Subálgebras de Mishchenko-Fomenko de álgebras envolventes de álgebras de Lie simples

Maria Clara Cardoso

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Vyacheslav Futorny

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq e da FAPESP (processo: 2017/11050-0)

São Paulo, agosto de 2019

Subálgebras de Mishchenko-Fomenko
de álgebras envolventes
de álgebras de Lie simples

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 02/08/2019. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Vyacheslav Futorny (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov - UNICAMP
- Prof. Dr. Lucas Henrique Calixto - UFMG

Resumo

CARDOSO, M. C. **Subálgebras de Mishchenko-Fomenko de álgebras envolventes de álgebras de Lie simples**. 2019. 94 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Nesse trabalho introduzimos as subálgebras de Mishchenko-Fomenko. Apresentamos o problema de Vinberg e a solução de Feigin, Frenkel e Toledano-Laredo Feigin *et al.* [2010]. Também é mostrada a solução para as álgebras de Lie de tipo A apresentada em Futorny e Molev [2015]. É estudado também o artigo Molev [2013] onde são apresentados geradores do centro de Feigin-Frenkel para as álgebras de Lie de tipo B, C e D. Também são introduzidas as subálgebras de Gelfand-Tsetlin, subálgebras das álgebras envolventes universais das álgebras de Lie de tipo A. Apresentamos uma definição de súbálgebra de Gelfand-Tsetlin para as álgebras de Lie de tipo C, introduzida em Molev e Yakimova [2017]. São exibidas as variedades de Gelfand-Tsetlin de $\mathfrak{sp}_4$ e $\mathfrak{sp}_6$, sendo provado que a variedade de Gelfand-Tsetlin de $\mathfrak{sp}_4$ é equidimensional de dimensão 4. Também é demonstrado um novo resultado sobre a equidimensionalidade de $\mathfrak{sp}_6$.

Palavras-chave: subálgebra de Mishchenko-Fomenko, problema de Vinberg, variedade de Gelfand-Tsetlin.

Abstract

CARDOSO, M. C. **Mishchenko-Fomenko subalgebras of universal enveloping algebras of simple Lie algebras**. 2019. 94 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

In this dissertation, we introduce the Mishchenko-Fomenko subalgebras. We show Vinberg's problem and the solution given by Feigin, Frenkel and Toledano-Laredo Feigin *et al.* [2010]. We also show a solution for Lie algebras of type A found in Futorny e Molev [2015]. We study the article Molev [2013] where generators for the Feigin-Frenkel center are shown for Lie algebras of type B, C and D. We introduce the Gelfand-Tsetlin subalgebras, which are subalgebras of the universal enveloping algebras of Lie algebras of type A. We show a definition of Gelfand-Tsetlin for Lie algebras of type C, introduced in Molev e Yakimova [2017]. We exhibit the Gelfand-Tsetlin varieties related to $\mathfrak{sp}_4$ and $\mathfrak{sp}_6$. We prove that the Gelfand-Tsetlin variety for $\mathfrak{sp}_4$ is equidimensional of dimension 4 and we prove a new result about the equidimensionality of $\mathfrak{sp}_6$.

Keywords: Mishchenko-Fomenko subalgebras, Vinberg's problem, Gelfand-Tsetlin variety.

Sumário

Lista de Símbolos

$\mathbb{C}$	conjunto dos complexos
End	endomorfismos
Im	imagem de uma função
k	corpo (normalmente fechado e de característica 0)
ker	núcleo (kernel) de uma função
S_m	grupo das permutações de m elementos
sgn	sinal de uma permutação
tr	traço de uma matriz

Capítulo 1

Introdução

Representações de álgebras de Lie é uma das áreas mais importantes e ativas da teoria de representações com uma variedade ampla de resultados e aplicações. Seja k um corpo de característica 0 e algebricamente fechado e seja $\mathfrak{g}$ uma k-álgebra de Lie. Podemos definir, a partir de $\mathfrak{g}$, uma álgebra associativa com unidade que chamamos de álgebra envolvente universal e denotamos por $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. É um fato conhecido que a categoria de $\mathfrak{g}$-módulos é equivalente a de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-módulos. Assim podemos focar no estudo de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-módulos.

Sejam U uma k-álgebra associativa com 1 (por exemplo, $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$) e B uma subálgebra comutativa de U. Pode-se perguntar se um B-módulo irredutível pode ser levantado para um U-módulo irredutível. A resposta para essa pergunta é positiva se U for um B-módulo livre (à esquerda ou à direita). Em Kostant [1963] é provado que $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, onde $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie simples de dimensão finita, é um módulo livre (à esquerda ou à direita) sobre seu centro Z. Pelo resultado de Bernstein e Lunts [1996], temos que a álgebra polinomial $P(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}^*)$ é livre sobre o conjunto de invariantes $P(\mathfrak{g})^G$, onde G é o grupo de Lie correspondente a $\mathfrak{g}$.

Nesse contexto, as subálgebras de Mishchenko-Fomenko se mostram importantes. A álgebra envolvente universal possui uma filtração natural e a álgebra graduada associada a essa filtração é a álgebra simétrica $S(\mathfrak{g})$.

Definição 1.0.1. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples e $P(Y_1, \ldots, Y_l) \in S(\mathfrak{g})$ um elemento de grau d. Fixe $\mu \in \mathfrak{g}^*$. Seja z uma variável. Substitua Y_i por $Y_i + z\mu(Y_i)$ em P e expanda o resultado para um polinômio em z,*

$$P(Y_1 + z\mu(Y_1), \ldots, Y_l + z\mu(Y_l)) = P_\mu^{(0)} + P_\mu^{(1)} z + \cdots P_\mu^{(d)} z^d \tag{1.1}$$

definindo assim elementos $P_\mu^{(i)} \in S(\mathfrak{g})$, chamados μ-deslocamentos de P. Denotamos por $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ a subálgebra de $S(\mathfrak{g})$ gerada pelos μ-deslocamentos de todos polinômios $\mathfrak{g}$-invariantes P. A subálgebra $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ é chamada de subálgebra de Mishchenko-Fomenko.

As subálgebras de Mishchenko-Fomenko são subálgebras maximais Poisson comutativas de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. O problema de Vinberg proposto em Vinberg [1991] consiste em quantizar as subálgebras de Mishchenko-Fomenko, ou seja, encontrar subálgebras comutativas de $U(L)$ cujas álgebras graduadas são as subálgebras de Mishchenko-Fomenko. Soluções positivas para o problema de Vinberg foram dadas em Rybnikov [2006] (para μ regular e semissimples) e em Feigin *et al.* [2010] (para qualquer μ regular).

A solução de Feigin, Frenkel e Toledano-Laredo usa o centro de Feigin-Frenkel. Em Futorny e Molev [2015], Futorny e Molev exibem geradores das álgebras que quantizam as subálgebras de Mishchenko-Fomenko em álgebras de Lie do tipo A e também ensinam como escolher os geradores de modo a obter um conjunto de geradores algebricamente independente. Em Molev [2013], Molev exibe geradores para o centro de Feigin-Frenkel para as álgebras de Lie de tipo B, C e D.

Se existir uma álgebra A_μ que quantiza as subálgebras de Mishchenko-Fomenko, podemos nos perguntar se $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ é um A_μ-módulo livre. Para isso, estuda-se se os geradores de $\overline{A_\mu}$ formam uma sequência regular.

Para as álgebras de Lie do tipo A, temos as subálgebras de Gelfand-Tsetlin, que também são subálgebras de $U(L)$ comutativas.

Definição 1.0.2. *Seja $\mathfrak{gl}_n$ a álgebra de Lie linear geral (tipo A), que consiste das matrizes $n \times n$, com base canônica $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. Para $1 \leq m \leq n$, considere $\mathfrak{gl}_m$ a álgebra de Lie gerada por $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq m\}$. Assim temos:*

$$\mathfrak{gl}_1 \subset \mathfrak{gl}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{gl}_n$$

e:

$$U(\mathfrak{gl}_1) \subset U(\mathfrak{gl}_2) \subset \ldots \subset U(\mathfrak{gl}_n).$$

Denote o centro de $U(\mathfrak{gl}_m)$ por Z_m para todo $m \in \{1, \ldots, n\}$. A subálgebra de Gelfand-Tsetlin Γ de $U(\mathfrak{gl}_n)$ é definida como a subálgebra gerada por $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$.

Essas subálgebras são um tipo de limite das subálgebras que quantizam as subálgebras de Mishchenko-Fomenko. Isso nos permite concluir resultados sobre A_μ e $\overline{A_\mu}$ a partir de resultados sobre Γ.

Para o tipo B e C, também pode-se estudar o limite das subálgebras que quantizam as subálgebras de Mishchenko-Fomenko. No artigo Molev e Yakimova [2017] são apresentados geradores para uma subálgebra de $\mathfrak{sp}_{2n}$ (tipo C) que é o análogo das subálgebra de Gelfand-Tsetlin para $\mathfrak{gl}_n$. Para aprender mais sobre essas subálgebras, estudamos as variedade de Gelfand-Tsetlin, já que a equidimensionalidade dessas variedades podem implicar que o conjunto gerador das subálgebras de Gelfand-Tsetlin formam uma sequência regular. Nessa dissertação são estudadas especificamente as variedade de Gelfand-Tsetlin de $\mathfrak{sp}_4$ e $\mathfrak{sp}_6$. São provados, até onde sabemos de forma inédita, os seguintes resultados:

Teorema 1.0.1. *A variedade de Gelfand-Tsetlin $\mathfrak{G}_{\mathfrak{sp}_4}$ é equidimensional com dimensão 4.*

Teorema 1.0.2. *A variedade de Gelfand-Tsetlin $\mathfrak{G}_{\mathfrak{sp}_6}$ é equidimensional de dimenão 9 se e somente se a variedade*

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, 2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52}, A, X_{23}^2 + X_{25}X_{43}, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$

é equidimensional de dimensão 9, onde $A = 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}$ e:

$$det \begin{pmatrix} u + X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ X_{21} & u + X_{22} & X_{23} & X_{24} & X_{25} & X_{15} \\ X_{31} & X_{32} & u + X_{33} & X_{34} & X_{24} & X_{14} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & u - X_{33} & -X_{23} & -X_{13} \\ X_{51} & X_{52} & X_{42} & -X_{32} & u - X_{22} & -X_{12} \\ X_{61} & X_{51} & X_{41} & -X_{31} & -X_{21} & u - X_{11} \end{pmatrix} = u^6 + \phi_2^{(0)}u^4 + \phi_4^{(0)}u^2 + \phi_6^{(0)}$$

Capítulo 2

Conceitos preliminares

2.1 Álgebra de Lie

2.1.1 Conceitos básicos e exemplos

Definição 2.1.1. *Seja $\mathfrak{g}$ um k-espaço vetorial com uma operação (produto) $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(x, y) \mapsto [x, y]$, chamada de colchete ou comutador. $\mathfrak{g}$, munido dessa operação, é chamado de álgebra de Lie se os seguintes axiomas são satisfeitos:*

(i) A operação $[\ ,\ ]$ é bilinear.

(ii) $[\ ,\ ]$ é antissimétrico, ou seja, $[x, x] = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$.

(iii) (Identidade de Jacobi) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, para todos x, y, $z \in \mathfrak{g}$.

Observação 2.1.1. *Se $[\ ,\ ]$ é bilinear e $[x, x] = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$, então $[x, y] = -[y, x]$, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, pois:*

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [y, x] + [x, y] + [y, y] = [y, x] + [x, y].$$

Se k não tem característica 2, $[\ ,\ ]$ é bilinear e $[x, y] = -[y, x]$, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, então $[x, x] = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$, pois:

$$[x, x] = -[x, x] \implies 2[x, x] = 0 \implies [x, x] = 0.$$

Normalmente denotaremos uma álgebra de Lie pelo seu espaço vetorial, $\mathfrak{g}$, em vez de denotá-la por $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$.

Definição 2.1.2. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita abeliana se $[x, y] = 0$ para todos $x, y \in \mathfrak{g}$.*

Definição 2.1.3. *Seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um subespaço da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Chamamos $\mathfrak{h}$ de subálgebra se para todo $x, y \in \mathfrak{h}$ temos $[x, y] \in \mathfrak{h}$.*

Abaixo estão listados alguns exemplos de álgebras de Lie:

Exemplo 2.1.1. *Seja A uma k-álgebra associativa. Podemos fornecer a A uma estrutura de álgebra de Lie, definindo $[x, y] = xy - yx$ para todos $x, y \in A$.*

Exemplo 2.1.2. *Seja V um k-espaço vetorial e seja End(V) o conjunto das transformações lineares que vão de V em V. End(V) com o colchete dado por $[T, S] = T \circ S - S \circ T$, para todos $T, S \in$ End(V), é uma álgebra de Lie chamada álgebra linear geral e é denotada por $\mathfrak{gl}(V)$. Se a dimensão de V é n, $\mathfrak{gl}(V)$ pode ser vista como a álgebra de Lie das matrizes n por n, com $[X, Y] = XY - YX$, para todas matrizes X, Y n por n. Nesse caso, ela será denotada por $\mathfrak{gl}_n(k)$.*

Exemplo 2.1.3. *Álgebra de Lie de tipo A_n:*

A álgebra linear especial, denotada por $\mathfrak{sl}_{n+1}(k)$, é a subálgebra de $\mathfrak{gl}_{n+1}(k)$ formada pelas matrizes com traço zero.

Exemplo 2.1.4. *Álgebra de Lie de tipo C_n:*

A álgebra simplética, denotada por $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$, é a subálgebra de $\mathfrak{gl}_{2n}(k)$ formada pelas matrizes X tais que $JX + X^tJ = 0$, sendo $J = \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ -Id_n & 0 \end{pmatrix}$, onde 0 é a matriz nula n por n e Id_n é a matriz identidade n por n.

Exemplo 2.1.5. *Álgebra de Lie de tipo B_n:*

A álgebra ortogonal, denotada por $\mathfrak{o}_{2n+1}(k)$, é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}_{2n+1}(k)$ formada pelas matrizes X tais que $KX + X^tK = 0$, sendo $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id_n \\ 0 & Id_n & 0 \end{pmatrix}$, onde 0 é a matriz nula n por n e Id_n é a matriz identidade n por n.

Exemplo 2.1.6. *Álgebra de Lie de tipo D_n:*

Também chamamos de álgebra ortogonal a álgebra, denotada por $\mathfrak{o}_{2n}(k)$, que é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}_{2n}(k)$ formada pelas matrizes X tais que $MX + X^tM = 0$, sendo $M = \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ Id_n & 0 \end{pmatrix}$, onde 0 é a matriz nula n por n e Id_n é a matriz identidade n por n.

Exemplo 2.1.7. $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ *é a subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ formada pelas matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal ($M = (a_{ij})$ com $a_{ij} = 0$ se $i \geq j$).*

Exemplo 2.1.8. $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ *é a subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ formada pelas matrizes triangulares superiores ($M = (a_{ij})$ com $a_{ij} = 0$ se $i > j$).*

Exemplo 2.1.9. $\mathfrak{d}(n, \mathbb{K})$ *é a subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ formada pelas matrizes diagonais.*

Definição 2.1.4. *Um ideal é um subespaço $\mathfrak{i}$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tal que, se $x \in \mathfrak{g}$ e $y \in \mathfrak{i}$, então $[x, y] \in \mathfrak{i}$.*

Exemplo 2.1.10. $\{0\}$ *e $\mathfrak{g}$ são ideais de $\mathfrak{g}$.*

Exemplo 2.1.11. *Chamamos de centro de $\mathfrak{g}$ o conjunto $Z(\mathfrak{g}) = \{y \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0, \forall x \in \mathfrak{g}\}$. $Z(\mathfrak{g})$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.*

Definição 2.1.5. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita simples se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$ e seus únicos ideais são $\{0\}$ e $\mathfrak{g}$.*

Para k um corpo algebricamente fechado de característica 0 existem, a menos de isomorfismo, nove famílias de k-álgebras de Lie simples de dimensão finita: A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4 e G_2. Essas álgebras podem ser representadas por diagramas de Coxeter-Dynkin e por matrizes de Cartan. Para mais informações, consulte o capítulo III (Root Systems), seção 11 (Classification) de Humphreys [1972].

Definição 2.1.6. *Um homomorfismo entre álgebras de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ é uma transformação linear $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ tal que $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$.*

2.1.2 Representação e módulo

Definição 2.1.7. *Uma representação de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um par (V, φ), onde V é um k-espaço vetorial e $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Normalmente denotamos a representação (V, φ) só por φ.*

Exemplo 2.1.12. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Dado $x \in \mathfrak{g}$, a função $ad(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $y \mapsto [x, y]$ é um homomorfismo. Defina agora a função ad que leva $x \in \mathfrak{g}$ em $ad(x)$. ad é uma representação de $\mathfrak{g}$.*

Definição 2.1.8. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e V um k-espaço vetorial. Dizemos que V é um $\mathfrak{g}$-módulo se V possui uma operação $\mathfrak{g} \times V \to V$, $(x, v) \mapsto xv$ (denotamos o resultado da operação por xv), que satisfaz:*

(i) $(ax + by)v = a(xv) + b(yv)$, *para todos* $a, b \in k$, $x, y \in \mathfrak{g}$, $v \in V$,

(ii) $x(av + bu) = a(xv) + b(xu)$, *para todos* $a, b \in k$, $x \in \mathfrak{g}$, $v, u \in V$,

(iii) $[x, y]v = x(yv) - y(xv)$, *para todos* $x, y \in \mathfrak{g}$, $v \in V$.

Observação 2.1.2. *Representações e módulos são basicamente a mesma coisa:*
Seja $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ *uma representação. Defina a operação* $\mathfrak{g} \times V \to V$ *tal que* $(x, v) \mapsto xv = \varphi(x)(v)$, *para todos* $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$. V *é um* $\mathfrak{g}$*-módulo com essa operação.*
Por outro lado, seja V *um* $\mathfrak{g}$*-módulo. Defina a função* $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ *tal que* $\varphi(x) \in \mathfrak{gl}(V)$ *é a transformação linear que leva* $v \in V$ *em* xv. φ *é uma representação de* $\mathfrak{g}$.

2.1.3 Álgebra de Lie semissimples

Sejam $\mathfrak{h}, \mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ subálgebras. Indicamos por $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]$ a álgebra de Lie gerada pelo conjunto $\{[x, y] \mid x \in \mathfrak{h},\ y \in \mathfrak{l}\}$.

Definição 2.1.9. *Defina a seguinte sequência de ideais:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{(1)} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ \mathfrak{g}^{(2)} &= [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}] \end{aligned}$$

Essa sequência de ideais é a série derivada de $\mathfrak{g}$.

Definição 2.1.10. *Uma álgebra* $\mathfrak{g}$ *é dita solúvel se sua série derivada se anula em algum momento, ou seja, se existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$.

Definição 2.1.11. *Uma álgebra de Lie é semissimples se o único ideal solúvel que ela contém é o* $\{0\}$.

Exemplo 2.1.13. *Toda álgebra de Lie simples é também semissimples.*

Definição 2.1.12. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie de dimensão finita. Para uma base de* $\mathfrak{g}$*, podemos escrever* adx *em forma de matriz, para todo* $x \in \mathfrak{g}$. *Defina* $\kappa(x, y) = tr(adx\ ady)$. κ *é chamada de forma de Killing.*

A forma de Killing é:

- bilinear,
- é simétirca, ou seja, $\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$,
- é associativa da seguinte forma $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z])$.

Definição 2.1.13. *Uma forma bilinear simétrica* β *é dita não degenerada se seu radical* $S = \{x \in \mathfrak{g} \mid \beta(x, y) = 0,\ \forall y \in \mathfrak{g}\}$ *é* $\{0\}$.

Para uma álgebra $\mathfrak{g}$ com dimensão n e base $\{v_1, \ldots, v_n\}$, uma forma bilinear β pode ser expressa pela matriz $M = (a_{ij})$, onde $a_{ij} = \beta(v_i, v_j)$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ e temos $\beta(x, y) = x^T M y$ para todos $x, y \in \mathfrak{g}$. A forma β é não degenerada se e somente se o determinante da sua matriz for diferente de 0.

Teorema 2.1.1. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. Então* $\mathfrak{g}$ *é semissimples se e somente se sua forma de Killing for não degenerada.*

Teorema 2.1.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples. Então existem ideais de $\mathfrak{g}$ simples $\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_t$ tais que $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{i}_t$. Todo ideal simples de $\mathfrak{g}$ coincide com algum $\mathfrak{i}_i$. Além disso, a forma de Killing em $\mathfrak{i}_i$ é a restrição de κ em $\mathfrak{i}_i \times \mathfrak{i}_i$.*

Demonstração. Ver página 23 de Humphreys [1972]. □

2.2 Álgebra graduada e álgebra filtrada

Definição 2.2.1. *Uma álgebra A é uma álgebra graduada se existe uma coleção de subespaços vetoriais $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (chamada de graduação de A), tal que:*

(i) $A_nA_m \subset A_{n+m}$, *para todos* $n, m \in \mathbb{N}$,

(ii) $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$.

Definição 2.2.2. *Sejam A e B duas álgebras graduadas com graduações $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente. Um homomorfismo de álgebras graduadas $f : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras tal que $f(A_n) \subset B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 2.2.3. *Uma álgebra A é uma álgebra filtrada se existe uma coleção de subespaços vetoriais $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (chamada de filtração de A), tal que:*

(i) $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ *(ou seja, se* $n \leq m$, *então* $A_n \subset A_m$*)*,

(ii) $A_nA_m \subset A_{n+m}$, *para todos* $n, m \in \mathbb{N}$,

(iii) $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

Seja A uma álgebra filtrada com filtração $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Defina $gr(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \overline{A_n}$, onde $A_{-1} := \{0\}$ e $\overline{A_n} := A_n/A_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos definir três operações em $gr(A)$:

- Soma:

  Sejam $x + A_{n-1}, y + A_{m-1} \in gr(A)$ com $n \leq m$. Como $A_n \subset A_m$ e A_m é subespaço, temos que $x + y \in A_m$. Assim podemos definir $(x + A_{n-1}) + (y + A_{m-1}) := x + y + A_{m-1}$.

- Multiplicação por escalar:

  Sejam $a \in k$ e $x + A_{n-1} \in gr(A)$. Como A_n é subespaço, $ax \in A_n$. Assim podemos definir $a(x + A_{n-1}) := ax + A_{n-1}$.

- Multiplicação:

  Sejam $x + A_{n-1}, y + A_{m-1} \in gr(A)$. Como $A_nA_m \subset A_{n+m}$, temos que $xy \in A_{n+m}$. Então podemos definir $(x + A_{n-1})(y + A_{m-1}) := xy + A_{m+n-1}$.

Todas operações estão bem definidas e com elas $gr(A)$ é uma álgebra graduada com *graduação associada a filtração de A*.

Considere agora B uma subálgebra de A. Então B também é uma álgebra filtrada, cuja filtração induzida é $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde $B_n = A_n \cap B$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, podemos definir a álgebra graduada $gr(B)$. A inclusão $i : B \to A$ induz um morfismo de álgebras graduadas:

$$\begin{aligned} gr(i) : gr(B) &\to gr(A) \\ x + B_{n-1} &\mapsto x + A_{n-1} \end{aligned}$$

$gr(i)$ é injetor, pois se $x + B_{n-1}, y + B_{n-1} \in gr(B)$ são tais que $gr(i)(x + B_{n-1}) = gr(i)(y + B_{n-1})$, então $x + A_{n-1} = y + A_{n-1}$. Isto implica que $x - y \in A_{n-1}$. Assim $x - y \in A_{n-1} \cap B = B_{n-1}$ e concluimos que $x + B_{n-1} = y + B_{n-1}$. Portanto, podemos identificar $gr(B)$ com a subálgebra de $gr(A)$ cujos elementos da forma $x + A_{n-1}$ tem $x \in B_n$.

2.3 Álgebra tensorial

Seja R um anel e M um R-módulo. Considere os seguintes R-módulos:

$$\begin{aligned}
&T^0M = R\\
&T^1M = M\\
&T^iM = M \otimes_R \cdots \otimes_R M \quad \text{(i vezes)} \quad \text{, para todo inteiro } i > 1.
\end{aligned}$$

e:

$$T(M) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^iM. \tag{2.1}$$

Podemos munir $T(M)$ de um produto associativo, definindo o produto nos geradores homogêneos de $T(M)$ da seguinte maneira:
se $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in T^kM, w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \in T^mM$:

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \in T^{k+m}M \tag{2.2}$$

e estendendo por R-bilinearidade para todo $T(M)$. $T(M)$ é chamada de *álgebra tensorial de M.* $T(M)$ é uma álgebra associativa graduada com unidade.

Proposição 2.3.1. *(Propriedade Universal da Álgebra Tensorial)*
Sejam M um R-módulo e A uma R-álgebra associativa com unidade 1. Para qualquer homomorfismo de R-módulos $\varphi : M \to A$, existe um único homomorfismo de R-álgebras $\psi : T(M) \to A$ tal que, $\psi(1) = 1$ e $\psi \circ i = \varphi$, onde $i : M \to T(M)$ é a inclusão. Em outras palavras, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & T(M) \arrow[d, dashed, "\exists!\psi"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Defina ψ nos geradores homogêneos de $T(M)$ da seguinte maneira:

$$\psi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \varphi(v_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(v_k) \tag{2.3}$$

e estenda por R-linearidade para todos elementos de $T(M)$.
ψ está bem definida e é um homomorfismo de R-álgebras. Também é fácil ver pela definição que $\psi \circ i = \varphi$. □

Proposição 2.3.2. *Sejam M um R-módulo livre e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de M. Então, para qualquer $m \geq 1$, T^mM é um R-módulo livre com posto n^m e com base:*

$$\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_m} \mid 1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n\} \tag{2.4}$$

Proposição 2.3.3. *Seja M um R-módulo livre de posto n sobre R. Então $T(M)$ é isomórfica a álgebra de polinômios não comutativos em n variáveis sobre R.*

Demonstração. Veja proposição 7.1 de Lang [2002]. □

2.3.1 Álgebra simétrica

Seja M um R-módulo e $T(M)$ sua álgebra tensorial. Denote por $C(M)$ o ideal (bilateral) de $T(M)$ gerado pelos elementos da forma $x \otimes y - y \otimes x$, para todo $x, y \in M$.

Definição 2.3.1. *A álgebra simétrica de M é a álgebra quociente $T(M)/C(M)$ e a denotamos por $S(M)$.*

Observação 2.3.1. *Seja k um corpo de característica zero e seja M um k-espaço vetorial. Outra forma de definir $S(M)$ é considerar S^nM a imagem da função $S^n : T^nM \to T^nM$ que leva $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$ da base de T^nM em $\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(n)}}$ (S^nM é o conjunto de elementos de T^nM que são simétricos). Depois defina $S(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^nM$ ($S(M)$ é o conjunto dos vetores de $T(M)$ que são simétricos).*

Para uma breve discussão sobre isso, ver o começo do capítulo 6 (Existence theorem) de Humphreys [1972] e, para mais detalhes, ver capítulo 4 (Multilinear algebra), seção 5 (Symmetric Tensors) de Kostrikin e Manin [1989].

$S(M)$ é uma R-álgebra comutativa graduada com graduação $\{S^nM\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde $S^nM = T^n(M)/(T^n(M) \cap C(M))$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.3.4. *Seja M um R-módulo livre com posto n sobre R. Então $S(M)$ é isomórfica a álgebra de polinômios em n variáveis sobre R.*

Demonstração. Ver proposição 8.1 de Lang [2002]. □

2.3.2 Álgebra exterior

Seja M um R-módulo e $T(M)$ sua álgebra tensorial. Denote por $A(M)$ o ideal (bilateral) de $T(M)$ gerado pelos elementos da forma $x \otimes x$, para todo $x \in M$.

Definição 2.3.2. *A álgebra exterior de M é a álgebra quociente $T(M)/A(M)$ e a denotamos por $\bigwedge M$.*

Observação 2.3.2. *Seja k corpo de característica zero e seja M um k-espaço vetorial. Outra forma de definir $\bigwedge M$ é considerar $\bigwedge^n M$ a imagem da função $\varphi^n : T^nM \to T^nM$ que leva $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$ da base de T^nM em $\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (sgn \sigma) e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(n)}}$. Depois defina $\bigwedge M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigwedge^n M$.*

Para mais detalhes, ver capítulo 4 (Multilinear algebra) e seção 6 (Skew-symmetric tensors and the exterior algebra of a linear space) de Kostrikin e Manin [1989].

O produto em $\bigwedge M$ é denotado por $\wedge$ e a classe de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \in T(M)$ em $\bigwedge M$ é denotada por $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$.

$\bigwedge M$ é uma álgebra graduada com graduação $\{\bigwedge^n M\}_{n \in \mathbb{N}}$ onde $\bigwedge^n M = T^nM/(T^nM \cap A(M))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\bigwedge^n M$ é chamada de *n-ésima potência exterior de M*.

Proposição 2.3.5. *(Propriedade universal da n-ésima potência exterior de M)*
Seja $n \in \mathbb{N}$. Se existir um R-módulo N e uma aplicação n-linear alternada $f : M^n \to N$ (isto é, $f(x_1, x_2, \ldots, x, \ldots, x, \ldots, x_n) = 0$), então existe um único homomorfismo de R-módulos $g : \bigwedge^n M \to N$ tal que $g \circ \wedge_n = f$, onde $\wedge_n : M^n \to \bigwedge^n M$ é a função que leva $(m_1, \ldots, m_n)$ em $m_1 \wedge \cdots \wedge m_n$, para todo $(m_1, \ldots, m_n) \in M^n$. Em outras palavras, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "\wedge_n"] \arrow[dr, "f"'] & \bigwedge^n M \arrow[d, dashed, "\exists! g"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Demonstração. Ver proposição 7 do parágrafo 7 do capítulo 3 de Bourbaki [1998]. □

Na proposição a seguir são apresentadas algumas características da álgebra exterior e de suas n-ésimas potências.

Proposição 2.3.6. *(i) Seja M um R-módulo. Sejam $x_1, \ldots, x_k \in M$. Para todo $\sigma \in S_k$, temos:*

$$x_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma(k)} = (sgn\sigma) x_1 \wedge \cdots \wedge x_k \tag{2.5}$$

onde sgn é o sinal da permutação σ.

(ii) Seja M um R-módulo de posto n e base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, então, para cada $1 \leq k \leq n$, $\bigwedge^k M$ é um R-módulo livre com base $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k} \mid 1 \leq i_1, \ldots, i_k, \leq n\}$ e tem posto $\binom{n}{k}$. Se $k > n$, temos $\bigwedge^k M = 0$.

(iii) Seja M um R-módulo de posto n. Então $\bigwedge M$ é um R-módulo livre de posto 2^n.

Demonstração. (i) Ver página 510 de Bourbaki [1998].

(ii) e (iii) Ver página 281 de Kostrikin e Manin [1989].

□

2.3.3 Álgebra envolvente universal

Definição 2.3.3. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre k. A álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$ é um par (U, i), onde U é uma k-álgebra associativa com unidade 1 e $i : \mathfrak{g} \to U$ é uma transformação linear que satisfaz:*

(i) $i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x)$, para todo $x, y \in \mathfrak{g}$,

(ii) (propriedade universal) para qualquer k-álgebra associativa A com 1 e para qualquer transformação linear $j : \mathfrak{g} \to A$ que satisfaz (i), existe um único homomorfismo de k-álgebras associativas $\varphi : U \to A$, que manda unidade em unidade, tal que $\varphi \circ i = j$. Ou seja, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j"'] & U \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Proposição 2.3.7. *Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, existe uma álgebra envolvente universal para $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Seja $T(\mathfrak{g})$ a álgebra tensorial de $\mathfrak{g}$ e seja J o ideal bilateral gerado pelos elementos $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$. Defina $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J$ e considere $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ o homomorfismo sobrejetor canônico. Denote por i a restrição de π a $\mathfrak{g}$. Vamos mostrar que $(U(\mathfrak{g}), i)$ é uma álgebra envolvente universal para $\mathfrak{g}$.

(i)

$$\begin{aligned} i([x, y]) = \pi([x, y]) = [x, y] + J = x \otimes y - y \otimes x + J = (x + J)(y + J) - (y + J)(x + J) = \\ = i(x)i(y) - i(y)i(x) \end{aligned}$$

para todos $x, y \in \mathfrak{g}$

(ii) Seja A uma k-álgebra associativa com 1 e $j : \mathfrak{g} \to A$ uma transformação linear tal que $j([x, y]) = j(x)j(y) - j(y)j(x)$, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$. Pela propriedade universal da álgebra tensorial, existe um único homomorfismo de k-álgebras $\psi : T(\mathfrak{g}) \to A$ tal que $\psi(1) = 1$ e $\psi \circ e = j$, onde $e : \mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g})$ é a inclusão. $J \subset \ker\psi$, pois:

$$\begin{aligned} \psi(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = \psi \circ e(x)\psi \circ e(y) - \psi \circ e(y)\psi \circ e(x) - \psi \circ e([x, y]) = \\ = j(x)j(y) - j(y)j(x) - j([x, y]) = 0 \end{aligned}$$

para todos $x, y \in \mathfrak{g}$. Pelo teorema do homomorfismo para quocientes, existe $\varphi : T(\mathfrak{g})/J \to A$ tal que $\varphi \circ \pi = \psi$. Assim, temos: $\varphi \circ i = \varphi \circ \pi \circ e = \psi \circ e = j$ e $\varphi(1) = 1$.

E φ é o único homomorfismo que satisfaz isso, pois, se φ' também satisfaz isso, temos:

$$\begin{aligned}\varphi'(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m + J) = \varphi'(\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)) = \varphi'(i(x_1) \cdots i(x_m)) = \varphi'(i(x_1)) \cdots \varphi'(i(x_m)) = \\ = j(x_1) \cdots j(x_m) = \varphi \circ i(x_1) \cdots \varphi \circ i(x_m) = \varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m + J)\end{aligned}$$

para todo $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m + J \in T(\mathfrak{g})/J$.

Portanto, $(U(\mathfrak{g}), i)$ é uma álgebra envolvente universal para $\mathfrak{g}$.

□

Proposição 2.3.8. *Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, existe, a menos de isomorfismo, uma única álgebra envolvente universal. Ela será denotada por $U(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. Sejam (U_1, i_1) e (U_2, i_2) álgebras envolventes universais de $\mathfrak{g}$. Então, existe um único homomorfismo de álgebras $\varphi_1 : U_1 \to U_2$ tal que $\varphi_1(1) = 1$ e $\varphi_1 \circ i_1 = i_2$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & U_1 \arrow[d, dashed, "\exists! \varphi_1"] \\ & U_2 \end{tikzcd}$$

Analogamente, existe um único homomorfismo de álgebras $\varphi_2 : U_2 \to U_1$ tal que $\varphi_2(1) = 1$ e $\varphi_2 \circ i_2 = i_1$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "i_1"'] & U_2 \arrow[d, dashed, "\exists! \varphi_2"] \\ & U_1 \end{tikzcd}$$

Assim, temos:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1 \circ i_1 = \varphi_2 \circ i_2 = i_1 = Id_{U_1} \circ i_1$$

onde Id_{U_1} é o homomorfismo identidade de U_1.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_1"'] & U_1 \arrow[d, shift right, "Id_{U_1}"'] \arrow[d, shift left, "\varphi_2 \circ \varphi_1"] \\ & U_1 \end{tikzcd}$$

Como (U_1, i_1) é uma álgebra envolvente universal para $\mathfrak{g}$, pela propriedade universal concluimos que $\varphi_2 \circ \varphi_1 = Id_{U_1}$. Analogamente, temos $\varphi_1 \circ \varphi_2 = Id_{U_2}$. Portanto, φ_1 e φ_2 são isomorfismos e $U_1 \cong U_2$. □

Exemplo 2.3.1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie abeliana. Então o ideal bilateral J gerado pelos elementos da forma $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, é igual ao ideal $C(\mathfrak{g})$. Assim temos: $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J = T(\mathfrak{g})/C(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$. Ou seja, a álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$ é a álgebra simétrica de $\mathfrak{g}$.*

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Simplificaremos as notações da seguinte maneira:

$$U := U(\mathfrak{g}), \quad T := T(\mathfrak{g}), \quad T^m := T^m(\mathfrak{g}), \quad S := S(\mathfrak{g}), \quad S^m := S^m(\mathfrak{g}), \quad C := C(\mathfrak{g})$$

Considere a seguinte filtração de T: $\{T_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, onde $T_m = \bigoplus_{i=0}^{m} T^m$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Podemos definir em U uma filtração $\{U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ onde $U_m = \pi(T_m)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Seja $\pi : T \to U$

a projeção canônica. Como temos uma filtração, podemos considerar a álgebra graduada de U, $gr(U) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} G^m$, onde $U_{-1} = \{0\}$ e $G^m = U_m/U_{m-1}$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Defina a transformação linear $\phi_m : T^m \to G^m$ que leva $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \in T^m$ em $\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) + U_{m-1}$, para todo $m \in \mathbb{N}$. ϕ_m é sobrejetora pois $\pi(T^m - T^{m-1}) = U_m - U_{m-1}$. Como $T = \bigoplus_{m=0}^{\infty} T^m$, podemos com as transformações lineares ϕ_m definir uma função linear $\phi : T \to gr(U)$. Como ϕ_m é sobrejetora para todo $m \in \mathbb{N}$, ϕ também é sobrejetora. Note também que ϕ manda 1 em 1.

