Aspectos Geométricos do Teorema de Bernstein em Ambientes Lorentzianos

Rodrigo Silva dos Santos

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: **Matemática**

Orientadora: **Profª. Drª. Martha Patrícia Dussan Angulo**

Coorientador: **Prof. Dr. Antônio de Pádua Franco Filho**

São Paulo, Fevereiro de 2021

Aspectos Geométricos do Teorema de Bernstein em Ambientes Lorentzianos

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 26/02/2021. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Martha Patrícia Dussan Angulo (orientadora) - IME-USP
- Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves - IME-USP
- Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra - Universidade Federal de São Carlos
- Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka - Universidade Estadual de Maringá
- Prof. Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco - Universidad Nacional Autónoma de México

Agradecimentos

Gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos à minha orientadora, Profª. Drª. Martha Patrícia Dussan Angulo e ao meu coorientador, Prof. Dr. Antônio de Pádua Franco Filho, pela excelente orientação conferida a mim na elaboração desta tese, pela paciência e por sempre apontarem de maneira tão precisa o melhor caminho para se obter um bom trabalho.

À minha família.

Resumo

SANTOS, R. S. **Aspectos Geométricos do Teorema de Bernstein em Ambientes Lorentzianos** . 2021. 62 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

Neste trabalho, estudamos as superfícies minimais em dois ambientes Lorentzianos, os espaços de Minkowski $\mathbb{R}^4_1$ e $\mathbb{R}^3_1$. Em um primeiro momento, usamos uma representação integral de Weierstrass relacionada às superfícies em $\mathbb{R}^4_1$ e via uma θ-família de superfícies paramétricas em $\mathbb{R}^4_1$, obtemos resultados do Teorema de Bernstein para gráficos minimais de $\mathbb{R}^4_1$ e gráficos minimais de $\mathbb{R}^3_1$ e $\mathbb{E}^3$.

Em um segundo momento, falamos sobre questões de extensões de soluções das equações dos gráficos minimais com codimensão igual a 2 e obtemos resultados relacionados à construção de uma classe de superfícies minimais não planas em $\mathbb{R}^4_1$.

Palavras-chave: superfície minimal, teorema de Bernstein, representação de Weierstrass, θ-família, superfície conjugada.

Abstract

SANTOS, R. S. **Geometric Aspects of the Bernstein's theorem in Lorentzian ambient spaces**. 2021. 62 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

In this work, we study the minimal surfaces in two Lorentzian ambient spaces, the Minkowski spaces $\mathbb{R}^4_1$ and $\mathbb{R}^3_1$. At first, we use a Weierstrass integral representation related to the surfaces in $\mathbb{R}^4_1$ and via a θ-family of parametric surfaces in $\mathbb{R}^4_1$, we get results from Bernstein's theorem for minimal graphics of $\mathbb{R}^4_1$ and minimal graphics of $\mathbb{R}^3_1$ and $\mathbb{E}^3$.

In a second step, we talk about issues of extensions of solutions of the equations of the minimal graphics with codimension equal to 2 and we obtain results related to the construction of a class of non-flat minimal surfaces in $\mathbb{R}^4_1$.

Keywords: minimal surface, Bernstein's theorem, Weierstrass representation, θ-family, conjugated surface.

Sumário

1

Introdução

Tema clássico no campo da Geometria Diferencial global de superfícies, o estudo de superfícies minimais em uma dada 3-variedade Riemanniana sempre gerou grande interesse de pesquisa, ocasionando, assim, inúmeros trabalhos publicados pelo mundo afora. Em 1915, uma das mais relevantes contribuições nessa direção nos foi fornecida por Bernstein [Ber15] que, em seu célebre teorema nos assegurou que

Teorema 1.0.1 (Bernstein)**.** *Se uma superfície minimal em $\mathbb{R}^3$ é um gráfico inteiro de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ então ela é um plano, ou seja, as únicas soluções inteiras para a equação de superfície minimal*

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0 \tag{1.1}$$

são as funções afins $f(x, y) = ax + by + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$.

Considerando-se dimensões mais altas, na década de 1960 versões do teorema foram provadas no caso de uma superfície minimal que é o gráfico de uma função $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, com $n \leq 8$. Entretanto, para $n \geq 9$, foi mostrado em [BGG69] que o resultado torna-se falso.

Nos voltando para o contexto Lorentziano, uma superfície minimal de tipo espaço em uma 3-variedade Lorentziana é uma superfície cujo vetor curvatura média se anula em todos os seus pontos. Alguns autores chamam tais superfícies de maximais.

Nesse sentido, o Teorema de Bernstein para superfícies minimais no espaço Euclideano $\mathbb{R}^3$ deu origem a um dos resultados mais relevantes no contexto de geometria global de superfícies de tipo espaço, estabelecido por E. Calabi [Cal70] em 1970; em linhas gerais ele afirma que

Teorema 1.0.2 (Calabi)**.** *No espaço de Minkowski $\mathbb{R}^3_1 \doteq (\mathbb{R}^3, -dx^2 + dy^2 + dz^2)$, os únicos gráficos minimais inteiros $\{(f(x, y), x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ são os planos de tipo espaço, ou seja, as únicas soluções inteiras $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ da equação de superfície minimal*

$$(1 - f_y^2)f_{xx} + 2f_x f_y f_{xy} + (1 - f_x^2)f_{yy} = 0, \quad |\operatorname{grad} f| < 1, \tag{1.2}$$

são as funções afins $f(x, y) = ax + by + c$, com $a^2 + b^2 < 1$, a, b e $c \in \mathbb{R}$.

No enunciado acima, é comum dizermos que a coordenada posição da função tem assinatura -1, ou ainda, que a função está na coordenada temporal.

Nosso principal interesse neste trabalho é abordar, via variáveis complexas, as superfícies minimais com codimensão igual a 2 e, a partir delas, obter os casos particulares com codimensão igual a 1. Estudamos um novo Teorema de Bernstein, associado a uma equação diferencial dos gráficos minimais, que desconhecemos ter sido tratada na bibliografia encontrada até o presente momento, a saber, a equação

$$(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (-1+f_x^2)f_{yy} = 0, \quad f_x^2 > f_y^2 + 1. \tag{1.3}$$

Repare, na terceira linha da tabela abaixo, como a equação (1.3) se diferencia das equações (1.1) e (1.2) na primeira e segunda linhas, já tratadas por Bernstein [Ber15] e Calabi [Cal70], respectivamente.

Tabela 1.1: *Equações do Teorema de Bernstein*

Gráfico	Assinatura	Equação	Condição
$\{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$	$(+,+,+)$	$(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy} = 0$	Não há
$\{(f(x,y),x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$	$(-,+,+)$	$(1-f_y^2)f_{xx} + 2f_xf_yf_{xy} + (1-f_x^2)f_{yy} = 0$	$f_x^2 + f_y^2 < 1$
$\{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$	$(-,+,+)$	$(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (f_x^2-1)f_{yy} = 0$	$f_x^2 - f_y^2 > 1$

Denotando por $\mathbb{E}^4$ o espaço Euclideano $\mathbb{R}^4$ dotado com o seu produto interno usual, observamos que a classe de superfícies com codimensão igual a 2 neste espaço foi estudada por K. Kommerell em [Kom05], no qual o seguinte resultado foi provado:

Proposição 1.0.1. *Para toda função holomorfa $w = w(z) = P(z) + iQ(z)$ de $z = x+iy \in \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$, a superfície minimal em $\mathbb{E}^4$ dada por*

$$X(x,y) = (x, y, P(x,y), Q(x,y)),$$

com métrica induzida $ds^2 = (1+|w'(z)|^2)(dx^2+dy^2)$ é uma solução global do sistema de equações dos gráficos minimais em $\mathbb{E}^4$ dado por

$$\begin{cases} g_{22}D_{11}P - 2g_{12}D_{12}P + g_{11}D_{22}P = 0 \\ g_{22}D_{11}Q - 2g_{12}D_{12}Q + g_{11}Q_{22}Q = 0. \end{cases}$$

De fato, este sistema reduz-se às equações $(P+iQ)_{z\bar{z}} = w_{z\bar{z}} = 0$ e $(P-iQ)_{z\bar{z}} = \overline{w}_{z\bar{z}} = 0$.

Por exemplo, tomando $f(u,v) = (u, v, (u^2+v^2)/2, uv)$ em $\mathbb{E}^4$, a métrica é dada por $ds^2 = (1+u^2+v^2)(du^2+dv^2)$ e, desta forma, a superfície é definida para todo ponto $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, livre de singularidades.

Por outro lado, se neste último exemplo tomarmos $f(u,v) = (u, v, (u^2+v^2)/2, uv)$ em $\mathbb{R}^4_1 \doteq (\mathbb{R}^4, -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$, então a métrica é dada por

$$ds^2 = (-1+u^2+v^2)du^2 + 2uv\, dudv + (1+u^2+v^2)dv^2,$$

a qual claramente possui singularidade, pois somente no conjunto $\mathbb{C} \setminus D$, onde D é o disco unitário, esta métrica é Riemanniana, e a superfície resultante não é minimal.

Posto isto e baseados também no trabalho de [DFS21] acerca de superfícies de tipo espaço em $\mathbb{R}^4_1$, nos motivamos a estudar o seguinte problema:

Substituindo gráficos de funções holomorfas inteiras por gráficos de funções inteiras, que são localmente funções analíticas reais, supomos que existe uma transformação em coordenadas envolvendo as funções holomorfas a, b e μ, chamadas dados de Weierstrass, se, e

somente se, a superfície resultante é minimal, onde assumimos que esta superfície possui um domínio maximal M, tomando uma extensão holomorfa em $\mathbb{C}$. A questão aqui é: Temos exemplos onde M é o plano complexo $\mathbb{C}$?

Esta indagação constitui um problema de continuação analítica ao longo de uma curva em superfícies de Riemann.

Como uma variedade, o gráfico dado por $w = z^2/2$ cumpre esta condição. Portanto, quando tomamos a métrica induzida de $\mathbb{R}^4_1$, o plano tangente da superfície $f(\mathbb{C})$ é tangente ao cone de luz de $\mathbb{R}^4_1$.

Exemplos destes tipos de singularidades em $\mathbb{R}^3_1$ foram considerados em [Kob83] por O. Kobayashi.

Estudaremos as equações dos gráficos para superfícies minimais de $\mathbb{R}^4_1$. Desta forma obteremos, em particular, as equações dos gráficos minimais em $\mathbb{E}^3$ e em $\mathbb{R}^3_1$, onde uma família de superfícies fará a conexão entre estes dois casos de gráficos minimais com codimensão igual a 1. Além disso, consideraremos um tipo de extensão de K. Kommerell para gráficos de funções holomorfas, mais precisamente:

Uma função $Z(x, y) = A(x, y) + iB(x, y)$ definida sobre todo o plano complexo é uma função holomorfa generalizada se, para cada ponto $p = (x, y)$, existe localmente uma transformação em coordenadas que torna a nova função $Z(x(u, v), y(u, v))$ uma função holomorfa ao redor de p.

A última questão estudada aqui é: Se tomarmos uma transformação em coordenadas globais para a função $Z(x, y) = A(x, y) + iB(x, y)$, onde Z é uma solução da equação dos gráficos minimais, implica que Z é uma função linear?

Diante do exposto acima, organizamos o escopo estrutural dos capítulos da seguinte maneira:

- No Capítulo 2 apresentamos a maior parte dos resultados do trabalho; fazemos isto da seguinte forma: Na Seção 2.1 introduzimos alguns fatos básicos sobre superfícies de tipo espaço em $\mathbb{R}^4_1$ e superfícies de Riemann, como a construção de uma base ortonormal normal para planos de tipo tempo (Proposição 2.1.1) e a maneira como uma superfície de Riemann está associada a uma superfície de tipo espaço em $\mathbb{R}^4_1$ (Subseção 2.1.3). Além disso, exibimos uma caracterização para superfícies de tipo espaço paramétricas isotérmicas minimais em $\mathbb{R}^4_1$ em função dos dados de Weierstrass a, b e μ (Lema 2.1.1) e fornecemos uma representação integral de Weierstrass para as superfícies de tipo espaço minimais em $\mathbb{R}^4_1$ (Subseção 2.1.5).

  Na Seção 2.2 definimos o que é uma θ-família de superfícies minimais isotérmicas paramétricas em $\mathbb{R}^4_1$, exibimos em seguida um referencial de Minkowski para estas superfícies (Lema 2.2.1) e, em parâmetros gerais, damos o conceito das equações associadas de uma θ-família, que são as relações que associam superfícies minimais paramétricas em $\mathbb{R}^3_1$ e em $\mathbb{E}^3$, via a θ-família. Como leitura complementar, indicamos o trabalho de [Gó81] para variedades com codimensão igual a 2 em espaços vetoriais Euclideanos.

  Na Subseção 2.2.2 utilizamos as projeções estereográficas da esfera unitária $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{E}^3$ para definir dois vetores de tipo luz em $\mathbb{R}^4_1$, a saber, $L_3(a)$ e $L_0(b)$, através dos quais exibimos uma base pontual para o fibrado normal das superfícies de uma θ-família (Lema 2.2.2). Além disso, fornecemos uma fórmula explícita para a curvatura de Gauss das superfícies de uma θ-família (Lema 2.2.3), à luz da qual obtemos o principal resultado da seção, a saber:

  - Teorema 2.2.1 Uma θ-família transporta localmente gráficos minimais de $S^0 \subset \mathbb{R}^3_1$ à $S^\pi \subset \mathbb{E}^3$ preservando o conjunto de pontos planares.

Finalizamos esta seção com a Subseção 2.2.3, na qual consideramos a aplicação normal de Gauss em parâmetros gerais de uma superfície de tipo espaço em $\mathbb{R}^3_1$ e mostramos que a aplicação que leva pontos do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^2$ sobre o hemisfério sul da esfera unitária $\mathbb{S}^2_-$ é um biholomorfismo (Lema 2.2.4), em seguida combinamos este fato com um clássico resultado de R. Osserman [Oss69] que diz "A imagem, sob a aplicação de Gauss, de uma superfície regular, completa, minimal e não plana do espaço Euclideano $\mathbb{E}^3$ é densa na esfera $\mathbb{S}^2$" (Lema 2.2.5) (também vide [Fuj88]) e concluímos que se duas superfícies minimais em $\mathbb{R}^3_1$ e em $\mathbb{E}^3$ são associadas por uma θ-família, então estas superfícies não são completas (Corolário 2.2.3).

Na Seção 2.3 tratamos com mais detalhes as aplicações aos gráficos em $\mathbb{R}^4_1$ e como obtemos os casos particulares em $\mathbb{R}^3_1$ e em $\mathbb{E}^3$. Começamos definindo os chamados gráficos do primeiro e segundo tipos em $\mathbb{R}^4_1$ e exibimos um sistema de equações (sistema (2.23)) que é satisfeito por estes gráficos quando eles são minimais (Proposição 2.3.1). Em seguida aplicamos as equações do sistema (2.23) aos gráficos minimais em $\mathbb{E}^3$ e em $\mathbb{R}^3_1$, e obtemos as equação (2.24), já tratada em [Ber15], a equação (2.25), já tratada em [Cal70], e a equação (2.26), dada por

$$(1 + A_y^2)A_{xx} - 2A_xA_yA_{xy} + (-1 + A_x^2)A_{yy} = 0, \quad \text{com} \quad A_x^2 > A_y^2 + 1,$$

onde $A \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Não encontramos estudos referentes a esta equação na literatura pesquisada até então.

Na Subseção 2.3.2, ainda considerando a codimensão igual a 1, escrevemos as equações de Weingarten e obtemos uma equação envolvendo a derivada complexa da aplicação de Gauss e a curvatura de Gauss da superfície (Proposição 2.3.2). Dessa proposição e do Teorema de Uniformização de Riemann, mostramos que a superfície de Riemann associada $M = (U, \mathcal{A})$ é conformemente equivalente a um disco unitário, utilizando o conjunto dos pontos planares da superfície (Corolário 2.3.1). Em seguida, obtemos as versões análogas para as superfícies minimais isotérmicas em $\mathbb{E}^3$, (Proposição 2.3.3 e Corolário 2.3.2).

Na Subseção 2.3.3, utilizamos as aplicações de tipo luz L_3 e L_0 para dar uma caracterização dos pontos planares da superfície (Lema 2.3.1). Usando este lema e denotando o Teorema de Bernstein para a equação (2.24) por TB, o Teorema de Calabi para a equação (2.25) por TC e o Teorema de Calabi para a equação (2.26) por T'C, obtemos o seguinte resultado:

– Teorema 2.3.1 Seja $M = (U, \mathcal{A})$ uma superfície de Riemann associada a uma θ-família de gráficos minimais de $\mathbb{R}^4_1$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(TB): Se $U = \mathbb{R}^2$ e $\theta = \pi$, então $S = F(\pi; U)$ é um plano;

(T2): Se $U = \mathbb{R}^2$ e $\theta = \pi$, então as aplicações normais de Gauss de tipo luz L_3 e L_0 são aplicações contantes do cone de luz de $\mathbb{R}^4_1$;

(TC) ou (T'C): Se $U = \mathbb{R}^2$ e $\theta = 0$, então $S = F(0; U)$ é um plano.

Na Subseção 2.3.4, obtemos um resultado que vem de uma combinação entre a equação de Gauss e a equação $\tau_w = \eta f_{\overline{w}}$ (Proposição 2.3.4).

Na Subseção 2.3.5, definimos a curvatura normal de Ricci da superfície utilizando as equações de Gauss e Weingarten em codimensão igual a 2 e fornecemos fórmulas explícitas para as funções que aparecem na fórmula da curvatura normal (Lema 2.3.2).

Como consequência, damos uma fórmula para a curvatura normal de Ricci em função dos dados de Weierstrass (Corolário 2.3.3).

Na Seção 2.4, tratamos sobre uma questão envolvendo extensões das soluções das equações (2.24), (2.25) e (2.26) (Proposição 2.4.1) e em decorrência deste fato obtemos a seguinte versão do Teorema de Bernstein:

– Teorema 2.4.1 Uma solução (U, X) da equação dos gráficos minimais (2.24) tem um ponto $p \in U$ tal que a sua função curvatura de Gauss satisfaz $K(p) \neq 0$ se, e somente se, $U \neq \mathbb{R}^2$.

  Em outras palavras: "uma solução local não plana da equação (2.24) não pode ser estendida a todo o plano $\mathbb{C}$."

Na Subseção 2.4.1, obtemos um resultado de unicidade para a direção de tipo luz futuro dirigida no fibrado normal das superfícies de uma θ-família (Proposição 2.4.2) e por meio da projeção estereográfica norte da esfera unitária, definimos a aplicação de Gauss complexa característica de uma θ-família.

Na Subseção 2.4.2, tratamos com maiores detalhes o caso em que $\Im(a) \neq 0$, onde $\Im$ denota a parte imaginária. Definimos duas aplicações de Gauss de um gráfico minimal em $\mathbb{R}^3_1$ e por meio de uma conveniente transformação em coordenadas, obtemos que se (U, f) é localmente obtida em parâmetros isotérmicos onde

$$f_w = \mu(2a, 1 + a^2, i(1 - a^2), 0),$$

então $\Im(a(w)) \neq 0$, para todo $w \in U$ (Lema 2.4.2). Como consequência, obtemos o importante lema:

– Lema 2.4.3 Seja $X(x, y) = (x, y, A(x, y), 0)$ um gráfico minimal em $\mathbb{R}^3_1$ de uma função suave A definida em todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{C}$.

  Se existe um subespaço $S^* \subset S = (\mathbb{C}, X)$, que é um subconjunto aberto conexo e denso de S e para o qual

$$\Im(a(p)) \neq 0, \quad \forall p \in S^*,$$

  onde $a(p)$ é a aplicação de Gauss complexa associada ao gráfico $S = X(\mathbb{C})$, então pelo Teorema de Picard, $a(p)$ é uma função constante, donde $a_w \equiv 0$, e portanto S é um plano de tipo espaço de $\mathbb{R}^3_1$.

Ainda inspirados pelo lema anterior, mostramos que se existe um ponto $p \in M$ para o qual $K(p) \neq 0$, então o conjunto de pontos planares de (M, f) é um conjunto discreto (Proposição 2.4.3), à luz do qual obtemos o seguinte resultado:

– Corolário 2.4.1 Se $(\mathbb{R}^2, X)$ é uma superfície inteira minimal (conexa) do espaço $\mathbb{R}^3_1$, onde

$$X(x, y) = (x, y, A(x, y)),$$

  dada pelas equações (2.24) ou (2.25) ou (2.26), então o subconjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : K(X(x, y)) \neq 0\}$$

  é um conjunto vazio, o que significa que $X(\mathbb{R}^2)$ é um plano de tipo espaço de $\mathbb{R}^3_1$.

- No Capítulo 3 apresentamos alguns resultados que possibilitam a construção de uma gama de exemplos de superfícies com codimensão igual a 2. Na Seção 3.1, definimos o chamado referencial semi-rígido associado a uma soma direta $\mathbb{R}^4_1 = E \oplus T$, onde E é um plano de tipo espaço e T é o seu complemento ortogonal, e provamos que bases para T são univocamente determinadas por esta soma direta (Proposição 3.1.1).

