

O problema de Michael

Vinicius Oliveira Rocha

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRA EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Lúcia Renato Junqueira

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo
Fevereiro de 2023

O problema de Michael

Vinicius Oliveira Rocha

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 10 de Fevereiro de 2023.

Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão julgadora:

Prof^a. Dr^a. Lúcia Renato Junqueira (orientadora) – IME-USP

Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva – UFBA

Prof. Dr. Rodrigo Roque Dias – UFABC

Agradecimentos

Agradeço a minha mãe por nunca duvidar de mim.

Agradeço aos amigos que fiz durante todos esse anos. O IME-USP, e a academia no geral, só conseguiram despertar em mim um senso de comunidade por causa de vocês. Um agradecimento especial à Ofélia, ao Gabriel e ao Guilherme pelas ajudas com a dissertação.

Agradeço à CAPES e ao IME pelo apoio financeiro.

E agradeço muito à Lúcia, que sempre recebeu minhas dificuldades com a maior paciência.

Resumo

Vinicius Oliveira Rocha. **O problema de Michael**. Dissertação (Mestrado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

O objetivo desta dissertação será estudar os espaços de Michael, espaços de Lindelöf cujo produto pelos irracionais não é de Lindelöf. O início é voltado para resultados gerais sobre preservação de normalidade por produto cartesiano. Depois, estudamos as três principais construções consistentes de espaços de Michael feitas até hoje, a feita por Michael usando CH e as feitas por Alster e Moore, usando a igualdade entre alguns pequenos cardinais. Este trabalho se encerra com uma investigação de espaços produtivamente Lindelöf. Estudaremos uma caracterização interna destes espaços, um teorema sobre uma condição suficiente para garantir que algum espaço não é produtivamente Lindelöf e outro sobre a relação destes espaços com espaços de Alster. Terminamos explorando resultados que relacionam a existência de um espaço de Michael com propriedades de espaços produtivamente Lindelöf.

Palavras-chave: preservação da normalidade por produto cartesiano. Espaços de Lindelöf. Espaços de Michael. Espaços Produtivamente Lindelöf. Espaços de Alster. Pequenos Cardinais. Teoria Descritiva dos Conjuntos.

Abstract

Vinicius Oliveira Rocha. **Michael's problem**. Thesis (Master's). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2023.

The goal of this dissertation is the study of Michael spaces, Lindelöf spaces whose product with the irrationals is not Lindelöf. The beginning of it is centered around general results about preservation of normality by cartesian products. After that, we study the three main consistent constructions of Michael spaces made until this day, namely the one made by Michael using CH and the ones made by Alster and Moore using some equalities between small cardinals.

This work finishes with an investigation of productively Lindelöf spaces. We study one internal characterization of these spaces, one theorem about a sufficient condition so that a space is guaranteed not to be productively Lindelöf and another about the relation of these spaces with Alster spaces. We conclude with results that link the existence of a Michael space with properties of productively Lindelöf spaces.

Keywords: preservation of normality by cartesian products. Lindelöf Spaces. Michael Spaces. Productively Lindelöf Spaces. Alster Spaces. Small Cardinals. Descriptive Set Theory.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Preliminares | 3 |
| 1.1 | Básico de Topologia | 3 |
| 1.2 | Pequenos Cardinais | 6 |
| 1.3 | Teoria Descritiva dos Conjuntos | 8 |
| 1.4 | Set Valued Functions | 10 |
| 2 | Produto de Espaços Normais | 11 |
| 2.1 | Motivação | 11 |
| 2.2 | Produtos com um Fator Compacto | 15 |
| 2.3 | Produtos com um Fator Metrizável | 23 |
| 3 | O Problema de Michael | 31 |
| 3.1 | Contribuições de Michael | 31 |
| 3.2 | Contribuições de Lawrence | 37 |
| 4 | Outras Construções | 45 |
| 4.1 | Contribuições de Alster | 45 |
| 4.2 | Contribuições de Justin Moore | 50 |
| 5 | Espaços Produtivamente Lindelöf | 57 |
| 5.1 | Uma Caracterização | 58 |
| 5.2 | Espaços não Produtivamente Lindelöf | 63 |
| 5.3 | Outras Propriedades | 66 |
| 5.4 | Voltando ao Problema de Michael | 76 |
| | Referências | 81 |

Introdução

É atribuída à Mary Ellen Rudin a afirmação de que a normalidade é onde a Topologia Geral deixa de ser Análise e se torna Conjuntista. Mesmo não tendo achado a referência de que essas palavras realmente são dela, a veracidade da frase não é perdida. Espaços normais, diferente dos outros axiomas de separação que vemos em um curso básico de topologia, se comportam muito mal do ponto de vista da preservação. Ela não é garantida para subespaços, para funções contínuas e, de especial interesse para nós, produtos cartesianos.

Em um curso básico de topologia, vemos que a reta de Sorgenfrey é um contraexemplo para a potência de um espaço normal não ser normal. As décadas de 1950 até 1970 foram um período de alta intensidade neste assunto. Para citar alguns artigos, temos [Dow51], [Tam62] [Mic63], [Rud75a], [Rud75b], [Ats77]. Este aumento de atividade pode ser interpretada como uma reação à definição de espaços paracompactos por Dieudonné em 1944 ([Die44]). Parafraseando, novamente, Mary Ellen Rudin, mas desta vez com uma fonte [Rud75a], "até a definição de paracompacidade, nós, essencialmente, sabíamos nada sobre a normalidade de produtos". A própria reta de Sorgenfrey é definida, em [Sor47], originalmente como um contraexemplo envolvendo paracompacidade. Com isso vemos que, desde o começo, a questão da preservação da normalidade está ligada à outras classes de espaços.

Em 1971, especificamente, o artigo [Mic71] de Michael foi publicado. Nele são apresentados contraexemplos sobre como até mesmo para espaços com propriedades mais fortes que normalidade, não existe a garantia da preservação da normalidade no produto. De particular interesse para nós, está sua construção, usando a hipótese do contínuo, de um exemplo de um espaço do que, posteriormente, seriam chamados **espaços de Michael**. Estes são espaços de Lindelöf cujo o produto com os irracionais não são de Lindelöf e cuja existência em ZFC é desconhecida.

Embora o problema da existência de tais espaços não esteja, a um primeiro momento, ligada à preservação de normalidade, sabemos que, quando um dos fatores é metrizável e separável, o produto é de Lindelöf se, e somente se, é normal. No entanto, a escolha da preservação pelos irracionais, especificamente, ao invés de qualquer outro espaço metrizável separável, adiciona muita riqueza ao problema. Por seu homeomorfismo com ω^ω , os irracionais estão muito ligados à pequenos cardinais. Eles também são centrais em Teoria dos Conjuntos Descritiva. Técnicas de ambas estas áreas aparecem quando estudamos espaços de Michael.

Esta dissertação nasceu a partir do estudo da preservação da normalidade por produtos

cartesianos em [Prz84], do *Handbook of Set Theoretical Topology*. Após um **primeiro capítulo** introdutório, o **segundo capítulo** desta dissertação se baseia neste estudo. Nele exploraremos questões relacionadas à caracterização dos espaços que preservam a normalidade pelo produto com classes específicas. Este capítulo fornecerá o contexto para os próximos.

Existe alguns caminhos que se abrem após um estudo mais geral da preservação de normalidade por produtos. Entre os principais temos o problema de Dowker e o problema de Michael. Como já mencionamos, nossa escolha foi pelo problema de Michael. Nosso **terceiro capítulo** será dedicado à construção original de Michael, encontrada em [Mic71], e tentativas de generalização dela. Das principais tentativas, nos baseamos principalmente no trabalho de Lawrence em [Law90], que relaciona o problema com o cardinal \mathfrak{b} .

No **capítulo quatro** continuaremos investigando as construções que vieram posteriormente. Estas são a feita por Alster, [Als90], e a feita por Moore em [Moo99]. Ambos também usam pequenos cardinais, mas a construção de Moore, especificamente, também envolverá trabalhar com teoria descritiva dos conjuntos. A contribuição de Moore, inclusive, vai muito além de sua construção de um espaço de Michael. Ele também encontrou uma estrutura, chamada **sequência de Michael**, cuja existência é equivalente à existência de um espaço de Michael.

Por fim, no **quinto capítulo**, estudaremos a classe de espaços cujo produto por todo espaço de Lindelöf é de Lindelöf, os chamados **espaços produtivamente Lindelöf**. Esta é uma classe que começa a ser mais explorada no mesmo artigo [Mic71] de Michael onde temos o primeiro exemplo consistente de um espaço de Michael. O interesse nestes espaços está, principalmente, ligada a descobrir como eles se relacionam com outras classes que se encontram entre os espaços σ -compactos e de Lindelöf. Uma caracterização para espaços produtivamente Lindelöf apareceu apenas em [AZ18]. Outro resultado importante, obtido por Alster em [Als88], mostra que, sob certas condições, estes espaços são equivalentes aos espaços que ficaram conhecidos como **espaços de Alster**.

Embora espaços produtivamente Lindelöf, sejam interessantes, por conta própria, também estaremos interessados em como eles se relacionam com espaços de Michael. Um leitor atento nota que a existência de um espaço de Michael pode ser enunciada negando que os irracionais sejam produtivamente Lindelöf. Por conta disto, e de certa particularidades dos espaços irracionais, a existência de um espaço de Michael decide qual a relação de alguns espaços produtivamente Lindelöf com outras classes de espaços, relações que podem ser conter, estar contido ou ser igual. Terminaremos dando um panorama sobre quais são os últimos resultados obtidos e quais perguntas continuam em aberto.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Básico de Topologia

Este capítulo tem como objetivo reunir todos os resultados e notações que serão utilizados ao longo desta dissertação. Não há uma regra sobre quais resultados aqui presentes demonstramos e quais apontamos para uma referência. A convenção que tentamos seguir é que resultados e definições que são usados pontualmente não se encontram aqui, mas aonde se fazem necessários.

Trabalharemos principalmente com as definições e nomenclatura que pode ser encontrada em [Eng89]. Assumiremos também que todos espaços são Tychonoff, a menos que explicitado o contrário e que **espaços normais, de Tychonoff e regulares** são também T_1 . Para espaços de Tychonoff, em particular, nos interessa também os seguinte resultado:

Proposição 1.1.1 ([Eng89] 2.3.23). *Se X é de Tychonoff então ele pode ser imergido em $I^{w(X)}$.*

Utilizaremos, sem justificar, muitos resultados básicos sobre todos estes espaços mencionados (e outros), todos os quais podem ser encontrados em [Eng89].

Dado um espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$, uma **base de X** é um subconjunto \mathcal{B} de τ tal que todo elemento de τ pode ser escrito como união de elementos de \mathcal{B} . Existem muitas maneiras de se definir topologias e bases que podem ser encontrados em [Eng89] nos capítulos 1.1 e 1.2. Dado $x \in X$ definiremos $V(x) = \{U \in \tau : x \in U\}$. Um espaço será dito **zero dimensional** se possuir uma base de abertos e fechados. Um subespaço de X é dito F_σ (G_δ) se é união (intersecção) enumerável de subespaços fechados (abertos). Claramente, o complementar de um espaço F_σ é um espaço G_δ . Dizemos que $A \subseteq X$ é um **funcionalmente fechado** se existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ com $A = f^{-1}[\{0\}]$. Note que, como f é contínua, A é fechado. Além disso, todo conjunto funcionalmente fechado é G_δ , afinal, $A = \bigcap_{n \in \omega} f^{-1}[[0, \frac{1}{n}]]$.

As funções cardinais usadas seguem a notação de [Hod84]. Assumiremos conhecidas as definições de **peso**, $w(X)$, pseudocaracter, $\psi(X)$, e grau de Lindelöf, $L(X)$, de um espaço X .

Seja $A \subseteq X$. Usaremos $\text{int}(A)$ para denotar seu interior, o maior aberto que está contido em A , e \overline{A} para denotar seu fecho, o menor fechado que contém A . Se estivermos trabalhando com mais de um espaço denotaremos por $\text{int}_Y(A)$ e \overline{A}^Y o interior e o fecho de A em Y , respectivamente. Um conjunto é dito **raro** se o interior de seu fecho é vazio e **magro** se está contido numa união enumerável de raros. Um subespaço de um espaço topológico é dito **discreto** se é discreto coma topologia de subespaço e é dito **perfeito** se não possui pontos isolados.

Para os resultados de teorias dos conjuntos, direcionamos o leitor para [Kun09]. Dado um conjunto X denotaremos por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto dos subconjuntos de X . Dada uma função f denotaremos por $\text{dom}(f)$ seu domínio e por $\text{Im}(f)$ sua imagem. Para nossos propósitos, f , como conjunto, é identificada com seu gráfico. O uso do teorema da escolha será feito livremente, sem nos preocuparmos em destacá-lo.

Para nós, **cardinais** são ordinais iniciais. Denotaremos os naturais por ω e o primeiro cardinal não enumerável por ω_1 . Dado um cardinal limite κ , sua cofinalidade será denotada por $\text{cf}(\kappa)$. Dados dois conjuntos X, Y , usamos X^Y para representar o conjunto das funções de Y em X . Dado um cardinal κ , não existem momentos em que a falta de distinção entre 2^κ e $|2^\kappa|$ causará ambiguidade. Denotaremos por *Hipótese do Contínuo*, ou CH, a afirmação $2^\omega = \omega_1$. Dado um conjunto A e um cardinal κ , $[A]^\kappa$ e $[A]^{<\kappa}$ e $[A]^{\leq\kappa}$ representam os subconjuntos de tamanho κ , menor estritamente que κ e menor igual à κ . Se $s \in [A]^n$, denotamos por $s \frown a$ a função $s \cup \{ \langle n, a \rangle \}$.

Topologicamente, sempre consideraremos ordinais com a topologia da ordem, a menos que mencionado ao contrario. Sobre esta topologia, o resultado abaixo é relevante.

Proposição 1.1.2. *Seja α um ordinal infinito. Temos que α é compacto se, e somente se, α é sucessor.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se α é um ordinal limite, então seja $\{\alpha_\xi : \xi < \text{cf}(\alpha)\}$ uma família cofinal em α . Note que a cobertura $\{[0, \alpha_\xi] : \xi < \text{cf}(\alpha)\}$ de α não possui subcobertura finita.

(\Leftarrow) Seja $\alpha = \beta + 1$ e tome \mathcal{U} uma cobertura por abertos básicos. Assuma que este não possui uma cobertura finita. Usaremos recursão para construir uma sequência decrescente infinita em α . Seja $\beta_0 = \beta$ e $U_0 \in \mathcal{U} \cap V(x_0)$. Como é básico, deve ser da forma $(x_1, \beta]$. Seja $\beta_1 = x_1$.

Assuma, agora, construído $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ e $\{U_0, U_1, \dots, U_{n-1}\}$. Tome x_{n+1} o menor elemento de α tal que $(\beta, \alpha] \subseteq \bigcup_{i \leq n} U_i$. Como \mathcal{U} não tem subcobertura finita, temos que $x_{n+1} \neq 0$. Portanto, $x_{n+1} \notin \bigcup_{i \leq n} U_i$, ou seja, $x_{n+1} \neq x_i$ para todo $i \leq n$. Seja $U_{n+1} \in \mathcal{U}$ tal que $\beta_{n+1} \in U_{n+1}$.

Como α é bem fundado, existe $i \in \omega$ tal que $x_i = \min\{x_n : n \in \omega\}$. No entanto, por construção $x_{i+1} < x_n$. Absurdo!

□

Proposição 1.1.3. *O peso de um cardinal é o próprio cardinal.*

Demonstração. Seja θ ordinal. O peso não pode ser menor que θ , afinal existem θ elementos sucessores, logo isolados, em θ . Como para os sucessores os unitários são abertos, temos que qualquer base tem no mínimo θ abertos. Por outro lado, como $\theta^2 = \theta$, temos $|\{(\beta, \alpha) : \beta, \alpha \in \theta\}| = \theta$. \square

Sempre que considerarmos um produto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$, estaremos interessados na topologia produto, que é a topologia cuja base é formada por abertos da forma $\prod_{i \in I} U_i$ onde U_i é aberto de X_i para todo $i \in I$ e $U_i = X_i$ exceto em um número finito de elementos de I . Sobre o peso de um espaço produto temos o seguinte resultado em [Juh80] teorema 5.3:

Proposição 1.1.4. *Dados X e Y temos $w(X \times Y) = w(X) \times w(Y)$.*

Se X e Y são espaços topológicos, então π_X (ou π_1) representará a projeção de $X \times Y$ em X . Definiremos de forma análoga π_Y ou π_2 . Dado um espaço produto $X = \prod_{i \in I} X_i$, definimos $\pi_{X_i} : X \rightarrow X_i$ a projeção na coordenada i . Se $J \subseteq I$, então definimos $\pi_J : X \rightarrow \prod_{j \in J} X_j$, onde $\prod_{j \in J} X_j$ é pensado como homeomorfo á $\prod_{i \in I} Y_i$, onde $Y_i = X_i$ se $i = j$ e, caso contrario $Y_i = \{x_i\}$ para algum $x_i \in X_i$.

Se consideramos $K \subseteq X \times Y$ e $x \in X$, denotaremos por K_x e o conjunto $(\{x\} \times Y) \cap K$. De forma análoga, definiremos K_y para $y \in Y$. Estes serão conjuntos que usaremos com alguma frequência, portanto precisamos destacar o seguinte resultado.

Proposição 1.1.5. *Se $F \subseteq X \times Y$ é fechado (aberto) então F_x é fechado (aberto).*

Demonstração. Basta notar que π_X é um homeomorfismo entre $\{x\} \times Y$ e Y . \square

Ao longo da dissertação, constantemente teremos que argumentar que subconjuntos definidos de maneira análoga à diagonal são fechados. A demonstração é idêntica à abaixo exceto por eventuais modificações que precisemos fazer aos abertos obtidos.

Proposição 1.1.6. *Se X é um espaço de Hausdorff, então $\{\langle x, x \rangle : x \in X\} \subseteq X^2$ é fechado.*

Demonstração. Seja $\Delta = \{\langle x, x \rangle : x \in X\}$ e $\langle x, y \rangle \notin \Delta$. Isto pode acontecer apenas se $x \neq y$. Como X é Hausdorff, existe $U \in V(x)$ e $V \in V(y)$ tal que $U \cap V = \emptyset$. isto basta para termos $U \times V \cap \Delta = \emptyset$. Portanto, Δ é fechado. \square

Na verdade, também vale a volta do resultado acima. No entanto, como não a usaremos, optamos por simplificar o enunciado.

Abaixo seguem alguns resultados sobre espaços compactos, paracompactos e de Lindelöf

Teorema 1.1.7 (Tychonoff, [Eng89] 3.2.4). *Se $\{K_i : i \in I\}$ é uma coleção de compactos, então $\prod_{i \in I} K_i$ é compacto.*

Nesta dissertação, exploraremos como algumas generalizações de compactos são, ou não são, preservadas pelo produto cartesiano. Em [Eng89], teoremas 3.8.10 e 5.1.36, temos um dos resultados mais importantes nesse sentido.

Proposição 1.1.8. *O produto de uma espaço Lindelof (paracompacto) e um espaço compacto é de Lindelof (paracompacto)*

Uma importante caracterização para espaços compactos envolve as projeções.

Teorema 1.1.9 (Kuratowski [Eng89]3.1.16). *Se Y é compacto, então $\pi : X \times Y \rightarrow Y$ é fechado.*

Agora nos voltaremos para alguns resultados sobre funções. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é uma **função fechada** se, para todo $F \subseteq X$ fechado, temos $f(F)$ fechado. Além disso, f é dita uma **função perfeita**, se f é contínua, fechada e, para todo $y \in Y$, temos que $f^{-1}[\{y\}]$ é compacto.

Proposição 1.1.10 ([Eng89] 1.5.20). *Funções fechadas preservam normalidade*

Proposição 1.1.11 ([Eng89] teorema 3.8.9). *Pré imagem perfeita de Lindelöf é de Lindelöf.*

Dadas duas funções $f : X \rightarrow X'$ e $g : Y \rightarrow Y'$ definimos a função $f \times g : X \times Y \rightarrow X' \times Y'$ como $f \times g(\langle x, y \rangle) = \langle f(x), g(y) \rangle$.

Proposição 1.1.12 ([Eng89] 2.3.6). *Vale que f e g são funções contínuas se, e somente se, $f \times g$ é contínua.*

Proposição 1.1.13 ([Eng89] 3.7.3). *Produto de funções perfeitas são perfeitas*

Denotaremos $[0, 1]$ por I e os irracionais por \mathbb{P} . Chamaremos de conjunto de Cantor o espaço 2^ω e de conjunto de Baire o espaço ω^ω . Sobre este último temos o seguinte resultado.

Proposição 1.1.14 ([Teh11]). *\mathbb{P} é homeomorfo à ω^ω*

Ao longo desta dissertação, trocaremos entre os dois espaços sem explicação quando conveniente. Relembramos também a definição da reta de Sorgenfrey.

Definição 1.1.15. *A **reta de Sorgenfrey**, denotada \mathbb{R}_s , é a reta real com a topologia gerada pelos abertos da forma $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.*

1.2 Pequenos Cardinais

Pequenos cardinais são cardinais que se encontram entre ω_1 e \mathfrak{c} . Uma definição que unifique todos não é fácil, mas, normalmente, são definidos como o menor tamanho de uma família sem alguma propriedade, propriedade tal esta que só pode falhar em famílias não enumeráveis. Nesta dissertação estaremos interessados em três deles: \mathfrak{b} , \mathfrak{d} e $\text{cov}(\mathcal{M})$. Uma referência com todos os resultados aqui presente é [Bla10a].

Os dois primeiros cardinais estão relacionados às ordens abaixo.

Sejam $f, g \in \omega^\omega$. Definimos a desigualdade $f \leq g$ se, e somente se, $f(n) \leq g(n)$ para todo n . Também definimos que $f \leq^* g$ se, e somente se, existe $N \in \omega$ $f(n) \leq g(n)$ para todo $n \geq N$.

Dado $f \in \omega^\omega$ usaremos a notação K_f para representar $\{g \in \omega^\omega : g \leq f\}$ e K_f^* para representar $\{g \in \omega^\omega : g \leq^* f\}$. Dada uma coleção $\{f_\xi : \xi < \lambda\}$, usaremos K_α para denotar

K_{f_α} para todo $\alpha < \lambda$. Note que se K é compacto de ω^ω , então existe $f \in \omega^\omega$ tal que $K \subseteq K_f$. De fato, K é compacto de ω^ω somente se, para todo $i \in \omega$, $\pi_i[K]$ é finito.

Definição 1.2.1. Definimos o pequeno cardinal $\mathfrak{b} = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \omega^\omega \text{ e } \mathcal{F} \text{ é } \leq^* \text{-ilimitada}\}$.

Como ω^ω é ilimitada, temos que \mathfrak{b} está bem definido. Também podemos definir \mathfrak{b} de maneiras alternativas. Por exemplo, seja $\mathfrak{b}_l = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \omega^\omega \text{ e é uma família ilimitada bem ordenada}\}$.

Proposição 1.2.2. Vale a igualdade $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_l$

Demonstração. Considere uma família $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ ilimitada. Vamos definir, recursivamente, uma família bem ordenada $\{g_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$. Para cada α , como a cardinalidade do conjunto $\{f_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{g_\beta : \beta < \alpha\}$ é menor que \mathfrak{b} , podemos escolher algum $g_\alpha \in \omega^\omega$ de forma que ele seja \leq^* -maior que todos os elementos deste conjunto. Temos que $\{g_\beta : \beta < \alpha\}$ é a família que procuramos. \square

Com este resultado, temos que \mathfrak{b} é regular, afinal, se $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ é família ilimitada e bem ordenada e $c : cf(\mathfrak{b}) \rightarrow \mathfrak{b}$ temos que $\{f_{c_\beta} : \beta < cf(\mathfrak{b})\}$ também é ilimitada.

Dizemos que uma família $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ é dominante se para todo $f \in \omega^\omega$, existe um $g \in \mathcal{F}$, tal que $f \leq^* g$

Definição 1.2.3. Definimos $\mathfrak{d} = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \omega^\omega \text{ é uma família dominante}\}$.

Podemos relacionar \mathfrak{d} com \mathfrak{b} .

Proposição 1.2.4. $\omega_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$.

Demonstração. Note que dada uma família $\{f_n : n \in \omega\} \subseteq \omega^\omega$, podemos sempre achar uma cota superior. Basta definirmos $f : \omega \rightarrow \omega$ como $f(n) = \sup\{f_i(n) : i \leq n\} + 1$. Com isso, podemos concluir que $\omega_1 \leq \mathfrak{b}$.

Fica claro que toda família dominante, também deve ser ilimitada, pois um limitante teria que ser menor que alguém da família. Com isso temos $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$.

Claramente ω^ω é dominante, portanto, $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$. \square

Proposição 1.2.5 ([Bla10a] 2.4). $\mathfrak{b} \leq cf(\mathfrak{d})$.

Em particular, a cofinalidade de \mathfrak{d} é não enumerável.

Definição 1.2.6. Uma κ -escala é uma família de elementos de \mathbb{P} dominante e bem ordenada em \leq^* de tamanho κ .

Nós vimos que, para dada uma família ilimitada, sempre podemos achar uma família ilimitada e bem ordenada de mesmo tamanho. Para famílias dominantes, no entanto, isto não vale. Na verdade, existência de escalas é independente de ZFC.

Proposição 1.2.7 ([Bla10a] 2.6). Existe uma \mathfrak{d} -escala se e somente se $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$.

Normalmente, na literatura, encontramos apenas o termo "escala". Aqui optamos por especificar o tamanho já que ele será útil nas nossas construções. Da mesma forma, a proposição acima normalmente é enunciada com "escala" ao invés de " \mathfrak{d} -escala", mas observando a construção, vemos que obtemos uma escala de tamanho \mathfrak{d} .

Dado um conjunto X , $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ é dito um **um ideal em X** se satisfaz:

1. Temos $\emptyset \in A$ e $X \notin A$.
2. Se $X, Y \in A$ então $X \cup Y \in A$.
3. Se $X \in A$ e $Y \subseteq A$, então $Y \in A$.

Definimos \mathcal{M} como o ideal dos subconjuntos magros de \mathbb{P} .

Definição 1.2.8.

$$\text{cov}(\mathcal{M}) = \min\{|A| : A \text{ é família de conjuntos magros e } \cup A = \mathbb{P}\}.$$

Na literatura, pode-se encontrar $\text{cov}(\mathcal{M})$ considerando a menor família de magros (em \mathbb{R}) que cobre \mathbb{R} . No entanto, como os racionais são enumeráveis, as duas definições são equivalentes. Além disso, dado um espaço completamente metrizável e separável, o menor tamanho de um conjunto de magros que o cobre será igual à $\text{cov}(\mathcal{M})$. Isto se dá pois espaços completamente metrizáveis e separáveis são homeomorfos a menos de um conjunto magro ([Bla10b]).

Temos, por fim, uma relação entre $\text{cov}(\mathcal{M})$ e \mathfrak{d} .

Proposição 1.2.9 ([Bla10a] 5.5). $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{d}$

1.3 Teoria Descritiva dos Conjuntos

A teoria a dos conjuntos lida com espaços definíveis de \mathbb{R} . As demonstrações neste capítulo podem ser encontradas em [Kec95]. Dizemos que um espaço X é **completamente metrizáveis** se existe uma métrica completa compatível com a topologia. Dizemos que X é **polonês** se ele é completamente metrizável e separável. Temos os seguintes exemplos. Por fim, X é dito **analítico** se é imagem contínua de \mathbb{P} .

Proposição 1.3.1 ([Kec95] seção 3.A). \mathbb{P} e 2^ω são poloneses.

Seguem alguns fatos sobre espaços poloneses.

Proposição 1.3.2 ([Kec95] 3.3 e 3.11). *Espaços fechados, abertos e G_δ 's de poloneses são poloneses. Produto de espaços poloneses é polonês.*

Teorema 1.3.3 (Cantor-Bendixson, [Kec95] 6.4). *Se X é polonês, então X pode ser unicamente escrito como a união de um subespaço perfeito e um enumerável.*

Agora fatos especificamente sobre \mathbb{P} .

Proposição 1.3.4. *Todo compacto de ω^ω é fechado e raro*

Demonstração. Seja $K \subseteq \omega^\omega$ compacto. Como ω^ω é Hausdorff, K é fechado. Vamos então mostrar que ele está contido em um raro.

Se K é compacto, então para todo $n \in \omega$, $\pi_n(K)$ é finito. Para cada n , escolha i_n tal que $\pi_n(K) \subseteq [0, i_n]$ e considere $M = \prod_{n \in \omega} [0, i_n]$. M é produto de fechados. Além disso, se U é aberto básico, existem infinitas coordenadas n onde $\pi_n(U) = \omega$, logo, $U \not\subseteq M$. \square

Proposição 1.3.5 ([Kec95] 7.7). ω^ω é o único espaço, a menos de homomorfismo, não vazio, polonês, zero dimensional e em que cada compacto tem interior vazio.

Este último resultado é obtido fazendo uma construção na literatura que, sempre que pode ser feita, nos dá um espaço homeomorfo ao espaço de Baire. A construção se chama esquema de Luzin e existe uma versão para espaços de Cantor também.

Definição 1.3.6 (Esquema de Cantor). *Um esquema de Cantor em um espaço topológico X é uma família de subconjuntos $\{A_s : s \in 2^{<\omega}\}$ que satisfaz:*

1. Para qualquer $s \in 2^{<\omega}$, com $\text{dom}(s) = n$, temos $A_{s \frown 0} \cap A_{s \frown 1} = \emptyset$.
2. Para qualquer $s \in 2^{<\omega}$, com $\text{dom}(s) = n$, e qualquer $j \in \{0, 1\}$ temos que $A_{s \frown j} \subseteq A_s$

Dado um espaço metrizável X , d é uma métrica compatível com sua topologia e $A \subseteq X$ o diâmetro de A , denotado por $\text{diam}(A)$, é definido como o sup do conjunto $\{d(x, y) : x, y \in A\}$. Se X é um espaço completamente metrizável e definimos um esquema de Cantor que também satisfaz as seguintes hipóteses adicionais:

1. Cada A_s é aberto.
2. $\lim_{n \in \omega} \text{diam}(A_{s|_n}) = 0$ para todo $s \in 2^\omega$.
3. $\overline{U_{s \frown i}} \subseteq U_s$ para todo $s \in 2^{<\omega}$ e $i \in \{0, 1\}$

Então o conjunto $\cup \{ \bigcap_{n \in \omega} A_{s|_n} : s \in 2^\omega \}$ é homeomorfo ao conjunto de Cantor ([Kec95] 6.2).

A partir desta construção, e do análogo esquema de Luzin, podemos obter os resultados abaixo.

Teorema 1.3.7 ([Kec95] 6.2). *Se X é um espaço polonês perfeito, então existe uma imersão de 2^ω em X .*

Teorema 1.3.8 ((Hurewicz), [Kec95] 7.10). *Seja X um espaço de Lindelöf e completamente metrizável. Então X não é σ -compacto se e somente se X tem uma cópia fechada de \mathbb{P} .*

Teorema 1.3.9. *Todo espaço polonês zero dimensional é homeomorfo a um subespaço fechado de \mathbb{P} .*

1.4 Set Valued Functions

Dados X e Y espaços topológicos, chamamos uma função $\phi : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ de **set-valued function**. Além disso, dado $A \subseteq X$, usaremos a notação $\phi(A) = \bigcup_{x \in A} \phi(x)$. Dizemos que uma set valued function é **compacta** se todo ponto é levado em um compacto e que é **semicontínua por cima** se para todo aberto V de Y o conjunto $\{x \in X : \phi(x) \subseteq V\}$ é aberto em X .

Proposição 1.4.1. *Sejam X Lindelof e Y espaço topológico. Se $\phi : X \rightarrow \mathcal{P}$ é compacta semicontínua por cima com $\phi(X) = Y$, então Y é Lindelof.*

Demonstração. Seja \mathcal{U} uma cobertura de Y fechada por uniões finitas. Para cada $U \in \mathcal{U}$, tome $V_U = \{x \in X : \phi(x) \subseteq U\}$. Pela semicontinuidade por cima de ϕ , a família $\mathcal{U}' = \{V_U : U \in \mathcal{U}\}$ é de abertos. Também é uma cobertura. Para ver isto, basta usarmos que ϕ é compacta, pois, dado $x \in X$, $\phi(x)$ é coberta por um elemento de \mathcal{U} .

Seja $\{V_{U_n} : n \in \omega\}$ subcobertura enumerável. Resta mostrar que $\{U_n : n \in \omega\}$ é subcobertura de \mathcal{U} . Fixe $y \in Y$ e, usando que $\phi(X) = Y$, tome $x \in X$ com $y \in \phi(x)$. Por ser cobertura, existe $n \in \omega$ tal que $x \in V_{U_n}$, ou seja, $y \in \phi(x) \subseteq U_n$. \square

Proposição 1.4.2. *Sejam X, X', Y, Y' espaços topológicos e $\phi_x : X \rightarrow \mathcal{P}(X')$ e $\phi_y : Y \rightarrow \mathcal{P}(Y')$ compactas, semicontínuas por cima e com $\phi_x(X) = X'$ e $\phi_y(Y) = Y'$. Temos então que $\phi_x \times \phi_y : X \times Y \rightarrow \mathcal{P}(X' \times Y')$ também é compacta e semicontínua por cima com $\phi_x \times \phi_y(X \times Y) = X' \times Y'$.*

Note que na proposição acima, embora tenhamos usando $\phi_x \times \phi_y$ para representar a função, ela não é o produto que definimos anteriormente. Usamos essa notação apenas como simplificação.

Demonstração. Para um aberto da forma $U \times V$ então $\{(x, y) : \phi_x \times \phi_y(x, y) \subseteq U \times V\} = \{x \in X : \phi_x(x) \subseteq U\} \times \{y \in Y : \phi_y(y) \subseteq V\}$ é um aberto. Agora, se $\phi_x \times \phi_y(y) \subseteq U$ qualquer, podemos usar a compacidade do produto para colocá-la numa união finita de abertos básicos. Por fim, dado $(x', y') \in X' \times Y'$, temos que existem $x \in X$ e $y \in Y$ com $x' \in \phi_x(x)$ e $y' \in \phi_y(y)$, logo, $(x', y') \in \phi_x(x) \times \phi_y(y)$. \square

Capítulo 2

Produto de Espaços Normais

Este capítulo, em que vamos explorar resultados gerais de preservação da normalidade por produtos cartesianos, será baseado principalmente no trabalho de [Prz84]. Começaremos com uma seção de motivação. Nela, mostraremos, com um contra-exemplo, que a preservação não é necessariamente verdadeira. Além disso, veremos que a classe em que a preservação sempre vale é bem restrita. Sendo assim, temos um incentivo para restringir às classes de espaços aos quais pedimos a preservação. Isso será justamente o que faremos posteriormente.

As duas seções seguintes tem estruturas bem similares. Uma tratará da classe de espaços compactos, enquanto a outra dos espaços metrizáveis. Ambas começam com contra-exemplos que mostram que a preservação não vale sempre. Assim, após uma motivação, temos os resultados mais importantes do capítulo, Teorema 2.2.7 e Teorema 2.3.4, que dão caracterizações para espaços cuja preservação ocorre, fixado um espaço compacto ou metrizável, respectivamente. No resto destas seções, teoremas importantes da literatura são derivados dos teoremas principais.

2.1 Motivação

Existem três propriedades que aprendemos em um curso básico de topologia que não serão preservadas por produtos cartesianos: normalidade, Lindelöf e paracompacidade. Sabemos que a relação entre estas propriedades é de implicação, pelo menos para espaços regulares. Mais especificamente, espaço regulares e Lindelöf são paracompactos que, por sua vez, são normais. Para todas elas, a reta de Sorgenfrey (1.1.15) é o contraexemplo padrão.

A demonstração que faremos, será uma consequência da proposição abaixo, ela, em si, sendo uma consequência do Teorema da Categoria de Baire (veja [Kec95] teorema 8.4).

Proposição 2.1.1. *Os irracionais \mathbb{P} não são um espaço F_σ em \mathbb{R} .*

Demonstração. Basta mostrar que \mathbb{Q} não é G_δ . Assuma que $\mathbb{Q} = \bigcap_{n \in \omega} U_n$ onde cada U_n é um aberto de \mathbb{R} . Como \mathbb{Q} é denso, cada U_n também é. Agora, seja $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$. Temos

que \mathbb{P} também é um G_δ , afinal, $\mathbb{P} = \bigcap_{n \in \omega} \mathbb{R} \setminus \{x_i : i \leq n\}$. Novamente, como \mathbb{P} é denso, cada aberto da forma $\mathbb{R} \setminus \{x_i : i \leq n\}$ também.

Com isso, temos que $\bigcap_{n \in \omega} U_n \cap \bigcap_{n \in \omega} \mathbb{R} \setminus \{x_i : i \leq n\}$. No entanto, esta é uma intersecção enumerável de abertos densos, logo, pelo Teorema da Categoria de Baire, deveria ser denso. Absurdo! \square

Agora, vamos mostrar o exemplo. Normalmente, esta demonstração é feita usando o Lema de Jones (veja [Prz84] Lema 1.1). No entanto, optamos por fazer usando o Teorema da Categoria de Baire, demonstração que também pode ser achada em [Prz84], por ser uma demonstração diferente da usual e por refletir melhor os argumentos que usaremos mais à frente.

Exemplo 2.1.2. *A reta de Sorgenfrey \mathbb{R}_s é um espaço regular de Lindelöf, mas \mathbb{R}_s^2 não é normal.*

Demonstração. Pela definição, todo elemento da base canônica \mathbb{R}_s é um aberto e fechado. Com isso, concluímos que ele é um espaço regular.

Seja \mathcal{U} uma cobertura básica de \mathbb{R}_s . Considere o seguinte conjunto $\mathcal{U}' = \{(a, b) : [a, b] \in \mathcal{U}\}$. Sendo \mathbb{R} hereditavelmente Lindelöf, $\cup \mathcal{U}'$, pensado como seu subespaço, tem uma subcobertura enumerável de \mathcal{U}' . Agora, mostraremos que o que sobra, $\mathbb{R}_s \setminus \cup \mathcal{U}'$, é enumerável. Para cada $a \in \mathbb{R}_s \setminus \cup \mathcal{U}'$, tomamos um $q_a \in \mathbb{Q}$ e $p_a \in \mathbb{R}$ tal que $[a, p_a] \subseteq U \in \mathcal{U}$ e $q_a \in [a, p_a)$. A função $f : \mathbb{R}_s \setminus \cup \mathcal{U}' \rightarrow \mathbb{Q}$ dada por $f(a) = q_a$ é injetora. De fato, dado $a, b \in \mathbb{R}_s \setminus \cup \mathcal{U}'$ com $a < b$, assumamos por absurdo que $q_a = q_b$. Neste caso, $b \in (a, q_b) = (a, q_a)$, logo por definição, $b \in \cup \mathcal{U}'$. Absurdo. Com isso, o complementar de $\cup \mathcal{U}'$ é enumerável e \mathbb{R}_s é de Lindelöf.

Agora, vamos mostrar que \mathbb{R}_s^2 não é normal. Considere os seguintes conjuntos $F_0 = \{(q, -q) : q \in \mathbb{Q}\}$ e $F_1 = \{(p, -p) : p \in \mathbb{P}\}$. Ambos os conjuntos são fechados, afinal, esta antidiagonal um fechado discreto.

Agora, considere U aberto tal que $F_1 \subseteq U$. Para cada $p \in \mathbb{P}$, podemos escolher um aberto básico, ou mais especificamente, escolher um $\epsilon_p \in \mathbb{R}_s$ tal que $[p, p + \epsilon_p) \times [-p, -p + \epsilon_p) \subseteq U$. Considere também o conjunto $P_n = \{p \in \mathbb{P} : \epsilon_p \geq \frac{1}{n}\}$ para todo $n \in \omega$. Temos que $\mathbb{P} = \bigcup_{n \in \omega} P_n \subseteq \bigcup_{n \in \omega} \overline{P_n}$. Como os irracionais não podem ser F_σ , pela proposição anterior, a segunda inclusão deve ser estrita, ou seja, existe $q \in \mathbb{Q}$ e $n \in \omega$ tal que $q \in \overline{P_n}$.

