Coálgebras não associativas e o radical localmente nilpotente

Gilson Reis dos Santos Filho

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Pós-Graduação em Matemática
Orientador: Profa. Dra. Lucia Satie Ikemoto Murakami
Coorientador: Prof. Dr. Ivan Pavlovich Shestakov

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, março de 2020

Coálgebras não associativas e o radical localmente nilpotente

Esta versão da dissertação/tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 06/03/2020. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof^{a}. Dr^{a}. Lucia Satie Ikemoto Murakami (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Vitor de Oliveira Ferreira - IME-USP
- Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov - UNICAMP
- Prof. Dr. Thiago Castilho de Mello - UNIFESP
- Prof. Dr. Walter Ricardo Ferrer Santos - UDELAR

Resumo

SANTOS FILHO, G. R. **Coálgebras não associativas e o radical localmente nilpotente**. 2020. 88 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2020.

Os resultados deste texto são motivados pela seguinte conjectura formulada por I. P. Shestakov: Uma variedade de álgebras admite radical localmente nilpotente se, e somente se, o Teorema Fundamental das Coálgebras é válido para as coálgebras desta variedade. Mostramos que o Teorema Fundamental das Coálgebras não é válido para coálgebras da variedade de álgebras alternativas à direita, uma variedade que não admite radical localmente nilpotente. Também mostramos que o Teorema Fundamental das Coálgebras é válido em uma classe que contém a variedades das álgebras alternativas e a variedade das álgebras de Jordan, generalizando o resultado de [ACM94], e contém duas variedades que possuem radical localmente nilpotente: a variedade das álgebras de tipo $(-1, 1)$ e a variedade das álgebras alternativas à direita Malcev-admissíveis.
Palavras-chave: coálgebra, radical localmente nilpotente, álgebra não associativa.

Abstract

SANTOS FILHO, G. R. **Nonassociative coalgebras and the locally nilpotent radical**. 2020. 88 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2020.

The results of this text are motivated by the following conjecture proposed by I. P. Shestakov: A variety of algebras admits locally nilpotent radical if, and only if, the Fundamental Coalgebra Theorem is true for the coalgebras of this variety. We show that the Fundamental Coalgebra Theorem isn't true for coalgebras of the variety of right alternative algebras, a variety with no locally nilpotent radical. We also show that the Fundamental Coalgebra Theorem is true for a class that contains the variety of alternative algebras and the variety of Jordan algebras, generalizing [ACM94], and two varieties with locally nilpotent radical: the variety of algebras of type $(-1, 1)$ and the variety of right alternative Malcev admissable algebras.

Keywords: coalgebra, locally nilpotent radical, nonassociative algebra.

Introdução

Um fenômeno recorrente no estudo de álgebras não necessariamente associativas é a demonstração de resultados da teoria de álgebras associativas em contextos mais gerais. Nesse sentido, certos teoremas importantes para álgebras associativas não necessariamente dependem da associatividade. Uma das dificuldades de estender certos teoremas é que a necessidade ou não da associatividade para a validade destes teoremas nem sempre é evidente ao estudar suas demonstrações no contexto associativo. Podemos entender que isto ocorre pois a associatividade é, de certa forma, uma propriedade bastante forte.

Um segundo fenômeno, também recorrente no estudo de álgebras não associativas, é a conexão entre certos conceitos bem estabelecidos e bem comportados em álgebras associativas que parecem, a princípio, conceitos independentes. Esta tese trata de entender se há uma conexão como esta (em um contexto mais geral) entre dois conceitos muito importantes relacionados a álgebras associativas: o Radical Localmente Nilpotente e o Teorema Fundamental das Coálgebras.

O Radical Localmente Nilpotente

O radical localmente nilpotente de uma álgebra associativa é definido como a soma de seus ideais localmente nilpotentes. Este radical foi definido inicialmente por J. Levitzki, em 1943, e por essa razão também é chamado de radical de Levitzki. Uma das principais motivações de J. Levitzki foi encontrar uma definição de radical que generalizasse o conceito de radical empregado por J. H. M. Wedderburn.

O radical de Wedderburn de uma álgebra associativa de dimensão finita é definido como o seu ideal nilpotente maximal e foi usado por J. H. M. Wedderburn, em 1908, para demonstrar o seguinte teorema

Teorema (Molien[1]-Wedderburn)**.** *Seja A uma álgebra sobre um corpo F arbitrário que é associativa, com unidade e de dimensão finita. Então*

- *A álgebra A contém um ideal N nilpotente maximal, chamado de radical da álgebra A;*

[1]Em 1891, T. Molien provou que toda álgebra sobre o corpo dos números complexos associativa, com unidade, de dimensão finita e simples é uma álgebra de matrizes com entradas complexas, um caso especial do resultado de J. H. M. Wedderburn.

- *O quociente A/N é isomorfo a soma direta $B_1 + \cdots + B_k$, em que $B_1, \ldots, B_k$ são ideais minimais em A/N e, em particular, são álgebras associativas, com unidade, simples e únicas salvo isomorfismos e permutações;*

- *Para cada $i = 1, \ldots, k$, a álgebra B_i é isomorfa à álgebra $M_{n_i}(D_i)$, em que n_i é um número inteiro positivo e D_i é um álgebra de divisão.*

Uma dificuldade ao generalizar a abordagem de J. H. M. Wedderburn para álgebras associativas de dimensão arbitrária é que álgebras associativas de dimensão infinita não necessariamente possuem um ideal nilpotente maximal.

Assim como outros radicais definidos na primeira metade do século XX (radical primo, radical de Jacobson, radical nil, etc.), o radical localmente nilpotente foi definido para qualquer álgebra associativa de forma que ele: 1) coincida com o radical de Wedderburn em álgebras associativas de dimensão finita; 2) possua certas propriedades do radical de Wedderburn. Inspirados por estas propriedades comuns aos radicais concretos então conhecidos, S. A. Amitsur, em 1952-54, e A. G. Kurosh, em 1953, definiram de maneira independente a noção de radical numa classe arbitrária de álgebras (para mais detalhes, ver a Subseção 1.4.1).

A noção de radicais também foi usada para estudar classes de álgebras não necessariamente associativas. Na teoria de álgebras de Lie, seguindo a terminologia moderna, definimos o radical de uma álgebra de Lie de dimensão finita como o seu ideal solúvel maximal e dizemos que uma álgebra de Lie de dimensão finita é semissimples se ela possui radical nulo. Em 1888-90, W. Killing classificou as álgebras de Lie semissimples sobre o corpo dos números complexos e, em 1894, E. Cartan classificou as álgebras de Lie semissimples sobre o corpo dos números reais. O radical localmente nilpotente pode ser usado para estudar álgebras de Jordan (conferir [ZSSS82, p. 93-97]) e álgebras alternativas (conferir [ZSSS82, p. 163-167]), por exemplo.

A propriedade "nilpotência local" não determina um radical de acordo com a definição de S. A. Amitsur e A. G. Kurosh em qualquer classe de álgebras (para mais detalhes, ver a Subseção 1.4.2). Em outras palavras, não podemos considerar a noção de radical localmente nilpotente para estudar toda classe de álgebras. Embora sejam conhecidas condições suficientes para que a propriedade "nilpotência local" defina um radical em uma variedade de álgebras, ainda é um problema em aberto determinar condições necessárias e suficientes.

O Teorema Fundamental das Coálgebras

A noção de coálgebra é uma dualização da noção usual de álgebra. Coálgebras associativas[2] com counidade são objetos de estudo na teoria das álgebras de Hopf, por exemplo.

[2]Utilizaremos neste texto a expressão "coálgebra associativa", embora a expressão comumente adotada na literatura da teoria de álgebras de Hopf (como em [Swe69] e [DNR01], por exemplo) seja "coálgebra coassociativa".

Uma importante propriedade de coálgebras associativas é que nesta classe é satisfeito o Teorema Fundamental das Coálgebras. Segundo este teorema, toda coálgebra associativa finitamente gerada possui dimensão finita.

Em 1974, W. Michaelis definiu a noção de coálgebra de Lie como uma coálgebra tal que sua álgebra dual é uma álgebra de Lie. W. Michaelis considerou o Teorema Fundamental das Coálgebras e mostrou que ele não é válido para coálgebras de Lie, exibindo uma coálgebra de Lie finitamente gerada e de dimensão infinita. Desde então, foi estudado o problema de determinar se o Teorema Fundamental das Coálgebras é válido para certas classes de coálgebras.

Em 1993, durante a conferência "*3rd International Conference on Non-associative Algebras and its Applications*", J. Anquela, T. Cortéz e F. Montaner apresentaram resultados que posteriormente foram publicados em [ACM94]. Dentre os resultados apresentados estava a demonstração que o Teorema Fundamental das Coálgebras é válido para coálgebras alternativas e coálgebras de Jordan, ou seja, coálgebras cuja álgebra dual é, respectivamente, uma álgebra alternativa e uma álgebra de Jordan. Depois da apresentação destes resultados, em uma conversa particular com A. Slinko (segundo [Sli95, p. 95]), E. Taft sugeriu que seria interessante encontrar condições necessárias e suficientes sobre uma variedade de álgebras para que coálgebras desta variedade (ou seja, coálgebras tais que as respectivas álgebras duais sejam álgebras desta variedade) satisfaçam o Teorema Fundamental das Coálgebras.

Além dos resultados de W. Michaelis e J. Anquela et al, conhecemos os seguintes avanços para mostrar que em certas classes é válido ou não o Teorema Fundamental das Coálgebras: Em 1995, A. Slinko determinou um critério necessário e suficiente para que seja válido o Teorema Fundamental das Coálgebras em uma certa classe de variedades. Em particular, este resultado generaliza [ACM94], mostrando que o Teorema Fundamental das Coálgebras é válido para a variedade das álgebras de Jordan e a variedade das álgebras alternativas, e generaliza [Mic74], mostrando que coálgebras de Lie não satisfazem Teorema Fundamental. Adicionalmente, A. Slinko mostra que o Teorema Fundamental é válido na variedade das álgebras do tipo $(-1,1)$ (conferir [Sli95]). Em 1996, V. N. Zhelyabin provou que o Teorema Fundamental das Coálgebras é válido para a classe das álgebras estruturáveis, uma variedade de álgebras com involução. Esta variedade contém as álgebras de Jordan e, portanto, também generaliza um dos resultados de [ACM94] (conferir [Zhe96]).

Apesar destes avanços ainda não conhecemos um critério necessário e suficiente para que seja válido numa variedade o Teorema Fundamental das Coálgebras.

Ainda segundo [Sli95], na mesma conversa particular mencionada anteriormente, I. P. Shestakov opinou que uma condição necessária e suficiente deve ser similar a condições suficientes para que a propriedade "nilpotência local" defina um radical (no sentido de Amitsur-Kurosh) em uma variedade. Neste contexto, I. P. Shestakov formulou a seguinte conjectura:

Conjectura 1. O Teorema Fundamental das Coálgebras é válido em uma variedade se, e somente se, esta variedade possui radical localmente nilpotente.

Se esta conjectura for verdadeira, encontramos aqui o segundo fenômeno que mencionamos no segundo parágrafo desta introdução. Sabemos que o Radical Localmente Nilpotente existe na classe das álgebras associativas e sabemos que o Teorema Fundamental das Coálgebras é válido para coálgebras associativas. Ao estudar estes conceitos em contextos não necessariamente associativos, podemos entender se há uma conexão entre eles que não é evidente no contexto associativo.

Objetivos e estrutura do texto

Os resultados deste texto foram motivados pela Conjectura 1. Nossos objetivos são:

1. Provar que o Teorema Fundamental das Coálgebras não é válido na variedade das álgebras alternativas à direita (uma variedade que não admite radical localmente nilpotente);

2. Provar uma generalização do Teorema Fundamental das Coálgebras que admite as seguintes consequências:

    (a) O Teorema Fundamental das Coálgebras é válido para coalgebras da variedade das álgebras (-1,1)-binárias e coálgebras da variedade das álgebras alternativas à direita Malcev-admissíveis (estas variedades admitem radical localmente nilpotente);

    (b) Em uma classe grande de variedades vale o seguinte lado da Conjectura 1: Se uma variedade (da classe em questão) admite radical localmente nilpotente, então as coálgebras desta variedade satisfazem o Teorema Fundamental das Coálgebras.

Este texto está dividido em quatro capítulos e um apêndice.

No Capítulo 1 introduzimos as definições e convenções aqui adotadas a respeito dos seguintes conceitos: álgebras, variedades de álgebras, bimódulos, superálgebras, nilpotência e teoria de radicais. No Capítulo 2, apresentamos conceitos da teoria de coálgebras, mostrando que as definições adotadas são compatíveis com as definições do contexto clássico de coálgebras associativas. No Capítulo 3, estudamos o problema de determinar o dual finito de uma álgebra e usamos os resultados encontrados para mostrar que o Teorema Fundamental das Coálgebras não é válido para coálgebras alternativas à direita. No Capítulo 4, mostramos que o Teorema Fundamental das Coálgebras é válido para uma classe de variedades que contém, em particular, as variedades das álgebras alternativas, álgebras de Jordan e álgebras de tipo $(-1,1)$. Esta classe também contém a variedades das álgebras $(-1,1)$-binárias e a variedade das álgebras alternativas à direita Malcev-admissíveis, variedades consideradas em [Pch76], onde foi provado que estas variedades admitem radical localmente nilpotente. Os capítulos 3 e 4 também contêm problemas ainda em aberto relacionados aos temas dos respectivos capítulos. No Apêndice A, provamos de duas maneiras que a coálgebra obtida no resultado principal do Capítulo 3 é alternativa à direita.

As principais contribuições desta tese estão contidas nos capítulos 3 e 4. Os teoremas 3.15, 3.19 e 4.19 são resultados novos e estão publicados em [SFMS21b] e [SFMS21a].

Sumário

Capítulo 1

Álgebras e Bimódulos - conceitos preliminares

Muitos dos conceitos apresentados a seguir provavelmente são familiares ao leitor. Nosso objetivo ao apresentá-los será estabelecer as convenções aqui adotadas (como, por exemplo, estabelecer que nossas álgebras não necessariamente possuem unidade, associatividade, etc) assim como a notação usada neste texto.

Vamos fixar neste texto um corpo arbitrário F. Exceto quando explicitamente indicado o contrário, todos os espaços vetoriais deste texto serão espaços vetoriais sobre o corpo F. Todos os produtos tensoriais considerados no texto serão sobre o corpo F.

Se V, W são espaços vetoriais, então:

- para qualquer subconjunto $S \subseteq V$, denotamos por span $\langle S \rangle \subseteq V$ o subespaço vetorial de V gerado por S;
- a soma direta dos espaços V e W é o conjunto
$$V \dot{+} W = \{v + w \mid v \in V, w \in W\};$$
- o espaço das transformações lineares de V em W é o conjunto
$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W \mid T \text{ é transformação linear}\};$$
- o espaço de todos os *endomorfismos* do espaço V é o conjunto
$$\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V) = \{T : V \to V \mid T \text{ é transformação linear}\};$$
- o *espaço dual* de V é o espaço
$$V^* = \mathcal{L}(V, F) = \{\alpha : V \to F \mid \alpha \text{ é transformação linear}\}.$$

  Os elementos de V^* são chamados de *funcionais lineares* de V.

Se $v \in V$ e $\alpha \in V^*$, então denotaremos o valor da função α avaliada em v por

$$\alpha(v) = \langle \alpha,\, v \rangle\,.$$

Uma álgebra é um espaço vetorial A munido de um produto, ou seja, uma função bilinear

$$\begin{aligned} A \times A &\to F \\ (a, b) &\mapsto ab. \end{aligned}$$

Quando o produto estiver subentendido, vamos nos referir simplesmente à álgebra A. Lembramos que existe uma correspondência biunívoca entre as funções bilineares de $A \times A$ em F e as transformações lineares de $A \otimes A$ em F. Assim, existe uma única transformação linear $\mathfrak{m} : A \otimes A \to A$, tal que $\mathfrak{m}(a \otimes b) = ab$, para quaisquer $a, b \in A$. Dessa forma, também podemos definir uma álgebra como um espaço vetorial A munido de uma transformação linear $\mathfrak{m} : A \otimes A \to A$. Esta definição será útil no Capítulo 2 para introduzir o conceito de coálgebras como o conceito dual de álgebras.

Sejam A, B álgebras. Dizemos que

- o conjunto $R \subseteq A$ é uma *subálgebra* de A, se R é um subespaço vetorial de A e $xy \in R$, para quaisquer $x, y \in R$. Se $S \subseteq A$, então denotamos por $\mathrm{alg}\langle S \rangle$ a *subálgebra gerada* por S. A subálgebra $\mathrm{alg}\langle S \rangle \subseteq A$ é menor subálgebra de A (no sentido da inclusão) que contém S;

- o conjunto $I \subseteq A$ é um *ideal* de A, se I for um subespaço vetorial de A e $ax, xa \in I$, para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$. Se $S \subseteq A$, então denotamos por $\mathrm{id}\langle S \rangle$ o *ideal gerado* por S. O ideal $\mathrm{id}\langle S \rangle \subseteq A$ é o menor ideal de A (no sentido da inclusão) que contém S;

- a transformação linear $f : A \to B$ é um *homomorfismo de álgebras* se $f(ab) = f(a)f(b)$, para quaisquer $a, b \in S$. O espaço de todos os homomorfismos de álgebras de A em B é denotado por $\mathrm{Hom}(A, B)$;

- a função $f : A \to A$ é um *endomorfismo da álgebra* A se f for um homomorfismo de álgebras. O espaço de todos os endomorfismos de álgebras de A é denotado por $\mathrm{End}\, A$;

Dizemos que a álgebra A é *associativa* quando o seu produto for associativo, ou seja, se

$$(ab)c = a(bc),$$

para quaisquer $a, b, c \in A$.

Dizemos que a álgebra A tem *unidade* quando existir elemento $1 \in A$ tal que, para todo $a \in A$,

$$1\,a = a\,1 = a.$$

Se V é um espaço vetorial, então $\mathcal{L}(V)$, o espaço das transformações lineares de V em V, é uma álgebra com soma usual de transformações lineares e com produto dado pela composição de funções. A álgebra $\mathcal{L}(V)$ é uma álgebra associativa e possui unidade $Id_V \in \mathcal{L}(V)$ dada por $Id_V(v) = v$, para todo $v \in V$. Se V for uma álgebra, então End V, o espaço dos endomorfismos de álgebra de V, é uma subálgebra de $\mathcal{L}(V)$.

Sejam x, y, z elementos de uma álgebra qualquer. Usaremos notações usuais para os seguintes elementos:

- O *comutador* dos elementos x, y, definido como

$$[x, y] = xy - yx;$$

- O *associador* dos elementos x, y, z, definido como

$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz).$$

Se A é uma álgebra e $a \in A$, então definimos as transformações lineares $L_a, R_a \in \mathcal{L}(A)$, chamadas respectivamente de operadores de multiplicação à esquerda e à direita por a, por

$$L_a(x) = ax \qquad\qquad R_a(x) = xa,$$

para todo $x \in A$. A subálgebra de $\mathcal{L}(A)$ gerada pelo subconjunto $\{L_a, R_a \mid a \in A\}$ é chamada de *álgebra de multiplicações de A*. Denotamos a álgebra de multiplicações de A por Mult A.

Se A tem unidade $1 \in A$, então a álgebra Mult A também tem unidade $L_1 = R_1 = Id_A$.

1.1 Variedades

Nessa seção apresentaremos ao leitor alguns conceitos sobre variedades de álgebras com o objetivo de definir o conceito de variedades homogêneas, nossos objetos de estudo no Capítulo 4. Para tal, vamos apresentar os conceitos de álgebra livre (não associativa) e identidades polinomiais. Também apresentaremos exemplos de variedades que ilustrarão as definições aqui contidas, em particular, a variedade das álgebras alternativas à direita, que será abordada no Capítulo 3, a variedade das álgebras $(-1, 1)$-binárias e a variedade das álgebras alternativas à direita Malcev-admissíveis, variedades que serão estudadas no Capítulo 4.

Fixemos um conjunto de indeterminadas $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Para simplificar a notação, em diversas instâncias neste texto vamos denotar elementos de X por x, y ou z. Vamos definir $W\{X\}$, o conjunto das palavras (não associativas) formadas pelas letras de X, indutivamente da seguinte forma:

- O conjunto de indeterminadas X está contido em $W\{X\}$;

- Para quaisquer $x_i, x_j \in X$ e quaisquer $u, v \in W\{X\} \setminus X$, os elementos

$$x_i x_j, \qquad x_i(u), \qquad (u)x_i, \qquad (u)(v),$$

são palavras de $W\{X\}$.

Exemplo 1.1. Sejam $x, y, z \in X$. Os seguintes elementos são exemplos de palavras distintas de $W\{X\}$:

$$\begin{aligned}
w_1 &= x, \\
w_2 &= z, \\
w_3 &= xy, \\
w_4 &= x(yz), \\
w_5 &= (xy)(xz), \\
w_6 &= ((xy)x)z, \\
w_7 &= x((yx)z).
\end{aligned}$$

Vamos definir o espaço vetorial $F\{X\} = \operatorname{span}\langle w \mid w \in W\{X\}\rangle$, em que $\{w \mid w \in W\{X\}\}$ é um conjunto linearmente independente. Podemos definir em $F\{X\}$ o seguinte produto: Se $u, v \in F\{X\}$, então o produto de u e v é dado por

$$uv = \begin{cases} x_i x_j, & \text{se } u = x_i \in X \text{ e } v = x_j \in X; \\ x_i(v), & \text{se } u = x_i \in X \text{ e } v \in W\{X\} \setminus X; \\ (u)x_j, & \text{se } u \in W\{X\} \setminus X \text{ e } v = x_j \in X; \\ (u)(v), & \text{se } u, v \in W\{X\} \setminus X. \end{cases}$$

Com a soma usual de espaços vetoriais e o produto descrito acima, a álgebra $F\{X\}$ é chamada de *álgebra livre* (não associativa) gerada por X.

Exemplo 1.2. Abaixo seguem exemplos de produtos entre as palavras do Exemplo 1.1:

$$\begin{aligned}
w_1 w_2 &= xz, \\
w_1 w_3 &= x(xy), \\
(w_1 w_3) w_2 &= (x(xy))z, \\
w_1 w_4 &= x(x(yz)), \\
w_3 w_1 &= (xy)x, \\
(w_3 w_1) w_2 &= ((xy)x)z = w_6, \\
w_3(w_1 w_2) &= (xy)(xz) = w_5.
\end{aligned}$$

É bem conhecido (e fácil de provar) que a álgebra $F\{X\}$ satisfaz a seguinte propriedade: Se A é uma álgebra e $f : X \to A$ é uma função, então existe um único homomorfismo de álgebras $\phi : F\{X\} \to A$ tal que $\phi|_X = f$. Em outras palavras, existe um único homomorfismo de álgebras $\phi : F\{X\} \to A$ tal que o diagrama abaixo comute:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & F\{X\} \arrow[d, "\phi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Observação. Usando a linguagem de teoria de categorias, a propriedade acima significa que $F\{X\}$ é um objeto livre dentro da categoria das álgebras não associativas.

Se A é uma álgebra e $p(x_1, \ldots, x_n) \in F\{X\}$, então, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$, podemos considerar o elemento $p(a_1, \ldots, a_n) \in A$ obtido da seguinte forma: Tome uma função qualquer $f : X \to A$ tal que $f(x_i) = a_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Como $F\{X\}$ é livre, a função f determina um homomorfismo $\varphi : F\{X\} \to A$ tal que $\varphi(x_i) = f(x_i) = a_i$, para todo inteiro positivo i. Assim, defina

$$p(a_1, \ldots, a_n) = \varphi(p(x_1, \ldots, x_n)).$$

É fácil ver que o elemento $p(a_1, \ldots, a_n) \in A$ independe da escolha da função f.

Em outras palavras, $p(a_1, \ldots, a_n)$ é o elemento de A que obtemos através da substituição em $p(x_1, \ldots, x_n)$ de cada uma das letras $x_1, \ldots, x_n \in X$ por $a_1, \ldots, a_n \in A$, respectivamente.

Exemplo 1.3. Considere a álgebra de matrizes com entradas reais $M_2(\mathbb{R})$, os seguintes elementos da álgebra livre $\mathbb{R}\{X\}$

$$\begin{aligned} p(x, y) &= xy - yx \\ q(x) &= x^2 \\ r(x, y, z) &= (xy)z \end{aligned}$$

e as matrizes

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então

$$p(a, c) = ac - ca = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad q(b) = b^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$q(c) = c^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad r(a, b, c) = (ab)c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dizemos que $p(x_1, \ldots, x_n) \in F\{X\}$ é uma *identidade polinomial* da álgebra A ou que A satisfaz a identidade $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$, se

$$p(a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$. Em algumas instâncias neste texto, escreveremos que A satisfaz $p(x_1, \ldots, x_n)$ para dizer que $p(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade polinomial de A.

Exemplo 1.4. A álgebra $M_2(\mathbb{R})$ satisfaz as identidades

$$\begin{aligned}(xy)z - x(yz) &= 0;\\ [[x,y]^2, z] &= 0.\end{aligned}$$

em que $x, y, z \in X$.

1. Como $M_2(\mathbb{R})$ é uma álgebra associativa, satisfaz a identidade $(xy)z - x(yz) = 0$.

2. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, se $M \in M_2(\mathbb{R})$, então M satisfaz

$$M^2 - \mathrm{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0, \tag{1.5}$$

em que $\mathrm{tr}(M) \in \mathbb{R}$ é o traço da matriz M, $\det(M)$ é o determinante da matriz M e I_2 é a matriz identidade de ordem 2×2. Se M, N são matrizes de entrada $m \times n$ e $n \times m$, respectivamente, então $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$. Assim, para quaisquer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, temos que

$$\mathrm{tr}([A,B]) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$$

e, fazendo $M = [A, B]$ na Equação 1.5, segue que

$$[A,B]^2 = -\det([A,B])I_2.$$

Concluímos que $[A,B]^2$ é uma matriz escalar. Em particular, $[A,B]^2$ comuta com qualquer outra matriz de $M_2(\mathbb{R})$, ou seja,

$$[[A,B]^2, C] = 0,$$

para quaisquer $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$. Segue que $[[x,y]^2, z]$ é uma identidade de $M_2(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.6. A álgebra de polinômios $\mathbb{Q}[t]$ é uma álgebra associativa e comutativa, ou seja, $\mathbb{Q}[t]$ satisfaz as identidades

$$\begin{aligned}(xy)z - x(yz) &= 0;\\ xy - yx &= 0;\end{aligned}$$

em que $x, y, z \in X$.

Seja $I \subseteq \mathcal{F}\{X\}$ um subconjunto de elementos da álgebra livre não associativa. A classe das álgebras que satisfazem todas as identidades de I é chamada de *variedade de álgebras* definida por I. Dizemos que A é uma $\mathcal{V}$-álgebra, ou uma álgebra de $\mathcal{V}$, se A pertence à variedade $\mathcal{V}$. A seguir, definiremos algumas variedades que serão importante no decorrer deste texto:

Exemplos 1.7. Nos exemplos a seguir, $x, y, z \in X$.

1. A variedade das *álgebras associativas*, denotada por As, é a classe das álgebras que satisfazem a identidade

$$(x, y, z) = 0, \quad \text{ou seja,} \quad (xy)z = x(yz).$$

A variedade das álgebras associativas contém exemplos importantes de álgebras estudadas em diversas outras áreas da matemática, como os corpos, as álgebras de polinômios, a álgebra dos quatérnios e a álgebras de matrizes com entradas em corpos. A teoria das álgebras associativas ganhou forma no começo do século XX, com os trabalhos de T. Molien (no caso de álgebras sobre um corpo algrbricamente fechado) e J. H. M. Wedderburn (no caso de um corpo arbitrário) [vdW85, p. 210].

2. A variedade das *álgebras de Lie*, denotada por Lie, é a classe das álgebras que satisfazem as identidades

$$x^2 = 0;$$
$$J(x, y, z) = 0,$$

em que

$$J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y.$$

Se A é uma álgebra associativa, então podemos definir o seguinte produto sobre elementos os de A:

$$[a, b] = ab - ba,$$

para $a, b \in A$. A álgebra munida deste produto é uma álgebra de Lie e é denotada por $A^{(-)}$. O Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt mostra que toda álgebra de Lie é isomorfa a uma subálgebra de $A^{(-)}$, para alguma álgebra associativa A. A teoria das álgebras de Lie é ubíqua: o estudo de álgebras de Lie é útil, por exemplo, em Física, na Teoria das Equações Diferenciais e em diversas subáreas de Geometria [vdW85, p. 160-174][Olv93]. Na década de 1870, S. Lie introduziu a definição de álgebras de Lie motivado pela conexão destas com grupos de Lie. O estudo da estrutura das álgebras de Lie foi iniciado com os trabalhos de S. Lie, F. Engel, W. Killing e E. Cartan a partir do final do século XIX [vdW85, p. 166, 167].

3. A variedade das *álgebras de Jordan*, denotada por Jord, é a classe das álgebras que satisfazem as identidades

$$xy = yx;$$
$$(x, y, x^2) = 0.$$

Se A é uma álgebra associativa e F é um corpo de característica diferente de dois, então podemos definir o seguinte produto sobre elementos os de A:

$$a \circ b = \frac{ab + ba}{2},$$

para $a, b \in A$. A álgebra munida deste produto é uma álgebra de Jordan e é denotada por $A^{(+)}$. Ao contrário do que ocorre com álgebras de Lie, nem toda álgebra de Jordan pode ser escrita como subálgebra de $A^{(+)}$, para alguma álgebra associativa A. As álgebras de Jordan foram definidas inicialmente em 1933 por P. Jordan, J. von Neumann e E. Wigner [McC04, p. 39]. O estudo da estrutura de álgebras de Jordan foi iniciado por A. A. Albert e N. Jacobson, que classificaram as álgebras de Jordan de dimensão finita sobre um corpo de característica diferente de dois.

O estudo de álgebras de Jordan é útil em diversas áreas do conhecimento, entre elas a Mecânica Quântica, a Geometria Diferencial e a Geometria Projetiva [McC04, p. 1].

4. A variedade das *álgebras alternativas*, denotada por Alt, é a classe das álgebras que satisfazem as identidades

$$(x, y, y) = 0;$$
$$(x, x, y) = 0.$$

Esta variedade contém as álgebras associativas, a álgebra dos octônions, entre outras. A teoria das álgebras alternativas foi introduzida por M. Zorn em 1930. Uma das motivações iniciais para o seu estudo foram os trabalhos de R. Moufang no contexto de Geometria Projetiva. Uma importante caracterização das álgebras alternativas é dada pelo Teorema de Artin: uma álgebra é alternativa se, e somente se, toda subálgebra gerada por dois elementos é associativa.

5. A variedade das *álgebras alternativas à direita*, aqui denotada por Alt_d, é a classe das álgebras que satisfazem a identidade

$$(x, y, y) = 0.$$

Esta variedade contém álgebras associativas, alternativas, entre outras.

6. A variedade das *álgebras de tipo* $(-1, 1)$, aqui denotada por $\mathcal{A}(-1, 1)$, é a classe das álgebras que satisfazem as identidades

$$(x, y, y) = 0;$$
$$J^{(-)}(x, y, z) = 0,$$

em que

$$J^{(-)}(x, y, z) = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y].$$

Uma álgebra alternativa à direita A é do tipo $(-1, 1)$ se, e somente se, $A^{(-)}$ é uma álgebra de Lie. A classe $\mathcal{A}(-1, 1)$ é uma subclasse das álgebras alternativas à direita que contém a variedade das álgebras associativas, mas não contém a variedade das álgebras alternativas. As álgebras de octônions são exemplos de álgebras alternativas que não são do tipo $(-1, 1)$. Mais precisamente, se o corpo base tem característica diferente de dois e três, então $\mathcal{A}(-1, 1) \cap \mathrm{Alt} = \mathrm{As}$.

7. A variedade das *álgebras* $(-1,1)$*-binárias*, aqui denotada por $\mathrm{Bin}(-1,1)$, é a classe das álgebras que satisfazem as identidades

$$(x,y,y) = 0;$$
$$[(x,x,y),y] = 0.$$

Sobre um corpo base de característica zero, esta variedade conta com uma caracterização importante, semelhante à caracterização de álgebras alternativas dada pelo Teorema de Artin: Uma álgebra é $(-1,1)$-binária se, e somente se, toda sua subálgebra gerada por dois elementos é de tipo $(-1,1)$. Esta variedade contém a variedade das álgebras alternativas e é uma subclasse da variedade das álgebras alternativas à direita.

8. A variedade das *álgebras de Malcev*, aqui denotada por Malc, é a classe das álgebras que satisfazem as identidades

$$x^2 = 0;$$
$$J(x,y,xz) = J(x,y,z)x.$$

As álgebras desta variedade foram definidas por A. Malcev, em 1955. Esta variedade contém a variedade das álgebras de Lie e a relação das álgebras de Malcev com loops analíticos generaliza a relação de álgebras de Lie e grupos de Lie. Se A é uma álgebra alternativa, então $A^{(-)}$ é uma álgebra de Malcev. [Sag61]

9. A variedade das *álgebras anticomutativas*, aqui denotada por ACom, é a classe das álgebras que satisfazem a identidade

$$xy = -yx.$$

Esta variedade contém a variedade das álgebras de Malcev e, portanto, também contém as álgebras de Lie.

10. A variedade das *álgebras Malcev-admissíveis*, aqui denotada por Malc_a, é a classe das álgebras que satisfazem a identidade

$$J^{(-)}(x,y,[x,z]) = \left[J^{(-)}(x,y,z), x \right].$$

Uma álgebra A é Malcev-admissível se, e somente se, a álgebra $A^{(-)}$ é uma álgebra de Malcev. Esta variedade inclui a variedade das álgebras alternativas e a variedade das álgebras do tipo $(-1,1)$.

11. A variedade das *álgebras alternativas à direita Malcev-admissíveis*, aqui denotada por $\mathrm{Alt}_d \cap \mathrm{Malc}_a$, é a classe das álgebras que satisfazem as identidades

$$(x,y,y) = 0;$$
$$J^{(-)}(x,y,[x,z]) = \left[J^{(-)}(x,y,z), x \right].$$

Assim como a variedade das álgebras $(-1,1)$-binárias, esta variedade contém a variedade das álgebras alternativas e é uma subclasse da variedade das álgebras alternativas à direita.

