Aspectos geométricos dos espaços $C_0(K, X)$

Vinícius Morelli Côrtes

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Matemática

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Elói Medina Galego

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP

São Paulo, 5 de Fevereiro de 2018

Aspectos geométricos dos espaços $C_0(K, X)$

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 27/06/2017. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Elói Medina Galego (orientador) - IME-USP
- Profa. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira - IME-USP
- Prof. Dr. Antonio Roberto da Silva - UFRJ
- Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann - UNIFESP
- Prof. Dr. Leandro Candido Batista - UNIFESP

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e à minha querida irmã pelo carinho constante, pelo incentivo contínuo e pela paciência infinita.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Elói Medina Galego, pelo apoio e orientação durante toda a elaboração deste trabalho e, sobretudo, por sua amizade.

Aos amigos André Barbeiro, André Porto, Clayton Suguio Hida, Eric Ossami Endo e Willian Hans agradeço pelas animadas conversas e pela amizade sincera. Um agradecimento especial também aos amigos Fabiano Cidral, pela ajuda na elaboração do projeto de qualificação, e Michael Rincón Villamizar, pela enorme paciência nos ajudando a verificar a demonstração do Teorema 3.4.

Nossos sinceros agradecimentos à professora Zara Issa Abud e aos professores Paulo Domingos Cordaro e Severino Toscano do Rego Melo, por todo o incentivo e pelas cartas de recomendação; aos professores Hugo Luiz Mariano e Ricardo dos Santos Freire Júnior, pela ajuda com a matrícula e com a inscrição no programa de doutorado; e aos professores Alexandre Lymberopoulos, Daniela Mariz Silva Vieira, Raul Antonio Ferraz e Valentin Raphael Henri Ferenczi, pela amizade e pelas disciplinas ministradas, que tanto me ensinaram.

Um agradecimento especial ao Prof. Satit Saejung pela valiosa ajuda na demonstração da Proposição 6.21.

Agradeço à FAPESP (processo nº 2014/08176-3) e à CAPES pelo auxílio financeiro durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

Este trabalho tem dois objetivos principais. Primeiramente, estudamos as cópias complementadas de $c_0(\tau)$ em espaços de Banach, onde τ é um cardinal infinito. Estendemos ao caso não-enumerável um resultado clássico obtido por T. Schlumprecht que caracteriza as cópias complementadas de c_0 em um espaço de Banach X. Usamos esta nova caracterização para estender resultados de G. Emmanuele, F. Bombal, D. Leung e F. Räbiger envolvendo as cópias complementadas de c_0 nos espaços de Banach clássicos $\ell_p(I, X)$, onde $p \in [1, \infty]$ e I é um conjunto não-vazio. Nós também provamos um novo resultado sobre as cópias complementadas de $c_0(\tau)$ nos espaços $C_0(K, X)$, onde K é um espaço de Hausdorff localmente compacto.

Em seguida, estudamos uma extensão vetorial do clássico Teorema de Banach-Stone obtida por K. Jarosz. Estudando várias constantes introduzidas por R. James, J. Schäffer, M. Baronti, E. Casini e P. Pappini, nós provamos uma nova relação entre os módulos de convexidade dos espaços X e X^*, que possui interesse independente. Esta relação é usada para provar uma nova generalização vetorial do Teorema de Banach-Stone que simultaneamente estende o Teorema de Jarosz e também mostra que este último resultado é, de fato, uma consequência de um teorema obtido recentemente por F. Cidral, E. Galego e M. Rincón-Villamizar.

Palavras-chave: Espaços $c_0(\tau)$, espaços $C_0(K, X)$, cópias complementadas, generalização do Teorema de Banach-Stone, constante de James, módulo de convexidade de um espaço de Banach e de seu dual.

Abstract

The goal of this work is two-fold. First, we study the complemented copies of $c_0(\tau)$ in Banach spaces, where τ is an infinite cardinal. We extend to the uncountable case a classical result by T. Schulmprecht that characterizes the complemented copies of c_0 in a Banach space X. We use this new characterization to extend results by G. Emmanuele, F. Bombal, D. Leung and F. Räbiger concerning the complemented copies of c_0 in the classical Banach spaces $\ell_p(I, X)$, where $p \in [1, \infty]$ and I is a non-empty set. We also obtain a new result involving the complemented copies of $c_0(\tau)$ in $C_0(K, X)$ spaces, where K is a locally compact Hausdorff space.

Next, we turn our attention to a vector-valued extension of the classical Banach-Stone theorem obtained by K. Jarosz. Studying several constants introduced by R. James, J. Schäffer, M. Baronti, E. Casini and P. Pappini, we obtain a new relationship between the moduli of convexity of X and X^*, which has independent interest. We then apply this relationship to prove a new X-valued generalization of the Banach-Stone theorem that simultaneously extends the aforementioned result by Jarosz and also shows that this result is, in fact, a consequence of a theorem obtained recently by F. Cidral, E. Galego and M. Rincón-Villamizar.

Keywords: $c_0(\tau)$ spaces, $C_0(K, X)$ spaces, complemented copies, generalization of the Banach-Stone theorem, James constant, moduli of convexity of a Banach space and its dual.

Conteúdo

Notações

$\mathbb{R}$	O corpo dos números reais.
δ_{ij}	O delta de Kronecker, isto é, $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.
S_X	A esfera unitária do espaço normado X, isto é, o conjunto $\{x \in X : \|x\| = 1\}$.
B_X	A bola unitária fechada do espaço normado X, isto é, o conjunto $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.
$B(x; \varepsilon)$	A bola aberta de centro $x \in X$ e raio $\varepsilon > 0$, onde X é um espaço normado.
X^*	O dual topológico do espaço normado X.
$X \sim Y$	Os espaços normados X e Y são isomorfos.
$X \equiv Y$	Os espaços normados X e Y são linearmente isométricos.
$x_n \to x$	A sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ converge em norma para $x \in X$.
$\wp(I)$	O conjunto das partes do conjunto I.

Introdução

Dados K um espaço de Hausdorff localmente compacto e X um espaço de Banach real, denotamos por $C_0(K, X)$ o espaço de Banach de todas as funções contínuas $f\colon K \to X$ que se anulam no infinito, munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{k\in K} \|f(k)\|, \forall f \in C_0(K, X).$$

Se K é compacto, denotaremos esse espaço por $C(K, X)$. Quando $X = \mathbb{R}$, escrevemos simplesmente $C_0(K)$ e $C(K)$. Dado τ um cardinal infinito munido da topologia discreta, escreveremos $c_0(\tau, X)$ e $c_0(\tau)$ ao invés de $C_0(\tau, X)$ e $C_0(\tau)$, respectivamente. Se $\tau = \aleph_0$, escreveremos simplesmente c_0.

Dados X um espaço de Banach e Y um subespaço de X, dizemos que Y é complementado em X se existe uma projeção P de X sobre Y. Se Z é um espaço de Banach, dizemos que X contém uma cópia (respectivamente, cópia complementada) de Z se Z é isomorfo a um subespaço (respectivamente, subespaço complementado) de X.

Neste trabalho vamos investigar algumas propriedades geométricas dos espaços $C_0(K, X)$. Temos dois objetivos principais. Primeiramente, vamos estudar a estabilidade de cópias complementadas dos espaços $c_0(\tau)$ em alguns espaços de Banach clássicos. Neste contexto, vamos considerar a seguinte questão.

Problema. *Sejam X e $\widetilde{X}$ espaços de Banach tais que $\widetilde{X}$ contém uma cópia complementada de X e seja τ um cardinal infinito. Que hipóteses sobre X e τ garantem que $\tilde{X}$ contém uma cópia complementada de $c_0(\tau)$ se, e somente se, X contém uma cópia complementada de $c_0(\tau)$?*

Resolveremos este problema, ao menos parcialmente, para os espaços de Banach $C_0(K, X)$, onde K é um espaço de Hausdorff localmente compacto, e $\ell_p(I, X)$, onde I é um conjunto não-vazio e $p \in [1, \infty]$. A principal ferramenta que vamos utilizar para lidar com este problema é uma caracterização das cópias complementadas de $c_0(\tau)$ que será provada no Capítulo 2; trata-se do Teorema 2.4.

A seguir, vamos nos dedicar ao estudo de extensões vetoriais do clássico Teorema de Banach-Stone.

Teorema (Teorema de Banach-Stone, [3, 47])**.** *Sejam K, S espaços de Hausdorff localmente compactos. Então $C_0(K)$ e $C_0(S)$ são linearmente isométricos se, e somente se, K e S são homeomorfos.*

D. Amir [2] e M. Cambern [7] independentemente fortaleceram o Teorema de Banach-Stone mostrando que a hipótese de existência de uma isometria entre $C_0(K)$ e $C_0(S)$ pode ser substituída pela existência de um isomorfismo $T : C_0(K) \to C_0(S)$ tal que $\|T\|\|T^{-1}\| < 2$. Mais tarde, Cambern [8] mostrou que 2 é o maior número para o qual o enunciado do Teorema de Amir-Cambern permanece verdadeiro ao exibir um par de espaços de Hausdorff localmente compactos K e S, onde K é compacto e S é não-compacto, e um isomorfismo $T : C(K) \to C_0(S)$ tal que $\|T\|\|T^{-1}\| = 2$. H. Cohen [13] também exibiu um exemplo onde ambos K e S são compactos.

Vários autores, começando por M. Jerison [34], estudaram o problema de determinar propriedades geométricas de X que permitem generalizações do Teorema de Banach-Stone para espaços $C_0(K, X)$ (veja [11] e suas referências). Um dos principais resultados nesta direção obtidos recentemente é o teorema a seguir. Recordamos que a constante de Schäffer de um espaço de Banach é o parâmetro

$$S(X) = \inf \{\max(\|x + y\|; \|x - y\|) : x, y \in S_X\}.$$

Teorema (Cidral-Galego-Rincón-Villamizar, [11], Teorema 2.1)**.** *Sejam K, S espaços de Hausdorff localmente compactos e X um espaço de Banach. Se existe um isomorfismo $T : C_0(K, X) \to C_0(S, X)$ satisfazendo $\|T\|\|T^{-1}\| < S(X)$, então K e S são homeomorfos.*

K. Jarosz [32] também investigou a relação entre propriedades geométricas de X^* e a estabilidade do Teorema de Banach-Stone para $C(K, X)$. O principal resultado obtido por Jarosz é o seguinte.

Teorema (Jarosz, [32], Teorema 1)**.** *Sejam K, S espaços de Hausdorff compactos e X um espaço de Banach. Se existe um isomorfismo $T : C(K, X) \to C(S, X)$ satisfazendo $\|T\|\|T^{-1}\| \leq \lambda$, onde*

$$\sup\{\|x_1^* - x_2^*\| : x_1^*, x_2^* \in X^*,\ \|x_1^* + x_2^*\| = 2,\ \|x_1^*\| \leq \lambda,\ \|x_2^*\| \leq \lambda\} < \frac{4}{3},$$

então K e S são homeomorfos.

Motivado pelos resultados obtidos por Amir e Cambern, o problema a seguir surge naturalmente neste contexto.

Problema. *O número $\frac{4}{3}$ é o maior número com o qual o enunciado do Teorema de Jarosz permanece verdadeiro?*

Além disso, o Teorema de Cidral-Galego-Rincón-Villamizar enunciado acima estendeu todas as generalizações vetoriais do Teorema de Banach-Stone conhecidas até então, com exceção do Teorema de Jarosz. Assim, também é natural considerarmos o seguinte problema.

Problema. *O Teorema de Jarosz é consequência do Teorema de Cidral-Galego-Rincón-Villamizar?*

O segundo objetivo deste trabalho é investigar estes últimos dois problemas. Provaremos que o Teorema de Jarosz é, de fato, uma consequência do Teorema de Cidral-Galego-Rincón-Villamizar. Além disso, mostraremos que o enunciado do Teorema de Jarosz permanece verdadeiro se substituirmos o número $\frac{4}{3}$ pela única raiz real do polinômio

$$p(x) = 2x^3 - x^2 + 8x - 20,$$

isto é, o seguinte número (aproximadamente 1.6753):

$$\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{1009 + 84\sqrt{159}} + \sqrt[3]{1009 - 84\sqrt{159}} + 1\right).$$

Lidando com esses problemas, provaremos também uma nova conexão entre os módulos de convexidade de X e de X^* (Teorema 6.15), que possui interesse independente.

No Capítulo 1 recordamos definições e resultados preliminares e fixamos a notação utilizada no decorrer do trabalho. Estudamos brevemente os conceitos de cópias e cópias complementadas de espaços de Banach, somas arbitrárias de números reais, medidas e integração vetoriais e famílias fracamente nulas, fraca*-nulas e fracamente incondicionalmente somáveis em espaços de Banach. Também vamos recordar as principais propriedades dos espaços $\ell_p(I, X)$, $C_0(K, X)$ e $c_0(\tau)$, que serão nossos objetos de estudo nos capítulos posteriores.

No Capítulo 2 iniciamos o estudo das cópias complementadas de $c_0(\tau)$ em espaços de Banach. Como mencionamos, o objetivo desse capítulo é provar o Teorema 2.4, que caracteriza as cópias complementadas de $c_0(\tau)$ em um espaço de Banach X em termos de uma família equivalente à base canônica de $c_0(\tau)$ em X e de uma família fraca*-nula no dual de X. Este resultado estende ao caso não-enumerável um resultado obtido por T. Schlumprecht em [42] envolvendo as cópias complementadas de c_0.

Colhemos os frutos do Teorema 2.4 nos Capítulos 3, 4 e 5. Estudamos a relação entre as cópias complementadas de $c_0(\tau)$ em X e nos espaços $C_0(K, X)$, $\ell_p(I, X)$ ($p \in [1, \infty)$), e $\ell_\infty(I, X)$, respectivamente.

Finalmente, o Capítulo 6 é dedicado à análise de algumas extensões vetoriais do Teorema de Banach-Stone. Vamos estudar a relação entre diversos parâmetros introduzidos por R. James, J. Schäffer, M. Baronti, E. Casini e P. Pappini, provar uma nova conexão entre os módulos de convexidade de X e de X^* e aplicar esta conexão para simultaneamente estender o Teorema de Jarosz e mostrar que este resultado é consequência do Teorema de Cidral-Galego-Rincón-Villamizar.

Capítulo 1

Preliminares

Neste Capítulo apresentaremos conceitos e resultados básicos que serão utilizados no decorrer do trabalho. Nossa terminologia é padrão e conceitos não definidos podem ser encontrados, e. g., em [15, 16, 19, 33, 43].

Todos os espaços vetoriais considerados estão definidos sobre $\mathbb{R}$.

1.1 Cópias e cópias complementadas de espaços de Banach

O objetivo desta seção é introduzir os conceitos de cópias e de cópias complementadas de um espaço de Banach, que serão nosso objeto de estudo nos capítulos seguintes.

Definição 1.1. Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço de X. Dizemos que Y é *complementado em* X se Y é fechado e existe um subespaço fechado Z de X tal que $X = Y \oplus Z$.

Definição 1.2. Sejam X, Y espaços de Banach. Dizemos que X *contém uma cópia* (respectivamente *contém uma cópia complementada*) *de* Y, e escrevemos $Y \hookrightarrow X$ (respectivamente $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$), se Y é isomorfo a um subespaço (respectivamente subespaço complementado) de X.

Definição 1.3. Sejam X um espaço de Banach e $P : X \to X$ um operador linear contínuo. Dizemos que P é uma *projeção (sobre sua imagem)* se $P \circ P = P$. Equivalentemente, P é uma projeção se $P(x) = x$ para todo $x \in Im(P)$.

Proposição 1.4. *Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço de X. Então Y é complementado em X se, e somente se, existe uma projeção $P : X \to X$ sobre Y.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que Y seja complementado em X e seja Z um subespaço fechado de X tal que $X = Y \oplus Z$. Dado $x \in X$, existem únicos $y \in Y$ e $z \in Z$ satisfazendo $x = y+z$. Assim, fica definido o operador linear $P : X \to X$ dado por $P(x) = y$, para todo $x = y + z \in X$. É imediato verificar que $\mathrm{Im}(P) = Y$ e que $P \circ P = P$.

Mostremos que P é contínuo usando o Teorema do Gráfico Fechado. Seja $(x_n)_{n\geq 1} = (y_n + z_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em X que converge para $x \in X$ e tal que $(P(x_n))_{n\geq 1} = (y_n)_{n\geq 1}$ converge para $w \in X$. Como Y é fechado, temos

$$w = \lim_{n\to\infty} y_n \in Y.$$

Escrevendo $x = y + z$, onde $y \in Y$ e $z \in Z$, obtemos

$$z + (y - w) = x - w = \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \in Z,$$

pois Z é fechado; portanto, $y - w \in Y \cap Z = \{0\}$, isto é, $w = y = P(x)$. Logo, pelo Teorema do Gráfico Fechado, P é contínuo.

Reciprocamente, seja $P : X \to X$ uma projeção sobre Y. Por continuidade, $Z = \mathrm{Ker}(P)$ e $Y = \mathrm{Ker}(I - P)$ são fechados em X. Notemos que

$$y \in Y \cap Z \iff P(y) = 0 = y - P(y) \iff y = 0.$$

Além disso, dado $x \in X$, temos $x = P(x)+(x-P(x))$. Logo, Y é complementado em X. ■

Proposição 1.5. *Sejam X, Y, Z espaços de Banach. Então temos:*

(i) Se $Y \hookrightarrow X$ e $Z \hookrightarrow Y$, então $Z \hookrightarrow X$;

(ii) Se $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$ e $Z \overset{c}{\hookrightarrow} Y$, então $Z \overset{c}{\hookrightarrow} X$.

Demonstração. (i) Basta notarmos que se $T : Y \to X$ e $S : Z \to Y$ são isomorfismos sobre suas respectivas imagens, então $T \circ S : Z \to X$ também é isomorfismo sobre sua imagem.

(ii) Sejam $T : Y \to X$ e $S : Z \to Y$ isomorfismos sobre suas respectivas imagens e $P : X \to X$ e $Q : Y \to Y$ projeções sobre $T(Y)$ e $S(Z)$, respectivamente. Definindo $R = T \circ Q \circ T^{-1} \circ P$, temos

$$\begin{aligned} R(T \circ S(z)) &= (T \circ Q \circ T^{-1} \circ P)(T \circ S(z)) = (T \circ Q \circ T^{-1} \circ T \circ S)(z) \\ &= (T \circ Q)(S(z)) = T \circ S(z), \end{aligned}$$

para todo $z \in Z$. Em particular, $T(S(Z)) \subset \mathrm{Im}(R)$. Por outro lado,

$$\mathrm{Im}(R) \subset \mathrm{Im}(T \circ Q) \subset T(S(Z)).$$

Isto prova que R é projeção sobre $T(S(Z))$, como queríamos. ∎

1.2 Somas arbitrárias de números reais

Nesta seção vamos introduzir a noção de soma de uma família arbitrária de números reais; esta definição será fundamental para introduzirmos os espaços $\ell_p(I, X)$, $p \in [1, \infty)$. Nosso primeiro passo é definir a soma de uma família de números reais positivos.

Definição 1.6. Sejam I um conjunto não-vazio e $(a_i)_{i \in I}$ uma família de números reais positivos. Definimos

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup \left\{ \sum_{i \in F} a_i : \varnothing \neq F \subset I \text{ finito} \right\} \in [0, \infty].$$

Se $(b_i)_{i \in I}$ é uma família de números reais tal que $\sum_{i \in I} |b_i| < \infty$, dizemos que $(b_i)_{i \in I}$ é *absolutamente somável*.

Vamos estender esta definição para famílias arbitrárias de números reais (não necessariamente positivos).

Definição 1.7. Sejam I um conjunto não-vazio e $a = (a_i)_{i \in I}$ uma família de números reais. Definimos o *suporte de a* como sendo o conjunto $\mathrm{supp}(a) = \{i \in I : a_i \neq 0\}$.

Definição 1.8. Sejam I um conjunto não-vazio e $a = (a_i)_{i \in I}$ uma família de números reais. Dizemos que a satisfaz a *condição de Cauchy* se para todo $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon \subset I$ finito e não-vazio tal que

$$\left| \sum_{i \in F} a_i \right| < \varepsilon,$$

para todo $F \subset I$ finito e não-vazio com $F \cap F_\varepsilon = \varnothing$.

Proposição 1.9. *Sejam I um conjunto não-vazio e $a = (a_i)_{i \in I}$ uma família de números reais que satisfaz a condição de Cauchy. Então para cada $n \geq 1$, o conjunto $I_n = \{i \in I : |a_i| \geq \frac{1}{n}\}$ é finito. Em particular,* $\mathrm{supp}(a)$ *é enumerável.*

Demonstração. Dado $n \geq 1$, por hipótese existe $F_n \subset I$ finito e não-vazio tal que

$$\left| \sum_{i \in F} a_i \right| < \frac{1}{n},$$

para todo $F \subset I$ finito e não-vazio com $F \cap F_n = \varnothing$. Em particular, $|a_i| < \frac{1}{n}$ para todo $i \in I \setminus F_n$. Isto prova que $(I \setminus F_n) \subset (I \setminus I_n)$, isto é, $I_n \subset F_n$. Portanto, cada I_n é finito e $\mathrm{supp}(a) = \bigcup_{n \geq 1} I_n$ é enumerável. ■

Proposição 1.10. *Sejam I um conjunto não-vazio e $a = (a_i)_{i \in I}$ uma família de números reais. Se a satisfaz a condição de Cauchy, então existe um único número real $S(a)$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subset I$ finito e não-vazio tal que*

$$\left| S(a) - \sum_{i \in F} a_i \right| < \varepsilon,$$

para todo $F \subset I$ finito satisfazendo $F_\varepsilon \subset F$.

Demonstração. Dado $n \geq 1$, seja $I_n = \left\{ i \in I : |a_i| \geq \frac{1}{n} \right\}$ como na proposição anterior e consideremos

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{se } I_n = \varnothing, \\ \sum_{i \in I_n} a_i & \text{se } I_n \neq \varnothing. \end{cases}$$

Vamos mostrar que a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, existe, por hipótese, $G_\varepsilon \subset I$ finito e não-vazio tal que

$$\left|\sum_{i\in G} a_i\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.1}$$

para todo $G \subset I$ finito e não-vazio com $G \cap G_\varepsilon = \varnothing$. Se $G_\varepsilon \cap \operatorname{supp}(a) \neq \varnothing$, sejam $\delta = \min\{|a_i| : i \in G_\varepsilon \cap \operatorname{supp}(a)\} > 0$ e $N_1 \geq 1$ tal que $\frac{1}{N_1} < \delta$; caso contrário, tomemos $N_1 = 1$. Então temos que

$$(G_\varepsilon \cap \operatorname{supp}(a)) \subset I_{N_1} \subset I_n, \forall n \geq N_1$$

e, portanto,

$$G_\varepsilon \cap (I_m \setminus I_n) = \varnothing, \forall m \geq n \geq N_1.$$

Logo, $|s_m - s_n| = 0$, se $I_n = I_m$, ou

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{i\in I_m\setminus I_n} a_i\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

se $I_n \neq I_m$ (por (1.1)), para todos $m \geq n \geq N_1$. Isto prova que $(s_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy e, portanto, converge para algum $S(a) \in \mathbb{R}$.

Mostremos que $S(a)$ satisfaz as condições do enunciado. Pela construção de $S(a)$, existe $N_2 \geq N_1$ tal que

$$|S(a) - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq N_2.$$

Sejam $F \subset I$ um subconjunto finito de I que contém propriamente o conjunto I_{N_2} e $F' = F \setminus I_{N_2}$. Como $(G_\varepsilon \cap \operatorname{supp}(a)) \subset I_{N_1} \subset I_{N_2}$, temos

$$(F' \cap \operatorname{supp}(a)) \cap G_\varepsilon = \varnothing.$$

Logo, $\left|\sum_{j\in F'} a_j\right| = 0$, se $F' \cap \operatorname{supp}(a) = \varnothing$, ou

$$\left|\sum_{j\in F'} a_j\right| = \left|\sum_{j\in F'\cap \operatorname{supp}(a)} a_j\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

se $F' \cap \mathrm{supp}(a) \neq \varnothing$ (por (1.1)). Portanto,

$$\left|S(a) - \sum_{j \in F} a_j\right| = \left|S(a) - s_{N_2} - \sum_{j \in F'} a_j\right| \leq |S(a) - s_{N_2}| + \left|\sum_{j \in F'} a_j\right| < \varepsilon.$$

Assim, basta tomarmos $F_\varepsilon = I_{N_2}$, se $I_{N_2} \neq \varnothing$, ou escolher qualquer subconjunto finito e não-vazio de I como sendo F_ε, se $I_{N_2} = \varnothing$.

Por fim, mostremos a unicidade de $S(a)$. Seja $S \in \mathbb{R}$ tal que, dado $\delta > 0$, existe $H_\delta \subset I$ finito e não-vazio tal que

$$\left|S - \sum_{i \in H} a_i\right| < \delta,$$

para todo $H \subset I$ finito e não-vazio com $H_\delta \subset H$. Pelo que fizemos, existe $H'_\delta \subset I$ finito e não-vazio tal que

$$\left|S(a) - \sum_{i \in H} a_i\right| < \delta,$$

para todo $H \subset I$ finito e não-vazio com $H'_\delta \subset H$. Tomando $H'' = H_\delta \cup H'_\delta$, obtemos

$$|S(a) - S| \leq \left|S - \sum_{i \in H''} a_i\right| + \left|S(a) - \sum_{i \in H''} a_i\right| < 2\delta.$$

Como $\delta > 0$ foi escolhido arbitrariamente, temos $S(a) = S$. ■

Proposição 1.11. *Sejam I um conjunto não-vazio e $a = (a_i)_{i \in I}$ uma família de números reais positivos. Então a é absolutamente somável se, e somente se, a satisfaz a condição de Cauchy. Neste caso, temos*

$$\sum_{i \in I} a_i = S(a),$$

onde $S(a)$ é o número real dado pela Proposição 1.10.

Demonstração. Seja $S = \sum_{i \in I} a_i = \sup\left\{\sum_{i \in F} a_i : \varnothing \neq F \subset I \text{ finito}\right\}$. Suponhamos primeiramente que $S < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, pela definição de supremo existe $F_\varepsilon \subset I$ finito e não-vazio tal que

$$S < \sum_{i \in F_\varepsilon} a_i + \varepsilon.$$

Portanto, se $F \subset I$ é finito e não-vazio e satisfaz $F \cap F_\varepsilon = \varnothing$, então

$$\sum_{j \in F} a_j = \sum_{k \in F \cup F_\varepsilon} a_k - \sum_{i \in F_\varepsilon} a_i \leq S - \sum_{i \in F_\varepsilon} a_i < \varepsilon.$$

Isto prova que a satisfaz a condição de Cauchy.

Reciprocamente, suponhamos que a satisfaça a condição de Cauchy. Em particular, existe $G_1 \subset I$ finito e não-vazio tal que

$$\sum_{j \in G} a_j < 1,$$

para todo $G \subset I$ finito e não-vazio tal que $G \cap G_1 \neq \varnothing$. Dado $H \subset I$ finito e não-vazio, temos

$$\begin{aligned} H \subset G_1 &\implies \sum_{j \in H} a_j \leq \sum_{i \in G_1} a_i, \\ H \not\subset G_1 &\implies \sum_{j \in H} a_j \leq \sum_{k \in H \setminus G_1} a_k + \sum_{i \in G_1} a_i < 1 + \sum_{i \in G_1} a_i. \end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que

$$S \leq 1 + \sum_{i \in G_1} a_i < \infty.$$

Isto prova que a é absolutamente somável.

Por fim, mostremos que $S(a) = \sum_{i \in I} a_i$. Dado $\delta > 0$, existe $J_\delta \subset I$ finito e não-vazio tal que

$$\begin{aligned} J_\delta \subset J \subset I \text{ finito } &\implies \left| S(a) - \sum_{i \in J} a_i \right| < \delta \\ &\implies \sum_{i \in J} a_i - \delta < S(a) < \sum_{i \in J} a_i + \delta. \end{aligned}$$

Em particular, temos

$$S(a) < \sum_{i \in J_\delta} a_i + \delta \leq S + \delta.$$

Por outro lado, dado $F \subset I$ finito e não-vazio, temos

$$\sum_{i \in F} a_i \leq \sum_{j \in F \cup J_\delta} a_j < S(a) + \delta.$$

Logo,

$$S \leq S(a) + \delta.$$

Como $\delta > 0$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos $S(a) = S$. ■

A Proposição 1.10 motiva a definição a seguir.

Definição 1.12. Sejam I um conjunto não-vazio e $a = (a_i)_{i\in I}$ uma família de números reais que satisfaz a condição de Cauchy. Definimos $\sum_{i\in I} a_i$ como sendo o único número real $S(a)$ dado pela Proposição 1.10.

Pela Proposição 1.11, as Definições 1.6 e 1.12 coincidem para famílias absolutamente somáveis de números reais positivos.

Os resultados simples a seguir apresentam as principais propriedades desta noção de soma que usaremos no decorrer do trabalho.

Corolário 1.13. *Sejam I um conjunto não-vazio e $a = (a_i)_{i\in I}$ uma família de números reais. Então a é absolutamente somável se, e somente se, a satisfaz a condição de Cauchy. Neste caso, temos*

$$\left|\sum_{i\in I} a_i\right| \leq \sum_{i\in I} |a_i|.$$

Demonstração. Fixemos $\varepsilon > 0$. Suponhamos primeiramente que a seja absolutamente somável. Pela Proposição 1.11, $(|a_i|)_{i\in I}$ satisfaz a condição de Cauchy. Portanto, existe $F_\varepsilon \subset I$ finito tal que

$$\left|\sum_{i\in F} a_i\right| \leq \sum_{i\in F} |a_i| < \varepsilon,$$

para todo $F \subset I$ finito e não-vazio satisfazendo $F \cap F_\varepsilon = \varnothing$. Isto prova que a satisfaz a condição de Cauchy.

Reciprocamente, suponhamos que a satisfaça a condição de Cauchy. Seja $G_\varepsilon \subset I$ finito e não-vazio tal que

$$\left|\sum_{i\in G} a_i\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $G \subset I$ finito e não-vazio satisfazendo $G \cap G_\varepsilon = \varnothing$. Fixado $G \subset I$ finito e não-vazio com $G \cap G_\varepsilon = \varnothing$, consideremos $G^+ = \{i \in G : a_i \geq 0\}$ e $G^- = \{i \in G : a_i < 0\}$. Temos três casos a considerar:

1º caso: $G^- = \varnothing$. Neste caso, temos

$$\sum_{i\in G}|a_i| = \sum_{i\in G} a_i = \left|\sum_{i\in G} a_i\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

2º caso: $G^+ = \varnothing$. Temos

$$\sum_{i\in G}|a_i| = -\sum_{i\in G} a_i = \left|\sum_{i\in G} a_i\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

3º caso: G^+ e G^- são ambos não-vazios. Neste caso, temos

$$\sum_{i\in G}|a_i| = \sum_{i\in G^+} a_i - \sum_{i\in G^-} a_i = \left|\sum_{i\in G^+} a_i\right| + \left|\sum_{i\in G^-} a_i\right| < \varepsilon.$$

Provamos, portanto, que $(|a_i|)_{i\in I}$ satisfaz a condição de Cauchy; logo, pela Proposição 1.11, a é absolutamente somável.

