Fundamentos do Forcing

Pedro Galvão Schoueri

Dissertação apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de
Mestrado em Ciências

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

São Paulo, fevereiro de 2022

Fundamentos do Forcing

Esta é a versão original da dissertação elaborada pelo candidato Pedro Galvão Schoueri, tal como submetida à Comissão Julgadora.

Agradecimentos

Primeiramente, e mais importante, gostaria de agradecer meu orientador, Rogério Augusto dos Santos Fajardo, que tanto quanto eu, é protagonista desta dissertação. Gostaria de agradecer também a Ariel Seranoni, pela ajuda com o código, a minha mãe Rita Galvão, pela correção do português e a Tomas Zerrenner Flórido pelas 292 partidas de wining 11.

Resumo

Schoueri, P. G. **Fundamentos do Forcing**. 2022. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

Neste trabalho vamos apresentar a técnica de *forcing*, mostrando a consistência relativa entre ZFC e $ZFC + \neg CH$. O foco principal da dissertação é a fundamentação lógica da técnica e das ferramentas utilizadas, como o conceito de absolutividade e teoremas de reflexão. Discutimos com detalhes o uso dos diferentes níveis de linguagem e metalinguagem no processo de formalização.

Palavras-chave: *forcing*, consistência relativa, metalinguagem, absolutividade, teoremas de reflexão.

Abstract

Schoueri, P. G. **Forcing Fondations**. 2022. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

In this work we will present the forcing technique, showing the relative consistency of ZFC and $ZFC + \neg CH$. The focus of the dissertation is the logic foundation of the technique and its tools, like the concept of absoluteness and reflection theorems. We will discuss in detail the use of different levels of language and metalanguage in the process.

Keywords: forcing, relative consistency, metalanguage, language, absoluteness, reflection theorems

Sumário

Prefácio

Em 1931, Gödel mostrou que em qualquer sistema ω-consistente, recursivo e capaz de expressar aritmética existem sentenças indecidíveis [Gö92]. Em 1936, Rosser aprimorou este resultado exigindo apenas consistência ao invés de ω-consistência [Ros36]. Esse fato tornou-se motivação para encontrar uma ferramenta para mostrar a consistência relativa entre teorias recursivas e capazes de expressar aritmética, e determinadas sentenças. Em particular para ZFC – isto é, a teoria dos conjuntos de Zermelo-Frankel com o Axioma da Escolha – e CH – a Hipótese do Contínuo. Em 1940, o próprio Gödel construiu um modelo para $ZFC + CH$, mostrando que ZFC não prova $\neg CH$, [Gö40]. Mas, para mostrar que CH é indecidível em ZFC, era preciso, também, construir um modelo para $ZFC + \neg CH$, mostrando que ZFC não prova CH. Finalmente, em 1964, Cohen construiu tal modelo usando a técnica do *forcing*, [Coh63] e [Coh64].

Faremos toda a construção do argumento necessário para mostrar a consistência relativa entre ZFC e $ZFC + \neg CH$, inclusive a técnica do *forcing*. Nosso enfoque será na formalização lógica das construções. Nossa principal referência será [Kun80], entretanto vamos estabelecer uma abordagem diferente. Por exemplo, [Kun80] aborda o conceito de um determinado conjunto "ser modelo para uma fórmula", ou "uma fórmula valer no modelo" do seguinte modo: M é modelo para A, ou A vale em M, se A^M, onde A^M é a fórmula A com os quantificadores restritos a M. Nessa abordagem, a metalinguagem é tratada de maneira informal. Não abandonaremos completamente esse enfoque, porém vamos também introduzir uma abordagem mais formal. Vamos definir uma linguagem (no texto a chamaremos de sublinguagem) como Gödel fez para mostrar seus teoremas de incompletude [Gö92]. Ou seja, vamos associar cada simbolo da lógica de primeira ordem a um ordinal, fazendo com que fórmulas possam ser associadas a sequências finitas de ordinais (trabalharemos com o ordinal $\omega + 7$, reservando ω para as variáveis e os primeiros sete ordinais infinitos para os outros símbolos da linguagem da teoria dos conjuntos). Faremos os detalhes da construção em si logo no primeiro capítulo.

Com essa nova abordagem, vamos olhar para "ser modelo" de um ângulo um pouco diferente. Definiremos que "uma fórmula ϕ é verdadeira em um modelo M", que denotamos por $M \models \phi$, como é feito nos livros de lógica, por exemplo [dSF17]. Ou seja, $M \models \phi$, se $(M, \sigma) \models \phi$ para toda valoração σ.

Dessa forma a expressão $M \models \phi$ é uma fórmula da metalinguagem, em relação ao nível onde se encontra a fórmula ϕ. Mas em alguns momentos, na dissertação, precisamos "subir" ainda mais um nível. Por isso convencionaremos fixar três níveis de linguagem: a sublinguagem, como já dito, é a linguagem codificada como sequências de ordinais; a linguagem é a principal onde utilizamos ZFC, e na qual formalizamos a sublinguagem; a metalinguagem é um nível acima da linguagem.

A nossa notação, utilizando valorações no lugar de destacar as variáveis, deixa claro o nível de linguagem em que se encontra cada termo, evitando compreensões equivocadas e deixando a notação mais limpa. Outros livros, por exemplo, adotam a notação $M \models \phi(x_1, \ldots, x_n)$, sendo x_i elementos de M, e não variáveis do mesmo nível da linguagem de ϕ. Ao manter a notação com as valorações, a notação fica mais compacta e não há confusão entre variáveis da linguagem e variáveis da sublinguagem.

O primeiro capítulo se dedica à construção da sublinguagem e ao estabelecimento mais dos três níveis de linguagem mencionados. O segundo capítulo se trata de uma breve revisão de teoria dos conjuntos básica. Nele faremos, ou às vezes simplesmente adaptaremos, alguns resultados básicos que serão necessários no futuro. Nesse capítulo vamos trabalhar com apenas um nível de linguagem, exceto na seção 2.3, na qual trabalharemos com metalinguagem, mas informalmente. O terceiro capítulo será o mais interessante do texto, apesar de não ser o capítulo no qual abordaremos o *forcing* em si. É nele que faremos as reflexões mais interessantes sobre níveis de linguagem, reflexões estas raramente encontradas na literatura. No quarto capítulo, sim, faremos toda a construção para definir a técnica do *forcing*, porém isso será feito usando sublinguagem, valorações etc. O quinto, finalmente, será focado na conclusão: consistência relativa entre ZFC e $ZFC + \neg CH$. Dizemos "conclusão", mas talvez seria mais preciso dizer "um exemplo" de como aplicar a técnica do *forcing*, que foi construída com essa abordagem mais formal, pois, reiteramos, o foco da dissertação é a formalização lógica.

Axiomas de ZFC

Axioma 1. Extensão.

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

Axioma 2. Regularidade.

$$\forall x (x \neq \varnothing \to \exists y (y \in x \wedge x \cap y = \varnothing)).$$

Axioma 3. Par.

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z).$$

Axioma 4. União.

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists w (w \in x \wedge z \in w)).$$

Axioma 5. Partes.

$$\forall x \exists y \forall z (z \subset x \leftrightarrow z \in y).$$

Axioma 6. Esquema de axiomas da substituição.

Para toda fórmula A com variáveis livres entre $x, y, z, w_1, ..., w_n$ temos:

$$\forall z \forall w_1, ..., w_n (\forall x \in z\, \exists' y A \to \exists u \forall y (y \in u \leftrightarrow \exists x (x \in z \wedge A))).$$

onde $\exists' x B$ significa "existe no máximo um x tal que B".

Axioma 7. Infinidade.

$$\exists x (\varnothing \in x \wedge (\forall y \in x (y \cup \{y\} \in x))).$$

Axioma 8. Escolha.

$$\forall x (\varnothing \notin x \to \exists f (f \text{ é função } \wedge dom(f) = x \wedge \forall y (y \in x \to f(y) \in y))).$$

Capítulo 1

Fundamentação Lógica

1.1 Linguagem

O sistema de axiomas aqui adotado é o ZFC e a linguagem utilizada é a lógica de primeira ordem. Todavia, como usualmente ocorre quando estudamos lógica, eventualmente precisamos estudar propriedades matemáticas da linguagem lógica. Os argumentos que utilizamos para formalizar a lógica e a teoria dos conjuntos podem eles próprios ser formalizados utilizando lógica e teoria dos conjuntos. A essa linguagem que utilizamos para se referir à lógica de primeira ordem chamamos de *metalinguagem*.

Em algumas ocasiões será necessário realizar o caminho inverso: estando no ambiente da teoria dos conjuntos – cuja linguagem é a da lógica de primeira ordem – precisamos definir a própria lógica como objeto matemático desse ambiente. Ou seja, a metalinguagem passa a ser formalizada para se referir externamente à linguagem da lógica, tal como feito por Gödel em sua aritmetização, para permitir que a linguagem lógica pudesse, de alguma forma, se referir a si mesma.

Portanto trabalharemos com três níveis de linguagem, aos quais chamaremos (do mais externo ao mais interno) de *metalinguagem*, *linguagem* e *sublinguagem*.

A linguagem utilizará ZFC e lógica de primeira ordem, como normalmente é feito em textos matemáticos. Dentro dessa linguagem construiremos a sublinguagem, em que fórmulas são vistas como conjuntos, objetos da linguagem. A saber, cada símbolo é visto como um elemento de $\omega + 7$. As *strings* são sequências finitas de elementos desse conjunto, e o conjunto das fórmulas é definido a partir do conjunto das *strings*. Dessa forma, podemos definir a linguagem, a semântica e a axiomática da lógica de primeira ordem utilizando todo o rigor da própria lógica nessa formalização.

A metalinguagem será utilizada para estudarmos propriedades das fórmulas da linguagem, em contextos nos quais não convém tratar essas fórmulas como conjuntos (isto é, fórmulas da sublinguagem). Como na teoria dos modelos há muitas mudanças de níveis de linguagem, consideramos que fixar esses três níveis será didaticamente mais adequado para a formalização da técnica do *forcing*.

Vamos começar definindo mais formalmente a numeração de Gödel.

Metadefinição 1.1.1. *Seja $L = \{(,), =, \in, \wedge, \neg, \exists, x_1, x_2, ...\}$ a linguagem de teoria dos conjuntos. Para cada elemento de L, vamos dizer o que significa o* ***pré-número de Gödel*** *deste elemento da seguinte maneira:*

$$\begin{array}{ccc} (& \mapsto & \omega \\ ) & \mapsto & \omega+1 \\ = & \mapsto & \omega+2 \\ \in & \mapsto & \omega+3 \\ \wedge & \mapsto & \omega+4 \\ \neg & \mapsto & \omega+5 \\ \exists & \mapsto & \omega+6 \\ x_n & \mapsto & n \end{array}$$

Definição 1.1.2. *Seja $S = \{f \subset \omega \times \omega + 7; f$ é função e $dom(f) \in \omega\}$. S será denominado o conjunto das **strings da sublinguagem**.*

Metadefinição 1.1.3. *Seja s uma string da linguagem. Suponha que ela seja formada pela concatenação dos caracteres $c_0, ..., c_n$. Dizemos que o **número de Gödel** de s é $\{(0, N(c_0)), ..., (n, N(c_n))\}$, onde para cada $i \in \{0, ..., n\}$, $N(c_i)$ significa o pré-número de Gödel do caracter c_i. Vamos denotar o número de Gödel da string s por $g(s)$.*

Observe que o número de Gödel de uma *string* da linguagem sempre será uma *string* da sublinguagem.

Agora, iremos definir o conjunto das fórmulas e a relação de satisfatibilidade para modelos *standard* (isto é, tais que o símbolo de pertinência é interpretado pela própria relação de pertinência entre conjuntos).

Definição 1.1.4. *Denotaremos por A (chamado **conjunto das fórmulas atômicas)** o seguinte subconjunto de S:*

$$A = \{\{(0, \omega), (1, n), (2, \alpha), (3, m), (4, \omega + 1)\} : \alpha \in \{\omega + 2, \omega + 3\}, n, m \in \omega\}.$$

Defina as seguintes operações em S:

$* : S^2 \longrightarrow S$ (função concatenação*) definida como: $dom(f * g) = dom(f) + dom(g)$, $(f * g)(n) = f(n)$, se $n \in dom(f)$ e $(f * g)(n) = g(m)$, se $n = dom(f) + m$. A concatenação está bem definida e é claramente associativa (por isso iremos omitir parênteses em sequências de concatenações).*

$\wedge : S^2 \longrightarrow S$ (função conjunção*) definida como $\phi \wedge \psi = \{(0, \omega)\} * \phi * \{(0, \omega + 4)\} * \psi * \{(0, \omega + 1)\}$.*

$\neg : S \longrightarrow S$ (função negação*) definida como $\neg\phi = \{(0, \omega), (1, \omega + 5)\} * \phi * \{(0, \omega + 1)\}$.*

Para cada $n \in \omega$, definimos a função $Q_n : S \longrightarrow S$ (chamada função quantificação na n-ésima variável*) como $Q_n(\phi) = \{(0, \omega), (1, \omega + 6), (2, n)\} * \phi * \{(0, \omega + 1)\}$.*

Vamos denotar $Q_n(\phi)$ por: $\exists n \phi$

Diremos que $X \subset S$ é um conjunto indutivo *se contiver A e for fechado pelas operações acima (exceto a concatenação). Isto é, $X \subset S$ é indutivo se:*

1. *$A \subset X$;*
2. *Se $\phi, \psi \in X$ então $\phi \wedge \psi \in X$;*
3. *Se $\phi \in X$ então $\neg\phi \in X$;*
4. *Se $\phi \in X$ e $n \in \omega$ então $\exists n \phi \in X$.*

Definimos F *(chamado* conjunto das fórmulas*) como:*

$$F = \bigcap \{X \subset S : X \text{ é } \textit{indutivo}\}.$$

Por motivos didáticos os símbolos $\wedge, \neg, \exists$ da sublinguagem estarão em vermelho, porém, se por acaso o leitor estiver lendo esse texto em preto e branco, será possível identificar pelo contexto se o símbolo em questão é da linguagem ou da sublinguagem. Usaremos também os símbolos: $\rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \forall$. Onde:

- $\phi \vee \psi$ significa $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$;
- $\phi \rightarrow \psi$ significa $\neg\phi \vee \psi$;
- $\phi \leftrightarrow \psi$ significa $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$;
- $\forall n\phi$ significa $\neg\exists n\neg\phi$.

Vale notar também que estamos omitindo parênteses quando possível, para facilitar a leitura. Mas para os parênteses não omitidos e para as abreviações vamos usar a mesma didática: símbolos da sublinguagem estarão em vermelho.

Além disso, quando estivermos trabalhando com linguagem e sublinguagem ao mesmo tempo, para evitar confusão, vamos adotar diferentes notações para variáveis e fórmulas de níveis diferentes. Para variáveis da sublinguagem usaremos n, m, k etc, afinal tratam-se de números naturais. Para variáveis da linguagem adotaremos a notação usual x, y, z etc. Denotaremos fórmulas da linguagem por A, B, C etc e fórmulas da sublinguagem por ϕ, ψ, χ etc.

Lema 1.1.5. *F é um conjunto indutivo e está contido em todos os outros conjuntos indutivos.*

Demonstração: É fácil ver que F está contido em todos os conjuntos indutivos. Vejamos que F é indutivo:

1. seja $\phi \in A$ e X um conjunto indutivo, assim $\phi \in X$, logo $\phi \in X$ para todo conjunto indutivo. Portanto $\phi \in F$

2. Sejam $\phi, \psi \in F$. Então $\phi, \psi \in X$ para todo X indutivo, logo $\phi \wedge \psi \in X$ para todo X indutivo, portanto $\phi \wedge \psi \in F$

3 e 4 são análogos.

■

Corolário 1.1.6. ***(Indução na complexidade das fórmulas)*** *Seja $X \subset F$ tal que:*

1. *$A \subset X$;*
2. *Se $\phi, \psi \in X$ então $\phi \wedge \psi \in X$;*
3. *Se $\phi \in X$ então $\neg\phi \in X$;*
4. *Se $\phi \in X$ e $n \in \omega$ então $\exists n\phi \in X$.*

Então $X = F$.

Demonstração: Segue diretamente do lema anterior.

■

Os lemas 1.1.7, 1.1.8 e 1.1.9 servirão para auxiliar a demonstração do Teorema de Unicidade de Representação das Fórmulas (teorema 1.1.10). A estratégia para demonstrá-lo é "contar" o número de parenteses esquerdos e direitos à esquerda de cada conectivo, e observar que só haverá um conectivo em cada fórmula que satisfaz o seguinte: o número de parênteses esquerdos é exatamente um a mais que o número de parênteses direitos. Esse conectivo nos dirá o tipo da fórmula: atômica, existencial, de negação ou de conjuncão. E veremos que esse conectivo sempre existe e é único, assim uma fórmula não poderá ser de dois tipos diferentes.

Como estamos codificando o parêntese esquerdo por ω e o parêntese direito por $\omega + 1$, o lema 1.1.7, afirma que o número de parênteses esquerdos e direitos em uma fórmula é sempre igual.

Lema 1.1.7. *Para cada $\phi \in F$ defina $A_\phi = \{a \in dom(\phi); \phi(a) = \omega\}$ e $B_\phi = \{b \in dom(\phi); \phi(b) = \omega + 1\}$. Então, para toda $\phi \in F$, temos que $|A_\phi| = |B_\phi|$.*

Demonstração: Vamos fazer a demonstração por indução na complexidade da fórmula. Se $\phi \in A$, então $|A_\phi| = 1 = |B_\phi|$. Suponha que o resultado valha para ϕ e ψ. Vejamos que vale para $\phi \wedge \psi$, ou seja, para $\{(0, \omega)\} * \phi * \{(0, \omega + 4)\} * \psi * \{(0, \omega + 1)\}$. De fato, temos que $|A_{\phi \wedge \psi}| = 1 + |A_\phi| + |A_\psi| = |B_\phi| + |B_\psi| + 1 = |B_{\phi \wedge \psi}|$.

Vejamos, agora, que vale para $\neg\phi$. Ou seja, para $\{(0, \omega), (1, \omega + 5)\} * \phi * \{(0, \omega + 1)\}$, mas para isso basta observar que $|A_{\neg\phi}| = |A_\phi| + 1 = |B_\phi| + 1 = |A_{\neg\phi}|$.

Por fim, vejamos que vale para $\exists n\ \phi$, ou seja, para $\{(0, \omega), (1, \omega + 6), (2, n)\} * x * \{(0, \omega + 1)\}$. Com efeito, temos: $|A_{\exists n\ \phi}| = 1 + |A_\phi| = |B_\phi| + 1 = |B_{\exists n\ \phi}|$.

■

O lema a seguir, que é a parte central na demonstração do Teorema de Unicidade de Representação das Fórmulas, mostra a existência e unicidade do conectivo mencionado anteriormente. O lema 1.1.8 também afirma que o número de parênteses esquerdos, à esquerda de um dado conectivo, é sempre maior que o número de parênteses direitos. Esse fato, porém, está posto apenas por motivos técnicos, ele serve para fortalecer a hipótese de indução.

Lema 1.1.8. *Para cada $\phi \in F$ e para cada $n \in dom(\phi)$ tal que $\phi(n) \in \{\omega+2, \omega+3, \omega+4, \omega+5, \omega+6\}$, defina $A_{\phi,n} = \{a \in dom(\phi); a < n \wedge \phi(a) = \omega\}$ e $B_{\phi,n} = \{a \in dom(\phi); b < n \wedge \phi(b) = \omega + 1\}$. Então para toda $\phi \in F$ e para todo $n \in dom(\phi)$ tal que $\phi(n) \in \{\omega + 2, \omega + 3, \omega + 4, \omega + 5, \omega + 6\}$, temos que $|B_{\phi,n}| < |A_{\phi,n}|$, além disso existe um único $n \in dom(\phi)$ tal que $\phi(n) \in \{\omega + 2, \omega + 3, \omega + 4, \omega + 5, \omega + 6\}$ e $|A_{\phi,n}| = |B_{\phi,n}| + 1$.*

Demonstração: Novamente, faremos a prova por indução. Suponha que ϕ seja atômica. Neste caso, 2 é o único elemento n de $dom(\phi)$ tal que $\phi(n) \in \{\omega + 2, \omega + 3, \omega + 4, \omega + 5, \omega + 6\}$. E temos que $|B_{\phi,2}| = 0$ e $|A_{\phi,2}| = 1$.

Suponha que o resultado seja verdadeiro para ϕ e ψ. Vejamos que ele também vale para $\phi \wedge \psi$. Seja $n \in dom(\phi \wedge \psi)$. Se $n = 0$, temos que $\phi \wedge \psi(n) \notin \{\omega+2, \omega+3, \omega+4, \omega+5, \omega+6\}$. Se $n \in \{1, ..., dom(\phi)\}$, temos que $|A_{\phi \wedge \psi,n}| = |A_{\phi,n}| + 1 > |B_{\phi,n}| + 1 = |B_{\phi \wedge \psi,n}| + 1$. Se $n = dom(\phi) + 1$, então $|A_{\phi \wedge \psi,n}| = |A_\phi| + 1 = |B_\phi| + 1 = |B_{\phi \wedge \psi,n}| + 1$. Se $n \in \{dom(\phi) + 2, ..., dom(\phi) + dom(\psi) + 1\}$, temos que $|A_{\phi \wedge \psi,n}| = |A_\phi| + |A_{\psi,n}| + 1$, mas pela hipótese de indução e pelo lema 1.1.7, temos que $|A_{\phi \wedge \psi,n}| = |A_\phi| + |A_{\psi,n}| + 1 > |B_\phi| + |B_{\psi,n}| + 1 = |B_{\phi \wedge \psi,n}| + 1$. E, finalmente, se $n = dom(\phi) + dom(\psi) + 2$, temos que $\phi \wedge \psi(n) \notin \{\omega + 2, \omega + 3, \omega + 4, \omega + 5, \omega + 6\}$.

Vejamos agora que o resultado vale para $\neg\phi$, ou seja, para $\{(0,\omega),(1,\omega+5)\}*\phi*\{(0,\omega+1)\}$. Seja $n \in dom(\neg\phi)$. Se $n=0$, temos que $\neg\phi(n) \notin \{\omega+2,\omega+3,\omega+4,\omega+5,\omega+6\}$. Se $n=1$, temos que $|A_{\neg\phi,n}| = 1 = 0+1 = |B_{\neg\phi,n}|+1$. Se $n \in \{2,...,dom(\phi)+1\}$, temos que $|A_{\neg\phi,n}| = |A_{\phi,n}|+1 > |B_{\phi,n}|+1 = |B_{\neg\phi,n}|+1$. Se $n = dom(\phi)+2$, então $\neg\phi(n) \notin \{\omega+2,\omega+3,\omega+4,\omega+5,\omega+6\}$.

Vejamos agora que o resultado vale para $\exists m\ \phi$, ou seja, para $\{(0,\omega),(1,\omega+6),(2,n)\}*\phi*\{(0,\omega+1)\}$. Seja $n \in dom(\exists m\ \phi)$. Se $n=0$, temos que $\exists m\ \phi(n) \notin \{\omega+2,\omega+3,\omega+4,\omega+5,\omega+6\}$. Se $n=1$, temos que $|A_{\exists m\ \phi,n}| = 1 = 0+1 = |B_{\exists m\ \phi,n}|+1$. Se $n=2$, temos que $\exists m\ \phi(n) \notin \{\omega+2,\omega+3,\omega+4,\omega+5,\omega+6\}$. Se $n \in \{3,...,dom(\phi)+2\}$, temos que $|A_{\exists m\ \phi,n}| = |A_\phi|+1 > |B_\phi|+1 = |B_{\exists m\ \phi,n}|+1$. Se $n = dom(\phi)+3$, então $\exists m\ \phi(n) \notin \{\omega+2,\omega+3,\omega+4,\omega+5,\omega+6\}$.

■

Lema 1.1.9. *Sejam $\phi,\psi \in F$ e $n \in \omega$. Então:*

1. $|A_{\phi\wedge\psi,dom(\phi)+1}| = |A_\phi|+1 = |B_\phi|+1 = |B_{\phi\wedge\psi,dom(\phi)+1}|+1$;
2. $|A_{\neg\phi,1}| = 1 = 0+1 = |B_{\neg\phi,1}|+1$;
3. $|A_{\exists n\ \phi,1}| = 1 = 0+1 = |B_{\exists n\ \phi,1}|+1$.

■

Teorema 1.1.10. ***(Teorema de Unicidade de Representação das Fórmulas)*** *Seja $\phi \in F$. Então uma, e apenas uma, das afirmações abaixo é verdadeira:*

1. $\phi \in A$;
2. $\exists\psi,\chi \in F\ (\phi = \psi\wedge\chi)$;
3. $\exists\psi \in F\ (\phi = \neg\psi)$;
4. $\exists n \in \omega\ \exists\psi \in F\ (\phi = \exists n\ \psi)$.

Demonstração: Faremos a prova por indução (no caso deste teorema, a hipótese de indução em si não é usada, usamos a indução apenas para tirar proveito do fato de que, para provarmos que alguma propriedade vale para todos os elementos de F, basta mostrar que vale para fórmulas do tipo atômica, existencial, negação e conjunção). Se ϕ é atômica é imediato que ϕ satisfaz apenas a propriedade 1.

Vejamos que o resultado é verdadeiro para $\phi\wedge\psi$. É evidente que $\phi\wedge\psi$ satisfaz 2. Pelo lema 1.1.9, temos que $|A_{\phi\wedge\psi,dom(\phi)+1}| = |B_{\phi\wedge\psi,dom(\phi)+1}|+1$, ou seja, o único elemento n do domínio de $\phi\wedge\psi$ tal que $|A_{\phi\wedge\psi,n}| = |B_{\phi\wedge\psi,n}|+1$ é $dom(\phi)+1$. Se $\phi\wedge\psi$ fosse da forma $\neg\phi$ ou $\exists n\ \phi$, tal elemento seria 1, portanto teríamos que $dom(\phi)=0$, um absurdo.

Vejamos agora, que o resultado vale para $\neg\phi$. Novamente, é claro que $\neg\phi$ satisfaz 3. Como foi visto anteriormente, um elemento de F não pode satisfazer 2 e 3 ao mesmo tempo. Suponha que $\neg\phi$ satisfaça 4, ou seja, que existam χ e n tais que $\neg\phi = \exists n\ \chi$. Assim teríamos, pelos lemas 1.1.8 e 1.1.9, que $\omega+5 = \neg\phi(1) = \exists n\ \chi(1) = \omega+6$.

Agora, verificar o resultado para $\exists n\ \phi$ fica fácil. É evidente que $\exists n\ \phi$ satisafaz 4, e o fato de que $\exists n\ \phi$ não pode satisfazer 2 nem 3 já foi provado anteriormente.

É claro também que se ϕ satisfizer 2, 3 ou 4, ϕ não pode ser atômica.

■

O teorema a seguir foi adaptado de [Hal73].

Teorema 1.1.11. ***(Teorema da Recursão para Fórmulas da Subliguagem)*** *Sejam:*

- $X \neq \varnothing$;
- $g_0 : A \longrightarrow X$;
- $g_\neg : X \longrightarrow X$;
- $g_\wedge : X \times X \longrightarrow X$;
- $g_\exists : \omega \times X \longrightarrow X$.

Então existe uma única função $f : F \longrightarrow X$ tal que:

- $f\restriction_A = g_0$;
- $f(\neg\phi) = g_\neg(f(\phi))$;
- $f(\phi \wedge \psi) = g_\wedge(f(\phi), f(\psi))$;
- $f(\exists n\phi) = g_\exists(n, f(\phi))$.

Demonstração: Seja $\mathfrak{F}$ o conjunto de todas as relações $R \subset F \times X$ tais que:

1. $g_0 \subset R$;
2. Se $(\phi, x) \in R$, então $(\neg\phi, g_\neg(x)) \in R$;
3. Se $\{(\phi, x), (\psi, y)\} \subset R$, então $(\phi \wedge \psi, g_\wedge(x, y)) \in R$;
4. Se $(\phi, x) \in R$ e $n \in \omega$, então $(\exists n\phi, g_\exists(n, x)) \in R$.

Observe que $\mathfrak{F} \neq \varnothing$, pois $F \times X \in \mathfrak{F}$. Defina $f = \bigcap \mathfrak{F}$. Segue diretamente da definição que $f \in \mathfrak{F}$ e que, para toda $R \in \mathfrak{F}$, temos que $f \subset R$.

Vejamos que f é função. Seja $S = \{\phi \in F; \exists! x \in X((\phi, x) \in f)\}$. Vamos mostrar por indução na complexidade da fórmula (corolário 1.1.6) que $F = S$. Seja $\phi \in A$, assim $(\phi, g_0(\phi)) \in R$ para todo $R \in \mathfrak{F}$, logo $(\phi, g_0(\phi)) \in f$. Suponha que exista $y \neq g_0(\phi)$ tal que $(\phi, y) \in f$, assim temos que $f \backslash \{(\phi, y)\} \in \mathfrak{F}$, uma contradição, pois $f \backslash \{(\phi, y)\} \not\supset f$.

Seja $\phi \in S$, vejamos que $\neg\phi \in S$. Seja x o único elemento de X tal que $(\phi, x) \in f$. Ou seja, x é o único elemento de X tal que $(\phi, x) \in R$ para todo $R \in \mathfrak{F}$. Pela condição 2, $(\neg\phi, g_\neg(x)) \in R$ para todo $R \in \mathfrak{F}$, logo $(\neg\phi, g_\neg(x)) \in f$. Suponha que exista $y \neq g_\neg(x)$ tal que $(\neg\phi, y) \in f$, vejamos que $f \backslash (\neg\phi, y) \in \mathfrak{F}$. A condição 1 está satisfeita, pois pelo Teorema de Unicidade de Representação das Fórmulas (teorema 1.1.10), temos que $\neg\phi \notin A$. Vamos verificar que $f \backslash (\neg\phi, y)$ satisfaz 3. Sejam $(\psi, z), (\chi, w) \in f \backslash (\neg\phi, y)$, novamente pelo teorema 1.1.10, temos que $\psi \wedge \chi$ não é $\neg\phi$, logo $(\psi \wedge \chi, g_\wedge(z, w)) \in f \backslash (\neg\phi, y)$. Vejamos 4. Seja $(\psi, z) \in f \backslash (\neg\phi, y)$, outra vez, pelo teorema 1.1.10, temos que $\exists n\psi$ não é $\neg\phi$, logo $(\exists n\psi, g_\exists(z)) \in f \backslash (\neg\phi, y)$. Por fim, vamos verificar 2. Seja $(\psi, z) \in f \backslash (\neg\phi, y)$. Se ψ não é ϕ, temos que $(\neg\psi, g_\neg(z)) \in f \backslash (\neg\phi, y)$. Se ϕ é ψ, pela hipótese de indução ($\phi \in S$), temos que $z = x$, assim $(\neg\phi, g_\neg(z)) \in f \backslash (\neg\phi, y)$, pois assumimos que $y \neq g_\neg(x)$. Portanto $f \backslash \{(\neg\phi, y)\} \in \mathfrak{F}$, uma contradição, logo $\neg\phi \in S$.

Analogamente, se $\phi, \psi \in S$, então $\phi \wedge \psi \in S$ e se $\phi \in S$, então $\exists n\phi \in S$. Assim f é uma função com domínio F. Vamos mostrar por indução na complexidede da fórmula que f satisfaz as condições do teorema. Seja $T \subset F$ tal que para toda $\phi \in T$ temos que $f\restriction_A(\phi) = g_0(\phi)$, se $\phi \in A$, $f(\neg\phi) = g_\neg(f(\phi))$, $f(\phi \wedge \psi) = g_\wedge(f(\phi), f(\psi))$ e $f(\exists n\phi) = g_\exists(n, f(\phi))$. Como f é função e $g_0 \subset f$, temos que $f\restriction_A = g_0$, logo $A \subset T$. Suponha que $\phi, \psi \in T$. Assim, pelas condições 2, 3 e 4, é fácil ver que $\neg\phi, \phi \wedge \psi, \exists n\phi \in T$, portanto pelo corolário 1.1.6, temos que $F = T$

■

Definição 1.1.12. *Sejam:*

$g_0 : A \longrightarrow \omega$ *dada por:*
$g_0(\phi) = 0$*, para toda* $\phi \in A$*;*

$g_\neg : \omega \longrightarrow \omega$ *dadas por:*
$g_\neg(n) = n + 1$*;*

$g_\exists : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ *dada por:*
$g_\exists(m, n) = n + 1$*;*

$g_\wedge : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ *dada por:*
$g_\wedge(n, m) = max(n, m) + 1.$

Defina $Gr : F \longrightarrow \omega$ *como sendo a função que o teorema* 1.1.11 *produz com* $\omega, g_0, g_\neg, g_\wedge, g_\exists$*. Chamaremos* $Gr(\phi)$ *de grau de complexidade de* ϕ*.*

Lema 1.1.13. *Para toda* $\phi, \psi \in F$ *temos:*

- $Gr(\phi) = 0$*, se* $\phi \in A$*;*
- $Gr(\neg\phi) = Gr(\phi) + 1$*;*
- $Gr(\phi \wedge \psi) = max(Gr(\phi), Gr(\psi)) + 1$*;*
- $Gr(\exists n\phi) = Gr(\phi) + 1.$

Demonstração: Sejam $\phi, \psi \in F$. Se $\phi \in A$, então $Gr(\phi) = Gr\restriction_A(\phi) = g_0(\phi) = 0$.
$Gr(\neg\phi) = g_\neg(Gr(\phi)) = Gr(\phi) + 1$;
$Gr(\phi \wedge \psi) = g_\wedge(Gr(\phi), Gr(\psi)) = max(Gr(\phi), Gr(\psi)) + 1$;
$Gr(\exists n\phi) = g_\exists(n, Gr(\phi)) = Gr(\phi) + 1$.

■

1.2 Semântica

Agora vamos nos dedicar, brevemente, à interpretação das fórmulas da sublinguagem. O objetivo desta seção é definir, no nosso contexto, o que significa um modelo e uma valoração satisfazerem uma fórmula (da sublinguagem, claro). Não faremos, entretanto, uma seção análoga a esta para a sintaxe. Além dessa parte estar bem formalizada em [dSF17] e ser simples transportar as definições e teoremas de [dSF17] para nosso contexto, raramente usaremos conceitos sintáticos no contexto sublinguagem/linguagem. Falaremos mais de sintaxe apenas na seção 3.7, majoritariamente no contexto linguagem/metalinguagem.

Definição 1.2.1. *Sejam* M *conjunto e* $\sigma, \theta \in {}^\omega M$*.* $\boldsymbol{\sigma \sim_n \theta}$ *significa que* $\sigma(i) = \theta(i)$*, se* $i \neq n$*.*

Definição 1.2.2. *Seja* $X = {}^Y 2$*, onde* $Y = {}^\omega M$*. Vamos definir* $g_0 : A \longrightarrow X$*. Se* $m, n \in \omega$ *temos:*

- $g_0(m = n)(\sigma) = 1$, *se* $\sigma(n) = \sigma(m)$;
- $g_0(m = n)(\sigma) = 0$, *caso contrário;*
- $g_0(m \in n)(\sigma) = 1$, *se* $\sigma(n) = \sigma(m)$;
- $g_0(m \in n)(\sigma) \in 0$, *caso contrário.*

Definamos agora $g_\neg : X \longrightarrow X$ *da seguinte forma: para cada* $h \in X$, *defina* $g_\neg(h) : {}^\omega M \longrightarrow 2$ *por:*

$$g_\neg(h)(\sigma) = 1 - h(\sigma).$$

Analogamente, vamos definir $g_\wedge : X \times X \longrightarrow X$ *da seguinte forma: para cada* $(h_1, h_2) \in X \times X$, *defina* $g_\wedge(h_1, h_2) : {}^\omega M \longrightarrow 2$ *por:*

$$g_\wedge(h_1, h_2)(\sigma) = min(h_1(\sigma), h_2(\sigma)).$$

E finalmente, definamos $g_\exists : \omega \times X \longrightarrow X$ *da seguinte forma: para cada* $(n, h) \in \omega \times X$, *defina* $g_\exists(n, h) : {}^\omega M \longrightarrow 2$ *por:*

- $g_\exists(n, h)(\sigma) = 1$, *se existe* $\theta \in {}^\omega M$ *tal que* $\theta \sim_n \sigma$ *e* $h(\theta) = 1$;
- $g_\exists(n, h)(\sigma) = 0$, *caso contrário.*

Seja f *a função produzida pelo teorema* 1.1.11 *usando* $X, g_0, g_\neg, g_\wedge, g_\exists$. *Dizemos que* $(M, \sigma) \models \phi$ *quando* $f(\phi)(\sigma) = 1$.

Lema 1.2.3. *Para todos* M $m, n \in \omega$, $\phi, \psi \in F$ *e* $\sigma \in {}^\omega M$ *temos:*

- $(M, \sigma) \models m = n$ *se, e somente se,* $\sigma(m) = \sigma(n)$;
- $(M, \sigma) \models m \in n$ *se, e somente se,* $\sigma(m) \in \sigma(n)$;
- $(M, \sigma) \models \neg\phi$ *se, e somente se, não vale* $(M, \sigma) \models \phi$;
- $(M, \sigma) \models \phi \wedge \psi$ *se, e somente se,* $(M, \sigma) \models \phi$ *e* $(M, \sigma) \models \psi$;
- $(M, \sigma) \models \exists n\phi$ *se, e somente se, existe* $\theta \in {}^\omega M$ *tal que* $\theta \sim_n \sigma$ *e* $(M, \theta) \models \phi$.

Demonstração: Sejam M, $m, n \in \omega$, $\phi, \psi \in F$ e $\sigma \in {}^\omega M$. Então temos:

$(M, \sigma) \models m = n$ se, e somente se, $f(m = n)(\sigma) = 1$, o que ocorre se, e somente se, $g_0(m = n)(\sigma) = 1$, o que ocorre se, e somente se, $\sigma(n) = \sigma(m)$.

$(M, \sigma) \models m \in n$ se, e somente se, $f(m \in n)(\sigma) = 1$, o que ocorre se, e somente se, $g_0(m \in n)(\sigma) = 1$, o que ocorre se, e somente se, $\sigma(m) \in \sigma(n)$.

$(M, \sigma) \models \neg\phi$ se, e somente se, $f(\neg\phi)(\sigma) = 1$, o que ocorre se, e somente se, $g_\neg(f(\phi))(\sigma) = 1$, o que ocorre se, e somente se, $1 - f(\phi)(\sigma) = 1$, o que ocorre se, e somente se, $f(\phi)(\sigma) = 0$ o que ocorre se, e somente se, não vale $(M, \sigma) \models \phi$.

$(M, \sigma) \models \phi \wedge \psi$ se, e somente se, $f(\phi \wedge \psi)(\sigma) = 1$, o que ocorre se, e somente se, $g_\wedge(f(\phi), f(\psi))(\sigma) = 1$, o que ocorre se, e somente se, $min(f(\phi)(\sigma), f(\psi)(\sigma)) = 1$, o que ocorre se, e somente se, $f(\phi)(\sigma) = 1$ e $f(\psi)(\sigma) = 1$, o que ocorre se, e somente se, $(M, \sigma) \models \phi$ e $(M, \sigma) \models \psi$.

$(M, \sigma) \models \exists n\phi$ se, e somente se, $f(\exists n\phi)(\sigma) = 1$, o que ocorre se, e somente se, $g_\exists(n, f(\phi))(\sigma) = 1$, o que ocorre se, e somente se, existe $\theta \in {}^\omega M$ tal que $\theta \sim_n \sigma$ e $f(\phi)(\theta) = 1$, o que ocorre se, e somente se, existe $\theta \in {}^\omega M$ tal que $\theta \sim_n \sigma$ e $(M, \theta) \models \phi$.

■

Definição 1.2.4. *Sejam M um conjunto e $\phi \in F$. Dizemos que $\boldsymbol{M} \models \boldsymbol{\phi}$ quando, para toda $\sigma \in {}^\omega M$, temos que $(M, \sigma) \models \phi$.*

Para manter a clareza na notação, a partir de agora, quando estivermos pensando em ω como o conjunto das variáveis da sublinguagem, vamos usar a notação $\boldsymbol{Var}$, ou seja, $Var = \omega$. E se M é um conjunto e $\sigma \in {}^\omega M$, chamaremos σ de uma valoração em M. E chamaremos, simplesmente, de valoração uma função de domínio Var.

Capítulo 2

Teoria dos Conjuntos

2.1 Equivalências dos Axiomas de ZFC

Nesta seção, vamos nos dedicar a fazer algumas equivalências entre axiomas de ZFC. Tais equivalências serão úteis, não apenas para observar consequências dos axiomas que serão utilizadas ao longo do texto. Na seção 4.3 vamos mostrar que um determinado conjunto, que vamos chamar de $M[G]$, satisfaz cada parte finita de ZFC (vamos explicar com detalhes posteriormente). Mas o que é importante destacar agora é que vamos precisar também da outra direção, ou seja, vamos precisar que os axiomas de ZFC, ou alguns deles pelo menos, sejam consequência de determinadas sentenças.