12. A variedade das *álgebras de potências associativas*, aqui denotada por PA, é a classe das álgebras tais que qualquer subálgebra gerada por um elemento é uma álgebra associativa. Precisamente, para quaisquer palavras $w_1(x_1,\ldots,x_n), w_2(x_1,\ldots,x_n) \in W\{X\}$ tais que cada letra x_i ocorre o mesmo número de vezes em w_1 e w_2, as álgebras de potências associativas satisfazem a identidade

$$w_1(x,\ldots,x) = w_2(x,\ldots,x).$$

Exemplos das identidades satisfeitas por álgebras de potências associativas são

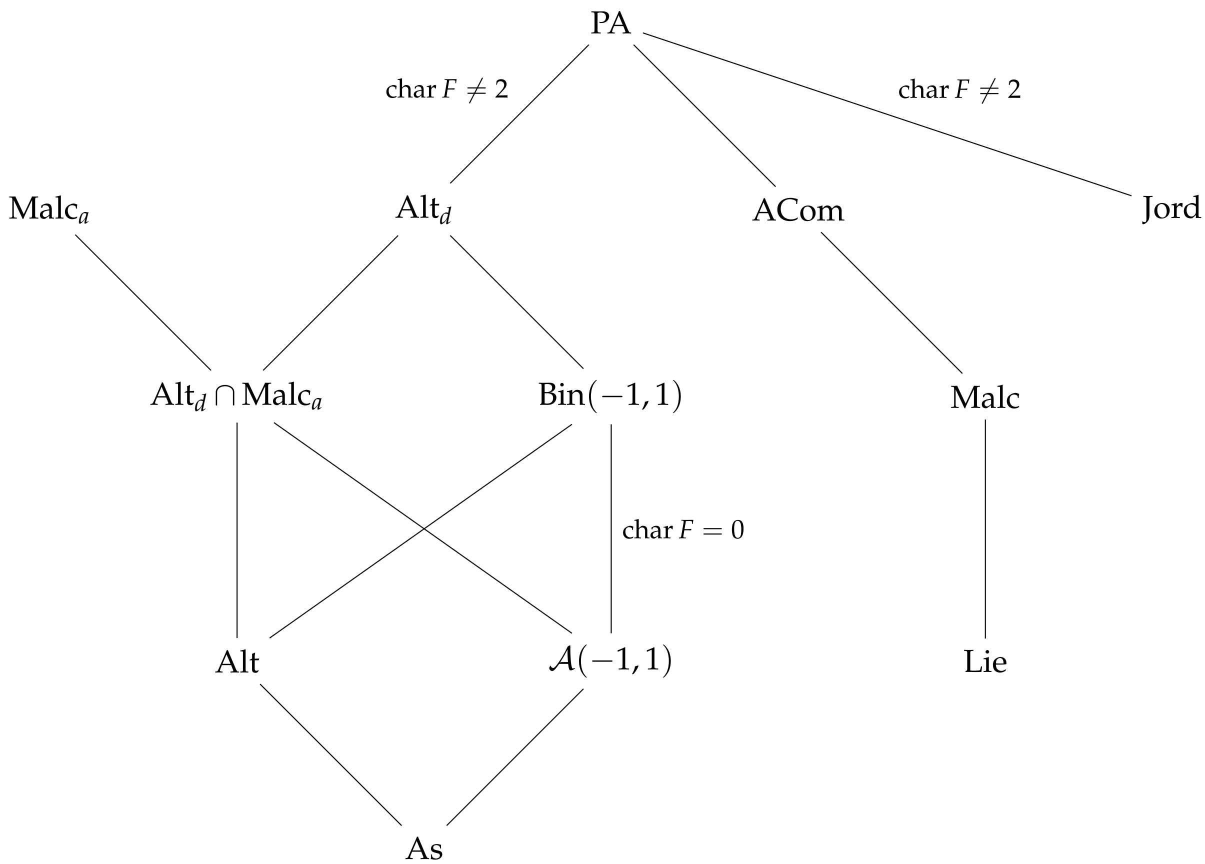
$$\begin{aligned} (xx)x &= x(xx); \\ ((xx)x)x &= (xx)(xx); \\ x(x(xx)) &= (xx)(xx). \end{aligned}$$

É sabido que se F é um corpo de característica zero, então PA é a variedade definida pelas identidades

$$\begin{aligned} (x,x,x) &= 0; \\ (x^2,x,x) &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se F é um corpo de característica positiva, então PA é uma variedade que só pode ser definida com uma quantidade infinita de identidades, conforme mostrado por A. T. Gainov, em 1970 (conferir [Gai70]). A variedade das álgebras de potências associativas é muito extensa: contém a variedade das álgebras anticomutativas, a variedade das álgebras alternativas e se F é um corpo de característica diferente de dois, contém a variedade das álgebras alternativas à direita e a variedade das álgebras de Jordan.

O seguinte esquema representa as relações de inclusão entre as variedades descritas anteriormente.



Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras. Defina

$$I(\mathcal{V}) = \{p \in F\{X\} \mid p \text{ é identidade de qualquer álgebra de } \mathcal{V}\} \cup \{0\}.$$

O conjunto $I(\mathcal{V})$ é um *T-ideal* de $F\{X\}$, isto é, um ideal de $F\{X\}$ invariante por endomorfismos de $F\{X\}$. O conjunto $I(\mathcal{V})$ é denominado *T-ideal das identidades de* $\mathcal{V}$.

Exemplo 1.8. A variedade Alt_d é definida pela identidade

$$p(x,y) = (x,x,y) = x^2y - x(xy) = 0.$$

Seja $z \in X$ distinto de x, y e considere os endomorfismos $\phi_1, \phi_2 : F\{X\} \to F\{X\}$ determinados pelas funções

$$\begin{aligned} f_1 : X &\to F\{X\} \\ x &\mapsto x + z \\ y &\mapsto y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f_2 : X &\to F\{X\} \\ x &\mapsto z \\ y &\mapsto y \end{aligned}$$

respectivamente. Como $p(x,y) \in I(\mathrm{Alt}_d)$ é identidade das álgebras alternativas à direita e $I(\mathrm{Alt}_d)$ é invariante a endomorfismos de $F\{X\}$, são válidas em Alt_d as identidades

$$p(x+z,y)=0 \qquad \text{e} \qquad p(z,y)=0,$$

pois,

$$p(x+z,y)=\phi_1(p(x,y)) \qquad \text{e} \qquad p(z,y)=\phi_2(p(x,y)).$$

Segue que

$$\begin{aligned}0 &= p(x+z,y)-p(x,y)-p(z,y)\\ &= (x+z,x+z,y)-(x,x,y)-(z,z,y)\\ &= (x,x,y)+(x,z,y)+(z,x,y)+(z,z,y)-(x,x,y)-(z,z,y)\\ &= (x,z,y)+(z,x,y)\end{aligned}$$

e, portanto, $(x,z,y)+(z,x,y)$ é uma identidade de álgebras alternativas à direita.

Observação. O processo feito no Exemplo 1.8 é chamado de linearização de identidades. Não vamos aqui descrever o processo, mas indicamos ao leitor a referência [ZSSS82, p. 9-17].

Se $\mathcal{V}$ é uma variedade, então a $\mathcal{V}$-álgebra $F_{\mathcal{V}}\{X\} = F\{X\}/I(\mathcal{V})$ possui a seguinte propriedade: Se A é uma álgebra de $\mathcal{V}$ e $f : X \to A$ é uma função, então existe um único homomorfismo de álgebras $\phi : F_{\mathcal{V}}\{X\} \to A$ tal que $\phi|_X = f$. A álgebra $F_{\mathcal{V}}\{X\}$ é chamada de *$\mathcal{V}$-álgebra livre* gerada por X.

Considere $\mathcal{V} = \mathrm{As}$ a variedade das álgebras associativas e denote por $F\langle X\rangle$ a álgebra $F_{\mathrm{As}}\{X\}\dotplus F$ cujo produto é dado por

$$(w_1+\alpha_1)(w_2+\alpha_2) = (w_1w_2+\alpha w_2+\beta w_1)+(\alpha\beta).$$

A álgebra $F\langle X\rangle$ possui unidade $1 \in F$ e é uma álgebra associativa. Além disso, $F\langle X\rangle$ possui a seguinte propriedade: Seja A uma álgebra associativa com unidade 1_A e $f : X \to A$ uma função, então existe um único homomorfismo de álgebras $\phi : F\langle X\rangle \to A$ tal que $\phi|_X = f$ e $\phi(1) = 1_A$. A álgebra $F\langle X\rangle$ é chamada de *álgebra associativa livre com unidade* gerada por X.

O *grau* de uma palavra não nula $w = w(x_1,\ldots,x_n) \in W\{X\}$ é a quantidade de letras de X que compõem w. Denotamos o grau da palavra w por $\deg w$. O *grau com respeito à letra* $x_i \in X$ de uma palavra $w(x_1,\ldots,x_n) \in W\{X\}$ é a quantidade de letras x_i que compõem w. Denotamos o grau com respeito à x_i da palavra w por $\deg_{x_i} w$. Se $p = p(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i w_i(x_1,\ldots,x_n) \in F\{X\}$ é um elemento não nulo, em que $w_1,\ldots,w_m \in W\{X\}$ são palavras não associativas e $\alpha_1,\ldots,\alpha_m \in F$ são elementos não nulos, então o grau de p é definido como

$$\deg p = \max_{1\le k\le m} \deg w_k$$

Analogamente, o grau de p com respeito à letra x_i é definido como

$$\deg_{x_i} p = \max_{1\leq k\leq m} \deg_{x_i} w_k$$

Por convenção, o grau (analogamente, o grau com respeito à letra x_i) do elemento 0 é $-\infty$.

Se $p(x_1, \ldots, x_n)$ é um elemento não nulo com

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i}^{m} \alpha_i w_i(x_1, \ldots, x_n),$$

em que $w_1, \ldots, w_m \in W\{X\}$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F$, então dizemos que $p(x_1, \ldots, x_n)$ é um *elemento homogêneo* se as palavras $w_1, \ldots, w_m$ têm o mesmo grau com respeito a letra x_k, para $k = 1, \ldots, n$.

Se $p(x_1, \ldots, x_n) \in F\{X\}$ é um elemento homogêneo, o *multigrau* de p é definido como a sequência

$$(\deg_{x_1} p, \deg_{x_2} p, \ldots).$$

Esta sequência é uma sequência *quase nula*, ou seja, possui apenas uma quantidade finita de elementos não nulos.

Todo elemento $p \in F\{X\}$ não nulo pode ser escrito como uma soma $p = p_1 + \cdots + p_n$, em que $p_1, \ldots, p_n \in F\{X\}$ são elementos homogêneos com multigraus distintos dois a dois. Os elementos $p_1, \ldots, p_n$ chamados de *componentes homogêneas* de p.

Exemplos 1.9. 1. O elemento $p_1 = (x_1^2 x_2)x_4 + (x_1x_2)(x_1x_4)$ é homogêneo, pois

$$\begin{aligned}
\deg_{x_1}(x_1^2x_2)x_4 &= \deg_{x_1}(x_1x_2)(x_1x_4) = 2\\
\deg_{x_2}(x_1^2x_2)x_4 &= \deg_{x_2}(x_1x_2)(x_1x_4) = 1\\
\deg_{x_4}(x_1^2x_2)x_4 &= \deg_{x_4}(x_1x_2)(x_1x_4) = 1
\end{aligned}$$

O grau de p_1 é $\deg p_1 = 4$. O multigrau de p_1 é $(2, 1, 0, 1, 0, 0, \ldots)$.

2. O elemento $p_2 = x_1{x_2}^2 + 2(x_1x_2)x_2 + x_2(x_1x_2)$ é homogêneo, pois

$$\begin{aligned}
\deg_{x_1} x_1{x_2}^2 &= \deg_{x_1}(x_1x_2)x_2 = \deg_{x_1} x_2(x_1x_2) = 1\\
\deg_{x_2} x_1{x_2}^2 &= \deg_{x_2}(x_1x_2)x_2 = \deg_{x_2} x_2(x_1x_2) = 2
\end{aligned}$$

O grau de p_2 é $\deg p_2 = 3$. O multigrau de p_2 é $(1, 2, 0, 0, \ldots)$.

3. O elemento $p_3 = x_1(x_2x_1) + (x_2x_1)x_1 + {x_1}^3 + x_1x_2$ não é homogêneo. Suas componentes homogêneas são

$$x_1(x_2x_1) + (x_2x_1)x_1, \qquad {x_1}^3 \qquad \text{e} \qquad x_1x_2.$$

Fixe I um ideal da álgebra $F\{X\}$. Denote por Λ o conjunto das sequências quase nulas de números inteiros positivos. Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \Lambda$, então podemos definir o conjunto I^α como a união do conjunto $\{0\}$ e o subconjunto dos elementos homogêneos de I com multigrau $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$. O conjunto I^α é um subespaço vetorial de I para qualquer sequência quase nula de números naturais $\alpha \in \Lambda$.

Dizemos que I é um ideal homogêneo de $F\{X\}$, se I puder ser escrito como $I = \sum_{\alpha\in\Lambda} I^\alpha$. Em outras palavras, I é um ideal homogêneo se, para qualquer elemento não nulo p pertencente ao ideal I, as componentes homogêneas de p também pertencem a I. Evidentemente, $F\{X\}$ é um ideal homogêneo de si próprio.

Uma variedade de álgebras é chamada *homogênea* se o T-ideal de suas identidades é um ideal homogêneo de $F\{X\}$. Em outras palavras, a variedade $\mathcal{V}$ é homogênea se as álgebras de $\mathcal{V}$ satisfazem todas as componentes homogêneas de qualquer identidade $p \in I(\mathcal{V})$.

Exemplos 1.10. 1. Se F é um corpo infinito, então toda variedade de álgebras sobre F é homogênea (conferir [ZSSS82, p. 8]);

2. Seja F_2 o corpo de dois elementos. A variedade das F_2-álgebras de Boole é definida pelas identidades

$$(xy)z = x(yz);$$
$$x^2 - x = 0.$$

Observe que essa variedade não é homogênea, uma vez que F_2 é uma álgebra da variedade que não satisfaz nenhuma das componentes homogêneas de $x^2 - x$.

1.2 Bimódulos

Nesta seção vamos apresentar conceitos sobre bimódulos com particular interesse em sub-bimódulos gerados por um conjunto, bimódulos de uma variedade e as propriedades que os últimos possuem.

Se A é uma álgebra, então um *A-bimódulo* é uma tripla ordenada (M, λ, ρ) em que M é um espaço vetorial e

$$\begin{aligned} \rho : A &\to \mathcal{L}(M) \\ a &\mapsto \rho_a \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \lambda : A &\to \mathcal{L}(M) \\ a &\mapsto \lambda_a \end{aligned}$$

são transformações lineares denominadas *ação à direita* e *ação à esquerda*, respectivamente. Quando a álgebra A, e as ações ρ e λ estiverem subentendidas, vamos nos referir simplesmente ao bimódulo M.

Exemplo 1.11. Se A é uma álgebra, então (A, L, R) é um A-bimódulo, onde L_a, R_a são, respectivamente, os operadores de multiplicação à esquerda e à direita por a. O A-bimódulo (A, L, R) é chamado de A-bimódulo regular.

Se A é uma álgebra, (M, λ, ρ) é um A-bimódulo, e $N \subseteq M$ é um subconjunto, então defina os espaços

$$A \cdot N = \operatorname{span} \langle \lambda_a(x) \mid a \in A, x \in N \rangle \text{, e}$$
$$N \cdot A = \operatorname{span} \langle \rho_a(x) \mid a \in A, x \in N \rangle$$

Dizemos que N é um A-sub-bimódulo de M se $A \cdot N \subseteq N$ e $N \cdot A \subseteq N$.

É fácil ver que a intersecção arbitrária de sub-bimódulos é também um sub-bimódulo. Dessa forma, para todo subconjunto $S \subseteq M$ do A-bimódulo M, podemos definir o sub-bimódulo gerado por S, denotado por $\operatorname{Bimod}\langle S \rangle$, como a intersecção de todos os sub-bimódulos de M que contém S. Por outro lado, podemos definir os espaços

$$B^{(0)}\langle S \rangle = \operatorname{span}\langle S \rangle;$$
$$B^{(k)}\langle S \rangle = A \cdot \left(B^{(k-1)}\langle S \rangle\right) + \left(B^{(k-1)}\langle S \rangle\right) \cdot A, \text{ para } k \geq 1;$$

ou, escrevendo de outra maneira,[1]

$$B^{(k)}\langle S \rangle = \operatorname{span}\left\langle \tau^{(1)}_{a_1} \dots \tau^{(k)}_{a_k}(s) \mid s \in S, a_1, \dots, a_k \in A, \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)} \in \{\lambda, \rho\} \right\rangle.$$

Verifica-se facilmente que $\sum_{k=0}^{\infty} B^{(k)}\langle S \rangle$ é um A-sub-bimódulo de M que contém S e que

$$\operatorname{Bimod}\langle S \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} B^{(k)}\langle S \rangle.$$

A partir de um A-bimódulo (M, λ, ρ) podemos construir o seguinte produto sobre o espaço vetorial $A \dot{+} M$:

$$(a + x)(b + y) = ab + \lambda_a(y) + \rho_b(x),$$

para quaisquer $a, b \in A$ e $x, y \in M$. Chamamos a álgebra $A \dot{+} M$ munida desta multiplicação de *extensão cindida-nula* do A-bimódulo M. Se $\mathcal{V}$ é uma variedade, dizemos que um bimódulo pertence a $\mathcal{V}$ (ou que M é um *$\mathcal{V}$-bimódulo*) se a respectiva extensão cindida-nula é uma álgebra de $\mathcal{V}$. É importante notar que com a multiplicação definida anteriormente, A é uma subálgebra de $A \dot{+} M$ e M é um ideal de $A \dot{+} M$.

Para facilitar a tarefa de determinar quando um bimódulo pertence a alguma variedade, vamos apresentar agora o conceito de identidades de operadores de bimódulo. Considere o conjunto $T_X = \{l_w, r_w \mid w \in W\{X\}\}$ e $F\langle T_X \rangle$ a álgebra associativa livre com unidade gerada por T_X. Se (M, λ, ρ) é um A-bimódulo e $\phi : F\{X\} \to A$ é um homomorfismo de álgebras, então podemos definir um homomorfismo de álgebras $\phi_M : F\langle T_X \rangle \to \mathcal{L}(M)$ determinado por $\phi_M(1) = Id_M$, $\phi_M(r_w) = \rho_{\phi(w)}$ e $\phi_M(l_w) = \lambda_{\phi(w)}$, em que $w \in W\{X\}$.

Dizemos que um elemento $p \in F\langle T_X \rangle$ é uma *identidade de operadores* do bimódulo (M, λ, ρ) ou, quando não houver ambiguidade, é uma identidade do bimódulo (M, λ, ρ) se, para qualquer homomorfismo de álgebras $\phi : F\{X\} \to A$, temos que $\phi_M(p) = 0$.

[1] Frequentemente faremos uso do seguinte abuso de notação: seja $a \in A$, então escreveremos "τ_a, em que $\tau \in \{\lambda, \rho\}$" para dizer que τ_a é um operador de $\mathcal{L}(M)$ da forma λ_a ou ρ_a.

Exemplo 1.12. Sejam A uma álgebra e (M, λ, ρ) um bimódulo associativo, ou seja, M é um A-bimódulo tal que a extensão cindida-nula $A \dot{+} M$ é uma álgebra que satisfaz a identidade

$$(xy)z - x(yz) = 0.$$

Em particular, para quaisquer $a, b \in A$ e $m \in M$,

$$0 = (ab)m - a(bm) = (\lambda_{ab} - \lambda_a \lambda_b)(m)$$

Segue que, para todo homomorfismo $\phi : F\{X\} \to A$ e todo $m \in M$, temos

$$\left(\phi_M(l_{xy} - l_x l_y)\right)(m) = (\lambda_{\phi(x)\phi(y)} - \lambda_{\phi(x)}\lambda_{\phi(y)})(m) = 0$$

Conclui-se que $l_{xy} - l_x l_y$ é uma identidade de (M, λ, ρ). Da mesma maneira, deduz-se que $r_{yx} - r_x r_y$ e $l_x r_y - r_y l_x$ são identidades de (M, λ, ρ).

Exemplo 1.13. Sejam A uma álgebra associativa, (M, λ, ρ) um A-bimódulo associativo e $m \in M$. Neste caso, o A-sub-bimódulo gerado por m é o espaço

$$\begin{aligned} \text{Bimod}\,\langle m \rangle &= B^{(0)}\langle m \rangle + B^{(1)}\langle m \rangle + B^{(2)}\langle m \rangle \\ &= \text{span}\,\langle m, \lambda_a(m), \rho_a(m), \lambda_a\rho_b(m) \mid a, b \in A \rangle \\ &= \text{span}\,\langle m \rangle + A \cdot m + m \cdot A + A \cdot (m \cdot A) \end{aligned}$$

Para demonstrar isso, precisamos mostrar que $B^{(k+1)}\langle m \rangle \subseteq B^{(k)}\langle m \rangle$ para qualquer inteiro positivo $k \geq 2$. Vamos mostrar que $B^{(3)}\langle m \rangle \subseteq B^{(2)}\langle m \rangle$ e os demais casos são análogos. Usaremos as seguintes identidades obtidas no exemplo anterior, válidas em qualquer bimódulo associativo:

$$\begin{aligned} l_x l_y &= l_{xy}; \\ l_x r_y &= r_y l_x; \\ r_x r_y &= r_{yx}. \end{aligned}$$

Para quaisquer $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \tau^{(3)} \in \{\lambda, \rho\}$ temos que ao menos dois deles são iguais. Para simplificar o argumento, vamos supor que $\tau^{(i)} = \tau^{(j)} = \lambda$, para $1 \leq i < j \leq 3$ (o caso em que dois operadores coincidem com ρ é completamente análogo), e vamos analisar o elemento $\tau_a^{(1)}\tau_b^{(2)}\tau_c^{(3)}(m)$, em que $a, b, c \in A$.

Caso 1: $\tau_a^{(1)}\tau_b^{(2)}\tau_c^{(3)}(m) = \lambda_a\lambda_b\tau_c^{(3)}(m) = \lambda_{ab}\tau_c^{(3)}(m) \in B^{(2)}\langle m \rangle$;
Caso 2: $\tau_a^{(1)}\tau_b^{(2)}\tau_c^{(3)}(m) = \lambda_a\rho_b\lambda_c(m) = \rho_b\lambda_a\lambda_c(m) = \rho_b\lambda_{ac}(m) \in B^{(2)}\langle m \rangle$;
Caso 3: $\tau_a^{(1)}\tau_b^{(2)}\tau_c^{(3)}(m) = \tau_a^{(1)}\lambda_b\lambda_c(m) = \tau_a^{(3)}\lambda_{bc}(m) \in B^{(2)}\langle m \rangle$;
Isso conclui nossa demonstração.

O Exemplo 1.13 mostra que, através das identidades da variedade As, podemos escrever um bimódulo associativo gerado por um elemento de maneira bastante simples. No caso de uma álgebra A e um A-bimódulo M em uma variedade, nem sempre conseguimos usar identidades para simplificar, por exemplo, um elemento da forma

$$\lambda_{a_1} \dots \lambda_{a_n}(m) \in \operatorname{Bimod}\langle m \rangle\,,$$

em que $a_1, \dots, a_n \in A$ e $m \in M$.

Exemplo 1.14. Considere a variedade de álgebras alternativas à direita Alt_d. Conforme visto no Exemplo 1.8, a variedade Alt_d satisfaz as identidades

$$(x, y, y) = 0; \tag{1.15}$$
$$(x, y, z) + (x, z, y) = 0. \tag{1.16}$$

Suponha que $A \dot{+} M$ seja um bimódulo alternativo à direita. Então

1. fazendo $x \in M$ e $y \in A$ em (1.15), deduz-se que $p_1(y) = r_y r_y - r_{y^2}$ é identidade de operadores do A-bimódulo M;

2. fazendo $z \in M$ e $x, y \in A$ em (1.16), deduz-se que $p_2(x, y) = l_{xy} - l_y l_x + r_y l_x - l_x r_y$ é identidade de operadores do A-bimódulo M.

Reciprocamente, suponha que M é um A-bimódulo que satisfaz p_1 e p_2, tome $a, b \in A$ e $m, n \in M$. Assim, lembrando que $M^2 = 0$, temos que

$$\begin{aligned}(a + m, b + n, b + n) &= (a, b, b) + (m, b, b) + (a, n, b) + (a, b, n)\\ &= (\rho_b \rho_b - \rho_{b^2})(a) + (\rho_b \rho_b - \rho_{b^2})(m)\\ &+ (\lambda_{ab} - \lambda_b \lambda_a + \rho_b \lambda_a - \lambda_a \rho_b)(n) = 0.\end{aligned}$$

Conclui-se que a extensão cindida-nula satisfaz a identidade (x, y, y) e, portanto, é uma álgebra alternativa à direita.

Definição 1.17. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade. Defina $I^B(\mathcal{V}) \subseteq F\langle T_X \rangle$ como o subconjunto das identidades satisfeitas por todos os $\mathcal{V}$-bimódulos. O conjunto $I^B(\mathcal{V})$ é um ideal de $F\langle T_X \rangle$ chamado de *ideal das identidades de operadores de $\mathcal{V}$-bimódulos*. Dizemos que $S \subseteq F\langle T_X \rangle$ é um *conjunto gerador* de $I^B(\mathcal{V})$ se, para todo bimódulo M,

$$M \text{ é } \mathcal{V}\text{-bimódulo} \iff M \text{ satisfaz as identidades de } S$$

O Exemplo 1.14 mostra que o conjunto

$$S_{\mathrm{Alt}_d} = \{r_y r_y - r_{y^2}, l_{xy} - l_y l_x + r_y l_x - l_x r_y\}$$

é um conjunto gerador de $I^B(\mathrm{Alt}_d)$.

Exemplos 1.18. 1. O seguinte conjunto é gerador de identidades de bimódulos alternativos:

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{Alt}} = \{ & l_x l_x - l_{x^2}, \\ & r_x r_x - r_{x^2}, \\ & l_{xy} - l_x l_y + r_y l_x - l_x r_y, \\ & r_{xy} - r_y r_x + l_x r_y - r_y l_x \}. \end{aligned}$$

2. O seguinte conjunto é gerador de identidades de bimódulos de Jordan:

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{Jord}} = \{ & r_x - l_x, \\ & l_{x^2} l_y + l_{yx} l_x - l_{x^2 y} - 2 l_x l_y l_x, \\ & l_{x^2} l_x - l_x l_{x^2} \}. \end{aligned}$$

3. O seguinte conjunto é gerador de identidades de bimódulos de Lie:

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{Lie}} = \{ & r_x + l_x, \\ & l_x l_y + l_y r_x + r_{xy} \}. \end{aligned}$$

1.3 Superálgebras

Nesta seção vamos introduzir o conceito de superálgebras com o objetivo de apresentar a definição de álgebra envolvente de Grassmann.

Definição 1.19. Seja G um grupo e A uma álgebra. Dizemos que A é *G-graduada* se A puder ser escrita como soma de subespaços

$$A = \sum_{g \in G} A_g$$

de forma que $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$.

Definição 1.20. Uma *superálgebra* é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, em que $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ é o grupo com dois elementos.

Se $A = A_0 + A_1$ é uma superálgebra, então chamamos o espaço A_0 de *parte par* de A e o espaço A_1 de *parte ímpar* de A. Os elementos de A_0 são chamados de elementos pares e os elementos de A_1 são chamados de elementos ímpares. Se $a \in A_0 \cup A_1$ é um elemento não nulo, então a paridade de a é dada por

$$|a| = \begin{cases} 0, & \text{se } a \in A_0; \\ 1, & \text{se } a \in A_1. \end{cases}$$

Pela definição, podemos observar que:

1. A_0 é uma subálgebra de A;
2. A_1 é um A_0-bimódulo;
3. $(A_1)^2 \subseteq A_0$.

Seja $F\langle x_1, x_2, \dots \rangle$ a álgebra associativa livre com unidade gerada por $\{x_1, x_2, \dots\}$. Podemos definir o ideal I gerado pelos elementos da forma $x_i x_j + x_j x_i$, em que i, j são inteiros positivos. O quociente $G = F\langle x_1, x_2, \dots \rangle / I$ é gerado pelos elementos $e_k = x_k + I$ que satisfazem as relações $e_i e_j = -e_j e_i$, em que i, j são inteiros positivos. A álgebra G é chamada de *álgebra de Grassmann* e o conjunto

$$\{1\} \cup \{e_{i_1} \dots e_{i_k} \mid k \geq 1,\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k\}$$

é uma base de G.

A álgebra G é uma superálgebra, pois $G = G_0 + G_1$, em que

$$G_0 = \operatorname{span}\langle 1 \rangle + \operatorname{span}\left\langle e_{i_1} \dots e_{i_{2k}} \mid k \geq 1,\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k} \right\rangle$$

e

$$G_1 = \operatorname{span}\left\langle e_{i_1} \dots e_{i_{2k-1}} \mid k \geq 1,\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k-1} \right\rangle.$$

Exemplo 1.21. Seja $M_2(F)$ a álgebra de matrizes 2×2 com entradas em F. Observe que $M_2(F) = A_0 + A_1$ é uma superálgebra, em que

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle|\ a, d \in F \right\} \qquad \text{e} \qquad A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle|\ b, c \in F \right\}.$$

Se $A = A_0 + A_1$ é uma superálgebra, então o produto tensorial $A \otimes G$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} A \otimes G &= (A_0 + A_1) \otimes (G_0 + G_1) \\ &= A_0 \otimes G_0 + A_0 \otimes G_1 + A_1 \otimes G_0 + A_1 \otimes G_1 \\ &= (A_0 \otimes G_0 + A_1 \otimes G_1) + (A_0 \otimes G_1 + A_1 \otimes G_0). \end{aligned}$$

É fácil verificar que $A \otimes G$ é uma superálgebra com partes par e ímpar dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} (A \otimes G)_0 &= A_0 \otimes G_0 + A_1 \otimes G_1 \\ (A \otimes G)_1 &= A_0 \otimes G_1 + A_1 \otimes G_0. \end{aligned}$$

A parte par da superálgebra $A \otimes G$ também é denotada por $G(A)$ e é chamada de *envolvente de Grassmann* da superálgebra A.

Observe que, mesmo que $A = A_0 + A_1$ seja uma superálgebra de dimensão finita, $G(A)$ será uma álgebra de dimensão infinita. A envolvente de Grassmann de superálgebras de dimensão finita será nosso objeto de estudo da Proposição 3.12, no Capítulo 3.

Definição 1.22. Se $\mathcal{V}$ é uma variedade, então dizemos que a superálgebra $A = A_0 + A_1$ é uma *superálgebra da variedade* $\mathcal{V}$ ou uma $\mathcal{V}$-superálgebra, se a envolvente de Grassmann $G(A)$ é uma álgebra de $\mathcal{V}$.

Se $G(A)$ é uma álgebra da variedade $\mathcal{V}$, então, em geral, a superálgebra $A = A_0 + A_1$ não é uma álgebra da variedade $\mathcal{V}$.

Exemplo 1.23. Suponha que a característica de F seja diferente de dois e considere $A = A_0 + A_1$ uma superálgebra comutativa, ou seja, uma superálgebra tal que a envolvente de Grassmann $G(A)$ é uma álgebra comutativa. Então $G(A)$ satisfaz a identidade $xy - yx = 0$. Em particular, para quaisquer $a, b \in A_0 \cup A_1$ não nulos e para quaisquer $e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}$, $e_{j_1}, \ldots, e_{j_n} \in G$ com

$$1 \leq i_1 < \cdots < i_m \qquad\qquad 1 \leq j_1 < \cdots < j_n$$

e de forma que a paridade de $e_{i_1} \ldots e_{i_m} \in G$ seja igual a de a, assim como a paridade de $e_{j_1} \ldots e_{j_n} \in G$ seja igual a de b. Nestas condições, vale que $a \otimes e_{i_1} \ldots e_{i_m}, b \otimes e_{j_1} \ldots e_{j_n} \in G(A)$ e

$$\begin{aligned}
0 &= (a \otimes e_{i_1} \ldots e_{i_m})(b \otimes e_{j_1} \ldots e_{j_n}) - (b \otimes e_{j_1} \ldots e_{j_n})(a \otimes e_{i_1} \ldots e_{i_m}) = \\
&= ab \otimes (e_{i_1} \ldots e_{i_m} e_{j_1} \ldots e_{j_n}) - ba \otimes (e_{j_1} \ldots e_{j_n} e_{i_1} \ldots e_{i_m}) \\
&= ab \otimes (e_{i_1} \ldots e_{i_m} e_{j_1} \ldots e_{j_n}) - (-1)^n (ba \otimes e_{i_1} (e_{j_1} \ldots e_{j_n}) e_{i_2} \ldots e_{i_m}) \\
&= \cdots = \\
&= (ab \otimes e_{i_1} \ldots e_{i_m} e_{j_1} \ldots e_{j_n}) - \underbrace{(-1)^n \ldots (-1)^n}_{m \text{ vezes}} (ba \otimes e_{i_1} \ldots e_{i_m} e_{j_1} \ldots e_{j_n}) \\
&= (ab \otimes e_{i_1} \ldots e_{i_m} e_{j_1} \ldots e_{j_n}) - (-1)^{mn} (ba \otimes e_{i_1} \ldots e_{i_m} e_{j_1} \ldots e_{j_n}) \\
&= (ab - (-1)^{mn} ba) \otimes e_{i_1} \ldots e_{i_m} e_{j_1} \ldots e_{j_n} \\
&= (ab - (-1)^{|a||b|} ba) \otimes e_{i_1} \ldots e_{i_m} e_{j_1} \ldots e_{j_n}.
\end{aligned}$$

Podemos concluir que os elementos de A satisfazem

$$ab - (-1)^{|a||b|} ba = 0,$$

para quaisquer $a, b \in A_0 \cup A_1$. Os elementos de A_1, em particular, satisfazem a identidade $ab + ba = 0$ e a álgebra $A = A_0 + A_1$ só é comutativa se $ab = 0$ para quaisquer $a, b \in A_1$.

Se $\mathcal{V}$ é uma variedade e $A = A_0 + A_1$ é uma $\mathcal{V}$-superálgebra, então a subálgebra $A_0 \subseteq A$ é uma álgebra de $\mathcal{V}$.

1.4 Nilpotência, radicais e o radical localmente nilpotente

Começaremos esta seção apresentando o conceito de nilpotência e noções relacionadas. A primeira subseção descreve de maneira resumida o surgimento do conceito de radical, apresenta a definição de radical no sentido de Amitsur-Kurosh e a ilustra com alguns exemplos. A segunda subseção é dedicada ao radical localmente nilpotente, também chamado de radical de Levitzki. Este radical ocupa um papel central na motivação deste trabalho, como visto na Conjectura 1 e conforme será visto nos Capítulos 3 e 4.

Seja A uma álgebra e $a \in A$. Dizemos que a é *nilpotente* se existir um inteiro positivo n tal que, para toda palavra $w(x) \in W\{X\}$ de grau n, $w(a) = 0$. Dizemos que A é *nil* se todos os seus elementos são nilpotentes.

Se B é um subconjunto de A, então defina

- $B^1 = B$ e $B^{n+1} = B^n \cdot B + B^{n-1} \cdot B^2 + \cdots + B \cdot B^n$, para $n \geq 1$;
- $B^{(1)} = B^2$ e $B^{(n+1)} = B^{(n)} \cdot B^{(n)}$, para $n \geq 1$.

Dizemos que a álgebra A é *nilpotente* se existir inteiro positivo n tal que $A^n = 0$. Dizemos que A é *solúvel* se existir inteiro positivo n tal que $A^{(n)} = 0$.

Uma álgebra é chamada *localmente nilpotente* se toda subálgebra finitamente gerada for nilpotente.

1.4.1 Radicais

O conceito de radicais foi empregado inicialmente por J. H. M. Wedderburn, em 1908, na demonstração do seguinte teorema.

