Princípios de seleção, jogos topológicos e indestrutibilidade de espaços compactos

Rodrigo Roque Dias

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do grau
de
Doutor em Ciências

Área de concentração: Matemática
Orientadora: Prof.ª Dr.ª Lúcia Renato Junqueira

Durante o desenvolvimento deste trabalho, o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e do CNPq.

São Paulo, outubro de 2012

Princípios de seleção, jogos topológicos e indestrutibilidade de espaços compactos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Rodrigo Roque Dias e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof.ª Dr.ª Lúcia Renato Junqueira (orientadora) – IME-USP
- Prof.ª Dr.ª Ofelia Teresa Alas – IME-USP
- Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli – IFCH-Unicamp
- Prof. Dr. Marcelo Dias Passos – IM-UFBA
- Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva – IM-UFBA

Aos três, sempre.

Agradecimentos

De um modo geral, eu sinto que deveria agradecer a todas as pessoas que, em algum momento, participaram da minha vida. Há um pouco de cada uma delas no que sou hoje, e há muito de mim nestas páginas.

Dito isto, há uma série de agradecimentos específicos que eu não posso deixar de explicitar.

Em primeiro lugar, a Marly, Francisco e Rita, por todos os motivos imagináveis. Sem vocês, nada importaria.

Aos meus amigos (que não vou listar por falta de espaço :), junto aos quais eu sempre pude buscar alívio para a mente e para o espírito — o que é absolutamente necessário pra se fazer o que quer que seja.

A todos os colegas e professores que tive (também muito numerosos para serem listados), aos quais devo muito, direta ou indiretamente. O matemático que sou nada mais é que uma consequência do que aprendi com vocês.

À Capes e ao CNPq, pelo apoio financeiro concedido durante a realização deste trabalho.

A Leandro Aurichi, por ter desempenhado impecavelmente seu papel de irmão-mais-velho-no-sentido-acadêmico — nisto inclusos o empurrão inicial, a ajuda constante e, não menos importante, alguém em quem me espelhar para o futuro próximo (não só ontem como hoje).

A Samuel da Silva, Marcelo Passos e Walter Carnielli, pelos seus comentários sobre este trabalho feitos durante a defesa de tese, que muito enriqueceram o texto final.

A Ofelia Alas, também pelo motivo acima, mas especialmente pelo apoio valiosíssimo que tem me dado desde o início do mestrado até os dias de hoje e, mais que tudo, por representar para mim (e certamente não apenas para mim) um exemplo em todos os sentidos.

A Frank Tall, por ter extraído o melhor de mim durante sete meses de trabalho intenso, que tiveram importância vital para esta tese.

E, é claro, a Lúcia Junqueira. Aqui, listar os motivos seria diminuí-los. Só consigo dizer obrigado.

The only excuse for making a useless thing is that one admires it intensely.

Oscar Wilde

Resumo

Este trabalho se dedica ao estudo da interação entre princípios de seleção e jogos topológicos. Isto inclui uma abordagem não-topológica destes tópicos, com aplicações à indestrutibilidade de espaços de Lindelöf e a uma versão seletiva de d-separabilidade, dentre outros. Provamos ainda a não-equivalência consistente entre indestrutibilidade e o princípio de seleção naturalmente associado a esta propriedade, o que conduz à investigação da indestrutibilidade de espaços compactos. Finalmente, mostramos que algumas afirmações que limitam a cardinalidade de espaços de Lindelöf indestrutíveis são equiconsistentes com a existência de certos tipos de grandes cardinais.

Palavras-chave: princípios de seleção, jogos topológicos, espaços de Lindelöf indestrutíveis, espaços D-separáveis

Abstract

In the present work we focus on the interplay between selection principles and topological games. This includes a nontopological approach to these topics, with applications to indestructibility of Lindelöf spaces and a selective version of d-separability, among others. We also show the consistent nonequivalence between indestructibility and the selection principle naturally associated to it, which leads to an investigation of indestructibility of compact spaces. We conclude by showing that some constraints on the cardinality of Lindelöf indestructible spaces are equiconsistent with the existence of some kinds of large cardinals.

Keywords: selection principles, topological games, indestructible Lindelöf spaces, D-separable spaces

Sumário

Introdução

Neste trabalho são estudadas propriedades topológicas provenientes dos chamados *princípios de seleção*, como hoje são conhecidos certos esquemas de propriedades de caráter combinatório em contextos infinitos; dentre tais propriedades podemos citar, por exemplo, as que caracterizam os espaços de Rothberger e os espaços de Menger:

Definição (Rothberger [44]). *Um espaço topológico X é dito um* espaço de Rothberger *se, para toda sequência $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ de coberturas abertas de X, pode-se escolher $U_n \in \mathcal{U}_n$ para cada $n \in \omega$ de modo que $X = \bigcup_{n\in\omega} U_n$.*

Definição (Hurewicz [27]). *Um espaço topológico X é dito um* espaço de Menger *se, para toda sequência $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ de coberturas abertas de X, pode-se escolher $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ finito para cada $n \in \omega$ de modo que $X = \bigcup\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$.*

Um estudo sistemático de propriedades topológicas deste tipo foi iniciado por M. Scheepers em [47], onde foram definidos os princípios de seleção tratados nesta tese. Com o desenvolvimento deste tópico, estabeleceu-se então um arcabouço que possibilita generalizar propriedades combinatórias de espaços topológicos e, desta forma, obter novas propriedades — que muitas vezes podem ser vistas como versões *seletivas* de propriedades clássicas, no mesmo sentido em que as propriedades de Rothberger e de Menger são consideradas versões seletivas da propriedade de Lindelöf.

Ilustrando esta abordagem, uma tal propriedade é explorada no capítulo 2: o conceito de D-separabilidade, introduzido por A. Bella, M. Matveev e S. Spadaro em [9] como uma versão seletiva da noção de d-separabilidade — definida por Đ. Kurepa em [38]. Em particular, por meio da introdução de uma nova propriedade, respondemos a uma pergunta feita em [9] envolvendo estas propriedades no âmbito de espaços monotonicamente normais.

Ao lidarmos com o tema de princípios de seleção, surge naturalmente o tópico de jogos topológicos: a cada princípio de seleção aqui considerado, pode-se associar naturalmente um jogo envolvendo dois jogadores. Um dos problemas centrais no estudo de princípios de seleção diz respeito à relação entre uma propriedade definida por um princípio de seleção e o jogo a ela associado; mais precisamente, pergunta-se se uma tal propriedade é equivalente à não-existência de estratégia vencedora para o primeiro jogador do jogo em questão. No capítulo 3, empregamos uma abordagem mais geral para estabelecer condições não-topológicas sob as quais esta equivalência se verifica — e, portanto, a propriedade seletiva pode ser caracterizada em termos do jogo associado. Com isto, unificamos demonstrações de resultados já conhecidos e aplicamos as ideias das mesmas a outros contextos, como por exemplo o trabalhado no capítulo 2. Na última seção do capítulo, estendemos esta abordagem para princípios de seleção e jogos de comprimento ω_1, obtendo então resultados envolvendo a *indestrutibilidade* de espaços de Lindelöf, uma propriedade definida por F. Tall em [60] num estudo sobre um problema proposto por A. Arhangel'skiĭ em [2].

Esta propriedade é o tema central do capítulo 4, no qual fornecemos uma resposta consistentemente negativa para uma pergunta feita por Scheepers e Tall em [50]; o fato de que o exemplo exibido para tal é um espaço compacto nos leva então a nos concentrar, mais especificamente, no estudo da indestrutibilidade de espaços compactos. Em particular, exploramos uma construção de espaços linearmente ordenados a partir de árvores — extraída de [65] — para mostrar a necessidade das hipóteses de grandes cardinais em resultados recentes obtidos por Tall e T. Usuba em [62] sobre a cardinalidade de espaços indestrutíveis.

A menos de menção em contrário, todos os resultados apresentados neste trabalho que não são atribuídos a outrem se devem ao autor.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduziremos os principais conceitos trabalhados no texto. Não cabe aqui desenvolver toda a teoria envolvida nos tópicos discutidos neste trabalho; nosso intuito será tão somente apresentar as definições básicas necessárias para a leitura do texto, bem como fixar as nomenclaturas e notações utilizadas ao longo do mesmo e enunciar resultados de que faremos uso mais adiante. Como complemento à exposição de tópicos feita no presente capítulo, sugerimos as referências [26], [33], [36] e [19].

1.1 Teoria dos conjuntos

Assume-se ZFC ao longo de todo o texto; resultados apresentados que utilizam hipóteses adicionais são enunciados explicitando tal fato. Em particular, o termo "consistente" será utilizado com o sentido de "consistente com ZFC"; de modo análogo, quando dissermos que duas afirmações φ e ψ são equiconsistentes, entenda-se que elas são equiconsistentes relativamente a ZFC, ou seja, que φ é consistente com ZFC se, e somente se, ψ é consistente com ZFC.

Um conjunto A é dito *transitivo* se $B \subseteq A$ para todo $B \in A$.

Dados dois conjuntos A e B, escrevemos $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.

Sendo X um conjunto, denotamos por $\wp(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos de X; sendo ainda κ um cardinal, escrevemos $[X]^\kappa = \{A \in \wp(X) : |A| = \kappa\}$, $[X]^{<\kappa} = \{A \in \wp(X) : |A| < \kappa\}$ e $[X]^{\leq\kappa} = [X]^\kappa \cup [X]^{<\kappa}$.

O domínio de uma função f será denotado por $\mathrm{dom}(f)$. O conjunto de todas as funções de domínio X e imagem contida em Y é denotado por ${}^XY$; uma função $f \in {}^XY$ será também designada por $(f(x))_{x\in X}$. Dados $b \in Y$ e $f \in {}^XY$, a notação $f \equiv b$ significa que $f(x) = b$ para todo $x \in X$. Para um ordinal α, escrevemos ainda ${}^{<\alpha}Y = \bigcup\{{}^{\xi}Y : \xi \in \alpha\}$ e ${}^{\leq\alpha}Y = {}^{<\alpha+1}Y$. Sendo κ um cardinal, escrevemos $Fn(X, Y, \kappa) = \bigcup\{{}^AY : A \in [X]^{<\kappa}\}$ e $Fn(X, Y) = Fn(X, Y, \aleph_0)$. Para $f \in {}^XY$, $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, adotamos as notações $f[A] = \{f(a) : a \in A\}$ e $f^{-1}[B] = \{a \in X : f(a) \in B\}$; a restrição de f ao conjunto A será denotada por $f \restriction A$. Se α é um ordinal, uma função $s \in {}^{\alpha}Y$ será dita uma *sequência (de comprimento α) em Y*; se $s \in {}^{\alpha}Y$ e $b \in Y$, então $s^\frown(b)$ designa a sequência $t \in {}^{\alpha+1}Y$ tal que $t \restriction \alpha = s$ e $t(\alpha) = b$.

Um subconjunto C de um ordinal α é dito *cofinal* em α se, para todo $\beta \in \alpha$, existe $\xi \in C$ com $\beta \leq \xi$; a *cofinalidade* de α, designada por $\mathrm{cf}(\alpha)$, é o menor ordinal η tal que existe $f \in {}^{\eta}\alpha$ cuja imagem é cofinal em α. Dizemos que α é *regular* se $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$. Para um ordinal α, escreveremos ainda $\lim(\alpha) = \{\xi \in \alpha : \xi$ é um ordinal limite$\}$.

O conjunto dos números naturais e o primeiro ordinal não-enumerável serão designados, respectivamente, por ω e ω_1. Lembramos que todo número natural é, em particular, um ordinal, de modo que cada $n \in \omega$ é o conjunto de todos os números naturais menores que n. Cardinais são definidos como sendo ordinais iniciais — *i.e.*, ordinais α tais que, para todo $\beta \in \alpha$, não existe bijeção entre α e β. Segundo esta convenção, temos, por exemplo, $\aleph_1 = \omega_1$; procuraremos escrever $\aleph_1$ quando houver aritmética cardinal envolvida, e ω_1 quando for conveniente utilizar a estrutura deste conjunto. Dado um cardinal κ, o *sucessor* de κ é $\kappa^+ = \min\{\theta \leq 2^\kappa : \theta$ é um cardinal e $\kappa < \theta\}$. Denotamos por $\mathfrak{c}$ a cardinalidade do contínuo, *i.e.*, $2^{\aleph_0}$. A *Hipótese do Contínuo*, abreviada CH, é a afirmação $\mathfrak{c} = \aleph_1$.

Se $X = \prod_{i\in I} X_i$ é um produto — *i.e.*, $X = \{f \in {}^I(\bigcup_{i\in I} X_i) : f(i) \in X_i$ para todo $i \in I\}$ —, então para cada $j \in I$ denotamos por $\pi_j : X \to X_j$ a projeção $\pi_j((x_i)_{i\in I}) = x_j$.

Sendo $\mathbf{P}$ uma propriedade definida num conjunto infinito enumerável E, abreviaremos a afirmação "o conjunto $\{x \in E : \neg\mathbf{P}(x)\}$ é finito" como $\forall^\infty x \in E\ (\mathbf{P}(x))$.

Dadas $f, g \in {}^\omega\omega$, a notação $f \leq g$ significa que $f(n) \leq g(n)$ para todo $n \in \omega$. Dizemos que $D \subseteq {}^\omega\omega$ é *dominante* se, para toda $f \in {}^\omega\omega$, existe $g \in D$ tal que $f \leq g$. Define-se então $\mathfrak{d} = \min\{|D| : D \subseteq {}^\omega\omega$ é dominante$\}$.

Define-se ainda $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \min\{\kappa :$ o espaço topológico ω^ω pode ser coberto por κ subconjuntos fechados de interior vazio$\}$. Aqui, sobre o conjunto ω considera-se a topologia discreta; assim sendo, o espaço ω^ω é homeomorfo ao espaço dos números irracionais com a topologia euclidiana herdada da reta real $\mathbb{R}$ ([5, seção I.4]; vide ainda [19, exercício 4.3.G]).[1]

Nestas condições, tem-se que $\aleph_1 \leq \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$ — vide *e.g.* [13, proposição 5.5].

1.2 Ordens parciais e *forcing*

Uma *ordem parcial* é um par $(\mathbb{P}, \leq)$ tal que $\leq$ é uma relação binária em $\mathbb{P}$ satisfazendo:

- $p \leq p$ para todo $p \in \mathbb{P}$;
- se $p, q, r \in \mathbb{P}$ são tais que $p \leq q$ e $q \leq r$, então $p \leq r$; e
- se $p, q \in \mathbb{P}$ são tais que $p \leq q$ e $q \leq p$, então $p = q$.

Quando não houver risco à interpretação, uma ordem parcial $(\mathbb{P}, \leq)$ será denotada simplesmente por $\mathbb{P}$. Na nomenclatura que utilizaremos, lê-se $p \leq q$ como "p estende q".

[1] De modo geral, sendo X um conjunto não-vazio e $\mathcal{I}$ um ideal em $\wp(X)$, define-se $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{I}$ é tal que $X = \bigcup\mathcal{C}\}$. No caso de $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$, consideram-se o conjunto $X = \omega^\omega$ e o σ-ideal $\mathcal{M} = \{M \in \wp(X) : M$ é um subconjunto magro de $X\}$.

Dizemos que $p, q \in \mathbb{P}$ são *compatíveis* se possuem extensão comum, *i.e.*, se existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ e $r \leq q$. Um *filtro* em $\mathbb{P}$ é um subconjunto não-vazio $G \subseteq \mathbb{P}$ cujos elementos são dois a dois compatíveis e tal que $\forall p \in G\, \forall q \in \mathbb{P}\ (p \leq q \rightarrow q \in G)$. Um subconjunto D de $\mathbb{P}$ é *denso em* $\mathbb{P}$ se, para todo $p \in \mathbb{P}$, existe $q \in D$ tal que $q \leq p$. Finalmente, $\mathbb{P}$ é dita *enumeravelmente fechada* se, para toda sequência decrescente $(p_n)_{n\in\omega}$ em $\mathbb{P}$, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leq p_n$ para todo $n \in \omega$.

Para nomenclatura e resultados básicos sobre *forcing*, recomendamos a consulta a [36]. O modelo inicial numa construção de *forcing* será sempre denotado por $\mathbf{M}$. Quando estivermos trabalhando neste contexto, empregaremos a palavra *forcing* particularmente para designar uma ordem parcial utilizada na construção de uma extensão genérica de $\mathbf{M}$. Sendo $\mathbb{P}$ um *forcing*, dizemos que $\mathbb{P}$ *acrescenta* g *a* $\mathbf{M}$ se g é um elemento de uma extensão genérica de $\mathbf{M}$ por $\mathbb{P}$ tal que $g \notin \mathbf{M}$. Na terminologia aqui adotada, *acrescentar* $\aleph_3$ *subconjuntos de Cohen de* ω_1 significa tomar uma extensão genérica de $\mathbf{M}$ pelo *forcing* $(Fn(\omega_3, 2, \aleph_1), \supseteq)$, supondo que $\mathbf{M}$ satisfaz CH; nestas condições, se $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ em $\mathbf{M}$, então $2^{\aleph_1} = \aleph_3$ na extensão — vide [36, teorema VII.6.17].

É pertinente mencionar aqui o seguinte resultado, devido a R. Solovay (vide [56, seção 10]):

Lema 1.2.1 (Solovay)**.** *Em* $\mathbf{M}$*, sejam* $\mathbb{P}$ *uma ordem parcial enumeravelmente fechada e* A *e* B *conjuntos com* A *enumerável. Então* $\mathbb{P}$ *não acrescenta a* $\mathbf{M}$ *nenhuma função* $f : A \rightarrow B$*. Em particular, no caso em que* $A = \omega$*, tem-se que* $\mathbb{P}$ *não acrescenta nenhum subconjunto enumerável de* B*.*

Demonstração. Vide *e.g.* teorema 6.14 no capítulo VII de [36]. *q.e.d.*

Ressaltamos ainda que, se (X, τ) é um espaço topológico em $\mathbf{M}$ e $\mathbb{P}$ é um *forcing*, o conjunto τ pode deixar de ser uma topologia sobre X quando considerado numa extensão de $\mathbf{M}$ por $\mathbb{P}$. No entanto, τ é uma base de abertos para um topologia $\tilde{\tau}$ sobre X na extensão; assim sendo, quando nos referirmos ao espaço X na extensão sem que se faça menção explícita à topologia considerada, entenda-se que o espaço topológico em questão é $(X, \tilde{\tau})$.

1.3 Topologia geral

Quando fizermos referência a um espaço topológico (X, τ), frequentemente cometeremos o abuso de notação de representá-lo apenas por X.

Nos itens a seguir, (X, τ) é um espaço topológico e $p \in X$.

- Uma *base local* para (X, τ) em p é um conjunto $\mathcal{V} \subseteq \{U \in \tau : p \in U\}$ que é denso na ordem parcial $(\{U \in \tau : p \in U\}, \subseteq)$.
- Uma *base (de abertos)* para (X, τ) é um conjunto $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tal que, para todo $p \in X$, o conjunto $\{U \in \mathcal{B} : p \in U\}$ é uma base local para (X, τ) em p.
- Uma *π-base local* para (X, τ) em p é um conjunto $\mathcal{W} \subseteq \tau \setminus \{\emptyset\}$ tal que, para todo $U \in \tau$ com $p \in U$, existe $W \in \mathcal{W}$ satisfazendo $W \subseteq U$.
- Uma *π-base* para (X, τ) é um conjunto $\mathcal{P} \subseteq \tau \setminus \{\emptyset\}$ que é denso na ordem parcial $(\tau \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$.

Dizemos que $E \subseteq X$ é *denso* no espaço topológico (X, τ) se $\overline{E} = X$, e que um subespaço $D \subseteq X$ é *discreto* se o conjunto $\{x\}$ é aberto em D para todo $x \in D$. Dizemos ainda que $M \subseteq X$ é *magro* se existe uma sequência $(F_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos fechados de X com $M \subseteq \bigcup_{n\in\omega} F_n$ e tal que cada F_n possui interior vazio em X.

Uma família $\mathcal{C} \subseteq \wp(X)$ é dita uma *cobertura* de X se $X = \bigcup \mathcal{C}$. Sendo $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ coberturas de X, dizemos que $\mathcal{A}$ é um *refinamento* de $\mathcal{B}$ se, para cada $A \in \mathcal{A}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq B$.

Definamos agora as funções cardinais que serão utilizadas no texto:

- O *peso* de X é $w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ é uma base para $X\} + \aleph_0$.
- O *π-peso* de X é $\pi w(X) = \min\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P}$ é uma π-base para $X\} + \aleph_0$.
- O *caráter* de X é $\chi(X) = \sup\{\chi(p, X) : p \in X\}$, sendo $\chi(p, X) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ é uma base local para X em $p\} + \aleph_0$ para todo $p \in X$.
- O *pseudocaráter* de X, sendo X um espaço T_1, é $\psi(X) = \sup\{\psi(p, X) : p \in X\}$, sendo $\psi(p, X) = \min\{\kappa : \{p\}$ é uma intersecção de κ subconjuntos abertos de $X\} + \aleph_0$ para todo $p \in X$.
- O *π-caráter* de X é $\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(p, X) : p \in X\}$, sendo $\pi\chi(p, X) = \min\{|\mathcal{W}| : \mathcal{W}$ é uma π-base local para X em $p\} + \aleph_0$ para todo $p \in X$.
- O *spread* de X é $s(X) = \sup\{|S| : S \subseteq X$ é discreto$\} + \aleph_0$.
- O *grau de Lindelöf* de X é $L(X) = \min\{\kappa :$ toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura de cardinalidade $\leq \kappa\} + \aleph_0$.
- A *densidade* de X é $d(X) = \min\{|D| : D \subseteq X$ é denso em $X\} + \aleph_0$.

Para $p \in X$, notemos que $\pi\chi(p, X) \leq \chi(p, X)$ e que, se X é T_1, então $\psi(p, X) \leq \chi(p, X)$. No caso em que X é um espaço de Hausdorff compacto, tem-se que $\psi(p, X) = \chi(p, X)$.

Dizemos que X é um *espaço de Lindelöf* se $L(X) = \aleph_0$. Se $d(X) = \aleph_0$, então X é dito *separável.* Se X é T_1 e $p \in X$ é tal que $\psi(p, X) = \aleph_0$, dizemos que p é um *ponto G_δ* de X.

Uma *família celular* em X é uma família de subconjuntos abertos de X dois a dois disjuntos. Dizemos que X é *coletivamente de Hausdorff* se, para todo $E \subseteq X$ discreto e fechado em X, existe uma família celular $\{V_p : p \in E\}$ em X tal que $V_p \cap E = \{p\}$ para todo $p \in E$.

No caso em que a topologia de X é proveniente de uma métrica d sobre X, tem-se que $\{B_d(x,r) : x \in X, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$ é uma base de abertos para X, sendo $B_d(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ a *bola aberta* de centro x e raio r na métrica d.