Lema 2.3.1. *A função ϕ é um homomorfismo de álgebras. Além disso, $\phi(C) = 0$, nos permitindo definir um homomorfismo $\omega : S = T/C \to gr(U)$ tal que $\omega(x + C) = \phi(x)$, para todo $x \in T$.*

Demonstração. Ver página 91 de Humphreys [1972]. □

Teorema 2.3.1. *(Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt ou Teorema PBW)*
O homomorfismo $\omega : S \to gr(U)$ é um isomorfismo de álgebras.

Demonstração. Ver página 93 e 94 de Humphreys [1972]. □

Corolário 2.3.1. *(i) A função canônica $i : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ é injetora.*

(ii) Seja $\{x_i\}_{i\in I}$ ($I \subset \mathbb{N}$) uma base de $\mathfrak{g}$. Então:

$$\{\pi(x_{i(1)} \otimes \cdots \otimes x_{i(m)}) \mid i(1), i(2), \ldots, i(m) \in I,\ i(1) \leq i(2) \leq \ldots \leq i(m)\} \cup \{1\}$$

é uma base para $U(\mathfrak{g})$.

(iii) Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. Estenda uma base $\{h_i\}_{i\in I}$ ($I \subset \mathbb{N}$) de $\mathfrak{h}$ para uma base $\{h_i\}_{i\in I} \cup \{x_i\}_{i\in J}$ ($J \subset \mathbb{N}$) de $\mathfrak{g}$. O homomorfismo, que vai de $U(\mathfrak{h})$ em $U(\mathfrak{g})$ e é induzido pela injeção $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$, é injetor e $U(\mathfrak{g})$ é um $U(\mathfrak{h})$-módulo livremente gerado com base:

$$\{\pi(x_{i(1)} \otimes \cdots \otimes x_{i(m)}) \mid i(1), i(2), \ldots, i(m) \in J,\ i(1) \leq i(2) \leq \ldots \leq i(m)\} \cup \{1\}$$

Demonstração. Ver página 92 de Humphreys [1972]. □

Essa parte sobre o teorema PBW também pode ser vista na primeira seção do capítulo 2 (Enveloping algebras) de Dixmier [1977].

2.4 Álgebra de Poisson-Lie

Definição 2.4.1. *Seja A uma k-álgebra com produto $*$. Uma derivação de A é uma transformação linear $d : A \to A$ que satisfaz a identidade de Leibniz:*

$$d(x * y) = x * d(y) + d(x) * y \quad , \quad \forall x, y \in A.$$

Definição 2.4.2. *Uma álgebra de Poisson-Lie (ou só Poisson) é um k-espaço vetorial equipado com dois produtos bilineares $*$ e $\{\ ,\ \}$, $(A, *, \{\ ,\ \})$, que satisfazem as seguintes propriedades:*

(i) A com o produto $*$ é uma k-álgebra associativa,

(ii) A com o produto $\{\ ,\ \}$ é uma k-álgebra de Lie (chamamos $\{\ ,\ \}$ de colchete de Poisson),

(iii) Dado $x \in A$, a função $\{x,\ \} : A \to A$ definida como $\{x,\ \}(y) = \{x, y\}$, para todo $y \in A$, é uma derivação em $(A, *)$. Ou seja, $\{x,\ \}$ é uma transformação linear e:

$$\{x, y * z\} = y * \{x, z\} + \{x, y\} * z$$

para todos $x, y, z \in A$.

Definição 2.4.3. *Sejam* $(A, *_A, \{\ ,\ \}_A)$ *e* $(B, *_B, \{\ ,\ \}_B)$ *duas álgebras de Poisson-Lie. Uma função* $\varphi : A \to B$ *é um homomorfismo de álgebras de Poisson se* φ *é um homormorfismo de álgebras de* $(A, *_A)$ *em* $(B, *_B)$ *e é um homormorfismo de álgebras de Lie de* $(A, \{\ ,\ \}_A)$ *em* $(B, \{\ ,\ \}_B)$.

2.5 Álgebra homológica

Definição 2.5.1. *Seja* R *um anel. Uma sequência* $(M_i, d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, *onde* M_i *são* R*-módulos e* $d_i : M_i \to M_{i-1}$ *homomorfismos de* R*-módulos, tais que* $d_i d_{i+1} = 0$ *para todo* $i \in \mathbb{Z}$, *é chamada de complexo. Um complexo é denotado por* (M, d) *e é representado da seguinte forma:*

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

Os homomorfismos d_i *são chamados de diferenciais.*

Observação 2.5.1. *Algumas vezes são usados complexos indexados por uma sequência crescente de inteiros, ou seja,* d_i *vai de* M_i *em* M_{i+1}, $d_i d_{i-1} = 0$ *e temos:*

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

Definição 2.5.2. *Seja* (M, d) *um complexo. Para cada* $i \in \mathbb{Z}$ *definimos sua i-ésima homologia (ou i-ésimo grupo de homologia) como:*

$$H_i(M) = Z_i(M)/B_i(M) \tag{2.6}$$

onde $Z_i = \ker d_i$ *e* $B_i = \operatorname{Im} d_{i+1}$.

2.5.1 Complexo de Koszul

Seja R um anel, M um R-módulo e $f : M \to R$ uma função R-linear. Considere a seguinte função n-linear alternada:

$$\begin{aligned} M^n &\to \bigwedge^{n-1} M \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f(x_i) x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n \end{aligned}$$

onde $\widehat{x_i}$ significa que x_i não está nesse produto exterior. Pela propriedade universal da n-ésima potência exterior, existe uma função R-linear $d_f^n : \bigwedge^n M \to \bigwedge^{n-1} M$ tal que:

$$d_f^n(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f(x_i) x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n \tag{2.7}$$

para todo $x_1, \dots, x_n \in M$. A coleção das funções $\{d_f^n\}_{n>0}$ define um R-homomorfismo $d_f : \bigwedge M \to \bigwedge M$ cuja restrição a $\bigwedge^n M$ é igual a d_f^n.

Proposição 2.5.1. *(i)* $d_f \circ d_f = 0$.

(ii) Para todo $x, y \in \bigwedge M$ *homogêneo:* $d_f(x \wedge y) = d_f(x) \wedge y + (-1)^{\deg x} x \wedge d_f(y)$, *sendo* $x \in \bigwedge^{\deg x} M$.

Demonstração. Os dois itens seguem de cálculos diretos a partir da definição de d_f. □

O item (ii) da proposição anterior mostra que d_f é uma antiderivação (de grau -1) e o item (i) prova que a cadeia abaixo é um complexo de R-módulos.

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^{n} M \xrightarrow{d_f} \bigwedge^{n-1} M \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigwedge^{2} M \xrightarrow{d_f} M \xrightarrow{f} R \longrightarrow 0 \tag{2.8}$$

Definição 2.5.3. *O complexo $(\bigwedge M, d_f)$ acima é chamado de complexo de Koszul de f e é denotado por $K_\bullet(f)$. A homologia do complexo de Koszul é chamada de homologia de Koszul de f e é denotada por $H_{\bullet n}(f)$.*

Definição 2.5.4. *Seja N um R-módulo. Chamamos o complexo $(\bigwedge M \otimes N, d_f \otimes 1)$ de complexo de Koszul de f com coeficientes em N, denotamos por $K_\bullet(f, N)$ e seus diferenciais por $d_{f,N}$. A homologia desse complexo é chamada de homologia de Koszul de f com coeficientes em N e é denotada por $H_{\bullet n}(f, N)$.*

Seja M um R-módulo livre de base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Uma função R-linear $f : M \to R$ está unicamente determinada pelos seus valores $x_i = f(e_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Da mesma forma, para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in R$, podemos determinar um único R-homomorfismo tal que $x_i = f(e_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dessa forma, temos a seguinte definição:

Definição 2.5.5. *Dada uma sequência $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de R, encontramos um R-homomorfismo f, como feito acima. Chamamos de complexo de Koszul de x o complexo $K_\bullet(x) := K_\bullet(f)$ e chamamos de homologia de Koszul de x a homologia $H_{\bullet n}(x) = H_{\bullet n}(f)$.*

Definição 2.5.6. *Dada uma sequência $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de R, encontramos um R-homomorfismo f, como feito acima. Chamamos o complexo $K_\bullet(x, N) := K_\bullet(f, N)$ de complexo de Koszul de x com coeficientes em N e a homologia $H_{\bullet n}(x, N) = H_{\bullet n}(f, N)$ desse complexo é chamada de homologia de Koszul de x com coeficientes em N.*

Definição 2.5.7. *Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n)$ uma sequência de elementos num anel R e N um R-módulo. Dizemos que tal sequência é intersecção completa para N se*

$$H_{\bullet n}(x, N) = 0 \quad \forall n > 0 \tag{2.9}$$

Observação 2.5.2. *A definição acima foi retirada da página 157 de Bourbaki [2006] (complètement sécante significa intersecção completa).*

2.6 Geometria algébrica

Seja k um corpo algebricamente fechado de característica zero (por exemplo, $\mathbb{C}$).

Definição 2.6.1. *Chamamos k^n de espaço afim (de dimensão n) e o denotamos por $\mathbb{A}^n$.*

k^n é um k-espaço vetorial, mas, nesse momento, não usaremos esse fato.

Definição 2.6.2. *Seja $S \subset k[x_1, \ldots, x_n]$. Definamos o conjunto de zeros de S como:*

$$\mathcal{V}(S) := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \quad \forall f \in S\}. \tag{2.10}$$

Este conjunto é chamado de variedade algébrica afim associada ao conjunto S (ou simplesmente variedade algébrica). Dizemos que $X \subset \mathbb{A}^n$, é um conjunto algébrico (ou variedade algébrica) se $X = \mathcal{V}(S)$ para algum $S \subset k[x_1, \ldots, x_n]$. Chamamos os polinômios de S de geradores de $\mathcal{V}(S)$.

Se $X = \mathcal{V}(S)$ para algum $S \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ e $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, denotamos por $X(f)$ ou $V(S)(f)$ a variedade algébrica $V(S \cup \{f\})$.

Observação 2.6.1. *Seja $S \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ e I o ideal gerado por S. É fácil ver que $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(I)$. Como $k[x_1, \ldots, x_n]$ é um anel Noetheriano, I é finitamente gerado, ou seja, existem $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Assim, temos $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\{f_1, \ldots, f_m\})$.*

Definição 2.6.3. *Seja R um anel (comutativo) e I um ideal de R. Chamamos de radical de I o conjunto*

$$\sqrt{I} = \{x \in R \mid x^n \in I, \text{ para algum } n \neq 0\}. \tag{2.11}$$

Dizemos que I é radical se $\sqrt{I} = I$.

Definição 2.6.4. *Seja $X \subset \mathbb{A}_n$. Podemos definir o ideal*

$$\mathcal{I}(X) := \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid f(x) = 0, \quad \forall x \in X\} \tag{2.12}$$

chamado de ideal associado a X.

Observação 2.6.2. *Claramente $X \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$, para todo $X \subset \mathbb{A}_n$, e $I \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$, para todo ideal I de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Também podemos concluir que $\mathcal{I}(X)$ é um ideal radical.*

Teorema 2.6.1. *(Teorema dos zeros de Hilbert)*
Seja I um ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$, então $\sqrt{I} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em Humphreys [1998] (primeiro teorema do capítulo 1) e em Tauvel e Yu [2005] (página 132). □

Do teorema acima concluimos que, se I é um ideal radical, então $I = \sqrt{I} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$.

Proposição 2.6.1. *Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade algébrica. Então $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) = X$.*

Demonstração. Claramente, pelas definições de $\mathcal{I}$ e $\mathcal{V}$, $X \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$.
Por outro lado, seja I ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $X = \mathcal{V}(I)$. Então, $I \subset \mathcal{I}(X)$. É fácil ver que isso implica $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) \subset \mathcal{V}(I) = X$.
Portanto, $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) = X$. □

Dessa forma, temos as seguintes correspondências biunívocas:

$$\mathcal{V} : \{\text{ideais radicais de } k[x_1, \ldots, x_n]\} \longrightarrow \{\text{variedades algébricas de } \mathbb{A}^n\} \tag{2.13}$$

$$\mathcal{I} : \{\text{variedades algébricas de } \mathbb{A}^n\} \longrightarrow \{\text{ideais radicais de } k[x_1, \ldots, x_n]\} \tag{2.14}$$

e uma é a inversa da outra.

Ideais primos são exemplos de ideais radicais. Então podemos pensar na correspondência acima restrita aos ideias primos.

Definição 2.6.5. *Uma variedade algébrica X de $\mathbb{A}^n$ é dita irredutível se não existem duas variedades algébricas diferentes de X e não vazias, X_1 e X_2, tais que $X = X_1 \cup X_2$.*

Proposição 2.6.2. *Uma variedade algébrica X é irredutível se e somente se $\mathcal{I}(X)$ é um ideal primo.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada no parágrafo 3 (Algebraic varieties in the affine space) do capítulo 7 (Polynomial and power series rings) de Zariski e Samuel [1960]. □

Ideais maximais são ideais primos. Assim também podemos pensar na correspondência restrita aos ideais maximais.

Proposição 2.6.3. *Seja $a \in \mathbb{A}^n$. Então $\mathcal{I}(\{a\})$ é ideal maximal. Por outro lado, se I é um ideal maximal, existe $a \in \mathbb{A}^n$ tal que $\mathcal{V}(I) = \{a\}$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada na página 6 de Humphreys [1972]. □

Assim, temos as seguinte correspondências biunívoas:

$$\{\text{ideais radicais de } k[x_1, \ldots, x_n]\} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{V}}{\rightleftarrows}} \{\text{variedades algébricas de } \mathbb{A}^n\} \tag{2.15}$$

$$\{\text{ideais primos de } k[x_1, \ldots, x_n]\} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{V}}{\rightleftarrows}} \{\text{variedades algébricas irredutíveis de } \mathbb{A}^n\} \tag{2.16}$$

$$\{\text{ideais maximais de } k[x_1, \ldots, x_n]\} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{V}}{\rightleftarrows}} \{\text{pontos de } \mathbb{A}^n\} \tag{2.17}$$

Proposição 2.6.4. *(i)* $\mathcal{V}(k[x_1,\ldots,x_n]) = \emptyset$ *e* $\mathcal{V}(\emptyset) = k[x_1,\ldots,x_n]$.

(ii) Sejam I *e* J *ideais de* $k[x_1,\ldots,x_n]$. *Temos:* $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I \cap J)$.

(iii) Sejam $\{I_s\}_{s\in S}$ *ideais de* $k[x_1,\ldots,x_n]$. *Temos:* $\bigcap_{s\in S} \mathcal{V}(I_s) = \mathcal{V}\left(\sum_{s\in S} I_s\right)$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada na proposição 11.1.4 de Tauvel e Yu [2005]. □

Pela proposição anterior, concluimos que podemos definir em $\mathbb{A}^n$ uma topologia onde os conjuntos fechados são as variedades algébricas afim. Essa topologia é chamada de *topologia de Zariski*.

Na proposição a seguir, podemos ver algumas características da topologia de Zariski:

Proposição 2.6.5. *(i) Seja* $X \subset \mathbb{A}^n$. *Então o fecho de* X *é* $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$.

(ii) $\mathbb{A}^n$ *é um espaço topológico Noetheriano (ou seja, satisfaz a condição de cadeias descendente) cujos pontos são fechados.*

(iii) Para todo ideal I *de* $k[x_1,\ldots,x_n]$, *o conjunto de componentes irredutíveis de* $\mathcal{V}(I)$ *é finito e é o conjunto das variedades do tipo* $\mathcal{V}(p)$, *onde* p *é um ideal primo minimal de* $k[x_1,\ldots,x_n]$ *que contém* I.

(iv) Todo conjunto algébrico X *pode ser expresso de maneira única como* $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$, *onde cada* X_i *é uma variedade algébrica irredutível e* $X_i \not\subset X_j$, $\forall i \neq j$.

Demonstração. Vide em Tauvel e Yu [2005]:

(i) Proposição 11.2.2,

(ii) Proposição 11.2.3,

(iii) Corolário 11.2.4.
Para a demonstração de (iv) vide proposição 1.5 de Hartshorne [1977].

□

Definição 2.6.6. *Seja* $X \in \mathbb{A}^n$ *um conjunto algébrico afim. Definimos o anel de coordenadas de* X *como*

$$\mathcal{A}(X) := k[x_1,\ldots,x_n]/\mathcal{I}(X). \tag{2.18}$$

Observação 2.6.3. *Se* $X \in \mathbb{A}^n$ *um conjunto algébrico afim, então* $\mathcal{A}(X)$ *é um domínio de integridade. Além disso,* $\mathcal{A}(X)$ *é uma* k*-álgebra finitamente gerada. Por outro lado, qualquer* k*-álgebra finitamente gerada que é um domínio é o anel de coordenadas de alguma variedade algébrica afim. (Vide observação 1.4.6 de Hartshorne [1977]. No exercício 1.5 desse mesmo livro, Hartshorne pede para provar essa observação trocando domínio de integridade por não ter elementos nilpotentes.)*

Definição 2.6.7. *Uma* k*-álgebra associativa, comutativa e finitamente gerada é chamada de* k*-álgebra afim. Uma* k*-álgebra afim é chamada de reduzida se não tem elementos nilpotentes.*

Definição 2.6.8. *Seja* X *uma variedade algébrica afim. Definimos a dimensão de* X *sendo o supremo dos inteiros* m *tais que existe uma cadeia de subconjuntos irredutíveis fechados de* X *distintos* $X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_m$. *Denotamos a dimensão de* X *por* $dim X$.

Definição 2.6.9. *Em um anel* R, *a altura de um ideal primo* p *é o supremo dos inteiros* m *tais que existe uma cadeia de ideais primos distintos* $p_0 \subset p_1 \subset \ldots \subset p_m = p$. *A dimensão (dimensão de Krull) de* R *é o supremo do conjunto das alturas dos ideais primos de* R. *Denotamos a dimensão de* R *por* $dim R$.

Proposição 2.6.6. $dim k[x_1,\ldots,x_n]{=}n$.

Proposição 2.6.7. *Se X é um conjunto algébrico afim, então a dimensão de X é igual a dimensão do anel de coordenadas de X.*

Demonstração. Vide proposição 1.7 de Hartshorne [1977]. □

Definição 2.6.10. *Uma variedade é dita equidimensional se todas suas componentes irredutíveis têm a mesma dimensão.*

Exemplo 2.6.1. *Considere a variedade algébrica $\mathcal{V}(xy, xz) \subset \mathbb{A}^3$. Claramente temos $\mathcal{V}(xy, xz) = = \mathcal{V}(x) \cup \mathcal{V}(y, z)$. Note que os ideais $\langle x \rangle$ e $\langle y, z \rangle$ são primos, então $\mathcal{V}(x)$ e $\mathcal{V}(y, z)$ são irredutíveis. Além disso, dim($\mathcal{A}(\mathcal{V}(X))$)=dim($k[x, y, z]/\langle x \rangle$)=dim($k[y, z]$)=2 e dim($\mathcal{A}(\mathcal{V}(y, z))$)= =dim($k[x, y, z]/\langle y, z \rangle$)=dim($k[x]$)=1. Portanto, a variedade algébrica $\mathcal{V}(xy, xz)$ não é equidimensional.*

2.7 Sequências regulares

Definição 2.7.1. *Seja R um anel e M um R-módulo. Dizemos que $x \in R$ é M-regular (ou regular em M) se $xm \neq 0$ para todo $0 \neq m \in M$.*

Definição 2.7.2. *Seja R um anel e M um R-módulo. Dizemos que uma sequência $x_1, \ldots, x_m$ de elementos de R é uma sequência M-regular se as seguintes duas condições são satisfeitas:*

(i) x_1 *é* M*-regular e* x_i *é* $\left(M / \sum_{l=1}^{i-1} x_l M\right)$*-regular para todo* $i \in \{2, \ldots, m\}$,

(ii) $M / \sum_{l=1}^{m} x_l M \neq 0$.

Observação 2.7.1. *Consultando livros, achei definições diferentes. Alguns autores definem sequência M-regular considerando R-módulos (por exemplo Matsumura [1989], de onde foi tirada a definição acima, ou Eisenbud [1995], notando que a condição ii) acima é equivalente a dizer que $\sum_{l=1}^{m} x_l M \neq M$). Outros definem sequência regular considerando só anéis R, onde sequência regular é uma sequência M-regular com $M = R$ (por exemplo, Lam [1999]). Em Futorny e Ovsienko [2003], a definião é dada considerando k-álgebras afins Λ e, em vez de usar ii), é usada uma afirmação equivalente: x_1 não é invertível em Λ e x_i não é invertível em $\Lambda / < x_1, \ldots, x_{i-1} >$ para todo $i \in \{2, \ldots, m\}$. Como toda k-álgebra afim é um k-módulo e um anel, qualquer um dos livros citados acima podem ser tranquilamente consultados.*

Observação 2.7.2. *A ordem dos elementos em uma sequência regular é importante. Permutando os elementos de uma sequência regular, pode-se obter uma sequência que não é regular. Exemplo: Seja k um corpo e considere $R = M = k[x, y, z]$. A sequência $x(y-1), y, z(y-1)$ é regular pois:*

- *$x(y-1)$ não é divisor de zero pois $k[x, y, z]$ é domínio de integridade,*
- *y não é divisor de zero em $k[x, y, z]/\langle x(y-1) \rangle$ pois se temos $yf = gx(y-1)$, para $f, g \in k[x, y, z]$, então $x(y-1)$ divide f e, consequentemente $f \in \langle x(y-1) \rangle$,*
- *$z(y-1)$ não é divisor de zero em $k[x, y, z]/\langle x(y-1), y \rangle = k[x, y, z]/\langle x, y \rangle \cong k[z]$, que é um domínio de integridade.*
- *$1 \notin \langle x(y-1), y, z(y-1) \rangle$, então $1 \in k[x, y, z]/\langle x(y-1), y, z(y-1) \rangle$ e $k[x, y, z]/\langle x(y-1), y, z(y-1) \rangle \neq 0$.*

Mas $x(y-1), z(y-1), y$ não é uma sequência regular pois $xz(y-1) = z(x(y-1))$, ou seja, $z(y-1)$ é divisor de zero em $k[x, y, z]/\langle x(y-1) \rangle$.

Proposição 2.7.1. *Sejam R um anel Noetheriano e $x_1, \dots, x_m$ uma sequência regular em R. Se R é um anel graduado e cada x_i é homogêneo de grau positivo, então qualquer permutação de $x_1, \dots, x_m$ é também regular.*

Demonstração. Ver teorema 28 em Matsumura [1970] página 102 ou Matsumura [1989] página 127. □

Proposição 2.7.2. *Sejam Λ uma álgebra afim de dimensão n e $x_1, \dots, x_t$ uma sequência de elementos de Λ, onde $1 \leq t \leq n$.*

(i) Se Λ é graduada e $x_1, \dots, x_t$ são homogêneos, então $x_1, \dots, x_t$ é uma sequência regular em Λ se,e somente se, a sequência $x_1, \dots, x_t$ é uma interseção completa em Λ.

(ii) Se Λ é Cohen-Macaulay, então a sequência $x_1, \dots, x_t$ é interseção completa para Λ se, e somente se, a variedade $\mathcal{V}(x_1, \dots, x_t)$ é equidimensional de dimensão $n - t$.

Demonstração. Proposição 2.1 de Futorny e Ovsienko [2003]. □

Observação 2.7.3. *Para detalhes sobre anéis Cohen-Macaulay ver página 134 de Matsumura [1989]. Neste trabalho, só vamos usar o fato que o anel de polinômios é Cohen-Macaulay (teorema 17.7 de Matsumura [1989]).*

Proposição 2.7.3. *Seja $A = k[x_1, \dots, x_n]$ a álgebra de polinômios e $g_1, \dots, g_t \in A$. A sequência $x_1, \dots, x_n, g_1, \dots, g_t$ é uma intersecção completa para A se, e somente se, a sequência $g_1, \dots, g_t$ é uma intersecção completa para $k[x_{r+1}, \dots, x_n]$, onde $g_i(x_{r+1}, \dots, x_n) = g_i(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n)$ para $i \in \{1, \dots, t\}$.*

Demonstração. Lema 2.1 de Futorny e Ovsienko [2003]. □

2.8 Provando equidimensionalidade

Considere $k[x_1, \dots, x_n]$. Sejam $y_1, \dots, y_k$ distintos com $\{y_1, \dots, y_k\} \subset \{x_1, \dots, x_n\}$. A variedade $\mathcal{V}(y_1, \dots, y_k)$ é irredutível e tem dimensão $n - k$, pois:

- o ideal $< y_1, \dots, y_k >$ é primo
- $\mathcal{A}(\mathcal{V}(y_1, \dots, y_k)) = k[x_1, \dots, x_n]/ < y_1, \dots, y_k > \cong k[S]$ onde $S = \{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{y_1, \dots, y_k\}$ e dim$(k[S])$=$n - k$.

Para provarmos que uma variedade é equidimensional, usaremos 3 processos:

1. Isomorfismos: Sejam $V = \mathcal{V}(S), U = \mathcal{V}(R) \subset \mathbb{A}^n$ variedades algébricas. Se V é uma variedade isomórfica a variedade U e U é equidimensional de dimensão m então V é equidimensional de dimensão m. Para provar que V e U são isomórficos basta achar um automorfismo f de $k[x_1, \dots, x_n]$ tal que $f(S) = R$.

2. União de subvariedades: Sejam $V, V_1, \dots, V_k \subset \mathbb{A}^n$ variedades tais que $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$. V é equidimensional de dimensão m se e somente se $V_1, \dots, V_k$ são equidimensionais de dimensão m. Isso ocorre porque toda variedade irredutível contida em algum V_i, $i \in \{1, \dots, k\}$, é uma variedade irredutível de V e toda variedade irredutível de V tem que estar contida em algum V_i (já que é irredutível).

3. Acrescentar variável: Seja $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_k) \subset \mathbb{A}^n$ e $y \in \{x_1, \dots, x_n\}$. Se $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_k, y)$ é equidimensional de dimensão $n - k - 1$, então $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_k)$ é equidimensional de dimensão $n - k$. Esse fato é consequência das proposições 2.7.1 e 2.7.2.

Exemplo 2.8.1. *Sejam $y_1, \dots, y_k, y_{k+1}$ distintos com $\{y_1, \dots, y_k, y_{k+1}\} \subset \{x_1, \dots, x_n\}$. A variedade $\mathcal{V}(y_1, \dots, y_k y_{k+1})$ é equidimensional de dimensão $n - k$ pois:*

$$\mathcal{V}(y_1, \dots, y_k y_{k+1}) = \mathcal{V}(y_1, \dots, y_{k-1}, y_k) \cup \mathcal{V}(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1})$$

Capítulo 3

Subálgebra de Mishchenko-Fomenko

Esse capítulo é baseado em Futorny e Molev [2015] e Molev [2018].

3.1 Definição

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples sobre $\mathbb{C}$. Seja $\{Y_1, \ldots, Y_l\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Podemos definir na álgebra simétrica $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ um colchete de Lie-Poisson $\{\ ,\ \}$. Sabemos que $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_l]$ (álgebra de polinômios nas variáveis $Y_1, \ldots, Y_l$, proposição 2.3.4). Então, para $f, g \in \mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_l]$, defina:

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{l} [Y_i, Y_j] \frac{\partial f}{\partial Y_i} \frac{\partial g}{\partial Y_j} \tag{3.1}$$

Note que $\{Y_i, Y_j\} = [Y_i, Y_j]$ e essa é a única maneira de definir $\{\ ,\ \}$ de forma que isso ocorra.

A subálgebra $\{P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \mid \{x, P\} = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}\}$ de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ é a álgebra de polinômios $\mathfrak{g}$-invariantes de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ e é denotada por $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

Seja $P(Y_1, \ldots, Y_l) \in \mathrm{S}(\mathfrak{g})$ um elemento de grau d. Fixe $\mu \in \mathfrak{g}^*$. Seja z uma variável. Substitua Y_i por $Y_i + z\mu(Y_i)$ em P e expanda o resultado para um polinômio em z,

$$P(Y_1 + z\mu(Y_1), \ldots, Y_l + z\mu(Y_l)) = P_\mu^{(0)} + P_\mu^{(1)} z + \cdots P_\mu^{(d)} z^d \tag{3.2}$$

definindo assim elementos $P_\mu^{(i)} \in \mathrm{S}(\mathfrak{g})$, chamados μ-deslocamentos de P. Denotamos por $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ a subálgebra de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ gerada pelos μ-deslocamentos de todos polinômios $\mathfrak{g}$-invariantes P. A subálgebra $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ é chamada de *subálgebra de deslocamento de argumento* ou *subálgebra de Mishchenko-Fomenko*. Para todo $\mu \in \mathfrak{g}^*$, $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ é comutativa em relação ao colchete de Poisson-Lie (ou seja, para todo $R, S \in \mathrm{S}(\mathfrak{g})$, $\{R, S\} = 0$). Isso é consequência do seguinte lema:

Lema 3.1.1. *Sejam $P_1, \ldots, P_m \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Então, para todo $\mu \in \mathfrak{g}^*$, os polinômios*

$$\{P_{i,\mu}^{(j)} \mid i = 1, \ldots, m \quad e \quad j = 1, \ldots, deg(P_{i,\mu}^{(j)}) - 1\} \tag{3.3}$$

são mutuamente comutativos com respeito ao colchete de Poisson-Lie.

Demonstração. Ver Mishchenko e Fomenko [1978]. □

Definição 3.1.1. *Seja k um corpo algebricamente fechado de característica zero e seja $\mathfrak{g}$ uma k-álgebra de Lie de dimensão finita. Para cada $\mu \in \mathfrak{g}^*$ o subespaço*

$$\mathfrak{g}_\mu = \{x \in \mathfrak{g} \mid \mu([x, y]) = 0 \text{ para todo } y \in \mathfrak{g}\} \tag{3.4}$$

é chamado de estabilizador de μ. O valor mínimo do conjunto $\{dim\mathfrak{g}_\mu : \mu \in \mathfrak{g}^*\}$ é chamado de índice de $\mathfrak{g}$ e é denotado por $ind\mathfrak{g}$. Dizemos que um elemento $\mu \in \mathfrak{g}^*$ é regular se $dim\mathfrak{g}_\mu = ind\mathfrak{g}$.

Se $\mathfrak{g}$ for redutível (por exemplo, semissimples), ind$\mathfrak{g}$ é igual ao rank de $\mathfrak{g}$.

Vamos denotar por $\mathfrak{g}^*_{reg}$o conjunto de todos os elementos regulares de $\mathfrak{g}^*$.

Teorema 3.1.1. *Seja k um corpo algebricamente fechado de característica zero e seja $\mathfrak{g}$ uma k-álgebra de Lie de dimensão finita. Suponha que*

(i) a subálgebra de polinômios $\mathfrak{g}$-invariantes, $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, contém polinômios algebricamente independentes $f_1, \dots, f_l$, com $l = ind\mathfrak{g}$, tais que $\sum_{i=1}^{l} deg f_i = \frac{1}{2}(dim\mathfrak{g} + ind\mathfrak{g}) := b(\mathfrak{g})$ e

(ii) $codim(\mathfrak{g}^* \setminus \mathfrak{g}^*_{reg}) \geq 3$

então, para todo $\mu \in \mathfrak{g}^*_{reg}$, a subalgebra $\overline{A}_\mu$ é uma álgebra de polinômios de dimensão de Krull $b(\mathfrak{g})$ e é uma subálgebra maximal Poisson comutativa de $S(\mathfrak{g})$.

Demonstração. Ver Panyushev e Yakimova [2008]. □

Para álgebras de Lie semissimples, (ii) ocorre e (i) segue do Teorema 7.3.8 de Dixmier [1977]. Então, nesse caso, $\overline{A}_\mu$ é uma subálgebra maximal Poisson comutativa de S($\mathfrak{g}$). Isso já havia sido provado em Tarasov [2002].

Teorema 3.1.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples com dimensão finita. Seja $\mu \in \mathfrak{g}^*$ regular. Se $P_1, \dots, P_n$ ($n = ind\mathfrak{g}$) são geradores algebricamente independentes de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ com graus $d_1, \dots, d_n$, respectivamente, então*

$$\{P^{(j)}_{i,\mu} \mid i = 1, \dots, n \quad e \quad j = 0, 1, \dots, d_j - 1\} \tag{3.5}$$

é um conjunto de geradores algebricamente independentes de $\overline{\mathcal{A}}_\mu$.

Demonstração. Ver [Bolsinov, 1991]. O caso μ regular e $\mathfrak{g}$ semissimples está provado em Mishchenko e Fomenko [1978]. Outra demonstração pode ser vista em Feigin *et al.* [2010]. □

3.2 Problema de Vinberg

A álgebra envolvente universal U($\mathfrak{g}$) de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tem uma filtração natural e a álgebra graduada grU($\mathfrak{g}$) associada a essa filtração é isomórfica a S($\mathfrak{g}$). Se $\mathcal{A}$ é uma subálgebra comutativa de U($\mathfrak{g}$) então gr$\mathcal{A}$ é uma subálgebra Poisson comutativa de S($\mathfrak{g}$). $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ é uma subálgebra Poisson comutativa de S($\mathfrak{g}$), então podemos nos perguntar se existe uma subálgebra comutativa $\mathcal{A}_\mu$ de U($\mathfrak{g}$) tal que gr$\mathcal{A}_\mu = \overline{\mathcal{A}}_\mu$. Esse problema foi proposto por Vinberg em Vinberg [1991], onde ele produz famílias comutativas de elementos de U($\mathfrak{g}$). Soluções positivas para o problema de Vinberg foram dadas em Rybnikov [2006] (para μ regular e semissimples) e em Feigin *et al.* [2010] (para qualquer μ regular).

3.2.1 A solução de Feigin, Frenkel e Toledano-Laredo

A solução do problema de Vinberg apresentada por Feigin, Frenkel e Toledano-Laredo em Feigin *et al.* [2010] usa o *Centro de Feigin-Frenkel*.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples sobre $\mathbb{C}$. Seja $\langle\ ,\ \rangle$ a forma bilinear simétrica invariante chamada *forma de Killing normalizada* que é definida por:

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2h^\vee}\mathrm{tr}(\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y) \tag{3.6}$$

onde $h^\vee$ é o número de Coxeter dual de $\mathfrak{g}$.

A *álgebra de Kac-Moody afim* $\widehat{\mathfrak{g}}$ correspondente a $\mathfrak{g}$ e $\langle\ ,\ \rangle$ é a extensão central

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \tag{3.7}$$

onde $\mathfrak{g}[t,t^{-1}]$ é a álgebra dos polinômios de Laurent em t com coeficientes em $\mathfrak{g}$. Para $X \in \mathfrak{g}$ e $r \in \mathbb{Z}$, escreva $X[r]$ para Xt^r. O colchete de Lie de $\widehat{\mathfrak{g}}$ é definido por

$$[X[r] + Y[s]] = [X,Y][r+s] + r\delta_{r,-s}\langle X,Y\rangle K \qquad X,Y \in \mathfrak{g}, \quad r,s \in \mathbb{Z} \tag{3.8}$$

e o elemento K é central em $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Para todo $\kappa \in \mathbb{C}$, denote por $\mathrm{U}_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}})$ o quociente da álgebra $\mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$ pelo ideal gerado por $K-\kappa$, chamado de *álgebra envolvente universal no nível* κ. Seja I o ideal à esquerda de $\mathrm{U}_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}})$ gerado por $\mathfrak{g}[t]$. O módulo vácuo de nível κ sobre $\widehat{g}$ é o quociente

$$V_\kappa(\mathfrak{g}) = \mathrm{U}_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}})/I. \tag{3.9}$$

Quando $\kappa = -h^\vee$, falamos que $V_\kappa(\mathfrak{g})$ é módulo vácuo de nível crítico.

Definição 3.2.1. *O centro de Feigin-Frenkel é a álgebra definida por:*

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) = \{v \in V_{-h^\vee}(\mathfrak{g}) \mid g[t]v = 0\}. \tag{3.10}$$

Proposição 3.2.1. *O centro de Feigin-Frenkel coincide com a álgebra associativa* $NormI/I$*, onde* I *é o ideal à esquerda de* $U_{h^\vee}(\widehat{\mathfrak{g}})$ *gerado por* $\mathfrak{g}[t]$ *e* $NormI = \{v \in U_{-h^\vee}(\mathfrak{g}) \mid Iv \subset I\}$ *(normalizador de* I *em* $U_{-h^\vee}(\mathfrak{g})$*).*

Demonstração.

- $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \subset \mathrm{Norm}I/I$:

  Seja $v \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$. Então $v = x + I$ onde $x \in \mathrm{U}_\kappa(\widehat{\mathfrak{g}})$. Seja $i \in I$. Temos: $iv = i(x+I) = ix + I = I$. Assim $Iv \subset I$ e $v \in \mathrm{Norm}I/I$.

- $\mathrm{Norm}I/I \subset \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$:

  Seja $v \in \mathrm{Norm}I/I$. Então existe $x \in \mathrm{Norm}I$ tal que $v = x + I$. Temos: $\mathfrak{g}[t]v = \mathfrak{g}[t](x+I) = \mathfrak{g}[t]x + I = I = 0$, pois I é gerado por $\mathfrak{g}[t]$. Portanto, $v \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$.