  Na Seção 3.2, damos mais uma fórmula para a curvatura de Gauss de uma superfície em $\mathbb{R}^4_1$, desta vez, unicamente em função dos dados de Weierstrass a, b e μ. Em seguida falamos sobre a existência de soluções não planas para as equações dos gráficos minimais dadas no sistema (2.23). Com relação aos gráficos minimais do primeiro tipo, obtemos o seguinte resultado:

  - Teorema 3.2.1 Seja $a = a(w)$ uma função holomorfa definida em todo o plano $\mathbb{C}$ e tal que $a(w) \neq 0$ para cada $w \in \mathbb{C}$. Considere $c = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$ de tal modo que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 1$, e tome a função holomorfa b de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ dada por $b(w) = \frac{c}{a(w)}$. Então a superfície dada por

    $$f(w) = X_0 + 2\Re \int_0^w \left(a(\xi) + \frac{c}{a(\xi)}, 1 + c, i(1-c), a(\xi) - \frac{c}{a(\xi)} \right) d\xi,$$

    é uma superfície minimal de $\mathbb{R}^4_1$, a qual é um gráfico do tipo

    $$X(x, y) = (A(x, y), x, y, B(x, y)),$$

    onde a transformação em coordenadas é dada por $x_w = (1 + c)$ e $y_w = i(1 - c)$. Além disso, assumindo que $a = a(w)$ não é uma função constante, existe um ponto $p \in S$ tal que $K(p) \neq 0$. Como consequência, a superfície não pode estar contida em hiperplanos de $\mathbb{R}^4_1$.

  Para os gráficos minimais do segundo tipo, obtemos o seguinte resultado:

  - Teorema 3.2.2 Seja $a = a(w)$ uma função holomorfa definida em todo o plano $\mathbb{C}$ e tal que $a(w) \neq 0$ para cada $w \in \mathbb{C}$. Considere $c = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
    Se, para cada $w \in \mathbb{C}$, tomarmos $b(w) = ca(w)$ e $\mu(w) = \frac{1}{a(w)}$, então a superfície dada por

    $$f(w) = X_0 + 2\Re \int_0^w \left(1 + c, \frac{1}{a(\xi)} + ca(\xi), i\left(\frac{1}{a(\xi)} - ca(\xi) \right), 1 - c \right) d\xi,$$

    é uma superfície minimal de $\mathbb{R}^4_1$, a qual é um gráfico do tipo

    $$X(x, y) = (x, A(x, y), B(x, y), y),$$

    onde a transformação em coordenadas é dada por $x_w = (1 + c)$ e $y_w = (1 - c)$. Além disso, a curvatura de Gauss $K(f)(w) = 0$ se, e somente se, $a'(w) = 0$. Assumindo que $a = a(w)$ não é uma função constante, então existe um ponto $p \in S$ tal que $K(p) \neq 0$.
    Novamente, não existe um hiperplano contendo a superfície S.

  A Seção 3.3 é a última do trabalho. Nela, definimos um importante operador, chamado J, no fibrado tangente da superfície (Definição 3.3.1) e provamos que ele satisfaz três importantes propriedades (Proposição 3.3.1).

Na Subseção 3.3.1, mostramos como podemos usar o produto exterior em $\mathbb{R}^4_1$ para relacionar dois vetores tangentes à superfície por meio do operador J (Lema 3.3.1). Em seguida, obtemos o seguinte resultado:

– Teorema 3.3.1 Seja $S = (M, X)$ uma superfície de tipo espaço de $\mathbb{R}^4_1$ tal que a 1-forma associada a S é dada por $\beta = X_x dx + X_y dy$. Então

$$J(\beta) = \frac{-Fdx - Gdy}{\sqrt{EG - F^2}}\, X_x + \frac{Edx + Fdy}{\sqrt{EG - F^2}}\, X_y.$$

Ademais, a 1-forma $J(\beta)$ é fechada se, e somente se, (M, X) é uma superfície de tipo espaço minimal.

Consequentemente, obtemos uma superfície de tipo espaço conjugada em $\mathbb{R}^4_1$, mais precisamente:

– Corolário 3.3.1 Sejam M um subconjunto aberto conexo e simplesmente conexo do plano $\mathbb{C}$ e (M, X) uma solução das equações dos gráficos minimais (2.23). A equação de representação integral (2.11) pode ser estendida a $Z = X + iY \in \mathbb{C}^4$ por

$$Z(x, y) = Z(x_0, y_0) + \int_{z_0}^{z} \beta + iJ(\beta),$$

onde temos que

$$Y(x, y) = Y(x_0, y_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{-Fdx - Gdy}{\sqrt{EG - F^2}}\, X_x + \frac{Edx + Fdy}{\sqrt{EG - F^2}}\, X_y$$

nos fornece uma superfície de tipo espaço (conjugada) (M, Y) de $\mathbb{R}^4_1$.

Concluímos este tópico com alguns exemplos ilustrando o uso do operador J.

Na Subseção 3.3.2, falamos sobre as equações de Cauchy-Riemann usando o operador J (Lema 3.3.2 e Corolário 3.3.2) e por meio do referencial semi-rígido definido anteriormente, obtemos uma relação envolvendo o ângulo trigonométrico da superfície e os vetores de tipo espaço do referencial semi-rígido (Proposição 3.3.2). Combinamos este último resultado com alguns fatos básicos de Análise Complexa e concluímos com o seguinte resultado:

– Teorema 3.3.2 Se duas soluções locais da equação (3.16) ao redor de um ponto $p \in S$ são dadas por $w_y = \alpha w_x$, $\tilde{w}_y = \alpha \tilde{w}_x$ e tais que $w_x = \tilde{w}_x$, então $w_y = \tilde{w}_y$. Consequentemente, toda solução local da equação (3.16) pode ser estendida continuamente sempre que $E(x, y) > 0$ e $\sqrt{EG - F^2}(x, y) > 0$.

Para finalizar, fazemos menção da equação (8) de J.C.C. Nitsche tratada em [Nit65, p. 23]. Observamos que as soluções das equações (3.17) estão intimamente relacionadas com a superfície conjugada $(M, Y(x, y))$. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

– Teorema 3.3.3 As soluções das equações (3.17) são dadas pelas equações de Nitsche (3.14)

$$\begin{aligned} u = u(x, y) &= x + \textstyle\int_{z_0}^{z} \frac{Edx + Fdy}{W} \\ v = v(x, y) &= y + \textstyle\int_{z_0}^{z} \frac{Fdx + Gdy}{W}. \end{aligned}$$

Destas equações, podemos obter coordenadas isotérmicas globais (U, f) para a superfície $S = X(M)$.

Concluímos o trabalho com o seguinte corolário acerca das equações de gráficos minimais em $\mathbb{R}^4_1$.

– Corolário 3.3.3 Se $S = (\mathbb{R}^2, X)$ é uma solução da equação dos gráficos minimais (2.23), então para todo ponto $p \in S$, as funções a e b são tais que: ou $b(p) = ca(p)$ com $c \notin \{-1, 1\}$ ou $a(p)b(p) = c$ com $\Im(c) \neq 0$, para alguma constante $c \in \mathbb{C}$.

  O Teorema de Bernstein e o Teorema de Calabi seguem do fato de que $c \neq 1$ e $c \neq -1$, e o nosso T'C para gráficos do segundo tipo segue de $\Im(c) \neq 0$.

  Por fim, se existe uma subvariedade $S = (\mathbb{R}^2, X) \subset \mathbb{R}^4$ tal que com a métrica induzida de $\mathbb{R}^4_1$, é um gráfico de tipo espaço e solução de (2.23) em um subconjunto aberto conexo e simplesmente conexo $M \subset \mathbb{C}$ onde para algum ponto $p \in S$ a seguinte sentença não ocorre:

  "ou $b(p) = ca(p)$ com $c \notin \{-1, 1\}$ ou $a(p)b(p) = c$ com $\Im(c) \neq 0$, para alguma constante $c \in \mathbb{C}$,"

  então os pontos $X(x, y)$ tais que $EG - F^2 = 0$, são pontos onde os planos tangentes de $X(\mathbb{R}^2)$ são tangentes ao cone de luz $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4_1$.

Por fim, para a leitura do texto à frente se faz necessária uma certa familiaridade com conceitos básicos de Geometria Lorentziana e Análise Complexa. À medida que tais tópicos forem surgindo, daremos a referência adequada.

Sem mais para o momento, concluímos aqui esta introdução e esperamos que a partir dela o leitor possa extrair o melhor proveito deste trabalho.

2

O Teorema de Bernstein e a θ-família

Faremos neste capítulo a apresentação da maior parte dos resultados que compõe todo o trabalho. Prezando pela máxima clareza na leitura do texto, procuramos introduzir de maneira conveniente o maquinário necessário a ser utilizado e dar um certo padrão à notação a ser empregada.

2.1 Uma representação de Weierstrass

Seja $\mathbb{R}^4_1$ o espaço de Minkowski de dimensão 4, isto é, o espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ munido com a forma bilinear indefinida, chamada produto Lorentziano, dada por

$$\langle (a,b,c,d),(t,x,y,z)\rangle = -at + bx + cy + dz,$$

para quaisquer pontos (a,b,c,d) e (t,x,y,z) em $\mathbb{R}^4$.

A topologia de $\mathbb{R}^4_1$ é a topologia natural produto para espaços vetoriais de dimensão finita e as derivadas de suas funções também são as derivadas usuais do cálculo diferencial e integral.

Definição 2.1.1. *No espaço de Minkowski* $\mathbb{R}^4_1$:

i) Um plano de tipo espaço $V \subset \mathbb{R}^4_1$ *é um subespaço vetorial de dimensão 2, onde* $\langle v,v\rangle > 0$ *para cada* $v \neq (0,0,0,0)$ *do plano* V;

ii) Um plano de tipo tempo $T \subset \mathbb{R}^4_1$ *é um subespaço vetorial de dimensão 2, no qual existe um vetor de tipo tempo* $t \in T$, *o que significa dizer que* $\langle t,t\rangle < 0$, *e um outro vetor de tipo espaço* $n \in T$ *tal que* $\langle n,n\rangle > 0$ *com* $\langle t,n\rangle = 0$;

iii) Dizemos que o plano de tipo tempo T *é o complemento ortogonal do plano de tipo espaço* V, *denotados pelos símbolos* $V = T^\perp$ *e* $T = V^\perp$, *quando*

$$\langle x,y\rangle = 0, \quad \textit{para todos} \quad x \in T \quad e \quad y \in V;$$

iv) Dizemos que uma base ortonormal $\{E_k\}$ *é um referencial de Minkowski se* E_0 *é um vetor de tipo tempo futuro dirigido e* $E_0 \wedge E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 = \partial_0 \wedge \partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \partial_3$, *onde* $\{\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ *denota a base canônica de* $\mathbb{R}^4$.

A seguinte proposição será muito útil ao longo deste trabalho. Ela diz respeito a uma base ortonormal muito especial para cada plano de tipo tempo em $\mathbb{R}^4_1$.

Proposição 2.1.1. *Seja $\{0\} \times \mathbb{R}^3$ o subespaço de dimensão 3 de $\mathbb{R}^4_1$ que identificaremos com o espaço vetorial Euclideano de dimensão 3, a saber $\mathbb{E}^3$. Para cada plano de tipo espaço $V \not\subset \mathbb{E}^3$ munido com uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$, o (único) plano de tipo tempo dado por $T = V^\perp$ possui uma base ortonormal $\{\tau, \nu\}$ satisfazendo as seguintes condições:*

1. *$\langle \tau, \tau \rangle = -1$ e $\langle \tau, \partial_0 \rangle < 0$, o que significa dizer que o vetor de tipo tempo τ é um vetor unitário futuro dirigido de T;*
2. *$\langle \nu, \nu \rangle = 1$ com $\langle \nu, \partial_0 \rangle = 0$, o que significa dizer que ν é um vetor em $\mathbb{E}^3$;*
3. *$\langle \tau, \nu \rangle = 0$ e para qualquer outra base ortonormal $\{t, n\}$ de T temos que $\tau^0 \leq |t^0|$;*
4. *A base ortonormal $\{\tau, e_1, e_2, \nu\}$, nesta ordem, é positiva, relativa ao referencial de Minkowski $\{\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3\}$.*

Prova: Primeiramente, precisamos definir o vetor τ. Desta forma, todas as afirmações da Proposição seguem imediatamente. Defina

$$\tau \doteq \frac{1}{\sqrt{1 + (e_1^0)^2 + (e_2^0)^2}} (\partial_0 + e_1^0 e_1 + e_2^0 e_2), \tag{2.1}$$

onde $e_i^0 = -\langle \partial_0, e_i \rangle$, para $i = 1, 2$.

Segue de (2.1) que $\langle \tau, \tau \rangle = -1$, $\langle \tau, e_i \rangle = 0$, para $i = 1, 2$ e também que τ é futuro dirigido. Como, por hipótese, $V \not\subset \mathbb{E}^3$, temos um plano de tipo tempo gerado por $\{\partial_0, \tau\}$. Então, seja ν o único vetor unitário sobre a reta $span\{\partial_0, \tau\} \cap \mathbb{E}^3$, para o qual, o conjunto $\{\tau, e_1, e_2, \nu\}$ é uma base positiva.

Agora, supondo que temos outra base ortonormal $\{t, n\}$ para T, podemos tomar a transformação de Lorentz dada por

$$t = \cosh \varphi \, \tau + \sinh \varphi \, \nu \quad \text{e} \quad n = \sinh \varphi \, \tau + \cosh \varphi \, \nu,$$

assumindo que $t^0 > 0$, e então de $-\langle t, \partial_0 \rangle = -\cosh \varphi \langle \tau, \partial_0 \rangle$, segue-se que $t^0 \geq \tau^0$. □

Como $\nu \in \mathbb{E}^3$, podemos medir o seu ângulo com os vetores da base $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ e em seguida usaremos a projeção estereográfica que identifica o plano complexo estendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ com a esfera unitária $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{E}^3$. Posto isto, definimos:

Definição 2.1.2. *Para cada soma direta ortogonal $V \oplus T$ do espaço de Minkowski $\mathbb{R}^4_1$, definimos o ângulo hiperbólico ϕ e o ângulo trigonométrico ϑ por*

$$\cosh \phi \doteq -\langle \partial_0, \tau \rangle \quad e \quad \cos \vartheta \doteq \langle \partial_3, \nu \rangle,$$

onde o referencial de Minkowski é dado por $\mathcal{M} = \{\tau, e_1, e_2, \nu\}$.

Agora, assumimos a existência de uma família de planos de tipo espaço, indexados com dois parâmetros $z = x + iy \in \Omega \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, dados por

$$\mathcal{D} = \{V(z) : z \in \Omega\}.$$

Proposição 2.1.2. *Se uma família a dois parâmetros de planos de tipo espaço é dada por $\mathcal{D} = \{V(z) : z \in \Omega\}$, então a família associada $\mathcal{D}^\perp = \{T(z) : z \in \Omega\}$ de planos de tipo*

tempo é tal que $T(z) = [\tau, \nu]$ *onde*

$$\nu(z) \doteq \left(0, \frac{z+\overline{z}}{1+z\overline{z}}, \frac{-i(z-\overline{z})}{1+z\overline{z}}, \frac{-1+z\overline{z}}{1+z\overline{z}}\right) \quad e \quad \nu(\infty) \doteq \partial_3$$

quando $\vartheta(z) \longrightarrow 0$.

Prova: Consequência direta da Proposição 2.1.1 juntamente com a Definição 2.1.2. □

2.1.1 Um pouco sobre superfícies de Riemann e o teorema de uniformização

Recordaremos abaixo algumas definições básicas e o chamado Teorema de Uniformização de Riemann. Indicamos [FK92] como referência para uma leitura mais detalhada sobre este tópico.

Definição 2.1.3. *Uma superfície de Riemann é uma variedade suave bidimensional conexa* $(S, \mathcal{A})$ *munida com um atlas maximal*

$$\mathcal{A} = \{(U_j, z_j)\}_{j \in I},$$

tal que:

(i) Para cada carta (U_j, z_j)*, o conjunto* $z_j(U_j)$ *é um subconjunto aberto conexo do plano complexo* $\mathbb{C}$ *e* z_j *é um homeomorfismo de* U_j *sobre* $z_j(U_j)$*.*

(ii) Se um ponto $p \in S$ *pertence a* $U_i \cap U_j$*, então a aplicação de transição*

$$f_{ij} = z_i \circ z_j^{-1} : z_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow z_i(U_i \cap U_j)$$

é uma função holomorfa no sentido da análise complexa.

Por definição, uma função $h : S \longrightarrow \mathbb{C}$ é dita ser holomorfa se, e somente se, para todo ponto $p \in S$ e para toda carta coordenada (U, z) ao redor deste ponto, a função

$$\tilde{h} : z(U) \longrightarrow \mathbb{C},$$

dada por $\tilde{h}(w) \doteq h(z^{-1}(w))$ é uma função holomorfa.

Também, dadas duas superfícies de Riemann $(S, \mathcal{A})$ e $(\hat{S}, \hat{\mathcal{A}})$, dizemos que elas são conformemente equivalentes ou isomorfas se existe uma aplicação $\Psi : S \longrightarrow \hat{S}$ que é um biholomorfismo entre estas duas superfícies de Riemann.

Uma função contínua

$$h : S \longrightarrow \hat{S}$$

é chamada holomorfa ou analítica se, para quaisquer coordenadas locais $(U, z) \in \mathcal{A}$ e $(V, w) \in \hat{\mathcal{A}}$ tais que $h^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset$, a função

$$w \circ h \circ z^{-1} : z(h^{-1}(V) \cap U) \longrightarrow w(V)$$

é holomorfa como uma função complexa sobre $\mathbb{C}$.

Por fim, uma função h de S sobre $\hat{S}$ é um biholomorfismo quando h e sua inversa h^{-1} são funções holomorfas.

Teorema 2.1.1 (Uniformização de Riemann). *Se $(S, \mathcal{A})$ é uma superfície de Riemann conexa, não compacta e simplesmente conexa, então S ou é conformemente equivalente ao plano complexo $\mathbb{C}$ ou é conformemente equivalente (ou conforme) ao disco $D = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} < 1\}$.*

Em particular, se $S \subset \mathbb{C}$ é um subconjunto aberto conexo e simplesmente conexo, então S é conforme ao disco se, e somente se, $\mathbb{C} \setminus S \neq \emptyset$.

2.1.2 Superfícies de tipo espaço em $\mathbb{R}^4_1$

Nesta subseção iremos definir o que é uma superfície de tipo espaço neste trabalho.

Definição 2.1.4. *Uma superfície de tipo espaço $S \subset \mathbb{R}^4_1$ é uma subvariedade suave de dimensão 2 do espaço vetorial topológico real $\mathbb{R}^4$, que em cada ponto $p \in S$, o seu plano tangente T_pS relativo ao produto Lorentziano de $\mathbb{R}^4_1$ é um plano de tipo espaço.*

Uma superfície de tipo espaço paramétrica de $\mathbb{R}^4_1$ é uma aplicação a dois parâmetros (U, X) de um subconjunto aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^4_1$ tal que o subespaço topológico $X(U)$ é uma superfície de tipo espaço.

Assumiremos sempre que $(X(U), X^{-1})$ é uma carta de um atlas completo para uma superfície de tipo espaço S de $\mathbb{R}^4_1$.

Seja $((x, y), U)$ um subconjunto aberto conexo e simplesmente conexo do plano $\mathbb{R}^2$.

Se $X(x, y) = (X^0(x, y), X^1(x, y), X^2(x, y), X^3(x, y))$ é uma superfície de tipo espaço paramétrica de $\mathbb{R}^4_1$, então temos um tensor métrico induzido pela métrica Lorentziana indefinida de $\mathbb{R}^4_1$ dado por

$$\mathbf{g} = \sum_{i,j} \langle D_i X, D_j X \rangle dx^i \otimes dx^j, \tag{2.2}$$

e a segunda forma quadrática de $S = X(U)$ é uma 2-forma vetorialmente quadrática simétrica

$$B = \sum_{i,j} \Psi_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

a qual é obtida da derivada parcial covariante dada pela fórmula

$$D_{ij} X - \sum_k \Gamma^k_{ij} D_k X = \Psi_{ij}. \tag{2.3}$$

Da definição dos símbolos de Christoffel

$$\Gamma^k_{ij} \doteq \frac{1}{2} g^{mk} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right),$$

segue que $\langle \Psi_{ij}, D_k X \rangle = 0$ em todos os pontos de S. Em cada ponto de S uma base ortonormal para o fibrado normal NS é dada pelo par de vetores $\tau(x, y)$ e $\nu(x, y)$, onde $\tau(x, y)$ é um campo de vetores unitário de tipo tempo futuro dirigido e $\nu(x, y)$ é um campo de vetores unitário de tipo espaço, no qual assumimos que $\langle \nu(x, y), (1, 0, 0, 0) \rangle = 0$. Portanto, temos

$$\Psi_{ij} = h_{ij} \tau + n_{ij} \nu, \tag{2.4}$$

onde por definição

$$h_{ij} \doteq -\langle D_{ij} X, \tau \rangle \quad \text{e} \quad n_{ij} \doteq \langle D_{ij} X, \nu \rangle.$$

Como em cada ponto $p \in S$, temos $dim(N_pS) = 2$, a conexão normal para S é dada pelo vetor covariante $\gamma \doteq \sum_k \gamma_k dx^k$, onde por definição

$$\gamma_k \doteq \langle D_k\tau, \nu\rangle = \langle D_k\nu, \tau\rangle. \tag{2.5}$$

A seguir, apresentamos as seguintes equações de estrutura para $S = X(U)$:

$$D_{ij}X = \sum_k \Gamma^k_{ij} D_k X + h_{ij}\tau + n_{ij}\nu, \tag{2.6}$$

$$D_k\tau = \sum_m h^k_m D_m X + \gamma_k\nu, \tag{2.7}$$

$$D_k\nu = -\sum_m n^k_m D_m X + \gamma_k\tau, \tag{2.8}$$

onde $h^k_m g_{mj} = h_{kj}$, $n^k_m g_{mj} = n_{kj}$ e diremos que (2.6) é o conjunto das equações de Gauss e (2.7) e (2.8) é o conjunto das equações de Weingarten.