Teorema 1.24 (Molien-Wedderburn). *Seja A uma álgebra associativa, com unidade e de dimensão finita. Então*

- *A álgebra A possui um ideal N nilpotente maximal;*
- *O quociente A/N é isomorfo a soma direta de álgebras $B_1 + \cdots + B_k$, em que $B_1, \ldots, B_k$ são álgebras associativas, com unidade, simples e únicas salvo isomorfismos e permutações;*
- *Para todo $i = 1, \ldots, k$, a álgebra B_i é isomorfa à álgebra $M_{n_i}(D_i)$, em que n_i é um número inteiro positivo e D_i é um álgebra de divisão.*

Na nomenclatura moderna, o ideal N é o radical da álgebra A. Em 1927, E. Artin generalizou o Teorema de Molien-Wedderburn para anéis associativos com unidade que satisfazem a condição de cadeia descendente sobre seus ideais à esquerda (ou à direita), provando o que hoje conhecemos como Teorema de Wedderburn-Artin. Uma dificuldade para mostrar o Teorema de Wedderburn-Artin em classes de anéis associativos mais gerais é que, se um anel não satisfaz a condição de cadeia descendente sobre seus ideais à esquerda (ou à direita), então ele não necessariamente possui um ideal nilpotente maximal.

B. L. van der Waerden menciona [vdW85, p. 211] que tentativas de demonstrar o Teorema de Wedderburn-Artin em contextos mais gerais motivaram a definição de novos radicais. Em 1930, G. Köthe definiu o radical nil de um anel associativo como a soma de todos os seus ideais nil. Foi G. Köthe quem cunhou o termo "radical" neste contexto. Em 1943, R. Baer definiu o radical primo de um anel associativo como a intersecção de seus ideais primos. Também em 1943, J. Levitzki definiu o radical localmente nilpotente de um anel associativo como a soma dos seus ideais localmente nilpotentes. Em 1945, Jacobson definiu o radical de Jacobson de um anel associativo R como o maior ideal de R que anula todos os R-módulos à esquerda (ou à direita) simples.

Estes exemplos concretos de radicais motivaram S. A. Amitsur, entre 1952 e 1954, e A. G. Kurosh, em 1953, a definir o conceito de radical de maneira axiomática da seguinte forma:

Definição 1.25. Seja $\mathcal{R}$ uma subclasse da variedade $\mathcal{V}$. Dizemos que $\mathcal{R}$ é um *radical* ou uma *classe radical* (no sentido de Amitsur-Kurosh) de $\mathcal{V}$ se $\mathcal{R}$ satisfaz as seguintes condições:

(1) Para quaisquer $\mathcal{V}$-álgebras A, B e qualquer homomorfismo sobrejetor $\varphi : A \to B$, se $A \in \mathcal{R}$, então $B \in \mathcal{R}$;

(2) Para qualquer $\mathcal{V}$-álgebra A, o ideal
$$\mathcal{R}(A) = \sum\{I \triangleleft A \mid I \in \mathcal{R}\}$$
pertence a $\mathcal{R}$;

(3) Para qualquer $\mathcal{V}$-álgebra A,
$$\mathcal{R}\left(\frac{A}{\mathcal{R}(A)}\right) = 0.$$

Na presença das condições (1) e (2), a condição (3) é equivalente (como pode ser conferido em [GW04, p. 22]) à seguinte condição

(3′) Para qualquer $\mathcal{V}$-álgebra A e qualquer ideal $I \triangleleft A$, se $I, A/I \in \mathcal{R}$, então $A \in \mathcal{R}$.

Se a classe $\mathcal{R}$ é uma classe radical em $\mathcal{V}$, então também dizemos que $\mathcal{V}$ possui radical $\mathcal{R}$. Neste contexto, ideal $\mathcal{R}(A)$ é chamado de *radical da álgebra A*.

Observação. Embora a definição trate de classes radicais como subclasses de variedades de álgebras, a teoria de radicais pode ser considerada em outros contextos algébricos, como em teoria de anéis associativas e teoria de grupos, ou contextos não algébricos, como em teoria de grafos e teoria de espaços topológicos. Para mais detalhes, conferir [GW04, p. 21].

A seguir, temos exemplos de algumas classes radicais:

Exemplos 1.26. 1. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade qualquer. Dizemos que uma álgebra $A \in \mathcal{V}$ é *linearmente localmente solúvel* se, para qualquer subespaço $V \subseteq A$ de dimensão finita, V é solúvel. A subclasse LLS das $\mathcal{V}$-álgebras linearmente localmente solúveis é uma classe radical em $\mathcal{V}$. Este radical é chamado de *radical localmente solúvel*;

2. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade qualquer. Dizemos que uma álgebra $A \in \mathcal{V}$ é *fracamente nil* se, para todo elemento $a \in A$, existir uma palavra $w(x) \in W\{X\}$ tal que $w(a) = 0$. A subclasse w-Nil das $\mathcal{V}$-álgebras fracamente nil é um radical para a variedade $\mathcal{V}$. Este radical é chamado de *radical fracamente nil*.

3. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade contida na variedade PA das álgebras de potências associativas. A subclasse Nil das $\mathcal{V}$-álgebras nil é um radical para $\mathcal{V}$. Este radical é chamado de *radical nil* ou *radical de Köthe* e foi definido inicialmente no contexto de anéis associativos por G. Köthe em 1930;

4. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade. Se A é uma $\mathcal{V}$-álgebra, então defina

$$\operatorname{rad}(A) = \cap\{I \triangleleft A \mid I \text{ é ideal primo}\}.$$

A subclasse $\operatorname{rad} = \{A \in \mathcal{V} \mid \operatorname{rad} A = A\}$ nem sempre é uma classe radical. No caso positivo, rad é chamado de *radical de Baer* ou *radical primo*. Assim como o radical anterior, este foi considerado inicialmente no contexto de anéis associativos, definido em 1943 por R. Baer. A classe rad é radical também na variedade das álgebras alternativas [ZSSS82, p. 181]. É ainda um problema em aberto se a classe rad é radical na variedade das álgebras de Jordan;

1.4.2 Radical localmente nilpotente

Se $\mathcal{V}$ é uma variedade, então defina a subclasse $\ell\text{-}\operatorname{rad}$ das $\mathcal{V}$-álgebras localmente nilpotentes.

Lema 1.27. *A subclasse $\ell\text{-}\operatorname{rad} \subseteq \mathcal{V}$ satisfaz a propriedade*

(1) Para quaisquer $\mathcal{V}$-álgebras A, B e qualquer homomorfismo sobrejetor $\varphi : A \to B$, se A é localmente nilpotente, então B é localmente nilpotente.

Demonstração. Seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo sobrejetor entre as álgebras A e B e suponha que A seja localmente nilpotente.

Se $R = \{b_1, \ldots, b_k\} \subseteq B$ é um subconjunto finito, então provaremos que a subálgebra $\operatorname{alg}\langle R\rangle$ é nilpotente. Como φ é sobrejetora, podemos definir um conjunto $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$, de forma que $\varphi(a_i) = b_i$, para $i = 1, \ldots, k$. A álgebra $\operatorname{alg}\langle S\rangle \subseteq A$ é uma subálgebra finitamente gerada de A e, como A é localmente nilpotente, $\operatorname{alg}\langle S\rangle$ é nilpotente. Seja n um inteiro positivo tal que $(\operatorname{alg}\langle S\rangle)^n = 0$.

Para quaisquer $b'_1, \ldots, b'_n \in \operatorname{alg}\langle R\rangle$, existem $a'_1, \ldots, a'_n \in \operatorname{alg}\langle S\rangle$ de forma que $\varphi(a'_i) = b'_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Assim, para toda palavra $w(x_1, \ldots, x_n) \in W\{X\}$ de grau n, segue que

$$w(b'_1, \ldots, b'_n) = \varphi(w(a'_1, \ldots, a'_n)) = 0$$

ou seja, $(\operatorname{alg}\langle R\rangle)^n = 0$. □

Proposição 1.28. *Se $\mathcal{V}$ é uma variedade, então a subclasse $\ell\text{-}\operatorname{rad} \subseteq \mathcal{V}$ das $\mathcal{V}$-álgebras localmente nilpotentes é uma subclasse radical no sentido de Amitsur-Kurosh se, e somente se, $\mathcal{V}$ satisfaz a propriedade*

(3′) *Para qualquer $\mathcal{V}$-álgebra A e qualquer ideal $I \lhd A$, se I e A/I são localmente nilpotentes, então A é localmente nilpotente.*

Demonstração. Naturalmente, se $\ell\text{-}\operatorname{rad}$ é radical em $\mathcal{V}$ no sentido de Amitsur-Kurosh, então $\ell\text{-}\operatorname{rad}$ satisfaz a condição $(3')$ da Definição 1.25.

Vamos supor agora que $\ell\text{-}\operatorname{rad} \subseteq \mathcal{V}$ satisfaz a condição $(3')$. Pelo Lema 1.27, $\ell\text{-}\operatorname{rad}$ satisfaz a condição (1) da Definição 1.25 e resta apenas mostrar que $\ell\text{-}\operatorname{rad}$ satisfaz a condição (2), ou seja, mostrar que, para toda $\mathcal{V}$-álgebra, o ideal

$$\ell\text{-}\operatorname{rad}(A) = \sum \{ I \lhd A \mid I \text{ é localmente nilpotente} \} \tag{1.29}$$

é localmente nilpotente. Seja A uma álgebra de $\mathcal{V}$ e considere $S \subseteq \ell\text{-}\operatorname{rad}(A)$ um subconjunto finito. Por (1.29), existem $I_1, \ldots, I_k$ ideais localmente nilpotentes de A tais que $S \subseteq I_1 + \cdots + I_k$. Para mostrar que $\operatorname{alg}\langle S \rangle$ é nilpotente para qualquer $S \subseteq \ell\text{-}\operatorname{rad}(A)$, é suficiente mostrar que $I_1 + \cdots + I_k$ é localmente nilpotente para quaisquer ideais localmente nilpotentes $I_1, \ldots, I_k \subseteq A$. Por indução, é suficiente mostrar que, se I_1 e I_2 são ideais localmente nilpotentes de A, então $I_1 + I_2$ é localmente nilpotente.

Se I_1 e I_2 são ideais localmente nilpotentes de A, então $I_1 \cap I_2$ é um ideal localmente nilpotente de I_1. Além disso, pelo Lema 1.27, como I_1 é localmente nilpotente, a álgebra quociente $I_1/(I_1 \cap I_2)$ é localmente nilpotente. Pelo Teorema do Isomorfismo, temos que

$$\frac{I_1 + I_2}{I_1} \simeq \frac{I_1}{I_1 \cap I_2}$$

e, em consequência, $(I_1 + I_2)/I_1$ é localmente nilpotente. Por hipótese, vale em $\ell\text{-}\operatorname{rad}$ a condição $(3')$ e, portanto, $I_1 + I_2$ é localmente nilpotente. □

Uma das motivações dos resultados deste texto é justamente o problema de determinar para quais variedades a subclasse $\ell\text{-}\operatorname{rad}$ é uma classe radical, ou seja, para quais variedades é válida a condição $(3')$ da Definição 1.25. Não se sabe exatamente uma condição necessária e suficiente para que uma variedade possua radical localmente nilpotente.

Sabemos que as variedades das álgebras associativas, alternativas (conferir [ZSSS82, p. 165]), de tipo $(-1,1)$ (conferir [ZS73]) e de Jordan (sobre um corpo de característica diferente de dois) possuem radical localmente nilpotente (conferir [ZSSS82, p. 93]). Também é sabido que as variedades $\operatorname{Bin}(-1,1)$ e $\operatorname{Alt}_d \cap \operatorname{Malc}_a$ (das álgebras $(-1,1)$-binárias e das álgebras alternativas à direita Malcev-admissíveis, respectivamente) possuem radical localmente nilpotente (conferir [Pch76]).

Sabemos que a variedade das álgebras de Lie não admite radical localmente nilpotente, pelo exemplo a seguir

Exemplo 1.30. Seja $L = \operatorname{span}\langle a, b\rangle$, em que $\{a, b\}$ é um conjunto linearmente independente, e considere o produto dado por

$$a^2 = b^2 = 0,\ ab = -ba = b.$$

A álgebra L é uma álgebra de Lie que não é localmente nilpotente. No entanto, o espaço $I = \operatorname{span}\langle b\rangle$ é um ideal localmente nilpotente de L tal que $L/I = \operatorname{span}\langle a + I\rangle$ é uma álgebra localmente nilpotente, violando a condição (3′) da Definição 1.25.

Como toda álgebra de Lie é também uma álgebra de Malcev (e uma álgebra de potências associativas), o exemplo anterior mostra que a subclasse ℓ- rad não é classe radical na variedade das álgebras de Malcev (respectivamente, na variedade das álgebras de potências associativas).

Também é sabido que a variedade das álgebras alternativas à direita não admite radical localmente nilpotente pelo seguinte exemplo devido a G. Dorofeev.

Exemplo 1.31 ([Dor70])**.** Considere a álgebra $A = \operatorname{span}\langle a, b, c, d, e\rangle$, onde $\{a, b, c, d, e\}$ é um conjunto linearmente independente, com produto dado por

$$\begin{aligned} ab &= -ba = -c \\ ae &= -ea = -c \\ db &= -bd = -c \\ ac &= d \\ bc &= e. \end{aligned}$$

e com todos os demais produtos entre elementos da base $\{a, b, c, d, e\}$ são iguais a zero. A álgebra A é alternativa à direita e $I = \operatorname{span}\langle c, d, e\rangle$ é um ideal tal que: 1) I e A/I são álgebras finitamente geradas; 2) $I^2 = 0$ e $(A/I)^2 = 0$. No entanto, A não é nilpotente, pois $b(ac) = c$ (e, portanto, como A é finitamente gerada, não é localmente nilpotente). Logo, A é um álgebra alternativa à direita que não satisfaz a condição (3′) da Definição 1.25.

Formulado por I. P. Shestakov, o problema em aberto a seguir envolve a relação entre o radical localmente nilpotente e o radical linearmente localmente solúvel.

Problema 1.32. Suponha que $\mathcal{V}$ seja uma variedade tal que ℓ- rad seja uma classe radical. É verdade que $\ell\text{- rad}(A) = \mathrm{LLS}(A)$, para toda $\mathcal{V}$-álgebra A?

Capítulo 2

Coálgebras

O objetivo deste capítulo é apresentar ao leitor o conceito de coálgebras. Na primeira seção apresentaremos a definição de coálgebras no contexto clássico de coálgebras associativas, deixando claro a relação desta noção com a noção de álgebras associativas. Na segunda seção, apresentaremos a noção de coálgebras aqui utilizada e enunciaremos resultados importantes para este texto. Na terceira seção vamos introduzir o conceito de dual finito de uma álgebra e citar alguns resultados que serão utilizados no Capítulo 3.

2.1 Coálgebras associativas com counidade

Seja A seja uma álgebra com produto dado pela transformação linear $\mathfrak{m} : A \otimes A \to A$. Suponha que A seja associativa, ou seja, suponha que

$$(ab)c = a(bc),$$

para quaisquer $a, b, c \in A$. Note que

$$\begin{aligned}
(ab)c &= \mathfrak{m}((ab) \otimes c) \\
&= \mathfrak{m}(\mathfrak{m}(a \otimes b) \otimes c) \\
&= \mathfrak{m}(\mathfrak{m}(a \otimes b) \otimes Id_A(c)) \\
&= \mathfrak{m}((\mathfrak{m} \otimes Id_A)(a \otimes b \otimes c))
\end{aligned}$$

em que $Id_A : A \to A$ é a função identidade de A. Da mesma forma, podemos notar que

$$a(bc) = \mathfrak{m}((Id_A \otimes \mathfrak{m})(a \otimes b \otimes c))$$

Assim, a associatividade de A pode ser reescrita em termos de $\mathfrak{m}$ como

$$(\mathfrak{m} \circ (\mathfrak{m} \otimes Id_A))(a \otimes b \otimes c) = (\mathfrak{m} \circ (Id_A \otimes \mathfrak{m}))(a \otimes b \otimes c),$$

para quaisquer $a, b, c \in A$, ou ainda,

$$\mathfrak{m} \circ (\mathfrak{m} \otimes Id_A) = \mathfrak{m} \circ (Id_A \otimes \mathfrak{m}),$$

Em outras palavras, A é uma álgebra associativa se, e somente se, o seguinte diagrama de transformações lineares é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathfrak{m} \otimes Id_A"] \arrow[d, "Id_A \otimes \mathfrak{m}"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mathfrak{m}"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mathfrak{m}"] & A
\end{tikzcd}$$

Suponha agora que A seja uma álgebra com unidade $1_A \in A$, ou seja,

$$1_A\, a = a\, 1_A = a,$$

para qualquer $a \in A$. Da mesma forma como feito com a associatividade, podemos mostrar que $1_A \in A$ é unidade se, e somente se, a transformação linear dada por

$$\begin{aligned} u : F &\to A \\ 1 &\mapsto 1_A \end{aligned}$$

é tal que o diagrama abaixo seja comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "\mathfrak{m}"] & \\
F \otimes A \arrow[ur, "u \otimes Id_A"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & A \otimes F \arrow[ul, "Id_A \otimes u"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

em que " $\simeq$" representa um dos isomorfismos de espaço vetoriais canônicos a seguir

$$\begin{aligned} F \otimes A &\to A \\ \alpha \otimes a &\mapsto \alpha a \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} A \otimes F &\to A \\ a \otimes \alpha &\mapsto a\alpha \end{aligned}$$

Uma vantagem nesta abordagem é que podemos definir a noção de coálgebra associativa com counidade dualizando as definições mencionadas acima.

Definição 2.1. Uma coálgebra é um par ordenado (C, Δ), em que C é um espaço vetorial e $\Delta : C \to C \otimes C$ é uma transformação linear chamada de comultiplicação. Dizemos que (C, Δ) é *associativa* se o seguinte diagrama de transformações é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \otimes C & & C \otimes C \arrow[ll, "\Delta \otimes Id_C"'] \\
C \otimes C \arrow[u, "Id_C \otimes \Delta"] & & C \arrow[ll, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

ou seja, se

$$(\Delta \otimes Id_C) \circ \Delta = (Id_C \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

Dizemos que uma transformação linear $\varepsilon : C \to F$ é counidade da coálgebra (C, Δ) se o seguinte diagrama de transformações lineares é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
& C \otimes C \arrow[dl, "\varepsilon \otimes Id_C"'] \arrow[dr, "Id_C \otimes \varepsilon"] & \\
F \otimes C & & C \otimes F \\
& C \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[ur, "\simeq"'] \arrow[uu, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

Em outras palavras, para cada $z \in C$, se $\Delta(z) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \varepsilon,\ x_i \rangle\, y_i = z = \sum_{i=1}^{n} \langle \varepsilon,\ y_i \rangle\, x_i$$

As coálgebras associativas com unidade são objetos de estudo na teoria das álgebras de Hopf, na teoria de representações de grupos e teoria de representações de álgebras de Lie, por exemplo. Na próxima seção vamos generalizar a noção de coálgebra associativa, definindo a noção de coálgebra de uma variedade arbitrária.

2.2 Definições

Como dito na seção anterior, uma *coálgebra* é um par ordenado (C, Δ), em que C é um espaço vetorial e $\Delta : C \to C \otimes C$ é uma transformação linear. Neste caso, dizemos que Δ é uma *comultiplicação*. Quando não houver confusão quanto à respectiva comultiplicação, vamos nos referir apenas à coálgebra C.

Se $x \in C$, então $\Delta(x)$ é um elemento de $C \otimes C$ e, portanto, existem $y_1, \ldots, y_n, z_1 \ldots, z_n \in C$ tais que

$$\Delta(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes z_i.$$

Na notação de Sweedler (conferir [DNR01, p. 5]), escrevemos a comultiplicação $\Delta(x)$ como

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}.$$

Se C é uma coálgebra com comultiplicação Δ, então podemos definir uma estrutura de álgebra sobre o espaço vetorial C^* dos funcionais lineares de C através da composição:

$$C^* \otimes C^* \xrightarrow{\iota} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*$$

sendo Δ^* a transformação linear transposta de Δ e

$$\begin{aligned} \iota : C^* \otimes C^* &\to (C \otimes C)^* \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto \iota(\alpha \otimes \beta) \end{aligned}$$

em que $\alpha, \beta \in C^*$ e

$$\langle \iota(\alpha \otimes \beta),\, x \otimes y \rangle = \langle \alpha,\, x \rangle \langle \beta,\, y \rangle, \text{ para todos } x, y \in C.$$

Em outras palavras, o produto $\mathfrak{m} = \Delta^* \circ \iota$ descrito acima é dado por

$$\langle \mathfrak{m}(\alpha \otimes \beta),\, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha,\, y_i \rangle \langle \beta,\, z_i \rangle,$$

em que $\alpha, \beta \in C^*$, $x \in C$ e $y_1, \ldots, y_n$,$z_1, \ldots, z_n \in C$ tais que $\Delta(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes z_i$. Para o resto deste texto, usaremos a notação usual para o produto de uma álgebra, ou seja, escreveremos $\mathfrak{m}(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$. Na notação de Sweedler, temos que

$$\langle \alpha\beta,\, x \rangle = \sum_{(x)} \left\langle \alpha,\, x_{(1)} \right\rangle \left\langle \beta,\, x_{(2)} \right\rangle,$$

Quando munido do produto $\mathfrak{m}$, o espaço vetorial C^* é chamado de *álgebra dual* de C. Se $\mathcal{V}$ é uma variedade de álgebras, então dizemos que a coálgebra C é uma *coálgebra da variedade* $\mathcal{V}$, se a álgebra dual C^* pertence a $\mathcal{V}$.

Lema 2.2. *[Swe69, p. 9] Se C é uma coálgebra coassociativa, então C é um C^*-bimódulo associativo.*

A Proposição 2.3 mostra que vale a recíproca do Lema anterior. Em particular, esta proposição também mostra que a nossa definição de coálgebra em uma variedade é consistente com a Definição 2.1 no caso em que $\mathcal{V}$ é a variedade das álgebras associativas.

Proposição 2.3. *Uma coálgebra (C, Δ) é associativa com counidade segundo a Definição 2.1 se, e somente se, C^* é uma álgebra associativa com unidade.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Lema 2.2.

$(\Leftarrow)$ Suponha que C^* seja uma álgebra associativa e tome I um conjunto de índices de forma que $\{e_n \mid n \in I\}$ seja uma base de C. Podemos construir a família de funcionais lineares $f_m : C \to F$, para todo $m \in I$, dada por

$$\langle f_m,\, e_n \rangle = \begin{cases} 1, \text{ se } n = m; \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $n \in I$. Note que, para todo $z \in C$,

$$z = \sum_{m \in I} \langle f_m,\, z \rangle\, e_m. \tag{2.4}$$

Para todo $n \in I$, vamos escrever

$$\Delta(e_n) = \sum_{i,j \in I} \alpha_{ij}^{(n)} e_i \otimes e_j,$$

em que $\alpha_{ij}^{(n)} \in F$ para quaisquer $i, j, n \in I$. Assim,

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes Id_C) \circ \Delta(e_n) &= (\Delta \otimes Id_C) \left(\sum_{\ell,k \in I} \alpha_{\ell k}^{(n)} e_\ell \otimes e_k \right) \\
&= \sum_{\ell,k \in I} \alpha_{\ell k}^{(n)} (\Delta(e_\ell) \otimes e_k) \\
&= \sum_{\ell,i,j,k \in I} \alpha_{\ell k}^{(n)} \alpha_{ij}^{(\ell)} (e_i \otimes e_j \otimes e_k) \\
&= \sum_{i,j,k \in I} \left(\sum_{\ell \in I} \alpha_{\ell k}^{(n)} \alpha_{ij}^{(\ell)} \right) (e_i \otimes e_j \otimes e_k) \\
&= \sum_{i,j,k \in I} a_{ijk}^{(n)}\; e_i \otimes e_j \otimes e_k
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(Id_C \otimes \Delta) \circ \Delta(e_n) &= (Id_C \otimes \Delta) \left(\sum_{\ell,i \in I} \alpha_{i\ell}^{(n)} e_i \otimes e_\ell \right) \\
&= \sum_{\ell,i \in I} \alpha_{i\ell}^{(n)} (e_i \otimes e_\ell) \\
&= \sum_{\ell,i,j,k \in I} \alpha_{i\ell}^{(n)} \alpha_{jk}^{(\ell)} (e_i \otimes e_j \otimes e_k)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j,k\in I} \left(\sum_{\ell\in I} \alpha_{i\ell}^{(n)} \alpha_{jk}^{(\ell)} \right) (e_i \otimes e_j \otimes e_k)$$
$$= \sum_{i,j,k\in I} b_{ijk}^{(n)}\, e_i \otimes e_j \otimes e_k.$$

Para provar que C é uma coálgebra associativa segundo a Definição 2.1, é suficiente mostrar que

$$(\Delta \otimes Id_C) \circ \Delta(e_n) = (Id_C \otimes \Delta) \circ \Delta(e_n),$$

para qualquer $n \in I$, ou equivalentemente que $a_{ijk}^{(n)} = b_{ijk}^{(n)}$, para quaisquer $i, j, k, n \in I$.

Fixando $i_0, j_0, k_0 \in I$, e lembrando que o produto da coálgebra C^* é dado pela transformação linear $\mathfrak{m} = \Delta^* \circ \iota$, temos que

$$\mathfrak{m} \circ (\mathfrak{m} \otimes Id_C)(f_{i_0} \otimes f_{j_0} \otimes f_{k_0}) \in C^*,$$

em que $f_{i_0}, f_{j_0}, f_{k_0} \in C^*$.

Assim, para todo $n \in I$ vale que

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathfrak{m} \circ (\mathfrak{m} \otimes Id_C)(f_{i_0} \otimes f_{j_0} \otimes f_{k_0}),\, e_n \right\rangle = \\
&= \left\langle \mathfrak{m}(\mathfrak{m}(f_{i_0} \otimes f_{j_0}) \otimes f_{k_0}),\, e_n \right\rangle \\
&= \left\langle \iota(\mathfrak{m}(f_{i_0} \otimes f_{j_0}) \otimes f_{k_0}),\, \Delta(e_n) \right\rangle \\
&= \left\langle \iota(\mathfrak{m}(f_{i_0} \otimes f_{j_0}) \otimes f_{k_0}),\, \sum_{\ell,k\in I} \alpha_{\ell k}^{(n)} e_\ell \otimes e_k \right\rangle \\
&= \sum_{\ell,k\in I} \alpha_{\ell k}^{(n)} \left\langle (\mathfrak{m}(f_{i_0} \otimes f_{j_0}),\, e_\ell \right\rangle \left\langle f_{k_0},\, e_k \right\rangle \\
&= \sum_{\ell,k\in I} \alpha_{\ell k}^{(n)} \left\langle (\iota(f_{i_0} \otimes f_{j_0}),\, \Delta(e_\ell) \right\rangle \left\langle f_{k_0},\, e_k \right\rangle \\
&= \sum_{\ell,i,j,k\in I} \alpha_{\ell k}^{(n)} \alpha_{ij}^{(\ell)} \left\langle f_{i_0},\, e_i \right\rangle \left\langle f_{j_0},\, e_j \right\rangle \left\langle f_{k_0},\, e_k \right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k\in I} \left(\sum_{\ell\in I} \alpha_{\ell k}^{(n)} \alpha_{ij}^{(\ell)} \right) \left\langle f_{i_0},\, e_i \right\rangle \left\langle f_{j_0},\, e_j \right\rangle \left\langle f_{k_0},\, e_k \right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k\in I} a_{ijk}^{(n)} \left\langle f_{i_0},\, e_i \right\rangle \left\langle f_{j_0},\, e_j \right\rangle \left\langle f_{k_0},\, e_k \right\rangle = a_{i_0 j_0 k_0}^{(n)},
\end{aligned}$$

uma vez que o produto $\langle f_{i_0}, e_i \rangle \langle f_{j_0}, e_j \rangle \langle f_{k_0}, e_k \rangle$ é diferente de zero se, e somente se, $i = i_0$, $j = j_0$ e $k = k_0$, sendo igual a 1 neste caso. De maneira análoga, temos que $\mathfrak{m} \circ (Id_C \otimes \mathfrak{m})(f_{i_0} \otimes f_{j_0} \otimes f_{k_0}) \in C^*$ e

$$\left\langle \mathfrak{m} \circ (Id_C \otimes \mathfrak{m})(f_{i_0} \otimes f_{j_0} \otimes f_{k_0}),\, e_n \right\rangle = b_{i_0 j_0 k_0}^{(n)}.$$

Como $(C^*, \mathfrak{m})$ é uma álgebra associativa, temos que $\mathfrak{m} \circ (\mathfrak{m} \otimes Id_C) = \mathfrak{m} \circ (Id_C \otimes \mathfrak{m})$ e, portanto, para quaisquer $i_0, j_0, k_0, n \in I$,

$$\begin{aligned} a^{(n)}_{i_0 j_0 k_0} &= \left\langle \mathfrak{m} \circ (\mathfrak{m} \otimes Id_C)(f_{i_0} \otimes f_{j_0} \otimes f_{k_0}),\ e_n \right\rangle \\ &= \left\langle \mathfrak{m} \circ (Id_C \otimes \mathfrak{m})(f_{i_0} \otimes f_{j_0} \otimes f_{k_0}),\ e_n \right\rangle = b^{(n)}_{i_0 j_0 k_0}. \end{aligned}$$

Concluímos que $(\Delta \otimes Id_C) \circ \Delta(e_n) = (Id_C \otimes \Delta) \circ \Delta(e_n)$, para todo $n \in I$ e segue que C é uma coálgebra associativa segundo a Definição 2.1.

Suponha agora que C^* seja uma álgebra com unidade $1_{C^*} \in C^*$. Como $\{e_n \mid n \in I\}$ é base de C, pela Definição 2.1, é suficiente mostrar que

$$e_n = \sum_{i,j \in I} \alpha^{(n)}_{ij} \langle 1_{C^*},\ e_i \rangle\, e_j = \sum_{i,j \in I} \alpha^{(n)}_{ij} \left\langle 1_{C^*},\ e_j \right\rangle e_i$$

para todo $n \in I$.

Observe que, como $1_{C^*} \in C^*$ é a unidade da álgebra C^*, então $1_{C^*} f_m = f_m = f_m 1_{C^*}$, para todo $m \in I$. Assim, para quaisquer $n, m \in I$,

$$\begin{aligned} \langle f_m,\ e_n \rangle = \langle 1_{C^*} f_m,\ e_n \rangle &= \langle \iota(1_{C^*} \otimes f_m),\ \Delta(e_n) \rangle \\ &= \sum_{i,j \in I} \alpha^{(n)}_{ij} \langle 1_{C^*},\ e_i \rangle \left\langle f_m,\ e_j \right\rangle \\ &= \left\langle f_m,\ \left(\sum_{i,j \in I} \alpha^{(n)}_{ij} \langle 1_{C^*},\ e_i \rangle\, e_j \right) \right\rangle \end{aligned}$$

Conclui-se usando (2.4) para $z = e_n$ e para $z = \sum_{i,j \in I} \alpha^{(n)}_{ij} \langle 1_{C^*},\ e_i \rangle\, e_j$ que, para todo $n \in I$,

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{m \in I} \langle f_m,\ e_n \rangle\, e_m \\ &= \sum_{m \in I} \left\langle f_m,\ \left(\sum_{i,j \in I} \alpha^{(n)}_{ij} \langle 1_{C^*},\ e_i \rangle\, e_j \right) \right\rangle e_m \\ &= \sum_{i,j \in I} \alpha^{(n)}_{ij} \langle 1_{C^*},\ e_i \rangle\, e_j. \end{aligned}$$

De maneira análoga, prova-se que

$$e_n = \sum_{i,j \in I} \alpha^{(n)}_{ij} \left\langle 1_{C^*},\ e_j \right\rangle e_i$$

e concluímos que 1_{C^*} é uma counidade segundo a Definição 2.1. $\square$

Exemplo 2.5 (Coálgebras de Lie)**.** Suponha que L seja uma álgebra de Lie e denote sua multiplicação por $\mathfrak{m} : L \otimes L \to L$. As identidades

$$\begin{aligned} &xy = -yx; \\ &(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0, \end{aligned}$$

em que $x, y, z \in L$, podem ser escritas em termos de $\mathfrak{m}$ respectivamente como

$$\begin{aligned} &\mathfrak{m}(x \otimes y) = -\mathfrak{m}(y \otimes x); \\ &\mathfrak{m}(\mathfrak{m}(x \otimes y) \otimes z) + \mathfrak{m}(\mathfrak{m}(y \otimes z) \otimes x) + \mathfrak{m}(\mathfrak{m}(z \otimes x) \otimes y) = 0. \end{aligned}$$

Em outras palavras,

$$\begin{aligned} &\mathfrak{m} = -\mathfrak{m} \circ \tau; \\ &\mathfrak{m} \circ (\mathfrak{m} \otimes Id_L) \circ (Id_{L \otimes L \otimes L} + \xi + \xi^2) = 0; \end{aligned}$$

em que $\tau = \tau_L$ é a transformação linear

$$\begin{aligned} \tau_L : L \otimes L &\to L \otimes L \\ x \otimes y &\mapsto y \otimes x; \end{aligned}$$

e $\xi = \xi_L$ é a transformação linear

$$\begin{aligned} \xi_L : L \otimes L \otimes L &\to L \otimes L \otimes L \\ x \otimes y \otimes z &\mapsto y \otimes z \otimes x; \end{aligned}$$

Uma coálgebra (C, Δ) é uma *coálgebra de Lie segundo W. Michaelis* (conferir [Mic85]), se Δ satisfaz as identidades

$$\Delta = -\tau \circ \Delta \tag{2.6}$$

$$(Id_{C \otimes C \otimes C} + \xi + \xi^2) \circ (\Delta \otimes Id_C) \circ \Delta = 0 \tag{2.7}$$

em que $\tau = \tau_C$ é a transformação linear

$$\begin{aligned} \tau_C : C \otimes C &\to C \otimes C \\ x \otimes y &\mapsto y \otimes x; \end{aligned}$$

e $\xi = \xi_C$ é a transformação linear

$$\begin{aligned} \xi_C : C \otimes C \otimes C &\to C \otimes C \otimes C \\ x \otimes y \otimes z &\mapsto y \otimes z \otimes x; \end{aligned}$$

A definição de coálgebra de Lie segundo W. Michaelis é equivalente a nossa definição, ou seja: uma coálgebra (C, Δ) satisfaz as equações (2.6) e (2.7) se, e somente se, C^* é uma álgebra de Lie (conferir [Mic85]).

Se (C, Δ) é uma coálgebra e $D \subseteq C$ é um subespaço vetorial, então dizemos que D é uma *subcoálgebra* de C se $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$. A soma arbitrária de subcoálgebras é uma subcoálgebra e a intersecção arbitrária de subcoálgebras é também uma subcoálgebra (ver [ACM94, p. 4697,4698]). Em particular, podemos considerar, para qualquer subconjunto $S \subseteq C$, a *subcoálgebra gerada* $\operatorname{Coalg}\langle S\rangle$, definida como a intersecção de todas as subcoálgebras de C tais que $S \subseteq C$.