Considere, agora, o ponto $\langle q, -q \rangle \in F_0$ e tome uma vizinhança aberta $[q, q + \epsilon) \times [-q, -q + \epsilon)$ dele. $[q, q + \epsilon) \cap P_n \neq \emptyset$, logo, temos uma sequência de irracionais maiores que q , $\{p_i : i \in \omega\} \subseteq P_n$, que convergem à ele. Considere o aberto básico $[q, q + \epsilon) \times [-q, -q + \epsilon)$. Seja $\epsilon' = \min\{\epsilon, q + \frac{1}{n}\}$. Já que $q \in \overline{P_n}$, existe um $p \in P_n$ tal que $p - q < \epsilon'$. Assim, por um lado, $\langle q, -p \rangle \in [q, q + \epsilon) \times [-q, -q + \epsilon)$. Por outro, $p - q < \frac{1}{n}$, logo, $\langle q, -p \rangle \in [p, p + \frac{1}{n}) \times [-p, -p + \frac{1}{n}) \subseteq U$. Ou seja, $\langle q, -q \rangle \in \overline{U} \cap F_0$ e, portanto, F_0 e F_1 não podem ser separados por abertos disjuntos. \square

Com isso, é natural perguntar sob quais condições o produto é preservado. Sabemos que se vamos procurar por espaços em que a normalidade é preservada, não seria natural

procurar em espaços de que não são eles mesmo normais, afinal, um espaço produto $X \times Y$ contém uma cópia fechada de X . Acontece que os únicos espaços cujo produto por todo espaço normal é normal são os discretos.

Proposição 2.1.3. *Se X é discreto, então $X \times Y$ é normal se, e somente se, Y é normal.*

Demonstração. (\Rightarrow) Tome algum $x \in X$. Temos que $\{x\} \times Y$ é um subespaço fechado de $X \times Y$ homeomorfo à Y . Como a normalidade é preservada em subespaços fechados, Y deve ser normal.

(\Leftarrow) Sejam $F, K \subseteq X \times Y$ fechados disjuntos (1.1.5). Para cada $x \in X$, temos que K_x e F_x são fechados de Y . De fato, dado $y \notin F_x$, temos que $\langle x, y \rangle \notin F$, temos $U \in V(y)$ tal que $(\{x\} \times U) \cap F = \emptyset$. Com isso, $U \cap F_x = \emptyset$. Além de fechados, também são disjuntos, logo, temos U_x e V_x abertos disjuntos tais que $K_x \subseteq U_x$ e $F_x \subseteq V_x$. Definimos $V = \bigcap_{x \in X} \{x\} \times V_x$ e $U = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times U_x$, que são abertos disjuntos que separam K e F . \square

Para mostrar que este são os únicos, nos baseamos nos trabalhos de Atsugi [Ats77]. Atsugi achou uma propriedade que é necessária caso o produto de um espaço por um outro não discreto seja normal.

Definição 2.1.4. *Se κ é um cardinal, dizemos que um espaço topológico Y tem a propriedade $B^*(\kappa)$ se para toda família decrescente de fechados $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ com $\bigcap_{\alpha < \kappa} F_\alpha = \emptyset$ existe uma família de abertos $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ com $F_\alpha \subseteq U_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa$ e $\bigcap_{\alpha < \kappa} \overline{U_\alpha} = \emptyset$.*

A condição pode ser vista como uma generalização de $B^*(\omega)$, uma caracterização de espaços normais enumeravelmente paracompactos ([Dow51]). Variações desta condição aparecem recorrentemente na literatura sobre produto de espaços normais. Utilizaremos uma dessas variações no próximo resultado.

Lema 2.1.5. *Sejam X e Y dois espaços topológicos tais que $X \times Y$ é normal. Dado $Z \subseteq X$, considere $\{E_x : x \in Z\}$ uma família de fechados de Y tal que $\bigcap_{U \in N(p)} \overline{\bigcup_{x \in U} E_x} = \emptyset$ para algum $p \in X$ e $N(p)$ base local de p . Assim, existe $Z' \subseteq X$ com $Z \subseteq Z'$ e uma família de abertos $\{U_x : x \in Z'\}$ com $E_x \subseteq U_x$ para todo $x \in Z$ e $\bigcap_{U \in N(p)} \overline{\bigcup_{x \in U} D_x} = \emptyset$.*

Demonstração. Fixe $p, N(p), Z$ e $\{E_x : x \in Z\}$. como no enunciado. Considere os seguintes fechados

$$F_0 = \overline{\bigcup_{x \in Z} \{x\} \times E_x}$$

e

$$F_1 = \{p\} \times Y$$

São dois fechados de $X \times Y$ que argumentaremos serem disjuntos. Fixe $y \in Y$. Como $\bigcap_{U \in N(p)} \overline{\bigcup_{x \in U} E_x} = \emptyset$, temos que existe um $U \in N(p)$ e $V \in N(y)$ tal que $V \cap \bigcup_{x \in U} E_x = \emptyset$. Ou seja, $U \times V \cap \bigcup_{x \in Z} \{x\} \times E_x = \emptyset$ e temos $\langle p, y \rangle \notin F_0$.

Pela normalidade do produto, temos que existe U com $F_0 \subseteq U$ e $\bar{U} \cap F_1 = \emptyset$. Seja $Z' = \pi_Y[U]$. Para todo $x \in Z'$, D_x , que é um aberto (1.1.50). Além disso, temos que $F_x \subseteq D_x$ para todo $x \in Z$

Agora, fixe $y \in Y$. Temos que $\langle p, y \rangle \notin \bar{U}$, logo, existe $V \in N(p)$ e $W \in N(y)$ tais que $V \times W \cap U = \emptyset$. Como consequência, para qualquer $x \in V$, $W \cap D_x = \emptyset$, ou seja, $y \notin \overline{\bigcup_{x \in V} D_x}$. Concluimos que $\bigcap_{U \in N(p)} \overline{\bigcup_{x \in U} D_x} = \emptyset$. \square

Com este lema, podemos dar uma propriedade necessária para o caso de X não discreto.

Teorema 2.1.6. *Seja X com um ponto de acumulação p tal que $\alpha = \min\{|A| : A \subseteq X \text{ e } p \in \overline{A \setminus \{p\}}\}$. Se $X \times Y$ é normal, então Y tem a propriedade $B^*(\alpha)$.*

Demonstração. Seja $\{F_\gamma : \gamma < \alpha\}$ uma sequência decrescente de fechados de Y cuja intersecção é vazia e A um subconjunto tal que $p \in \bar{A}$ e $|A| = \alpha$. Enumeraremos $A = \{x_\gamma : \gamma < \alpha\}$. Para usarmos o lema, fixaremos $N(p)$ base local de p e tomaremos $Z = A$ e, para todo $\gamma < \alpha$ $E_{x_\gamma} = F_\gamma$.

Agora, fixe $y \in Y$. Existe um $\beta < \alpha$ tal que $y \notin F_\beta$ e, como F_β é fechado, existe vizinhança V de y tal que $V \cap F_\gamma = \emptyset$ para todo $\gamma > \beta$. Note que, pela minimalidade de α , $p \notin \overline{\{x_\gamma : \gamma < \beta\}}$, ou seja, existe $U \in N(p)$ tal que $x_\gamma \notin U$ para todo $\gamma < \beta$. Assim, $V \cap \bigcup_{x \in U} E_x = V \cap \bigcup_{\gamma > \beta} F_\gamma = \emptyset$. Em outras palavras, $y \notin \bigcap_{U \in N(p)} \overline{\bigcup_{x \in U} E_x}$.

Usando o lema anterior, existe $Z' \supseteq Z$ e $\{D_x : x \in Z'\}$ tal que, para todo $x \in Z$, $E_x \subseteq D_x$ e $\bigcap_{U \in N(p)} \overline{\bigcup_{x \in U} D_x} = \emptyset$. Fixe $y \in Y$ qualquer. Existem $V \in N(p)$ e $W \in N(y)$ tais que, para todo $x \in V$, $W \cap D_x = \emptyset$. Esta afirmação não basta, pois poderia acontecer de $Z' \cap U = \emptyset$, o que não nos daria um $x \in Z$ tal que $y \notin D_x$. Isto, no entanto, não pode ocorrer já que $p \in \bar{Z}$, logo, deve existir um $x \in Z \cap U \neq \emptyset$ com $y \notin D_x$. Com isso, concluimos, $\bigcap_{x \in Z} D_x = \emptyset$. \square

Em seu artigo, Atsui aponta para [Rud78], de Rudin, para a demonstração de que, para todo κ , existe um espaço normal sem a propriedade $B^*(\kappa)$. Em outras palavras, a contra-positiva do teorema anterior nos leva a concluir o seguinte resultado.

Corolário 2.1.7. *Para todo espaço X não discreto existe um espaço normal Y tal que $X \times Y$ não é normal.*

Tais espaços são chamados por Mary Ellen Rudin de **n-Dowker**. A razão do nome é que sua construção é uma adaptação da feita por ela para um **espaço de Dowker** em ZFC. Espaços de Dowker são espaços normais não enumeravelmente paracompactos e problemas envolvendo eles ainda estão em aberto. No seu artigo [Dow51], Dowker mostrou que esta classes de espaços é totalmente caracterizada por não possuírem a propriedade $B^*(\omega)$, dando uma ideia de como eles estão relacionados com o que estudamos. Sua construção está fora do escopo dessa dissertação, no entanto, estes espaços se relacionam à produtos de espaços normais de uma forma que exploraremos na próxima seção.

O próximo passo será começarmos a olhar o produto de espaços normais por classes com condições mais fortes.

2.2 Produtos com um Fator Compacto

No artigo de Przymusiński, temos um contra-exemplo feito por Dieudonné para a pergunta: o produto de um espaço normal por um espaço compacto é normal? Para isto, ele utilizou como base o ordinal ω_1 . É um resultado conhecido que um ordinal infinito é compacto se e somente se ele é sucessor (1.1.2). Assim, sabemos que $\omega_1 + 1$ é compacto. Além disso, qualquer ordinal com a topologia da ordem é normal (Em [Lut80] lema 3.1). Para construir este contra-exemplo, usaremos o lema do Pressing Down. Enunciamos, abaixo, uma versão mais fraca do lema, mas que é o suficiente para aos nossos propósitos.

Lema 2.2.1 (Pressing Down). *Se $f : \omega_1 \rightarrow \omega_1$ é uma função tal que $f(\alpha) < \alpha$ para todo $\alpha < \omega_1$, então existe $S \subseteq \omega_1$ não enumerável e $\gamma < \omega_1$ tal que $f(\alpha) = \gamma$ para todo $\alpha \in S$.*

Exemplo 2.2.2. *O produto de $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ não é normal.*

Demonstração. Considere os conjuntos $F_0 = \{\langle \alpha, \alpha \rangle : \alpha < \omega_1\}$ e $F_1 = \omega_1 \times \{\omega_1\}$. São disjuntos e F_1 é um produto de fechados. Como os abertos ω_1 são induzidos por abertos de $\omega_1 + 1$, podemos adaptar a demonstração de 1.1.6 para mostrar que F_0 também é fechado.

Sejam U e aberto tal que $F_0 \subseteq U$. Como U é aberto, podemos escolher, para cada $\alpha < \omega_1$, um β_α tal que $(\beta_\alpha, \alpha] \times (\beta_\alpha, \alpha] \subseteq U$. Tome $f : \omega_1 \rightarrow \omega_1$ a função dada por $f(\alpha) = \beta_\alpha$ e utilizando o lema anterior, temos que existe $S \subseteq \omega_1$ não enumerável e $\beta < \omega_1$ tais que, para todo $\alpha \in S$, $f(\alpha) = \beta$.

Queremos mostrar que $\langle \beta + 1, \omega_1 \rangle \in \overline{U}$. Seja $\gamma < \omega_1$ e considere a vizinhança $\{\beta + 1\} \times (\beta, \omega_1]$ deste ponto. Como S é não enumerável, em particular, é cofinal em ω_1 , logo, existe $\alpha \in S$ com $\gamma < \alpha$. Pela definição de S , $\langle \beta + 1, \alpha \rangle \in U \cap \{\beta + 1\} \times (\beta, \omega_1]$. Concluimos, então, que $\overline{U} \cap F_1 \neq \emptyset$.

□

Assim, ficamos com a pergunta se podemos caracterizar a classe de espaços que preservam a normalidade pelo produto por um compacto. Existe uma classe conhecida de espaços que satisfazem a propriedade, os espaços paracompactos (1.1.8).

Como comentamos na introdução do capítulo, vamos olhar para a preservação da normalidade por um compacto C fixado. A razão é que, através dela, poderemos chegar na resposta sobre a classe de espaços tais que a normalidade no produto por todo compacto é preservado. Pela proposição acima, vemos que tal propriedade deve contemplar os espaços paracompactos Hausdorff. Poderia acontecer dessa classe serem os únicos, mas este não é o caso. Usaremos $A(\omega_1)$ para designar a compactificação por um ponto do espaço discreto de tamanho ω_1 . Note que tal compactificação existe, afinal, ele é localmente compacto.

Exemplo 2.2.3. *$\omega_1 \times A(\omega_1)$ é normal.*

Como ω_1 não é um espaço paracompacto ([Lut80] teorema 4.2), temos que, ao menos para o espaço $A(\omega_1)$, a classe dos espaços cujo produto é normal é mais ampla que os espaços paracompactos. Como este exemplo será consequência do teorema principal deste capítulo, resolvemos deixar a demonstração para ser feita mais à frente.

De qualquer forma, a classe de espaços que nos interessa terá que ser caracterizada por uma propriedade que generaliza a paracompacidade. Acontece que a distinção será apenas nas coberturas que consideramos. A definição e demonstração abaixo são de [Prz84].

Definição 2.2.4. *Seja C um espaço compacto e fixe \mathcal{B} uma base de C fechada por intersecções e uniões finitas. Dizemos que uma cobertura \mathcal{U} de um espaço X é uma \mathcal{B} -Cobertura, se seus elementos forem indexados pelos pares $B, D \in \mathcal{B}$ tais que $\overline{B} \cap \overline{D} = \emptyset$ e satisfaz $U(B, D) \cap U(B', D') = U(B \cap B', D \cap D')$.*

Assim, o teorema de caracterização pode ser enunciado da seguinte maneira.

Teorema 2.2.5 (Teorema de Caracterização para Produtos com Compactos). *Seja X um espaço completamente regular e fixe um espaço compacto Hausdorff C , uma base \mathcal{B} de C e um espaço regular X . $X \times C$ é normal se e somente se X é normal e toda \mathcal{B} -cobertura tem refinamento aberto localmente finito.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $X \times C$ normal e $\mathcal{U} = \{U(A, B) : A, B \in \mathcal{B} \text{ e } \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset\}$ uma \mathcal{B} -cobertura. Vamos usá-lo para definir dois fechados

$$K = X \times C \setminus \bigcup \{U(A, B) \times (C \setminus \overline{A}) : \overline{A} \cap \overline{B} \text{ e } A, B \in \mathcal{U}\}$$

e

$$L = X \times C \setminus \bigcup \{U(A, B) \times (C \setminus \overline{B}) : \overline{A} \cap \overline{B} \text{ e } A, B \in \mathcal{U}\}$$

Ambos são claramente complementares de abertos. Resta mostrar que são disjuntos. Tome $\langle x, y \rangle \in X \times C$, como \mathcal{U} é cobertura, existem $A, B \in \mathcal{B}$ com $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ tais que $\langle x, y \rangle \in U(A, B)$. Temos duas possibilidades. Se $y \notin \overline{A}$, então pela definição $\langle x, y \rangle \notin K$. Agora, se $y \in \overline{A}$, então pela disjunção, temos que $y \notin \overline{B}$, logo, $\langle x, y \rangle \notin L$.

Usando a hipótese em conjunto com o Lema de Urysohn ([Eng89] teorema 1.5.11), fixamos uma função $f : X \times C \rightarrow I$ tal que $f|_K \equiv 0$ e $f|_L \equiv 1$. Uma pseudo-métrica tem as mesmas propriedades de uma métrica, exceto que pontos distintos tenham distância maior que zero. Usando f , definiremos uma pseudométrica contínua ρ em X dada por

$$\rho(x, x') = \sup_{y \in C} \{f(x, y) - f(x', y)\}$$

Note que ρ é uma composição de funções contínuas, logo, também é contínua. Para ver que, de fato, é uma pseudométrica a única propriedade não trivial de verificarmos é que satisfaz a desigualdade triangular. No entanto, isto é consequência da norma em \mathbb{R} satisfazer a desigualdade triangular.

Nosso candidato para refinar \mathcal{U} será $\{B(x, \frac{1}{3}) : x \in X\}$. Pela continuidade de ρ temos que tais bolas são, de fato, abertas. Se observarmos a demonstração de que espaços metrizáveis são para paracompactos, como achada em [Rud69], notamos que a argumentação continuaria valendo caso substituíssemos a métrica por uma pseudométrica. Sendo assim, embora $\{B(x, \frac{1}{3}) : x \in X\}$ possa não ser localmente finito, podemos facilmente pegar um refinamento delas que o é.

Note o seguinte fato sobre \mathcal{B} -coberturas. Se $A \subseteq A'$ e $B \subseteq B'$, temos $U(A, B) \cap U(A', B') = U(A', B')$, ou seja, vale $U(A, B) \subseteq U(A', B')$.

Para mostrar que $\{B(x, \frac{1}{3}) : x \in X\}$ refina \mathcal{U} , fixe $x_0 \in X$. Vamos achar $A, B \in \mathcal{B}$ com $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ tal que $B(x_0, \frac{1}{3}) \subseteq U(A, B)$. Como f é contínua, $\{y \in C : f(x, y) \leq \frac{1}{3}\} = f^{-1}[0, \frac{1}{3}] \cap (x \times C)$ é fechado em C , logo, conseguimos uma subcobertura finita de \mathcal{B} . Além disso, escolhemos \mathcal{B} fechado para uniões finitas, portanto, existe um $A' \in \mathcal{B}$ tal que $\{y \in C : f(x, y) \leq \frac{1}{3}\} \subseteq A'$. Analogamente, existe $B' \in \mathcal{B}$ tal que $\{y \in C : f(x, y) \geq \frac{2}{3}\} \subseteq B'$.

Note que $K_{x_0} \subseteq B$. Na verdade, vale mais, se $x \in B(x_0, \frac{1}{3})$ então $K_x \subseteq B$. De fato, se $y \in K_x$ temos $\langle x, y \rangle \in K$. Se tivéssemos $f(x_0, y) > \frac{1}{3}$, então vale $\rho(x, x_0) > \frac{1}{3}$, um absurdo. Igualmente, se $y \in L_x$, então $f(x, y) = 1$. Se $f(x_0, y) < \frac{2}{3}$, então não poderia valer $x \in B(x_0, \frac{1}{3})$. Com esta argumentação, podemos concluir que, para $x \in B(x_0, \frac{1}{3})$ e para $y \notin B$, $\langle x, y \rangle \notin K$. Ou seja, temos $\langle x, y \rangle \in \bigcup \{U(A, E) \times C \setminus \bar{A} : A, E \in \mathcal{B} \text{ e } \bar{A} \cap \bar{E} = \emptyset\}$. Colocando de outra forma, $\{x\} \times (C \setminus B) \subseteq \{U(A, E) \times C \setminus \bar{A} : A, E \in \mathcal{B} \text{ e } \bar{A} \cap \bar{E} = \emptyset\}$. Analogamente, $\{x\} \times C \setminus D \subseteq \{U(A, E) \times C \setminus \bar{A} : A, E \in \mathcal{B} \text{ e } \bar{A} \cap \bar{E} = \emptyset\}$. Como $C \setminus B$ é fechado em um compacto, existe $n \in \omega$ e subconjuntos $(A_i)_{i < n}$ e $(E_i)_{i < n}$ tais que para todo $i < n$, $\bar{A}_i \cap \bar{E}_i = \emptyset$ e $\{x\} \times C \setminus B \subseteq \{U(A_i, E_i) \times C \setminus \bar{A}_i : i < n\}$ pois $\{x\} \times C \setminus B$ é homeomorfo à $C \setminus B$. Podemos fazer o mesmo para $\{x\} \times C \setminus A$ para obter $m \in \omega$ e $(\langle A'_j, E'_j \rangle)_{j < m}$ tal que $x \in \bigcap_{i < n} U(A_i, E_i) \cap \bigcap_{j < m} U(A'_j, E'_j)$.

Temos $C \setminus B \subseteq \bigcup_{i < n} C \setminus \bar{A}_i$ e $C \setminus D \subseteq \bigcup_{j < m} C \setminus \bar{A}'_j$. Tomando o complementar dos dois lados e usando a propriedade de \mathcal{B} -cobertura temos $x \in U(\bigcap_{i < n} A_i \cap \bigcap_{j < m} A'_j, \bigcap_{i < n} E_i \cap \bigcap_{j < m} E'_j) \subseteq U(B, D)$. Com isso, concluímos o que queríamos.

(\Leftarrow)

Assuma agora que toda \mathcal{B} -cobertura tem refinamento localmente finito. Fixe $K, L \subseteq X \times C$ fechados disjuntos. Vamos definir a seguinte \mathcal{B} -cobertura. Se $A, B \subseteq C$ tais que $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ então $U(A, B) = \{x \in X : K_x \subseteq A \text{ e } L_x \subseteq B\}$.

Começaremos mostrando que definimos abertos. Fixados A, B com $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, podemos escrever $U(A, B) = \{x \in X : K_x \subseteq A\} \cap \{x \in X : B \subseteq L_x\}$. Basta mostrar que cada um deles é um aberto. Mostraremos para $\{x \in X : K_x \subseteq A\}$ e o outro é análogo. Fixe $x_0 \in U(A, B)$. Vale que $K_{x_0} \subseteq A$, ou seja, se $\langle x, y \rangle \in K$, então $y \in A$.

Pela contra-positiva, se $y \notin A$, então $\langle x_0, y \rangle \notin K$ e, como K é fechado, existe $M_y \times N_y$ vizinhança de $\langle x, y \rangle$ tal que $M_y \times N_y \cap K = \emptyset$. Notemos que $\{N_y : y \notin A\}$ é cobertura de $C \setminus A$, que é compacto, logo, podemos pegar $\{y_1, \dots, y_n\}$ tal que $C \setminus A \subseteq \bigcup_{i \leq n} N_{y_i}$. Seja, agora, $M = \bigcap_{i \leq n} M_{y_i}$. M é vizinhança aberta de x e, se $z \in M$, temos $K_z \subseteq A$. De fato, caso contrário, existiria $y \in C \setminus A$ e $i \leq n$ tal que $y \in N_{y_i}$ e $\langle z, y \rangle \in K$. No entanto, $z \in M_{y_i}$ nos diz que isto é um absurdo.

Agora, vamos mostrar que é de fato cobertura. Fixe $x \in X$. Temos que K_x e L_x são fechados disjuntos (1.1.5), portanto, pela normalidade de C existe E, D tais que $\bar{E} \cap \bar{D} = \emptyset$ e $K_x \subseteq E$ e $L_x \subseteq D$. Seja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $E = \bigcup \mathcal{C}$. Usando o fato de que K_x é compacto e \mathcal{B} é fechado para uniões finitas temos que existe $A \in \mathcal{B}$ com $K_x \subseteq A \subseteq E$. Analogamente, obtemos $B \in \mathcal{B}$ com $L_x \subseteq B \subseteq D$ e $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. Com isso, $x \in U(A, B)$.

Seja \mathcal{V} uma subcobertura localmente finita. Como X é regular, podemos indexar essa subcobertura por pela mesma do original, além de podermos pegar um refinamento fechado

$\{F(A, B) : \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset\}$ (veja [Eng89] lema 5.1.6).

Vamos mostrar a normalidade construindo uma função contínua que separa os dois fechados. Fixe A, B tal que $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. Usando a normalidade de X , tomamos uma função $f_{A,B} : X \rightarrow I$ tal que $f_{A,B}[F(A, B)] \subseteq \{0\}$ e $f_{A,B}[X \setminus U(A, B)] \subseteq \{1\}$. Além disso, pela normalidade de C também tomamos $g_{A,B} : C \rightarrow I$ tal que $g_{A,B}[\bar{A}] \subseteq \{0\}$ e $g_{A,B}[\bar{B}] \subseteq \{1\}$. Com elas, definiremos $h : X \times C \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x, y) = \sum \{f_{A,B}(x) * g_{A,B}(y) : A, B \in \mathcal{B} : \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset\}.$$

Como \mathcal{V} é localmente finito, para cada x, y esta soma é finita, logo, h está bem definida. Também por causa disso, ela coincide localmente com uma soma de funções contínuas, logo, é contínua. Agora, fixe $\langle x, y \rangle \in K$ e $A, B \in \mathcal{B}$ com $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. Temos $y \in K_x$. Se $x \notin V(A, B)$, então $h(x, y) = 0$. Agora, se $x \in V(A, B) \subseteq U(A, B)$, temos $K_x \subseteq \bar{A}$, o que nos leva a concluir que $y \in \bar{A}$ e $h(x, y) = 0$. Agora, seja $\langle x, y \rangle \in L$. Existem $A, B \in \mathcal{B}$ com $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ tais que $x \in F(A, B)$, logo, $f_{A,B}(x) = 1$. Além disso, temos que $y \in L_x$ e $x \in u(A, B)$, logo, $y \in \bar{B}$, ou seja, $g_{A,B}(y) = 1$. Com isso, $h(x, y) \geq 1$. Os abertos $f^{-1}[(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$ e $f^{-1}[(\frac{1}{2}, \infty)]$ separam K e L . □

Provado o teorema, podemos agora explorar alguns resultados. Um espaço é dito **κ -paracompacto** se toda cobertura de tamanho menor ou igual à κ tem refinamento localmente finito. Este próximo corolário, originalmente de Morita [Mor62], chama atenção ao fato de que a demonstração independe da base escolhida.

Corolário 2.2.6. *Se X é normal e C compacto, então basta que X seja $w(C)$ -paracompacto para garantir que $X \times C$ seja normal.*

Demonstração. Podemos assumir que X é infinito, afinal, se for finito a normalidade nos garante que a topologia é discreta e teríamos a garantia de que o produto é normal. Seja \mathcal{B} uma base de tamanho mínimo em C . Assuma sem perda de generalidade que é fechada para uniões e intersecções finitas. Dada qualquer \mathcal{B} -cobertura, seu tamanho deve ser $w(C) \times w(C)$, portanto, existe um refinamento localmente finito. □

Agora, vamos mostrar resultados que foram provados antes, por outras pessoas, mas que podem ser deduzidos a partir do teorema. Os resultados foram publicados, originalmente, em vários artigos distintos, porém as versões que vemos aqui podem ser encontradas em [Prz84]. Começamos com uma caracterização, original de [Tam62], dos espaços cujo produto pela própria compactificação de Stone-Čech é normal.

Corolário 2.2.7 (Teorema de Tamano). *Se X é regular, são equivalentes:*

- (i) X é paracompacto
- (ii) Se αX é uma compactificação de X , então $X \times \alpha X$ é normal
- (iii) $X \times \beta X$ é normal

Demonstração. (i) \implies (ii) Como αX é compacto, temos a preservação da normalidade garantida pela proposição 1.1.8.

(ii) \implies (iii) Óbvio.

(iii) \implies (i) Seja \mathcal{U} uma cobertura de X em βX fechada para uniões finitas e \mathcal{B} a base de βX dada por todos seus abertos. Defina, para cada $A, B \in \mathcal{B}$ com $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$,

$$U(A, B) = \begin{cases} A \cap X \text{ se } \beta X \setminus B \subseteq \cup \mathcal{U}. \\ \emptyset \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

A família destes abertos é uma \mathcal{B} -cobertura em X . De fato, considere $B, B', D, D' \in \mathcal{B}$. Assuma, primeiro, que $\beta X \setminus D \not\subseteq \cup \mathcal{U}$. Então também vale $\beta X \setminus D \cap D' \not\subseteq \cup \mathcal{U}$, logo, $U(B, D) \cap U(B', D') = \emptyset = U(B \cap B', D \cap D')$. Por outro lado, se assumirmos $U(B, D) = B \cap X$ e $U(B', D') = B' \cap X$, teremos $\beta X \setminus D, \beta X \setminus D' \subseteq \cup \mathcal{U}$, ou seja, $\beta X \setminus D \cap D' = (\beta X \setminus D) \cup (\beta X \setminus D') \subseteq \cup \mathcal{U}$. Assim, temos $U(B \cap B', D \cap D') = B \cap B' = U(B, D) \cap U(B', D')$.

Pelo teorema 2.2.7, existe um \mathcal{C} refinamento localmente finito desta \mathcal{B} -cobertura, o que significa que, para todo $C \in \mathcal{C}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq B$ e $\overline{C} \subseteq \overline{B} \subseteq \cup \mathcal{U}$. Como o fecho de C é compacto, existem finitos elementos de \mathcal{U} que o cobrem. Além disso, tomamos a cobertura fechada para uniões finitas, então temos que a união desse elementos está em \mathcal{C} . Portanto, \mathcal{C} também será um refinamento de \mathcal{U} .

□

Uma consequência deste resultado, é a resposta sobre quais são os espaços normais cujo o produto por qualquer compacto é normal. Se isto acontece, em particular, seu produto por sua compactificação de Stone-Čech também é, logo, esta propriedade caracteriza os espaços paracompactos.

Corolário 2.2.8. *Seja X um espaço topológico. $X \times C$ é normal para todo C compacto se e somente se X é paracompacto.*

Alguns resultados na literatura relacionam paracompacidade enumerável e κ -coletivamente normal. Um espaço X é dito **κ -coletivamente normal** se, para toda família $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ discreta de fechados, existe $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ família localmente finita de abertos que os separam. Vale notar que a definição usual pede que os abertos sejam disjuntos. Optamos por essa definição equivalente (teorema 5.1.17 de [Eng89]) pois é a que usaremos abaixo. O resultado a seguir mostra que são propriedades necessárias para termos a preservação.

Teorema 2.2.9. *Se C é infinito e compacto e $X \times C$ é normal, então X é enumeravelmente paracompacto e $w(C)$ -coletivamente normal.*

O resultado acima é usado apenas como motivação para a utilização de tais propriedades. Sua demonstração utiliza conceitos que não estão relacionados às utilizadas no resto da dissertação e, portanto, a omitiremos. No entanto, ele pode ser encontrado em [Rud75b].

O lema a seguir (exercício 5.5.17(a) em [Eng89]) nos dá uma consequência de um espaço ser enumeravelmente paracompacto e κ -coletivamente normal.

Lema 2.2.10. *Seja X enumeravelmente paracompacto e κ -coletivamente normal. Se $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é uma família de fechados localmente finita, então existe $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ família de abertos localmente finita, tal que $F_\alpha \subseteq U_\alpha$*

Demonstração. Começamos considerando o caso em que $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ são dois a dois disjuntos. Nesse caso, a normalidade κ -coletiva, garante a existência da família localmente finita de $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

Vamos, agora, provar por indução o caso em que existe um $i \in \omega$ tal que para todo $x \in X$, $|\{\alpha : x \in F_\alpha\}| \leq i$. Assuma que vale para algum $i \in \omega$ e vamos considerar uma família localmente finita de fechados $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ tal que todo ponto está em, no máximo, $i + 1$ deles. Considere também a família de fechados $\{\bigcap_{i \in s} F_i : s \in [\kappa]^{i+1}\}$. Esta é uma família de κ fechados localmente finitos tais que todo ponto está, no máximo, em um fechado. Pela normalidade κ -coletiva existe uma família localmente finita de abertos $\{V_s : s \in [\kappa]^{i+1}\}$ que os separam.

Para cada $\alpha < \kappa$, defina $K_\alpha = F_\alpha \setminus \bigcup\{V_s : s \in [\kappa]^{i+1} \text{ e } \alpha \in s\}$. Considere a família de fechados $\{K_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Note que cada $x \in X$ pertence à no máximo i elementos dela. Senão, em particular, haveria $s \in [\kappa]^{i+1}$ tal que $x \in F_s$. Pela nossa hipótese, se $\alpha \notin s$, temos que $x \notin K_\alpha$. Ao mesmo tempo, se $\alpha \in s$, então, como $x \in V_s$, temos que $x \notin K_\alpha$.

Por hipótese de indução, existe $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ família localmente finita de abertos tal que $K_\alpha \subset V_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa$.

Considere o aberto $U_\alpha = V_\alpha \cup \bigcup\{V_s : s \in [\kappa]^{i+1} \text{ e } \alpha \in s\}$ para cada $\alpha < \kappa$. Seja $x \in F_\alpha$. Temos duas opções. A primeira é existir um $s \in [\kappa]^{i+1}$ com $\alpha \in s$ tal que $x \in U_s$. Se este não for o caso, então $x \in K_\alpha \subseteq V_\alpha \subseteq U_\alpha$. Com isso concluímos que $F_\alpha \subseteq U_\alpha$.

Para mostrar que a família $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é localmente finita, tome $x \in X$. Existe um $U \in V(x)$ e um $n \in \omega$ tal que $\{\alpha < \kappa : U \cap V_\alpha \neq \emptyset\} = \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$. Ao mesmo tempo que existe $V \in V(x)$ com $\{s \in [\kappa]^{i+1} : V_s \cap V \neq \emptyset\} = \{s_0, \dots, s_m\}$ para algum $m \in \omega$. Com isso, $V \cap U$ é uma vizinhança de x em que vale $\{\alpha < \kappa : (U \cap V) \cap U_\alpha \neq \emptyset\} = \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\} \cup \bigcup_{I \leq m} s_i$.

Vamos, por fim, ao caso geral. Defina $W_n = \{x \in X : |\{\alpha : x \in F_\alpha\}| \leq n\}$ para cada $n \in \omega$. Como a família $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é localmente finita, para todo $x \in X$, temos $|\{\alpha : x \in F_\alpha\}| < \omega$. Com isso, sabemos que $\{W_n : n \in \omega\}$ é uma cobertura de X . Mais que isso, são abertos, afinal, pela finitude local, todo ponto tem uma vizinhança que só intersecta os pontos a que pertence.

Usando a paracompacidade enumerável e a normalidade, podemos tomar $\{U_n : n \in \omega\}$ refinamento localmente finito tal que $U_n \subseteq W_n$, para todo $n \in \omega$, e $\overline{U_n} \subseteq W_n$ ([Eng89] teorema 5.2.3). Agora, para cada $n \in \omega$, a família de fechados $\{\overline{U_n} \cap F_\alpha : \alpha < \kappa\}$, satisfaz a condição do caso anterior para $i = n$, ou seja, temos uma família localmente finita $\{V_\alpha^n : \alpha < \kappa\}$ tal que $F_\alpha \cap \overline{U_n} \subseteq V_\alpha^n$ para todo $\alpha < \kappa$.

Defina, por fim, $V_\alpha = \bigcup_{n \in \omega} V_\alpha^n \cap U_n$. Para encerrarmos, basta mostrar que a família $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é localmente finita. Fixe $x \in X$. Existe U_x aberto de x que intersecta finitos elementos de $\{U_n : n \in \omega\}$. Seja N o maior índice tal que $V_x \cap U_N \neq \emptyset$. Agora, para cada

$i \in \omega$, considere V_x^i vizinhança aberta de x tal que $\{\alpha : V_\alpha^i \cap V_x^i \neq \emptyset\}$ é finita. A vizinhança aberta de x dada por $V = V_x \cap \bigcap V_x^i$ encontra apenas finitos elementos de $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$. \square

Juntando este lema com o teorema principal, podemos achar uma caracterização para a preservação da normalidade pelo produto com as compactificações de Alexandroff de espaços discretos. O resultado a seguir ([Ala71]) embora trate de uma classe bem específica de espaços, nos garante o exemplo 2.2.3.

Teorema 2.2.11. $X \times A(\kappa)$ é normal se e somente se X é enumeravelmente paracompacto e κ -coletivamente normal.

Demonstração. (\Rightarrow) É consequência direta de 2.2.9.

(\Leftarrow) Vamos, primeiro, fazer para o caso específico de que um dos fechados é $X \times \kappa$. Seja F um fechado disjunto deste. Considere a família de fechados de X dada por $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Esta é uma família localmente finita. De fato, dado $x \in X$, o ponto $\langle x, \kappa \rangle$ é disjunto de F , logo existe uma vizinhança básica de $\langle x, \kappa \rangle$, $U \times V$, disjunta de F . Pela topologia de $A(\kappa)$, V é cofinito. Como $z \in U \cap F_\alpha$, implica que $\alpha \notin V$, todo elemento de U está em apenas finitos membros da família.

Fixe uma família $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de abertos localmente finitos dada pelo lema anterior. Definimos $U = \bigcup_{\alpha < \kappa} U_\alpha \times \{\alpha\}$. Se $\langle x, \alpha \rangle \in F$, temos que $x \in F_\alpha \subseteq U_\alpha$, logo, $\langle x, \alpha \rangle \in U$. Tome, agora, $x \in X$ e V vizinhança de x tal que $A = \{\alpha < \kappa : V \cap U_\alpha \neq \emptyset\} = \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$. Considere a vizinhança aberta de κ dada por $W = A(\kappa) \setminus A$. $V \times W$ é uma vizinhança aberta de $\langle x, \kappa \rangle$ que é disjunta de U .

Agora, tomemos o caso geral. Sejam F e K dois fechados disjuntos e considere $F_0 = F \cap X \times \{\kappa\}$ e $K_0 = K \cap X \times \{\kappa\}$.

Para cada, $\alpha \leq \kappa$, o conjunto $F_\alpha = \pi_X[F \cap (X \times \{\alpha\})]$ e K_α , definido de forma análoga, são fechados disjuntos de X . Portanto, temos V_α e U_α abertos de X que contém F_α e K_α , respectivamente, e os separam. Considere o aberto $W_F = \bigcup_{\alpha < \kappa} U_\alpha \times \{\alpha\}$. Defina W_K de maneira análoga. Observe que $F \setminus U_\kappa \times A(\kappa) \subseteq W_F$, $K \setminus V_\kappa \times A(\kappa) \subseteq W_K$ e $W_F \cap W_K = \emptyset$. Sabemos que $F \setminus U_\kappa \times A(\kappa)$ é um fechado disjunto de $X \times \{\kappa\}$, logo, pela argumentação que fizemos acima, podemos supor que $\overline{W_F} \cap (X \times \{\kappa\}) = \emptyset$. Considere os abertos $U_F = ((U_\kappa \times X) \setminus \overline{W_K}) \cup W_F$ e U_K , definido de forma análoga. Estes são os abertos que separam L e K . \square

Outra classe de espaços cuja caracterização da preservação da normalidade pelo produto é consequência do teorema são os ordinais compactos. O resultado a seguir é creditado ao Kunen por Przymusiński, mas uma referência não é dada.

Proposição 2.2.12. *Seja α um ordinal. $X \times (\alpha + 1)$ é normal se, e somente se, X é normal e $|\alpha|$ -paracompacto.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se $X \times (\alpha + 1)$ é normal, como existe uma cópia fechada de X dentro deste, X também é normal. A $|\alpha|$ -paracompacidade mostraremos por indução. Assuma que vale para todo $\gamma < \alpha$ e seja $\mathcal{U} = \{U_\beta : \beta < \alpha\}$ cobertura de X . Podemos, sem perda de generalidade, assumir que α é infinito. Queremos usar o Teorema de Caracterização 2.2.5. Portanto, definiremos \mathcal{B} como a base dada por todos os abertos de $\alpha + 1$ e, para cada $A, B \in \mathcal{B}$ com $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, escolhemos o seguinte aberto de X :

$$U(A, B) = \begin{cases} V_\beta \text{ onde } \beta \text{ é o menor tal que } (\beta, \alpha] \subseteq B, \\ \emptyset \text{ se não existir tal } \beta \end{cases}$$

onde $V_\beta = \bigcup_{\gamma < \beta} U_\gamma$. Vamos mostrar que de fato é uma \mathcal{B} -cobertura. Dado $x \in X$, existe um menor β tal que $x \in V_\beta$. Note que $U(\{\emptyset\}, (\beta, \alpha]) = V_\beta$. Agora, analisaremos $U(A, B) \cap U(C, D)$. Se algum for vazio, digamos $U(A, B)$, então não existe β tal que $(\beta, \alpha] \subseteq B \cap D \subseteq B$. Se ambos são não vazios, como V_β 's são encaixados, então $U(A, B) \cap U(C, D) = V_\beta \cap V_\gamma = V_{\max\{\beta, \gamma\}}$.

Pelo Teorema de Caracterização 2.2.7, existe um \mathcal{G}' refinamento localmente finito desta \mathcal{B} -cobertura.