□

Pelo teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, $V_{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ é isomórfico, como um espaço vetorial, à álgebra envolvente universal $\mathrm{U}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$. A aplicação $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \hookrightarrow \mathrm{U}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$ é um mergulho de álgebras, logo $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ pode ser visto como uma subálgebra de $\mathrm{U}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$. $V_{-h^\vee}$ pode ser munido de uma estrutura de álgebra vertex afim e, dessa forma, $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ é o centro dessa álgebra vertex afim. Isso nos permite concluir que $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ é comutativa. Qualquer elemento de $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ é chamado de *vetor de Segal-Sugawara.*

Seja T a derivação de $\mathrm{U}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$ tal que $T(X[r]) = rX[r-1]$, para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $r < 0$.

Teorema 3.2.1. *(Feigin e Frenkel [1992]) Existem vetores de Segal-Sugawara* $S_1, \ldots, S_n$ *(*$n = \mathrm{ind}\mathfrak{g}$*) tais que*

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) = \mathbb{C}[T^r S_i \mid i = 1, \ldots, n,\ r \geq 0]. \tag{3.11}$$

Demonstração. Os detalhes da prova ficam em Frenkel [2007]. □

A família $S_1, \ldots, S_n$ do teorema anterior é chamada de *conjunto completo de vetores de Segal-Sugawara.*

Considere agora a derivação D de $\mathrm{U}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$ tal que $D(X[r]) = rX[r]$, para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $r < 0$. D define uma graduação na álgebra $\mathrm{U}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$.

Dado $\mu \in \mathfrak{g}^*$ e um elemento $z \in \mathbb{C}$ diferente de 0, a função:

$$\begin{aligned} \varrho_{\mu,z} : \mathrm{U}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]) &\to \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \\ X[r] &\mapsto Xz^r + \delta_{r,-1}\mu(X) \end{aligned} \tag{3.12}$$

é um homomorfismo de álgebras. A imagem do centro de Feigin-Frenkel $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ por $\varrho_{\mu,z}$ é uma álgebra comutativa de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, que não depende de z, e é denotada por A_μ. Se $S \in \mathrm{U}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$ é um elemento de grau d em relação a graduação definida por D, então, considerando que $\varrho_{\mu,z}(S)$ é um polinômio em z^{-1}, podemos definir elementos $S^{(i)} \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ de forma que:

$$\varrho_{\mu,z}(S) = S^{(0)}z^{-d} + \cdots + S^{(d-1)}z^{-1} + S^{(d)}. \tag{3.13}$$

Proposição 3.2.2. *Para todo $\mu \in \mathfrak{g}^*$:*

(i) $\overline{A_\mu} \subset grA_\mu$.

Para todo $\mu \in \mathfrak{g}^*$ regular:

(ii) *a subálgebra A_μ de $U(\mathfrak{g})$ é maximal comutativa,*

(iii) *se $\{S_1, \ldots, S_n\} \subset \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ é um conjunto completo de vetores de Segal-Sugawara, onde S_i tem grau d_i, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, então os elementos $S_k^{(i)}$, onde $k \in \{1, \ldots, n\}$ e $i \in \{0, 1, \ldots, d_k - 1\}$, são geradores algebricamente independentes de A_μ,*

(iv) $grA_\mu = \overline{A_\mu}$.

Demonstração. Ver Feigin *et al.* [2010]. □

3.3 Alguns conceitos

Nessa seção definiremos alguns conceitos e notações que serão necessários para entender alguns geradores do centro de Feigin-Frenkel e da subálgebra A_μ que serão estudados na próxima seção.

Dada uma álgebra associativa com unidade $\mathcal{A}$ e uma matriz $M = (M_{ij})$ $n \times n$ com entradas em $\mathcal{A}$ podemos definir o elemento

$$M = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} \otimes M_{ij} \tag{3.14}$$

em $\mathrm{End}\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{A}$, onde e_{ij} formam a base canônica de $\mathrm{End}\mathbb{C}^n$. E, dados m inteiro positivo e $a \in \{1, \ldots, m\}$, defina

$$M_a = \sum_{i,j=1}^{n} 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(m-a)} \otimes M_{ij} \tag{3.15}$$

em $(\mathrm{End}\mathbb{C}^n)^{\otimes m} \otimes \mathcal{A} = \underbrace{\mathrm{End}\mathbb{C}^n \otimes \cdots \otimes \mathrm{End}\mathbb{C}^n}_{m} \otimes \mathcal{A}$.

Agora considere $\mathbb{C}[S_m]$, a álgebra do grupo simétrico S_m.

Definição 3.3.1. *Chamamos de simetrizador o seguinte elemento de $\mathbb{C}[S_m]$:*

$$h^{(m)} = \frac{1}{m!} \sum_{s \in S_m} s.$$

Definição 3.3.2. *Chamamos de antissimetrizador o seguinte elemento de $\mathbb{C}[S_m]$:*

$$a^{(m)} = \frac{1}{m!} \sum_{s \in S_m} sgn s \cdot s.$$

Sejam $a, b \in \{1, \ldots, m\}$, com $a < b$. Denote por s_{ab} a transposição $(ab) \in S_m$. Defina o seguinte elemento de $(\mathrm{End}\mathbb{C}^n)^{\otimes m}$:

$$P_{ab} = \sum_{i,j=1}^{n} 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(b-a-1)} \otimes e_{ji} \otimes 1^{\otimes(m-b)}. \tag{3.16}$$

Note que $P_{ab}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_a \otimes \cdots \otimes v_b \otimes \cdots \otimes v_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_b \otimes \cdots \otimes v_a \otimes \cdots \otimes v_m$, para todo $v_1 \otimes \cdots \otimes v_a \otimes \cdots \otimes v_b \otimes \cdots \otimes v_m \in \mathbb{C}^{\otimes m}$, pois, se $f_1, \ldots, f_n$ é a base canônica de $\mathbb{C}^n$, $v_a = f_r$ e $v_b = f_s$, temos:

$$\begin{aligned} P_{ab}(v_1 \otimes \cdots \otimes f_r \otimes \cdots \otimes f_s \otimes \cdots \otimes \cdots \otimes v_m) &= \sum_{i,j=1}^{n} v_1 \otimes \cdots \otimes e_{ij}(f_r) \otimes \cdots \otimes e_{ji}(f_s) \otimes \cdots \otimes v_m = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} v_1 \otimes \cdots \otimes \delta_{jr} f_i \otimes \cdots \otimes \delta_{is} f_j \otimes \cdots \otimes v_m = \\ &= v_1 \otimes \cdots \otimes f_s \otimes \cdots \otimes f_r \otimes \cdots \otimes v_m \end{aligned}$$

para todos $r, s \in \{1, \ldots, m\}$.

Podemos definir um homomorfismo de álgebras que vai de $\mathbb{C}[S_m]$ em $(\mathrm{End}\mathbb{C}^n)^{\otimes m}$ e que leva s_{ab} em P_{ab} para toda transposição s_{ab} de S_m. Denotaremos por P_x a imagem de $x \in \mathbb{C}[S_m]$ por esse homomorfismo. Defina $H^{(m)} := P_{h^{(m)}} \in (\mathrm{End}\mathbb{C}^n)^{\otimes m}$ e $A^{(m)} := P_{a^{(m)}} \in (\mathrm{End}\mathbb{C}^n)^{\otimes m}$.

Dado $a \in \{1, \ldots, m\}$, defina a função linear dada por:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_a : (\mathrm{End}\mathbb{C}^n)^{\otimes m} &\to (\mathrm{End}\mathbb{C}^n)^{\otimes m-1} \\ (x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) &\mapsto x_a(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{a-1} \otimes x_{a+1} \otimes \cdots \otimes x_m). \end{aligned}$$

Lembre-se que os elementos x_a pertencem a $\mathrm{End}\mathbb{C}^n$ então podem ser vistos como matrizes $n \times n$ e ter seu traço calculado.

Denotamos por $\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}$ a composta $\mathrm{tr}_1 \circ \cdots \circ \mathrm{tr}_m$.

Dada uma álgebra associativa com unidade U, para $(\mathrm{End}\mathbb{C}^n)^{\otimes m} \otimes \mathrm{U}$, abusaremos da notação e denotaremos $H^{(m)} \otimes 1 \in (\mathrm{End}\mathbb{C}^n)^{\otimes m} \otimes \mathrm{U}$ por $H^{(m)}$, $A^{(m)} \otimes 1 \in (\mathrm{End}\mathbb{C}^n)^{\otimes m} \otimes \mathrm{U}$ por $A^{(m)}$, $\mathrm{tr}_a \otimes 1 : (\mathrm{End}\mathbb{C}^n)^{\otimes m} \otimes \mathrm{U} \to (\mathrm{End}\mathbb{C}^n)^{\otimes (m-1)} \otimes \mathrm{U}$ por tr_a e $\mathrm{tr}_1 \otimes 1 \circ \cdots \circ \mathrm{tr}_m \otimes 1 : (\mathrm{End}\mathbb{C}^n)^{\otimes m} \otimes \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ por $\mathrm{tr}_{1,\ldots,m}$.

Definição 3.3.3. *Uma matriz $M = (M_{ij})$, $n \times n$, com entradas em uma $\mathbb{C}$-álgebra associativa é chamada de matriz de Manin se satisfaz as seguintes relações:*

$$M_{ij}M_{kl} - M_{kl}M_{ij} = M_{kj}M_{il} - M_{il}M_{kj}$$

para todos $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposição 3.3.1. *Seja M uma matriz de Manin. Considere a notação M_a dada em (3.15). M_aM_b denota o produto dos elementos M_a e M_b da álgebra $(\mathrm{End}\mathbb{C}^n)^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}$. Para $m \in \{1, \ldots, n\}$ temos:*

$$tr_{1,\ldots,m} A^{(m)} M_1 \cdots M_m = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n} \sum_{\sigma \in S_m} sgn\sigma \cdot M_{i_{\sigma(1)} i_1} \cdots M_{i_{\sigma(m)} i_m}. \tag{3.17}$$

Além disso, para $m \geq 1$ temos:

$$tr_{1,\ldots,m} H^{(m)} M_1 \cdots M_m = \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_m \le n} \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} \sum_{\sigma \in S_m} M_{i_m i_{\sigma(m)}} \cdots M_{i_1 i_{\sigma(1)}} \tag{3.18}$$

onde α_i é a multiplicidade do índice $i \in \{1, \ldots, n\}$ em $(i_1, \ldots, i_m)$.

Demonstração. Ver proposição 3.2.2. da página 46 de Molev [2018]. □

Dada uma matriz M, definimos o *determinante coluna* de M por:

$$\mathrm{cdet}(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma M_{\sigma(1)1} \cdots M_{\sigma(n)n}. \tag{3.19}$$

Assim temos:

$$\mathrm{cdet}(M) = \mathrm{tr}_{1,\ldots,m} A^{(m)} M_1 \cdots M_m. \tag{3.20}$$

Corolário 3.3.1. *Se M é uma matriz de Manin e u uma variável temos:*

$$cdet(1 + uM) = \sum_{m=0}^{n} u^m tr_{1,\dots,m} A^{(m)} M_1 \cdots M_m.$$

Demonstração. Ver Corolário 3.2.5. da página 48 de Molev [2018]. □

3.4 Tipo A

Nessa seção vamos focar o estudo para as álgebras de Lie de tipo A.

3.4.1 Geradores do centro de Feigin-Frenkel

Considere o seguinte homormorfismo sobrejetor:

$$\begin{aligned} p : \mathfrak{gl}_n &\to \mathfrak{sl}_n \\ X &\mapsto X - \frac{1}{n}(\mathrm{tr}X)Id \end{aligned}$$

p induz homomorfismos sobrejetores $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_n) \to \mathrm{U}(\mathfrak{sl}_n)$ e $S(\mathfrak{gl}_n) \to S(\mathfrak{sl}_n)$. Esses homormorfismos nos permitem encontrar para qualquer resultado para $\mathfrak{gl}_n$ um resultado correspondente para $\mathfrak{sl}_n$. Assim, em vez de trabalharmos com as álgebras $\mathfrak{sl}_n$ iremos trabalhar com $\mathfrak{gl}_n$.

Dada uma forma bilinear simétrica não degenerada B de $\mathfrak{gl}_n$, temos que $\mathfrak{gl}_n \cong \mathfrak{gl}_n^*$ através do isomorfismo f que leva $x \in \mathfrak{gl}_n$ em $f(x) \in \mathfrak{gl}_n^*$, onde $f(x)$ é o funcional linear que leva $y \in \mathfrak{gl}_n$ em $B(x, y)$. Dessa forma, veremos todos $\mu \in \mathfrak{gl}_n^*$ como matrizes $n \times n$.

Denote por E_{ij}, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, os elementos da base canônica de $\mathfrak{gl}_n$. Considere a forma bilinear invariante em $\mathfrak{gl}_n$ dada por:

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(XY) - \frac{1}{n}\mathrm{tr}X\mathrm{tr}Y \tag{3.21}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{gl}_n$. Note que o kernel dessa forma é gerado pelo elemento $E_{11} + \cdots + E_{nn}$ e a restrição dela à subálgebra $\mathfrak{sl}_n$ é dada por:

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(XY) \tag{3.22}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{sl}_n$.

O colchete de Lie da álgebra de Kac-Moody afim $\widehat{\mathfrak{gl}_n} = \mathfrak{gl}_n[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ é definido por:

$$[E_{ij}[r], E_{kl}[s]] = \delta_{kj}E_{il}[r+s] - \delta_{il}E_{kj}[r+s] + r\delta_{r,-s}K\left(\delta_{kj}\delta_{il} - \frac{\delta_{ij}\delta_{kl}}{n}\right) \tag{3.23}$$

onde o elemento K é central em $\widehat{\mathfrak{gl}_n}$. O nível crítico $-n$ coincide com o negativo do número de Coxeter dual para $\mathfrak{sl}_n$. Com a forma bilinear acima, o centro de Feigin-Frenkel $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$ coincide com a subálgebra dos elementos $\mathfrak{gl}_n[t]$-invariantes e com a subálgebra dos elementos $\mathfrak{sl}_n[t]$-invariantes do módulo vácuo:

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}_n}) = \{v \in V_{-n}(\mathfrak{gl}_n) \mid \mathfrak{gl}_n[t]v = 0\} = \{v \in V_{-n}(\mathfrak{gl}_n) \mid \mathfrak{sl}_n[t]v = 0\}. \tag{3.24}$$

Iremos trabalhar com a álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{gl}_n} \oplus \mathbb{C}\tau$ onde o elemento τ satisfaz as seguintes relações:

$$[\tau, X[r]] = -rX[r-1] \quad , \quad [\tau, K] = 0. \tag{3.25}$$

Para todo $r \in \mathbb{Z}$, combine os elementos $E_{ij}[r]$ na matriz $E[r]$ da seguinte maneira:

$$E[r] = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} \otimes E_{ij}[r] \in \mathrm{End}\mathbb{C}^n \otimes \mathrm{U} \tag{3.26}$$

onde e_{ij} formam a base canônica de $\mathrm{End}\mathbb{C}^n$ e U é a álgebra envolvente universal de $\widehat{\mathfrak{gl}_n} \oplus \mathbb{C}\tau$.

Dado $a \in \{1, \dots, m\}$, defina o seguinte elemento:

$$E[r]_a = \sum_{i,j=1}^{n} 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(m-a)} \otimes E_{ij}[r] \tag{3.27}$$

pertencente a álgebra $(\mathrm{End}\mathbb{C}^n)^{\otimes m} \otimes \mathrm{U}$.

Proposição 3.4.1. *A matriz $\varepsilon = \tau + E[-1] = (\delta_{ij}\tau + E_{ij}[-1])$ com as entradas em $\widehat{\mathfrak{gl}_n} \oplus \mathbb{C}\tau$ é uma matriz de Manin.*

Demonstração. Ver lema 7.1.2. da página 108 de Molev [2018]. □

Defina os elementos $\phi_{ma}, \psi_{ma}, \theta_{ma} \in \mathrm{U}(t^{-1}\mathfrak{gl}_n[t^{-1}])$ pelas expansões:

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)}(\tau + E[-1])_1 \cdots (\tau + E[-1])_m = \phi_{m0}\tau^m + \phi_{m1}\tau^{m-1} + \dots + \phi_{mm}, \tag{3.28}$$

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m} H^{(m)}(\tau + E[-1])_1 \cdots (\tau + E[-1])_m = \psi_{m0}\tau^m + \psi_{m1}\tau^{m-1} + \dots + \psi_{mm}, \tag{3.29}$$

$$\mathrm{tr}(\tau + E[-1])^m = \theta_{m0}\tau^m + \theta_{m1}\tau^{m-1} + \dots + \theta_{mm}. \tag{3.30}$$

O determinante-coluna de $\tau + E[-1]$ é dado por:

$$\mathrm{cdet}(\tau + E[-1]) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma(\tau + E[-1])_{\sigma(1)1} \cdots (\tau + E[-1])_{\sigma(n)n} \tag{3.31}$$

e expandindo isso para um polinômio em τ temos:

$$\mathrm{cdet}(\tau + E[-1]) = \tau^n + \phi_1\tau^{n-1} + \dots + \phi_n. \tag{3.32}$$

Assim, como $\tau + E[-1]$ é uma matriz de Manin, temos:

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)}(\tau + E[-1])_1 \cdots (\tau + E[-1])_m = \mathrm{cdet}(\tau + E[-1])$$

e, consequentemente, $\phi_{na} = \phi_a$ para todo $a \in \{1, \dots, n\}$.

Do corolário (3.3.1) temos a expansão

$$\mathrm{cdet}(u + \tau + E[-1]) = \sum_{m=0}^{n} u^{n-m} tr_{1,\dots,m} A^{(m)}(\tau + E[-1]_1) \cdots (\tau + E[-1]_m) \tag{3.33}$$

onde u é uma variável. Substituindo τ por $u + \tau$ em (3.32), obtemos as seguintes relações:

$$\phi_{ma} = \binom{n-a}{m-a}\phi_a \tag{3.34}$$

para todos $a, m \in \{1, \dots, n\}$, com $a \leq m$. Em particular, $\phi_m = \phi_{mm}$ para todo $m \in \{1, \dots, n\}$.

Teorema 3.4.1. *Os elementos ϕ_m, ψ_{ma} e θ_{ma} pertencem ao centro de Feigin-Frenkel $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$. Além disso, os conjuntos $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, $\{\psi_{11}, \dots, \psi_{nn}\}$ e $\{\theta_{11}, \dots, \theta_{nn}\}$ são conjuntos completos de vetores de Segal-Sugawara para $\mathfrak{gl}_n$.*

Demonstração. Ver Chervov e Molev [2009]. □

Observação 3.4.1. *Note que para $X[r] \in U = U(\widehat{\mathfrak{gl}_n} \oplus \mathbb{C}\tau)$ temos:*

$$\tau X[r] = X[r]\tau + [\tau, X[r]] = X[r] - rX[r-1].$$

Em particular:

$$\tau E_{ij}[-1] = E_{ij}[-1]\tau + E_{ij}[-2].$$

Exemplo 3.4.1. *Em $\mathfrak{gl}_2$:*

(i) Vamos calcular ϕ_1 e ϕ_2.

$$\begin{aligned} cdet(\tau + E[-1]) &= (\tau + E[-1])_{11}(\tau + E[-1])_{22} - (\tau + E[-1])_{21}(\tau + E[-1])_{12} = \\ &= (\tau + E_{11}[-1])(\tau + E_{22}[-1]) - E_{21}[-1]E_{12}[-1] = \\ &= \tau^2 + E_{11}[-1]\tau + \tau E_{22}[-1] + (E_{11}[-1]E_{22}[-1] - E_{21}[-1]E_{12}[-1]) = \\ &= \tau^2 + (E_{11}[-1] + E_{22}[-1])\tau + \\ &+ (E_{22}[-2] + E_{11}[-1]E_{22}[-1] - E_{21}[-1]E_{12}[-1]) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= E_{11}[-1] + E_{22}[-1] \\ \phi_2 &= E_{22}[-2] + E_{11}[-1]E_{22}[-1] - E_{21}[-1]E_{12}[-1] \end{aligned}$$

(ii) Vamos calcular θ_{11} e θ_{22}.

Para $m = 1$ temos:

$$tr(\tau + E[-1]) = tr(Id)\tau + trE[-1]$$

Então:

$$\theta_{11} = trE[-1]$$

Para $m = 2$ temos:

$$\begin{aligned} tr(\tau + E[-1])^2 &= tr(\tau^2 + E[-1]\tau + \tau E[-1] + E[-1]^2) = \\ &= tr(\tau^2 + 2E[-1]\tau + E[-2] + E[-1]^2) = \\ &= tr(Id)\tau^2 + 2trE[-1]\tau + (trE[-2] + trE[-1]^2) \end{aligned}$$

Então:

$$\theta_{22} = trE[-2] + trE[-1]^2$$

(iii) Vamos calcular ψ_{11} e ψ_{22}.

Para $m = 1$ temos:

$$\begin{aligned} tr_1 H^{(1)}(\tau E[-1])_1 &= tr \sum_{1 \le i \le 2} \frac{1}{\alpha_i!} \sum_{\sigma \in S_1} (\tau + E[-1])_{ii} = tr(\tau + E[-1])_{11} + tr(\tau + E[-1])_{22} = \\ &= 2\tau + E_{11}[-1] + E_{22}[-1] \end{aligned}$$

Então:

$$\psi_{11} = E_{11}[-1] + E_{22}[-1]$$

Para $m = 2$ temos:

$$
\begin{aligned}
&tr_{1,2}H^{(2)}(\tau + E[-1])_1(\tau + E[-1])_2 = \\
&= \sum_{\substack{(i_1,i_2)=(1,1),\\(1,2),(2,2)}} \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!} \sum_{Id,(12)} (\tau + E[-1])_{i_2 i_{\sigma(2)}} (\tau + E[-1])_{i_1 i_{\sigma(1)}} = \\
&= \frac{1}{2}(\tau + E[-1])_{11}(\tau + E[-1])_{11} + \frac{1}{2}(\tau + E[-1])_{11}(\tau + E[-1])_{11} + \\
&+ (\tau + E[-1])_{22}(\tau + E[-1])_{11} + (\tau + E[-1])_{21}(\tau + E[-1])_{12} + \\
&+ \frac{1}{2}(\tau + E[-1])_{22}(\tau + E[-1])_{22} + \frac{1}{2}(\tau + E[-1])_{22}(\tau + E[-1])_{22} = \\
&= (\tau + E_{11}[-1])(\tau + E_{11}[-1]) + (\tau + E_{22}[-1])(\tau + E_{11}[-1]) + \\
&+ E_{21}[-1]E_{12}[-1] + (\tau + E_{22}[-1])(\tau + E_{22}[-1]) = \\
&= \tau^2 + 2E_{11}[-1]\tau + E_{22}[-2] + E_{11}[-1]^2 + \tau^2 + E_{22}[-1]\tau + \\
&+ E_{11}[-1]\tau + E_{11}[-2] + E_{22}[-1]E_{11}[-1] + E_{21}[-1]E_{12}[-1] + \\
&+ \tau^2 + 2E_{22}[-1]\tau + E_{22}[-2] + E_{22}[-1]^2
\end{aligned}
$$

Então:

$$\psi_{22} = 2E_{22}[-2] + E_{11}[-1]^2 + E_{11}[-2] + E_{22}[-1]E_{11}[-1] + E_{21}[-1]E_{12}[-1] + E_{22}[-1]^2$$

Exemplo 3.4.2. *Em $\mathfrak{gl}_3$:*

(i) Vamos calcular ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3.

$$
\begin{aligned}
&cdet(\tau + E[-1]) = \\
&= (\tau + E_{11}[-1])(\tau + E_{22}[-1])(\tau + E_{33}[-1]) - E_{21}[-1]E_{12}[-1](\tau + E_{33}[-1]) - \\
&- E_{31}[-1](\tau + E_{22}[-1])E_{13}[-1] - (\tau + E_{11}[-1])E_{32}[-1]E_{23}[-1] + \\
&+ E_{21}[-1]E_{32}[-1]E_{13}[-1] + E_{31}[-1]E_{12}[-1]E_{23}[-1] = \\
&= \tau^3 + E_{11}[-1]\tau^2 + \tau E_{22}[-1]\tau + \tau^2 E_{33}[-1] + E_{11}[-1]E_{22}[-1]\tau + E_{11}[-1]\tau E_{33}[-1] + \\
&+ \tau E_{22}[-1]E_{33}[-1] - E_{21}[-1]E_{12}[-1]\tau - E_{31}[-1]\tau E_{13}[-1] - \tau E_{32}[-1]E_{23}[-1] + \\
&+ (E_{11}[-1]E_{22}[-1]E_{33}[-1] - E_{21}[-1]E_{12}[-1]E_{33}[-1] - E_{31}[-1]E_{22}[-1]E_{13}[-1] - \\
&- E_{11}[-1]E_{32}[-1]E_{23}[-1] + E_{21}[-1]E_{32}[-1]E_{13}[-1] + E_{31}[-1]E_{12}[-1]E_{23}[-1]) = \\
&= \tau^3 + (E_{11}[-1] + E_{22}[-1] + E_{33}[-1])\tau^2 + \\
&+ (E_{22}[-2] + 2E_{33}[-2] + E_{11}[-1]E_{22}[-1] + E_{11}[-1]E_{33}[-1] + E_{22}[-1]E_{33}[-1] - \\
&- E_{21}[-1]E_{12}[-1] - E_{31}[-1]E_{13}[-1] - E_{32}[-1]E_{23}[-1])\tau + \\
&+ (2E_{33}[-1] + E_{11}[-1]E_{33}[-2] + E_{22}[-2]E_{33}[-1] + E_{22}[-1]E_{33}[-2] - \\
&- E_{31}[-1]E_{13}[-2] - E_{32}[-2]E_{23}[-1] - E_{32}[-1]E_{23}[-2] + \\
&+ E_{11}[-1]E_{22}[-1]E_{33}[-1] - E_{21}[-1]E_{12}[-1]E_{33}[-1] - E_{31}[-1]E_{22}[-1]E_{13}[-1] - \\
&- E_{11}[-1]E_{32}[-1]E_{23}[-1] + E_{21}[-1]E_{32}[-1]E_{13}[-1] + E_{31}[-1]E_{12}[-1]E_{23}[-1])
\end{aligned}
$$

Então:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= E_{11}[-1] + E_{22}[-1] + E_{33}[-1] \\
\phi_2 &= E_{22}[-2] + 2E_{33}[-2] + E_{11}[-1]E_{22}[-1] + E_{11}[-1]E_{33}[-1] + E_{22}[-1]E_{33}[-1] - \\
&- E_{21}[-1]E_{12}[-1] - E_{31}[-1]E_{13}[-1] - E_{32}[-1]E_{23}[-1] \\
\phi_3 &= 2E_{33}[-1] + E_{11}[-1]E_{33}[-2] + E_{22}[-2]E_{33}[-1] + E_{22}[-1]E_{33}[-2] - \\
&- E_{31}[-1]E_{13}[-2] - E_{32}[-2]E_{23}[-1] - E_{32}[-1]E_{23}[-2] + \\
&+ E_{11}[-1]E_{22}[-1]E_{33}[-1] - E_{21}[-1]E_{12}[-1]E_{33}[-1] - E_{31}[-1]E_{22}[-1]E_{13}[-1] - \\
&- E_{11}[-1]E_{32}[-1]E_{23}[-1] + E_{21}[-1]E_{32}[-1]E_{13}[-1] + E_{31}[-1]E_{12}[-1]E_{23}[-1]
\end{aligned}$$

(ii) Vamos calcular θ_{11}, θ_{22} e θ_{33}.

Note que as contas para θ_{ma} não dependem de n. Então θ_{11} e θ_{22} são iguais aos calculados para $\mathfrak{gl}_2$.

$$\begin{aligned}
\theta_{11} &= trE[-1] \\
\theta_{22} &= trE[-2] + trE[-1]^2
\end{aligned}$$

Assim, só temos que calcular θ_{33}. Para $m = 3$ temos:

$$\begin{aligned}
&tr(\tau + E[-1])^3 = \\
&= tr(\tau^3 + \tau E[-1]\tau + E[-1]\tau^2 + E[-1]^2\tau + \tau^2 E[-1] + \tau E[-1]^2 + E[-1]\tau E[-1] + E[-1]^3) = \\
&= tr(\tau^3 + E[-1]\tau^2 + E[-2]\tau + E[-1]\tau^2 + E[-1]^2\tau + E[-1]\tau^2 + 2E[-2]\tau + \\
&+ 2E[-3] + E[-1]^2\tau + E[-1]E[-2] + E[-2]E[-1] + E[-1]^2\tau + E[-1]E[-2] + E[-1]^3) = \\
&= 3\tau^3 + 3trE[-1]\tau^2 + (3trE[-2] + 3trE[-1]^2)\tau + \\
&+ (2trE[-3] + 2trE[-1]E[-2] + trE[-2]E[-1] + trE[-1]^3)
\end{aligned}$$

Então:

$$\theta_{33} = 2trE[-3] + 2trE[-1]E[-2] + trE[-2]E[-1] + trE[-1]^3$$

3.4.2 Geradores de A_μ

Aplicando o homomorfismo $\varrho_{\mu,z}$ de (3.12) nos elementos de $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$ do teorema 3.4.1 e fazendo a expansão dos resultados como em (3.13), obtemos elementos de $A_\mu \subset \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_n)$. Para dar formas explícitas para esses elementos, usaremos a álgebra tensorial $(\mathrm{End}\mathbb{C}^n)^{\otimes m} \otimes \mathrm{U}$, onde U agora denotará a álgebra de operadores diferenciais cujos elementos são somas finitas com a seguinte forma:

$$\sum_{k,l \geq 0} u_{kl} z^{-k} \partial_z^l u_{kl} \in \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_n)$$

com $u_{kl} \in \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_n)$.

Podemos estender o homomorfismo $\varrho_{\mu,z}$ de (3.12) para $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{gl}_n} \oplus \mathbb{C}\tau$, sendo ∂_z a imagem do elemento $-\tau$.

Como na subseção anterior, temos:

$$E = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} \otimes E_{ij} \in \mathrm{End}\mathbb{C}^n \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{gl}_n). \tag{3.35}$$

Defina os polinômios (dependentes de μ) $\phi_{ma}(z)$, $\psi_{ma}(z)$ e $\theta_{ma}(z)$ em z^{-1} com coeficientes em

$U(\mathfrak{gl}_n)$ pelas expansões:

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m} A^{(m)} M_1 \dots M_m = \phi_{m0}(z)\partial_z^m + \phi_{m1}(z)\partial_z^{m-1} + \cdots + \phi_{mm}(z), \tag{3.36}$$

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,m} H^{(m)} M_1 \dots M_m = \psi_{m0}(z)\partial_z^m + \psi_{m1}(z)\partial_z^{m-1} + \cdots + \psi_{mm}(z), \tag{3.37}$$

$$\mathrm{tr} M^m = \theta_{m0}(z)\partial_z^m + \theta_{m1}(z)\partial_z^{m-1} + \cdots + \theta_{mm}(z), \tag{3.38}$$

onde $M = -\partial_z + \mu + Ez^{-1} = (-\delta_{ij}\partial_z + \mu(E_{ij}) + E_{ij}z^{-1})$.

Além disso, analogamente ao que fizemos na seção anterior, definimos polinômios $\phi_a(z)$ pela expansão do determinante coluna

$$\mathrm{cdet} M = \phi_0(z)\partial_z^m + \phi_1(z)\partial_z^{m-1} + \cdots + \phi_n(z). \tag{3.39}$$

Também temos:

$$\phi_{ma}(z) = \binom{n-a}{m-a}\phi_a(z), \tag{3.40}$$

para todo $a, m \in \{1, \dots, n\}$ com $a \leq m$, e $\phi_{mm} = \phi_m(z) = \phi_{nm}$ para todo $m \in \{1, \dots, n\}$.

Dando uma notação para os coeficientes dos polinômios $\phi_m(z)$, $\psi_{mm}(z)$ e $\theta_{mm}(z)$ obtemos:

$$\phi_m(z) = \phi_m^{(0)} z^{-m} + \cdots + \phi_m^{(m-1)} z^{-1} + \phi_m^{(m)}, \tag{3.41}$$

$$\psi_m(z) = \psi_m^{(0)} z^{-m} + \cdots + \psi_m^{(m-1)} z^{-1} + \psi_m^{(m)}, \tag{3.42}$$

$$\theta_m(z) = \theta_m^{(0)} z^{-m} + \cdots + \theta_m^{(m-1)} z^{-1} + \theta_m^{(m)}. \tag{3.43}$$

Teorema 3.4.2. *Dado $\mu \in \mathfrak{gl}_n$, todos os coeficientes dos polinômios $\phi_m(z)$, $\psi_{ma}(z)$ e $\theta_{ma}(z)$ pertencem à subálgebra comutativa A_μ de $U(\mathfrak{gl}_n)$. Além disso, os conjuntos $\{\phi_m^{(k)} \mid 0 \leq k < m \leq n\}$, $\{\psi_{mm}^{(k)} \mid 0 \leq k < m \leq n\}$ e $\{\theta_{mm}^{(k)} \mid 0 \leq k < m \leq n\}$ são conjuntos geradores de A_μ. Se μ é regular, esses conjuntos são formados por elementos algebricamente independentes.*

Demonstração. É consequência do teorema 3.4.1 e de resultados de Feigin *et al.* [2010] e de Rybnikov [2006]. □

Observação 3.4.2. *Como $-\partial_z$ é imagem de τ por $\varrho_{\mu,z}$, pela observação 3.4.1 temos:*

$$-\partial_z X z^r = -X z^r \partial_z - r X z^{r-1} - r\delta_{r-1,-1}\mu(X)$$

para todo $X \in \mathfrak{gl}_n$. Em particular:

$$-\partial_z E_{ij} z^{-1} = -E_{ij} z^{-1}\partial_z + E_{ij} z^{-2}.$$

Além disso, μ comuta com ∂_z e com Xz^r, para todo $X \in \mathfrak{gl}_n$.

Exemplo 3.4.3. *Em $\mathfrak{gl}_2$:*

(i) Vamos calcular $\phi_1^{(0)}$, $\phi_2^{(0)}$ e $\phi_2^{(1)}$.

$$\begin{aligned}
&cdet(-\partial_z + \mu + Ez^{-1}) = \\
&= (-\partial_z + \mu + Ez^{-1})_{11}(-\partial_z + \mu + Ez^{-1})_{22} - (-\partial_z + \mu + Ez^{-1})_{21}(-\partial_z + \mu + Ez^{-1})_{12} \\
&= (-\partial_z + \mu(E_{11}) + E_{11}z^{-1})(-\partial_z + \mu(E_{22}) + E_{22}z^{-1}) - (\mu(E_{21}) + E_{21}z^{-1})(\mu(E_{12}) + E_{12}z^{-1}) = \\
&= \partial_z^2 + (\mu(E_{11}) + E_{11}z^{-1} + \mu(E_{22}) + E_{22}z^{-1})\partial_z + \\
&+ (E_{22}z^{-2} + (\mu(E_{11}) + E_{11}z^{-1})(\mu(E_{22}) + E_{22}z^{-1}) - (\mu(E_{21}) + E_{21}z^{-1})(\mu(E_{12}) + E_{12}z^{-1}))
\end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
&\phi_1 = \mu(E_{11}) + E_{11}z^{-1} + \mu(E_{22}) + E_{22}z^{-1} \\
&\phi_2 = E_{22}z^{-2} + (\mu(E_{11}) + E_{11}z^{-1})(\mu(E_{22}) + E_{22}z^{-1}) - (\mu(E_{21}) + E_{21}z^{-1})(\mu(E_{12}) + E_{12}z^{-1})
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
\phi_1^{(0)} &= E_{11} + E_{22}\\
\phi_2^{(0)} &= E_{22} + E_{11}E_{22} + E_{21}E_{12}\\
\phi_2^{(0)} &= E_{11}\mu(E_{22}) + \mu(E_{11})E_{22} - E_{21}\mu(E_{12}) - \mu(E_{21})E_{12}.
\end{aligned}$$

Poderiamos ter também aplicado o homomorfismo $\varrho_{\mu,z}$ nos ϕ_1 e ϕ_2 obtidos no exemplo 3.4.1 e feito a expansão (3.13), assim teriamos:

$$\begin{aligned}
\varrho_{\mu,z}(\phi_1) = \varrho_{\mu,z}(E_{11}[-1] + E_{22}[-1]) &= E_{11}z^{-1} + \mu(E_{11}) + E_{22}z^{-1} + \mu(E_{22}) =\\
&= (E_{11} + E_{22})z^{-1} + (\mu(E_{11}) + \mu(E_{22}))
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\varrho_{\mu,z}(\phi_2) = \varrho_{\mu,z}(E_{22}[-2] + E_{11}[-1]E_{22}[-1] - E_{21}[-1]E_{12}[-1]) =\\
&= E_{22}z^{-2} + (E_{11}z^{-1} + \mu(E_{11}) + (E_{22}z^{-1} + \mu(E_{22})) - (E_{21}z^{-1} + \mu(E_{21}))(E_{12}z^{-1} + \mu(E_{12})) =\\
&= (E_{22} + E_{11}E_{22} - E_{21}E_{12})z^{-2} + (E_{11}\mu(E_{22}) + \mu(E_{11})E_{22} - E_{21}\mu(E_{12}) - \mu(E_{21})E_{12})z^{-1} +\\
&+ (\mu(E_{11})\mu(E_{22}) - \mu(E_{21})\mu(E_{12}))
\end{aligned}$$

obtendo o mesmo resultado anterior.

(ii) Vamos calcular $\theta_1^{(0)}$, $\theta_2^{(0)}$ e $\theta_2^{(1)}$.