Dizemos que uma coálgebra é *localmente finita* se toda subcoálgebra finitamente gerada tiver dimensão finita. Para mostrar que a coálgebra C é localmente finita é suficiente mostrar que a subcoálgebra $\operatorname{Coalg}\langle z\rangle$ tem dimensão finita para todo $z \in C$, pois se $S = \{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq C$ é um subconjunto finito, então

$$\operatorname{Coalg}\langle S\rangle = \operatorname{Coalg}\langle z_1\rangle + \cdots + \operatorname{Coalg}\langle z_n\rangle .$$

É fácil verificar que a soma de subcoálgebras localmente finitas também é uma subcoálgebra localmente finita. Assim, definindo o espaço $\operatorname{Loc} C$ como a soma de todas as subcoálgebras localmente finitas de C, temos que $\operatorname{Loc} C$ é a maior subcoálgebra de C que é localmente finita.

Se C é uma coálgebra associativa, então C é uma coálgebra localmente finita. Este resultado é conhecido como *Teorema Fundamental das Coálgebras* e sua demonstração pode ser conferida em [Swe69, p. 46]. Dizemos que o *Teorema Fundamental das Coálgebras é válido em uma variedade* $\mathcal{V}$, se toda coálgebra C da variedade $\mathcal{V}$ for localmente finita.

Como vimos anteriormente, se C é uma coálgebra associativa com comultiplicação Δ, podemos obtemos a identidade

$$(\Delta \otimes Id_C) \circ \Delta = (Id_C \otimes \Delta) \circ \Delta,$$

e usá-la para estudar coálgebras associativas. Quando C é uma coálgebra de uma variedade arbitrária, também podemos obter identidades análogas sobre a comultiplicação Δ para estudar a coálgebra C. O Exemplo 2.5 mostra como obter identidades sobre a comultiplicação Δ quando (C, Δ) é uma coálgebra de Lie.

Em um outro caso, [Nic14] define que (C, Δ) é uma coálgebra de Jordan se satisfaz as identidades

$$\tau \circ \Delta = \Delta, \text{(cocomutatividade)} \tag{2.8}$$
$$Q \circ (\Delta \otimes Id_C \otimes Id_C) \circ (\Delta \circ Id_C) \circ \Delta = Q \circ (Id_C \otimes Id_C \otimes \Delta) \circ (\Delta \circ Id_C) \circ \Delta, \tag{2.9}$$

em que:

- τ é a transformação linear

$$\begin{aligned} \tau : C \otimes C &\to C \otimes C \\ x \otimes y &\mapsto y \otimes x; \end{aligned}$$

- $W \subseteq C \otimes C \otimes C \otimes C$ é o subespaço gerado pelo conjunto

$$\{y \otimes x \otimes x \otimes x,\ x \otimes y \otimes x \otimes x,\ x \otimes x \otimes y \otimes x,\ x \otimes x \otimes x \otimes y \mid x, y \in C\};$$

- $Q : W \to C \otimes C \otimes C \otimes C$ é a transformação linear injetora canônica relativa à inclusão $W \subseteq C \otimes C \otimes C \otimes C$.

Com essa definição, (C, Δ) é uma coálgebra de Jordan se, e somente se, C^* é uma álgebra de Jordan.

Neste trabalho, no entanto, vamos explorar a hipótese de que C é uma coálgebra da variedade $\mathcal{V}$ através da estrutura de C^*-bimódulo que definiremos a seguir sobre a coálgebra C.

Considere C uma coálgebra com comultiplicação Δ e C^* sua álgebra dual. Podemos considerar a seguinte estrutura de C^*-bimódulo sobre C: defina as ações à esquerda e à direita, respectivamente, por

$$\lambda_\alpha(z) = (Id_C \otimes \alpha) \circ \Delta(z)$$
$$\rho_\alpha(z) = (\alpha \otimes Id_C) \circ \Delta(z)$$

isto é,

$$\lambda_\alpha(z) = \sum_{(z)} \left\langle \alpha,\ z_{(2)} \right\rangle z_{(1)}$$
$$\rho_\alpha(z) = \sum_{(z)} \left\langle \alpha,\ z_{(1)} \right\rangle z_{(2)}$$

em que $z \in C$, $\alpha \in C^*$. A estrutura de coálgebra de C está associada à estrutura de C^*-bimódulo através da seguinte proposição:

Proposição 2.10. *[ACM94, p. 4699] Seja C uma coálgebra e $D \subseteq C$ um subespaço vetorial. O espaço D é uma subcoálgebra de C se, e somente se, D for um C^*-sub-bimódulo de C.*

e, por consequência,

Corolário 2.11. *[ACM94, p. 4699] Se C é uma coálgebra e $S \subseteq C$ é arbitrário, então a subcoálgebra* Coalg $\langle S \rangle$ *coincide com o C^*-sub-bimódulo* Bimod $\langle S \rangle$.

Nosso objetivo agora é mostrar a Proposição 2.19, que mostra como as identidades de operadores do C^*-bimódulo C se relacionam com as identidade do C^*-bimódulo regular. Com exceção da Proposição 2.22, os resultados e argumentos desenvolvidos no restante desta seção são adaptados de [ACM94]. Optamos por adaptar estas demonstrações para ilustrar ao leitor como obtemos identidades de operador para o C^*-bimódulo C a partir da hipótese que C^* é uma coálgebra de uma variedade arbitrária.

Definição 2.12. Defina em $F\langle T_X \rangle$ a involução $* : F\langle T_X \rangle \to F\langle T_X \rangle$ dada por

$$(l_w)^* = r_w \quad \text{e} \quad (r_w)^* = l_w,$$

para todo $w \in W\{X\}$.

Exemplo 2.13. Se $x, y \in X$, então

$$\begin{aligned}
(r_x r_y)^* &= (r_y)^*(r_x)^* = l_y l_x;\\
(l_x r_y r_{x^2})^* &= (r_{x^2})^*(r_y)^*(l_x)^* = l_{x^2} l_y r_x;\\
(l_x + r_y)^* &= (l_x)^* + (r_y)^* = r_x + l_y;\\
(l_{xy} - l_x l_y)^* &= r_{xy} - r_y r_x;\\
(l_x r_y - r_y r_x)^* &= l_y r_x - l_x l_y;\\
(r_x r_y l_{xy})^* &= r_{xy} l_y l_x.
\end{aligned}$$

Se (M, λ, ρ) é um A-bimódulo e $R = \text{alg}\langle \lambda_a, \rho_a \in \mathcal{L}(M) \mid a \in A \rangle$, então podemos definir a involução $* : R \to R$ dada por

$$(\rho_a)^* = \lambda_a \qquad\qquad (\lambda_a)^* = \rho_a,$$

para todo $a \in A$.

Exemplo 2.14. Sejam A uma álgebra e (A, L, R) o A-bimódulo regular. Note que

$$ab = L_a(b) = R_b(a), \text{ para quaisquer } a, b \in A.$$

Esta equação pode ser expressa em termos da involução $*$ como

$$T_a(b) = (T_b)^*(a), \text{ para quaisquer } a, b \in A, T \in \{L, R\}$$

Tome $\alpha, \beta \in C^*$ e $z \in C$ e observe que

$$\begin{aligned}
\langle \alpha\beta,\ z \rangle &= \sum_{(z)} \left\langle \alpha,\ z_{(1)} \right\rangle \left\langle \beta,\ z_{(2)} \right\rangle\\
&= \sum_{(z)} \left\langle \alpha,\ \left\langle \beta,\ z_{(2)} \right\rangle z_{(1)} \right\rangle\\
&= \left\langle \alpha,\ \lambda_\beta(z) \right\rangle
\end{aligned}$$

Logo, para quaisquer $\alpha \in C^*$ e $z \in C$,

$$\left\langle R_\beta(\alpha),\ z \right\rangle = \left\langle \alpha,\ \lambda_\beta(z) \right\rangle, \text{ para todo } \beta \in C^* \tag{2.15}$$

e, analogamente,

$$\left\langle L_\beta(\alpha),\ z \right\rangle = \left\langle \alpha,\ \rho_\beta(z) \right\rangle, \text{ para todo } \beta \in C^* \tag{2.16}$$

em que R_β e L_β denotam os operadores de multiplicação à direita e a esquerda, respectivamente, na álgebra C^*.

Lembramos[1] que, se (M, λ, ρ) é um A-bimódulo e $\phi : F\{X\} \to A$ é um homomorfismo de álgebras, então podemos definir um homomorfismo de álgebras $\phi_M : F\langle T_X \rangle \to \mathcal{L}(M)$ determinado por $\phi_M(1) = Id_M$, $\phi_M(r_w) = \rho_{\phi(w)}$ e $\phi_M(l_w) = \lambda_{\phi(w)}$, em que $w \in W\{X\}$.

[1]Mais detalhes na página 15

Usando as estruturas de C^*-bimódulo definidas sobre a coálgebra C e sobre a álgebra C^*, podemos escrever as equações (2.15) e (2.16) respectivamente como

$$\begin{aligned} \langle (\phi_{C^*}(r_x))\,(\alpha),\, z\rangle &= \langle \alpha,\, (\phi_C(l_x))\,(z)\rangle\,,\ \text{para todo}\ \phi \in \mathrm{Hom}(F\{X\}, C^*),\ \text{e} \\ \langle (\phi_{C^*}(l_x))\,(\alpha),\, z\rangle &= \langle \alpha,\, (\phi_C(r_x))\,(z)\rangle\,,\ \text{para todo}\ \phi \in \mathrm{Hom}(F\{X\}, C^*) \end{aligned}$$

em que $x \in X$, $\alpha \in C^*$ e $z \in C$. Podemos ainda escrever (2.15) e (2.16) como

$$\langle (\phi_{C^*}(t_x))\,(\alpha),\, z\rangle = \langle \alpha,\, (\phi_C(t_x^*))\,(z)\rangle\,,\ \text{para todo}\ \phi \in \mathrm{Hom}(F\{X\}, C^*), \tag{2.17}$$

em que $t \in \{l, r\}$, $x \in X$, $\alpha \in C^*$ e $z \in C$.

Lema 2.18. *[ACM94] Seja C uma coálgebra. Para quaisquer $p \in F\langle T_X\rangle$, $z \in C$, $\alpha \in C^*$ e para qualquer homomorfismo de álgebras $\phi : F\{X\} \to C^*$, vale que*

$$\langle (\phi_{C^*}(p))(\alpha),\, z\rangle = \langle \alpha,\, (\phi_C(p^*))(z)\rangle$$

Demonstração. Podemos assumir, por linearidade que $p = t_{w_1}^{(1)} \dots t_{w_n}^{(n)}$, em que $t^{(1)}, \dots, t^{(n)} \in \{l, r\}$ e $w_1, \dots, w_n \in W\{X\}$. Para qualquer homomorfismo $\phi : F\{X\} \to C^*$, temos que

$$\left\langle \phi_{C^*}\left(t_{w_1}^{(1)} \dots t_{w_n}^{(n)}\right)(\alpha),\, z\right\rangle = \left\langle \phi_{C^*}\left(t_{w_1}^{(1)}\right) \dots \phi_{C^*}\left(t_{w_n}^{(n)}\right)(\alpha),\, z\right\rangle$$

pois $\phi_C^* : F\langle T_X\rangle \to \mathcal{L}(C^*)$ é um homomorfismo de álgebras. Aplicando a (2.17) múltiplas vezes, temos que

$$\begin{aligned} \langle (\phi_{C^*}(p))(\alpha),\, z\rangle &= \left\langle \phi_{C^*}\left(t_{w_1}^{(1)} \dots t_{w_n}^{(n)}\right)(\alpha),\, z\right\rangle \\ &= \left\langle \phi_{C^*}\left(t_{w_1}^{(1)}\right) \dots \phi_{C^*}\left(t_{w_n}^{(n)}\right)(\alpha),\, z\right\rangle \\ &= \left\langle \phi_{C^*}\left(t_{w_2}^{(2)}\right) \dots \phi_{C^*}\left(t_{w_n}^{(n)}\right)(\alpha),\, \phi_C\left((t_{w_1}^{(1)})^*\right)(z)\right\rangle \\ &= \cdots = \\ &= \left\langle \alpha,\, \phi_C\left((t_{w_n}^{(n)})^*\right) \dots \phi_C\left((t_{w_1}^{(1)})^*\right)(z)\right\rangle \\ &= \left\langle \alpha,\, \phi_C\left((t_{w_n}^{(n)})^* \dots (t_{w_1}^{(1)})^*\right)(z)\right\rangle \\ &= \left\langle \alpha,\, \phi_C\left((t_{w_1}^{(1)} \dots t_{w_n}^{(n)})^*\right)(z)\right\rangle \\ &= \langle \alpha,\, (\phi_C(p^*))(z)\rangle\,, \end{aligned}$$

para quaisquer $z \in C, \alpha \in C^*$. □

Proposição 2.19. *[ACM94] Seja C uma coálgebra. Então $p \in F\langle T_X\rangle$ é uma identidade de operadores do C^*-bimódulo regular se, e somente se, p^* é uma identidade de operadores do C^*-bimódulo C.*

Demonstração. Seja $p \in F\langle T_X \rangle$ e C uma coálgebra. Uma das sentenças do enunciado é a frase abaixo:

(a) p é identidade de operadores do C^*-bimódulo regular.

É fácil ver que esta frase é equivalente a cada uma das frases a seguir

(b) $\phi_{C^*}(p) = 0,$ para todo homomorfismo de álgebras $\phi \in \mathrm{Hom}(F\{X\}, C^*)$;

(c) $\phi_{C^*}(p)(\alpha) = 0,$ para quaisquer $\phi \in \mathrm{Hom}(F\{X\}, C^*)$ e $\alpha \in C^*$;

(d) $\langle \phi_{C^*}(p)(\alpha),\ z \rangle = 0,$ para quaisquer $\phi \in \mathrm{Hom}(F\{X\}, C^*)$, $\alpha \in C^*$ e $z \in C$;

(e) $\langle \alpha,\ \phi_C(p^*)(z) \rangle = 0,$ para quaisquer $\phi \in \mathrm{Hom}(F\{X\}, C^*)$, $\alpha \in C^*$ e $z \in C$;

(f) $\phi_C(p^*)(z) = 0,$ para quaisquer $\phi \in \mathrm{Hom}(F\{X\}, C^*)$ e $z \in C$;

(g) $\phi_C(p^*) = 0,$ para todo $\phi \in \mathrm{Hom}(F\{X\}, C^*)$;

(h) p^* é identidade do C^*-bimódulo C.

E isto conclui nossa demonstração. □

Confirme visto pela Proposição 2.3, uma coálgebra C com comultiplicação Δ é associativa se C^* é uma álgebra associativa ou, de maneira equivalente, se

$$(\Delta \otimes Id_C) \circ \Delta = (Id_C \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

A proposição abaixo, mostra uma outra forma equivalente de expressar a associatividade da coálgebra C usando a Proposição 2.19.

Proposição 2.20. *Seja C uma coálgebra. A coálgebra C é associativa se, e somente se, C é um C^*-bimódulo associativo.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que C seja uma coálgebra associativa. Como C^* é uma álgebra associativa, pelo Exemplo 1.12, o C^*-bimódulo regular satisfaz as identidades de operador do conjunto

$$S_{\mathrm{As}} = \{l_{xy} - l_x l_y,\ r_{yx} - r_x r_y,\ l_x r_y - r_y l_x\}$$

e é fácil verificar que S_{As} é um conjunto gerador das identidades de operadores de $I^B(\mathrm{As})$. Observe que

$$\begin{aligned}(l_{xy} - l_x l_y)^* &= r_{xy} - r_y r_x \\ (r_{yx} - r_x r_y)^* &= l_{yx} - l_y l_x \\ (l_x r_y - r_y l_x)^* &= l_y r_x - r_x l_y\end{aligned}$$

e, portanto, o conjunto S_{As} é tal que $(S_{\mathrm{As}})^* \subseteq I^B(\mathrm{As})$. Em particular, o C^*-bimódulo regular satisfaz as identidades de $(S_{\mathrm{As}})^*$ e, pela Proposição 2.19, segue que o C^*-bimódulo C, satisfaz as identidades de S_{As}. Concluímos que C é um C^*-bimódulo associativo.

($\Leftarrow$) Suponha agora que C seja um C^*-bimódulo associativo. Então a extensão cindida-nula $C^* \dotplus C$ é uma álgebra associativa e $C^* \subseteq C^* \dotplus C$ é uma subálgebra. Logo, C^* também é uma álgebra associativa. □

Observando a demonstração da Proposição 2.20, podemos observar que vale o seguinte corolário.

Corolário 2.21. *Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras e C uma coálgebra. Se C é um C^*-bimódulo da variedade $\mathcal{V}$, então C é uma coálgebra da variedade $\mathcal{V}$.*

A partir da Proposição 2.20 e do Corolário 2.21, é natural perguntar-se se C é um C^*-bimódulo de uma variedade $\mathcal{V}$ sempre que C^* for uma álgebra da variedade $\mathcal{V}$. Isso nem sempre é verdade, como mostra a próxima proposição.

Proposição 2.22. *Se C é uma coálgebra tal que C é C^*-bimódulo alternativo à direita, então C é uma coálgebra alternativa. Em particular, se C é uma coálgebra alternativa à direita que não é alternativa, então C não é um C^*-bimódulo alternativo à direita.*

Demonstração. Se C é um C^*-bimódulo alternativo à direita, então C satisfaz as seguintes identidades:

$$p_1 = l_{yx} - l_y l_x + r_x l_y - l_y r_x$$
$$p_2 = r_x r_x - r_{x^2}$$

O conjunto $\{p_1, p_2\}$ é inclusive um conjunto gerador das identidades de $I^B(\mathrm{Alt}_d)$.

Um conjunto gerador de $I^B(\mathrm{Alt})$ é

$$S_{\mathrm{Alt}} = \{p_1, p_2, p_3 = r_{xy} - r_y r_x + l_x r_y - r_y l_x, p_4 = l_x l_x - l_{x^2}\}$$

A álgebra C^* é uma subálgebra da extensão cindida-nula $C^* \dotplus C$, que é alternativa à direita por hipótese. Logo, C^* é uma álgebra alternativa à direita e o C^*-bimódulo regular é alternativo à direita. Em particular, o C^*-bimódulo regular satisfaz as identidades p_1, p_2.

Pela Proposição 2.19, C satisfaz as identidades p_1^* e $p_2^* = p_4$. Mas C é um bimódulo alternativo à direita, logo C satisfaz adicionalmente p_1, p_2. Linearizando a identidade p_2, obtemos a identidade

$$q = r_x r_y + r_y r_x - r_{xy} - r_{yx}$$

e, por fim, observando que $p_3 = -p_1^* - q$, temos que C satisfaz as identidades de S_{Alt}, ou seja, C é um bimódulo alternativo. Em particular, a subálgebra $C^* \subseteq C^* \dotplus C$ é uma álgebra alternativa. □

Em vista da Proposição 2.22, toda variedade $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{Alt}_d$ e $\mathcal{V} \nsubseteq \mathrm{Alt}$ é um exemplo de variedade cujas coálgebras não são bimódulos na mesma variedade. Dentre variedades que satisfazem esta condição, destacamos a variedade $\mathrm{Bin}(-1,1)$ das álgebra $(-1,1)$-binárias e a variedade $\mathrm{Malc}_a \cap \mathrm{Alt}_d$ das álgebras alternativas à direita Malcev-admissíveis.

A Proposição 2.20 mostra que a variedade As é um caso particular de variedade que satisfaz uma das condições (e, portanto, todas as demais) do seguinte resultado de [ACM94]:

Proposição 2.23. *[ACM94, p. 4707] Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras e C uma coálgebra de $\mathcal{V}$. São equivalentes:*

1. *C é um C^*-bimódulo de $\mathcal{V}$;*

2. *p^* é identidade do C^*-bimódulo C, para todo $p \in I^B(\mathcal{V})$;*

3. *C^* satisfaz as identidades de S^*, em que S é um conjunto gerador de $I^B(\mathcal{V})$.*

As variedades das álgebras de Lie, álgebras alternativas e álgebras de Jordan são outros exemplos de variedades que satisfazem as condições da Proposição 2.23 (conforme provado em [ACM94, p. 4708]).

Exemplo 2.24. Uma coálgebra (C, Δ) é uma coálgebra de Lie se satisfaz (2.6) e (2.7) ou, equivalentemente, se o C^*-bimódulo regular satisfaz as identidades

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{Lie}} = \{&r_x + l_x, \\ &l_x l_y + l_y r_x + r_{xy}\}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.25. Suponha que a característica de F seja diferente de dois. Uma coálgebra (C, Δ) é uma coálgebra de Jordan se satisfaz (2.8) e (2.9) ou, equivalentemente, se o C^*-bimódulo regular satisfaz as identidades

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{Jord}} = \{&r_x - l_x, \\ &l_{x^2} l_y + 2 l_{yx} l_x - l_{x^2 y} - 2 l_x l_y l_x, \\ &l_{x^2} l_x - l_x l_{x^2}\}. \end{aligned}$$

2.3 Dual finito

Na seção anterior mostramos que, se C é uma coálgebra, então a partir da comultiplicação de C obtemos uma multiplicação sobre o espaço C^*. Vamos abordar agora o problema inverso: se A é uma álgebra, então é possível construir uma comultiplicação sobre A^* a partir do produto de A?

Lembramos que no caso em que (C, Δ) é uma coálgebra, a transformação linear $\iota : C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^*$ nos permite construir uma multiplicação através da composição

$$C^* \otimes C^* \xrightarrow{\iota} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*.$$

A função ι é uma função injetora mas, como veremos a seguir, em geral não é sobrejetora.

Seja A uma álgebra, $\mathfrak{m} : A \otimes A \to A$ seu produto e considere A^*, o espaço dos funcionais lineares de A. Dizemos que um subespaço $B \subseteq A^*$ é um *subespaço bom* se $\mathfrak{m}^*(B) \subseteq \iota(B \otimes B)$.

Se B é um espaço bom, então podemos definir em B a comultiplicação $\Delta : B \to B \otimes B$ da seguinte forma: Para cada $f \in B$, existe um elemento $\Delta(f) \in B \otimes B$ tal que $\mathfrak{m}^*(f) = \iota(\Delta(f))$. O elemento $\Delta(f)$ é único pois a transformação linear ι é injetora e, assim, definimos a função $\Delta : B \to B \otimes B$. É fácil verificar que Δ é uma transformação linear.

A soma de dois subespaços bons é um subspaço bom. De fato, seja $(A, \mathfrak{m}^*)$ uma álgebra e $S_1, S_2 \subseteq A^*$ subespaços bons. Vamos mostrar que $m^*(S_1 + S_2) \subseteq \iota((S_1 + S_2) \otimes (S_1 + S_2))$, e portanto devemos tomar $f_1 \in S_1$ e $f_2 \in S_2$. Como S_1 e S_2 são subespaços bons, existem $\Delta(f_1) \in S_1 \otimes S_1$ e $\Delta(f_2) \in S_2 \otimes S_2$ tais que

$$m^*(f_1) = \iota(\Delta(f_1)) \qquad\qquad m^*(f_2) = \iota(\Delta(f_2)).$$

Observe que, para quaisquer $x, y \in A$

$$\begin{aligned}
\langle m^*(f_1 + f_2),\ x \otimes y \rangle &= \langle f_1 + f_2,\ xy \rangle \\
&= \langle f_1,\ xy \rangle + \langle f_2,\ xy \rangle \\
&= \langle m^*(f_1),\ x \otimes y \rangle + \langle m^*(f_2),\ x \otimes y \rangle \\
&= \langle \iota(\Delta(f_1)),\ x \otimes y \rangle + \langle \iota(\Delta(f_2)),\ x \otimes y \rangle \\
&= \langle \iota(\Delta(f_1) + \Delta(f_2)),\ x \otimes y \rangle
\end{aligned}$$

e, como $\Delta(f_1) + \Delta(f_2) \in (S_1 \otimes S_1) + (S_2 \otimes S_2) \subseteq (S_1 + S_2) \otimes (S_1 + S_2)$, segue que

$$\mathfrak{m}^*(f_1 + f_2) \in \iota((S_1 + S_2) \otimes (S_1 + S_2)).$$

A partir do desenvolvido no parágrafo anterior, é fácil mostrar que a soma arbitrária de subespaços bons é um subespaço bom. Assim, definindo o subespaço

$$A^\circ = \sum\{S \subseteq A^* \mid S \text{ é subespaço bom}\},$$

concluímos que A° é também um subespaço bom. Chamamos o espaço A° de *dual finito* da álgebra A. O dual finito é o maior subespaço bom de A^* ou, em outras palavras, o maior subespaço de A^* onde é possível definir uma comultiplicação através da transformação linear transposta $\mathfrak{m}^*$.

Além disso, é fácil ver que as subcoálgebras de A° são exatamente os subespaços bons de A^*.

Observação. No caso em que a função $\iota : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ é sobrejetora, o próprio espaço A^* é um subespaço bom e, portanto, a transformação linear $\iota^{-1} \circ \mathfrak{m}^*$ é uma comultiplicação de A^*. Em particular, $A^* = A^\circ$. Na Seção 3.4 vamos determinar o espaço A° para alguns exemplos de álgebras e mostrar que a igualdade $A^* = A^\circ$ não ocorre sempre - mostrando em particular que a função ι nem sempre é sobrejetora.

Observação. Caso A seja uma álgebra de dimensão finita, ι é uma transformação linear injetora entre espaços de dimensão finita. A transformação linear ι é, portanto, um isomorfismo de espaços vetoriais, donde segue que o espaço A^* é um subespaço bom. Neste caso, temos a igualdade $A^\circ = A^*$.

Determinar o dual finito não é sempre uma tarefa fácil. Na Seção 3.4, por exemplo, determinamos a dimensão do dual finito de certas álgebras de dimensão infinita. O seguinte resultado, demonstrado em [ACM94, p. 4705], nos permite determinar um subespaço do dual finito.

Proposição 2.26. *[ACM94, p. 4705] Se A é uma álgebra e A° é seu dual finito, então a maior subcoálgebra localmente finita de A° é dada por*

$$\mathrm{Loc}(A^\circ) = \{f \in A^* \mid \ker f \textit{ contém um ideal de } A \textit{ de codimensão finita}\}$$

O próximo lema mostra uma importante propriedade do dual finito

Lema 2.27. *[ACM94, p. 4710] Se $\mathcal{V}$ é uma variedade e A é uma álgebra de $\mathcal{V}$, então o dual finito A° é uma coálgebra de $\mathcal{V}$.*

No caso em que A é uma álgebra associativa, pelo Lema 2.27, A° é uma coálgebra associativa. Pelo Teorema Fundamental das Coálgebras, temos que A° é localmente finita ou, em outras palavras, $\mathrm{Loc}(A^\circ) = A^\circ$. Assim, aplicando a Proposição 2.26, obtemos a seguinte caracterização do dual finito de A, quando A é uma álgebra associativa:

$$A^\circ = \{f \in A^* \mid \ker f \text{ contém um ideal de } A \text{ de codimensão finita}\}$$

Observe que a caracterização acima é válida desde que A pertença a alguma variedade onde é válido o Teorema Fundamental das Coálgebras.

Se A é uma álgebra, então o espaço A^* possui estrutura de A-bimódulo com ações à esquerda e à direita dadas, respectivamente, por:

$$\lambda_a f = f \circ R_a,$$
$$\rho_a f = f \circ L_a,$$

em que $a \in A$, $f \in A^*$ e L_a, R_a são os operadores de multiplicação por $a \in A$ à esquerda e à direita, respectivamente. Em outras palavras, para todo $a \in A$ e todo $f \in A^*$, as transformações lineares $\lambda_a f, \rho_a f$ são funcionais lineares do espaço A dadas por

$$\langle \lambda_a f,\, x\rangle = \langle f,\, xa\rangle \qquad e \qquad \langle \rho_a f,\, x\rangle = \langle f,\, ax\rangle\,,$$

para todo $x \in A$.

Observação. O subespaço $A^\circ \subseteq A^*$ admite duas ações de bimódulo: além da ação de A-bimódulo descrita acima, como A° é uma coálgebra, também podemos considerar a ação de $(A^\circ)^*$-bimódulo sobre A°. Em certos contextos, estas ações de bimódulo podem causar alguma confusão. Exploraremos a relação entre elas na Seção 3.1 do Capítulo 3.

Seja $\kappa : A \to A^{**}$ a inclusão canônica de A em A^{**}. Lembramos que κ é dada por

$$\begin{aligned} \kappa : A &\to A^{**} \\ a &\mapsto \kappa(a) \end{aligned} \qquad \text{em que} \qquad \begin{aligned} \kappa(a) : A^* &\to F \\ f &\mapsto \langle \kappa(a),\, f \rangle = \langle f,\, a \rangle \end{aligned}$$

O próximo teorema apresenta condições necessárias e suficientes para que um subespaço de A^* seja um espaço bom.

Teorema 2.28. *[ACM94, p. 4704] Seja A uma álgebra e S um subespaço vetorial de A^*. São equivalentes:*

(a) *O subespaço $S \subseteq A^*$ é um A-sub-bimódulo de A^* e, para qualquer $\alpha \in S$, um dos subespaços*

$$\alpha A = \{\rho_a(\alpha) \mid a \in A\} \qquad e \qquad A\alpha = \{\lambda_a(\alpha) \mid a \in A\}$$

tem dimensão finita. Nestas condições, αA e $A\alpha$ são ambos espaços de dimensão finita para todo $\alpha \in S$;

(b) *O subespaço S é bom;*

(c) *Existe uma transformação linear $\Delta : S \to S \otimes S$ tal que a transformação $\kappa : A \to S^*$ é um homomorfismo de álgebras entre A e a álgebra dual relativa à coálgebra (S, Δ).*

Além disso, sob qualquer uma das condições acima a comultiplicação Δ é única e a função

$$\kappa + Id_M : A \dotplus S \to S^* \dotplus S$$

é um homomorfismo de álgebras entre as extensões cindidas-nulas dos bimódulos (A, S) e (S^*, S).

Capítulo 3

Uma coálgebra alternativa à direita não localmente finita e outras aplicações

Neste capítulo mostraremos que o Teorema Fundamental das Coálgebras não é válido na variedade das álgebras alternativas à direita. Para isso, vamos estudar o dual finito de uma certa álgebra alternativa à direita de dimensão infinita.

Em vista do Lema 2.27, se almejamos encontrar uma coálgebra em uma determinada variedade é natural procurar pelo dual finito de uma álgebra desta mesma variedade. Essa abordagem tem como desafio determinar quais elementos do espaço dual pertencem ao dual finito. A primeira seção deste capítulo usa o Teorema 2.28 para obter um critério para que um elemento arbitrário do espaço dual pertença ao dual finito. A segunda seção trata de aplicar tal critério para encontrar (sob condições convenientes) uma subcoálgebra específica no dual finito. Na terceira seção aplicaremos tal critério para obter exemplos de subcoálgebras de dimensão infinita com uma estrutura conveniente. Nesta seção, por exemplo, mostramos que existe uma coálgebra alternativa à direita que não é localmente finita. Na quarta seção vamos estudar os casos em que conseguimos determinar completamente o dual finito de uma álgebra.

Os teoremas 3.15 e 3.19 são resultados novos.

3.1 Elementos do dual finito

Seja A uma álgebra arbitrária e C uma coálgebra arbitrária.

Como vimos na página 30, se C é uma coálgebra, então C^* é uma álgebra e, como vimos na página 36, C tem estrutura de C^*-bimódulo. Somente nesta seção, vamos denotar as ações à esquerda e à direita deste bimódulo, respectivamente, por

$$\alpha \rightharpoonup f = \sum_{(f)} \left\langle \alpha,\ f_{(2)} \right\rangle f_{(1)}$$

$$f \leftharpoonup \alpha = \sum_{(f)} \left\langle \alpha,\ f_{(1)} \right\rangle f_{(2)},$$

em que $f \in C$, $\alpha \in C^*$ e $\Delta(f) = \sum_{(f)} f_{(1)} \otimes f_{(2)}$ é a comultiplicação de C escrita na notação de Sweedler.

Como vimos na página 43, se A é uma álgebra, então A^* é um A-bimódulo. Vamos denotar as ações à esquerda e à direita deste bimódulo, respectivamente, por

$$\lambda_a f = f \circ R_a,$$
$$\rho_a f = f \circ L_a,$$

em que $a \in A$, $f \in A^*$ e $L_a, R_a \in \operatorname{Mult} A$.

No caso em que A é uma álgebra, então $C = A^\circ$ é uma coálgebra e $C^* = (A^\circ)^*$ é uma álgebra. Os elementos do espaço A° possuem as duas ações descritas acima:

1. A ação de $(A^\circ)^*$-bimódulo sobre A°, associada a toda coálgebra. Se $f \in A^\circ$, então denotamos, somente nesta seção, o $(A^\circ)^*$-sub-bimódulo gerado por f como
$$\operatorname{Bimod}_{(A^\circ)^*} \langle f \rangle \subseteq A^\circ;$$
2. A ação de A-bimódulo sobre $A^\circ \subseteq A^*$, associada a todo espaço dual de uma álgebra. Se $f \in A^\circ$, então denotamos, somente nesta seção, o A-sub-bimódulo gerado por f como
$$\operatorname{Bimod}_A \langle f \rangle \subseteq A^*;$$

A proposição a seguir mostra, em particular, que existe uma compatibilidade entre estas ações no subespaço A°.

Proposição 3.1. *Para todo $f \in A^\circ$, o $(A^\circ)^*$-sub-bimódulo* $\operatorname{Bimod}_{(A^\circ)^*} \langle f \rangle \subseteq A^\circ$ *é um A-sub-bimódulo de A^* com a estrutura dada acima. Em particular A° é um A-sub-bimódulo de A^*.*

Demonstração. Tome $f \in A^\circ$ e $a \in A$ e defina $\alpha \in (A^\circ)^*$ dado por

$$\langle \alpha,\, g \rangle = \langle g,\, a \rangle\,,$$

para todo $g \in A^\circ$. Denote por Δ a comultiplicação de A°. Para todo $x \in A$,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \rightharpoonup f,\, x \rangle &= \left\langle \sum_{(f)} \left\langle \alpha,\, f_{(2)} \right\rangle f_{(1)}\,,\;\; x \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{(f)} \left\langle f_{(2)},\, a \right\rangle f_{(1)}\,,\;\; x \right\rangle = \sum_{(f)} \left\langle f_{(2)},\, a \right\rangle \left\langle f_{(1)},\, x \right\rangle \\
&= \langle \Delta(f),\, x \otimes a \rangle = \langle f,\, xa \rangle = \langle f \circ R_a,\, x \rangle = \langle \lambda_a f,\, x \rangle
\end{aligned}$$

e, portanto, $\lambda_a f = \alpha \rightharpoonup f \in \operatorname{Bimod}_{(A^\circ)^*} \langle f \rangle$. De maneira análoga, prova-se que $\rho_a f = f \leftharpoonup \alpha \in \operatorname{Bimod}_{(A^\circ)^*} \langle f \rangle$. □

Pelo Corolário 2.11, se $f \in A^\circ$, então

$$\mathrm{Coalg}\,\langle f\rangle = \mathrm{Bimod}_{(A^\circ)^*}\,\langle f\rangle\,. \tag{3.2}$$

Por outro lado, pela Proposição 3.1, $\mathrm{Bimod}_{(A^\circ)^*}\,\langle f\rangle$ é um A-sub-bimódulo de A^* que contém f, donde segue que

$$\mathrm{Bimod}_A\,\langle f\rangle \subseteq \mathrm{Bimod}_{(A^\circ)^*}\,\langle f\rangle\,. \tag{3.3}$$

Vamos provar que vale a igualdade da última inclusão.