(\Leftarrow) É uma consequência direta do teorema principal 2.2.7 e fato de $\alpha + 1$ ter peso α . □

Usando esta última proposição, vamos provar o último resultado desta seção. Uma classe de espaços compactos a se considerar são espaços compactos metrízáveis. Para muitos, o primeiro exemplo de tal é o intervalo unitário I . No artigo que já citamos ([Dow51]), motivado pelo teorema abaixo, Dowker perguntou se haveria algum espaço normal tal que o produto por I não é normal. Acontece que esta é uma caracterização dos espaços de Dowker que mencionamos na seção anterior. Só existiam exemplos consistentes até Mary E. Rudin publicar [Rud72], onde construiu um exemplo em ZFC.

Teorema 2.2.13 (Teorema de Dowker). *Dado X espaço topológico, são equivalentes*

1. X é normal e enumeravelmente paracompacto.
2. $X \times Y$ é normal para todo Y compacto metrízável infinito.
3. $X \times I$ é normal.

Demonstração. (i) \implies (ii) É uma consequência imediata do teorema principal 2.2.5 e o fato de todo compacto metrízável ter base enumerável.

(ii) \implies (iii) Óbvio.

(iii) \implies (i) Primeiro chamamos atenção para o fato que X deve ser normal pois existe uma cópia fechada deste em $X \times I$.

Agora, fixe uma sequência convergente em I e considere o conjunto dado pela sequência com o ponto de acumulação. Tal conjunto é fechado, afinal, I é Hausdorff. Além disso, é homeomorfo à $\omega + 1$. Assim, temos que $X \times (\omega + 1)$ pode ser visto como subconjunto fechado de $X \times C$, logo, também é normal. Com isso, podemos aplicar a proposição 2.2.12, para concluir que X é ω -paracompacto. □

Já comentamos, após a definição 2.1.4 que paracompacidade enumerável também é equivalente à condição $B^*(\omega)$. Com isso, vemos a relação dos espaços que não satisfazem $B^*(\kappa)$, vistos em [Rud78], e os espaços de Dowker.

No espírito deste teorema, na próxima seção, voltaremos nossa atenção para espaços metrizáveis.

2.3 Produtos com um Fator Metrizável

O produto de um espaço normal por um espaço metrizável não precisa ser normal. Em [Mic63], Ernest Michael forneceu um contraexemplo para este fato. O que faremos a seguir é uma modificação deste, achada em [Prz84].

Começamos definindo a reta de Michael \mathbb{M} como sendo a reta real com a menor topologia que além de possuir abertos usuais, torna os irracionais pontos isolados. Mais precisamente, é a topologia gerada por $\{U \cup P : U \text{ é aberto de } \mathbb{R} \text{ e } P \subseteq \mathbb{P}\}$. Tal espaço é normal, na verdade, mais que isso, é hereditariamente paracompacto.

Proposição 2.3.1. \mathbb{M} é hereditariamente paracompacto.

Demonstração. Vamos mostrar que \mathbb{M} é hereditariamente paracompacto. Seja $X \subseteq \mathbb{M}$ e tome \mathcal{U} cobertura aberta. Esta cobertura pode ser representada como união de \mathcal{V} e $\mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$, onde \mathcal{V} representa os abertos euclidianos. Como \mathbb{R} é metrizável, também é hereditariamente paracompacto, logo, existe \mathcal{V}' refinamento localmente finito de \mathcal{V} em $\cup \mathcal{V}$. Agora, considere $\mathcal{V}' \cup \{\{p\} : p \in X \setminus \mathcal{V}'\}$. Claramente é um refinamento de \mathcal{U} . Além disso, se $x \in \cup \mathcal{V}$, podemos considerar que a vizinhança V que intersecta finitos elementos de \mathcal{V}' está contida em $\cup \mathcal{V}$. Para os elementos de $p \in X \setminus \mathcal{V}'$, o próprio aberto $\{p\}$ intersecta apenas um elemento da família. Portanto, este refinamento é localmente finito. \square

Note que, como a topologia é mais fina que a da reta, \mathbb{M} é um espaço regular. Assim, temos que, juntando com a paracompacidade, é também um espaço normal. O seguinte resultado nos dá um contra-exemplo para a preservação de normalidade no produto por espaços metrizável.

Exemplo 2.3.2. O produto da Reta de Michael com os irracionais não é normal.

Demonstração. Considere os subconjuntos $F_0 = \mathbb{Q} \times \mathbb{P}$ e $F_1 = \{\langle p, p \rangle : p \in \mathbb{P}\}$ de $\mathbb{M} \times \mathbb{P}$. São disjuntos e também são fechados. De fato, pela definição da topologia F_0 é um produto de fechados e podemos mostrar que F_1 com uma adaptação do argumento em 1.1.6.

Sejam agora U e V abertos de tais que $F_1 \subseteq U$. Vamos mostrar que $\bar{U} \cap F_0 \neq \emptyset$. Como \mathbb{R} tem base enumerável, \mathbb{P} também tem, logo, podemos escolher um D denso enumerável em \mathbb{P} . Assim, para cada $p \in \mathbb{P}$, podemos escolher $d_p \in D$ tal que $\{p\} \times [p, d_p] \subseteq V$.

Agora, definimos, para cada $d \in D$, $P_d = \{p \in \mathbb{P} : d_p = d\}$. Claramente, temos $\mathbb{P} = \bigcup_{d \in D} P_d$, mas não podemos ter $\mathbb{P} = \bigcup_{d \in D} \overline{P_d}^{\mathbb{R}}$. Isso se dá pois, como consequência de 2.1.1, os racionais não são um subconjunto G_δ de \mathbb{R} . Já que todo aberto que contém os racionais na reta de Michael é um aberto dos reais, \mathbb{Q} também não é G_δ em \mathbb{M} . Sendo assim, existe $q \in \mathbb{Q}$ e com $q \in \bigcup_{d \in D} \overline{P_d}^{\mathbb{R}}$. Seja d o elemento de D tal que $q \in \overline{P_d}^{\mathbb{R}}$ e $U_0 \times V_0$ um aberto que contém o ponto $\langle q, d \rangle$. Como $q \in U_0$, U_0 deve ser um aberto de \mathbb{R} , logo, existe $p \in P_d$ tal que $p \in U_0$. Isso significa que existe $p \in U_0$, tal que $\{p\} \times [p, d] \subseteq U$, ou

seja, $\langle p, d \rangle \in U \cap (U_0 \times V_0)$. Com isso, vemos que $\langle p, d \rangle \in \bar{U}$. Por definição, também temos $\langle p, d \rangle \in F_0$, logo, $U \cap V \neq \emptyset$. \square

Nosso objetivo agora, será achar uma condição equivalente à preservação normalidade do produto por um espaço metrizável ser preservado. Como no caso dos compactos, nossa condição dependerá de uma construção feita usando um espaço metrizável fixado. Ou seja, como na seção anterior, é uma condição diferente para cada metrizável.

A partir de agora, fixaremos um espaço M metrizável até terminarmos de provar o teorema 2.3.4. Além disso, fixe uma base \mathcal{B} de M com a propriedade de que $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{B}_n$, onde \mathcal{B}_n é uma cobertura localmente finita de M formada por abertos de diâmetro menor que $\frac{1}{n}$. Para obter cada \mathcal{B}_n , basta que, usando a paracompacidade dos espaços metrizáveis, tomemos um refinamento localmente finito da cobertura $\{B(x, \frac{1}{n}) : x \in M\}$.

Além disso, assumiremos que, para todo $n \in \omega$, \mathcal{B}_{n+1} seja um refinamento de \mathcal{B}_n . Para isto, basta, para cada elemento de \mathcal{B}_n , escolher vizinhanças de tamanho menor que $\frac{1}{n+1}$ de seus pontos que estejam contidas nele, considerar a cobertura formada por estes abertos, e tomar um refinamento localmente finito. Podemos nos certificar, também, de escolher sempre vizinhanças diferentes para que $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{B}_m = \emptyset$ se $m \neq n$.

Definição 2.3.3. *Seja X um espaço qualquer. Considere a família $\{F_B : B \in \mathcal{B}\}$ de fechados em X . Dizemos que ela é **monótona** se $F_B \subseteq F_{B'}$ sempre que $B \subseteq B'$.*

Com esta definição, podemos enunciar o teorema, de autoria de Przymusiński (assim como o lema provado logo depois [Prz84]).

Teorema 2.3.4. [Teorema de Caracterização para Produtos com metrizáveis] *Seja X um espaço Tychonoff. Temos que $X \times M$ é normal se, e somente se, X é normal e para toda família monótona $\{F_B : B \in \mathcal{B}\}$ de fechados de X tal que, para todo $m \in M$, temos $\bigcap \{F_B : z \in \mathcal{B}\} = \emptyset$, existe uma família de abertos $\{U_B : B \in \mathcal{B}\}$, tal que $F_B \subseteq U_B$ para todo $B \in \mathcal{B}$ e, para todo $m \in M$, temos $\bigcap \{U_B : z \in \mathcal{B}\} = \emptyset$.*

Chamamos a atenção para o fato de que o que caracteriza a preservação é uma generalização da condição $B^*(\kappa)$. Sendo assim, esta caracterização interna também pode ser vista como uma generalização de paracompacidade. Antes de demonstrar o teorema, temos o seguinte lema.

Lema 2.3.5. *Seja X um espaço topológico. X é normal se, e somente se, para todo $F_0, F_1 \subseteq X$ fechados disjuntos existe \mathcal{U} cobertura σ -localmente finita aberta tal que, para todo $U \in \mathcal{U}$, $\bar{U} \cap F_0 = \emptyset$ ou $\bar{U} \cap F_1 = \emptyset$*

Demonstração. Tome F_0, F_1 fechados disjuntos

(\Rightarrow) Pela normalidade de X podemos escolher U aberto tal que $F_0 \subseteq U$ e $\bar{U} \cap F_1 = \emptyset$. Também pela normalidade, existe um V aberto, tal que vale $F_0 \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$. Considere, agora, $\mathcal{U} = \{U, X \setminus \bar{V}\}$. Pela finitude é localmente finita e pela construção satisfaz a propriedade.

(\Leftarrow) A demonstração se assemelha à de que espaços paracompactos são normais. Fixe $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}_n$ com as propriedades do lema. Para cada $n \in \omega$ e $i = 1, 2$, considere $U_i(n) = \bigcup \{U \in \mathcal{U}_n : \bar{U} \cap F_{1-i} = \emptyset\}$. Note que $U_i(n)$ é aberto e, como $\mathcal{U}_i(n)$ é localmente

finito, $\overline{U_i(n)} \cap F_{1-i} = \emptyset$. Além disso, para cada ponto de F_i , todo aberto de \mathcal{U} que contém ele é disjuntos de F_{1-i} . O que isso significa é que $\bigcup_{n \in \omega} U_i(n)$ cobre F_i . Para construir os abertos disjuntos, definiremos $V_i(n) = U_i(n) \setminus \bigcup_{j \leq n} \overline{U_{1-i}(j)}$. Então $V_i = \bigcup_{n \in \omega} V_i(n)$ é um aberto que contém F_i e é disjunto de V_{1-i} . Assuma que exista $x \in V_0 \cap V_1$. Existem $n, j \in \omega$ tais que $x \in V_0(n) \cap V_1(j)$. No entanto, pela definição, não poderíamos ter $n \leq j$ nem $j \leq n$. Absurdo!

□

Agora, ao teorema. Esta demonstração lembra muito a demonstração original de Dowker para 2.2.13.

Teorema de Caracterização para Produtos com Metrizáveis. (\Rightarrow) Assuma $X \times M$ normal. Como $X \times \{m\}$ é fechado e homeomorfo à X , temos que ele é normal. Fixe agora $\{F_B : B \in \mathcal{B}\}$ uma sequência monótona de fechados como no enunciado.

Começamos assumindo que nenhum $B \in \mathcal{B}$ é discreto. Vamos, para cada $B \in \mathcal{B}$, escolher dois pontos, dois a dois distintos. Fixe $n \in \omega$ e assumamos escolhidos $p_B^0, p_B^1 \in B$ para cada $B \in \mathcal{B}_m$ e $m < n$. Dado $B \in \mathcal{B}_n$, estamos assumindo que existe um $x \in B$ que seja um ponto de acumulação, logo, podemos escolher $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq B$ sequência que converge à x . Apenas finitos elementos da sequência pertencem à $\{p_B^i : B \in \bigcup_{m < n} \mathcal{B}_m \text{ e } i = 0, 1\}$, afinal, se infinitos pertencessem, existiria $m < n$ tal que existem infinitos em $\{p_B^i : B \in \mathcal{B}_m \text{ e } i = 0, 1\}$. Sendo assim, qualquer vizinhança aberta de x contém infinitos elementos da sequência, ou seja, intercepta infinitos elementos de \mathcal{B}_m , contradizendo a finitude local de \mathcal{B}_m . Podemos, então, escolher dois pontos $p_B^0, p_B^1 \in B$ que não foram escolhidos antes. O mesmo argumento, junto com uma boa enumeração de B_n , nos dá que podemos escolher de forma a todo elemento de B_n tenha dois pontos distintos.

Definimos agora os conjuntos $F_i = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} F_B \times \{p_B^i\}$ para $i = 0, 1$. São claramente disjuntos. Falta vermos que são fechados. Este fato virá de ser uma união de fechados localmente finitos. Fixe $i = 0, 1$. Primeiro, notamos que $\{F_B \times \{p_B^i\} : B \in \mathcal{B}_n\}$ é localmente finito. De fato, tome $\langle x, m \rangle$. Existe U vizinhança aberta de m que intercepta finitos $B \in \mathcal{B}_n$. Sendo assim, $X \times U$ intercepta finitos elementos de $\{F_B \times \{p_B^i\} : B \in \mathcal{B}_n\}$. Portanto, $\bigcup \{F_B \times \{p_B^i\} : B \in \mathcal{B}_n\}$ é fechado.

Agora, precisamos ver que encontra um número finito de \mathcal{B}_m 's. Considere $B \in \mathcal{B}$ tal que $m \in B$, mas $x \notin F_B$. Existe algum $N \in \omega$ tal que $B(m, \frac{1}{N}) \subseteq B$. Com isso, para todo $m \geq 2N$ e $D \in \mathcal{B}_m$, pela escolha da base, se $B \cap D \neq \emptyset$, então $D \subseteq B(x, \frac{1}{N})$. Vamos mostrar isso. Fixe $m \in \omega$ tal que existe $D \in \mathcal{B}_m$ e $x \in B$. Sabemos podemos escolher um pois existem finitos elementos de $\bigcup_{i < N} \mathcal{B}_i$, então podemos pegar o mínimo dos diâmetros k e $B(x, k) \cap \bigcup_{i \geq N} \mathcal{B}_i \neq \emptyset$. Considere o aberto $U = (X \setminus F_D) \times D$. Temos que $\langle x, m \rangle \in U$. Além disso, se $m \geq e \bigcup \{F_B \times \{p_B^i\} : B \in \mathcal{B}_m\} \cap U \neq \emptyset$, existe um $V \in \mathcal{B}_n$ tal que $U \cap F_V \times \{p_V^i\} \neq \emptyset$. Pelo comentário que fizemos anteriormente, $V \subseteq B$, logo, $F_V \subseteq F_B$. No entanto, isso contradiz que $U \cap F_V \times \{p_V^i\} \neq \emptyset$. Absurdo! Concluimos que a família é de fato localmente finito e, portanto, K_i é fechado para $i = 0, 1$.

Usando a normalidade, temos que existem U_0 e U_1 abertos que separam K_0 e K_1 . Para cada $B \in \mathcal{B}$, defina $U_B = \pi_X[U \cap (X \times \{p_B^0\})] \cap \pi_X[U \cap (X \times \{p_B^1\})]$. Note que U_B será um aberto, afinal π_X é homeomorfismo entre X e $X \times \{p_B^i\}$. Também é claro que $F_B \subseteq U_B$. Assim,

nos resta mostrar que fixado $z \in M$, e $x \in X$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $m \in B$ e $x \notin X$. Sabemos que existe $i = 1, 2$ tal que $\langle z, m \rangle \notin \bar{U}_i$. Sendo assim, existe vizinhança aberta básica $V \times B$ de $\langle z, m \rangle$ que é disjunto de U_i . Não podemos ter que $x \in U_B$ senão, pela definição, teríamos $\langle z, p_B^i \rangle \in U_i \cap V \times B$. Com isso concluímos.

(\Leftarrow)

Vamos mostrar que $X \times M$ satisfaz as premissas do lema anterior. Como queremos um recobrimento de $X \times M$, necessariamente teremos um recobrimento de M também, então iremos procurar abertos da forma $V_B \times B$ para $B \in \mathcal{B}$. Abertos dessa forma, deverão ser σ -localmente finitos pois a base que escolhemos o é (veja o argumento que fizemos em (\Rightarrow) deste teorema).

Tome $F_0, F_1 \subseteq X \times M$ fechados disjuntos. Para cada $B \in \mathcal{B}$ e $i = 0, 1$, defina $F_B^i = \pi_X[(X \times \bar{B}) \cap \bar{F}_i]$ e $F_B = F_B^0 \cap F_B^1$. Em outras palavras, fora de $M \times F_B$ as projeções de F_0 e F_1 são disjuntas em $X \times B$. Note que é uma sequência de fechados monótona, afinal intersecção, produto, fecho e projeção são monótonas. Vamos mostrar que $\bigcap \{F_B : m \in B\} = \emptyset$, então fixe $m \in M$ e $x \in X$. Assuma, sem perda de generalidade, que $\langle x, m \rangle \notin F_0$. Repetindo o argumentos que fizemos na ida, pela regularidade, temos que existe $U \times B$ vizinhança básica de $\langle x, m \rangle$ cujo fecho, $\bar{U} \times \bar{B}$, é disjunto de F_0 . Temos que se $y \in \pi_X[(F_0 \cap (X \times \bar{B})]$, teríamos que existe um $z \in \bar{B}$ tal que $\langle y, z \rangle \in F_0$. Assim, se y também pertence à U , teríamos que $\langle y, z \rangle \in U \times V$, o que seria um absurdo. Sendo assim, U é testemunha de que $x \notin F_B^0$.

Tome a família $\{U_B : B \in \mathcal{B}\}$ que existe por hipótese. Fixe $B \in \mathcal{B}$. Tomando o complementar, temos $X \setminus U_B \subseteq X \setminus F_B^0 \cup F_B^1$. Note que $(X \setminus U_B) \setminus (X \setminus F_B^1)$ é um fechado contido em $X \setminus F_B^0$. Pela normalidade, existe V_B^0 aberto tal que

$$(X \setminus U_B) \setminus (X \setminus F_B^1) \subseteq V_B^0 \subseteq \bar{V}_B^0 \subseteq X \setminus F_B^0$$

.

Agora, $X \setminus B \cup V_B^0$ é um fechado e está contido em $X \setminus F_B^1$, logo, podemos achar V_B^1 tal que

$$X \setminus U_B \cup V_B^0 \subseteq V_B^1 \subseteq \bar{V}_B^1 \subseteq X \setminus F_B^1$$

.

Obviamente, temos $X \setminus U_B \subseteq V_B^0 \cup V_B^1$. Defina $\mathcal{V} = \{V_B^0 \times B : B \in \mathcal{B}\} \cup \{V_B^1 \times B : B \in \mathcal{B}\}$. Note que \mathcal{V} é σ -localmente finita, pois \mathcal{B} o é, e satisfaz a propriedade do lema por construção. Só resta mostrar que é uma cobertura. Para isso, tome $\langle x, y \rangle \in X \times M$. Existe algum $B \in \mathcal{B}$ tal que $y \in B$ e $x \notin U_B$. Assim, $x \in V_B^0 \cup V_B^1$. Assuma sem perda de generalidade que $x \in V_B^0$. Temos que $\langle x, y \rangle \in V_B^0 \times B$. \square

Novamente, com esta caracterização podemos tirar como corolário diversos resultados conhecidos. Assim como antes, embora os resultados originais sejam de vários autores, as versões aqui escritas podem ser encontradas em [Prz84]. O primeiro deles mostra que para espaços metrizáveis, a preservação da normalidade e da paracompacidade enumerável é igual.

Lema 2.3.6. *Se X é normal e M é metrizável não discreto, então o produto $X \times M$ é normal se e somente se é enumeravelmente paracompacto.*

Demonstração. (\Rightarrow) Pelo Teorema de Dowker 2.2.13, basta provar que $X \times M \times (\omega + 1)$ é normal, pois $\omega + 1$ é compacto e infinito. Além disso, é metrizável, já que podemos vê-lo como homeomorfo à qualquer sequência convergindo a um ponto. Por exemplo, a métrica tal que para todo $n, m \in \omega$, $d(\omega, n) = \frac{1}{n}$ e $d(n, m) = 1$ é compatível com a topologia. Com essa mesma lógica, podemos achar um subespaço de M homeomorfo à $\omega + 1$, afinal M não é discreto. Temos que $X \times \omega + 1$ é homeomorfo à um subespaço fechado de $X \times M$ e, portanto, é normal.

Agora, fixe \mathcal{B} uma base de M nas condições do Teorema 2.3.4 e $\{F_B : B \in \mathcal{B}\}$ uma família monótona de fechados de $X \times \omega + 1$. Como $\omega + 1$ é compacto, a projeção em X é fechada, logo, $\{\pi_X[F_B] : B \in \mathcal{B}\}$ é uma sequência monótona de fechados.

Além disso, fixe $m \in M$ e $\langle x, i \rangle \in X \times (\omega + 1)$. Sabemos que existe $B' \in \mathcal{B}$ tal que $m \in B'$ e $\langle x, \omega \rangle \notin F_{B'}$. Como $F_{B'}$ é fechado, existe $N \in \omega$ tal que $\langle x, n \rangle \notin F_{B'}$ para todo $n \geq N$. Agora, para cada $i \leq N$ tome $B_i \in \mathcal{B}$ vizinhança de m tal que $\langle x, i \rangle \notin F_{B_i}$. Seja $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq \bigcap \{B_i : i \leq N\} \cap B'$ vizinhança de m . Temos que $F_B \cap \{x\} \times \omega_1 = \emptyset$, logo, $x \notin \pi_X[F_B]$.

Como $X \times M$ é normal, tome a família $\{U_B : B \in \mathcal{B}\}$ garantida pelo teorema 2.3.4. Considere a família $\{\pi_X^{-1}[U_B] : B \in \mathcal{B}\}$. Claramente, $F_B \subseteq \pi_X^{-1}[U_B]$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Fixe, agora, $m \in M$ e $\langle x, i \rangle \in X \times (\omega + 1)$. Existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $m \in B$ e $x \notin U_B$ e, portanto, $\langle x, i \rangle \notin \pi_X^{-1}[U_B]$. Com isso, concluímos a demonstração.

(\Leftarrow)

Seja $\{F_B : B \in \mathcal{B}\}$ como no enunciado e considere, para cada $n \in \omega$, o fechados $F_n = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_n} F_B \times \bar{B}$. Claramente, estes são fechados decrescentes. Além disso, $\bigcap_{n \in \omega} F_n = \emptyset$. De fato, se $\langle x, m \rangle \in X \times B$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $m \in B$ e $x \notin F_B$. Além disso, existe um $m \in \omega$ tal que $m \in B(m, \frac{1}{m}) \subseteq B$. Seja $n > 2m$ e $B' \in \mathcal{B}_n$ tal que $m \in B' \subseteq B$. Denotemos a métrica de M por d . Se $m \in D \in \mathcal{B}_n$ e $d \in D \cap B'$ então, dado $x \in D$, $d(x, m) \leq d(x, d) + d(d, m) \leq \frac{1}{n} + \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$. Com isso, concluímos que $D \subseteq B$.

Usando a equivalência de paracompacidade enumerável que comentamos após a definição 2.1.4, existe $\{U_n : n \in \omega\}$ família de abertos tal que $F_n \subseteq U_n$ para todo $n \in \omega$ e $\bigcap_{n \in \omega} U_n = \emptyset$. Podemos assumir que que todo elemento de \mathcal{B} é unitário ou infinito, afinal, por ser a base de um espaço Hausdorff, eliminando todos elementos finitos não unitários, ainda temos uma base. Assim, se $|B| = 1$, defina $U_B = \emptyset$. Agora, se B não é discreto defina, para cada $B \in \mathcal{B}$, o aberto $U_B = \pi_X[U_n \cap (X \times \bar{B})]$, onde n é o menor tal que $B \in \mathcal{B}_n$. Fixe $B \in \mathcal{B}$. Se $|B| = 1$ então pela propriedade da intersecção vazia, temos que $F_B = \emptyset$. Se B não for discreto e $x \in F_B$, tome $y \in \bar{B}$ e $n \in \omega$ o menor tal que $B \in \mathcal{B}_n$. Temos $\langle x, y \rangle \in F_B \times \bar{B} \subseteq F_n \subseteq U_n$, portanto, $F_B \subseteq U_B$. Agora, tome $m \in M$ e $x \in X$. Se m for discreto, não há o que fazer. \square

O próximo lema, original de [RS75], nos ajudará a expandir o resultado anterior.

Lema 2.3.7. *Seja X um espaço topológico normal, C compacto e M metrizável. Se $X \times C$ e $X \times M$ são normais, então $X \times M \times C$ também o é.*

Demonstração. Se M for discreto, já vimos que o resultado valerá.

Agora, assumamos M não discreto. Pelo lema anterior, $X \times M$ é enumeravelmente paracompacto. Uma demonstração similar à 1.1.8, mostra que $X \times M \times C$ também é enumeravelmente paracompacto. Usando agora a volta do lema anterior, temos que $X \times C \times M$ é normal.

□

Com estes lemas, podemos provar o próximo resultado, provado primeiro também em [RS75], que relaciona as três propriedades que mencionamos na introdução deste capítulo.

Teorema 2.3.8. *Seja X um espaço de Lindelöf. Se M é metrizável e separável, então são equivalentes:*

1. $X \times M$ é normal.
2. $X \times M$ é enumeravelmente paracompacto.
3. $X \times M$ é paracompacto
4. $X \times M$ é de Lindelöf

Demonstração. (i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (iv) é óbvio.

(ii) \implies (i) vem do lema.

(iii) \implies (i) Aplicando o 2.2.7 da seção anterior, basta mostrarmos que $X \times M \times \beta(X \times M)$ é normal. Como X é de Lindelöf e $\beta(X \times M)$ é compacto, $X \times \beta(X \times M)$ é de Lindelöf, logo, normal. Por outro lado, estamos assumindo que $X \times M$ é normal. Aplicando o resultado anterior, temos o que queríamos.

(iii) \implies (iv) Assuma $X \times M$ paracompacto e seja \mathcal{U} uma cobertura. Existe \mathcal{V} um refinamento localmente finito de \mathcal{U} . Fixe $D \subseteq M$ um denso enumerável. Então $X \times D$ também é denso, logo, todo elemento de \mathcal{V} o intercepta. Para cada $z \in X \times D$, considere U vizinhança de z que intercepta finitos elementos de \mathcal{V} . Considere a cobertura de $X \times D$ dada por estes abertos. Note que $X \times D = \bigcup_{d \in D} X \times \{d\}$ é de Lindelöf, logo, existe uma subcobertura enumerável \mathcal{C} . Ou seja, se a quantidade de elementos de \mathcal{V} que intersecta $X \times D$ fosse não enumerável, teríamos que algum elemento de \mathcal{C} tem intercepção com não enumeráveis elementos de \mathcal{V} . Como isso não ocorre e todo elemento de \mathcal{V} intersecta $X \times D$, concluímos que \mathcal{V} é enumerável. Para conseguir a subcobertura enumerável basta escolher, para cada elemento de \mathcal{V} , um U que o contém.

□

Antes de terminarmos, faremos como na seção anterior e usar este último teorema para classificar todos os espaços que preservam a normalidade pelo produto por qualquer espaço metrizável. Diferente de antes, não é uma classe já familiar para quem fez um curso básico de topologia. No entanto, como tem sido o padrão até aqui, a propriedade pode ser vista como uma generalização de paracompacidade.

Definição 2.3.9. Um espaço X é dito um **P -espaço** se para todo κ cardinal e toda família monótona $\{F_\sigma : \sigma \in [\kappa]^{<\omega}\}$ de fechados de X existe uma família $\{U_\sigma : \sigma \in [\kappa]^{<\omega}\}$ tal que cada U_σ contém seu respectivo F_σ e, para todo $f \in \kappa^\omega$ com $\bigcap_{n \in \omega} F_{f|_n} = \emptyset$ temos que $\bigcap_{n \in \omega} U_{f|_n} = \emptyset$.

Estes espaços foram definidos por Morita em [Mor64] justamente com o objetivo de provar o teorema abaixo. Seu artigo original dá a entender que a definição vem das tentativas de generalização das classes que já se sabiam, na época, preservar a normalidade para todo metrizable.

O lema abaixo será usado na demonstração e pode ser achado em [Mor55].

Lema 2.3.10. Se M é metrizable, existe $M_0 \subseteq w(M)^\omega$ e uma função perfeita $f : M_0 \rightarrow M$ sobrejetora.

Este lema é importante pois quando tratamos de subespaços de κ^ω , temos a base $\mathcal{B} = \{B_\sigma : \sigma \in K^{<\omega}\}$, onde $B_\sigma = \{f \in \kappa^\omega : f \subseteq \sigma\}$ naturalmente relaciona com o conceito de P -espaço.

Teorema 2.3.11. O produto $X \times M$ é normal para todo M metrizable se, e somente se, X é um P -espaço normal.

Demonstração. (\Rightarrow) Fixe κ cardinal e $\{F_\sigma : \sigma \in [\kappa]^{<\omega}\}$ como na definição de P -espaço. Se consideramos κ com a topologia discreta, temos que κ^ω será um espaço metrizable. Considere o subespaço $M = \{f \in \kappa^\omega : \bigcap_{n \in \omega} F_{f|_n} = \emptyset\}$ e $S = \{\sigma \in \kappa^{<\omega} : \text{existe } f \in M \text{ com } f \supseteq \sigma\}$.

Por hipótese, temos que $X \times M$ é normal. Se quisermos aplicar o teorema 2.3.4, precisamos fixar uma base. Dado $\sigma \in \kappa^{<\omega}$, considere $B_\sigma = \{f \in \kappa^\omega : f \supseteq \sigma\}$. Está claro que $\mathcal{B} = \{B_\sigma \cap M : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ é uma base para M .

Além disso, dado $f \in M$, temos que os $B \in \mathcal{B}$ tais que $f \in B$ estão em correspondência com os $\sigma \in \kappa^{<\omega}$ tais que $\sigma \subseteq f$. Como $\bigcap_{n \in \omega} F_{f|_n} \supseteq \bigcap_{\sigma \subseteq f} F_{f|_n} = \emptyset$, temos que estamos nas condições do teorema. Considere $\{U_\sigma : \sigma \in S\}$ a coleção de abertos obtida. Dado $f \in \kappa^\omega$, sabemos que $\bigcap_{\sigma \subseteq f} F_\sigma = \emptyset$. Note que, dado $\sigma \subseteq f$, se tomarmos $n = \text{maxdom}(\sigma)$, temos $\sigma \subset f|_n$, logo, $F_{f|_n} \subseteq F_\sigma$. Com isso, concluímos que $\bigcap_{n \in \omega} F_{f|_n} = \emptyset$. Para finalizar, dado $\sigma \in \kappa^{<\omega} \setminus S$, tome $U_\sigma = X$. Temos que $\{U_\sigma : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ satisfaz a condição para que X seja P -espaço.

(\Leftarrow) A volta se assemelha ao que fizemos anteriormente. Seja X um P -espaço e M metrizable. Pelo lema anterior e por 1.1.10, podemos assumir que existe κ cardinal tal que $M \subset \kappa^\omega$. Como antes, fixe a base $\mathcal{B} = \{B_\sigma \cap M : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ e uma família $\{F_\sigma : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ de fechados tal que $\bigcap \{F_\sigma : f \in F_\sigma\} = \emptyset$ para todo $f \in M$. Temos que existe $\{U_\sigma : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ que satisfaz a definição de P -espaço. Fixe $f \in \kappa^\omega$. Temos que $\bigcap \{U_\sigma : \sigma \subseteq f\} = \emptyset$, afinal, $\bigcap \{F_\sigma : \sigma \subseteq f\} = \emptyset$ por hipótese. Assim, pelo teorema 2.3.4 temos a normalidade do produto. □

Dado o que fizemos até aqui, o próximo passo poderia ser procurar instâncias de não preservação, ou seja, escolher espaços conhecidos, compactos ou metrizaáveis, e explorar as circunstâncias em que a preservação não ocorre. Isso poderia nos levar a duas rotas

distintas. A primeira, já mencionada aqui, seria a escolha de I , que nos jogaria nos espaços de Dowker. Embora a existência destes espaços em ZFC já tenha sido decidida, há ainda perguntas que envolvem achar espaços de Dowker pequenos. No entanto, seguiremos a outra rota, a que nos leva a investigar a preservação da normalidade pelo produto com o espaço dos irracionais, o chamado problema de Michael.

Capítulo 3

O Problema de Michael

Como estabelecido no capítulo anterior, existe uma ampla literatura investigando a preservação, ou não, da normalidade por produto cartesiano. Um matemático que teve uma expressiva contribuição nessa área foi Ernest Michael. Já entramos em contato com algumas dessas contribuições quando vimos a, posteriormente nomeada em sua homenagem, **reta de Michael**, no capítulo anterior.

É de Michael também que vem o nome do problema que estudaremos neste capítulo e o assunto principal desta dissertação. O que ficou conhecido como **Problema de Michael** está interessado na existência de um espaço de Lindelöf cujo produto pelos irracionais não o é. Pelo teorema 2.3.8, notamos que é uma pergunta equivalente à preservação de normalidade.

Neste capítulo, vamos estudar como a motivação para a pergunta surge do exemplo 2.3.2 e como se deu a construção original de Michael.

Em seguida, vamos estudar uma generalização e consequências desta construção presentes na obra de Lawrence. Estes resultados são os que introduzem a ideia de pequenos cardinais ao problema. O resultado mais importante, consiste em achar uma equivalência para o tipo específico de espaço de Michael construído. Além disso, vemos em quais tipos de espaços a construção funciona.

3.1 Contribuições de Michael

Com uma leve modificação de 2.3.2, obtemos um exemplo de que produto de um espaço de Lindelöf por um métrico que não é de Lindelöf. Esta modificação passa pelo conceito de conjunto de Berstein.

Definição 3.1.1. *Um subconjunto da reta B é dito **de Bernstein** quando satisfaz que, para todo $F \subseteq \mathbb{R}$ fechado, se $F \subseteq B$ ou $F \subseteq \mathbb{R} \setminus B$, então F é enumerável.*

Normalmente, nos será mais útil a contra-positiva, ou seja, se $F \subseteq \mathbb{R}$ é um fechado não enumerável, então $F \cap B \neq \emptyset$ e $F \cap (\mathbb{R} \setminus B) \neq \emptyset$. Existem outras maneiras de definir estes espaços. Em especial podemos reduzir a classe de espaços para os quais vale a propriedade.

Por exemplo, se para todo $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto não enumerável temos $B \cap K \neq \emptyset$ e $B \cap (\mathbb{R} \setminus B) \neq \emptyset$, então B é conjunto de Bernstein. De fato, Se F é um fechado não enumerável da reta, deve existir um $n \in \omega$ tal que $[-n, n] \cap F$ é um compacto não enumerável. Se tivéssemos $F \subseteq B$ ou $F \subseteq \mathbb{R} \setminus B$, iríamos contradizer a propriedade.

Poderíamos também definir esta propriedade para conjuntos de Cantor e teríamos o mesmo resultado, afinal, todo fechado não enumerável de \mathcal{R} também contém um (veja 1.3.7 e 1.3.3).

Independente da definição que escolhermos, vamos mostrar abaixo a sua existência, que pode ser achado em [Eng89] (exercício 5.5.4(a)).

Proposição 3.1.2. *Existe um conjunto de Berstein.*

Demonstração. Primeiro, note que todo conjunto fechado não enumerável de \mathbb{R} tem tamanho \mathfrak{c} (1.3.3 e 1.3.7). Também temos que existem exatamente \mathfrak{c} deles, pois \mathbb{R} tem base enumerável. De fato, como \mathbb{R} tem base enumerável, existe no máximo 2^ω . Além disso, $\{[x, \infty) : x \in \mathbb{R}\}$ é uma família de \mathfrak{c} fechados não enumeráveis de \mathbb{R} . Vamos fixar uma enumeração $\{F_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ destes fechados não enumeráveis.

Faremos a construção por indução transfinita. Mais especificamente, vamos construir duas famílias de elementos dois a dois distintos $\{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ e $\{y_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ tais que $x_\alpha, y_\alpha \in F_\alpha$ e $x_\alpha \neq y_\beta$ para todo $\alpha, \beta < \mathfrak{c}$. A construção em si é fácil.

Assumindo escolhidos até o ordinal $\alpha < \mathfrak{c}$. Temos que $F_\alpha \setminus (\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \mathfrak{c}\})$ é infinito, afinal $|F_\alpha| = \mathfrak{c}$. Assim, tome x_α e y_α neste conjunto. Seja $B = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Claramente, B satisfaz o que queríamos. \square

Fixado um conjunto de Berstein B da reta real, seja \mathbb{B} a reta real com o menor refinamento da sua topologia usual que discretiza B .

Proposição 3.1.3. $\mathbb{B} \times B$ não é normal

Demonstração. Faremos apenas um esboço pois as modificações, em relação ao que fizemos com a reta de Michael, são pontuais. Um esboço mais completo pode ser encontrado em [Prz84], exemplo 2.3.

A argumentação para que \mathbb{B} seja Lindelöf, passa por argumentar que quando consideramos o complementar da união dos abertos euclidianos de uma cobertura, somos deixados com um fechado de B , que deve ser enumerável. Há, também, a óbvia modificação dos fechados que mostramos não poderem ser separados. A última adaptação de nota é a argumentação de que B não é F_σ . Aqui, não podemos usar o Teorema de Baire pois não sabemos se B e $\mathbb{R} \setminus B$ são densos. No entanto, se B fosse um conjunto F_σ , pela propriedade que o define, deveria ser enumerável. \square

A priori, pode parecer um contra-exemplo mais forte que 2.3.2, mas um conjunto de Berstein não é completamente metrizável, como é o caso dos irracionais são, pois, como argumentamos, não pode conter uma cópia do conjunto de Cantor (1.3.7).

O problema de Michael, então, é a pergunta se necessariamente precisamos enfraquecer a segunda condição ao fortalecermos a primeira. Em outras palavras:

Pergunta 3.1.4 (Problema de Michael). *Existe algum espaço de Lindelöf regular cujo produto pelos irracionais não é de Lindelöf?*

Um espaço que responde positivamente o problema é conhecido como um **espaço de Michael**. Esta pergunta ganhou relevância quando Michael construiu um exemplo de tal espaço usando a Hipótese do Contínuo no artigo [Mic71]. Desde então, tivemos a construção de diferentes exemplos consistentes com ZFC. No entanto, a existência de um espaço de Michael em ZFC permanece em aberto.

Em um primeiro momento, a escolha de \mathbb{P} pode parecer arbitrária, resquício do exemplo que gestou a pergunta. No entanto, o espaço dos irracionais serve como um espécie de "espaço teste" para classes mais amplas, tornando a pergunta mais geral do que parece à primeira vista.

Teorema 3.1.5. *Se X é um espaço de Lindelöf, então o produto de X com os irracionais é de Lindelöf se e somente se o produto por qualquer espaço analítico (veja seção 1.3) é de Lindelöf.*

Demonstração. Seja X um espaço topológico e $f : \mathbb{P} \rightarrow X$ uma função sobrejetora. Seja M espaço de Lindelöf tal que $M \times \mathbb{P}$ não seja normal. Temos que $M \times X$ é imagem contínua de $M \times \mathbb{P}$ por $f \times id$ (1.1.12), portanto, se o segundo fosse de Lindelöf, o primeiro também seria. \square

Também não precisamos, necessariamente, olhar para o produto com \mathbb{P} para achar um espaço de Michael.

Teorema 3.1.6. *Seja Y um espaço polonês e não σ -compacto. Dado X espaço topológico regular, $X \times Y$ é normal se, e somente se, $X \times \mathbb{P}$ é normal.*

Um esboço de demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [Law90]. Optamos por não fazer pois teríamos que introduzir muitos resultados.