Definição 2.1.1. *Uma relação R em um conjunto A é dita* ***bem fundada*** *quando:*

$$\forall X \in P(A)\,(X \neq \varnothing \rightarrow \exists y \in X(\neg \exists z \in X(zRy))).$$

O conjunto y na fórmula acima é dito ***R -minimal*** *em X.*

Lema 2.1.2. *Em ZFC sem o axioma da regularidade, temos que axioma da regularidade vale se, e somente se, todo conjunto é $\in$-bem fundado.*

Demonstração: Vejamos a ida. Seja A conjunto e $X \subset A$ com $X \neq \varnothing$. Suponha por absurdo que para todo $y \in X$ exista $z \in X$ tal que $z \in y$, assim temos que $\forall y(y \cap X \neq \varnothing)$, contradizendo o axioma da regularidade. Reciprocamente suponha que exista $x \neq \varnothing$ tal que $\forall y \in x(x \cap y \neq \varnothing)$, seja $A = x$, assim existe $x \in P(A)$, com $x \neq \varnothing$ tal que $\forall y \in x \exists z \in x(z \in y)$.

■

O lema a seguir trata do esquema de axiomas da substituição. Existem diferentes versões do esquema de axiomas da substituição. Uma delas, a que assumimos aqui, não depende do esquema de axiomas da separação, ou seja, o esquema de axiomas da separação segue como consequência. Porém, se enfraquecermos um pouco o esquema de axiomas da substituição, trocando a hipótese de $\exists' y$ por $\exists! y$, precisaríamos assumir o esquema de axiomas da separação. Entretanto, podemos enfraquecer ainda mais o esquema de axiomas da substituição sem perder nada. Nessa versão mais fraca, obtemos não a "imagem" da fórmula funcional, mas um conjunto que a contém. O metalema 2.1.3, terá, então, como objetivo, fazer a equivalência entre o esquema de axiomas da substituição forte, por assim dizer, e os esquemas de axiomas da separação e substituição fraco.

Metalema 2.1.3. *Considere as seguintes afirmações:*

($*$) *Para toda fórmula A, com variáveis livres entre $x, z, w_1, ..., w_n$, temos:*

$$\forall z \forall w_1, ..., w_n \exists u \forall x (x \in u \leftrightarrow x \in z \wedge A).$$

($**$) *Para toda fórmula A, com variáveis livres entre $x, y, z, w_1, ..., w_n$ temos:*

$$\forall z \forall w_1, ..., w_n (\forall x \in z\, \exists! y A \rightarrow \exists u \forall y (y \in u \leftrightarrow \exists x (x \in z \wedge A))).$$

($* * *$) *Para toda fórmula A, com variáveis livres entre $x, y, z, w_1, ..., w_n$, temos:*

$$\forall z \forall w_1, ..., w_n (\forall x \in z\, \exists! y A \rightarrow \exists u \forall x \in z\, \exists y \in u\, A)).$$

Em ZFC sem o axioma da substituição, são equivalentes:

(I) O esquema de axiomas da substituição;

(II) ($*$) e ($**$);

(III) ($*$) e ($* * *$).

Chamaremos ($***$) de esquema de axiomas da substituição fraco e ($*$) de esquema de axiomas da separação.

Demonstração: Primeiramente vejamos a equivalência entre (I) e (II). (I) implica ($**$) é imediato. Vejamos que (I) implica ($*$). Seja A uma fórmula com variáveis livres entre $x, z, w_1, ..., w_n$. Fixe $x, z, w_1, ..., w_n$. Seja B a seguinte fórmula: $A \wedge x = y$. Observe que B satisfaz que $\forall x \in z\, \exists' y B$. Assim, tome u tal que $\forall y (y \in u \leftrightarrow \exists x (x \in z \wedge B))$. Assim temos:

$$x \in u \leftrightarrow \exists x' (x' \in z \wedge B) \leftrightarrow \exists x' (x' \in z \wedge x' = x \wedge [A]_x^{x'}) \leftrightarrow x \in z \wedge A.$$

Reciprocamente, suponha (II). Seja A uma fórmula com variáveis livres entre $x, y, z, w_1, ..., w_n$. Fixe $z, w_1, ..., w_n$ e suponha que $\forall x \in z\, \exists! y A$. Por ($*$), tome $w = \{x \in z; \exists! y A\}$. Por ($**$), tome u tal que $\forall y (y \in u \leftrightarrow \exists x (x \in w \wedge A))$. Vejamos que $\forall y (y \in u \leftrightarrow \exists x (x \in z \wedge A))$. Seja y um conjunto. Se $y \in u$, então $\exists x (x \in w \wedge A)$, logo $\exists x (x \in z \wedge A)$. Reciprocamente suponha que $\exists x (x \in z \wedge A)$, assim $\exists y A$, logo $\exists! y A$, portanto $x \in w$, logo $y \in u$.

Vejamos, agora, a equivalência entre (II) e (III). Suponha (II). Vejamos que vale ($* * *$), com efeito, seja A uma fórmula com variáveis livres entre $x, y, z, w_1, ..., w_n$. Fixe $z, w_1, ..., w_n$ e suponha que $\forall x \in z\, \exists! y A$. Por ($**$) , tome u tal que $\forall y (y \in u \leftrightarrow \exists x (x \in z \wedge A))$. Seja $x \in z$, fixe o único y tal que vale A. Assim, para esse y, temos que $\exists x (x \in z \wedge A))$, logo $y \in u$.

Reciprocamente, suponha (III). Vejamos que vale ($**$). Seja A uma fórmula com variáveis livres entre $x, y, z, w_1, ..., w_n$. Fixe $z, w_1, ..., w_n$ e suponha que $\forall x \in z\, \exists! y A$. Por ($* * *$), tome u tal que $\forall x \in z\, \exists y \in u\, A$. Por ($*$), podemos tomar $u' = \{y \in u; \exists x (x \in z \wedge A)\}$. Vejamos que u' satisfaz $\forall y (y \in u' \leftrightarrow \exists x (x \in z \wedge A))$. É evidente que, se $y \in u'$, então $\exists x (x \in z \wedge A)$. Suponha que $\exists x (x \in z \wedge A)$. Fixe um tal x. Assim, existe y' tal que $y' \in u \wedge [A]_y^{y'}$. Mas, como valem A e $[A]_y^{y'}$, temos que $y = y'$, logo $y \in u$.

■

Lema 2.1.4. *Em ZFC sem o axioma das partes, temos que o axioma das partes é equivalente a:*

$$(*)\ \forall x \exists y \forall z (z \subset x \rightarrow z \in y).$$

Demonstração: É evidente que o axioma das partes implica $(*)$. Suponha $(*)$. Seja x um conjunto. Tome u tal que $\forall z(z \subset x \to z \in u)$. Pelo esquemas de axiomas da separação (podemos assumi-lo graças ao metalema 2.1.3), tome $w = \{z \in u; z \subset x\}$, assim w é tal que $\forall z(z \subset x \leftrightarrow z \in w)$

■

Lema 2.1.5. *Em ZF, o axioma da escolha é equivalente a* $\forall x \exists \alpha \exists f(\alpha \text{ é ordinal} \wedge f \text{ é função} \wedge dom(f) = \alpha \wedge x \subset im(f))$

Demonstração: Por [eTJ99, Teorema 1.13], basta mostrar que a afirmação acima é equivalente ao princípio da boa ordem. $(\Rightarrow)$ é uma consequência direta do teorema da contagem [eTJ99, Teorema 3.1] . Façamos $(\Leftarrow)$. Seja x conjunto, tome α e f como na afirmação, defina $g : x \longrightarrow \alpha$ da seguinte forma: $g(y) = min(f^{-1}\{y\})$. g é injetora, pois se $y, z \in x$ e $g(y) = g(z)$, então $f(g(y)) = f(g(z))$, logo $y = z$. Assim podemos definir a seguinte ordem em $x : y \leqslant z$, quando $g(y) \leqslant g(z)$. ■

Lema 2.1.6. *Em ZF, são equivalentes:*

(I) O axioma da escolha.

(II) Para todo X *tal que* $\varnothing \notin X$ *e* $\forall x, y \in X(x \neq y \to x \cap y = \varnothing)$, *existe* $f : X \longrightarrow \bigcup X$ *tal que* $\forall x \in X(f(x) \in x)$.

(III) Toda função tem inversa à direita, ou seja:

$$f \text{ é função } \to \exists g(g \text{ é função } \wedge dom(g) = im(f) \wedge f \circ g = Id).$$

Demonstração: Primeiramente façamos $(I) \leftrightarrow (II)$. $(I) \to (II)$ é trivial. Vejamos $(II) \to (I)$. Assuma (II). Seja X tal que $\varnothing \notin x$. Para cada $x \in X$, defina $A_x = \{(y, x); y \in x\}$. Observe que, se $(z, w) \in A_{x_1} \cap A_{x_2}$, então $w = x_1 = x_2$. Assim $B = \{A_x; x \in X\}$ é tal que $\forall A_{x_1}, A_{x_2} \in B(A_{x_1} \neq A_{x_2} \to A_{x_1} \cap A_{x_2} = \varnothing)$. Portanto podemos tomar $f : B \longrightarrow \bigcup B$ tal que $\forall A_x \in B(f(A_x) \in A_x))$. Seja $g : X \longrightarrow B$ dada por: $g(x) = A_x$ e $h : \bigcup B \longrightarrow \bigcup X$ dada por: $h(x, y) = x$. Seja $F = h \circ f \circ g$. Vejamos que F é a função de escolha procurada. De fato, seja $x \in X$, assim $F(x) = h(f(A_x))$. Seja $(u, v) = f(A_x)$, assim $h(f(A_x)) = u$, mas como $(u, v) = f(A_x) \in A_x$, temos que $F(x) = u \in v = x$.

Vejamos agora, que $(III) \to (II)$. Seja X tal que $\varnothing \notin X$ e $\forall x, y \in X(x \neq y \to x \cap y = \varnothing)$. Assim, para todo $y \in \bigcup X$, existe um único x_y tal que $y \in x_y$. Defina $g : \bigcup X \longrightarrow X$ por: $g(y) = x_y$. Como $\varnothing \notin X$, temos que $Im(g) = X$. Tome, portanto, $f : X \longrightarrow \bigcup X$ tal que $g \circ f = Id$. Assim $\forall y \in \bigcup X(y \in g(y))$, logo se $x \in X$, temos que $f(x) \in g(f(x)) = x$. Portanto f é uma função de escolha.

Para concluir, vejamos $(I) \to (III)$. Seja f uma função. Sejam $X = dom(f)$, $Y = im(f)$ e $Z = \{f^{-1}(\{y\}); y \in Y\}$. Assim, pelo axioma da escolha, podemos tomar $g : \bigcup Z \longrightarrow Z$ tal que, para todo $y \in Y$, $g(f^{-1}(\{y\})) \in f^{-1}(\{y\})$. Seja $h : Y \longrightarrow X$ dada por: $h(y) = g(f^{-1}(\{y\}))$. Assim, se $y \in Y$, então $h(y) \in f^{-1}(\{y\})$, logo $f \circ h(y) = y$. Portanto $f \circ h = Id$.

■

2.2 Propriedades Básicas Sobre Cofinalidade

Nesta seção vamos mostrar alguns resultados elementares de teoria dos conjuntos que não são encontrados nos livros básicos, como por exemplo [eTJ99].

Definição 2.2.1. *Sejam α e β ordinais, dizemos que $f : \alpha \longrightarrow \beta$ é* ***cofinal*** *quando:*

$$\forall \gamma < \beta \, \exists \delta < \alpha \, (\gamma \leqslant f(\delta)).$$

Definição 2.2.2. *Seja β um ordinal. Dizemos que α é a* ***cofinalidade*** *de β quando α é o menor ordinal tal que existe uma função cofinal $f : \alpha \longrightarrow \beta$. Usaremos para cofinalidade de β a notação: $\boldsymbol{cf(\beta)}$.*

Lema 2.2.3. *Seja β um ordinal. Então existe uma função cofinal estritamente crescente $f : cf(\beta) \longrightarrow \beta$. Onde estritamente crescente significa:*

$$\forall \alpha, \gamma \in dom(f) \, (\alpha < \gamma \Rightarrow f(\alpha) < f(\gamma)).$$

Demonstração: Seja $g : cf(\beta) \longrightarrow \beta$ uma função cofinal. Defina recursivamente f da seguinte forma:

$$f(\gamma) = max(g(\gamma), sup\{f(\alpha) + 1; \alpha < \gamma\}).$$

Como $f(\gamma) \geqslant g(\gamma)$, para todo $\gamma \in cf(\beta)$ e g é cofinal temos que f é cofinal. Sejam $\alpha, \gamma \in cf(\beta)$ com $\alpha < \gamma$, assim $f(\gamma) \geqslant sup\{f(\delta) + 1; \delta < \gamma\} \geqslant f(\alpha) + 1 > f(\alpha)$, portanto f é estritamente crescente. ■

Lema 2.2.4. *Sejam α um ordinal limite e $f : \alpha \longrightarrow \beta$ uma função cofinal e estritamente crescente. Então $cf(\alpha) = cf(\beta)$*

Demonstração: Seja $f' : cf(\alpha) \longrightarrow \alpha$ cofinal, assim $f \circ f'$ é cofinal, logo $cf(\beta) \leqslant cf(\alpha)$. Vejamos que $cf(\alpha) \leqslant cf(\beta)$. Seja $g : cf(\beta) \longrightarrow \beta$ uma função cofinal. Defina $h : cf(\beta) \longrightarrow \alpha$ da sguinte forma: para cada $\gamma \in cf(\beta)$, $h(\gamma)$ é o menor ordinal δ tal que $f(\delta) > g(\gamma)$. Observe que só é possível definir h, pois f é cofinal. Vejamos que h é cofinal. É fácil ver que f é tal que: $f(\epsilon) < f(\epsilon') \Rightarrow \epsilon < \epsilon'$. Seja $\epsilon \in \alpha$, como g é cofinal, existe $\gamma \in cf(\beta)$ tal que $g(\gamma) > f(\epsilon)$. Assim $h(\gamma)$ é tal que $f(h(\gamma)) > g(\gamma) > f(\epsilon)$, logo $h(\gamma) > \epsilon$. ■

Definição 2.2.5. *Seja β um ordinal. Dizemos que β é regular quando β é um ordinal limite e $cf(\beta) = \beta$.*

Lema 2.2.6. *Seja β um ordinal limite. Então $c(\beta)$ é regular.*

Demonstração: Pelo lema 2.2.3 existe $f : cf(\beta) \longrightarrow \beta$ cofinal e estritamente crescente, assim pelo lema 2.2.4, $cf(cf(\beta)) = cf(\beta)$.

■

Lema 2.2.7. *Seja β um ordinal. Se β é regular, então β é um cardinal.*

Demonstração: Basta observar que toda bijeção é cofinal.

■

Lema 2.2.8. *Seja β um ordinal. Então β é regular se, e somente se, não existe $S \subset \beta$ tal que $|S| < \beta$ e $\bigcup S = \beta$.*

Demonstração: Primeiramente, suponha que β não seja regular, assim existe $\alpha < \beta$ e $f : \alpha \longrightarrow \beta$ cofinal. Assim $|im(f)| = |\alpha| \leqslant \alpha < \beta$ e $\bigcup im(f) = \beta$. Reciprocamente, suponha que exista tal S. Seja $\kappa = |S|$, seja $f : \kappa \longrightarrow S \subset \beta$ bijeção. Assim f é cofinal em β e $\kappa = |S| < \beta$, portanto β não é regular.

■

O lema a seguir é um resultado importante que usaremos no texto, porém não o provaremos, pois isso exigiria muitas definições e resultados preliminares que não são o foco da dissertação.

Lema 2.2.9. *Sejam κ um cardinal infinito e X um conjunto tal que $|X| \leqslant \kappa$ e $\forall x \in X(|x| \leqslant \kappa)$. Então $|\bigcup X| \leqslant \kappa$.*

Demonstração: Segue de [eTJ99] capítulo 8, teoremas 1.5 e 1.12. ■

Lema 2.2.10. *Seja λ um cardinal infinito sucessor. Então λ é regular.*

Demonstração: Seja κ tal que $\lambda = \kappa^+$. Suponha que exista $\alpha < \lambda$ tal e $f : \alpha \longrightarrow \lambda$ cofinal. Assim temos que $\alpha \leqslant \kappa$. Como f é cofinal, temos que $\bigcup im(f) = \lambda$. Mas $|im(f)| = |\alpha| \leqslant \alpha \leqslant \kappa$ e, além disso, para todo $\beta \in im(f)$, temos que $|\beta| \leqslant \beta < \lambda$, ou seja, $|\beta| \leqslant \kappa$, portanto, pelo lema 2.2.9 $|\bigcup im(f)| \leqslant \kappa < \lambda$, um absurdo.

■

2.3 Relações Bem Fundadas

O principal objetivo desta seção será o teorema da recursão para fórmulas bem fundadas, teorema 2.3.22. Definições recursivas são algo muito comum em matemática. Porém, para que elas façam sentido formalmente, são necessários teoremas de recursão. Vamos apresentar aqui uma versão bastante geral de recursão (o teorema da recursão para fórmulas bem fundadas). Mas antes, por motivos didáticos, vamos provar uma versão um pouco menos geral (o teorema da recursão para relações bem fundadas). A seguir, vamos apresentar definições, lemas, metadefinições e metalemas. Alguns dos metalemas e das metadefinições são praticamente idênticos aos lemas e definições apresentados, a única diferença é que trocaremos uma relação em um dado conjunto por uma fórmula set-like. As definições e lemas serão usados para mostrar a versão mais particular do teorema (metateorema 2.3.21), que ainda assim é bastante geral, enquanto os metalemas, metadefinições e o próprio metateorema 2.3.21 serão usados para mostrar a versão mais geral (metateorema 2.3.22).

Metadefinição 2.3.1. *Seja $R(x, y)$ uma fórmula. Dizemos que R* ***é bem fundada*** *quando:*

$$\forall x(x \neq \varnothing \rightarrow \exists y \in x(\forall z \in x(\neg R(z, y)))).$$

Definição 2.3.2. *Sejam X um conjunto e $r \subset X \times X$. Dizemos que r é* ***bem fundada em X*** *quando:*

$$\forall Y \subset X(Y \neq \varnothing \rightarrow \exists y \in Y(\forall z \in Y(\neg((z, y) \in r)))).$$

Em ambas as definições acima o conjunto y será chamado de r-minimal, ou R-minimal.

Lema 2.3.3. ***(Indução para Relações Bem Fundadas)***
Sejam X um conjunto, r uma relação bem fundada em X e $A(x)$ uma fórmula. Então:

$$\forall x \in X\ (\forall y((y, x) \in r \rightarrow A(y)) \rightarrow A(x)) \rightarrow (\forall x \in X\ A(x)).$$

Demonstração: Suponha por absurdo que o conjunto $Y = \{x \in X; \neg A(x)\} \neq \emptyset$. Podemos, portanto, fixar y r-minimal em Y. Assim $\forall z \in X\ ((z, y) \in r \to A(z))$, logo, por hipótese, temos que vale $A(y)$, um absurdo, pois $y \in Y$

■

Metadefinição 2.3.4. *Seja $R(y, x)$, dizemos que R é **set-like**, quando:*

$$\forall x \exists z (y \in z \leftrightarrow R(y, x)).$$

Assim, se R é set-like, para cada x, chamaremos o conjunto $\{y; R(y, x)\}$ de $\boldsymbol{pred(x, R)}$.

Metadefinição 2.3.5. *Seja $R(x, y)$ uma fórmula set-like. Para cada x vamos definir recursivamente $pred^n(x, R)$:*

$pred^0(x, R) = pred(x, R);$

$pred^{n+1}(x, R) = \bigcup\{pred(y, R); y \in pred^n(x, R)\}.$

Metadefinição 2.3.6. *Seja $R(x, y)$ uma fórmula set-like. Para cada x defina $cl(x, R) = \bigcup\{pred^n(x, R); n \in \omega\}$.*

Observe que a definição de $cl(R, x)$ é um pouco diferente das definições usuais de fecho, pois não é necessariamente verdade que $x \subset cl(R, x)$.

Metadefinição 2.3.7. *Sejam x um conjunto e $R(x, y)$ uma fórmula set-like. Dizemos que x é R-transitivo, quando $\forall y \in x\ (pred(y, R) \subset x)$.*

Metalema 2.3.8. *Seja $R(x, y)$ uma fórmula set-like. Para cada x, temos que $cl(x, R)$ é R-transitivo.*

Demonstração: Sejam x um conjunto e $y \in cl(x, R)$, assim existe $n \in \omega$ tal que $y \in pred^n(x, R)$, assim $pred(y, R) \subset pred^{n+1}(x, R) \subset cl(x, R)$.

■

Metalema 2.3.9. *Seja $R(x, y)$ uma fórmula set-like. Para todo $n \geqslant 1$ e para x, temos que:*

$$pred^n(x, R) \subset \bigcup_{y \in pred(x,R)} cl(y, R).$$

Demonstração: Faremos a prova por indução. Se $n = 1$, temos que:

$$pred^n(x, R) = pred^1(x, R) = \bigcup_{y \in pred(x,R)} pred(y, R) \subset \bigcup_{y \in pred(x,R)} cl(y, R).$$

Suponha agora que

$$pred^n(x, R) \subset \bigcup_{y \in pred(x,R)} cl(y, R).$$

Seja $w \in pred^{n+1}(x, R)$. Assim, existe $z \in pred^n(x, R)$ tal que $w \in pred(z, R)$, logo, pela hipótese de indução, tome $z \in \bigcup_{y \in pred(x,R)} cl(y, R)$ tal que $w \in pred(z, R)$. Assim, existe $y \in pred(x, R)$ tal que $z \in cl(y, R)$ e $w \in pred(z, R)$. Mas como $cl(y, R)$ é R-transitivo, temos que $w \in cl(y, R)$.

■

Metalema 2.3.10. *Seja $R(x,y)$ uma fórmula set-like. Para todo $n \in \omega$ e para x, temos que:*

$$\forall y \in pred(x,R)\ (pred^n(y,R) \subset cl(x,R))$$

Demonstração: Faremos a prova por indução. Vejamos o caso $n = 0$. Se $y \in pred(x,R)$, então $pred(y,R) \subset cl(x,R)$, pois $cl(x,R)$ é transitivo. Suponha que o resultado valha para n. Seja $z \in pred^{n+1}(y,R)$, assim existe $w \in pred^n(y,R)$ tal que $z \in pred(w,R)$, mas, pela hipótese de indução, $w \in cl(x,R)$, logo, como $cl(x,R)$ é transitivo, temos que $z \in cl(x,R)$.

■

Metalema 2.3.11. *Seja $R(x,y)$ uma fórmula set-like. Então para todo x, temos que:*

$$cl(x,R) = \bigcup_{y \in pred(x,R)} (cl(y,R) \cup \{y\}).$$

Demonstração: Seja $z \in cl(y,R)$. Assim existe $n \in \omega$ tal que $z \in pred^n(x,R)$. Se $n = 0$, $z \in pred(x,R) = \bigcup_{y \in pred(x,R)} \{y\} \subset \bigcup_{y \in pred(x,R)} (cl(y,R) \cup \{y\})$. Se $n \geqslant 1$, pelo lema 2.3.9, temos que

$$z \in pred^n(x,R) \subset \bigcup_{y \in pred(x,R)} cl(y,R) \subset \bigcup_{y \in pred(x,R)} (cl(y,R) \cup \{y\}).$$

Reciprocamente, seja $z \in \bigcup_{y \in pred(x,R)} (cl(y,R) \cup \{y\})$. Se $z \in \bigcup_{y \in pred(x,R)} \{y\}$, temos que $z \in pred(x,R) \subset cl(x,R)$. E se $z \in \bigcup_{y \in pred(x,R)} cl(y,R)$, tome $y \in pred(x,R)$ tal que $z \in cl(y,R)$, assim existe $n \in \omega$ tal que $z \in pred^n(y,R)$, logo, pelo lema 2.3.10, $z \in cl(x,R)$

■

Definição 2.3.12. *Sejam X um conjunto e r uma relação bem fundada em X. Para cada $x \in X$, defina $\boldsymbol{pred(x,r)} = \{y \in X; (y,x) \in r\}$*

Definição 2.3.13. *Sejam X um conjunto e r uma relação bem fundada em X. Para cada $x \in X$ vamos definir recursivamente $\boldsymbol{pred^n(x,r)}$:*

$pred^0(x,r) = pred(x,r)$;

$pred^{n+1}(x,r) = \bigcup\{pred(y,r); y \in pred^n(x,r)\}$.

Definição 2.3.14. *Sejam X um conjunto e r uma relação bem fundada em X. Para cada $x \in X$ defina $\boldsymbol{cl(x,r)} = \bigcup\{pred^n(x,r); n \in \omega\}$.*

Definição 2.3.15. *Sejam X um conjunto e r uma relação bem fundada em X. Dizemos que $x \in X$ é **r-transitivo**, quando $\forall y \in x\ (pred(y,r) \subset x)$.*

Lema 2.3.16. *Sejam X um conjunto e r uma relação bem fundada em X. Para cada $x \in X$, temos que $cl(x,r)$ é r-transitivo.*

Demonstração: Sejam x um conjunto e $y \in cl(x,r)$, assim existe $n \in \omega$ tal que $y \in pred^n(x,r)$, assim $pred(y,r) \subset pred^{n+1}(x,r) \subset cl(x,R)$.

■

Lema 2.3.17. *Sejam X um conjunto e r uma relação bem fundada em X. Então, para todo $x \in X$, temos que:*

$$cl(x,r) = \bigcup_{y \in pred(x,r)} cl(y,r) \cup \{y\}.$$

Demonstração: Basta tomar $R(x,y)$ como sendo $(x,y) \in r$ e aplicar o metalema 2.3.11

■

Metalema 2.3.18. *Sejam $R(x,y)$ uma fórmula set-like e x, y conjuntos R-transitivos, então $x \cap y$ é R-transitivo.*

Demonstração: Seja $z \in x \cap y$. Como $z \in x$, temos que $pred(z,R) \subset x$ e o mesmo vale para y, portanto temos o resultado.

■

Metalema 2.3.19. *Seja $R(x,y)$ uma fórmula set-like. Então:*

$$\forall x \forall y (y \in cl(x,R) \rightarrow pred(y,R) \subset cl(x,R)).$$

Demonstração: Sejam x, y conjuntos, com $y \in cl(x,R)$. Seja $z \in pred(y,R)$. Assim existe $n \in \omega$ tal que $y \in pred^n(x,R)$, logo $z \in pred^{n+1}(x,R) \subset cl(x,R)$.

■

Metadefinição 2.3.20. *Sejam $A(x,y)$ tal que $\forall x \exists! y A(x,y)$ e R uma fórmula set-like. Então, defina $\boldsymbol{A}\restriction_{\boldsymbol{pred(x,R)}} = \{(y,z); A(y,z) \wedge y \in pred(x,R)\}$.*

Metateorema 2.3.21. ***(teorema da recursão para relações bem fundadas)***
Sejam $A(x,y)$ uma fórmula tal que $\forall x \exists! y\ A(x,y)$, X um conjunto e $r \subset X \times X$ uma relação bem fundada em X. Então existe uma única função f com domínio X tal que, para todo $x \in X$:

$$A(f\restriction_{pred(x,r)}, f(x)).$$

Demonstração: Para cada $x \in X$ r-transitivo, dizemos que g é uma aproximação para x quando:

$$g \text{ é função } \wedge dom(g) = x \wedge \forall y \in x\ A(g\restriction_{pred(y,r)}, g(y)).$$

Vejamos que, se g é uma aproximação para x e g' é uma aproximação para y, então $g\restriction_{x \cap y} = g'\restriction_{x \cap y}$, ou seja, vamos mostrar que $\forall z \in x \cap y (g(z) = g'(z))$. Faremos a prova deste fato por indução em relações bem fundadas. Suponha que para todo $w \in pred(z,r)$ $(g(w) = g'(w))$. Observe que a afirmação acima faz sentido, pois $x \cap y$ é transitivo (lema 2.3.18). Assim temos $g\restriction_{pred(z,r)} = g'\restriction_{pred(z,r)}$. Mas como g é aproximação para x e $z \in x$, temos que vale $A(g\restriction_{pred(z,r)}, g(z))$ e como g' é aproximação para y e $z \in y$, temos que vale $A(g'\restriction_{pred(z,r)}, g'(z))$. Mas, como $A(x,y)$ é tal que $\forall x \exists! y\ A(x,y)$, temos que $g(z) = g'(z)$. Observe que, em particular, temos que cada aproximação é única.

Vamos mostrar, por indução em r, que para todo $x \in X$, existe uma aproximação para $\{x\} \cup cl(x,r)$. Suponha que para todo $y \in pred(x,r)$, exista uma aproximação h_y para $\{y\} \cup cl(y,r)$. Seja $h = \bigcup\{h_y; y \in pred(x,r)\}$. A existência do conjunto $\{h_y; y \in pred(x,r)\}$ está garantida pela unicidade das aproximações e pelo axioma da substituição. Vejamos que h é função. Sejam $(z,w_1), (z,w_2) \in h$, assim existem $y_1, y_2 \in pred(x,r)$, tais que $(z,w_1) \in h_{y_1}$ e $(z,w_2) \in h_{y_2}$, assim $z \in domh_{y_1} \cap domh_{y_2}$, logo, como foi visto anteriormente, $w_1 = h_{y_1}(z) = h_{y_2}(z) = w_2$. Assim, pelo lema 2.3.17, temos que:

$$domh = \bigcup_{y \in pred(x,r)} domh_y = \bigcup_{y \in pred(x,r)} (\{y\} \cup cl(y,r)) = cl(x,r).$$

Seja z o único conjunto tal que vale $A(h\restriction_{pred(x,r)}, z)$ e $f = h \cup \{(x,z)\}$. Vejamos que f é uma aproximação para $\{x\} \cup cl(x,r)$. f é função, pois $x \notin domh = cl(x,r)$. Como $domh = cl(x,r)$, temos que $domf = cl(x,r) \cup \{x\}$. Vejamos que $\forall y \in cl(x,r) \cup \{x\}\ A(f\restriction_{pred(y,r)}, f(y))$. Com efeito, seja $y \in cl(x,r) \cup \{x\}$. Se $y = x$, temos que vale $A(f\restriction_{pred(y,r)}, f(y))$, pois $f(y) = f(x) = z$ e $f\restriction_{pred(x,r)} = h\restriction_{pred(x,r)}$. Seja, portanto, $y \in cl(x,r)$. Assim, pelo lema 2.3.17, existe $w \in pred(x,R)$ tal que $y \in cl(w,r) \cup \{w\}$, ou seja, $y \in domh_w$. Assim vale $A(h_w\restriction_{pred(y,r)}, h_w(y))$, portanto vale $A(f\restriction_{pred(y,r)}, f(y))$.

Com isso, concluímos que, para todo $x \in X$, existe uma aproximação f_x para $\{x\} \cup cl(x,r)$. Seja $f = \bigcup\{f_x; x \in X\}$. Pelo mesmo argumento usado anteriormente, temos que f está bem definida e é função, com isso é fácil ver que, para todo $x \in X$, temos que $f\restriction_{\{x\}\cup cl(x,r)} = f_x$. Assim, para todo $x \in X$, temos que vale $A(f_x\restriction_{pred(x,r)}, f_x(x))$, logo vale $A(f\restriction_{pred(x,r)}, f(x))$.

Vejamos agora a unicidade. Sejam f e g tais que $domf = domg = X$ e para todo $x \in X$ temos que:

$$A(f\restriction_{pred(x,r)}, f(x)) \wedge A(g\restriction_{pred(x,r)}, g(x)).$$

Vejamos por indução em r que $\forall x \in X(f(x) = g(x))$. Seja $x \in X$ e suponha que, para todo $y \in pred(x,r)$, tenhamos que $f(y) = g(y)$. Assim, $f\restriction_{pred(x,r)} = g\restriction_{pred(x,r)}$. Mas como $A(x,y)$ é tal que $\forall x \exists! y A(x,y)$, temos que $f(x) = g(x)$. ■

Metateorema 2.3.22. ***(teorema da recursão para fórmulas bem fundadas)***
Sejam $B(x,y)$ tal que $\forall x \exists! y B(x,y)$ e $R(x,y)$ uma fórmula set-like bem fundada. Então existe uma fórmula A satisfazendo $\forall x \exists! y A(x,y)$ tal que:

$$\forall x \exists w (B(A\restriction_{pred(x,R)}, w) \wedge A(x,w)).$$

Além disso, se A' é uma fórmula satisfazendo $\forall x \exists! y A'(x,y)$ tal que

$$\forall x \exists w (B(A'\restriction_{pred(x,R)}, w) \wedge A'(x,w)).$$

Então

$$\forall x \forall y (A'(x,y) \leftrightarrow A(x,y)).$$

Ou seja, A é única com tal propriedade.

Demonstração: Para cada X tal que X é R-transitivo defina $r_X = \{(y,z) \in X \times X; R(y,z)\}$. Como R é bem fundada, r_X também o é, assim pelo metateorema 2.3.21, existe uma única função f_X com domínio X tal que para todo $x \in X$, temos que:

$$B(f_X\restriction_{\overleftarrow{(x,r)}}, f_X(x)),$$

onde $\overleftarrow{(x,r)} = \{y \in X; (y,x) \in r_X\}$.

Vejamos que, para todos X, Y, R-transitivos e para todo $x \in X \cap Y$, temos que $f_X(x) = f_Y(x)$. Mas para isso, antes, precisamos verificar que $r_X\restriction_{X\cap Y} = r_Y\restriction_{X\cap Y}$. Mas, de fato, $r_X\restriction_{X\cap Y} = \{(y,z) \in X \cap Y \times X \cap Y; R(y,z)\} = r_Y\restriction_{X\cap Y}$. E, novamente, como R é bem fundada, $r_X\restriction_{X\cap Y}$ também o é. Seja $r = r_X\restriction_{X\cap Y}$, assim, $(X \cap Y, r)$ é bem fundado. Vamos mostrar agora, por indução para relações bem fundadas, que $\forall x \in X \cap Y(f_X(x) = f_Y(x))$. Suponha que

$$\forall y((y,x) \in r \rightarrow f_X(y) = f_Y(y)),$$

ou seja,

$$\forall y \in \overleftarrow{(x,r)}(f_X(y) = f_Y(y)).$$

Como X, Y e $X \cap Y$ são R-transitivos (metalema 2.3.18), temos que $\overleftarrow{(x,r)} = \overleftarrow{(x,r_X)} = \overleftarrow{(x,r_Y)}$. Portanto $f_X \restriction \overleftarrow{(x,r)} = f_Y \restriction \overleftarrow{(x,r)}$. Assim, por construção de f_X e f_Y, temos que:

$$B(f_X \restriction_{\overleftarrow{(x,r)}}, f_X(x)) \wedge B(f_Y \restriction_{\overleftarrow{(x,r)}}, f_Y(x)).$$

Portanto $f_X(x) = f_Y(x)$.

Agora seja x um conjunto, por 1), tome $t(x)$ R-transitivo tal que $x \in t(x)$ (basta tomar $t(x) = cl(\{x\}, R)$). Seja $A(x,w)$ a seguinte fórmula:

$$w = f_{t(x)}(x).$$

Assim, $A\restriction_{pred(x,R)} = \{(y,u); A(y,u) \wedge y \in pred(x,R)\} = \{(y,u); u = f_{t(y)}(y) \wedge R(y,x)\} = \{(y,u); u = f_{t(x)}(y) \wedge R(y,x)\} = f_{t(x)} \restriction_{\overleftarrow{(x,r_{t(x)})}}$.

Mas, por construção de $f_{t(x)}$ temos que:

$$B(f_{t(x)} \restriction_{\overleftarrow{(x,r_{t(x)})}}, f_{t(x)}(x)).$$

Assim, tomando $w = f_{t(x)}(x)$ temos que:

$$\forall x \exists w (B(A\restriction_{pred(x,R)}, w) \wedge A(x,w)).$$

Vejamos, agora, a unicidade. Seja A' uma fórmula tal que $\forall x \exists ! y(x,y)$ e

$$\forall x \exists w (B(A'\restriction_{pred(x,R)}, w) \wedge A'(x,w)).$$

Para cada z defina g_z da seguinte forma:

$$g_z = \{(x,y); x \in z \wedge A'(x,y)\}.$$

Assim temos que para todo $x \in z$:

$$g\restriction_{\overleftarrow{(x,r_z)}} = A'\restriction_{pred(x,R)}.$$

Vejamos que:

$$\forall z \forall x \in z\ B(g\restriction_{\overleftarrow{(x,r_z)}}, g_z(x)).$$

Sejam z e $x \in z$. Assim existe w tal que

$$B(A'\restriction_{pred(x,R)}, w) \wedge A'(x,w).$$

Como vale $A'(x,w)$, temos que $(x,w) \in g_z$, ou seja, $g_z(x) = w$, assim vale

$$B(g\restriction_{\overleftarrow{(x,r_z)}}, g_z(x)).$$

Portanto, pela unicidade de f_z, temos que $\forall z(f_z = g_z)$
Vejamos, agora, que

$$\forall x \forall y (A'(x,y) \leftrightarrow \exists z (z \text{ é } R\text{-transitivo } \wedge g_z(x) = y)).$$

Sejam x, y conjuntos. Suponha que valha $A'(x,y)$. Tome z R-transitivo tal que $R(x,z)$, assim $x \in z$, logo $(x,y) \in g_z$, ou seja, $g_z(x) = y$. A outra direção é imediata.

Como $\forall z (f_z = g_z)$, temos que:

$$\forall x \forall y (A'(x,y) \leftrightarrow \exists z (z \text{ é } R\text{-transitivo } \wedge g_z(x) = y) \leftrightarrow \exists z (z \text{ é } R\text{-transitivo } \wedge f_z(x) = y)).$$

Assim, para concluir o teorema, basta mostrar que:

$$\exists z (z \text{ é } R\text{-transitivo } \wedge f_z(x) = y) \leftrightarrow f_{t(x)} = y.$$

Mas, como ambos z e $t(x)$ são transitivos e $x \in t(x) \cap z$, temos que $f_{t(x)} = f_z$

■

Capítulo 3

Teoria dos Modelos

Este capítulo é central para o texto. Aqui vamos, de fato, começar a usar a sublinguagem construída no primeiro capítulo e faremos teoremas com maior complexidade em termos de níveis de linguagem.

3.1 O Colapso de Mostowski

Esta curta seção tem como objetivo mostrar o teorema 3.1.5, que basicamente afirma que toda relação bem fundada pode ser encarada como a relação de pertencimento.

Definição 3.1.1. *Dizemos que x é **transitivo** quando para todo $y \in x$ temos que $y \subset x$.*

Definição 3.1.2. *Sejam A um conjunto e r uma relação bem fundada em A. Pelo teorema da recursão para relações bem fundadas, podemos definir uma função G com domínio A tal que $G(x) = \{G(y); y \in A \wedge (y, x) \in r\}$. Chamaremos tal função de função de **colapso de Mostowski de** $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{R})$. E denominaremos por colapso de Mostowski de (A, r) a imagem de G.*

Lema 3.1.3. *Sejam A um conjunto, r uma relação bem fundada em A e M o colapso de Mostowski de (A, r). Então M é transitivo.*

Demonstração: Segue diretamente da definição. ■

Definição 3.1.4. *Seja A um conjunto e r uma relação bem fundada em A. Dizemos que r é extencional em A quando*

$$\forall x, y \in A\, (\forall z \in A\, ((z, x) \in r \leftrightarrow (z, y) \in r) \rightarrow x = y).$$

Teorema 3.1.5. *Sejam A um conjunto e r uma relação bem fundada em A, tal que r é extencional em A. Seja G a função de colapso de Mostowski de (A, r) e M o colapso de Mostowski de (A, r). Então G é um isomorfismo de (A, r) para $(M, \in)$.*

Demonstração: O fato de que $\forall x, y \in A\, ((x, y) \in r \leftrightarrow G(x) \in G(y))$ segue imediatamente da definição da função G. Portanto basta mostrar que G é injetora. Com efeito, suponha que não, assim o conjunto $B = \{x \in A; \exists y \in A\, (x \neq y \wedge G(x) = G(y))\} \neq \emptyset$. Como r é bem fundada, existe $x \in A$ r-minimal em B, conforme descrito na definição 2.1.1. Fixe um tal x e fixe y tal que $x \neq y \wedge G(x) = G(y)$. Como A é extencional, vale uma das duas:

- $\exists z \in A\, ((z, x) \in r \wedge \neg((z, y) \in r))$;

- $\exists z \in A\,((z,y) \in r \wedge \neg((z,x) \in r))$.

Primeiramente, suponha que $\exists z \in A\,((z,x) \in r \wedge \neg((z,y) \in r))$. Fixe um tal z, como $(z,x) \in r$, temos que $G(z) \in G(x) = G(y)$, logo existe $w \in A$ tal que $G(z) = G(w)$ e $(w,y) \in r$, mas como $\neg((z,y) \in r)$, temos que $w \neq z$, portanto $z \in B$, contradizendo a minimalidade de x.

