Probabilidades de transição e fundamentos de geometria diferencial generalizada

Paulo Cristiano Queiroz

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans

São Paulo, 5 de outubro de 2023

Probabilidades de transição e fundamentos de geometria diferencial generalizada

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 07/08/2023. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatástica da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans (orientador) - MAT-IME-USP
- Prof. Dr. Raul Antonio Ferraz (examinador interno) - MAT-IME-USP
- Prof. Dr. Wagner de Oliveira Cortes (examinador externo) - UFRGS
- Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo (examinador externo) - UFSJ
- Prof. Dr. Euripedes Carvalho da Silva (examinador externo) - IFCE

A minha filha Cecília Queiroz.

"Na moderação, fixa-se o âmago deste trabalho, aqui com importância matemática.
Para a vida, imprescindível".

Agradecimentos

No primeiro parágrafo deste texto, desejo registrar, para que se torne inapagável, a transcrição mais significativa dos meus diálogos com Deus, que precederam cada um dos meus dias no instituto: “Deus, bom dia. Agradeço por cuidar da minha filha enquanto aqui me encontro; sou grato, também, por cuidar de mim e dos membros da minha família. [...] Peço que nos proteja da injustiça, da humilhação, do perigo e da maldade que possam vir das mãos dos homens.” É em virtude da atenção concedida a essas súplicas que manifesto minha gratidão ao Criador, àquele que é benevolente e deseja nosso bem-estar, e a mais ninguém. Além disso, agradeço por me ter permitido escrever esta obra, abraçando, sem exceção, todas as vicissitudes que surgiram ao longo deste percurso, desde as tormentas e desilusões em momentos de adversidade até as celebrações que brindaram meu êxito.

Minha gratidão mais bela é dirigida à minha filha, Cecília, por ela acreditar que sou o cara mais incrível do mundo, por me pintar com orgulho e por me fazer sentir como é bom ser luz na vida dela. Tudo o que sou, tudo o que posso dar, pertence a você, minha pequena marrentinha; amo você primeiro, e todo o mais, só vou amar depois.

Manifesto igualmente meu agradecimento à minha família. À minha esposa, Dayane Carvalho, que cuidou com amor e dedicação da nossa preciosa filha, e aos meus pais, Maria do Rosário e José Lobo, aos quais devo tudo, especialmente meus valores e virtudes. Sou grato a todos os demais membros da família, mesmo àqueles que não estão fisicamente presentes por ora. Sinto-me abençoado por ter sido colocado por Deus em meio a todos vocês.

Meus amigos, embora escassos em número, são inigualáveis em qualidade. Sem vocês, as noites de sábado seriam destituídas de alegria, e a vida careceria de beleza e de sua plenitude. A vocês também sou grato.

Quero expressar minha gratidão a dona Rosa Di Nizo Moscaritolo e sua adorável família. Durante meu doutorado, dona Rosa gentilmente me recebeu em sua casa em São Paulo, sem me conhecer previamente, e me acolheu como um filho. Seus deliciosos pratos italianos eram presença constante, e ela se tornou minha referência materna nesta cidade. Foi como se eu nunca tivesse saído de perto da minha mãe. A generosidade e a gentileza que ela demonstrou constituem um dos maiores tesouros que já tive a sorte de encontrar.

Não posso deixar de expressar meu profundo agradecimento ao meu orientador, o Prof. Orlando Stanley Juriaans. Mais do que um guia, Orlando tornou-se um amigo, daqueles que sempre nos inspiram sobre como agir em circunstâncias cruciais, fornecendo orientações e auxiliando na transposição dos obstáculos. Orientadores apontam o caminho, mas amigos genuínos não só mostram a direção como também caminham ao nosso lado, compartilhando o fardo dos desafios, permanecendo disponíveis quando mais precisamos deles e nos tratando com igualdade. Orlando esteve presente desde o começo, durante todo o trajeto e continuará a ser uma influência valiosa no futuro. Agradeço pelas suas orientações acadêmicas e pelas envolventes conversas que tivemos sobre as singularidades do universo e da vida.

Agradeço também aos membros da banca por avaliarem e contribuírem para uma melhor apresentação destes resultados. Todas as sugestões foram por nós muito apreciadas.

Por último, expresso minha gratidão ao Centro de Ciências de Balsas (CCBL) e à Universidade Federal do Maranhão (UFMA) por me concederem a oportunidade de realizar este doutorado. Agradeço também ao Instituto de Matemática e Estatística (IME-USP) e à Universidade de São Paulo (USP) por me receberem de braços abertos e contribuírem significativamente para a minha formação.

A todos vocês, minha sincera e profunda gratidão.

Resumo

Paulo Cristiano Queiroz. **Probabilidades de transição e fundamentos de geometria diferencial generalizada**. Tese de Doutorado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Estudamos probabilidades de transição de operadores generalizados como introduzido por Colombeau e Gsponer e as associamos ao conceito de suporte para firmar este último como uma potente ferramenta para transportar informações para o ambiente clássico quando problemas de realidade física são modelados no ambiente generalizado. Também analisamos este problema sob o ponto de vista das funções quase periódicas de H. Bohr e desenvolvemos ferramentas adequadas para o cálculo do valor médio. Revisitamos exemplos da literatura e exibimos os cálculos. Isto pode contribuir com o estudo de probabilidades de transição no espaço de Fock como originalmente abordado por estes autores. Construir ambientes que possam lidar com singularidades e não linearidades é fundamental para encontrar soluções de certas equações diferenciais. Em tais ambientes, infinitesimais e infinitos devem coexistir e o colapso de seus encontros deve ser analisado por ferramentas apropriadas. Nesse sentido, mostramos que uma variedade Riemanniana M pode ser discretamente mergulhada em uma variedade generalizada M^*, nesta última existem infinitesimais, sua estrutura subjacente contém infinitos, singularidades desaparecem, produto de distribuições faz sentido e problemas em M podem ser levantados para M^*. Tudo isto é feito no intitulado ambiente full, o que nos permitiu uma conexão a uma teoria global existente apresentando um teorema de mergulho de $\overline{\mathbb{K}}$-álgebras $\kappa : \hat{\mathcal{G}}(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M^*, \widetilde{\mathbb{R}}_f)$. Também provamos um teorema de ponto fixo que pode ser usado neste contexto. Estabelecemos assim os fundamentos de uma geometria diferencial generalizada muito similar a teoria clássica. Nossa teoria nos permite definir o espaço-tempo generalizado e usá-lo para sugerir explicações para fenômenos no espaço-tempo clássico. Por fim, construímos exemplos de ações parciais de grupos no anel dos números generalizados $\overline{\mathbb{R}}$ como um ensaio para estabelecer um ponto de partida desta teoria para os chamados conjuntos internos fortes.

Palavras-chave: Operadores generalizados, Probabilidades de transição, Suporte, Funções quase periódicas, Geometria diferencial generalizada, Ações parciais.

Abstract

Paulo Cristiano Queiroz. **Transition probabilities and foundations of generalized differential geometry**. Ph.D. thesis. Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2023.

We studied transition probabilities of generalized operators as introduced by Colombeau and Gsponer and associated them with the concept of support to establish the latter as a powerful tool for carrying information to the classical setting when problems of physical reality are modeled in the generalized environment. We also analyzed this problem from the perspective of H. Bohr's almost periodic functions and developed suitable tools for calculating the mean value. We revisited examples from the literature and demonstrated the calculations. This can contribute to the study of transition probabilities in Fock space as originally approached by these authors. Constructing environments that can handle singularities and non-linearities is crucial for finding solutions to certain differential equations. In such environments, infinitesimals and infinities must coexist, and the collapse of their encounters must be analyzed using appropriate tools. In this sense, we show that a Riemannian manifold M can be discretely embedded in a generalized manifold M^*, in which infinitesimals exist, its underlying structure contains infinities, singularities vanish, the product of distributions makes sense, and problems in M can be lifted to M^*. All of this is done in the so-called full environment, which allowed us to establish a connection to an existing global theory by presenting a embedding theorem of $\overline{\mathbb{K}}$-algebras $\kappa : \hat{\mathcal{G}}(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M^*, \widetilde{\mathbb{R}}_f)$. We also proved a fixed-point theorem that can be used in this context. Thus, we established the foundations of a generalized differential geometry that is very similar to the classical theory. Our theory allows us to define the generalized space-time and use it to suggest explanations for phenomena in classical space-time. Finally, we constructed examples of partial actions of groups on the ring of generalized numbers $\overline{\mathbb{R}}$ as an attempt to establish a starting point for this theory concerning the so-called strongly internal sets.

Keywords: Generalized operators, Transition probabilities, Support, Almost periodic functions, Generalized differential geometry, Partial actions.

Sumário

Introdução

É apropriado começar apresentando a álgebra das funções generalizadas de Colombeau como um conjunto que contém o espaço das distribuições, e que por ser uma álgebra permite um produto entre elas. A princípio, isto nos leva a um intrigante desconforto devido ao afamado Teorema da Impossibilidade de Schwartz [Sch54], publicado por L. Schwartz em 1954, e que trata da impossibilidade de se multiplicar distribuições nas condições mínimas que devemos esperar de uma boa operação produto, mas tal incômodo já está muito bem esclarecido nas referências [Kun96],[CG08], [ACC+15], [JFAC+17], [Gsp08], [Col07a] e [ACCJ16]. Em seu trabalho, Schwartz lista propriedades que um bom produto de distribuições deve satisfazer, assume a existência e chega a uma contradição. É uma prova relativamente simples, mas muito importante, pois apontava para o fato de que as distribuições [Sch66], que já eram uma potente ferramenta para lidar com EDO's lineares, veja [Ehr55], [Ehr54], [Mal56], [Mal53], [Mal54] e [Lew57], não tinham o mesmo poder com as EDO's não-lineares. Isto mais tarde, mostrou-se ser um grande equívoco. O teorema afirma que não pode existir uma álgebra $(\mathcal{A}(\mathbb{R}), +, \circ)$ comutativa e associativa onde:

1. $D'(\mathbb{R})$ está linearmente mergulhado em $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ e $f \equiv 1$ é a unidade em $\mathcal{A}(\mathbb{R})$;
2. existe um operador de derivação ∂ em $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ que é linear e satisfaz a regra de Leibniz;
3. a restrição de ∂ a $D'(\mathbb{R})$ coincide com a derivação usual;
4. a restrição de $\circ$ a $C(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R})$ coincide com o produto pontual de funções.

Este teorema foi por anos mal interpretado, talvez pela escolha inadequada de seu nome, ou por outro motivo que desconhecemos, a questão é que ele mostrava apenas que não se pode combinar, sem algum controle ou restrições, a diferenciação, o produto de funções contínuas e objetos irregulares da física como a função de Heaviside e a Delta de Dirac.

Uma álgebra satisfazendo 2 é chamada uma álgebra diferencial. Assim, o teorema nos diz que não pode haver uma álgebra associativa, comutativa e diferencial contendo o espaço das distribuições e preservando o produto de funções contínuas. O mesmo continua válido se substituirmos $C(\mathbb{R})$ por $C^k(\mathbb{R})$ em 4. Contudo, pode-se preservar o produto das funções $C^\infty(\mathbb{R})$ e isto foi mostrado originalmente pelo matemático francês Jean François Colombeau, [Col83], [Col84] e [Col85]. Uma álgebra satisfazendo as propriedades acima, substituindo $C(\mathbb{R})$ por $C^\infty(\mathbb{R})$ em 4, é extremamente rica em informações e propriedades, e extrapolam pelos motivos óbvios as limitações do ambiente linear D'. É esta a álgebra $\mathcal{G}$ das funções generalizadas de Colombeau, [Col90], [Col13], [Col92], [AB91], [Bia06], [Chi99], [Ego90],[GFKS01], [AFJ06], [AFJ09], [AJOS08], [AGJ13], [AFJ05], [OK99] e [Sca00].

Ainda sem o uso do rigor, vamos agora para uma descrição mais física de $\mathcal{G}$ e também bastante apropriada para os fins deste trabalho. Este ponto de vista é devido a Colombeau e colaboradores [JFAC⁺17].

Considere as duas igualdades abaixo onde H denota a função de Heaviside, a saber, $H(x) = 0$ se $x < 0$, $H(x) = 1$ se $x > 0$ e $H(0)$ não é especificado. A primeira

$$\int_{\mathbb{R}} (H^2(x) - H(x))\psi(x)dx = 0, \quad \forall\ \psi \in D(\mathbb{R}), \tag{1}$$

e a segunda

$$\int_{\mathbb{R}} (H^2(x) - H(x))H'(x)dx = -\frac{1}{6}. \tag{2}$$

A equação 1 é intuitiva se considerarmos $H^2(0) - H(0)$ limitado. Quanto a equação 2, lembre que para a física, a função de Heaviside é a idealização de uma função suave que salta de 0 para 1 em um intervalo muito pequeno ao redor de 0. Portanto naturalmente esta integral é igual a $\left(\frac{H^3}{3} - \frac{H^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$ que por sua vez é igual a $-\frac{1}{6}$. Considere um ambiente em que valham 1 e 2, pela idealização de H, tal ambiente é necessário para à física. Agora note que 1 nos fornece $H^2 - H = 0$, isto é um resultado básico em teoria de distribuições (é a análise clássica), enquanto que 2 nos fornece $H^2 - H \neq 0$. Esta contradição pode prontamente ser justificada pelo resultado de Schwartz uma vez que 2 trata da integral de um produto de distribuições, lembre aqui que $\delta = H'$, onde δ é a função delta de Dirac, veja [DK]. Mas como já foi dito, um ambiente em que 1 e 2 sejam compatíveis é importante se quisermos observar alguma realidade física. Nesse sentido, o caminho para se atingir esta compatibilidade é um ambiente matemático contendo o espaço das distribuições de modo que $H^2 - H$ não seja zero, mas sim uma quantidade infinitesimal diferente de zero. Se $\mathcal{A}$ é este ambiente, i.e., se $\mathcal{A}$ é uma álgebra diferencial hipotética, no sentido de ser similar a álgebra de funções C^∞, contendo uma integração e o espaço das distribuições $D'(\mathbb{R})$, então em $\mathcal{A}$ não vale um resultado básico da teoria de distribuições que nos fornece 1, isto é, em $\mathcal{A}$

$$\int_{\mathbb{R}} F\psi dx = 0 \ \ \forall\ \psi \in D(\mathbb{R}) \not\Rightarrow F = 0,$$

(não é mais a análise clássica). Em contrapartida, se denotarmos a propriedade "F é uma quantidade infinitesimal diferente de 0" por $F \approx 0$, a relação $\approx$ ainda permite o desenvolvimento de um cálculo similar ao clássico, com duras perdas de propriedades em relação a este último, como a compatilidade com o produto, veja [Kun96], mas sem comprometer a realidade física, como já constatado em muitas pesquisas, veja por exemplo [BO92]. Esta álgebra diferencial hipotética $\mathcal{A}$ a qual nos referimos é ainda a álgebra das funções generalizadas de Colombeau. A equivalência "$\approx$" em $\mathcal{G}$ é chamada associação e será definida sem surpresas adiante. Vale observar que é preciso atenção ao manipular as equivalências "$=$" e "$\approx$" nos cálculos, pode ser tentador utilizar "$=$" quando na verdade deve-se utilizar "$\approx$", veja [ACC$^+$15] para um exemplo simples. Um ponto positivo é que a álgebra clássica de funções C^∞ é uma subálgebra diferencial fiel de $\mathcal{G}$ o que torna estas funções relativamente mais simples de serem manipuladas, veja [Kun96] Proposição 1.2.12. Encerramos este parágrafo observando que há também um cálculo diferencial e newtoniano em $\mathcal{G}$ desenvolvido por Aragona, Fernandez e Juriaans em [AFJ05], o qual resgata a percepção de derivada como uma variação. Para entender isto, veja a Definição 3 e note que ao declarar que todas as distribuições são diferenciáveis, usando para isto a estrutura diferenciável do espaço das funções C^∞ com suporte compacto, Schwartz parece abrir mão da derivação newtoniana, isto é, da ideia de derivada como uma taxa de variação, mas tal intuição é outro equívoco. É claro que a percepção de derivação das distribuições obtida por Schwartz é visionária e não cabem contestações, o que Aragona e seus colaboradores fizeram foi perceber que havia sim em $\mathcal{G}$, e consequentemente em D', uma extensão direta do cálculo newtoniano ao considerar as variações em $\mathcal{G}$ em nível infinitesimal, note por esta perspectiva que $\mathcal{G}$ alcança infinitos e infinitesimais, e veja em [AFJ05] as Definições 2.2 e 2.7 e o Teorema 4.1. Mais recentemente, em [JO22], Jurians e Oliveira apresentam mais uma poderosa ferramenta deste cálculo, a saber, um teorema de ponto fixo intrínseco ao ambiente generalizado, eles também observam que a associação é mais que um conceito algébrico, é também um conceito topológico, e que da mesma forma como visualizamos os conjuntos clássicos, a saber, mergulhados discretamente em ambientes generalizados, temos também D' discreto em $\mathcal{G}$, e por último, exibem uma proposta de geometria diferencial generalizada (local), como extensão deste cálculo, e com a mesma naturalidade em que a geometria diferencial clássica nasce do cálculo diferencial newtoniano.

Estamos agora prontos para descrever do que se trata e também de apresentar a estrutura linear deste trabalho.

Neste ponto, não é mais novidade para o leitor que a álgebra das funções generalizadas $\mathcal{G}(\Omega)$ contém o espaço das distribuições $D'(\Omega)$ e por isto contém também objetos irregulares da física identificados classicamente com distribuições. Nesta álgebra temos cálculos não lineares, antes não permitidos, mas agora aceitáveis aos olhos do rigor matemático. O próximo passo natural, parece ser uma verificação dos modelos físicos nesse novo ambiente, veja por exemplo as referências [Gsp08] e [GKOS13]. Dentre as interpretações dos conceitos de associação e suporte de um objeto generalizado, onde este último trata-se de uma generalização do primeiro, o qual também definiremos adiante, os destacamos aqui como uma forma de transferir informações do ambiente generalizado para o clássico. Nesse sentido, se $f \in \mathcal{G}$ é solução de uma e.d.o., então as funções clássicas do suporte de f devem conter as informações de alguma interpretação dessa equação para a realidade física. Note que mesmo uma igualdade trivial da física como $H^2 = H$ é falsa no ambiente generalizado, e que a associação é a relação de equivalência que nos fornece $H^2 \approx H$. Apesar disso, veremos que existe a dependência de molifiers nos elementos de $\mathcal{G}$ vindos de distribuições, e em particular, nos objetos físicos que mencionamos, o que pode nos levar a alguma divergência em interpretações. Nesse sentido, J. F. Colombeau, A. Gsponer, B. Perrot e outros colaboradores [CGP08], [JFAC+17], [CG08], [ACC+15], [Col07b], mostram em um modelo em QFT que os cálculos de Heisenberg-Pauli fazem sentido matematicamente usando a teoria de funções generalizadas. Estes autores apontam vários problemas técnicos, visivelmente difíceis de serem contornados ao se usar funções generalizadas em QFT, como por exemplo, o de lidar com objetos generalizados cujos valores são operadores ilimitados no espaço de Fock $\mathbb{F}$, um espaço de Hilbert de dimensão infinita comumente usado em QFT. Mas em seu trabalho, Colombeau e A. Gsponer [CG08] reinterpretam este problema em uma álgebra de operadores generalizados limitados definidos em um subespaço $\mathbb{D}$ denso em $\mathbb{F}$, tal interpretação é bastante próxima da situação real, veja Definição 32. Os autores deixam claro também que, devido as dificuldades mencionadas, não é o objetivo fazer interpretações físicas sobre o modelo estudado, algo que consideram precipitado, mas se dispõem apenas a dar um sentido matemático aos cálculos de Heisenberg-Pauli como um ponto de partida para melhorias, já que estes apresentam produto, integral e exponencial de produtos de distribuições em seus operadores. Os mesmos deixam claro também que há problemas pendentes a resolver antes de chegar a uma abordagem mais abrangente sobre este modelo, e que outros trabalhos devem surgir para contribuir com esta pesquisa, veja os comentários finais em [CGP08]. O trabalho foi portanto reescrever os operadores no sentido generalizado e apresentar uma proposta para calcular *probabilidades de transição*, i.e., a probabilidade de um estado inicial Φ_1 se transformar após a interação em um estado final Φ_2, considerando a probabilidade de transição generalizada, a qual é naturalmente obtida ao se considerar os operadores generalizados. Vale ressaltar que testes numéricos foram realizados obtendo resultados satisfatórios. Ainda que tenham sido considerados apenas casos similares e mais simples, este trabalho esclarece a possibilidade de extender os cálculos para QFT. Esclarecemos contudo, que ainda não é isso que fazemos aqui, mas é a partir desta proposta, a qual concordamos, que damos nossa contribuição, isto é, também não tratamos de interpretações físicas, mas sim da proposta de calcular a probabilidade de transição fazendo uso de uma nova ferramenta do ambiente generalizado, a saber, o conceito de *suporte* que surge em [JO22], e resultados clássicos de variação espectral [HW53], [BE94]. Apresentamos também resultados sobre funções quase periódicas [Boh18], [BB54], os quais são reinterpretações de resultados clássicos, mas agora com uma configuração compatível com o ambiente generalizado. Estes resultados contribuíram e são condizentes com as probabilidades de transição obtidas. Veremos isto apresentando um link entre probabilidades de transição e o valor médio de funções quase periódicas. Apresentamos também nesse sentido um conceito de função quase periódica generalizada.

Como esclareceremos em seção oportuna, a álgebra full das funções generalizadas de Colombeau $\mathcal{G}_f(\Omega)$, uma abordagem mais ampla e elegante formalizada por Aragona e Biagioni

[AB91], deixa de depender de mollifiers no que diz respeito ao mergulho das distribuições D' em $\mathcal{G}_f$ ao transportar as propriedades outrora obtidas por essas funções ao conjunto $\mathcal{A}_0$ que indexa as redes representantes dos elementos de $\mathcal{G}_f$. Além disso, $\mathcal{G}_f$ pode ser definida para qualquer espaço normado suave E, tem um mergulho canônico de D' e contém a álgebra simplificada de Colombeau $\mathcal{G}$. Devido a essas propriedades é costumeiro encarar a dificuldade técnica do conjunto de índices $\mathcal{A}_0$ e obter em $\mathcal{G}_f$ uma extensão de resultados já provados para $\mathcal{G}$, tornando-os mais fortes. Isto já nos motiva a apresentar uma prova, no ambiente generalizado full, do teorema do ponto fixo provado por Juriaans e Oliveira. Para isso fizemos uso das extensões da topologia e do cálculo em $\mathcal{G}_f$ apresentadas em [AFJ06] [CGdS17].

A geometria diferencial generalizada traz a vantagem de poder tratar com rigor equações diferenciais em variedades que envolvem singularidades e não linearidades em seus dados, e em particular, produtos de distribuições, veja um exemplo desta natureza em [KS99]. Muitas vezes, para lidar com estas especificidades é necessário considerar infinitesimais e infinitos, isto é, considerar estruturas subjacentes nas quais estes objetos coexistam. O anel dos números generalizados $\overline{\mathbb{R}}$ é apropriado para este propósito. Com esta motivação, Aragona et.al. [AFJ05], apresentam uma definição de variedade cuja estrutura padrão é $\overline{\mathbb{R}}$ e não $\mathbb{R}$ e a chamam de *$\mathcal{G}$-variedade ou variedade generalizada*. É claro que ferramentas matemáticas que sirvam como transporte de soluções de equações neste ambiente para o clássico precisam ser estabelecidas, e para isto o conceito de *suporte* é adequado. Para dar continuidade a este estudo e estabelecer os fundamentos desta geometria, construímos a partir de uma variedade Riemanniana clássica M, uma variedade generalizada M^*, que contém M mergulhada discretamente, e de modo que problemas em M possam ser levantados para M^*. Aqui, tratamos desta proposta no ambiente full pelos motivos já especificados e para apresentar uma abordagem alternativa e aproximada da teoria global encontrada na literatura, veja [CM94, GKSV02, GKSV12, KS02, MR99]. Unimos essas teorias apresentando uma extensão do teorema do mergulho encontrado em [AFJ05].

Por último, daremos exemplos de ações parciais [Exe94, Exe98, Exe17, DE05, M.11, Aba03, CF09, CFM16, CM21, Bat17], um tipo de generalização da teoria de ação global de grupos, considerando as estruturas algébricas e topológicas do conjunto $\overline{\mathbb{R}}$. O produto final do que iniciamos aqui, que ainda não sabemos se a curto, médio ou longo prazo, será o desenvolvimento de uma teoria de ações parciais intrínseca ao ambiente generalizado, será o ponto de partida. Acreditamos que pesquisas nesse sentido possam enriquecer ainda mais a estrutura de $\overline{\mathbb{K}}^n$.

Este texto se organiza como segue. No primeiro capítulo tratamos dos conceitos básicos, definiremos as álgebras *simplificada e full* de Colombeau, traremos um resumo da topologia, do cálculo, da estrutura algébrica necessária e do modelo que inspirou nossos primeiros resultados. No segundo apresentamos nossos principais resultados, provaremos principalmente:

Teorema [Aproximação Espectral] Sejam $T = (T_\varepsilon) : \mathcal{G}_H \to \mathcal{G}_H$ um operador linear básico tal que cada T_ε é um operador linear auto-adjunto e Hilbert-Schmidt e $T_0 \in supp(T)$ na norma de Hilbert-Schmidt. Se $\{t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots\}$ e $\{t_1, t_2, \ldots\}$ são enumerações dos autovalores de T_{ε_n} e T_0 onde $(\varepsilon_n)_n$ é tal que $T_{\varepsilon_n} \to T_0$ então existe uma sequência $(\pi_n)_n$ de permutações de $\mathbb{N}$ tal que $t^{(n)}_{\pi_n(i)} \to t_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Teorema [Existência de Probabilidade de Transição Generalizada] Seja $T = (T_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{G}}_H)$ um operador linear básico tal que cada operador T_ε é auto-adjunto. Então $supp(\nu(T)) = \{\nu(T_0) : T_0 \in supp(T)\}$.

Teorema [Valor Médio de Funções Quase Periódicas] Seja f uma função quase periódica, $\gamma > 0$, e $\lambda : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ uma função contínua com $\lambda(0) = 0$, e seja ν sua inversa. Suponha que $\nu \in \mathcal{C}^k([0,\lambda(1)])$, com $k \geq 2$, e que ν não seja uma função nula. Então, temos

$$M(f) = \lim_{T \longrightarrow \infty} \gamma \cdot T^\gamma \cdot \int_T^\infty \frac{f(x)}{x^{1+\gamma}} dx = \lim_{\eta \longrightarrow 0} \frac{1}{\eta} \int_0^\eta f\left(\frac{1}{\lambda(\varepsilon)}\right) d\varepsilon.$$

Em particular, $\nu(f \circ \frac{1}{\lambda}) = M(f)$.

Teorema [Ponto Fixo] Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $A = [(A_\varphi)_\varphi] \subset B_r(0) \cap \mathcal{G}_f(\Omega)$, $r < 2$, um conjunto interno e $T : A \to A$ uma aplicação com representante $(T_\varphi : A_\varphi \to A_\varphi)_{\varphi \in A_0(n)}$. Se existe $k = [(k_\varphi)_\varphi] \in \tilde{\mathbb{N}}$ tal que cada $T_\varphi^{k_\varphi}$ é uma λ-contração então T^k é bem definida, contínua e tem um único ponto fixo $f_0 \in A$.

Teorema [Down Sequencing Argument on Full] Seja $f \in \mathcal{G}_f(\Omega)$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se $f \in W^0_{m,r}[0]$ com $r > 0$ e $p_0 \in \mathbb{N}^n$ então $f \in W^{|p_0|}_{m,s}[0]$ onde $s = 4^{-n|p_0|}r$, isto é, $W^0_{m,r}[0] \subset W^{|p_0|}_{m,s}[0]$.

Teorema [do Mergulho para Variedades] Seja M uma variedade Riemanniana orientável n-dimensional. Existe uma $\mathcal{G}_f$-variedade n-dimensional M^* e um monomorfismo de álgebras

$$\kappa : \hat{\mathcal{G}}(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M^*, \widetilde{\mathbb{R}}_f)$$

que comuta com a derivação. Além disso, $ssupp(M^*) = \overline{M}$ e equações cujos dados tem singularidades ou não linearidades definidas em M são naturalmente extendidas para equações em M^* onde esses dados se tornam funções $\mathcal{C}^\infty$.

E por fim, no terceiro capítulo, estudamos ações parciais como descritas anteriormente. Outras descrições podem ser encontradas no início de cada seção.

Álgebras de funções generalizadas

Álgebras simplificada e full de Colombeau

Depois destas, um tanto coloquiais, formas de enxergar $\mathcal{G}$, podemos partir para uma apresentação mais formal desta álgebra, até chegarmos a uma definição rigorosa em suas duas principais abordagens, simplificada e full. Traremos também propriedades e exemplos. Começaremos com um resumo sobre as distribuições e neste ponto ainda não abriremos mão de alguns aspectos históricos.

Distribuições

Em meados da década de 1940 Schwartz formaliza a teoria das distribuições, possivelmente criadas para manipular singularidades provenientes da física, entre as quais vamos destacar a função delta de Dirac em $x_0 \in \mathbb{R}$, definida pelas propriedades

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & se \quad x = x_0 \\ 0 & se \quad x \neq x_0, \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)dx = 1$$

e a função de Heaviside em x_0 definida por

$$H(x - x_0) = \begin{cases} 0 & se \quad x < x_0 \\ ? & se \quad x = x_0 \\ 1 & se \quad x > x_0. \end{cases}$$

É comum tomar $x_0 = 0$ sem fazer referência a este ponto. Estes objetos matemáticos são apropriados para descrever modelos físicos, por exemplo, a delta de Dirac pode ser útil para tratar de funções de densidade de massa concentrada unitária, isto é, nulas em quase todos os pontos com exceção de um, onde vale infinito, e com integrais volumétricas iguais a 1, enquanto que Heaviside é uma idealização de uma função suave que salta de 0 para 1 em um intervalo de tempo muito pequeno ao redor de um ponto. Estes objetos recebem o mesmo tratamento dado as funções C^∞ mas note que a função de Heaviside não é contínua aos olhos do rigor matemático, e note também que, do ponto de vista da teoria de Lebesgue, a delta de Dirac não poderia ser nula em quase todo ponto e ter integral igual a 1. Nesse sentido, do ponto de vista do rigor, estas funções necessitavam de algum processo de regularização, o que foi feito por Schwartz ao definir o espaço D' das distribuições e visualizá-las como elementos de D'. Este novo olhar não privava estes objetos de suas propriedades físicas e eram aceitáveis. A criação e formalização de algo tão inovador rendeu a Schwartz a prestigiada medalha Fields em 1950. Além da sequencial, uma definição de distribuição mais comum na literatura é a seguinte.

Definição 1 (Distribuições)**.** *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Uma distribuição é um elemento de $D'(\Omega)$, o espaço vetorial de todos os funcionais lineares contínuos de $D(\Omega)$ com valores em $\mathbb{C}$, onde $D(\Omega)$ é o espaço de todas as funções $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto.*

A notação $C_c^\infty(\Omega)$ para o espaço $D(\Omega)$ é comum na literatura, mas achamos esta última mais adequada pelos motivos óbvios. A continuidade na definição acima é sequencial, i.e., se $u \in D'(\Omega)$ então $\lim_{n\to\infty} u(\phi_n) = u(\phi)$ sempre que $\phi_n \to \phi$ em $D(\Omega)$. Podemos também considerar o seguinte resultado equivalente. Para uma demonstração consulte [DK], Lema 3.7. Também nesta referência, pode-se encontrar as definições de suporte de uma função e convergência em $D(\Omega)$, bem como familiarizar-se com a notação de derivação multi-índice ∂^α. Conceitos mais simples como estes serão omitidos aqui afim de tornar esta leitura mais direta. A norma $||\cdot||_{C^k}$ em $D(\Omega)$, definida por

$$||\phi||_{C^k} = \sup_{x\in\Omega, |\alpha|\leq k} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

é chamada norma C^k . A menos que se mencione o contrário, Ω sempre denotará um aberto do espaço $\mathbb{R}^n$.

Proposição 1. *Um funcional linear u definido em $D(\Omega)$ é contínuo se, e somente se, para cada compacto K de Ω existe uma constante $c > 0$ e uma ordem de derivação $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que*

$$|u(\phi)| \leq c||\phi||_{C^k}, \quad \forall \phi \in D(K).$$

Para ter exemplos, nos referimos ao Teorema 3.4 e Lema 3.5 em [DK]. O primeiro afirma que se f é uma função localmente integrável em Ω, então a função $testf$, definida em $D(\Omega)$ por $(testf)(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx$ é uma distribuição em Ω. Nesse sentido, para Schwartz, a função

$$\begin{aligned} H : D(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}_+} \phi(x)dx \end{aligned}$$

deve agora ser a forma de olharmos para a função de Heaviside, ou seja, um objeto matemático regularizado. Trataremos da derivação mais adiante. E o segundo, afirma que $D'(\Omega)$ contém uma cópia do espaço linear de todas as funções contínuas de Ω, o qual denota-se

$C(\Omega)$, via a aplicação $f \mapsto test f$, i.e., esta aplicação é linear e injetiva de $C(\Omega)$ em $D'(\Omega)$. Por vezes, vamos nos referir a este tipo função como um mergulho, que por sua vez são de importância vital para esta teoria e merecem atenção.

Este é um bom ponto para observar que a função delta de Dirac, como distribuição, é definida por

$$\begin{aligned} \delta : D(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\longrightarrow \phi(0). \end{aligned}$$

A noção de convergência em $D'(\Omega)$ se dá da seguinte forma.

Definição 2. *Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $D'(\Omega)$. Dizemos que $u \in D'(\Omega)$ é o limite de (u_j), e escrevemos $u_j \to u$, se $u_j(\phi) \to u(\phi)$, $\forall\, \phi \in D(\Omega)$.*

Note que esta é uma convergência fraca. É um resultado clássico na teoria das distribuições que se $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $D'(\Omega)$ tal que para cada $\phi \in D(\Omega)$ a sequência $(u_j(\phi))_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{C}$ então a aplicação $\phi \mapsto \lim u_j(\phi)$ de $D(\Omega)$ em $\mathbb{C}$ define um elemento em $D'(\Omega)$. Além disso, se $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\int \phi(x)dx = 1$ e definirmos $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi(\varepsilon^{-1}x)$, então $\phi_\varepsilon \to \delta$ em $D'(\mathbb{R}^n)$ quando $\varepsilon \to 0$, i.e., *test* $\phi_\varepsilon \to \delta$. A rede $(\phi_\varepsilon)_\varepsilon$ é chamada rede delta e desempenha um importante papel em teoria de distribuições. Veja as notas de aula [Cor99] para os detalhes.

Definição 3 (Derivada distribucional)**.** *Seja $u \in D'(\Omega)$. Então a derivada distribucional de u com respeito a j-ésima variável é definida por*

$$\partial_j u(\phi) = -u(\partial_j \phi), \quad \phi \in D(\Omega) \text{ e } 1 \le j \le n.$$

Mais geralmente, se $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ é um multi-índice, então

$$\partial^\alpha u(\phi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \phi).$$

Podemos às vezes nos referir a esta derivada como derivada de Schwartz. É fácil ver que se f é continuamente diferenciável então $\partial_j(test\ f) = test\ (\partial_j f)$. Um outro exemplo é que a derivada distribucional da função de Heaviside é a função delta de Dirac, como segue.

Exemplo 1. *Para toda $\phi \in D(\mathbb{R})$, tem-se $H'(\phi) = -H(\phi') = -\int_{\mathbb{R}_+} \phi'(x)dx = \phi(0) = \delta(\phi)$.*

Uma operação pertinente envolvendo distribuições e funções é apresentada agora.

Definição 4 (Convolução de distribuição com função)**.** *O produto de convolução, ou simplesmente convolução, de $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ por $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$ é a função definida por*

$$(u * \phi)(x) = u(T_x \circ S\phi), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

onde T_x *e* S *são respectivamente a translação e a reflexão definidas por* $T_x(\varphi)(y) = \varphi(y-x)$ *e* $S(\varphi)(y) = \varphi(-y)$ *com* φ *uma função em* $\mathbb{R}^n$ *e* $y \in \mathbb{R}^n$.