Proposição 3.4. *Seja A uma álgebra e $f \in A^*$. Se $f \in A^\circ$, então o subespaço* $\mathrm{Bimod}_A\,\langle f\rangle$ *é um subespaço bom de A^*. Em particular,* $\mathrm{Bimod}_A\,\langle f\rangle$ *é uma subcoálgebra de A° e* $\mathrm{Bimod}_A\,\langle f\rangle \supseteq \mathrm{Coalg}\,\langle f\rangle$

Demonstração. Vamos provar que o subespaço $\mathrm{Bimod}_A\,\langle f\rangle$ satisfaz a condição (a) do Teorema 2.28. Tome $g \in \mathrm{Bimod}_A\,\langle f\rangle$. O espaço $\mathrm{Bimod}_{(A^\circ)^*}\,\langle f\rangle$ é um subespaço bom de A^*, pois é uma subcoálgebra de A°, e $g \in \mathrm{Bimod}_A\,\langle f\rangle \subseteq \mathrm{Bimod}_{(A^\circ)^*}\,\langle f\rangle$. Pelo Teorema 2.28, o espaço $g(A^\circ)^*$ tem dimensão finita.

Considere o espaço

$$gA = \mathrm{span}\,\langle \rho_a g \mid a \in A\rangle$$

Pela demonstração da Proposição 3.1, $gA \subseteq g(A^\circ)^*$ e, em particular, gA tem dimensão finita.

Novamente pelo Teorema 2.28, temos que $\mathrm{Bimod}_A\,\langle f\rangle$ é um subespaço bom de A^*. □

Por (3.2), (3.3) e pela Proposição anterior, concluímos o seguinte Corolário.

Corolário 3.5. *Seja A uma álgebra e $f \in A^*$. Se $f \in A^\circ$, então*

$$\mathrm{Coalg}\,\langle f\rangle = \mathrm{Bimod}_{(A^\circ)^*}\,\langle f\rangle = \mathrm{Bimod}_A\,\langle f\rangle\,.$$

Antes de demonstrar nosso critério para que um elemento do espaço dual pertença ao dual finito, vamos demonstrar o seguinte lema.

Lema 3.6. *Se A é uma álgebra e $g \in A^\circ$, então o espaço*

$$B^{(1)}\langle g\rangle = \mathrm{span}\,\langle \tau_a(g) \mid a \in A, \tau \in \{\lambda, \rho\}\rangle$$

é um subespaço de A° com dimensão finita.

Demonstração. Para qualquer $g \in A^\circ$, a subcoálgebra $\mathrm{Coalg}\,\langle g\rangle = \mathrm{Bimod}_A\,\langle g\rangle$ está contida em A° (pois A° é uma coálgebra) e, em particular, para todo $a \in A$, os elementos $\lambda_a g$ e $\rho_a g$ pertencem a $\mathrm{Coalg}\,\langle g\rangle$. Segue que $B^{(1)}\langle g\rangle$ é um subespaço de A°.

Se Δ é a comultiplicação de A°, então tome $h_1^{(1)}, \ldots, h_n^{(1)}, h_1^{(2)}, \ldots, h_n^{(2)} \in A^\circ$ tais que

$$\Delta(g) = \sum_{i=1}^{n} h_i^{(1)} \otimes h_i^{(2)}.$$

Pela Proposição 3.1, para todo $a \in A$,

$$\lambda_a g = \sum_{i=1}^{n} \left\langle h_i^{(2)},\, a \right\rangle h_i^{(1)} \subseteq \operatorname{span}\left\langle h_1^{(1)}, \ldots, h_n^{(1)} \right\rangle$$
$$\rho_a g = \sum_{i=1}^{n} \left\langle h_i^{(1)},\, a \right\rangle h_i^{(2)} \subseteq \operatorname{span}\left\langle h_1^{(2)}, \ldots, h_n^{(2)} \right\rangle$$

são elementos do espaço de dimensão finita span $\left\langle h_1^{(1)}, \ldots, h_n^{(1)}, h_1^{(2)}, \ldots, h_n^{(2)} \right\rangle$. Em particular, $B^{(1)}\langle g \rangle$ tem dimensão finita para todo $g \in A$. □

Teorema 3.7. *Seja A uma álgebra e $f \in A^*$. São equivalentes:*

(1) $f \in A^\circ$*;*

(2) Para todo $\alpha \in \operatorname{Bimod}_A \langle f \rangle$, um dos espaços

$$\alpha A = \{\rho_a(\alpha) \mid a \in A\} \qquad e \qquad A\alpha = \{\lambda_a(\alpha) \mid a \in A\}$$

tem dimensão finita. Nestas condições, αA e $A\alpha$ são ambos espaços de dimensão finita para todo $\alpha \in \operatorname{Bimod}_A \langle f \rangle$;

(3) Para todo inteiro positivo k, o espaço

$$B^{(k)}\langle f \rangle = \operatorname{span}\left\langle \tau_{a_1}^{(1)} \ldots \tau_{a_k}^{(k)}(f) \mid a_1, \ldots, a_k \in A, \tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(k)} \in \{\lambda, \rho\} \right\rangle$$

tem dimensão finita.

Demonstração. $(1) \iff (2)$: Basta observar que $f \in A^\circ$ se, e somente se $\operatorname{Bimod}_A \langle f \rangle$ está contido em A° e aplicar o Teorema 2.28 com $S = \operatorname{Bimod}_A \langle f \rangle$.

$(1) \implies (3)$: Pelo Lema 3.6, $B^{(1)}\langle f \rangle$ é um subespaço de A° com dimensão finita. A conclusão segue notando que, se $B^{(k)}\langle f \rangle = \operatorname{span}\langle x_1, \ldots, x_N \rangle \subseteq A^\circ$, em que k é um inteiro positivo, então

$$B^{(k+1)}\langle f \rangle = B^{(1)}\langle x_1 \rangle + \cdots + B^{(1)}\langle x_N \rangle$$

e usando indução sobre k.

$(3) \implies (2)$: Lembramos (conferir a página 15) que

$$\operatorname{Bimod}_A \langle f \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} B^{(k)}\langle f \rangle,$$

em que

$$B^{(0)}\langle f \rangle = \operatorname{span}\langle S \rangle\,;$$
$$B^{(k)}\langle f \rangle = \operatorname{span}\left\langle \tau_{a_1}^{(1)} \ldots \tau_{a_k}^{(k)}(f) \mid a_1, \ldots, a_k \in A, \tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(k)} \in \{\lambda, \rho\} \right\rangle$$

Se $\alpha \in \mathrm{Bimod}_A \langle f \rangle$, então podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha = \tau_{b_1}^{(1)} \dots \tau_{b_t}^{(t)} f$, em que $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(t)} \in \{\lambda, \rho\}$ e $b_1, \dots, b_t \in A$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha A,\ A\alpha \subseteq \alpha A + A\alpha &= \operatorname{span} \left\langle \tau_b \tau_{b_1}^{(1)} \dots \tau_{b_t}^{(t)}(f) \mid b \in A, \tau \in \{\lambda, \rho\} \right\rangle \\ &\subseteq B^{(t+1)}\langle f \rangle \end{aligned}$$

Segue que $A\alpha$ e αA são espaços de dimensão finita. □

Embora o Teorema 2.28 seja semelhante ao Teorema 3.7, o último é mais útil quando queremos mostrar que um certo funcional pertence ao dual finito, mas não conhecemos um subespaço que o contenha e satisfaça as condições do Teorema 2.28.

3.2 Funcionais duais e o dual finito

Se V é um espaço de dimensão finita, então o espaço dual V^* possui a mesma dimensão de V. Além disso, a partir de qualquer base de V podemos construir uma base de V^* chamada de base dual. Lembramos que a base dual é construída da seguinte maneira: se V é um espaço de dimensão finita e $\{e_i \mid i \in I\}$ é uma base de V, em que I é um conjunto de índices, então $\{f_i \mid i \in I\}$ é uma base de V^*, em que f_i é o funcional linear dado por

$$\langle f_i,\, e_j \rangle = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j; \\ 0, \text{caso contrário;} \end{cases}$$

para quaisquer $i, j \in I$. Quando consideramos espaços vetoriais de dimensão infinita (ou seja, quando o conjunto de índices I é infinito) ainda podemos reproduzir esta construção. No caso geral, chamaremos os funcionais assim obtidos de *funcionais duais* relativos à uma base fixada.

Se A é uma álgebra de dimensão finita, então $A^\circ = A^*$ e, a partir de qualquer base de A, podemos construir uma base de A° e estudar o dual finito.

Note no entanto que, se A é uma álgebra de dimensão infinita e $\mathcal{B}$ é uma base A, então o conjunto dos funcionais duais relativos a $\mathcal{B}$ tem a mesma cardinalidade de $\mathcal{B}$, ao passo que A^* é um espaço vetorial com dimensão estritamente maior do que a dimensão de A. Concluímos que, no caso em que A é uma álgebra de dimensão infinita, o conjunto dos funcionais obtidos a partir de uma base de A sempre gera um subespaço próprio de A^*. Em geral, o subespaço gerado pelos funcionais duais de uma base não está necessariamente contido no dual finito A° (conferir o Exemplo 3.16).

Nesta seção vamos aplicar o Teorema 3.7 para mostrar que se A é uma álgebra de dimensão infinita e $\mathcal{B} \subseteq A$ é uma base de A tal que possamos escrever a tabela de multiplicação de A de maneira conveniente, então o conjunto dos funcionais duais à base $\mathcal{B}$ gera uma subcoálgebra de A° com dimensão infinita.

Seja A uma álgebra, $\mathcal{B}$ uma base fixada de A. Defina $\{\varphi_b \mid b \in \mathcal{B}\}$ o conjunto dos funcionais dados por

$$\varphi_b(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x = b; \\ 0, \text{ se } x \in \mathcal{B} \setminus \{b\}, \end{cases}$$

em que $b \in \mathcal{B}$. Definimos o subespaço dos funcionais duais relativos a $\mathcal{B}$ como $\varphi_{\mathcal{B}} = \operatorname{span}\langle \varphi_b \mid b \in \mathcal{B}\rangle$.

Definição 3.8. Seja $x \in A$, então escreva $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$, em que $\alpha_i \in F$ são elementos não nulos, $b_i \in \mathcal{B}$, para qualquer $1 \leq i \leq n$. Definimos o *suporte* de x como $\operatorname{supp} x = \{b_1, \ldots, b_n\}$, ou seja, o menor subconjunto de $\mathcal{B}$ tal que x se escreve como combinação linear de seus elementos.

Lema 3.9. *Seja A uma álgebra e $\mathcal{B}$ uma base de A. Suponha que $x \in \mathcal{B}$ seja um elemento tal que o conjunto*

$$P(x) = \{(b_1, b_2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mid x \in \operatorname{supp}(b_1 b_2)\}$$

seja finito. Sejam (λ, ρ) as ações à esquerda e à direita, respectivamente, do A-bimódulo A^*. Segue que,

$$\lambda_b \varphi_x = \sum_{(a,b)\in P(x)} \langle \varphi_x,\, ab\rangle\, \varphi_a$$

$$\rho_b \varphi_x = \sum_{(b,a)\in P(x)} \langle \varphi_x,\, ba\rangle\, \varphi_a$$

e o conjunto

$$B^{(1)}\langle \varphi_x\rangle = A\varphi_x + \varphi_x A = \operatorname{span}\langle \tau_a \varphi_x \mid \tau \in \{\lambda, \rho\}, a \in A\rangle$$

tem dimensão finita.

Demonstração. Se $x \in \mathcal{B}$ é como no enunciado, então o espaço

$$V = \operatorname{span}\langle \varphi_a \mid (a,b) \in P(x), \text{ para algum } b \in \mathcal{B}\rangle$$

tem dimensão finita. Nossa estratégia será mostrar que $B^{(1)}\langle \varphi_x\rangle$ está contido em V.

Se $a, b \in \mathcal{B}$, então

$$\langle \lambda_b \varphi_x,\, a\rangle = \langle \varphi_x,\, R_b a\rangle = \langle \varphi_x,\, ab\rangle = \begin{cases} \alpha \neq 0, \text{ se } x \in \operatorname{supp}(ab) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Fixe um elemento $b \in \mathcal{B}$. Se não existir elemento $a \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \operatorname{supp}(ab)$, então $\lambda_b \varphi_x = 0$ e trivialmente $\lambda_b \varphi_x \in V$. Caso contrário, como o conjunto $P(x)$ é finito, existe uma quantidade finita de elementos $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{B}$ tais que $x \in \operatorname{supp}(a_1 b) \cap \cdots \cap \operatorname{supp}(a_n b)$. Nesse caso, verifica-se que $\lambda_b \varphi_x$ coincide nos elementos da base $\mathcal{B}$ com o funcional

$$\langle \varphi_x,\, a_1 b\rangle\, \varphi_{a_1} + \cdots + \langle \varphi_x,\, a_n b\rangle\, \varphi_{a_n}$$

Em outras palavras,

$$\lambda_b \varphi_x = \sum_{(a,b)\in P(x)} \langle \varphi_x,\, ab \rangle\, \varphi_a.$$

Em particular, concluímos que $\lambda_b \varphi_x$ é combinação dos elementos $\varphi_{a_1}, \ldots, \varphi_{a_n}$.

Segue também que

$$A\varphi_x = \operatorname{span} \langle \lambda_b \varphi_x \mid b \in B \rangle \subseteq \operatorname{span} \langle \varphi_a \mid (a,b) \in P(x),\ \text{para algum } b \in \mathcal{B} \rangle\,,$$

e, em particular, $A\varphi_x$ tem dimensão finita. Pelo mesmo raciocínio,

$$\rho_b \varphi_x = \sum_{(b,a)\in P(x)} \langle \varphi_x,\, ba \rangle\, \varphi_a,$$

$\varphi_x A$ é um subespaço de dimensão finita e segue o resultado enunciado. □

Note que o conjunto $P(x)$ é finito se, e somente se, o elemento $x \in \mathcal{B}$ ocorre na tabela de multiplicação de A (escrita na base $\mathcal{B}$) um número finito de vezes, de forma que a condição do Lema 3.9 pode ser verificada se pudermos escrever a tabela de multiplicação de A em uma base conveniente.

Teorema 3.10. *Seja A uma álgebra e $\mathcal{B}$ uma base de A. Suponha que, para qualquer $x \in \mathcal{B}$, o conjunto*

$$P(x) = \{(b_1, b_2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mid x \in \operatorname{supp}(b_1 b_2)\}$$

seja finito. Segue que o espaço $\varphi_{\mathcal{B}}$ é uma subcoálgebra do dual finito A°.

Demonstração. Tome $b \in \mathcal{B}$ e defina $f = \varphi_b$. Provaremos por indução sobre k que, para cada inteiro positivo k, existe um subconjunto finito $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq \mathcal{B}$ de forma que o espaço

$$B^{(k)}\langle f \rangle = \operatorname{span} \left\langle \tau^{(1)}_{a_1} \ldots \tau^{(k)}_{a_k}(f) \mid a_1, \ldots, a_k \in A, \tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(k)} \in \{\lambda, \rho\} \right\rangle$$

esteja contido em $\operatorname{span}\left\langle \varphi_{b_1}, \ldots, \varphi_{b_n} \right\rangle$. Pela demonstração do Lema 3.9, $B^{(1)}\langle f \rangle$ satisfaz o caso base da indução.

Suponha que $t \geq 1$ seja um inteiro tal que $B^{(t)}\langle f \rangle \subseteq \operatorname{span}\left\langle \varphi_{b_1}, \ldots, \varphi_{b_m} \right\rangle$, em que $b_1, \ldots, b_m \in \mathcal{B}$. Lembramos que $B^{(t+1)}\langle f \rangle = A \cdot B^{(t)}\langle f \rangle + B^{(t)}\langle f \rangle \cdot A$ e, portanto,

$$\begin{aligned} B^{(t+1)}\langle f \rangle &\subseteq A\varphi_{b_1} + \cdots + A\varphi_{b_m} + \varphi_{b_1} A + \cdots + \varphi_{b_m} A \\ &= (A\varphi_{b_1} + \varphi_{b_1} A) + \cdots + (A\varphi_{b_m} + \varphi_{b_m} A) \\ &= B^{(1)}\langle \varphi_{b_1} \rangle + \cdots + B^{(1)}\langle \varphi_{b_m} \rangle \end{aligned}$$

Novamente, pela demonstração do Lema 3.9, os espaços $B^{(1)}\langle \varphi_{b_1} \rangle, \ldots, B^{(1)}\langle \varphi_{b_m} \rangle$ estão contidos em subespaços da forma $\operatorname{span}\left\langle \varphi_{b_1}, \ldots, \varphi_{b_n} \right\rangle$, em que $b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{B}$, assim como $B^{(t+1)}\langle f \rangle$.

Por indução, concluímos que, para qualquer inteiro positivo k, o espaço $B^{(k)}\langle f\rangle$ está contido num subespaço da forma span $\left\langle \varphi_{b_1},\ldots,\varphi_{b_n}\right\rangle$, em que $b_1,\ldots,b_n\in\mathcal{B}$. Em particular, para qualquer inteiro positivo k, o espaço $B^{(k)}\langle f\rangle$ tem dimensão finita e, pelo Teorema 3.7, segue que $f\in A^\circ$. Pela demonstração também é claro que Coalg $\langle f\rangle=$ Bimod $\langle f\rangle\subseteq\varphi_{\mathcal{B}}$. Segue que $\varphi_{\mathcal{B}}$ é uma subcoálgebra de A°. $\square$

3.3 Aplicações

O principal objetivo desta seção é apresentar uma coálgebra alternativa à direita que não é localmente finita. Em vista da Conjectura 1, se $\mathcal{V}$ é uma variedade que não possui radical localmente nilpotente, entender sob quais condições $\mathcal{V}$ admite coálgebras que não sejam localmente finitas pode nos ajudar a entender uma eventual conexão entre a existência do radical localmente finito e o Teorema Fundamental das Coálgebras.

Além de aplicar os teoremas obtidos anteriormente para apresentar o exemplo descrito acima, usaremos os resultados para estudar o dual finito de outras álgebras.

Alguns dos primeiros exemplos de coálgebras não localmente finitas foram obtidos por W. Michaelis a partir de 1980, no contexto de coálgebras de Lie. Em 1990, é apresentado em [Mic90] um exemplo de coálgebra não nula cujo maior espaço localmente finito é o espaço nulo. Esta coálgebra é o dual finito da álgebra de Witt e podemos usar o Teorema 3.10 para dar uma outra demonstração deste fato.

Exemplo 3.11. Suponha que F seja um corpo de característica nula e considere o espaço $L=\operatorname{span}\langle e_{-1},e_0,e_1,\ldots\rangle$, onde $e_{-1},e_0,\ldots$ são elementos linearmente independentes. Defina em L o produto $[e_n,e_m]=(m-n)e_{n+m}$, em que $n,m\geq -1$ são números inteiros. Esta álgebra é conhecida como álgebra de Witt e é uma álgebra de Lie. A álgebra L satisfaz a hipótese do Teorema 3.10 pois, para todo inteiro $k\geq 1$,

$$P(e_k)\subseteq\{(e_{-1},e_{k+1}),(e_0,e_k),(e_1,e_{k-1}),\ldots,(e_{k+1},e_{-1})\}.$$

Segue que o espaço span $\left\langle \varphi_{e_{-1}},\varphi_{e_0},\ldots\right\rangle$ é uma subcoálgebra de L° e, em particular, L° é uma coálgebra não nula.

A álgebra L é uma álgebra de Lie simples e, portanto, seu único ideal de codimensão finita é a própria álgebra L. Pelo Lema 2.26, $f\in L^*$ pertence a $\operatorname{Loc}(L^\circ)$ se, e somente se, o núcleo de f contém um ideal de L de codimensão finita. Isto ocorre se, e somente se, o núcleo de f contém toda a álgebra L, ou seja, se, e somente se, f é o elemento nulo de L^*. Conclui-se que $\operatorname{Loc}(L^\circ)=0$.

Antes da próxima proposição, lembramos que, mesmo que $A=A_0\dot{+}A_1$ seja uma superálgebra de dimensão finita, a envolvente de Grassmann $G(A)=A_0\otimes G_0+A_1\otimes G_1$ será uma álgebra de dimensão infinita. Assim, se estamos interessados em obter exemplos de coálgebras de dimensão infinita em certas variedades, poderíamos estudar o dual finito de envolventes de Grassmann de superálgebras de dimensão finita nas mesmas variedades.

Como veremos a seguir, a envolvente de Grassmann de uma superálgebra de dimensão finita satisfaz a hipótese do Teorema 3.10, mas a subcoálgebra dos funcionais duais assim obtida é sempre uma coálgebra localmente finita. Dessa forma, embora esta seja uma fonte de exemplos de coálgebras de dimensão infinita, estes exemplos não são úteis para provar que o Teorema Fundamental das Coálgebras não é válido em determinada variedade.

Proposição 3.12. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade homogênea e $A = A_0 + A_1$ uma $\mathcal{V}$-superálgebra de dimensão finita. Denote por $\mathcal{B}_{G_0} = \{1\} \cup \{e_{i_1} \dots e_{i_{2k}} \mid k \geq 1,\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{2k}\}$ e $\mathcal{B}_{G_1} = \{e_{i_1} \dots e_{i_{2k+1}} \mid k \geq 1,\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{2k+1}\}$ bases de G_0 e G_1 respectivamente, e $\mathcal{B}_{A_0}, \mathcal{B}_{A_1}$ bases de A_0 e A_1, respectivamente. Então o conjunto $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{G_0} \otimes \mathcal{B}_{A_0}) \cup (\mathcal{B}_{G_1} \otimes \mathcal{B}_{A_1})$ é uma base de $G(A)$ que satisfaz a hipótese do Teorema 3.10, donde concluímos que $\varphi_{\mathcal{B}}$ é uma coálgebra. Além disso, a coálgebra $\varphi_{\mathcal{B}}$ é localmente finita.*

Demonstração. O conjunto $\mathcal{B}$ é claramente uma base de $G(A)$. Se $a \in \mathcal{B}_{A_0} \cup \mathcal{B}_{A_1}$, então é fácil ver que $P(a \otimes 1) \subseteq \{a' \otimes 1 \mid a' \in \mathcal{B}_{A_0} \cup \mathcal{B}_{A_1}\}$ é um conjunto finito.

Seja $a \otimes e_{i_1} \dots e_{i_t} \in \mathcal{B}$, com $t \geq 1$. Então

$$P(a \otimes e_{i_1} \dots e_{i_t}) \subseteq \{(b_1 \otimes e_{j_1} \dots e_{j_r},\ b_2 \otimes e_{k_1} \dots e_{k_s}) \mid b_1, b_2 \in B_{A_0} \cup \mathcal{B}_{A_1} \text{ e } \\ \{j_1, \dots, j_r\} \cup \{k_1, \dots, k_s\} = \{i_1, \dots, i_t\}\}.$$

Assim,

$$B^{(1)}\langle \varphi_{a \otimes e_{i_1} \dots e_{i_t}} \rangle \subseteq \operatorname{span}\left\langle \varphi_{b \otimes e_{j_1} \dots e_{j_r}} \mid b \in \mathcal{B}_{A_0} \cup \mathcal{B}_{A_1} \text{ e } \{j_1, \dots, j_r\} \subseteq \{i_1, \dots, i_t\} \right\rangle$$

e, para qualquer $b \in \mathcal{B}_{A_0} \cup \mathcal{B}_{A_1}$ e qualquer subconjunto $\{j_1, \dots, j_r\} \subseteq \{i_1, \dots, i_t\}$,

$$\begin{aligned} B^{(1)}\langle \varphi_{b \otimes e_{j_1} \dots e_{j_r}} \rangle &\subseteq \operatorname{span}\left\langle \varphi_{c \otimes e_{k_1} \dots e_{k_r}} \mid c \in \mathcal{B}_{A_0} \cup \mathcal{B}_{A_1} \text{ e } \{k_1, \dots, k_s\} \subseteq \{j_1, \dots, j_r\} \right\rangle \\ &\subseteq \operatorname{span}\left\langle \varphi_{b \otimes e_{j_1} \dots e_{j_r}} \mid b \in \mathcal{B}_{A_0} \cup \mathcal{B}_{A_1} \text{ e } \{j_1, \dots, j_r\} \subseteq \{i_1, \dots, i_t\} \right\rangle. \end{aligned}$$

Segue que,

$$B^{(2)}\langle \varphi_{a \otimes e_{i_1} \dots e_{i_t}} \rangle\rangle \subseteq \sum_{\substack{b \in \mathcal{B}_{A_0} \cup \mathcal{B}_{A_1} \\ \{j_1, \dots, j_r\} \subseteq \{i_1, \dots, i_t\}}} B^{(1)}\langle \varphi_{b \otimes e_{j_1} \dots e_{j_r}} \rangle$$

e o último espaço está contido em

$$V = \operatorname{span}\left\langle \varphi_{b \otimes e_{j_1} \dots e_{j_r}} \mid b \in \mathcal{B}_{A_0} \cup \mathcal{B}_{A_1} \text{ e } \{j_1, \dots, j_r\} \subseteq \{i_1, \dots, i_t\} \right\rangle,$$

que tem dimensão finita.

Por indução, $B^{(m)}\langle \varphi_{a \otimes e_{i_1} \dots e_{i_t}} \rangle$ está contido em V e, em consequência,

$$\operatorname{Coalg}\left\langle \varphi_{a \otimes e_{i_1} \dots e_{i_t}} \right\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} B^{(i)}\langle \varphi_{a \otimes e_{i_1} \dots e_{i_t}} \rangle \subseteq V. \qquad \square$$

A Proposição 3.12 não nos permite afirmar muito sobre os elementos de $(G(A))^\circ$ que não pertencem à subcoálgebra $\varphi_\mathcal{B}$, mas ainda assim podemos concluir que $(G(A))^\circ$ tem dimensão infinita, para qualquer superálgebra de dimensão finita A.

Vamos agora nos voltar à variedade das álgebras alternativas à direita. Construída de maneira semelhante à família de álgebras do Exemplo 3.12, a álgebra apresentada a seguir é um exemplo concreto de álgebra alternativa à direita de dimensão infinita que satisfaz às condições do Teorema 3.10, mas tal que a coálgebra $\varphi_\mathcal{B}$ obtida é localmente finita.

Exemplo 3.13. Seja $A = G_0[t]\dot{+}G_1[t]$, em que $G = G_0 + G_1$ é a álgebra de Grassmann. Considere o produto em A dado por:

$$\begin{aligned} at^i \cdot bt^j &= abt^{i+j} \\ at^i \cdot \xi t^j &= a\xi t^{i+j} \\ \xi t^i \cdot at^j &= 0 \\ \xi t^i \cdot \eta t^j &= i\xi\eta t^{i+j-1}, \end{aligned}$$

em que $a, b \in G_0$, $\xi, \eta \in G_1$ e i, j são inteiros não negativos. Quando munido de tal produto, o espaço A possui estrutura de álgebra alternativa à direita (que não é alternativa) e a álgebra A é dotada da base

$$\mathcal{B} = \{zt^k \mid z \in \mathcal{B}_{G_0} \cup \mathcal{B}_{G_1}, k \geq 0\}.$$

Observe que, para qualquer $zt^k \in \mathcal{B}$,

$$P(zt^k) = \{(z_1t^{k_1}, z_2t^{k_2}) \mid z_1z_2 = z, k_1 + k_2 = k\}$$

é um conjunto finito. Pelo Teorema 3.10, $\varphi_\mathcal{B}$ é uma subcoálgebra de A°.

A coálgebra $\varphi_\mathcal{B}$ é uma coálgebra alternativa à direita que, embora não seja alternativa, é localmente finita. De fato, tome $zt^k \in \mathcal{B}$ e observe que

$$\text{Coalg}\,\langle\varphi_{zt^k}\rangle = \text{Bimod}\,\langle\varphi_{zt^k}\rangle = \text{span}\,\langle\varphi_{zt^k}\rangle + B^{(1)}\langle\varphi_{zt^k}\rangle + B^{(2)}\langle\varphi_{zt^k}\rangle + \dots$$

Para qualquer $W(t) \in \mathcal{B} \subseteq A$ e quaisquer $m = 2^n(k+1) + 2$ elementos $a_1 \dots a_m \in A$ e operadores (da multiplicação interna de A) $T^{(1)}, \dots, T^{(m)} \in \{L, R\}$, temos que

$$T^{(m)}_{a_m} \dots T^{(1)}_{a_1}(W(t))$$

é um múltiplo de algum elemento da base $\mathcal{B}$ (pois $\mathcal{B}$ é uma base multiplicativa) que não divide zt^k: no caso em que este múltiplo é não nulo, pelo princípio da casa dos pombos, tal elemento possui ou mais elementos de Grassmann do que z, ou maior grau com relação a t do que t^k. Logo,

$$\left\langle \tau^{(1)}_{a_1} \dots \tau^{(m)}_{a_m}(\varphi_{zt^k}),\ W(t) \right\rangle = \left\langle \varphi_{zt^k},\ T^{(m)}_{a_m} \dots T^{(1)}_{a_1}(W(t)) \right\rangle = 0,$$

para qualquer $W(t) \in \mathcal{B}$, em que $\tau^{(i)} = \lambda$, se $T^{(i)} = R$ e $\tau^{(i)} = \rho$, se $T^{(i)} = L$. Portanto, $\tau^{(1)}_{a_1} \ldots \tau^{(m)}_{a_m} \varphi_{zt^k} = 0$.

Em vista do discutido anteriormente, concluímos que

$$\mathrm{Coalg}\,\langle \varphi_{zt^k} \rangle = \mathrm{span}\,\langle \varphi_{zt^k} \rangle + B^{(1)}\langle \varphi_{zt^k} \rangle + \cdots + B^{(m+1)}\langle \varphi_{zt^k} \rangle$$

e, portanto, $\mathrm{Coalg}\,\langle \varphi_{zt^k} \rangle$ tem dimensão finita para qualquer $zt^k \in \mathcal{B}$.

Em vista da Conjectura 1, vale observar que a álgebra $A = G_0[t] \dot{+} G_1[t]$ do Exemplo 3.13 possui um ideal localmente nilpotente maximal

$$I = \mathrm{span}\left\langle e_{i_1} \ldots e_{i_n} t^k \mid k \geq 0,\ n \geq 1 \right\rangle$$

e que $A/I \simeq F[t]$ é a álgebra de polinômios.

Finalmente, vamos apresentar um exemplo de coálgebra alternativa à direita que não é localmente finita. Esse exemplo foi baseado na construção encontrada em [MS01] de uma família de $M_2(F)$-bimódulos de dimensão finita.

Exemplo 3.14. Considere $A = M_2(F) = \mathrm{span}\,\langle e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22} \rangle$, a álgebra de matrizes 2×2 com entradas no corpo F, em que

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, para cada $h \in \mathbb{Z}$, considere o espaço $M^{(h)} = \mathrm{span}\left\langle m_1^{(h)}, m_2^{(h)}, m_3^{(h)}, m_4^{(h)} \right\rangle$, em que $m_1^{(h)}, m_2^{(h)}, m_3^{(h)}, m_4^{(h)}$ são elementos linearmente independentes. O espaço $M = \bigoplus_{h\in\mathbb{Z}} M^{(h)}$ possui estrutura de A-bimódulo através da seguinte tabela de multiplicação:

$$\begin{array}{rlrl}
m_1^{(h)}e_{11} = & m_1^{(h)} & m_2^{(h)}e_{11} = & 0 \\
m_1^{(h)}e_{12} = & 0 & m_2^{(h)}e_{12} = & m_3^{(h)} \\
m_1^{(h)}e_{21} = & m_4^{(h)} & m_2^{(h)}e_{21} = & 0 \\
m_1^{(h)}e_{22} = & 0 & m_2^{(h)}e_{22} = & m_2^{(h)} \\
\\
m_3^{(h)}e_{11} = & m_3^{(h)} & m_4^{(h)}e_{11} = & 0 \\
m_3^{(h)}e_{12} = & 0 & m_4^{(h)}e_{12} = & m_1^{(h)} \\
m_3^{(h)}e_{21} = & m_2^{(h)} & m_4^{(h)}e_{21} = & 0 \\
m_3^{(h)}e_{22} = & 0 & m_4^{(h)}e_{22} = & m_4^{(h)} \\
\\
e_{11}m_1^{(h)} = & m_1^{(h)} & e_{11}m_2^{(h)} = & 0 \\
e_{12}m_1^{(h)} = & 0 & e_{12}m_2^{(h)} = & -m_4^{(h)} \\
e_{21}m_1^{(h)} = & -m_3^{(h)} & e_{21}m_2^{(h)} = & 0 \\
e_{22}m_1^{(h)} = & 0 & e_{22}m_2^{(h)} = & m_2^{(h)} \\
\\
e_{11}m_3^{(h)} = & -m_1^{(h+1)} & e_{11}m_4^{(h)} = & m_4^{(h)} - m_1^{(h+1)} \\
e_{12}m_3^{(h)} = & 0 & e_{12}m_4^{(h)} = & m_1^{(h)} \\
e_{21}m_3^{(h)} = & -m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)} - m_4^{(h+1)} & e_{21}m_4^{(h)} = & -2m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)} - m_4^{(h+1)} \\
e_{22}m_3^{(h)} = & m_3^{(h)} + m_1^{(h+1)} & e_{22}m_4^{(h)} = & m_1^{(h+1)}
\end{array}$$

em que $h \in \mathbb{Z}$.

O A-bimódulo M é alternativo à direita e oferecemos duas demonstrações deste fato no Apêndice A. Assim, $A \dot{+} M$ é uma álgebra alternativa à direita e $(A \dot{+} M)^\circ$ é uma coálgebra alternativa à direita.

Fixando a base $\mathcal{B} = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\} \cup \{m_k^{(h)} \mid h \in \mathbb{Z},\ k \in \{1,2,3,4\}\}$, podemos notar que qualquer elemento $m_k^{(h)} \in \mathcal{B}$ ocorre na tabela de multiplicação um número finito de vezes, donde concluímos que a base $\mathcal{B}$ da extensão cindida nula $A \dot{+} M$ satisfaz a hipótese do Teorema 3.10. Em particular, o funcional $\varphi_{m_1^{(1)}}$ pertence à coálgebra $(A \dot{+} M)^\circ$ e, em particular, $C = \mathrm{Coalg}\langle \varphi_{m_1^{(1)}} \rangle = \mathrm{Bimod}\langle \varphi_{m_1^{(1)}} \rangle$ é uma coálgebra alternativa à direita. Vamos agora mostrar que C é uma coálgebra de dimensão infinita.