Suponha agora que $\exists z \in A\,((z,y) \in r \wedge \neg((z,x) \in r))$. Fixe um tal z, como $(z,y) \in r$, temos que $G(z) \in G(y) = G(x)$, logo existe $w \in A$ tal que $G(z) = G(w)$ e $(w,x) \in r$. Como x é minimal, temos que $w \in A \backslash B$, ou seja, $\forall u \in A(G(u) = G(w) \to u = w)$. Em particular, $G(z) = G(w) \to z = w$, logo $z = w$, portanto $(z,x) \in r$, uma contradição.

■

3.2 Absolutividade

Para introduzir o conceito de absolutividade, precisamos informar o que significa uma fórmula da sublinguagem ser "verdadeira no universo". O que em [Kun80] é chamado de absolutividade, aqui vamos chamar de absolutividade externa, e vamos dedicar a seção 3.6 a isso. Segundo a abordagem de [Kun80], uma fórmula ser verdadeira no universo significa simplesmente ela ser verdadeira, pois essa abordagem trata de fórmulas da linguagem e não da sublinguagem. A definição de $V \models \phi$ (que significa ϕ ser verdadeira no universo) se assemelha à definição de $M \models \phi$ introduzida no primeiro capítulo. Porém não é possível definir $V \models \phi$ ou $(V,\sigma) \models \phi$ diretamente na linguagem, como fizemos com $(M,\sigma) \models \phi$. Primeiramente, não podemos usar, para definir $(V,\sigma) \models \phi$, o teorema 1.1.11, pois quando o usamos para definir $(M,\sigma) \models \phi$ (definição 1.2.2) foi fundamental o fato de as valorações sobre M serem um conjunto. E, por "definir na linguagem", queremos dizer definir em uma única fórmula da linguagem, como fizemos, por exemplo, com $(M,\sigma) \models \phi$. O que conseguiremos fazer é definir o que significa fórmulas com grau de complexidade menor ou igual a um número fixado serem "verdadeiras no universo". Em particular, para uma dada ϕ, vamos poder dizer se $(V,\sigma) \models \phi$, porém não seremos capazes de colocar essa definição em uma só fórmula da linguagem, para uma ϕ genérica, em lógica de primeira ordem. Portanto a definição $(V,\sigma) \models \phi$ será uma metadefinição. De fato, se conseguíssemos definir $(V,\sigma) \models \phi$, para uma ϕ genérica, isso seria "definir verdade" em lógica de primeira ordem, contradizendo o Teorema da Indefinibilidade de Tarski, veja [Smu92].

Metadefinição 3.2.1. *Sejam $k \in \omega$ $\phi \in F$ e σ uma valoração. Dizemos que vale $(\boldsymbol{V_k}, \boldsymbol{\sigma}) \models \boldsymbol{\phi}$ quando $Gr(\phi) \leqslant k$ e:*

- *Se ϕ é da forma $m = n$, então $\sigma(n) = \sigma(m)$.*
- *Se ϕ é da forma $m \in n$, então $\sigma(m) \in \sigma(n)$.*
- *Se ϕ é da forma $\neg\psi$, então não vale $(V_{n-1},\sigma) \models \psi$.*
- *Se ϕ é da forma $\psi \wedge \chi$, então existem $m, l < n$ tais que valem $(V_m,\sigma) \models \psi$ e $(V_l,\sigma) \models \chi$.*
- *Se ϕ é da forma $\exists m\psi$, então existe $\theta \sim_m \sigma$ tal que $(V_{n-1},\theta) \models \psi$.*

Observe que a metadefinição 3.2.1 é recursiva, porém trata-se de uma recursão na metalinguagem, por isso estamos nos permitindo fazê-la de forma ingênua, sem usar nenhum teorema de recursão. Observe também que é possível fazê-la de forma ingênua, pois abaixo de cada $n \in \omega$ há um número finito de naturais, portanto a fórmula $(V_n,\sigma) \models \phi$ pode ser escrita de maneira finita.

Metadefinição 3.2.2. *Sejam $\phi \in F$ e σ uma valoração. Dizemos que* $(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\sigma}) \models \boldsymbol{\phi}$ *quando existe $n \in \omega$ tal que $(V_n,\sigma) \models \phi$.*

Aqui vale a pena notar que, de fato, precisamos que 3.2.2 seja uma metadefinição, pois para escrever $(V,\sigma) \models \phi$ na linguagem seria necessario fazer uma disjunção infinita de fórmulas. Ou seja, $(V,\sigma) \models \phi$, quando $\bigvee_{n\in\omega}(V_n,\sigma) \models \phi$, o que não pode ser escrito em primeira ordem.

Metalema 3.2.3. *Fixada $\phi,\psi \in F$, para todos $m,n \in Var$ temos que:*

- *$(V,\sigma) \models m = n$ se, e somente se, $\sigma(m) = \sigma(n)$;*
- *$(V,\sigma) \models m \in n$ se, e somente se, $\sigma(m) \in \sigma(n)$;*
- *$(V,\sigma) \models \neg\phi$ se, e somente se, não vale $(V,\sigma) \models \phi$;*
- *$(V,\sigma) \models \phi \wedge \psi$ se, e somente se, $(V,\sigma) \models \phi$ e $(V,\sigma) \models \psi$;*
- *$(V,\sigma) \models \exists n\phi$ se, e somente se, existe $\theta \sim_n \sigma$ valoração tal que $(V,\theta) \models \phi$.*

Demonstração: Sejam $m,n \in Var$. Suponha que $(V,\sigma) \models m = n$, assim existe $k \in Var$ tal que $(V_k,\sigma) \models m = n$, logo $\sigma(m) = \sigma(n)$. Reciprocamente, se $\sigma(m) = \sigma(n)$, temos que $(V_0,\sigma) \models m = n$, logo $(V,\sigma) \models m = n$. O caso $m \in n$ é análogo.

Suponha que $(V,\sigma) \models \neg\phi$, assim existe $k \in Var$ tal que $(V_k,\sigma) \models \neg\phi$, logo não vale $(V_{k-1},\sigma) \models \phi$. Seja $n = Gr(\phi)$. Se existisse, $m \geqslant n$, tal que $(V_m,\sigma) \models \phi$, teríamos que $(V_{k-1},\sigma) \models \phi$, um absurdo. E se existisse $m < n$ tal que $(V_m,\sigma) \models \phi$ teríamos que $Gr(\phi) \leqslant m < n$, um absurdo. Portanto não vale $(V,\sigma) \models \phi$. Reciprocamente, suponha que não valha $(V,\sigma) \models \phi$, assim para todo $k \in Var$, temos que não vale $(V_k,\sigma) \models \phi$, em particular, não vale $(V_n,\sigma) \models \phi$, onde $n = Gr(\phi) - 1$, logo vale $(V_{n+1},\sigma) \models \neg\phi$, portanto vale $(V,\sigma) \models \neg\phi$

Suponha que $(V,\sigma) \models \phi \wedge \psi$, assim existe $k \in Var$ tal que $(V_k,\sigma) \models \phi \wedge \psi$, assim existem $m,n < k$ tais que $(V_m,\sigma) \models \phi$ e $(V_n,\sigma) \models \psi$, assim $(V,\sigma) \models \phi$ e $(V,\sigma) \models \psi$. Reciprocamente, se $(V,\sigma) \models \phi$ e $(V,\sigma) \models \psi$, temos que existem $m,n \in Var$ tais que $(V_m,\sigma) \models \phi$ e $(V_n,\sigma) \models \psi$, assim tomando $k = max(m,n)$, temos que $(V_k,\sigma) \models \phi$ e $(V_k,\sigma) \models \psi$, logo $(V_{k+1},\sigma) \models \phi \wedge \psi$, portanto $(V,\sigma) \models \phi \wedge \psi$.

Suponha que $(V,\sigma) \models \exists n\phi$, assim existe $k \in Var$ tal que $(V_k,\sigma) \models \exists n\phi$. Assim existe $\theta \sim_n \sigma$ tal que $(V_{k-1},\theta) \models \phi$. Logo existe $\theta \sim_n \sigma$ tal que $(V,\theta) \models \phi$. Reciprocamente se existe $\theta \sim_n \sigma$ tal que $(V,\theta) \models \phi$, temos que existem $\theta \sim_n \sigma$ e tais que $(V_k,\theta) \models \phi$, assim $(V_{k+1},\sigma) \models \exists n\phi$, portanto $(V,\sigma) \models \exists n\phi$.

■

Lema 3.2.4. *Se ϕ é um axioma lógico , então, para todo M, $M \models \phi$.*

Demonstração: Segue diretamente do teorema da correção, [dSF17, Teorema 7.9].

■

Metadefinição 3.2.5. *Sejam $\phi \in F$ e σ uma valoração. Dizemos que* $\boldsymbol{V} \models \boldsymbol{\phi}$ *quando para toda σ valoração temos que $(V,\sigma) \models \phi$.*

Metalema 3.2.6. *Se ϕ é um axioma lógico , então temos que $V \models \phi$.*

Não faremos a demonstração desse teorema, porém para demonstrá-lo basta adaptar a demostração da primeira parte do teorema da correção [dSF17, Teorema 7.9], na qual se mostra que os axiomas são verdadeiros em qualquer modelo.

Metadefinição 3.2.7. *Sejam $\phi \in F$ e M um conjunto. Dizemos que ϕ* ***é absoluta para M*** *quando, para toda valoração $\sigma : Var \longrightarrow M$, temos que*

$$(V, \sigma) \models \phi \Leftrightarrow (M, \sigma) \models \phi.$$

Dizemos que ϕ ***é absoluta*** *quando ϕ é absoluta para todo M transitivo.*

Aqui vale a pena levantar uma questão, será que há algum jeito de definir absolutividade em uma só fórmula de primeira ordem, já que parece não ser possível definir $(V, \sigma) \models \phi$?

Definição 3.2.8. *Sejam $\phi \in F$ e M, N conjuntos. Dizemos que ϕ* ***é absoluta para M, N*** *quando, para toda valoração $\sigma : Var \longrightarrow M$, temos que*

$$(N, \sigma) \models \phi \leftrightarrow (M, \sigma) \models \phi.$$

Observe que a definição 3.2.8, pode ser apenas uma definição e não uma metadefinição, pois não usa o $(V, \sigma) \models \phi$.

Definição 3.2.9. *Sejam $\phi, \psi \in F$, dizemos que ϕ e ψ são* ***equivalentes*** *quando $\phi \leftrightarrow \psi$ é um axioma lógico.*

Metalema 3.2.10. *Sejam $\phi, \psi \in F$, tal que ϕ e ψ são equivalentes e M um conjunto. Então ϕ é absoluta para M se, e somente se, ψ é absoluta para M.*

Demonstração: Como ψ e ϕ são equivalentes, temos que $\phi \leftrightarrow \psi$ é um axioma lógico. Pelo lema 3.2.4 e pelo metalema 3.2.6 , temos que $V \models \phi \leftrightarrow \psi$ e $M \models \phi \leftrightarrow \psi$.

Seja $\sigma : Var \longrightarrow M$ uma valoração. Assim $(V, \sigma) \models \phi \leftrightarrow \psi$ e $(M, \sigma) \models \phi \leftrightarrow \psi$, logo:

$$(V, \sigma) \models \psi \Leftrightarrow (V, \sigma) \models \phi$$

e

$$(M, \sigma) \models \psi \Leftrightarrow (M, \sigma) \models \phi.$$

Assim:

$$(V, \sigma) \models \phi \Leftrightarrow (V, \sigma) \models \psi \Leftrightarrow (M, \sigma) \models \psi \Leftrightarrow (M, \sigma) \models \phi$$

Portanto ϕ é absoluta para M se, e somente se, ϕ é absoluta para M. ■

Definição 3.2.11. *Seja $\phi \in F$, então dizemos que ϕ é* $\boldsymbol{\Delta_0}$*, quando satisfaz uma das propriedades abaixo:*

- *ϕ é atômica;*
- *ϕ é da forma $\exists m(m \in n \wedge \psi)$, onde $m, n \in \omega$ e ψ é Δ_0;*
- *ϕ é da forma $\neg\psi$ onde ψ é Δ_0;*
- *ϕ é da forma $\psi \wedge \chi$, onde ψ e χ são Δ_0.*

Metalema 3.2.12. *Toda fórmula Δ_0 é absoluta.*

Demonstração: Seja M um conjunto transitivo. Vamos fazer a prova por indução na complexidade da fórmula.

Os casos em que ϕ é atômica, $\neg\psi$ ou $\psi \wedge \chi$, são imediatos.

Suponha ϕ seja da forma $\exists m(m \in n \wedge \psi)$, onde ψ é Δ_0, ou seja ψ é absoluta, pela hipótse de indução. Seja $\sigma : Var \longrightarrow M$ uma valoração. É fácil ver que

$$(M, \sigma) \models \phi \Rightarrow (V, \sigma) \models \phi.$$

Suponha então que $(V, \sigma) \models \phi$. Assim existe uma valoração θ tal que $\theta \sim_m \sigma$, $(V, \theta) \models \psi$ e $(V, \theta) \models (m \in n)$. Logo $\theta(m) \in \theta(n) = \sigma(n) \in M$, mas como M é transitivo, teomos que $\theta(m) \in M$. Assim $Im(\theta) \subset M$. Dessa forma, pela hipótse de indução, temos que $(M, \theta) \models \psi$. Mas como, $\theta(m) \in \theta(n)$, temos que $(M, \theta) \models (m \in n) \wedge \psi$, logo $(M, \sigma) \models \exists m((m \in n) \wedge \psi)$. ■

Corolário 3.2.13. *Toda fórmula equivalente a uma fórmula Δ_0 é absoluta.*

Demonstração: Segue diretamente dos metalemas 3.2.12 e 3.2.10 ■

Metalema 3.2.14. *Se ϕ é Δ_0, então $\forall m(m \in n \rightarrow \phi)$ é absoluta.*

Demonstração: Vamos mostrar que $\forall m(m \in n \rightarrow \phi)$ é equivalene a uma fórmula Δ_0.

$\forall m(m \in n \wedge \phi)$ é equivalente a $\neg\exists m \neg(m \in n \rightarrow \phi)$ que, por sua vez, é equivalente a $\neg\exists m(m \in n \wedge \neg\phi)$. Observemos que $\neg\exists m(m \in n \wedge \neg\phi)$ é Δ_0. Como ϕ é Δ_0, $\neg\phi$ é Δ_0, logo $\exists m(m \in n \wedge \neg\phi)$ é Δ_0, portanto, $\neg\exists m(m \in n \wedge \neg\phi)$ é Δ_0 ■

A partir de agora, vamos mostrar que uma série de fórmulas são absolutas, usando os metalemas 3.2.10 e 3.2.12 em tandem, simplesmente mostrando que as fórmulas em questão são equivalentes à fórmulas Δ_0. Como iremos mostrar que fórmulas específicas são equivalentes a fórmulas, também específicas, Δ_0 vamos trabalhar em um só nível de linguagem, portanto não usaremos a notação de sublinguagem, e sim as notações usuais.

Lema 3.2.15.
As seguintes fórmulas são equivalentes a fórmulas Δ_0, portanto absolutas:

(a) $x \in y$;

(b) $x = y$;

(c) $x \subset y$;

(d) $z = \{x, y\}$;

(e) $y = \{x\}$;

(f) $z = (x, y)$;

(g) $x = \varnothing$;

(h) $z = x \cup y$;

(i) $z = x \cap y$;

(j) $z = x \backslash y$;

(k) $y = x \cup \{x\}$;

(l) x é transitivo;

(m) $y = \bigcup x$;

(n) $x \neq \varnothing \wedge y = \bigcap x$;

(o) $x = A \times B$;

(p) $x \in \bigcup y$;

(q) $(x, y) \in z$;

(u) z é par ordenado;

(v) R é relação.

Demonstração: (a) e (b) são imediatas. (c) é consequência direta do lema 3.2.14.

(d) signfica $x \in z \wedge y \in z \wedge \forall w \in z(w = x \vee w = y)$ que é equivalente a uma fórmula Δ_0, pois $\forall w \in z(w = x \vee w = y)$ o é.

(e) significa $x \in y \wedge \forall w \in y(w = x)$.

(f) é equivalente a $\exists w \in z(w = \{x\}) \wedge \exists w \in z(w = \{x, y\}) \wedge \forall w \in z(w = \{x, y\} \vee w = \{x\})$ e o fato de ela ser equivalente a uma fórmula Δ_0 segue dos itens (e) e (f).

(g) é equivalente a $\forall y \in x(y \neq y)$.

(h) é equivalente a $\forall w \in z(w \in x \vee w \in y) \wedge x \subset z \wedge y \subset z$.

(i) é equivalente a $\forall w \in x(w \in y \rightarrow w \in z) \wedge z \subset x \wedge z \subset y$.

(j) é equivalente a $\forall w \in x(w \notin y \rightarrow w \in z) \wedge \forall w \in z(w \in x \wedge w \notin y)$.

(k) é equivalente à seguinte fórmula $x \in y \wedge x \subset y \wedge \forall z \in y(z = x \vee z \in x)$.

(l) significa $\forall y \in x(y \subset x)$.

(m) é equivalente a $\forall z \in x(z \subset y) \wedge \forall z \in y(\exists w \in x(z \in w))$.

(n) é equivalente a $[\forall z \in x(y \subset z) \wedge \forall z \in x(\forall w \in z(\forall v \in x(w \in v) \rightarrow w \in y))] \wedge x \neq \varnothing$.

(o) é equivalente a $\forall y \in x\, \exists a \in A\, \exists b \in B(y = (a, b)) \wedge \forall a \in A\, \forall b \in B\, \exists y \in x(y = (a, b))$.

(p) é equivalente a $\exists z \in y\, (x \in z)$.

(q) é equivalente a $\exists w \in z(w = (x, y))$, que é equvialente a uma fórmula Δ_0 pelo item (f).

(u) é equivalente à seguinte fórmula:

$$\exists x \in w(\exists y \in w(w = \bigcup z \wedge z = (x, y))).$$

E $w = \bigcup z$ e $z = (x, y)$ são equivalentes a uma fórmula Δ_0, pelo item (f).

(v) é equivalente à seguinte fórmula: $\forall z \in R(z$ é um par ordenado).

■

Lema 3.2.16. *Se X é um conjunto totalmente ordenado por $\in$ e é transitivo, então X é um ordinal.*

Demonstração: *Para concluir que X é ordinal, basta mostrar que para todo $Y \subset X$ existe $Z \in Y$ tal que $Z = min(Y)$. Suponha que para todo $Z \in Y$ exista $W \in Y$ tal que $W \in Z$, então temos que para todo $Z \in Y$ existe $W \in Y \cap Z$, contrariando o axioma da regularidade.*

■

Lema 3.2.17. *A fórmula (x é um ordinal) é absoluta.*

Demonstração: *Pelo lema anterior x é um ordinal é equivalente à seguinte fórmula: $[\forall y \in x(\forall z \in x(z = y \vee z \in y \vee y \in z))] \wedge (x$ é transitivo $)$, que é equivalente a uma fórmula Δ_0 pelo lema* 3.2.15 *(l)*

■

Lema 3.2.18. *As seguintes fórmulas são absolutas:*

(a) x é um ordinal sucessor;

(b) x é um ordinal limite;

(c) $x \in \omega$;

(d) $x = \omega$.

Demonstração: (a) significa (x é ordinal) $\wedge$ $(\exists y \in x\ (y = x \cup \{x\}))$ e é equivalente a uma fórmula Δ_0 pelo lema 3.2.15 (k).

(b) é consequência direta de (a).

(c) é equivalente a (x é ordinal sucessor) $\wedge$ $(\forall y \in x((y$ é ordinal sucessor$) \vee y = \varnothing))$ e sua absolutividade segue de (a).

(d) é equivalente a (x é ordinal limite) $\wedge$ $(\forall y \in x((y$ é ordinal sucessor$) \vee y = \varnothing))$ e sua absolutividade segue de (a) e de (b). ■

Lema 3.2.19. *As fórmulas $x = 0, x = 1, x = 2, ...$ são absolutas.*

Demonstração: Vamos fazer a prova por indução na complexidade da fórmula. A fórmula $x = 0$ é absoluta pelo lema 3.2.15. Suponha que todas as fórmulas desse tipo com complexidade menor que a complexidade da fórmula $x = n$ sejam absolutas. Assim, a fórmula $y = n - 1$ é absoluta. Mas $x = n$ é equivalente a seguinte fórmula: $\exists y \in x((y = n - 1) \wedge x = y \cup \{y\})$. ■

3.3 V_κ e $H(\kappa)$

O objetivo dessa seção, como já indica o título, será construir os conjuntos V_κ e $H(\kappa)$, que são o mesmos quando κ é fortemente inacessível. Esses conjuntos serão bastante úteis para mostrar os teoremas de reflexão na seção 3.4. Mas além disso, quando κ é fortemente inacessivel $H(\kappa)$ será um modelo para ZFC, não para cada parte finita de ZFC, mas para todo ZFC, explicaremos melhor essa distinção na seção 3.5.

Definição 3.3.1. *Para cada ordinal α, vamos definir recursivamente $\boldsymbol{V_\alpha}$:*

1. *$V_\varnothing = \varnothing$;*
2. *$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$;*

3. $V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$, *se* α *é um ordinal limite.*

Lema 3.3.2. *Para todos* α, β *ordinais temos:*

1. V_α *é transitivo;*
2. *Se* $\beta \leqslant \alpha$, *então* $V_\beta \subset V_\alpha$*;*
3. *Se* $\beta < \alpha$, *então* $V_\beta \in V_\alpha$*;*
4. $\alpha \subset V_\alpha$.

Demonstração: Provemos 1, por indução em α. Suponha que, para todo $\gamma < \alpha$, V_γ seja transitivo. Primeiramente, suponha que α seja sucessor. Tome β tal que $\alpha = \beta + 1$. Sejam x, y tais que $y \in x \in V_\alpha = P(V_\beta)$, assim $x \subset V_\beta$, logo $y \in V_\beta$, mas como V_β é transitivo, temos que $y \subset V_\beta$, logo $y \in P(V_\beta) = V_\alpha$. Suponha, agora, que α seja limite, e sejam $y \in x \in V_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} V_\gamma$. Tome $\gamma < \alpha$ tal que $x \in V_\gamma$, mas como V_γ é transitivo, temos que $y \in V_\gamma \subset V_\alpha$

Provemos, agora, o item 2. Se $\alpha = \beta$ não há nada a fazer. Podemos supor, portanto, que $\beta < \alpha$. Vejamos, primeiramente, o caso em que α é limite. Neste caso $V_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} V_\gamma$. Como $\beta < \alpha$, temos que $V_\beta \subset V_\alpha$. O caso em que α é sucessor, vamos provar por indução em α. Seja γ tal que $\alpha = \gamma + 1$, e suponha que $\beta \leqslant \gamma \to V_\beta \subset V_\gamma$. Como $\beta < \alpha$, temos que $\beta \leqslant \gamma$, logo $V_\beta \subset V_\gamma$. Portanto para concluir basta mostrar que $V_\gamma \subset V_\alpha$. Com efeito, seja $x \in V_\gamma$, temos que $x \in \{x\} \in P(V_\gamma) = V_\alpha$, mas como α é transitivo, temos que $x \in V_\alpha$.

Para mostrar o item 3, basta observar que, se α e β ordinais tais que $\beta < \alpha$, temos que $V_\beta \in V_{\beta+1} \subset V_\alpha$.

Façamos o item 4 por indução em α. Suponha que, para todo $\gamma < \alpha$, tenhamos que $\gamma \subset V_\gamma$. Se α é sucessor, tome β tal que $\alpha = \beta + 1$. Seja $\delta \in \alpha$, assim $\delta \leqslant \beta$, logo $\delta \subset \beta$. Mas, pela hipótese de indução, temos que $\delta \subset \beta \subset V_\beta$, portanto $\delta \in P(V_\beta) = V_\alpha$.

Suponha agora que α seja um ordinal limite. Seja $\gamma \in \alpha$, assim exsite $\beta \in \alpha$ tal que $\gamma \in \beta$, mas como $\beta < \alpha$, temos: $\gamma \in \beta \subset V_\beta \subset V_\alpha$, logo $\alpha \subset V_\alpha$. ∎

Definição 3.3.3. *Seja* x *um conjunto. Dizemos que* x *é* ***bem fundado*** *se existe* α *um ordinal tal que* $x \in V_\alpha$.

Definição 3.3.4. *Seja* x *um conjunto bem fundado. Definimos* $\boldsymbol{rank(x)}$ *por: o menor ordinal* α *tal que* $x \in V_{\alpha+1}$.

Lema 3.3.5. *Seja* α *um ordinal. Então* $x \in V_\alpha$ *se, e somente se,* $rank(x) < \alpha$.

Demonstração: Primeiramente, suponha que $x \in V_\alpha$. Se α for um ordinal sucessor, tome β tal que $\beta+1 = \alpha$. Assim $x \in V_{\beta+1}$, logo $rank(x) \leqslant \beta < \alpha$. Se α é um ordial limite, $x \in V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$. Tome $\beta \in \alpha$ tal que $x \in V_\beta$, assim $x \in V_{\beta+1}$, logo $\beta + 1 < \alpha$, portanto $rank(x) \leqslant \beta < \alpha$. Reciprocamente, suponha que $rank(x) < \alpha$. Assim $x \in V_{rank(x)+1}$ e $rank(x) + 1 \leqslant \alpha$, logo $x \in V_{rank(x)+1} \subset V_\alpha$, pelo lema 3.3.2.2. ∎

Definição 3.3.6. *Seja* A *um conjunto. Para cada* $n \in \omega$, *vamos definir recursivamente* $\bigcup^n A$*:*

1. $\bigcup^0 A = A$*;*
2. $\bigcup^{n+1} A = \bigcup(\bigcup^n A)$.

Definição 3.3.7. *Seja A um conjunto.* $\boldsymbol{FT(A)} = \bigcup\{\bigcup^n A; n \in \omega\}$*. Chamamos $FT(A)$ de* ***fecho transitivo de A****.*

Lema 3.3.8. *Sejam A e B conjuntos. Então:*

1. *$A \subset FT(A)$;*
2. *$FT(A)$ é transitivo;*
3. *Se T é transitivo e $A \subset T$, então $FT(A) \subset T$;*
4. *Se A é transitivo, então $A = FT(A)$;*
5. *se $x \in A$, então $FT(x) \subset FT(A)$;*
6. *$FT(A) = A \cup \bigcup\{FT(x); x \in A\}$.*

Demonstração: 1 é trivial.

Provemos 2. Seja $x \in TF(A)$, tome $n \in \omega$ tal que, $x \in \bigcup^n A$, assim $x \subset \bigcup^{n+1} A \subset FT(A)$.

Vamos provar 3. Seja T transitivo com $A \subset T$ Vejamos, por indução em n, que $\bigcup^n A \subset T$, para todo $n \in \omega$, concluindo. $\bigcup^0 A = A \subset T$, se $\bigcup^n A \subset T$, como T é transitivo, temos que $\bigcup^{n+1} A \subset T$.

4 segue diretamente de 1 e 3.

Verifiquemos 5. Seja $x \in A$, por 1, $x \in FT(A)$, logo, por 2, $x \subset FT(A)$, mas por 3, $FT(x) \subset FT(A)$.

Provemos 5. Seja $T = A \cup \bigcup\{FT(x); x \in A\}$, assim temos que T é transitivo e $A \subset T$, assim, por 3, temos que $FT(A) \subset T$. Por 1, $A \subset FT(A)$ e por 5, temos que $\bigcup\{FT(x); x \in A\} \subset FT(A)$, logo $T \subset FT(A)$.

■

Lema 3.3.9. *Seja x um conjunto. x é bem fundado se, e somente se, todo elemento de x é bem fundado.*

Demonstração: Se x é bem fundado, segue diretamente do lema 3.3.2.1, que todo elemento de x é bem fundado. Reciprocamente, suponha que, para todo $y \in x$, y seja bem fundado. Seja $\alpha = sup\{rank(y) + 1; y \in x\}$. Vamos mostrar que $x \subset V_\alpha$, concluindo o resultado. De fato, seja $y \in x$, assim $(rank(y)+1) \leqslant \alpha$, logo, pelo lema 3.3.2.2, $V_{rank(y)+1} \subset V_\alpha$, mas como $y \in V_{rank(y)+1}$, temos $y \in V_\alpha$. ■

Lema 3.3.10. *Todo conjunto transitivo é bem fundado.*

Demonstração: Seja A um conjunto transitivo. Pelo lema 3.3.9, é suficiente mostrar que todo elemento de A é bem fundado. Suponha que exista um elemento de A que não é bem fundado. Assim, o conjunto $X = \{y \in A; y \text{ não é bem fundado}\} \neq \varnothing$. Portanto, pelo lema 2.1.2, existe $y \in X$, ϵ-minimal. Assim, se $z \in y$, temos que $z \notin X$, mas, como A é transitivo, $z \in A$, logo z é bem fundado, logo todo elemento de y é bem fundado, mas y não o é, contradizendo o lema 3.3.9. ■

Teorema 3.3.11. *Todo conjunto é bem fundado.*

Demonstração: Seja A um conjunto. Pelo lema 3.3.8 itens 1 e 2, temos que $A \subset FT(A)$ e $FT(A)$ é transitivo. Assim, pelo lema 3.3.10, $FT(A)$ é bem fundado, mas, pelo lema 3.3.9, todo elemento de $FT(A)$ é bem fundado, logo todo elemento de A é bem fundado. Portanto, novamente pelo lema 3.3.9, A é bem fundado. ■

Lema 3.3.12. $\forall x \forall y (x \in y \rightarrow rank(x) \in rank(y))$.

Demonstração: Sejam x, y com $x \in y$. Seja $\alpha = rank(y)$, assim $y \in V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$, logo $x \in y \subset V_\alpha$, portanto, pelo lema 3.3.5, temos que $rank(x) < \alpha = rank(y)$. ■

Lema 3.3.13. $\forall y\ (rank(y) = sup\{rank(x) + 1; x \in y\})$.

Demonstração: Sejam y um conjunto. Seja $\alpha = sup\{rank(x)+1; x \in y\}$. Se $x \in y$, pelo lema anterior, temos que $rank(x) < rank(y)$, ou seja, $rank(x) + 1 \leqslant rank(y)$. Assim $\alpha \leqslant rank(y)$. Por outro lado, se $x \in y$, como $rank(x) + 1 \leqslant \alpha$, pelo lema 3.3.2, temos que $x \in V_{rank(x)+1} \subset V_\alpha$, logo $y \subset V_\alpha$. Portanto $y \in V_{\alpha+1}$, assim $rank(y) \leqslant \alpha$. ■

Lema 3.3.14. *Seja κ um cardinal. Assim para todo x, se $|FT(x)| < \kappa$, então $x \in V_\kappa$.*

Demonstração: Seja x um conjunto tal que $|FT(x)| < \kappa$. Seja $t = FT(x)$ e $S = \{rank(y); y \in t\}$. Primeiramente, vamos mostrar que S é um ordinal. Seja α o menor ordinal que não pertence a S. É facil ver que $\alpha \subset S$. Suponha por absurdo que $\alpha \neq S$, assim o conjunto $A = \{\gamma \in S; \gamma \notin \alpha\} \neq \varnothing$, seja $\beta = min(A)$. A tem mínimo, pois é um conjunto de ordinais, de fato, todo elemento de S é um ordinal. Seja $y \in t$ tal que $rank(y) = \beta$. Vamos mostrar que $\forall z \in y\ (rank(z) < \alpha)$. Seja $z \in y$, como t é transitivo, temos que $z \in t$, logo $rank(z) \in S$. Pelo lema 3.3.12, temos que $rank(z) \in rank(y) = \beta$. Como β é o minimo de A temos que $rank(z) \notin A$, mas como $rank(z) \in S$, temos que $rank(z) \in \alpha$. Assim, pelo lema 3.3.13, temos que:

$$\beta = rank(y) = sup\{rank(z) + 1; z \in y\} \leqslant \alpha.$$

Mas como $\beta \notin \alpha$, temos que $\alpha = \beta$, um absurdo, pois $\beta \in S$. Portanto $\alpha = S$. Logo S é um ordinal.

É facil ver que $|S| \leqslant |t|$ (basta considerar a uma função de t em S que leva y em $rank(y)$). Assim temos: $|S| \leqslant |t| < \kappa$. Note que $t \subset V_S$, de fato, se $y \in t$, então $rank(y) \in S$, logo $y \in V_{rank(y)+1} \subset V_S$. Assim temos que $x \subset t \subset V_S$, mas como $S < \kappa$, temos que $x \in V_{S+1} \subset V_\kappa$. ■

Lema 3.3.15. *Sejam κ um cardinal regular, A um conjunto tal que $|A| < \kappa$ e $\forall a \in A\ (|a| < \kappa)$, então, $|\bigcup A| < \kappa$.*

Demonstração: Primeiramente vejamos que $\exists \alpha < \kappa\ \forall a \in A(|a| \leqslant \alpha)$. Suponha que não seja o caso, isto é, $\forall \alpha < \kappa\ \exists a \in A(|a| > \alpha)$. Sejam $\lambda = |A|$ e $g : \lambda \longrightarrow A$ bijeção. Defina $f : \lambda \longrightarrow \kappa$ como $f(\beta) = |g(\beta)|$.

Vejamos que f é cofinal, contradizendo a regularidade de κ. Seja $\alpha < \kappa$. Tome $a \in A$ tal que $|a| > \alpha$. Como g é bijeção, tome $\beta < \lambda$ tal que $g(\beta) = a$. Logo $f(\beta) = |g(\beta)| = |a| > \alpha$, ou seja, f é cofinal. Portanto existe $\alpha < \kappa$ tal que $\forall a \in A(|a| \leqslant \alpha)$.

Sejam $\lambda_1 = |\alpha|$ e $\lambda_2 = max(\lambda, \lambda_1)$. Assim, $\lambda_2 < \kappa$, $\forall a \in A(|a| \leqslant \lambda_2)$ e $|A| \leqslant \lambda_2$. Portanto, pelo lema 2.2.9, temos que $|\bigcup A| \leqslant \lambda_2 < \kappa$.

■

Definição 3.3.16. *Seja κ um cardinal. Definimos* $\boldsymbol{H(\kappa)}$ *por:* $H(\kappa) = \{x \in V_\kappa; |FT(x)| < \kappa\}$.

Definição 3.3.17. *Seja κ um cardinal. κ é* ***fortemente inacessível*** *quando $\omega < \kappa$, κ é regular e $\forall \lambda < \kappa\ (2^\lambda < \kappa)$.*

Lema 3.3.18. *Seja κ um cardinal regular. $H(\kappa) = V_\kappa$ se, e somente se, $\kappa = \omega$ ou κ é fortemente inacessível.*

Demonstração: Seja κ um cardinal tal que, κ é fortemente inacessivel ou $\kappa = \omega$. Vamos mostrar que $\forall \alpha < \kappa\ (|V_\alpha| < \kappa)$. Suponha que este fato seja falso. Assim, o conjunto $A = \{\alpha \in \kappa; \kappa \leqslant |V_\alpha|\} \neq \varnothing$. Seja $\alpha = minA$. Primeiramente suponha que α seja um ordinal sucessor. Tome β tal que $\beta + 1 = \alpha$. Como $\beta < \alpha$ temos que $|V_\beta| < \kappa$. Mas $V_\alpha = P(V_\beta)$, assim $|V_\alpha| = |P(V_\beta)| = 2^{|V_\beta|}$. Mas como $\kappa = \omega$ ou κ é fortemente inacessível, temos que $2^{|V_\beta|} < \kappa$, absurdo. Suponha agora que α seja um ordinal limite. Assim $V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta$, mas pelo lema 3.3.15, $|V_\alpha| < \kappa$, absurdo.

Seja $x \in V_\kappa$ e $\alpha = rank(x)$, pelo lema 3.3.5, temos que $\alpha < k$. Assim, $x \in V_{\alpha+1}$, logo $x \subset \alpha \subset V_\alpha$, mas como V_α é transitivo, pelo lema 3.3.8, $FT(x) \subset V_\alpha$, assim pelo fato que mostramos anteriormente, $|FT(x)| < \kappa$, portanto $x \in H(\kappa)$.

Reciprocamente, seja κ um cardinal regular tal que $\omega < \kappa$ e κ não é fortemente inacessível. Como κ é regular e $\omega < \kappa$, podemos tomar $\lambda < \kappa$ tal que $\kappa \leqslant 2^\lambda$. Assim $\kappa \leqslant |P(\lambda)| \leqslant |FT(P(\lambda))|$, logo $P(\lambda) \notin H(\kappa)$. Vamos mostrar que $P(\lambda) \in V_\kappa$, concluindo o lema. Pelo lema 3.3.2.4, $\lambda \subset V_\lambda$, assim, se $A \subset \lambda$, então $A \subset V_\lambda$, ou seja, se $A \in P(\lambda)$, então $A \in P(V_\lambda) = V_{\lambda+1}$, logo $P(\lambda) \subset V_{\lambda+1}$, portanto $P(\lambda) \in P(V_{\lambda+1})) = V_{\lambda+2} \subset V_\kappa$, pois κ é um ordinal limite. ■

Lema 3.3.19. *Se κ é um cardinal, então:*

1. *$H(\kappa)$ é transitivo;*
2. *$\{\alpha \in H(\kappa); \alpha$ é ordinal$\} = \kappa$;*
3. *Se $x \in \kappa$, então $\bigcup x \in H(\kappa)$;*
4. *Se κ é infinito e $x, y \in H(\kappa)$, então $\{x, y\} \in H(\kappa)$;*
5. *Se $x \in H(\kappa)$ e $y \subset x$, então $y \in H(\kappa)$;*
6. *Se κ é regular então $\forall x\ (x \in H(\kappa) \leftrightarrow x \subset H(\kappa) \wedge |x| < \kappa)$.*

Demonstração: O item 1 segue diretamente do lema 3.3.8.4.

Mostremos o item 2. Seja $A = \{\alpha \in H(\kappa); \alpha$ é ordinal$\}$. Se α é um ordinal, então, como α é transitivo, pelo lema 3.3.8, temos que $\alpha = FT(\alpha)$. Seja $\alpha \in A$, assim $|\alpha| = |FT(\alpha)| < \kappa$, mas como κ é um cardinal, $\alpha < \kappa$. Reciprocamente, se $\alpha \in \kappa$ temos: $|FT(\alpha)| = |\alpha| \leqslant \alpha < \kappa$, logo $\alpha \in A$.

Agora o item 3. Seja $x \in H(\kappa)$, temos que $\bigcup x \subset FT(x)$, logo $|\bigcup x| \leqslant |FT(x)| < \kappa$.

Mostremos, agora, o item 4. Pelo lema 3.3.8.7 temos que $FT(\{x, y\}) = \{x, y\} \cup FT(x) \cup FT(y)$, assim $|FT(\{x, y\})| \leqslant 2 + |FT(x)| + |FT(y)| < \kappa$, pois κ é infinito.

O item 5 segue diretamente da transitividade de $H(\kappa)$.

Mostraremos o item 6. Seja $x \in H(\kappa)$, novamente, pela transitividade de $H(\kappa)$, temos que $x \subset H(\kappa)$, além disso, $|x| \leqslant |FT(x)| < \kappa$. Reciprocamente, seja $x \subset H(\kappa)$ tal que $|x| < \kappa$. Pelo lema 3.3.8.7, temos que $FT(x) = x \cup \bigcup\{FT(y); y \in x\}$, mas como $|x| < \kappa$, e $\forall y \in x\ (|FT(y)| < \kappa)$, pelo lema 3.3.15, $|FT(x)| < \kappa$. ■

3.4 Metateoremas de Reflexão

O objetivo desta seção é encontrar um modelo transitivo e enumerável para cada pedaço finito de ZFC. Expliquemos isso um pouco melhor. Um leitor desavisado poderia pensar que, se temos um modelo para cada pedaço finito de ZFC, então, pelo teorema da compacidade [dSF17, Teorema 7.5], temos um modelo para ZFC todo. E assim mostramos que ZFC prova a própria consistência, portanto é inconsistente, o que evidentemente não ocorre. A chave para compreender isso está no fato de esses resultados serem metateoremas. Ou seja, quando dizemos que para cada pedaço finito de ZFC temos um modelo, é de suma importância observar que esse quantificador "para cada" está na metalinguagem e não na linguagem. Por esse motivo não é possível aplicar o teorema da compacidade.

Vamos formular esse processo de duas maneiras. Primeiramente, vamos fazer os metateoremas lançando mão da sublinguagem. O modelo em questão será nos moldes $M \models \phi$, como já apresentamos antes, e como normalemte é feito nos livros de lógica, em particular em [dSF17]. Porém não abdicaremos de usar a abordagem apresentada em [Kun80] e [Dra74], na qual ao invés do modelo ser da forma $M \models \phi$, onde ϕ é uma fórmula da sublinguagem, será da forma A^M, onde A é uma fórmula da linguagem, e A^M significa apenas restringir os quantificadores da fórmula A ao conjunto M. A metadefinição 3.4.13 precisará melhor essa ideia. A maioria dos detalhes técnicos da prova dos teoremas em si será feita segundo a primeira abordagem. Não é absolutamente necessário fazer as provas desses teoremas dessa forma, mas acreditamos ser mais fácil compreender os detalhes da formalização olhando por esse ângulo, além de manter a coerência com o restante do texto. A partir do metateorema 3.4.12, vamos buscar fazer uma ponte entre as duas abordagens, ponte essa que será importante também nos capítulos e seções seguintes. Então concluiremos os metateoremas da abordagem utilizada em [Kun80] e [Dra74] a partir dos metateoremas que fazem uso da subliguagem, em particular a partir do metacorolário 3.4.10.