Para $m = 1$ temos:

$$tr(-\partial_z + \mu + Ez^{-1}) = -tr(Id)\partial_z + tr\mu + trEz^{-1}$$

Então:

$$\theta_{11}(z) = tr\mu + trEz^{-1}$$

O que implica que:

$$\theta_{11}^{(0)} = trE$$

Para $m = 2$ temos:

$$\begin{aligned}
tr(-\partial_z + \mu + Ez^{-1})^2 &= tr(\partial_z^2 - 2\mu\partial_z - 2Ez^{-1}\partial_z + \mu^2 + 2\mu Ez^{-1} + E^2z^{-2} + Ez^{-2}) =\\
&= tr(Id)\partial_z^2 + tr(-2\mu - 2Ez^{-1})\partial_z + tr(\mu^2 + 2\mu Ez^{-1} + E^2z^{-2} + Ez^{-2})
\end{aligned}$$

Então:

$$\theta_{22}(z) = (trE^2 + trE)z^{-2} + 2tr\mu Ez^{-1} + tr\mu^2$$

O que implica que:

$$\begin{aligned}
\theta_{22}(0) &= trE^2 + trE\\
\theta_{22}(1) &= 2tr\mu E
\end{aligned}$$

Exemplo 3.4.4. *Em $\mathfrak{gl}_3$:*

Vamos calcular $\theta_{11}^{(0)}$, $\theta_{22}^{(0)}$, $\theta_{22}^{(1)}$, $\theta_{33}^{(0)}$, $\theta_{33}^{(1)}$ e $\theta_{33}^{(2)}$. Note que para calcular $\theta_{mm}^{(k)}$ não usamos n, então

$\theta_{11}^{(0)}$, $\theta_{22}^{(0)}$ e $\theta_{22}^{(1)}$ para $\mathfrak{gl}_3$ são os mesmos de $\mathfrak{gl}_2$:

$$\begin{aligned}\theta_{11}^{(0)} &= trE\\ \theta_{22}(0) &= trE^2 + trE\\ \theta_{22}(1) &= 2tr\mu E\end{aligned}$$

Falta calcular $\theta_{33}^{(0)}$, $\theta_{33}^{(1)}$ e $\theta_{33}^{(2)}$.

Aplicando $\varrho_{\mu,z}$ em θ_{33} do exemplo 3.4.2, temos:

$$\begin{aligned}\varrho_{\mu,z}(\theta_{33}) &= \varrho_{\mu,z}(2trE[-3] + 2trE[-1]E[-2] + trE[-2]E[-1] + trE[-1]^3) =\\ &= 2trEz^{-3} + 2trE^2z^{-3} + 2tr\mu Ez^{-2} + trE^2z^{-3} + tr\mu Ez^{-2} + trE^3z^{-3}+\\ &+ 3tr\mu E^2z^{-2} + 3tr\mu^2Ez^{-1} + tr\mu^3\end{aligned}$$

pois, por exemplo, temos:

$$\begin{aligned}trE[-1]E[-2] &= tr\left(\sum_{i,j=1}^{2} e_{ij}\otimes E_{ij}[-1]\right)\left(\sum_{k,l=1}^{2} e_{kl}\otimes E_{kl}[-2]\right) =\\ &= tr\left(\sum_{i,j,k,l=1}^{2} e_{ij}e_{kl}\otimes E_{ij}[-1]E_{kl}[-2]\right) =\\ &= tr\left(\sum_{i,j,l=1}^{2} e_{il}\otimes E_{ij}[-1]E_{jl}[-2]\right) =\\ &= \left(\sum_{i,j=1}^{2} E_{ij}[-1]E_{ji}[-2]\right)\end{aligned}$$

e

$$\varrho_{\mu,z}(trE[-1]E[-2]) = \left(\sum_{i,j=1}^{2} E_{ij}E_{ji}z^{-3}\right) + \left(\sum_{i,j=1}^{2} \mu(E_{ij})E_{ji}z^{-2}\right) = trE^2z^{-3} + tr\mu Ez^{-2}$$

Assim concuimos que:

$$\begin{aligned}\theta_{33}^{(0)} &= 2trE + 3trE^2 + trE^3\\ \theta_{33}^{(1)} &= 3tr\mu E + 3tr\mu E^2\\ \theta_{33}^{(2)} &= 3tr\mu^2E\end{aligned}$$

3.4.3 Geradores de A_μ algebricamente independentes

Dada uma forma bilinear simétrica não degenerada B de $\mathfrak{gl}_n$, temos que $\mathfrak{gl}_n \cong \mathfrak{gl}_n^*$ através do isomorfismo f que leva $x \in \mathfrak{gl}_n$ em $f(x) \in \mathfrak{gl}_n^*$, onde $f(x)$ é o funcional linear que leva $y \in \mathfrak{gl}_n$ em $B(x, y)$. Dessa forma, veremos todos $\mu \in \mathfrak{gl}_n^*$ como matrizes $n \times n$.

Seja $\mu \in \mathfrak{gl}_n$. Suponha que os diferentes autovalores de μ são $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ e que a forma de Jordan de μ é dada pelos blocos de Jordan $J_{\alpha_j^{(i)}}(\lambda_i)$ de tamanhos $\alpha_1^{(i)} \geq \alpha_2^{(i)} \geq \ldots \geq \alpha_{s_i}^{(i)} \geq 1$. Denote por $\alpha^{(i)}$ o diagrama de Young cuja j-ésima linha possui $\alpha_j^{(i)}$ caixas (quadrados) e denote por $|\alpha^{(i)}|$ o número total de caixas em $\alpha^{(i)}$.

Defina agora outro diagrama de Young γ tal que sua l-ésima linha tem γ_l caixas, onde:

$$\gamma_l = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j \geq l+1} \alpha_j^{(i)}$$

ou seja, γ_l é a soma do número de caixas que estão abaixo da l-ésima linha de todos diagramas $\alpha^{(i)}$.

Seja Γ o diagrama de Young cuja k-ésima linha tem $n-k+1$ caixas. Preencha Γ com os geradores $\phi_m^{(k)}$ de A_μ de forma que a j-ésima caixa da i-ésima linha tenha o gerador $\phi_{n-j+1}^{(n-i-j+1)}$. Assim temos:

$$\widehat{\Gamma} := \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
\phi_n^{(n-1)} & \phi_{n-1}^{(n-2)} & \cdots & \phi_2^{(1)} & \phi_1^{(0)} \\
\hline
\phi_n^{(n-2)} & \phi_{n-1}^{(n-3)} & \cdots & \phi_2^{(0)} & \\
\cline{1-4}
\vdots & \vdots & \ddots & & \\
\cline{1-2}
\phi_n^{(1)} & \phi_{n-1}^{(0)} & & & \\
\cline{1-2}
\phi_n^{(0)} & & & & \\
\cline{1-1}
\end{array}$$

Note que o diagrama γ está contido em Γ, ou seja, a quantidade de linhas de γ é menor ou igual à quantidade de linhas de Γ e a quantidade de caixas na i-ésima linha de γ é menor ou igual à quantidade de caixas da i-ésima linha de Γ. Assim podemos definir o diagrama Γ/γ que é Γ sem as caixas que também estão presentes em γ. Da mesma forma que preenchemos Γ podemos preencher Γ/γ, ou seja, na j-ésima caixa da i-ésima linha colocamos o gerador $\phi_{n-j+1}^{n-i-j+1}$. Denote esse diagrama preenchido por $\widehat{\Gamma}/\gamma$.

Teorema 3.4.3. *Os elementos $\phi_m^{(k)}$ que aparecem em $\widehat{\Gamma}/\gamma$ são geradores algebricamente independentes da subálgebra A_μ. Além disso, a subálgebra A_μ é a quantização de $\overline{A_\mu}$, ou seja, $grA_\mu = \overline{A_\mu}$.*

Demonstração. Esse é o teorema principal de Futorny e Molev [2015]. $\square$

Exemplo 3.4.5. *Seja μ regular. Então μ só possui um bloco de Jordan para cada autovalor, ou seja, os diagramas α^i só têm uma linha. Assim o diagrama γ não possui nenhuma linha, é vázio. Portanto todos geradores $\phi_m^{(k)}$ que aparecem em $\widehat{\Gamma}$ são algebricamente independentes.*

Exemplo 3.4.6. *Seja μ uma matrix escalar, ou seja, μ tem n blocos de Jordan de tamanho 1 para seu único autovalor. Assim, γ tem $n-j$ caixas na sua j-ésima linha, $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Portanto:*

$$\widehat{\Gamma}/\gamma = \begin{array}{ccccc}
 & & & & \boxed{\phi_1^{(0)}} \\
 & & & \boxed{\phi_2^{(0)}} & \\
 & & \iddots & & \\
 & \boxed{\phi_{n-1}^{(0)}} & & & \\
\boxed{\phi_n^{(0)}} & & & &
\end{array}$$

e $\phi_1^{(0)}, \ldots, \phi_n^{(0)}$ são geradores algebricamente independentes.

Exemplo 3.4.7. *Seja μ a matriz abaixo:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

onde λ_1, λ_2 e λ_3 são distintos. Então temos para λ_1 três blocos de Jordan de tamanho 1, para λ_2 um bloco de Jordan de tamanho 2 e para para λ_3 dois blocos de Jordan de tamanho 1. Assim:

$$\gamma = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

e

$$\widehat{\Gamma}/\gamma = \begin{array}{ccccccc} & & & \phi_4^{(3)} & \phi_3^{(2)} & \phi_2^{(1)} & \phi_1^{(0)} \\ & \phi_6^{(3)} & \phi_5^{(3)} & \phi_4^{(2)} & \phi_3^{(1)} & \phi_2^{(0)} & \\ \phi_7^{(4)} & \phi_6^{(3)} & \phi_5^{(2)} & \phi_4^{(1)} & \phi_3^{(0)} & & \\ \phi_7^{(3)} & \phi_6^{(2)} & \phi_5^{(1)} & \phi_4^{(0)} & & & \\ \phi_7^{(2)} & \phi_6^{(1)} & \phi_5^{(0)} & & & & \\ \phi_7^{(1)} & \phi_6^{(0)} & & & & & \\ \phi_7^{(0)} & & & & & & \end{array}$$

Portanto, os elementos da forma $\phi_m^{(k)}$ que aparecem no diagrama acima são geradores algebricamente independente de A_μ.

3.5 Tipo B e D

Nessa seção vamos focar o estudo para as álgebras de Lie de tipo B e D.

Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_N$, com $N = 2n+1$ (tipo B, $n \geq 1$) ou $N = 2n$ (tipo D, $n \geq 3$), a álgebra de Lie ortogonal. $\mathfrak{o}_N$ pode ser vista como uma subálgebra de $\mathfrak{gl}_N$, gerada pelos elementos $F_{ij} := E_{ij} - E_{j'i'}$, onde $i' = N - i + 1$. Note que $F_{ij} = -F_{j'i'}$.

3.5.1 Geradores do centro de Feigin-Frenkel

O número de Coxeter dual para a álgebra de Lie ortogonal é $h^\vee = N - 2$. Assim, a forma de Killing normalizada é dada por

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{tr} XY$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{o}_N$.

Considere a álgebra de Kac-Moody afim $\widehat{\mathfrak{o}_N} = \mathfrak{o}_N[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$. Denote por $F_{ij}[r]$ os elementos $F_{ij}t^r$, para todo $r \in \mathbb{Z}$. O colchete de $\widehat{\mathfrak{o}_N}$ é definido como:

$$\begin{aligned}[F_{ij}[r], F_{kl}[s]] =& \delta_{kj}F_{il}[r+s] - \delta_{il}F_{kj}[r+s] - \delta_{ki'}F_{j'l}[r+s] + \delta_{j'l}F_{ki'}[r+s] + \\ &+ r\delta_{r,-s}K(\delta_{kj}\delta_{il} - \delta_{ki'}\delta_{j'l})\end{aligned} \tag{3.44}$$

onde K é um elemento central.

Para todo $r \in \mathbb{Z}$ defina o seguinte elemento:

$$F[r] = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes F_{ij}[r] \tag{3.45}$$

pertencente a $\mathrm{End}\mathbb{C}^n \otimes \mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{o}_n})$.

Para $a, m \in \{1, \ldots, N\}$, com $a \leq m$, defina o elemento:

$$F[r]_a = \sum_{i,j=1}^{N} 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(m-a)} \otimes F_{ij}[r] \tag{3.46}$$

pertencente a $(\mathrm{End}\mathbb{C}^n)^{\otimes m} \otimes \mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{o}_n})$.

Para $N = 2n$ par, também definiremos o elemento *Pfaffian*:

$$\mathrm{Pf}F[-1] = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \mathrm{sgn}\sigma \cdot \prod_{i=1}^{n} F_{\sigma(2i-1)\sigma(2i)'}[-1] \tag{3.47}$$

pertencente a álgebra envolvente universal $\mathrm{U}(t^{-1}\mathfrak{o}_N[t^{-1}])$.

Observação 3.5.1. *Em álgeba linear, dada uma matriz $A = (a_{ij})$ antissimétrica (i.e. $A = -A^t$, onde A^t é a transposta de A) com entradas em um corpo k fechado de característica 0, seu determinante pode ser escrito como o quadrado de um polinômio nas entradas das matrizes com coeficientes inteiros. Ou seja, existe $p \in k[a_{ij} : 1 \leq i, j \leq n]$ tal que $detA = p^2$. Esse polinômio p recebe o nome de Pfaffian de A. O Pfaffian de A é dado por:*

$$PfF[-1] = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} sgn\sigma \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(2i-1)\sigma(2i)} \tag{3.48}$$

Assim, o elemento Pfaffian definido acima é uma definição análoga a usada em álgebra linear mas para as matrizes de $End\mathbb{C}^n \otimes U(\widehat{\mathfrak{o}_n})$.

Exemplo 3.5.1. *Vamos calcular $PfF[-1]$ para $n = 2$.*

Temos:

$$\begin{aligned}S_4 =& \{1, (12), (13), (14), (23), (24), (34), (13)(12), (14)(12), (12)(13), (14)(13), (12)(14), (13)(14),\\ &(24)(23), (23)(24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (14)(13)(12), (13)(14)(12), (14)(12)(13),\\ &(12)(14)(13), (13)(12)(14), (12)(13)(14)\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
PfF[-1] &= \frac{1}{2^2 2!}\sum_{\sigma\in S_4} sgn\sigma\cdot F_{\sigma(1)\sigma(2)'}[-1]F_{\sigma(3)\sigma(4)'}[-1] = \\
&= \frac{1}{8}(F_{13}[-1]F_{31}[-1] - F_{24}[-1]F_{31}[-1] - F_{33}[-1]F_{11}[-1] - F_{43}[-1]F_{34}[-1] - \\
&- F_{12}[-1]F_{21}[-1] - F_{11}[-1]F_{33}[-1] - F_{13}[-1]F_{42}[-1] + F_{22}[-1]F_{11}[-1] + \\
&+ F_{21}[-1]F_{34}[-1] + F_{34}[-1]F_{21}[-1] + F_{33}[-1]F_{44}[-1] + F_{44}[-1]F_{33}[-1] + \\
&+ F_{43}[-1]F_{12}[-1] + F_{12}[-1]F_{43}[-1] + F_{11}[-1]F_{22}[-1] + F_{24}[-1]F_{42}[-1] + \\
&+ F_{31}[-1]F_{13}[-1] + F_{42}[-1]F_{24}[-1] - F_{22}[-1]F_{44}[-1] - F_{21}[-1]F_{12}[-1] - \\
&- F_{31}[-1]F_{24}[-1] - F_{34}[-1]F_{43}[-1] - F_{42}[-1]F_{13}[-1] - F_{44}[-1]F_{22}[-1]) = \\
&= \frac{1}{8}(F_{13}[-1]F_{31}[-1] - F_{24}[-1]F_{31}[-1] - F_{13}[-1]F_{42}[-1] + F_{24}[-1]F_{42}[-1]) + \\
&+ \frac{1}{8}(-F_{12}[-1]F_{21}[-1] + F_{34}[-1]F_{21}[-1] + F_{12}[-1]F_{43}[-1] - F_{34}[-1]F_{43}[-1]) + \\
&+ \frac{1}{8}(F_{11}[-1]F_{22}[-1] - F_{11}[-1]F_{33}[-1] - F_{44}[-1]F_{22}[-1] + F_{44}[-1]F_{33}[-1]) + \\
&+ \frac{1}{8}(F_{31}[-1]F_{13}[-1] - F_{31}[-1]F_{24}[-1] - F_{42}[-1]F_{13}[-1] + F_{42}[-1]F_{24}[-1]) + \\
&+ \frac{1}{8}(-F_{21}[-1]F_{12}[-1] + F_{21}[-1]F_{34}[-1] + F_{43}[-1]F_{12}[-1] - F_{43}[-1]F_{34}[-1]) + \\
&+ \frac{1}{8}(F_{22}[-1]F_{11}[-1] - F_{22}[-1]F_{44}[-1] - F_{33}[-1]F_{11}[-1] + F_{33}[-1]F_{44}[-1]) = \\
&= \frac{1}{2}(F_{13}[-1]F_{31}[-1] - F_{12}[-1]F_{21}[-1] + F_{11}[-1]F_{22}[-1] + F_{31}[-1]F_{13}[-1] - \\
&- F_{21}[-1]F_{12}[-1] + F_{22}[-1]F_{11}[-1])
\end{aligned}
$$

Por (3.52), temos:

$$
\begin{aligned}
F_{31}[-1]F_{13}[-1] &= F_{13}[-1]F_{31}[-1] + F_{33}[-2] - F_{11}[-2] \\
F_{21}[-1]F_{12}[-1] &= F_{12}[-1]F_{21}[-1] + F_{22}[-2] - F_{11}[-2] \\
F_{22}[-1]F_{11}[-1] &= F_{11}[-1]F_{22}[-1]
\end{aligned}
$$

e

$$F_{33} = -F_{3'3'} = -F_{22}.$$

Portanto:

$$Pf[-1] = F_{13}[-1]F_{31}[-1] - F_{12}[-1]F_{21}[-1] + F_{11}[-1]F_{22}[-1] - F_{22}[-2].$$

Proposição 3.5.1. *O elemento $PfF[-1]$ pertence ao centro de Feigin-Frenkel $\mathfrak{z}(\widehat{o}_{2n})$.*

Demonstração. Ver proposição 8.1.4. da página 122 de Molev [2018]. □

Iremos trabalhar com a álgebra de Lie estendida $\widehat{\mathfrak{o}_N}\oplus\mathbb{C}\tau$ onde o elemento τ satisfaz as seguintes relações:

$$[\tau, X[r]] = -rX[r-1] \quad , \quad [\tau, K] = 0. \tag{3.49}$$

Defina a seguinte constante

$$\gamma_m N = \frac{N+m-2}{N+2m-2} \tag{3.50}$$

Considere o módulo vácuo no nível crítico $V_{-h^\vee}(\mathfrak{o}_N) \cong \mathrm{U}(t^{-1}\mathfrak{o}_N[t^{-1}])$. Defina os elementos ϕ_{ma}

de $V_{-h^\vee}(\mathfrak{o}_N)$ através da seguinte expansão:

$$\gamma_m N \mathrm{tr}_{1,\dots,m} H^{(m)}(\tau + F[-1])_1 \cdots (\tau + F[-1])_m = \phi_{m0}\tau^m + \phi_{m1}\tau^{m-1} + \cdots + \phi_{mm} \tag{3.51}$$

onde $\tau + F[-1] = (\delta_{ij}\tau + F_{ij}[-1])$.

Proposição 3.5.2. *$\tau + F[-1]$ é uma matriz de Manin.*

Demonstração. Ver lema 8.1.5. da página 123 de Molev [2018]. □

Teorema 3.5.1. *Todos elementos ϕ_{ma} pertencem ao centro de Feigin-Frenkel $\mathfrak{z}(\widehat{o}_n)$.*

Demonstração. Ver Molev [2013]. □

Teorema 3.5.2. *$\{\phi_{22}, \phi_{44}, \dots, \phi_{2n2n}\}$ é um conjunto completo de vetores de Segal-Sugawara para $\mathfrak{o}_{2n+1}$.*

$\{\phi_{22}, \phi_{44}, \dots, \phi_{2n-22n-2}, PfF[-1]\}$é um conjunto completo de vetores de Segal-Sugawara para $\mathfrak{o}_{2n}$.

Demonstração. Ver Molev [2013]. □

3.6 Tipo C

Nessa seção vamos focar o estudo para as álgebras de Lie de tipo C.

Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_N = \mathfrak{sp}_{2n}$ a álgebra de Lie simplética (tipo C). $\mathfrak{sp}_N$ pode ser vista como uma subálgebra de $\mathfrak{gl}_N$, gerada pelos elementos $F_{ij} := E_{ij} - \epsilon_i\epsilon_j E_{j'i'}$, onde $i' = N - i + 1$ e:

$$\epsilon_i := \begin{cases} 1, \text{ se } & i \in \{1, \dots, n\} \\ -1, \text{ se } & i \in \{n+1, \dots, N\} \end{cases}$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, N\}$.

3.6.1 Geradores do centro de Feigin-Frenkel

O número de Coxeter dual para a álgebra de Lie ortogonal é $h^\vee = n + 1$. Assim, a forma de Killing normalizada é dada por

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr} XY$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{sp}_{2n}$.

Considere a álgebra de Kac-Moody afim $\widehat{\mathfrak{sp}_{2n}} = \mathfrak{sp}_{2n}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$. Denote por $F_{ij}[r]$ os elementos $F_{ij}t^r$, para todo $r \in \mathbb{Z}$. O colchete de $\widehat{\mathfrak{sp}_{2n}}$ é definido como:

$$\begin{aligned}[F_{ij}[r], F_{kl}[s]] =& \delta_{kj}F_{il}[r+s] - \delta_{il}F_{kj}[r+s] - \epsilon_i\epsilon_j(\delta_{ki'}F_{j'l}[r+s] + \delta_{j'l}F_{ki'}[r+s]) + \\ &+ 2r\delta_{r,-s}K(\delta_{kj}\delta_{il} - \epsilon_i\epsilon_j\delta_{ki'}\delta_{j'l})\end{aligned} \tag{3.52}$$

onde K é um elemento central.

Para todo $r \in \mathbb{Z}$ defina o seguinte elemento:

$$F[r] = \sum_{i,j=1}^{2n} e_{ij} \otimes F_{ij}[r] \tag{3.53}$$

pertencente a $\mathrm{End}\mathbb{C}^{2n} \otimes \mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{sp}_{2n}})$.

Para $a, m \in \{1, \ldots, 2n\}$, com $a \leq m$, defina o elemento:

$$F[r]_a = \sum_{i,j=1}^{2n} 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(m-a)} \otimes F_{ij}[r] \tag{3.54}$$

pertencente a $(\mathrm{End}\mathbb{C}^{2n})^{\otimes m} \otimes \mathrm{U}(\widehat{\mathfrak{sp}_{2n}})$.

Iremos trabalhar com a álgebra de Lie estendida $\widehat{\mathfrak{sp}_{2n}} \oplus \mathbb{C}\tau$ onde o elemento τ satisfaz as seguintes relações:

$$[\tau, X[r]] = -rX[r-1] \quad , \quad [\tau, K] = 0. \tag{3.55}$$

Defina a seguinte constante

$$\gamma_m(-2n) = \frac{2n - m + 2}{2(n - m + 1)} \tag{3.56}$$

Considere o módulo vácuo no nível crítico $V_{-h^\vee}(\mathfrak{sp}_{2n}) \cong \mathrm{U}(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}])$. Defina os elementos ϕ_{ma} de $V_{-h^\vee}(\mathfrak{sp}_{2n})$ através da seguinte expansão:

$$\gamma_m(-2n)\mathrm{tr}_{1,\ldots,m} H^{(m)}(\tau + F[-1])_1 \cdots (\tau + F[-1])_m = \phi_{m0}\tau^m + \phi_{m1}\tau^{m-1} + \cdots + \phi_{mm} \tag{3.57}$$

onde $\tau + F[-1] = (\delta_{ij}\tau + F_{ij}[-1])$.

Proposição 3.6.1. *$\tau + F[-1]$ é uma matriz de Manin.*

Demonstração. Ver lema 8.3.1. da página 135 de Molev [2018]. □

Teorema 3.6.1. *Seja $n \geq m$. Então todos elementos ϕ_{ma} pertencem ao centro de Feigin-Frenkel $\mathfrak{z}(\widehat{sp}_{2n})$.*

Demonstração. Ver Molev [2013]. □

Teorema 3.6.2. *$\{\phi_{22}, \phi_{44}, \ldots, \phi_{2n2n}\}$ é um conjunto completo de vetores de Segal-Sugawara para $\mathfrak{sp}_{2n}$.*

Demonstração. Ver Molev [2013]. □

3.7 U($\mathfrak{g}$) é livre sobre A_μ?

Definição 3.7.1. *Uma álgebra U é chamada de álgebra PBW se qualquer elemento de U pode ser escrito de forma única como uma combinação linear de monômios ordenados em alguns geradores fixados de U.*

Definição 3.7.2. *Uma PBW álgebra U é chamada de filtrada especial se sua álgebra graduada $gr(U)$ é uma álgebra de polinômios.*

Exemplo 3.7.1. *Pelo teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt temos que toda álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie de dimensão finita é uma álgebra filtrada especial.*

Teorema 3.7.1. *Sejam U uma álgebra filtrada especial e $g_1, \ldots, g_t \in U$ elementos mutuamente comutativos. Denote por $\overline{g_i}$ a imagem de g_i em $gr(U)$, $i \in \{1, \ldots, t\}$. Se $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_t}$ é uma intersecção completa para $gr(U)$, então U é livre como $k[g_1, \ldots, g_t]$-módulo à esquerda (ou à direita).*

Demonstração. Ver Futorny e Ovsienko [2003]. □

Uma consequência desse teorema é que U($\mathfrak{g}$) é livre sobre seu centro.

Se os geradores $P_{i,\mu}^{(j)}$ (como em (3.5)) de $\overline{A_\mu}$ formarem uma sequência regular, pelo teorema acima e pela proposição 2.7.2 temos que, se existir A_μ tal que $\mathrm{gr}(A_\mu) = \overline{A_\mu}$, então U($\mathfrak{g}$) é um A_μ-módulo livre. Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ e μ regular semissimples, isso é discutido na observação 3.4 de Panyushev e Yakimova [2008].

Teorema 3.7.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie redutível e μ regular, então os geradores de $\overline{A_\mu}$ formam uma sequência regular.*

Demonstração. Ver teorema 1.2 de Moreau [2018]. $\square$

Capítulo 4

Subálgebras de Gelfand-Tsetlin

4.1 Definição

Definição 4.1.1. *Seja $\mathfrak{gl}_n$ a álgebra de Lie linear geral (tipo A), que consiste das matrizes $n \times n$, com base canônica $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. Para $1 \leq m \leq n$, considere $\mathfrak{gl}_m$ a álgebra de Lie gerada por $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq m\}$. Assim temos:*

$$\mathfrak{gl}_1 \subset \mathfrak{gl}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{gl}_n$$

e:

$$U(\mathfrak{gl}_1) \subset U(\mathfrak{gl}_2) \subset \ldots \subset U(\mathfrak{gl}_n).$$

Denote o centro de $U(\mathfrak{gl}_m)$ por Z_m para todo $m \in \{1, \ldots, n\}$. A subálgebra de Gelfand-Tsetlin Γ de $U(\mathfrak{gl}_n)$ é definida como a subálgebra gerada por $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$.

Teorema 4.1.1. *Para $m \in \{1, \ldots, n\}$, o centro Z_m é uma álgebra polinomial em m variáveis $\{\lambda_{mj} \mid j = 1, 2, \ldots, m\}$ com*

$$\lambda_{mj} = \sum_{t_1, \ldots, t_m \in 1, \ldots, i} E_{t_1 t_2} E_{t_2 t_3} \cdots E_{t_{j-1} t_j} E_{t_j, t_1}$$

Além disso, a subálgebra Γ é uma álgebra de polinômios nas $\frac{n(n+1)}{2}$ variáveis $\{\lambda_{ij} \mid 1 \leq j \leq i \leq n\}$.

Demonstração. Ver página 169 de Zelobenko [1973]. □

Seja $\overline{\lambda_{ij}}$ a imagem de λ_{ij} em $\mathrm{gr}(\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_n))$.

Definição 4.1.2. *A variedade de Gelfand-Tsetlin para $\mathfrak{gl}_n$ é a variedade algébrica:*

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{gl}_n} := \mathcal{V}(\{\overline{\lambda_{ij}} \mid i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, i\}) \subset k^{n^2}$$

Teorema 4.1.2. *A variedade de Gelfand-Tsetlin para $\mathfrak{gl}_n$ é equidimensional de dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$.*

Demonstração. Ver demonstração em Ovsienko [2003]. □

4.2 Relação com subálgebras de Mishchenko-Fomenko

Sejam $\lambda, \mu \in \mathfrak{g}^*$, com μ regular e λ não, e $u \in \mathbb{C}$. Em Vinberg [2014] e Molev e Yakimova [2017] são discutidos o limite de $\overline{A}_{\lambda+u\mu}$ para u tendendo a 0. Para $\mathfrak{g}$ do tipo A, o limite é a álgebra graduada da álgebra de Gelfand-Tsetlin. Para o tipo C, podemos definir uma álgebra cuja graduação é o limite de $\overline{A}_{\lambda+u\mu}$ para u tendendo a 0 e a chamaremos de álgebra de Gelfand-Tsetlin (para o tipo C). Os geradores dessa álgebra podem ser encontrados em Molev e Yakimova [2017] e trabalharemos com eles na próxima seção.

4.3 Subálgebras de Gelfand-Tsetlin para o tipo C

Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_N = \mathfrak{sp}_{2n}$ a álgebra linear simplética. $\mathfrak{sp}_n$ pode ser vista como uma subálgebra de $\mathfrak{gl}_N$, gerada pelos elementos $F_{ij} := E_{ij} - \epsilon_i\epsilon_j E_{j'i'}$, onde $i' = N - i + 1$ e:

$$\epsilon_i := \begin{cases} 1, \text{ se } & i \in \{1, \dots, n\} \\ -1, \text{ se } & i \in \{n+1, \dots, N\} \end{cases}$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, N\}$.

Proposição 4.3.1. *Considere $F = (F_{ij})$, mas, abusando da notação, aqui F_{ij} representa a imagem de F_{ij} em $S(\mathfrak{sp}_{2\mathfrak{n}})$. Considere também o polinômio característico:*

$$det(u + F) = u^{2n} + \phi_2 u^{2n-2} + \cdots + \phi_{2n}. \tag{4.1}$$

Os coeficientes $\phi_2, \dots, \phi_{2n}$ são geradores algebricamente independentes da álgebra de $\mathfrak{sp}_{2n}$-invariantes $S(\mathfrak{sp}_{2n})^{\mathfrak{sp}_{2n}}$.

Demonstração. Página 29 e 30 de Molev [2018]. □

Exemplo 4.3.1. *Para $\mathfrak{sp}_2$ temos:*

$$F_{11} = E_{11} - E_{22}, \quad F_{12} = 2E_{12}, \quad F_{21} = 2E_{21}, \quad F_{22} = E_{22} - E11 = -F_{11} \tag{4.2}$$

$$det(u + F) = det\left(uId + \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & -F_{11} \end{pmatrix}\right) = (u + F_{11})(u - F_{11}) - F_{12}F_{21} = u^2 + (-F_{11}^2 - F_{12}F_{21})$$

Portanto, $S(\mathfrak{sp}_2)^{\mathfrak{sp}_2}$ é gerada por $\phi_2 = -F_{11}^2 - F_{12}F_{21}$.

Exemplo 4.3.2. *Para $\mathfrak{sp}_4$ temos:*

$$\begin{aligned} F_{11} = E_{11} - E_{44} = -F_{44}, \quad & F_{12} = E_{12} - E_{34} = -F_{34}, \quad F_{13} = E_{13} + E_{24} = F_{24}, \\ F_{14} = E_{14} + E_{14} = 2E_{14}, \quad & F_{21} = E_{21} - E43 = -F_{43}, \quad F_{22} = E_{22} - E_{33} = -F_{33}, \\ F_{23} = E_{23} + E_{23} = 2E_{23}, \quad & F_{31} = E_{31} + E_{42} = F_{42}, \quad F_{32} = E_{32} + E_{32} = 2E_{32}, \\ & F_{41} = E_{41} + E_{41} = 2E_{41} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
det(u+F) &= det\begin{pmatrix} u+F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & u+F_{22} & F_{23} & F_{13} \\ F_{31} & F_{32} & u-F_{22} & -F_{12} \\ F_{41} & F_{31} & -F_{21} & u-F_{11} \end{pmatrix} \\
&= (u+F_{11})det\begin{pmatrix} u+F_{22} & F_{23} & F_{13} \\ F_{32} & u-F_{22} & -F_{12} \\ F_{31} & -F_{21} & u-F_{11} \end{pmatrix} - F_{12}det\begin{pmatrix} F_{21} & F_{23} & F_{13} \\ F_{31} & u-F_{22} & -F_{12} \\ F_{41} & -F_{21} & u-F_{11} \end{pmatrix} \\
&+ F_{13}det\begin{pmatrix} F_{21} & u+F_{22} & F_{13} \\ F_{31} & F_{32} & -F_{12} \\ F_{41} & F_{31} & u-F_{11} \end{pmatrix} - F_{14}det\begin{pmatrix} F_{21} & u+F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & u-F_{22} \\ F_{41} & F_{31} & -F_{21} \end{pmatrix} \\
&= (u+F_{11})(u^3 - F_{11}u^2 - F_{22}^2u - F_{13}F_{31}u - F_{23}F_{32}u - F_{12}F_{21}u+ \\
&+ F_{22}^2F_{11} - F_{23}F_{12}F_{31} - F_{13}F_{32}F_{21} + F_{13}F_{22}F_{31} + F_{23}F_{32}F_{11} - F_{22}F_{12}F_{21}) \\
&- F_{12}(F_{21}u^2 - F_{21}F_{22}u - F_{21}F_{11}u - F_{13}F_{41}u - F_{23}F_{31}u+ \\
&+ F_{21}F_{22}F_{11} - F_{23}F_{12}F_{41} - F_{13}F_{31}F_{21} + F_{13}F_{22}F_{41} + F_{23}F_{31}F_{11} - F_{21}F_{12}F_{21}) \\
&+ F_{13}(-F_{31}u^2 + F_{21}F_{32}u - F_{12}F_{41}u + F_{31}F_{11}u - F_{22}F_{31}u- \\
&- F_{21}F_{32}F_{11} - F_{22}F_{12}F_{41} + F_{13}F_{31}^2 - F_{13}F_{32}F_{41} + F_{22}F_{31}F_{11} + F_{21}F_{12}F_{31}) \\
&- F_{14}(F_{41}u^2 + F_{31}F_{21}u - F_{21}F_{31}u- \\
&- F_{21}F_{32}F_{21} - F_{22}^2F_{41} + F_{23}F_{31}^2 - F_{23}F_{32}F_{41} + F_{22}F_{31}F_{21} + F_{21}F_{22}F_{31}) \\
&\overset{*}{=} u^4 + (-F_{11}^2 - F_{22}^2 - 2F_{12}F_{21} - 2F_{13}F_{31} - F_{23}F_{32} - F_{14}F_{41})u^2 \\
&+ F_{11}F_{22}^2F_{11} - F_{11}F_{23}F_{12}F_{31} - F_{11}F_{13}F_{32}F_{21} + F_{11}F_{13}F_{22}F_{31} + F_{11}F_{23}F_{32}F_{11}- \\
&- F_{11}F_{22}F_{12}F_{21} - F_{12}F_{21}F_{22}F_{11} + F_{12}F_{23}F_{12}F_{41} + F_{12}F_{13}F_{31}F_{21} - F_{12}F_{13}F_{22}F_{41}- \\
&- F_{12}F_{23}F_{31}F_{11} + F_{12}F_{21}F_{12}F_{21} - F_{13}F_{21}F_{32}F_{11} - F_{13}F_{22}F_{12}F_{41} + F_{13}^2F_{31}^2- \\
&- F_{13}^2F_{32}F_{41} + F_{13}F_{22}F_{31}F_{11} + F_{13}F_{21}F_{12}F_{31} + F_{14}F_{21}F_{32}F_{21} + F_{14}F_{22}^2F_{41}- \\
&- F_{14}F_{23}F_{31}^2 + F_{14}F_{23}F_{32}F_{41} - F_{14}F_{22}F_{31}F_{21} - F_{14}F_{21}F_{22}F_{31} \\
&\overset{*}{=} u^4 + (-F_{11}^2 - F_{22}^2 - 2F_{12}F_{21} - 2F_{13}F_{31} - F_{23}F_{32} - F_{14}F_{41})u^2+ \\
&+ F_{11}^2F_{22}^2 + F_{12}^2F_{21}^2 + F_{13}^2F_{31}^2 + F_{11}^2F_{23}F_{32} + F_{12}^2F_{23}F_{41} - F_{13}^2F_{32}F_{41} + F_{14}F_{21}^2F_{32}+ \\
&+ F_{14}F_{22}^2F_{41} - F_{14}F_{23}F_{31}^2 - 2F_{11}F_{12}F_{21}F_{22} - 2F_{11}F_{12}F_{23}F_{31} - 2F_{11}F_{13}F_{21}F_{32}+ \\
&+ 2F_{11}F_{13}F_{22}F_{31} + 2F_{12}F_{13}F_{21}F_{31} - 2F_{12}F_{13}F_{22}F_{41} - 2F_{14}F_{21}F_{22}F_{31} + F_{14}F_{23}F_{32}F_{41}
\end{aligned}
$$

(Lembre-se que estamos fazendo essas contas em $S(\mathfrak{sp}_4)$, então os F_{ij}'s comutam entre si.)*

Portanto, $S(\mathfrak{sp}_4)^{\mathfrak{sp}_4}$ é gerada por:

$$
\begin{aligned}
\phi_2 &= -F_{11}^2 - F_{22}^2 - 2F_{12}F_{21} - 2F_{13}F_{31} - F_{23}F_{32} - F_{14}F_{41} \\
\phi_4 &= F_{11}^2F_{22}^2 + F_{12}^2F_{21}^2 + F_{13}^2F_{31}^2 + F_{11}^2F_{23}F_{32} + F_{12}^2F_{23}F_{41} - F_{13}^2F_{32}F_{41} + F_{14}F_{21}^2F_{32}+ \\
&+ F_{14}F_{22}^2F_{41} - F_{14}F_{23}F_{31}^2 - 2F_{11}F_{12}F_{21}F_{22} - 2F_{11}F_{12}F_{23}F_{31} - 2F_{11}F_{13}F_{21}F_{32}+ \\
&+ 2F_{11}F_{13}F_{22}F_{31} + 2F_{12}F_{13}F_{21}F_{31} - 2F_{12}F_{13}F_{22}F_{41} - 2F_{14}F_{21}F_{22}F_{31} + F_{14}F_{23}F_{32}F_{41}
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.3.3. *Para* $\mathfrak{sp}_6$ *temos:*

$$F_{11} = E_{11} - E_{66} = -F_{66}, \quad F_{12} = E_{12} - E_{56} = -F_{56}, \quad F_{13} = E_{13} - E_{46} = -F_{46},$$
$$F_{14} = E_{14} + E_{36} = F_{36}, \quad F_{15} = E_{15} + E_{26} = F_{26}, \quad F_{16} = 2E_{16},$$
$$F_{21} = E_{21} - E_{65} = -F_{65}, \quad F_{22} = E_{22} - E_{55} = -F_{55}, \quad F_{23} = E_{23} - E_{45} = -F_{45},$$
$$F_{24} = E_{24} + E_{35} = F_{35}, \quad F_{25} = 2E_{25}, \quad F_{31} = E_{31} - E_{64} = -F_{64},$$
$$F_{32} = E_{32} - E_{54} = -F_{54}, \quad F_{33} = E_{33} - E_{44} = -F_{44}, \quad F_{34} = 2E_{34},$$
$$F_{41} = E_{41} + E_{63} = F_{63}, F_{42} = E_{42} + E_{53} = F_{53}, \quad F_{43} = 2E_{43},$$
$$F_{51} = E_{51} + E_{62} = F_{62}, \quad F_{52} = 2E_{52}, \quad F_{61} = 2E_{61}.$$

$$det(u+F) = det \begin{pmatrix} u+F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} \\ F_{21} & u+F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} & F_{15} \\ F_{31} & F_{32} & u+F_{33} & F_{34} & F_{24} & F_{14} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & u-F_{33} & -F_{23} & -F_{13} \\ F_{51} & F_{52} & F_{42} & -F_{32} & u-F_{22} & -F_{12} \\ F_{61} & F_{51} & F_{41} & -F_{31} & -F_{21} & u-F_{11} \end{pmatrix}$$

Foi usado um programa para calcular o determinante dessa matriz que gerou um documento de texto de quatro páginas (veja mais detalhes no apêndice 1), então o resultado não será mostrado aqui.

