)^* \circ \Phi = (h^* \circ \Psi) \circ f,$$

com $h^* \circ \Psi \in \mathrm{Hom}_A(Y, M^*)$. Isso prova que M^* é um cogerador de mod A. ■

1.5 Módulos Semissimples e o Radical de Jacobson

Nesta última seção preliminar, desenvolveremos um pouco da teoria que nos auxiliará a provar o Teorema 2.3.7, que nos dá condições suficientes para que uma álgebra autoinjetiva seja uma álgebra de Frobenius. Aqui, nos baseamos essencialmente em [SY11].

Comecemos estudando o *radical de Jacobson*, que nos permite encontrar uma caracterização para módulos semissimples e que também será necessário para definir o módulo *top*, como veremos mais a frente, que é um conceito fundamental na demonstração do teorema mencionado acima.

Definição 1.5.1: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e M um módulo em mod A. O *radical de Jacobson*, ou simplesmente *radical*, rad M de M é a intersecção de todos os A-submódulos maximais de M.

O lema a seguir descreve um pouco da estrutura do radical do módulo regular.

Lema 1.5.2: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. As seguintes condições são equivalentes:

i. $a \in \mathrm{rad}\, A$;
ii. Para todo $b \in A$, o elemento $1_A - ab$ possui um inverso à direita;
iii. Para todo $b \in A$, o elemento $1_A - ab$ possui um inverso bilateral;
iv. Para todo $b \in A$, o elemento $1_A - ba$ possui um inverso bilateral;
v. Para todo $b \in A$, o elemento $1_A - ba$ possui um inverso à esquerda;
vi. a pertence à intersecção de todos os ideais à esquerda maximais de A.

Demonstração: Abreviaremos $1 = 1_A$. Comecemos pela equivalência (i) $\iff$ (ii). Tome $b \in A$ e suponha que o elemento $1 - ab$ não possui um inverso à direita em A, ou seja, $1 \notin (1 - ab)A$ e, portanto, o ideal à direita $(1 - ab)A$ é diferente de A. Logo, existe I um ideal à direita de A maximal tal que $1 - ab \in I$. Como $a \in \mathrm{rad}\, A \subseteq I$, temos $ab \in I$ e, portanto, $1 \in I$, uma contradição, pois $I \neq A$. Assim, concluímos que $1 - ab$ possui um inverso à direita.

Reciprocamente, suponha que $a \notin \mathrm{rad}\, A$ e seja I um ideal à direita de A maximal tal que $a \notin I$. Então, $I + aA$ é um ideal à direita de A contendo I propriamente. Pela maximalidade de I, temos $A = I + aA$. Portanto, existem $x \in I$ e $b \in A$ tais que $1 = x + ab$. Porém, dessa forma, $x = 1 - ab \in I$ não possui um inverso à direita, pois $I \neq A$, o que é uma contradição com (ii). Logo, $a \in \operatorname{rad} A$.

A equivalência (v) $\iff$ (vi) segue de maneira similar.

Provemos agora a equivalência (ii) $\iff$ (iii). Claramente, temos (iii) $\Rightarrow$ (ii). Por outro lado, seja $b \in A$. Pela hipótese (ii), existe $c \in A$ tal que $(1-ab)c = 1$. Assim, $c = 1-a(-bc)$. Aplicando (ii) para o elemento $-bc$, temos que existe $d \in A$ tal que

$$1 = (1 - a(-bc))d = cd$$

e, além disso,

$$1 = (1 - a(-bc))d = d + abcd = d + ab.$$

Portanto, $d = 1 - ab$ e c é um inverso à esquerda de $1 - ab$.

A equivalência (iv) $\iff$ (v) segue também de maneira similar.

Por fim, só nos resta mostrar a equivalência (iii) $\iff$ (iv). Para isso, note que, para todos $c, d, x, y \in A$,

1. Se $(1 - cd)x = 1$, então

$$(1 - dc)(1 + dxc) = 1 - dc + dxc - dcdxc = 1 - dc + d((1 - cd)x)c = 1.$$

2. Se $y(1 - cd) = 1$, então

$$(1 + dyc)(1 - dc) = 1 - dc + dyc - dycdc = 1 - dc + d(y(1 - cd))c = 1.$$

Logo, $1 - ab$ possui um inverso bilateral se, e somente se, $1 - ba$ possui um inverso bilateral. ■

Com esse lema, conseguimos encontrar mais algumas propriedades sobre $\operatorname{rad} A$, como, por exemplo, que ele é um ideal bilateral de A.

Proposição 1.5.3: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Assim, $\operatorname{rad} A$ é um ideal bilateral de A e $\operatorname{rad}(A/\operatorname{rad} A) = \overline{0} = \operatorname{rad} A$.

Demonstração: Por definição, temos que $\operatorname{rad} A$ é a intersecção de todos os ideias à direita maximais de A e, pelo item (vi) nas equivalências do Lema 1.5.2, temos que ele também é a intersecção de todos os ideias à esquerda maximais de A. Portanto, concluímos que $\operatorname{rad} A$ é um ideal bilateral de A. Agora, observe que os ideais à direita maximais de $A/\operatorname{rad} A$ são os ideais da forma $I + \operatorname{rad} A$, com I um ideal à direita maximal de A contendo $\operatorname{rad} A$. Logo, $\operatorname{rad}(A/\operatorname{rad} A) = \operatorname{rad} A = \overline{0}$. ■

Seja I um ideal bilateral de uma $\Bbbk$-álgebra A. Dizemos que I é *nilpotente* se existir $n \geq 1$ tal que $I^n = 0$. Vamos mostrar que, se A é de dimensão finita, então rad A é nilpotente, mas, antes, precisamos de mais um lema.

Lema 1.5.4 (Lema de Nakayama)**:** Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, M um módulo em mod A e $I \subseteq$ rad A um ideal bilateral de A. Se $MI = M$, então $M = 0$.

Demonstração: Suponha que M seja gerado por elementos $m_1, \ldots, m_r \in M$, isto é, que $M = m_1A + \cdots + m_rA$. Nossa prova procederá por indução em r.

Inicialmente, suponha que $r = 1$, ou seja, $M = m_1A$. Como I é ideal bilateral de A, temos $M = MI = (m_1A)I = m_1I$. Em particular, $m_1 \in M = m_1I$. Logo, existe $x_1 \in I$ tal que $m_1 = m_1x_1$ e, com isso, temos que $m_1(1 - x_1) = 0$. Como $x_1 \in I \subseteq$ rad A, o Lema 1.5.2 nos garante que $1 - x_1$ é inversível à direita e, portanto, concluímos que $M = 0$.

Para o passo indutivo, suponha $r > 1$ e que o resultado é válido para $r - 1$. Logo,

$$M = MI = (m_1A + \cdots + m_rA)I = m_1I + \cdots + m_rI.$$

Assim, existem $x_1, \ldots, x_r \in I$ tais que $m_r = m_1x_1 + \cdots + m_rx_r$ e, portanto,

$$m_r(1 - x_r) = m_1x_1 + \cdots + m_{r-1}x_{r-1}.$$

Novamente pelo Lema 1.5.2, temos que $1 - x_r$ é inversível à direita em A e, com isso, concluímos que $m_r = m_1y_1 + \cdots + m_{r-1}y_{r-1}$, com $y_1, \ldots, y_{r-1} \in A$. Portanto, $M = m_1A + \cdots + m_{r-1}A$ e, pela hipótese de indução, temos $M = 0$. ■

Proposição 1.5.5: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Então rad A é um ideal nilpotente.

Demonstração: Considere a seguinte cadeia decrescente de ideais bilaterais de A:

$$A \supseteq \text{rad}\, A \supseteq (\text{rad}\, A)^2 \supseteq \cdots \supseteq (\text{rad}\, A)^i \supseteq (\text{rad}\, A)^{i+1} \supseteq \cdots$$

Como $\dim_{\Bbbk} A$ é finita, existe $n \geq 1$ tal que

$$(\text{rad}\, A)^n = (\text{rad}\, A)^{n+1} = (\text{rad}\, A)^n\, \text{rad}\, A.$$

Assim, pelo Lema 1.5.4, temos que $(\text{rad}\, A)^n = 0$. ■

Agora, vamos estudar as propriedades do *top* e do *socle*, módulos que serão fundamentais na demonstração do teorema que mencionamos no começo desta seção.

Definição 1.5.6: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e $M \neq 0$ um módulo em mod A. Definimos então dois A-módulos associados a M:

$$\operatorname{top}(M) = \frac{M}{\operatorname{rad} M},$$

chamado de *top* de M, e

$$\operatorname{soc}(M) = \sum_{S \in \mathcal{S}_M} S,$$

chamado de *socle* de M, em que $\mathcal{S}_M$ é o conjunto de todos os A-submódulos simples de M.

Lembramos agora que um módulo é dito *semissimples* se ele puder ser escrito como uma soma direta de módulos simples. Além disso, temos que toda soma de módulos semissimples é uma soma direta de alguns desses módulos simples, sendo também semissimples. Portanto, claramente, $\operatorname{soc}(M)$ é um módulo semissimples e, diretamente da definição, temos que $\operatorname{soc}(M)$ é o maior A-submódulo semissimples de M, isto é, se S é um A-submódulo semissimples de M, então $S \subseteq \operatorname{soc}(M)$.

O que não é tão fácil de ver é que $\operatorname{top}(M)$ também é semissimples e que também temos uma relação de "grandeza" envolvendo ele: a de que ele é o maior fator semissimples de M. Exploraremos esses fatos nos resultados que seguem agora e também observaremos que existe uma dualidade entre esses dois módulos.

Antes de mais nada, relembremos uma caracterização para os módulos semissimples que nos ajudará a seguir em frente:

Observação 1.5.7: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra e M um A-módulo. Então, M é um A-módulo semissimples se, e somente se, M é *completamente redutível*, isto é, para qualquer A-submódulo N de M, existe um A-submódulo L de M tal que $M = N \oplus L$.

Na seguinte proposição, caracterizamos os ideais de $A/\operatorname{rad} A$ e os módulos em mod $(A/\operatorname{rad} A)$.

Proposição 1.5.8: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e $B = A/\operatorname{rad} A$. São verdadeiras as afirmações:

1. Todo ideal à direita não nulo I de B é uma soma direta de ideais à direita minimais de B da forma eB, em que e é um idempotente primitivo de B. Em particular, o B-módulo à direita B_B é semissimples;
2. Qualquer módulo não nulo M em mod B é isomorfo a uma soma direta de ideais à direita minimais de B da forma eB, em que e é um idempotente primitivo de B.

Demonstração:

1. Suponha que I seja um ideal de B à direita não nulo. Como A é de dimensão finita, temos que B e, consequentemente, I também são A-módulos de dimensão finita. Dessa

forma, podemos tomar S um submódulo não nulo de I de dimensão minimal. Observe que S é um módulo simples, pois a dimensão de cada um dos seus submódulos é menor ou igual à dimensão de S e, como essa dimensão é minimal, ou o submódulo é nulo ou tem a mesma dimensão de S, sendo, portanto, igual a S.

Considere o B-submódulo à direita S^2 de S composto por todas as somas finitas de elementos da forma xy com $x, y \in S$. Vejamos que $S^2 \neq 0$.

Suponha, por contradição, que $S^2 = 0$. Assim, para todo $x \in S$ e $b \in B$, temos $(1_B - xb)(1_B + xb) = 1_B$, pois S é ideal à direita de B. Portanto, pelo Lema 1.5.2, $x \in \operatorname{rad} B$. Consequentemente, temos $S \subseteq \operatorname{rad} B$, mas, pela Proposição 1.5.3, temos $\operatorname{rad} B = 0$. Logo, $S = 0$, uma contradição.

Portanto, S^2 é um submódulo não nulo de S e, assim, $S = S^2$, pois S é simples. Dessa forma, existe $x \in S$ tal que $xS \neq 0$ e, logo, $xS = S$, pois xS é um B-submódulo à direita de S. Em particular, $x = xe$ para algum $e \in S$. Considere o homomorfismo de B-módulos à direita $f : S \to S$ dado por $f(y) = xy$. Como $f(e) = xe = x \neq 0_B$, temos que f é um homomorfismo não nulo e, consequentemente, é um isomorfismo, pois é claramente injetor e sobrejetor já que S é simples e $xS = S$.

Além disso,

$$f(e^2 - e) = f(e^2) - f(e) = xee - xe = xe - xe = 0_B$$

e, portanto, $e^2 - e = 0_B$. Logo, e é um idempotente não nulo de B e $S = eB$.

Note que, para todo $b \in B$, $b = eb + (1_B - e)b$. Portanto, $B = eB + (1_B - e)B$. Suponha agora que exista $y \in eB \cap (1_B - e)B$. Assim, $y = eb_1 = (1_B - e)b_2$, com $b_1, b_2 \in B$. Observe que $(1_B - e)^2 = 1_B - e$. Logo,

$$y = (1_B - e)b_2 = (1_B - e)(1_B - e)b_2 = (1_B - e)eb_1 = (e - e)b_1 = 0.$$

Portanto, $B_B = eB \oplus (1_B - e)B$ e, assim, $I = S \oplus (1_B - e)I$. Como $(1_B - e)I$ é um subespaço de I diferente de I, temos $\dim(1_B - e)I < \dim I$.

Se $(1_B - e)I \neq 0$, podemos repetir a demonstração acima para escrever

$$(1_B - e)I = S_2 \oplus (1_B - e_2)((1_B - e)I),$$

em que S_2 é um B-submódulo simples de $(1_B - e)I$ da forma $S_2 = e_2B$, com $e_2 \neq 0$ um idempotente de B. Também teremos

$$\dim((1_B - e_2)((1_B - e)I)) < \dim((1_B - e)I).$$

Como a dimensão de I é finita, esse processo termina, ou seja, para algum n, teremos que $(1_B - e_n)(1_B - e_{n-1})\cdots(1_B - e_2)(1_B - e)I = 0$. Assim, poderemos escrever $I = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n$, em que $S_i = e_iB$ é um B-submódulo de I à direita simples e $e_i \neq 0$ é um idempotente de B para todo $i = 1, \ldots, n$. Como I é ideal de B à direita, temos que os B-submódulos de I à direita são ideais à direita de B, concluindo a demonstração do item (1).

2. Seja M um módulo não nulo em mod B e tome elementos $m_1, \ldots, m_r \in M$ tais que $M = m_1B + \cdots + m_rB$. Considere o homomorfismo sobrejetor de B-módulos à direita $\varphi : B^r \to M$ dado por $\varphi((b_1, \ldots, b_r)) = m_1b_1 + \cdots + m_rb_r$, para $(b_1, \ldots, b_r) \in B^r$. Então, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, $M \cong B^r / \ker\varphi$.
   Utilizando o item (1), concluímos que B^r é uma soma direta de ideais à direita simples da forma eB, em que e é um idempotente primitivo de B. Por outro lado, pela Observação 1.5.7, existe um B-submódulo à direita L de B^r tal que $B^r = \ker\varphi \oplus L$. Assim, pelo Teorema de Krull-Schmidt e utilizando o fato de que submódulos de módulos semissimples são semissimples, concluímos que tanto $\ker\varphi$ quanto L são somas diretas de ideais à direita minimais da forma eB, para idempotentes primitivos e de B. Logo, como $M \cong L$, temos o resultado que desejávamos. ■

Agora, descreveremos algumas propriedades básicas do radical de um módulo.

Proposição 1.5.9: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e M e N módulos em mod A. São verdadeiras as seguintes afirmações:

1. Seja $m \in M$. Assim, $m \in \operatorname{rad} M$ se, e somente se, $f(m) = 0$ para qualquer homomorfismo $f \in \operatorname{Hom}_A(M, S)$, em que S é um A-módulo à direita simples;
2. $\operatorname{rad}(M \oplus N) = \operatorname{rad} M \oplus \operatorname{rad} N$;
3. Se $f \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$, então $f(\operatorname{rad} M) \subseteq \operatorname{rad} N$;
4. $\operatorname{rad} M = M \operatorname{rad} A$;
5. Se $L + \operatorname{rad} M = M$ para algum A-submódulo à direita L de M, então $L = M$.

Demonstração:

1. Suponha $m \in \operatorname{rad} M$. Tome um homomorfismo não nulo $f \in \operatorname{Hom}_A(M, S)$, em que S é um A-módulo simples. Como f é não nulo e $S \neq 0$ é simples, f é sobrejetor. Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos $M/\ker f \cong S$, que é simples, e, portanto, $\ker f$ é um A-submódulo à direita maximal de M. Logo, $m \in \ker f$, ou seja, $f(m) = 0$.
   Por outro lado, observe que, se L é um A-submódulo à direita de M maximal, então M/L é um A-módulo simples e existe um homomorfismo sobrejetor $\pi_L : M \to M/L$ com $\ker\pi_L = L$. Portanto, se $f(m) = 0$ para qualquer $f \in \operatorname{Hom}_A(M, S)$ e qualquer A-módulo à direita simples S, em particular, $m \in \ker\pi_L = L$ para todo A-submódulo à direita de M maximal L. Assim, $m \in \operatorname{rad} M$.

2. Seja $x \in \operatorname{rad} M \oplus \operatorname{rad} N$. Então, existem elementos $x_M \in \operatorname{rad} M$ e $x_N \in \operatorname{rad} N$ tais que $x = x_M + x_N$. Pelo item (1), temos $f(x_M) = 0$ para todo $f \in \operatorname{Hom}_A(M, S)$ e $g(x_N) = 0$ para todo $g \in \operatorname{Hom}_A(N, S)$, ambos com S simples.
   Note que, dado $h \in \operatorname{Hom}_A(M \oplus N, S)$, com S simples, temos $h|_M \in \operatorname{Hom}_A(M, S)$ e $h|_N \in \operatorname{Hom}_A(N, S)$. Assim,
   $$h(x) = h(x_M + x_N) = h|_M(x_M) + h|_N(x_N) = 0$$
   e, dessa forma, pelo item (1), $x \in \operatorname{rad}(M \oplus N)$.
   Por outro lado, suponha que $x \in \operatorname{rad}(M \oplus N)$. Como $x \in M \oplus N$, podemos escrever $x = x_M + x_N$, com $x_M \in M$ e $x_N \in N$.
   Seja S um A-módulo simples. Tome $f \in \operatorname{Hom}_A(M, S)$ e denote o homomorfismo nulo de $\operatorname{Hom}_A(N, S)$ por ζ. Observe que temos o isomorfismo
   $$\Phi : \operatorname{Hom}_A(M \oplus N, S) \to \operatorname{Hom}_A(M, S) \oplus \operatorname{Hom}_A(N, S) \tag{1.2}$$
   dado por $h \mapsto h \circ \iota_M + h \circ \iota_N$, em que $\iota_M : M \to M \oplus N$ e $\iota_N : N \to M \oplus N$ são as inclusões canônicas.
   Dessa forma, temos que existe $h \in \operatorname{Hom}_A(M \oplus N, S)$ tal que $\Phi(h) = f + \zeta$ e, assim,
   $$f(x_M) = f(x_M) + \zeta(x_N) = (h \circ \iota_M + h \circ \iota_N)(x_M + x_N) = h(x) = 0.$$
   Logo, $f(x_M) = 0$ para todo $f \in \operatorname{Hom}_A(M, S)$. Pela arbitrariedade de S, temos $x_M \in \operatorname{rad} M$.
   Analogamente, podemos mostrar que $x_N \in \operatorname{rad} N$ e, portanto, $x \in \operatorname{rad} M \oplus \operatorname{rad} N$.
3. Seja $f \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$. Tome $x \in \operatorname{rad} M$ e J um submódulo maximal de N. Como J é maximal, pelo Teorema da Correspondência, concluímos que N/J é simples. Seja $\pi : N \to N/J$ a projeção canônica. Dessa forma, $\pi \circ f \in \operatorname{Hom}_A(M, N/J)$ e, pelo item (1), temos $\pi \circ f(x) = 0$, isto é, $f(x) \in J$. Pela arbitrariedade do submódulo maximal J, concluímos que $f(x) \in \operatorname{rad} N$.
4. Mostremos, primeiramente, que $M \operatorname{rad} A \subseteq \operatorname{rad} M$. Dado $m \in M$, defina um homomorfismo de A-módulos à direita $f_m : A \to M$ por $f_m(a) = ma$. Pelo item (3), temos que, se $a \in \operatorname{rad} A$, então $ma = f(a) \in \operatorname{rad} M$. Portanto, $M \operatorname{rad} A \subseteq \operatorname{rad} M$.
   Para a inclusão contrária, observe que $M/M \operatorname{rad} A$ é um módulo à direita sobre a álgebra $A/\operatorname{rad} A$ considerando a multiplicação
   $$(m + M \operatorname{rad} A)(a + \operatorname{rad} A) := ma + M \operatorname{rad} A,$$
   com $m \in M$ e $a \in A$, pois $(M/M \operatorname{rad} A) \operatorname{rad} A \subseteq M \operatorname{rad} A$.

Da Proposição 1.5.8, temos que o $A/\operatorname{rad} A$-módulo à direita $M/M\operatorname{rad} A$ é soma direta de $A/\operatorname{rad} A$-módulos simples. Como o radical de um módulo simples é nulo, pelo item (2), temos que o radical de qualquer módulo semissimples em mod A é também nulo. Portanto, $\operatorname{rad}(M/M\operatorname{rad} A) = 0$.
Considere agora a projeção canônica $\pi : M \to M/M\operatorname{rad} A$. Pelo item (3), temos que $\pi(\operatorname{rad} M) \subseteq \operatorname{rad}(M/M\operatorname{rad} A) = 0$ e, portanto, $\operatorname{rad} M \subseteq \ker \pi = M\operatorname{rad} A$.
Juntando as duas inclusões, concluímos que $\operatorname{rad} M = M\operatorname{rad} A$.

5. Seja L um A-submódulo à direita de M tal que $L + \operatorname{rad} M = M$. Se $L \neq M$, existe um A-submódulo maximal X de M tal que $L \subseteq X$. No entanto, dessa forma, teríamos $M = L + \operatorname{rad} M \subseteq X \neq M$, o que seria uma contradição. Portanto, $L = M$. ■

O lema abaixo é o último passo antes de mostrarmos que $\operatorname{top}(M)$ é semissimples e nos fala sobre a relação entre os A-módulos simples e os $A/\operatorname{rad} A$-módulos simples.

Lema 1.5.10: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Temos que M é um $A/\operatorname{rad} A$-módulo simples se, e somente se, M é um A-módulo simples. Consequentemente, todo $A/\operatorname{rad} A$-módulo semissimples é um A-módulo semissimples e vice-versa.

Demonstração: Por um lado, suponha que M seja um $A/\operatorname{rad} A$-módulo simples. Assim, M é um A-módulo considerando a ação

$$m \cdot a := m(a + \operatorname{rad} A)$$

para todos $m \in M$ e $a \in A$. Dessa forma, fica claro ver que M é também um A-módulo simples, pois, dado $m \in M$,

$$mA = \{m \cdot a \mid a \in A\} = \{m(a + \operatorname{rad} A) \mid a \in A\} = m(A/\operatorname{rad} A)$$

e, portanto, se $m \neq 0$, então $mA = m(A/\operatorname{rad} A) = M$.

Por outro lado, se M é um A-módulo simples, observe que, dado $a \in \operatorname{rad} A$, $ma = 0$ para todo $m \in M$. Para isso, fixe $a \in \operatorname{rad} A$ e considere o homomorfismo $f_a : M \to M\operatorname{rad} A$ dado por $f_a(m) = ma$ para todo $m \in M$. Pelo item (4) da Proposição 1.5.9, temos $M\operatorname{rad} A = \operatorname{rad} M = 0$, pois M é simples. Logo, $ma = 0$ para todos $m \in M$ e $a \in \operatorname{rad} A$. Portanto, está bem definida a ação

$$m \cdot (a + \operatorname{rad} A) := ma$$

para $m \in M$ e $a + \operatorname{rad} A \in A/\operatorname{rad} A$, e, enfim, concluímos que M é um $A/\operatorname{rad} A$-módulo simples da mesma forma que fizemos acima.

Por fim, como um módulo semissimples é soma direta de módulos simples, temos que as classes desses módulos coincidem em mod A e mod $(A/\operatorname{rad} A)$. ■

Finalmente, conseguimos mostrar que top(M) é semissimples e que ele é o maior fator semissimples de M:

Corolário 1.5.11: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e M um módulo em mod A. São verdadeiras as afirmações:

1. O A-módulo à direita top$(M) = M/\operatorname{rad} M$ é semissimples e é um módulo à direita sobre a $\Bbbk$-álgebra $A/\operatorname{rad} A$;
2. Se L é um A-submódulo de M tal que M/L é um A-módulo semissimples, então $\operatorname{rad} M \subseteq L$.

Demonstração:

1. Na demonstração do item (4) da Proposição 1.5.9, vimos que $M/M\operatorname{rad} A$ é um $(A/\operatorname{rad} A)$-módulo à direita e que $\operatorname{rad} M = M\operatorname{rad} A$. Portanto, top$(M) = M/\operatorname{rad} M$ é um $(A/\operatorname{rad} A)$-módulo à direita.
   Pela Proposição 1.5.8, temos que todo módulo em mod $(A/\operatorname{rad} A)$ é semissimples. Portanto, top(M) é um $(A/\operatorname{rad} A)$-módulo à direita semissimples e, pelo Lema 1.5.10, concluímos que é também um A-módulo à direita semissimples.
2. Suponha que L seja um A-submódulo à direita de M tal que M/L seja um A-módulo semissimples. Seja $\pi : M \to M/L$ a projeção canônica. Segue do item (3) da Proposição 1.5.9 que $\pi(\operatorname{rad} M) \subseteq \operatorname{rad}(M/L) = 0$, pois M/L é semissimples. Portanto, $\operatorname{rad} M \subseteq \ker \pi = L$. ■

Com esse resultado, podemos demonstrar a relação de dualidade que existe entre o *top* e o *socle*.

Proposição 1.5.12: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Para todo módulo M em mod A, temos:

1. $(\operatorname{top}(M))^* \cong \operatorname{soc}(M^*)$;
2. $(\operatorname{soc}(M))^* \cong \operatorname{top}(M^*)$.

Demonstração: Vamos provar o item (1). O item (2) segue de forma análoga.

Pelo Lema 1.2.5, temos

$$(\operatorname{top}(M))^* = \left(\frac{M}{\operatorname{rad} M}\right)^* \cong (\operatorname{rad} M)^{\perp}.$$

No entanto, top(M) é semissimples e, tendo em vista as Proposições 1.2.4 e 1.2.6, temos que $(\operatorname{top}(M))^*$ também é semissimples. Assim, $(\operatorname{rad} M)^{\perp}$ é um submódulo semissimples de M^* e, como sabemos que $\operatorname{soc}(M^*)$ é o maior submódulo semissimples de M^*, temos então que $(\operatorname{rad} M)^{\perp} \subseteq \operatorname{soc}(M^*)$.

Por outro lado, como $\operatorname{soc}(M^*) \subseteq M^*$, temos $(\operatorname{soc}(M^*))^\perp \subseteq M$ e

$$\operatorname{soc}(M^*) = ((\operatorname{soc}(M^*))^\perp)^\perp \cong \left(\frac{M}{(\operatorname{soc}(M^*))^\perp}\right)^*.$$

Logo, como $\operatorname{soc}(M^*)$ é semissimples, temos que $M/(\operatorname{soc}(M^*))^\perp$ também é semissimples. Pelo Corolário 1.5.11, temos então que $\operatorname{rad} M \subseteq (\operatorname{soc}(M^*))^\perp$ e, portanto, $\operatorname{soc}(M^*) = ((\operatorname{soc}(M^*))^\perp)^\perp \subseteq (\operatorname{rad} M)^\perp$.

Com isso, concluímos que $\operatorname{soc}(M^*) = (\operatorname{rad} M)^\perp \cong (\operatorname{top}(M))^*$. ■

Seguindo em frente, temos uma nova caracterização para módulos semissimples utilizando o radical de Jacobson:

Corolário 1.5.13: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e M um módulo não nulo em mod A. Então, M é um A-módulo semissimples se, e somente se, $\operatorname{rad} M = 0$.

Demonstração: Por um lado, suponha que $M = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$, em que S_i é um A-módulo à direita simples para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pelo item (2) da Proposição 1.5.9, temos que $\operatorname{rad} M = \operatorname{rad} S_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{rad} S_n$. No entanto, sabemos que o radical de um módulo simples é nulo. Portanto, $\operatorname{rad} M = 0$.

Por outro lado, se $\operatorname{rad} M = 0$, pelo item (1) do Corolário 1.5.11, concluímos que $M = M/\operatorname{rad} M$ é semissimples. ■

Veremos mais adiante que podemos definir funtores $\operatorname{top} : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A$ e $\operatorname{soc} : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A$ que associam um módulo M em mod A a $\operatorname{top}(M)$ e $\operatorname{soc}(M)$, respectivamente. Nosso objetivo agora é mostrar que o funtor top induz uma bijeção entre as classes de isomorfismos dos módulos projetivos e as classes de isomorfismo dos módulos semissimples, enquanto o funtor soc, por sua vez, induz uma bijeção entre as classes de isomorfismos dos módulos injetivos e indecomponíveis não nulos e as classes de isomorfismos dos módulos simples. Utilizando a dualidade entre top e socle, podemos também dualizar esses resultados.

Primeiramente, vamos encontrar uma caracterização para os módulos simples em mod $(A/\operatorname{rad} A)$ que será importante para provar o resultado sobre o funtor soc. Precisaremos de alguns resultados para isso.

Começamos encontrando uma forma de "levantar" os idempotentes módulo um ideal nilpotente, como descrita no lema abaixo:

Lema 1.5.14: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, I um ideal nilpotente de A, $B = A/I$ e $\pi : A \to B$ a projeção canônica de A em B. As seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Para quaisquer idempotentes $f_1, \ldots, f_n \in B$ dois-a-dois ortogonais, com $f_i = \pi(x_i)$

para alguns $x_i \in A$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$, existem idempotentes $e_1, \ldots, e_n \in A$, também dois-a-dois ortogonais, tais que $\pi(e_i) = f_i$ e e_i é uma combinação linear de produtos de potências dos elementos $x_1, \ldots, x_n$ para todos $i \in \{1, \ldots, n\}$;

2. Se $e \in A$ é um idempotente tal que $\pi(e) = f_1 + \cdots + f_n$, para idempotentes $f_1, \ldots, f_n \in B$ dois-a-dois ortogonais, então existem idempotentes $e_1, \ldots, e_n \in A$, também dois-a-dois ortogonais, tais que $e = e_1 + \cdots + e_n$ e $\pi(e_i) = f_i$ para todos $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstração: Vamos apenas apresentar uma ideia geral de como é feita a demonstração.

Para provar o item (1), tomamos um inteiro m tal que $I^m = 0$ e a demonstração prossegue por indução em n. No caso $n = 1$, temos $f = \pi(x)$ e, denotando $y = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \binom{m}{i} x^{i-1}$, temos que $e = (xy)^m$ é uma combinação linear de potências de x e é um elemento idempotente de A tal que $\pi(e) = f$. Para o caso geral, utilizamos a demonstração acima para encontrar um idempotente $a_n \in A$ tal que $\pi(a_n) = f_n$, que é uma combinação linear de potências de x_n, e a hipótese de indução para encontrar idempotentes $e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$, dois-a-dois ortogonais, todos combinações lineares de produtos de potências dos elementos $x_1, \ldots, x_{n-1}$, tais que $\pi(e_i) = f_i$ para todos $i = 1, \ldots, n-1$. Denotando $a = e_1 + \ldots + e_{n-1}$ e $a'_n = a_n - aa_n - a_n a + aa_n a$, mostra-se que $\pi(a'_n) = f_n$ e, utilizando mais uma vez a demonstração do caso $n = 1$, podemos tomar um idempotente $e_n \in A$ que seja uma combinação linear de potências de a'_n e tal que $\pi(e_n) = f_n$. Dessa forma, é fácil ver que e_n é uma combinação linear de produtos de potências dos elementos $x_1, \ldots, x_n$. Por fim, basta mostrar que $a'_n e_i = 0_A = e_i a'_n$ para todos $i = 1, \ldots, n-1$ e, dessa forma, teremos também que $e_n e_i = 0_A = e_i e_n$ para todos $i = 1, \ldots, n-1$, finalizando a demonstração desse item.

Para o item (2), primeiramente, escrevemos $f_i = \pi(a_i)$, com $a_i \in A$, denotamos $d_i = ea_ie$ e mostramos que $\pi(d_i) = f_i$ para todos $i = 1, \ldots, n$. Utilizando o item (1), encontramos idempotentes $e_1, \ldots, e_n$, dois-a-dois ortogonais e todos combinações lineares de produtos de potências de $d_1, \ldots, d_n$, tais que $f_i = \pi(e_i)$ para todos $i = 1, \ldots, n$. Como $d_i = ea_ie$, temos $e_i \in eAe$ para todos $i = 1, \ldots, n$. Denotando $d = e_1 + \cdots + e_n$, utilizamos o fato de que $d \in eAe$ para mostrar que $(e - d)^2 = e - d$ e, por fim, provamos que $\pi(e - d) = 0$, donde conclui-se que $e = d$ utilizando a nilpotência de I. ■

Utilizando esse lema e alguns resultados anteriores, conseguimos descrever uma relação entre os somandos diretos indecomponíveis de uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita A, em $\operatorname{mod} A$, e os somandos diretos indecomponíveis da álgebra $A/\operatorname{rad} A$, em $\operatorname{mod}(A/\operatorname{rad} A)$.

Proposição 1.5.15: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, $B = A/\operatorname{rad} A$, $e \in A$ um idempotente não nulo e $\overline{e} = e + \operatorname{rad} A$ o idempotente associado de B. As seguintes condições são equivalentes:

i. eA é um A-módulo à direita indecomponível;
ii. $e\,\mathrm{rad}\,A$ é um único A-submódulo à direita maximal de eA;
iii. $\overline{e}B$ é um B-módulo à direita simples.

Demonstração: Vamos começar mostrando a equivalência entre (ii) e (iii). Note que temos um isomorfismo de A-módulos à direita

$$\begin{aligned} \overline{e}B &\longrightarrow eA/e\,\mathrm{rad}\,A \\ \overline{e}\cdot\overline{a} &\longmapsto ea + e\,\mathrm{rad}\,A \end{aligned}$$

em que $\overline{a} = a + \mathrm{rad}\,A \in B$ para $a \in A$.

Se $e\,\mathrm{rad}\,A$ é um A-submódulo maximal de eA, então $eA/e\,\mathrm{rad}\,A$ é um A-módulo simples e, portanto, $\overline{e}B$ é um A-módulo simples. Assim, pelo Lema 1.5.10, temos que $\overline{e}B$ é um B-módulo simples.

Por outro lado, se $\overline{e}B$ é um B-módulo simples, temos que ele também é um A-módulo simples e o isomorfismo acima nos garante então que $e\,\mathrm{rad}\,A$ é maximal.

No entanto, do item (4) da Proposição 1.5.9, temos que

$$\mathrm{rad}\,eA = eA\,\mathrm{rad}\,A = e(A\,\mathrm{rad}\,A) = e\,\mathrm{rad}\,A.$$

Assim, concluímos que $e\,\mathrm{rad}\,A$ é o único A-submódulo maximal de eA.

Dessa forma, concluímos a equivalência entre (ii) e (iii).

Vamos mostrar agora que (iii) implica (i). Suponha que eA não seja indecomponível. Dessa forma, e não é primitivo e, portanto, existem dois idempotentes ortogonais $e_1, e_2 \in A$, diferentes de e, tais que $e = e_1 + e_2$ e, além disso, como $\mathrm{rad}\,A$ é nilpotente (Proposição 1.5.5), temos também que $e_1, e_2 \notin \mathrm{rad}\,A$.

Assim, temos $\overline{e}B = \overline{e_1}B \oplus \overline{e_2}B$, em que, para cada $j = 1, 2$

$$\overline{e_j} = e_j + \mathrm{rad}\,A \neq \overline{0}.$$

Porém, isso nos dá uma decomposição de $\overline{e}B$ em soma direta de B-módulos à direita não nulos, o que é uma contradição com a hipótese de que $\overline{e}B$ era simples.

Por fim, mostremos que (i) implica (iii). Por hipótese, então, eA é indecomponível. Suponha, por contradição, que $\overline{e}B$ não seja um B-módulo simples. Com isso, e considerando a Proposição 1.5.8, temos que $\overline{e}B$ se escreve como uma soma direta não trivial. Logo, $\overline{e}B$ não é indecomponível e, portanto, existem idempotentes ortogonais não nulos $f_1, f_2 \in B$ tais que $\overline{e} = f_1 + f_2$.

Assim, pelo item (1) do Lema 1.5.14, temos que existem idempotentes ortogonais $e_1, e_2 \in A$ tais que $f_1 = e_1 + \mathrm{rad}\,A$, $f_2 = e_2 + \mathrm{rad}\,A$ e $e = e_1 + e_2$, provando que e não é primitivo. Porém, isso é uma contradição com o fato de eA ser indecomponível. Com isso, temos que $\overline{e}B$ é um B-módulo simples, concluindo a demonstração das equivalências. ■

Com os resultados estudados até agora, conseguimos dar uma caracterização para os módulos simples em mod $(A/\operatorname{rad} A)$.

Corolário 1.5.16: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, $e_1, \ldots, e_n \in A$ um conjunto de idempotentes primitivos e dois-a-dois ortogonais com $1_A = e_1 + \cdots + e_n$ e $B = A/\operatorname{rad} A$. Todo módulo simples S em mod B é isomorfo a um B-módulo à direita $e_iA/e_i \operatorname{rad} A$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstração: Seja S um B-módulo à direita simples. Pela Proposição 1.5.8, temos que S é isomorfo a um B-módulo à direita da forma fB para algum idempotente primitivo $f \in B$. Dessa forma, fB é indecomponível.

Observe que $B = fB \oplus (1_B - f)B$ e que podemos encontrar $f_1, \ldots, f_m$ idempotentes primitivos e dois-a-dois ortogonais, com $f_1 = f$, de forma que $B_B = f_1B \oplus \cdots \oplus f_mB$ seja uma decomposição de B_B como soma direta de módulos indecomponíveis.

Por outro lado, sejam $\overline{e_1} = e_1 + \operatorname{rad} A, \ldots, \overline{e_n} = e_n + \operatorname{rad} A$ idempotentes em B associados a $e_1, \ldots, e_n$. Claramente, esses idempotentes em B também são dois-a-dois ortogonais, $1_B = \overline{e_1} + \cdots + \overline{e_n}$ e, pelo item (2) do Lema 1.5.14, temos que todos são primitivos.

Da Proposição 1.5.15, temos que $\overline{e_i}B$ é um B-módulo à direita simples para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e, portanto, com a Proposição 1.4.4, conseguimos uma decomposição de B_B em soma direta de módulos simples em mod B, a saber, $B_B = \overline{e_1}B \oplus \cdots \oplus \overline{e_n}B$.

Utilizando o Teorema de Krull-Schmidt mais uma vez, temos que $n = m$ e $f_iB \cong \overline{e_{i'}}B$, com $i \in \{1, \ldots, n\}$ e uma permutação em n elementos $i \mapsto i'$.

Em particular, temos $fB = f_1B \cong \overline{e_j}B$ para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$. Além disso, assim como feito na demonstração da Proposição 1.5.15, temos um isomorfismo de B-módulos à direita $\overline{e_i}B \cong e_iA/e_i \operatorname{rad} A$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto, temos

$$S \cong fB = f_1B \cong \overline{e_j}B \cong e_jA/e_j \operatorname{rad} A,$$

como desejávamos. ■

Para seguir em frente, precisaremos introduzir novos conceitos. O primeiro deles será o de *resolução projetiva*, que também será utilizada para provar os resultados sobre os funtores top e soc. O lema abaixo será uma espécie de equivalência para essa definição, que será apresentada logo em seguida.

Lema 1.5.17: Seja $h : M \to N$ um epimorfismo (homomorfismo sobrejetor) não nulo em mod A. Então, são equivalentes:

i. Para todo A-submódulo X de M tal que $\ker h + X = M$, temos $X = M$;
ii. Para qualquer homomorfismo $g : L \to M$ em mod A tal que $h \circ g$ é um epimorfismo, temos que g também é um epimorfismo.

Demonstração: Inicialmente, assuma que (i) seja válido. Tome então um homomorfismo $g : L \to M$ em mod A de forma que $h \circ g$ seja um epimorfismo. Como h também é sobrejetor, temos que, para todo $m \in M$, existe $x \in L$ tal que $h(m) = h(g(x))$ e, assim, $m - g(x) \in \ker h$. Com isso, temos que $\ker h + \operatorname{im} g = M$. Pela hipótese (i), concluímos então que $\operatorname{im} g = M$, ou seja, g é sobrejetor e, portanto, é um epimorfismo.

Reciprocamente, assuma que (ii) seja válido. Tome então X um A-submódulo de M tal que $\ker h + X = M$ e considere $g : X \to M$ a inclusão natural. Seja $y \in N$. Como h é sobrejetor, existe $m \in M$ tal que $h(m) = y$. Porém, como $\ker h + X = M$, temos $m' \in \ker h$ e $x \in X$ tais que $m' + x = m$. Temos também, por definição de g, $g(x) = x$ e, portanto,

$$y = h(m) = h(m' + x) = h(m' + g(x)) = h(m') + h(g(x)) = h(g(x)),$$

mostrando que $h \circ g$ é sobrejetor e, logo, um epimorfismo. Pela hipótese (ii), temos então que g é um epimorfismo e, com isso, concluímos que $X = M$. ■

Definição 1.5.18: Um epimorfismo não nulo $h : P \to M$ em mod A é dito uma *resolução projetiva* de M se P é um A-módulo projetivo e, para todo A-submódulo X de P tal que $\ker h + X = P$, temos $X = P$.

Exemplo 1.5.19: Seja P um módulo projetivo em mod A e considere a projeção canônica $\pi : P \to \operatorname{top}(P) = P/\operatorname{rad} P$. Já sabemos que π é um homomorfismo sobrejetor. Tome então um A-submódulo X de P tal que $\ker \pi + X = P$, ou seja $X + \operatorname{rad} P = P$. Pelo item (5) da Proposição 1.5.9, temos que $X = P$ e, portanto, π é uma resolução projetiva de $\operatorname{top}(P)$.

No teorema abaixo, veremos que sempre existe uma resolução projetiva para um módulo M em mod A e que ela é única, a menos de composição por um isomorfismo. Com este resultado, estaremos prontos para provar o resultado sobre o funtor top.

Primeiramente, observemos que, dada uma $\mathbb{k}$-álgebra A de dimensão finita, temos, de fato, um funtor $\operatorname{top} : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A$.

Claramente, top leva um objeto M em mod A a um objeto $\operatorname{top}(M)$ em mod A. Agora, tomando um homomorfismo $f : M \to N$ em mod A, note que, pela Proposição 1.5.9, temos $f(\operatorname{rad} M) \subseteq \operatorname{rad}(N)$. Portanto, denotando por $\pi_M : M \to \operatorname{top}(M)$ e $\pi_N : N \to \operatorname{top}(N)$ as projeções canônicas, podemos definir um homomorfismo $\operatorname{top}(f) : \operatorname{top}(M) \to \operatorname{top}(N)$ de forma que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_N"] & N \arrow[d, "\pi_M"] \\
\text{top}(M) \arrow[r, "\text{top}(f)"] & \text{top}(N)
\end{tikzcd}$$

Definindo top : mod $A \to$ mod A dessa forma, temos que ele é um funtor entre essas categorias.

De forma semelhante, é possível definir um funtor soc : mod $A \to$ mod A que leva um objeto M em mod A a um objeto soc(M) em mod A e um homomorfismo $f : M \to N$ em mod A a um homomorfismo soc(f) : soc$(M) \to$ soc(N) tomando a restrição de f a soc(M), pois $f(\text{soc}(M)) \subseteq \text{soc}(N)$.

Teorema 1.5.20: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita.

1. Dado um módulo $M \neq 0$ em mod A, existe uma resolução projetiva $h : P(M) \to M$. Além disso, o homomorfismo induzido top(h) : top$(P(M)) \to$ top(M) de módulos semissimples em mod A é um isomorfismo.
2. Para qualquer resolução projetiva $h' : P' \to M$ em mod A de um módulo não nulo M, existe um isomorfismo $g : P' \to P(M)$ em mod A tal que $h \circ g = h'$.

Demonstração: Para provar o item (1), considere M um módulo não nulo em mod A. Pelo Corolário 1.5.11, temos que top(M) é semissimples tanto como A-módulo à direita quanto como B-módulo à direita. Ou seja, existem submódulos simples $S_1, \ldots, S_m$ de B em mod B tais que top$(M) \cong S_1 \oplus \cdots \oplus S_m$.

Pela Proposição 1.4.4, temos uma decomposição $A_A = e_1 A \oplus \cdots \oplus e_n A$ como soma direta de módulos em mod A indecomponíveis e projetivos, em que $e_1, \ldots, e_n \in A$ são idempotentes primitivos e dois-a-dois ortogonais com $1_A = e_1 + \cdots + e_n$.

Denotando $\overline{e_i} = e_i + \text{rad}\, A$ para todos $i = 1, \ldots, n$, temos que $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}$ são idempotentes primitivos e dois-a-dois ortogonais de B tais que $1_B = \overline{e_1} + \cdots + \overline{e_n}$.

Assim, como feito no Corolário 1.5.16, para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$, temos que $S_j \cong \overline{e_i} B$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dessa forma, top$(M) \cong (\overline{e_1} B)^{r_1} \oplus \cdots \oplus (\overline{e_n} B)^{r_n}$, com cada $r_i \geq 0$.

Pelo item (4) da Proposição 1.5.9, para todo $i = 1, \ldots, n$, temos que $\text{rad}\, e_i A = e_i \,\text{rad}\, A$ e

$$\text{top}(e_i A) = \frac{e_i A}{\text{rad}\, e_i A} = \frac{e_i A}{e_i \,\text{rad}\, A} \cong \overline{e_i} B.$$

Logo, temos um isomorfismo de A-módulos

$$\operatorname{top}(e_1A)^{r_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{top}(e_nA)^{r_n} \xrightarrow{\sim} (\overline{e_1}B)^{r_1} \oplus \cdots \oplus (\overline{e_n}B)^{r_n} \xrightarrow{\sim} \operatorname{top}(M). \tag{1.3}$$

Tome agora $P(M) = (e_1A)^{r_1} \oplus \cdots \oplus (e_nA)^{r_n}$. Temos que $P(M)$ é um módulo projetivo em mod A e $\operatorname{top}(P(M)) \cong \operatorname{top}(e_1A)^{r_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{top}(e_nA)^{r_n}$. Portanto, utilizando o isomorfismo em 1.3, temos um isomorfismo $\varphi : \operatorname{top}(P(M)) \to \operatorname{top}(M)$. Agora, denotando por $\pi_{P(M)} : P(M) \to \operatorname{top}(P(M))$ e $\pi_M : M \to \operatorname{top}(M)$ as projeções canônicas, como $P(M)$ é projetivo, existe $h \in \operatorname{Hom}_A(P(M), M)$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
P(M) \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[dr, "\varphi\circ\pi_{P(M)}"'] & M \arrow[d, two heads, "\pi_M"] \\
& \operatorname{top}(M)
\end{tikzcd}$$

Assim, temos $\varphi = \operatorname{top}(h)$ e já tínhamos que φ era um isomorfismo. Agora, vamos mostrar que h é uma resolução projetiva.

Como $\operatorname{top}(h) \circ \pi_{P(M)}$ é sobrejetor e $\pi_{P(M)}$ é uma resolução projetiva, pelo Lema 1.5.17, temos que h é sobrejetor.

Além disso, $\ker h \subsetneq \ker(\pi_M \circ h) = \ker(\operatorname{top}(h) \circ \pi_{P(M)}) = \ker \pi_{P(M)}$, pois $\operatorname{top}(h)$ é um isomorfismo, ou seja, $\ker h = \operatorname{rad} P(M)$ e, pelo item (5) da da Proposição 1.5.9, temos que h é uma resolução projetiva.

Agora, provemos o item (2). Seja $h' : P' \to M$ uma resolução projetiva de um módulo M em mod A. Como a função $h : P(M) \to M$ construída acima é um epimorfismo, a projetividade de P' nos garante que existe um homomorfismo $g : P' \to P(M)$ em mod A tal que $h \circ g = h'$. Mais uma vez pelo Lema 1.5.17, temos que g é sobrejetor.

Analogamente, podemos mostrar que existe um epimorfismo $f : P(M) \to P'$ de forma que $h' \circ f = h$. Portanto, temos $\dim P(M) \leq \dim P' \leq \dim P(M)$ e, com isso, $\dim P(M) = \dim P'$. Logo, $g : P' \to P(M)$ é um isomorfismo. ■

Abaixo, veremos que todo módulo semissimples em mod A é isomorfo ao *top* de algum módulo projetivo em mod A. Dualizando este resultado, poderíamos concluir que todo módulo semissimples em mod A também é isomorfo ao *socle* de algum módulo injetivo em mod A.

Corolário 1.5.21: Considere A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Temos que o funtor $\operatorname{top} : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A$ induz uma bijeção entre classes de isomorfismos dos módulos projetivos em mod A e classes de isomorfismo dos módulos semissimples em mod A.

Demonstração: Considere então o funtor $\operatorname{top} : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A$ que associa um módulo M em mod A a $\operatorname{top}(M)$ em mod A. Pelo Corolário 1.5.11, temos que $\operatorname{top}(M)$ é semissimples.

Como estamos em dimensão finita, temos que $M \cong \text{rad}\, M$ em mod A se, e somente se, $M = 0$. Portanto, $\text{top}(M) = 0$ se, e somente se, $M = 0$.

Tome então $M \neq 0$ um módulo semissimples em mod A. Pelo Corolário 1.5.13, temos $M \cong \text{top}(M)$. Além disso, pelo item (1) do Teorema 1.5.20, temos que existe uma resolução projetiva $h_M : P(M) \to M$ e $\text{top}(P(M)) \cong \text{top}(M) \cong M$, em que $P(M)$ é um módulo projetivo não nulo.

Claramente temos que, se P_1 e P_2 são módulos projetivos isomorfos em mod A, então $\text{top}(P_1) \cong \text{top}(P_2)$. Dessa forma, temos que top : mod $A \to$ mod A induz uma função sobrejetora entre as classes de isomorfismo de módulos projetivos em mod A e classes de isomorfismo de módulos semissimples em mod A.

Vamos mostrar agora que essa função também é injetora.

Considere dois módulos semissimples M e N em mod A tais que $M \cong N$. Se forem nulos, o resultado segue trivialmente. Suponha então M e N não nulos. Analogamente ao feito acima, existem resoluções projetivas $h_M : P(M) \to M$ e $h_N : P(N) \to N$ e isomorfismos $\text{top}(P(M)) \cong \text{top}(M) \cong M$ e $\text{top}(P(N)) \cong \text{top}(N) \cong N$.

No entanto, se $\psi : M \to N$ é um isomorfismo, temos que $\psi \circ h_M : P(M) \to N$ é uma resolução projetiva e, pelo item (2) do Teorema 1.5.20, temos então que $P(M) \cong P(N)$. ■

A proposição abaixo é mais uma consequência do Teorema de Krull-Schmidt e nos dá uma descrição da estrutura dos módulos injetivos não nulos em mod A. Ela é o último passo que nos falta para provar o resultado sobre o funtor soc.

Proposição 1.5.22: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e $e_1, \ldots, e_n \in A$ idempotentes primitivos e dois-a-dois ortogonais tais que $1_A = e_1 + \cdots + e_n$. Então, todo módulo injetivo não nulo E em mod A é uma soma direta $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$, em que cada E_j, para $j = 1, \ldots, m$, é isomorfo a um módulo $(Ae_i)^*$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstração: Seja E um módulo injetivo em mod A. Como vimos na Proposição 1.3.4, E^* é um módulo projetivo em mod A^{op}.

Pelo Teorema de Krull-Schmidt, existe uma decomposição $E^* = P_1 \oplus \cdots \oplus P_m$ em que cada P_i é um submódulo de E^* indecomponível em mod A^{op}.

Como E^* é projetivo, pelo item (1) do Teorema 1.3.2, temos que existe um módulo P em mod A^{op} tal que $E^* \oplus P$ é livre, ou seja, existe $r \geq 1$ tal que $E^* \oplus P \cong ({}_AA)^r$.

Mais uma vez pelo Teorema de Krull-Schmidt, podemos decompor $P = P'_1 \oplus \cdots \oplus P'_s$, em que cada P'_j é um submódulo indecomponível de P em mod A^{op}.

A Proposição 1.4.4 nos garante que existe uma decomposição ${}_AA = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$ em que cada Ae_i é um A-módulo à esquerda indecomponível e projetivo.

Dessa forma, temos o seguinte isomorfismo:

$$P_1 \oplus \cdots \oplus P_m \oplus P_1' \oplus \cdots \oplus P_s' \cong (Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n)^r.$$

Lançando mão do Teorema de Krull-Schmidt uma vez mais, temos que, em particular, cada P_j, com $j = 1, \ldots, m$, é isomorfo a um módulo da forma Ae_i para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Agora, note que $E \cong (E^*)^* = P_1^* \oplus \cdots \oplus P_m^*$. Denotando $E_j = P_j^*$ para $j \in \{1, \ldots, m\}$, temos que $E_j \cong (Ae_i)^*$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$, como desejávamos. ■

Similar ao que fizemos acima, com o seguinte resultado concluímos que todo módulo simples em mod A é isomorfo ao *socle* de algum módulo injetivo e indecomponível não nulo em mod A. Dualizando este resultado novamente, poderíamos concluir que todo módulo simples em mod A também é isomorfo ao *top* de algum módulo projetivo e indecomponível não nulo em mod A.

Corolário 1.5.23: Considere A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Temos que o funtor soc : mod $A \to$ mod A induz uma bijeção entre classes de isomorfismos dos módulos injetivos e indecomponíveis não nulos em mod A e classes de isomorfismos dos módulos simples em mod A.

Demonstração: À luz da Proposição 1.4.4, escreva ${}_AA = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$, em que cada Ae_i é um A-módulo à esquerda indecomponível e projetivo.

Observe que, se E é um módulo injetivo, indecomponível e não nulo em mod A, a Proposição 1.5.22 nos garante que $E \cong (Ae_i)^*$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Assim, considerando o Lema 1.5.12, temos soc$(E) \cong$ soc$((Ae_i)^*) \cong (\text{top}(Ae_i))^*$. Note que $\text{top}(Ae_i) = Ae_i/\operatorname{rad}(Ae_i) = Ae_i/(\operatorname{rad} A)e_i$ em mod A^{op}. Portanto, pela Proposição 1.5.15, como Ae_i é um módulo indecomponível em mod A^{op}, temos que $Ae_i/(\operatorname{rad} A)e_i$ é um módulo simples como $A/\operatorname{rad} A$-módulo à esquerda e, consequentemente, como A-módulo à esquerda, utilizando o Lema 1.5.10. Portanto, soc$(E) \cong (\text{top}(Ae_i))^*$ é simples em mod A.

Dessa forma, temos que soc : mod $A \to$ mod A leva módulos injetivos, indecomponíveis e não nulos em módulos simples, de fato.

Sejam então E_1 e E_2 dois módulos injetivos, indecomponíveis e não nulos em mod A isomorfos. Dessa forma, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $E_1 \cong E_2 \cong (Ae_i)^*$. Logo,

$$\text{soc}(E_1) \cong (\text{top}(Ae_i))^* \cong \text{soc}(E_2).$$

Por outro lado, se S é um módulo simples em mod A, temos S^* simples em mod A^{op}. Logo, pelo Corolário 1.5.16, temos $S^* \cong Ae_i/(\operatorname{rad} A)e_i = \text{top}(Ae_i)$ em mod A^{op}. Dessa forma, temos

$$S \cong (S^*)^* \cong (\text{top}(Ae_i))^* \cong \text{soc}((Ae_i)^*)$$

e $(Ae_i)^*$ é um módulo injetivo, indecomponível e não nulo em mod A.

Por fim, suponha que soc$((Ae_i)^*) \cong$ soc$((Ae_j)^*)$ para alguns $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Só nos falta mostrar que, nesse caso, $(Ae_i)^* \cong (Ae_j)^*$.