Dada uma propriedade topológica $\mathbf{P}$, dizemos que um espaço topológico X é *hereditariamente* $\mathbf{P}$ se todo subespaço de X satisfaz a propriedade $\mathbf{P}$.

Dizemos que uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X é *ponto-finita* (respectivamente, *ponto-enumerável*) se, para todo $p \in X$, o conjunto $\{F \in \mathcal{F} : p \in F\}$ é finito (respectivamente, enumerável). Se $\mathcal{S}$ é uma reunião enumerável de famílias ponto-finitas, dizemos que $\mathcal{S}$ é *σ-ponto-finita*.

Em todos os produtos topológicos $X = \prod_{i \in I} X_i$ (em particular, em todas as potências da forma X^κ), a menos de menção em contrário, será considerada a topologia produto de Tychonoff, que tem por base a família de todas as intersecções finitas de elementos do conjunto $\bigcup_{i \in I}\{\pi_i^{-1}[V_i] : V_i \in \tau_i\}$, sendo τ_i a topologia do espaço X_i para cada $i \in I$.

Denotaremos por $\mathbb{D}$ o conjunto $\{0,1\}$ munido da topologia discreta.

Dizemos que um espaço topológico X contém uma *cópia* de um espaço topológico Y, e denotaremos este fato escrevendo $Y \hookrightarrow X$, se X possui um subespaço que é homeomorfo a Y.

1.4 Ordens lineares

Uma *ordem linear*, ou *ordem total*, é uma relação binária $\prec$ sobre um conjunto não-vazio X tal que:

- se $x, y, z \in X$ são tais que $x \prec y$ e $y \prec z$, então $x \prec z$;
- para quaisquer $x, y \in X$ distintos, tem-se que $x \prec y$ ou $y \prec x$;
- para todo $x \in X$, não ocorre $x \prec x$.

Cometeremos o abuso de linguagem de dizer que o par $(X, \prec)$ é uma ordem linear se $\prec$ for uma ordem linear sobre X.

Um *corte de Dedekind* numa ordem linear $(X, \prec)$ é um subconjunto $A \subseteq X$ tal que, para quaisquer $a \in A$ e $x \in X$ tais que $x \prec a$, tem-se que $x \in A$. Uma ordem linear é *completa* se todo corte de Dedekind admite supremo.

Serão chamados de *intervalos* de uma ordem linear $(X, \prec)$ todos os conjuntos da forma

- $]a, b[= \{x \in X : a \prec x \prec b\}$, com $a, b \in X$;
- $]a, \rightarrow[= \{x \in X : a \prec x\}$, com $a \in X$; ou
- $]\leftarrow, b[= \{x \in X : x \prec b\}$, com $b \in X$.

Uma ordem linear $\prec$ sobre X induz naturalmente uma topologia $\tau_\prec$ sobre X que tem como base a família de todos os intervalos; $(X, \tau_\prec)$ é dito então um *espaço topológico linearmente ordenado*. Nestas condições, $(X, \tau_\prec)$ é um espaço normal (vide [12, teorema III.6]); além disso, tem-se do teorema B de [23]:

Teorema 1.4.1 (Haar-König [23]). *O espaço topológico $(X, \tau_\prec)$ é compacto se, e somente se, a ordem linear $(X, \prec)$ é completa.*

1.5 Árvores

Com exceção de adaptações menores, seguiremos [65] no que diz respeito à nomenclatura referente a árvores.

Uma *árvore* é uma ordem parcial $(T, \leq)$ tal que, para todo $t \in T$, o conjunto $T^\downarrow(t) = \{t' \in T : t' < t\}$ é bem-ordenado por $<$ — ou, mais formalmente, pela relação binária $< \cap (T^\downarrow(t) \times T^\downarrow(t))$. Cada $t \in T$ é dito um *nó* da árvore T. Para cada $t \in T$, a *altura* de

t em T, denotada por $\mathrm{ht}_T(t)$, é o tipo de ordem de $T^{\downarrow}(t)$, *i.e.*, o (único) ordinal isomorfo em ordem a $T^{\downarrow}(t)$. Se α é um ordinal, o *nível* α de T é $T_\alpha = \{t \in T : \mathrm{ht}_T(t) = \alpha\}$; dizemos que T é uma árvore com *raiz* se $|T_0| = 1$. A *altura* de T é o menor ordinal η com $T_\eta = \emptyset$.

Dizemos que T é uma *árvore de Hausdorff* se, para todo ordinal limite α, não há $t, t' \in T_\alpha$ distintos com $T^{\downarrow}(t) = T^{\downarrow}(t')$.

Uma *subárvore* de $(T, \leq)$ é um subconjunto $T' \subseteq T$ considerado com a restrição da ordem $\leq$ a $T' \times T'$ — o que, note-se, torna T' também uma árvore. Uma *parte inicial* de T é uma subárvore T' de T tal que $T^{\downarrow}(t) \subseteq T'$ para todo $t \in T'$.

Uma *cadeia* em T é um subconjunto de T que é totalmente ordenado por $\leq$. Um *ramo* de T é uma cadeia que é maximal com respeito à inclusão ($\subseteq$). A *cofinalidade* de um ramo B é a menor cardinalidade de um subconjunto *cofinal* de B, *i.e.*, um subconjunto $C \subseteq B$ tal que $\forall t \in B\ \exists t' \in C\ (t \leq t')$; equivalentemente, a cofinalidade de B é $\mathrm{cf}(\beta)$, sendo β o tipo de ordem de B com a ordem induzida por $\leq$. Um ramo B é *cofinal* em T se $B \cap T_\alpha \neq \emptyset$ para todo α tal que $T_\alpha \neq \emptyset$.

Suponha que $(T, \leq)$ é uma árvore de Hausdorff tal que, para cada $t \in T$, o conjunto $S(t)$ de todos os sucessores imediatos de t em $\leq$ é linearmente ordenado por uma relação $\prec_t$. A *ordem lexicográfica* no conjunto de todos os ramos de T é a ordem linear $\prec$ definida por $B \prec B' \leftrightarrow v \prec_t v'$, sendo t o maior elemento de $B \cap B'$ segundo $\leq$ e $v, v' \in S(t)$ tais que $v \in B$ e $v' \in B'$.

Se κ é um cardinal, dizemos que T é uma *κ-árvore* se T tem altura κ e todos os níveis de T possuem cardinalidade menor que κ. Uma κ-árvore é *de Aronszajn* se não possui ramo cofinal. Uma *árvore de Kurepa* é uma ω_1-árvore com pelo menos $\aleph_2$ ramos cofinais. A *Hipótese de Kurepa*, abreviada KH, é a afirmação "existe uma árvore de Kurepa".

1.6 Grandes cardinais e consistência

Um cardinal não-enumerável κ é *(fortemente) inacessível* se κ é regular e $2^\lambda < \kappa$ para todo cardinal $\lambda < \kappa$. Se κ é inacessível e não existe κ-árvore de Aronszajn, então κ é dito *fracamente compacto.*

A não-existência de cardinais inacessíveis é consistente com ZFC — vide *e.g.* [36, corolário VI.4.13]. Já a consistência da afirmação "existe um cardinal inacessível" não pode ser demonstrada em ZFC, a menos que ZFC seja uma teoria inconsistente; isto é uma consequência do fato de que cardinais inacessíveis são *grandes cardinais*, *i.e.*, cardinais cuja existência implica a consistência de ZFC — vide *e.g.* [29, teorema 12.12 e lema 12.13]. Cabe notar que a não-demonstrabilidade da existência de grandes cardinais não é suficiente para se concluir que a existência de grandes cardinais é inconsistente; o que se pode afirmar é que, caso a existência de um certo tipo de grande cardinal seja consistente, tal consistência não pode ser demonstrada através de métodos formalizáveis em ZFC — novamente, como é natural, pressupondo-se a consistência de ZFC.

Uma observação importante a ser feita é que a hipótese de que a existência de um cardinal inacessível é consistente não é suficiente para acarretar a consistência da existência de um cardinal fracamente compacto — vide *e.g.* [33, exercício 15.22].

A existência de cardinais inacessíveis está intimamente ligada à Hipótese de Kurepa, como decorre dos seguintes teoremas de Solovay (vide [65, teorema 8.11]) e J. Silver:

Teorema 1.6.1 (Solovay). *Se ω_2 não é inacessível em $\mathbf{L}$, então existe uma árvore de Kurepa.*

Teorema 1.6.2 (Silver [58]). *Se a existência de um cardinal inacessível é consistente, então* $\neg$KH *também é consistente.*

Com vista a uma melhor compreensão do enunciado do teorema 1.6.1, faremos aqui uma breve digressão.

O *universo construtível de Gödel*, denotado por $\mathbf{L}$, é uma classe transitiva que satisfaz os axiomas de ZFC — ou, mais formalmente, é uma $\in$-interpretação transitiva de ZFC em ZFC; para maiores detalhes, vide *e.g.* [55, seção 9.5] e [36, capítulo VI]. Primeiramente, define-se o conjunto $\mathbf{L}_\alpha$ recursivamente para cada ordinal α, e $\mathbf{L}$ é então definido como sendo a classe de todos os conjuntos que, para algum ordinal α, pertencem a $\mathbf{L}_\alpha$. Os elementos de $\mathbf{L}$ são ditos *construtíveis*; o *Axioma da Construtibilidade*, usualmente representado pela igualdade $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, é a afirmação "todo conjunto é construtível" — a qual é consistente com ZFC.

Suponha agora que estejamos trabalhando num modelo transitivo $\mathbf{M}$ para ZFC, *i.e.*, um conjunto $\mathbf{M}$ munido de uma estrutura segundo a qual $\mathbf{M} \models \varphi$ para toda fórmula φ da teoria ZFC — aqui, $\mathbf{M} \models \varphi$ significa que a fórmula φ é válida quando interpretada em $\mathbf{M}$. Nestas condições, a definição de $\mathbf{L}$ é relativizada a $\mathbf{M}$, obtendo-se então $\mathbf{L}^\mathbf{M} = \{x \in \mathbf{M} : \mathbf{M} \models \text{“}x \text{ é construtível”}\}$ (lê-se $\mathbf{L}^\mathbf{M}$ como "$\mathbf{L}$ relativo a $\mathbf{M}$" ou "$\mathbf{L}$ no sentido de $\mathbf{M}$"); neste caso, $\mathbf{M} \models$ "x é construtível" significa "$x \in \mathbf{L}_\alpha$ para algum ordinal $\alpha \in \mathbf{M}$" (para maiores detalhes, vide *e.g.* [36, lema VI.3.2]).

Um aspecto importante da construtibilidade é o fato de que todo ordinal (de $\mathbf{M}$) é construtível (no sentido de $\mathbf{M}$); em outras palavras, para todo ordinal $\alpha \in \mathbf{M}$, tem-se que $\alpha \in \mathbf{L}^\mathbf{M}$. Cabe ressaltar que um ordinal $\alpha \in \mathbf{M}$ pode ser tal que $\mathbf{L}^\mathbf{M} \models$ "α é um cardinal" e, no entanto, $\mathbf{M} \models$ "α não é um cardinal". Da mesma maneira, interpretada num modelo transitivo $\mathbf{M}$ de ZFC, a afirmação "ω_2 é inacessível em $\mathbf{L}$" significa que, sendo α o ordinal que em $\mathbf{M}$ é o cardinal $\aleph_2$, tem-se $\mathbf{L}^\mathbf{M} \models$ "α é inacessível", o que não é uma contradição ao fato de que $\mathbf{M} \models$ "α não é inacessível".

Retornemos agora aos teoremas 1.6.1 e 1.6.2.

Em primeiro lugar, notemos que, pelo teorema 1.6.1, $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ implica KH, e portanto KH é consistente com ZFC.

Já a consistência de $\neg$KH não pode ser demonstrada a partir de ZFC, uma vez que, da combinação dos teoremas 1.6.1 e 1.6.2, resulta:

Teorema 1.6.3 (Silver-Solovay). $\neg$KH *e a existência de um cardinal inacessível são equiconsistentes.*

Demonstração. Uma das implicações é o teorema 1.6.2; assim, resta mostrar que a consistência de $\neg$KH implica a consistência da existência de um cardinal inacessível. Para tanto, mostraremos que, se ZFC + $\neg$KH é uma teoria consistente, então ZFC + "existe um cardinal inacessível" também o é. Suponha então que ZFC + $\neg$KH é consistente; pelo Teorema da Completude de Gödel (vide *e.g.* 4.2 em [55]), existe um modelo $\mathbf{M}$ para ZFC + $\neg$KH; fazendo uso do colapso de Mostowski ([42, teorema 3]), podemos supor que $\mathbf{M}$ é transitivo. Como $\mathbf{M} \models \neg$KH, segue do teorema 1.6.1 que $\mathbf{M} \models$ "ω_2 é inacessível em $\mathbf{L}$", *i.e.*, $\mathbf{L}^{\mathbf{M}} \models$ "α é inacessível", sendo $\alpha \in \mathbf{L}^{\mathbf{M}} \subseteq \mathbf{M}$ o ordinal tal que $\mathbf{M} \models \alpha = \aleph_2$. Em particular, $\mathbf{L}^{\mathbf{M}} \models$ "existe um cardinal inacessível"; além disso, como $\mathbf{M}$ é um modelo para ZFC, então $\mathbf{L}^{\mathbf{M}}$ também o é. Assim, $\mathbf{L}^{\mathbf{M}}$ é um modelo para ZFC + "existe um cardinal inacessível", e portanto — novamente pelo Teorema da Completude de Gödel — a teoria ZFC + "existe um cardinal inacessível" é consistente. *q.e.d.*

Notemos que o teorema 1.6.3 mostra, em particular, a necessidade da hipótese sobre a existência de cardinais inacessíveis no teorema 1.6.2.

1.7 Princípios de seleção e jogos topológicos

Retornemos às definições enunciadas na Introdução:

Definição 1.7.1 (Rothberger [44]). *Um espaço topológico X é dito um* espaço de Rothberger *se, para toda sequência $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ de coberturas abertas de X, pode-se escolher $U_n \in \mathcal{U}_n$ para cada $n \in \omega$ de modo que $X = \bigcup_{n\in\omega} U_n$.*

Definição 1.7.2 (Hurewicz [27]). *Um espaço topológico X é dito um* espaço de Menger *se, para toda sequência $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ de coberturas abertas de X, pode-se escolher $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ finito para cada $n \in \omega$ de modo que $X = \bigcup\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$.*

Estas propriedades foram definidas, respectivamente, em estudos sobre a Conjectura de Borel (da qual trataremos brevemente na seção 4.3) e sobre espaços métricos σ-compactos (*i.e.*, espaços métricos que podem ser representados como uma reunião enumerável de subespaços compactos). Consideremos agora os seguintes jogos topológicos:

Definição 1.7.3 (Galvin [20]). *O* jogo de Rothberger *num espaço topológico X é jogado da seguinte maneira: em cada rodada $n \in \omega$, o jogador Um apresenta uma cobertura aberta $\mathcal{U}_n$ de X, e em seguida o jogador Dois escolhe $U_n \in \mathcal{U}_n$; Dois vence se $X = \bigcup_{n\in\omega} U_n$, do contrário Um é o vencedor.*

Definição 1.7.4 (Pawlikowski [43]). *O* jogo de Menger *num espaço topológico X é jogado da seguinte maneira: em cada rodada $n \in \omega$, o jogador Um apresenta uma cobertura aberta $\mathcal{U}_n$ de X, e em seguida o jogador Dois escolhe um subconjunto finito $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$; Dois vence se $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$ for uma cobertura aberta de X, do contrário Um é o vencedor.*

Jogos topológicos como os definidos acima nos fornecem propriedades topológicas expressas em termos da existência de estratégias vencedoras para cada um dos jogadores. Informalmente, uma estratégia vencedora para um dos jogadores é uma maneira de jogar que faz com que este jogador vença a partida independentemente de quais serão os movimentos do adversário. Uma estratégia pode ser intuitivamente visualizada como uma árvore: por exemplo, uma estratégia para o jogador Um no jogo de Rothberger fornece, na primeira rodada, uma cobertura aberta $\mathcal{U}_0$ a ser jogada por Um; em seguida, para cada $U_0 \in \mathcal{U}_0$ (*i.e.*, para cada um dos lances possíveis para o jogador Dois), a estratégia fornece uma cobertura aberta $\mathcal{U}_1(U_0)$ a ser jogada por Um na segunda rodada, e assim por diante. Nestas condições, um ramo da árvore representa a sequência de abertos escolhidos pelo jogador Dois numa partida em que o jogador Um adota a estratégia em questão; assim, tal estratégia é vencedora se nenhum ramo da árvore corresponde a uma cobertura do espaço.

Vamos agora formalizar este conceito. Sendo τ a topologia de X, utilizaremos deste ponto em diante a notação $\mathcal{O}_X = \{\mathcal{U} \subseteq \tau : \bigcup \mathcal{U} = X\}$.

Definição 1.7.5. *Uma* estratégia *para o jogador Um no jogo de Rothberger em X é uma função $\sigma_1 : {}^{<\omega}\tau \to \mathcal{O}_X$; a estratégia σ_1 indica que, se U_i é o conjunto aberto escolhido por Dois na i-ésima rodada para cada $i < n$, então a cobertura aberta que Um joga na n-ésima rodada é $\sigma_1((U_i)_{i<n}) \in \mathcal{O}_X$. Dizemos que σ_1 é* vencedora *se, para toda sequência $(U_n)_{n\in\omega}$ em τ satisfazendo $U_n \in \sigma_1((U_i)_{i<n})$ para cada $n \in \omega$, tem-se que $\{U_n : n \in \omega\} \notin \mathcal{O}_X$ — o que significa que, se Um joga de acordo com σ_1, então ele vence a partida independentemente de quais serão os lances do jogador Dois.*

Já uma estratégia para o jogador Dois neste jogo é uma função $\sigma_2 : ({}^{<\omega}\mathcal{O}_X)\setminus\{\emptyset\} \to \tau$ tal que, para todo $n \in \omega$ e toda sequência $(\mathcal{U}_i)_{i\leq n}$ em $\mathcal{O}_X$, tem-se $\sigma_2((\mathcal{U}_i)_{i\leq n}) \in \mathcal{U}_n$. Neste caso, σ_2 é dita uma estratégia vencedora se $\{\sigma_2((\mathcal{U}_i)_{i\leq n}) : n \in \omega\} \in \mathcal{O}_X$ para toda sequência $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ em $\mathcal{O}_X$.

Estas definições se estendem naturalmente para o jogo de Menger e, num contexto mais amplo, para os jogos que veremos nas definições 1.7.9 e 3.2.2.

É imediato que, se Um não possui estratégia vencedora no jogo de Rothberger (respectivamente, Menger) num espaço topológico X, então X é um espaço de Rothberger (respectivamente, Menger): se $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência de coberturas abertas de X que testemunha o fato de X não ser de Rothberger (respectivamente, Menger), jogar a cobertura $\mathcal{U}_n$ na n-ésima rodada constitui uma estratégia vencedora para Um neste jogo. Os teoremas a seguir mostram que também valem as recíprocas destas afirmações — e, portanto, estas propriedades podem ser caracterizadas a partir dos jogos a elas associados.

Teorema 1.7.6 (Pawlikowski [43])**.** *Um espaço topológico X é de Rothberger se, e somente se, Um não possui estratégia vencedora no jogo de Rothberger em X.*

Teorema 1.7.7 (Hurewicz [27])**.** *Um espaço topológico X é de Menger se, e somente se, Um não possui estratégia vencedora no jogo de Menger em X.*

As propriedades de Rothberger e de Menger motivam o estudo dos tópicos de *princípios de seleção* e *jogos topológicos.* Em seu estudo iniciado com [47], Scheepers generaliza estas propriedades através das seguintes definições:

Definição 1.7.8 (Scheepers [47]; com esta formulação, [50]). *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ conjuntos não-vazios com $\emptyset \notin \mathcal{A}$. Sendo λ um cardinal infinito, denotamos por $\mathsf{S}_1^\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ a seguinte afirmação:*

> *para toda sequência $(A_\alpha)_{\alpha \in \lambda}$ em $\mathcal{A}$, pode-se escolher $B_\alpha \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in \lambda$ de modo que $\{B_\alpha : \alpha \in \lambda\} \in \mathcal{B}$.*

Denotamos, ainda, por $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}^\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ a seguinte afirmação:

> *para toda sequência $(A_\alpha)_{\alpha \in \lambda}$ em $\mathcal{A}$, pode-se escolher um subconjunto finito $F_\alpha \subseteq A_\alpha$ para cada $\alpha \in \lambda$ de modo que $\bigcup_{\alpha \in \lambda} F_\alpha \in \mathcal{B}$.*

Convenciona-se omitir o índice λ em S_1^λ e S_{fin}^λ se $\lambda = \omega$.

Em particular, notemos que, dado um espaço topológico X, as afirmações "X é um espaço de Rothberger" e "X é um espaço de Menger" podem ser expressas como, respectivamente, $\mathsf{S}_1(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ e $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.

Scheepers introduziu ainda dois jogos naturalmente associados aos princípios de seleção S_1^λ e $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}^\lambda$:

Definição 1.7.9 (Scheepers [48]; com esta formulação, [50]). *Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e λ como na definição 1.7.8. Os jogos $\mathsf{G}_1^\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}^\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ são definidos como segue. Em cada rodada $\alpha \in \lambda$ do jogo $\mathsf{G}_1^\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, o jogador Um escolhe $A_\alpha \in \mathcal{A}$, e em seguida o jogador Dois escolhe $B_\alpha \in A_\alpha$. Dois vence a partida se $\{B_\alpha : \alpha \in \lambda\} \in \mathcal{B}$; do contrário, Um é o vencedor. O jogo $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}^\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ é definido similarmente, mas neste jogo Dois escolhe um subconjunto finito F_α de A_α na α-ésima rodada, e é o vencedor se $\bigcup_{\alpha \in \lambda} F_\alpha \in \mathcal{B}$. Assim como na definição 1.7.8, em lugar de G_1^ω e $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}^\omega$ escrevemos simplesmente G_1 e $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}$.*

Da mesma maneira, cabe ressaltar que os jogos de Rothberger e de Menger num espaço topológico X são, respectivamente, os casos particulares $\mathsf{G}_1(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ e $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ da definição anterior.

Estamos, assim, munidos de uma estrutura combinatória não-topológica que nos permite generalizar propriedades como as de Rothberger e Menger já discutidas. No entanto, como veremos mais adiante (especialmente no capítulo 3), propriedades topológicas como as obtidas a partir destes esquemas não se limitam a coberturas abertas. Isto ficará evidente já no capítulo 2, em que se estuda um tipo particular de propriedade seletiva envolvendo subconjuntos densos de espaços topológicos.

