# A Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás.

Thiago Grando

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Área de Concentração: **Matemática**

Orientadora: **Prof$^{a}$ Dr$^{a}$ Mary Lilian Lourenço**

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

-São Paulo, 20 de maio de 2016-

# A Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás.

Esta é a versão original da tese elaborada pelo
candidato Thiago Grando, tal como
submetida à Comissão Julgadora.

# A Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás.

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 20/05/2016. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Leonardo Pellegrini Rodrigues - IME-USP
- Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui - IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. André Arbex Hallack - UFJF
- Profa. Dra. Neusa Nogas Tocha - UTFPR

# Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos

à minha orientadora Mary Lilian pela orientação, por sempre estar presente em todos os momentos, pela sua paciência, pelos momentos de descontração e por sempre demonstrar carisma pelos seus orientandos;

à minha avó Anair, minha mãe Elizabet e à minha tia Rosemaria, por apoiarem todas minhas decisões e por estarem comigo em cada momento da minha vida;

aos amigos e colegas que fiz durante esse período, em particular ao Wilson A. Cuellar;

aos professores e funcionários do IME-USP;

aos professores que fizeram parte da banca examinadora, Jorge Mujica, Neusa N. Tocha, Leonardo P. Rodrigues e André A. Hallack pelas correções e sugestões feitas;

à CAPES pelo auxílio financeiro;

Obrigado!

# Resumo

GRANDO, T. **A Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás.** 2016. Tese(Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Estudamos a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores, $(BPBP)$, definidos entre espaços de Banach. Nosso objetivo foi o de procurar pares de espaços de Banach que possuem a $BPBP$. Assim, provamos que, se o par de espaços de Banach reais $\left(c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \ell_2^i\right), Y\right)$ satisfaz a $BPBP$, onde $Y$ é um espaço de Banach estritamente convexo, então $Y$ é uniformemente convexo. No estudo da $BPBP$ aparecem diversas outras propriedades, dentre elas destacamos a *Approximate hyperplane series property* $(AHSP)$. Nesta direção, considerando $(K, (X_t)_{t \in K}, Z)$ um espaço de função módulo, provamos que $Z$ satisfaz a $AHSP$ desde que $X_t$ satisfaça a $AHSP$ para todo $t \in K$. Além disso, sob determinadas condições provamos a recíproca desse resultado. Como consequência, provamos que um espaço de Banach $X$ tem a $AHSP$ se, e somente se, $\mathcal{C}_0(L, X)$ tem a $AHSP$, para todo espaço localmente compacto Hausdorff $L$ não-vazio.

Concomitantemente ao estudo da $BPBP$, estudamos técnicas de caracterização dos conjuntos compactos de $c_0$. Com essas técnicas, caracterizamos os conjuntos compactos de $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \ell_p^i\right)$, $1 \leq p \leq \infty$ e do prédual do espaço de Lorentz, $d_*(w, 1)$.

**Palavras-chave:** propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores, operadores que atingem a norma, propriedade $AHSP$, espaços de função módulo, conjuntos compactos

# Abstract

GRANDO, T. **Bishop-Phelps-Bollobás property.** 2016. Tese(Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

We study the Bishop-Phelps-Bollobás property for operators, $(BPBP)$, defined between Banach spaces. Our goal was to look for pairs of Banach spaces satisfying the $BPBP$. We prove that if the pair of real Banach spaces $(c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \ell_2^i\right), Y)$ satisfy $BPBP$, where $Y$ is a strictly convex Banach space, then $Y$ is an uniformly convex space. In the study of $BPBP$, it appears other properties, such the *Approximate hyperplane series property* for Banach spaces. In this sense, we proved that if $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$ is function module space, then $Z$ satisfies $AHSP$ if $X_t$ has the $AHSP$ for all $t \in K$. Moreover, under certain conditions we proved the reciprocal of this result. As a consequence, a Banach space $X$ has the $AHSP$ if, and only if, $\mathcal{C}_0(L, X)$ has the $AHSP$, for every non-empty locally compact Hausdorff space $L$.

Concomitantly to the study of $BPBP$, we study techniques of characterization of compact sets of $c_0$. With these techniques, we characterize the compact sets of the spaces $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \ell_p^i\right)$, $1 \leq p \leq \infty$ and the predual of Lorentz sequence space $d_*(w, 1)$.

**Keywords:** Bishop-Phelps-Bollobás, norm-attaining operators, compact subsets

# Sumário


**Lista de Símbolos** **ix**

**Introdução** **xi**

**1 Conceitos Preliminares** **1**

1.1 Espaços estritamente convexos e uniformemente convexos . . . . . . . . . . . 1

1.2 Espaços $c_0$-somas e os espaços de Lorentz . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

1.3 Espaços de função módulo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

**2 A propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás** **11**

2.1 A propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

2.2 A propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para $\left(c_0\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty}\ell_2^k\right), Y\right)$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19

2.3 A propriedade $AHSP$ para espaços de função módulo . . . . . . . . . . . . . 30

**3 Caracterização de compactos em alguns espaços de Banach** **41**

3.1 Conjuntos compactos de $c_0\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty}\ell_p^i\right)$, $1 \leq p \leq \infty$ e $d_*(w,1)$. . . . . . . . . . 41

**Referências Bibliográficas** **51**

# Lista de Símbolos

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}_0$ | o conjunto dos números naturais; |
| $\mathbb{N}$ | o conjunto dos números inteiros estritamente positivos; |
| $\mathbb{R}$ | o corpo dos números reais; |
| $\mathbb{C}$ | o corpo dos números complexos; |
| $\mathbb{K}$ | o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; |
| $X, Y$ | espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$; |
| $B_X$ | a bola unitária fechada de $X$; |
| $S_X$ | a esfera unitária de $X$; |
| $B(x, \epsilon)$ | bola fechada centrada em $x$ de raio $\epsilon$; |
| $\mathcal{L}(X, Y)$ | o espaço de Banach de todas as |
| | aplicações lineares e contínuas de $X$ em $Y$; |
| $\mathcal{NA}(X; Y)$ | o conjunto dos operadores de $X$ em $Y$ que atingem a norma; |
| $\mathcal{C}(K, X)$ | espaço das funções contínuas de $K$ em $X$, |
| | $K$ compacto; |
| $\mathcal{C}_0(L, X)$ | espaço das funções contínuas de $L$ em $X$ que se anulam no infinito |
| | $L$ localmente compacto; |
| $X^*$ | o espaço $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, dual de $X$; |
| $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$ | espaço de função módulo; |
| $\mathcal{H}(X)$ | o espaço das funções holomorfas definidas em $X$; |
| $\ell_p$ | o espaço das sequências $p$-somáveis; |
| $\ell_p^n$ | o espaço $\mathbb{K}^n$ com a norma $p$; |
| $I(n)$ | subconjunto finito de $\mathbb{N}$, ver p. 4; |

| | |
|---|---|
| $c_0$ | espaço das sequências que convergem a zero; |
| $c_0^+$ | conjunto das sequências de números reais positivos que convergem a zero; |
| $\operatorname{supp} y$ | suporte da sequência $y$; |
| $\ell_1\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell_2^k\right)$ | espaço de Stegal, ver p. 4; |
| $c_0\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell_2^k\right)$ | prédual do espaço de Stegal, ver p. 4; |
| $d(w,1)$ | espaço de sequências de Lorentz, ver p. 6; |
| $d_*(w,1)$ | prédual do espaço $d(w,1)$, ver p. 7; |
| $P_A$ | operador de projeção nas coordenadas de $A \subset \mathbb{N}$; |
| $e_k^*$ | funcional coordenado. |

# Introdução

Na década de 50, o matemático R. James apresentou condições necessárias e suficientes para que um espaço de Banach $X$ seja reflexivo. Tal resultado é conhecido como *Teorema de James*, e nos diz que:

**Teorema 0.1** (R. James)**.** *Um espaço de Banach $X$ é reflexivo se, e somente se, todo funcional linear e contínuo definido em $X$ atinge a norma.*

Inspirados no resultado de James, em 1961, E. Bishop e R. Phelps começam a estudar classes de funcionais lineares contínuos definidos em espaços de Banach $X$ não reflexivos, que atingem a norma. Com isso, provaram que se $X$ é um espaço de Banach, então o conjunto dos funcionais lineares e contínuos definidos em $X$ que atingem a norma, é denso em $X^*$. Este resultado é conhecido como *Teorema de Bishop-Phelps* [11]. A partir daí surge a idéia natural de estudar este resultado para operadores lineares e contínuos. Mais concretamente, para que espaços de Banach $X$ e $Y$ o conjunto dos operadores que atingem a norma, $\mathcal{NA}(X,Y)$, é denso no espaço $\mathcal{L}(X,Y)$ dos operadores lineares e contínuos? O estudo deste tópico produziu uma teoria com resultados profundos e elegantes. Em 1963, J. Lindenstrauss [25], mostrou que, quando $X$ é reflexivo, então $\mathcal{NA}(X,Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X,Y)$, para todo espaço de Banach $Y$, e, mostrou através de um exemplo, que a hipótese de reflexibilidade de $X$ é essencial. Em 1977, J. Bourgain provou um resultado análogo ao de Lindenstrauss, para espaços de Banach $X$ que possuem a propriedade de Radon-Nikodým. Quer dizer, dados $X$ e $Y$ espaços de Banach, tem-se que $\mathcal{NA}(X,Y)$ será denso em $\mathcal{L}(X,Y)$ sempre que $X$ for reflexivo ou $X$ tiver a propriedade de Radon-Nikodým. A partir daí, surgiram muitos trabalhos nesta direção, dentre eles destacamos [1], [2], [3], [6], [21], [29], [30].

Motivado por alguns problemas sobre o intervalo numérico de um operador, B. Bollobás em [12], provou uma versão quantitativa do teorema de Bishop-Phelps [11]. Esse teorema ficou conhecido como teorema de Bishop-Phelps-Bollobás.

**Teorema 0.2** (B. Bollobás)**.** *Seja $\epsilon > 0$ um número arbitrário. Se $x \in B_X$ e $x^* \in S_{X^*}$ tais que $|1 - x^*(x)| < \frac{\epsilon^2}{4}$, então existem $y \in S_X$ e $y^* \in S_{X^*}$ tais que $y^*(y) = 1$, $\|y - x\| < \epsilon$ e $\|y^* - x^*\| < \epsilon$.*

Assim, podemos nos questionar sobre as possíveis extensões do teorema de Bishop-Phelps-Bollobás a operadores definidos entre dois espaços de Banach quaisquer. Em geral, é falso que para cada par de espaços de Banach $X$ e $Y$, $\mathcal{NA}(X, Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X, Y)$. Por isso, não há grandes expectativas de que um teorema do tipo Bishop-Phelps-Bollobás venha ser válido de um modo geral. Tendo em vista buscar resultados positivos a essa questão, M. D. Acosta, R. M. Aron, D. García e M. Maestre em [4], introduziram a *propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores(BPBP)*. Especificamente, um par de espaços de Banach $(X, Y)$ possui a $BPBP$ se, para cada $\epsilon > 0$ existir $\eta(\epsilon) > 0$ tal que, para cada operador linear e contínuo $T : X \to Y$, $\|T\| = 1$, se $x \in X$, $\|x\| = 1$ satisfaz $\|T(x)\| > 1 - \eta(\epsilon)$, então podemos aproximar $T$ a um operador $R$ e $x$ a um vetor $x_0$, onde $\|R\| = 1$, $\|x_0\| = 1$ e $R$ atinge a norma em $x_0$. No estudo do teorema de Bishop-Phelps para operadores entre espaços de Banach quaisquer, há duas questões a serem consideradas:

1. Para que espaço de Banach $X$, $\mathcal{NA}(X, Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X, Y)$, para todo espaço de Banach $Y$?

2. Para que espaço de Banach $Y$, $\mathcal{NA}(X, Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X, Y)$, para todo espaço de Banach $X$?

W. Schachermayer em [30], apresentou uma resposta a pergunta 1. Ele introduziu uma propriedade, denominada $\alpha$, e mostrou que se $X$ tiver tal propriedade então a resposta a 1. é positiva. A segunda pergunta foi respondida de maneira afirmativa por J. Lindenstrauss em [25], introduzindo uma propriedade, denominada $\beta$, ao espaço de Banach $Y$. Essas duas propriedades generalizam em algum sentido a situação geométrica dos espaços $\ell_1$ e $c_0$, respectivamente. Em [4], os autores fizeram perguntas semelhantes a 1. e 2., mas no sentido do teorema de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores. Nesse artigo, provaram que o par $(X, Y)$ tem a propriedade $BPBP$ sempre que $Y$ tem a propriedade $\beta$ de Lindenstrauss. No caso dual, fixando $\ell_1$ no domínio, os autores definiram condições necessárias e suficientes ao espaço de Banach $Y$, para que o par $(\ell_1, Y)$ possua a $BPBP$. A essas condições deram o nome de *Approximate hyperplane series property* $(AHSP)$ e provaram que vários espaços possuem a $AHSP$: os espaços de dimensão finita, $\mathcal{C}(K)$ para todo espaço Hausdorff compacto $K$, $L_1(\mu)$ para toda medida $\sigma$-finita $\mu$ e todo espaço de Banach uniformemente convexo. Além disso provaram que o par $(\ell_\infty^n, Y)$ tem a $BPBP$ para todo espaço de Banach $Y$ uniformemente convexo. Em [4] os autores perguntaram se para todo $Y$ uniformemente convexo, o par $(c_0, Y)$ satisfaz a $BPBP$. Em 2013, S. Kim [23] respondeu a questão de forma positiva.

Neste trabalho, nosso objetivo é procurar pares de espaços de Banach que satisfazem a $BPBP$. Primeiramente, usando as técnicas apresentadas em [23], provamos que, se o par de espaços de Banach reais $(c_0(\bigoplus_{i=1}^\infty \ell_2^i), Y)$ satisfaz a $BPBP$, onde $Y$ é um espaço de Banach estritamente convexo, então $Y$ é uniformemente convexo. Conjecturamos que o par $\left(\ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^n \ell_2^k\right), Y\right)$ satisfaz a $BPBP$, para cada espaço de Banach $Y$ uniformemente convexo. Caso ocorra, teríamos que o par $(c_0(\bigoplus_{i=1}^\infty \ell_2^i), Y)$ satisfaz a $BPBP$, para cada espaço de Banach $Y$ uniformemente convexo. Também procuramos espaços de Banach $Y$ que tem a $AHSP$, como descrita anteriormente. Especificamente, considerando $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$ um espaço de função módulo, nos perguntamos quais seriam as condições sobre os espaços de Banach $(X_t)_{t\in K}$ para que $Z$ tenha a $AHSP$. Obtivemos o seguinte:

**Teorema 0.3.** *Sejam $K$ um espaço Hausdorff compacto não-vazio, $(X_t)_{t\in K}$ uma família de espaços de Banach e $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$ espaço de função módulo. Se $(X_t)_{t\in K}$ tem AHSP, para todo $t \in K$, então a $Z$ tem AHSP.*

Além disso, colocando a hipótese de que a aplicação $t \in K \mapsto \|x(t)\| \in \mathbb{R}$ é contínua para todo $x \in Z$, conseguimos provar a recíproca do teorema acima:

**Teorema 0.4.** *Sejam $K$ um espaço Hausdorff compacto não-vazio, $(X_t)_{t\in K}$ uma família de espaços de Banach e $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$ um espaço de função módulo tal que a aplicação $t \in K \mapsto \|x(t)\| \in \mathbb{R}$ é contínua para todo $x \in Z$. Se $Z$ tem a $AHSP$, então $X_t$ tem a $AHSP$ para todo $t \in K$.*

Observamos que o Teorema 0.4 vale se $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$ é um espaço de função módulo dual. Como consequência obtemos que $\mathcal{C}(K, X)$ tem a $AHSP$ se, e somente se, $X$ tem a $AHSP$, ja que o espaço $\mathcal{C}(K, X)$ pode ser visto como espaço de função módulo, quando consideramos $K$ o espaço base, $X_t = X$ para todo $t \in K$ e $Z = \mathcal{C}(K, X)$, generalizando assim o Teorema 11 de [16]. Da mesma forma, se $L$ é um espaço topológico Hausdorff localmente compacto e $X$ um espaço de Banach, então $\mathcal{C}_0(L, X)$ tem a $AHSP$ se, e somente se, $X$ tem a $AHSP$.