Note que, se soc$((Ae_i)^*) \cong$ soc$((Ae_j)^*)$, então (soc$((Ae_i)^*))^* \cong$ (soc$((Ae_j)^*))^*$, ou seja, pelo Lema 1.5.12, top$(Ae_i) \cong$ top(Ae_i) em mod A^{op}. Como já vimos, as projeções canônicas $\pi_i : Ae_i \to$ top(Ae_i) e $\pi_j : Ae_j \to$ top(Ae_j) são resoluções projetivas. Como top$(Ae_i) \cong$ top(Ae_j), temos uma resolução projetiva $Ae_j \to$ top(Ae_i). Pelo item (2) do Teorema 1.5.20, concluímos que $Ae_i \cong Ae_j$ e, portanto, $(Ae_i)^* \cong (Ae_j)^*$. ■

Agora, observamos que, dados uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita A, um A-módulo M e um idempotente $e \in A$, Hom$_A(eA, M)$ é isomorfo a Me em mod eAe e, em seguida, calcularemos o radical de Jacobson da $\Bbbk$-álgebra eAe.

Lema 1.5.24: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, $e \in A$ um idempotente e M um módulo em mod A. Assim, a aplicação $\Bbbk$-linear

$$\theta_M^e : \text{Hom}_A(eA, M) \to Me,$$

definida por $\theta_M^e(\varphi) = \varphi(e) = \varphi(e)e$ para $\varphi \in \text{Hom}_A(eA, M)$, é um isomorfismo de eAe-módulos à direita.

Demonstração: A demonstração é direta. Basta observar que θ_M^e é um homomorfismo de eAe-módulos à direita e que a aplicação $\psi_M^e : Me \to \text{Hom}_A(eA, M)$ dada por

$$\psi_M^e(me)(ea) = mea,$$

para $m \in M$ e $a \in A$, define um outro homomorfismo de eAe-módulos à direita de forma que θ_M^e e ψ_M^e sejam mutualmente inversos. ■

Lema 1.5.25: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e $e \in A$ um idempotente. Assim, rad$(eAe) = (\text{rad}\, A) \cap eAe = e(\text{rad}\, A)e$. Além disso, $eAe/\,\text{rad}(eAe) \cong \overline{e}B\overline{e}$, em que $\overline{e} = e + \text{rad}\, A$ e $B = A/\,\text{rad}\, A$.

Demonstração: Primeiramente, considere $a \in$ rad(eAe). Vamos mostrar que $1_A - ba$ possui um inverso à esquerda para todo $b \in A$ e, à luz do Lema 1.5.2, concluiremos que $a \in$ rad A.

Fixe $b \in A$. Como $a \in$ rad(eAe) e $ebe \in eAe$, o mesmo lema mencionado acima nos garante que existe $c \in eAe$ tal que $c(e - ebea) = e$, pois $1_{eAe} = e$. Como $a, c \in eAe$, temos

$ce = c$, $ea = a = ae$. Portanto,

$$ba = bae = ba(c(e - ebea)) = ba(ce)(1_A - bea) = bac(1_A - ba).$$

Dessa forma,

$$(1_A + bac)(1_A - ba) = 1_A - ba + bac(1_A - ba) = 1_A - ba + ba = 1_A.$$

Com isso, mostramos que $a \in \operatorname{rad} A$ e, logo, $\operatorname{rad}(eAe) \subseteq (\operatorname{rad} A) \cap eAe$. No entanto, isso nos mostra que $a = eae \in e(\operatorname{rad} A)e$ e, então, temos

$$\operatorname{rad}(eAe) \subseteq (\operatorname{rad} A) \cap eAe \subseteq e(\operatorname{rad} A)e.$$

Agora, faremos uso mais uma vez do lema supramencionado para provar a inclusão $e(\operatorname{rad} A)e \subseteq \operatorname{rad}(eAe)$. Tome então $a \in e(\operatorname{rad} A)e$ e $b \in eAe$. Como $a \in e(\operatorname{rad} A)e$ e $b \in A$, existe $c \in A$ tal que $c(1_A - ba) = 1_A$. Dessa forma,

$$e = e(c(1_A - ba))e = ec(e - ba) = ece(e - ba),$$

ou seja, ece é um inverso à esquerda de $e - ba$ em eAe e, portanto, $a \in \operatorname{rad}(eAe)$.

Com isso, concluímos que $e(\operatorname{rad} A)e \subseteq \operatorname{rad}(eAe)$ e, assim, seguem as igualdades que buscávamos.

Por fim, temos que $\psi : eAe \to \overline{e}B\overline{e}$ definido por $\psi(eae) = \overline{eae}$ é um homomorfismo sobrejetor cujo núcleo é $e(\operatorname{rad} A)e$. Logo, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos $eAe/e(\operatorname{rad} A)e \cong \overline{e}B\overline{e}$. ■

Encerramos a seção apresentando um último resultado sobre a relação entre os módulos top e socle. Ele será de grande importância na demonstração do Teorema 2.3.7, como mencionamos anteriormente.

Proposição 1.5.26: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um conjunto de idempotentes primitivos, dois-a-dois ortogonais, em A com $1_A = e_1 + \cdots + e_n$. Então, $\operatorname{soc}((Ae_i)^*) \cong e_iA/e_i \operatorname{rad} A = \operatorname{top}(e_iA)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstração: Fixe $i \in \{1, \dots, n\}$. Como vimos na Proposição 1.4.4, Ae_i é um A-módulo à esquerda projetivo e indecomponível. Portanto, pela Proposição 1.3.4, $(Ae_i)^*$ é injetivo e indecomponível em $\operatorname{mod} A$ e, dessa vez pelo Corolário 1.5.23, temos que $\operatorname{soc}((Ae_i)^*)$ é um módulo simples em $\operatorname{mod} A$.

Suponha, então, que exista um homomorfismo não nulo $\varphi : e_iA \to \operatorname{soc}((Ae_i)^*)$. Por um lado, temos que ele é sobrejetor, pois $\varphi(e_iA)$ é submódulo de $\operatorname{soc}((Ae_i)^*)$. Dessa forma, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos

$$\frac{e_iA}{\ker\varphi} \cong \operatorname{soc}((Ae_i)^*).$$

Por outro lado, tendo em vista esse isomorfismo acima, o Corolário 1.5.11 nos garante que $\operatorname{rad}(Ae_i) \subseteq \ker\varphi$, pois $\operatorname{soc}((Ae_i)^*)$ é semissimples. Assim, pelo Teorema da Correspondência, temos que $e_iA/\ker\varphi$ é isomorfo a um submódulo de $e_iA/\operatorname{rad}(e_iA)$. Porém, a Proposição 1.5.15 nos dá que, como e_iA também é indecomponível, $e_iA/\operatorname{rad}(e_iA)$ é simples. Logo, como $\varphi \neq 0$, temos $\operatorname{rad}(e_iA) \cong \ker\varphi$ e

$$\operatorname{top}(e_iA) = \frac{e_iA}{\operatorname{rad}(e_iA)} \cong \frac{e_iA}{\ker\varphi} \cong \operatorname{soc}((Ae_i)^*),$$

como desejamos demonstrar.

Temos então que provar que existe um tal homomorfismo φ.

Note que, do Lema 1.5.12, temos que

$$\operatorname{soc}((Ae_i)^*) \cong (\operatorname{top}(Ae_i))^* = \left(\frac{Ae_i}{(\operatorname{rad}A)e_i}\right)^*.$$

Portanto, basta mostrarmos que

$$\operatorname{Hom}_A\left(e_iA, \left(\frac{Ae_i}{(\operatorname{rad}A)e_i}\right)^*\right) \neq 0.$$

Pelo Lema 1.5.24, temos um isomorfismo de e_iAe_i-módulos à direita

$$\operatorname{Hom}_A\left(e_iA, \left(\frac{Ae_i}{(\operatorname{rad}A)e_i}\right)^*\right) \cong \left(\frac{Ae_i}{(\operatorname{rad}A)e_i}\right)^* e_i.$$

Agora, para facilitar a notação, denote $B = A/\operatorname{rad}A$ e $\overline{e_i} = e_i + \operatorname{rad}A$ e defina uma aplicação $\psi : (B\overline{e_i})^*e_i \to (\overline{e_i}B\overline{e_i})^*$ por

$$\psi(\zeta \cdot e_i)(\overline{e_i}b\overline{e_i}) = \zeta(\overline{e_i}b\overline{e_i}) = \zeta(e_i \cdot b\overline{e_i}) = (\zeta \cdot e_i)(b\overline{e_i})$$

para todos $\zeta \in (B\overline{e_i})^*$ e $b \in B$. Temos claramente que ψ é injetor e, portanto, um isomorfismo de $\Bbbk$-espaços. Logo, como $\Bbbk$-espaços,

$$\left(\frac{Ae_i}{(\operatorname{rad}A)e_i}\right)^* e_i \cong \left(\frac{e_iAe_i}{e_i(\operatorname{rad}A)e_i}\right)^*.$$

Pelo Lema 1.5.25, temos que $\mathrm{rad}(e_iAe_i) = e_i(\mathrm{rad}\,A)e_i$ e, assim, como $\Bbbk$-espaços,

$$\mathrm{Hom}_A\left(e_iA, \left(\frac{Ae_i}{(\mathrm{rad}\,A)e_i}\right)^*\right) \cong \left(\frac{e_iAe_i}{e_i(\mathrm{rad}\,A)e_i}\right)^* \neq 0,$$

concluindo nossa demonstração. ■

Capítulo 2

Álgebras de Frobenius e Simétricas

Neste capítulo, fazemos nossas investigações sobre *álgebras de Frobenius* e uma subclasse dessas álgebras, as *álgebras simétricas*. Seguimos, na primeira seção, uma abordagem "histórica" com as demonstrações dos *Teoremas de Brauer-Nesbitt-Nakayama* para encontrar outras caracterizações para esses conceitos. Na segunda seção, buscamos entender mais a fundo o que esses teoremas nos dizem. Para isso, introduzimos os conceitos de homomorfismo de Frobenius e o automorfismo de Nakayama, que emergem desses teoremas, e encontramos mais algumas caracterizações para as álgebras tema deste capítulo. Nessas duas seções, concentramos todos os resultados sobre álgebras de Frobenius que serão necessários nos capítulos seguintes.

De qualquer forma, mesmo já tendo apresentado toda a teoria necessária para seguir em frente, resolvemos dedicar uma última seção a alguns resultados muito interessantes que essas álgebras satisfazem. Começamos a seção aplicando parte do que foi estudado no capítulo anterior para introduzir o conceito de *álgebra autoinjetiva* e, provamos que essas álgebras englobam as álgebras de Frobenius. Em seguida, demonstramos uma equivalência para as álgebras autoinjetivas, que é o fato de as classes dos módulos projetivos e dos módulos injetivos coincidirem. Depois, introduzimos também o conceito de *álgebra básica*, que é uma condição suficiente para que uma álgebra autoinjetiva seja também uma álgebra de Frobenius. Por fim, utilizamos a discussão feita nessa seção para provar que álgebras autoinjetivas são *Morita-equivalentes* a álgebras de Frobenius, ou seja, as categorias de módulos dessas álgebras são essencialmente as mesmas.

A principal referência deste capítulo é [SY11]. Detalhes que são deixados de fora aqui podem ser encontrados nesse livro.

2.1 Teoremas de Brauer-Nesbitt-Nakayama

Antes de apresentar as definições de álgebra de Frobenius e álgebra simétrica, vamos considerar um caso particular.

Sejam G um grupo finito e $\Bbbk$ um corpo. Sabemos que os elementos de G formam uma base para a $\Bbbk$-álgebra $\Bbbk G$. Assim, todo elemento de $\Bbbk G$ pode ser escrito da forma $\sum_{g\in G} \lambda_g g$, com $\lambda_g \in \Bbbk$ para todo $g \in G$.

Como $\Bbbk G$ é um $\Bbbk G$-módulo à direita livre com base $\{1_{\Bbbk G}\}$, para definir um homomorfismo de $\Bbbk G$-módulos à direita com domínio em $\Bbbk G$, basta defini-lo em $1_{\Bbbk G}$. Assim, defina $\theta : \Bbbk G \to (\Bbbk G)^*$ como sendo o homomorfismo de $\Bbbk G$-módulos à direita (com a ação à direita de $\Bbbk G$ em $(\Bbbk G)^*$ definida na Equação 1.1) tal que, para cada $g \in G$, temos

$$\theta(1_{\Bbbk G})(g) = \begin{cases} 1 & \text{se } g = 1_{\Bbbk G}; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e, dessa forma, $\theta(g)(h) = \delta_{g,h^{-1}}$ para todos $g, h \in G$. Estendendo linearmente, temos que, a cada $x = \sum_{g\in G} \lambda_g g \in \Bbbk G$, está associada a transformação linear $\theta(x) : \Bbbk G \to \Bbbk$ dada por

$$\theta\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G} \gamma_h h\right) = \sum_{g\in G} \lambda_g \gamma_{g^{-1}}.$$

Note que, se $x = \sum_{g\in G} \lambda_g g \in \ker\theta$, em particular, $\lambda_{g^{-1}} = \theta(x)(g) = 0$ para todo $g \in G$, ou seja, $x = 0$. Logo, θ é injetora. Além disso, como G é um grupo finito, temos que $\Bbbk G$ tem dimensão finita e, portanto, $\dim \Bbbk G = \dim(\Bbbk G)^*$. Assim, temos que θ é um isomorfismo de $\Bbbk G$-módulos à direita.

No entanto, por método análogo, podemos concluir que θ também é um isomorfismo de $\Bbbk G$-módulos à esquerda. Portanto, temos que $\Bbbk G$ e $(\Bbbk G)^*$ são isomorfos como $\Bbbk G$-bimódulos. Essa discussão nos motiva a definir o seguinte:

Definição 2.1.1: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$. Dizemos que A é uma $\Bbbk$-*álgebra de Frobenius* se A e A^* são isomorfos como A-módulos à direita. Além disso, dizemos que A é uma $\Bbbk$-*álgebra simétrica* se A e A^* são isomorfos como A-bimódulos.

Poderíamos também definir álgebra de Frobenius considerando os módulos à esquerda, como veremos mais adiante no Primeiro Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama.

Voltando à discussão acima, vamos observar um pouco o comportamento da transformação linear $\varphi := \theta(1_{\Bbbk G}) : \Bbbk G \to \Bbbk$, que é dada por

$$\varphi\left(\sum_{g\in G}\gamma_g g\right) = \gamma_{1_G}.$$

Suponha que exista I um ideal à direita de $\Bbbk G$ tal que $\varphi(I) = 0$. Assim, para qualquer $a \in I$, como $a\Bbbk G \subseteq I$, temos

$$0 = \varphi(a\Bbbk G) = \theta(1_{\Bbbk G})(a\Bbbk G) = (\theta(1_{\Bbbk G}) \cdot a)(\Bbbk G) = \theta(a)(\Bbbk G),$$

ou seja, $\theta(a) = 0$ e, como θ é isomorfismo, $a = 0$. Portanto, $I = 0$.

No resultado a seguir, veremos que isso acontece para qualquer álgebra de Frobenius e, mais do que isso, caracteriza essas álgebras.

Teorema 2.1.2: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$. Temos que A é uma álgebra de Frobenius se, e somente se, existe uma forma $\Bbbk$-linear $\varphi : A \to \Bbbk$ cujo núcleo $\ker\varphi$ não contém ideais à direita de A não nulos.

Demonstração: Observe que, no comentário acima, não utilizamos nada especial sobre a álgebra $\Bbbk G$ além da existência do isomorfismo θ, ou seja, além do fato de ela ser uma álgebra de Frobenius. Portanto, a mesma demonstração garante a primeira implicação deste teorema. Demonstremos, então, a recíproca.

Suponha que exista uma forma $\Bbbk$-linear $\varphi : A \to \Bbbk$ tal que $\ker\varphi$ não contém ideais de A à direita não nulos. Como A é um A-módulo à direita livre com base $\{1_A\}$, podemos (como fizemos no caso particular para $\Bbbk G$) definir um homomorfismo de A-módulos à direita $\theta : A \to A^*$ definindo $\theta(1_A) = \varphi$ e estendendo para todos elementos $a \in A$ como $\theta(a) = \varphi \cdot a$.

Note que θ é injetor pois, dado $a \in \ker\theta$, temos $0 = \theta(a)(A) = \varphi(aA)$, donde concluímos que $aA = 0$ e, então, $a = 0$. Por fim, como $\dim A = \dim A^*$, temos que θ é um isomorfismo de A-módulos à direita. ∎

Com a próxima definição, poderemos demonstrar mais uma equivalência que será parte do *Primeiro Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama*.

Definição 2.1.3: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$. Dizemos que uma forma $\Bbbk$-bilinear $(\,|\,) : A \times A \to \Bbbk$ é

- *Associativa* se $(ab\,|\,c) = (a\,|\,bc)$ para todos $a, b, c \in A$;
- *Não degenerada à esquerda* se, para todo elemento $a \in A$ não nulo, a forma linear $(a\,|\,-) : A \to \Bbbk$ é não nula;
- *Não degenerada à direita* se, para todo elemento $a \in A$ não nulo, a forma linear $(-\,|\,a) : A \to \Bbbk$ é não nula;

- *Não degenerada* se for não degenerada à esquerda e à direita.

Na realidade, como veremos a seguir, temos que uma forma $\Bbbk$-bilinear sobre uma álgebra de dimensão finita é não degenerada à esquerda se, e somente se, ela também é não degenerada à direita.

Observação 2.1.4: Considere A uma $\Bbbk$-álgebra com uma base $\{a_1, \dots, a_n\}$. Observe que uma matriz $P = [p_{ij}]_{ij} \in \mathbb{M}_n(\Bbbk)$ determina a forma $\Bbbk$-bilinear $(\,|\,)_P : A \times A \to \Bbbk$ tal que $(a_i \,|\, a_j)_P = p_{ij}$ para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Reciprocamente, toda forma $\Bbbk$-bilinear $(\,|\,) : A \times A \to \Bbbk$ é da forma $(\,|\,) = (\,|\,)_P$, em que $P = [p_{ij}]_{ij} \in \mathbb{M}_n(\Bbbk)$ com $p_{ij} = (a_i \,|\, a_j)$ para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Lema 2.1.5: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e $P = [p_{ij}]_{ij} \in \mathbb{M}_n(\Bbbk)$. A forma $(\,|\,)_P$ é não degenerada à direita (ou à esquerda) se, e somente se, a matriz P é inversível.

Demonstração: Seja $\{a_1, \dots, a_n\}$ uma base de A como $\Bbbk$-espaço vetorial. Primeiramente, note que, dado um elemento $a = \sum_{j=1}^n \xi_j a_j \in A$, temos, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$(a_k \,|\, a)_P = \sum_{j=1}^n \xi_j \,(a_k \,|\, a_j)_P = \sum_{j=1}^n \xi_j p_{kj}.$$

Se P for inversível, então suas colunas são linearmente independentes, isto é, dado $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Bbbk^n$, temos

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \xi_i p_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \xi_i p_{ni} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \xi_i \begin{bmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} = 0 \iff \xi_i = 0 \;\forall i = 1, \dots, n. \tag{2.1}$$

Portanto, se $(- \,|\, a)_P = 0$ para um elemento $a = \sum_{j=1}^n \xi_j a_j \in A$, então $\sum_{j=1}^n \xi_j p_{kj} = 0$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Pela equivalência 2.1, temos $a = 0$, concluindo que $(\,|\,)_P$ é não degenerada à direita.

Por outro lado, se $(\,|\,)_P$ é não degenerada à direita, então, tomando $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Bbbk^n$, vale a equivalência 2.1, mostrando que P é inversível.

Analogamente, temos que $(a \,|\, -)_P \neq 0$ se, e somente se, as linhas de P são linearmente independentes, o que também é equivalente à inversibilidade da matriz P. ■

Uma consequência imediata do lema acima é:

Corolário 2.1.6: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Temos que uma forma $\Bbbk$-bilinear $(\,|\,) : A \times A \to \Bbbk$ é não degenerada à esquerda se, e somente se, é não degenerada à direita.

Agora, voltemos ao nosso exemplo de álgebra de grupo. Tome $\varphi = \theta(1_{\Bbbk G}) \in (\Bbbk G)^*$

como anteriormente. Defina uma forma $\mathbb{k}$-bilinear $(\,|\,) : \mathbb{k}G \times \mathbb{k}G \to \mathbb{k}$ por $(a\,|\,b) = \varphi(ab)$. Dessa forma, se $a = \sum_{g\in G} \lambda_g g$ e $b = \sum_{h\in G} \gamma_h h$, então

$$(a\,|\,b) = \varphi(ab) = \sum_{g,h\in G} \lambda_g \gamma_h \delta_{1_G,(gh)^{-1}}.$$

Observe também que

$$(ab\,|\,c) = \varphi((ab)c) = \varphi(a(bc)) = (a\,|\,bc)$$

para todos $a, b, c, \in \mathbb{k}G$, e, portanto, $(\,|\,)$ é associativa.

Além disso, tomando $a \in \mathbb{k}G$, se $(a\,|\,-) = 0$, então $\varphi(a\mathbb{k}G) = 0$. Mas $a\mathbb{k}G$ é um ideal à direita de $\mathbb{k}G$ e, pelo que vimos anteriormente, temos então $a\mathbb{k}G = 0$, ou seja, $a = 0$. Utilizando o Corolário 2.1.6, concluímos que $(\,|\,)$ é também não degenerada.

Tendo em vista essa discussão, podemos enunciar o próximo teorema.

Teorema 2.1.7: Seja A uma $\mathbb{k}$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{k}$. São equivalentes:

i. Existe uma forma $\mathbb{k}$-bilinear associativa e não degenerada $(\,|\,) : A \times A \to \mathbb{k}$;
ii. Existe uma forma $\mathbb{k}$-linear $\varphi : A \to \mathbb{k}$ tal que $\ker \varphi$ não contém ideais à direita de A não nulos.

Demonstração: A demonstração (ii) $\Rightarrow$ (i) é justamente a discussão acima, pois não utilizamos nada além dessa hipótese e de $\mathbb{k}G$ ter dimensão finita sobre $\mathbb{k}$. Provemos então a outra direção.

Seja $(\,|\,) : A \times A \to \mathbb{k}$ uma forma associativa $\mathbb{k}$-bilinear não degenerada. Defina uma forma $\mathbb{k}$-linear $\varphi : A \to \mathbb{k}$ por $\varphi(a) = (a\,|\,1_A) = (1_A\,|\,a)$ e seja I um ideal de A à direita tal que $I \subseteq \ker \varphi$. Dado $a \in I$, temos que, para todo $b \in A$,

$$(a\,|\,b) = (ab\,|\,1_A) = \varphi(ab) = 0,$$

pois, como I é ideal de A à direita e $a \in I$, temos $ab \in I$.

Logo, $(a\,|\,-) = 0$ e, assim, $a = 0$, pois $(\,|\,)$ é não degenerada. Portanto, $I = 0$. ■

Exemplo 2.1.8: Considere n um inteiro positivo. A aplicação traço $\mathrm{Tr} : \mathbb{M}_n(\mathbb{k}) \to \mathbb{k}$ é uma aplicação linear e, assim, podemos definir uma forma $\mathbb{k}$-bilinear associativa tomando $(\,|\,) : \mathbb{M}_n(\mathbb{k}) \times \mathbb{M}_n(\mathbb{k}) \to \mathbb{k}$ tal que $(A\,|\,B) = \mathrm{Tr}(AB)$ para todos $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{k})$.

Se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{k})$ é uma matriz não nula, seja a_{rs} uma entrada não nula de A. Assim,

$AE_{sr} = [c_{ij}]_{ij}$, em que E_{ij} é a matriz com a entrada (i, j) igual a 1 e as demais nulas e

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq r; \\ a_{is} & \text{se } j = r. \end{cases}$$

Logo,

$$(A \,|\, E_{sr}) = \text{Tr}(AE_{sr}) = \text{Tr}([c_{ij}]) = c_{rr} = a_{rs} \neq 0$$

e, portanto, (|) é não degenerada.

Unindo agora os Teoremas 2.1.2 e 2.1.7, temos que $\mathbb{M}_n(\Bbbk)$ é uma álgebra de Frobenius.

A próxima discussão refere-se a uma abordagem histórica, com o resultado mencionado na introdução deste capítulo que trouxe a primeira aparição do que foi considerado, posteriormente, uma álgebra de Frobenius.

Definição 2.1.9: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e $\{a_1, \ldots, a_n\}$ uma base de A como $\Bbbk$-espaço vetorial. Os elementos $\alpha_{ijk} \in \Bbbk$, com $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ tais que

$$a_j a_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk} a_i$$

são chamados de *constantes de estrutura*.

Sobre essas constantes de estrutura, temos o seguinte resultado:

Lema 2.1.10: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita com base $\{a_1, \ldots, a_n\}$ e constantes de estrutura α_{ijk} como acima. Assim:

1. Para todos $j, k, h, l \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk}\alpha_{hil} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ikl}\alpha_{hji};$$

2. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Bbbk$ tais que $1_A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j$. Para todos $i, k \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ijk} = \delta_{ik} \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ikj} = \delta_{ik}.$$

Demonstração: Esses resultados seguem a partir da associatividade de A e da propriedade da unidade. ■

Fixe uma base $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de A. Note que as estruturas de A como A-módulo regular nos dão as *representações regulares* $L : A \to \mathbb{M}_n(\Bbbk)$ e $R^t : A \to \mathbb{M}_n(\Bbbk)$ tais que $L(a)$ é a matriz da aplicação $\Bbbk$-linear $l_a : A \to A$ dada por $l_a(x) = ax$ e, analogamente, $R^t(a)$ é a matriz transposta da aplicação $\Bbbk$-linear $r_a : A \to A$ dada por $r_a(x) = xa$. Dessa forma, temos, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$L(a_j) = [\alpha_{ijk}]_{ik};$$
$$R^t(a_k) = [\alpha_{ijk}]^t_{ij} = [\alpha_{ijk}]_{ji},$$

Exemplo 2.1.11: Seja A o anel das matrizes triangulares superiores em $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. A é uma $\mathbb{C}$-álgebra com base $\{a_1 = E_{11}, a_2 = E_{12}, a_3 = E_{22}\}$.

Assim, as constantes de estrutura são:

- $\alpha_{111} = 1$, $\alpha_{112} = 0$, $\alpha_{113} = 0$;
- $\alpha_{211} = 0$, $\alpha_{212} = 1$, $\alpha_{213} = 0$;
- $\alpha_{311} = 0$, $\alpha_{312} = 0$, $\alpha_{313} = 0$;
- $\alpha_{121} = 0$, $\alpha_{122} = 0$, $\alpha_{123} = 0$;
- $\alpha_{221} = 0$, $\alpha_{222} = 0$, $\alpha_{223} = 1$;
- $\alpha_{321} = 0$, $\alpha_{322} = 0$, $\alpha_{323} = 0$;
- $\alpha_{131} = 0$, $\alpha_{132} = 0$, $\alpha_{133} = 0$;
- $\alpha_{231} = 0$, $\alpha_{232} = 0$, $\alpha_{233} = 0$;
- $\alpha_{331} = 0$, $\alpha_{332} = 0$, $\alpha_{333} = 1$.

Dessa forma, as imagens das representações regulares são:

$$L(a_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad L(a_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad L(a_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^t(a_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R^t(a_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R^t(a_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note, porém, que não existe $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ tal que $QL(a_j) = R^t(a_j)Q$ para todos $j = 1, 2, 3$, ou seja, L e R^t não são equivalentes.

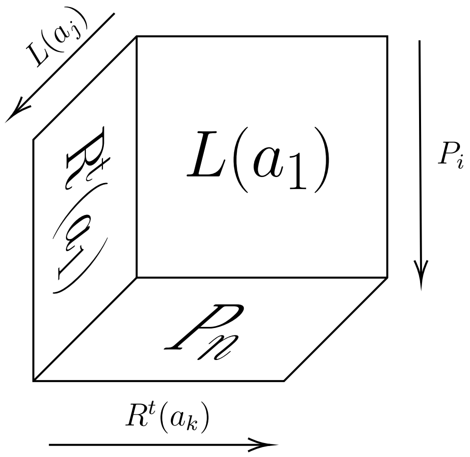
Vamos construir agora a tal "matriz especial" utilizada no trabalho de Frobenius que mencionamos na Introdução e mostrar de que maneira ela se relaciona com essas representações regulares.

Para uma álgebra A de dimensão n sobre um corpo $\Bbbk$ e com constantes de estrutura α_{ijk}, com $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$, defina $P_i = [\alpha_{ijk}]_{jk} \in \mathbb{M}_n(\Bbbk)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dessa forma, dado um elemento $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{k}^n$, definimos a matriz

$$P(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i P_i \in \mathbb{M}_n(\mathbb{k}),$$

que foi chamada de *parastrophe matrix* por Frobenius em [Fro03].

Organizando as n^3 constantes de estrutura em um cubo, temos a seguinte disposição:



Exemplo 2.1.12: Note que, voltando ao Exemplo 2.1.11, temos

$$P(\xi) = \xi_1 P_1 + \xi_2 P_2 + \xi_3 P_3,$$

com $P_i = [\alpha_{ijk}]_{jk}$ e $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{C}^3$, ou seja,

$$P(\xi) = \xi_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \xi_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix}.$$

Por ora, apenas observe que essa matriz $P(\xi)$ não é inversível para nenhum $\xi \in \mathbb{C}^3$.

Veremos a seguir como se comportam essas matrizes P_i que definimos acima.

Lema 2.1.13: Se A é uma $\mathbb{k}$-álgebra de dimensão finita e L e R^t são as representações regulares de A sobre $\mathbb{k}$, para todos $\xi \in \mathbb{k}^n$ e $a \in A$, temos

$$P(\xi)L(a) = R^t(a)P(\xi).$$

Demonstração: Para $h, k \in \{1, \dots, n\}$, temos, para uma base $\{a_1, \dots, a_n\}$ fixada,

$$P_h L(a_k) = [\alpha_{hji}]_{ji}[\alpha_{ikl}]_{il} = \left[\sum_{i=1}^n \alpha_{hji}\alpha_{ikl}\right]_{jl},$$
$$R^t(a_k)P_h = [\alpha_{ijk}]_{ij}^t[\alpha_{hil}]_{il} = [\alpha_{ijk}]_{ji}[\alpha_{hil}]_{il} = \left[\sum_{i=1}^n \alpha_{ijk}\alpha_{hil}\right]_{jl}.$$

Como $\Bbbk$ é um corpo, o Lema 2.1.10 nos dá que, para todos $h, k \in \{1, \dots, n\}$, temos $P_h L(a_k) = R^t(a_k) P_h$ e, utilizando a linearidade de L e de R^t, temos que isso vale para todo elemento de A. Assim,

$$P(\xi)L(a) = \sum_{h=1}^{n} \xi_h P_h L(a) = \sum_{h=1}^{n} \xi_h R^t(a) P_h = R^t(a) \sum_{h=1}^{n} \xi_h P_h = R^t(a) P(\xi)$$

para todos $\xi \in \Bbbk^n$ e $a \in A$. ■

Proposição 2.1.14: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra com base $\{a_1, \dots, a_n\}$. Defina

$$\mathbb{P}(A) = \{S \in \mathbb{M}_n(\Bbbk) \mid SL(a) = R^t(a)S \ \ \forall a \in A\}.$$

Com isso, temos que $\{P_1, \dots, P_n\}$ é uma base de $\mathbb{P}(A)$.

Demonstração: Primeiramente, note que $\mathbb{P}(A)$ é um subespaço de $\mathbb{M}_n(\Bbbk)$. Vamos mostrar, então, que $\dim \mathbb{P}(A) = n$ e que $\{P_1, \dots, P_n\}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathbb{P}(A)$.

Lembre que, a toda representação $\Phi : A \to \mathbb{M}_n(\Bbbk)$, corresponde o A-módulo à esquerda M_Φ de dimensão n tal que $M_\Phi = \mathbb{M}_{n\times 1}(\Bbbk)$ como $\Bbbk$-espaço vetorial e $a \cdot_\Phi x = \Phi(a)x$ para todos $a \in A$ e $x \in M_\Phi$.

Agora, utilizando essa notação, observe que, para todo $S \in \mathbb{P}(A)$, temos um homomorfismo de A-módulos à esquerda $T_S : M_L \to M_{R^t}$ dado por $T_S(X) = SX$, pois, para todos $a \in A$ e $X \in M_L$,

$$T_S(a \cdot_L X) = T_S(L(a)X) = SL(a)X = R^t(a)SX = a \cdot_{R^t} T_S(X).$$

Dessa forma, temos uma aplicação $\Bbbk$-linear injetora

$$T_{(-)} : \mathbb{P}(A) \to \mathrm{Hom}_A(M_L, M_{R^t})$$

que associa cada matriz $S \in \mathbb{P}(A)$ a um homomorfismo $T_S : M_L \to M_{R^t}$ de A-módulos à esquerda. Porém, se $f : M_L \to M_{R^t}$ é um homomorfismo de A-módulos à esquerda, existe $Q \in \mathbb{M}_n(\Bbbk)$ tal que $f(X) = QX$ para todo $X \in M_L$ e, para todo $a \in A$,

$$QL(a)X = f(a \cdot_L X) = a \cdot_{R^t} f(X) = R^t(a)QX,$$

isto é, $Q \in \mathbb{P}(A)$ e, portanto, a aplicação $T_{(-)}$ é uma bijeção.

Observe também que $M_L \cong A$ como A-módulos à esquerda, pois, como $\{E_1, \dots, E_n\}$ é base de M_L, em que E_i é a matriz com 1 na linha i e 0 nas demais, se $f : M_L \to A$ é o isomorfismo de $\Bbbk$-espaços vetoriais tal que $f(E_i) = a_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, temos

$$f(a_j \cdot E_k) = f(L(a_j)E_k) = f([\alpha_{ijl}]_{il}E_k) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk}E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk}f(E_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk}a_i = a_j a_k = a_j f(E_k).$$

para todos $j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Por linearidade, $f(a \cdot X) = af(X)$ para todos $a \in A$ e $X \in M_L$.

Com isso, obtemos isomorfismos de $\Bbbk$-espaços vetoriais

$$\mathbb{P}(A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(M_L, M_{R^t}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A({}_AA, M_{R^t}) \xrightarrow{\sim} M_{R^t}.$$

Portanto, $\dim \mathbb{P}(A) = \dim M_{R^t} = n$.

Agora, vamos mostrar que $\{P_1, \ldots, P_n\}$ forma uma base de $\mathbb{P}(A)$ como $\Bbbk$-espaço vetorial. Primeiramente, observe que $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{P}(A)$ pelo Lema 2.1.13.

Tome elementos $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Bbbk$ tais que $\gamma_1 P_1 + \cdots + \gamma_n P_n = 0$. Portanto, para todos $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$\gamma_1 \alpha_{1jk} + \cdots + \gamma_n \alpha_{njk} = 0.$$

Como $L(a_j) = [\alpha_{ijk}]_{ik}$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, temos então, denotando por X_i a i-ésima linha de uma matriz $X \in \mathrm{M}_n(\Bbbk)$,

$$\gamma_1 L(a_j)_1 + \cdots + \gamma_n L(a_j)_n = 0$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Assim, como $\{a_1, \ldots, a_n\}$ é base de A, temos, para todo $a \in A$,

$$\gamma_1 L(a)_1 + \cdots + \gamma_n L(a)_n = 0.$$

Tomando $a = 1_A$, temos

$$0 = \gamma_1 L(1_A)_1 + \cdots + \gamma_n L(1_A)_n = \gamma_1 (\mathrm{Id}_n)_1 + \cdots + \gamma_n (\mathrm{Id}_n)_n$$

e, dessa forma, $\gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0$, ou seja, $\{P_1, \ldots, P_n\}$ é um conjunto linearmente independente de elementos de $\mathbb{P}(A)$. Como $\dim_\Bbbk \mathbb{P}(A) = n$, temos então que $\{P_1, \ldots, P_n\}$ é base de $\mathbb{P}(A)$. ■

Tendo em vista os Exemplos 2.1.11 e 2.1.12, podemos nos perguntar se existe uma relação entre a equivalência das representações regulares e a invertibilidade da matriz $P(\xi)$. É justamente essa relação que foi encontrada por Frobenius em [Fro03] e que veremos a seguir.

Teorema 2.1.15: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Então, as representações regulares L e R^t são equivalentes se, e somente se, existe $\xi \in \Bbbk^n$ tal que a matriz $P(\xi)$ é inversível.

Demonstração: Sejam $\{a_1, \ldots, a_n\}$ uma base de A como $\Bbbk$-espaço vetorial e $\alpha_{ijk} \in \Bbbk$, com $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$, as constantes de estrutura.

Primeiramente, suponha que, para algum $\xi \in \Bbbk^n$, a matriz $P(\xi)$ seja inversível. Do Lema 2.1.13, temos que, para todo $a \in A$, $P(\xi)L(a) = R^t(a)P(\xi)$. Como $P(\xi) \in \mathbb{M}_n(\Bbbk)$ é inversível, temos então que as representações L e R^t são equivalentes.

Reciprocamente, suponha que as representações L e R^t sejam equivalentes. Logo, existe uma matriz inversível $P \in \mathbb{M}_n(\Bbbk)$ tal que $PL(a) = R^t(a)P$ para todo $a \in A$.

Em particular, $P \in \mathbb{P}(A)$ e, portanto, pela Proposição 2.1.14, existem $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \Bbbk$ tais que

$$P = \xi_1 P_1 + \cdots + \xi_n P_n = P(\xi),$$

com $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \Bbbk^n$. Assim, $P(\xi)$ é uma matriz inversível. ■

Agora, vamos buscar uma forma de relacionar essas matrizes com os conceitos que já foram estudados.

Lema 2.1.16: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e fixe $\{a_1, \ldots, a_n\}$ uma base de A. Dada uma matriz $P = [p_{ij}]_{ij} \in \mathbb{M}_n(\Bbbk)$, a forma $(\,|\,)_P$ é associativa se, e somente se, $PL(a) = R^t(a)P$ para todo $a \in A$.

Demonstração: A condição de associatividade $(ab \,|\, c)_P = (a \,|\, bc)_P$ é claramente equivalente à condição

$$(a_l a_j \,|\, a_k)_P = (a_l \,|\, a_j a_k)_P \text{ para todos } j, k, l \in \{1, \ldots, n\},$$

pois $\{a_1, \ldots, a_n\}$ é base de A.

Além disso, para todos $j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(a_l a_j \,|\, a_k)_P = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ilj} a_i \,\middle|\, a_k \right)_P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ilj} \, (a_i \,|\, a_k)_P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ilj} p_{ik}$$

e

$$(a_l \mid a_j a_k)_P = \left(a_l \middle| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk} a_i \right)_P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk} (a_l \mid a_i)_P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk} p_{li}.$$

Portanto, a associatividade de $(\,|\,)_P$ é equivalente à condição

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ilj} p_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk} p_{li} \quad \forall j, k, l \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.2}$$

Por outro lado, a condição $PL(a) = R^t(a)P$ para todo $a \in A$ é equivalente à condição

$$PL(a_j) = R^t(a_j)P \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Porém, temos

$$PL(a_j) = [p_{li}]_{li} [\alpha_{ijk}]_{ik} = \left[\sum_{i=1}^{n} p_{li} \alpha_{ijk} \right]_{lk}$$

e

$$R^t(a_j)P = [\alpha_{ilj}]_{il}^t [p_{ik}]_{ik} = [\alpha_{ilj}]_{li} [p_{ik}]_{ik} = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ilj} p_{ik} \right]_{lk},$$

isto é, a condição $PL(a) = R^t(a)P$ para todo $a \in A$ é equivalente à condição

$$\sum_{i=1}^{n} p_{li} \alpha_{ijk} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ilj} p_{ik} \quad \forall j, k, l \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.3}$$

Como $\Bbbk$ é um corpo, as condições (2.2) e (2.3) coincidem e, assim, concluímos a demonstração. ■

Munidos da lista de resultados que demonstramos anteriormente nesta seção, podemos finalmente enunciar o Primeiro Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama com suas equivalências para a definição de álgebra de Frobenius.

Teorema 2.1.17 (Primeiro Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama)**:** Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$. São equivalentes:

i. A é uma álgebra de Frobenius;
ii. Existe um isomorfismo $\theta' : A \to A^*$ de A-módulos à esquerda;
iii. Existe uma forma $\Bbbk$-linear $\varphi : A \to \Bbbk$ tal que $\ker \varphi$ não contém ideais de A à direita não nulos;

iv. Existe uma forma $\Bbbk$-linear $\varphi' : A \to \Bbbk$ tal que $\ker \varphi'$ não contém ideais de A à esquerda não nulos;

v. Existe uma forma $\Bbbk$-bilinear $(\,|\,) : A \times A \to \Bbbk$ associativa e não degenerada;

vi. As representações regulares L e R^t são equivalentes.

Demonstração: A equivalência entre (i) e (iii) é dada pelo Teorema 2.1.2. Por sua vez, o Teorema 2.1.7 garante a equivalência entre (iii) e (v). Mostremos agora a equivalência entre (v) e (vi).

Pelo Teorema 2.1.15, temos que a afirmação (vi) é equivalente à existência de uma matriz inversível da forma $P(\xi)$ para algum $\xi \in \Bbbk^n$, com $n = \dim A$. Supondo então que exista uma tal matriz, juntando a Observação 2.1.4 e os Lemas 2.1.13, 2.1.5 e 2.1.16, temos que, fixada uma base, $(\,|\,)_{P(\xi)}$ é uma forma $\Bbbk$-bilinear associativa e não degenerada. Por outro lado, se $(\,|\,)$ é uma forma $\Bbbk$-bilinear associativa e não degenerada, fixando uma base $\{a_1, \dots, a_n\}$ de A, podemos definir uma matriz P como na Observação 2.1.4 de forma que $(\,|\,)_P = (\,|\,)$ e, pelo Lema 2.1.5, temos que P é uma matriz inversível. Para cada $i = 1, \dots, n$, defina $\xi_i = (a_i \,|\, 1)$ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Temos que

$$P(\xi) = \sum_{h=1}^{n} \xi_h P_h = \sum_{h=1}^{n} (a_h \,|\, 1)\, [\alpha_{hij}]_{ij} = \sum_{h=1}^{n} [(a_h \,|\, 1)\, \alpha_{hij}]_{ij} = \sum_{h=1}^{n} [\alpha_{hij}\, (a_h \,|\, 1)]_{ij} =$$
$$= \left[\left(\sum_{h=1}^{n} \alpha_{hij} a_h \,\middle|\, 1 \right) \right]_{ij} = [(a_i a_j \,|\, 1)]_{ij} = [(a_i \,|\, a_j)]_{ij} = P$$

e, assim, $P(\xi)$ é uma matriz inversível, concluindo a equivalência entre (v) e (vi). Logo, temos (i) $\iff$ (iii) $\iff$ (v) $\iff$ (vi).

Observe agora que, no Teorema 2.1.7, poderíamos tomar um ideal de A à esquerda e a demonstração seguiria exatamente da mesma forma, ou seja, fazendo as trocas necessárias, temos que esse teorema garante a equivalência entre (iv) e (v). Por fim, a demonstração da equivalência entre (ii) e (iv) é análoga à do Teorema 2.1.2. Logo, temos (ii) $\iff$ (iv) $\iff$ (v). Unindo essas equivalências às que já havíamos demonstrado, concluímos o teorema. ■

Exemplo 2.1.18: Com esse teorema, podemos mostrar que a $\mathbb{C}$-álgebra das matrizes triangulares superiores que vimos nos exemplos 2.1.11 e 2.1.12 não é uma álgebra de Frobenius.

Temos a versão análoga desse resultado para as álgebras simétricas: o *Segundo Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama*. Antes de seguir para ele, voltemos para o nosso clássico exemplo da álgebra de grupo.

Havíamos definido uma forma $\Bbbk$-bilinear $(\,|\,) : \Bbbk G \times \Bbbk G \to \Bbbk$ por $(a \,|\, b) = \varphi(ab)$, em que $\varphi : \Bbbk G \to \Bbbk$ era a aplicação dada por

$$\varphi\left(\sum_{g\in G}\gamma_g g\right) = \gamma_{1_G}.$$

Note que, se $a = \sum_{g\in G}\lambda_g g$ e $b = \sum_{h\in G}\gamma_h h$,

$$(a\,|\,b) = \varphi(ab) = \sum_{g,h\in G}\lambda_g\gamma_h = \sum_{g,h\in G}\gamma_h\lambda_g = \varphi(ba) = (b\,|\,a)\,.$$

Dessa forma, temos então a seguinte definição

Definição 2.1.19: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$. Dizemos que uma forma $\Bbbk$-bilinear $(\,|\,) : A \times A \to \Bbbk$ é ***simétrica*** se $(a\,|\,b) = (b\,|\,a)$ para todos $a, b \in A$.

Como já vimos que $\Bbbk G$ é uma álgebra simétrica, o exemplo acima nos dá algumas pistas sobre quais seriam as possíveis equivalências para esse conceito que serão relacionadas no Segundo Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama, que demonstramos a seguir.

Teorema 2.1.20 (Segundo Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama)**:** Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$. São equivalentes:

i. A é uma álgebra simétrica;
ii. Existe uma forma $\Bbbk$-linear $\varphi : A \to \Bbbk$ tal que $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ para todos $a, b \in A$ e $\ker\varphi$ não contém ideais unilaterais de A não nulos;
iii. Existe uma forma $\Bbbk$-bilinear $(\,|\,) : A\times A \to \Bbbk$ associativa, não degenerada e simétrica;
iv. Existe uma matriz P simétrica que determina uma equivalência entre as representações regulares L e R^t.

Demonstração: Comecemos por mostrar a equivalência entre (i) e (ii). Suponha que temos um isomorfismo de A-bimódulos $\theta : A \to \mathrm{Hom}_\Bbbk(A, \Bbbk)$. Considere então a aplicação linear $\varphi = \theta(1_A) : A \to \Bbbk$. Para todo $a \in A$, temos

$$\varphi(a) = \theta(1_A)(a) = \theta(1_A)(a1_A) = (\theta(1_A)\cdot a)(1_A) = \theta(a)(1_A).$$

Assim, para todos $a, b \in A$

$$\varphi(ab) = \theta(ab)(1_A) = (\theta(a)\cdot b)(1_A) = \theta(a)(b) = (a\cdot\theta(1_A)) = \theta(1_A)(ba) = \varphi(ba),$$

de onde concluímos que $\varphi(aA) = \theta(a)(A) = \varphi(Aa)$ para todo $a \in A$. Como θ é um isomorfismo, em particular é injetor e, portanto, $\theta(a)(A) = \{0\}$ se, e somente se, $a = 0$. Assim, se I é um ideal de A à direita contido em $\ker\varphi$, para todo $a \in I$ temos $\varphi(aA) = \{0\}$ e, portanto $a = 0$. Logo, $I = \{0\}$ e vale o análogo para ideais à esquerda.

Por outro lado, assuma que $\varphi : A \to \Bbbk$ é uma forma $\Bbbk$-linear tal que $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ para todos $a, b \in A$ e $\ker \varphi$ não contém ideais unilaterais de A não nulos. Defina uma aplicação $\Bbbk$-linear $\theta : A \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, \Bbbk)$ por $\theta(a)(b) = \varphi(ab)$ para todos $a, b \in A$. Mostremos que θ é um homomorfismo de A-bimódulos. Para $a, b, c \in A$, temos

$$(c \cdot \theta(a))(b) = \theta(a)(bc) = \varphi(a(bc)) = \varphi((bc)a) = \varphi(b(ca)) = \theta(ca)(b),$$

mostrando que θ é um homomorfismo de A-módulos à esquerda. Além disso,

$$(\theta(a) \cdot c)(b) = \theta(a)(cb) = \varphi(a(cb)) = \varphi((ac)b) = \theta(ac)(b),$$

concluindo que θ é um homomorfismo de A-bimódulos.

Agora, note que, se $\theta(a) = 0$ para algum $a \in A$, temos $0 = \theta(a)(A) = \varphi(aA)$. Como $\ker \varphi$ não contém ideais de A à direita não nulos, temos então $aA = 0$ e, portanto, $a = 0$, mostrando que θ é injetor. Como $\dim A = \dim \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, \Bbbk)$, temos que esse homomorfismo injetor é, na verdade, um isomorfismo, concluindo assim a equivalência entre (i) e (ii).

A equivalência entre (ii) e (iii) segue do Teorema 2.1.7, pois temos que uma forma $\Bbbk$-linear $\varphi : A \to \Bbbk$ satisfaz $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ para todos $a, b \in A$ se, e somente se, a forma $\Bbbk$-bilinear $(\,|\,)_{\varphi} : A \times A \to \Bbbk$ dada por $(a \,|\, b)_{\varphi} = \varphi(ab)$ é simétrica. Além disso, dado $a \in A$, a condição $(- \,|\, a)_{\varphi} = 0$ é equivalente a $\varphi(Aa) = \{0\}$. Isto é, $(\,|\,)_{\varphi}$ é não degenerada se, e somente se, $\ker \varphi$ não contém ideais unilaterais não nulos.

Por fim, nos resta provar a equivalência entre (iii) e (iv), mas isso segue da equivalência entre (v) e (vi) do Primeiro Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama, pois, dada uma matriz $P \in \mathrm{M}_n(\Bbbk)$, a forma $\Bbbk$-bilinear $(\,|\,)_P : A \times A \to \Bbbk$ definida por P é simétrica se, e somente se, P é simétrica. ■

Mais adiante, no Exemplo 4.3.10, temos um exemplo de uma álgebra de Frobenius que não é simétrica.

2.2 Homomorfismo de Frobenius e Automorfismo de Nakayama

Nesta seção, vamos explorar algumas consequências diretas do Primeiro Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama e apresentar dois conceitos que serão utilizados mais à frente no texto: o *homomorfismo de Frobenius* e o *automorfismo de Nakayama*. Utilizando esses conceitos podemos encontrar novas caracterizações para álgebras de Frobenius e álgebras simétricas.

Observação 2.2.1: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Observe que, na demonstração do Teorema 2.1.7, mostramos que, dada uma forma bilinear $(\,|\,) : A \times A \to \Bbbk$ associativa e não degenerada, o núcleo da aplicação $\Bbbk$-linear $\varphi : A \to \Bbbk$ dada por $\varphi(a) = (a \,|\, 1_A)$ não contém ideais de A à direita não nulos.

Já na demonstração do Teorema 2.1.2, mostramos que podemos construir um isomorfismo de A-módulos à direita $\theta : A \to A^*$ definindo $\theta(1_A) = \varphi$, isto é, θ é dado por

$$\begin{aligned} \theta : A &\to A^* \\ a &\mapsto \varphi \cdot a. \end{aligned}$$

No entanto,

$$\varphi \cdot a = \varphi(a-) = (a- \,|\, 1_A) = (a \,|\, -)\,,$$

ou seja, se $\beta : A \times A \to \Bbbk$ é uma forma bilinear associativa e não degenerada, temos um isomorfismo de A-módulos à direita

$$\begin{aligned} \beta_R : A &\to A^* \\ a &\mapsto \beta(a, -). \end{aligned}$$

Resumindo, toda forma $\Bbbk$-bilinear associativa e não degenerada $\beta : A \times A \to \Bbbk$ dá origem a um isomorfismo de A-módulos à direita $\beta_R : A \to A^*$. Analogamente, temos que toda forma $\Bbbk$-bilinear associativa e não degenerada $\beta : A \times A \to \Bbbk$ dá origem a um isomorfismo de A-módulos à esquerda $\beta_L : A \to A^*$, definindo $\beta_L(a) = \beta(-, a)$.

Por outro lado, os mesmos resultados mencionados acima nos garantem que todo isomorfismo de A-módulos à direita $\theta : A \to A^*$ dá origem a uma forma $\Bbbk$-bilinear associativa e não degenerada $\beta_\theta : A \times A \to \Bbbk$, definindo $\beta_\theta(a, b) = \theta(1_A)(ab)$ para todos $a, b \in A$. (Isso pode ser visto também como uma consequência da adjunção entre o produto tensorial e o funtor Hom, isto é, da propriedade que diz que, se M é um A-módulo à direita, N é um A-módulo à esquerda e V é um $\Bbbk$-espaço, então existe um isomorfismo de $\Bbbk$-espaços

$$\mathrm{Hom}_\Bbbk(M \otimes_A N, V) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_\Bbbk(N, V)).$$

Tomando $M = N = A$ e $V = \Bbbk$, temos justamente que o espaço das formas $\Bbbk$-bilineares é isomorfo ao espaço dos homomorfismos de A-módulos à direita entre A e A^*).

Podemos, portanto, utilizar esses conceitos intercambiavelmente.

Esse fato de uma forma $\Bbbk$-bilinear associativa e não degenerada produzir um isomorfismo de A-módulos entre A e A^* nos permite utilizar essa forma para descrever os elementos da álgebra, como mostramos na seguinte proposição.

Proposição 2.2.2: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e $\beta : A \times A \to \Bbbk$ uma forma $\Bbbk$-bilinear associativa. Temos que β é não degenerada se, e somente se, existem conjuntos $\{x_1, \ldots, x_n\}, \{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq A$ tais que, para todo $a \in A$,

$$a = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta(y_i, a).$$

Analogamente, temos que β é não degenerada se, e somente se, existem conjuntos $\{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n\}, \{\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n\} \subseteq A$ tais que, para todo $a \in A$,

$$a = \sum_{i=1}^{n} \beta(a, \tilde{x}_i)\tilde{y}_i.$$

Demonstração: Por um lado, se $\dim_{\Bbbk} A = n$, podemos tomar bases $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$ e $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq A^*$ tais que, para todo $a \in A$, temos

$$a = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(a) x_i.$$

Se β é uma forma $\Bbbk$-bilinear não degenerada, vimos na Observação 2.2.1 que, para cada $i = 1, \ldots, n$, existe $y_i \in A$ tal que $\varphi_i = \beta(y_i, -)$. Logo, podemos escrever

$$a = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta(y_i, a).$$

Por outro lado, suponha que existam $\{x_1, \ldots, x_n\}, \{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq A$ tais que, para todo $a \in A$,

$$a = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta(y_i, a).$$

Tome $\varphi \in A^*$. Assim, temos, para todo $a \in A$,

$$\beta\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) y_i, a\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\beta(y_i, a) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \beta(y_i, a)\right) = \varphi(a), \tag{2.4}$$

isto é, $\varphi = \beta\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) y_i, -\right)$ e, portanto, β_R é sobrejetor. Logo, como estamos em dimensão finita, β_R é também injetor e, assim, β é não degenerada.

Para provar o resultado análogo, basta utilizar um argumento similar com β_L. ■

Observação 2.2.3: Apesar de não serem necessariamente bases, chamamos os conjuntos $\{x_1, \ldots, x_n\}, \{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq A$ da proposição acima de *bases duais para* β.

Uma consequência da demonstração anterior é que, no caso em que esses conjuntos existam, também existem duas bases que satisfazem essa propriedade.

O resultado abaixo nos mostra que, na verdade, se β é não degenerada, podemos utilizar o mesmo par de conjuntos para escrever os elementos da álgebra em ambas as formas descritas na Proposição 2.2.2.

Lema 2.2.4: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Tome $\beta : A \times A \to \Bbbk$ uma forma bilinear não degenerada e $\{x_1, \dots, x_n\}, \{y_1, \dots, y_n\} \subseteq A$. Assim, temos a seguinte equivalência:

$$a = \sum_{i=1}^{n} \beta(a, x_i) y_i \ \forall a \in A \iff a = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta(y_i, a) \ \forall a \in A.$$

Demonstração: Suponha $a = \sum_{i=1}^{n} \beta(a, y_i) x_i$ para todo $a \in A$. Assim, dados $a, b \in A$,

$$\begin{aligned}\beta(a,b) &= \beta\left(\sum_{i=1}^{n} \beta(a, y_i) x_i, b\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta(a, y_i)\beta(x_i, b) = \sum_{i=1}^{n} \beta(x_i, b)\beta(a, y_i) \\ &= \beta\left(a, \sum_{i=1}^{n} \beta(x_i, b) y_i\right).\end{aligned}$$

Como β é não degenerada, temos

$$b = \sum_{i=1}^{n} \beta(x_i, b) y_i.$$

A recíproca é análoga. ■

Juntando todos esses resultados, como consequência do Primeiro Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama, temos mais uma caracterização para as álgebras de Frobenius:

Teorema 2.2.5: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. A é uma álgebra de Frobenius se, e somente se, existem $\phi \in A^*$ e elementos $x_i, y_i \in A$, com $1 \leq i \leq n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, tais que, para todo $a \in A$,

$$a = \sum_{i=1}^{n} \phi(a x_i) y_i.$$

Demonstração: Pelo Primeiro Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama, A é um álgebra de Frobenius se, e somente se, existe uma forma $\Bbbk$-bilinear $\beta : A \times A \to A$ associativa e não degenerada.

Assim, se A é uma álgebra de Frobenius, a Proposição 2.2.2 nos garante que existem conjuntos $\{x_1, \ldots, x_n\}, \{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq A$ tais que, para todo $a \in A$,

$$a = \sum_{i=1}^{n} \beta(a, x_i) y_i.$$

Definindo $\phi = \beta_R(1_A)$, como β é associativa, temos

$$a = \sum_{i=1}^{n} \beta(1_A, ax_i) y_i = \sum_{i=1}^{n} \phi(ax_i) y_i,$$

como desejado.