O metateorema 3.4.1 foi adaptado do [Dra74]. O restante dos teoremas foi adaptado de [Kun80]. O metateorema 3.4.1 é a parte mais difícil do processo: achar o modelo. Depois o que precisa ser feito é adaptar esse modelo para que ele seja transitivo e enumerável. Com metateorema 3.4.6, que faz o papel do teorema de Löwenheim-Skolem para baixo (que diz que se uma teoria tem modelo, então tem modelo enumerável) conseguimos transformar nosso modelo em um modelo enumerável. E em seguida usamos o metateorema 3.4.9 para tornar nosso modelo enumerável, também transitivo.

Metateorema 3.4.1. *Seja $\phi \in F$. Então para todo ordinal α existe $\beta > \alpha$ tal que para toda $\sigma : Var \longrightarrow V_\beta$ valoração, temos:*

$$(V, \sigma) \models \phi \Leftrightarrow (V_\beta, \sigma) \models \phi.$$

Demonstração: Sejam $n_1, ..., n_k$ as variáveis livres de ϕ. Seja $Q_1 m_1, ..., Q_l m_l\ \psi$ a forma normal prenexa de ϕ, onde $Q_i \in \{\exists, \forall\}$. Para cada $r \in \{1, ..., l\}$ Defina ψ_r por $Q_{r+1} m_{r+1}, ..., Q_l m_l\ \psi$. Vamos provar por indução em r a seguinte afirmação:

Para todo $r \in \{1, ..., l\}$, para toda valoração σ, existe um ordinal γ tal que, para todo $\epsilon \geqslant \gamma$ e para toda valoração $\theta : Var \longrightarrow V_\epsilon$ tal que $\theta(n_1) = \sigma(n_1), ..., \theta(n_k) = \sigma(n_k), \theta(m_1) = \sigma(m_1), ..., \theta(m_{r-1}) = \sigma(m_{r-1})$, temos que

$$(V, \theta) \models Q_r m_r \psi_r \Leftrightarrow (V_\epsilon, \theta) \models Q_r m_r \psi_r.$$

Vamos assumir que a afirmação vale para $r + 1$ e mostrar que vale para r. É fácil ver que isso é equivalente à indução usual. Suponha, portanto, que a afirmação seja válida para $r + 1$.

Primeiramente, vejamos o caso em que Q_r é $\exists$. Seja σ valoração. Suponha que não exista θ^* tal que $\theta^*(n_1) = \sigma(n_1), ..., \theta^*(n_k) = \sigma(n_k), \theta^*(m_1) = \sigma(m_1), ..., \theta^*(m_{r-1}) = \sigma(m_{r-1})$ e $(V, \theta^*) \models \psi_r$. Assim, se θ é tal que $\theta(n_1) = \sigma(n_1), ..., \theta(n_k) = \sigma(n_k), \theta(m_1) = \sigma(m_1), ..., \theta(m_{r-1}) = \sigma(m_{r-1})$, não vale $(V, \theta) \models \exists m_r \psi_r$, pois se valesse, teríamos que existiria θ' tal que $\theta' \sim_{m_r} \theta$ e $(V, \theta') \models \psi_r$, mas isso é uma contradição, pois isso significa que $\theta'(n_1) = \sigma(n_1), ..., \theta'(n_k) = \sigma(n_k), \theta'(m_1) = \sigma(m_1), ..., \theta'(m_{r-1}) = \sigma(m_{r-1})$. Portanto $(\Rightarrow)$ é verdadeiro para qualquer γ, mas como estamos no caso $\exists$, $(\Leftarrow)$ é sempre verdadeira para qualquer γ, portanto $(\Leftrightarrow)$ está provado.

Assim, podemos supor que existe uma valoração θ^* tal que $\theta^*(n_1) = \sigma(n_1), ..., \theta^*(n_k) = \sigma(n_k), \theta^*(m_1) = \sigma(m_1), ..., \theta^*(m_{r-1}) = \sigma(m_{r-1})$ e $(V, \theta^*) \models \psi_r$. Pela hipótese de indução, tome γ_0 tal que para todo $\epsilon \geqslant \gamma_0$ e para toda valoração $\theta : Var \longrightarrow V_\epsilon$ tal que $\theta(n_1) = \theta^*(n_1), ..., \theta(n_k) = \theta^*(n_k), \theta(m_1) = \theta^*(m_1), ..., \theta(m_r) = \theta^*(m_r)$, temos que

$$(V, \theta) \models \psi_r \Leftrightarrow (V_\epsilon, \theta) \models \psi_r.$$

Em particular, temos que

$$(V, \theta^*) \models \psi_r \Leftrightarrow (V_\epsilon, \theta^*) \models \psi_r.$$

Assim temos que $(V_\epsilon, \theta^*) \models \psi_r$.

Tome $\gamma \geqslant \gamma_0$ tal que $\theta^*(n_1), ..., \theta^*(n_k), \theta^*(m_1), ..., \theta^*(m_r) \in V_\gamma$, podemos tomar tal γ pelo teorema 3.3.11 e pelo lema 3.3.2. Seja $\epsilon \geqslant \gamma$, assim $\theta^*(n_1), ..., \theta^*(n_k), \theta^*(m_1), ..., \theta^*(m_r) \in V_\epsilon$, novamente pelo lema 3.3.2. Seja $\theta : Var \longrightarrow V_\epsilon$ tal que $\theta(n_1) = \sigma(n_1), ..., \theta(n_k) = \sigma(n_k), \theta(m_1) = \sigma(m_1), ..., \theta(m_{r-1}) = \sigma(m_{r-1})$. Vamos mostrar que

$$(V, \theta) \models \exists m_r \psi_r \Leftrightarrow (V_\epsilon, \theta) \models \exists m_r \psi_r.$$

A volta é trivial. Façamos a ida. Ou seja, vamos mostrar que $(V_\epsilon, \theta) \models \exists m_r \psi_r$.

Tome $\theta' : Var \longrightarrow V_\epsilon$ da seguinte forma: $\theta'(n_r) = \theta^*(n_r)$ e $\theta'(i) = \theta(i)$, se $i \neq n_r$. Observe que, de fato, temos que $im(\theta') \subset V_\epsilon$, pois $\theta^*(n_r) \in V_\epsilon$. Se $j \in \{1, ..., r-1\}$, temos que $\theta'(m_j) = \theta(m_j) = \sigma(m_j) = \theta^*(m_j)$, se $i \in \{1, ..., k\}$ temos que $\theta'(n_i) = \theta(n_i) = \sigma(n_i) = \theta^*(n_i)$. Assim temos que θ' e θ^* coincidem em todas as variávies livres de ϕ_r, logo $(V_\epsilon, \theta') \models \psi_r$, portanto $(V_\epsilon, \theta) \models \exists m_r \psi_r$. Com isso, concluímos o caso em que Q_r é $\exists$.

Suponha, agora, que Q_r é $\forall$. Observe que a hipótese de indução implica no seguinte fato:

Para toda valoração σ, existe um ordinal γ tal que, para todo $\epsilon \geqslant \gamma$ e para toda valoração $\theta : Var \longrightarrow V_\epsilon$ tal que $\theta(n_1) = \sigma(n_1), ..., \theta(n_k) = \sigma(n_k), \theta(m_1) = \sigma(m_1), ..., \theta(m_r) = \sigma(m_r)$, temos que:

$$\text{não vale } (V, \theta) \models \psi_r \Leftrightarrow \text{não vale } (V_\epsilon, \theta) \models \psi_r,$$

ou seja,

$$(V, \theta) \models \neg\psi_r \Leftrightarrow (V_\epsilon, \theta) \models \neg\psi_r.$$

Portanto, dada σ uma valoração, podemos repetir a prova a cima para $\neg\psi_r$ assim, podemos tomar γ tal que para todo $\epsilon \geqslant \gamma$ e para toda valoração $\theta : Var \longrightarrow V_\epsilon$ tal que $\theta(n_1) = \sigma(n_1), ..., \theta(n_k) = \sigma(n_k), \theta(m_1) = \sigma(m_1), ..., \theta(m_{r-1}) = \sigma(m_{r-1})$, temos que

$$(V,\theta) \models \exists m_r \neg\psi_r \Leftrightarrow (V_\epsilon,\theta) \models \exists m_r \neg\psi_r.$$

logo,

$$(V,\theta) \models \neg\forall m_r \psi_r \Leftrightarrow (V_\epsilon,\theta) \models \neg\forall m_r \psi_r.$$

logo,

$$\text{não vale } (V,\theta) \models \forall m_r \psi_r \Leftrightarrow \text{não vale } (V_\epsilon,\theta) \models \forall m_r \psi_r.$$

logo,

$$(V,\theta) \models \forall m_r \psi_r \Leftrightarrow (V_\epsilon,\theta) \models \forall m_r \psi_r.$$

Concluímos, portanto, a prova da afirmação.

Em particular, tomando $r = 1$ temos que, para toda valoração σ, existe um ordinal γ tal que, para todo $\epsilon \geqslant \gamma$ e para toda valoração $\theta : Var \longrightarrow V_\epsilon$ tal que $\theta(n_1) = \sigma(n_1), ..., \theta(n_k) = \sigma(n_k)$, temos que

$$(V,\theta) \models Q_1 m_1 \psi_1 \Leftrightarrow (V_\epsilon,\theta) \models Q_1 m_1 \psi_1.$$

Assim, para cada valoração σ, defina $g(\sigma)$ por: o primeiro ordinal δ tal que para toda valoração $\theta : Var \longrightarrow V_\delta$ tal que $\theta(n_1) = \sigma(n_1), ..., \theta(n_k) = \sigma(n_k)$, temos que:

$$(V,\theta) \models Q_1 m_1 \psi_1 \Leftrightarrow (V_\delta,\theta) \models Q_1 m_1 \psi_1.$$

Para cada ordinal ξ, defina $Y_\xi = \{g(\sigma); \sigma(n_1), ..., \sigma(n_k) \in V_\xi\}$ e $h(\xi) = Sup(Y_\xi \cup \{\xi\}) + 1$. Agora vamos definir recursivamente $f_n(\xi)$:

- $f_0(\xi) = \xi$;
- $f_1(\xi) = h(\xi)$;
- $f_{n+1}(\xi) = f_1(f_n(\xi))$.

Finalmente, defina $f(\xi) = Sup_{n<\omega} f_n(\xi)$. Com essas definições, vale o seguinte: $f(\xi) > \xi$, pois $\xi < h(\xi) \leqslant f(\xi)$. Além disso, vale que para toda valoração σ tal que $\sigma(n_1), ..., \sigma(n_k) \in V_{f(\xi)}$, temos que $g(\sigma) < f(\xi)$. Vejamos porque vale esse fato. Seja σ valoração tal que $\sigma(n_1), ..., \sigma(n_k) \in V_{f(\xi)}$, tome $p < \omega$ tal que $\sigma(n_1), ..., \sigma(n_k) \in V_{f_p(\xi)}$, assim $g(\sigma) < f_p(\xi) \leqslant f(\xi)$.

Seja α um ordinal, tome $\beta = f(\alpha)$. Assim, para toda valoração $\sigma : Var \longrightarrow V_\beta$ e para toda $\theta : Var \longrightarrow V_\beta$ tal que $\theta(n_1) = \sigma(n_1), ..., \theta(n_k) = \sigma(n_k)$, temos que

$$(V,\theta) \models Q_1 n_1 \psi_1 \Leftrightarrow (V_\beta,\theta) \models Q_r n_1 \psi_1.$$

Em particular, tomando $\theta = \sigma$, temos que, para toda valoração $\sigma : Var \longrightarrow V_\beta$, temos:

$$(V,\sigma) \models Q_1 n_1 \psi_1 \Leftrightarrow (V_\beta,\sigma) \models Q_r n_1 \psi_1.$$

Como $Q_r n_1 \psi_1$ é a forma normal prenexa de ϕ, temos que $\phi \leftrightarrow (Q_r n_1 \psi_1)$ é um axioma lógico. Pelo lema 3.2.6, temos que $V \models \phi \leftrightarrow (Q_r n_1 \psi_1)$ e $V_\beta \models \phi \leftrightarrow (Q_r n_1 \psi_1)$.

Seja $\sigma : Var \longrightarrow V_\beta$ uma valoração. Assim $(V, \sigma) \models \phi \leftrightarrow (Q_r n_1 \psi_1)$ e $(V_\beta, \sigma) \models \phi \leftrightarrow (Q_r n_1 \psi_1)$, logo:

$$(V, \sigma) \models Q_1 n_1 \psi_1 \Leftrightarrow (V, \sigma) \models \phi.$$

e

$$(V_\beta, \sigma) \models Q_1 n_1 \psi_1 \Leftrightarrow (V_\beta, \sigma) \models \phi.$$

Assim:

$$(V, \sigma) \models \phi \Leftrightarrow (V, \sigma) \models Q_1 n_1 \psi_1 \Leftrightarrow (V_\beta, \sigma) \models Q_r n_1 \psi_1 \Leftrightarrow (V_\beta, \sigma) \models \phi.$$

■

Metateorema 3.4.2. *Sejam $\phi_0, ..., \phi_m \in F$. Então para todo ordinal α existe $\beta > \alpha$ tal que para toda $\sigma : Var \longrightarrow V_\beta$ valoração e para todo $i \in \{1, , , m\}$, temos:*

$$(V, \sigma) \models \phi_i \Leftrightarrow (V_\beta, \sigma) \models \phi_i.$$

Demonstração: Sejam $n_1, ..., n_k$ tais que todas as variáveis livres de $\phi_1, ..., \phi_m$ estão entre $n_1, ..., n_k$. Seja $\phi = (\phi_1 \wedge n_t = 0) \vee ... \vee (\phi_1 \wedge n_t = m)$, onde $n_t \notin \{n_1, ..., n_k\}$. Observe que as subfórmulas $n_t = 0$,..., $n_t = m$ são abreviações, por exemplo, $n_t = 0$ significa $\forall n_s \neg(n_s \in n_t)$, onde $n_s \notin \{n_1, ..., n_k, n_t\}$.

Pelo teorema anterior, podemos tomar $\beta > \omega$ tal que para toda $\sigma : Var \longrightarrow V_\beta$ valoração, temos:

$$(V, \sigma) \models \phi \Leftrightarrow (V_\beta, \sigma) \models \phi.$$

Seja $i \in \{1, ..., m\}$ e $\sigma_i : Var \longrightarrow V_\beta$ uma valoração tal que $\sigma_i(n_t) = i$. Assim, temos que vale $(V, \sigma_i) \models (n_t = i)$ e não vale $(V, \sigma_i) \models (n_t = j)$, se $j \neq i$. Mas como as fórmulas $(n_t = j)$ são absolutas e $\{1, ..., m\} \subset V_\beta$, temos que vale $(V_\beta, \sigma_i) \models (n_t = i)$ e não vale $(V_\beta, \sigma_i) \models (n_t = j)$, se $j \neq i$.

Temos que

$$(V, \sigma_i) \models \phi \Leftrightarrow (V_\beta, \sigma_i) \models \phi.$$

Substituindo ϕ por $(\phi_1 \wedge n_t = 0) \vee ... \vee (\phi_1 \wedge n_t = m)$ e abrindo um pouco as contas temos:

$[((V, \sigma_i) \models \phi_0$ e $(V, \sigma_i) \models (n_t = 0))$ ou ... ou $((V, \sigma_i) \models \phi_i$ e $(V, \sigma_i) \models (n_t = i))$ ou ... ou $((V, \sigma_i) \models \phi_m$ e $(V, \sigma_i) \models (n_t = m))]$ sse $[((V_\beta, \sigma_i) \models \phi_0$ e $(V_\beta, \sigma_i) \models (n_t = 0))$ ou ... ou $((V_\beta, \sigma_i) \models \phi_i$ e $(V_\beta, \sigma_i) \models (n_t = i))$ ou ... ou $((V_\beta, \sigma_i) \models \phi_m$ e $(V_\beta, \sigma_i) \models (n_t = m))]$.

Portanto:

$$(V, \sigma_i) \models \phi_i \Leftrightarrow (V_\beta, \sigma_i) \models \phi_i.$$

Seja agora $\sigma : Var \longrightarrow V_\beta$ uma valoração qualquer. Tome σ_i tal que $\sigma_i(n_t) = i$ e $\sigma_i(l) = \sigma(l)$, se $l \neq n_t$. Como n_t não ocorre livre em ϕ_i temos que σ e σ_i coincidem em todas as variáveis livres de ϕ_i assim:

$$(V, \sigma) \models \phi_i \Leftrightarrow (V_\beta, \sigma) \models \phi_i.$$

■

Definição 3.4.3. *Sejam $n \in \omega$, A, B com $B \subset B$ conjuntos e $f : A^n \longrightarrow A$. Dizemos que B é* ***fechado para f*** *quando $Im(B^n) \subset B$.*

Lema 3.4.4. *Sejam A conjunto e para cada $i \in \{1, ..., k\}$ $f_i : A^n \longrightarrow A$ uma função. Então existe $C \subset A$ fechado para toda f_i, tal que $|C| \leqslant \omega$ e $C \neq \varnothing$.*

Demonstração: Para cada $m \in \omega$ vamos definir recursivamente C_m. Tome $C_0 = \{a\}$, onde a é um elemento qualquer de A e $C_{m+1} = C_m \cup \bigcup\{f_i(C_m^n) : 1 \leqslant i \leqslant k\}$. É fácil ver que cada C_m é enumerável e não vazio, assim $C = \bigcup_{m \in \omega} C_m$ também é enumerável e não vazio. Vamos mostrar que C é fechado para cada f_i. Para tal, tome $i \in \{1, ..., k\}$ e $x \in f_i(C^n)$, assim existe $(y_1, ..., y_n) \in C^n$ tal que $f_i(y_1, ..., y_n) = x$, logo, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, temos que $y_j \in C$, portanto para cada $j \in \{1, ..., n\}$ existe $m_j \in \omega$ tal que $y_i \in C_{m_i}$. Seja $m = max\{m_j; j \in \{1, ..., n\}\}$, assim $\{y_1, ..., y_n\} \subset C_m$, logo $(y_1, ..., y_n) \in (C_m)^n$, portanto $x \in C_{m+1} \subset C$.

■

Definição 3.4.5. *Seja $\Gamma \subset F$. Dizemos que Γ é* ***fechada para subfórmulas*** *quando para toda $\phi \in \Gamma$ e para toda ψ subfórmula de ϕ, temos que $\psi \in \Gamma$.*

Metateorema 3.4.6. *Sejam $\phi_1, ..., \phi_n \in F$. Então, existe A, um conjunto enumerável, tal que tal que para toda $\sigma : Var \longrightarrow A$ valoração e para todo $i \in \{1, , , n\}$, temos:*

$$(V, \sigma) \models \phi_i \Leftrightarrow (A, \sigma) \models \phi_i$$

Demonstração: Pelo teorema 3.4.2, tome $\beta > \omega$ tal que para toda $\sigma : Var \longrightarrow V_\beta$ valoração e para todo $i \in \{1, , , n\}$, temos:

$$(V, \sigma) \models \phi_i \Leftrightarrow (V_\beta, \sigma) \models \phi_i.$$

Podemos supor que $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ seja fechado por subfórmulas (se não for, basta acrescentar fórmulas para que isso aconteça). Seja $\leqslant$ uma boa ordem para V_β. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, sejam $i_1, ..., i_{m_i}$ as variáveis livres de ϕ_i. Para cada i, vamos definir uma função $H_i : V_\beta^{m_i} \longrightarrow V_\beta$. Seja $i \in \{1, ..., n\}$. Para cada $(a_1, ..., a_{m_i}) \in V_\beta^{m_i}$, tome $\sigma : Var \longrightarrow V_\beta$ uma valoração tal que $\sigma(i_1) = a_1, ..., \sigma(i_{m_i}) = a_{m_i}$. Vamos definir H_i da seguinte forma: se existe $l \in \omega$ e $j \in \{1, ..., n\}$ tal que ϕ_i é $\exists l \phi_j$ e $(V_\beta, \sigma) \models \phi_i$, tome $H_i(a_1, ..., a_{m_i})$ como sendo o primeiro elemento b, na ordem $\leqslant$, tal que existe $\theta : Var \longrightarrow V_\beta$ tal que $\theta \sim_l \sigma$, $\theta(l) = b$ e $(V_\beta, \theta) \models \phi_j$. E se não vale $(V_\beta, \sigma) \models \phi_i$, ou ϕ não um começa com um quantificador existencial, tome $H_i(a_1, ..., a_{m_i})$, como sendo o primeiro elemento de V_β na ordem $\leqslant$. Observe que H_i está bem definido, pois a afirmação $V_\beta, \theta) \models \phi_i)$, só depende do valor de σ nas variáveis livres de ϕ_i.

Pelo lema 3.4.4 tome A tal que $|A| \leqslant \omega$, tal que A é fechado para cada H_i. Vamos mostrar que para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e para toda valoração $\sigma : Var \longrightarrow A$, temos que:

$$(V, \sigma) \models \phi_i \Leftrightarrow (A, \sigma) \models \phi_i.$$

Vamos fazer a prova por indução em i. Sem perda de generalidade podemos supor que $\phi_1, ..., \phi_n$ está ordenado por ordem de complexidade. Seja $i \in \{1, ..., n\}$. Suponha que o resultado seja verdadeiro para todo $j < i$. Vejamos o caso em que ϕ_i é $\exists l \phi_j$, onde $l \in \omega$ e $j < i$. Seja $\sigma : Var \longrightarrow A$. Já temos que:

$$(V, \sigma) \models \phi_i \Leftrightarrow (V_\beta, \sigma) \models \phi_i.$$

E é fácil ver que:

$$(A, \sigma) \models \phi_i \Rightarrow (V_\beta, \sigma) \models \phi_i.$$

Portanto basta mostrar que:

$$(V_\beta, \sigma) \models \phi_i \Rightarrow (A, \sigma) \models \phi_i.$$

Suponha que $(V_\beta, \sigma) \models \phi_i$. Assim, existe $\theta : Var \longrightarrow V_\beta$ tal que $\theta \sim_l \sigma$ $H(\sigma(i_1), ..., \sigma(i_{m_i})) = \theta(l)$. Como A é fechado para cada H_i, temos que $\theta(l) \in A$, logo $im(\theta) \subset A$. Portanto, pela hipótese de indução, temos que:

$$(V, \theta) \models \phi_j \Leftrightarrow (A, \theta) \models \phi_j,$$

logo

$$(V_\beta, \theta) \models \phi_j \Leftrightarrow (A, \theta) \models \phi_j,$$

portanto, temos $(A, \theta) \models \phi_j$, assim $(A, \sigma) \models \phi_i$

Os caso em que ϕ_i é $\phi_j \wedge \phi_k$ ou $\neg\phi_j$ ou ϕ_i é atômica são imediatos.

■

Lema 3.4.7. *Sejam $\phi \in F$, A e M conjuntos e $f : A \longrightarrow M$ um ϵ-isomorfismo. Então para toda valoração $\sigma : Var \longrightarrow A$ temos que:*

$$(A, \sigma) \models \phi \Leftrightarrow (M, f \circ \sigma) \models \phi.$$

Demonstração: Vamos fazer a prova por indução na complexidade de ϕ. Suponha que ϕ seja atômica. Seja $\sigma : Var \longrightarrow A$. Assim, se ϕ é $m \in n$, temos que

$$(A, \sigma) \models m \in n \Leftrightarrow \sigma(m) \in \sigma(n) \Leftrightarrow f \circ \sigma(m) \in f \circ \sigma(n) \Leftrightarrow (M, f \circ \sigma) \models m \in n.$$

Observe que o fato de f ser um $\in$-isomorfismo foi usado na segunda biimplicacão.
O caso em que ϕ é $m = n$ é idêntico ao anterior.

Suponha agora que o resulado valha para todas as fórmulas ψ com complexidade menor que ϕ. Vejamos o caso em que ϕ é $\exists l\psi$.

Seja $\sigma : Var \longrightarrow A$. Suponha que $(A, \sigma) \models \phi$. Assim existe $\theta : Var \longrightarrow A$ tal que $\theta \sim_l \sigma$ e $(A, \theta) \models \psi$. Dessa forma, pela hipótese de indução, temos que $(M, f \circ \theta) \models \psi$, mas como $f \circ \theta \sim_l f \circ \sigma$, temos que $(M, f \circ \sigma) \models \phi$.

Reciprocamente, suponha que $(M, f \circ \sigma) \models \phi$. Assim existe $\theta' : Var \longrightarrow M$ tal que $\theta' \sim_l f \circ \sigma$ e $(M, \theta') \models \psi$. Seja $\theta = f^{-1} \circ \theta'$, logo $f \circ \theta \sim_l f \circ \sigma$ e $(M, f \circ \theta) \models \psi$, portanto, pela hipótse de indução, $(A, \theta) \models \psi$. Mas como $\theta \sim_l \sigma$, temos que $(A, \sigma) \models \phi$.

Os casos em que ϕ é $\psi \wedge \chi$ ou $\neg\psi$ são imediatos.

■

Metalema 3.4.8. *Sejam $\phi \in F$, A, M conjuntos e $f : A \longrightarrow M$ um ϵ-isomorfismo. Então para toda valoração $\sigma : Var \longrightarrow A$ temos que:*

$$(V, \sigma) \models \phi \Leftrightarrow (V, f \circ \sigma) \models \phi.$$

Demonstração: A prova é idêntica à do lema anterior. A única diferença é que não estabelecemos contradomínio para θ e θ'.

■

Metateorema 3.4.9. *Sejam $\phi_1, ..., \phi_n \in F$. Então existe M, um conjunto transitivo e enumerável, tal que para toda $\sigma : Var \longrightarrow M$ valoração e para todo $i \in \{1, , , n\}$, temos:*

$$(V, \sigma) \models \phi_i \Leftrightarrow (M, \sigma) \models \phi_i.$$

Demonstração: Pelo teorema 3.4.6, tome A enumerável tal que, para toda $\sigma' : Var \longrightarrow A$ valoração e para todo $i \in \{1, , , n\}$, temos:

$$(V, \sigma') \models \phi_i \Leftrightarrow (A, \sigma') \models \phi_i.$$

Seja $(M, \in)$ o colapso de Mostovski de $(A, \in)$, e G a função de colapso de Mostovski de (A, ϵ), pelo teorema 3.1.5, temos que G é um ϵ-isomorfismo. Portanto, pelo lema 3.4.7, temos que para toda $\sigma' : Var \longrightarrow A$ valoração e para todo $i \in \{1, , , n\}$, temos:

$$(A, \sigma') \models \phi_i \Leftrightarrow (M, G \circ \sigma') \models \phi_i.$$

E pelo lema 3.4.8, temos que para toda $\sigma' : Var \longrightarrow A$ valoração e para todo $i \in \{1, , , n\}$, temos:

$$(V, \sigma') \models \phi_i \Leftrightarrow (V, G \circ \sigma') \models \phi_i.$$

Seja $i \in \{1, , , n\}$, $\sigma : Var \longrightarrow M$ e $\sigma' = G^{-1} \circ \sigma$. Assim, temos:

$(M, \sigma) \models \phi_i \Leftrightarrow (M, G \circ \sigma') \models \phi_i \Leftrightarrow (A, \sigma') \models \phi_i \Leftrightarrow (V, \sigma') \models \phi_i \Leftrightarrow (V, G \circ \sigma') \models \phi_i \Leftrightarrow (V, \sigma) \models \phi_i$.

■

Metacorolário 3.4.10. *Seja $\phi \in F$ uma sentença. Então, existe M, um conjunto transitivo e enumerável, tal que tal que:*

$$V \models \phi \Leftrightarrow M \models \phi.$$

Demonstração: Segue diretamente do teorema 3.4.9. ■

Metadefinição 3.4.11. *Seja A uma fórmula, vamos denotar por $[\boldsymbol{A}]_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{y}}$ a fórmula A substituindo todas as ocorrências livres de x por y.*

Metateorema 3.4.12. *Sejam A uma fórmula e σ uma valoração tal que $\sigma(g(v)) = v$ para toda v variável livre de A. Então temos:*

$$A \Leftrightarrow ((V, \sigma) \models g(A)).$$

Demonstração: Vamos fazer a prova por indução no grau de complexidade da fórmula.

Vejamos o caso $x = y$. Assim, suponha $x = y$, logo $\sigma(g(x)) = \sigma(g(y))$, logo $(V, \sigma) \models (g(x) = g(y))$, ou seja $(V, \sigma) \models g(x = y)$. Reciprocamente, suponha que $(V, \sigma) \models (g(x) = g(y))$, assim $\sigma(g(x)) = \sigma(g(y))$, logo $x = y$.

A demonstração do caso $x \in y$ é idêntica à anterior, basta substituir $=$ por $\in$.

Vejamos o caso em que A é $\forall xB$. Suponha agora que o teorema valha para B. Seja σ uma valoração tal que $\sigma(g(v)) = v$ para toda v variável livre de $\forall xB$. Suponha que valha $\forall xB$. Seja θ uma valoração tal que $\theta \sim_n \sigma$, onde $n = g(x)$. Seja $y = \theta(n)$, onde y não ocorre livre em B. Como Vale $\forall xB$, temos que vale $[B]^y_x$, assim pela hipótese de inducão, temos que $(V, \sigma) \models g([B]^y_x)$. Mas como n não ocorre livre em $g([B]^y_x)$, temos que σ e θ coincidem em todas as variáveis livres de $g([B]^y_x)$, logo $(V, \theta) \models g([B]^y_x)$, portanto $(V, \sigma) \models g(\forall xB)$.

Reciprocamente, suponha que $(V, \sigma) \models g(\forall xB)$. Seja x um conjunto. Defina θ a seguinte valoração: $\theta(m) = \sigma(m)$, se $m \neq n$ e $\theta(n) = x$, onde $n = g(x)$. Assim $(V, \theta) \models g(B)$, além disso temos que $\theta(g(v)) = v$ para toda v variável livre de B, pois $\theta \sim_{g(x)} \sigma$ e $\theta(g(x)) = x$. Assim, pela hipótese de indução, temos que vale B, como x é arbitrário, vale $\forall xB$.

Vejamos, agora, o caso em que A é $B \wedge C$. Suponha que o teorema valha para B e C. Assim, vale $B \wedge C$ se, e somente se, vale B e C, o que vale se, e somente se, (pela hipótese de indução) $(V, \sigma) \models g(B)$ e $(V, \sigma) \models g(C)$, o que vale se, e somente se, $(V, \sigma) \models g(B \wedge C)$.

Vejamos, agora, o caso em que A é $\neg B$. Suponha que o teorema valha para $\neg B$. Assim, vale $\neg B$ se, e somente se, não vale B, o que ocorre se, e somente se, (pela hipótese de indução) não vale $(V, \sigma) \models g(B)$, o que ocorre se, e somente se, $(V, \sigma) \models g(\neg B)$.

■

Metadefinição 3.4.13. *Sejam A uma fórmula e M um conjunto. Vamos definir* $\boldsymbol{A^M}$ *da seguinte forma:*

- $(x = y)^M$ *é* $x = y$;
- $(x \in y)^M$ *é* $x \in y$;
- $(B \wedge C)^M$ *é* $(B^M \wedge C^M)$;
- $(\neg B)^M$ *é* $(\neg B)$;
- $(\exists xA)^M$ *é* $\exists x \in M\ A$.

Chamaremos A^M *de* ***A relativizado a M****.*

Metacorolário 3.4.14. *Seja A uma sentença. Então temos:*

$$A \Leftrightarrow V \models g(A).$$

Demonstração: Segue imediatamente do metateorema 3.4.12. ■

Metateorema 3.4.15. *Sejam M um conjunto, A uma fórmula e $\sigma : Var \longrightarrow M$ uma valoração tal que $\sigma(g(v)) = v$ para toda v variável livre de A. Então temos:*

$$A^M \Leftrightarrow ((M, \sigma) \models g(A)).$$

Demonstração: Vamos fazer a prova por indução no grau de complexidade da fórmula.

Nos casos em que A é $B \wedge C$, $\neg B$, $x = y$ e $x \in y$ a demonstração é exatamente a mesma do metateorema 3.4.12. Vejamos o caso em que A é $\forall xB$. Suponha que o teorema valha para B. Seja $\sigma : Var \longrightarrow M$ uma valoração tal que $\sigma(g(v)) = v$ para toda v variável livre de $\forall xB$. Suponha que vale $\forall x \in M\ B$. Seja $\theta : Var \longrightarrow M$ uma valoração tal que $\theta \sim_n \sigma$, onde $n = g(x)$.

Seja $y = \theta(n)$, onde y não ocorre livre em B. Como Vale $\forall x \in MB$, temos que vale $[B]_x^y$, uma vez que $\theta(n) = y \in M$, assim pela hipótese de indição, temos que $(M, \sigma) \models g([B]_x^y)$. Mas como n não ocorre livre em $g([B]_x^y)$, temos que σ e θ coincidem em todas as variáveis livres de $g([B_x^y)$, logo $(V, \theta) \models g([B]_x^y)$, portanto $(M, \sigma) \models g(\forall x B)$.

Reciprocamente, suponha que $(M, \sigma) \models g(\forall x B)$. Seja $x \in M$. Defina θ a seguinte valoração: $\theta(m) = \sigma(m)$, se $m \neq n$ e $\theta(n) = x$, onde $n = g(x)$. Como $x \in M$, θ, de fato, é uma valoração em M. Assim $(M, \theta) \models g(B)$, além disso temos que $\theta(g(v)) = v$ para toda v variável livre de B, pois $\theta \sim_{g(x)} \sigma$ e $\theta(g(x)) = x$. Assim, pela hipótese de indução, temos que vale B, como x é arbitrário, vale $\forall x \in M\ B$.

■

Metacorolário 3.4.16. *Sejam A uma sentença e M um conjunto. Então temos:*

$$A^M \Leftrightarrow M \models g(A).$$

Demonstração: Segue imediatamente do metateorema 3.4.15. ■

Metateorema 3.4.17. *Seja A um teorema. Então existe M um conjunto transitivo e enumerável tal que A^M é um teorema.*

Demonstração: Pelo metacorolário 3.4.10, tome M um conjunto transitivo e enumerável tal que

$$V \models g(A) \Leftrightarrow M \models g(A).$$

Como A é um teorema, temos que vale A. Assim, pelo metacorolário 3.4.14, temos que $V \models g(A)$, logo $M \models g(A)$. Portanto, pelo metacorolário 3.4.16, temos que vale A^M. ■

Metacorolário 3.4.18. *Sejam $A_1, ..., A_n$ teoremas. Então existe M um conjunto transitivo e enumerável tal que $A_1^M, ..., A_n^M$ são teoremas.*

Demonstração: Como $A_1, ..., A_n$ são teoremas, temos que $A_1 \wedge ... \wedge A_n$ é um teorema. Assim, pelo metateorema 3.4.17, vale $(A_1 \wedge ... \wedge A_n)^M$, logo $A_1^M \wedge ... \wedge A_n^M$. ■

3.5 Universos de Grothendieck

Universos de Grothendieck são comumente usados para formalizar teoria de categorias, porém falar deles aqui não é completamente uma digressão do tema principal, apesar de não os usarmos para a construção do *forcing* em si. É verdade que poderíamos fazer na seção 3.3 a reflexão que faremos aqui. No entanto os Universos de Grothendieck explicitam melhor a ideia de modelos para ZFC, apesar de todo Universo de Grothendieck ser um $H(\kappa)$, com κ fortemente inacessível, e todo $H(\kappa)$, com κ fortemente inacessível, ser um Universo de Grothendieck, como mostram os teoremas 3.5.6 e 3.5.2 respectivamente. Portanto estamos falando essencialmente da mesma coisa.

Definição 3.5.1. *Dizemos que $\mathfrak{U}$ é um **Universo de Grothendieck** quando:*

1. *$\mathfrak{U}$ é transitivo;*
2. *$\omega \in \mathfrak{U}$;*

3. *se* $x, y \in \mathfrak{U}$, *então* $\{x, y\} \in \mathfrak{U}$;

4. *se* $x \in \mathfrak{U}$, *então* $\bigcup x \in \mathfrak{U}$;

5. *se* $x \in \mathfrak{U}$, *então* $P(x) \in \mathfrak{U}$;

6. *se* $x \in \mathfrak{U}$, $y \subset \mathfrak{U}$ *e* $f : x \longrightarrow y$ *é uma função, então* $Im(f) \in \mathfrak{U}$.

Teorema 3.5.2. *Seja* κ *um cardinal fortemente inacessível. Então* $H(\kappa)$ *é um Universo de Grothendieck.*

Demonstração: Os axiomas 1,3 e 4 seguem direto do lema 3.3.19. 2 segue pois $\omega \in \kappa \subset H(\kappa)$.

Mostremos que vale o axioma 5. Seja $x \in H(\kappa)$, assim $|FT(x)| < \kappa$. Pelo lema 3.3.8, temos que $FT(P(x)) = P(x) \cup \bigcup\{FT(y); y \subset x\}$. Como κ é fortemente inacessível, temos que $|P(x)| < \kappa$ e se $y \subset x$, $|TF(y)| \leqslant |FT(x)| < \kappa$. Assim, pelo lema 3.3.15, temos que $|FT(P(x))| < \kappa$.

Vejamos, agora, que vale o axioma 6. Sejam $x \in H(\kappa)$, $y \subset H(\kappa)$ e $f : x \longrightarrow y$ uma função. Assim $Im(f) \subset y \subset H(\kappa)$ e $|Im(f)| \leqslant |x| < \kappa$, logo, pelo lema 3.3.19.6, temos que $Im(f) \in H(\kappa)$. ■

Lema 3.5.3. *Sejam* $\mathfrak{U}$ *um Universo de Grothendieck,* $X \in \mathfrak{U}$ *e* $Y \subset X$*, então* $Y \in \mathfrak{U}$.

Demonstração: Se $Y = \varnothing$, $Y \in \omega \in \mathfrak{U}$, logo, pela transitividade $Y \in \mathfrak{U}$. Suponha, então que $Y \neq \varnothing$. Tome $y_0 \in Y$ e defina $f : X \longrightarrow X$, da seguinte forma:

- $f(x) = x$, se $x \in Y$;
- $f(x) = y_0$, caso contrário.

Assim, $Im(f) = Y$, logo $Y \in \mathfrak{U}$. ■

Lema 3.5.4. *Sejam* X, Y *conjuntos transitivos com* $Y \subset X$*. Assim temos que: se* $\forall x \in X$ $(\forall y \in x\ (y \in Y) \rightarrow x \in Y)$*, então* $Y = X$.

Demonstração: Suponha que o resultado seja falso. Assim $Z = X \backslash Y \neq \varnothing$. Seja x ϵ-minimal em Z, se $y \in x$, então $y \notin Z$, mas como X é transitivo, $y \in X$, logo $y \in Y$. Portanto, por hipótese, como todo elemento de x pertence a Y, temos que $x \in Y$, um absurdo. ■

Lema 3.5.5. *Sejam* $\mathfrak{U}$ *um universo de Grothendieck,* $\kappa = sup\{|x|; x \in \mathfrak{U}\}$ *e* $y \subset \mathfrak{U}$ *tal que* $|y| < \kappa$*. Então* $y \in \mathfrak{U}$.

Demonstração: Seja $\lambda = |y|$, como κ é o supremo do conjunto, existe $x \in \mathfrak{U}$ tal que $|x| = \lambda'$ e $\lambda < \lambda' \leqslant \kappa$. Podemos tomar, portanto, uma função $f : x \longrightarrow y$ sobrejetora. Assim $y = Im(f) \in \mathfrak{U}$. ■

Teorema 3.5.6. *Seja* $\mathfrak{U}$ *um Universo de Grothendieck. Então* $\kappa = sup\{|x|; x \in \mathfrak{U}\}$ *é um cardinal fortemente inacessível e* $\mathfrak{U} = H(\kappa)$.

Demonstração: Seja $\lambda < \kappa$, como κ é o supremo do conjunto, existe $x \in \mathfrak{U}$ tal que $|x| = \lambda'$ e $\lambda < \lambda' \leqslant \kappa$. É fácil ver que podemos tomar $y \subset x$ com $|y| = \lambda$. Pelo, lema 3.5.3, temos que $y \in \mathfrak{U}$. Assim $P(y) \in \mathfrak{U}$ e $P(P(y)) \in \mathfrak{U}$. Assim temos $2^\lambda = |P(y)| < |P(P(y))| \leqslant \kappa$. Como $\omega \in \mathfrak{U}$, temos que $P(\omega) \in \mathfrak{U}$, logo $\omega < |P(\omega)| \leqslant \kappa$.