Concomitantemente ao estudo da $BPBP$, estudamos as técnicas de caracterização dos conjuntos compactos de $c_0$. Recentemente, em [20], S. Dineen e J. Mujica provaram, usando uma caracterização dos conjuntos compactos de $c_0$, que os monômios com a ordenação quadrada formam base de Schauder para os espaços $(\mathcal{H}(c_0), \tau_0)$, $(\mathcal{H}(c_0), \tau_w)$ e $(\mathcal{H}_b(c_0), \tau_b)$. Compreendidas as técnicas apresentadas em [20], aqui apresentaremos uma caracterização aos conjuntos compactos de $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \ell_p^i\right)$, $1 \leq p \leq \infty$ e do predual do espaço de Lorentz $d_*(w, 1)$. Com essa caracterização, nosso objetivo é dar continuidade ao estudo dos monômios em $\mathcal{H}\left(c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \ell_p^i\right)\right)$, $1 \leq p \leq \infty$ e $\mathcal{H}\left(d_*(w, 1)\right)$.

# Capítulo 1

# Conceitos Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e alguns resultados que serão utilizados no decorrer da tese. Estaremos trabalhando com espaços de Banach reais ou complexos. Se $X$ é um espaço de Banach ou normado, $B_X$ e $S_X$ denotarão a bola unitária fechada e a esfera unitária respectivamente. Fixado $1 \leq p \leq \infty$, denotaremos por $\ell_p^n$ o espaço $\mathbb{K}^n$ munido da norma $p$.

## 1.1 Espaços estritamente convexos e uniformemente convexos

A proposta desta seção é definir e apresentar algumas equivalências dos espaços estritamente convexos e uniformemente convexos, que são propriedades dos espaços normados e se referem a forma da bola unitária fechada. Estas duas definições foram formuladas de forma independente em 1936 por J. Clarkson, e em 1938 por M. Krein.

**Definição 1.1.** *Um espaço normado $X$ é dito* **estritamente convexo** *se*

$$\|tx_1 + (1-t)x_2\| < 1$$

*sempre que $x_1$ e $x_2$ são pontos distintos em $S_X$ e $t \in (0,1)$.*

Geometricamente, a Definição 1.1 nos diz que um espaço normado é estritamente convexo quando sua esfera unitária não contém segmentos de retas não-triviais. Daremos a seguir alguns exemplos e contra-exemplos de espaços estritamente convexos.

**Exemplos 1.2.**

1. *Todo espaço normado cuja dimensão é* $0$ *ou* $1$ *é estritamente convexo.*

2. *Os espaços* $\ell_p$ *e* $\ell_p^n$ *são estritamente convexos para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $1 < p < \infty$.

3. *Os espaços* $\ell_1$, $\ell_\infty$ *e* $c_0$ *não são estritamente convexos.*

4. *O espaço* $\mathcal{C}(K)$ *não é estritamente convexo, para todo espaço Hausdorff compacto* $K$ *que possua pelo menos dois elementos.*

Uma importante caracterização dos espaços estritamente convexo, e que será usada neste texto, é a que segue.

**Proposição 1.3.** *Seja* $X$ *um espaço normado. São equivalentes:*

*(i)* $X$ *é estritamente convexo.*

*(ii)* $\left\|\dfrac{x_1+x_2}{2}\right\| < 1$ *sempre que* $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ *e* $x_1 \neq x_2$.

*Demonstração.* Ver [27], Proposição 5.1.2, página 427. ■

A Proposição 1.3, nos diz que um espaço normado é estritamente convexo se, e somente se, cada segmento de reta não-trivial com extremos sobre a esfera do espaço, possui ponto médio no interior da bola unitária. Assim, podemos questionar o quanto ao interior da bola unitária está tal ponto médio.

**Definição 1.4.** *Um espaço normado* $X \neq \{0\}$ *é* **uniformemente convexo** *se para todo* $\epsilon > 0$ *existir* $\delta = \delta(\epsilon)$, $0 < \delta < 1$ *tais que, se* $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| > 1 - \delta$ *para cada* $x, y \in B_X$, *então* $\|x - y\| < \epsilon$.

Neste caso o *módulo de convexidade* é dado por

$$\delta(\epsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in S_X,\ \|x-y\| \geq \epsilon\right\}.$$

A convexidade uniforme é uma propriedade métrica, ou seja, depende explicitamete de uma dada norma do espaço e não somente da topologia a qual é definida. O próximo teorema, que foi demonstrado de forma independente, em 1938 por D. P. Milman e em 1939 por B. J. Pettis, afirma que os espaços uniformemente convexos formam uma sub-classe dos espaços reflexivos.

**Teorema 1.5.** *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

*Demonstração.* Ver [27], Proposição 5.2.15, página 452. ■

É importante ressaltar que, ao contrário dos espaços uniformemente convexos, os espaços estritamente convexos não são necessáriamente reflexivos (ver Exemplo 5.1.8, [27], página 428). Na sequência daremos alguns exemplos de espaços uniformemente convexos.

**Exemplos 1.6.**

1. $c_0$ não é uniformemente convexo, pois não é reflexivo.
2. Todo subespaço de um espaço uniformemente convexo é uniformemente convexo.
3. Os espaços $\ell_p$ e $\ell_p^n$ são uniformemente convexos para todo $n \in \mathbb{N}$ e $1 < p < \infty$.
4. Todo espaço de Hilbert é uniformemente convexo.

O próximo resultado é uma caracterização sequencial para a convexidade uniforme em espaços normados. Usaremos tal caracterização no capítulo 2.

**Proposição 1.7.** *Seja $X$ um espaço normado. São equivalentes:*

*(i)* *$X$ é uniformemente convexo.*

*(ii)* *Se $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são sequências em $S_X$ tais que $\left\|\dfrac{x_n + y_n}{2}\right\| \to 1$, então $\|x_n - y_n\| \to 0$.*

*Demonstração.* Ver [27], Proposição 5.2.8, página 447. ■

O próximo teorema garante que convexidade uniforme implica em convexidade estrita.

**Teorema 1.8.** *Todo espaço normado $X$ uniformemente convexo é estritamente convexo.*

*Demonstração.* Ver [27], Proposição 5.2.6, página 447. ■

## 1.2 Espaços $c_0$-somas e os espaços de Lorentz

Nesta seção iremos apresentar os espaços da forma $c_0$-somas de espaços $\ell_p^n$, onde $1 \leq p \leq \infty$, bem como os seus duais. Também iremos definir os espaços de Lorentz da forma $d(w,p)$.

Vamos recordar que, uma sequência $(x_k)_k$ num espaço de Banach $X$ é uma *base de Schauder* de $X$ se, para cada $x \in X$ existir uma única sequência $(\alpha_k)_k$ de escalares tais que $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$. Duas bases de Schauder $(x_k)_k$ e $(y_k)_k$ num espaço de Banach $X$ são *equivalentes* se, para cada sequência $(\alpha_k)_k$ de escalares, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ converge se, e somente se, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k$ converge. Uma base de Schauder $(x_k)_k$ de $X$ é dita *simétrica* se, para cada permutação $\pi$ de naturais, $(x_{\pi(k)})_k$ é equivalente a $(x_k)_k$.

Para simplificar as notações para tais espaços, iremos introduzir uma aplicação auxiliar $s : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definida por

$$s(n) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n = 0 \\ 1 + 2 + \ldots + n & \text{se} \quad n \neq 0. \end{cases}$$

Com isso, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$I(n) = \{l \in \mathbb{N} : \; s(n-1) + 1 \leq l \leq s(n)\}.$$

Seja $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço de Banach,

$$X = c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \ell_p^i\right) = \left\{ (y_i)_i \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \; \left( \left( \sum_{i \in I(n)} |y_i|^p \right)^{1/p} \right)_n \in c_0 \right\}$$

munido da norma $\|y\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in I(n)} |y_i|^p\right)^{1/p}$. Ele tem como dual o seguinte espaço de Banach,

$$Y = \ell_1\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \ell_q^i\right) = \left\{ (y_i)_i \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \; \left( \left( \sum_{i \in I(n)} |y_i|^q \right)^{1/q} \right)_n \in \ell_1 \right\},$$

munido da norma $\|y\| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i\in I(n)} |y_i|^q\right)^{1/q}$, onde $1 \leq q < \infty$ é o conjugado de $p$. A importância de tais espaços deve-se ao fato que, quando $p = 2$, $Y$ foi o primeiro exemplo de um espaço de Banach que tem a propriedade de Dunford-Pettis mas que seu dual não a possui. Tal exemplo foi dado por C. Stegall em [31].

De forma análoga definimos esses espaços para $p = \infty$,

$$c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \ell_\infty^i\right) = \left\{ y = (y_i)_i \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \left(\max_{i \in I(n)} |y_i|\right)_n \in c_0 \right\},$$

munido da norma $\|y\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{i \in I(n)} |y_i|$, cujo dual é

$$\ell_1\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \ell_1^i\right) = \left\{ y = (y_i)_i \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \left(\sum_{i \in I(n)} |y_i|\right)_n \in \ell_1 \right\},$$

munido da norma $\|y\| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i \in I(n)} |y_i|$. Para facilitar as contas nesses espaços, é usual representar seus elementos por uma matriz da seguinte forma

$$y = (y_i)_i = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_4 & \dots \\ & y_3 & y_5 & \dots \\ & & y_6 & \dots \end{pmatrix}.$$

Note que, como definido anteriormente $I(1)$ é o conjunto de índices que percorre a primeira coluna da matriz, $I(2)$ a segunda coluna, e assim sucessivamente. Dessa forma, a base canônica $(e_k)_k$ para esses espaços, é representada por

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ & 0 & & \vdots & \dots \\ & & 0 & 1 & \dots \\ & & & 0 & \dots \end{pmatrix},$$

onde suas entradas são todas nulas exceto na $j$-ésima, que vale 1 . Tais sequências formam base de Schauder para os espaços definidos anteriormente.

Se $n \in \mathbb{N}$, vamos considerar $\ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^{n} \ell_2^k\right)$ o espaço $\mathbb{K}^{\frac{n^2+n}{2}}$. Um elemento $x \in \ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^{n} \ell_2^k\right)$

será representado por uma matriz da seguinte forma

$$x = (x_k)_k = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_j \\ & x_3 & \dots & \vdots \\ & & \ddots & x_{\frac{n^2+n}{2}} \end{pmatrix}.$$

$\ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^n l_2^k\right)$ é um espaço de Banach munido da norma $\|x\| = \max_{1\leq k\leq n}\left(\sum_{i\in I(k)}|x_i|^2\right)^{1/2}$.

Denotaremos a base canônince $(f_k)_k$ de $\ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^n \ell_2^k\right)$ por

$$f_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & & \vdots \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

onde suas entradas são todas nulas exceto na $k$-ésima, que vale 1.

Definiremos agora, os espaços de sequências de Lorentz $d(w,p)$ que foram introduzidos em 1950 [26], em conexão com alguns problemas de análise harmônica e teoria da interpolação, e são exemplos de espaços de Banach que possuem base de Schauder simétrica.

**Definição 1.9.** *Seja $1 \leq p < \infty$ e $w = (w_k)_k$ uma sequência decrescente de números reais positivos tais que $w \in c_0 \setminus \ell_1$. O espaço de sequência de Lorentz $d(w,p)$ é o espaço de Banach de todas as sequências de escalares $y = (y_i)_i$ para os quais*

$$\|y\|_{d(w,p)} := \sup_\pi \left(\sum_{i=1}^\infty \left|y_{\pi(i)}\right|^p w_i\right)^{1/p} < \infty.$$

*onde o supremo é tomado sobre todas as permutações de números naturais.*

**Observação 1.10.** *Quando $p = 1$, o espaço de sequência de Lorentz $d(w,1)$ é o espaço de Banach de todas as sequências de escalares $y = (y_i)_i$ para os quais*

$$\|y\|_{d(w,1)} := \sup_\pi \sum_{i=1}^\infty \left|y_{\pi(i)}\right| w_i < \infty.$$

Dada uma sequência $(x_k)_k$, vamos denotar por $([x]_k)_k$ o rearranjo decrescente da sequência $(|x_k|)_k$. Considerando essa notação, o espaço de Lorentz $d(w,1)$ admite como predual o espaço de Banach definido por

$$d_*(w,1) = \left\{ y = (y_i)_i \in c_0 : \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{k} [y]_i}{\sum_{n=1}^{k} w_i} = 0 \right\},$$

munido da norma $\|y\|_* = \sup\limits_k \frac{\sum_{n=1}^{k} [y]_i}{\sum_{n=1}^{k} w_i}$.

## 1.3 Espaços de função módulo

Nesta seção iremos definir e dar exemplos de espaços de função módulo, seguindo a notação dada em [10].

Seja $K$ um espaço Hausdorff compacto não-vazio e $(X_t)_{t\in K}$ uma família de espaços de Banach. Definimos o produto $\prod_{t\in K} X_t$ por:

$$\prod_{t\in K} X_t = \left\{ x : K \to \bigcup_{t\in K} X_t : \, x(t) \in X_t, \quad \text{para todo} \quad t \in K \right\}.$$

O espaço $\prod_{t\in K} X_t$ é "muito grande"para ser usado em análise funcional, por isso considera-se o subespaço de $\prod_{t\in K} X_t$ das funções $x \in \prod_{t\in K} X_t$ as quais $\sup\{\|x(t)\|_{X_t} : t \in K\} < \infty$. Denotaremos esse subespaço por $\prod_{t\in K}^{\infty} X_t$.

Os subespaços fechados de $\prod_{t\in K}^{\infty} X_t$, que denotaremos por $Z$, serão chamados de espaços de Banach das funções sobre $K$ a valores vetoriais, munido da norma do supremo. Ao estudarmos esses espaços, estamos interessados em obter informações relativas ao espaço de Banach $Z$ através das propriedades de $K$ e de $X_t$. A escolha de tais condições devem garantir que $Z$ herde propriedades do espaço $\mathcal{C}(K)$ e que seja possível "traduzir"propriedades de $Z$ para propriedades de $X_t$. Para definir os espaços de função módulo, precisaremos do conceito de semi-continuidade superior.

**Definição 1.11.** *Sejam $T$ um espaço topológico e $f : T \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $f$ é semi-contínua superior se para todo $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(-\infty, a)$ é um aberto.*

Com essas considerações definimos o espaço de função módulo:

**Definição 1.12.** *Um* **espaço de função módulo** *é uma terna* $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$*, onde* $K$ *é um espaço Hausdorff compacto não-vazio,* $(X_t)_{t\in K}$ *é uma família de espaços de Banach e* $Z$ *é um subespaço fechado de* $\prod_{t\in K}^{\infty} X_t$*, com as seguintes propriedades:*

*(i)* $hx \in Z$*, para quaisquer* $x \in Z$ *e* $h \in \mathcal{C}(K)$*, onde* $hx : K \to \bigcup_{t\in K} X_k$ *é a aplicação definida por* $(hx)(t) = h(t)x(t)$*.*

*(ii) Para cada* $x \in Z$*, a função* $t \in K \mapsto \|x(t)\|$ *é semi-contínua superior.*

*(iii)* $X_t = \{x(t) : x \in Z\}$ *para todo* $t \in K$*.*

*(iv)* $K = \overline{\{t \in K : X_t \neq \{0\}\}}$*.*

**Observação 1.13.** *Na Definição 1.12 o espaço* $K$ *é chamado de* **espaço base** *e a família* $(X_t)_{t\in K}$ *são os* **espaços componentes** *da terna* $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$*. As vezes, para simplificar a notação diremos que* $Z$ *é um espaço de função módulo ao invés de* $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$*.*

Apresentaremos agora alguns exemplos de espaços de função módulo.