Por outro lado, se $\phi \in A^*$ é um homomorfismo como no enunciado, podemos definir uma forma $\Bbbk$-bilinear $\beta : A \times A \to A$ por $\beta(a, b) = \phi(ab)$, para todos $a, b \in A$. Dessa forma, β é claramente associativa e, para todo $a \in A$

$$a = \sum_{i=1}^{n} \phi(ax_i) y_i = \sum_{i=1}^{n} \beta(a, x_i) y_i,$$

donde concluímos que β é não degenerada utilizando, mais uma vez, a Proposição 2.2.2. Portanto, A é uma álgebra de Frobenius. ■

Observação 2.2.6: Note que, se $\phi \in A^*$ é como no enunciado do Teorema 2.2.5, a demonstração que fizemos acima, juntamente com o Lema 2.2.4, nos garante que, para todo $a \in A$,

$$a = \sum_{i=1}^{n} \phi(ax_i) y_i = \sum_{i=1}^{n} \beta(a, x_i) y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta(y_i, a) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi(y_i a).$$

Essa observação motiva a seguinte definição:

Definição 2.2.7: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita n. Um funcional linear $\phi \in A^*$ é chamado de *homomorfismo de Frobenius*[1], com *bases duais* $(x_i, y_i)_{i=1}^n$, se vale uma das condições (equivalentes) abaixo:

i. Para todo $a \in A$, $a = \sum_{i=1}^n x_i \phi(y_i a)$;
ii. Para todo $a \in A$, $a = \sum_{i=1}^n \phi(ax_i) y_i$.

Na realidade, o homomorfismo de Frobenius já havia aparecido no texto antes. A aplicação $\varphi : A \to \Bbbk$ do Primeiro Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama cujo núcleo não continha ideais de A à direita não nulos é justamente o homomorfismo de Frobenius, como observamos abaixo.

[1] Estamos seguindo a definição apresentada em [Sch95]. Esse funcional é um homomorfismo apenas entre espaços vetoriais.

Observação 2.2.8: Considere $\beta : A \times A \to \Bbbk$ uma forma $\Bbbk$-bilinear associativa e não degenerada. Note que, no Teorema 2.2.5, mostramos que podemos conseguir um homomorfismo de Frobenius $\phi : A \to \Bbbk$ tomando $\phi = \beta_R(1_A)$. Assim, como vimos na Observação 2.2.1, para todo isomorfismo $\theta : A \to A^*$ de A-módulo à direita, temos que $\theta(1_A)$ é um homomorfismo de Frobenius.

Além disso, vimos também na Observação 2.2.1 que $\beta_R(1_A)$ é uma aplicação $\Bbbk$-linear cujo núcleo não contém ideais de A à direita não nulos, isto é, a aplicação φ com essa propriedade no Primeiro Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama é um homomorfismo de Frobenius. Logo, podemos concluir que o homomorfismo de Frobenius também possui essa propriedade sobre seu o núcleo.

Portanto, pelo Teorema 2.1.2, se ϕ é um homomorfismo de Frobenius com bases duais $(x_i, y_i)_{i=1}^n$, então temos um isomorfismo de A-módulos à direita $A \to A^*$ dado por $a \mapsto \phi \cdot a$.

Outra consequência do Primeiro Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama é que, para todas essas observações acima, vale o resultado análogo considerando-se módulos à esquerda.

Agora, vamos introduzir também o *automorfismo de Nakayama*. Com ele, seremos capazes de dar mais uma caracterização para as álgebras simétricas a partir do Segundo Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama. A proposição abaixo é quem garantirá sua existência para toda álgebra de Frobenius.

Proposição 2.2.9: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de Frobenius com uma forma $\Bbbk$-bilinear associativa e não degenerada $(\,|\,) : A \times A \to \Bbbk$. Existe um automorfismo $\nu : A \to A$ tal que

$$(a \,|\, b) = (b \,|\, \nu(a))$$

para todos $a, b \in A$.

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar que, para todo $a \in A$, existe $x \in A$ tal que $(a \,|\, -) = (- \,|\, x)$.

Para isso, tome uma base $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de A. Considerando a matriz $P = [p_{ij}]_{ij} \in \mathbb{M}_n(\Bbbk)$ associada à forma $(\,|\,)$ com relação à base fixada, isto é, com $p_{ij} = (a_i \,|\, a_j)$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, o Lema 2.1.5 nos garante que P é inversível. Fixe agora um elemento $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \in A$.

Note que, dado $x \in A$, temos $(a \,|\, -) = (- \,|\, x)$ se, e somente se, $(a \,|\, a_j) = (a_j \,|\, x)$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Escrevendo $x = \sum_{i=1}^n x_i a_i$, temos, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(a \,|\, a_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \,(a_i \,|\, a_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_{ij} \quad \text{e} \quad (a_j \,|\, x) = \sum_{i=1}^n x_i \,(a_j \,|\, a_i) = \sum_{i=1}^n x_i p_{ji},$$

ou seja, temos $(a\,|\,-) = (-\,|\,x)$ se, e somente se, $\sum_{i=1}^{n} p_{ji}x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{ij}$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Assim, temos um sistema linear de n equações e incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ associado à matriz P, que possui determinante não nulo já que é inversível. Logo, pela regra de Cramer, temos que esse sistema possui uma solução única em $\Bbbk$, digamos $x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n$.

Agora, denotando $\nu(a) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i$, temos então $(a\,|\,-) = (-\,|\,\nu(a))$. Vejamos que, definindo $\nu : A \to A$ dessa forma, obtemos um automorfismo de $\Bbbk$-álgebras. Note que ν é claramente uma aplicação $\Bbbk$-linear e é injetora pois, se $\nu(a) = \nu(b)$, com $a, b \in A$, então

$$0 = (-\,|\,\nu(a) - \nu(b)) = (-\,|\,\nu(a-b)) = (a-b\,|\,-)$$

e, como $(\ |\ )$ é não degenerada, então $a - b = 0$. Dessa forma, como A tem dimensão finita, temos que $\nu : A \to A$ é uma bijeção.

Para provar que ν é um homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras, tome $a, b, x \in A$. Assim, temos

$$\begin{aligned}(x\,|\,\nu(ab)) &= (ab\,|\,x) = (a\,|\,bx) = (bx\,|\,\nu(a)) = (b\,|\,x\nu(a)) = (x\nu(a)\,|\,\nu(b)) \\ &= (x\,|\,\nu(a)\nu(b))\end{aligned}$$

e, como $(\ |\ )$ é não degenerada, concluímos que $\nu(ab) = \nu(a)\nu(b)$ para todos $a, b \in A$. Além disso,

$$\nu(1_A) = 1_A\nu(1_A) = \nu(\nu^{-1}(1_A))\nu(1_A) = \nu(\nu^{-1}(1_A)1_A) = \nu(\nu^{-1}(1_A)) = 1_A,$$

concluindo que $\nu : A \to A$ é um automorfismo de $\Bbbk$-álgebras. ■

Definição 2.2.10: Dada uma $\Bbbk$-álgebra de Frobenius A com uma forma $\Bbbk$-bilinear associativa e não degenerada $(\ |\ ) : A \times A \to \Bbbk$, o automorfismo ν com a propriedade da Proposição 2.2.9 é chamado de *automorfismo de Nakayama associado a* $(\ |\ )$.

Também podemos definir o automorfismo de Nakayama a partir de um homomorfismo de Frobenius, como observamos a seguir.

Observação 2.2.11: Já vimos que uma forma $\Bbbk$-bilinear associativa e não degenerada $\beta : A \times A \to \Bbbk$ determina um homomorfismo de Frobenius tomando $\phi_\beta = \beta_R(1_A)$. Por outro lado, um homomorfismo de Frobenius $\phi : A \to \Bbbk$ determina uma forma $\Bbbk$-bilinear associativa e não degenerada $\beta_\phi : A \times A \to \Bbbk$ dada por $\beta_\phi(a, b) = \phi(ab)$, para $a, b \in A$. Assim, se ν é o automorfismo de Nakayama associado à forma β_ϕ, podemos também nos referir a ele como sendo o automorfismo de Nakayama associado ao homomorfismo de Frobenius ϕ. Note que ν é o automorfismo de Nakayama associado ao homomorfismo de

Frobenius ϕ se, e somente se, para todos $a, b \in A$, vale

$$\phi(ab) = \phi(b\nu(a)).$$

A próxima proposição é fundamental para conseguirmos estabelecer uma propriedade para o automorfismo de Nakayama que garanta que a álgebra em que ele está definido seja simétrica.

Proposição 2.2.12: Sejam A uma $\mathbb{k}$-álgebra de Frobenius, $(\,|\,)_1, (\,|\,)_2 : A \times A \to \mathbb{k}$ duas formas $\mathbb{k}$-bilineares associativas e não degeneradas, ν_1 e ν_2 os automorfismos de Nakayama associados a essas formas, respectivamente. Com isso, existe um elemento inversível $x \in A$ tal que $\nu_2(a) = x\nu_1(a)x^{-1}$ para todo $a \in A$.

Demonstração: Considere $\theta_1, \theta_2 : A \to A^*$ os isomorfismos de A-módulos à esquerda associados aos automorfismos de Nakayama ν_1 e ν_2, respectivamente, isto é, os isomorfismos dados por $\theta_1(a) = (a\,|\,-)_1$ e $\theta_2(a) = (a\,|\,-)_2$.

Como já fizemos anteriormente, dado que A é um A-módulo livre com base $\{1_A\}$, um homomorfismo $\theta : A \to A$, está determinado a partir de seu valor em 1_A da seguinte forma:

$$\theta(a) = a \cdot \theta(1_A)$$

para todo $a \in A$.

Dessa forma, se $\theta_2(1_A) = \psi$, então, para todo $a \in A$, temos $\theta_2(a) = a \cdot \psi$. Como θ_1 é um isomorfismo, temos que existe um elemento $x_\psi \in A$ tal que $\theta_1(x_\psi) = \psi$. Com isso, para todo $a \in A$,

$$\theta_2(a) = a \cdot \psi = a \cdot \theta_1(x_\psi) = \theta_1(ax_\psi) = \theta_1 \circ r_{x_\psi}(a),$$

em que $r_{x_\psi} : A \to A$ é dado por $r_{x_\psi}(a) = ax_\psi$. Ou seja, $\theta_2 = \theta_1 \circ r_{x_\psi}$.

No entanto, como θ_2 é sobrejetor, temos que r_{x_ψ} também o é. Assim, como A tem dimensão finita, concluímos que r_{x_ψ} é um automorfismo de A.

Isso nos garante a existência de um elemento $y \in A$ tal que $r_{x_\psi}(y) = 1_A$, isto é, $yx_\psi = 1_A$ e, portanto, x_ψ é inversível à esquerda.

Além disso, temos

$$r_{x_\psi}(x_\psi y) = x_\psi(yx_\psi) = x_\psi 1_A = x_\psi.$$

Como r_{x_ψ} é um isomorfismo e $r_{x_\psi}(x_\psi y) = r_{x_\psi}(1_A)$, temos $x_\psi y = 1_A$, donde concluímos que x_ψ é inversível.

Agora, temos então que $\theta_2 = \theta_1 \circ r_x$ para um elemento inversível $x \in A$. Dessa forma,

$$(a \,|\, b)_2 = \theta_2(1_A)(ab) = \theta_1(x)(ab) = (x \cdot \theta_1(1_A))(ab) = \theta_1(1_A)(abx) = (a \,|\, bx)_1 .$$

Assim,

$$(b \,|\, x\nu_1(a))_1 = (bx \,|\, \nu_1(a))_1 = (a \,|\, bx)_1 = (a \,|\, b)_2 = (b \,|\, \nu_2(a))_2 = (b \,|\, \nu_2(a)x)_1$$

e, como $(\,|\,)_1$ é não degenerada, temos $x\nu_1(a) = \nu_2(a)x$ para todo $a \in A$. Com isso, como x é inversível, concluímos que $\nu_2(a) = x\nu_1(a)x^{-1}$. ■

Dizemos que um automorfismo $f : A \to A$ é *interno* se existe um elemento inversível $x \in A$ tal que $f(a) = xax^{-1}$ para todo $a \in A$. Assim, a proposição acima nos diz que um automorfismo de Nakayama de uma $\Bbbk$-álgebra de Frobenius A está unicamente determinado a menos de um automorfismo interno de A.

Também como consequência dessa demonstração, temos mais uma caracterização para álgebras simétricas:

Corolário 2.2.13: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de Frobenius. Temos as seguintes equivalências:

i. A é uma $\Bbbk$-álgebra simétrica;
ii. Todo automorfismo de Nakayama de A é interno;
iii. Existe um automorfismo de Nakayama de A que é interno.

Demonstração: Suponha, inicialmente, que A seja simétrica. Pelo Segundo Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama, existe uma forma $\Bbbk$-bilinear associativa, não degenerada e simétrica $(\,|\,) : A \times A \to \Bbbk$ e, portanto, o automorfismo de Nakayama associado a essa forma é $\nu = \mathrm{id}_A$. Agora, se $(\,|\,)' : A \times A \to \Bbbk$ é uma forma $\Bbbk$-bilinear associativa e não degenerada com automorfismo de Nakayama associado ν', pela Proposição 2.2.12 temos que existe um elemento inversível $x \in A$ tal que $\nu'(a) = x\nu(a)x^{-1} = xax^{-1}$ para todo $a \in A$, provando que ν' é um automorfismo interno. Assim, temos que (i) $\Rightarrow$ (ii).

É claro que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Provemos então que (iii) $\Rightarrow$ (i).

Seja $(\,|\,) : A \times A \to \Bbbk$ uma forma $\Bbbk$-bilinear associativa e não degenerada cujo automorfismo de Nakayama ν associado é interno. Seja $x \in A$ o elemento inversível tal que $\nu(a) = xax^{-1}$ para todo $a \in A$ e defina uma outra forma $\Bbbk$-bilinear $(\,|\,)' : A \times A \to \Bbbk$ por

$$(a \,|\, b)' = \left(x^{-1}a \,\middle|\, b\right) .$$

Se existir $b \in A$ não nulo tal que $(- \,|\, b)' = 0$, em particular, para todo $a \in A$, temos

$$0 = (xa \,|\, b)' = \left(x^{-1}xa \,\middle|\, b\right) = (a \,|\, b) ,$$

o que é uma contradição com o fato de $(\,|\,)$ ser não degenerada. Portanto, $(\,|\,)'$ também é não degenerada.

Além disso, $(\,|\,)'$ é associativa, pois, para todos $a, b, c \in A$,

$$(a\,|\,bc)' = \left(x^{-1}a\,\middle|\,bc\right) = \left(x^{-1}ab\,\middle|\,c\right) = (ab\,|\,c)'.$$

Dessa forma, podemos considerar ν' o automorfismo de Nakayama associado a essa forma. Como $(x^{-1}\,|\,-) = (1_A\,|\,-)'$, temos, para todos $a, b \in A$,

$$\begin{aligned}\left(b\,\middle|\,\nu(x^{-1}ax)\right)' &= \left(x^{-1}b\,\middle|\,\nu(x^{-1}ax)\right) = \left(x^{-1}ax\,\middle|\,x^{-1}b\right) = \left(x^{-1}\,\middle|\,ab\right) = (1_A\,|\,ab)' \\ &= (a\,|\,b)' = (b\,|\,\nu'(a))'.\end{aligned}$$

Como $(\,|\,)'$ é não degenerada, então, para todo $a \in A$,

$$\nu'(a) = \nu(x^{-1}ax) = x(x^{-1}ax)x^{-1} = a,$$

ou seja, $\nu' = \mathrm{id}_A$ e, portanto, $(\,|\,)'$ é simétrica, provando que A é simétrica. ■

Vamos terminar esta seção observando os conceitos vistos aqui no exemplo particular da álgebra de um grupo finito:

Exemplo 2.2.14: Sejam G um grupo finito, $\Bbbk$ um corpo qualquer e $A = \Bbbk G$.

Como vimos na seção anterior, temos uma forma bilinear associativa e não degenerada $\beta : A \times A \to \Bbbk$ tal que, para todos $g, h \in G$,

$$\beta(g, h) = \delta_{1_G,(gh)^{-1}}.$$

Um par de bases duais para β é $(g, g^{-1})_{g\in G}$, pois, para todo $h \in G$, temos que $\beta(h, g) \neq 0$ se, e somente se, $g = h^{-1}$ e, portanto,

$$\sum_{g\in G} \beta(h, g)g^{-1} = (h^{-1})^{-1} = h.$$

Dessa forma, temos um homomorfismo de Frobenius $\phi : A \to \Bbbk$ dado por $\phi = \beta_R(1_A)$ e, assim, para todo $g \in G$,

$$\phi(g) = \beta_R(1_A)(g) = \beta(1_A, g) = \delta_{1_G,g}$$

com as mesmas bases duais acima.

Por fim, observe que a forma β é simétrica. Logo, o automorfismo de Nakayama associado a β é a aplicação identidade id_A.

2.3 Álgebras Autoinjetivas

Nesta seção, vamos estudar alguns resultados muito interessantes sobre as álgebras de Frobenius. Começaremos aplicando o que estudamos no primeiro capítulo para apresentar a definição de *álgebra autoinjetiva*.

Proposição 2.3.1: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. São equivalentes:

i. O A-módulo à direita A_A é injetivo;

ii. O A-módulo à esquerda ${}_AA$ é injetivo.

Além disso, nesse caso, os A-módulos ${}_AA$ e A_A são cogeradores injetivos de mod A^{op} e de mod A, respectivamente.

Demonstração: Pela Proposição 1.4.4, existe uma decomposição única de A_A em soma direta de ideais à direita indecomponíveis e projetivos, $A_A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$, de forma que $e_1, \ldots, e_n$ são idempotentes primitivos de A, dois-a-dois ortogonais, e também tais que $1_A = e_1 + \cdots + e_n$. Por outro lado, temos uma decomposição ${}_AA = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$ em mod A^{op}.

Podemos então assumir (trocando os índices, se necessário) que $e_1A, \ldots, e_mA$, com $m \leq n$, é um conjunto completo de módulos projetivos indecomponíveis, dois-a-dois não isomorfos, de mod A. Analogamente, podemos obter um conjunto completo de módulos projetivos indecomponíveis, dois-a-dois não isomorfos, em mod A^{op} formado por $Ae_{j_1}, \ldots, Ae_{j_s}$, com $j_i \in \{1, \ldots, n\}$ para todo $i = 1, \ldots, s$.

Com isso, sejam $e = e_1 + \cdots + e_m$ e $f = e_{j_1} + \cdot + e_{j_s}$. Pela Proposição 1.4.5, eA e Af são geradores projetivos minimais de mod A e mod A^{op}, respectivamente.

Suponha, por um lado, que A_A seja injetivo. Assim, e_iA é injetivo para todo $i = 1, \ldots, n$, pois é somando direto de um A-módulo injetivo. Logo, $(e_iA)^*$ é projetivo em mod A^{op} para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e, dessa forma, $(e_1A)^*, \ldots, (e_mA)^*$ é um conjunto de módulos projetivos, indecomponíveis e dois-a-dois não isomorfos em mod A^{op}. Logo, $m \leq s$.

Analogamente, $(Ae_{j_1})^*, \ldots, (Ae_{j_s})^*$ é um conjunto de módulos projetivos, indecomponíveis e dois-a-dois não isomorfos em mod A. Logo, $s \leq m$. Ou seja, $s = m$ e ambos os conjuntos são completos.

Portanto, pela Proposição 1.4.5, $(eA)^*$ é gerador projetivo minimal de mod A^{op} e, além disso, $(eA)^* \cong Af$.

Como vimos, eA é projetivo em mod A e, portanto, $(eA)^*$ é injetivo em mod A^{op}. Logo, Af é injetivo em mod A^{op} e, como $Af_1, \ldots, Af_m$ é um conjunto completo de módulos indecomponíveis em mod A^{op}, ${}_AA$ é isomorfo a um somando direto de um A-módulo à esquerda injetivo $(Af)^r$, para algum $r \geq 1$, sendo, portanto, injetivo.

Além disso, ${}_AA$ contém $Af \cong (eA)^*$, que é um cogerador de mod A^{op}. Portanto, ${}_AA$ é um cogerador injetivo de mod A^{op}.

A recíproca segue de maneira análoga. ∎

Tendo em vista proposição acima, podemos definir agora o que é uma álgebra *autoinjetiva* e, em seguida, mostrar que essas álgebras englobam as álgebras de Frobenius.

Definição 2.3.2: Uma $\Bbbk$-álgebra A de dimensão finita é dita *autoinjetiva* se ${}_AA$ ou A_A é um A-módulo injetivo, ou seja, como vimos acima, se ambos são injetivos.

Proposição 2.3.3: Toda álgebra de Frobenius é uma álgebra autoinjetiva.

Demonstração: Seja A uma álgebra de Frobenius. Como A é um A-módulo projetivo, temos que, pela Proposição 1.3.4, $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, \Bbbk)_A$ é um módulo injetivo em mod A.

Do Primeiro Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama, temos que existe um isomorfismo de A-módulos à direita $A_A \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, \Bbbk)_A$. Assim, A é também um módulo injetivo em mod A. Portanto, A é uma álgebra autoinjetiva. ∎

Para simplificar a linguagem, introduzimos a notação abaixo:

Definição 2.3.4: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Denotamos por proj A a subcategoria plena de mod A consistindo de todos os A-módulos projetivos. Por outro lado, denotamos por inj A a subcategoria plena de mod A consistindo de todos os A-módulos injetivos.

Agora, utilizando o fato de que as álgebras de Frobenius são autoinjetivas, podemos provar que as classes dos módulos injetivos e dos módulos projetivos sobre essas álgebras coincidem.

Teorema 2.3.5: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. São equivalentes:

i. A é autoinjetiva;
ii. proj $A =$ inj A;
iii. proj $A^{\mathrm{op}} =$ inj A^{op}.

Demonstração: Vejamos, primeiramente, que (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii).

Seja P um módulo em mod A projetivo. Logo, P é somando direto de um A-módulo livre que, por sua vez, é isomorfo a A^r para algum $r \leq 1$. Como A_A é injetivo, temos então que A^r é injetivo. Como P é somando direto de um módulo injetivo, P também é injetivo.

De maneira análoga, dado um módulo projetivo em mod A^{op}, podemos concluir que ele é um A^{op}-módulo à direita injetivo.

Seja E um módulo em mod A injetivo. Logo, E^* é um módulo projetivo em mod A^{op} e, como acabamos de mostrar, E^* é injetivo em mod A^{op}. Dessa forma, $E \cong E^{**}$ é projetivo em mod A.

Mais uma vez de forma análoga, dado um módulo injetivo em mod A^{op}, concluímos que ele é projetivo em mod A^{op}.

Agora, note que a implicação (ii) $\Rightarrow$ (i) é trivial pois, como A_A é um A-módulo à direita projetivo, por hipótese temos que ele também é injetivo.

Por fim, a implicação (iii) $\Rightarrow$ (i) também é trivial pois, como ${}_AA$ é um A^{op}-módulo à direita projetivo, por hipótese temos que ele também é injetivo. ■

Mostramos que toda álgebra de Frobenius é autoinjetiva. Esse resultado nos leva a pensar se vale também a recíproca deste resultado, mas, como Nakayama apontou em [Nak39], a resposta é não. Um contra-exemplo para isso seria a álgebra formada por todas as matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \delta_1 & \delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

em que todas as entradas estejam em um corpo algebricamente fechado.

No entanto, esses dois conceitos ainda são muito próximos, tanto que uma outra nomenclatura para álgebra autoinjetiva é *álgebra quase-Frobenius*. Ao longo do restante desta seção, mostraremos que as álgebras de Frobenius carregam a "parte importante" das álgebras autoinjetivas e que as categorias dos módulos dessas álgebras são essencialmente as mesmas.

Para poder explicar o que queremos dizer acima com "parte importante", precisamos definir o que é uma *álgebra básica* e provar que uma álgebra autoinjetiva básica é uma álgebra de Frobenius.

Definição 2.3.6: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Chamamos A de *álgebra básica* se A_A é soma direta de A-submódulos à direita projetivos indecomponíveis e dois-a-dois não isomorfos.

Teorema 2.3.7: Toda álgebra autoinjetiva básica é uma álgebra de Frobenius.

Demonstração: Seja A uma álgebra autoinjetiva básica. Como A é uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, a Proposição 1.4.4 nos garante que $A_A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$, em que $e_1, \ldots, e_n$ são idempotentes primitivos de A, dois-a-dois ortogonais, tais que $1_A = e_1 + \cdots + e_n$. Como A é básica, temos que os módulos projetivos e indecomponíveis $e_1A, \ldots, e_nA$ são dois-a-dois não isomorfos.

Assim, pelo Corolário 1.5.21, temos que $\mathrm{top}(e_1A), \ldots, \mathrm{top}(e_nA)$ são dois-a-dois não isomorfos e, pela Proposição 1.5.26, temos então que $\mathrm{soc}((Ae_1)^*), \ldots, \mathrm{soc}((Ae_n)^*)$ são dois-a-dois não isomorfos.

Agora, pela Proposição 1.4.4, temos que Ae_i é projetivo e indecomponível para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e, portanto, $(Ae_i)^*$ é injetivo e indecomponível. Logo, pelo Corolário 1.5.23, concluímos que $(Ae_1)^*, \ldots, (Ae_n)^*$ são também dois-a-dois não isomorfos.

Dessa forma, temos que $(Ae_1)^*, \ldots, (Ae_n)^*$ formam um conjunto completo de módulos injetivos e indecomponíveis, dois-a-dois não isomorfos, em mod A e existe um isomorfismo de A-módulos à direita

$$A^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}({}_AA, \Bbbk) \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(Ae_1, \Bbbk) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(Ae_n, \Bbbk).$$

Por outro lado, como e_iA é projetivo para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e A é autoinjetiva, então, pelo Teorema 2.3.5 temos que e_iA é injetivo e, assim, concluímos que $e_1A, \ldots, e_nA$ formam um conjunto completo de módulos injetivos e indecomponíveis, dois-a-dois não isomorfos, em mod A.

Portanto, como $\{(Ae_1)^*, \ldots, (Ae_n)^*\}$ e $\{e_1A, \ldots, e_nA\}$ são conjuntos completos de módulos injetivos e indecomponíveis, dois-a-dois não isomorfos, em mod A, temos que existe uma permutação σ de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $e_{\sigma(i)}A \cong (Ae_i)^*$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Assim,

$$A_A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA \cong (Ae_1)^* \oplus \cdots \oplus (Ae_n)^* \cong A^*$$

e temos então que A é uma álgebra de Frobenius. ■

De uma forma nada precisa, podemos dizer que uma álgebra de Frobenius é uma álgebra autoinjetiva "minimal", no sentido de que não existem repetições dos módulos projetivos indecomponíveis que a compõe. Toda a parte substancial da álgebra autoinjetiva é mantida, enquanto a hipótese de álgebra básica retira tudo o que é redundante.

Agora, para finalizar o estudo focado em álgebras de Frobenius, estudaremos mais um resultado que nos mostra como uma álgebra autoinjetiva é "quase" uma álgebra de Frobenius. Veremos que, dada A uma álgebra autoinjetiva, mod A é equivalente a mod A' para alguma álgebra de Frobenius A'.

Essa equivalência é chamada de *equivalência de Morita*. Como nosso objetivo nesta seção é apenas apresentar alguns resultados sobre álgebras de Frobenius, não entraremos nos detalhes sobre a parte categórica dessa teoria, pois isso acabaria fugindo do escopo do texto. Apresentaremos apenas os conceitos e enunciados necessários, estando as demonstrações omitidas. Uma referência para estudar todos os detalhes é [SY11].

Comecemos apresentando a definição de *equivalência de categorias*:

Definição 2.3.8: Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ $\Bbbk$-categorias e F e G funtores covariantes de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$. Uma *transformação natural de funtores* $\varphi : F \to G$ associa, a cada objeto X de $\mathcal{C}$, um morfismo $\varphi_X : F(X) \to G(X)$ em $\mathcal{D}$ tal que, para todo morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$, o diagrama abaixo comuta em $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

No caso em que φ_X é um isomorfismo para todo X em $\mathcal{C}$, φ é chamado de *isomorfismo natural de funtores*, ou também *equivalência natural*.

$\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são *equivalentes* se existirem funtores covariantes $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que a composição $G \circ F$ seja naturalmente isomorfa ao funtor identidade $1_{\mathcal{C}}$ em $\mathcal{C}$, enquanto $F \circ G$ é naturalmente isomorfa ao funtor identidade $1_{\mathcal{D}}$ em $\mathcal{D}$. Também dizemos que, nesse caso, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma *equivalência de categorias* e G é um *funtor quase-inverso* de F.

Podemos estender o conceito de equivalência de categorias para álgebras com a noção de *equivalência de Morita*:

Definição 2.3.9: Sejam A e B duas $\mathbb{k}$-álgebras de dimensão finita. Dizemos que A e B são *Morita-equivalentes* se as categorias mod A e mod B são equivalentes. Um funtor F : mod $A \to$ mod B definindo tal equivalência é chamado de uma *equivalência de Morita*.

Exemplo 2.3.10: Observe que podemos definir uma equivalência de Morita entre $\mathbb{k}$ e $\mathbb{M}_n(\mathbb{k})$, com $n > 0$, por F : mod $\mathbb{k} \to$ mod $\mathbb{M}_n(\mathbb{k})$ tal que $F(M) = M^n$ para todo módulo M em mod $\mathbb{k}$, em que $M^n = \{(m_1, \ldots, m_n) \,|\, m_i \in M, i = 1, \ldots, n\}$ é um módulo em mod $\mathbb{M}_n(\mathbb{k})$ com a ação dada por multiplicação de matrizes à direita, e, dado um homomorfismo $f : M \to N$ em mod $\mathbb{k}$,

$$\begin{aligned} F(f) : F(M) &\to F(N) \\ (m_1, \ldots, m_n) &\mapsto (f(m_1), \ldots, f(m_n)). \end{aligned}$$

A proposição a seguir nos diz que projetividade e injetividade de módulos são preservadas pela equivalência de Morita. Para demonstrá-la, são encontradas outras propriedades das equivalências de categorias e, mais especificamente, das equivalências de Morita. Como não é nosso objetivo nos aprofundarmos nessas teorias, essa demonstração será omitida, mas pode ser encontrada em [SY11, Proposition II.6.6].

Proposição 2.3.11: Sejam A e B $\mathbb{k}$-álgebras de dimensão finita e suponha que exista uma equivalência de Morita F : mod $A \to$ mod B. Para todo módulo não nulo M em mod A, temos

1. M é um módulo projetivo em mod A se, e somente se, $F(M)$ é um módulo projetivo em mod B;
2. M é um módulo injetivo em mod A se, e somente se, $F(M)$ é um módulo injetivo em mod B.

Agora, enunciamos um resultado clássico da Teoria de Morita que diz que um gerador projetivo define uma equivalência de Morita.

Teorema da Equivalência de Morita: Sejam A uma $\mathbb{k}$-álgebra de dimensão finita e P um gerador projetivo de mod A. Então A é Morita-equivalente à álgebra de endomorfismos $B = \text{End}_A(P)$ e, considerando P como um (B, A)-bimódulo, os funtores

$$\text{Hom}_A(P, -) : \text{mod } A \to \text{mod } B,$$
$$\text{Hom}_B(\text{Hom}_A(P, A), -) : \text{mod } B \to \text{mod } A$$

definem uma equivalência de Morita entre mod A e mod B.

Esse resultado será fundamental para garantir que a *álgebra básica* A^b de uma $\mathbb{k}$-álgebra de dimensão finita A está unicamente determinada (a menos de isomorfismos), como observamos abaixo:

Observação 2.3.12: Seja A uma $\mathbb{k}$-álgebra de dimensão finita. Escreva

$$1_A = \sum_{j=1}^{s_1} e_{1j} + \cdots + \sum_{j=1}^{s_n} e_{nj} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{s_i} e_{ij} \right),$$

em que e_{ij} são idempotentes primitivos de A, dois-a-dois ortogonais, $e_{ij}A \cong e_{ik}A$, com $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j, k \in \{1, \ldots, s_i\}$, e $e_{ij}A \ncong e_{i'k}A$ se $i \neq i'$.

Seja $e = \sum_{i=1}^{n} e_{i1}$ e note que $e^2 = e$. Pela Proposição 1.4.5, eA é um gerador projetivo de mod A. Assim, pelo Teorema da Equivalência de Morita, A é Morita-equivalente a $\text{End}_A(eA)$.

Defina $\psi : \text{End}_A(eA) \to eAe$ por $\psi(\varphi) = \varphi(e)e$. Vamos mostrar que ψ é um isomorfismo de $\mathbb{k}$-álgebras.

Em primeiro lugar, ψ é claramente $\mathbb{k}$-linear e $\psi(\text{id}_{eA}) = e$. Além disso, tomando $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{End}_A(eA)$, temos

$$\psi(\varphi_1 \circ \varphi_2) = (\varphi_1 \circ \varphi_2)(e)e = \varphi_1(\varphi_2(e))e. \tag{2.5}$$

Como $\varphi_2(e) \in eA$, temos que existe $a \in A$ tal que $\varphi_2(e) = ea$. Assim,

$$e\varphi_2(e) = e(ea) = ea = \varphi_2(e).$$

Logo, por (2.5), temos

$$\psi(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \varphi_1(e\varphi_2(e)) = \varphi_1(e)\varphi_2(e) = \varphi_1(e^2)\varphi_2(e^2) = \varphi_1(e)e\varphi_2(e)e = \psi(\varphi_1)\psi(\varphi_2).$$

Portanto, ψ é um homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras.

Note que, dado $a \in A$ e definindo $r_a(x) = xa$ para todo $x \in eA$, temos $r_a \in \mathrm{End}_A(eA)$. Assim, para um elemento $eae \in eAe$, temos $\psi(r_a) = eae$, ou seja, ψ é sobrejetor.

Por fim, tome $\varphi \in \ker \psi$. Logo, $\varphi(e) = \varphi(e)e = \psi(\varphi) = 0$. Como $\varphi \in \mathrm{End}_A(eA)$, temos então $\varphi = 0$. Assim, ψ é um isomorfismo de $\Bbbk$-álgebras.

Dessa forma, temos então que A e eAe são Morita-equivalentes.

Definição 2.3.13: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Se $e \in A$ é um idempotente tal que eA é um gerador projetivo minimal de mod A (soma direta de um conjunto completo de módulos projetivos indecomponíveis e dois-a-dois não isomorfos em mod A), denotamos por $A^b := eAe \cong \mathrm{End}_A(eA)$ a *álgebra básica de A*, que está unicamente determinada por A a menos de isomorfismos, pois é isomorfa à álgebra de endomorfismos de um gerador projetivo minimal, que, por sua vez, está determinado a menos de isomorfismos pela Proposição 1.4.5.

A discussão acima prova o seguinte resultado sobre a relação entre uma álgebra e sua álgebra básica:

Corolário 2.3.14: Toda $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita A é Morita-equivalente à sua álgebra básica A^b.

Como a nomenclatura já deveria indicar, vemos abaixo que uma álgebra básica é isomorfa à sua álgebra básica.

Proposição 2.3.15: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Então, A é básica se, e somente se, $A \cong A^b$ como $\Bbbk$-álgebras.

Demonstração: Suponha que A seja básica. Logo, temos $A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$, em que $e_1, \ldots, e_n$ são idempotentes primitivos, $e_1 + \cdots + e_n = 1$, $e_1A, \ldots, e_nA$ são A-módulos à direita projetivos e indecomponíveis e $e_iA \ncong e_jA$ se $i \neq j$. Dessa forma, $A = 1_AA$ é um gerador projetivo minimal de mod A e $A^b = 1_AA1_A = A$.

Suponha, por outro lado, que $A^b \cong A$. Temos $A^b = eAe$, em que $e = e_1 + \cdots + e_n$, com $e_1, \ldots, e_n \in A$ idempotentes primitivos dois-a-dois ortogonais tais que $e_iA \ncong e_jA$ se $i \neq j$. Seja $\psi : eAe \to A$ um isomorfismo de $\Bbbk$-álgebras. Logo,

$$1_A = \psi(e) = \psi(e_1) + \cdots + \psi(e_n).$$

Como ψ é homomorfismo, temos que $\psi(e_1), \ldots, \psi(e_n)$ são idempotentes primitivos de A, dois-a-dois ortogonais. Como ψ é bijetor, temos também que $\psi(e_1)A, \ldots, \psi(e_n)A$ são projetivos e indecomponíveis, $A = \psi(e_1)A \oplus \cdots \oplus \psi(e_n)A$ e $\psi(e_i)A \ncong \psi(e_j)A$ se $i \neq j$. Portanto, A é básica. ■

O lema a seguir, que mostra que a equivalência de Morita preserva autoinjetividade de álgebras, é o último passo em direção à demonstração do resultado que estamos buscando desde o começo desta seção.

Lema 2.3.16: Sejam A e B duas $\Bbbk$-álgebras de dimensão finita Morita-equivalentes. Então, A é autoinjetiva se, e somente se, B é autoinjetiva.

Demonstração: Seja $F : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} B$ uma equivalência de Morita. Da Proposição 2.3.11, temos que M é um módulo projetivo (respectivamente, injetivo) em $\operatorname{mod} A$ se, e somente se, $F(M)$ é um módulo projetivo (respectivamente, injetivo) em $\operatorname{mod} B$.

Como F é uma equivalência, temos que todo módulo N em $\operatorname{mod} B$ é isomorfo a um módulo da forma $F(M)$ para algum módulo M em $\operatorname{mod} A$. Logo, $\operatorname{proj} A = \operatorname{inj} A$ se, e somente se, $\operatorname{proj} B = \operatorname{inj} B$ e, portanto, pelo Teorema 2.3.5, temos que A é uma álgebra autoinjetiva se, e somente se, B é uma álgebra autoinjetiva. ■

Agora, reunindo todas as definições e resultados apresentados, podemos finalmente mostrar que uma $\Bbbk$-álgebra autoinjetiva é Morita-equivalente a uma álgebra de Frobenius e, portanto, as categorias de módulos delas são equivalentes.

Corolário 2.3.17: Toda álgebra autoinjetiva é Morita-equivalente a uma álgebra de Frobenius.

Demonstração: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra autoinjetiva. Do Corolário 2.3.14, temos que A é Morita-equivalente à sua álgebra básica A^b. Como A é autoinjetiva, pelo Lema 2.3.16, temos que A^b é autoinjetiva. Por fim, pela Proposição 2.3.7, A^b é uma álgebra de Frobenius. ■

Note que, reunindo os resultados demonstrados nesta seção, temos que a classe de todas as $\Bbbk$-álgebras autoinjetivas é a menor classe de $\Bbbk$-álgebras de dimensão finita que contém a classe de todas as $\Bbbk$-álgebras de Frobenius e é fechada para equivalências de Morita.

Capítulo 3

Álgebras de Hopf

Neste capítulo, vamos apresentar o básico sobre *álgebras de Hopf*. O texto foi pensado para o leitor com alguma familiaridade com essa teoria e, por isso, omitiremos boa parte dos detalhes deste capítulo, focando apenas em relembrar conceitos e resultados fundamentais para o entendimento do que será apresentado nos próximos capítulos. Para conferir os detalhes e as demonstrações omitidas, [FM20] pode ser consultado.

Na primeira seção, apenas apresentamos as definições básicas sobre o assunto e alguns exemplos e propriedades. Na segunda seção, estudamos os módulos sobre álgebras de Hopf e introduzimos alguns exemplos e notações que serão chaves para o próximo capítulo. O principal resultado dessa seção é o *Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf*, que garantirá que álgebras de Hopf de dimensão finita são álgebras de Frobenius. Na terceira seção, demonstramos nossa primeira generalização de um resultado de Teoria de Representações de Grupos Finitos, o *Teorema de Maschke*.

Na última seção do capítulo, introduzimos e estudamos o conceito de *coálgebra matricial*, que será uma ferramenta utilizada no próximo capítulo.

3.1 Definições básicas

Vamos começar relembrando os conceitos de *coálgebra*, *comultiplicação* e *counidade*, que dualizam as estruturas de uma álgebra. De aqui em diante, passaremos a utilizar a definição de álgebra dada por diagramas comutativos, pois eles nos permitirão visualizar melhor os conceitos em questão.

Definição 3.1.1: Uma $\Bbbk$-*coálgebra* é um $\Bbbk$-espaço vetorial C equipado com duas aplicações $\Bbbk$-lineares, a *comultiplicação* $\Delta = \Delta_C : C \to C \otimes C$ e a *counidade* $\varepsilon = \varepsilon_C : C \to \Bbbk$, de forma que os diagramas abaixo sejam comutativos:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes \mathrm{id}"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
\Bbbk \otimes C & & C \otimes \Bbbk \\
& C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}"] \arrow[ur, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
$$

O primeiro diagrama expressa a *coassociatividade* da comultiplicação, enquanto o segundo expressa a *lei da counidade*.

Uma coálgebra C é dita *cocomutativa* se $\Delta = \tau \circ \Delta$, em que $\tau : C \otimes C \to C \otimes C$ é a *aplicação twist*, dada por $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$.

Um subespaço $I \subseteq C$ é dito um *coideal à esquerda* se $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$, um *coideal à direita* se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$ e simplesmente um *coideal* se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ e $\varepsilon(I) = \{0\}$.

Além disso, um subespaço $E \subseteq C$ é uma *subcoálgebra* se $\Delta(E) \subseteq E \otimes E$.

A partir de agora, dados um $\Bbbk$-espaço vetorial V, um elemento $v \in V$ e um elemento $\varphi \in V^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$, denotaremos o escalar $\varphi(v)$ por $\langle \varphi, v \rangle$ (com exceção da aplicação counidade de uma coálgebra).

Observação 3.1.2: Se (C, Δ, ε) é uma coálgebra, então $(C^*, \Delta^* \circ \iota, \varepsilon^* \circ \Psi)$ é uma álgebra, em que

- $\iota : C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^*$ é a aplicação $\Bbbk$-linear tal que $\langle \iota(f \otimes g), a \otimes b \rangle = \langle f, a \rangle \langle g, b \rangle$, para todos $f, g \in C^*$ e $a, b \in C$;
- $\Psi : \Bbbk \to \Bbbk^*$ é o isomorfismo dado por $\langle \Psi(\alpha), \beta \rangle = \alpha\beta$, para todos $\alpha, \beta \in \Bbbk$.

Além disso, se $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ são coálgebras, então $C \otimes D$ possui uma estrutura de coálgebra em que

- $\Delta_{C \otimes D}$ é a composta

$$C \otimes D \xrightarrow{\Delta_C \otimes \Delta_D} C \otimes C \otimes D \otimes D \xrightarrow{\mathrm{id}_C \otimes \tau \otimes \mathrm{id}_D} C \otimes D \otimes C \otimes D,$$

  em que $\tau : C \otimes D \to D \otimes C$ é a aplicação twist dada por $\tau(c \otimes d) = d \otimes c$ para todos $c \in C$ e $d \in D$;
- $\varepsilon_{C \otimes D}(c \otimes d) = \varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d)$, para todos $c \in C$ e $d \in D$.

Exemplo 3.1.3: Seja G um grupo. Defina $\varepsilon : \Bbbk G \to \Bbbk$ e $\Delta : \Bbbk G \to \Bbbk G \otimes \Bbbk G$ por

$$\varepsilon\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) = \sum_{g \in G} \alpha_g \qquad \Delta\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) = \sum_{g \in G} \alpha_g (g \otimes g).$$

Com essas aplicações, temos que $\Bbbk G$ é uma coálgebra.

Observação 3.1.4: Lembramos agora que uma das ferramentas muito útil no estudo das álgebras de Hopf é a *notação de Sweedler*, ou *notação sigma*. A partir dela, dados uma $\Bbbk$-álgebra C e um elemento $c \in C$, denotamos

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

Com esta notação, note que o segundo diagrama da definição de coálgebras nos garante que, para todo $c \in C$,

$$c = \sum_{(c)} \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)} = \sum_{(c)} c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)}).$$

Vamos relembrar agora o que são os *homomorfismos entre coálgebras*:

Definição 3.1.5: Sejam C e D coálgebras, com comultiplicações Δ_C e Δ_D e counidades ε_C e ε_D. Uma aplicação $\Bbbk$-linear $f : C \to D$ é dita um *homomorfismo de coálgebras* se os seguintes diagramas forem comutativos:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta_C"] \arrow[d, "f"'] & C \otimes C \arrow[d, "f\otimes f"] \\ D \arrow[r, "\Delta_D"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[dr, "\varepsilon_C"] \arrow[dd, "f"'] & \\ & \Bbbk \\ D \arrow[ur, "\varepsilon_D"'] & \end{tikzcd}$$

Na notação de Sweedler, temos então:

$$\sum_{(f(c))} f(c)_{(1)} \otimes f(c)_{(2)} = \sum_{(c)} f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}) \quad \text{e} \quad \varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c).$$

De forma bem natural, unimos os conceitos de álgebra e coálgebra na seguinte definição:

Definição 3.1.6: Uma $\Bbbk$-*biálgebra* é um $\Bbbk$-espaço vetorial B que é simultaneamente uma $\Bbbk$-álgebra e uma $\Bbbk$-coálgebra e essas duas estruturas são compatíveis, isto é, as seguintes afirmações equivalentes estão satisfeitas:

1. A comultiplicação Δ_B e a counidade ε_B são homomorfismos de $\Bbbk$-álgebras.
2. A multiplicação $\mathfrak{m}_B$ e a unidade μ_B são homomorfismos de $\Bbbk$-coálgebras.

Note que, se B é uma biálgebra, dados $x, y \in B$, então

$$\sum_{(xy)} (xy)_{(1)} \otimes (xy)_2 = \Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) = \sum_{(x),(y)} x_{(1)}y_{(1)} \otimes x_{(2)}y_{(2)}.$$

O último conceito do qual necessitamos para poder definir uma álgebra de Hopf é o *produto de convolução*, que nos permitirá multiplicar endomorfismos dessas álgebras e dará uma estrutura de álgebra para o espaço dessas aplicações.

Definição 3.1.7: Considere $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ uma $\Bbbk$-coálgebra e $A = (A, \mathfrak{m}, \mu)$ uma $\Bbbk$-álgebra. Definimos por *produto de convolução* o produto de elementos do $\Bbbk$-espaço vetorial $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C, A)$ dado por,

$$f * g = \mathfrak{m} \circ (f \otimes g) \circ \Delta,$$

para $f, g \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C, A)$, isto é, dado $c \in C$,

$$(f * g)(c) = \sum_{(c)} f(c_{(1)})g(c_{(2)}).$$

Observação 3.1.8: Com o produto de convolução $*$ definido acima, temos que

$$(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C, A), *, \mu \circ \varepsilon)$$

é uma $\Bbbk$-álgebra. [1]

Definição 3.1.9: Seja B uma biálgebra. Podemos definir uma convolução no $\Bbbk$-espaço $\mathrm{End}_{\Bbbk}(B)$ como acima. Dessa forma, se id_B é inversível pela convolução em $\mathrm{End}_{\Bbbk}(B)$, diremos que B é uma *álgebra de Hopf* e chamaremos o inverso de id_B de *antípoda* de B, que será denotada por S ou S_B.

Observação 3.1.10: Note que, se S é antípoda de uma álgebra de Hopf B, temos, para todo $b \in B$,

$$\sum_{(b)} S(b_{(1)})b_{(2)} = (S_B * \mathrm{id}_B)(b) = \mu(\varepsilon(b)) = (\mathrm{id}_B * S_B)(b) = \sum_{(b)} b_{(1)}S(b_{(2)})$$

e também que

$$\mu(\varepsilon(b)) = \varepsilon(b)\mu(1_{\Bbbk}) = \varepsilon(b)1_B.$$

[1] Ao definir uma álgebra, é usual apresentar o elemento unidade em vez de a função unidade. Aqui, $\mu \circ \varepsilon$ é o elemento unidade de $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C, A)$.

Portanto, a antípoda S pode ser caracterizada pela condição:

$$\sum_{(b)} S(b_{(1)})b_{(2)} = \varepsilon(b)1_B = \sum_{(b)} b_{(1)}S(b_{(2)}).$$

Além disso,

1. S é um *antimorfismo de álgebras*, isto é, $S(1_B) = 1_B$ e $S(ab) = S(b)S(a)$ para todos $a, b \in B$;
2. S é um *antimorfismo de coálgebras* de $\operatorname{End}_{\Bbbk} B$, isto é, $\Delta \circ S = \tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta$ e $\varepsilon \circ S = \varepsilon$. Na notação de Sweedler, podemos reescrever a primeira igualdade como

$$\sum_{(S(b))} (S(b))_{(1)} \otimes (S(b))_{(2)} = \Delta(S(b)) = \sum_{(b)} S(b_{(2)}) \otimes S(b_{(1)})$$

para todo $b \in B$.

Exemplo 3.1.11: Seja G um grupo. Sabemos que $\Bbbk G$ é uma álgebra com a multiplicação dada por

$$\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right)\left(\sum_{h\in G} \beta_h h\right) = \sum_{g,h\in G} \alpha_g\beta_h gh = \sum_{x\in G}\left(\sum_{gh=x} \alpha_g\beta_h\right) x$$

e unidade dada por $\lambda \mapsto \lambda 1_G$.

No Exemplo 3.1.3, vimos que $\Bbbk G$ é uma coálgebra e, com essas duas estruturas acima, temos que $\Bbbk G$ é uma biálgebra.

Além disso, $\Bbbk G$ possui uma antípoda dada por $S(g) = g^{-1}$, ou seja, $\Bbbk G$ é uma álgebra de Hopf.

Observação 3.1.12: Se $(H, \mathfrak{m}_H, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H, S_H)$ é uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf de dimensão finita, então temos que

$$(H^*, \mathfrak{m}_{H^*}, \mu_{H^*}, \Delta_{H^*}, \varepsilon_{H^*}, S_{H^*}),$$

também é uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf de dimensão finita com

- $\mathfrak{m}_{H^*} = * : H^* \otimes H^* \to H^*$ (o produto de convolução);
- $\mu_{H^*} = \varepsilon_H^* \circ \Psi : \Bbbk \to H^*$, em que $\Psi : \Bbbk \to \Bbbk^*$ é o isomorfismo definido por $\langle \Psi(\alpha), \beta \rangle = \alpha\beta$, com $\alpha, \beta \in \Bbbk$. Isto é, para todo $\lambda \in \Bbbk$,

$$\mu_{H^*}(\lambda) = \varepsilon_H^*(\Psi(\lambda)) = \Psi(\lambda) \circ \varepsilon_H = \lambda\varepsilon_H;$$

- $\Delta_{H^*} = \iota^{-1} \circ \mathfrak{m}_H^* : H^* \to H^* \otimes H^*$, em que $\iota : H^* \otimes H^* \to (H \otimes H)^*$ é o isomorfismo tal que $\langle \iota(f \otimes g), a \otimes b \rangle = \langle f, a \rangle \langle g, b \rangle$, para todos $f, g \in H^*$ e $a, b \in H$;

- $\varepsilon_{H^*} = \Psi^{-1} \circ \mu_H^* : H^* \to \Bbbk$, isto é, para todo $\varphi \in H^*$,

$$\varepsilon_{H^*}(\varphi) = \Psi^{-1}(\mu_H^*(\varphi)) = \Psi^{-1}(\varphi \circ \mu_H) = \langle \varphi, 1_H \rangle ;$$

- $S_{H^*} = S_H^* : H^* \to H^*$ é dado por $S_{H^*}(\varphi) = S_H^*(\varphi) = \varphi \circ S_H$.

Para entender melhor quem é Δ_{H^*}, tome $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de H e seja $B^* = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ sua base dual. Logo, dado $h \in H$, temos $h = \sum_{i=1}^n \langle \phi_i, h \rangle v_i$ e, dado $\varphi \in H^*$, temos $\varphi = \sum_{i=1}^n \langle \varphi, v_i \rangle \phi_i$. Assim, observe que, tomando $\varphi \in H^*$ e $a, b \in H$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \iota\left(\sum_{i,j=1}^{n} \langle \varphi, v_i v_j \rangle \phi_i \otimes \phi_j\right), a \otimes b \right\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \mathfrak{m}_H^*(\varphi), v_i \otimes v_j \rangle \langle \phi_i, a \rangle \langle \phi_j, b \rangle \\
&= \left\langle \mathfrak{m}_H^*(\varphi), \sum_{i=1}^{n} \langle \phi_i, a \rangle v_i \otimes \sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, b \rangle v_j \right\rangle \\
&= \langle \mathfrak{m}_H^*(\varphi), a \otimes b \rangle ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta_{H^*}(\varphi) = \iota^{-1}(\mathfrak{m}_H^*(\varphi)) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \varphi, v_i v_j \rangle \phi_i \otimes \phi_j. \tag{3.1}$$

3.2 Módulos de Hopf

Nosso principal objetivo nesta seção é enunciar o *Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf*. Embora estejamos omitindo a maior parte das demonstrações, provaremos um corolário desse teorema, que será utilizado na seção seguinte para caracterizar as álgebras de Hopf de dimensão finita a partir da existência de elementos integrais.

Para começar, observe que poderíamos definir o conceito de módulo utilizando diagramas comutativos da seguinte forma: se $(A, \mathfrak{m}, \mu)$ é uma $\Bbbk$-álgebra, um *A-módulo à esquerda* é um par ordenado (M, ψ), em que M é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $\psi : A \otimes M \to M$ é uma aplicação $\Bbbk$-linear tal que os seguintes diagramas sejam comutativos:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes M \arrow[r, "\mathfrak{m} \otimes \mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \psi"'] & A \otimes M \arrow[d, "\psi"] \\
A \otimes M \arrow[r, "\psi"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Bbbk \otimes M \arrow[r, "\mu \otimes \mathrm{id}_M"] \arrow[dr, "\sim"'] & A \otimes M \arrow[d, "\psi"] \\
 & M
\end{tikzcd}$$

Assim, podemos denotar $\psi(a \otimes x) = a \cdot x$ para todos $a \in A$ e $x \in M$.

Dualizando esses diagramas, temos o seguinte conceito:

Definição 3.2.1: Para uma $\Bbbk$-coálgebra (C, Δ, ε), um *C-comódulo à direita* é um par ordenado (M, ρ) em que M é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $\rho : M \to M \otimes C$ é uma aplicação $\Bbbk$-linear tal que os seguintes diagramas sejam comutativos:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}_M \otimes \Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\rho \otimes \mathrm{id}_C"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\sim"'] & M \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}_M \otimes \varepsilon"] \\ & M \otimes \Bbbk \end{tikzcd}$$

Define-se um *C-comódulo à esquerda* simetricamente.

Exemplo 3.2.2: Se (C, Δ, ε) é uma $\Bbbk$-coálgebra, C tem uma estrutura de C-módulo à direita dada por $\rho = \Delta$.

Observação 3.2.3: Também temos uma notação sigma para comódulos: se (M, ρ) é um comódulo à direita sobre uma $\Bbbk$-coálgebra C, dado $m \in M$, denotamos:

$$\rho(m) = \sum_{(m)} m_{(0)} \otimes m_{(1)},$$

com $m_{(0)} \in M$ e $m_{(1)} \in C$.

Para comódulos à esquerda, a notação é:

$$\rho(m) = \sum_{(m)} m_{(-1)} \otimes m_{(0)},$$

com $m_{(0)} \in M$ e $m_{(-1)} \in C$. Ou seja, nessa notação, utilizamos o índice zero para identificar os elementos de M, índices positivos para identificar a coação à direita e negativos para a coação à esquerda.

Sobre os comódulos, temos o seguinte resultado clássico da teoria das álgebras de Hopf. Ele será utilizado para provar o último resultado desta seção, que terá grande importância na seção seguinte.

Teorema Fundamental dos Comódulos: Sejam C uma coálgebra e M um C-comódulo à esquerda. Então todo elemento de M pertence a um subcomódulo de M de dimensão finita.

Um corolário clássico desse teorema nos mostra que as coálgebras possuem uma propriedade de finitude muito similar:

Teorema Fundamental das Coálgebras: Todo elemento de uma coálgebra pertence a uma subcoálgebra de dimensão finita.