Note que estamos considerando $\Omega = \mathbb{R}^n$, isto se deve as dificuldades geradas pela translação. As propriedades da derivada distribucional e mais geralmente das distribuições podem ser encontradas em qualquer literatura sobre o tema, veja por exemplo em [DK], Teorema 11.2, que ela comuta com a convolução. Poderíamos facilmente dedicar muitas páginas desse estudo a teoria das distribuições, mas não é essa a nossa intenção, sugerimos ao leitor que consulte as duas referências que citamos nesta seção para mais detalhes.

Álgebra simplificada

Não demorou para a teoria de Schwartz, resumida na seção anterior, ganhar notoriedade. Entre suas consequências, podemos destacar o teorema de Malgrange-Ehrenpreis, o qual nos diz que toda equação diferencial parcial linear com coeficientes constantes tem solução distribucional. Esta solução não é única e o análogo para coeficientes polinomiais é falso, veja o contra-exemplo de Lewy [Lew57]. Isto nos inclina a perceber a utilidade da teoria das distribuições para as EDP's lineares. Mas foi o teorema da impossibilidade de Schwartz que trouxe à tona o desafio de criar uma estrutura que tratasse também do ambiente não linear. É importante destacar também, que em paralelo, a física quântica de campos de Dirac, Plank, Heisenberg, Schrondinger, Pauli, entre outros, estava em ascensão e envolviam objetos não regulares (delta de Dirac, Heaviside) que eram multiplicados, integrados e exponenciados.

Agora, seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. A definição sequencial do espaço vetorial das distribuições em Ω é o espaço quociente $D'(\Omega) := R/S$, onde

$$R := \{(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in I} : \ \forall \psi \in D(\Omega) \ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega f_\varepsilon(x)\psi(x)dx \ existe\}$$

$$S := \{(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in I} \in R : \ \forall \psi \in D(\Omega) \ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega f_\varepsilon(x)\psi(x)dx = 0\},$$

veja [AMMS73]. Temos que S é subespaço vetorial de R, o qual é formado por redes de funções $C^\infty(\Omega)$ indexadas em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ que deve ter 0 como ponto de acumulação à esquerda. As operações algébricas são definidas pontualmente nos representantes e são compatíveis com o quociente. Podemos então introduzir um produto de distribuições em $D'(\Omega)$ definindo uma álgebra diferencial $\mathcal{A}$ contendo R e um ideal diferencial J de $\mathcal{A}$ de modo que $J \subset S \subset R \subset \mathcal{A}$ e exista um mergulho $D'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{A}/J$. É nesse sentido, que vamos agora definir a álgebra simplificada das funções generalizadas de Colombeau em Ω, a qual denotaremos por $\mathcal{G}(\Omega)$, como uma álgebra diferencial que contém uma cópia do espaço das distribuições e satisfaz as condições discutidas em nossa introdução. Considere $D = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$ a derivação multi-índice, onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

Definição 5 (Álgebra Simplificada de Colombeau)**.** *Seja $I = (0, 1]$. Então* $\mathcal{G}(\Omega) := \mathcal{A}(\Omega)/\ J\ (\Omega)$ *onde*

$$\mathcal{A}(\Omega) := \{(f_\varepsilon)_{\varepsilon\in I} \in (C^\infty)^I :\ \forall\ K \subset\subset \Omega,\ \forall\ D,\ \exists\ N > 0,\ \exists\ \eta \in I,\ \textit{de modo que}$$

$$\sup_{x\in K} |Df_\varepsilon(x)| = O(\varepsilon^{-N}),\ \varepsilon < \eta\}$$

$$\mathcal{J}(\Omega) := \{(f_\varepsilon)_{\varepsilon\in I} \in (C^\infty)^I :\ \forall\ K \subset\subset \Omega,\ \forall\ D,\ \forall\ q > 0,\ \exists\ \eta \in I,\ \textit{de modo que}$$

$$\sup_{x\in K} |Df_\varepsilon(x)| = O(\varepsilon^{q}),\ \varepsilon < \eta\}.$$

As operações são feitas a nível de representantes e compatíveis com o quociente. As redes em $\mathcal{A}$ são chamadas moderadas e as redes em J são chamadas nulas. O modus operandi para se chegar a estrutura da álgebra diferencial $\mathcal{A}$, do ideal J e ao mergulho $D'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{A}/J$ está muito bem detalhado em [Kun96] e não é nossa intenção replicá-lo. Contudo, é conveniente destacar:

Teorema 1 (Mergulho de $D'(\Omega)$ em $\mathcal{G}(\Omega)$)**.** *A aplicação $i : D'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{G}(\Omega)$, definida por $i(w) := \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j((\psi_{\lambda_j} w) * \rho_\varepsilon))_{\varepsilon\in I} + \mathcal{J}(\Omega)$ é um mergulho.*

O leitor interessado pode consultar a prova deste teorema em [Kun96], Teorema 1.2.10. Nesta referência, os conjuntos de redes moderadas e nulas são denotados respectivamente por $\mathcal{E}_M(\Omega)$ e $\mathcal{N}(\Omega)$. Este mergulho depende de uma função fixada $\rho \in S(\mathbb{R}^n)$ (espaço de Schwartz) tal que $\int \rho(x)dx = 1$ e $\int x^\alpha \rho(x)dx = 0$ para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ com ordem $|\alpha| \geq 1$, ρ é chamada uma mollifier e $(\rho_\epsilon)_\varepsilon$ é sua rede delta. Já $\{\chi_j, j \in \mathbb{N}\}$ e $(\psi_\lambda)_\lambda$ são respectivamente uma partição da unidade subordinada a uma cobertura aberta $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de Ω e uma família de elementos de $D(\Omega)$ com $\psi_\lambda \equiv 1$ em alguma vizinhança de $\overline{\Omega}_\lambda$. Este mergulho não depende da escolha destes elementos, confira Proposição 1.2.14. O mergulho de $\mathcal{E}'(\Omega)$, o espaço das distribuições com suporte compacto, em $\mathcal{G}(\Omega)$, é canônico e se dá apenas por convolução com a rede delta obtida da mollifier, o mesmo vale para $D'(\mathbb{R}^n)$, confira as proposições 1.2.1 e 1.2.6. Também é canônico o mergulho de $C^\infty(\Omega)$ e se dá por $f \hookrightarrow (f)_\varepsilon + \mathcal{N}(\Omega)$, veja a Proposição 1.2.12. Observe que isto faz de $C^\infty(\Omega)$ uma subálgebra fiel de $\mathcal{G}(\Omega)$, ou de forma mais grosseira, que o ambiente generalizado acolhe as funções suaves sem fazer alterações em sua estrutura. Com isto, já temos exemplos simples de funções generalizadas. Para uma visualização mais ampla destas funções, considere os exemplos:

Exemplo 2 (Mergulho de δ e H em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$)**.** *Uma vez que δ tem suporte compacto, tem-se*

$$i(\delta) = (\delta * \rho_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}(\mathbb{R}) = (\rho_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}(\mathbb{R}).$$

O mergulho de funções L^1_{loc} polinomialmente limitadas é análogo, veja Proposição 1.2.17, e *portanto*

$$i(H) = ((H * \rho_\epsilon)(x))_\varepsilon + \mathcal{N}(\mathbb{R}) = \left(\int_0^{+\infty} \rho_\varepsilon(x-y)dy \right)_\varepsilon + \mathcal{N}(\mathbb{R}) = \left(\int_{-\infty}^{x} \rho_\varepsilon(y)dy \right)_\varepsilon + \mathcal{N}(\mathbb{R}).$$

Estas igualdades seguem direto da Definição 4.

O primeiro passo que se dá ao estudar funções é estabelecer a noção de valor pontual, com esse propósito em mente, considere primeiro o importante conceito de número no ambiente generalizado.

Definição 6 (Números generalizados). *O anel dos números generalizados é o quociente* $\overline{\mathbb{K}} := \mathcal{E}/\mathcal{N}$*, onde*

$$\mathcal{E} := \{(r_\varepsilon)_{\varepsilon \in I} \in \mathbb{K}^I : \ \exists\, p \in \mathbb{N}, \ \exists\, \eta > 0, \ \textit{satisfazendo } |r_\varepsilon| = O(\varepsilon^{-p}), \ \forall\, \varepsilon < \eta\}$$

$$\mathcal{N} := \{(r_\varepsilon)_{\varepsilon \in I} \in \mathbb{K}^I : \ \forall\, q \in \mathbb{N}, \ \exists\, \eta > 0, \ \textit{satisfazendo } |r_\varepsilon| = O(\varepsilon^{q}), \ \forall\, \varepsilon < \eta\}.$$

Aqui, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ e $|r_\varepsilon| = O(\varepsilon^q)$ significa que $\exists\, C > 0$ tal que $|r_\varepsilon| \leq C\varepsilon^q$. Note a compatibilidade da estrutura de $\overline{\mathbb{K}}$ com a de $\mathcal{G}$. Três observações importantes que se pode fazer sobre $\overline{\mathbb{K}}$ é que ele não é um corpo, que contém $\mathbb{K}$ canonicamente mergulhado pela aplicação $r \in \mathbb{K} \hookrightarrow [(r)_\varepsilon] \in \overline{\mathbb{K}}$ e que as operações são feitas naturalmente nos representantes.

Definição 7 (Valor pontual). *Para* $u \in \mathcal{G}(\Omega)$ *e* $x_0 \in \Omega$ *o valor pontual de* u *em* x_0 *é a classe de* $(u_\varepsilon(x_0))_\varepsilon$ *em* $\overline{\mathbb{K}}$*.*

Um exemplo de fixação e fácil visualização deste conceito é o valor pontual da função generalizada $i(\delta)$ em $0 \in \mathbb{R}$ dado por $i(\delta)(0) = [(\rho_\varepsilon(0))_\varepsilon] = [(\frac{1}{\varepsilon}\rho(0))_\varepsilon]$. Algo mais interessante é que $x \cdot \delta = 0$ em $D'(\mathbb{R})$, mas é diferente de 0 em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$. De fato, se fixarmos $x_0 \neq 0$ tal que $\rho(x_0) \neq 0$ (lembre da dependência da mollifier ρ), uma vez que $i(x) \cdot i(\delta) = [(x\rho_\varepsilon(x))_\varepsilon]$, tomando $x = \varepsilon x_0$ temos que $x\rho_\varepsilon(x) = x_0\rho(x_0) \neq 0$ e portanto $(x\rho_\varepsilon(x))_\varepsilon \notin \mathcal{N}(\mathbb{R})$. Contudo, seus valores pontuais são iguais a 0 em qualquer ponto. Para ver isto, note que se $x_0 \neq 0$ então $x_0\rho_\varepsilon(x_0) = \varepsilon^{-1}x_0\rho(\varepsilon^{-1}x_0) \to 0$ mais rápido que qualquer potência de ε já que $\rho \in S(\mathbb{R})$. Se $x_0 = 0$, isto é óbvio. Isto nos diz que as funções generalizadas em $\mathcal{G}(\Omega)$ não são determinadas por seus valores pontuais e portanto que Ω não é o domínio natural de suas funções e que a noção de valor pontual precisa ser readequada. Tal domínio é definido como segue.

Definição 8 (Pontos compactamente suportados). *Seja* $\widetilde{\Omega} := \Omega_M/\sim$*, onde*

$$\Omega_M := \{(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in I} \in \Omega^I : \ \exists\, p \in \mathbb{N}, \ \exists\, \eta > 0, \ \textit{satisfazendo } |x_\varepsilon| = O(\varepsilon^{-p}) \ \forall\, \varepsilon < \eta\} \ \textit{e}$$

$$(x_\varepsilon)_\varepsilon \sim (y_\varepsilon)_\varepsilon \Leftrightarrow \forall\, q > 0 \ \exists\, \eta > 0, \ \textit{satisfazendo } |x_\varepsilon - y_\varepsilon| < \varepsilon^q \ \forall\, \varepsilon < \eta.$$

O conjunto dos pontos compactamente suportados é denotado e definido por

$$\widetilde{\Omega}_c := \{\tilde{x} \in \tilde{\Omega} : \exists \textit{ um representante } (x_\varepsilon)_\varepsilon, \ \exists\, K \subset\subset \Omega, \ \exists\, \eta > 0,$$

$$com\ x_\varepsilon \in K,\ \forall\ \varepsilon < \eta\}.$$

Podemos agora apresentar uma readequação do conceito de valor pontual de funções generalizadas.

Definição 9 (Valor pontual generalizado)**.** *Para $u \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $\tilde{x} \in \widetilde{\Omega}_c$ o valor pontual generalizado de u em $\tilde{x} = [(x_\varepsilon)_\varepsilon]$ é o número generalizado $u(\tilde{x}) := [(u_\varepsilon(x_\varepsilon))_\varepsilon]$.*

Para ver que o valor pontual generalizado está bem definido, isto é, que não depende da escolha dos representantes de u e $\tilde{x}$, consulte novamente [Kun96], Proposição 1.4.8. Com esta configuração, as funções generalizadas são caracterizadas por seus valores pontuais, como fica claro no seguinte resultado.

Teorema 2. *Seja $u \in \mathcal{G}(\Omega)$. Então $u = 0 \Leftrightarrow u(\tilde{x}) = 0$ em $\overline{\mathbb{K}}\ \forall\ \tilde{x} \in \tilde{\Omega}_c$.*

Demonstração. Veja [Kun96], Teorema 1.4.9. □

Esta abordagem se deve a Oberguggenberger e Kunzinger [OK99], e foi fundamental para a compreensão das funções generalizadas.

Vamos agora definir a relação de equivalência $\approx$ a que nos referimos na introdução deste capítulo. Lembre que a destacamos como uma relação bastante apropriada ao ambiente generalizado. Isto ficará mais claro agora que conhecemos a definição de $\mathcal{G}(\Omega)$ e de $\overline{\mathbb{K}}$.

Definição 10 (Associação em $\mathcal{G}(\Omega)$)**.** *Um elemento $u \in \mathcal{G}(\Omega)$ é dito associado a 0 ($u \approx 0$) se*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Esta definição não depende da escolha do representante de u e a relação

$$u \approx v \Leftrightarrow u - v \approx 0$$

é de equivalência em $\mathcal{G}(\Omega)$. Neste caso dizemos que u está associado a v. O leitor mais atento já deve ter notado que a associação é uma relação de equivalência mais fraca que a igualdade, contudo, note da definição que a associação de u a 0 significa que qualquer rede que representa u converge para 0 em $D'(\Omega)$. Isto significa que não devemos olhar para associação como uma igualdade fraca, mas como uma maneira de enxergar as projeções das propriedades das funções generalizadas em suas sombras no ambiente clássico. Faz sentido portanto o seguinte.

Definição 11 (Sombra distribucional)**.** *Sejam $u \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $w \in D'(\Omega)$. Dizemos que w é a sombra distribucional de u se $u \approx i(w)$.*

É direto das propriedades da integral que $x \cdot i(\delta) \approx 0$. Em resumo, esta função é igual a 0 como distribuição, diferente de 0 como função generalizada, mas é associada a 0, e tem todos os seus valores pontuais iguais a zero.

Segue o análogo deste conceito para $\overline{\mathbb{K}}$.

Definição 12 (Associação em $\overline{\mathbb{K}}$). *Sejam $z, z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{K}}$ e $a \in \mathbb{K}$. Dizemos que z está associado a 0, e escrevemos $z \approx 0$, se $z_\varepsilon \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, para algum, e portanto para todos, os representantes de z. Dizemos que z_1 está associado a z_2, e escrevemos $z_1 \approx z_2$, quando $z_1 - z_2 \approx 0$. Se $z \approx a$, dizemos que a é a sombra de z.*

Um fato curioso é que Kunzinger [Kun96] se refere aos objetos generalizados que não possuem sombra como vampiros, algo muito apropriado já que nos filmes que assistimos sobre a figura do conde Drácula, os vampiros não tem sombra ou reflexo em espelhos. Contudo, podemos pensar em redes com inúmeras subredes convergindo para limites diferentes, o que nos leva a existência de várias sombras para um único objeto generalizado, isto é capturado pelo conceito de *suporte* que definiremos a seguir. Outra fato interessante é que se $f, g \in C(\Omega)$, então $i(f)i(g) \approx i(fg)$, uma propriedade desejada por Schwartz no que diz respeito ao teorema de impossibilidade, não verdadeira para $=$, mas que vale para $\approx$. Veja a Proposição 1.6.6. (ii) deste mesmo autor.

Faremos agora uma descrição mais ampla do ambiente generalizado no sentido de não nos limitarmos as redes de funções suaves e redes de elementos dos corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Esta abordagem é encontrada em [Gar05][GV11]. Importantes conceitos como *conjuntos internos, interleaving e suporte* serão definidos agora.

Seja E um espaço vetorial topológico localmente convexo com a topologia obtida de uma família de seminormas $\{p_i\}_{i\in I}$. Então os conjuntos

$$\mathcal{M}_E := \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in E^I : \ \forall\, i \in I \ \exists\, N \in \mathbb{N}, \ \exists\, \eta \in I, \text{ satisfazendo } p_i(u_\varepsilon) = O(\varepsilon^{-N}), \ \forall\, \varepsilon < \eta\}$$

$$\mathcal{N}_E := \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in E^I : \ \forall\, i \in I, \ \forall\, q \in \mathbb{N}, \ \exists\, \eta \in I, \text{ satisfazendo } p_i(u_\varepsilon) = O(\varepsilon^{q}), \ \forall\, \varepsilon < \eta\}$$

são chamados conjuntos das redes $E-$moderadas e das redes $E-$nulas, respectivamente. O espaço das funções generalizadas de Colombeau relativo a E é definido como o quociente $\mathcal{G}_E := \mathcal{M}_E/\mathcal{N}_E$.
Os anéis $\overline{\mathbb{C}}$ e $\overline{\mathbb{R}}$, dos números generalizados complexos e dos números generalizados reais, são obtidos tomando $E = \mathbb{C}$ e $E = \mathbb{R}$, respectivamente. É direto verificar que se E é um espaço vetorial topológico localmente convexo em $\mathbb{C}$ então $\mathcal{G}_E$ é um $\overline{\mathbb{C}}$-módulo, em particular $\overline{\mathbb{C}}$ é um módulo sobre si próprio. Se $E = C^\infty(\Omega)$ então $\mathcal{G}_E = \mathcal{G}(\Omega)$. Podemos pensar em $\overline{\mathbb{K}}^n$ de forma natural como um módulo formado por n-uplas de elementos de $\overline{\mathbb{K}}$.

Definição 13 (Conjunto interno). *Um subconjunto $A \subset \mathcal{G}_E$ é chamado interno, e denotamos $A = [(A_\varepsilon)_\varepsilon]$, se existe uma rede $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ de subconjuntos de E tal que*

$$A = \{u \in \mathcal{G}_E : \exists\ (u_\varepsilon)_\varepsilon \ (\textit{representante de } u) \ \exists\, \eta > 0 \ \textit{tq} \ \forall\, \varepsilon < \eta \ \textit{temos } u_\varepsilon \in A_\varepsilon\}.$$

Note que o conceito de conjunto interno é um tipo de generalização de conjunto de pontos compactamente suportados, e portanto é uma estrutura natural do ambiente generalizado.

Se $\mathcal{S} = \{S \subset I : 0 \in \overline{S} \cap \overline{S^c}\}$, então os números generalizados do tipo e_S cujos representantes são as funções características $(\chi_S(\varepsilon))_\varepsilon$ com $S \in \mathcal{S}$, são precisamente os elementos idempotentes não triviais de $\overline{\mathbb{K}}$. De fato, $\mathcal{X}_S \neq 0$ se, e somente se, $0 \in \overline{S}$ e $\mathcal{X}_S \neq 1$ se, e somente se, $0 \in \overline{S^c}$. Assim, se $S \in \mathcal{S}$ temos que $\mathcal{X}_S$ é idempotente não trivial de $\overline{\mathbb{K}}$. Estes números desempenham um papel importante na estruturação algébrica do ambiente generalizado, consulte [AJ01][AJOS08] para uma análise mais detalhada. Dentre essas estruturas, mostraremos agora o conceito de interleaving.

Definição 14 (Interleaving). *Se $A \subset \mathcal{G}_E$, então o interleaving de A é o conjunto*

$$interl(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{m} e_{S_j} a_j : \ m \in \mathbb{N}, \ \{S_1, \ldots, S_m\} \subset \mathcal{S} \text{ é uma partição de } I \text{ e } a_j \in A \right\}.$$

Todo o desenvolvimento teórico destes conceitos pode ser encontrado em [OV08][GKV15].

Em [JO22], Juriaans e Oliveira definem o suporte de um número generalizado como segue.

Definição 15 (Suporte). *Seja $p = [(p_\varepsilon)_\varepsilon] \in \overline{\mathbb{K}}$. Então o suporte de p, denotado por $supp(p)$ é o conjunto $supp(p) = \{q \in \mathbb{K} : \exists\ (\varepsilon_n)_n,\ com\ \varepsilon_n \to 0\ e\ p_{\varepsilon_n} \to q\}$.*

A generalização deste conceito para $\overline{\mathbb{K}}^n$ é feita de forma óbvia. Note também que há aqui uma estreita relação com os elementos idempotentes, já que se $p \in \overline{\mathbb{R}}^n$, então $q \in \mathbb{R}^n$ está no $supp(p)$ se, e somente se, existe um idempotente e tal que $e \cdot p \approx e \cdot q$. Os conceitos de associação e sombra em $\overline{\mathbb{K}}^n$ são também estendidos de forma óbvia. Para fixar esta definição, perceba facilmente que se $p = [(sen(1/\varepsilon))_\varepsilon]$ então $supp(p) = [-1, 1]$. Perceba também, que suporte unitário e associação são conceitos equivalentes.

Álgebra full

A álgebra full de Colombeau foi construída com a mesma proposta da simplificada, mas traz melhorias significativas em sua estrutura. Desenvolvida por Aragona e Biagioni em [AB91], é um trabalho pioneiro dentre as generalizações feitas sobre o trabalho de Colombeau. Aragona foi um dos primeiros pesquisadores a estudar, entender, reinterpretar e contribuir com o trabalho de Colombeau em obter uma álgebra que contivesse o espaço das distribuições. Já deixamos claro aqui que o mergulho de um elemento de D' em $\mathcal{G}$ depende da escolha de uma mollifier ρ do espaço de Schwartz, que traz consigo duas propriedades volumétricas para este propósito. Na full, Aragona e Biagioni indexam as redes representantes das funções em um conjunto de outras funções que já possuem estas propriedades. O resultado, além da elegância e também de evidenciar o caráter intríseco das propriedades matemáticas do ambiente generalizado, é um mergulho de D' canônico e livre desta dependência. Esta álgebra é definida para espaços normados suaves (norma suave) quaisquer e não mais apenas para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, e o mergulho de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{G}_f$ (f para full) evidencia o seu caráter generalista. Todos esses ganhos aumentam o nível de tecnicidade das demonstrações, mas os resultados são vantajosos.

Considere os conjuntos

$$\mathcal{A}_0(\mathbb{R}) = \left\{\varphi \in D(\mathbb{R}) : \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx = 1/2,\ \varphi \text{ é } \textit{par e constante em alguma } \text{vizinhanca } V_0\right\}$$

e, para $q \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{A}_q(\mathbb{R}) = \left\{\varphi \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}) : \int_0^{+\infty} x^{\frac{j}{m}}\varphi(x)dx = 0,\ 1 \leq j, m \leq q\right\}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, se ω_n denota a área da esfera unitária $(n-1)$-dimensional S^{n-1} em $\mathbb{R}^n$, $E = E_n$ denota um espaço normado suave de dimensão n com norma $||\cdot||_{E_n}$ e c_n são constantes (para cada n) definidas por

$$c_n = \begin{cases} \frac{2n}{\omega_n} & se \quad n > 1 \\ 1 & se \quad n = 1, \end{cases}$$

então o mapa

$$I_E^1 : \varphi_0 \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}) \to \varphi = c_n \cdot (\varphi_0 \circ ||\ ||_{E_n}^n) \in D(E)$$

está bem definido e é injetivo. Podemos agora definir o conjunto de índices que substituirá I na definição da álgebra full de Colombeau.

Definição 16. *Para qualquer espaço normado suave E_n e qualquer $q \in \mathbb{N}_0$, definimos*

$$\mathcal{A}_q(E_n) := I_{E_n}^1(\mathcal{A}_q(\mathbb{R})).$$

O leitor pode consultar [Kun96], Proposição 1.7.5, para familiarizar-se com as propriedades dos conjuntos $\mathcal{A}_q(E_n)$, e a Proposição 1.7.4 para uma verificação das propriedades volumétricas a que nos referimos, necessárias para o mergulho de D' em $\mathcal{G}_f$. Estamos agora em condições de definir a álgebra das funções generalizadas full de Colombeau. No que segue $D^{(n)}$ representa a derivada multi-índice e Γ é o conjunto

$$\Gamma := \{\gamma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+ : \gamma \text{ é estritamente crescente e} \lim_{n\to\infty} \gamma(n) = \infty\}.$$

Definição 17 (Álgebra full de Colombeau)**.** *Seja Ω um aberto de um espaço normado suave E. A álgebra de Colombeau full $\mathcal{G}_f(\Omega)$ é o espaço quociente $\mathcal{E}_{M,f}(\Omega)/\mathcal{N}_f(\Omega)$, onde*

$$\mathcal{E}(\Omega) := \{u : \mathcal{A}_0(E) \times \Omega \to \mathbb{K} : u(\varphi, \cdot) \in C^\infty(\Omega)\ \forall\ \varphi \in \mathcal{A}_0(E)\},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{M,f}(\Omega) := \{u \in \mathcal{E}(\Omega) :\ & \forall\ K \subset\subset \Omega\ \forall\ n \in \mathbb{N}_0\ \exists\ p \in \mathbb{N}_0,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{A}_p(E) \\ & \exists\ c > 0\ \exists\ \eta > 0,\ \sup_{x\in K} ||D^{(n)}u(\varphi_\epsilon, x)|| \leq c\epsilon^{-p},\ \forall\ \epsilon < \eta\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_f(\Omega) := \{u \in \mathcal{E}(\Omega) :\ & \forall\ K \subset\subset \Omega\ \forall\ n \in \mathbb{N}_0\ \exists\ p \in \mathbb{N}_0,\ \exists\ \gamma \in \Gamma \\ & \forall\ q \geq p\ \forall\ \varphi \in \mathcal{A}_q(E)\ \exists\ c > 0\ \exists\ \eta > 0, \\ & \sup_{x \in K} ||D^{(n)} u(\varphi_\epsilon, x)|| \leq c\epsilon^{\gamma(q)-p},\ \forall\ \epsilon < \eta\}.\end{aligned}$$

Como na simplificada, os mergulhos de $D'(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{E}'(\Omega)$ em $\mathcal{G}_f(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{G}_f(\Omega)$ respectivamente, são canônicos, a saber, são apenas a convolução com os índices dadas respectivamente por $w \in D'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow [(w * \varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}_0(n)}] \in \mathcal{G}_f(\mathbb{R}^n)$ e $w \in \mathcal{E}'(\Omega) \hookrightarrow [(w * \varphi|_\Omega)_{\varphi \in \mathcal{A}_0(n)}] \in \mathcal{G}_f(\Omega)$, onde $\mathcal{A}_0(n)$ é apenas uma redução da notação $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$. O mergulho de $C^\infty(\Omega)$ é também o constante dado por $f \in C^\infty(\Omega) \hookrightarrow [(f)_{\varphi \in \mathcal{A}_0(n)}]$. Para o caso geral, isto é, o mergulho de $D'(\Omega)$ em $\mathcal{G}_f(\Omega)$ onde Ω é um aberto qualquer do $\mathbb{R}^n$, considere primeiro a exaustão de Ω dada por:

$$\Omega_r := \{x \in \Omega : |x| \leq 1/r\ e\ dist(x, \partial\Omega) \geq 3r\}.$$

Agora, definimos em $\mathcal{A}_0(n)$, a função $i(\varphi) := diam\ supp(\varphi)$. É direto verificar que $i(\varphi_\epsilon) = \epsilon i(\varphi)$. Em seguida defina $\theta(\varphi) := \chi_{i(\varphi)} * \varphi$, onde $\chi_{i(\varphi)}$ denota a função característica de $\Omega_{i(\varphi)}$. Com esta configuração, o seguinte teorema nos diz como a álgebra $\mathcal{G}_f(\Omega)$ contém uma cópia do espaço $D'(\Omega)$ das distribuições em Ω.

Teorema 3 (Mergulho de $D'(\Omega)$ em $\mathcal{G}_f(\Omega)$)**.** *A aplicação $i : D'(\Omega) \to \mathcal{G}_f(\Omega)$ definida por*

$$i(w) := [((\theta(\varphi)w) * \varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}_0(n)}]$$

é linear, injetiva e comuta com a derivada parcial.

Demonstração. Veja [Kun96], Teorema 1.7.15. □

Encerramos esta seção observando que a aplicação $u \in \mathcal{G}(\Omega) \hookrightarrow [(u_{i(\varphi)})_\varphi] \in \mathcal{G}_f(\Omega)$ é um mergulho e portanto a full é uma extensão da simplificada. As noções de número generalizado, valor pontual, pontos compactamente suportados e qualquer outro conceito presente na simplificada tem ou poderá ter sua versão na full. Para não sermos repetitivos, pedimos ao leitor que consulte a Seção 1.7.3 de [Kun96] para as duas primeiras. A partir de agora vamos considerar os espaços euclidianos standards.

Podemos definir o conjunto dos pontos compactamente suportados, como segue: sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{K}^n$ e $I_\eta = (0, \eta] \subset I$. Então o conjunto das redes de pontos moderadas é

$$\Omega_{M_f} := \{(x_\varphi) \in \Omega^{\mathcal{A}_0(n)} :\ \exists\, p \in \mathbb{N},\ \exists\, \eta \in I,\ \exists\, c > 0,\ t.q.\ \forall\, \varphi \in \mathcal{A}_p(n),\ |x_{\varphi_\varepsilon}| \leq c(\varepsilon^{-p}),\ \forall\, \varepsilon \in I_\eta\},$$

para o qual definimos a relação de equivalência

$$(x_\varphi)_\varphi \sim (y_\varphi)_\varphi \Leftrightarrow\ \ \exists\ p \in \mathbb{N}\ \exists\ \eta > 0,\ \exists\ c > 0\ \exists\ \gamma \in \Gamma\ t.q.\ |x_{\varphi_\varepsilon} - y_{\varphi_\varepsilon}| < c\epsilon^{\gamma(q)-p},$$

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{A}_q(n),\ q \geq p,\ \forall\ \varepsilon \in I_\eta.$$

Agora defina $\tilde{\Omega} := \Omega_{M_f}/\sim$. O conjunto dos pontos compactamente suportados é denotado e definido por

$$\tilde{\Omega}_{c,f} := \{x \in \tilde{\Omega} : \exists\ \textit{um representante}\ (x_\varphi)_\varphi,\ \exists\ K \subset\subset \Omega,\ \exists\ p \in \mathbb{N},\ \exists\ \eta > 0$$

$$\textit{com}\ x_{\varphi_\varepsilon} \in K,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{A}_p(n),\ \forall\ \varepsilon \in I_\eta\}.$$

Nestas definições as constantes c e η dependem de φ, i.e., $c = c_\varphi$ e $\eta = \eta_\varphi$, e é claro que a última não depende da escolha do representantes. Se $\Omega = \mathbb{K}$, temos que $\tilde{\mathbb{K}} = \overline{\mathbb{K}}_f$, de onde segue a identificação canônica $\tilde{\mathbb{K}^n} = \tilde{\mathbb{K}}^n = \overline{\mathbb{K}}_f^n$. Utilizaremos ambas as notações e o subscrito f será as vezes omitido sempre que o contexto estiver claro.

Definição 18. *Dizemos que $x \in \overline{\mathbb{K}}_f$ é associado a 0, e escrevemos $x \approx 0$, se para um (e portanto para todos) representantes $(x_\varphi)_\varphi$ de x, $\exists\ p \in \mathbb{N}$ tal que $x_{\varphi_\varepsilon} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{A}_p(1)$. A identificação $x_1 \approx x_2$ é equivalente a $x_1 - x_2 \approx 0$. E se existe $x_0 \in \mathbb{K}$ tal que $x \approx x_0$, dizemos que x_0 é o número associado (ou sombra de) a x.*

A definição acima é estendida para $\overline{\mathbb{K}}_f^n$ de forma óbvia.

Definição 19 (Suporte)**.** *Seja $p = [(p_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}_0(\mathbb{K})}] \in \overline{\mathbb{K}}_f$. Então o suporte de p é o subconjunto*

$$supp_f(p) := \{q \in \mathbb{K} :\ \forall\ m \in \mathbb{N}\ \exists\ \varphi \in \mathcal{A}_m(\mathbb{K})\ \exists\ \varepsilon_l \to 0\ \textit{em}\ I\ \textit{com}\ p_{\varphi_{\varepsilon_l}} \to q\}.$$

A sequência $(\varepsilon_l)_{l \in \mathbb{N}}$ na definição acima depende de φ.

Desta definição temos também que $q \in supp_f(p) \Leftrightarrow \exists$ *um idempotente e tal que* $ep \approx eq$.

Exemplo 3.

1. *Se $r > 0$ então $supp_f(\alpha_r^\bullet) = \{0\}$. De fato, $\alpha_r^\bullet = [(i(\varphi)^r)_\varphi]$ e $i(\varphi_\varepsilon)^r = \varepsilon^r i(\varphi)^r \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{A}_0(1)$. Mais geralmente, se $p \in B_1(0)$ então $supp_f(p) = \{0\}$, pois nesse caso temos $p \approx 0$, veja [AGJ13] Lema 2.1.*

2. *Se $p = [(\sin(1/i(\varphi)))_\varphi]$, então $supp_f(p) = [-1, 1]$.*

A extensão do conceito de suporte para pontos em $\overline{\mathbb{K}}_f^n$ é também obtida de forma óbvia.

Topologia e cálculo

No desenvolvimento da teoria de distribuições, Schwartz, ao estabelecer que toda distribuição é suave, veja Definição 3, parece abandonar a noção newtoniana de derivada. A perca do conceito de derivada como uma taxa de variação seria um duro golpe na teoria de funções generalizadas, e isto levou Aragona, Fernandez e Juriaans [AFJ05] a desenvolverem uma teoria de cálculo generalizado, que é uma extensão natural do cálculo clássico newtoniano. O que de fato difere do cálculo clássico é apenas a percepção de como a variação deve ser considerada, mantendo todos os demais conceitos inalterados. Isto é devido ao se considerar uma topologia induzida por uma ultramétrica (topologia cortante) que surge naturalmente do conceito de moderação, e portanto incomum em relação ao espaço euclidiano onde as teorias de cálculo foram estabelecidas. Embora esta abordagem pareça muito mais conveniente, o ponto alto deste artigo é o teorema do mergulho, o qual mostra a estreita relação entre a derivada definida por Aragona e seus colaboradores e a definida por Schwartz. Começaremos esta seção com uma breve descrição da topologia cortante formalizada por Biagioni-Scarpalézos [Bia90] [Sca00] [Sca04], mas a abordagem será mais geral (para $\mathcal{G}_E$, veja em seção anterior) como descrita por Garetto e Vernaeve [Gar05][GV11]. Vamos primeiro, sem perca de generalidade, considerar o anel $\overline{\mathbb{C}}$.

Definimos primeiro a *valorização* v de um número generalizado $r \in \overline{\mathbb{C}}$ por $v(r) := sup\{a \in \mathbb{R} : |r_\epsilon| = O(\epsilon^a), \epsilon \to 0\}$, onde (r_ϵ) é um representante de r, e em seguida a *ultra-pseudo-norma*

$$\begin{aligned} |\cdot|_e : \overline{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ u &\longrightarrow |u|_e = e^{-v(u)}. \end{aligned}$$

A topologia em $\overline{\mathbb{C}}$ induzida por $|\cdot|_e$ é chamada topologia cortante e a distância é definida por $d(u, v) = |u - v|_e$. Veja propriedades de v e de $|\cdot|_e$ em [AJ01], Proposição 1.3 e Corolário 1.6.