**Exemplo 1.14.** *Sejam* $K$ *espaço Hausdorff compacto não-vazio e* $X \neq \{0\}$ *um espaço de Banach. Então o espaço*

$$\mathcal{C}(K, X) = \{f : K \to X : \; f \text{ é contínua}\},$$

*é um espaço de função módulo se considerarmos* $K$ *o espaço base e* $X_t = X$*, para todo* $t \in K$ *os espaços componentes.*

**Exemplo 1.15.** *Sejam* $L$ *um espaço Hausdorff localmente compacto não-vazio e* $X \neq \{0\}$ *um espaço de Banach. Se* $K = \beta L$ *é a compactificação de Stone-Cech então o espaço*

$$\mathcal{C}_0(L, X) = \{f : L \to X : \; f \text{ é contínua e} \,\forall\, \epsilon > 0 \,\exists\, C \text{ compacto de} \, L \text{ tal que} \, \|f(t)\| \leq \epsilon, \forall t \in L \backslash C\},$$

*é um espaço de função módulo se considerarmos* $K$ *como espaço base e os espaços componentes* $(X_t)_{t\in K}$ *como*

$$X_t = \begin{cases} X & \text{se} \quad t \in L \\ \{0\} & \text{se} \quad t \in K \setminus L. \end{cases}$$

Quando consideramos $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$ um espaço de função módulo dual, ou seja, onde $Z$ é um espaço de Banach dual, a aplicação $t \in K \mapsto \|x(t)\|$ é contínua, para todo $x \in Z$.

**Proposição 1.16.** *Seja $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$ um espaço de função módulo dual. Então a aplicação $t \in K \mapsto \|x(t)\|$ é contínua, para todo $x \in Z$.*

*Demonstração.* Ver Teorema 5.13 em [10]. ■

# Capítulo 2

# A propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás

Neste capítulo, estudaremos a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores ($BPBP$), que foi definida em [4] por M. D. Acosta, R. M. Aron, D. García e M. Maestre. Esta propriedade está relacionada com a densidade do conjunto dos operadores que atingem a norma, $\mathcal{NA}(X, Y)$, no espaço dos operadores lineares e contínuos, $\mathcal{L}(X, Y)$, definidos entre espaços de Banach $X, Y$ quaisquer. O estudo deste tópico, vem do pioneiro trabalho de R. James que, na década de 50, provou que um espaço de Banach $X$ é reflexivo se, e somente se, todo funcional linear e contínuo definido em $X$ atinge a norma. Motivados por esse resultado E. Bishop e R. R. Phelps, provaram que se $X$ é um espaço de Banach, então $\mathcal{NA}(X, \mathbb{K})$ é denso em $X^*$, onde $\mathbb{K}$ é o corpo dos escalares. Resultado que ficou conhecido como *Teorema de Bishop-Phelps* [11]. Assim, surgiu a pergunta natural sobre a possibilidade de estender o Teorema de Bishop-Phelps para operadores definidos entre espaços de Banach quaisquer. Em 1963, J. Lindenstrauss [25] mostrou que quando $X$ for reflexivo, então $\mathcal{NA}(X, Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X, Y)$, para todo espaço de Banach $Y$, e, através de um exemplo, mostrou que a hipótese de reflexibilidade é necessária. Muitos trabalhos relevantes surgiram a partir daí, dentre eles destacamos [6], [13], [29] e [30]. Em 1970, B. Bollobás provou uma versão do Teorema de Bishop-Phelps, que ficou conhecido como *Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás.*

**Teorema 2.1** ([12], B. Bollobás). *Seja $\epsilon > 0$ um número arbitrário. Se $x \in B_X$ e $x^* \in S_{X^*}$ tais que $|1 - x^*(x)| < \frac{\epsilon^2}{4}$, então existem $y \in S_X$ e $y^* \in S_{X^*}$ tais que $y^*(y) = 1$, $\|y - x\| < \epsilon$*

*e* $\|y^* - x^*\| < \epsilon$.

Motivados a buscar o equivalente ao Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores definidos entre espaços de Banach, em [4] os autores definiram a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás como descreveremos na próxima seção. Eles apresentaram exemplos de pares de espaços de Banach que satisfazem essa propriedade. Neste mesmo trabalho, apresentaram condições geométricas ao espaço de Banach $Y$ de maneira que o par $(\ell_1, Y)$ satisfaça a $BPBP$. Tal propriedade ficou conhecida como *Approximate Hiperplane Series Property* $(AHSP)$. Depois disso, vários trabalhos apareceram nessa direção, dos quais destacamos [5], [8], [9], [15] e [24].

Provaremos, seguindo as técnicas apresentadas em [23] que, se o par de espaços de Banach reais $\left(c_0\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell_2^k\right), Y\right)$ tem a $BPBP$, onde $Y$ é um espaço de Banach estritamente convexo, então $Y$ é um espaço de Banach uniformemente convexo. Além disso, mostraremos que, se $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$ é um espaço de função módulo, então $Z$ tem a propriedade $AHSP$, sempre que os espaços coordenados $(X_t)_{t\in K}$ tiverem a $AHSP$. Também provaremos que o espaço $\mathcal{C}_0(L, X)$ tem a $AHSP$ se, e somente se $X$ tem a $AHSP$, onde $X$ é um espaço de Banach e $L$ é um espaço Hausdorff localmente compacto. No caso geral, mostramos que num espaço de função módulo $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$, se a função $t \in K \mapsto \|x(t)\| \in \mathbb{R}$ for contínua para cada $x \in Z$, então $X_t$ tem a $AHSP$ para todo $t \in K$, sempre que $Z$ tiver a $AHSP$.

No decorrer deste capítulo, estaremos considerando $X$ e $Y$ espaços de Banach sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Denotaremos por $B_X$ e $S_X$ a bola unitária fechada e a esfera unitária de $X$, respectivamente. Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ e $X$ um espaço de Banach com base de Schauder, a projeção sobre as coordenadas de $A$ é a aplicação $P_A : X \to X$ definida por $P_A(x) = \sum_{k\in A} x_k e_k$. para cada $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in X$.

## 2.1 A propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás

Nosso objetivo nesta seção é definir e dar alguns exemplos da propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás. Nesse sentido, ao tentar determinar exemplos de pares de espaços de Banach que satisfazem a $BPBP$, surgiram outras propriedades que foram introduzidas ao longo dos anos. Aqui, vamos estudar a *Aproximate Hiperplane Series Property* $(AHSP)$, que é uma propriedade geométrica dos espaços de Banach e foi introduzida com objetivo de buscar espaços de Banach $X$ tais que o par $(l_1, X)$ possua a $BPBP$.

**Definição 2.2.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que o par $(X,Y)$ satisfaz a* **propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores** ($BPBP$)*, se dado $\epsilon > 0$, existirem $\eta(\epsilon) > 0$ e $\beta(\epsilon) > 0$ com $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \beta(\epsilon) = 0$ tais que, para cada $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$, se $x \in S_X$ satisfaz $\|Tx\| > 1 - \eta(\epsilon)$, então existem $x_0 \in S_X$ e um operador $R \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ tais que*

$$\|R(x_0)\| = 1, \quad \|x - x_0\| < \beta(\epsilon), \quad \|T - R\| < \epsilon.$$

A partir da introdução da $BPBP$ em 2008 por M. D. Acosta, R. M. Aron, D. García e M. Maestre [4], essa propriedade passou a ser estudada por vários matemáticos, os quais apresentaram inúmeros exemplos de pares de espaços de Banach que possuem a tal propriedade. Destacamos os seguintes exemplos:

**Exemplos 2.3.**

1. Em [4], os autores provaram que os seguintes pares satisfazem a $BPBP$:

   a) (Teorema 2.2) O par $(X, Y)$ terá a $BPBP$ para todo espaço de Banach $X$, sempre que $Y$ tiver a propriedade $\beta$ de Lindenstrauss, definida em [25].

   b) (Teorema 5.2) O par $(\ell_\infty^n, Y)$ satisfaz a $BPBP$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sempre que $Y$ for um espaço uniformemente convexo.

2. ([9], Teorema 2.3 e 2.4) O par $(L_1(\mu), L_\infty[0,1])$, satisfaz a $BPBP$ para toda medida $\mu$, $\sigma$-finita.

3. ([8], Corolário 2.7) O par $(X, \mathcal{C}_0(L))$ satisfaz a $BPBP$ para todo espaço de Asplund $X$ e todo espaço Hausdorff localmente compacto $L$.

4. ([23], Corolário 2.6) O par $(c_0, Y)$ satisfaz a $BPBP$, para todo espaço uniformemente convexo $Y$.

5. ([24], Teorema 2.2) O par $(\mathcal{C}(K), Y)$ satisfaz a $BPBP$, para todo espaço uniformemente convexo $Y$.

6. ([5], Teorema 2.5) O par $(\mathcal{C}(K), \mathcal{C}(S))$ satisfaz a $BPBP$, para todos espaços topológicos compactos Haudorff $K$ e $S$.

A seguinte proposição nos diz que a $BPBP$ é preservada por isomorfismo isométrico:

**Proposição 2.4.** *Sejam $X$ e $\tilde{X}$ espaços de Banach isometricamente isomorfos e $Y$ um espaço de Banach qualquer. Então o par $(X, Y)$ tem a $BPBP$ se, e somente se, $(\tilde{X}, Y)$ possui a $BPBP$.*

*Demonstração.* Suponhamos que o par $(X, Y)$ tenha a $BPBP$. Fixado $\epsilon > 0$, existem $\eta(\epsilon)$ e $\beta(\epsilon) > 0$ satisfazendo a Definição 2.2 para o par $(X, Y)$. Sejam $T \in S_{\mathcal{L}(\tilde{X},Y)}$ e $x \in S_{\tilde{X}}$ tais que

$$\|T(x)\| > 1 - \eta(\epsilon).$$

Seja $\varphi : X \to \tilde{X}$ isomorfismo isométrico. Então $\varphi^{-1}(x) \in S_X$ e $T \circ \varphi \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$. Por isso,

$$\left\|T \circ \varphi(\varphi^{-1}(x))\right\| = \|T(x)\| > 1 - \eta(\epsilon).$$

Como o par $(X, Y)$ tem a BPBP, então existem $R \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $u \in S_X$ tais que

$$\|R(u)\| = 1, \quad \left\|u - \varphi^{-1}(x)\right\| < \beta(\epsilon), \quad \|R - T \circ \varphi\| < \epsilon.$$

Assim, para $R \circ \varphi^{-1} \in S_{\mathcal{L}(\tilde{X},Y)}$ e $\varphi(u) \in S_X$,

- $\|R \circ \varphi^{-1}(\varphi(u))\| = \|R(u)\| = 1,$
- $\|\varphi(u) - x\| = \|\varphi^{-1}(\varphi(u) - x)\| = \|\varphi^{-1}(\varphi(u)) - \varphi^{-1}(x)\| = \|u - \varphi^{-1}(x)\| < \beta(\epsilon),$
- $\|R \circ \varphi^{-1} - T\| = \|R - T \circ \varphi\| < \epsilon$

Portanto, $(\tilde{X}, Y)$ tem a BPBP. A demonstração da recíproca é análoga. ■

Em [30], W. Shachermayer introduziu uma propriedade, denominando-a de *propriedade* $\alpha$ para os espaços de Banach. Essa propriedade generaliza, de certa forma, a situação geométrica de $\ell_1$. Ele mostrou que muitos espaços de Banach podem ser renormados de forma a ter a propriedade $\alpha$. Sabe-se que, quando um espaço de Banach $X$ tiver a propriedade $\alpha$, então $\mathcal{NA}(X, Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X, Y)$ para todo espaço de Banach $Y$, como comentamos anteriormente. Por isso, uma pergunta natural a ser feita é: para quais espaços de Banach $Y$, o par $(\ell_1, Y)$ terá a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores? Essa pergunta foi respondida por M. D. Acosta, R. M. Aron, D. García e M. Maestre em [4]. Eles definiram certas condições geométricas a $Y$ afim de obter respostas positivas a essa questão. Tais condições ficaram conhecidas como *Approximate Hiperplane Series Property (AHSP)*. Antes de definirmos essa propriedade, vamos precisar do conceito de série convexa:

**Definição 2.5.** *Sejam $X$ um espaço de Banach, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ e $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tais que $\lambda_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Chamamos de* **série convexa** *a série dada por $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, onde $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$.*

**Definição 2.6.** *Um espaço de Banach $X$ tem a* **approximate hyperplane series property (propriedade AHSP)** *se para todo $\epsilon > 0$ existir $0 < \eta < \epsilon$ tal que, para cada sequência $(x_k)_k \subset S_X$ e cada série convexa $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ tais que*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\| > 1 - \eta,$$

*existir um subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ e um subconjunto $\{z_k : k \in A\} \subset X$ com as seguintes propriedades:*

*(i)* $\sum_{k\in A} \alpha_k > 1 - \eta$,

*(ii)* $\|z_k - x_k\| < \epsilon$ *para todo* $k \in A$,

*(iii)* $x^*(z_k) = 1$ *para algum* $x^* \in S_{X^*}$ *e todo* $k \in A$.

No que segue, daremos exemplos de espaços de Banach com tal propriedade, que são resultados provados nas referências em questão.

**Exemplos 2.7.**

1. Em [4], os autores mostraram que os seguintes espaços de Banach satisfazem a $AHSP$.

   a) (Proposição 3.5) Todo espaço de Banach de dimensão finita.

   b) (Proposição 3.6) $L_1(\mu)$ onde $\mu$ é uma medida $\sigma$-finita.

c) (Proposição 3.7) $\mathcal{C}(K)$ onde $K$ é um espaço topológico compacto Hausdorff.

d) (Proposição 3.8) Todo espaço de Banach uniformemente convexo.

2. ([16], Teorema 14) $L_1(\mu, X)$, para toda medida $\mu$ $\sigma$-finita e todo espaço de Banach $X$ uniformemente convexo.

3. O espaço reflexivo $\ell_2\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell_{\infty}^{k}\right)$ (ver [4]) não satisfaz a propriedade $AHSP$.

Na sequência, mostraremos que um espaço de Banach $X$ satisfaz a propriedade $AHSP$ se, na Definição 2.6 tomamos simplesmente combinações convexas finitas em vez de séries convexas infinitas.

**Proposição 2.8.** *Um espaço de Banach $X$ tem a $AHSP$ se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$ existe $0 < \eta < \epsilon$ tal que para cada sequência finita, $(x_k)_{k=1}^{n} \subset S_X$ e cada combinação convexa finita $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ com*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\| > 1 - \eta,$$

*existir um subconjunto $A \subset \{1, \ldots, n\}$ e um subconjunto $\{z_k : k \in A\} \subset X$ com as seguintes propriedades:*

*(i)* $\sum_{k \in A} \alpha_k > 1 - \eta$,

*(ii)* $\|z_k - x_k\| < \epsilon$ *para todo* $k \in A$,

*(iii)* $x^*(z_k) = 1$ *para algum* $x^* \in S_{X^*}$ *e todo* $k \in A$.