Cabe aqui mencionar que, embora a existência de estratégia vencedora para o jogador Dois no jogo $\mathsf{G}_1^\lambda(\mathcal{A},\mathcal{B})$ implique a não-existência de estratégia vencedora para o jogador Um no mesmo jogo, a recíproca desta implicação não se verifica em geral: em [43], J. Pawlikowski mostra que existe um espaço indeterminado para o jogo de Rothberger — *i.e.*, um espaço em que nenhum jogador tem estratégia vencedora neste jogo. Além disso, tem-se que a não-existência de estratégia vencedora para Um em $\mathsf{G}_1^\lambda(\mathcal{A},\mathcal{B})$ implica $\mathsf{S}_1^\lambda(\mathcal{A},\mathcal{B})$ (pelo mesmo argumento exposto anteriormente para o caso dos jogos de Rothberger e Menger); no entanto, sob CH, Scheepers mostra em [49] a existência de um espaço X tal que vale $\mathsf{S}_1(\mathcal{D}_X,\mathcal{D}_X)$ mas Um possui estratégia vencedora no jogo $\mathsf{G}_1(\mathcal{D}_X,\mathcal{D}_X)$, sendo $\mathcal{D}_X = \{D \subseteq X : D \text{ é denso em } X\}$.

Dizemos que dois jogos J e J' — cada um dos quais envolvendo dois jogadores, denominados Um e Dois — são *equivalentes* se:

· Um possui estratégia vencedora em J se, e somente se, Um possui estratégia vencedora em J'; e

· Dois possui estratégia vencedora em J se, e somente se, Dois possui estratégia vencedora em J'.

Dizemos que J e J' são jogos *duais* se:

· Um possui estratégia vencedora em J se, e somente se, Dois possui estratégia vencedora em J'; e

· Dois possui estratégia vencedora em J se, e somente se, Um possui estratégia vencedora em J'.

1.8 Espaços indestrutíveis

Em [2], Arhangel'skiĭ demonstrou o seguinte teorema:

Teorema 1.8.1 (Arhangel'skiĭ [2])**.** *Se X é um espaço de Hausdorff, então $|X| \leq 2^{L(X)\cdot\chi(X)}$. Em particular, se X é de Lindelöf e tem caráter enumerável, então $|X| \leq \mathfrak{c}$.*

Ainda em [2], Arhangel'skiĭ perguntou se a hipótese de caráter enumerável no caso particular do teorema acima pode ser enfraquecida para pseudocaráter enumerável:

Problema 1.8.2 (Arhangel'skiĭ [2])**.** *Existe um espaço de Lindelöf T_2 cujos pontos são todos G_δ e cuja cardinalidade é maior que $\mathfrak{c}$?*

Há exemplos mostrando que a resposta afirmativa é consistente — vide *e.g.* [54] e [22]. A consistência de uma resposta negativa permanece em aberto; há resultados parciais nesse sentido obtidos a partir de hipóteses envolvendo grandes cardinais, dentre os quais destacamos o teorema 1.8.4 a seguir.

Definição 1.8.3 (Tall [60])**.** *Um espaço de Lindelöf X é* indestrutível *se X é um espaço de Lindelöf em toda extensão por* forcing *enumeravelmente fechado. X é dito* destrutível *se não é indestrutível.*

Cabe aqui mencionar que, por um resultado devido a S. Shelah (vide [60, teorema 3] ou [32, lema 5.3]), tem-se que um espaço de Lindelöf X é indestrutível se, e somente se, X é de Lindelöf em toda extensão genérica pelo *forcing* $(Fn(\omega_1, \omega, \aleph_1), \supseteq)$.

Teorema 1.8.4 (Tall [60]). *Se a existência de um cardinal supercompacto*[2] *é consistente com* ZFC, *então também é consistente com* ZFC *que todo espaço de Lindelöf T_2 indestrutível cujos pontos são G_δ possui cardinalidade $\leq \mathfrak{c}$.*

O conceito de indestrutibilidade introduzido por Tall em [60] propicia, assim, a seguinte via de investigação para o problema de Arhangel'skiĭ, a qual é objeto de pesquisa neste tópico desde então:

Problema 1.8.5 (Tall [60]). *Um espaço de Lindelöf T_2 cujos pontos são G_δ pode ser destrutível?*

É válido notar a seguinte caracterização de indestrutibilidade para espaços compactos:

Proposição 1.8.6 (Tall [17]). *Um espaço compacto X é indestrutível se, e somente se, X é compacto em toda extensão por* forcing *enumeravelmente fechado.*

Demonstração. A recíproca é imediata. Para a implicação direta, tome uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X na extensão; podemos supor que todos os elementos de $\mathcal{U}$ são abertos básicos, e portanto abertos de X no modelo inicial $\mathbf{M}$. Na extensão, existe uma subcobertura enumerável $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ de X, uma vez que X é indestrutível. Como o *forcing* é enumeravelmente fechado, segue do lema 1.2.1 que $\mathcal{U}_0 \in \mathbf{M}$; assim, como X é compacto em $\mathbf{M}$, existe um subconjunto finito $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ tal que $X = \bigcup \mathcal{F}$. *q.e.d.*

Uma conexão inesperada entre indestrutibilidade e jogos topológicos foi estabelecida por Scheepers e Tall em [50]:

Teorema 1.8.7 (Scheepers-Tall [50]). *Um espaço de Lindelöf X é indestrutível se, e somente se, o jogador Um não possui estratégia vencedora no jogo $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.*

[2] A definição de cardinal supercompacto será omitida por se tratar de um conceito que não ocorrerá novamente neste texto; mencionamos apenas que todo cardinal supercompacto é fracamente compacto, e que a consistência da existência de um cardinal supercompacto é uma hipótese estritamente mais forte que a consistência da existência de um cardinal fracamente compacto.

O teorema 1.8.7 será nossa principal ferramenta para tratar de espaços indestrutíveis neste trabalho.

Capítulo 2

Sobre algumas variações de separabilidade

Em [38], Kurepa introduziu uma generalização de separabilidade hoje conhecida como d--separabilidade. Uma versão seletiva desta propriedade foi definida por Bella, Matveev e Spadaro em [9] e denominada D-separabilidade; também em [9], isto conduziu à definição de D^+-separabilidade, a qual é uma versão mais forte de D-separabilidade expressa em termos de jogos topológicos.

Na seção 2.1, apresentamos as definições das propriedades que serão nosso objeto de estudo nesse capítulo (o que inclui propriedades auxiliares aqui introduzidas) e demonstramos algumas relações entre as mesmas. As seções 2.2 e 2.3 são dedicadas a estabelecer condições que, aliadas a d-separabilidade, impliquem D- e D^+-separabilidade, respectivamente. Em particular, o corolário 2.3.5 responde uma pergunta feita em [9].

Por uma questão de conveniência, todos os espaços topológicos considerados neste capítulo serão assumidos T_1.

Os resultados deste capítulo foram obtidos em colaboração com Leandro F. Aurichi e Lúcia R. Junqueira, e se encontram no artigo [4].

2.1 As propriedades consideradas

As definições a seguir foram dadas, respectivamente, em [38] — sob outra terminologia — e [9].

Definição 2.1.1 (Kurepa [38]). *Um espaço topológico é* d-separável *se contém um subconjunto denso que é* σ*-discreto,* i.e., *que é uma reunião enumerável de subconjuntos discretos.*

Notemos que d-separabilidade é uma generalização de separabilidade: é imediato que todo espaço separável é d-separável; por outro lado, um espaço discreto não-enumerável é d-separável mas não é separável.

Definição 2.1.2 (Bella-Matveev-Spadaro [9]). *Um espaço topológico X é dito*

- D-separável *se, para toda sequência* $(E_n)_{n\in\omega}$ *de subconjuntos densos de* X*, existe uma sequência* $(D_n)_{n\in\omega}$ *de subconjuntos discretos de* X *tal que* $D_n \subseteq E_n$ *para todo* $n \in \omega$ *e* $\overline{\bigcup_{n\in\omega} D_n} = X$*;*
- D^+-separável *se Dois possui estratégia vencedora no jogo* $\mathsf{G}_{dis}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$*, definido como segue: em cada rodada* $n \in \omega$*, o jogador Um escolhe um subconjunto denso* E_n *de* X*, e em seguida o jogador Dois escolhe um subconjunto discreto* $D_n \subseteq E_n$*; Dois vence se* $\bigcup_{n\in\omega} D_n$ *é denso em* X*, do contrário Um é o vencedor.*

Assim, D-separabilidade é uma versão seletiva de d-separabilidade — no mesmo sentido em que a propriedade de Rothberger é uma versão seletiva da propriedade de Lindelöf. É imediato que todo espaço D^+-separável é D-separável e que todo espaço D-separável é d-separável. As recíprocas destas afirmações não valem em geral; vide [9].

No corolário 3.2 de [53], B. Šapirovskiĭ provou que todo espaço topológico que possui uma base σ-ponto-finita é d-separável. O próximo resultado mostra que tal hipótese pode ser enfraquecida. Um espaço topológico X é dito *quase-desenvolvível* (vide [10]) se existe um quase-desenvolvimento para X, *i.e.*, uma sequência $(\mathscr{G}_n)_{n\in\omega}$ de famílias de subconjuntos abertos de X tal que, para todo $x \in X$, o conjunto $\{st(x,\mathscr{G}_n) : n \in \omega\} \setminus \{\emptyset\}$ é uma base local para X em x, sendo $st(x,\mathscr{G}_n) = \bigcup\{V \in \mathscr{G}_n : x \in V\}$.

Proposição 2.1.3. *Considere as seguintes afirmações sobre um espaço topológico X:*

(a) *X possui uma base σ-ponto-finita;*

(b) *X é quase-desenvolvível;*

(c) *X é d-separável.*

Então $(a) \to (b) \to (c)$.

Demonstração. A implicação $(a) \to (b)$ é o teorema 3 de [3]. Para $(b) \to (c)$, seja $(\mathscr{G}_n)_{n\in\omega}$ um quase-desenvolvimento para X. Para cada $n \in \omega$, seja $\mathscr{G}_n = \{U^n_\alpha : \alpha \in \gamma_n\}$ uma boa-ordenação de $\mathscr{G}_n$; em seguida, para cada $\alpha \in \gamma_n$, defina recursivamente:

· $V^n_\alpha = U^n_\alpha$ e $A^n_\alpha = \{x^n_\alpha\}$, sendo x^n_α qualquer elemento de $U^n_\alpha \setminus \bigcup_{\beta\in\alpha} V^n_\beta$, se este conjunto for não-vazio e $U^n_\alpha \cap \bigcup_{\beta\in\alpha} A^n_\beta = \emptyset$; ou

· $V^n_\alpha = A^n_\alpha = \emptyset$, se $U^n_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta\in\alpha} V^n_\beta$ ou $U^n_\alpha \cap \bigcup_{\beta\in\alpha} A^n_\beta \neq \emptyset$.

Note que o conjunto $D_n = \bigcup_{\alpha\in\gamma_n} A^n_\alpha$ é discreto. Afirmamos que $\bigcup_{n\in\omega} D_n$ é denso em X.

De fato, seja Ω um aberto não-vazio de X, e fixe $x \in \Omega$. Como $(\mathscr{G}_n)_{n\in\omega}$ é um quase-desenvolvimento, tem-se que $\emptyset \neq st(x,\mathscr{G}_n) \subseteq \Omega$ para algum $n \in \omega$. Seja $\xi = \min\{\alpha \in \gamma_n : x \in U^n_\alpha\}$. Por construção, se $D_n \cap U^n_\xi$ fosse vazio, deveríamos ter que $U^n_\xi \subseteq \bigcup_{\beta\in\xi} V^n_\beta$, e assim $x \in U^n_\xi \subseteq \bigcup_{\beta\in\xi} U^n_\beta$, o que contradiz a definição de ξ. Portanto, $\emptyset \neq D_n \cap U^n_\xi \subseteq D_n \cap \Omega$. *q.e.d.*

Nas definições 2.1.4 e 2.1.6 a seguir, introduziremos duas propriedades que serão úteis neste capítulo. Sendo X um espaço topológico e $Y \subseteq X$, dizemos que $(V_y)_{y\in Y}$ é uma *atribuição de vizinhanças abertas* — ou, abreviadamente, *o.n.a.* (do inglês *open neighbourhood assignment*) — se, para todo $y \in Y$, tem-se que V_y é uma vizinhança aberta de y em X.

Definição 2.1.4. *Dizemos que um espaço topológico X satisfaz a* propriedade P *se:*

> *para todo discreto $D \subseteq X$, todo* o.n.a. $(V_d)_{d \in D}$ *e toda sequência $(E_n)_{n \in \omega}$ de subconjuntos densos de X, existe uma sequência $(D_n)_{n \in \omega}$ de subconjuntos discretos de X tal que $\forall n \in \omega\ (D_n \subseteq E_n)$ e $\forall d \in D\ (V_d \cap \bigcup_{n \in \omega} D_n \neq \emptyset)$.*

O intuito de considerar esta propriedade auxiliar é obter uma condição que, na presença de d-separabilidade, implique D-separabilidade. A propriedade P cumpre este papel para o caso de espaços de caráter enumerável (como veremos no corolário 2.2.2) e, como veremos a seguir, é uma consequência de outras propriedades topológicas mais usuais. Cabe observar o seguinte fato, cuja demonstração é imediata:

Lema 2.1.5. *Todo espaço D-separável satisfaz a propriedade P.*

Um espaço topológico X é dito *discretamente gerado* (vide [18]) se, para todo $A \subseteq X$ e todo $x \in \overline{A}$, existe $D \subseteq A$ discreto tal que $x \in \overline{D}$. Este conceito pode ser generalizado tomando-se subconjuntos discretos ao invés de pontos, resultando no seguinte conceito:

Definição 2.1.6. *Um espaço topológico X é* discretamente discretamente gerado (DDG) *se, para todo $A \subseteq X$ e todo $D \subseteq \overline{A}$ discreto, existe $D_0 \subseteq A$ discreto tal que $D \subseteq \overline{D_0}$.*

Antes de proceder às relações existentes entre tais propriedades, façamos uma pequena observação:

Lema 2.1.7. *As seguintes condições são equivalentes para um espaço topológico X:*

(a) X é hereditariamente coletivamente de Hausdorff;

(*b*) *para todo discreto* $D \subseteq X$, *existe uma família celular* $\{V_d : d \in D\}$ *em* X *tal que* $V_d \cap D = \{d\}$ *para cada* $d \in D$.

Demonstração. A implicação $(b) \to (a)$ é imediata. Para $(a) \to (b)$, seja D um subconjunto discreto de X. Então o conjunto A de todos os pontos de acumulação de D em X é disjunto de D, o que implica que D é um subconjunto fechado e discreto de $Y = X \setminus A$. Por (a), existe uma família $\{V_d : d \in D\}$ de abertos de Y dois a dois disjuntos tal que $d \in V_d$ para cada $d \in D$. Mas Y é aberto em X, logo V_d é aberto em X para todo $d \in D$. *q.e.d.*

Veremos agora como os conceitos anteriores se relacionam. Aqui faremos menção a espaços *monotonicamente normais*; em lugar de apresentar a definição original deste conceito (introduzido em [25]), mencionaremos a seguinte caracterização (também estabelecida em [25]): um espaço topológico (X, τ) é monotonicamente normal se, e somente se, existe uma função

$$\Omega : \{(x, U) \in X \times \tau : x \in U\} \to \tau$$

satisfazendo $x \in \Omega(x, U)$ e tal que $\Omega(x, U) \cap \Omega(y, V) \neq \emptyset$ implica $x \in V$ ou $y \in U$.

Proposição 2.1.8. *Considere as seguintes afirmações sobre um espaço topológico* X:

(*a*) X *é metrizável;*

(*b*) X *é monotonicamente normal;*

(*c*) X *é discretamente gerado e hereditariamente coletivamente de Hausdorff;*

(*d*) X *é DDG;*

(*e*) X *satisfaz a propriedade P.*

Então $(a) \to (b) \to (c) \to (d) \to (e)$.

Demonstração. Para a primeira das implicações, fixe uma métrica d sobre X compatível com sua topologia. Para cada par (x, U) com $U \subseteq X$ aberto e $x \in U$, basta tomar $r(x, U) > 0$ tal que $x \in B_d(x, r(x, U)) \subseteq U$ e definir $\Omega(x, U) = B_d(x, \frac{r(x,U)}{2})$.

Pelo teorema 3.10 de [18], todo espaço monotonicamente normal é discretamente gerado. A implicação $(b) \to (c)$ segue então deste resultado e do lema 2.1.7; alternativamente, este fato decorre também do teorema 3.1 de [25].

Para $(c) \to (d)$, sejam $D, A \subseteq X$ tais que D é discreto e $D \subseteq \overline{A}$. Pelo lema 2.1.7, existe uma família celular $\{V_d : d \in D\}$ em X tal que $d \in V_d$ para todo $d \in D$. Para cada $d \in D$, seja A_d um subconjunto discreto de A satisfazendo $d \in \overline{A_d}$. Então $D_0 = \bigcup_{d \in D}(A_d \cap V_d)$ é um subconjunto discreto de A tal que $D \subseteq \overline{D_0}$.

Finalmente, (d) implica (e) uma vez que podemos tomar $D_0 \subseteq E_0$ tal que $D \subseteq \overline{D_0}$ e definir $D_n = \emptyset$ para $n \in \omega \setminus \{0\}$. *q.e.d.*

O próximo resultado faz menção à seguinte propriedade: um espaço topológico X é dito *screenable* (vide [11]) se toda cobertura aberta de X possui um refinamento que é uma reunião enumerável de famílias celulares.

Proposição 2.1.9. *Todo espaço que é hereditariamente* screenable *satisfaz a propriedade P.*

Demonstração. Sejam D, $(V_d)_{d \in D}$ e $(E_n)_{n \in \omega}$ como no enunciado da propriedade P. Como $Y = \bigcup_{d \in D} V_d$ é *screenable*, existe uma sequência $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ de famílias celulares em Y tal que $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{U}_n$ é um refinamento aberto de $\{V_d : d \in D\}$. Para cada $n \in \omega$ e cada $U \in \mathcal{U}_n$, tome $y_U^n \in U \cap E_n$ arbitrário; como os elementos de $\mathcal{U}_n$ são dois a dois disjuntos, segue que $D_n = \{y_U^n : U \in \mathcal{U}_n\}$ é um subconjunto discreto de E_n.

Agora, para $d \in D$ arbitrário, sejam $k \in \omega$ e $U \in \mathcal{U}_k$ tais que $d \in U$. Como $\mathcal{U}$ é um refinamento de $\{V_x : x \in D\}$ e $d \notin V_x$ se $x \in D \setminus \{d\}$, devemos ter que $U \subseteq V_d$, logo $y_U^n \in V_d \cap D_k \subseteq V_d \cap \bigcup_{n \in \omega} D_n$. *q.e.d.*

2.2 Obtendo D-separabilidade

Vamos agora investigar condições sob as quais d-separabilidade implica D-separabilidade.

No seguinte lema auxiliar, uma tal condição é apresentada explicitamente.

Lema 2.2.1. *Suponha que um espaço d-separável X satisfaz a seguinte condição:*

> *para todo $D \subseteq X$ discreto e toda sequência $(E_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos densos de X, existe uma sequência $(D_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos discretos de X tal que $D_n \subseteq E_n$ para todo $n \in \omega$ e $D \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\omega} D_n}$.*

Então X é D-separável.

Demonstração. Seja $(Z_k)_{k\in\omega}$ uma sequência de subespaços discretos de X tal que $Z = \bigcup_{k\in\omega} Z_k$ é denso em X, e fixe uma bijeção $f : \omega \times \omega \to \omega$. Seja agora $(E_j)_{j\in\omega}$ uma sequência de subconjuntos densos de X. Por hipótese, para cada $k \in \omega$ existe uma sequência $(A^k_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos discretos de X tal que $A^k_n \subseteq E_{f(k,n)}$ para todo $n \in \omega$ e $Z_k \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\omega} A^k_n}$. Definindo então $D_{f(k,n)} = A^k_n$ para cada $(k, n) \in \omega \times \omega$, tem-se que

$$\overline{\bigcup_{j\in\omega} D_j} = \overline{\bigcup_{k\in\omega}\bigcup_{n\in\omega} A^k_n} \supseteq \bigcup_{k\in\omega}\overline{\bigcup_{n\in\omega} A^k_n} \supseteq \bigcup_{k\in\omega} Z_k = Z,$$

o que implica $\overline{\bigcup_{j\in\omega} D_j} \supseteq \overline{Z} = X$. *q.e.d.*

Podemos então usar a propriedade P para obter uma tal condição.

Corolário 2.2.2. *Se um espaço d-separável X tem caráter enumerável e satisfaz a propriedade P, então X é D-separável.*

Demonstração. Basta mostrar que a condição enunciada no lema 2.2.1 se verifica. Sejam então $D \subseteq X$ discreto e $(E_n)_{n\in\omega}$ uma sequência de subconjuntos densos de X. Para cada $x \in D$, seja $\{V^x_k : k \in \omega\}$ uma base local de X em x tal que $V^x_k \cap D = \{x\}$ para todo $k \in \omega$. Fixe agora uma bijeção $f : \omega \times \omega \to \omega$. Para cada $k \in \omega$, segue da propriedade P que existe uma sequência $(A^k_j)_{j\in\omega}$ de subconjuntos discretos de X satisfazendo

- $A_j^k \subseteq E_{f(k,j)}$ para todo $j \in \omega$; e
- $V_k^x \cap \bigcup_{j\in\omega} A_j^k \neq \emptyset$ para todo $x \in D$.

Assim, definindo $D_{f(k,j)} = A_j^k$ para cada $(k,j) \in \omega \times \omega$, obtemos $D \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\omega} D_n}$, uma vez que, para todo $x \in D$, tem-se que $\forall k \in \omega\ (V_k^x \cap \bigcup_{n\in\omega} D_n \neq \emptyset)$ e portanto $x \in \overline{\bigcup_{n\in\omega} D_n}$. *q.e.d.*

Em vista do lema 2.1.5, tem-se que o corolário 2.2.2 pode ser reescrito como uma equivalência para espaços de caráter enumerável:

Corolário 2.2.3. *Seja X um espaço de caráter enumerável. Então X é D-separável se, e somente se, X é d-separável e satisfaz a propriedade P.*

Este resultado nos traz as seguintes consequências:

Corolário 2.2.4. *Se um espaço d-separável X satisfaz $\chi(X) = s(X) = \aleph_0$, então X é D-separável.*

Demonstração. Segue diretamente do corolário 2.2.2 e da observação de que *spread* enumerável implica a propriedade P. *q.e.d.*

Corolário 2.2.5. *Se um espaço quase-desenvolvível tem* spread *enumerável, então ele é D-separável.*

Demonstração. Segue da proposição 2.1.3 e do corolário 2.2.4. *q.e.d.*

Corolário 2.2.6. *Se um espaço d-separável tem caráter enumerável e é hereditariamente* screenable*, então ele é D-separável.*

Demonstração. Segue da proposição 2.1.9 e do corolário 2.2.2. *q.e.d.*

Encerramos esta seção notando que é pertinente questionar a necessidade da hipótese sobre o caráter no corolário 2.2.2. Mais precisamente, a seguinte pergunta permanece sem resposta:

Problema 2.2.7. *Existe um espaço d-separável de caráter $\aleph_1$ que satisfaz a propriedade P mas não é D-separável?*

O tópico de D-separabilidade será retomado na seção 3.3, onde veremos outras condições que implicam esta propriedade.