Garetto [Gar05], define um $\overline{\mathbb{C}}$-módulo topológico como um $\overline{\mathbb{C}}$-módulo $\mathcal{G}$ com uma topologia $\overline{\mathbb{C}}$-linear, i.e., soma em $\mathcal{G}$ e produto por elementos de $\overline{\mathbb{C}}$ são funções contínuas, e define um $\overline{\mathbb{C}}$-módulo topológico localmente convexo como um $\overline{\mathbb{C}}$-módulo topológico cuja topologia é determinada por uma família de ultra-pseudo-seminormas, estas últimas definidas como segue:

Definição 20. *Uma ultra-pseudo-seminorma em $\mathcal{G}$ é uma função $\mathcal{P} : \mathcal{G} \to \mathbb{R}_+$ tal que*

(i) $\mathcal{P}(0) = 0$*;*

(ii) $\mathcal{P}(\lambda u) \leq |\lambda|_e \mathcal{P}(u)\ \forall\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}},\ \forall\ u \in \mathcal{G}$*;*

(iii) $\mathcal{P}(u + v) \leq max\{\mathcal{P}(u), \mathcal{P}(v)\}\ \forall\ u, v \in \mathcal{G}$*.*

Podemos equipar $\mathcal{G}_E$ com a estrutura de um $\overline{\mathbb{C}}$-módulo topológico localmente convexo extendendo primeiro a noção de valorização para o contexto de $\overline{\mathbb{C}}-$módulos, em seguida usando a família de seminormas $\{p_i\}_{i \in I}$ de E para definir valorizações em $\mathcal{G}_E$ e por fim definindo as ultra-pseudo-seminormas correspondentes, visto que qualquer valorização v gera uma ultra-pseudo-seminorma $\mathcal{P}$ pondo $\mathcal{P}(u) = e^{-v(u)}$.

Definição 21. *Uma valorização em um $\overline{\mathbb{C}}$-módulo $\mathcal{G}$ é uma função $v : \mathcal{G} \to (-\infty, +\infty]$ tal que*

(i) $v(0) = +\infty$*;*

(ii) $v(\lambda u) \geq v_{\overline{\mathbb{C}}}(\lambda) + v(u),\ \forall\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}},\ \forall\ u \in \mathcal{G}$;

(iii) $v(u+\omega) \geq min\{v(u), v(\omega)\}\ \forall\ u, \omega \in \mathcal{G}$.

Para $u \in \mathcal{G}_E$ e $(u_\epsilon)_\epsilon$ um representante de u, definindo as valorizações

$$v_{p_i}(u) = sup\{a \in \mathbb{R} : p_i(u_\epsilon) = O(\epsilon^a), \epsilon \to 0\}$$

e as ultra-pseudo-seminormas correspondentes $\{\mathcal{P}_i\}_{i \in I}$ por $\mathcal{P}_i(u) = e^{-v_{p_i}(u)}$, temos que $\mathcal{G}_E$ é um $\overline{\mathbb{C}}$-módulo topológico localmente convexo.

Neste contexto, vamos definir para a álgebra simplificada $\mathcal{G}(\Omega)$, a família de valorizações

$$V_{mp}(u) := sup\{a \in \mathbb{R} : \forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0\ com\ |\alpha| \leq p,\ temos\ ||\partial^\alpha u_\epsilon(\cdot)||_{\Omega_m} = O(\epsilon^a), \epsilon \to 0\},$$

onde $m, p \in \mathbb{N}$ e $(\Omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma exaustão aberta de Ω, e as ultra-pseudo-seminormas correspondentes

$$||u||_{mp} := e^{-V_{m,p}(u)}.$$

Para cada par $m, p \in \mathbb{N}$, $D_{mp}(u, v) := ||u - v||_{mp}$ é uma ultra-pseudo-métrica em $\mathcal{G}(\Omega)$, e a topologia metrizável resultante é chamada *topologia cortante* em $\mathcal{G}(\Omega)$.

Para a full, dado $x \in \overline{\mathbb{K}}_f$ definimos $A(x) := \{r \in \mathbb{R} : \alpha^\bullet_r x \approx 0\}$ e em seguida a valorização de x por $V(x) := sup(A(x))$. O conceito de associação neste ambiente é definido em 18. Note que $r \in A(x)$ se, e somente se, $\exists\ p \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-r} x_{\varphi_\varepsilon} = 0$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{A}_p(\mathbb{K})$. A ultra-norma e distância são definidas de forma análoga.

Para $f \in \mathcal{G}_f(\Omega)$, defina a família de conjuntos $A_{mp}(f) := \{r \in \mathbb{R} : \alpha^\bullet_r ||f||_{mp} \approx 0\}$ e defina à família de valorizações $V_{mp}(f) := sup(A_{mp}(f))$. Assim, $D_{mp} : \mathcal{G}_f(\Omega) \times \mathcal{G}_f(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ definida por $D_{mp}(x, y) = e^{-V_{mp}(x-y)}$ é uma família de ultra-métricas em $\mathcal{G}_f(\Omega)$, onde $m, p \in \mathbb{N}$ denotam uma exaustão de Ω e a ordem da derivada de f respectivamente, veja [AFJ09]. Isto determina uma estrutura uniforme em $\mathcal{G}_f(\Omega)$ chamada estrutura uniforme cortante em $\mathcal{G}_f(\Omega)$ e a topologia resultante de (D_{mp}) é chamada a topologia cortante em $\mathcal{G}_f(\Omega)$.

Existe ainda uma topologia formalizada por Aragona, Fernandez e Juriaans [AFJ06][AFJ09], compatível com a estrutura de anel, e que coincide com a topologia cortante definida em $\overline{\mathbb{K}}$ e $\mathcal{G}(\Omega)$, mas com a vantagem de ter um sistema de vizinhanças de zero com raios generalizados. Estes raios (chamados medidores padrão) são os números generalizados definidos na simplificada e na full respectivamente por $\alpha_r := [(\epsilon^r)_\epsilon]$ e $\alpha^\bullet_r := [(i(\varphi)^r)_\varphi]$. A partir de agora, vamos denotar os números generalizados na full por $\overline{\mathbb{K}}_f$. Para visualizar esta topologia, primeiro para os números generalizados, considere o módulo, definido em $\overline{\mathbb{K}}$ e em $\overline{\mathbb{K}}_f$ respectivamente, por:

$$|x| := [(|x_\epsilon|)_\epsilon]\ se\ x = [(x_\epsilon)_\epsilon] \in \overline{\mathbb{K}}\ \ e\ \ |x| := [(|x_\varphi|)_\varphi]\ se\ x = [(x_\varphi)_\varphi] \in \overline{\mathbb{K}}_f.$$

Agora, se $x_0 \in \overline{\mathbb{K}}$ e $r \in \mathbb{R}$ considere

$$V_r(x_0) := \{x \in \overline{\mathbb{K}} : |x - x_0| \leq \alpha_r\} \ \ e \ \ \mathcal{B} := \{V_r(0) : r \in \mathbb{R}\}.$$

Da mesma forma, se $x_0 \in \overline{\mathbb{K}}_f$ e $r \in \mathbb{R}$ considere

$$V_r[x_0] := \{x \in \overline{\mathbb{K}}_f : |x - x_0| \leq \alpha_r^\bullet\} \ \ e \ \ \mathcal{B}_f := \{V_r[0] : r \in \mathbb{R}\}.$$

A relações de ordem acima são parciais e definidas por: em $\overline{\mathbb{K}}$, dizemos que x é quase positivo, e denotamos $x \geq 0$, se existe um representante $(x_\epsilon)_\epsilon$ de x tal que $x_\epsilon \geq 0$ para todo $\epsilon \in I$. Esta definição é análoga se $x \in \overline{\mathbb{K}}_f$, basta tomar a substituição óbvia $x_\varphi \geq 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{A}_0$. Consulte o Lema 2.1 em [AFJ09] para condições equivalentes. Em ambos os casos, $x \geq y$ se, e somente se, $x - y \geq 0$.

Teorema 4. *$\mathcal{B}$ (respc. $\mathcal{B}_f$) é um sistema de 0-vizinhanças de $\overline{\mathbb{K}}$ (respc $\overline{\mathbb{K}}_f$) que induz uma topologia compatível com a estrutura de anel de $\overline{\mathbb{K}}$ (respc $\overline{\mathbb{K}}_f$).*

A prova deste teorema pode ser encontrada em [AFJ09], Lemas 2.12 e 2.9. Nesta mesma referência é provado que esta topologia coincide com a topologia cortante em $\overline{\mathbb{K}}$, veja o Teorema 2.13.

Analogamente, para toda $f \in \mathcal{G}(\Omega)$, e fixados $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ e $l \in \mathbb{N}$, definimos

$$|f|_{\beta,l} := [(||\partial^\beta f_\epsilon(\cdot)||_l)_{\epsilon \in I}],$$

e para toda $f \in \mathcal{G}_f(\Omega)$, com β e l fixados, definimos

$$||f||_{\beta,l} := [(||\partial^\beta f_\varphi(\cdot)||_l)_{\varphi \in \mathcal{A}_0(n)}].$$

Aqui, $||\cdot||_l$ denota a norma do supremo em Ω_l (de uma exaustão de Ω). Então, para toda $f_0 \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $r \in \mathbb{R}$, definimos

$$W_{l,r}^\beta(f_0) := \{f \in \mathcal{G}(\Omega) : |f - f_0|_{\sigma,l} \leq \alpha_r \ \forall \ \sigma \leq \beta\} \ \ e \ \ \mathcal{B}_\Omega := \{W_{l,r}^\beta(0) : \beta \in \mathbb{N}_0^n, \ l \in \mathbb{N} \ e \ r \in \mathbb{R}\},$$

e definimos para toda $f_0 \in \mathcal{G}_f(\Omega)$ e $r \in \mathbb{R}$,

$$W_{l,r}^\beta[f_0] := \{f \in \mathcal{G}_f(\Omega) : ||f - f_0||_{\sigma,l} \leq \alpha_r^\bullet \ \forall \ \sigma \leq \beta\} \ \ e \ \ \mathcal{B}_{f\Omega} := \{W_{l,r}^\beta[0] : \beta \in \mathbb{N}_0^n, \ l \in \mathbb{N} \ e \ r \in \mathbb{R}\}.$$

Vale o seguinte teorema.

Teorema 5. *$\mathcal{B}_\Omega$ (respc $\mathcal{B}_{f\Omega}$) é um sistema de 0-vizinhanças de $\mathcal{G}(\Omega)$ (respc $\mathcal{G}_f(\Omega)$) que induz uma topologia compatível com a estrutura de anel de $\mathcal{G}(\Omega)$ (respc $\mathcal{G}_f(\Omega)$).*

Esta topologia coincide com a topologia cortante em $\mathcal{G}(\Omega)$. Para uma demonstração consulte os Teoremas 3.6 e 3.12.

Uma vez esclarecida a topologia, partiremos para as configurações do cálculo generalizado, considere primeiro o seguinte lema.

Lema 1. *Sejam $U \subset \overline{\mathbb{K}}$ aberto, $f : U \to \overline{\mathbb{K}}$ e $x_0 \in U$. Então existe no máximo um $z_0 \in \overline{\mathbb{K}}$ tal que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - z_0(x - x_0)}{\alpha_{-log||x-x_0||}} = 0.$$

Este resultado dá sentido a seguinte definição.

Definição 22 (Funções diferenciáveis)**.** *Dados $U \subset \overline{\mathbb{K}}$ aberto, $f : U \to \overline{\mathbb{K}}$ e $x_0 \in U$. Dizemos que f é diferenciável em x_0 se existe $z_0 \in \overline{\mathbb{K}}$ tal que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - z_0(x - x_0)}{\alpha_{-log||x-x_0||}} = 0.$$

Denotamos esta diferenciabilidade por $D(f)(x_0) = z_0$. Note que a taxa de variação na definição acima é capturada por medidores padrão α_r, que devido a estrutura topológica de $\overline{\mathbb{K}}$, são mais apropriados para modelar qualquer conceito de variação local.

É direto ver que se f é diferenciável em x_0, então

$$D(f)(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + \alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n}.$$

As demais definições, seguem naturalmente. Apresentamos primeiro a noção de derivação parcial.

Definição 23 (Derivação parcial)**.** *Sejam $U \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ aberto, $f : U \to \overline{\mathbb{K}}$ e $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in U$. Para $1 \leq i \leq n$ suponha que existe $a_i \in \overline{\mathbb{K}}$ tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_{01}, \ldots, x_{0i} + h, \ldots, x_{0n}) - f(x_0) - a_i h}{\alpha_{-log||h||}} = 0.$$

Dizemos então que a_i é a derivada parcial de f com respeito a x_i em x_0 (ou i-ésima derivada parcial de f em x_0) e escrevemos $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = a_i$.

Se U é um subconjunto aberto de $\overline{\mathbb{R}}^n$ e $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$\mathcal{C}^k(U, \overline{\mathbb{K}}) := \{f : U \to \overline{\mathbb{K}} : \partial^\alpha f \in \mathcal{C}(U, \overline{\mathbb{K}}), \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n \ tal\ que\ |\alpha| \leq k\}.$$

Naturalmente definimos

$$\mathcal{C}^\infty(U, \overline{\mathbb{K}}) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(U, \overline{\mathbb{K}}).$$

Se $x = (x_1, \ldots, x_n)$, dizemos que f é diferenciável em $x_0 \in U$ se existe $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \overline{\mathbb{K}}^n$, tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \sum_i a_i(x_i - x_{0i})}{\alpha_{-log||x-x_0||}} = 0.$$

Mais geralmente, para $U \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ aberto e $f : U \to \overline{\mathbb{R}}^m$, escrevendo $f = (f_1, \ldots, f_m)$, onde para cada i, $f_i : U \to \overline{\mathbb{R}}$ é função coordenada de f, dizemos que f é diferenciável em $x_0 \in U$, se cada f_i é diferenciável em x_0.

Resultados standards do cálculo, desde os mais triviais, como por exemplo que diferenciabilidade implica em continuidade, aos mais celebrados, como o Teorema da Função Inversa e o da Função Implícita, tem suas versões no ambiente generalizado. Isto garante que esta versão newtoniana do cálculo para funções generalizadas é uma extensão natural do cálculo clássico. Finalmente, vamos enunciar o resultado que evidencia a proximidade desta teoria com a derivação de Schwartz.

Teorema 6 (Teorema do mergulho). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. O mergulho $k : \mathcal{G}(\Omega) \to \mathcal{C}^1(\tilde{\Omega}_c, \overline{\mathbb{K}})$ é um homomorfismo injetivo de $\overline{\mathbb{K}}$-álgebras. Além disso, k é contínua e $k\big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big) = \frac{\partial (k(f))}{\partial x_i}$ $\forall\ f \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $1 \leq i \leq n$.*

Demonstração. Consulte [AFJ05], Teorema 4.1. □

Como uma consequência deste teorema, note que as funções generalizadas, e em particular as distribuições, são funções infinitamente diferenciáveis, agora em um sentido newtoniano claro. Note também que a função de Heaviside $\kappa(H)$ não é um idempotente, i.e., $\kappa(H)^2 \neq \kappa(H)$. E não menos importante, perceba que para estas novas funções $\mathcal{C}^\infty$, quando definidas em $\tilde{\Omega}_c$, as composições ficam bem definidas no mesmo sentido que no ambiente clássico.

Exemplo 4. *Para $n = 1$, a função $g(x) = \alpha_{\ln(\|x\|^{-2})}$, $g(0) = 0$, é diferenciável, não constante e $g'(x) = 0$ para todo x. Contudo, se $f \in \kappa(\mathcal{G}(\mathbb{R}))$ e $f' \equiv 0$, então f é constante. Por isso esta regra clássica fundamental não é violada se nos restringirmos as funções de $\mathcal{G}(\mathbb{R})$.*

Por fim, lembramos que existe ainda uma teoria de integração sobre membranas (um tipo especial de conjunto interno) desenvolvido por estes autores em [AFJO12]. Resultados envolvendo estas noções da topologia e do cálculo continuam sendo provados, como por exemplo o teorema do ponto fixo provado por Juriaans e Oliveira em [JO22]. A versão para a full é análoga e pode ser encontrada em [AFJ06] [CGdS17], portanto não vamos descrevê-la.

Antes de prosseguir para uma análise dessas estruturas considerando operadores, perceba que a construção do anel $\overline{\mathbb{R}}$ é semelhante a construção de $\mathbb{R}$ por classes de equivalência de sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$, e embora os números reais sejam um padrão para se fazer matemática, raras vezes sua construção é levada em consideração, o que de fato importa é sua estrutura algébrica e topológica. Isto nos diz que nenhuma análise não standard é necessária para entendê-lo e que não é precisamente necessário que o leitor fique preso aos detalhes inicialmente complicados da construção de $\overline{\mathbb{R}}$ e sim que conheça suas tais estruturas. Isto se comprova observando que muitos resultados em álgebra de funções generalizadas são provados intrinsecamente, isto é, sem fazer uso dos representantes. Nesse sentido, o teorema abaixo traz um resumo de tudo que é necessário saber sobre $\overline{\mathbb{R}}$ para usá-lo como estrutura básica em novas teorias. Mais detalhes sobre isso podem ser encontrados em [JQ23].

Teorema 7 ([AJ01]). *1. $\overline{\mathbb{R}}$ é parcialmente ordenado, não arquimediano e ultramétrico. E ainda, satisfaz $||x \cdot y|| \leq ||x|| \cdot ||y||$ e $||x + y|| \leq max\{||x||, ||y||\}$;*

2. *$Inv(\overline{\mathbb{R}})$ é aberto e denso em $\overline{\mathbb{R}}$;*

3. *$x \in Inv(\overline{\mathbb{R}})$ se, e somente se, $|x| \geq \alpha_r$ para algum $r \in \mathbb{R}$;*

4. *$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \{e \in \overline{\mathbb{R}} : e^2 = e\} = \{\mathcal{X}_S : S \in \mathcal{S}\}$;*

5. *$x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus Inv(\overline{\mathbb{R}})$ se, e somente se, $\exists$ um idempotente não trivial e tal que $ex = 0$;*

6. *O radical de Jacobson de $\overline{\mathbb{R}}$ é $\{0\}$. Em particular, $\overline{\mathbb{R}}$ não tem elementos nilpotentes não triviais;*

7. *A bola unitária $B_1(0)$ consiste de infinitesimais, i.e., se $x \in B_1(0)$ então $|x| < 1/n, \ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Em particular, $\alpha_r \in B_1(0), \ \forall\ r > 0$;*

8. *Para cada $r < 0$, α_r é um infinito, i.e., $\alpha_r > n, \ \forall\ n \in \mathbb{N}$;*

9. *Se $x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ então existe $e \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ tal que $e \cdot x \in Inv(e \cdot \overline{\mathbb{R}})$;*

10. *$\mathbb{R}$ está mergulhado em $\overline{\mathbb{R}}$ como uma grade de pontos equidistantes cuja distância comum é igual a 1.*

Para $\overline{\mathbb{R}}_f$, estas propriedades podem ser encontradas em [AGJ13].

Finalizamos esta seção comparando a topologia clássica em análise com a topologia cortante. Para isto lembremos do conceito de continuidade. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em x_0. Classicamente isto significa que para todo ε positivo existe δ_ε positivo tal que sempre que $|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon$ temos $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ ($|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$). Para topologia cortante, isto se traduz da seguite forma: f é contínua em x_0, se dado α, existe $\delta = [(\delta_\varepsilon)]$ tal que, $x \in V_\delta(x_0) \Longrightarrow f(x) \in V_1(f(x_0))$. Isto prova que classicamente interrompemos a medição em escala α e também justifica a definição de derivação como apresentada anteriormente.

Operadores generalizados

Uma vez esclarecida a topologia podemos tratar da continuidade de mapas $\overline{\mathbb{C}}$-lineares entre $\overline{\mathbb{C}}$-módulos topológicos localmente convexos. Nesse sentido, o próximo resultado é uma caracterização da continuidade desses mapas. Trata-se do Corolário 1.17 de [Gar05]. Completaremos esta seção com alguns conceitos de uma teoria de análise funcional generalizada apresentados por Garetto e Vernaeve em [GV11], os quais colocaremos aqui para melhorar a compreensão dos operadores generalizados, que por sua vez são importantes em alguns de nossos resultados. Estas referências devem ser consultadas para demonstrações e um estudo mais detalhado.

Teorema 8. *Se $(\mathcal{G}, \{\mathcal{P}_i\}_{i\in I})$ e $(\mathcal{H}, \{\mathcal{Q}_j\}_{j\in J})$ são $\overline{\mathbb{C}}$-módulos topológicos localmente convexos e $T : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é um mapa $\overline{\mathbb{C}}$-linear, então são equivalentes:*

1. *T é contínuo;*

2. *T é contínuo na origem;*

3. *$\forall\ j \in J$, existe um subconjunto finito $I_0 \subseteq I$ e uma constante $C > 0$, tal que para todo $u \in \mathcal{G}$*
$$\mathcal{Q}_j(Tu) \leq C \max_{i\in I_0} \mathcal{P}_i(u). \tag{3}$$

Ainda em relação ao teorema anterior, considere a seguinte definição:

Definição 24 (Mapa básico)**.** *Sejam E e F espaços vetoriais localmente convexos. Um mapa $\overline{\mathbb{C}}$-linear $T : \mathcal{G}_E \to \mathcal{G}_F$ é básico se existe uma rede $(T_\varepsilon)_\varepsilon$ de mapas lineares contínuos de E para F satisfazendo*

$$\forall\ j \in J,\ \exists\ I_0 \subseteq I\ finito,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \exists\ \eta \in (0,1], de\ modo\ que\ \forall\ u \in E\ e\ \forall\ \varepsilon \in (0,\eta],$$

$$q_j(T_\varepsilon u) \leq \varepsilon^{-N} \sum_{i\in I_0} p_i(u), \tag{4}$$

e tal que $Tu = [(T_\varepsilon(u_\varepsilon))_\varepsilon]$, $\forall\ u \in \mathcal{G}_E$.

Note que (4) implica (3) e portanto mapas básicos são contínuos.

Definição 25 (Mapa com representante)**.** *Sejam E e F espaços normados e $T : \mathcal{G}_E \to \mathcal{G}_F$ um mapa $\overline{\mathbb{C}}$-linear. Então, um representante de T, se existir, é uma rede $(T_\varepsilon)_\varepsilon$ de mapas lineares de E para F tais que $(T_\varepsilon(u_\varepsilon))_\varepsilon$ é moderada sempre que $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ é moderada, $(T_\varepsilon(u_\varepsilon))_\varepsilon$ é nula sempre que $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ é nula e $Tu = [(T_\varepsilon(u_\varepsilon))_\varepsilon]$ para todo $u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon]$.*

Proposição 2. *Sejam E e F espaços normados e $T : \mathcal{G}_E \to \mathcal{G}_F$ um mapa $\overline{\mathbb{C}}$-linear. Se T tem um representante $(T_\varepsilon)_\varepsilon$, então T é contínuo.*

Demonstração. Veja [GV11] Proposição 1.9. □

Definição 26. *Seja $\mathcal{G}$ um $\overline{\mathbb{C}}$-módulo. Uma $\overline{\mathbb{R}}$-seminorma em $\mathcal{G}$ é um mapa $p : \mathcal{G} \to \overline{\mathbb{R}}$ satisfazendo:*

(i) $p(0) = 0$ *e* $p(u) \geq 0\ \forall u \in \mathcal{G}$;

(ii) $p(\lambda u) = |\lambda| p(u)\ \forall\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}},\ \forall\ u \in \mathcal{G}$;

(iii) $p(u + v) \leq p(u) + p(v)\ \forall\ u, v \in \mathcal{G}$.

Uma $\overline{\mathbb{R}}$-norma é uma $\overline{\mathbb{R}}$-seminorma p tal que $p(u) = 0$ se e somente se $u = 0$.

Exemplo 5. *Seja $(E,\{p_i\}_{i\in I})$ um espaço vetorial topológico localmente convexo e $\mathcal{G}=\mathcal{G}_E$. Então podemos extender qualquer seminorma p_i de E para uma $\overline{\mathbb{R}}$-seminorma em $\mathcal{G}_E$, a qual também denotaremos por p_i, definindo $p_i(u):=[(p_i(u_\varepsilon))_\varepsilon]$. Para ver isto basta notar a moderação da rede $(p_i(u_\varepsilon))_\varepsilon$ e a não dependência do representante $(u_\varepsilon)_\varepsilon$.*

Para um análogo do teorema 8, i.e., para uma caracterização por estimativas de mapas $\overline{\mathbb{C}}$-lineares contínuos entre $\overline{\mathbb{C}}$-módulos com $\overline{\mathbb{R}}$-seminormas veja [GV11], Proposição 1.7.

Da teoria de $\overline{\mathbb{C}}$-módulos Hilbert, desenvolvida nesta referência, queremos destacar o que segue.

Definição 27 (Produto escalar)**.** *Seja $\mathcal{G}$ um $\overline{\mathbb{C}}$-módulo. Um produto escalar $(\cdot|\cdot)$ é uma forma $\overline{\mathbb{C}}$-sesquilinear de $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ para $\overline{\mathbb{C}}$, satisfazendo para todo $u,v\in\mathcal{G}$, as seguintes propriedades:*

(i) $(u|v)=\overline{(v|u)}$;

(ii) $(u|u)\in\overline{\mathbb{R}}$ *e* $(u|u)\geq 0$;

(iii) $(u|u)=0$ *se, e só se,* $u=0$.

Os mapas $||\cdot||: u\in\mathcal{G}\to ||u||:=(u|u)^{\frac{1}{2}}\in\overline{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{P}: u\in\mathcal{G}\to\mathcal{P}(u):=|(u|u)^{\frac{1}{2}}|_e=|(u|u)|_e^{\frac{1}{2}}\in[0,+\infty)$ são respectivamente uma $\overline{\mathbb{R}}$-norma e uma ultra-pseudo-norma em $\mathcal{G}$. A topologia em $\mathcal{G}$ induzida por $||\cdot||$ ou equivalentemente por $\mathcal{P}$, veja Proposição 1.6, torna $\mathcal{G}$ um $\overline{\mathbb{C}}$-módulo topológico.

Definição 28 ($\overline{\mathbb{C}}$-módulo Hilbert)**.** *Um $\overline{\mathbb{C}}$-módulo Hilbert é um $\overline{\mathbb{C}}$-módulo com produto escalar $(\cdot|\cdot)$ que é completo quando equipado com a topologia induzida pela ultra-pseudo-norma $\mathcal{P}$.*

Se $(H,(\cdot|\cdot))$ é um espaço de Hilbert, então $\mathcal{G}_H$ é um $\overline{\mathbb{C}}$-módulo Hilbert onde o produto escalar é definido por $(u|v)=[((u_\varepsilon|v_\varepsilon))_\varepsilon]$. Mais geralmente vale o seguinte resultado.

Proposição 3. *Sejam $(H_\varepsilon,(\cdot|\cdot)_{H_\varepsilon})_\varepsilon$ uma rede de espaços vetoriais com produto escalar e $\mathcal{G}:=\dfrac{\mathcal{M}_{(H_\varepsilon)_\varepsilon}}{\mathcal{N}_{(H_\varepsilon)_\varepsilon}}$ o $\overline{\mathbb{C}}$-módulo, onde*

$$\mathcal{M}_{(H_\varepsilon)_\varepsilon}=\{(u_\varepsilon)_\varepsilon:\forall\ \varepsilon\in I\ u_\varepsilon\in H_\varepsilon\ e\ \exists\ N\in\mathbb{N}\ tal\ que\ ||u_\varepsilon||_{H_\varepsilon}=O(\varepsilon^{-N})\}$$

e

$$\mathcal{N}_{(H_\varepsilon)_\varepsilon}=\{(u_\varepsilon)_\varepsilon:\forall\ \varepsilon\in I\ u_\varepsilon\in H_\varepsilon\ e\ \forall\ q\in\mathbb{N}\ ||u_\varepsilon||_{H_\varepsilon}=O(\varepsilon^{q})\}.$$

Seja $(\cdot|\cdot):\mathcal{G}\times\mathcal{G}\to\overline{\mathbb{C}}$ a forma $\overline{\mathbb{C}}$-sesquilinear definida por

$$(u,v):=[((u_\varepsilon|v_\varepsilon)_{H_\varepsilon})_\varepsilon].$$

Então, $(\cdot|\cdot)$ é um produto escalar que equipa $\mathcal{G}$ com a estrutura de um $\overline{\mathbb{C}}$-módulo Hilbert.

Demonstração. Consulte a Proposição 2.7. □

Definição 29. *Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ $\overline{\mathbb{C}}$-módulos Hilbert e $T : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ um mapa $\overline{\mathbb{C}}$-linear contínuo. Um mapa $\overline{\mathbb{C}}$-linear contínuo $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ é chamado adjunto de T se*

$$(Tu|v) = (u|T^*v)$$

para todo $u \in \mathcal{G}$ e $v \in \mathcal{H}$.

O operador adjunto T^*, se existir, é único, e sempre existe se T é básico, veja a Proposição 5.3.

Definição 30 (Operador autoadjunto)**.** *Sejam $\mathcal{G}$ um $\overline{\mathbb{C}}$-módulo Hilbert e $T : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ um operador $\overline{\mathbb{C}}$-linear contínuo. Então T é chamado autoadjunto se $(Tu|v) = (u|Tv)$ para todo $u, v \in \mathcal{G}$.*

O seguinte resultado é uma caracterização de operadores autoadjuntos generalizados.

Proposição 4. *As seguintes condições são equivalentes:*

(i) T é um operador autoadjunto em $\mathcal{G}$;

(ii) $(Tu|u) = (u|Tu)$ para todo $u \in \mathcal{G}$;

(iii) $(Tu|u) \in \overline{\mathbb{R}}$ para todo $u \in \mathcal{G}$.

Demonstração. Veja Proposição 5.16. □

Para o próximo resultado considere $\mathcal{G} = M_n(\overline{\mathbb{K}})$, (matrizes de lado n em $\overline{\mathbb{K}}$, o qual é isomorfo a $\overline{\mathbb{K}}^{n^2}$). A seguinte proposição classifica as matrizes autoadjuntas quanto aos seus representantes, trata-se do Lema 4.3 de [May08]. Colocamos uma prova análoga aqui, apenas para considerarmos $\overline{\mathbb{C}}$ enquanto que neste último o ambiente é $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposição 5. *Seja $A \in M_n(\overline{\mathbb{K}})$. São equivalentes:*

(i) A é hermitiana;

(ii) Existe um representante $(A_\varepsilon)_\varepsilon = (a_{ij}^\varepsilon)_\varepsilon$ de A formado por matrizes hermitianas.

Demonstração. A implicação $(ii) \Rightarrow (i)$ é direta. Para a implicação contrária, tome um representante $(a_{ij}^\varepsilon)_\varepsilon$ de A qualquer e defina

$$\alpha_{ij}^\varepsilon := \frac{a_{ij}^\varepsilon + \overline{a_{ji}^\varepsilon}}{2}.$$

A rede $(\alpha_{ij}^\varepsilon)_\varepsilon$ é claramente moderada e por (i) é um representante de A. E ainda, para cada par (i,j) temos $\overline{\alpha_{ji}^\varepsilon} = \dfrac{\overline{a_{ji}^\varepsilon} + a_{ij}^\varepsilon}{2} = \alpha_{ij}^\varepsilon$, e por isso cada $(\alpha_{ij}^\varepsilon)$ é hermitiana. □

O leitor pode encontrar também em [GV11] as definições de operadores isométricos e unitários, bem como caracterizações e propriedades.

Operadores em QFT

Nesta seção, vamos tratar da motivação dos nossos resultados sobre probabilidades de transição generalizadas, que é física, mas em nossos resultados a semelhança com QFT se limita apenas a motivação ao considerar a matemática deste problema para apresentar uma aplicação para o conceito de *suporte*. Nossa intenção é deixar claro que este conceito é um importante veículo de transporte das informações obtidas ao se interpretar a realidade física no ambiente generalizado para o ambiente clássico. As dependências temporais destes operadores não serão consideradas pois é necessário mais avanços teóricos antes de partir para exemplos físicos. Veja mais sobre isso na introdução deste trabalho. Apresentaremos para a conveniência do leitor um resumo dos objetos físicos considerados em [JFAC+17] e suas expressões no ambiente generalizado. Os cálculos para se chegar a estas expressões podem ser encontrados em [CG08]. As relações de comutação, importantes no formalismo Hamiltoniano canônico e que surgem como funções de distribuições clássicas, também podem ser encontradas nesta referência. Trata-se de cálculos de Heisenberg-Pauli de um modelo simples mas não trivial em QFT, a saber um campo de bóson escalar real auto-interagente, que são apresentados de forma puramente formal no sentido de não estarem definidos matematicamente, mas serem feitos em concordância a cálculos realizados com funções C^∞. A partir de agora vamos nos referir ao ambiente generalizado com a notação $\mathcal{G}$.

- Espaço de Fock

Denotado por $\mathbb{F}$, é a soma direta hilbertiana

$$\mathbb{F} = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} L_s^2((\mathbb{R}^3)^n),$$

onde $L_s^2((\mathbb{R}^3)^0) = \mathbb{C}$, $L_s^2((\mathbb{R}^3)^1) = L^2(\mathbb{R}^3)$ e para $n \geq 2$ $L_s^2((\mathbb{R}^3)^n)$ é o subespaço fechado do espaço $L^2((\mathbb{R}^3)^n)$ de funções integráveis de valores complexos que são simétricas nas n entradas. De um modo geral, uma soma direta hilbertiana de uma família de espaços de Hilbert $\{H_i\}_{i\in I}$ é o conjunto

$$\bigoplus_{i\in I} H_i = \left\{ h \in \prod_{i\in I} H_i : \sum_{i\in I} ||h_i||_{H_i}^2 < \infty \right\},$$

com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definido por $\langle g, h\rangle = \sum_{i\in I}\langle g_i, h_i\rangle_{H_i}$, e com respeito ao qual $\bigoplus_{i\in I} H_i$ é um espaço de Hilbert. Isto nos dá que um elemento $F \in \mathbb{F}$ é uma sequência infinita $F = (f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots)$ tal que

$$||F||^2 = |f_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} ||f_n||_{L^2((\mathbb{R}^3)^n)}^2 < +\infty.$$

O espaço $\mathbb{F}$ contém o domínio $\mathbb{D}$ dos operadores considerados.

- Operadores de criação e aniquilação

Considere $\mathbb{D}$ o subespaço denso de $\mathbb{F}$ das sequências (f_n) cujas funções são nulas para n suficientemente grande. Fixe $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, o operador de criação $a^+(\psi) : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ é definido por

$$a^+(\psi)\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_0\psi(\xi_1) \\ \sqrt{2}Sym(\psi(\xi_2)\otimes f_1) \\ \vdots \\ \sqrt{n}Sym(\psi(\xi_n)\otimes f_{n-1}) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

onde Sym é a função de simetrização

$$Sym(f)(\xi_1,\cdots,\xi_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi} f(\xi_{\pi(1)},\cdots,\xi_{\pi(n)}),$$

com π variando no conjunto das $n!$ permutações de $\{1,\cdots,n\}$ e $\xi_j \in \mathbb{R}^3$. Já o operador de aniquilação $a^-(\psi) : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ é definido por

$$a^-(\psi)\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\psi(\xi_1), f_1(\xi_1)\rangle \\ \sqrt{2}\langle\psi(\xi_2), f_2(\xi_1,\xi_2)\rangle \\ \sqrt{3}\langle\psi(\xi_3), f_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\rangle \\ \vdots \\ \sqrt{n+1}\langle\psi(\xi_{n+1}), f_{n+1}(\xi_1,\cdots,\xi_{n+1})\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Os operadores de criação e aniquilação são utilizados em QFT em sistemas de muitas partículas, eles aumentam e reduzem, respectivamente, o número de partículas em um determinado estado e são adjuntos mutuamente, veja [CG08] Proposição 1.1.1. São usados como alternativa ao uso de funções de onda em um processo conhecido como segunda quantização. Em certos modelos físicos, operadores podem ser expressos como função de operadores que criam e destroem partículas, é este o caso do operador Hamiltoniano total.