Resta provar que κ é regular. Mas antes vamos mostrar que todo ordinal menor que κ é um elemento do $\mathfrak{U}$, ou seja:

$$\forall \alpha < \kappa \, (\alpha \in \mathfrak{U}).$$

Façamos a prova por indução. $\varnothing \in \omega \in \mathfrak{U}$, logo $\varnothing \in \mathfrak{U}$. Seja $\alpha < \kappa$ e suponha que $\forall \beta(\beta < \alpha \to \beta \in \mathfrak{U})$. Assim temos que $\alpha \subset \mathfrak{U}$. Mas, como $|\alpha| < \kappa$, pelo lema 3.5.5, temos que $\alpha \in \mathfrak{U}$. Estamos preparados para mostrar a regularidade. Seja $\gamma \leqslant \kappa$ e $f : \gamma \longrightarrow \kappa$ uma função cofinal. Suponha por absurdo que $\gamma < \kappa$, assim $\gamma \in \mathfrak{U}$. Como $\kappa \subset \mathfrak{U}$, temos que $Im(f) \in \mathfrak{U}$, logo $\bigcup Im(f) \in \mathfrak{U}$. Vejamos que $Im(f) = \kappa$. Seja $\alpha \in \kappa$, como f é cofinal, existe $\beta \in \gamma$ tal que $\alpha \in f(\beta) \in Im(f)$, logo $\alpha \in \bigcup Im(f)$. Reciprocamente, se $\alpha \in \bigcup Im(f)$, então existe $\beta \in \gamma$ tal que $\alpha \in f(\beta) \in Im(f) \subset \kappa$, logo $\alpha \in \kappa$. Portanto $P(\kappa) \in \mathfrak{U}$, logo $|P(\kappa)| \leqslant \kappa$, absurdo.

Mostraremos agora que $\mathfrak{U} = H(\kappa)$. Seja $x \in \mathfrak{U}$. Vamos mostrar que $FT(x) \in \mathfrak{U}$. Vejamos que $\forall n \in \omega(\bigcup^n x \in \mathfrak{U})$. $\bigcup^0 x = x \in \mathfrak{U}$ e se $\bigcup^n x \in \mathfrak{U}$, pelo axioma 4 de Universo de Grothendieck, $\bigcup^{n+1} x \in \mathfrak{U}$, logo $\forall n \in \omega(\bigcup^n x \in \mathfrak{U})$. Assim $A = \{\bigcup^n x; n \in \omega\} \subset \mathfrak{U}$, mas tomando uma função de ω em A que leva n em $\bigcup^n x$, temos A será a imagem desta função, logo $A \in \mathfrak{U}$, assim $FT(x) = \bigcup A \in \mathfrak{U}$. Portanto $P(FT(x)) \in \mathfrak{U}$, logo $|FT(x)| < |P(FT(x))| \leqslant \kappa$, logo $x \in H(\kappa)$. Portanto $\mathfrak{U} \subset H(\kappa)$.

Vejamos agora a igualdade. Pelo lema 3.5.4, basta mostrar que $\forall x \in H(\kappa)$ $(\forall y \in x \, (y \in \mathfrak{U}) \to x \in \mathfrak{U})$. Com efeito, seja $x \in H(\kappa)$ e suponha que $\forall y \in x \, (y \in \mathfrak{U})$, ou seja , que $x \subset \mathfrak{U}$. Como já argumentamos anteriormente, $\lambda = |x| \in \mathfrak{U}$. Tome $f : \lambda \longrightarrow x$, bijeção, assim, $x = Im(f) \in \mathfrak{U}$. ■

Corolário 3.5.7. *São equivalentes:*

1. *para todo cardinal λ existe um cardinal κ fortemente inacessível tal que $\lambda < \kappa$;*
2. *para todo conjunto x existe um Universo Grothendieck $\mathfrak{U}$ tal que $x \in \mathfrak{U}$.*

Demonstração: Assuma 1. Seja x um conjunto, seja $\lambda = |FT(x)|$. Tome κ fortemente inacessível tal que $\lambda < \kappa$, assim $x \in H(\kappa)$, mas pelo teorema 3.5.2, $H(\kappa)$ é um Universo de Grothendieck. logo temos 2. Reciprocamente, assuma 2. Seja λ um cardinal. Tome $\mathfrak{U}$ um Universo de Grothendieck tal que $\lambda \in \mathfrak{U}$, logo $P(\lambda) \in \mathfrak{U}$. Seja $\kappa = sup\{|x|; x \in \mathfrak{U}\}$, assim $\lambda < |P(\lambda)| \leqslant \kappa$. Mas pelo teorema 3.5.6, κ é fortemente inacessível.

■

O corolário 3.5.7 é bastante relevante na formalização da teoria das categorias. Em algumas formalizações é necessário ter Universos de Grothendieck, um pertencente ao outro, em cadeia. Nesse caso é necessário assumir a existência de uma cadeia de cardinais fortemente inacessíveis, um maior que o outro, tantos cardinais quanto são necessários Universos de Grothendieck.

Lema 3.5.8. *Sejam $\phi \in F$, N um conjunto, $\sigma : Var \longrightarrow N$ e $n \in Var$. Assim, se $(N, \sigma) \models \exists! m \, \phi$, então existe uma única $\theta : Var \longrightarrow N$ tal que $\theta \sim_n \sigma$ e $(N, \theta) \models \phi$.*

Demonstração: Suponha que $(N, \sigma) \models \exists! m \, \phi$. Ou seja, $(N, \sigma) \models \exists m \, \phi$ e $(N, \sigma) \models \forall m(\phi^n_m \wedge \phi \to n = m)$, onde m não ocorre em ϕ. Assim existe $\theta : Var \longrightarrow N$ tal que $\theta \sim_n \sigma$ e

$(N,\theta) \models \phi$. Seja $\theta' : Var \longrightarrow N$ tal que $\theta' \sim_n \sigma$ e $(N,\theta') \models \phi$. Vejamos que $\theta' = \theta$, para isso basta mostrar que $\theta'(n) = \theta(n)$. Por hipótese, para todo $\mu : Var \longrightarrow N$ com $\mu \sim_n \sigma$, temos que, se $(N,\mu) \models \phi_n^m$ e $(N,\mu) \models \phi$, então $\mu(n) = \mu(m)$. Seja $\mu : Var \longrightarrow N$ tal que $\mu(n) = \theta(n)$, $\mu(m) = \theta'(n)$ e $\mu(i) = \sigma(i)$, se $i \in Var \backslash \{n,m\}$. Assim, temos que $(N,\mu) \models \phi_n^m$ e $(N,\mu) \models \phi$, pois $(N,\theta') \models \phi$ e $(N,\theta) \models \phi$, respectivamente. Portanto $\theta(n) = \mu(n) = \mu(m) = \theta'(n)$.

■

Lema 3.5.9. *Seja $\mathfrak{U}$ um Universo de Grothendieck. então $\mathfrak{U}$ satisfaz o axioma da substituição.*

Demonstração: Seja $\phi \in F$ com suas variáveis livres entre $m, n, j_1, ..., j_i$ e $l \in Var\backslash\{m,n,j_1,...,j_i\}$. Precisamos mostrar que:

$$\mathfrak{U} \models \forall j_1 ... \forall j_i \forall k((\forall n(n \in k \to \exists! m\ \phi)) \to \exists l \forall m(m \in l \leftrightarrow \exists n(n \in k \wedge \phi))).$$

Ou seja, precisamos mostrar que para toda $\sigma : Var \longrightarrow \mathfrak{U}$ temos:

$$(\mathfrak{U},\sigma) \models (\forall n(n \in k \to \exists! m\ \phi)) \to \exists l \forall m(m \in l \leftrightarrow \exists n(n \in k \wedge \phi)).$$

Seja $\sigma : Var \longrightarrow \mathfrak{U}$. Suponha que:

$$(\mathfrak{U},\sigma) \models \forall n(n \in k \to \exists! m\ \phi).$$

Assim para toda $\theta : Var \longrightarrow \mathfrak{U}$ tal que $\theta \sim_n \sigma$, temos que, se $\theta(n) \in \theta(k)$, então $(\mathfrak{U},\theta) \models \exists! m\ \phi$. Para cada $x \in \sigma(k)$ seja $\theta_x : Var \longrightarrow \mathfrak{U}$. tal que $\theta_x \sim_n \sigma$ e $\theta_x(n) = x$. Assim, para cada $x \in \sigma(k)$, temos que $(\mathfrak{U},\theta_x) \models \exists! m\ \phi$, logo, pelo lema 3.5.8, existe um único $\theta'_x : Var \longrightarrow \mathfrak{U}$ tal que $\theta'_x \sim_m \theta_x$ e $(\mathfrak{U},\theta'_x) \models \phi$.

Defina $f : \sigma(k) \longrightarrow \mathfrak{U}$ por: $f(x) = \theta'_x(m)$. Assim como $\sigma(k) \in \mathfrak{U}$ e $im(f) \subset \mathfrak{U}$, temos que $im(f) \in \mathfrak{U}$. Vejamos que:

$$(\mathfrak{U},\sigma) \models \exists l \forall m(m \in l \leftrightarrow \exists n(n \in k \wedge \phi)).$$

Tome $\sigma_1 : Var \longrightarrow \mathfrak{U}$ tal que $\sigma_1 \sim_l \sigma$ e $\sigma_1(l) = im(f)$. Seja $\sigma_2 \sim_m \sigma_1$. Precisamos mostrar que

$$(\mathfrak{U},\sigma_2) \models m \in l \leftrightarrow \exists n(n \in k \wedge \phi).$$

Suponha que $\sigma_2(m) \in \sigma_2(l) = \sigma_1(l) = im(f)$. Assim existe $x \in \sigma(k)$ tal que $f(x) = \sigma_2(m)$. Tome $\sigma_3 : Var \longrightarrow \mathfrak{U}$ tal que $\sigma_3 \sim_n \sigma_2$ e $\sigma_3(n) = x$. Assim temos:

$\theta'_x(m) = f(x) = \sigma_2(m) = \sigma_3(m)$;
$\theta'_x(n) = \theta'_x(n) = x = \sigma_3(m)$;
$\theta'_x(i) = \theta_x(i) = \sigma(i) = \sigma_1(i) = \sigma_2(i) = \sigma_3(i)$, se $i \in Var\backslash\{m,n,l\}$.

Portanto, $\sigma_3 \sim_l \theta'_x$, mas como l não ocorre livre em ϕ e $(\mathfrak{U},\theta'_x) \models \phi$ temos que $(\mathfrak{U},\sigma_3) \models \phi$.

Reciprocamente, suponha que $(\mathfrak{U},\sigma_2) \models \exists n(n \in k \wedge \phi)$. Assim, existe $\sigma_3 : Var \longrightarrow \mathfrak{U}$ tal que $\sigma_3 \sim_n \sigma_2$, $\sigma_3(n) \in \sigma_3(k)$ e $(\mathfrak{U},\sigma_3) \models \phi$. Seja $\sigma_4 : Var \longrightarrow \mathfrak{U}$ tal que $\sigma_4 \sim_l \sigma_3$ e $\sigma_4(l) = \theta_{\sigma_3(n)}(l)$. Assim temos que $(\mathfrak{U},\sigma_4) \models \phi$, pois l não ocorre livre em ϕ, além disso:

$\sigma_4(n) = \sigma_3(n) = \theta_{\sigma_3(n)}(n)$;

$\sigma_4(l) = \theta_{\sigma_3(n)}(l)$;

$\sigma_4(i) = \sigma_3(i) = \sigma_2(i) = \sigma_1(i) = \sigma(i) = \theta_{\sigma_3(n)}(i)$, se $i \in Var \backslash \{m, n, l\}$.

Portanto $\sigma_4 \sim_m \theta_{\sigma_3(n)}$, mas como $\theta'_{\sigma_3(n)}$ é única tal que $\theta'_{\sigma_3(n)} \sim_m \theta_{\sigma_3(n)}$ e $(\mathfrak{U}, \theta'_{\sigma_3(n)}) \models \phi$, temos que $f(\sigma_3(n)) = \theta'_{\sigma_3(n)} = \sigma_4$, em particular $\theta'_{\sigma_3(n)}(m) = \sigma_4(m) = \sigma_3(m) = \sigma_2(m)$, portanto $\sigma_2(m) \in im(f) = \sigma_1(l) = \sigma_2(l)$.

■

Lema 3.5.10. *Seja $\mathfrak{U}$ um Universo de Grothendieck. Então $\mathfrak{U}$ satisfaz o axioma da separação.*

Demonstração: Seja $\phi \in F$ com suas variáveis livres entre $m, n, j_1, ..., j_i$ e $l \in Var \backslash \{m, n, j_1, ..., j_i\}$. Precisamos mostrar que:

$$\mathfrak{U} \models \forall j_1, ..., \forall j_1 \forall k \exists l \forall n (n \in l \leftrightarrow n \in k \wedge \phi).$$

Ou seja, precisamos mostrar que, dada $\sigma : Var \longrightarrow \mathfrak{U}$ temos que:

$$(\mathfrak{U}, \sigma) \models \exists l \forall n (n \in l \leftrightarrow n \in k \wedge \phi).$$

Primeiramente suponha que:

$$(\mathfrak{U}, \sigma) \models \forall n (n \in k \rightarrow \neg \phi).$$

Ou seja, $(*)$ para toda $\sigma_1 : Var \longrightarrow \mathfrak{U}$ tal que $\sigma_1 \sim_n \sigma$ e $\sigma_1(n) \in \sigma_1(k) = \sigma(k)$, temos que não vale $(\mathfrak{U}, \sigma_1) \models \phi$.

Tome $\theta : Var \longrightarrow \mathfrak{U}$ tal que $\theta \sim_l \sigma$ e $\theta(l) = \varnothing \in \mathfrak{U}$. Seja $\theta_1 \sim_n$. Precisamos mostar que $(\mathfrak{U}, \theta_1) \models n \in l \leftrightarrow n \in k \wedge \phi$. Ou seja, precisamos mostrar que:

$$(\mathfrak{U}, \theta_1) \models n \in l \Leftrightarrow (\mathfrak{U}, \theta_1) \models n \in k \wedge \phi.$$

Vejamos que ambos os lados da biimplicação são falsos. Primeiramente, se $(\mathfrak{U}, \theta_1) \models n \in l$ temos que $\theta_1(n) \in \theta_1(l) = \theta(l) = \varnothing$. Suponha agora que $\theta_1(n) \in \theta_1(k)$ e $(\mathfrak{U}, \theta_1) \models \phi$. Tome $\sigma_1 : Var \longrightarrow \mathfrak{U}$ tal que $\sigma_1 \sim_n \sigma$ e $\sigma_1(n) = \theta_1(n)$. Assim $\sigma_1 \sim_l \theta_1$, logo como l não ocorre livre em ϕ, temos que $(\mathfrak{U}, \sigma_1) \models \phi$, mas $\sigma_1(n) = \theta_1(n) \in \theta_1(k) = \theta(k) = \sigma(k)$, contradizendo $(*)$.

Assim, podemos assumir que $(\mathfrak{U}, \sigma) \models \exists n (n \in k \wedge \phi)$. Portanto existe $\sigma_0 : Var \longrightarrow \mathfrak{U}$ tal que $\sigma_0(n) \in \sigma_0(k) = \sigma(k)$ e $(\mathfrak{U}, \sigma_0) \models \phi$.

Para cada $x \in \sigma(k)$, defina $\theta_x : Var \longrightarrow \mathfrak{U}$ tal que $\theta_x \sim_n \sigma$ e $\theta_x(n) = x$.

Defina $f : \sigma(k) \longrightarrow \sigma(k)$ dada por:

- $f(x) = x$, se $(\mathfrak{U}, \theta_x) \models \phi$;
- $f(x) = \sigma_0(n)$, caso contrário.

Assim, pelo axioma 6 de universo temos que $Im(f) \in \mathfrak{U}$.

Tome $\theta : Var \longrightarrow \mathfrak{U}$ $\theta \sim_l \sigma$ e $\theta(l) = im(f)$. Seja $\rho : Var \longrightarrow \mathfrak{U}$ tal que $\rho \sim_n \theta$.

Suponha que $(\mathfrak{U}, \rho) \models n \in l$, logo $\rho(n) \in \rho(l) = \theta(l) = im(f) \subset \sigma(k) = \theta(k) = \rho(k)$, portanto $(\mathfrak{U}, \rho) \models n \in k$.

Vejamos agora que $(\mathfrak{U}, \rho) \models \phi$. Primeiramente suponha que $\rho(n) = \sigma_0(n)$. Assim temos que:

$\rho(n) = \sigma_0(n)$;
$\rho(k) = \theta(k) = \sigma(k) = \sigma_0(k)$;
$\rho(i) = \theta(i) = \sigma(i) = \sigma_0(i)$, se $i \in Var \backslash \{n, k, l\}$.

Logo $\rho \sim_l \sigma_0$, portanto, como l não ocorre livre em ϕ, temos que $(\mathfrak{U}, \rho) \models \phi$.

Vejamos agora o caso que existe $x \in \sigma(k)$ tal que $\rho(n) = x$ e $(\mathfrak{U}, \theta_x) \models \phi$. Assim temos:

$\rho(n) = x = \theta_x(n)$;
$\rho(k) = \theta(k) = \sigma(k) = \theta_x(k)$;
$\rho(i) = \theta(i) = \sigma(i) = \theta_x(i)$, se $i \in Var \backslash \{n, k, l\}$.

Logo $\rho \sim_l \theta_x$, portanto, como l não ocorre livre em ϕ, temos que $(\mathfrak{U}, \rho) \models \phi$.

Reciprocamente, suponha que $(\mathfrak{U}, \rho) \models n \in k \wedge \phi$. Logo $(\mathfrak{U}, \rho) \models \phi$ e $\rho(n) \in \rho(k) = \theta(k) = \sigma(k)$. Assim:

$\rho(n) = \theta_{\rho(n)}(n)$;
$\rho(k) = \theta(k) = \sigma(k) = \theta_{\rho(n)}(k)$;
$\rho(i) = \theta(i) = \sigma(i) = \theta_{\rho(n)}(i)$, se $i \in Var \backslash \{n, k, l\}$.

Logo $\rho \sim_l \theta_{\rho(n)}$, assim, como l não ocorre livre em ϕ, temos que $(\mathfrak{U}, \rho_{\rho(n)}) \models \phi$. Portanto $\rho(n) \in im(f) = \theta(l) = \rho(l)$. Ou seja, $(\mathfrak{U}, \rho) \models n \in l$.

■

Lema 3.5.11. *Seja $\mathfrak{U}$ um Universo de Grothendieck. Então vale o axioma da escolha relativizado a $\mathfrak{U}$.*

Demonstração: Seja X um conjunto. Como $X \times X \in P(P(P(X))) \in \mathfrak{U}$, logo $X \times X \in \mathfrak{U}$, assim $P(X \times X) \in \mathfrak{U}$. Pelo axioma da escolha temos que existe $\leqslant \in P(X \times X)$ uma boa ordem. Mas como $\leqslant \in P(X \times X) \in \mathfrak{U}$, temos que $\leqslant \in \mathfrak{U}$.

■

Lema 3.5.12. *Seja N um conjunto transitivo. Então vale o axioma da extensão relativizado a N.*

Demonstração: O axioma da extensão relativizado a N é $[\forall x, y(x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y))]^N$, que é equivalente a $\forall x, y \in N(x = y \leftrightarrow \forall z \in N(z \in x \leftrightarrow z \in y))$. Vamos mostrá-lo: sejam $x, y \in N$, trivialmente temos que $x = y \rightarrow \forall z \in N(z \in x \leftrightarrow z \in y)$. Façamos a outra direção: seja $z \in x$, como N é transitivo, $z \in N$, logo $z \in y$, portanto $x \subset y$. A prova de $y \subset x$ é análoga.
■

Lema 3.5.13. *Seja N um conjunto transitivo. Então vale o axioma da regularidade relativizado a N.*

Demonstração: O axioma da regularidade relativizado a N é $[\forall x(x \neq \emptyset \to \exists y(x \cap y = \emptyset))]^N$, que é equivalente a $\forall x \in N(x \neq \emptyset \to \exists y \in N(x \cap y = \emptyset)^N)$, mas $x \cap y = \emptyset$ é equivalente a $\forall z \in x(z \in y \to z \neq z)$, portanto é absoluta. Assim o axioma da regularidade relativizado a N é equivalente a $\forall x \in N(x \neq \emptyset \to \exists y \in N(x \cap y = \emptyset))$, que é consequência do axioma da regularidade e da transitividade de N. ■

Lema 3.5.14. *Seja $\mathfrak{U}$ um Universo de Grothendieck. Então valem os axiomas união, par, infinidade, regularidade, extensão, partes relativizados a $\mathfrak{U}$.*

Demonstração: Extensão e regularidade seguem dos lemas 3.5.12 e 3.5.13. Infinidade, par, união e partes seguem diretamente dos itens 2, 3, 4 e 5 da definição de universo de Grothendieck. ■

Corolário 3.5.15. $\mathfrak{U} \models ZFC$.

■

Aqui vale a pena destacar o fato de que 3.5.15 é um corolário e não um metacorolário. Isso se deve ao fato de 3.5.9 ser um lema e não um metalema. Ou seja, conseguimos provar que $\mathfrak{U}$ satisfaz o esquema de axiomas da substituição em um só lema, sem recorrer à metalinguagem, apesar do fato de o esquema de axiomas da substituição ser composto por infinitos axiomas. Eis a diferença entre o lema 3.5.9 e os metateoremas de reflexão, nos quais só conseguimos provar que o conjunto M em questão satisfaz uma quantidade finita de teoremas de ZFC. Assim, se assumirmos a existência de um cardinal fortemente inacessível, conseguimos mostrar a consistência de ZFC, ou seja, $ZFC + I \vdash con(ZFC)$, ou mais precisamente: $ZFC + I \vdash con(g(ZFC))$.

3.6 Absolutividade Externa

Como já foi mencionado anteriormente, o que chamamos de absolutividade externa, [Kun80] simplesmente chamará de absolutividade. O metalema 3.6.2 estabelece uma relação entre os dois conceitos.

Metadefinição 3.6.1. *Sejam N um conjunto e A uma fórmula cujas variáveis livres são $y_1, ..., y_n$. Dizemos que A é **externamente absoluta para N** quando:*

$$\forall y_1, ..., y_n \in N(A^N \leftrightarrow A).$$

Assim como no caso da absolutividade, dizemos que uma fórmula é externamente absoluta quando ela é externamente absoluta para qualquer conjunto transitivo.

Metalema 3.6.2. *Sejam N um conjunto e A uma fórmula. Assim, se $g(A)$ é absoluta para N, então A é externamente absoluta para N.*

Demonstração: Suponha que $g(A)$ seja absoluta para N.

Seja $\sigma : Var \longrightarrow N$ uma valoração tal que $\sigma(g(v)) = v$. Assim para todos $y_1, ..., y_n \in N$ temos:

$$A \Leftrightarrow (V, \sigma) \models g(A) \Leftrightarrow (N, \sigma) \models g(A) \Leftrightarrow A^N.$$

A primeira equivalência segue do metalema 3.4.12, a segunda do fato de que $g(A)$ é absoluta e a terceira do metateorema 3.4.15. ■

Com esse resultado, todos os teoremas provados no capítulo de absolutividade, sobre absolutividade de fórmulas da sublinguagem, podemos usar agora para fórmulas da linguagem.

Lema 3.6.3. *As fórmulas $x = im(f)$ e $x = dom(f)$ são externamente absolutas.*

Demonstração: Seja N um conjunto transitivo. Precisamos mostrar que $\forall x, f \in N\,[(x = im(f))^N \leftrightarrow (x = im(f))]$. De fato, sejam $x, f \in N$ temos que: $[x = im(f)]^N$ significa $[\forall y\,(y \in x \leftrightarrow (\exists z\,((z,y) \in f)))]^N$. Mas, como a fórmula $(z,y) \in f$ é absoluta (lema 3.2.15), temos que $((x = im(f))^N$ é equivalente a $\forall y \in N\,(y \in x \leftrightarrow (\exists z \in N\,((z,y) \in f)))$. Mostraremos que esta última fórmula é equivalente a $\forall y\,(y \in x \leftrightarrow (\exists z\,((z,y) \in f)))$ que significa $(x = im(f))$.

Primeiramente, assuma que $\forall y \in N\,(y \in x \leftrightarrow (\exists z \in N\,((z,y) \in f)))$. Por um lado, seja $y \in x$, como N é transitivo, temos que $y \in N$, logo, por hipótese, $(\exists z \in N\,((z,y) \in f))$, logo $(\exists z\,((z,y) \in f))$. Por outro lado, seja y tal que $(\exists z\,((z,y) \in f))$, como $f \in N$ e N é transitivo, $y \in N$, logo, por hipótese, $y \in x$

Assuma agora que $\forall y\,(y \in x \leftrightarrow (\exists z\,((z,y) \in f)))$. Seja $y \in N$. Por um lado, suponha que $y \in x$, por hipótese existe z tal que $(z,y) \in f$, mas, como $f \in N$ e N é transitivo, $z \in N$. Por outro lado, suponha que $(\exists z \in N\,((z,y) \in f))$, logo $(\exists z\,((z,y) \in f))$, portanto, por hipótese, $y \in x$.

A prova da absolutividade de $x = dom(y)$ é análoga. ∎

Lema 3.6.4. *A fórmula (f é função) é externamente absoluta.*

Demonstração: Seja N um conjunto transitivo e $f \in N$. Como a fórmula $(x,y) \in z$ é absoluta, temos que $(f \text{ é função})^N$ é equivalente a $(f \text{ é relação})^N \wedge [\forall a,b,c \in N\,(((a,b) \in f \wedge (a,c) \in f) \rightarrow b = c)]$, o que, pelo lema 3.2.15, é equivalente a $(f \text{ é relação}) \wedge [\forall a,b,c \in N\,(((a,b) \in f \wedge (a,c) \in f) \rightarrow b = c)]$. Claramente, esta fórmula é uma consequência de (f é *função*).

Façamos a outra direção. Assuma que $(r \text{ é relação}) \wedge [\forall a,b,c \in N\,(((a,b) \in f \wedge (a,c) \in f) \rightarrow b = c)]$, precisamos mostrar que $\forall a,b,c \in N\,(((a,b) \in f \wedge (a,c) \in f) \rightarrow b = c)$. De fato, sejam a,b,c tais que $(a,b) \in f$ e $(a,c) \in f)$, como N é transitivo e $f \in N$, temos que $a,b,c \in N$, logo, por hipótese, $b = c$ ∎

Lema 3.6.5. *A fórmula (f é função injetora) é absoluta.*

Demonstração: Análogo ao lema 3.6.4. ∎

Lema 3.6.6. *As seguintes fórmulas são externamente absolutas:*

(a) $y = f(x)$;

(b) $f(x) = g(y)$;

(c) $x \in \{x_1, ..., x_n\}$;

(d) $f \circ g(x) = y$;

(e) $f \circ g(x) = h(y)$;

(f) $y = \{x_1, ..., x_n\}$;

(g) p *é finito.*

Demonstração: (a) segue diretamente do lema 3.2.15 (q).

Vejamos (b). Seja N um conjunto transitivo e $x, y, , f, g \in N$. $f(x) = g(y)$ significa $\exists z\ ((x, z) \in f \wedge (x, z \in g))$. Se assumirmos (b), podemos concluir, então, que $z \in \{x, z\} \in (x, z) \in N$. Mas como N é transitivo, $z \in N$, logo (b) é equivalente a $\exists z \in N\ ((x, z) \in f \wedge (x, z) \in g)$, que pelo item (a) é equivalente a $(f(x) = g(y))^N$.

(c) é equivalente a $x = x_1 \vee ... \vee x = x_n$.

(d) significa $\exists z\ (z = g(x) \wedge f(z) = y)$ e pelo mesmo argumento de (b), pode-se mostrar que $z \in N$.

(e) segue também pelo mesmo argumento.

Vejamos (f). Seja N um conjunto transitivo e $y, x_1, ..., x_n \in N$. (f) é equivalente a $\forall x\ (x \in \{x_1, ..., x_n\} \Leftrightarrow x \in y)$. Pelo item (c), $(y = \{x_1, ..., x_n\})^N$ é equivalente a $\forall x \in N\ (x \in \{x_1, ..., x_n\} \Leftrightarrow x \in y)$. Assim, $y = \{x_1, ..., x_n\} \Rightarrow (y = \{x_1, ..., x_n\})^N$. Vejamos a recíproca. Suponha que $\forall x \in N\ (x \in \{x_1, ..., x_n\} \Leftrightarrow x \in y)$. Se $x \in \{x_1, ..., x_n\}$, então $x = x_1 \vee ... \vee x = x_n$, logo $x \in N$. E se $x \in y$, então $x \in N$, pois N é transitivo.

Vejamos (g). Seja N um conjunto transitivo e $p \in N$. p é finito é equivalente a $\exists x_1, ..., x_n\ (p = \{x_1, ..., x_n\})$. Pelo item (f), $(p$ é finito $)^N$ é equivalente a $\exists x_1, ..., x_n \in N\ (p = \{x_1, ..., x_n\})$. Assim $(p$ é finito $)^N \Rightarrow p$ é finito . Vejamos a recíproca. Suponha que $\exists x_1, ..., x_n\ (p = \{x_1, ..., x_n\})$. Assim, pela transitividade de N, temos que $x_1, ..., x_n \in N$, logo, pelo item (f), temos que $\exists x_1, ..., x_n \in N\ (p = \{x_1, ..., x_n\})^N$. ■

3.7 A teoria ZFCM

Nesta seção vamos apresentar uma ideia usada em [Wea14]. Para mostrar a consistência relativa entre ZFC e $ZFC + \neg CH$, vamos definir uma nova linguagem L_M que extende a teoria dos conjuntos (acrescenta a ela uma única constante M) e uma nova lista de axiomas $ZFCM$ que extende os axiomas de ZFC.

Metadefinição 3.7.1. *Seja* $\boldsymbol{L_M}$ *a linguagem da teoria dos conjuntos adicionada de uma constante* M*. Em* L_M*, considere os seguintes axiomas:*

- *Os axiomas de ZFC.*
- *Para cada* A *axioma de* ZFC*,* A^M *é um axioma.*
- M *é transitivo e enumerável.*

Chamaremos esta lista de ***axiomas de ZFCM****.*

Vamos mostrar ainda nesta seção a consistência relativa entre ZFC e $ZFCM$, e nos próximos capítulos mostraremos a consistência relativa entre $ZFCM$ e $ZFC + \neg CH$. Construiremos, em $ZFCM$, então, um conjunto que chamaremos de $M[G]$, que assim como M será um modelo para cada parte finita de ZFC, e além disso será modelo para $\neg CH$. E isso, como veremos, será suficiente para mostrar a consitência relativa entre $ZFCM$ e $ZFC + \neg CH$. É importante destacar que, mesmo em $ZFCM$, nem M nem $M[G]$ são modelos para ZFC todo, ou seja, não é verdade que $M \models ZFC$, ou mais precisamente $M \models g(ZFC)$. O que vale em $ZFCM$ é o seguinte: como para cada axioma A de ZFC, temos que vale A^M, assim, pelo metacorolário 3.4.16, podemos concluir que $M \models g(A)$. Porém a partir disso não podemos concluir que

$M \models g(ZFC)$, pois para tanto precisaríamos de uma prova infinita, ou seja, precisaríamos usar uma quantidade infinita de axiomas de $ZFCM$.

Metalema 3.7.2. *Sejam* $L = \{(,), =, \in, \wedge, \neg, \exists, x_1, x_2, ...\}$*, a linguagem usual da teoria dos conjuntos e* Γ *um conjunto de fórmulas de* L*. Então* Γ *é* L*-consistente se, e somente se,* Γ *é* L_M*-consistente.*

Demonstração: Nessa demonstração vamos fazer referência aos axiomas A1, A2, A3, A4 e A5 de [dSF17]. Suponha que Γ seja L_M-inconsistente. Seja $A_1, ..., A_n$ uma prova de $x \neq x$ em L_M. Sejam $B_1, ..., B_n$ satisfazendo o seguinte: fixe v uma variável que não ocorre em $A_1, ..., A_n$, assim cada B_i é A_i trocando cada ocorrência de M por v.

Vamos mostrar por indução que, para todo $i \leqslant n$, $B_1, ..., B_i$ seja uma prova de B_i. De fato, suponha que $B_1, ..., B_i$ é uma prova de B_i. Vejamos que $B_1, ..., B_{i+1}$ é uma prova de B_{i+1}. Para isso basta ver que B_{i+1} segue de $B_1, ..., B_i$. Se A_{i+1} segue de $A_1, ..., A_i$ por *modus ponens*, ou seja, existem $j, l \leqslant i$ tais que A_j é $A_l \to A_{i+1}$, assim existem $j, l \leqslant i$ tais que B_j é $B_l \to B_{i+1}$, logo B_{i+1} segue de $B_1, ..., B_i$ por *modus ponens*. Se A_{i+1} segue de $A_1, ..., A_i$ por generalização, ou seja, existem $j \leqslant i$ e x uma variável tais que A_{i+1} é $\forall x A_j$, assim existem $j \leqslant i$ e x uma variável tais que B_{i+1} é $\forall x B_j$, logo A_{i+1} segue de $A_1, ..., A_i$ por generalização. Se $A_{i+1} \in \gamma$, então $B_{i+1} \in \gamma$, pois Γ são fórmulas de L, portanto A_{i+1} te B_{i+1} são a mesma fórmula. Suponha agora que A_{i+1} seja um axioma lógico. Se A_{i+1} é uma instância de A2, A3 ou A5, então B_{i+1}, também será uma instância do mesmo axioma, pois escolhemos v tal que não ocorre em $A_1, ..., A_n$. Se A_{i+1} é uma instância de A1 ou A4 é imediato que B_{i+1} é uma instância de A1 ou A4.

O caso base da indução segue pelo mesmo argumento, sem precisar considerar os casos *modus ponens* e generalização.

■

Metalema 3.7.3. *Sejam* Γ *um conjunto de fórmulas* L_M*-consistente na qual* M *não ocorre e* A *uma fórmula com uma variável livre* x *na qual* M *também não ocorre. Então* $\Gamma \cup \{\exists x\, A \Rightarrow [A]^M_x\}$ *é* L_M*-consistente.*

Demonstração: É um caso particular de [dSF17, Lema 7.17].

■

Metalema 3.7.4. *Con(ZFC)* $\Rightarrow$ *Con(ZFCM).*

Demonstração: Suponha que ZFC seja consistente, mas $ZFCM$ seja inconsistente. Assim existe uma prova de $x \neq x$ em ZFCM. Sejam $A, A_1, ..., A_n, B^M_1, ..., B^M_m$ os axiomas de ZFCM usados nesta prova, onde $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m$ são axiomas de ZFC e A é o axioma (M é transitivo e enumerável).

Seja B a seguinte fórmula:

$$x \text{ é transitivo e enumerável} \wedge B^x_1 \wedge ... \wedge B^x_m$$

Pelo metacorolário 3.4.18, temos que $ZFC \vdash \exists x\, B$. Seja $\Gamma = \{A_1, ..., A_n, \exists x\, B\}$. Assim, como, por hipótese, ZFC é consistente, temos que Γ é L-consistente. Portanto, pelo metalema 3.7.2, temos que Γ é L_M-consistente. Assim, pelo metalema 3.7.3, $\Gamma \cup \{\exists x\, B \Rightarrow [B]^M_x\}$ é L_M-consistente, logo $\Gamma \cup \{[B]^M_x\}$ é L_M-consistente, pois $\Gamma \cup \{\exists x\, B \Rightarrow [B]^M_x\} \vdash [B]^M_x$. Mas $\Gamma \cup \{[B]^M_x\} \vdash A, A_1, ..., A_n, B^M_1, ..., B^M_m \vdash x \neq x$, um absurdo.

■

Metateorema 3.7.5.

Seja A uma fórmula da linguagem da teoria dos conjuntos. Suponha que, para todos $A_1, ..., A_n$ axiomas de ZFC, tenhamos que $ZFCM \vdash \exists M_0(A^{M_0} \wedge A_1^{M_0} \wedge ... \wedge A_n^{M_0})$. Então $Con(ZFC) \Rightarrow Con(ZFC + A)$.

Demonstração: Vamos fazer a prova por contraposição. Suponha que $(ZFC+A)$ seja inconsistente. Assim existem $A_1, ..., A_n$ axiomas de ZFC tais que $A, A_1, ..., A_n \vdash x \neq x$. Como já foi mencionado anteriormente, nossa metalinguagem é ZFC, ou seja, o que está sendo dito é que ZFC prova que $A, A_1, ..., A_n \vdash x \neq x$. Assim, repetindo na sublinguagem o mesmo processo feito na linguagem, podemos concluir que:

$$(*) ZFC \vdash g(A), g(A_1), ..., g(A_n) \vdash g(x \neq x).$$

Logo

$$(**) ZFCM \vdash g(A), g(A_1), ..., g(A_n) \vdash g(x \neq x).$$

Portanto, pelo teorema da correção:

$$ZFCM \vdash \neg \exists M_0\ (M_0 \models g(A), M_0 \models g(A_1), ..., M_0 \models g(A_n)).$$

Mas por hipótese:

$$ZFCM \vdash \neg \exists M_0\ (M_0 \models g(A), M_0 \models g(A_1), ..., M_0 \models g(A_n)).$$

Portanto temos $con(ZFCM)$, mas, pelo lema 3.7.4 , $\neg Con(FZC)$.

■

Observação: em $(*)$ e em $(**)$ o primeiro símbolo $\vdash$ não significa a mesma coisa que o segundo. O primeiro relaciona fórmulas da linguagem, o segundo relaciona fórmulas da sublinguagem.

Capítulo 4

Forcing

Como foi mencionado acima, este capítulo será feito inteiramente dentro de $ZFCM$, ou seja, ao invés de usarmos a linguagem da teoria dos conjuntos e os axiomas de ZFC, vamos usar L_M e vamos assumir os axiomas de $ZFCM$.

4.1 O conjunto M[G]

Esta seção se dedica a definir o conjunto $M[G]$ e mostrar algumas de suas propriedades. Aqui vamos conseguir mostrar que valem os seguintes axiomas relativizados a $M[G]$: infinidade, extensão, regularidade, par e união. Para mostrar o restante será necessário usar a ferramenta do *forcing*, que será introduzida na seção seguinte.

Definição 4.1.1. *Sejam τ, π e G conjuntos, dizemos que $\boldsymbol{\pi} \in_{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{\tau}$ quando $\exists p \in G((\pi, p) \in \tau)$*

Lema 4.1.2. *Seja G um conjunto, então a fórmula $x \in_G y$ é set-like.*

Demonstração: Seja x um conjunto. Assim $pred(x, R) = \{y \in FT(x); y \in_G x$ onde $R(x, y)$ é $x \in_G y\}$.

■

Lema 4.1.3. *Seja G um conjunto. Então a fórmula $x \in_G y$ é bem fundada.*

Demonstração: Suponha que $\in_G$ não seja bem fundado. Então existe W tal que para todo $\tau \in W$, existe $\pi \in W$ tal que $\pi \in_G \tau$. Assim podemos definir recursivamente uma sequência $\tau_0, \tau_1, \tau_2, ... \in W$ tal que $\tau_{i+1} \in_G \tau_i$, para todo i. Portanto existem $p_1, p_2, ... \in G$ tais que, para todo i, temos:

$$\tau_{i+1} \in \{\tau_{i+1}, p_{i+1}\} \in (\tau_{i+1}, p_{i+1}) \in \tau_i.$$

Logo, podemos definir uma sequência em $FT(W)$ da seguinte forma:

- $\pi_0 = \tau_0$;
- $\pi_1 = (\tau_1, p_1)$;
- $\pi_2 = \{\tau_1, p_1\}$;
- $\pi_3 = \tau_1$;

- $\pi_4 = (\tau_2, p_2)$.

.

.

.

Ou, mais formalmente:

- $\pi_i = \tau_k$, se $i = 3k$.
- $\pi_i = (\tau_{k+1}, p_{k+1})$, se $i = 3k + 1$;
- $\pi_i = \{\tau_{k+1}, p_{k+1}\}$, se $i = 3k + 2$.

Assim temos que $\pi_{i+1} \in \pi_i$, para todo i, contradizendo que todo conjunto é $\in$-bem fundado (lema 3.3.10). ■

Definição 4.1.4. *Sejam $\mathbb{P}$ e τ conjuntos. Vamos definir $\boldsymbol{H}(\mathbb{P}, \boldsymbol{\tau})$:*

- *$H(\mathbb{P}, \tau) = 1$ se existe X tal que $\tau \subset X \times \mathbb{P}$ e para todo σ tal que $\sigma \in_{\mathbb{P}} \tau$ temos que $H(\mathbb{P}, \sigma) = 1$;*
- *$H(\mathbb{P}, \tau) = 0$ caso contrário.*

Lema 4.1.5. *$H(\mathbb{P}, \tau)$ está bem definido.*

Demonstração: Sejam $R(x, y)$ a fórmula $x \in_G y$ e $B(x, y)$ a seguinte fórmula:

$((x$ é função $\wedge \forall w \in dom(x)\, \exists z(w \subset z \times \mathbb{P}) \wedge Im(x) = \{1\}) \rightarrow y = 1) \wedge ((x$ não é função $\vee$ $\exists w \in dom(x)\, \forall z(w \not\subset z \times \mathbb{P}) \vee Im(x) \neq \{1\}) \rightarrow y = 0)$.