*Demonstração.* Se $X$ tem a $AHSP$, segue de forma imediata a partir da Definição 2.6 a afirmação sobre a sequência finita. Reciprocamente, seja $X$ um espaço de Banach. Vejamos que a condição sobre as combinações convexas finitas implica em $X$ ter a $AHSP$. Dado $\epsilon > 0$, consideremos $0 < \eta < \epsilon$ obtido da hipótese e fixemos uma constante $C > 1$ tal que $0 < C\eta < \epsilon$. Sejam $(x_k)_k \subset S_X$ uma sequência de vetores unitários em $X$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x_k$ uma série convexa tal que

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x_k \right\| > 1 - \eta > 1 - C\eta.$$

Usando que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}\beta_k x_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k x_k\right\| \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k>n}\beta_k = 0,$$

existe $N \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, tal que

- $\left\|\sum_{k=1}^{N}\beta_k x_k\right\| - \sum_{k>N}\beta_k > 1-\eta$
- $\sum_{k>N}\beta_k < (C-1)\eta$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{N}\beta_k x_k + \left(\sum_{k>N}\beta_k\right)x_{N+1}\right\| &\geq \left\|\sum_{k=1}^{N}\beta_k x_k\right\| - \left\|\left(\sum_{k>N}\beta_k\right)x_{N+1}\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{N}\beta_k x_k\right\| - \left(\sum_{k>N}\beta_k\right) > 1-\eta.
\end{aligned}$$

Aplicando a hipótese para a sequência finita $(x_k)_{k=1}^{N+1} \subset S_X$ e a combinação convexa finita $\sum_{k=1}^{N+1}\alpha_k x_k$, onde $\alpha_k = \beta_k$, para todo $k = 1, \ldots, N$ e $\alpha_{N+1} = \sum_{k>N}\beta_k$, obtemos que existe $\tilde{A} \subset \{1, \ldots, N+1\}$ e um conjunto de vetores $\{z_k : k \in \tilde{A}\} \subset X$ tais que

(i) $\sum_{k\in\tilde{A}}\alpha_k > 1-\eta$,

(ii) $\|z_k - x_k\| < \epsilon$ para todo $k \in \tilde{A}$,

(iii) $x^*(z_k) = 1$ para algum $x^* \in S_{X^*}$ e todo $k \in \tilde{A}$.

É claro que se $N+1 \notin \tilde{A}$, definimos $A := \tilde{A}$ e as condições da Definição 2.6 são satisfeitas considerando os mesmos elementos obtidos nas condições anteriores $(i)$, $(ii)$ e $(iii)$. Agora, caso $N+1 \in \tilde{A}$, definimos $A := \tilde{A} \setminus \{N+1\}$. Neste caso, a condição $(ii)$ e $(iii)$ é ainda válida tomando os mesmos elementos. Resta provar a condição $(i)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in A}\beta_k = \sum_{k\in A}\alpha_k &= \sum_{k\in\tilde{A}}\alpha_k - \alpha_{N+1} \\
&= \sum_{k\in\tilde{A}}\alpha_k - \sum_{k>N}\beta_k \\
&> 1-\eta-(C-1)\eta = 1-C\eta.
\end{aligned}$$

O que prova a propriedade $AHSP$ para $X$ tomando $C\eta$ ao invés de $\eta$. ■

Uma caracterização dos espaços que tem $AHSP$, que foi apresentada em [4], é que, na Definição 2.6, podemos considerar sequências de vetores na bola unitária de $X$:

**Proposição 2.9.** *Um espaço de Banach $X$ tem a propriedade AHSP se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existirem $\gamma(\epsilon) > 0$ e $\eta(\epsilon) > 0$ com $\lim_{\epsilon \to 0^+} \gamma(\epsilon) = 0$, tais que, para cada sequência $(x_n)_n \subset B_X$ e cada série convexa $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ com*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\| > 1 - \eta(\epsilon),$$

*existirem um subconjunto $A \subset \mathbb{N}$, $\{z_k : k \in A\} \subset S_X$ e $x^* \in S_{X^*}$ com as seguintes propriedades:*

*(i)* $\sum_{k \in A} \alpha_k > 1 - \gamma(\epsilon)$,

*(ii)* $\|z_k - x_k\| < \epsilon$ *para todo* $k \in A$,

*(iii)* $x^*(z_k) = 1$ *para todo* $k \in A$.

A propriedade $AHSP$ é preservada por isomorfismo isométrico:

**Proposição 2.10.** *Sejam $X$ e $\tilde{X}$ espaços de Banach isometricamente isomorfos. Então $X$ satisfaz a $AHSP$ se, e somente se, $\tilde{X}$ satisfaz a $AHSP$.*

*Demonstração.* Suponha que $X$ satisfaça a $AHSP$. Fixe $\epsilon > 0$ e considere $(y_k)_k \subset B_{\tilde{X}}$, e uma série convexa $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k$ satisfazendo

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k \right\| > 1 - \eta(\epsilon),$$

onde $\eta(\epsilon) > 0$ é o número que satisfaz as condições da Definição 2.6 para $X$. Como a aplicação $\varphi : \tilde{X} \to X$ é um isomorfismo isométrico, então $(\varphi(y_k))_k \in B_X$ e

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi(y_k) \right\| = \left\| \varphi \left( \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k \right) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k \right\| > 1 - \eta(\epsilon).$$

Como $X$ tem a $AHSP$, existem $A \subset \mathbb{N}$, $\{z_k : k \in A\} \subset S_X$ e $z^* \in S_{X^*}$ tais que

1. $\sum_{k \in A} \alpha_k > 1 - \gamma(\epsilon)$,

2. $\|\varphi(y_k) - z_k\| < \epsilon$, para todo $k \in A$,

3. $z^*(z_k) = 1$, para todo $k \in A$.

Note que $\varphi^{-1}(z_k) \in S_{\tilde{X}}$, com isso

$$\begin{aligned}
\left\|y_k - \varphi^{-1}(z_k)\right\| &= \left\|\varphi^{-1}(\varphi(y_k)) - \varphi^{-1}(z_k)\right\| \\
&= \left\|\varphi^{-1}(\varphi(y_k) - z_k)\right\| \\
&= \|\varphi(y_k) - z_k\| < \epsilon, \quad \forall k \in A.
\end{aligned}$$

Definindo $x^* := z^* \circ \varphi$, temos que $x^* \in S_{\tilde{X}}$ e logo $x^*(\varphi(\varphi^{-1}(z_k))) = x^*(z_k) = 1$. Portanto $\tilde{X}$ satisfaz a $AHSP$. A recíproca é análoga. ■

O próximo teorema nos traz uma importante caracterização aos espaços de Banach $Y$, tais que o par $(\ell_1, Y)$ satisfaz a $BPBP$:

**Teorema 2.11** ([4], Teorema 4.1). *Seja $Y$ um espaço de Banach. Então o par $(\ell_1, Y)$ tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores se, e somente se, $Y$ tem a $AHSP$.*

## 2.2 A propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para $\left(c_0\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell_2^k\right), Y\right)$.

Em [4] os autores provaram que, se $Y$ for um espaço de Banach uniformemente convexo, então o par $(\ell_\infty^n, Y)$ tem a $BPBP$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e deixaram em aberto a pergunta se o par $(c_0, Y)$ tem a $BPBP$. Em 2013 S. S. Kim [23] respondeu essa questão de forma afirmativa. Ele deu outra demonstração que o par $(\ell_\infty^n, Y)$ tem a $BPBP$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e usou as estimativas obtidas para provar que o par $(c_0, Y)$ tem a $BPBP$.

Nesta seção provaremos, seguindo as técnicas apresentadas em [23] que, se o par de espaços de Banach reais $\left(c_0\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell_2^k\right), Y\right)$ satisfaz a $BPBP$, então $Y$ é um espaço de Banach uniformemente convexo.

A seguir vamos apresentar alguns lemas que são necessários para o desenvolvimento do trabalho.

**Lema 2.12.** *Sejam* $X = c_0\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell_2^k\right)$, *$Y$ um espaço de Banach estritamente convexo e* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Se* $\|T(x)\| = \|T\|$ *para algum* $x = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\in I(n)} x_k e_k \in S_X$, *então*

$$T(e_k) = 0 \quad \textit{para todo} \quad k \in \left\{ j \in \mathbb{N} : \left(\sum_{i\in I(j)} |x_i|^2\right)^{1/2} < 1 \right\},$$

*onde* $(e_k)_k$ *é a base canônica de* $X$.

*Demonstração.* Seja $x = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\in I(n)} x_k e_k \in S_X$ tal que $\|T(x)\| = \|T\|$. Como $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in I(n)} |x_i|^2\right)^{1/2} = 1$, o conjunto

$$\left\{ j \in \mathbb{N} : \left(\sum_{i\in I(j)} |x_i|^2\right)^{1/2} < 1 \right\} \neq \emptyset.$$

Suponha, por absurdo, que existe $k_0 \in \left\{ j \in \mathbb{N} : \left(\sum_{i\in I(j)} |x_i|^2\right)^{1/2} < 1 \right\}$ tal que $T(e_{k_0}) \neq 0$. Sendo $I(k_0) = \{k, \ldots, l\}$, onde $k, \ldots, l \in \mathbb{N}$, então consideremos $v = \left(x_k \pm \left(1 - \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2}\right), x_{k+1}, \ldots, x_l\right)$. Logo,

$$\left\| \left( x_k \pm \left(1 - \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2}\right), x_{k+1}, \ldots, x_l \right) \right\|_2 \leq$$

$$\leq \|(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_l)\|_2 + \left\| \left( \left(1 - \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2}\right), 0, \ldots, 0 \right) \right\|_2$$

$$= \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2} + \left| 1 - \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2} \right|$$

$$= \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2} + 1 - \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2} = 1,$$

onde a penúltima igualdade é válida pela escolha de $k_0$. Assim,

$$\left\| x \pm \left(1 - \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2}\right) e_k \right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left(\sum_{i\in I(n)\setminus\{k_0\}} |x_i|^2\right)^{1/2}, \|v\|_2 \right\} \leq 1.$$

Como consequência,

$$\left\| T\left( x \pm \left(1 - \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2}\right) e_k \right)\right\| \leq \|T\|.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
2\|T\| &= 2\,\|T(x)\| \\
&= \left\| T\left( x + \left(1 - \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2}\right) e_k + x - \left(1 - \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2}\right) e_k \right)\right\| \\
&= \left\| T\left( x + \left(1 - \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2}\right) e_k \right) + T\left( x - \left(1 - \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2}\right) e_k \right)\right\| \\
&\leq \left\| T\left( x + \left(1 - \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2}\right) e_k \right)\right\| + \left\| T\left( x - \left(1 - \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2}\right) e_k \right)\right\| \\
&\leq \|T\| + \|T\| = 2\,\|T\|.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\left\| T\left( x + \left(1 - \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2}\right) e_k \right)\right\| + \left\| T\left( x - \left(1 - \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2}\right) e_k \right)\right\| = 2\,\|T\|. \tag{2.1}$$

Como $\left\| T\left( x \pm \left(1 - \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2}\right) e_k \right)\right\| \leq \|T\|$, então

$$\left\| T\left( x \pm \left(1 - \left(\sum_{i\in I(k_0)} |x_i|^2\right)^{1/2}\right) e_k \right)\right\| = \|T\|,$$

pois se tivéssemos a desigualdade estrita $\left\|T\left(x \pm \left(1-\left(\sum_{i\in I(k_0)}|x_i|^2\right)^{1/2}\right)e_k\right)\right\| < \|T\|$, teríamos

$$\left\|T\left(x + \left(1-\left(\sum_{i\in I(k_0)}|x_i|^2\right)^{1/2}\right)e_k\right)\right\| + \left\|T\left(x - \left(1-\left(\sum_{i\in I(k_0)}|x_i|^2\right)^{1/2}\right)e_k\right)\right\| < 2\|T\|,$$

contradizendo a desigualdade (2.1). Dessa forma,

$$\left\|T\left(x \pm \left(1-\left(\sum_{i\in I(k_0)}|x_i|^2\right)^{1/2}\right)e_k\right)\right\| = \|T\| = \|T(x)\|.$$

Com isso, vemos que $\dfrac{T\left(x \pm \left(1-\left(\sum_{i\in I(k_0)}|x_i|^2\right)^{1/2}\right)e_k\right)}{\|T\|} \in S_Y$, e também que

$$\left\|\frac{\dfrac{T\left(x + \left(1-\left(\sum_{i\in I(k_0)}|x_i|^2\right)^{1/2}\right)e_k\right)}{\|T\|} + \dfrac{T\left(x - \left(1-\left(\sum_{i\in I(k_0)}|x_i|^2\right)^{1/2}\right)e_k\right)}{\|T\|}}{2}\right\| =$$

$$= \left\|\frac{2T(x)}{2\|T\|}\right\| = 1.$$

O que contradiz o fato de $Y$ ser estritamente convexo (ver Proposição 1.3). Portanto $T(e_{k_0}) = 0$. ■

**Teorema 2.13.** *Sejam os espaços de Banach reais $X = c_0\left(\oplus_{k=1}^{\infty}\ell_2^k\right)$ e $Y$ estritamente convexo. Se o par $\left(c_0\left(\oplus_{k=1}^{\infty}\ell_2^k\right), Y\right)$ tem BPBP, então $Y$ é uniformemente convexo.*

*Demonstração.* Suponhamos que o par $\left(c_0\left(\oplus_{k=1}^{\infty}\ell_2^k\right), Y\right)$ tem a *BPBP*. Se $Y$ não fosse uniformemente convexo, pela Proposição 1.7, existiriam $\epsilon > 0$ e sequências $(y_k)_k, (z_k)_k \subset S_{c_0\left(\oplus_{k=1}^{\infty}\ell_2^k\right)}$ tais que

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{y_k+z_k}{2}\right\| = 1 \quad \text{e} \quad \|y_k - z_k\| > \epsilon. \tag{2.2}$$

Sendo $(e_k)_k$ a base canônica de $c_0\left(\oplus_{k=1}^{\infty}l_2^k\right)$, para cada $i \in \mathbb{N}$, considere $T_i : X \longrightarrow Y$

operador linear definido por

$$T_i(e_1+e_2)=y_i$$
$$T_i(e_1-e_2)=z_i$$
$$T_i(e_k)=0,\ \forall k\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}.$$

Então para todo $x\in c_0\left(\oplus_{k=1}^{\infty}\ell_2^k\right)$ e $i\in\mathbb{N}$,

$$T_i(x)=\frac{x_1+x_2}{2}y_i+\frac{x_1-x_2}{2}z_i.$$

Dessa forma, se $x\in S_{c_0\left(\oplus_{k=1}^{\infty}\ell_2^k\right)}$

$$\|T_i(x)\|\le\frac{1}{2}\{|x_1+x_2|+|x_1-x_2|\}=\max\{|x_1|,|x_2|\}\le 1.$$

Como $\|T_i(e_1+e_2)\|=1$, vemos que $T_i\in S_{\mathcal{L}\left(c_0\left(\oplus_{k=1}^{\infty}\ell_2^k\right),Y\right)}$. Agora, para cada $i\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|T_i(e_1)\|=\left\|T_i\left(\frac{e_1+e_2+e_1-e_2}{2}\right)\right\| &= \left\|\frac{T_i(e_1+e_2)+T_i(e_1-e_2)}{2}\right\|\\ &= \left\|\frac{y_i+z_i}{2}\right\|\xrightarrow{i\to\infty}1.\end{aligned}$$

Em virtude disso, podemos escolher $i_0\in\mathbb{N}$ tal que $\|T_{i_0}(e_1)\|>1-\eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$. Mas estamos supondo que o par $\left(c_0\left(\oplus_{k=1}^{\infty}\ell_2^k\right),Y\right)$ tem a BPBP, assim existem $R\in S_{\mathcal{L}\left(c_0\left(\oplus_{k=1}^{\infty}\ell_2^k\right),Y\right)}$ e $u\in S_{c_0\left(\oplus_{k=1}^{\infty}\ell_2^k\right)}$ tais que

$$\|R(u)\|=1,\ \|R-T_{i_0}\|<\frac{\epsilon}{2},\ \|u-e_1\|<\beta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)<1. \tag{2.3}$$