Definição 4.3.1. *Considere a função* $\varpi : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$, *tal que*

$$x_1 \cdots x_k \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \widehat{x_{\sigma(1)}} \cdots \widehat{x_{\sigma(k)}}$$

onde $x_1 \cdots x_k$ *é o produto das imagens de* $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$ *em* $S(\mathfrak{g})$ *e* $\widehat{x_i}$ *é a imagem de* x_i *em* $U(\mathfrak{g})$. *Chamamos* ϖ *de função simetrizante.*

Proposição 4.3.2. ϖ *é um isomorfismo de espaços vetoriais filtrados.*

Demonstração. Ver teorema 5.4 da página 114 de Meinrenken [2013]. □

Definição 4.3.2. *Seja* $H \in S(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ *e* $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, *a derivada direcional de* H *com respeito a* λ, $\partial_\lambda H$, *é definida da seguinte maneira:*

$$\partial_\lambda H(x) = \frac{d}{dt} H(x + t\lambda) \mid_{t=0} . \tag{4.3}$$

Proposição 4.3.3. *O centro de* $U(\mathfrak{sp}_{2n})$, *denotado por* $Z(U(\mathfrak{sp}_{2n}))$, *é gerado por* $\{\varpi(\phi_2), \ldots, \varpi(\phi_{2n})\}$.

Demonstração. Vide página 26 de Molev e Yakimova [2017]. □

Para $\mathfrak{sp}_{2n}$:

(i) Para $m \in \{0, \ldots, n-1\}$, podemos ver $\mathfrak{sp}_{2n-2m}$ como o subálgebra de $\mathfrak{sp}_{2n}$ gerado pelos elementos F_{ij} para todos $i, j \in \{m+1, \ldots, (m+1)'\}$ (lembrando que $(m+1)' = n - m$).

(ii) Considere $h(i-1) = F_{ii}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, e denote por $\phi_{2i}^{(m)} \in S(\mathfrak{sp}_{2n-2m})$ o $2i$-ésimo coeficiente do polinômio característico associado a $\mathfrak{sp}_{2n-2m}$, para todos $m \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $i \in \{1, \ldots, n-m\}$.

Definição 4.3.3. *A subálgebra de Gelfand-Tsetlin para* $\mathfrak{sp}_{2n}$ *é definida como a subálgebra de* $U(\mathfrak{sp}_{2n})$ *livremente gerada pelos centros de* $U(\mathfrak{sp}_{2k})$, *para* $1 \leq k \leq n$, *e pelos elementos* $\varpi(\partial_{h(m)}\phi_{2i}^{(m)})$, *para* $m \in \{0, \ldots, n-1\}$ *e* $i \in \{1, \ldots, n-m\}$. *Ou seja, é a subálgebra gerada por:*

$$\{\varpi(\phi_{2i}^{(m)}) \mid 0 \leq m \leq n-1, 1 \leq i \leq n-m\} \cup \{\varpi(\partial_{h(m)}\phi_{2i}^{(m)}) \mid 0 \leq m \leq n-1, 1 \leq i \leq n-m\}. \quad (4.4)$$

Denote por $\overline{x}$ a imagem de $x \in U(\mathfrak{sp}_{2n})$ em $gr(U(\mathfrak{sp}_{2n})) = S(\mathfrak{sp}_{2n})$. Note que, pela definição da função simetrizante, temos $\overline{\varpi(y)} = y$ para todo $y \in S(\mathfrak{sp}_{2n})$. Dessa forma, temos a seguinte definição:

Definição 4.3.4. *A variedade de Gelfand-Tsetlin para* $\mathfrak{sp}_{2n}$, *denotada por* $\mathfrak{G}_{\mathfrak{sp}_{2n}}$, *é a variedade algébrica dada por:*

$$\mathcal{V}\left(\{\phi_{2i}^{(m)} \mid 0 \leq m \leq n-1, 1 \leq i \leq n-m\} \cup \{\partial_{h(m)}\phi_{2i}^{(m)} \mid 0 \leq m \leq n-1, 1 \leq i \leq n-m\}\right) \subset k^{n(2n+1)} \quad (4.5)$$

sendo $n(2n+1)$ *a dimensão de* $\mathfrak{sp}_{2n}$ *como espaço vetorial.*

Exemplo 4.3.4. *Vamos calcular* $\mathfrak{G}_{\mathfrak{sp}_4}$.

- $m = 1$ *(coeficientes em* $\mathfrak{sp}_2$*):*

  No exemplo 4.0.1 já calculamos que:

$$\phi_2^{(1)} = -F_{11}^2 - F_{12}F_{21}.$$

  Mas, como $m = 1$ *e* $\mathfrak{sp}_2$ *é vista como a subálgebra de* $\mathfrak{sp}_4$ *gerada por* $F_{i,j}$ *com* $i, j \in \{2, 3\}$, *devemos trocar 1 por 2 e 2 por 3. Assim temos:*

$$\begin{aligned}
\phi_2^{(1)} &= -F_{22}^2 - F_{23}F_{32} \\
\partial_{h(1)}\phi_2^{(1)} &= \partial_{F_{22}}(-F_{22}^2 - F_{23}F_{32}) = -2F_{22}
\end{aligned}$$

- $m = 0$ *(coeficientes em* $\mathfrak{sp}_4$*):*

  No exemplo 4.0.2 já calculamos que:

$$\begin{aligned}
\phi_2^{(0)} &= -F_{11}^2 - F_{22}^2 - 2F_{12}F_{21} - 2F_{13}F_{31} - F_{23}F_{32} - F_{14}F_{41} \\
\phi_4^{(0)} &= F_{11}^2F_{22}^2 + F_{12}^2F_{21}^2 + F_{13}^2F_{31}^2 + F_{11}^2F_{23}F_{32} + F_{12}^2F_{23}F_{41} - F_{13}^2F_{32}F_{41} + F_{14}F_{21}^2F_{32} + \\
&+ F_{14}F_{22}^2F_{41} - F_{14}F_{23}F_{31}^2 - 2F_{11}F_{12}F_{21}F_{22} - 2F_{11}F_{12}F_{23}F_{31} - 2F_{11}F_{13}F_{21}F_{32} + \\
&+ 2F_{11}F_{13}F_{22}F_{31} + 2F_{12}F_{13}F_{21}F_{31} - 2F_{12}F_{13}F_{22}F_{41} - 2F_{14}F_{21}F_{22}F_{31} + F_{14}F_{23}F_{32}F_{41}
\end{aligned}$$

  Temos:

$$\partial_{h(0)}\phi_2^{(0)} = \partial_{F_{11}}(-F_{11}^2 - F_{22}^2 - 2F_{12}F_{21} - 2F_{13}F_{31} - F_{23}F_{32} - F_{14}F_{41}) = -2F_{11}$$

  e:

$$\begin{aligned}
\partial_{h(0)}\phi_4^{(0)} &= \partial_{F_{11}}(F_{11}^2F_{22}^2 + F_{12}^2F_{21}^2 + F_{13}^2F_{31}^2 + F_{11}^2F_{23}F_{32} + F_{12}^2F_{23}F_{41} - F_{13}^2F_{32}F_{41} + F_{14}F_{21}^2F_{32} + \\
&+ F_{14}F_{22}^2F_{41} - F_{14}F_{23}F_{31}^2 - 2F_{11}F_{12}F_{21}F_{22} - 2F_{11}F_{12}F_{23}F_{31} - 2F_{11}F_{13}F_{21}F_{32} + \\
&+ 2F_{11}F_{13}F_{22}F_{31} + 2F_{12}F_{13}F_{21}F_{31} - 2F_{12}F_{13}F_{22}F_{41} - 2F_{14}F_{21}F_{22}F_{31} + F_{14}F_{23}F_{32}F_{41}) \\
&= 2F_{11}F_{22}^2 + 2F_{11}F_{23}F_{32} - 2F_{12}F_{21}F_{22} - 2F_{12}F_{23}F_{31} - 2F_{13}F_{21}F_{32} + 2F_{13}F_{22}F_{31}
\end{aligned}$$

  Outro jeito de calcular $\partial_{h(0)}\phi_4^{(0)}$ *é da seguinte forma:*

  Seja $M = (m_{ij})$ *uma matriz 4 por 4. Sabemos que* $detM = \sum_{\sigma \in S_4} sgn(\sigma) m_{1\sigma(1)}m_{2\sigma(2)}m_{3\sigma(3)}m_{4\sigma(4)}$.

  Como $\phi_4^{(0)}$ *é o coeficiente do determinante que não acompanha u, temos* $\phi_4^{(0)}$ $=det(F)$ $=$

$\sum_{\sigma\in S_4} sgn(\sigma)F_{1\sigma(1)}F_{2\sigma(2)}F_{3\sigma(3)}F_{4\sigma_4}$. *Para calcular* $\partial_{h(0)}\phi_4^{(0)}$ *não importa os monômios de* $\phi_4^{(0)}$ *que não têm* F_{11}*, pois esses serão zerados no cáldulo da derivada direcional. Além disso, em* $\mathfrak{sp}_4$ *temos* $F_{11} = -F_{44}$*. Então podemos nos concentrar nos monômios formados por* $\sum_{\substack{\sigma\in S_4\\ \sigma(1)=1}} sgn(\sigma)F_{1\sigma(1)}F_{2\sigma(2)}F_{3\sigma(3)}F_{4\sigma_4}$ *e* $\sum_{\substack{\sigma\in S_4\\ \sigma(4)=4}} sgn(\sigma)F_{1\sigma(1)}F_{2\sigma(2)}F_{3\sigma(3)}F_{4\sigma_4}$*, ou seja:*

$$F_{11}det\begin{pmatrix} F_{22} & F_{23} & F_{13}\\ F_{32} & -F_{22} & -F_{12}\\ F_{31} & -F_{21} & -F_{11}\end{pmatrix} \ e \ -F_{11}det\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13}\\ F_{21} & F_{22} & F_{23}\\ F_{31} & F_{32} & -F_{22}\end{pmatrix}.$$

Os monômios formados dessa forma terão ou F_{11} *ou* F_{11}^2*. Se tiver* F_{11}*, ele irá aparecer em somente uma das fórmulas acima e sua derivada direcional em* F_{11} *é igual dividí-lo por* F_{11}*. Se tiver* F_1^2*, irá aparecer uma vez em cada uma das fórmulas acima e sua derivada direcional em* F_{11} *é igual a dividí-lo por* F_{11} *e multiplicar o resultado por 2. Assim concluimos que:*

$$\partial_{h(0)}\phi_4^{(0)} = det\begin{pmatrix} F_{22} & F_{23} & F_{13}\\ F_{32} & -F_{22} & -F_{12}\\ F_{31} & -F_{21} & -F_{11}\end{pmatrix} - det\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13}\\ F_{21} & F_{22} & F_{23}\\ F_{31} & F_{32} & -F_{22}\end{pmatrix} =$$
$$= 2F_{11}F_{22}^2 + 2F_{11}F_{23}F_{32} - 2F_{12}F_{21}F_{22} - 2F_{12}F_{23}F_{31} - 2F_{13}F_{21}F_{32} + 2F_{13}F_{22}F_{31}$$

Portanto, são geradores de $\mathfrak{G}_{\mathfrak{sp}_4}$*:*

$$\begin{aligned}
&F_{11}\\
&F_{22}\\
&F_{23}F_{32}\\
&2F_{12}F_{21} + 2F_{13}F_{31} + F_{14}F_{41}\\
&F_{12}F_{23}F_{31} + F_{13}F_{21}F_{32}\\
&F_{12}^2F_{21}^2 + F_{13}^2F_{31}^2 + F_{12}^2F_{23}F_{41} - F_{13}^2F_{32}F_{41} + F_{14}F_{21}^2F_{32} - F_{14}F_{23}F_{31}^2 + 2F_{12}F_{13}F_{21}F_{31}
\end{aligned}$$

pela definição de variedade e pelas seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
&F_{11} = -\frac{1}{2}\partial_{h(0)}\phi_2^{(0)}\\
&F_{22} = -\frac{1}{2}\partial_{h(1)}\phi_2^{(1)}\\
&F_{23}F_{32} = -\phi_2^{(1)} - F_{22}^2\\
&2F_{12}F_{21} + 2F_{13}F_{31} + F_{14}F_{41} = -\phi_2^{(0)} - F_{11}^2 - F_{22}^2 - F_{23}F_{32}\\
&F_{12}F_{23}F_{31} + F_{13}F_{21}F_{32} = -\frac{1}{2}\partial_{h(0)}\phi_4^{(0)} + F_{11}F_{22}^2 + F_{11}(F_{23}F_{32}) - (F_{12}F_{21})F_{22} + (F_{13})F_{22}(F_{31})\\
&F_{13}^2F_{31}^2 + F_{12}^2F_{23}F_{41} - F_{13}^2F_{32}F_{41} + F_{14}F_{21}^2F_{32} - F_{14}F_{23}F_{31}^2 + F_{14}F_{23}F_{32}F_{41} =\\
&= \phi_4^{(0)} - F_{11}^2F_{22}^2 - F_{11}^2(F_{23}F_{32}) - (F_{14})F_{22}^2(F_{41}) + 2F_{11}(F_{12}F_{21})F_{22} + 2F_{11}F_{12}(F_{23}F_{31}) +\\
&+ 2F_{11}(F_{13}F_{21}F_{32}) - 2F_{11}(F_{13})F_{22}(F_{31}) + 2(F_{12}F_{13})F_{22}(F_{41}) + 2(F_{14}F_{21})F_{22}(F_{31}) -\\
&- (F_{14})F_{23}F_{32}(F_{41})
\end{aligned}$$

Exemplo 4.3.5. *Vamos calcular* $\mathfrak{G}_{\mathfrak{sp}_6}$*.*

- $m = 2$ *(coeficientes em* $\mathfrak{sp}_2$*):*

  Pelo exemplo 4.0.1:

$$\phi_2^{(2)} = -F_{11}^2 - F_{12}F_{21}$$

Mas, como $m = 2$ *e* $\mathfrak{sp}_2$ *é vista como a subálgebra de* $\mathfrak{sp}_6$ *gerada por* $F_{i,j}$ *com* $i, j \in \{3, 4\}$*, devemos trocar 1 por 3 e 2 por 4. Assim temos:*

$$\begin{aligned}
\phi_2^{(2)} &= -F_{33}^2 - F_{34}F_{43} \\
\partial_{h(2)}\phi_2^{(2)} &= \partial_{h(33)}(-F_{33}^2 - F_{34}F_{43}) = -2F_{33}
\end{aligned}$$

- $m = 1$ *(coeficientes em* $\mathfrak{sp}_4$*):*

  Pelo exemplo 4.0.2:

$$\begin{aligned}
\phi_2^{(1)} &= -F_{11}^2 - F_{22}^2 - 2F_{12}F_{21} - 2F_{13}F_{31} - F_{23}F_{32} - F_{14}F_{41} \\
\phi_4^{(1)} &= F_{11}^2F_{22}^2 + F_{12}^2F_{21}^2 + F_{13}^2F_{31}^2 + F_{11}^2F_{23}F_{32} + F_{12}^2F_{23}F_{41} - F_{13}^2F_{32}F_{41} + F_{14}F_{21}^2F_{32}+ \\
&+ F_{14}F_{22}^2F_{41} - F_{14}F_{23}F_{31}^2 - 2F_{11}F_{12}F_{21}F_{22} - 2F_{11}F_{12}F_{23}F_{31} - 2F_{11}F_{13}F_{21}F_{32}+ \\
&+ 2F_{11}F_{13}F_{22}F_{31} + 2F_{12}F_{13}F_{21}F_{31} - 2F_{12}F_{13}F_{22}F_{41} - 2F_{14}F_{21}F_{22}F_{31} + F_{14}F_{23}F_{32}F_{41}
\end{aligned}$$

Mas, como $m = 1$ *e* $\mathfrak{sp}_4$ *é vista como a subálgebra de* $\mathfrak{sp}_6$ *gerada por* $F_{i,j}$ *com* $i, j \in \{2, 5\}$*, devemos trocar 1 por 2, 2 por 3, 3 por 4 e 4 por 5. Assim temos:*

$$\begin{aligned}
\phi_2^{(1)} &= -F_{22}^2 - F_{33}^2 - 2F_{23}F_{32} - 2F_{24}F_{42} - F_{34}F_{43} - F_{25}F_{52} \\
\phi_4^{(1)} &= F_{22}^2F_{33}^2 + F_{23}^2F_{32}^2 + F_{24}^2F_{42}^2 + F_{22}^2F_{34}F_{43} + F_{23}^2F_{34}F_{52} - F_{24}^2F_{43}F_{52} + F_{25}F_{32}^2F_{43}+ \\
&+ F_{25}F_{33}^2F_{52} - F_{25}F_{34}F_{42}^2 - 2F_{22}F_{23}F_{32}F_{33} - 2F_{22}F_{23}F_{34}F_{42} - 2F_{22}F_{24}F_{32}F_{43}+ \\
&+ 2F_{22}F_{24}F_{33}F_{42} + 2F_{23}F_{24}F_{32}F_{42} - 2F_{23}F_{24}F_{33}F_{52} - 2F_{25}F_{32}F_{33}F_{42} + F_{25}F_{34}F_{43}F_{52}
\end{aligned}$$

E:

$$\begin{aligned}
&\partial_{h(1)}\phi_2^{(1)} = \partial_{F_{22}}(-F_{22}^2 - F_{33}^2 - 2F_{23}F_{32} - 2F_{24}F_{42} - F_{34}F_{43} - F_{25}F_{52}) = -2F_{22} \\
&\partial_{h(1)}\phi_4^{(1)} = \partial_{F_{22}}(F_{22}^2F_{33}^2 + F_{23}^2F_{32}^2 + F_{24}^2F_{42}^2 + F_{22}^2F_{34}F_{43} + F_{23}^2F_{34}F_{52} - F_{24}^2F_{43}F_{52} + F_{25}F_{32}^2F_{43}+ \\
&+ F_{25}F_{33}^2F_{52} - F_{25}F_{34}F_{42}^2 - 2F_{22}F_{23}F_{32}F_{33} - 2F_{22}F_{23}F_{34}F_{42} - 2F_{22}F_{24}F_{32}F_{43}+ \\
&+ 2F_{22}F_{24}F_{33}F_{42} + 2F_{23}F_{24}F_{32}F_{42} - 2F_{23}F_{24}F_{33}F_{52} - 2F_{25}F_{32}F_{33}F_{42} + F_{25}F_{34}F_{43}F_{52}) \\
&= 2F_{22}F_{33}^2 + 2F_{22}F_{34}F_{43} - 2F_{23}F_{32}F_{33} - 2F_{23}F_{34}F_{42} - 2F_{24}F_{32}F_{43} + 2F_{24}F_{33}F_{42}
\end{aligned}$$

- $m = 0$ *(coeficientes em* $\mathfrak{sp}_6$*):*

  Vamos primeiro calcular $\phi_2^{(0)}$*. Esse é o coeficiente que acompanha* u^4 *no polinômio caracterís-tico. Considere* F *a matriz do exemplo 4.0.3. Usando um programa para calcular determinante, temos:*

$$\begin{aligned}
\phi_2^{(0)} &= -F_{11}^2 - 2F_{12}F_{21} - F_{22}^2 - 2F_{13}F_{31} - 2F_{23}F_{32} - F_{33}^2 - 2F_{14}F_{41} - 2F_{24}F_{42} - F_{34}F_{43}- \\
&- 2F_{15}F_{51} - F_{25}F_{52} - F_{16}F_{61}
\end{aligned}$$

E:

$$\begin{aligned}
\partial_{h(0)}\phi_2^{(0)} &= \partial_{F_{11}}(-F_{11}^2 - 2F_{12}F_{21} - F_{22}^2 - 2F_{13}F_{31} - 2F_{23}F_{32} - F_{33}^2- \\
&- 2F_{14}F_{41} - 2F_{24}F_{42} - F_{34}F_{43} - 2F_{15}F_{51} - F_{25}F_{52} - F_{16}F_{61}) \\
&= -2F_{11}
\end{aligned}$$

Pelo que já fizemos, temos os seguintes geradores:

$$F_{11}$$
$$F_{22}$$
$$F_{33}$$
$$F_{34}F_{43}$$
$$2F_{23}F_{32}+2F_{24}F_{42}+F_{25}F_{52}$$
$$F_{23}F_{34}F_{42}+F_{24}F_{32}F_{43}$$
$$2F_{12}F_{21}+2F_{13}F_{31}+2F_{14}F_{41}+2F_{15}F_{51}+F_{16}F_{61}$$
$$F_{23}^2F_{32}^2+F_{24}^2F_{42}^2+F_{23}^2F_{34}F_{52}-F_{24}^2F_{43}F_{52}+F_{25}F_{32}^2F_{43}-F_{25}F_{34}F_{42}^2+2F_{23}F_{24}F_{32}F_{42}$$

pela definição de variedade e pelas seguintes igualdades:

$$F_{11}=-\frac{1}{2}\partial_{h(0)}\phi_2^{(0)}$$
$$F_{22}=-\frac{1}{2}\partial_{h(1)}\phi_2^{(1)}$$
$$F_{33}=-\frac{1}{2}\partial_{h(2)}\phi_2^{(2)}$$
$$F_{34}F_{43}=-\phi_2^(2)-F_{33}^2$$
$$2F_{23}F_{32}+2F_{24}F_{42}+F_{25}F_{52}=-\phi_2^{(1)}-F_{22}^2-F_{33}^2-F_{34}F_{43}$$
$$F_{23}F_{34}F_{42}+F_{24}F_{32}F_{43}=-\frac{1}{2}\partial_{h(1)}\phi_4^{(1)}+F_{22}^2F_{33}+F_{22}(F_{34}F_{43})-(F_{23}F_{32})F_{33}+F_{24}(F_{33})F_{42}$$
$$2F_{12}F_{21}+2F_{13}F_{31}+2F_{14}F_{41}+2F_{15}F_{51}+F_{16}F_{61}=$$
$$=-\phi_2^{(0)}-F_{11}^2-F_{22}^2-(2F_{23}F_{32}+2F_{24}F_{42}+F_{25}F_{52})-F_{33}^2-F_{34}F_{43}$$
$$F_{23}^2F_{32}^2+F_{24}^2F_{42}^2+F_{23}^2F_{34}F_{52}-F_{24}^2F_{43}F_{52}+F_{25}F_{32}^2F_{43}-F_{25}F_{34}F_{42}^2+2F_{23}F_{24}F_{32}F_{42}=$$
$$=\phi_4^{(1)}-F_{22}^2F_{33}^2-F_{22}^2F_{34}F_{43}-F_{25}F_{33}^2F_{52}+2F_{22}F_{23}F_{32}F_{33}+2F_{22}F_{23}F_{34}F_{42}+$$
$$+2F_{22}F_{24}F_{32}F_{43}-2F_{22}F_{24}F_{33}F_{42}+2F_{23}F_{24}F_{33}F_{52}+2F_{25}F_{32}F_{33}F_{42}-(F_{25})F_{34}F_{43}(F_{52})$$

Pela fórmula do determinante e por $\phi_6^{(0)}$ *ser o coeficiente independente (que não acompanha a variável u), temos:*

$$\phi_6^{(0)}=det\begin{pmatrix}F_{11}&F_{12}&F_{13}&F_{14}&F_{15}&F_{16}\\F_{21}&F_{22}&F_{23}&F_{24}&F_{25}&F_{15}\\F_{31}&F_{32}&F_{33}&F_{34}&F_{24}&F_{14}\\F_{41}&F_{42}&F_{43}&-F_{33}&-F_{23}&-F_{13}\\F_{51}&F_{52}&F_{42}&-F_{32}&-F_{22}&-F_{12}\\F_{61}&F_{51}&F_{41}&-F_{31}&-F_{21}&-F_{11}\end{pmatrix}$$

$$\partial_{F_{11}}\phi_6^{(0)}=det\begin{pmatrix}F_{22}&F_{23}&F_{24}&F_{25}&F_{15}\\F_{32}&F_{33}&F_{34}&F_{24}&F_{14}\\F_{42}&F_{43}&-F_{33}&-F_{23}&-F_{13}\\F_{52}&F_{42}&-F_{32}&-F_{22}&-F_{12}\\F_{51}&F_{41}&-F_{31}&-F_{21}&-F_{11}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}F_{11}&F_{12}&F_{13}&F_{14}&F_{15}\\F_{21}&F_{22}&F_{23}&F_{24}&F_{25}\\F_{31}&F_{32}&F_{33}&F_{34}&F_{24}\\F_{41}&F_{42}&F_{43}&-F_{33}&-F_{23}\\F_{51}&F_{52}&F_{42}&-F_{32}&-F_{22}\end{pmatrix}$$

Os outros dois geradores são $\psi_4^{(0)}$ *e* $\partial_{F_{11}}\psi_4^{(0)}$.

Conjectura 4.3.1. *A variedade de Gelfand-Tsetlin* $\mathfrak{G}_{\mathfrak{sp}_{2n}}$ *é equidimensional com dimensão:*

$$dim\mathfrak{G}_{\mathfrak{sp}_{2n}}=n(2n+1)-2\frac{n(n+1)}{2}=n^2.$$

Para $\mathfrak{G}_{\mathfrak{sp}_4}$, provamos que a conjectura acima é verdadeira:

Teorema 4.3.1. *A variedade de Gelfand-Tsetlin $\mathfrak{G}_{\mathfrak{sp}_4}$ é equidimensional com dimensão 4.*

Demonstração. No exemplo 4.0.4. calculamos os geradores de $\mathfrak{G}_{\mathfrak{sp}_4} \subset k^{10}$. Usando uma notação mais tradicional, temos que os geradores são:

$$
\begin{aligned}
&X_{11}\\
&X_{22}\\
&X_{23}X_{32}\\
&2X_{12}X_{21}+2X_{13}X_{31}+X_{14}X_{41}\\
&X_{12}X_{23}X_{31}+X_{13}X_{21}X_{32}\\
&X_{12}^2X_{21}^2+X_{13}^2X_{31}^2+X_{12}^2X_{23}X_{41}-X_{13}^2X_{32}X_{41}+X_{14}X_{21}^2X_{32}-X_{14}X_{23}X_{31}^2+2X_{12}X_{13}X_{21}X_{31}
\end{aligned}
$$

Sejam

$$V=\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},2X_{12}X_{21}+2X_{13}X_{31}+X_{14}X_{41},X_{13}X_{21}X_{32},A)$$

onde $A=X_{12}^2X_{21}^2+X_{13}^2X_{31}^2-X_{13}^2X_{32}X_{41}+X_{14}X_{21}^2X_{32}+2X_{12}X_{13}X_{21}X_{31}$, e

$$U=\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{32},2X_{12}X_{21}+2X_{13}X_{31}+X_{14}X_{41},X_{12}X_{23}X_{31},B)$$

onde $B=X_{12}^2X_{21}^2+X_{13}^2X_{31}^2+X_{12}^2X_{23}X_{41}-X_{14}X_{23}X_{31}^2+2X_{12}X_{13}X_{21}X_{31}$. Observe que $\mathfrak{G}_{\mathfrak{sp}_4}=V\cup U$ e que $V\cong U$, pois os geradores de U são a imagem dos geradores de V pela função que leva X_{ij} em X_{ji}. Assim, basta provar que V é equidimensional de dimensão 4.

Agora considere

$$
\begin{aligned}
V_1&=\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{13},2X_{12}X_{21}+X_{14}X_{41},X_{12}^2X_{21}^2+X_{14}X_{21}^2X_{32})\\
V_2&=\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{21},2X_{13}X_{31}+X_{14}X_{41},X_{13}^2X_{31}^2-X_{13}^2X_{32}X_{41})\\
V_3&=\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{32},2X_{12}X_{21}+2X_{13}X_{31}+X_{14}X_{41},X_{12}^2X_{21}^2+X_{13}^2X_{31}^2+2X_{12}X_{13}X_{21}X_{31})
\end{aligned}
$$

Primeiro provaremos que V_1 é equidimensional de dimensão 4. Temos:

$$
\begin{aligned}
&V_1=\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{13},2X_{12}X_{21}+X_{14}X_{41},X_{12}^2X_{21}^2+X_{14}X_{21}^2X_{32})=\\
&=\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{13},2X_{12}X_{21}+X_{14}X_{41},X_{21}^2(X_{12}^2+X_{14}X_{32}))=\\
&=\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{13},X_{21},X_{14}X_{41})\cup\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{13},2X_{12}X_{21}+X_{14}X_{41},X_{12}^2+X_{14}X_{32})=\\
&=\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{13},X_{21},X_{14})\cup\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{13},X_{21},X_{41})\cup\\
&\cup\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{13},2X_{12}X_{21}+X_{14}X_{41},X_{12}^2+X_{14}X_{32})
\end{aligned}
$$

Como $\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{13},X_{21},X_{14})$ e $\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{13},X_{21},X_{41})$ são equidimensionais de dimensão 10-6=4, basta provarmos que $\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{13},2X_{12}X_{21}+X_{14}X_{41},X_{12}^2+X_{14}X_{32})$ é equidimensional de dimensão 4. Note que:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{13},2X_{12}X_{21}+X_{14}X_{41},X_{12}^2+X_{14}X_{32},X_{32})=\\
&=\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{13},X_{32},2X_{12}X_{21}+X_{14}X_{41},X_{12}^2)=\\
&=\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{13},X_{32},X_{12},X_{14}X_{41})=\\
&=\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{13},X_{32},X_{12},X_{14})\cup\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{13},X_{32},X_{12},X_{41})
\end{aligned}
$$

é equidimensional de dimensão 10-7=3. Então $\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{23},X_{13},2X_{12}X_{21}+X_{14}X_{41},X_{12}^2+X_{14}X_{32})$ é equidimensional de dimensão 4.

Vamos agora provar que V_2 é equidimensional de dimensão 4. Temos:

$$\begin{aligned}
V_2 &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{21}, 2X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41}, X_{13}^2X_{31}^2 - X_{13}^2X_{32}X_{41}) \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{21}, 2X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41}, X_{13}^2(X_{31}^2 - X_{32}X_{41})) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{21}X_{13}, X_{14}) \cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{21}X_{13}, X_{41}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{21}, 2X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41}, X_{31}^2 - X_{32}X_{41}).
\end{aligned}$$

Então, basta provar que $\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{21}, 2X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41}, X_{31}^2 - X_{32}X_{41})$ é equidimensal de dimensão 4. Mas

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{21}, 2X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41}, X_{31}^2 - X_{32}X_{41}, X_{32}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{21}, X_{32}, 2X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41}, X_{31}^2) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{21}, X_{32}, X_{31}, X_{14}X_{41}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{21}, X_{32}, X_{31}, X_{14}) \cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{21}, X_{32}, X_{31}, X_{41})
\end{aligned}$$

é equidimensional de dimensão 10-7=3. Portanto, V_2 também é equidimensional.

Por último, vamos analisar V_3. Temos que:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{32}, 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41}, X_{12}^2X_{21}^2 + X_{13}^2X_{31}^2 + 2X_{12}X_{13}X_{21}X_{31}, X_{12}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{32}, X_{12}, 2X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41}, X_{13}^2X_{31}^2) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{32}, X_{12}, X_{14}X_{41}, X_{13}X_{31}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{32}, X_{12}, X_{14}, X_{13}X_{31}) \cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{32}, X_{12}X_{41}, X_{13}X_{31}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{12}, X_{32}, X_{14}, X_{13}) \cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{32}, X_{12}, X_{14}, X_{31}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{12}, X_{32}, X_{41}, X_{13}) \cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{23}, X_{32}, X_{12}, X_{41}, X_{31})
\end{aligned}$$

é equidimensional de dimensão 10-7=3. Então V_3 é equidimensional de dimensão 4.

Portanto $\mathfrak{G}_{\mathfrak{sp}_4}$ é equidimensional de dimensão 4. □

Para $\mathfrak{G}_{\mathfrak{sp}_6}$, descubrimos e demonstramos o seguinte resultado:

Teorema 4.3.2. *A variedade de Gelfand-Tsetlin $\mathfrak{G}_{\mathfrak{sp}_6}$ é equidimensional de dimenão 9 se e somente se a variedade*

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, 2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52}, A, X_{23}^2 + X_{25}X_{43}, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$

onde $A = 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}$, é equidimensional de dimensão 9.

Demonstração. No exemplo 4.0.5. vimos que os geradores de $\mathfrak{G}_{\mathfrak{sp}_6}$, usando uma notação mais tradicional, são:

X_{11}
X_{22}
X_{33}
$X_{34}X_{43}$
$2X_{23}X_{32}+2X_{24}X_{42}+X_{25}X_{52}$
$X_{23}X_{34}X_{42}+X_{24}X_{32}X_{43}$
$2X_{12}X_{21}+2X_{13}X_{31}+2X_{14}X_{41}+2X_{15}X_{51}+X_{16}X_{61}$
$X_{23}^2X_{32}^2+X_{24}^2X_{42}^2+X_{23}^2X_{34}X_{52}-X_{24}^2X_{43}X_{52}+X_{25}X_{32}^2X_{43}-X_{25}X_{34}X_{42}^2+2X_{23}X_{24}X_{32}X_{42}$
$\phi_6^{(0)}$
$\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}$
$\phi_4^{(0)}$
$\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}$.

Sejam

$$\begin{aligned}V=&\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{33},X_{34},2X_{23}X_{32}+2X_{24}X_{42}+X_{25}X_{52},X_{24}X_{32}X_{43},A,B,\phi_6^{(0)},\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)},\phi_4^{(0)},\\&\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})\end{aligned}$$

onde $A=2X_{12}X_{21}+2X_{13}X_{31}+2X_{14}X_{41}+2X_{15}X_{51}+X_{16}X_{61}$ e
$B=X_{23}^2X_{32}^2+X_{24}^2X_{42}^2-X_{24}^2X_{43}X_{52}+X_{25}X_{32}^2X_{43}+2X_{23}X_{24}X_{32}X_{42}$, e:

$$\begin{aligned}U=&\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{33},X_{43},2X_{23}X_{32}+2X_{24}X_{42}+X_{25}X_{52},X_{23}X_{34}X_{42},A,C,\phi_6^{(0)},\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)},\phi_4^{(0)},\\&\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})\end{aligned}$$

onde $C=X_{23}^2X_{32}^2+X_{24}^2X_{42}^2+X_{23}^2X_{34}X_{52}-X_{25}X_{34}X_{42}^2+2X_{23}X_{24}X_{32}X_{42}$

Como o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta, temos que o automorfismo f do anel de polinômios nas 21 variáveis X_{ij}, que leva X_{ij} em X_{ji}, leva $\phi_4^{(0)}$, $\phi_6^{(0)}$ e suas diferenciais neles mesmos. Com isso concluimos que $V\cong U$. Assim, só precisamos provar que V é equidimensional de dimensão 9.