Tome $h \in \mathbb{Z}$ e observe que, pela tabela de multiplicação de M e pelo Lema 3.9,

$$\rho_{e_{11}} \varphi_{m_1^{(h)}} = \varphi_{m_1^{(h)}} - \varphi_{m_3^{(h-1)}} - \varphi_{m_4^{(h-1)}}$$

$$\rho_{e_{21}} \varphi_{m_1^{(h)}} = 0$$

$$\rho_{e_{21}} \varphi_{m_3^{(h-1)}} = -\varphi_{m_1^{(h-1)}} + \varphi_{m_3^{(h-2)}} + \varphi_{m_4^{(h-2)}}$$

$$\rho_{e_{21}}\varphi_{m_4^{(h-1)}} = -\varphi_{m_3^{(h-2)}} - \varphi_{m_4^{(h-2)}}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\rho_{e_{21}}\rho_{e_{11}}\varphi_{m_1^{(h)}} &= \rho_{e_{21}}\varphi_{m_1^{(h)}} - \rho_{e_{21}}\varphi_{m_3^{(h-1)}} - \rho_{e_{21}}\varphi_{m_4^{(h-1)}}\\ &= \varphi_{m_1^{(h-1)}} - \varphi_{m_3^{(h-2)}} - \varphi_{m_4^{(h-2)}} + \varphi_{m_3^{(h-2)}} + \varphi_{m_4^{(h-2)}}\\ &= \varphi_{m_1^{(h-1)}}\end{aligned}$$

Em particular, $\{\varphi_{m_1^{(1)}}, \varphi_{m_1^{(0)}}, \varphi_{m_1^{(-1)}}, \dots\} \subseteq C$ e concluímos que C tem dimensão infinita. Como C é finitamente gerada, segue que C é uma coálgebra alternativa à direita que não é localmente finita.

Teorema 3.15. *O Teorema Fundamental das Coálgebras não é válido na variedade das álgebras alternativas à direita.*

Em vista do Exemplo 3.14, a variedade das álgebras alternativas à direita é uma variedade que reforça a Conjectura 1. Ainda assim, se houver conexão entre a existência de uma coálgebra alternativa à direita não localmente finita e a não existência do radical localmente nilpotente em Alt_d, esta conexão ainda não é clara.

3.4 Determinando o dual finito

Determinar todos os elementos do dual finito de uma álgebra de dimensão infinita pode ser uma tarefa difícil. Tome os Exemplos 3.12, 3.13 e 3.14, da seção anterior: ainda não sabemos muito sobre elementos do dual finito que não pertencem a uma subcoálgebra da forma $\varphi_{\mathcal{B}}$.

Nesta seção vamos apresentar três álgebras de dimensão enumerável tais que o dual finito é, respectivamente,

1. o espaço nulo;
2. um espaço de dimensão infinita e enumerável;
3. todo o espaço dual e, em particular, um espaço de dimensão infinita não enumerável;

No caso das variedades onde é válido o Teorema Fundamental das Coálgebras, a tarefa de determinar todos os elementos do dual finito pode ser simplificada usando o Lema 2.26, como veremos nos próximos dois exemplos.

Exemplo 3.16. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade em que o Teorema Fundamental das Coálgebras seja válido e seja A uma $\mathcal{V}$-álgebra simples de dimensão infinita (e.g. a variedade das álgebras associativas e a álgebra de Weyl de primeira ordem). Então

$$A^\circ = \operatorname{Loc} A^\circ = \{f \in A^* \mid \ker f \text{contém um ideal de } A \text{ de codimensão finita}\}.$$

Mas como A é simples, os únicos ideais de A são 0 e o próprio A, donde concluímos que o único ideal de codimensão finita é o próprio A. Assim, $f \in A^\circ$ se, e somente se, o núcleo de f contém A, ou seja, se f é o funcional nulo. Concluímos que $A^\circ = 0$.

Exemplo 3.17. Seja $\mathbb{Q}[t]$ a álgebra dos polinômios com coeficientes racionais. Provaremos que, embora $\mathbb{Q}[t]^*$ tenha dimensão infinita não enumerável, a coálgebra $\mathbb{Q}[t]^\circ$ tem dimensão infinita enumerável.[1]

Pelo fato que $\mathbb{Q}[t]$ é uma álgebra associativa, variedade onde vale o Teorema Fundamental das Coálgebras, e pelo Lema 2.26,

$$\mathbb{Q}[t]^\circ = \operatorname{Loc} \mathbb{Q}[t]^\circ = \{f \in \mathbb{Q}[t]^* \mid \ker f \text{contém um ideal de } \mathbb{Q}[t] \text{ de codimensão finita}\}.$$

Vamos provar que todo ideal não nulo de $\mathbb{Q}[t]$ tem codimensão finita.

Tome I um ideal não nulo de $\mathbb{Q}[t]$. Se $I = \mathbb{Q}[t]$, então I é claramente um ideal de codimensão finita. Suponha agora que I é um ideal próprio de $\mathbb{Q}[t]$. A álgebra $\mathbb{Q}[t]$ é um domínio de ideais principais e, portanto, todo ideal $I \lhd \mathbb{Q}[t]$ diferente de $\mathbb{Q}[t]$ é da forma $I = \operatorname{id}\langle p(t)\rangle$, em que $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{Q}[t]$ é um polinômio mônico, com $n \geq 1$. Assim, $\mathbb{Q}[t]/I = \operatorname{span}\left\langle 1 + I, t + I, \ldots, t^{n-1} + I\right\rangle$ é uma álgebra de dimensão finita e segue o desejado. Em particular, um funcional $f \in \mathbb{Q}[t]^*$ é um elemento de $\mathbb{Q}[t]^\circ$ se, e somente se, o núcleo de f contém algum ideal não nulo de $\mathbb{Q}[t]$.

Observe que a base $\mathcal{B} = \{t^k \mid k \geq 0\}$ satisfaz a hipótese do Teorema 3.10 e, portanto, o espaço de dimensão enumerável $\varphi_{\mathcal{B}}$ está contido em $\mathbb{Q}[t]^\circ$. Em particular $\mathbb{Q}[t]^\circ$ tem dimensão infinita.

Para provar que $\mathbb{Q}[t]^\circ$ tem dimensão enumerável, provaremos antes o seguinte lema:

Lema 3.18. (a) *Seja $f : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}$ um elemento não nulo de $\mathbb{Q}[t]^\circ$. Pelo Lema 2.26, o núcleo de f anula um ideal de $\mathbb{Q}[t]$ gerado por um polinômio $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{Q}[t]$. Então o funcional f é unicamente determinado pelos racionais $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, $f(1), f(t), \ldots, f(t^{n-1}) \in \mathbb{Q}$.*

(b) *Se $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{Q}$, então existe um funcional linear $f : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}$ tal que $f(1) = b_0, f(t) = b_1, \ldots, f(t^{n-1}) = b_{n-1}$ e o núcleo de f contém o ideal de $\mathbb{Q}[t]$ gerado pelo polinômio $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$.*

[1] Seja F um corpo infinito enumerável. O argumento usado na demonstração deste exemplo também é válido para mostrar que o dual finito da álgebra de polinômios $F[t]$ é uma coálgebra de dimensão não enumerável.

Demonstração. (a)

$$0 = f(p(t)) = f(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0) \Rightarrow$$
$$f(t^n) = -a_{n-1}f(t^{n-1}) - \cdots - a_1 f(t) - a_0 f(1)$$

Analogamente,

$$0 = f(tp(t)) = f(t^{n+1} + a_{n-1}t^n + \cdots + a_1 t^2 + a_0 t) \Rightarrow$$
$$f(t^{n+1}) = -a_{n-1}f(t^n) - \cdots - a_1 f(t^2) - a_0 f(t)$$

e assim, sucessivamente, obtemos a seguinte relação recursiva:

$$f(t^{n+\ell}) = -a_{n-1}f(t^{n+\ell-1}) - \cdots - a_1 f(t^{\ell+1}) - a_0 f(t^\ell),$$

para todo $\ell \geq 0$.

(b) Defina um funcional linear $f : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}$ dado por

$$f(t^k) = \begin{cases} b_k, & \text{se } 0 \leq k \leq n-1 \\ -a_{n-1}f(t^{n+\ell-1}) - \cdots - a_1 f(t^{\ell+1}) - a_0 f(t^\ell), & \text{se } \ell = k-n \geq 0 \end{cases}$$

Pela construção de f, conforme desenvolvido no item (a), podemos concluir que $f(t^i p(t)) = 0$, para todo $i \geq 0$. Concluímos que o núcleo de f contém o ideal de $\mathbb{Q}[t]$ gerado por $p(t)$. □

A parte (b) do lema mostra que, para todo $n \geq 1$, existe uma função do conjunto infinito enumerável $S_n = \mathbb{Q}^{2n} = \{(a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1})\}$ em $\mathbb{Q}[t]^\circ$. Segue que existe uma função do conjunto $\cup_{n\geq 1} S_n$ em $\mathbb{Q}[t]^\circ$ e, pela parte (a), essa função é sobrejetora. Como o conjunto $\cup_{n\geq 1} S_n$ é infinito enumerável e $\mathbb{Q}[t]^\circ$ é infinito, segue que $\mathbb{Q}[t]^\circ$ é infinito enumerável. Concluímos que $\mathbb{Q}[t]^\circ$ tem dimensão infinita enumerável

Também é interessante notar que $\varphi_{\mathcal{B}}$ é uma subcoálgebra própria de $\mathbb{Q}[t]^\circ$ e, em particular, os funcionais φ_{t^k}, com $k \geq 0$, não são uma base de $\mathbb{Q}[t]^\circ$. De fato, defina para qualquer $r \in \mathbb{Q}$ o funcional $\theta_r : \mathbb{Q}[t]^* \to \mathbb{Q}$ dado por

$$\theta_r(p(t)) = p(r),$$

para qualquer polinômio $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$. Denote o produto de $\mathbb{Q}[t]$ por $\mathfrak{m}$. Para quaisquer inteiros $m, n \geq 0$, temos que

$$\langle \mathfrak{m}^*(\theta_r),\ t^m \otimes t^n \rangle = \left\langle \theta_r,\ t^{m+n} \right\rangle = r^{m+n} = r^m r^n = \langle \theta_r,\ t^m \rangle \langle \theta_r,\ t^n \rangle = \langle \iota(\theta_r \otimes \theta_r),\ t^m \otimes t^n \rangle .$$

Podemos concluir que $\mathfrak{m}^*(\theta_r) = \iota(\theta_r \otimes \theta_r)$, que span $\langle \theta_r \rangle$ é um subespaço bom e, em particular, $\theta_r \in \mathbb{Q}[t]^\circ$.

Por fim, para qualquer $r \in \mathbb{Q}$ não nulo, θ_r é um funcional do dual finito $\mathbb{Q}[t]^\circ$ que não pertence a $\varphi_{\mathcal{B}}$. De fato, suponha que $\theta_r \in \varphi_{\mathcal{B}}$ e tome $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ tais que

$$\theta_r = a_0\varphi_1 + a_1\varphi_t + \cdots + a_n\varphi_{t^n}.$$

Teríamos dessa forma que, $0 = \left\langle \theta_r,\ t^{n+1} \right\rangle = r^{n+1}$, um absurdo.

O teorema a seguir mostra um caso onde, em oposição ao Exemplo 3.16, o dual finito consiste de todos os funcionais do espaço dual.

Teorema 3.19. *Seja A uma álgebra de dimensão finita e M um A-bimódulo. Então o dual finito da extensão cindida-nula $A \dotplus M$ é o próprio espaço dual $(A \dotplus M)^*$.*

Demonstração. Vamos mostrar que, para qualquer $f \in (A \dotplus M)^*$ e qualquer inteiro positivo m, o espaço $B^{(1)}\langle f \rangle$ tem dimensão finita e concluir através do Teorema 2.28 que $f \in A^\circ$ para todo $f \in A^*$.

Seja $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ uma base da álgebra A. O espaço A^* tem dimensão finita e pode ser considerado um subespaço do espaço $(A \dotplus M)^*$. Assim, defina o subespaço de dimensão finita

$$V = A^* + \operatorname{span}\langle \lambda_{a_1} f, \rho_{a_1} f, \ldots, \lambda_{a_n} f, \rho_{a_n} f \rangle \subseteq (A \dotplus M)^*.$$

Vamos mostrar que, para qualquer $x \in A \dotplus M$, $\lambda_x f, \rho_x f \in V$. Por linearidade, podemos assumir que $x \in A$ ou $x \in M$. No primeiro caso, ainda por linearidade, é evidente que

$$\lambda_x f, \rho_x f \in \operatorname{span}\langle \lambda_{a_1} f, \rho_{a_1} f, \ldots, \lambda_{a_n} f, \rho_{a_n} f \rangle \subseteq V.$$

Suponha agora que $x = m_0 \in M$ e observe que, para qualquer $m \in M$,

$$\begin{aligned}(\lambda_{m_0} f)(m) &= f(m m_0) = f(0) = 0,\\ (\rho_{m_0} f)(m) &= f(m_0 m) = f(0) = 0.\end{aligned}$$

Ou seja, $\lambda_{m_0} f, \rho_{m_0} f \in A^* \subseteq (A \dotplus M)^*$.

Segue, como desejado, que $\lambda_x f, \rho_x f \in V$, para qualquer $x \in A \dotplus M$. $\square$

É importante comparar o Teorema 3.10 e o Teorema 3.19, duas formas aqui apresentadas de se estudar o dual finito de uma álgebra. Se estamos interessados em encontrar uma subcoálgebra do dual finito da extensão cindida nula de um bimódulo, é verdade que a coálgebra obtida pelo último teorema contém a coálgebra $\varphi_{\mathcal{B}}$ obtida no primeiro teorema. No entanto, pode ser difícil determinar a comultiplicação do dual finito de uma extensão cindida nula arbitrária, e em consequência determinar a subcoálgebra gerada por um elemento específico, ao passo que a comultiplicação de $\varphi_{\mathcal{B}}$ pode ser facilmente determinada desde que a base $\mathcal{B}$ tenha boas propriedades.

3.5 Problemas em aberto

Lembramos (conferir Exemplo 1.31, página 25) que a variedade Alt_d não possui radical localmente nilpotente pois não satisfaz a seguinte propriedade

(3') Para qualquer $\mathcal{V}$-álgebra A e qualquer ideal $I \triangleleft A$, se I e A/I são localmente nilpotentes, então A é localmente nilpotente.

Neste contexto, investigar o seguinte problema pode ajudar a entender a conexão entre o Exemplo 3.14 e o radical localmente nilpotente.

Problema 3.20. A extensão cindida-nula $\mathcal{A} = A \dot{+} M$ do Exemplo 3.14 satisfaz a seguinte condição?

(3*) Para qualquer ideal $I \triangleleft \mathcal{A}$, se I e $\mathcal{A}/I$ são álgebras localmente nilpotentes, então $\mathcal{A}$ é uma álgebra localmente nilpotente.

Visto que a variedade das álgebras comutativas de potências associativas não possui radical localmente nilpotente, a Conjectura 1 sugere o seguinte problema:

Problema 3.21. É possível construir um exemplo de álgebra comutativa e de potências associativas satisfazendo as condições do Teorema 3.10?

Problema 3.22. A família de bimódulos que inspirou o bimódulo do Exemplo 3.14 é uma família de bimódulos irredutíveis de dimensão $4n$, para todo inteiro $n \geq 2$. Se $\mathcal{V}$ é uma variedade que admite uma família de bimódulos irredutíveis com dimensão arbitrariamente grande, então é possível construir um bimódulo de dimensão infinita satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.10, como no Exemplo 3.14? Em caso positivo, quais propriedades devemos impôr a esta família para que ela forneça um contra exemplo do Teorema Fundamental das Coálgebras?

Capítulo 4

O Teorema Fundamental das Coálgebras

Em 1973, I. P. Shestakov e K. A. Zhevlakov (conferir [ZS73]) encontraram condições necessárias e suficientes para que variedades de uma certa classe de álgebras possuam radical localmente nilpotente. Em 1976, S. V. Pchelintsev (conferir [Pch76]) encontrou condições suficientes para que uma subvariedade da variedade das álgebras alternativas à direita possua radical localmente nilpotente. Ao observar as condições obtidas pelos trabalhos mencionados é possível notar que há uma certa semelhança entre algumas destas condições e certas propriedades suficientes para que as coálgebras de uma variedade satisfaçam o Teorema Fundamental das Coálgebras.

Neste capítulo estudamos variedades que satisfazem uma propriedade que generaliza uma condição encontrada em [Pch76]. Esta classe de variedades inclui, por exemplo, as variedades das álgebras de Malcev, de Lie, associativas, alternativas, de Jordan, do tipo $(-1,1)$ e as variedades das álgebras $(-1,1)$-binárias e alternativas à direita Malcev-admissíveis, sendo estas duas últimas variedades objetos de estudo em [Pch76] (para a definição destas variedades, conferir Exemplo 1.7). A partir dos resultados deste capítulo, concluímos que, se uma variedade desta classe possui radical localmente nilpotente, então as coálgebras desta variedade satisfazem o Teorema Fundamental das Coálgebras.

Como consequência, provaremos que o Teorema Fundamental das Coálgebras é válido para as coálgebras associativas, alternativas, de Jordan, do tipo $(-1,1)$ (resultados já conhecidos), e é válido para coálgebras das variedades $\mathrm{Bin}(-1,1)$, das álgebras $(-1,1)$-binárias, e $\mathrm{Alt}_d \cap \mathrm{Malc}_a$, das álgebras alternativas à direita Malcev-admissíveis.

A primeira seção trata de estudar algumas propriedades de subcoálgebras geradas por um único elemento, usando a estrutura de bimódulo que essas subcoálgebras possuem. A segunda seção e a terceira seção tratam de contextualizar as condições que definem a classe de variedades onde é válido o Teorema Fundamental das Coálgebras segundo o Teorema 4.19. Na quarta seção, demonstramos o Teorema 4.19 e aplicamos ao caso das variedades $\mathrm{Bin}(-1,1)$ e $\mathrm{Alt}_d \cap \mathrm{Malc}_a$.

O Teorema 4.19 é um resultado novo.

4.1 Coálgebras finitamente geradas

Seja C uma coálgebra, C^* sua álgebra dual e tome $z \in C$. Neste trabalho escolhemos estudar a coálgebra C através da sua estrutura de C^*-bimódulo. Esta opção é especialmente útil em nosso caso pois desejamos estudar a subcoálgebra gerada por z, que coincide com o C^*-sub-bimódulo gerado por z.

Como espaço vetorial, Bimod $\langle z \rangle$ é gerado por z e por todos os elementos da forma

$$\tau_{a_1}^{(1)} \dots \tau_{a_t}^{(t)} z \in B^{(t)}\langle z \rangle,$$

em que t é um inteiro positivo, $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(t)} \in \{\lambda, \rho\}$ e $a_1, \dots, a_t \in C^*$. Assim, para mostrar que Bimod $\langle z \rangle$ tem dimensão finita é necessário mostrar que existe um inteiro positivo N tal que, se $t \geq N$, então todo elemento da forma

$$\tau_{a_1}^{(1)} \dots \tau_{a_t}^{(t)} z \in B^{(t)}\langle z \rangle,$$

é escrito como combinação linear de elementos de $\sum_{i=0}^{t-1} B^{(i)}\langle z \rangle$. Nosso objetivo nesta seção é mostrar que esta condição também é suficiente (Proposição 4.5).

Definição 4.1. Seja A uma álgebra, (M, λ, ρ) um A-bimódulo e $m \in M$. Para todo inteiro positivo k, defina

$$\begin{aligned}\mathrm{Ann}^{(k)}(m) = \{a \in A \mid \tau_a^{(1)} \tau_{b_1}^{(2)} \dots \tau_{b_{t-1}}^{(t)} m = 0, \text{ para quaisquer } t = 1, \dots, k,\\ \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(t)} \in \{\lambda, \rho\} \text{ e } b_1, \dots, b_{t-1} \in A\}\end{aligned}$$

Exemplo 4.2. Seja $G = G_0 + G_1$ a álgebra de Grassmann. Defina $A = G_0$, considere o A-bimódulo $M = G_1$ e fixe o elemento $m = e_1$. Para todo inteiro positivo n, temos

$$\mathrm{Ann}^{(n)}(e_1) = \mathrm{Ann}^{(1)}(e_1) = \mathrm{span}\left\langle e_1 e_{i_0} \dots e_{i_{2k}} \mid k \geq 0,\ 1 < i_0 < \dots < i_{2k} \right\rangle.$$

Os espaços $\mathrm{Ann}^{(1)}(m)$ e $\mathrm{Ann}^{(2)}(m)$ foram considerados em [ACM94] para mostrar que o Teorema Fundamental das Coálgebras é válido na variedade das álgebras alternativas e na variedade das álgebras de Jordan, respectivamente. Um espaço análogo ao espaço $\mathrm{Ann}^{(2)}(m)$ foi estudado em [Zhe96] para mostrar que o Teorema Fundamental das Coálgebras é válido na variedade das álgebras estruturáveis.

Lema 4.3. *Seja A uma álgebra, M um A-bimódulo, $m \in M$ e n um inteiro positivo tal que $\mathrm{Ann}^{(n)}(m)$ tem codimensão finita. Então o espaço*

$$B^{(t)}\langle m \rangle = \mathrm{span}\left\langle \tau_{a_1}^{(1)} \dots \tau_{a_t}^{(t)} m \mid \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(t)} \in \{\lambda, \rho\},\ a_1, \dots, a_t \in C^* \right\rangle$$

tem dimensão finita para todo inteiro positivo $t \leq n$.

Demonstração. Como $\mathrm{Ann}^{(n)}(m)$ tem codimensão finita, existem $b_1, \ldots, b_r \in A$ tais que

$$A = \mathrm{Ann}^{(n)}(m) \dot{+} \operatorname{span}\langle b_1, \ldots, b_r \rangle .$$

Observe que, para qualquer $t \leq n$

$$\begin{aligned} B^{(t)}\langle m \rangle &= \operatorname{span}\left\langle \tau^{(1)}_{a_1} \ldots \tau^{(t)}_{a_t} m \mid \tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(t)} \in \{\lambda, \rho\},\ a_1, \ldots, a_t \in A \right\rangle \\ &= \operatorname{span}\left\langle \tau^{(1)}_{a_1} \ldots \tau^{(t)}_{a_t} m \mid \tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(t)} \in \{\lambda, \rho\},\ a_1, \ldots, a_t \in (\mathrm{Ann}^{(n)}(m)) \cup \{b_1, \ldots, b_r\} \right\rangle . \end{aligned}$$

Como $t \leq n$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_t \in (\mathrm{Ann}^{(n)}(m)) \cup \{b_1, \ldots, b_r\}$ e quaisquer $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(t)} \in \{\lambda, \rho\}$, se houver $a_j \in \mathrm{Ann}^{(n)}(m)$ para algum j, então $\tau^{(1)}_{a_1} \ldots \tau^{(t)}_{a_t} m = 0$. Conclui-se que

$$B^{(t)}\langle m \rangle = \operatorname{span}\left\langle \tau^{(1)}_{b_{i_1}} \ldots \tau^{(t)}_{b_{i_t}} m \mid \tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(t)} \in \{\lambda, \rho\},\ i_1, \ldots, i_t \in \{1, \ldots, r\} \right\rangle$$

e assim, $B^{(t)}\langle m \rangle$ é um espaço gerado por um conjunto finito para qualquer $t \leq n$. $\square$

Lema 4.4. *Seja C uma coálgebra e C^* a álgebra dual. Para qualquer $z \in C$ e qualquer inteiro positivo k, $\mathrm{Ann}^{(k)}(z) \subseteq C^*$ é um subespaço de codimensão finita.*

Demonstração. Demonstraremos por indução sobre k.

Tome $k = 1$. Defina as transformações lineares $f, g : C^* \to C$ dadas por

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \lambda_\alpha z \ \text{ e} \\ g(\alpha) &= \rho_\alpha z, \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in C^*$.

Suponha que $\Delta(z) = \sum_{i=1}^m x_i \otimes y_i$, em que $x_i, y_i \in C$ para $i = 1, \ldots, m$. Então para todo $\alpha \in C^*$,

$$f(\alpha) = \lambda_\alpha z = (Id_C \otimes \alpha)(\Delta(z)) = \sum_{i=1}^m \langle \alpha,\ y_i \rangle\, x_i \in \operatorname{span}\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$$

e, analogamente, $g(\alpha) \in \operatorname{span}\langle y_1, \ldots, y_m \rangle$, para todo $\alpha \in C^*$. Logo, $\ker f$ e $\ker g$ são espaços de codimensão finita de C^* e $\mathrm{Ann}^{(1)}(z) = \ker f \cap \ker g$ também o é.

Suponha agora que $k = n$ seja um inteiro tal que $\mathrm{Ann}^{(n)}(z)$ é um subespaço de codimensão finita para todo $z \in C$. Pelo Lema 4.3, o espaço

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=0}^n B^{(i)}\langle z \rangle \\ &= \operatorname{span}\langle z \rangle + \operatorname{span}\left\langle \tau^{(1)}_{a_1} \ldots \tau^{(t)}_{a_t} z \mid 1 \leq t \leq n,\ \tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(t)} \in \{\lambda, \rho\},\ a_1, \ldots, a_t \in C^* \right\rangle \end{aligned}$$

tem dimensão finita. Tome $x_1, \ldots, x_m \in C$ tais que $V = \operatorname{span}\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ e observe que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ann}^{(n+1)}(z) = \Big\{ \alpha \in C^* \mid \tau^{(1)}_{\alpha}\tau^{(2)}_{a_1}\dots\tau^{(t)}_{a_t}z = 0, \text{ para quaisquer } t = 1,\dots,n+1, \\
\tau^{(1)},\dots,\tau^{(t)} \in \{\lambda,\rho\} \text{ e } a_1,\dots,a_t \in C^* \Big\} \\
&= \{\alpha \in C^* \mid \tau_\alpha v = 0, \text{ para quaisquer } v \in V \text{ e } \tau \in \{\lambda,\rho\}\} \\
&= \{\alpha \in C^* \mid \tau_\alpha x_1 = \dots = \tau_\alpha x_m = 0, \text{ para qualquer } \tau \in \{\lambda,\rho\}\} \\
&= (\mathrm{Ann}^{(1)}(x_1)) \cap \dots \cap (\mathrm{Ann}^{(1)}(x_m))
\end{aligned}
$$

Como cada $\mathrm{Ann}^{(1)}(x_i)$ é um espaço de codimensão finita, para qualquer $i = 1,\dots,m$, segue que $\mathrm{Ann}^{(n+1)}(z)$ também o é. □

Observe que, em geral, se A é uma álgebra, M é um A-bimódulo e $m \in M$, o espaço $\mathrm{Ann}^{(n)}(m)$ não tem necessariamente codimensão finita. De fato, considere novamente o Exemplo 4.2, em que $G = G_0 \dot{+} G_1$ é a álgebra de Grassmann, $A = G_0$ e $M = G_1$. Temos que $A = G_0 = \mathrm{Ann}^{(1)}(e_1) \dot{+} V$, em que V é o espaço de dimensão infinita

$$
V = \mathrm{span}\,\langle 1 \rangle + \mathrm{span}\left\langle e_{i_1}\dots e_{i_{2k}} \mid k \geq 0,\ 1 < i_1 < \dots i_{2k} \right\rangle,
$$

e que $\mathrm{Ann}^{(n)}(e_1)$ tem codimensão infinita para todo inteiro positivo n.

Como consequência do Lema 4.3 e do Lema 4.4, obtém-se a seguinte proposição.

Proposição 4.5. *Seja C uma coálgebra e $z \in C$. Considere a estrutura usual de C^*-bimódulo em C. A coálgebra* $\mathrm{Coalg}\,\langle z \rangle$ *tem dimensão finita se, e somente se, existe um inteiro positivo N tal que*

$$
B^{(k+1)}\langle z \rangle \subseteq \sum_{t=0}^{k} B^{(t)}\langle z \rangle,
$$

para todo $k \geq N$.

Demonstração. Conforme notado anteriormente,

$$
\mathrm{Coalg}\,\langle z \rangle = \mathrm{Bimod}\,\langle z \rangle = \sum_{t=0}^{\infty} B^{(t)}\langle z \rangle.
$$

Pelo Lema 4.3 e pelo Lema 4.4, o espaço $B^{(t)}\langle z \rangle$ tem dimensão finita para cada inteiro $t \geq 0$. Assim, mostrar que $\mathrm{Bimod}\,\langle z \rangle$ tem dimensão finita é equivalente a mostrar que existe um inteiro positivo N tal que

$$
\sum_{t=0}^{\infty} B^{(t)}\langle z \rangle = \sum_{t=0}^{N} B^{(t)}\langle z \rangle,
$$

ou seja, tal que $B^{(k)}\langle z\rangle \subseteq \sum_{t=1}^{N} B^{(t)}\langle z\rangle$, para todo inteiro positivo $k \geq N$. Isso ocorre se, e somente se, para qualquer $k \geq N$,

$$B^{(k+1)}\langle z\rangle \subseteq \sum_{t=0}^{k} B^{(t)}\langle z\rangle. \qquad \square$$

É importante ressaltar que a Proposição 4.5 nos fornece uma condição necessária e suficiente para que uma coálgebra finitamente gerada tenha dimensão finita independente da coálgebra pertencer a alguma variedade. Essa condição foi notada em [ACM94] no caso de coálgebras alternativas e coálgebras de Jordan.

4.2 Uma condição sobre variedades

O principal resultado deste capítulo, o Teorema 4.19, mostra que o Teorema Fundamental das Coálgebras é válido para uma classe considerável de variedades. Em vista da Conjectura 1, para obter esta classe, estudamos propriedades válidas em variedades conhecidas, e em especial, propriedades válidas em variedades que possuem radical localmente nilpotente.

Antes de definir a classe em questão, vamos introduzir a seguinte notação: Seja A uma álgebra, M um bimódulo e $m \in M$. Se N é um inteiro positivo, então defina a seguinte relação em $B^{(N+1)}\langle m\rangle$:

$$w_1 \equiv w_2, \text{ se } w_1 - w_2 \in \sum_{t=0}^{N} B^{(t)}\langle m\rangle,$$

em que $w_1, w_2 \in B^{(N+1)}\langle m\rangle$. A relação "$\equiv$" é uma relação de equivalência em $B^{(N+1)}\langle m\rangle$.

Também por abuso de notação, quando $A = F\{y, x_1, x_2, \dots\}$ é a álgebra livre não associativa e $M = A$, dizemos que a variedade homogênea $\mathcal{V}$ possui uma identidade da forma

$$\sum \alpha_{(i_1,\dots,i_N)} T^{(1)}_{x_{i_1}} \dots T^{(N)}_{x_{i_N}} \equiv \sum \beta_{(j_1,\dots,j_N)} T^{(1)}_{x_{j_1}} \dots T^{(N)}_{x_{j_N}}.$$

se é válida nas álgebras de $\mathcal{V}$ uma identidade da forma

$$\sum \alpha_{(i_1,\dots,i_N)} T^{(1)}_{x_{i_1}} \dots T^{(N)}_{x_{i_N}} y \equiv \sum \beta_{(j_1,\dots,j_N)} T^{(1)}_{x_{j_1}} \dots T^{(N)}_{x_{j_N}} y.$$

Exemplo 4.6. Nas álgebras da variedade Alt_d são válidas as identidades

$$\begin{aligned}(R_xR_y + R_yR_x)(z) &= (R_{xy} + R_{yx})(z)\\ (L_xL_y - R_yL_x + L_xR_y)(z) &= L_{xy}(z),\end{aligned}$$

onde R, L são os operadores de multiplicação à esquerda e à direita. Segundo a notação anterior, dizemos que em Alt_d são válidas identidades da forma

$$\begin{aligned}R_yR_x &\equiv -R_xR_y\\ R_yL_x &\equiv L_xR_y + L_xL_y\end{aligned}$$

Esta seção é dedicada à condição:

(I) Existe inteiro positivo n tal que, para quaisquer $T^{(1)}, \ldots, T^{(n+1)} \in \{L, R\}$, é satisfeita nas álgebras de $\mathcal{V}$ uma identidade da forma

$$T_{x_1}^{(1)} \ldots T_{x_n}^{(n)} T_y^{(n+1)} \equiv \sum_{j \neq n+1} \alpha \tilde{T}_{x_{i_1}}^{(1)} \ldots \tilde{T}_y^{(j)} \ldots \tilde{T}_{x_{i_{n-1}}}^{(n)} \tilde{T}_{x_{i_n}}^{(n+1)};$$

A forma como exprimimos a condição (I) não nos permite inferir informações imediatamente a respeito das álgebras de $\mathcal{V}$ e de seus ideais. Por isso, a próxima proposição mostra uma maneira equivalente de exprimi-la.

Proposição 4.7. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade homogênea de álgebras. A condição (I) é equivalente à condição*

(I') Se A é uma álgebra de $\mathcal{V}$ e I é um ideal de A, então existe um inteiro positivo n tal que

$$\mathrm{id}\langle I^2 \rangle = \sum_{0 \leq k < n} B^{(k)} \langle I^2 \rangle,$$

onde a estrutura de bimódulo considerada é a de A-bimódulo regular.

Demonstração. $(I) \Rightarrow (I')$ Tome A uma álgebra de $\mathcal{V}$ e I um ideal de A. Quando consideramos o A-bimódulo regular, o ideal $\mathrm{id}\langle I^2 \rangle$ é igual ao A-sub-bimódulo Bimod $\left\langle I^2 \right\rangle$. Em particular,

$$\mathrm{id}\langle I^2 \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} B^{(k)} \langle I^2 \rangle.$$

Vamos provar por indução sobre $t \geq n$ que $B^{(t)} \langle I^2 \rangle \subseteq \sum_{k=0}^{t-1} B^{(k)} \langle I^2 \rangle$, onde n é o inteiro positivo da condição (I).

Tome $T^{(1)}, \ldots, T^{(t)} \in \{L, R\}$, $x_1, \ldots, x_t \in A$ e $y, z \in I$. Assim,

$$\begin{aligned} T_{x_1}^{(1)} \ldots T_{x_t}^{(t)} (yz) &= T_{x_1}^{(1)} \ldots T_{x_t}^{(t)} L_y(z) \\ &= T_{x_1}^{(1)} \ldots T_{x_{t-n}}^{(t-n)} T_{x_{t-(n-1)}}^{(t-(n-1))} \ldots T_{x_t}^{(t)} L_y(z) \\ &\equiv \sum T_{x_1}^{(1)} \ldots T_{x_{t-n}}^{(t-n)} \tilde{T}_{x_{i_1}}^{(t-(n-1))} \ldots T_y \ldots \tilde{T}_{x_{i_n}}^{(t+1)}(z) \\ &\equiv \sum T_{x_{i_1}}^{(1)} \ldots T_{x_{i_s}}^{(s)} (\underbrace{y(W(z))}_{\in I^2}) \end{aligned}$$

em que, nos somandos da última equação, $s < t$ e W é um operador de $\mathrm{Mult}(A)$. Concluimos que $T_{x_1}^{(1)} \ldots T_{x_t}^{(t)} (yz) \in \sum_{k=0}^{t-1} B^{(k)} \langle I^2 \rangle$ e o desejado por indução sobre t.