Vamos relembrar agora o que entendemos por *homomorfismos de comódulos*:

Definição 3.2.4: Sejam (M, ρ_M) e (N, ρ_N) comódulos à esquerda sobre uma $\Bbbk$-coálgebra C. Uma aplicação $\Bbbk$-linear $f : M \to N$ é um *homomorfismo de comódulos* se

$$\rho_N \circ f = (\mathrm{id}_C \otimes \mathrm{id}_f) \circ \rho_M.$$

Agora uniremos os conceitos de módulos e comódulos nos chamados *módulos de Hopf*:

Definição 3.2.5: Considere uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf H, um $\Bbbk$-espaço vetorial M e aplicações $\Bbbk$-lineares $\psi : M \otimes H \to M$ e $\rho : M \to M \otimes H$. Diremos que (M, ψ, ρ) é um *H-módulo de Hopf à direita* se (M, ψ) for um H-módulo à direita, (M, ρ) for um H-comódulo à direita e o seguinte diagrama for comutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes H \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\rho \otimes \Delta_H"'] & M \arrow[r, "\rho"] & M \otimes H \arrow[d, "\psi \otimes m_H"] \\
M \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[rr, "\mathrm{id}_M \otimes \tau \otimes \mathrm{id}_H"'] & & M \otimes H \otimes H \otimes H
\end{tikzcd}$$

Além disso, dados M, N dois H-módulos de Hopf à direita, uma aplicação $\Bbbk$-linear $f : M \to N$ é um *homomorfismo de módulos de Hopf à direita* se f for simultaneamente um homomorfismo tanto de módulos quanto de comódulos, ambos à direita.

Simetricamente, temos as definições para módulos de Hopf à esquerda.

Exemplo 3.2.6: Seja V um $\Bbbk$-espaço vetorial. Podemos definir em $H \otimes V$ uma estrutura de H-módulo à esquerda por

$$g \cdot (h \otimes v) := gh \otimes v$$

para todos $h, g \in H$ e $v \in V$.

Além disso, também é possível definir em $H \otimes V$ uma estrutura de H-comódulo à esquerda $\rho : H \otimes V \to H \otimes H \otimes V$ por $\rho = \Delta \otimes \mathrm{id}_V$, isto é,

$$\rho(h \otimes v) := \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)} \otimes v$$

para todos $h \in H$ e $v \in V$.

Com essas estruturas, $H \otimes V$ é um H-módulo de Hopf à esquerda.

Podemos definir estruturas análogas à direita e, considerando essas estruturas para $M \otimes H$ abaixo, temos as seguintes equivalências:

Observação 3.2.7: Lembramos agora que, se H for uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf e M for um

$\Bbbk$-espaço vetorial com uma estrutura de módulo à direita $\psi : M \otimes H \to M$ e uma estrutura de comódulo à direita $\rho : M \to M \otimes H$, são equivalentes:

i. ψ é um homomorfismo de H-comódulos à direita;

ii. ρ é um homomorfismo de H-módulos à direita;

iii. (M, ψ, ρ) é um H-módulo de Hopf à direita.

(Vale o resultado análogo à esquerda).

Exemplo 3.2.8: Seja H uma álgebra de Hopf. A multiplicação e a comultiplicação fornecem a H uma estrutura de H-módulo de Hopf à esquerda.

Pelo Exemplo 3.2.6, temos que $H \otimes V$ também tem uma estrutura de H-módulo de Hopf à esquerda.

Para cada $v \in V$, defina a aplicação linear $\psi_v : H \to H \otimes V$ por $\psi_v(h) = h \otimes v$.

Observe que, dados $g, h \in H$,

$$\psi_v(gh) = gh \otimes v = g \cdot (h \otimes v) = g \cdot \psi_v(h),$$

isto é, ψ_v é um homomorfismo de H-módulos à esquerda.

Além disso,

$$\rho_{H\otimes V} \circ \psi_v(h) = \rho_{H\otimes V}(h \otimes v) = \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)} \otimes v = \Delta(h) \otimes v = (\mathrm{id}_H \otimes \psi_v) \circ \Delta(h),$$

isto é, ψ_v é um homomorfismo de H-comódulos à esquerda.

Portanto, ψ_v é um homomorfismo de H-módulos de Hopf à esquerda.

Vamos relembrar agora que H^* possui uma estrutura de H-módulo de Hopf à esquerda. Para isso, vamos definir algumas estruturas de H-módulo em H^* que serão muito utilizadas nos próximos capítulos.

Observação 3.2.9: Seja H uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf com antípoda S. Se (M, ψ) é um H-módulo à direita, então M tem estrutura de H-módulo à esquerda dada por

$$\begin{aligned} \psi' : H \otimes M &\to M \\ h \otimes m &\mapsto \psi(m \otimes S(h)) \end{aligned}$$

para $h \in H$ e $m \in M$.

Se H tem dimensão finita, vimos no primeiro capítulo que existe uma ação natural de H à direita em H^* e denotaremos aqui essa ação por $\varphi \leftharpoonup h$, para $h \in H$ e $\varphi \in H^*$, isto é, H^*

é um H-módulo à direita considerando a ação

$$(\varphi \leftharpoonup h)(x) := \varphi(hx)$$

para todo $x \in H$.

Assim, essa ação induz uma estrutura de H-módulo à esquerda em H^* por intermédio da antípoda. Denotando essa nova ação por $h \rightharpoondown \varphi$, para $h \in H$ e $\varphi \in H^*$, temos

$$(h \rightharpoondown \varphi)(x) = (\varphi \leftharpoonup S(h))(x) = \varphi(S(h)x).$$

De maneira análoga, poderíamos definir ações $\rightharpoonup$ e $\leftharpoondown$.

A seguir, definimos uma estrutura de H-comódulo em H^*:

Observação 3.2.10: Novamente, seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita.

Denote por $\delta : H^* \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H^*, H^*)$ a aplicação $\Bbbk$-linear definida por

$$\delta(\varphi)(\psi) = \mathfrak{m}_{H^*}(\varphi \otimes \psi) = \varphi * \psi,$$

para $\varphi, \psi \in H^*$.

Considere também a aplicação $\Bbbk$-linear $\omega : H \otimes H^* \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H^*, H^*)$ dada por

$$\omega(h \otimes \varphi)(\psi) = \langle \psi, h \rangle \, \varphi,$$

para $h \in H$ e $\varphi, \psi \in H^*$.

Vamos mostrar que ω é injetora. Se $\sum_{i=1}^{n} h_i \otimes \varphi_i \neq 0$, podemos assumir que $\varphi_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e que $\{h_1, \dots, h_n\}$ é um conjunto linearmente independente sobre $\Bbbk$. Assim, podemos garantir que existe $f \in H^*$ tal que $f(h_1) = 1$ e $f(h_i) = 0$ para todo $i \in \{2, \dots, n\}$. Dessa forma,

$$\omega\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \otimes \varphi_i\right)(f) = \varphi_1 \neq 0.$$

Por outro lado, temos

$$\dim(H \otimes H^*) = (\dim H)(\dim H^*) = (\dim H^*)(\dim H^*) = \dim \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H^*, H^*).$$

Portanto, ω é um isomorfismo de $\Bbbk$-espaços.

Assim, podemos definir a composição

$$\rho : H^* \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H^*, H^*) \xrightarrow{\omega^{-1}} H \otimes H^*.$$

Agora, observamos que ρ é definida da seguinte forma: para cada $\varphi \in H^*$, temos que $\rho(\varphi) = \sum_{(\varphi)} \varphi_{(-1)} \otimes \varphi_{(0)} \in H \otimes H^*$ se, e somente se, $\varphi * \psi = \sum_{(\varphi)} \left\langle \psi, \varphi_{(-1)} \right\rangle \varphi_{(0)}$ para qualquer $\psi \in H^*$. Por um lado, supondo $\rho(\varphi) = \sum_{(\varphi)} \varphi_{(-1)} \otimes \varphi_{(0)}$, como $\delta = \omega \circ \rho$ pela definição de ρ, temos

$$\begin{aligned} \varphi * \psi = \delta(\varphi)(\psi) = \omega(\rho(\varphi))(\psi) &= \omega \left(\sum_{(\varphi)} \varphi_{(-1)} \otimes \varphi_{(0)} \right) (\psi) \\ &= \sum_{(\varphi)} \left\langle \psi, \varphi_{(-1)} \right\rangle \varphi_{(0)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por outro lado, supondo $\varphi * \psi = \sum_{(\varphi)} \left\langle \psi, \varphi_{(-1)} \right\rangle \varphi_{(0)}$, temos que ω é um isomorfismo e

$$\omega \left(\sum_{(\varphi)} \varphi_{(-1)} \otimes \varphi_{(0)} \right) (\psi) = \sum_{(\varphi)} \left\langle \psi, \varphi_{(-1)} \right\rangle \varphi_{(0)} = \varphi * \psi = \delta(\varphi)(\psi) = \omega(\rho(\varphi))(\psi),$$

donde concluímos que $\sum_{(\varphi)} \varphi_{(-1)} \otimes \varphi_{(0)} = \rho(\varphi)$.

Podemos mostrar que a aplicação ρ acima define uma estrutura de H-comódulo em H^* e, com ela e com a ação ação $\rightharpoondown$ definida na Observação 3.2.9, temos que H^* é um H-módulo de Hopf à esquerda .

A definição do *subespaço de coinvariantes* é a última necessária para podermos enunciar o Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf.

Definição 3.2.11: Sejam H uma biálgebra e (M, ρ) um H-comódulo à esquerda. O conjunto

$$M^{\mathrm{co}\, H} = \{m \in M \mid \rho(m) = 1_H \otimes m\}$$

é um subespaço de M chamado de *subespaço de coinvariantes de M*.

Finalmente, chegamos ao enunciado do principal resultado desta seção. O teorema a seguir será o responsável por garantir as conexões entre álgebras de Hopf e álgebras de Frobenius que veremos no próximo capítulo.

Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf: Sejam H uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf e M um H-módulo de Hopf à esquerda. Então, a aplicação $\alpha : H \otimes M^{\mathrm{co}\, H} \to M$ definida por $\alpha(h \otimes m) = h \cdot m$, para $h \in H$ e $m \in M^{\mathrm{co}\, H}$, é um isomorfismo de módulos de Hopf, em que a estrutura de $H \otimes M^{\mathrm{co}\, H}$ é dada no Exemplo 3.2.6.

Observação 3.2.12: É possível mostrar que, dados uma álgebra de Hopf H e um H-módulo de Hopf (à direita ou à esquerda) M, então

1. Se N é um subcomódulo de M, então o submódulo de M gerado por N é um H-

submódulo de Hopf de M (isto é, é simultaneamente um submódulo e um subcomódulo de M);

2. Se N é um submódulo de M, então o subcomódulo de M gerado por N é um H-submódulo de Hopf de M.

Ou seja, temos que submódulos gerados por subcomódulos são subcomódulos e subcomódulos gerados por submódulos são submódulos.

O corolário abaixo é uma aplicação dos resultados enunciados ao longo desta seção e será um passo importante para a caracterização das álgebras de Hopf de dimensão finita na próxima seção. Escrevemos sua demonstração apenas a fim de fixar esses resultados e os conceitos que foram apresentados ao longo de todo o capítulo.

Corolário 3.2.13: Toda álgebra de Hopf que possui um ideal à esquerda não nulo e de dimensão finita tem dimensão finita. O mesmo vale para ideais à direita.

Demonstração: Considere uma álgebra de Hopf H e suponha que $I \neq 0$ seja um ideal à esquerda de H de dimensão finita. H é um H-módulo de Hopf, com as estruturas dadas pela multiplicação e pela comultiplicação, e I é um submódulo de H. Denote por M o subcomódulo de H gerado por I.

Seja $\{h_1, \ldots, h_n\} \subseteq M$ uma base de I como $\Bbbk$-espaço. Pelo Teorema Fundamental dos Comódulos, temos que, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe M_i um subcomódulo de M de dimensão finita tal que $h_i \in M_i$. Com isso, temos que $\sum_{i=1}^{n} M_i$ é um subcomódulo de H de dimensão finita e contém I. Porém, M é o menor subcomódulo de H que contém I e, assim, concluímos que M tem dimensão finita.

A Observação 3.2.12 nos diz que M é um submódulo de Hopf de H. Logo, pelo Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf, M é isomorfo a $H \otimes M^{\operatorname{co} H}$. Com isso, como $0 \neq I \subseteq M$, devemos ter $M^{\operatorname{co} H} \neq 0$.

Dado $m \in M^{\operatorname{co} H}$, temos $\Delta(m) = 1_H \otimes m$ e, portanto, $m = \varepsilon(m)1_H$. Assim, como $M^{\operatorname{co} H} \neq 0$, concluímos que $M^{\operatorname{co} H} \cong \Bbbk$ e, com isso, $M \cong H \otimes \Bbbk \cong H$. Dessa forma, temos que $M = H$ e que H tem dimensão finita.

A demonstração é análoga para ideais à direita. ■

3.3 Teorema de Maschke

Nesta seção, provamos a generalização do *Teorema de Maschke*, clássico da Teoria de Representação de Grupos Finitos, para álgebras de Hopf. Para isso, introduzimos o conceito de *elemento integral* e aproveitamos para mostrar também a relação entre a existência de integrais não nulos e a dimensão da álgebra. Após esse pequeno desvio, apresentamos a demonstração do Teorema de Mashcke generalizado e alguns corolários.

Definição 3.3.1: Seja H uma álgebra de Hopf. Dizemos que

1. $\Lambda \in H$ é um *integral à esquerda* para H se $h\Lambda = \varepsilon(h)\Lambda$ para todo $h \in H$;
2. $\Lambda \in H$ é um *integral à direita* para H se $\Lambda h = \varepsilon(h)\Lambda$ para todo $h \in H$.

Denotaremos por $\int_H^l$ e $\int_H^r$ os conjuntos dos integrais à esquerda e à direita de H, respectivamente.

Se H é uma álgebra de Hopf, definimos os *integrais* para a álgebra H^* por:

1. $\lambda \in H^*$ é um integral à esquerda para H^* se $\varphi * \lambda = \varepsilon_{H^*}(\varphi)\lambda = \langle \varphi, 1_H \rangle \lambda$ para todo $\varphi \in H^*$;
2. $\lambda \in H^*$ é um integral à direita para H^* se $\lambda * \varphi = \varepsilon_{H^*}(\varphi)\lambda = \langle \varphi, 1_H \rangle \lambda$ para todo $\varphi \in H^*$.

Utilizando a ação $\rightharpoonup$ definida na seção anterior e o Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf, temos o seguinte resultado:

Lema 3.3.2: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então, a aplicação

$$\alpha : H \otimes \int_{H^*}^r \to H^*$$

definida por $\alpha(h \otimes \lambda) = h \rightharpoonup \lambda$, para $h \in H$ e $\lambda \in \int_{H^*}^r$ é um isomorfismo de H-módulos de Hopf à esquerda.

Demonstração: Pelo Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf, temos um isomorfismo de H-módulos de Hopf à esquerda $\tilde{\alpha} : H \otimes (H^*)^{\mathrm{co}\,H} \to H^*$ dado por $\tilde{\alpha}(h \otimes \varphi) = h \rightharpoonup \varphi$.

No entanto, note que $\varphi \in (H^*)^{\mathrm{co}\,H}$ se, e somente se, $\rho(\varphi) = 1_H \otimes \varphi$. Pela definição de ρ no Exemplo 3.2.10, temos $\rho(\varphi) = 1_H \otimes \varphi$ se, e somente se, $\varphi * \psi = \langle \psi, 1_H \rangle \varphi$ para todo $\psi \in H^*$, ou seja, se, e somente se, $\varphi \in \int_{H^*}^r$.

Portanto, $\int_{H^*}^r = (H^*)^{\mathrm{co}\,H}$ e $\alpha = \tilde{\alpha}$. ■

Como consequência do resultado acima, e consequentemente do Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf, temos garantidas a existência de integrais não nulos e a bijetividade da antípoda para álgebras de Hopf de dimensão finita:

Teorema 3.3.3: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então, $\dim_{\Bbbk} \int_{H^*}^r = 1$ e a antípoda S de H é bijetora. Em particular, a igualdade $S(\int_H^l) = \int_H^r$ é válida.

Demonstração: Pelo Lema 3.3.2, temos um isomorfismo de módulos de Hopf à esquerda. Em particular, isso nos garante que

$$\dim_{\Bbbk} H = \dim_{\Bbbk} H^* = \dim_{\Bbbk}(H \otimes \int_{H^*}^r) = (\dim_{\Bbbk} H)(\dim_{\Bbbk} \int_{H^*}^r).$$

Consequentemente, $\dim_{\Bbbk} \int_{H^*}^r = 1$.

Agora, note que, se existe $h \in H$ tal que $S(h) = 0$, para todo $\lambda \in \int_{H^*}^r$, temos

$$\alpha(h \otimes \lambda) = h \rightharpoonup \lambda = \lambda \leftharpoonup S(h) = 0.$$

No entanto, vimos acima que existe $\lambda \in \int_{H^*}^r$ tal que $\lambda \neq 0$. Logo, como α é um isomorfismo, em particular é injetor e temos que $h = 0$, donde concluímos que S também é injetora. Como S é um endomorfismo de H e H tem dimensão finita, então S é bijetora.

Agora, tome $\Lambda \in \int_H^l$. Assim, como S é um antimorfismo de álgebras e também de coálgebras, denotando por $\overline{S}$ o inverso de S pela composição, isto é, $S \circ \overline{S} = \mathrm{id}_H = \overline{S} \circ S$, temos que $\overline{S}$ também é um antimorfismo de álgebras e de coálgebras e

$$S(\Lambda)h = S(\overline{S}(h)\Lambda) = \varepsilon(\overline{S}(h))S(\Lambda) = \varepsilon(h)S(\Lambda),$$

para todo $h \in H$.

Portanto, temos $S(\int_H^l) \subseteq \int_H^r$, obtendo uma das inclusões desejadas. Por outro lado, dado $\Lambda \in \int_H^r$,

$$h\overline{S}(\Lambda) = \overline{S}(\Lambda S(h)) = \varepsilon(S(h))\overline{S}(\Lambda) = \varepsilon(h)\overline{S}(\Lambda).$$

Logo, $\overline{S}(\Lambda) \in \int_H^l$ e $\Lambda \in S(\int_H^l)$. Assim, concluímos que $\int_H^r \subseteq S(\int_H^l)$ e temos a igualdade desejada. ■

A partir do resultado acima e do Corolário 3.2.13, podemos encontrar uma caracterização para as álgebras de Hopf de dimensão finita a partir da existência de integrais não nulos:

Corolário 3.3.4: Seja H uma álgebra de Hopf. As afirmações abaixo são equivalentes:

i. H tem dimensão finita;

ii. $\int_H^l \neq 0$;

iii. $\int_H^r \neq 0$.

Neste caso, $\dim_{\Bbbk} \int_H^l = \dim_{\Bbbk} \int_H^r = 1$.

Demonstração: Se $\Lambda \neq 0$ for um integral à esquerda para H, então $\Bbbk\Lambda$ é um ideal de H de dimensão 1 e, pelo Corolário 3.2.13, temos que H tem dimensão finita. O mesmo vale se Λ for um integral à direita.

Por outro lado, se H tem dimensão finita, H^* é uma álgebra de Hopf de dimensão finita e o Teorema 3.3.3 nos dá

$$\dim_{\Bbbk} \int_{H^{**}}^r = \dim_{\Bbbk} \int_{H^{**}}^l = 1. \tag{3.3}$$

Seja $\Phi : H \to H^{**}$ o isomorfismo do Lema 1.2.2. Observe que, dado $h \in H$, temos

$$\varepsilon_{H^{**}}(\phi_h) = \langle \phi_h, \varepsilon_H \rangle = \varepsilon_H(h).$$

Assim, se $\Lambda \in \int_H^l$, então, dado $\phi_h \in H^{**}$,

$$\phi_h * \phi_\Lambda = \Phi(h\Lambda) = \varepsilon_H(h)\phi_\Lambda = \varepsilon_{H^{**}}(\phi_h)\phi_\Lambda$$

e, por outro lado, se $\phi_\Lambda \in \int_{H^{**}}^l$, então

$$\Phi(h\Lambda) = \phi_h * \phi_\Lambda = \varepsilon_{H^{**}}(\phi_h)\phi_\Lambda = \varepsilon_H(h)\Phi(\Lambda) = \Phi(\varepsilon_H(h)\Lambda),$$

ou seja, $h\Lambda = \varepsilon_H(h)\Lambda$, pois Φ é isomorfismo.

Logo, temos que Λ é um integral para H se, e somente se, $\Phi(\Lambda)$ é um integral para H^{**}.

Portanto, as igualdades de (3.3) nos garantem que

$$\dim_{\Bbbk} \int_H^r = \dim_{\Bbbk} \int_H^l = 1,$$

encerrando a demonstração das equivalências e também da observação sobre a dimensão dos espaços dos integrais à direita e à esquerda. ■

Voltando nossa atenção para a demonstração do Teorema de Maschke, relembramos as seguintes definições:

Definição 3.3.5: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra. Dizemos que A é

- *Simples* se $A \neq 0$ e os únicos ideais bilaterais de A forem $\{0\}$ e A;
- *Semissimples* se todo A-módulo à esquerda (ou à direita) for semissimples (ou, equivalentemente, se rad $A = \{0\}$).

Agora que temos todas as definições necessárias, podemos provar o Teorema de Maschke generalizado para álgebras de Hopf.

Teorema 3.3.6 (Teorema de Maschke)**:** Seja H uma álgebra de Hopf. Então H é uma álgebra semissimples se, e somente se, $\varepsilon(\Lambda) \neq 0$ para algum elemento integral à esquerda (ou, equivalentemente, à direita) $\Lambda \in H$.

Demonstração: Como os H-submódulos à esquerda de H coincidem com os ideais à esquerda de H e $\ker \varepsilon$ é um ideal à esquerda de H, do fato de H ser semissimples concluímos que existe um ideal à esquerda I de H tal que $H = \ker \varepsilon \oplus I$. Como essa soma é direta, dados $x \in \ker \varepsilon$ e $y \in I$, temos $xy \in \ker \varepsilon \cap I = \{0\}$. Assim,

$$xy = 0 = \varepsilon(x)y.$$

Além disso, para todo $h \in H$, temos $h = (h - \varepsilon(h)1_H) + \varepsilon(h)1_H$ e, claramente, $h - \varepsilon(h)1_H \in \ker \varepsilon$. Logo, dado $y \in I$,

$$\begin{aligned} hy &= ((h - \varepsilon(h)1_H) + \varepsilon(h)1_H)y \\ &= (h - \varepsilon(h)1_H)y + \varepsilon(h)y \\ &= 0 + \varepsilon(h)y \\ &= \varepsilon(h)y, \end{aligned}$$

ou seja $I \subseteq \int_H^l$.

Note que, como ε é um homomorfismo de álgebras, $\varepsilon(1_H) = 1_{\Bbbk}$ e, portanto, $\ker \varepsilon \neq H$. Com isso, temos $I \neq 0$. Assim, podemos tomar $0 \neq \Lambda \in I \subseteq \int_H^l$ e $\varepsilon(\Lambda) \neq 0$ pois $\Lambda \notin \ker \varepsilon$.

Por outro lado, suponha que $\varepsilon(\Lambda) \neq 0$ para algum $\Lambda \in \int_H^l$. Podemos supor, em particular, que $\varepsilon(\Lambda) = 1$.

Agora, tome M um H-módulo à esquerda e N um submódulo de M. Considere B_N uma base de N como $\Bbbk$-espaço e estenda essa base até uma base B_M de M. Seja $\pi : M \to N$ a aplicação $\Bbbk$-linear tal que, dado um elemento $b \in B_M$,

$$\pi(b) = \begin{cases} b & \text{se } b \in B_N; \\ 0 & \text{se } b \notin B_N. \end{cases}$$

Agora, defina uma outra aplicação $\Bbbk$-linear $p : M \to N$ por

$$p(m) = \sum_{(\Lambda)} \Lambda_{(1)} \cdot \pi(S(\Lambda_{(2)}) \cdot m),$$

para todo $m \in M$. Vamos mostrar que p é um homomorfismo de módulos. Para isso, tome $h \in H$ e $m \in M$. Assim,

$$\begin{aligned} h \cdot p(m) &= \sum_{(\Lambda)} h\Lambda_{(1)} \cdot \pi(S(\Lambda_{(2)}) \cdot m) \\ &= \sum_{(\Lambda)} \left(\sum_{(h)} h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)}) \right) \Lambda_{(1)} \cdot \pi(S(\Lambda_{(2)}) \cdot m) \\ &= \sum_{(\Lambda),(h)} h_{(1)}\Lambda_{(1)} \cdot \pi(S(\Lambda_{(2)})\varepsilon(h_{(2)}) \cdot m) \qquad (3.4) \\ &= \sum_{(\Lambda),(h)} h_{(1)}\Lambda_{(1)} \cdot \pi(S(\Lambda_{(2)})S(h_{(2)})h_{(3)} \cdot m) \\ &= \sum_{(\Lambda),(h)} h_{(1)}\Lambda_{(1)} \cdot \pi(S(h_{(2)}\Lambda_{(2)})h_{(3)} \cdot m). \end{aligned}$$

Note que, como $\Lambda \in \int_H^l$, para todo $h \in H$,

$$\begin{aligned}
\sum_{(\Lambda),(h)} h_{(1)}\Lambda_{(1)} \otimes h_{(2)}\Lambda_{(2)} \otimes h_{(3)} &= \sum_{(h)} \Delta(h_{(1)}\Lambda) \otimes h_{(2)} \\
&= \sum_{(h)} \Delta(\varepsilon(h_{(1)})\Lambda) \otimes h_{(2)} \\
&= \sum_{(h)} \Delta(\Lambda) \otimes \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} \\
&= \Delta(\Lambda) \otimes h \\
&= \sum_{(\Lambda)} \Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)} \otimes h.
\end{aligned}$$

Com isso e com a sequência de equações em (3.4), temos

$$h \cdot p(m) = \sum_{(\Lambda)} \Lambda_{(1)}\pi(S(\Lambda_{(2)})h \cdot m) = p(h \cdot m),$$

ou seja, p é um homomorfismo de módulos e $\ker p$ é um H-submódulo de M.

Agora, note que $p(n) = n$ para todo $n \in N$, pois,

$$p(n) = \sum_{(\Lambda)} \Lambda_{(1)} \cdot \pi(S(\Lambda_{(2)}) \cdot n) = \sum_{(\Lambda)} \Lambda_{(1)}S(\Lambda_{(2)}) \cdot n = \varepsilon(\Lambda)n = n$$

e, portanto, $p(M) = N$.

Claramente, para todo $m \in M$, temos $m = p(m) + (m - p(m))$, ou seja,

$$M = p(M) + (\mathrm{id}_M - p)(M) = N + \ker p.$$

No entanto, como $p(n) = n$ para todo $n \in N$, temos $N \cap \ker p = \{0\}$ e, portanto, $M = N \oplus \ker p$, provando que M é completamente irredutível. Assim, concluímos que H é semissimples. ■

Como consequências diretas, temos os seguintes resultados:

Corolário 3.3.7: Toda álgebra de Hopf semissimples tem dimensão finita.

Corolário 3.3.8: Toda álgebra de Hopf semissimples é unimodular, isto é, a igualdade $\int_H^l = \int_H^r$ é válida.

Demonstração: Pelo Teorema de Mashcke, existe $\Lambda \in \int_H^l$ tal que $\varepsilon(\Lambda) \neq 0$. Assim, dado

$t \in \int_H^r$, temos

$$t = \frac{\varepsilon(\Lambda)}{\varepsilon(\Lambda)} t = \frac{1}{\varepsilon(\Lambda)} t\Lambda = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(\Lambda)} \Lambda \in \int_H^l$$

e, portanto, $\int_H^r \subseteq \int_H^l$, concluindo a demonstração de uma das inclusões. A outra inclusão é análoga. ■

Se H for unimodular, denotaremos simplesmente por $\int_H$ o espaço dos elementos integrais.

Por fim, podemos obter novamente o caso clássico para grupos finitos.

Corolário 3.3.9: Seja G um grupo finito. $\Bbbk G$ é uma álgebra semissimples se, e somente se, a característica de $\Bbbk$ não divide a ordem de G.

Demonstração: Note que $\Lambda = \sum_{g \in G} g \neq 0$ é um elemento integral à esquerda para $\Bbbk G$. Como $\int_{\Bbbk G}^l$ tem dimensão 1, todo integral à esquerda para $\Bbbk G$ é um múltiplo escalar de Λ. Assim, $\varepsilon\left(\int_{\Bbbk G}^l\right) = \{0\}$ se, e somente se, $\varepsilon(\Lambda) = 0$. Além disso, note que

$$\varepsilon(\Lambda) = \sum_{g \in G} 1 = |G|.$$

Portanto, $\varepsilon\left(\int_{\Bbbk G}^l\right) = \{0\}$ se, e somente se, char $\Bbbk$ divide $|G|$. Agora, o resultado segue diretamente do Teorema de Maschke. ■

3.4 Coálgebra Matricial

Aproveitamos a última seção deste capítulo para falar sobre um exemplo de coálgebra que será muito útil no próximo capítulo: a coálgebra matricial.

Antes de começar o estudo sobre essas coálgebras, relembramos o *Teorema de Wedderburn-Artin*, que nos garante que álgebras simples, essencialmente, são álgebras de matrizes.

Teorema de Wedderburn-Artin: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra semissimples de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$. Assim,

$$A \cong \mathbb{M}_{n_1}(D_1) \times \cdots \times \mathbb{M}_{n_r}(D_n),$$

em que D_i é uma $\Bbbk$-álgebra com divisão de dimensão finita, $\mathbb{M}_{n_i}(D_i)$ é o anel das matrizes $n_i \times n_i$ com entradas em D_i e $n_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. O número r e os pares $(n_1, D_1), \ldots, (n_r, D_r)$ estão unicamente determinados (a menos de permutação) e existem exatamente r módulos simples em mod A mutualmente não isomorfos. Se esses módulos são $S_1, \ldots, S_r$, então $A \cong S_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus S_r^{n_r}$.

Se $\mathbb{k}$ é um corpo algebricamente fechado, então

$$A \cong \mathbb{M}_{n_1}(\mathbb{k}) \times \cdots \times \mathbb{M}_{n_r}(\mathbb{k}).$$

Corolário 3.4.1: Seja A uma $\mathbb{k}$-álgebra de dimensão finita. Assim, A é uma álgebra simples se, e somente se, existem um inteiro positivo n e uma $\mathbb{k}$-álgebra com divisão D tais que $A \cong \mathbb{M}_n(D)$ como $\mathbb{k}$-álgebras.

Se $\mathbb{k}$ for algebricamente fechado, então A é simples se, e somente se, $A \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{k})$ para algum inteiro positivo n.

Assim, será possível dizer que os espaços duais dessas álgebras simples serão as coálgebras matriciais. Dessa forma, esse conceito nos ajudará a estudar a relação entre a semissimplicidade de uma álgebra de Hopf e a de seu espaço dual.

Também será importante definir uma multiplicação na coálgebra matricial de forma que ela seja uma álgebra isomorfa à álgebra de matrizes, que nos permitirá encontrar um resultado semelhante ao *Teorema de Skolem-Noether* para as coálgebras matriciais.

Comecemos então nosso estudo apresentando a definição da coálgebra matricial. Nossa principal referência no que se segue é [DNR01].

Definição 3.4.2: Seja $n \geq 1$ inteiro e considere C um $\mathbb{k}$-espaço de base $\{c_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$.

Defina duas aplicações $\mathbb{k}$-lineares $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to \mathbb{k}$ tais que

$$\Delta(c_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \otimes c_{kj} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon(c_{ij}) = \delta_{ij}.$$

Com essas operações, C é uma coálgebra e será chamada de uma *coálgebra matricial de ordem n*.

Como observamos abaixo, e como o nome sugere, a coálgebra matricial é dual da álgebra de matrizes e, portanto, das álgebras simples.

Observação 3.4.3: Se C é uma coálgebra matricial de ordem n, podemos definir uma aplicação $\mathbb{k}$-linear $\Phi : C^* \to \mathbb{M}_n(\mathbb{k})$ tomando $\Phi(\varphi_{ij}) = E_{ij}$, em que $\{\varphi_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ é a base dual de uma base $\{c_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ de C e $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$, com E_{ij} sendo a matriz com 1 na entrada (i, j) e 0 nas demais, é uma base de $\mathbb{M}_n(\mathbb{k})$.

Dados $\varphi_{ij}, \varphi_{kl} \in C^*$ e $c_{pq} \in C$, temos

$$\langle \varphi_{ij} * \varphi_{kl}, c_{pq} \rangle = \sum_{m=1}^{n} \langle \varphi_{ij}, c_{pm} \rangle \langle \varphi_{kl}, c_{mq} \rangle .$$

Observe que, se $i \neq p$ ou $l \neq q$, temos $\langle \varphi_{ij} * \varphi_{kl}, c_{pq} \rangle = 0$. Agora, note que

$$\langle \varphi_{ij} * \varphi_{kl}, c_{il} \rangle = \sum_{m=1}^{n} \langle \varphi_{ij}, c_{im} \rangle \langle \varphi_{kl}, c_{ml} \rangle = \langle \varphi_{ij}, c_{ij} \rangle \langle \varphi_{kl}, c_{jl} \rangle = \delta_{jk},$$

ou seja,

$$\langle \varphi_{ij} * \varphi_{kl}, c_{pq} \rangle = \delta_{jk} \delta_{(i,l),(p,q)} = \delta_{jk} \langle \varphi_{il}, c_{pq} \rangle .$$

Portanto, $\varphi_{ij} * \varphi_{kl} = \delta_{jk} \varphi_{il}$ e

$$\Phi(\varphi_{ij} * \varphi_{kl}) = \Phi(\delta_{jk} \varphi_{il}) = \delta_{jk} \Phi(\varphi_{il}) = \delta_{jk} E_{il} = E_{ij} E_{jk}.$$

Dessa forma, temos que Φ é um isomorfismo de álgebras.

Identificando $C^* = \mathbb{M}_n(\Bbbk)$, podemos calcular o traço dos elementos de C^* somando os coeficientes dos elementos φ_{ii} numa representação como combinação linear da base $\{\varphi_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$.

Observação 3.4.4: Podemos definir também uma forma bilinear $(\,|\,) : C \times C \to \Bbbk$ tomando

$$(c_{ij} \mid c_{kl}) = \delta_{il} \delta_{jk}.$$

Com isso, temos uma aplicação linear $\xi : C \to C^*$ dada por $\xi(c) = (c \mid -)$, isto é, dados $c, d \in C$,

$$\xi(c)(d) = (c \mid d) .$$

Claramente, $\xi(c_{ij}) = \varphi_{ji}$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto, ξ é um isomorfismo de $\Bbbk$-espaços.

Com as definições acima e identificando $C^* = \mathbb{M}_n(\Bbbk)$, temos o seguinte resultado

Lema 3.4.5: Seja C uma coálgebra matricial de ordem n com uma base $\{c_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. Dados $c, d \in C$, temos

1. $(c \mid d) = \mathrm{Tr}(\xi(c)\xi(d))$;
2. $\varepsilon(c) = \sum_{i=1}^{n} (c \mid c_{ii}) = \mathrm{Tr}(\xi(c))$.

Demonstração: Vamos checar essas igualdades para os elementos da base de C.

Primeiramente, note que

$$\mathrm{Tr}(\xi(c_{ij})\xi(c_{kl})) = \mathrm{Tr}(\varphi_{ji} \varphi_{lk}) = \delta_{jk} \, \mathrm{Tr}(\varphi_{il}) = \delta_{jk} \delta_{il} = (c_{ij} \mid c_{kl}) .$$

Agora, note que

$$\varepsilon(c_{jk}) = \delta_{jk} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ji}\delta_{ki} = \sum_{i=1}^{n} (c_{jk} \mid c_{ii})$$

e, além disso,

$$\text{Tr}(\xi(c_{jk})) = \text{Tr}(\varphi_{jk}) = \delta_{jk}.$$

Por linearidade, podemos estender o resultado para todos os elementos de C. ■

Observação 3.4.6: Queremos agora definir uma estrutura de álgebra em C de forma que ξ seja um isomorfismo de álgebras, ou seja, definir uma multiplicação $\bullet : C \otimes C \to C$ tal que $\xi(c \bullet d) = \xi(c)\xi(d)$ para todos $c, d \in C$ e encontrar um elemento $e_C \in C$ que seja unidade para essa operação e satisfaça $\xi(e_C) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ii}$.

Para isso, como ξ é isomorfismo de $\Bbbk$-espaços, basta definir

$$c \bullet d = \xi^{-1}(\xi(c)\xi(d))$$

e $e_C = \xi^{-1}(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$.

Note que e_C é, de fato, uma unidade para $(C, \bullet)$, pois, dados $c_{pq}, c_{ij} \in C$,

$$\begin{aligned}\langle \xi(e_C)\xi(c_{pq}), c_{ij} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} c_{ll} \,\middle|\, c_{ik} \right) (c_{pq} \mid c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \delta_{lk}\delta_{li} \right) \delta_{pj}\delta_{qk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{ki}\delta_{pj}\delta_{qk} = \delta_{pj}\delta_{qi} = (c_{pq} \mid c_{ij}) = \langle \xi(c_{pq}), c_{ij} \rangle\,,\end{aligned}$$

ou seja, $\xi(e_C)\xi(c_{pq}) = \xi(c_{pq})$ e, portanto, $e_C \bullet c_{pq} = \xi^{-1}(\xi(e_C)\xi(c_{pq})) = c_{pq}$. A igualdade do outro lado é análoga.

Em particular, para elementos da base, temos que

$$c_{ij} \bullet c_{kl} = \xi^{-1}(\varphi_{ji}\varphi_{lk}) = \delta_{il}\xi^{-1}(\varphi_{jk}) = \delta_{il}c_{kj}.$$

Para evitar confusões, denotaremos por $c^{(r)}$ o elemento $\underbrace{c \bullet \cdots \bullet c}_{r \text{ vezes}}$ e por $c^{(-1)}$ o inverso de um elemento c inversível em $(C, \bullet, e_C)$.

Algumas propriedades dessa álgebra $(C, \bullet, e_C)$ estão listadas no resultado abaixo:

Lema 3.4.7: Seja C uma coálgebra matricial de ordem n. Dados $a, b, c \in C$, temos

1. $(a \mid b) = (b \mid a)$;
2. $a \bullet b = \sum_{(a)} \left(a_{(1)} \,\middle|\, b\right) a_{(2)} = \sum_{(b)} \left(a \,\middle|\, b_{(2)}\right) b_{(1)}$;

3. $(a \,|\, b) = \varepsilon(a \bullet b)$;
4. $(x \,|\, y \bullet z) = (x \bullet y \,|\, z) = (a \bullet b \,|\, c)$ para qualquer permutação cíclica (x, y, z) da sequência (a, b, c);
5. $(a \bullet b \,|\, c) = \sum_{(c)} \big(a \,\big|\, c_{(1)}\big) \big(b \,\big|\, c_{(2)}\big)$.

Demonstração: O item (1) sai diretamente das propriedades do traço e do item (1) do Lema 3.4.5, pois

$$(a \,|\, b) = \mathrm{Tr}(\xi(a)\xi(b)) = \mathrm{Tr}(\xi(b)\xi(a)) = (b \,|\, a)\,.$$

Provaremos o item (2) para elementos de uma base $\{c_{ij} \mid 0 \le i, j \le n\}$ de C. Sejam $a = c_{ij}$ e $b = c_{kl}$. Assim,

$$\sum_{(a)} \big(a_{(1)} \,\big|\, b\big)\, a_{(2)} = \sum_{m=1}^{n} (c_{im} \,|\, c_{kl})\, c_{mj} = \sum_{m=1}^{n} \delta_{il}\delta_{mk} c_{mj} = \delta_{il} c_{kj} = c_{ij} \bullet c_{kl} = a \bullet b.$$

A outra igualdade segue de maneira análoga.

Para o item (3), basta aplicar ε na igualdade do item (2).

Para provar o item (4), note que, mais uma vez pelo item (1) do Lema 3.4.5,

$$\begin{aligned}(x \,|\, y \bullet z) = \mathrm{Tr}(\xi(x)\xi(y \bullet z)) &= \mathrm{Tr}(\xi(x)\xi(\xi^{-1}(\xi(y)\xi(z)))) = \mathrm{Tr}(\xi(x)\xi(y)\xi(z)) \\ &= \mathrm{Tr}(\xi(a)\xi(b)\xi(c)) = \mathrm{Tr}(\xi(\xi^{-1}(\xi(a)\xi(b)))\xi(c)) = (a \bullet b \,|\, c)\,.\end{aligned}$$

A outra igualdade sai, então, do item (1).

Por fim, para provar o item (5), observe que

$$\sum_{(c)} \big(a \,\big|\, c_{(1)}\big) \big(b \,\big|\, c_{(2)}\big) = \left(a \,\middle|\, \sum_{(c)} \big(b \,\big|\, c_{(2)}\big)\, c_{(1)}\right) = (a \,|\, b \bullet c) = (a \bullet b \,|\, c)\,,$$

encerrando a demonstração do lema. ■

Encerramos o capítulo apresentando um resultado que será importante para a demonstração de Teorema 4.4.6, que diz que, sobre um corpo de característica zero, a semissimplicidade de uma álgebra de Hopf de dimensão finita é mantida por dualização. Esse resultado é uma consequência do *Teorema de Skolem-Noether*:

Teorema de Skolem-Noether: Sejam A e B duas $\Bbbk$-álgebras simples de dimensão finita. Suponha que $\mathcal{Z}(B) = \Bbbk 1_B$, em que $\mathcal{Z}(B)$ é o centro de B. Dados dois homomorfismos de álgebras $f, g : A \to B$, existe um elemento inversível $b \in B$ tal que $g(a) = b f(a) b^{-1}$ para todo $a \in A$.

Proposição 3.4.8: Sejam C uma coálgebra matricial de ordem n e $\phi : C \to C$ uma aplicação linear. Então ϕ é um homomorfismo de coálgebras se, e somente se, existe $t \in C$, inversível na álgebra $(C, \bullet)$, tal que $\phi(c) = t^{(-1)} \bullet c \bullet t$ para todo $c \in C$. Além disso, nesse caso, temos $\mathrm{Tr}(\phi) = \varepsilon(t)\varepsilon(t^{(-1)})$.

Demonstração: Por um lado, suponha que exista $t \in C$, inversível na álgebra $(C, \bullet)$, tal que $\phi(c) = t^{(-1)} \bullet c \bullet t$ para todo $c \in C$. Assim, utilizando o Lema 3.4.7, temos, para todo $c \in C$,

$$\begin{aligned}\varepsilon(\phi(c)) &= \varepsilon(t^{(-1)} \bullet c \bullet t) = \big(t^{(-1)} \,\big|\, c \bullet t\big) = \big(c \bullet t \,\big|\, t^{(-1)}\big) \\ &= \big(c \,\big|\, t \bullet t^{(-1)}\big) = \varepsilon(c \bullet e_C) = \varepsilon(c).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\Delta(\phi(c)) &= \Delta(t^{(-1)} \bullet c \bullet t) = \Delta\left(\sum_{(c)} \big(t^{(-1)} \,\big|\, c_{(3)}\big)\, \big(c_{(1)} \,\big|\, t\big)\, c_{(2)}\right) \\ &= \sum_{(c)} \big(t^{(-1)} \,\big|\, c_{(4)}\big)\, \big(c_{(1)} \,\big|\, t\big)\, c_{(2)} \otimes c_{(3)} = \sum_{(c)} \big(c_{(1)} \,\big|\, t\big)\, c_{(2)} \otimes \big(t^{(-1)} \,\big|\, c_{(4)}\big)\, c_{(3)} \\ &= \sum_{(c)} (c_{(1)} \bullet t) \otimes (t^{(-1)} \bullet c_{(2)})\end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}(\phi \otimes \phi)(\Delta(c)) &= \sum_{(c)} (t^{(-1)} \bullet c_{(1)} \bullet t) \otimes (t^{(-1)} \bullet c_{(2)} \bullet t) \\ &= \sum_{(c)} \Big(\big(t^{(-1)} \,\big|\, c_{(2)}\big)\, c_{(1)} \bullet t\Big) \otimes \Big(\big(c_{(3)} \,\big|\, t\big)\, t^{(-1)} \bullet c_{(4)}\Big) \\ &= \sum_{(c)} \big(t^{(-1)} \,\big|\, c_{(2)}\big)\, \big(t \,\big|\, c_{(3)}\big)\, (c_{(1)} \bullet t) \otimes (t^{(-1)} \bullet c_{(4)}) \\ &= \sum_{(c)} \big(t^{(-1)} \bullet t \,\big|\, c_{(2)}\big)\, (c_{(1)} \bullet t) \otimes (t^{(-1)} \bullet c_{(3)}) \\ &= \sum_{(c)} \varepsilon(e_C \bullet c_{(2)})(c_{(1)} \bullet t) \otimes (t^{(-1)} \bullet c_{(3)}) \\ &= \sum_{(c)} (c_{(1)} \bullet t) \otimes (t^{(-1)} \bullet \varepsilon(c_{(2)})c_{(3)}) = \\ &= \sum_{(c)} (c_{(1)} \bullet t) \otimes (t^{(-1)} \bullet c_{(2)}).\end{aligned}$$

Logo, ϕ é um homomorfismo de coálgebras.

Agora, suponha que ϕ seja um homomorfismo de coálgebras. Logo, $\phi^* : C^* \to C^*$ é um homomorfismo de álgebras.

Sabemos que $\mathbb{M}_n(\Bbbk)$ é uma álgebra simples e, além disso, temos $\mathcal{Z}(\mathbb{M}_n(\Bbbk)) = \Bbbk\,\mathrm{Id}_n$. Portanto, $\mathbb{M}_n(\Bbbk)$ está nas condições do Teorema de Skolem-Noether.

Identificando $C^* = \mathbb{M}_n(\Bbbk)$, temos então que existe um elemento inversível $T \in C^*$ tal que $\phi^*(\varphi) = T * \varphi * T^{-1}$ para todo $\varphi \in C^*$. Assim, aplicando a um elemento $c \in C$, temos

$$\langle \varphi, \phi(c) \rangle = \sum_{(c)} \left\langle T, c_{(1)} \right\rangle \left\langle \varphi, c_{(2)} \right\rangle \left\langle T^{-1}, c_{(3)} \right\rangle = \left\langle \varphi, \sum_{(c)} \left\langle T, c_{(1)} \right\rangle \left\langle T^{-1}, c_{(3)} \right\rangle c_{(2)} \right\rangle.$$

Logo, como isso vale para todo $\varphi \in C^*$, concluímos que, para todo $c \in C$,

$$\phi(c) = \sum_{(c)} \left\langle T, c_{(1)} \right\rangle \left\langle T^{-1}, c_{(3)} \right\rangle c_{(2)}.$$

Defina, então, $t = \xi^{-1}(T)$, que é um elemento inversível na álgebra $(C, \bullet)$, pois ξ é um isomorfismo.

Note que $\langle T, c \rangle = \langle \xi(t), c \rangle = (t \,|\, c)$ para todo $c \in C$. Assim, utilizando mais uma vez o Lema 3.4.7, temos, para todo $d \in C$,

$$\begin{aligned}
\langle \xi(\phi(c)), d \rangle &= \left\langle \xi \left(\sum_{(c)} \left(t \,\middle|\, c_{(1)}\right) \left(t^{(-1)} \,\middle|\, c_{(3)}\right) c_{(2)} \right), d \right\rangle \\
&= \sum_{(c)} \left(t \,\middle|\, c_{(1)}\right) \left(t^{(-1)} \,\middle|\, c_{(3)}\right) \left(c_{(2)} \,\middle|\, d\right) \\
&= \sum_{(c)} \left(t \,\middle|\, c_{(1)}\right) \left(d \,\middle|\, c_{(2)}\right) \left(t^{(-1)} \,\middle|\, c_{(3)}\right) \\
&= \left(t \bullet d \bullet t^{(-1)} \,\middle|\, c\right) \\
&= \left(t^{(-1)} \bullet c \bullet t \,\middle|\, d\right) \\
&= \left\langle \xi(t^{(-1)} \bullet c \bullet t), d \right\rangle
\end{aligned}$$

e, portanto, como ξ é isomorfismo, concluímos que $\phi(c) = t^{(-1)} \bullet c \bullet t$.

Dessa forma, temos que, se ϕ é um homomorfismo de coálgebras e $\{c_{ij} \,|\, 1 \leq i, j \leq n\}$ é uma base de C, então

$$\phi(c_{ij}) = t^{(-1)} \bullet c_{ij} \bullet t = \sum_{k,l=1}^{n} (t \,|\, c_{ik}) \left(t^{(-1)} \,\middle|\, c_{lj}\right) c_{kl}$$

e, com isso, pelo Lema 3.4.5,

$$\mathrm{Tr}(\phi) = \sum_{i,j=1}^{n} (t \mid c_{ii}) \left(t^{(-1)} \mid c_{jj}\right) = \varepsilon(t)\varepsilon(t^{(-1)}),$$

como desejávamos. ■

Capítulo 4

Conexões entre Álgebras de Frobenius e Álgebras de Hopf

Finalmente chegou o momento de conectar os conceitos estudados até aqui e aplicar resultados que foram demonstrados anteriormente.

Na primeira seção deste capítulo, vamos provar que álgebras de Hopf de dimensão finita são álgebras de Frobenius e discutir rapidamente algumas consequências diretas desse resultado, principalmente sobre elementos integrais dessas álgebras.

Em seguida, na segunda seção, vamos focar justamente nos elementos integrais do dual e mostrar que esses elementos são os homomorfismos de Frobenius que já estudamos. Também encontraremos nessa seção uma condição necessária e suficiente para que uma biálgebra que seja uma álgebra de Frobenius seja também uma álgebra de Hopf. Para finalizar a segunda seção, utilizaremos o Teorema de Mashcke para relacionar a semissimplicidade de uma álgebra de Hopf e de seu dual com o traço da antípoda.

Na terceira seção, vamos apresentar a demonstração da *fórmula de Radford para a antípoda*, bem como de alguns corolários, utilizando o material que desenvolvemos sobre as álgebras de Frobenius. Nessa demonstração, ficará claro que o papel importante que o elemento integral desempenha para a validade do resultado é justamente a sua propriedade de ser um homomorfismo de Frobenius. Encerraremos a seção utilizando os resultados que precisaremos para provar a fórmula de Radford para também encontrar uma caracterização para as álgebras de Hopf simétricas (com isso, encontramos facilmente o exemplo de uma álgebra de Frobenius que não é simétrica).

Na quarta e última seção deste capítulo, vamos retomar o conceito das coálgebras matriciais, o resultado sobre semissimplicidade encontrado na segunda seção deste capítulo e nosso estudo sobre a antípoda a partir da fórmula de Radford, realizado na seção anterior, para provar que a semissimplicidade de uma álgebra de Hopf sobre um corpo de característica zero é mantida pela dualização. Para finalizar, utilizaremos esse resultado para encontrar uma caracterização para as álgebras de Hopf semissimples sobre corpos de característica zero, sendo uma delas a propriedade de idempotência da antípoda.

4.1 Álgebras de Hopf de dimensão finita são Frobenius

Os resultados desta seção baseiam-se principalmente em [Rad90].

Como comentamos anteriormente, uma consequência do Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf é que álgebras de Hopf de dimensão finita são álgebras de Frobenius.

Começamos esta seção apresentando diretamente essa demonstração:

Teorema 4.1.1: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$. Então H e H^* são H-módulos de Hopf à esquerda (ou à direita) isomorfos.

Demonstração: Pelo Lema 3.3.2, temos um isomorfismo de H-módulos de Hopf à esquerda entre $H \otimes \int_{H^*}^r$ e H^*. Já pelo Teorema 3.3.3, temos que $\int_{H^*}^r$ é um espaço unidimensional.

Como vimos no Exemplo 3.2.8, para todo $\lambda \in \int_{H^*}^r$, temos um homomorfismo de H-módulos de Hopf à esquerda $\phi_\lambda : H \to H \otimes \int_{H^*}^r$ dado por $\phi_\lambda(h) = h \otimes \lambda$. Fixando $\lambda \neq 0$, temos que, se $\phi_\lambda(h) = 0$ para algum $h \in H$, então $h = 0$. Portanto, ϕ_λ é injetor e, como

$$\dim_\Bbbk(H \otimes \textstyle\int_{H^*}^r) = (\dim_\Bbbk H)(\dim_\Bbbk \int_{H^*}^r) = \dim_\Bbbk H,$$

temos que ϕ_λ é um isomorfismo.

Portanto, temos um isomorfismo de H-módulos de Hopf à esquerda entre H e H^*.

Um argumento análogo mostra que H e H^* também são isomorfos como H-módulos à direita. ■

Corolário 4.1.2: Toda álgebra de Hopf de dimensão finita é uma álgebra de Frobenius.

Vamos estudar agora algumas propriedades desse isomorfismo. Para isso, vamos retomar as notações que vimos na Observação 3.2.9.

Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$. Temos uma estrutura de H-bimódulo em H^* dada pelas ações $\rightharpoonup$, de H em H^* à esquerda, e $\leftharpoonup$, de H em H^* à direita, isto é,

$$\langle h \rightharpoonup \varphi, x \rangle = \langle \varphi, xh \rangle \qquad \text{e} \qquad \langle \varphi \leftharpoonup h, x \rangle = \langle \varphi, hx \rangle\,,$$

para todos $h, x \in H$ e $\varphi \in H^*$.

Além disso, utilizando a antípoda S de H temos uma nova ação de H em H^* à esquerda dada por $h \rightharpoondown \varphi = \varphi \leftharpoonup S(h)$, isto é,

$$\langle h \rightharpoondown \varphi, x \rangle = \langle \varphi, S(h)x \rangle \,,$$

para todos $h, x \in H$ e $\varphi \in H^*$.

Também podemos definir uma estrutura de H^*-bimódulo em H tomando

$$\varphi \rightharpoonup h = \sum_{(h)} h_{(1)} \left\langle \varphi, h_{(2)} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad h \leftharpoonup \varphi = \sum_{(h)} \left\langle \varphi, h_{(1)} \right\rangle h_{(2)},$$

para todos $h \in H$ e $\varphi \in H^*$.

Com essas estruturas, temos o seguinte resultado:

Proposição 4.1.3: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$ e com antípoda S. Seja $\Phi : H \to H^*$ um isomorfismo de H-módulos de Hopf à esquerda. Denote $\Lambda = \Phi^{-1}(\varepsilon)$ e $\lambda = \Phi(1_H)$. Com isso,

1. Λ é um integral à esquerda para H e λ é um integral à direita para H^*;
2. $\Phi(h) = h \rightharpoondown \lambda$ para todo $h \in H$ e $\Phi^{-1}(\varphi) = \Lambda \leftharpoonup \varphi$ para todo $\varphi \in H^*$;
3. $\Lambda \leftharpoonup (h \rightharpoondown \lambda) = h$ para todo $h \in H$ e $(\Lambda \leftharpoonup \varphi) \rightharpoondown \lambda = \varphi$ para todo $\varphi \in H^*$;
4. $\langle \lambda, \Lambda \rangle = 1 = \langle \lambda, S(\Lambda) \rangle$.

(Se $\Phi : H \to H^*$ for um isomorfismo de H-módulos de Hopf à direita, temos um resultado análogo.)

Demonstração: Inicialmente, observe que, como Φ é um homomorfismo de H-módulos à esquerda, então $\Phi(hx) = h \rightharpoondown \Phi(x)$ para todos $h, x \in H$. Por outro lado, como Φ é um homomorfismo de comódulos à esquerda, temos, para todo $h \in H$,

$$\rho(\Phi(h)) = (\mathrm{id}_H \otimes \Phi) \circ \Delta(h) = \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes \Phi(h_{(2)}).$$

Portanto, como vimos na Equação (3.2), para todos $h \in H$ e $\varphi \in H^*$,

$$\Phi(h) * \varphi = \sum_{(h)} \left\langle \varphi, h_{(1)} \right\rangle \Phi(h_{(2)}) = \Phi \left(\sum_{(h)} \left\langle \varphi, h_{(1)} \right\rangle h_{(2)} \right) = \Phi(h \leftharpoonup \varphi),$$

ou seja, Φ é um homomorfismo de H^*-módulos à direita.

Agora, para provar o item (1), observe que, para todo $h \in H$,

$$\Phi(h\Lambda) = h \rightharpoondown \Phi(\Lambda) = h \rightharpoondown \varepsilon = \varepsilon(S(h))\varepsilon = \varepsilon(h)\varepsilon = \varepsilon(h)\Phi(\Lambda) = \Phi(\varepsilon(h)\Lambda)$$

e, como Φ é isomorfismo, $h\Lambda = \varepsilon(h)\Lambda$. Portanto, Λ é um integral à esquerda para H. Além disso, para todo $\varphi \in H^*$,

$$\lambda * \varphi = \Phi(1_H) * \varphi = \Phi(1_H \leftharpoonup \varphi) = \Phi(\langle \varphi, 1_H \rangle\, 1_H) = \langle \varphi, 1_H \rangle\, \Phi(1_H) = \langle \varphi, 1_H \rangle\, \lambda$$

e, assim, concluímos que λ é um integral à direita para H^*.