Defina as seguintes variedades

$V_1=$
$\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{33},X_{34},X_{24},2X_{23}X_{32}+X_{25}X_{52},A,X_{23}^2X_{32}^2+X_{25}X_{32}^2X_{43},\phi_6^{(0)},\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)},\phi_4^{(0)},\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$
$V_2=$
$\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{33},X_{34},X_{32},2X_{24}X_{42}+X_{25}X_{52},A,X_{24}^2X_{42}^2-X_{24}^2X_{43}X_{52},\phi_6^{(0)},\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)},\phi_4^{(0)},\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$
$V_3=$
$\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{33},X_{34},X_{43},2X_{23}X_{32}+2X_{24}X_{42}+X_{25}X_{52},A,X_{23}^2X_{32}^2+X_{24}^2X_{42}^2+2X_{23}X_{24}X_{32}X_{42},$
$\phi_6^{(0)},\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)},\phi_4^{(0)},\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$

Temos: $V=V_1\cup V_2\cup V_3$.

Para V_1 temos:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, 2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52}, A, X_{32}^2, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, 2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52}, A, X_{23}^2 + X_{25}X_{43}, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}X_{52}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, 2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52}, A, X_{23}^2 + X_{25}X_{43}, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})
\end{aligned}$$

Defina:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \\
W_2 &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{52}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \\
W_3 &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, 2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52}, A, X_{23}^2 + X_{25}X_{43}, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}).
\end{aligned}$$

Dessa forma, $V_1 = W_1 \cup W_2 \cup W_3$.

Agora para V_2 temos:

$$\begin{aligned}
V_2 &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{32}, 2X_{24}X_{42} + X_{25}X_{52}, A, X_{24}^2, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{32}, 2X_{24}X_{42} + X_{25}X_{52}, A, X_{42}^2 - X_{43}X_{52}, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{32}, X_{24}, X_{25}X_{52}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{32}, 2X_{24}X_{42} + X_{25}X_{52}, A, X_{42}^2 - X_{43}X_{52}, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})
\end{aligned}$$

Defina:

$$W_4 = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{32}, 2X_{24}X_{42} + X_{25}X_{52}, A, X_{42}^2 - X_{43}X_{52}, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$

Dessa forma, $V_2 = W_1 \cup W_2 \cup W_4$.

Para V_3 temos:

$$\begin{aligned}
V_3 &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, 2X_{23}X_{32} + 2X_{24}X_{42} + X_{25}X_{52}, A, (X_{23}X_{32} + X_{24}X_{42})^2, \\
&\phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{23}X_{32} + X_{24}X_{42}, X_{25}X_{52}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})
\end{aligned}$$

Defina:

$$\begin{aligned}
W_5 &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{23}X_{32} + X_{24}X_{42}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \\
W_6 &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{52}, X_{23}X_{32} + X_{24}X_{42}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})
\end{aligned}$$

Assim, $V_3 = W_5 \cup W_6$.

Portanto, para provar que $\mathfrak{G}_{\mathfrak{sp}_6}$ é equidimensional de dimensão 9, basta provar que W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 e W_6 são equidimensionais de dimensão 9.

(i) W_1

$$W_1 = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \tag{4.6}$$

Calculando o determinante da matriz F do exemplo 4.3.3 para $X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{24} = X_{32} = X_{25} = 0$, temos (considerando $X_{11} = 0$):

$$\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)} = 2X_{14}X_{23}^2X_{31}X_{52}$$

Assim, defina:

$$\begin{aligned}
Z_1^{(1)} &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \\
Z_2^{(1)} &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \\
Z_3^{(1)} &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{31}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \\
Z_4^{(1)} &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{52}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})
\end{aligned}$$

obtendo $W_1 = Z_1^{(1)} \cup Z_2^{(1)} \cup Z_3^{(1)} \cup Z_4^{(1)}$. Então para provar que W_1 é equidimensional de dimensão 9 basta provar que $Z_1^{(1)}$, $Z_2^{(1)}$, $Z_3^{(1)}$ e $Z_4^{(1)}$ são equidimensionais de dimensão 9.

(a) $Z_1^{(1)}$

Calculando o determinante da matriz F do exemplo 4.3.3 para
$X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{24} = X_{32} = X_{25} = X_{14} = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\phi_6^{(0)} &= -X_{12}^2X_{23}^2X_{31}^2 - 2X_{12}X_{15}X_{23}X_{31}^2X_{42} - X_{15}^2X_{31}^2X_{42}^2 + \\
&+ 2X_{13}X_{15}X_{23}X_{31}^2X_{52} - X_{16}X_{23}^2X_{31}^2X_{52} + X_{15}^2X_{31}^2X_{43}X_{52} = \\
&= X_{31}^2[-(X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42})^2 + X_{52}(2X_{13}X_{15}X_{23} - X_{16}X_{23}^2 + X_{15}^2X_{43})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_4^{(0)} &= X_{12}^2X_{21}^2 + 2X_{12}X_{13}X_{21}X_{31} + X_{13}^2X_{31}^2 + 2X_{16}X_{21}X_{31}X_{42} + \\
&+ X_{16}X_{31}^2X_{43} + 2X_{12}X_{15}X_{21}X_{51} + 2X_{13}X_{15}X_{31}X_{51} - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} + \\
&+ X_{15}^2X_{51}^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} - 2X_{15}X_{23}X_{31}X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61} = \\
&= (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 + 2X_{16}X_{21}X_{31}X_{42} + X_{16}X_{31}^2X_{43} - \\
&- 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} + X_{16}X_{21}^2X_{52} - 2X_{15}X_{23}X_{31}X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61}
\end{aligned}$$

$$\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)} = -2X_{12}X_{23}X_{31} - 2X_{15}X_{31}X_{42} - 2X_{15}X_{21}X_{52}$$

Além disso, $A = 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}$.
Por $\phi_6^{(0)}$ temos que $Z_1^{(1)}$ é a união das duas variedades abaixo:

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{31}, A, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \tag{4.7}$$

e

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, \\
&-(X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42})^2 + X_{52}(2X_{13}X_{15}X_{23} - X_{16}X_{23}^2 + X_{15}^2X_{43}), A, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})
\end{aligned} \tag{4.8}$$

A variedade (4.7) é equidimensional de dimensão 9 pois é igual a:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{31}, A, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{31}, 2X_{12}X_{21} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, \\
&(X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61}, -2X_{15}X_{21}X_{52}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{31}, X_{15}, 2X_{12}X_{21} + X_{16}X_{61}, \\
&(X_{12}X_{21})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{31}, X_{21}, 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, \\
&(X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{31}, X_{52}, 2X_{12}X_{21} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, \\
&(X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51})^2) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{31}, X_{15}, X_{21}, X_{16}X_{61}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{15}, X_{31}, 2X_{12}X_{21} + X_{16}X_{61}, X_{12}^2 + X_{16}X_{52}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{31}, X_{21}, X_{15}, X_{16}X_{61}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{31}, X_{21}, 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, X_{51}^2 - X_{52}X_{61}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{31}, X_{52}, X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}
$$

e as variedades abaixo são equidimensionais de dimensão 21-13=8:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{15}, X_{31}, 2X_{12}X_{21} + X_{16}X_{61}, X_{12}^2 + X_{16}X_{52}, X_{52}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{15}, X_{31}, X_{52}, X_{12}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{31}, X_{21}, 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, X_{51}^2 - X_{52}X_{61}, X_{52}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{31}, X_{21}, X_{52}, X_{51}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{31}, X_{52}, X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, X_{15}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{31}, X_{52}, X_{15}, X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}
$$

Considere agora a variedade (4.8) acrescida de X_{21}. Ela é igual a:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14},\\
&-(X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42})^2 + X_{52}(2X_{13}X_{15}X_{23} - X_{16}X_{23}^2 + X_{15}^2X_{43}), A, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}, X_{21}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21},\\
&-(X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42})^2 + X_{52}(2X_{13}X_{15}X_{23} - X_{16}X_{23}^2 + X_{15}^2X_{43}),\\
&2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{31}^2X_{43} - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} - 2X_{15}X_{23}X_{31}X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61},\\
&-2X_{12}X_{23}X_{31} - 2X_{15}X_{31}X_{42}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{31},\\
&-(X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42})^2 + X_{52}(2X_{13}X_{15}X_{23} - X_{16}X_{23}^2 + X_{15}^2X_{43}), 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61})\cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42},\\
&X_{52}(2X_{13}X_{15}X_{23} - X_{16}X_{23}^2 + X_{15}^2X_{43}), 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{31}^2X_{43} - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} - 2X_{15}X_{23}X_{31}X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{31}, X_{15},\\
&-(X_{12}X_{23})^2 - X_{52}X_{16}X_{23}^2, X_{16}X_{61})\cup \qquad (4.9)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{31}, X_{51}^2 - X_{52}X_{61},\\
&-(X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42})^2 + X_{52}(2X_{13}X_{15}X_{23} - X_{16}X_{23}^2 + X_{15}^2X_{43}),\\
&2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61})\cup \qquad (4.10)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{52}, X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42},\\
&2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{31}^2X_{43} - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51})\cup \qquad (4.11)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42},\\
&2X_{13}X_{15}X_{23} - X_{16}X_{23}^2 + X_{15}^2X_{43}, 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{31}^2X_{43} - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} - 2X_{15}X_{23}X_{31}X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61}) \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

A variedade (4.9) é equidimensional de dimensão 8 pois a variedade

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{31}, X_{15}, -(X_{12}X_{23})^2 - X_{52}X_{16}X_{23}^2, X_{16}X_{61},\\
&X_{52}) = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{31}, X_{15}, X_{52}, X_{16}X_{61}, X_{12}X_{23})
\end{aligned}$$

é equidimensional de dimensão 21-14=7.
A variedade (4.10) é equidimensional de dimensão 8 pois a variedade

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{31}, X_{51}^2 - X_{52}X_{61},\\
&-(X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42})^2 + X_{52}(2X_{13}X_{15}X_{23} - X_{16}X_{23}^2 + X_{15}^2X_{43}), 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&X_{52}, X_{42}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{31}, X_{52}, X_{42}, X_{51}, -(X_{12}X_{23})^2,\\
&2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{31}, X_{52}, X_{42}, X_{51}, X_{12}X_{23}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

é equidimensional de dimensão 21-15=6.

A variedade (4.11) é equidimensional de dimensão 8 pois a variedade

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{52}, X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42},\\
&2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{31}^2X_{43} - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51},\\
&X_{42}, X_{31}) = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{52}, X_{42}, X_{31}, X_{12}X_{23},\\
&2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, X_{15}X_{51}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{52}, X_{42}, X_{31}, X_{12}X_{23}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

é equidimensional de dimensão 21-15=6.
A variedade (4.12) acrescida de X_{43} é igual a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42},\\
&2X_{13}X_{15}X_{23} - X_{16}X_{23}^2 + X_{15}^2X_{43}, 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{31}^2X_{43} - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} - 2X_{15}X_{23}X_{31}X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61},\\
&X_{43}) = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42},\\
&2X_{13}X_{15}X_{23} - X_{16}X_{23}^2, 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} - 2X_{15}X_{23}X_{31}X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{23}, X_{15}X_{42},\\
&2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61}) \cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42},\\
&2X_{13}X_{15} - X_{16}X_{23}, 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} - 2X_{15}X_{23}X_{31}X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{23}, X_{15}, X_{13}X_{31}, X_{16}X_{61}) \cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{23}, X_{42},\\
&2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61}) \cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42},\\
&2X_{13}X_{15} - X_{16}X_{23}, 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} - 2X_{15}X_{23}X_{31}X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61})
\end{aligned}$$

A variedade

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{23}, X_{42},\\
&2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61}, X_{15}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{23}, X_{42}, X_{15}, X_{13}X_{31}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

é equidimensional de dimensão 21-15=6.

A variedade

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42},\\
&2X_{13}X_{15} - X_{16}X_{23}, 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} - 2X_{15}X_{23}X_{31}X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61}, X_{42}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{42}, X_{12}X_{23},\\
&2X_{13}X_{15} - X_{16}X_{23}, 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} - 2X_{15}X_{23}X_{31}X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61})\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{42}, X_{12},\\
&2X_{13}X_{15} - X_{16}X_{23}, 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} - 2X_{15}X_{23}X_{31}X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61})\cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{42}, X_{23},\\
&2X_{13}X_{15}, 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{42}, X_{12},\\
&2X_{13}X_{15} - X_{16}X_{23}, 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} - 2X_{15}X_{23}X_{31}X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61})\cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{42}, X_{23}, X_{13}, 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61})\cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{42}, X_{23}, X_{15}, X_{13}X_{31}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

é equidimensional de dimensão 6 pois a variedade

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{42}, X_{12},\\
&2X_{13}X_{15} - X_{16}X_{23}, 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} - 2X_{15}X_{23}X_{31}X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61}, X_{23}, X_{52}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{42}, X_{12}, X_{23}, X_{52},\\
&2X_{13}X_{15}, 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{42}, X_{12}, X_{23}, X_{52}, X_{13}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})\cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{42}, X_{12}, X_{23}, X_{52}, X_{15}, X_{13}X_{31}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

é equidimensional de dimensão 21-17=4 e a variedade

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{42}, X_{23}, X_{13}, 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61}, X_{52}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{14}, X_{21}, X_{43}, X_{42}, X_{23}, X_{13}, X_{52}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

é equidimensional de dimensão 21-16=5.

Portanto, a variedade (4.12) acrescida de X_{43} é equidimensional de dimensão 7 e, consequentemente, a variedade (4.12) é equidimensional de dimensão 8.

Assim concluimos que a variedade (4.8) acrescida de X_{21} é equidimensional de dimensão 8. Logo, (4.8) é equidimensional de dimensão 9.

Por fim, $Z_1^{(1)}$ é equidimensional de dimensão 9.

(b) $Z_2^{(1)}$ e $Z_4^{(1)}$

$$Z_2^{(1)} = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{F_{11}}\phi_4^{(0)})$$

$$Z_4^{(1)} = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{52}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{F_{11}}\phi_4^{(0)})$$

Considere

$$\begin{aligned}Z_2^{(1)} \cap Z_4^{(1)} &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{F_{11}}\phi_4^{(0)}) = \\ &= Z_2^{(1)}(X_{52}) = Z_4^{(1)}(X_{23})\end{aligned}$$

Calculando o determinante da matriz F do exemplo 4.3.3 para
$X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{24} = X_{32} = X_{25} = X_{23} = X_{52} = 0$, temos:
(considerando $X_{11} = 0$)

$$\begin{aligned}\phi_6^{(0)} &= -X_{14}^2X_{21}^2X_{42}^2 + 2X_{14}X_{15}X_{21}X_{31}X_{42}^2 - X_{15}^2X_{31}^2X_{42}^2 = \\ &= -(X_{42}^2)(X_{14}X_{21} - X_{15}X_{31})^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_4^{(0)} &= X_{12}^2X_{21}^2 + 2X_{12}X_{13}X_{21}X_{31} + X_{13}^2X_{31}^2 + 2X_{12}X_{14}X_{21}X_{41} + \\ &+ 2X_{13}X_{14}X_{31}X_{41} + X_{14}^2X_{41}^2 + 2X_{16}X_{21}X_{31}X_{42} + X_{16}X_{31}^2X_{43} + \\ &+ 2X_{12}X_{15}X_{21}X_{51} + 2X_{13}X_{15}X_{31}X_{51} + 2X_{14}X_{15}X_{41}X_{51} + X_{15}^2X_{51}^2 - \\ &- 2X_{14}X_{15}X_{42}X_{61} - X_{14}^2X_{43}X_{61} = \\ &= (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 + 2X_{16}X_{21}X_{31}X_{42} + X_{16}X_{31}^2X_{43} - \\ &- 2X_{14}X_{15}X_{42}X_{61} - X_{14}^2X_{43}X_{61}\end{aligned}$$

$$\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)} = -2X_{14}X_{21}X_{42} - 2X_{15}X_{31}X_{42} - 2X_{14}X_{31}X_{43}$$

Além disso, $A = 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}$.
Por $\phi_6^{(0)}$ concluimos que $Z_2^{(1)} \cap Z_4^{(1)}$ é a união das duas variedades abaixo.

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, A, \phi_4^{(0)}, \partial_{F_{11}}\phi_4^{(0)}) \tag{4.13}$$

e

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{14}X_{21} - X_{15}X_{31}, A, \phi_4^{(0)}, \partial_{F_{11}}\phi_4^{(0)}) \tag{4.14}$$

A variedade 4.13 é equidimensional de dimensão 8 pois é igual a

$$\begin{aligned}&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, A, \phi_4^{(0)}, \partial_{F_{11}}\phi_4^{(0)}) = \\ &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, A, \phi_4^{(0)}, -2X_{14}X_{31}X_{43}) = \\ &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{14}, A, \\ &(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{31}^2X_{43}) \cup \\ &\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{31}, A, \\ &(X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - X_{14}^2X_{43}X_{61}) \cup \\ &\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{43}, A, \\ &(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2)\end{aligned}$$

e as variedades

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{14}, A,\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{31}^2X_{43}, X_{51}, X_{31}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{14}, X_{51}, X_{31}, 2X_{12}X_{21} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21})^2) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{14}, X_{51}, X_{31}, X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61},)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{31}, A,\\
&(X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - X_{14}^2X_{43}X_{61}, X_{14}, X_{15}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{31}, X_{14}, X_{15}, 2X_{12}X_{21} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21})^2) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{31}, X_{14}, X_{15}, X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

são equidimensionais de dimensão 21-15=6 e a variedade

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{43}, A,\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2, X_{31}, X_{41}, X_{51}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{43}, X_{31}, X_{41}, X_{51},\\
&2X_{12}X_{21} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21})^2) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{43}, X_{31}, X_{41}, X_{51}, X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

é equidimensional de dimensão 21-16=5.

Considere agora a variedade (4.14) acrescida de X_{42}:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{14}X_{21} - X_{15}X_{31}, A, \phi_4^{(0)}, \partial_{F_{11}}\phi_4^{(0)}, X_{42}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{14}X_{21} - X_{15}X_{31}, A, \phi_4^{(0)}, \\
&- 2X_{14}X_{31}X_{43}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{14}, X_{15}X_{31}, \\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, \\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{31}^2X_{43}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{31}, X_{14}X_{21}, \\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, \\
&(X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - X_{14}^2X_{43}X_{61}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{43}, X_{14}X_{21} - X_{15}X_{31}, \\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, \\
&X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{14}, X_{15}, \\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31})^2 + X_{16}X_{31}^2X_{43}) \cup \qquad (4.15) \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{14}, X_{31}, \\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}) \cup \qquad (4.16) \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{31}, X_{14}, \\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}) \cup \qquad (4.17) \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{31}, X_{21}, \\
&2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - X_{14}^2X_{43}X_{61}) \cup \qquad (4.18) \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{43}, X_{14}X_{21} - X_{15}X_{31}, \\
&X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}) \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

A variedade (4.15) é equidimensional de dimensão 7 pois a variedade

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{14}, X_{15}, \\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31})^2 + X_{16}X_{31}^2X_{43}, X_{31}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{14}, X_{15}, X_{31}, X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}
$$

é equidimensional de dimensão 21-15=6.
As variedades (4.16) e (4.17) são iguais e são equidimensionais de dimensão 7 pois a variedade

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{31}, X_{14}, \\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}, X_{15}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{31}, X_{14}, X_{15}, X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}
$$

é equidimensional de dimensão 21-15=6.
A variedade (4.18) é equidimensional de dimensão 7 pois a variedade

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{31}, X_{21}, \\
&2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - X_{14}^2X_{43}X_{61}, X_{14}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{31}, X_{21}, X_{14}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}
$$

é equidimensional de dimensão 21-15=6.

A variedade (4.19) é equidimensional de dimensão 7 pois a variedade

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{43}, X_{14}X_{21} - X_{15}X_{31},$$
$$X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, X_{12}, X_{41}, X_{31}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{23}, X_{52}, X_{42}, X_{43}, X_{12}, X_{41}, X_{31}, X_{14}X_{21}, X_{15}X_{51},$$
$$X_{16}X_{61})$$

é equidimensional de dimensão 21-17=4.

Portanto, a variedade (4.14) acrescida de X_{42} é equidimensional de dimensão 7 e, consequentemente, a variedade (4.14) é equidimensional de dimensão 8.

Assim concluimos que $Z_2^{(1)} \cup Z_4^{(1)}$ é equidimensional de dimensão 8. Logo, $Z_2^{(1)}$ e $Z_4^{(1)}$ são equidimensionais de dimensão 9.

(c) $Z_3^{(1)}$

$$Z_3^{(1)} = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, X_{31}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$

Calculando o determinante da matriz F do exemplo 4.3.3 para
$X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{24} = X_{32} = X_{25} = X_{31} = 0$, temos:
(considerando $X_{11} = 0$)

$$\begin{aligned}\phi_6^{(0)} &= -X_{14}^2X_{21}^2X_{42}^2 + 2X_{14}^2X_{21}X_{23}X_{42}X_{51} - X_{14}^2X_{23}^2X_{51}^2 - \\ &- 2X_{14}^2X_{21}X_{23}X_{41}X_{52} + X_{14}^2X_{21}^2X_{43}X_{52} + X_{14}^2X_{23}^2X_{52}X_{61} = \\ &= X_{14}^2[-(X_{21}X_{42} - X_{23}X_{51})^2 + X_{52}(-2X_{21}X_{23}X_{41} + X_{21}^2X_{43} + X_{23}^2X_{61})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_4^{(0)} &= X_{12}^2X_{21}^2 + 2X_{12}X_{14}X_{21}X_{41} + X_{14}^2X_{41}^2 + 2X_{12}X_{15}X_{21}X_{51} + \\ &+ 2X_{14}X_{15}X_{41}X_{51} + X_{15}^2X_{51}^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} + 2X_{14}X_{21}X_{23}X_{52} - \\ &- 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} - 2X_{14}X_{15}X_{42}X_{61} - X_{14}^2X_{43}X_{61} - X_{15}^2X_{52}X_{61} = \\ &= (X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} + 2X_{14}X_{21}X_{23}X_{52} - \\ &- 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} - 2X_{14}X_{15}X_{42}X_{61} - X_{14}^2X_{43}X_{61} - X_{15}^2X_{52}X_{61}\end{aligned}$$

$$\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)} = -2X_{14}X_{21}X_{42} + 2X_{14}X_{23}X_{51} - 2X_{15}X_{21}X_{52}$$

E $A = 2X_{12}X_{21} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}$.

Seja f o automorfismo do anel de polinômios nas 21 variáveis X_{ij} definido da seguinte forma:

$$\begin{array}{llll} f(X_{11}) = X_{11}, & f(X_{12}) = X_{51}, & f(X_{13}) = X_{41}, & f(X_{14}) = -X_{31} \\ f(X_{15}) = X_{21}, & f(X_{16}) = -X_{61}, & f(X_{21}) = X_{15}, & f(X_{22}) = X_{22} \\ f(X_{23}) = X_{23}, & f(X_{24}) = -X_{24}, & f(X_{25}) = X_{25}, & f(X_{31}) = X_{14} \\ f(X_{32}) = X_{32}, & f(X_{33}) = X_{33}, & f(X_{34}) = X_{34}, & f(X_{41}) = -X_{13} \\ f(X_{42}) = -X_{42}, & f(X_{43}) = X_{43}, & f(X_{51}) = X_{12}, & f(X_{52}) = X_{52} \\ f(X_{61}) = -X_{16} & & & \end{array}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}f(\phi_6^{(0)}) &= f(X_{14}^2[-(X_{21}X_{42} - X_{23}X_{51})^2 + X_{52}(-2X_{21}X_{23}X_{41} + X_{21}^2X_{43} + X_{23}^2X_{61})]) = \\ &= X_{31}^2[-(-X_{15}X_{42} - X_{23}X_{12})^2 + X_{52}(2X_{15}X_{23}X_{13} + X_{15}^2X_{43} - X_{23}^2X_{16})]\end{aligned}$$

$$f(\phi_4^{(0)}) = f((X_{51}X_{15} + X_{31}X_{13} + X_{21}X_{12})^2 - X_{61}X_{15}^2X_{52} - 2X_{31}X_{15}X_{23}X_{52} - \\ - 2X_{51}X_{31}X_{23}X_{16} + 2X_{31}X_{21}X_{42}X_{16} + X_{31}^2X_{43}X_{16} + X_{21}^2X_{52}X_{16})$$

$$f(\partial_{X_{11}}) = f(-2X_{14}X_{21}X_{42} + 2X_{14}X_{23}X_{51} - 2X_{15}X_{21}X_{52}) = \\ = -2X_{31}X_{15}X_{42} - 2X_{31}X_{23}X_{12} - 2X_{21}X_{15}X_{52}$$

$$f(A) = f(2X_{12}X_{21} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}) = \\ = 2X_{51}X_{15} + 2X_{31}X_{13} + 2X_{21}X_{12} + X_{61}X_{16}$$

Dessa forma, temos:

$$f(Z_3^{(1)}) := \mathcal{V}(f(X_{11}), f(X_{22}), f(X_{33}), f(X_{34}), f(X_{24}), f(X_{32}), f(X_{25}), f(X_{31}), f(A), f(\phi_6^{(0)}), \\ f(\phi_4^{(0)}), f(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})) = Z_1^{(1)}$$

Portanto $Z_3^{(1)}$ e $Z_1^{(1)}$ são variedades isomórficas. Como $Z_1^{(1)}$ é equidimensional de dimensão 9 concluimos que $Z_3^{(1)}$ também é equidimensional de dimensão 9. Por fim, W_1 é equidimensional de dimensão 9.

(ii) W_2

$$W_1 = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$
$$W_2 = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{52}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$

Lembre-se que $\phi_6^{(0)}$ é o coeficiente independente e $\phi_4^{(0)}$ é o coeficiente de u^2 no polinômio obtido do determinante abaixo:

$$\det\begin{pmatrix} u+X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ X_{21} & u+X_{22} & X_{23} & X_{24} & X_{25} & X_{15} \\ X_{31} & X_{32} & u+X_{33} & X_{34} & X_{24} & X_{14} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & u-X_{33} & -X_{23} & -X_{13} \\ X_{51} & X_{52} & X_{42} & -X_{32} & u-X_{22} & -X_{12} \\ X_{61} & X_{51} & X_{41} & -X_{31} & -X_{21} & u-X_{11} \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

Denote por $W_1(\phi_6^{(0)})$ o elemento $\phi_6^{(0)}$ calculado considerando $X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{24} = X_{32} = X_{25}$. De maneira análoga, defina $W_1(A)$, $W_1(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)})$, $W_1(\phi_4^{(0)})$ e $W_1(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$. Para obter esses elementos, devemos calcular o determinante abaixo:

$$\det\begin{pmatrix} u+X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ X_{21} & u & X_{23} & 0 & 0 & X_{15} \\ X_{31} & 0 & u & 0 & 0 & X_{14} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & u & -X_{23} & -X_{13} \\ X_{51} & X_{52} & X_{42} & 0 & u & -X_{12} \\ X_{61} & X_{51} & X_{41} & -X_{31} & -X_{21} & u-X_{11} \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Denote por $W_2(\phi_6^{(0)})$ o elemento $\phi_6^{(0)}$ calculado considerando $X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{24} = X_{32} = X_{52}$. De maneira análoga, defina $W_2(A)$, $W_2(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)})$,

$W_2(\phi_4^{(0)})$ e $W_2(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$. Para obter esses elementos, devemos calcular o determinante abaixo:

$$\det\begin{pmatrix} u+X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ X_{21} & u & X_{23} & 0 & X_{25} & X_{15} \\ X_{31} & 0 & u & 0 & 0 & X_{14} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & u & -X_{23} & -X_{13} \\ X_{51} & 0 & X_{42} & 0 & u & -X_{12} \\ X_{61} & X_{51} & X_{41} & -X_{31} & -X_{21} & u-X_{11} \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

Nos dois casos não consideramos $X_{11} = 0$ porque precisamos calcular as diferenciais em X_{11}.

Considere agora o automorfismo f do anel de polinômios nas 21 variáveis X_{ij} definido da seguinte forma:

$$\begin{array}{llllllll} f(X_{11}) = X_{11} & , & f(X_{12}) = X_{15} & , & f(X_{13}) = X_{13} & , & f(X_{14}) = -X_{14} \\ f(X_{15}) = X_{12} & , & f(X_{16}) = -X_{16} & , & f(X_{21}) = X_{51} & , & f(X_{22}) = X_{22} \\ f(X_{23}) = X_{42} & , & f(X_{24}) = X_{32} & , & f(X_{25}) = X_{52} & , & f(X_{31}) = X_{31} \\ f(X_{32}) = X_{24} & , & f(X_{33}) = X_{33} & , & f(X_{34}) = -X_{34} & , & f(X_{41}) = -X_{41} \\ f(X_{42}) = X_{23} & , & f(X_{43}) = -X_{43} & , & f(X_{51}) = X_{21} & , & f(X_{52}) = X_{25} \\ f(X_{61}) = -X_{61} \end{array}$$

Para obter $f(W_2(\phi_6^{(0)}))$, $f(W_2(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}))$, $f(W_2(\phi_4^{(0)}))$ e $f(W_2(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}))$, basta calcular o determinante abaixo:

$$\det\begin{pmatrix} u+X_{11} & X_{15} & X_{13} & -X_{14} & X_{12} & -X_{16} \\ X_{51} & u & X_{42} & 0 & X_{32} & X_{52} \\ X_{31} & 0 & u & 0 & 0 & -X_{14} \\ -X_{42} & X_{23} & -X_{43} & u & -X_{42} & -X_{13} \\ X_{21} & 0 & X_{23} & 0 & u & -X_{15} \\ -X_{61} & X_{51} & -X_{41} & -X_{31} & -X_{51} & u-X_{11} \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

que é o determinante (4.22) substituindo X_{ij} por $f(X_{ij})$.

Usando um programa, obtemos que (4.23) é igual a (4.62).

Assim podemos concluir que:

$$\begin{array}{lll} f(W_2(\phi_6^{(0)})) = W_1(\phi_6^{(0)}) & , & f(W_2(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)})) = W_1(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}) \\ f(W_2(\phi_4^{(0)})) = W_1(\phi_4^{(0)}) & , & f(W_2(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})) = W_1(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \end{array}$$

e

$$\begin{aligned} & f(W_2) := \mathcal{V}(f(X_{11}), f(X_{22}), f(X_{33}), f(X_{34}), f(X_{24}), f(X_{32}), f(X_{52}), f(A), f(\phi_6^{(0)}), \\ & f(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}), f(\phi_4^{(0)}), f(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})) = \\ & = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) = W_1 \end{aligned}$$

Assim concluimos que W_2 e W_1 são variedades isomórficas. Como W_1 é equidimensional de dimensão 9, W_2 também é equidimensional de dimensão 9.

(iii) W_4

$W_3 = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, 2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52}, A, X_{23}^2 + X_{25}X_{43}, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)},$
$\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$
$W_4 = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{32}, 2X_{24}X_{42} + X_{25}X_{52}, A, X_{42}^2 - X_{43}X_{52}, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)},$
$\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$

Denote por $W_3(\phi_6^{(0)})$ o elemento $\phi_6^{(0)}$ calculado considerando $X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{24} = 2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52} = X_{23}^2 + X_{25}X_{43} = 0$. De maneira análoga, defina $W_3(A)$, $W_3(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)})$, $W_3(\phi_4^{(0)})$ e $W_3(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$. Para obter esses elementos, devemos calcular o determinante abaixo:

$$\det\begin{pmatrix} u+X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ X_{21} & u & X_{23} & 0 & X_{25} & X_{15} \\ X_{31} & X_{32} & u & 0 & 0 & X_{14} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & u & -X_{23} & -X_{13} \\ X_{51} & X_{52} & X_{42} & -X_{32} & u & -X_{12} \\ X_{61} & X_{51} & X_{41} & -X_{31} & -X_{21} & u-X_{11} \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

e considerar no resultado final $2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52} = X_{23}^2 + X_{25}X_{43} = 0$.

Denote por $W_4(\phi_6^{(0)})$ o elemento $\phi_6^{(0)}$ calculado considerando $X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{32} = 2X_{24}X_{42} + X_{25}X_{52} = X_{42}^2 - X_{43}X_{52} = 0$. De maneira análoga, defina $W_4(A)$, $W_4(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)})$, $W_4(\phi_4^{(0)})$ e $W_4(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$. Para obter esses elementos, devemos calcular o determinante abaixo:

$$\det\begin{pmatrix} u+X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ X_{21} & u & X_{23} & X_{24} & X_{25} & X_{15} \\ X_{31} & 0 & u & 0 & X_{24} & X_{14} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & u & -X_{23} & -X_{13} \\ X_{51} & X_{52} & X_{42} & 0 & u & -X_{12} \\ X_{61} & X_{51} & X_{41} & -X_{31} & -X_{21} & u-X_{11} \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

e considerar no resultado final $2X_{24}X_{42} + X_{25}X_{52} = X_{42}^2 - X_{43}X_{52} = 0$.

Nos dois casos não consideramos $X_{11} = 0$ porque precisamos calcular as diferenciais em X_{11}.

Considere agora o automorfismo f do anel de polinômios nas 21 variáveis X_{ij} definido da seguinte forma:

$$\begin{array}{llll} f(X_{11}) = X_{11}, & f(X_{12}) = X_{21}, & f(X_{13}) = X_{41}, & f(X_{14}) = -X_{31} \\ f(X_{15}) = X_{51}, & f(X_{16}) = X_{61}, & f(X_{21}) = X_{12}, & f(X_{22}) = X_{22} \\ f(X_{23}) = X_{42}, & f(X_{24}) = -X_{32}, & f(X_{25}) = X_{52}, & f(X_{31}) = X_{14} \\ f(X_{32}) = X_{24}, & f(X_{33}) = X_{33}, & f(X_{34}) = -X_{34}, & f(X_{41}) = -X_{13} \\ f(X_{42}) = -X_{23}, & f(X_{43}) = -X_{43}, & f(X_{51}) = X_{15}, & f(X_{52}) = X_{25} \\ f(X_{61}) = X_{16} & & & \end{array}$$

Para obter $f(W_4(\phi_6^{(0)}))$, $f(W_4(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}))$, $f(W_4(\phi_4^{(0)}))$ e $f(W_4(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}))$, basta calcular o determinante abaixo:

$$\det\begin{pmatrix} u+X_{11} & X_{21} & X_{41} & -X_{31} & X_{51} & X_{61} \\ X_{12} & u & X_{42} & -X_{32} & X_{52} & X_{51} \\ X_{14} & 0 & u & 0 & -X_{32} & -X_{31} \\ -X_{13} & -X_{23} & -X_{43} & u & -X_{42} & -X_{41} \\ X_{15} & X_{25} & -X_{23} & 0 & u & -X_{21} \\ X_{16} & X_{15} & -X_{13} & -X_{14} & -X_{12} & u-X_{11} \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

que é o determinante (4.25) substituindo X_{ij} por $f(X_{ij})$.

Usando um programa, obtemos que (4.26) é igual a (4.24).

Assim podemos concluir que:

$$f(W_4(\phi_6^{(0)})) = W_3(\phi_6^{(0)}) \quad , \qquad f(W_4(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)})) = W_3(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)})$$
$$f(W_4(\phi_4^{(0)})) = W_3(\phi_4^{(0)}) \quad , \qquad f(W_4(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})) = W_3(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$

e

$$f(W_4) := \mathcal{V}(f(X_{11}), f(X_{22}), f(X_{33}), f(X_{34}), f(X_{24}), f(X_{32}), f(X_{52}), f(A), f(\phi_6^{(0)}),$$
$$f(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}), f(\phi_4^{(0)}), f(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) = W_3$$

Assim concluimos que W_4 e W_3 são variedades isomórficas. Então W_4 é equidimensional de dimensão 9 se e somente se W_3 é equidimensional de dimensão 9.

(iv) W_5

$$W_5 = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{23}X_{32} + X_{24}X_{42}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$

Calculando o determinante da matriz F do exemplo 4.3.3 para
$X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{43} = X_{25} = X_{23}X_{32} + X_{24}X_{42} = 0$, temos (considerando $X_{11} = 0$):

$$\begin{aligned}\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)} =& 2X_{14}X_{23}^2X_{31}X_{52} - 2X_{13}X_{23}X_{24}X_{31}X_{52} + 2X_{14}X_{23}X_{24}X_{41}X_{52} - 2X_{13}X_{24}^2X_{41}X_{52} = \\ &= 2X_{52}(X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41})(X_{14}X_{23} - X_{13}X_{24})\end{aligned}$$

Assim, defina:

$$Z_1^{(5)} = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{23}X_{32} + X_{24}X_{42}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$
$$Z_2^{(5)} = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{23}X_{32} + X_{24}X_{42}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$
$$Z_3^{(5)} = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{23}X_{32} + X_{24}X_{42}, X_{14}X_{23} - X_{13}X_{24}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$

Temos $W_5 = Z_1^{(5)} \cup Z_2^{(5)} \cup Z_3^{(5)}$.