Mostremos agora que $\left|\sum_{i\in I} a_i\right| \leq \sum_{i\in I}|a_i|$. Por definição, existe $H_\varepsilon \subset I$ finito e não-vazio tal que

$$\left|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{j\in H_\varepsilon} a_j\right| < \varepsilon.$$

Logo,

$$\left|\sum_{i\in I} a_i\right| \leq \left|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{j\in H_\varepsilon} a_j\right| + \left|\sum_{j\in H_\varepsilon} a_j\right| < \varepsilon + \sum_{j\in H_\varepsilon}|a_j| \leq \varepsilon + \sum_{i\in I}|a_i|.$$

Como $\varepsilon > 0$ foi escolhido arbitrariamente, temos o resultado. ■

Proposição 1.14. *Sejam I um conjunto não-vazio, $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}$ famílias de números reais que satisfazem a condição de Cauchy e $t \in \mathbb{R}$. Então $(a_i + tb_i)_{i\in I}$ satisfaz a condição de Cauchy e*

$$\sum_{i\in I}(a_i + tb_i) = \sum_{i\in I} a_i + t\sum_{i\in I} b_i.$$

Demonstração. O resultado é imediato se $t = 0$; suponhamos, portanto, $t \neq 0$. Fixado $\varepsilon > 0$, existem, por hipótese, $F_1, F_2 \subset I$ finitos e não-vazios tais que

$$F \subset I \text{ finito com } F \cap F_1 = \varnothing \implies \left|\sum_{i\in F} a_i\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$F \subset I \text{ finito com } F \cap F_2 = \varnothing \implies \left|\sum_{i\in F} b_i\right| < \frac{\varepsilon}{2|t|}.$$

Portanto, dado $F \subset I$ finito e não-vazio com $F \cap (F_1 \cup F_2) = \varnothing$, temos

$$\left|\sum_{i\in F}(a_i + tb_i)\right| \leq \left|\sum_{i\in F} a_i\right| + |t|\left|\sum_{i\in F} b_i\right| < \varepsilon.$$

Isto prova que $(a_i + tb_i)_{i\in I}$ satisfaz a condição de Cauchy.

Vamos escrever $S_1 = \sum_{i\in I} a_i$ e $S_2 = \sum_{i\in I} b_i$. Por definição, existem $G_1, G_2 \subset I$ finitos e não-vazios tais que

$$G_1 \subset G \subset I \text{ finito} \implies \left|S_1 - \sum_{j\in G} a_j\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$G_2 \subset G \subset I \text{ finito} \implies \left|S_2 - \sum_{j\in G} b_j\right| < \frac{\varepsilon}{2|t|}.$$

Tomando $G_\varepsilon = G_1 \cup G_2$, temos

$$\left|\sum_{j\in G}(a_j + tb_j) - (S_1 + tS_2)\right| \leq \left|\sum_{j\in G} a_j - S_1\right| + |t|\left|\sum_{j\in G} b_j - S_2\right| < \varepsilon,$$

para todo $G \subset I$ finito tal que $G_\varepsilon \subset G$. Portanto, pela unicidade de $\sum_{i\in I}(a_i + tb_i)$, temos a igualdade desejada. ■

Proposição 1.15. *Sejam I um conjunto não-vazio e $(a_i)_{i\in I}$ uma família de números reais que satisfaz a condição de Cauchy. Então temos:*

(i) Se $J \subset I$ é um subconjunto não-vazio de I, então $(a_j)_{j\in J}$ satisfaz a condição de Cauchy;

(ii) Se $J_1, J_2 \subset I$ são subconjuntos disjuntos e não-vazios de I, então

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J_1} a_j + \sum_{k\in J_2} a_k.$$

Demonstração. (i) Dado $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subset I$ finito e não-vazio tal que

$$\left|\sum_{i\in F} a_i\right| < \varepsilon,$$

para todo $F \subset I$ finito e não-vazio com $F \cap F_\varepsilon = \varnothing$. Seja $G_\varepsilon \subset J$ um subconjunto finito e não-vazio de J que contém $F_\varepsilon \cap J$. Então

$$\left|\sum_{j\in G} a_j\right| < \varepsilon,$$

para todo $G \subset J$ finito e não vazio tal que $G \cap G_\varepsilon = \varnothing$. Isto prova que $(a_j)_{j\in J}$ satisfaz a condição de Cauchy.

(ii) Sejam $S = \sum_{i\in I} a_i$, $S_1 = \sum_{j\in J_1} a_j$ e $S_2 = \sum_{k\in J_2} a_k$ e mostremos que $S = S_1 + S_2$. Dado $\delta > 0$, existem $H_\delta^1 \subset J_1$ e $H_\delta^2 \subset J_2$ finitos e não-vazios tais que

$$H_\delta^1 \subset H \subset J_1 \text{ finito} \implies \left|S_1 - \sum_{j\in H} a_j\right| < \frac{\delta}{2},$$
$$H_\delta^2 \subset H \subset J_2 \text{ finito} \implies \left|S_2 - \sum_{k\in H} a_k\right| < \frac{\delta}{2}.$$

Tomando $H_\delta = H_\delta^1 \cup H_\delta^2$, temos

$$\left|(S_1 + S_2) - \sum_{i\in H} a_i\right| \leq \left|S_1 - \sum_{j\in H\cap J_1} a_j\right| + \left|S_2 - \sum_{k\in H\cap J_2} a_k\right| < \delta,$$

para todo $H \subset I$ finito com $H_\delta \subset H$. Portanto, pela unicidade de S, obtemos a igualdade desejada. ■

Proposição 1.16. *Sejam I um conjunto não-vazio e $a = (a_i)_{i\in I}$ uma família de números reais que satisfaz a condição de Cauchy. Dados $J \subset I$ um conjunto infinito enumerável com* $\operatorname{supp}(a) \subset J$ *e $\sigma : \mathbb{N} \to J$ uma bijeção, temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ é convergente e*

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{i\in I} a_i.$$

Demonstração. Sejam $S = \sum_{i\in I}$ e $\sigma : \mathbb{N} \to J$ uma bijeção e mostremos que a sequência das somas parciais $\left(\sum_{n=1}^{m} a_{\sigma(n)}\right)_{m\geq 1}$ converge para S. Para cada $m \geq 1$, seja $J_m = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(m)\}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $G_\varepsilon \subset I$ finito e não-vazio tal que

$$\left| S - \sum_{i\in G} a_i \right| < \varepsilon,$$

para todo $G \subset I$ finito com $G_\varepsilon \subset G$. Seja $G'_\varepsilon = G_\varepsilon \setminus J$ e seja $M \geq 1$ tal que $(G_\varepsilon \cap J) \subset J_M$. Dado $m \geq M$, como $G'_\varepsilon \cap \operatorname{supp}(a) = \varnothing$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{m} a_{\sigma(n)} = \sum_{j\in J_m \cup G'_\varepsilon} a_j$$

e, portanto,

$$\left| S - \sum_{n=1}^{m} a_{\sigma(n)} \right| = \left| S - \sum_{j\in J_m \cup G'_\varepsilon} a_j \right| < \varepsilon.$$

Isto prova que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{i\in I} a_i.$$

Em particular, pelo que provamos,

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{i\in I} a_i,$$

pois $\operatorname{supp}(a) = \operatorname{supp}((a_j)_{j\in J})$. Isto completa a demonstração. ■

1.3 Desigualdades de Young, Hölder e Minkowski

O objetivo desta seção é provar as Desigualdades de Hölder e de Minkowski (Teoremas 1.19 e 1.20, respectivamente), que desempenharão um papel fundamental na próxima seção. Começamos recordando a definição a seguir.

Definição 1.17. Dado $p \in (1, \infty)$, o *expoente conjugado de* p é o único número real $q \in (1, \infty)$ satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proposição 1.18 (Desigualdade de Young [19], Lema 1.11)**.** *Dados* $p \in (1, \infty)$ *e* $q \in (1, \infty)$ *seu expoente conjugado, temos* $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$*, para todos* $a, b \geq 0$.

Demonstração. O resultado é imediato se $b = 0$; suponhamos, portanto, $b > 0$. Consideremos a função $\varphi_b : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_b(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab, \forall a \geq 0.$$

φ_b é derivável em $(0, \infty)$ e

$$\varphi_b'(a) = a^{p-1} - b = a^{\frac{p}{q}} - b, \forall a > 0.$$

Logo, φ_b é decrescente no intervalo $(0, b^{\frac{q}{p}}]$ e crescente no intervalo $[b^{\frac{q}{p}}, \infty)$. Portanto, o valor mínimo de φ_b no intervalo $(0, \infty)$ é

$$\varphi_b(b^{\frac{q}{p}}) = \frac{(b^{\frac{q}{p}})^p}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{1+\frac{q}{p}} = b^q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) = 0.$$

Isto prova que $\varphi_b(a) \geq 0$ para todo $a > 0$. Como $\varphi_b(0) = \frac{b^q}{q} > 0$, temos o resultado. ■

Teorema 1.19 (Desigualdade de Hölder [19], Teorema 1.10)**.** *Dados $p \in (1, \infty)$, $q \in (1, \infty)$ seu expoente conjugado, I um conjunto não-vazio e $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}$ famílias de números reais, temos*

$$\sum_{i \in I} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i \in I} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i \in I} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Podemos supor $a_i, b_i \geq 0$ para todo $i \in I$.

Suponhamos primeiramente que I seja finito. O resultado é imediato se todos os a_i ou todos os b_i são zero; podemos supor, portanto, que $\sum_{i \in I} a_i > 0$ e $\sum_{i \in I} b_i > 0$. Para cada $i \in I$, definimos

$$A_i = a_i \left(\sum_{j \in I} a_j^p\right)^{-\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad B_i = b_i \left(\sum_{j \in I} b_j^q\right)^{-\frac{1}{q}}.$$

É imediato verificar que $\sum_{i \in I} A_i^p = \sum_{i \in I} B_i^q = 1$. Além disso, pela Desigualdade de Young, para cada $i \in I$ temos

$$A_i B_i \leq \frac{A_i^p}{p} + \frac{B_i^q}{q}.$$

Concluímos, portanto, que

$$\sum_{i\in I} A_iB_i \leq \frac{1}{p}\sum_{i\in I} A_i^{\,p} + \frac{1}{q}\sum_{i\in I} B_i^{\,q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

isto é,

$$\sum_{i\in I} a_ib_i \leq \left(\sum_{i\in I} a_i^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i\in I} b_i^{\,q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

como queríamos.

Suponhamos agora que I seja infinito. Dado $F \subset I$ finito e não-vazio, temos, pelo caso anterior, que

$$\sum_{i\in F} a_ib_i \leq \left(\sum_{i\in F} a_i^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i\in F} b_i^{\,q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i\in I} a_i^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i\in I} b_i^{\,q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Pela definição de supremo, obtemos

$$\sum_{i\in I} a_ib_i \leq \left(\sum_{i\in I} a_i^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i\in I} b_i^{\,q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

e a demonstração está completa. ■

Teorema 1.20 (Desigualdade de Minkowski [19], Teorema 1.12)**.** *Dados $p \in [1,\infty)$, I um conjunto não-vazio e $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}$ famílias de números reais, temos*

$$\left(\sum_{i\in I} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i\in I} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i\in I} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que I seja finito. Notemos que o resultado é imediato se $p = 1$; podemos supor, portanto, $p > 1$ e tomar $q > 1$ seu expoente conjugado. Seja $S = \sum_{i\in I} |a_i + b_i|^p$. Se $S = 0$, nada temos que fazer. Caso contrário, pela Desigualdade de Hölder temos

$$
\begin{aligned}
S = \sum_{i\in I} |a_i+b_i|^{p-1}|a_i+b_i| &\le \sum_{i\in I} |a_i+b_i|^{p-1}|a_i| + \sum_{i\in I} |a_i+b_i|^{p-1}|b_i| \\
&\le \left(\sum_{i\in I} |a_i+b_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i\in I} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i\in I} |a_i+b_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i\in I} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i\in I} |a_i+b_i|^{p}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i\in I} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i\in I} |a_i+b_i|^{p}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i\in I} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= S^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i\in I} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + S^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i\in I} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}
$$

pois $(p-1)q = p$. Dividindo por $S^{\frac{1}{q}} > 0$, obtemos

$$
\left(\sum_{i\in I} |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = S^{\frac{1}{p}} = S^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{i\in I} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i\in I} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},
$$

como queríamos.

Suponhamos agora que I seja infinito. Dado $F \subset I$ finito e não-vazio, temos, pelo caso anterior, que

$$
\left(\sum_{i\in F} |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i\in F} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i\in F} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i\in I} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i\in I} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
$$

Pela definição de supremo, concluímos

$$
\left(\sum_{i\in I} |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i\in I} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i\in I} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}
$$

e a demonstração está completa. ■

1.4 Espaços $\ell_p(I,X)$, $p \in [1,\infty]$

Nesta seção vamos introduzir os espaços de Banach $\ell_p(I,X)$, $p \in [1,\infty]$, e apresentar algumas de suas propriedades. Como bibliografia básica para esta seção, indicamos [19].

Definição 1.21. Sejam I um conjunto não-vazio, X um espaço de Banach e $p \in [1,\infty)$.

Definimos
$$\ell_p(I,X)=\left\{(x_i)_{i\in I}: x_i\in X, \forall i\in I, \sum_{i\in I}\|x_i\|^p<\infty\right\}.$$
Escreveremos $\ell_p(I,\mathbb{R})=\ell_p(I)$ e $\ell_p(\mathbb{N})=\ell_p$.

Pela Desigualdade de Minkowski, $\ell_p(I,X)$ é um espaço vetorial (munido da soma e multiplicação por escalar coordenada a coordenada) e a função $\|\cdot\|_p:\ell_p(I,X)\to[0,\infty)$ dada por
$$\|x\|_p=\left(\sum_{i\in I}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \forall x=(x_i)_{i\in I}\in\ell_p(I,X),$$
é uma norma em $\ell_p(I,X)$.

Teorema 1.22. *Dados I um conjunto não-vazio, X um espaço de Banach e $p\in[1,\infty)$, temos que $\ell_p(I,X)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\geq1}=((x_i^n)_{i\in I})_{n\geq1}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p(I,X)$. Dado $j\in I$, como
$$\|x_j^m-x_j^n\|\leq\left(\sum_{i\in I}\|x_i^m-x_i^n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|x_m-x_n\|_p, \forall m,n\geq1,$$
temos que a sequência $(x_j^n)_{n\geq1}$ é de Cauchy em X e, portanto, converge para algum $y_j\in X$.

Mostremos que $y=(y_j)_{j\in I}\in\ell_p(I,X)$. Como $(x_n)_{n\geq1}$ é de Cauchy, existe $M>0$ tal que
$$\|x_n\|_p\leq M, \forall n\geq1.$$
Logo, dado $F\subset I$ finito e não-vazio, temos
$$\left(\sum_{i\in F}\|x_i^n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq M, \forall n\geq1.$$
Fazendo $n\to\infty$, obtemos
$$\left(\sum_{i\in F}\|y_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq M.$$

Como F foi escolhido arbitrariamente, concluímos

$$\left(\sum_{i \in I} \|y_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M,$$

isto é, $y \in \ell_p(I, X)$.

Mostremos agora que $x_n \to y$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i \in I} \|x_i^m - x_i^n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x_m - x_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \forall m, n \geq N.$$

Em particular, dado $G \subset I$ finito e não-vazio, temos

$$\left(\sum_{i \in G} \|x_i^m - x_i^n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}, \forall m, n \geq N.$$

Fazendo $m \to \infty$, obtemos

$$\left(\sum_{i \in G} \|y_i - x_i^n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq N.$$

Como G foi escolhido arbitrariamente, concluímos

$$\|y - x_n\|_p = \left(\sum_{i \in I} \|y_i - x_i^n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \forall n \geq N.$$

Isto prova que $x_n \to y$, o que conclui a demonstração. ■

Definição 1.23. Sejam I um conjunto não-vazio e X um espaço de Banach. Definimos

$$\ell_\infty(I, X) = \left\{(x_i)_{i \in I} : x_i \in X, \forall i \in I, \sup_{i \in I} \|x_i\| < \infty\right\}.$$

Escreveremos $\ell_\infty(I, \mathbb{R}) = \ell_\infty(I)$ e $\ell_\infty(\mathbb{N}) = \ell_\infty$.

É imediato verificar que $\ell_\infty(I, X)$ é um espaço vetorial e que a função $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty(I, X) \to [0, \infty)$ dada por

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in I} \|x_i\|, \forall x = (x_i)_{i \in I} \in \ell_\infty(I, X),$$

é uma norma em $\ell_\infty(I,X)$.

Teorema 1.24. *Dados I um conjunto não-vazio e X um espaço de Banach, temos que $\ell_\infty(I,X)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\geq 1} = ((x_i^n)_{i\in I})_{n\geq 1}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_\infty(I,X)$. Dado $j \in I$, como

$$\|x_j^m - x_j^n\| \leq \sup_{i\in I} \|x_i^m - x_i^n\| = \|x_m - x_n\|_\infty, \forall m,n \geq 1,$$

temos que a sequência $(x_j^n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy em X e, portanto, converge para algum $y_j \in X$.

Mostremos que $y = (y_j)_{j\in I} \in \ell_\infty(I,X)$. Como $(x_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy, existe $M > 0$ tal que

$$\|x_n\|_\infty \leq M, \forall n \geq 1.$$

Logo, dado $i \in I$ temos

$$\|x_i^n\| \leq M, \forall n \geq 1.$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos $\|y_i\| \leq M$. Portanto, $\sup_{i\in I} \|y_i\| \leq M$, isto é, $y \in \ell_\infty(I,X)$.

Mostremos agora que $x_n \to y$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \geq 1$ tal que

$$\sup_{i\in I} \|x_i^m - x_i^n\| = \|x_m - x_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \forall m,n \geq N.$$

Logo, dado $i \in I$ temos

$$\|x_i^m - x_i^n\| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall m,n \geq N.$$

Fazendo $m \to \infty$, obtemos

$$\|y_i - x_i^n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq N.$$

Portanto,

$$\|y - x_n\|_\infty = \sup_{i\in I} \|y_i - x_i^n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \forall n \geq N.$$

Isto prova que $x_n \to y$, o que conclui a demonstração. ■

Os dois resultados a seguir fornecem descrições simples dos espaços duais de $\ell_p(I,X)$ para $p \in [1,\infty)$.

Teorema 1.25. *Sejam I um conjunto não-vazio e X um espaço de Banach. A função $T : \ell_\infty(I,X^*) \to \ell_1(I,X)^*$ dada por*

$$T(\varphi)(x) = \sum_{i\in I} \varphi_i(x_i),$$

para todos $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I,X^*)$ e $x = (x_i)_{i\in I} \in \ell_1(I,X)$, está bem definida e é uma isometria linear sobrejetora.

Demonstração. Dados $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I,X^*)$ e $x = (x_i)_{i\in I} \in \ell_1(I,X)$, temos

$$\sum_{i\in I} |\varphi_i(x_i)| \leq \sum_{i\in I} \|\varphi_i\|\|x_i\| \leq \|\varphi\|_\infty \sum_{i\in I} \|x_i\| = \|\varphi\|_\infty \|x\|_1 < \infty.$$

Isto prova que $(\varphi_i(x_i))_{i\in I}$ é absolutamente somável e, portanto, T está bem definida. A linearidade de T é consequência imediata da Proposição 1.14. Além disso, pelo Corolário 1.13, temos

$$|T(\varphi)(x)| = \left|\sum_{i\in I} \varphi_i(x_i)\right| \leq \sum_{i\in I} |\varphi_i(x_i)| \leq \|\varphi\|_\infty \|x\|_1.$$

Portanto, T é contínua e

$$\|T(\varphi)\| \leq \|\varphi\|_\infty, \forall \varphi \in \ell_\infty(I,X^*).$$

Por outro lado, fixados $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I,X^*)$ e $\varepsilon > 0$, para cada $i \in I$ existe $y_i \in B_X$ tal que

$$\|\varphi_i\| < |\varphi_i(y_i)| + \varepsilon.$$

Definindo $z_i = (\delta_{ij} y_i)_{j\in I} \in B_{\ell_1(I,X)}$, temos

$$\|T(\varphi)\| \geq |T(\varphi)(z_i)| = \left|\sum_{j\in I} \varphi_j(\delta_{ij} y_i)\right| = |\varphi_i(y_i)| > \|\varphi_i\| - \varepsilon, \forall i \in I$$

e, portanto,

$$\|T(\varphi)\| \geq \sup_{i\in I} \|\varphi_i\| - \varepsilon = \|\varphi\|_\infty - \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos

$$\|T(\varphi)\| \geq \|\varphi\|_\infty, \forall \varphi \in \ell_\infty(I, X^*).$$

Isto prova que T é uma isometria.

Por fim, mostremos que T é sobrejetora. Fixemos $\psi \in \ell_1(I, X)^*$ e para cada $i \in I$ consideremos a inclusão usual $S_i : X \to \ell_1(I, X)$ dada por

$$S_i(w) = (\delta_{ij} w)_{j \in I}, \forall w \in X.$$

É imediato verificar que S_i está bem definida e é uma isometria linear sobre sua imagem. Definindo $\psi_i = \psi \circ S_i \in X^*$, temos

$$\|\psi_i\| = \|\psi \circ S_i\| \leq \|\psi\| \|S_i\| = \|\psi\| < \infty, \forall i \in I,$$

isto é, $(\psi_i)_{i \in I} \in \ell_\infty(I, X^*)$.

Mostremos agora que $T((\psi_i)_{i \in I}) = \psi$. Fixados $x = (x_i)_{i \in I} \in \ell_1(I, X)$ e $\delta > 0$, existe $F_\delta \subset I$ finito e não-vazio tal que

$$\sum_{i \in I \setminus F_\delta} \|x_i\| = \sum_{i \in I} \|x_i\| - \sum_{j \in F_\delta} \|x_j\| < \frac{\delta}{\|\psi\| + 1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \psi(x) - \sum_{j \in F} \psi_j(x_j) \right| &= \left| \psi \left(x - \sum_{j \in F} S_j(x_j) \right) \right| \leq \|\psi\| \left\| x - \sum_{j \in F} S_j(x_j) \right\|_1 \\ &= \|\psi\| \sum_{j \in I \setminus F} \|x_j\| < \delta, \end{aligned}$$

para todo $F \subset I$ finito com $F_\delta \subset F$. Isto prova que

$$\psi(x) = \sum_{i \in I} \psi_i(x_i) = T((\psi_i)_{i \in I})(x),$$

como queríamos. ■

Recordamos a seguir a definição da função sinal.

Definição 1.26. Definimos a *função sinal* como sendo a função sign : $\mathbb{R} \to \{-1, 1\}$ dada por

$$\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0, \\ -1 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Teorema 1.27. *Sejam I um conjunto não-vazio, X um espaço de Banach, $p \in (1, \infty)$ e $q \in (1, \infty)$ o expoente conjugado de p. A função $T : \ell_p(I, X^*) \to \ell_q(I, X)^*$ dada por*

$$T(\varphi)(x) = \sum_{i \in I} \varphi_i(x_i),$$

para todos $\varphi = (\varphi_i)_{i \in I} \in \ell_p(I, X^*)$ e $x = (x_i)_{i \in I} \in \ell_q(I, X)$, está bem definida e é uma isometria linear sobrejetora.

Demonstração. Dados $\varphi = (\varphi_i)_{i \in I} \in \ell_p(I, X^*)$ e $x = (x_i)_{i \in I} \in \ell_q(I, X)$, pela Desigualdade de Hölder temos

$$\sum_{i \in I} |\varphi_i(x_i)| \leq \sum_{i \in I} \|\varphi_i\| \|x_i\| \leq \left(\sum_{i \in I} \|(\varphi_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i \in I} \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|\varphi\|_p \|x\|_q < \infty.$$

Isto prova que $(\varphi_i(x_i))_{i \in I}$ é absolutamente somável e, portanto, T está bem definida. A linearidade de T é consequência imediata da Proposição 1.14. Além disso, pelo Corolário 1.13, temos

$$|T(\varphi)(x)| = \left| \sum_{i \in I} \varphi_i(x_i) \right| \leq \sum_{i \in I} |\varphi_i(x_i)| \leq \|\varphi\|_p \|x\|_q.$$

Portanto, T é contínua e

$$\|T(\varphi)\| \leq \|\varphi\|_p, \forall \varphi \in \ell_p(I, X^*).$$

Por outro lado, fixemos $\varphi = (\varphi_i)_{i \in I} \in \ell_p(I, X^*), \varphi \neq 0$, e seja $M = \|\varphi\|_p > 0$. Dados $\varepsilon > 0$ e $F \subset I$ finito e não-vazio, para cada $i \in F$ existe $y_i \in B_X$ tal que

$$\|\varphi_i\| < |\varphi_i(y_i)| + \frac{\varepsilon}{|F| M^{p-1}}.$$

Definindo

$$z = \sum_{i \in F} \operatorname{sign}(\varphi_i(y_i)) \|\varphi_i\|^{p-1} (\delta_{ij} y_i)_{j \in I} \in \ell_q(I, X),$$

temos

$$|T(\varphi)(z)| = \sum_{i \in F} \|\varphi_i\|^{p-1} |\varphi_i(y_i)| > \sum_{i \in F} \|\varphi_i\|^p - \sum_{i \in F} \frac{\varepsilon}{|F|} \frac{\|\varphi_i\|^{p-1}}{M^{p-1}} \geq \sum_{i \in F} \|\varphi_i\|^p - \varepsilon$$

e, portanto,

$$\|z\|_q \|T(\varphi)\| \geq \sum_{i \in F} \|\varphi_i\|^p - \varepsilon.$$

Notemos que

$$\|z\|_q \leq \left(\sum_{i \in F} \|\varphi_i\|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i \in F} \|\varphi_i\|^p \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i \in I} \|\varphi_i\|^p \right)^{\frac{1}{q}} = M^{\frac{p}{q}}.$$

Logo, temos

$$M^{\frac{p}{q}} \|T(\varphi)\| \geq \sum_{i \in F} \|\varphi_i\|^p - \varepsilon.$$

Pela arbitrariedade de F, concluímos

$$M^{\frac{p}{q}} \|T(\varphi)\| \geq \sum_{i \in I} \|\varphi_i\|^p - \varepsilon = M^p - \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ também foi escolhido arbitrariamente, obtemos

$$M^{\frac{p}{q}} \|T(\varphi)\| \geq M^p,$$

isto é,

$$\|T(\varphi)\| \geq M^{p - \frac{p}{q}} = M = \|\varphi\|_p.$$

Isto prova que T é uma isometria.

Por fim, mostremos que T é sobrejetora. Fixemos $\psi \in \ell_q(I, X)^*$, $\psi \neq 0$, e para cada $i \in I$ consideremos a inclusão usual $S_i : X \to \ell_q(I, X)$ dada por

$$S_i(w) = (\delta_{ij} w)_{j \in I}, \forall w \in X.$$

É imediato verificar que S_i está bem definida e é uma isometria linear sobre sua imagem. Definimos $\psi_i = \psi \circ S_i \in X^*$, para cada $i \in I$. Vamos mostrar que $(\psi_i)_{i \in I} \in \ell_p(I, X^*)$.

Dados $\delta > 0$ e $G \subset I$ finito e não-vazio, para cada $i \in G$ existe $w_i \in B_X$ tal que

$$\|\psi_i\| < |\psi_i(w_i)| + \frac{\delta}{|G| \|\psi\|^{p-1}}.$$

Definindo

$$v_i = \operatorname{sign}(\psi_i(w_i)) \|\psi_i\|^{p-1} w_i, \forall i \in G,$$

temos

$$\psi_i(v_i) = |\psi_i(w_i)| \|\psi_i\|^{p-1} > \|\psi_i\|^p - \frac{\delta}{|G|} \frac{\|\psi_i\|^{p-1}}{\|\psi\|^{p-1}} \geq \|\psi_i\|^p - \frac{\delta}{|G|}, \forall i \in G.$$

Logo,

$$\sum_{i \in G} \|\psi_i\|^p - \delta < \sum_{i \in G} \psi_i(v_i).$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in G} \psi_i(v_i) = \sum_{i \in G} (\psi \circ S_i)(v_i) = \psi \left(\sum_{i \in G} S_i(v_i) \right) &\leq \|\psi\| \left\| \sum_{i \in G} S_i(v_i) \right\|_q \\
= \|\psi\| \left(\sum_{i \in G} \|v_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \|\psi\| \left(\sum_{i \in G} \|\psi_i\|^{pq-q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
= \|\psi\| \left(\sum_{i \in G} \|\psi_i\|^p \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i \in G} \|\psi_i\|^p - \delta < \|\psi\| \left(\sum_{i \in G} \|\psi_i\|^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Pela arbitrariedade de $\delta > 0$, obtemos

$$\sum_{i \in G} \|\psi_i\|^p \leq \|\psi\| \left(\sum_{i \in G} \|\psi_i\|^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Concluímos, portanto,

$$\left(\sum_{i \in G} \|\psi_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|\psi\| < \infty.$$

Isto prova que $(\psi_i)_{i\in I} \in \ell_p(I, X^*)$.

Mostremos finalmente que $T((\psi_i)_{i\in I}) = \psi$. Fixados $x = (x_i)_{i\in I} \in \ell_q(I, X)$ e $\rho > 0$, existe $F_\rho \subset I$ finito e não-vazio tal que

$$\sum_{i\in I\setminus F_\rho} \|x_i\|^q = \sum_{i\in I} \|x_i\|^q - \sum_{j\in F_\rho} \|x_j\|^q < \frac{\rho^q}{\|\psi\|^q}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left|\psi(x) - \sum_{j\in F} \psi_j(x_j)\right| &= \left|\psi\left(x - \sum_{j\in F} S_j(x_j)\right)\right| \leq \|\psi\| \left\|x - \sum_{j\in F} S_j(x_j)\right\|_q \\ &= \|\psi\| \left(\sum_{j\in I\setminus F} \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \rho,\end{aligned}$$

para todo $F \subset I$ finito com $F_\rho \subset F$. Isto prova que

$$\psi(x) = \sum_{i\in I} \psi_i(x_i) = T((\psi_i)_{i\in I})(x),$$

como queríamos. ■

Encerramos esta seção com o seguinte resultado simples, que garante que $\ell_p(I, X)$ contém uma cópia complementada de X para todo $p \in [1, \infty]$.

Proposição 1.28. *Dados I um conjunto não-vazio, X um espaço de Banach e $p \in [1, \infty]$, temos que $X \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_p(I, X)$.*

Demonstração. Fixado $i \in I$, consideremos a inclusão natural $S_i : X \to \ell_p(I, X)$ dada por

$$S_i(x) = (\delta_{ij} x)_{j\in I}, \forall x \in X,$$

e a projeção natural $P_i : \ell_p(I, X) \to \ell_p(I, X)$ dada por

$$P_i(y) = S_i(y_i), \forall y = (y_j)_{j\in I} \in \ell_p(I, X).$$

É imediato verificar que S_i é uma isometria sobre sua imagem e que P_i é uma projeção sobre

$\mathrm{Im}(S_i)$. Isto prova que $X \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_p(I, X)$. ■

1.5 Espaços $C_0(K, X)$ e $c_0(\tau)$

Esta seção é dedicada ao estudo dos espaços de Banach $C_0(K, X)$, onde K é um espaço de Hausdorff localmente compacto e X é um espaço de Banach. Como bibliografia básica para esta seção, indicamos [19, 43].

Definição 1.29. Sejam K um espaço de Hausdorff localmente compacto, X um espaço de Banach e $f : K \to X$ uma função. Dizemos que f *se anula no infinito* se para todo $\varepsilon > 0$ existe K_ε subconjunto compacto de K tal que

$$\|f(t)\| < \varepsilon, \forall t \in K \setminus K_\varepsilon.$$

Equivalentemente, f se anula no infinito se o conjunto $\{t \in K : \|f(t)\| \geq \varepsilon\}$ é compacto.

Definição 1.30. Sejam K um espaço de Hausdorff localmente compacto e X um espaço de Banach. Denotamos por $C_0(K, X)$ o espaço de todas as funções contínuas $f : K \to X$ que se anulam no infinito, munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in K} \|f(t)\|, \forall f \in C_0(K, X).$$

Se K é compacto, escreveremos simplesmente $C(K, X)$. Se $X = \mathbb{R}$, denotaremos esses espaços por $C_0(K)$ e $C(K)$, respectivamente.

Destacamos a seguir um importante caso particular dos espaços $C_0(K, X)$.

Definição 1.31. Sejam I um conjunto não-vazio munido da topologia discreta e X um espaço de Banach. Denotaremos o espaço $C_0(I, X)$ por $c_0(I, X)$. Se $X = \mathbb{R}$, escreveremos simplesmente $c_0(I)$. Se $I = \mathbb{N}$, escreveremos c_0.