Definição 2.1.5. *Diremos que $S = X(U)$ é uma superfície minimal se, e somente se,*

$$H_S \doteq \frac{1}{2}\sum_{i,j} \Psi_{ij} g^{ij} = 0 \tag{2.9}$$

em todos os pontos de S, onde o campo de vetores H_S é chamado o vetor curvatura média de S.

Observação 2.1.1. *Segue da equação (2.3) a definição equivalente para superfícies minimais dada por*

$$2H_S = \sum_{i,j} g^{ij}(D_{ij}X - \sum_k \Gamma^k_{ij} D_k X) = (\Delta_{\mathbf{g}} X^0, \Delta_{\mathbf{g}} X^1, \Delta_{\mathbf{g}} X^2, \Delta_{\mathbf{g}} X^3) = 0,$$

onde $\Delta_{\mathbf{g}}$ é o operador de Laplace-Beltrami sobre $S = (X(U), \mathbf{g})$.

2.1.3 A superfície de Riemann associada a S

Um fato conhecido, vide [Che55] por exemplo, é que toda superfície de tipo espaço admite um atlas contendo cartas em coordenadas isotérmicas, isto significa que se $f : U' \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}^4_1$ é uma parametrização λ-isotérmica dada por

$$f(w) = (f^0(w), f^1(w), f^2(w), f^3(w)), \qquad w = u + iv \in U' \subset \mathbb{C},$$

tal que $f(U') \subset S = X(U)$, e o tensor métrico induzido agora é dado por $\mathbf{g} = \lambda^2 dw d\overline{w}$, então

$$\langle f_u, f_u\rangle = \lambda^2 = \langle f_v, f_v\rangle \quad \text{e} \quad \langle f_u, f_v\rangle = 0.$$

Como $f_w = \frac{1}{2}(f_u - if_v)$, estendemos a forma bilinear simétrica de $\mathbb{R}^4_1$ à uma forma bilinear complexa sobre $\mathbb{C}^4 \equiv \mathbb{R}^4 + i\mathbb{R}^4$ da seguinte maneira:

$$\langle \mathbf{x} + i\mathbf{y}, \mathbf{a} + i\mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{b}\rangle + i(\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{a}\rangle),$$

sempre que $\mathbf{x}+i\mathbf{y}, \mathbf{a}+i\mathbf{b} \in \mathbb{C}^4$, o que implica

$$\langle f_w, f_w\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle f_w, \overline{f_w}\rangle = \langle f_w, f_{\overline{w}}\rangle = \lambda^2/2. \tag{2.10}$$

Agora, se tivermos duas cartas isotérmicas (U', f) e (V, h) para S, então quando fizer sentido, as aplicações de transição $h^{-1} \circ f : U' \to V$ e $f^{-1} \circ h : V \to U'$ serão funções holomorfas. Portanto, podemos ver $M \doteq (U, \mathcal{A})$ como uma superfície de Riemann munida de um atlas conforme $\mathcal{A}$ e o tensor métrico induzido ou elemento de linha $ds^2 = \lambda^2(w)|dw|^2$ é uma métrica compatível para esta superfície de Riemann M.

Por fim, recordamos que não existem superfícies de tipo espaço compactas em $\mathbb{R}^4_1$, portanto, de agora em diante, M será ou o disco

$$D \doteq \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} < 1\} \quad \text{que é uma superfície de Riemann hiperbólica}$$

ou o plano complexo $\mathbb{C}$, que é uma superfície de Riemann parabólica, uma vez que estamos assumindo que M é uma superfície de Riemann conexa e simplesmente conexa.

Se $h(z(w)) = f(w)$, então da regra da cadeia, obtemos

$$f_w(w) = h_z(z(w))\frac{dz}{dw}(w) \quad \text{e} \quad \langle f_w, f_{\overline{w}}\rangle = \langle h_z, h_{\overline{z}}\rangle \left|\frac{dz}{dw}\right|^2.$$

2.1.4 Uma solução para a equação de Monge

Chamaremos a equação (2.10) de *equação de Monge*. Expandindo em suas coordenadas, temos que esta equação torna-se

$$-(f^0_w)^2 + (f^1_w)^2 + (f^2_w)^2 + (f^3_w)^2 = 0.$$

Simplificando um pouco mais a notação, substituímos os nomes das coordenadas fazendo $Z^i \doteq f^i_w$ e obtemos

$$\frac{Z^0 - Z^3}{Z^1 - iZ^2}\frac{Z^0 + Z^3}{Z^1 - iZ^2} = \frac{Z^1 + iZ^2}{Z^1 - iZ^2},$$

assumindo que $Z^1 - iZ^2 \neq 0$.

Definindo

$$a \doteq \frac{Z^0 + Z^3}{Z^1 - iZ^2}, \quad b \doteq \frac{Z^0 - Z^3}{Z^1 - iZ^2} \quad \text{e} \quad \mu \doteq \frac{Z^1 - iZ^2}{2},$$

obtemos a seguinte aplicação de U' em $\mathbb{C}^4$:

$$f_w = \mu W(a, b) \quad \text{onde} \quad W(a, b) = (a + b, 1 + ab, i(1 - ab), a - b) \in \mathbb{C}^4,$$

com $(a, b) \in \mathcal{H}(U, \mathbb{C}) \times \mathcal{H}(U, \mathbb{C})$, onde $\mathcal{H}(U, \mathbb{C})$ denota o espaço das funções holomorfas de U em $\mathbb{C}$.

Além disso, temos que $\lambda^2 = 2\langle f_w, \overline{f_w}\,\rangle = 4\mu\overline{\mu}(1-a\overline{b})(1-\overline{a}b)$. Portanto, $\mu \neq 0$ e $1-a\overline{b} \neq 0$ são as condições para se obter uma superfície sem singularidades em sua métrica.

Agora, como podemos escrever $W(a, b) = (a, 1, i, a) + b(1, a, -ia, -1)$, obtemos os casos onde $(Z^1 + iZ^2)(Z^1 - iZ^2) = 0$, com as expressões $f_w = \eta(a, 1, i, a)$ e $f_w = \xi(1, a, -ia, -1)$. Além disso, quando $Z^0 = 0 = Z^3$, obtemos $f_w = \eta(0, 1, i, 0)$ que é o plano $\{0\} \times \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Lema 2.1.1. *Para uma superfície de tipo espaço paramétrica λ-isotérmica (U, f), as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A superfície $f(U)$ é minimal, isto é, $H_f \equiv 0$;

(ii) As aplicações μ, a, b são funções holomorfas de U em $\mathbb{C}$.

Prova: Segue do operador de Laplace-Beltrami:

$$\Delta_M f^m(w) = \frac{2}{\lambda^2}(f^m(w))_{w\overline{w}} = 0 \text{ para } m = 0, 1, 2, 3.$$

□

2.1.5 Uma representação integral

Se (U, X) é uma superfície de tipo espaço paramétrica de $\mathbb{R}^4_1$, onde

$$X(x, y) = (X^0(x, y), X^1(x, y), X^2(x, y), X^3(x, y))$$

e $U \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio simplesmente conexo, então a 1-forma dada por

$$dX = X_x dx + X_y dy$$

é exata, e portanto, fechada.

A equação integral

$$X(x, y) = X(x_0, y_0) + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} X_x dx + X_y dy, \tag{2.11}$$

tem uma única solução, que é a superfície paramétrica de tipo espaço (U, X).

De fato, se $Y(x, y) = X(x_0, y_0) + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} X_x dx + X_y dy$ é uma outra solução para a equação integral (2.11), então

$$X(x, y) - Y(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} 0dx + 0dy = 0.$$

Da Definição 2.1.5 e Lema 2.1.1, obtemos

Corolário 2.1.1. *Em um domínio simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$, se (U, X) é uma superfície de tipo espaço paramétrica minimal que é a solução da equação integral (2.11), então cada função coordenada de $X(x, y)$ é uma função harmônica a valores reais definida em U.*

Prova: De fato, o operador de Laplace-Beltrami Δ_M é um operador tensorial, definido pela contração da equação de Gauss (2.6), como segue na Definição 2.1.5. □

Com coordenadas isotérmicas locais, a representação integral é geralmente chamada de equação integral de Weierstrass. Tal representação é a aplicação $f : U' \to \mathbb{R}^4_1$ dada por

$$f(w) = p_0 + 2\Re \int_{w_0}^{w} \mu(\xi) W(a(\xi), b(\xi)) d\xi, \tag{2.12}$$

a qual é uma solução da equação (2.10) na Subseção 2.1.3.

2.2 O principal resultado para a θ-família

Começamos definindo uma θ-família de superfícies minimais em $\mathbb{R}^4_1$.

Definição 2.2.1. *Sejam $\mu, a \in \mathcal{H}(U, \mathbb{C})$. Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ e cada $w \in U$, tomando $b(w) = e^{i\theta}a(w)$, a aplicação dada por*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times U &\longrightarrow \mathbb{R}^4_1 \\ (\theta; w) &\longmapsto F(\theta; w) \doteq P + 2\Re \int_{w_0}^{w} \mu(\xi) W(a(\xi), e^{i\theta}a(\xi)) d\xi, \end{aligned} \tag{2.13}$$

determina um conjunto de superfícies minimais paramétricas isotérmicas em $\mathbb{R}^4_1$, chamada uma θ-família, onde $P \in \mathbb{R}^4_1$ é um ponto arbitrário e

$$W(a, e^{i\theta}a) = ((1 + e^{i\theta})a, 1 + e^{i\theta}a^2, i(1 - e^{i\theta}a^2), (1 - e^{i\theta})a).$$

A θ-família conjugada é definida pela aplicação

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} \times U &\longrightarrow \mathbb{R}^4_1 \\ (\theta; w) &\longmapsto H(\theta; w) \doteq Q + 2\Im \int_{w_0}^{w} \mu(\xi) W(a(\xi), e^{i\theta}a(\xi)) d\xi, \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde $Q \in \mathbb{R}^4_1$ é um ponto arbitrário, e ao conjunto dado por $F(\theta; w) + iH(\theta; w)$, passando pelo ponto $P + iQ \in \mathbb{C}^4$, chamamos de θ-família de superfícies minimais em $\mathbb{C}^4$.

Observação 2.2.1. *Uma θ-família está associada a uma hipersuperfície θ-periódica $F(\mathbb{R}; U)$ de $\mathbb{R}^4_1$, assim, podemos ver esta família como uma imersão própria de $\mathbb{R} \times U$ em uma hipersuperfície que é folheada por superfícies minimais. Para $\theta = 0$, temos uma superfície minimal em $\mathbb{R}^3_1 \equiv \{p \in \mathbb{R}^4_1 : \langle p, (0, 0, 0, 1)\rangle = 0\}$ e para $\theta = \pi$, temos uma superfície minimal em $\mathbb{E}^3 \equiv \{p \in \mathbb{R}^4_1 : \langle p, (1, 0, 0, 0)\rangle = 0\}$.*

À luz das Definições 2.2.1 e 2.1.2, temos o seguinte referencial de Minkowski:

Lema 2.2.1. *Se (M, f_θ) é uma dada θ-família, então a aplicação T_θ que associa a cada base $\{f_u(p), f_v(p)\}$ do plano tangente T_pM o conjunto $\{(0, f^1_u(p), f^2_u(p), 0), (0, f^1_v(p), f^2_v(p), 0)\}$, é uma aplicação linear sobrejetiva de T_pM em $\{0\} \times \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.*

Prova: Em primeiro lugar, temos:
$\chi \doteq (1 + e^{i\theta}a^2)(1 - e^{-i\theta}\overline{a}^2) = 1 - e^{-i\theta}\overline{a}^2 + e^{i\theta}a^2 - a^2\overline{a}^2 = (1 + a\overline{a})(1 - a\overline{a}) + i\Im(e^{i\theta}a^2) \neq 0.$

Agora, T_θ não é sobrejetiva se, e somente se, $\det(T_\theta) = 0$ se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} \mu(1 + e^{i\theta}a^2) + \overline{\mu}(1 + e^{-i\theta}\overline{a}^2) & i[\mu(1 - e^{i\theta}a^2) - \overline{\mu}(1 - e^{-i\theta}\overline{a}^2)] \\ i[\mu(1 + e^{i\theta}\overline{a}^2) - \overline{\mu}(1 + e^{-i\theta}\overline{a}^2)] & -\mu(1 - e^{i\theta}\overline{a}^2) - \overline{\mu}(1 - e^{-i\theta}\overline{a}^2) \end{vmatrix} = -4\mu\overline{\mu}(1+a\overline{a})(1-a\overline{a}) = 0$$

se, e somente se, $ds^2(f_\theta) = 0$. □

2.2.1 Sistemas de coordenadas não isotérmicas

Seja

$$X(x, y) = (X^0(x, y), X^1(x, y), X^2(x, y), 0)$$

uma superfície minimal paramétrica em $\mathbb{R}^3_1$, para $(x^1, x^2) = (x, y) \in U$. Pela Definição 2.1.4, temos um tensor métrico sobre U com componentes dadas por

$$g_{ij} = -\frac{\partial X^0}{\partial x^i}\frac{\partial X^0}{\partial x^j} + \frac{\partial X^1}{\partial x^i}\frac{\partial X^1}{\partial x^j} + \frac{\partial X^2}{\partial x^i}\frac{\partial X^2}{\partial x^j}.$$

Seja $M = (U, \mathcal{A})$ a superfície de Riemann associada a superfície paramétrica de tipo espaço minimal $S = X(U)$, munida com a métrica $ds^2 = \sum g_{ij}dx^i dx^j$, para a qual, cada função $X^0, X^1, X^2 \in \mathcal{H}(M, \mathbb{R})$ é uma função harmônica, isto é, $\Delta_{\mathbf{g}} X^m = 0$.

Como para cada função harmônica $X^m \in \mathcal{H}(M, \mathbb{R})$ podemos associar uma outra função harmônica conjugada, a saber, $Y^m \in \mathcal{H}(M, \mathbb{R})$, podemos entender a θ-família como um tipo de conjugação de uma superfície minimal de $\mathbb{R}^3_1$ numa superfície minimal de $\mathbb{E}^3$.

Agora, por uma única transformação em coordenadas, em cada vizinhança de um dado ponto, obtemos parâmetros conformes $w = u + iv$ dados pelas funções holomorfas $a = a(w)$ e $\mu = \mu(w)$ tais que

$$X(w) = (X^0(z(w)), X^1(z(w)), X^2(z(w)), 0) = P + 2\Re \int_{w_0}^{w} \mu(\xi) W(a(\xi), a(\xi)) d\xi,$$

para (U, X) em $\mathbb{R}^3_1$ e via a θ-família,

$$Y(w) = (0, Y^1(z(w)), Y^2(z(w)), Y^3(z(w))) = Q + 2\Re \int_{w_0}^{w} \mu(\xi) W(a(\xi), -a(\xi)) d\xi,$$

para (U, Y) em $\mathbb{E}^3$.

Como $W(a, a) = (2a, 1 + a^2, i(1 - a^2), 0)$ e $W(a, -a) = (0, 1 - a^2, i(1 + a^2), 2a)$, obtemos as relações conectando $X = X(x, y)$ a $Y = Y(x, y)$. Então, definimos:

Definição 2.2.2. *Para o par de superfícies paramétricas minimais (U, X) e (U, Y), onde $X(U) \subset \mathbb{R}^3_1$ e $Y(U) \subset \mathbb{E}^3$, associadas a uma θ-família, as relações*

$$\frac{\partial Y^3(w)}{\partial w} = \frac{\partial X^0(w)}{\partial w}, \qquad \frac{\partial Y^1(w)}{\partial w} = -i\frac{\partial X^2(w)}{\partial w} \qquad e \qquad \frac{\partial Y^2(w)}{\partial w} = i\frac{\partial X^1(w)}{\partial w}, \tag{2.15}$$

chamaremos de equações associadas da θ-família.

No seguinte exemplo, ilustramos a Definição 2.2.2.

Exemplo 2.2.1. *Para cada $w \in U$, considere em $\mathbb{R}^3_1$ uma solução da equação de Monge com parâmetros isotérmicos na forma*

$$X_w = \frac{1}{2}(1, \cosh w, i \sinh w, 0).$$

Usando que $\sinh w = \sinh u \cos v + i \cosh u \sin v$ e $\cosh w = \cosh u \cos v + i \sinh u \sin v$, com $u \neq 0$, obtemos $\langle X_w, X_w \rangle = 0$ e $\langle X_w, X_{\overline{w}} \rangle > 0$.

Fazendo a integração a menos de constantes aditivas, obtemos uma curva holomorfa em $\mathbb{C}^4$ dada por

$$\tilde{X}(w) = \frac{1}{2}(w, \sinh w, i \cosh w, 0),$$

de modo que $X(w) \doteq \Re(\tilde{X}(w)) = \frac{1}{2}(u, \sinh u \cos v, -\sinh u \sin v, 0)$ é um Catenóide em $\mathbb{R}^3_1$.

Temos que $E(u, v) = G(u, v) = \sinh^2 u$ e $F(u, v) = 0$.

A seguir, tomando a representação $X_w = \mu W(a,a)$, obtemos

$$X_w = \frac{e^w}{4}(2e^{-w}, 1+e^{-2w}, i(1-e^{-2w}), 0),$$

donde $\mu = \frac{e^w}{4}$ e $a = e^{-w}$.

Fazendo o transporte via a θ-família, obtemos $Y_w \doteq \mu W(a,-a) = \frac{1}{2}(0, \sinh w, i\cosh w, 1)$.

Novamente por meio da integração, obtemos uma curva holomorfa em $\mathbb{C}^4$ dada por

$$\tilde{Y}(w) = \frac{1}{2}(0, \cosh w, i\sinh w, w),$$

de modo que $Y(w) \doteq \Im(\tilde{Y}(w)) = \frac{1}{2}(0, \sinh u \sin v, \sinh u \cos v, v)$ é um Helicóide em $\mathbb{E}^3$.

Note que, $(Y^3)_w = (X^0)_w$, $(Y^1)_w = -i(X^2)_w$ e $(Y^2)_w = i(X^1)_w$.

Por fim, observe ainda que, $\Im(\tilde{X}(w))$ e $\Re(\tilde{Y}(w))$ nos fornecem um Helicóide e um Catenóide em $\mathbb{R}^3_1$ e em $\mathbb{E}^3$, respectivamente.

2.2.2 Uma base ponto a ponto para o fibrado normal

Uma vez que $\langle W(a,b), W(x,y)\rangle = 0$ se, e somente se, ou $a = x$ ou $b = y$, definimos dois campos de vetores de tipo luz por

$$L_3(a) \doteq \overline{a}W(a, 1/\overline{a}) \quad \text{e} \quad L_0(b) \doteq \overline{b}W(1/\overline{b}, b),$$

os quais estão relacionados com as projeções estereográficas norte e sul, $(0,0,0,1)$ e $(0,0,0,-1)$, de $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{E}^3$, respectivamente. Explicitamente, estes campos são dados pelas fórmulas

$$L_3(a) = (1+a\overline{a}, a+\overline{a}, -i(a-\overline{a}), -1+a\overline{a}), \quad \text{e} \quad L_0(b) = (1+b\overline{b}, b+\overline{b}, -i(b-\overline{b}), 1-b\overline{b}).$$

Aplicando estas duas fórmulas à θ-família, iremos obter, omitindo a variável $w \in U$ em $a = a(w)$, que

$$L_3(a) = (1+a\overline{a}, a+\overline{a}, -i(a-\overline{a}), -1+a\overline{a}) \tag{2.16}$$

$$L_0(e^{i\theta}a) = (1+a\overline{a}, ae^{i\theta}+\overline{a}e^{-i\theta}, -i(ae^{i\theta}-\overline{a}e^{-i\theta}), 1-a\overline{a}). \tag{2.17}$$

Podemos ainda expressar o referencial de Minkowski associado a uma θ-família $F(\theta; w)$, em função da aplicação de Gauss complexa a por

$$\mathcal{M}(\theta; a) = \{\tau(\theta; a), (\frac{1}{\lambda}F_u)(\theta; a), (\frac{1}{\lambda}F_v)(\theta; a), \nu(\theta; a)\}.$$

Os vetores normais do referido referencial são calculados no seguinte lema:

Lema 2.2.2. *Os vetores normais correspondentes para o referencial de Minkowski $\mathcal{M}(\theta; a)$, associado a θ-família, são dados por*

$$\tau(\theta; a) = \frac{1}{\sqrt{-2\langle L_3(a), L_0(e^{i\theta}a)\rangle}}\,[L_3(a) + L_0(e^{i\theta}a)] \tag{2.18}$$

$$\nu(\theta; a) = \frac{1}{\sqrt{-2\langle L_3(a), L_0(e^{i\theta}a)\rangle}}\,[L_3(a) - L_0(e^{i\theta}a)]. \tag{2.19}$$

O tensor métrico para este conjunto de superfícies é dado por

$$\mathbf{g}(\theta; w) = 4\mu(w)\overline{\mu(w)}(1 - 2\cos\theta a(w)\overline{a(w)} + (a(w)\overline{a(w)})^2)dwd\overline{w}. \tag{2.20}$$

Além disso, temos que $\tau^3(\theta; w) = 0$ e $\nu^0(\theta; w) = 0$, para todo $(\theta; w) \in \mathbb{R} \times M$.