Assim, $\left(\sum_{i\in I(k)}|u_i|^2\right)^{1/2}<1$ para todo $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Aplicando o Lema 2.12, para o operador $R$ e o elemento $u$, chegamos ao seguinte:

$$R(e_k)=0,\quad \text{para todo}\quad k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Por isso, podemos assumir $u=e_1$. Assim, $R(e_1+e_2)=R(e_1-e_2)=R(e_1)$, o que nos leva a conluir que

$$\begin{aligned}\|y_k - z_k\| &= \|T_{i_0}(e_1+e_2) - T_{i_0}(e_1-e_2)\| \\ &= \|T_{i_0}(e_1+e_2) - R(e_1+e_2) + R(e_1-e_2) - T_{i_0}(e_1-e_2)\| \\ &\leq \|T_{i_0} - R\|\|e_1+e_2\| + \|R - T_{i_0}\|\|e_1-e_2\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Isso contradiz (2.2). ■

Em [23] S. K. Kim deu outra demonstração que o par $(\ell_\infty^n, Y)$ tem a $BPBP$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sempre que $Y$ for um espaço de Banach uniformemente convexo, e usou as estimativas obtidas nessa demonstração para provar que o par $(c_0, Y)$ tem a $BPBP$. Assim, nos perguntamos se o par $\left(c_0\left(\bigoplus_{k=1}^\infty \ell_2^k\right), Y\right)$ tema $BPBP$ para todo espaço de Banach $Y$ uniformemente convexo. No intuito de conseguir provar tal resultado e usando técnicas similares a [23], provamos o seguinte Lema:

**Lema 2.14.** *Dado $n \in \mathbb{N}$, considere $A = \bigcup_{i=1}^n I(i)$. Sejam $0 < \epsilon < 1$, $X = c_0\left(\bigoplus_{k=1}^\infty \ell_2^k\right)$ e $Y$ um espaço de Banach uniformemente convexo com módulo de convexidade $\delta(\epsilon)$. Se $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ tem a propriedade que $\|TP_A\| > 1 - \delta(\epsilon)$, então $\|T(I - P_A)\| \leq \epsilon$.*

*Demonstração.* Fixado $0 < \epsilon < 1$, consideremos $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ tal que

$$\|TP_A\| > 1 - \delta(\epsilon).$$

Como $\|TP_A\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in P_A(S_X)\}$, existe $x \in S_X \cap P_A(X)$, $x = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k \in I(n)} x_k e_k$ tal que

$$\|TP_A(x)\| > 1 - \delta(\epsilon). \tag{2.4}$$

**Afirmação 1**: $\|T(x \pm y)\| \leq 1$, para qualquer $y \in B_X$ com $\operatorname{supp} y \subset \mathbb{N} \setminus A$.

De fato, seja $y = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k \in I(n)} y_k e_k \in B_X$ com $\operatorname{supp} y \subset \mathbb{N} \setminus A$. Se $k \in A$ então $y_k = 0$, assim

$$\|x \pm y\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} \left( \sum_{i \in I(j)} |x_i \pm y_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{j\in\mathbb{N}}\left\{\left(\sum_{i\in I(j),1\leq j\leq n}|x_i\pm y_i|^2\right)^{1/2}, \left(\sum_{i\in I(j),j\geq n+1}|x_i\pm y_i|^2\right)^{1/2}\right\}\\
&= \sup_{j\in\mathbb{N}}\left\{\left(\sum_{i\in I(j),1\leq j\leq n}|x_i|^2\right)^{1/2}, \left(\sum_{i\in I(j),j\geq n+1}|y_i|^2\right)^{1/2}\right\}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Em virtude disso, $\|T(x\pm y)\|\leq 1$, para todo $y\in B_X$ tal que $\operatorname{supp} y\subset\mathbb{N}\setminus A$.

**Afirmação 2**: $\|T(x)\pm T(I-P_A)(z)\|\leq 1$, para qualquer $z\in B_X$.

Seja $z\in B_X$. O vetor $y=(I-P_A)(z)$ é tal que $\operatorname{supp} y\subset\mathbb{N}\setminus A$. Usando a Afirmação 1,

$$\|T(x)\pm T(I-P_A)(z)\| = \|T(x\pm(I-P_A)(z))\| = \|T(x\pm y)\|\leq 1.$$

Isso prova a Afirmação 2.

Considerando $z\in B_X$ arbitrário, temos que $T(x)\pm T(I-P_A)(z)\in B_Y$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{T(x+(I-P_A)(z))+T(x-(I-P_A)(z))}{2}\right\| &= \|T(x)\|\\
&= \|TP_A(x)\|\\
&\overset{(2.4)}{>} 1-\delta(\epsilon).
\end{aligned}
$$

Como $Y$ é um espaço de Banach uniformemente convexo, segue da Definição 1.4 que

$$\|T(x+(I-P_A)(z))-T(x-(I-P_A)(z))\|<\epsilon.$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
\|2T(I-P_A)(z)\| &= \|T(x+(I-P_A)(z))-T(x-(I-P_A)(z))\|<\epsilon\Rightarrow\\
\|T(I-P_A)(z)\| &< \frac{\epsilon}{2}<\epsilon.
\end{aligned}
$$

Como $z$ é um elemento arbitrário em $B_X$, concluímos que $\|T(I-P_A)\|<\epsilon$. ■

Observamos que seria possível provar que o par $\left(c_0\left(\oplus_{k=1}^{\infty}\ell_2^k\right), Y\right)$ tem a $BPBP$ se a seguinte conjectura

**Conjectura 2.15.** *Seja $Y$ um espaço de Banach uniformemente convexo. Então para todo $n \in \mathbb{N}$ o par $\left(\ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^n \ell_2^k\right), Y\right)$ satisfaz a $BPBP$.*

for verdadeira.

No que segue provamos que o par $\left(c_0\left(\oplus_{k=1}^\infty \ell_2^k\right), Y\right)$ tem a $BPBP$ se a Conjectura 2.15 for verdadeira.

**Consequência 1.** *Se $Y$ é um espaço de Banach uniformemente convexo, então o par $\left(c_0\left(\oplus_{k=1}^\infty \ell_2^k\right), Y\right)$ satisfaz a propriedade de Bishop-Phelps Bollobás para operadores.*

*Demonstração.* Seja $0 < \epsilon < 1$. Como $Y$ é uniformemente convexo, se a Conjectura 2.15 for verdadeira, então existem $0 < \eta(\epsilon) < \epsilon$ e $\beta(\epsilon) > 0$, com $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \beta(\epsilon) = 0$, tais que, para todo $Q \in S_{\mathcal{L}\left(\ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^n \ell_2^k\right), Y\right)}$ se $z \in S_{\ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^n \ell_2^k\right)}$ satisfaz $\|Q(z)\| > 1 - \eta(\epsilon)$, então existem $\tilde{Q} \in S_{\mathcal{L}\left(l_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^n \ell_2^k\right), Y\right)}$ e $z_0 \in S_{\ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^n \ell_2^k\right)}$ tais que

$$\|\tilde{Q}(z_0)\| = 1, \quad \|z - z_0\| < \beta(\epsilon), \quad \|\tilde{Q} - Q\| < \epsilon. \tag{2.5}$$

Sejam $T \in S_{\mathcal{L}\left(c_0\left(\oplus_{k=1}^\infty \ell_2^k\right), Y\right)}$ e $x = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k \in I(n)} x_k e_k \in S_{c_0\left(\oplus_{k=1}^\infty \ell_2^k\right)}$ tais que

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &> 1 - \eta(\epsilon) + \gamma(\epsilon) > 1 - \eta(\epsilon) \\ \|T(x)\| &> 1 - \delta(\epsilon) + \gamma(\epsilon) > 1 - \delta(\epsilon), \end{aligned}$$

onde $\delta(\epsilon) > 0$ é o módulo de convexidade de $Y$ e $\gamma(\epsilon) > 0$ com $\lim_{\epsilon \to o} \gamma(\epsilon) = 0$. Como $c_{00}$ é denso em $c_0\left(\oplus_{k=1}^\infty \ell_2^k\right)$, podemos escolher $u \in S_{c_0\left(\oplus_{k=1}^\infty \ell_2^k\right)}$, com suporte finito tal que $\|x - u\| < \gamma(\epsilon)$. Logo

$$\begin{aligned} \|T(u)\| = \|T(x - x + u)\| &\geq \|T(x)\| - \|T(x - u)\| \\ &> 1 - \eta(\epsilon) + \gamma(\epsilon) - \gamma(\epsilon) \\ &= 1 - \eta(\epsilon). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Analogamente,

$$\|T(u)\| > 1 - \delta(\epsilon). \tag{2.7}$$

Se $n = \min\{k \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} u \subset \bigcup_{j=1}^{k} I(j)\}$, denotaremos por $A = \bigcup_{k=1}^{n} I(k)$. Do fato de que $P_A(u) = u$, então

$$\|TP_A\| \geq \|TP_A(u)\| = \|T(u)\| > 1 - \delta(\epsilon),$$

e de forma análoga,

$$\|TP_A\| > 1 - \eta(\epsilon). \tag{2.8}$$

Aplicando Lema 2.14, podemos garantir que

$$\|T(I - P_A)\| \leq \epsilon. \tag{2.9}$$

Considere a inclusão de $J : \ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^{n} \ell_2^k\right) \hookrightarrow c_0\left(\oplus_{k=1}^{\infty} \ell_2^k\right)$ definida por

$$J(w) = \begin{cases} w_i, \text{ se } i \in A \\ 0, \text{ se } i \in \mathbb{N} \setminus A. \end{cases}$$

Então para todo $w \in \ell_\infty\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \ell_2^k\right)$,

$$\begin{aligned} \|J(w)\| &= \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i \in I(j)} |w_i|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|w\|. \end{aligned}$$

Definimos o operador $Q : \ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^{n} \ell_2^k\right) \to Y$ por

$$Q(w) = \frac{TP_A J}{\|TP_A J\|}(w), \quad \text{para todo} \quad w \in \ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^{n} \ell_2^k\right),$$

e o vetor $z = (z_i)_{i \in A} \in \ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^{n} \ell_2^k\right)$ por $z_i = u_i$, para todo $i \in A$. Assim $Q \in S_{\mathcal{L}\left(\ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^{n} \ell_2^k\right), Y\right)}$ e $z \in S_{\ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^{n} \ell_2^k\right)}$. Além disso, como $\|TP_A J\| \leq 1$, então

$$\|Q(z)\| = \left\| \frac{TP_A J}{\|TP_A J\|}(z) \right\| \geq \|TP_A(u)\| = \|T(u)\| > 1 - \eta(\epsilon), \tag{2.10}$$

onde a última desigualdade segue de (2.6). Agora, por hipótese o par $\left(\ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^n \ell_2^k\right), Y\right)$ tem a $BPBP$, logo existem $\tilde{R} \in S_{\mathcal{L}\left(\ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^n \ell_2^k\right), Y\right)}$ e $\tilde{u} \in S_{\ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^n \ell_2^k\right)}$, tais que

$$\|\tilde{R}(\tilde{u})\| = 1, \quad \left\|\tilde{R} - Q\right\| < \epsilon, \quad \|z - \tilde{u}\| < \beta(\epsilon). \tag{2.11}$$

Se $(e_k)_k$ e $(f_k)_k$ representam as bases canônicas de $c_0\left(\oplus_{k=1}^\infty \ell_2^k\right)$ e $\ell_\infty\left(\bigoplus_{k=1}^n \ell_2^k\right)$, respectivamente, definimos o operador limitado $R : c_0\left(\oplus_{k=1}^\infty \ell_2^k\right) \longrightarrow Y$ por

$$R(y) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i \in I(j)} y_i R(e_i),$$

onde

$$R(e_i) = \begin{cases} \tilde{R}(f_i), \text{ se } i \in A \\ 0, \text{ se } i \in \mathbb{N} \setminus A, \end{cases}$$

e o elemento $v = (v_i)_i \in c_0\left(\oplus_{k=1}^\infty \ell_2^k\right)$ por

$$v_i = \begin{cases} \tilde{u}_i, \ i \in A \\ x_i, \ i \in \mathbb{N} \setminus A. \end{cases}$$

Assim, $R \in S_{\mathcal{L}\left(c_0\left(\oplus_{k=1}^\infty \ell_2^k\right), Y\right)}$, $v \in S_{c_0\left(\oplus_{k=1}^\infty \ell_2^k\right)}$ e

$$\|R(v)\| = \|\tilde{R}(\tilde{u})\| = 1. \tag{2.12}$$

Isto mostra que $R$ atinge a norma em $v$. Na sequência, iremos aproximar os operadores $R$ e $T$.

$$\begin{aligned}
\|R - T\| &= \|R - TP_A + TP_A - T\| \\
&\leq \left\|R - \frac{TP_A}{\|TP_A\|} + \frac{TP_A}{\|TP_A\|} - TP_A\right\| + \|TP_A - T\| \\
&\leq \left\|R - \frac{TP_A}{\|TP_A\|}\right\| + \left\|\frac{TP_A}{\|TP_A\|} - TP_A\right\| + \|TP_A - T\| \\
&= \left\|\tilde{R} - \frac{TP_AJ}{\|TP_AJ\|}\right\| + \left\|\frac{TP_A}{\|TP_A\|} - TP_A\right\| + \|TP_A - T\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\|\tilde{R}-\frac{TP_AJ}{\|TP_AJ\|}\right\| + \left\|TP_A\left(\frac{I}{\|TP_A\|}-I\right)\right\| + \|TP_A-T\| \\
&= \left\|\tilde{R}-\frac{TP_AJ}{\|TP_AJ\|}\right\| + \|TP_A\|\left|\frac{1}{\|TP_A\|}-1\right| + \|TP_A-T\| \\
&= \left\|\tilde{R}-Q\right\| + |1-\|TP_A\|| + \|TP_A-T\| \\
&= \left\|\tilde{R}-Q\right\| + 1-\|TP_A\| + \|TP_A-T\| \\
&< \epsilon+1-1+\eta(\epsilon)+\epsilon \\
&< 3\epsilon. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

onde a terceira desigualdade é válida por (2.11), (2.8) e (2.9). Finalmente, vamos aproximar os pontos $v$ e $x$:

$$\begin{aligned}
\|v-x\| = \|P_A(v-x)\| &= \max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i\in I(j)}|v_i-x_i|^2)\right)^{1/2} \\
&= \max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i\in I(j)}|\tilde{u}_i-x_i|^2)\right)^{1/2} \\
&= \max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i\in I(j)}|\tilde{u}_i-u_i+u_i-x_i|^2)\right)^{1/2} \\
&\le \max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i\in I(j)}|\tilde{u}_i-u_i|^2)\right)^{1/2} + \max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i\in I(j)}|u_i-x_i|^2)\right)^{1/2} \\
&\le \max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i\in I(j)}|\tilde{u}_i-u_i|^2)\right)^{1/2} + \sup_{j\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I(j)}|u_i-x_i|^2)\right)^{1/2} \\
&= \|\tilde{u}-z\| + \|u-x\| \\
&< \beta(\epsilon)+\gamma(\epsilon), \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

onde $\lim_{\epsilon\to 0}\beta(\epsilon)+\gamma(\epsilon)=0$. De (2.12), (2.13) e (2.14), concluímos que o par $\left(c_0\left(\oplus_{k=1}^{\infty}\ell_2^k\right),Y\right)$ possui a $BPBP$. ■

**Consequência 2.** *O par de espaços de Banach reais* $\left(c_0\left(\oplus_{k=1}^{\infty}\ell_2^k\right),Y\right)$*, com* $Y$ *estritamente convexo, tem BPBP se, e somente se,* $Y$ *é uniformemente convexo.*

## 2.3 A propriedade $AHSP$ para espaços de função módulo

Nesta seção vamos mostrar que se $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$ é um espaço de função módulo, então $Z$ satisfaz a propriedade $AHSP$, sempre que os espaços coordenados $(X_t)_{t\in K}$ tiverem a $AHSP$. Além disso, provaremos que, o espaço $\mathcal{C}_0(L, X)$ tem a $AHSP$ se, e somente se $X$ tem a $AHSP$, onde $X$ é um espaço de Banach e $L$ é um espaço Hausdorff localmente compacto. Generalizando esse último resultado, mostramos que se a função $t \in K \mapsto \|x(t)\| \in \mathbb{R}$ for contínua para cada $x \in Z$, então $X_t$ satisfaz a $AHSP$ para todo $t \in K$, sempre que $Z$ tiver a $AHSP$. E como consequência $\mathcal{C}(K, X)$ tem a $AHSP$ se, e somente se, $X$ tem a $AHSP$.