Teorema 1.32. *Dados K um espaço de Hausdorff localmente compacto e X um espaço de Banach, temos que $C_0(K, X)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de Cauchy em $C_0(K,X)$. Dado $t \in K$, como

$$\|f_m(t) - f_n(t)\| \leq \|f_m - f_n\|_\infty, \forall m, n \geq 1,$$

temos que a sequência $(f_n(t))_{n\geq 1}$ é de Cauchy em X e, portanto, converge para algum $f(t) \in X$. Isto define uma função $f : X \to K$. Vamos mostrar que f é contínua, se anula no infinito e que $f_n \to f$.

Fixado $\varepsilon > 0$, tomemos $N \geq 1$ tal que

$$\|f_m - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}, \forall m, n \geq N.$$

Então temos

$$\|f_m(t) - f_n(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall t \in K, \forall m, n \geq N.$$

Fazendo $m \to \infty$, obtemos

$$\|f(t) - f_n(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall t \in K, \forall n \geq N.$$

Dado $t_0 \in K$, pela continuidade de f_N em t_0 existe $V \subset K$ aberto tal que $t_0 \in V$ e

$$\|f_N(t) - f_N(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall t \in V.$$

Logo,

$$\|f(t) - f(t_0)\| \leq \|f(t) - f_N(t)\| + \|f_N(t) - f_N(t_0)\| + \|f_N(t_0) - f(t_0)\| < \varepsilon, \forall t \in V.$$

Isto prova que f é contínua em t_0.

Mostremos agora que f se anula no infinito. Como f_N se anula no infinito, existe $K_N \subset K$ compacto tal que

$$\|f_N(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall t \in K \setminus K_N$$

e, portanto,

$$\|f(t)\| \leq \|f(t) - f_N(t)\| + \|f_N(t)\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon, \forall t \in K \setminus K_N.$$

Logo, f se anula no infinito.

Finalmente, como

$$\|f - f_n\|_\infty = \sup_{t \in K} \|f(t) - f_n(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon, \forall n \geq N,$$

temos que $f_n \to f$, como queríamos. ∎

Proposição 1.33. *Sejam K um espaço de Hausdorff finito e X um espaço de Banach. Então $C(K,X)$ é linearmente isométrico a X^n (munido da norma do máximo), onde $n = |K|$.*

Demonstração. É imediato verificar que K está munido da topologia discreta; portanto, toda função $f : K \to X$ é contínua. Vamos escrever $K = \{t_1, \ldots, t_n\}$, onde $t_i \neq t_j$ se $i \neq j$. Consideremos o operador linear $T : C(K,X) \to X^n$ dado por

$$T(f) = (f(t_1), \ldots, f(t_n)), \forall f \in C(K,X).$$

T é sobrejetor e, além disso,

$$\|T(f)\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|f(t_i)\| = \|f\|_\infty, \forall f \in C(K,X).$$

Portanto, T é uma isometria linear de $C(K,X)$ sobre X^n. ∎

Para provar a Proposição 1.35, vamos precisar do resultado a seguir.

Teorema 1.34 ([18], Teorema 3.3.1)**.** *Dados K um espaço de Hausdorff localmente compacto infinito, $F \subset K$ um subconjunto fechado e $t \in K \setminus F$, existe $f : K \to [0,1]$ contínua tal que $f(t) = 0$ e $f(s) = 1$, para todo $s \in F$.*

Proposição 1.35. *Dados K um espaço de Hausdorff localmente compacto e X um espaço de Banach, temos $X \overset{c}{\hookrightarrow} C_0(K,X)$.*

Demonstração. Fixemos $t_0 \in K$ e sejam $L \subset K$ uma vizinhança compacta de t_0 e $U \subset L$ um aberto que contém t_0. Pela Proposição 1.34, existe $f : K \to [0,1]$ contínua tal que $f(t_0) = 1$ e $f(s) = 0$, para todo $s \in K \setminus U$. Por construção, f se anula no infinito.

Consideremos o operador linear $T : X \to C_0(K, X)$ dado por

$$T(x) = f(\cdot)x, \forall x \in X.$$

Notemos que

$$\|T(x)\|_\infty = \sup_{t\in K} \|f(t)x\| = \|x\| \sup_{t\in K} |f(t)| = \|x\|, \forall x \in X.$$

Logo, T é uma isometria linear sobre sua imagem.

Definimos agora o operador linear $P : C_0(K, X) \to C_0(K, X)$ por

$$P(g) = T(g(t_0)) = f(\cdot)g(t_0), \forall g \in C_0(K, X).$$

Por definição, temos $\mathrm{Im}(P) \subset \mathrm{Im}(T)$. Notemos também que

$$\|P(g)\|_\infty = \|T(g(t_0))\|_\infty = \|g(t_0)\| \leq \|g\|_\infty, \forall g \in C_0(K, X).$$

Isto prova que P é contínuo. Finalmente, temos

$$P(T(x)) = T(T(x)(t_0)) = T(f(t_0)x) = T(x), \forall x \in X.$$

Portanto, P é projeção sobre $\mathrm{Im}(T)$, como queríamos. ■

Recordemos as definições de densidade e de peso de um espaço topológico.

Definição 1.36. Seja S um espaço topológico. A *densidade* de S, denotada por $\mathrm{dens}(S)$, é o menor cardinal λ tal que existe $D \subset S$ subconjunto denso tal que $|D| = \lambda$. O *peso* de S, denotado por $\mathrm{w}(S)$, é o menor cardinal κ tal que existe $\mathcal{B}$ uma base de abertos de S satisfazendo $|\mathcal{B}| = \kappa$.

Convém observarmos que não exigimos que a densidade ou o peso de um espaço topológico sejam cardinais infinitos.

Dois resultados envolvendo o peso de um espaço de Hausdorff compacto que usaremos são os seguintes.

Lema 1.37 ([43], Proposição 7.6.5). *Se K é um espaço de Hausdorff compacto infinito, então* $\mathrm{w}(K) = \mathrm{dens}(C(K))$.

Proposição 1.38 ([30], Teorema 7.2). *Se K é um espaço de Hausdorff compacto infinito, então* $\mathrm{w}(K) \leq |K|$.

Vejamos agora alguns resultados sobre o peso de alguns espaços de Hausdorff compactos específicos.

Dado K um espaço de Hausdorff localmente compacto, não-compacto, denotaremos por γK seu *compactificado de Alexandroff* (veja [18, Teorema 3.5.11, pg. 169]) e por βK seu *compactificado de Stone-Čech* (veja [18, pg. 172]).

Proposição 1.39 ([18], Teorema 3.5.11). *Se K é um espaço de Hausdorff localmente compacto, não-compacto, então* $\mathrm{w}(K) = \mathrm{w}(\gamma K)$.

Proposição 1.40 ([18], Teorema 3.6.11). *Se I é um conjunto infinito munido da topologia discreta, então* $\mathrm{w}(\beta I) = 2^{|I|}$.

Dado I um conjunto não-vazio, denotaremos por $\mathbf{2}^I$ o conjunto $\{0, 1\}^I$ munido da topologia produto, onde $\{0, 1\}$ está munido da topologia discreta.

Proposição 1.41 ([43], Corolário 8.2.7). *Se I é um conjunto infinito, então* $\mathrm{w}(\mathbf{2}^I) = |I|$.

Outro resultado que vamos usar envolvendo o compactificado de Alexandroff é o seguinte.

Proposição 1.42. *Dados K um espaço de Hausdorff localmente compacto, não-compacto, e X um espaço de Banach, temos $C_0(K, X) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\gamma K, X)$.*

Demonstração. Vamos escrever $\gamma K = K \dot{\cup} \{\infty\}$. Dada $f \in C_0(K, X)$, denotemos por $T(f) : \gamma K \to X$ a extensão de f a γK tal que $T(f)(\infty) = 0$. É imediato verificar que Tf é contínua em γK. Isto define uma isometria linear T de $C_0(K, X)$ sobre o subespaço $\mathcal{F} = \{g \in C(\gamma K, X) : g(\infty) = 0\}$.

Consideremos o operador linear $P : C(\gamma K, X) \to C(\gamma K, X)$ dado por

$$P(g) = g(\cdot) - g(\infty), \forall g \in C(\gamma K, X).$$

Então temos $\mathrm{Im}(P) \subset \mathcal{F}$ e, além disso, $P(g) = g$, para toda $g \in \mathcal{F}$. Isto prova que P é projeção sobre $\mathcal{F} = \mathrm{Im}(T)$, como queríamos. ■

Apresentamos a seguir as principais propriedades dos espaços $c_0(I, X)$ que vamos utilizar no decorrer do trabalho.

Proposição 1.43. *Dados I um conjunto não-vazio e X um espaço de Banach, temos que $c_0(I, X)$ é o conjunto de todas as famílias $(x_i)_{i\in I}$ de elementos de X tais que para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{I \in I : \|x_i\| \geq \varepsilon\}$ é finito.*

Demonstração. Basta notarmos que os únicos subconjuntos compactos de I são os subconjuntos finitos, pois a topologia de I é discreta. ■

Corolário 1.44. *Dados I um conjunto não-vazio e $x = (x_i)_{i\in I} \in c_0(I)$, temos que* $\mathrm{supp}(x)$ *é enumerável.*

Demonstração. Pela Proposição 1.43, para cada $n \geq 1$ o conjunto $I_n = \{i \in I : |x_i| \geq \frac{1}{n}\}$ é finito. Logo, $\mathrm{supp}(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ é enumerável. ■

Definição 1.45. Dado I um conjunto não-vazio, a *base canônica* do espaço $c_0(I)$ é a família $(e_i)_{i\in I}$, onde $e_i(j) = \delta_{ij}$ para todos $i, j \in I$.

Dado $i \in I$, é imediato verificar que a função $\varphi_i : c_0(I) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_i(x) = x_i, \forall x = (x_j)_{j\in I} \in c_0(I),$$

é um funcional linear contínuo de $c_0(I)$ satisfazendo $\|\varphi_i\| = 1$. Tais funcionais serão chamados de *funcionais coeficientes associados à base canônica de* $c_0(I)$.

Definição 1.46. Sejam I um conjunto não-vazio, X um espaço de Banach e $(x_i)_{i\in I}$ uma família de elementos de X. Dizemos que $(x_i)_{i\in I}$ é *equivalente* à base canônica de $c_0(I)$ se existe $T : c_0(I) \to X$ isomorfismo sobre sua imagem tal que

$$T(e_i) = x_i, \forall i \in I.$$

Proposição 1.47. *Dados I um conjunto não-vazio e X um espaço de Banach, temos que $c_0(I) \hookrightarrow X$ se, e somente se, existe $(x_i)_{i\in I}$ família equivalente à base canônica de $c_0(I)$ em X. Neste caso, o espaço $\overline{span}\{x_i : i \in I\}$ é isomorfo a $c_0(I)$.*

Demonstração. A equivalência dada no enunciado é consequência imediata das definições.

Sejam $T : c_0(I) \to X$ um isomorfismo sobre sua imagem e $x_i = T(e_i)$, para todo $i \in I$. Notemos que se I é finito, então $\overline{\operatorname{span}}\{x_i : i \in I\} = \operatorname{span}\{x_i : i \in I\} = \operatorname{Im}(T)$. Suponhamos, portanto, que I seja infinito.

Como $\operatorname{Im}(T)$ é fechada e $x_i \in \operatorname{Im}(T)$, para todo $i \in I$, temos $\overline{\operatorname{span}}\{x_i : i \in I\} \subset \operatorname{Im}(T)$. Por outro lado, dado $y = (y_i)_{i\in I} \in c_0(I)$, existe $J \subset I$ infinito e enumerável tal que $\operatorname{supp}(y) \subset J$. Vamos escrever $J = \{j_1, \ldots, j_n, \ldots\}$, onde $j_m \neq j_n$ se $m \neq n$. Para cada $m \geq 1$, definimos

$$z_m = \sum_{n=1}^{m} y_{j_n} e_{j_n} \in c_0(I).$$

Afirmamos que $z_m \to y$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{i \in I : |y_i| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \subset J$ é finito e, portanto, existe $N \geq 1$ tal que $\{i \in I : |y_i| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \subset \{j_1, \ldots, j_N\}$. Logo,

$$\|y - z_m\|_\infty = \sup_{i\in I} |y_i - z_m(i)| = \sup_{i\in J} |y_i - z_m(i)| = \sup_{n\geq m+1} |y_{j_n}| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall m \geq N.$$

Isto prova que $z_m \to y$. Assim, temos

$$T(y) = \lim_{m\to\infty} T(z_m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} y_{j_n} T(e_{j_n}) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} y_{j_n} x_{j_n} \in \overline{\operatorname{span}}\{x_i : i \in I\},$$

como queríamos. ■

Proposição 1.48. *Sejam $I_1 \subset I_2$ conjuntos não-vazios e seja X o subespaço de $c_0(I_2)$ das funções $f \in c_0(I_2)$ tais que $f(j) = 0$, para todo $j \in I_2 \setminus I_1$. Então $c_0(I_1)$ e X são linearmente isométricos e, além disso, X é complementado em $c_0(I_2)$. Em particular, $c_0(I_1) \overset{c}{\hookrightarrow} c_0(I_2)$.*

Demonstração. Consideremos o operador linear $T : c_0(I_1) \to c_0(I_2)$ dado por

$$T(x)(j) = \begin{cases} x_j, & \text{se } j \in I_1, \\ 0, & \text{se } j \in I_2 \setminus I_1, \end{cases}$$

para todo $x = (x_i)_{i \in I_1} \in c_0(I_1)$. É imediato verificar que $\mathrm{Im}(T) = X$ e, além disso, temos

$$\|T(x)\|_\infty = \sup_{j \in I_2} |T(x)(j)| = \sup_{i \in I_1} |x_i| = \|x\|_\infty, \forall x = (x_i)_{i \in I_1} \in c_0(I_1).$$

Portanto, T é uma isometria linear de $c_0(I_1)$ sobre X.

Analogamente, a função $P : c_0(I_2) \to c_0(I_2)$ dada por

$$T(y)(j) = \begin{cases} y_j, & \text{se } j \in I_1, \\ 0, & \text{se } j \in I_2 \setminus I_1, \end{cases}$$

para todo $y = (y_j)_{j \in I_2} \in c_0(I_2)$, é uma projeção sobre X. ■

Pela Proposição 1.48, dados $\varnothing \neq I_1 \subset I_2$, vamos identificar $c_0(I_1)$ com o subespaço fechado $\{(x_i)_{i \in I_2} : x_i = 0, \forall i \in I_2 \setminus I_1\}$ e considerar $c_0(I_1)$ como subespaço de $c_0(I_2)$.

Proposição 1.49. *Dado I um conjunto infinito, temos* $\mathrm{dens}(c_0(I)) = |I|$.

Demonstração. Fixemos $x = (x_i)_{i \in I} \in c_0(I)$ e $\varepsilon > 0$. Pelo Corolário 1.44, existe $J \subset I$ infinito e enumerável tal que $\mathrm{supp}(x) \subset J$. Vamos escrever $J = \{j_1, \ldots, j_n, \ldots\}$, onde $j_m \neq j_n$ se $m \neq n$. Como o conjunto $\{i \in I : |x_i| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \subset J$ é finito, existe $N \geq 1$ tal que $\{i \in I : |x_i| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \subset \{j_1, \ldots, j_N\}$. Para cada $1 \leq n \leq N$, seja $q_n \in \mathbb{Q}$ satisfazendo $|q_n - x_{j_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Definindo

$$y = \sum_{n=1}^{N} q_n e_n,$$

temos

$$\|x - y\|_\infty = \sup_{i \in I} |x_i - y(i)| = \max\left(\max_{1 \leq n \leq N} |x_{j_n} - q_n| \, ; \, \sup_{n \geq N+1} |x_{j_n}| \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Isto prova que o conjunto das combinações lineares finitas de elementos da base canônica de $c_0(I)$ com coeficientes racionais é denso em $c_0(I)$. É imediato verificar que este conjunto tem cardinalidade $|I|$; logo, $\operatorname{dens}(c_0(I)) \leq |I|$.

Por outro lado, seja D um subconjunto denso qualquer de $c_0(I)$. Como $\left(B\left(e_i; \frac{1}{2}\right)\right)_{i\in I}$ é uma família de abertos dois a dois disjuntos e não-vazios de $c_0(I)$, temos $D \cap B\left(e_i; \frac{1}{2}\right) \neq \varnothing$, para todo $i \in I$. Logo, $|D| \geq |I|$. Isto completa a demonstração. ■

Proposição 1.50. *Sejam I_1, I_2 conjuntos não-vazios. São equivalentes:*

(i) I_1 e I_2 têm a mesma cardinalidade;

(ii) $c_0(I_1)$ e $c_0(I_2)$ são linearmente isométricos;

(iii) $c_0(I_1)$ e $c_0(I_2)$ são isomorfos.

Demonstração. $(i) \implies (ii)$ Suponhamos que $|I_1| = |I_2|$. Seja $\sigma\colon I_1 \to I_2$ uma bijeção e consideremos o operador linear $T : c_0(I_1) \to c_0(I_2)$ dado por

$$T(x)(j) = x_i, \forall j = \sigma(i) \in I_2, \forall x = (x_i)_{i\in I_1} \in c_0(I_1).$$

É imediato verificar que T é sobrejetor e, além disso, temos

$$\|T(x)\|_\infty = \sup_{j\in I_2} |T(x)(j)| = \sup_{i\in I_1} |x_i| = \|x\|_\infty, \forall x = (x_i)_{i\in I_1} \in c_0(I_1).$$

Logo, T é uma isometria linear de $c_0(I_1)$ sobre $c_0(I_2)$.

$(ii) \implies (iii)$ É imediata.

$(iii) \implies (i)$ Suponhamos que $c_0(I_1)$ e $c_0(I_2)$ sejam isomorfos. Se I_1 é finito, então $c_0(I_1)$ tem dimensão $|I_1|$, pela Proposição 1.33 e, portanto, $c_0(I_2)$ também tem dimensão $|I_1|$. Como a base canônica de $c_0(I_2)$ é um conjunto linearmente independente, concluímos $|I_2| \leq |I_1|$. Em particular, I_2 também é finito. Aplicando novamente a Proposição 1.33, concluímos que $c_0(I_2)$ tem dimensão $|I_2|$. Logo, $|I_1| = |I_2|$. Analogamente, se I_2 é finito, então $|I_1| = |I_2|$.

Suponhamos, portanto, que I_1 e I_2 sejam ambos infinitos. Como $c_0(I_1)$ e $c_0(I_2)$ são isomorfos, temos $\operatorname{dens}(c_0(I_1)) = \operatorname{dens}(c_0(I_2))$ e basta aplicarmos a Proposição 1.49. ■

Pelas Proposições 1.33 e 1.50, é suficiente estudarmos os espaços $c_0(\tau)$, onde τ é um cardinal infinito.

O resultado a seguir fornece uma descrição simples do dual de $c_0(I,X)$.

Teorema 1.51. *Sejam I um conjunto não-vazio e X um espaço de Banach. A função $T:\ell_1(I,X^*)\to c_0(I,X)^*$ dada por*

$$T(\varphi)(x)=\sum_{i\in I}\varphi_i(x_i),$$

para todos $\varphi=(\varphi_i)_{i\in I}\in\ell_1(I,X^*)$ e $x=(x_i)_{i\in I}\in c_0(I,X)$, está bem definida e é uma isometria linear sobrejetora.

Demonstração. Dados $\varphi=(\varphi_i)_{i\in I}\in\ell_1(I,X^*)$ e $x=(x_i)_{i\in I}\in c_0(I,X)$, temos

$$\sum_{i\in I}|\varphi_i(x_i)|\leq\sum_{i\in I}\|\varphi_i\|\|x_i\|\leq\|x\|_\infty\sum_{i\in I}\|\varphi_i\|=\|\varphi\|_1\|x\|_\infty<\infty.$$

Isto prova que $(\varphi_i(x_i))_{i\in I}$ é absolutamente somável e, portanto, T está bem definida. A linearidade de T é consequência imediata da Proposição 1.14. Além disso, pelo Corolário 1.13, temos

$$|T(\varphi)(x)|=\left|\sum_{i\in I}\varphi_i(x_i)\right|\leq\sum_{i\in I}|\varphi_i(x_i)|\leq\|\varphi\|_1\|x\|_\infty.$$

Portanto, T é contínua e

$$\|T(\varphi)\|\leq\|\varphi\|_1,\forall\varphi\in\ell_1(I,X^*).$$

Por outro lado, fixemos $\varphi=(\varphi_i)_{i\in I}\in\ell_1(I,X^*)$. Dados $\varepsilon>0$ e $F\subset I$ finito e não-vazio, para cada $i\in F$ existe $y_i\in B_X$ tal que

$$\|\varphi_i\|<|\varphi_i(y_i)|+\frac{\varepsilon}{|F|}.$$

Definindo

$$z=\sum_{i\in F}\operatorname{sign}(\varphi_i(y_i))(\delta_{ij}y_i)_{j\in I}\in B_{c_0(I,X)},$$

temos

$$\|T(\varphi)\|\geq|T(\varphi)(z)|=\left|\sum_{i\in F}\operatorname{sign}(\varphi_i(y_i))\varphi_i(y_i)\right|=\sum_{i\in F}|\varphi_i(y_i)|>\sum_{i\in F}\|\varphi_i\|-\varepsilon.$$

Pela arbitrariedade de F, concluímos

$$\|T(\varphi)\| \geq \sum_{i\in I} \|\varphi_i\| - \varepsilon = \|\varphi\|_1 - \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ também foi escolhido arbitrariamente, obtemos

$$\|T(\varphi)\| \geq \|\varphi\|_1.$$

Isto prova que T é uma isometria.

Por fim, mostremos que T é sobrejetora. Fixemos $\psi \in (c_0(I,X))^*$ e para cada $i \in I$ consideremos a inclusão usual $S_i : X \to c_0(I,X)$ dada por

$$S_i(w) = (\delta_{ij} w)_{j\in I}, \forall w \in X.$$

É imediato verificar que S_i está bem definida e é uma isometria linear sobre sua imagem. Definimos $\psi_i = \psi \circ S_i \in X^*$, para cada $i \in I$. Vamos mostrar que $(\psi_i)_{i\in I} \in \ell_1(I, X^*)$.

Dado $G \subset I$ finito e não-vazio, para cada $i \in G$ existe $w_i \in B_X$ tal que

$$\|\psi_i\| < |\psi_i(w_i)| + \frac{1}{|G|}.$$

Definindo

$$v_i = \operatorname{sign}(\psi_i(w_i)) w_i, \forall i \in G,$$

temos

$$\psi_i(v_i) = |\psi_i(w_i)| > \|\psi_i\| - \frac{1}{|G|}, \forall i \in G.$$

Logo,

$$\sum_{i\in G} \|\psi_i\| - 1 < \sum_{i\in G} \psi_i(v_i).$$

Como

$$\sum_{i\in G} \psi_i(v_i) = \sum_{i\in G} (\psi \circ S_i)(v_i) = \psi\left(\sum_{i\in G} S_i(v_i)\right) \leq \|\psi\| \left\|\sum_{i\in G} S_i(v_i)\right\|_\infty = \|\psi\| \max_{i\in G} \|v_i\| \leq \|\psi\|,$$

obtemos

$$\sum_{i \in G} \|\psi_i\| < \|\psi\| + 1.$$

Como G foi escolhido arbitrariamente, concluímos

$$\sum_{i \in I} \|\psi_i\| \leq \|\psi\| + 1 < \infty.$$

Isto prova que $(\psi_i)_{i \in I} \in \ell_1(I, X^*)$.

Mostremos finalmente que $T((\psi_i)_{i \in I}) = \psi$. Fixados $x = (x_i)_{i \in I} \in c_0(I, X)$ e $\delta > 0$, o conjunto

$$F_\delta = \left\{ i \in I : \|x_i\| \geq \frac{\delta}{\|\psi\| + 1} \right\}$$

é finito. Notemos que

$$\left| \psi(x) - \sum_{j \in F} \psi_j(x_j) \right| = \left| \psi \left(x - \sum_{j \in F} S_j(x_j) \right) \right| \leq \|\psi\| \left\| x - \sum_{j \in F} S_j(x_j) \right\|_\infty = \|\psi\| \sup_{i \in I \setminus F} \|x_i\| < \delta,$$

para todo $F \subset I$ finito com $F_\delta \subset F$. Isto prova que

$$\psi(x) = \sum_{i \in I} \psi_i(x_i) = T((\psi_i)_{i \in I})(x),$$

como queríamos. ■

Encerramos esta seção com o seguinte resultado, que será útil no Capítulo 3.

Teorema 1.52 ([16], Corolário 11, pg. 156)**.** *Dado τ um cardinal infinito, temos $c_0 \overset{c}{\not\hookrightarrow} \ell_\infty(\tau)$. Em particular, $c_0(\tau_1) \overset{c}{\not\hookrightarrow} \ell_\infty(\tau_2)$, para quaisquer cardinais infinitos τ_1, τ_2.*

1.6 Medidas e integração vetoriais. O dual de $C(K, X)$

Nesta seção vamos recordar brevemente os conceitos de medida e de integração vetoriais, que serão fundamentais no Capítulo 3. Como bibliografia básica para esta seção, indicamos [16].

Definição 1.53. Sejam I um conjunto não-vazio, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de I e X um espaço de Banach. Uma função $m : \mathcal{A} \to X$ é dita uma *medida vetorial finitamente aditiva* se dados $A, B \in \mathcal{A}$ disjuntos, temos $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Uma função $m : \mathcal{A} \to X$ é dita uma *medida vetorial σ-aditiva* se para toda sequência $(A_n)_{n\geq 1}$ de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{A}$, temos

$$m\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Se $m : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ é uma medida (finitamente aditiva ou σ-aditiva), dizemos que m é *positiva*.

Definição 1.54. Sejam I um conjunto não-vazio, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de I, X um espaço de Banach e $m : \mathcal{A} \to X$ uma medida vetorial finitamente aditiva ou σ-aditiva. A *variação* de m é a função $|m| : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ dada por

$$|m|(A) = \sup \sum_{k=1}^{n} \|m(A_k)\|, \forall A \in \mathcal{A},$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{A}$ de A. Se $|m|(I) < \infty$, dizemos que m tem *variação limitada.*

Proposição 1.55. *Sejam I um conjunto não-vazio, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de I, X um espaço de Banach e $m : \mathcal{A} \to X$ uma medida vetorial finitamente aditiva (respectivamente, σ-aditiva). Se m tem variação limitada, então sua variação $|m| : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ é uma medida finitamente aditiva (respectivamente, σ-aditiva) positiva.*

Demonstração. Faremos o caso em que m é σ-aditiva; o outro caso é análogo. Notemos primeiramente que, por definição, temos $0 \leq |m|(A) \leq |m|(B)$, para todos $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$.

Mostremos que $|m|$ é σ-aditiva. Seja $(A_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de elementos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \geq 1$ seja $\{B_1^n, \ldots, B_{k_n}^n\} \subset \mathcal{A}$ uma partição de A_n satisfazendo

$$|m|(A_n) < \sum_{k=1}^{k_n} \|m(B_k^n)\| + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Então para todo $N \geq 1$ temos

$$|m|\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \geq |m|\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{k_n} \|m(B_k^n)\| > \sum_{n=1}^{N} |m|(A_n) - \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos

$$|m|\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} |m|(A_n).$$

Por outro lado, dado $\delta > 0$ existe $\{C_1, \ldots, C_k\} \subset \mathcal{A}$ partição de $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ satisfazendo

$$|m|\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) < \sum_{j=1}^{k} \|m(C_j)\| + \delta.$$

Para cada $1 \leq j \leq k$, como $\{A_n \cap C_j : n \geq 1\}$ é uma partição de C_j, pela σ-aditividade de m temos

$$\|m(C_j)\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n \cap C_j)\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|m(A_n \cap C_j)\| \leq |m|(C_j) \leq |m|(I) < \infty.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |m|\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) - \delta &< \sum_{j=1}^{k} \|m(C_j)\| \leq \sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} \|m(A_n \cap C_j)\| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k} \|m(A_n \cap C_j)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |m|(A_n), \end{aligned}$$

pois $\{A_n \cap C_1, \ldots, A_n \cap C_k\}$ é uma partição de A_n. Como $\delta > 0$ foi escolhido arbitrariamente, obtemos

$$|m|\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |m|(A_n).$$

Isto prova que $|m|$ é σ-aditiva. ■

Salvo menção em contrário, no decorrer do trabalho, por *medida vetorial* entenderemos uma medida vetorial σ-aditiva.

Proposição 1.56. *Sejam I um conjunto não-vazio, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de I,*

X um espaço de Banach e $m : \mathcal{A} \to X^*$ uma medida vetorial. Se m tem variação limitada, então

$$|m|(A) = \sup \left| \sum_{k=1}^{n} m(A_k)(x_k) \right|, \forall A \in \mathcal{A},$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{A}$ de A e todos $x_1, \dots, x_n \in B_X$.

Demonstração. Fixemos $A \in \mathcal{A}$. Dados $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ e $x_1, \dots, x_n \in B_X$ como no enunciado, temos

$$\left| \sum_{k=1}^{n} m(A_k)(x_k) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |m(A_k)(x_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} \|m(A_k)\| \leq |m|(A),$$

pela definição de $|m|$.

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\{B_1, \dots, B_l\} \subset \mathcal{A}$ uma partição de A satisfazendo

$$|m|(A) < \sum_{j=1}^{l} \|m(B_j)\| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para cada $1 \leq j \leq l$, seja $y_j \in B_X$ tal que

$$\|m(B_j)\| < |m(B_j)(y_j)| + \frac{\varepsilon}{2l}.$$

Definindo

$$\alpha_j = \operatorname{sign}(m(B_j)(y_j)), 1 \leq j \leq l,$$

concluímos

$$|m|(A) - \varepsilon < \sum_{j=1}^{l} |m(B_j)(y_j)| = \sum_{j=1}^{l} m(B_j)(\alpha_j y_j) = \left| \sum_{j=1}^{l} m(B_j)(\alpha_j y_j) \right| \leq S,$$

onde S é o supremo definido no enunciado. Pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, obtemos a desigualdade contrária. ■

No que segue, dados I um conjunto não-vazio e A um subconjunto de I, denotaremos por χ_A a função característica de A.

Definição 1.57. Sejam I um conjunto não-vazio, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de I e X um espaço de Banach. Uma função $f : I \to X$ é dita *simples* se existem $x_1, \dots, x_n \in X$ e $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos tais que $\bigcup_{k=1}^{n} A_n = I$ e

$$f = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(\cdot) x_k.$$

Denotaremos por $\mathcal{S}(I, X)$ o espaço vetorial de todas as funções simples de I em X, munido da norma do supremo. Se $X = \mathbb{R}$, escreveremos simplesmente $\mathcal{S}(I)$.

Agora estamos em condições de introduzir as noções de integração vetorial que usaremos no trabalho. Sejam I um conjunto não-vazio, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de I, X um espaço de Banach e $m : \mathcal{A} \to X^*$ uma medida vetorial de variação limitada. Como m é, em particular, finitamente aditiva, fica bem definida a função $\varphi_m : \mathcal{S}(I, X) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_m(f) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k)(x_k),$$

para toda $f = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(\cdot) x_k \in \mathcal{S}(I, X)$. É imediato verificar que φ_m é um funcional linear contínuo de $\mathcal{S}(I, X)$ e, pela Proposição 1.56, satisfaz $\|\varphi_m\| = |m|(I)$. O funcional φ_m admite uma única extensão linear, contínua e de mesma norma ao espaço $\overline{\mathcal{S}(I, X)} \subset \ell_\infty(I, X)$, que denotaremos por

$$\int_I f \, dm, \forall f \in \overline{\mathcal{S}(I, X)}.$$

Definiremos agora uma segunda noção de integração vetorial que será útil para demonstrarmos o Teorema 3.4. Se $m : \mathcal{A} \to X$ é uma medida vetorial de variação limitada, fica bem definida a função $T_m : \mathcal{S}(I) \to X$ dada por

$$T_m(g) = \sum_{k=1}^{n} a_k m(A_k),$$

para toda $g = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k} \in \mathcal{S}(I)$. É imediato verificar que T_m é um operador linear contínuo e satisfaz $\|T_m\| \leq |m|(I)$. Portanto, T_m admite uma única extensão linear, contínua e de mesma norma ao espaço $\overline{\mathcal{S}(I)} \subset \ell_\infty(I)$, que denotaremos por

$$\int_I g\ dm, \forall g \in \overline{\mathcal{S}(I)}.$$

A proposição a seguir relaciona estes dois conceitos de integração.