Ao longo da próxima demonstração, vamos trabalhar com a topologia em $\mathcal{P}(\kappa)$ induzida por seu homeomorfismo com 2^κ . Por esta razão, vale gastarmos algumas linhas explorando-a. Sabemos que o homeomorfismo é dado associando $h \in 2^\kappa$ com o subconjunto cujos elementos são as coordenadas em que o valor da função é um. Além disso, cada elemento B da base canônica de 2^κ está associado à $s \subseteq \kappa$ finito tal que para todo $i \in s$ existe $k \in \{0, 1\}$ para o qual todo $h \in B$ satisfaz $h(i) = k$.

Traduzindo isso para $\mathcal{P}(\kappa)$, os valores das funções viram pertencimento. Mais precisamente, para todos $s, t \in [k]^{<\omega}$ com $t \subseteq s$, temos associado o aberto básico $G(s, t) = \{A \in \mathcal{P}(\kappa) : A \cap s = t\}$. t representa os as coordenadas em que as funções associada são sempre um, enquanto $s \setminus t$, as em que são sempre zero.

Usaremos isto para mostrar que, embora tenhamos nos restringido a pedir que o espaço seja regular, afinal, deste modo, ainda se trata de uma questão sobre preservação da normalidade, podemos procurar por espaços não regulares. Isso se dá porque em [DTZ13] provou-se, usando set-valued functions (veja seção 1.4), a proposição abaixo.

Proposição 3.1.7. *Se existe um espaço de Lindelöf cujo produto por \mathbb{P} não é de Lindelöf, então existe um espaço de Michael.*

Demonstração. Seja X um espaço como no enunciado e $\mathcal{U} = \{U_\alpha \times V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma cobertura de $X \times \mathbb{P}$ sem subcobertura enumerável. Defina a set-valued function $\Phi_X : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\kappa))$ dada por $\Phi_X(x) = \{A \subseteq \kappa : I(x) \subseteq A\}$, onde $I(x) = \{\alpha : x \in U_\alpha\}$. Ela será compacta e semicontínua por cima pelo lema 2 de [Zdo05]. Defina Φ_Y de forma análoga, substituindo U_α por V_α .

Sejam $M = \Phi_Y(Y)$ e $Z = \Phi_X(X)$. Pelas proposição 1.4.1, temos que M é de Lindelöf e, como subconjunto de 2^κ , é regular. Lembrando da preposição 1.4.2 temos que $\Phi_X \times Id_M$ é compacta e semicontínua por cima, logo, se $Z \times M$ não for de Lindelöf, $X \times M$ não será, finalizando a demonstração.

Considere a última set-valued function $\Phi : Z \times M \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\kappa))$ dada por $\Phi(A, C) = A \cap C$. Mostraremos que $\Phi(Z \times M)$ não é de Lindelöf. Defina o aberto $W_\alpha = \{A \subseteq \kappa : \alpha \in A\}$. Para ver que $\{W_\alpha : \alpha \leq \kappa\}$ é uma cobertura de $\Phi(Z \times M)$, basta mostrar que \emptyset não é um elemento deste. Dado $\langle A, B \rangle \in Z \times M$, tome $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $A \in \Phi_X(x)$ e $B \in \Phi_Y(y)$. Como \mathcal{U} é cobertura, tome $\alpha < \kappa$ tal que $\langle x, y \rangle \in U_\alpha \times V_\alpha$. Claramente, $\alpha \in A \cap B$.

Agora, fixe $I \subseteq \kappa$. Temos que $\{W_\alpha : \alpha \in I\}$ é uma subcobertura. Além disso, tome $\langle x, y \rangle \in X \times Y$ e defina $I_x = \{\alpha < \kappa : x \in U_\alpha\}$ e I_y de forma análoga. Vale que $\langle I_x, I_x \rangle \in Z \times M$, logo, existe $\alpha \in I$ tal que $I_x \cap I_y \in W_\alpha$, ou seja, $\langle x, y \rangle \in U_\alpha \times V_\alpha$. Em outras palavras, I não pode ser enumerável, pois, nesse caso, $\{U_\alpha \times V_\alpha : \alpha \in I\}$ seria uma subcobertura enumerável de $X \times Y$.

□

Note que o resultado acima é mais geral, afinal, não usamos nada específico de \mathbb{P} . portanto poderíamos substituí-lo por qualquer espaço de Lindelöf.

No artigo em que primeiro aparece, [Mic71], o espaço de Michael é só um de muitos contra-exemplos. Outros resultados ali presentes também geraram perguntas próprias, que fogem do escopo desta dissertação. De qualquer maneira, é considerado um artigo importante na literatura sobre preservação da normalidade por produto cartesiano. O resto do capítulo será dedicado à explorar esta construção lá encontrada.

Exemplo 3.1.8. *Assumindo CH, existe um subconjunto da Reta de Michael que é um espaço de Michael.*

A argumentação é uma adaptação do exemplo 2.3.2. Assim, ela pode ser dividida em duas partes. A primeira, que acontece exclusivamente em ZFC, consiste em argumentar que se existe um subconjunto da reta de Michael com certas características, ele é um espaço de Michael.

Proposição 3.1.9. *Se existe um subespaço X de \mathbb{M} que é de Lindelöf, não enumerável que contém \mathbb{Q} , então $X \times \mathbb{P}$ não é de Lindelöf.*

Demonstração. Mostramos, anteriormente, que o produto de \mathbb{M} pelos irracionais não é normal, logo, não é de Lindelöf. O resultado, se olharmos com atenção, é mais geral. Não

precisamos que o conjunto tenha todos os irracionais, apenas que tem quantidade grande de pontos isolados e sua relação com \mathbb{Q} . Modificando apropriadamente os fechados que escolhemos e repetindo o argumento, podemos ver que qualquer subespaço de \mathbb{M} que contém \mathbb{Q} , mas não como G_δ , tem o produto com os irracionais não de Lindelöf.

Vamos mostrar agora que qualquer subconjunto não enumerável de Lindelöf de \mathbb{M} que contém \mathbb{Q} , tem eles como conjunto não G_δ . Tome X um tal subconjunto da Reta de Michael. Assuma, ainda, que $\mathbb{Q} = \bigcap_{n \in \omega} U_n$. Para cada $n \in \omega$, sabemos que $X \setminus U_n$ é enumerável, pois $\{U_n\} \cup \{\{p\} : p \in X \setminus U_n\}$ é cobertura de X . Assim, por um lado, $X \setminus \mathbb{Q}$ é não enumerável, por outro $X \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \omega} X \setminus U_n$, que deve ser enumerável. Portanto, \mathbb{Q} não pode ser G_δ . \square

Agora, para a segunda parte, usaremos CH para mostrar que tal subconjunto existe.

Exemplo 3.1.10. *Assumindo CH, existe um subespaço de \mathbb{M} de Lindelöf que contém \mathbb{Q} .*

Demonstração. Para a construção, fixe uma base \mathbb{M} que seja uma base enumerável de \mathbb{R} unida com os unitários dos irracionais. Fica claro que esta base tem tamanho 2^ω . Vamos chamar de \mathcal{U} o conjunto obtido fechando por uniões enumeráveis desta base. Considere, agora, $\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{U} : \mathbb{Q} \subseteq U\}$. A garantia de que é não vazio vem de \mathbb{Q} ser enumerável. Também é fácil ver que este conjunto tem tamanho até 2^ω , logo, usando CH, podemos escreve-lo como $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

Agora, usando recursão transfinita, podemos escolher, para cada $\alpha < \omega_1$,

$$x_\alpha \in \left(\bigcap_{\beta < \alpha} U_\beta \setminus \mathbb{Q} \right) \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\}$$

Sabemos que $\bigcap_{\beta < \alpha} U_\beta \setminus \mathbb{Q}$ é não vazio, afinal \mathbb{Q} não é G_δ em \mathbb{M} . De fato, se fosse cada um dos abertos teria que ser aberto de \mathbb{R} também, então ele também seria G_δ nos reais. Mais que isso, sabemos que a diferença é, na verdade, não enumerável. Se tivéssemos $\bigcap_{\beta < \alpha} U_\beta \setminus \mathbb{Q} = \{x_n : n \in \omega\}$, poderíamos escrever \mathbb{Q} como $\bigcap_{\beta < \alpha} U_\beta \cap \bigcap_{n \in \omega} (\mathbb{M} \setminus \{x_n\})$.

Defina agora $X = \mathbb{Q} \cup \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. A única coisa que resta mostrar é que é de Lindelöf. Tome uma cobertura formada pelos abertos da base fixada no início. Para cada racional, escolha um elemento da cobertura que o contém. Assim, obtemos um aberto U que contém os racionais. Mais que isso, como é união enumerável de elementos da base, deve existir um $\alpha < \omega_1$ tal que $U = U_\alpha$. Então, pela construção, $X \setminus U$ é enumerável. Assim, podemos escolher enumeráveis abertos que cubram os elementos que faltam. Usando a proposição anterior, podemos concluir que X é um espaço de Michael. \square

A aplicação de CH está bem isolada na demonstração. Está sendo usado apenas para garantir a existência de um conjunto específico. Sendo assim, é tentador querer achar um jeito de dispensar CH para se achar um exemplo em ZFC. A próxima seção será baseada, principalmente, no artigo [Law90], no qual L. B. Lawrence explora algumas pontas soltas e generalizações desta construção. Antes de prosseguirmos, no entanto, faremos o resultado a seguir, que impõe algumas restrições sobre espaços do Michael.

Teorema 3.1.11. *Seja X um espaço de Michael e \mathcal{C} uma cobertura de $X \times \mathbb{P}$ de cardinalidade mínima que não possui subcobertura enumerável. Então $|\mathcal{C}| \geq \min\{\mathfrak{b}, \omega_\omega\}$*

Demonstração. Seja $|\mathcal{C}| = \lambda$. Temos que, necessariamente, λ é maior ou igual à ω_1 , portanto, se assumirmos que cofinalidade de λ é enumerável, teremos que $\lambda \geq \omega_\omega$. Assim, assumindo que a cofinalidade é não enumerável, vamos mostrar que $\lambda \geq \mathfrak{b}$.

Começamos escrevendo $\mathcal{C} = \{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Nossa estratégia será encontrar uma função $\tau : \mathfrak{b} \rightarrow \lambda$ injetora. Vamos construí-la por recursão, utilizando uma outra função $\sigma : \mathfrak{b} \rightarrow \omega^\omega$. Mais precisamente, vamos construir tais funções de forma que:

1. σ e τ são estritamente crescentes. No caso de ω^ω , consideramos ordenado por \leq^*
2. Para todo $\alpha < \lambda$, $X \times C^*(\sigma(\alpha))$ não é coberto por $\{U_\beta : \beta < \sup\{\tau(\beta) : \beta < \alpha\}\}$.
3. Para todo $\alpha < \lambda$, $X \times C^*(\sigma(\alpha))$ é coberto por $\{U_\beta : \beta < \tau(\alpha)\}$

Seja $\alpha < \mathfrak{b}$ e $\tau|_\alpha$ e $\sigma|_\alpha$ construídos. Como $|\{\sigma_\beta : \beta < \alpha\}| < \mathfrak{b}$ existe um limitante superior σ'_α . Seja $\gamma = \sup\{\tau(\beta) : \beta < \alpha\}$. Temos dois casos.

Suponha primeiro que α tenha cofinalidade enumerável, $\gamma < \lambda$. Pela minimalidade de λ , existe σ''_α que não pertence à $\bigcup\{U_\beta : \beta < \gamma\}$. Tome σ_α tal que $\sigma''_\alpha, \sigma'_\alpha <^* \sigma_\alpha$. Vale que $\bigcup\{U_\beta : \beta < \gamma\}$ não cobre $X \times C^*(\sigma(\alpha))$, no entanto, como este é de Lindelöf, existe uma subcobertura enumerável. Como λ tem cofinalidade não enumerável, existe τ_α tal que $X \times C^*(\sigma(\alpha)) \subseteq \{U_\beta : \beta < \tau_\alpha\}$.

Assuma, agora, que cofinalidade de γ é não enumerável. Em particular, γ é limite. Tome σ_α igual ao σ'_α definido no caso anterior. Podemos, sem perda de generalidade, assumi-lo distinto dos anteriores. Assuma que $\bigcup\{U_\beta : \beta < \gamma\} \supseteq X \times C^*(\sigma(\alpha))$. Novamente, como este é de Lindelöf existe subcobertura enumerável e, já que assumimos γ com cofinalidade não enumerável, existe um $\delta < \gamma$ tal que $\bigcup\{U_\beta : \beta < \delta\} \supseteq X \times C^*(\sigma(\alpha))$. No entanto, pela construção, não pode valer $X \times C^*(\sigma(\delta + 1)) \subseteq X \times C^*(\sigma(\alpha)) \subseteq \bigcup\{U_\beta : \beta < \delta\}$. Sendo assim, sabemos que $\sigma(\alpha)$ satisfaz (2). O processo para se obter $\tau(\alpha)$ é idêntico ao anterior.

□

Com esta restrição, conseguimos algumas informações sobre o peso e a cardinalidade de um espaço de Michael.

Corolário 3.1.12. *Se X é um espaço de Michael $|X|, w(X) \geq \min\{\mathfrak{b}, \omega_\omega\}$*

Demonstração. Fixe \mathcal{C} cobertura de $X \times \mathbb{P}$ sem subcobertura enumerável de tamanho mínimo.

Note que, como \mathbb{P} tem base enumerável, usando que o peso do produto é o produto dos pesos (1.1.4) temos que $w(X \times \mathbb{P}) = w(X)$. Com isso temos $w(X) = w(X \times \mathbb{P}) \geq |\mathcal{C}|$.

Para limitar a cardinalidade de X , usaremos o grau de Lindelöf de $X \times \mathbb{P}$, denotado por $L(X \times \mathbb{P})$. Se tivéssemos $L(X \times \mathbb{P}) < |\mathcal{C}|$, pela minimalidade de \mathcal{C} , toda cobertura teria uma subcobertura enumerável. Agora, note que dada uma cobertura \mathcal{U} , para cada $x \in X$, conseguimos uma subcobertura enumerável de $\{x\} \times \mathbb{P}$. Repetindo os processo, conseguimos uma subcobertura enumerável de tamanho $|X|$. Portanto, $|X| \geq L(X \times \mathbb{P}) \geq |\mathcal{C}|$.

□

3.2 Contribuições de Lawrence

Como dito antes, esta seção será baseado, principalmente em [Law90]. Aqui iremos explorar algumas pontas soltas e perguntas que podem surgir ao se ler a seção anterior. Primeiro, vamos isolar o tipo de espaço de Michael que foi construído e usar uma nova linguagem para explicar porque \mathcal{B} não é um espaço de Michael. Depois, vamos ver a relação dessa construção com pequenos cardinais (veja seção 0.2).

A técnica utilizada na seção anterior foi, antes de Lawrence, estudada também por Van Douwen em [Dou84] e por Burke e Davis em [BD84]. Nestes trabalhos, vemos as primeiras tentativas de associar pequenos cardinais ao problema.

No trabalho de Burke e Davis temos a substituição de CH pela existência de uma ω_1 -escala na construção. O lema a seguir é o cerne para este enfraquecimento. Embora a demonstração seja bem similar ao que fizemos anteriormente, consideramos a adaptação interessante o bastante para fazê-la.

Proposição 3.2.1. *Se X é T_1 e primeiro enumerável e D não é um G_δ de X e é não enumerável, então existe Z tal que $D \subseteq Z$ tal que para todo o aberto U de X com $D \subseteq U$, temos $|Z \setminus U| = \omega$.*

Demonstração. Seja $\{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ uma escala (1.2.6) e $D = \{z_n : n \in \omega\}$. Para cada $n \in \omega$, tome $\{U_k^n : k \in \omega\}$ um base local decrescente de z_n . Além disso, para cada $f \in \omega^\omega$, defina $W_f = \bigcap_{n \in \omega} U_{f(n)}^n$ e, para cada $\alpha, \omega_1, G_\alpha = \bigcap \{W_f : f \leq^* f_\alpha\}$. Como cada um destes últimos é um G_δ , sabemos que $D \not\subseteq G_\alpha$ para todo $\alpha < \omega_1$. Note também que cada G_α é não enumerável, senão conseguiríamos escrever D como G_δ de X .

Assim, podemos por recursão, escolher, para cada $\alpha < \omega_1$

$$x_\alpha \in \bigcap_{\gamma < \alpha} G_\gamma \setminus D.$$

A razão do lado direito nunca ser vazio se dá pelo fato de que, dada a definição, $G_\alpha \subseteq \bigcap_{\gamma < \alpha} G_\gamma$, portanto, este último é não enumerável. Seja $Z = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Resta mostrar que tal Z tem a propriedades que queremos.

Seja $U \subseteq X$ um aberto tal que $D \subseteq U$. Para cada $n \in \omega$ existe um $k_n \in \omega$ tal que $U_{k_n}^n \subseteq U$. Seja $g \in \omega^\omega$ dada por $g(n) = k_n$ e $\alpha < \omega_1$ tal que $g \leq^* f_\alpha$. Tome $\beta > \alpha$ e seja $h \in \omega^\omega$ dado por $h(n) = \max\{f_\alpha(n), f_\beta(n)\}$. Como $f_\alpha \leq^* f_\beta$, temos que $h \leq^* f_\beta$, então $G_\beta \subseteq W_h \subseteq U$. Ou seja, para todo $\beta > \alpha$, concluímos que $G_\beta \subseteq U$. Assim, $Z \setminus D \subseteq \{x_\gamma : \gamma < \alpha\}$ é enumerável.

□

Embora na seção anterior tenhamos feito uma argumentação parecida dentro do lema 3.1.10, no artigo original de Michael esta é apresentada como um lema à parte. A contribuição deste resultado, então, é enfraquecer as condições para o lema, para assim, prosseguir com a demonstração como antes.

A ideia aqui presente, a de que toda cobertura de \mathbb{Q} , deve deixar apenas enumeráveis elementos de Z de fora, parece ser a parte central em que utilizamos CH (ou a existência de uma ω_1 -escala) nesta construção original. Usando isto como motivação, Van Douwen e Lawrence utilizam as seguintes definições.

Definição 3.2.2. *Um espaço topológico X é dito ser **concentrado ao redor de um subconjunto** $A \subseteq X$ se para todo aberto U de X tal que $A \subseteq U$, temos que $X \setminus U$ é enumerável. No caso específico dos espaços de Michael, diremos que X é um **Espaço de Michael Concentrado** se for um espaço de Michael concentrado ao redor em um subespaço fechado A tal que $A \times \mathbb{P}$ seja normal.*

Com esta nomenclatura podemos entender melhor a construção que vimos no capítulo anterior. A pergunta, agora, se torna: quando conseguimos construir um espaço concentrado de Michael? A técnica usada até agora, consiste exatamente em achar um subespaço de \mathbb{M} que seja concentrado ao redor de \mathbb{Q} . O lema a seguir nos mostra uma condição equivalente para a normalidade nesta situação. Ele, assim como todos os outros resultados os quais não especificamos o contrário, foi retirado de [Law90].

Lema 3.2.3. *[Caracterização da Normalidade do Produto de um espaço de Lindelöf Concentrado] Seja X um espaço de Lindelöf concentrado ao redor de um conjunto fechado A e P um métrico separável. $X \times P$ é normal se e somente se para todo $B \subseteq X \setminus A$ não enumerável e função $F : B \rightarrow P$ injetora vale que $\bar{F} \cap (A \times P) \neq \emptyset$*

Antes da demonstração, valem alguns comentários. Embora a caracterização pareça estranha, se substituirmos, X por um subespaço de Lindelöf de \mathbb{M} , P por \mathbb{P} , B por $X \setminus \mathbb{Q}$ e F pela identidade, a negação da segunda afirmação nos diz que $(\mathbb{Q} \times \mathbb{P}) \cap \{\langle p, p \rangle : p \in X \setminus \mathbb{Q}\} = \emptyset$. Estes são justamente os fechados que demonstramos ser disjuntos na seção anterior para argumentar que $X \times \mathbb{P}$ não é normal.

Também vale notar que se $|P| \leq \omega$, então o lado direito é satisfeito por vacuidade, afinal, para todo B não enumerável, não existe $F : B \rightarrow P$ injetora. Isto, no entanto, não é um problema. Como X é de Lindelöf, se P for enumerável, então $X \times P = \bigcup_{p \in P} X \times \{p\}$ é união enumerável de espaços de Lindelöf e, portanto, de Lindelöf. Assim, o teorema ainda vale.

Abaixo, provaremos a negação, ou seja, $X \times P$ não é normal se e somente se existe $B \subseteq X \times A$ e $F : B \rightarrow P$ injetora com $\bar{F} \cap (A \times Y) = \emptyset$.

Lema 3.2.3. (\Leftarrow) Começamos notando que $A \times P$ é um fechado. Agora, vamos assumir que exista $B \subseteq X \setminus A$ e $F : B \rightarrow Y$ injetora tal que $\bar{F} \cap (A \times Y) = \emptyset$. Estes últimos são fechados disjuntos. Mostraremos que eles não podem ser separados por abertos disjuntos. A demonstração será muito parecida com a feita na seção anterior.

Tome um U aberto tal que $A \times P \subseteq U$. Fixe $D \subseteq P$ denso enumerável e, para cada $d \in D$, considere o conjunto $Y_d = \{x \in X : \langle x, d \rangle \notin U\}$. Note que Y_d é um fechado de X . De fato, se $\langle x, d \rangle \in U$, então existe uma vizinhança básica $V \times W \subseteq U$ de $\langle x, d \rangle$. Temos que V é uma vizinhança de x disjunta de Y_d . Com isso, Y_d deve ser enumerável, afinal $X \setminus Y_d$ é um aberto contendo A . Assim, como B é não enumerável, podemos escolher $x_0 \in B \setminus \bigcup_{d \in D} Y_d$. Pela definição, $\langle x_0, d \rangle \in U$ para todo $d \in D$. P sendo métrico, podemos escolher uma sequência

$\{d_n : n \in \omega\} \subseteq T$ que converge à $F(x_0)$. Temos assim que $\{(x_0, d_n) : n \in \omega\}$ converge à $\langle x_0, F(x_0) \rangle$, ou seja, $\langle x_0, F(x_0) \rangle \in \overline{U} \cap \overline{F}$.

(\Rightarrow) Assuma que $X \times P$ não seja normal, mas $A \times P$ seja. Usando o Lema de 2.3.8, temos que $A \times P$ é de Lindelöf. Note que podemos usar o lema porque A é fechado, portanto, de Lindelöf.

Vamos construir um conjunto B e uma função $F : B \rightarrow P$ como na negação do enunciado. Para garantir a disjunção, vamos construir de forma que o gráfico esteja contido no complementar de um aberto que contém $A \times P$. Escolheremos este aberto U de forma que $A_U = \pi_X(X \setminus U)$ seja não enumerável. Para ver que tal aberto existe, considere a possibilidade de que para todo aberto U que contém $A \times P$, A_U seja enumerável. Fixado U nestas condições, como P é segundo enumerável e cada $x \in A_U$, $\{x\} \times P$ é homeomorfo à P , temos que $A_U \times P = \bigcup_{x \in A_U} \{x\} \times P$ é união enumerável de Lindelöf. Tome agora uma cobertura \mathcal{U} de $X \times P$. Como $A \times P$ é de Lindelöf, temos uma subcobertura $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$. Tomando $U = \cup \mathcal{U}'$, temos que $A_U \times P$ também tem subcobertura enumerável. Assim, teríamos que $X \times P = (A \times P) \cup (A_U \times P)$ tem subcobertura enumerável.

Fixe um aberto U com a propriedade acima e para cada $p \in P$ considere $Y_p = \{x \in X : \langle x, p \rangle \notin U\}$. Como argumentado acima, Y_p é um fechado disjunto de A , portanto, deve ser enumerável. No entanto, pela escolha de U , temos que $A_U = \bigcup_{p \in P} Y_p$ é não enumerável. Para finalizar, usaremos este fato para construir recursivamente duas funções $\sigma : \omega_1 \rightarrow A_U$ e $\tau : \omega_1 \rightarrow P$ de forma que teremos $B = \text{ran}(\sigma)$ e $F = \{(\sigma(\alpha), \tau(\alpha)) : \alpha \in \omega_1\}$. Comece escolhendo $\sigma(0) \in A_U$ e $\tau(0)$ algum índice tal que $\sigma(0) \in Y_{\tau(0)}$. Para o passo $\alpha \in \omega_1$, escolha $\sigma(\alpha) \in Z \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} Y_{\beta}$, o que podemos pois A_U é não enumerável, e $\tau(\alpha)$ algum índice tal que $\sigma(\alpha) \in Y_{\tau(\alpha)}$. Claramente B é não enumerável, disjunto de A e F é injetora. Além disso, $F \subseteq U$, logo, $\overline{F} \cap (A \times P) = \emptyset$.

□

Com este lema, vemos que não existe nada de especial sobre a escolha da reta de Michael. Na verdade, uma construção parecida funcionaria para qualquer separável metrizável. Dado um espaço X concentrado ao redor de A , definiremos o espaço $\mathbb{L}(X, A)$ o espaço X com a menor topologia que contém a original e torna $Y \setminus A$ um conjunto discreto.

Corolário 3.2.4. *Se Y é um metrizável separável concentrado ao redor de algum subconjunto A e $Y \setminus A$ é não enumerável, então $\mathbb{L}(Y, A) \times (S \setminus A)$ não é normal.*

Olharemos, agora, uma direção para a qual a construção não pode ser generalizada. Antes, um lema.

Lema 3.2.5. *Todo subconjunto não enumerável A de um espaço metrizável separável possui dois pontos distintos com a propriedade de que, para toda vizinhança aberta U de algum deles, $|U \cap A| \geq \omega_1$.*

Demonstração. Vamos começar mostrando que existe pelo menos um ponto. Assuma, por absurdo, que não. Temos que para todo $a \in A$, existe $U_a \in \mathcal{V}(a)$ tal que $U_a \cap A$ é enumerável. Note que X tem base enumerável, logo é hereditavelmente Lindelöf. Como $\{U_a : a \in A\}$ é uma cobertura por abertos de A , existe $\{U_{a_i} : i \in \omega\}$ subcobertura enumerável. No entanto, $A = \bigcup_{i \in \omega} U_{a_i} \cap A = \bigcup_{i \in \omega} (U_{a_i} \cap A)$ é enumerável, o que é um absurdo.

Fixe $a \in A$ com tal propriedade. Para mostrarmos que existe um segundo, assuma que, para todo $n \in \omega$, temos $A \setminus B(a, \frac{1}{n})$ enumerável. Assim, $A \setminus \bigcap_{n \in \omega} B(a, \frac{1}{n}) = A \setminus \{a\}$ também seria, um óbvio absurdo. Com isso, fixe $n \in \omega$ tal que $A \setminus B(a, \frac{1}{n})$ é não enumerável. Pela argumentação acima, temos que existe $b \in A \setminus B(a, \frac{1}{n})$ com a mesma propriedade que queríamos. □

Por fim, mais um lema que nos dá uma consequência do produto de um espaço da forma $\mathbb{L}(X, A)$ e \mathbb{P} não ser normal

Lema 3.2.6. *Seja Y polonês e considere subconjuntos $A \subseteq X \subseteq Y$ tais que X é concentrado ao redor de A . Se $\mathbb{L}(X, A) \times \mathbb{P}$ não é normal, então existe $K \subseteq Y$ homeomorfo à um conjunto de Cantor tal que $K \cap A = \emptyset$, mas $K \subseteq \overline{A}^Y$.*

Demonstração. Pela negação do lema 3.2.3, existe $B \subseteq \mathbb{L}(X, A)$ não enumerável e $F : B \rightarrow \mathbb{P}$ tal que $\overline{F} \cap A = \emptyset$. Dado $x = \langle a, p \rangle \in A \times \mathbb{P}$ deve existir U um aberto básico de $\mathbb{L}(X, A)$ e V aberto de \mathbb{P} tais que $\langle a, p \rangle \in U \times V$ e $U \times V \cap F = \emptyset$. Como U_x é básico e $a \in U_x$, temos que ele é um aberto de X como subconjunto de Y , logo, existe $W \subseteq Y$ aberto tal que $V = U \cap X$. Como $B \subseteq X$, temos que $W \cap B = U \cap B$, logo, $W \times V \cap F = \emptyset$. Seja $G = \overline{F}^{Y \times \mathbb{P}}$. O que argumentamos foi que $G \cap A \times \mathbb{P} = \emptyset$.

A partir de agora, trabalharemos no espaço $Y \times \mathbb{P}$, que é um espaço polonês (1.3.2). Nosso objetivo será construir um esquema de Cantor (1.3.6) $\{A_s : s \in 2^{<\omega}\}$ de tal forma que, para todo $s \in 2^{<\omega}$, temos que A_s é aberto, $F \cap A_s$ é não enumerável e $A_{s \smallfrown 0}$ e $A_{s \smallfrown 1}$ são mais que disjuntos, suas projeções em Y são disjuntas.

Começamos fixando um $x_0 \in F$, garantido pelo lema anterior e tomando $A_0 = B(x_0, \frac{1}{2})$. Assuma, agora, que temos A_s construído para algum $n \in \omega$ e $s \in 2^n$. Temos que $A_s \cap F$ é não enumerável, logo, existe $x = \langle a, p \rangle$ e $x' = \langle a', p' \rangle$ pontos deste conjunto que satisfazem o lema anterior. Seja d uma métrica compatível com a topologia de Y e $\epsilon = \min\{\frac{d(a, a')}{2}, \frac{1}{n}\}$ e considere $A_{s \smallfrown 0} = B(x, \epsilon)$ e $A_{s \smallfrown 1} = B(x', \epsilon)$. Já que $\epsilon < \frac{d(a, a')}{2}$, temos a garantia que as projeções são disjuntas. Além disso, como $Y \times \mathbb{P}$ é regular, podemos assumir que estes conjuntos tem o fecho contido em A_s .

Como construímos um Esquema de Cantor, sabemos que $K' = \cup\{\bigcap_{n \in \omega} A_{s|n} : s \in 2^\omega\}$ é um conjunto de Cantor. Mais que isso, pela construção, temos $K' \subseteq G$. Como K' é compacto e π_Y é uma bijeção contínua, pela proposição 1.1.9 temos que é um homeomorfismo, logo, $K = \pi_Y[K']$ é um conjunto de Cantor de X . Além disso, pelo fato que de $K \subseteq B$, temos $K \cap A = \emptyset$.

Resta mostrar que $K \subseteq \overline{A}^Y$. Para isso, tome $x \in K$ e $U \in \mathcal{V}(x)$. Usando a regularidade, se necessário, podemos assumir $\overline{U} \cap A = \emptyset$. Se $x = \pi_X(b, p)$ então $V = U \times \mathbb{P}$ é vizinhança aberta de $\langle b, p \rangle$, logo, $V \cap F$ é não enumerável. Isto nos diz que $U \cap B$ é não enumerável, em particular, \overline{U} é não enumerável. Agora, lembremos que X é concentrado ao redor de A , no entanto, $X \setminus \overline{U}$, é um aberto que contém A e cujo complementar é não enumerável. Absurdo! Com isso, mostramos a inclusão que queríamos. □

Usando este último lema, conseguimos mostrar que a construção não pode ser generalizada para espaços poloneses concentrados.

Teorema 3.2.7. *Seja Y polonês, concentrado ao redor de A . Temos que $\mathbb{L}(Y, A) \times \mathbb{P}$ é normal.*

Demonstração. Usando lema anterior, se fosse normal, teríamos que existe um conjunto de cantor K tal que $K \cap A = \emptyset$. No entanto, K deve ser um fechado não enumerável de Y , logo, $U = X \setminus K$ deveria ser um aberto que contém A cujo complementar é não enumerável, contradizendo a concentração de Y ao redor de A . \square

Com este resultado, responderemos uma questão que tínhamos deixado passar batido. Note que B é um conjunto de Bernstein e \mathbb{R} é concentrado ao redor de $\mathbb{R} \setminus B$. De fato, se \mathcal{C} é cobertura deste último, $\mathbb{R} \setminus \cup \mathcal{C}$ é um fechado contido em B , logo, é enumerável. Isto coloca o conjunto \mathbb{B} que construímos dentro das hipóteses do corolário acima. Como o complementar do conjunto de Bernstein intersecta todo conjunto de Cantor, essa modificação não pode ser um exemplo de espaço de Michael, o que justifica nossa busca por espaços diferentes.

Corolário 3.2.8. *Se B é um conjunto de Berstein dos reais, então $L(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus B) \times \mathbb{P}$ é de Lindelöf.*

Agora, que exploramos quando a técnica de Michael não funciona, Vamos achar condições necessárias e suficientes para que exista um espaço de Michael Concentrado em \mathbb{R} . Em 1984, o artigo que já citamos de Van Douwen [Dou84], no Teorema 10.2, mostra que a construção de Michael está relacionada ao pequeno cardinal \mathfrak{b} . Embora não pareça intuitivo, a principio, termos um problema sobre espaços Lindelöf estar relacionado à pequenos cardinais, vale lembrar que \mathbb{P} é homeomorfo à ω^ω .

Nos dois resultados baixo, apresentamos a versão deste resultado feita por Lawrence. Embora as versões sejam dissimilares, há pequenas diferenças que nos fazem preferir esta versão. Por exemplo, Van Douwen considera os espaços concentrados apenas ao redor de conjuntos enumeráveis.

Proposição 3.2.9. *Seja $X \subseteq \mathbb{P}$ não enumerável. São equivalentes:*

- (i) *Todo subconjunto não enumerável de X é ilimitado em relação à \leq^**
- (ii) *X tem intersecção enumerável com todo compacto de ω^ω .*
- (iii) *$X \cup \mathbb{Q}$ é concentrado em torno de \mathbb{Q}*
- (iv) *$X \cup \mathbb{Q}$ é de Lindelöf como subespaço da reta de Michael \mathbb{M}*

Demonstração. (i) \implies (ii) Seja K um compacto de ω^ω . Se $X \cap K$ fosse não enumerável, então, por hipótese, deveria ser ilimitado. No entanto, a compacidade de K implica que todo subconjunto seja limitado.

(ii) \implies (i) Tome $Y \subseteq X$ não enumerável. Se Y for limitado, então existe $f \in \omega^\omega$ tal que para todo $g \in Y$, $g \leq^* f$. Assim, $Y \subseteq K_f^*$ e, com isso, X teria intersecção não enumerável com K_f^* . No entanto, K_f^* é σ -compacto. Como Y é não enumerável, a intersecção com algum dos compactos cuja união resulta em K_f^* também deve ser. Absurdo!

(iii) \implies (iv) Tome uma cobertura \mathcal{U} de $X \cup \mathbb{Q}$. Escolhendo para cada $q \in \mathbb{Q}$ um aberto $U_q \in \mathcal{U}$ tal que $q \in U_q$, obtemos um aberto, mais precisamente $U = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} U_q$, que contém \mathbb{Q} . Por hipótese, $(X \cup \mathbb{Q}) \setminus U$ é enumerável, logo, basta escolher, para cada ponto do complementar, um aberto da cobertura que o contenha.

(iv) \implies (iii) Fixe U um aberto que contém \mathbb{Q} . O seguinte conjunto $\{U\} \cup \{p\} : p \in X$ é uma cobertura de $X \cup \mathbb{Q}$. Existe uma subcobertura da forma $\{U\} \cup \{p_n\} : n \in \omega$, afinal, $X \cup \mathbb{Q}$ é de Lindelöf. Sendo assim, temos $(X \cup \mathbb{Q}) \setminus U \subseteq \{p_n : n \in \omega\}$.

(ii) \implies (iii) Seja U um aberto de $X \cup \mathbb{Q}$ tal que $\mathbb{Q} \subseteq U$ e V um aberto de ω^ω com $V \cap (X \cup \mathbb{Q}) = U$. Temos que $\mathbb{R} \setminus V$ é um fechado, logo σ -compacto, contido em \mathbb{P} , portanto, existe $f \in \omega^\omega$ tal que $X \setminus U \subseteq \mathbb{R} \setminus V \subseteq K_f^*$. Como K_f^* é união enumerável de compactos, $X \cap K_f^*$, que contém $X \cup \mathbb{Q} \setminus U$, é enumerável.

(iii) \implies (ii) Tome $K \subseteq \mathbb{P}$ compacto. K é, em particular, um fechado de \mathbb{R} , logo, $U = (\mathbb{R} \setminus K) \cap (X \cup \mathbb{Q})$ é um aberto que contém os racionais. Por hipótese, o complementar é enumerável. No entanto, o complementar em $X \cup \mathbb{Q}$ é justamente $K \cap (X \cup \mathbb{Q})$. Com isso, $K \cap X$ também é enumerável. \square

Observe que um consequência deste resultado é que \mathbb{M} não pode ser de Lindelöf, afinal \mathbb{P} não satisfaz o item (ii). Com isso, temos que a reta de Michael de fato não é um espaço de Michael.

Agora, vamos à condição que nos garante que um conjunto com tais propriedades existe.

Proposição 3.2.10. *Existe um subconjunto de \mathbb{P} não enumerável satisfazendo algum dos itens anteriores se e somente se $\mathfrak{b} = \omega_1$*

Demonstração. (\implies) Pela proposição anterior, podemos assumir que X é um subconjunto não enumerável de \mathbb{P} que satisfaz o item (1). Escolha $Y \subseteq X$ de tamanho ω_1 . Por hipótese, Y é ilimitado, logo, $\mathfrak{b} \leq |Y| = \omega_1$.

(\impliedby) Tome um conjunto X de ω^ω que testemunhe $\mathfrak{b} = \omega_1$. Como já mostramos em 1.2.2, podemos assumir X bem ordenado. Todo subconjunto de X não enumerável, será também cofinal em X . Como escolhemos X bem ordenado, qualquer subconjunto não enumerável deve ser ilimitado. \square

Embora tenham semelhanças, o teorema provado por Van Douwen continha um item a mais, que nos informa sobre espaços de Michael concentrados que não estejam em subespaços de \mathbb{M} .

Proposição 3.2.11. *Vale $\mathfrak{b} = \omega_1$ se e somente se existe um espaço X concentrado ao redor de A enumerável com $\psi(X) = \omega$.*

Vamos analisar o que esse resultado nos diz. Se existe um espaço de Michael concentrado M , mesmo que fora de \mathbb{M} , e assumimos algumas condições extras de M , então conseguimos fazer a construção da última seção a partir dele. A razão pela qual só mencionamos este resultado é que, novamente, a versão feita por Lawrence acaba sendo mais completa.

Teorema 3.2.12. *Existe um espaço concentrado de Michael se e somente se $\mathfrak{b} = \omega_1$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Assuma a existência de um espaço Michael M concentrado ao redor de A tal que $A \times \mathbb{P}$ seja normal. Pelo lema 3.2.3, existe um conjunto não enumerável $B \subseteq M$ e uma função injetora $F : B \rightarrow \mathbb{P}$ tal que $\overline{F} \cap (A \times \mathbb{P}) = \emptyset$. Queremos achar um subconjunto dos irracionais que satisfaça o item (ii) da proposição 3.2.9 e nosso candidato será $X = \text{Im}(F)$.

Fixe $K \subseteq \mathbb{P}$ compacto. Assuma, por absurdo, que $|X \cap K| > \omega$. Sem perda de generalidade, também podemos assumir que $X \subseteq K$, afinal, se não for, bastaria trocarmos B por $F^{-1}[K \cap \text{Im}(F)]$ e F por pela restrição ao novo conjunto. Pela escolha de F , para cada $\langle a, p \rangle \in A \times K$ podemos escolher um $U \times V$ vizinhança aberta básica tal que $(U \times V) \cap F = \emptyset$.

Fixado $a \in A$, podemos pegar \mathcal{W}_a subcobertura enumerável de $\{a\} \times K$ composta por elementos desta forma. Tome $U_a = \bigcap_{U \in \mathcal{W}_a} \pi_M[U]$. Se existe $x \in U_a \cap B$, então $\langle x, f(x) \rangle \in F$ e existiria $U \in \mathcal{W}_a$ tal que $\langle x, f(x) \rangle \in U$, o que contradiz a construção. Sendo assim, temos que $U = \bigcup_{a \in A} U_a$ é um aberto que contém A , logo, $M \setminus U$ deve ser enumerável. No entanto, $B \subseteq X \setminus U$ e B é enumerável. Absurdo!