(a) $Z_1^{(5)}$
Considere

$$Z_1^{(5)}(X_{32}) = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}X_{42}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$

Assim, $Z_1^{(5)}(X_{32})$ é a união das duas variedades abaixo

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \tag{4.27}$$

e

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{42}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \tag{4.28}$$

Vamos provar que (4.27) é equidimensional de dimensão 8.
Calculando o determinante da matriz F do exemplo 4.3.3 para
$X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{43} = X_{25} = X_{52} = X_{32} = X_{24} = 0$, temos (considerando $X_{11} = 0$):

$$\begin{aligned}
\phi_6^{(0)} &= -X_{12}^2X_{23}^2X_{31}^2 + 2X_{12}X_{14}X_{21}X_{23}X_{31}X_{42} - 2X_{12}X_{15}X_{23}X_{31}^2X_{42} - X_{14}^2X_{21}^2X_{42}^2 + \\
&\quad + 2X_{14}X_{15}X_{21}X_{31}X_{42}^2 - X_{15}^2X_{31}^2X_{42}^2 - 2X_{12}X_{14}X_{23}^2X_{31}X_{51} + 2X_{14}^2X_{21}X_{23}X_{42}X_{51} - \\
&\quad - 2X_{14}X_{15}X_{23}X_{31}X_{42}X_{51} - X_{14}^2X_{23}^2X_{51}^2 = \\
&= -\left(X_{12}X_{23}X_{31} - X_{14}X_{21}X_{42} + X_{15}X_{31}X_{42} + X_{14}X_{23}X_{51}\right)^2 \\
\phi_4^{(0)} &= X_{12}^2X_{21}^2 + 2X_{12}X_{13}X_{21}X_{31} + X_{13}^2X_{31}^2 + 2X_{12}X_{14}X_{21}X_{41} + \\
&\quad + 2X_{13}X_{14}X_{31}X_{41} + X_{14}^2X_{41}^2 + 2X_{16}X_{21}X_{31}X_{42} + 2X_{12}X_{15}X_{21}X_{51} + \\
&\quad + 2X_{13}X_{15}X_{31}X_{51} - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} + 2X_{14}X_{15}X_{41}X_{51} + X_{15}^2X_{51}^2 - \\
&\quad - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} - 2X_{14}X_{15}X_{42}X_{61} = \\
&\quad = \left(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}\right)^2 + 2X_{16}X_{21}X_{31}X_{42} - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} - \\
&\quad - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} - 2X_{14}X_{15}X_{42}X_{61} \\
\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)} &= -2X_{12}X_{23}X_{31} - 2X_{14}X_{21}X_{42} - 2X_{15}X_{31}X_{42} + 2X_{14}X_{23}X_{51}
\end{aligned}$$

E $A = 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}$.
Por ϕ_6^0 e $\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}$ concluimos que, para (4.27), temos

$$\begin{aligned}
X_{12}X_{23}X_{31} - X_{14}X_{21}X_{42} + X_{15}X_{31}X_{42} + X_{14}X_{23}X_{51} = 0 \\
X_{12}X_{23}X_{31} + X_{14}X_{21}X_{42} + X_{15}X_{31}X_{42} - X_{14}X_{23}X_{51} = 0
\end{aligned}$$

e isso ocorre se e somente se:

$$\begin{aligned}
X_{14}X_{21}X_{42} - X_{14}X_{23}X_{51} = 0 \\
X_{12}X_{23}X_{31} + X_{15}X_{31}X_{42} = 0
\end{aligned}$$

Assim, (4.27) é igual a:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{32}, X_{24}, X_{52},\\
&X_{14}X_{21}X_{42} - X_{14}X_{23}X_{51}, X_{12}X_{23}X_{31} + X_{15}X_{31}X_{42},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 + 2X_{16}X_{21}X_{31}X_{42} - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} -\\
&- 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} - 2X_{14}X_{15}X_{42}X_{61}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{32}, X_{24}, X_{52}, X_{14},\\
&X_{12}X_{23}X_{31} + X_{15}X_{31}X_{42}, 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 + 2X_{16}X_{21}X_{31}X_{42} - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51}) \cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{32}, X_{24}, X_{52}, X_{21}X_{42} - X_{23}X_{51},\\
&X_{12}X_{23}X_{31} + X_{15}X_{31}X_{42}, 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 + 2X_{16}X_{21}X_{31}X_{42} - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} -\\
&- 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} - 2X_{14}X_{15}X_{42}X_{61}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{32}, X_{24}, X_{52}, X_{14}, X_{31},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}) \cup \qquad (4.29)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{32}, X_{24}, X_{52}, X_{14}, X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 + 2X_{16}X_{21}X_{31}X_{42} - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51}) \cup \qquad (4.30)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{32}, X_{24}, X_{52}, X_{31}, X_{21}X_{42} - X_{23}X_{51},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} - 2X_{14}X_{15}X_{42}X_{61}) \cup \qquad (4.31)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{32}, X_{24}, X_{52}, X_{21}X_{42} - X_{23}X_{51}, X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 + 2X_{16}X_{21}X_{31}X_{42} - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} -\\
&- 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} - 2X_{14}X_{15}X_{42}X_{61}) \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

A variedade (4.29) é equidimensional de dimensão 8 pois a variedade

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, X_{14}, X_{31},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}, X_{15}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, X_{14}, X_{31}, X_{15}, X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}
$$

é equidimensional de dimensão 21-14=7.

A variedade (4.30) é equidimensional de dimensão 8 pois a variedade

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, X_{14}, X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 + 2X_{16}X_{21}X_{31}X_{42} - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51}, X_{31}, X_{42}, X_{21}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, X_{14}, X_{31}, X_{42}, X_{21}, X_{12}X_{23}, X_{15}X_{51},\\
&X_{16}X_{61})
\end{aligned}
$$

é equidimensional de dimensão 21-16=5.

A variedade (4.31) é equidimensional de dimensão 8 pois a variedade

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, X_{31}, X_{21}X_{42} - X_{23}X_{51},\\ 2X_{12}X_{21} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\ (X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} - 2X_{14}X_{15}X_{42}X_{61}, X_{14}, X_{23}, X_{12}) =\\ = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, X_{31}, X_{14}, X_{23}, X_{12}, X_{21}X_{42}, X_{15}X_{51},\\ X_{16}X_{61})$$

é equidimensional de dimensão 21-16=5.
A variedade (4.32) é equidimensional de dimensão 8 pois a variedade

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, X_{21}X_{42} - X_{23}X_{51}, X_{12}X_{23} + X_{15}X_{42},\\ 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\ (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 + 2X_{16}X_{21}X_{31}X_{42} - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} -\\ - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} - 2X_{14}X_{15}X_{42}X_{61}, X_{12}, X_{31}) =\\ = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, X_{12}, X_{31}, X_{21}X_{42} - X_{23}X_{51}, X_{15}X_{42},\\ 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{14}X_{15}X_{42}X_{61}) =\\ = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, X_{12}, X_{31}, X_{15}, X_{21}X_{42} - X_{23}X_{51},\\ X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61}) \cup\\ \cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, X_{12}, X_{31}, X_{42}, X_{23}X_{51}, X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51},\\ X_{16}X_{61}) =\\ = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, X_{12}, X_{31}, X_{15}, X_{21}X_{42} - X_{23}X_{51}, X_{14}X_{41},\\ X_{16}X_{61}) \cup\\ \cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, X_{12}, X_{31}, X_{42}, X_{23}, X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51},\\ X_{16}X_{61}) \cup\\ \cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, X_{12}, X_{31}, X_{42}, X_{51}, X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61})$$

é equidimensional de dimensão 6 já que as variedades abaixo são equidimensionais de dimensão 21-16=5:

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, X_{12}, X_{31}, X_{15}, X_{21}X_{42} - X_{23}X_{51}, X_{14}X_{41},\\ X_{16}X_{61}, X_{23}) =\\ = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, X_{12}, X_{31}, X_{15}, X_{23}, X_{21}X_{42}, X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61})$$

e

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, X_{12}, X_{31}, X_{42}, X_{23}, X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51},\\ X_{16}X_{61}, X_{14}) =\\ = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{52}, X_{32}, X_{24}, X_{12}, X_{31}, X_{42}, X_{23}, X_{14}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})$$

Portanto, a variedade (4.27) é equidimensional de dimensão 8.
Agora vamos provar para (4.28).
Calculando o determinante da matriz F do exemplo 4.3.3 para

$X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{43} = X_{25} = X_{52} = X_{32} = X_{42} = 0$, temos (considerando $X_{11} = 0$):

$$\begin{aligned}
\phi_6^{(0)} =& - X_{12}^2X_{23}^2X_{31}^2 - 2X_{12}^2X_{23}X_{24}X_{31}X_{41} - X_{12}^2X_{24}^2X_{41}^2 - 2X_{12}X_{14}X_{23}^2X_{31}X_{51} + \\
&+ 2X_{12}X_{13}X_{23}X_{24}X_{31}X_{51} - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{24}X_{41}X_{51} + 2X_{12}X_{13}X_{24}^2X_{41}X_{51} - \\
&- X_{14}^2X_{23}^2X_{51}^2 + 2X_{13}X_{14}X_{23}X_{24}X_{51}^2 - X_{13}^2X_{24}^2X_{51}^2 = \\
&= -(X_{12}X_{23}X_{31} + X_{12}X_{24}X_{41} + X_{14}X_{23}X_{51} - X_{13}X_{24}X_{51})^2 \\
\phi_4^{(0)} =& X_{12}^2X_{21}^2 + 2X_{12}X_{13}X_{21}X_{31} + X_{13}^2X_{31}^2 + 2X_{12}X_{14}X_{21}X_{41} + \\
&+ 2X_{13}X_{14}X_{31}X_{41} + X_{14}^2X_{41}^2 + 2X_{12}X_{15}X_{21}X_{51} + \\
&+ 2X_{13}X_{15}X_{31}X_{51} - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} + 2X_{14}X_{15}X_{41}X_{51} - \\
&- 2X_{16}X_{24}X_{41}X_{51} + X_{15}^2X_{51}^2 - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61} = \\
&= (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} - \\
&- 2X_{16}X_{24}X_{41}X_{51} - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61} \\
\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)} =& - 2X_{12}X_{23}X_{31} - 2X_{12}X_{24}X_{41} + 2X_{14}X_{23}X_{51} - 2X_{13}X_{24}X_{51}
\end{aligned}$$

E $A = 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}$.
Seja f o automorfismo do anel de polinômios nas 21 variáveis X_{ij} definido da seguinte forma:

$$\begin{array}{llll}
f(X_{11}) = X_{11} \quad , & f(X_{12}) = X_{14} \quad , & f(X_{13}) = X_{15} \quad , & f(X_{14}) = X_{12} \\
f(X_{15}) = X_{13} \quad , & f(X_{16}) = -X_{16} \quad , & f(X_{21}) = X_{41} \quad , & f(X_{22}) = X_{22} \\
f(X_{23}) = -X_{23} \quad , & f(X_{24}) = X_{42} \quad , & f(X_{25}) = X_{25} \quad , & f(X_{31}) = X_{51} \\
f(X_{32}) = -X_{32} \quad , & f(X_{33}) = X_{33} \quad , & f(X_{34}) = X_{34} \quad , & f(X_{41}) = X_{21} \\
f(X_{42}) = X_{24} \quad , & f(X_{43}) = X_{43} \quad , & f(X_{51}) = X_{31} \quad , & f(X_{52}) = X_{52} \\
f(X_{61}) = -X_{61} & & &
\end{array}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
f(\phi_6^{(0)}) &= f(-(X_{12}X_{23}X_{31} + X_{12}X_{24}X_{41} + X_{14}X_{23}X_{51} - X_{13}X_{24}X_{51})^2) = \\
&= -(-X_{14}X_{23}X_{51} + X_{14}X_{42}X_{21} - X_{12}X_{23}X_{31} - X_{15}X_{42}X_{31})^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\phi_4^{(0)}) &= f((X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{16}X_{23}X_{31}X_{51} - \\
&- 2X_{16}X_{24}X_{41}X_{51} - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61}) = \\
&= (X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51} + X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31})^2 - 2X_{16}X_{23}X_{51}X_{31} + \\
&+ 2X_{16}X_{42}X_{21}X_{31} - 2X_{14}X_{12}X_{23}X_{61} - 2X_{14}X_{15}X_{42}X_{61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) &= f(-2X_{12}X_{23}X_{31} - 2X_{12}X_{24}X_{41} + 2X_{14}X_{23}X_{51} - 2X_{13}X_{24}X_{51}) = \\
&= 2X_{14}X_{23}X_{51} - 2X_{14}X_{42}X_{21} - 2X_{12}X_{23}X_{31} - 2X_{15}X_{42}X_{31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(A) &= f(2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}) = \\
&= 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + X_{16}X_{61}
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos:

$\mathcal{V}(f(X_{11}), f(X_{22}), f(X_{33}), f(X_{34}), f(X_{43}), f(X_{25}), f(X_{32}), f(X_{24}), f(X_{31}), f(A), f(\phi_6^{(0)}),$
$f(\phi_4^{(0)}), f(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}))$

que é igual a variedade (4.27).
Como (4.27) é equidimensional de dimensão 8 concluimos que (4.28) também é equidimensional de dimensão 8.
Portanto $Z_1^{(5)}(X_{32})$ é equidimensional de dimensão 8 e $Z_1^{(5)}$ é equidimensional de dimensão 9.

(b) $Z_2^{(5)}$

$$\begin{aligned}Z_2^{(5)} =&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{23}X_{32} + X_{24}X_{42}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)},\\ &\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})\end{aligned}$$

Considere a variedade:

$$\begin{aligned}Z_2^{(5)}(X_{42}) =&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{23}X_{32} + X_{24}X_{42}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)},\\ &\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}, X_{42})\end{aligned}$$

e defina as seguintes variedades:

$$\begin{aligned}H_1 =&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})\\ H_2 =&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})\\ H_3 =&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}, X_{42})\end{aligned}$$

Então temos $Z_2^{(5)} = H_1 \cup H_2 \cup H_3$. Assim, para provarmos que $Z_2^{(5)}$ é equidimensional de dimensão 9 basta provar que H_1, H_2 e H_3 são equidimensionais de dimensão 8.

- H_1
Calculando o determinante da matriz F do exemplo 4.3.3 para
$X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{43} = X_{25} = X_{42} = X_{23} = X_{24} = 0$, temos (considerando $X_{11} = 0$):

$$\begin{aligned}\phi_6^{(0)} =& - X_{13}^2X_{21}^2X_{32}^2 - 2X_{13}X_{15}X_{21}X_{32}^2X_{41} - X_{15}^2X_{32}^2X_{41}^2 =\\ &= -X_{32}^2(X_{13}X_{21} + X_{15}X_{41})^2\\ \phi_4^{(0)} =&X_{12}^2X_{21}^2 + 2X_{12}X_{13}X_{21}X_{31} + X_{13}^2X_{31}^2 + 2X_{12}X_{14}X_{21}X_{41}+\\ &+ 2X_{13}X_{14}X_{31}X_{41} - 2X_{16}X_{21}X_{32}X_{41} + X_{14}^2X_{41}^2 + 2X_{12}X_{15}X_{21}X_{51}+\\ &+ 2X_{13}X_{15}X_{31}X_{51} + 2X_{14}X_{15}X_{41}X_{51} + X_{15}^2X_{51}^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52}-\\ &- 2X_{13}X_{15}X_{32}X_{61} - X_{15}^2X_{52}X_{61} =\\ &= (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{16}X_{21}X_{32}X_{41} + X_{16}X_{21}^2X_{52}-\\ &- 2X_{13}X_{15}X_{32}X_{61} - X_{15}^2X_{52}X_{61}\\ \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)} =& - 2X_{13}X_{21}X_{32} + 2X_{15}X_{32}X_{41} - 2X_{15}X_{21}X_{52}\end{aligned}$$

E $A = 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}$.
Por $\phi_6^{(0)}$ temos que H_1 é a união das duas variedades abaixo:

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{32}, A, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \tag{4.33}$$

e

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{13}X_{21} + X_{15}X_{41}, A, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \tag{4.34}$$

A variedade (4.33) é igual a:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{32}, A, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{32}, \\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, \\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61}, \\
&-2X_{15}X_{21}X_{52}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{32}, X_{15}, \\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{32}, X_{21}, \\
&2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{32}, X_{52}, \\
&X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

As variedades

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{32}, X_{15}, \\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52}, \\
&X_{21}, X_{31}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{32}, X_{15}, X_{21}, X_{31}, X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{32}, X_{21}, \\
&2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61}, \\
&X_{15}, X_{13}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{32}, X_{21}, X_{15}, X_{13}, X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

são equidimensionais de dimensão 21-15=6 e a variedade

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{32}, X_{52}, \\
&X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, X_{13}, X_{14}, X_{15}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{32}, X_{52}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

é equidimensional de dimensão 21-16=5.
Então a variedade (4.33) é equidimensional de dimensão 8.

Considera a variedade (4.34) acrescida de X_{52}:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{13}X_{21} + X_{15}X_{41}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}, X_{52}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{13}X_{21} + X_{15}X_{41}, \\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, \\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{16}X_{21}X_{32}X_{41} - 2X_{13}X_{15}X_{32}X_{61}, \\
&- 2X_{13}X_{21}X_{32} + 2X_{15}X_{32}X_{41}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{32}, X_{13}X_{21} + X_{15}X_{41}, \\
&X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{13}X_{21} + X_{15}X_{41}, -X_{13}X_{21} + X_{15}X_{41}, \\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, \\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{16}X_{21}X_{32}X_{41} - 2X_{13}X_{15}X_{32}X_{61}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{32}, X_{13}X_{21} + X_{15}X_{41}, \\
&X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{13}X_{21}, X_{15}X_{41}, \\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, \\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{16}X_{21}X_{32}X_{41} - 2X_{13}X_{15}X_{32}X_{61}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{32}, X_{13}X_{21} + X_{15}X_{41}, \\
&X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{13}, X_{15}, \\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{14}X_{41} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41})^2 - 2X_{16}X_{21}X_{32}X_{41}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{13}, X_{41}, \\
&X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{21}, X_{15}, \\
&X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{21}, X_{41}, \\
&2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{13}X_{15}X_{32}X_{61}))
\end{aligned}$$

A variedade

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{32}, X_{13}X_{21} + X_{15}X_{41}, \\
&X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, X_{41}, X_{51}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{32}, X_{41}, X_{51}, X_{13}X_{21}, \\
&X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31}, X_{16}X_{61}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{32}, X_{41}, X_{51}, X_{13}, \\
&X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{32}, X_{41}, X_{51}, X_{21}, \\
&X_{13}X_{31}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

é equidimensional de dimensão 21-16=5 e as variedades abaixo são equidimensionais de dimensão 21-15=6:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{13}, X_{15}, \\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{14}X_{41} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41})^2 - 2X_{16}X_{21}X_{32}X_{41}, X_{21}) = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{13}, X_{15}, X_{21}, X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{13}, X_{41},\\
&X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, X_{21}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{13}, X_{41}, X_{21}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{21}, X_{15},\\
&X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61}, X_{13}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{21}, X_{15}, X_{13}, X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{21}, X_{41},\\
&2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{13}X_{15}X_{32}X_{61}, X_{13}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{21}, X_{41}, X_{13}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}
$$

Então a variedade (4.34) acrescida de X_{52} é equidimensional de dimensão 7 e a variedade (4.34) é equidimensional de dimensão 8.
Portanto a variedade H_1 é equidimensional de dimensão 8.

- H_2

$$H_2 = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$

Calculando o determinante da matriz F do exemplo 4.3.3 para
$X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{43} = X_{25} = X_{42} = X_{23} = X_{41} = 0$, temos (considerando $X_{11} = 0$):

$$
\begin{aligned}
\phi_6^{(0)} =& - X_{13}^2X_{21}^2X_{32}^2 - 2X_{13}^2X_{21}X_{24}X_{32}X_{51} - X_{13}^2X_{24}^2X_{51}^2 + 2X_{13}^2X_{21}X_{24}X_{31}X_{52}+\\
&+ X_{13}^2X_{24}^2X_{52}X_{61} = X_{13}^2[-(X_{21}X_{32} + X_{24}X_{51})^2 + X_{24}X_{52}(2X_{21}X_{31} + X_{24}X_{61})]\\
\phi_4^{(0)} =& X_{12}^2X_{21}^2 + 2X_{12}X_{13}X_{21}X_{31} + X_{13}^2X_{31}^2 + 2X_{12}X_{15}X_{21}X_{51}+\\
&+ 2X_{13}X_{15}X_{31}X_{51} + X_{15}^2X_{51}^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} - 2X_{13}X_{21}X_{24}X_{52}+\\
&+ 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61} - 2X_{13}X_{15}X_{32}X_{61} - X_{15}^2X_{52}X_{61} =\\
&= (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} - 2X_{13}X_{21}X_{24}X_{52}+\\
&+ 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61} - 2X_{13}X_{15}X_{32}X_{61} - X_{15}^2X_{52}X_{61}\\
\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)} =& - 2X_{13}X_{21}X_{32} - 2X_{13}X_{24}X_{51} - 2X_{15}X_{21}X_{52}
\end{aligned}
$$

E $A = 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}$.
Por $\phi_6^{(0)}$ temos que H_2 é a união das duas variedades abaixo:

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{13}, A, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \tag{4.35}$$

e

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24},\\
&- (X_{21}X_{32} + X_{24}X_{51})^2 + X_{24}X_{52}(2X_{21}X_{31} + X_{24}X_{61}), A, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})
\end{aligned} \tag{4.36}
$$

A variedade (4.35) é igual a:

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{13}, A, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{13}, 2X_{12}X_{21} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},$$
$$(X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61}, -2X_{15}X_{21}X_{52}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{13}, X_{15}, 2X_{12}X_{21} + X_{16}X_{61},$$
$$(X_{12}X_{21})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52}) \cup$$
$$\cup\, \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{13}, X_{21}, 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},$$
$$(X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61}) \cup$$
$$\cup\, \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{13}, X_{52}, X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})$$

As variedades abaixo são equidimensionais de dimensão 21-14=7:

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{13}, X_{15}, 2X_{12}X_{21} + X_{16}X_{61},$$
$$(X_{12}X_{21})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52}, X_{52}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{13}, X_{15}, X_{52}, X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61})$$

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{13}, X_{21}, 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},$$
$$(X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61}, X_{52}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{13}, X_{21}, X_{52}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})$$

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{13}, X_{52}, X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, X_{15}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{24}, X_{13}, X_{52}, X_{15}, X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61})$$

Então a variedade (4.35) é equidimensional de dimensão 8.

Considere agora a variedade (4.36) acrescida de X_{15}:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41},\\
&-(X_{21}X_{32} + X_{24}X_{51})^2 + X_{24}X_{52}(2X_{21}X_{31} + X_{24}X_{61}), A, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}, X_{15}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15},\\
&-(X_{21}X_{32} + X_{24}X_{51})^2 + X_{24}X_{52}(2X_{21}X_{31} + X_{24}X_{61}), 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} - 2X_{13}X_{21}X_{24}X_{52} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61},\\
&-2X_{13}X_{21}X_{32} - 2X_{13}X_{24}X_{51}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{13},\\
&-(X_{21}X_{32} + X_{24}X_{51})^2 + X_{24}X_{52}(2X_{21}X_{31} + X_{24}X_{61}), 2X_{12}X_{21} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52}) \cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{21}X_{32} + X_{24}X_{51},\\
&X_{24}X_{52}(2X_{21}X_{31} + X_{24}X_{61}), 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} - 2X_{13}X_{21}X_{24}X_{52} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{13},\\
&-(X_{21}X_{32} + X_{24}X_{51})^2 + X_{24}X_{52}(2X_{21}X_{31} + X_{24}X_{61}), 2X_{12}X_{21} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52}) \cup \qquad (4.37)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{24}, X_{21}, X_{13}X_{31}, X_{16}X_{61}) \cup \qquad (4.38)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{24}, X_{32},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52}) \cup \qquad (4.39)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{52}, X_{21}X_{32} + X_{24}X_{51},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31})^2 + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61}) \cup \qquad (4.40)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, 2X_{21}X_{31} + X_{24}X_{61},\\
&X_{21}X_{32} + X_{24}X_{51}, 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} - 2X_{13}X_{21}X_{24}X_{52} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61}) \qquad (4.41)
\end{aligned}$$

As variedades (4.37) e (4.40) são equidimensionais de dimensão 7 pois as

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{13},\\
&-(X_{21}X_{32} + X_{24}X_{51})^2 + X_{24}X_{52}(2X_{21}X_{31} + X_{24}X_{61}), 2X_{12}X_{21} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52}, X_{52}, X_{32}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{13}, X_{52}, X_{32}, X_{24}X_{51}, X_{12}X_{21},\\
&X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{52}, X_{21}X_{32} + X_{24}X_{51},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31})^2 + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61}, X_{32}, X_{12}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{52}, X_{32}, X_{12}, X_{24}X_{51}, X_{13}X_{31},\\
&X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

são equidimensionais de dimensão 21-16=5.

A variedade (4.39) é equidimensional de dimensão 7 pois a variedade

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{24}, X_{32},$$
$$2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52}, X_{21}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{24}, X_{32}, X_{21}, X_{13}X_{31}, X_{16}X_{61})$$

é equidimensional de dimensão 21-15=6.
A variedade (4.41) é equidimensional de dimensão 7 pois a variedade:

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, 2X_{21}X_{31} + X_{24}X_{61},$$
$$X_{21}X_{32} + X_{24}X_{51}, 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + X_{16}X_{61},$$
$$(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} - 2X_{13}X_{21}X_{24}X_{52} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61}, X_{32}, X_{52}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{32}, X_{52}, X_{24}, X_{21}, X_{13}X_{31}, X_{16}X_{61}) \cup$$
$$\cup\, \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{32}, X_{52}, X_{24}, X_{31}, X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61}) \cup$$
$$\cup\, \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, 2X_{21}X_{31} + X_{24}X_{61},$$
$$2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31})^2 + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61})$$

é equidimensional de dimensão 5 já que a variedade abaixo é equidimensional de dimensão 21-17=4:

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, 2X_{21}X_{31} + X_{24}X_{61},$$
$$X_{24}X_{51}, 2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31})^2 + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61}, X_{24}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{24}, X_{21}, X_{13}X_{31},$$
$$X_{16}X_{61}) \cup$$
$$\cup\, \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{24}, X_{31}, X_{12}X_{21},$$
$$X_{16}X_{61})$$

Então a variedade (4.36) acrescida de X_{15} é equidimensional de dimensão 7 e a variedade (4.36) é equidimensional de dimensão 8.
Portanto, a variedade H_2 é equidimensional de dimensão 8.

- H_3

$$H_3 = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$

Calculando o determinante da matriz F do exemplo 4.3.3 para
$X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{43} = X_{25} = X_{42} = X_{32} = X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41} = 0$, temos (considerando $X_{11} = 0$):

$$\begin{aligned}
\phi_6^{(0)} =& -X_{14}^2X_{23}^2X_{51}^2+2X_{13}X_{14}X_{23}X_{24}X_{51}^2-X_{13}^2X_{24}^2X_{51}^2+2X_{13}^2X_{21}X_{24}X_{31}X_{52}-\\
&-2X_{14}^2X_{21}X_{23}X_{41}X_{52}-2X_{13}X_{14}X_{21}X_{23}X_{31}X_{52}+2X_{13}X_{14}X_{21}X_{24}X_{41}X_{52}+\\
&+X_{14}^2X_{23}^2X_{52}X_{61}-2X_{13}X_{14}X_{23}X_{24}X_{52}X_{61}+X_{13}^2X_{24}^2X_{52}X_{61}=\\
&=(X_{14}X_{23}-X_{13}X_{24})[-X_{51}^2(X_{14}X_{23}-X_{13}X_{24})+\\
&+X_{52}(-2X_{13}X_{21}X_{31}-2X_{14}X_{21}X_{41}+X_{14}X_{23}X_{61}-X_{13}X_{24}X_{61})]\\
\phi_4^{(0)} =& X_{12}^2X_{21}^2+2X_{12}X_{13}X_{21}X_{31}+X_{13}^2X_{31}^2+2X_{12}X_{14}X_{21}X_{41}+\\
&+2X_{13}X_{14}X_{31}X_{41}+X_{14}^2X_{41}^2+2X_{12}X_{15}X_{21}X_{51}+2X_{13}X_{15}X_{31}X_{51}+\\
&+2X_{14}X_{15}X_{41}X_{51}+X_{15}^2X_{51}^2+X_{16}X_{21}^2X_{52}+2X_{14}X_{21}X_{23}X_{52}-\\
&-2X_{13}X_{21}X_{24}X_{52}-2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61}+2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61}-X_{15}^2X_{52}X_{61}=\\
&=(X_{12}X_{21}+X_{13}X_{31}+X_{14}X_{41}+X_{15}X_{51})^2+X_{16}X_{21}^2X_{52}+2X_{14}X_{21}X_{23}X_{52}-\\
&-2X_{13}X_{21}X_{24}X_{52}-2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61}+2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61}-X_{15}^2X_{52}X_{61}\\
\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)} =& +2X_{14}X_{23}X_{51}-2X_{13}X_{24}X_{51}-2X_{15}X_{21}X_{52}
\end{aligned}$$

E $A=2X_{12}X_{21}+2X_{13}X_{31}+2X_{14}X_{41}+2X_{15}X_{51}+X_{16}X_{61}$.
Por $\phi_6^{(0)}$ temos que H_3 é a união das duas variedades abaixo:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{33},X_{34},X_{43},X_{25},X_{42},X_{32},X_{23}X_{31}+X_{24}X_{41},X_{14}X_{23}-X_{13}X_{24},A,\phi_4^{(0)},\\
&\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})
\end{aligned} \tag{4.42}$$

e

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11},X_{22},X_{33},X_{34},X_{43},X_{25},X_{42},X_{32},X_{23}X_{31}+X_{24}X_{41},\\
&-X_{51}^2(X_{14}X_{23}-X_{13}X_{24})+X_{52}(-2X_{13}X_{21}X_{31}-2X_{14}X_{21}X_{41}+X_{14}X_{23}X_{61}-X_{13}X_{24}X_{61}),\\
&A,\phi_4^{(0)},\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})
\end{aligned} \tag{4.43}$$

A variedade (4.42) acrescida de X_{13} é igual a:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41}, X_{14}X_{23} - X_{13}X_{24}, A, \phi_4^{(0)},\\
&\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}, X_{13}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{14}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41}, A, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})\cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{24}, A, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})\cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{41}, A, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{14}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61},\\
&- 2X_{15}X_{21}X_{52})\cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{24},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61}, -2X_{15}X_{21}X_{52})\cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{41},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} - X_{15}^2X_{52}X_{61},\\
&- 2X_{15}X_{21}X_{52}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&2X_{12}X_{21} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52})\cup \qquad (4.44)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{14}, X_{21}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61})\cup \qquad (4.45)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{14}, X_{52}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})\cup \qquad (4.46)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{24}, X_{15},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{14}X_{41} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52})\cup \qquad (4.47)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{24}, X_{21},\\
&2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61})\cup \qquad (4.48)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{24}, X_{52},\\
&2X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})\cup \qquad (4.49)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{41}, X_{15},\\
&2X_{12}X_{21} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52})\cup \qquad (4.50)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{41}, X_{21},\\
&2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61})\cup \qquad (4.51)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{41}, X_{52},\\
&X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}) \qquad (4.52)
\end{aligned}$$

A variedade (4.44) é equidimensional de dimensão 7 pois a variedade

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&2X_{12}X_{21} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52}, X_{52}, X_{24}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{52}, X_{24}, X_{23}X_{31},\\
&X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

é equidimensional de dimensão 21-16=5.

A variedade (4.45) é equidimensional de dimensão 7 pois a variedade

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{14}, X_{21}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},$$
$$2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61}, X_{52}, X_{24}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{14}, X_{21}, X_{52}, X_{24}, X_{23}X_{31},$$
$$X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})$$

é equidimensional de dimensão 21-16=5.
A variedade (4.46) é equidimensional de dimensão 7 pois a variedade

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{14}, X_{52}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},$$
$$X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, X_{12}, X_{24}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{14}, X_{52}, X_{12}, X_{24}, X_{23}X_{31},$$
$$X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})$$

é equidimensional de dimensão 21-16=5.
A variedade (4.47) é equidimensional de dimensão 7 pois a variedade

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{24}, X_{15},$$
$$2X_{12}X_{21} + 2X_{14}X_{41} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52}, X_{21}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{24}, X_{15}, X_{21}, X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61})$$

é equidimensional de dimensão 21-15=6.
A variedade (4.48) é equidimensional de dimensão 7 pois a variedade

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{24}, X_{21},$$
$$2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61}, X_{15}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{24}, X_{21}, X_{15}, X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61})$$

é equidimensional de dimensão 21-15=6.
A variedade (4.49) é equidimensional de dimensão 7 pois a variedade

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{24}, X_{52},$$
$$2X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, X_{12}, X_{14}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{24}, X_{52}, X_{12}, X_{14}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})$$

é equidimensional de dimensão 21-16=5.
A variedade (4.50) é equidimensional de dimensão 7 pois a variedade

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{41}, X_{15},$$
$$2X_{12}X_{21} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52}, X_{52}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{41}, X_{15}, X_{52}, X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61})$$

é equidimensional de dimensão 21-15=6.
A variedade (4.51) é equidimensional de dimensão 7 pois a variedade

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{41}, X_{21},$$
$$2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61}, (X_{15}X_{51})^2 - X_{15}^2X_{52}X_{61}, X_{52}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{41}, X_{21}, X_{52}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})$$

é equidimensional de dimensão 21-15=6.

A variedade (4.52) é equidimensional de dimensão 7 pois a variedade

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{41}, X_{52},\\
&X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, X_{12}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{41}, X_{52}, X_{12}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

é equidimensional de dimensão 21-15=6.
Então a variedade (4.42) acrescida de X_{13} é equidimensional de dimensão 7 e a variedade (4.42) é equidimensional de dimensão 8.

Considere agora a variedade (4.43):

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&- X_{51}^2(X_{14}X_{23} - X_{13}X_{24}) + X_{52}(-2X_{13}X_{21}X_{31} - 2X_{14}X_{21}X_{41} + X_{14}X_{23}X_{61} - X_{13}X_{24}X_{61}),\\
&A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&- X_{51}^2(X_{14}X_{23} - X_{13}X_{24}) + X_{52}(-2X_{13}X_{21}X_{31} - 2X_{14}X_{21}X_{41} + X_{14}X_{23}X_{61} - X_{13}X_{24}X_{61}),\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} + 2X_{14}X_{21}X_{23}X_{52}-\\
&- 2X_{13}X_{21}X_{24}X_{52} - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61} - X_{15}^2X_{52}X_{61},\\
&2X_{14}X_{23}X_{51} - 2X_{13}X_{24}X_{51} - 2X_{15}X_{21}X_{52}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&- X_{51}X_{15}X_{21}X_{52} + X_{52}(-2X_{13}X_{21}X_{31} - 2X_{14}X_{21}X_{41} + X_{14}X_{23}X_{61} - X_{13}X_{24}X_{61}),\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} + 2X_{14}X_{21}X_{23}X_{52}-\\
&- 2X_{13}X_{21}X_{24}X_{52} - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61} - X_{15}^2X_{52}X_{61},\\
&2X_{14}X_{23}X_{51} - 2X_{13}X_{24}X_{51} - 2X_{15}X_{21}X_{52}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61},\\
&2X_{14}X_{23}X_{51} - 2X_{13}X_{24}X_{51})\cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&- X_{51}X_{15}X_{21} + -2X_{13}X_{21}X_{31} - 2X_{14}X_{21}X_{41} + X_{14}X_{23}X_{61} - X_{13}X_{24}X_{61},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} + 2X_{14}X_{21}X_{23}X_{52}-\\
&- 2X_{13}X_{21}X_{24}X_{52} - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61} - X_{15}^2X_{52}X_{61},\\
&2X_{14}X_{23}X_{51} - 2X_{13}X_{24}X_{51} - 2X_{15}X_{21}X_{52}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41})^2 - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61})\cup && (4.53)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{14}X_{23} - X_{13}X_{24}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})\cup && (4.54)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&- X_{51}X_{15}X_{21} + -2X_{13}X_{21}X_{31} - 2X_{14}X_{21}X_{41} + X_{14}X_{23}X_{61} - X_{13}X_{24}X_{61},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} + 2X_{14}X_{21}X_{23}X_{52}-\\
&- 2X_{13}X_{21}X_{24}X_{52} - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61} - X_{15}^2X_{52}X_{61},\\
&2X_{14}X_{23}X_{51} - 2X_{13}X_{24}X_{51} - 2X_{15}X_{21}X_{52}) && (4.55)
\end{aligned}
$$

A variedade (4.53) acrescida de X_{24} é igual a

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},$$
$$2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + X_{16}X_{61},$$
$$(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41})^2 - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61}, X_{24}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{24}, X_{23}X_{31},$$
$$2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41})^2 - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{24}, X_{23},$$
$$X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61}) \cup$$
$$\cup\, \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{24}, X_{31},$$
$$2X_{12}X_{21} + 2X_{14}X_{41} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41})^2 - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61})$$

A variedade

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{24}, X_{23},$$
$$X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61}, X_{41}, X_{31}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{24}, X_{23}, X_{41}, X_{31},$$
$$X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61})$$

é equidimensional de dimensão 21-16=5 e a variedade

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{24}, X_{31},$$
$$2X_{12}X_{21} + 2X_{14}X_{41} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41})^2 - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61}, X_{14}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{24}, X_{31}, X_{14},$$
$$X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61})$$

é equidimensional de dimensão 21-15=6. Então a variedade (4.53) acrescida de X_{24} é equidimensional de dimensão 7 e a variedade (4.53) é equidimensional de dimensão 8.
A variedade (4.54) acrescida de X_{41} é igual a:

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{14}X_{23} - X_{13}X_{24}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},$$
$$X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, X_{41}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{41}, X_{14}X_{23} - X_{13}X_{24}, X_{23}X_{31},$$
$$X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{41}, X_{23}, X_{13}X_{24},$$
$$X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}) \cup$$
$$\cup\, \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{41}, X_{31}, X_{14}X_{23} - X_{13}X_{24},$$
$$X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{41}, X_{23}, X_{13},$$
$$X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}) \cup$$
$$\cup\, \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{41}, X_{23}, X_{24},$$
$$X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}) \cup$$
$$\cup\, \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{41}, X_{31}, X_{14}X_{23} - X_{13}X_{24},$$
$$X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})$$

A variedade

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{41}, X_{23}, X_{13},\\
&X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, X_{12}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{41}, X_{23}, X_{13}, X_{12}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

é equidimensional de dimensão 21-15=6 e as variedades abaixo são equidimensionais de dimensão 21-16=5:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{41}, X_{23}, X_{24},\\
&X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, X_{13}, X_{12}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{41}, X_{23}, X_{24}, X_{13}, X_{12},\\
&X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{41}, X_{31}, X_{14}X_{23} - X_{13}X_{24},\\
&X_{12}X_{21} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, X_{13}, X_{12}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{41}, X_{31}, X_{13}, X_{12}, X_{14}X_{23},\\
&X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

então a variedade (4.54) acrescida de X_{41} é equidimensional de dimensão 7 e (4.54) é equidimensional de dimensão 8.