Prova: De $\langle L_0(b), L_3(a)\rangle = -2|1 - a\overline{b}|^2$ segue que $\tau(\theta, a)$ e $\nu(\theta, a)$ dados em (2.18) e (2.19) quando $b = ae^{i\theta}$ são campos de vetores unitários e mutuamente ortogonais do fibrado normal NS. Como as componentes

$$L_0^3 = 1 - a\overline{a} \quad \text{e} \quad L_3^3 = -1 + a\overline{a},$$

segue-se que $\tau^3(\theta; a(w)) = 0$ para cada $\theta \in \mathbb{R}$ e cada $w \in U$. Da Proposição 2.1.1, os campos (2.18) e (2.19) definem duas aplicações normais de Gauss. □

Neste ponto, recordamos a fórmula para a curvatura de Gauss quando $E = G = \lambda^2$ e $F = 0$. Em cada ponto de $X(U) = S$, temos que

$$K(w) = -\frac{1}{2E}\Delta \ln E = -\frac{1}{\lambda^2}\Delta \ln \lambda. \tag{2.21}$$

Observação 2.2.2. *Doravante, usaremos livremente com certa frequência a expressão "A θ-família transporta gráficos". Precisamos entender melhor essa sentença.*

A equação (2.9) e a equação

$$\langle X_y, X_y\rangle X_{xx} - \langle X_x, X_y\rangle X_{xy} + \langle X_x, X_x\rangle X_{yy} = 0,$$

nos casos em que $X(x, y) = (A(x, y), x, y, B(x, y))$ ou $X(x, y) = (x, A(x, y), B(x, y), y)$, permite-nos dar a equação das superfícies parametrizadas de tipo espaço cujo vetor curvatura média é identicamente zero, $H_X = 0$. De fato, neste caso vamos obter as equações (2.23) que veremos mais à frente . A expressão S é um gráfico minimal advém do Teorema da Função Implícita do Cálculo. Por exemplo, se temos a equação da circunferência $x^2+y^2 = 1$, podemos resolvê-la na forma $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ao redor de um ponto $p_0 = (x_0, y_0)$ se, e somente se, a normal à curva neste ponto não é paralela ao eixo Ox.

O fato análogo no nosso trabalho que deixa explícito a ideia de gráfico associado a famílias a um parâmetro θ é a Proposição 3.2.1 e seus corolários.

É uma condição fundamental para dizermos que uma superfície minimal do tipo espaço pertence a uma θ-família, a existência das folhas em $\mathbb{R}^3_1$ e em $\mathbb{E}^3$ com todas elas definidas em um mesmo aberto $M \subset \mathbb{R}^2$. Assim, a normal tipo espaço denotada por $\nu(x, y)$, cuja definição usa com toda a força que sua componente temporal $\nu^0(x, y) \equiv 0$, não pode cruzar o equador na esfera unitária $\mathbb{S}^2$, relativamente a uma escolha inicial dessa normal num ponto fixado $\nu(p_0)$ da superfície em questão.

Explorando a relação entre as duas normais $\nu(x, y)$ e $\tau(x, y)$, cujas existências da forma como foram estabelecidas nesse trabalho somente é possível por estarmos no ambiente definido como sendo o espaço de Minkowski $\mathbb{R}^4_1$, caracteriza a sentença:

"A θ-família transporta gráficos."

É isto o que vemos dado pelo Teorema 2.2.1 e também pela equação no Corolário 3.2.1. É claro que as transformações de coordenadas que movem da forma paramétrica à forma não paramétrica (gráfico) para cada superfície da θ-família dependem da superfície, visto que a métrica depende do parâmetro θ.

A seguir, precisamos de mais um lema para obter o nosso principal resultado desta seção, que é o último teorema desta subseção.

Lema 2.2.3. *Existe uma θ-família de superfícies paramétricas isotérmicas $F(\theta; w)$ com domínio em uma superfície de Riemann $M = (U, \mathcal{A})$ se, e somente se, o vetor normal de tipo tempo no referencial de Minkowski $\mathcal{M}(\theta; w)$ é tal que para cada $\theta \in \mathbb{R}$ e cada $w \in U$,*

$$\langle \tau(\theta; w), \partial_3 \rangle = 0$$

se, e somente se, o dado de Weierstrass ou aplicação de Gauss complexa $a = a(w)$ e o fator de integração $\mu = \mu(w)$ para esta superfície paramétrica isotérmica são funções holomorfas de U em $\mathbb{C}$.

Além disso, a existência de pontos planares correspondem aos zeros da função holomorfa $a' \doteq a_w$ e a curvatura de Gauss para a família é dada por

$$K(F(\theta; w)) = \frac{|a'|^2(\cos\theta(1 + |a|^4) - 2|a|^2)}{|\mu|^2(1 - 2\cos\theta|a|^2 + |a|^4)^3}. \tag{2.22}$$

Prova: Se a é uma função holomorfa, então μ é uma função holomorfa como veremos abaixo e podemos definir a θ-família. Assim, só precisamos mostrar que $\tau^3(\theta; w) \equiv 0$ ou $\nu^0(\theta; w) \equiv 0$ implica que a é uma função holomorfa.

Como $f_{w\overline{w}}(w)$ é um vetor normal real de $\mathbb{R}^4_1$ para todo $w \in U$, da equação para o fator de integração μ dada por

$$\frac{\partial}{\partial \overline{w}} \text{Log } \mu = \frac{\overline{a} b_{\overline{w}}}{1 - \overline{a} b} + \frac{\overline{b} a_{\overline{w}}}{1 - a\overline{b}},$$

(vide [DFS21] para mais detalhes), obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial \overline{w}} \text{Log } \mu = \frac{\overline{a} a_{\overline{w}}}{1 - 2\cos\theta|a|^2 + |a|^4}(1 - e^{-i\theta} a\overline{a}) + (1 - e^{i\theta} a\overline{a}),$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial \overline{w}} \text{Log } \mu = \frac{2\overline{a} a_{\overline{w}}(1 - \cos\theta|a|^2)}{1 - 2\cos\theta|a|^2 + |a|^4}.$$

Como μ não depende de θ, temos que $a_{\overline{w}} = 0$, logo a e μ são funções holomorfas.

Em seguida, iremos calcular a fórmula para a curvatura de Gauss de cada superfície da família.

Primeiramente, $\Delta \ln E = 4(\ln(4\mu\overline{\mu}(1 - 2\cos\theta a\overline{a} + (a\overline{a})^2)))_{w\overline{w}}$. Calculando as derivadas no segundo membro da última igualdade, temos:

$$\begin{aligned}
(\ln(4\mu\overline{\mu}(1 - 2\cos\theta a\overline{a} + (a\overline{a})^2)))_{w\overline{w}} &= \left(\frac{\mu_w}{\mu} + 2a_w\left(\frac{a\overline{a}^2 - \cos\theta\overline{a}}{1 - 2\cos\theta|a|^2 + |a|^4}\right)\right)_{\overline{w}} \\
&= \frac{2|a'|^2}{(1 - 2\cos\theta|a|^2 + |a|^4)^2}(2|a|^2 - (1 + |a|^4)\cos\theta).
\end{aligned}$$

Assim, por (2.21), segue a fórmula (2.22) para a curvatura de Gauss.

Se $\theta = 0$, então obtemos $K(F(0; w)) \geq 0$. Se $\theta = \pi$, então obtemos $K(F(0, w)) \leq 0$.

Além disso, segue da fórmula (2.22) que o conjunto de pontos planares é dado por $\{w \in U : a'(w) = 0\}$. □

Exemplo 2.2.2. *Se para cada $w \in U$, tivermos $a(w) = \sin w$ e $\mu(w) = 1$, então tomando $\theta = 0$ temos superfícies minimais em $\mathbb{R}^3_1$ e tomando $\theta = \pi$ temos superfícies minimais em $\mathbb{E}^3$, ambos os tipos de superfícies possuindo um conjunto de pontos planares fechado e discreto. No caso onde $\theta = \pi$, este conjunto é infinito.*

$$Planar = \{w \in U : cosw = 0\}.$$

O seguinte teorema é uma decorrência dos Lemas 2.2.3 e 2.2.1. Ele diz que uma θ-família transporta gráficos minimais do tipo $X(x, y) = (A(x, y), x, y, B(x, y))$. Na próxima seção veremos a definição de uma classe destas superfícies.

Teorema 2.2.1. *Uma θ-família transporta localmente gráficos minimais de $S^0 \subset \mathbb{R}^3_1$ à $S^\pi \subset \mathbb{E}^3$ preservando o conjunto de pontos planares.*

Prova: De fato, podemos relacionar superfícies em $\mathbb{R}^3_1$ e $\mathbb{E}^3$ por meio das equações (2.15). Pelo Lema 2.2.1, podemos formar um referencial de Minkowski para todas as superfícies de uma θ-família, onde o $\tau(\theta; w)$ e o $\nu(\theta; w)$ são formados com os vetores $(0, F^1_u(p), F^2_u(p), 0)$ e $(0, F^1_v(p), F^2_v(p), 0)$. Como este $\tau(\theta; w)$ construído satisfaz a condição do lema anterior, podemos fazer o transporte dos gráficos minimais do espaço Lorentziano para o espaço Euclidiano.

Por fim, novamente pelo Lema 2.2.3, os pontos planares são preservados, via a θ-família. □

2.2.3 A não completeza de superfícies minimais

Usando a aplicação de Gauss τ em parâmetros gerais $(x, y) \in M$, escrevemos

$$\tau(x, y) = (\tau^0(x, y), \tau^1(x, y), \tau^2(x, y), 0) \in \mathbb{H}^2,$$

e assumindo que a projeção estereográfica definida em $\mathbb{H}^2 \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 : x = \sqrt{1 + y^2 + z^2}\}$ sobre o disco

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} < 1\},$$

dada por

$$a(x, y) = (st_h(\tau(x, y)) \doteq \left.\frac{\tau^1 + i\tau^2}{\tau^0 + 1}\right|_{(x,y)},$$

vemos que a função complexa $a = a(x, y) \in \mathbb{D}$ é definida em parâmetros gerais sobre M.

A seguir, definimos a única aplicação de Gauss ν, associada a τ, pondo para cada $(x, y) \in M$ o vetor

$$\nu(x, y) \doteq \left.\frac{1}{\tau^0}(0, \tau^1, \tau^2, -1)\right|_{(x,y)},$$

e a aplicação definida em $\mathbb{H}^2$ sobre o hemisfério sul aberto $\mathbb{S}^2_-$ da esfera unitária de $\mathbb{E}^3$, dada por $\Phi(\tau(x, y)) \doteq \nu(x, y)$. À luz disto, temos o seguinte lema:

Lema 2.2.4. *A aplicação*

$$\Phi : \tau = (\tau^0, \tau^1, \tau^2, 0) \in \mathbb{H}^2 \longmapsto \nu = \frac{1}{\tau^0}(0, \tau^1, \tau^2, -1) \in \mathbb{S}^2_-$$

é um biholomorfismo do plano hiperbólico sobre o hemisfério sul da esfera $\mathbb{S}^2$.

Prova: Segue-se de $(\tau^0)^2 = 1 + (\tau^1)^2 + (\tau^2)^2$ que $\langle \nu, \nu \rangle = 1$. Por outro lado, usando a projeção estereográfica norte st_N de $\mathbb{S}^2$ sobre o plano equatorial $\mathbb{C}$, o hemisfério sul mapeia sobrejetivamente o disco $\mathbb{D}$. Se $z \in \mathbb{D}$, então $z = (st_N) \circ \Phi \circ st_h(z)$. $\square$

Utilizando o Lema 2.2.4 juntamente com o Teorema 2.2.1, obtemos imediatamente o seguinte fato:

Corolário 2.2.1. *Uma θ-família transporta a superfície minimal (M, X) de $\mathbb{R}^3_1$ à uma superfície minimal (M, Y) de $\mathbb{E}^3$.*

Ademais, a aplicação de Gauss complexa é definida em M por $\tau = \tau(p)$ para cada $p \in M$ e

$$a(\tau) = \frac{\tau^1 + i\tau^2}{\tau^0 + 1} \quad com \quad |a(\tau)| = \sqrt{\frac{\tau^0 - 1}{\tau^0 + 1}}\,.$$

Os fatos obtidos nesta subseção levam-nos novamente às equações (2.15) da Definição 2.2.2. Uma consequência é o seguinte corolário:

Corolário 2.2.2. *As equações (2.15) da Definição 2.2.2 estão estabelecidas em parâmetros gerais sobre M.*

De fato, usando o fato de que a aplicação de Gauss complexa a é definida pela aplicação de Gauss de tipo tempo $\tau : M \longrightarrow \mathbb{H}^2$, não podemos usar parâmetros isotérmicos para obter a superfície (M, Y).

Finalizamos esta subseção com um corolário que é uma consequência do Lema 2.2.4 combinado com um clássico resultado devido a R. Osserman em [Oss69].

Lema 2.2.5 (Osserman)**.** *A imagem, sob a aplicação de Gauss, de uma superfície regular, completa, minimal e não plana do espaço Euclideano $\mathbb{E}^3$ é densa na esfera $\mathbb{S}^2$.*

Enunciamos o corolário como se segue:

Corolário 2.2.3. *Se (M, X) em $\mathbb{R}^3_1$ e (M, Y) em $\mathbb{E}^3$ são duas superfícies minimais associadas uma à outra por uma θ-família, então estas duas superfícies não são completas.*

De fato, $\nu(M)$ omite todo o hemisfério norte (aberto e não vazio) da esfera $\mathbb{S}^2$.

2.3 Aplicação a gráficos de $\mathbb{R}^4_1$

Primeiramente, lembremos que $\mathbb{R}^4_1$ tem a estrutura topológica e diferenciável do espaço Euclideano $\mathbb{R}^4$.

Sejam $\varphi, \psi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ e $T : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável dada por $T(x, y) \doteq (\varphi(x, y), \psi(x, y))$. A partir da definição formal da aplicação T, podemos ver o gráfico de T como um conjunto de pontos de $\mathbb{R}^4$ com a notação

$$graph(T) \doteq \{((x, y), (\varphi(x, y), \psi(x, y))) \in \mathbb{R}^4 : (x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2\}.$$

Podemos escolher quatro posições equivalentes para o eixo temporal em $\mathbb{R}^4_1$ e só precisamos escolher duas destas possíveis posições para ter todas as possibilidades de gráficos:

Fixando a assinatura de $\mathbb{R}^4_1$ por assinatura$(\mathbb{R}^4_1) = (-1, +1, +1, +1)$, tomamos por definição:

(1) Os primeiros tipos de gráficos são dados pelas aplicações $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^4_1$ da forma

$$f(x,y) = (A(x,y), x, y, B(x,y)), \quad \text{onde} \quad (x,y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2,$$

os quais chamaremos *gráficos do primeiro tipo*;

(2) Os segundos tipos de gráficos são dados pelas aplicações $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^4_1$ da forma

$$f(x,y) = (x, A(x,y), B(x,y), y), \quad \text{onde} \quad (x,y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2,$$

os quais chamaremos *gráficos do segundo tipo.*

Assumiremos sempre que as funções A e B são $\mathbb{C}^\infty(U,\mathbb{R})$, que U é um subconjunto aberto conexo e simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$ e que as superfícies traçadas pela aplicação f são superfícies de tipo espaço de $\mathbb{R}^4_1$.

Proposição 2.3.1. *Um gráfico minimal (do primeiro ou segundo tipo) de $\mathbb{R}^4_1$ safisfaz o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} g_{22}D_{11}A - 2g_{12}D_{12}A + g_{11}D_{22}A = 0 \\ g_{22}D_{11}B - 2g_{12}D_{12}B + g_{11}D_{22}B = 0, \end{cases} \tag{2.23}$$

onde $\mathbf{g} = \sum_{i,j} g_{ij}du^i du^j$ *é o tensor métrico positivo definido associado a superfície* $S = f(U)$.

Além disso, o sistema de equações (2.23) nos diz que A e B são funções harmônicas da superfície de Riemann (U, X).

Prova: Tomando a representação matricial do tensor métrico (forma covariante) e de seu tensor inverso (forma contravariante), temos:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [g^{ij}] = \frac{1}{EG - F^2}\begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}$$

e pela Definição 2.1.5, o vetor curvatura média é dado em cada ponto da superfície por

$$2H_f = \frac{1}{EG - F^2}(G\Psi_{11} - 2F\Psi_{12} + E\Psi_{22}).$$

Para cada tipo de superfície tomemos uma base pontual $\{N_1, N_2\}$ para o seu fibrado normal.

Se $f(x,y) = (x, A(x,y), B(x,y), y)$, então obtemos os vetores normais dados por $N_1 = (A_x, 1, 0, -A_y)$ e $N_2 = (B_x, 0, 1, -B_y)$, e as derivadas parciais dos vetores tangentes dadas por $D_{ij}f = (0, D_{ij}A, D_{ij}B, 0)$.

Se $f(x,y) = (A(x,y), x, y, B(x,y))$, então obtemos os vetores normais dados por $N_1 = (1, A_x, A_y, 0)$ e $N_2 = (0, -B_x, -B_y, 1)$, e as derivadas parciais dos vetores tangentes dadas por $D_{ij}f = (D_{ij}A, 0, 0, D_{ij}B)$.

Desta forma, o sistema (2.23) segue imediatamente. □

Agora iremos aplicar estas equações do sistema (2.23) à superfícies do tipo gráficos minimais em $\mathbb{E}^3$ e em $\mathbb{R}^3_1$. Daremos uma equação explícita para cada caso.

(1) Quando $A(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, obtemos gráficos em $\mathbb{E}^3$ dados por uma única função $B : U \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = (0, x, y, B(x,y)) \in \mathbb{E}^3.$$

Com o tensor métrico induzido sobre $f(U)$, visto como uma subvariedade de tipo espaço de $\mathbb{R}^4_1$, obtemos a equação

$$(1 + B_y^2)B_{xx} - 2B_xB_yB_{xy} + (1 + B_x^2)B_{yy} = 0, \tag{2.24}$$

chamada de equação dos gráficos minimais para superfícies diferenciáveis sobre o espaço Euclideano $\mathbb{R}^3 \doteq \mathbb{E}^3$. Conforme vimos no Teorema 1.0.1, Bernstein mostrou que se $U = \mathbb{R}^2$, então as soluções de (2.24) são as funções afins, como consequência, o conjunto dado por $\{(0, x, y, B(x,y)) \in \mathbb{R}^4_1 : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ é um plano;

(2) Quando $B(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, obtemos gráficos em $\mathbb{R}^3_1$ dados por uma única função $A : U \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = (A(x,y), x, y, 0) \in \mathbb{R}^3_1.$$

Com o tensor métrico induzido sobre $f(U)$, visto como uma subvariedade de tipo espaço de $\mathbb{R}^4_1$, obtemos a equação

$$(1 - A_y^2)A_{xx} + 2A_xA_yA_{xy} + (1 - A_x^2)A_{yy} = 0, \quad \text{com} \quad A_x^2 < 1 \quad \text{e} \quad A_x^2 + A_y^2 < 1, \tag{2.25}$$

chamada de equação dos gráficos minimais para superfícies diferenciáveis sobre o espaço Lorentziano $\mathbb{R}^3_1$. Conforme vimos no Teorema 1.0.2, Calabi mostrou que se $U = \mathbb{R}^2$ então as soluções de (2.25) são as funções afins, como consequência, o conjunto dado por $\{(A(x,y), x, y, 0) \in \mathbb{R}^4_1 : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ é um plano.

Exemplo 2.3.1. *Seja (M, f) uma superfície minimal em $\mathbb{R}^3_1$ com parâmetros isotérmicos dada por*

$$f(u,v) = (u, \sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 0).$$

Como $f_u = (1, \cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0)$ e $f_v = (0, -\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0)$, temos $\lambda^2(f) = \sinh^2 u$. Assumimos que $u > 0$.

Usando que $2f_w = f_u - if_v$, obtém-se facilmente $f_w = \frac{1}{2}(1, \cosh w, -i \sinh w, 0)$.

Associada a esta superfície, pelas equações (2.15), temos a superfície $h(u,v)$ tal que

$$h_w = \frac{1}{2}(0, -\sinh w, i \cosh w, 1), \quad \textit{onde} \quad \tilde{h}(w) = (0, -\cosh w, i \sinh w, w)$$

é uma curva holomorfa em $\mathbb{C}^4$ cuja parte real nos dá (M, h), sendo

$$h(u,v) = (0, -\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, u) \quad \textit{com} \quad \lambda^2(h) = \cosh^2 u.$$

Mediante a transformação $x = \sinh u \cos v$ e $y = \sinh u \sin v$, temos $\sinh u = \sqrt{x^2 + y^2}$, e assim (M, f) fica na forma não paramétrica determinada pela função

$$A(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}).$$

Com a transformação $p = -\cosh u \cos v$ e $q = -\cosh u \sin v$, temos $\cosh u = \sqrt{p^2 + q^2}$,

e assim (M, h) fica na forma não paramétrica determinada pela função

$$B(p,q) = \ln(\sqrt{p^2+q^2} + \sqrt{p^2+q^2-1}).$$

Estas superfícies são as correspondentes para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ da família, associadas ao Catenóide em $\mathbb{E}^3$.

2.3.1 O segundo tipo

São os gráficos dados pelas aplicações diferenciáveis $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^4_1$ da forma

$$f(x,y) = (x, A(x,y), B(x,y), y), \quad \text{onde} \quad (x,y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2.$$

(3) Quando $B(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, obtemos gráficos em $\mathbb{R}^3_1$ dados por uma única função $A : U \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = (x, A(x,y), 0, y) \in \mathbb{R}^3_1.$$

Com o tensor métrico induzido sobre $f(U)$, visto como uma subvariedade de tipo espaço de $\mathbb{R}^4_1$, obtemos a equação

$$(1+A_y^2)A_{xx} - 2A_xA_yA_{xy} + (-1+A_x^2)A_{yy} = 0, \quad \text{com} \quad A_x^2 > A_y^2 + 1 \tag{2.26}$$

e diremos que esta equação é a *equação dos gráficos minimais do segundo tipo para superfícies diferenciáveis sobre o espaço Lorentziano $\mathbb{R}^3_1$.*

Até o presente momento não encontramos estudos tratando de modo explícito a equação (2.26) na literatura pesquisada.

2.3.2 A equação $\tau_w = \eta f_{\overline{w}}$

Assumiremos que (U, f) é uma superfície paramétrica λ-isotérmica de $\mathbb{R}^3_1$ com aplicação normal de Gauss dada por $\tau : U \longrightarrow \mathbb{H}^2$.