- Operador Hamiltoniano total

Se $t, m, g \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N}$, o Hamiltoniano total é definido por

$$H_0(t) := \int_{\mathbb{R}^3} \Big[\frac{1}{2}(\partial_t\Phi_0(x,t))^2 + \frac{1}{2}\sum_{1\leq\mu\leq 3}(\partial_{x_\mu}\Phi_0(x,t))^2 + \frac{1}{2}m^2(\Phi_0(x,t))^2 + \frac{g}{N+1}(\Phi_0(x,t))^{N+1}\Big]dx, \tag{5}$$

onde $\Phi_0(x,t)$ é o operador de campo livre definido por

$$\Phi_0(x,t) := a^+(\psi_1) + a^-(\psi_2), \tag{6}$$

com funções ψ_1 e ψ_2 definidas respectivamente por

$$k \to (2k^0)^{-1/2}(2\pi)^{-3/2}e^{ik^0t}e^{-ikx}$$

$$k \to (2k^0)^{-1/2}(2\pi)^{-3/2}e^{-ik^0t}e^{ikx},$$

onde $k^0 = \sqrt{|k|^2 + m^2}$. As potências na equação (5) são composições de operadores no espaço de Fock. O Hamiltoniano de um sistema é um operador que corresponde a energia total do sistema (cinética e potencial), seu espectro é o conjunto de resultados possíveis que podem ser obtidos a partir de uma medição da energia total do sistema, i.e., o Hamiltoniano corresponde a soma das energias cinéticas de todas as partículas mais a energia potencial das partículas associadas ao sistema.

- Operador interagente e operador de espalhamento

Para $\tau < t$,

$$\Phi(x,t) := e^{i(t-\tau)H_0(\tau)}\Phi_0(x,\tau)e^{-i(t-\tau)H_0(\tau)} \tag{7}$$

é chamado operador interagente. Agora defina o operador $P_0 : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ por

$$P_0(F) := (f_0, k^0 f_1(k), \dots, (k_1^0 + \dots + k_n^0) f_n(k_1, \dots, k_n), \dots) \tag{8}$$

e em seguida o operador $exp(itP_0)$ por

$$exp(itP_0)(F) := (f_0, e^{ik^0t} f_1(k), \dots, e^{i(k_1^0 + \dots + k_n^0)t} f_n(k_1, \dots, k_n), \dots). \tag{9}$$

O operador P_0 é simétrico e portanto $exp(itP_0)$ é unitário em $\mathbb{D}$. O operador unitário

$$S_\tau(t) := e^{i(t-\tau)P_0}e^{-i(t-\tau)H_0(\tau)} \tag{10}$$

é chamado operador de espalhamento. Os operadores de espalhamento (S-matrizes) relacionam o estado inicial e o estado final de um sistema físico, associando-os por uma probabilidade (probabilidade de transição). Isto é feito fazendo uma coleção de partículas de entrada colidirem, normalmente com altas energias, ou interagirem de alguma forma, e em seguida medindo os estados das partículas de saída resultantes. De um modo geral, uma S-matriz é uma matriz unitária que conecta conjuntos de estados de partículas assintoticamente livres, i.e., estados de entrada e de saída no espaço de Hilbert de todos os estados físicos (aqui o espaço de Fock), os quais são considerados em um passado distante ou um futuro distante.

Os operadores interagente e de espalhamento relacionam-se pela igualdade

$$\Phi(x,t) = (S_\tau(t))^{-1}\Phi_0(x,t)S_\tau(t). \tag{11}$$

Por fim, as entradas numéricas de uma S-matriz são chamadas amplitudes de espalhamento.

Operadores em $\mathcal{G}$

Vamos agora apresentar os operadores que destacamos acima no ambiente generalizado $\mathcal{G}$. Esta álgebra de funções generalizadas, a qual denota-se $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{D}))$, onde n é 4 (numa referência ao espaço-tempo), é construída da mesma forma como apresentamos a álgebra de Colombeau em seção anterior, é apenas uma extensão desta última, com a diferença que agora as funções tomam valores no espaço $L(\mathbb{D})$ de operadores limitados em $\mathbb{D}$, (mas não em $\mathbb{F}$). Uma teoria de suavidade de funções de $\mathbb{R}^n$ para $L(\mathbb{D})$, necessária para se falar em redes moderadas, é apresentada em [Col82]. Já a limitação em $L(\mathbb{D})$ é uniforme e definida como segue.

Definição 31. *Um subconjunto $\mathcal{B} := \{u_i\}_{i\in I} \subset L(\mathbb{D})$ é dito ser limitado se para todo subconjunto B limitado em $\mathbb{D}$, $\{u_i(f)\}_{i\in I, f\in B}$ é também limitado em $\mathbb{D}$, i.e., os mapas u_i são uniformemente limitados em qualquer subconjunto limitado de $\mathbb{D}$.*

Podemos agora definir naturalmente a álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{D}))$.

Definição 32. *A álgebra de funções generalizadas com valores em $L(\mathbb{D})$, denotada por $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{D}))$, é o espaço quociente*

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{D})) := \frac{\mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{D}))}{\mathcal{N}(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{D}))}, \tag{12}$$

onde

$$\mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{D})) := \{(H_\varepsilon) : \forall \textit{ compacto } K \textit{ em } \mathbb{R}^n\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n\ \exists\ \mathcal{B} \textit{ limitado em } L(\mathbb{D})$$

$$\exists\ N \in \mathbb{N}\ \exists\ \eta \in I\ \forall\ x \in K\ \forall\ \varepsilon < \eta,\ D^\alpha H_\varepsilon(x) \in \frac{1}{\varepsilon^N}\mathcal{B}\}$$

e

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{D})) := \{(H_\varepsilon) : \forall \textit{ compacto } K \textit{ em } \mathbb{R}^n\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n\ \exists\ \mathcal{B} \textit{ limitado em } L(\mathbb{D})$$

$$\forall\ q \in \mathbb{N}\ \exists\ C_q > 0\ \exists\ \eta \in I\ \forall\ x \in K\ \forall\ \varepsilon < \eta,\ D^\alpha H_\varepsilon(x) \in C_q\varepsilon^q\mathcal{B}\}.$$

De forma análoga ao capítulo anterior, as redes em $\mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{D}))$ são chamadas moderadas e as redes em $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{D}))$ são chamadas nulas, $\mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{D}))$ é uma álgebra diferencial com operações pontuais e $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{D}))$ um ideal diferencial. Segue que $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{D}))$ é uma álgebra diferencial, contudo não é comutativa pois suas funções generalizadas tomam valores em $L(\mathbb{D})$. O mergulho do espaço das distribuições $D'(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{D}))$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{D}))$ é também estudado na referência. E por fim, o conceito de associação é exatamente o mesmo, com a observação que a convergência

$$\int H_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \to 0 \text{ } em \text{ } L(\mathbb{D}) \text{ } quando \text{ } \varepsilon \to 0,$$

significa que $\exists\, \mathcal{B}$ limitado em $L(\mathbb{D})$ tal que para todo $a > 0$ $\exists\, \eta > 0$ satisfazendo

$$0 < \varepsilon < \eta \Rightarrow \int H_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \in a\mathcal{B}.$$

Os cálculos para se chegar as expressões desses operadores em $\mathcal{G}$ com as ED's que os relacionam e as relações de comutação, é árduo e deixariam este capítulo desnecessariamente extenso, por isso serão omitidos aqui.

O operador de campo livre em 6 é o operador $\Phi_0 = [(\Phi_{0,\varepsilon})_\varepsilon]$ com representante $\Phi_{0,\varepsilon}$ dado por

$$\begin{aligned}\Phi_{0,\varepsilon}(x,t) = {} & a^+\{k \to (2k^0)^{-1/2}e^{ik^0t}e^{-ikx}\mathcal{F}\phi(\varepsilon k)\} \\ & + \ a^-\{k \to (2k^0)^{-1/2}e^{-ik^0t}e^{ikx}\mathcal{F}\phi(-\varepsilon k)\},\end{aligned} \tag{13}$$

onde $\mathcal{F}\phi(k) := (2\pi)^{-3/2}\int e^{-ikx}\phi(x)dx$ é a transformada de Fourier. Esta expressão é obtida a partir do mergulho em $\mathcal{G}$ da função estado de partícula ψ, usada como argumento para definir os operadores de criação e aniquilação, i.e., é obtida a partir da substituição de ψ por $i(\psi)$. O Teorema 2.3.1 em [CG08] mostra que esse operador é bem definido em $\mathcal{G}$.

Em $\mathcal{G}$, o Hamiltoniano total $H_0(t)$ na equação (5) é a classe de

$$\begin{aligned}H_{0,\varepsilon}(t) := \int_{\mathbb{R}^3} \Big[& \frac{1}{2}(\partial_t\Phi_{0,\varepsilon}(x,t))^2 + \frac{1}{2}\sum_{1\le\mu\le 3}(\partial_{x_\mu}\Phi_{0,\varepsilon}(x,t))^2 \\ & + \frac{1}{2}m^2(\Phi_{0,\varepsilon}(x,t))^2 + \frac{g}{N+1}(\Phi_{0,\varepsilon}(x,t))^{N+1}\Big]\hat{\mathcal{X}}(\varepsilon x)dx,\end{aligned} \tag{14}$$

onde $\hat{\mathcal{X}}$ é uma função no espaço de Schwartz. Cada $H_{0,\varepsilon}$ aplica $\mathbb{D}$ em $\mathbb{D}$ e é simétrico. Além disso, o Hamiltoniano generalizado $[(H_{0,\varepsilon})_\varepsilon]$ admite uma extensão auto-adjunta denotada por $H^{<0>}$, veja o Teorema 3.3.1 em [CG08]. Esta extensão é usada para definir o operador de espalhamento generalizado $S_\tau = [(S_{\tau,\varepsilon})_\varepsilon]$, definido a seguir, e garantir que ele é unitário. O operador de energia P_0 definido em 8 é a classe $[(P_{0,\varepsilon})_\varepsilon]$ onde

$$\begin{aligned}P_{0,\varepsilon}(F) = (f_0, k \mapsto k^0\mathcal{F}\phi(\varepsilon k)\mathcal{F}\phi(-\varepsilon k)f_1(k), \dots, (k_1,\dots,k_n) \mapsto \\ (k_1^0\mathcal{F}\phi(\varepsilon k_1)\mathcal{F}\phi(-\varepsilon k_1) + \cdots + k_n^0\mathcal{F}\phi(\varepsilon k_n)\mathcal{F}\phi(-\varepsilon k_n))f_n(k_1,\dots,k_n), \dots),\end{aligned} \tag{15}$$

e é possível mostrar que

$$H_{0,\varepsilon}(t) = P_{0,\varepsilon} + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(x)}{N+1} (\Phi_{0,\varepsilon}(x,t))^{N+1} dx, \tag{16}$$

onde a constante g é agora substituída por uma função $g(x) \in D(\mathbb{R}^3)$. Finalmente, o operador de espalhamento generalizado é a classe $S_\tau(t) = [(S_{\tau,\varepsilon}(t))_\varepsilon]$, tal que

$$S_{\tau,\varepsilon}(t) := e^{i(t-\tau)P_\varepsilon^{<0>}} e^{-i(t-\tau)H_\varepsilon^{<0>}}, \tag{17}$$

onde $H^{<0>} = [(H_\varepsilon^{<0>})_\varepsilon]$ é a extensão auto-adjunta do Hamiltoniano $H_0 = [(H_{0,\varepsilon})_\varepsilon]$ e $P^{<0>} = [(P_\varepsilon^{<0>})_\varepsilon]$ é a extensão natural de P_0 por 16.

Nas referências que citamos, os autores estão interessados em calcular probabilidades de transição com o operador de espalhamento como configurado acima. Muitos detalhes em QFT precisam ser melhor estudados para esta configuração antes de se chegar a uma teoria mais precisa. Veja mais detalhes sobre isso em [CGP08]. Infelizmente Gsponer não pôde concluir a parte II de seu trabalho. Nos inspiramos neste problema para mostrar como o conceito de *suporte* pode ser aplicado. Não ficaremos restritos a este problema, portanto o leitor não precisa se prender aos detalhes técnicos e complicados das definições dos operadores acima (é apenas a nossa motivação), levaremos em consideração os operadores generalizados como apresentamos em seção específica acima. Sobre estes últimos, vamos agora finalizar este capítulo com resultados relevantes para esta pesquisa.

Um vetor $(v_1, \cdots, v_n) = v \in \overline{\mathbb{K}}^n$ é um vetor livre se $span_{\overline{\mathbb{K}}}[v_1, \cdots, v_n] = \overline{\mathbb{K}}$ e um número generalizado $\lambda \in \overline{\mathbb{K}}$ é um autovalor de uma $n \times n$ matriz $A \in M_n(\overline{\mathbb{K}})$ se existe um vetor livre $v \in \overline{\mathbb{K}}^n$ tal que $A \cdot v = \lambda v$. Neste caso tem-se que $det(\lambda I - A) = 0 \in \overline{\mathbb{K}}$, $Ker(\lambda I - A)$ é não trivial e contém um vetor livre. Note que $v \in \overline{\mathbb{K}}^n$ é um vetor livre se e somente se $\|v\| \in Inv(\overline{\mathbb{R}})$.

A seguinte proposição, devido a Vernaeve [Ver08] é a ferramenta para provar os teoremas que seguem.

Proposição 6. *Sejam $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \overline{\mathbb{C}}$. Então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$. O conjunto solução em $\overline{\mathbb{C}}$ da equação $p(\lambda) = 0$ é o conjunto interno $interl(\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}) = \{\lambda_1\mathcal{X}_{S_1} + \cdots + \lambda_n\mathcal{X}_{S_n}$: com $\{S_1, \ldots, S_n\}$ partição de $I\}$ onde $\lambda_i = [(\lambda_i^\varepsilon)_\varepsilon]$.*

Demonstração. Veja [Ver08], Lema 4.7. □

Teorema 9. *Seja $A \in M_n(\overline{\mathbb{C}})$ e $p(\lambda)$ o polinômio característico de A. Então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$. Além disso, dado qualquer $n-upla$ $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ com esta propriedade, qualquer autovalor λ de A é um interleaving de $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.*

Demonstração. Veja [HKK14], Teorema 3.22. □

Teorema 10. *Seja $A = [(A_\varepsilon)_\varepsilon] \in M_n(\overline{\mathbb{C}})$ hermitiana e λ_i^ε, com $1 \leq i \leq n$, os autovalores de A_ε ordenados por $Re(\lambda_1^\varepsilon) \geq \cdots \geq Re(\lambda_n^\varepsilon)$. Então $\lambda_i = [(\lambda_i^\varepsilon)_\varepsilon]$ são elementos bem definidos de $\overline{\mathbb{R}}$ independente do representante $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ e $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Qualquer autovalor λ de A é um interleaving de $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Além disso, existe uma matriz unitária U em $M_n(\overline{\mathbb{C}})$ tal que $U^* AU = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.*

Demonstração. Veja [HKK14], Proposição 3.25. □

Resultados obtidos

Probabilidades de transição

A probabilidade de que um estado inicial $\Phi_1 \in \mathbb{D}$, antes da interação, se torne um estado final $\Phi_2 \in \mathbb{D}$, depois da interação, é o limite

$$\mathcal{P}(1 \to 2) = \lim_{\tau \to -\infty, t \to +\infty} |\langle \Phi_2, S_\tau(t)\Phi_1 \rangle_{\mathbb{F}}|^2, \tag{18}$$

se este limite existir, e é chamada a probabilidade de transição de Φ_1 para Φ_2, os quais são tomados normalizados. É claro que este limite será um número real generalizado se tomarmos o operador unitário $S_\tau(t)$ generalizado. O problema torna-se portanto atribuir um número real clássico a este número generalizado e que faça sentido fisicamente. Com este propósito a pesquisa feita em [JFAC+17] sugere algum tipo de média do representante do número generalizado $|\langle \Phi_2, S_\tau(t)\Phi_1 \rangle_{\mathbb{F}}|$ expresso na equação 18, ou pra ser mais claro, sugere o cálculo do valor médio da função representante. Em detalhes, se $u, v \in \mathbb{D}$ são ortonormais, Colombeau, Gsponer, et al atribuem uma probabilidade clássica ao número generalizado $|\langle u, Sv \rangle|$, com representante $\varepsilon \mapsto |\langle u, S_\varepsilon v \rangle|$, tomando uma média dos valores $|\langle u, S_\varepsilon v \rangle|$ para uma grande quantidade de valores ε muito pequenos. Note que $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ é um representante do operador generalizado S, que $0 \leq |\langle u, S_\varepsilon v \rangle| \leq 1$ e que as variáveis temporais estão sendo desconsideradas. Nesse sentido, a probabilidade de transição deverá ser

$$\mathcal{P}(v \to u) = \lim_{\eta \to 0, N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |\langle u, S_{\varepsilon_i} v \rangle|, \tag{19}$$

com $\varepsilon_i \in (0, \eta)$. Os autores perguntam se o limite (19) existe e nosso objetivo aqui é sugerir o conceito de *suporte*, que é recente, como uma potente ferramenta na busca por uma resposta. Note aqui, que o limite em 19 desconsiderando a discretização, é

$$\mathcal{P}(v \to u) = \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\eta} \int_0^\eta |\langle u, S_\varepsilon v \rangle| d\varepsilon. \tag{20}$$

Em nosso ambiente, se o operador generalizado S tem um operador clássico associado, a resposta é sim e sabemos quem é esse limite, veja o Teorema 14. Se S tem um suporte não unitário, a resposta continua afirmativa, porque para nós existência de probabilidade de transição (que é um real generalizado) é ter suporte não vazio, esta será nossa definição de

Probabilidade de Transição Generalizada, veja os Teoremas 15 e 17. Na referência citada, são apresentados exemplos numéricos de S-matrizes, como exponenciais de matrizes hermitianas (lembre que as S-matrizes são unitárias), cujas amplitudes se assemelham a situações em QFT, ainda que em cenários muito mais simples como o espaço de dimensão finita $\mathbb{C}^n$. Nestes exemplos, esta média é obtida de uma forma semelhante ao cálculo de um elemento do suporte do número generalizado $|\langle \Phi_2, S_\tau(t)\Phi_1\rangle_{\mathbb{F}}|$, e fazem sentido fisicamente, isto sugere que é este o lar das probabilidades de transição. Uma vez que uma função quase periódica sempre tem um valor médio, veja [Boh18], os autores desta pesquisa questionam se $|\langle \Phi_2, S_\tau(t)\Phi_1\rangle_{\mathbb{F}}|$ é sempre uma função quase periódica, e se não, se pode ainda existir um valor médio em um sentido natural. Isto inspirou os resultados em nossa seção sobre funções quase periódicas. Bom, a menos de condições ideais, não parece muito viável que $|\langle \Phi_2, S_\tau(t)\Phi_1\rangle_{\mathbb{F}}|$ seja sempre uma função quase periódica a julgar, por exemplo, pelos cenários caóticos dos modelos físicos em mecânica quântica, mas para a segunda pergunta, o conceito de suporte parece promissor e certamente é bastante natural no contexto dos números generalizados. É neste ponto que deixamos nossa contribuição. É claro que mais hipóteses devem ser consideradas, isso se quisermos observar alguma realidade física, mas insistimos em lembrar que os autores desse trabalho, no qual nos inspiramos, esclarecem que o objetivo é apenas dar um sentido matemático aos cálculos do formalismo Hamiltoniano canônico como base para melhorias e não o de fazer interpretações físicas. Acreditamos que nossos resultados possam contribuir de alguma forma, contudo, também não consideramos o ambiente delicado da física quântica, mas sim nos dedicamos ao limite em 20 de uma forma mais linear devido principalmente à influência das pesquisas sobre matrizes e operadores generalizados desenvolvidas em [GV11], [HKK14], [May08]. Este será o nosso cenário, e acreditamos estar apontando para uma direção que poderá trazer bons resultados para o problema estudado por Colombeau-Gsponer e outros mais gerais.

Vamos começar com dimensão finita, para este caso um operador autoadjunto corresponde a uma matriz Hermitiana $A \in M_n(\overline{\mathbb{K}})$. Denotaremos a probabilidade de transição generalizada por $\nu(A) := | < \vec{u}, exp(iA(\varepsilon))\vec{v} > |$ onde u, v são vetores unitários em $\mathbb{C}^n$. A partir deste ponto escreveremos apenas $\nu(A)$ para nos referir a este conceito. Denotaremos por $M_n(\overline{\mathbb{K}}_{as})$ o conjunto de matrizes tais que cada entrada possui elemento associado (ou sombra).

Definição 33. *Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz complexa, então a norma $\| \cdot \|_F$ definida por $\| A \|_F := (\sum_{i,j} |a_{ij}|^2)^{1/2}$ é chamada norma de Frobenius de A.*

O resultado a seguir, conhecido como desigualdade de Hoffman-Wielandt, é a espinha dorsal na prova do Teorema 13, na verdade é uma aplicação direta. O mesmo é encontrado originalmente em [HW53]. Em seguida uma versão em dimensão infinita.

Teorema 11 (Hoffman-Wielandt)**.** *Sejam A e B matrizes normais em $M_n(\mathbb{C})$ e S_n o grupo de permutações de $\{1, \dots, n\}$. Se $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ e $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ são os autovalores de A e B respectivamente, então $\min_{\sigma \in S_n} \left(\sum_1^n |\alpha_i - \beta_{\sigma(i)}|^2 \right)^{1/2} \leq \| A - B \|_F$.*

Demonstração. Veja [HW53]. □

Teorema 12. *Sejam A e B operadores de Hilbert-Schmidt normais e $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}, \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$ enumerações de seus autovalores. Então para cada $\varepsilon > 0$ existe uma permutação π de $\mathbb{N}$ tal que*

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i - \beta_{\pi(i)}|^2\right]^{1/2} \leq ||A - B||_2 + \varepsilon. \tag{21}$$

Demonstração. Veja [BE94]. □

Apresentamos agora nossos resultados sobre probabilidades de transição generalizadas.

Se A é uma matriz $n \times n$ com coeficientes em $\overline{\mathbb{C}}$ e $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ contido no $Spec(A)$ como no Teorema 9, então dizemos que $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ é um *conjunto gerador* para $Spec(A)$. Sejam A uma matriz $n \times n$ com coeficientes em $\overline{\mathbb{C}}$ e $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ um conjunto gerador. Então uma *rede de permutações* é um mapa $\sigma : I \longrightarrow S_n$. Agora considere o elemento λ_i^σ com representante $\lambda_i^\sigma(\varepsilon) := \lambda_{\sigma_\varepsilon(i)}(\varepsilon)$. Para cada $1 \leq j \leq n$, sejam $S_{ij} = \{\varepsilon \in I : \sigma_\varepsilon(i) = j\}$ e e_{ij} o idempotente gerado por S_{ij}. Então $\lambda_i^\sigma = \sum\limits_j e_{ij} \cdot \lambda_j \in Spec(A)$ e $\{e_{i1}, \cdots e_{in}\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais. Isto prova que λ_i^σ é um elemento bem definido. Além disso, se a matriz (e_{ij}) é inversível, então $\{\lambda_1^\sigma, \cdots \lambda_n^\sigma\}$ é um conjunto gerador para $Spec(A)$.

Teorema 13. *Sejam $A \in M_n(\overline{\mathbb{K}}_{as})$ uma matriz Hermitiana com $supp(A) = \{A_0\}$ e $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ um conjunto gerador para $Spec(A)$. Então existe uma rede de permutações σ tal que $\{\lambda_1^\sigma, \cdots, \lambda_n^\sigma\}$ é um conjunto gerador para $Spec(A)$, $\lambda_i^\sigma \in \overline{\mathbb{K}}_{as}$ $\forall i$ e $\{supp(\lambda_i^\sigma), \cdots, supp(\lambda_n^\sigma)\} = Spec(A_0)$.*

Demonstração. Seja $Spec(A_0) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ ordenado. Uma vez que A é Hermitiana e $A \approx A_0$, segue que A_0 é Hermitiana e podemos escolher um representante para A tal que A_ε é Hermitiana para todo $\varepsilon \in I$. Aplicando o Teorema de Hoffman-Wielandt, existe uma rede de permutações σ tal que

$$|\lambda_i^\sigma - \mu_i| \leq \|A - A_0\| \approx 0 \tag{22}$$

da qual segue que $supp(\lambda_i^\sigma) = \{\mu_i\}$. Uma vez que $\lambda_i^\sigma \in Spec(A)$, e $\prod\limits_i(\lambda - \lambda_i^\sigma(\varepsilon)) = \prod\limits_i(\lambda - \lambda_i(\varepsilon))$ para todo ε, temos que $\prod\limits_i(\lambda - \lambda_i^\sigma) = \chi_A(\lambda)$ e o teorema está provado. □

Corolário 1. *Sejam $A \approx A_0 \in M_n(\mathbb{C})$ e $\lambda \in Spec(A)$. Então $supp(\lambda) \subseteq Spec(A_0)$ e $supp(\lambda) = Spec(A_0)$ se $\lambda = \sum\limits_i e_i \cdot \lambda_i^\sigma$, onde $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais não triviais e os λ_i^σ são dados pelo teorema.*

Demonstração. Uma vez que $\lambda \in Spec(A)$, existe um vetor livre $v \in \overline{\mathbb{C}}^n$ de norma 1 tal que $Av = \lambda v$. Se $\lambda_0 \in supp(\lambda)$, então existe um idempotente f tal que $f \cdot \lambda \approx f \cdot \lambda_0$.

Uma vez que v tem norma um, existe um idempotente e tal que $ef = e$ e $e \cdot v \approx e \cdot v_0$, com $v_0 \in \mathbb{C}^n$. Por isso temos $e \cdot \lambda_0 v_0 \approx e\lambda v = (Av)e \approx e \cdot A_0 v_0$ e portanto $A_0 v_0 = \lambda_0 v_0$. Seja $Spec(A_0) = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$. Se $\lambda = \sum_i e_i \cdot \lambda_i^\sigma$ com $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ e $e_i \notin \{0, 1\}$, então $\lambda \cdot e_i = e_i \cdot \lambda_i^\sigma \approx e_i \cdot \mu_i$ e por isso o resultado segue. $\square$

Estes resultados deixam claro que $A \approx A_0$ não implica necessariamente que qualquer autovalor de A está associado a algum autovalor de A_0. E que o suporte é o conceito apropriado para estabelecer uma tal proximidade. Mas o teorema nos diz que sempre existe um autovalor de A associado a qualquer autovalor de A_0, isto é, que $Spec(A_0)$ é a sombra do $Spec(A)$.

Corolário 2. *$supp(Spec(A)) := \bigcup_{\lambda \in Spec(A)} supp(\lambda) = Spec(A_0)$.*

Demonstração. Segue direto do Corolário 1. $\square$

Observação 1. *No Teorema 11, no geral não sabemos descrever a permutação para a qual o mínimo é atingido, contudo se A é hermitiana e B é normal arbitrária então o mínimo é atingido nas ordens $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$ e $Re(\beta_1) \geq \cdots \geq Re(\beta_n)$. Veja [Bha07], Observação 15.3. Considerando esta configuração, temos $\lambda_i^\sigma = \lambda_i$ para cada i. Consideraremos isto nos próximos corolários e note que assim estamos em sintonia com o Teorema 10.*

Teorema 14. *Sejam $A \in M_n(\overline{\mathbb{K}}_{as})$ uma matriz Hermitiana com $supp(A) = \{A_0\}$, e u_0, v_0 vetores ortogonais unitários de $\mathbb{C}^n$. Então $supp(\nu(A)) = \{\nu(A_0)\}$. Em particular, $\nu(A) \approx \nu(A_0)$.*

Demonstração. Primeiro note que se e é um idempotente então $e \cdot exp(iA) = e \cdot exp(i(eA)) \approx e \cdot exp(iA_0)$. Agora sejam $t_0 \in supp(\nu(A))$ e e um idempotente tal que $e \cdot \nu(A) \approx e \cdot t_0$. Disto, segue que $e \cdot t_0 \approx e \cdot \nu(A) = e \cdot exp(i(eA)) \approx e \cdot exp(iA_0) = e \cdot \nu(A_0)$ e por isso $t_0 = \nu(A_0)$. Note que omitimos os vetores na prova pois os mesmos são clássicos e por isso tem embedding constante. $\square$

Para cada $1 \leq i \leq n$, denote por $V_{\mu_i}(A_0)$ o autoespaço de A_0 relativo ao autovalor $\mu_i \in Spec(A_0)$ e seja $V_{\lambda_i}(A)$ o $\overline{\mathbb{K}}$−sub-módulo de $\overline{\mathbb{K}}^n$ gerado pelos autovetores de A relativos ao autovalor λ_i.

Suponha que A, A_0, σ and $\{\lambda_1^\sigma, \cdots, \lambda_n^\sigma\}$ são como no Teorema 13. Seja $Spec(A_0) = \{\mu_1, \cdots, \mu_n\}$. Por [HKK14, Proposições 3.18 e 3.25], $Spec(A) \subset \overline{\mathbb{R}}$ e A é unitariamente equivalente a $diag(\lambda_1^\sigma, \cdots, \lambda_n^\sigma)$. Segue facilmente que $supp(\chi_A) = \{\chi_{A_0}\}$ e a multiplicidade algébrica de λ_i^σ e μ_i são iguais.

Corolário 3. *Para cada $1 \leq i \leq n$, temos $supp(V_{\lambda_i^\sigma}) := \bigcup_{v \in V_{\lambda_i^\sigma}(A)} supp(v) = V_{\mu_i}(A_0)$.*

Demonstração. Sejam $v \in V_{\lambda_i^\sigma}(A)$ e $v_0 \in supp(v)$. Então $e \cdot v \approx e \cdot v_0$, para algum $e^2 = e$. Com a notação da prova do teorema, segue que $e \cdot (A_0 v_0) \approx e \cdot (Av) = e \cdot (\lambda_i^\sigma v) \approx e \cdot \mu_i v_0$.

Consequentemente, $v_0 \in V_{\mu_i}$. Uma vez que as multiplicidades algébricas de λ_i^σ and μ_i são iguais, segue que o $\overline{\mathbb{C}}-$posto livre de $V_{\lambda_i^\sigma}$ é igual a $\mathbb{R}-$dimensão de V_{μ_i} e por isso, uma vez que $supp(V_{\lambda_i^\sigma})$ é um $\mathbb{R}-$espaço vetorial, temos $supp(V_{\lambda_i^\sigma}) = V_{\mu_i}(A_0)$. $\square$

Note que se $A \in M_n(\tilde{\mathbb{K}}_c)$ então temos que $supp(A) \neq \emptyset$. Além disso, seu suporte é compacto. Podemos agora apresentar nosso principal resultado em dimensão finita.

Teorema 15. *Seja* $A = [(A_\varepsilon)_\varepsilon] \in M_n(\tilde{\mathbb{K}}_c)$ *uma matriz Hermitiana. Então* $supp(\nu(A)) = \{\nu(A_0) : A_0 \in supp(A)\}$.

Demonstração. Se $A_0 \in supp(A)$, então existe um idempotente e tal que $e \cdot A \approx e \cdot A_0$. Lembre que $e \cdot \nu(A) = e \cdot \nu(eA) \approx e \cdot \nu(A_0)$. Por isso $\nu(A_0) \in supp(\nu(A))$. Por outro lado, seja $a \in supp(\nu(A))$ e $e = e^2$ tal que $e \cdot a \approx e \cdot \nu(A) = e \cdot \nu(e \cdot A)$. Escolha $A_0 \in supp(e \cdot A) \subset supp(A)$ e $f = f^2$ tal que $ef = f$ e $f \cdot A_0 \approx f \cdot (eA) = f \cdot A$. Então $f \cdot a \approx f \cdot \nu(A) = f \cdot \nu(f \cdot A) \approx f \cdot \nu(A_0)$. Por isso $a = \nu(A_0)$ e o teorema está provado. $\square$

Partiremos agora para uma extensão do Teorema 15 para $\overline{\mathbb{K}}$-módulos Hilbert $\mathcal{G}_H$ onde H é um espaço de Hilbert de dimensão infinita. Note que o Teorema 14 é um caso particular do Teorema 15. Como em dimensão finita, precisaremos da definição de suporte de operadores generalizados e da versão em dimensão infinita do Teorema de Hoffman-Wielandt para uma versão ainda que mais fraca do Teorema 13.

Definição 34. *Seja* $T = (T_\varepsilon) : \mathcal{G}_H \to \mathcal{G}_H$ *um operador linear básico. O suporte de* T*, denotado por* $supp(T)$*, é o conjunto de operadores lineares limitados em* H *definido por* $supp(T) := \{T_0 \in \mathcal{B}(H) : \exists\ (\varepsilon_n)_n$ *em* I *com* $\varepsilon_n \to 0$ *e* $||T_{\varepsilon_n} - T_0||_\infty \to 0\}$.

É claro que outras normas podem ser consideradas na definição acima e a menos que se mencione uma outra estaremos nos referindo a norma standard.

Teorema 16. *Sejam* $T = (T_\varepsilon) : \mathcal{G}_H \to \mathcal{G}_H$ *um operador linear básico tal que cada* T_ε *é um operador linear auto-adjunto e Hilbert-Schmidt e* $T_0 \in supp(T)$ *na norma de Hilbert-Schmidt. Se* $\{t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots\}$ *e* $\{t_1, t_2, \dots\}$ *são enumerações dos autovalores de* T_{ε_n} *e* T_0 *onde* $(\varepsilon_n)_n$ *é tal que* $T_{\varepsilon_n} \to T_0$ *então existe uma sequência* $(\pi_n)_n$ *de permutações de* $\mathbb{N}$ *tal que* $t_{\pi_n(i)}^{(n)} \to t_i$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Pelo Teorema 12, para cada natural n existe uma permutação π_n de $\mathbb{N}$ tal que

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} |t_i - t_{\pi_n(i)}^{(n)}|^2\right]^{1/2} \leq ||T_0 - T_{\varepsilon_n}||_2 + \varepsilon_n. \tag{23}$$

Como $T_0 \in supp(T)$, então $\varepsilon_n \to 0$ e $||T_0 - T_{\varepsilon_n}||_2 \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto, para cada i,

$$|t_i - t_{\pi_n(i)}^{(n)}| \leq ||T_0 - T_{\varepsilon_n}||_2 + \varepsilon_n \to 0. \tag{24}$$

Logo, a sequência de permutações $(\pi_n)_n$ de $\mathbb{N}$ satisfaz $t^{(n)}_{\pi_n(i)} \to t_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ e isto prova o teorema.

$\square$

Em analogia as matrizes em $M_n(\tilde{\mathbb{K}}_c)$, dizemos que um operador linear básico $T : \mathcal{G}_H \to \mathcal{G}_H$ está em $\tilde{\mathcal{B}}_c(\mathcal{G}_H)$ se existe um representante $(T_\varepsilon)_\varepsilon$ de T e um compacto K em $\mathcal{B}(H)$ munido da topologia induzida por $||\cdot||_\infty$ tal que $T_\varepsilon \in K\ \forall\ \varepsilon < \eta$ para algum $\eta \in I$. Podemos portanto definir o que segue.

Definição 35. *O subconjunto $\tilde{\mathcal{B}}_c(\mathcal{G}_H)$ de $\mathcal{B}(\mathcal{G}_H)$ é chamado conjunto dos operadores generalizados compactamente suportados.*

Note que se $T \in \tilde{\mathcal{B}}_c(\mathcal{G}_H)$ então $supp(T) \neq \emptyset$.

Teorema 17. *Seja $T = (T_\varepsilon)_\varepsilon \in \tilde{\mathcal{B}}_c(\mathcal{G}_H)$ um operador linear básico tal que cada operador T_ε é auto-adjunto. Então $supp(\nu(T)) = \{\nu(T_0) : T_0 \in supp(T)\}$.*

Demonstração. Seja $T_0 \in supp(T)$ e $e = e^2$ tal que $e \cdot T \approx e \cdot T_0$. Uma vez que todos os operadores envolvidos são limitados e o mapa exponencial é contínuo, temos que $e \cdot \nu(T) = e \cdot \nu(e \cdot T) \approx e \cdot \nu(T_0)$. Por outro lado, seja $\omega \in supp(\nu(T))$ e $e = e^2$ tal que $e \cdot \omega \approx e \cdot \nu(T)$. Escolha f tal que $f \cdot e = f$ e $f \cdot T \approx f \cdot T_0$, para algum T_0. Então temos que $f \cdot \omega \approx f \cdot \nu(T) = f \cdot \nu(f \cdot T) \approx f \cdot \nu(T_0)$. Segue que $\omega = \nu(T_0)$, completando a prova. $\square$

Funções quase periódicas

Nesta seção, vamos provar a existência de valores médios para algumas funções. É aqui também que estabelecemos a conexão entre as probabilidades de transição e o valor médio de uma função quase periódica. Começamos relembrando o conceito de *função quase periódica.* As referências básicas que utilizamos são [BB54, Boh18]. Uma das principais características desta seção é o fato de que uma função quase periódica se torna uma função periódica no contexto generalizado. Após relembrar a definição de uma função quase periódica, demonstramos algumas maneiras úteis de calcular o seu valor médio e, em seguida, mostramos sua relação com as probabilidades de transição.