Proposição 1.58. *Sejam I um conjunto não-vazio, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de I, X um espaço de Banach e $m : \mathcal{A} \to X^*$ uma medida vetorial de variação limitada. Então*

$$\left(\int_I g\ dm\right)(x) = \int_I g(\cdot)x\ dm, \forall g \in \overline{\mathcal{S}(I)}, \forall x \in X.$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $g \in \mathcal{S}(I)$ e tomemos $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos tais que $g = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k}$. Por definição, temos

$$\left(\int_I g\ dm\right)(x) = \left(\sum_{k=1}^n a_k m(A_k)\right)(x) = \sum_{k=1}^n a_k m(A_k)(x) = \sum_{k=1}^n m(A_k)(a_k x) = \int_I g(\cdot)x\ dm,$$

pois $g(\cdot)x = \sum_{k=1}^n \chi_{A_k}(\cdot)a_k x \in \mathcal{S}(I, X)$.

Seja agora $g \in \overline{\mathcal{S}(I)}$ qualquer e fixemos $(g_n)_{n\geq 1}$ sequência em $\mathcal{S}(I)$ tal que $g_n \to g$. Como a função

$$\overline{\mathcal{S}(I)} \ni h \mapsto \int_I h\ dm \in X^*$$

é contínua, temos

$$\int_I g_n\ dm \to \int_I g\ dm$$

e, em particular,

$$\left(\int_I g_n\ dm\right)(x) \to \left(\int_I g\ dm\right)(x).$$

Por outro lado, como a função

$$\overline{\mathcal{S}(I, X)} \ni f \mapsto \int_I f\ dm \in \mathbb{R}$$

também é contínua, obtemos

$$\int_I g_n(\cdot)x\ dm \to \int_I g(\cdot)x\ dm.$$

Pelo caso anterior, temos o resultado. ■

Nosso próximo passo é relacionar estes conceitos com o espaço dual de $C(K,X)$, onde K é um espaço de Hausdorff compacto e X é um espaço de Banach. Nestas condições, denotaremos por $\mathcal{B}(K)$ a σ-álgebra de Borel de K. Os elementos de $\mathcal{B}(K)$ serão chamados de *borelianos* de K, e uma medida vetorial $m : \mathcal{B}(K) \to X$ será chamada de *medida de Borel* em K.

Definição 1.59. Seja K um espaço de Hausdorff compacto. Uma medida de Borel positiva $m : \mathcal{B}(K) \to \mathbb{R}$ em K é dita *regular* se satisfaz

$$m(B) = \inf\{m(U) : B \subset U, U \text{ é aberto}\} = \sup\{m(L) : L \subset B, L \text{ é compacto}\},$$

para todo $B \subset K$ boreliano.

Se X é um espaço de Banach e $m : \mathcal{B}(K) \to X$ é uma medida de Borel em K, dizemos que m é *regular* se $|m|$ é regular no sentido acima. Denotaremos por $\mathrm{rcabv}(K,X)$ o espaço de Banach de todas as medidas de Borel regulares de K em X, munido da norma

$$\|m\| = |m|(K), \forall m \in \mathrm{rcabv}(K,X).$$

Proposição 1.60. *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach. Para toda função $f \in C(K,X)$ existe uma sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ em $\mathcal{S}(K,X)$ tal que $f_n \to f$ em $\ell_\infty(K,X)$.*

Demonstração. Dado $n \geq 1$, o conjunto $\{f^{-1}\left(B(f(t);1/n)\right) : t \in K\}$ é uma cobertura aberta de K. Portanto, por compacidade, existem $t_1^n, \ldots, t_{k_n}^n \in K$ satisfazendo

$$K = \bigcup_{j=1}^{k_n} f^{-1}(B(f(t_j^n);1/n)).$$

Definimos $A_0^n = \varnothing$, $A_{j+1}^n = f^{-1}(B(f(t_j^n);1/n)) \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{j} A_k^n\right)$ para cada $0 \leq j \leq k_n - 1$, e

$$f_n = \sum_{j=1}^{k_n} \chi_{A_j^n}(\cdot) f(t_j^n) \in \mathcal{S}(I,X).$$

Dados $n \geq 1$ e $t \in K$, existe um único $j \in \{1, \ldots, k_n\}$ tal que $t \in A_j^n$. Então temos

$$\|f(t) - f_n(t)\| = \|f(t) - f(t_j^n)\| < \frac{1}{n},$$

pela definição de A_j^n. Como $t \in K$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos $\|f - f_n\|_\infty \leq 1/n$. Isto prova que $f_n \to f$, como queríamos. ■

Pela proposição anterior, temos $C(K, X) \subset \overline{\mathcal{S}(K, X)}$. Em particular, para cada $m \in \operatorname{rcabv}(K, X^*)$, a função $\varphi_m : C(K, X) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_m(f) = \int_K f dm, \forall f \in C(K, X),$$

é um funcional linear contínuo de $C(K, X)$. Na verdade, todo funcional linear contínuo de $C(K, X)$ é desta forma, como garante o Teorema de Representação de Riesz-Singer ([45, Lema 1.6, pg. 193], veja também [29]).

Teorema 1.61 (Teorema de Representação de Riesz-Singer)**.** *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach. A função $T : \operatorname{rcabv}(K, X^*) \to C(K, X)^*$ dada por*

$$T(m)(f) = \int_K f d_m, \forall m \in \operatorname{rcabv}(K, X^*), \forall f \in C(K, X),$$

é uma isometria linear sobrejetora.

1.7 Famílias fracamente nulas, fraca*-nulas e fracamente incondicionalmente somáveis. Propriedade de Dunford-Pettis

Nesta seção vamos recordar brevemente os conceitos de famílias fracamente nulas, fraca*-nulas e fracamente incondicionalmente somáveis em espaços de Banach. Como bibliografia básica para esta seção, indicamos [15, 19].

Definição 1.62. Sejam X um espaço de Banach e I um conjunto infinito.

(i) Dizemos que uma família $(x_i)_{i\in I}$ em X é *fracamente nula* se $(x^*(x_i))_{i\in I} \in c_0(I)$, para todo $x^* \in X^*$;

(ii) Dizemos que uma família $(x_i^*)_{i\in I}$ em X^* é *fraca*-nula* se $(x_i^*(x))_{i\in I} \in c_0(I)$, para todo $x \in X$;

(iii) Dizemos que uma família $(x_i)_{i\in I}$ em X é *fracamente incondicionalmente somável* se $(x^*(x_i))_{i\in I} \in \ell_1(I)$, para todo $x^* \in X^*$.

Proposição 1.63. *Dados X, Y espaços de Banach, I um conjunto infinito e $T : X \to Y$ um operador linear contínuo, temos:*

(i) Se $(x_i)_{i\in I}$ é uma família fracamente nula em X, então $(T(x_i))_{i\in I}$ é fracamente nula em Y;

(ii) Se $(y_i^*)_{i\in I}$ é uma família fraca*-nula em Y^*, então $(T^*(y_i^*))_{i\in I}$ é fraca*-nula em X^*.

(iii) Se $(x_i)_{i\in I}$ é uma família fracamente incondicionalmente somável em X, então $(T(x_i))_{i\in I}$ é fracamente incondicionalmente somável em Y.

Demonstração. (i) Temos $(y^*(T(x_i)))_{i\in I} = (T^*(y^*)(x_i))_{i\in I} \in c_0(I)$, para todo $y^* \in Y^*$.

(ii) Basta notarmos que $(T^*(y_i^*)(x))_{i\in I} = (y_i^*(T(x)))_{i\in I} \in c_0(I)$, para todo $x \in X$.

(iii) Analogamente ao que fizemos em (i), temos

$$\sum_{i\in I} |y^*(T(x_i))| = \sum_{i\in I} |T^*(y^*)(x_i)| < \infty,$$

para todo $y^* \in Y^*$. ■

Proposição 1.64. *Sejam X um espaço de Banach e I um conjunto infinito.*

(i) Se $(x_i^*)_{i\in I}$ é uma família fraca*-nula em X^*, então $(x_i^*)_{i\in I}$ é limitada;

(ii) Se $(x_i)_{i\in I}$ é uma família fracamente nula em X, então $(x_i)_{i\in I}$ é limitada.

Demonstração. (i) Por hipótese, temos

$$\sup_{i\in I} |x_i^*(x)| < \infty, \forall x \in X.$$

Logo, pelo Princípio da Limitação Uniforme, concluímos $\sup_{i\in I}\|x_i^*\| < \infty$.

(ii) Denotemos por $\hat{x}$ a inclusão canônica de $x \in X$ em X^{**}. Como

$$(\widehat{x_i}(x^*))_{i\in I} = (x^*(x_i))_{i\in I} \in c_0(I), \forall x^* \in X^*,$$

temos que $(\widehat{x_i})_{i\in I}$ é fraca*-nula em X^{**}. Portanto, pelo caso anterior, obtemos

$$\sup_{i\in I}\|x_i\| = \sup_{i\in I}\|\widehat{x_i}\| < \infty,$$

como queríamos. ■

Proposição 1.65. *Se I é um conjunto infinito, então:*

(i) A base canônica de $c_0(I)$ é fracamente incondicionalmente somável (e, portanto, também é fracamente nula);

(ii) A família dos funcionais coeficientes associados à base canônica de $c_0(I)$ é fraca-nula.*

Demonstração. (i) Dado $x^* = (\alpha_i)_{i\in I} \in c_0(I)^* \equiv \ell_1(I)$, temos

$$x^*(e_i) = \sum_{j\in I}\alpha_j e_i(j) = \alpha_i, \forall i \in I.$$

Logo, $(x^*(e_i))_{i\in I} = (\alpha_i)_{i\in I} \in \ell_1(I) \subset c_0(I)$.

(ii) Denotando por $(\varphi_i)_{i\in I}$ a família dos funcionais coeficientes associados à base canônica de $c_0(I)$, temos $(\varphi_i(x))_{i\in I} = (x_i)_{i\in I} \in c_0(I)$, para todo $x = (x_i)_{i\in I} \in c_0(I)$. ■

Definição 1.66 ([19], Definição 13.41)**.** Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X tem a *Propriedade de Dunford-Pettis* (ou X tem *PDP*) se dadas sequências fracamente nulas $(x_n)_{n\geq 1}$ em X e $(x_n^*)_{n\geq 1}$ em X^*, temos

$$\lim_{n\to\infty} x_n^*(x_n) = 0.$$

Recordamos a seguir um resultado clássico importante.

Teorema 1.67 (Teorema de Schur, [19], Teorema 5.36)**.** *Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em ℓ_1. Então $(x_n)_{n\geq 1}$ é fracamente nula se, e somente se, $x_n \to 0$.*

Proposição 1.68. *O espaço c_0 tem* PDP.

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n\geq 1} = ((x_j^n)_{j\geq 1})_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1} = ((y_j^n)_{j\geq 1})_{n\geq 1}$ sequências fracamente nulas em c_0 e em $c_0^* \equiv \ell_1$, respectivamente. Pelo Teorema 1.67, temos $y_n \to 0$. Pela Proposição 1.64, existe $M > 0$ tal que

$$\|x_n\|_\infty \leq M, \forall n \geq 1.$$

Logo,

$$|y_n(x_n)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} y_j^n x_j^n\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |y_j^n||x_j^n| \leq \|x_n\|_\infty \sum_{j=1}^{\infty} |y_j^n| \leq M\|y_n\|_1 \to 0,$$

como queríamos. ■

Corolário 1.69. *Sejam X um espaço de Banach, $(x_n)_{n\geq 1}$ uma sequência equivalente à base canônica de c_0 e $(x_n^*)_{n\geq 1}$ uma sequência fracamente nula em X^*. Então*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^*(x_n) = 0.$$

Demonstração. Seja $T : c_0 \to X$ um isomorfismo de c_0 sobre sua imagem tal que

$$T(e_n) = x_n, \forall n \geq 1.$$

Pelas Proposições 1.63 e 1.65, respectivamente, temos que $(T^*(x_n^*))_{n\geq 1}$ é fracamente nula em c_0^* e $(e_n)_{n\geq 1}$ é fracamente nula em c_0. Portanto, pela Proposição 1.68, concluímos

$$\lim_{n\to\infty} x_n^*(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^*(Te_n) = \lim_{n\to\infty} (T^*(x_n^*))(e_n) = 0,$$

e a demonstração está completa. ■

Capítulo 2

Uma caracterização das cópias complementadas de $c_0(\tau)$

Neste capítulo iniciamos o estudo das cópias complementadas de $c_0(\tau)$ em espaços de Banach. Nosso objetivo é enunciar e provar o Teorema 2.4, que será fundamental nos capítulos seguintes.

Em sua tese de doutorado, T. Schlumprecht [42] obteve o seguinte resultado.

Teorema 2.1 ([17, 42], veja também [10], Teorema 1.1.2)**.** *Seja X um espaço de Banach. Então X contém uma cópia complementade de c_0 se, e somente se, existem $(x_n)_{n\geq 1}$ sequência equivalente à base canônica de c_0 em X e $(x_n)_{n\geq 1}$ sequência fraca*-nula em X^* tais que*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(x_n)| > 0.$$

Vamos estender o Teorema 2.1 ao caso não-enumerável. Para fazê-lo, vamos precisar dos dois resultados a seguir.

Teorema 2.2 ([39], Observação 1 após o Teorema 3.4, [27], Teorema 7.11)**.** *Sejam X um espaço de Banach, τ um cardinal infinito e $T : c_0(\tau) \to X$ um operador linear contínuo. Se $\inf_{i\in\tau} \|T(e_i)\| > 0$, então existe $\Gamma \subset \tau$ tal que $|\Gamma| = \tau$ e $T|_{c_0(\Gamma)} : c_0(\Gamma) \to X$ é isomorfismo sobre sua imagem.*

Teorema 2.3 ([26], Corolário 2, [27], Teorema 7.19)**.** *Sejam τ um conjunto não-vazio e X um subespaço fechado de $c_0(\tau)$. Então X é complementado em $c_0(\tau)$ se, e somente se, existe*

$\varnothing \neq \Gamma \subset \tau$ *tal que* $X \sim c_0(\Gamma)$.

Agora estamos em condições de provar o Teorema 2.4.

Teorema 2.4. *Sejam X um espaço de Banach e τ um cardinal infinito. São equivalentes:*

(i) $c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} X$;

(ii) Existem $(x_i)_{i\in\tau}$ família equivalente à base canônica de $c_0(\tau)$ em X e $(x_i^*)_{i\in\tau}$ família fraca-nula em X^* tais que*

$$x_i^*(x_j) = \delta_{ij}, \forall i, j \in \tau;$$

(iii) Existem $(x_i)_{i\in\tau}$ família equivalente à base canônica de $c_0(\tau)$ em X e $(x_i^*)_{i\in\tau}$ família fraca-nula em X^* tais que*

$$\inf_{i\in\tau} |x_i^*(x_i)| > 0.$$

Demonstração. $(i) \implies (ii)$ Por hipótese, existem $T : c_0(\tau) \to X$ isomorfismo sobre sua imagem e $P : X \to X$ projeção sobre $\mathrm{Im}(T)$. Para cada $i \in \tau$, seja $x_i = T(e_i)$; por definição, a família $(x_i)_{i\in\tau}$ é equivalente à base canônica de $c_0(\tau)$ em X.

Seja $(\varphi_i)_{i\in\tau}$ a família dos funcionais coeficientes associados à base canônica de $c_0(\tau)$. Para cada $i \in \tau$, definimos $x_i^* = \varphi_i \circ T^{-1} \circ P \in X^*$. Notemos que

$$x_i^*(x_j) = (\varphi_i \circ T^{-1})(P(T(e_j))) = \varphi_i(T^{-1}(T(e_j))) = \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}, \forall i, j \in \tau.$$

Além disso, temos

$$(x_i^*(x))_{i\in\tau} = (\varphi_i((T^{-1} \circ P)(x)))_{i\in\tau} \in c_0(\tau), \forall x \in X,$$

pois $(\varphi_i)_{i\in\tau}$ é fraca*-nula, pela Proposição 1.65. Isto prova $(i) \implies (ii)$.

$(ii) \implies (iii)$ É imediata.

$(iii) \implies (i)$ Sejam $(x_i)_{i\in\tau}$ em X e e $(x_i^*)_{i\in\tau}$ em X^* como no enunciado. Fica bem definido o operador linear $T : X \to c_0(\tau)$ dado por

$$T(x) = (x_i^*(x))_{i\in\tau} \in c_0(\tau), \forall x \in X.$$

Pela Proposição 1.64, temos $M = \sup_{i\in\tau} \|x_i^*\| < \infty$ e, portanto,

$$\|T(x)\|_\infty = \sup_{i\in\tau} |x_i^*(x)| \leq M\|x\|, \forall x \in X.$$

Isto prova que T é contínuo.

Seja $S : c_0(\tau) \to Y$ isomorfismo de $c_0(\tau)$ sobre $Y = \overline{\text{span}}\{x_i : i \in \tau\}$ tal que $S(e_i) = x_i$, para todo $i \in \tau$. Temos que

$$\|(T \circ S)(e_i)\|_\infty = \|T(x_i)\|_\infty = \sup_{j\in\tau} |x_j^*(x_i)| \geq |x_i^*(x_i)| \geq \delta, \forall i \in \tau$$

onde $\delta = \inf_{j\in\tau} |x_j^*(x_j)| > 0$. Portanto, pelo Teorema 2.2, existe $\Gamma \subset \tau$ tal que $|\Gamma| = \tau$ e $T \circ S|_{c_0(\Gamma)}$ é isomorfismo de $c_0(\Gamma)$ sobre $Z = (T \circ S)(c_0(\Gamma))$. Escrevendo

$$W = \overline{\text{span}}\{x_i : i \in \Gamma\} = S(c_0(\Gamma)),$$

temos que

$$T|_W = (T \circ S|_{c_0(\Gamma)}) \circ (S|_{c_0(\Gamma)})^{-1} : W \to Z$$

é isomorfismo de W sobre Z.

Pelo Teorema 2.3, existe $P : c_0(\tau) \to Z$ projeção sobre Z. Definimos

$$Q = (T|_W)^{-1} \circ P \circ T : X \to W.$$

Q é um operador linear contínuo e

$$Q(w) = ((T|_W)^{-1} \circ P \circ T)(w) = (T|_W)^{-1}(T(w)) = w, \forall w \in W.$$

Logo, Q é projeção de X sobre $W \sim c_0(\tau)$, como queríamos. ■

Observação 2.5. *Pela demonstração do teorema anterior, concluímos que se $(x_i)_{i\in\tau}$ é uma família equivalente à base canônica de $c_0(\tau)$ em X e $(x_i^*)_{i\in\tau}$ é uma família fraca*-nula em X^* satisfazendo $\inf_{i\in\tau} |x_i^*(x_i)| > 0$, então existe $\tau' \subset \tau$ tal que $|\tau'| = \tau$ e $\overline{\text{span}}\{x_i : i \in \tau'\}$ é um subespaço complementado de X.*

Capítulo 3

Cópias complementadas de $c_0(\tau)$ em $C(K, X)$

Neste capítulo iniciamos o estudo das cópias complementadas de $c_0(\tau)$ em espaços de Banach clássicos. Nosso primeiro objetivo é analisar as cópias complementadas de $c_0(\tau)$ em espaços $C(K, X)$, onde K é um espaço de Hausdorff compacto e X é um espaço de Banach. O resultado principal deste capítulo é o Teorema 3.4.

3.1 O Teorema Principal

Vamos precisar de alguns resultados auxiliares simples para provar o Teorema 3.4.

Lema 3.1. *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, $D \subset K$ um subconjunto denso de K, $\mathcal{C} \subset C(K)$ um subconjunto denso de $C(K)$, X um espaço de Banach e $f \in C(K, X)$. Para cada $\varepsilon > 0$ existem $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{C}$ e $d_1, \ldots, d_m \in D$ satisfazendo $\|f - h_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$, onde*

$$h_\varepsilon = \sum_{j=1}^{m} f_j(\cdot) f(d_j).$$

Demonstração. Fixemos $\varepsilon > 0$. Para cada $t \in K$, seja $U_t = \{s \in K : \|f(s) - f(t)\| < \varepsilon/4\}$. Como $\{U_t : t \in K\}$ é uma cobertura aberta de K, existem $t_1, \ldots, t_m \in K$ tais que

$$K = U_{t_1} \cup \ldots \cup U_{t_m}.$$

Seja $\{g_1,\dots,g_m\}\subset C(K)$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_{t_1},\dots,U_{t_m}\}$. Para cada $j\in\{1,\dots,m\}$, fixemos $d_j\in U_{t_j}\cap D$ e $f_j\in\mathcal{C}$ satisfazendo

$$\|f_j-g_j\|_\infty<\frac{\varepsilon}{4m(\|f\|_\infty+1)}.$$

Definimos

$$h_\varepsilon=\sum_{j=1}^{m}f_j(\cdot)f(d_j)\in C(K,X).$$

Mostremos que $\|f-h_\varepsilon\|_\infty<\varepsilon$. Fixado $t\in K$, consideremos o conjunto

$$I_t=\{j\in\{1,\dots,m\}:t\in U_{t_j}\}\neq\varnothing.$$

Notemos que se $j\in I_t$, então

$$\|f(t)-f(d_j)\|\le\|f(t)-f(t_j)\|+\|f(t_j)-f(d_j)\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

e se $i\in\{1,\dots,m\}\setminus I_t$, então $g_i(t)=0$. Portanto, temos

$$\begin{aligned}\|f(t)-h_\varepsilon(t)\|&\le\left\|f(t)-\sum_{j=1}^{m}g_j(t)f(d_j)\right\|+\left\|\sum_{j=1}^{m}g_j(t)f(d_j)-\sum_{j=1}^{m}f_j(t)f(d_j)\right\|\\&=\left\|\sum_{j=1}^{m}g_j(t)f(t)-\sum_{j=1}^{m}g_j(t)f(d_j)\right\|+\left\|\sum_{j=1}^{m}(g_j(t)-f_j(t))f(d_j)\right\|\\&=\left\|\sum_{j=1}^{m}g_j(t)(f(t)-f(d_j))\right\|+\left\|\sum_{j=1}^{m}(g_j(t)-f_j(t))f(d_j)\right\|\\&\le\sum_{j=1}^{m}g_j(t)\|f(t)-f(d_j)\|+\sum_{j=1}^{m}|g_j(t)-f_j(t)|\|f(d_j)\|\\&\le\sum_{j\in I_t}g_j(t)\|f(t)-f(d_j)\|+\sum_{j=1}^{m}\|g_j-f_j\|_\infty\|f\|_\infty\\&<\sum_{j\in I_t}\frac{\varepsilon}{2}g_j(t)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\varepsilon}{4m}\le\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{m}g_j(t)+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{3\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

Como $t\in K$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos $\|f-h_\varepsilon\|_\infty<\varepsilon$. ■

Vamos recordar a seguinte definição.

Definição 3.2. Seja τ um cardinal infinito. A *cofinalidade* de τ, denotada por $\mathrm{cf}(\tau)$, é o menor cardinal λ tal que existe uma família de cardinais $\{\alpha_i : i \in \lambda\}$ satisfazendo $|\alpha_i| < \tau$, para todo $i \in \lambda$, e $\sup_{i\in\lambda} \alpha_i = \tau$. Se $\mathrm{cf}(\tau) = \tau$, dizemos que τ é *regular*; caso contrário, dizemos que τ é *singular*.

Lema 3.3. *Sejam I um conjunto infinito e J um conjunto não-vazio. Seja $\{I_j\}_{j\in J}$ uma família de subconjuntos de I tal que $\bigcup_{j\in J} I_j = I$. Se $\mathrm{cf}(|I|) > |J|$, então existe $j_0 \in J$ tal que $|I_{j_0}| = |I|$.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que $|I_j| < |I|$ para todo $j \in J$. Por definição de cofinalidade, temos

$$\sup\{|I_j| : j \in J\} < |I|.$$

Como $|J| < \mathrm{cf}(|I|) \leq |I|$, concluímos

$$|I| = \left|\bigcup_{j\in J} I_j\right| \leq \max(|J|\ ;\ \sup\{|I_j| : j \in J\}) < |I|,$$

uma contradição. ■

Agora estamos em condições de provar o Teorema 3.4.

Teorema 3.4. *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, X um espaço de Banach e τ um cardinal infinito. Se $\mathrm{cf}(\tau) > \mathrm{w}(K)$, então*

$$c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} C(K,X) \iff c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Demonstração. Suponhamos que $c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} C(K,X)$. Temos dois casos a considerar:

1º caso: K é infinito. Pelo Teorema 2.4, existem $(f_i)_{i\in\tau}$ família equivalente à base canônica de $c_0(\tau)$ em $C(K,X)$ e $(\varphi_i)_{i\in\tau}$ família fraca*-nula em $C(K,X)^*$ tais que

$$\varphi_i(f_j) = \delta_{ij}, \forall i,j \in \tau.$$

Pelo Teorema de Representação de Riesz-Singer (Teorema 1.61), para cada $i \in \tau$ existe

$m_i \in \mathrm{rcabv}(K, X^*)$ tal que $\|m_i\| = \|\varphi_i\|$ e

$$\varphi_i(f) = \int_K f \, dm_i, \forall f \in C(K,X).$$

Pela Proposição 1.64, temos

$$0 < M = \sup_{i \in \tau} \|\varphi_i\| < \infty.$$

Fixemos $D \subset K$ e $\mathcal{C} \subset C(K)$ subconjuntos densos de K e $C(K)$ respectivamente tais que $|D| = \mathrm{dens}(K)$ e $|\mathcal{C}| = \mathrm{dens}(C(K))$. Pelo Lema 3.1, para cada $i \in \tau$ existem $f_1^i, \ldots, f_{n_i}^i \in \mathcal{C}$ e $d_1^i, \ldots, d_{n_i}^i \in D$ satisfazendo

$$\|f_i - h_i\|_\infty < \frac{1}{2M},$$

onde

$$h_i = \sum_{j=1}^{n_i} f_j^i(\cdot) f_i(d_j^i).$$

Assim, para cada $i \in \tau$ temos

$$1 = \varphi_i(f_i) = |\varphi_i(f_i)| \leq |\varphi_i(f_i - h_i)| + |\varphi_i(h_i)| < \frac{1}{2} + |\varphi_i(h_i)|$$

e, portanto,

$$\frac{1}{2} < |\varphi_i(h_i)| = \left| \int_K h_i \, dm_i \right| = \left| \int_K \sum_{j=1}^{n_i} f_j^i(\cdot) f_i(d_j^i) \, dm_i \right| \leq \sum_{j=1}^{n_i} \left| \left(\int_K f_j^i \, dm_i \right) (f_i(d_j^i)) \right|,$$

onde a última desigualdade é consequência da Desigualdade Triangular e da Proposição 1.58.

Como K é infinito, pelo Lema 1.37 temos

$$\aleph_0 \leq \mathrm{dens}(K) \leq \mathrm{w}(K) = \mathrm{dens}(C(K))$$

e, portanto, por hipótese,

$$\mathrm{cf}(\tau) > \mathrm{w}(K) = |\mathcal{C}| \geq |D| \geq \aleph_0. \tag{3.1}$$

Seja $\mathcal{N} = \{n_i : i \in \tau\} \subset \mathbb{N}$ e para cada $n \in \mathcal{N}$ consideremos $\alpha_n = \{i \in \tau : n_i = n\}$.

Como $\tau = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} \alpha_n$ tem cofinalidade não-enumerável, pelo Lema 3.3 existe $N_0 \in \mathcal{N}$ tal que $|\alpha_{N_0}| = \tau$. Escrevendo $\tau_1 = \alpha_{N_0}$, obtemos

$$\sum_{j=1}^{N_0} \left| \left(\int_K f_j^i \, dm_i \right) (f_i(d_j^i)) \right| > \frac{1}{2}, \forall i \in \tau_1.$$

A seguir, para cada $j \in \{1, \ldots, N_0\}$ seja

$$\beta_j = \left\{ i \in \tau_1 : \left| \left(\int_K f_j^i \, dm_i \right) (f_i(d_j^i)) \right| > \frac{1}{2N_0} \right\}.$$

Como $\tau_1 = \bigcup_{j=1}^{N_0} \beta_j$ é infinito, novamente pelo Lema 3.3 existe $j_0 \in \{1, \ldots, N_0\}$ tal que $|\beta_{j_0}| = |\tau_1| = \tau$. Tomando $\tau_2 = \beta_{j_0}$, temos

$$\left| \left(\int_K f_{j_0}^i \, dm_i \right) (f_i(d_{j_0}^i)) \right| > \frac{1}{2N_0}, \forall i \in \tau_2.$$

Definimos agora $\mathcal{F} = \{f_{j_0}^i : i \in \tau_2\} \subset \mathcal{C}$ e para cada $f \in \mathcal{F}$ seja $\gamma_f = \{i \in \tau_2 : f_{j_0}^i = f\}$. Por (3.1) e pelo Lema 3.3 existe $g_0 \in \mathcal{F}$ tal que $|\gamma_{g_0}| = |\tau_2| = \tau$. Escrevendo $\tau_3 = \gamma_{g_0}$, temos

$$\left| \left(\int_K g_0 \, dm_i \right) (f_i(d_{j_0}^i)) \right| > \frac{1}{2N_0}, \forall i \in \tau_3.$$

Seja $\mathcal{D} = \{d_{j_0}^i : i \in \tau_3\} \subset D$ e para cada $d \in \mathcal{D}$ consideremos $\lambda_d = \{i \in \tau_3 : d_{j_0}^i = d\}$. Por (3.1) e pelo Lema 3.3 existe $d_0 \in \mathcal{D}$ tal que $|\lambda_{d_0}| = |\tau_3| = \tau$. Finalmente, fazendo $\tau_4 = \lambda_{d_0}$, obtemos

$$|\psi_i(f_i(d_0))| > \frac{1}{2N_0},$$

para todo $i \in \tau_4$, onde $\psi_i = \int_K g_0 \, dm_i \in X^*$.

Pelo Teorema 2.4, basta mostrarmos que existe $\tau_5 \subset \tau_4$ tal que $|\tau_5| = \tau$, $(f_i(d_0))_{i \in \tau_5}$ é equivalente à base canônica de $c_0(\tau_5)$ em X e $(\psi_i)_{i \in \tau_5}$ é fraca*-nula em X^*.

Pela Proposição 1.58, temos

$$\psi_i(x) = \left(\int_K g_0 \, dm_i \right)(x) = \int_K g_0(\cdot)x \, dm_i = \varphi_i(g_0(\cdot)x), \forall i \in \tau_4, \forall x \in X. \tag{3.2}$$

Isto prova que

$$0 < \|\psi_i\| \leq \|\varphi_i\| \|g_0\|_\infty \leq M\|g_0\|_\infty, \forall i \in \tau_4.$$

Portanto, temos

$$\frac{1}{2N_0} < |\psi_i(f_i(d_0))| \leq \|\psi_i\| \|f_i(d_0)\| \leq M\|g_0\|_\infty \|f_i(d_0)\|, \forall i \in \tau_4,$$

isto é,

$$\|f_i(d_0)\| > \frac{1}{2MN_0\|g_0\|_\infty}, \forall i \in \tau_4.$$

Por hipótese, existe $T : c_0(\tau) \to C(K,X)$ isomorfismo de $c_0(\tau)$ sobre sua imagem tal que $T(e_i) = f_i$, para todo $i \in \tau$. Consideremos $S : C(K,X) \to X$ o operador linear contínuo dado por

$$S(f) = f(d_0), \forall f \in C(K,X).$$

Então temos

$$\|(S \circ T)(e_i)\| = \|f_i(d_0)\| \geq \frac{1}{2Mn_0\|g_0\|_\infty} > 0, \forall i \in \tau_4$$

e, portanto, pelo Teorema 2.2, existe $\tau_5 \subset \tau_4$ tal que $|\tau_5| = |\tau_4| = \tau$ e $S \circ T|_{c_0(\tau_5)}$ é um isomorfismo sobre sua imagem. Isto prova que $(f_i(d_0))_{i\in\tau_5} = (S(T(e_i))_{i\in\tau_5}$ é equivalente à base canônica de $c_0(\tau_5)$ em X.