Como $\langle \tau, \tau \rangle = -1$, implica que $\langle \tau_w, \tau \rangle = 0$, e já que $\langle \tau, f_w \rangle = 0$, temos que existem funções $\eta, h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\tau_w(w) = h(w) f_w(w) + \eta(w) f_{\overline{w}}(w)$$

para cada $w \in U$. Neste caso, como $\nu = (0,0,0,1)$, as equações de Weingarten (2.7) se tornam

$$\begin{cases} \tau_u = (h_{11}/\lambda^2)\ f_u + (h_{12}/\lambda^2)\ f_v \\ \tau_v = (h_{12}/\lambda^2)\ f_u + (h_{22}/\lambda^2)\ f_v. \end{cases}$$

Proposição 2.3.2. *Se (U, f) é uma superfície paramétrica minimal $E(f)$-isotérmica de $\mathbb{R}^3_1$ com aplicação normal de Gauss $\tau : U \longrightarrow \mathbb{H}^2$, então as equações de Weingarten para S são dadas por*

$$\tau_w(w) = \eta(w)\ f_{\overline{w}}(w) \quad \textit{onde} \quad \eta(w) = \sqrt{K_f(w)}\, e^{i\psi(w)} \tag{2.27}$$

e $K_f(w)$ é a curvatura de Gauss de S.

Prova: Pela hipótese de que a curvatura média de S é 0, temos funções $p(w) \doteq h_{11}(w)/\lambda^2 = -h_{22}(w)/\lambda^2$ e $q(w) \doteq h_{12}(w)/\lambda^2 = h_{21}(w)/\lambda^2$ tais que $K_f(w) = p^2(w) + q^2(w)$. Usando as identidades $f_u = f_w + f_{\overline{w}}$ e $f_v = i(f_w - f_{\overline{w}})$, obtemos

$$\tau_w = (\tau_u - i\tau_v)/2 = p(f_w + f_{\overline{w}}) - iq(f_w - f_{\overline{w}}) = (p - iq)f_{\overline{w}}.$$

Definindo $\eta \doteq p - iq$ uma vez que $\eta\overline{\eta} = K_f$, obtemos a equação (2.27) quando tomamos a forma polar da função η. □

Corolário 2.3.1. *Seja (U, f) uma superfície paramétrica minimal $E(f)$-isotérmica de $\mathbb{R}^3_1$ com aplicação normal de Gauss $\tau : U \longrightarrow \mathbb{H}^2$ e o conjunto de pontos planares definido por*

$$\textit{Planar(S)} \doteq \{w \in U : K_f(w) = 0\}.$$

Se Planar(S) $= \emptyset$, então a superfície de Riemann associada $M = (U, \mathcal{A})$ é conformemente equivalente ao disco: $D = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} < 1\}$.

Prova: De fato, se Planar(S) $= \emptyset$, então a superfície de Riemann associada $M = (U, \mathcal{A})$ possui pontos onde $K_f(w) \neq 0$, logo, não pode ser todo o plano. □

Observação 2.3.1. *Da equação $\tau_w = \eta f_{\overline{w}}$, segue-se que*

$$\frac{1}{2}E(\tau) = \langle \tau_w, \tau_{\overline{w}} \rangle = K_f(w)\langle f_w, f_{\overline{w}} \rangle = \frac{1}{2}K_f(w)E(f),$$

que nos fornece uma fórmula para a curvatura de Gauss de $f(U)$:

$$\frac{4|a'|^2}{(1 - a\overline{a})^2} = K(f)(4\mu\overline{\mu}(1 - a\overline{a})^2) \quad ou \quad K(f) = \frac{|a'|^2}{\mu\overline{\mu}(1 - a\overline{a})^4}.$$

A seguinte proposição é a versão da Proposição 2.3.2 para superfícies minimais do espaço $\mathbb{E}^3$, a qual tem prova análoga:

Proposição 2.3.3. *Se (U, h) é uma superfície paramétrica minimal $E(h)$-isotérmica de $\mathbb{E}^3$ com aplicação normal de Gauss $\nu : U \longrightarrow \mathbb{S}^2$, então as equações de Weingarten para S são dadas por*

$$\nu_w(w) = \xi(w)\, h_{\overline{w}}(w) \quad onde \quad \xi(w) = \sqrt{-K_h(w)}\, e^{i\phi(w)} \tag{2.28}$$

e $K_h(w)$ é a curvatura de Gauss de S.

O corolário análogo é obtido como segue:

Corolário 2.3.2. *Seja (U, h) uma superfície paramétrica minimal $E(h)$-isotérmica de $\mathbb{E}^3$ com aplicação normal de Gauss $\nu : U \longrightarrow \mathbb{S}^2$ e o conjunto de pontos planares definido por*

$$\textit{Planar(S)} \doteq \{w \in U : K_h(w) = 0\}.$$

Se Planar(S) $= \emptyset$, então a superfície de Riemann associada $M = (U, \mathcal{A})$ é conformemente equivalente ao disco $D = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} < 1\}$.

Observação 2.3.2. *Da equação $\nu_w = \xi h_{\overline{w}}$, segue-se que*

$$\frac{1}{2}E(\nu) = \langle \nu_w, \nu_{\overline{w}} \rangle = K_h(w)\langle h_w, h_{\overline{w}} \rangle = \frac{1}{2}K_h(w)E(h),$$

que nos fornece uma fórmula para a curvatura de Gauss de $f(U)$:

$$\frac{4|a'|^2}{(1+a\overline{a})^2} = -K(h)(4\mu\overline{\mu}(1+a\overline{a})^2) \quad ou \quad K(h) = -\frac{|a'|^2}{\mu\overline{\mu}(1+a\overline{a})^4}.$$

2.3.3 Sobre a fórmula da curvatura de Gauss (2.22)

Vimos que podemos usar a fórmula da curvatura de Gauss dada em (2.22) para caracterizar o conjunto dos pontos planares em uma θ-família. A parte principal do denominador do funcional fração da expressão de $K(F(\theta; w))$ é uma função de $(\theta; w)$, cuja expressão em termos de $|a|$ é dada por

$$Q(\theta; w) \doteq 1 - 2\cos\theta|a|^2 + |a|^4.$$

A equação obtida fazendo o lado direito da última igualdade igual a zero, tem solução dada por

$$|a|^2 = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta},$$

que implica $\theta = 0$, e como $\{w : |a(w)| = 1\} = \emptyset$, não temos soluções para $Q(\theta; w) = 0$.

Lema 2.3.1. *Em uma θ-família $(U, F(\theta, w))$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) Existe um $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que para cada $w \in U$, o ponto $F(\theta_0; w)$ é um ponto planar: $K(F(\theta_0; w)) = 0$;

(2) A aplicação de representação isotérmica a é constante em U, isto é, para cada $w \in U$, temos $a'(w) = 0$;

(3) As aplicações normais de Gauss de tipo luz $L_3(a)$ e $L_0(ae^{i\theta})$ são aplicações constantes de U no cone de luz $\mathcal{C} \doteq \{x \in \mathbb{R}^4_1 \setminus \{\vec{0}\} : \langle x, x \rangle = 0\}$;

4) Para todo $\theta \in \mathbb{R}$, temos $U = Planar(F(\theta; U))$.

Prova: Imediatamente de (2.22), temos (1) $\Leftrightarrow$ (2).
Utilizando (2.16) e (2.17), obtemos (2) $\Leftrightarrow$ (3).
Por fim, note que, como (4) $\Leftrightarrow$ (2), então (4) $\Leftrightarrow$ (3). □

A seguir, no próximo resultado, denotamos o Teorema de Bernstein para a equação (2.24) por TB, o Teorema de Calabi para a equação (2.25) por TC e o Teorema de Calabi para a equação (2.26) por T'C.

Teorema 2.3.1. *Seja $M = (U, \mathcal{A})$ uma superfície de Riemann associada a uma θ-família de gráficos minimais de $\mathbb{R}^4_1$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(TB): Se $U = \mathbb{R}^2$ e $\theta = \pi$, então $S = F(\pi; U)$ é um plano;

(T2): Se $U = \mathbb{R}^2$ e $\theta = \pi$, então as aplicações normais de Gauss de tipo luz L_3 e L_0 são aplicações constantes do cone de luz $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4_1$;

(TC) ou (T'C): Se $U = \mathbb{R}^2$ e $\theta = 0$, então $S = F(0; U)$ é um plano.

Prova: Pelo Lema (2.3.1), segue que (T2) implica todos os outros itens. Por outro lado, (TB) e ((TC) ou (T'C)) implicam (T2). □

2.3.4 A equação de Gauss e a equação $\tau_w = \eta f_{\overline{w}}$

Comecemos escrevendo a equação de Gauss (2.6) para uma imersão minimal (M, f) de M em $\mathbb{R}^3_1$ com parâmetros isotérmicos λ^2 da seguinte maneira:

$$f_{ww} = Af_w + Bf_{\overline{w}} + \Omega\tau,$$

com $A, B, \Omega \in C^\infty(U, \mathbb{R})$.

Então, usando que a imersão é minimal juntamente com $\langle f_w, f_w\rangle = 0$ e $\langle f_w, f_{\overline{w}}\rangle = \lambda^2/2$, segue que

$$f_{ww} = 2\frac{\lambda_w}{\lambda} f_w + \frac{\eta\lambda^2}{2}\tau$$

uma vez que, temos também $\langle f_{ww}, \tau\rangle = -\langle f_w, \tau_w\rangle = -\langle f_w, \eta f_{\overline{w}}\rangle = -\Omega$.

Novamente, como (M, f) é uma superfície minimal, obtemos que $f_{ww\overline{w}} = 0$ e de $\langle \tau_{w\overline{w}}, \tau\rangle = 0$, obtemos que $\Omega_{\overline{w}} = 0$.

Proposição 2.3.4. *Seja (M, f) uma imersão minimal de M em $\mathbb{R}^3_1$. Então:*

(1) A função $\Omega \doteq \eta\lambda^2/2$ é holomorfa;

(2) $\Omega(w) = 2\mu(w)a'(w)$ para cada $w \in M$.

Prova: Primeiramente, calculemos η. Temos: $\tau^0_w = \eta f^0_{\overline{w}}$ se, e somente se,

$$\frac{\partial}{\partial w}\frac{1 + a\overline{a}}{1 - a\overline{a}} = \frac{2a_w\overline{a}}{(1 - a\overline{a})^2} = 2\overline{\mu}\,\overline{a}\,\eta \text{ se, e somente se, } \eta = \frac{a_w}{\overline{\mu}(1 - a\overline{a})^2}.$$

Agora, pela definição desta função complexa, obtemos

$$\Omega = \eta\lambda^2/2 = \frac{a_w}{2\overline{\mu}(1 - a\overline{a})^2}\, 4\mu\overline{\mu}(1 - a\overline{a})^2 = 2\mu a'.$$

Do item (2), segue a holomorfia afirmada no item (1). □

2.3.5 Fórmula análoga com conexão normal não livre de torção

Escrevendo as equações de Gauss e Weingarten (2.6), (2.7) e (2.8) para uma θ-família com parâmetros isotérmicos e uma variável complexa $w = u + iv$, obtemos:

$$\tau_w = \sigma f_{\overline{w}} + \Gamma\,\nu \quad \text{e} \quad \nu_w = \chi f_{\overline{w}} + \Gamma\,\tau; \tag{2.29}$$

$$f_{ww} = 2\frac{\lambda_w}{\lambda} f_w + \frac{\sigma\lambda^2}{2}\,\tau - \frac{\chi\lambda^2}{2}\,\nu \text{ e } f_{w\overline{w}} = 0; \tag{2.30}$$

$$\Gamma(w) = \langle \tau_w, \nu\rangle = -\langle \nu_w, \tau\rangle = \frac{\gamma_1(w) - i\gamma_2(w)}{2}, \tag{2.31}$$

onde $\sigma, \Gamma, \chi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$.

A 1-forma da conexão normal é dada por

$$\gamma = \gamma_1 du + \gamma_2 dv = \gamma_1 \frac{dw + d\overline{w}}{2} - i\gamma_2 \frac{dw - d\overline{w}}{2} = \Gamma dw + \overline{\Gamma}\, d\overline{w}.$$

Outros fatos interessantes seguem utilizando que $\tau_{w\overline{w}}$ e $\nu_{w\overline{w}}$ são campos de vetores a valores reais ao longo de (M, f). Como $\tau_{w\overline{w}} = \sigma_{\overline{w}} f_{\overline{w}} + \sigma f_{\overline{w}\,\overline{w}} + \Gamma_{\overline{w}}\nu + \Gamma\nu_{\overline{w}}$, obtemos que

$$\Im\left(\langle \tau_{w\,\overline{w}}, \nu\rangle\right) = \Im\left(\Gamma_{\overline{w}} - \sigma\overline{\chi}\frac{\lambda^2}{2}\right) = 0.$$

Consequentemente, temos a seguinte equação a respeito da torção escalar da conexão normal ou curvatura normal de Ricci das superfícies da família:

$$\Gamma_{\overline{w}} - \overline{\Gamma}_w = (\sigma\overline{\chi} - \overline{\sigma}\chi)\frac{\lambda^2}{2}. \tag{2.32}$$

A equação (2.32) nos sugere a seguinte

Definição 2.3.1. *A curvatura normal de Ricci e o funcional área para a θ-família (M, f) são definidas pelas seguintes funções escalares:*

$$K_N \doteq -i(\sigma\overline{\chi} - \overline{\sigma}\chi) = -2i\frac{\Gamma_{\overline{w}} - \overline{\Gamma}_w}{\lambda^2} \quad e \quad dArea \doteq i\frac{\lambda^2}{2} dw \wedge d\overline{w} = \lambda^2 du \wedge dv.$$

Observação 2.3.3. *Novamente, se γ denota a 1-forma da conexão normal de (M, f), então*

$$d\gamma = \left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial v} - \frac{\partial\gamma_2}{\partial u}\right) du \wedge dv = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial v} - \frac{\partial\gamma_2}{\partial u}\right) dArea.$$

Para a curvatura de Gauss, temos que $K(f) = \sigma\,\overline{\sigma} - \chi\,\overline{\chi}$. Também, ela é o quociente entre a diferença das áreas determinadas pelas aplicações normais de Gauss τ e ν e a área determinada por f.

A seguir, forneceremos as fórmulas para as funções $\sigma(\theta; w)$ e $\chi(\theta; w)$:

Lema 2.3.2. *Se (M, f) é uma θ-família com parâmetros λ^2-isotérmicos, onde*

$$\lambda^2 = 4\mu\overline{\mu}(1 - 2\cos\theta|a|^2 + |a|^4),$$

então temos as seguintes fórmulas:

$$\sigma(\theta, w) = \frac{a'}{2\overline{\mu}}\,\frac{(1 - |a|^2)(1 + e^{i\theta})}{(1 - 2\cos\theta|a|^2 + |a|^4)^{3/2}}, \tag{2.33}$$

$$\chi(\theta, w) = \frac{a'}{2\overline{\mu}}\,\frac{(1 + |a|^2)(1 - e^{i\theta})}{(1 - 2\cos\theta|a|^2 + |a|^4)^{3/2}}. \tag{2.34}$$

Prova: Como $\langle \nu, \partial_0\rangle = 0$, segue da equação (2.29), usando as equações (2.18) e (2.19) do Lema 2.2.2, que podemos tomar

$$\tau^0_w = \sigma f^0_{\overline{w}} \quad \text{e} \quad \nu^3_w = \chi f^3_{\overline{w}},$$

enquanto para a família, temos que $f^0_{\overline{w}} = \overline{\mu}(\overline{a}\,(1 + e^{-i\theta}))$ e $f^3_{\overline{w}} = \overline{\mu}(\overline{a}\,(1 - e^{-i\theta}))$.

Por outro lado,

$$\tau^0 = \frac{1 + a\overline{a}}{\sqrt{(1 - 2\cos\theta|a|^2 + |a|^4)}} \quad \text{e} \quad \nu^3 = \frac{-1 + a\overline{a}}{\sqrt{(1 - 2\cos\theta|a|^2 + |a|^4)}}.$$

Assim,

$$\tau^0_w = a'\overline{a}\frac{(1 - 2\cos\theta|a|^2 + |a|^4) - (1 + a\overline{a})(-\cos\theta + a\overline{a})}{(1 - 2\cos\theta|a|^2 + |a|^4)^{3/2}},$$

e de $(1 + e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta}) = 2(1 + \cos\theta)$, segue-se facilmente a fórmula (2.33). Analogamente, de

$$\nu^3_w = a'\overline{a}\frac{(1 - 2\cos\theta|a|^2 + |a|^4) - (-1 + a\overline{a})(-\cos\theta + a\overline{a})}{(1 - 2\cos\theta|a|^2 + |a|^4)^{3/2}},$$

segue a fórmula (2.34). □

O seguinte corolário é obtido por meio de um simples cálculo:

Corolário 2.3.3. *Se (M, f) é uma θ-família com parâmetros λ^2-isotérmicos, então a curvatura normal de Ricci é dada por*

$$K_N = -i(\sigma\overline{\chi} - \overline{\sigma}\chi) = \frac{|a'|^2}{\mu\overline{\mu}}\,\frac{(1 - |a|^4)\sin\theta}{(1 - 2\cos\theta|a|^2 + |a|^4)^3}. \tag{2.35}$$

Além disso, a fórmula da curvatura de Gauss (2.22) segue de $K(f) = \sigma\,\overline{\sigma} - \chi\,\overline{\chi}$, como esperado, pelo Teorema egregium de Gauss.

Prova: De fato, utilizando (2.33) e (2.34) do Lema 2.3.2, segue-se (2.35). □

2.4 Soluções locais para as equações (2.24), (2.25) e (2.26)

Assumiremos aqui que temos um subconjunto aberto conexo e simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$, uma superfície minimal $S \subset \mathbb{R}^4_1$ e além disso que existe um difeomorfismo $X : U \longrightarrow S$.

Como S é uma superfície de Riemann conexa, não compacta e simplesmente conexa, temos que existem um biholomorfismo ξ de $\tilde{U}$ sobre S e um outro biholomorfismo Φ de $U \subset \mathbb{C}$ sobre $\tilde{U}$ tais que

$$X(x, y) = \xi \circ \Phi : (x, y) \in U \mapsto \xi(\Phi(x, y)) \in S.$$

Pelo Teorema de Uniformização de Riemann, $\tilde{U}$ ou é um disco D ou é o plano complexo $\mathbb{C}$. Além disso, o difeomorfismo $\Phi = \xi^{-1} \circ X$ com inversa $\Phi^{-1} = X^{-1} \circ \xi$ é uma transformação em coordenadas que nos dá uma parametrização de S com parâmetros isotérmicos $w = (u, v) \in \tilde{U}$.

Uma construção explícita das funções ξ e Φ pode ser encontrada em [Nit65], em particular, as equações (8) da página 23 do artigo de Nitsche que aparecem na prova do Teorema de Bernstein definem uma função tal qual a nossa Φ.

Definição 2.4.1. *Seja (U_1, X_1) uma solução local para as equações dos gráficos minimais (2.24) ou (2.25) ou (2.26). Dizemos que outra solução local (U_2, X_2) é uma extensão de (U_1, X_1) se, e somente se,*

$$U_1 \subset U_2 \quad e \quad X_2|_{U_1} = X_1.$$

Neste caso, escrevemos $(U_1, X_1) \preceq (U_2, X_2)$.

Como o espaço topológico $\mathbb{R}^2$ possui base enumerável de subconjuntos abertos, podemos restringir o conjunto de soluções locais a uma família enumerável de domínios abertos conexos (U, X). À vista disso, temos a imediata proposição:

Proposição 2.4.1. *Se* $\{(U_n, X_n) : n \in \mathbb{N}\}$ *é uma* $\preceq$*-cadeia de soluções da equação (2.24), então o par* (V, Y) *definido por*

$$V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \subset M \quad e \quad Y(p) = X_n(p) \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } p \in U_n,$$

também é uma solução da equação (2.24).

Consequentemente, cada solução local conexa da equação (2.24) possui uma extensão maximal conexa que é uma solução da equação (2.24).

Em decorrência da Proposição 2.4.1, o Teorema de Bernstein tem a seguinte versão:

Teorema 2.4.1 (Bernstein)**.** *Uma solução* (U, X) *da equação dos gráficos minimais (2.24) tem um ponto* $p \in U$ *tal que a sua função curvatura de Gauss satisfaz* $K(p) \neq 0$ *se, e somente se,* $\mathbb{R}^2 \setminus U \neq \emptyset$.

Em outras palavras: "uma solução local não plana da equação (2.24) não pode ser estendida a todo o plano $\mathbb{C}$*."*

Mostraremos a seguir que uma θ-família transporta soluções maximais da equação (2.24) que resultam em soluções maximais da equação (2.25).

2.4.1 Novamente as fórmulas (2.16) e (2.17)

Se $F(\theta, w)$ é uma θ-família de superfícies paramétricas isotérmicas minimais em $\mathbb{R}^4_1$, podemos ver na fórmula (2.16) que a direção nula dada por $L_3(a)$ não depende do parâmetro θ. Na realidade, $L_3(a)$ é uma aplicação de M no cone de luz $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4_1$. A outra direção nula, $L_0(e^{i\theta}a)$, do fibrado normal do conjunto de superfícies S_θ é aquela que depende do parâmetro θ.

Lema 2.4.1. *Dados dois números complexos* a *e* b *tais que* $L_3(a) = rL_3(b)$*, então* $a = b$ *e* $r = 1$.