(\Leftarrow) Pela proposição 3.2.9, existe um $X \subseteq \mathbb{M}$ de Lindelöf tal que $\mathbb{Q} \subseteq X$. A construção é a feita por Michael. Colocando na linguagem de 3.2.3 tomamos $P = \mathbb{P}$, $B = X \setminus \mathbb{Q}$ e $F : X \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{P}$ como a identidade. Para vermos que $X \times \mathbb{P}$ não é normal, basta verificarmos que $\overline{\{\langle p, p \rangle : p \in P\}} \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{P}) = \emptyset$. \square

Assim, como antes, a existência um espaço de Michael concentrado qualquer, nos permite garantir que a construção que vimos em 3.1.10 pode ser feita. No entanto, agora, com a única condição sendo que o espaço seja concentrado ao redor de um fechado A cujo produto com \mathbb{P} é normal. Isso, no entanto, não nos dá uma construção explícita de um espaço de Michael concentrado fora de \mathbb{M} .

Também não encontramos tentativas na literatura de generalizações que não envolvam A seja fechado. Note que, se assumimos que A é fechado, então a condição de que $A \times \mathbb{P}$ é normal não faz sentido ser removida, afinal, senão já teríamos no próprio A um exemplo de espaço de Michael. Ambas as condições estão presentes no exemplo original, então podem ser consideradas bem razoáveis. No entanto, o mesmo pode ser dito de van Douwen assumindo que o espaço é concentrado ao redor de um conjunto enumerável, e o resultado acima representa uma generalização deste caso.

De qualquer maneira, após esse capítulo, temos, dentro da razoabilidade da definição, que espaços de Michael concentrados são independentes. Este poderia ser o fim da história. Caso todo espaço de Michael fosse concentrado. No entanto, como se pode imaginar, o problema se mostraria mais resiliente.

Capítulo 4

Outras Construções

No capítulo anterior estudamos um tipo específico de espaço de Michael, os concentrados. No entanto, no mesmo ano em que o artigo de Lawrence foi publicado, Alster também construiu um exemplo de espaço de Michael. As hipóteses usadas são consistentes com $\omega_1 < \mathfrak{b}$, logo pelo teorema 3.2.12, temos que não pode ser um espaço concentrado. Vale destacarmos que, no artigo original, Alster se utilizou de MA e couber à Fleissner, pelo menos de acordo com o pequeno artigo histórico [GN15], observar que bastava a igualdade de cardinais. Inclusive, este último artigo foi inestimável para ajudar-nos a montar a bibliografia e é dele que saem as comparações que faremos entre as diferentes construções.

Este capítulo focará nas duas construções mais relevantes que tivemos desde a de Michael. Começamos com a já citada construção de Alster, publicada em [Als90]. Esta construção foi feita assumindo a igualdade $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \text{cov}(\mathcal{M})$. Embora o cardinal \mathfrak{b} seja um elemento comum entre ambas, sabemos que esta e a hipótese na qual baseamos o último capítulo são independentes.

A segunda construção será a feita por Justin Moore em [Moo99]. Esta pode ser vista como uma melhora da construção feita por Alster, já que é feita assumindo apenas $\mathfrak{b} = \text{cov}(\mathcal{M})$. Moore também mostra que há uma estrutura, chamada sequência de Michael, cuja existência é equivalente à existência de espaços de Michael.

Ambas seções estarão principalmente focada em suas respectivas construções. Por essa razão, serão estruturados na forma de vários lemas com o objetivo de chegar à construção final. Isto, é claro, não nos impedirá de fazer ocasionais comentários sobre as relações que as construções tem entre si e com outros problemas.

4.1 Contribuições de Alster

Começamos a construção olhando para a hipótese $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$. Sabemos que tal igualdade é equivalente à existência de uma \mathfrak{d} -escala $\{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{d}\}$ (1.2.7). Para simplificar a notação, nesta seção, para cada $\alpha \in \mathfrak{d}$ denotaremos $K_{x_\alpha}^*$ (seção 1.2) por K_α . A boa ordenação garante que $\{K_\alpha : \alpha < \mathfrak{d}\}$ é uma família crescentes de subconjuntos de ω^ω cuja união é o próprio

conjunto de Baire. O espaço que iremos construir será um que contém \mathbb{P} e estes conjuntos serão vizinhanças de seus pontos.

Antes da construção, vamos demonstrar um resultado que motiva a segunda condição que assumimos, $\mathfrak{d} = \text{cov}(\mathcal{M})$.

Lema 4.1.1. *Seja M um espaço metrizável e compacto tal que $M = \bigcup\{K_\gamma : \gamma < \beta\}$, onde $\beta < \text{cov}(\mathcal{M})$ e K_γ é compacto para todo γ . Temos que existe $I \subseteq \beta$ enumerável tal que $M = \bigcup_{\gamma \in I} K_\gamma$.*

Demonstração. Assuma por absurdo que o resultado não vale. Como M é um compacto metrizável, ele tem base enumerável e, como consequência, é hereditariamente de Lindelöf.

Nosso objetivo será definir uma sequência $(U_\gamma)_{\gamma < \omega_1}$ tal que

- (i) Cada U_γ é um aberto não vazio de M
- (ii) Para todo γ , $U_\gamma \setminus \bigcup\{U_\alpha : \alpha < \gamma\} \neq \emptyset$
- (iii) Para todo γ , existe um conjunto enumerável $I_\gamma \subseteq \beta$ tal que $U_\gamma \subseteq \bigcup\{K_i : i \in I_\gamma\}$

A condição (iii), apesar de ser mais técnica, será útil na construção dos espaços. O importante é que com (i) e (ii) e pela regularidade de ω_1 , temos que $\bigcup_{\gamma < \omega_1} U_\gamma$ não tem subcobertura enumerável, contradizendo que M é hereditariamente de Lindelöf.

Começamos definindo o aberto $U_0 = \bigcup\{\text{Int}_M K_\gamma : \gamma < \beta\}$. Note que $M \setminus U_0 \subseteq \bigcup(K_\gamma \setminus \text{Int}_M K_\gamma)$. Temos que cada $K_\gamma \setminus \text{Int}_M K_\gamma$ tem, obviamente, interior vazio em M . Além disso, como cada K_γ é compacto, eles também são fechados, portanto, raros. Assim, caso U_0 fosse vazio, M seria uma união de menos de $\text{cov}(\mathcal{M})$ conjuntos raros, o que contradiz a definição de $\text{cov}(\mathcal{M})$. Note que o espaço não é \mathbb{P} , mas usando o comentário posterior à definição 1.2.8 e o fato de que espaços compactos metrizáveis são poloneses ([Kec95] proposição 4.1), podemos afirmar que o tamanho de uma família de magros que cobrem M deve ser maior que $\text{cov}(\mathcal{M})$.

Com isso, concluímos que U_0 não pode ser vazio, satisfazendo assim (i). (ii) é satisfeito por vacuidade. Já (iii) vem do fato de que U_0 ser de Lindelöf garantir a existência de um I_0 enumerável tal que $U_0 = \bigcup\{\text{Int} K_i : i \in I_0\} \subseteq \bigcup\{K_i : i \in I_0\}$

Agora, fixe $\alpha < \omega_1$ e assumamos que definimos um U_γ para cada $\gamma < \alpha$. Seja $U = \bigcup\{U_\gamma : \gamma < \alpha\}$ e $A = M \setminus U = \bigcup\{K_\gamma \setminus U : \gamma < \beta\}$. Pela condição (iii), temos que $U \subseteq \bigcup_{\gamma < \alpha} \bigcup_{i \in I_\gamma} K_i$, que é uma união enumerável. Como estamos negando a tese, A não pode ser vazio. Além disso, como cada K_γ é fechado, $K_\gamma \setminus U$ é fechado em A . Note que como A é fechado, ele também é completamente metrizável (1.3.2). Juntando este fato com a mesma argumentação de antes, temos que $U'_\alpha = \bigcup\{\text{Int}_A(K_\gamma \setminus U) : \gamma < \beta\}$ é não vazio.

Tome $U_\alpha = U \cup U'_\alpha$. Com isso, temos que U_α satisfaz (ii). O complementar de U_α em M é $(M \setminus U) \cap M \setminus U'_\alpha = A \cap M \setminus U'_\alpha = A \setminus U'_\alpha$. Ou seja, o complementar de U'_α em M é fechado em A , logo, fechado em M . Com isso, U'_α é de Lindelöf, portanto, existe I'_α enumerável tal que $U'_\alpha = \bigcup_{\gamma < \alpha} \text{Int}_A K_\gamma$. Tomando $I_\alpha = I'_\alpha \cup \bigcup_{\gamma < \alpha} I_\gamma$, satisfazemos o item (iii). \square

Agora, podemos nos voltar à construção. Nosso espaço, como conjunto, será uma compactificação metrizável dos irracionais, que denotaremos por C . Sabemos que ela existe

pois \mathbb{P} é um espaço de Tychonoff com peso enumerável, logo, existe uma compactificação de sua em I^ω (1.1.1 teorema 2.3.23). Não usaremos a topologia usual de C , no entanto, mas sim um refinamento desta. Primeiro, para uniformizar a notação, usaremos $K_\mathfrak{d}$ como notação para C . Agora, para cada $\alpha \leq \mathfrak{d}$ e $x \in K_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} K_\beta$ uma base local é dada por $\mathcal{U}_\alpha = \{K_\alpha \cap U \setminus K_\beta\}$, onde $U \subseteq C$ é um aberto e $\beta < \alpha$. C com esta topologia será denotado por X . Vemos que de fato, forma a base de uma topologia.

No momento, temos uma ambiguidade na definição. Ela não faz menção à subconjuntos da forma $X_\alpha \cap U$, isto é, sabemos se é necessário remover algum X_β para que termos um aberto. Note as vizinhanças de X_0 já são desta forma, afinal, não existe $\beta < 0$. A partir daí podemos seguir por indução para mostrar que $X_\alpha \cap U = (X_\alpha \cap U \setminus X_\beta) \cup X_\beta$ é aberto. Como consequência, temos o fato de esta topologia refina a usual de C . Para ver isso, observe que $U = X_\mathfrak{d} \cap U$.

Essencialmente, esta topologia associa, para cada $\alpha < \mathfrak{d}$, um subconjunto, $K'_\alpha = X_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} K_\beta$, cujos pontos são isolados de K'_β , para $\beta > \alpha$, pela vizinhança X_α .

A chave para mostrar que X é de Lindelöf, está no lema abaixo. Em essência, o que ele diz é que quando consideramos uma cobertura \mathcal{C} de K'_α , ela cobre o bastante para não termos uma sequência $\{\beta_i : i \in cf(\alpha)\}$ tal que $K_{\beta_i} \not\subseteq \bigcup \mathcal{C}$ para todo $i \in cf(\alpha)$. Em outras palavras, a cobertura cobre não apenas K'_α , mas todos K'_γ com $\gamma > \beta$ para algum $\beta < \alpha$. Isto tudo para o caso $cf(\alpha) > \omega$.

Lema 4.1.2. *Seja $\alpha \leq \mathfrak{d}$ e U um aberto tal que $K'_\alpha \subseteq U$, então existe uma sequência $(\gamma_i)_{i \in \omega} \subseteq \alpha$ tal que $K_\alpha \setminus U \subseteq \bigcup_{i \in \omega} K_{\gamma_i}$*

Demonstração. Fixe um $\alpha \leq \mathfrak{d}$ e um aberto U tal que $X'_\alpha \subseteq U$. Vamos fazer por casos.

Se $\alpha = \beta + 1$, então temos $K_\alpha \setminus U \subseteq K_\beta$. Além disso, caso $cf(\alpha) = \omega$, tome uma sequência $(\gamma_i)_{i \in \omega}$ cofinal em α . Se $x \in K_\alpha \setminus U$, então existe $\beta < \alpha$ tal que $x \in K_\beta$. Como a sequência é cofinal podemos tomar um $i \in \omega$ tal que $x \in K_\beta \subseteq K_{\gamma_i}$. Portanto $K_\alpha \setminus U \subseteq \bigcup_{i \in \omega} K_{\gamma_i}$

Vamos dividir o caso $\omega < cf(\alpha)$ em 2 (igual e diferente a \mathfrak{d}). Antes, mostraremos que podemos, sem perda de generalidade, considerar um subconjunto aberto de U com uma forma mais simples. Nosso U original deve ser uma união de elementos da forma $V_i = K_{\alpha_i} \cap U_i \setminus X_{\beta_i}$ com $i \in I$, sendo este um índice qualquer. Note que, pela definição de K'_α , podemos assumir sem perda de generalidade que, para todo $i \in I$, temos $K_{\alpha_i} = K_\alpha$, afinal, senão o aberto V_i seria disjunto de K_{α_i} .

Como C é hereditariamente de Lindelöf, temos que existe um conjunto $J \subseteq I$ enumerável tal que $K'_\alpha \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$. Já a cofinalidade de α ser maior que ω , nos garante que $\sup\{\beta_j : j \in J\} = \beta < \alpha$. Se definirmos $U' = (K_\alpha \cap V) \setminus K_\beta$, onde $V = \bigcup_{j \in J} U_j$, então, pela definição, $K'_\alpha \subseteq U'$. Como $U' \subseteq \bigcup_{i \in I} K_\alpha \cap U_i \setminus K_{\beta_i} \subseteq U$, temos que $K_\alpha \setminus U \subseteq K_\alpha \setminus U'$ e, portanto, podemos de fato assumir que U é da forma $K_\alpha \cap V \setminus K_\beta$.

Começemos com o caso $\alpha = \mathfrak{d}$. Neste caso, $U = V \setminus K_\beta$, assim, $X \setminus U = C \setminus (V \setminus K_\beta) = (C \setminus V) \cup K_\beta$. Agora, só precisamos colocar $C \setminus V$ em uma união enumerável de elementos de $(K_\gamma)_{\gamma < \mathfrak{d}}$. Note que $C \setminus V$ é um compacto de ${}^\omega\omega$, e como todo compacto deste espaço, para todo $i \in \omega$ a projeção na i -ésima coordenada $\pi_i(C \setminus V)$ é finita. Portanto, existe um $y \in {}^\omega\omega$ tal que para todo $i \in \omega$ e para todo $x \in C \setminus V$, $x(i) < y(i)$. Como $\{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{d}\}$ é

uma \mathfrak{d} -escala, existe um α tal que $y <^* x_\alpha$. Assim, $C \setminus V \subseteq K_\alpha$, logo, $C \setminus U \subseteq K_\alpha \cup K_\beta$. Por indução, conseguimos obter a sequência que queríamos em \mathfrak{d} .

Agora temos o caso $\alpha < \mathfrak{d}$ e $cf(\alpha) > \omega$. Neste caso, vamos usar o lema 4.1.1. Nosso objetivo será colocar $K_\alpha \setminus U$ em uma união enumerável de compactos, cada um podendo ser posto dentro de uma união da forma $\bigcup_{n \in \omega} K_{\alpha_n}$, com $\alpha_n < \alpha$ para todo $n \in \omega$. O primeiro passo é notar que K_α é σ -compacto em \mathbb{P} , ou seja existem $(K_\alpha(n))_{n \in \omega}$ sequência de compactos tais que $K_\alpha = \bigcup_{n \in \omega} K_\alpha(n)$. De fato, dado α temos:

$$K_\alpha = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{i \in \omega} \{x \in \mathbb{P} : x(j) \leq i \text{ se } j \leq n \text{ e } x(j) < x_\alpha \text{ caso contrário}\} = \bigcup_{n \in \omega} K_\alpha(n).$$

Assim, como vale que $K_\alpha \setminus U \subseteq \bigcup \{K_\gamma(m) : \gamma < \alpha \text{ e } m \in \omega\}$, podemos escrever:

$$K_\alpha \setminus U = \bigcup \{K_\alpha(n) \cap K_\gamma(m) : \gamma < \alpha \text{ e } m \in \omega\}.$$

Note que cada $K_\alpha(n) \setminus U$ se encontra nas condições do lema anterior, logo, existe sequência $(\alpha_i(n_i))_{i \in \omega}$ tal que vale:

$$K_\alpha(n) \setminus U = \bigcup_{i \in \omega} \{K_\alpha(n) \cap K_{\alpha_i}(n_i) \in \omega\}.$$

Concluimos:

$$K_\alpha \setminus U = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{i \in \omega} K_\alpha(n) \cap K_{\alpha_{n_i}}(m_{n_i}) \subseteq \bigcup \{K_{\alpha_{n_i}}(m_{n_i}) : \langle n, i \rangle \in \omega \times \omega\}.$$

□

Com isso, conseguimos mostrar que X é de Lindelöf.

Proposição 4.1.3. X é de Lindelöf.

Demonstração. Vamos provar que K_α é de Lindelöf para todo $\alpha \leq c$.

Começamos notando que a topologia de K_0 como subespaço de X coincide com a topologia como subespaço de C . Assim, pela topologia herdada do compacto métrico C , K_0 tem base enumerável, logo, é de Lindelöf.

Agora fixe $\alpha \leq c$ e assuma que para todo $\beta < \alpha$, K_β é de Lindelöf. Note que o mesmo argumento acima que usamos para K_0 pode ser usando para K'_α . Considere a intersecção

$$(K_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} K_\beta) \cap ((K_\gamma \cap U) \setminus K_\delta) = (K_\alpha \cap U \cap K_\gamma) \setminus \left(\bigcup_{\beta < \alpha} K_\beta \cup K_\delta \right)$$

onde $\gamma, \delta < \mathfrak{d}$ e U aberto de C . Se $\delta > \alpha$ ou $\delta, \gamma < \alpha$ temos que o conjunto seria vazio. Caso contrário, temos $(K_\alpha \cap U) \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} K_\beta = K'_\alpha \cap U$. Assim, como anteriormente, podemos

concluir que K'_α é de Lindelöf.

Dada, então, uma cobertura \mathcal{C} de K_α , existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ enumerável tal que $K_\alpha \subseteq \cup \mathcal{C}'$. Usando o lema anterior, existe $I \subseteq \alpha$ enumerável, tal que $K'_\alpha \setminus \cup \mathcal{C}' \subseteq \cup_{i \in I} K_i$. Por hipótese de indução, cada um deles é de Lindelöf, logo existe $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}$ tal que $K_i \subseteq \mathcal{C}_i$. Assim, $K_\alpha \subseteq \mathcal{C}' \cup \cup_{i \in I} \mathcal{C}_i$. □

Agora, nos resta mostrar que X tem a propriedade que pedimos de um espaço de Michael. Para isso, mostraremos que X possui um subespaço fechado que não é de Lindelöf. Este fechado é, dadas as devidas adaptações, um dos que usamos pra argumentar que $\mathbb{M} \times \mathbb{P}$ não é normal.

Proposição 4.1.4. $X \times \mathbb{P}$ não é de Lindelöf.

Demonstração. Considere o conjunto $F = \{\langle p, p \rangle : p \in \mathbb{P}\}$. Adaptando a demonstração 1.1.6, podemos mostrar que F é um conjunto fechado. Para ver isso considere um ponto $\langle x, p \rangle$ tal que $x \neq p$. Podemos escolher abertos U e V de Y tais que $x \in U$, $p \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Seja α o primeiro ordinal tal que $x \in X_\alpha$. Assim, $X_\alpha \cap U \times (V \cap \mathbb{P})$ é um aberto disjunto de F .

Se $X \times \mathbb{P}$ fosse de Lindelöf, F também seria. No entanto, o conjunto $\{(X_\alpha \times \mathbb{P}) : \alpha < \mathfrak{d}\}$, que pela a propriedade de \mathfrak{d} -escala é uma cobertura, não tem subcobertura enumerável. □

Note que este espaço não é primeiro enumerável. De fato, seja $\alpha < \mathfrak{d}$ com $cf(\alpha) > \omega$ e $x \in K'_\alpha$. Assuma que temos $\{(K_\alpha \cap U_i) \setminus K_{\beta_i} : i \in \omega\}$ base local para x e tome $\beta = \sup\{\beta_i : i \in \omega\}$. Para todo $i \in \omega$, podemos assumir que $\beta_i = \beta$, afinal, $(K_\alpha \cap U_i) \setminus K_\beta \subseteq (K_\alpha \cap U_i) \setminus K_{\beta_i}$. Considere agora a família $\{K_\alpha \setminus K_\beta : \beta < \gamma < \alpha\} \subseteq V(x)$. Se o conjunto que fixamos antes é uma base local, então existe $i \in \omega$ e $\{\gamma_\delta : \delta < cf(\alpha)\}$ tal que $(K_\alpha \cap U_i) \setminus K_\beta \subseteq K_\alpha \setminus K_{\gamma_\delta}$, em outras palavras, como $\gamma_\delta > \beta$, temos que $U_i \cap (K_{\gamma_\delta} \setminus K_\beta) = \emptyset$. No entanto, usando que $\{\gamma_\delta : \delta < cf(\alpha)\}$ é cofinal em α , concluímos que $U_i \subseteq K'_\alpha$. Agora, se X fosse primeiro enumerável, existiria tal vizinhança para todo $x \in K'_\alpha$, o que contradiria o lema 4.1.2.

Em [Pav11], Palov aponta que bastaria um refinamento da topologia para torná-la primeiro enumerável. Note que $K_\alpha = \cup\{K_x : x \leq^* x_\alpha\}$. O que Palov fez foi pegar a topologia onde cada um destes elementos também é um aberto.

No resto do artigo, Alster busca uma maneira de generalizar a construção. Ao invés de considerar uma escala, ele fixa uma família ilimitada $\{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ em \mathbb{P} . A construção é bem próxima do que fizemos. Ele considera, para todo $\alpha < \mathfrak{b}$, $C_\alpha = \{x \in \mathbb{P} : x \leq^* x_\alpha\}$ e $C_\mathfrak{b} = C \setminus \mathbb{P}$. Análogo ao que fizemos, abertos básicos são conjuntos da forma $U \cap \cup\{C_\alpha : \gamma < \alpha \leq \beta\}$ onde U é aberto de C e $\gamma < \alpha \leq \beta$.

O problema é que, para provar o lema 4.1.2, usamos que a família era uma escala. Para compensar esta falta e provar algo análogo, ele propõe a seguinte afirmação: Para todo $K \subseteq \mathbb{P}$, α cardinal com $cf(\alpha) > \omega$ e $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ família estritamente crescente, em relação à \leq^* , de elementos de K , existe $x \in K$ que domina esta família. No artigo, ele aponta que D. H. Fremlin mostrou que tal afirmação não vale se $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, no entanto, sua consistência

não é sabida. De qualquer forma, esta afirmação não parece ter sido muito explorada na literatura e a destacamos apenas como curiosidade.

Embora este tipo de construção seja independente da feita originalmente por Michael, há paralelos que podemos achar se substituirmos nossa escolha de compactificação de \mathbb{P} para uma dentro de \mathbb{R} e contendo \mathbb{Q} , cuja construção veremos na próxima seção. Assim, podemos pensar nos dois exemplos como refinamentos da topologia desta compactificação. Enquanto no original temos cada elemento de \mathbb{P} sendo discreto, neste teremos vizinhanças Lindelöf.

4.2 Contribuições de Justin Moore

A próxima construção que faremos, e a última explícita da literatura, foi feita por Justin Moore em [Moo99]. Como na construção anterior, usaremos uma compactificação métrica dos irracionais. Agora, no entanto, teremos que ter um maior cuidado ao escolhê-la. Especificamente, estamos buscando uma compactificação cujo resíduo seja enumerável. A demonstração abaixo foi tirada de [Sco12]. Dizemos que $x \in 2^\omega$ é **eventualmente constante** se existem $n \in \omega$ e $i \in 2$ tais que $x(m) = i$ para todo $m \geq n$.

Proposição 4.2.1. *O conjunto de Cantor 2^ω pode ser visto como uma compactificação de \mathbb{P} da forma $C = \mathbb{P} \cup Q_C$, onde Q_C é homeomorfo à \mathbb{Q} .*

Demonstração. Considere o seguinte conjunto:

$$X = \{x \in 2^\omega : x \text{ não é eventualmente constante}\}$$

Já que X é denso em 2^ω , o segundo é uma compactificação do primeiro. Para mostrar que X é homeomorfo à \mathbb{P} , usaremos que este é o único zero dimensional polonês tal que todo compacto tem interior vazio (1.3.5).

Zero-dimensional é uma propriedades que X herda de 2^ω . Além disso, se denotarmos seu complementar por Q , temos que $|Q| = |\bigcup_{n \in \omega} \{f \in 2^\omega : f(k) = i \text{ para todo } i = 0, 1 \text{ e } k \geq n\}| = |\bigcup_{n \in \omega} 2^{n+1}| = \omega$. Portanto, X é um G_δ de um polonês, logo, também é polonês.

Agora, fixe $K \subseteq X$ compacto e vamos mostrar que ele tem interior vazio. Note que o complementar de X também é denso, logo, $U \setminus K \neq \emptyset$. Como K é fechado em \mathbb{P} também, temos que $U \setminus K$ é um aberto, portanto, existe $p \in U \setminus K \cap X$. Concluimos que $U \cap X \not\subseteq K$, ou seja, K tem interior vazio em X .

Resta apenas notar que $2^\omega \setminus X$ não tem pontos isolados. É um resultado de Sierpiński o fato de que todo espaço metrizável, enumerável e sem pontos isolados é homeomorfo à \mathbb{Q} . Uma referência pode ser encontrada em [Cie20]. De qualquer maneira, isso conclui a demonstração. □

Fixaremos a notação da proposição, $C = \mathbb{P} \cup Q_C$. O exemplo a seguir será um subespaço do espaço produto $\mathfrak{d} \times C$. Esta pode parecer a primeira vez que vemos um espaço de Michael

em um espaço produto, porém os outros dois exemplos podem ser vistos assim também. O caso de Alster talvez seja o mais fácil de se enxergar, já que é homeomorfo ao subespaço $\bigcup_{\alpha < \mathfrak{d}} \{\alpha\} \times K'_\alpha$ de $\mathfrak{d} \times C$.

Já o exemplo construído por Michael pode ser imerso no espaço $\omega_1 \times C$. Dado $A \subseteq C$ concentrado ao redor de Q_C , temos que o conjunto $\{\omega_1\} \times (Q_C \cup \{(\alpha + 1, a_\alpha) : \alpha < \omega_1\})$ é homeomorfo ao exemplo de Michael. Ao tomarmos o sucessor na primeira coordenada do segundo termo, claramente fazemos com que o subespaço $\{(\alpha + 1, a_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ seja discreto.

Acontece que, sob certas restrições, um espaço de Michael pode ser visto como subespaço da forma $(\theta + 1) \times C$, onde θ é um cardinal regular. Este θ está relacionado a uma função cardinal que definiremos. Se um espaço X não é de Lindelöf, usaremos $L_f(X)$ para denotar a menor cardinalidade de uma cobertura sem subcobertura enumerável.

Proposição 4.2.2. $L_f(X)$ é regular ou tem cofinalidade enumerável.

Demonstração. Não pode ser enumerável pela própria definição. Seja κ a cofinalidade de $L_f(X)$ e tome $\{\alpha_\gamma : \gamma < \kappa\}$ cofinal em $L_f(X)$ e $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < L_f(X)\}$ uma cobertura sem subcobertura enumerável. Definimos a cobertura $\mathcal{U}' = \{\bigcup_{\beta < \alpha_\gamma} U_\beta : \gamma < \kappa\}$. Se assumirmos que $\kappa < L_f(X)$, então \mathcal{U}' tem subcobertura enumerável \mathcal{U}_0 . Se assumir que a cofinalidade é não enumerável, $\delta = \sup\{\alpha : X \not\subseteq \bigcup_{\beta < \alpha} U_\beta\} < L_f(X)$, logo, $\{U_\alpha : \alpha < \delta\}$ é subcobertura de \mathcal{U} . No entanto, como $\delta < L_f(X)$, existe uma subcobertura enumerável de \mathcal{U} . \square

Começamos com a seguinte definição:

Definição 4.2.3. Seja θ um cardinal. $\{X_\xi\}_{\xi \leq \theta} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é dito uma **sequência de Michael** se satisfaz as seguintes condições:

- Para todo $\eta < \xi < \theta + 1$, $Q_C = X_\theta \subsetneq X_\eta \subsetneq X_\xi \subsetneq C$.
- Dado um $K \subseteq \mathbb{P}$ compacto, $\delta = \min\{\xi \leq \theta : X_\xi \cap K = \emptyset\}$ tem cofinalidade enumerável.

Uma θ -sequência de Michael é dita **reduzida** se satisfizer

- Dado um subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ analítico (veja 1.3) temos que $\delta = \min\{\xi \leq \theta : X_\xi \cap A = \emptyset\}$ tem cofinalidade enumerável ou é θ

Note que estes mínimos estão bem definidos dado que, temos $X_\theta \cap Y = \emptyset$, se $Y \subseteq \mathbb{P}$.

Como o nome indica, a existência de uma sequência da Michael está diretamente relacionada à existência de um espaço de Michael.

Teorema 4.2.4. Dado θ cardinal regular, temos que são equivalentes

- (i) Existe um espaço de Michael M que é subespaço de $(\theta + 1) \times C$ e $w(M \times \mathbb{P}) = L_f(M \times \mathbb{P}) = \theta$
- (ii) Existe um espaço de Michael M tal que $L_f(M \times \mathbb{P}) = \theta$
- (iii) Existe uma θ -sequência de Michael reduzida $\{X_\xi\}_{\xi \leq \theta}$.

Demonstração. (i) \implies (ii) é óbvio.

(ii) \implies (iii)

Fixe um espaço de Michael X com $L_f(X \times \mathbb{P}) = \theta$ e $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \theta\}$ uma cobertura se $X \times \mathbb{P}$ sem subcobertura enumerável. Nossa sequência será definida da seguinte maneira: para cada $\xi \leq \theta$, tome $X_\xi = Q_C \cup \{p \in \mathbb{P} : X \times \{p\} \not\subseteq \bigcup_{\alpha < \xi} U_\alpha\}$. Como \mathcal{U} é uma cobertura, temos que $X_\theta = Q_C$. Aqui precisamos tomar um cuidado. Não temos garantia de que os elementos da sequência serão todos distintos, por isso, teremos que remover todas as repetições. Já que $L_f(M \times \mathbb{P})$ é minimal e regular, isso não modifica o tamanho da coleção, portanto, podemos assumir direto que são todos distintos.

Fixe agora um $K \subseteq \mathbb{P}$ compacto e tome $\delta = \min\{\alpha : X_\alpha \cap K = \emptyset\}$. Pela construção, $X \times K \subseteq \bigcup_{\alpha < \delta} U_\alpha$. No entanto, X é de Lindelöf e K é compacto, logo, o produto é de Lindelöf. Assim, existe uma subcobertura enumerável \mathcal{U}' . Se assumirmos, por absurdo, que a cofinalidade de δ é não enumerável, então $\alpha = \sup\{\beta < \delta : U_\beta \in \mathcal{U}'\}$ é um ordinal estritamente menor que δ . No entanto, teríamos que $X \times K \subseteq \bigcup \mathcal{U}' \subseteq \bigcup_{\beta < \alpha} U_\beta$, contradizendo a minimalidade de δ .

Falta mostrarmos que a cobertura é reduzida. Seja $A \subseteq \mathbb{P}$, um conjunto analítico e $f : \mathbb{P} \rightarrow A$ uma função contínua e sobrejetora. Considere o conjunto $F = \{\langle x, f(x) \rangle : x \in \mathbb{P}\} \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{P}$. Note que ele é fechado. De fato, dado $\langle x, y \rangle \notin F$, temos que $y \neq f(x)$, portanto, existem abertos $U \in V(f(x))$ e $V \in V(y)$ tais que $U \cap V = \emptyset$. Como f é contínua, existe $W \in V(x)$ tal que $f[W] \subseteq V$. Tome a vizinhança $W \times V$ de $\langle x, y \rangle$. Temos que, se $\langle x', y' \rangle \in W \times V$, então $f(x') \in V$ e, como $y' \in V$, vale $f(x') \neq y'$, ou seja, $\langle x', y' \rangle \notin F$. Concluimos que F é fechado. Além disso, E tem a propriedade que $\pi[E] = A$.

Note que F não pode ser σ -compacto, pois se tivéssemos $F = \bigcup_{n \in \omega} K_n$, onde cada K_n é compacto, poderíamos escrever $\mathbb{P} = \bigcup_{n \in \omega} \pi_1[K_n]$, contrariando, 2.1.1. Agora, usando 1.3.2, que $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ tem base enumerável e 1.3.8, temos que existe $Y \subseteq E$ fechado e $h : Y \rightarrow \mathbb{P}$ homeomorfismo. Note que A é imagem contínua de Y por $f \circ h$. Em outras palavras, Podemos, sem perda de generalidade, assumir que F é homeomorfo à \mathbb{P} .

Seja $\delta = \min\{\xi \leq \theta : X_\xi \cap A = \emptyset\}$. Novamente, pela definição, temos que $X \times A \subseteq \bigcup_{\xi < \delta} U_\xi$. Note que isto acontece se, e somente se $X \times F \subseteq \bigcup_{\xi < \delta} U_\xi \times \mathbb{P}$. Pelo homomorfismo, temos que $L_f(X \times F) = L_f(X \times \mathbb{P}) = \theta$. Assim, se $\delta \neq \theta$, então $\{U_\xi \times \mathbb{P} : \xi \leq \delta\}$ possui subcobertura enumerável. Portanto, $\{U_\xi : \xi \leq \delta\}$ também possui subcobertura enumerável. Agora, usando um argumento idêntico ao que fizemos para compactos, δ ter cofinalidade não enumerável iria contradizer sua minimalidade.

(iii) \implies (i)

Fixe $\{X_\xi : \xi < \theta\}$. Começaremos definindo, para cada $\xi \leq \theta$, $M_\xi = \bigcup_{\alpha < \xi} \{\alpha\} \times X_\alpha$. Nosso candidato à espaço de Michael em $(\theta + 1) \times C$ será M_θ .

Primeiramente, demonstraremos por indução que M_ξ é de Lindelöf para todo $\xi \leq \theta$. Note que como C é compacto e métrico, em particular tem base enumerável, também é hereditariamente de Lindelöf. Assim, cada $\xi \leq \theta$, X_ξ é de Lindelöf. Com isso, M_0 , que é homeomorfo à X_0 , é de Lindelöf. O caso sucessor é bem parecido. $M_{\xi+1}$ será a união de dois de Lindelöf, M_α e $\{\xi + 1\} \times X_{\xi+1}$.

Para ordinais limites, dividiremos em dois casos: cofinalidade enumerável e não enumerável. Se $cf(\xi) = \omega$, fixe $\{\xi_n : n \in \omega\}$ sequência cofinal em ξ . Neste caso,

$M_\xi = (\{\xi\} \times X_\xi) \cup \bigcup_{n \in \omega} M_n$, logo, M_ξ é união de enumeráveis Lindelöf.

Já para o caso $cf(\xi) > \omega$, fixe \mathcal{U} uma cobertura de M_ξ em $C \times (\xi + 1)$. Como X_ξ é de Lindelöf e $\xi + 1$ é compacto, existe $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ tal que $X_\xi \times (\xi + 1) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_0$. Considere $F = \pi_C[C \times (\xi + 1) \setminus \bigcup \mathcal{U}_0]$. Como $\xi + 1$ é compacto, temos que F é um fechado de C , logo, também compacto. Além disso, pela construção de F , temos que $F \cap X_\xi = \emptyset$. Como ξ tem cofinalidade não enumerável, existe algum $\alpha < \xi$, tal que $X_\alpha \cap F = \emptyset$. No entanto, isso significa que $X_\alpha \times (\xi + 1) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_0$. Com isso, temos que $M_\xi \setminus \bigcup \mathcal{U}_0 \subseteq M_\alpha$. Por indução, M_α é de Lindelöf, logo, existe $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ enumerável que cobre M_α . Assim, $\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$ é uma subcobertura enumerável.

Vamos mostrar agora que $w(M \times \mathbb{P}) = \theta$. Para isso usaremos 1.1.4. Como \mathbb{P} tem base enumerável, a base do produto deverá ser igual ao peso de M . M é um subconjunto de $(\xi + 1) \times C$, logo, seu peso é no máximo $w((\theta + 1) \times C)$. Novamente, como C tem base enumerável, este coincide com o peso de $\theta + 1$, que é θ . Com isso, $w(M \times \mathbb{P}) \leq \theta$. Para ver que deve ser exatamente θ , seja \mathcal{B} uma base. Veja que $\pi[\mathcal{B}]$ é uma base de θ . De fato, dado $U \subseteq \theta$ aberto, $\alpha \in U$, existe algum $x \in X_\alpha$ com $\langle \alpha, x \rangle \in M$. Note que $(U \times C) \cap M$ é vizinhança de $\langle \alpha, x \rangle$, logo existe $B \in \mathcal{B}$ com $\alpha \in \pi[B]$. Como $w(\theta + 1) = \theta$, temos $|\mathcal{B}| \geq \theta$.

A estratégia para mostrar que $M \times \mathbb{P}$ não é de Lindelöf se assemelha às outras construções. Primeiro, considere o conjunto $\Delta = \{\langle \xi, p, p \rangle : \langle \xi, p \rangle \in M\}$. Agora, note que tal conjunto é fechado em M . De fato, dado $\langle \xi, p, q \rangle$ qualquer em $(\theta + 1) \times C \times \mathbb{P}$, temos que como $p, q \in C$ são distintos, existem dois abertos, U e V , tais que $p \in U$, $q \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Sendo assim, $(\theta + 1) \times U \times (V \cap \mathbb{P})$ é uma vizinhança de $\langle \xi, p, q \rangle$ disjunta de $\{\langle \xi, p, p \rangle : p \in \mathbb{P}\}$, logo este é fechado. Portanto, $\Delta = \{\langle \xi, p, p \rangle : p \in \mathbb{P}\} \cap (M \times \mathbb{P})$ também é fechado.

Falta achar uma cobertura de Δ que não tenha subcobertura enumerável. Note que, dado ξ , M_ξ é um aberto de M , afinal $M_\xi = M \cap ((\theta, \xi) \times C)$. Sendo assim, $\{M_\xi \times \mathbb{P} : \xi < \theta\}$ é uma cobertura de M sem subcobertura enumerável.

Resta apenas mostrar que $L(M \times \mathbb{P}) = \theta$. Tome \mathcal{U} uma cobertura de $M \times \mathbb{P}$ de tamanho estritamente menor que θ . Sem perda de generalidade, podemos assumir que a cobertura é de abertos em $(\theta + 1) \times C \times \mathbb{P}$. Para achar a subcobertura enumerável, utilizaremos uma base $\{B_n : n \in \omega\}$ de $C \times \mathbb{P}$. A ideia, será cobrir $M \times \mathbb{P}$ por retângulos da forma $\xi_n \times B_n$, e então cobrir cada retângulo por enumeráveis elementos de \mathcal{U} . Para garantir que estes retângulos cobrem de fato $M \times \mathbb{P}$, vamos pedir que a cobertura seja fechada para uniões finitas.

Para cada $n \in \omega$ e $U \in \mathcal{U}$ podemos definir o aberto $U[B_n] = \bigcup \{\alpha \times B_n : \alpha \leq (\theta + 1) \text{ e } \alpha \times B_n \subseteq U\}$. Para verificar que estes abertos cobrem $M \times \mathbb{P}$, fixe um elemento $x = \langle \xi, p, q \rangle$. Temos que $(\xi + 1) \times \{p\} \times \{q\}$ é compacto. Além disso, como $p \in X_\alpha$, $(\xi + 1) \times \{p\} \times \{q\} \subseteq M \times \mathbb{P}$, logo, existe uma subcobertura finita de \mathcal{U} que o cobre. Como escolhemos \mathcal{U} fechado para uniões finitas, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $(\xi + 1) \times \{p\} \times \{q\} \subseteq U$. Assim, pelo Teorema de Wallace ([Eng89] teorema 3.2.10), existe B_n tal que $x \in (\xi + 1) \times B_n \subseteq U$, ou seja, $x \in U[B_n]$.

Agora, fixado $n \in \omega$ se tomarmos a união $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U[B_n]$, obteremos um conjunto da forma $\xi_n \times B_n$, para algum $\xi_n \leq \theta + 1$. Temos duas possibilidades: $\xi_n \geq \theta$ ou $\xi_n < \theta$. Se $\xi_n \geq \theta$, como a cobertura tem tamanho menor que θ , que é regular, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U(B_n) = \xi_n \times B_n$. Seja $\mathcal{U}_n = \{U\}$. Agora, se $\xi_n < \theta$, então $(\xi_n \times B_n) \cap (M \times \mathbb{P}) \subseteq M_\xi \times \mathbb{P}$.