Dado $x \in X$, por (3.2) temos

$$(\psi_i(x))_{i\in\tau_5} = (\varphi_i(g_0(\cdot)x))_{i\in\tau_5} \in c_0(\tau_5),$$

pois $(\varphi_i)_{i\in\tau_5}$ é fraca*-nula em $C(K,X)^*$ por hipótese. Isto prova que $(\psi_i)_{i\in\tau_5}$ é fraca*-nula em X^*. Concluímos, portanto, pelo Teorema 2.4, que $c_0(\tau_5) \overset{c}{\hookrightarrow} X$.

2º caso: K é finito. Pela Proposição 1.33, temos $C(K,X) = (X^n, \|\cdot\|_\infty)$, onde $n = |K|$. Por indução finita, podemos supor $n = 2$. Pelo Teorema 2.4, existem $(x_i, y_i)_{i\in\tau}$ família equivalente à base canônica de $c_0(\tau)$ em X^2 e $(\eta_i)_{i\in\tau}$ família fraca*-nula em $(X^2)^*$ satisfazendo

$$\eta_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \forall i,j \in \tau.$$

Pela Proposição 1.64, temos

$$0 < \delta = \sup_{i \in \tau} \|\eta_i\| < \infty.$$

Munindo $(X^*)^2$ da norma da soma, é imediato verificar que a função $\Phi : (X^*)^2 \to (X^2)^*$ dada por

$$\Phi(x^*, y^*)(x, y) = x^*(x) + y^*(y), \forall x^*, y^* \in X^*, \forall x, y \in X,$$

é uma isometria linear. Escrevendo $(x_i^*, y_i^*) = \Phi^{-1}(\eta_i)$, para cada $i \in \tau$, temos

$$|x_i^*(x_i)| + |y_i^*(y_i)| \geq |x_i^*(x_i) + y_i^*(y_i)| = x_i^*(x_i) + y_i^*(y_i) = 1.$$

Consideremos $\Gamma_1 = \{i \in \tau : |x_i^*(x_i)| \geq 1/2\}$ e $\Gamma_2 = \{i \in \tau : |y_i^*(y_i)| \geq 1/2\}$. Como $\tau = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ é infinito, temos $|\Gamma_1| = \tau$ ou $|\Gamma_2| = \tau$; sem perda de generalidade, podemos assumir $|\Gamma_1| = \tau$. Assim, temos

$$\frac{1}{2} \leq |x_i^*(x_i)| \leq \|x_i^*\|\|x_i\| \leq \|\eta_i\|\|x_i\| \leq \delta\|x_i\|, \forall i \in \Gamma_1,$$

isto é,

$$\|x_i\| \geq \frac{1}{2\delta}, \forall i \in \Gamma_1.$$

Por hipótese, existe $S : c_0(\tau) \to X^2$ um isomorfismo sobre sua imagem tal que $S(e_i) = (x_i, y_i)$, para todo $i \in \tau$. Consideremos $Q : X^2 \to X$ o operador linear contínuo dado por

$$Q(x, y) = x, \forall x, y \in X.$$

Notemos que

$$\|(Q \circ S)(e_i)\| = \|x_i\| \geq \frac{1}{2\delta} > 0, \forall i \in \Gamma_1.$$

Portanto, pelo Teorema 2.2, existe $\Gamma \subset \Gamma_1$ tal que $|\Gamma| = |\Gamma_1| = \tau$ e $Q \circ S|_{c_0(\Gamma)}$ é um isomorfismo sobre sua imagem. Isto prova que $(x_i)_{i\in\Gamma} = (Q(S(e_i))_{i\in\Gamma}$ é equivalente à base canônica de $c_0(\Gamma)$.

Dado $x \in X$, observemos que

$$(x_i^*(x))_{i\in\Gamma} = (x_i^*(x) + y_i^*(0))_{i\in\Gamma} = (\eta_i(x,0))_{i\in\Gamma} \in c_0(\Gamma),$$

pois $(\eta_i)_{i\in\Gamma}$ é fraca*-nula em $(X^2)^*$ por hipótese. Isto prova que $(x_i^*)_{i\in\Gamma}$ é fraca*-nula em X^*. Portanto, pelo Teorema 2.4, temos $c_0(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} X$.

A implicação contrária é consequência imediata das Proposições 1.5 e 1.35. ■

3.2 Aplicações

Esta seção é dedicada ao estudo de diversas consequências do Teorema 3.4. Observamos inicialmente que a hipótese de compacidade pode ser substituída por compacidade local no enunciado do Teorema 3.4.

Teorema 3.5. *Sejam K um espaço de Hausdorff localmente compacto, X um espaço de Banach e τ um cardinal infinito. Se $\operatorname{cf}(\tau) > \operatorname{w}(K)$, então*

$$c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} C_0(K,X) \iff c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Demonstração. Podemos supor que K não é compacto; neste caso, temos $\operatorname{w}(\gamma K) = \operatorname{w}(K)$ (Proposição 1.39). Se $c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} C_0(K,X)$, então $c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\gamma K, X)$, pelas Proposições 1.5 e 1.42; portanto, pelo Teorema 3.4, temos $c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} X$. A recíproca é consequência imediata das Proposições 1.5 e 1.35. ■

Em particular, temos o corolário a seguir.

Corolário 3.6. *Sejam I um conjunto não-vazio, X um espaço de Banach e τ um cardinal infinito. Se $\operatorname{cf}(\tau) > |I|$, então*

$$c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} c_0(I,X) \iff c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Demonstração. Como I está munido da topologia discreta, a única base de abertos de I é o conjunto $\{\{i\} : i \in I\}$. Logo, $\operatorname{w}(I) = |I| < \operatorname{cf}(\tau)$ e basta aplicarmos o Corolário 3.5. ■

No caso em que I é finito, podemos omitir a hipótese sobre a cofinalidade do cardinal τ.

Corolário 3.7. *Dados X um espaço de Banach, τ um cardinal infinito e $n \geq 1$, temos*

$$c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} X^n \iff c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Demonstração. Definindo $I = \{1, \ldots, n\}$, temos $c_0(I, X) = X^n$ e $|I| = n < \aleph_0 \leq \mathrm{cf}(\tau)$; portanto, pelo Corolário 3.6, temos o resultado. ■

Vejamos a seguir outras consequências do Teorema 3.4.

Corolário 3.8. *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto infinito, X um espaço de Banach e τ um cardinal infinito. Se $\mathrm{cf}(\tau) > |K|$, então*

$$c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} C(K, X) \iff c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Demonstração. Pela Proposição 1.38, temos $\mathrm{w}(K) \leq |K|$ e basta aplicarmos o Teorema 3.4. ■

Dado α um ordinal infinito, denotaremos por $[0, \alpha]$ o conjunto de todos os ordinais $\beta \leq \alpha$, munido da topologia da ordem.

Corolário 3.9. *Sejam α um ordinal infinito, X um espaço de Banach e τ um cardinal infinito. Se $\mathrm{cf}(\tau) > |\alpha|$, então*

$$c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} C([0, \alpha], X) \iff c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Demonstração. Basta notarmos que $|[0, \alpha]| = |\alpha| < \mathrm{cf}(\tau)$ e aplicarmos o Corolário 3.8. ■

Corolário 3.10. *Sejam I um conjunto infinito, X um espaço de Banach e τ um cardinal infinito. Se $\mathrm{cf}(\tau) > 2^{|I|}$, então*

$$c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\beta I, X) \iff c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Demonstração. Basta notarmos que $\mathrm{w}(\beta I) = 2^{|I|}$ (Proposição 1.40) e aplicarmos o Teorema 3.4. ■

Em contraste com o Corolário 3.10, temos o resultado a seguir.

Teorema 3.11 ([21], Teorema 5.3)**.** *Sejam I um conjunto infinito, X um espaço de Banach e τ um cardinal infinito. Se $|I| < \mathrm{cf}(\tau) \leq \tau \leq 2^{|I|}$, então*

$$c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\beta I, X) \iff c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow X.$$

Em particular, como $\mathrm{cf}(2^{|I|}) > |I|$ ([33, Corolário 5.12]), temos

$$c_0(2^{|I|}) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\beta I, X) \iff c_0(2^{|I|}) \hookrightarrow X,$$

para todo espaço de Banach X.

Corolário 3.12. *Sejam I um conjunto infinito, X um espaço de Banach e τ um cardinal infinito. Se $\mathrm{cf}(\tau) > |I|$, então*

$$c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\mathbf{2}^I, X) \iff c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Demonstração. Basta notarmos que $\mathrm{w}(\mathbf{2}^I) = |I|$ (Proposição 1.41) e novamente aplicarmos o Teorema 3.4. ■

A hipótese $\mathrm{cf}(\tau) > |I|$ não pode ser substituída por $\mathrm{cf}(\tau) \geq |I|$ no enunciado do Corolário 3.12. De fato, observamos primeiramente que há um erro de digitação no enunciado de [21, Teorema 5.1]. Dado $\mathfrak{m}$ um cardinal infinito, Lindenstrauss provou que $L_1([0,1]^{\mathfrak{m}})$ contém uma cópia de $l_2(\mathfrak{m})$ [36, Teorema 2.13], e não de $l_2(2^{\mathfrak{m}})$ como está escrito na demonstração de [21, Teorema 5.1]. Seguindo passo a passo a demonstração de [21, Teorema 5.1], concluímos que o enunciado correto deste resultado é o seguinte.

Teorema 3.13 ([21], Teorema 5.1)**.** *Seja $\mathfrak{m}$ um cardinal satisfazendo $\aleph_0 < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\alpha \leq \mathfrak{m}$, para algum ordinal α. Se X é um espaço de Banach, então*

$$c_0(\aleph_\alpha) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\mathbf{2}^{\mathfrak{m}}, X) \iff c_0(\aleph_\alpha) \hookrightarrow X.$$

Em particular, aplicando o Teorema 3.13 para $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$ cardinal regular não-enumerável e $X = \ell_\infty(\mathfrak{m})$, obtemos $c_0(\mathfrak{m}) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\mathbf{2}^\mathfrak{m}, l_\infty(\mathfrak{m}))$. Neste caso, $\mathrm{cf}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} = \mathrm{w}(\mathbf{2}^\mathfrak{m})$ (Proposição 1.41), mas sabemos que $l_\infty(\mathfrak{m})$ não contém cópia complementada de $c_0(\mathfrak{m})$ (Proposição 1.52).

3.3 Análise das hipóteses do Teorema Principal

Nesta última seção veremos que a hipótese $\mathrm{cf}(\tau) > \mathrm{w}(K)$ não pode ser substituída por $\mathrm{cf}(\tau) \geq \mathrm{w}(K)$ no enunciado do Teorema 3.4. Para cardinais regulares, temos o seguinte exemplo simples.

Exemplo 3.14. Dado τ um cardinal infinito regular, temos $\mathrm{cf}(\tau) = \tau = \mathrm{w}(\gamma\tau)$ (Proposição 1.39) e, além disso, $c_0(\tau) = C_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\gamma\tau)$, pela Proposição 1.42. No entanto, $c_0(\tau) \not\hookrightarrow \mathbb{R}$.

Nosso próximo passo é apresentar um exemplo no caso geral. Vamos precisar introduzir algumas notações e resultados auxiliares.

Sejam I um conjunto não-vazio e $(X_i)_{i\in I}$ uma família de espaços de Banach. Consideremos o espaço de Banach

$$\left(\oplus_{i\in I} X_i\right)_1 = \{(x_i)_{i\in I} : x_i \in X_i, \forall i \in I, (\|x_i\|)_{i\in I} \in \ell_1(I)\},$$

munido da norma

$$\|(x_i)_{i\in I}\|_1 = \sum_{i\in I} \|x_i\|, \forall (x_i)_{i\in I} \in \left(\oplus_{i\in I} X_i\right)_1.$$

Consideremos também o espaço de Banach

$$\left(\oplus_{i\in I} X_i\right)_0 = \{(x_i)_{i\in I} : x_i \in X_i, \forall i \in I, (\|x_i\|)_{i\in I} \in c_0(I)\},$$

munido da norma

$$\|(x_i)_{i\in I}\|_\infty = \sup_{i\in I} \|x_i\|, \forall (x_i)_{i\in I} \in \left(\oplus_{i\in I} X_i\right)_0.$$

Dados $p \in \{0, 1\}$ e $J \subset I$ não-vazio, denotaremos por $P_J : \left(\oplus_{i\in I} X_i\right)_p \to \left(\oplus_{j\in J} X_j\right)_p$ a projeção usual dada por $P_J(x)(j) = x_j$, para todos $j \in J$ e $x = (x_i)_{i\in I} \in \left(\oplus_{i\in I} X_i\right)_p$. É imediato verificar que P_J é um operador linear contínuo sobrejetor.

Teorema 3.15 ([6], Teorema 1.1). *Sejam I um conjunto infinito, $(X_i)_{i\in I}$ uma família de espaços de Banach, Y um espaço de Banach, $p \in \{0,1\}$ e $T : Y \to (\oplus_{i\in I} X_i)_p$ um isomorfismo sobre sua imagem. Suponhamos que $P_F \circ T$ não seja um isomorfismo sobre sua imagem, para todo $F \subset I$ finito e não-vazio. Então $c_0 \hookrightarrow Y$, se $p = 0$, ou $\ell_1 \hookrightarrow Y$, se $p = 1$.*

Demonstração. 1º caso: $p = 0$.

Como T é isomorfismo sobre sua imagem, existem $0 < \delta \le M$ tais que

$$\delta\|y\| \le \|T(y)\|_\infty \le M\|y\|, \forall y \in Y.$$

Vamos construir indutivamente três sequências convenientes.

Fixemos $i_0 \in I$ e seja $J_0 = \{i_0\}$. Como $P_{J_0} \circ T : Y \to X_{i_0}$ não é isomorfismo sobre sua imagem, existe $y_1 \in Y$ tal que $\|y_1\| = 1$ e $\|T(y_1)(i_0)\| = \|(P_{J_0} \circ T)(y_1)\| \le \frac{\delta}{2^4}$. Além disso, como $(\|T(y_1)(i)\|)_{i\in I} \in c_0(I)$, o conjunto

$$J_1 = \left\{ i \in I : \|T(y_1)(i)\| \ge \frac{\delta}{2^3} \right\}$$

é finito. Definimos $F_1 = J_0 \cup J_1$ e $x_1 = (x_i^1)_{i\in I} \in X$, onde

$$x_i^1 = \begin{cases} T(y_1)(i), & \text{se } i \in F_1, \\ 0, & \text{se } i \in I \setminus F_1. \end{cases}$$

Então temos

$$\|x_1\|_\infty \le \|T(y_1)\|_\infty \le M$$

e, além disso,

$$\|T(y_1) - x_1\|_\infty = \sup_{i\in I} \|T(y_1)(i) - x_i^1\| = \sup_{i\in I\setminus F_1} \|T(y_1)(i)\| \le \frac{\delta}{2^3}.$$

Logo,

$$\|x_1\|_\infty \ge \|T(y_1)\|_\infty - \|T(y_1) - x_1\|_\infty \ge \frac{\delta}{2}.$$

Suponhamos construídos $y_1, \ldots, y_n \in Y$, $\varnothing = F_0 \ne F_1 \subsetneq \ldots \subsetneq F_n \subset I$ subconjuntos finitos e $x_1 = (x_i^1)_{i\in I}, \ldots, x_n = (x_i^n)_{i\in I} \in X$ satisfazendo, para cada $j \in \{1,\ldots,n\}$, as seguintes propriedades:

(i) $\|y_j\| = 1$;

(ii) $x_i^j = 0$, para todo $i \in (I \setminus F_j) \cup (F_j \setminus F_{j-1})$;

(iii) $\frac{\delta}{2} \leq \|x_j\|_\infty \leq M$;

(iv) $\|T(y_j) - x_j\|_\infty \leq \frac{\delta}{2^{j+2}}$.

Vamos definir y_{n+1}, F_{n+1} e x_{n+1}.

Como $P_{F_n} \circ T : Y \to (\oplus_{i\in F_n} X_i)_0$ não é isomorfismo sobre sua imagem, existe $y_{n+1} \in Y$ tal que $\|y_{n+1}\| = 1$ e

$$\sup_{i\in F_n} \|T(y_{n+1})(i)\| = \|(P_{F_n} \circ T)(y_{n+1})\|_\infty \leq \frac{\delta}{2^{n+4}}. \tag{3.3}$$

Além disso, como $(\|T(y_{n+1})(i)\|)_{i\in I} \in c_0(I)$, o conjunto

$$J_{n+1} = \left\{ i \in I : \|T(y_{n+1})(i)\| \geq \frac{\delta}{2^{n+3}} \right\}$$

é finito. Fixado $i_n \in I \setminus F_n$, definimos $F_{n+1} = F_n \cup J_{n+1} \cup \{i_n\}$ e $x_{n+1} = (x_i^{n+1})_{i\in I} \in X$, onde

$$x_i^{n+1} = \begin{cases} T(y_{n+1})(i), & \text{se } i \in F_{n+1} \setminus F_n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então temos

$$\|x_{n+1}\|_\infty \leq \|T(y_{n+1})\|_\infty \leq M$$

e, além disso, por (3.3) e pela definição de F_{n+1},

$$\|T(y_{n+1}) - x_{n+1}\|_\infty = \sup_{i\in(I\setminus F_{n+1})\cup F_n} \|T(y_{n+1})(i)\| \leq \frac{\delta}{2^{n+3}}.$$

Logo,

$$\|x_{n+1}\|_\infty \geq \|T(y_{n+1})\|_\infty - \|T(y_{n+1}) - x_{n+1}\|_\infty \geq \frac{\delta}{2}.$$

Assim, construímos $(y_n)_{n\geq 1}$ sequência em Y, $(F_n)_{n\geq 1}$ sequência estritamente crescente de subconjuntos finitos e não-vazios de I e $(x_n)_{n\geq 1}$ sequência em X satisfazendo as propriedades (i), (ii), (iii) e (iv).

Afirmação 1: Dados $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$, temos

$$\frac{\delta}{2} \sup_{1\leq n\leq m} |t_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{m} t_n x_n \right\|_\infty \leq M \sup_{1\leq n\leq m} |t_n|.$$

Basta notarmos que

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} t_n x_n \right\|_\infty = \sup_{i\in I} \left\| \sum_{n=1}^{m} t_n x_i^n \right\| = \sup_{1\leq n\leq m} \left(\sup_{i\in F_n\setminus F_{n-1}} \|t_n x_i^n\| \right) = \sup_{1\leq n\leq m} |t_n| \|x_n\|$$

e aplicarmos a propriedade (iii).

Afirmação 2: Dados $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$, temos

$$A \sup_{1\leq n\leq m} |t_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{m} t_n T(y_n) \right\|_\infty \leq B \sup_{1\leq n\leq m} |t_n|,$$

onde $A = \frac{\delta}{4}$ e $B = \frac{\delta}{4} + M$.

De fato, pela propriedade (iv) e pela Afirmação 1 temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{m} t_n T(y_n) \right\|_\infty &\leq \left\| \sum_{n=1}^{m} t_n (T(y_n) - x_n) \right\|_\infty + \left\| \sum_{n=1}^{m} t_n x_n \right\|_\infty \\ &\leq \sum_{n=1}^{m} |t_n| \|T(y_n) - x_n\|_\infty + M \sup_{1\leq n\leq m} |t_n| \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{\delta}{2^{n+2}} + M \right) \sup_{1\leq n\leq m} |t_n| \leq B \sup_{1\leq n\leq m} |t_n|. \end{aligned}$$

Por outro lado, novamente pela propriedade (iv) e pela Afirmação 1 temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{m} t_n T(y_n) \right\|_\infty &\geq \left\| \sum_{n=1}^{m} t_n x_n \right\|_\infty - \left\| \sum_{n=1}^{m} t_n (T(y_n) - x_n) \right\|_\infty \\ &\geq \frac{\delta}{2} \sup_{1\leq n\leq m} |t_n| - \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{\delta}{2^{n+2}} \right) \sup_{1\leq n\leq m} |t_n| \\ &\geq \left(\frac{\delta}{2} - \sum_{n=1}^{m} \frac{\delta}{2^{n+2}} \right) \sup_{1\leq n\leq m} |t_n| \geq A \sup_{1\leq n\leq m} |t_n|. \end{aligned}$$

Isto prova a Afirmação 2.

Afirmação 3: Y contém uma cópia de c_0.

Fixemos $t = (t_n)_{n\geq 1} \in c_0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \geq 1$ tal que $|t_n| < \frac{\varepsilon}{2B}$, para todo $n \geq N$. Portanto, pela Afirmação 2, temos

$$\left\|\sum_{j=n}^{m} t_j T(y_j)\right\|_\infty \leq B \sup_{n\leq j\leq m} |t_j| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \forall m \geq n \geq N.$$

Isto prova que a sequência das somas parciais $\left(\sum_{n=1}^{m} t_n T(y_n)\right)_{m\geq 1}$ é de Cauchy em X e, portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} t_n T(y_n)$ é convergente. Assim, fica bem definida a função $S : c_0 \to X$ dada por

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n T(y_n),$$

para todo $t = (t_n)_{n\geq 1} \in c_0$. Pela Afirmação 2, S é um operador linear contínuo que satisfaz

$$A\|t\|_\infty \leq \|S(t)\|_\infty \leq B\|t\|_\infty, \forall t \in c_0.$$

Isto prova que S é injetor e

$$\|S^{-1}(x)\|_\infty = \|t\|_\infty \leq \frac{1}{A}\|S(t)\|_\infty = \frac{1}{A}\|x\|_\infty,$$

para todo $x = S(t) \in \mathrm{Im}(S)$, isto é, S^{-1} também é contínuo. Portanto, S é um isomorfismo de c_0 sobre sua imagem.

Definindo $Z = \overline{\mathrm{span}}\{T(y_n) : n \geq 1\}$, pela definição de S temos $\mathrm{Im}(S) \subset Z$ e, além disso, como $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço fechado de X, temos também $Z \subset \mathrm{Im}(T)$. Logo, $T^{-1} \circ S$ é um isomorfismo de c_0 sobre sua imagem, como queríamos.

2º caso: $p = 1$.

Como T é isomorfismo sobre sua imagem, existem $0 < \delta \leq M$ tais que

$$\delta\|y\| \leq \|T(y)\|_1 \leq M\|y\|, \forall y \in Y.$$

Vamos construir indutivamente três sequências convenientes.

Fixemos $i_0 \in I$ e seja $J_0 = \{i_0\}$. Como $P_{J_0} \circ T : Y \to X_{i_0}$ não é isomorfismo sobre sua imagem, existe $y_1 \in Y$ tal que $\|y_1\| = 1$ e $\|T(y_1)(i_0)\| = \|(P_{J_0} \circ T)(y_1)\| \leq \frac{\delta}{4}$. Além disso, como $(\|T(y_1)(i)\|)_{i \in I} \in \ell_1(I)$, existe $J_1 \subset I$ finito tal que

$$\sum_{i \in I \setminus J_1} \|T(y_1)(i)\| < \frac{\delta}{4}.$$

Definimos $F_1 = J_0 \cup J_1$ e $x_1 = (x_i^1)_{i \in I} \in X$, onde

$$x_i^1 = \begin{cases} T(y_1)(i), & \text{se } i \in F_1, \\ 0, & \text{se } i \in I \setminus F_1. \end{cases}$$

Então temos

$$\|x_1\|_1 \leq \|T(y_1)\|_1 \leq M$$

e, além disso,

$$\|T(y_1) - x_1\|_1 = \sum_{i \in I} \|T(y_1)(i) - x_i^1\| = \sum_{i \in I \setminus F_1} \|T(y_1)(i)\| < \frac{\delta}{4}.$$

Logo,

$$\|x_1\|_1 \geq \|T(y_1)\|_1 - \|T(y_1) - x_1\|_1 \geq \frac{\delta}{2}.$$

Suponhamos construídos $y_1, \ldots, y_n \in Y$, $\varnothing = F_0 \neq F_1 \subsetneq \ldots \subsetneq F_n \subset I$ subconjuntos finitos e $x_1 = (x_i^1)_{i \in I}, \ldots, x_n = (x_i^n)_{i \in I} \in X$ satisfazendo, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, as seguintes propriedades:

(I) $\|y_j\| = 1$;

(II) $x_i^j = 0$, para todo $i \in (I \setminus F_j) \cup (F_j \setminus F_{j-1})$;

(III) $\frac{\delta}{2} \leq \|x_j\|_1 \leq M$;

(IV) $\|T(y_j) - x_j\|_1 \leq \frac{\delta}{4}$.

Vamos definir y_{n+1}, F_{n+1} e x_{n+1}.

Como $P_{F_n} \circ T : Y \to (\oplus_{i \in F_n} X_i)_1$ não é isomorfismo sobre sua imagem, existe $y_{n+1} \in Y$

tal que $\|y_{n+1}\| = 1$ e

$$\sum_{i \in F_n} \|T(y_{n+1})(i)\| = \|(P_{F_n} \circ T)(y_{n+1})\|_1 \leq \frac{\delta}{8}. \tag{3.4}$$

Além disso, como $(\|T(y_{n+1})(i)\|)_{i \in I} \in \ell_1(I)$, existe $F_{n+1} \subset I$ finito tal que $F_n \subsetneq F_{n+1}$ e

$$\sum_{i \in I \setminus F_{n+1}} \|T(y_{n+1})(i)\| < \frac{\delta}{8}.$$

Definimos $x_{n+1} = (x_i^{n+1})_{i \in I} \in X$, onde

$$x_i^{n+1} = \begin{cases} T(y_{n+1})(i), & \text{se } i \in F_{n+1} \setminus F_n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então temos

$$\|x_{n+1}\|_1 \leq \|T(y_{n+1})\|_1 \leq M$$

e, além disso, por (3.4) e pela definição de F_{n+1},

$$\|T(y_{n+1}) - x_{n+1}\|_1 = \sum_{i \in I \setminus F_{n+1}} \|T(y_{n+1})(i)\| + \sum_{j \in F_n} \|T(y_{n+1})(j)\| < \frac{\delta}{4}.$$

Logo,

$$\|x_{n+1}\|_1 \geq \|T(y_{n+1})\|_1 - \|T(y_{n+1}) - x_{n+1}\|_1 \geq \frac{\delta}{2}.$$

Assim, construímos $(y_n)_{n \geq 1}$ sequência em Y, $(F_n)_{n \geq 1}$ sequência estritamente crescente de subconjuntos finitos e não-vazios de I e $(x_n)_{n \geq 1}$ sequência em X satisfazendo as propriedades (I), (II), (III) e (IV).

Afirmação 4: Dados $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$, temos

$$\frac{\delta}{2} \sum_{n=1}^{m} |t_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{m} t_n x_n \right\|_1 \leq M \sum_{n=1}^{m} |t_n|.$$

Basta notarmos que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{m} t_n x_n\right\|_1 &= \sum_{i\in I}\left\|\sum_{n=1}^{m} t_n x_i^n\right\| = \sum_{n=1}^{m}\sum_{i\in F_n\setminus F_{n-1}} \|t_n x_i^n\| \\ &= \sum_{n=1}^{m}|t_n|\left(\sum_{i\in F_n\setminus F_{n-1}}\|x_i^n\|\right) = \sum_{n=1}^{m}|t_n|\|x_n\|_1\end{aligned}$$

e aplicarmos a propriedade (III).

Afirmação 5: Dados $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$, temos

$$A\sum_{n=1}^{m}|t_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{m} t_n T(y_n)\right\|_1 \leq B\sum_{n=1}^{m}|t_n|,$$

onde $A = \frac{\delta}{4}$ e $B = \frac{\delta}{4} + M$.

De fato, pela propriedade (IV) e pela Afirmação 4 temos

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{m} t_n T(y_n)\right\|_1 &\leq \left\|\sum_{n=1}^{m} t_n (T(y_n) - x_n)\right\|_1 + \left\|\sum_{n=1}^{m} t_n x_n\right\|_1 \\ &\leq \sum_{n=1}^{m}|t_n|\|T(y_n) - x_n\|_1 + M\sum_{n=1}^{m}|t_n| \leq B\sum_{n=1}^{m}|t_n|.\end{aligned}$$

Por outro lado, novamente pela propriedade (IV) e pela Afirmação 4 temos

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{m} t_n T(y_n)\right\|_1 &\geq \left\|\sum_{n=1}^{m} t_n x_n\right\|_1 - \left\|\sum_{n=1}^{m} t_n (T(y_n) - x_n)\right\|_1 \\ &\geq \frac{\delta}{2}\sum_{n=1}^{m}|t_n| - \frac{\delta}{4}\sum_{n=1}^{m}|t_n| = A\sum_{n=1}^{m}|t_n|.\end{aligned}$$

Isto prova a Afirmação 5.

Afirmação 6: Y contém uma cópia de ℓ_1.

Fixemos $t = (t_n)_{n\geq 1} \in \ell_1$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \geq 1$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|t_n| < \frac{\varepsilon}{B}.$$

Portanto, pela Afirmação 5, temos

$$\left\|\sum_{j=n}^{m} t_j T(y_j)\right\|_1 \leq B\sum_{j=n}^{m}|t_j| \leq B\sum_{j=N+1}^{\infty}|t_j| < \varepsilon, \forall m \geq n \geq N.$$

Isto prova que a sequência das somas parciais $\left(\sum_{n=1}^{m} t_n T(y_n)\right)_{m\geq 1}$ é de Cauchy em X e, portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} t_n T(y_n)$ é convergente. Assim, fica bem definida a função $S : \ell_1 \to X$ dada por

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n T(y_n),$$

para todo $t = (t_n)_{n\geq 1} \in \ell_1$. Pela Afirmação 5, S é um operador linear contínuo que satisfaz

$$A\|t\|_1 \leq \|S(t)\|_1 \leq B\|t\|_1, \forall t \in \ell_1.$$

Isto prova que S é injetor e

$$\|S^{-1}(x)\|_1 = \|t\|_1 \leq \frac{1}{A}\|S(t)\|_1 = \frac{1}{A}\|x\|_1,$$

para todo $x = S(t) \in \mathrm{Im}(S)$, isto é, S^{-1} também é contínuo. Portanto, S é um isomorfismo de ℓ_1 sobre sua imagem.

Definindo $Z = \overline{\mathrm{span}}\{T(y_n) : n \geq 1\}$, pela definição de S temos $\mathrm{Im}(S) \subset Z$ e, além disso, como $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço fechado de X, temos também $Z \subset \mathrm{Im}(T)$. Logo, $T^{-1} \circ S$ é um isomorfismo de ℓ_1 sobre sua imagem, como queríamos. ■

Proposição 3.16. *Dados X_1, X_2 espaços de Banach e τ um cardinal infinito, temos*

$$c_0(\tau) \hookrightarrow X_1 \oplus X_2 \iff c_0(\tau) \hookrightarrow X_1 \;\; ou \;\; c_0(\tau) \hookrightarrow X_2.$$

Demonstração. Consideremos $X \oplus Y$ munido da norma da soma e sejam $P_1 : X_1 \oplus X_2 \to X_1$, $P_2 : X_1 \oplus X_2 \to X_2$ as projeções usuais. Suponhamos primeiramente que exista $T : c_0(\tau) \to X_1 \oplus X_2$ um isomorfismo sobre sua imagem e seja $\delta > 0$ tal que

$$\delta\|x\|_\infty \leq \|T(x)\| = \|P_1(T(x))\| + \|P_2(T(x))\|, \forall x \in c_0(\tau).$$

Em particular, temos

$$\delta \le \|P_1(T(e_i))\| + \|P_2(T(e_i))\|, \forall i \in \tau.$$

Consideremos, para cada $j \in \{1,2\}$, o conjunto $\tau_j = \{i \in \tau : \|P_j(T(e_i))\| \ge \frac{\delta}{2}\}$. Como $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, existe $j \in \{1,2\}$ tal que $|\tau_j| = \tau$. Assim, temos

$$\inf_{i\in\tau_j} \|(P_j \circ T)(e_i)\| \ge \frac{\delta}{2} > 0$$

e, portanto, pelo Teorema 2.2, existe $\Gamma \subset \tau_j$ tal que $|\Gamma| = |\tau_j| = \tau$ e $P_j \circ T|_{c_0(\Gamma)}$ é um isomorfismo sobre sua imagem. Isto prova que $c_0(\tau) \hookrightarrow X_j$.