Para o item (2), basta notar que, para todo $h \in H$

$$\Phi(h) = \Phi(h 1_H) = h \rightharpoonup \Phi(1_H) = h \rightharpoonup \lambda$$

e, para todo $\varphi \in H^*$,

$$\varphi = \varepsilon * \varphi = \Phi(\Phi^{-1}(\varepsilon)) * \varphi = \Phi(\Phi^{-1}(\varepsilon) \leftharpoonup \varphi) = \Phi(\Lambda \leftharpoonup \varphi).$$

O item (3) sai diretamente do item (2), pois, para todo $h \in H$,

$$h = \Phi^{-1}(\Phi(h)) = \Lambda \leftharpoonup \Phi(h) = \Lambda \leftharpoonup (h \rightharpoonup \lambda)$$

e, para todo $\varphi \in H^*$,

$$\varphi = \Phi(\Phi^{-1}(\varphi)) = \Phi(\Lambda \leftharpoonup \varphi) = (\Lambda \leftharpoonup \varphi) \rightharpoonup \lambda.$$

Por fim, pelo item (3), temos que

$$\begin{aligned} 1_{\Bbbk} &= \varepsilon(1_H) = \varepsilon(\Lambda \leftharpoonup (1_H \rightharpoonup \lambda)) = \varepsilon(\Lambda \leftharpoonup (\lambda \leftharpoonup S(1_H))) = \varepsilon(\Lambda \leftharpoonup (\lambda \leftharpoonup 1_H)) \\ &= \varepsilon(\Lambda \leftharpoonup \lambda) = \varepsilon\left(\sum_{(\Lambda)} \left\langle \lambda, \Lambda_{(1)} \right\rangle \Lambda_{(2)} \right) = \left\langle \lambda, \sum_{(h)} \Lambda_{(1)} \varepsilon(\Lambda_{(2)}) \right\rangle = \langle \lambda, \Lambda \rangle \end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned} 1_{\Bbbk} &= \varepsilon(1_H) = \langle (\Lambda \leftharpoonup \varepsilon) \rightharpoonup \lambda), 1_H \rangle = \left\langle \left(\sum_{(\Lambda)} \varepsilon(\Lambda_{(1)}) \Lambda_{(2)} \right) \rightharpoonup \lambda, 1_H \right\rangle \\ &= \sum_{(\Lambda)} \varepsilon(\Lambda_{(1)}) \left\langle \Lambda_{(2)} \rightharpoonup \lambda, 1_H \right\rangle = \sum_{(\Lambda)} \varepsilon(\Lambda_{(1)}) \left\langle \lambda, S(\Lambda_{(2)}) \right\rangle = \langle \lambda, S(\Lambda) \rangle, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração do item (4). ■

Como consequência, podemos ver que sempre podemos tomar integrais para uma álgebra de Hopf de dimensão finita e seu dual de forma que a avaliação de um pelo outro seja não nula:

Corolário 4.1.4: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Se $\Lambda \in H$ é um integral não nulo à esquerda (respectivamente, à direita) e $\lambda \in H^*$ é um integral não nulo à direita (respectivamente, à esquerda), então $\langle \lambda, \Lambda \rangle \neq 0$.

Demonstração: Sabemos que $\int_H^l$ e $\int_{H^*}^r$ são unidimensionais. Portanto, os elementos $\Phi^{-1}(\varepsilon)$ e $\Phi(1_H)$ da Proposição 4.1.3 são geradores desses espaços, respectivamente. Assim, se tomamos $0 \neq \Lambda \in \int_H^l$ e $0 \neq \lambda \in \int_{H^*}^r$, então existem $k_1, k_2 \in \Bbbk$ não nulos tais que $\Lambda = k_1\Phi^{-1}(\varepsilon)$ e $\lambda = k_2\Phi(1_H)$.

Com isso, $\langle \lambda, \Lambda \rangle = \langle k_2\Phi(1_H), k_1\Phi^{-1}(\varepsilon)\rangle = k_1k_2 \neq 0$. ■

Observação 4.1.5: Utilizando o fato de que $\int_H^l = \Bbbk\Phi^{-1}(\varepsilon)$ e $\int_{H^*}^r = \Bbbk\Phi(1_H)$, temos que as igualdades (3) e (4) da Proposição 4.1.3 são válidas para quaisquer $\Lambda \in \int_H^l$ e $\lambda \in \int_{H^*}^r$ tais que $\langle \lambda, \Lambda \rangle = 1$.

4.2 Homomorfismo de Frobenius para Álgebras de Hopf

Agora que sabemos que álgebras de Hopf de dimensão finita são álgebras de Frobenius, queremos também entender quem são o homomorfismo de Frobenius e o automorfismo de Nakayama dessas álgebras. Veremos a seguir que os elementos integrais não nulos de H^* são os homomorfismos de Frobenius. Quanto ao automorfismo de Nakayama, precisaremos de mais alguns resultados e deixaremos para calculá-lo na seção seguinte.

Os resultados desta seção seguem o que foi feito em [Par71] e [Sch95].

Lema 4.2.1: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Assim, $\lambda \in \int_{H^*}^r$ se, e somente se, para todo $h \in H$,

$$\langle \lambda, h \rangle 1_H = \sum_{(h)} \langle \lambda, h_{(1)} \rangle h_{(2)}.$$

Demonstração: Seja $\varphi \in H^*$. Logo, para todo $h \in H$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda * \varphi, h \rangle = \langle \varphi, 1_H \rangle \langle \lambda, h \rangle &\iff \sum_{(h)} \langle \lambda, h_{(1)} \rangle \langle \varphi, h_{(2)} \rangle = \langle \varphi, 1_H \rangle \langle \lambda, h \rangle \\ &\iff \left\langle \varphi, \sum_{(h)} \langle \lambda, h_{(1)} \rangle h_{(2)} \right\rangle = \langle \varphi, \langle \lambda, h \rangle 1_H \rangle . \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que $\lambda \in \int_{H^*}^r$ se, e somente se,

$$\left\langle \varphi, \sum_{(h)} \left\langle \lambda, h_{(1)} \right\rangle h_{(2)} \right\rangle = \left\langle \varphi, \left\langle \lambda, h \right\rangle 1_H \right\rangle$$

para todos $\varphi \in H^*$ e $h \in H$. Isto é, se, e somente se,

$$\sum_{(h)} \left\langle \lambda, h_{(1)} \right\rangle h_{(2)} = \left\langle \lambda, h \right\rangle 1_H,$$

como desejávamos. ■

Teorema 4.2.2: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Tome então um integral à direita $0 \neq \lambda \in H^*$ e um integral à esquerda $\Lambda \in H$ tais que $\langle \lambda, \Lambda \rangle = 1$. Assim, λ é um homomorfismo de Frobenius com bases duais $(\Lambda_{(1)}, S(\Lambda_{(2)}))_{(\Lambda)}$.

Demonstração: Para todo $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{(\Lambda)} \left\langle \lambda, h\Lambda_{(1)} \right\rangle S(\Lambda_{(2)}) &= \sum_{(\Lambda),(h)} \left(\left\langle \lambda, h_{(1)}\Lambda_{(1)} \right\rangle h_{(2)}\Lambda_{(2)} \right) S(\Lambda_{(3)}) \\
&= \sum_{(h)} \left\langle \lambda, h_{(1)}\Lambda \right\rangle h_{(2)} \\
&= \sum_{(h)} \left\langle \lambda, \Lambda \right\rangle \varepsilon(h_{(1)}) h_{(2)} \\
&= h,
\end{aligned}$$

provando que λ é um homomorfismo de Frobenius com bases duais $(\Lambda_{(1)}, S(\Lambda_{(2)}))_{(\Lambda)}$. ■

De forma análoga, se tomarmos $\gamma \in H^*$ um integral à esquerda e um integral à direita $\Gamma \in H$ tais que $\langle \gamma, \Gamma \rangle = 1$, temos que γ é um homomorfismo de Frobenius de H com bases duais $(S(\Gamma_{(1)}), \Gamma_{(2)})_{(\Gamma)}$.

Apesar de as álgebras de Hopf de dimensão finita serem álgebras de Frobenius, a recíproca não é verdadeira, como nos mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 4.2.3: Como vimos no Exemplo 2.1.8, $\mathbb{M}_n(\Bbbk)$ é uma álgebra de Frobenius para todo inteiro positivo n. Agora, suponha $n > 1$.

Suponha que $\mathbb{M}_n(\Bbbk)$ seja uma álgebra de Hopf. Assim, $\varepsilon : \mathbb{M}_n(\Bbbk) \to \Bbbk$ é um homomorfismo de álgebras e

$$\dim_{\Bbbk} \ker \varepsilon + \dim_{\Bbbk} \mathbf{im}\, \varepsilon = \dim_{\Bbbk} \mathbb{M}_n(\Bbbk) = n^2 > 1.$$

No entanto, $\mathbb{M}_n(\Bbbk)$ é uma álgebra simples e, como $\varepsilon(\mathrm{Id}_n) = 1$, $\ker \varepsilon \subsetneq \mathbb{M}_n(\Bbbk)$. Portanto,

$\ker\varepsilon = 0$. Porém, $\dim_{\mathbb{k}} \operatorname{im}\varepsilon = 1$ e, assim, teríamos $n^2 = 1$, o que é uma contradição, pois supusemos $n > 1$.

Assim, concluímos que $\mathbb{M}_n(\mathbb{k})$, com $n > 1$, não pode ser uma álgebra de Hopf.

Exemplo 4.2.4: Considere agora $B = \frac{\mathbb{k}[x]}{(x^2-x)}$, em que $\mathbb{k}$ é um corpo algebricamente fechado e de característica zero. Denotando $I := \overline{1}$ e $X := \overline{x}$, temos que B é uma $\mathbb{k}$-álgebra com base $\{X, I\}$. Definindo $\varphi : B \to \mathbb{k}$ por $\varphi(X) = 1$ e $\varphi(I) = 0$, temos

$$X = I\varphi((X-I)X) + X\varphi(IX) \quad \text{e} \quad I = I\varphi((X-I)I) + X\varphi(II),$$

ou seja, B é uma álgebra de Frobenius com homomorfismo de Frobenius φ e bases duais $\{(I, X-I), (X, I)\}$.

Além disso, B é uma biálgebra com

- $\Delta : B \to B \otimes B$ dado por $\Delta(I) = I \otimes I$ e $\Delta(X) = X \otimes X$;
- $\varepsilon : B \to \mathbb{k}$ dado por $\varepsilon(I) = 1$ e $\varepsilon(X) = 1$.

Suponha que B seja uma álgebra de Hopf com antípoda S. Assim,

$$I = \varepsilon(X)I = (S * \mathrm{id}_B)(X) = S(X)X.$$

Podemos escrever $S(X) = aX + bI$, com $a, b \in \mathbb{k}$. Assim,

$$I = S(X)X = aX + bX = (a+b)X,$$

o que é um absurdo, pois $\{X, I\}$ é uma base de B.

Portanto, B é uma biálgebra que é uma álgebra de Frobenius mas não é uma álgebra de Hopf.

Apesar de álgebras de Frobenius não serem necessariamente álgebras de Hopf, precisamos apenas garantir que exista um homomorfismo de Frobenius que satisfaça a propriedade do Lema 4.2.1 para que esse resultado seja verdadeiro, como veremos abaixo:

Teorema 4.2.5: Seja B uma $\mathbb{k}$-biálgebra de dimensão finita. Então, B é uma álgebra de Hopf se, e somente se, B é uma álgebra de Frobenius com um homomorfismo de Frobenius λ tal que, para todo $b \in B$,

$$\sum_{(b)} \lambda(b_{(1)})b_{(2)} = \lambda(b)1_B.$$

Demonstração: Note que uma das implicações já foi provada. Se B é uma álgebra de Hopf, como sua dimensão é finita, temos que B é uma álgebra de Frobenius. Agora, o Corolário 3.3.4 nos garante a existência de um elemento integral à esquerda λ não nulo e o Teorema

4.2.2 nos diz que λ é um homomorfismo de Frobenius. Por fim, a fórmula desejada é exatamente a que foi demonstrada no Lema 4.2.1.

Agora, suponha que B seja uma álgebra de Frobenius com um homomorfismo de Frobenius λ que satisfaça a igualdade do enunciado. Como vimos na Observação 2.2.8, podemos supor que $\lambda = \Phi(1_B)$ para algum isomorfismo de B-módulos à direita $\Phi : B \to B^*$. Tome então $\Lambda \in B$ tal que $\lambda \leftharpoonup \Lambda = \Phi(\Lambda) = \varepsilon$.

Defina agora $S : B \to B$ por

$$S(b) = \sum_{(\Lambda)} \lambda(\Lambda_{(1)}b)\Lambda_{(2)}.$$

Assim, para todo $b \in B$,

$$\sum_{(b)} S(b_{(1)})b_{(2)} = \sum_{(b),(\Lambda)} \lambda(\Lambda_{(1)}b_{(1)})\Lambda_{(2)}b_{(2)} = \lambda(\Lambda b)1_B = \varepsilon(b)1_B,$$

ou seja, $S * \mathrm{id}_B = \mu_B \circ \varepsilon_B$.

No entanto, observe que $\Psi : \mathrm{End}_{\Bbbk}(B) \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(B)$ definido por $\Psi(f) = S * f$ é um homomorfismo sobrejetor de $\Bbbk$-espaços, pois, para todo $f \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(B)$,

$$f = (\mu_B \circ \varepsilon_B) * f = (S * \mathrm{id}_B) * f = S * (\mathrm{id}_B * f) = \Psi(\mathrm{id}_B * f)$$

e, como $\mathrm{End}_{\Bbbk}(B)$ tem dimensão finita, temos que Ψ é um isomorfismo de $\Bbbk$-espaços.

Note agora que o inverso desse isomorfismo é $\Phi : \mathrm{End}_{\Bbbk}(B) \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(B)$ dado por $\Phi(f) = \mathrm{id}_B * f$, sendo este também um isomorfismo. Portanto,

$$\mathrm{id}_B * S = \mathrm{id}_B * S * (\mu_B \circ \varepsilon_B) = \Phi \circ \Psi(\mu_B \circ \varepsilon_B) = \mu_B \circ \varepsilon_B,$$

provando que S é uma antípoda e, portanto, que B é uma álgebra de Hopf. ■

Dados uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita A e um A-módulo à esquerda finitamente gerado M, podemos calcular o traço dos operadores lineares em $\mathrm{End}_{\Bbbk}(M)$. A seguir, veremos algumas formas convenientes de fazer esse cálculo.

Observação 4.2.6: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra e M um A-módulo à esquerda, ambos de dimensão finita. Se $\dim_{\Bbbk} M = n$, podemos encontrar uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de M e uma base $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de M^* tais que $\langle \varphi_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$, para $i, j = 1, \ldots, n$.

Com essas bases, podemos escrever todos os elementos $m \in M$ e $f \in M^*$ como somas

$$m = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, m \rangle \, v_i \qquad\qquad f = \sum_{i=1}^{n} \langle f, v_i \rangle \, \varphi_i.$$

Com isso, podemos calcular o traço Tr : $\mathrm{End}_{\Bbbk}(M) \to \Bbbk$ da seguinte forma:

$$\mathrm{Tr}(\psi) = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \psi(v_i) \rangle .$$

Além disso, temos um isomorfismo $\Psi : M^* \otimes M \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(M)$ tal que, para todos $f \in M^*$ e $m \in M$, $\Psi(f \otimes m) = \langle f, - \rangle\, m$. Dessa forma, temos

$$\mathrm{Tr}(\Psi(f \otimes m)) = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \langle f, v_i \rangle\, m \rangle = \left\langle f, \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, m \rangle\, v_i \right\rangle = \langle f, m \rangle ,$$

ou seja, se $\psi \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(M)$ e $\Psi^{-1}(\psi) = \sum_{i=1}^{r} f_i \otimes m_i$, então

$$\mathrm{Tr}(\psi) = \sum_{i=1}^{r} \langle f_i, m_i \rangle .$$

Agora, utilizando os elementos integrais da álgebra de Hopf, podemos encontrar uma fórmula para calcular o traço de endomorfismos dessas álgebras:

Lema 4.2.7: Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e $F \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(H)$. Tome $\lambda \in H^*$ um integral à direita e $\Lambda \in H$ um integral à esquerda tais que $\langle \lambda, \Lambda \rangle = 1$. Assim, o traço de F é dado por

$$\mathrm{Tr}(F) = \sum_{(\Lambda)} \left\langle \lambda, S(\Lambda_{(2)}) F(\Lambda_{(1)}) \right\rangle$$

Demonstração: Para todo $h \in H$, como $(\Lambda_{(1)}, S(\Lambda_{(2)}))_{(\Lambda)}$ são bases duais para λ, temos

$$F(h) = \sum_{(\Lambda)} \Lambda_{(1)} \left\langle \lambda, S(\Lambda_{(2)}) F(h) \right\rangle .$$

Portanto, identificando $H^* \otimes H = \mathrm{End}_{\Bbbk}(H)$, temos

$$F = \sum_{(\Lambda)} \left\langle \lambda, S(\Lambda_{(2)}) F(-) \right\rangle \otimes \Lambda_{(1)}$$

e, assim, pela Observação 4.2.6,

$$\mathrm{Tr}(F) = \sum_{(\Lambda)} \left\langle \lambda, S(\Lambda_{(2)}) F(\Lambda_{(1)}) \right\rangle ,$$

como desejávamos. ■

Como consequência dessa fórmula, temos o último resultado desta seção sobre os elementos integrais das álgebras de Hopf. Ele será nosso primeiro passo em direção à caracterização das álgebras de Hopf semissimples que veremos no final deste capítulo:

Corolário 4.2.8: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$.

1. Se $\lambda \in \int_{H^*}^r$ e $\Lambda \in \int_H^l$ são tais que $\langle \lambda, \Lambda \rangle = 1$, então $\mathrm{Tr}(S^2) = \varepsilon(\Lambda) \langle \lambda, 1_H \rangle$;
2. H e H^* são semissimples se, e somente se, $\mathrm{Tr}(S^2) \neq 0$.

Demonstração: Para o item (1), basta tomar $F = S^2$ no Lema 4.2.7 e temos

$$\mathrm{Tr}(S^2) = \sum_{(\Lambda)} \left\langle \lambda, S(\Lambda_{(2)}) S^2(\Lambda_{(1)}) \right\rangle = \sum_{(\Lambda)} \left\langle \lambda, S(S(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)}) \right\rangle = \varepsilon(\Lambda) \langle \lambda, 1_H \rangle .$$

Para mostrar o item (2), lembre que, pelo Teorema de Maschke, H e H^* são semissimples se, e somente se, existem $\Lambda \in \int_H^l$ e $\lambda \in \int_{H^*}^r$ tais que $\varepsilon_H(\Lambda) \neq 0$ e $\langle \lambda, 1_H \rangle = \varepsilon_{H^*}(\lambda) \neq 0$.

Podemos tomar $\Lambda \in \int_H^l$ e $\lambda \in \int_{H^*}^r$ tais que $\langle \lambda, \Lambda \rangle = 1$ e, com isso, o resultado sai pelo item (1) deste corolário. ■

Nesta seção, estudamos os homomorfismos de Frobenius das álgebras de Hopf de dimensão finita. Como dissemos, precisaremos de mais alguns resultados para poder calcular os automorfismos de Nakayama associados a esses homomorfismos. Na próxima seção, faremos isso, além de encontrar outras bases duais para os homomorfismos de Frobenius. Aproveitamos as últimas linhas desta seção para fazer uma observação inicial sobre o automorfismo de Nakayama no contexto das álgebras que estamos estudando agora.

Seja então H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Considere $\lambda \in H^*$ um integral à direita não nulo. Como vimos, λ é um homomorfismo de Frobenius e temos um isomorfismo de H-módulos à esquerda $H \to H^*$ dado por $h \mapsto h \rightharpoonup \lambda$.

Dado $x \in H$, temos $(\lambda \leftharpoonup x) \in H^*$ e, portanto, existe um elemento $\nu(x) \in H$ tal que $\lambda \leftharpoonup x = \nu(x) \rightharpoonup \lambda$, ou seja, para todo $y \in H$,

$$\langle \lambda, xy \rangle = \langle \lambda, y\nu(x) \rangle .$$

Assim, a aplicação $\nu : H \to H$ é o automorfismo de Nakayama de H associado ao homomorfismo de Frobenius λ, como vimos na Observação 2.2.11.

4.3 A ordem da antípoda

Para poder demonstrar a *fórmula de Radford para a antípoda*, precisamos introduzir mais um conceito clássico da teoria das álgebras de Hopf: os elementos *grouplike*.

Definição 4.3.1: Seja C uma coálgebra. Um elemento $c \in C$ é chamado de *elemento grouplike* se $c \neq 0$ e $\Delta(c) = c \otimes c$. Denotaremos o conjunto dos elementos grouplike de C

por $G(C)$.

Note que, se $c \in G(C)$, então $c = \varepsilon(c)c$ e, portanto, como $c \neq 0$, temos $\varepsilon(c) = 1$.

Se H é uma álgebra de Hopf, $G(H)$ é um grupo em que $g^{-1} = S(g)$ para todo $g \in G(H)$. Além disso, se H tiver dimensão finita, o grupo $G(H)$ terá ordem menor ou igual a $\dim_{\Bbbk} H$, pois elementos grouplike são linearmente independentes, e $G(H^*) = \text{Alg}(H, \Bbbk)$.

Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e tome Λ um integral à direita não nulo para H. Observe que, dado qualquer $a \in H$, temos $a\Lambda \in \int_H^r$. Como $\int_H^r \cong \Bbbk\Lambda$, existe $\alpha(a) \in \Bbbk$ tal que $a\Lambda = \alpha(a)\Lambda$. Dessa forma, temos definida uma aplicação $\Bbbk$-linear não nula $\alpha : H \to \Bbbk$. Além disso, dados $a, b \in H$, note que

$$\langle \alpha, ab \rangle \Lambda = ab\Lambda = \langle \alpha, b \rangle a\Lambda = \langle \alpha, a \rangle \langle \alpha, b \rangle \Lambda$$

e, portanto, $\langle \alpha, ab \rangle = \langle \alpha, a \rangle \langle \alpha, b \rangle$, para todos $a, b \in H$.

Assim, pela Equação (3.1), temos que, se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de H com base dual $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$,

$$\Delta_{H^*}(\alpha) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \alpha, v_i v_j \rangle \phi_i \otimes \phi_j = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha, v_i \rangle \phi_i \otimes \sum_{j=1}^{n} \langle \alpha, v_j \rangle \phi_j = \alpha \otimes \alpha$$

e concluímos que $\alpha \in G(H^*) = \text{Alg}(H, \Bbbk)$.

Podemos tomar também $0 \neq \lambda \in \int_{H^*}^r$. Como $H \cong H^{**}$, temos que existe um elemento $g \in G(H)$ tal que $\varphi * \lambda = \varphi(g)\lambda$, para todo $\varphi \in H^*$, por argumento análogo ao acima.

Note que os elementos $\alpha \in G(H^*)$ e $g \in G(H)$ acima não dependem da escolha de Λ ou de λ, pois, se $\tilde{\Lambda} \in \int_H^r$, então existe $k \in \Bbbk$ tal que $\tilde{\Lambda} = k\Lambda$. Dessa forma, para todo $h \in H$,

$$h\tilde{\Lambda} = hk\Lambda = k\alpha(h)\Lambda = \alpha(h)\tilde{\Lambda}$$

e, analogamente, se $\tilde{\lambda} \in \int_{H^*}^r$, então $\varphi * \tilde{\lambda} = \varphi(g)\tilde{\lambda}$.

Definição 4.3.2: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. O elemento $\alpha \in G(H^*)$ é chamado de *elemento H-grouplike distinguido de* H^* e o elemento $g \in G(H)$ é chamado de *elemento H-grouplike distinguido de* H.

Munidos de todos os conceitos necessários, podemos começar a demonstrar a fórmula de Radford. O primeiro resultado em direção a isso nos dá uma nova base dual para um homomorfismo de Frobenius de uma álgebra de Hopf de dimensão finita e nos apresenta uma fórmula para o automorfismo de Nakayama associado a ele.

Proposição 4.3.3: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Tome $\lambda \in H^*$ um integral à direita e $\Lambda \in H$ um integral à esquerda tais que $\langle \lambda, \Lambda \rangle = 1$. Denotando $t = S(\Lambda)$ e tomando $\alpha \in G(H^*)$ elemento H-grouplike distinguido de H^*, temos

1. $(\overline{S}(t_{(2)}), t_{(1)})_{(t)}$ são bases duais para λ;
2. O automorfismo de Nakayama ν associado a λ é dado por

$$\nu(h) = \sum_{(h)} \left\langle \alpha, h_{(1)} \right\rangle \overline{S}^2(h_{(2)}),$$

para $h \in H$.

(Lembrando que $\overline{S}$ é o inverso de S pela composição).

Demonstração: Note que o item (1) sai diretamente do Teorema 4.2.2, pois

$$(\overline{S}(t_{(2)}), t_{(1)})_{(t)} = (\Lambda_{(1)}, S(\Lambda_{(2)}))_{(\Lambda)}.$$

Para o item (2), tome $h \in H$. Assim, pelo item (1), temos

$$\nu(h) = \sum_{(t)} \overline{S}(t_{(2)}) \left\langle \lambda, t_{(1)}\nu(h) \right\rangle = \sum_{(t)} \overline{S}(t_{(2)}) \left\langle \lambda, ht_{(1)} \right\rangle.$$

Agora, aplicando S^2 e lembrando que $\lambda \in \int_{H^*}^r$, $t \in \int_H^r$, $1 = \langle \lambda, S(\Lambda) \rangle = \langle \lambda, t \rangle$ e utilizando o Lema 4.2.1, temos

$$\begin{aligned} S^2(\nu(h)) &= \sum_{(t)} \left\langle \lambda, ht_{(1)} \right\rangle S(t_{(2)}) = \sum_{(t),(h)} \left\langle \lambda, h_{(1)}t_{(1)} \right\rangle h_{(2)}t_{(2)}S(t_{(3)}) = \sum_{(h)} \left\langle \lambda, h_{(1)}t \right\rangle h_{(2)} \\ &= \sum_{(h)} \left\langle \lambda, \left\langle \alpha, h_{(1)} \right\rangle t \right\rangle h_{(2)} = \sum_{(h)} \left\langle \alpha, h_{(1)} \right\rangle \langle \lambda, t \rangle h_{(2)} = \sum_{(h)} \left\langle \alpha, h_{(1)} \right\rangle h_{(2)} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\nu(h) = \sum_{(h)} \left\langle \alpha, h_{(1)} \right\rangle \overline{S}^2(h_{(2)}),$$

como desejávamos. ∎

Utilizando o elemento grouplike distinguido, podemos encontrar um resultado semelhante ao Lema 4.2.1:

Lema 4.3.4: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S. Considere $0 \neq \lambda \in \int_{H^*}^r$ e seja $g \in G(H)$ o elemento H-grouplike distinguido de H. Para todo $h \in H$,

$$\sum_{(h)} \left\langle \lambda, h_{(2)} \right\rangle h_{(1)} = \langle \lambda, h \rangle g.$$

Demonstração: Tome $\varphi \in H^*$. Assim,

$$\left\langle \varphi, \sum_{(h)} \left\langle \lambda, h_{(2)} \right\rangle h_{(1)} \right\rangle = \sum_{(h)} \left\langle \varphi, h_{(1)} \right\rangle \left\langle \lambda, h_{(2)} \right\rangle = (\varphi * \lambda)(h) = \langle \varphi, g \rangle \langle \lambda, h \rangle$$
$$= \langle \varphi, \langle \lambda, h \rangle g \rangle$$

e, pela arbitrariedade de φ, concluímos que $\sum_{(h)} \left\langle \lambda, h_{(2)} \right\rangle h_{(1)} = \langle \lambda, h \rangle g$. ■

Com esse resultado, temos mais uma base dual para o homomorfismo de Frobenius de uma álgebra de Hopf de dimensão finita e uma nova fórmula para o automorfismo de Nakayama associado a ele. Essas fórmulas e bases duais que estamos encontrando são o cerne da nossa demonstração da fórmula de Radford. Bastará apenas combiná-las para ter o resultado que buscamos.

Proposição 4.3.5: Nas mesmas condições da Proposição 4.3.3 e tomando $g \in G(H)$ elemento H-grouplike distinguido de H,

1. $(S(t_{(1)})g, t_{(2)})_{(t)}$ são bases duais para λ;
2. Para todo $h \in H$, temos $\nu(h) = \sum_{(h)} g^{-1} S^2(h_{(1)}) \left\langle \alpha, h_{(2)} \right\rangle g$.

Demonstração: Primeiramente, para todo $h \in H$, utilizando o Lema 4.3.4 e lembrando que $t \in \int_H^r$, temos

$$\sum_{(t)} S(t_{(1)})g \left\langle \lambda, t_{(2)}h \right\rangle = \sum_{(t),(h)} S(t_{(1)})t_{(2)}h_{(1)} \left\langle \lambda, t_{(3)}h_{(2)} \right\rangle = \sum_{(h)} h_{(1)} \left\langle \lambda, th_{(2)} \right\rangle$$
$$= \sum_{(h)} h_{(1)} \left\langle \lambda, \varepsilon(h_{(2)})t \right\rangle = \langle \lambda, t \rangle h = h$$

e, assim, concluímos a prova do item (1).

Com isso, para todo $h \in H$, podemos escrever

$$\nu(h) = \sum_{(t)} S(t_{(1)})g \left\langle \lambda, t_{(2)}\nu(h) \right\rangle = \sum_{(t)} S(t_{(1)})g \left\langle \lambda, ht_{(2)} \right\rangle.$$

Lembre que $g, g^{-1} \in G(H)$ e que, para todo $x \in G(H)$, $x^{-1} = S(x)$. Assim,

$$g = (g^{-1})^{-1} = S(g^{-1}) = S^2(g).$$

Portanto, para todo $h \in H$, utilizando o Lema 4.3.4, temos

$$\begin{aligned} g\overline{S}^2(\nu(h))g^{-1} &= \sum_{(t)} g \left\langle \lambda, ht_{(2)} \right\rangle \overline{S}(t_{(1)})\overline{S}^2(g)g^{-1} \\ &= \sum_{(t),(h)} h_{(1)}t_{(2)} \left\langle \lambda, h_{(2)}t_{(3)} \right\rangle \overline{S}(t_{(1)}) = \sum_{(h)} h_{(1)} \left\langle \lambda, h_{(2)}t \right\rangle \\ &= \sum_{(h)} h_{(1)} \left\langle \lambda, \left\langle \alpha, h_{(2)} \right\rangle t \right\rangle = \sum_{(h)} h_{(1)} \left\langle \alpha, h_{(2)} \right\rangle. \end{aligned}$$

Logo, para todo $h \in H$,

$$\nu(h) = \sum_{(h)} S^2(g^{-1}h_{(1)} \left\langle \alpha, h_{(2)} \right\rangle g) = \sum_{(h)} g^{-1}S^2(h_{(1)}) \left\langle \alpha, h_{(2)} \right\rangle g,$$

encerrando a prova do item (2). ■

Agora, combinando as proposições que demonstramos acima, temos a fórmula de Radford para a antípoda:

Teorema 4.3.6 (Fórmula de Radford)**:** Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S. Se $\alpha \in G(H^*)$ é o elemento H-grouplike distinguido de H^* e $g \in G(H)$ é o elemento H-grouplike distinguido de H, então, para todo $h \in H$,

$$S^4(h) = g(\alpha^{-1} \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha)g^{-1}.$$

Demonstração: Pelas Proposições 4.3.3 e 4.3.5, temos, para todo $h \in H$,

$$\sum_{(h)} \left\langle \alpha, h_{(1)} \right\rangle \overline{S}^2(h_{(2)}) = \nu(h) = \sum_{(h)} g^{-1}S^2(h_{(1)}) \left\langle \alpha, h_{(2)} \right\rangle g.$$

Aplicando S^2, ficamos com

$$\sum_{(h)} \left\langle \alpha, h_{(1)} \right\rangle h_{(2)} = \sum_{(h)} g^{-1}S^4(h_{(1)}) \left\langle \alpha, h_{(2)} \right\rangle g.$$

Assim, lembrando que, como $\alpha \in G(H^*)$, $\alpha^{-1} = S_{H^*}(\alpha) = \alpha \circ S$ e que α é um homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras,

$$\begin{aligned}
g(\alpha^{-1} \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha)g^{-1} &= \sum_{(h)} \left(\sum_{h_{(1)}} g \left\langle \alpha, h_{(1)_{(1)}} \right\rangle h_{(1)_{(2)}} g^{-1} \right) \left\langle \alpha^{-1}, h_{(2)} \right\rangle \\
&= \sum_{(h)} \left(\sum_{(h_{(1)})} S^4(h_{(1)_{(1)}}) \left\langle \alpha, h_{(1)_{(2)}} \right\rangle \right) \left\langle \alpha^{-1}, h_{(2)} \right\rangle \\
&= \sum_{(h)} S^4(h_{(1)}) \left\langle \alpha, h_{(2)} \right\rangle \left\langle \alpha, S(h_{(3)}) \right\rangle \\
&= S^4(h),
\end{aligned}$$

encerrando a demonstração do teorema. ■

Como consequência desse resultado, veremos a seguir que a antípoda de uma álgebra de Hopf de dimensão finita tem ordem finita e, no caso de a álgebra de Hopf em questão e seu dual serem álgebras unimodulares, essa ordem será menor ou igual a 4.

Corolário 4.3.7: A antípoda S de uma álgebra de Hopf H de dimensão finita tem ordem finita.

Demonstração: Considere $\alpha \in G(H^*)$ e $g \in G(H)$ os elementos H-grouplike distinguidos de H^* e de H, respectivamente. Assim, $\Delta(g) = g \otimes g$, $\Delta(g^{-1}) = g^{-1} \otimes g^{-1}$ e α é homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras. Logo, dado $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
g^{-1}hg \leftharpoonup \alpha &= \sum_{(g^{-1}hg)} \left\langle \alpha, (g^{-1}hg)_{(1)} \right\rangle (g^{-1}hg)_{(2)} = \sum_{(h)} \left\langle \alpha, g^{-1}h_{(1)}g \right\rangle g^{-1}h_{(2)}g \\
&= g^{-1} \left(\sum_{(h)} \left\langle \alpha, g^{-1} \right\rangle \left\langle \alpha, h_{(1)} \right\rangle \left\langle \alpha, g \right\rangle h_{(2)} \right) g = g^{-1} \left(\sum_{(h)} \left\langle \alpha, h_{(1)} \right\rangle h_{(2)} \right) g \\
&= g^{-1}(h \leftharpoonup \alpha)g
\end{aligned}$$

e, analogamente, $\alpha^{-1} \rightharpoonup g^{-1}hg = g^{-1}(\alpha^{-1} \rightharpoonup h)g$.

Portanto, pela Fórmula de Radford, temos que $S^{4n}(h) = g^n(\alpha^{-n} \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^n)g^{-n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como H tem dimensão finita, temos $0 < |G(H)| \leq \dim_{\Bbbk} H$. Denotando $|G(H)| = k$, temos $g^k = g^{-k} = 1_H$ e $\alpha^k = \alpha^{-k} = \varepsilon$. Portanto,

$$S^{4k}(h) = g^k(\alpha^{-k} \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^k)g^{-k} = \varepsilon \rightharpoonup h \leftharpoonup \varepsilon = \varepsilon \rightharpoonup h = h,$$

completando a demonstração de que a ordem da antípoda é finita. ■

Corolário 4.3.8: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Se H e H^* forem unimodulares, então $S^4 = \mathrm{id}_H$.

Demonstração: Sejam α e g os elementos H-grouplike distinguidos de H^* e de H, respectivamente. Se H é unimodular, claramente temos que $\alpha = \varepsilon = \varepsilon^{-1}$. Por outro lado, se H^* é unimodular, temos que $g = 1$. Portanto, dado $h \in H$,

$$S^4(h) = \varepsilon \rightharpoonup h \leftharpoonup \varepsilon = \sum_{(h)} \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}\varepsilon(h_{(3)}) = \sum_{(h)} \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} = h,$$

ou seja, $S^4 = \mathrm{id}_H$. ■

Para finalizar a seção, utilizando a Proposição 4.3.3, poderemos encontrar também uma caracterização para as álgebras de Hopf simétricas e, utilizando essa caracterização, mostraremos que a *álgebra de Sweedler*, mais um exemplo clássico da teoria de álgebras de Hopf, é uma álgebra de Frobenius que não é simétrica.

Teorema 4.3.9: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. H é uma álgebra simétrica se, e somente se, H é unimodular e S^2 é um automorfismo interno.

Demonstração: Por um lado, suponha que H seja unimodular e que S^2 seja um automorfismo interno. Como H é unimodular, temos $\alpha = \varepsilon$ e, utilizando a Proposição 4.3.3, concluímos que $\nu = \overline{S}^2$. Como S^2 é automorfismo interno, existe um elemento inversível $x \in H$ tal que $S^2(h) = xhx^{-1}$ para todo $h \in H$. Assim, dado $h \in H$,

$$\overline{S}^2(h) = x^{-1}x\overline{S}^2(h)x^{-1}x = x^{-1}S^2\left(\overline{S}^2(h)\right)x = x^{-1}hx$$

e concluímos que $\nu = \overline{S}^2$ também é um automorfismo interno. Portanto, pelo Corolário 2.2.13, temos que H é uma álgebra simétrica.

Por outro lado, suponha que ν seja um automorfismo interno. Dessa forma, $\varepsilon \circ \nu = \varepsilon$. Agora, lembrando que $\varepsilon \circ S = \varepsilon$ e utilizando a Proposição 4.3.3, temos, denotando por $\alpha * \overline{S}^2$ a aplicação[1] $H \to H$ dada por $h \mapsto \sum_{(h)} \langle \alpha, h_{(1)} \rangle \overline{S}^2(h_{(2)})$,

$$\varepsilon = \varepsilon \circ \nu = \varepsilon \circ \left(\alpha * \overline{S}^2\right) = \alpha * \varepsilon = \alpha,$$

provando que H é unimodular e, utilizando mais uma vez a Proposição 4.3.3, que $\overline{S}^2 = \nu$ é um automorfismo interno. Como vimos acima, isso nos mostra que S^2 é um automorfismo interno e concluímos a demonstração do corolário. ■

[1] Podemos considerar H^* dentro de $\mathrm{End}(H)$ compondo os funcionais com a inclusão natural $i : \Bbbk \to H$. Nesse caso, portanto, temos que essa aplicação é dada por $(i \circ \alpha) * \overline{S}^2$, em que $*$ é o produto de convolução usual.

Exemplo 4.3.10: Agora, daremos um exemplo de uma álgebra de Frobenius que não é simétrica.

A *álgebra de Sweedler* é dada pelos geradores e pelas relações abaixo:

$$H_4 := \Bbbk \left\langle g, x \,|\, g^2 = 1, x^2 = 0, xg = -gx \right\rangle.$$

Temos que $\{1, g, x, gx\}$ é uma base de H_4 sobre $\Bbbk$ e, logo, $\dim_{\Bbbk} H_4 = 4$.

Para definir uma estrutura de coálgebra em H_4, considere os seguintes homomorfismos de álgebras:

- $\delta : \Bbbk \langle y, z \rangle \to H_4 \otimes H_4$, dado por $\delta(y) = g \otimes g$ e $\delta(z) = x \otimes 1 + g \otimes x$;
- $\rho : \Bbbk \langle y, z \rangle \to \Bbbk$, dado por $\rho(y) = 1$ e $\rho(z) = 0$.

δ induz um novo homomorfismo de álgebras $\Delta : H_4 \to H_4 \otimes H_4$ tal que $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x$.

Por sua vez, ρ induz um homomorfismo de álgebras $\varepsilon : H_4 \to \Bbbk$ tal que $\varepsilon(g) = 1$ e $\varepsilon(x) = 0$.

Com as aplicações Δ e ε acima, temos que H_4 é uma biálgebra.

Além disso, H_4 possui uma antípoda $S : H_4 \to H_4$ tal que $S(1) = 1$, $S(g) = g$, $S(x) = -gx$ e $S(gx) = x$. Logo, H_4 é uma álgebra de Hopf de dimensão finita, sendo, assim, uma álgebra de Frobenius.

Suponha que char $\Bbbk \neq 2$. Denote $\Lambda_1 = x + gx \in \int_{H_4}^{l}$ e $\Lambda_2 = x - gx \in \int_{H_4}^{r}$. Com isso,

$$\int_{H_4}^{l} = \Bbbk\Lambda_1 \neq \Bbbk\Lambda_2 = \int_{H_4}^{r},$$

ou seja, H_4 não é unimodular e, portanto, pelo Corolário 4.3.9, temos que H_4 não é simétrica.

4.4 Álgebras de Hopf Semissimples

Para fechar o capítulo, vamos encontrar uma caracterização para as álgebras de Hopf semissimples que será fundamental para a nossa demonstração da *Equação de Classe de Kac e Zhu*. Para isso, precisaremos mostrar que a semissimplicidade das álgebras de Hopf de dimensão finita são mantidas pela dualização, o que exige uma série de lemas que apresentaremos a seguir.

As discussões apresentadas nesta seção baseiam-se majoritariamente em [DNR01], [LR88b] e [LR88a].

Lema 4.4.1: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Se H^* é semissimples, então $\lambda \circ S = \lambda$ para todo $\lambda \in \int_{H^*}$.

Demonstração: Como H^* é semissimples, H^* é unimodular e existe um integral não nulo

$\lambda \in H^*$ que gera $\int_{H^*}$. Além disso, já vimos que $\lambda \circ S = S_{H^*}(\lambda) \in \int_{H^*}$. Portanto, existe $k \in \Bbbk$ tal que $\lambda \circ S = k\lambda$. Agora, note que

$$k \langle \lambda, 1_H \rangle = \langle k\lambda, 1_H \rangle = \langle \lambda \circ S, 1_H \rangle = \langle \lambda, 1_H \rangle .$$

Como λ gera $\int_{H^*}$, o Teorema de Maschke nos dá que $0 \neq \varepsilon_{H^*}(\lambda) = \langle \lambda, 1_H \rangle$ e, portanto, $k = 1$. ■

Dualizando o conceito de semissimplicidade, temos o conceito abaixo:

Definição 4.4.2: Dizemos que uma $\Bbbk$-coálgebra C é *cossemissimples* se C é uma soma direta de subcoálgebras simples. Além disso, toda subcoálgebra de uma coálgebra cossemissimples também é cossemissimples.

Se a dimensão de C é finita, temos claramente que C é cossemissimples se, e somente se, a álgebra dual C^* é semissimples.

Lema 4.4.3: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Se H é cossemissimples, então $S_H^2(C) = C$ para toda subcoálgebra C de H.

Demonstração: Se $C = \{0\}$, claramente $S^2(C) = C$. Suponha então que $C \neq \{0\}$.

Como H^* é semissimples, temos que existe $0 \neq \lambda \in \int_{H^*}$ e, pelo Lema 4.4.1, $\lambda \circ S = \lambda$.

Como H é cossemissimples, C é uma soma de coálgebras simples. Logo, sem perda de generalidade, podemos supor que C é uma coálgebra simples. Assim, $S^2(C) \neq \{0\}$ é uma subcoálgebra simples de H, pois S^2 é um homomorfismo de coálgebras injetor. Além disso, temos que $S^2(C) \cap C = \{0\}$ ou $S^2(C) \cap C = C$.

Suponha que $S^2(C) \cap C = \{0\}$. Dessa forma, podemos definir uma aplicação linear $\varphi : H \to \Bbbk$ tal que $\varphi|_C = 0$ e $\varphi|_{S^2(C)} = \varepsilon$. Com isso, $\varphi \in H^*$ e, pela Proposição 4.1.3, temos

$$(h \rightharpoondown \lambda) * \varphi = \Phi(h) * \varphi = \Phi(h \leftharpoondown \varphi) = (h \leftharpoondown \varphi) \rightharpoondown \lambda$$

para todo $h \in H$.

Portanto, dados $g, h \in H$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda, S(h)(\varphi \rightharpoonup g) \rangle &= \sum_{(g)} \left\langle \lambda, S(h) g_{(1)} \varphi(g_{(2)}) \right\rangle = \sum_{(g)} \left\langle \lambda, S(h) g_{(1)} \right\rangle \left\langle \varphi, g_{(2)} \right\rangle = \\ &= \langle (h \rightharpoondown \lambda) * \varphi, g \rangle = \langle (h \leftharpoondown \varphi) \rightharpoondown \lambda, g \rangle = \langle \lambda, S(h \leftharpoondown \varphi) g \rangle . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Assim, dados $x, y \in C$, temos

$$\left\langle \lambda, S(x) S^2(y) \right\rangle = \left\langle \lambda, S(x)(\varphi \rightharpoonup S^2(y)) \right\rangle = \left\langle \lambda, S(x \leftharpoondown \varphi) S^2(y) \right\rangle = \left\langle \lambda, S(0) S^2(y) \right\rangle = 0$$

e, com isso,

$$\langle \lambda, S(y)x \rangle = \langle \lambda \circ S, S(y)x \rangle = \left\langle \lambda, S(x)S^2(y) \right\rangle = 0.$$

Agora, note que, para todo $x \in C$,

$$\varepsilon(x) \langle \lambda, 1_H \rangle = \langle \lambda, \varepsilon(x) 1_H \rangle = \sum_{(x)} \left\langle \lambda, S(x_{(1)}) x_2 \right\rangle = 0$$

e, portanto, $\varepsilon(x) = 0$ para todo $x \in C$, já que $\lambda \neq 0$.

Logo, dado $x \in C$, temos

$$x = \sum_{(x)} \varepsilon(x_{(1)}) x_{(2)} = 0,$$

ou seja, $C = \{0\}$, o que é uma contradição.

Portanto, concluímos que $S^2(C) \cap C = C$, isto é, $S^2(C) = C$. ■

Observação 4.4.4: Observe que, se H é uma álgebra de Hopf cossemissimples, então H é uma soma direta de subcoálgebras simples. Porém, pelo Corolário 3.4.1, temos que, se C é uma subcoálgebra simples de H, $C^* \cong \mathbb{M}_n(\Bbbk)$ para algum inteiro positivo n, ou seja, C é uma subcoálgebra matricial. Dessa forma, temos que H é uma soma direta de subcoálgebras matriciais.

Para o último lema necessário antes de provar o primeiro teorema desta seção, vamos precisar retomar as coálgebras matriciais que definimos no capítulo anterior.

Lema 4.4.5: Sejam H uma álgebra de Hopf cossemissimples e C uma subcoálgebra matricial de H de ordem n. Se $t \in C$ é um elemento inversível na álgebra $(C, \bullet)$ tal que $S^2(c) = t^{(-1)} \bullet c \bullet t$ para todos $c \in C$, então $\varepsilon(t) \neq 0$ e $\varepsilon(t^{(-1)}) \neq 0$.

Demonstração: Como H é cossemissimples, então H^* é semissimples e, pelo Teorema de Maschke, existe $\lambda \in \int_H^*$ tal que $\langle \lambda, 1_H \rangle = \langle \varepsilon_{H^*}, \lambda \rangle \neq 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\langle \lambda, 1_H \rangle = 1$.

Seja X um complemento linear de C em H e defina $\psi, \phi \in H^*$ por:

- $\langle \psi, h \rangle = \langle \lambda, e_C S(h) \rangle$ para todo $h \in H$;
- $\langle \phi, d \rangle = (t \,|\, d)$ para todo $d \in C$ e $\langle \phi, x \rangle = 0$ para todo $x \in X$.

Fixe agora $c \in C$ e defina $\varphi \in H^*$ por $\langle \varphi, d \rangle = (d \,|\, c)$ para todo $d \in C$ e $\langle \varphi, x \rangle = 0$ para todo $x \in X$.

Pelo item (2) do Lema 3.4.7, temos que $\varphi \rightharpoonup d = c \bullet d$ e também que $d \leftharpoonup \varphi = d \bullet c$ para todo $d \in C$.

Analogamente ao feito na equação (4.1), temos $\langle \lambda, (g \leftharpoonup \varphi) S(h) \rangle = \langle \lambda, g S(\varphi \rightharpoonup h) \rangle$, para todos $g, h \in H$.

Logo, para todo $d \in C$, temos

$$\begin{aligned}\langle \psi, c \bullet d \rangle &= \langle \lambda, e_C S(c \bullet d) \rangle = \langle \lambda, e_C S(\varphi \rightharpoonup d) \rangle = \langle \lambda, (e_C \leftharpoonup \varphi) S(d) \rangle \\ &= \langle \lambda, (e_C \bullet c) S(d) \rangle = \langle \lambda, cS(d) \rangle \, .\end{aligned}$$

Com isso, temos que, para todos $c, d \in C$, $\langle \psi, c \bullet d \rangle = \langle \lambda, cS(d) \rangle$.

Assim como foi feito no Lema 4.4.3, temos $\lambda \circ S = \lambda$ e, portanto, para todos $c, d \in C$,

$$\begin{aligned}\langle \psi, c \bullet d \rangle &= \langle \lambda, cS(d) \rangle = \langle \lambda, S(cS(d)) \rangle = \left\langle \lambda, S^2(d) S(c) \right\rangle = \left\langle \lambda, (t^{(-1)} \bullet d \bullet t) S(c) \right\rangle \\ &= \left\langle \psi, t^{(-1)} \bullet d \bullet t \bullet c \right\rangle ,\end{aligned}$$

ou seja, $V := \text{span}_{\Bbbk}\{c \bullet d - t^{(-1)} \bullet d \bullet t \bullet c \,|\, c, d \in C\} \subseteq \ker \psi$. Além disso,

$$\left\langle \phi, t^{(-1)} \bullet d \bullet t \bullet c \right\rangle = \left(t \,\middle|\, t^{(-1)} \bullet d \bullet t \bullet c \right) = (e_C \,|\, d \bullet t \bullet c) = (t \,|\, c \bullet d) = \langle \phi, c \bullet d \rangle \, ,$$

isto é, também temos $V \subseteq \ker \phi$.

Note que

$$\text{span}_{\Bbbk}\{AB - BA \,|\, A, B \in M_n(\Bbbk)\} = \text{span}_{\Bbbk}\{\delta_{jk} E_{il} - \delta_{il} E_{kj} \,|\, 0 \leq i, j, k, l \leq n\}$$

e, portanto, $\dim(\text{span}_{\Bbbk}\{AB - BA \,|\, A, B \in M_n(\Bbbk)\}) = n^2 - 1$.

Como $\xi : (C, \bullet) \to \mathbb{M}_n(\Bbbk)$ é um isomorfismo de álgebras, temos que

$$\dim(\text{span}_{\Bbbk}\{c \bullet d - d \bullet c \,|\, c, d \in C\}) = n^2 - 1.$$

Como $t \in C$ é inversível em $(C, \bullet)$, temos

$$\text{span}_{\Bbbk}\{c \bullet d - d \bullet c \,|\, c, d \in C\} = \text{span}_{\Bbbk}\{(t \bullet c) \bullet d - d \bullet (t \bullet c) \,|\, c, d \in C\}$$

e, portanto,

$$\dim V = \dim(\text{span}_{\Bbbk}\{t^{(-1)} \bullet (t \bullet c \bullet d - d \bullet t \bullet c) \,|\, c, d \in C\}) = n^2 - 1.$$

Note que $\phi|_C = \xi(t)$ e, como $t \neq 0$, então $\xi(t) \neq 0$ e $\phi \neq 0$. Como tanto ϕ quanto ψ se anulam em um mesmo espaço de codimensão 1, existe $\alpha \in \Bbbk$ tal que $\psi = \alpha\phi$.

Além disso, se $\{c_{ij} \,|\, 1 \leq i, j \leq n\}$ é uma base de C e $p_{kl} \in H^*$ é tal que $\langle p_{kl}, c \rangle = (c \,|\, c_{kl})$

para todo $c \in C$ e $\langle p_{kl}, x \rangle = 0$ para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned}\langle \lambda, (c_{ij} \bullet c_{kl}) S(c_{sk}) \rangle &= \langle \lambda, (c_{ij} \leftharpoonup p_{kl}) S(c_{sk}) \rangle = \langle \lambda, c_{ij} S(p_{kl} \rightharpoonup c_{sk}) \rangle \\ &= \langle \lambda, c_{ij} S(c_{kl} \bullet c_{sk}) \rangle .\end{aligned}$$

Como $c_{ij} \bullet c_{kl} = \delta_{il} c_{kj}$ e $c_{kl} \bullet c_{sk} = c_{sl}$, temos então que $\delta_{il} \langle \lambda, c_{kj} S(c_{sk}) \rangle = \langle \lambda, c_{ij} S(c_{sl}) \rangle$. Logo, para todos $i, j, k, s \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\delta_{ik} \langle \lambda, c_{kj} S(c_{sk}) \rangle = \langle \lambda, c_{ij} S(c_{sk}) \rangle \tag{4.2}$$

e

$$\langle \lambda, c_{kj} S(c_{sk}) \rangle = \langle \lambda, c_{ij} S(c_{si}) \rangle . \tag{4.3}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}\langle \psi, e_C \rangle = \langle \lambda, e_C S(e_C) \rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \lambda, c_{ii} S(c_{jj}) \rangle \overset{(4.2)}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \langle \lambda, c_{ji} S(c_{jj}) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \lambda, c_{ii} S(c_{ii}) \rangle \overset{(4.3)}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle \lambda, c_{1i} S(c_{i1}) \rangle = \sum_{(c_{11})} \left\langle \lambda, c_{11(1)} S(c_{11(2)}) \right\rangle \\ &= \langle \lambda, \varepsilon(c_{11}) 1_H \rangle = \langle \lambda, 1_H \rangle = 1.\end{aligned}$$

No entanto, pelo item (2) do Lema 3.4.5,

$$\langle \phi, e_C \rangle = (t \,|\, e_C) = \sum_{i=1}^{n} (t \,|\, c_{ii}) = \varepsilon(t),$$

ou seja, $1 = \langle \psi, e_C \rangle = \alpha \langle \phi, e_C \rangle = \alpha \varepsilon(t)$, o que nos garante que $\varepsilon(t) \neq 0$, pois, como $\langle \psi, e_C \rangle = 1$, temos que $\alpha \neq 0$.

A prova de que $\varepsilon(t^{(-1)}) \neq 0$ é similar. ■

Finalmente, podemos demonstrar o resultado que já citamos tantas vezes de que a propriedade de semissimplicidade é conservada pela dualização em álgebras de Hopf de dimensão finita.

Teorema 4.4.6: Suponha que $\Bbbk$ seja um corpo de característica zero e que H seja uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf de dimensão finita. H é semissimples se, e somente se, H^* é semissimples.

Demonstração: Suponha que H^* seja semissimples. Se K é uma extensão de $\Bbbk$, fazendo extensão de escalares, temos que $K \otimes_{\Bbbk} H^*$ é semissimples. Então, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\Bbbk$ é algebricamente fechado.

Seja C uma subcoálgebra de matrizes de H. Pelo Lema 4.4.3, temos que $S^2(C) = C$ e, pelo Corolário 4.3.7, existe $r > 0$ tal que $S^{2r} = \mathrm{id}_H$. Além disso, pela Proposição 3.4.8, existe um elemento inversível t na álgebra $(C, \bullet)$ tal que $S^2(c) = t^{(-1)} \bullet c \bullet t$ para todo $c \in C$. Logo, para todo $c \in C$,

$$c = S^{2r}(c) = t^{(-r)} \bullet c \bullet t^{(r)},$$

isto é, $t^{(r)}$ está no centro da álgebra $(C, \bullet)$.

Considerando o isomorfismo de álgebras $\xi : C \to \mathrm{M}_n(\Bbbk)$, temos que $\Bbbk e_C$ é o centro de $(C, \bullet)$ e, portanto, $t^{(r)} = \lambda e_C$, para algum $\lambda \in \Bbbk$. Como t é inversível, temos $\lambda \neq 0$ e, como $\Bbbk$ é algebricamente fechado, $\left(\lambda^{\frac{1}{r}}\right)^{-1} t \in C$ também satisfaz $S^2(c) = t^{(-1)} \bullet c \bullet t$. Dessa forma, podemos supor $\lambda = 1$ e, portanto, $t^{(r)} = e_C$. Logo, $\xi(t)^r = \mathrm{Id}_n$. Assim, concluímos que o polinômio minimal de $\xi(t)$ divide $X^r - 1$ e, então, a matriz $\xi(t)$ é diagonalizável e seus autovalores são raízes r-ésimas da unidade.