É fácil ver que $\forall x \exists! y B(x, y)$ e, pelos lemas 4.1.2 e 4.1.3, $R(x, y)$ é set-like e bem fundada. Portanto, pelo metateorema 2.3.22, existe uma única fórmula $A(x, y)$ tal que $\forall x \exists! y A(x, y)$ e:

$$\forall x \exists w(B(A\restriction_{pred(x,R)}, w) \wedge A(x, w)).$$

Defina $G(\mathbb{P}, \tau)$ como sendo o único y tal que $A(\tau, y)$. E defina $H(\mathbb{P}, \tau)$ da seguinte forma:

- $H(\mathbb{P}, \tau) = 1$, quando existe X tal que $\tau \subset X \times \mathbb{P}$ e $G(\mathbb{P}, \tau) = 1$;
- $H(\mathbb{P}, \tau) = 0$, caso contrário.

Vejamos que $H(\mathbb{P}, \tau)$, de fato, satisfaz as condições da definição 4.1.4. Primeiramente, suponha que $H(\mathbb{P}, \tau) = 1$. Por definição já temos que existe X tal que $\tau \subset X \times \mathbb{P}$. Vejamos que para todo σ tal que $\sigma \in_{\mathbb{P}} \tau$ temos que $H(\mathbb{P}, \sigma) = 1$.

Temos que $G(\mathbb{P}, \tau) = 1$ assim vale $A(\tau, 1)$. Além disso temos que:

$$\exists w(B(A\restriction_{pred(\tau,R)}, w) \wedge A(\tau, w)).$$

Mas como $A(x, y)$ é tal que $\forall x \exists! y A(x, y)$, temos que $w = 1$. Portanto vale $(B(A\restriction_{pred(\tau,R)}, 1)$. Ou seja, vale:

$((A\restriction_{pred(\tau,R)}$ é função $\wedge \forall w \in dom(A\restriction_{pred(\tau,R)})\, \exists z(w \subset z \times \mathbb{P}) \wedge Im(A\restriction_{pred(\tau,R)}) = \{1\}) \rightarrow 1 = 1) \wedge ((A\restriction_{pred(\tau,R)}$ não é função $\vee \exists w \in dom((A\restriction_{pred(\tau,R)})\, \forall z(w \not\subset z \times \mathbb{P}) \vee Im(A\restriction_{pred(\tau,R)}) \neq \{1\}) \rightarrow 1 = 0)$

Logo:

$$\forall w \in dom(A\restriction_{pred(\tau,R)})\, \exists z(w \subset z \times \mathbb{P}) \;\wedge\; Im(A\restriction_{pred(\tau,R)}) = \{1\}).$$

Seja $\sigma \in_{\mathbb{P}} \tau$, logo $\sigma \in dom(A\restriction_{pred(\tau,R)})$, assim, por um lado, temos que $A\restriction_{pred(\tau,R)}(\sigma) = 1$, logo vale $G(\mathbb{P}, \sigma)$, por outro lado, existe z tal que $\sigma \subset z \times \mathbb{P}$.

Reciprocamente, suponha que exista X tal que $\tau \subset X \times \mathbb{P}$ e que, para todo $\sigma \in_{\mathbb{P}} \tau$, temos que $H(\mathbb{P}, \sigma) = 1$. Vejamos que $H(\mathbb{P}, \tau) = 1$, para isso, basta mostrar que $G(\mathbb{P}, \tau) = 1$. Assim, precisamos mostrar que $A(\tau, 1)$. Segue diretamente da hipótese que $\forall \sigma \in_{\mathbb{P}} \tau$ vale $A(\sigma, 1)$, ou seja, temos que $Im(A\restriction_{pred(\tau,R)}) = \{1\}$, assim temos que $B(A\restriction_{pred(\tau,R)}), 1)$, mas como

$$\exists w(B(A\restriction_{pred(\tau,R)}, w) \wedge A(\tau, w)).$$

e $B(x, y)$ é tal que $\forall x \exists! y B(x, y)$, temos que $w = 1$, logo vale $A(\tau, 1)$.

■

Definição 4.1.6. *Sejam $\mathbb{P}$ e τ conjuntos. Dizemos que τ é um $\mathbb{P}$-**nome** quando $H(\mathbb{P}, \tau) = 1$*

Lema 4.1.7. *Seja $\mathbb{P}$ um conjunto. Então, τ é um $\mathbb{P}$-nome se, e somente se, para todo $x \in \tau$ existem $p \in \mathbb{P}$ e σ um $\mathbb{P}$-nome tal que $x = (\sigma, p)$*

Demonstração: Seja τ um $\mathbb{P}$-nome. Seja $x \in \tau$. Como $\tau \subset X \times \mathbb{P}$ para algum X, temos que $x = (\sigma, p)$, onde $p \in \mathbb{P}$, logo $\sigma \in_{\mathbb{P}} \tau$, portanto σ é $\mathbb{P}$-nome. Reciprocamente, suponha que para todo $x \in \tau$, existem $p \in \mathbb{P}$ e σ $\mathbb{P}$-nome tais que $x = (\sigma, p)$. Assim, é claro que $\tau \subset X \times \mathbb{P}$, para algum X. E também é claro que, se $\sigma \in_{\mathbb{P}} \tau$, temos σ é $\mathbb{P}$-nome.

■

Definição 4.1.8. *Sejam G e τ conjuntos. Defina $\boldsymbol{val(\tau, G)}$ por $val(\tau, G) = \{val(\sigma, G) : \exists p \in G((\sigma, p) \in \tau)\}$.*

Lema 4.1.9. *$val(\tau, G)$ está bem definido.*

Demonstração: Seja $R(x, y)$ a fórmula $x \in_G y$ e $B(x, y)$ a fórmula $\forall z(z \in y \leftrightarrow \exists v(v, z) \in x)$. É fácil ver que $\forall x \exists! y B(x, y)$ e, pelos lemas 4.1.2 e 4.1.3, $R(x, y)$ é set-like e bem fundada. Portanto, pelo metateorema 2.3.22, existe uma única fórmula $A(x, y)$ tal que $\forall x \exists! y A(x, y)$ e:

$$\forall x \exists w(B(A\restriction_{pred(x,R)}, w) \wedge A(x, w)).$$

Definimos $val(\tau, G)$ como sendo o único y tal que $A(\tau, y)$.
Temos que vale $A(\tau, val(\tau, G))$, além disso temos que

$$\exists w(B(A\restriction_{pred(\tau,R)}, w) \wedge A(\tau, w)).$$

Mas como $A(x, y)$ é tal que $\forall x \exists! y A(x, y)$, temos que $w = val(\tau, G)$. Portanto vale

$$(B(A\restriction_{pred(\tau,R)}, val(\tau, G)).$$

Ou seja, vale:

$$\forall z(z \in val(\tau, G) \leftrightarrow \exists v(v, z) \in A\restriction_{pred(\tau,R)})).$$

Ou seja:

$$\forall z(z \in val(\tau, G) \leftrightarrow \exists v \in pred(\tau, R)\ A(v, z).$$

Portanto:

$$\forall z(z \in val(\tau, G) \leftrightarrow \exists v(v \in_G \tau \wedge z = val(v, G)).$$

■

Os lemas 4.1.5 e 4.1.9 raramente são feitos na literatura. Nem sempre é fácil aplicar os teoremas de recursão para fazer definições recusivas. Observe que os lemas em questão são relativamente longos. Fizemos esse tipo de lema também no primeiro capítulo. Os lemas 1.1.13 e 1.2.3 também são desse estilo. Porém nem sempre faremos todos os detalhes de como aplicar os teoremas de recursão. No caso do lema 4.1.13 apenas indicamos as fórmulas corretas a serem usadas e deixamos os detalhes para o leitor. Deixaremos, também para o leitor, os detalhes de como aplicar o teorema de recursão para fórmulas da sublinguagem (teorema 1.1.11) para definir o *forcing* estrela (definição 4.2.11) na seção seguinte.

Para facilitar a compreensão do conceito de $val(\tau, G)$ calculemos dois exemplos:

- $val(\emptyset, G) = \{val(\sigma, G) : \exists p \in G((\sigma, p) \in \emptyset)\} = \emptyset$
- $val(\{\emptyset\} \times \mathbb{P}, G) = \{val(\sigma, G) : \exists p \in G((\sigma, p) \in \{\emptyset\} \times \mathbb{P})\} = \{val(\sigma, G); \sigma = \emptyset\} = \{\emptyset\}$

Definição 4.1.10. *Seja $\mathbb{P} \in M$. Defina $\boldsymbol{M^{\mathbb{P}}}$ por $M^{\mathbb{P}} = \{\tau \in M : \tau$ é $\mathbb{P} - nome\}$.*

Definição 4.1.11. *Seja $\mathbb{P} \in M$ e $G \subset \mathbb{P}$. Defina $\boldsymbol{M[G]}$ por $M[G] = \{val(\tau, G) : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$.*

Definição 4.1.12. *Sejam x e $\mathbb{P}$ conjuntos. Defina $\boldsymbol{\check{x}}$ por $\check{x} = \{(\check{y}, p) : p \in \mathbb{P} \wedge y \in x\}$.*

Lema 4.1.13. *$\check{x}$ está bem definido.*

Demonstração: A demonstração é análoga às demonstrações dos lemas 4.1.5 e 4.1.9, onde tomamos $R(x, y)$ como sendo $x \in y$ e $B(x, y)$ a seguinte fórmula:

$$(x \text{ é função } \rightarrow y = \{(x(z), p); p \in \mathbb{P} \wedge y \in dom x\}) \wedge (x \text{ não é função } \rightarrow y = \emptyset).$$

■

Definição 4.1.14. *Seja $\mathbb{P}$ um conjunto. Defina $\boldsymbol{\Gamma}$ por $\Gamma = \{(\check{p}, p) : p \in \mathbb{P}\}$.*

Lema 4.1.15. *Sejam $\mathbb{P} \in M$, $G \subset \mathbb{P}$ não vazio e $x \in M$, então $val(\check{x}, G) = x$.*

Demonstração: Faremos a prova por indução. Suponha que para todo $y \in x$ temos que $val(\check{y}, G) = y$. Seja $y \in val(\check{x}, G)$, assim existem $p \in G$ e σ tais que $(\sigma, p) \in \check{x}$ e $y = val(\sigma, G)$. Mas, como $(\sigma, p) \in \check{x}$ temos que existe $z \in x$ tal que $\sigma = \check{z}$, mas, por hipótese de indução, $val(\check{z}, G) = z$, logo $y = z$, portanto $y \in x$. Reciprocamente, suponha que $y \in x$, como $G \neq \emptyset$ existe $p \in G$, $(\check{y}, p) \in \check{x}$, mas, por hipótes de indução, $val(\check{y}, G) = y$, logo $y \in val(\check{x}, G)$. ■

Lema 4.1.16. *A fórmula $z = \check{x}$ é externamente absoluta para M.*

Demonstração: Vamos mostrar por indução para relações bem fundadas em x que $\forall x, z, \mathbb{P} \in M((z = \check{x} \leftrightarrow (z = \check{x})^M) \wedge \check{x} \in M)$. Obseve que $\mathbb{P}$ também é uma variável livre, pois $\check{x}$ depende de $\mathbb{P}$. De fato, tome $x, z, \mathbb{P} \in M$, vamos mostrar que $[z = \check{x} \leftrightarrow (z = \check{x})^M)] \wedge \check{x} \in M$. Portanto nossa hipótese de indução será $\forall y \in x\, [\forall u, \mathbb{P} \in M(u = \check{y} \leftrightarrow (u = \check{y})^M)] \wedge \check{y} \in M$.

Vamos à prova: $(z = \check{x})^M$ é equivalente a $(z = \{(u,p) : \exists(y \in x(\check{y} = u)) \wedge p \in \mathbb{P}\})^M$ que é equivalente a $[\forall w(w \in z \leftrightarrow \exists y \in x\, \exists p \in \mathbb{P}\, \exists u(\check{y} = u \wedge w = (u,p)))]^M$ que é equivalente a $\forall w \in M(w \in z \leftrightarrow \exists y \in x\, \exists p \in \mathbb{P}\, [\exists u(\check{y} = u \wedge w = (u,p))]^M)$. Mas, como $\check{y} \in M$ para todo $y \in x$, temos que $[\exists u(\check{y} = u \wedge w = (u,p))] \leftrightarrow [\exists u \in M(\check{y} = u \wedge w = (u,p))]$, logo $(z = \check{x})^M$ é equivalente a $\forall w \in M(w \in z \leftrightarrow \exists y \in x\, \exists p \in \mathbb{P}\, \exists u(\check{y} = u \wedge w = (u,p))^M)$, mas pela hipótese de indução e pelo fato de que o par ordenado é absoluto (lema 3.2.15) temos que $(z = \check{x})^M$ é equivalente a $\forall w \in M(w \in z \leftrightarrow \exists y \in x\, \exists p \in \mathbb{P}\, \exists u(\check{y} = u \wedge w = (u,p)))$ que é equivalente a $\forall w \in M(w \in z \leftrightarrow w \in \check{x})$. Finalmente vamos concluir que $(z = \check{x})^M$ é equivalente a $z = \check{x}$. Trivialmente temos que $z = \check{x}$ implica $\forall w \in M(w \in z \leftrightarrow w \in \check{x})$, mostraremos então a outra direção. Assuma que $\forall w \in M(w \in z \leftrightarrow w \in \check{x})$. Se $w \in z$ temos que $w \in M$, pois $z \in M$ e M é trantitivo, logo $w \in \check{x}$. Reciprocamente suponha que $w \in \check{x}$, ou seja, $w = (\check{y}, p)$, onde $y \in x$ e $p \in \mathbb{P}$. Então, como $\check{y} \in M$ (pela hipótese de indução), $p \in M$ (por transitividade) e o par ordenado é absoluto, temos que $w \in M$, logo $w \in z$. E como $z \in M$ temos que $\check{x} \in M$. ■

Lema 4.1.17. *Sejam $\mathbb{P} \in M$, $G \subset \mathbb{P}$ não vazio e $x \in M$. Então $\check{x}$ é um $\mathbb{P} - nome$.*

Demonstração: A prova segue diretamente da hipótese de indução: para todo $y \in x$ ($\check{y}$ é um $\mathbb{P} - nome$). ■

Corolário 4.1.18. *Sejam $\mathbb{P} \in M$ e $G \subset \mathbb{P}$ não vazio. Então $M \subset M[G]$.*

Demonstração: Seja $x \in M$, como $val(\check{x}, G) = x$, basta mostrar que $\check{x} \in M^{\mathbb{P}}$, ou seja, que $\check{x}$ é $\mathbb{P} - nome$ e que $\check{x} \in M$, mas $\check{x}$ é $\mathbb{P} - nome$ pelo lema 4.1.17 e $\check{x} \in M$ pelo lema 4.1.16. ■

Corolário 4.1.19. *Sejam $\mathbb{P} \in M$ e $G \subset \mathbb{P}$ não vazio. Então vale o axioma da infinidade relativizado a $M[G]$.*

Demonstração: Basta observar que $\omega \in M \subset M[G]$, pelo corolário 4.1.18. ■

Lema 4.1.20. *Sejam $\mathbb{P} \in M$, $G \subset \mathbb{P}$. Então $G = val(\Gamma, G)$.*

Demonstração: Seja $p \in G$, temos que $p \in \mathbb{P}$, logo $(\check{p}, p) \in \Gamma$, portanto $val(\check{p}, G) \in val(\Gamma, G)$, assim, pelo lema 4.1.15, $p \in val(\Gamma, G)$. Reciprocamente, seja $p \in val(\Gamma, G)$, logo existem σ e $q \in G$ tais que $p = val(\sigma, G)$ e $(\sigma, q) \in \Gamma$, ou seja, existe $q \in G$ tal que $p = val(\check{q}, G)$, portanto, novamente pelo lema 4.1.15, temos que $p = q$, logo $p \in G$. ■

Lema 4.1.21. *Sejam $\mathbb{P} \in M$ e $G \subset \mathbb{P}$. Então $M[G]$ é transitivo.*

Demonstração: Seja $y \in M[G]$ e $x \in y$. Assim existe $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $y = val(\tau, G)$, logo, como $x \in val(\tau, G)$, existem σ e $p \in G$ tais que $(\sigma, p) \in \tau$ e $x = val(\sigma, G)$. Para concluir o resultado, basta mostrar que $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$. De fato, temos que σ é $\mathbb{P} - nome$, pois $(\sigma, p) \in \tau$, $p \in \mathbb{P}$ e τ é $\mathbb{P} - nome$. Além disso, temos que $\sigma \in M$, pois $\sigma \in \{\sigma, p\} \in (\sigma, p) \in \tau \in M$ e M é transitivo. ■

Corolário 4.1.22. *Sejam $\mathbb{P} \in M$ e $G \subset \mathbb{P}$. M[G] satisfaz os axiomas da extensão e regularidade.*

Definição 4.1.23. *Sejam $\sigma, \tau, \mathbb{P}$ conjuntos, defina:*

- *$up(\sigma,\tau) = \{\sigma,\tau\} \times \mathbb{P}$;*
- *$op(\sigma,\tau) = up(up(\sigma,\sigma), up(\sigma,\tau))$.*

Lema 4.1.24. *Sejam $\mathbb{P} \in M$, $G \subset \mathbb{P}$ não vazio e $\sigma,\tau \in M^{\mathbb{P}}$, então:*

- *$val(up(\sigma,\tau), G) = \{val(\sigma,G), val(\tau,G)\}$;*
- *$val(op(\sigma,\tau), G) = (val(\sigma,G), val(\tau,G))$.*

Demonstração: Para o primeiro item, seja $val(\pi,G) \in val(up(\sigma,\tau),G)$, assim existe $p \in G$ tal que $(\pi,p) \in up(\sigma,\tau)$, logo $\pi = \tau$ ou $\pi = \sigma$, portanto $val(\pi,G) \in \{val(\sigma,G), val(\tau,G)\}$. Reciprocamente seja $x \in \{val(\sigma,G), val(\tau,G)\}$, sem perda de generalidade, assuma que $x = val(\sigma,G)$, tome $p \in G$, temos que $(\sigma,p) \in up(\sigma,\tau)$, logo $val(\sigma,G) \in val(up(\sigma,\tau),G)$.

Para o segundo item temos:

$val(op(\sigma,\tau),G) = \{val(up(\sigma,\sigma),G), val(up(\sigma,\tau),G)\} = \{\{val(\sigma,G)\}, \{val(\sigma,G), val(\tau,G)\}\} = (val(\sigma,G), val(\tau,G))$.

■

Corolário 4.1.25. *Sejam $\mathbb{P} \in M$ e $G \subset \mathbb{P}$. Então M[G] satisfaz o axioma do par.*

Demonstração: Sejam $val(\tau,G), val(\sigma,G) \in M[G]$, assim $\sigma,\tau \in M^{\mathbb{P}}$, é fácil ver que $up(\sigma,\tau) \in M^{\mathbb{P}}$, pois claramente $up(\sigma,\tau)$ é um $\mathbb{P}$-nome, assim $\{val(\sigma,G), val(\tau,G)\} = val(up(\sigma,\tau),G) \in M[G]$. Isso conclui a prova, pois a fórmula que define o par ordenado é absoluta. ■

Lema 4.1.26. *Sejam $\mathbb{P} \in M$ e $G \subset \mathbb{P}$. Então M[G] satisfaz o axioma da união.*

Demonstração: Seja $val(\tau,G) \in M[G]$. Defina $\tilde{\tau} = \{(\pi,p) : p \in G \wedge \exists\sigma\,[(\pi,p) \in \sigma \wedge \exists q \in G\,((\sigma,q) \in \tau)]\}$. Note que $\tilde{\tau}$ é $\mathbb{P}$-nome, logo $val(\tilde{\tau},G) \in M[G]$, portanto se mostrarmos que $val(\tilde{\tau},G) = \bigcup val(\tau,G)$, teremos o resultado. Com efeito, seja $x \in val(\tilde{\tau},G)$, assim, $x = val(\pi,G)$ e existem σ e $p \in G$ tal que $(\pi,p) \in \sigma$ e $(\pi,p) \in \sigma$ e $\exists q \in G\,((\sigma,q) \in \tau)$, logo $val(\pi,G) \in val(\sigma,G)$ e $val(\sigma,G) \in val(\tau,G)$, assim $x \in val(\tilde{\tau},G)$. Reciprocamente, tome $x \in \bigcup val(\tau,G)$, ou seja, existe $y \in val(\tau,G)$ tal que $x \in y$, assim existe σ tal que $y = val(\sigma,G)$ e $\exists p \in G\,((\sigma,p) \in \tau)$, logo $x = val(\pi,G)$, onde $\exists q \in G\,((\pi,q) \in \tau)$. Dessa forma temos que $(\pi,q) \in \tilde{\tau}$, pois existe σ tal que $(\pi,q) \in \sigma$ e existe $p \in G$ tal que $(\sigma,p) \in \tau$, logo $x \in val(\tilde{\tau},G)$. Isso conclui a prova, pois a fórmula que define a união é absoluta. ■

4.2 Forcing

Nesta seção vamos definir o *forcing* e o *forcing* estrela. Nesse texto usá-los-emos para mostrar, como já foi dito anteriormente, que $M[G]$ satisfaz partes, separação, substituição e escolha. Mas, antes de mais nada, nosso objetivo é fazer as definições, lemas e teoremas do *forcing* de forma mais precisa possível, tentando elucidar os detalhes da formalização. Continuaremos com a abordagem de fazer uso da sublinguagem e das valorações. Porém, como nesta seção não será necessário "subir para a metalinguagem", não haverá ambiguidade entre níveis de variáveis, portanto usaremos x, y, z etc para denotar variáveis da sublinguagem.

Definição 4.2.1. *Seja $\mathbb{P}$ um conjunto e $\leqslant \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}$. Dizemos que que $\leqslant$ é uma **ordem parcial** quando:*

- $\forall p \in \mathbb{P}((p,p) \in \leqslant)$;
- $\forall p,q,r \in \mathbb{P}((p,q) \in \leqslant \wedge (q,r) \in \leqslant \to (p,r) \in \leqslant)$;
- $\forall p,q \in \mathbb{P}((p,q) \in \leqslant \wedge (q,p) \in \leqslant \to p = q)$.

Definição 4.2.2. *Seja $(\mathbb{P}, \leqslant)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que $D \subset \mathbb{P}$ é* ***denso em*** $\mathbb{P}$ *quando para todo $x \in \mathbb{P}$ existe $y \in D$ tal que $y \leqslant x$.*

Definição 4.2.3. *Seja $(\mathbb{P}, \leqslant)$ um conjunto parcialmente ordenado e $G \subset \mathbb{P}$. Dizemos que G é um* ***filtro em*** $\mathbb{P}$*, quando:*

- *$G \neq \emptyset$;*
- *para todo $p, q \in G$ existe $r \in G$ tal que $r \leqslant p \wedge r \leqslant q$;*
- *para todo $p \in G$ e $q \in \mathbb{P}$ temos que $p \leqslant q \to q \in G$.*

Definição 4.2.4. *Sejam $(\mathbb{P}, \leqslant)$ um conjunto parcialmente ordenado e G um filtro em $\mathbb{P}$. Dizemos que G é* ***$\mathbb{P}$-genérico sobre*** *M quando para todo $D \in M$, $D \subset \mathbb{P}$ e denso em $\mathbb{P}$ temos $D \cap G \neq \emptyset$.*

Lema 4.2.5. *Sejam $(\mathbb{P}, \leqslant)$ um conjunto parcialmente ordenado e $p \in \mathbb{P}$. Então existe G um filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$.*

Demonstração: Seja $A = \{D \in M : D \subset \mathbb{P} \wedge D \textit{ é denso}\}$. Se $A = \emptyset$, por vacuidade qualquer filtro que contém p satisfaz a propriedade, portanto basta tomar $G = \{q; p \leqslant q\}$. Suponha que $A \neq \emptyset$. Como M é enumerável, A também o é enumerável, logo $A = \{D_n : n \in \omega\}$. Defina recursivamente a seguinte sequência: p_0 é tal que $p_0 \in D_0$ e $p_0 \leqslant p$. E para cada p_n, p_{n+1} é tal que $p_{n+1} \leqslant p_n$ e $p_{n+1} \in D_{n+1}$. Note que a sequência forma uma cadeia em $\mathbb{P}$, ou seja, se $m, n \in \omega$ temos que $p_n \leqslant p_m$ ou $p_m \leqslant p_n$. Seja $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega(p_n \leqslant q)\}$. É trivial que $p \in G$ e que G é $\mathbb{P}$-genérico. Vamos mostrar que G é filtro: sejam $q, r \in G$, assim existem n_q e n_r tais que $p_{n_q} \leqslant q$ e $p_{n_r} \leqslant r$, suponha sem perda de generalidade que $p_{n_q} \leqslant p_{n_r}$, assim $p_{n_q} \leqslant q$ e $p_{n_q} \leqslant r$. Suponha agora que $q \in G$ e $q \leqslant r$, assim existe $n \in \omega$ tal que $p_n \leqslant q \leqslant r$, logo $r \in G$. ■

Definição 4.2.6. *Sejam $(\mathbb{P}, \leqslant)$ um conjunto parcialmente ordenado e $p, q \in \mathbb{P}$. Dizemos que p e q são* ***compatíveis*** *se existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant p \wedge r \leqslant q$. Dizemos que p e q são* ***incompatíveis*** *se não são compatíveis. Notação:* $\boldsymbol{p \perp q}$ *significa que p e q são incompatíveis.*

Faremos o seguinte abuso de notação: quando escrevermos "$\mathbb{P} \in M$ é um conjunto parcialmente ordenado", rigorosamente, estaremos dizendo: "$(\mathbb{P}, \leqslant)$ é um conjunto parcialmente ordenado, $\mathbb{P} \in M$ e $\leqslant \in M$".

Definição 4.2.7. *Sejam $\mathbb{P} \in M$ um conjunto parcialmente ordenado, $p \in \mathbb{P}$ e $E \subset \mathbb{P}$. Então E* ***é denso abaixo de p*** *quando:*

$$\forall q \leqslant p(\exists r \leqslant q(r \in E)).$$

Lema 4.2.8. *Sejam $\mathbb{P} \in M$ um conjunto parcialmente ordenado, $E \in M$ tal que $E \subset \mathbb{P}$ e G $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Então $G \cap E \neq \emptyset$ ou $\exists q \in G(\forall r \in E(r \perp q))$.*

Demonstração: Seja $D = A \cup B$, onde $A = \{p \in \mathbb{P} : \exists r \in E(p \leqslant r)\}$ e $B = \{q \in \mathbb{P} : \forall r \in E(r \perp q)\}$. Vamos mostrar que D é denso, seja $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \notin D$, como $q \notin B$, temos que $\exists r \in E$ tal que r e q são compatíveis, logo existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leqslant r$ e $p \leqslant q$, logo $p \in A \subset D$, portanto D é denso. Suponha que $G \cap E = \varnothing$, como D é denso $\exists p \in G \cap D$, se $p \in A$, então $\exists r \in E(p \leqslant r)$, mas como $p \in G$ temos que $r \in G$, absurdo, logo $p \in B$, portanto $\forall r \in E(r \perp q)$. ■

Lema 4.2.9. *Sejam $\mathbb{P} \in M$ um conjunto parcialmente ordenado, $E \in M$ tal que $E \subset \mathbb{P}$ e G $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Então $\exists p \in G(E$ é denso abaixo de $p) \Rightarrow G \cap E \neq \varnothing$.*

Demonstração: Suponha que $\exists p \in G(E$ é denso abaixo de $p)$ e $G \cap E = \varnothing$, pelo lema anterior $\exists q \in G(\forall r \in E(r \perp q))$. Como G é filtro $\exists s \in G(s \leqslant q \wedge s \leqslant p)$, mas, como E é denso abaixo de p, $\exists r \in E(r \leqslant s)$, logo $r \leqslant q$, absurdo. ■

Definição 4.2.10. *Sejam $\mathbb{P} \in M$ um conjunto parcialmente ordenado, $p \in \mathbb{P}$, $\phi \in F$, $\sigma : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ e $f : M^{\mathbb{P}} \longrightarrow M[G]$ a função que leva cada τ em $val(\tau, G)$. Dizemos que **p força** $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\sigma})$ quando, para todo G $\mathbb{P}-$genérico sobre M, temos:*

$$p \in G \Rightarrow (M[G], f \circ \sigma) \models \phi.$$

Usaremos a seguinte notação: $\boldsymbol{p} \Vdash (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\sigma})$ significa p força (ϕ, σ).

Vale a pena observar que em [Kun80], ao invés de $p \Vdash (\phi, \sigma)$, formula-se a definição da seguinte maneira: $p \Vdash \phi(\tau_1, ..., \tau_n)$, onde $\tau_1, ..., \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$. Na nossa notação, a valoração σ faz o papel dos $\mathbb{P}$-nomes $\tau_1, ..., \tau_n$, de forma que ambas as formulações representam essencialmente a mesma ideia.

A nossa abordagem, apesar de, à primeira vista, parecer mais técnica, evita deixar escapar detalhes da formalização. A notação do Kunen, que é adotada pela maioria dos autores, pode confundir ao trocar variáveis da que chamamos de sublinguagem $(x_1, x_2, \ldots)$ por variáveis da linguagem $(\tau_1, \tau_2, \ldots)$ que representam conjuntos específicos. Ao utilizar a valoração deixamos clara essa distinção, evitando compreensão errônea e facilitando por não precisar "carregar" as variáveis livres da fórmula ϕ.

Lembrando que estamos usando o teorema 1.1.11 para que a definição 4.2.11 faça sentido.

Definição 4.2.11. *Sejam $\mathbb{P}$ um conjunto parcialmente ordenado, $p \in \mathbb{P}$, $\phi \in F$ e σ uma valoração. Vamos definir recursivamente o que significa $\boldsymbol{p} \Vdash^* (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\sigma})$:*

- *Se ϕ é da forma $x = y$, $p \Vdash^* (\phi, \sigma)$ quando:*

  1) para todo $(\pi_1, s_1) \in \sigma(x)$, temos que $\{q \leqslant p : q \leqslant s_1 \rightarrow \exists(\pi_2, s_2) \in \sigma(y)(q \leqslant s_2 \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow V^{\mathbb{P}} (\theta \sim_{x,y} \sigma \wedge \theta(x) = \pi_1 \wedge \theta(y) = \pi_2 \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta)))\}$ é denso abaixo de p.

  2) para todo $(\pi_2, s_2) \in \sigma(y)$, temos que $\{q \leqslant p : q \leqslant s_2 \rightarrow \exists(\pi_1, s_1) \in \sigma(x)(q \leqslant s_1 \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow V^{\mathbb{P}} (\theta \sim_{x,y} \sigma \wedge \theta(x) = \pi_1 \wedge \theta(y) = \pi_2 \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta)))\}$ é denso abaixo de p.

- *Se ϕ é da forma $x \in y$, $p \Vdash^* (\phi, \sigma)$ quando:*

  $\{q \in \mathbb{P} : \exists(\pi, s) \in \sigma(y)(q \leqslant s \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow V^{\mathbb{P}} (\theta \sim_{x,y} \sigma \wedge \theta(x) = \pi \wedge \theta(y) = \sigma(x) \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta)))\}$ é denso abaixo de p.

- *Se ϕ é da forma $\neg\psi$, $p \Vdash^* (\phi, \sigma)$ quando:*

  $\forall q \leqslant p(q \nVdash^* (\psi, \sigma)$.

  obsevação: $q \nVdash^* (\psi, \sigma)$ significa não vale $(q \Vdash^* (\psi, \sigma))$.

- *Se* ϕ *é da forma* $\psi \wedge \chi$, $p \Vdash^* (\phi, \sigma)$ *quando:*
  $p \Vdash^* (\psi, \sigma)$ *e* $p \Vdash^* (\chi, \sigma)$.

- *Se* ϕ *é da forma* $\exists x\, \psi$, $p \Vdash^* \phi$ *quando:*
  $\{r \in \mathbb{P} : \exists \theta : Var \longrightarrow V^{\mathbb{P}}\ (\theta \sim_x \sigma \wedge r \Vdash^* (\psi, \theta))\}$ *é denso a baixo de* p.

Lema 4.2.12. *A fórmula "A é denso abaixo de p" é externamente absoluta para* M.

Demonstração: Precisamos mostrar que

$$\forall\, \mathbb{P}, \leqslant, p, A \in M\ [A \text{ é denso abaixo de } p \leftrightarrow (A \text{ é denso abaixo de } p)^M]$$

Com efeito, sejam $\mathbb{P} \in M$ um conjunto parcialmente ordenado, $p \in \mathbb{P}$ e $A \in M$. (p é denso abaixo de A) significa $\forall q \in \mathbb{P}((q \leqslant p) \rightarrow \exists r \in A(r \leqslant q))$. Devemos mostrar, então, que (p é denso abaixo de A) é equivalente a $[\forall q \in \mathbb{P}((q \leqslant p) \rightarrow \exists r \in A(r \leqslant q))]^M$. Mas $[\forall q \in \mathbb{P}((q \leqslant p) \rightarrow \exists r \in A(r \leqslant q))]^M$ é equivalente a $\forall q \in \mathbb{P}((q \leqslant p)^M \rightarrow \exists r \in A(r \leqslant q)^M)$, mas como $p, q, r, \mathbb{P}, \leqslant \in M$, temos que $\forall q \in \mathbb{P}((q \leqslant p)^M \rightarrow \exists r \in A(r \leqslant q)^M)$ é equivalente a $\forall p \in \mathbb{P}((q \leqslant p) \rightarrow \exists r \in A(r \leqslant q))$. ■

Metalema 4.2.13. *Sejam* $\mathbb{P} \in M$, $G \subset \mathbb{P}$, $A(x)$ *uma fórmula com uma única variável livre e* $m, n \in Var$. *Assim temos:*

Se $\forall \sigma : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}\ \forall \theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}\ (\theta(n) \in_G \sigma(n) \wedge \theta(m) \in_G \sigma(m) \wedge A(\theta)) \Rightarrow A(\sigma)$, *então*

$\forall \sigma : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}} A(\sigma)$.

Demonstração: Seja $Z = \{\sigma : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}\}$. Defina a seguinte relação em Z. $\theta R \sigma$ quando $\theta(n) \in_G \sigma(n)$ e $\theta(m) \in_G \sigma(m)$. Pelo lema 2.3.3, para concluir, basta mostrar que R é bem fundada. Com efeito, seja $W \in Z$ não vazio. Pelo lema 4.1.3, o conjunto $\{\sigma(n); \sigma \in W\}$ munido da relação $\in_G$ possui elemento minimal, seja $\theta(n)$ tal elemento. Vejamos que θ é elemento minimal de W. Suponha que existe $\sigma \in W$ tal que $\sigma R \theta$, assim $\sigma(n) \in_G \theta(n)$, um absurdo. ■

Lema 4.2.14. *A fórmula* $f(x) = g(x)$ *é externamente absoluta.*

Demonstração: Sejam N um conjunto transitivo e $f, g, x \in N$. Temos que $f(x) = g(x)$ é equivalente a $\exists y((x, y) \in f \wedge (x, y) \in g) \wedge (f \text{ é função}) \wedge (g \text{ é função})$, mas, como N é transitivo, tal fórmula é equivalente a $\exists y \in N((x, y) \in f \wedge (x, y) \in g) \wedge (f \text{ é função}) \wedge (g \text{ é função})$, mas pelo lema 3.6.4, ela é equivalente a $\exists y \in N((x, y) \in f \wedge (x, y) \in g) \wedge (f \text{ é função})^N \wedge (g \text{ é função})^N$ que é equivalente a $(f(x) = g(x))^N$. ■

Corolário 4.2.15. *A fórmula* $\theta \sim_x \sigma$ *é externamente absoluta.*

Demonstração: Segue diretamente do lema anterior.

■

Lema 4.2.16. *A fórmula* $p \Vdash^* (x = y, \sigma)$ *é externamente absoluta para* M.

Demonstração: Sejam $\sigma, \mathbb{P}, p, x, y \in M$. Pela transitividade de M, temos que $im(\sigma) \subset M$ Por indução em $\mathbb{P}$ e pelo metalema 4.2.13, podemos assumir que, para todo $q \leqslant p$ e para toda $\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ tal que $\theta(x) \in_G \sigma(n) \wedge \theta(m) \in_G \sigma(y)$, temos que $(q \Vdash^* (x = y, \theta))^M \Leftrightarrow q \Vdash^* (x = y, \theta))$.

Vamos mostrar que o item 1) da definição relativizado a M permanece igual. O item 2) é análogo. Como $\sigma(x) \in M$, o item 1) relativizado a M é equivalente a:

Para todo $(\pi_1, s_1) \in \sigma(x)$, temos que $(\{q \leqslant p : q \leqslant s_1 \rightarrow \exists(\pi_2, s_2) \in \sigma(y)(q \leqslant s_2 \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow V^{\mathbb{P}}\ (\theta(x) = \pi_1 \wedge \theta(y) = \pi_2 \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta)))\}$ é denso abaixo de p $)^M$.

Assim, pelo lema 4.2.12, basta mostrar que $A = \{q \leqslant p : q \leqslant s_1 \rightarrow \exists(\pi_2, s_2) \in \sigma(y)(q \leqslant s_2 \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow V^{\mathbb{P}}\ (\theta(x) = \pi_1 \wedge \theta(y) = \pi_2 \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta)))\} \in M$.

Como M satisfaz o axioma da separação, temos que o conjunto $B = \{q \leqslant p; (q \leqslant s_1 \rightarrow \exists(\pi_2, s_2) \in \sigma(y)(q \leqslant s_2 \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow V^{\mathbb{P}}\ (\theta \sim_{x,y} \sigma \wedge \theta(x) = \pi_1 \wedge \theta(y) = \pi_2 \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta))))^M\} \in M$. Vejamos, então, que $A = B$.

Para isso vamos verificar que θ nas condicões do conjunto acima pertence a M. Lembrando que $\sigma \in M$. Como M satisfaz o axioma da separação e a fórmula $(a, b) \neq (c, d)$ é absoluta, temos que $\sigma \backslash \{(x, \sigma(x)), (y, \sigma(y))\} = \{(a, b) \in \sigma; (a, b) \neq (x, \sigma(x) \wedge (a, b) \neq (y, \sigma(y)\} \in M$. Mas como M satisfaz o axioma da união, o par ordenado é absoluto e $(x, \theta(x)), (y, \theta(y)) \in M$, temos que $\theta = (\sigma \backslash \{(x, \sigma(x)), (y, \sigma(y))\}) \cup (x, \theta(x)) \cup (y, \theta(y)) \in M$.

Assim $B = \{q \leqslant p; q \leqslant s_1 \rightarrow \exists(\pi_2, s_2) \in \sigma(y)(q \leqslant s_2 \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow V^{\mathbb{P}}\ (\theta \sim_{x,y} \sigma \wedge \theta(x) = \pi_1 \wedge \theta(y) = \pi_2 \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta)))^M\}$. Mas pelo corolário 4.2.15 e pela hipótese de indução temos que $B = \{q \leqslant p : q \leqslant s_1 \rightarrow \exists(\pi_2, s_2) \in \sigma(y)(q \leqslant s_2 \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow V^{\mathbb{P}}\ (\theta(x) = \pi_1 \wedge \theta(y) = \pi_2 \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta)))\} = A$.

■

Corolário 4.2.17. *Sejam $\mathbb{P} \in M$ um conjunto parcialmente ordenado, $p \in \mathbb{P}$, $\phi \in F$ e $\sigma : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ uma valoração. Então $(p \Vdash^* (\phi, \sigma))^M$ significa:*

- *Se ϕ é da forma $x = y$, $(p \Vdash^* (\phi, \sigma))^M$ quando:*

  1) para todo $(\pi_1, s_1) \in \sigma(x)$, temos que $\{q \leqslant p : q \leqslant s_1 \rightarrow \exists(\pi_2, s_2) \in \sigma(y)(q \leqslant s_2 \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}\ (\theta \sim_{x,y} \sigma \wedge \theta(x) = \pi_1 \wedge \theta(y) = \pi_2 \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta)))\}$ é denso abaixo de p.

  2) para todo $(\pi_2, s_2) \in \sigma(y)$, temos que $\{q \leqslant p : q \leqslant s_2 \rightarrow \exists(\pi_1, s_1) \in \sigma(x)(q \leqslant s_1 \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}\ (\theta \sim_{x,y} \sigma \wedge \theta(x) = \pi_1 \wedge \theta(y) = \pi_2 \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta)))\}$ é denso abaixo de p.

- *Se ϕ é da forma $x \in y$, $(p \Vdash^* (\phi, \sigma))^M$ quando:*

  $\{q \in \mathbb{P} : \exists(\pi, s) \in \sigma(y)(q \leqslant s \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}\ (\theta \sim_{x,y} \sigma \wedge \theta(x) = \pi \wedge \theta(y) = \sigma(x) \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta)))\}$ é denso abaixo de p.

- *Se ϕ é da forma $\neg\psi$, $(p \Vdash^* (\phi, \sigma))^M$ quando:*

  $\forall q \leqslant p\ (q \nVdash^* (\psi, \sigma))^M$.

  Obsevação: $q \nVdash^* (\psi, \sigma)$ significa não vale $(q \Vdash^* (\psi, \sigma))$.