Prova: Como $L_3(a) \neq (0, 0, 0, 0)$, de

$$0 = \langle L_3(a), L_3(a)\rangle = \langle L_3(a), rL_3(b)\rangle = r\langle L_3(a), L_3(b)\rangle = -2r|b - a|^2$$

obtemos que $a = b$. Portanto, da primeira coordenada de $L_3(a)$, segue-se que $r = 1$. □

Proposição 2.4.2. *Se* $F(\theta, w)$ *é uma* θ*-família de superfícies paramétricas isotérmicas minimais em* $\mathbb{R}^4_1$*, então para cada ponto*

$$p \in \bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} F(\theta, M) = \bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} S_\theta,$$

temos uma única direção luz futuro dirigida $L(p)$ *no fibrado normal da superfície* S_θ *dada pela fórmula (2.16), onde* $p = F(\theta, w)$ *e* $L(p) \doteq L_3(a(w))$.

Prova: Segue de modo imediato do Lema 2.4.1. □

À luz da Proposição 2.4.2 e do Lema 2.4.1 podemos definir um tipo de aplicação de Gauss de S_θ no plano complexo $\mathbb{C}$:

Definição 2.4.2. *Denotando por st_N a projeção estereográfica norte da esfera Euclideana $\mathbb{S}^2$ no plano complexo $\mathbb{C}$, chamaremos a função $a : S_\theta \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$a(p) \doteq st_N\left(\frac{1}{1+a\overline{a}}L_3(a) - (1,0,0,0)\right)$$

de aplicação de Gauss complexa característica da θ-família.

Recordemos que os zeros de uma função holomorfa não constante são pontos isolados. Portanto, se f e g são duas funções holomorfas definidas em um domínio M tal que o conjunto $\{w \in M : (f-g)(w) = 0\}$ tem um ponto de acumulação, então $f = g$ em todo subconjunto aberto conexo de $M \subset \mathbb{C}$. (Precisamos da hipótese de que M é conexo).

Outro fato interessante é que os campos de vetores de tipo luz $L_3(a)$ e $L_0(b)$ são obtidos tais que o tensor métrico pode ser escrito da seguinte forma:

$$\lambda^2 = -2\mu\overline{\mu}\langle L_3(a), L_0(b)\rangle = 4\mu\overline{\mu}(1-a\overline{b})(1-\overline{a}b).$$

2.4.2 A inequação $\Im(a) \neq 0$

Nos moldes da Seção 2.3, seja $X(x,y) = (x, y, A(x,y), 0)$ um gráfico minimal em $\mathbb{R}^3_1$. A aplicação normal de Gauss em cada ponto $(x,y) \in U$, chegando em $\mathbb{H}^2$ é dada por

$$\tau(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(A_x)^2 - (A_y)^2 - 1}}(A_x, -A_y, 1, 0)$$

e a matriz de dX_p é dada por

$$[dX_p]^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & A_x & 0 \\ 0 & 1 & A_y & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.36}$$

Definiremos as duas aplicações de Gauss de tipo luz $L_0(X)$ e $L_3(X)$ e com estas duas aplicações poderemos ver globalmente algumas propriedades relacionadas à extensão holomorfa da aplicação de Gauss complexa característica $a(w)$.

Definição 2.4.3. *Seja $X(x,y) = (x, y, A(x,y), 0)$ um gráfico minimal em $\mathbb{R}^3_1$. As aplicações normais de Gauss são definidas por*

$$L_0(X) \doteq \left(A_x, -A_y, 1, \sqrt{(A_x)^2 - (A_y)^2 - 1}\right) \quad e \tag{2.37}$$

$$L_3(X) \doteq \left(A_x, -A_y, 1, -\sqrt{(A_x)^2 - (A_y)^2 - 1}\right). \tag{2.38}$$

Observação 2.4.1. *Mediante os campos de vetores (2.16) e (2.17), o sinal usado na Definição 2.4.3 para os campos de vetores de tipo luz (2.37) e (2.38) é justificado assim: Por (2.18), obtemos*

$$\tau(a) = \frac{1}{1-a\overline{a}}(1+a\overline{a}, a+\overline{a}, -i(a-\overline{a}), 0).$$

Por outro lado, utilizando a transformação em coordenadas que precisamos para obter a aplicação $a(w)$, o funcional área

$$dArea = \sqrt{(A_x)^2 - (A_y)^2 - 1}\ dxdy$$

é associado a $\langle L_0(a), (0,0,0,1)\rangle = 1 - a\overline{a}$.

A seguir, olharemos para as equações associadas a nossa θ-família juntamente com as equações dos gráficos para superfícies minimais.

Antes de tudo, observemos que $f_w = \mu(a+b, 1+ab, i(1-ab), a-b)$ é uma representação de $S \subset \mathbb{R}^3_1$ quando $a = b$, o que corresponde a

$$f_w = \mu(2a, 1+a^2, i(1-a^2), 0).$$

Agora, se tivermos uma transformação em sistemas de coordenadas $z(w) = x(w) + iy(w)$ escrito como

$$\Phi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}, \tag{2.39}$$

então representamos o gráfico minimal $X(x,y) = (x, y, A(x,y), 0)$ como uma superfície paramétrica de tipo espaço minimal (U, f), onde $f_w = \mu(2a, 1+a^2, i(1-a^2), 0)$. Da matriz de rotação definida em (2.36), temos os seguintes tipos de sistemas de equações:

$$x_w = 2\mu a, \quad y_w = \mu(1+a^2) \quad e \quad A_x x_w + A_y y_w = \mu i(1-a^2),$$

logo o determinante do Jacobiano desta transformação em coordenadas com notação complexa corresponde a

$$x_w y_{\overline{w}} - x_{\overline{w}} y_w = 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad \Im(a) = 0, \tag{2.40}$$

isto porque $2\mu\overline{\mu}[a(1+\overline{a}^2) - \overline{a}(1+a^2)] = 2\mu\overline{\mu}(1-a\overline{a})(a-\overline{a}) = 4i\mu\overline{\mu}(1-a\overline{a})\Im(a)$.

Enunciaremos e provaremos o seguinte lema relacionado a transformação em coordenadas (2.39):

Lema 2.4.2. *Se $S = (U, X)$ é uma superfície paramétrica minimal de $\mathbb{R}^3_1$ dada por $X(x,y) = (A^1(x,y), A^2(x,y), A^3(x,y))$ e supondo que temos uma transformação em coordenadas (2.39) que nos permite obter localmente uma representação (U, f) com parâmetros isotérmicos onde*

$$f_w = \mu(2a, 1+a^2, i(1-a^2), 0),$$

então $\Im(a(w)) \neq 0$, para todo $w \in U$.

Prova: Por meio das funções do Jacobiano usando variáveis complexas, temos que

$$\det\left(\frac{\partial(A^i, A^j)}{\partial(w, \overline{w})}\right) = \det\left(\frac{\partial(A^i, A^j)}{\partial(x,y)}\right)\begin{vmatrix} x_w & x_{\overline{w}} \\ y_w & y_{\overline{w}} \end{vmatrix}$$

é igual a zero para todos os três possíveis casos onde $1 \leq i < j \leq 3$ se, e somente se, $\Im(a) = 0$, pela equação (2.40). □

Este último fato nos sugere o seguinte importante lema.

Lema 2.4.3. *Seja $X(x,y) = (x, y, A(x,y), 0)$ um gráfico minimal em $\mathbb{R}^3_1$ de uma função suave A definida em todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{C}$.*

Se existe um subespaço $S^* \subset S = (\mathbb{C}, X)$, que é um subconjunto aberto conexo e denso de S e tal que

$$\Im(a(p)) \neq 0, \quad \forall p \in S^*,$$

onde $a(p)$ é a aplicação de Gauss complexa associada ao gráfico $S = X(\mathbb{C})$, então pelo Teorema de Picard, $a(p)$ é uma função constante, donde $a_w \equiv 0$, e portanto S é um plano de tipo espaço de $\mathbb{R}^3_1$.

Prova: Assumindo que em um ponto $p_0 \in S^*$ temos $\Im(a(p_0)) > 0$, pela conexidade de S^*, segue-se que $\Im(a(p)) > 0$, para todo ponto $p \in S^*$. Como S^* é denso em S e superfícies são espaços topológicos metrizáveis, para cada $q \in S$ temos que $\Im(a(q)) = \lim_{n\to\infty} \Im(a(p_n))$ onde $\{p_n : n \in \mathbb{N}\} \subset S^*$ é uma sequência que converge para $q \in S$.

Pela hipótese de que S^* é um subconjunto aberto conexo e denso, e usando que a projeção $pr : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $pr(x,y) = x$ é uma aplicação contínua, aberta e sobrejetiva, obtemos $pr(S^*) = \mathbb{R}$. □

Como consequência direta do Lema 2.4.3, a existência de um tal subespaço S^* de S implicará o Teorema de Bernstein, o Teorema de Calabi e a nossa versão T'C.

Proposição 2.4.3. *Seja (M, f) uma superfície minimal conexa λ^2-isotérmica do espaço $\mathbb{R}^3_1$, onde*

$$f_w = \mu(2a, 1 + a^2, i(1 - a^2), 0).$$

Se existe um ponto $p \in M$ para o qual $K(p) \neq 0$, então o conjunto de pontos planares de (M, f) é um conjunto discreto.

Prova: Fazendo $\theta = 0$ na fórmula (2.22), segue-se que $K(f(w)) = 0$ se, e somente se, $a'(w) = 0$, para todo $w \in M$. Como a' é uma função holomorfa que possui um ponto $w_0 = p$ onde $a'(w_0) \neq 0$, o conjunto formado pelos seus zeros é um conjunto discreto em todas as componentes conexas de p. Por hipótese, M é uma destas componentes conexas. □

Como $\Im(a) \neq 0$ em uma vizinhança aberta de S é uma consequência da existência de parâmetros isotérmicos e o conjunto dos pontos de S onde $a'(w) = 0$ em cada $w \in U$ é discreto quando $K(f(w)) \neq 0$, temos como consequência o seguinte corolário:

Corolário 2.4.1. *Se $(\mathbb{R}^2, X)$ é uma superfície inteira minimal (conexa) do espaço $\mathbb{R}^3_1$, onde*

$$X(x,y) = (x, y, A(x,y)),$$

dada pelas equações (2.24) ou (2.25) ou (2.26), então o subconjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : K(X(x,y)) \neq 0\}$$

é um conjunto vazio, o que significa dizer que $S = X(\mathbb{R}^2)$ é um plano de tipo espaço de $\mathbb{R}^3_1$.

3

Codimensão efetivamente igual a 2

Neste derradeiro capítulo apresentaremos alguns resultados que possibilitam a construção de uma gama de exemplos de superfícies com codimensão igual a 2.

3.1 Um referencial semi-rígido

Seja $\mathbb{R}^4_1 = E \oplus T$ dado pela soma direta entre um plano de tipo espaço E e seu complemento ortogonal T, o qual é um plano de tipo tempo.

Definição 3.1.1. *Um referencial semi-rígido do espaço de Minkowski $\mathbb{R}^4_1$ associado à soma direta $\mathbb{R}^4_1 = E \oplus T$ é uma base positiva $\{l_0, e_1, e_2, l_3\}$ de $\mathbb{R}^4_1$, satisfazendo as seguintes condições:*

(1) $E = span\{e_1, e_2\}$ *e* $T = span\{l_0, l_3\}$;

(2) $\{e_1, e_2\}$ *é uma base ortonormal de* E;

(3) $\{l_0, l_3\}$ *é uma base de tipo luz (ou nula) de* T, *de tal modo que* $l_0^0 = 1 = l_3^0$.

Proposição 3.1.1. *Se $\{l_0, e_1, e_2, l_3\}$ e $\{\tilde{l}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{l}_3\}$ são dois referenciais semi-rígidos associados a soma direta $\mathbb{R}^4_1 = E \oplus T$, com $T = E^\perp$, então $l_0 = \tilde{l}_0$ e $l_3 = \tilde{l}_3$.*

Consequentemente, os números complexos dados por

$$a(l_3) \doteq \frac{l_3^1 + il_3^2}{1 - l_3^3} \quad e \quad b(l_0) \doteq \frac{l_0^1 + il_0^2}{1 + l_0^3}$$

são univocamente determinados pela soma direta $\mathbb{R}^4_1 = E \oplus T$.

Prova: No plano de Lorentz T com a orientação induzida por $\partial_0 = (1, 0, 0, 0)$ existem apenas duas direções de tipo luz independentes, a saber, L_0 e L_3, portanto adicionando a condição

$$\langle L_0, \partial_0 \rangle = -1 = \langle L_3, \partial_0 \rangle,$$

obtemos uma única base $\{l_0, l_3\}$ para T, dada no item (3) da Definição 3.1.1. □

Corolário 3.1.1. *Sejam $\mathcal{M} = \{l_0, E_1, E_2, l_3\}$ e $\overline{\mathcal{M}} = \{l_0, V_1, V_2, l_3\}$ dois referenciais semi-rígidos associados à soma direta $\mathbb{R}^4_1 = E \oplus T$. Então, uma relação entre $\mathcal{M}$ e $\overline{\mathcal{M}}$ é obtida*

por meio da equação matricial

$$\begin{bmatrix} l_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ l_3 \end{bmatrix},$$

com $\vartheta \in \mathbb{R}$ *e tal que* $\langle E_1, V_1 \rangle = \cos\vartheta$.

Observação 3.1.1. *A matriz de ordem* 4, *denotada por* $\mathcal{M}(\vartheta)$, *que aparece no Corolário anterior, é um subgrupo a* 1*-parâmetro do grupo de isometrias de Minkowski de* $\mathbb{R}^4_1$ *e todos os fatos geométricos que veremos doravante são invariantes por este subgrupo. De fato, veremos que as funções complexas* $a(l_3)$ *e* $b(l_0)$ *determinam as propriedades geométricas de superfícies minimais de tipo espaço em* $\mathbb{R}^4_1$.

Proposição 3.1.2. *O referencial associado ao subespaço vetorial* E *pode ser tomado em função de* $a(p)$ *e* $b(p)$, *onde*

$$W(p) = (a(p) + b(p), 1 + a(p)b(p), i(1 - a(p)b(p)), a(p) - b(p)),$$

em cada ponto $p \in E$.

Prova: De fato, usando que $\langle W(p), \overline{W(p)} \rangle = 2|1 - a(p)\overline{b(p)}|^2$, segue-se que:

$$e_1(p) = \frac{W(p) + \overline{W(p)}}{2|1 - a(p)\overline{b(p)}|} \quad \text{e} \quad e_2(p) = \frac{W(p) - \overline{W(p)}}{2i|1 - a(p)\overline{b(p)}|}.$$

□

Na última seção do trabalho iremos apresentar alguns resultados que utilizam um importante operador definido no fibrado tangente das superfícies de tipo espaço em $\mathbb{R}^4_1$. Este operador é motivado pelas seguintes ideias:

Se $\mathcal{M}$ é um referencial semi-rígido conforme a Definição 3.1.1, então tomando $V = V^0 l_0 + V^1 e_1 + V^2 e_2 + V^3 l_3$, podemos definir uma transformação linear $L : \mathbb{R}^4_1 \longrightarrow E$ por

$$L(V) \doteq V^1 e_2 - V^2 e_1 = -V^2 e_1 + V^1 e_2.$$

A restrição ao plano de tipo espaço E nos dá um operador linear L_E satisfazendo as seguintes propriedades:

(1) $\langle L_E(V), V \rangle = 0$ e $\langle L_E(V), L_E(V) \rangle = \langle V, V \rangle$, para cada $V \in E$;

(2) $L_E(L_E(V)) = -V$, para cada $V \in E$;

(3) A base ordenada de E dada por $\{V, L_E(V)\}$ para cada $V \in E$ tal que $V \neq 0$ pertence a orientação definida pela base $\{e_1, e_2\}$ de E. De fato, $det[V L_E(V)]_{2\times 2} = \langle V, V \rangle$.

Agora, se pr_{12} denota a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^4_1$ sobre $E \subset \mathbb{R}^4_1$, então $pr_{12}(V^0 l_0 + V^1 e_1 + V^2 e_2 + V^3 l_3) = V^1 e_1 + V^2 e_2$ e ao tomarmos $L_E(V^1 e_1 + V^2 e_2) \doteq -V^2 e_1 + V^1 e_2$, fica claro que $L_E = L \circ pr_{12}$ e as propriedades (1), (2) e (3) acima nos dizem que L_E é uma única rotação positiva de $\pi/2$, uma isometria do plano de tipo espaço orientado $E \subset \mathbb{R}^4_1$.

Definição 3.1.2. *Se $TS \doteq \bigcup\{T_pS : p \in S\}$ denota o fibrado tangente associado a uma superfície de tipo espaço $S = (M, X)$ do espaço de Minkowski $\mathbb{R}^4_1$, a função*

$$J : TS \longrightarrow TS,$$

definida em cada ponto por $J(p) \doteq L_{T_pS}$ é um conjunto de rotações positivas de $\pi/2$ sobre TS.

3.2 Dois exemplos de superfícies com $K \neq 0$

Como estaremos explorando um pouco mais a representação $f_w = \mu W(a, b)$, onde (U, f) é uma superfície de tipo espaço minimal de $\mathbb{R}^4_1$ com a, b e $\mu \in \mathcal{H}(U, \mathbb{C})$, precisaremos de mais uma expressão para a curvatura de Gauss

$$K(f) = -\frac{1}{2\lambda^2}\Delta \ln \lambda^2 = -\frac{1}{\lambda^2}\Delta \ln \lambda.$$

Como $\lambda^2 = 4\mu\overline{\mu}(1 - a\overline{b})(1 - \overline{a}b)$ e $\Delta = 4\partial_{w\overline{w}}$, obtemos

$$K(f) = -\frac{1}{2\mu\overline{\mu}(1 - a\overline{b})(1 - \overline{a}b)}(\ln(1 - a\overline{b})(1 - \overline{a}b))_{w\overline{w}}.$$

Usando que

$$(\ln(1 - a\overline{b})(1 - \overline{a}b))_{w\overline{w}} = -\left(\frac{a_w\overline{b}}{1 - a\overline{b}}\right)_{\overline{w}} - \left(\frac{\overline{a}b_w}{1 - b\overline{a}}\right)_{\overline{w}}$$

e recordando que o Laplaceano do logaritmo do módulo de uma função holomorfa é zero, temos:

$$\begin{aligned} K(f) &= \frac{1}{2\mu\overline{\mu}(1 - a\overline{b})^3(1 - \overline{a}b)^3}(a_w\overline{b}_{\overline{w}}(1 - \overline{a}b)^2 + \overline{a}_{\overline{w}}b_w(1 - a\overline{b})^2) \\ &= \frac{\Re(a_w\overline{b}_{\overline{w}}(1 - \overline{a}b)^2)}{\mu\overline{\mu}(1 - a\overline{b})^3(1 - \overline{a}b)^3}. \end{aligned}$$

Primeiro caso:
Fixaremos nossa atenção em encontrar superfícies dadas por

$$X(x, y) = (A(x, y), x, y, B(x, y)), \quad \text{para todo} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

satisfazendo as equações (2.23), o que significa dizer que $X(\mathbb{R}^2) = S$ é um gráfico minimal de $\mathbb{R}^4_1$.

A questão é: Existem soluções não planas para este problema?

É o que analisamos a seguir.

3.2.1 Uma base ponto a ponto para o fibrado normal (primeiro caso)

Tomemos os seguintes campos de vetores normais ao longo de $S = X(\mathbb{R}^2)$:

$$N_1 = (1, A_x, A_y, 0) \quad \text{e} \quad N_2 = (0, -B_x, -B_y, 1),$$

usados na prova da Proposição 2.3.1.

Proposição 3.2.1. *A aplicação de Gauss de tipo espaço $\nu(x,y)$ para a superfície minimal $S \subset \mathbb{R}^4_1$ é dada por*

$$\nu(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+(B_x)^2+(B_y)^2}}(0,-B_x,-B_y,1).$$

Prova: Só precisamos conferir se a orientação de $\{N_1, N_2\}$ e a orientação de $\{\partial_0, \partial_3\}$ são compatíveis uma com a outra.

A compatibilidade das orientações segue-se das seguintes projeções dos vetores N_1 e N_2 : $(N_1^0, 0, 0, N_1^3) = \partial_0$ e $(N_2^0, 0, 0, N_2^3) = \partial_3$. □

Corolário 3.2.1. *A aplicação de Gauss $\nu : S \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{E}^3$ é tal que*

$$\nu^3 = \frac{1}{\sqrt{1+(B_x)^2+(B_y)^2}} > 0.$$

Em outras palavras, $\nu(S)$ mapeia apenas um hemisfério aberto da esfera $\mathbb{S}^2$.

Prova: É imediato a partir da proposição anterior. □

Assumimos agora que temos uma representação local (U, f) tal que $f(U) \subset S$ e

$$f_w = \mu(a+b, 1+ab, i(1-ab), a-b),$$

onde a, b, μ são funções holomorfas de U em $\mathbb{C}$. Além disso, assumimos que U é um subconjunto aberto conexo e simplesmente conexo de $\mathbb{C}$.

O fibrado normal de S possui uma base pontual de vetores de tipo luz dados por $\{L_3(a), L_0(b)\}$, através dos quais calculamos de modo elementar a componente ν^3 da aplicação de Gauss de tipo espaço $\nu(a,b)$.

Lema 3.2.1. *Para uma representação local em parâmetros isotérmicos (U, f) tal que $f(U) \subset S$, temos*

$$\nu^3(a,b) = \frac{1}{|1-\overline{a}b|\sqrt{1+|a|^2}\,\sqrt{1+|b|^2}}(1-|ab|^2).$$

Uma extensão maximal das funções holomorfas a, b está sujeita às desigualdades:

$$|1-\overline{a}b| \neq 0 \quad e \quad |ab|^2 \neq 1. \tag{3.1}$$

Prova: Tomando a normalização do vetor

$$N_3(a,b) = \frac{1}{1+b\overline{b}}L_0(b) - \frac{1}{1+a\overline{a}}L_3(a),$$

obtemos $\nu(a,b)$, pois $N_3^0(a,b) = 0$. Portanto, obtemos a componente $\nu^3(a,b)$ e as desigualdades em (3.1). □

A primeira desigualdade em (3.1) está relacionada ao funcional área $\sqrt{EG-F^2} = |\mu|\ |1-\overline{a}b|$. Desta forma, encontraremos uma condição necessária e suficiente para obter uma extensão maximal para $\sqrt{EG-F^2}$.