2.3 Obtendo D^+-separabilidade

Finalmente, buscaremos hipóteses topológicas que implicam D^+-separabilidade na presença de d-separabilidade.

O primeiro resultado na verdade requer separabilidade em vez de d-separabilidade.

Proposição 2.3.1. *Se um espaço topológico é separável e discretamente gerado, então ele é D^+-separável.*

Demonstração. Seja $\{x_n : n \in \omega\}$ um subconjunto denso de X. Consideremos uma partida do jogo $\mathsf{G}_{\text{dis}}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$ em que, em cada rodada $n \in \omega$, Dois responde ao subconjunto denso $E_n \subseteq X$ jogado por Um com um discreto $D_n \subseteq E_n$ tal que $x_n \in \overline{D_n}$. Isto define uma estratégia vencedora para o jogador Dois, uma vez que o conjunto $\bigcup_{n\in\omega} D_n$ obtido ao fim do jogo é denso em X. *q.e.d.*

Tem-se, no entanto, que a hipótese de separabilidade no resultado anterior pode ser substituída por d-separabilidade no caso de espaços hereditariamente *screenable*:

Proposição 2.3.2. *Se um espaço topológico é d-separável, discretamente gerado e hereditariamente* screenable*, então ele é D^+-separável.*

Demonstração. Fixe uma bijeção $f : \omega \times \omega \to \omega$ e um subconjunto denso $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ de X tal que cada A_n é discreto. Para cada $n \in \omega$, seja $(V_x^n)_{x\in A_n}$ um *o.n.a.* que testemunha que A_n é discreto. Como $Y_n = \bigcup_{x\in A_n} V_x^n$ é *screenable*, existe uma sequência $(\mathcal{U}_k^n)_{k\in\omega}$ de famílias celulares em Y_n tal que $\mathcal{U}^n = \bigcup_{k\in\omega} \mathcal{U}_k^n$ é um refinamento aberto de $\{V_x^n : x \in A_n\}$. Para cada $x \in A_n$, tome então $U_x^n \in \mathcal{U}^n$ tal que $x \in U_x^n$; como $\mathcal{U}^n$ é um refinamento de $\{V_x^n : x \in A_n\}$ e $x \notin V_y^n$ se $y \in A_n \setminus \{x\}$, tem-se que $U_x^n \subseteq V_x^n$.

Definamos agora uma estratégia para o jogador Dois no jogo $\mathsf{G}_{\text{dis}}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$. Para cada $j \in \omega$, seja $E_j \subseteq X$ o subconjunto denso jogado por Um na j-ésima rodada. Tome então $n, k \in \omega$ tais que $f(n,k) = j$, e defina $B_j = \{x \in A_n : U_x^n \in \mathcal{U}_k^n\}$. Para cada $x \in B_j$, como $x \in \overline{U_x^n \cap E_j}$, existe um discreto $D_x^j \subseteq U_x^n \cap E_j$ satisfazendo $x \in \overline{D_x^j}$. Como $\mathcal{U}_k^n$ é uma família celular, tem-se que $D_j = \bigcup_{x\in B_j} D_x^j$ é um subconjunto discreto de E_j. Afirmamos que isto define uma estratégia vencedora para Dois no jogo $\mathsf{G}_{\text{dis}}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$, *i.e.*, que $\bigcup_{j\in\omega} D_j$ será denso em X se para todo $j \in \omega$ o conjunto D_j for obtido a partir de E_j de acordo com o procedimento descrito acima.

De fato, seja $\Omega \neq \emptyset$ aberto em X. Então existem $n \in \omega$ e $x \in A_n$ satisfazendo $x \in \Omega$. Seja $k \in \omega$ tal que $x \in B_j$ para $j = f(n,k)$. Então $x \in \overline{D_x^j} \subseteq \overline{D_j} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in\omega} D_i}$. *q.e.d.*

Outra classe de espaços topológicos na qual d-separabilidade implica D^+-separabilidade é a classe de espaços DDG:

Proposição 2.3.3. *Se X é um espaço topológico d-separável e DDG, então X é D^+--separável.*

Demonstração. Seja $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ um subconjunto denso de X tal que A_n é discreto para todo $n \in \omega$. Definamos uma estratégia para Dois em $\mathsf{G}_{\text{dis}}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$ da seguinte maneira: se Um joga o subconjunto denso $E_n \subseteq X$ na n-ésima rodada, Dois joga um subconjunto discreto $D_n \subseteq E_n$ tal que $A_n \subseteq \overline{D_n}$. Como A é denso em X, tem-se que $\bigcup_{n\in\omega} D_n$ também o é, e portanto esta é uma estratégia vencedora para o jogador Dois. *q.e.d.*

Da combinação do resultado acima com a proposição 2.1.8 decorrem os seguintes corolários:

Corolário 2.3.4. *Seja X um espaço topológico discretamente gerado e hereditariamente coletivamente de Hausdorff. Então X é d-separável se, e somente se, é D^+-separável.*

Corolário 2.3.5. *Um espaço topológico monotonicamente normal é d-separável se, e somente se, é D^+-separável.*

Em particular, o corolário 2.3.5 responde afirmativamente o problema 27 de [9], onde foi perguntado se d-separabilidade e D-separabilidade seriam equivalentes para espaços monotonicamente normais.

Capítulo 3

Um contexto mais geral

Neste capítulo, exploramos a relação entre princípios de seleção e os jogos a eles associados. Mais especificamente, buscamos condições não-topológicas que impliquem a equivalência entre uma afirmação definida por um princípio de seleção e a não-existência de estratégia vencedora para o jogador Um no jogo associado. Para princípios de seleção de comprimento ω (*i.e.*, o caso $\lambda = \omega$ nas definições 1.7.8 e 1.7.9), isto é atingido com os teoremas 3.2.4 e 3.2.5, que possibilitam a unificação de demonstrações de resultados envolvendo propriedades topológicas diversas, como é visto na seção 3.3. Na seção 3.4, as técnicas trabalhadas nas primeiras seções do capítulo são adaptadas para tratar um caso de comprimento ω_1 — a saber, o jogo $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$, que, como visto no teorema 1.8.7, caracteriza indestrutibilidade para espaços de Lindelöf. Em particular, o corolário 3.4.6 estabelece um limitante inferior em ZFC para a cardinalidade de espaços de Lindelöf destrutíveis.

3.1 $\mathfrak{d}$ e cov($\mathcal{M}$) em ${}^{<\omega}\omega$

Primeiramente, apresentemos caracterizações de $\mathfrak{d}$ e $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ que serão úteis no que segue.

Lema 3.1.1. *Sendo $\mathcal{S} = {}^{<\omega}\omega$, defina*

$$\mathfrak{d}_1 = \min\{\kappa : \exists \mathcal{F} \in [{}^{\mathcal{S}}\omega]^{\kappa}\ \forall h \in {}^{\omega}\omega\ \exists F \in \mathcal{F}\ \forall n \in \omega\ (F(h \restriction n) \geq h(n))\}$$

e

$$\mathfrak{d}_2 = \min\{\kappa : \exists \mathcal{F} \in [{}^{\mathcal{S}}\omega]^{\kappa}\ \forall h \in {}^{\omega}\omega\ \exists F \in \mathcal{F}\ \forall^{\infty} n \in \omega\ (F(h \restriction n) \geq h(n))\}.$$

Então $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_2 = \mathfrak{d}$.

Demonstração. O fato de que $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_2$ decorre de um argumento usual: a desigualdade $\mathfrak{d}_2 \leq \mathfrak{d}_1$ é trivial; por outro lado, se $\mathcal{F} \subseteq {}^{\mathcal{S}}\omega$ satisfaz a condição presente na definição de $\mathfrak{d}_2$, basta considerar $\mathcal{G} = \{G \in {}^{\mathcal{S}}\omega : \exists F \in \mathcal{F}\ \forall^{\infty} s \in \mathcal{S}\ (F(s) = G(s))\}$ e notar que $\mathfrak{d}_1 \leq |\mathcal{G}| = |\mathcal{F}|$.

Para a desigualdade $\mathfrak{d}_1 \leq \mathfrak{d}$, seja $\mathcal{F} \in [{}^{\mathcal{S}}\omega]^{\mathfrak{d}}$ tal que

$$\forall G \in {}^{\mathcal{S}}\omega\ \exists F \in \mathcal{F}\ \forall s \in \mathcal{S}\ (F(s) \geq G(s))$$

— uma tal $\mathcal{F}$ existe dado que $|\mathcal{S}| = \aleph_0$. Para cada $h \in {}^{\omega}\omega$, tome $G_h \in {}^{\mathcal{S}}\omega$ dada por $G_h(h \restriction n) = h(n)$ para todo $n \in \omega$ e $G_h(s) = 0$ para toda $s \in \mathcal{S} \setminus \{h \restriction n : n \in \omega\}$. Segue da escolha de $\mathcal{F}$ que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que a desigualdade $F(h \restriction n) \geq G_h(h \restriction n) = h(n)$ é válida para todo $n \in \omega$.

Finalmente, provemos que $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{d}_1$. Tome $\mathcal{F} \subseteq {}^{\mathcal{S}}\omega$ tal que

$$\forall h \in {}^{\omega}\omega\ \exists F \in \mathcal{F}\ \forall n \in \omega\ (F(h \restriction n) \geq h(n))$$

e $|\mathcal{F}| = \mathfrak{d}_1$. Para cada $F \in \mathcal{F}$ e cada $n \in \omega$, defina

$$\mathcal{S}_n^F = \{s \in {}^{n+1}\omega : \forall i \leq n\ (F(s \restriction i) \geq s(i))\}.$$

Segue facilmente, por indução em n, que $\mathcal{S}_n^F$ é finito para todo $n \in \omega$. Para cada $F \in \mathcal{F}$, considere

$$\begin{array}{rccl} g_F & : & \omega & \rightarrow & \omega \\ & & n & \mapsto & \max\{s(n) : s \in \mathcal{S}_n^F\}. \end{array}$$

Afirmamos que $\{g_F : F \in \mathcal{F}\}$ é uma família dominante — o que acarreta $\mathfrak{d} \leq |\{g_F : F \in \mathcal{F}\}| \leq |\mathcal{F}| = \mathfrak{d}_1$.

De fato, tome $h \in {}^{\omega}\omega$ arbitrária. Pela escolha de $\mathcal{F}$, existe $F_0 \in \mathcal{F}$ tal que a desigualdade $F_0(h \restriction n) \geq h(n)$ ocorre para todo $n \in \omega$. Mas então $h \restriction (n+1) \in \mathcal{S}_n^{F_0}$ para todo $n \in \omega$, o que implica que $\forall n \in \omega\ (h(n) \leq g_{F_0}(n))$. *q.e.d.*

A caracterização de $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ que apresentaremos no lema 3.1.3 a seguir é uma variação do seguinte resultado, demonstrado no corolário 1.8 de [6]:

Teorema 3.1.2. $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \min\{\kappa : \exists \mathcal{F} \in [{}^{\omega}\omega]^{\kappa}\ \forall h \in {}^{\omega}\omega\ \exists f \in \mathcal{F}\ \forall n \in \omega\ (f(n) \neq h(n))\}$.

Lema 3.1.3. *Sendo $\mathcal{S} = {}^{<\omega}\omega$, defina*

$$\mu_1 = \min\{\kappa : \exists \mathcal{F} \in [{}^{\mathcal{S}}\omega]^{\kappa}\ \forall h \in {}^{\omega}\omega\ \exists F \in \mathcal{F}\ \forall n \in \omega\ (F(h \restriction n) \neq h(n))\}$$

e

$$\mu_2 = \min\{\kappa : \exists \mathcal{F} \in [{}^{\mathcal{S}}\omega]^{\kappa}\ \forall h \in {}^{\omega}\omega\ \exists F \in \mathcal{F}\ \forall^{\infty} n \in \omega\ (F(h \restriction n) \neq h(n))\}.$$

Então $\mu_1 = \mu_2 = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$.

Demonstração. Em face do teorema 3.1.2, a demonstração de que $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \geq \mu_1 = \mu_2$ é análoga à demonstração de que $\mathfrak{d} \geq \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_2$ feita no lema 3.1.1.

Resta então provar que $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mu_1$. Tome $\mathcal{F} \in [{}^{\mathcal{S}}\omega]^{\mu_1}$ tal que

$$\forall h \in {}^{\omega}\omega\ \exists F \in \mathcal{F}\ \forall n \in \omega\ (F(h \restriction n) \neq h(n)).$$

Para cada $F \in \mathcal{F}$, defina

$$P_F = \bigcup_{j \in \omega} \{t \in {}^{j+1}\omega : t(j) = F(t \restriction j)\}$$

e

$$C_F = \bigcap_{k\in\omega}\{f \in {}^{\omega}\omega : f\restriction(k+1) \notin P_F\}.$$

Afirmamos que C_F, visto como um subconjunto do produto topológico ω^ω, é fechado e tem interior vazio.

Para mostrar que C_F é fechado em ω^ω, é suficiente notar que o conjunto $C_F^k = \{f \in {}^{\omega}\omega : f\restriction(k+1) \notin P_F\}$ é fechado em ω^ω para cada $k \in \omega$: se $f \in {}^{\omega}\omega$ é tal que $f\restriction(k+1) \in P_F$, então $W = \{g \in {}^{\omega}\omega : g\restriction(k+1) = f\restriction(k+1)\}$ é um subconjunto aberto de ω^ω que satisfaz $f \in W \subseteq {}^{\omega}\omega \setminus C_F^k$.

Tome agora $f \in C_F$ arbitrária; mostraremos que $f \notin \mathrm{int}(C_F)$. Seja Ω uma vizinhança aberta de f em ω^ω; podemos assumir que $\Omega = \{g \in {}^{\omega}\omega : g\restriction F = f\restriction F\}$ para algum $F \in [\omega]^{<\omega}$. Sejam agora $n = (\max F) + 1$, $u = f\restriction n$ e $k_0 = F(u)$. Segue assim que, se $g \in {}^{\omega}\omega$ é tal que $g\restriction n = u$ e $g(n) = k_0$, então $g \in \Omega$ mas $g \notin C_F$, uma vez que $g\restriction(n+1) = u^\frown(k_0) \in P_F$. Logo $\Omega \nsubseteq C_F$, como requerido.

Assim, $C_F \subseteq \omega^\omega$ é fechado e tem interior vazio para todo $F \in \mathcal{F}$. Mostraremos agora que $\omega^\omega = \bigcup\{C_F : F \in \mathcal{F}\}$, o que implica que $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq |\mathcal{F}| = \mu_1$, como desejado.

De fato, tome $h \in {}^{\omega}\omega$ arbitrária. Segue da escolha de $\mathcal{F}$ que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F(h\restriction n) \neq h(n)$ para todo $n \in \omega$. Tem-se então que $h\restriction(n+1) \notin P_F$ para todo $n \in \omega$, *i.e.*, $h \in C_F$. *q.e.d.*

3.2 Consequências nas relações entre princípios de seleção e jogos

Fazendo uso dos resultados da seção anterior, vamos agora formular condições que garantam a equivalência entre princípios de seleção e a não-existência de estratégia vencedora para o jogador Um nos jogos a eles associados. Aqui, além dos princípios de seleção e jogos definidos na seção 1.7, consideraremos ainda os seguintes:

Definição 3.2.1. *Sejam* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *conjuntos não-vazios com* $\emptyset \notin \mathcal{A}$*. Abreviaremos por* $\mathsf{S}_1^\infty(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *a afirmação:*

> *para toda sequência* $(A_n)_{n\in\omega}$ *em* $\mathcal{A}$*, pode-se escolher* $B_n \in A_n$ *para cada* $n \in \omega$ *de modo que* $\{B_k : k \in \omega \setminus n\} \in \mathcal{B}$ *para todo* $n \in \omega$*.*

Abreviaremos ainda por $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}^\infty(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *a afirmação:*

> *para toda sequência* $(A_n)_{n\in\omega}$ *in* $\mathcal{A}$*, pode-se escolher* $F_n \in [A_n]^{<\aleph_0}$ *para cada* $n \in \omega$ *de modo que* $\bigcup_{k\in\omega\setminus n} F_k \in \mathcal{B}$ *para todo* $n \in \omega$*.*

Definição 3.2.2. *Sejam* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *como na definição 3.2.1.*

- *O jogo* $\mathsf{G}_1^\infty(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *é jogado da mesma maneira que* $\mathsf{G}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *— vide 1.7.9. Dois vence uma partida de* $\mathsf{G}_1^\infty(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *se* $\{B_k : k \in \omega \setminus n\} \in \mathcal{B}$ *para todo* $n \in \omega$*; do contrário, Um é o vencedor.*
- *O jogo* $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}^\infty(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *é jogado da mesma maneira que* $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *— vide 1.7.9. Dois vence uma partida de* $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}^\infty(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *se* $\bigcup_{k\in\omega\setminus n} F_k \in \mathcal{B}$ *para todo* $n \in \omega$*; do contrário, Um é o vencedor.*

O conceito introduzido na definição a seguir tem o intuito de generalizar certas noções topológicas — como há de ficar claro na próxima seção —, e será a peça chave dos resultados que obteremos no que segue.

Definição 3.2.3. *Sejam* $T \neq \emptyset$ *e* $\mathcal{B} \subseteq \wp(T)$*. Diremos que* $\mathcal{B}$ *é* reconhecido *por um par ordenado* (H, R)*, sendo* $H \neq \emptyset$ *e* $R \subseteq H \times T$*, se a equivalência*

$$B \in \mathcal{B} \leftrightarrow \forall x \in H \; \exists y \in B \; (xRy)$$

se verifica para todo $B \in \wp(T)$*.*

A título de motivação para a definição 3.2.3, notemos que há diversas propriedades topológicas que podem ser caracterizadas em termos de expressões que admitem a forma "$\forall x \in H\ \exists y \in B\ (xRy)$": por exemplo, sendo X um espaço topológico, tem-se que uma família B de subconjuntos de X é uma cobertura de X se, e somente se, $\forall x \in X\ \exists U \in B\ (x \in U)$; ainda, se $\mathcal{V}$ é uma π-base para X, então um subconjunto B' de X é denso em X se, e somente se, $\forall V \in \mathcal{V}\ \exists y \in B'\ (V \ni y)$.

A partir da definição 3.2.3, podemos então, por meio de hipóteses não-topológicas, estabelecer as seguintes relações entre os princípios de seleção considerados e os jogos a eles associados. Os dois teoremas a seguir são, juntamente com o teorema 3.4.4, os resultados centrais deste capítulo.

Teorema 3.2.4. *Sejam $T \neq \emptyset$ e $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \wp(T)$ não-vazios com $\emptyset \notin \mathcal{A}$. Suponha que $\mathcal{B}$ é reconhecido por um par (H, R) tal que $|H| < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *Um não possui estratégia vencedora no jogo $\mathsf{G}_1^\infty(\mathcal{A}, \mathcal{B})$;*

(b) *Um não possui estratégia vencedora no jogo $\mathsf{G}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$;*

(c) *$\mathsf{S}_1^\infty(\mathcal{A}, \mathcal{B})$;*

(d) *$\mathsf{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$;*

(e) *todo $A \in \mathcal{A}$ possui um subconjunto enumerável que é um elemento de $\mathcal{B}$.*

Demonstração. É imediato que $(a) \to (b) \to (d) \to (e)$ e que $(a) \to (c) \to (d)$; provaremos então a implicação $(e) \to (a)$.

Para cada $A \in \mathcal{A}$, fixe um subconjunto enumerável $B_A = \{y(A, n) : n \in \omega\} \subseteq A$ tal que $B_A \in \mathcal{B}$. Seja φ uma estratégia para o jogador Um no jogo $\mathsf{G}_1^\infty(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Vamos mostrar que o jogador Dois pode derrotar esta estratégia jogando apenas elementos da forma $y(A, n)$, sendo A o conjunto jogado por Um de acordo com φ. Para tanto, considere a função ψ que associa a cada $t = (t_i)_{i<k} \in {}^{<\omega}\omega$ a sequência $(z_i)_{i<k}$ definida recursivamente por $z_i = y(\varphi((z_j)_{j<i}), t_i)$ para todo $i < k$; finalmente, para cada $t \in {}^{<\omega}\omega$, defina $A_t = \varphi(\psi(t)) \in \mathcal{A}$.

Para cada $x \in H$, considere

$$\begin{array}{rcccl} F_x & : & {}^{<\omega}\omega & \to & \omega \\ & & s & \mapsto & \min\{m \in \omega : xR(y(A_s, m))\} \end{array}$$

— note que F_x está bem-definida, uma vez que $\{y(A_s, m) : m \in \omega\} \in \mathcal{B}$ para todo $s \in {}^{<\omega}\omega$. Pelo lema 3.1.3, $|H| < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ implica que existe $g \in {}^{\omega}\omega$ tal que, para todo $x \in H$, o conjunto $\{n \in \omega : F_x(g \restriction n) = g(n)\}$ é infinito.

Afirmamos que, se Um joga de acordo com φ e Dois responde a um conjunto $A \in \mathcal{A}$ jogado por Um na n-ésima rodada do jogo $\mathsf{G}_1^{\infty}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ com o elemento $y(A, g(n)) \in A$, então Dois vence a partida.

De fato, se Um e Dois jogam da maneira descrita acima, obtemos a seguinte partida de $\mathsf{G}_1^{\infty}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$:

rodada	Um	Dois
0	$A_\emptyset$	$y(A_\emptyset, g(0))$
1	$A_{(g(0))}$	$y(A_{(g(0))}, g(1))$
2	$A_{(g(0),g(1))}$	$y(A_{(g(0),g(1))}, g(2))$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$A_{g \restriction k}$	$y(A_{g\restriction k}, g(k))$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tome agora $n \in \omega$ arbitrário. Para cada $x \in H$, segue da definição de F_x e da escolha de g que o conjunto $\{k \in \omega : xR(y(A_{g\restriction k}, g(k)))\}$ é infinito, de modo que existe $k \geq n$ satisfazendo $xR(y(A_{g\restriction k}, g(k)))$. Assim,

$$\forall x \in H \; \exists y \in \{y(A_{g\restriction k}, g(k)) : k \geq n\} \; (xRy),$$

o que, por hipótese, implica que $\{y(A_{g\restriction k}, g(k)) : k \geq n\} \in \mathcal{B}$. Portanto, Dois vence a partida. *q.e.d.*

Fazendo-se uso do lema 3.1.1, a demonstração do teorema 3.2.4 pode ser diretamente adaptada de modo a se obter o seguinte resultado análogo:

Teorema 3.2.5. *Sejam $T, \mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ como no teorema 3.2.4. Suponha que $\mathcal{B}$ é reconhecido por um par (H, R) tal que $|H| < \mathfrak{d}$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *Um não possui estratégia vencedora no jogo $\mathsf{G}^{\infty}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$;*

(b) *Um não possui estratégia vencedora no jogo $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$;*

(c) $\mathsf{S}^{\infty}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$;

(d) $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$;

(e) *todo $A \in \mathcal{A}$ possui um subconjunto enumerável que é um elemento de $\mathcal{B}$.*

3.3 Aplicações em topologia geral

Como veremos agora, os teoremas 3.2.4 e 3.2.5 permitem unificar as demonstrações de resultados já conhecidos em topologia geral e obter novos resultados de formulação análoga em outras situações.