- *Se ϕ é da forma $\psi \wedge \chi$, $(p \Vdash^* (\phi, \sigma))^M$ quando:*

  $(p \Vdash^* (\psi, \sigma))^M$ e $(p \Vdash^* (\chi, \sigma))^M$.

- *Se ϕ é da forma $\exists x\, \psi$, $p \Vdash^* \phi$ quando:*

  $\{r \in \mathbb{P} : \exists\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}(\theta \sim_x \sigma \wedge (r \Vdash^* (\psi, \theta))^M)\}$ é denso a baixo de p.

Demonstração: O caso $x = y$ segue diretamente do lema anterior. Os casos $x \in y$ e $\exists x\, \psi$ são análogos. E os casos $\neg\psi$ e $\psi \wedge \chi$ são imediatos. ■

Lema 4.2.18. *Sejam $\mathbb{P} \in M$ um conjunto parcialmente ordenado, $p \in \mathbb{P}$, $\phi \in F$ e σ uma valoração tal que para todo $n \in Var$, $\sigma(n)$ é um $\mathbb{P}$-nome. Então são equivalentes:*
1) $p \Vdash^* (\phi, \sigma)$;
2) $\forall r \leqslant p(r \Vdash^* (\phi, \sigma))$;
3) $\{r \in \mathbb{P} : r \Vdash^* (\phi, \sigma)\}$ é denso abaixo de p.

Demonstração: $2 \Rightarrow 1$ e $2 \Rightarrow 3$ são triviais. Vejamos $1 \Rightarrow 2$. Se ϕ é atômica ou da forma $\exists x\, \psi$, $1 \Rightarrow 2$ segue do seguinte fato: se D é denso abaixo de p e $r \leqslant p$, então D é denso abaixo de r. Se ϕ é da forma $\psi \wedge \chi$ ou $\neg\psi$, temos que $1 \Rightarrow 2$ segue diretamente da hipótse de indução. Vejamos $3 \Rightarrow 1$. Se ϕ é atômica ou da forma $\exists x\, \psi$, $1 \Rightarrow 2$ segue do seguinte fato: se o conjunto $\{r \in \mathbb{P} : D$ é denso abaixo de $r\}$ é denso abaixo de p, então D é denso abaixo de p. E, da mesma forma, se ϕ é da forma $\psi \wedge \chi$ ou $\neg\psi$, temos que $1 \Rightarrow 2$ segue diretamente da hipótse de indução. ■

Teorema 4.2.19. *Sejam $\phi \in F$, $\mathbb{P} \in M$ um conjunto parcialmente ordenado e G um filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, então para todos $\sigma : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ e $f : M^{\mathbb{P}} \longrightarrow M[G]$ dada por $f(\tau) = val(\tau, G)$, temos:*

$$\exists p \in G(p \Vdash^* (\phi, \sigma))^M \Leftrightarrow (M[G], f \circ \sigma) \models \phi.$$

Demonstração: Vamos fazer a prova por indução na complexidade de ϕ. Primeiramente, suponha que ϕ seja da forma $x = y$. Fixe σ e f como no enunciado. Precisamos mostrar que $\exists p \in G(p \Vdash^* (x = y, \sigma)) \Leftrightarrow (M[G], f \circ \sigma) \models x = y$, abrindo a definição de $(M[G], f \circ \sigma) \models x = y$, preciamos mostrar que $\exists p \in G(p \Vdash^* (x = y, \sigma)) \Leftrightarrow val(\sigma(x), G) = val(\sigma(y), G)$. Pelo metalema 4.2.13, podemos assumir que para toda $\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ tal que $\theta(x) \in_G \sigma(n) \wedge \theta(m) \in_G \sigma(y)$ temos $\exists p \in G(p \Vdash^* (x = y, \theta)) \Leftrightarrow val(\theta(x), G) = val(\theta(y), G)$.

Primeiramente façamos ($\Rightarrow$). Vejamos que $val(\sigma(x), G) \subset val(\sigma(y), G)$, usando a parte 1 do primeiro item da definição 4.2.17, a outra contenção é análoga usando a parte 2. Seja $a \in val(\sigma(x), G)$, assim $a = val(\pi_1, G)$ onde $\exists s_1 \in G((\pi_1, s_1) \in \sigma(x))$. Como G é filtro, podemos tomar $r \in G$ tal que $r \leqslant p$ e $r \leqslant s_1$, pelo lema 4.2.18, temos que $r \Vdash^* (\phi, \sigma)$. Seja $E = \{q \leqslant r; q \leqslant s_1 \Rightarrow \exists(\pi_2, s_2) \in \sigma(y)\, (q \leqslant s_2 \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}\, (\theta \sim_x \sigma \wedge \theta(x) = \pi_1 \wedge \theta(y) = \pi_2 \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta))\}$. Como $r \Vdash^* (\phi, \sigma)$, temos que E é denso abaixo de r. Pelo lema 4.2.9, tome $q \in E \cap G$, assim $q \leqslant r \leqslant s_1$, logo $\exists(\pi_2, s_2) \in \sigma(y)\, (q \leqslant s_2 \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}\, (\theta \sim_x \sigma \wedge \theta(x) = \pi_1 \wedge \theta(y) = \pi_2 \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta)$. Fixe um tal θ. Assim, $s_2 \in G$, portanto pela hipótese de indução, temos que $val(\theta(x), G) = val(\theta(y), G)$, ou seja, $val(\pi_1), G) = val(\pi_2, G)$, assim $a = val(\pi_1, G) \in val(\sigma(y), G)$.

Façamos agora ($\Leftarrow$). Assuma que $val(\sigma(x), G) = val(\sigma(y), G)$. Sejam:

$A = \{r \in \mathbb{P} : \exists(\pi_1, s_1) \in \sigma(x)(r \leqslant s_1 \wedge \forall(\pi_2, s_2) \in \sigma(y)\, \forall q \in \mathbb{P}((q \leqslant s_2 \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}\, (\theta \sim_x \sigma \wedge \theta(x) = \pi_1 \wedge \theta(y) = \pi_2 \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta))) \Rightarrow q \perp r))\}$,

$B = \{r \in \mathbb{P} : \exists(\pi_2, s_2) \in \sigma(y)(r \leqslant s_2 \wedge \forall(\pi_1, s_1) \in \sigma(x)\, \forall q \in \mathbb{P}((q \leqslant s_1 \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}\, (\theta \sim_x \sigma \wedge \theta(x) = \pi_1 \wedge \theta(y) = \pi_2 \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta))) \Rightarrow q \perp r))\}$,

$D = A \cup B \cup \{r \in \mathbb{P} : r \Vdash^* (x = y, \sigma)\}$.

Primeiramente, vamos mostrar que $G \cap A = \varnothing$. Suponha que exista $r \in G \cap A$, assim fixe $(\pi_1, s_1) \in \tau_1$ satisfazendo a propriedade descrita em A. Como $r \leqslant s_1$, temos que $s_1 \in G$, logo

$val(\pi_1, G) \in val(\sigma(x), G) = val(\sigma(y), G)$. Portanto existe $s_2 \in G$ tal que $(\pi_1, s_2) \in \sigma(y)$. Tome $\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ tal que $\theta \sim_x \sigma$ e $\theta(x) = \theta(y) = \pi_1$, assim $val(\theta(x), G) = val(\theta(y), G)$. Logo, pela hipótese de indução, existe $q_0 \in G$ tal que $q_0 \Vdash^* (x = y, \theta)$. Tome $q \in G$ satisfazendo $q \leqslant q_0$ e $q \leqslant s_2$. Assim, pelo lema 4.2.18, $q \Vdash^* (x = y, \theta)$, mas, pela propriedade descrita em A, temos que $q \perp r$, contradição, pois $r, q \in G$. A prova de que $G \cap B = \varnothing$ é análoga.

Vejamos que $A \in M$. Como M satisfaz o axioma da separação, basta mostrar que a fórmula que define A é absoluta. Pelo mesmo argumento usado no lema 4.2.16, temos que $\theta \in M$. Pelo metalema 4.2.13, podemos assumir que a fórmula $q \Vdash^* (x = y, \theta)$ é absoluta para M. E é fácil ver que a fórmula $p \perp q$ é absoluta. Portanto podemos concluir a absolutividade da fórmula definidora da A. Análogamente temos que $B \in M$. Mas como a intersecção é absoluta, e novamente, M satisfaz o axioma da separação, temos que $D \in M$.

Portanto, para concluir $(\Leftarrow)$, basta mostrar que D é denso, pois, se existe $p \in D \cap G$, mas como $p \notin A$ e $p \notin B$, temos que $p \Vdash^* (x = y, \sigma)$. De fato, seja $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \notin D$, assim $\neg(p \Vdash^* (x = y, \theta))$. Então 1) ou 2) do primeiro item da definição 4.2.17 falha. Suponha que 1) falha, ou seja, existe $(\pi_1, s_1) \in \sigma(x)$ tal que $\{q \leqslant p : q \leqslant s_1 \to \exists(\pi_2, s_2) \in \sigma(y)(q \leqslant s_2 \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}} (\theta \sim_x \sigma \wedge \theta(x) = \pi_1 \wedge \theta(y) = \pi_2 \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta)))\}$ não é denso abaixo de p. Logo existe $r \leqslant p$ tal que, para todo $q \leqslant r$, temos $q \notin \{q \leqslant p : q \leqslant s_1 \to \exists(\pi_2, s_2) \in \sigma(y)(q \leqslant s_2 \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}} (\theta \sim_x \sigma \wedge \theta(x) = \pi_1 \wedge \theta(y) = \pi_2 \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta)))\}$, ou seja, para todo $q \leqslant r$, temos que $q \leqslant s_1$ e $\forall(\pi_2, s_2) \in \sigma(y)\ (\neg(q \leqslant s_2 \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta)))$, em particular $r \leqslant s_1$, portanto $r \in A$, logo $r \in D$ e $r \leqslant p$. Analogamente, se 2) falha, encontramos $r \leqslant p$ com $r \in B \subset D$.

Vejamos agora o caso em que ϕ é $x \in y$. Provemos $(\Rightarrow)$. Assuma que existe $p \in G$ tal que $p \Vdash^* (x \in y, \sigma)$. Precisamos mostrar que $val(\sigma(x), G) \in val(\sigma(y), G)$. Temos que o conjunto

$D = \{q \in \mathbb{P} : \exists(\pi, s) \in \sigma(y)(q \leqslant s \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}} (\theta \sim_{x,y} \sigma \wedge \theta(x) = \pi \wedge \theta(y) = \sigma(x) \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta)))\}$

é denso abaixo de p. Logo, pelo lema 4.2.9, existe $q \in D \cap G$, assim existe $(\pi, s) \in \sigma(y)$ tal que $q \leqslant s$ e $\exists\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}} (\theta \sim_{x,y} \sigma \wedge \theta(x) = \pi \wedge \theta(y) = \sigma(x) \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta))$. Mas, pelo caso anterior, temos que $val(\theta(x), G) = val(\theta(y), G)$, ou seja $val(\sigma(x), G) = val(\pi, G)$, logo $val(\sigma(x), G) = val(\pi, G) \in val(\sigma(y), G)$.

Façamos agora a direção $(\Leftarrow)$. Suponha que $val(\sigma(x), G) \in val(\sigma(y), G)$, logo existe $(\pi, s) \in \sigma(y)$ com $s \in G$ tal que $val(\pi, G) = val(\sigma(x), G)$, seja $\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$, $\theta \sim_y \sigma$ com $\theta(y) = \pi$. Assim, $val(\theta(x), G) = val(\theta(y), G)$. Mas, pelo caso anterior, temos que existe $r \in G$ tal que $r \Vdash^* (x = y, \theta)$. Seja $p \in G$ tal que $p \leqslant r$ e $p \leqslant s$. Assim temos que para todo $q \leqslant p$ $(q \leqslant s \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}} (\theta \sim_{x,y} \sigma \wedge \theta(x) = \pi \wedge \theta(y) = \sigma(x) \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta))$, portanto o conjunto $\{q \in \mathbb{P} : \exists(\pi, s) \in \sigma(y)(q \leqslant s \wedge \exists\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}} (\theta \sim_{x,y} \sigma \wedge \theta(x) = \pi \wedge \theta(y) = \sigma(x) \wedge q \Vdash^* (x = y, \theta)))\}$ é denso abaixo de p.

Com isso, concluímos o caso em que ϕ é atômica. Para os casos seguintes, usaremos a hipótese de indução:

para todo ψ com complexidade menor que ϕ, $\sigma : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ e $f : M^{\mathbb{P}} \longrightarrow M[G]$ dada por $f(\tau) = val(\tau, G)$, temos:

$$\exists p \in G(p \Vdash^* (\psi, \sigma))^M \Leftrightarrow (M[G], f \circ \sigma) \models \psi.$$

Sejam $\sigma : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ e $f : M^{\mathbb{P}} \longrightarrow M[G]$ dada por $f(\tau) = val(\tau, G)$.

Vejamos agora o caso em que ϕ é $\neg\psi$. Façamos $(\Rightarrow)$. Assuma que $\exists p \in G(p \Vdash^* (\neg\psi, \sigma))^M$, fixe um tal p. Precisamos mostrar que $(M[G], f\circ\sigma) \models \neg\psi$, ou seja, que não vale $(M[G], f\circ\sigma) \models \psi$. Suponha por absurdo que $(M[G], f\circ\sigma) \models \psi$, assim, pela hipótese de indução, podemos fixar $q \in G$ tal que $(q \Vdash^* (\psi, \sigma))^M$. Tome $r \in G$ tal que $r \leqslant p$ e $r \leqslant q$. Assim temos que $(q \Vdash^* (\psi, \sigma))^M$, contradição com o fato que $(p \Vdash^* (\neg\psi, \sigma))^M$.

Façamos agora ($\Leftarrow$). Suponha que $(M[G], f\circ\sigma) \models \neg\psi$. Seja $D = \{p \in \mathbb{P}; (p \Vdash^* (\psi, \sigma))^M \vee (p \Vdash^* (\neg\psi, \sigma))^M\}$. Como M satisfaz o axioma da separação, temos que $D \in M$. Vejamos que D é denso. Seja $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \notin D$, logo não vale que $(p \Vdash^* (\neg\psi, \sigma))^M$. Assim existe $q \leqslant p$ tal que $(p \Vdash^* (\psi, \sigma))^M$, ou seja, tal $q \in D$. Posto que D é denso, tome $p \in G \cap G$. Não podemos ter que $(p \Vdash^* (\psi, \sigma))^M$, pois pela hipétese de indução teríamos que $(M[G], f\circ\sigma) \models \psi$, uma contradição. Portanto temos que $(p \Vdash^* (\neg\psi, \sigma))^M$.

O caso em que ϕ é $\psi \wedge \chi$ segue diretamente da hipótese de indução.

Vejamos, agora, o caso em que ϕ é $\exists x\, \psi$. Façamos ($\Rightarrow$). Fixe $p \in G$ tal que $p \Vdash^* \exists x\, \psi$. Pelo lema 4.2.9, $\{r \in \mathbb{P} : \exists\theta : Var \longrightarrow V^{\mathbb{P}}\, (\theta \sim_x \sigma \wedge (r \Vdash^* (\psi, \theta))^M\} \cap G \neq \varnothing$. Assim podemos tomar $r \in G$ e $\theta : Var \longrightarrow V^{\mathbb{P}}$ com $\theta \sim_x \sigma$ tais que $(r \Vdash^* (\psi, \theta))^M$. Mas, pela hipótese de indução, temos que $(M[G], f\circ\theta) \models \psi$. Mas, como $\theta \sim_x \sigma$, temos que $f\circ\theta \sim_x f\circ\sigma$, logo $(M[G], f\circ\sigma) \models \exists x\, \psi$.

Finalmente mostremos ($\Leftarrow$). Suponha que $(M[G], f\circ\sigma) \models \exists x\, \psi$. Fixe $\theta' : Var \longrightarrow M[G]$ tal que $\theta' \sim_x f\circ\sigma$ e $(M[G], \theta') \models \psi$. Vamos definir $\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ da seguinte fomra:

- Se $y \neq x$, $\theta(y) = \sigma(y)$;
- $\theta(x) = g\circ\theta'$, onde g é uma inversa a direita de f.

Assim, temos que $\theta' = f\circ\theta$, logo $(M[G], f\circ\theta) \models \psi$. Mas, pela hipótese de indução, podemos tomar $p \in G$ tal que $(p \Vdash^* (\psi, \theta))^M$, assim temos que $\forall r \leqslant p\, (r \Vdash^* (\psi, \theta))^M$, portanto o conjunto $\{r \in \mathbb{P} : \exists\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}(\theta \sim_x \sigma \wedge (r \Vdash^* (\psi, \theta))^M)\}$ é denso abaixo de p, ou seja, $p \Vdash^* \exists x\, \psi$. ■

Teorema 4.2.20. *Sejam $\phi \in F$, $\mathbb{P} \in M$ um conjunto parcialmente ordenado, $\sigma : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ e $f : M^{\mathbb{P}} \longrightarrow M[G]$ dada por $f(\tau) = val(\tau, G)$, então temos que:*

(a) Para todo $p \in \mathbb{P}$:

$$p \Vdash (\phi, \sigma) \Leftrightarrow (p \Vdash^* (\phi, \sigma))^M.$$

(b) Para todo G $\mathbb{P}$-genérico sobre M:

$$(M[G], f\circ\sigma) \models \phi \Leftrightarrow \exists p \in G(p \Vdash (\phi, \sigma)).$$

Demonstração: Façamos primeiramente (a). ($\Leftarrow$) segue diretamente do teorema 4.2.19. Vejamos ($\Rightarrow$). Suponha que $p \Vdash (\phi, \sigma)$. Pelo lema 4.2.18, basta mostrar que o conjunto $\{r \leqslant p : (r \Vdash^* (\phi, \sigma))^M\}$ é denso abaixo de p. Suponha que não seja o caso, logo $\exists q \leqslant p(\forall r \leqslant q(r \nVdash^* (\phi, \sigma))^M$, fixe q satisfazendo tal propriedade. Assim, temos que $(q \Vdash^* (\neg\phi, \sigma))^M$. Mas, pelo item (a), temos que $q \Vdash (\neg\phi, \sigma)$. Seja G $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $q \in G$ (observe que tal G sempre existe, na pior da hipóteses, podemos tomar $G = \mathbb{P}$). Assim, como $q \Vdash (\neg\phi, \sigma)$, temos que $(M[G], f\circ\sigma) \models \neg\phi$, mas, como $q \leqslant p$, temos que $p \in G$, logo, como $p \Vdash (\phi, \sigma)$, temos que $(M[G], f\circ\sigma) \models \phi$, contradição.
O item (b) segue diretamente do teorema 4.2.19 e do item (a). ■

Os teoremas 4.2.19 e 4.2.20, em particular 4.2.20 (a), são os principais resultados da seção. Com 4.2.20 (a), seremos capazes de mostrar que uma série de conjuntos definidos por $\Vdash$ pertence a M. Por exemplo, dados $\mathbb{P} \in M$, $\phi \in F$ e $\sigma : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$, podemos mostrar que $\{p \in \mathbb{P}; p \Vdash (\phi, \sigma)\} \in M$. A estratégia é a seguinte: por 4.2.20 (a), temos que $\{p \in \mathbb{P}; p \Vdash (\phi, \sigma)\} = \{p \in \mathbb{P}; (p \Vdash^* (\phi, \sigma))^M\}$. Assim, como $\mathbb{P} \in M$, e como vale o axioma da separação relativizado a M, temos que $\{p \in \mathbb{P}; (p \Vdash^* (\phi, \sigma))^M\} \in M$. Com isso, conseguiríamos se quiséssemos fazer todo o argumento da consistência relativa de $\neg CH$ sem sair do modelo, bastando provar, em M, que para alguma valoração σ e algum $p \in \mathbb{P}$ vale $p \Vdash^* (\neg CH, \sigma)$.

Corolário 4.2.21. *Sejam $\mathbb{P} \in M$ um conjunto parcialmente ordenado, $\sigma : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ e $\phi \in F$. Então:*

(a) $\{p \in \mathbb{P} : p \Vdash (\phi, \sigma) \vee p \Vdash (\neg\phi, \sigma)\}$ é denso em $\mathbb{P}$;

(b) para todo $p \in \mathbb{P}$ temos: $p \Vdash (\neg\phi, \sigma)$, se e somente se, $\forall q \leqslant p(p \nVdash (\neg\phi, \sigma))$;

(c) para todo $p \in \mathbb{P}$ temos: $p \Vdash (\exists x\, \phi, \sigma)$, se e somente se, $\{r \in \mathbb{P} : \exists\theta : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}(\theta \sim_x \sigma \wedge r \Vdash (\psi, \theta))\}$ é denso a baixo de p.

Demonstração: Façmos (a). Pelo teorema 4.2.20, temos que $A = \{p \in \mathbb{P} : p \Vdash (\phi, \sigma) \vee p \Vdash (\neg\phi, \sigma)\} = \{p \in \mathbb{P} : (p \Vdash^* (\phi, \sigma))^M \vee (p \Vdash^* (\neg\phi, \sigma))^M\} = \{p \in \mathbb{P} : (p \Vdash^* (\phi, \sigma))^M \vee \forall q \leqslant p(q \nVdash^* (\phi, \sigma))^M\}$. Seja $p \in \mathbb{P}$, se $p \in A$ não há nada a fazer. Se $p \notin A$, em particular, temos que não vale $\forall q \leqslant p(q \nVdash^* (\phi, \sigma))^M$, logo $\exists q \leqslant p(q \Vdash^* (\phi, \sigma))^M$, assim $\exists q \in p(q \in A)$.

Os itens (b) e (c) seguem diretamente do teorema 4.2.20 e do corolário 4.2.17. ■

4.3 M[G] Satisfaz os Axiomas de ZFC

Já foi visto na seção 4.1 que valem infinidade, extensão, regularidade, par e união relativizados a $M[G]$. Vejamos aqui os outros. Usando o metalema 2.1.3, ao invés de mostrar que $M[G]$ satisfaz o esquema de axiomas da substituição, vamos mostrar que $M[G]$ satisfaz o esquema de axiomas da separação e da substituição fraco. Para ser mais preciso, de fato, vamos mostrar que $M[G]$ satisfaz o esquema de axiomas da substituição fraco, todos os infinitos axiomas de uma só vez. Porém no caso da separação o que provaremos é o seguinte: dada uma instância do esquema de axiomas, vamos mostrar que $M[G]$ satisfaz essa instância. Vale notar também que no caso dos esquemas da separação e substituição, vamos mostrar que $M[G] \models \phi$, para cada instância desses axiomas, ou seja, $M[G]$ as satisfaz. Já no caso dos outros axiomas, o que vamos mostrar é que eles valem relativizados a $M[G]$, ou seja, que vale $A^{M[G]}$, onde A é axioma da linguagem. Mas, pelo metacorolário 3.4.16, sabemos que não faz diferença fazer de um jeito ou de outro.

Teorema 4.3.1. *$M[G]$ satisfaz o axioma da substituição fraco.*

Demonstração: Seja $\phi \in F$ com suas variáveis livres entre $m, n, j_1, ..., j_i$ e $l \in Var\backslash\{m, n, j_1, ..., j_i\}$. Precisamos mostrar que:

$$M[G] \models \forall j_1 ... \forall j_i \forall k((\forall n(n \in k \rightarrow \exists! m\, \phi)) \rightarrow \exists l \forall n(n \in k \rightarrow \exists m(m \in l \wedge \phi))).$$

Ou seja, dada $\sigma : Var \longrightarrow M[G]$ precisamos mostrar que:

$$(M[G], \sigma) \models \forall j_1 ... \forall j_i \forall k((\forall n(n \in k \rightarrow \exists! m\, \phi)) \rightarrow \exists l \forall n(n \in k \rightarrow \exists m(m \in l \wedge \phi))).$$

Para tal, basta mostrar que para toda $\sigma_1 : Var \longrightarrow M[G]$ temos:

$$(M[G], \sigma_1) \models (\forall n(n \in k \rightarrow \exists! m\, \phi)) \rightarrow \exists l \forall n(n \in k \rightarrow \exists m(m \in l \wedge \phi)).$$

Seja $\sigma_1 : Var \longrightarrow M[G]$. Suponha que:

$$(M[G], \sigma_1) \models \forall n(n \in k \rightarrow \exists! m\, \phi).$$

Em particular

$$(M[G], \sigma_1) \models \forall n(n \in k \rightarrow \exists m\, \phi).$$

(*) Assim para toda $\theta : Var \longrightarrow M[G]$ com $\theta \sim_n \sigma_1$ existe $\theta' : Var \longrightarrow M[G]$ com $\theta' \sim_m \theta$ tal que $M[G] \models \phi$.

Precisamos mostrar que

$$(M[G], \sigma_1) \models \exists l \forall n(n \in k \rightarrow \exists m(m \in l \wedge \phi)).$$

Com efeito, sejam $f : M^{\mathbb{P}} \longrightarrow M[G]$, que leva τ em $val(\tau, G)$, $\tau' \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $val(\tau', G) = \sigma_1(k)$ e $S = \{\tau \in M^{\mathbb{P}} : \exists p \in \mathbb{P}\, \exists \pi \in dom(\tau')\, \exists \mu : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}\ (\mu(n) = \pi\ \wedge\ \mu(m) = \tau\ \wedge\ \mu(k) = \tau' \wedge\ \forall i \in Var\ (i \notin \{n, k, m, l\} \Rightarrow f \circ \mu(i) = \sigma_1(i))\ \wedge\ p \Vdash (\phi, \mu)\}$.

Vejamos que $S \in M$. Pelo lema 4.2.20 (a) temos que $S = \{\tau \in M^{\mathbb{P}} : \exists p \in \mathbb{P}\, \exists \pi \in dom(\tau')\, \exists \mu : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}\ (\mu(n) = \pi\ \wedge\ \mu(m) = \tau\ \wedge\ \mu(k) = \tau' \wedge\ \forall i \in Var\ (i \notin \{n, k, m, l\} \Rightarrow f \circ \mu(i) = \sigma_1(i))\ \wedge\ (p \Vdash^* (\phi, \mu))^M\}$, mas pelo lema 3.6.6, temos que $S = \{\tau \in M^{\mathbb{P}} : (\exists p \in \mathbb{P}\, \exists \pi \in dom(\tau')\, \exists \mu : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}\ (\mu(n) = \pi\ \wedge\ \mu(m) = \tau\ \wedge\ \mu(k) = \tau' \wedge\ \forall i \in Var\ (i \notin \{n, k, m, l\} \Rightarrow f \circ \mu(i) = \sigma_1(i))\ \wedge\ (p \Vdash^* (\phi, \mu)))^M\}$, assim, como M satisfaz o axioma da separação, temos que $S \in M$.

Seja $\rho = S \times \mathbb{P}$. Como a fórmula $x = A \times B$ é absoluta, temos que $\rho \in M$, é fácil ver que ρ é $\mathbb{P}$-nome, assim $\rho \in M^{\mathbb{P}}$, logo $val(\rho, G) \in M[G]$. Assim podemos definir $\sigma_2 : Var \longrightarrow M[G]$ tal que $\sigma_2 \sim \sigma_1$ e $\sigma_2(l) = val(\rho, G)$. Dessa forma, para concluir o teorema basta mostrar que:

$$(M[G], \sigma_2) \models \forall n(n \in k \rightarrow \exists m(m \in l \wedge \phi)).$$

De fato, seja $\sigma_3 \sim_n \sigma_2$ e suponha que $\sigma_3(n) \in \sigma_3(k) = \sigma_2(k) = \sigma_1(k) = val(\tau', G)$. Queremos mostrar que:

$$(M[G], \sigma_3) \models \exists m(m \in l \wedge \phi)).$$

Ou seja, precisamos mostrar que existe $\sigma_4 : Var \longrightarrow M[G]$ tal que $\sigma_4 \sim_m \sigma_3$, $\sigma_4(m) \in \sigma_4(l)$ e $(M[G], \sigma_4) \models \phi$.

Com efeito, fixe $\pi \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\sigma_3(n) = val(\pi, G)$. Defina $\theta : Var \longrightarrow M[G]$ tal que $\theta(n) = \sigma_3(n)$ e $\theta \sim_n \sigma_1$. Por (*), tome θ' tal que $\theta' \sim_m \theta$ e $(M[G], \theta') \models \phi$. Seja $\sigma_4 : Var \longrightarrow M[G]$ tal que $\sigma_4(m) = \theta'(m)$ e $\sigma_4 \sim_m \sigma_3$. Assim temos que $\sigma_4 \sim_l \theta'$, mas, como l não ocorre livre em ϕ e $(M[G], \theta') \models \phi$, temos que $(M[G], \sigma_4) \models \phi$. Portanto, para concluir, basta mostrar que $\sigma_4(m) \in \sigma_4(l) = \sigma_3(l) = \sigma_2(l)$.

Seja $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $val(\tau, G) = \sigma_4(m)$. Seja $g : M[G] \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ uma inversa à direita da função f definida acima. Defina $\mu : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ da seguinte forma:

$\mu(n) = \pi$;
$\mu(m) = \tau$;
$\mu(k) = \tau'$;
$\mu(l) = g \circ \sigma_4(l)$;
$\mu(i) = g \circ \sigma_1(i)$, se $i \notin \{n.m, k, l\}$.

Assim temos que:
$f \circ \mu(n) = val(\pi, G) = \sigma_3(n) = \sigma_4(n)$;
$f \circ \mu(m) = val(\tau, G) = \sigma_4(m)$;
$f \circ \mu(k) = val(\tau', G) = \sigma_1(k) = \sigma_2(k) = \sigma_3(k) = \sigma_4(k)$;
$f \circ \mu(l) = f \circ g \circ \sigma_4(l) = \sigma_4(l)$;
$f \circ \mu(i) = f \circ g \circ \sigma_1(i) = \sigma_2(i) = \sigma_3(i) = \sigma_4(i)$, se $i \notin \{n.m, k, l\}$.

Portanto $f \circ \mu = \sigma_4$, mas, como $(M[G], \sigma_4) \models \phi$, pelo teorema 4.2.20, temos que $\exists p \in G(p \Vdash (\phi, \mu))$, logo $\tau \in S$, portanto:

$$\sigma_4(m) = val(\tau, G) \in val(\rho, G) = \sigma_2(l).$$

■

Metateorema 4.3.2. *M[G] satisfaz cada instância do axioma da separação.*

Demonstração: Seja $\phi \in F$ com suas variáveis livres entre $k, n, j_1, ..., j_1$. Precisamos mostrar que

$$M[G] \models \forall j_1 ... \forall j_i \forall k \exists m \forall n (n \in m \leftrightarrow n \in k \wedge \phi).$$

Ou seja, precisamos mostrar que, para toda $\sigma : Var \longrightarrow M[G]$ temos que:

$$(M[G], \sigma) \models \exists m \forall n (n \in m \leftrightarrow n \in k \wedge \phi).$$

Fixe $\sigma : Var \longrightarrow M[G]$, seja $\theta : Var \longrightarrow M[G]$ tal que $\theta \sim_n \sigma$ e $\theta(n) = x$. Pelo axioma da separação (da linguagem) existe Y tal que:

$$(*)\ \forall x (x \in Y \Leftrightarrow x \in \sigma(k) \wedge (M[G], \theta) \models \phi).$$

Suponha, por enquanto, que $Y \in M[G]$. Assim, podemos tomar $\sigma_1 : Var \longrightarrow M[G]$ tal que $\sigma_1 \sim_m \sigma$ e $\sigma_1(m) = Y$. Seja $\sigma_2 : Var \longrightarrow M[G]$ tal que $\sigma_2 \sim_n \sigma_1$. Como (*) vale para todo x, tomando $x = \sigma_2(n)$, temos que:

$$\sigma_2(n) \in Y \Leftrightarrow \sigma_2(n) \in \sigma(k) \wedge (M[G], \theta) \models \phi).$$

Mas, como $Y = \sigma_1(m) = \sigma_2(m)$ temos que:

$$\sigma_2(n) \in \sigma_2(m) \Leftrightarrow \sigma_2(n) \in \sigma(k) \wedge (M[G], \theta) \models \phi).$$

Por outro lado temos:

$\theta(n) = x = \sigma_2(n)$;
$\theta(i) = \sigma(i) = \sigma_1(i)\sigma_2(i)$, se $i \notin \{m, n\}$.

Logo $\theta \sim_m \sigma_2$. Assim, como m não ocorre livre em ϕ, temos que

$$(M[G], \theta) \models \phi) \Leftrightarrow (M[G], \sigma_2) \models \phi).$$

Além disso, $\sigma(k) = \sigma_1(k) = \sigma_2(k)$. Portanto:

$$\sigma_2(n) \in \sigma_2(m) \Leftrightarrow \sigma_2(n) \in \sigma_2(k) \wedge (M[G], \sigma_2) \models \phi).$$

Ou seja:

$$(M[G], \sigma_2) \models (n \in m \leftrightarrow n \in k \wedge \phi).$$

Logo:

$$(M[G], \sigma_1) \models \forall n(n \in m \leftrightarrow n \in k \wedge \phi).$$

Portanto:

$$(M[G], \sigma) \models \exists m \forall n(n \in m \leftrightarrow n \in k \wedge \phi).$$

Assim, para terminar a demonstração, basta mostrar que $Y \in M[G]$. Seja $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $val(\tau, G) = \sigma(k)$. Sejam $f : M^{\mathbb{P}} \longrightarrow M[G]$, que leva τ em $val(\tau, G)$ e

$\rho = \{(\pi, p) \in dom(\tau) \times \mathbb{P}; \exists \mu : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}(\mu(n) = \pi \wedge \mu(k) = \tau \wedge \forall i \in Var(i \notin \{m, k, n\} \Rightarrow f \circ \mu(i) = \theta(i)) \wedge (p \Vdash (n \in k \wedge \phi, \mu)))\}$.

Pelo mesmo argumento usado para mostrar o axioma da substituição, temos que $\rho \in M$, logo $\rho \in M^{\mathbb{P}}$. Vamos verificar que $Y = val(\rho, G)$, concluindo a demonstração. Primeiramente seja $x \in val(\rho, G)$, assim $x = val(\pi, G)$, onde π tal que $(\pi, p) \in \rho$, para algum $p \in G$.

Assim, podemos fixar $\mu : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ tal que $(\mu(n) = \pi$ e $\mu(k) = \tau$ e $\forall i \in Var(i \notin \{m, k, n\} \Rightarrow f \circ \mu(i) = \theta(i))$ e $(p \Vdash (\phi, \mu))$ e $(p \Vdash (n \in k, \mu))$. Observe que:

$f \circ \mu(k) = val(\tau, G) = \sigma(k) = \theta(k)$;
$f \circ \mu(n) = val(\pi, G) = x = \theta(n)$.

Como $p \in G$, por definição de $\Vdash$, temos que $(M[G], f \circ \mu) \models n \in m$ e $(M[G], f \circ \mu) \models \phi$. Assim, $f \circ \mu(n) \in f \circ \mu(k)$, ou seja, $x \in \sigma(k)$. Por outro lado, como $f \circ \mu \sim_m \theta$ e m não ocorre livre em ϕ, temos que $(M[G], \theta) \models \phi$, portanto $x \in Y$.

Reciprocamente seja $x \in Y$, assim $x \in \sigma(k)$ e $(M[G], \theta) \models \phi$. Logo $x = val(\pi, G)$ para $\pi \in dom(\tau)$. Seja g uma inversa a direta de f. Defina $\mu : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ a seguinte valoração:

$\mu(n) = \pi$;
$\mu(k) = \tau$;

$\mu(i) = g \circ \theta(i)$, se $i \notin \{n, k\}$.

Assim, $f \circ \mu = \theta$, logo $(M[G], f \circ \mu) \models \phi$. Por outro lado, como $x \in \sigma(k)$, temos que $val(\pi, G) \in val(\tau, G)$, ou seja, $f \circ \mu(n) \in f \circ \mu(k)$, logo $(M[G], f \circ \mu) \models n \in m$. Portanto $(M[G], f \circ \mu) \models n \in m \wedge \phi$. Assim, pelo lema 4.2.20 (b), existe $p \in G$ tal que $p \Vdash (n \in k \wedge \phi, \mu)$. Logo $(\pi, p) \in \rho$, portanto $x \in val(\rho, G)$.

■

Aqui vale a pena, novamente, fazer um contraponto entre o metateorema 4.3.2 e o lema 3.5.9. Como já foi mencionado na seção 3.5, o lema foi demonstrado de uma vez só, sem precisar passar para a metalinguagem. Aqui, 4.3.2, precisa ser um metateorema, pois, para provar que $M[G]$ satisfaz uma única instância do axioma da separação da sublinguagem, precisamos usar uma instância do axioma da separação da linguagem relativa a esse axioma da sublinguagem. Assim, 4.3.2 não pode ser um teorema, pois sua prova não seria finita, uma vez que seriam necessárias infinitas instâncias do axioma da separação para prová-lo.

Teorema 4.3.3. *$M[G]$ satisfaz o axioma das partes.*

Demonstração: Vamos mostrar que

$$\forall x \in M[G]\ \exists y \in M[G]\ \forall z \in M[G]\ (z \subset x \Rightarrow z \in y).$$

Com efeito, seja $x \in M[G]$. Fixe $\tau' \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $x = val(\tau', G)$. Sejam $S = \{\tau \in M^{\mathbb{P}}; dom(\tau) \subset dom(\tau')\}$, $\rho = S \times \mathbb{P}$ e $y = val(\rho, G)$.

Vejamos que $\forall z \in M[G]\ (z \subset x \Rightarrow z \in y)$. De fato, seja $z \in M[G]$ tal que $z \subset x = val(\tau', G)$. Fixe $\tau^* \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $z = val(\tau^*, G)$. Seja $\tau = \{(\pi, p); \pi \in dom(\tau') \wedge \exists \sigma : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}\ (\sigma(m) = \pi \wedge \sigma(n) = \tau^* \wedge\ p \Vdash (m \in n, \sigma))\}$. É fácil ver que $\tau \in S$, assim $\forall p \in \mathbb{P}\ ((\tau, p) \in \rho)$, logo, como $G \neq \emptyset$, $\tau \in_G \rho$, logo $val(\tau, G) \in val(\rho, G)$.

Portanto, para concluir, basta mostrar que $val(\tau, G) = val(\tau^*, G)$. Primeiramente, seja $val(\pi, G) \in val(\tau^*, G) \subset val(\tau', G)$. Assim, como $val(\pi, G) \in val(\tau', G)$, temos que $\pi \in dom(\tau')$. Seja $\sigma : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ tal que $\sigma(m) = \pi$ e $\sigma(n) = \tau^*$, assim, como $val(\pi, G) \in val(\tau^*, G)$, pelo teorema 4.2.20 (b), temos que existe $p \in G$ tal que $p \Vdash (m \in n, \sigma)$, logo, $(\pi, p) \in \tau$, assim $\pi \in_G \tau$, portanto $val(\pi, G) \in val(\tau, G)$.

Reciprocamente, seja $val(\pi, G) \in val(\tau, G)$. Assim, $\exists p \in G\ (\pi, p) \in \tau$. Fixe $\sigma : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ tal que $\sigma(m) = \pi$, $\sigma(n) = \tau^*$ e $p \Vdash (m \in n, \sigma)$. Assim, por definição de $\Vdash$, temos que $val(\pi, G) \in val(\tau^*, G)$.

■

Teorema 4.3.4. *M[G] satisfaz o axioma da escolha.*

Demonstração: Pelo lema 2.1.5, precisamos mostrar que:

$$\forall x \in M[G]\ \exists \alpha \in M[G]\ \exists f \in M[G]\ (\alpha\ \acute{e}\ ordinal \wedge f \text{ é função} \wedge\ dom(f) = \alpha \wedge\ x \subset im(f))^{M[G]}.$$

Mas, como todas as fórmulas entre parênteses são absolutas, precisamos mostrar que:

$$\forall x \in M[G]\ \exists \alpha \in M[G]\ \exists f \in M[G]\ (\alpha\ \acute{e}\ ordinal \wedge f \text{ é função} \wedge\ dom(f) = \alpha \wedge\ x \subset im(f)).$$

De fato, seja $x \in M[G]$, fixe $\rho \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $x = val(\rho, G)$. Como M satisfaz o axioma da escolha, pelo lema 2.1.5 temos que existem $\alpha \in M$ e $f \in M$ tais que $\alpha\ \acute{e}\ ordinal$, f é função,

$dom(f) = \alpha$ e $dom(\rho) = im(f)$. Seja $\tau = \{op(\check{\beta}, f(\beta)) : \beta \in \alpha\} \times \mathbb{P}$. Observe que a fórmula $a = op(\check{\beta}, f(\beta))$ é absoluta, pois as fórmulas que a compõem são todas absolutas, assim $\tau \in M$. para cada $\beta \in \alpha$, temos que $\check{\beta}$ é $\mathbb{P}$-nome e $f(\beta)$ é $\mathbb{P}$-nome, pois $f(\beta) \in dom(\rho)$, logo τ é um $\mathbb{P}$-nome. Logo $\tau \in M^{\mathbb{P}}$.