**Teorema 2.16.** *Sejam $K$ um espaço Hausdorff compacto não-vazio, $(X_t)_{t\in K}$ uma família de espaços de Banach e $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$ espaço de função módulo. Se $(X_t)_{t\in K}$ tem AHSP, para todo $t \in K$, então $Z$ tem AHSP.*

*Demonstração.* Iremos verificar que as condições da Proposição 2.9 são satisfeitas para o espaço $Z$. Fixado $0 < \epsilon < 1$, considere $(x_k)_{k=1}^n \subset B_Z$ e $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$ uma série convexa finita tal que

$$\left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\| > 1 - \eta(\epsilon).$$

Como

$$\left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\| = \sup \left\{ \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k(t) \right\|_{X_t} : t \in K \right\} > 1 - \eta(\epsilon),$$

então da definição de supremo, existe $t_0 \in K$ tal que,

$$\left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k(t_0) \right\|_{X_{t_0}} > 1 - \eta(\epsilon).$$

Veja que, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\|x_k(t_0)\|_{X_{t_0}} \leq \|x_k\| \leq 1.$$

Por isso, $(x_k(t_0))_{k=1}^n \subset B_{X_{t_0}}$. Por hipótese $X_{t_0}$ tem $AHSP$, assim existem $A \subset \{1, \ldots, n\}$,

$\{z_k : k \in A\} \subset S_{X_{t_0}}$ e $z^* \in S_{X^*_{t_0}}$ tais que:

1. $\sum_{k\in A} \alpha_k > 1 - \gamma(\epsilon)$,

2. $\|z_k - x_k(t_0)\|_{X_{t_0}} < \epsilon$ para todo $k \in A$,

3. $z^*(z_k) = 1$ para todo $k \in A$.

Definimos o seguinte subconjunto em $K$:

$$U = \bigcap_{k\in A} \{t \in K : \|x_k(t)\|_{X_t} < \|x_k(t_0)\|_{X_{t_0}} + \epsilon\}$$

O elemento $t_0 \in U$, por isso, $U$ é não-vazio. A condição $(ii)$ da Definição 1.12 nos garante que a função $t \in K \mapsto \|x(t)\| \in \mathbb{R}$ é semi-contínua superior para todo $x \in X$, o conjunto $\{t \in K : \|x_k(t)\|_{X_t} < \|x_k(t_0)\|_{X_{t_0}} + \epsilon\}$ é um aberto de $K$. Como intersecção finita de abertos é aberto, $U$ é aberto em $K$. Para cada $k \in A$, seja $g_k : K \to \bigcup_{t\in K} X_t$ definida por:

$$g_k(t) = \begin{cases} z_k & \text{se} \quad t = t_0 \\ \left(1 - \frac{\epsilon}{\|x_k(t_0)\|+\epsilon}\right) x_k(t) & \text{se} \quad t \in U \setminus \{t_0\} \\ (1-\epsilon)x_k(t) & \text{se} \quad t \in K \setminus U. \end{cases}$$

Afirmamos que $(g_k)_{k\in A} \subset S_Z$. Se $t \in U \setminus \{t_0\}$, então

$$\begin{aligned} \|g_k(t)\|_{X_t} &= \left\| \left(1 - \frac{\epsilon}{\|x_k(t_0)\| + \epsilon}\right) x_k(t) \right\|_{X_t} \\ &= \left| \left(1 - \frac{\epsilon}{\|x_k(t_0)\| + \epsilon}\right) \right| \|x_k(t)\|_{X_t} \\ &< \|x_k(t)\|_{X_t} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Já no caso em que $t \in K \setminus U$,

$$\begin{aligned} \|g_k(t)\|_{X_t} &= \|(1-\epsilon)x_k(t)\|_{X_t} \\ &= |1-\epsilon| \, \|x(t)\|_{X_t} \\ &< 1. \|x_k(t)\|_{X_t} \leq 1 \end{aligned}$$

Se $t = t_0$, teremos que

$$\|g_k(t_0)\|_{X_{t_0}} = \|z_k\|_{X_{t_0}} = 1.$$

Em vista disso, para todo $k \in A$

$$\|g_k\| = \sup\{\|g_k(t)\|_{X_t} : t \in K\} = 1,$$

ou seja, $g_k \in S_Z$ para cada $k \in A$. Provaremos agora que $\|g_k - x_k\| < \epsilon$ para todo $k \in A$.

Se $t = t_0$,

$$\|g_k(t_0) - x_k(t_0)\|_{X_{t_0}} = \|z_k - x_k(t_0)\|_{X_{t_0}} < \epsilon.$$

Se $t \in U \setminus \{t_0\}$,

$$\begin{aligned} \|g_k(t) - x_k(t)\|_{X_t} &= \left\| \left(1 - \frac{\epsilon}{\|x_k(t_0)\| + \epsilon}\right) x_k(t) - x_k(t) \right\|_{X_t} \\ &= \frac{\epsilon}{\|x_k(t_0)\|_{X_{t_0}} + \epsilon} \|x_k(t)\|_{X_t} < \epsilon. \end{aligned}$$

Se $t \in K \setminus U$,

$$\|g_k(t) - x_k(t)\|_{X_t} = \|(1-\epsilon)x_k(t) - x_k(t)\|_{X_t} < \epsilon.$$

Dessa forma,

$$\|g_k - x_k\| = \sup\{\|(g_k - x_k)(t)\| : t \in K\} < \epsilon, \quad \forall k \in A.$$

Considerando $\delta_{t_0} : X \longrightarrow X_{t_0}$ a aplicação avaliação na coordenada $t_0$, definimos o funcional $x^* := z^* \circ \delta_{t_0}$. Se $x \in S_Z$, então

$$\begin{aligned} |x^*(x)| &= |z^*(\delta_{t_0}(x))| \\ &= |z^*(x(t_0))| \\ &\leq \|z^*\| \, \|x(t_0)\| \leq 1. \end{aligned}$$

Além disso, para todo $k \in A$,

$$|x^*(g_k)| = |z^*(\delta_{t_0}(g_k))| = |z^*(g_k(t_o))| = |z^*(z_k)| = 1.$$

Dessa maneira,

$$\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : x \in S_X\} = 1.$$

Finalmente $x^* \in S_{Z^*}$ e $x^*(g_k) = 1$, para todo $k \in A$. Concluímos então que $Z$ tem a $AHSP$.

■

**Corolário 2.17.** *Sejam $K$ um espaço Hausdorff compacto não-vazio, $(X_t)_{t\in K}$ uma família de espaços de Banach e $(K, (X_t)_t, Z)$ um espaço de função módulo. Se $(X_t)_{t\in K}$ tem AHSP para todo $t \in K$, então o par $(\ell_1, Z)$ possui a $BPBP$.*

*Demonstração.* Segue dos Teorema 2.16 e do Teorema 2.11. ■

Em [16], os autores provaram que para um espaço Hausdorff compacto não-vazio $K$, se $\mathcal{C}(K, X)$ tem a $AHSP$ então $X$ tem a $AHSP$. Tendo em vista a técnica apresentada pelos autores, nos perguntamos se ao considerarmos $\mathcal{C}_0(L, X)$, onde $L$ é um espaço topológico Hausdorff localmente compacto, teríamos um resultado semelhante. O próximo teorema responde de forma afirmativa a essa questão.

**Teorema 2.18.** *Sejam $L$ um espaço topológico Hausdorff localmente compacto e $X$ um espaço de Banach. Então $\mathcal{C}_0(L, X)$ tem a $AHSP$ se, e somente se, $X$ tem a $AHSP$.*

*Demonstração.* Suponhamos que $X$ tenha a propriedade $AHSP$, como $\mathcal{C}_0(L, X)$ é um espaço de função módulo, quando consideramos $K = \beta L$ (compactificação de *Stone-Čech*), $X_t = X$ se $t \in L$ e $X_t = \{0\}$ se $t \in K \setminus L$, então segue do Teorema 2.16 que $\mathcal{C}_0(L, X)$ tem a $AHSP$. Reciprocamente, assuma que $\mathcal{C}_0(L, X)$ tenha a propriedade $AHSP$. Dado $\epsilon > 0$, suponha que $\eta, \gamma > 0$ são os números que satisfazem as condições da Definição 2.6 para $\frac{\epsilon}{2}$. Sejam $(x_k)_k \subset B_X$ e a série convexa $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ tais que

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\| > 1 - \eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right).$$

Seja $t_0 \in L$. Considere $U$ aberto de $L$ contendo $t_0$. Como $L$ é completamente regular (pois é espaço Hausdorff localmente compacto), existe uma função contínua $m : L \to [0,1]$ tal que $m(t_0) = 1$ e $m(t) = 0$ para todo $t \in L \setminus U$ (Ver [32], Teorema 14.10). Para cada $k \in \mathbb{N}$, e cada $t \in L$ defina $f_k(t) = m(t)x_k$, ou seja,

$$f_k(t) = \begin{cases} m(t)x_k & \text{se} \quad t \in U \\ 0 & \text{se} \quad t \in L \setminus U. \end{cases}$$

Claramente $(f_k)_k \subset \mathcal{C}_0(L,X)$. Além disso, para todo $t \in L$, $\|f_k(t)\| \leq 1$, ou seja, $(f_k)_k \subset B_{\mathcal{C}_0(L,X)}$. Considere a combinação convexa $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k$ em $\mathcal{C}_0(L,X)$. Calcularemos a norma dessa combinação convexa. Seja $t$ um elemento qualquer de $L$, se $t \in U \setminus K$, então $f_k(t) = 0$ e assim $\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k(t)\| = 0$. Agora se $t \in U \setminus K$ então $f_k(t) = m(t)x_k$, e

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k(t) \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m(t) x_k \right\| \\ &= |m(t)| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\|, \end{aligned}$$

já no caso em que $t = t_0$, então $f_k(t) = f_k(t_0) = m(t_0)x_k = x_k$, logo $\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k(t)\| = \|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k\|$. Consequentemente,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k \right\| = \sup \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k(t) \right\| \,:\, t \in L \right\} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\| > 1 - \eta\left(\frac{\epsilon}{2}\right).$$

Como $\mathcal{C}_0(L,X)$ tem a $AHSP$, então existem $A \subset \mathbb{N}$, $\{g_k \,:\, k \in A\} \subset S_{\mathcal{C}_0(L,X)}$ e um funcional $\Phi \in S_{\mathcal{C}_0(L,X)^*}$ tais que:

1. $\sum_{k \in A} \alpha_k > 1 - \gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$,

2. $\|f_k - g_k\| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $k \in A$,

3. $\Phi(g_k) = 1$, para todo $k \in A$.

Afirmamos que $\left\|\sum_{k\in A}\alpha_k g_k\right\| = \sum_{k\in A}\alpha_k$. De fato, se $\varphi \in S_{\mathcal{C}_0(L,X)^*}$, então

$$\begin{aligned}\left|\varphi\left(\sum_{k\in A}\alpha_k g_k\right)\right| &\leq \|\varphi\|\left\|\sum_{k\in A}\alpha_k g_k\right\| \\ &\leq \sum_{k\in A}|\alpha_k|\,\|g_k\| \\ &\leq \sum_{k\in A}\alpha_k.\end{aligned}$$

Por 3, $\Phi(g_k) = 1$ para todo $k \in A$, segue que

$$\Phi\left(\sum_{k\in A}\alpha_k g_k\right) = \sum_{k\in A}\alpha_k\Phi(g_k) = \sum_{k\in A}\alpha_k.$$

E certamente

$$\left\|\sum_{k\in A}\alpha_k g_k\right\| = \sup\left\{\left|\varphi\left(\sum_{k\in A}\alpha_k g_k\right)\right| \,:\, \varphi \in S_{\mathcal{C}_0(L,X)^*}\right\} = \sum_{k\in A}\alpha_k.$$

Agora seja $t_1 \in L$ tal que $\left\|\sum_{k\in A}\alpha_k g_k(t_1)\right\| = \sum_{k\in A}\alpha_k > 1-\gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$. Por isso o vetor $\sum_{k\in A}\alpha_k g_k(t_1) \neq \mathbf{0}$, aplicando o teorema de Hahn-Banach, existe um funcional $x^* \in S_{X^*}$ tal que

$$Re\, x^*\left(\sum_{k\in A}\alpha_k g_k(t_1)\right) = \left\|\sum_{k\in A}\alpha_k g_k(t_1)\right\| = \sum_{k\in A}\alpha_k.$$

Note que $|x^*(g_k(t_1))| \leq \|x^*\|\,\|g_k\| = 1$, para todo $k \in A$. Caso $|x^*(g_k(t_1))| < 1$, teríamos que $Re\, x^*(g_k(t_1)) < 1$ para cada $k \in A$, e logo, $Re\, x^*\left(\sum_{k\in A}\alpha_k g_k(t_1)\right) < \sum_{k\in A}\alpha_k$. Por isso $|x^*(g_k(t_1))| = 1$ e $Re\, x^*(g_k(t_1)) = 1$, ou seja, $x^*(g_k(t_1)) = 1$, para quaisquer $k \in A$. Para cada $k \in A$, definimos $z_k := g_k(t_1)$. Veja que $z_k \in S_X$. Logo,

$$x^*(z_k) = x^*(g_k(t_1)) = 1, \quad \text{para quaisquer} \quad k \in A. \tag{2.15}$$

Agora iremos aproximar $x_k$ a $z_k$ para cada $k \in A$. Antes disso verifiquemos algumas estimativas. Se $k \in A$

$$1 - \|f_k(t_1)\| \leq \|g_k(t_1) - f_k(t_1)\| \leq \|g_k - f_k\| < \frac{\epsilon}{2},$$

e como consequência

$$1 - \frac{\epsilon}{2} < \|f_k(t_1)\|\,. \tag{2.16}$$

Repare que o ponto $t_1 \notin L \setminus U$, por isso iremos considerar os seguintes casos: se $t_1 \in K$, então

$$\|z_k - x_k\| = \|g_k(t_0) - f_k(t_0)\| \leq \|g_k - f_k\| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para quaisquer} \quad k \in A. \tag{2.17}$$

Caso $t_1 \in U \setminus K$ então $f_k(t_1) = m(t_1)x_k$. Usando (2.16) vemos que $1 - \epsilon < m(t_1)$ e diante disso

$$\begin{aligned} \|z_k - x_k\| &\leq \|g_k(t_1) - f_k(t_1)\| + \|f_k(t_1) - x_k\| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \|m(t_1)x_k - x_k\| \\ &= \frac{\epsilon}{2} + |m(t_1) - 1|\,\|x_k\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + 1 - m(t_1) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + 1 - 1 + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned} \tag{2.18}$$

■

**Corolário 2.19.** *Um espaço de Banach $X$ tem a AHSP se, e somente se, $(\ell_1, \mathcal{C}_0(L,X))$ tem a BPBP.*

*Demonstração.* Segue imediatamente do Teorema 2.18 ■

Após demonstrarmos o teorema acima, percebemos que era possível ter a recíproca do Teorema 2.16 se incluíssemos a hipótese adicional ao espaço de função módulo $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$ de que a aplicação $t \in K \mapsto \|x(t)\| \in \mathbb{R}$ seja contínua.