A demonstração, então, termina se mostrarmos que $M_\xi \times \mathbb{P}$ é de Lindelöf para todo $\xi < \theta$. Como antes, faremos a demonstração por indução. Ela é bem similar ao que fizemos para M_ξ , então não faremos todos os detalhes. Começamos notando que $(\xi + 1) \times X_\xi \times \mathbb{P}$ é de Lindelöf. Com isso, o único caso que precisamos considerar é o em que $cf(\xi) > \omega$. Dada uma cobertura \mathcal{U} de $M_\xi \times \mathbb{P}$, tome uma subcobertura enumerável \mathcal{U} de $\{\xi + 1\} \times X_\xi \times \mathbb{P}$. Seja $F = \pi_{C \times \mathbb{P}}[\xi + 1 \times X_\xi \times \mathbb{P} \setminus \cup \mathcal{U}]$. Temos que F é um analítico tal que $F \cap X_\xi = \emptyset$. Portanto, deve existir $\delta < \xi$ tal que $F \cap X_\delta = \emptyset$. Como antes, por indução, conseguimos \mathcal{U}_1 subcobertura de $M_\delta \times \mathbb{P}$. Com isso, $\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$ é cobertura de $M_\xi \times \mathbb{P}$. \square

No teorema usamos a noção de sequência reduzida, embora não seja necessária para a construção de um espaço de Michael a partir de uma sequência de Michael. A único momento em que esta propriedade se fez necessária, é para provar que $L_f(M \times \mathbb{P})$ é exatamente θ . Outro ponto que podemos enfraquecer, é na regularidade de θ . Em (iii) \implies (i), para mostrar que $M \times \mathbb{P}$ não é de Lindelöf, precisamos apenas que $cf(\theta) > \omega$. O corolário abaixo sintetiza esses comentários.

Corolário 4.2.5. *Se θ tiver cofinalidade não enumerável então podemos tirar o "reduzida" da hipótese da sequência de Michael*

É importante destacar que não são todos os espaços de Michael que são contemplados por essa demonstração. Se $\{X_\xi : \xi < \theta\}$ é uma espaço sequência de Michael com $cf(\theta) = \omega$, então não temos a garantia de que existe um espaço de Michael. Alternativamente, se existe um espaço de Michael M com $L_f(M \times \mathbb{P})$ tendo cofinalidade enumerável, não garantimos que existe um em $\theta \times C$. De forma mais geral, embora a existência de um espaço de Michael em $\mathfrak{d} \times C$ tenha sido mostrada como equivalente à existência de um espaço geral, não temos razão para imaginar seriam homeomorfos. Mesmo assim, como argumentados não temos exemplos de espaços não homeomorfos à subconjuntos de $\mathfrak{d} \times C$.

Ainda considerando o caso de espaços de Michael com $L_f(M \times \mathbb{P})$ de cofinalidade enumerável, o artigo tem um resultado que vai nesta direção.

Teorema 4.2.6. *Se θ é um cardinal com cofinalidade enumerável e existe θ^+ sequência reduzida de Michael, então existe um espaço de Michael M tal que $w(M \times \mathbb{P}) = L_f(M \times \mathbb{P}) = \theta$.*

Um espaço de Michael M com esta propriedade possui uma peculiaridade que não encontramos nos outros. Seu produto com os irracionais é um exemplo de um espaço linearmente Lindelöf não de Lindelöf. Espaços linearmente Lindelöf são tais que toda cobertura crescente tem subcobertura enumerável. Claramente se trata de uma generalização da propriedade de Lindelöf e existe um campo de pesquisa focado em achar quando estas duas classes são distintas (veja [Fig10]). Para ver que um espaço X não de Lindelöf com $w(X) = L_f(X) = \theta$ deve ser linearmente Lindelöf, note o peso limita as coberturas que precisamos considerar à apenas as de tamanho menor ou igual que θ , enquanto $L_f(X)$ limita às de tamanho maior ou igual à θ . Além disso, é claro que todo cobertura crescente com cofinalidade enumerável tem subcobertura enumerável.

Com este resultado, conseguimos relacionar a propriedade linearmente Lindelöf com o tamanho do contínuo.

Corolário 4.2.7. *$c > \aleph_\omega$ se e somente se existe um espaço de Lindelöf regular X e um espaço métrico separável Y tal que $X \times Y$ é um espaço linearmente de Lindelöf não de Lindelöf.*

Antes de prosseguirmos para o teorema principal desta seção, precisaremos do seguinte resultado, que pode ser achado em [Sol94]. Não faremos a demonstração pois envolve ferramentas fora do escopo desta dissertação.

Lema 4.2.8. *Se A é um subconjunto analítico dos irracionais e \mathcal{F} é uma cobertura de fechados de A , então existe duas possibilidades:*

- \mathcal{F} tem subcobertura enumerável.
- Existe um $G \subseteq A$, G_δ não vazio e homeomorfo aos irracionais, tal que $G \cap F$ é raro para todo $F \in \mathcal{F}$.

Agora veremos que, assumindo $\mathfrak{d} = \text{cov}(\mathcal{M})$, podemos construir uma sequência de Michael. Este resultado, em junção com 4.2.4, são bem importantes na história do problema de Michael. No entanto, até onde pudemos verificar, a adição do conceito de sequência de Michael à literatura não resultou em avanços significativos quanto à existência de um espaço de Michael, até o momento.

Teorema 4.2.9. *Se assumirmos $\mathfrak{d} = \text{cov}(\mathcal{M})$, existe um espaço de Michael.*

Demonstração. Por 1.2.5, sabemos que \mathfrak{d} tem cofinalidade não enumerável. Portanto, pelo corolário 4.2.5, basta mostrarmos que existe uma \mathfrak{d} - sequência de Michael, sem nos preocuparmos se é reduzida ou não. Tome uma família dominante $\{f_\xi : \xi < \mathfrak{d}\}$. Cada K_{f_α} é σ -compacto em \mathbb{P} (veja demonstração do lema 4.1.2). Seja sua representação $\cup\{K_\alpha(n) : n \in \omega\}$. A família de compactos $\{K_\alpha(n) : n \in \omega \text{ e } \alpha < \mathfrak{d}\}$ tem a propriedade de que, para todo $K \subseteq \mathbb{P}$, existe $n \in \omega$ e $\alpha < \mathfrak{d}$ tal que $K \subseteq K_\alpha(n)$. Como ela tem tamanho \mathfrak{d} , vamos representá-la por $\{D_\xi : \xi < \mathfrak{d}\}$.

Nossa sequência de Michael será dada por $X_\xi = C \setminus \bigcup_{\alpha < \xi} D_\alpha$. Claramente, a sequência é decrescente. Além disso, como a família é dominante, temos a garantia de que $X_\mathfrak{d} = Q_C$.

Agora, fixe K compacto de \mathbb{P} e tome $\alpha < \mathfrak{d}$ tal que $K \subseteq D_\alpha$. Com isso, sabemos que existe um ordinal α tal que $X_\alpha \cap K = \emptyset$, então considere $\xi < \mathfrak{d}$ com cofinalidade não enumerável e a mesma propriedade. Aqui entrará o lema anterior. Sabemos que K é um conjunto analítico de \mathbb{P} já que é fechado. Podemos aplicar o lema anterior, afinal $\{D_\alpha : \alpha < \xi\}$ é uma cobertura de fechados de K . Assuma que exista um G que é G_δ de K e homeomorfo à \mathbb{P} tal que $G \cap K_\alpha$ é raro para todo $\alpha < \mathfrak{d}$. Neste caso, $G = \bigcup_{\alpha < \xi} G \cap K_\alpha$ seria união de menos de $\text{cov}(\mathcal{M})$ raros, logo, seria raro. No entanto, G é homeomorfo à \mathbb{P} e se este não pode ser raro, afinal, \mathbb{Q} é raro e $\mathbb{R} = \mathbb{P} \cup \mathbb{Q}$.

Sendo assim, a opção que nos resta é que exista uma subcobertura $\{K_{\alpha_i} : i \in \omega\}$. Como a cofinalidade de ξ é não enumerável, temos que $\alpha = \sup\{\alpha_i : i \in \omega\} < \xi$. Concluimos que $K \subseteq \bigcup_{\beta < \alpha} K_\beta$, ou seja, $K \cap X_\alpha = \emptyset$. Com isso, concluimos que $\{X_\xi : \xi < \mathfrak{d}\}$ é uma \mathfrak{d} -sequência de Michael. □

Já sabemos que a volta não pode valer, afinal, como comentamos, $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ é consistente com $\text{cov}(\mathcal{M}) < \mathfrak{d}$. Mesmo assim, é interessante nos perguntarmos sobre as limitações desta técnica.

Primeiro, precisamos entender onde necessitamos da igualdade da hipótese. Usamos que nossa sequência tem tamanho $\text{cov}(\mathcal{M})$ para argumentar que todo compacto de \mathbb{P} é coberto por enumeráveis elementos de $\{K_\alpha : \alpha < \mathfrak{d}\}$. O artigo tem um resultado que mostra que este não precisa ser o caso sempre. Moore atribui este resultado à uma conversa com Todorčević.

Proposição 4.2.10. *Existem $K \subseteq \omega^\omega$ compacto e $\{x_\xi : \xi < \text{cov}(\mathcal{M})\} \subseteq \omega^\omega$ tais que, para cada $\xi < \text{cov}(\mathcal{M})$, $K \cap K_{x_\xi}$ é raro, mas $K \subseteq \bigcup_{\xi < \text{cov}(\mathcal{M})} K_{x_\xi}$.*

Mesmo assim, usando forcing, Moore consegue construir um modelo de ZFC em que vale $\text{cov}(\mathcal{M}) < \mathfrak{d}$ e existe um espaço de Michael. O forcing utilizado é o aleatório e foge do escopo desta dissertação. Além disso, ele também consegue construir espaços de Michael com θ reais de Cohen, onde θ é cardinal não enumerável. Tal espaço teria a propriedade $L_f(M \times \mathbb{P}) = \theta$.

Capítulo 5

Espaços Produtivamente Lindelöf

Se olharmos nos problemas que Przymusiński deixa na seção final de [Prz84], veremos um que se relaciona com o problema de Michael, embora a relação não seja tão clara a princípio. Este está listado como *Problem 5* e pede uma caracterização da classe de espaços que definimos abaixo.

Definição 5.0.1. *Dizemos que um espaço X regular é **produtivamente Lindelöf** se seu produto com qualquer espaço de Lindelöf é de Lindelöf.*

No primeiro capítulo desta dissertação, caracterizamos os espaços cujo produto por espaços normais é sempre normal. Fazer o análogo para espaços de Lindelöf, é bem natural. Além disso, vemos que o problema de Michael se trata de descobrir se os irracionais são produtivamente Lindelöf. Não à toa, recentemente, novos resultados envolvendo espaços de Michael tem focado em relacioná-los com espaços produtivamente Lindelöf, mais especificamente, em como esta classe de espaços se relaciona com outras.

Primeiro, vale a pena notar que sabemos que estes espaços precisam ser de Lindelöf, afinal existe uma cópia fechada deles dentro do produto. Sabemos também, por 1.1.8 que espaços compactos estão contidos nessa classe. Mais do que isso, usando este resultado, podemos escrever o produto de um σ -compacto por um Lindelöf como uma união enumerável de espaços de Lindelöf. Assim, temos:

Proposição 5.0.2. *O produto de um σ -compacto por um Lindelöf é de Lindelöf.*

O problema de classificar todos estes espaços ainda está em aberto, embora algo muito próximo já tenha sido obtido. Em [AZ18] L. Aurichi e L. Zdomskyy acharam uma caracterização interna para espaços produtivamente Lindelöf. Na primeira seção, exploraremos essa demonstração.

Em seguida, olhando para o artigo [Ala+11], vamos explorar uma técnica que nos dá quando um espaço não é produtivamente Lindelöf. Esta técnica consiste em achar um subespaço e uma topologia que satisfaçam algumas propriedades. Como consequência, obteremos diversos resultados, incluindo achar uma topologia para ω^ω que satisfaça estas condições, assumindo certas igualdades entre pequenos cardinais.

Na terceira seção, vamos explorar alguns problemas atuais da topologia conjuntista que envolvem espaços produtivamente Lindelöf. Estes envolvem, em sua maioria, descobrir se outras classes de espaços que se encontram entre σ -compacto e Lindelöf são iguais. Dentre estes, o mais relevantes para nós serão os espaços definidos por Alster em [Als88], que foram depois nomeados em sua homenagem. A seção culminará com a prova de uma generalização de um teorema provado neste artigo. Ele mostra que, assumindo CH, temos que todo espaço produtivamente Lindelöf, que satisfaz certas condições, é de Alster. Esta generalização é encontrada em [AZ18].

Por fim, voltaremos aos espaços de Michael, para mostrar como sua existência decide algumas das questões da seção anterior. Sendo a última seção, vamos dar uma ideia dos caminhos dos últimos resultados provados sobre o tema. Por esta razão, não nos preocuparemos muito com as demonstrações.

5.1 Uma Caracterização

Em [AZ18], os autores deram uma caracterização interna para espaços produtivamente Lindelöf regulares. Para isso, dado um espaço X usaremos $\mathcal{O}(X)$ para denotar todas as coberturas abertas de X . Nos casos em que não há chance de ambiguidade, usaremos a notação \mathcal{O} . Se τ é a topologia de um espaço X e dado $F \subseteq \tau$, usaremos a notação $F^* = \{O \in \mathcal{O} : F \subseteq O\}$. Seja τ^* a topologia em \mathcal{O} gerada por $\{F^* : F \subseteq \tau \text{ é finito}\}$. Note que, dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, temos que $\{\mathcal{U}\}^*$ é uma vizinhança de \mathcal{U} e, dados $F, G \subseteq \mathcal{O}$ finitos, temos $(F \cup G)^* = F^* \cap G^*$.

Os autores notaram que, se X for produtivamente Lindelöf, então também deverá ser de Lindelöf o produto por cada subespaço de Lindelöf de $\mathcal{O}(X)$. A seguinte definição classifica estes subespaços.

Definição 5.1.1. Dizemos que $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{O}$ é **uma coleção Lindelöf** se para toda função $f : \mathcal{Y} \rightarrow [\cup \mathcal{Y}]^{<\omega}$ que escolhe finitos abertos de cada cobertura de \mathcal{Y} , temos que existe uma sequência $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{Y}$ satisfazendo que, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{Y}$ existe $n \in \omega$ com $f(\mathcal{U}_n) \subseteq \mathcal{U}$.

Estas coleções serão de Lindelöf por causa da correspondência que existe entre $\mathcal{U} \in F^*$ e $F \subseteq \mathcal{U}$. Assim, qualquer cobertura básica em \mathcal{O} de um subconjunto \mathcal{Y} pode ser pensada como subconjuntos finitos de cada elemento de \mathcal{Y} e vice versa.

A motivação para a propriedade a seguir, que chamaremos de pL (de produtivamente Lindelöf) surge quando consideramos que, dado $Y \subseteq \mathcal{O}$ Lindelöf e uma cobertura da forma $\{\mathcal{U} \times \{\mathcal{U}\}^* : \mathcal{U} \in Y\}$ de $X \times \mathcal{O}$, queremos uma subcobertura enumerável dela.

Definição 5.1.2. Dizemos que um espaço topológico X tem **propriedade pL** se para toda coleção Lindelöf \mathcal{Y} existe uma sequência $\{A_n : n \in \omega\}$ de abertos de X tal que para todo $\langle x, \mathcal{U} \rangle \in X \times \mathcal{Y}$, existe $n \in \omega$ tal que $x \in A_n \in \mathcal{U}$

Com os comentários feitos, vemos que a propriedade é necessária para que X seja produtivamente Lindelöf. A argumentação é esta que fizemos até aqui, mas escreveremos a seguir com todos os detalhes.

Proposição 5.1.3. Se X é produtivamente Lindelöf, então ele tem a propriedade pL

Demonstração. Seja X produtivamente Lindelöf e fixe $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{O}(X)$ uma coleção Lindelöf. Dada uma cobertura $\{F_i^* : i \in I\}$ por abertos básicos de \mathcal{Y} , definimos $f : \mathcal{Y} \rightarrow [\cup \mathcal{Y}]^{<\omega}$ como $f(\mathcal{U}) = F_i$ para algum $i \in I$ tal que $\mathcal{U} \in F_i^*$. Por ser coleção Lindelöf, existe $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{Y}$ tal que para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{Y}$ existe $n \in \omega$ tal que $f(\mathcal{U}_n) = F_n \subseteq \mathcal{U}$. Logo, $\mathcal{U} \in F_n^*$. Assim, $\{f(\mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ é cobertura de \mathcal{Y} .

Com este argumento, temos que \mathcal{Y} é um subespaço de Lindelöf de \mathcal{O} . Como X é produtivamente Lindelöf, também vale que $X \times \mathcal{Y}$ é de Lindelöf. Considere agora a cobertura do produto da forma $\{U \times \{U\}^* : U \in \cup \mathcal{Y}\}$. A subcobertura enumerável $\{A_n \times \{A_n\}^* : n \in \omega\}$ satisfaz o que queríamos. De fato, dado $\langle x, \mathcal{U} \rangle \in X \times \mathcal{Y}$, existe $n \in \omega$ tal que $\langle x, \mathcal{U} \rangle \in A_n \times \{A_n\}^*$. Assim, $x \in A_n$ e como $\mathcal{U} \in \{A_n\}^*$, por definição, $A_n \in \mathcal{U}$. \square

Mostrar que se tem a propriedade pL, então deve ser produtivamente Lindelöf, não é tão direto. A ideia é que, dado um Y espaço de Lindelöf em $\mathcal{O}(X)$ e uma cobertura do produto, acharemos uma coleção Lindelöf que nos passa informação sobre eles.

Para isso, introduziremos uma notação motivada pela seguinte construção. Fixe dois espaços topológicos $\langle X, \tau \rangle$ e $\langle Y, \rho \rangle$ além de uma cobertura do produto por abertos básicos \mathcal{W} . Para cada $y \in Y$ consideramos $\mathcal{U}_y = \{\pi_X[U] : U \in \mathcal{W} \text{ e } U \cap (X \times \{y\}) \neq \emptyset\}$. Como \mathcal{W} é uma cobertura do produto, para cada $y \in Y$ temos \mathcal{U}_y é cobertura de X . Considere $\mathcal{Y}_{\mathcal{W}} = \{\mathcal{U}_y : y \in Y\}$. O próximo resultado nos diz quando temos a garantia de que $\mathcal{Y}_{\mathcal{W}}$ será coleção de Lindelöf.

Proposição 5.1.4. *Se Y é de Lindelöf, então $\mathcal{Y}_{\mathcal{W}}$ é de Lindelöf.*

Demonstração. Tome $f : \mathcal{Y}_{\mathcal{W}} \rightarrow [\cup \mathcal{Y}_{\mathcal{W}}]^{<\omega}$ que escolhe finitos abertos de cada cobertura, ou seja, para cada $y \in Y$, $f(\mathcal{U}_y) = \{U_y^0, \dots, U_y^{n_y}\} \subseteq \mathcal{U}_y$. Pela definição de \mathcal{U}_y , para cada $i \leq n_y$, existe um V_y^i tal que $U_y^i \times V_y^i \in \mathcal{W}$. Seja $V_y = \bigcap_{i \leq n_y} V_y^i$. Sabemos que $\{V_y : y \in Y\}$ é cobertura de Y , logo, existem $\{y_n : n \in \omega\} \subseteq Y$ que induzem uma subcobertura enumerável.

Vamos mostrar que $\{f(\mathcal{U}_{y_i}) : i \in \omega\}$ é a sequência que queremos. Tome $y \in Y$ e considere \mathcal{U}_y . Existe um $i \in \omega$ tal que $y \in V_{y_i}$. Mais precisamente, $y \in V_{y_i}^j$ para todo $j \leq n_{y_i}$. Assim, temos que se $U_{y_i}^j \in f(\mathcal{U}_{y_i})$, então vale tanto que $U_{y_i}^j \times V_{y_i}^j \in \mathcal{W}$, como que $U_{y_i}^j \times V_{y_i}^j \cap X \times \{y\} \neq \emptyset$. Com isso, temos que $U_{y_i}^j \in \mathcal{U}_y$ e podemos concluir que $f(\mathcal{U}_{y_i}) \subseteq \mathcal{U}_y$. \square

Começaremos mostrando que, usando a propriedade pL, conseguimos achar subcoberturas enumeráveis de pra um tipo específico de coberturas básicas \mathcal{W} .

Definição 5.1.5. *Seja \mathcal{U} uma cobertura básica de um produto $X \times Y$*

- Dizemos que \mathcal{U} é **cobertura injetiva** se sempre que $U \times V, U' \times V' \in \mathcal{U}$ e $U = U'$, então $V = V'$.
- Dizemos que \mathcal{U} é **ω -injetiva** se, fixado $U \subseteq X$, $\{V \subseteq Y : U \times V \in \mathcal{U}\}$ é enumerável.

A ideia é que, como os elementos de $\mathcal{Y}_{\mathcal{W}}$ são projeções e temos um controle sobre elas, se $\mathcal{Y}_{\mathcal{W}}$ for de Lindelöf, conseguimos achar uma subcobertura enumerável.

Lema 5.1.6. *Seja X, Y dois espaços topológicos de Lindelöf e \mathcal{W} cobertura por abertos básicos ω -injetiva de $X \times Y$. Se X tem a propriedade pL, então \mathcal{W} tem subcobertura enumerável.*

Demonstração. Defina $\mathcal{Y}_{\mathcal{W}}$ como definimos antes. Como Y é de Lindelöf, pelo lema anterior temos que $\mathcal{Y}_{\mathcal{W}}$ também é, logo, existe uma sequência $\{A_n : n \in \omega\}$ de abertos de X tais que para todo $\langle x, \mathcal{U} \rangle \in X \times \mathcal{Y}_{\mathcal{W}}$ existe $n \in \omega$ tal que $x \in A_n \in \mathcal{U}$. Como todo A_n é elemento de um \mathcal{U}_y , por definição, todos são projeções em X de elementos de \mathcal{W} . Usando que a cobertura é ω -injetiva, podemos para cada $n \in \omega$ fixar $\{V_n^m : m \in \omega\}$ sequência de todos abertos V de Y tal que $A_n \times V \in \mathcal{W}$.

Falta mostrar $\{A_n \times V_n^m : n, m \in \omega\}$ é subcobertura de \mathcal{W} . Tome $\langle x, y \rangle \in X \times Y$. Existe $n \in \omega$ tal que $x \in A_n \in \mathcal{U}_y$. Pela nossa escolha e pela definição de \mathcal{U} , existe $m \in \omega$ tal que $y \in V_n^m$. Assim, temos $\langle x, y \rangle \in A_n \times V_n^m$. \square

Agora, podemos, a partir deste último lema, começar a montar a equivalência que queremos entre a propriedade pL e a propriedade produtivamente Lindelöf.

Corolário 5.1.7. *Seja X de Lindelöf. X é produtivamente Lindelöf se e somente se X tem a propriedade pL e para todo Y Lindelöf e \mathcal{W} cobertura de $X \times Y$, \mathcal{W} tem refinamento ω -injetiva.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se $X \times Y$ é de Lindelöf, então, em particular, toda cobertura tem uma subcobertura enumerável, que é mais forte que ω -injetiva. Além disso, com vimos antes, todo produtivamente Lindelöf tem a propriedade pL.

(\Leftarrow) É consequência do lema anterior. \square

O que nos resta então é achar em quais condições podemos achar refinamentos ω -injetivos para coberturas. Começamos mostrando que para espaços T_1 , podemos achar um refinamento $|\mathcal{B}|$ -injetiva onde \mathcal{B} é uma base de X . Para isso, usaremos o conceito de **submodelos elementares**. Uma boa referência é a seção I.15, teorema II.5.03, definição I.9.29 e teorema II.5.03 de [Kun11].

Para a demonstração, precisaremos da seguinte propriedade de submodelos elementares.

Proposição 5.1.8. *Se M é submodelo elementar de algum V_θ , $|M| = \kappa$ para algum $\kappa < \theta$, $\kappa \in M$ e $A \in M$ com $|A| \leq \kappa$ então $A \subseteq M$.*

Demonstração. Como $A, \kappa \in M$, "existe $f : \kappa \rightarrow A$ função sobrejetora" é uma fórmula definível em M , portanto, existe alguma tal f em M . Agora, dado $a \in A$, existe $\alpha < \kappa$ tal que $f(\alpha) = a$ e M satisfaz que existe $y = f(\alpha)$. Como este elemento é único em V_θ temos que $a \in A$. \square

Agora, vamos à demonstração.

Lema 5.1.9. *Seja Y um espaço de Lindelöf e X um espaço T_1 . Além disso, considere \mathcal{B} uma base de X e \mathcal{W} uma cobertura de $X \times Y$. Existe um \mathcal{U} refinamento de \mathcal{W} tal que todo elemento é da forma $B \times C$ com $B \in \mathcal{B}$, C aberto de Y e, para todo $B \in \mathcal{B}$, $|\{C : C \times B \in \mathcal{U}\}| \leq |B| + \aleph_0$.*

Demonstração. Seja ρ a topologia de Y . Se $x \in X$ é um ponto isolado, temos que $\{x\} \in \mathcal{B}$. Assim, para cada $y \in Y$, existe $W_y \in \mathcal{W}$ tal que $\langle x, y \rangle \in W_y$. Fixe $C_y \in \rho$ tal que $\{x\} \times C_y \subseteq W_y$ e

seja $\mathcal{C}_x = \{C_y : y \in Y\}$, que é uma cobertura aberta de Y . Assim, existe $\mathcal{C}_x \subseteq \mathcal{C}$ subcobertura enumerável. Defina $\mathcal{B}_0 = \{\{x\} \times C : x \in X \text{ é isolado e } C \in \mathcal{C}_x\}$.

Vamos generalizar essa construção para pontos que não são isolados. Para cada $x \in X$, defina $\kappa_x = \min\{|B| : B \in \mathcal{B} \text{ e } x \in B\}$. Agora, dado um $\kappa < |X|$ cardinal defina também $B_\kappa = \{B \in \mathcal{B} : |B| = \kappa\}$ e $X_\kappa = \{x \in X : \kappa_x = \kappa\}$. Vamos escrever este último como $\{x_\xi : \xi < \lambda\}$.

Faremos uma recursão transfinita em λ . Escolha um θ grande o bastante para que V_θ prove tudo que ZFC prova sobre estes espaços e tome um submodelo elementar M_0 tal que $X, Y, \rho, \mathcal{B}, \mathcal{W}, x_0, \kappa \in M_0$ e $|M_0| = \kappa$. Com isso, podemos definir:

$$R_0^\kappa = \{B \times C \in M_0 : \text{ existe } W \in \mathcal{W} \text{ com } B \times C \subseteq W, B \in \mathcal{B}_\kappa \text{ e } C \in \rho\}.$$

Vamos mostrar que $\{x_0\} \times Y \subseteq \cup R_0^\kappa$. Como no caso dos pontos isolados, em V_θ existe um z enumerável tal que, para todo $x \in z$, existem $B \in \mathcal{B}_\kappa$ e $C \in \rho$ com $x = B \times C$ e existe $W \in \mathcal{W}$ com $x \subseteq W$; e para todo $y \in Y$ existe $x \in z$ com $\langle x_0, y \rangle \in x$. Note que todos os parâmetros desta fórmula se encontram em M_0 , portanto, existe uma tal sequência $\{B_n \times C_n : n \in \omega\}$ em R_0^κ .

Note que, embora nossa argumentação tenha sido feita para x_0 , ela vale para qualquer $x \in X_\kappa \cap M_0$. Em particular, como, para cada $n \in \omega$, $|B_n| = \kappa$ e $B_n \in M_0$, temos que $B_n \subseteq M_0$, ou seja, a argumentação vale para todo $x \in \cup\{B \in \mathcal{B} : \text{ existe } C \in \rho \text{ com } B \times C \in R_0^\kappa\}$.

Agora, tome o menor $\eta < \lambda$ onde x_η é tal que não existe $B \in \mathcal{B}_\kappa$ com $x \in B$ e existe $C \in \rho$ com $B \times C \in R_\eta^\kappa$. Para todo $0 < \beta < \eta$ definimos $R_\beta^\kappa = \emptyset$. Novamente, tomamos M_η um submodelo elementar de V_θ com $X, Y, \rho, \mathcal{B}, \mathcal{W}, x_\eta, \kappa \in M_\eta$. Definimos $A_0 = \cup\{B \in \mathcal{B} : \text{ existe } C \in \rho \text{ com } B \times C \in R_0^\kappa\}$ e

$$R_\eta^\kappa = \{B \times C \in M_\eta : \text{ existe } W \in \mathcal{W} \text{ com } B \times C \subseteq W, B \in \mathcal{B}_\kappa, C \in \rho \text{ e } B \setminus A \neq \emptyset\}.$$

Esta condição a mais nos garante que os B 's escolhidos serão distintos dos escolhidos por R_η^κ . Fazendo uma recursão em λ , podemos definir $R^\kappa = \bigcup_{\alpha < \lambda} R_\alpha^\kappa$ e $R = \bigcup_{\alpha < |X|^{R^\alpha}}$. Temos que R é o refinamento que queríamos. □

Lema 5.1.10. *Se X é um espaço T_1 , sem pontos isolados e que possui uma base \mathcal{B} satisfazendo que para todo $U, V \in \mathcal{B}$ temos que $U \Delta V$ não é finito, então para todo Y Lindelöf e \mathcal{W} cobertura de $X \times Y$, existe um refinamento aberto injetivo.*

Demonstração. Usando o lema anterior, podemos assumir, sem perda de generalidade, que \mathcal{W} é composta por abertos da forma $B \times V$, onde $B \in \mathcal{B}$, que satisfazem $\mathcal{W}_B = \{V \subseteq Y : B \times V \in \mathcal{W}\} \leq |B| + \aleph_0$.

Como X é T_1 e não tem pontos isolados, todo elemento de \mathcal{B} é infinito. Assim, para todo $B \in \mathcal{B}$ e $V \in \mathcal{W}_B$, conseguimos distintos, $x_V, y_V \in B$ de forma que, se $U, V \in \mathcal{W}_B$ e

$V \neq U$, então $\{x_V, y_V\} \cap \{x_U, y_U\} = \emptyset$. Faça esta escolha para cada $B \in \mathcal{B}$ tal que \mathcal{W}_B não é vazio. Com isso, cada $B \times U \in \mathcal{W}$ pode ser refinado pelos abertos $B \setminus \{x_U\} \times U$ e $B \setminus \{y_U\} \times U$. O conjunto de todos estes abertos é um refinamento ω -injetivo de \mathcal{W} . \square

O próximo resultado nos mostra que tal base existe para espaços regulares sem pontos isolados.

Lema 5.1.11. *Se X é um espaço regular sem pontos isolados, então existe uma base \mathcal{B} tal que para todos $U, V \in \mathcal{B}$ temos que $|U \Delta V|$ não é finito.*

Demonstração. Basta considerar o conjunto \mathcal{B} de todos os abertos de X que são regulares, isto é, tais que $U = \text{Int}(\overline{U})$. Como X é regular, \mathcal{B} é uma base. De fato, dado $U \subseteq X$ aberto e $x \in U$, pela regularidade, existe V vizinhança aberta de x tal que $x \in \overline{V} \subseteq U$. Note que $\text{Int}(\overline{V})$ é vizinhança aberta regular de x contida em U .

Agora, tome $U, V \in \mathcal{B}$ distintos e seja $W = (U \setminus \overline{V}) \cup (V \setminus \overline{U})$. Temos que W é um aberto de X contido em $U \Delta V$. Como X não tem pontos isolados e é Hausdorff, ou W é infinito ou é vazio. No entanto, se W fosse vazio teríamos que $V \subseteq \overline{U}$, logo $V = \text{Int}(V) \subseteq \text{Int}(\overline{U}) = U$. Por simetria, seríamos obrigados a concluir que $U = V$. Como assumimos que são distintos, temos que W é infinito, e conseqüentemente $U \Delta V$ também. \square

Agora que lidamos com o caso de espaços regulares sem pontos isolados, voltaremos nossa atenção ao caso geral. Um espaço é dito disperso se todo subconjunto seu possui um ponto isolado. Para estes espaços também conseguimos refinamentos ω -injetivos.

Lema 5.1.12. *Se X é disperso e T_1 , Y é de Lindelöf e \mathcal{W} é uma cobertura de $X \times Y$, então \mathcal{W} tem refinamento aberto ω -injetivo*

Demonstração. Usaremos recursão para construir uma família de subconjuntos de X . Primeiro, definimos X_0 como o conjunto dos pontos isolados de X . Então, assumindo a construção para todo $\beta < \alpha$, definimos X_α como os pontos isolados de $X \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta$. Como X é disperso, não existe α ordinal tal que $X_\alpha = X_{\alpha+1}$, senão $X \setminus X_\alpha$ não teria pontos isolados. Com isso, podemos concluir que $X_{|X|+1} = \emptyset$, o que nos permite achar, para cada $x \in X$, o menor α ordinal tal que vale $x \in X_\alpha$. Esta construção é conhecida como decomposição de Cantor-Bendixson ([Kec95] seções 6.B e 6.C).

Como queremos um refinamento, podemos assumir que \mathcal{W} é composta por abertos básicos. Fixe α ordinal e $x \in X_\alpha$. Como Y é de Lindelöf, temos que existe uma subcobertura $\{U_n^x \times V_n^x : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{W}$ de $\{x\} \times Y$. No entanto, x é um ponto isolado, logo existe um aberto U tal que $U \cap (X_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta) = \{x\}$. Já que nosso objetivo é obter um refinamento, podemos assumir que cada U_n^x tem esta propriedade. Considere a subcobertura de \mathcal{W} dada por $\{U_n^x \times V_n^x : x \in X \text{ e } n \in \omega\}$.

Resta mostrar que é uma cobertura ω -injetiva. Sejam x, y elementos de X tais que $x \neq y$. Além disso, sejam α_x e α_y os primeiros ordinais tais que $x \in X_{\alpha_x}$ e $y \in X_{\alpha_y}$. Se $\alpha_x < \alpha_y$, então $y \notin V_n^x$ para qualquer $n \in \omega$. Agora, se $\alpha_x = \alpha_y$, então $V_n^x \neq V_m^y$ para quaisquer $n, m \in \omega$, justamente pela propriedade de que $V_n^x \cap X_{\alpha_x} = \{x\}$ para qualquer $x \in X$ e $n \in \omega$. \square

Para juntar os três lemas, vamos precisar do fato de que todo espaço pode ser escrito como uma união de um subespaço sem pontos isolado e um subespaço disperso. Para ver isso, basta olharmos para a construção que fizemos no começo do lema anterior. Sem a garantia de que X é disperso, não podemos concluir que existe β ordinal tal que $X_\beta = \emptyset$. No entanto, deve existir α tal que $X_{\alpha+1} = X_\alpha$. Por definição, X_α é um espaço perfeito. Ao mesmo tempo, $D = \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta$ deve ser disperso. De fato, dado $A \subseteq D$, temos que existe algum menor α ordinal tal que $X_\alpha \cap D \neq \emptyset$. Por definição, x é um ponto isolado de A . Uma boa referência é a seção 6.C de [Kec95].

Concluimos que, dado X Lindelöf com a propriedade pL, Y Lindelöf e \mathscr{W} cobertura de $X \times Y$, se tomarmos $X = P \cup D$ com P sem pontos isolados e D disperso, podemos obter refinamentos ω -injetivos para $P \times Y$ e $D \times Y$. Usando, então, o 5.1.6, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.1.13. *Se X é um espaço regular de Lindelöf, então ele é produtivamente Lindelöf se e somente se X tem a propriedade pL.*

Vale mencionar que depois disso, os autores estudam a possibilidade de remover a condição de regularidade. Eles definem uma função cardinal kc tal que $\lambda = kc(X)$ representa o menor cardinal tal que X pode ser escrito como união de λ de seus compactos e usam ela para mostrar que todo espaço T_1 , Lindelöf e de tamanho até ω_1 é produtivamente Lindelöf se, e somente se, tem a propriedade pL.

5.2 Espaços não Produtivamente Lindelöf

No primeiro capítulo desta dissertação, vimos que a Reta de Sorgenfrey é um exemplo de um espaço que é de Lindelöf e que não é produtivamente Lindelöf. Também discutimos a consistência de \mathbb{P} ser um espaço de Lindelöf não produtivamente Lindelöf. Em [Ala+11], encontramos uma condição suficiente para decidir quando uma classe de espaços não é produtivamente Lindelöf.

Definição 5.2.1. *Um espaço X é dito **Lindelöf no Infinito** se $\beta X \setminus X$ é de Lindelöf.*

Esta nomenclatura, "no infinito", foi introduzida em [HI58] e pode ser aplicada para outras propriedades. Neste artigo, para o caso da propriedade Lindelöf, encontramos uma caracterização interna. Antes de mostrá-la, precisamos definir uma função cardinal. Dado X um espaço topológico e um subconjunto A de X , dizemos que uma família $\{U_i : i \in I\}$ de abertos que contém A é um **Sistema Fundamental de Vizinhanças para A** se, para todo aberto que contém A , existe $i \in I$ tal que U_i é subconjunto dele. Usamos a notação $\chi(A, X) = \min\{|\mathscr{V}| : \mathscr{V} \text{ é sistema fundamental de vizinhanças para } A\}$. Sobre essa função cardinal mostramos o lema abaixo, também encontrado em [HI58].

Lema 5.2.2. *Se $K \subseteq X$ é compacto X é denso em Y e Y é regular, então $\chi(K, X) = \chi(K, Y)$.*

Demonstração. Se \mathscr{U} é um sistema fundamental de vizinhanças de K em Y , então $\{U \cap X : U \in \mathscr{U}\}$ é sistema fundamental de vizinhanças para K em X . De fato, se $K \subseteq V = V_0 \cap X$, então $K \subseteq V_0$, logo, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $K \subseteq U \subseteq V_0$, ou seja, $K \subseteq U \cap X \subseteq V$. Com isso, podemos concluir que $\chi(K, X) \leq \chi(K, Y)$.

Seja, agora, \mathcal{U} um sistema fundamental de vizinhanças para K em X . Para cada $U \in \mathcal{U}$, seja V_U aberto de Y tal que $U = V_U \cap X$ e considere $\{int(\overline{V_U}) : U \in \mathcal{U}\}$. Seja W um aberto com $K \subseteq W$. Como K é compacto, usando a regularidade podemos obter O aberto tal que $K \subseteq O \subseteq \overline{O} \subseteq W$ (adaptação de [Eng89] teorema 3.1.9). Agora, já que temos $O \cap X \supseteq K$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $O \cap X \supseteq V_U \cap X \supseteq K$. Usando que X é denso, temos que $\overline{V_U \cap X} = \overline{V_U}$ ([Eng89] teorema 1.3.6), logo,

$$K \subseteq V_U \cap X \subseteq V_U \subseteq int(\overline{V_U}) \subseteq \overline{O} \subseteq W.$$

Com isso concluímos que $\{int(\overline{V_U}) : U \in \mathcal{U}\}$ é sistema fundamental de vizinhanças para K em Y . □

A caracterização interna de espaços Lindelöf no infinito é dada usando o carácter de compactos. Antes precisamos de:

Proposição 5.2.3. *X é de Lindelöf no infinito se, e somente se, para todo $K \subseteq X$ compacto, existe um $K' \subseteq X$ compacto de carácter enumerável tal que $K \subseteq K'$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Tome $K \subseteq X \subseteq \beta X$. Para todo $z \in \beta X \setminus X$, considere $U_z \in V(z)$ tal que $K \cap \overline{U_z} = \emptyset$. Escolha $\{z_n : n \in \omega\}$ tais que $\beta X \setminus X \subseteq \bigcup_{n \in \omega} U_{z_n}$. Temos que

$$\beta X \setminus \bigcup_{n \in \omega} \overline{U_{z_n}} = \bigcap_{n \in \omega} \beta X \setminus \overline{U_{z_n}} \supseteq K.$$

Como βX é Tychonoff, para cada $n \in \omega$, temos um subconjunto funcionalmente fechado de βX (veja seção 1.1) F_n tal que $\bigcap_{n \in \omega} \beta X \setminus \overline{U_{z_n}} \supseteq \bigcap_{n \in \omega} F_n \supseteq K$. Temos que $\bigcap_{n \in \omega} F_n$ é um fechado em βX , logo é um compacto de X .