Corolário 3.2.2. *Se podemos estender a, b a todo o plano $\mathbb{C}$, então existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $a(w)b(w) = c$. Consequentemente: Se $a(w) = b(w)$ ou $a(w) = -b(w)$ para todo $w \in \mathbb{C}$, então $a(w) = \sqrt{c}$, isto é, $(\mathbb{C}, f)$ é um plano de tipo espaço de $\mathbb{R}^4_1$.*

Prova: Pelo lema anterior a função ab é limitada, uma vez que usando o resultado precedente, $\nu(a, b)$ mapeia apenas um hemisfério da esfera.

Assim, se ab é inteira e limitada, então pelo Teorema de Liouville, é constante. □

Observação 3.2.1. *Do Corolário 3.2.2, podemos encontrar um exemplo de um gráfico minimal $(\mathbb{C}, f)$ com curvatura de Gauss $K(f) \neq 0$. O conjunto dos pontos $p \in S$ para os quais $K(p) = 0$ não é todo o plano $\mathbb{C}$.*

Teorema 3.2.1. *Seja $a = a(w)$ uma função holomorfa definida em todo o plano $\mathbb{C}$ e tal que $a(w) \neq 0$ para cada $w \in \mathbb{C}$. Considere $c = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$ de tal modo que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 1$, e tome a função holomorfa b de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ dada por $b(w) = \frac{c}{a(w)}$. Então, a superfície dada por*

$$f(w) = X_0 + 2\Re \int_0^w \left(a(\xi) + \frac{c}{a(\xi)}, 1 + c, i(1 - c), a(\xi) - \frac{c}{a(\xi)} \right) d\xi, \tag{3.2}$$

é uma superfície minimal de $\mathbb{R}^4_1$, a qual é um gráfico do tipo

$$X(x, y) = (A(x, y), x, y, B(x, y)),$$

onde a transformação em coordenadas é dada por $x_w = (1 + c)$ e $y_w = i(1 - c)$.

Além disso, assumindo que $a(w)$ não é uma função constante, existe um ponto $p \in S$ tal que $K(p) \neq 0$. Como consequência, a superfície não pode estar contida em hiperplanos de $\mathbb{R}^4_1$.

Prova: Tomando $x(u, v) = 2[(1 + \alpha)u - \beta v]$ e $y(u, v) = 2[\beta u + (\alpha - 1)v]$, obtemos a equação da mudança de coordenadas, a saber,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{2[\alpha^2 + \beta^2 - 1]} \begin{bmatrix} \alpha - 1 & \beta \\ -\beta & \alpha + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Portanto, como a e b são funções holomorfas e $\alpha^2 + \beta^2 \neq 1$, temos que a equação (3.2) representa um gráfico minimal do primeiro tipo.

Como a métrica é dada por $\lambda^2 = 4|1 - \overline{a}c/a|^2$, segue que $\Delta \ln \lambda \neq 0$ nos pontos onde $a_w(w) \neq 0$. Então, usando que $K(f) = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta \ln \lambda$, segue-se que nestes pontos, $K(f) \neq 0$.

A seguir, pela integração obtemos as funções componentes $A(w) = f^0(w)$ e $B(w) = f^3(w)$, e pela transformação em coordenadas dada por (3.3), obtemos a representação explícita do gráfico.

Vejamos agora a propriedade espacial real de S. De fato, suponhamos por absurdo que exista um vetor $v = (v^0, v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^4_1$ tal que $\langle v, f_w \rangle = 0$. De $-v^0(a + b) + v^1(1 + ab) + iv^2(1 - ab) + v^3(a - b) = 0$, obtemos

$$(v^3 - v^0)a - (v^3 + v^0)b + (v^1 + iv^2) + ab(v^1 - iv^2) = 0.$$

Definindo $T \doteq v^3 - v^0$, $S \doteq v^3 + v^0$ e $Z \doteq v^1 + iv^2$, obtemos $(Ta + Z) + b(a\overline{Z} - S) = 0$,

o que implica

$$b = \frac{Ta + Z}{S - a\overline{Z}} = \frac{c}{a} \quad \text{se, e somente se,} \quad T = 0 = S \quad \text{e} \quad c = -\frac{1}{|Z|^2} Z^2.$$

De $T = v^0 - v^3 = 0$, $S = v^0 + v^3 = 0$ e usando que $Z^2 = -c|Z|^2$, segue-se que v possui alguma componente imaginária e $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. □

Segundo caso:
Neste ponto, focaremos a nossa atenção em encontrar superfícies dadas por

$$X(x, y) = (x, A(x, y), B(x, y), y), \quad \text{para todo} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

satisfazendo as equações (2.23), o que significa dizer que $X(\mathbb{R}^2) = S$ é um gráfico minimal de $\mathbb{R}^4_1$.
Novamente, a questão é: Existem soluções não planas para este problema?
É o que vamos analisar a seguir.

3.2.2 Uma base ponto a ponto para o fibrado normal (segundo caso)

Tomemos em cada ponto de S a matriz de dX_p :

$$[dX_p]^t = \begin{bmatrix} 1 & A_x & B_x & 0 \\ 0 & A_y & B_y & 1 \end{bmatrix}.$$

A aplicação de Gauss de tipo espaço unitária $\nu = \nu(x, y)$ é dada por

$$\nu(x, y) = \frac{1}{\sqrt{J^2 + (B_x)^2 + (A_x)^2}}(0, B_x, -A_x, J), \quad \text{onde} \quad J = \frac{\partial(A, B)}{\partial(x, y)} = A_x B_y - A_y B_x.$$

Como não podemos controlar as funções ν^i, com $i = 1, 2, 3$, trabalharemos com a forma de Weierstrass

$$f_w = \mu(a + b, 1 + ab, i(1 - ab), a - b)$$

e a transformação em coordenadas

$$x_w = \mu(a + b) \ \text{ e } \ y_w = \mu(a - b), \quad \text{onde} \quad x_w y_{\overline{w}} - x_{\overline{w}} y_w = 2|\mu|^2 \, (\overline{a}b - a\overline{b}). \tag{3.4}$$

Lema 3.2.2. *Seja Φ uma transformação em coordenadas dada pelas equações em (3.4). A função Jacobiana*

$$x_w y_{\overline{w}} - x_{\overline{w}} y_w = 2|\mu|^2 \, (\overline{a}b - a\overline{b})$$

não se anula em um domínio $\tilde{U} \subset M$ se, e somente se,

$$\Im\left(\frac{a(w)}{b(w)}\right) \neq 0 \quad e \quad a(w) \neq 0 \neq b(w) \quad \text{para cada} \quad w \in \tilde{U}. \tag{3.5}$$

Uma extensão maximal das funções holomorfas a, b está sujeita à desigualdade $|1 - \overline{a}b| \neq 0$ e às dadas em (3.5).

Prova: Primeiramente, vemos que $a(w) \neq 0 \neq b(w)$ é uma condição necessária.

Além disso,

$$\frac{\overline{a(w)}b(w) - a(w)\overline{b(w)}}{b(w)\overline{b(w)}} = \frac{\overline{a(w)}}{\overline{b(w)}} - \frac{a(w)}{b(w)} = -2i\Im\left(\frac{a(w)}{b(w)}\right),$$

para cada $w \in \tilde{U}$.

Assim, usando que o Jacobiano não se anula em $\tilde{U}$, temos que $\Im\left(\frac{a(w)}{b(w)}\right) \neq 0$. A recíproca segue de modo imediato. □

Corolário 3.2.3. *Suponha que as funções holomorfas a, b podem ser estendidas a todo o plano $\mathbb{C}$. Então existe uma constante $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$, tal que $b(w) = ca(w)$.*

Como consequência, $f_w = \mu(a(1+c), 1+ca^2, i(1-ca^2), a(1-c))$, o que implica

$$x(w) = 2\Re\left((1+c)\int_0^w \mu(\xi)a(\xi)d\xi\right) \quad e \quad y(w) = 2\Re\left((1-c)\int_0^w \mu(\xi)a(\xi)d\xi\right).$$

Tomando $P(w) + iQ(w) = \int_0^w \mu(\xi)a(\xi)d\xi$ e $c = \alpha + i\beta$, obtemos

$$x(w) = 2((1+\alpha)P(w) - \beta Q(w)) \quad e \quad y(w) = 2((1-\alpha)P(w) + \beta Q(w)).$$

Prova: Pelo lema anterior, a função $\frac{a}{b}$ tem parte imaginária diferente de 0 quando é inteira. Logo, sua imagem não cobre todo o plano complexo.

Assim, pelo Pequeno Teorema de Picard, $\frac{a}{b}$ é constante. □

Observação 3.2.2. *O Corolário 3.2.3 apresenta uma certa fraqueza no seguinte sentido: A equação (3.3) no Teorema 3.2.1 produz uma aplicação inversa, que é uma função linear, portanto podemos usar este teorema para construir gráficos sobre todo o $\mathbb{C}$. O Corolário 3.2.3 não garante que temos gráficos sobre todo o plano complexo, uma vez que podemos ter ramificações. Por exemplo, tomando $a(w) = e^w$, obtemos $P(u, v) = e^u \cos v$ e $Q(u, v) = e^u \sin v$.*

Se uma dada função holomorfa $a = a(w)$ é definida em todo o plano $\mathbb{C}$, de tal modo que $a(w) \neq 0$ para todo $w \in \mathbb{C}$, então podemos tomar para cada $w \in \mathbb{C}$, a função holomorfa $\mu(w) = 1/a(w)$, donde obtemos que $f_w = \mu W(a(w), ca(w))$ é definida por cada constante $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$.

À vista disto, temos o seguinte resultado que produz exemplos de gráficos minimais inteiros do segundo tipo.

Teorema 3.2.2. *Seja $a = a(w)$ uma função holomorfa definida em todo o plano $\mathbb{C}$ e tal que $a(w) \neq 0$ para cada $w \in \mathbb{C}$. Considere $c = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

Se para cada $w \in \mathbb{C}$, tomarmos $b(w) = ca(w)$ e $\mu(w) = \frac{1}{a(w)}$, então a superfície dada por

$$f(w) = X_0 + 2\Re\int_0^w \left(1 + c, \frac{1}{a(\xi)} + ca(\xi), i\left(\frac{1}{a(\xi)} - ca(\xi)\right), 1 - c\right) d\xi, \tag{3.6}$$

é uma superfície minimal de $\mathbb{R}^4_1$, a qual é um gráfico do tipo

$$X(x, y) = (x, A(x, y), B(x, y), y),$$

onde a transformação em coordenadas é dada por $x_w = (1 + c)$ e $y_w = (1 - c)$.

Além disso, a curvatura de Gauss $K(f)(w) = 0$ se, e somente se, $a'(w) = 0$. Assumindo que $a(w)$ não é uma função constante, existe um ponto $p \in S$ tal que $K(p) \neq 0$.

Novamente, não existe um hiperplano contendo a superfície S.

Prova: Como, por hipótese, $c \notin \mathbb{R}$, não podemos ter $x_w y_{\overline{w}} - x_{\overline{w}} y_w = 0$.

Tomando $x(u,v) = 2\Re(((1+\alpha)+i\beta)(u+iv)) = 2((1+\alpha)u - \beta v)$ e $y(u,v) = 2((1-\alpha)u + \beta v)$, obtemos a equação da mudança de coordenadas, a saber,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{4\beta} \begin{bmatrix} \beta & \beta \\ \alpha - 1 & \alpha + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Novamente, é impossível obter um vetor de tipo tempo $v \in \mathbb{R}^4_1$ tal que $\langle v, f_w \rangle = 0$. □

Observação 3.2.3. *Em ambos os Teoremas 3.2.1 e 3.2.2, precisamos ter especial atenção com relação ao fator de integração μ, pois sua composição com a transformação em coordenadas pode ocorrer de tal modo a produzir ramificações.*

Exemplo 3.2.1. *Considere o gráfico minimal do segundo tipo dado por: $a = e^w$ e $b = e^{i\theta}a$, para cada $w \in \mathbb{C}$ e com a restrição $0 \neq \theta \neq \pi$. A aplicação de Gauss generalizada é dada por*

$$W(a,b) = ((1+e^{i\theta})e^w, 1 + e^{i\theta}e^{2w}, i(1 - e^{i\theta}e^{2w}), (1 - e^{i\theta})e^w),$$

e o fator de integração é dado por $\mu = e^{-w}/4$. Desta forma, temos a representação integral do Teorema 3.2.2. Assim, obtemos que:

$$f(w) = \frac{1}{2}\Re \int_0^w \left(1 + e^{i\theta}, e^{-\xi} + e^{i\theta}e^{\xi}, i(e^{-\xi} - e^{i\theta}e^{\xi}), 1 - e^{i\theta}\right) d\xi.$$

No seguinte exemplo, o domínio M de S precisa ser um disco D.

Exemplo 3.2.2. *Considere o gráfico minimal do primeiro tipo dado por: $a = e^w$ e $b = e^{i\theta}/a$, para cada $w \in D$ e cada $\theta \in]0, \pi[$. Como $|c| = |e^{i\theta}| = 1$, precisamos restringir o domínio de e^w para obter um gráfico. A aplicação de Gauss generalizada é dada por*

$$W(a,b) = (e^w + e^{i\theta}e^{-w}, 1 + e^{i\theta}, i(1 - e^{i\theta}), e^w - e^{i\theta}e^{-w}),$$

e o fator de integração é dado por $\mu = 1/4$. Deste modo, temos a representação integral do Teorema 3.2.1. Assim, obtemos que:

$$f(w) = \frac{1}{2}\Re \int_0^w (e^{\xi} + e^{i\theta}e^{-\xi}, 1 + e^{i\theta}, i(1 - e^{i\theta}), e^{\xi} - e^{i\theta}e^{-\xi}) d\xi.$$

Estes dois últimos exemplos estão intimamente relacionados com o Catenóide e seu conjugado, o Helicóide, superfícies em $\mathbb{E}^3$ e em $\mathbb{L}^3$. Entretanto, para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, não temos superfícies do tipo gráficos dados por $(\mathbb{C}, f)$.

3.3 A construção da superfície conjugada (M, Y)

Nesta última seção iremos definir um operador em TS para uma superfície minimal de tipo espaço (M, X) de $\mathbb{R}^4_1$. Este operador é uma variação do chamado tensor covariante alternado de Levi-Civita (2-forma) da superfície S.

Definição 3.3.1. *Seja (M, X) uma superfície de tipo espaço com elemento de linha $ds^2(X) = Edx^2+2Fdxdy+Gdy^2$ e TS o seu fibrado tangente, onde em cada ponto $p \in S$, $\{X_x(p), X_y(p)\}$ é uma base de T_pS.*

Definimos a aplicação $J : TS \longrightarrow TS$ por

$$J(V) \doteq \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\langle X_x, V \rangle X_y - \langle X_y, V \rangle X_x \right), \quad \text{para todo } V \in TS. \tag{3.8}$$

Proposição 3.3.1. *Seja $J : TS \longrightarrow TS$ a função definida em (3.8). Então, para todo $V \in TS$, a função J satisfaz as seguintes identidades:*

$$\langle V, J(V) \rangle = 0, \quad \langle J(V), J(V) \rangle = \langle V, V \rangle \quad e \quad J(J(V)) = -V.$$

Prova: A primeira relação segue de $\sqrt{EG - F^2}\, \langle V, J(V) \rangle = \langle X_x, V \rangle \langle X_y, V \rangle - \langle X_y, V \rangle \langle X_x, V \rangle = 0$.

A seguir, calculamos as seguintes relações que serão úteis para a prova das outras sentenças:

$$J(X_x) = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (EX_y - FX_x) \quad \text{e} \quad J(X_y) = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (FX_y - GX_x). \tag{3.9}$$

Agora, da bilinearidade ponto a ponto de $\langle\ ,\ \rangle$, segue-se a linearidade ponto a ponto de J. Portanto, das relações (3.9), obtemos que

$$\langle J(X_x), J(X_x) \rangle = \frac{1}{EG - F^2} (E^2G - 2EF^2 + F^2E) = E,$$

e analogamente $\langle J(X_y), J(X_y) \rangle = G$ e $\langle J(X_x), J(X_y) \rangle = F$. Assim, temos a segunda assertiva.

A última relação segue do seguinte:

$$\begin{aligned} J(J(X_x)) &= J\left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (EX_y - FX_x) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \{ \langle X_x, J(X_x) \rangle X_y - \langle X_y, J(X_x) \rangle X_x \} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \{ -\langle X_y, -FX_x + EX_y \rangle X_x \} \\ &= -X_x, \end{aligned}$$

onde usamos que $\langle V, J(V) \rangle = 0$. De modo análogo, obtemos $J(J(X_y)) = -X_y$. □

Observação 3.3.1. *Recordemos a seguinte propriedade a respeito de 1-formas: Se $d\alpha(x, y) = \alpha_x dx + \alpha_y dy$, onde $\alpha(x, y)$ é uma função de $\mathcal{H}(M)$ e $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, então segue-se de $dx = x_u du + x_v dv$ e $dy = y_u du + y_v dv$ que $d\alpha(x(u, v), y(u, v)) = (\alpha_x x_u + \alpha_y y_u)du + (\alpha_x x_v + \alpha_y y_v)dv$.*

Se $S = (M, X)$ é uma superfície de tipo espaço de $\mathbb{R}^4_1$ e a 1-forma vetorial associada a S é dada por $\beta = X_x dx + X_y dy$, então definimos a 1-forma $J(\beta)$ por

$$J(\beta) \doteq J(X_x)dx + J(X_y)dy. \tag{3.10}$$

3.3.1 Outra forma de obter o operador J

Uma vez que 1-formas fechadas em um subconjunto aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$ são exatas, precisamos do seguinte resultado para construir a superfície conjugada de $S = (M, X)$.

Primeiro, seja $\vec{u} = \mathfrak{X}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ o produto exterior de três vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^4_1$. Usando, por definição, que $\Omega(\mathbb{R}^4_1) = (-dx^0) \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ é a forma volume (4-tensor de Levi-Civita alternado), temos que $\vec{u} = \mathfrak{X}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ é definido, para todo $\vec{w} \in \mathbb{R}^4_1$, por

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \Omega(\mathbb{R}^4_1)(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{w}).$$

O operador J é equivalente a $J(V) = \mathfrak{X}(\tau, \nu, V)$. De fato, temos:

Lema 3.3.1. *Usando o produto exterior em $\mathbb{R}^4_1$, para cada campo de vetores $P \in TS$, seja $Q \in TS$ o campo de vetores definido por*

$$Q \doteq \mathfrak{X}(\tau, \nu, P) = \tau \times \nu \times P.$$

Então, P e Q são relacionados pela condição $Q = J(P)$.

Prova: Como $\{\tau(p), \nu(p)\}_{p \in S}$ é uma base ortonormal pontual do fibrado normal NS com orientação compatível dada pela forma volume de $\mathbb{R}^4_1$, segue-se que $\mathfrak{X}(\tau(p), \nu(p), P(p)) = Q(p) \in T_pS$ é um vetor ortogonal a $P(p)$, tal que $||Q(p)|| = ||P(p)||$ e preservando a orientação de T_pS. Portanto, $Q = J(P)$. □

As equações (3.9) correspondem a uma extensão à $\mathbb{R}^4_1$ do conjunto de equações que encontramos em [Rad71, p. 22], numeradas de (2.5) à (2.10), relativas ao problema

$$\iint \sqrt{EG - F^2} = \text{mínima},$$

usando notação vetorial para representar o conjunto de quatro equações das coordenadas de X.

Teorema 3.3.1. *Seja $S = (M, X)$ uma superfície de tipo espaço de $\mathbb{R}^4_1$ tal que a 1-forma associada a S é dada por $\beta = X_x dx + X_y dy$. Então*

$$J(\beta) = \frac{-F dx - G dy}{\sqrt{EG - F^2}} X_x + \frac{E dx + F dy}{\sqrt{EG - F^2}} X_y. \tag{3.11}$$

Ademais, a 1-forma $J(\beta)$ é fechada se, e somente se, (M, X) é uma superfície de tipo espaço minimal.

Prova: A equação (3.11) é obtida de modo elementar usando as equações (3.9) e (3.10).

Usando a representação do operador J como um produto exterior, obtemos que

$$J(\beta) = \mathfrak{X}(\tau, \nu, X_x dx + X_y dy) = \tau \times \nu \times X_x dx + \tau \times \nu \times X_y dy.$$

Agora, para a derivada exterior, temos: $dJ(\beta) = (d\tau) \times \nu \times \beta + \tau \times (d\nu) \times \beta$, pois $d\beta = 0$. Então:

$$dJ(\beta) = (d\tau) \times \nu \times (X_x dx + X_y dy) + \tau \times (d\nu) \times (X_x dx + X_y dy).$$

A seguir, calcularemos as parcelas do lado direito da última igualdade usando as fórmulas de Weingarten (2.7) e (2.8).