Um conjunto de números reais $E \subset \mathbb{R}$ é dito ser *relativamente denso* em $\mathbb{R}$ se existir $L > 0$ tal que para cada $a \in \mathbb{R}$ temos que $]a, a+L[\, \cap E \neq \emptyset$. Falando de forma mais simples, isso significa que não existem lacunas arbitrariamente grandes entre os elementos de E.

Definição 36 (Função quase periódica)**.** *Dada uma função de valores complexos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$, o número real $\tau = \tau(\varepsilon) = \tau_f(\varepsilon) > 0$ é chamado de número de translação de f correspondente a ε se $|f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Uma função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é dita ser quase periódica (uma f.q.p.) se, para cada $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{\tau \in \mathbb{R} \mid \tau = \tau_f(\varepsilon)\}$ é relativamente denso.*

Considere o espaço $\mathbb{C}$-vetorial $V = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}[e^{i\lambda x} \mid \lambda \in \mathbb{R}]$ de polinômios trigonométricos. Os elementos de V são funções limitadas e, portanto, podemos considerar o espaço normado $(V, ||\cdot||_\infty)$. Seja $\overline{V}$ o seu fecho em $L_\infty(\mathbb{R})$. Então, $\overline{V}$ consiste em limites uniformes de elementos de V. Observe que os elementos de V são funções periódicas, segue que o conjunto de funções periódicas é denso em $\overline{V}$.

Com uma *função degrau elementar*, nos referimos à função característica de um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Uma *função degrau* é uma combinação linear finita de funções degrau elementares. Uma vez que $M(f(x+c)) = M(f)$, para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$ e $M(f(\lambda x)) = M(f)$, para qualquer $\lambda > 0$, podemos considerar funções degrau elementares definidas em um intervalo da forma $[0, \beta]$ com $\beta < 1$. Dizemos que f é uma *função degrau elementar periódica* se f tem período 1 e em $[0, 1]$ f é a função característica de um intervalo $[0, \beta]$.

Se f é periódica com período L, então podemos aproximar f uniformemente por uma sequência de funções degrau em $[0, L]$. Assim, f pode ser aproximada uniformemente por funções degrau periódicas em $\mathbb{R}$. Consequentemente, uma f.q.p. é um limite uniforme de funções degrau em $\mathbb{R}$. Assim, se denotarmos por S o conjunto de funções degrau periódicas, temos $\overline{V} \subset \overline{S}$. Se $A \in M_n(\overline{\mathbb{C}})$ é uma matriz hermitiana, então $\exp(iA)$ é uma matriz unitária, segue que seus autovalores são da forma $\exp(i\theta)$, onde $\theta \in \mathrm{Spec}(A) \subset \overline{\mathbb{R}}$. Como estamos interessados em probabilidades de transição, que incluem tais expressões, consideramos a situação geral. Seja $[f_\varepsilon] = f \in \overline{\mathbb{R}}$ integrável quando vista como uma função $f \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}$. Definimos a *probabilidade de transição generalizada* de f como:

$$\nu(f) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(t)dt = \left[\varepsilon \longrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(t)dt\right]$$

Em particular, se $f \approx f_0 \in \mathbb{R}$, então $\nu(f) = f_0$, como pode ser facilmente observado. Isso também será deduzido de um resultado desta seção. Em particular, isso explica nosso interesse em funções quase periódicas e seus valores médios, e nos conecta com o conceito de *probabilidade de transição* como definido por Colombeau-Gsponer. Os resultados desta seção mostram que essa definição faz sentido. Quando uma matriz ou operador A em um espaço de Hilbert está envolvido, escreveremos $\nu(A) = \nu(A, u, v) = \nu(|\langle u \mid Av \rangle|)$ sem especificar a dependência do par de vetores ortogonais fixos envolvidos na definição. O mesmo será feito quando as probabilidades de transição de pares ortogonais fixos estiverem envolvidas (veja a seção anterior). Essa definição deve ser comparada com a definição de $\mu(e), \ e \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{K}})$, dada em [JO22]. Como uma maneira natural de aproximar dados discretos é com o uso de funções degrau elementares, é natural pensar que idempotentes decorrentes da realidade física resultem de tais funções degrau elementares. Portanto, sua probabilidade está bem definida. Recordamos os seguintes resultados fundamentais relacionados as funções quase periódicas de Bohr:

Teorema 18 (Teorema Fundamental das f.q.p.). *Uma função de valores complexos f é quase periódica se, e somente se, $f \in \overline{V}$. Além disso, $\overline{V}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$ e seus elementos* *são funções uniformemente contínuas e limitadas.*

Se f é uma função periódica com período L, então é fácil ver que

$$M(f) := \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(x)dx = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)dx.$$

Em particular, $M(|\sin(Ax)|) = M(|\cos(Ax)|) = \frac{2}{\pi}$, para todo $A > 0$. Isso será usado nos exemplos.

Teorema 19 (Teorema do Valor Médio)**.** *Para toda f.q.p., o valor médio*

$$M(f) := \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(x)dx$$

existe.

Portanto, uma f.q.p. pode não ser periódica, mas ainda assim tem um valor médio. Procedemos agora para provar fórmulas alternativas para o valor médio de uma f.q.p. e, ao compô-las com infinitos puros (apenas ∞ no suporte), damos sua probabilidade de transição generalizada.

Lema 2. *Seja f uma função degrau periódica elementar e $\gamma > 0$. Então,*

$$M(f) = \lim_{T\longrightarrow\infty} \gamma \cdot T^{\gamma} \cdot \int\limits_T^{\infty} \frac{f(x)}{x^{1+\gamma}}dx$$

Demonstração. **Caso $\gamma = 1$:** Suponha primeiro que $T = n$ é um número inteiro, então podemos calcular seu limite como

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} n \cdot \int\limits_n^{\infty} \frac{f(x)}{x^2}dx = \lim_{n\longrightarrow\infty} n \cdot \left(\sum_{k=n}^{\infty} [\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\beta}] \right) = \beta \cdot \left(\lim_{n\longrightarrow\infty} n \cdot \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+\beta)} \right) \right).$$

Observe que

$$\int\limits_n^{\infty} \frac{1}{u(u+\beta)}du < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+\beta)} < \int\limits_{n-1}^{\infty} \frac{1}{u(u+\beta)}du = \int\limits_{n-1}^{n} \frac{1}{u(u+\beta)}du + \int\limits_n^{\infty} \frac{1}{u(u+\beta)}du.$$

Aplicando a regra de L'Hospital do cálculo elementar, obtemos

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} n \cdot \left(\int\limits_{n-1}^{n} \frac{1}{u(u+\beta)}du \right) = 0.$$

Daí segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty} n\cdot\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k(k+\beta)}\right) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} n\cdot\left(\int_{n}^{\infty}\frac{1}{u(u+\beta)}du\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow\infty} x\cdot\left(\int_{x}^{\infty}\frac{1}{u(u+\beta)}du\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x}{\beta}\cdot\ln\left(\frac{x+\beta}{x}\right)\\
&= 1,
\end{aligned}$$

onde mais uma vez aplicamos a regra de L'Hospital para obter a última igualdade.

Agora, se $T\in\mathbb{R}$, então $T=n+r$, com $0\le r\le 1$. Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{T\longrightarrow\infty} T\cdot\int_{T}^{\infty}\frac{f(x)}{x^2}dx &= \lim_{T\longrightarrow\infty} T\cdot\int_{n+r}^{\infty}\frac{f(x)}{x^2}dx\\
&= \lim_{T\longrightarrow\infty} n\cdot\int_{n}^{\infty}\frac{f(x)}{x^2}dx + \lim_{T\longrightarrow\infty} r\cdot\int_{n}^{\infty}\frac{f(x)}{x^2}dx + \lim_{T\longrightarrow\infty}(n+r)\cdot\int_{n}^{n+r}\frac{f(x)}{x^2}dx
\end{aligned}$$

A integral do meio tende a 0, à medida que T tende ao infinito (independentemente do valor de r), e a última integral é $\le (n+r)[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+r}]=\frac{r}{n}$, e segue o resultado.

Caso $\gamma\neq 1$: Suponhamos primeiro que $\gamma\in\mathbb{Q}$ e $T=n\in\mathbb{N}$. Como antes, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty}\gamma\cdot n^{\gamma}\cdot\int_{n}^{\infty}\frac{f(x)}{x^{1+\gamma}}dx &= \lim_{n\longrightarrow\infty} n^{\gamma}\cdot\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left[\frac{1}{k^{\gamma}}-\frac{1}{(k+\beta)^{\gamma}}\right]\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow\infty} x^{\gamma}\cdot\left(\int_{x}^{\infty}\left[\frac{1}{u^{\gamma}}-\frac{1}{(u+\beta)^{\gamma}}\right]du\right)\\
&= \frac{1}{1-\gamma}\lim_{x\longrightarrow\infty} x^{\gamma}\cdot((u+\beta)^{1-\gamma}-u^{1-\gamma}).
\end{aligned}$$

Se $1-\gamma>0$, definimos $1-\gamma=\frac{p}{q}$ e, caso contrário, definimos $\gamma-1=\frac{p}{q}$. No primeiro caso, o limite se torna

$$\frac{1}{1-\gamma}\lim_{x\longrightarrow\infty} x^{\gamma}\cdot(\sqrt[q]{(u+\beta)^p}-\sqrt[q]{u^p}),$$

e no segundo caso, se torna

$$\frac{1}{1-\gamma}\lim_{x\longrightarrow\infty} x^{\gamma}\cdot(\frac{1}{\sqrt[q]{(u+\beta)^p}}-\frac{1}{\sqrt[q]{u^p}}).$$

Racionalizando essa expressão da maneira usual e calculando seu limite, obtemos que ele é igual a β. Por continuidade, o resultado vale para todos os $\gamma > 0$. $\square$

Corolário 4. *Seja f uma função limite uniforme de funções degrau periódicas e $c > 0, \gamma > 0$. Então,*

$$M(f) = \lim_{T \longrightarrow \infty} \gamma \cdot T^{\gamma} \cdot \int_{T}^{\infty} \frac{f(x)}{x^{1+\gamma}} dx = \lim_{\eta \longrightarrow 0} \frac{1}{\eta} \int_{0}^{\eta} f\left(\frac{1}{\varepsilon^{c}}\right) d\varepsilon.$$

Em particular, $\nu(f \circ \alpha^{-c}) = M(f)$.

Demonstração. Se f é o limite uniforme da sequência (f_n), claramente temos que $\lim_{n \longrightarrow \infty} M(f_n) = M(f)$. Para provar a segunda parte, fazemos a mudança de variável $x = \frac{1}{\varepsilon^c}$, obtendo

$$\lim_{\eta \longrightarrow 0} \frac{1}{\eta} \int_{0}^{\eta} f\left(\frac{1}{\varepsilon^{c}}\right) d\varepsilon = \lim_{T \longrightarrow \infty} \gamma \cdot T^{\gamma} \cdot \int_{T}^{\infty} \frac{f(x)}{x^{1+\gamma}} dx,$$

onde $\gamma = \frac{1}{c}$. O resultado agora segue do Lema 2. $\square$

Teorema 20. *Sejam f uma função quase periódica, $\gamma > 0$, e $\lambda : [0,1] \longrightarrow [0, \infty]$ uma função contínua com $\lambda(0) = 0$, e ν sua inversa. Suponha que $\nu \in \mathcal{C}^k([0, \lambda(1)])$, com $k \geq 2$, e que ν não seja uma função nula. Então, temos*

$$M(f) = \lim_{T \longrightarrow \infty} \gamma \cdot T^{\gamma} \cdot \int_{T}^{\infty} \frac{f(x)}{x^{1+\gamma}} dx = \lim_{\eta \longrightarrow 0} \frac{1}{\eta} \int_{0}^{\eta} f\left(\frac{1}{\lambda(\varepsilon)}\right) d\varepsilon.$$

Em particular, $\nu(f \circ \frac{1}{\lambda}) = M(f)$.

Demonstração. Como visto anteriormente, f pode ser aproximada uniformemente por funções degrau periódicas, assim, a primeira igualdade segue do Corolário 4. Para provar a segunda igualdade, observe que, como ν não é uma função nula, então existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que $b := \nu^{(q)}(0) \neq 0$ e $\nu^{(j)}(0) = 0$ para todo $0 < j < q$. Fazendo a mudança de variável $x = \frac{1}{\lambda(\varepsilon)}$, obtemos

$$\lim_{\eta \longrightarrow 0} \frac{1}{\eta} \int_{0}^{\eta} f\left(\frac{1}{\lambda(\varepsilon)}\right) d\varepsilon = \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{\nu(\frac{1}{T})} \int_{T}^{\infty} \frac{f(x)\nu'(\frac{1}{x}) dx}{x^2}.$$

A partir da hipótese, temos que $\lim_{T \longrightarrow \infty} T^q \nu(\frac{1}{T}) = \frac{b}{q!}$ e $\nu'(\frac{1}{x}) = \frac{b}{q! x^{q-1}} + g(x)$, onde $|g(x)| \leq \frac{C}{x^q}$ para alguma constante $C > 0$. Assim, temos

$$\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{\nu(\frac{1}{T})}\int\limits_T^\infty\frac{f(x)\nu'(\frac{1}{x})dx}{x^2}=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{T^q}{T^q\nu(\frac{1}{T})}\int\limits_T^\infty\frac{f(x)\big[\frac{b}{q!x^{q-1}}+g(x)\big]}{x^2}dx$$

$$=\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{T^q}{b/q!}\int\limits_T^\infty\frac{f(x)\big[\frac{b}{(q-1)!x^{q-1}}+g(x)\big]}{x^2}dx$$

$$=\lim_{T\longrightarrow\infty}q\cdot T^q\cdot\int\limits_T^\infty\frac{f(x)dx}{x^{q+1}}+\lim_{T\longrightarrow\infty}T^q\cdot\int\limits_T^\infty\frac{q!f(x)g(x)dx}{bx^2}.$$

Como f é limitada e a função $g(x)$ é integrável, temos, a partir de nossa hipótese, que

$$\Big|\lim_{T\longrightarrow\infty}T^q\cdot\int\limits_T^\infty\frac{q!f(x)g(x)dx}{bx^2}\Big|\leq\frac{q!C|f|_\infty}{b}\lim_{T\longrightarrow\infty}T^q\cdot\int\limits_T^\infty\frac{dx}{x^{q+2}}=0.$$

Portanto, temos $\lim\limits_{T\longrightarrow\infty}\frac{1}{\nu(\frac{1}{T})}\int\limits_T^\infty\frac{f(x)\nu'(\frac{1}{x})dx}{x^2}=\lim\limits_{T\longrightarrow\infty}q\cdot T^q\cdot\int\limits_T^\infty\frac{f(x)dx}{x^{q+1}}=M(f).$ □

Observe que, se ν for uma função nula, então $\lim\limits_{\eta\longrightarrow 0}\frac{1}{\eta}\int\limits_0^\eta f(\frac{1}{\lambda(\varepsilon)})d\varepsilon=0$. Isso é facilmente visto, uma vez que, nesse caso, temos $|\nu'(x)|\leq C(q)\frac{1}{x^q}$, onde $C(q)$ é uma constante, para todo $q>0$.

Lema 3. *1. Seja f uma f.q.p. e g tal que $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=L$. Então $M(gf)=L\cdot M(f)$.*

2. Sejam f e λ como no teorema anterior e seja $g=[g(\varepsilon)]\in\overline{\mathbb{R}}$ tal que $g\approx g_0\in\mathbb{R}$. Então $\nu\Bigg(g\cdot\bigg(f\circ\frac{1}{\lambda}\bigg)\Bigg)=\lim\limits_{\eta\longrightarrow 0}\frac{1}{\eta}\int\limits_0^\eta g(\varepsilon)f\bigg(\frac{1}{\lambda(\varepsilon)}\bigg)d\varepsilon=g_0\cdot M(f)$.

3. Sejam f e g como no item anterior. Então $\nu(f\circ g)=\lim\limits_{\eta\longrightarrow 0}\frac{1}{\eta}\int\limits_0^\eta f\bigg(g(\varepsilon)\bigg)d\varepsilon=f(g_0)$.

Demonstração. Temos que $\Bigg|\frac{1}{T}\int\limits_0^T g(x)f(x)dx-\frac{1}{T}\int\limits_0^T Lf(x)dx\Bigg|\leq||g-L||_{[0,T],\infty}\cdot\frac{1}{T}\int\limits_0^T|f(x)|dx$ $\leq||g-L||_{[0,T],\infty}\cdot(2M(|f(x)|)+1)$, para T grande, provando o primeiro item. O segundo item segue pelo teorema anterior e pela prova do item anterior. Para o último item, observe que $f\circ g\approx f(g_0)$ porque f é contínua. Portanto, a probabilidade de transição é o valor médio de qualquer sequência convergente para $f(g_0)$. □

Do lema anterior, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 5. *Seja f uma f.q.p., λ um infinito puro e $g\in\overline{\mathbb{R}}$ tal que $g\approx g_0\in\mathbb{R}$. Então $M(g\cdot f\circ\lambda)=g_0\cdot M(f)$ e, caso $f\circ g$ exista, então $M(f\circ g)=f(g_0)$.*

O último resultado desta seção prova que uma função positiva limitada por uma f.q.p. possui valores médios generalizados.

Teorema 21. *Sejam $0 \leq |g(x)| \leq f(x)$, f uma f.q.p. e λ um infinito puro. Então tanto $\nu(g \circ \lambda)$ quanto $\nu(|g \circ \lambda|)$ possuem suportes não vazios.*

Demonstração. Podemos supor que g seja uma função positiva. Para cada $0 < \eta < 1$, suficientemente pequeno, temos $0 \leq \frac{1}{\eta} \int\limits_0^\eta g(\lambda(\varepsilon))d\varepsilon \leq \frac{1}{\eta} \int\limits_0^\eta f(\lambda(\varepsilon))d\varepsilon \leq 2M(f) + 1$. Portanto, no ambiente generalizado, temos $0 \leq \nu(g \circ \lambda) \leq (2M(f) + 1)$ e a partir disso o resultado segue. $\square$

Seja f uma f.q.p. C^∞ e $\nu \in \overline{\mathbb{R}}$ um infinitesimal positivo. Para cada $\varepsilon \in I$, defina o conjunto $M_\varepsilon^{f,\nu} = \{\tau_\varepsilon \in \mathbb{R} : ||f(x + \tau_\varepsilon) - f(x)||_\infty \leq \nu(\varepsilon)\}$, um conjunto de números de translação de f, e considere o conjunto interno $M = [M_\varepsilon^{f,\nu}]$. Dado $\tau \in M$, temos que $supp(\tau) \cap \mathbb{R}^* \neq \emptyset$ se e somente se f é uma função periódica. Portanto, se f é não periódica, então M contém infinitesimais ou infinitos. Se f é C^∞, ν é nula e $M \neq \emptyset$, então a imagem canônica de f em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ é uma função periódica generalizada e cada elemento não nulo de M é um período generalizado de f. Tais períodos de f não precisam ser elementos invertíveis, mas se $\tau \in M$ é um infinito puro invertível, então $\frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau f(t)dt \approx M(f)$. Poderíamos começar com qualquer sequência moderada de f.q.p.'s e não apenas com uma sequência constante. Uma função generalizada que possui tais sequências como representantes será chamada de uma *f.q.p.g.*, abreviação para *função quase periódica generalizada*. Seria interessante saber se existem f.q.p.'s não periódicas que são periódicas generalizadas. A mesma pergunta pode ser feita para f.q.p.g.'s.

Exemplos

Nesta seção, consideramos alguns exemplos, dos quais alguns já foram considerados em [CAC+18], mas sem cálculos explícitos. Esses exemplos não são cobertos pelos resultados das seções anteriores. Antes de prosseguirmos, lembre que um elemento $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ que satisfaz $supp(\lambda) = \emptyset$ é chamado *infinito puro*. Note que isso é equivalente a $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow \infty} \lambda(\varepsilon) = \infty$.

Em um espaço de Hilbert bidimensional, seja

$$H(t) = \begin{pmatrix} \frac{g}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{g}{\varepsilon^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g\alpha^{-1} & 0 \\ 0 & g\alpha^{-2} \end{pmatrix},$$

onde $g \in \mathbb{R}$. A solução da EDO

$$S'(t) = iH(t)S(t)$$

é dada por

$$\left[\varepsilon \longrightarrow S_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} \exp\left(i\frac{g}{\varepsilon}(t - t_0)\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{g}{\varepsilon^2}(t - t_0)\right) \end{pmatrix}\right].$$

Portanto, para vetores unitários ortogonais $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, temos que

$$\langle u \mid S_\varepsilon(t)v\rangle = u_1v_1 \exp\left(i\frac{g}{\varepsilon}(t-t_0)\right) + u_2v_2 \exp\left(i\frac{g}{\varepsilon^2}(t-t_0)\right).$$

No artigo [CAC+18], é afirmado que o suporte de $\langle u, S_\varepsilon(t)v\rangle$ não é unitário, ou seja, $\langle u, S_\varepsilon(t)v\rangle$ não está associado a nenhum número real. Mas está claro que $[\varepsilon \longrightarrow \langle u, S_\varepsilon(t)v\rangle]$ é a soma da composição de f.q.p.'s e infinitos puros. Assim, ele tem um valor médio. Desta maneira, é muito provável que $|\langle u, S_\varepsilon(t)v\rangle|$ também tenha um valor médio. Prosseguimos para calcular esse valor. Se escrevermos $a = u_1v_1, b = u_2v_2$ então $a + b = 0$ e temos que

$$|\langle u, S_\varepsilon(t)v\rangle| = 2|a| \cdot \left|sin\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^2}g(t-t_0)\right)\right|$$

Segue que $M(|\langle u, S_\varepsilon(t)v\rangle|) = 2|a| \cdot M\left(\left|sin\left(\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon^2}(t-t_0)\right)\right|\right) = \frac{4}{\pi} \cdot |a|$, onde usamos o Teorema 20 na última igualdade.

Agora, vamos analisar outro exemplo de [JFAC+17, CAC+18], considerando a matriz simétrica A de dimensão 2×2

$$A = \left[\varepsilon \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{a}{\varepsilon^{n_1}+\varepsilon^{2n_1}} & \frac{c}{\varepsilon-2\varepsilon^2} \\ \frac{c}{\varepsilon-2\varepsilon^2} & \frac{b}{\varepsilon^{n_2}} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{a}{\alpha^{n_1}+\alpha^{2n_1}} & \frac{c}{\alpha-2\alpha^2} \\ \frac{c}{\alpha-2\alpha^2} & \frac{b}{\alpha^{n_2}} \end{pmatrix}.$$

Seja $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, e calculamos

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |\langle (u_1, u_2) \mid \exp(-iH)(v_1, v_2)\rangle|$$

escolhendo ε aleatoriamente entre 0 e um valor muito pequeno η. Aqui, $< \cdots >$ é o produto escalar hermitiano padrão em $\mathbb{C}^n$ e eles usaram a rotina do Matlab *expm* para calcular a exponencial de uma matriz. Parece que deve existir uma probabilidade de transição para $a = 1$, $b = 1.3$, $c = 0.4$, $n_1 = n_2 = 1$, que é aproximadamente 0.9251. No entanto, observe que essa simulação apenas indica que o suporte da probabilidade de transição generalizada não é vazio, apesar dos valores de ε, escolhidos aleatoriamente, sugerir que o suporte tenha um único elemento e que, portanto, a probabilidade de transição exista. Vamos considerar primeiro $u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $A = \left[\varepsilon \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon+\varepsilon^2} & \frac{1}{\varepsilon-2\varepsilon^2} \\ \frac{1}{\varepsilon-2\varepsilon^2} & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}\right]$, e vamos provar a existência da probabilidade de transição para qualquer par ortogonal e dar o seu valor real. Vamos começar calculando os autovalores de A:

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left[\frac{2\varepsilon+\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\varepsilon^3} \pm \sqrt{\left(\frac{2\varepsilon+\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\varepsilon^3}\right)^2 - 4\left[\frac{1}{\varepsilon^2+\varepsilon^3} - \frac{1}{(\varepsilon-2\varepsilon^2)^2}\right]}\right].$$

A partir disso, segue que

$$\alpha\lambda = \left[\varepsilon \longrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} \pm \sqrt{\left(\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 - 4\left[\frac{1}{1+\varepsilon} - \frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}\right]}\right]\right]$$

e, segue que, $\alpha \cdot \lambda \approx \frac{1}{2}[2 \pm 2]$. Denotamos por λ_1 o autovalor escolhido com o sinal $+$ e por λ_2 o escolhido com o sinal $-$. A partir disso e usando uma calculadora gráfica, pode-se provar que $\|\lambda_1\| = e$ e $\|\lambda_2\| < e^{-18} < 1$. Portanto, λ_1 é um infinito puro e λ_2 é um infinitesimal. Também temos que

$$\alpha(\lambda_1 - \lambda_2) = \sqrt{\left(\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 - 4\left[\frac{1}{1+\varepsilon} - \frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}\right]} \approx \sqrt{2}$$

provando que $\lambda_1 - \lambda_2$ é um infinito puro. Uma base de autovetores de A é $\{(1,k),(-k,1)\}$, onde

$$k(\varepsilon) = (\varepsilon - 2\varepsilon^2)(\lambda_1 - (\varepsilon+\varepsilon^2)^{-1}) =$$

$$(\varepsilon - 2\varepsilon^2)\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{2\varepsilon+\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\varepsilon^3}\right)^2 - 4\left[\frac{1}{\varepsilon^2+\varepsilon^3} - \frac{1}{(\varepsilon-2\varepsilon^2)^2}\right]}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{\left(\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 - 4\left[\frac{1}{1+\varepsilon} - \frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}\right]}\right] \approx 1.5 := k_0$$

Logo, $M = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz que diagonaliza A na forma $D = \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2} \end{pmatrix}$ e $M \approx M_0 = \frac{1}{\sqrt{1+k_0^2}}\begin{pmatrix} 1 & -k_0 \\ k_0 & 1 \end{pmatrix}$. A partir disso, segue que

$$\langle u \mid \exp(iA)v\rangle = \langle Mu \mid DMv\rangle =: g_1g_3e^{i\lambda_1} + g_2g_4e^{i\lambda_2}$$

onde $Mu = (g_1, g_2)$, $Mv = (g_3, g_4)$, $g_i \approx y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 4$, $g_1g_3 + g_2g_4 = 0$ e $\{e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}\}$ consiste em vibrações puras. Como vimos anteriormente, λ_1 é um infinito puro. Assim como no exemplo anterior, obtemos que

$$|\langle u \mid \exp(iA)v\rangle| = 2|g_1g_3| \cdot \left|sin\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)\right|$$

e, portanto, a probabilidade de transição é

$$\frac{4}{\pi} \cdot |g_1(0)g_3(0)| = \frac{4}{\pi} \cdot \left|\frac{1}{\sqrt{10}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - k_0\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + k_0\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \frac{2(k_0^2-1)}{(k_0^2+1)\pi} \approx 0.244853758603.$$

Claramente, esses dois exemplos mostram como resolver o caso genérico de uma matriz generalizada 2×2. Agora calculamos o valor real relatado em [JFAC+17, CAC+18]. Neste caso,

$$A = \left[\varepsilon \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon+\varepsilon^2} & \frac{0.4}{\varepsilon-2\varepsilon^2} \\ \frac{0.4}{\varepsilon-2\varepsilon^2} & \frac{1.3}{\varepsilon^2} \end{pmatrix} \right]$$

com autovalores

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left[\frac{1.3+2.3\varepsilon}{\varepsilon^2+\varepsilon^3} \pm \sqrt{\left(\frac{1.3+2.3\varepsilon}{\varepsilon^2+\varepsilon^3}\right)^2 - 4\left[\frac{1.3}{\varepsilon^3+\varepsilon^4} - \frac{0.16}{(\varepsilon-2\varepsilon^2)^2}\right]} \right].$$

Segue que

$$\alpha^{2.6}\cdot\lambda(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left[\varepsilon^{.06}\cdot\frac{1.3+2.3\varepsilon}{1+\varepsilon} \pm \sqrt{\varepsilon^{1.2}\left(\frac{1.3+2.3\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 - 4\varepsilon^{0.2}\left[\frac{1.3(1-2\varepsilon)2 - 0.16(\varepsilon+\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon)(1-2\varepsilon)}\right]} \right].$$

Assim, $\alpha^{2.6}\cdot\lambda \approx 0$. Denotamos por λ_1 o autovalor escolhido com o sinal $+$ e por λ_2 o autovalor escolhido com o sinal $-$. Então, $\alpha^{2.5}\cdot\lambda_1 \not\approx 0$. Logo, temos $|\lambda_1| \geq e^{2.5}$ e λ_1 é um infinito puro. Para λ_2, usando uma calculadora gráfica, encontramos que $\alpha^{-18.2}\cdot\lambda_2 \approx 0$, mas $\alpha^{-18.1}\cdot\lambda_2 \not\approx 0$. Portanto, λ_2 é um infinitesimal de norma menor que $e^{-18.2}$. Note que

$$\alpha^2(\lambda_1-\lambda_2) = \left[\varepsilon \longrightarrow \sqrt{\left(\frac{1.3+2.3\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 - 4\left[\frac{1.3\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{0.16\varepsilon^2}{(1-2\varepsilon)^2}\right]}\right] \approx 1,$$

provando que $\lambda_1-\lambda_2$ é um infinito puro. Uma base de autovetores de A é $\{(1,k),(-k,1)\}$, onde

$$k(\varepsilon) = \frac{5}{2}(\varepsilon-2\varepsilon^2)(\lambda_1-(\varepsilon+\varepsilon^2)^{-1}) =$$

$$\frac{5}{2}(\varepsilon-2\varepsilon^2)\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{1.3}{\varepsilon^2} + \sqrt{\left(\frac{1.3+2.3\varepsilon}{\varepsilon^2+\varepsilon^3}\right)^2 - 4\left[\frac{1.3}{\varepsilon^3+\varepsilon^4} - \frac{0.16}{(\varepsilon-2\varepsilon)^2}\right]}\right]$$

$$\frac{5}{4}(1-2\varepsilon)\left[\frac{1.3}{\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{1.3+2.3\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon^2}\right)^2 - 4\left[\frac{1.3}{\varepsilon+\varepsilon^2} - \frac{0.16}{(1-2\varepsilon)^2}\right]}\right].$$

Segue que $\alpha k \approx 2.6$ e então k é um infinito puro. Consequentemente, $M = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{pmatrix}$ diagonaliza A na forma $D = \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2} \end{pmatrix}$ e $M \approx M_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Disso segue que

$$\langle u \mid exp(iA)v\rangle = \langle Mu \mid DMv\rangle =: g_1g_3e^{i\lambda_1} + g_2g_4e^{i\lambda_2}$$

onde $Mu = (g_1,g_2), Mv = (g_3,g_4)$, $g_i \approx y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,4$, $g_1g_3 + g_2g_4 = 0$ e $\{e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}\}$ consiste de vibrações puras. Segue do corolário 5 que $\langle u \mid exp(iA)v\rangle$ tem um valor médio.

Novamente λ_1 é um infinito puro e, consequentemente,

$$|\langle u \mid exp(iA)v\rangle| = 2|g_1 g_3| \cdot \left|sin\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)\right|$$

mostrando que a probabilidade de transição é

$$\frac{4}{\pi} \cdot |g_1(0)g_3(0)| = \frac{4}{\pi}\left|\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \frac{2}{\pi} \approx 0.636619772368.$$

Esse valor é diferente do encontrado nas referências acima. A partir de nossos cálculos, no caso de dimensão 2, segue que se o suporte da probabilidade de transição generalizada possui mais de um elemento, então o mesmo será verdadeiro para o elemento $|g_1 \cdot g_3|$.

Considere

$$A = \left[\varepsilon \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon^2} & \frac{2}{\varepsilon-2\varepsilon^2} \\ \frac{2}{\varepsilon-2\varepsilon^2} & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}\right]$$

e vamos calcular o valor médio de $|\langle u \mid \exp(-iA)v\rangle|$.

Os autovalores de $-A$ são

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left[\frac{1+\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon(1+\varepsilon\sqrt{\varepsilon})} \pm \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon(1+\varepsilon\sqrt{\varepsilon})}\right)^2 - 4\left[\frac{\sqrt{\varepsilon}(1-2\varepsilon)^2 - \varepsilon\sqrt{\varepsilon} - 1}{\varepsilon^2(1+\varepsilon\sqrt{\varepsilon})(1-2\varepsilon)^2}\right]}\right].$$

Disto temos que

$$\alpha\lambda = \left[\varepsilon \longrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{1+\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \pm \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 - 4\left[\frac{\sqrt{\varepsilon}(1-2\varepsilon)^2 - \varepsilon\sqrt{\varepsilon} - 1}{(1+\varepsilon\sqrt{\varepsilon})(1-2\varepsilon)^2}\right]}\right]\right].$$

e por isso $\alpha \cdot \lambda \approx \frac{1}{2}[1 \pm \sqrt{5}]$. Denote por λ_1 o autovalor com o sinal $+$ e por λ_2 o autovalor com o sinal $-$. Segue que λ_1 e λ_2 são infinitos puros. E também

$$\alpha(\lambda_1 - \lambda_2) \approx \sqrt{5}$$

e por isso $\lambda_1 - \lambda_2$ é um infinito cuja norma é $\geq e^{-1}$. Uma base de autovetores de A é $\{(1,k),(k,-1)\}$, onde

$$k(\varepsilon) = \frac{(\varepsilon - 2\varepsilon^2)}{2}\left(\lambda_1 - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}+\epsilon^2}\right) =$$

$$\frac{1-2\varepsilon}{2}\left[1 + \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 - 4\left[\frac{\sqrt{\varepsilon}(1-2\varepsilon)^2 - \varepsilon\sqrt{\varepsilon} - 1}{(1+\varepsilon\sqrt{\varepsilon})(1-2\varepsilon)^2}\right]}\right] \approx \frac{1+\sqrt{5}}{2} =: k_0$$

Por isso $M = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{pmatrix}$ diagonaliza A para a forma $D = \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2} \end{pmatrix}$ e $M \approx M_0 = \frac{1}{\sqrt{1+k_0^2}}\begin{pmatrix} 1 & -k_0 \\ k_0 & 1 \end{pmatrix}$. Disso segue que

$$\langle u \mid exp(iA)v\rangle = \langle Mu \mid DMv\rangle =: g_1g_3e^{i\lambda_1} + g_2g_4e^{i\lambda_2},$$

onde $Mu = (g_1, g_2), Mv = (g_3, g_4),\ g_i \approx y_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 4,\ g_1g_3 + g_2g_4 = 0$ e $\{e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}\}$ consiste de vibrações puras. Segue do corolário 5 que $\langle u \mid exp(iA)v\rangle$ tem um valor médio. Note que $\lambda_1 - \lambda_2$ é um infinito puro. Como no exemplo anterior,

$$|\langle u \mid exp(iA)v\rangle| = 2|g_1g_3| \cdot \left|sin\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)\right|$$

Como antes, concluímos que a probabilidade de transição é

$$\frac{4}{\pi} \cdot |g_1(0)g_3(0)| = \frac{4}{\pi} \cdot \left|\frac{1}{1+k_0^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + k_0\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - k_0\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \frac{2(k_0^2-1)}{\pi(k_0^2+1)} \approx 0.284705017367.$$

O valor reportado nas referências é 0.1539.

Agora consideramos o caso geral de dimensão finita. Procedendo da mesma forma para uma matriz $n \times n$ simétrica A, com $Spec(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, temos que

$$\begin{aligned} |\langle u \mid exp(iA)v\rangle| &= \sqrt{\|a\|^2 + 2\sum_{i<j} a_ia_jcos(\lambda_i - \lambda_j)} \\ &= 2\sqrt{-\sum_{i<j} a_ia_jsin^2\left(\frac{\lambda_i - \lambda_j}{2}\right)} \\ &\leq 2\left(\sum_{i<j}\sqrt{|a_i| \cdot |a_j|} \cdot \left|sin\left(\frac{\lambda_i - \lambda_j}{2}\right)\right|\right), \end{aligned} \tag{25}$$

onde $a = (a_1, \cdots, a_n) \in (\overline{\mathbb{C}}_{as})^n,\ \sum_i a_i = 0\ e\ \|a\|^2 < 1$.