Seja $g = \{(\beta, val(f(\beta), G)) : \beta \in \alpha\}$, vamos mostrar que $g = val(\tau, G)$. Com efeito, seja $w \in g$, então existe $\beta \in \alpha$ tal que $w = (\beta, val(f(\beta), G))$, assim pelos lemas 4.1.15 e 4.1.24 temos que $w = val(op(\check{\beta}, f(\beta)), G)$, seja $p \in G$ qualquer, como $(op(\check{\beta}, f(\beta)), p) \in \tau$ temos que $w \in val(\tau, G)$. Reciprocamente, seja $val(\tau', G) \in val(\tau, G)$, assim existe $p \in G$ tal que $(\tau', p) \in \tau$, logo $\tau' = op(\check{\beta}, f(\beta))$, onde $\beta \in \alpha$, logo $val(\tau', G) = (\beta, val(f(\beta), G))$, assim $val(\tau', G) \in g$.

Portanto temos que $val(\tau, G) = \{(\beta, val(f(\beta), G)) : \beta \in \alpha\}$. Assim $val(\tau, G)$ é a função que procuravamos, ou seja, $val(\tau, G)$ é função, $dom(val(\tau, G)) = \alpha$, $\alpha \in M[G]$, $val(\tau, G) \in M[G]$. Resta mostrar, apenas, que $val(\rho, G) \subset im(val(\tau, G))$. Com efeito, seja $val(\pi, G) \in val(\rho, G)$, assim existe $p \in G$ tal que $(\pi, p) \in \rho$, ou seja, $\pi \in dom(\rho)$, logo existe $\beta \in \alpha$ tal que $\pi = f(\beta)$, assim $val(\pi, G) = val(f(\beta), G) = val(\tau, G)\ (\beta)$. Portanto $val(\pi, G) \in im(val(\tau, G))$.

$\blacksquare$

Capítulo 5

Consistência de $ZFC + \neg CH$

Após mostrar que $M[G]$ satisfaz cada pedaço finito de ZFC, precisamos mostrar que $M[G]$ de fato satisfaz $\neg CH$. Esse será o objetivo deste capítulo.

5.1 Preservação de Cardinais

Nesta primeira seção vamos mostrar que, em um tipo de ordem parcial específica, c.c.c. (definiremos em breve), ser cardinal em M é equivalente a ser cardinal em $M[G]$.

Lema 5.1.1. *A fórmula* $(p \perp q$ *em* $(\mathbb{P}, \leqslant))$ *é absoluta.*

Demonstração: Seja N um conjunto transitivo. Precisamos mostrar que $\forall p, q, \mathbb{P}, \leqslant \in N\ [(p \perp q)^N \Leftrightarrow p \perp q]$. De fato, sejam $p, q, \mathbb{P}, \leqslant \in N$. $(p \perp q)^N$ é equivalente a $[\forall r \in \mathbb{P}\,((r,p) \in \leqslant \rightarrow \neg((r,q) \in \leqslant))]^N$, mas, como $p, q, \mathbb{P}, \leqslant \in N$ e a fórmula que define o par ordenado é absoluta, temos que esta última fórmula é equivalente a $\forall r \in \mathbb{P}\,((r,p) \in \leqslant \rightarrow \neg((r,q) \in \leqslant))$, que é equivalente a $(p \perp q)$. ■

Definição 5.1.2. *Sejam* $(\mathbb{P}, \leqslant)$ *um conjunto parcialmente ordenado e* $X \subset \mathbb{P}$. *Dizemos que* X *é uma* ***anticadeia em*** $\mathbb{P}$ *quando* $\forall p, q \in X\ (p \neq q \Rightarrow p \perp q)$.

Lema 5.1.3. *A fórmula* $(X$ *é uma anticadeia em* $(\mathbb{P}, \leqslant))$ *é absoluta.*

Demonstração: Seja N um conjunto transitivo. Precisamos mostrar que $\forall X, \mathbb{P}, \leqslant \in N\ [(X$ é uma anticadeia em $(\mathbb{P}, \leqslant))^N \Leftrightarrow X$ é uma anticadeia em $(\mathbb{P}, \leqslant)]$. De fato, sejam $X, \mathbb{P}, \leqslant \in N$. $(X$ é uma anticadeia em $(\mathbb{P}, \leqslant))^N$ significa $[\forall p, q \in X\ (p \neq q \rightarrow p \perp q)]^N$, mas como $X, \mathbb{P}, \leqslant \in N$ e vale o lema 5.1.1, esta última fórmula é equivalente a $\forall p, q \in X\ (p \neq q \rightarrow p \perp q)$, que significa $(X$ é uma anticadeia em $(\mathbb{P}, \leqslant))$. ■

Definição 5.1.4. *Seja* $(\mathbb{P}, \leqslant)$ *um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que* $\mathbb{P}$ *tem* ***c.c.c.*** *quando toda anticadeia em* $\mathbb{P}$ *for enumerável. (c.c.c. vem da expressão em inglês: countable chain condition)*

Lema 5.1.5. *Sejam* $\mathbb{P} \in M$ *tal que* $(\mathbb{P}$ *é c.c.c.*$)^M$, $A, B \in M$, G *um filtro* $\mathbb{P}$*-genérico sobre* M *e* $h \in M[G]$ *tal que* $dom(h) = A$ *e* $im(h) = B$. *Então existe uma função* $F \in M$ *tal que* $dom(F) = A$, $im(F) \subset \mathcal{P}(B)$, $\forall a \in A\ (h(a) \in F(a))$ *e* $\forall a \in A\ (|F(a)| \leqslant \omega)^M$.

Demonstração: Seja $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $val(\tau, G) = h$. Como as fórmulas: h é função, $dom(h) = A$ e $im(h) = B$ são absolutas para $M[G]$, temos que:

$$[h \text{ é função} \wedge\ dom(h) = A \wedge im(h) = B]^{M[G]}.$$

Considere g a função de Gödel e $f : M^{\mathbb{P}} \longrightarrow M[G]$ dada por $f(\tau) = val(\tau, G)$.

Seja $\sigma : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ tal que:

$\sigma(g(h)) = \tau$;
$\sigma(g(A)) = \check{A}$;
$\sigma(g(B)) = \check{B}$.

Assim temos:

$f \circ \sigma(g(h)) = f(\tau) = h$;
$f \circ \sigma(g(A)) = f(\check{A}) = A$;
$f \circ \sigma(g(B)) = f(\check{B}) = B$.

Ou seja, $f \circ \sigma(g(v)) = v$, para toda variável livre v da fórmula:

$$h \text{ é função} \wedge\ dom(h) = A \wedge im(h) = B.$$

Seja $\phi = g(h \text{ é função} \wedge\ dom(h) = A \wedge im(h) = B)$. Assim, pelo mateteorema 3.4.15, temos que $(M[G], f \circ \sigma) \models \phi$. Assim, pelo teorema 4.2.20 (b), temos que, existe $p \in G$ tal que $p \Vdash (\phi, \sigma)$.

Para cada $(a, b) \in A \times B$, seja $\sigma_{(a,b)} : Var \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ tal que:

$\sigma_{(a,b)}(g(h)) = \tau$;
$\sigma_{(a,b)}(g(a)) = \check{a}$;
$\sigma_{(a,b)}(g(b)) = \check{b}$;
$\sigma_{(a,b)}(g(A)) = \check{A}$;
$\sigma_{(a,b)}(g(B)) = \check{B}$.

Assim, dado $(a, b) \in A \times B$, temos que:

$f \circ \sigma_{(a,b)}(g(a)) = f(\check{a}) = a$;
$f \circ \sigma_{(a,b)}(g(b)) = f(\check{b}) = b$;
$f \circ \sigma_{(a,b)}(g(h)) = f(\tau) = h$;
$f \circ \sigma_{(a,b)}(g(A)) = f(\check{A}) = A$;
$f \circ \sigma_{(a,b)}(g(B)) = f(\check{B}) = B$.

Ou seja, $f \circ \sigma_{(a,b)}(g(v)) = v$, para toda variável livre v da fórmula $b = h(a)$. Seja $\psi_{(a,b)} = g(b = h(a))$. Assim, para todo $(a, b) \in A \times B$, pelo metateorema 3.4.15, temos:

$$(b = h(a))^{M[G]} \Leftrightarrow (M[G], f \circ \sigma_{(a,b)}) \models \psi_{(a,b)}.$$

Seja $F = \{(a, F(a)); a \in A\}$, onde $F(a) = \{b \in B : \exists q \leqslant p\ (q \Vdash (\psi_{(a,b)}, \sigma_{(a,b)}))\}$. Pelo teorema 4.2.20 (a) e pelo fato que M satisfaz o axioma da separação, temos que $\forall a \in A\ (F(a) \in M)$ e $F \in M$.

Seja $a \in A$, vamos mostrar que $h(a) \in F(a)$. Com efeito, seja $b = h(a)$, como $f(a) \in M[G]$, temos que $(b = h(a))^{M[G]}$, logo $(M[G], f \circ \sigma_{(a,b)}) \models \psi_{(a,b)}$, portanto, pelo teorema 4.2.20 (b), existe $r \in G$ tal que $r \Vdash (\psi_{(a,b)}, \sigma_{(a,b)})$, mas como $p, r \in G$, temos que existe $q \in G$ tal que $q \leqslant r$ e $q \leqslant p$, logo $q \Vdash (\psi_{(a,b)}, \sigma_{(a,b)})$, portanto $b \in F(a)$.

Agora vamos mostrar que $\forall a \in A\, (|F(a)| \leqslant \omega)^M$. Seja $a \in A$, como M satisfaz o axioma da escolha, existe $Q \in M$ tal que $dom(Q) = F(a)$, $im(Q) \subset \mathbb{P}$ e para todo $b \in F(a)$ temos que $(Q(b) \leqslant p$ e $Q(b) \Vdash (\psi_{(a,b)}, \sigma_{(a,b)})$. Mostraremos que, se $b_1, b_2 \in F(a)$ e $b_1 \neq b_2$, então $Q(b_1) \perp Q(b_2)$. Com efeito, suponha que $Q(b_1)$ e $Q(b_2)$ sejam compatíveis, assim existe um filtro $\mathbb{P}$-genérico H, tal que $Q(b_1), Q(b_2) \in H$ (pode-se construir H pelo mesmo argumento usado no lema 4.2.5).

Como $Q(b_1) \leqslant p$, temos que $Q(b_1) \Vdash (\phi, \sigma)$, logo $(M[H], f \circ \sigma) \models \phi$, portanto:

$$(h \text{ é função} \wedge\ dom(h) = A \wedge im(h) = B)^{M[H]}.$$

Além disso, como $Q(b_1) \Vdash (\psi_{(a,b_1)}, \sigma_{(a,b_1)})$ e $Q(b_2) \Vdash (\psi_{(a,b_2)}, \sigma_{(a,b_2)})$, temos que $(M[H], f \circ \sigma_{(a,b_1)}) \models \psi_{(a,b_1)}$ e $(M[H], f \circ \sigma_{(a,b_2)}) \models \psi_{(a,b_2)}$, ou seja, $(b_1 = h(a))^{M[H]}$ e $(b_2 = h(a))^{M[H]}$, logo $(b_1 = b_2)^{M[H]}$, portanto, por absolutividade, $b_1 = b_2$, uma contradição.

Portanto $X = \{Q(b) : b \in F(a)\}$ é uma anticadeia em $\mathbb{P}$, logo, pelo lema 5.1.3, (X é anticadeia$)^M$, alem disso, como $Q \in M$ e $(\mathbb{P}$ *é c.c.c.*$)^M$, temos que $(|X| \leqslant \omega)^M$, mas como Q é injetora (logo $(Q$ *é injetora*$)^M$, pois $Q \in M$), temos $(|F(a)| \leqslant \omega)^M$. ■

Definição 5.1.6. *Sejam $\mathbb{P} \in M$, dizemos que $\mathbb{P}$* ***preserva cardinais*** *quando, para todo G filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, temos que:*

$$\forall \beta \in M\, ((\beta \textit{ é cardinal})^M \Leftrightarrow (\beta \textit{ é cardinal})^{M[G]}).$$

Lema 5.1.7. *Sejam $\mathbb{P} \in M$ e G filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, assim temos:*

$$\forall \beta \in M\, ((\beta \textit{ é cardinal})^{M[G]} \Rightarrow (\beta \textit{ é cardinal})^M).$$

Demonstração: Suponha que $(\kappa \textit{ é cardinal})^{M[G]}$. Seja $\alpha \in M[G]$ tal que $\alpha \in \kappa$. Precisamos mostrar que não existe $f \in M$ tal que f é função, $dom(f) = \alpha$ e $im(f) = \kappa$. De fato, se existisse tal função, teríamos que $f \in M[G]$, assim β não seria um cardinal em $M[G]$. ■

Corolário 5.1.8. *Seja $\mathbb{P} \in M$. Então $\mathbb{P}$ preserva cardinais se, e somente se, para todo G filtro $\mathbb{P}$-genérico, temos que:*

$$\forall \beta \in M\, ((\omega < \beta \wedge (\beta \textit{ é cardinal})^M) \Rightarrow (\beta \textit{ é cardinal})^{M[G]}).$$

Demonstração: Segue diretamente do lema 5.1.7 e da absolutividade de ω.

■

Definição 5.1.9. *Seja N um conjunto e $\lambda \geqslant \omega$. Dizemos que* $\boldsymbol{\kappa = cf(\lambda)^N}$, *quando $(\kappa = cf(\lambda))^N$.*

Definição 5.1.10. *Seja $\mathbb{P} \in M$. Dizemos que $\mathbb{P}$* ***preserva cofinalidades*** *quando, para todo G filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M e para todo ordinal limite $\lambda \in M$ com $\omega < \lambda$, temos:*

$$cf(\lambda)^M = cf(\lambda)^{M[G]}.$$

Lema 5.1.11. *Seja $\mathbb{P} \in M$. Se $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades, então $\mathbb{P}$ preserva cardinais.*

Demonstração: Primeiramete observe que, se $\alpha \in M$, $\alpha \geqslant \omega$ e (α é regular)^M, temos que $(cf(\alpha) = \alpha)^M$, logo $cf(\alpha)^M = cf(\alpha)^{M[G]} = \alpha$, portanto α é regular em $M[G]$.

Pelo corolário 5.1.8, precisamos mortrar que:

$$\forall \beta \in M\ ((\omega < \beta \wedge (\beta\ \textit{é cardinal})^M) \Rightarrow (\beta\ \textit{é cardinal})^{M[G]}).$$

De fato, seja $\beta > \omega$ tal que $(\beta\ \textit{é cardinal})^M$. Se ($\beta$ é cardnal sucessor)^M, então (β é regular)^M, logo (β é regular)$^{M[G]}$, portanto (β é cardinal)$^{M[G]}$.

Vejamos, então, o caso em que (β é cardinal limite)^M. Suponha que β não seja cardinal em $M[G]$. Assim, existe $\kappa \in M[G]$ tal que (κ é cardinal)$^{M[G]}$, $\kappa < \beta$ e $(|\beta| = \kappa)^{M[G]}$. Pelo lema 5.1.7, temos que (κ é cardinal)^M. Seja λ tal que $(\lambda = \kappa^+)^M$, assim (λ é regular)^M, logo (λ é regular)$^{M[G]}$, portanto (λ é cardinal)$^{M[G]}$. Como (β é cardinal limite)^M, temos que $(\lambda < \beta)^M$, assim como $<$ é absoluto, temos que $(\lambda < \beta)^{M[G]}$, logo $(|\beta| \geqslant \lambda)^{M[G]}$. Portanto:

$$(|\beta| \geqslant \lambda > \kappa = |\beta|)^{M[G]}.$$

■

Lema 5.1.12. *Seja $\mathbb{P} \in M$. Suponha que, para todo G $\mathbb{P}$-genérico sobre M, e para todo $\kappa \in M$ tal que $\kappa > \omega$ e (κ é regular)^M, temos que (κ é regular)$^{M[G]}$. Então $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades.*

Demonstração: Seja λ um ordinal limite em M e $\kappa = cf(\lambda)^M$. Assim, pelo lema 2.2.3 aplicado em M, existe $f \in M$ tal que $dom(f) = k$, $im(f) = \lambda$, f é cofinal e f é estritamente crescente. Observe que estamos usando o fato de que as fórmulas $dom(f) = k$, $im(f) = \lambda$, f é cofinal e f é estritamente crescente são absolutas, as duas primeiras seguem do lema 3.6.3 e as duas últimas são fáceis de verificar com os fatos que já mostramos. Como (κ é regular)^M, temos que (κ é regular)$^{M[G]}$, assim, como $f \in M[G]$, pelos lemas 2.2.4 e 2.2.6 aplicados em $M[G]$, temos que $(\kappa = cf(\lambda))^{M[G]}$.

■

Teorema 5.1.13. *Seja $\mathbb{P} \in M$. Se ($\mathbb{P}$ tem c.c.c.)^M, então $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades, portanto preserva cardinais.*

Demonstração: Suponha que o teorema seja falso. Então, pelo lema 5.1.12, existe um $\kappa \in M$, $\kappa > \omega$ tal que (κ é regular)^M, mas (κ não é regular)$^{M[G]}$. Assim existe $\lambda < \kappa$ e $f \in M[G]$ tal que $dom(f) = \lambda$, $im(f) = \kappa$ e f é cofinal, pois as fórmulas mencionadas são absolutas. Assim, pelo lema 5.1.5, temos que existe uma função $F \in M$ tal que $dom(F) = \lambda$, $im(F) \subset \mathcal{P}(\kappa)$, $\forall \alpha \in \lambda\ (f(\alpha) \in F(\alpha))$ e $\forall \alpha \in \lambda\ (|F(\alpha)| \leqslant \omega)^M$.

Seja $S = \bigcup_{\alpha<\lambda} F(\alpha)$. Como a união é absoluta, temos que $S \in M$. Seja $\beta \in \kappa$, como f é cofinal, existe $\alpha \in \lambda$ tal que $\beta < f(\alpha)$, mas $f(\alpha) \in F(\alpha) \subset S$, logo S é ilimitado em κ. Mas como ser ilimitado é absoluto temos que (S é ilimitado em κ)^M, logo $(\bigcup S = \kappa)^M$. Além disso, como $\forall \alpha \in \lambda\ (|F(\alpha)| \leqslant \omega)^M$, temos que $(|S| \leqslant max\{\lambda, \omega\} < \kappa)^M$. Portanto, pelo lema 2.2.8 , temos que (κ não é regular)^M, um absurdo.

■

5.2 Funções parciais finitas

Estamos agora muito perto de mostrar que $M[G]$ satisfaz $\neg CH$. Para isso vamos precisar escolher um $\mathbb{P}$ específico, o conjunto das funções parciais finitas, mais especificamente ainda, o conjunto que nos servirá será o conjunto das funções parciais finitas de $\kappa \times \omega$ em 2, onde $(\kappa = \omega_2)^M$. Evidentemente precisaremos mostrar que tal ordem parcial é, de fato, c.c.c. para usar os resultados da seção anterior.

Definição 5.2.1. *Sejam I e J conjuntos. Vamos definir o seguinte conjunto parcialmente ordenado $\boldsymbol{Fn(I,J)} = \{p : p$ é finito $\wedge\ p$ é função $\wedge\ dom(p) \subset I \wedge im(p) \subset J\}$. E a ordem parcial em $Fn(I,J)$ é definida da seguinte maneira: $\boldsymbol{p \leqslant q}$ quando $q \subset p$.*

Lema 5.2.2. *Sejam $I, J \in M$ com $J \neq \emptyset$, então $Fn(I,J) \in M$.*

Demonstração: De fato, isso ocorre, pois M satisfaz o axioma da separação e pelo fato de as fórmulas (p é finito), (p é função), ($dom(p) \subset I$) e ($im(p) \subset J$) serem absolutas para M. A absolutividade das fórmulas (p é finito) e (p é função) segue dos lemas 3.6.6 (g) e 3.6.4. Já a absolutividade das fórmulas ($dom(p) \subset I$) e ($im(p) \subset J$) podemos deduzir diretamente do lema 3.6.3.

■

Lema 5.2.3. *Sejam $I, J \in M$ com $J \neq \emptyset$, I infinito e G um filtro $Fn(I,J)$-genérico sobre M, então $\bigcup G$ é uma função, $dom(\bigcup G) = I$ e $im(\bigcup G) = J$.*

Demonstração: Claramente temos que $\bigcup G \subset I \times J$. Vamos mostrar que $\forall x \in I\, \exists y \in J\, ((x,y) \in \bigcup G)$. Para cada $x \in I$ defina $D_x = \{p \in Fn(I,J) : x \in dom(p)\}$, mas como a fórmula $x \in dom(p)$ também é absoluta para M, temos que $\forall x \in I\ D_x \in M$. Seja $x \in I$, temos que $D_x \in M$, vamos mostrar que D_x é denso em $Fn(I,J)$. Seja $p \in Fn(I,J)$, se $x \in dom(p)$ não há nada a fazer. Se $x \notin dom(p)$, como $J \neq \emptyset$ tome $y \in J$ e defina $q = p \cup \{(x,y)\}$, assim $q \leqslant p$ e $q \in D_x$ portanto, D_x é denso. Assim, como G é $Fn(I,J)$-genérico sobre M, temos que $\exists p \in D_x \cap G$, ou seja, $\exists p \in G\ (x \in dom(p))$, logo existe y tal que $(x,y) \in p \subset \bigcup G$.

Agora, vamos mostrar que $\forall x \forall y \forall z\ (((x,y) \in \bigcup G \wedge (x,z) \in \bigcup G) \Rightarrow y = z)$. Com efeito, sejam x, y, z tais que $(x,y) \in \bigcup G$ e $(x,z) \in \bigcup G$, assim existem $p, q \in G$ tais que $(x,y) \in p$ e $(x,y) \in q$, mas, como G é filtro, existe $r \in G$ tal que $p, q \subset r$, logo $(x,y) \in r$ e $(x,z) \in r$, mas, como r é função, temos que $y = z$.

Agora, resta mostrar que $im(\bigcup G) = J$, seja $y \in J$, pelo mesmo argumento da prova de que $\bigcup G$ é função, temos que $D_y = \{p \in Fn(I,J) : y \in im(p)\} \in M$. Vejamos que D_y é denso em $Fn(I,J)$. Seja $p \in Fn(I,J)$, como I é infinito, podemos tomar $x \in I$ tal que $x \notin dom(p)$, tome $q = p \cup \{(x,y)\}$, assim $q \in D_y$ e $q \leqslant p$, portanto D_y é denso. Assim $\exists p \in D_y \cap G$, ou seja, $\exists p \in G\ (y \in im(p))$, logo existe x tal que $(x,y) \in p \subset \bigcup G$. ■

Lema 5.2.4. *Sejam $\kappa \in M$, $\mathbb{P} = Fn(\kappa \times \omega, 2)$ e G um filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, então $\exists f \in M[G]$ (f é função $\wedge\ dom(f) = \kappa\ \wedge im(f) \subset 2^\omega \wedge f$ é injetora).*

Demonstração: Seja $g = \bigcup G$, e para cada $\alpha \in \kappa$, defina $g_\alpha = \{(n, g(\alpha, n)) : n \in \omega\}$. Claramente g_α é função, $dom(f_\alpha) = \omega$ e $im(g_\alpha) = 2$. Além disso, para cada $\alpha \in \kappa$, temos que $g_\alpha \in M[G]$, pois $g \in M[G]$ e $M[G]$ satisfaz o axioma da substituição. Pelo mesmo argumento $f = \{(\alpha, g_\alpha) : \alpha \in \kappa\} \in M[G]$, também é claro que f é função, $dom(f) = \kappa$ e $im(f) \subset 2^\omega$.

Agora para concluir a demonstração, basta mostrar que f é injetora. Com efeito, sejam $\alpha, \beta \in \kappa$ com $\alpha \neq \beta$. Defina $D_{\alpha\beta} = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega\ ((\alpha, n) \in dom(p) \wedge (\beta, n) \in dom(p) \wedge p(\alpha, n) \neq p(\beta, n))\}$, vamos mostrar que $D_{\alpha\beta}$ é denso em $\mathbb{P}$. Seja $q \in \mathbb{P}$ e $n \in \omega$ tal que $(n, \alpha) \notin dom(q)$ e $(n, \beta) \notin dom(q)$, tal n existe pois q é finito. Seja $p = q \cup \{((n,\alpha), 0), ((n,\beta), 1)\}$, assim temos que $p \leqslant q$ e $p \in D_{\alpha,\beta}$, logo $D_{\alpha,\beta}$ é, de fato, denso em $\mathbb{P}$. Tome, portanto, $p \in D_{\alpha,\beta} \cap G$, assim existe $n \in \omega$ tal que $p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)$, mas como $p \subset g$, temos que $g(\alpha, n) \neq g(\beta, n)$, logo $g_\alpha \neq g_\beta$, portanto f é injetora. ■

Definição 5.2.5. *Seja A um conjunto. Dizemos que A é um* ***Δ-sistema*** *quando: $\exists r \,\forall a, b \in A\,(a \neq b \rightarrow a \cap b = r)$. Neste caso chamamos r de raiz do Δ-sistema.*

Teorema 5.2.6. *Seja E um conjunto não enumerável de conjuntos finitos. Então existe $D \subset E$ um Δ-sistema não enumerável.*

Demonstração: Vamos dividir a prova em 2 casos. O primeiro caso consistirá em supor que existe $\tilde{E} \subset E$ não enumerável tal que para todo $a \in \bigcup \tilde{E}$ temos que $A_a = \{x \in \tilde{E} : a \in x\}$ é enumerável. Primeiramente vamos mostrar que $\bigcup \tilde{E}$ é nao enumerável. De fato, se $\bigcup \tilde{E}$ fosse enumerável, o conjunto $A = \{A_a : a \in \bigcup \tilde{E}\}$ também o seria, mas como $\tilde{E} \subset \bigcup A$ e $\bigcup A$ seria enumerável, então teríamos que $\tilde{E}$ seria enumerável, absurdo.

Agora vamos mostrar que para todo $C \subset \bigcup \tilde{E}$, enumerável, temos que o conjunto $\{x \in \tilde{E} : x \cap C = \emptyset\}$ é não enumerável. Com efeito, como C é enumerável, então o conjunto $\{A_a : a \in C\}$ é enumerável, mas como cada A_a é enumerável, o conjunto $B := \bigcup\{A_a : a \in C\}$ também é enumerável, mas $\tilde{E}$ é não enumerável, assim $\tilde{E} \backslash B$ é não enumerável, porém $\tilde{E} \backslash B = \{x \in \tilde{E} : \forall a \in C\,(a \notin x)\} = \{x \in \tilde{E} : x \cap C = \emptyset\}$.

Vamos definir recursivamente o conjunto $\{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \subset \tilde{E}$ tal que $\alpha_1 \neq \alpha_2 \rightarrow x_{\alpha_1} \cap x_{\alpha_2} = \emptyset$. De fato, dado $\alpha \in \omega_1$ suponha que exista $C_\alpha = \{x_\beta : \beta \in \alpha\}$ satisfasendo $\beta_1 \neq \beta_2 \rightarrow x_{\beta_1} \cap x_{\beta_2} = \emptyset$. Como $\alpha \in \omega_1$, α é enumerável, logo C_α é enumerável, mas como cada $x_\beta \in C_\alpha$ é finito, $\bigcup C_\alpha$ é enumerável. Assim $H := \{x \in \tilde{E} : x \cap \bigcup C_\alpha = \emptyset\}$ é não enumerável, logo $H \backslash C_\alpha \neq \emptyset$. Escolha $x_\alpha \in E \backslash C_\alpha$. Portanto $C_\alpha \cup \{x_\alpha\}$ satisfaz $\beta_1 \neq \beta_2 \rightarrow x_{\beta_1} \cap x_{\beta_2} = \emptyset$. Logo $\{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \subset \tilde{E} \subset E$ é um Δ-sistema com raiz $\emptyset$.

Agora vamos para o caso 2. Ou seja, para todo $\tilde{E} \subset E$ existe $a \in \bigcup \tilde{E}$ tal que A_a, como na definição do caso 1, é não enumerável. Defina $f : E \longrightarrow \omega$ por $f(x) = |x|$. Assim existe $n \in \omega$ tal que $f^{-1}(n)$ é não enumerável, pois $\bigcup\{f^{-1}(n) : n \in \omega\} = E$. Seja $\tilde{E} = f^{-1}(n)$, para concluir a demonstração, basta que exista um Δ-sistema contido em $\tilde{E}$.

Temos que $\forall x \in \tilde{E}\,(|x| = n)$. Provaremos o resultado por indução em n. Se $n = 1$, temos que $\forall x, y \in \tilde{E}\,(x \cap y) = \emptyset$, portanto o próprio $\tilde{E}$ é um Δ-sistema. Façamos agora o passo indutivo. Suponha que $\forall x \in \tilde{E}\,(|x| = n + 1)$ e suponha verdadeiro o resultado para n. Como estamos no caso 2, existe $a \in \bigcup \tilde{E}$ tal que A_a é não enumerável, logo $\tilde{E}_a = \{x \backslash \{a\} : x \in A_a\}$ também é não enumerável e $\forall x \in \tilde{E}_a\,(|x| = n)$, assim, pela hipótese de indução, existe $D_a \subset \tilde{E}_a$ e r tal que $\forall x, y \in D_a\,(x \cap y = r)$. Defina $D = \{x \cup \{a\} : x \in D_a\}$, assim D é não enumerável e $\forall x, y \in D\,(x \cap y = r \cup \{a\})$, portanto D é Δ-sistema e $D \subset \tilde{E}$.

■

Lema 5.2.7. *Sejam I e J conjuntos enumeráveis. Então $Fn(I, J)$ é enumerável.*

Demonstração: Sejam $I = \{x_1, x_2 ...\}$ e $J = \{y_1, y_2 ...\}$. Defina

$$Fn^{k,l}(I, J) = \{p \in Fn(I, J); dom(p) \subset \{x_1, ..., x_k\} \wedge im(p) \subset \{y_1, ..., y_l\}\}.$$

É fácil ver que cada $Fn^{k,l}(I, J)$ é finito, mas como

$$\bigcup_{l<\omega} \bigcup_{k<\omega} Fn^{k,l}(I, J) = Fn(I, J),$$

temos que $Fn(I, J)$ é enumerável.

$\blacksquare$

Lema 5.2.8. *Sejam I e J enumerável, com J contável. Então, $Fn(I, J)$ tem c.c.c.*

Demonstração: Suponha por absurdo que exista uma anticadeia não enumerável $X \subset Fn(I, J)$. Seja $Y = \{dom(p) : p \in X\}$. Vamos mostrar que Y é não enumerável. Com efeito, se Y fosse enumerável, como cada elemento de Y é finito, teríamos $\bigcup Y$ seria enumerável, logo, pelo lema 5.2.7, $Fn(\bigcup Y, J)$ também o seria, absurdo, pois $X \subset Fn(\bigcup Y, J)$.

Assim, pelo teorema 5.2.6, existe $Z \subset Y$, um Δ-sistema. Descartando, se necessário, alguns elementos, podemos escrever Z da seguinte forma: $Z = \{dom(p_\alpha) : \alpha \in \omega_1\}$, onde $dom(p_\alpha) \neq dom(p_\beta)$ se $\alpha \neq \beta$. Seja r a raiz do Δ-sistema. Como J é enumerável, J^r também o é, assim o conjunto $\{p_\alpha \restriction r : \alpha \in \omega_1\}$ é enumerável. Portanto existem $\alpha, \beta \in \omega_1$ tais que $p_\alpha \restriction r = p_\beta \restriction r$. Como r é raiz do Δ-sistema, temos que $dom(p_\alpha) \cap dom(p_\beta) = r$. Seja $p_\gamma = p_\alpha \cup p_\beta$. Claramente p_γ é finito, assim basta mostrar que p_γ é função, para concluir que $p_\gamma \in Fn(I, J)$, e isso mostra que p_α e p_β são compatíveis, pois $p_\gamma \leqslant p_\alpha$ e $p_\gamma \leqslant p_\beta$, o que é um absurdo, porque $p_\alpha, p_\beta \in X$. Portanto, para concluir a prova, precisamos mostrar que p_γ é função. De fato, sejam $(a, b), (a, c) \in p_\gamma$. Se $(a, b), (a, c) \in p_\alpha$, então $b = c$, o caso $(a, b), (a, c) \in p_\beta$ é análogo. Portanto, sem perda de generalidade, só falta verificar o caso em que $(a, b) \in p_\alpha$ e $(a, c) \in p_\beta$. Neste caso temos que $a \in dom(p_\alpha) \cap dom(p_\beta) = r$, logo $b = p_\alpha(a) = p_\alpha \restriction r(a) = p_\beta \restriction r(a) = p_\beta(a) = c$. $\blacksquare$

5.3 Consistência de $ZFC + \neg CH$

Lema 5.3.1. *Sejam $\mathbb{P} \in M$ tal que $(\mathbb{P}$ é c.c.c.$)^M$ e G um filtro $\mathbb{P}$-genérico. Então para todo $n \in \omega$ a fórmula $(\alpha = \omega_n)$ é absoluta para M, $M[G]$.*

Demonstração: Vamos fazer a prova por indução em n. O caso $n = 0$ é imediato pois $\omega_0 = \omega$, que á absoluto. Suponha que a fórmula $\alpha = \omega_n$ seja absoluta para M, $M[G]$ Vejamos que $\alpha = \omega_{n+1}$ é absoluta para M, $M[G]$. Com efeito, seja $\alpha \in M$, $(\alpha = \omega_{n+1})^{M[G]}$ é equivalente a

$$[(\alpha \text{ é cardinal }) \wedge (\omega_n \in \alpha) \wedge \forall \beta \in \alpha\, (\beta \text{ é cardinal } \rightarrow (\beta = \omega_n \vee \beta \in \omega_n)]^{M[G]},$$

que é equivalente a:

$$[(\alpha \text{ é cardinal }) \wedge (\exists \gamma \in \alpha(\gamma = \omega_n)) \wedge (\forall \beta \in \alpha\, (\beta \text{ é cardinal } \rightarrow (\beta = \omega_n \vee \exists \gamma \in \alpha(\beta \in \gamma \wedge \gamma = \omega_n)))]^{M[G]},$$

que, pelo teorema 5.1.13, é equivalente a

$(\alpha \text{ é cardinal })^M \wedge (\exists \gamma \in \alpha(\gamma = \omega_n)^{M[G]}) \wedge (\forall \beta \in \alpha\, (\beta \text{ é cardinal } \rightarrow ((\beta = \omega_n)^{M[G]} \vee \exists \gamma \in \alpha(\beta \in \gamma \wedge (\gamma = \omega_n)^{M[G]}))),$

que pela hipótese de indução é equivalente a

$(\alpha \text{ é cardinal })^M \wedge (\exists \gamma \in \alpha(\gamma = \omega_n)^M) \wedge (\forall \beta \in \alpha\, (\beta \text{ é cardinal } \rightarrow ((\beta = \omega_n)^M \vee \exists \gamma \in \alpha(\beta \in \gamma \wedge (\gamma = \omega_n)^M))),$

que é equivalente a

$$[(\alpha \text{ é cardinal }) \wedge (\exists \gamma \in \alpha(\gamma = \omega_n)) \wedge (\forall \beta \in \alpha\, (\beta \text{ é cardinal } \rightarrow (\beta = \omega_n \vee \exists \gamma \in \alpha(\beta \in \gamma \wedge \gamma = \omega_n)))]^M,$$

que é equivalente a

$$[(\alpha \text{ é cardinal }) \wedge (\omega_n \in \alpha) \wedge \forall \beta \in \alpha\, (\beta \text{ é cardinal } \rightarrow (\beta = \omega_n \vee \beta \in \omega_n)]^M,$$

que é equivalente a $(\alpha = \omega_{n+1})^M$

■

Lema 5.3.2. *Sejam $\kappa \in M$ tal que $(\kappa = \omega_2)^M$ e $\mathbb{P} = Fn(\kappa \times \omega, 2)$ e G um filtro $\mathbb{P}$-genérico seobre M. Então $(\neg CH)^{M[G]}$.*

Demonstração: Como $\kappa \in M$, $\omega \in M$, o produto cartesiano é absoluto e M satisfaz o axioma da substituição, temos que $\kappa \times \omega \in M$, como $2 \in M$, pelo lema 5.2.2, temos que $Fn(\kappa \times \omega, 2) \in M$. Assim, aplicando o lema 5.2.8 em M, temos que ($\mathbb{P}$ tem c.c.c.)^M, logo, pelo lema 5.3.1, temos que $(\kappa = \omega_2)^{M[G]}$. Além disso pelo lema 5.2.4:

$$\exists f \in M[G]\, (f \text{ é função } \wedge\ dom(f) = \kappa\ \wedge im(f) \subset 2^\omega \wedge f\ \acute{e}\ injetora).$$

Já vimos que as fórmulas f é função, $dom(f) = \kappa$, e $f\ \acute{e}\ injetora$ são absolutas, portanto:

$$(f \text{ é função } \wedge\ dom(f) = \kappa\ \wedge f\ \acute{e}\ injetora)^{M[G]}.$$

Observemos que $(im(f) \subset 2^\omega)^{M[G]}$. Mas $(im(f) \subset 2^\omega)^{M[G]}$ é equivalente a $\forall g \in im(f)$ (g é função $\wedge$ $dom(g) = \omega \wedge im(g) \subset 2)$. Portanto:

$$(f \text{ é função } \wedge\ dom(f) = \kappa\ \wedge im(f) \subset 2^\omega \wedge f\ \acute{e}\ injetora)^{M[G]}.$$

Logo:

$$(f \text{ é função } \wedge\ dom(f) = \omega_2\ \wedge im(f) \subset 2^\omega \wedge f\ \acute{e}\ injetora)^{M[G]}.$$

Ou seja:

$$(\neg CH)^{M[G]}.$$

■

Metateorema 5.3.3. *$Con(ZFC) \Rightarrow Con(ZFC + \neg CH)$.*

Demonstração: Sejam $A_1, ..., A_n$ axiomas de ZFC. Vimos que

$$ZFCM \vdash \exists M_0\, ((\neg CH)^{M_0}, A_1^{M_0}, .., A_n^{M_0}).$$

Basta tomar $M_0 = M[G]$, onde G é um filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M e $\mathbb{P}$ é como no lema 5.3.2 (existe tal G em $\mathbb{P}$, pelo lema 4.2.5). Observe que o fato de valer $(\neg CH)^{M[G]}, A_1^{M[G]}, .., A_n^{M[G]}$ foi demonstrado em $ZFCM$.

Assim pelo teorema 3.7.5, temos que $Con(ZFC) \Rightarrow Con(ZFC + \neg CH)$.

■

Vale a pena observar, também, que usando a técnica do forcing é possível mostrar, não apenas a consistência relativa da negação Hipótese do Contínuo, como a consistência relativa da própria Hipótese do Contínuo em relação a ZFC. Não faremos a essa demonstração aqui, porém a estratégia para fazê-la é a seguinte: basta considerar $\mathbb{P} = \{f; f \text{ é função } \wedge$ $dom(f)$ é enumerável $\wedge\, dom(f) \subset \omega_1 \wedge im(f) \subset 2^\omega\}$. Pode-se provar que $\mathbb{P}$ é que $\mathbb{P}$ é σ-fechado (isto é, toda cadeia enumerável decrescente em $\mathbb{P}$ tem um limitante inferior). É possível mostrar, então, que forcings σ-fechados preservam ω_1 e não adicionam conjuntos enumeráveis. Tomando G um filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M teremos que $\bigcup G$ será uma função sobrejetora de ω_1 em 2^ω. E como o forcing preserva cardinais e não adiciona conjuntos enumeráveis, ω_1 e 2^ω são preservados em M[G]. Portanto vale CH em $M[G]$. Pode-se encontrar um argumento análogo a esse em [Kun80], capítulo VII, teorema 6.14.

Referências Bibliográficas

[Coh63] Paul Joseph Cohen. *The independence of the continuum hypothesis I*. Proceedings of the National Academy of Science, 1963.

[Coh64] Paul Joseph Cohen. *The independence of the continuum hypothesis II*. Proceedings of the National Academy of Science, 1964.

[Dra74] Frank Donald Drake. *Set Theory: An Introduction to Large Cardinals*. North-Holland Company, 1974.

[dSF17] Rogério Augusto dos Santos Fajardo. *Lógica Matemática*. Edusp, 2017.

[eTJ99] Karel Hrbáček e Thomas Jech. *Introduction to Set Theory, Third Edition, Revised and Expanded*. Marcel Dekker, Inc., 1999.

[Gö40] Kurt Friedrich Gödel. *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory, Annals of Mathematical Studies, Volume 3*. Princeton University Press, 1940.

[Gö92] Kurt Friedrich Gödel. *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*. Dover Publications, 1992.

[Hal73] Paul Richard Halmos. *Teoria Ingênua dos Conjuntos*. Editora Polígono, 1973.

[Kun80] Herbert Kenneth Kunen. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. North-Holland Company, 1980.

[Ros36] John Barkley Rosser. *Extensions of some theorems of Gödel and Church*. Journal of Symbolic Logic, 1936.

[Smu92] Raymond Merrill Smullyan. *Gödel's Incompleteness Theorems*. Oxford University Press, Inc., 1992.

[Wea14] Nik Weaver. *Forcing for Mathematicians*. World Scientific, 2014.