A recíproca é consequência imediata da Proposição 1.5. ■

Agora estamos em condições de exibir o próximo exemplo, que obtivemos em nossos estudos.

Exemplo 3.17. Sejam τ um cardinal infinito, $\lambda = \mathrm{cf}(\tau)$ e $(\alpha_i)_{i\in\lambda}$ uma família estritamente crescente de cardinais infinitos tais que $\alpha_i < \tau$, para todo $i \in \lambda$, e $\sup_{i\in\lambda} \alpha_i = \tau$. Consideremos $X = (\oplus_{i\in\lambda} c_0(\alpha_i))_1$. Vamos mostrar que $c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\gamma\lambda, X)$, mas $c_0(\tau) \not\hookrightarrow X$.

Notemos que um elemento $x \in c_0(\lambda, X)$ é da forma $x = (x_i)_{i\in\lambda} = ((x^i_j)_{j\in\lambda})_{i\in\lambda}$, onde $x^i_j \in c_0(\alpha_i)$, para todos $i, j \in \lambda$.

Definimos, por recursão transfinita, os conjuntos $\beta_0 = \alpha_0$ e $\beta_i = \alpha_i \setminus \bigcup_{j<i} \alpha_j$, para todo $i \in \lambda$, $i > 0$. É imediato verificar que $\beta_i \cap \beta_j = \varnothing$ se $i \neq j$ e

$$\tau = \bigcup_{i\in\lambda} \alpha_i = \bigcup_{i\in\lambda} \beta_i.$$

Consideremos o Y o subespaço vetorial de $c_0(\lambda, X)$ de todos os elementos $x = (x_i)_{i\in\lambda} = ((x^i_j)_{j\in\lambda})_{i\in\lambda}$ tais que $x^i_j = 0$ se $i \neq j$, e $x^i_i(k) = 0$, para todo $k \in \alpha_i \setminus \beta_i$.

Consideremos também a função $P : c_0(\lambda, X) \to c_0(\lambda, X)$ dada por $P(x) = (y_i)_{i\in\lambda} = ((y^i_j)_{j\in\lambda})_{i\in\lambda}$, onde $y^i_j = 0$ se $i \neq j$, e

$$y^i_i(k) = \begin{cases} x^i_i(k), & \text{se } k \in \beta_i, \\ 0, & \text{se } k \in \alpha_i \setminus \beta_i, \end{cases}$$

para todo $x = (x_i)_{i\in\lambda} = ((x^i_j)_{j\in\lambda})_{i\in\lambda} \in c_0(\lambda, X)$. Notemos que P está bem definida: dado $\varepsilon > 0$, temos

$$\{i \in \lambda : \|y_i\|_1 \geq \varepsilon\} = \left\{i \in \lambda : \|y^i_i\|_\infty \geq \varepsilon\right\} \subset \left\{i \in \lambda : \|x^i_i\|_\infty \geq \varepsilon\right\} \subset \{i \in \lambda : \|x_i\|_1 \geq \varepsilon\}$$

e este último conjunto é finito, pela definição de $c_0(\lambda, X)$. É imediato verificar que P é um operador linear satisfazendo $\mathrm{Im}(P) = Y$ e $P(y) = y$, para todo $y \in Y$. Temos ainda que

$$\|P(x)\|_\infty = \sup_{i\in\lambda} \|y_i\|_1 \leq \sup_{i\in\lambda} \|x^i_i\|_\infty \leq \sup_{i\in\lambda} \|x_i\|_1 = \|x\|_\infty,$$

para todo $x = (x_i)_{i\in\lambda} = ((x^i_j)_{j\in\lambda})_{i\in\lambda} \in c_0(\lambda, X)$. Logo, P é uma projeção sobre Y.

Definimos agora $T : c_0(\tau) \to Y$ por $T(t) = (z_i)_{i\in\lambda} = ((z^i_j)_{j\in\lambda})_{i\in\lambda}$, onde $z^i_j = 0$ se $i \neq j$, e

$$z^i_i(k) = \begin{cases} t_k, & \text{se } k \in \beta_i, \\ 0, & \text{se } k \in \alpha_i \setminus \beta_i, \end{cases}$$

para todo $t = (t_k)_{k\in\tau} \in c_0(\tau)$. Afirmamos que T está bem definida. De fato, dados $t = (t_k)_{k\in\tau} \in c_0(\tau)$ e $\delta > 0$, sejam $F = \{i \in \lambda : \|z_i\|_1 \geq \delta\}$ e $G = \{k \in \tau : |t_k| \geq \frac{\delta}{2}\}$. Como G é finito e os conjuntos $(\beta_i)_{i\in\lambda}$ são dois a dois disjuntos, o conjunto $H = \{i \in \lambda : G \cap \beta_i \neq \varnothing\}$ também é finito. Notemos que

$$i \in F \implies \|z^i_i\|_\infty = \|z_i\|_1 \geq \delta \implies \sup_{k\in\beta_i} |t_k| = \sup_{k\in\beta_i} |z^i_i(k)| \geq \delta \implies i \in H.$$

Isto prova que F é finito, isto é, T está bem definida.

È imediato verificar que T é linear. Mostraremos agora que T é uma isometria sobre Y. Dado $t = (t_k)_{k\in\tau} \in c_0(\tau)$, temos

$$\|T(t)\|_\infty = \sup_{i\in\lambda} \|z_i\|_1 = \sup_{i\in\lambda} \|z^i_i\|_\infty \leq \sup_{i\in\lambda} \sup_{k\in\alpha_i} |t_k| = \|t\|_\infty.$$

Por outro lado, dado $k \in \tau$, existe um único $i \in \lambda$ tal que $k \in \beta_i$ e, portanto,

$$|t_k| \leq \sup_{l \in \beta_i} |t_l| = \|z_i^i\|_\infty = \|z_i\|_1 \leq \|T(t)\|.$$

Isto prova que T é uma isometria (sobre sua imagem).

Finalmente, fixemos $y = (y_i)_{i \in \lambda} = ((y_j^i)_{j \in \lambda})_{i \in \lambda} \in Y$. Dado $k \in \tau$, seja $i_k \in \lambda$ (único) tal que $k \in \beta_{i_k}$ e consideremos $t_k = y_{i_k}^{i_k}(k)$. Afirmamos que $t = (t_k)_{k \in \tau} \in c_0(\tau)$. Com efeito, dado $\rho > 0$, consideremos os conjuntos $A = \{k \in \tau : |t_k| \geq \rho\}$,

$$B = \{i \in \lambda : \|y_i\|_1 \geq \rho\} = \big\{i \in \lambda : \|y_i^i\|_\infty \geq \rho\big\} = \left\{i \in \lambda : \beta_i \neq \varnothing \text{ e } \sup_{k \in \beta_i} |t_k| \geq \rho\right\}$$

e, para cada $i \in \lambda$, $C_i = \{k \in \alpha_i : |y_i^i(k)| \geq \rho\} = \{k \in \beta_i : |t_k| \geq \rho\}$. Como $y \in c_0(\lambda, X)$ e $y_i^i \in c_0(\alpha_i)$, para todo $i \in \lambda$, os conjuntos B e C_i são todos finitos. Notemos que se $k \in A$, então $k \in C_{i_k}$ e $i_k \in B$. Portanto, $A \subset \bigcup_{j \in B} C_j$ é finito. Isto prova que $t \in c_0(\tau)$. Como $T(t) = y$, temos que T é uma isometria linear sobre Y.

Provamos, portanto, que $c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} c_0(\lambda, X)$. Logo, pelas Proposições 1.5 e 1.42, obtemos $c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\gamma\lambda, X)$. Além disso, temos $\mathrm{cf}(\tau) = \lambda = \mathrm{w}(\gamma\lambda)$ (Proposição 1.39).

Por outro lado, afirmamos que $c_0(\tau) \not\hookrightarrow X$. De fato, suponhamos, por absurdo, que $c_0(\tau) \hookrightarrow X$. Como $\alpha_i < \tau$ para todo $i \in \lambda$, temos $c_0(\tau) \not\hookrightarrow c_0(\alpha_i)$, pela Proposição 1.49. Portanto, pela Proposição 3.16 e pelo Teorema 3.15, obtemos $\ell_1 \hookrightarrow c_0(\tau) = (\oplus_{j \in \tau} \mathbb{R})_0$. Aplicando novamente o Teorema 3.15, concluímos $c_0 \hookrightarrow \ell_1$; isto contradiz o Teorema de Schur (Teorema 1.67), pois a base canônica de c_0 é uma sequência fracamente nula que não converge para zero.

Capítulo 4

Cópias complementadas de $c_0(\tau)$ em $\ell_p(I, X)$, $p \in [1, \infty)$

Este capítulo é dedicado ao estudo das cópias complementadas de $c_0(\tau)$ em espaços $\ell_p(I, X)$, onde X é um espaço de Banach, I é um conjunto não-vazio e $p \in [1, \infty)$. Nosso objetivo é estender ao caso não-separável o teorema a seguir, obtido independentemente por G. Emmanuele ([17], Teorema 3), no caso $p = 1$, e F. Bombal ([5], Teorema 3.3), no caso geral.

Teorema 4.1 ([5], Teorema 3.3, [17], Teorema 3, veja também [10], Teorema 4.3.1)**.** *Dados X um espaço de Banach e $p \in [1, \infty)$, temos*

$$c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_p(\mathbb{N}, X) \iff c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Para estender este teorema, vamos precisar do lema a seguir, cuja demonstração é uma modificação natural da demonstração de [5, Teorema 2.2]. Embora as demonstrações dos casos $p = 1$ e $p > 1$ sejam similares, optamos por fazê-las separadamente. Recordamos que podemos identificar $\ell_1(I, X)^*$ com $\ell_\infty(I, X^*)$ e $\ell_p(I, X)^*$ com $\ell_q(I, X^*)$, onde $p \in (1, \infty)$ e $q \in (1, \infty)$ é seu expoente conjugado, de acordo com os Teoremas 1.25 e 1.27.

Lema 4.2. *Sejam X um espaço de Banach, I um conjunto infinito, τ um cardinal infinito e $p \in [1, \infty)$. Sejam $(x_i)_{i \in \tau} = ((x_j^i)_{j \in I})_{i \in \tau}$ uma família equivalente à base canônica de $c_0(\tau)$ em $\ell_p(I, X)$ e $(\varphi_i)_{i \in \tau} = ((\varphi_j^i)_{j \in I})_{i \in \tau}$ uma família limitada em $(\ell_p(I, X)^*) \equiv \ell_q(I, X^*)$, onde*

$q=\infty$, se $p=1$, ou $q \in (1,\infty)$ é o expoente conjugado de p, se $p \in (1,\infty)$. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon \subset I$ finito tal que

$$\left|\sum_{j \in I \setminus F_\varepsilon} \varphi_j^i(x_j^i)\right| < \varepsilon, \forall i \in \tau.$$

Demonstração. Consideremos os seguintes casos:

1º caso: $p=1$.

Por hipótese, existe $M>0$ satisfazendo

$$M \geq \|\varphi_i\| = \sup_{j \in I} \|\varphi_j^i\|, \forall i \in \tau.$$

Suponhamos, por absurdo, que a tese do enunciado seja falsa. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $F \subset I$ finito, existe $i \in \tau$ satisfazendo

$$\left|\sum_{j \in I \setminus F} \varphi_j^i(x_j^i)\right| \geq \varepsilon.$$

Em particular, para $F_0 = \varnothing$ existe $i_1 \in \tau$ tal que

$$\left|\sum_{j \in I} \varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1})\right| \geq \varepsilon.$$

Como

$$\sum_{j \in I} |\varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1})| \leq \sum_{j \in I} \|\varphi_j^{i_1}\| \|x_j^{i_1}\| \leq \|\varphi_{i_1}\| \sum_{j \in I} \|x_j^{i_1}\| = \|\varphi_{i_1}\| \|x_{i_1}\|_1 < \infty,$$

existe $F_1 \subset I$ finito e não-vazio tal que

$$\sum_{j \in I \setminus F_1} |\varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fazendo $I_1 = I \setminus F_1$, temos

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j\in F_1} \varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1})\right| &= \left|\sum_{j\in I} \varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1}) - \sum_{j\in I_1} \varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1})\right| \\ &\geq \left|\sum_{j\in I} \varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1})\right| - \left|\sum_{j\in I_1} \varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1})\right| \\ &\geq \varepsilon - \sum_{j\in I_1} |\varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1})| > \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Suponhamos construídos, para algum $n \geq 1$, $i_1, \ldots, i_n \in \tau$ dois a dois distintos e $F_1, \ldots, F_n$ subconjuntos finitos, não-vazios e dois a dois disjuntos de I satisfazendo

$$\left|\sum_{j\in F_k} \varphi_j^{i_k}(x_j^{i_k})\right| > \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{j\in I_k} |\varphi_j^{i_k}(x_j^{i_k})|$$

onde $I_k = I \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_k)$, para todo $1 \leq k \leq n$. Por hipótese, existe $i_{n+1} \in \tau$ tal que

$$\left|\sum_{j\in I_n} \varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}})\right| \geq \varepsilon.$$

Como

$$\sum_{j\in I_n} |\varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}})| \leq \sum_{j\in I} \|\varphi_j^{i_{n+1}}\|\|x_j^{i_{n+1}}\| \leq \|\varphi_{i_{n+1}}\| \sum_{j\in I} \|x_j^{i_{n+1}}\| = \|\varphi_{i_{n+1}}\|\|x_{i_{n+1}}\|_1 < \infty,$$

existe $F_{n+1} \subset I_n$ finito e não-vazio tal que

$$\sum_{j\in I_n\setminus F_{n+1}} |\varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Escrevendo $I_{n+1} = I_n \setminus F_{n+1} = I \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_{n+1})$, obtemos

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j\in F_{n+1}} \varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}})\right| &= \left|\sum_{j\in I_n} \varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}}) - \sum_{j\in I_{n+1}} \varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}})\right| \\ &\geq \left|\sum_{j\in I_n} \varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}})\right| - \left|\sum_{j\in I_{n+1}} \varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}})\right| \\ &\geq \varepsilon - \sum_{j\in I_{n+1}} |\varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}})| > \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Notemos também que

$$\left|\sum_{j\in I_n} \varphi_j^{i_k}(x_j^{i_k})\right| \leq \sum_{j\in I_n} |\varphi_j^{i_k}(x_j^{i_k})| \leq \sum_{j\in I_k} |\varphi_j^{i_k}(x_j^{i_k})| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $1 \leq k \leq n$. Isto prova que $i_{n+1} \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$.

Consideremos, para cada $n \geq 1$, $\psi_n = (\psi_j^n)_{j\in I} \in c_0(I, X^*) \subset \ell_\infty(I, X^*)$, onde

$$\psi_j^n = \begin{cases} \varphi_j^{i_n}, & \text{se } j \in F_n, \\ 0, & \text{se } j \in I \setminus F_n. \end{cases}$$

Afirmamos que $(\psi_n)_{n\geq 1}$ é fracamente nula em $\ell_\infty(I, X^*)$. De fato, dado $\eta \in \ell_\infty(I, X^*)^*$, temos que $\eta|_{c_0(I,X^*)} \in c_0(I, X^*)^* \equiv \ell_1(I, X^{**})$ e, portanto, existe $(\eta_j)_{j\in I} \in \ell_1(I, X^{**})$ satisfazendo

$$\eta(\psi_n) = \sum_{j\in I} \eta_j(\psi_j^n) = \sum_{j\in F_n} \eta_j(\varphi_j^{i_n}), \forall n \geq 1.$$

Dado $\delta > 0$, como $\sum_{j\in I} \|\eta_j\| < \infty$, existe $G_\delta \subset I$ finito tal que

$$\sum_{j\in I\setminus G_\delta} \|\eta_j\| < \frac{\delta}{M}.$$

Como $(F_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de subconjuntos dois a dois disjuntos de I e G_δ é finito, existe $N \geq 1$ tal que

$$F_n \cap G_\delta = \varnothing, \forall n \geq N.$$

Logo, para todo $n \geq N$ temos

$$|\eta(\psi_n)| \leq \sum_{j\in F_n} |\eta_j(\varphi_j^{i_n})| \leq \sum_{j\in F_n} \|\eta_j\|\|\varphi_j^{i_n}\| \leq M \sum_{j\in F_n} \|\eta_j\| \leq M \sum_{j\in I\setminus G_\delta} \|\eta_j\| < \delta.$$

Isto prova que $\eta(\psi_n) \to 0$. Como $\eta \in \ell_\infty(I, X^*)^*$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos que $(\psi_n)_{n\geq 1}$ é fracamente nula em $\ell_\infty(I, X^*) \equiv \ell_1(I, X)^*$.

Por outro lado, para cada $n \geq 1$ temos

$$|\psi_n(x_{i_n})| = \left|\sum_{j\in I} \psi_j^n(x_j^{i_n})\right| = \left|\sum_{j\in F_n} \varphi_j^{i_n}(x_j^{i_n})\right| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Isto contradiz o Corolário 1.69 (pois mostramos que $(\psi_n)_{n\geq 1}$ é fracamente nula em $\ell_1(I, X)^*$ e, por hipótese, $(x_{i_n})_{n\geq 1}$ é equivalente à base canônica de c_0 em $\ell_1(I, X)$).

2º caso: $p \in (1, \infty)$.

Por hipótese, existe $M > 0$ satisfazendo

$$M \geq \|\varphi_i\| = \left(\sum_{j\in I} \|\varphi_j^i\|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \forall i \in \tau.$$

Suponhamos, por absurdo, que a tese do enunciado seja falsa. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $F \subset I$ finito, existe $i \in \tau$ satisfazendo

$$\left|\sum_{j\in I\setminus F} \varphi_j^i(x_j^i)\right| \geq \varepsilon.$$

Em particular, para $F_0 = \varnothing$ existe $i_1 \in \tau$ tal que

$$\left|\sum_{j\in I} \varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1})\right| \geq \varepsilon.$$

Pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\sum_{j\in I} |\varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1})| \leq \left(\sum_{j\in I} \|\varphi_j^{i_1}\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j\in I} \|x_j^{i_1}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\varphi_{i_1}\|\|x_{i_1}\|_p < \infty$$

e, portanto, existe $F_1 \subset I$ finito e não-vazio tal que

$$\sum_{j\in I\setminus F_1} |\varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fazendo $I_1 = I \setminus F_1$, temos

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j\in F_1}\varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1})\right| &= \left|\sum_{j\in I}\varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1}) - \sum_{j\in I_1}\varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1})\right| \\ &\geq \left|\sum_{j\in I}\varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1})\right| - \left|\sum_{j\in I_1}\varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1})\right| \\ &\geq \varepsilon - \sum_{j\in I_1}|\varphi_j^{i_1}(x_j^{i_1})| > \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Suponhamos construídos, para algum $n \geq 1$, $i_1,\ldots,i_n \in \tau$ dois a dois distintos e $F_1,\ldots,F_n$ subconjuntos finitos, não-vazios e dois a dois disjuntos de I satisfazendo

$$\left|\sum_{j\in F_k}\varphi_j^{i_k}(x_j^{i_k})\right| > \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{j\in I_k}|\varphi_j^{i_k}(x_j^{i_k})|$$

onde $I_k = I \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_k)$, para todo $1 \leq k \leq n$. Por hipótese, existe $i_{n+1} \in \tau$ tal que

$$\left|\sum_{j\in I_n}\varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}})\right| \geq \varepsilon.$$

Pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\sum_{j\in I_n}|\varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}})| \leq \left(\sum_{j\in I}\|\varphi_j^{i_{n+1}}\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j\in I}\|x_j^{i_1}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\varphi_{i_{n+1}}\|\|x_{i_{n+1}}\|_p < \infty,$$

existe $\varnothing \neq F_{n+1} \subset I_n$ finito tal que

$$\sum_{j\in I_n\setminus F_{n+1}}|\varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Escrevendo $I_{n+1} = I_n \setminus F_{n+1} = I \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_{n+1})$, obtemos

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j\in F_{n+1}} \varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}})\right| &= \left|\sum_{j\in I_n} \varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}}) - \sum_{j\in I_{n+1}} \varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}})\right| \\ &\geq \left|\sum_{j\in I_n} \varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}})\right| - \left|\sum_{j\in I_{n+1}} \varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}})\right| \\ &\geq \varepsilon - \sum_{j\in I_{n+1}} |\varphi_j^{i_{n+1}}(x_j^{i_{n+1}})| > \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Notemos também que

$$\left|\sum_{j\in I_n} \varphi_j^{i_k}(x_j^{i_k})\right| \leq \sum_{j\in I_n} |\varphi_j^{i_k}(x_j^{i_k})| \leq \sum_{j\in I_k} |\varphi_j^{i_k}(x_j^{i_k})| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $1 \leq k \leq n$. Isto prova que $i_{n+1} \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$.

Consideremos, para cada $n \geq 1$, $\psi_n = (\psi_j^n)_{j\in I} \in \ell_q(I, X^*)$, onde

$$\psi_j^n = \begin{cases} \varphi_j^{i_n}, & \text{se } j \in F_n, \\ 0, & \text{se } j \in I \setminus F_n. \end{cases}$$

Afirmamos que $(\psi_n)_{n\geq 1}$ é fracamente nula em $\ell_q(I, X^*)$. De fato, fixemos $\eta \in \ell_q(I, X^*)^* \equiv \ell_p(I, X^{**})$ e seja $(\eta_j)_{j\in I} \in \ell_p(I, X^{**})$ satisfazendo

$$\eta(\psi_n) = \sum_{j\in I} \eta_j(\psi_j^n) = \sum_{j\in F_n} \eta_j(\varphi_j^{i_n}), \forall n \geq 1.$$

Dado $\delta > 0$, como $\sum_{j\in I} \|\eta_j\|^p < \infty$, existe $G_\delta \subset I$ finito tal que

$$\sum_{j\in I\setminus G_\delta} \|\eta_j\|^p < \frac{\delta^p}{M^p}.$$

Como $(F_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de subconjuntos dois a dois disjuntos de I e G_δ é finito, existe $N \geq 1$ tal que

$$F_n \cap G_\delta = \varnothing, \forall n \geq N.$$

Logo, para cada $n \geq N$ temos, pela Desigualdade de Hölder,

$$|\eta(\psi_n)| \leq \sum_{j\in F_n} |\eta_j(\varphi_j^{i_n})| \leq \sum_{j\in F_n} \|\eta_j\|\|\varphi_j^{i_n}\| \leq \left(\sum_{j\in F_n}\|\eta_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j\in F_n}\|\varphi_j^{i_n}\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq M\left(\sum_{j\in F_n}\|\eta_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\left(\sum_{j\in I\setminus G_\delta}\|\eta_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \delta.$$

Isto prova que $\eta(\psi_n) \to 0$. Como $\eta \in \ell_q(I,X^*)^*$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos que $(\psi_n)_{n\geq 1}$ é fracamente nula em $\ell_q(I,X^*) \equiv \ell_p(I,X)^*$.

Por outro lado, para cada $n \geq 1$ temos

$$|\psi_n(x_{i_n})| = \left|\sum_{j\in I}\psi_j^n(x_j^{i_n})\right| = \left|\sum_{j\in F_n}\varphi_j^{i_n}(x_j^{i_n})\right| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Isto contradiz o Corolário 1.69 (pois mostramos que $(\psi_n)_{n\geq 1}$ é fracamente nula em $\ell_p(I,X)^*$ e, por hipótese, $(x_{i_n})_{n\geq 1}$ é equivalente à base canônica de c_0 em $\ell_p(I,X)$). ■

Também vamos usar o resultado simples a seguir.

Lema 4.3. *Seja τ um cardinal infinito e para cada $i \in \tau$ seja $(a_n^i)_{1\leq n\leq N}$ uma sequência finita de números positivos. Suponhamos que exista $\delta > 0$ tal que*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n^i \geq \delta, \forall\, i \in \tau.$$

Então existem $N_0 \in \{1,\ldots,N\}$ e $\tau' \subset \tau$ satisfazendo $|\tau'| = \tau$ e

$$a_{N_0}^i \geq \frac{\delta}{N}, \forall\, i \in \tau'.$$

Demonstração. Por hipótese, para cada $i \in \tau$ existe $n_i \in \{1,\ldots,N\}$ tal que $a_{n_i}^i \geq \frac{\delta}{N}$. Seja $\mathcal{N} = \{n_i : i \in \tau\}$ e para cada $n \in \mathcal{N}$ consideremos $\Gamma_n = \{i \in \tau : n_i = n\}$. Como $\tau = \bigcup_{n\in\mathcal{N}}\Gamma_n$, pelo Lema 3.3 existe $N_0 \in \mathcal{N}$ tal que $|\Gamma_{N_0}| = \tau$. Tomando $\tau' = \Gamma_{N_0}$, temos o resultado. ■

Agora estamos em condições de provar o resultado principal deste capítulo, que estende ao caso não-separável o Teorema 4.1.

Teorema 4.4. *Sejam X um espaço de Banach, I um conjunto não-vazio, τ um cardinal infinito e $p \in [1, \infty)$. Então*

$$c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_p(I, X) \iff c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $c_0(\tau) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_p(I, X)$. Notemos que se I é finito, então os espaços $\ell_p(I, X)$ e $(X^n, \|\cdot\|_\infty)$ são isomorfos, onde $n = |I|$, e basta aplicarmos o Corolário 3.7. Suponhamos, portanto, que I seja infinito. Se $p = 1$, seja $q = \infty$; caso contrário, seja $q \in (1, \infty)$ o expoente conjugado de $p \in (1, \infty)$.

Pelo Teorema 2.4, existem $(x_i)_{i\in\tau} = ((x_j^i)_{j\in I})_{i\in\tau}$ família equivalente à base canônica de $c_0(\tau)$ em $\ell_p(I, X)$ e $(\varphi_i)_{i\in\tau} = ((\varphi_j^i)_{j\in I})_{i\in\tau}$ família fraca*-nula em $(\ell_p(I, X))^* \equiv \ell_q(I, X^*)$ satisfazendo

$$\delta_{ik} = \varphi_i(x_k) = \sum_{j\in I} \varphi_j^i(x_j^k), \forall i, k \in \tau.$$

Pela Proposição 1.64, existe $M > 0$ tal que

$$M \geq \|\varphi_i\| \geq \sup_{j\in I} \|\varphi_j^i\|, \forall i \in \tau.$$

Portanto, pelo Lema 4.2, existe $F_0 \subset I$ finito tal que

$$\left| \sum_{j\in I\setminus F_0} \varphi_j^i(x_j^i) \right| < \frac{1}{2}, \forall i \in \tau.$$

Em particular, F_0 é não-vazio e

$$\sum_{j\in F_0} |\varphi_j^i(x_j^i)| \geq \left| \sum_{j\in F_0} \varphi_j^i(x_j^i) \right| \geq \left| \sum_{j\in I} \varphi_j^i(x_j^i) \right| - \left| \sum_{j\in I\setminus F_0} \varphi_j^i(x_j^i) \right| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \forall i \in \tau.$$

Logo, pelo Lema 4.3, existem $j_0 \in F_0$ e $\tau_1 \subset \tau$ tais que $|\tau_1| = \tau$ e

$$|\varphi_{j_0}^i(x_{j_0}^i)| \geq \frac{1}{2|F_0|}, \forall i \in \tau_1.$$

Assim, temos

$$M\|x^i_{j_0}\| \geq \|\varphi^i_{j_0}\|\|x^i_{j_0}\| \geq |\varphi^i_{j_0}(x^i_{j_0})| \geq \frac{1}{2|F_0|}, \forall i \in \tau_1$$

e, portanto,

$$\|x^i_{j_0}\| \geq \frac{1}{2M|F_0|} > 0, \forall i \in \tau_1.$$

Pelo Teorema 2.4, basta mostrarmos que existe $\tau_2 \subset \tau_1$ tal que $|\tau_2| = \tau$, $(x^i_{j_0})_{i\in\tau_2}$ é equivalente à base canônica de $c_0(\tau_2)$ em X e $(\varphi^i_{j_0})_{i\in\tau_2}$ é fraca*-nula em X^*.

Consideremos $\pi_{j_0} : \ell_p(I,X) \to X$ o operador linear contínuo dado por

$$\pi_{j_0}(y) = y_{j_0}, \forall y = (y_j)_{j\in I} \in \ell_p(I,X).$$

Por hipótese, existe $T : c_0(\tau) \to \ell_p(I,X)$ isomorfismo sobre sua imagem tal que $T(e_i) = x_i$, para todo $i \in \tau$. Então temos

$$\|(\pi_{j_0} \circ T)(e_i)\| = \|\pi_{j_0}(x_i)\| = \|x^i_{j_0}\| > \frac{1}{2M|F_0|} > 0, \forall i \in \tau_1$$

e, portanto, pelo Teorema 2.2, existe $\tau_2 \subset \tau_1$ tal que $|\tau_2| = |\tau_1| = \tau$ e $\pi_{j_0}\circ T|_{c_0(\tau_2)}$ é isomorfismo sobre sua imagem. Logo, $(x^i_{j_0})_{i\in\tau_2} = (\pi_{j_0}(T(e_i)))_{i\in\tau_2}$ é equivalente à base canônica de $c_0(\tau_2)$.

Dado $x \in X$, temos

$$\varphi^i_{j_0}(x) = \sum_{j\in I} \varphi^i_j(\delta_{j_0 j}x) = \varphi_i((\delta_{j_0 j}x)_{j\in I}), \forall i \in \tau_2$$

e, portanto,

$$(\varphi^i_{j_0}(x))_{i\in\tau_2} = (\varphi_i((\delta_{j_0 j}x)_{j\in I}))_{i\in\tau_2} \in c_0(\tau_2),$$

pois $(\varphi_i)_{i\in\tau_2}$ é fraca*-nula em $\ell_p(I,X)^*$ por hipótese. Isto prova que $(\varphi^i_{j_0})_{i\in\tau_2}$ é fraca*-nula em X^*. Concluímos, portanto, pelo Teorema 2.4, que $c_0(\tau_2) \overset{c}{\hookrightarrow} X$.

A implicação contrária é consequência imediata das Proposições 1.5 e 1.28. ■

Capítulo 5

Cópias complementadas de $c_0(\tau)$ em $\ell_\infty(I, X)$

Neste capítulo investigamos as cópias complementadas de $c_0(\tau)$ em $\ell_\infty(I, X)$. Assim como no Capítulo 4, estamos interessados em estender ao caso não-separável um resultado envolvendo cópias complementadas de c_0; trata-se do resultado a seguir.

Teorema 5.1 ([37], Teorema Principal, veja também [10], Teorema 5.1.2)**.** *Dado X um espaço de Banach, temos*

$$c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\mathbb{N}, X) \iff c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

Os resultados auxiliares que vamos usar para provar o resultado principal deste capítulo, o Teorema 5.13, são extensões naturais dos resultados encontrados em [37] e em [10, Seção 5.1].

Primeiramente, estudaremos uma projeção de $\ell_\infty(I, X)^*$ sobre um subespaço linearmente isométrico a $\ell_1(I, X^*)$. Tal projeção será conveniente para lidarmos com famílias fraca*-nulas em $\ell_\infty(I, X)^*$ e será definida na proposição a seguir.

Proposição 5.2. *Sejam X um espaço de Banach e I um conjunto não-vazio. Então:*

(i) A função $T : \ell_1(I, X^*) \to \ell_\infty(I, X)^*$ dada por

$$T(x^*)(x) = \sum_{i \in I} x_i^*(x_i),$$

para todos $x=(x_i)_{i\in I}\in\ell_\infty(I,X)$ *e* $x^*=(x_i^*)_{i\in I}\in\ell_1(I,X^*)$, *está bem definida e é uma isometria linear sobre sua imagem;*

(ii) A função $P:\ell_\infty(I,X)^*\to\ell_\infty(I,X)^*$ *dada por*

$$P(\varphi)(x)=\sum_{i\in I}\varphi((\delta_{ij}x_i)_{j\in I}),$$

para todos $x=(x_i)_{i\in I}\in\ell_\infty(I,X)$ *e* $\varphi\in\ell_\infty(I,X)^*$, *está bem definida e é uma projeção sobre* $\mathrm{Im}(T)$.