**Teorema 2.20.** *Sejam $K$ um espaço Hausdorff compacto não-vazio, $(X_t)_{t\in K}$ uma família de espaços de Banach e $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$ um espaço de função módulo tal que a aplicação $t \in K \mapsto \|x(t)\| \in \mathbb{R}$ é contínua para todo $x \in Z$. Se $Z$ tem a AHSP, então $X_t$ tem a AHSP para todo $t \in K$.*

*Demonstração.* Fixe $\epsilon > 0$. Como $Z$ tem a $AHSP$, então existem $\eta(\epsilon), \gamma(\epsilon) > 0$ satisfazendo a Definição 2.6. Sejam $t_0 \in K$, $(x_k)_k \subset B_{X_{t_0}}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ uma série convexa tal que

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\|_{X_{t_0}} > 1 - \eta(\epsilon).$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$, definimos $y_k : K \to \bigcup_{t \in K} X_t$ por

$$y_k(t) = \begin{cases} x_k & \text{se} \quad t = t_0 \\ 0 & \text{se} \quad t \neq t_0. \end{cases}$$

Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|y_k\| &= \sup\{\|y_k(t)\| : t \in K\} \\ &= \|x_k\| \leq 1. \end{aligned}$$

Logo, $(y_k)_k \subset B_Z$. Além disso, se $t \neq t_0$, então

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k(t) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k .0 \right\| = 0. \tag{2.19}$$

Agora, caso $t = t_0$

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k(t) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\|. \tag{2.20}$$

Das igualdades (2.19) e (2.20), temos

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k \right\| = \sup \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k(t) \right\| : t \in K \right\} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\| > 1 - \eta(\epsilon).$$

Como $Z$ satisfaz a $AHSP$, existem $A \subset \mathbb{N}$, $\{z_k : k \in A\} \subset S_Z$ e $\Phi \in S_{Z^*}$ tais que

1. $\sum_{k \in A} \alpha_k > 1 - \gamma(\epsilon)$,

2. $\|z_k - y_k\| < \epsilon$, para todo $k \in A$,

3. $\Phi(z_k) = 1$, para todo $k \in A$.

Se $t \neq t_0$, então

$$\begin{aligned} \|z_k(t)\| &= \|z_k(t) - 0\| \\ &= \|z_k(t) - y_k(t)\| \\ &\leq \|z_k - y_k\| < \epsilon \quad \forall k \in A. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Já no caso em que $t = t_0$, teremos

$$\begin{aligned} \|z_k(t_0) - x_k\| &= \|z_k(t_0) - y_k(t_0)\| \\ &\leq \|z_k - y_k\| < \epsilon \quad \forall k \in A. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Por outro lado,

$$1 = \|z_k\| = \sup\{\|z_k(t)\| : t \in K\}, \quad \forall k \in A.$$

Como a função $t \in K \mapsto \|x(t)\|$ é contínua para todo $x \in Z$, e usando a desigualdade (2.21), temos que o supremo acima é atingido no ponto $t_0$, ou seja, $\|z_k(t_0)\| = 1$. Definimos $g_k = z_k(t_0)$, para todo $k \in A$. Assim, $\{g_k : k \in A\} \subset S_{X_{t_0}}$ e

$$\|g_k - x_k\| = \|z_k(t_0) - x_k\| \overset{(2.22)}{<} \epsilon, \quad \forall k \in A. \tag{2.23}$$

**Afirmação 1**: $\left\|\sum_{k\in A} \alpha_k z_k\right\| = \sum_{k \in A} \alpha_k$.

De fato,

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{k\in A} \alpha_k z_k\right\| &\leq \sum_{k\in A} \alpha_k \|z_k\| \\ &= \sum_{k\in A} \alpha_k .1 \\ &= \sum_{k\in A} \alpha_k. \end{aligned}$$

Como para todo $k \in A$, $\Phi(z_k) = 1$, então

$$\Phi\left(\sum_{k\in A} \alpha_k z_k\right) = \sum_{k\in A} \alpha_k \Phi(z_k) = \sum_{k\in A} \alpha_k.$$

Dessa forma,

$$\left\|\sum_{k\in A}\alpha_k z_k\right\| = \sup\left\{\left|\varphi\left(\sum_{k\in A}\alpha_k z_k\right)\right| \; : \; \varphi \in S_{X^*}\right\} = \sum_{k\in A}\alpha_k.$$

Com isso, provamos a Afirmação 1.

Então,

$$\sum_{k\in A}\alpha_k = \left\|\sum_{k\in A}\alpha_k z_k\right\| = \sup\left\{\left\|\sum_{k\in A}\alpha_k z_k(t)\right\| \; : \; t\in K\right\}$$

Por hipótese, a função $t \in K \mapsto \left\|\sum_{k\in A}\alpha_k z_k(t)\right\|$ é contínua. Logo existe $t \in K$, tal que $\left\|\sum_{k\in A}\alpha_k z_k(t)\right\| = \sum_{k\in A}\alpha_k$. Afirmamos que essa norma é atingida no no ponto $t_0$. Realmente, seja $t_1 \in K$, $t_1 \neq t_0$. Então

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k\in A}\alpha_k z_k(t_1)\right\| &\leq \sum_{k\in A}\alpha_k \left\|z_k(t_1)\right\| \\ &\overset{(2.21)}{<} \sum_{k\in A}\alpha_k \epsilon \\ &< \sum_{k\in A}\alpha_k.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\left\|\sum_{k\in A}\alpha_k z_k(t_0)\right\| = \sum_{k\in A}\alpha_k > 1-\gamma(\epsilon).$$

Por isso, $\sum_{k\in A}\alpha_k z_k(t_0) \neq \mathbf{0}$. Aplicando o teorema de Hahn-Banach, existe um funcional $x^* \in S_{X^*_{t_0}}$ tal que

$$x^*\left(\sum_{k\in A}\alpha_k z_k(t_0)\right) = \left\|\sum_{k\in A}\alpha_k z_k(t_0)\right\| = \sum_{k\in A}\alpha_k.$$

Note que $|x^*(z_k(t_0))| \leq \|x^*\|\,\|z_k\| = 1$, para todo $k \in A$. Caso $|x^*(z_k(t_0))| < 1$, teríamos que $Re\, x^*(z_k(t_0)) < 1$ para cada $k \in A$, logo $Re\, x^*\left(\sum_{k\in A}\alpha_k z_k(t_0)\right) < \sum_{k\in A}\alpha_k$. Por isso $|x^*(z_k(t_0))| = 1$ e $Re\, x^*(z_k(t_0)) = 1$, ou seja, $x^*(z_k(t_0)) = 1$. Finalmente,

$$x^*(g_k) = x^*(z_k(t_0)) = 1, \quad \forall k \in A. \tag{2.24}$$

■

**Corolário 2.21.** *Seja $(K, (X_t)_{t\in K}, Z)$ um espaço de função módulo dual. Se $Z$ tem a AHSP* *então* $X_t$ *tem a* $AHSP$ *para todo* $t \in K$.

*Demonstração.* Segue da Proposição 1.16 e do Teorema 2.20 ■

**Corolário 2.22.** *Sejam* $K$ *um espaço Hausdorff compacto não-vazio e* $X$ *um espaço de Banach. Então* $X$ *tem a* $AHSP$ *se, e somente se,* $\mathcal{C}(K, X)$ *tem a* $AHSP$.

*Demonstração.* Notando que $\mathcal{C}(K, X)$ pode ser visto como espaço de função módulo, quando consideramos $K$ o espaço base, $X_t = X$ para todo $t \in K$, $Z = \mathcal{C}(K, X)$ e que a aplicação $t \in K \mapsto \|f(t)\|$ é contínua para toda $f \in \mathcal{C}(K, X)$, o resultado segue imediatamente dos Teoremas 2.16 e 2.20. ■

**Observação 2.23.** *Sejam* $K$ *um espaço Hausdorff compacto não-vazio e* $X$ *um espaço de Banach. Em [16] Teorema 11, S. Kim demonstrou que se* $\mathcal{C}(K, X)$ *tem a* $AHSP$ *então* $X$ *tem a* $AHSP$. *Logo o Corolário 2.22 generaliza este resultado de S. Kim.*

Como consequência, temos que $\mathcal{C}(K, X)$ tem a $AHSP$ se $X$ for qualquer um dos espaços citados nos Exemplos 2.7.

# Capítulo 3

# Caracterização de compactos em alguns espaços de Banach

Em [20], S. Dineen e J. Mujica provaram que os monômios com uma ordenação compatível formam uma base de Schauder para os seguintes espaços de funções holomorfas: $(\mathcal{H}(c_0), \tau_0)$, $(\mathcal{H}(c_0), \tau_w)$ e $(\mathcal{H}_b(c_0), \tau_b)$, onde $\tau_0$, $\tau_w$ e $\tau_b$ são as topologias localmente convexas, denominadas compacto-aberto, de Nachbin e da convergência uniforme sobre os limitados de $c_0$. Sugerimos [18], [19] e [28], para o estudo desses espaços e suas topologias. Para mostrar tal fato, os autores usaram uma caracterização dos conjuntos compactos de $c_0$. Este capítulo, surge com o objetivo de estudar os monômios em $\mathcal{H}\left(c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \ell_p^i\right)\right)$, $1 \leq p \leq \infty$ e $\mathcal{H}(d_*(w,1))$. Para tal, é necessário ter uma caracterização dos conjuntos compactos de $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \ell_p^i\right)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ e de $d_*(w,1)$. Apresentaremos tais caracterizações, e seguiremos trabalhando com o objetivo de conseguir resultados positivos referentes aos monômios definidos nesses espaços.

## 3.1 Conjuntos compactos de $c_0\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell_p^i\right)$, $1 \leq p \leq \infty$ e $d_*(w,1)$.

Seja $X$ um espaço de Banach. Um *sistema fundamental para os conjuntos compactos* de $X$ é uma família $\{A_\lambda : \lambda \in I\}$ de conjuntos compactos de $X$ tal que, para cada compacto $K \subset X$, existe $\lambda \in I$ tal que $K \subset A_\lambda$.

Primeiramente, vamos definir os conjuntos totalmente limitados em espaços normados. A partir daí, apresentaremos um sistema fundamental para os conjuntos compactos $K$ de $c_0\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty}\ell_p^i\right)$, para cada $1 \leq p \leq \infty$ e de $d_*(w,1)$.

**Definição 3.1.** *Seja $(X, \|.\|)$ um espaço normado. Um subconjunto $A \subset X$ é totalmente limitado se para todo $\epsilon > 0$ existirem $x_1, ..., x_n \in X$ ($\epsilon$-rede para $A$), tais que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$.*

**Observação 3.2.** *Em espaços normados um subconjunto é compacto se e somente se é completo e totalmente limitado.*

**Proposição 3.3.** *Para cada $\lambda = (\lambda_m)_m \in c_0^+$ e $1 \leq p < \infty$, considere*

$$A_\lambda = \left\{ (y_i)_i \in c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}\ell_p^i\right) : \quad \left(\sum_{i\in I(m)} |y_i|^p\right)^{1/p} \leq \lambda_m \quad m \in \mathbb{N} \right\}.$$

*Então a família $\left\{A_\lambda : \lambda \in c_0^+\right\}$ é um sistema fundamental para os conjuntos compactos de $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} l_p^i\right)$.*

*Demonstração.* Para cada $1 < p < \infty$, seja $\lambda \in c_0^+$. Definimos o seguinte conjunto:

$$A_\lambda = \left\{ (y_i)_i \in c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}\ell_p^i\right) : \left(\sum_{i\in I(m)} |y_i|^p\right)^{1/p} \leq \lambda_m \quad m \in \mathbb{N} \right\}.$$

**(1)** $A_\lambda$ é fechado em $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}\ell_p^i\right)$:

Seja $y \in \overline{A_\lambda}$. Então existe $(y^j)_{j\in\mathbb{N}} \subset A_\lambda$ tal que $y^j \longrightarrow y$ quando $j \longrightarrow \infty$. Assim, dado $\epsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|y^j - y\| \leq \epsilon$, sempre que $j \geq j_0$. Assim,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i\in I(m)} |y_i|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{i\in I(m)} \left|y_i^j\right|^p\right)^{1/p} &\leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in I(m)} \left|y_i^j - y_i\right|^p\right)^{1/p} \\ &= \left\|y^j - y\right\| \leq \epsilon, \end{aligned} \tag{3.1}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $j \geq j_0$. Assim,

$$\left(\sum_{i\in I(m)} |y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i\in I(m)} \left|y_i^j\right|^p\right)^{1/p} + \epsilon$$

$$\leq \quad \lambda_m+\epsilon, \quad \text{para todo} \quad m\in\mathbb{N}, \tag{3.2}$$

onde a segunda desigualdade segue do fato de que $y^j\in A_\lambda$ para todo $j$. Fazendo $\epsilon\to 0$ em (3.2), concluímos que

$$\left(\sum_{i\in I(m)}|y_i|^p\right)^{1/p}\leq\lambda_m, \quad \text{para todo} \quad m\in\mathbb{N}.$$

Logo $y\in A_\lambda$, e $A_\lambda$ é um conjunto fechado em $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}\ell_p^i\right)$.

**(2)** $A_\lambda$ é totalmente limitado em $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}\ell_p^i\right)$:

Dado $\epsilon>0$, como $\lambda\in c_0^+$, então existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$\lambda_m\leq\frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para todo} \quad m\geq N. \tag{3.3}$$

Definimos:

$$A_\lambda^N=\{(y_i)_i\in A_\lambda : y_i=0 \quad \text{para todo} \quad i\in I(m) \quad \text{e} \quad m>N\}.$$

Note que $A_\lambda^N$ é não-vazio. Para $n=\frac{N(N+1)}{2}$, considere $T:\mathbb{C}^n\longrightarrow c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}l_p^i\right)$ a aplicação linear dada por

$$T(z_1,...,z_n)=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_4 & \dots & z_k & 0 & \dots \\ & z_3 & z_5 & & & 0 & \\ & & z_6 & & & 0 & \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \\ & & & & z_n & 0 & \\ & & & & & 0 & \end{pmatrix}.$$

Então $T$ é contínua, pois está definida sobre um espaço normado de dimensão finita. Agora, o conjunto

$$F=\left\{z\in\mathbb{C}^n : \left(\sum_{i\in I(m)}|z_i|^p\right)^{1/p}\leq\lambda_m, \quad 1\leq m\leq N\right\}$$

é um compacto de $\mathbb{C}^n$ e $T(F)=A_\lambda^N$. Como $T$ é contínua, então $A_\lambda^N$ é um conjunto compacto de $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}\ell_p^i\right)$. Logo, existem $z^1,...,z^l \in A_\lambda^N$, tais que

$$A_\lambda^N \subset \bigcup_{j=1}^{l} B(z^j, \frac{\epsilon}{2}). \tag{3.4}$$

Afirmamos que $A_\lambda \subset \bigcup_{j=1}^{l} B(z^j,\epsilon)$. Realmente, se $y \in A_\lambda$ podemos decompor em uma soma, $y = v + w$, onde

$$v = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_4 & \dots & y_k & 0 & \dots \\ & y_3 & y_5 & & & 0 & \\ & & y_6 & & & 0 & \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \\ & & & & y_m & 0 & \\ & & & & & 0 & \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_{m+1} & \dots \\ & 0 & 0 & & & y_{m+2} & \\ & & 0 & & & y_{m+3} & \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Como $v \in A_\lambda^N$, por (3.4) existe $1 \leq j_0 \leq l$, tal que $v \in B(z^{j_0}, \frac{\epsilon}{2})$. Logo,

$$\|v - z^{j_0}\| \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.5}$$

Além disso, como $y \in A_\lambda$ então $w \in A_\lambda$. Assim,

$$\begin{aligned} \|w\| &= \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in I(m)} |w_i|^p\right)^{1/p} \\ &= \sup_{m>N} \left(\sum_{i\in I(m)} |w_i|^p\right)^{1/p} \\ &= \sup_{m>N} \left(\sum_{i\in I(m)} |y_i|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \sup_{m>N} \lambda_m \leq \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde a segunda desigualdade, é válida por (3.3). Em vista disso,

$$\left\|y - z^{j_0}\right\| = \left\|v + w - z^{j_0}\right\|$$

$$\begin{aligned} &\leq \left\|v - z^{j_0}\right\| + \|w\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade é válida por (3.5) e (3.6). Então $y \in B(z^{j_0}, \epsilon)$. Portanto $A_\lambda$ é totalmente limitado em $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}\ell_p^i\right)$. Segue da Observação 3.2 que $A_\lambda$ é um conjunto compacto de $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}\ell_p^i\right)$.