Como a característica de $\Bbbk$ é zero, podemos supor que $\mathbb{Q} \subseteq \Bbbk$ e, como supusemos que $\Bbbk$ é algebricamente fechado, também podemos supor que o fecho algébrico de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{C}$ também está contido em $\Bbbk$. [2]

Como o inverso de uma raiz complexa da unidade é seu conjugado, temos que $\xi(t^{(-1)})$ também é diagonalizável e seus autovalores são os conjugados dos autovalores de $\xi(t)$. Portanto,

$$\mathrm{Tr}(\xi(t))\,\mathrm{Tr}(\xi(t^{(-1)})) = \mathrm{Tr}(\xi(t))\overline{\mathrm{Tr}(\xi(t))} \in \mathbb{R}_+.$$

Mais uma vez pela Proposição 3.4.8, e também pelo Lema 3.4.5, temos

$$\mathrm{Tr}(S^2|_C) = \varepsilon(t)\varepsilon(t^{(-1)}) = \mathrm{Tr}(\xi(t))\,\mathrm{Tr}(\xi(t^{(-1)})) \in \mathbb{R}_+.$$

Além disso, pelo Lema 4.4.5, temos $\varepsilon(t) \neq 0$ e $\varepsilon(t^{(-1)}) \neq 0$. Então, $\mathrm{Tr}(S^2|_C) > 0$.

Dessa forma, como H é uma soma direta de subcoálgebras matriciais, temos que $\mathrm{Tr}(S^2) > 0$ e, pelo Corolário 4.2.8, H é semissimples.

Para finalizar, é claro que, se $H \cong (H^*)^*$ é semissimples, como provamos acima, H^* é semissimples. ■

Vamos, então, continuar nosso caminho para caracterização as álgebras de Hopf semissimples.

[2] Para ser mais preciso, aqui e no que se segue, temos um isomorfismo de corpos subentendido entre um subcorpo de $\Bbbk$ e $\overline{\mathbb{Q}}$. Para simplificar a notação, vamos identificar esses corpos a partir desse isomorfismo e tratar os elementos desse subcorpo de $\Bbbk$ como números complexos, transportando para ele a ordem dos elementos cuja imagem por esse isomorfismo seja real.

Lembre que, dada uma $\Bbbk$-álgebra A qualquer, temos um endomorfismo dado pela multiplicação de A, isto é, fixando um elemento $a \in A$, a aplicação $l_a = l(a) : A \to A$ definida por $l(a)(x) = ax$ é um homomorfismo de módulos. Além disso, a aplicação $l : A \to \text{End}(A)$ dada por $a \mapsto l_a$ é um homomorfismo de álgebras.

Agora, considerando as aplicações $\text{Tr} : \text{End}(A^*) \to \Bbbk$ e $l : A^* \to \text{End}(A^*)$, temos $\text{Tr} \circ l \in A^{**}$.

Voltando para o nosso caso de uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf H de dimensão finita e lembrando o isomorfismo $H \cong H^{**}$, temos que existe um elemento $x \in H$ tal que $\text{Tr}(l(\varphi)) = \varphi(x)$ para todo $\varphi \in H^*$.

(Na verdade, como veremos no próximo capítulo, esse elemento é o que chamaremos de *caracter regular de* H^* e denotaremos por $\chi_{H^*} \in H^{**}$).

O lema abaixo nos dá algumas propriedades desse elemento que serão importantes para seguirmos em frente.

Lema 4.4.7: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Tome $x \in H$ tal que $\text{Tr}(l(\varphi)) = \varphi(x)$ para todo $\varphi \in H^*$. Temos que

1. $\Delta(x) = \tau \circ \Delta(x)$;
2. $x^2 = \varepsilon(x)x$;
3. $S^2(x) = x$;
4. $l(x)$ e S^2 comutam em $\text{End}_{\Bbbk}(H)$.

Demonstração: Para provar o item (1), note que $\text{Tr}(l(\varphi) \circ l(\psi)) = \text{Tr}(l(\psi) \circ l(\varphi))$ para todos $\varphi, \psi \in H^*$. Portanto,

$$\sum_{(x)} \left\langle \varphi, x_{(1)} \right\rangle \left\langle \psi, x_{(2)} \right\rangle = \langle \varphi * \psi, x \rangle = \text{Tr}(l(\varphi * \psi)) = \text{Tr}(l(\varphi) \circ l(\psi)) = \text{Tr}(l(\psi) \circ l(\varphi))$$
$$= \langle \psi * \varphi, x \rangle = \sum_{(x)} \left\langle \varphi, x_{(2)} \right\rangle \left\langle \psi, x_{(1)} \right\rangle .$$

Pela arbitrariedade de φ e ψ, concluímos que

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)} = \sum_{(x)} x_{(2)} \otimes x_{(1)} = \tau \circ \Delta(x),$$

provando o item (1).

Para provar o item (2), começamos notando que, aplicando o item (1), temos

$$\sum_{(x)} \overline{S}(x_{(1)}) \otimes \overline{S}(x_{(2)}) = \sum_{(x)} \overline{S}(x_{(2)}) \otimes \overline{S}(x_{(1)}).$$

Observe que, da Proposição 4.1.3, temos

$$(h \rightharpoondown \lambda) * \varphi = \Phi(h) * \varphi = \Phi(h \leftharpoonup \varphi) = (h \leftharpoonup \varphi) \rightharpoondown \lambda,$$

para todos $h \in H$ e $\varphi \in H^*$, e note que $H \otimes H^* \cong H^{**} \otimes H^* \cong \text{End}_{\Bbbk}(H^*)$ de forma que podemos identificar

$$(h \otimes \varphi)(\psi) = (\phi_h \otimes \varphi)(\psi) = \langle \phi_h, \psi \rangle \varphi = \langle \psi, h \rangle \varphi,$$

para todos $h \in H$ e $\varphi, \psi \in H^*$.

Com isso, dados $h \in H$ e $f \in \text{End}_{\Bbbk}(H)$, temos, para todo $\psi \in H^*$,

$$\begin{aligned}(l(h \rightharpoondown \lambda) \circ f^*)(\psi) &= (h \rightharpoondown \lambda) * (f^*(\psi)) = (h \leftharpoonup f^*(\psi)) \rightharpoondown \lambda \\ &= \sum_{(h)} \left\langle f^*(\psi), h_{(1)} \right\rangle (h_{(2)} \rightharpoondown \lambda) \\ &= \left(\sum_{(h)} f(h_{(1)}) \otimes (h_{(2)} \rightharpoondown \lambda) \right) (\psi).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Tr}(l(h \rightharpoondown \lambda) \circ f^*) = \sum_{(h)} \left\langle h_{(2)} \rightharpoondown \lambda, f(h_{(1)}) \right\rangle = \sum_{(h)} \left\langle \lambda, S(h_{(2)}) f(h_{(1)}) \right\rangle, \tag{4.4}$$

para todos $h \in H$ e $f \in \text{End}_{\Bbbk}(H)$.

Logo, para todo $h \in H$, denotando $s = \overline{S}(x)$, temos $\varepsilon(s) = \varepsilon(\overline{S}(x)) = \varepsilon(x)$ e

$$\begin{aligned}\left\langle h \rightharpoondown \lambda, x^2 \right\rangle &= \langle h \rightharpoondown \lambda, S(s)x \rangle = \langle sh \rightharpoondown \lambda, x \rangle = \text{Tr}(l(sh \rightharpoondown \lambda)) = \text{Tr}(l(sh \rightharpoondown \lambda) \circ \text{id}_H) \\ &= \sum_{(h),(s)} \left\langle \lambda, S(s_{(2)} h_{(2)}) s_{(1)} h_{(1)} \right\rangle = \sum_{(h),(s)} \left\langle \lambda, S(h_{(2)}) S(s_{(2)}) s_{(1)} h_{(1)} \right\rangle \\ &= \sum_{(h)} \left\langle \lambda, S(h_{(2)}) \varepsilon(s) h_{(1)} \right\rangle = \sum_{h} \left\langle \lambda, \varepsilon(x) S(h_{(2)}) h_{(1)} \right\rangle \\ &= \langle h \rightharpoondown \lambda, \varepsilon(x) x \rangle .\end{aligned}$$

Como $\Phi : H \to H^*$ dado por $\Phi(h) = h \rightharpoondown \lambda$ é um isomorfismo, concluímos que $x^2 = \varepsilon(x)x$.

Provemos agora o item (3). Como S é um antimorfismo de álgebras, temos que S^2 é um homomorfismo de álgebras. Assim, denotando por $\sigma = (S^2)^* : H^* \to H^*$ a transposta de

S^2, σ também é homomorfismo de álgebras e, para todo $\varphi \in H^*$, temos, para todo $\psi \in H^*$,

$$\sigma \circ l(\varphi) \circ \sigma^{-1}(\psi) = \sigma(\varphi * \sigma^{-1}(\psi)) = \sigma(\varphi) * \psi = l(\sigma(\varphi))(\psi).$$

Com isso,

$$\left\langle \varphi, S^2(x) \right\rangle = \langle \sigma(\varphi), x \rangle = \mathrm{Tr}(l(\sigma(\varphi))) = \mathrm{Tr}(\sigma \circ l(\varphi) \circ \sigma^{-1}) = \mathrm{Tr}(l(\varphi)) = \langle \varphi, x \rangle ,$$

ou seja, $S^2(x) = x$.

Por fim, para provar o item (4), basta apenas lembrar que S^2 é um homomorfismo de álgebras e, utilizando o item (3) temos que, para todo $h \in H$,

$$(S^2 \circ l(x))(h) = S^2(xh) = S^2(x)S^2(h) = xS^2(h) = (l(x) \circ S^2)(h),$$

concluindo a prova do lema. ■

A proposição abaixo nos apresenta uma fórmula para o traço do quadrado da antípoda que poderemos utilizar no teorema seguinte para separar nossa demonstração em casos que saberemos, então, resolver.

Proposição 4.4.8: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Tome $x \in H$ tal que $\mathrm{Tr}(l(\varphi)) = \langle \varphi, x \rangle$ para todo $\varphi \in H^*$. Com isso,

$$\mathrm{Tr}(S^2) = (\dim_{\Bbbk} H)\,\mathrm{Tr}(S^2|_{xH}).$$

Demonstração: Claramente, como ε é a unidade de H^*, temos $\varepsilon(x) = \mathrm{Tr}(l(\varepsilon)) = \dim_{\Bbbk} H$ e a equação que queremos provar é equivalente a

$$\mathrm{Tr}(S^2) = \varepsilon(x)\,\mathrm{Tr}(S^2|_{xH}). \tag{4.5}$$

Considerando os isomorfismos $h \in H \mapsto \phi_h \in H^{**}$ e $\varphi \in H^* \mapsto \phi_\varphi \in H^{***}$ como no Lema 1.2.2, podemos tomar $\zeta \in H^*$ tal que $\phi_\zeta \in H^{***}$ é dado por

$$\langle \phi_\zeta, \phi_h \rangle = \mathrm{Tr}(l(\phi_h) \circ (S^2_{H^*})^*) = \mathrm{Tr}(l(h) \circ S^2).$$

Além disso, temos $\langle \phi_\zeta, \phi_h \rangle = \langle \phi_h, \zeta \rangle = \langle \zeta, h \rangle$.

Agora, considere um isomorfismo $\tilde{\Phi} : H^* \to H^{**}$ como na Proposição 4.1.3 e defina $\lambda = \tilde{\Phi}(\varepsilon)$. Para todo $\varphi \in H^*$, temos, pela equação (4.4),

$$\langle \varphi \rightharpoonup \lambda, \zeta \rangle = \mathrm{Tr}(l(\varphi \rightharpoonup \lambda) \circ (S^2_{H^*})^*) = \sum_{(\varphi)} \left\langle \lambda, S_{H^*}(\varphi_{(2)}) S^2_{H^*}(\varphi_{(1)}) \right\rangle = \varepsilon_{H^*}(\varphi) \left\langle \lambda, \varepsilon_{H^*} \right\rangle$$

e, dado $\psi \in H^*$,

$$\begin{aligned}\langle \varphi \rightharpoondown \lambda, \psi * \zeta \rangle &= \left\langle (\overline{S_{H^*}}(\psi) * \varphi) \rightharpoondown \lambda, \zeta \right\rangle = \varepsilon_{H^*}(\overline{S_{H^*}}(\psi) * \varphi) \langle \lambda, \varepsilon_{H^*} \rangle \\ &= \varepsilon_{H^*}(\psi)\varepsilon_{H^*}(\varphi) \langle \lambda, \varepsilon_{H^*} \rangle = \langle \varphi \rightharpoondown \lambda, \varepsilon_{H^*}(\psi)\zeta \rangle \,,\end{aligned}$$

ou seja, ζ é um integral à esquerda para H^*.

Com isso, lembrando que definimos $r(\zeta) = r_\zeta : H^* \to H^*$ por $r_\zeta(\varphi) = \varphi * \zeta$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(r(\zeta)) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i^*, r(\zeta)(\varphi_i) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i^*, \varphi_i * \zeta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{H^*}(\varphi_i) \langle \varphi_i^*, \zeta \rangle \\ &= \varepsilon_{H^*}(\zeta) = \langle \zeta, 1_H \rangle \,.\end{aligned}$$

Assim, $\langle \zeta, x \rangle = \mathrm{Tr}(l(\zeta)) = \mathrm{Tr}(r(\zeta)) = \langle \zeta, 1_H \rangle$.

Portanto,

$$\mathrm{Tr}(S^2) = \mathrm{Tr}(l(1_H) \circ S^2) = \langle \zeta, 1_H \rangle = \langle \zeta, x \rangle = \mathrm{Tr}(l(x) \circ S^2). \tag{4.6}$$

Lembre-se de que, do item (2) do Lema 4.4.7, temos que $x^2 = \varepsilon(x)x$ e, portanto, $l(x)^2 = \varepsilon(x)l(x)$.

Suponha, por um lado, que $\varepsilon(x) = 0$. Assim, $l(x)^2 = 0$ e, como $l(x)$ e S^2 comutam,

$$(l(x) \circ S^2)^2 = l(x) \circ S^2 \circ l(x) \circ S^2 = l(x)^2 \circ S^4 = 0.$$

Logo, $\mathrm{Tr}(S^2) = 0$ e vale a equação (4.5).

Por outro lado, suponha que $\varepsilon(x) \neq 0$. Assim, $e = \frac{1}{\varepsilon(x)}x$ é idempotente e

$$\mathrm{Tr}(l(e) \circ S^2) = \mathrm{Tr}(S^2 \circ l(e)) = \mathrm{Tr}(S^2|_{l(e)H}) = \mathrm{Tr}(S^2|_{xH}).$$

Por fim, a equação (4.6) nos dá que

$$\mathrm{Tr}(S^2) = \mathrm{Tr}(l(x) \circ S^2) = \varepsilon(x)\,\mathrm{Tr}(l(e) \circ S^2) = \varepsilon(x)\,\mathrm{Tr}(S^2|_{xH}),$$

como desejávamos. ■

O teorema a seguir é o último passo na demonstração da caracterização que buscamos. Bastará apenas reunir os resultados já provados para obtê-la.

Teorema 4.4.9: Suponha que $\Bbbk$ seja um corpo de característica zero. Se H for uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf de dimensão finita, temos $\mathrm{Tr}(S^2) \neq 0$ se, e somente se, $S^2 = \mathrm{id}_H$.

Demonstração: Claramente, se $S^2 = \mathrm{id}_H$, então $\mathrm{Tr}(S^2) \neq 0$, pois char $\Bbbk = 0$.

Reciprocamente, suponha que Tr$(S^2) \neq 0$. Pelo Corolário 4.2.8, H e H^* são semissimples. Dessa forma, como visto no Corolário 3.3.8, H e H^* são unimodulares e, pelo Corolário 4.3.8, temos que $S^4 = \mathrm{id}_H$. Assim, concluímos que a ordem de S^2 é 2 e, portanto, S^2 é um operador diagonalizável com autovalores iguais a 1 ou -1. Denotando, para $i \in \{1, -1\}$,

$$d_i = \dim_{\Bbbk}\{h \in H \mid S^2(h) = ih\},$$

temos Tr$(S^2) = d_1 - d_{-1}$ e $\dim_{\Bbbk} H = d_1 + d_{-1}$. Portanto, para mostrar que $S^2 = \mathrm{id}_H$, basta mostrar que $d_{-1} = 0$.

Como Tr$(S^2) \neq 0$, temos

$$0 < |d_1 - d_{-1}| \leq d_1 + d_{-1} = \dim_{\Bbbk} H.$$

Observe que, se mostrarmos que $d_1 - d_{-1}$ é um múltiplo inteiro de $\dim_{\Bbbk} H$, como char $\Bbbk = 0$, teremos $|d_1 - d_{-1}| = d_1 + d_{-1}$ e, com isso, $d_1 = 0$ ou $d_{-1} = 0$. Porém, $S^2(1_H) = 1_H$ e, assim, $d_1 \geq 1$. Logo, $d_{-1} = 0$ e teremos o resultado desejado.

Para mostrar isso, consideraremos dois casos.

Tome $x \in H$ tal que Tr$(l(\varphi)) = \langle \varphi, x \rangle$ para todo $\varphi \in H^*$ e suponha, primeiramente, que $xH = H$. Pela Proposição 4.4.8, temos

$$\mathrm{Tr}(S^2) = (\dim_{\Bbbk} H)\,\mathrm{Tr}(S^2|_{xH}) = (\dim_{\Bbbk} H)\,\mathrm{Tr}(S^2),$$

ou seja, como Tr$(S^2) \neq 0$, isso nos dá $\dim_{\Bbbk} H = 1$. Logo,

$$0 \leq d_{-1} = \dim_{\Bbbk} H - d_1 = 1 - d_1 \leq 0$$

e concluímos que $d_{-1} = 0$.

Por outro lado, suponha que $xH \neq H$. Temos Tr$(S^2|_{xH}) = m$ para algum m inteiro tal que

$$|m| \leq \dim_{\Bbbk} xH \leq \dim_{\Bbbk} H - 1.$$

Seja $r = (d_1 - d_{-1}) - (\dim_{\Bbbk} H)m$. Dessa forma,

$$r = \mathrm{Tr}(S^2) - (\dim_{\Bbbk} H)\,\mathrm{Tr}(S^2|_{xH})$$

e, assim, $r = 0$ pela Proposição 4.4.8. Portanto $d_1 - d_{-1}$ é um múltiplo inteiro de $\dim_{\Bbbk} H$. ■

A seguir, juntando o Corolário 4.2.8, o Teorema 4.4.6 e o Teorema 4.4.9, temos a caracterização que será tão importante no próximo capítulo:

Teorema 4.4.10: Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S sobre um corpo $\Bbbk$ de característica zero. São equivalentes:

i. H é semissimples;
ii. H^* é semissimples;
iii. $\mathrm{Tr}(S^2) \neq 0$;
iv. $S^2 = \mathrm{id}_H$.

Por fim, utilizamos essa caracterização para observar que toda álgebra de Hopf semissimples é uma álgebra simétrica.

Corolário 4.4.11: Toda álgebra de Hopf semissimples sobre um corpo de característica zero é uma álgebra simétrica.

Demonstração: Como H é semissimples, vimos no Corolário 3.3.8 que H é unimodular. Além disso, temos também que $S^2 = \mathrm{id}$, como visto acima. Dessa forma, S^2 é um automorfismo interno e, portanto, pelo Teorema 4.3.9, temos que H é uma álgebra simétrica. ■

Na realidade, é possível encontrar um resultado ainda mais geral: toda álgebra semissimples e de dimensão finita sobre um corpo é uma álgebra simétrica. Basicamente, o que é demonstrado é que álgebras com divisão sobre um corpo são álgebras simétricas e que equivalências de Morita conservam a propriedade de simetria de uma álgebra. Como o Teorema de Wedderburn-Artin nos diz que álgebras simples são álgebras de matrizes sobre uma álgebra com divisão, basta mostrar que $\mathbb{M}_n(D)$ é Morita-equivalente a D, em que D é uma álgebra com divisão, e, portanto, teremos que álgebras simples são simétricas. Depois, só resta mostrar que soma direta de álgebras simétricas é uma álgebra simétrica e temos, assim, o resultado.

Acreditamos que as demonstrações com detalhes dos resultados citados acima acabariam fugindo do escopo deste texto, mas elas podem ser encontradas em [SY11].

Exemplo 4.4.12: Sejam G um grupo finito e $\Bbbk$ um corpo tal que char $\Bbbk$ divide $|G|$. Temos que $\Bbbk G$ é uma álgebra de Hopf simétrica, mas, pelo Teorema de Mashcke, sabemos que $\Bbbk G$ não é semissimples.

Capítulo 5

Tabela de Caracteres

Neste capítulo, vamos provar o resultado que foi o pontapé inicial para esta pesquisa: a *Equação de Classe de Kac e Zhu*. A demonstração que apresentaremos segue o que foi apresentado em [Lor11]. Esse resultado não só é interessante por generalizar resultados conhecidos das teorias de grupos e de representações de grupos para álgebras de Hopf, mas com essa demonstração específica encontramos uma forma de combinar toda as discussões que realizamos ao longo dos últimos capítulos.

Na primeira seção, definiremos o conceito de caracter para módulos sobre álgebras, ambos de dimensão finita, e estudaremos algumas propriedades no caso de a álgebra base ser uma álgebra de Frobenius.

Na segunda seção, demonstraremos a equação de classe. Para isso, introduziremos a álgebra gerada pelos caracteres irredutíveis e relembraremos alguns resultados sobre *inteiros algébricos* que serão necessários. Por fim, aplicaremos esse resultado para as álgebras de grupo.

A partir da terceira seção, não entraremos tão a fundo nos detalhes, pois o interesse é apenas observar aplicações do que estudamos ou mostrar para onde a teoria caminha.

Em particular, a terceira seção é dedicada a duas aplicações da Equação de Classe de Kac e Zhu no contexto de corpos algebricamente fechados e de característica zero: a caracterização das álgebras de Hopf de dimensão prima e um resultado sobre a divisibilidade da dimensão de uma álgebra de Hopf fatorizável e semissimples pelo quadrado da dimensão de seus módulos simples, seguindo o que foi feito em [Sch01].

A parte final do capítulo foi inspirada pela discussão apresentada em [CW13].

Na quarta seção, seguindo a ideia de generalizar a teoria de caracteres de representações de grupos, apresentaremos uma generalização da tabela de caracteres para álgebras de Hopf semissimples. Na quinta, apresentaremos alguns resultados clássicos da Teoria de Representações de Grupos Finitos que podem ser generalizados a partir dos conceitos apresentados na seção anterior.

Para finalizar, na última seção, aplicaremos os resultados das seções anteriores para estudar a tabela de caracteres do *Drinfeld Double* de $\mathbb{C}S_3$.

5.1 Caracter

Como já mencionamos anteriormente, os caracteres são ferramentas poderosas para o estudo dos grupos finitos, sendo as chaves para as primeiras demonstrações de resultados importantes sobre a estrutura desses grupos e para a classificação dos grupos finitos simples. Enquanto uma representação associa cada elemento do grupo a uma matriz, um caracter associa cada elemento a um número. Nesse sentido, esse conceito acaba sendo até mais "elegante", pois ainda consegue carregar muitas informações sobre o grupo de uma maneira bem mais resumida. Por exemplo, a partir da tabela de caracteres de um grupo, conseguimos obter o centro desse grupo e todos os seus subgrupos normais, dizer se ele é simples, solúvel, nilpotente...

A Teoria de Caracteres tem aplicações em outras áreas, como Teoria dos Números (o leitor pode encontrar um comentário sobre essa relação em [Lam98a]), e até mesmo fora da matemática, como na física das vibrações moleculares (esse exemplo é abordado no último capítulo de [JL01]).

Todos esses feitos da Teoria de Caracteres motivam a tentativa de generalizar esse conceito para álgebras de Hopf. A Equação de Classe de Kac e Zhu será a principal aplicação que estudaremos desse conceito generalizado, mas veremos depois, à luz de [CW13], mais alguns resultados clássicos que podem ser generalizados para determinadas álgebras de Hopf.

Na Teoria de Representações de Grupos, um *caracter* é a aplicação que associa, a cada elemento do grupo, o traço da representação calculada naquele elemento. Podemos generalizar esse conceito para módulos definindo-o de maneira análoga, como vemos abaixo:

Definição 5.1.1: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra e M um A-módulo à esquerda, ambos de dimensão finita. Para cada elemento $a \in A$, definimos um endomorfismo $l_a \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(M)$ dado por $l_a(x) = ax$, para todo $x \in M$. Com isso, definimos o *caracter de M* pela aplicação linear $\chi_M \in A^*$ dada por

$$\langle \chi_M, a \rangle = \mathrm{Tr}(l_a).$$

Assim, se $\{m_1, \ldots, m_n\}$ é uma base de M com base dual $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, então

$$\langle \chi_M, a \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, l_a(m_i) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, a \cdot m_i \rangle .$$

Note que, se $e \in A$ é um elemento idempotente, então $M = eM \oplus (1-e)M$ e, assim, $l_e|_{eM} = \mathrm{id}_{eM}$ e $l_e|_{(1-e)M} = 0$. Portanto,

$$\langle \chi_M, e\rangle = \dim_{\Bbbk} eM. \tag{5.1}$$

Se M for um módulo irredutível, diremos que χ_M é um *caracter irredutível*.

Os caracteres definidos acima são um exemplo do que chamaremos de *forma traço*.

Definição 5.1.2: Dada uma $\Bbbk$-álgebra A, uma aplicação $\phi \in A^*$ é chamada de *forma traço* se $\langle \phi, xy\rangle = \langle \phi, yx\rangle$, para todos $x, y \in A$. Denotaremos por $A^*_{\text{traço}}$ o espaço de todas as formas traço de A.

Abaixo, veremos que, no contexto das álgebras simétricas, o espaço das formas traço é isomorfo ao centro da álgebra.

Observação 5.1.3: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Análogo ao feito na Observação 2.2.1, temos que, se $\beta : A \times A \to \Bbbk$ é uma forma bilinear associativa e não degenerada, temos um isomorfismo de A-módulos à esquerda

$$\begin{aligned} \beta_L : A &\to A^* \\ a &\mapsto \beta(-, a). \end{aligned}$$

Suponha agora que β seja simétrica também. Vamos mostrar que temos um novo isomorfismo de $\Bbbk$-espaços tomando a restrição $\beta_L|_{\mathcal{Z}(A)} : \mathcal{Z}(A) \to A^*_{\text{traço}}$.

A aplicação $\beta_L|_{\mathcal{Z}(A)}$ está claramente bem definida com imagem em $A^*_{\text{traço}}$. Como β_L é um homomorfismo injetor, só nos resta mostrar que $\beta_L|_{\mathcal{Z}(A)}$ é sobrejetor. Para isso, tome $f \in A^*_{\text{traço}} \subseteq A^*$. Logo, como β_L é isomorfismo, existe $a \in A$ tal que $f = \beta(-, a)$. Assim, temos que, para todos $x, y \in A$,

$$0 = f(xy - yx) = \beta(xy - yx, a).$$

Utilizando a associatividade e a simetria de β, podemos mostrar que $\beta(ax - xa, y) = 0$ para todos $x, y \in A$. No entanto, como β é não degenerada, temos que $ax - xa = 0$ para todo $x \in A$, ou seja, $a \in \mathcal{Z}(A)$.

No segundo capítulo, definimos o que eram bases duais para uma forma bilinear, o que estava relacionado com as bases duais dos homomorfismos de Frobenius. Na observação abaixo, retomaremos essas ideias para explorar um pouco do *caracter regular* e definir o *elemento de Casimir*.

Observação 5.1.4: Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de Frobenius de dimensão finita n. Pelo Primeiro

Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama, temos que existe $\beta : A \times A \to \Bbbk$ uma forma bilinear associativa e não degenerada. Pela Proposição 2.2.2, temos também bases duais $\{x_1, \ldots, x_n\}, \{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq A$ para β.

Identificando $A^* \otimes A = \mathrm{End}_{\Bbbk}(A)$ e considerando o Lema 2.2.4, podemos escrever, para todo $a \in A$,

$$l_a = \sum_{i=1}^{n} \beta(y_i, a\,-) \otimes x_i = \sum_{i=1}^{n} \beta(a\,-, x_i) \otimes y_i.$$

Analogamente, definindo $r_a \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(A)$ por $r_a(x) = xa$, para todo $x \in A$, temos, para todo $a \in A$,

$$r_a = \sum_{i=1}^{n} \beta(y_i, -\,a) \otimes x_i = \sum_{i=1}^{n} \beta(-\,a, x_i) \otimes y_i.$$

Aplicando a função traço, como β é associativa, temos, para todo $a \in A$,

$$\mathrm{Tr}(l_a) = \sum_{i=1}^{n} \beta(y_i, ax_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta(y_i a, x_i) = \mathrm{Tr}(r_a).$$

Dessa forma, $\langle \chi_A, a \rangle = \mathrm{Tr}(l_a) = \mathrm{Tr}(r_a)$, para todo $a \in A$, e chamamos χ_A de *caracter regular de A*.

Note que, como também temos $\mathrm{Tr}(l_a) = \sum_{i=1}^{n} \beta(ay_i, x_i)$ e $\mathrm{Tr}(r_a) = \sum_{i=1}^{n} \beta(y_i, x_i a)$ para todo $a \in A$, então

$$\chi_A = \beta(-, z) = \beta(z, -),$$

em que $z = z_\beta := \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$ é chamado de *elemento de Casimir*.

Na próxima observação, vamos calcular a pré-imagem de um caracter a partir do isomorfismo definido na Observação 5.1.3 e que a definição do elemento de Casimir independe da escolha do par de bases duais.

Observação 5.1.5: Agora, assuma que A seja uma álgebra de Frobenius com forma bilinear associativa e não degenerada β. Sejam $\{x_1, ..., x_n\}$ e $\{y_1, ..., y_n\}$ bases duais para β, que, portanto, satisfazem as igualdades do Lema 2.2.4.

Como vimos na Equação 2.4, dado M um A-módulo à esquerda de dimensão finita, a pré-imagem de $\chi_M \in A^*_{\text{traço}} \subseteq A^*$ pelo isomorfismo β_L é o elemento

$$z(M) = z_\beta(M) := \sum_{i=1}^{n} \langle \chi_M, x_i \rangle\, y_i.$$

Assim, $\langle \chi_M, - \rangle = \beta(-, z_\beta(M))$. Em particular, $z_\beta(M)$ é independente da escolha dos conjuntos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e $\{y_1, \ldots, y_n\}$.

Note que o elemento de Casimir é $z_\beta = z_\beta(A)$, pois β é não degenerada.

Se β for simétrica, então a Observação 5.1.3 nos garante que $z_\beta(M) \in \mathcal{Z}(A)$.

Agora, vamos ver um exemplo de elemento de Casimir no caso das álgebras de grupos:

Exemplo 5.1.6: Sejam G um grupo finito, $\mathbb{k}$ um corpo qualquer e $A = \mathbb{k}G$.

Da Observação 2.2.14, temos uma forma bilinear associativa, não degenerada e simétrica $\beta : A \times A \to \mathbb{k}$ tal que, para todos $g, h \in G$,

$$\beta(g, h) = \delta_{1_G, (gh)^{-1}}$$

com bases duais $(g, g^{-1})_{g \in G}$.

Portanto, temos um elemento de Casimir

$$z_\beta = \sum_{g \in G} g^{-1} g = |G| 1_G.$$

Como vimos na Observação 5.1.4, tomando $g \in G$, temos que o caracter regular de A é dado por

$$\chi_A(g) = \beta(g, z_\beta) = |G| \beta(g, 1_G) = \begin{cases} |G| & \text{se } g = 1_G; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e estendido linearmente (exatamente como é feito na *Teoria de Representações de Grupos*).

A seguir, definiremos o *caracter central* e o *índice* de um módulo tal que $\mathrm{End}_A(M) \cong \mathbb{k}$ como $\mathbb{k}$-álgebras, que serão conceitos importantes para a demonstração da equação de classe na próxima seção.

Observação 5.1.7: Assuma que $\mathrm{End}_A(M) \cong \mathbb{k}$ como $\mathbb{k}$-álgebras (por exemplo, quando M é irredutível e $\mathbb{k}$ é algebricamente fechado).

Assim, para cada $x \in \mathcal{Z}(A)$, temos $l_x = \omega_M(x) l_{1_A} = \omega_M(x)\, \mathrm{id}_M$, com $\omega_M(x) \in \mathbb{k}$. Isso produz um homomorfismo de $\mathbb{k}$-álgebras $\omega_M : \mathcal{Z}(A) \to \mathbb{k}$, que será chamado de *caracter central* de M.

Como $\mathrm{Tr}(l_x) = \omega_M(x)\, \mathrm{Tr}(\mathrm{id}_M)$, temos

$$\langle \chi_M, x \rangle = \omega_M(x) \dim M.$$

Agora, assuma que A seja uma álgebra de Frobenius com forma bilinear associativa e não degenerada β. Seja $z_\beta(M) = \sum_{i=1}^{n} \langle \chi_M, x_i \rangle\, y_i$, como feito previamente. Então, para todos $x \in \mathcal{Z}(A)$ e $a \in A$,

$$\begin{aligned}\beta(a, xz_\beta(M)) &= \beta(ax, z_\beta(M)) = \langle \chi_M, ax \rangle = \langle \chi_M, xa \rangle = \operatorname{Tr}(l_x \circ l_a)\\ &= \omega_M(x)\operatorname{Tr}(l_a) = \omega_M(x)\,\langle \chi_M, a \rangle = \omega_M(x)\beta(a, z_\beta(M))\\ &= \beta(a, \omega_M(x) z_\beta(M)).\end{aligned}$$

Logo, como β é não degenerada, temos, para todo $x \in \mathcal{Z}(A)$,

$$xz_\beta(M) = \omega_M(x) z_\beta(M).$$

Se β é simétrica, então $z_\beta(M) \in \mathcal{Z}(A)$ e podemos definir o *índice de M* por

$$[A : M]_\beta := \omega_M(z_\beta(M)) \in \Bbbk.$$

Em resumo, o que temos é o seguinte:

No caso em que A é uma álgebra simétrica com uma forma bilinear β e M é um A-módulo à esquerda de dimensão finita, $z_\beta(M)$ é o elemento central de A que define χ_M a partir da forma bilinear β. Além disso, se $\operatorname{End}_A(M) \cong \Bbbk$ como $\Bbbk$-álgebras, a ação em M de um elemento central de A é um múltiplo da identidade e, assim, $\omega_M(z_\beta(M)) = [A : M]_\beta$ é o escalar $k \in \Bbbk$ tal que $l_{z_\beta(M)} = k\,\mathrm{id}_M$.

Se $e \in A$ é um elemento idempotente tal que a $\Bbbk$-álgebra de endomorfismos do A-módulo Ae seja isomorfa a $\Bbbk$, veremos na proposição abaixo que o índice $[A : Ae]_\beta$ acima é o inverso em $\Bbbk$ de $\beta(e, 1_A)$.

Proposição 5.1.8: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra simétrica com forma bilinear β (associativa, não degenerada e simétrica) e $e \in A$ idempotente. Assuma que o A-módulo $M = Ae$ satisfaça $\operatorname{End}_A(M) \cong \Bbbk$ como $\Bbbk$-álgebras. Dessa forma, $[A : M]_\beta$ é o inverso de $\beta(e, 1_A)$.

Demonstração: Semelhante ao feito no Lema 1.5.24, podemos mostrar que, como $\Bbbk$-espaços,

$$eM = eAe \cong \operatorname{End}_A(M) \cong \Bbbk.$$

Com isso, temos $\langle \chi_M, e \rangle = \dim(eM) = 1$.

Como visto na Observação 5.1.7, temos $xe = l_x(e) = \omega_M(x)e$ para todo $x \in \mathcal{Z}(A)$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
1 &= \langle \chi_M, e\rangle = \beta(e, z_\beta(M)) = \beta(z_\beta(M)e, 1_A) = \omega_M(z_\beta(M))\beta(e, 1_A) \\
&= [A : M]_\beta \beta(e, 1_A)
\end{aligned}
$$

e, portanto, $[A : M]_\beta$ é o inverso de $\beta(e, 1)$. ■

5.2 Equação de Classe de Kac e Zhu

Para demonstrar a equação de classe, será necessário calcular o caracter regular de uma álgebra de Hopf semissimples. Para nos auxiliar com isso, temos um resultado muito interessante que nos diz que ele está totalmente determinado pelos elementos integrais.

Proposição 5.2.1: Seja H uma álgebra de Hopf semissimples sobre um corpo de característica zero e fixe integrais $\Lambda \in \int_H$ e $\lambda \in \int_{H^*}$ tais que $\langle \lambda, \Lambda\rangle = 1$. Assim, o caracter regular χ_H de H é dado por $\chi_H = \varepsilon(\Lambda)\lambda$. Em particular, $\chi_H \in \int_{H^*}$.

Demonstração: Primeiramente, sabemos que λ gera $\int_{H^*}$ e que temos um isomorfismo de H-módulos à esquerda $H \to H^*$ dado por $h \mapsto h \rightharpoonup \lambda$.

Note que uma forma bilinear $\beta : H \times H \to \Bbbk$ associativa e não degenerada para H é dada por $\beta(h, g) = \langle \lambda, hg\rangle$, pois, dado $h \in H$,

$$
0 = \beta(h, -) = \lambda \leftharpoonup h = S(h) \rightharpoonup \lambda \iff S(h) = 0
$$

e, como S é uma bijeção pelo Teorema 3.3.3, temos $S(h) = 0$ se, e somente se, $h = 0$.

Como observado após o Teorema 4.2.2, temos que $(S(\Lambda_{(1)}), \Lambda_{(2)})_\Lambda$ são bases duais para λ e, portanto, pela Observação 5.1.4, temos

$$
\chi_H = \beta(-, z) = \beta(z, -),
$$

em que

$$
z = \sum_{(\Lambda)} \Lambda_{(2)} S(\Lambda_{(1)}) = \sum_{(\Lambda)} S^2(\Lambda_{(2)}) S(\Lambda_{(1)}) = \sum_{(\Lambda)} S(\Lambda_{(1)} S(\Lambda_{(2)})) = \varepsilon(\Lambda) 1_H.
$$

Dessa forma, para todo $h \in H$,

$$
\langle \chi_H, h\rangle = \langle \lambda, hz\rangle = \varepsilon(\Lambda) \langle \lambda, h\rangle ,
$$

ou seja, $\chi_H = \varepsilon(\Lambda)\lambda$. ■

De agora em diante, vamos assumir que H é uma álgebra de Hopf semissimples sobre um corpo $\Bbbk$. Em particular, como H é Hopf semissimples, H é de dimensão finita sobre $\Bbbk$ (Corolário 3.3.7) e, portanto, é uma álgebra de Frobenius.

Denotaremos por $\operatorname{Irr} H$ um conjunto completo de H-módulos de dimensão finita irredutíveis (simples) e dois-a-dois não isomorfos. Observe que, como H é semissimples, o Teorema de Wedderburn-Artin nos garante que $\operatorname{Irr} H$ é um conjunto finito.

Será importante, no que segue, entender a álgebra gerada pelos caracteres irredutíveis. Na observação abaixo, exploramos algumas operações que podemos fazer com caracteres.

Observação 5.2.2: Sejam V e W módulos em $\operatorname{mod} H$. Tomando bases $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V e $\{w_1, \ldots, w_m\}$ de W, temos

- $\chi_V + \chi_W = \chi_{V \oplus W}$: Temos uma base $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$ de $V \oplus W$. Dessa forma,

$$\langle \chi_{V \oplus W}, h \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i^*, h \cdot v_i \rangle + \sum_{j=1}^{m} \left\langle w_j^*, h \cdot w_j \right\rangle = \langle \chi_V, h \rangle + \langle \chi_W, h \rangle .$$

- $\chi_V * \chi_W = \chi_{V \otimes W}$: Temos uma base $\{v_i \otimes w_j \,|\, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$ de $V \otimes W$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle \chi_{V \otimes W}, h \rangle &= \sum_{i,j} \langle (v_i \otimes w_j)^*, h \cdot (v_i \otimes w_j) \rangle = \sum_{i,j} \sum_{(h)} \left\langle v_i^*, h_{(1)} \cdot v_i \right\rangle \left\langle w_j^*, h_{(2)} \cdot w_j \right\rangle \\ &= \sum_{(h)} \left\langle \chi_V, h_{(1)} \right\rangle \left\langle \chi_W, h_{(2)} \right\rangle = \langle \chi_V * \chi_W, h \rangle . \end{aligned}$$

- $\chi_{V^*} = \chi_V \circ S$: Temos $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ base de V^* e, portanto,

$$\langle \chi_{V^*}, h \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i^{**}, h \rightharpoonup v_i^* \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle h \rightharpoonup v_i^*, v_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i^*, S(h) v_i \rangle = \langle \chi_V, S(h) \rangle .$$

Além disso, note que temos um H-módulo à esquerda irredutível de dimensão 1, que denotaremos por $\Bbbk_\varepsilon$, munindo $\Bbbk$ com a ação

$$h \cdot k = \varepsilon(h) k,$$

para todos $h \in H$ e $k \in \Bbbk$, e $\chi_{\Bbbk_\varepsilon} = \varepsilon$.

Definição 5.2.3: O $\Bbbk$-subespaço de H^* gerado por $\{\chi_V \,|\, V \in \operatorname{Irr} H\}$ é uma subálgebra de H^* chamada de *álgebra de caracteres de H* ou *álgebra de representação de H* e será denotada por $R(H)$. (Note que a propriedade $\chi_V + \chi_W = \chi_{V \oplus W}$ acima nos permite mostrar que $\{\chi_V \,|\, V \in \operatorname{Irr} H\}$ é um conjunto linearmente independente e, portanto, é uma base de

$R(H)$).

Agora vamos precisar de mais alguns resultados para poder provar a equação de classe. O primeiro deles será uma aplicação do Lema de Schur que nos permitirá calcular a dimensão do subespaço de invariantes do produto tensorial de dois módulos.

Lema de Schur: Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra e M, N dois A-módulos à esquerda simples. Dado um homomorfismo de módulos $f : M \to N$, temos que f é inversível ou é nulo. Em particular, $\text{End}_A(M)$ é uma $\Bbbk$-álgebra com divisão.

Definição 5.2.4: Seja V um H-módulo à esquerda. O conjunto

$$V^H := \{v \in V \mid h \cdot v = \varepsilon(h)v \ \forall h \in H\}$$

é um subespaço de V chamado de *subespaço de invariantes de V*.

Lema 5.2.5: Seja H uma álgebra de Hopf semissimples sobre um corpo $\Bbbk$ algebricamente fechado. Se V e W são dois H-módulos à esquerda de dimensão finita e simples, então

$$\dim_{\Bbbk}(V \otimes W^*)^H = \begin{cases} 1 & \text{se } V \text{ e } W \text{ são isomorfos;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração: Temos um isomorfismo de $\Bbbk$-espaços $\phi : V \otimes W^* \to \text{Hom}_{\Bbbk}(W, V)$ tal que $\phi(v \otimes \varphi)(w) = \langle \varphi, w \rangle \, v$ para todos $v \in V$, $\varphi \in W^*$ e $w \in W$. Com isso, podemos munir o espaço $\text{Hom}_{\Bbbk}(W, V)$ com uma estrutura de H-módulo à esquerda de forma que, se $f = \phi(\sum_{i=1}^n v_i \otimes \varphi_i) \in \text{Hom}_{\Bbbk}(W, V)$, então, dado $h \in H$,

$$h \cdot f = \sum_{(h)} \phi \left(\sum_{i=1}^{n} h_{(1)} v_i \otimes (h_{(2)} \rightharpoondown \varphi_i) \right)$$

e, assim, para todo $w \in W$,

$$\begin{aligned} (h \cdot f)(w) &= \sum_{(h)} \phi \left(\sum_{i=1}^{n} h_{(1)} v_i \otimes (h_{(2)} \rightharpoondown \varphi_i) \right) (w) = \sum_{(h)} \sum_{i=1}^{n} \left\langle h_{(2)} \rightharpoondown \varphi_i, w \right\rangle h_{(1)} v_i \\ &= \sum_{(h)} \sum_{i=1}^{n} \left\langle \varphi_i, S(h_{(2)}) w \right\rangle h_{(1)} v_i = \sum_{(h)} \sum_{i=1}^{n} h_{(1)} \phi(v_i \otimes \varphi_i)(S(h_{(2)}) w) \\ &= \sum_{(h)} h_{(1)} f(S(h_{(2)}) w). \end{aligned}$$

Note que $\text{Hom}_{\Bbbk}(W, V)^H = \text{Hom}_H(W, V)$, pois, se $f \in \text{Hom}_H(W, V)$, então, para todos

$h \in H$ e $w \in W$,

$$(h \cdot f)(w) = \sum_{(h)} h_{(1)} f(S(h_{(2)})w) = f\left(\sum_{(h)} h_{(1)} S(h_{(2)})w\right) = \varepsilon(h) f(w)$$

ou seja, $f \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W, V)^H$, e, por outro lado, se $f \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W, V)^H$, então, para todos $h \in H$ e $w \in W$,

$$\begin{aligned} hf(w) &= \sum_{(h)} h_{(1)} f\big(\varepsilon(h_{(2)})w\big) = \sum_{(h)} h_{(1)} f(S(h_{(2)})h_{(3)}w) = \sum_{(h)} (h_{(1)} \cdot f)(h_{(2)}w) \\ &= \sum_{(h)} \varepsilon(h_{(1)}) f(h_{(2)}w) = f(hw), \end{aligned}$$

ou seja, $f \in \mathrm{Hom}_H(W, V)$.

Portanto, $(V \otimes W^*)^H \cong \mathrm{Hom}_H(W, V)$ como $\Bbbk$-espaços.

Agora, pelo Lema de Schur, se W e V são H-módulos isomorfos, então temos que $\mathrm{Hom}_H(W, V) \cong \mathrm{End}_H(V)$ é uma $\Bbbk$-álgebra de divisão e, como $\Bbbk$ é algebricamente fechado, $\mathrm{End}_H(V) \cong \Bbbk$. Portanto, $\dim_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_H(W, V) = 1$. Caso contrário, o único homomorfismo de módulos $W \to V$ é o homomorfismo nulo, ou seja, $\dim_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_H(W, V) = 0$. ■

Os últimos passos antes de demonstrar a equação de classe exigem a introdução de mais alguns conceitos.

Durante todo o texto, trabalhamos apenas com álgebras sobre corpos, mas também podemos definir o conceito de álgebra sobre anéis de forma análoga: dado um anel R comutativo e com unidade, dizemos que um anel A é uma *R-álgebra* se A for um R-módulo de forma que as somas do anel e do módulo coincidam, enquanto a multiplicação do anel e o produto por escalar do módulo satisfazem, para todos $a_1, a_2 \in A$ e $r \in R$,

$$r(a_1 a_2) = (ra_1)a_2 = a_1(ra_2).$$

Definimos então um *inteiro algébrico* da seguinte forma:

Definição 5.2.6: Seja A uma $\mathbb{Z}$-álgebra. Dizemos que um elemento $a \in A$ é um *inteiro algébrico* se vale uma das seguintes condições equivalentes:

i. a é raiz de um polinômio mônico em $\mathbb{Z}[X]$;
ii. a subálgebra $\mathbb{Z}[a]$ de A é um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado.

Se todo elemento de A for um inteiro algébrico, diremos que A é *inteira sobre $\mathbb{Z}$*.

Agora, precisaremos relembrar alguns resultados sobre esses inteiros algébricos. Esses resultados são clássicos e suas demonstrações serão omitidas, mas podem ser encontradas, por exemplo, em [Bou89].

Observação 5.2.7: Considere A uma $\mathbb{Z}$-álgebra. Com isso:

1. Se A é um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado, A é inteira sobre $\mathbb{Z}$;
2. Se $a_1, \ldots, a_n \in A$ são inteiros algébricos, então $\mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_n]$ é um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado;
3. Se A é comutativa e X é uma matriz quadrada de ordem n sobre A, então X é um inteiro algébrico se, e somente se, os coeficientes do polinômio característico de X são inteiros algébricos;
4. Se $\mathbb{Q} \subseteq A$ e $a \in \mathbb{Q}$ for um inteiro algébrico, então $a \in \mathbb{Z}$.

A seguir, mostraremos que os caracteres são inteiros algébricos de H^* e estaremos prontos para provar a *Equação de Classe de Kac e Zhu*.

Observação 5.2.8: Como H é semissimples, $\operatorname{Irr} H$ é um conjunto finito e, para todo H-módulo à esquerda de dimensão finita V, temos

$$V \cong \bigoplus_{W \in \operatorname{Irr} H} W^{n_W},$$

com $n_W \in \mathbb{N}$ para todo $W \in \operatorname{Irr} H$ e, com isso,

$$\chi_V = \sum_{W \in \operatorname{Irr} H} n_W \chi_W. \tag{5.2}$$

Logo, tendo em vista as relações da Observação 5.2.2, definindo a multiplicação no $\mathbb{Z}$-módulo gerado por $\{\chi_S \mid S \in \operatorname{Irr} H\}$ como sendo o produto de convolução, temos uma estrutura de $\mathbb{Z}$-álgebra nesse módulo.

Além disso, essa $\mathbb{Z}$-álgebra contém χ_V para todo H-módulo à esquerda V de dimensão finita.

Portanto, pela Observação 5.2.7, temos que χ_V é um inteiro algébrico para todo H-módulo à esquerda V de dimensão finita.

Teorema 5.2.9 (Equação de Classe de Kac e Zhu)**:** Sejam H uma álgebra de Hopf semissimples sobre um corpo $\Bbbk$ algebricamente fechado e de característica zero. Dado $e \in R(H) \subseteq H^*$ um idempotente primitivo, $\dim_{\Bbbk} H^*e$ divide $\dim_{\Bbbk} H$. Além disso, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um conjunto completo de idempotentes primitivos e ortogonais de $R(H)$, então

$$\dim H = \sum_{i=1}^{n} \dim(H^* e_i).$$

Demonstração: Primeiramente, note que, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um conjunto completo de idempotentes primitivos e ortogonais de $R(H)$, então

$$1_{H^*} = 1_{R(H)} = e_1 + \cdots + e_n.$$

Assim,

$$H^* = \bigoplus_{i=1}^{n} H^* e_i,$$

donde concluímos diretamente que

$$\dim H = \dim H^* = \sum_{i=1}^{n} \dim(H^* e_i).$$

Agora, tome e um idempotente primitivo de $R(H)$. Seja $\chi_{H^*} \in (H^*)^*$ o caracter regular de H^*. Assim, existe $\Lambda \in H$ tal que $\langle \chi_{H^*}, f \rangle = \langle f, \Lambda \rangle$ para todo $f \in H^*$. Como vimos na Proposição 5.2.1, temos que χ_{H^*} é um integral de H^{**} e, portanto, Λ é um integral de H.

Lembrando que $\langle \chi_{H^*}, e \rangle = \mathrm{Tr}(l_e^{H^*}) = \mathrm{Tr}(r_e^{H^*})$, temos

$$\langle e, \Lambda \rangle = \langle \chi_{H^*}, e \rangle = \dim_{\Bbbk} eH^* = \dim_{\Bbbk} H^* e.$$

Com isso, dado um módulo $V \in \mathrm{Irr}\, H$, temos $h\Lambda v = \varepsilon(h)\Lambda v$, para todos $v \in V$ e $h \in H$. Portanto, se $\Lambda v \neq 0$ para algum $v \in V$, temos $V = \Bbbk \Lambda v \cong \Bbbk_\varepsilon$. Portanto, $\langle \chi_V, \Lambda \rangle = 0$ para todo $V \in \mathrm{Irr}\, H \setminus \{\Bbbk_\varepsilon\}$.

Por outro lado, temos

$$\varepsilon(\Lambda) = \langle \chi_{\Bbbk_\varepsilon}, \Lambda \rangle = \langle \chi_{H^*}, \chi_{\Bbbk_\varepsilon} \rangle = \langle \chi_{H^*}, \varepsilon \rangle = \dim H^*,$$

pois ε é a unidade de H^*.

Como H é semissimples, denotando $\mathrm{Irr}\, H = \{U_1, \ldots, U_n\}$, dado um módulo V em mod H, podemos escrever $V \cong U_1^{r_1} \oplus \cdots \oplus U_n^{r_n}$, com $r_i \geq 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Pela discussão acima, se $0 \neq v \in V^H$, então $\Lambda v = \varepsilon(\Lambda) v = (\dim_{\Bbbk} H^*) v \neq 0$ e, supondo sem perda de generalidade que $U_1 = \Bbbk_\varepsilon$, temos que V^H é isomorfo a um submódulo de $U_1^{r_1}$. Por outro lado, os elementos de $U_1^{r_1}$ são claramente H-invariantes e, portanto, temos $V^H \cong U_1^{r_1}$ e $\dim_{\Bbbk} V^H = r_1$.

Isso nos mostra que $\langle \chi_{H^*}, \chi_V \rangle = \dim_{\Bbbk} H^* \dim_{\Bbbk} V^H$ para todo módulo V em mod H e, assim, $\chi_{H^*}|_{R(H)} = (\dim_{\Bbbk} H^*)\tau$, em que $\tau : R(H) \to \Bbbk$ é dada por $\tau(\chi_V) = \dim_{\Bbbk} V^H$.

Dessa forma, temos

$$\dim_{\Bbbk} H^* e = \langle e, \Lambda \rangle = (\dim_{\Bbbk} H^*) \tau(e).$$

Defina $\beta : R(H) \times R(H) \to \Bbbk$ nos elementos da base $\{\chi_U \mid U \in \operatorname{Irr} H\}$ por

$$\beta(\chi_V, \chi_W) = \tau(\chi_V * \chi_W) = \dim_{\Bbbk}(V \otimes W)^H = \begin{cases} 1 & \text{se } V \text{ e } W^* \text{ são isomorfos;} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para $V, W \in \operatorname{Irr} H$, e estenda linearmente.

Claramente, β é uma forma associativa, simétrica e não degenerada. Portanto, $R(H)$ é uma álgebra simétrica. Além disso, $\tau(e) = \beta(e, 1_{R(H)})$.

Como e é um idempotente primitivo, $R(H)e$ é um $R(H)$-módulo à esquerda simples. Portanto, pelo Lema de Schur, temos $\operatorname{End}_{R(H)}(R(H)e) \cong \Bbbk$. Assim, pela Proposição 5.1.8 e denotando $M = R(H)e$, temos $\beta(e, 1_{R(H)})^{-1} = [R(H) : M]_\beta$. Portanto,

$$[R(H) : M]_\beta = \frac{\dim_{\Bbbk} H^*}{\dim_{\Bbbk} H^* e},$$

ou seja, $[R(H) : M]_\beta$ é um número racional.

Seja B a $\mathbb{Z}$-álgebra gerada por $\{\chi_U \mid U \in \operatorname{Irr} H\}$. Dessa forma, B é inteira sobre $\mathbb{Z}$ e $l_b^M \in \operatorname{End}_{\Bbbk}(M)$ é um inteiro algébrico para todo $b \in B$.

Podemos também considerar $\Bbbk$ como uma $\mathbb{Z}$-álgebra comutativa e, pelo item (3) da Observação 5.2.7, como $\langle \chi_M, \chi_U \rangle = \operatorname{Tr}(l_{\chi_U}^M)$ é o coeficiente de x^{n-1} no polinômio característico de $l_{\chi_U}^M$, temos que $\langle \chi_M, \chi_U \rangle$ é um inteiro algébrico.

Com isso, pelo item (2) da Observação 5.2.7, temos que $Z := \mathbb{Z}[\langle \chi_M, \chi_U \rangle \mid U \in \operatorname{Irr} H]$ é um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado e, portanto, ZB também é um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado. Logo, todo elemento de ZB é um inteiro algébrico pelo item (1) da Observação 5.2.7.

Note que, como $\chi_W = \sum_{V \in \operatorname{Irr} H} \chi_V \beta(\chi_{V^*}, \chi_W)$ para todo $W \in \operatorname{Irr} H$,

$$z_\beta(M) = \sum_{V \in \operatorname{Irr} H} \langle \chi_M, \chi_V \rangle \, \chi_{V^*} \in ZB$$

e, portanto, $z_\beta(M)$ é um inteiro algébrico. Agora, observe que, como β é simétrica, temos $z_\beta(M) \in \mathcal{Z}(R(H))$ e, então, para todo $m \in M$,

$$z_\beta(M) * m = \omega_M(z_\beta(M))m,$$

isto é, $l_{z_\beta(M)}^M = \omega_M(z_\beta(M)) \operatorname{id}_M$. Assim, como feito acima, $l_{z_\beta(M)}^M \in \operatorname{End}_{\Bbbk}(M)$ é um inteiro algébrico e, assim, temos que $[R(H) : M]_\beta = \omega_M(z_\beta(M))$ também é um inteiro algébrico.

Como já vimos que $[R(H) : M]_\beta$ é racional, concluímos que ele deve ser, de fato, um número inteiro. ■

Por fim, podemos aplicar o resultado acima para um grupo finito para encontrar a equação de classes de conjugação do grupo e mostrar que o tamanho de cada uma dessas classes de conjugação e a dimensão de todo módulo simples sobre a álgebra desse grupo dividem a ordem do grupo.