Demonstração. (*i*) Dados $x=(x_i)_{i\in I}\in\ell_\infty(I,X)$ e $x^*=(x_i^*)_{i\in I}\in\ell_1(I,X^*)$, temos

$$\sum_{i\in I}|x_i^*(x_i)|\leq\sum_{i\in I}\|x_i^*\|\|x_i\|\leq\|x\|_\infty\|x^*\|_1<\infty.$$

Isto prova que $(x_i^*(x_i))_{i\in I}$ é absolutamente somável e, portanto, T está bem definida. A linearidade de T é consequência imediata da Proposição 1.14. Além disso, pelo Corolário 1.13, temos

$$|T(x^*)(x)|=\left|\sum_{i\in I}x_i^*(x_i)\right|\leq\sum_{i\in I}|x_i^*(x_i)|\leq\|x\|_\infty\|x^*\|_1.$$

Portanto, T é contínua e

$$\|T(x^*)\|\leq\|x^*\|_1,\forall x^*\in\ell_1(I,X^*).$$

Mostremos a desigualdade contrária. Fixemos $x^*=(x_i^*)_{i\in I}\in\ell_1(I,X^*)$, $F\subset I$ finito e não-vazio e $\varepsilon>0$. Para cada $i\in F$ existe $y_i\in B_X$ tal que

$$\|x_i^*\|<|x_i^*(y_i)|+\frac{\varepsilon}{|F|}.$$

Escrevendo $\alpha_i=\mathrm{sign}(x_i^*(y_i))$ para cada $i\in F$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i\in F}\|x_i^*\|-\varepsilon&<\sum_{i\in F}|x_i^*(y_i)|=\sum_{i\in F}x_i^*(\alpha_iy_i)=T(x^*)\left(\sum_{i\in F}\alpha_i(\delta_{ij}y_i)_{j\in I}\right)\\&\leq\|T(x^*)\|\left\|\sum_{i\in F}\alpha_i(\delta_{ij}y_i)_{j\in I}\right\|_\infty\leq\|T(x^*)\|.\end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de F, obtemos

$$\sum_{i\in I}\|x_i^*\| - \varepsilon \leq \|T(x^*)\|.$$

Como $\varepsilon > 0$ também foi escolhido arbitrariamente, concluímos

$$\|x^*\|_1 = \sum_{i\in I}\|x_i^*\| \leq \|T(x^*)\|,$$

como queríamos.

(ii) Dados $x = (x_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I,X)$ e $\varphi \in \ell_\infty(I,X)^*$, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in F}|\varphi((\delta_{ij}x_i)_{j\in I})| &= \sum_{i\in F}\alpha_i\varphi((\delta_{ij}x_i)_{j\in I}) = \varphi\left(\sum_{i\in F}\alpha_i(\delta_{ij}x_i)_{j\in I}\right)\\ &\leq \|\varphi\|\left\|\sum_{i\in F}\alpha_i(\delta_{ij}x_i)_{j\in I}\right\|_\infty \leq \|\varphi\|\|x\|_\infty < \infty,\end{aligned}$$

para todo $F \subset I$ finito e não-vazio, onde $\alpha_i = \operatorname{sign}(\varphi((\delta_{ij}x_i)_{j\in I}))$ para cada $i \in I$. Isto prova que $(\varphi((\delta_{ij}x_i)_{j\in I}))_{i\in I}$ é absolutamente somável e, portanto, P está bem definida. A linearidade de P é consequência imediata da Proposição 1.14. Além disso, pelo Corolário 1.13, temos

$$|P(\varphi)(x)| = \left|\sum_{i\in I}\varphi((\delta_{ij}x_i)_{j\in I})\right| \leq \sum_{i\in I}|\varphi((\delta_{ij}x_i)_{j\in I})| \leq \|\varphi\|\|x\|_\infty.$$

Portanto, P é contínua e

$$\|P(x^*)\| \leq \|\varphi\|, \forall\varphi \in \ell_\infty(I,X)^*.$$

Mostremos que P é projeção sobre $\operatorname{Im}(T)$. Consideremos, para cada $i \in I$, a inclusão usual $S_i : X \to \ell_\infty(I,X)$ dada por

$$S_i(y) = (\delta_{ij}y)_{j\in I}, \forall y \in X.$$

Dado $\varphi \in \ell_\infty(I,X)^*$, afirmamos que $(\varphi \circ S_i)_{i\in I} \in \ell_1(I,X^*)$. De fato, fixado $G \subset I$ finito e não-vazio, para cada $i \in G$ existe $y_i \in B_X$ tal que

$$\|\varphi \circ S_i\| < |(\varphi \circ S_i)(y_i)| + \frac{1}{|G|}.$$

Escrevendo $\beta_i = \operatorname{sign}((\varphi \circ S_i)(y_i))$, para cada $i \in G$, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i \in F} \|\varphi \circ S_i\| - 1 < \sum_{i \in F} |(\varphi \circ S_i)(y_i)| &= \sum_{i \in F} \beta_i (\varphi \circ S_i)(y_i) \\ &= \varphi\left(\sum_{i \in F} \beta_i S_i(y_i)\right) \le \|\varphi\| \left\|\sum_{i \in F} \beta_i S_i(y_i)\right\|_\infty \le \|\varphi\|.\end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de G, obtemos

$$\sum_{i \in I} \|\varphi \circ S_i\| \le \|\varphi\| + 1 < \infty.$$

Isto prova que $(\varphi \circ S_i)_{i \in I} \in \ell_1(I, X^*)$.

Notemos também que

$$P(\varphi)(x) = \sum_{i \in I} \varphi((\delta_{ij} x_i)_{j \in I}) = \sum_{i \in I} (\varphi \circ S_i)(x) = T((\varphi \circ S_i)_{i \in I})(x),$$

para todo $x = (x_i)_{i \in I} \in \ell_\infty(I, X)$, isto é, $P(\varphi) = T((\varphi \circ S_i)_{i \in I}) \in \operatorname{Im}(T)$. Isto prova que $\operatorname{Im}(P) \subset \operatorname{Im}(T)$.

Além disso, temos

$$P(T(x^*))(x) = \sum_{i \in I} T(x^*)(S_i(x_i)) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} x_j^*(\delta_{ij} x_i) = \sum_{i \in I} x_i^*(x_i) = T(x^*)(x),$$

para todos $x = (x_i)_{i \in I} \in \ell_\infty(I, X)$ e $x^* = (x_i^*)_{i \in I} \in \ell_1(I, X^*)$. Portanto, P é projeção sobre $\operatorname{Im}(T)$. ■

Nosso interesse na projeção P definida na proposição anterior é devido à seguinte propriedade: se $(\varphi_i)_{i \in \tau}$ é uma família fraca*-nula em $(\ell_\infty(I, X))^*$, então $(P(\varphi_i))_{i \in \tau}$ também é fraca*-nula. O objetivo da próxima proposição é provar esta propriedade. Vamos precisar do seguinte resultado clássico.

Lema 5.3 (Lema de Phillips, [15], pg. 83)**.** *Para cada $n \geq 1$, seja $m_n : \wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ uma medida finitamente aditiva e de variação limitada. Suponhamos que*

$$\lim_{n\to\infty} m_n(A) = 0, \forall A \subset \mathbb{N}.$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |m_n(\{j\})| = 0.$$

Corolário 5.4. *Se $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência fraca*-nula em ℓ_∞^*, então*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_n(e_j) = 0.$$

Demonstração. Dado $n \geq 1$, consideremos a função $m_n : \wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$m_n(A) = \varphi_n(\chi_A), \forall A \subset \mathbb{N}.$$

Vamos mostrar que a sequência $(m_n)_{n\geq 1}$ satisfaz as hipóteses do Lema de Phillips.

Notemos que

$$m_n(A \cup B) = \varphi_n(\chi_{A\cup B}) = \varphi_n(\chi_A + \chi_B) = m_n(A) + m_n(B),$$

para quaisquer $A, B \subset \mathbb{N}$ disjuntos e todo $n \geq 1$. Isto prova que cada m_n é uma medida finitamente aditiva.

Dada $\{A_1, \ldots, A_k\}$ uma partição de $\mathbb{N}$, escrevendo $\beta_j^n = \text{sign}(\varphi_n(\chi_{A_j}))$ para cada $n \geq 1$ e $1 \leq j \leq k$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} |m_n(A_j)| = \sum_{j=1}^{k} |\varphi_n(\chi_{A_j})| = \sum_{j=1}^{k} \beta_j^n \varphi_n(\chi_{A_j}) = \varphi_n\left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j^n \chi_{A_j}\right) \\ \leq \|\varphi_n\| \left\| \sum_{j=1}^{k} \beta_j^n \chi_{A_j} \right\|_\infty \leq \|\varphi_n\|.\end{aligned}$$

Isto prova que m_n tem variação limitada.

Finalmente, notemos que

$$\lim_{n\to\infty} m_n(A) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\chi_A) = 0,$$

para todo $A \subset \mathbb{N}$, pois $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ é fraca*-nula em ℓ_∞^* por hipótese.

Portanto, pelo Lema de Phillips, concluímos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_n(e_j)\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{j=0}^{\infty} m_n(\{j\})\right| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |m_n(\{j\})| = 0,$$

como queríamos. ■

A proposição a seguir é uma extensão natural de [10, Proposição 5.1.1].

Proposição 5.5. *Sejam X um espaço de Banach, I um conjunto infinito e τ um cardinal infinito. Se $(\varphi_i)_{i\in\tau}$ é fraca*-nula em $\ell_\infty(I,X)^*$, então $(P(\varphi_i))_{i\in\tau}$ também é fraca*-nula.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que a tese seja falsa. Então existe $x = (x_j)_{j\in I} \in \ell_\infty(I,X)$ tal que $(P(\varphi_i)(x))_{i\in\tau} \notin c_0(\tau)$, isto é, existe $\varepsilon > 0$ tal que o conjunto

$$\tau_\varepsilon = \{i \in \tau : |P(\varphi_i)(x)| \geq \varepsilon\}$$

é infinito. Fixemos $(i_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em τ_ε tal que $i_m \neq i_n$ se $m \neq n$. Consideremos, para cada $j \in I$, a inclusão usual $S_j : X \to \ell_\infty(I,X)$ dada por

$$S_j(y) = (\delta_{jk} y)_{k\in I}, \forall y \in X.$$

Dado $n \geq 1$, $(\varphi_{i_n}(S_j(x_j)))_{j\in I}$ é absolutamente somável, pela definição de P. Logo, pela Proposição 1.9, existe $I_n \subset I$ infinito enumerável tal que

$$\varphi_{i_n}(S_j(x_j)) = 0, \forall j \in I \setminus I_n.$$

Definindo $I_0 = \bigcup_{n\geq 1} I_n$ e escrevendo $I_0 = \{j_1, \ldots, j_k, \ldots\}$, onde $j_k \neq j_l$ se $k \neq l$, temos

$$P(\varphi_{i_n})(x) = \sum_{j\in I} \varphi_{i_n}(S_j(x_j)) = \sum_{j\in I_0} \varphi_{i_n}(S_j(x_j)) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{i_n}(S_{j_k}(x_{j_k})), \forall n \geq 1$$

e, portanto,

$$\varepsilon \leq |P(\varphi_{i_n})(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{i_n}(S_{j_k}(x_{j_k}))\right|, \forall n \geq 1. \tag{5.1}$$

Por outro lado, consideremos o operador linear contínuo $T_x : \ell_\infty \to \ell_\infty(I, X)$ dado por

$$T_x(\alpha)(j) = \begin{cases} \alpha_k x_{j_k}, & \text{se } j = j_k, \text{ para algum } k \geq 1, \\ 0, & \text{se } j \in I \setminus I_0, \end{cases}$$

para todo $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 1} \in \ell_\infty$. Em particular,

$$T_x(e_k) = S_{j_k}(x_{j_k}), \forall j \geq 1.$$

Notemos que

$$((\varphi_{i_n} \circ T_x)(\alpha))_{n\geq 1} = (\varphi_{i_n}(T_x(\alpha)))_{n\geq 1} \in c_0, \forall \alpha \in \ell_\infty,$$

pois $(\varphi_{i_n})_{n\geq 1}$ é fraca*-nula em $\ell_\infty(I, X)^*$ por hipótese. Isto prova que $(\varphi_{i_n} \circ T_x)_{n\geq 1}$ é fraca*-nula em ℓ_∞^*. Logo, pelo Corolário 5.4, concluímos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{i_n}(S_{j_k}(x_{j_k})) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_{i_n} \circ T_x)(e_k) = 0,$$

o que contradiz (5.1). ■

Pela Proposição 5.5, toda família fraca*-nula $(\varphi_i)_{i\in\tau}$ em $\ell_\infty(I, X)^*$ pode ser escrita como soma de duas famílias fraca*-nulas: $(P(\varphi_i))_{i\in\tau}$ em $\mathrm{Im}(P) \equiv \ell_1(I, X^*)$ e $(\varphi_i - P(\varphi_i))_{i\in\tau}$ em $\mathrm{Ker}(P)$. Seguindo a estratégia usada em [37] e em [10, Seção 5.1], nosso próximo passo é analisar o comportamento de cada uma destas famílias. Isto será feito no Lema 5.6 e no Corolário 5.12.

O lema a seguir é uma extensão natural ao caso não-separável de [37, Lema 4] e [10, Lema 5.1.1], e terá um papel análogo ao do Lema 4.2 no caso $p = \infty$.

Lema 5.6. *Sejam X um espaço de Banach, I um conjunto infinito e τ um cardinal infinito. Seja $(\varphi_i)_{i\in\tau}$ uma família em $\ell_\infty(I, X)^*$ tal que $(P(\varphi_i))_{i\in\tau}$ é fraca*-nula em $\ell_\infty(I, X)^*$.*

Consideremos, para cada $i \in \tau$, $(\varphi_j^i)_{j\in I} \in \ell_1(I, X^*)$ tal que

$$P(\varphi_i)(x) = \sum_{j\in I} \varphi_j^i(x_j), \forall x = (x_j)_{j\in I} \in \ell_\infty(I, X).$$

Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon \subset I$ finito tal que

$$\sum_{j\in I\setminus F_\varepsilon} \|\varphi_j^i\| < \varepsilon, \forall i \in \tau.$$

Demonstração. Suponhamos que a tese seja falsa; então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $F \subset I$ finito, existe $i \in \tau$ satisfazendo

$$\sum_{j\in I\setminus F} \|\varphi_j^i\| \geq \varepsilon.$$

Em particular, para $F_0 = \varnothing$ existe $i_1 \in \tau$ tal que

$$\sum_{j\in I} \|\varphi_j^{i_1}\| \geq \varepsilon.$$

Como $\sum_{j\in I} \|\varphi_j^{i_1}\| < \infty$, existe $F_1 \subset I$ finito e não-vazio tal que

$$\sum_{j\in I\setminus F_1} \|\varphi_j^{i_1}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fazendo $I_1 = I \setminus F_1$, temos

$$\sum_{j\in F_1} \|\varphi_j^{i_1}\| = \sum_{j\in I} \|\varphi_j^{i_1}\| - \sum_{j\in I_1} \|\varphi_j^{i_1}\| > \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{j\in I_1} \|\varphi_j^{i_1}\|.$$

Suponhamos construídos, para algum $n \geq 1$, $i_1, \ldots, i_n \in \tau$ dois a dois distintos e $F_1, \ldots, F_n$ subconjuntos finitos, não-vazios e dois a dois disjuntos de I satisfazendo

$$\sum_{j\in I_k} \|\varphi_j^{i_k}\| < \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{j\in F_k} \|\varphi_j^{i_k}\|,$$

onde $I_k = I \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_k)$, para todo $1 \leq k \leq n$. Por hipótese, existe $i_{n+1} \in \tau$ tal que

$$\sum_{j \in I_n} \|\varphi_j^{i_{n+1}}\| \geq \varepsilon.$$

Como $\sum_{j \in I} \|\varphi_j^{i_{n+1}}\| < \infty$, existe $F_{n+1} \subset I_n$ finito e não-vazio tal que

$$\sum_{j \in I \setminus F_{n+1}} \|\varphi_j^{i_{n+1}}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fazendo $I_{n+1} = I_n \setminus F_{n+1}$, obtemos

$$\sum_{j \in F_{n+1}} \|\varphi_j^{i_{n+1}}\| = \sum_{j \in I_n} \|\varphi_j^{i_{n+1}}\| - \sum_{j \in I_{n+1}} \|\varphi_j^{i_{n+1}}\| > \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{j \in I_{n+1}} \|\varphi_j^{i_{n+1}}\|.$$

Além disso, como

$$\sum_{j \in I_n} \|\varphi_j^{i_k}\| \leq \sum_{j \in I_k} \|\varphi_j^{i_k}\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $1 \leq k \leq n$, temos $i_{n+1} \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$.

Dados $n \geq 1$ e $j \in F_n$, existe $x_j^n \in B_X$ tal que

$$\|\varphi_j^{i_n}\| < |\varphi_j^{i_n}(x_j^n)| + \frac{\varepsilon}{4|F_n|}.$$

Consideremos $z = (z_j)_{j \in I} \in \ell_\infty(I, X)$, onde

$$z_j = \begin{cases} \operatorname{sign}(\varphi_j^{i_n}(x_j^n)) x_j^n, & \text{se } j \in F_n, \text{ para algum } n \geq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então $\|z\|_\infty \leq 1$ e

$$\sum_{j \in F_n} \varphi_j^{i_n}(z_j) = \sum_{j \in F_n} |\varphi_j^{i_n}(x_j^n)| > \sum_{j \in F_n} \|\varphi_j^{i_n}\| - \frac{\varepsilon}{4} > \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq 1. \tag{5.2}$$

Vamos escrever

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \{j_1, \ldots, j_k, \ldots\},$$

onde $j_k \neq j_l$ se $k \neq l$. Notemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{j_k}^{i_n}(z_{j_k})| = \sum_{j\in I} |\varphi_j^{i_n}(z_j)| \leq \sum_{j\in I} \|\varphi_j^{i_n}\| \|z_j\| \leq \sum_{j\in I} \|\varphi_j^{i_n}\| < \infty, \forall n \geq 1.$$

Para cada $n \geq 1$, seja $y_n = (\varphi_{j_k}^{i_n}(z_{j_k}))_{k\geq 1} \in \ell_1$. Afirmamos que $(y_n)_{n\geq 1}$ é fracamente nula em ℓ_1. De fato, dado $\psi = (\alpha_n)_{n\geq 1} \in \ell_1^* \equiv \ell_\infty$, consideremos $(\beta_j)_{j\in I} \in \ell_\infty(I)$, onde

$$\beta_j = \begin{cases} \alpha_k, & \text{se } j = j_k, \text{ para algum } k \geq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, temos

$$\psi(y_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k^n = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{j_k} \varphi_{j_k}^{i_n}(z_{j_k}) = \sum_{j\in I} \varphi_j^{i_n}(\beta_j z_j) = P(\varphi_{i_n})((\beta_j z_j)_{j\in I}) \xrightarrow{n} 0,$$

pois, por hipótese, a sequência $(P(\varphi_{i_n}))_{n\geq 1}$ é fraca*-nula em $\ell_\infty(I,X)^*$. Isto prova que $(y_n)_{n\geq 1}$ é fracamente nula em ℓ_1. Como ℓ_1 é de Schur (Teorema 1.67), concluímos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{j_k}^{i_n}(z_{j_k})| = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k^n| = \|y_n\|_1 \xrightarrow{n} 0$$

e, portanto, existe $N \geq 1$ tal que

$$\sum_{j\in F_N} \varphi_j^{i_N}(z_j) \leq \left| \sum_{j\in F_N} \varphi_j^{i_N}(z_j) \right| \leq \sum_{j\in F_N} |\varphi_j^{i_N}(z_j)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{j_k}^{i_N}(z_{j_k})| < \frac{\varepsilon}{2},$$

o que contradiz (5.2). ■

Para os próximos resultados desta seção, vamos precisar das seguintes definições.

Definição 5.7. Seja κ um cardinal não-enumerável. Uma função $m : \wp(\kappa) \to [0,1]$ é dita *κ-aditiva* se dada $(A_i)_{i\in\kappa}$ uma família de subconjuntos dois a dois disjuntos de κ, temos

$$m\left(\bigcup_{i\in\kappa} A_i\right) = \sum_{i\in\kappa} m(A_i).$$

Definição 5.8 ([33], Definição 10.8)**.** Um cardinal não-enumerável κ é dito *mensurável a valores reais* se existe uma função não-nula e κ-aditiva $m : \wp(\kappa) \to [0, 1]$ que se anula nos subconjuntos unitários de κ.

Sabe-se que a existência de cardinais mensuráveis a valores reais não pode ser estabelecida assumindo os axiomas usuais de ZFC. O menor cardinal mensurável a valores reais, se existir, será denotado por $\mathfrak{m}_r$.

Nosso interesse nestes cardinais se deve às propriedades a seguir.

Proposição 5.9 ([33], Corolário 10.7)**.** *Seja κ o menor cardinal não-enumerável tal que existe $m : \wp(\kappa) \to [0, 1]$ medida σ-aditiva e não-nula que se anula nos subconjuntos unitários de κ. Então m é κ-aditiva. Em particular, $\mathfrak{m}_r \leq \kappa$.*

Proposição 5.10. *Seja I um conjunto não-vazio tal que $|I| < \mathfrak{m}_r$. Se $m : \wp(I) \to \mathbb{R}$ é uma medida σ-aditiva que se anula nos subconjuntos unitários de I, então $m = 0$.*

Demonstração. Faremos a contra-positiva. Suponhamos que exista $m : \wp(I) \to \mathbb{R}$ uma medida σ-aditiva e não nula que se anula nos subconjuntos unitários de I. Como no enunciado da proposição anterior, denotemos por κ o menor cardinal tal que existe $\mu : \wp(\kappa) \to [0, 1]$ medida σ-aditiva e não-nula que se anula nos subconjuntos unitários de κ. Consideremos a medida $m' : \wp(I) \to [0, 1]$ dada por

$$m'(A) = \frac{|m|(A)}{|m|(I)}, \forall A \subset I.$$

m' é uma medida σ-aditiva e não-nula que se anula nos subconjuntos unitários de I e, portanto, $|I| \geq \kappa$. Logo, pela proposição anterior, temos $\mathfrak{m}_r \leq \kappa \leq |I|$, como queríamos. ■

Mais detalhes sobre cardinais mensuráveis a valores reais podem ser encontrados em [24, pg. 972] e [33, 44, 46].

A Proposição 5.10 é essencial para a demonstração do resultado a seguir.

Lema 5.11 ([37], Lema 3)**.** *Sejam X um espaço de Banach e I um conjunto não-vazio com $|I| < \mathfrak{m}_r$. Sejam $(x_n)_{n \geq 1}$ uma sequência fracamente incondicionalmente somável em $\ell_\infty(I, X)$*

e $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ uma sequência fraca-nula em $\ell_\infty(I,X)^*$. Se $P(\varphi_n)=0$, para todo $n\geq 1$, então*

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_n)=0.$$

O Lema 5.11 tem como consequência imediata o Corolário 5.12.

Corolário 5.12. *Sejam X um espaço de Banach, I um conjunto não-vazio com $|I|<\mathfrak{m}_r$ e τ um cardinal infinito. Sejam $(x_i)_{i\in\tau}$ uma família fracamente incondicionalmente somável em $\ell_\infty(I,X)$ e $(\varphi_i)_{i\in\tau}$ uma sequência fraca*-nula em $\ell_\infty(I,X)^*$. Se $P(\varphi_i)=0$, para todo $i\in\tau$, então $(\varphi_i(x_i))_{i\in\tau}\in c_0(\tau)$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $(\varphi_i(x_i))_{i\in\tau}\notin c_0(\tau)$. Então existe $\varepsilon>0$ tal que $\tau_\varepsilon=\{i\in\tau : |\varphi_i(x_i)|\geq\varepsilon\}$ é infinito. Seja $(i_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em τ_ε tal que $i_m\neq i_n$ se $m\neq n$. Como $(x_{i_n})_{n\geq 1}$ é fracamente incondicionalmente somável e $(\varphi_{i_n})_{n\geq 1}$ é fraca*-nula, pelo Lema 5.11 temos

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{i_n}(x_{i_n})=0,$$

o que contradiz o fato de τ_ε ser infinito. ∎

Agora estamos em condições de provar o teorema principal deste capítulo, o Teorema 5.13, que estende ao caso não-separável o Teorema 5.1.

Teorema 5.13. *Dados X um espaço de Banach, I um conjunto não-vazio com $|I|<\mathfrak{m}_r$ e τ um cardinal infinito, temos*

$$c_0(\tau)\overset{c}{\hookrightarrow}\ell_\infty(I,X)\iff c_0(\tau)\overset{c}{\hookrightarrow}X.$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $c_0(\tau)\overset{c}{\hookrightarrow}\ell_\infty(I,X)$. Notemos que se I é finito, então $\ell_\infty(I,X)=X^n$, onde $n=|I|$, e basta aplicarmos o Corolário 3.7. Podemos supor, portanto, que I é infinito.

Pelo Teorema 2.4, existem $(x_i)_{i\in\tau}=((x_j^i)_{j\in I})_{i\in\tau}$ família equivalente à base canônica de $c_0(\tau)$ em $\ell_\infty(I,X)$ e $(\varphi_i)_{i\in\tau}$ família fraca*-nula em $\ell_\infty(I,X)^*$ satisfazendo

$$\varphi_i(x_k)=\delta_{ik},\forall i,k\in\tau.$$

Consideremos, para cada $i \in \tau$, $(\varphi_j^i)_{j\in I} \in \ell_1(I, X^*)$ tal que

$$P(\varphi_i)(x) = \sum_{j\in I} \varphi_j^i(x_j), \forall x = (x_j)_{j\in I} \in \ell_\infty(I, X).$$

Fixemos $T : c_0(\tau) \to \ell_\infty(I, X)$ isomorfismo sobre sua imagem tal que $T(e_i) = x_i$, para todo $i \in \tau$. Notemos que $(x_i)_{i\in\tau}$ é fracamente incondicionalmente somável, pelas Proposições 1.63 e 1.65.

Pela Proposição 5.5, $(P(\varphi_i))_{i\in\tau}$ e $(\varphi_i - P(\varphi_i))_{i\in\tau}$ são ambas fraca*-nulas em $\ell_\infty(I, X)^*$. Portanto, pelo Corolário 5.12, temos $(\varphi_i(x_i) - P(\varphi_i)(x_i))_{i\in\tau} \in c_0(\tau)$. Em particular, o conjunto $G = \{i \in \tau : |\varphi_i(x_i) - P(\varphi_i)(x_i)| \geq \frac{1}{2}\}$ é finito. Escrevendo $\tau_1 = \tau \setminus G$, temos

$$|\varphi_i(x_i) - P(\varphi_i)(x_i)| < \frac{1}{2} \implies -\frac{1}{2} < P(\varphi_i)(x_i) - 1 < \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2} < P(\varphi_i)(x_i) < \frac{3}{2}, \tag{5.3}$$

para todo $i \in \tau_1$.

Como $(P(\varphi_i))_{i\in\tau}$ é fraca*-nula, pelo Lema 5.6 existe $F_0 \subset I$ finito satisfazendo

$$\sum_{j\in I\setminus F_0} \|\varphi_j^i\| < \frac{1}{4\|T\|}, \forall i \in \tau$$

e, portanto,

$$\left|\sum_{j\in I\setminus F_0} \varphi_j^i(x_j^i)\right| \leq \sum_{j\in I\setminus F_0} |\varphi_j^i(x_j^i)| \leq \sum_{j\in I\setminus F_0} \|\varphi_j^i\|\|x_j^i\| \leq \|x_i\|_\infty \sum_{j\in I\setminus F_0} \|\varphi_j^i\| < \frac{1}{4}, \forall i \in \tau.$$

Por outro lado, por (5.3) temos

$$\left|\sum_{j\in I} \varphi_j^i(x_j^i)\right| \geq \sum_{j\in I} \varphi_j^i(x_j^i) = P(\varphi_i)(x_i) > \frac{1}{2}, \forall i \in \tau_1.$$

Logo, F_0 é não-vazio e

$$\begin{aligned}\sum_{j\in F_0}|\varphi_j^i(x_j^i)| \geq \left|\sum_{j\in F_0}\varphi_j^i(x_j^i)\right| &= \left|\sum_{j\in I}\varphi_j^i(x_j^i) - \sum_{j\in I\setminus F_0}\varphi_j^i(x_j^i)\right|\\ &\geq \left|\sum_{j\in I}\varphi_j^i(x_j^i)\right| - \left|\sum_{j\in I\setminus F_0}\varphi_j^i(x_j^i)\right| > \frac{1}{4}, \forall i\in\tau_1.\end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 4.3, existem $j_0\in F_0$ e $\tau_2\subset\tau_1$ satisfazendo $|\tau_2|=|\tau_1|=\tau$ e

$$|\varphi_{j_0}^i(x_{j_0}^i)| > \frac{1}{4|F_0|}, \forall i\in\tau_2.$$

Pelo Teorema 2.4, basta mostrarmos que existe $\tau_3\subset\tau_2$ tal que $|\tau_3|=\tau$, $(x_{j_0}^i)_{i\in\tau_2}$ é equivalente à base canônica de $c_0(\tau_3)$ em X e $(\varphi_{j_0}^i)_{i\in\tau_3}$ é fraca*-nula em X^*.

Seja $S_{j_0}: X\to\ell_\infty(I,X)$ a inclusão usual dada por

$$S_{j_0}(x) = (\delta_{j_0 j}x)_{j\in I}, \forall x\in X.$$

Como $(P(\varphi_i))_{i\in\tau}$ é fraca*-nula, pela Proposição 1.64 existe $M>0$ tal que $M\geq\|P(\varphi_i)\|$, para todo $i\in\tau$. Notemos que

$$\varphi_{j_0}^i(x) = \sum_{j\in I}\varphi_j^i(\delta_{j_0 j}x) = P(\varphi_i)(S_{j_0}(x)), \forall x\in X, \forall i\in\tau \tag{5.4}$$

e, portanto,

$$|\varphi_{j_0}^i(y)| \leq \|P(\varphi_i)\|\|x\| \leq M\|x\|, \forall x\in X, \forall i\in\tau.$$

Logo,

$$\|\varphi_{j_0}^i\| \leq M, \forall i\in\tau.$$

Assim, temos

$$M\|x_{j_0}^i\| \geq \|\varphi_{j_0}^i\|\|x_{j_0}^i\| \geq |\varphi_{j_0}^i(x_{j_0}^i)| > \frac{1}{4|F_0|}, \forall i\in\tau_2,$$

isto é,

$$\|x_{j_0}^i\| \geq \frac{1}{4M|F_0|}, \forall i\in\tau_2.$$

Consideremos $\pi_{j_0} : \ell_\infty(I, X) \to X$ o operador linear contínuo dado por

$$\pi_{j_0}(z) = z_{j_0}, \forall z = (z_j)_{j \in I} \in \ell_\infty(I, X).$$

Então temos

$$\|(\pi_{j_0} \circ T)(e_i)\| = \|\pi_{j_0}(x_i)\| = \|x^i_{j_0}\| > \frac{1}{4M|F_0|} > 0, \forall i \in \tau_2$$

e, portanto, pelo Teorema 2.2, existe $\tau_3 \subset \tau_2$ tal que $|\tau_3| = |\tau_2| = \tau$ e $\pi_{j_0} \circ T|_{c_0(\tau_3)}$ é isomorfismo sobre sua imagem. Logo, $(x^i_{j_0})_{i \in \tau_3} = (\pi_{j_0}(T(e_i))_{i \in \tau_3}$ é equivalente à base canônica de $c_0(\tau_3)$.