Se o conjunto $\{\lambda_i - \lambda_j\ :\ \lambda_i \neq \lambda_j \in Spec(A)\}$ consistir de infinitos puros e infinitesimais e supp$(a) = a_0 \in \mathbb{R}^n$, então $|\langle u \mid \exp(iA)v\rangle|^2$ tem um valor médio (similar ao caso $n = 2$). Pode-se usar a adição de fasores para reduzir essa soma e verificar se $|\langle u \mid \exp(iA)v\rangle|$ tem um valor médio. Provavelmente, o fato de $\{\lambda_i - \lambda_j\ :\ \lambda_i, \lambda_j \in Spec(A)\}$ consistir em infinitos puros e infinitesimais implica todas as outras condições.

A adição de fasores e as relações $a = (a_1, \cdots, a_n) \in (\overline{\mathbb{C}}_{as})^n$, $\sum_i a_i = 0$, $|a|^2 < 1$ na Equação 25 podem ser interessantes. Chamaremos isso de "*condição de interferência destrutiva perfeita*".

Agora vamos provar que a condição de interferência destrutiva perfeita também vale para a probabilidade de transição de matrizes normais. De fato, seja $U \in M_n(\overline{\mathbb{K}})$ uma matriz normal, i.e., $UU^* = U^*U$. Podemos escrever $U = A + iB$, onde $A = \frac{1}{2}(U + U^*)$ e $B = \frac{1}{2i}(U - U^*)$ são matrizes autoadjuntas comutativas. Seja M uma matriz unitária tal que $MAM^* = D_1$ seja uma matriz diagonal, $\lambda \in Spec(A)$ e $W = V_\lambda$. Como W é gerado por vetores livres ortogonais, na verdade ele é gerado por alguma coluna de M, ele é um $\overline{\mathbb{K}}$-módulo livre. Como $AB = BA$, segue que B deixa W invariante e $B\big|_W$ é um operador simétrico. O fato de W ser um $\overline{\mathbb{K}}$-módulo livre e $B\big|_W$ ser simétrico implica que podemos decompor W como uma soma direta de automódulos de B. Portanto, modificando algumas colunas de M, se necessário, podemos supor que $MBM^* = D_2$ é também uma matriz diagonal e assim $MUM^* = D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ é diagonal com $MM^* = Id$. Sejam u, v vetores ortogonais em $\mathbb{K}^n$, então $\langle \exp(iU)u \mid v\rangle = \langle M^* \exp(iD)Mu \mid v\rangle = \langle \exp(iD)Mu \mid Mv\rangle = \sum_k \exp(i\lambda_k) g_k \overline{f_k}$, com $\sum_k g_k f_k = \langle Mu \mid Mv\rangle = \langle u \mid v\rangle = 0$, o que prova a afirmação. Consequentemente, os resultados da primeira seção deste capítulo também valem para matrizes normais. Em [JFAC+17, CAC+18], é considerada a seguinte expressão:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{6}}\left[\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\right) - 2\exp\left(\frac{i}{\varepsilon^2}\right) + (1+\varepsilon)\exp\left(\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]\right|$$

Como essa expressão não satisfaz a condição de interferência destrutiva perfeita, ela não representa uma probabilidade de transição proveniente de uma matriz normal.

Teorema 22. *Seja* $f = \sqrt{\sum_i g_i \cdot (f_i \circ \mu_i)^2}$*, onde* $g = (g_1, \cdots, g_n) \in (\overline{\mathbb{C}}_{as})^n$ *ou* $|g_i| \leq C^2\ \forall\, i$ *e para alguma constante real* $C > 0$*, os* μ_i*'s são infinitos puros ou infinitesimais, e as* f_i*'s são f.q.p. Então* $supp(\nu(f)) \neq \emptyset$.

Demonstração. Temos que $f = |f| = \sqrt{\left|\sum_i g_i \cdot (f_i \circ \mu_i)^2\right|} \leq C\left(\sum_i |f_i \circ \mu_i|\right)$. O resultado segue do Teorema 20 e Teorema 21. $\square$

Segue do teorema anterior que

$$\left|\frac{1}{\sqrt{6}}\left[\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\right) - 2\exp\left(\frac{i}{\varepsilon^2}\right) + (1+\varepsilon)\exp\left(\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]\right|$$

tem probabilidades de transição generalizadas, e o mesmo vale para toda matriz normal A cujos autovalores são infinitos puros ou infinitesimais. A última afirmação segue da desigualdade (25), do Teorema 21 e do Teorema 22. Com isso, fornecemos uma resposta afirmativa para a existência de probabilidades de transição generalizadas no caso de dimensão finita. A probabilidade de transição definida por Colombeau-Gsponer, em nosso estudo, existe se e somente se o suporte das probabilidades de transição generalizadas tiver um único elemento.

Embora não possamos considerar operadores ilimitados, já que não podemos definir redes moderadas desses operadores, podemos contornar isso da seguinte maneira. Considere um Espaço de Hilbert $\mathbb{H}$. Como o conjunto de operadores unitários em $\mathbb{H}$ não é compacto, devemos impor algum tipo de compacidade para obter probabilidades de transição ou probabilidades de transição generalizadas. Seja T um operador autoadjunto em $\mathbb{H}$. De acordo com [Sch12, Seção 5.7], podemos escrever $T = \bigoplus_n T_n$, uma decomposição direta ortogonal, em $\mathbb{H} = \bigoplus_{n=0}^{N} \mathbb{H}_n$, com $N \in \infty \cup \mathbb{N}$, de modo que cada T_n seja um operador autoadjunto com espectro simples no espaço de Hilbert $\mathbb{H}_n$, e, portanto, podemos aplicar o Teorema 17. Como temos uma soma direta ortogonal, segue que o Teorema 17 também vale para T.

Teorema do ponto fixo

O Teorema do Ponto Fixo de Banach é certamente uma das mais importantes ferramentas matemáticas na teoria dos espaços métricos. Ele estabelece condições para a existência e unicidade de pontos fixos de aplicações definidas nesses espaços, além de construir um método para encontrar tais pontos, o método das aproximações sucessivas. Uma aplicação direta desse resultado é o afamado Teorema de Picard-Lindelöf o qual dá condições para existência e unicidade de soluções de problemas de valor inicial. O método consiste em iterar a aplicação a partir de um ponto qualquer do domínio e obter uma sequência que deverá convergir para um ponto fixo. Para que se possa obter qualquer resultado desse tipo, e de natureza intrínseca ao ambiente generalizado, faz-se necessário apresentar um conceito de sequência mais adequado. Nesse sentido, as hipersequências de D. Tiwari e P. Giordano [TG22] são bastante apropriadas, estas serão aqui sequências de $\mathcal{G}_f(\Omega)$ indexadas no conjunto dos números hipernaturais $\tilde{\mathbb{N}}$. Fazendo uso de um sistema de vizinhanças da topologia cortante introduzida por Biagioni-Scarpalézos [Bia90] [Sca00] [Sca04], publicado por Aragona, Fernandez e Juriaans em [AFJ09], mas agora compatível com a estrutura generalizada (veja isso em seção anterior), Juriaans e Oliveira [JO22] apresentam uma noção de convergência de hipersequências e de hipersequências de Cauchy. Com esta configuração, eles provam em um teorema do ponto fixo intrínseco a $\mathcal{G}(\Omega)$. Vale lembrar que uma teoria de cálculo diferencial generalizado já foi apresentada por Aragona, Fernandez e Juriaans em [AFJ05] [AFJO12] (também em seção anterior) e que portanto esses resultados são uma continuação desses trabalhos. Nosso objetivo é agora a obtenção desse resultado para o aspecto full por motivos já esclarecidos (veja introdução).

Para começar, considere as seguintes definições.

Definição 37 (Números hipernaturais). *O subconjunto* $\tilde{\mathbb{N}} := \{n = [(n_\varphi)_{\varphi \in A_0}] \in \overline{\mathbb{R}}_f : \ n_\varphi \in \mathbb{N}, \ \forall \ \varphi \in A_0\}$ *é chamado o conjunto dos números hipernaturais.*

Note que hipernaturais são números generalizados com representantes em $\xi_{M_f}(\mathbb{N})$.

Definição 38 (Hipersequência em $\mathcal{G}_f$). *Uma hipersequência é uma aplicação* $f : \tilde{\mathbb{N}} \to \mathcal{G}_f$ *e será denotada por* $(f_n)_{n \in \tilde{\mathbb{N}}}$.

Passamos agora para o próximo passo natural que é estabelecer as noções de convergência de hipersequência e de hipersequência de Cauchy.

Definição 39. *Dizemos que uma hipersequência* $(f_n)_{n\in\tilde{\mathbb{N}}}$ *converge para* $f \in \mathcal{G}_f$ *se para qualquer vizinhança* $W^{\beta}_{l,r}[0]$ *de zero, existe* $n_0 \in \tilde{\mathbb{N}}$ *tal que se* $n \geq n_0$ *então* $(f_n - f) \in W^{\beta}_{l,r}[0]$.

Note que se $f(\tilde{\mathbb{N}}) \subset \overline{\mathbb{K}}_f$, então a igualdade $\overline{\mathbb{K}}_f \cap W^{\beta}_{l,r}[0] = V_r[0]$ implica que $f_n \to f$ se nas mesmas condições da definição acima tivermos $(f_n - f) \in V_r[0]$. Uma hipersequência $(f_n)_{n\in\tilde{\mathbb{N}}}$ é de *Cauchy* se para qualquer vizinhança de zero $W^{\beta}_{l,r}[0]$ existe $n_0 \in \tilde{\mathbb{N}}$ tal que se $n, m \geq n_0$ então $(f_n - f_m) \in W^{\beta}_{l,r}[0]$. Analogamente, podemos substituir a condição $(f_n - f_m) \in W^{\beta}_{l,r}[0]$ por $(f_n - f_m) \in V_r[0]$ se $f(\tilde{\mathbb{N}}) \subset \overline{\mathbb{K}}_f$. Uma vez que $\mathcal{G}_f$ é completo temos que $(f_n)_{n\in\tilde{\mathbb{N}}}$ é convergente se, e só se, é de Cauchy.

Exemplo 6. *A hipersequência $(\frac{1}{n})_{n\in\tilde{\mathbb{N}}}$ converge para* 0 *em $\mathcal{K}_f$. De fato, para $r > 0$ escolhido arbitrariamente, basta tomar $n_0 = [(\lfloor i(\varphi)^{-r} + 1\rfloor)_\varphi]$. Então, se $n = [(n_\varphi)_\varphi] > n_0$, temos $\frac{1}{n_\varphi} < \frac{1}{\lfloor i(\varphi)^{-r}+1\rfloor} \leq \frac{1}{i(\varphi)^{-r}}$ $\forall\ \varphi \in A_q(1)$ com $q > p$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Portanto, $|\frac{1}{n} - 0| < \alpha^\bullet_r$ e por isso $\frac{1}{n} \in V_r[0]$.*

O conjunto dos números hipernaturais não é enumerável, tão pouco é totalmente ordenado, portanto a convergência para um ponto trata-se da escolha de uma aproximação, mas sempre convergindo para o mesmo ponto, tornando estas definições apropriadas.

Definição 40. *Sejam $A = [(A_\varphi)_\varphi]$ e $B = [(B_\varphi)_\varphi]$ conjuntos internos em $\mathcal{G}_f$ e uma aplicação $T : A \to B$. Um representante de T é uma rede de aplicações $(T_\varphi : A_\varphi \to B_\varphi)_{\varphi\in A_0}$ tal que $Tf = [(T_\varphi(f_\varphi))_\varphi]$, $\forall\ f = [(f_\varphi)_\varphi] \in A$.*

Veja a definição de mapa $\tilde{\mathbb{C}}$-linear com representante em [GV11].

Definição 41 (Contração)**.** *Sejam $A = [(A_\varphi)_\varphi] \subset \mathcal{G}_f$ um conjunto interno e $T : A \to A$ uma aplicação com representante $(T_\varphi : A_\varphi \to A_\varphi)_{\varphi\in A_0}$. Dizemos que T é uma contração se existem $L \in \overline{\mathbb{R}}^*_{+f}$ e $\lambda \in (0, 1)$ tais que $L < \lambda$ e $||T(f) - T(g)||_m \leq L||f - g||_m$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$.*

Lembre que $||h||_m = [\varphi \in A_0 \to ||h_\varphi(\cdot)||_m \in \mathbb{R}_+] = ||h||_{m,\sigma}$ com $\sigma = 0$, veja [AFJ09]. E ainda, se $n = [(n_\varphi)_\varphi] \in \tilde{\mathbb{N}}$ então a aplicação $T^n : A \to A$ com representante $(T^{n_\varphi}_\varphi : A_\varphi \to A_\varphi)_{\varphi\in A_0}$, entenda n_φ composições de T_φ, é uma contração e $||T^n(f) - T^n(g)||_m \leq L^n||f - g||_m \leq \lambda^n||f - g||_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Se for preciso especificar λ diremos que T é uma λ-contração.

Para o próximo resultado, considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $l, p \in \mathbb{N}$ e em $\mathcal{G}_f(\Omega)$ a ultra-métrica $D : \mathcal{G}_f(\Omega) \times \mathcal{G}_f(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ definida por

$$D(f, g) := sup\left\{\frac{2 \cdot D_{mm}(f, g)}{1 + D_{mm}(f, g)} :\ m \in \mathbb{N}\right\},$$

onde $D_{l,p} : \mathcal{G}_f(\Omega)\times\mathcal{G}_f(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ é a pseudo-ultra-métrica definida por $D_{l,p}(f, g) := e^{-V_{l,p}[f-g]}$ e por sua vez $V_{l,p} : \mathcal{G}_f(\Omega) \to \mathbb{R}$ é a valorização definida por $V_{l,p}[f] := sup\{r \in \mathbb{R} \mid \forall\ \beta \in \mathbb{N}^n\ com\ |\beta| \leq p,\ temos\ \alpha^\bullet_{-r}||f||_{\beta,l} \approx 0\}$, veja [AFJ06] para mais detalhes. Veja também que se $f \in B_r(0)$, então $\dfrac{2D_{mm}(f, 0)}{1 + D_{mm}(f, 0)} < r$, o que nos dá $D_{mm}(f, 0) < \dfrac{r}{2 - r}$ e por isso $V_{mm}[f] > \ln\left(\dfrac{2 - r}{r}\right)$.

Podemos agora apresentar nosso resultado principal desta seção.

Teorema 23 (Teorema do Ponto Fixo). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $A = [(A_\varphi)_\varphi] \subset B_r(0) \cap \mathcal{G}_f(\Omega)$, $r < 2$, um conjunto interno e $T : A \to A$ uma aplicação com representante $(T_\varphi : A_\varphi \to A_\varphi)_{\varphi \in A_0(n)}$. Se existe $k = [(k_\varphi)_\varphi] \in \tilde{\mathbb{N}}$ tal que T^k é uma λ-contração, então T^k é contínua e tem um único ponto fixo $f_0 \in A$.*

Demonstração. É claro que T^k é contínua pois é contração. Denote $G = T^k$ e tome qualquer $g_0 \in A$. Só precisamos mostrar que a hipersêquencia $(G^n(g_0))_{n \in \tilde{\mathbb{N}}}$ converge em A já que A fechado e G contínua implicam que o limite $f_0 = \lim\limits_{n \in \tilde{\mathbb{N}}} G^n(g_0)$ é um ponto fixo de G em A. Vamos fazer isso mostrando que $(G^n(g_0))_{n \in \tilde{\mathbb{N}}}$ é uma hipersequência de Cauchy. Uma vez que a hipersequência $(\lambda^n)_{n \in \tilde{\mathbb{N}}}$ converge para 0, podemos escolher $r > 0$, $l \in \mathbb{N}$ e $n_0 \in \tilde{\mathbb{N}}$ grande o suficiente tal que

$$\lambda^{n_0} \alpha_d^\bullet \in V_{4^l r}[0] = V_{4r_1}[0],$$

onde $r_1 = 4^{l-1} r$ e $d \leq ln(\frac{2-r}{r})$. Se tomarmos $n, s > n_0$ e escrevermos $n = n_0 + p$ e $s = n_0 + q$ com $p, q \in \tilde{\mathbb{N}}$ então $||G^p(g_0) - G^q(g_0)||_m \leq \alpha_d^\bullet$. Uma vez que G^{n_0} é contração, temos

$$\begin{aligned} ||G^n(g_0) - G^s(g_0)||_m &= ||G^{n_0}(G^p(g_0)) - G^{n_0}(G^q(g_0))||_m \\ &\leq \lambda^{n_0} ||G^p(g_0) - G^q(g_0)||_m \\ &\leq \lambda^{n_0} \alpha_d^\bullet \in V_{4r_1}[0]. \end{aligned}$$

Isso prova que $F := G^n(g_0) - G^s(g_0) \in W^0_{m,4r_1}[0]$. Neste ponto vamos considerar o mergulho κ de $\mathcal{G}_f(\Omega)$ em $\mathcal{C}^1(\tilde{\Omega}_c, \overline{\mathbb{K}})$ e considerar $F \in \kappa(\mathcal{G}_f(\Omega))$, veja [AFJ05] [CGdS17], e sem perca de generalidade considerar também $\Omega \subset \mathbb{R}$. Uma vez que F é diferenciável em $\tilde{\Omega}_c$, segue que

$$\lim_{r_1 \to +\infty} \frac{F(x + \alpha_{2r_1}^\bullet) - F(x)}{\alpha_{2r_1}^\bullet} = F'(x),$$

para todo $x \in \tilde{\Omega}_c$. Uma vez que $F \in W^0_{m,4r_1}[0]$, temos que

$$|F(x + \alpha_{2r_1}^\bullet) - F(x)| \leq |F(x + \alpha_{2r_1}^\bullet)| + |F(x)| \leq 2\alpha_{4r_1}^\bullet$$

e por isso

$$\frac{|F(x + \alpha_{2r_1}^\bullet) - F(x)|}{\alpha_{2r_1}^\bullet} \leq 2\alpha_{2r_1}^\bullet, \tag{26}$$

para todo $x \in \tilde{\Omega}_c$. De (26) segue que $\frac{F(x+\alpha_{2r_1}^\bullet) - F(x)}{\alpha_{2r_1}^\bullet} \in V_{r_1}[0]$ e pelo limite acima $F'(x) \in V_{r_1}[0]$ $\forall\ x \in \tilde{\Omega}_c$. Como isto também vale para $F(x)$, segue que $F \in W^1_{m,r_1}[0]$. Para a indução nas ordens de derivação, suponha que $F \in W^k_{m,4^{-(k-1)}r_1}[0]$. Devemos mostrar que $F \in W^{k+1}_{m,4^{-k}r_1}[0]$. De forma análoga, como $\kappa(\mathcal{G}_f(\Omega)) \subset \mathcal{C}^\infty(\tilde{\Omega}_c, \overline{\mathbb{K}})$ então F^k é diferenciável em $\tilde{\Omega}_c$. Segue que

$$\lim_{r_1 \to +\infty} \frac{F^k(x + \alpha^{\bullet}_{2^{-4(k-1)}r_1}) - F^k(x)}{\alpha^{\bullet}_{2^{-4(k-1)}r_1}} = F^{k+1}(x).$$

De forma análoga a (26) temos

$$\frac{|F^k(x + \alpha^{\bullet}_{2^{-4(k-1)}r_1}) - F^k(x)|}{\alpha^{\bullet}_{2^{-4(k-1)}r_1}} \leq \alpha^{\bullet}_{4^{-k}r_1}. \tag{27}$$

Segue de (27) que $\frac{F^k(x+\alpha^{\bullet}_{2^{-4(k-1)}r_1})-F^k(x)}{\alpha^{\bullet}_{2^{-4(k-1)}r_1}} \in V_{4^{-k}r_1}[0]$ o que nos dá, como acima, que $F \in W^{k+1}_{m,4^{-k}r_1}[0]$. Isso garante que $(G^n(g_0))_{n\in\tilde{\mathbb{N}}}$ é uma hipersequência de Cauchy e por isso converge. Por fim, suponha que h_0 é outro ponto fixo de G, isto é, $G(h_0) = h_0$. Então $||f_0 - h_0||_m = ||G(f_0) - G(h_0)||_m \leq \lambda||f_0 - h_0||_m$. Desta maneira, $(1-\lambda)||f_0 - h_0||_m \leq 0$ e por isso $||f_0 - h_0||_m = 0$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Portanto, $h_0 = f_0$ e isso prova a unicidade do ponto fixo. Para o caso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ basta considerar a derivada em $\mathcal{C}^1(\tilde{\Omega}_c, \overline{\mathbb{K}})$ com $\tilde{\Omega}_c \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, veja [AFJ05] [CGdS17]. Isto finaliza a prova.

□

Exemplo 7. *Em [JO22] Juriaans e Oliveira mostram que o teorema do ponto fixo também pode ser usado para garantir unicidade e existência de solução para o sistema*

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= f(x(t))\delta(t) + h(t) \\ x(-1) &= x_0 \\ \dot{x}(-1) &= \dot{x}_0 \end{aligned}$$

estudado em [GFKS01], [KS99], [Ste98]. Tal sistema contém produto de distribuições em seus dados e portanto o ambiente generalizado é mais adequado para estudá-lo. O interessante é que tal ferramenta, devido ao seu caráter intrínseco relativo as álgebras de funções generalizadas, evita a necessidade de provar a moderação da solução, o que muitas vezes é um trabalho árduo. Uma vez que $i(\delta)$ é uma função delta generalizada, veja Definição 1 de [KS99], onde i é o mergulho de D' em $\mathcal{G}_f$, segue de forma análoga que o Teorema 23 também garante a existência e unicidade da solução do sistema quando considerado em $\mathcal{G}_f$.

A indução na demonstração acima prova a ferramenta topológica DSA no ambiente full, veja [JO22]. Note que esta propriedade também garante que moderação e nulidade em nível 0 implicam em nulidade.

Teorema 24 (Down sequencing argument)**.** *Seja $f \in \mathcal{G}_f(\Omega)$, $f \in W^0_{l,4^k r}[0]$ com $r > 0$. Então $f \in W^k_{l,r}[0]$, isto é, $W^0_{l,4^k r}[0] \subset W^k_{l,r}[0]$.*

Fundamentos de geometria diferencial generalizada

Um conceito de variedade generalizada ou $\mathcal{G}$-variedade foi apresentado por Aragona, Juriaans e Fernandez em [AFJ05] fazendo uso da teoria de cálculo diferencial generalizado que é desenvolvida neste mesmo artigo. Recentemente, Juriaans e Oliveira [JO22] mostraram que o conjunto dos pontos compactamente suportados $\tilde{M}_c$, relativo a uma subvariedade clássica M de dimensão n em $\mathbb{R}^N$ é uma $\mathcal{G}$-variedade de dimensão n em $\overline{\mathbb{R}}^N$. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ é um subconjunto aberto, não há conjunto generalizado mais natural que $\tilde{\Omega}_c$ que possa ser obtido a partir de Ω, veja Oberguggenberger e Kunzinger [OK99]. Nesse sentido, além de mostrar que sempre podemos obter de forma natural uma $\mathcal{G}$-variedade a partir de uma clássica, estes autores propõem os fundamentos de uma geometria diferencial generalizada como uma extensão natural da geometria diferencial clássica, mas agora com a vantagem de lidar, dentro dos limites do rigor matemático, com equações diferenciais que envolvem singularidades e não linearidades em seus dados, em particular produtos de distribuições. Já sabemos que Ω está discretamente mergulhado em $\tilde{\Omega}_c$, em particular M está discretamente mergulhada em $\tilde{M}_c$, isto nos diz que esta geometria generalizada contém a clássica como um subcaso discreto. Como um desdobramento disto, estes autores também provam que o conjunto das distribuições $D'(\Omega)$ é discreto em $\mathcal{G}(\Omega)$ e por isso soluções clássicas para equações diferenciais são raras. Com isto, queremos dizer que o conjunto $\mathcal{C}^\infty(\tilde{M}_c, \overline{\mathbb{R}}^p)$, o qual apresentamos na seção de topologia e cálculo, pode ser muito útil para encontrar soluções de e.d.o's. Na seção de álgebra full já destacamos as vantagens de lidar com esta álgebra no que diz respeito a dependência de mollifiers para o mergulho de D'. O que vamos fazer nesta seção é mostrar que o resultado obtido por Juriaans e Oliveira é válido também para o ambiente full e que portanto a dependência de mollifiers pode ser contornada. Também estenderemos o teorema do mergulho para variedades abstratas e isto nos fornece uma abordagem alternativa a teoria global existente, mas agora muito similar a teoria clássica, e criada sobre uma estrutura subjacente que pode ser útil para investigar fenômenos físicos, o anel $\widetilde{\mathbb{R}}_f$. Apresentaremos primeiro uma versão para a full dos conceitos necessários, e mais uma vez, lembramos que o cálculo utilizado aqui é a versão para a full do cálculo de Aragona e seus colaboradores, que foi obtido por Cortes, Garcia e Silva em [CGdS17] e que a topologia cortante para a full está publicada em [AFJ06]. Mais motivações são apresentadas na introdução, conclusão e sugestões para discussões deste trabalho.

Definição 42. *Seja M um conjunto não vazio. Um $\mathcal{G}_f$-atlas de dimensão n e classe C^∞ de M é uma família $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, onde Λ é um conjunto de índices, que satisfaz as seguintes condições:*

1. *Para todo índice $\lambda \in \Lambda$, o mapa $\varphi_\lambda : U_\lambda \to \overline{\mathbb{R}}_f^n$ é uma bijeção entre o subconjunto aberto e não vazio $U_\lambda \subset M$ e o subconjunto aberto $\varphi_\lambda(U_\lambda) \subset \overline{\mathbb{R}}_f^n$;*
2. *$M = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$;*

3. *Para cada par $\alpha, \beta \in \Lambda$ com $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, os subconjuntos $\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ e $\varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ são abertos contidos em $\overline{\mathbb{R}}_f^n$ tais que $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ é um difeomorfismo de classe C^∞.*

O par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ é chamado uma carta local (ou um sistema de coodenadas) de $\mathcal{A}$. Se $U \subset M$ e $\varphi : U \to \varphi(U)$ é um homeomorfismo, onde $\varphi(U)$ é um aberto de $\overline{\mathbb{R}}_f^n$, então o par (U, φ) é dito ser compatível com $\mathcal{A}$ se para cada par $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathcal{A}$, com $W_\lambda = U \cap U_\lambda \neq \emptyset$, tivermos que $\varphi \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(W_\lambda) \to \varphi(W_\lambda)$ é um difeomorfismo de classe C^∞, onde $\varphi_\lambda(W_\lambda)$ e $\varphi(W_\lambda)$ são abertos de $\overline{\mathbb{R}}_f^n$. Pelo Lema de Zorn, considerando $\mathcal{A}$, existe um único $\mathcal{G}$-atlas maximal $\mathcal{A}^*$ de dimensão n em M, a saber, o atlas

$$(U, \varphi) \in \mathcal{A}^*, \ \textit{se e somente se}, (U, \varphi) \in \mathcal{A} \ \textit{ou} \text{ é } \textit{compatvel com } \mathcal{A}.$$

Definição 43. *Uma variedade generalizada de Colombeau no ambiente full, ou uma $\mathcal{G}_f$-variedade é um conjunto M equipado com um $\mathcal{G}_f$-atlas. Um $\mathcal{G}_f$-atlas maximal da $\mathcal{G}_f$-variedade M é chamado uma $\mathcal{G}_f$-estrutura diferencial de M.*

Esta estrutura diferenciável induz de maneira natural uma topologia em M definindo $A \subset M$ aberto, se $\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$ é aberto em $\overline{\mathbb{R}}_f^n$ na topologia cortante, sempre que $A \cap U_\alpha \neq \emptyset$. Esta topologia torna todas as cartas simultaneamente homeomorfismos. Podemos algumas vezes, e em um contexto claro, omitir o prefixo $\mathcal{G}_f$.

Teorema 25 (Invariância da Dimensão)**.** *Seja M uma $\mathcal{G}_f$-variedade. Então a dimensão de um $\mathcal{G}_f$-atlas $\mathcal{A}$ é constante em cada componente conexa de M.*

Demonstração. Uma vez que $\overline{\mathbb{R}}_f$ é também um anel comutativo com unidade, a prova deste teorema é a mesma encontrada em [dO09], Teorema 2.4. □

Já definimos o suporte de um ponto generalizado no ambiente simplificado. Dado um ponto $p = [(p_\varepsilon)_\varepsilon] \in \overline{\mathbb{K}}^n$ é fácil ver que

$$supp(p) = \bigcap_{\eta \in I} \overline{\{p_\varepsilon \ : \ \varepsilon \in I_\eta\}}.$$

Se M é uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$ e $p \in \widetilde{M}_{c,f}$ lembre que

$$supp_f(p) = \{q \in M : \ \forall \ m \in \mathbb{N} \ \ \exists \ \varphi \in \mathcal{A}_m(n) \ \exists \ \varepsilon_l \to 0 \ em \ I \ com \ p_{\varphi_{\varepsilon_l}} \to q\}$$

e considere a seguinte definição.

Definição 44 (Suporte essencial)**.** *O suporte essencial de p é denotado e definido por*

$$ssupp_f(p) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{\{p_\varphi \ : \ \varphi \in \mathcal{A}_m\}}.$$

Claramente $supp_f(p) \subset ssupp_f(p)$. A partir de agora omitiremos o subscrito f quando nos referirmos ao suporte. Note que se M é uma variedade Riemanniana e $p \in \widetilde{M}_{cf}$, então $ssupp(p)$ é um subconjunto compacto de M e que $ssupp(\widetilde{M}_{cf}) = M$.

Afim de estudar o que chamaram de espaço de funções suaves generalizadas, Giordano, Kunzinger e Vernaeve [GKV15] desenvolvem a noção de conjuntos internos fortes como um refinamento dos conjuntos internos estudados em [OV08]. Veja também o conceito de membranas em [AFJO12]. Descreveremos agora estes conceitos para o ambiente full.

Considere a topologia cortante em $\overline{\mathbb{R}}^n_f$, que também pode ser vista como a topologia gerada pelas bolas

$$B_\rho(x) = \{y \in \overline{\mathbb{R}}^n_f : ||y - x|| < \rho\},$$

onde $\rho \in \overline{\mathbb{R}}_f$ é positivo e inversível e $||\cdot||$ é a extensão natural da norma euclidiana para $\overline{\mathbb{R}}^n_f$, isto é, se $x = [(x_\varphi)_\varphi] \in \overline{\mathbb{R}}^n_f$ então $||x|| = [(||x_\varphi||_{\mathbb{R}^n})_\varphi]$.

Definição 45. *Se $(A_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}_0(n)}$ é uma rede de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, então o conjunto interno gerado por $(A_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}_0(n)}$ é*

$$[A_\varphi] := \{x \in \overline{\mathbb{R}}^n_f : \exists\, (x_\varphi)_\varphi \text{ representante de } x,\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \exists\, \eta_\varphi \in I,\ \text{tais que } x_{\varphi_\varepsilon} \in A_{\varphi_\varepsilon},\ \forall\, \varphi \in \mathcal{A}_k(n)$$

$$\text{e } \varepsilon \in I_{\eta_\varphi}\}$$

Conjuntos internos são fechados na topologia cortante, esta e outras propriedades sobre estes conjuntos podem ser encontradas em [dSJ19].

De uma forma geral, qualquer topologia τ em $\overline{\mathbb{R}}^n_f$ fornece uma relação de equivalência $\asymp_\tau$ em $\overline{\mathbb{R}}^n_f$ como segue:

$$x \asymp_\tau y \Longleftrightarrow \forall\, U \in \tau, x \in U \text{ sse } y \in U.$$

Exemplo 8. *É fácil ver que se τ é a topologia cortante, então $x \asymp_\tau y \Leftrightarrow x = y$.*

Esta identificação nos permite definir uma relação de pertinência especial, que em sintonia com [GKV15], chamaremos de *pertinência forte em relação a τ*, como segue.

Definição 46. *Sejam $(A_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}_0(n)}$ uma rede de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e $(x_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}_0(n)}$ uma rede moderada de pontos de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $(x_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}_0(n)}$ pertence τ-fortemente a $(A_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}_0(n)}$, e escrevemos $x_\varphi \in_\tau A_\varphi$, se*

(i) existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $x_{\varphi_\varepsilon} \in A_{\varphi_\varepsilon}$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{A}_k(n)$ e ε suficientemente pequeno;

(ii) e se $[(y_\varphi)_\varphi] \asymp_\tau [(x_\varphi)_\varphi]$, existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq k$, tal que $y_{\varphi_\varepsilon} \in A_{\varphi_\varepsilon}$ também, $\forall\, \varphi \in \mathcal{A}_p(n)$ e ε suficientemente pequeno.

Podemos agora apresentar a definição de conjunto interno forte no ambiente full.

Definição 47 (Conjuntos Internos Fortes, Full)**.** *Sejam $(A_\varphi)_{\varphi\in\mathcal{A}_0(n)}$ uma rede de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e τ uma topologia de $\overline{\mathbb{R}}^n_f$. Então o conjunto interno forte em relação a τ (τ-interno forte) gerado por $(A_\varphi)_{\varphi\in\mathcal{A}_0(n)}$ é denotado e definido por:*

$$\langle A_\varphi\rangle_\tau := \{[(x_\varphi)_\varphi] \in \overline{\mathbb{R}}^n_f : x_\varphi \in_\tau A_\varphi\}.$$

Ainda em sintonia com [GKV15], se τ for a topologia cortante, omitiremos "τ" na notação $\langle A_\varphi\rangle_\tau$ e chamaremos apenas conjunto interno forte, sem nos referir a topologia, e também substituiremos a notação $\in_\tau$ por $\in_\varphi$. Note também que $\langle A_\varphi\rangle$ é fechado para as classes, diferentemente de $[A_\varphi]$.

Exemplo 9. *É direto verificar que:*

1. $\overline{\mathbb{R}}_f = \langle(-e^{1/i(\varphi)}, e^{1/i(\varphi)})_{\varphi\in\mathcal{A}_0}\rangle$;
2. $\langle A_\varphi\rangle \cap \langle B_\varphi\rangle = \langle A_\varphi \cap B_\varphi\rangle$.

Teorema 26. *Sejam $(A_\varphi)_{\varphi\in\mathcal{A}_0(n)}$ uma rede de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e $(x_\varphi)_{\varphi\in\mathcal{A}_0(n)}$ uma rede moderada de pontos de $\mathbb{R}^n$. Então*

$$x_\varphi \in_\varphi A_\varphi \Longleftrightarrow \exists\ r > 0 \text{ e } p \in \mathbb{N} \text{ tais que } d(x_{\varphi_\varepsilon}, A^c_{\varphi_\varepsilon}) > \alpha^\bullet_r(\varphi_\varepsilon),\ \forall\ \varphi \in \mathcal{A}_p(n)$$

e ε suficientemente pequeno, isto é, $x_\varphi \in_\varphi A_\varphi \Longleftrightarrow [(d(x_\varphi, A^c_\varphi))_\varphi]$ é inversível em $\overline{\mathbb{R}}_f$.