Observação 5.2.10: Suponha que G seja um grupo finito. Vamos relembrar alguns conceitos sobre representações de grupos.

Para cada $x \in G$, definimos a *classe de conjugação* de x em G por

$$\mathfrak{C}_x = \{g^{-1}xg \mid g \in G\}.$$

Se $\{p_g \mid g \in G\}$ é base dual da base G, temos que $F_x = \sum_{g \in \mathfrak{C}_x} p_g$ é uma *função de classe* (é constante em todas as classes de conjugação de G). Como o espaço das funções de classe é gerado pelo conjunto dos caracteres irredutíveis de G, temos $F_x \in R(\Bbbk G)$.

Além disso, F_x é claramente um idempotente primitivo (é a função de classe cujo valor é 1 nos elementos de $\mathfrak{C}_x$ e 0 em todos os outros elementos de G).

Note também que, para todo $g \in G$,

$$p_g * F_x = \begin{cases} p_g & \text{se } g \in \mathfrak{C}_x; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, se $H = \Bbbk G$, como $\{p_g \mid g \in G\}$ é base de H^*, temos $|\mathfrak{C}_x| = \dim(H^* F_x)$. Dessa forma, nesse caso, a Equação de Classe de Kac e Zhu é justamente a equação de classes de conjugação de G.

Agora, se $H = (\Bbbk G)^*$, a Equação de Classe de Kac e Zhu nos diz que $\dim(He)$ divide $\dim H^* = \dim H$ para todo idempotente primitivo $e \in R(H^*) \subseteq H^{**} = H$. Logo, a dimensão de todo $\Bbbk G$-módulo simples divide $|G|$ (esse resultado é chamado de *Teorema da Divisibilidade de Frobenius* por M.Lorenz em [Lor98]).

5.3 Aplicações da Equação de Classe

A *Equação de Classe de Kac e Zhu* tem aplicações muito importantes. A partir dela, foi possível, por exemplo, provar o primeiro teorema sobre a classificação das álgebras de Hopf semissimples: toda álgebra de Hopf de dimensão prima sobre um corpo algebricamente fechado e de característica zero é isomorfa a uma álgebra de grupo. Vamos estudar esse resultado nesta seção.

Uma segunda aplicação que estudaremos será um resultado sobre a divisibilidade da dimensão de uma álgebra pelo quadrado da dimensão de seus módulos simples. O caso para o qual será provada essa propriedade é o de álgebras de Hopf *fatorizáveis* e semissimples sobre um corpo algebricamente fechado e de característica zero. Um exemplo dessas álgebras que veremos é o *Drinfeld Double* de uma álgebra de grupo. Esse exemplo será importante no final deste capítulo, mas aproveitamos para introduzir o conceito aqui.

Comecemos, então, a discussão sobre o teorema de classificação das álgebras de Hopf de dimensão prima. Para poder demonstrar esse teorema, precisaremos do *Teorema de Nichols-Zoeller*. Vamos apenas enunciá-lo, mas sua demonstração pode ser encontrada em [Lor18, §12.4.6].

Definição 5.3.1: Se H for uma álgebra de Hopf e K uma subálgebra de Hopf de H, diremos que M é um (H, K)-módulo se for simultaneamente um K-módulo à esquerda e um H-comódulo à esquerda com estruturas $\psi : K \otimes M \to M$ e $\rho : M \to H \otimes M$ de forma que ψ seja um homomorfismo de comódulos.

Com esse conceito, temos:

Teorema de Nichols-Zoeller: Seja K uma subálgebra de Hopf de uma álgebra de Hopf H de dimensão finita. Todo (H, K)-módulo de Hopf é livre como K-módulo. Em particular, H é livre como K-módulo e $\dim K$ divide $\dim H$.

O teorema acima generaliza o resultado de que uma álgebra $\Bbbk G$ de um grupo finito G é livre sobre qualquer álgebra $\Bbbk D$ de um subgrupo $D \subseteq G$. Em particular, $|D|$ divide $|G|$. Logo, esse teorema pode ser visto como uma generalização do Teorema de Lagrange para grupos finitos.

O teorema caracterizando as álgebras de Hopf de dimensão prima sobre corpos algebricamente fechados e de característica zero foi conjecturado por Kaplansky e provado por Zhu em [Zhu94, Theorem 2].

Teorema 5.3.2: Seja H uma álgebra de Hopf sobre um corpo $\Bbbk$ algebricamente fechado e de característica zero. Se $\dim H = p$ for um primo, então $H \cong \Bbbk C_p$, em que C_p é o grupo cíclico de ordem p.

Demonstração: Se existir um elemento grouplike não trivial em H, esse elemento gera um grupo cíclico não trivial G. Dessa forma, $\Bbbk G$ é uma subálgebra de Hopf de H e, pelo Teorema de Nichols-Zoeller, temos que $|G|$ divide $\dim H = p$. Como G é não trivial, temos $|G| = p$ e $\Bbbk G = H$.

Provemos agora que H é semissimples para poder aplicar a Equação de Classe de Kac e Zhu.

Se $\dim H = 2$, H é gerada por 1_H e um outro elemento $x \in H$, de forma que H é claramente comutativa. Assim,

$$\begin{aligned} S^2(h) &= \sum_{(h)} S(\varepsilon(h_{(2)})S(h_{(1)})) = \sum_{(h)} \varepsilon(h_{(2)})1_H S(S(h_{(1)})) \\ &= \sum_{(h)} S(h_{(2)})h_{(3)}S(S(h_{(1)})) = \sum_{(h)} h_{(3)}S(h_{(2)})S(S(h_{(1)})) \\ &= \sum_{(h)} h_{(3)}S(S(h_{(1)})h_{(2)}) = \sum_{(h)} h_{(2)}S(\varepsilon(h_{(1)})1_H) = \sum_{(h)} \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} = h \end{aligned}$$

e, com isso, temos que H é semissimples.

Suponha então que $p > 2$.

Considere um elemento $\Lambda \in \int_H^r$. Vimos que existe um elemento $\alpha \in G(H^*)$ tal que $a\Lambda = \alpha(a)\Lambda$ para todo $a \in H$. Supondo que H não seja unimodular, temos $\alpha \neq \varepsilon$ e, portanto, α é um elemento grouplike não trivial de H^*. Pelo que vimos acima, isso nos mostraria que $H^* \cong \Bbbk C_p$ e, dessa forma, $H \cong (\Bbbk C_p)^* \cong \Bbbk C_p$. Isso é uma contradição com a suposição de que H não era unimodular.

Temos então que H é unimodular e, por argumento análogo, H^* também é. Pelo Corolário 4.3.8, temos $S^4 = \mathrm{id}_H$. Denote por H_+ e H_- os autoespaços de S^2 com autovalores 1 e -1, respectivamente. Com isso, temos $H = H_+ \oplus H_-$. Se H não for semissimples, temos, pelo Teorema 4.4.10, que $\mathrm{Tr}(S^2) = 0$ e, portanto, $\dim H_+ - \dim H_- = 0$ e $\dim H = 2\dim H_+$, o que é uma contradição com o fato de $\dim H = p$ ser um primo maior do que 2. Assim, concluímos que H é semissimples.

Aplicando agora a Equação de Classe de Kac e Zhu, temos

$$\dim H = \sum_{i=1}^{n} \dim(H^* e_i),$$

em que $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um conjunto completo de idempotentes primitivos e ortogonais de $R(H)$. Além disso, $\dim H^* e_i$ divide $\dim H = p$ para todo $i = 1, \dots, n$. Dessa forma, temos que $\dim H^* e_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$ ou $n = 1$ e $\dim H^* e_1 = p$.

Se $n = 1$, temos consequentemente que $\dim R(H) = 1$ e, assim, $R(H) = \Bbbk\varepsilon$. Dessa forma, temos que H possui um único submódulo irredutível (a menos de isomorfismo): o submódulo trivial. No entanto, como H é semissimples, isso nos daria que $\dim H = 1$, o que é uma contradição.

Temos então que $\dim H^* e_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Com isso,

$$p = \dim H = \sum_{i=1}^{n} \dim(H^* e_i) = n$$

e, portanto, $\dim R(H) = p$, ou seja, como álgebra, H é uma soma direta de p cópias de $\Bbbk$, mostrando que $H \cong \Bbbk C_p$. ■

Vamos encontrar agora um cenário em que podemos provar que o quadrado da dimensão de um módulo simples divide a dimensão da álgebra. Isso será válido em álgebras de Hopf fatorizáveis e semissimples sobre um corpo algebricamente fechado e de característica zero. Primeiramente, precisaremos definir o que é uma álgebra de Hopf *fatorizável*, que é um caso particular de álgebras de Hopf *quasitriangulares*, como vemos a seguir:

Definição 5.3.3: Uma álgebra de Hopf *quasitriangular* é um par (H, R), em que H é uma álgebra de Hopf sobre um corpo $\Bbbk$ com antípoda bijetora e $R = \sum_i x_i \otimes y_i \in H \otimes H$ é um elemento inversível tal que

1. $\sum_i \sum_{(h)} h_{(2)}x_i \otimes h_{(1)}y_i = \sum_i \sum_{(h)} x_i h_{(1)} \otimes y_i h_{(2)}$ para todo $h \in H$;
2. $\sum_i \Delta(x_i) \otimes y_i = \sum_{i,j} x_i \otimes x_j \otimes y_i y_j$;
3. $\sum_i x_i \otimes \Delta(y_i) = \sum_{i,j} x_i x_j \otimes y_j \otimes y_i$.

Aqui, utilizamos a notação $R = \sum_i x_i \otimes y_i = \sum_j x_j \otimes y_j$ para indicar duas somas com índices diferentes.

Agora, temos $\tau(R) = \sum_i y_i \otimes x_i$, em que $\tau : H \otimes H \to H \otimes H$ é a aplicação twist, e defina

$$b := \tau(R)R = \sum_{i,j} y_j x_i \otimes x_j y_i.$$

Note que, para todo $h \in H$, temos $b\Delta(h) = \Delta(h)b$.

Para não carregar tanto a notação, escreveremos também $b = \sum_b b^1 \otimes b^2$.

Com isso, dizemos que uma álgebra de Hopf quasitriangular (H, R) é *fatorizável* se a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi_R = \Phi : H^* &\to H \\ \varphi &\mapsto \sum_b b^1 \left\langle \varphi, b^2 \right\rangle \end{aligned} \tag{5.3}$$

é um isomorfismo de $\Bbbk$-espaços vetoriais. A aplicação Φ_R acima é chamada de *aplicação de Drinfeld* de (H, R).

Observação 5.3.4: Observe que, por um lado,

$$((\mu \circ \varepsilon) \otimes \mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_H) \left(\sum_i \Delta(x_i) \otimes y_i \right) = \sum_i \sum_{(x_i)} \varepsilon(x_{i(1)}) 1_H \otimes x_{i(2)} \otimes y_i = 1_H \otimes R$$

e, por outro,

$$
\begin{aligned}
((\mu \circ \varepsilon) \otimes \mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_H)\left(\sum_{i,j} x_i \otimes x_j \otimes y_i y_j\right) &= \sum_{i,j} \varepsilon(x_i) 1_H \otimes x_j \otimes y_i y_j \\
&= \left(\sum_i \varepsilon(x_i) 1_H \otimes 1_H \otimes y_i\right)(1_H \otimes R) \\
&= \left(\sum_i 1_H \otimes \varepsilon(x_i) 1_H \otimes y_i\right)(1_H \otimes R).
\end{aligned}
$$

Portanto, utilizando o segundo item da Definição 5.3.3, temos que

$$R = ((\mu \circ \varepsilon) \otimes 1_H)(R)R.$$

Como R é um elemento inversível em $H \otimes H$, concluímos que

$$1_H = \sum_i \varepsilon(x_i) y_i.$$

De maneira análoga, utilizando o terceiro item da Definição 5.3.3, também podemos concluir que

$$1_H = \sum_i \varepsilon(y_i) x_i.$$

Veremos abaixo um exemplo que será importante mais adiante. Para isso, é necessário um conhecimento básico sobre a estrutura do *Drinfeld Double*. Não apresentaremos essa discussão aqui, mas tudo o que precisaremos pode ser encontrado em [FM20].

Exemplo 5.3.5: Seja G um grupo finito. Considere $D(\Bbbk G) = (\Bbbk G)^* \bowtie \Bbbk G$ o Drinfeld Double da álgebra $\Bbbk G$.

Para cada $g \in G$, denote por φ_g a aplicação dada por $\varphi_g(x) = \delta_{g,x}$. Assim, $\{\varphi_g \mid g \in G\}$ é uma base de $(\Bbbk G)^*$ dual da base G de $\Bbbk G$. Além disso, $\varepsilon := \varepsilon_{\Bbbk G} = \sum_{g \in G} \varphi_g$.

Relembrando as estruturas de álgebra de Hopf de $\Bbbk G$ e de $(\Bbbk G)^*$ (Exemplo 3.1.3 e Observação 3.1.12), temos que, para todo $g \in G$,

$$\Delta(\varphi_g) = \sum_{x,y \in G} \langle \varphi_g, xy \rangle \, \varphi_x \otimes \varphi_y = \sum_{xy=g} \varphi_x \otimes \varphi_y.$$

Com isso, a multiplicação em $D(\Bbbk G)$ é caracterizada por:

$$(\varphi_g \bowtie a)(\varphi_h \bowtie b) = \sum_{xy=h} \varphi_g * \left\langle \varphi_y, a^{-1}\_a \right\rangle \bowtie \left\langle \varphi_x, a^{-1}a \right\rangle ab = \varphi_g * \varphi_{aha^{-1}} \bowtie ab.$$

Além disso, $D(\Bbbk G)$ é uma álgebra quasitriangular com

$$R = \sum_{g\in G} (\varepsilon \bowtie g) \otimes (\varphi_g \bowtie 1_G).$$

Vamos mostrar que $(D(\Bbbk G), R)$ é fatorizável. Para isso, note que

$$b = \sum_{g,h\in G} (\varphi_h \bowtie 1_G)(\varepsilon \bowtie g) \otimes (\varepsilon \bowtie h)(\varphi_g \bowtie 1_G) = \sum_{g,h\in G} (\varphi_h \bowtie g) \otimes (\varphi_{hgh^{-1}} \bowtie h).$$

Identificando $D(\Bbbk G)^*$ com $\Bbbk G \otimes (\Bbbk G)^*$, temos uma base de $D(\Bbbk G)^*$ dada pelos elementos da forma $g \otimes \varphi_h$, com $g, h \in G$, e, para todos $x, y \in G$,

$$\langle g \otimes \varphi_h, \varphi_x \bowtie y \rangle = \varphi_x(g)\varphi_h(y).$$

Agora, note que, dados $g, h \in G$,

$$\Phi_R(g \otimes \varphi_h) = \sum_{x,y\in G} (\varphi_y \bowtie x) \langle g \otimes \varphi_h, \varphi_{yxy^{-1}} \bowtie y \rangle = \varphi_h \bowtie h^{-1}gh.$$

Dessa forma, temos que Φ_R leva uma base de $D(\Bbbk G)^*$ em uma base de $D(\Bbbk G)$, sendo, portanto, um isomorfismo de $\Bbbk$-espaços. Logo, $(D(\Bbbk G), R)$ é fatorizável.

Agora, precisaremos de um isomorfismo de álgebras entre o centro e a álgebra de representação de uma álgebra de Hopf fatorizável e semissimples sobre um corpo algebricamente fechado e de característica zero. Em [Sch01], o resultado provado é ainda mais forte, pois garante que isso vale para qualquer álgebra de Hopf fatorizável. No entanto, com o que já foi apresentado no texto, já conseguimos provar essa versão mais fraca do resultado, que será o necessário para provar o teorema que desejamos.

Lema 5.3.6: Seja (H, R) uma álgebra de Hopf fatorizável e semissimples sobre um corpo $\Bbbk$ algebricamente fechado e de característica zero. Então $\mathcal{Z}(H)$ e $R(H)$ são isomorfas como $\Bbbk$-álgebras.

Demonstração: Vamos provar que tal isomorfismo é dado justamente por $\Phi = \Phi_R$.

Comecemos provando que $\Phi(R(H)) \subseteq \mathcal{Z}(H)$. Para isso, tome $\chi \in R(H)$ e $h \in H$.

Lembre que χ é uma forma traço e que, como H é semissimples, então $\overline{S} = S$. Assim,

$$\begin{aligned}
h\Phi(\chi) &= \sum_b hb^1 \left\langle \chi, b^2 \right\rangle = \sum_{(h)} \sum_b h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)})b^1 \left\langle \chi, b^2 \right\rangle \\
&= \sum_{(h)} \sum_b h_{(1)}b^1 \left\langle \chi, \overline{S}(h_{(3)})h_{(2)}b^2 \right\rangle = \sum_{(h)} \sum_b b^1 h_{(1)} \left\langle \chi, S(h_{(3)})b^2 h_{(2)} \right\rangle \\
&= \sum_{(h)} \sum_b b^1 h_{(1)} \left\langle \chi, b^2 h_{(2)} S(h_{(3)}) \right\rangle = \Phi(\chi)h.
\end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que, para todos $\chi, \xi \in R(H)$, temos $\Phi(\chi * \xi) = \Phi(\chi)\Phi(\xi)$. Dados, então, $\chi, \xi \in R(H)$, temos

$$\begin{aligned}
\Phi(\chi * \xi) &= \sum_{i,j} y_j x_i \left\langle \chi * \xi, x_j y_i \right\rangle = \sum_{i,j} \sum_{(y_i),(x_j)} y_j x_i \left\langle \chi, x_{j(1)} y_{i(1)} \right\rangle \left\langle \xi, x_{j(2)} y_{i(2)} \right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k,l} y_j y_k x_i x_l \left\langle \chi, x_j y_l \right\rangle \left\langle \xi, x_k y_i \right\rangle = \sum_{i,j,k,l} y_j y_k x_i \left\langle \xi, x_k y_i \right\rangle x_l \left\langle \chi, x_j y_l \right\rangle \\
&= \sum_{j,l} y_j \Phi(\xi) x_l \left\langle \chi, x_j y_l \right\rangle = \sum_{j,l} y_j x_l \left\langle \chi, x_j y_l \right\rangle \Phi(\xi) = \Phi(\chi)\Phi(\xi).
\end{aligned}$$

Além disso, como vimos na Observação 5.3.4, temos que

$$1_H = \sum_i \varepsilon(x_i) y_i = \sum_i x_i \varepsilon(y_i)$$

e, assim,

$$\Phi(1_{H^*}) = \Phi(\varepsilon) = \sum_{i,j} y_j x_i \varepsilon(x_j y_i) = \sum_{i,j} \varepsilon(x_j) y_j x_i \varepsilon(y_i) = 1_H.$$

Portanto, temos que $\Phi|_{R(H)} : R(H) \to \mathcal{Z}(H)$ é um homomorfismo de álgebras. Como $\Phi : A^* \to A$ é um isomorfismo de $\Bbbk$-espaços, temos que Φ é injetora. Agora só resta mostrar que $\dim R(H) = \dim \mathcal{Z}(H)$. Isso será consequência da discussão feita na próxima seção. ■

Podemos agora aplicar a Equação de Classe de Kac e Zhu para provar o seguinte resultado:

Teorema 5.3.7: Seja (H, R) uma álgebra de Hopf fatorizável sobre um corpo $\Bbbk$ algebricamente fechado e de característica zero. Se H for semissimples e V for um H-módulo à esquerda simples, então $\dim(V)^2$ divide $\dim H$.

Demonstração: Como H é semissimples, o Teorema de Wedderburn-Artin nos dá uma decomposição $H \cong \mathbb{M}_{d_1}(\Bbbk) \times \cdots \times \mathbb{M}_{d_n}(\Bbbk)$.

Seja $E_i \in \mathcal{Z}(H)$ o idempotente central primitivo correspondente ao módulo V. Com isso, $HE_i \cong \mathbb{M}_{d_i}(\Bbbk)$ tem dimensão d_i^2 e $\dim_{\Bbbk} V = d_i$.

Como vimos no Lema 5.3.6, Φ_R induz um isomorfismo de álgebras entre $R(H)$ e $\mathcal{Z}(H)$.

Seja então $e_i \in R(H)$ o idempotente primitivo tal que $\Phi_R(e_i) = E_i$. Como Φ_R é um isomorfismo de álgebras,

$$\Phi_R(H^* e_i) = \Phi_R(H^*)\Phi_R(e_i) = HE_i$$

e, assim,

$$\dim_{\Bbbk}(H^* e_i) = \dim_{\Bbbk}(HE_i) = \dim_{\Bbbk}(V)^2.$$

Para finalizar, pela Equação de Classe de Kac e Zhu, temos que $\dim_{\Bbbk}(H^* e_i)$ divide $\dim_{\Bbbk} H^* = \dim_{\Bbbk} H$. ■

5.4 Tabela de Caracteres

Vamos supor que H seja uma álgebra de Hopf semissimples de dimensão d sobre um corpo algebricamente fechado $\Bbbk$ de característica zero. Pelo Teorema de Wedderburn-Artin, temos

$$H \cong \prod_{i=1}^{n} \mathbb{M}_{d_i}(\Bbbk). \tag{5.4}$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$, se E_i denota a matriz identidade de $\mathbb{M}_{d_i}(\Bbbk)$, tome $e_i \in H$ o elemento associado a $(0, \ldots, E_i, \ldots, 0)$ pelo isomorfismo (5.4). Assim, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um conjunto de idempotentes *centrais primitivos*[1] e ortogonais.

Além disso, denote por V_i o módulo irredutível associado à representação natural de $\mathbb{M}_{d_i}(\Bbbk)$ de dimensão d_i. Dessa forma, temos $He_i \cong \mathbb{M}_{d_i}(\Bbbk) \cong V_i^{d_i}$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $V_1 = \Bbbk_\varepsilon$. Dessa forma, temos que e_1 é um integral de H. Denote $\Lambda = e_1$.

Podemos considerar também um conjunto de caracteres $\{\chi_1 = \varepsilon, \ldots, \chi_n\}$, em que $\chi_i = \chi_{V_i}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Com isso, temos $\langle \chi_i, 1_H \rangle = d_i$ e

$$\chi_H = \sum_{i=1}^{n} d_i \chi_i.$$

[1] Dizemos que um idempotente $e \in H$ é *central primitivo* se e for central, ou seja, $e \in \mathcal{Z}(H)$, e não puder ser escrito como soma de dois idempotentes centrais não nulos e ortogonais.

Como e_i age como a identidade em V_i e anula V_j se $j \neq i$, então, para todo $h \in H$,

$$\langle \chi_i, he_j \rangle = \operatorname{Tr}(l_{he_i}) = \delta_{ij} \operatorname{Tr}(l_h) = \delta_{ij} \langle \chi_i, h \rangle.$$

Em particular,

$$\langle \chi_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \langle \chi_i, 1_H \rangle = \delta_{ij} d_i. \tag{5.5}$$

Pelo que foi discutido acima, $\mathcal{Z}(H) = \bigoplus_{i=1}^n \Bbbk e_i$. Portanto, temos que $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ é uma base de $R(H)$ dual da base $\left\{\frac{1}{d_1} e_1, \ldots, \frac{1}{d_n} e_n\right\}$ de $\mathcal{Z}(H)$. (Observe que, com isso, temos que $\dim R(H) = \dim \mathcal{Z}(H)$, como precisávamos para finalizar a demonstração do Lema 5.3.6).

Além disso, pela Proposição 5.2.1, temos que χ_H é um integral de H^* e

$$\langle \chi_H, \Lambda \rangle = \sum_{i=1}^n d_i \langle \chi_i, e_1 \rangle = \langle \chi_1, e_1 \rangle = 1.$$

Denotando $\lambda = \chi_H$, temos $\langle \lambda, \Lambda \rangle = 1$ e podemos definir um isomorfismo $\Psi : H \to H^*$ de H-módulos à esquerda por $\Psi(h) = h \rightharpoonup \lambda$. Como já vimos, $\Psi^{-1}(\varphi) = \Lambda \leftharpoonup \varphi$ para todo $\varphi \in H^*$ e, como Ψ^{-1} também é homomorfismo de H-módulos à esquerda, então, para todos $h \in H$ e $\varphi \in H^*$,

$$h\Psi^{-1}(\varphi) = \Psi^{-1}(h \rightharpoonup \varphi). \tag{5.6}$$

Além disso, temos $\Psi(1_H) = \lambda$ e, pela Proposição 4.1.3,

$$\lambda = (\Lambda \leftharpoonup \lambda) \rightharpoonup \lambda = \Psi(\Lambda \leftharpoonup \lambda),$$

ou seja, $\Lambda \leftharpoonup \lambda = 1_H$, pois Ψ é um isomorfismo.

Vamos mostrar que a restrição de Ψ a $\mathcal{Z}(H)$ nos fornece um isomorfismo de H-módulos entre $\mathcal{Z}(H)$ e $R(H)$.

Proposição 5.4.1: Se H é uma álgebra de Hopf semissimples sobre um corpo algebricamente fechado $\Bbbk$ de característica zero, então $\Psi(\mathcal{Z}(H)) = R(H)$.

Demonstração: Primeiramente, lembre-se de que, se $V \in \operatorname{Irr} H$, então $V^* \in \operatorname{Irr} H$. Assim, se χ_V é um caracter irredutível, então $\chi_V \circ S = \chi_{V^*}$ também é.

Agora, note que, como $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ é base de $R(H)$ dual da base $\left\{\frac{1}{d_i} e_1, \ldots, \frac{1}{d_n} e_n\right\}$ de

$\mathcal{Z}(H)$, basta mostrarmos que, para todo $i = 1, \ldots, n$,

$$\frac{1}{d_i} e_i \rightharpoonup \chi_H = \chi_i \circ S.$$

Para isso, tome $h \in H$. Logo, lembrando que, pelo Lema 4.4.1, $\chi_H \circ S = \chi_H$, temos

$$\begin{aligned}\langle e_i \rightharpoonup \chi_H, h\rangle = \langle \chi_H, S(e_i)h\rangle = \langle \chi_H \circ S, S(h)e_i\rangle &= \sum_{j=1}^{n} d_j \langle \chi_j, S(h)e_i\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} d_j \langle \chi_j, S(h)\rangle = d_i \langle \chi_i \circ S, h\rangle\end{aligned}$$

e, portanto, segue o resultado. ∎

Observe que a demonstração que fizemos acima também nos permite concluir que

$$e_i = d_i \Psi^{-1}(\chi_i \circ S). \tag{5.7}$$

Lembre que um corpo $\Bbbk$ é dito *perfeito* se todo polinômio irredutível sobre $\Bbbk$ possuir raízes distintas num corpo de raízes. Como consequência de [Pie82, §10.6 - Corollary] e [Pie82, §10.7 - Corollary b], temos o seguinte resultado:

Corolário 5.4.2: Sejam $\Bbbk$ um corpo perfeito e A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Dessa forma, A é semissimples se, e somente se, $A \otimes_{\Bbbk} F$ é semissimples sobre F para todo corpo F que contenha $\Bbbk$ como subcorpo.

Agora, vamos mostrar que, no contexto em que estamos trabalhando, $R(H)$ também é uma álgebra semissimples. Dessa forma, poderemos obter conjuntos de idempotentes centrais primitivos da mesma forma que fizemos em H.

Teorema 5.4.3: Se H é uma álgebra de Hopf semissimples sobre um corpo $\Bbbk$ algebricamente fechado e de característica zero, então $R(H)$ também é uma $\Bbbk$-álgebra semissimples.

Demonstração: Lembre que, como vimos no Teorema 4.4.10, se H é semissimples, H^* também é semissimples. Pelo mesmo teorema, temos $S_{H^*}^2 = \mathrm{id}_{H^*}$.

Considere $R_{\mathbb{Q}}(H)$ a $\mathbb{Q}$-álgebra gerada por $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ e tome $0 \neq \varphi \in R_{\mathbb{Q}}(H)$. Escrevendo $\varphi = \sum_{i=1}^{n} q_i \chi_i$, observe que, denotando $\chi_{j^*} = \chi_{V_j^*}$,

$$\varphi * S_{H^*}(\varphi) = \sum_{i,j=1}^{n} q_i q_j \chi_i * S_{H^*}(\chi_j) = \sum_{i,j=1}^{n} q_i q_j \chi_i * \chi_{j^*} = \sum_{i,j=1}^{n} q_i q_j \chi_{V_i \otimes V_j^*}.$$

Note que, pelo Lema 5.2.5, o módulo trivial aparece na decomposição de $V_i \otimes V_j^*$ se, e somente se, $i = j$. Dessa forma, temos que o coeficiente de $\chi_1 = \varepsilon$ em $\varphi * S_{H^*}(\varphi)$ é

$\sum_{i=1}^{n} q_i^2 \neq 0$ (pois $q_i \in \mathbb{Q}$ para todo $i = 1, \ldots, n$). Portanto, temos $\varphi * S_{H^*}(\varphi) \neq 0$.

Suponha agora que exista $0 \neq \varphi \in \operatorname{rad} R_{\mathbb{Q}}(H)$. Denotando $\psi = \varphi * S_{H^*}(\varphi)$, temos $\psi \in \operatorname{rad} R_{\mathbb{Q}}(H)$ (pela Proposição 1.5.3) e $\psi \neq 0$, como vimos acima.

Como $S_{H^*}^2 = \mathrm{id}_{H^*}$, temos $S_{H^*}(\psi) = \psi$ e concluímos que $\psi^2 = \psi * S_{H^*}(\psi) \neq 0$.

Usando esse mesmo argumento, conseguimos provar que $\psi^{2^r} \neq 0$ para todo $r \in \mathbb{N}$ e, como $\psi^{2^r} \in \operatorname{rad} R_{\mathbb{Q}}(H)$, temos uma contradição, pois todo elemento de $\operatorname{rad} R_{\mathbb{Q}}(H)$ é nilpotente.

Assim, temos $\operatorname{rad} R_{\mathbb{Q}}(H) = \{0\}$ e, logo, $R_{\mathbb{Q}}(H)$ é semissimples sobre $\mathbb{Q}$.

Dessa forma, como $\mathbb{Q} \subseteq \Bbbk$ é um corpo perfeito, utilizando o Corolário 5.4.2 podemos concluir que $R(H) = R_{\mathbb{Q}}(H) \otimes_{\mathbb{Q}} \Bbbk$ é uma $\Bbbk$-álgebra semissimples. ■

Como $R(H)$ é semissimples, considere $\left\{\frac{1}{d}\lambda = F_1, \ldots, F_m\right\}$ um conjunto completo de idempotentes centrais primitivos de $R(H)$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, considere $\left\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_{m_i}}\right\}$ um conjunto completo de idempotentes primitivos e ortogonais da álgebra simples $F_i R(H)$. Assim, todos os $R(H)$-módulos à direita $f_{i_j} R(H)$, com $j \in \{1, \ldots, m_i\}$ são isomorfos. Agora, escolha arbitrariamente $j \in \{1, \ldots, m_i\}$ e denote $f_i = f_{i_j}$.

Com isso, $\{f_1, \ldots, f_m\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais primitivos em $R(H)$ de forma que $f_i * F_j = \delta_{ij} f_i$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Dessa forma, generalizamos os conceitos de *classe de conjugação* $\mathfrak{C}_i \subseteq H$, *soma de classes* $\overline{\mathfrak{C}_i} \in H$ e *representante de classe de conjugação* $\eta_i \in H$ presentes na *Teoria de Representações de Grupos Finitos*:

Definição 5.4.4: Dada uma álgebra de Hopf semissimples H sobre um corpo algebricamente fechado $\Bbbk$ de característica zero, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, definimos

- A *classe de conjugação* $\mathfrak{C}_i \subseteq H$ como o subespaço

$$\mathfrak{C}_i = \Psi^{-1}(f_i H^*) = \Lambda \leftharpoondown f_i H^*; \tag{5.8}$$

- A *somas de classes* $\overline{\mathfrak{C}_i} \in \mathcal{Z}(H)$ como o elemento

$$\overline{\mathfrak{C}_i} = \Psi^{-1}((\dim H) F_i) = \Lambda \leftharpoondown (\dim H) F_i;$$

- A *soma de classes normalizada* $\eta_i \in \mathcal{Z}(H)$ como o elemento

$$\eta_i = \frac{\overline{\mathfrak{C}_i}}{\dim(f_i H^*)} = \frac{\dim H}{\dim(f_i H^*)} \Lambda \leftharpoondown F_i. \tag{5.9}$$

Observação 5.4.5: Sobre as definições acima, temos as seguintes observações:

1. Note que, pela Equação de Classe de Kac-Zhu, temos que $\frac{\dim H}{\dim(f_i H^*)}$ é um número inteiro.
2. Em [CW11], foi provado que a definição de $\mathfrak{C}_i$ independe da escolha de f_i, que $\mathfrak{C}_i$ é

um $D(H)$-módulo irredutível e que, se $m_i = \dim f_i R(H)$,

$$H \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{C}_i^{m_i}$$

como $D(H)$-módulos.

3. Diferentemente da situação para grupos, não temos necessariamente que $\eta_i \in \mathfrak{C}_i$, pois, caso contrário, $F_i = f_i * \varphi$ para algum $\varphi \in H^*$, implicando que

$$f_i = f_i * F_i = f_i * f_i * \varphi = f_i * \varphi = F_i,$$

ou seja, $F_i = f_i$. Se $R(H)$ é comutativa, então isso é válido para todo i e, portanto, neste caso, $\eta_i \in \mathfrak{C}_i$.

Agora, definimos a *tabela de caracteres generalizada de H:*

Definição 5.4.6: A *tabela de caracteres generalizada* $(\xi_{ij})_{ij}$ de uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf semissimples H é dada por:

$$\xi_{ij} = \langle \chi_i, \eta_j \rangle,$$

para todos caracteres irredutíveis χ_i e todas somas de classes generalizadas η_j de H.

Note que, diferentemente do caso para grupos finitos, $(\xi_{ij})_{ij}$ não é necessariamente uma matriz quadrada.

Exemplo 5.4.7: Observe que as definições acima são análogas às definições usuais aplicadas para grupos finitos. Para ver isso, seja $H = \Bbbk G$, com G um grupo finito. Como visto na Observação 5.2.10, as classes de conjugação e somas de classes de G são definidas, respectivamente, por

$$\mathfrak{C}_i = \{g^{-1} x_i g \mid g \in G\} \qquad \text{e} \qquad \overline{\mathfrak{C}_i} = \sum_{g \in \mathfrak{C}_i} g.$$

Note que, denotando $\Lambda = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$, $d = \dim(H) = |G|$ e $F_i = \sum_{g \in \mathfrak{C}_i} p_g$, em que $\{p_g \mid g \in G\}$ é base dual da base G, temos

$$\Lambda \leftharpoonup dF_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \leftharpoonup d \left(\sum_{h \in \mathfrak{C}_i} p_h \right) = \sum_{g \in G} \sum_{h \in \mathfrak{C}_i} p_h(g) g = \sum_{g \in \mathfrak{C}_i} g = \overline{\mathfrak{C}_i}$$

e $|\mathfrak{C}_i| = \dim(H^* F_i)$.

A (i, j)-ésima entrada da tabela de caracteres de um grupo é $\langle \chi_i, \eta_j \rangle$, em que η_j é um elemento de $\mathfrak{C}_j$. Note que η_j poderia ser substituído por $\frac{1}{|\mathfrak{C}_j|}\overline{\mathfrak{C}_j}$, pois

$$\left\langle \chi_i, \frac{1}{|\mathfrak{C}_j|}\overline{\mathfrak{C}_j} \right\rangle = \left\langle \chi_i, \frac{1}{|\mathfrak{C}_j|}\sum_{g\in\mathfrak{C}_j} g \right\rangle = \frac{1}{|\mathfrak{C}_j|}\sum_{g\in\mathfrak{C}_j}\langle \chi_i, g\rangle = \frac{|\mathfrak{C}_j|}{|\mathfrak{C}_j|}\langle \chi_i, \eta_j\rangle = \langle \chi_i, \eta_j\rangle.$$

Disso, segue que a soma de classes normalizada η_i definida em 5.9 é, de fato, análoga a um representante da classe de conjugação $\mathfrak{C}_i$.

Exemplo 5.4.8: Considere o grupo diedral

$$G = D_3 = \left\langle a, b \mid a^3 = b^2 = 1, ba = a^2 b \right\rangle.$$

Vamos calcular a tabela de caracteres de $(\mathbb{C}D_3)^*$. Como $H = \mathbb{C}D_3$ é uma álgebra de Hopf semissimples, temos que o mesmo vale para $H^* = (\mathbb{C}D_3)^*$.

Considere a base usual $D_3 = \{1_G, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ de H e denote sua base dual por $\{\varphi_{1_G}, \varphi_a, \varphi_{a^2}, \varphi_b, \varphi_{ab}, \varphi_{a^2b}\}$.

Observe que essa base é ortogonal e $1_{H^*} = \varepsilon_H = \sum_{g\in D_3}\varphi_g$. Portanto, temos uma decomposição de H^* em soma de módulos irredutíveis dada por

$$H^* = \bigoplus_{g\in D_3}\mathbb{C}\varphi_g.$$

Note que φ_{1_G} é um elemento integral de H^* e $\mathbb{C}\varphi_{1_G} \cong \mathbb{C}_{\varepsilon_{H^*}}$.

Dessa forma, temos que os caracteres irredutíveis de H^* são as aplicações $\chi_g : H^* \to \mathbb{C}$ definidas, para cada $x \in D_3$, por

$$\chi_g(\varphi_x) = \delta_{g,x}$$

para todo $g \in D_3$.

Observe que, para todos $g, x \in D_3$, temos $\chi_g(\varphi_x) = \varphi_x(g)$. Portanto, identificando $H^{**} = H$, temos $R(H^*) = \mathbb{C}D_3$.

Denotando $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, considere os seguintes elementos:

$$\begin{aligned}
v_1 &= 1_G + a + a^2 \\
v_2 &= 1_G + \omega^2 a + \omega a^2 \\
v_3 &= 1_G + \omega a + \omega^2 a^2 \\
w_1 &= b + ab + a^2 b \\
w_2 &= b + \omega^2 ab + \omega a^2 b \\
w_3 &= b + \omega ab + \omega^2 a^2 b.
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos uma decomposição de $R(H^*)$ em soma de módulos irredutíveis dada por

$$R(H^*) = \mathbb{C}D_3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3^2,$$

em que

$$\begin{aligned} V_1 &= \text{span}\{v_1 + w_1\} \\ V_2 &= \text{span}\{v_1 - w_1\} \\ V_3 &= \text{span}\{v_2, w_3\}. \end{aligned}$$

Com isso, temos um conjunto completo de idempotentes centrais primitivos de $R(H^*)$ dado por $\{F_1, F_2, F_3\}$ em que

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{6}(v_1 + w_1) \\ F_2 &= \frac{1}{6}(v_1 - w_1) \\ F_3 &= \frac{1}{3}(v_2 + w_3) \end{aligned}$$

e um conjunto de idempotentes primitivos e ortogonais $\{f_1, f_2, f_3\}$ de $R(H^*)$ tais que $f_i * F_j = \delta_{ij} f_i$ dado por

$$\begin{aligned} f_1 = F_1 &\Longrightarrow \dim_{\mathbb{C}}(f_1 H) = 1 \\ f_2 = F_2 &\Longrightarrow \dim_{\mathbb{C}}(f_2 H) = 1 \\ f_3 = \frac{1}{3}v_2 &\Longrightarrow \dim_{\mathbb{C}}(f_3 H) = 2. \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 6(\varphi_{1_G} \leftharpoonup F_1) = \varphi_{1_G} \leftharpoonup (v_1 + w_1) = \varphi_{1_G} + \varphi_a + \varphi_{a^2} + \varphi_b + \varphi_{ab} + \varphi_{a^2b} = \varepsilon_H \\ \eta_2 &= 6(\varphi_{1_G} \leftharpoonup F_2) = \varphi_{1_G} \leftharpoonup (v_1 - w_1) = \varphi_{1_G} + \varphi_a + \varphi_{a^2} - \varphi_b - \varphi_{ab} - \varphi_{a^2b} \\ \eta_3 &= 3(\varphi_{1_G} \leftharpoonup F_3) = \varphi_{1_G} \leftharpoonup (v_2 + w_3) = \varphi_{1_G} + \omega\varphi_a + \omega^2\varphi_{a^2} + \varphi_b + \omega\varphi_{ab} + \omega^2\varphi_{a^2b}. \end{aligned}$$

Agora, temos $\langle \chi_g, \eta_i \rangle = \eta_i(g)$ para todo $g \in D_3$. Portanto, a tabela de caracteres de $(\mathbb{C}D_3)^*$ é:

	η_1	η_2	η_3
χ_{1_G}	1	1	1
χ_a	1	1	ω
χ_{a^2}	1	1	ω^2
χ_b	1	-1	1
χ_{ab}	1	-1	ω
χ_{a^2b}	1	-1	ω^2

Por fim, vamos calcular as classes de conjugação:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_1 &= \varphi_{1_G} \leftharpoonup f_1 H = \mathbb{C}\varepsilon_H \\
\mathfrak{C}_2 &= \varphi_{1_G} \leftharpoonup f_2 H = \mathbb{C}(\varphi_{1_G} + \varphi_a + \varphi_{a^2} - \varphi_b - \varphi_{ab} - \varphi_{a^2b}) \\
\mathfrak{C}_3 &= \varphi_{1_G} \leftharpoonup f_3 H = \mathbb{C}(\varphi_{1_G} + \omega\varphi_a + \omega^2\varphi_{a^2}) + \mathbb{C}(\varphi_b + \omega^2\varphi_{ab} + \omega\varphi_{a^2b}).
\end{aligned}$$

Observe que $\eta_1 \in \mathfrak{C}_1$ e $\eta_2 \in \mathfrak{C}_2$, mas $\eta_3 \notin \mathfrak{C}_3$.

5.5 Resultados Generalizados

Utilizando os conceitos definidos na seção anterior, vamos agora buscar generalizações dos seguintes resultados clássicos da *Teoria de Representações de Grupos Finitos* (esses resultados podem ser encontrados em livros sobre caracteres de grupos, como [Isa76]):

(G1) As entradas da tabela de caracteres de um grupo finito são inteiros algébricos;

(G2) Para cada linha i da tabela de caracteres de um grupo finito G, temos que $\xi_{i1} = \langle \chi_i, 1_G \rangle$ é maximal dentre todos os valores absolutos das entradas desta linha;

(G3) Colunas diferentes são ortogonais, enquanto o quadrado da norma de cada coluna j é $\frac{|G|}{|\mathfrak{C}_j|}$. Como consequência, o tamanho de cada classe de conjugação pode ser determinada a partir da norma da coluna correspondente. Linhas diferentes satisfazem uma relação de ortogonalidade generalizada;

(G4) O produto de duas somas de classes é uma combinação linear de somas de classes com coeficientes inteiros. As constantes de estrutura desse produto são obtidas a partir da tabela de caracteres;

(G5) O núcleo de uma representação irredutível φ, associada a um módulo V, é a união de todas as classes de conjugação $\mathfrak{C}_j$ tais que $\langle \chi_V, \eta_j \rangle = \langle \chi_V, 1_G \rangle = \dim V$;

(G6) Uma coleção de classes de conjugação forma um subgrupo normal se, e somente se, ela for uma intersecção de núcleos de representações irredutíveis. Como consequência, as ordens de todos os subgrupos normais, bem como as relações de inclusão entre eles, podem ser determinadas;

(G7) O subespaço comutador K de $\Bbbk G$ é dado por

$$K = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g \;\middle|\; \sum_{g \in \mathfrak{C}_i} \alpha_g = 0 \text{ para todas as classes de conjugação } \mathfrak{C}_i \right\}.$$

Tendo em vista a Equação 5.1, para todo $i = 1, \ldots, m$, temos $\langle \chi_{H^*}, F_i \rangle = \dim F_i H^*$. Além disso, pela Proposição 5.2.1, temos $\chi_{H^*} = \varepsilon_{H^*}(\lambda)\Lambda^{**}$. Assim,

$$\dim F_i H^* = \langle \chi_{H^*}, F_i \rangle = \langle \varepsilon_{H^*}(\lambda)\Lambda^{**}, F_i \rangle = \langle \chi_H, 1_H \rangle \langle F_i, \Lambda \rangle$$

e, portanto,

$$\langle F_i, \Lambda \rangle = \frac{\dim F_i H^*}{\dim H^*}.$$

Logo,

$$\langle F_i, \overline{\mathfrak{C}_j} \rangle = d\langle F_i, \Lambda \leftharpoonup F_j \rangle = d\langle F_j * F_i, \Lambda \rangle = d\delta_{ij}\langle F_i, \Lambda \rangle = \delta_{ij} \dim F_i H^*. \tag{5.10}$$

Se $R(H)$ é comutativa, então $\{F_1, \ldots, F_m\}$ forma uma base de $R(H)$ e $f_i = F_i$ para todo i. Como $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ é outra base de $R(H)$, então $m = n$. Logo, $\{F_1, \ldots, F_n\}$ é uma base de $R(H)$ dual da base $\left\{ \frac{1}{\dim F_1 H^*}\overline{\mathfrak{C}_1}, \ldots, \frac{1}{\dim F_n H^*}\overline{\mathfrak{C}_n} \right\} = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ de $\mathcal{Z}(H)$.

Observe também que, nesse caso,

$$\varepsilon(\eta_i) = \frac{\dim H}{\dim F_i H^*}\varepsilon(\Lambda \leftharpoonup F_i) = \frac{\dim H}{\dim F_i H^*}\langle F_i, \Lambda \rangle = 1. \tag{5.11}$$

Lema 5.5.1: Seja H uma álgebra de Hopf semissimples sobre um corpo algebricamente fechado $\Bbbk$ de característica zero. Suponha que $R(H)$ seja comutativa. A tabela de caracteres $(\xi_{ij})_{ij}$ de H é a matriz de mudança de bases em $R(H)$ entre $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ e $\{F_1, \ldots, F_n\}$.

Demonstração: Como $\{F_1, \ldots, F_n\}$ é uma base dual de $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$, temos que

$$\chi_i = \sum_{j=1}^{n} \langle \chi_i, \eta_j \rangle F_j = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} F_j$$

e, portanto, segue o resultado. ■

Com isso, se $R(H)$ é comutativa, então

$$\chi_i * F_j = \langle \chi_i, \eta_j \rangle F_j. \tag{5.12}$$

A partir de agora, vamos supor também que $R(H)$ é uma álgebra comutativa. Pelo Lema

5.5.1, temos que a tabela de caracteres de H é uma matriz de mudança de base. Logo, a partir de agora, temos que ela é uma matriz quadrada e inversível.

Podemos, então, encontrar uma generalização de (G1):

Teorema 5.5.2: Seja H uma álgebra de Hopf semissimples sobre um corpo algebricamente fechado $\Bbbk$ de característica zero. Suponha também que $R(H)$ seja uma álgebra comutativa. Assim, todas as entradas ξ_{ij} da tabela de caracteres são inteiros algébricos.

Demonstração: Primeiramente, observe que, assim como feito na demonstração da Equação de Classe de Kac e Zhu (Teorema 5.2.9), dados $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, temos que $\chi_{R(H)F_j}(\chi_i)$ é um inteiro algébrico, em que

$$\left\langle \chi_{R(H)F_j}, \chi_i \right\rangle = \text{Tr}\left(l_{\chi_i}^{R(H)F_j} \right),$$

com $l_{\chi_i}^{R(H)F_j} \in \text{End}_{\Bbbk}(R(H)F_j)$.

No entanto, como $\{F_1, \ldots, F_n\}$ é uma base de $R(H)$ e é um conjunto de idempotentes dois-a-dois ortogonais, então $\dim R(H)F_j = 1$ e, como $\chi_i * F_j = \xi_{ij} F_j$,

$$\text{Tr}\left(l_{\chi_i}^{R(H)F_j} \right) = \xi_{ij}.$$

Portanto, ξ_{ij} é um inteiro algébrico para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. ■

Note que, com $d = \dim H$,

$$\eta_1 = \frac{\Psi^{-1}(dF_1)}{\dim(F_1 H^*)} = \Psi^{-1}(\lambda) = 1_H.$$

Suponha que H seja uma álgebra de Hopf semissimples sobre $\mathbb{C}$. Em [NR98], os autores definem uma aplicação $\iota : R(H) \times R(H) \to \mathbb{C}$ de forma que $\iota(\chi_i, \chi_j) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}^H(V_i, V_j)$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, em que $\mathcal{M}^H(V, W)$ denota o $\mathbb{C}$-espaço vetorial composto pelos homomorfismos de H-comódulos à direita de V em W. Com essa aplicação, eles também definem um *produto interno* em $R(H)$ da seguinte forma: dados dois elementos $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_i$, $v = \sum_{i=1}^n \beta_i \chi_i \in R(H)$, com $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(u, v) := \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \iota(\chi_i, \chi_j).$$

Logo, podemos definir uma *norma* em $R(H)$ tomando $||\chi|| = \sqrt{(\chi, \chi)}$ para todo $\chi \in R(H)$.

Na mesma referência, encontramos o seguinte resultado:

[NR98, Theorem 14(2)]: Se $\chi \in R(H)$ é tal que $\chi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_i$, em que $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $\alpha_i \geq 0$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, então

$$\langle \chi, 1_H \rangle = \sup_{0 \neq \varphi \in R(H)} \frac{||\chi * \varphi||}{||\varphi||}.$$

Com isso, para qualquer caracter irredutível χ de H, se a é um autovalor de l_χ, então existe $0 \neq \varphi \in R(H)$ tal que $l_\chi(\varphi) = a\varphi$ e, portanto,

$$\langle \chi, \eta_1 \rangle = \langle \chi, 1_H \rangle \geq \frac{||l_\chi(\varphi)||}{||\varphi||} = \frac{||a\varphi||}{||\varphi||} = |a|,$$

isto é, $\langle \chi, 1_H \rangle$ é o maior dentre os valores absolutos dos autovalores de l_χ. Dessa forma, temos uma generalização de (G2):

Teorema 5.5.3: Seja H uma álgebra de Hopf semissimples sobre um corpo algebricamente fechado $\Bbbk$ de característica zero. Suponha também que $R(H)$ seja uma álgebra comutativa. Então $|\xi_{ij}| \leq \langle \chi_i, 1_H \rangle$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Demonstração: Como todas as entradas da i-ésima coluna de $(\xi_{ij})_{ij}$ são autovalores de l_{χ_i} em $R(H)$, segue o resultado. ■

Vamos buscar agora uma generalização de (G3). Para isso, precisaremos de mais alguns resultados.

Lema 5.5.4: Suponha que H seja uma álgebra de Hopf semissimples sobre $\mathbb{C}$ e que $R(H)$ seja uma $\mathbb{C}$-álgebra comutativa. Para todas as entradas (i, j) da tabela de caracteres de H,

$$\xi_{i^*j} = \xi_{ij^*} = \overline{\xi_{ij}},$$

em que $\xi_{i^*j} = \langle S_{H^*}(\chi_i), \eta_j \rangle$ e $\xi_{ij^*} = \langle \chi_i, S(\eta_j) \rangle$.

Demonstração: Como vimos na demonstração do Teorema 5.5.2, temos que, para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left\langle \chi_{R(H)F_j}, \chi_i \right\rangle = \xi_{ij}$$

e $\chi_{R(H)F_j} = \eta_j^{**}$ é um caracter de $R(H)$.

A Observação 11 de [NR98] nos diz que todo caracter ζ de $R(H)$ satisfaz

$$\langle \zeta, S_{H^*}(\chi) \rangle = \overline{\langle \zeta, \chi \rangle},$$

para todo $\chi \in R(H)$, donde segue o resultado. ■

Como corolário, temos

Corolário 5.5.5: Se H é uma álgebra de Hopf semissimples sobre $\mathbb{C}$ e $R(H)$ é uma álgebra comutativa, então a tabela de caracteres de H é formada por valores reais se, e somente se, a antípoda S age como a identidade em $\mathcal{Z}(H)$ e a antípoda do dual, S_{H^*}, age como a identidade em $R(H)$.

Demonstração: Pelo Lema 5.5.4, dados $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, temos $\xi_{ij} = \overline{\xi_{ij}}$ se, e somente se,

$$\langle \chi_i, \eta_j \rangle = \langle S_{H^*}(\chi_i), \eta_j \rangle = \langle \chi_i, S(\eta_j) \rangle.$$

Como $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ e $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ são bases para os espaços duais $R(H)$ e $\mathcal{Z}(H)$, respectivamente, temos o resultado desejado. ■

Lema 5.5.6: Seja H uma álgebra de Hopf semissimples sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{k}$ de característica zero. Suponha também que $R(H)$ seja uma álgebra comutativa. Denotando $A = (\xi_{ij})_{ij}$ e $A^{-1} = (\beta_{ij})_{ij}$, temos

$$\beta_{ij} = \frac{\dim(F_i H^*) \langle \chi_j, S(\eta_i) \rangle}{d} = \frac{\dim(F_i H^*) \xi_{ji^*}}{d} = \frac{\dim(F_i H^*) \xi_{j^* i}}{d}.$$

Demonstração: Como $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ e $\left\{\frac{1}{d_1} e_1, \ldots, \frac{1}{d_n} e_n\right\}$ são bases ortogonais de $R(H)$ e de $\mathcal{Z}(H)$, respectivamente, podemos escrever, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$F_j = \sum_{t=1}^{n} \left\langle F_j, \frac{e_t}{d_t} \right\rangle \chi_t.$$

Observe também que, como $\chi_i \circ S$ é um caracter irredutível para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos, pela Equação (5.12),

$$(\chi_i \circ S) * F_j = \langle (\chi_i \circ S), \eta_j \rangle F_j$$

para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\beta_{ij} = \left\langle F_i, \frac{e_j}{d_j} \right\rangle &= \left\langle F_i, \Psi^{-1}(\chi_j \circ S) \right\rangle = \langle F_i, \Lambda \leftharpoonup (\chi_j \circ S) \rangle = \langle (\chi_j \circ S) * F_i, \Lambda \rangle \\
&= \langle \chi_j, S(\eta_i) \rangle \langle F_i, \Lambda \rangle = \langle \chi_j, S(\eta_i) \rangle \frac{\dim F_i H^*}{\dim H^*}
\end{aligned}$$

para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. ■

Corolário 5.5.7: Seja H uma álgebra de Hopf semissimples sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{k}$ de característica zero. Suponha também que $R(H)$ seja uma álgebra comutativa.

Dados $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$\chi_i * \chi_j = \sum_{t=1}^{n} m_t^{ij} \chi_t, \tag{5.13}$$

em que $m_t^{ij} \in \mathbb{N}$ para todo $t \in \{1, \ldots, n\}$ e

$$m_t^{ij} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\dim(F_r H^*) \xi_{ir} \xi_{jr} \xi_{t^* r}}{d}.$$

Demonstração: Dados $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, temos $\chi_i * \chi_j = \chi_{V_i \otimes V_j}$. Assim, pela Equação (5.2), podemos escrever

$$\chi_{V_i \otimes V_j} = \sum_{t=1}^{n} m_t^{ij} \chi_t,$$

com $m_t^{ij} \in \mathbb{N}$ para todo $t \in \{1, \ldots, n\}$.

Por outro lado, pela Equação (5.12) e pelo Lema 5.5.6, temos

$$\begin{aligned} \chi_i * \chi_j = \chi_i * \left(\sum_{r=1}^{n} \xi_{jr} F_r \right) &= \sum_{r=1}^{n} \xi_{jr} \chi_i * F_r = \sum_{r=1}^{n} \xi_{jr} \xi_{ir} F_r \\ &= \sum_{r=1}^{n} \xi_{ir} \xi_{jr} \left(\sum_{t=1}^{n} \beta_{rt} \chi_t \right) = \sum_{t=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{n} \xi_{ir} \xi_{jr} \beta_{rt} \right) \chi_t. \end{aligned}$$

No entanto, como $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ é base de $R(H)$, devemos ter

$$m_t^{ij} = \sum_{r=1}^{n} \xi_{ir} \xi_{jr} \beta_{rt} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\dim(F_r H^*) \xi_{ir} \xi_{jr} \xi_{t^* r}}{d},$$

como desejado. ■

Podemos provar agora a primeira e a segunda relações de ortogonalidade para a tabela de caracteres de H, obtendo uma generalização de (G3):

Teorema 5.5.8: Seja H uma álgebra de Hopf semissimples sobre $\mathbb{C}$ tal que $R(H)$ seja comutativa. Então,

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dim(F_j H^*) \xi_{rj} \overline{\xi_{tj}} = \delta_{rt} d$;
2. $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \overline{\xi_{ti}} \xi_{tj} = \delta_{ij} \frac{d}{\dim(F_i H^*)}$.