A primeira consequência topológica destes teoremas é uma versão ligeiramente mais forte do teorema 3 de [20] — a qual também pode ser obtida combinando-se este teorema com o lema 2 de [43]. Recordemos que, como visto na seção 1.7, $\mathcal{O}_X$ denota o conjunto de todas as coberturas abertas de um espaço topológico X.

Corolário 3.3.1 (Galvin [20], Pawlikowski [43])**.** *Seja X um espaço de Lindelöf com cardinalidade menor que* $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$*. Então Um não possui estratégia vencedora no jogo* $\mathsf{G}^{\infty}_{1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.

Demonstração. Como $\mathcal{O}_X = \{\mathcal{U} \subseteq \tau_X : \forall x \in X\ \exists U \in \mathcal{U}\ (x \in U)\}$, basta aplicar o teorema 3.2.4 para $T = \tau_X$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{O}_X$, $H = X$ e $R = \in$. *q.e.d.*

Com uma demonstração análoga, obtém-se a partir do teorema 3.2.5 a seguinte consequência do teorema 5 de [28] e do lema 1 de [43]:

Corolário 3.3.2 (Hurewicz [28], Pawlikowski [43]). *Se X é um espaço de Lindelöf de cardinalidade menor que $\mathfrak{d}$, então Um não possui estratégia vencedora no jogo $\mathsf{G}^{\infty}_{\text{fin}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.*

Os próximos dois resultados são originalmente consequências dos teoremas 29 e 40 de [49], respectivamente. Recordemos que, para um espaço topológico X, definimos $\mathcal{D}_X = \{E \subseteq X : E \text{ é denso em } X\}$. Um espaço topológico X é dito *R-separável* (respectivamente, *M-separável*) se vale $\mathsf{S}_1(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$ (respectivamente, $\mathsf{S}_{\text{fin}}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$); vide [49] e [8].

Corolário 3.3.3 (Scheepers [49]). *Seja X um espaço topológico tal que $\pi w(X) < \text{cov}(\mathcal{M})$. São equivalentes:*

(*a*) *Um não possui estratégia vencedora no jogo $\mathsf{G}_1(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$;*

(*b*) *X é R-separável;*

(*c*) *todo subespaço denso de X é separável.*

Demonstração. Sendo $\mathcal{V}$ uma π-base para X satisfazendo $|\mathcal{V}| < \text{cov}(\mathcal{M})$, tem-se que $\mathcal{D}_X = \{E \subseteq X : \forall V \in \mathcal{V}\ \exists y \in E\ (V \ni y)\}$. Agora aplique o teorema 3.2.4 tomando $T = X$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{D}_X$, $H = \mathcal{V}$ e $R = \ni$. *q.e.d.*

Corolário 3.3.4 (Scheepers [49]). *Seja X um espaço topológico satisfazendo $\pi w(X) < \mathfrak{d}$. São equivalentes:*

(*a*) *Um não possui estratégia vencedora em $\mathsf{G}_{\text{fin}}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$;*

(*b*) *X é M-separável;*

(*c*) *todo subespaço denso de X é separável.*

Demonstração. Basta repetir a demonstração do corolário 3.3.3 aplicando o teorema 3.2.5 em lugar do teorema 3.2.4. *q.e.d.*

O próximo resultado, presente em [4] e obtido em colaboração com L. Aurichi e L. Junqueira, diz respeito às propriedades discutidas no capítulo 2. Naturalmente, para que um espaço topológico X seja D-separável, é necessário que todo subespaço denso de X seja d-separável. O resultado a seguir nos dá uma hipótese adicional sob a qual esta condição também é suficiente para tal.

Corolário 3.3.5 (Aurichi-Dias-Junqueira [4]). *Seja X um espaço topológico tal que $\pi w(X) < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$. São equivalentes:*

(*a*) *Um não possui estratégia vencedora em $\mathsf{G}_{\mathrm{dis}}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$;*

(*b*) *X é D-separável;*

(*c*) *todo subespaço denso de X é d-separável.*

Demonstração. Fixe uma π-base $\mathcal{V}$ para X tal que $|\mathcal{V}| < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$. Sendo então $dis(X) = \{D \subseteq X : D \text{ é discreto}\}$, aplique o teorema 3.2.4 para

- $T = dis(X)$,
- $\mathcal{A} = \{\{D \in dis(X) : D \subseteq E\} : E \in \mathcal{D}_X\}$,
- $\mathcal{B} = \{\mathcal{I} \subseteq dis(X) : \bigcup \mathcal{I} \in \mathcal{D}_X\}$,
- $H = \mathcal{V}$, e
- $R = \{(V, D) \in \mathcal{V} \times dis(X) : V \cap D \neq \emptyset\}$.

O resultado segue então da observação de que os jogos $\mathsf{G}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\mathsf{G}_{\text{dis}}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X)$ são equivalentes. *q.e.d.*

Corolário 3.3.6. *Se um espaço topológico X é quase-desenvolvível e satisfaz $\pi w(X) < \operatorname{cov}(\mathcal{M})$, então X é D-separável.*

Demonstração. Como X é quase-desenvolvível, todo subespaço de X também o é. Pela proposição 2.1.3, isto implica que todo subespaço de X é d-separável, e o resultado então segue do corolário 3.3.5. *q.e.d.*

Corolário 3.3.7. *Se um espaço quase-desenvolvível X possui uma base ponto-enumerável*[1] *e satisfaz $s(X) < \operatorname{cov}(\mathcal{M})$, então X é D-separável.*

Demonstração. Pela proposição 2.1.3, X é d-separável, o que implica que X possui um subespaço denso de cardinalidade $s(X) \cdot \aleph_0 = s(X)$, e portanto $d(X) \leq s(X) < \operatorname{cov}(\mathcal{M})$. Como X possui uma base ponto-enumerável, tem-se que $w(X) = d(X) < \operatorname{cov}(\mathcal{M})$, logo $\pi w(X) \leq w(X) < \operatorname{cov}(\mathcal{M})$ e o resultado segue então do corolário 3.3.6. *q.e.d.*

Corolário 3.3.8. *Se um espaço topológico X possui uma base σ-ponto-finita e satisfaz $s(X) < \operatorname{cov}(\mathcal{M})$, então X é D-separável.*

Demonstração. Segue da proposição 2.1.3 e do corolário 3.3.7. *q.e.d.*

O corolário 3.3.8 diz respeito à pergunta 21 de [9], que se encontra em aberto:

Problema 3.3.9. *Se um espaço topológico possui uma base σ-ponto-finita, então ele é D-separável?*

Poder-se-ia perguntar se a desigualdade $\pi w(X) < \operatorname{cov}(\mathcal{M})$ seria suficiente para acarretar as condições presentes no enunciado do corolário 3.3.5. É claro que CH implica

[1] Agradeço à Prof.ª Ofelia Alas por observar, na defesa desta tese, que a hipótese de existência de uma base ponto-enumerável para X pode ser omitida neste resultado.

uma resposta afirmativa, dado que todo espaço com π-peso enumerável é tal que todos os seus subespaços densos são separáveis. A resposta negativa também é consistente: o L espaço $\mathscr{L}$ construído por J. Moore em [41] satisfaz $\pi w(\mathscr{L}) = \aleph_1$ e não é d-separável, pois $d(\mathscr{L}) = \aleph_1$ e $s(\mathscr{L}) = \aleph_0$; assim, trata-se de um contraexemplo sob a hipótese $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \geq \aleph_2$. Notemos ainda que considerações análogas se aplicam aos corolários 3.3.3 e 3.3.4.

Cabe ainda mencionar que a hipótese sobre o π-peso de X no corolário 3.3.5 não pode ser omitida: em [9, exemplo 40], foi mostrada a existência de um subespaço denso, enumerável e não-D-separável do cubo de Cantor $\mathbb{D}^{\mathfrak{c}}$.

Problema 3.3.10. *Pode-se enfraquecer a hipótese* $\pi w(X) < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ *no corolário 3.3.5?*

Precedamos agora à última aplicação que faremos dos resultados da seção anterior. Sendo X um espaço topológico, denotaremos por $\mathcal{G}_X$ a família de todas as coberturas de X por subconjuntos G_δ, e utilizaremos ainda a notação

$$\mathcal{G}_X^* = \{\mathcal{U} \in \mathcal{G}_X : \text{ para todo compacto } K \subseteq X, \text{ existe } A \in \mathcal{U} \text{ com } K \subseteq A\}.$$

Recordemos (vide [1]) que um *espaço de Alster* é um espaço topológico X tal que toda cobertura $\mathcal{U} \in \mathcal{G}_X^*$ contém uma subcobertura enumerável de X. Em [1], K. Alster demonstrou que todo espaço de Alster X é *produtivamente de Lindelöf*, *i.e.*, $X \times Y$ é de Lindelöf para todo espaço de Lindelöf Y. Ainda em [1], Alster demonstrou que, assumindo-se CH, todo espaço produtivamente de Lindelöf e regular com peso $\leq \aleph_1$ é um espaço de Alster.

Primeiramente, façamos a seguinte observação (devida ao autor e a L. Aurichi):

Proposição 3.3.11. *Um espaço topológico X é de Alster se, e somente se, ocorre* $\mathsf{S}_1(\mathcal{G}_X^*, \mathcal{G}_X)$.

Demonstração. A recíproca é imediata. Para a implicação direta, seja $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ uma sequência em $\mathcal{G}_X^*$. Considere $S = \prod_{n\in\omega} \mathcal{U}_n$ e, para cada $f \in S$, defina $V_f = \bigcap_{n\in\omega} f(n)$.

Nestas condições, tem-se que $\{V_f : f \in S\} \in \mathcal{G}_X^*$; logo, como X é de Alster, existe $\{f_n : n \in \omega\} \subseteq S$ tal que $X = \bigcup_{n\in\omega} V_{f_n}$. Defina agora $A_n = f_n(n)$ para cada $n \in \omega$. Então

$$X = \bigcup_{n\in\omega} V_{f_n} = \bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{k\in\omega} f_n(k) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} f_n(n) = \bigcup_{n\in\omega} A_n$$

e, como $A_n \in \mathcal{U}_n$ para todo $n \in \omega$, tem-se o desejado. *q.e.d.*

A seguir, relacionaremos a propriedade de Alster ao *jogo compacto-G_δ*, definido por R. Telgársky em [63]. Este jogo é jogado num espaço topológico X de acordo com as seguintes regras. Em cada rodada $n \in \omega$, o jogador Um toma um subespaço compacto $K_n \subseteq X$, e em seguida o jogador Dois escolhe um subconjunto $A_n \subseteq X$ tal que A_n é G_δ em X e $K_n \subseteq A_n$. Um vence o jogo se $X = \bigcup_{n\in\omega} A_n$; do contrário, Dois é o vencedor.

Por essencialmente a mesma demonstração apresentada para o teorema 6.2 de [63], tem-se:

Proposição 3.3.12 (Telgársky [63]). *O jogo $\mathsf{G}_1(\mathcal{G}_X^*, \mathcal{G}_X)$ e o jogo compacto-G_δ em X são duais.*

Em particular, tem-se:

Corolário 3.3.13. *Se X é um espaço topológico tal que o jogador Dois não possui estratégia vencedora no jogo compacto-G_δ em X, então X é um espaço de Alster.*

Aplicando-se o teorema 3.2.4, pode-se obter a recíproca da proposição 3.3.13 — e, assim, uma caracterização da propriedade de Alster via jogos topológicos — para o caso em que $|X| < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$:

Corolário 3.3.14. *Seja X um espaço topológico com $|X| < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$. Então X é de Alster se, e somente se, o jogador Dois não possui estratégia vencedora no jogo compacto-G_δ em X.*

Demonstração. Análoga à demonstração do corolário 3.3.1. *q.e.d.*

À luz do teorema 1.7.6, e tendo em vista o paralelismo entre os corolários 3.3.1 e 3.3.14, cabe então perguntar:

Problema 3.3.15. *A não-existência de estratégia vencedora no jogo compacto-G_δ num espaço topológico X é equivalente a X ser um espaço de Alster?*

3.4 Um análogo de $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ em ${}^{\omega_1}\omega_1$ e sua relação com indestrutibilidade

Nesta seção, empregaremos ideias análogas às utilizadas nas seções 3.1 e 3.2 a fim de obter resultados sobre indestrutibilidade de espaços de Lindelöf.

Seja τ a topologia sobre ${}^{\omega_1}\omega_1$ gerada pelos subconjuntos G_δ do produto usual ${\omega_1}^{\omega_1}$, no qual ω_1 é considerado com a topologia discreta. Denotaremos por Z o espaço topológico $({}^{\omega_1}\omega_1, \tau)$, e por $\mathfrak{z}$ a menor cardinalidade de uma cobertura de Z por subconjuntos fechados de interior vazio.[2]

Primeiramente, um lema técnico:

Lema 3.4.1. *Seja $\mathbb{P} = (Fn(\omega_1, \omega_1, \aleph_1), \supseteq)$. Suponha que κ é um cardinal tal que, para toda família $\mathscr{D}$ de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ tal que $|\mathscr{D}| \leq \kappa$, existe um filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ tal que $G \cap D \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathscr{D}$. Então $\mathfrak{z} > \kappa$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{W}$ uma família não-vazia de abertos densos de Z tal que $|\mathcal{W}| \leq \kappa$; mostraremos que $\bigcap \mathcal{W} \neq \emptyset$.

Para cada $p \in \mathbb{P}$, defina $[p] = \{f \in {}^{\omega_1}\omega_1 : f \supseteq p\}$. O conjunto $\{[p] : p \in \mathbb{P}\}$ é uma base de abertos para Z; logo, para cada $W \in \mathcal{W}$, podemos fixar $I_W \neq \emptyset$ e $\{p_i^W : i \in I_W\} \subseteq \mathbb{P}$

[2] Cabe notar que, utilizando a notação $\mathrm{cov}(\mathcal{I})$ a que nos referimos na nota de rodapé da página 6, podemos escrever $\mathfrak{z} = \mathrm{cov}(\{A \in \wp(Z) : A \text{ é um subconjunto magro de } Z\})$.

satisfazendo $W = \bigcup\{[p_i^W] : i \in I_W\}$. Assim, a afirmação $\bigcap \mathcal{W} \neq \emptyset$ é equivalente a

$$\exists f \in {}^{\omega_1}\omega_1 \; \forall W \in \mathcal{W} \; \exists i \in I_W \; (f \supseteq p_i^W). \tag{†}$$

Para cada $W \in \mathcal{W}$, defina $E_W = \bigcup_{i \in I_W}\{q \in \mathbb{P} : q \supseteq p_i^W\}$. Afirmamos que cada E_W é denso na ordem parcial $\mathbb{P}$. De fato, para $r \in \mathbb{P}$ arbitrário, o conjunto $[r]$ é não-vazio e aberto em Z; logo, como W é denso em Z, existe $i \in I_W$ tal que $[p_i^W] \cap [r] \neq \emptyset$. Tem-se então que $q = p_i^W \cup r$ é uma extensão de r em $\mathbb{P}$ tal que $q \in E_W$.

Assim, por hipótese, existe um filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ tal que $G \cap E_W \neq \emptyset$ para todo $W \in \mathcal{W}$. Seja $f \in {}^{\omega_1}\omega_1$ uma função satisfazendo $f \supseteq \bigcup G$. Para cada $W \in \mathcal{W}$, o fato de que $G \cap E_W \neq \emptyset$ implica que existe $i \in I_W$ tal que $f \supseteq p_i^W$. Portanto, por (†), tem-se que $\bigcap \mathcal{W} \neq \emptyset$. *q.e.d.*

Podemos então fazer a seguinte estimativa do valor de $\mathfrak{z}$:

Corolário 3.4.2. $\aleph_1 < \mathfrak{z} \leq 2^{\aleph_1}$.

Demonstração. A segunda desigualdade é imediata, uma vez que $|{}^{\omega_1}\omega_1| = 2^{\aleph_1}$. Para a primeira desigualdade, faremos uso do lema 3.4.1.

Seja $\mathscr{D} = \{D_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ uma família de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Construiremos, indutivamente, uma sequência $(p_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$ em $\mathbb{P}$ como segue.

Primeiramente, defina $p_0 = \emptyset$. Se $\alpha \in \omega_1$ é tal que p_α já foi definido, tome $p_{\alpha+1} \in D_\alpha$ tal que $p_{\alpha+1} \leq p_\alpha$. Finalmente, se $\beta \in \omega_1$ é um ordinal limite não-nulo tal que $(p_\alpha)_{\alpha<\beta}$ já foi construída, defina $p_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} p_\alpha \in \mathbb{P}$.

Em posse da sequência $(p_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$ assim obtida, temos que $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists \alpha \in \omega_1 \; (p_\alpha \leq q)\}$ é um filtro que intersecta todo elemento de $\mathscr{D}$. Assim, podemos aplicar o lema 3.4.1 para $\kappa = \aleph_1$. *q.e.d.*

O próximo resultado é análogo à porção do lema 3.1.3 que foi utilizada no teorema 3.2.4.

Lema 3.4.3. *Sejam $\mathcal{S} = {}^{<\omega_1}\omega_1$ e $\mathcal{F} \subseteq {}^{\mathcal{S}}\omega_1$ com $|\mathcal{F}| < \mathfrak{z}$. Então existe $g : \omega_1 \to \omega_1$ tal que, para todo $F \in \mathcal{F}$, existe $\xi \in \omega_1$ satisfazendo $g(\xi) = F(g \restriction \xi)$.*

Demonstração. Para cada $F \in \mathcal{F}$, considere

$$P_F = \bigcup_{\alpha \in \omega_1} \{s \in {}^{\alpha+1}\omega_1 : s(\alpha) = F(s \restriction \alpha)\}$$

e

$$M_F = \bigcap_{\xi \in \omega_1} \{f \in {}^{\omega_1}\omega_1 : f \restriction (\xi + 1) \notin P_F\}.$$

Afirmamos que M_F é um subconjunto fechado de Z com interior vazio.

O fato de que M_F é fechado em Z segue da observação de que o conjunto $M_F^\xi = \{f \in {}^{\omega_1}\omega_1 : f \restriction (\xi + 1) \notin P_F\}$ é fechado em Z para todo $\xi \in \omega_1$: de fato, se $f \in {}^{\omega_1}\omega_1 \setminus M_F^\xi$, o conjunto $V = \{h \in {}^{\omega_1}\omega_1 : h \restriction (\xi + 1) = f \restriction (\xi + 1)\}$ é uma vizinhança aberta de f em Z satisfazendo $V \cap M_F^\xi = \emptyset$.

Suponha agora, por absurdo, que existe Ω aberto em Z tal que $\emptyset \neq \Omega \subseteq M_F$, e tome $h \in \Omega$ arbitrário. Podemos assumir que $\Omega = \{f \in {}^{\omega_1}\omega_1 : f \restriction C = h \restriction C\}$, onde $C \subseteq \omega_1$ é enumerável. Seja agora $\delta \in \omega_1$ com $\delta > \sup C$, e considere $t = h \restriction \delta$ e $\beta = F(t)$. Tem-se assim que, se $f \in {}^{\omega_1}\omega_1$ é tal que $f \restriction (\delta + 1) = t^\frown(\beta)$, então $f \in \Omega$ e, no entanto, como $f(\delta) = \beta = F(f \restriction \delta)$, devemos ter que $f \restriction (\delta + 1) \in P_F$, de modo que $f \notin M_F$. Isto contradiz a escolha de Ω.

Como $\{M_F : F \in \mathcal{F}\}$ é uma família de subconjuntos fechados de Z com interior vazio, segue de $|\mathcal{F}| < \mathfrak{z}$ que existe $g \in Z \setminus \bigcup\{M_F : F \in \mathcal{F}\}$. Para cada $F \in \mathcal{F}$, como $g \notin M_F$, existe $\xi \in \omega_1$ com $g \restriction (\xi + 1) \in P_F$, o que implica que $g(\xi) = F(g \restriction \xi)$. Assim, g satisfaz as condições desejadas. *q.e.d.*

Da mesma maneira, temos então a seguinte versão do teorema 3.2.4 para comprimento ω_1:

Teorema 3.4.4. *Sejam T um conjunto não-vazio e $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \wp(T)$ não-vazios com $\emptyset \notin \mathcal{A}$. Suponha que $\mathcal{B}$ é reconhecido por um par (H, R) com $|H| < \mathfrak{z}$. Então as seguinte condições são equivalentes:*

(a) Um não possui estratégia vencedora no jogo $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$;

(b) $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$;

(c) $\forall A \in \mathcal{A}\ ([A]^{\leq\aleph_1} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset)$.

Demonstração. É imediato que $(a) \to (b) \to (c)$. Provemos então a implicação $(c) \to (a)$.

Primeiramente, para cada $A \in \mathcal{A}$, fixe $B_A = \{y(A, \xi) : \xi \in \omega_1\} \in [A]^{\leq\aleph_1} \cap \mathcal{B}$. Mostraremos que qualquer estratégia para Um no jogo $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ pode ser derrotada por Dois jogando apenas elementos de B_A, sendo $A \in \mathcal{A}$ o conjunto jogado por Um na mesma rodada. Para tanto, podemos assumir que uma estratégia para Um neste jogo é uma função que, a cada $s \in {}^{<\omega_1}\omega_1$, associa um $A_s \in \mathcal{A}$. Fixe então uma tal estratégia.

Para cada $x \in H$, defina

$$\begin{array}{rccl} F_x & : & {}^{<\omega_1}\omega_1 & \to & \omega_1 \\ & & s & \mapsto & \min\{\gamma \in \omega_1 : xR(y(A_s, \gamma))\} \end{array}$$

— note que F_x está bem-definida, uma vez que $\{y(A_s, \gamma) : \gamma \in \omega_1\} \in \mathcal{B}$ para toda $s \in {}^{<\omega_1}\omega_1$. Pelo lema 3.4.3, existe $g : \omega_1 \to \omega_1$ tal que, para todo $x \in H$, existe $\xi \in \omega_1$ satisfazendo $g(\xi) = F_x(g \restriction \xi)$. Mostraremos que, se Dois responde a um conjunto $A \in \mathcal{A}$ jogado por Um na ξ-ésima rodada de $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ com o elemento $y(A, g(\xi)) \in A$, então Dois vence a partida.