Demonstração. Considere $x_\varphi \in_\varphi A_\varphi$ e suponha que $\forall\ p \in \mathbb{N}\ \exists\ \varphi \in \mathcal{A}_p(n)$ e $\varepsilon_k \to 0$ tal que

$$d(x_{\varphi_{\varepsilon_k}}, A^c_{\varphi_{\varepsilon_k}}) \le i(\varphi)^k \varepsilon_k^k,\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Então, podemos escolher para cada $k \in \mathbb{N}$, um $y_k \in A^c_{\varphi_{\varepsilon_k}}$, tal que

$$||y_k - x_{\varphi_{\varepsilon_k}}|| < 2i(\varphi)^k \varepsilon_k^k.$$

Agora, escolha $(y_\varphi)_\varphi$ equivalente a $(x_\varphi)_\varphi$, de modo que para tais $\varphi's$ que supomos existir, tenhamos

$$y_{\varphi_{\varepsilon_k}} = y_k,\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Assim, $y_{\varphi_{\varepsilon_k}} \notin A_{\varphi_{\varepsilon_k}}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$, uma contradição. Por outro lado, se vale a hipótese da implicação contrária, então $x_{\varphi_\varepsilon} \in A_{\varphi_\varepsilon}$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{A}_p(n)$ e ε suficientemente pequeno. Além disso, se $(y_\varphi)_\varphi$ é equivalente a $(x_\varphi)_\varphi$, então $d(y_{\varphi_\varepsilon}, A^c_{\varphi_\varepsilon}) > \frac{1}{2}\alpha^\bullet_r(\varphi_\varepsilon)$ e portanto,

$$y_{\varphi_\varepsilon} \in A_{\varphi_\varepsilon},\ \forall\ \varphi \in \mathcal{A}_p(n) \text{ e } \varepsilon\ suficientemente\ pequeno.$$

Isto finaliza a prova. □

Corolário 6. *$\langle A_\varphi\rangle$ é aberto na topologia cortante.*

Sejam M uma subvariedade conexa de dimensão n em $\mathbb{R}^N$ e $\{(U_\alpha, \phi_\alpha), \alpha \in \Lambda\}$ um atlas de M. Suponha que $\forall\ \alpha \in \Lambda$, $\phi_\alpha(U_\alpha) = \Omega_0 = B_r(0)$, para algum $r > 0$. Considere $\tilde{M}_{c,f} \subset \tilde{\mathbb{R}}^N_{c,f} \subset \overline{\mathbb{R}}^N_f$ o conjunto dos pontos compactamente suportados definido por M. Agora defina, $\tilde{\Lambda} := \{\lambda : \mathcal{A}_0(N) \to \Lambda\}$ o conjunto de todas as funções de $\mathcal{A}_0(N)$ para Λ, e note que cada $\lambda \in \tilde{\Lambda}$ está associado a uma rede $(\lambda_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}_0(N)}$ de elementos de Λ, onde $\lambda_\varphi = \lambda(\varphi)$. Para $\lambda \in \tilde{\Lambda}$, defina $U_\lambda := \langle U_{\lambda_\varphi} \rangle \subset \tilde{\mathbb{R}}^N_{c,f}$ e $\phi_\lambda := (\phi_{\lambda_\varphi})_\varphi$ a função

$$\begin{aligned} \phi_\lambda : U_\lambda &\longrightarrow \langle \Omega_0 \rangle \subset \tilde{\mathbb{R}}^n_{c,f} \\ [(p_\varphi)_\varphi] &\longmapsto [(\phi_{\lambda_\varphi}(p_\varphi))_\varphi]. \end{aligned}$$

Neste ponto, é importante lembrar que os índices $\varphi' s$ devem ser tomados onde fizer sentido considerá-los, isto é, devem ser considerados os índices φ_ε com $\varphi \in \mathcal{A}_p(N)$ para algum natural p e ε suficientemente pequeno.

Com a configuração acima, afirmamos agora o principal resultado desta seção.

Teorema 27. *Suponha que para cada $\alpha \in \Lambda$, o mapa ϕ_α é bi-Lipschitz. Então $\widetilde{M}_{c,f}$ é uma $\mathcal{G}_f$-variedade de $\overline{\mathbb{R}}^N_f$ de dimensão n com a topologia induzida.*

Demonstração. Tome arbitrariamente $p = [(p_\varphi)_\varphi] \in \tilde{M}_{c,f}$. Uma vez que $ssupp(p)$ é um subconjunto compacto de M, existe um subconjunto finito I_0 de índices $\alpha' s$ em Λ tal que

$$ssupp(p) \subset \bigcup_{\alpha \in I_0} U_\alpha.$$

Seja δ o número de Lebesgue relativo a esta cobertura. Agora escolha um número finito de pontos $q_i \in ssupp(p)$ tais que

$$ssupp(p) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq l} B_{\delta_1}(q_i),$$

onde $\delta_1 < \delta/4$. Iniciando com q_1, defina $\lambda \in \tilde{\Lambda}$ por $\lambda_\varphi := \alpha_{q_1}$ onde α_{q_1} é escolhido de forma que $B_{\delta_1}(q_1) \subset U_{\alpha_{q_1}}$ e $p_\varphi \in B_{\delta_1}(q_1)$. Para λ_φ ainda não definido, continue esse processo definindo $\lambda_\varphi := \alpha_{q_2}$ onde α_{q_2} é escolhido de forma que $B_{\delta_1}(q_2) \subset U_{\alpha_{q_2}}$ e $p_\varphi \in B_{\delta_1}(q_2)$ até encerrá-lo ao definir $\lambda_\varphi := \alpha_{q_l}$. No fim deste processo, λ estará bem definido. De fato, se não fosse assim, existiria uma sequência (p_{φ_n}) convergindo para algum ponto q do suporte de p tal que para todo n suficientemente grande tem-se $p_{\varphi_n} \notin B_{\delta_1}(q_i)$ para nenhum i, $1 \leq i \leq l$, uma contradição já que tais bolas cobrem o suporte de p. Assim, λ é bem definido e tem imagem finita. Além disso, $p \in U_\lambda$. Para ver isto, precisamos mostrar que $p_\varphi \in_\varphi U_{\lambda_\varphi}$, mas isto segue direto do Teorema 26 e da definição de λ, já que pela definição de λ temos $p_\varphi \in B_{\delta_1}(q_i) \subset U_{\alpha_{q_i}}$ para algum i, e pelo Teorema 26 e escolha adequada de δ_1, temos $[(d(p_\varphi, U^c_{\lambda_\varphi}))_\varphi]$ é inversível em $\overline{\mathbb{R}}_f$. Agora vamos mostrar que a família $\left\{(U_\lambda, \phi_\lambda), \lambda \in \tilde{\Lambda}\right\}$, com λ definido como acima é um $\mathcal{G}_f$-atlas de classe C^∞ e dimensão n de $\tilde{M}_{c,f}$. É claro que ϕ_λ é bem definida para cada λ, isto é, não depende de representantes e $\phi_\lambda(p) \in \langle \Omega_0 \rangle\ \forall\ p \in U_\lambda$, isto segue diretamente da condição Lipschitz das cartas de M e de suas inversas e de λ ter imagem finita. Disto, também segue que cada ϕ_λ é uma isometria em relação as topologias cortantes de $\overline{\mathbb{R}}_f^N$ e $\overline{\mathbb{R}}_f^n$, e são portanto, bijetivas e contínuas. Pelo Corolário 6, já temos que cada U_λ e $\langle\Omega_0\rangle$ são abertos na topologia cortante. É claro que $\tilde{M}_{c,f} = \bigcup_\lambda U_\lambda$. Qualquer mudança de coordenada $\phi_\beta \circ \phi_\lambda^{-1}$ é um homeomorfismo que tem um representante formado por finitos difeomorfismos C^∞ que tomam valores em um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$, por isso $\phi_\beta \circ \phi_\lambda^{-1}$ é um difeomorfismo C^∞ do aberto $\phi_\lambda(U_{\lambda\beta})$ no aberto $\phi_\beta(U_{\lambda\beta})$. Observe que podemos escrever $\phi_\beta \circ \phi_\lambda^{-1}$ como um interleaving finito

$$\phi_\beta \circ \phi_\lambda^{-1} = \sum_i e_i f_i$$

onde cada f_i é um difeomorfismo C^∞. Por fim, para cada λ_φ existe um aberto U^{λ_φ} de $\mathbb{R}^N$ tal que $U_{\lambda_\varphi} = M \cap U^{\lambda_\varphi}$. Definindo $U^\lambda = \langle U^{\lambda_\varphi}\rangle$, segue que $U_\lambda = \tilde{M}_{c,f} \cap U^\lambda$, com U^λ aberto de $\overline{\mathbb{R}}_f^N$. Isto prova que $\tilde{M}_{c,f}$ tem a topologia induzida de $\overline{\mathbb{R}}_f^N$, e finaliza a prova. $\square$

Corolário 7. *Cada carta local $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ é uma isometria nas topologias cortantes.*

Demonstração. De fato, pelo Lema A.1 de [Ver11], para cada compacto $K \subset M$, existe $C > 0$, tal que $||p-q|| \leq dist_M(p,q) \leq C||p-q||$, $\forall\ p,q \in K$, onde $dist_M$ é a métrica Riemanniana de M. Isto implica que as cartas locais são isometrias, uma vez que da prova acima, cada uma delas é isometria em relação as topologias cortantes de $\overline{\mathbb{R}}_f^N$ e $\overline{\mathbb{R}}_f^n$. $\square$

Seja M uma variedade Riemanniana. Pelo Teorema de Nash [Nas54, Nas56], M pode ser mergulhada como uma subvariedade em algum espaço euclidiano. Aplicando o Teorema 27, definimos $M^* = \widetilde{M}_{c,f}$. Por construção, temos que $ssupp(M^*) = M$ e também que $M \subset M^* \subset \widetilde{M}$, este último contém infinitos, e M^* contém infinitesimais. Temos diretamente o seguinte corolário.

Corolário 8. *Seja M uma variedade Riemanniana. Então existe uma $\mathcal{G}_f$-variedade M^* tal que M está discretamente mergulhada em M^* e $ssupp(M^*) = M$.*

Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ e defina $\iota(f)$ em M^* tal que sua expressão nas cartas locais $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ de M^* é dada por $f \circ \phi_\lambda^{-1}([(p_\varphi)_\varphi]) = [(f \circ \varphi_{\lambda(\varphi)}^{-1}(p_\varphi))_\varphi]$. Uma vez que f é diferenciável, as expressões locais $\iota(f)$ são funções diferenciáveis e por isso, como definido classicamente, segue que $\iota(f) \in \mathcal{C}^\infty(M^*, \widetilde{\mathbb{R}}_f)$. Consequentemente,

$$\iota : \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M^*, \widetilde{\mathbb{R}}_f)$$

é um monomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

Seja M uma variedade Riemanniana orientável. Vamos agora relacionar nossa construção com a construção de [GKSV02, GKSV12], onde os autores definem o espaço básico de escalares generalizados sobre M o qual denotam por $\hat{\mathcal{E}}(M)$, o subconjunto de elementos moderados é denotado por $\hat{\mathcal{E}}_m(M)$ e a álgebra de funções generalizadas sobre M é denotada por

$\hat{\mathcal{G}}(M)$. Como em nosso caso, isto é feito também no ambiente full. Nosso próximo corolário extende o teorema do mergulho (veja capítulo anterior), relaciona ambas as construções e segue do que acabamos de ver e de alguns resultados sobre $\hat{\mathcal{E}}_m(M)$.

Corolário 9 (Teorema do Mergulho para Variedades)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana orientável n-dimensional. Existe uma $\mathcal{G}_f$-variedade n-dimensional M^* e um monomorfismo de álgebras*

$$\kappa : \hat{\mathcal{G}}(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M^*, \widetilde{\mathbb{R}}_f)$$

que comuta com a derivação. Além disso, ssupp$(M^*) = M$ e equações cujos dados tem singularidades ou não linearidades definidas em M são naturalmente extendidas para equações em M^* onde esses dados se tornam funções $\mathcal{C}^\infty$.

A restrição de κ a $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ é ι. Alguns resultados clássicos podem ser prontamente estendidos, por exemplo, uma aplicação diferenciável $g : M \longrightarrow N$ entre variedades induz um homomorfismo de álgebras $\Phi_g : \mathcal{C}^\infty(N^*, \widetilde{\mathbb{R}}_f) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M^*, \widetilde{\mathbb{R}}_f)$. Outro ponto em nossa abordagem é que as topologias das álgebras e das $\mathcal{G}_f$-variedades envolvidas têm os mesmos números reais subjacentes, ou seja, $\widetilde{\mathbb{R}}_f$. No entanto, observe que em nossa abordagem podemos incorporar infinitesimais no modelo, mas não podemos incorporar infinitos, pois eles vivem em $\widetilde{M}$, que não é uma $\mathcal{G}_f$-variedade. Deve ser possível definir $\widetilde{\mathbb{R}}^n$-variedades e tentar construir um ambiente que contenha infinitos e infinitesimais.

Ações parciais em $\overline{\mathbb{R}}$

Considere uma álgebra $\mathcal{A}$ e isomorfismos entre ideais de $\mathcal{A}$, os quais chamaremos de *automorfismos parciais*. Sem uso do rigor matemático, uma ação parcial de um grupo G em $\mathcal{A}$ é uma coleção de automorfismos parciais de $\mathcal{A}$ indexada pelos elementos de G tal que a composição, onde faz sentido, é compatível com a operação de G. Podemos pensar então, que uma ação parcial é uma extensão natural do conceito de ação global. A noção de ação parcial surge primeiro com Exel em [Exe94] no contexto de C^*-álgebras, desde então foram publicados excelentes artigos, que levaram este conceito para ambientes mais gerais. Na verdade, como veremos na definição, a idéia de ação parcial está perfeitamente estruturada para conjuntos arbitrários, onde consideramos bijeções e subconjuntos quaisquer em vez de isomorfismos e ideais, o contexto das álgebras está destacado aqui pois é neste ambiente que apresentaremos nosso primeiro exemplo, veja [DE05]. Também apresentaremos um exemplo de ação parcial no ambiente topológico, isto é, considerando homeomorfismos e subconjuntos abertos de um espaço topológico, consulte [Aba03]. Para os menos teóricos, há também uma interessante aplicação computacional da teoria de ações parciais em [Bir04]. Um panorama mais detalhado do desenvolvimento desta teoria e que nos convence de que a mesma é uma potente ferramenta matemática pode ser encontrado em [M.11] e em [Bat17]. Neste capítulo, nosso objetivo é apresentar exemplos, arquitetados de modo que se possa extrair muitos outros, de ações parciais de grupos na álgebra (e espaço topológico) dos números generalizados $\overline{\mathbb{R}}$, sendo este um ponto de partida do estudo das ações parciais no ambiente dos números, módulos e funções generalizadas. Podemos facilmente obter uma ação parcial a partir de uma ação global, por restrições dos automorfismos. O sentido contrário, isto é, estabelecer se uma dada ação parcial é a restrição de alguma ação global e se esta última é única é chamado *globalização*. No contexto das álgebras, Dokuchaev e Exel [DE05], caracterizam completamente o problema da globalização e usamos diretamente este resultado para apresentar também a globalização de um exemplo que apresentamos. Começaremos exibindo um subgrupo do grupo dos automorfismos de $\overline{\mathbb{R}}$ com a operação de composição, em seguida, para a conveniência do leitor e por serem fundamentais aqui, apresentamos definições e resultados das referências citadas, sem contudo desencorajar a leitura desses artigos que apresentam esses resultados em um cenário muito mais rico de informações. E finalmente, damos o exemplo e sua globalização. Para ações parciais contínuas, onde a topologia cortante de $\overline{\mathbb{R}}$ é o principal ingrediente, também começamos com alguns resultados publicados em [AJ01], e por fim um exemplo.

Seja $\rho \in B_1(0) \cap \overline{\mathbb{R}}_+$. A composição $x \circ \rho \in \overline{\mathbb{R}}$, $\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}}$. Assim, o mapa

$$\begin{aligned} \psi_\rho : \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\longrightarrow \psi_\rho(x) = x \circ \rho \end{aligned}$$

está bem definido e é ainda um homomorfismo de $\overline{\mathbb{R}}$. De fato, se $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ então $\psi_\rho(x+y) = (x+y)\circ\rho = x\circ\rho + y\circ\rho = \psi_\rho(x) + \psi_\rho(y)$ e $\psi_\rho(xy) = xy\circ\rho = (x\circ\rho)(y\circ\rho) = \psi_\rho(x)\psi_\rho(y)$. E também $\psi_\rho(1) = 1\circ\rho = 1$, onde 1 é a unidade de $\overline{\mathbb{R}}$. Note que a composição é bem definida apenas pelo lado direito.

Proposição 7. *Se ρ é como acima e existe $\delta \in B_1(0) \subset \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\delta\circ\rho = \rho\circ\delta = \alpha$, então $\psi_\rho \in Aut(\overline{\mathbb{R}})$.*

Demonstração. Só precisamos mostrar que ψ_ρ é bijeção. De fato, para qualquer $x \in \overline{\mathbb{R}}$, temos

$$\psi_\rho \circ \psi_\delta(x) = \psi_\rho(x\circ\delta) = x\circ\delta\circ\rho = x\circ\alpha = \psi_\alpha(x) = x.$$

Analogamente, $\psi_\delta \circ \psi_\rho(x) = \psi_\alpha(x) = x$. Logo, ψ_δ é a inversa de ψ_ρ e portanto ψ_ρ é bijeção. □

Note que tais automorfismos formam um subgrupo do grupo de automorfismos de $\overline{\mathbb{R}}$, o qual vamos denotar por A_B. E note ainda que se $H = \{\rho \in B_1(0) \cap \overline{\mathbb{R}}_+ : \exists\, \delta \in B_1(0)\ com\ \delta\circ\rho = \rho\circ\delta = \alpha\}$, então $(H, \circ)$ é grupo. De fato, α é a identidade de H uma vez que $||\alpha|| = D(\alpha, 0) = exp(-V(\alpha)) = exp(-1) < 1$ e por isso $\alpha \in B_1(0)$, a existência do elemento inverso é direta da definição de H, a associatividade é também direta, e por fim, se $\rho_1, \rho_2 \in H$ tem inversos $\delta_1, \delta_2 \in H$, então $(\rho_1\circ\rho_2)\circ(\delta_2\circ\delta_1) = \rho_1\circ\alpha\circ\delta_1 = \alpha$, analogamente $(\delta_2\circ\delta_1)\circ(\rho_1\circ\rho_2) = \alpha$. Isto prova que H é fechado para a composição.

Se $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tem representantes $(a_\varepsilon)_\varepsilon$ e $(b_\varepsilon)_\varepsilon$ defina $a \vee b := [(max(a_\varepsilon, b_\varepsilon))_\varepsilon]$ e $a \wedge b := [(min(a_\varepsilon, b_\varepsilon))_\varepsilon]$. O seguinte resultado será útil, veja Vernaeve [Ver10], Lema 4.1.

Proposição 8. *Sejam $a, b \in \overline{\mathbb{K}}$. Então*

1. $a\overline{\mathbb{K}} + b\overline{\mathbb{K}} = (|a| \vee |b|)\overline{\mathbb{K}} = (|a| + |b|)\overline{\mathbb{K}}$;
2. $a\overline{\mathbb{K}} \cap b\overline{\mathbb{K}} = (|a| \wedge |b|)\overline{\mathbb{K}}$.

O item 1 nos diz que todo ideal finitamente gerado de $\overline{\mathbb{K}}$ é principal, e do item 2, tomando $a = \mathcal{X}_{S_1}$ e $b = \mathcal{X}_{S_2}$ segue que

$$\mathcal{X}_{S_1}\overline{\mathbb{K}} \cap \mathcal{X}_{S_2}\overline{\mathbb{K}} = (|\mathcal{X}_{S_1}| \wedge |\mathcal{X}_{S_2}|)\overline{\mathbb{K}} = (\mathcal{X}_{S_1} \wedge \mathcal{X}_{S_2})\overline{\mathbb{K}} = \mathcal{X}_{S_1\cap S_2}\overline{\mathbb{K}}.$$

Neste ponto, é importante lembrar também, pois usaremos livremente, que se $\rho \in H$ então $\psi_\rho(\mathcal{X}_S) = \mathcal{X}_S \circ \rho = \mathcal{X}_{\delta(S)}$, onde δ é a inversa de ρ e isso é direto das definições de ψ_ρ e de função característica.

Definição 48 (Ação parcial). *Seja G um grupo com identidade 1 e X um conjunto. Uma ação parcial α de G em X é uma coleção $\{\{\alpha_g, D_g\}, g \in G\}$ de subconjuntos $D_g \subset X$ e bijeções $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ tais que*

(i) $D_1 = X$ *e* α_1 *é a aplicação identidade de* X*;*

(ii) $D_{(gh)^{-1}} \supset \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$;

(iii) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$ *para todo* $x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$.

Note que a definição de ação parcial é, como já esperávamos, uma extensão do conceito de ação global, o item (i) se repete e se adequa aqui, o item (ii) dá sentido ao item (iii) que é o análogo à compatibilidade da composição das bijeções com a operação do grupo, note também que (ii) e (iii) dizem que a função α_{gh} é uma extensão da função $\alpha_g \circ \alpha_h$.

Observação 2. *Quando for conveniente a condição (ii) pode ser substituída pela condição $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$. De fato, é direto que esta última implica em (ii) e por outro lado, se vale (ii), temos imediatamente que $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subset D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$, pois $D_{h^{-1}}$ é imagem de α_h^{-1}. Para a inclusão contrária, substitua nesta última h por h^{-1} e g por gh, isto fornece $\alpha_{h^{-1}}^{-1}(D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}) \subset D_h \cap D_{g^{-1}}$, aplicando $\alpha_{h^{-1}}$ em ambos os lados obtemos a inclusão desejada. Também, de (iii), substituindo g por h^{-1} temos que $\alpha_{h^{-1}} = \alpha_h^{-1}$. Com esta configuração, (ii) e (iii) são agora*

(ii') $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$;

(iii') $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$ *para todo* $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$.

Para ajustar a compreensão, considere o simples exemplo:

Exemplo 10 (translação). *Considere $G = (\mathbb{Z}, +)$ e $X = \mathbb{Z}_+$. Definindo para qualquer $n \in \mathbb{N}$ os subconjuntos $X_{-n} = \mathbb{Z}_+$ e $X_n = \{m \in \mathbb{Z}_+ : m \geq n\}$ e as bijeções correspondentes $\alpha_n : X_{-n} \to X_n$ por $\alpha_n(m) = m+n$, então de uma simples e direta verificação das condições da Definição 1, temos que G age parcialmente em X por translações.*

Exemplos menos triviais podem ser encontrados em [Bat17].

A definição acima é a mais geral possível considerando os subconjuntos D_g's de X arbitrários, isto é, pedir bijeção para as aplicações α_g's é a melhor maneira de conectá-los. Se X for um espaço topológico, é natural pedir homeomorfismos para estas aplicações e tomar os subconjuntos D_g's abertos. Nesse sentido, para uma K-álgebra $\mathcal{A}$, temos a seguinte definição.

Definição 49. *Seja G um grupo com identidade 1 e $\mathcal{A}$ uma K-álgebra. Uma ação parcial α de G em $\mathcal{A}$ é uma coleção $\{\{\alpha_g, D_g\}, g \in G\}$ de ideais $D_g \subset X$ e isomorfismos de álgebras $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ tais que* *(i)* $D_1 = X$ *e* α_1 *é a aplicação identidade de* X*;*

(ii) $D_{(gh)^{-1}} \supset \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$;

(iii) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$ *para todo* $x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$.

Nosso objetivo agora é a construção dos exemplos 12 e 13. O exemplo a seguir foi construído eliminando propositalmente as dificuldades geradas pela condição (ii) na definição acima tornando-a trivial, isso acabou deixando-o pouco operacional, mas nosso propósito era apenas nos habituar com as operações para poder montar nosso kit de ferramentas algébricas necessárias, já descritas acima, e depois melhorá-lo. Nesse sentido o leitor encontrará na sequência um exemplo ensaio e em seguida, não só uma generalização deste, mas também um modelo mais funcional.

Exemplo 11. *Considere* $G = (\mathbb{Z}, +)$ *o grupo aditivo dos inteiros,* $X = \overline{\mathbb{R}}$ *e* $\psi_\rho \in Aut(\overline{\mathbb{R}})$ *onde* $\psi_\rho : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *é o automorfismo definido por* $\psi_\rho(x) = x \circ \rho$ *com* ρ *um elemento do grupo* $(H, \circ)$ *tal que* $\rho \neq \alpha$*. Agora tome* $S_0 = I$ *e uma sequência* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de subconjuntos de* $\mathcal{S}$ *disjuntos dois a dois, tais que* $\delta(S_m) \cap S_n = \emptyset\ \forall\ m, n \in \mathbb{N}$ *onde* δ *é a inversa de* ρ *e defina os ideais* $D_n := \mathcal{X}_{S_n}\overline{\mathbb{R}}$ *e* $D_{-n} := \psi_\rho(D_n)\ \forall\ n \geq 0$*. Finalmente defina a família de aplicações* $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *por*

$$x \in D_{-n} \mapsto \psi_\delta(x) \in D_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

e $\alpha_0(x) = \psi_\alpha(x)$*. Então* $\{\{D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\}$ *é uma ação parcial de* $\mathbb{Z}$ *sobre o conjunto* $\overline{\mathbb{R}}$ *dos números generalizados de Colombeau. Para ver isto, note primeiro que cada* D_n *é um ideal gerado por um idempotente. De fato, isto é direto se* $n \geq 0$ *e*

$$D_{-n} = \psi_\rho(D_n) = \psi_\rho(\mathcal{X}_{S_n}\overline{\mathbb{R}}) = \psi_\rho(\mathcal{X}_{S_n})\overline{\mathbb{R}} = \mathcal{X}_{\delta(S_n)}\overline{\mathbb{R}}.$$

Note ainda, direto da definição, que cada α_n *é isomorfismo e que estão bem definidos pois* $\psi_\delta(\mathcal{X}_{\delta(S_n)}) = \mathcal{X}_{S_n}$*. Como*

$$D_0 = \mathcal{X}_{S_0}\overline{\mathbb{R}} = \mathcal{X}_I\overline{\mathbb{R}} = 1\overline{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}}$$

e

$$\alpha_0(x) = \psi_\alpha(x) = x \circ \alpha = x$$

temos que $\alpha = id|_{\overline{\mathbb{R}}}$ *e a condição (i) da definição de ações parciais está verificada. Por último, uma vez que* $\delta(S_m) \cap S_n = \emptyset$*,* $\forall\ m, n \in \mathbb{N}$*, então*

$$0 = \mathcal{X}_{\delta(S_m)\cap S_n} = \mathcal{X}_{\delta(S_m)}\mathcal{X}_{S_n}$$

e por isso

$$D_{-m} \cap D_n = \mathcal{X}_{\delta(S_m)}\overline{\mathbb{R}} \cap \mathcal{X}_{S_n}\overline{\mathbb{R}} = \mathcal{X}_{\delta(S_m)}\mathcal{X}_{S_n}\overline{\mathbb{R}} = \mathcal{X}_{\delta(S_m)\cap S_n}\overline{\mathbb{R}} = (0).$$

Portanto, como cada α_n é isomorfismo, as condições (ii) e (iii) reescritas em nosso caso como:

(ii) $\alpha_{-n}(D_{-m} \cap D_n) \subseteq D_{-(m+n)} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$

(iii) $\alpha_m \circ \alpha_n(x) = \alpha_{m+n}(x) \quad \forall x \in \alpha_{-n}(D_{-m} \cap D_n) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z};$

são trivialmente satisfeitas.

Quanto a existência de uma sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e de uma aplicação $\delta \in B_1(0)$ tais que $\delta(S_m) \cap S_n = \emptyset \ \forall \ m, n \in \mathbb{N}$, tome $S_n = \left\{\frac{1}{z_n l} : l \in \mathbb{N}\right\}$, onde $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números algebricamente independentes sobre $\mathbb{Q}$ com $z_n \geq 1$ e defina $\delta(\epsilon) = \sqrt{\epsilon}$. Então $\delta(S_n) = \left\{\frac{1}{\sqrt{z_n}\sqrt{l}} : l \in \mathbb{N}\right\}$. Se existe algum $w \in \delta(S_m) \cap S_n$ então

$$\frac{1}{\sqrt{z_m}\sqrt{l_1}} = w = \frac{1}{z_n l_2}$$

com $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$, segue que

$$\frac{z_n^2}{z_m} = \frac{l_1}{l_2^2} \in \mathbb{Q},$$

de onde teríamos o par (z_n, z_m) como raíz do polinômio $p(x,y) = x^2 - \frac{l_1}{l_2^2} y$, uma contradição.

Do ponto de vista da condição (iii), a qual pede que o isomorfismo α_{gh} seja uma extensão de $\alpha_g \circ \alpha_h$ o exemplo acima, apesar de correto, é como já foi dito, pouco operacional, uma vez que há um único ponto no domínio de $\alpha_m \circ \alpha_n$. Note também que o grupo G influencia apenas nos domínios dos isomorfismos sendo sempre a mesma definição para cada $n \in \mathbb{N}$ ou $n \in \mathbb{Z}_-^*$. Na tentativa de dar um exemplo para grupos $(\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}, +)$ buscamos também fugir desses aspectos, e conseguimos isso assumindo uma hipótese para o número generalizado δ até mais razoável que no exemplo acima.

Exemplo 12 (Ação parcial do grupo $(\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}, +)$ sobre $\overline{\mathbb{R}}$)**.** *Considere primeiro o grupo aditivo $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$. Sejam $S_0 = I$ e $S \in \mathcal{S}$ tal que $\delta(S) \subset S$, e com o intuito de simplificar a notação, defina $e := \mathcal{X}_S$ e $e_0 := \mathcal{X}_{S_0}$. Agora, com $\rho \in B_1(0)$ e $\psi_\rho \in Aut(\overline{\mathbb{R}})$ como no exemplo anterior, defina os ideais $D_{(0,m)} = e_0\overline{\mathbb{R}}$, $\forall \ m \in \mathbb{Z}$, e os isomorfismos correspondentes $\alpha_{(0,m)} := \psi_\alpha$, e para $n \in \mathbb{N}$ defina*

$$\begin{aligned} D_{-(n,m)} &:= e\overline{\mathbb{R}} \\ D_{(n,m)} &:= \psi_{\rho^n}(e\overline{\mathbb{R}}), \quad \forall \ m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

em seguida defina os isomorfismos correspondentes

$$\begin{aligned} \alpha_{(n,m)} : D_{-(n,m)} &\longrightarrow D_{(n,m)} \\ x &\longrightarrow \psi_{\rho^n}(x). \end{aligned}$$

Note, fazendo uso da visão geométrica de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sobre o plano cartesiano, que $D_{(0,m)}$ são os ideais relativos aos pontos sobre o eixo y e que são todos iguais a $\overline{\mathbb{R}}$ e $D_{-(n,m)}$ e $D_{(n,m)}$ são os ideais relativos aos pontos dos lados esquerdo e direito respectivamente, do mesmo eixo. Perceba também que todos os ideais relativos aos pontos do lado esquerdo do eixo y são iguais a $e\overline{\mathbb{R}}$, enquanto que os ideais do lado direito desse mesmo eixo são tais que se a primeira coordenada é sempre k então o ideal correspondente é sempre igual a $\psi_{\rho^k}(e\overline{\mathbb{R}})$. Vale observar que poderíamos definir apenas os ideais $D_{-(n,m)}$, pois os ideais $D_{(n,m)}$ já surgem naturalmente como imagem dos isomorfismos $\alpha_{(n,m)}$. Note também que $D_{(n,m)} = \mathcal{X}_{\delta^n(S)}\overline{\mathbb{R}}$. Como no exemplo anterior, a condição (i) da definição de ações parciais é satisfeita. Quanto a condição (ii), note que se $n, k \in \mathbb{N}$, então $\alpha_{-(k,l)}(D_{-(n,m)} \cap D_{(k,l)}) = \psi_{\delta^k}(e\overline{\mathbb{R}} \cap \mathcal{X}_{\delta^k(S)}\overline{\mathbb{R}}) = \psi_{\delta^k}(\mathcal{X}_{S\cap\delta^k(S)}\overline{\mathbb{R}}) = \psi_{\delta^k}(\mathcal{X}_{\delta^k(S)}\overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{X}_S\overline{\mathbb{R}} = D_{-(n+k,m+l)}$. Para os casos $n \in \mathbb{Z}_-^*$ e/ou $k \in \mathbb{Z}_-^*$, basta usar a identidade $(-n, m) = -(n, -m)$. Os casos $n = 0$ e/ou $k = 0$ são trivialmente satisfeitos. E para a condição (iii), basta ver que

$$\alpha_{(n,m)} \circ \alpha_{(k,l)}(x) = \psi_{\rho^n} \circ \psi_{\rho^k}(x) = x \circ \rho^{n+k} = \psi_{\rho^{n+k}}(x) = \alpha_{(n+k,m+l)}(x),$$

$\forall\ x \in \alpha_{-(k,l)}(D_{-(n,m)} \cap D_{(k,l)})$ e $\forall\ (n, m), (k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Finalmente, note que para definir os ideais e os isomorfismos usamos apenas as primeiras coordenadas, portanto se mantermos as definições acima podemos tomar este exemplo em $(\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}, +)$.

Agora vamos utilizar o Teorema 4.5 de Dokuchaev e Exel em [DE05] para construir a ação envolvente do exemplo acima. Toda ação global determina, por restrições, uma ação parcial, no seguinte sentido: suponha que $\beta = \{\beta_g : \mathcal{B} \to \mathcal{B} : g \in G\}$ é uma ação global de um grupo G em uma álgebra $\mathcal{B}$ e $\mathcal{A}$ é um ideal de $\mathcal{B}$. Defina $D_g = \mathcal{A} \cap \beta_g(\mathcal{A})$ e os isomorfismos correspondentes α_g como a restrição de β_g para $D_{g^{-1}}$. Então $\{\{\alpha_g, D_g\}, g \in G\}$ é uma ação parcial de G em $\mathcal{A}$. De fato, os itens (i) e (iii) são diretos de β ser global e por último

(ii)

$$\begin{aligned}
\alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) &= \beta_{h^{-1}}\Big|_{\mathcal{A}\cap\beta_h(\mathcal{A})}((\mathcal{A} \cap \beta_h(\mathcal{A})) \cap (\mathcal{A} \cap \beta_{g^{-1}}(\mathcal{A}))) \\
&\subset \beta_{h^{-1}}\Big|_{\beta_h(\mathcal{A})}(\beta_h(\mathcal{A}) \cap \beta_{g^{-1}}(\mathcal{A})) \\
&\subset \mathcal{A} \cap \beta_{h^{-1}g^{-1}}(\mathcal{A}) \\
&= D_{(gh)^{-1}}.
\end{aligned}$$

Neste caso dizemos que α é uma *restrição* de β para $\mathcal{A}$. Agora, seja $\mathcal{B}_1$ a subálgebra de $\mathcal{B}$ gerada por $\cup_{g\in G}\beta_g(\mathcal{A})$. É claro que podemos ter $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}_1$ e que α pode ser obtida como restrição de uma ação de G em $\mathcal{B}_1$. Nesse sentido, dizemos que a restrição acima é *admissível* se $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$. Podemos agora tratar do conceito de equivalência entre ações parciais.

Definição 50. *Uma ação parcial $\alpha = \{\{\alpha_g, D_g\}, g \in G\}$ de um grupo G em uma álgebra*

$\mathcal{A}$ é equivalente a uma ação parcial $\alpha' = \{\{\alpha'_g, D'_g\}, g \in G\}$ de G em uma álgebra $\mathcal{A}'$ se existe um isomorfismo de álgebras $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ tal que para cada $g \in G$ valem as seguintes condições:

(i) $\varphi(D_g) = D'_g$;

(ii) $\alpha'_g \circ \varphi(x) = \varphi \circ \alpha_g(x) \quad \forall x \in D_{g^{-1}}$.

Agora vamos definir ação envolvente para uma ação parcial fixada.

Definição 51. *Uma ação global β de um grupo G em uma álgebra $\mathcal{B}$ é uma ação envolvente para a ação parcial α de G em uma álgebra $\mathcal{A}$ se α é equivalente a uma restrição admissível de β para um ideal de $\mathcal{B}$, isto é, se existe um isomorfismo de álgebras φ de $\mathcal{A}$ para um ideal de $\mathcal{B}$ tal que para cada $g \in G$ valem:*

(i') $\varphi(D_g) = \varphi(\mathcal{A}) \cap \beta_g(\varphi(\mathcal{A}))$;

(ii') $\beta_g \circ \varphi(x) = \varphi \circ \alpha_g(x) \quad \forall x \in D_{g^{-1}}$;

(iii') $\mathcal{B}$ *é gerada por* $\cup_{g\in G}\beta_g(\varphi(\mathcal{A}))$.

Note que (i') e (ii') são as condicões equivalentes a (i) e (ii) da definição anterior e que (iii') refere-se a restrição ser admissível.