Dado $x \in X$, por (5.4) temos

$$(\varphi^i_{j_0}(x))_{i \in \tau_3} = (P(\varphi_i)(S_{j_0}(x)))_{i \in \tau_3} \in c_0(\tau_3),$$

pois $(P(\varphi_i))_{i \in \tau_3}$ é fraca*-nula em $\ell_\infty(I, X)^*$. Isto prova que $(\varphi^i_{j_0})_{i \in \tau_2}$ é fraca*-nula em X^*. Concluímos, portanto, pelo Teorema 2.4, que $c_0(\tau_2) \overset{c}{\hookrightarrow} X$.

A implicação contrária é consequência imediata das Proposições 1.5 e 1.28. ■

Convém observarmos que se não existirem cardinais mensuráveis a valores reais, então o enunciado do Teorema 5.13 é válido para conjuntos de índices I arbitrários.

Capítulo 6

Uma extensão vetorial do Teorema de Banach-Stone via o módulo de convexidade de X^*

Neste capítulo estudamos generalizações do clássico Teorema de Banach-Stone para espaços $C_0(K, X)$. Nossos resultados principais deste capítulo são o Teorema 6.15, que fornece uma nova relação entre os módulos de convexidade de X e de X^*, e o Teorema 6.23, que simultaneamente estende o Teorema de Jarosz (Teorema 6.4) e mostra que o Teorema de Jarosz é uma consequência do Teorema 6.3.

6.1 Um breve panorama histórico

Começamos recordando o enunciado do Teorema de Banach-Stone.

Teorema 6.1 (Teorema de Banach-Stone, [3, 47])**.** *Sejam K, S espaços de Hausdorff localmente compactos. Então $C_0(K)$ e $C_0(S)$ são linearmente isométricos se, e somente se, K e S são homeomorfos.*

D. Amir [2] e M. Cambern [7] independentemente fortaleceram o Teorema de Banach-Stone mostrando que a hipótese de existência de uma isometria entre $C_0(K)$ e $C_0(S)$ pode ser substituída pela existência de um isomorfismo $T : C_0(K) \to C_0(S)$ tal que $\|T\|\|T^{-1}\| < 2$. Mais tarde, Cambern [8] mostrou que 2 é o maior número para o qual o enunciado do

Teorema de Amir-Cambern permanece verdadeiro ao exibir um par de espaços de Hausdorff localmente compactos K e S, onde K é compacto e S é não-compacto, e um isomorfismo $T : C(K) \to C_0(S)$ tal que $\|T\|\|T^{-1}\| = 2$. H. Cohen [13] também exibiu um exemplo onde ambos K e S são compactos.

Vários autores, começando por M. Jerison [34], estudaram o problema de determinar propriedades geométricas de X que permitem generalizações do Teorema de Banach-Stone para espaços $C_0(K, X)$ (veja [11] e suas referências). Nesta direção, enfatizamos o Teorema 6.3, obtido recentemente em [11]. Para enunciá-lo, vamos recordar a definição a seguir.

Definição 6.2 ([22, 41])**.** Dado X um espaço de Banach, a *constante de Schäffer* de X é o parâmetro

$$S(X) = \inf \{\max(\|x + y\|; \|x - y\|) : x, y \in S_X\} .$$

Teorema 6.3 ([11], Teorema 2.1)**.** *Sejam K, S espaços de Hausdorff localmente compactos e X um espaço de Banach. Se existe um isomorfismo $T : C_0(K, X) \to C_0(S, X)$ satisfazendo $\|T\|\|T^{-1}\| < S(X)$, então K e S são homeomorfos.*

Convém observarmos que este resultado estende o Teorema de Amir-Cambern, pois $S(\mathbb{R}) = 2$.

K. Jarosz [32] também investigou a relação entre propriedades geométricas de X^* e a estabilidade do Teorema de Banach-Stone para $C(K, X)$. O principal resultado obtido por Jarosz é o seguinte.

Teorema 6.4 ([32], Teorema 1)**.** *Sejam K, S espaços de Hausdorff compactos e X um espaço de Banach. Se existe um isomorfismo $T : C(K, X) \to C(S, X)$ satisfazendo $\|T\|\|T^{-1}\| \leq \lambda$, onde*

$$\sup\{\|x_1^* - x_2^*\| \ : x_1^*, x_2^* \in X^*,\ \|x_1^* + x_2^*\| = 2,\ \|x_1^*\| \leq \lambda,\ \|x_2^*\| \leq \lambda\} < \frac{4}{3},$$

então K e S são homeomorfos.

Motivado pelos resultados obtidos por Amir e Cambern mencionados anteriormente, o problema a seguir surge naturalmente neste contexto.

Problema 6.5. *O número $\frac{4}{3}$ é o maior número para o qual o enunciado do Teorema 6.4 permanece verdadeiro?*

Além disso, o Teorema 6.3 estendeu todas as generalizações vetoriais do Teorema de Banach-Stone conhecidas até então, com exceção do Teorema 6.4. Assim, também é natural considerarmos o seguinte problema.

Problema 6.6. *O Teorema 6.4 é consequência do Teorema 6.3?*

Nosso objetivo neste capítulo é investigar os Problemas 6.5 e 6.6. Mais precisamente, daremos uma resposta negativa ao Problema 6.5 e resposta positiva ao Problema 6.6. O primeiro passo para resolvermos estes problemas será provar, na próxima seção, uma nova conexão entre os módulos de convexidade de X e de X^* (Teorema 6.15), que possui interesse independente. A seguir, introduziremos a função $J_X : [1, \infty) \to [0, \infty)$ (Definição 6.19), que está intimamente relacionada com o supremo mencionado no enunciado do Teorema 6.4 e com o módulo de convexidade de X. O último passo fundamental será relacionar a função J_{X^*} com a constante de Schäffer de X.

6.2 Uma nova relação entre os módulos de convexidade de X e de X^*

No restante deste capítulo, consideraremos apenas espaços de Banach de dimensão maior ou igual a 2. Recordamos a definição de módulo de convexidade de um espaço de Banach X.

Definição 6.7 ([12])**.** Dado X um espaço de Banach, o *módulo de convexidade* de X é a função $\delta_X : [0, 2] \to [0, 1]$ dada por

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{\|x + y\|}{2} : x, y \in S_X, \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}, \forall \varepsilon \in [0, 2].$$

Nosso objetivo neste seção é provar uma relação conveniente entre os módulos de convexidade de X e de X^* (Teorema 6.15) que será fundamental neste capítulo.

Recordamos primeiramente as seguintes importantes propriedades da função δ_X.

Teorema 6.8 ([20], Proposição 3, [15], pg. 125)**.** *Dados X um espaço de Banach e*

$0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq 2$, *temos*

$$\frac{\delta_X(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1} \leq \frac{\delta_X(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2}.$$

Teorema 6.9 ([38], Teorema Principal)**.** *Dados X um espaço de Banach e $\varepsilon \in [0,2]$, temos*

$$\delta_X(\varepsilon) \leq 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}.$$

Os parâmetros a seguir terão um papel fundamental na demonstração do Teorema 6.15.

Definição 6.10 ([9, 23, 31])**.** Dado X um espaço de Banach, a *constante de James* de X é o parâmetro

$$J(X) = \sup\{\min(\|x+y\|; \|x-y\|) : x, y \in S_X\}.$$

Lembramos que o parâmetro

$$A_2(X) = \frac{1}{2}\sup\{\|x+y\| + \|x-y\| : x, y \in S_X\}$$

foi introduzido por Baronti, Casini e Papini em [4]. É imediato verificar que $A_2(X) \geq J(X)$.

As seguintes proposições relacionam estes conceitos com o módulo de convexidade.

Proposição 6.11 ([23], Corolário 5.5)**.** *Dados X um espaço de Banach e $\varepsilon \in (0,2]$, temos*

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} < \delta_X(\varepsilon) \iff J(X) < \varepsilon.$$

Proposição 6.12 ([4], Proposição 2.2)**.** *Dado X um espaço de Banach, temos*

$$A_2(X) = A_2(X^*) = 1 + \sup\left\{\frac{t}{2} - \delta_X(t) : 0 \leq t \leq 2\right\}.$$

Proposição 6.13 ([4], Proposição 2.4)**.** *Dado X um espaço de Banach, temos*

$$A_2(X) = 1 + \sup\left\{\frac{t}{2} - \delta_X(t) : A_2(X) \leq t \leq 2\right\}.$$

Consideremos agora a função polinomial estritamente crescente

$$q(x) = 32x^3 - 4x^2 + 8x - 5, \forall x \in \mathbb{R}.$$

A única raiz real de q será denotada por C. Mais concretamente, C é o seguinte número (aproximadamente 0.41883):

$$\frac{1}{24}\left(\sqrt[3]{1009 + 84\sqrt{159}} + \sqrt[3]{1009 - 84\sqrt{159}} + 1\right). \tag{6.1}$$

Nosso interesse nesta constante é devido à simples proposição a seguir.

Proposição 6.14. *Nas condições acima, temos*

$$\sqrt{4C^2+1} = C + 1 - \sqrt{C^2 + 2C - 1}.$$

Demonstração. Consideremos primeiramente o polinômio $f(x) = x^2 + 2x - 1$, cujas raízes são $\pm\sqrt{2} - 1$. Como $q(\sqrt{2} - 1) = 176\sqrt{2} - 249 < 0$ e q é estritamente crescente, temos $\sqrt{2} - 1 < C$, isto é, $f(C) > 0$.

Seja $x \geq 0$ satisfazendo $x^2 + 2x - 1 \geq 0$ e

$$\sqrt{x^2 + 2x - 1} = x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1}. \tag{6.2}$$

Elevando ao quadrado ambos os termos da igualdade (6.2), obtemos

$$x^2 + 2x - 1 = x^2 + 1 + 4x^2 + 1 + 2x - 2(x+1)\sqrt{4x^2+1},$$

isto é,

$$2(x+1)\sqrt{4x^2+1} = 4x^2 + 3. \tag{6.3}$$

Elevando ao quadrado novamente ambos os termos da igualdade (6.3), concluímos

$$4(x^2 + 2x + 1)(4x^2 + 1) = 16x^4 + 24x^2 + 9. \tag{6.4}$$

Desenvolvendo a igualdade (6.4), obtemos

$$32x^3 - 4x^2 + 8x - 5 = 0,$$

isto é, $q(x) = 0$. Isto prova que $x = C$ e a demonstração está completa. ■

Agora estamos em condições de provar o Teorema 6.15.

Teorema 6.15. *Dados X um espaço de Banach e $\varepsilon \in (0,2]$, temos*

$$1 - C\varepsilon < \delta_X(\varepsilon) \implies 1 - \frac{\varepsilon}{2} < \delta_{X^*}(\varepsilon).$$

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista $\varepsilon \in (0,2]$ tal que

$$1 - C\varepsilon < \delta_X(\varepsilon) \quad \text{e} \quad 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geq \delta_{X^*}(\varepsilon). \tag{6.5}$$

Pela Proposição 6.11, temos

$$A_2(X^*) \geq J(X^*) \geq \varepsilon$$

e, portanto, pelas Proposições 6.12 e 6.13,

$$\begin{aligned} A_2(X) &= 1 + \sup\left\{\frac{t}{2} - \delta_X(t) : A_2(X) \leq t \leq 2\right\} \\ &= 1 + \sup\left\{\frac{t}{2} - \delta_X(t) : A_2(X^*) \leq t \leq 2\right\} \\ &\leq 1 + \sup\left\{\frac{t}{2} - \delta_X(t) : \varepsilon \leq t \leq 2\right\} \\ &\leq 1 + \sup\left\{\frac{t}{2} - \delta_X(t) : 0 \leq t \leq 2\right\} = A_2(X). \end{aligned}$$

Isto prova que

$$\varepsilon \leq A_2(X^*) = A_2(X) = 1 + \sup\left\{\frac{t}{2} - \delta_X(t) : \varepsilon \leq t \leq 2\right\}.$$

Logo, para cada $n \geq 1$ existe $t_n \in [\varepsilon, 2]$ satisfazendo

$$1 + \frac{t_n}{2} - \delta_X(t_n) \geq \varepsilon - \frac{1}{n},$$

isto é,

$$\delta_X(t_n) \leq 1 + \frac{t_n}{2} - \varepsilon + \frac{1}{n}.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que a sequência $(t_n)_{n\geq 1}$ converge para algum $t_0 \in [\varepsilon, 2]$.

Escrevendo $\lambda = 2/\varepsilon \geq 1$, por (6.5) e pelo Teorema 6.8 temos

$$1 - \frac{2C}{\lambda} < \delta_X\left(\frac{2}{\lambda}\right) \leq \frac{\delta_X(t_n)}{t_n}\frac{2}{\lambda} \leq \left(1 + \frac{t_n}{2} - \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{n}\right)\frac{2}{t_n\lambda}, \forall n \geq 1.$$

Desenvolvendo a desigualdade acima e fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$4 - 2\lambda \leq t_0(2\lambda C + \lambda - \lambda^2) \leq 2(2\lambda C + \lambda - \lambda^2),$$

isto é,

$$\lambda^2 - 2(C+1)\lambda + 2 \leq 0. \tag{6.6}$$

Consideremos o polinômio $Q(x) = x^2 - 2(C+1)x + 2$, cujo discriminante é

$$\Delta = 4(C^2 + 2C - 1) > 0.$$

As raízes de Q são

$$x = C + 1 \pm \sqrt{C^2 + 2C - 1}. \tag{6.7}$$

De acordo com (6.5) e com o Teorema 6.9, temos

$$1 - \frac{2C}{\lambda} < \delta_X\left(\frac{2}{\lambda}\right) \leq 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}},$$

isto é,

$$\lambda < \sqrt{4C^2 + 1}. \tag{6.8}$$

Por (6.8) e pela Proposição 6.14, concluímos

$$\lambda < \sqrt{4C^2 + 1} = C + 1 - \sqrt{C^2 + 2C - 1}.$$

Portanto, por (6.7), temos

$$\lambda^2 - 2(C+1)\lambda + 2 = Q(\lambda) > 0.$$

Isto contradiz a desigualdade (6.6) e a demonstração está completa. ∎

Convém observarmos que a Proposição 6.11 e o Teorema 6.15 fornecem uma nova conexão entre o módulo de convexidade de X e a constante de James de X^*, a saber,

$$1 - C\varepsilon < \delta_X(\varepsilon) \implies J(X^*) < \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon \in (0, 2]$.

O próximo corolário é uma consequência imediata do Teorema 6.15 e será muito útil mais adiante. Recordamos o seguinte resultado.

Proposição 6.16 ([35], Corolário 5.ii)**.** *Dado X um espaço de Banach, temos*

$$J(X) = J(X^{**}).$$

Corolário 6.17. *Dados X um espaço de Banach e $\varepsilon \in (0, 2]$, temos*

$$1 - C\varepsilon < \delta_{X^*}(\varepsilon) \implies 1 - \frac{\varepsilon}{2} < \delta_X(\varepsilon).$$

Demonstração. Por hipótese e pelo Teorema 6.15, temos $1 - \frac{\varepsilon}{2} < \delta_{X^{**}}(\varepsilon)$. Logo, pelas Proposições 6.11 e 6.16, obtemos $J(X) = J(X^{**}) < \varepsilon$. Aplicando novamente a Proposição 6.11, concluímos $1 - \frac{\varepsilon}{2} < \delta_X(\varepsilon)$, como queríamos. ∎

Não sabemos se C é a maior constante que torna o enunciado do Teorema 6.15 verdadeiro. Estudando este problema, a melhor cota superior que obtivemos foi a seguinte.

Proposição 6.18. *Seja $c \in (0, \frac{1}{2})$ um número real satisfazendo*

$$1 - c\varepsilon < \delta_X(\varepsilon) \implies 1 - \frac{\varepsilon}{2} < \delta_{X^*}(\varepsilon),$$

para todo espaço de Banach X de dimensão maior ou igual a 2 e todo $\varepsilon \in (0,2]$. Então

$$c \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13-2\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}} \approx 0,46706.$$

Demonstração. Seja $X = \ell_2 - \ell_1$ o espaço de Day-James (veja [35]), isto é, X é o espaço $\mathbb{R}^2$ munido da norma

$$\|(x,y)\|_{2,1} = \begin{cases} \|(x,y)\|_2, & \text{se } xy \geq 0, \\ \|(x,y)\|_1, & \text{se } xy \leq 0. \end{cases}$$

Por [25, pg. 60], sabemos que

$$\delta_X(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq \sqrt{2}, \\ 1 - \sqrt{2-\varepsilon^2/2}, & \text{se } \sqrt{2} \leq \varepsilon \leq \sqrt{8/3}, \\ 1 - \sqrt{1-\varepsilon^2/8}, & \text{se } \sqrt{8/3} \leq \varepsilon \leq 2. \end{cases}$$

Seja $\varepsilon = 1 + 1/\sqrt{2}$. Como $J(X^*) = \varepsilon$ (veja [1, p. 1282]), pela Proposição 6.11 temos

$$1 - \varepsilon/2 \geq \delta_{X^*}(\varepsilon).$$

Por hipótese, temos

$$1 - c\varepsilon \geq \delta_X(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{8}},$$

isto é,

$$c \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13-2\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}},$$

como queríamos. ∎

6.3 A função J_X

A definição a seguir desempenhará um papel central neste capítulo.

Definição 6.19. Dados X um espaço de Banach e $\lambda \in [1, \infty)$, definimos

$$J_X(\lambda) = \sup\{\|x_1 - x_2\| \,:\, x_1, x_2 \in X,\ \|x_1 + x_2\| = 2,\ \|x_1\| \leq \lambda,\ \|x_2\| \leq \lambda\}.$$

A motivação para a definição da função J_X vem do supremo mencionado no enunciado do Teorema 6.4.

Nosso próximo passo é relacionar as funções δ_X e J_X de acordo com a Proposição 6.21. Vamos usar a seguinte expressão equivalente de δ_X.

Lema 6.20 ([14], Lema 6)**.** *Dados X um espaço de Banach e $\varepsilon \in [0, 2]$, temos*

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x + y\|}{2} : x, y \in B_X, \|x - y\| = \varepsilon\right\}.$$

Proposição 6.21. *Dados X um espaço de Banach e $\lambda \in [1, \infty)$, temos*

$$J_X(\lambda) = 2\lambda\left(1 - \delta_X\left(\frac{2}{\lambda}\right)\right).$$

Demonstração. Fixemos $x_1, x_2 \in X$ satisfazendo $\|x_1\| \leq \lambda, \|x_2\| \leq \lambda$ e $\|x_1 + x_2\| = 2$. Escrevendo $x_1' = \frac{x_1}{\lambda}$ e $x_2' = \frac{x_2}{\lambda}$, temos $x_1', x_2' \in B_X$ e $\|x_1' - (-x_2')\| = \|x_1' + x_2'\| = \frac{2}{\lambda}$. Portanto, pelo Lema 6.20, temos

$$\delta_X\left(\frac{2}{\lambda}\right) \leq 1 - \frac{\|x_1' - x_2'\|}{2},$$

isto é,

$$\|x_1 - x_2\| = \lambda\|x_1' - x_2'\| \leq 2\lambda\left(1 - \delta_X\left(\frac{2}{\lambda}\right)\right).$$

Isto prova que

$$J_X(\lambda) \leq 2\lambda\left(1 - \delta_X\left(\frac{2}{\lambda}\right)\right).$$

Por outro lado, sejam $x, y \in S_X$ tais que $\|x - y\| = \frac{2}{\lambda}$. Escrevendo $x' = \lambda x$ e $y' = \lambda y$, temos $\|x'\| = \|y'\| = \lambda$ e $\|x' - y'\| = 2$ e, portanto,

$$\lambda\|x + y\| = \|x' + y'\| \leq J_X(\lambda),$$

isto é,

$$1 - \frac{J_X(\lambda)}{2\lambda} \leq 1 - \frac{\|x+y\|}{2}.$$

Pelo Lema 6.20, obtemos

$$1 - \frac{J_X(\lambda)}{2\lambda} \leq \delta_X\left(\frac{2}{\lambda}\right),$$

ou seja,

$$J_X(\lambda) \geq 2\lambda\left(1 - \delta_X\left(\frac{2}{\lambda}\right)\right),$$

como queríamos. ■

6.4 Uma generalização do Teorema de Banach-Stone via a função J_{X^*}

Recordamos a seguinte relação entre as constantes de James e de Schäffer.

Proposição 6.22 ([22], Teorema 2.5)**.** *Dado X um espaço de Banach, temos $J(X)S(X) = 2$.*

Agora estamos em condições de provar o Teorema 6.23. Vamos escrever $r = 4C$, onde C é, como antes, o número dado em (6.1). Notemos que $r > \frac{4}{3}$ e, portanto, o Teorema 6.23 estende o Teorema de Jarosz.

Teorema 6.23. *Sejam K, S espaços de Hausdorff localmente compactos e X um espaço de Banach. Se existe um isomorfismo $T : C_0(K, X) \to C_0(S, X)$ satisfazendo $\|T\|\|T^{-1}\| \leq \lambda$, onde $J_{X^*}(\lambda) < r$, então K e S são homeomorfos.*

Demonstração. Como $J_{X^*}(\lambda) < r = 4C$, pela Proposição 6.21 temos

$$1 - C\left(\frac{2}{\lambda}\right) < \delta_{X^*}\left(\frac{2}{\lambda}\right).$$

Aplicando o Corolário 6.17 obtemos

$$1 - \frac{1}{\lambda} < \delta_X\left(\frac{2}{\lambda}\right),$$

isto é,

$$J(X) < \frac{2}{\lambda},$$

pela Proposição 6.11. Finalmente, pela Proposição 6.22, concluímos

$$\|T\|\|T^{-1}\| \leq \lambda < \frac{2}{J(X)} = S(X).$$

Portanto, pelo Teorema 6.3, K e S são homeomorfos, como queríamos. ■

Não sabemos se o enunciado do Teorema 6.23 permanece verdadeiro, em geral, se substituirmos r por 2. No entanto, temos o seguinte resultado.

Teorema 6.24. *Sejam K, S espaços de Hausdorff localmente compactos e X um espaço de Banach tal que $J(X) \leq J(X^*)$. Se existe um isomorfismo $T : C_0(K, X) \to C_0(S, X)$ satisfazendo $\|T\|\|T^{-1}\| \leq \lambda$, onde $J_{X^*}(\lambda) < 2$, então K e S são homeomorfos.*

Demonstração. Como $J_{X^*}(\lambda) < 2$, pela Proposição 6.21 temos

$$1 - \frac{1}{\lambda} < \delta_{X^*}\left(\frac{2}{\lambda}\right).$$

Aplicando a Proposição 6.11, obtemos

$$J(X^*) < \frac{2}{\lambda}$$

e, portanto,

$$\|T\|\|T^{-1}\| \leq \lambda < \frac{2}{J(X^*)} \leq \frac{2}{J(X)} = S(X).$$

Logo, novamente pelo Teorema 6.3, K e S são homeomorfos. ■

O exemplo a seguir mostra que 2 é o maior número que torna o enunciado do Teorema 6.24 verdadeiro.

Exemplo 6.25. Fixemos $p \in (2, \infty)$ e seja $X = \ell_p$. Então $X^* \equiv \ell_q$, onde $q \in (1, 2)$ é o expoente conjugado de p, e por [22, Teorema 3.1] sabemos que

$$J(\ell_p) = J(\ell_q) = 2^{\frac{1}{q}}.$$

Como $1 < q < 2$, por [28, Teorema 2] temos a seguinte fórmula implícita para δ_{ℓ_q}:

$$\left(1 - \delta_{\ell_q}(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}\right)^q + \left|1 - \delta_{\ell_q}(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}\right|^q = 2, \forall \varepsilon \in (0, 2]. \tag{6.9}$$

Se $\lambda \geq 1$ satisfaz $J_{\ell_q}(\lambda) = 2$, então pela Proposição 6.21 temos

$$\delta_{\ell_q}\left(\frac{2}{\lambda}\right) = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

e, portanto, por (6.9) obtemos $\lambda = 2^{\frac{1}{p}}$.

Consideremos ℓ_p^2 munido da norma do máximo. Seja $T : \ell_p^2 \to \ell_p$ o operador linear dado por

$$T(x, y) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots)_{n \geq 1},$$

para todos $x = (x_n)_{n\geq 1}, y = (y_n)_{n\geq 1} \in \ell_p$. É imediato verificar que T é bijetor e sua inversa é a função $T^{-1} : \ell_p \to \ell_p^2$ dada por

$$T^{-1}(z) = ((z_{2n-1})_{n\geq 1}, (z_{2n})_{n\geq 1}),$$

para todo $z = (z_n)_{n\geq 1} \in \ell_p$. Vamos estimar as normas de T e de sua inversa.

Notemos primeiramente que

$$\|T^{-1}(z)\|_\infty = \max(\|(z_{2n-1})_{n\geq 1}\|_p \,;\, \|(z_{2n})_{n\geq 1}\|_p) \leq \|z\|_p,$$

para todo $z = (z_n)_{n\geq 1} \in \ell_p$. Isto prova que $\|T^{-1}\| \leq 1$.

Por outro lado, dados $x = (x_n)_{n\geq 1}, y = (y_n)_{n\geq 1} \in \ell_p$ temos

$$\|T(x, y)\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p = \|x\|_p^p + \|y\|_p^p \leq 2\|(x, y)\|_\infty^p,$$

isto é,

$$\|T(x, y)\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}} \|(x, y)\|_\infty.$$

Portanto, $\|T\| \leq 2^{\frac{1}{p}}$.

Sejam $K = \{1, 2\}$ e $S = \{1\}$ espaços discretos. Pela Proposição 1.33, podemos tomar isometrias lineares sobrejetoras $I_1 : C(K,X) \to \ell_p^2$ e $I_2 : \ell_p \to C(S,X)$ e definir

$$T' = I_2 \circ T \circ I_1 : C(K,X) \to C(S,X).$$

Então T' é um isomorfismo de $C(K,X)$ sobre $C(S,X)$ que satisfaz

$$\|T'\|\|(T')^{-1}\| \leq \|T\|\|T^{-1}\| \leq 2^{\frac{1}{p}}$$

e, além disso, $J_{\ell_q}(2^{\frac{1}{p}}) = 2$. Contudo, é claro que K e S não são homeomorfos neste caso.

Convém observarmos que a desigualdade $J(X) \leq J(X^*)$ não vale em geral (veja [35, 40, 48]).

Bibliografia

[1] J. Alonso and E. Llorens-Fuster, *Geometric mean and triangles inscribed in a semicircle in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **340** (2008), 1271–1283.

[2] D. Amir, *On isomorphisms of continuous function spaces*, Israel J. Math. **3** (1965), 205–210.

[3] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warsaw, 1933.

[4] M. Baronti, E. Casini, and P. L. Papini, *Triangles inscribed in a semicircle, in Minkowski planes, and in normed spaces*, J. Math. Anal. Appl. **252** (2000), 124–146.

[5] F. Bombal, *Distinguished Subsets in Vector Sequence Spaces*, Progress in Functional Analysis, Proceedings of the Peñíscola Meeting on occasion of 60th birthday of M. Valdivia (Edited by J. Bonet et al.), Elsevier Science Publishers. (1992), 293–306.

[6] L. Burlando, *On subspaces of direct sums of infinite sequences of Banach spaces*, Atti Accad. Ligure Sci. Lett. **46** (1989), 96–105.

[7] M. Cambern, *On isomorphisms with small bound*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 1062–1066.

[8] ———, *Isomorphisms of $C_0(Y)$ onto $C(X)$*, Pacific J. Math. **35** (1970), 307–312.

[9] E. Casini, *About some parameters of normed linear spaces*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **80** (1986), 11–15.

[10] P. Cembranos and J. Mendoza, *Banach Spaces of Vector-Valued Functions*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.

[11] F. C. Cidral, E. M. Galego, and M. A. Rincón-Villamizar, *Optimal extensions of the Banach-Stone theorem*, J. Math. Anal. Appl. **430** (2015), 193–204.

[12] J. A. Clarkson, *Uniformly Convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 396–414.

[13] H. B. Cohen, *A bound-two isomorphism between $C(X)$ Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **50** (1975), 215–217.

[14] J. Daneš, *On local and global moduli of convexity*, Comment. Math. Univ. Carolinae **17** (1976), 413–420.

[15] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Graduate texts in Math. n. 92, Springer-Verlag, 1984.

[16] J. Diestel and J. J. Uhl Jr., *Vector Measures*, Mathematical Surveys 15, American Mathematical Society, 1977.

[17] G. Emmanuele, *On Banach spaces containing complemented copies of c_0*, Extracta Mathematicae **3** (1988), no. 3, 98–100.

[18] R. Engelking, *General Toplogy*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[19] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, and V. Zizler, *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2010.

[20] T. Figiel, *On the moduli of convexity and smoothness*, Studia Math. **56** (1976), 121–155.

[21] E. M. Galego and J. N. Hagler, *Copies of $c_0(\Gamma)$ in $C(K, X)$ spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 3843–3852.

[22] J. Gao and K. S. Lau, *On the geometry of spheres in normed linear spaces*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **48** (1990), 101–112.

[23] ———, *On two classes of Banach spaces with uniform normal structure*, Studia Math. **99** (1991), 41–56.

[24] R. J. Gardner and W. F. Pfeffer, *Borel Measures*, in Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen and J. Vaughan (eds.), North-Holland, 1984.

[25] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[26] A. S. Granero, *On the complemented subspaces of $c_0(I)$*, Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena **96** (1998), 35–36.

[27] P. Hájek, V. M. Santalúcia, J. Vanderwerff, and V. Zizler, *Biorthogonal Systems in Banach Spaces*, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag New York, 2008.

[28] O. Hanner, *On the uniform convexity of L^p and ℓ^p*, Ark. Mat. **3** (1956), 239–244.

[29] W. Hensgen, *A simple proof of Singer's representation theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 3211–3212.

[30] R. Hodel, *Cardinal Functions I*, in Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen and J. Vaughan (eds.), North-Holland, 1984.

[31] R. C. James, *Uniformly non-square Banach spaces*, Ann. of Math. **80** (1964), 542–550.

[32] K. Jarosz, *A generalization of the Banach-Stone theorem*, Studia Math. **73** (1982), 33–39.

[33] T. Jech, *Set Theory, The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2003.

[34] M. Jerison, *The space of bounded maps into a Banach space*, Ann. of Math. **52** (1950), 309–327.

[35] M. Kato, L. Maligranda, and Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach Spaces*, Studia Math. **144** (2001), 275–295.

[36] H. E. Lacey and S. J. Bernau, *Characterizations and classifications of some classical Banach spaces*, Advances in Math. **12** (1974), 367–401.

[37] D. Leung and F. Räbiger, *Complemented copies of* c_0 *in* ℓ^∞*-sums of Banach spaces*, Illinois J. Math. **34** (1990), no. 1, 52–58.

[38] G. Nordlander, *The modulus of convexity in normed linear spaces*, Ark. Mat. **4** (1960), 15–17.

[39] H. P. Rosenthal, *On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory*, Studia Math. **37** (1970), 13–36.

[40] K-S. Saito, M. Sato, and R. Tanaka, *When does the equality* $J(X^*) = J(X)$ *hold for a two-dimensional Banach space X?*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **31** (2015), 1303–1314.

[41] J. J. Schäffer, *Geometry of Spheres in Normed Spaces*, M. Dekker, 1976.

[42] T. Schlumprecht, *Limitierte Mengen in Banachräume*, Ph.D. thesis, Ludwig Maximilians Universität, München, 1988.

[43] Z. Semadeni, *Banach spaces of continuous functions*, Vol. I. Monografie Matematyczne, Tom 55, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1971.

[44] J. Silver, *The consistence of the GCH with the existence of a measurable cardinal*, Proc. Symposia in Pure Mathematics, Vol. 13, Part 1, D. S. Scott (ed.), American Mathematical Society, Providence, 1971.

[45] I. Singer, *Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen vol. 171, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1970.

[46] R. M. Solovay, *Real-valued measurable cardinals*, Proc. Symposia in Pure Mathematics, Vol. 13, Part 1, D. S. Scott (ed.), American Mathematical Society, Providence, 1971.

[47] M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 375–481.

[48] C. S. Yang and H. Y. Li, *The James constant for the* $\ell_3 - \ell_1$ *space*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **32** (2016), 1075–1079.