$(I') \Rightarrow (I)$ Tome $T^{(1)}, \dots, T^{(n)}, T^{(n+1)} \in \{L, R\}$ e $x_1, \dots, x_n, y, z \in X$. Defina $A = F_{\mathcal{V}}\{x_1, \dots, x_n, y, z\}$, a F-álgebra livre gerada por $\{x_1, \dots, x_n, y, z\}$, e defina o ideal $I = \mathrm{id}\langle y, z\rangle$. Pela condição (I'), existe um inteiro positivo n tal que

$$\mathrm{id}\langle I^2\rangle = \sum_{0\leq k<n} B^{(k)}\langle I^2\rangle,$$

Observe que o elemento $T_y^{(n+1)}(z)$ é um elemento de I^2 e, portanto, $T_{x_1}^{(1)} \dots T_{x_n}^{(n)} T_y^{(n+1)}(z) \in \mathrm{id}\langle I^2\rangle$. Pela condição (I'), $T_{x_1}^{(1)} \dots T_{x_n}^{(n)} T_y^{(n+1)}(z) \in \sum_{0\leq k<n} B^{(k)}\langle I^2\rangle$ e, portanto,

$$T_{x_1}^{(1)} \dots T_{x_n}^{(n)} T_y^{(n+1)}(z) \equiv \sum \alpha T_{w_1}^{(1)} \dots T_{w_n}^{(n)} T_{w_{n+1}}^{(n+1)}(z),$$

em que $w_1, \dots, w_n, w_{n+1} \in A$. Pela homogeneidade de $\mathcal{V}$ e pela hipótese que

$$T_{w_1}^{(1)} \dots T_{w_n}^{(n)} T_{w_{n+1}}^{(n+1)}(z) \in B^{(k)}\langle I^2\rangle,$$

para algum $0 \leq k < n$, temos que $\{w_1, \dots, w_n, w_{n+1}\} = \{x_1, \dots, x_n, y\}$ e $w_{n+1} \neq y$, ou seja

$$T_{x_1}^{(1)} \dots T_{x_n}^{(n)} T_y^{(n+1)} \equiv \sum_{j\neq n+1} \alpha \tilde{T}_{x_{i_1}}^{(1)} \dots \tilde{T}_y^{(j)} \dots \tilde{T}_{x_{i_{n-1}}}^{(n)} \tilde{T}_{x_{i_n}}^{(n+1)},$$

concluindo nossa demonstração. □

A condição (I) do Teorema 4.19 é satisfeita por diversas variedades, como visto nos exemplos a seguir.

Exemplo 4.8. Na variedade Alt são satisfeitas as identidades

$$\begin{aligned} R_xR_y &= -R_yL_x + R_{xy} + R_{yx} \\ L_xL_y &= -L_yL_x + L_{xy} + L_{yx} \\ R_xL_y &= L_yR_x + R_yR_x - R_{xy} \\ L_xR_y &= R_yL_x + R_yR_x - R_{xy} \end{aligned}$$

e, portanto, Alt satisfaz a condição (I) com $n = 1$. Em particular, a subvariedade As também satisfaz a condição (I).

Exemplo 4.9. Na variedade Malc são satisfeitas as identidades

$$\begin{aligned} R_x &= -L_x \\ R_xR_zR_x &= R_xR_xR_z + R_{(xz)x} + R_{xz}R_x. \end{aligned}$$

Na notação introduzida anteriormente, temos

$$R_xR_zR_x \equiv R_xR_xR_z.$$

Linearizando tal identidade, obtemos

$$R_xR_zR_y + R_yR_zR_x \equiv R_xR_yR_z + R_yR_xR_z$$

e fazendo $x = x_1$ e $z = x_2$, temos uma identidade da forma

$$R_{x_1}R_{x_2}R_y = -R_yR_{x_2}R_{x_1} + R_{x_1}R_yR_{x_2} + R_yR_{x_1}R_{x_2}.$$

Assim, Malc satisfaz a condição (I) com $n = 2$. Em particular, a subvariedade Lie também satisfaz a condição (I).

Exemplo 4.10. Na variedade Jord são satisfeitas as identidades

$$\begin{aligned} R_x &= L_x \\ 2R_xR_zR_x &= -R_{x^2z} + 2R_xR_{xz} + R_zR_{x^2}. \end{aligned}$$

Na notação introduzida anteriormente, temos

$$2R_xR_zR_x \equiv 0$$

e, se a característica do corpo base é diferente de dois, então é satisfeita em Jord uma identidade da forma

$$R_xR_zR_x \equiv 0$$

Linearizando tal identidade, obtemos

$$R_xR_zR_y \equiv -R_yR_zR_x$$

Fazendo $x = x_1$ e $z = x_2$, temos uma identidade da forma

$$R_{x_1}R_{x_2}R_y \equiv -R_yR_{x_2}R_{x_1}.$$

Assim, Jord satisfaz a condição (I) com $n = 2$.

Exemplo 4.11. Suponha que a característica de F é diferente de dois. A variedade $\mathcal{A}(-1,1)$ é definida pelas identidades

$$(x,y,y) = 0 \tag{4.12}$$

$$J^{(-)}(x,y,z) = 0. \tag{4.13}$$

Aplicando o processo de linearização em (4.12), obtemos as identidades

$$\begin{aligned} R_xR_y &= -R_yR_x + R_{xy} + R_{yx} \\ R_xL_y &= L_yL_x + L_yR_x - L_{yx} \end{aligned}$$

e, como char $F \neq 2$, obtemos de (4.13) a identidade

$$L_{yx} - R_{yx} + R_yL_x - L_xR_y + R_xR_y - L_yL_x = 0.$$

Assim, $\mathcal{A}(-1,1)$ tem identidades da forma

$$\begin{aligned} R_xR_y &\equiv -R_yR_x \\ R_xL_y &\equiv L_yL_x + L_yR_x \\ L_xR_y &\equiv R_yL_x + L_yL_x + R_yR_x \\ L_xL_y &\equiv -L_yL_x - R_yR_x. \end{aligned}$$

Concluímos que, se a característica de F é diferente de dois, então $\mathcal{A}(-1,1)$ satisfaz a condição (I) com $n=1$.

Lembramos que as variedades Alt ([ZSSS82, p. 165]), Jord ([ZSSS82, p. 93] quando o corpo base tem característica diferente de dois) e $\mathcal{A}(-1,1)$ ([ZS73, p. 34] quando o corpo base tem característica diferente de dois) possuem radical localmente nilpotente, enquanto as variedades Lie e Malc não possuem radical localmente nilpotente (Exemplo 1.30).

Nosso objetivo agora será mostrar que a variedade $\mathrm{Bin}(-1,1)$ das álgebras $(-1,1)$-binárias e a variedade $\mathrm{Alt}_d \cap \mathrm{Malc}_a$ das álgebras alternativas à direita Malcev-admissíveis satisfazem a condição (I). Para tal, usaremos o seguinte lema devido a S. V. Pchelintsev.

Lema 4.14. *[Pch76, p. 274] As variedades* $\mathrm{Bin}(-1,1)$ *e* $\mathrm{Alt}_d \cap \mathrm{Malc}_a$ *satisfazem a seguinte condição:*

(I″) Para quaisquer $T^{(1)}, T^{(2)}, T^{(3)} \in \{L, R\}$, existe identidade da forma

$$L_tT^{(1)}_{x_1}T^{(2)}_{x_2}T^{(3)}_{y} \equiv -L_t\widetilde{T}^{(1)}_{y}\widetilde{T}^{(2)}_{x_2}\widetilde{T}^{(3)}_{x_1} + \sum \alpha L_t(\widehat{T}^{(1)}_{x_1}\widehat{T}^{(2)}_{y}\widehat{T}^{(3)}_{x_2} + \overline{T}^{(1)}_{y}\overline{T}^{(2)}_{x_1}\overline{T}^{(3)}_{x_2}),$$

em que $\widetilde{T}^{(1)}, \widetilde{T}^{(2)}, \widetilde{T}^{(3)} \in \{L, R\}$ e o somatório do lado direito é indexado por todas as combinações dos operadores $\widehat{T}^{(i)}, \overline{T}^{(i)} \in \{L, R\}$, para $i = 1, 2, 3$.

Proposição 4.15. *Se $\mathcal{V}$ é uma subvariedade homogênea de álgebras alternativas à direita que satisfaz a condição (I''), então $\mathcal{V}$ satisfaz a condição (I) para $n=3$.*

Demonstração. Para simplificar a notação, vamos denotar as identidades garantidas pela condição (I'') do Lema 4.14 omitindo os índices dos operadores de multiplicação, escrevendo

$$L_tT^{(1)}_{x_1}T^{(2)}_{x_2}T^{(3)}_{y} \equiv -L_t\widetilde{T}^{(1)}_{y}\widetilde{T}^{(2)}_{x_2}\widetilde{T}^{(3)}_{x_1} + \sum \alpha L_t(\widehat{T}^{(1)}_{x_1}\widehat{T}^{(2)}_{y}\widehat{T}^{(3)}_{x_2} + \overline{T}^{(1)}_{y}\overline{T}^{(2)}_{x_1}\overline{T}^{(3)}_{x_2}),$$

como

$$L_tT_{x_1}T_{x_2}T_y \equiv -L_tT_yT_{x_2}T_{x_1} + \sum \alpha L_t(T_{x_1}T_yT_{x_2} + T_yT_{x_1}T_{x_2}) \tag{4.16}$$

Como $\mathcal{V}$ é uma subvariedade de álgebras alternativas à direita, $\mathcal{V}$ também satisfaz as identidades

$$\begin{aligned} R_xR_y &= -R_yR_x + R_{xy} + R_{yx} \\ R_xL_y &= L_yL_x + L_yR_x - L_{yx}. \end{aligned}$$

Vamos analisar o operador $T_{x_1}T_{x_2}T_{x_3}T_y$ em cada uma das possibilidades para os operadores que o compõem e mostrar que a variedade $\mathcal{V}$ satisfaz:

$$T_{x_1}T_{x_2}T_{x_3}T_y \equiv \sum_{1\leq j\leq 3} \alpha T^{(1)}_{x_{i_1}} \dots T^{(j)}_y \dots T^{(3)}_{x_{i_2}} T^{(4)}_{x_{i_3}}$$

Caso 1: $T_{x_1} = L_{x_1}$. Neste caso, pela aplicação direta de (4.16), vale o desejado.

Caso 2: $T_{x_1} = R_{x_1}$ e $T_{x_2} = L_{x_2}$. Neste caso, como $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{Alt}_d$, podemos aplicar a identidade

$$R_{x_1}L_{x_2} \equiv L_{x_2}L_{x_1} + L_{x_2}R_{x_1}$$

e obtemos uma identidade da forma

$$\begin{aligned} T_{x_1}T_{x_2}T_{x_3}T_y &= (R_{x_1}L_{x_2})T_{x_3}T_y \\ &\equiv (L_{x_2}L_{x_1} + L_{x_2}R_{x_1})T_{x_3}T_y \\ &\equiv L_{x_2}L_{x_1}T_{x_3}T_y + L_{x_2}R_{x_1}T_{x_3}T_y, \end{aligned}$$

que pode ser reduzida ao Caso 1.

Caso 3: $T_{x_1} = R_{x_1}$, $T_{x_2} = R_{x_2}$ e $T_{x_3} = L_{x_3}$. Neste caso, obtemos uma identidade da forma

$$\begin{aligned} T_{x_1}T_{x_2}T_{x_3}T_y &= R_{x_1}(R_{x_2}L_{x_3})T_y \\ &\equiv R_{x_1}(L_{x_3}L_{x_2} + L_{x_3}R_{x_2})T_y \\ &\equiv R_{x_1}L_{x_3}L_{x_2}T_y + R_{x_1}L_{x_3}R_{x_2}T_y, \end{aligned}$$

que pode ser reduzida ao Caso 2.

Caso 4: $T_{x_1} = R_{x_1}$, $T_{x_2} = R_{x_2}$, $T_{x_3} = R_{x_3}$ e $T_y = L_y$. Neste caso, obtemos uma identidade da forma

$$\begin{aligned} T_{x_1}T_{x_2}T_{x_3}T_y &= R_{x_1}R_{x_2}(R_{x_3}L_y) \\ &\equiv R_{x_1}R_{x_2}(L_yL_{x_3} + L_yR_{x_3}) \\ &\equiv R_{x_1}R_{x_2}L_yL_{x_3} + R_{x_1}R_{x_2}L_yR_{x_3}, \end{aligned}$$

como desejado.

Caso 5: $T_{x_1}T_{x_2}T_{x_3}T_y = R_{x_1}R_{x_2}R_{x_3}R_y$. Neste caso, como $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{Alt}_d$, vale em $\mathcal{V}$ uma identidade da forma

$$R_{x_3}R_y \equiv -R_yR_{x_3}$$

e, portanto,

$$T_{x_1}T_{x_2}T_{x_3}T_y = R_{x_1}R_{x_2}R_{x_3}R_y \equiv -R_{x_1}R_{x_2}R_yR_{x_3},$$

como desejado.

Conclui-se que vale uma identidade da forma

$$T_{x_1}T_{x_2}T_{x_3}T_y \equiv \sum_{1\leq j\leq 3} \alpha T^{(1)}_{x_{i_1}} \dots T^{(j)}_y \dots T^{(3)}_{x_{i_2}} T^{(4)}_{x_{i_3}},$$

para quaisquer operadores de multiplicação T_{x_1}, T_{x_2}, T_{x_3} e T_y. □

4.3 Identidades polinomiais e o radical localmente nilpotente

Em vista da Conjectura 1, buscamos propriedades satisfeitas em variedades com radical localmente nilpotente que fossem úteis para demonstrar que coálgebras destas variedades fossem localmente finitas. O objetivo desta seção é apresentar a seguinte condição

(II) Para todo inteiro positivo k existe um inteiro positivo $N = N(k)$ tal que, para quaisquer $i_1, \ldots, i_N \in \{1, \ldots, k\}$ e quaisquer $T^{(1)}, \ldots, T^{(N)} \in \{L, R\}$, é satisfeita em $\mathcal{V}$ a identidade
$$T^{(1)}_{x_{i_1}} \ldots T^{(N)}_{x_{i_N}} \equiv 0,$$

e estudar sua relação com o radical localmente nilpotente. Mostramos, em particular, que qualquer variedade que possui radical localmente nilpotente satisfaz a condição (II).

Lema 4.17. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras com a seguinte propriedade:*

(III) $\mathcal{V}$ possui radical localmente nilpotente.

Então é válida em $\mathcal{V}$ a seguinte propriedade:

(II') Toda $\mathcal{V}$-álgebra finitamente gerada e solúvel é nilpotente.

Demonstração. Seja A uma álgebra de $\mathcal{V}$ que seja finitamente gerada e solúvel. Tome N um inteiro não negativo tal que $A^{(N)} = 0$. Se $N = 0$, então A é a álgebra nula e o resultado segue trivialmente. Suponha então que $N \geq 1$.

Observe que, para todo inteiro positivo n, $A^{(n)} = A^{(n-1)}A^{(n-1)}$ é um ideal da álgebra $A^{(n-1)}$. Além disso, como A é solúvel, o quociente $A^{(n-1)}/A^{(n)}$ é uma álgebra nilpotente de ordem 2, pois

$$(A^{(n-1)}/A^{(n)})^2 = (A^{(n-1)})^2/A^{(n)} = A^{(n)}/A^{(n)} = 0.$$

Como $A^{(N)} = 0$, segue que $A^{(N-1)}$ é nilpotente e, em particular, localmente nilpotente.

Suponha agora que n seja um inteiro positivo tal que $A^{(n)}$ seja localmente nilpotente. Como a propriedade "nilpotência local" é radical em $\mathcal{V}$, é válida a seguinte propriedade:

(3') Para qualquer $\mathcal{V}$-álgebra A e qualquer ideal $I \triangleleft A$, se I e A/I são localmente nilpotentes, então A é localmente nilpotente.

Como $A^{(n)}$ é localmente nilpotente por hipótese e $A^{(n-1)}/A^{(n)}$ é localmente nilpotente, segue pela propriedade $(3')$ que $A^{(n-1)}$ é localmente nilpotente. Por indução, temos que $A = A^{(0)}$ é localmente nilpotente e, como A é finitamente gerada, concluímos que A é nilpotente. □

Lema 4.18. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras homogênea com a seguinte propriedade:*

(II′) Toda $\mathcal{V}$-álgebra finitamente gerada e solúvel é nilpotente.

Então é válida em $\mathcal{V}$ a seguinte propriedade:

(II) Para todo inteiro positivo k existe um inteiro positivo $N = N(k)$ tal que, para quaisquer $i_1, \dots, i_N \in \{1, \dots, k\}$ e quaisquer $T^{(1)}, \dots, T^{(N)} \in \{L, R\}$, é satisfeita em $\mathcal{V}$ a identidade

$$T^{(1)}_{x_{i_1}} \dots T^{(N)}_{x_{i_N}} \equiv 0$$

Demonstração. Seja k um inteiro positivo, $A = F_{\mathcal{V}}\{x_1, \dots, x_k, y\}$ a $\mathcal{V}$-álgebra livre gerada por $x_1, \dots, x_k, y$ e $I = \mathrm{id}\langle (A^2)^2 \rangle$ o ideal de A gerado por $A^{(2)} = (A^2)^2$. A álgebra A/I é solúvel finitamente gerada e, portanto, é nilpotente. Escolha N um inteiro positivo tal que $(A/I)^{N+1} = 0$. Então, para quaisquer $i_1, \dots, i_N \in \{1, \dots, k\}$ e quaisquer $T^{(1)}, \dots, T^{(N)} \in \{L, R\}$,

$$T^{(1)}_{x_{i_1}+I} \dots T^{(N)}_{x_{i_N}+I}(y + I) = 0 + I,$$

ou seja,

$$T^{(1)}_{x_{i_1}} \dots T^{(N)}_{x_{i_N}}(y) \in I$$

Assim, existem $u_i, v_i \in A^2$ e $W_i \in \mathrm{Mult}(A)$, para $i = 1, \dots, m$, tais que

$$T^{(1)}_{x_{i_1}} \dots T^{(N)}_{x_{i_N}}(y) = \sum_{i=1}^{m} W_i(u_i v_i)$$

Como $\mathcal{V}$ é homogênea, podemos assumir que a identidade acima é homogênea e teremos para cada termo $W_i(u_i v_i)$, uma (e apenas uma) das seguintes três possibilidades:

1. A letra y ocorre em u_i;

2. A letra y ocorre em v_i;

3. A letra y ocorre em alguma palavra $z \in A$ e T_z ocorre em W_i para algum $T \in \{L, R\}$.

Caso 1: Neste caso, $u_i = W'(y)$, para algum $W' \in \mathrm{Mult}(A)$ e temos que

$$W_i(u_i v_i) = W_i R_{v_i}(u_i) = W_i R_{v_i} W'(y).$$

Como $v_i \in A^2$, v_i é uma palavra nas letras $\{x_1, \dots, x_k\}$ de grau no mínimo 2 e, por consequência da homogeneidade de $\mathcal{V}$, $W_i R_{v_i} W'$ é um operador de Mult A com menos termos (com respeito a L, R) que $T^{(1)}_{x_{i_1}} \dots T^{(N)}_{x_{i_N}}$.

Caso 2: Análogo ao Caso 1.

Caso 3: Neste caso, sejam $\widetilde{T}^{(1)}, \ldots, \widetilde{T}^{(r)} \in \{L, R\}$ e $z_1, \ldots, z_r \in A$ tais que $W_i = \widetilde{T}^{(1)}_{z_1} \ldots \widetilde{T}^{(r)}_{z_r}$ e a letra y ocorre na palavra $z = z_j$ para algum j. Tome $V, V', W' \in \mathrm{Mult}(A)$ tais que $W_i = V\widetilde{T}_z V'$ e $z = W'(y)$. Segue que

$$\begin{aligned} W_i(u_i v_i) &= V\widetilde{T}_z V'(u_i v_i) = V\widetilde{T}_z(V'(u_i v_i)) \\ &= V\widetilde{T}^*_{V'(u_i v_i)}(z) \\ &= V\widetilde{T}^*_{V'(u_i v_i)} W'(y), \end{aligned}$$

em que $*$ é a involução da Definição 2.12. Como $u_i v_i \in A^2$, $V'(u_i v_i)$ é uma palavra nas letras $\{x_1, \ldots, x_k\}$ de grau no mínimo 2 e, por consequência da homogeneidade de $\mathcal{V}$, $V\widetilde{T}^*_{V'(u_i v_i)} W'$ é um operador de $\mathrm{Mult}\, A$ com menos termos (com respeito a L, R) que $T^{(1)}_{x_{i_1}} \ldots T^{(N)}_{x_{i_N}}$.

Em suma, provamos que

$$T^{(1)}_{x_{i_1}} \ldots T^{(N)}_{x_{i_N}}(y) = \sum_{i=1}^{m} W'_i(y),$$

em que $W'_1, \ldots, W'_m$ são operadores de $\mathrm{Mult}(A)$ com menos de N termos, com respeito a L, R. Conclui-se, como queríamos, que é válida em $\mathcal{V}$ uma identidade da forma

$$T^{(1)}_{x_{i_1}} \ldots T^{(N)}_{x_{i_N}} \equiv 0. \qquad \square$$

O Lema 4.17 e o Lema 4.18 nos permitem concluir as seguintes implicações

$$(III) \Rightarrow (II') \Rightarrow (II)$$

Ainda é um problema em aberto determinar se alguma destas implicações é própria ou se vale alguma recíproca.

4.4 Teorema Fundamental das Coálgebras

Finalmente, estamos em condições de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 4.19. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade homogênea que satisfaça as seguintes propriedades:*

(I) Se A é uma álgebra de $\mathcal{V}$ e I é um ideal de A, então existe um inteiro positivo n tal que

$$\mathrm{id}\langle I^2 \rangle = \sum_{0 \leq k < n} B^{(k)} \langle I^2 \rangle,$$

onde a estrutura de bimódulo considerada é a de A-bimódulo regular.

(II) Para todo inteiro positivo k existe um inteiro positivo $N = N(k)$ tal que, para quaisquer $i_1, \ldots, i_N \in \{1, \ldots, k\}$ e quaisquer $T^{(1)}, \ldots, T^{(N)} \in \{L, R\}$, é satisfeita em $\mathcal{V}$ a identidade

$$T^{(1)}_{x_{i_1}} \ldots T^{(N)}_{x_{i_N}} \equiv 0.$$

Então toda coálgebra C com $C^* \in \mathcal{V}$ é localmente finita.

Demonstração. Seja C uma coálgebra com $C^* \in \mathcal{V}$ e $z \in C$. Se $z = 0$, então $\operatorname{Coalg}\langle 0 \rangle = 0$ tem dimensão finita trivialmente. Assumiremos assim que $z \neq 0$. Tome $n \geq 1$ dado por (I). Pelo Lema 4.4, existe inteiro positivo k e existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in C^*$ tais que

$$C^* = \operatorname{Ann}^{(n)}(z) \dot{+} \operatorname{span}\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle.$$

Pela condição (II), existe $N = N(k)$ tal que

$$T^{(1)}_{x_{i_1}} \ldots T^{(N)}_{x_{i_N}} \equiv 0$$

é identidade em $\mathcal{V}$ para quaisquer $i_1, \ldots, i_N \in \{1, \ldots, k\}$ e $T^{(1)}, \ldots, T^{(N)} \in \{L, R\}$. Pela Proposição 2.19, temos que

$$\tau^{(1)}_{x_{i_1}} \ldots \tau^{(N)}_{x_{i_N}} \equiv 0 \tag{4.20}$$

é uma identidade do C^*-bimódulo C, para quaisquer $i_1, \ldots, i_N \in \{1, \ldots, k\}$ e $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(N)} \in \{\lambda, \rho\}$.

Ainda pela Proposição 2.19, pela propriedade (I) e pela Proposição 4.7, para quaisquer $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(n+1)} \in \{L, R\}$, é satisfeita no C^*-bimódulo C uma identidade da forma

$$\tau^{(1)}_y \tau^{(2)}_{x_1} \ldots \tau^{(n+1)}_{x_n} \equiv \sum_{j \neq n+1} \mu \tilde{\tau}^{(1)}_{x_{i_1}} \tilde{\tau}^{(2)}_{x_{i_2}} \ldots \tilde{\tau}^{(j)}_y \ldots \tilde{\tau}^{(n+1)}_{x_{i_n}} \tag{4.21}$$

Pelo Lema 4.3, o espaço

$$B^{(t)}\langle z \rangle = \operatorname{span}\left\langle \tau^{(1)}_{a_1} \ldots \tau^{(t)}_{a_t} z \mid \tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(t)} \in \{\lambda, \rho\},\ a_1, \ldots, a_t \in C^* \right\rangle$$

tem dimensão finita para cada inteiro positivo t.

Pela Proposição 4.5, para mostrar que $\operatorname{Coalg}\langle z \rangle$ é um espaço de dimensão finita é suficiente mostrar que, se $t \geq N$, então $B^{(t+1)}\langle z \rangle \subseteq \sum_{i=0}^{t} B^{(i)}\langle z \rangle$.

Tome $\tau^{(1)}_{a_1} \ldots \tau^{(t+1)}_{a_{t+1}}(z) \in B^{(t+1)}\langle z \rangle$, com $a_1, \ldots, a_{t+1} \in C^*$ e $\tau^{(1)} \ldots, \tau^{(t+1)} \in \{\lambda, \rho\}$. Podemos assumir que $a_1, \ldots, a_{t+1} \in \operatorname{Ann}^{(n)}(z) \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$.

Caso 1: $a_j \in \operatorname{Ann}^{(n)}(z)$, para algum j. Neste caso, através de sucessivas aplicações da identidade (4.21), temos que $\tau^{(1)}_{a_1} \ldots \tau^{(j)}_{a_j} \ldots \tau^{(t+1)}_{a_{t+1}}(z)$ é escrito como combinação linear de termos da forma

$$\tilde{\tau}^{(1)}_{a_{i_1}} \ldots \tilde{\tau}^{(r)}_{a_j} \ldots \tilde{\tau}^{(t+1)}_{a_{i_{t+1}}}(z),$$

em que $\tilde{\tau}^{(1)}, \ldots, \tilde{\tau}^{(t+1)} \in \{\lambda, \rho\}$ e $r \leq n$. Como $a_j \in \mathrm{Ann}^{(n)}(z)$, segue que

$$\tilde{\tau}_{a_j}^{(r)} \ldots \tilde{\tau}_{a_{i_{t+1}}}^{(t+1)}(z) = 0$$

e, portanto,

$$\tau_{a_1}^{(1)} \ldots \tau_{a_{t+1}}^{(t+1)}(z) = 0 \in \sum_{i=0}^{t} B^{(i)}\langle z \rangle.$$

Caso 2: $a_1, \ldots, a_{t+1} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. Neste caso, existem $i_1, \ldots, i_N \in \{1, \ldots, k\}$ tais que

$$\tau_{a_1}^{(1)} \ldots \tau_{a_{t+1}}^{(t+1)}(z) = \tau_{\alpha_{i_1}}^{(1)} \ldots \tau_{\alpha_{i_{t+1}}}^{(t+1)}(z).$$

Como $t \geq N$, podemos usar a identidade (4.20) e obter

$$\tau_{a_1}^{(1)} \ldots \tau_{a_{t+1}}^{(t+1)}(z) \equiv 0,$$

ou, seja, $\tau_{a_1}^{(1)} \ldots \tau_{a_{t+1}}^{(t+1)}(z) \in \sum_{i=0}^{t} B^{(i)}\langle z \rangle$.

Em qualquer um dos casos, temos que $\tau_{a_1}^{(1)} \ldots \tau_{a_{t+1}}^{(t+1)}(z) \in \sum_{i=0}^{t} B^{(i)}\langle z \rangle$ e, portanto, $B^{(t+1)}\langle z \rangle \subseteq \sum_{i=0}^{t} B^{(i)}\langle z \rangle$. $\square$

Junto com o Lema 4.17 e o Lema 4.18, o Teorema 4.19 nos permite dar a seguinte solução parcial para a Conjectura 1:

Corolário 4.22. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade homogênea que satisfaz a condição*

(I) Se A é uma álgebra de $\mathcal{V}$ e I é um ideal de A, então existe um inteiro positivo n tal que

$$\mathrm{id}\langle I^2 \rangle = \sum_{0 \leq k < n} B^{(k)}\langle I^2 \rangle,$$

onde a estrutura de bimódulo considerada é a de A-bimódulo regular.

Se $\mathcal{V}$ possui radical localmente nilpotente, então o Teorema Fundamental das Coálgebras é válido em $\mathcal{V}$.

As variedades $\mathrm{Bin}(-1,1)$ e $\mathrm{Alt}_d \cap \mathrm{Malc}_a$ satisfazem a condição (I), pelo Lema 4.14 e pela Proposição 4.15, e possuem radical localmente nilpotente (conferir [Pch76, p. 276]), donde concluímos o seguinte corolário:

Corolário 4.23. *Se C é uma coálgebra tal que C^* é uma álgebra $(-1,1)$-binária ou alternativa à direita Malcev-admissível, então C é localmente finita.*

Podemos resumir o panorama do que se sabe sobre a Conjectura 1 depois do desenvolvido neste capítulo na seguinte imagem:

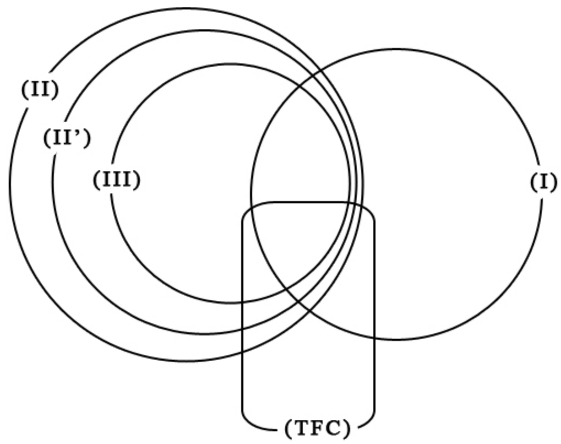


Figura 4.1: Representação gráfica do que era sabido antes do Teorema 4.19

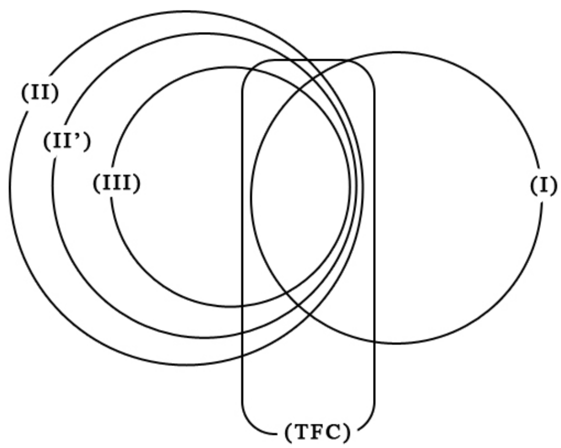


Figura 4.2: Representação gráfica do que se sabe após a demonstração do Teorema 4.19

4.5 Problemas em aberto

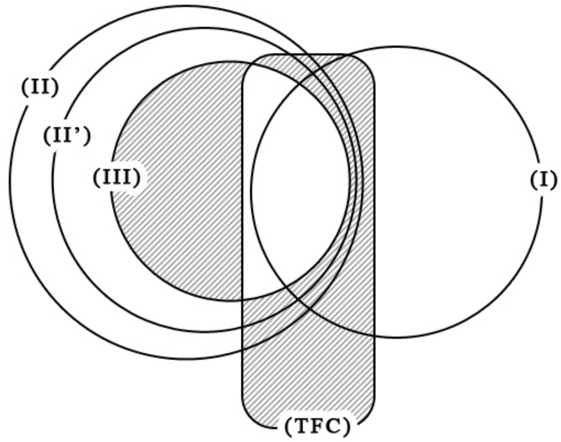


Figura 4.3

Para provar que a Conjectura 1 é verdadeira é necessário provar que o conjunto destacado na Figura 4.3 é vazio. Em vista do Teorema 4.19, podemos estudar esta conjectura na classe de variedades que satisfaz a condição (I). Um problema aparentemente mais simples do que provar que a Conjectura 1 é verdadeira na classe de variedades que satisfazem a condição (I) é o seguinte:

Problema 4.24. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade que satisfaça a condição (I). É verdade que as coálgebras de $\mathcal{V}$ satisfazem o Teorema Fundamental das Coálgebras se, e somente se, $\mathcal{V}$ satisfaz a condição (II)? Em outras palavras, o conjunto destacado na Figura 4.4 é vazio?

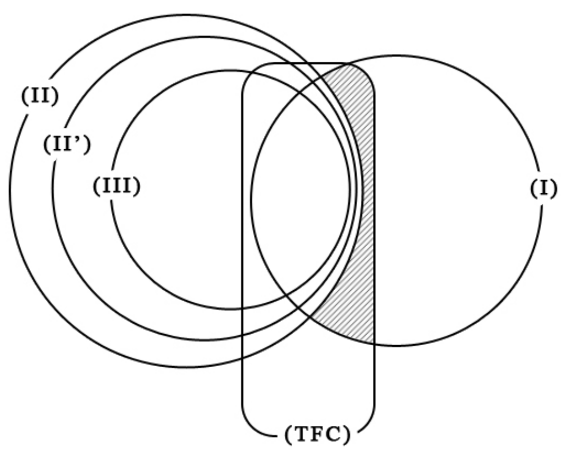


Figura 4.4

Problema 4.25. Suponha que $\mathcal{V}$ seja uma variedade homogênea que satisfaz a condição (I) do Teorema 4.19. Se o Teorema Fundamental das Coálgebras é válido em $\mathcal{V}$, então $\mathcal{V}$ satisfaz a condição (II)? A variedade $\mathcal{V}$ satisfaz a condição (II')? A variedade $\mathcal{V}$ possui radical localmente nilpotente?

Um problema mais concreto, sugerido por I. P. Shestakov e inspirado em condições suficientes para que uma variedade admita radical localmente nilpotente, é o seguinte:

Problema 4.26. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade homogênea de álgebras comutativas e de potências associativas. Suponha que $\mathcal{V}$ satisfaça a seguinte condição: Para toda $\mathcal{V}$-álgebra e todo ideal $I \triangleleft A$, vale que $\mathrm{id}\langle I^3 \rangle \subseteq I^2$. É verdade que o Teorema Fundamental das Coálgebras é válido em $\mathcal{V}$?

Problema 4.27. Sabemos que a variedade das álgebras alternativas à direita não pertence à classe *(TFC)*. Ainda não sabemos onde está localizada esta variedade no diagrama de Venn da Figura 4.2.

Apêndice A

O bimódulo do Exemplo 3.14 é alternativo à direita

Nosso objetivo neste apêndice é demonstrar que o bimódulo descrito no Exemplo 3.14 é, de fato, alternativo à direita. Definir as ações deste bimódulo é o objetivo da primeira seção. A seguir, vamos oferecer duas demonstrações da alternatividade à direita. Na primeira seção, mostraremos como nosso exemplo se relaciona com a família de bimódulos alternativos à direita definido por L. Murakami e I. Shestakov em [MS01] e, assumindo os resultados desta referência, mostraremos como nosso bimódulo também é alternativo à direita. A segunda abordagem é descrita na seção 3, onde mostramos que o nosso bimódulo satisfaz as identidades de operadores

$$r_x r_x = r_{x^2}$$
$$l_x r_y - r_y l_x = l_{xy} - l_x l_y$$

calculando-as diretamente sem o auxílio do exemplo de L. Murakami e I. Shestakov.