Como $d\tau = \tau_x dx + \tau_y dy$ e $d\nu = \nu_x dx + \nu_y dy$, pelas propriedades de anti-comutatividade do produto exterior em $\mathbb{R}^4_1$ e do produto exterior de 1-formas, obtemos:

$$((d\tau)\times\nu\times X_x)dx = h^2_2(X_x\times\nu\times X_y)(dx\wedge dy) \quad \text{e} \quad ((d\tau)\times\nu\times X_y)dy = h^1_1(X_x\times\nu\times X_y)(dx\wedge dy).$$

Analogamente para ν, obtemos:

$$(\tau\times(d\nu)\times X_x)dx = -n^2_2(\tau\times X_x\times X_y)(dx\wedge dy) \quad \text{e} \quad (\tau\times(d\nu)\times X_y)dy = -n^1_1(\tau\times X_x\times X_y)(dx\wedge dy).$$

Portanto:

(1) $(d\tau)\times\nu\times\beta = (h^1_1 + h^2_2)(X_x\times\nu\times X_y)(dx\wedge dy)$,

(2) $\tau\times(d\nu)\times\beta = -(n^1_1 + n^2_2)(\tau\times X_x\times X_y)(dx\wedge dy)$.

Por fim, utilizando as equações de Gauss (2.6), a definição do vetor curvatura média $2H_X = \Psi^1_1 + \Psi^2_2$, bem como as relações $X_x\times\nu\times X_y = -\sqrt{EG-F^2}\ \tau$ e $\tau\times X_x\times X_y = \sqrt{EG-F^2}\ \nu$, segue-se a relação:

$$\begin{aligned} dJ(\beta) &= -\sqrt{EG-F^2}\,((h^1_1+h^2_2)\tau + (n^1_1+n^2_2)\nu)dx\wedge dy \\ &= -(\Psi^1_1+\Psi^2_2)\sqrt{EG-F^2}\,dx\wedge dy \\ &= -2H_X dArea, \end{aligned} \tag{3.12}$$

a qual mostra que $dJ(\beta) = 0$ se, e somente se, (M, X) é minimal. □

Corolário 3.3.1. *Sejam M um subconjunto aberto conexo e simplesmente conexo do plano $\mathbb{C}$ e (M, X) uma solução da equação dos gráficos minimais (2.23). A equação de representação integral (2.11) pode ser estendida a $Z = X + iY \in \mathbb{C}^4$ por*

$$Z(x,y) = Z(x_0,y_0) + \int_{z_0}^{z} \beta + iJ(\beta), \tag{3.13}$$

onde temos que

$$Y(x,y) = Y(x_0,y_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{-Fdx - Gdy}{\sqrt{EG-F^2}}\,X_x + \frac{Edx+Fdy}{\sqrt{EG-F^2}}\,X_y \tag{3.14}$$

nos fornece uma superfície de tipo espaço minimal (conjugada) (M, Y) de $\mathbb{R}^4_1$.

Prova: Utilizando que $J(dY) = J(J(dX)) = -dX = -(X_x dx + X_y dy)$ é uma 1-forma fechada, pelo Teorema anterior, segue-se que $H_Y(p) = 0$ para cada $p \in M$. □

Concluímos esta subseção apresentando alguns exemplos envolvendo o uso do operador J.

Exemplo 3.3.1. *Seja $X(x,y) = (0, x\cos y, x\sin y, y)$ um Helicóide paramétrico de $\mathbb{E}^3$. A superfície conjugada dada pela equação (3.14) com $Y(0,0) = (0,0,1,0)$ é o Catenóide paramétrico dado por*

$$Y(x,y) = (0, -\sqrt{1+x^2}\,\sin y, \sqrt{1+x^2}\,\cos y, \ln(x+\sqrt{1+x^2})). \tag{3.15}$$

De fato, como $X_x = (0, \cos y, \sin y, 0)$ e $X_y = (0, -x\sin y, x\cos y, 1)$ segue-se que $E = 1$, $F = 0$ e $G = 1 + x^2$. Calculando dY na integral de linha da equação (3.14), obtemos

$$dY = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(0, -x\sin y, x\cos y, 1)dx - \sqrt{1+x^2}(0, \cos y, \sin y, 0)dy,$$

donde a integração nos dá o Catenóide $(\mathbb{R}^2, Y(x,y))$ em (3.15).

Além disso, se $x \geq 0$, então temos a parte que corresponde a $Y^3 \geq 0$ e se $x \leq 0$, então temos a parte que corresponde a $Y^3 \leq 0$. Ambas as superfícies $(\mathbb{R}^2, X)$ e a sua conjugada $(\mathbb{R}^2, Y(x,y))$ são ramificadas.

Se tomarmos $x = \sinh u$ e $y = v$, então obtemos (omitindo a primeira coordenada)

$$\tilde{X}(u,v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v) \ \text{ e } \ \tilde{Y}(u,v) = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, u),$$

em coordenadas isotérmicas.

Exemplo 3.3.2. *Seja $w = f(\sqrt{u^2+v^2})$ uma superfície de rotação de $\mathbb{E}^3$ em coordenadas polares parametrizada por*

$$X(x,y) = (0, x\cos y, x\sin y, f(x)).$$

Como $X_x = (0, \cos y, \sin y, f'(x))$ e $X_y = (0, -x\sin y, x\cos y, 0)$, obtemos

$$E(x,y) = 1 + (f'(x))^2, \ \ G(x,y) = x^2, \ \ F(x,y) = 0, \ \ e \ \ W = x\sqrt{1+(f'(x))^2}.$$

Para $\beta = X_x dx + X_y dy$, aplicando o operador J, temos:

$$J(\beta) = \left(\frac{E}{W}X_y\right)dx - \left(\frac{G}{W}X_x\right)dy,$$

que para ser uma 1-forma vetorial fechada precisamos ter a última coordenada de $J(\beta)$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{G}{W}f'(x)\right) = 0, \quad \text{o que implica} \quad \frac{xf'}{\sqrt{1+(f')^2}} = k \ \ \text{ou} \ \ (x^2-k^2)(f')^2 = k^2$$

para alguma constante $k \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$f(x) = \pm k \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-k^2}} = \pm k \ln(x + \sqrt{x^2-k^2}) + c$$

para constantes $k, c \in \mathbb{R}$ com $k \neq 0$. As superfícies são subconjuntos abertos de um Catenóide. Tomando $x = k\cosh t$, obtemos

$$\tilde{X}(t,y) = k(0, \cosh t \cos y, \cosh t \sin y, u) + p_0.$$

Exemplo 3.3.3. *Seja $X(x,y) = (x\cosh y, x\sinh y, f(x), 0)$ um "tipo de gráfico de rotação hiperbólico" em $\mathbb{R}^3_1$ munido de coordenadas polares hiperbólicas.*

Como $X_x = (\cosh y, \sinh y, f'(x), 0)$ e $X_y = (x\sinh y, x\cosh y, 0, 0)$, obtemos

$$E(x,y) = -1 + (f'(x))^2 > 0, \quad F(x,y) = 0, \quad G(x,y) = x^2 > 0 \quad e \quad W = x\sqrt{(f')^2 - 1}.$$

Portanto, aplicando o operador J, a condição necessária para se obter uma superfície

minimal é que $dJ(\beta) = dJ(dX) = 0$.

O cálculo da coordenada Y^2 *fornece-nos a equação*

$$\frac{xf'}{\sqrt{-1+(f')^2}} = k \quad ou \quad (k^2 - x^2)(f')^2 = k^2,$$

com $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* $|x| < |k|$. *Por meio da integração direta, temos*

$$f(x) = b + (\pm k) \arcsin(x/k),$$

onde assumimos que $k > 0$ *e* $b = 0$. *Assim, obtemos a superfície paramétrica dada por*

$$X(x, y) = (x \cosh y, x \sinh y, k \arcsin(x/k), 0).$$

Tomando $x = k \sin u$ *e* $y = v$, *temos a superfície paramétrica minimal correspondente com parâmetros isotérmicos dada por*

$$f(u, v) = k(\sin u \cosh v, \sin u \sinh v, u, 0),$$

onde $E(u, v) = k^2 \sin^2 u = G(u, v)$ *e singularidades luz para* $f_u(u, v)$ *quando* $u = n\pi$, *com* $n \in \mathbb{Z}$.

Similar a esta superfície, temos a superfície dada por

$$g(u, v) = k(\cos u \cosh v, \cos u \sinh v, v, 0),$$

a qual é uma superfície minimal regrada, com o mesmo tensor métrico, um tipo de superfície helicoidal hiperbólica de $\mathbb{R}^4_1$.

3.3.2 Equações de Cauchy-Riemann sobre (M, X)

Consideremos que $f(U) \subset X(M)$ é uma superfície com parâmetros isotérmicos $w = (u, v) \in U$, e então podemos escrever $X(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$. Portanto, temos que:

$$X_x = u_x f_u + v_x f_v \quad \text{e} \quad X_y = u_y f_u + v_y f_v.$$

Lema 3.3.2. *Para cada solução local* $(\tilde{U}, f)$ *em uma vizinhança* $\tilde{U} \subset M$ *de um ponto* $p \in M$, *da equação*

$$w_y = \alpha(x, y)\, w_x, \quad onde \quad \alpha(x, y) = \frac{F(x, y) + i\sqrt{E(x, y)G(x, y) - F^2(x, y)}}{E(x, y)}, \tag{3.16}$$

temos uma superfície isotérmica paramétrica $(\tilde{U}, f)$ *de* (M, X) *tal que* $X(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$. *Além disso,* $\alpha\overline{\alpha} = G/E$.

Prova: Seja $W = \sqrt{EG - F^2}$ a função área em coordenadas $z = x + iy \in U$. Aplicando o operador J, temos que

$$J(X_x) = u_x f_v - v_x f_u = \frac{E}{W}(u_y f_u + v_y f_v) - \frac{F}{W}(u_x f_u + v_x f_v),$$

onde usamos a equação (3.9) e o fato de que $J(f_u) = f_v$. Desta última igualdade, obtemos as seguintes equações com representação matricial:

$$\begin{bmatrix} u_y \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F/E & -W/E \\ W/E & F/E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} = \frac{E}{G} \begin{bmatrix} F/E & W/E \\ -W/E & F/E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y \\ v_y \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

As matrizes quadradas de ordem 2 destas equações nada mais são do que a representação matricial de um número complexo. Portanto, podemos escrever

$$u_y + iv_y = \frac{F + iW}{E}\,(u_x + iv_x),$$

que é a equação (3.16). □

Segue abaixo o nosso primeiro corolário, o qual identificamos como uma equação do tipo Cauchy-Riemann para (M, X):

Corolário 3.3.2. *Se uma função $h = \varphi + i\psi : S \longrightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa sobre a superfície de Riemann $S = X(M)$, então temos que*

$$\begin{bmatrix} \varphi_y \\ \psi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F/E & -W/E \\ W/E & F/E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_x \\ \psi_x \end{bmatrix} \quad ou \quad h_y = \alpha h_x.$$

Prova: Em uma vizinhança isotérmica $(U, \tilde{h})$, a função $\tilde{h}(u, v)$ é holomorfa no sentido de variáveis complexas se, e somente se, $h(x, y)$ é holomorfa sobre S. Isto implica que

$$h_x = \tilde{h}_u(u_x + iv_x) \quad \text{e} \quad h_y = \tilde{h}_u(u_y + iv_y),$$

pois $\tilde{h}_u = -i\tilde{h}_v$ ocorre para funções $\mathbb{C}$-holomorfas. Assim, $h_y = \alpha h_x$ segue da definição da função $\alpha(x, y)$. □

Para o próximo resultado, estaremos relacionando a vizinhança isotérmica $(U, \tilde{f})$ com os dados de Weierstrass $a(w)$ e $b(w)$ para gráficos de tipo espaço em $\mathbb{R}^4_1$.

De fato, fixando o referencial semi-rígido associado a (M, X) dado por

$$\mathcal{M}_0 = \{l_0(b(p)), e_1(p), e_2(p), l_3(a(p))\},$$

onde

$$e_1(p) = \frac{1}{\sqrt{E}} X_x \quad \text{e} \quad e_2 = J(e_1) = \frac{1}{\sqrt{E}} J(X_x),$$

obtemos o seguinte resultado:

Proposição 3.3.2. *Seja $S = (M, X)$ uma solução da equação dos gráficos minimais em $\mathbb{R}^4_1$ e localmente assuma que $(\tilde{U}, \tilde{f})$ é uma dada superfície isotérmica contida em S. Tomando uma função a valores reais dada por $r(u, v)$ e o referencial semi-rígido dado por $\mathcal{M}(\vartheta) = \{l_0(b), e_1, e_2, l_3(a)\}_{(u,v)}$ e associado a $f_w(w) = \mu(w)W(a(w), b(w)) = r(w)(\hat{e}_1(w) - i\hat{e}_2(w))$, obtemos a relação*

$$\hat{e}_1(w) - i\hat{e}_2(w) = (\cos\vartheta\, e_1 + \sin\vartheta\, e_2) - i(-\sin\vartheta\, e_1 + \cos\vartheta\, e_2) = e^{i\vartheta}(e_1 - ie_2).$$

Segue-se da Proposição 3.3.2 que os sistemas de coordenadas (M, X), (U, f) e $(\tilde{U}, \tilde{f})$ ao

redor de um ponto $p \in f(U) \cap \tilde{f}(\tilde{U})$ relacionam-se entre si pelas equações

$$X(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)) = f \circ \Phi(x,y), \quad X(x,y) = \tilde{f}(\tilde{u}(x,y), \tilde{v}(x,y)) = \tilde{f} \circ \tilde{\Phi}(x,y),$$

e então a função de transição é dada por

$$f \circ \Phi(x,y) = \tilde{f} \circ \tilde{\Phi}, \quad \text{o que implica} \quad \Psi = \tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1} = \tilde{f}^{-1} \circ f. \tag{3.18}$$

Por outro lado, aplicando a Proposição 3.3.2 a f_w e $\tilde{f}_{\tilde{w}}$, obtemos:

$$\frac{1}{\hat{r}} f_w = e^{i\hat{\phi}}(\hat{e}_1 - i\hat{e}_2) \quad \text{com} \quad \frac{1}{\tilde{r}} \tilde{f}_{\tilde{w}} = e^{i\tilde{\phi}}(\tilde{e}_1 - i\tilde{e}_2),$$

portanto estas funções angulares relacionam-se uma à outra pela equação:

$$\hat{\phi}(u,v) - \tilde{\phi} \circ \Psi(u,v) = \hat{\vartheta}(u,v) - \tilde{\vartheta} \circ \Psi(u,v). \tag{3.19}$$

Agora, temos os seguintes fatos, advindos da relação (3.19):

(1) Se duas funções holomorfas coincidem ao longo de um arco de Jordan, então elas coincidem ao longo de toda componente conexa deste arco;

De (1), obtemos:

(2) Se (U, f) e $(\tilde{U}, \tilde{f})$ coincidem ao longo de um arco de Jordan em S, então eles coincidem ao longo do subconjunto aberto $f(U) \cap \tilde{f}(\tilde{U})$;

(3) As aplicações de transição entre dois sistemas de coordenadas isotérmicos de uma superfície de tipo espaço em $\mathbb{R}^4_1$ são funções holomorfas no sentido da análise complexa;

(4) Cada função holomorfa $h : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow V \subset \mathbb{C}$ pode ser vista como uma transformação $\mathbb{C}$-linear pontual $dh_{z_0} : T_{z_0}\mathbb{C} \longrightarrow T_{h(z_0)}\mathbb{C}$ que preserva a orientação dos ângulos.

Novamente, da relação (3.19) segue-se o seguinte fato:

Lema 3.3.3. *A função ângulo $\tilde{\vartheta} - \vartheta$ determina a aplicação de transição entre as parametrizações conformes (U, f) e $(\tilde{U}, \tilde{f})$ em uma vizinhança $f(U) \cap \tilde{f}(\tilde{U}) \subset S$ ao redor de um ponto $p \in S$.*

Do Lema 3.3.3 segue-se o seguinte resultado de extensão de soluções locais:

Teorema 3.3.2. *Se duas soluções locais da equação (3.16) ao redor de um ponto $p \in S$ são dadas por $w_y = \alpha w_x$, $\tilde{w}_y = \alpha \tilde{w}_x$ e tais que $w_x = \tilde{w}_x$, então $w_y = \tilde{w}_y$.*

Consequentemente, toda solução local da equação (3.16) pode ser estendida continuamente sempre que $E(x,y) > 0$ e $\sqrt{EG - F^2}(x,y) > 0$.

Prova: Como $w_y - \tilde{w}_y = \alpha(w_x - \tilde{w}_x) = \alpha 0 = 0$, a primeira assertiva segue.

Por outro lado, ao redor de um ponto $p \in S$ podemos tomar a curva coordenada $c(x) = X(x, y_0)$, onde $c'(x) = \sqrt{E(x,y_0)} e_1(x, y_0)$ usando o referencial $\mathcal{M}_0$.

Tomando esta curva como condição inicial para o problema de Cauchy dado pela equação (3.16) e $c'(x)$, temos uma única solução ao longo desta curva que pode ser estendida sempre que $c'(x) \neq 0$, isto é, sempre que $E(x,y) > 0$ e $\sqrt{EG - F^2}(x,y) > 0$. □

Para finalizar, fazemos menção da equação (8) de J.C.C. Nitsche tratada em [Nit65, p. 23]. Observamos que as soluções das equações (3.17) estão intimamente relacionadas com a superfície conjugada $(M, Y(x,y))$. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.3. *As soluções das equações (3.17) são dadas pelas equações de Nitsche (3.14)*

$$\begin{array}{l} u = u(x,y) = x + \int_{z_0}^{z} \frac{Edx+Fdy}{W} \\ v = v(x,y) = y + \int_{z_0}^{z} \frac{Fdx+Gdy}{W}. \end{array}$$

Destas equações, podemos obter coordenadas isotérmicas globais (U, f) para a superfície $S = X(M)$.

Prova: Primeiramente, segue-se de

$$u_x = \frac{W+E}{W}, \quad u_y = \frac{F}{W}, \quad v_x = \frac{F}{W} \quad \text{e} \quad v_y = \frac{W+G}{W}$$

a validade das equações matriciais (3.17). De fato, lembrando que $W^2 + F^2 = EG$, obtemos

$$\begin{bmatrix} F/W \\ (W+G)/W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F/E & -W/E \\ W/E & F/E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (E+W)/W \\ F/W \end{bmatrix}.$$

□

Concluímos o trabalho com o seguinte corolário acerca das equações de gráficos minimais em $\mathbb{R}^4_1$.

Corolário 3.3.3. *Se $S = (\mathbb{R}^2, X)$ é uma solução da equação dos gráficos minimais (2.23), então para todo ponto $p \in S$, as funções a e b são tais que: ou $b(p) = ca(p)$ com $c \notin \{-1, 1\}$ ou $a(p)b(p) = c$ com $\Im(c) \neq 0$, para alguma constante $c \in \mathbb{C}$.*

O Teorema de Bernstein e o Teorema de Calabi seguem do fato de que $c \neq 1$ e $c \neq -1$, e o nosso T'C para gráficos do segundo tipo segue de $\Im(c) \neq 0$.

Por fim, se existe uma subvariedade $S = (\mathbb{R}^2, X) \subset \mathbb{R}^4$ tal que com a métrica induzida de $\mathbb{R}^4_1$, é um gráfico de tipo espaço e solução de (2.23) em um subconjunto aberto conexo e simplesmente conexo $M \subset \mathbb{C}$ onde para algum ponto $p \in S$ a seguinte sentença não ocorre:

"ou $b(p) = ca(p)$ com $c \notin \{-1, 1\}$ ou $a(p)b(p) = c$ com $\Im(c) \neq 0$, para alguma constante $c \in \mathbb{C}$,"

então os pontos $X(x, y)$ tais que $EG - F^2 = 0$, são pontos onde os planos tangentes de $X(\mathbb{R}^2)$ são tangentes ao cone de luz $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4_1$.

Observamos que os pontos onde ocorre a última condição do Corolário 3.3.3 são conhecidos como singularidades de tipo luz, como definidas em [Kob83].

Referências Bibliográficas

[Ber15] S.N. Bernstein. Sur une thèorème de géométrie et ses applications aux équations aux dérivées partialles du type elliptique. *Comm. Inst. Sci. Math. Mech. Univ. Kharkov*, 15:38–45, 1915. 1, 2, 4

[BGG69] E. Bombieri, E. De Giorgi, and E. Giusti. Minimal cones and the Bernstein problem. *Invent. Math.*, 7:243–268, 1969. 1

[Cal70] E. Calabi. Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations. *Proc. Symp. Pure Math.*, 15:223–230, 1970. 1, 2, 4

[Che55] S-S Chern. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6:771–782, 1955. 13

[DFS21] M.P. Dussan, A.P. Franco Filho, and P. Simões. Spacelike surfaces in $\mathbb{L}^4$ with null mean curvature vector and the nonlinear Riccati partial differential equation. *Nonlinear Analysis*, 207:112271, 2021. 2, 20

[FK92] H.M. Farkas and I. Kra. *Riemann Surfaces*. Springer, 2º edition, 1992. Graduate Texts in Mathematics book series (GTM, volume 71). 11

[Fuj88] H. Fujimoto. On the number of exceptional values of the Gauss maps of minimal surfaces. *J. Math. Soc. Japan*, 40:235–247, 1988. 4

[Góes81] C.C. Góes. *Subvariedades mínimas no $\mathbb{R}^n$ com fibrado normal plano*. Universidade de São Paulo (Brasil), 1981. Ph.D thesis. 3

[Kob83] O. Kobayashi. Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space $\mathbb{L}^3$. *Tokyo J. Math.*, 6:297–309, 1983. 3, 50

[Kom05] K. Kommerell. Riemannsehe flächen in ebenen Raum von vier dimensioncn. *Math. Ann.*, 60:546–596, 1905. 2

[Nit65] J.C.C. Nitsche. On new result in the theory of minimal surfaces. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, 71:195–270, 1965. 7, 30, 49

[Oss69] R. Osserman. *A survey of minimal surfaces*. Dover Publications, 1º edition, 1969. Phoenix Edition Series. 4, 22

[Rad71] T. Radó. *On the problem of Plateau and subharmonic functions*. Springer-Verlag, 1º edition, 1971. Reprint. 44