De fato, se Um joga de acordo com a estratégia fixada inicialmente e Dois joga de acordo com a estratégia acima descrita, obtemos a partida

rodada	Um	Dois
0	$A_\emptyset$	$y(A_\emptyset, g(0))$
1	$A_{(g(0))}$	$y(A_{(g(0))}, g(1))$
2	$A_{(g(0),g(1))}$	$y(A_{(g(0),g(1))}, g(2))$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
ξ	$A_{g\restriction\xi}$	$y(A_{g\restriction\xi}, g(\xi))$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

de $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Devemos mostrar que $\{y(A_{g\restriction\xi}, g(\xi)) : \xi \in \omega_1\} \in \mathcal{B}$ — ou, o que é equivalente, que, para todo $x \in H$, existe $\xi \in \omega_1$ com $xR(y(A_{g\restriction\xi}, g(\xi)))$. Mas isto segue da definição de F_x, uma vez que $xR(y(A_s, F_x(s)))$ para todo $s \in {}^{<\omega_1}\omega_1$ e a escolha de g garante a existência de $\xi \in \omega_1$ satisfazendo $y(A_{g\restriction\xi}, g(\xi)) = y(A_{g\restriction\xi}, F_x(g\restriction\xi))$. *q.e.d.*

No que segue, faremos uso da seguinte consequência topológica do teorema 3.4.4:

Corolário 3.4.5. *Seja X um espaço topológico com $|X| < \mathfrak{z}$. São equivalentes:*

(*a*) *Um não possui estratégia vencedora em $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$;*

(*b*) $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$*;*

(*c*) $L(X) \leq \aleph_1$.

Demonstração. Este resultado é similar ao corolário 3.3.1: basta aplicar o teorema 3.4.4 a $T = \tau_X$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{O}_X$, $H = X$ e $R = \in$. *q.e.d.*

Corolário 3.4.6. *Todo espaço de Lindelöf com cardinalidade menor que $\mathfrak{z}$ é indestrutível.*

Demonstração. Segue diretamente do corolário 3.4.5 e do teorema 1.8.7. *q.e.d.*

À luz do corolário 3.4.2, tem-se que o corolário 3.4.6 estende o teorema 6(b) de [60], que afirma que todo espaço de Lindelöf com cardinalidade menor ou igual a $\aleph_1$ é indestrutível. É válido ainda mencionar que, pelo teorema 17 de [60], o cubo de Cantor $\mathbb{D}^{\omega_1}$ é destrutível (vide ainda lema 4.2.3 mais adiante); assim, $\mathfrak{z}$ não pode ser substituído por nenhum cardinal consistentemente maior que $2^{\aleph_1}$ no corolário 3.4.6.

Problema 3.4.7. *Existe um espaço destrutível de cardinalidade $\mathfrak{z}$?*

A fim de extrairmos do corolário 3.4.6 o resultado mais forte possível — levando-se em consideração o corolário 3.4.2 —, mostraremos agora que a igualdade $\mathfrak{z} = 2^{\aleph_1} = \kappa$ é consistente com ZFC para todo cardinal regular $\kappa \geq \aleph_2$.

Recordemos que uma ordem parcial é dita:

- *well-met* se, dados quaisquer dois elementos compatíveis, o conjunto de suas extensões comuns possui elemento máximo;
- $\aleph_1$-*linked* se é uma reunião de $\aleph_1$ subconjuntos, cada um dos quais não possuindo dois elementos incompatíveis.

O *Axioma de Baumgartner*, usualmente abreviado BA (vide *e.g.* [59]), é a seguinte afirmação:

> seja $\mathbb{P}$ uma ordem parcial que é enumeravelmente fechada, *well-met* e $\aleph_1$-*linked*, e seja $\mathscr{D}$ uma família de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ tal que $|\mathscr{D}| < 2^{\aleph_1}$. Então existe um filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ satisfazendo $G \cap D \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathscr{D}$.

Teorema 3.4.8 (Baumgartner [7], Tall-Weiss [59])**.** *Seja $\kappa \geq \aleph_2$ um cardinal regular. Então a afirmação* $\mathrm{BA} + \mathrm{CH} + 2^{\aleph_1} = \kappa$ *é consistente com* ZFC.

Proposição 3.4.9. *Assuma* $\mathrm{BA} + \mathrm{CH}$. *Então* $\mathfrak{z} = 2^{\aleph_1}$.

Demonstração. É imediato que a ordem parcial $\mathbb{P}$ considerada no lema 3.4.1 é enumeravelmente fechada e *well-met*; além disso, tem-se por CH que $\mathbb{P}$ é $\aleph_1$-*linked*, uma vez que $|\mathbb{P}| = {\aleph_1}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Assim, segue de BA que a condição enunciada na hipótese do lema 3.4.1 é satisfeita para todo $\kappa < 2^{\aleph_1}$. O resultado segue então do lema 3.4.1 e do corolário 3.4.2. *q.e.d.*

Isto implica, em particular, a seguinte consequência do teorema 6(c) de [60]:

Corolário 3.4.10 (Tall [60])**.** *Para todo cardinal regular* $\kappa \geq \aleph_2$*, a conjunção das seguintes afirmações é consistente com* ZFC*:*

- CH*;*
- $2^{\aleph_1} = \kappa$*;*
- *todo espaço de Lindelöf de cardinalidade menor que* κ *é indestrutível.*

Demonstração. Decorre do teorema 3.4.8, da proposição 3.4.9 e do corolário 3.4.6. *q.e.d.*

Capítulo 4

Indestrutibilidade de espaços compactos

Neste capítulo, nosso interesse se concentrará na indestrutibilidade de espaços de Lindelöf do ponto de vista de jogos topológicos, dando assim continuidade ao tópico iniciado na seção 3.4.

Na seção 4.1, nosso interesse se concentra numa pergunta feita por Scheepers e Tall em [50], para a qual daremos uma resposta consistente através da exibição de um contra-exemplo. O fato de que o contraexemplo obtido é um espaço compacto nos leva então a estudar, na seção 4.2, a propriedade de indestrutibilidade em espaços de Hausdorff compactos. Finalmente, na seção 4.3, exploraremos a necessidade de hipóteses envolvendo cardinais inacessíveis e fracamente compactos em resultados recentes obtidos por Tall e Usuba em [62] sobre a cardinalidade de certos tipos de espaços de Lindelöf indestrutíveis.

Os resultados deste capítulo estão presentes no artigo [17], que foi recentemente submetido para publicação.

4.1 Indestrutibilidade *versus* $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O},\mathcal{O})$

À luz do teorema 1.7.6, Scheepers e Tall perguntam em [50] se ocorre a situação análoga no caso em que o princípio de seleção e o jogo topológico associado têm comprimento ω_1:

Problema 4.1.1 (Scheepers-Tall [50])**.** *Sendo X um espaço topológico, $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$ é equivalente à não-existência de estratégia vencedora para Um no jogo $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$?*

Notemos que, pelo corolário 3.4.5, a resposta é afirmativa para espaços com cardinalidade menor que $\mathfrak{z}$.

Tendo em vista a caracterização de indestrutibilidade dada pelo teorema 1.8.7, esta pergunta é feita ainda por Tall em [61] explicitamente para o caso de espaços de Lindelöf:

Problema 4.1.2 (Tall [61])**.** *Sendo X um espaço de Lindelöf, $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$ é equivalente a X ser indestrutível?*

Nesta seção, daremos uma resposta consistente negativa para esta pergunta; para tanto, exibiremos um espaço de Hausdorff compacto e destrutível X tal que ocorre $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$ sob CH.

Adotaremos aqui a seguinte terminologia utilizada em [37]:

Definição 4.1.3. *Seja κ um cardinal infinito. Uma* árvore κ-Čech-Pospíšil *num espaço topológico X é uma família indexada $\langle F_s : s \in {}^{\leq\kappa}2\rangle$ satisfazendo as seguintes condições:*

(i) *cada F_s é um subconjunto fechado e não-vazio de X;*

(ii) *$s \subseteq t$ implica $F_s \supseteq F_t$;*

(iii) *$F_{s^\frown(0)} \cap F_{s^\frown(1)} = \emptyset$;*

(iv) *se $\gamma \leq \kappa$ é um ordinal limite não-nulo e $s \in {}^{\gamma}2$, então $F_s = \bigcap_{\alpha\in\gamma} F_{s\restriction\alpha}$.*

Proposição 4.1.4. *Se existe uma árvore ω_1-Čech-Pospíšil num espaço topológico X, então o jogador Um possui estratégia vencedora no jogo $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.*

Demonstração. Seja $\langle F_s : s \in {}^{\leq\kappa}2\rangle$ uma árvore ω_1-Čech-Pospíšil em X. Para cada $s \in {}^{\leq\omega_1}2$, tome $U_s = X \setminus F_s$. Isto define a seguinte estratégia para o jogador Um em $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$: Um inicia a partida jogando a cobertura aberta $\{U_{(0)}, U_{(1)}\}$; se $\alpha \in \omega_1$ e $s \in {}^{\alpha}2$ são tais que, para cada $\beta \in \alpha$, o lance do jogador Dois na β-ésima rodada foi $U_{s\restriction(\beta+1)}$, então Um joga $\{U_{s^\frown(0)}, U_{s^\frown(1)}\}$ na α-ésima rodada. Ao término da partida, os conjuntos jogados por Dois terão formado a sequência $(U_{t\restriction(\beta+1)})_{\beta\in\omega_1}$ para algum $t \in {}^{\omega_1}2$; pelo item (iv) da definição 4.1.3, tem-se que $\bigcup\{U_{t\restriction(\beta+1)} : \beta \in \omega_1\} = U_t \neq X$, e portanto Um é o vencedor. *q.e.d.*

Corolário 4.1.5. *Todo espaço de Hausdorff compacto sem pontos G_δ é destrutível.*

Demonstração. Como foi demonstrado por E. Čech e B. Pospíšil em [16], se X é um espaço de Hausdorff compacto sem pontos G_δ, então existe uma árvore ω_1-Čech-Pospíšil em X. O resultado segue então da proposição 4.1.4 e do teorema 1.8.7. *q.e.d.*

Deste ponto em diante, ocupemo-nos do espaço que será um contraexemplo consistente para as perguntas 4.1.1 e 4.1.2.

Para quaisquer $f, g \in {}^{\omega_1}2$ distintas, defina $\Delta(f, g) = \min\{\xi \in \omega_1 : f(\xi) \neq g(\xi)\}$. Seja $\prec$ a ordem lexicográfica sobre o conjunto ${}^{\omega_1}2$, *i.e.*, para quaisquer $f, g \in {}^{\omega_1}2$ distintas, tem-se que $f \prec g$ se, e somente se, $f(\Delta(f, g)) = 0$ e $g(\Delta(f, g)) = 1$. Finalmente, seja X o espaço topológico linearmente ordenado ${}^{\omega_1}2$ obtido a partir da ordem $\prec$.

O fato a seguir é já conhecido (vide *e.g.* [21, lema 13.17]):

Lema 4.1.6. *Todo subconjunto não-vazio de X admite supremo e ínfimo.*

Como X é um espaço linearmente ordenado, tem-se do lema 4.1.6 e do teorema 1.4.1:

Lema 4.1.7. *X é compacto.*

Mostraremos agora que X satisfaz as hipóteses do corolário 4.1.5. Para tanto, faremos uso dos dois lemas a seguir.

Lema 4.1.8. *Sejam $f, g \in {}^{\omega_1}2$ tais que $f \prec g$. Então $]f, g[\, = \emptyset$ se, e somente se, para todo $\xi \in \omega_1$ com $\xi > \Delta(f, g)$ tem-se que $f(\xi) = 1$ e $g(\xi) = 0$.*

Demonstração. Vide 13.16 em [21]. *q.e.d.*

Lema 4.1.9. *Seja $f \in {}^{\omega_1}2$.*

(a) *Se $f = \sup A$, sendo A um subconjunto enumerável de ${}^{\omega_1}2$ que não possui elemento máximo, então o conjunto $\{\xi \in \omega_1 : f(\xi) = 1\}$ é enumerável.*

(b) *Se $f = \inf A$, sendo A um subconjunto enumerável de ${}^{\omega_1}2$ que não possui elemento mínimo, então o conjunto $\{\xi \in \omega_1 : f(\xi) = 0\}$ é enumerável.*

Demonstração. Provaremos (a); (b) é análogo.

Seja $A \subseteq {}^{\omega_1}2$ enumerável, sem elemento máximo e tal que $f = \sup A$. Como A não possui elemento máximo, tem-se que $f \notin A$; seja então $\delta = \sup\{\Delta(x, f) : x \in A\} + 1 \in \omega_1$. Afirmamos que $f(\xi) = 0$ para todo $\xi \in \omega_1 \backslash \delta$. De fato, se $\alpha \in \omega_1 \backslash \delta$ fosse tal que $f(\alpha) = 1$, teríamos que a função $g \in {}^{\omega_1}2$ definida por

$$g(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi = \alpha \\ f(\xi) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

seria um limitante superior para A satisfazendo $g \prec f$, o que contradiz a hipótese de que $f = \sup A$. *q.e.d.*

Lema 4.1.10. *Nenhum ponto de X é G_δ.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $f \in X$ é um ponto G_δ. Assumamos, por um momento, que a função f não é constante. Existem então sequências $(x_n)_{n\in\omega}$ e $(y_n)_{n\in\omega}$ em X tais que $\{g \in X : x_n \prec g \prec y_n \text{ para todo } n \in \omega\} = \{f\}$. Sejam $x = \sup\{x_n : n \in \omega\}$

e $y = \inf\{y_n : n \in \omega\}$ — note que, pelo lema 4.1.6, x e y estão bem-definidos. Como $x_n \prec f \prec y_n$ para todo $n \in \omega$, devemos ter que $x \preceq f \preceq y$.

Notemos agora que

(†) $x \prec f$ implica $]x, f[= \emptyset$; e

(‡) $f \prec y$ implica $]f, y[= \emptyset$.

Assim, em vista do lema 4.1.8, $x \prec f \prec y$ não pode ocorrer. Tampouco se pode ter $x = f = y$, em virtude do lema 4.1.9. Restam então os casos $x \prec f = y$ e $x = f \prec y$, os quais, pelos lemas 4.1.8 e 4.1.9, contradizem (†) e (‡), respectivamente.

Finalmente, note que os casos $f \equiv 0$ e $f \equiv 1$ podem ser tratados utilizando-se essencialmente o mesmo argumento. *q.e.d.*

Os lemas 4.1.7 e 4.1.10, aliados ao corolário 4.1.5, acarretam:

Corolário 4.1.11. *X é destrutível.*

Mostraremos agora que vale $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ se a Hipótese do Contínuo é assumida.

Em primeiro lugar, notemos o seguinte:

Lema 4.1.12. *Se $h \in X$ é ponto de acumulação de um conjunto $A \subseteq X$, então $h = \sup\{f \in A : f \prec h\}$ ou $h = \inf\{f \in A : h \prec f\}$.*

Demonstração. Sejam $E = \{f \in A : f \prec h\}$ e $D = \{f \in A : h \prec f\}$. Tratemos inicialmente o caso em que E e D são ambos não-vazios.

Sendo $x = \sup E$ e $y = \inf D$, temos que $x \preceq h \preceq y$. Se, por absurdo, ocorresse $x \prec h \prec y$, teríamos que $]x, y[\cap A \subseteq \{h\}$, contradizendo o fato de que h é ponto de acumulação de A. Portanto, $h = x$ ou $h = y$.

Nos casos $E = \emptyset$ e $D = \emptyset$, basta proceder de maneira análoga. *q.e.d.*

Do lemas 4.1.9 e 4.1.12 decorre então:

Lema 4.1.13. *Se $F \subseteq X$ é fechado e infinito, então existe $h \in F$ tal que $h \restriction (\omega_1 \setminus \beta)$ é constante para algum $\beta \in \omega_1$.*

Demonstração. Tome $A \in [F]^{\aleph_0}$. Como F é compacto, existe $h \in F$ que é ponto de acumulação de A. Podemos aplicar o lema 4.1.12 e assumir, sem perda de generalidade, que $h = \sup\{f \in A : f \prec h\}$. Como $h \notin \{f \in A : f \prec h\}$, segue do lema 4.1.9 que $\{\xi \in \omega_1 : h(\xi) = 1\}$ é enumerável, o que acarreta o desejado. *q.e.d.*

Finalmente, podemos então provar:

Proposição 4.1.14. CH *implica* $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.

Demonstração. Seja $C = \{f \in {}^{\omega_1}2 : \text{existe } \beta \in \omega_1 \text{ tal que } f \restriction (\omega_1 \setminus \beta) \text{ é constante}\}$. Usando CH, escreva $C = \{f_\alpha : \alpha \in \omega_1 \setminus \omega\}$.

Seja agora $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ uma sequência de coberturas abertas de X. Para cada $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$, tome $U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ tal que $f_\alpha \in U_\alpha$. Note que, pelo lema 4.1.13, o conjunto $F = X \setminus \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \omega_1 \setminus \omega\}$ é finito. Podemos então cobrir todos os pontos de F escolhendo um aberto U_n em cada $\mathcal{U}_n$ com $n \in \omega$, obtendo assim $(U_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ tal que $U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ para todo $\alpha \in \omega_1$ e $X = \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$. *q.e.d.*

Cabe aqui notar que, a fim de concluir $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ na proposição 4.1.14, seria suficiente mostrar a existência de um subespaço $Y \subseteq X$ tal que:

(*i*) vale $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y)$; e

(*ii*) $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_{X\setminus U}, \mathcal{O}_{X\setminus U})$ ocorre para todo aberto U com $Y \subseteq U \subseteq X$.

O fato de que a Hipótese do Contínuo nos permitiu obter uma condição consideravelmente mais forte que esta — o qual se deve ao lema 4.1.13 — sugere a possibilidade de que o exemplo aqui exibido ainda não seja o melhor possível.

Problema 4.1.15. *Existe um contraexemplo em* ZFC*? Ou assumindo-se hipóteses adicionais mais fracas,* e.g. MA*?*

Façamos ainda duas observações sobre este espaço das quais faremos uso mais adiante:

Lema 4.1.16. *Se $F \subseteq X$ é fechado, então existe $h \in F$ tal que $\pi\chi(h, F) = \aleph_0$.*

Demonstração. Se F é finito, o resultado é imediato. Se F é infinito, tome $A \in [F]^{\aleph_0}$; como F é compacto, A tem um ponto de acumulação $h \in F$. Como na demonstração do lema 4.1.13, podemos aplicar o lema 4.1.12 e assumir que $h = \sup\{f \in A : f \prec h\}$. Tem-se, nestas condições, que o conjunto $\{\ ]f, h[\ \cap F : f \in A, f \prec h\}$ é uma π-base enumerável para h em F. *q.e.d.*

Lema 4.1.17. $w(X) = \mathfrak{c}$.

Demonstração. À luz do lema 4.1.8, é fácil ver que

$$\mathcal{B}_0 = \{\ ]f, g[\ : f, g \in S\} \cup \{\ ]f, \to[\ : f \in S\} \cup \{\ ]\leftarrow, f[\ : f \in S\}$$

é uma base de abertos para X com cardinalidade $\mathfrak{c}$, sendo $S = \{f \in {}^{\omega_1}2 : f$ possui um sucessor imediato ou um predecessor imediato na ordem $\prec\}$.

Suponha agora, por absurdo, que $w(X) < \mathfrak{c}$. Como $\mathcal{B}_0$ é uma base para X, deve então existir uma base $\mathcal{B}_1$ para X tal que $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_0$ e $|\mathcal{B}_1| = w(X) < \mathfrak{c} = |S|$. Tome então $f \in S$ tal que f não é extremo de nenhum intervalo presente em $\mathcal{B}_1$; podemos supor, sem perda de generalidade, que f possui um sucessor imediato g na ordem $\prec$. Nestas condições, $]f, \to[$ é um aberto de X que contém g, porém não existe $U \in \mathcal{B}_1$ tal que $g \in U \subseteq\ ]f, \to[$; isto contradiz o fato de $\mathcal{B}_1$ ser uma base de abertos para X. *q.e.d.*

Concluiremos esta seção observando que os argumentos apresentados na obtenção do exemplo aqui exibido podem ser naturalmente generalizados para outros cardinais:

Teorema 4.1.18. *Sejam κ um cardinal infinito e $\mu = \mathrm{cf}(\kappa)$. Então o espaço compacto linearmente ordenado $X = {}^{\kappa}2$ obtido a partir da ordem lexicográfica é tal que o jogador Um possui estratégia vencedora no jogo $\mathsf{G}_1^{\mu}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$. Além disso, se $\mu = \kappa \geq \sup\{2^\lambda : \lambda < \kappa \text{ é um cardinal}\} > \aleph_0$, então vale $\mathsf{S}_1^{\kappa}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.*

Corolário 4.1.19. *Sejam κ um cardinal não-enumerável e X como no teorema 4.1.18. Suponha que κ é inacessível ou $\kappa = \lambda^+ = 2^\lambda$ para algum cardinal λ. Então vale $\mathsf{S}_1^{\kappa}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ e Um possui estratégia vencedora em $\mathsf{G}_1^{\kappa}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.*

4.2 Algumas classes de espaços destrutíveis

Iniciaremos esta seção observando o comportamento da indestrutibilidade na classe de espaços *diádicos*, *i.e.*, espaços de Hausdorff que são uma imagem contínua do cubo de Cantor $\mathbb{D}^\kappa$ para algum cardinal infinito κ. No que segue, utilizaremos o seguinte resultado clássico sobre espaços diádicos:

Teorema 4.2.1 (Šanin [46])**.** *Se um espaço diádico tem peso λ, então ele é uma imagem contínua de $\mathbb{D}^\lambda$.*

Faremos uso ainda do seguinte fato, cuja demonstração elementar omitiremos. Aqui, diremos que um espaço topológico X satisfaz $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ (respectivamente, que Um não possui estratégia vencedora no jogo $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ em X), se a afirmação $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ for válida (respectivamente, se Um não possuir estratégia vencedora no jogo $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$).

Lema 4.2.2. *Se um espaço topológico X satisfaz $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ (respectivamente, Um não possui estratégia vencedora em $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$), então todo subespaço fechado de X e toda imagem contínua de X também satisfazem $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ (respectivamente, Um não possui estratégia vencedora em $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$).*

Lema 4.2.3. *As seguintes condições são equivalentes para um cardinal infinito κ:*

(a) $\mathbb{D}^\kappa$ *é indestrutível;*

(b) $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_{\mathbb{D}^\kappa}, \mathcal{O}_{\mathbb{D}^\kappa})$*;*

(c) $\kappa = \omega$*.*

Demonstração. A implicação $(a) \to (b)$ segue do teorema 1.8.7.