Demonstração: Pelo Lema 5.5.6 e pelo Lema 5.5.4, temos que

$$\beta_{jk} = \frac{\dim(F_j H^*)}{d} \xi_{k^* j} = \frac{\dim(F_j H^*)}{d} \overline{\xi_{kj}}.$$

Com isso,

$$\delta_{rt} = \sum_{j=1}^{n} \xi_{rj} \beta_{jt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\dim(F_j H^*)}{d} \xi_{rj} \overline{\xi_{tj}}$$

e

$$\delta_{ij} = \sum_{t=1}^{n} \beta_{it} \xi_{ti} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\dim(F_i H^*)}{d} \overline{\xi_{ti}} \xi_{tj},$$

concluindo a demonstração do teorema. ■

Agora, veremos uma generalização de (G4):

Teorema 5.5.9: Seja H uma álgebra de Hopf semissimples sobre $\mathbb{C}$ tal que $R(H)$ seja comutativa. Então,

$$\overline{\mathfrak{C}_i}\,\overline{\mathfrak{C}_j} = \sum_{t=1}^{n} c_t^{ij} \overline{\mathfrak{C}_t},$$

em que

$$c_t^{ij} = \frac{\dim(F_i H^*) \dim(F_j H^*)}{d} \sum_{r=1}^{n} \frac{\xi_{ri} \xi_{rj} \overline{\xi_{rt}}}{d_r}.$$

Demonstração: Como vimos anteriormente, $A = (\xi_{ij})_{ij}$ é a matriz de mudança de base em $R(H)$ entre $B_1 = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ e $B_2 = \{F_1, \ldots, F_n\}$. Pelas equações (5.5) e (5.10), temos $B_1^* = \left\{\frac{1}{d_1} e_1, \ldots, \frac{1}{d_n} e_n\right\}$ e $B_2^* = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$. Assim, se $(\alpha_{ij})_{ij}$ é a matriz de mudança de base em $\mathcal{Z}(H)$ entre B_2^* e B_1^*, temos

$$\alpha_{ij} = \left\langle \chi_j, \sum_{t=1}^{n} \alpha_{it} \frac{e_t}{d_t} \right\rangle = \langle \chi_j, \eta_i \rangle = \left\langle \sum_{t=1}^{n} \xi_{jt} F_t, \eta_i \right\rangle = \xi_{ji},$$

ou seja, $(\alpha_{ij})_{ij} = A^t = (\xi_{ji})_{ij}$. Portanto,

$$\overline{\mathfrak{C}_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\dim(F_i H^*) \xi_{ji}}{d_j} e_j$$

e, tomando a inversa de A^t com auxílio do Lema 5.5.6, temos

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} d_i \frac{\dim(F_j H^*)\xi_{i^*j}}{d} \frac{1}{\dim F_j H^*} \overline{\mathfrak{C}_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d_i \xi_{i^*j}}{d} \overline{\mathfrak{C}_j}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{C}_i}\,\overline{\mathfrak{C}_j} &= \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\dim(F_i H^*)\xi_{ri}}{d_r} e_r\right)\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{\dim(F_j H^*)\xi_{tj}}{d_t} e_t\right) \\
&= \dim(F_i H^*)\dim(F_j H^*) \sum_{r=1}^{n} \frac{\xi_{ri}\xi_{rj}}{d_r d_r} e_r \\
&= \dim(F_i H^*)\dim(F_j H^*) \sum_{r=1}^{n} \frac{\xi_{ri}\xi_{rj}}{d_r d_r} \sum_{t=1}^{n} \frac{d_r \xi_{r^*t}}{d} \overline{\mathfrak{C}_t} \\
&= \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{\dim(F_i H^*)\dim(F_j H^*)}{d} \sum_{r=1}^{n} \frac{\xi_{ri}\xi_{rj}\overline{\xi_{rt}}}{d_r} \right) \overline{\mathfrak{C}_t},
\end{aligned}$$

como desejado. ∎

A parte dos "coeficientes inteiros" de (G4) não pode ser garantida no contexto de álgebras de Hopf semissimples. Contudo, temos que, para álgebras de Hopf quasitriangulares, esses coeficientes são inteiros a menos de um fator d^{-2} ([CW11, Theorem 2.6]) e, para álgebras de Hopf fatorizáveis, a menos de um fator d^{-1} ([CW10, Theorem 4.3]).

Exemplo 5.5.10: Sejam G um grupo finito e $H = \Bbbk G$. Como vimos no Exemplo 5.4.7, $|\mathfrak{C}_i| = \dim(F_i H^*)$. Logo, aplicando o Teorema 5.5.9, temos

$$c_t^{ij} = \frac{|\mathfrak{C}_i||\mathfrak{C}_j|}{|G|} \sum_{r=1}^{n} \frac{\xi_{ri}\xi_{rj}\overline{\xi_{rt}}}{\xi_{r1}}.$$

Agora, vamos apresentar, sem demonstração, as generalizações para os resultados (G5), (G6) e (G7) (as demonstrações podem ser encontradas em [CW13]). Para isso, precisamos relembrar e introduzir mais alguns conceitos. Esses resultados generalizados serão utilizados no final do capítulo em um exemplo.

Dados um grupo G e um $\Bbbk G$-módulo V, lembre-se de que o *núcleo* de V é definido como sendo o núcleo da representação associada a ele, isto é, o conjunto dos elementos do grupo que agem como a identidade em V. Se χ é o caracter associado a esse módulo, o conjunto acima é denotado por $\ker \chi$ e temos que $\ker \chi$ é um subgrupo normal de G. Além disso, dizemos que χ é *fiel* se $\ker \chi = \{1_G\}$.

Podemos generalizar esses conceitos da seguinte forma:

Definição 5.5.11: Seja H uma álgebra de Hopf. Dado um H-módulo V, definimos uma aplicação $L_V : H \otimes V \to H \otimes V$ por $h \otimes v \mapsto \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes (h_{(2)} \cdot v)$. O maior subespaço X de H tal que $L_V|_{X \otimes V} = \mathrm{id}_{X \otimes V}$ é chamado de *núcleo à esquerda de* V e denotado por LKer_V. Dessa forma,

$$\mathrm{LKer}_V = \left\{ h \in H \;\middle|\; \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes (h_{(2)} \cdot v) = h \otimes v \;\; \forall v \in V \right\}.$$

Denotaremos também $\mathrm{LKer}_{\chi_V} = \mathrm{LKer}_V$ e, com isso, temos que um caracter χ_V é dito *fiel* se $\mathrm{LKer}_{\chi_V} = \Bbbk$.

Observação 5.5.12: Dados um grupo G e um $\Bbbk G$-módulo V, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{LKer}_V &= \left\{ h \in \Bbbk G \;\middle|\; \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes (h_{(2)} \cdot v) = h \otimes v \;\; \forall v \in V \right\} \\
&= \left\{ g \in G \;\middle|\; g \otimes (g \cdot v) = g \otimes v \;\; \forall v \in V \right\} \\
&= \left\{ g \in G \;\middle|\; g \cdot v = v \;\; \forall v \in V \right\},
\end{aligned}$$

ou seja, LKer_V coincide com a definição usual de núcleo de uma representação.

Para generalizar o conceito de *subgrupo normal* da teoria de grupos, temos a definição abaixo:

Definição 5.5.13: Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma subálgebra de H. Definimos a *ação adjunta à esquerda* de H em A por

$$h \underset{ad}{\cdot} a = \sum_{(h)} h_{(1)} a S(h_{(2)}),$$

para todos $a \in A$ e $h \in H$.

Se A for estável sob a ação adjunta à esquerda de H, diremos que A é uma subálgebra *normal* de H.

A seguir, veremos que, como esperado, LKer_V é uma subálgebra normal de H.

Proposição 5.5.14: Sejam H uma álgebra de Hopf e V um H-módulo. Então, LKer_V é uma subálgebra coideal à esquerda e normal de H.

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar que LKer_V é um coideal à esquerda de H, ou seja, $\Delta(\text{LKer}_V) \subseteq H \otimes \text{LKer}_V$. Note que, dados $a \in \text{LKer}_V$ e $v \in V$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes v = (\Delta \otimes \text{id})(a \otimes v) &= (\Delta \otimes \text{id}) \left(\sum_{(a)} a_{(1)} \otimes (a_{(2)} \cdot v) \right) \\ &= \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes (a_{(3)} \cdot v).\end{aligned}$$

Portanto, escrevendo $\Delta(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes x_i$, em que $\{h_1, \ldots, h_n\}$ é uma base de H, temos

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \otimes x_i \otimes v = \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes \left(\sum_{(x)} x_{i_{(1)}} \otimes (x_{i_{(2)}} \cdot v) \right)$$

e, como $\{h_1, \ldots, h_n\}$ é um conjunto linearmente independente, concluímos que, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{(x)} x_{i_{(1)}} \otimes (x_{i_{(2)}} \cdot v) = x_i \otimes v,$$

mostrando que $x_i \in \text{LKer}_V$ e que, assim, $\Delta(\text{LKer}_V) \subseteq H \otimes \text{LKer}_V$.

Vamos mostrar agora que LKer_V é uma subálgebra de H. Para isso, observe que, dados $a \in \text{LKer}_V$ e $v \in V$,

$$\varepsilon(a)v = (\varepsilon \otimes \text{id})(a \otimes v) = (\varepsilon \otimes \text{id}) \left(\sum_{(a)} a_{(1)} \otimes (a_{(2)} \cdot v) \right) = a \cdot v.$$

Como sabemos que LKer_V é um subespaço de H, basta mostrarmos que ele é fechado para a multiplicação. Considere então $a, b \in \text{LKer}_V$ e escreva $\Delta(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes x_i$ e $\Delta(b) = \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes y_i$, com $\{h_1, \ldots, h_n\}$ uma base de H. Dessa forma, vimos acima que $x_i, y_i \in \text{LKer}_V$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e, portanto, para todo $v \in V$,

$$\begin{aligned}\sum_{(ab)} (ab)_{(1)} \otimes ((ab)_{(2)} \cdot v) = \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \otimes (x_i \cdot (y_j \cdot v)) &= \sum_{i,j=1}^{n} (h_i \varepsilon(x_i))(h_j \varepsilon(y_j)) \otimes v \\ &= ab \otimes v,\end{aligned}$$

mostrando que $ab \in \text{LKer}_V$.

Por fim, vamos mostrar que LKer_V é normal. Dados $y \in H$, $a \in \text{LKer}_V$ e $v \in V$, e escrevendo mais uma vez $\Delta(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes x_i$ com $\{h_1, \ldots, h_n\}$ uma base de H, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{\left(y \underset{ad}{\cdot} a\right)} \left(y \underset{ad}{\cdot} a\right)_{(1)} \otimes \left(y \underset{ad}{\cdot} a\right)_{(2)} \cdot v &= \sum_{(y)} \sum_{i=1}^{n} y_{(1)} h_i S(y_{(2)})_{(1)} \otimes y_{(2)} x_i S(y_{(2)})_{(2)} \cdot v \\
&= \sum_{(y)} \sum_{i=1}^{n} y_{(1)} h_i S(y_{(4)}) \otimes y_{(2)} \cdot (x_i \cdot (S(y_{(3)}) \cdot v)) \\
&= \sum_{(y)} \sum_{i=1}^{n} y_{(1)} h_i S(y_{(4)}) \otimes y_{(2)} \cdot (\varepsilon(x_i)(S(y_{(3)}) \cdot v)) \\
&= \sum_{(y)} y_{(1)} a S(y_{(4)}) \otimes y_{(2)} S(y_{(3)}) \cdot v \\
&= \sum_{(y)} y_{(1)} a S(y_{(3)}) \otimes \varepsilon(y_{(2)}) v \\
&= \left(y \underset{ad}{\cdot} a\right) \otimes v,
\end{aligned}$$

donde concluímos que LKer_V é normal, encerrando a demonstração. ■

Com a definição de núcleo à esquerda acima, (G5) pode ser generalizado da seguinte forma:

Teorema 5.5.15 ([CW13, Corollary 1.10])**:** Sejam H uma álgebra de Hopf semissimples sobre $\Bbbk$ tal que $R(H)$ seja comutativa e V_i um H-módulo irredutível. Assim,

$$\mathrm{LKer}_{V_i} = \bigoplus_{j \in J_i} \mathfrak{C}_j,$$

em que $J_i = \{1 \leq j \leq n \mid \langle \chi_i, \eta_j \rangle = \langle \chi_i, 1_H \rangle\}$.

Temos que todo subgrupo normal é intersecção de núcleos de representações. Esse resultado pode ser generalizado mostrando-se que toda subálgebra coideal à esquerda e normal é intersecção de uma certa coleção de núcleos à esquerda, como veremos abaixo.

Para qualquer subespaço N de H, defina $N^+ = N \cap \ker \varepsilon$. Se N for uma subálgebra coideal à esquerda e normal de H, denote $\overline{H} = H/(N^+H)$. Para cada $\overline{H}$-módulo irredutível W, existe um H-módulo irredutível V_i tal que $W \cong V_i$ como H-módulos via pullback. Considere então o subconjunto de índices $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ de forma que V_i seja isomorfo a um $\overline{H}$-módulo irredutível dessa maneira para todo $i \in I$.

Com essas notações, temos então que, se N for uma subcoálgebra coideal à esquerda e normal de uma álgebra de Hopf semissimples H sobre um corpo algebricamente fechado e de característica zero, então

$$N = \bigcap_{i \in I} \text{LKer}_{V_i} = \text{LKer}_{\oplus_{i\in I} V_i}\,.$$

É possível determinar uma forma de obter todas as subálgebras coideais à esquerda e normais de H a partir de sua tabela de caracteres, generalizando (G6):

Teorema 5.5.16 ([CW13, Theorem 1.11])**:** Seja H uma álgebra de Hopf semissimples sobre $\Bbbk$ tal que $R(H)$ seja comutativa. Se N for uma subálgebra coideal à esquerda e normal de H, então

$$N = \bigoplus_{j \in J_I} \mathfrak{C}_j,$$

em que $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ é tal que $\{V_i \,|\, i \in I\}$ está identificado com o conjunto completo de módulos irredutíveis e não isomorfos de $H/(N^+H)$ e

$$J_I = \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid \chi_i * F_j = \langle \chi_i, 1_H \rangle\, F_j \ \ \forall i \in I\}.$$

Além disso, se $L = \oplus_{j \in J} \mathfrak{C}_j$, para algum $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ temos que L é uma subálgebra coideal à esquerda e normal de H se, e somente se, existe $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tal que $J = J_I$.

Para finalizar a lista dos resultados generalizados, vamos ver como podemos generalizar (G7) para álgebras de Hopf.

Dada uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita A, definimos K_A, o *subespaço comutador de* A, como sendo o subespaço de A gerado por $ab - ba$, para todos $a, b \in A$.

Com isso, temos a generalização de (G7):

Teorema 5.5.17 ([CW13, Theorem 1.13])**:** Seja H uma álgebra de Hopf semissimples sobre $\Bbbk$ tal que $R(H)$ seja comutativa. Então,

$$K_H = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{C}_i \cap \ker \varepsilon.$$

Agora, definimos o *ideal comutador* I de H como sendo

$$I = \bigcap_{M \in \mathcal{R}} M^{\perp},$$

em que $\mathcal{R}$ é o conjunto dos H-módulos de dimensão 1, e a *álgebra comutadora* N de H

como

$$N = \text{LKer}_{H/I}\,.$$

Esse conceito de álgebra comutadora é o análogo ao subgrupo comutador para álgebras de Hopf.

Proposição 5.5.18 ([CW13, Proposition 1.14])**:** Sejam H uma álgebra de Hopf semissimples, N a álgebra comutadora de H e K_H o subespaço comutador de H, como definidos acima. Dessa forma,

1. $I = HK_H$;
2. $N = \bigcap_{\sigma\in G(H^*)} \text{LKer}_{\Bbbk\sigma}$.

5.6 Tabela de Caracteres de $D(\mathbb{C}S_3)$

Vamos estudar agora um último exemplo: a tabela de caracteres de $D(\mathbb{C}S_3)$. A discussão apresentada é baseada principalmente em [CW11] e [DPR90].

Primeiramente, tome G um grupo finito qualquer e $\Bbbk$ um corpo algebricamente fechado e de caraterística zero. Temos que $D(\Bbbk G)$ é uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf fatorizável (como visto no Exemplo 5.3.5) e semissimples. Portanto, pelo Lema 5.3.6, temos que $R(D(\Bbbk G))$ é comutativa.

Prosseguindo como feito na Seção 5.4, considere $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ o conjunto de caracteres irredutíveis de $D(\Bbbk G)$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes centrais primitivos e ortogonais de $D(\Bbbk G)$.

Considere também $\Phi : D(\Bbbk G)^* \to D(\Bbbk G)$ uma aplicação de Drinfeld de $D(\Bbbk G)$, como definida em (5.3). Observe que

$$\Phi(\chi_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle \chi_i, \Phi(\chi_j)\rangle \frac{1}{d_i} e_i,$$

pois vimos, como consequência da Equação (5.5), que $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ é uma base dual da base $\left\{\frac{1}{d_1}e_1, \ldots, \frac{1}{d_n}e_n\right\}$.

Como vimos no Lema 5.3.6, temos que $\Phi|_{R(D(\Bbbk G))} : R(D(\Bbbk G)) \to \mathcal{Z}(D(\Bbbk G))$ é um isomorfismo de álgebras. Portanto, $\{F_1 = \Phi^{-1}(e_1), \ldots, F_n = \Phi^{-1}(e_n)\}$ é um conjunto completo de idempotentes centrais primitivos e ortogonais de $R(D(\Bbbk G))$.

Note que, para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\Phi(\chi_i * F_j) = \Phi(\chi_i)e_j = \sum_{k=1}^{n} \langle \chi_k, \Phi(\chi_i)\rangle \frac{e_k}{d_k} e_j = \langle \chi_j, \Phi(\chi_i)\rangle \frac{e_j}{d_j} = \Phi\left(\frac{\langle \chi_j, \Phi(\chi_i)\rangle}{d_j} F_j\right)$$

e, como Φ é um isomorfismo,

$$\xi_{ij}F_j = \chi_i * F_j = \frac{\langle \chi_j, \Phi(\chi_i)\rangle}{d_j}F_j,$$

ou seja,

$$\xi_{ij} = \frac{\langle \chi_j, \Phi(\chi_i)\rangle}{d_j}. \tag{5.14}$$

Agora, vamos descrever os caracteres de $D(\Bbbk G)$.

Considere a base $\{\varphi_g \mid g \in G\}$ de $(\Bbbk G)^*$ dual da base G, isto é, $\varphi_g(h) = \delta_{g,h}$ para todos $g, h \in G$.

Como vimos no Exemplo 5.3.5, a multiplicação em $D(\Bbbk G)$ é caracterizada por:

$$(\varphi_g \bowtie a)(\varphi_h \bowtie b) = \sum_{xy=h} \varphi_g * \left\langle \varphi_y, a^{-1}\_a \right\rangle \bowtie \left\langle \varphi_x, a^{-1}a \right\rangle ab = \varphi_g * \varphi_{aha^{-1}} \bowtie ab.$$

Tomando um elemento $\sigma \in G$, denote por $C_G(\sigma)$ o centralizador de σ em G. Além disso, se $\mathfrak{C}_\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ é a classe de conjugação de σ, considere um conjunto $\{g_1, \dots, g_n\}$ de elementos de G tais que

$$g_i \sigma g_i^{-1} = \sigma_i$$

para todos $i \in \{1, \dots, n\}$.

Denote por R_σ a subálgebra de $D(\Bbbk G)$ gerada como espaço vetorial pelos elementos da forma $\varphi_g \bowtie x$, em que $g \in G$ e $x \in C_G(\sigma)$. Se $(M^\sigma, \cdot)$ é um $\Bbbk C_G(\sigma)$-módulo irredutível, temos uma ação de R_σ em M^σ dada por

$$(\varphi_g \bowtie x)m = \delta_{g,\sigma} x \cdot m,$$

para todos $g \in G$, $x \in C_G(\sigma)$ e $m \in M$.

Dessa forma, podemos associar a M^σ um $D(\Bbbk G)$-módulo irredutível V^σ definido como:

$$V^\sigma := D(\Bbbk G) \otimes_{R_\sigma} M^\sigma,$$

de forma que

$$\dim V^\sigma = |\mathfrak{C}_\sigma| \dim M^\sigma.$$

Na realidade, todo $D(\Bbbk G)$-módulo irredutível é isomorfo a algum módulo da forma acima. Para provar isso, note primeiramente que, como $C_G(h)$ é um grupo finito para todo $h \in G$, denotando por $\{M_i^h \mid i \in I_h\}$ um conjunto completo de $C_G(h)$-módulos irredutíveis dois-a-dois não isomorfos, da Teoria de Representações de Grupos temos que

$$\frac{|G|}{|\mathfrak{C}_h|} = |C_G(h)| = \sum_{i \in I_h} (\dim M_i^h)^2$$

e, com isso, tomando um conjunto completo X de representantes de classes de conjugação distintas de G,

$$\sum_{h \in X} \sum_{i \in I_h} (\dim V_i^h)^2 = \sum_{h \in X} \sum_{i \in I_h} |\mathfrak{C}_h|^2 \dim(M_i^h)^2 = \sum_{h \in X} |\mathfrak{C}_h|^2 \frac{|G|}{|\mathfrak{C}_h|} = |G| \sum_{h \in X} |\mathfrak{C}_h| = |G|^2.$$

Por outro lado, como $D(\Bbbk G)$ é semissimples, temos

$$D(\Bbbk G) = \bigoplus_{j=1}^{r} A_j^{\dim A_j},$$

em que $\{A_j \mid j = 1, \ldots, r\}$ é um conjunto completo de $D(\Bbbk G)$-módulos irredutíveis não isomorfos, e, com isso,

$$|G|^2 = \dim D(\Bbbk G) = \sum_{j=1}^{r} (\dim A_j)^2.$$

Logo, temos que $\{V_i^h \mid h \in X, i \in I_h\}$ exaure as possibilidades de $D(\Bbbk G)$-módulos irredutíveis não isomorfos, isto é, todo $D(\Bbbk G)$-módulo irredutível é isomorfo a um módulo da forma V^σ.

Agora, dado um elemento $x \in G$, observe que $x\sigma x^{-1} = \sigma_i$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto,

$$(g_i^{-1}x)\sigma(g_i^{-1}x)^{-1} = g_i^{-1}x\sigma x^{-1}g_i = g_i^{-1}\sigma_i g_i = \sigma,$$

ou seja $g_i^{-1}x \in C_G(\sigma)$. Se $\{m_1, \ldots, m_r\}$ é uma base de M^σ, temos que, dados $g, x \in G$ e $j \in \{1, \ldots, r\}$,

$$\begin{aligned}
(\varphi_g \bowtie x) \otimes_{R_\sigma} m_j &= ((\varepsilon \bowtie g_i)(\varphi_{g_i^{-1}gg_i} \bowtie g_i^{-1}x)) \otimes_{R_\sigma} m_j \\
&= (\varepsilon \bowtie g_i) \otimes_{R_\sigma} ((\varphi_{g_i^{-1}gg_i} \bowtie g_i^{-1}x)m_j) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k (\varepsilon \bowtie g_i) \otimes_{R_\sigma} m_k,
\end{aligned}$$

com $\lambda_k \in \Bbbk$ para todo $k \in \{1, \ldots, r\}$. Assim, concluímos que os elementos da forma $(\varepsilon \bowtie g_i) \otimes_{R_\sigma} m_j$, com $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, r\}$, formam uma base de V^σ.

A ação de $\varphi_g \bowtie x$, com $g, x \in G$, nos elementos dessa base é dada por:

$$\begin{aligned}(\varphi_g \bowtie x)((\varepsilon \bowtie g_i) \otimes_{R_\sigma} m_j) &= ((\varphi_g \bowtie x)(\varepsilon \bowtie g_i)) \otimes_{R_\sigma} m_j \\ &= (\varphi_g \bowtie xg_i) \otimes_{R_\sigma} m_j.\end{aligned}$$

Note que, para cada $x \in G$, existe um único $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$(xg_i)\sigma(xg_i)^{-1} = \sigma_k = g_k \sigma g_k^{-1}$$

e, assim, $h := g_k^{-1} x g_i \in C_G(\sigma)$. Observe que $h = \sigma g_k^{-1} x g_i \sigma^{-1}$ e, portanto, $xg_i = g_k h$. Com isso,

$$\begin{aligned}(\varphi_g \bowtie xg_i) \otimes_{R_\sigma} m_j &= (\varphi_g \bowtie g_k h) \otimes_{R_\sigma} m_j \\ &= ((\varepsilon \bowtie g_k)(\varphi_{g_k^{-1} g g_k} \bowtie h)) \otimes_{R_\sigma} m_j \\ &= (\varepsilon \bowtie g_k) \otimes_{R_\sigma} ((\varphi_{g_k^{-1} g g_k} \bowtie h) m_j) \\ &= (\varepsilon \bowtie g_k) \otimes_{R_\sigma} (\delta_{g_k^{-1} g g_k, \sigma} h \cdot m_j) \\ &= \delta_{g, \sigma_k} (\varepsilon \bowtie g_k) \otimes_{R_\sigma} h \cdot m_j.\end{aligned}$$

Queremos agora descrever o caracter $\chi = \chi_{V^\sigma}$. Observe que, se $g \neq \sigma_k$, então $\langle \chi, \varphi_g \bowtie x \rangle = 0$ para todo $x \in G$. Por outro lado, se $g = \sigma_k$ e quisermos $\langle \chi, \varphi_g \bowtie x \rangle \neq 0$, precisamos pelo menos de $k = i$. Dessa forma, temos $g_i^{-1} x g_i = h \in C_G(\sigma)$ e

$$\langle \chi_{V^\sigma}, \varphi_{\sigma_i} \bowtie x \rangle = \left\langle \chi_{M^\sigma}, g_i^{-1} x g_i \right\rangle.$$

Portanto, identificando $(D(\Bbbk G))^*$ com $\Bbbk G \otimes (\Bbbk G)^*$, temos

$$\chi_{V^\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \otimes \sum_{h \in C_G(\sigma)} \langle \chi_{M^\sigma}, h \rangle \, \varphi_{g_i h g_i^{-1}}. \tag{5.15}$$

Em [CW05, Example 2.12], as autoras provaram que a aplicação de Drinfeld para a álgebra $D(H)$ de uma álgebra de Hopf de dimensão finita H, definida como em (5.3), também identificando $D(H)^*$ com $H \otimes H^*$, é dada por

$$\Phi(x \otimes \psi) = (\varepsilon \bowtie x)(\psi \bowtie 1_H),$$

para todos $x \in H$ e $\psi \in H^*$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
\Phi(\chi_{V^\sigma}) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{h \in C_G(\sigma)} \langle \chi_{M^\sigma}, h \rangle \, (\varepsilon \bowtie \sigma_i)(\varphi_{g_i h g_i^{-1}} \bowtie 1_H) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{h \in C_G(\sigma)} \langle \chi_{M^\sigma}, h \rangle \, \varphi_{\sigma_i g_i h g_i^{-1} \sigma_i^{-1}} \bowtie \sigma_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{h \in C_G(\sigma)} \langle \chi_{M^\sigma}, h \rangle \, \varphi_{g_i \sigma h \sigma^{-1} g_i^{-1}} \bowtie \sigma_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{h \in C_G(\sigma)} \langle \chi_{M^\sigma}, h \rangle \, \varphi_{g_i h g_i^{-1}} \bowtie \sigma_i.
\end{aligned} \tag{5.16}
$$

Exemplo 5.6.1: Temos que $\mathbb{C}S_3$ é uma $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf semissimples de dimensão 6. Portanto, $H = D(\mathbb{C}S_3)$ é uma $\mathbb{C}$-álgebra de Hopf fatorizável e semissimples de dimensão 36 e, pelo Lema 5.3.6, $R(H)$ é comutativa.

Prosseguindo como na discussão acima, temos três classes de conjugação para $G = S_3$:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{C}_{1_G} &= \{1_G\} \\
\mathfrak{C}_{(12)} &= \{(12), (13), (23)\} \\
\mathfrak{C}_{(123)} &= \{(123), (132)\}.
\end{aligned}
$$

Os centralizadores, por sua vez, são:

$$
\begin{aligned}
C_G(1_G) &= S_3 \\
C_G(12) &= \{1_G, (12)\} \cong C_2 \\
C_G(123) &= \{1_G, (123), (132)\} \cong C_3.
\end{aligned}
$$

(Aqui, C_2 e C_3 denotam, respectivamente, os grupos cíclicos de ordem 2 e de ordem 3).

Para $\sigma = 1_G$, temos três representações para S_3:

- M_1: a representação trivial de S_3;
- M_2: a representação dada pelo sinal das permutações de S_3;
- M_3: a representação irredutível de S_3 de grau 2 tal que $\chi_{M_3}(123) = -1$ e $\chi_{M_3}(12) = 0$.

Para $\sigma = (12)$, temos duas representações de C_2:

- M_4: a representação trivial de $\mathbb{Z}_2$;
- M_5: a única representação não trivial de $\mathbb{Z}_2$.

Por fim, para $\sigma = (123)$, temos três representações de C_3:

- M_6: a representação trivial de $\mathbb{Z}_3$;
- M_7: a representação com $\chi_{M_7}(123) = \omega$ e $\chi_{M_7}(132) = \omega^2$, para $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$;

- M_8: a representação com $\chi_{M_8}(123) = \omega^2$ e $\chi_{M_8}(132) = \omega$, para $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Agora, utilizando a Equação (5.15), temos:

$$
\begin{aligned}
\chi_1 &= 1_G \otimes \left(\sum_{g \in S_3} \varphi_g \right) = 1_G \otimes \varepsilon \\
\chi_2 &= 1_G \otimes \left(\varphi_{1_G} + \varphi_{(123)} + \varphi_{(132)} - \varphi_{(12)} - \varphi_{(13)} - \varphi_{(23)}\right) \\
\chi_3 &= 1_G \otimes \left(2\varphi_{1_G} - \varphi_{(123)} - \varphi_{(132)}\right) \\
\chi_4 &= (12) \otimes \left(\varphi_{1_G} + \varphi_{(12)}\right) + (13) \otimes \left(\varphi_{1_G} + \varphi_{(13)}\right) + (23) \otimes \left(\varphi_{1_G} + \varphi_{(23)}\right) \\
\chi_5 &= (12) \otimes \left(\varphi_{1_G} - \varphi_{(12)}\right) + (13) \otimes \left(\varphi_{1_G} - \varphi_{(13)}\right) + (23) \otimes \left(\varphi_{1_G} - \varphi_{(23)}\right) \\
\chi_6 &= (123) \otimes \left(\varphi_{1_G} + \varphi_{(123)} + \varphi_{(132)}\right) + (132) \otimes \left(\varphi_{1_G} + \varphi_{(123)} + \varphi_{(132)}\right) \\
\chi_7 &= (123) \otimes \left(\varphi_{1_G} + \omega\varphi_{(123)} + \omega^2\varphi_{(132)}\right) + (132) \otimes \left(\varphi_{1_G} + \omega^2\varphi_{(123)} + \omega\varphi_{(132)}\right) \\
\chi_8 &= (123) \otimes \left(\varphi_{1_G} + \omega^2\varphi_{(123)} + \omega\varphi_{(132)}\right) + (132) \otimes \left(\varphi_{1_G} + \omega\varphi_{(123)} + \omega^2\varphi_{(132)}\right).
\end{aligned}
$$

Utilizando a Equação (5.16), temos

$$
\begin{aligned}
\Phi(\chi_1) &= \sum_{g \in S_3} \varphi_g \bowtie 1_G = \varepsilon \bowtie 1_G \\
\Phi(\chi_2) &= \left(\varphi_{1_G} + \varphi_{(123)} + \varphi_{(132)} - \varphi_{(12)} - \varphi_{(13)} - \varphi_{(23)}\right) \bowtie 1_G \\
\Phi(\chi_3) &= \left(2\varphi_{1_G} - \varphi_{(123)} - \varphi_{(132)}\right) \bowtie 1_G \\
\Phi(\chi_4) &= \left(\varphi_{1_G} + \varphi_{(12)}\right) \bowtie (12) + \left(\varphi_{1_G} + \varphi_{(13)}\right) \bowtie (13) + \left(\varphi_{1_G} + \varphi_{(23)}\right) \bowtie (23) \\
\Phi(\chi_5) &= \left(\varphi_{1_G} - \varphi_{(12)}\right) \bowtie (12) + \left(\varphi_{1_G} - \varphi_{(13)}\right) \bowtie (13) + \left(\varphi_{1_G} - \varphi_{(23)}\right) \bowtie (23) \\
\Phi(\chi_6) &= \left(\varphi_{1_G} + \varphi_{(123)} + \varphi_{(132)}\right) \bowtie (123) + \left(\varphi_{1_G} + \varphi_{(123)} + \varphi_{(132)}\right) \bowtie (132) \\
\Phi(\chi_7) &= \left(\varphi_{1_G} + \omega\varphi_{(123)} + \omega^2\varphi_{(132)}\right) \bowtie (123) + \left(\varphi_{1_G} + \omega^2\varphi_{(123)} + \omega\varphi_{(132)}\right) \bowtie (132) \\
\Phi(\chi_8) &= \left(\varphi_{1_G} + \omega^2\varphi_{(123)} + \omega\varphi_{(132)}\right) \bowtie (123) + \left(\varphi_{1_G} + \omega\varphi_{(123)} + \omega^2\varphi_{(132)}\right) \bowtie (132).
\end{aligned}
$$

Podemos, então, calcular a tabela de caracteres de $D(\mathbb{C}S_3)$ utilizando a Equação (5.14):

	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	η_7	η_8
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	1	1	1
χ_3	2	2	2	0	0	-1	-1	-1
χ_4	3	-3	0	1	-1	0	0	0
χ_5	3	-3	0	-1	1	0	0	0
χ_6	2	2	-1	0	0	2	-1	-1
χ_7	2	2	-1	0	0	-1	-1	2
χ_8	2	2	-1	0	0	-1	2	-1

Utilizando o item (2) do Teorema 5.5.8, podemos calcular a dimensão das classes de conjugação de $D(\mathbb{C}S_3)$:

$$\dim \mathfrak{C}_i = \dim(F_i H^*) = 36 \left(\sum_{t=1}^{8} \overline{\xi_{ti}} \xi_{ti} \right)^{-1}$$

- $\dim \mathfrak{C}_1 = \dim \mathfrak{C}_2 = 1$;
- $\dim \mathfrak{C}_3 = \dim \mathfrak{C}_6 = \dim \mathfrak{C}_7 = \dim \mathfrak{C}_8 = 4$;
- $\dim \mathfrak{C}_4 = \dim \mathfrak{C}_5 = 9$.

Essa álgebra é um exemplo em que as constantes de estrutura da multiplicação de duas somas de classes não são necessariamente inteiras. Considerando $\overline{\mathfrak{C}_4}\,\overline{\mathfrak{C}_5}$, por exemplo, temos, pelo Teorema 5.5.9:

$$c_t^{4,5} = \frac{\dim(F_4 H^*) \dim(F_5 H^*)}{\dim H} \sum_{r=1}^{8} \frac{\xi_{r,4} \xi_{r,5} \overline{\xi_{rt}}}{d_r}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
c_1^{4,5} &= \frac{81}{36}(1+1+0-1-1+0+0+0) = 0; \\
c_2^{4,5} &= \frac{81}{36}(1+1+0+1+1+0+0+0) = 9; \\
c_3^{4,5} &= \frac{81}{36}(1+1+0+0+0+0+0+0) = \frac{9}{2}; \\
c_4^{4,5} &= \frac{81}{36}\left(1-1+0-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+0+0+0\right) = 0; \\
c_5^{4,5} &= \frac{81}{36}\left(1-1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+0+0+0\right) = 0; \\
c_6^{4,5} &= \frac{81}{36}(1+1+0+0+0+0+0+0) = \frac{9}{2}; \\
c_7^{4,5} &= \frac{81}{36}(1+1+0+0+0+0+0+0) = \frac{9}{2}; \\
c_8^{4,5} &= \frac{81}{36}(1+1+0+0+0+0+0+0) = \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando o Teorema 5.5.15, podemos descrever os núcleos à esquerda de H:

$$\begin{aligned}
\mathrm{LKer}_{V_1} &= \mathfrak{C}_1 \oplus \mathfrak{C}_2 \oplus \mathfrak{C}_3 \oplus \mathfrak{C}_4 \oplus \mathfrak{C}_5 \oplus \mathfrak{C}_6 \oplus \mathfrak{C}_7 \oplus \mathfrak{C}_8 = H \Longrightarrow \dim \mathrm{LKer}_{V_1} = 36;\\
\mathrm{LKer}_{V_2} &= \mathfrak{C}_1 \oplus \mathfrak{C}_2 \oplus \mathfrak{C}_3 \oplus \mathfrak{C}_6 \oplus \mathfrak{C}_7 \oplus \mathfrak{C}_8 \Longrightarrow \dim \mathrm{LKer}_{V_2} = 18;\\
\mathrm{LKer}_{V_3} &= \mathfrak{C}_1 \oplus \mathfrak{C}_2 \oplus \mathfrak{C}_3 \Longrightarrow \dim \mathrm{LKer}_{V_3} = 6;\\
\mathrm{LKer}_{V_4} &= \mathfrak{C}_1 \Longrightarrow \dim \mathrm{LKer}_{V_4} = 1;\\
\mathrm{LKer}_{V_5} &= \mathfrak{C}_1 \Longrightarrow \dim \mathrm{LKer}_{V_5} = 1;\\
\mathrm{LKer}_{V_6} &= \mathfrak{C}_1 \oplus \mathfrak{C}_2 \oplus \mathfrak{C}_6 \Longrightarrow \dim \mathrm{LKer}_{V_6} = 6;\\
\mathrm{LKer}_{V_7} &= \mathfrak{C}_1 \oplus \mathfrak{C}_2 \oplus \mathfrak{C}_8 \Longrightarrow \dim \mathrm{LKer}_{V_7} = 6;\\
\mathrm{LKer}_{V_8} &= \mathfrak{C}_1 \oplus \mathfrak{C}_2 \oplus \mathfrak{C}_7 \Longrightarrow \dim \mathrm{LKer}_{V_8} = 6.
\end{aligned}$$

Disso, concluímos que χ_4 e χ_5 são fiéis.

Da Proposição 5.5.14, temos que cada um desses oito espaços é uma subálgebra coideal à esquerda e normal de H.

Tendo em vista a Equação (5.12), podemos utilizar o Teorema 5.5.16 para calcular todas as subálgebras coideais à esquerda e normais de H. A única delas que falta e que não é um núcleo à esquerda é $\mathfrak{C}_1 \oplus \mathfrak{C}_2$, de dimensão 2.

Observe que V_2 é o único H-módulo de dimensão 1 não trivial. Portanto, segue da Proposição 5.5.18 que LKer_{V_2} é a álgebra comutadora de H.

Capítulo 6

Conclusão

Cada uma das teorias apresentadas ao longo do texto teve grandes avanços ao longo da segunda metade do século XX e do início do século XXI. Poderíamos falar sobre *extensões de Frobenius*, por exemplo, que generaliza o conceito de álgebras de Frobenius para anéis (ver [NT60]). Porém, para finalizar o texto, vamos apresentar resultados mais próximos do que discutimos nesta dissertação.

Primeiramente, apresentaremos as *conjecturas de Kaplansky* sobre álgebras de Hopf. Muitas dessas conjecturas têm uma relação direta com o que estudamos e a demonstração de casos particulares delas são consequências dos resultados que vimos sobre semissimplicidade de álgebras de Hopf ou da Equação de Classe de Kac e Zhu, por exemplo.

Por fim, apresentaremos mais um resultado da teoria de grupos que pode ser generalizado para um caso particular de álgebras de Hopf: o *Teorema $p^a q^b$ de Burnside* para álgebras de Hopf semissimples e quasitriangulares.

6.1 Conjecturas de Kaplansky

Em 1975, Irwin Kaplansky enunciou uma série de dez conjecturas sobre álgebras de Hopf. Algumas delas foram provadas, outras continuam em aberto, seja totalmente ou parcialmente. A seguir, listamos as dez conjecturas e apresentamos uma breve discussão sobre elas. O conteúdo apresentado aqui baseia-se, fundamentalmente, em [Som00].

Conjectura 1: Se C é uma subálgebra de Hopf de uma álgebra de Hopf B, então B é um C-módulo livre.

Em alguns casos específicos, essa conjectura é verdadeira. Por exemplo, no caso em que B tem dimensão finita, temos o *Teorema de Nichols-Zoeller*, cuja demonstração pode ser encontrada em [Lor18, §12.4.6]. Como apontamos anteriormente, uma das consequências desse resultado é que, em dimensão finita, a dimensão de toda subálgebra de uma álgebra de

Hopf divide a dimensão dessa álgebra de Hopf, generalizando o *Teorema de Lagrange* sobre as ordens de subgrupos.

Um outro caso em que essa conjectura é válida e que também foi provado por Nichols e Richmond é o caso em que C é semissimples, sem ser necessária nenhuma hipótese sobre a dimensão de B ([NR92, Theorem 4]).

No entanto, em geral, ela é falsa. Contra-exemplos e uma discussão maior sobre essa conjectura podem ser encontrados em [Som00].

Conjectura 2: Uma coálgebra C é admissível se, e somente se, todo subconjunto finito de C está contido em alguma subcoálgebra admissível de dimensão finita. (Dizemos que uma coálgebra C é *admissível* se ela admite uma estrutura de álgebra que faça dela uma álgebra de Hopf).

Um contra-exemplo que mostra que essa conjectura é falsa é $\Bbbk[x]$ e pode ser encontrado com detalhes, mais uma vez, em [Som00].

Conjectura 3: Uma álgebra de Hopf sobre um corpo de característica zero não possui elementos nilpotentes não nulos.

Como consequência do Teorema de Maschke, essa conjectura é falsa para toda álgebra de Hopf que não seja semissimples.

Conjectura 4: Um elemento h de uma álgebra de Hopf H é central se, e somente se,

$$\sum_{(a)} a_{(1)} h S(a_{(2)}) = \varepsilon(a) h$$

para todo $a \in H$.

Essa conjectura é claramente verdadeira, pois

$$ah = \sum_{(a)} a_{(1)} h \varepsilon(a_{(2)}) = \sum_{(a)} a_{(1)} h S(a_{(2)}) a_{(3)} = \sum_{(a)} \varepsilon(a_{(1)}) h a_{(2)} = ha.$$

Conjectura 5: Se H for uma álgebra de Hopf de dimensão finita tal que H ou H^* é semissimples, o quadrado da antípoda é a identidade.

Pelo Teorema 4.4.10, temos esse resultado quando a característica do corpo base é zero, mas sua generalização para um corpo de característica arbitrária pode ser encontrada em [EG98, Theorem 3.1].

Conjectura 6: Se H for uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e M for um H-módulo simples, então $\dim M$ divide $\dim H$.

Esse resultado é válido para álgebras de grupos finitos sobre corpos com característica zero, mas é falso no geral. Uma discussão aprofundada pode ser encontrada em [Som00].

Conjectura 7: Se H e H^* forem álgebras de Hopf semissimples sobre um corpo algebricamente fechado $\Bbbk$, a característica de $\Bbbk$ não divide a dimensão de H.

Pelo Corolário 4.2.8, se H e H^* são semissimples, então $\mathrm{Tr}(S^2) \neq 0$ e, além disso, pela Proposição 4.4.8, temos

$$0 \neq \mathrm{Tr}(S^2) = \dim H \, \mathrm{Tr}(S^2|_{xH}),$$

isto é, $\dim H$ é não nulo como elemento do corpo base.

Conjectura 8: Se H for uma álgebra de Hopf de dimensão prima sobre um corpo algebricamente fechado, então H é comutativa e cocomutativa.

No caso em que a característica do corpo é zero, o Teorema 5.3.2 nos garante que $H \cong \Bbbk C_p$, provando o resultado. O caso em que a característica é prima também é válido e pode ser encontrado em [EG98, Theorem 3.4].

Essa conjectura é vista como um passo inicial para o entendimento da estrutura das álgebras de Hopf semissimples em termos dos fatores primos de suas dimensões, assim como feito para grupos finitos. A *Equação de Classe de Kac e Zhu* se tornou uma ferramenta de extrema importância nessa investigação, chamada de *Programa de Classificação para Álgebras de Hopf Semissimples*. Uma discussão muito interessante sobre esse programa pode ser encontrado em [BG13]. Além disso, um resultado sobre álgebras de Hopf semissimples de dimensão $p^a q^b$, com p, q primos, pode ser encontrado em [CW14].

Conjectura 9: Se H for uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\Bbbk$ de forma que a característica de $\Bbbk$ não divida $\dim H$, então $\dim \mathrm{rad}\, H = \dim \mathrm{rad}\, H^*$.

Esse resultado é falso. Um contra-exemplo pode ser encontrado, novamente, em [Som00].

Conjectura 10: Se $\Bbbk$ é um corpo algebricamente fechado e sua característica não divide um determinado inteiro n, então existe um número finito, a menos de isomorfismo, de álgebras de Hopf de dimensão n.

O resultado é falso, em geral, mas temos o seguinte resultado particular:

[Şte97, Theorem 2.2]: O conjunto de classes de isomorfismo de álgebras de Hopf semissimples e cossemissimples de dimensão n sobre um corpo algebricamente fechado é finito.

6.2 Generalização do Teorema de Burnside

Na teoria de grupos, dizemos que um grupo G é *solúvel* se existe uma cadeia

$$\{1_G\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_t = G$$

em que, para todos $0 \leq i \leq t-1$,

1. G_i é um subgrupo normal de G_{i+1};
2. O quociente G_{i+1}/G_i é um grupo abeliano.

Para esse conceito, temos o famoso Teorema $p^a q^b$ de Burnside:

Teorema $p^a q^b$ de Burnside: Se G é um grupo de ordem $p^a q^b$, com p, q primos e a, b inteiros não negativos, então G é solúvel.

No artigo [CW17], as autoras encontraram uma forma de generalizar esses conceitos e esse teorema para álgebras de Hopf. A definição de álgebra de Hopf *solúvel* apresentada é a seguinte:

Definição 6.2.1: Seja H uma álgebra de Hopf semissimples. Uma cadeia de subálgebras coideais à esquerda de H

$$N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_t$$

é uma *série solúvel* se, para todo $0 \leq i \leq t-1$,

1. $\Lambda_{N_i} \in \mathcal{Z}(N_{i+1})$, em que Λ_{N_i} é um integral de N_i;
2. Para todos $a, b \in N_{i+1}$,

$$\left(a \underset{ad}{\cdot} b\right) \Lambda_{N_i} = \varepsilon(a) b \Lambda_{N_i}.$$

Dizemos que H é *solúvel* se H possui uma série solúvel tal que $N_0 = \Bbbk$ e $N_t = H$.

No caso de álgebras de grupos, esse conceito coincide com a definição de grupo solúvel que apresentamos.

É possível generalizar o Teorema de Burnside para álgebras de Hopf semissimples e quasitriangulares como vemos abaixo:

[CW17, Theorem 3.11]: Seja H uma álgebra de Hopf semissimples e quasitriangular de dimensão $p^a q^b$, com p, q primos, sobre um corpo $\Bbbk$ de característica zero. Nessas condições, H é solúvel. Além disso, se N é uma subálgebra coideal à esquerda de H, então H possui uma série solúvel contendo N.

6.3 Considerações finais

O principal intuito da pesquisa que culminou neste texto era explorar contextos maiores em que as álgebras de grupo estão inseridas para dar continuidade aos estudos realizados durante o curso de *Representações de Grupos*. Como foi relatado ao longo destas páginas, conseguimos realizar essa exploração de diferentes maneiras.

Em um primeiro momento, exploramos as *álgebras de Frobenius* e estudamos um pouco também sobre *álgebras simétricas* e *álgebras autoinjetivas* (ou *quase-Frobenius*), o que nos apresentou a novos conceitos sobre teoria de módulos, como o *radical de Jacobson* e os módulos *top* e *socle*, para que fosse possível estudar resultados interessantes sobre essas álgebras.

Dentre os primeiros resultados estudados sobre as álgebras de Frobenius, estava a caracterização que permitiu identificar as *álgebras de Hopf* de dimensão finita como exemplos de álgebras de Frobenius. A partir disso, estabelecemos como objetivo a demonstração da *Equação de Classe de Kac e Zhu*.

A escolha por demonstrar esse resultado foi motivada pela forma como diversos conceitos se comunicavam em uma única demonstração. Isso permitiu explorar as álgebras de Hopf para além do que é apresentado em cursos introdutórios, aprofundando a discussão sobre semissimplicidade dessas álgebras e introduzindo uma teoria de caracteres, por exemplo, e utilizar a linguagem das álgebras de Frobenius que vimos para traduzir alguns resultados clássicos da teoria, como a *fórmula de Radford* para a antípoda.

A partir daí, vimos que essas teorias caminham para diversos lugares interessantes, sendo possível, por exemplo, generalizar diversos resultados clássicos das teorias de *Grupos* e de *Representações de Grupos* para alguns casos particulares de álgebras de Hopf.

Muito do que estudamos aqui se conecta com as *conjecturas de Kaplansky*, o que indica que existem vários outros caminhos de pesquisa que podem ser seguidos para além do que vimos, como as generalizações para casos de dimensão infinita ou com hipóteses menos restritivas sobre o corpo base.

Chegando ao final deste texto, temos mais um exemplo do poder impressionante da matemática. Partimos de conceitos que, em um primeiro momento, não têm nenhuma relação entre si e chegamos em um ponto em que perdemos de vista o número de caminhos que se seguem a partir da exploração que fizemos ao longo de toda essa jornada.

Referências

[AW99] William A. Adkins e Steven H. Weintraub. *Algebra: An Approach via Module Theory*. 2ª ed. Springer-Verlag, 1999.

[BG13] Margaret Beattie e Gastón Andrés García. “Classifying Hopf algebras of a given dimension”. Em: *AMS - Contemporary Mathematics (Hopf Algebras and Tensor Categories)*, vol. 585 (2013), pp. 125–152.

[Bou89] Nicolas Bourbaki. *Commutative Algebra, Chapters 1-7*. Springer-Verlag, 1989.

[CW05] Miriam Cohen e Sara Westreich. “Some interrelations between Hopf algebras and their duals”. Em: *Journal of Algebra*, vol. 283 (2005), pp. 42–62.

[CW10] Miriam Cohen e Sara Westreich. “Higman Ideals and Verlinde-type Formulas for Hopf Algebras”. Em: *Ring and Module Theory - Trends in Mathematics* (2010).

[CW11] Miriam Cohen e Sara Westreich. “Conjugacy Classes, Class Sums and Character Tables for Hopf Algebras”. Em: *Communications in Algebra*, vol. 39 (2011), pp. 4618–4633.

[CW13] Miriam Cohen e Sara Westreich. “Recovering information from character tables of Hopf algebras: normality, dimensions and quotients”. Em: *AMS - Contemporary Mathematics (Hopf Algebras and Tensor Categories)*, vol. 585 (2013), pp. 213–226.

[CW14] Miriam Cohen e Sara Westreich. “Character tables and normal left coideal subalgebras”. Em: *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 218, no. 10 (2014), pp. 1845–1866.

[CW17] Miriam Cohen e Sara Westreich. “Solvability for semisimple Hopf algebras via integrals”. Em: *Journal of Algebra*, vol. 472 (2017), pp. 67–94.

[DNR01] Sorin Dascalescu, Constantin Nastasescu e Serban Raianu. *Hopf Algebras: an introduction*. Marcel Dekker, Inc., 2001.

[DPR90] Robbert Dijkgraaf, Vincent Pasquier e Philippe Roche. "Quasi Hopf algebras, group cohomology and orbifold models". Em: *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, vol. 18, no. 2 (1990), pp. 60–72.

[EG98] Pavel Etingof e Shlomo Gelaki. "On finite-dimensional semisimple and cosemisimple Hopf algebras in positive characteristic". Em: *International Mathematics Research Notices*, 1998, no. 16 (1998), pp. 851–864.

[FM20] Vitor de Oliveira Ferreira e Lucia Satie Ikemoto Murakami. *Uma Introdução às Álgebras de Hopf*. Editora Livraria da Física, 2020.

[Fro03] Ferdinand Georg Frobenius. "Theorie der hyperkomplexen Größen". Em: *Sitzungsber. Press. Akad. Wissen.*, vol. 24 (1903), pp. 504–537.

[Isa76] Irving Martin Isaacs. *Character Theory of Finite Groups*. Pure and Applied Mathematics vol. 69. Academic Press, 1976.

[Jac89] Nathan Jacobson. *Basic Algebra II*. 2ª ed. W.H.Freeman e Company, 1989.

[JL01] Gordon James e Martin Liebeck. *Representations and Characters of Groups*. 2ª ed. Cambridge University Press, 2001.

[Lam01] Tsit-Yuen Lam. *A First Course in Noncommutative Rings*. 2ª ed. Springer-Verlag, 2001.

[Lam98a] Tsit-Yuen Lam. "Representations of Finite Groups: A Hundred Years, Part I". Em: *Notices of the AMS*, vol. 45, no. 3 (mar. de 1998), pp. 361–372.

[Lam98b] Tsit-Yuen Lam. "Representations of Finite Groups: A Hundred Years, Part II". Em: *Notices of the AMS*, vol. 45, no. 4 (abr. de 1998), pp. 465–474.

[Lor11] Martin Lorenz. "Some applications of Frobenius algebras to Hopf algebras". Em: *Groups, Algebras and Applications, Contemporary Mathematics*, vol. 537 (2011), pp. 269–289.

[Lor18] Martin Lorenz. *A Tour of Representation Theory*. AMS: American Mathematical Society, 2018.

[Lor98] Martin Lorenz. “On the Class Equation for Hopf Algebras”. Em: *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 126, no. 10 (1998), pp. 2841–2844.

[LR88a] Richard G. Larson e David E. Radford. “Finite Dimensional Cosemisimple Hopf Algebras in Characteristic 0 Are Semisimple”. Em: *Journal of Algebra*, vol. 117 (1988), pp. 267–289.

[LR88b] Richard G. Larson e David E. Radford. “Semisimple Cosemisimple Hopf Algebras”. Em: *American Journal of Mathematics*, vol. 110, no. 1 (fev. de 1988), pp. 187–195.

[Nak39] Tadasi Nakayama. “On Frobeniusean Algebras. I”. Em: *Annals of Mathematics*, vol. 40, no. 3 (jul. de 1939), pp. 611–633.

[NR92] Warren D. Nichols e M. Bettina Richmond. “Freeness of infinite dimentional Hopf algebras”. Em: *Communications in Algebra*, vol. 20, no. 5 (1992), pp. 1489–1492.

[NR98] Warren D. Nichols e M. Bettina Richmond. “The Grothendieck Algebra Of A Hopf Algebra, I”. Em: *Communications in Algebra*, vol. 26, no. 4 (1998), pp. 1081–1095.

[NT60] Tadasi Nakayama e Tosiro Tsuzuku. “On Frobenius extensions I.” Em: *Nagoya Mathematical Journal*, vol. 17 (1960), pp. 89–110.

[Par71] Bodo Pareigis. “When Hopf algebras are Frobenius algebras”. Em: *Journal of Algebra*, vol. 18, no. 4 (1971), pp. 588–596.

[Pie82] Richard S. Pierce. *Associative algebras*. Graduate texts in mathematics; 88. Springer-Verlag New York Inc, 1982.

[Rad90] David E. Radford. “The Group of Automorphisms of a Semisimple Hopf Algebra Over a Field of Characteristic 0 is Finite”. Em: *American Journal of Mathematics*, vol. 112, no. 2 (abr. de 1990), pp. 331–357.

[Sch01] Hans-Jürgen Schneider. “Some Properties of Factorizable Hopf Algebras”. Em: *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 129, no. 7 (jul. de 2001), pp. 1891–1898.

[Sch95] Hans-Jürgen Schneider. “Lectures on Hopf algebras”. Em: *Trabajos de Matemática*, vol. 31, no. 95 (1995). Notes by Sonia Natale.

[Som00] Yorck Sommerhäuser. “On Kaplansky’s conjectures”. Em: *Interactions Between Ring Theory and Representations of Algebras (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics)* (2000), pp. 393–412.

[Şte97] Dragoş Ştefan. “The Set of Types ofn-Dimensional Semisimple and Cosemisimple Hopf Algebras Is Finite”. Em: *Journal of Algebra*, vol. 193, no. 2 (1997), pp. 571–580.

[SY11] Andrzej Skowronski e Kunio Yamagata. *Frobenius Algebras I: Basic Representation Theory*. EMS: European Mathematical Society, 2011.

[Zhu94] Yongchang Zhu. “Hopf Algebras of Prime Dimension”. Em: *International Mathematics Research Notices*, 1 (1994), pp. 53–59.

Índice Remissivo