De [Eng89] 3.1.E, sabemos que em um compacto o carácter e pseudocaracter de fechados são iguais.

Como os F_n são conjuntos funcionalmente fechados, também são G_δ 's (seção 1.1), temos que $\bigcap_{n \in \omega} F_n$ tem carácter enumerável.

(\Leftarrow) Seja \mathcal{U} cobertura de $\beta X \setminus X$. Temos que $\beta X \setminus \bigcup \mathcal{U}$ é um compacto de X . Por hipótese, existe F um G_δ tal que $\beta X \setminus \bigcup \mathcal{U} \subseteq F \subseteq X$. Assim, $\beta X \setminus X \subseteq \beta X \setminus F \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Como $\beta X \setminus F$ é F_σ em X , existe uma subcobertura enumerável de F e, portanto, de $\beta X \setminus X$. □

Com esse resultado, vemos que Lindelöf no infinito generaliza espaços metrizáveis, afinal, neles, todo compacto tem um carácter enumerável pois é um G_δ . Isto é importante por termos que nos leva a concluir que os irracionais são Lindelöf no infinito. Assim, o teorema abaixo, que é o principal desta seção, se aplica a aos espaços metrizáveis.

Teorema 5.2.4. *Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço regular, de Lindelöf e Lindelöf no infinito. Assuma que existe um $Y \subseteq X$ não enumerável e uma topologia ρ em Y tal que*

(i) *A topologia ρ é mais fina que a topologia de Y como subespaço*

(ii) $\langle Y, \rho \rangle$ é não Lindelöf

(iii) Para cada $K \subseteq X$ que é τ -compacto, $K \cap Y$ é ρ -Lindelöf

Então X não é produtivamente Lindelöf.

Demonstração. Defina $Z = (\beta X \setminus X) \cup Y$ com a seguinte topologia:

- Se $y \in Y$, $V(y) = \{U \in \rho : y \in \rho\}$

- Se $x \in \beta X \setminus X$, então

$$V(x) = \{V \setminus K : x \in V \subseteq (\beta X \setminus X) \cup Y \text{ aberto e } K \text{ é um compacto de } X\}$$

A união destas famílias formam, de fato, uma base para uma topologia pois estamos assumindo que ρ é mais fina que τ .

Agora, vamos mostrar que Z é de Lindelöf. Tome \mathcal{U} uma cobertura de Z e considere $\mathcal{U}' = \{U \in \mathcal{U} : U \cap (\beta X \setminus X) \neq \emptyset\} = \{V_i \setminus K_i : i \in I\}$. Pela definição da topologia, temos que $\{V_i : i \in I\}$ deve ser uma cobertura de $\beta X \setminus X$. Como este é de Lindelöf, existe $\{V_n \setminus K_n : n \in \omega\}$ subcobertura enumerável de $\beta X \setminus X$. Nos resta apenas cobrir $Y \setminus \bigcup_{n \in \omega} V_n$. Este está contido em $(\bigcup_{n \in \omega} K_n \cap Y) \cup (Y \setminus \bigcup_{n \in \omega} V_n)$. Como cada K_n é compacto, pela condição (iii) temos que $K_n \cap Y$ é de Lindelöf, logo, $\bigcup_{n \in \omega} K_n \cap Y$ tem subcobertura enumerável. Além disso, $\beta X \setminus \bigcup_{n \in \omega} V_n = X \setminus \bigcup_{n \in \omega} V_n \cap Y = Y \setminus \bigcup_{n \in \omega} V_n$ também é um compacto de X , portanto, também tem subcobertura enumerável.

Resta a nós mostrar que $X \times Z$ não é de Lindelöf. Considere o conjunto $\Delta = \{\langle y, y \rangle : y \in Y\}$. Tal conjunto é homeomorfo à $\langle Y, \rho \rangle$, que não é de Lindelöf. De fato, seja $f : Y \rightarrow \Delta$ dado por $f(y) = \langle y, y \rangle$. Claramente, f é bijetora. Dado $W \in \rho$ temos que $f[W] = (X \times W) \cap \Delta$ é um aberto de Δ . Por outro lado, dado $U \in \rho$ e $V \in \tau$, temos $f^{-1}[(U \times V) \cap \Delta] = \{y \in Y : y \in U \cap V\} = U \cap V$ que é um aberto de Y .

Como Δ é um subespaço fechado de $X \times Z$ (1.1.6), temos que este não pode ser de Lindelöf. \square

Originalmente, este teorema tinha uma outra condição, necessária para mostrar a regularidade, que tornava a definição da topologia, e portanto a prova, mais complicada. No entanto, usando a proposição 3.1.7, sabemos que a partir do Z definido, podemos achar um espaço de Lindelöf regular Z' tal que $X \times Z'$ não é de Lindelöf.

O próximo corolário mostra um caso específico do teorema.

Corolário 5.2.5. *Se X é um espaço de Lindelöf, regular e Lindelöf no infinito e existe um $Y \subseteq X$ não enumerável tal que para todo $K \subseteq X$ compacto temos que $K \cap Y$ é enumerável, então X não é produtivamente Lindelöf.*

Demonstração. Tome como ρ sobre Y a topologia discreta. Claramente, $\langle Y, \rho \rangle$ é regular e refina a topologia original de X . Além disso, como Y é não enumerável, não pode ser de Lindelöf. Por fim, para cada compacto K de X , $K \cap Y$ é enumerável, portanto, temos que Y satisfaz a condição (iii) do teorema anterior. Assim, podemos concluir que X não é produtivamente Lindelöf. \square

A partir deste corolário, podemos obter a ida do teorema de Lawrence 3.2.12. De fato, pela proposição 3.2.9, $b = \omega_1$ implica que existe um subconjunto dos irracionais com a propriedade do corolário.

Como a nossa ideia é mostrar a existência de um espaço de Michael, temos que achar o $Y \subseteq \omega^\omega$ e o ρ correspondentes do teorema. Para esta aplicação, nosso espaço Y será o próprio ω^ω . Quanto a topologia, trabalharemos com a seguinte definição.

Definição 5.2.6. Fixado \mathcal{F} uma família de subconjuntos de ω^ω , a \mathcal{F} -topologia sobre ω^ω é a topologia gerada pela sub-base dada pelos abertos padrões de ω^ω junto com a família $\{K_f : f \in \mathcal{F}\}$ (seção 1.2).

Nosso objetivo é achar condições sobre famílias \mathcal{F} de forma que a \mathcal{F} -topologia em ω^ω satisfaça o teorema 5.2.4. Para qualquer família, temos que a condição (i) será sempre satisfeita como consequência da definição de \mathcal{F} -topologia. Para a condição (ii), basta pegarmos uma família \mathcal{F} que seja uma escala. De fato, se \mathcal{F} é ilimitada, então é uma cobertura de ω^ω e por 1.2.4, não possui subcobertura enumerável.

Usando esta técnica, podemos obter demonstrações alternativas dos resultados de Lawrence 3.2.12 e Alster 4.1.4.

Proposição 5.2.7. Se $b = \omega_1$ existe um $Y \subseteq \omega^\omega$ e um $\mathcal{F} \subseteq Y$ tal que a \mathcal{F} -topologia ρ satisfaz as premissas do teorema 5.2.4.

Proposição 5.2.8. Se $b = \mathfrak{d} = \text{cov}(\mathcal{M})$ então existe um $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ tal que, se $X = Y = \omega^\omega$ e ρ é a \mathcal{F} -topologia, $\langle Y, \rho \rangle$ então satisfaz as premissas do teorema 5.2.4.

Para exemplificar a demonstração faremos o segundo resultado. Para isso, precisaremos de uma **escala forte**, isto é, uma escala na ordem \leq . Sabemos de $b = \mathfrak{d}$ garante a existência de uma escala. Usando uma construção similar à [Dou84] teorema 3.6, podemos obter uma escala forte.

Demonstração. Seja $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{d}\}$ uma escala forte e ρ a \mathcal{F} -topologia sob Y . A única condição que precisamos argumentar é a (iii). Tome $\beta < \mathfrak{d}$ o primeiro ordinal tal que existe $K \subseteq K_\beta$ compacto que não é ρ -Lindelöf.

Note que $K = \bigcup_{\gamma < \beta} K \cap K_\gamma$. Fixe \mathcal{U} cobertura de K sem subcobertura enumerável. Este fato nos garante que $K_\beta \notin \mathcal{U}$. Considere a subcoleção $\mathcal{U}' = \{U \in \mathcal{U} : U \text{ é aberto na topologia usual de } \omega^\omega\}$. Como ω^ω tem base enumerável, podemos assumir \mathcal{U}' enumerável. Note também que, se $x \in K \setminus \bigcup_{\gamma < \beta} K_\gamma$, então $x \in \bigcup \mathcal{U}'$.

Para cobrir o que resta, usaremos o lema 4.1.1. Note que $K \setminus \bigcup \mathcal{U}' \subseteq_{\xi < \beta} K_\xi$. Olhando para o lema, temos que deve existir $I \subseteq \beta$ enumerável tal que $K \setminus \bigcup \mathcal{U}' \subseteq_{\xi \in I} K_\xi$, mas pela minimalidade de β , existe uma subcobertura enumerável de tal conjunto. Absurdo! \square

5.3 Outras Propriedades

Como mencionamos antes, parte dos problemas que envolvem espaços produtivamente Lindelöf investigam a relação destes com outras classes de espaços que também se encontram entre σ -compacto e Lindelöf. Neste capítulo, vamos explorar algumas destas relações.

A primeira classe que exploraremos tornou-se relevante no mesmo artigo [Mic71] em que encontramos o primeiro espaço de Michael e está, também, relacionada à preservação de Lindelöf por produtos.

Definição 5.3.1. *Um espaço topológico X é dito **exponencialmente Lindelöf** se X^ω é de Lindelöf.*

Note que todo espaço assim deve ser de Lindelöf, afinal X^ω tem uma cópia fechada de X . Na verdade, podemos estender esta lógica para toda potência finita de X . No entanto, esta não é uma propriedade suficiente. No mesmo artigo, Michael, usando CH, mostra um exemplo de um espaço tal que toda potência finita é de Lindelöf mas cuja potência enumerável não é normal. Vaughan depois, fez uma construção em ZFC em [Vau75].

Outro fato interessante encontrado em [Mic71], é que espaços exponencialmente Lindelöf e T_1 , não podem ser espaços de Michael. A ideia da demonstração, é que só precisamos mostrar para o caso em que X tem uma cópia de ω , pois o caso em que não tem foi mostrado por Dieudonné em [Die58]. No entanto, se X tem cópia de ω , então X^ω tem uma cópia de \mathbb{P} .

Proposição 5.3.2. *Se X é exponencialmente Lindelöf, então ele não é um espaço de Michael.*

Sabemos que a classe dos espaços exponencialmente Lindelöf e a dos espaços produtivamente Lindelöf são distintas. De fato, vimos a consistência de \mathbb{P} não pertencer à segunda sendo que, como espaço metrizável com base enumerável, deve pertencer à primeira. Para um exemplo em ZFC, lembre que, no capítulo três, discutimos uma modificação 2.3.2 que nos dá um espaço metrizável com base enumerável que não é produtivamente Lindelöf.

Ainda sim, Michael fez a pergunta abaixo.

Pergunta 5.3.3. *Se X é produtivamente Lindelöf, ele é exponencialmente Lindelöf também?*

Motivando mais esta questão, temos o fato de que existe uma classe de espaço que tem ambas as propriedades.

Definição 5.3.4. *Seja X um espaço topológico. Uma cobertura \mathcal{G} de X é dita uma **k -cobertura** se para todo $K \subseteq X$ compacto, existe um $G \in \mathcal{G}$ com $K \subseteq G$. Um espaço X é dito um **espaço de Alster** se toda k -cobertura de G_δ 's tem subcobertura enumerável.*

Note que todo espaço σ -compacto é de Alster. De fato, se $X = \bigcup_{n \in \omega} K_n$ e dada \mathcal{G} uma k -cobertura, para cada $n \in \omega$, existe $G_n \in \mathcal{G}$ tal que $K_n \subseteq G_n$, logo, $\{G_n : n \in \omega\}$ é uma subcobertura enumerável de X . A definição destes espaços é pensada a partir de uma tentativa de generalizar o resultado 1.1.8, de que o produto de todo compacto por um Lindelöf é de Lindelöf. Mais especificamente, aonde pedíamos a compacidade de um dos fatores para obtermos uma cobertura aberta, agora basta uma cobertura de G_δ 's.

Proposição 5.3.5. *Todo espaço de Alster é produtivamente Lindelöf.*

Demonstração. Seja X um espaço de Alster, Y um espaço de Lindelöf e \mathcal{C} uma cobertura básica do produto. Para cada $K \subseteq X$ compacto, existe uma subcobertura $\mathcal{C}_K = \{U_n^K \times V_n^K : n \in \omega\}$ enumerável de $K \times Y$. Definimos o G_δ $G_K = \bigcap_{n \in \omega} U_n^K$. Por construção, $\mathcal{G} = \{G_K : K \subseteq X \text{ compacto}\}$ é uma cobertura de Alster, logo, existe uma subcobertura

$\{G_{K_n} : n \in \omega\}$. Temos assim que, $\{U_n^{K_m} \times V_n^{K_m} : n, m \in \omega\}$ é uma subcobertura enumerável de $X \times Y$. \square

Como mencionado, espaços de Alster se encontram na intersecção entre produtivamente Lindelöf e exponencialmente Lindelöf.

Proposição 5.3.6. *Todo espaço de Alster é exponencialmente Lindelöf*

Com este dois resultados, vemos que espaços de Alster podem nos ajudar a responder a pergunta 5.3.3. De fato, sob certas condições, podemos garantir a consistência de que produtivamente Lindelöf implica Alster. O seguinte resultado foi mostrado por Alster em [Als88].

Teorema 5.3.7. *Se vale CH e X é um espaço de Tychonoff, com peso menor ou igual a ω_1 , então ele é produtivamente Lindelöf se, e somente se, X é exponencialmente Lindelöf*

No artigo que estudamos [AZ18] temos uma generalização deste resultado. Antes de enunciá-lo, entretanto, precisamos definir uma terceira classe de espaços.

Definição 5.3.8. *Um espaço X é dito **de Menger** se para toda $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de coberturas de X existe $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ com \mathcal{V}_n subconjunto finito de \mathcal{U} para todo $n \in \omega$ e $\bigcup_{n \in \omega} \mathcal{V}_n$ é cobertura de X .*

Esta classe também generaliza espaços σ -compactos e está contida na classe dos espaços de Lindelöf. Na época que foram introduzidos, K. Menger se perguntou se seriam todos σ -compactos, mas existem contra-exemplos em ZFC.

A propriedade de Menger está associada à jogos topológicos. **O jogo de Menger em X** funciona da seguinte forma: o primeiro jogador escolher uma cobertura de X e o segundo escolhe um subconjunto finito desta. Agora, sabendo a escolha do segundo jogador, o primeiro escolhe uma nova cobertura. O jogo continua assim por ω passos. O jogador dois ganha se a união dos conjuntos que ele escolheu formarem uma cobertura no final. A diferença do jogo para a propriedade de Menger é sutil. No jogo, as coberturas não são dadas logo de cara, mas podem ser escolhidas usando as respostas do segundo jogador. Em certas circunstância, isso é bem útil, por isso, é um alívio que estas propriedades sejam iguais (veja [AD14])

Teorema 5.3.9. *Seja $X \subseteq [0, 1]^{\omega_1}$ um espaço produtivamente Lindelöf e de Menger. Toda k -cobertura \mathcal{G} de $[0, 1]^{\omega_1}$ por G_δ 's de Lindelöf com $|\mathcal{G}| = \omega_1$ tem subcobertura enumerável.*

Dedicaremos o resto desta seção à demonstrar esta versão, assim como mostrar que de fato é um generalização, ou seja, assumindo CH temos o teorema 5.3.7. Seguindo como base o artigo original, faremos vários lemas que nos levarão até nosso objetivo. O primeiro destes nos dá um controle sobre a projeções de G_δ 's de I^{ω_1} .

Lema 5.3.10. *Um G_δ $G \subseteq [0, 1]^{\omega_1}$ é de Lindelöf se e somente se existe $\alpha < \omega_1$ tal que para todo $\beta \geq \alpha$ vale $\pi_\beta^{-1}[\pi_\beta(G)] = G$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Vamos começar assumindo que $G = \bigcap_{n \in \omega} B_n \subseteq [0, 1]^\omega$ é de Lindelöf, onde cada B_n é um aberto básico. Sendo abertos básicos, para cada $n \in \omega$, existe i_n natural tal que $\pi_m[B_n] = [0, 1]$ sempre que $m > i_n$. Tome $\alpha = \sup\{i_n : n \in \omega\} + 1 < \omega_1$ e fixe

$\beta \geq \alpha$. Se $x \in \pi_\beta^{-1}[\pi_\beta(G)]$, então existe $y \in G$ tal que $\pi_\beta(y) = \pi_\beta(x)$, mas, nesse caso, $x \in B_n$ para cada $n \in \omega$, afinal, B_n independe das coordenadas acima de α . Como a outra inclusão sempre vale, temos o que queríamos.

Agora, considere $G = \bigcap_{n \in \omega} U_n$ um G_δ qualquer. Para reaproveitarmos o argumento anterior, vamos colocar G em uma intersecção de uniões enumeráveis de abertos básicos. Para cada $n \in \omega$ e $x \in G$, existe algum aberto básico B_x^n tal que $x \in B_x^n \subseteq U_n$. Fixado $n \in \omega$, como G é de Lindelöf, existe uma subcobertura $\{B_{x_i}^n : i \in \omega\}$. Temos que $G \subseteq \bigcap_{i \in \omega} \bigcup_{n \in \omega} B_{x_i}^n$. Agora, para cada $n, i \in \omega$ existe α_n^i ordinal tal que para todo $\beta > \alpha_n^i$, $\pi_\beta(B_{x_i}^n) = I$. Novamente, tomamos $\alpha = \sup\{\alpha_n^i : n \in \omega\} + 1$. Dado $\beta > \alpha$ e $x \in \pi_\beta^{-1}[\pi_\beta(G)]$, existe um $y \in G$ tal que $\pi_\beta(y) = \pi_\beta(x)$. Também vale que, para qualquer $i \in \omega$, existe um $n_i \in \omega$ tal que $y \in B_{x_{n_i}}^i$. Como $\pi_\beta(y) = \pi_\beta(x)$, temos que $x \in B_{x_{n_i}}^i$ também, logo, $x \in U_{n_i}$. Com isso, concluímos que $x \in G$.

(\Leftarrow) Se vale que existe um $\alpha < \omega_1$ tal que $\pi_\alpha^{-1}[\pi_\alpha(G)] = G$, então $G = \pi_\alpha(G) \times I^{\omega_1 \setminus \alpha}$. Como $\pi_\alpha(G)$ é um subconjunto de I^α que, como produto enumerável de um segundo enumerável metrizável, também é um segundo enumerável metrizável. Em particular, é de Lindelöf. Já $I^{\omega_1 \setminus \alpha}$ é um compacto. Com isso, G também é de Lindelöf pela proposição 1.1.8. \square

O Próximo resultado é uma consequência de 5.2.5.

Proposição 5.3.11. *Seja $X \subseteq [0, 1]^{\omega_1}$ metrizável e de Lindelöf e assumamos que existe $\{A_\xi : \xi < \omega_1\}$ uma cobertura estritamente crescente de X tal que para todo $K \subseteq X$ compacto existe $\xi < \omega_1$ com $K \subseteq A_\xi$. Se $A_\xi \neq X$ para todo $\xi < \omega_1$, então X não é produtivamente Lindelöf.*

Demonstração. Note que para estamos dentro das hipóteses de 5.2.5 precisamos apenas construir um subconjunto Y de X que intersecta apenas enumeráveis elementos de cada compacto.

Para cada $\alpha < \omega_1$, escolhemos $x_\alpha \in A_\alpha \setminus \bigcup_{\xi < \alpha} A_\xi$. A condição de que cada A_α seja diferente de X , nos garante que conseguimos ω_1 elementos. Agora, considere $Y = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Dado $K \subseteq X$ compacto, existe α ordinal enumerável tal que $K \subseteq A_\alpha$, ou seja, no máximo enumeráveis elementos de Y estão em K , como queríamos mostrar. \square

A maneira que demonstraremos 5.3.9 será por contradição. Sendo assim, a partir deste momento fixaremos um subconjunto $X \subseteq I^\omega$ produtivamente Lindelöf e Menger. Também fixaremos \mathcal{G} cobertura de Alster de X de tamanho ω_1 composta por subespaços de I^ω que são G_δ 's de Lindelöf e que não possui subcobertura enumerável.

Definição 5.3.12. *Fixado \mathcal{G} cobertura de G_δ 's Lindelöf em $[0, 1]^{\omega_1}$ de X , dizemos que $A \subseteq I^{\omega_1}$ é **grande** se não existe subcobertura enumerável de \mathcal{G} para $A \cap X$.*

No resto do capítulo, quando trataremos de subconjuntos grandes, será em relação à cobertura \mathcal{G} que fixamos. Antes de prosseguirmos, precisamos de dois resultados sobre a preservação da propriedade de produtivamente Lindelöf. Eles são consequência do fato que a propriedade de Lindelöf é preservada por subconjuntos fechados, funções contínuas e pré imagens de funções perfeitas (1.1.11 e 1.1.13).

Proposição 5.3.13. *Se X é um espaço produtivamente Lindelöf, então vale:*

- (i) Se $F \subseteq X$ é fechado, então F é produtivamente Lindelöf
- (ii) Se $f : X \rightarrow Z$ é contínua e sobrejetora, então Z é produtivamente Lindelöf.
- (iii) Se $f : Y \rightarrow X$ é perfeita e sobrejetora, então Y é produtivamente Lindelöf.

O próximos lemas tratarão de propriedades que subespaços grandes de X possuem.

Lema 5.3.14. *Se $F \subseteq X$ é fechado e grande, para todo $\alpha < \omega_1$ existe um $K \subseteq \pi_\alpha[F]$ compacto tal que $\pi_\alpha^{-1}[K] \cap F$ é grande.*

Demonstração. Faremos uma demonstração por absurdo. Por um lado, como visto na proposição anterior, produtivamente Lindelöf é preservado tanto por subespaço fechado como por funções contínuas, assim $\pi_\alpha[F]$ deve ser produtivamente Lindelöf. No entanto, se negamos a tese do lema, conseguimos construir $\{A_\xi : \xi < \omega_1\}$ que satisfazem da proposição 5.3.11.

Começamos enumerando $\mathcal{G} = \{G_\xi : \xi < \omega_1\}$. Vamos assumir, por absurdo, que para todo $K \subseteq \pi_\alpha[F]$, existe \mathcal{G} subcobertura enumerável de $\pi_\alpha^{-1}[K] \cap F$. Definimos $A_\xi = \pi_\alpha[F] \setminus \pi_\alpha[F \setminus \bigcup_{\beta < \xi} G_\beta]$ para todo $\xi < \omega_1$. Como F é grande, temos a garantia de que $A_\xi \neq \pi_\alpha[F]$ para todo $\xi < \omega_1$. Temos que tomar um certo cuidado pois não necessariamente será uma família estritamente crescente.

Como negamos a tese e pela cofinalidade de ω_1 , dado $K \subseteq \pi_\alpha[F]$ compacto, existe um $\xi < \omega_1$ tal que $\pi_\alpha^{-1}[K] \cap F \subseteq \bigcup_{\beta < \xi} G_\beta$. Como consequência temos $\pi_\alpha^{-1}[K] \subseteq \bigcup_{\beta < \xi} G_\beta$. Assim, se $y \in K$, então $y \in A_\xi$. De fato, para todo $x \in F$ com $\pi_\alpha[x] = y$, vale que $x \in \bigcup_{\beta < \xi} G_\beta$ pois $\pi_\alpha^{-1}[y] \subseteq \pi_\alpha^{-1}[K]$. Assim, $y \in F \setminus \pi_\alpha[F \setminus \bigcup_{\beta < \xi} G_\beta]$.

Um fato que não comentamos, mas que nem por isso deixa de ser importante, é que $\{A_\xi : \xi < \omega_1\}$ é uma cobertura de $\pi_\alpha[F]$. A razão é que isto é uma consequência da propriedade que acabamos de provar, afinal, cada compacto de $\pi_\alpha[F]$ da forma $\{x\}$ deve estar contido em algum A_ξ . Com isso, usando o 5.3.11, concluímos que $\pi_\alpha[F]$ não é produtivamente Lindelöf. Absurdo! \square

O próximo resultado é um pouco mais técnico.

Lema 5.3.15. *Seja $A \subseteq X$ um espaço de Lindelöf grande. Existe algum $\alpha < \omega_1$ tal que, para todo $\beta > \alpha$, existe uma cobertura \mathcal{W}_β de $\pi_\beta[A]$ tal que para todo $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}_\beta$ finito, temos $A \setminus \pi_\beta^{-1}[\bigcup \mathcal{V}]$ é grande.*

Demonstração. A ideia é achar um subespaço de A que sabemos não ser grande, mas que, com a negação da hipótese, conseguimos provar ser. Começaremos entendendo a negação da tese. Seja $P(\beta)$ a propriedade em que, para toda cobertura \mathcal{W} de $\pi_\beta[A]$, também existe $\mathcal{V}_\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$ finito tal que $\pi_\beta[A] \setminus \bigcup \mathcal{V}_\mathcal{W}$ tem subcobertura enumerável. Seja $\Delta = \{\beta < \omega_1 : P(\beta)\}$. A negação da tese do lema nos dá que tal conjunto é cofinal em ω_1 .

Ressuscitemos a notação $\mathcal{O}(Y)$, usada na primeira seção, para representar as coberturas abertas de Y . Para cada $\beta \in \Delta$, considere a seguinte construção:

$$K_\beta = \bigcap_{\mathcal{W} \in \mathcal{O}(\pi_\beta[A])} \overline{U\mathcal{V}_\mathcal{W}^{\pi_\beta[A]}}$$

Note que K_β é um compacto de $\pi_\beta[A]$, afinal é um fechado no compacto I^β . Além disso, já que $\pi_\beta[A]$ é metrizável com base enumerável, podemos tomar $\mathcal{W}_\beta \subseteq \mathcal{O}(\pi_\beta[A])$ enumerável tal que $K_\alpha = \bigcap_{\mathcal{W} \in \mathcal{W}_\beta} \overline{U\mathcal{V}_\mathcal{W}^{\pi_\alpha[A]}}$.

Pela definição de $\mathcal{V}_\mathcal{W}$, temos que

$$A \setminus \pi_\beta^{-1}[K_\alpha] = A \setminus \bigcap_{\mathcal{W} \in \mathcal{W}_\beta} \pi_\beta^{-1}[\overline{U\mathcal{V}_\mathcal{W}^{\pi_\alpha[A]}}] = \bigcup_{\mathcal{W} \in \mathcal{W}_\beta} (A \setminus \pi_\beta^{-1}[\overline{U\mathcal{V}_\mathcal{W}^{\pi_\alpha[A]}}])$$

é uma união enumerável de subespaços não grandes e, portanto, não grande.

Assim, para todo $\alpha \in \omega_1$

$$\bigcup_{\gamma \in \Delta \cap \alpha} A \setminus \pi_\gamma^{-1}[K_\gamma] = A \setminus \bigcap_{\gamma \in \Delta \cap \alpha} \pi_\gamma^{-1}[K_\gamma]$$

é não grande.

Mas, como A é grande, temos que $A \cap \bigcap_{\gamma \in \Delta \cap \alpha} \pi_\gamma^{-1}[K_\gamma]$ é grande. Por outro lado, $K = \bigcap_{\gamma \in \Delta \cap \alpha} \pi_\gamma^{-1}[K_\gamma] \subseteq I^{\omega_1}$ é compacto, pois se não fosse não poderia cobrir K_α . Temos, então, que $K_\alpha \subseteq \pi_\alpha[A]$ para todo $\alpha \in \Delta$. Se houvesse $k \in K_\alpha \setminus A$, poderíamos considerar a cobertura de $A \setminus \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ onde $U_\alpha = \{x \in A : \pi_\alpha(x) \neq \pi_\alpha(k)\}$. Se houvesse subcobertura enumerável, poderíamos tomar o sup dos índices, o que contradiz que $k \in \pi_\alpha^{-1}(K_\alpha) \subseteq A$. Logo, $K \subseteq A \subseteq X$. Se K é compacto de X , temos que existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $K \subseteq G$, pois \mathcal{G} é k -cobertura.

Com isso, $\{A \setminus \pi_\alpha[K_\alpha] : \alpha \in \Delta\}$ é cobertura aberta de $A \setminus G$. De fato, $\bigcap_{\alpha \in \Delta} \pi_\alpha^{-1}[K_\alpha] \subseteq G$. Tomando o complementar, temos $A \setminus G \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Delta} A \setminus \pi_\alpha[K_\alpha]$. Além disso, este último é aberto, pois K_α é fechado. Note que $A \setminus G$ é F_σ em A , logo, é de Lindelöf. Portanto, tal cobertura tem subcobertura enumerável, ou seja, existe $\lambda < \omega_1$ tal que $A \setminus G \subseteq A \setminus \bigcup_{\alpha \in (\Delta \cap \lambda)} \pi_\alpha[K_\alpha]$. Tomando o complementar, novamente, temos $A \cap \bigcap_{\alpha \in \Delta \cap \lambda} \pi_\alpha^{-1}[K_\alpha]$. Com isso, concluímos que este conjunto não pode ser grande. Absurdo!

□

Iremos explicitar nosso objetivo para auxiliar a leitura dos próximos resultados. Usaremos o fato de que X é grande para construir um espaço de Lindelöf tal que $X \times Y$ não é de Lindelöf. Já podemos começar a construção de tal espaço. Como cada elemento $G \in \mathcal{G}$ é um G_δ Lindelöf, podemos aplicar o lema 5.3.10 para obter um ordinal β_G tal que, para todo $\beta \geq \beta_G$, vale $\pi_\beta^{-1}[\pi_\beta(G)] = G$. Com isso, podemos definir uma função $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \omega_1$ tal que, para cada $G \in \mathcal{G}$, temos $\psi(G) \geq \beta_G$. A escolha específica de $\psi(G)$ será recursiva, pois queremos, para cada $\alpha < \omega$, que $\psi^{-1}(\alpha)$ seja enumerável. Se $\{G_\xi : \xi < \omega_1\}$ for uma enumeração de \mathcal{G} , então tomamos $\psi(G_\xi) = \max \{ \sup \{ \psi(G_\beta) : \beta < \xi \}, \beta_{G_\xi} \} + 1$.

Agora, para cada $\alpha < \omega$ vamos definir o seguinte conjunto:

$$C_\alpha = \{z \in I^{\omega_1} : \alpha = \min\{\beta : \pi_\beta(z) \notin \pi_\beta(X)\} \text{ e } \forall G \in \mathcal{G} \text{ com } \psi(G) < \alpha, z \notin G\}.$$

Em outras palavras, olhamos para os elementos que não pertencem à X . Se isso acontece, então existe um menor α tal que $\pi_\alpha(x) \notin \pi_\alpha[X]$. Dentre esses, para C_α , escolhemos os pontos que também não pertencem à nenhum $G \in \mathcal{G}$ tal que $\psi(G) < \alpha$.

Teorema 5.3.16. *O conjunto $\Lambda = \{\alpha < \omega_1 : C_\alpha \neq \emptyset\}$ é ilimitado*

Demonstração. Fixe $\alpha_0 < \omega_1$ e vamos achar $\alpha > \alpha_0$ tal que $C_\alpha \neq \emptyset$. Faremos isso usando os lemas anteriores para construir uma sequência decrescente de compactos cuja intersecção estará contida em C_α . Também usaremos o jogo de Menger que mencionamos após a definição 5.3.8

Vamos fazer algumas construções por recursão. Começamos tomando $A_0 = X$. Como A_0 é um fechado grande de X , podemos usar o lema 5.3.14 para conseguir $K_0 \subseteq \pi_{\alpha_0}[X]$ tal que $A'_0 = \pi_{\alpha_0}^{-1}[K_0] \cap A_0$ é grande. Note que $\pi_{\alpha_0}^{-1}[K_0]$ pode ser visto como o produto de dois fechados, em I^α e $I^{\omega \setminus \alpha}$, respectivamente, logo A'_0 é fechado.

Fixe agora um $G_0 \in \mathcal{G}$ com $\psi(G_0) < \alpha$. Como A'_0 é grande, $A'_0 \setminus G_0$ também é. No entanto, G_0 é um G_δ , ou seja, existem $\{U_n : n \in \omega\}$ abertos de I^{ω_1} tal que $G_0 = \bigcap_{n \in \omega} U_n$. Assim, $A'_0 \setminus G_0 = A'_0 \setminus \bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcup_{n \in \omega} A'_0 \setminus U_n$. Note que se todos fossem não-grandes, então $A'_0 \setminus G_0$ também seria, dado que é uma união enumerável, assim, deve existir algum U_n , que chamaremos de S_0 , tal que $A''_0 = A'_0 \setminus S_0$ é grande e $G_0 \subseteq S_0$. É importante tirarmos este S_0 ao invés de apenas G_0 pois queremos que A''_0 seja um fechado, além de ser disjunto de G_0 . Note também que $\pi_{\alpha_0}^{-1}[\pi_{\alpha_0}[S_0]] = S_0$, pois se não, não poderia conter G_0 . Ao longo da construção, vamos sempre retirar conjuntos com essa propriedade de A_0 e isso será importante mais à frente.

Sendo $A''_0 \subseteq X$ um espaço fechado, ele também é de Lindelöf, assim, podemos aplicar o 5.3.15 para obter $\alpha_1 > \alpha_0$ e \mathcal{W}_0 cobertura de $\pi_{\alpha_1}[A''_0]$ tal que para todo $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}_0$ finito $A''_0 \setminus \pi_{\alpha_1}^{-1}[\bigcup \mathcal{V}]$ é grande. Note que $\{X \setminus A\} \cup \{\pi_{\alpha_1}^{-1}[W] : W \in \mathcal{W}\}$ é uma cobertura de X . Escolha $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{W}$ finito. Mais à frente ficará claro qual escolha faremos, mas por enquanto vamos só definir $A_1 = A''_0 \setminus \pi_{\alpha_1}^{-1}[\bigcup \mathcal{V}_0]$. Note que novamente removemos um aberto então, juntando isto com a propriedade de \mathcal{W}_0 temos que A_1 é fechado e grande.

O passo n será idêntico. Começando com $A_n \subseteq X$ fechado e grande, definimos $K_n, A'_n, G_n, S_n, A''_n, \alpha_{n+1}, \mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n$ e A_{n+1} de maneira análoga.

Seja $\alpha = \sup_{n \in \omega} \alpha_n < \omega_1$. Queremos fazer esta construção de forma que todo $G \in \mathcal{G}$ com $\psi(G) < \alpha$ é escolhido em algum ponto. Podemos fazer isso pois só existem enumeráveis, afinal, tomamos ψ de forma que a imagem inversa de cada ordinal seja enumerável. Agora, vamos voltar à escolha dos \mathcal{V}_n 's. O que fizemos, pode ser visto como um jogo de Menger. Como X é de Menger, podemos escolher os \mathcal{V}_n de forma que tenhamos uma cobertura no final, ou seja, $X = \bigcup_{n \in \omega} X \setminus A''_n \cup \bigcup_{n \in \omega} \bigcup \mathcal{V}_n$.

Por fim, definimos $K := \bigcap_{n \in \omega} \pi_{\alpha_n}^{-1}[K_n]$. Como K é uma intersecção de fechados não vazios e encaixados dentro de I^{ω_1} , não é vazio. Assim, basta mostrar que $K \subseteq C_\alpha$. Tome $z \in K$, precisamos mostrar que eles possuem as três propriedades que definem C_α .

Em primeiro lugar, fixe $\beta < \alpha$ e algum $n \in \omega$ com $\beta < \alpha_n$. Temos que $z \in \pi_{\alpha_n}^{-1}[K_n]$, ou seja, $\pi_{\alpha_n}(z) \in K_n \subseteq \pi_{\alpha_n}[A_n] \subseteq \pi_{\alpha_n}[X]$. Assim, como $\beta < \alpha_n$, $\pi_{\beta}[X](z) \in \pi_{\beta}[X]$

Agora, fixe $G \in \mathcal{G}$ com $\psi(G) < \alpha$. Pela imposição que colocamos na construção, existe algum $n \in \omega$ tal que $G = G_n$. Com isso, temos que $\pi_{\alpha_{n+1}}(z) \in K_{n+1} \subseteq \pi_{\alpha_{n+1}}[A_{n+1}]$. Mas, pela construção, $A_{n+1} \subseteq A_n''$ e $A_n'' \cap S_n = \emptyset$. Também não pode acontecer $\pi_{\alpha_{n+1}}[A_{n+1}] \cap \pi_{\alpha_{n+1}}[S_n] \neq \emptyset$ pois $\pi_{\alpha_{n+1}}^{-1}[\pi_{\alpha_{n+1}}[S_n]] = S_n$. Como $G_n \subseteq S_n$, temos $z \notin G$.

Por fim, precisamos mostrar que $\pi_{\alpha}(z) \notin \pi_{\alpha}[X]$. Assuma, por absurdo, que existe $x \in X$ tal que $\pi_{\alpha}(x) = \pi_{\alpha}(z)$. Lembremos que escolhemos $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ de forma que $\bigcup_{n \in \omega} X \setminus A_n'' \cup \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{V}_n$ cobre X . Assim, temos duas possibilidades para x , ou $x \in X \setminus A_n''$ para algum n , ou $x \in \pi_{\alpha_n}^{-1}[\mathcal{V}_n]$ para algum n .

No primeiro caso, como $A_{n+1} \subseteq A_n''$, temos $x \in X \setminus A_{n+1}$. No segundo caso, x também não pode pertencer a A_{n+1} , já que $A_{n+1} = A_n'' \setminus \pi_{\alpha_{n+1}}^{-1}[\mathcal{V}_n]$, ou seja, $x \in X \setminus A_{n+1}$. Assim, $\pi_{\alpha_n}(x) \in \pi_{\alpha_n}[X \setminus A_{n+1}]$ e, como começamos com $A_0 = X$, podemos escrever $X \setminus A_{n+1}$ como a seguinte união: $\bigcup_{k \leq n} A_k \setminus A_{k+1}$. Usando que a imagem comuta com a união, concluímos que $\pi_{\alpha_{n+1}}(z) \in \bigcup_{k \leq n} \pi_{\alpha_{n+1}}[A_k \setminus A_{k+1}]$.

Agora, chamamos atenção para o fato de que para obter A_{k+1} de A_k , nós tiramos apenas conjuntos da forma $C = \pi_{\alpha_{n+1}}^{-1}[\pi_{\alpha_{n+1}}[C]]$, o que nos diz que

$$\pi_{\alpha_{n+1}}[A_k \setminus A_{k+1}] = \pi_{\alpha_{n+1}}[A_k] \setminus \pi_{\alpha_{n+1}}[[A_{k+1}]].$$

De fato, sempre vale $\pi_{\alpha_{n+1}}[A_k \setminus A_{k+1}] = \pi_{\alpha_{n+1}}[A_k] \setminus \pi_{\alpha_{n+1}}[[A_{k+1}]]$.

No entanto, $\pi_{\alpha_{n+1}}(x) = \pi_{\alpha_{n+1}}(z) \in K_{n+1} \subseteq \pi_{\alpha_{n+1}}[A_{n+1}]$, o que é um absurdo! Portanto, $\pi_{\alpha}(z) \notin \pi_{\alpha}[X]$. \square

Agora, podemos definir o espaço Z de Lindelöf que construiremos tal que $X \times Z$ não é produtivamente Lindelöf. Seja $Y = \bigcup_{\alpha < \omega_1} C_{\alpha}$. Note que $Y \cap X = \emptyset$. Além disso, estamos assumindo que X é grande, então, para cada $\alpha < \omega_1$, podemos escolher $X_{\alpha} \in X \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} G_{\beta}$, para alguma ordenação $\mathcal{G} = \{G_{\alpha} : \alpha < \omega_1\}$. Ao fazer esta recursão, podemos garantir que são dois a dois distintos.

Definimos $Z = Y \cup \{x_{\alpha} : \alpha < \omega_1\}$ com a topologia em que os x_{α} são discretos e as vizinhanças dos elementos de Y são as induzidas por I^{ω_1} . Além de formar uma base local, a topologia gerada é regular.