Para $(b) \to (c)$, suponha, por absurdo, que κ é não-enumerável. Então $\mathbb{D}^\kappa$ contém uma cópia de $\mathbb{D}^{\omega_1}$, a qual é fechada uma vez que $\mathbb{D}^{\omega_1}$ é compacto. Assim, pelo lema 4.2.2, $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ não é satisfeito por $\mathbb{D}^\kappa$, uma vez que não é satisfeito por $\mathbb{D}^{\omega_1}$: tomando, para cada $\alpha \in \omega_1$, a cobertura aberta $\mathcal{U}_\alpha = \{\pi_\alpha^{-1}[\{0\}], \pi_\alpha^{-1}[\{1\}]\}$ de $\mathbb{D}^{\omega_1}$, teremos que qualquer escolha de abertos $U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ para $\alpha \in \omega_1$ será tal que $|\mathbb{D}^{\omega_1} \setminus \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}| = 1$.

Finalmente, $(c) \to (a)$ é uma consequência imediata do teorema 6(a) de [60], que afirma que todo espaço hereditariamente de Lindelöf é indestrutível. *q.e.d.*

Podemos então caracterizar a classe dos espaços indestrutíveis diádicos:

Corolário 4.2.4. *As seguintes condições são equivalentes para um espaço diádico X:*

(a) X *é indestrutível;*

(b) $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$*;*

(c) X *não contém uma cópia de* $\mathbb{D}^{\omega_1}$*;*

(d) $w(X) = \aleph_0$*;*

(e) X *é uma imagem contínua do conjunto de Cantor* $\mathbb{D}^\omega$*.*

Demonstração. Novamente, a implicação $(a) \to (b)$ decorre do teorema 1.8.7, e $(b) \to (c)$ já foi observada na demonstração do lema 4.2.3. A implicação $(c) \to (d)$ é um caso particular do teorema 1 de [24]. Finalmente, $(d) \to (e)$ pelo teorema 4.2.1, e $(e) \to (a)$ segue da combinação dos lemas 4.2.2 e 4.2.3. *q.e.d.*

O corolário 4.2.4 nos diz que, para espaços diádicos, destrutibilidade é equivalente à propriedade de conter uma cópia do cubo de Cantor $\mathbb{D}^{\omega_1}$. Vamos agora procurar diferenciar estas duas propriedades para espaços de Hausdorff compactos em geral.

O teorema a seguir foi demonstrado por Šapirovskiĭ em [52] (vide 3.18 em [31]):

Teorema 4.2.5 (Šapirovskiĭ [52])**.** *As condições a seguir são equivalentes para um espaço de Hausdorff compacto X e um cardinal não-enumerável κ:*

(*a*) *$[0,1]^\kappa$ é uma imagem contínua de X;*

(*b*) *$\mathbb{D}^\kappa$ é uma imagem contínua de um subconjunto fechado de X;*

(*c*) *existe um fechado não-vazio $F \subseteq X$ tal que $\pi\chi(x, F) \geq \kappa$ para todo $x \in F$;*

(*d*) *existe um sistema κ-diádico em X,* i.e.*, uma família indexada $\langle F^i_\alpha : \alpha \in \kappa, i \in 2\rangle$ de subconjuntos fechados de X satisfazendo $F^0_\alpha \cap F^1_\alpha = \emptyset$ para todo $\alpha \in \kappa$ e $\bigcap\{F^{p(\xi)}_\xi : \xi \in \mathrm{dom}(p)\} \neq \emptyset$ para toda $p \in Fn(\kappa, 2)$.*

O caso $\kappa = \omega_1$ do teorema 4.2.5 é de interesse no estudo da destrutibilidade de espaços compactos:

Lema 4.2.6. *Seja X um espaço compacto.*

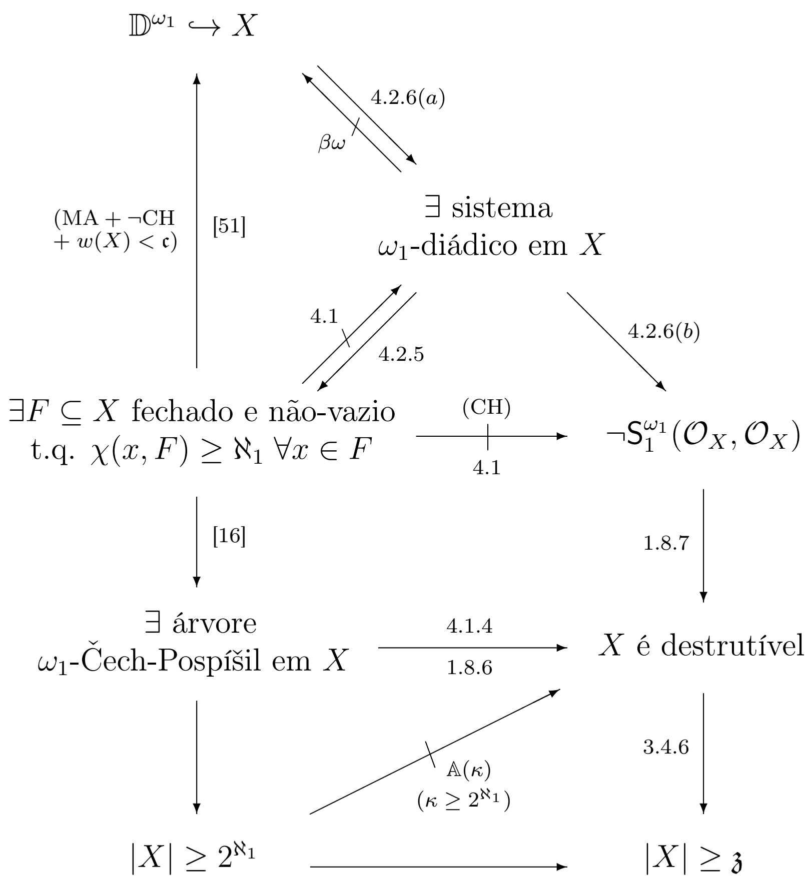
(*a*) *Se X contém uma cópia de $\mathbb{D}^{\omega_1}$, então existe um sistema ω_1-diádico em X.*

(*b*) *Se existe um sistema ω_1-diádico em X, então $\neg\mathsf{S}^{\omega_1}_1(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.*

Demonstração. Como $\langle \pi^{-1}_\alpha[\{i\}] : \alpha \in \omega_1, i \in 2\rangle$ é um sistema ω_1-diádico em $\mathbb{D}^{\omega_1}$, ele define um sistema ω_1-diádico em X. Isto prova (a).

Para (b), seja $\langle F^i_\alpha : \alpha \in \omega_1, i \in 2\rangle$ um sistema ω_1-diádico em X. Para cada $\alpha \in \omega_1$, seja $\mathcal{U}_\alpha = \{X \setminus F^0_\alpha, X \setminus F^1_\alpha\}$. A sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ testemunha $\neg\mathsf{S}^{\omega_1}_1(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$: para qualquer $f \in {}^{\omega_1}2$, tem-se que $\bigcap\{F^{f(\alpha)}_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \neq \emptyset$, uma vez que esta é a intersecção de uma família de conjuntos compactos que possui a propriedade da intersecção finita. *q.e.d.*

Temos, assim, o seguinte diagrama para X compacto T_2:



Convém ressaltar que a hipótese de compacidade do espaço em questão não é necessária em algumas das implicações.

A implicação no diagrama que assume MA $+ \neg$CH $+ w(X) < \mathfrak{c}$ é um caso particular do teorema 1.3 de [51], devido a L. Shapiro.

Segue do lema 4.1.16 e do teorema 4.2.5 que o espaço considerado na seção 4.1 mostra a não-implicação que chega em "existe um sistema ω_1-diádico em X" no diagrama; assim, em particular, segue do lema 4.1.17 que a hipótese sobre o peso de X no teorema de Shapiro é a melhor possível. É válido ainda notar que a existência de uma árvore ω_1--Čech-Pospíšil não implica a existência de um sistema ω_1-diádico.

A notação $\mathbb{A}(\kappa)$ no diagrama representa a compactificação de Alexandroff do espaço discreto de cardinalidade κ, ou seja, o conjunto $\kappa \cup \{\kappa\}$ munido da topologia que tem por base o conjunto $\wp(\kappa) \cup \{A \cup \{\kappa\} : A \subseteq \kappa \text{ e } |\kappa \setminus A| < \aleph_0\}$. É elementar verificar que $\mathbb{A}(\kappa)$ é um espaço compacto tal que o jogador Dois possui estratégia vencedora no jogo $\mathsf{G}_1(\mathcal{O}_{\mathbb{A}(\kappa)}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}(\kappa)})$ — e, portanto, no jogo $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}(\kappa)}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}(\kappa)})$.

Designamos por $\beta\omega$ a compactificação de Stone-Čech do espaço discreto de cardinalidade $\aleph_0$ — para uma descrição detalhada de $\beta\omega$, vide [45]. Como foi demonstrado por A. Tychonoff em [67], este espaço não possui sequências convergentes não-triviais; assim, em particular, $\mathbb{D}^\omega \not\hookrightarrow \beta\omega$ e, portanto, $\mathbb{D}^{\omega_1} \not\hookrightarrow \beta\omega$. No entanto, existe um sistema $\mathfrak{c}$-diádico em $\beta\omega$: isto decorre do fato (vide *e.g.* [13, proposição 8.9]) de que existe uma família independente de cardinalidade $\mathfrak{c}$ em ω, *i.e.*, uma família $\mathcal{I} \subseteq \wp(\omega)$ com $|\mathcal{I}| = \mathfrak{c}$ tal que, para quaisquer $m, n \in \omega$ e $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{I}$ distintos, tem-se $\bigcap_{i \leq m} A_i \cap \bigcap_{j \leq n} (\omega \setminus B_j) \neq \emptyset$. Como $w(\beta\omega) = \mathfrak{c}$ (vide *e.g.* [19, corolário 3.6.12]), este espaço é mais um exemplo que mostra que não se pode enfraquecer a hipótese sobre o peso no teorema de Shapiro.

Ainda pelo exemplo exibido na seção 4.1, temos a seguinte observação referente ao teorema de Shapiro:

Proposição 4.2.7. *Denotemos por* (Υ) *a afirmação:*

> *se X é um espaço de Hausdorff compacto com $w(X) = \aleph_1$ e existe $F \subseteq X$ fechado e não-vazio tal que $\chi(x, F) = \aleph_1$ para todo $x \in F$, então X contém uma cópia de $\mathbb{D}^{\omega_1}$.*

Então $\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH} \to (\Upsilon) \to \neg\mathrm{CH}$.

Note que existe um sistema ω_1-diádico em X se, e somente se, existe uma sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ de coberturas abertas de X com $|\mathcal{U}_\alpha| = 2$ para todo $\alpha \in \omega_1$ que testemunha $\neg \mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ — ou, equivalentemente, se ocorre $\neg \mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X^{(2)}, \mathcal{O}_X)$, sendo $\mathcal{O}_X^{(2)} = \{\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X : |\mathcal{U}| = 2\}$. De modo análogo, existe uma árvore ω_1-Čech-Pospíšil em X se, e somente se, Um possui uma estratégia vencedora em $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ de acordo com a qual ele joga apenas coberturas abertas de X que possuem exatamente dois elementos — equivalentemente, se Um possui estratégia vencedora no jogo $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X^{(2)}, \mathcal{O}_X)$. Isto nos leva a perguntar:

Problema 4.2.8. $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ *é equivalente à não-existência de sistema* ω_1*-diádico em* X — i.e. $\mathsf{S}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X^{(2)}, \mathcal{O}_X)$ — *para* X *compacto?*

Problema 4.2.9. *A destrutibilidade de um espaço* X *é equivalente à existência de uma árvore* ω_1*-Čech-Pospíšil em* X*? Ou, de modo mais geral: a existência de estratégia vencedora para Um em* $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ *é equivalente à existência de estratégia vencedora para Um em* $\mathsf{G}_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X^{(2)}, \mathcal{O}_X)$*?*

Outras questões que podem ser feitas sobre propriedades do diagrama são:

Problema 4.2.10. *Existe um espaço de Hausdorff compacto* X *no qual existe uma árvore* ω_1*-Čech-Pospíšil e tal que todo* $F \subseteq X$ *fechado e não-vazio possui um ponto que é* G_δ *em* F*?*

Problema 4.2.11. *Existe um exemplo consistente de um espaço destrutível de cardinalidade menor que* $2^{\aleph_1}$*?*

Consistência é o melhor que se pode obter no problema 4.2.11, uma vez que $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ implica a não-existência de um tal espaço em virtude dos corolários 3.4.6 e 3.4.2.

4.3 Indestrutibilidade e grandes cardinais

Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é dito *fortemente nulo* se, para qualquer sequência $(\varepsilon_n)_{n\in\omega}$ de números reais positivos, existe uma sequência $(I_n)_{n\in\omega}$ de intervalos abertos de $\mathbb{R}$ com $A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$ e tal que, para cada $n \in \omega$, o intervalo I_n tem comprimento ε_n. A *Conjectura de Borel* é a afirmação "um subconjunto de $\mathbb{R}$ é fortemente nulo se, e somente se, é enumerável". Esta conjectura foi formulada por É. Borel em [15, p. 123], provada consistentemente falsa por W. Sierpiński em [57] e, finalmente, demonstrada independente de ZFC por R. Laver em [39].

Por resultados recentes, tem-se que a Conjectura de Borel é equivalente à afirmação "um espaço de Lindelöf regular é de Rothberger se, e somente se, todas as suas imagens contínuas em $[0,1]^\omega$ são enumeráveis" — vide [40, proposição 8] e [14, seção 5.1]. À luz desta formulação para a Conjectura de Borel e dos teoremas 1.7.6 e 1.8.7, Tall e Usuba introduziram em [62] a seguinte "versão ω_1" desta conjectura:

Definição 4.3.1 (Tall-Usuba [62]). *A* Conjectura $\aleph_1$-Borel *é a afirmação "um espaço de Lindelöf regular é indestrutível se, e somente se, todas as suas imagens contínuas em $[0,1]^{\omega_1}$ têm cardinalidade $\leq \aleph_1$".*

No mesmo artigo, foram estabelecidos então os seguintes resultados:

Teorema 4.3.2 (Tall-Usuba [62]). *Se a existência de um cardinal inacessível é consistente, então é consistente que todo espaço de Lindelöf regular e indestrutível de peso $\leq \aleph_1$ possui cardinalidade $\leq \aleph_1$.*

Teorema 4.3.3 (Tall-Usuba [62]). *Se a existência de um cardinal inacessível é consistente, então a Conjectura $\aleph_1$-Borel é consistente.*

Teorema 4.3.4 (Tall-Usuba [62]). *Se a existência de um cardinal fracamente compacto é consistente, então é consistente que não existe espaço de Lindelöf T_1 com pseudocaráter $\leq \aleph_1$ e cardinalidade $\aleph_2$.*

No que segue, mostraremos que as hipóteses de grandes cardinais são necessárias nos teoremas acima — o que implica, em particular, que as conclusões destes teoremas não podem ser demonstradas consistentes com ZFC (vide início da seção 1.6). Os resultados presentes nesta seção foram obtidos em colaboração com Franklin D. Tall.

Nos argumentos que apresentaremos, faremos uso da construção a seguir, extraída — a menos de adaptações menores — da seção 8 do artigo [65] de S. Todorčević. É pertinente notar que esta construção generaliza o exemplo apresentado na seção 4.1.

Seja T uma árvore de Hausdorff com raiz tal que todos os níveis e todos os ramos de T possuem cardinalidade $\leq \aleph_1$. Podemos assumir que T é uma parte inicial de $({}^{<\omega_2}(\omega_1+1), \subseteq)$ que satisfaz a seguinte condição:

$(*)$ para cada $t \in T$, o conjunto $\{\xi \leq \omega_1 : t^\frown(\xi) \in T\}$ é um ordinal sucessor.

Seja $\prec$ a ordem lexicográfica naturalmente induzida sobre o conjunto

$$L_T = \{\bigcup B : B \text{ é um ramo de } T\} \subseteq {}^{<\omega_2}(\omega_1+1),$$

e considere L_T um espaço topológico linearmente ordenado. O argumento presente no lema 8.1(i) de [65] se aplica a este caso para mostrar que $w(L_T) \leq |T|$. Para cada $t \in T$, seja $L_T(t) = \{s \in L_T : t \subseteq s\}$.

Lema 4.3.5 (vide [65]). *Para todo $t \in T$, tem-se que $L_T(t)$ é um subespaço compacto de L_T.*

Demonstração. Provaremos que $L_T = L_T(\emptyset)$ é compacto; o caso geral é análogo a este. Como L_T é um espaço linearmente ordenado, então L_T é compacto se, e somente se, a ordem linear $\prec$ de L_T é completa.

Tome $A \subseteq L_T$ arbitrário. Para cada $s \in L_T$, seja $\tilde{s} = s \cup \{(\xi, 0) : \xi \in \omega_2 \setminus \mathrm{dom}(s)\} \in {}^{\omega_2}(\omega_1+1)$. Defina agora $f \in {}^{\omega_2}(\omega_1+1)$ recursivamente por

$$f(\alpha) = \sup\{\tilde{s}(\alpha) : s \in A \text{ e } s \restriction \alpha = f \restriction \alpha\}$$

para todo $\alpha \in \omega_2$. Tem-se que deve existir $\beta \in \omega_2$ tal que $f \restriction \beta \notin T$, pois, do contrário, $\{f \restriction \beta : \beta \in \omega_2\}$ seria um ramo de cardinalidade $\aleph_2$ em T. Seja então β_0 o menor β satisfazendo tal condição, e tome $u = f \restriction \beta_0$.

Caso 1. β_0 é um ordinal limite. Segue da minimalidade de β_0 que $\{u \restriction \xi : \xi \in \beta_0\} \subseteq T$; logo, como $u \notin T$ e β_0 é limite, tem-se que $\{u \restriction \xi : \xi \in \beta_0\}$ é um ramo de T. Assim, $u = \bigcup\{u \restriction \xi : \xi \in \beta_0\} \in L_T$. Note que $f = \tilde{u}$, pela construção de f. Disto decorre que $\sup A = u \in L_T$.

Caso 2. β_0 é um ordinal sucessor. Seja $\alpha \in \omega_2$ tal que $\beta_0 = \alpha + 1$, e considere $v = u \restriction \alpha \in T$. Como $u \notin T$ e T verifica $(*)$, segue da construção de f que $u(\alpha) = 0$. Assim, $\{v \restriction \xi : \xi \leq \alpha\}$ é um ramo de T (note que $(*)$ implica que, se $v^\frown(0) \notin T$, então v não possui extensão em T), donde decorre que $v = \bigcup\{v \restriction \xi : \xi \leq \alpha\} \in L_T$. Como no caso anterior, $f = \tilde{v}$ e, portanto, $\sup A = v \in L_T$. *q.e.d.*

Lema 4.3.6. $\psi(L_T) \leq \aleph_1$.

Demonstração. Fixe $s \in L_T$ arbitrário. É suficiente mostrar que existe $A \subseteq \{s' \in L_T : s' \prec s\}$ tal que $|A| \leq \aleph_1$ e $]a, s[= \emptyset$, sendo $a = \sup A \in L_T$; por um argumento similar, teremos que a condição análoga também é válida à direita de s.

Seja $S = \{\xi \in \mathrm{dom}(s) : \exists s' \in L_T \ (s' \prec s \text{ e } s' \restriction \xi = s \restriction \xi)\}$.

Caso 1. S não possui elemento máximo. Para cada $\xi \in S$, tome $r_\xi \in L_T$ com $r_\xi \prec s$ e $r_\xi \restriction \xi = s \restriction \xi$. Tem-se assim que, se $s' \in L_T$ é tal que $s' \prec s$, então $s' \prec r_\xi$ para algum $\xi \in S$. Logo, podemos tomar $A = \{r_\xi : \xi \in S\}$.

Caso 2. Existe $\beta = \max S$. Seja então $\theta = s(\beta)$ e, para cada $\eta \in \theta$, defina

$$r_\eta = \sup\{s' \in L_T : s' \restriction \beta = s \restriction \beta \text{ e } s'(\beta) = \eta\} \prec s.$$

Então $A = \{r_\eta : \eta \in \theta\}$ satisfaz as condições desejadas. *q.e.d.*

O próximo resultado será a principal ferramenta para obter indestrutibilidade em nossos exemplos.

Lema 4.3.7. *São equivalentes:*

(a) L_T *é destrutível;*

(b) *existe um* forcing *enumeravelmente fechado que acrescenta um novo corte de Dedekind em* $(L_T, \prec)$*;*

(c) *existe um* forcing *enumeravelmente fechado que acrescenta um novo ramo em* T*;*

(d) T *contém uma subárvore isomorfa a* $({}^{<\omega_1}2, \subseteq)$*;*

(e) *existe uma árvore* ω_1*-Čech-Pospíšil em* L_T*.*

Demonstração. Como L_T é um espaço compacto linearmente ordenado, segue do teorema 1.4.1 que este espaço deixa de ser compacto numa extensão por *forcing* enumeravelmente fechado se, e somente se, esta ordem parcial acrescenta em L_T um novo corte de Dedekind que não admite supremo. A equivalência entre (a) e (b) decorre então da observação de que, se um corte de Dedekind na extensão possui um supremo, então ele é um corte de Dedekind do modelo inicial.

Para $(b) \to (c)$, seja $A \subseteq L_T$ um corte de Dedekind numa extensão por *forcing* enumeravelmente fechado, e suponha que $A \notin \mathbf{M}$. Seja α o menor ordinal $\leq \omega_2$ tal que não existe $t_\alpha \in T$ satisfazendo

- $\mathrm{dom}(t_\alpha) = \alpha$;
- $\{a \in A : t_\alpha \subseteq a\} \neq \emptyset$; e
- $\{b \in L_T \setminus A : t_\alpha \subseteq b\} \neq \emptyset$.

Para cada $\xi \in \alpha$, fixe $t_\xi \in T$ satisfazendo as condições acima. Notemos que α é um ordinal limite: se ocorresse $\alpha = \beta + 1$, existiria $\eta \in \omega_1 + 1$ tal que

- $\{\xi \in \omega_1 : \exists a \in A \ (t_\beta{}^\frown(\xi) \subseteq a)\} = \eta$ e

· $t_\beta{}^\frown(\eta) \subseteq b$ para algum $b \in L_T \setminus A$,

e portanto $A = \{s \in L_T : s \prec t_\beta{}^\frown(\eta)\} \in \mathbf{M}$, uma contradição.

Considere agora $C = \{t_\xi : \xi \in \alpha\}$ e $u = \bigcup C$. Afirmamos que $u \notin \mathbf{M}$, o que implica $C \notin \mathbf{M}$. Suponha, por absurdo, que $u \in \mathbf{M}$. Sendo $E = \{s \in L_T : u \subseteq s\}$, tem-se que $E \subseteq A$ ou $E \subseteq L_T \setminus A$, pois do contrário poderíamos ter definido $t_\alpha = u$. Portanto, devemos ter $A = \{s \in L_T : \exists s' \in L_T\ (u \subseteq s' \text{ e } s \preceq s')\}$ ou $A = \{s \in L_T : s \prec u\}$, contradizendo assim a hipótese de que $A \notin \mathbf{M}$.