A.1 Definição do bimódulo M

Considere $A = M_2(F) = \text{span}\,\langle e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\rangle$, a álgebra de matrizes 2×2 com entradas no corpo F, em que

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, para cada $h \in \mathbb{Z}$, considere o espaço $M^{(h)} = \text{span}\left\langle m_1^{(h)}, m_2^{(h)}, m_3^{(h)}, m_4^{(h)}\right\rangle$. O espaço $M = \bigoplus_{h\in\mathbb{Z}} M^{(h)}$ possui estrutura de A-bimódulo através da seguinte tabela de multiplicação:

$$
\begin{array}{ll}
m_1^{(h)}e_{11} = m_1^{(h)} & m_2^{(h)}e_{11} = 0 \\
m_1^{(h)}e_{12} = 0 & m_2^{(h)}e_{12} = m_3^{(h)} \\
m_1^{(h)}e_{21} = m_4^{(h)} & m_2^{(h)}e_{21} = 0 \\
m_1^{(h)}e_{22} = 0 & m_2^{(h)}e_{22} = m_2^{(h)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
m_3^{(h)}e_{11} = m_3^{(h)} & m_4^{(h)}e_{11} = 0 \\
m_3^{(h)}e_{12} = 0 & m_4^{(h)}e_{12} = m_1^{(h)} \\
m_3^{(h)}e_{21} = m_2^{(h)} & m_4^{(h)}e_{21} = 0 \\
m_3^{(h)}e_{22} = 0 & m_4^{(h)}e_{22} = m_4^{(h)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
e_{11}m_1^{(h)} = m_1^{(h)} & e_{11}m_2^{(h)} = 0 \\
e_{12}m_1^{(h)} = 0 & e_{12}m_2^{(h)} = -m_4^{(h)} \\
e_{21}m_1^{(h)} = -m_3^{(h)} & e_{21}m_2^{(h)} = 0 \\
e_{22}m_1^{(h)} = 0 & e_{22}m_2^{(h)} = m_2^{(h)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
e_{11}m_3^{(h)} = -m_1^{(h+1)} & e_{11}m_4^{(h)} = m_4^{(h)} - m_1^{(h+1)} \\
e_{12}m_3^{(h)} = 0 & e_{12}m_4^{(h)} = m_1^{(h)} \\
e_{21}m_3^{(h)} = -m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)} - m_4^{(h+1)} & e_{21}m_4^{(h)} = -2m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)} - m_4^{(h+1)} \\
e_{22}m_3^{(h)} = m_3^{(h)} + m_1^{(h+1)} & e_{22}m_4^{(h)} = m_1^{(h+1)}
\end{array}
$$

em que $h \in \mathbb{Z}$ e usamos a notação

$$
\lambda_{e_{ij}}(m_k^{(h)}) = e_{ij}m_k^{(h)} \qquad\qquad \rho_{e_{ij}}(m_k^{(h)}) = m_k^{(h)}e_{ij}
$$

para quaisquer $h \in \mathbb{Z}$, $i, j \in \{1, 2\}$ e $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

A.2 Primeira abordagem; um exemplo de bimódulo alternativo à direita

Nessa seção vamos apresentar uma família de exemplos de bimódulos alternativos à direita, devida a L. Murakami e I. Shestakov, que inspirou a definição do bimódulo M. Com base no fato que essa família contém bimódulos alternativos à direita, vamos argumentar que M também é um bimódulo alternativo à direita

Considere para cada inteiro $t \geq 2$ o espaço vetorial

$$N^{(t)} = \operatorname{span}\left\langle n_1^{(h)}, n_2^{(h)}, n_3^{(h)}, n_4^{(h)} \,\middle|\, h = 1, \ldots, t \right\rangle.$$

Defina em $N^{(t)}$ a estrutura de A-bimódulo determinada pela tabela a seguir

- Se $h = 1, \ldots, t$, então defina

$$\begin{aligned}
n_1^{(h)} e_{11} &= n_1^{(h)} & \qquad n_2^{(h)} e_{11} &= 0 \\
n_1^{(h)} e_{12} &= 0 & n_2^{(h)} e_{12} &= n_3^{(h)} \\
n_1^{(h)} e_{21} &= n_4^{(h)} & n_2^{(h)} e_{21} &= 0 \\
n_1^{(h)} e_{22} &= 0 & n_2^{(h)} e_{22} &= n_2^{(h)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_3^{(h)} e_{11} &= n_3^{(h)} & \qquad n_4^{(h)} e_{11} &= 0 \\
n_3^{(h)} e_{12} &= 0 & n_4^{(h)} e_{12} &= n_1^{(h)} \\
n_3^{(h)} e_{21} &= n_2^{(h)} & n_4^{(h)} e_{21} &= 0 \\
n_3^{(h)} e_{22} &= 0 & n_4^{(h)} e_{22} &= n_4^{(h)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{11} n_1^{(h)} &= n_1^{(h)} & \qquad e_{11} n_2^{(h)} &= 0 \\
e_{12} n_1^{(h)} &= 0 & e_{12} n_2^{(h)} &= -n_4^{(h)} \\
e_{21} n_1^{(h)} &= -n_3^{(h)} & e_{21} n_2^{(h)} &= 0 \\
e_{22} n_1^{(h)} &= 0 & e_{22} n_2^{(h)} &= n_2^{(h)}
\end{aligned}$$

- Se $h = 1, \ldots, t-1$, então defina

$$\begin{aligned}
e_{11} n_3^{(h)} &= -n_1^{(h+1)} & \qquad e_{11} n_4^{(h)} &= n_4^{(h)} - n_1^{(h+1)} \\
e_{12} n_3^{(h)} &= 0 & e_{12} n_4^{(h)} &= n_1^{(h)} \\
e_{21} n_3^{(h)} &= -n_2^{(h)} + n_3^{(h+1)} - n_4^{(h+1)} & e_{21} n_4^{(h)} &= -2n_2^{(h)} + n_3^{(h+1)} - n_4^{(h+1)} \\
e_{22} n_3^{(h)} &= n_3^{(h)} + n_1^{(h+1)} & e_{22} n_4^{(h)} &= n_1^{(h+1)}
\end{aligned}$$

- Se $h = t$, então defina

$$
\begin{aligned}
e_{11}n_3^{(t)} &= n_2^{(1)} & e_{11}n_4^{(h)} &= n_2^{(1)} + n_4^{(t)} \\
e_{12}n_3^{(t)} &= -n_3^{(1)} + n_4^{(1)} & e_{12}n_4^{(h)} &= -n_3^{(1)} + n_4^{(1)} + n_1^{(t)} \\
e_{21}n_3^{(t)} &= -n_2^{(t)} & e_{21}n_4^{(h)} &= -2n_2^{(t)} \\
e_{22}n_3^{(t)} &= -n_2^{(1)} + n_3^{(t)} & e_{22}n_4^{(h)} &= -n_2^{(1)}
\end{aligned}
$$

Para todo $t \geq 2$ o A-bimódulo $N^{(t)}$ é alternativo à direita (conferir [MS01, p. 911]). Em particular, consideremos o bimódulo $N^{(3)} = \operatorname{span}\left\langle n_1^{(i)}, n_2^{(i)}, n_3^{(i)}, n_4^{(i)} \;\middle|\; i = 1, 2, 3 \right\rangle$. Para cada $h \in \mathbb{Z}$, defina a transformação linear injetora $T_h : N^{(3)} \to M$ dada por

$$T_h(n_k^{(i)}) = m_k^{(h+i-1)},$$

para quaisquer $i \in \{1, 2, 3\}$ e $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Embora a transformação linear T_h não seja um homomorfismo de A-bimódulos, comparando as ações de A-bimódulo de M e $N^{(3)}$, podemos notar que

$$
\begin{aligned}
T_h(e_{rs}n_k^{(i)}) &= e_{rs}m_k^{(h+i-1)} \\
T_h(n_k^{(i)}e_{rs}) &= m_k^{(h+i-1)}e_{rs},
\end{aligned}
$$

para todo $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, todo $i \in \{1, 2\}$ e quaisquer $r, s \in \{1, 2\}$.

Assim, para provar que M é alternativo à direita é suficiente notar que, para qualquer $h \in \mathbb{Z}$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $r, s, p, q \in \{1, 2\}$, temos

$$
\begin{aligned}
&(\rho_{e_{rs}}\rho_{e_{rs}} - \rho_{e_{rs}^2})(m_k^{(h)}) = \left(m_k^{(h)}, e_{rs}, e_{rs}\right) = \\
&= \left(m_k^{(h)}e_{rs}\right)e_{rs} - m_k^{(h)}(e_{rs}e_{rs}) \\
&= \left(T_h\left(n_k^{(1)}\right)e_{rs}\right)e_{rs} - T_h\left(n_k^{(1)}\right)(e_{rs}e_{rs}) \\
&= T_h\left(\left(n_k^{(1)}e_{rs}\right)e_{rs} - n_k^{(1)}(e_{rs}e_{rs})\right) \\
&= T_h\left(n_k^{(1)}, e_{rs}, e_{rs}\right) = T_h(0) = 0
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&(\rho_{e_{pq}}\lambda_{e_{rs}} - \lambda_{e_{rs}}\rho_{e_{pq}} + \lambda_{e_{rs}e_{pq}} - \lambda_{e_{rs}}\lambda_{e_{pq}})(m_k^{(h)}) = \left(e_{rs}, m_k^{(h)}, e_{pq}\right) + \left(e_{rs}, e_{pq}, m_k^{(h)}\right) = \\
&= \left(e_{rs}m_k^{(h)}\right)e_{pq} - e_{rs}\left(m_k^{(h)}e_{pq}\right) + (e_{rs}e_{pq})\,m_k^{(h)} - e_{rs}\left(e_{pq}m_k^{(h)}\right) \\
&= \left(e_{rs}T_h\left(n_k^{(1)}\right)\right)e_{pq} - e_{rs}\left(T_h\left(n_k^{(1)}\right)e_{pq}\right) + (e_{rs}e_{pq})\,T_h\left(n_k^{(1)}\right) - e_{rs}\left(e_{pq}T_h\left(n_k^{(1)}\right)\right) \\
&= T_h\left(\left(e_{rs}n_k^{(1)}\right)e_{pq} - e_{rs}\left(n_k^{(1)}e_{pq}\right) + (e_{rs}e_{pq})\,n_k^{(1)} - e_{rs}\left(e_{pq}n_k^{(1)}\right)\right) \\
&= T_h\left(\left(e_{rs}, n_k^{(1)}, e_{pq}\right) + \left(e_{rs}, e_{pq}, n_k^{(1)}\right)\right) = T_h(0) = 0
\end{aligned}
$$

Concluímos que M satisfaz as identidades de operadores

$$r_x r_x = r_{x^2}$$
$$l_x r_y - r_y l_x = l_{xy} - l_x l_y$$

e, portanto, é um bimódulo alternativo à direita.

A.3 Segunda abordagem

A.3.1 A primeira identidade

Vamos mostrar nesta seção que o A-bimódulo M satisfaz a identidade de operadores

$$r_x r_x = r_{x^2},$$

mostrando diretamente (ou seja, sem o auxílio do exemplo encontrado em [MS01, p. 911]) que

$$\rho_x \rho_x (m_k^{(h)}) = \rho_{x^2}(m_k^{(h)}),$$

para quaisquer $x \in \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $h \in \mathbb{Z}$.

- $x = e_{11}$: Neste caso, $x^2 = e_{11}e_{11} = e_{11}$.

k	$m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{11}}\rho_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{11}{}^2} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{11}}\rho_{e_{11}} m_k^{(h)} - \rho_{e_{11}{}^2} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	0
2	$m_2^{(h)}$	0	0	0	0
3	$m_3^{(h)}$	$m_3^{(h)}$	$m_3^{(h)}$	$m_3^{(h)}$	0
4	$m_4^{(h)}$	0	0	0	0

- $x = e_{12}$: Neste caso, $x^2 = e_{12}e_{12} = 0$.

k	$m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{12}}\rho_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{12}{}^2} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{12}}\rho_{e_{12}} m_k^{(h)} - \rho_{e_{12}{}^2} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	0	0	0	0
2	$m_2^{(h)}$	$m_3^{(h)}$	0	0	0
3	$m_3^{(h)}$	0	0	0	0
4	$m_4^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	0	0	0

- $x = e_{21}$: Neste caso, $x^2 = e_{21}e_{21} = 0$.

k	$m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{21}}\rho_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{21}{}^2} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{21}}\rho_{e_{21}} m_k^{(h)} - \rho_{e_{21}{}^2} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	$m_4^{(h)}$	0	0	0
2	$m_2^{(h)}$	0	0	0	0
3	$m_3^{(h)}$	$m_2^{(h)}$	0	0	0
4	$m_4^{(h)}$	0	0	0	0

- $x = e_{22}$: Neste caso, $x^2 = e_{22}e_{22} = e_{22}$.

k	$m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{22}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{22}}\rho_{e_{22}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{22}{}^2} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{22}}\rho_{e_{22}} m_k^{(h)} - \rho_{e_{22}{}^2} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	0	0	0	0
2	$m_2^{(h)}$	$m_2^{(h)}$	$m_2^{(h)}$	$m_2^{(h)}$	0
3	$m_3^{(h)}$	0	0	0	0
4	$m_4^{(h)}$	$m_4^{(h)}$	$m_4^{(h)}$	$m_4^{(h)}$	0

Concluímos que

$$r_x r_x - r_{x^2} = 0$$

é uma identidade de operadores de M.

A.3.2 A segunda identidade

Vamos mostrar nesta seção que o A-bimódulo M satisfaz a identidade de operadores

$$l_x r_y - r_y l_x = l_{xy} - l_x l_y,$$

mostrando diretamente (ou seja, sem o auxílio do exemplo encontrado em [MS01, p. 911]) que

$$\lambda_x \rho_y m_k^{(h)} - \rho_y \lambda_x m_k^{(h)} = \lambda_{xy} m_k^{(h)} - \lambda_x \lambda_y m_k^{(h)},$$

para quaisquer $x, y \in \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $h \in \mathbb{Z}$.

$x = e_{11}$

- $x = e_{11}$, $y = e_{11}$: Neste caso, $xy = e_{11}e_{11} = e_{11}$.

k	$m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}}\rho_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{11}}\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}}\rho_{e_{11}} m_k^{(h)} - \rho_{e_{11}}\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	0
2	$m_2^{(h)}$	0	0	0	0	0
3	$m_3^{(h)}$	$m_3^{(h)}$	$-m_1^{(h+1)}$	$-m_1^{(h+1)}$	$-m_1^{(h+1)}$	0
4	$m_4^{(h)}$	0	0	0	0	0

k	$m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}}\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}e_{11}} m_k^{(h)} - \lambda_{e_{11}}\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	0
2	$m_2^{(h)}$	0	0	0	0
3	$m_3^{(h)}$	$-m_1^{(h+1)}$	$-m_1^{(h+1)}$	$-m_1^{(h+1)}$	0
4	$m_4^{(h)}$	0	0	0	0

- $x = e_{11}, y = e_{12}$: Neste caso, $xy = e_{11}e_{12} = e_{12}$.

k	$m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}}\rho_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{12}}\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}}\rho_{e_{12}} m_k^{(h)} - \rho_{e_{12}}\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	0	0	$m_1^{(h)}$	0	0
2	$m_2^{(h)}$	$m_3^{(h)}$	$-m_1^{(h)}$	0	0	$-m_1^{(h+1)}$
3	$m_3^{(h)}$	0	0	$-m_1^{(h+1)}$	0	0
4	$m_4^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$m_4^{(h)} - m_1^{(h+1)}$	$m_1^{(h)}$	0

k	$m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}}\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}e_{12}} m_k^{(h)} - \lambda_{e_{11}}\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	0	0	0	0
2	$m_2^{(h)}$	$-m_4^{(h)}$	$-m_4^{(h)}$	$m_1^{(h+1)} - m_4^{(h)}$	$-m_1^{(h+1)}$
3	$m_3^{(h)}$	0	0	0	0
4	$m_4^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	0

- $x = e_{11}, y = e_{21}$: Neste caso, $xy = e_{11}e_{21} = 0$.

k	$m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}}\rho_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{21}}\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}}\rho_{e_{21}} m_k^{(h)} - \rho_{e_{21}}\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	$m_4^{(h)}$	$m_4^{(h)} - m_1^{(h+1)}$	$m_1^{(h)}$	$m_4^{(h)}$	$-m_1^{(h+1)}$
2	$m_2^{(h)}$	0	0	0	0	0
3	$m_3^{(h)}$	$m_2^{(h)}$	0	$-m_1^{(h+1)}$	$-m_4^{(h+1)}$	$m_4^{(h+1)}$
4	$m_4^{(h)}$	0	0	$m_4^{(h)} - m_1^{(h+1)}$	$-m_4^{(h+1)}$	$m_4^{(h+1)}$

k	$m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}}\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}e_{21}} m_k^{(h)} - \lambda_{e_{11}}\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	0	$-m_3^{(h)}$	$m_1^{(h+1)}$	$-m_1^{(h+1)}$
2	$m_2^{(h)}$	0	0	0	0
3	$m_3^{(h)}$	0	$-m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)} - m_4^{(h+1)}$	$-m_4^{(h+1)}$	$m_4^{(h+1)}$
4	$m_4^{(h)}$	0	$-2m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)} - m_4^{(h+1)}$	$-m_4^{(h+1)}$	$m_4^{(h+1)}$

- $x = e_{11}, y = e_{22}$: Neste caso, $xy = e_{11}e_{22} = 0$.

k	$m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{22}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}}\rho_{e_{22}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{22}}\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}}\rho_{e_{22}} m_k^{(h)} - \rho_{e_{22}}\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	0	0	0	0	0
2	$m_2^{(h)}$	$m_2^{(h)}$	0	0	0	0
3	$m_3^{(h)}$	0	0	$m_3^{(h)} + m_1^{(h+1)}$	0	0
4	$m_4^{(h)}$	$m_4^{(h)}$	$m_4^{(h)} - m_1^{(h+1)}$	$m_4^{(h)} - m_1^{(h+1)}$	$m_4^{(h)}$	$-m_1^{(h+1)}$

k	$m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}e_{22}}m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{22}}m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}}\lambda_{e_{22}}m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}e_{22}}m_k^{(h)} - \lambda_{e_{11}}\lambda_{e_{22}}m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	0	0	0	0
2	$m_2^{(h)}$	0	$m_2^{(h)}$	0	0
3	$m_3^{(h)}$	0	$m_3^{(h)} + m_1^{(h+1)}$	0	0
4	$m_4^{(h)}$	0	$m_1^{(h+1)}$	$m_1^{(h+1)}$	$-m_1^{(h+1)}$

Para qualquer $y \in \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ e quaisquer $h \in \mathbb{Z}$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, temos

$$\left(\lambda_{e_{11}}\rho_y - \rho_y\lambda_{e_{11}}\right) m_k^{(h)} = \left(\lambda_{e_{11}y} - \lambda_{e_{11}}\lambda_y\right) m_k^{(h)}.$$

$x = e_{22}$

Pela tabela de multiplicação da Seção A.1, vale que

$$\lambda_{e_{11}+e_{22}}m_k^{(h)} = \rho_{e_{11}+e_{22}}m_k^{(h)} = m_k^{(h)},$$

para quaisquer $h \in \mathbb{Z}$ e $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Conclui-se daí que

$$\begin{aligned}\lambda_{e_{22}} &= Id_M - \lambda_{e_{11}}\\ \rho_{e_{22}} &= Id_M - \rho_{e_{11}}\end{aligned}$$

Na subseção anterior, mostramos para todo $y \in \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ e quaisquer $h \in \mathbb{Z}$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, que

$$\left(\lambda_{e_{11}}\rho_y - \rho_y\lambda_{e_{11}}\right) m_k^{(h)} = \left(\lambda_{e_{11}y} - \lambda_{e_{11}}\lambda_y\right) m_k^{(h)}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\left(\lambda_{e_{22}}\rho_y - \rho_y\lambda_{e_{22}}\right) m_k^{(h)} &= \lambda_{e_{22}}\rho_y m_k^{(h)} - \rho_y\lambda_{e_{22}}m_k^{(h)}\\ &= \left(Id_M - \lambda_{e_{11}}\right)\rho_y m_k^{(h)} - \rho_y\left(Id_M - \lambda_{e_{11}}\right) m_k^{(h)}\\ &= Id_M(\rho_y m_k^{(h)}) - \lambda_{e_{11}}\rho_y m_k^{(h)} - \rho_y Id_M(m_k^{(h)}) + \rho_y\lambda_{e_{11}}m_k^{(h)}\\ &= \rho_y m_k^{(h)} - \rho_y m_k^{(h)} - \left(\lambda_{e_{11}}\rho_y m_k^{(h)} - \rho_y\lambda_{e_{11}}m_k^{(h)}\right)\\ &= -\left(\left(\lambda_{e_{11}}\rho_y - \rho_y\lambda_{e_{11}}\right) m_k^{(h)}\right)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left(\left(\lambda_{e_{22}y} - \lambda_{e_{22}}\lambda_y\right)\right) m_k^{(h)} &= \lambda_{e_{22}y}m_k^{(h)} - \lambda_{e_{22}}\lambda_y m_k^{(h)}\\ &= \lambda_{(e_{22}y+e_{11}y-e_{11}y)}m_k^{(h)} - \left(Id_M - \lambda_{e_{11}}\right)\lambda_y m_k^{(h)}\\ &= \lambda_{(e_{11}+e_{22})y}m_k^{(h)} - \lambda_{e_{11}y}m_k^{(h)} - Id_M(\lambda_y m_k^{(h)}) - \lambda_{e_{11}}\lambda_y m_k^{(h)}\\ &= \lambda_y m_k^{(h)} - \lambda_y m_k^{(h)} - \left(\lambda_{e_{11}y}m_k^{(h)} - \lambda_{e_{11}}\lambda_y m_k^{(h)}\right)\\ &= -\left(\left(\lambda_{e_{11}y} - \lambda_{e_{11}}\lambda_y\right) m_k^{(h)}\right).\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\left(\lambda_{e_{22}}\rho_y - \rho_y\lambda_{e_{22}}\right) m_k^{(h)} = \left(\lambda_{e_{22}y} - \lambda_{e_{22}}\lambda_y\right) m_k^{(h)}.$$

$x = e_{12}$

- $x = e_{12}, y = e_{11}$: Neste caso, $xy = e_{12}e_{11} = 0$.

k	$m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}}\rho_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{11}}\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}}\rho_{e_{11}} m_k^{(h)} - \rho_{e_{11}}\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	0	0	0	0
2	$m_2^{(h)}$	0	0	$-m_4^{(h)}$	0	0
3	$m_3^{(h)}$	$m_3^{(h)}$	0	0	0	0
4	$m_4^{(h)}$	0	0	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$-m_1^{(h)}$

k	$m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}}\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}e_{11}} m_k^{(h)} - \lambda_{e_{12}}\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	0	$m_1^{(h)}$	0	0
2	$m_2^{(h)}$	0	0	0	0
3	$m_3^{(h)}$	0	$-m_1^{(h+1)}$	0	0
4	$m_4^{(h)}$	0	$m_4^{(h)} - m_1^{(h+1)}$	$m_4^{(h)}$	$-m_4^{(h)}$

- $x = e_{12}, y = e_{12}$: Neste caso, $xy = e_{12}e_{12} = 0$.

k	$m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}}\rho_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{12}}\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}}\rho_{e_{12}} m_k^{(h)} - \rho_{e_{12}}\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	0	0	0	0	0
2	$m_2^{(h)}$	$m_3^{(h)}$	0	$-m_4^{(h)}$	$-m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$
3	$m_3^{(h)}$	0	0	0	0	0
4	$m_4^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	0	$m_1^{(h)}$	0	0

k	$m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}}\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}e_{12}} m_k^{(h)} - \lambda_{e_{12}}\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	0	0	0	0
2	$m_2^{(h)}$	0	$-m_4^{(h)}$	$-m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$
3	$m_3^{(h)}$	0	0	0	0
4	$m_4^{(h)}$	0	$m_1^{(h)}$	0	0

- $x = e_{12}, y = e_{21}$: Neste caso, $xy = e_{12}e_{21} = e_{11}$.

k	$m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}}\rho_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{21}}\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}}\rho_{e_{21}} m_k^{(h)} - \rho_{e_{21}}\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	$m_4^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	0	0	0
2	$m_2^{(h)}$	0	0	$-m_4^{(h)}$	0	0
3	$m_3^{(h)}$	$m_2^{(h)}$	$-m_4^{(h)}$	0	0	$-m_4^{(h)}$
4	$m_4^{(h)}$	0	0	$m_1^{(h)}$	$m_4^{(h)}$	$-m_4^{(h)}$

k	$m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}}\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}e_{21}} m_k^{(h)} - \lambda_{e_{12}}\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$-m_3^{(h)}$	0	0
2	$m_2^{(h)}$	0	0	0	0
3	$m_3^{(h)}$	$-m_1^{(h+1)}$	$-m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)} - m_4^{(h+1)}$	$m_4^{(h)} - m_1^{(h+1)}$	$-m_4^{(h)}$
4	$m_4^{(h)}$	$m_4^{(h)} - m_1^{(h+1)}$	$-2m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)} - m_4^{(h+1)}$	$2m_4^{(h)} - m_1^{(h+1)}$	$-m_4^{(h)}$

- $x = e_{12}, y = e_{22}$: Neste caso, $xy = e_{12}e_{22} = e_{12}$.

k	$m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{22}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}}\rho_{e_{22}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{22}}\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}}\rho_{e_{22}} m_k^{(h)} - \rho_{e_{22}}\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	0	0	0	0	0
2	$m_2^{(h)}$	$m_2^{(h)}$	$-m_4^{(h)}$	$-m_4^{(h)}$	$-m_4^{(h)}$	0
3	$m_3^{(h)}$	0	0	0	0	0
4	$m_4^{(h)}$	$m_4^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	0	$m_1^{(h)}$

k	$m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}e_{22}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{22}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}}\lambda_{e_{22}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}e_{22}} m_k^{(h)} - \lambda_{e_{12}}\lambda_{e_{22}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	0	0	0	0
2	$m_2^{(h)}$	$-m_4^{(h)}$	$m_2^{(h)}$	$-m_4^{(h)}$	0
3	$m_3^{(h)}$	0	$m_3^{(h)} + m_1^{(h+1)}$	0	0
4	$m_4^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h+1)}$	0	$m_1^{(h)}$

$x = e_{21}$

- $x = e_{21}, y = e_{11}$: Neste caso, $xy = e_{21}e_{11} = e_{21}$.

k	$m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}}\rho_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{11}}\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}}\rho_{e_{11}} m_k^{(h)}$ $-\rho_{e_{11}}\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$-m_3^{(h)}$	$-m_3^{(h)}$	$-m_3^{(h)}$	0
2	$m_2^{(h)}$	0	0	0	0	0
3	$m_3^{(h)}$	$m_3^{(h)}$	$-m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$	$-m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$	$m_3^{(h+1)}$	$-m_2^{(h)} - m_4^{(h+1)}$
4	$m_4^{(h)}$	0	0	$-2m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$	$m_3^{(h+1)}$	$-m_3^{(h)}$

k	$m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}}\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}e_{11}} m_k^{(h)}$ $-\lambda_{e_{21}}\lambda_{e_{11}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	$-m_3^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$-m_3^{(h)}$	0
2	$m_2^{(h)}$	0	0	0	0
3	$m_3^{(h)}$	$-m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$	$-m_1^{(h+1)}$	$m_3^{(h+1)}$	$-m_2^{(h)} - m_4^{(h+1)}$
4	$m_4^{(h)}$	$-2m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$	$m_4^{(h)} - m_1^{(h+1)}$	$-2m_2^{(h)} + 2m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$	$-m_3^{(h)}$

- $x = e_{21}, y = e_{12}$: Neste caso, $xy = e_{21}e_{12} = e_{22}$.

k	$m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}}\rho_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{12}}\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}}\rho_{e_{12}} m_k^{(h)}$ $-\rho_{e_{12}}\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	0	0	$-m_3^{(h)}$	0	0
2	$m_2^{(h)}$	$m_3^{(h)}$	$-m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$	0	0	$-m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$
3	$m_3^{(h)}$	0	0	$-m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$	$-m_3^{(h)} - m_1^{(h+1)}$	$m_3^{(h)} + m_1^{(h+1)}$
4	$m_4^{(h)}$	$m_1^{(h)}$	$-m_3^{(h)}$	$-2m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$	$-2m_3^{(h)} - m_1^{(h+1)}$	$m_3^{(h)} + m_1^{(h+1)}$

k	$m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}}\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}e_{12}} m_k^{(h)} - \lambda_{e_{21}}\lambda_{e_{12}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	0	0	0	0
2	$m_2^{(h)}$	$m_2^{(h)}$	$-m_4^{(h)}$	$2m_2^{(h)} - m_3^{(h+1)}$ $+m_4^{(h+1)}$	$-m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$
3	$m_3^{(h)}$	$m_3^{(h)} + m_1^{(h+1)}$	0	0	$m_3^{(h)} + m_1^{(h+1)}$
4	$m_4^{(h)}$	$m_1^{(h+1)}$	$m_1^{(h)}$	$-m_3^{(h)}$	$m_3^{(h)} + m_1^{(h+1)}$

- $x = e_{21}, y = e_{21}$: Neste caso, $xy = e_{21}e_{21} = 0$.

k	$m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}}\rho_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{21}}\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}}\rho_{e_{21}} m_k^{(h)}$ $-\rho_{e_{21}}\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	$m_4^{(h)}$	$-2m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$	$-m_3^{(h)}$	$-m_2^{(h)}$	$-m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$
2	$m_2^{(h)}$	0	0	0	0	0
3	$m_3^{(h)}$	$m_2^{(h)}$	0	$-m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$	$m_2^{(h+1)}$	$-m_2^{(h+1)}$
4	$m_4^{(h)}$	0	0	$-2m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$	$m_2^{(h+1)}$	$-m_2^{(h+1)}$

k	$m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}}\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}e_{21}} m_k^{(h)} - \lambda_{e_{21}}\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	0	$-m_3^{(h)}$	$m_2^{(h)} - m_3^{(h+1)}$ $+m_4^{(h+1)}$	$-m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$
2	$m_2^{(h)}$	0	0	0	0
3	$m_3^{(h)}$	0	$-m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$	$m_2^{(h+1)}$	$-m_2^{(h+1)}$
4	$m_4^{(h)}$	0	$-2m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$	$m_2^{(h+1)}$	$-m_2^{(h+1)}$

- $x = e_{21}, y = e_{22}$: Neste caso, $xy = e_{21}e_{22} = 0$.

k	$m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{22}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}} \rho_{e_{22}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\rho_{e_{22}} \lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}} \rho_{e_{22}} m_k^{(h)}$ $-\rho_{e_{22}} \lambda_{e_{21}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	0	0	$-m_3^{(h)}$	0	0
2	$m_2^{(h)}$	$m_2^{(h)}$	0	0	0	0
3	$m_3^{(h)}$	0	0	$-m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$	$-m_2^{(h)} - m_4^{(h+1)}$	$m_2^{(h)} + m_4^{(h+1)}$
4	$m_4^{(h)}$	$m_4^{(h)}$	$-2m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$	$-2m_2^{(h)} + m_3^{(h+1)}$ $-m_4^{(h+1)}$	$-2m_2^{(h)} - m_4^{(h+1)}$	$m_3^{(h+1)}$

k	$m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}e_{22}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{22}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}} \lambda_{e_{22}} m_k^{(h)}$	$\lambda_{e_{21}e_{22}} m_k^{(h)} - \lambda_{e_{21}} \lambda_{e_{22}} m_k^{(h)}$
1	$m_1^{(h)}$	0	0	0	0
2	$m_2^{(h)}$	0	$m_2^{(h)}$	0	0
3	$m_3^{(h)}$	0	$m_3^{(h)} + m_1^{(h+1)}$	$-m_2^{(h)} - m_4^{(h+1)}$	$m_2^{(h)} + m_4^{(h+1)}$
4	$m_4^{(h)}$	0	$m_1^{(h+1)}$	$-m_3^{(h+1)}$	$-m_3^{(h+1)}$

Concluímos pelas subseções anteriores que

$$l_x r_y - r_y l_x = l_{xy} - l_x l_y$$

é uma identidade de operadores de M.

Referências Bibliográficas

[ACM94] J. A. Anquela, T. Cortés e F. Montaner. Nonassociative coalgebras. *Comm. Algebra*, 22(12):4693–4716, 1994.

[DNR01] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu e Ş. Raianu. *Hopf algebras*, volume 235 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 2001. An introduction.

[Dor70] G. V. Dorofeev. The nilpotency of right-alternative rings. *Algebra and Logic*, 9:180–182, 1970.

[Gai70] A. T. Gainov. Power associative algebras over a field of finite characteristic. *Algebra and Logic*, 9:5–19, 1970.

[GW04] B. J. Gardner e R. Wiegandt. *Radical theory of rings*, volume 261 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 2004.

[McC04] K. McCrimmon. *A taste of Jordan algebras*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2004.

[Mic74] W. Michaelis. *Lie Coalgebras (with a proof of an analogue of the Poincaré-Birkhoff-Witt Theorem)*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1974. Thesis (Ph.D.)–University of Washington.

[Mic85] W. Michaelis. The dual Poincaré-Birkhoff-Witt theorem. *Adv. in Math.*, 57(2):93–162, 1985.

[Mic90] W. Michaelis. An example of a nonzero Lie coalgebra M for which $\mathrm{Loc}(M) = 0$. *J. Pure Appl. Algebra*, 68(3):341–348, 1990.

[MS01] L. S. I. Murakami e I. P. Shestakov. Irreducible unital right alternative bimodules. *J. Algebra*, 246(2):897–914, 2001.

[Nic14] F. F. Nichita. On Jordan (co)algebras. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 59(4):401–409, 2014.

[Olv93] P. J. Olver. *Applications of Lie groups to differential equations*, volume 107 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edição, 1993.

[Pch76] S. V. Pchelincev. The locally nilpotent radical in certain classes of right alternative rings. *Sib. Math. J.*, 17(2):265–280, 1976.

[Sag61] A. A. Sagle. Malcev algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 101:426–458, 1961.

[SFMS21a] G. Santos Filho, L. Murakami e I. Shestakov. Locally finite coalgebras and the locally nilpotent radical I. *Linear Algebra Appl.*, 621:235–253, 2021.

[SFMS21b] G. Santos Filho, L. Murakami e I. Shestakov. Locally finite coalgebras and the locally nilpotent radical II, 2021.

[Sli95] A. Slinko. Local finiteness of coalgebraic Lie coalgebras. *Comm. Algebra*, 23(3):1165–1170, 1995.

[Swe69] M. E. Sweedler. *Hopf algebras*. Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[vdW85] B. L. van der Waerden. *A history of algebra*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. From al-Khwārizmī to Emmy Noether.

[Zhe96] V. N. Zhelyabin. Coalgebras that can be made into a lattice. *Algebra and Logic*, 35(5):296–304, 1996.

[ZS73] K. A. Zhevlakov e I. P. Shestakov. Local finiteness in the sense of shirshov. *Algebra and Logic*, 12:23–41, 1973.

[ZSSS82] K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov e A. I. Shirshov. *Rings that are nearly associative*, volume 104 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1982. Translated from the Russian by Harry F. Smith.