**(3)** $\{A_\lambda : \lambda \in c_0\}$ é um sistema fundamental para os compactos de $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}\ell_p^i\right)$:

Seja $K \subset c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}\ell_p^i\right)$ um subconjunto compacto. Para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos

$$\lambda_m = \sup_{z\in K}\left(\sum_{i\in I(m)} |z_i|^p\right)^{1/p}$$

Afirmamos que $\lambda = (\lambda_m)_m \in c_0^+$. Dado $\epsilon > 0$, consideremos $\{B(z, \frac{\epsilon}{2}) : z \in K\}$ uma cobertura aberta de $K$. Assim existem $z^1, ..., z^l \in K$ tal que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{l} B(z^j, \frac{\epsilon}{2}). \tag{3.7}$$

Como $z^j \in c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}\ell_p^i\right)$, então para cada $j = 1, ..., l$, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\sum_{i\in I(m)} \left|z_i^j\right|^p\right)^{1/p} \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para todo} \quad m \geq N_j.$$

Se $N = \max\limits_{1\leq j\leq l} N_j$, então

$$\left(\sum_{i\in I(m)} \left|z_i^j\right|^p\right)^{1/p} \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para todo} \quad m \geq N \quad \text{e} \quad 1 \leq j \leq l. \tag{3.8}$$

Seja $z \in K$ qualquer. Então por (3.7) existe $1 \leq j_0 \leq l$,

$$\left\|z - z^{j_0}\right\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ou seja,

$$\left(\sum_{i\in I(m)} |z_i|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{i\in I(m)} \left|z_i^{j_0}\right|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i\in I(m)} \left|z_i - z_i^{j_0}\right|^p\right)^{1/p} \leq \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Por isso,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i\in I(m)} |z_i|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{i\in I(m)} \left|z_i^{j_0}\right|^p\right)^{1/p} + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{para todo} \quad m \geq N. \end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade é válida por (3.8). Portanto, para todo $m \geq N$

$$\sup_{z\in K} \left(\sum_{i\in I(m)} |z_i|^p\right)^{1/p} \leq \epsilon.$$

Com isso,

$$|\lambda_m| = \sup_{z\in K} \left(\sum_{i\in I(m)} |z_i|^p\right)^{1/p} \leq \epsilon, \quad \text{para todo} \quad m \geq N.$$

Ou seja $\lambda \in c_0^+$. Se $w = (w_i)_i \in K$, então

$$\left(\sum_{i\in I(m)} |w_i|^p\right)^{1/p} \leq \sup_{z\in K} \left(\sum_{i\in I(m)} |z_i|^p\right)^{1/p} = \lambda_m,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Mostrando assim que $w \in A_\lambda$. Ou seja, $K \subset A_\lambda$. Portanto $\left\{A_\lambda : \lambda \in c_0^+\right\}$ é um sistema fundamental para os conjuntos compactos de $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \ell_p^i\right)$. ■

Para o caso $p = \infty$, o espaço $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \ell_\infty^i\right)$ é isométricamente isomorfo a $c_0$. Neste caso, o sistema fundamental de compactos é o mesmo que foi usado em [20].

Na sequência, apresentaremos uma caracterização aos conjuntos compactos de $d_*(w, 1)$.

**Proposição 3.4.** *Seja $w \in c_0 \setminus \ell_1$, sequência decrescente de reais positivos. Para cada*

*$\lambda=(\lambda_n)_n\in c_0^+$, considere o conjunto*

$$A_\lambda=\left\{y\in d_*(w,1):\ \frac{\sum_{i=1}^n[y]_i}{\sum_{i=1}^n w_i}\leq\lambda_n\ \forall n\in\mathbb{N}\right\}.$$

*Então a família $\left\{A_\lambda:\ \lambda\in c_0^+\right\}$ é um sistema fundamental para os conjuntos compactos de $d^*(w,1)$.*

*Demonstração.* Fixe $\lambda\in c_0^+$ e $w\in c_0\setminus\ell_1$ sequência decrescente de números reais positivos tal que $w_1=1$, e defina

$$A_\lambda=\left\{y\in d_*(w,1):\ \frac{\sum_{i=1}^n[y]_i}{\sum_{i=1}^n w_i}\leq\lambda_n\ \forall n\in\mathbb{N}\right\}.$$

**(1)** $A_\lambda$ é fechado em $d_*(w,1)$:

Seja $y\in\overline{A_\lambda}$. Então existe $(z^j)_{j\in\mathbb{N}}\subset A_\lambda$ tal que $z^j\longrightarrow y$ quando $j\longrightarrow\infty$. Assim, dado $\epsilon>0$ existe $j_0\in\mathbb{N}$ tal que $\|z^j-y\|_*\leq\epsilon$, sempre que $j\geq j_0$. Com isso,

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^n[y]_i}{\sum_{i=1}^n w_i}-\frac{\sum_{i=1}^n[z^j]_i}{\sum_{i=1}^n w_i}\ &\leq\ \frac{\sum_{i=1}^n[z^j-y]_i}{\sum_{i=1}^n w_i}\leq\|z^j-y\|_*\leq\epsilon\quad\forall n\Rightarrow\\ \frac{\sum_{i=1}^n[y]_i}{\sum_{i=1}^n w_i}\leq\epsilon\ &+\ \frac{\sum_{i=1}^n[z^j]_i}{\sum_{i=1}^n w_i}\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^n[y]_i}{\sum_{i=1}^n w_i}\leq\epsilon+\lambda_n\quad\forall n\end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon\to 0$, vemos que $\frac{\sum_{i=1}^n[y]_i}{\sum_{i=1}^n w_i}\leq\lambda_n$ para todo $n$. Logo $y\in A_\lambda$, e $A_\lambda$ é fechado em $d_*(w,1)$.

**(2)** $A_x$ é totalmente limitado em $d_*(w,1)$:

Como $\lambda\in c_0$, dado $\epsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\lambda_i\leq\frac{\epsilon}{2}$, para todo $i\geq N$. Definimos:

$$A_\lambda^N=\{y\in A_\lambda: y_i=0,\quad i>N\}.$$

Seja $T:\mathbb{C}^N\longrightarrow d_*(w,1)$ definida por $T(z_1,...,z_N)=(z_1,...,z_N,0,0,...)$. Vemos que $T$ está bem definida, é linear e contínua . O conjunto $F=\{z\in\mathbb{C}^N:\ \frac{\sum_{i=1}^n[y]_i}{\sum_{i=1}^n w_i}\leq\lambda_n,\quad 1\leq n\leq$

$N\}$, é um compacto de $\mathbb{C}^N$ e $T(F) = A_\lambda^N$. Como $T$ é contínua $A_\lambda^N$ é compacto. Logo, existem $z^1, ..., z^l \in A_\lambda^N$, tal que $A_\lambda^N \subset \bigcup_{j=1}^{l} B(z^j, \frac{\epsilon}{2})$. Afirmamos que $A_\lambda \subset \bigcup_{j=1}^{l} B(z^j, \epsilon)$. Realmente, tomando $y \in A_\lambda$ escrevemos $y = u + v$, onde

$$\begin{aligned} u &= (y_1, ..., y_N, 0, 0, ...) \\ v &= (0, ..., 0, y_{N+1}, y_{N+2}, ...). \end{aligned}$$

Como $u \in A_\lambda^N$, então $u \in B(z^{j_0}, \frac{\epsilon}{2})$ para algum $1 \leq j_0 \leq l$. Ou seja, $\|u - z^{j_0}\|_* \leq \frac{\epsilon}{2}$. Como $y \in A_\lambda$, então,

$$\begin{aligned} \|v\|_* = \sup_n \frac{\sum_{i=1}^n [v]_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \sup_{n>N} \frac{\sum_{i=N+1}^n [y]_i}{\sum_{i=1}^n w_i} &\leq \sup_{n>N} \frac{\sum_{i=1}^n [y]_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \\ &\leq \sup_{n>N} |x_n| \leq \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|y - z^{j_0}\|_* &= \|u + v - z^{j_0}\|_* \\ &\leq \|u - z^{j_0}\|_* + \|v\|_* \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

e então $y \in B(z^{j_0}, \epsilon)$. Portanto $A_\lambda$ é totalmente limitado.

De (1) e (2), $A_\lambda$ é um compacto de $d_*(w, 1)$.

**(3)** $\{A_\lambda : x \in c_0\}$ é um sistema fundamental para os compactos de $d_*(w, 1)$:
Seja $K \subset d_*(w, 1)$ um subconjunto compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\lambda_n = \sup_{z \in K} \frac{\sum_{i=1}^n [z]_i}{\sum_{i=1}^n w_i}. \tag{3.9}$$

Afirmamos que $\lambda = (\lambda_n)_n \in c_0$. Dado $\epsilon > 0$, consideremos $\{B(z, \frac{\epsilon}{2}) : z \in K\}$ uma cobertura aberta de $K$. Assim existem $z^1, ..., z^l \in K$ tal que $K \subset \bigcup_{j=1}^{l} B(z^j, \frac{\epsilon}{2})$. Como $z^j \in d_*(w, 1)$

então para cada $j = 1, ..., l$ existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}[z^j]_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \le \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n \ge N_j, \tag{3.10}$$

Se $N = \max\limits_{1\le j\le l} N_j$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}[z^j]_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \le \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n \ge N, \quad 1 \le j \le l. \tag{3.11}$$

Seja $z \in K$, então existe $1 \le j_0 \le l$ tal que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}[z]_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} - \frac{\sum_{i=1}^{n}[z^{j_0}]_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \le \sup_{z\in K} \frac{\sum_{i=1}^{n}[z - z^{j_0}]_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \le \|z - z^{j_0}\|_* \le \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, se $n \ge N$

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^{n}[z]_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} &\le \frac{\sum_{i=1}^{n}[z^{j_0}]_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} + \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{\sum_{i=1}^{n}[z]_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} &\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre os $z \in K$, temos

$$\sup_{z\in K} \frac{\sum_{i=1}^{n}[z]_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \le \epsilon \quad \forall \quad n \ge N.$$

$$|\lambda_n| = \left|\sup_{z\in K} \frac{\sum_{i=1}^{n}[z]_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\right| \le \epsilon \quad \forall\, n \ge N.$$

E assim, mostramos que $x \in c_0$. Para finalizar, seja $z \in K$, então considerando $x \in c_0$ definido acima, temos

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}[z]_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \le \sup_{z\in K} \frac{\sum_{i=1}^{n}[z]_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = |\lambda_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostrando assim que $K \subset A_\lambda$. ■

Com estas caracterizações dos conjuntos compactos de $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}\ell_p^i\right)$ para todo $1 \le p \le \infty$ e de $d_*(w,1)$, nosso objetivo é dar continuidade ao estudo dos monômios em $\mathcal{H}\left(c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} l_p^i\right)\right)$,

$1 \leq p \leq \infty$ e $\mathcal{H}(d_*(w,1))$, para seguir buscando resultados positivos nessa direção, análogos aos determinados em [20].

# Referências Bibliográficas


[1] M. D. Acosta, F. J. Aguirre, *A new sufficient condition for the denseness of norm attaining operators*, Rocky Mountain J. of Math. **26** (1996), 407–418.

[2] M. D. Acosta, F. J. Aguirre, R. Payá, *A space by W. Gowers and new result on norm and numerical radius attaining operators*, Acta Univ. Carolinae **33** (1992), 5–1.

[3] M. D. Acosta, F. J. Aguirre, R. Payá, *There is no bilinear Bishop-Phelps theorem*, Israel J. Math. **93** (1996), 221–227.

[4] M. D. Acosta, R. M. Aron, D. García, M. Maestre, *The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators*, J. Funct. Anal. **254** (2008), 2780–2799.

[5] M. D. Acosta, J. B. Guerrero, Y. S. Choi, M. Ciesielski, S. K. Kim, H. J. Lee, M. L. Lourenço, M. Martín, *The Bishop-Phelps-Bollobás property for operators between spaces of continuous functions*, Nonlinear Analysis **95** (2014), 323–332.

[6] M. D. Acosta, R. Payá, *Norm attaining and numerical radius attaining operators*, Rev. Mat. UCM **2** (1989), 19–25.

[7] N. I. Akhiezer, M. G. Krein, *Some questions in the theory of moments*, Amer. Math. Soc., 1938.

[8] R. M. Aron, B. Cascales, O. Kozhushkina, *The Bishop-Phelps-Bollobás theorem and Asplund operators*, Proc. of the Amer. Math. Soc. **139** (2011), 3553–3560.

[9] R. M. Aron, Y. S. Choi, D. García, M. Maestre, *The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for $\mathcal{L}(L_1(\mu), L_\infty[0,1])$*, Adv. in Math. **228** (2011), 617–628.

[10] E. Behrends, *M-Structure and the Banach-Stone Theorem*, Springer-Verlag, 1979.

[11] E. Bishop, R. R. Phelps, *A proof that every Banach space is subreflexive*, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 97–98.

[12] B. Bollobás, *An extension to the theorem of Bishop and Phelps*, Bull. Lond. Math. Soc. **2** (1970), 181–182.

[13] J. Bourgain, *On dentability and the Bishop-Phelps property*, Israel J. Math. **28** (1977), 265–271.

[14] L. Cheng, D. Dai, Y. Dong, *A sharp operator version of the Bishop-Phelps theorem for operators from $l_1$ to CL-spaces*, Proc. of the Amer. Math. Soc. **141** (2012), 867–872.

[15] Y. S. Choi, D. García, S. K. Kim, M. Maestre, *Some geometric properties of disk algebras*, J. Math. Anal. **409** (2014), 147–157.

[16] Y. S. Choi, S. K. Kim, *The Bishop-Phelps-Bollobás property and lush spaces*, J. Math. Anal. and Appl. **390** (2012), 549–555.

[17] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 396–414.

[18] S. Dineen, *Complex Analysis in Locally Convex Spaces*, North-Holland Mathematics Studies, 1944.

[19] S. Dineen, *Complex Analysis in Infinite Dimensional Spaces*, Springer-Verlag Monographs in Mathematics, 1999.

[20] S. Dineen, J. Mujica, *A monomial basis for the holomorphic functions on* $c_0$, Proc. of Amer. Math. Soc. **141** (2012), 1663–1672.

[21] J. J. J. Uhl, *Norm attaining operators on* $L^1[0,1]$ *and the Radon-Nikodým property*, Pacific. Journ. of Math **63** (1976), 293–300.

[22] G. J. O. Jameson, *Convex series*, Proc. Camb. Phil. Soc. **72** (1972), 37–47.

[23] S. K. Kim, *The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators from* $c_0$ *to uniformly convex spaces*, Israel J. Math. **197** (2013), 425–435.

[24] S. K. Kim, H. J. Lee, *The Bishop-Phelps-Bollobás property for operators from* $\mathcal{C}(K)$ *to uniformly convex spaces*, Preprint .

[25] J. Lindenstrauss, *On operator which attain their norm*, Israel J. Math. **1** (1963), 139–148.

[26] C. G. Lorentz, *Some new functional spaces*, Ann. of Math. **51** (1950), 37–55.

[27] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, 1998.

[28] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, Holland Mathematics Studies, 1986.

[29] J. R. Partingon, *Norm attaining operators*, Israel J. Math. **43** (1982), 273–276.

[30] W. Schachermayer, *Norm attaining operators and renormings of Banach spaces*, Israel J. Math. **44** (1983), 201–212.

[31] C. Stegall, *Duals of certain spaces with the Dunford-Pettis properties*, Notices Amer. Math. Soc. **19** (1972), 799.

[32] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.