O próximo passo, será mostrar que Z é de Lindelöf. Para isso, dedicaremos os próximos três lemas. Os dois primeiros para mostrar que Y é de Lindelöf como subespaço de Z .

Seja \mathcal{B}_{α} a família dos abertos de I^{ω_1} da forma $\pi_{\alpha < \omega_1} U_{\alpha}$ tais que existe $F \subseteq \alpha$ finito satisfazendo que, para todo $\alpha \notin F$, temos que $U_{\alpha} = I$. Além disso, podemos considerar que, para cada $\alpha \in F$, U_{α} é um intervalo de extremos racionais. Assim, temos que $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{B}_{\alpha}$ é uma base de I_1^{ω} de tamanho ω_1 .

Agora, vamos fixar \mathcal{U} uma cobertura de Y em I^{ω_1} fechada para uniões finitas e tomar subconjuntos. Podemos definir $\mathcal{U}_{\alpha} = \mathcal{U} \cap \mathcal{B}_{\alpha}$. Com esta notação fixada, podemos provar o próximo lema.

Lema 5.3.17. Para todo $\alpha < \omega_1$, temos $C_\alpha \subseteq \cup \mathcal{U}_\alpha$.

Demonstração. Fixe um $x \in C_\alpha$ e defina o conjunto $K_x = \{\pi_\alpha(x)\} \times I^{\omega_1 \setminus \alpha}$. Temos que K_x é um produto de compactos, logo, um compacto. Ao mesmo tempo, pela definição de C_α , todo $y \in I^{\omega_1}$ tal que $\pi_\alpha(y) = \pi_\alpha(x)$ satisfaz $y \in C_\alpha$. De fato, y não poderá pertencer a nenhum $G \in \mathcal{G}$ com $\psi(G) < \alpha$. Ou seja, $K_x \subseteq C_\alpha \subseteq Y$. Portanto, K_x é coberto por \mathcal{U} . Mais especificamente, é coberto pelos abertos básicos de \mathcal{U} .

Fixemos $\mathcal{V} = \{V_0, \dots, V_n\}$ subcobertura de K_x por abertos básicos. Seja $\{\alpha_0, \dots, \alpha_m\}$ as coordenadas α 's tais que existe pelo menos um $i \leq n$ com $\pi_\alpha[V_i] \neq I$. Claramente $\alpha_i \leq \alpha$ para cada $i \leq m$. Considere, para cada $i \leq m$, o aberto $U_i \subseteq I$ que seja um intervalo com extremos racionais tal que $\pi_i(x) \in U$ e $U \subseteq \bigcap_{j \leq n} \pi_i[V_j]$. Defina $U = \prod_{i < \omega_1} U_i$, onde $U_i = I$ se $i \in \omega_1 \setminus \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$. Por construção, $K_x \subseteq U \subseteq \cup \mathcal{V}$.

Pelas restrições que colocamos sobre \mathcal{U} , temos $\cup \mathcal{V} \in \mathcal{U}$. Pelo mesma razão, temos $U \in \mathcal{U}$. Assim, é claro que $x \in U \in \mathcal{U}_\alpha$ e temos o que queríamos. □

Contrastando com o lema acima, a demonstração de que Y é de Lindelöf é bem indireta. A ideia é chegar em um absurdo usando a demonstração do lema 5.3.16.

Proposição 5.3.18. Y possui uma subcobertura enumerável de \mathcal{U}

Demonstração. Como \mathcal{B}_α é enumerável, basta mostrarmos que existe $\alpha < \omega_1$ tal que $Y \subseteq \cup \mathcal{U}_\alpha$. Assuma, por absurdo, que este não é o caso. Considere $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \cup \{\cup \mathcal{U}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Será útil, por questões de notação, expandir a ψ que definimos para incluir todos os elementos de \mathcal{G}' . Dizemos que $\psi(\cup \mathcal{U}_\alpha) = \alpha$. Pelo que assumimos, \mathcal{G}' não pode ter uma subcobertura enumerável de X . Vamos mostrar que este não pode ser o caso.

Fixe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}'$ enumerável e seja $\alpha = \sup \psi[\mathcal{C}]$. Tome $z \in Y \setminus \cup \mathcal{U}_\alpha$. Pelo lema anterior, temos que deve existir um $\gamma > \alpha$ tal que $z \in C_\gamma$.

Definimos, para $\alpha < \omega_1$ o conjunto

$$C'_\alpha = \{z \in I^{\omega_1} : \alpha = \min\{\beta : \pi_\beta(z) \notin \pi_\beta(X)\} \text{ e } \forall G \in \mathcal{G}' \text{ com } \psi(G) < \alpha, z \notin G\}$$

Usando um argumento análogo ao lema 5.3.16, temos que deve existir algum $\alpha < \omega_1$ tal que $C'_\alpha \neq \emptyset$. No entanto, pela definição de \mathcal{G}' e a extensão de ψ temos que $C'_\alpha = C_\alpha \setminus \cup \mathcal{U}_\alpha$, que é vazio pelo lema anterior. Absurdo! □

Como a cobertura \mathcal{U} que escolhemos foi arbitrária, podemos concluir que Y é um espaço de Lindelöf de I^{ω_1} , e portanto, de Z . Agora, vamos mostrar que, recobrindo Y por U aberto de Z , conseguimos uma cobertura enumerável de $Z \setminus U$.

Proposição 5.3.19. Tome U um aberto de I^{ω_1} tal que $Y \subseteq U$. Então existe $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ enumerável tal que $X \setminus U \subseteq \cup \mathcal{H}$.

Demonstração. Seja \mathcal{U} uniões de abertos básicos dentro de U e, como antes, $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U} \cap \mathcal{B}_\alpha$. Sabemos que existe uma família $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ e α tal que $X \subseteq \cup \mathcal{H} \cup \cup \mathcal{U}_\alpha$. De fato, este argumento foi usado no lema anterior. Se não houvesse, X seria grande em relação a esta cobertura, ou seja, estaríamos nas mesmas condições do final da demonstração anterior. Mais precisamente, existiria um $\alpha < \omega$ cujo \mathcal{C}'_α correspondente, definido de maneira análoga, não seria vazio, nos levando ao mesmo absurdo de antes.

Agora, note que $\cup \mathcal{U}_\alpha \subseteq U$. Disso conseguimos tirar que $X \setminus U \subseteq X \setminus \cup \mathcal{U}_\alpha \subseteq \cup \mathcal{H}$. \square

Isto basta para concluir que Z é de Lindelöf. De fato, dada uma cobertura \mathcal{U} , temos, em particular, uma cobertura de Y , que é de Lindelöf. Tomando uma subcobertura enumerável \mathcal{V} , seja $U = \cup \mathcal{V}$. Pelo lema anterior, existe $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{U}$ enumerável tal que $Z \setminus U \subseteq \cup \mathcal{H}$. Seja $\alpha = \sup\{\psi(G) : G \in \mathcal{H}\}$. Pela construção, $\{x_\beta : \beta > \alpha\} \subseteq \cup \mathcal{U}$ e, portanto, $Z \setminus U$ é enumerável.

Agora, finalizamos mostrando o teorema.

Dem. do teorema 5.3.9. A única coisa falta argumentar é que $X \times Z$ não pode ser de Lindelöf. De fato, $\{\langle x_\alpha, x_\alpha \rangle : \alpha < \omega_1\}$ é um fechado discreto não enumerável.

No entanto, X é produtivamente Lindelöf e Z é de Lindelöf. O absurdo vem de assumir que X é um subespaço grande. \square

Isso termina a demonstração. Podemos agora mostrar o resultado original de Alster 5.3.7, mas antes precisamos do seguinte lema, que pode ser encontrado em [RZ12]. Para ele usaremos o conceito de set-valued functions.

Proposição 5.3.20. *Existir um espaço de Michael implica que todo produtivamente Lindelöf é de Menger.*

Demonstração. Tome M um espaço de Michael e assumamos que X é produtivamente Lindelöf, mas não Menger. Como X é de Lindelöf, podemos obter uma set-valued function $\phi : X \rightarrow \mathcal{P}(\omega^\omega)$ compacta, semicontinua por cima e com $\phi(X) = \omega^\omega$ (Veja [Zdo05] teorema 8). Note que $\rho : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ dada por $\rho(x) = \{x\}$, também é compacta, semicontinua por cima e $\rho(M) = M$. Pela proposição 1.4.2, temos que $\phi \times \rho$ é compacta e semicontinua por cima, além de termos $\phi(X \times M) = \omega^\omega \times M$. Sendo assim, como M é de Lindelöf, $X \times M$ também é de Lindelöf e, pela proposição 1.4.1, $\omega^\omega \times M$ é de Lindelöf. Mas pela definição de M , este produto não ser de Lindelöf. Absurdo! \square

Iremos mostrar, na verdade, uma versão diferente da que enunciamos.

Teorema 5.3.21. *Se vale CH e X tem peso não maior do que ω_1 , então X é de Alster se, e somente se, X é produtivamente Lindelöf.*

Demonstração. (\Rightarrow) Já foi feita em 5.3.5

(\Leftarrow) Fixe X como no enunciado e \mathcal{G} uma k -cobertura. Como vale CH, por 3.1.10, sabemos que existe um espaço de Michael, logo, pelo lema anterior, como X é de Menger. Também estamos assumindo X de Tychonoff e que tem peso ω_1 , portanto, sabemos que

pode ser imergido em I^{ω_1} (1.1.1). Além disso, como todo G_δ de X é a intersecção de um G_δ em I^{ω_1} com X , podemos assumir que \mathcal{G} é composto por G_δ 's de I_1^ω .

O peso de X também será importante para limitarmos o tamanho de \mathcal{G} . Sabemos que $\{|G \subseteq X : G \text{ é } G_\delta\} = w(X)^\omega = \omega_1^\omega$ e, como estamos assumindo CH, temos $\omega_1^\omega = (\omega^\omega)^\omega = \omega^{\omega \times \omega} = \omega^\omega = \omega_1$.

Por fim, resta apenas mostrarmos que podemos pegar um refinamento de \mathcal{G} composto por G_δ 's Lindelöf. Da demonstração do lema 5.3.10, podemos concluir que todo G_δ que é intersecção de abertos básicos de I^{ω_1} é de Lindelöf. Dado $x \in X$, tome $G_x \in \mathcal{G}$ tal que $x \in G_x$. Seja $G_x = \bigcap_{n \in \omega} U_n$. Para cada $n \in \omega$ seja B_n aberto básico com $x \in B_n \subseteq U_n$. O G_δ $H_x = \bigcap_{n \in \omega} B_n$ satisfaz $x \in H_x \subseteq G_x$. O conjunto $\mathcal{H} = \{H_x : x \in X\}$ é um refinamento de \mathcal{G} composto por G_δ 's Lindelöf. O único cuidado que resta tomarmos é sobre o tamanho de \mathcal{H} . No entanto, como o número de G_δ 's em X é limitado por ω_1 , podemos escolher entre os elementos cuja intersecção com X é igual, apenas um representante. Isto nos dará uma subcobertura de \mathcal{H} de tamanho ω_1 .

Finalmente, depois de toda essa argumentação para chegarmos nas hipóteses do teorema 5.3.9, podemos obter uma subcobertura enumerável de \mathcal{H} e, portanto, também de \mathcal{G} .

□

5.4 Voltando ao Problema de Michael

Como vimos em 5.3.20 na seção anterior, muitos resultados recentes sobre espaços de Michael, estão relacionado com espaços produtivamente Lindelöf. Em todos, a existência de um espaço de Michael é apenas utilizada como um axioma que nos garante certas igualdades entre as classes que estudamos na seção anterior (e outras).

No geral, serão demonstrações simples, que consistem em achar cópias de \mathbb{P} em classes de espaços. Nosso objetivo será apresentar a progressão dos resultado. Por esse motivo, não faremos a versão mais geral logo de cara.

Começamos pelo artigo [AT12], que nos dará uma uma condição necessária e suficiente para que todo espaço produtivamente Lindelöf seja σ -compacto na classe dos espaços completamente metrizáveis.

Começamos mostrando algumas relações sobre as classes que trabalharemos.

Proposição 5.4.1. *Todo espaço de Alster tem a propriedade de Menger*

Demonstração. Seja X um espaço de Alster e $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ uma coleção de coberturas de X . Podemos assumir, sem perda de generalidade, que cada uma é fechada para uniões finitas. Defina $\mathcal{G} = \{\bigcap_{n \in \omega} U_n : U_n \in \mathcal{U}_n\}$. Como tomamos as coberturas fechadas para uniões finitas, para cada $K \subseteq X$ compacto e $n \in \omega$, existe $U_n \in \mathcal{U}_n$ com $K \subseteq U_n$. Ou seja, \mathcal{G} é uma k -cobertura.

Seja, então, $\{G_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{G}$ uma subcobertura. Como notação, vamos fixar $G_n = \bigcap_{i \in \omega} U_n^i$. Como $\{G_n : n \in \omega\}$ cobre X , $\{U_n^n : n \in \omega\}$ também cobre, então basta, para todo

$n \in \omega$, escolher $\{U_n^n\} \subseteq \mathcal{U}_n$. □

Proposição 5.4.2. *Em espaços metrizáveis, todo espaço de Alster é σ -compacto.*

Demonstração. Como X é metrizável, todo compacto é um G_δ , portanto, $\{K \subseteq X : K \text{ é compacto}\}$ deve ter uma subcobertura enumerável. □

O resultado abaixo pode ser encontrado em [Hur26] em alemão.

Proposição 5.4.3. *Em subconjuntos analíticos (Veja 1.3) de \mathbb{P} , Menger é equivalente a σ -compacto.*

Agora, vamos ao teorema.

Corolário 5.4.4. *Se existe um espaço produtivamente Lindelöf completamente metrizável que não é σ -compacto, então existe um que é subconjunto \mathbb{P} .*

Teorema 5.4.5. *São equivalentes:*

- (i) *Todo espaço completamente metrizável produtivamente Lindelöf é Menger.*
- (ii) *Todo espaço completamente metrizável produtivamente Lindelöf é de Alster.*
- (iii) *Todo espaço completamente metrizável produtivamente Lindelöf é σ -compacto.*
- (iv) *Existe um espaço de Michael.*

Demonstração. Pelas proposições anteriores temos de imediato que (ii) \implies (i) e a equivalência entre (ii) e (iii). De resto, vamos mostrar uma equivalência entre (iii) e (iv) e que (i) \implies (iv).

(iii) \implies (iv) Como \mathbb{P} é completamente metrizável (1.3.1) e não é σ -compacto, afinal não é F_σ (2.1.1), temos que não pode ser produtivamente Lindelöf. Portanto, deve existir um espaço de Michael.

(iv) \implies (iii) Faremos pela contra-positiva. Assuma que exista um espaço X que seja completamente metrizável, produtivamente Lindelöf e não σ -compacto. Em particular, X é de Lindelöf, então por 1.3.8 existe $Y \subseteq X$ fechado tal que Y é homeomorfo à \mathbb{P} . Agora, para todo espaço de Lindelöf Z , temos que $Z \times \mathbb{P}$ é homeomorfo à $Z \times Y$, que por sua vez é subconjunto do espaço de Lindelöf fechado $Z \times X$. Concluimos que \mathbb{P} é um espaço produtivamente Lindelöf, ou seja, não existe espaço de Michael.

(i) \implies (iii) Assuma que X é um produtivamente Lindelöf que não é σ -compacto. Como todo produtivamente Lindelöf é de Lindelöf, X é separável e, portanto, tem base enumerável. Por 4.4.J em [Eng89], existe $Y \subseteq \omega^\omega$ e uma função perfeita sobrejetora $f : Y \rightarrow X$. Se X for produtivamente Lindelöf, por 5.3.13, Y também será.

No entanto, imagem por função contínua sobrejetora de σ -compacto é σ -compacto, portanto, Y também não é σ -compacto. Pela última proposição, se existe um subespaço de \mathbb{P} que é completamente metrizável produtivamente Lindelöf mas não σ -compacto, então existe um completamente metrizável produtivamente Lindelöf que não é Menger. □

Juntando com o que já sabemos sobre a construção de espaços de Michael, temos que

Corolário 5.4.6. $b = \omega_1$ ou $\mathfrak{d} = \text{Cov}(\mathcal{M})$ implica que todo espaço produtivamente Lindelöf metrizável é σ -compacto.

Em um artigo que já estudamos, [Ala+11], temos uma generalização deste resultado para espaços **Čech-completos**. Estes espaços são espaços completamente regulares que são G_δ na sua compactificação de Stone-Čech e aparecem na literatura como uma generalização de espaços completamente metrizáveis (Veja [Eng89] 4.3.26).

Teorema 5.4.7. *Todo espaço produtivamente Lindelöf, Čech-completo e regular é σ -compacto se, e somente se, existe um espaço de Michael.*

Para provar este resultado, basta saber que todo espaço paracompacto e Čech-completo é pré imagem de um espaço completamente metrizável ([Eng89] problema 5.5.9 ou [Fro60]). Como X é de Lindelöf e regular, temos que ele é paracompacto. Por 1.1.13 e 1.1.11 sabemos que pré imagem perfeita de um espaço produtivamente Lindelöf, deve ser de Lindelöf. Portanto, usando o teorema 5.4.5 temos o resultado.

Focando em outra generalização de completamente metrizável, também temos um melhoramento do teorema 5.4.5 em [Tal11].

Teorema 5.4.8. *Todo espaço produtivamente Lindelöf, analítico e metrizável é σ -compacto se e somente se existe um espaço de Michael.*

Usando uma argumentação parecida com a feita para os espaços Čech-completos, F. Tall e B. Tsaban mostram em [TT11] que a hipótese de metrizabilidade pode ser removida e o teorema acima ainda vale. Isso se dá pois espaços analíticos são pré-imagens perfeitas de espaços metrizáveis ([Ark86]). Como a imagem contínua de um analítico é analítico, podemos usar teorema anterior para mostrar que todo produtivamente analítico é σ -compacto se, e somente se, existe espaço de Michael.

Parte da relevância deste resultado é que existe um interesse de se saber quando espaços de Menger são σ -compactos. O próprio Menger conjecturou que seriam todos, mas isto se provou falso. Pelo teorema 5.3.20, sabemos que, se existe um espaço de Michael, todo espaço produtivamente Lindelöf é de Menger. Assim, assumir esta existência pode ser útil ao se investigar esta pergunta.

Em [Tal11], F. Tall também conjectura se podemos melhorar o resultado acima usando o **Axioma da Determinancia Projetiva**. Este axioma diz que um jogo específico sempre é, como o nome diz, determinado para conjuntos projetivos, uma classe que generaliza os espaços analíticos. Uma boa referência para estas definições são as seções 37 e 38 de [Kec95].

Pergunta 5.4.9. *Assumindo PD podemos provar que todo espaço produtivamente Lindelöf projetivo é σ -compacto se, e somente se, existe um espaço de Michael?*

Uma indicação que a resposta acima pode ser positiva é que Tall conseguiu provar a questão acima com σ -compacto substituído por Hurewicz. Espaços de Hurewicz é uma classe que se encontra entre espaços de Menger e σ -compactos. Portanto podemos ver este resultado como uma resposta parcial para a questão acima.

Há também tentativas de estender este resultado para espaços co-analíticos, isto é, cujo complementar é analítico. Note que espaços co-analíticos são definidos apenas para espaços poloneses. Diferente de espaços analíticos, fora de espaços poloneses a melhor generalização não é clara. Usaremos a definição encontrada em [Tal20]: X é co-analítico se seu resíduo em alguma compactificação é analítico.

É natural perguntarmos se a existência de espaços de Michael também decide se espaços produtivamente Lindelöf co-analíticos são σ -compactos.

Temos alguns resultado parciais envolvendo estes espaços e outras generalizações de espaços analíticos. As referências [Tal20] e [TT11] são bem completas.

Exite mais uma classe de espaços que se relaciona com espaços de Michael e que não vimos até agora.

Definição 5.4.10. *Um espaço X regular é dito **de Frölik** se é homeomorfo à um subconjunto fechado de um produto enumerável de σ -compactos.*

Eles foram introduzido em [Fro63]. Antes de mostrar sua relação com espaços de Michael, precisamos do seguinte lema.

Lema 5.4.11. *Se $C = \bigcup_{n \in \omega} K_n$ é σ -compacto regular, então existe K compacto, $F \subseteq \omega \times K$ fechado e $f : F \rightarrow C$ contínua*

Demonstração. Como X é de Lindelöf e regular, em particular é de Tychonoff. Seja K a compactificação de Stone-Čech de C e $\phi : C \rightarrow K$ a imersão.

Considere $F = \bigcup_{n \in \omega} \{n\} \times \phi[K_n]$. Temos que F é um fechado. De fato, se $\langle n, k \rangle \notin F$, como $\phi[K_n]$ é um compacto, logo, fechado existe U aberto de K tal que $k \in U$ e $U \cap \phi[K_n] = \emptyset$. Sendo assim, $\{n\} \times U \in V(\langle n, k \rangle)$ e é disjunto de F .

Por fim, defina $f : F \rightarrow C$ dada por $f(i, \phi(x)) = x$. Claramente f é sobrejetora. Agora, tome $V \subseteq C$. Temos que $f^{-1}(V) = \omega \times \phi^{-1}[V] \cap F = \omega \times \phi[V] \cap F$. Como ϕ é aberta, temos que $f^{-1}(V)$ é aberto. \square

Diferente dos resultados anteriores, o teorema a seguir temos como hipótese a não existência de um espaço de Michael. Embora saibamos que esta é uma condição que é, no máximo, consistente, ainda é um resultado interessante.

Teorema 5.4.12. *Todo espaço de Frölik é produtivamente Lindelöf se, e somente se, não existe um espaço de Michael.*

Demonstração. (\Rightarrow) Pelo seu homeomorfismo com ω^ω , temos que \mathbb{P} é de Frölik, portanto, é produtivamente Lindelöf. Assim, não pode existir um espaço de Michael.

(\Leftarrow) Seja X um espaço de Lindelöf. Dado um espaço de Frölik F qualquer, considere uma sequência $\{C_n : n \in \omega\}$ de σ -compactos tais que F é homeomorfo à um subespaço fechado de $\prod_{n \in \omega} C_n$. Basta mostrarmos que $\prod_{n \in \omega} C_n \times X$ é de Lindelöf para mostrar que F é produtivamente Lindelöf.

Para cada C_n , pelo lema anterior, temos um compacto K_n , um $F_n \subseteq \omega \times K_n$ fechado e uma $f : F_n \rightarrow C_n$ contínua e sobrejetora. Por hipótese, $X \times \omega^\omega$ é de Lindelöf, logo, como

$\prod_{n \in \omega} K_n$ é compacto, temos que $X \times \omega^\omega \times \prod_{n \in \omega} K_n$ é de Lindelöf (1.1.8). No entanto, temos um homeomorfismo entre $\omega^\omega \times \prod_{n \in \omega} K_n$ e $\prod_{n \in \omega} \omega \times K_n$. Como $\prod_{n \in \omega} F_n$ é um espaço fechado deste último, temos que $X \times \prod_{n \in \omega} F_n$ é de Lindelöf. Assim, já que $\prod_{n \in \omega} f_n$ é contínua 1.1.12, podemos concluir $X \times \prod_{n \in \omega} C_n$ é de Lindelöf. \square

Se não existir um espaço de Michael, temos que os espaços de Frolík são mais uma classe que se encontra entre produtivamente Lindelöf e exponencialmente Lindelöf.

Proposição 5.4.13. *Todo espaço de Frolík é exponencialmente Lindelöf.*

Demonstração. Considere, primeiro, $X = \prod_{n \in \omega} C_n$, onde cada C_n é um σ -compacto. Temos um homeomorfismo entre X^ω e $\prod_{n \in \omega} C_n^\omega$ e este segundo pode ser visto como produto enumerável de σ -compactos. Como σ -compactos são de Alster e o produto é associativo, temos o resultado. \square

Referências

- [AD14] Leandro F. Aurichi e Rodrigo R. Dias. “Topological games and Alster spaces”. Em: *Canad. Math. Bull.* 57.4 (2014), pp. 683–696. ISSN: 0008-4395. DOI: [10.4153/CMB-2013-048-5](https://doi.org/10.4153/CMB-2013-048-5). URL: <https://doi.org/10.4153/CMB-2013-048-5> (ver p. 68).
- [Ala+11] Ofelia T. Alas et al. “Non-productively Lindelöf spaces and small cardinals”. Em: *Houston J. Math.* 37.4 (2011), pp. 1373–1381. ISSN: 0362-1588 (ver pp. 57, 63, 78).
- [Ala71] O. T. Alas. “On a characterization of collectionwise normality”. Em: *Canad. Math. Bull.* 14 (1971), pp. 13–15. ISSN: 0008-4395. DOI: [10.4153/CMB-1971-003-6](https://doi.org/10.4153/CMB-1971-003-6). URL: <https://doi.org/10.4153/CMB-1971-003-6> (ver p. 21).
- [Als88] K. Alster. “On the class of all spaces of weight not greater than ω_1 whose Cartesian product with every Lindelöf space is Lindelöf”. Em: *Fund. Math.* 129.2 (1988), pp. 133–140. ISSN: 0016-2736. DOI: [10.4064/fm-129-2-133-140](https://doi.org/10.4064/fm-129-2-133-140). URL: <https://doi.org/10.4064/fm-129-2-133-140> (ver pp. 2, 58, 68).
- [Als90] K. Alster. “The product of a Lindelöf space with the space of irrationals under Martin’s axiom”. Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 110.2 (1990), pp. 543–547. ISSN: 0002-9939. DOI: [10.2307/2048102](https://doi.org/10.2307/2048102). URL: <https://doi.org/10.2307/2048102> (ver pp. 2, 45).
- [Ark86] A. V. Arkhangel’skii. “Hurewicz spaces, analytic sets and fan tightness of function spaces”. Em: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 287.3 (1986), pp. 525–528. ISSN: 0002-3264 (ver p. 78).
- [AT12] Leandro F. Aurichi e Franklin D. Tall. “Lindelöf spaces which are indestructible, productive, or D ”. Em: *Topology Appl.* 159.1 (2012), pp. 331–340. ISSN: 0166-8641. DOI: [10.1016/j.topol.2011.09.039](https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.09.039). URL: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.09.039> (ver p. 76).
- [Ats77] M. Atsugi. “On normality of the product of two spaces”. Em: *General topology and its relations to modern analysis and algebra, IV (Proc. Fourth Prague Topological Sympos., Prague, 1976), Part B*. Soc. Czechoslovak Mathematicians e Physicists, Prague, 1977, pp. 25–27 (ver pp. 1, 13).
- [AZ18] Leandro F. Aurichi e Lyubomyr Zdomskyy. “Internal characterizations of productively Lindelöf spaces”. Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 146.8 (2018), pp. 3615–3626. ISSN: 0002-9939. DOI: [10.1090/proc/14031](https://doi.org/10.1090/proc/14031). URL: <https://doi.org/10.1090/proc/14031> (ver pp. 2, 57, 58, 68).
- [BD84] D. K. Burke e S. W. Davis. “Subsets of ${}^\omega\omega$ and generalized metric spaces”. Em: *Pacific J. Math.* 110.2 (1984), pp. 273–281. ISSN: 0030-8730. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102710915> (ver p. 37).

- [Bla10a] Andreas Blass. “Combinatorial cardinal characteristics of the continuum”. Em: *Handbook of set theory*. Vols. 1, 2, 3. Springer, Dordrecht, 2010, pp. 395–489. DOI: [10.1007/978-1-4020-5764-9_7](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5764-9_7). URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5764-9_7 (ver pp. 6–8).
- [Bla10b] Andreas Blass. *Covering number of the meager ideal*. 2010. (Acesso em 06/05/2023) (ver p. 8).
- [Cie20] Krzysztof Chris Ciesielski. “Sierpiński’s topological characterization of \mathbb{Q} ”. Em: *Math. Mag.* 93.2 (2020), pp. 136–138. ISSN: 0025-570X. DOI: [10.1080/0025570X.2020.1708187](https://doi.org/10.1080/0025570X.2020.1708187). URL: <https://doi.org/10.1080/0025570X.2020.1708187> (ver p. 50).
- [Die44] Jean Dieudonné. “Une généralisation des espaces compacts”. Em: *J. Math. Pures Appl.* (9) 23 (1944), pp. 65–76. ISSN: 0021-7824 (ver p. 1).
- [Die58] J. Dieudonné. “Un critère de normalité pour les espaces produits”. Em: *Colloq. Math.* 6 (1958), pp. 29–32. ISSN: 0010-1354. DOI: [10.4064/cm-6-1-29-32](https://doi.org/10.4064/cm-6-1-29-32). URL: <https://doi.org/10.4064/cm-6-1-29-32> (ver p. 67).
- [Dou84] Eric K. van Douwen. “The integers and topology”. Em: *Handbook of set-theoretic topology*. North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 111–167 (ver pp. 37, 41, 66).
- [Dow51] C. H. Dowker. “On countably paracompact spaces”. Em: *Canad. J. Math.* 3 (1951), pp. 219–224. ISSN: 0008-414X. DOI: [10.4153/cjm-1951-026-2](https://doi.org/10.4153/cjm-1951-026-2). URL: <https://doi.org/10.4153/cjm-1951-026-2> (ver pp. 1, 13, 14, 22).
- [DTZ13] Haosui Duanmu, Franklin D. Tall e Lyubomyr Zdomskyy. “Productively Lindelöf and indestructibly Lindelöf spaces”. Em: *Topology Appl.* 160.18 (2013), pp. 2443–2453. ISSN: 0166-8641. DOI: [10.1016/j.topol.2013.07.038](https://doi.org/10.1016/j.topol.2013.07.038). URL: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2013.07.038> (ver p. 33).
- [Eng89] Ryszard Engelking. *General topology*. Second. Vol. 6. Sigma Series in Pure Mathematics. Translated from the Polish by the author. Heldermann Verlag, Berlin, 1989, pp. viii+529. ISBN: 3-88538-006-4 (ver pp. 3, 5, 6, 16, 18–20, 32, 53, 64, 77, 78).
- [Fig10] Robson Aparecido Figueiredo. “Espaços linearmente Lindelöf”. Diss. de mest. São Paulo, Brasil: Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2010 (ver p. 54).
- [Fro60] Z. Frolik. “On the topological product of paracompact spaces”. Em: *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 8 (1960), pp. 747–750. ISSN: 0001-4117 (ver p. 78).
- [Fro63] Zdeněk Frolik. “On the descriptive theory of sets”. Em: *Czechoslovak Math. J.* 13(88) (1963), pp. 335–359. ISSN: 0011-4642 (ver p. 79).
- [GN15] Gary Gruenhagen e Peter Nyikos. “Mary Ellen’s conjectures”. Em: *Topology Appl.* 195 (2015), pp. 15–25. ISSN: 0166-8641. DOI: [10.1016/j.topol.2015.09.014](https://doi.org/10.1016/j.topol.2015.09.014). URL: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2015.09.014> (ver p. 45).
- [HI58] Melvin Henriksen e J. R. Isbell. “Some properties of compactifications”. Em: *Duke Math. J.* 25 (1958), pp. 83–105. ISSN: 0012-7094. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.dmj/1077467780> (ver p. 63).
- [Hod84] R. Hodel. “Cardinal functions. I”. Em: *Handbook of set-theoretic topology*. North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 1–61 (ver p. 3).
- [Hur26] Witold Hurewicz. “Über eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems”. Em: *Math. Z.* 24.1 (1926), pp. 401–421. ISSN: 0025-5874. DOI: [10.1007/BF01216792](https://doi.org/10.1007/BF01216792). URL: <https://doi.org/10.1007/BF01216792> (ver p. 77).

- [Juh80] István Juhász. *Cardinal functions in topology—ten years later*. Second. Vol. 123. Mathematical Centre Tracts. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980, pp. iv+160. ISBN: 90-6196-196-3 (ver p. 5).
- [Kec95] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory*. Vol. 156. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1995, pp. xviii+402. ISBN: 0-387-94374-9. DOI: [10.1007/978-1-4612-4190-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4190-4). URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4190-4> (ver pp. 8, 9, 11, 46, 62, 63, 78).
- [Kun09] Kenneth Kunen. *The foundations of mathematics*. Vol. 19. Studies in Logic (London). Mathematical Logic and Foundations. College Publications, London, 2009, pp. viii+251. ISBN: 978-1-904987-14-7 (ver p. 4).
- [Kun11] Kenneth Kunen. *Set theory*. Vol. 34. Studies in Logic (London). College Publications, London, 2011, pp. viii+401. ISBN: 978-1-84890-050-9 (ver p. 60).
- [Law90] L. Brian Lawrence. “The influence of a small cardinal on the product of a Lindelöf space and the irrationals”. Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 110.2 (1990), pp. 535–542. ISSN: 0002-9939. DOI: [10.2307/2048101](https://doi.org/10.2307/2048101). URL: <https://doi.org/10.2307/2048101> (ver pp. 2, 33, 35, 37, 38).
- [Lut80] David J. Lutzer. “Ordered topological spaces”. Em: *Surveys in general topology*. Academic Press, New York-London-Toronto, Ont., 1980, pp. 247–295 (ver p. 15).
- [Mic63] E. Michael. “The product of a normal space and a metric space need not be normal”. Em: *Bull. Amer. Math. Soc.* 69 (1963), pp. 375–376. ISSN: 0002-9904. DOI: [10.1090/S0002-9904-1963-10931-3](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1963-10931-3). URL: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1963-10931-3> (ver pp. 1, 23).
- [Mic71] Ernest A. Michael. “Paracompactness and the Lindelöf property in finite and countable Cartesian products”. Em: *Compositio Math.* 23 (1971), pp. 199–214. ISSN: 0010-437X (ver pp. 1, 2, 33, 34, 67).
- [Moo99] J. Tatch Moore. “Some of the combinatorics related to Michael’s problem”. Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 127.8 (1999), pp. 2459–2467. ISSN: 0002-9939. DOI: [10.1090/S0002-9939-99-04808-X](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-99-04808-X). URL: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-99-04808-X> (ver pp. 2, 45, 50).
- [Mor55] Kiiti Morita. “A condition for the metrizability of topological spaces and for n -dimensionality”. Em: *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A* 5 (1955), pp. 33–36. ISSN: 0371-3539 (ver p. 29).
- [Mor62] K. Morita. “Paracompactness and product spaces”. Em: *Fund. Math.* 50 (1961/62), pp. 223–236. ISSN: 0016-2736. DOI: [10.4064/fm-50-3-223-236](https://doi.org/10.4064/fm-50-3-223-236). URL: <https://doi.org/10.4064/fm-50-3-223-236> (ver p. 18).
- [Mor64] Kiiti Morita. “Products of normal spaces with metric spaces”. Em: *Math. Ann.* 154 (1964), pp. 365–382. ISSN: 0025-5831. DOI: [10.1007/BF01362570](https://doi.org/10.1007/BF01362570). URL: <https://doi.org/10.1007/BF01362570> (ver p. 29).
- [Pav11] Oleg Pavlov. “A first countable linearly Lindelöf not Lindelöf topological space”. Em: *Topology Appl.* 158.16 (2011), pp. 2205–2209. ISSN: 0166-8641. DOI: [10.1016/j.topol.2011.06.057](https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.06.057). URL: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.06.057> (ver p. 49).
- [Prz84] Teodor C. Przymusiński. “Products of normal spaces”. Em: *Handbook of set-theoretic topology*. North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 781–826 (ver pp. 2, 11, 12, 16, 18, 23, 24, 26, 32, 57).

- [RS75] Mary Ellen Rudin e Michael Starbird. “Products with a metric factor”. Em: *General Topology and Appl.* 5.3 (1975), pp. 235–248. ISSN: 0016-660X (ver pp. 27, 28).
- [Rud69] Mary Ellen Rudin. “A new proof that metric spaces are paracompact”. Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 20 (1969), p. 603. ISSN: 0002-9939. DOI: [10.2307/2035708](https://doi.org/10.2307/2035708). URL: <https://doi.org/10.2307/2035708> (ver p. 16).
- [Rud72] Mary Ellen Rudin. “A normal space X for which $X \times I$ is not normal”. Em: *Fund. Math.* 73.2 (1971/72), pp. 179–186. ISSN: 0016-2736. DOI: [10.4064/fm-73-2-179-186](https://doi.org/10.4064/fm-73-2-179-186). URL: <https://doi.org/10.4064/fm-73-2-179-186> (ver p. 22).
- [Rud75a] Mary Ellen Rudin. “The normality of products”. Em: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B.C., 1974), Vol. 2*. Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975, pp. 81–84 (ver p. 1).
- [Rud75b] Mary Ellen Rudin. “The normality of products with one compact factor”. Em: *General Topology and Appl.* 5 (1975), pp. 45–59. ISSN: 0016-660X (ver pp. 1, 19).
- [Rud78] Mary Ellen Rudin. “ κ -Dowker spaces”. Em: *Czechoslovak Math. J.* 28(103).2 (1978), pp. 324–326. ISSN: 0011-4642 (ver pp. 14, 22).
- [RZ12] Dušan Repovš e Lyubomyr Zdomskyy. “On the Menger covering property and D -spaces”. Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 140.3 (2012), pp. 1069–1074. ISSN: 0002-9939. DOI: [10.1090/S0002-9939-2011-10945-6](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2011-10945-6). URL: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2011-10945-6> (ver p. 75).
- [Sco12] Brian M. Scott. *Dense subset of Cantor set homeomorphic to the Baire space*. 2012. URL: <https://math.stackexchange.com/questions/254364/dense-subset-of-cantor-set-homeomorphic-to-the-baire-space/254381#254381> (acesso em 10/02/2023) (ver p. 50).
- [Sol94] Sławomir Solecki. “Covering analytic sets by families of closed sets”. Em: *J. Symbolic Logic* 59.3 (1994), pp. 1022–1031. ISSN: 0022-4812. DOI: [10.2307/2275926](https://doi.org/10.2307/2275926). URL: <https://doi.org/10.2307/2275926> (ver p. 55).
- [Sor47] R. H. Sorgenfrey. “On the topological product of paracompact spaces”. Em: *Bull. Amer. Math. Soc.* 53 (1947), pp. 631–632. ISSN: 0002-9904. DOI: [10.1090/S0002-9904-1947-08858-3](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1947-08858-3). URL: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1947-08858-3> (ver p. 1).
- [Tal11] Franklin D. Tall. “Lindelöf spaces which are Menger, Hurewicz, Alster, productive, or D ”. Em: *Topology Appl.* 158.18 (2011), pp. 2556–2563. ISSN: 0166-8641. DOI: [10.1016/j.topol.2011.08.015](https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.08.015). URL: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.08.015> (ver p. 78).
- [Tal20] Franklin D. Tall. “Co-analytic spaces, K -analytic spaces, and definable versions of Menger’s conjecture”. Em: *Topology Appl.* 283 (2020), pp. 107345, 14. ISSN: 0166-8641. DOI: [10.1016/j.topol.2020.107345](https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107345). URL: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107345> (ver p. 79).
- [Tam62] Hisahiro Tamano. “On compactifications”. Em: *J. Math. Kyoto Univ.* 1 (1961/62), pp. 161–193. ISSN: 0023-608X. DOI: [10.1215/kjm/1250525055](https://doi.org/10.1215/kjm/1250525055). URL: <https://doi.org/10.1215/kjm/1250525055> (ver pp. 1, 18).
- [Teh11] Henry Naranjo Teheran. “Algumas propriedades do espaço topológico dos irracionais”. Diss. de mestr. São Paulo, Brasil: Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2011 (ver p. 6).

REFERÊNCIAS

- [TT11] Franklin D. Tall e Boaz Tsaban. “On productively Lindelöf spaces”. Em: *Topology Appl.* 158.11 (2011), pp. 1239–1248. ISSN: 0166-8641. DOI: [10.1016/j.topol.2011.04.003](https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.04.003). URL: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.04.003> (ver pp. 78, 79).
- [Vau75] J. E. Vaughan. “Nonnormal products of ω_μ -metrizable spaces”. Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 51 (1975), pp. 203–208. ISSN: 0002-9939. DOI: [10.2307/2039873](https://doi.org/10.2307/2039873). URL: <https://doi.org/10.2307/2039873> (ver p. 67).
- [Zdo05] Lubomyr Zdomsky. “A semifilter approach to selection principles”. Em: *Comment. Math. Univ. Carolin.* 46.3 (2005), pp. 525–539. ISSN: 0010-2628 (ver pp. 34, 75).