Assim, $u \notin \mathbf{M}$; em particular, $u \notin T$, e portanto $C \notin \mathbf{M}$ é um ramo de T.

A implicação $(c) \to (d)$ segue essencialmente do mesmo argumento presente na demonstração do lema 4.3 de [64].

Para $(d) \to (e)$, seja $\{t_p : p \in {}^{<\omega_1}2\} \subseteq T$ tal que $p \subseteq q \leftrightarrow t_p \subseteq t_q$ para quaisquer $p, q \in {}^{<\omega_1}2$. Para cada $p \in {}^{<\omega_1}2$, defina $F_p = L_T(t_p)$ — que, pelo lema 4.3.5, é fechado em L_T. Agora, para cada $h \in {}^{\omega_1}2$, considere $F_h = \bigcap\{F_{h\restriction\alpha} : \alpha \in \omega_1\}$; note que $F_h \neq \emptyset$, uma vez que L_T é compacto. Nestas condições, $\langle F_r : r \in {}^{\leq\omega_1}2\rangle$ é uma árvore ω_1-Čech-Pospíšil em L_T.

Finalmente, $(e) \to (a)$ segue da proposição 4.1.4 e do teorema 1.8.7. *q.e.d.*

Cabe notar que o lema 4.3.7 estende o corolário 4.1.11.

A observação que faremos agora é essencialmente parte do Lema de Silver ([58]; vide ainda [36, lema VIII.3.4]):

Lema 4.3.8. *Se T é uma ω_1-árvore, então T não tem nenhuma subárvore isomorfa a $({}^{<\omega_1}2, \subseteq)$.*

Demonstração. Seja $(T, \leq)$ uma ω_1-árvore, e suponha, por absurdo, que $\{t_p : p \in {}^{<\omega_1}2\} \subseteq T$ é tal que $p \subseteq q \leftrightarrow t_p \leq t_q$ para quaisquer $p, q \in {}^{<\omega_1}2$. Seja $\theta = \sup\{\mathrm{ht}_T(t_p) : p \in {}^{<\omega}2\} \in \omega_1$ e, para cada $f \in {}^{\omega}2$, tome $u_f \in T_\theta$ tal que t_f e u_f são $\leq$-comparáveis (isto é possível dado que existe $p \in {}^{<\omega_1}2$ estendendo f com $\mathrm{ht}_T(t_p) > \theta$). A função $f \mapsto u_f$ é injetora, o que contradiz o fato de que T_θ é enumerável. *q.e.d.*

Podemos então provar:

Teorema 4.3.9. KH *implica que existe um espaço compacto T_2 e indestrutível de peso $\leq \aleph_1$ e cardinalidade maior que $\aleph_1$.*

Demonstração. Seja T uma árvore de Kurepa com $\kappa > \aleph_1$ ramos cofinais. Podemos assumir que T é de Hausdorff e tem raiz. Pelos lemas 4.3.8 e 4.3.7, o espaço compacto linearmente ordenado L_T é indestrutível. Além disso, tem-se que $w(L_T) \leq |T| = \aleph_1$ e $|L_T| \geq \kappa > \aleph_1$. *q.e.d.*

Os dois corolários a seguir têm demonstração análoga à do teorema 1.6.3:

Corolário 4.3.10. *A existência de um cardinal inacessível e a afirmação "todo espaço de Lindelöf regular e indestrutível de peso $\leq \aleph_1$ possui cardinalidade $\leq \aleph_1$" são equiconsistentes.*

Demonstração. Decorre dos teoremas 4.3.2, 4.3.9 e 1.6.1. *q.e.d.*

Corolário 4.3.11. *A Conjectura $\aleph_1$-Borel e a existência de um cardinal inacessível são equiconsistentes.*

Demonstração. Como todo espaço completamente regular de peso $\leq \aleph_1$ é homeomorfo a um subespaço de $[0,1]^{\omega_1}$, o resultado segue dos teoremas 4.3.3, 4.3.9 e 1.6.1. *q.e.d.*

Podemos provar ainda:

Corolário 4.3.12. *Seja $\kappa > \aleph_1$ um cardinal regular. É consistente com* ZFC *que existe um espaço compacto T_2 e indestrutível de peso $\leq \aleph_1$ e cardinalidade $2^{\aleph_1} = \kappa$.*

Demonstração. Temos que é consistente que valham CH + $2^{\aleph_1} = \kappa$ + "existe uma árvore de Kurepa com κ ramos cofinais" (vide *e.g.* [36, corolário II.7.11 e exercício VII.H20]); assim, basta proceder como na demonstração do teorema 4.3.9. *q.e.d.*

Tratemos agora da hipótese de consistência presente no teorema 4.3.4. O ingrediente principal da demonstração que apresentaremos é o seguinte teorema, que resulta da combinação do teorema 6.1 de [30] (vide 1.10 em [66]) e do teorema 3.9 de [35]:

Teorema 4.3.13 (Jensen [30], König [35])**.** *Se um cardinal regular e não-enumerável κ não é fracamente compacto em $\mathbf{L}$, então existe uma sequência $\mathcal{F} = (f_\alpha)_{\alpha\in\lim(\kappa)}$ de funções $f_\alpha : \alpha \to \alpha$ que é* coerente — i.e., *satisfaz $f_\alpha =^* f_\beta \restriction \alpha$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \lim(\kappa)$ com $\alpha < \beta$ — e tal que $(T(\mathcal{F}), \subseteq)$ é uma κ-árvore de Aronszajn, sendo*

$$T(\mathcal{F}) = \bigcup_{\xi\in\kappa} \bigcup_{\alpha\in\lim(\kappa)\setminus\xi} \{f \in {}^{\xi}\xi : f =^* f_\alpha \restriction \xi\}.$$

O próximo lema será essencial para o que faremos a seguir.

Lema 4.3.14. *Se $\mathcal{F} = (f_\alpha)_{\alpha\in\lim(\omega_2)}$ é coerente, então $(T(\mathcal{F}), \subseteq)$ não possui ramos de cofinalidade ω_1.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $B \subseteq T(\mathcal{F})$ é um ramo de cofinalidade ω_1. Sejam $g = \bigcup B$ e $\gamma = \operatorname{dom}(g) \in \lim(\omega_2)$, e fixe uma sequência estritamente crescente de ordinais limite $(\gamma_\eta)_{\eta\in\omega_1}$ com $\sup\{\gamma_\eta : \eta \in \omega_1\} = \gamma$. Note que, para cada $\eta \in \omega_1$, tem-se $g\restriction\gamma_\eta \in T(\mathcal{F})$, e portanto $g\restriction\gamma_\eta =^* f_{\gamma_\eta} =^* f_\gamma\restriction\gamma_\eta$, uma vez que $\mathcal{F}$ é coerente. Assim,

$$\omega_1 = \bigcup_{k\in\omega} \{\eta \in \omega_1 : |\{\xi \in \gamma_\eta : g(\xi) \neq f_\gamma(\xi)\}| = k\},$$

e segue então da regularidade de ω_1 que existe $k_0 \in \omega$ tal que o conjunto

$$\{\eta \in \omega_1 : |\{\xi \in \gamma_\eta : g(\xi) \neq f_\gamma(\xi)\}| = k_0\}$$

é não-enumerável. Como a função $\eta \mapsto |\{\xi \in \gamma_\eta : g(\xi) \neq f_\gamma(\xi)\}|$ é não-decrescente, disto decorre que existe $\eta_0 \in \omega_1$ tal que $|\{\xi \in \gamma_\eta : g(\xi) \neq f_\gamma(\xi)\}| = k_0$ para todo $\eta \in \omega_1 \setminus \eta_0$;

mas então $|\{\xi \in \gamma : g(\xi) \neq f_\gamma(\xi)\}| = k_0$, e portanto $g \in T(\mathcal{F})$, o que contradiz a escolha de B. *q.e.d.*

O lema a seguir garantirá que o espaço que obteremos será indestrutível.

Lema 4.3.15. *Assuma* CH. *Se* $\mathcal{F} = (f_\alpha)_{\alpha\in\lim(\omega_2)}$ *é coerente, então* $(T(\mathcal{F}), \subseteq)$ *não possui subárvore isomorfa a* $({}^{<\omega_1}2, \subseteq)$.

Demonstração. Esta demonstração é similar à do lema 4.3.8. Suponha, por absurdo, que existe $\{g_s : s \in {}^{<\omega_1}2\} \subseteq T(\mathcal{F})$ satisfazendo $g_s \subseteq g_t \leftrightarrow s \subseteq t$ para quaisquer $s, t \in {}^{<\omega_1}2$. Por CH, tem-se que $\delta = \sup\{\mathrm{dom}(g_s) : s \in {}^{<\omega_1}2\} \in \omega_2$. Para cada $h \in {}^{\omega_1}2$, seja $g_h = \bigcup\{g_{h\restriction\alpha} : \alpha \in \omega_1\}$, e considere então $\tilde{g}_h = g_h \cup (f_\delta \restriction (\delta \setminus \mathrm{dom}(g_h)))$; note que $g_h \in T(\mathcal{F})$ em decorrência do lema 4.3.14, e portanto $\tilde{g}_h \in T(\mathcal{F})$. Mas o nível δ da árvore $T(\mathcal{F})$ é o conjunto $\{f \in {}^\delta\delta : f =^* f_\delta\}$, que possui cardinalidade $\aleph_1$; isto contradiz o fato de que ele contém o conjunto $\{\tilde{g}_h : h \in {}^{\omega_1}2\}$, uma vez que a função $h \mapsto \tilde{g}_h$ é injetora. *q.e.d.*

O resultado de equiconsistência que obteremos será em grande parte devido à seguinte proposição:

Proposição 4.3.16. *Assuma* CH. *Se* ω_2 *não é fracamente compacto em* $\mathbf{L}$*, então existe um espaço compacto* T_2 *e indestrutível de pseudocaráter* $\aleph_1$ *e cardinalidade* $\aleph_2$.

Demonstração. Assuma que ω_2 não é fracamente compacto em $\mathbf{L}$, e seja então $\mathcal{F} = (f_\alpha)_{\alpha\in\lim(\omega_2)}$ dada pelo teorema 4.3.13. Considere agora o espaço compacto linearmente ordenado L_T, sendo T uma árvore isomorfa a $T(\mathcal{F})$ satisfazendo as condições descritas no parágrafo anterior ao lema 4.3.5. Pelos lemas 4.3.15 e 4.3.7, tem-se que L_T é indestrutível. Por um lado, o fato de que T é uma ω_2-árvore de Aronszajn implica que $|L_T| \geq \aleph_2$; por outro lado, em vista do Lemma 4.3.14, tal fato também implica que todos os ramos de T possuem cofinalidade enumerável, de modo que $L_T \subseteq \{\bigcup C : C \in [T]^{\leq\aleph_0}\}$; como $|T| = \aleph_2$, isto acarreta $|L_T| \leq {\aleph_2}^{\aleph_0} = {\aleph_1}^{\aleph_0} \cdot \aleph_2 = \aleph_2$ em virtude da fórmula de Hausdorff (*e.g.*

3.11 no capítulo 9 de [26]) e de CH. Portanto, $|L_T| = \aleph_2$. Finalmente, $\psi(L_T) \leq \aleph_1$ pelo lema 4.3.6, logo $\psi(L_T) = \aleph_1$, pois do contrário contradiríamos o teorema 1.8.1. *q.e.d.*

Finalmente, temos:

Teorema 4.3.17. *Se ω_2 não é fracamente compacto em* $\mathbf{L}$*, então existe um espaço de Lindelöf regular e indestrutível com pseudocaráter $\leq \aleph_1$ e cardinalidade $\aleph_2$.*

Demonstração. Se $\mathfrak{c} \geq \aleph_2$, temos que qualquer subespaço $X \subseteq \mathbb{R}$ com $|X| = \aleph_2$ satisfaz as condições desejadas — lembremos que, pelo teorema 6(a) de [60], todo espaço hereditariamente de Lindelöf é indestrutível. Caso contrário, o resultado segue da proposição 4.3.16. *q.e.d.*

Indestrutibilidade no teorema 4.3.17 é relevante devido ao fato de que, assumindo-se que ω_2 não é fracamente compacto em $\mathbf{L}$, um contraexemplo indestrutível para a conclusão do teorema 4.3.4 é exibido em [62] adicionando-se $\aleph_3$ subconjuntos de ω_1 de Cohen a um modelo de CH.

Temos então o seguinte corolário, também análogo ao teorema 1.6.3:

Corolário 4.3.18. *A existência de um cardinal fracamente compacto e a afirmação "não existe espaço de Lindelöf T_1 com pseudocaráter $\leq \aleph_1$ e cardinalidade $\aleph_2$" são equiconsistentes.*

Demonstração. Decorre dos teoremas 4.3.4 e 4.3.17. *q.e.d.*

É válido mencionar que, ainda no artigo [62], obtém-se uma versão mais restritiva do teorema 4.3.4 a partir de uma hipótese mais forte:

Teorema 4.3.19 (Tall-Usuba [62])**.** *Se a existência de um cardinal mensurável*[1] *é consistente, então é consistente a conjunção das seguintes afirmações:*

[1]Assim como no caso dos cardinais supercompactos mencionados no teorema 1.8.4, omitiremos a definição de cardinal mensurável; cabe apenas citar que esta hipótese é estritamente mais forte que a hipótese do teorema 4.3.4 — no mesmo sentido utilizado na nota de rodapé da página 21.

· CH;

· *todo espaço de Lindelöf* T_1 *e indestrutível com pseudocaráter* $\leq \aleph_1$ *tem cardinalidade* $\leq \aleph_1$.

A questão sobre a necessidade da hipótese sobre a existência de um cardinal mensurável no teorema 4.3.19 — que é perguntada explicitamente em [62] — permanece sem resposta. O método apresentado na presente seção deste trabalho não pôde ser aplicado a este caso por não se conhecer, por exemplo, uma consequência da não-existência de cardinais mensuráveis em **L** que possa ser traduzida em termos da existência de certos tipos de árvores — o que configura um problema passível de investigação.

Referências bibliográficas

[1] K. Alster, *On the class of all spaces of weight not greater than ω_1 whose cartesian product with every Lindelöf space is Lindelöf*, Fundamenta Mathematicae **129** (1988), 133–140.

[2] A. V. Arhangel'skiĭ, *The power of bicompacta with first axiom of countability*, Doklady Akademii Nauk SSSR **187** (1969), 967–970 (Soviet Mathematics. Doklady **10** (1969), 951–955).

[3] C. E. Aull, *Topological spaces with a σ-point finite base*, Proceedings of the American Mathematical Society **29** (1971), 411–416.

[4] L. F. Aurichi, R. R. Dias e L. R. Junqueira, *On d- and D-separability*, Topology and its Applications **159** (2012), 3445–3452.

[5] R. Baire, *Sur la représentation des fonctions discontinues. Deuxième partie*, Acta Mathematica **32** (1909), 97–176.

[6] T. Bartoszyński, *Combinatorial aspects of measure and category*, Fundamenta Mathematicae **127** (1987), 225–239.

[7] J. E. Baumgartner, *Iterated forcing*, Surveys in set theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1983, 1–59.

[8] A. Bella, M. Bonanzinga e M. Matveev, *Variations of selective separability*, Topology and its Applications **156** (2009), 1241–1252.

[9] A. Bella, M. Matveev e S. Spadaro, *Variations of selective separability II: Discrete sets and the influence of convergence and maximality*, Topology and its Applications **159** (2012), 253–271.

[10] H. R. Bennett, *Quasi-developable spaces*, Topology Conference, Arizona State University, Tempe, 1968, 314–317.

[11] R. H. Bing, *Metrization of topological spaces*, Canadian Journal of Mathematics **3** (1951), 175–186.

[12] G. Birkhoff, *Lattice theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XXV, New York City, 1948.

[13] A. Blass, *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum*, Handbook of set theory, Springer, Dordrecht, 2010, 395–489.

[14] M. Bonanzinga, F. Cammaroto e M. Matveev, *Projective versions of selection principles*, Topology and its Applications **157** (2010), 874–893.

[15] É. Borel, *Sur la classification des ensembles de mesure nulle*, Bulletin de la Société Mathématique de France **47** (1919), 97–125.

[16] E. Čech e B. Pospíšil, *Sur les espaces compacts*, Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university **258** (1938), 1–7.

[17] R. R. Dias e F. D. Tall, *Indestructibility of compact spaces*, *preprint*, 2012.

[18] A. Dow, M. G. Tkachenko, V. V. Tkachuk e R. G. Wilson, *Topologies generated by discrete subspaces*, Glasnik Matematički **37** (2002), 189–212.

[19] R. Engelking, *General topology*, Heldermann, Berlin, 1989.

[20] F. Galvin, *Indeterminacy of point-open games*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences **26** (1978), 445–449.

[21] L. Gillman e M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, Princeton, 1960.

[22] I. Gorelic, *The Baire category and forcing large Lindelöf spaces with points G_δ*, Proceedings of the American Mathematical Society **118** (1993), 603–607.

[23] A. Haar e D. König, *Über einfach geordnete Mengen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **139** (1911), 16–28.

[24] J. Hagler, *On the structure of S and $C(S)$ for S dyadic*, Transactions of the American Mathematical Society **214** (1975), 415–428.

[25] R. W. Heath, D. J. Lutzer e P. L. Zenor, *Monotonically normal spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **178** (1973), 481–493.

[26] K. Hrbacek e T. Jech, *Introduction to set theory*, Marcel Dekker, New York, 1999.

[27] W. Hurewicz, *Über eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems*, Mathematische Zeitschrift **24** (1926), 401–421.

[28] W. Hurewicz, *Über Folgen stetiger Funktionen*, Fundamenta Mathematicae **9** (1927), 193–204.

[29] T. Jech, *Set theory*, Springer, Berlin, 2002.

[30] R. B. Jensen, *The fine structure of the constructible hierarchy*, Annals of Mathematical Logic **4** (1972), 229–308.

[31] I. Juhász, *Cardinal functions in topology — Ten years later*, Mathematical Centre Tracts, 123, Amsterdam, 1980.

[32] I. Juhász, *Cardinal functions II*, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, 63–109.

[33] W. Just e M. Weese, *Discovering modern set theory. II*, Graduate studies in mathematics, Volume 18, American Mathematical Society, Providence, 1997.

[34] A. Kanamori, *The higher infinite*, Springer, Berlin, 2009.

[35] B. König, *Local coherence*, Annals of Pure and Applied Logic **124** (2003), 107–139.

[36] K. Kunen, *Set theory*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[37] K. Kunen, *Compact spaces, compact cardinals, and elementary submodels*, Topology and its Applications **130** (2003), 99–109.

[38] G. Kurepa, *Le problème de Souslin et les espaces abstraits*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences **203** (1936), 1049–1052.

[39] R. Laver, *On the consistency of Borel's conjecture*, Acta Mathematica **137** (1976), 151–169.

[40] A. W. Miller, *The γ-borel conjecture*, Archive for Mathematical Logic **44** (2005), 425–434.

[41] J. T. Moore, *A solution to the L space problem*, Journal of the American Mathematical Society **19** (2005), 717–736.

[42] A. Mostowski, *An undecidable arithmetical statement*, Fundamenta Mathematicae **36** (1949), 143–164.

[43] J. Pawlikowski, *Undetermined sets of point-open games*, Fundamenta Mathematicae **144** (1994), 279–285.

[44] F. Rothberger, *Eine Verschärfung der Eigenschaft C*, Fundamenta Mathematicae **30** (1938), 50–55.

[45] W. Rudin, *Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications*, Duke Mathematical Journal **23** (1956), 409–419; *Note of correction*, Duke Mathematical Journal **23** (1956), 633.

[46] N. A. Šanin, *On the product of topological spaces*, Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova **24**, Moskva, 1948.

[47] M. Scheepers, *Combinatorics of open covers I: Ramsey theory*, Topology and its Applications **69** (1996), 31–62.

[48] M. Scheepers, *Combinatorics of open covers (III): games,* $\mathsf{C}_p(X)$, Fundamenta Mathematicae **152** (1997), 231–254.

[49] M. Scheepers, *Combinatorics of open covers VI: Selectors for sequences of dense sets*, Quaestiones Mathematicae **22** (1999), 109–130.

[50] M. Scheepers e F. D. Tall, *Lindelöf indestructibility, topological games and selection principles*, Fundamenta Mathematicae **210** (2010), 1–46.

[51] L. B. Shapiro, *On Šapirovskiĭ's theorem*, Topology and its Applications **107** (2000), 161–167.

[52] B. E. Shapirovskii, *Maps onto Tikhonov cubes*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk **35**:3 (1980), 122–130 (Russian Mathematical Surveys **35**:3 (1980), 145–156).

[53] B. E. Shapirovskii, *Cardinal invariants in bicompacta*, Seminar on General Topology, Moscow State University Publishing House, Moscow, 1981, 162–187.

[54] S. Shelah, *On some problems in general topology*, Set theory (Boise, 1992–1994), Contemporary Mathematics, 192, American Mathematical Society, Providence, 1996, 91–101.

[55] J. R. Shoenfield, *Mathematical logic*, Addison-Wesley, Reading, 1967.

[56] J. R. Shoenfield, *Unramified forcing*, Axiomatic set theory (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume XIII, Part I, University of California, Los Angeles, 1967), American Mathematical Society, Providence, 1971, 357–381.

[57] W. Sierpiński, *Sur un ensemble non dénombrable, dont toute image continue est de mesure nulle*, Fundamenta Mathematicae **11** (1928), 302–304.

[58] J. Silver, *The independence of Kurepa's conjecture and two-cardinal conjectures in model theory*, Axiomatic set theory (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume XIII, Part I, University of California, Los Angeles, 1967), American Mathematical Society, Providence, 1971, 383–390.

[59] F. D. Tall, *Some applications of a generalized Martin's axiom*, Topology and its Applications **57** (1994), 215–248.

[60] F. D. Tall, *On the cardinality of Lindelöf spaces with points* G_δ, Topology and its Applications **63** (1995), 21–38.

[61] F. D. Tall, *Set-theoretic problems concerning Lindelöf spaces*, Questions and Answers in General Topology **29** (2011), 91–103.

[62] F. D. Tall e T. Usuba, *Lindelöf spaces with small pseudocharacter and an analog of Borel's Conjecture for subsets of* $[0,1]^{\aleph_1}$, *preprint*, 2012.

[63] R. Telgársky, *Spaces defined by topological games, II*, Fundamenta Mathematicae **116** (1983), 189–207.

[64] S. B. Todorčević, *Trees, subtrees and order types*, Annals of Mathematical Logic **20** (1981), 233-268.

[65] S. Todorčević, *Trees and linearly ordered sets*, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, 235–293.

[66] S. Todorcevic, *Partitioning pairs of countable ordinals*, Acta Mathematica **159** (1987), 261–294.

[67] A. Tychonoff, *Über einen Funktionenraum*, Mathematische Annalen **111** (1935), 762–766.

Índice de símbolos

Índice remissivo