A variedade (4.55) acrescida de X_{52} é igual a:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&- X_{15}X_{21}X_{51} - 2X_{13}X_{21}X_{31} - 2X_{14}X_{21}X_{41} + X_{14}X_{23}X_{61} - X_{13}X_{24}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 + X_{16}X_{21}^2X_{52} + 2X_{14}X_{21}X_{23}X_{52}-\\
&- 2X_{13}X_{21}X_{24}X_{52} - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61} - X_{15}^2X_{52}X_{61},\\
&2X_{14}X_{23}X_{51} - 2X_{13}X_{24}X_{51} - 2X_{15}X_{21}X_{52}, X_{52}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + 2X_{15}X_{51} + X_{16}X_{61},\\
&- X_{15}X_{21}X_{51} - 2X_{13}X_{21}X_{31} - 2X_{14}X_{21}X_{41} + X_{14}X_{23}X_{61} - X_{13}X_{24}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51})^2 - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61},\\
&2X_{14}X_{23}X_{51} - 2X_{13}X_{24}X_{51}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + X_{16}X_{61},\\
&- 2X_{13}X_{21}X_{31} - 2X_{14}X_{21}X_{41} + X_{14}X_{23}X_{61} - X_{13}X_{24}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41})^2 - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61})\cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41}, X_{14}X_{23} - X_{13}X_{24}\\
&X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, -X_{15}X_{21}X_{51} - 2X_{13}X_{21}X_{31} - 2X_{14}X_{21}X_{41}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + X_{16}X_{61},\\
&- 2X_{13}X_{21}X_{31} - 2X_{14}X_{21}X_{41} + X_{14}X_{23}X_{61} - X_{13}X_{24}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41})^2 - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61})\cup && (4.56)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{21}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41}, X_{14}X_{23} - X_{13}X_{24}\\
&X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})\cup && (4.57)\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41}, X_{14}X_{23} - X_{13}X_{24}\\
&X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, -X_{15}X_{51} - 2X_{13}X_{31} - 2X_{14}X_{41}) && (4.58)
\end{aligned}$$

A variedade (4.56) acrescida de X_{23} é igual a:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + X_{16}X_{61},\\
&-2X_{13}X_{21}X_{31} - 2X_{14}X_{21}X_{41} + X_{14}X_{23}X_{61} - X_{13}X_{24}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41})^2 - 2X_{12}X_{14}X_{23}X_{61} + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61}, X_{23}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}, X_{24}X_{41},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + 2X_{14}X_{41} + X_{16}X_{61}, -2X_{13}X_{21}X_{31} - 2X_{14}X_{21}X_{41} - X_{13}X_{24}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41})^2 + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}, X_{24},\\
&X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61}, -2X_{13}X_{21}X_{31} - 2X_{14}X_{21}X_{41})\cup\\
&\cup\, \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}, X_{41},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + X_{16}X_{61}, -2X_{13}X_{21}X_{31} - X_{13}X_{24}X_{61},\\
&(X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31})^2 + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}, X_{24}, X_{21},\\
&X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61})\cup\\
&\cup\, \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}, X_{24},\\
&X_{12}X_{21}, X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61})\cup\\
&\cup\, \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}, X_{41}, X_{13},\\
&X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61})\cup\\
&\cup\, \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}, X_{41}, 2X_{21}X_{31} + X_{24}X_{61},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31})^2 + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61})
\end{aligned}$$

As variedades abaixo são equidimensionais de dimensão 21-16=5:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}, X_{24}, X_{21},\\
&X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61}, X_{13}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}, X_{24}, X_{21}, X_{13},\\
&X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}, X_{24},\\
&X_{12}X_{21}, X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61}, X_{13}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}, X_{24}, X_{13},\\
&X_{12}X_{21}, X_{14}X_{41}, X_{16}X_{61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}, X_{41}, 2X_{21}X_{31} + X_{24}X_{61},\\
&2X_{12}X_{21} + 2X_{13}X_{31} + X_{16}X_{61}, (X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31})^2 + 2X_{12}X_{13}X_{24}X_{61}, X_{24}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}, X_{41}, X_{24}, X_{21}X_{31},\\
&X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31}, X_{16}X_{61}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}, X_{41}, X_{24}, X_{21},\\
&X_{13}X_{31}, X_{16}X_{61})\cup\\
&\cup\, \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{51}, X_{23}, X_{41}, X_{24}, X_{31},\\
&X_{12}X_{21}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

então a variedade (4.56) acrescida de X_{23} é equidimensional de dimensão 6 e a variedade (4.56) é equidimensional de dimensão 7.
A variedade (4.57) acrescida de X_{13} é igual a:

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{21}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41}, X_{14}X_{23} - X_{13}X_{24}$$
$$X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, X_{13}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{21}, X_{13}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41}, X_{14}X_{23},$$
$$X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{21}, X_{13}, X_{14}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},$$
$$X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}) \cup$$
$$\cup\, \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{21}, X_{13}, X_{23}, X_{24}X_{41},$$
$$X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{21}, X_{13}, X_{14}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},$$
$$X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}) \cup$$
$$\cup\, \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{21}, X_{13}, X_{23}, X_{24},$$
$$X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}) \cup$$
$$\cup\, \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{21}, X_{13}, X_{23}, X_{41},$$
$$X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})$$

As variedades abaixo são equidimensionais de dimensão 21-16=5:

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{21}, X_{13}, X_{14}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},$$
$$X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, X_{24}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{21}, X_{13}, X_{14}, X_{24}, X_{23}X_{31},$$
$$X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})$$

$$\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{21}, X_{13}, X_{23}, X_{24},$$
$$X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, X_{14}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{21}, X_{13}, X_{23}, X_{24}, X_{14},$$
$$X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})$$

então a variedade (4.57) acrescida de X_{13} é equidimensional de dimensão 6 e a variedade (4.57) é equidiemnsional de dimensão 7.

A variedade (4.58) acrescida de X_{13} é igual a:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41}, X_{14}X_{23} - X_{13}X_{24}\\
&X_{12}X_{21} + X_{13}X_{31} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, -X_{15}X_{51} - 2X_{13}X_{31} - 2X_{14}X_{41}, X_{13}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{13}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41}, X_{14}X_{23},\\
&X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, -X_{15}X_{51} - 2X_{14}X_{41}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{13}, X_{14}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&X_{12}X_{21}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})\cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{13}, X_{23}, X_{24}X_{41},\\
&X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, -X_{15}X_{51} - 2X_{14}X_{41}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{13}, X_{14}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&X_{12}X_{21}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})\cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{13}, X_{23}, X_{24},\\
&X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, -X_{15}X_{51} - 2X_{14}X_{41})\cup\\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{13}, X_{23}, X_{41},\\
&X_{12}X_{21}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

As variedades abaixo são equidimensionais de dimensão 21-16=5

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{13}, X_{14}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41},\\
&X_{12}X_{21}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, X_{24}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{13}, X_{14}, X_{24}, X_{23}X_{31},\\
&X_{12}X_{21}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{13}, X_{23}, X_{24},\\
&X_{12}X_{21} + X_{14}X_{41} + X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61}, -X_{15}X_{51} - 2X_{14}X_{41}, X_{41}) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{42}, X_{32}, X_{52}, X_{13}, X_{23}, X_{24}, X_{41},\\
&X_{12}X_{21}, X_{15}X_{51}, X_{16}X_{61})
\end{aligned}$$

então a variedade (4.58) acrescida de X_{13} é equidimensional de dimensão 6 e a variedade (4.58) é equidimensional de dimensão 7.
Portanto a variedade (4.55) acrescida de X_{52} é equidimensional de dimensão 7 e a variedade (4.55) é equidimensional de dimensão 8.
Assim concluimos que a variedade (4.43) é equidimensional de dimenao 8.
E a variedade H_3 é equidimensional de dimensão 8.
Por fim, concluimos que $Z_2^{(5)}$ acrescida de X_{42} é equidimensional de dimensão 8 e $Z_2^{(5)}$ é equidimensional de dimensão 9.

(c) $Z_3^{(5)}$

$$Z_2^{(5)} = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{23}X_{32} + X_{24}X_{42}, X_{23}X_{31} + X_{24}X_{41}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$
$$Z_3^{(5)} = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{23}X_{32} + X_{24}X_{42}, X_{14}X_{23} - X_{13}X_{24}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$

Denote por $Z_2^{(5)}(\phi_6^{(0)})$ o elemento $\phi_6^{(0)}$ calculado considerando $X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{24} = 2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52} = X_{23}^2 + X_{25}X_{43} = 0$. De maneira análoga, defina $Z_3^{(5)}(A)$, $Z_3^{(5)}(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)})$, $Z_2^{(5)}\phi_4^{(0)})$ e $Z_2^{(5)}(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$. Para obter esses elementos, devemos calcular o determinante abaixo:

$$\det\begin{pmatrix} u+X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ X_{21} & u & X_{23} & 0 & X_{25} & X_{15} \\ X_{31} & X_{32} & u & 0 & 0 & X_{14} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & u & -X_{23} & -X_{13} \\ X_{51} & X_{52} & X_{42} & -X_{32} & u & -X_{12} \\ X_{61} & X_{51} & X_{41} & -X_{31} & -X_{21} & u-X_{11} \end{pmatrix} \tag{4.59}$$

e considerar no resultado final $2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52} = X_{23}^2 + X_{25}X_{43} = 0$.
Denote por $Z_3^{(5)}(\phi_6^{(0)})$ o elemento $\phi_6^{(0)}$ calculado considerando
$X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{32} = 2X_{24}X_{42} + X_{25}X_{52} = X_{42}^2 - X_{43}X_{52} = 0$. De maneira análoga, defina $Z_3^{(5)}(A)$, $Z_3^{(5)}(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)})$, $Z_3^{(5)}(\phi_4^{(0)})$ e $Z_3^{(5)}(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$. Para obter esses elementos, devemos calcular o determinante abaixo:

$$\det\begin{pmatrix} u+X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ X_{21} & u & X_{23} & X_{24} & X_{25} & X_{15} \\ X_{31} & 0 & u & 0 & X_{24} & X_{14} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & u & -X_{23} & -X_{13} \\ X_{51} & X_{52} & X_{42} & 0 & u & -X_{12} \\ X_{61} & X_{51} & X_{41} & -X_{31} & -X_{21} & u-X_{11} \end{pmatrix} \tag{4.60}$$

e considerar no resultado final $2X_{24}X_{42} + X_{25}X_{52} = X_{42}^2 - X_{43}X_{52} = 0$.
Nos dois casos não consideramos $X_{11} = 0$ porque precisamos calcular as diferenciais em X_{11}.
Considere agora o automorfismo f do anel de polinômios nas 21 variáveis X_{ij} definido da seguinte forma:

$$\begin{array}{llll} f(X_{11}) = X_{11} \quad , & f(X_{12}) = X_{51} \quad , & f(X_{13}) = X_{41} \quad , & f(X_{14}) = X_{31} \\ f(X_{15}) = X_{21} \quad , & f(X_{16}) = -X_{61} \quad , & f(X_{21}) = X_{15} \quad , & f(X_{22}) = X_{22} \\ f(X_{23}) = -X_{23} \quad , & f(X_{24}) = X_{24} \quad , & f(X_{25}) = X_{25} \quad , & f(X_{31}) = X_{14} \\ f(X_{32}) = -X_{32} \quad , & f(X_{33}) = X_{33} \quad , & f(X_{34}) = X_{34} \quad , & f(X_{41}) = X_{13} \\ f(X_{42}) = X_{42} \quad , & f(X_{43}) = X_{43} \quad , & f(X_{51}) = X_{12} \quad , & f(X_{52}) = X_{52} \\ f(X_{61}) = -X_{16} & & & \end{array}$$

Para obter $f(Z_3^{(5)}(\phi_6^{(0)}))$, $f(Z_3^{(5)}(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}))$, $f(Z_3^{(5)}(\phi_4^{(0)}))$ e $f(Z_3^{(5)}(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}))$, basta calcular o determinante abaixo:

$$\det\begin{pmatrix} u+X_{11} & X_{51} & X_{41} & X_{31} & X_{21} & -X_{61} \\ X_{15} & u & -X_{23} & X_{24} & X_{25} & X_{21} \\ X_{14} & 0 & u & 0 & X_{24} & X_{31} \\ X_{13} & X_{42} & X_{43} & u & X_{23} & -X_{41} \\ X_{12} & X_{52} & X_{42} & 0 & u & -X_{51} \\ -X_{16} & X_{12} & X_{13} & -X_{14} & -X_{15} & u-X_{11} \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

que é o determinante (4.60) substituindo X_{ij} por $f(X_{ij})$.
Usando um programa, obtemos que (4.61) é igual a (4.59).
Assim podemos concluir que:

$$\begin{array}{ll} f(Z_3^{(5)}(\phi_6^{(0)})) = Z_2^{(5)}(\phi_6^{(0)}) \quad , & f(Z_3^{(5)}(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)})) = Z_2^{(5)}(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}) \\ f(Z_3^{(5)}(\phi_4^{(0)})) = Z_2^{(5)}(\phi_4^{(0)}) \quad , & f(Z_3^{(5)}(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})) = Z_2^{(5)}(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \end{array}$$

e

$$\begin{aligned}
&f(Z_3^{(5)}) := \mathcal{V}(f(X_{11}), f(X_{22}), f(X_{33}), f(X_{34}), f(X_{24}), f(X_{32}), f(X_{52}), f(A), f(\phi_6^{(0)}),\\
&f(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}), f(\phi_4^{(0)}), f(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})) =\\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) = Z_2^{(5)}
\end{aligned}$$

Assim concluimos que $Z_3^{(5)}$ e $Z_2^{(5)}$ são variedades isomórficas. Como $Z_2^{(5)}$ é equidimensional de dimensão 9 $Z_3^{(5)}$ também é equidimensional de dimensão 9.

(v) W_6

$$\begin{aligned}
W_5 &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{25}, X_{23}X_{32} + X_{24}X_{42}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})\\
W_6 &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{43}, X_{52}, X_{23}X_{32} + X_{24}X_{42}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})
\end{aligned}$$

Pelo automorfismo que leva X_{ij} em X_{ji} concluimos que W_6 é isomórfico a W_5. Portanto, W_6 é equidimensional de dimensão 9.

Portanto, segue o teorema.

□

Observação 4.3.1.

$$\begin{aligned}
W_3 =&\mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, 2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52}, A, X_{23}^2 + X_{25}X_{43}, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)},\\
&\phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})
\end{aligned}$$

Calculando o determinante da matriz F do exemplo 4.3.3 para $X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{24} = 2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52} = X_{23}^2 + X_{25}X_{43} = 0$, *temos (considerando $X_{11} = 0$):*

$$\begin{aligned}
\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)} =&2X_{13}X_{25}X_{32}^2X_{41} - 2X_{13}X_{25}X_{31}X_{32}X_{42} + 2X_{14}X_{25}X_{32}X_{41}X_{42}-\\
&- 2X_{14}X_{25}X_{31}X_{42}^2 + 2X_{15}X_{21}X_{32}^2X_{43} + 2X_{13}X_{21}X_{23}X_{32}^2-\\
&- 2X_{15}X_{23}X_{32}^2X_{41} + 2X_{14}X_{21}X_{23}X_{32}X_{42} + 2X_{15}X_{23}X_{31}X_{32}X_{42} =\\
&= 2X_{13}X_{25}X_{32}^2X_{41} - 2X_{13}X_{25}X_{31}X_{32}X_{42} + 2X_{14}X_{25}X_{32}X_{41}X_{42}-\\
&- 2X_{14}X_{25}X_{31}X_{42}^2 + 2X_{15}X_{21}X_{32}^2X_{43} - X_{13}X_{21}X_{25}X_{32}X_{52}+\\
&+ X_{15}X_{25}X_{32}X_{41}X_{52} - X_{14}X_{21}X_{25}X_{42}X_{52} - X_{15}X_{25}X_{31}X_{42}X_{52}
\end{aligned}$$

$\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}$ não é fatorável em W_3, diferente do que acontece em W_1 e W_5. Assim, já partimos para o método de acrescentar variável. Apesar de várias tentativas, não foi possível provar que W_3 é equidimensional de dimensão 9.

Assim, partimos para outra abordagem. Note que:

$$\begin{aligned}
\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)} =&X_{25}(X_{32}X_{41} - X_{31}X_{42} - \frac{1}{2}X_{21}X_{52})(2X_{13}X_{32})+\\
&+ X_{25}(X_{32}X_{41} - X_{31}X_{42} - \frac{1}{2}X_{21}X_{52})(2X_{14}X_{42})+\\
&+ X_{25}(X_{32}X_{41} - 2_{31}X_{42})(X_{15}X_{52}) + 2X_{15}X_{21}X_{32}^2X_{43}
\end{aligned}$$

Então o monômio $+2X_{15}X_{21}X_{32}^2X_{43}$ é o "problema". Um jeito de contornar esse problema é descrito *a seguir. Considere a variedade:*

$$Z = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, 2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52}, A, X_{23}^2 + X_{25}X_{43}, \phi_6^{(0)}, X_{25}\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)},$$
$$\phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) =$$
$$= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{25}, X_{23}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \cup W_3$$

Temos:

$$\begin{aligned}
X_{25}\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)} &= 2X_{13}X_{25}^2X_{32}^2X_{41} - 2X_{13}X_{25}^2X_{31}X_{32}X_{42} + 2X_{14}X_{25}^2X_{32}X_{41}X_{42} - \\
&- 2X_{14}X_{25}^2X_{31}X_{42}^2 + 2X_{15}X_{21}X_{25}X_{32}^2X_{43} + 2X_{13}X_{21}X_{23}X_{25}X_{32}^2 - \\
&- 2X_{15}X_{23}X_{25}X_{32}^2X_{41} + 2X_{14}X_{21}X_{23}X_{25}X_{32}X_{42} + 2X_{15}X_{23}X_{25}X_{31}X_{32}X_{42} = \\
&= 2X_{13}X_{25}^2X_{32}^2X_{41} - 2X_{13}X_{25}^2X_{31}X_{32}X_{42} + 2X_{14}X_{25}^2X_{32}X_{41}X_{42} - \\
&- 2X_{14}X_{25}^2X_{31}X_{42}^2 - 2X_{15}X_{21}X_{23}^2X_{32}^2 - X_{13}X_{21}X_{25}^2X_{32}X_{52} + \\
&+ X_{15}X_{25}^2X_{32}X_{41}X_{52} - X_{14}X_{21}X_{25}^2X_{42}X_{52} - X_{15}X_{25}^2X_{31}X_{42}X_{52} = \\
&= 2X_{13}X_{25}^2X_{32}^2X_{41} - 2X_{13}X_{25}^2X_{31}X_{32}X_{42} + 2X_{14}X_{25}^2X_{32}X_{41}X_{42} - \\
&- 2X_{14}X_{25}^2X_{31}X_{42}^2 - \frac{1}{2}X_{15}X_{21}X_{25}^2X_{52}^2 - X_{13}X_{21}X_{25}^2X_{32}X_{52} + \\
&+ X_{15}X_{25}^2X_{32}X_{41}X_{52} - X_{14}X_{21}X_{25}^2X_{42}X_{52} - X_{15}X_{25}^2X_{31}X_{42}X_{52} = \\
&= X_{25}^2(X_{32}X_{41} - X_{31}X_{42} - \frac{1}{2}X_{21}X_{52})(2X_{13}X_{32} + 2X_{14}X_{42} + X_{15}X_{52})
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
Z &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{25}, X_{23}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \cup \\
&\cup \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, 2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52}, A, X_{23}^2 + X_{25}X_{43}, \phi_6^{(0)}, \\
&(X_{32}X_{41} - X_{31}X_{42} - \frac{1}{2}X_{21}X_{52})(2X_{13}X_{32} + 2X_{14}X_{42} + X_{15}X_{52}), \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})
\end{aligned}$$

Defina:

$$\begin{aligned}
Z_1^{(3)} &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{25}, X_{23}, A, \phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \cap W_3 = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{25}, X_{23}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \\
Z_2^{(3)} &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, 2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52}, A, X_{23}^2 + X_{25}X_{43}, \phi_6^{(0)}, \\
&X_{32}X_{41} - X_{31}X_{42} - \frac{1}{2}X_{21}X_{52}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \cap W_3 = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, 2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52}, A, X_{23}^2 + X_{25}X_{43}, \phi_6^{(0)}, \\
&\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, X_{32}X_{41} - X_{31}X_{42} - \frac{1}{2}X_{21}X_{52}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \\
Z_3^{(3)} &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, 2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52}, A, X_{23}^2 + X_{25}X_{43}, \phi_6^{(0)}, \\
&2X_{13}X_{32} + 2X_{14}X_{42} + X_{15}X_{52}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) \cap W_3 = \\
&= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, 2X_{23}X_{32} + X_{25}X_{52}, A, X_{23}^2 + X_{25}X_{43}, \phi_6^{(0)}, \\
&\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, 2X_{13}X_{32} + 2X_{14}X_{42} + X_{15}X_{52}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})
\end{aligned}$$

Assim $W_3 = Z_1^{(3)} \cup Z_2^{(3)} \cup Z_3^{(3)}$. Dessa forma, W_3 é equidimensional de dimensão 9 se e somente se $Z_1^{(3)}$, $Z_2^{(3)}$ e $Z_3^{(3)}$ são equidimensionais de dimensão 9.

A variedade $Z_1^{(3)}$ é isomórfica a W_1:

$$W_1 = \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$

Denote por $W_1(\phi_6^{(0)})$ *o elemento* $\phi_6^{(0)}$ *calculado considerando* $X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{24} = X_{32} = X_{25}$. *De maneira análoga, defina* $W_1(A)$, $W_1(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)})$, $W_1(\phi_4^{(0)})$ *e* $W_1(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$. *Para obter esses elementos, devemos calcular o determinante abaixo:*

$$det \begin{pmatrix} u+X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ X_{21} & u & X_{23} & 0 & 0 & X_{15} \\ X_{31} & 0 & u & 0 & 0 & X_{14} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & u & -X_{23} & -X_{13} \\ X_{51} & X_{52} & X_{42} & 0 & u & -X_{12} \\ X_{61} & X_{51} & X_{41} & -X_{31} & -X_{21} & u-X_{11} \end{pmatrix} \tag{4.62}$$

Denote por $Z_1^{(3)}(\phi_6^{(0)})$ *o elemento* $\phi_6^{(0)}$ *calculado considerando* $X_{22} = X_{33} = X_{34} = X_{24} = X_{25} = X_{23}$. *De maneira análoga, defina* $Z_1^{(3)}(A)$, $Z_1^{(3)}(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)})$, $Z_1^{(3)}(\phi_4^{(0)})$ *e* $Z_1^{(3)}(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$. *Para obter esses elementos, devemos calcular o determinante abaixo:*

$$det \begin{pmatrix} u+X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ X_{21} & u & 0 & 0 & 0 & X_{15} \\ X_{31} & X_{32} & u & 0 & 0 & X_{14} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & u & 0 & -X_{13} \\ X_{51} & X_{52} & X_{42} & -X_{32} & u & -X_{12} \\ X_{61} & X_{51} & X_{41} & -X_{31} & -X_{21} & u-X_{11} \end{pmatrix} \tag{4.63}$$

Nos dois casos não consideramos $X_{11} = 0$ *porque precisamos calcular as diferenciais em* X_{11}.

Considere agora o automorfismo f *do anel de polinômios nas 21 variáveis* X_{ij} *definido da seguinte forma:*

$$\begin{array}{llll} f(X_{11}) = X_{11} \;, & f(X_{12}) = X_{13} \;, & f(X_{13}) = X_{12} \;, & f(X_{14}) = X_{15} \\ f(X_{15}) = X_{14} \;, & f(X_{16}) = X_{16} \;, & f(X_{21}) = X_{31} \;, & f(X_{22}) = X_{22} \\ f(X_{23}) = X_{32} \;, & f(X_{24}) = X_{24} \;, & f(X_{25}) = X_{34} \;, & f(X_{31}) = X_{21} \\ f(X_{32}) = X_{23} \;, & f(X_{33}) = X_{33} \;, & f(X_{34}) = X_{25} \;, & f(X_{41}) = X_{51} \\ f(X_{42}) = X_{42} \;, & f(X_{43}) = X_{52} \;, & f(X_{51}) = X_{41} \;, & f(X_{52}) = X_{43} \\ f(X_{61}) = X_{61} & & & \end{array}$$

Para obter $f(Z_1^{(3)}(\phi_6^{(0)}))$, $f(Z_1^{(3)}(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}))$, $f(Z_1^{(3)}(\phi_4^{(0)}))$ *e* $f(Z_1^{(3)}(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}))$, *basta calcular o determinante abaixo:*

$$det \begin{pmatrix} u+X_{11} & X_{13} & X_{12} & X_{15} & X_{14} & X_{16} \\ X_{31} & u & 0 & 0 & 0 & X_{14} \\ X_{21} & X_{23} & u & 0 & 0 & X_{15} \\ X_{51} & X_{42} & X_{52} & u & 0 & -X_{12} \\ X_{41} & X_{43} & X_{42} & -X_{23} & u & -X_{13} \\ X_{61} & X_{41} & X_{51} & -X_{21} & -X_{31} & u-X_{11} \end{pmatrix} \tag{4.64}$$

que é o determinante (4.63) substituindo X_{ij} *por* $f(X_{ij})$.

Usando um programa, obtemos que (4.64) é igual a (4.62).

Assim podemos concluir que:

$$f(Z_1^{(3)}(\phi_6^{(0)})) = W_1(\phi_6^{(0)}) \quad , \qquad f(Z_1^{(3)}(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)})) = W_1(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)})$$
$$f(Z_1^{(3)}(\phi_4^{(0)})) = W_1(\phi_4^{(0)}) \quad , \qquad f(Z_1^{(3)}(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})) = W_1(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})$$

e

$$\begin{aligned}&f(Z_1^{(3)}) := \mathcal{V}(f(X_{11}), f(X_{22}), f(X_{33}), f(X_{34}), f(X_{24}), f(X_{32}), f(X_{52}), f(A), f(\phi_6^{(0)}),\\ &f(\partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}), f(\phi_4^{(0)}), f(\partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)})) =\\ &= \mathcal{V}(X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{34}, X_{24}, X_{32}, X_{25}, A, \phi_6^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_6^{(0)}, \phi_4^{(0)}, \partial_{X_{11}}\phi_4^{(0)}) = W_1\end{aligned}$$

Assim concluimos que $Z_1^{(3)}$ *e* W_1 *são variedades isomórficas. Como* W_1 *é equidimensional de dimensão 9,* $Z_1^{(3)}$ *também é equidimensional de dimensão 9.*

Assim, W_3 *é equidimensional de dimensão 9 se e somente se* $Z_2^{(3)}$ *e* $Z_3^{(3)}$ *são equidimensionais de dimensão 9.*

Apêndice A

Programas para calcular determinante

Nesse trabalho foi utilizado o software de matemática Sage. A seguir estão os códigos dos programas.

Para calcular o determinante:

```
# Declara as variaveis X_ij.
X = ''
for i in range(1, 7):
  for j in range(1, 7):
    X += 'X_'+str(i)+str(j)+','

# Tira a ultima virgula.
X = X[:-1]
X = var(X)

# Declara variavel u.
u = var('u')

# Matriz.
M = matrix(SR, 6, 6, [u+X_11, X_12, X_13, X_14, X_15, X_16,
                       X_21, u+X_22, X_23, X_24, X_25, X_15,
                       X_31, X_32, u+X_33, X_34, X_24, X_14,
                      X_41, X_42, X_43, u-X_33, -X_23, -X_13,
                      X_51, X_52, X_42, -X_32, u-X_22, -X_12,
                      X_61, X_51, X_41, -X_31, -X_21, u-X_11])

# Exibir o determinate.
print(M.determinant())
```

Para exibir o resultado em formato latex, trocar:

```
print(M.determinant())
```

por

```
f=M.determinant()
print(latex(f))
```

Para calcular o determinante considerando que expressões (por exemplo $X_{23}X_{32}+X_{24}X_{42}$ e $X_{23}X_{31}+X_{24}X_41$):

```
# Declara as variaveis X_ij.
X = ''
for i in range(1, 7):
  for j in range(1, 7):
    X += 'X_'+str(i)+str(j)+','

# Tira a ultima virgula.
X = X[:-1]
X = var(X)
```

```

# Declara variavel u.
u = var('u')

# Define o anel de polinômios com o qual iremos trabalhar
R = PolynomialRing(QQ, 'u,X_11,X_12,X_13,X_14,X_15,X_16,X_21,X_22,X_23,X_24,X_25,X_31,X_32,X_33,X_34,X_41,X_42,X_43,X_51,X_52,X_61')

# Matriz.
M = matrix(SR, 6, 6, [u+X_11, X_12, X_13, X_14, X_15, X_16,
                       X_21, u+X_22, X_23, X_24, X_25, X_15,
                       X_31, X_32, u+X_33, X_34, X_24, X_14,
                     X_41, X_42, X_43, u-X_33, -X_23, -X_13,
                     X_51, X_52, X_42, -X_32, u-X_22, -X_12,
                     X_61, X_51, X_41, -X_31, -X_21, u-X_11])

# Define o ideal gerado por X_23*X_32+X_24*X_42 e X_23*X_31+X_24*X_41
I=R.ideal([X_23*X_32+X_24*X_42,X_23*X_31+X_24*X_41])

# Define o anel quociente do anel R por I
Q = R.quotient_ring(I)

# Calcula o determinante da matriz M em Q
f=Q(M.determinant())

# Escreve f como polinômio de R e não com suas classes de equivalência de Q
g=f.lift()

# Exibir o determinante.
print(latex(g))
```

Referências Bibliográficas

Bernstein e Lunts(1996) J. Bernstein e V. Lunts. A simple proof of Kostant's theorem that $U(\mathfrak{g})$ is free over its center. *American Journal of Mathematics*, 18(5):979–987. Citado na pág. 1

Bolsinov(1991) A. V. Bolsinov. Commutative families of functions related to consistent Poisson brackets. *Acta Applicandae Mathematica*, 24:253–274. Citado na pág. 20

Bourbaki(1998) N. Bourbaki. *Algebra chapters 1-3*. Springer. Citado na pág. 8, 9

Bourbaki(2006) N. Bourbaki. *Elements de mathematique-Algebre-chapitre 10*. Springer. Citado na pág. 13

Chervov e Molev(2009) A. V. Chervov e A. I. Molev. On higher-order Sugawara operators. *International Mathematics Research Notices*, páginas 1612–1635. Citado na pág. 25

Dixmier(1977) J. Dixmier. *Enveloping algebras*, volume 14. North-Holland Publishing Company. Citado na pág. 11, 20

Eisenbud(1995) D. Eisenbud. *Commutative algebra, with a view toward algebraic geometry*. Springer. Citado na pág. 16

Feigin e Frenkel(1992) B. Feigin e E. Frenkel. Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gelfand-Dikii algebras. *International Journal of Modern Physics A*, 7(supp01a):197–215. Citado na pág. 21

Feigin *et al.*(2010) B. Feigin, E. Frenkel e V. Toledano-Laredo. Gaudin models with irregular singularities. *Advances in Mathematics*, 223(3):873–948. Citado na pág. i, iii, 1, 20, 22, 29

Frenkel(2007) E. Frenkel. *Langlands correspondence for loop groups*. Cambridge University Press. Citado na pág. 21

Futorny e Molev(2015) V. Futorny e A. I. Molev. Quantization of the shift of argument subalgebras in type A. *Advances in Mathematics*, 285:1358–1375. Citado na pág. i, iii, 1, 19, 32

Futorny e Ovsienko(2003) V. Futorny e S. Ovsienko. Kostant's theorem for special filtered algebras. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 37(2):187–199. Citado na pág. 16, 17, 37

Hartshorne(1977) R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer. Citado na pág. 15, 16

Humphreys(1972) J. E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer-Verlag. Citado na pág. 4, 6, 8, 11, 14

Humphreys(1998) J. E. Humphreys. *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag. Citado na pág. 14

Kostant(1963) B. Kostant. Lie group representations on polynomial rings. *American Journal of Mathematics*, 85(3):327–404. Citado na pág. 1

Kostrikin e Manin(1989) A. I. Kostrikin e Y. I. Manin. *Linear algebra and geometry*. CRC Press. Citado na pág. 8, 9

Lam(1999) T. Y. Lam. *Lectures on modules and rings*. Springer. Citado na pág. 16

Lang(2002) S. Lang. *Algebra*. Springer. Citado na pág. 7, 8

Matsumura(1989) H. Matsumura. *Commutative ring theory*. Cambridge University Press. Citado na pág. 16, 17

Matsumura(1970) H. Matsumura. *Commutative algebra*. Cambridge University Press. Citado na pág. 17

Meinrenken(2013) E. Meinrenken. *Clifford algebras and Lie theory*. Springer. Citado na pág. 42

Mishchenko e Fomenko(1978) A. S. Mishchenko e A. T. Fomenko. Euler equations on finite-dimensional Lie groups. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 12(2):371–389. Citado na pág. 19, 20

Molev(2013) A. I. Molev. Feigin-frenkel center in types B, C and D. *Inventiones mathematicae*, 191(1):1–34. Citado na pág. i, iii, 1, 36, 37

Molev(2018) A. I. Molev. *Sugawara operators for classical Lie algebras*. American Mathematical Society. Citado na pág. 19, 23, 24, 25, 35, 36, 37, 40

Molev e Yakimova(2017) A. I. Molev e O. Yakimova. Quantisation and nilpotent limits of Mishchenko-Fomenko subalgebras. art. arXiv:1711.03917. URL https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2017arXiv171103917M. Citado na pág. i, iii, 2, 39, 42

Moreau(2018) A. Moreau. A remark on Mishchenko-Fomenko algebras and regular sequences. *Selecta Mathematica*, 24(3):2651–2657. Citado na pág. 38

Ovsienko(2003) S. Ovsienko. Strongly nilpotent matrices and Gelfand-Zetlin modules. *Linear Algebra and its Applications*, 365:349–367. Citado na pág. 39

Panyushev e Yakimova(2008) D. I. Panyushev e O. S. Yakimova. The argument shift method and maximal commutative subalgebras of Poisson algebras. *Mathematical Research Letters*, 15(2): 239–249. Citado na pág. 20, 37

Rybnikov(2006) L. G. Rybnikov. The argument shift method and the Gaudin model. *Functional Analysis and Its Applications*, 40(3):188–199. Citado na pág. 1, 20, 29

Tarasov(2002) A. A. Tarasov. The maximality of certain commutative subalgebras in the Poisson algebra of a semisimple Lie algebra. *Russian Mathematical Surveys*, 57(5):1013–1014. Citado na pág. 20

Tauvel e Yu(2005) P. Tauvel e R.W.T. Yu. *Lie algebras and algebraic groups*. Springer. Citado na pág. 14, 15

Vinberg(2014) E. B. Vinberg. Limits of integrable Hamiltonians on semisimple Lie algebras. *Functional Analysis and Its Applications*, 48(2):107–115. Citado na pág. 39

Vinberg(1991) E. B. Vinberg. On certain commutative subalgebras of a universal enveloping algebra. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 36(1):1–22. Citado na pág. 1, 20

Zariski e Samuel(1960) O. Zariski e P. Samuel. *Commutative algebra*, volume 2. D. Van Nostrand Company, Inc. Citado na pág. 14

Zelobenko(1973) D. P. Zelobenko. *Compact Lie groups and their representations*. American Mathematical Society. Citado na pág. 39