Exemplo 13 (Ação envolvente para a ação parcial construída no exemplo 12)**.** *Considere $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}^2, \overline{\mathbb{R}})$ a álgebra de todas as funções de $\mathbb{Z}^2$ em $\overline{\mathbb{R}}$. Por conveniência, para $f \in \mathcal{F}$ e $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ vamos denotar o valor pontual $f((n,m))$ por $f|_{(n,m)}$. Como ação global, defina para cada $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$*

$$\begin{aligned}\beta_{(n,m)} : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F}\\ f &\longrightarrow \beta_{(n,m)}(f)\Big|_{(k,l)} := f(-(n,m) + (k,l)).\end{aligned}$$

Segue do Teorema 4.5 (na verdade de sua demonstração) de Dokuchaev e Exel [DE05] que $f \mapsto \beta_{(n,m)}(f)$ define um automorfismo $\beta_{(n,m)}$ de $\mathcal{F}$ e por isso $\beta = \{\beta_{(n,m)} : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ é uma ação global de $\mathbb{Z}^2$ em $\mathcal{F}$. Para qualquer $a \in \overline{\mathbb{R}}$ temos $a\mathcal{X}_{\delta^n(S)} \in D_{(n,m)}$, isto torna bem definida a aplicação

$$\begin{aligned}\varphi : \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \mathcal{F}\\ a &\longrightarrow \varphi(a)\Big|_{(n,m)} := \alpha_{-(n,m)}(a\mathcal{X}_{\delta^n(S)}),\end{aligned}$$

que também é um monomorfismo de $\overline{\mathbb{R}}$ em $\mathcal{F}$. Por fim, tome $\mathcal{B}$ a subálgebra de $\mathcal{F}$ gerada por $\bigcup_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \beta_{(n,m)}(\varphi(\overline{\mathbb{R}}))$ então, também da prova do Teorema 4.5, a restrição $\beta\Big|_{\mathcal{B}}$ é uma ação envolvente para α a qual é única a menos de equivalências.

Vamos agora apresentar exemplos de ações parciais contínuas, i.e., exemplos de ações parciais no ambiente topológico. Nesta categoria, Abadie [Aba03] dá a seguinte definição para as ações:

Definição 52. *Uma ação parcial de um grupo topológico G em um espaço topológico X é um par $\alpha = (\{X_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ tal que*

1. *X_t é aberto em X e $\alpha_t : X_{t^{-1}} \to X_t$ é homeomorfismo, $\forall\ t \in G$;*
2. *o conjunto $\Gamma_\alpha = \{(t, x) \in G \times X :\ t \in G,\ x \in X_{t^{-1}}\}$ é aberto em $G \times X$ e a função, também chamada α, $\alpha : \Gamma_\alpha \to X$ definida por $(t, x) \mapsto \alpha_t(x)$ é contínua;*
3. *α é uma ação parcial, i.e., $X_e = X$ e α_{st} é uma extensão de $\alpha_s \circ \alpha_t$, $\forall\ s, t \in G$.*

Como esclarecemos na observação 2, a condição 3 acima é equivalente a

(i) $\alpha_e = id_X$ e $\alpha_{t^{-1}} = \alpha_t^{-1}$, $\forall\ t \in G$;

(ii) $\alpha_t(X_{t^{-1}} \cap X_s) = X_t \cap X_{ts}$, $\forall\ s, t \in G$;

(iii) $\alpha_s \circ \alpha_t : X_{t^{-1}} \cap X_{t^{-1}s^{-1}} \to X_s \cap X_{st}$ é uma bijeção e $\alpha_s \circ \alpha_t(x) = \alpha_{st}(x)$ para todo $x \in X_{t^{-1}} \cap X_{t^{-1}s^{-1}}$.

E a novidade fica por conta da condição 2, necessária se quisermos falar em globalização, ou ação envolvente, veja o Teorema 2.5 de Abadie [Aba03], o qual esclarece a existência e unicidade de uma ação envolvente para qualquer ação parcial contínua.

Antes de darmos exemplos de ações parciais contínuas em $\overline{\mathbb{R}}$ faremos algum esclarecimento sobre homeomorfismos considerando a topologia cortante. Para $z \in \overline{\mathbb{K}}$ fixado, as aplicações T_z e h_z, de $\overline{\mathbb{K}}$ para $\overline{\mathbb{K}}$, definidas respectivamente por $T_z(x) := x + z$ e $h_z(x) := xz$ são contínuas. Mais do que isso, a translação T_z é na verdade um homeomorfismo, e se $z \in inv(\overline{\mathbb{K}})$, então h_z também é, e suas inversas são respectivamente T_{-z} e $h_{z^{-1}}$. E ainda, se $a \in \overline{\mathbb{K}}$, $R, r > 0$ e α_r, β_r são os números generalizados cujos representantes são respectivamente $(\varepsilon^r)_\varepsilon$ e $(\varepsilon^{\log r})_\varepsilon$, é direto ver que $T_z(B_R(a)) = B_R(T_z(a))$, $T_z(S_R(a)) = S_R(T_z(a))$, $h_{\alpha_r}(S_R) = S_{Re^{-r}}$ e $h_{\beta_r}(S_R) = S_{Rr}$. Neste ponto, vamos lembrar que o conjunto $\{\beta_r : r \in \mathbb{R}_+^*\}$ é um subgrupo multiplicativo de $\overline{\mathbb{R}}$ com unidade β_1 e inversos $\beta_{t^{-1}}$ para cada β_t. Afim de mostrar que o grupo de homeomorfismos de $\overline{\mathbb{K}}$ nele mesmo é não enumerável, Aragona et.al. [AJ01], provam o próximo teorema, o qual usaremos para generalizar nosso primeiro exemplo de ação parcial contínua, ou pra ser mais preciso, o usaremos para apontar a direção de inúmeros outros exemplos análogos. Antes de enunciá-lo, considere a seguinte notação: seja H o grupo de permutações de $\mathbb{R}_+^*$ e fixe $\sigma \in H$, então os mapas j_σ e $\tilde{\sigma}$ de $\mathbb{R}_+^*$ para $\mathbb{R}_+^*$, são definidos por $j_\sigma(r) := r\sigma(r)$ e $\tilde{\sigma}(r) := \sigma(r)^{-1}$, enquanto que o mapa φ_σ de $\overline{\mathbb{K}}$ para $\overline{\mathbb{K}}$ é definido por $\varphi_\sigma(0) := 0$ e $\varphi_\sigma(x) := \beta_{\sigma(r)}x$ se $x \in S_r$.

Teorema 28. *Sejam σ, j_σ e φ_σ como acima. Valem:*

(a) *se* φ_σ *é bijetiva então* $\varphi_\sigma(S_r) = S_{j_\sigma(r)}$, $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$;

(b) φ_σ *é bijetiva se, e somente se,* j_σ *é bijetiva;*

(c) *são equivalentes:*

(i) φ_σ *é um homeomorfismo;*

(ii) j_σ *é bijetiva e* $\lim\limits_{r\to 0} j_\sigma(r) = 0 = \lim\limits_{r\to 0} j_\sigma^{-1}(r)$.

.

Demonstração. Veja [AJ01], Teorema 3.4. □

Em caso de bijeção, as inversas de φ_σ e j_σ são respectivamente φ_ω e j_ω, onde $\omega := \tilde{\sigma} \circ j_\sigma$. Vamos finalmente ao nosso primeiro exemplo para o ambiente topológico.

Exemplo 14. *Considere* $X = \overline{\mathbb{R}}$ *munido da topologia cortante e* $G = (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ *munido da topologia discreta. Defina* $X_t = S_t$, *para* $t \neq 1$, $X_1 = \overline{\mathbb{R}}$ *e as aplicações* α_t *(não confundir com os infinitesimais standards) por*

$$\begin{aligned} \alpha_t : X_{t^{-1}} &\longrightarrow X_t \\ x &\longrightarrow \alpha_t(x) := h_{\beta_{t^2}}(x). \end{aligned}$$

Então $(\{X_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ *é uma ação parcial contínua de* G *em* $\overline{\mathbb{R}}$. *De fato, cada esfera* S_t *é aberta em* $\overline{\mathbb{R}}$ *na topologia cortante e se* $t = 1$ *então* $\alpha_1(x) = h_{\beta_1}(x) = \beta_1 x = x$ *e por isso* $\alpha_1 = id\Big|_{\overline{\mathbb{R}}}$. *Se* $t \neq 1$, *temos* $\alpha_t(S_{t^{-1}}) = h_{\beta_{t^2}}(S_{t^{-1}}) = S_{t^2 t^{-1}} = S_t$. *Disso segue que cada função* α_t *é um homeomorfismo bem definido, o que verifica 1. Além disso, se* $t \neq 1$ *e* $x \in S_t$ *então*

$$\alpha_t^{-1}(x) = h_{\beta_{t^2}}^{-1}(x) = h_{\beta_{t^2}^{-1}}(x) = h_{\beta_{t^{-2}}}(x) = h_{\beta_{(t^{-1})^2}}(x) = \alpha_{t^{-1}}(x),$$

e isto nos dá $\alpha_{t^{-1}} = \alpha_t^{-1}$, $\forall\ t \in G$. *Note que para* $t = 1$ *isto é óbvio. Agora, vamos verificar que* $\alpha_t(X_{t^{-1}} \cap X_s) = X_t \cap X_{ts}$, $\forall\ s, t \in G$. *Primeiro suponha que* $X_t \cap X_{ts} \neq \emptyset$. *Neste caso,*

$$X_t \cap X_{ts} \neq \emptyset \text{ se, e somente se, } s = 1 \text{ ou } t = 1 \text{ ou } ts = 1,$$

se $s = 1$, *então*

$$\alpha_t(X_{t^{-1}} \cap X_1) = \alpha_t(X_{t^{-1}}) = X_t = X_t \cap X_{t\cdot 1}.$$

Analogamente, se $t = 1$

$$\alpha_1(X_1 \cap X_s) = \alpha_1(X_s) = X_s = X_1 \cap X_{s\cdot 1}.$$

Já se $ts = 1$, *i.e.,* $s = t^{-1}$, *então*

$$\alpha_t(X_{t^{-1}} \cap X_s) = \alpha_t(X_{t^{-1}}) = X_t = X_t \cap X_1 = X_t \cap X_{t\cdot t^{-1}} = X_t \cap X_{ts}.$$

Se por outro lado $X_t \cap X_{ts} = \emptyset$*, então* $s, t \neq 1$ *e* $s \neq t^{-1}$*, daí* $X_{t^{-1}} \cap X_s = \emptyset$ *e portanto,*

$$\alpha_t(X_{t^{-1}} \cap X_s) = \emptyset = X_t \cap X_{ts}.$$

Isto mostra que as composições $\alpha_s \circ \alpha_t$ *só fazem sentido se uma delas é a identidade (*$s = 1$ *ou* $t = 1$*) ou se* s, t *são inversos mutuamente. Nesse sentido, as composições* $\alpha_s \circ \alpha_t$ *são claramente bijeções bem definidas como em (iii) acima. E ainda, se* $s = 1$ *temos* $\alpha_1 \circ \alpha_t(x) = \alpha_t(x) = \alpha_{1\cdot t}(x)$ *e o mesmo vale se* $t = 1$*. Para* $s = t^{-1}$*, temos*

$$\alpha_s \circ \alpha_t(x) = \alpha_{t^{-1}} \circ \alpha_t(x) = \alpha_t^{-1} \circ \alpha_t(x) = id(x) = \alpha_1(x) = \alpha_{ss^{-1}}(x) = \alpha_{st}(x).$$

Isto verifica a condição 3. Finalmente, o conjunto $\Gamma_\alpha = \{(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \overline{\mathbb{R}} : \ t \in \mathbb{R}_+^*, \ x \in S_{t^{-1}}\}$ *é aberto em* $\mathbb{R}_+^* \times \overline{\mathbb{R}}$ *(na topologia produto) pois é união de abertos de* $\mathbb{R}_+^* \times \overline{\mathbb{R}}$*, a saber*

$$\Gamma_\alpha = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+^*} \{t\} \times X_{t^{-1}}.$$

Para ver que $\alpha : \Gamma_\alpha \to \overline{\mathbb{R}}$*,* $(t, x) \longmapsto \alpha_t(x) = h_{\beta_{t^2}}(x)$ *é contínua em um ponto* (t, x) *qualquer em* Γ_α*, devemos mostrar que para qualquer* $r > 0$ *existe uma vizinhança* V *de* (t, x) *em* Γ_α *tal que* $\alpha(V) \subset B_r(\alpha(t, x))$*. Seja* $s < min\{\frac{r}{t^2}, t^{-1}\}$ *e tome* $y \in B_s(x)$*. Então*

$$\begin{aligned}
\| \alpha(t, y) - \alpha(t, x) \| &= \| \alpha_t(y) - \alpha_t(x) \| \\
&= \| h_{\beta_{t^2}}(y) - h_{\beta_{t^2}}(x) \| \\
&= \| \beta_{t^2} y - \beta_{t^2} x \| \\
&= \| \beta_{t^2}(y - x) \| \\
&= \ t^2 \| y - x \| \\
&< \ t^2 s \\
&< \ t^2 \frac{r}{t^2} \\
&= \ r.
\end{aligned}$$

Portanto, $\alpha(t, y) \in B_r(\alpha(t, x))$*,* $\forall \ y \in B_s(x)$*. Tomando* $V = \{t\} \times B_s(x)$ *segue que* $\alpha(V) \subset B_r(\alpha(t, x))$*. Isto prova que* α *é contínua em* (t, x)*, e pela arbitrariedade da escolha de* (t, x)*, temos que* α *é contínua.*

Podemos encontrar mais exemplos como este definindo os homeomorfismos α_t's usando as aplicações φ_σ's como no Teorema 28. Por exemplo, se para cada $t \in \mathbb{R}_+^*$ escolhermos uma permutação $\sigma_t(x)$ de $\mathbb{R}_+^*$ fixando $\sigma_t(t^{-1}) = t^2$ e $\sigma_t(t) = t^{-2}$, que $j_{\sigma_t}(x)$ seja bijetiva e $\lim\limits_{x \to 0} j_{\sigma_t}(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0} j_{\sigma_t}^{-1}(x)$, e definirmos $\alpha_t(x) := \varphi_{\sigma_t}(x)$ se $t \neq 1$ e $\alpha_1 = id\Big|_{\overline{\mathbb{R}}}$, então produziremos exatamente o mesmo exemplo anterior. Para se convencer disto note alguns pontos convenientes:

- $\alpha_t(x) = \varphi_{\sigma_t}(x) = \beta_{\sigma_t(t^{-1})}x = \beta_{t^2}x = h_{\beta_{t^2}}(x)$ para $t \neq 1$;
- $\alpha_t(S_{t^{-1}}) = \varphi_{\sigma_t}(S_{t^{-1}}) = S_{j_{\sigma_t}(t^{-1})} = S_{t^{-1}\sigma_t(t^{-1})} = S_{t^{-1}t^2} = S_t$; para $t \neq 1$;
- $\alpha_t^{-1}(x) = \varphi_{\sigma_t}^{-1}(x) = \varphi_\omega(x) = \beta_{\omega(t)}x = \beta_{(\sigma_t(t\sigma_t(t)))^{-1}}x = \beta_{(\sigma_t(t^{-1}))^{-1}}x = \beta_{t^{-2}}x = \beta_{\sigma_{t^{-1}}(t)}x = \varphi_{\sigma_{t^{-1}}}(x) = \alpha_{t^{-1}}(x)$ para $t \neq 1$;

É claro que as permutações σ_t's deverão ser escolhidas de forma conveniente. Por exemplo, se fixarmos uma permutação σ de $\mathbb{R}_+^*$ e tomássemos para cada $t \neq 1$ $X_t = S_{\sigma(t)}$, então valeria $\alpha_t(S_{\sigma(t^{-1})}) = S_{\sigma(t)}$ se, e somente se, $S_{j_{\sigma_t}(\sigma(t^{-1}))} = S_{\sigma(t)}$, que por sua vez valeria se, e somente se

$$\sigma(t^{-1})\sigma_t(\sigma(t^{-1})) = \sigma(t). \tag{28}$$

Em nosso exemplo, σ é a identidade $\sigma(t) = t$, que substituindo em 28 nos fornece $\sigma_t(t^{-1}) = t^2$ como exigimos na hipótese. Em conjunto com 28 devemos exigir das permutações α_t's que

$$\tilde{\sigma_t} \circ j_{\sigma_t}(\sigma(t)) = \sigma_{t^{-1}}(\sigma(t)), \tag{29}$$

em nosso caso, i.e., se $\sigma(t) = t$, 29 nos forneceria $\sigma_t(t) = t^{-2}$, que é nossa outra hipótese. Resta-nos agora apresentar, para mostrar que existe, uma família de permutações $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}}$ satisfazendo as condições exigidas. Basta definir para cada t

$$\sigma_t(x) = \begin{cases} x & se \quad x \neq t^{-3,5}, t^{-2,5}, t^{-2}, t^{-1,5}, t^{-1}, t^{-0,5}, t^{0,5}, t, t^{1,5}, t^2, t^{2,5}, t^{3,5} \\ t^{1,5} & se \quad x = t^{-3,5} \\ t^{-1,5} & se \quad x = t^{-2,5} \\ t^{-1} & se \quad x = t^{-2} \\ t^{-2,5} & se \quad x = t^{-1,5} \\ t^2 & se \quad x = t^{-1} \\ t^{2,5} & se \quad x = t^{-0,5} \\ t^{3,5} & se \quad x = t^{0,5} \\ t^{-2} & se \quad x = t \\ t^{-3,5} & se \quad x = t^{1,5} \\ t & se \quad x = t^2 \\ t^{-0,5} & se \quad x = t^{2,5} \\ t^{0,5} & se \quad x = t^{3,5}. \end{cases}$$

Para o caso em que a permutação σ fixada é qualquer podemos obter uma família de permutações da mesma forma, i.e., fixando pontos adequados para garantir que 28 e 29 sejam satisfeitas e para que j_{σ_t} seja bijeção, para cada t. Entendemos que a estrutura de σ seja um tanto deselegante, mas certamente há uma melhor descrição para ela.

A translação é um bom exemplo de ação parcial pois nos fornece uma visão mais geométrica do que de fato está acontecendo. Isto é um pouco menos intuitivo em $\overline{\mathbb{K}}$, veja por exemplo em [AJ01], Lema 2.2, que $B_1 \cap B_1(1) = \emptyset$, bem diferente da nossa viciante visão topológica do espaço euclidiano. Na verdade, peculiaridades como esta acontecem em espaços ultra-métricos, onde qualquer ponto de uma bola é seu centro e interseções de bolas ou são vazias ou iguais a uma delas. Por isso achamos que seria interessante apresentar um exemplo de ação parcial de translação no ambiente generalizado. Perceba que se no exemplo seguinte tomássemos raios maiores que 1, então não perceberíamos uma translação (em um sentido de movimentação) mesmo para $t \neq 0$. Vamos aproveitar as vericações feitas no exemplo anterior, para uma leitura mais direta.

Exemplo 15 (Translações em S_1)**.** *Sejam $G = (\mathbb{R}, +) \subset \overline{\mathbb{R}}$ com a topologia induzida de $\overline{\mathbb{R}}$ e $X = \overline{\mathbb{R}}$. Defina $X_t = B_1(t)$ se $t \neq 0$, $X_0 = \overline{\mathbb{R}}$ e para cada $t \in G$ as aplicações*

$$\begin{aligned} \alpha_t : X_{-t} &\longrightarrow X_t \\ x &\longrightarrow \alpha_t(x) := T_{2t}(x). \end{aligned}$$

Então $(\{X_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ é uma ação parcial contínua de translação de bolas de S_1 centradas em pontos de G e raio 1 (para $t \neq 0$). É claro que os conjuntos X_t's são abertos e que α_0 é a identidade. Além disso, para $t \neq 0$ $\alpha_t(X_{-t}) = T_{2t}(B_1(-t)) = B_1(T_{2t}(-t)) = B_1(t) = X_t$, e segue que cada α_t é um homeomorfismo bem definido de X_{-t} para X_t. Quanto a condição 3, observe que $\alpha_t^{-1}(x) = T_{2t}^{-1}(x) = T_{-2t}(x) = T_{2(-t)}(x) = \alpha_{-t}(x)$. Como no exemplo anterior, $X_{-t} \cap X_s \neq \emptyset$ se, e somente se,$-t = s$ ou $t = 0$ ou $s = 0$, portanto, a condição $\alpha_t(X_{-t} \cap X_s) = X_t \cap X_{t+s}$ $\forall\, t, s \in G$ se prova de forma análoga e vamos omiti-la para não sermos repetitivos. O mesmo vale para provar que α_{s+t} é uma extensão de $\alpha_s \circ \alpha_t$, note que as composições só fazem sentido se uma delas é a identidade ou inversas mutuamente, nos primeiros casos basta usar que α_0 é a identidade, e no último, que α_t e α_{-t} são inversas mutuamente. Como $G \cap B_1(t) = \{t\}$ para cada t, então $\Gamma_\alpha = \bigcup_{t\in G} \{t\} \times X_{-t}$ é aberto por ser união de abertos. E por fim, para ver a continuidade de $\alpha : \Gamma_\alpha \to \overline{\mathbb{R}}$, $(t, x) \longmapsto \alpha_t(x)$, em um ponto arbitrário $(t, x) \in \Gamma_\alpha$, tome para qualquer $r > 0$, $s < min\{r, 1\}$, então

$$\alpha(\{t\} \times B_s(x)) = \alpha_t(B_s(x)) = T_{2t}(B_s(x)) = B_s(T_{2t}(x)) = B_s(\alpha_t(x)) \subset B_r(\alpha_t(x)).$$

Logo α é contínua no ponto (t, x) e por arbitrariedade é contínua em todo Γ_α.

Conclusão

Suporte e probabilidades de transição

Em seu trabalho, Colombeau e Gsponer propõe a teoria de funções generalizadas para estudar certos modelos em QFT, isto se justifica pois tais modelos apresentam singularidades e não linearidades em seus dados. Ao construir operadores generalizados e propor a probabilidade de transição, eles questionam qual a melhor maneira de se extrair uma probabilidade clássica a partir de uma probabilidade generalizada. Nesse sentido, mostramos que isso se resume a escolha de um idempotente adequado. Tal elemento da álgebra Booleana de $\overline{\mathbb{R}}$ pode fazer parte da natureza intrínseca do modelo construído e podemos portanto não ter que o escolher, mas sim, o notar. De qualquer forma, mostramos que tais probabilidades são extraídas dos elementos do *suporte* do operador generalizado estudado, ou em bom dito popular, que a fruta nunca cai longe do pé. Lembre que muitos fenômenos físicos são afetados pela forma como os observamos e isto certamente nos fornece respostas divergentes. Neste trabalho, mostramos evidências de que a noção de *suporte* reune todas essas respostas, e que quando encontramos outros resultados para a mesma circunstância pode ser porque estamos tomando agora um idempotente diferente e em consequência enxergando outro ponto do *suporte*. Tudo isto também se torna perceptível a partir de nossa análise sobre funções quase periódicas, e nosso estudo aponta para existência de probabilidade de transição no espaço de Fock como introduzida originalmente por Colombeau e Gsponer.

Fundamentos de geometria diferencial generalizada

O desafio de propor um cenário onde infinitesimais e infinitos coexistam é lidar com o amontoado de análise não standard necessária para se obter boas propriedades matemáticas. Uma vez obtidas, podemos nos perguntar se elas mantém algum grau de proximidade com a análise clássica. Nesse sentido, perguntas naturais surgem: nesse novo ambiente pode-se construir uma teoria de cálculo diferencial? Se sim, como ele se compara ao já confiável e bem sucedido cálculo Newtoniano? Uma teoria de geometria diferencial também pode ser obtida a partir desse novo cálculo da mesma forma como a geometria diferencial clássica surge a partir do cálculo infinitesimal? Soluções clássicas de equações diferenciais podem ser encontradas a partir de soluções generalizadas? Foi nessa direção que nos esforçamos para estabelecer os fundamentos do que chamamos de geometria diferencial generalizada, que é local e por isso muito semelhante a teoria existente. Fizemos isso, obtendo a partir de uma variedade abstrata clássica M, uma variedade generalizada M^*, de forma que problemas em M possam ser levantados para M^*, além de nos conectar com outra teoria geométrica já publicada. A principal diferença é a estrutura básica subjacente que não é mais $\mathbb{R}$ e sim $\widetilde{\mathbb{R}}$. Isto garante a pesquisadores interessados em nossa teoria, que não há necessidade de reaprender geometria, mas apenas se familiarizar com as propriedades algébricas e topológicas de $\widetilde{\mathbb{R}}$, por sua vez, já bem esclarecidas na literatura e em certos sentidos análogas as de $\mathbb{R}$. Tenha em mente que a principal vantagem aqui é lidar com singularidades e não-linearidades. Nossos alicerces foram somente o já familiar cálculo generalizado, a topologia cortante e os valores pontuais. Por fim, os conceitos de *suporte, interleaving*, e os elementos idempotentes de $\widetilde{\mathbb{R}}$ são as ferramentas que nos levam as soluções clássicas.

Comentários e sugestões para discussões

Separamos propositalmente esta parte do texto para sugerir alguma discussão sobre o espaço-tempo generalizado, um olhar sobre sua estrutura e sua aparente relação com o espaço-tempo clássico. O último, fortemente conhecido e aceito na comunidade científica, e o primeiro pode ser definido a partir de nossos resultados. Não temos absolutamente nenhuma evidência física e tão pouco experimental de que estas sugestões estejam corretas, portanto o espaço-tempo generalizado pode não corresponder a realidade. Deste modo, não há aqui teoremas ou outra estrutura matemática sólida, mas somente algum entendimento que pode ser discutido sob os parâmetros do nosso modelo.

Seja M o espaço-tempo clássico de quatro dimensões. Por Friedman [Fri61] existe um menor n tal que M pode ser mergulhado isometricamente em $\mathbb{R}^n$. Definimos o *espaço-tempo generalizado* como a $\mathcal{G}_f$-variedade M^* associada a M. Temos que M está discretamente mergulhada em M^* e $M \subset M^* \subset \overline{B}_1(0) \subset \widetilde{M} \subset \widetilde{\mathbb{R}}^n$, com $ssupp(M^*) = M$. Os infinitesimais estão contidos em $M^* \cap B_1(\vec{0})$ e os infinitos estão contidos em $\widetilde{M} \cap (\overline{B}_1(\vec{0}))^c \subset \widetilde{\mathbb{R}}^n$. Se $p \in M^*$ é um infinitesimal tal que o $\|p\|_2 \notin Inv(\widetilde{\mathbb{R}})$, então existem $e, f \in \mathcal{B}(\widetilde{\mathbb{R}})$ tais que $e \cdot p = \vec{0}$ e $f \cdot \|p\|_2 \in Inv(f \cdot \widetilde{\mathbb{R}})$. Dado $p_1 \in M^*$, o interleaving $ep_1 + (1-e)p = ep_1 + p \in M^*$. Para melhorar o entendimento, pense em cada ponto ou região em M^* como um evento, e no interleaving como eventos intercalados (ou entrelaçados), isto é, que se relacionam ou se encontram de alguma forma. Nosso primeiro entendimento é que pontos quaisquer de M^* que são intercalados com infinitesimais podem por um lado não alterar a natureza do infinitesimal, tal encontro não o modifica, embora gere um novo evento em M^*. Por outro lado, infinitesimais podem gerar eventos espantosos em M. Para ver isto, lembre que um interleaving (intercalação ou entrelaçamento) é formalmente uma soma $\sum_j e_j \cdot x_j$, onde $x_j \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$, $e_j \in \mathcal{B}(\widetilde{\mathbb{R}})$, $e_i \cdot e_j = \delta_{ij} e_i$, $\sum_j e_j = 1$ e δ_{ij} é a função delta de Kronecker, além disso, uma probabilidade de transição generalizada $\nu(e_j)$ está associada a cada e_j com $\sum_j \nu(e_j) = 1$. Se medir em M corresponde a aplicar uma função F, então $F(\sum_j e_j \cdot x_j) = \sum_j e_j \cdot F(x_j)$ é novamente um entrelaçamento de eventos. Por exemplo, seja $T = x\delta$, $x_0, x_j \in \mathbb{R}$, $e_j \in \mathcal{B}(\widetilde{\mathbb{R}})$ e $T_j(x) = T(\frac{x_j}{x_0} x)$, e considere o entrelaçamento $F = \sum_j T_j e_j$. Então $\kappa(T)(x_0 \cdot \alpha) = x_0 \rho(x_0)$ e $\kappa(F)(x_0 \cdot \alpha) = \sum_j \kappa(T_j)(x_0 \cdot \alpha) e_j = \sum_j \kappa(T)(x_j \cdot \alpha) e_j = \sum_j x_j \rho(x_j) e_j$, mostrando que um infinitesimal pode produzir o que vamos chamar um *efeito intercalado simultâneo* nos pontos x_j, lançando-os a distâncias clássicas arbitrariamente longe de $x_0 \alpha \in halo(0) =$

$B_1(0)$ e portanto de zero. Podemos denominar o produto do infinitesimal $x_0\alpha$ com o infinito $\delta(x_0\alpha)$, com o que chamaremos de *o colapso do infinito* ou *o surgimento do infinitesimal*. Sob qualquer interpretação, são efeitos imprevisíveis.

À soma de duas ou mais intercalações, pode ser aplicado um análogo ao princípio de superposição de ondas, e assim, termos cujos idempotentes não são ortogonais irão produzir um novo idempotente, e termos com o mesmo idempotente podem desaparecer ou serem aprimorados, isto é, em M, as intercalações, e seus produtos e somas, podem ser percebidos como um resultado de superposição de ondas. É mais interessante quando os pontos deixam de ser notados, ou seja, quando as intercalações envolvem infinitesimais e infinitos. Vamos a uma situação mais geométrica. Considere um fluxo F em M^*. Como evidenciamos acima, tal fluxo pode produzir o encontro de infinitesimais de M^* com infinitos de $\widetilde{M}$. Isto nos diz que se tomar-mos um pequeno volume Δ de $\widetilde{M}$ contendo o encontro, haverá alguma probabilidade de que se observe um efeito intercalado simultâneo em pontos contidos em $\Delta \cap (F \cap M)$ resultando em padrões de fluxo de $\Delta \cap F \cap M$ que exibem comportamento caótico e imprevisível. A imprevisibilidade depende das probabilidades de transição generalizadas dos idempotentes envolvidos e do tipo de infinitesimais e infinitos contidos em Δ. Uma instantaneidade também pode ocorrer, ocasionada pela observação em M do colapso de infinitos em M^*. Por exemplo, suponha que se entrelace dois eventos F_1 e F_2 em M^*, que por sua vez são extremidades de um pequeno volume do espaço-tempo generalizado, Δ_1, estendido na direção espacial. A criação de infinitesimais em $F_1 \cap M$, uma extremidade da extensão espacial, pode resultar na observação de um efeito intercalado simultâneo instantâneo em $F_2 \cap M$, a outra extremidade da extensão espacial. Nenhuma contradição surge na instantaneidade, uma vez que M consiste em uma grade de pontos equidistantes em M^*.

O espaço-tempo M é o que podemos enxergar, e em M^*, nenhum ponto de M está longe, e isto nos leva a discussões sobre como percebemos a distância. Até aqui esperamos ter esclarecido que para nós entrelaçamentos são observações (entrelaçamentos $\simeq$ idempotentes $\simeq$ suporte $\simeq$ observação), o que não está entrelaçado não pode ser observado, portanto a distância deve estar intimamente relacionada ao conceito de interleaving. As probabilidades de transição que são determinadas pela observação, bem como os colapsos e surgimentos aos quais nos referimos, podem alterar significativamente qualquer medição, por isso controlar as entradas e direcionar as saídas nos eventos de M^* é o que nos levará as soluções em M. Compare isto com a teoria de *dependência da malha* nas soluções numéricas de edp's. O seguinte texto foi obtido ao perguntarmos ao ChatGPT[1] do que se trata a *convergência de malha uniforme*:

> Esta teoria afirma que a solução obtida por métodos numéricos pode depender da discretização espacial utilizada, isto é, da forma como a região do domínio é subdividida em células [...] Isto leva a erros de truncamento, pois há a substituição de uma equação diferencial contínua por uma versão aproximada discreta [...] Algumas soluções são altamente sensíveis a irregularidades na malha mesmo que elas estejam sendo refinadas. Portanto é desejável a um método numérico que

[1]inteligência artificial de linguagem natural criada pela OpenAi.

> ele seja independente da malha, ou seja, que a solução numérica seja convergente para solução exata a medida que a malha é refinada. Essa propriedade é conhecida como convergência de malha uniforme (OpenAI. https://chat.openai.com. Acesso em 16 de Junho de 2023).

Para nós, isto se traduz em uma forma otimizada de observação e portanto uma boa malha é um bom entrelaçamento. É claro que isto só se torna possível se existir uma solução da equação quando considerada no ambiente generalizado.

Para tornar tudo mais claro, por nossa primeira análise sobre as probabilidades de transição, buscamos entender e sugerir o estado quântico como um interleaving dos estados próprios de operadores generalizados (observáveis generalizados), isto é, $v = \sum_j e_j v_j$. Note que o colapso causado por uma medição parece encaixar bem com o conceito de interleaving e de suporte agindo juntos sobre o estado quântico. Ainda que de forma muito rudimentar, isto sugere que tais conceitos podem ser matematicamente interessantes aos estudiosos da interpretação de Copenhague. Note pelo exposto acima, ainda que T seja muito simples, que paradoxos intrigantes podem ser entendidos matematicamente. A probabilidade de transição do que se consegue observar depois do colapso pode ser uma função com parâmetros $\nu(e_j)$.

Já por nossa segunda análise, agora geométrica, queremos sugerir o espaço-tempo generalizado para pesquisadores que buscam entender como o espaço-tempo pode ser influenciado pela mecânica quântica e como as funções de onda se relacionam com a geometria do espaço-tempo em escalas subatômicas. É claro que ainda temos muito pra analisar, como por exemplo, fazer um estudo detalhado sobre curvaturas, módulos tangentes, campos e geodésicas nessas novas variedades, além de estudar o que seriam as métricas Lorentzianas generalizadas destes objetos.

O exposto justifica a nossa recomendação a pesquisadores de que $\mathcal{C}^\infty(M^*, \widetilde{\mathbb{R}}_f)$ pode ser atrativo na busca por soluções de equações diferenciais que modelem fenômenos físicos estudados atualmente, veja o Teorema 5.8 em [JQ23] e a observação que o segue. Com a mesma motivação recomendamos os operadores generalizados para medições de estados quânticos.

Sem mais, agradecemos ao leitor, e insistimos em lembrar que tudo isso são apenas sugestões para discussão sobre as implicações de nossa pesquisa e não fatos comprovados.

Referências Bibliográficas

[AB91] J. Aragona e H.A. Biagioni. Intrinsic definition of the colombeau algebra of generalized functions. *Analysis Mathematica*, 17(2):75–132, 1991. 2, 5, 15

[Aba03] F. Abadie. Enveloping actions and takai duality for partial actions. *Journal of Functional Analysis*, 197(1):14–67, 2003. 5, 64, 71

[ACC+15] J. Aragona, P. Catuogno, J.F. Colombeau, S.O. Juriaans e C. Olivera. Multiplication of distributions in mathematical physics. Em *International Workshop on Lie Theory and Its Applications in Physics*, páginas 583–589. Springer, 2015. 1, 3, 4

[ACCJ16] J. Aragona, P. Catuogno, J.F. Colombeau e S.O. Juriaans. Ch. olivera in lie theory and its applications in physics, v. dobrev ed, 2016. 1

[AFJ05] J. Aragona, R. Fernandez e S.O. Juriaans. A discontinuous colombeau differential calculus. *Monatshefte für Mathematik*, 144(1):13–29, 2005. 2, 3, 5, 18, 23, 53, 55, 56, 57

[AFJ06] J Aragona, R. Fernandez e S.O. Juriaans. The sharp topology on the full colombeau algebra of generalized functions. *Integral Transforms and Special Functions*, 17(2-3):165–170, 2006. 2, 5, 20, 23, 54, 57

[AFJ09] J. Aragona, R. Fernandez e S.O. Juriaans. Natural topologies on colombeau algebras. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 34(1):161–180, 2009. 2, 20, 21, 53, 54

[AFJO12] J. Aragona, R. Fernandez, S.O. Juriaans e M. Oberguggenberger. Differential calculus and integration of generalized functions over membranes. *Monatsh. Math.*, 166(1):1–18, 2012. 23, 53, 59

[AGJ13] J. Aragona, A.R. Garcia e S.O. Juriaans. Algebraic theory of colombeau generalized numbers. *Journal of Algebra*, 384:194–211, 2013. 2, 18, 24

[AJ01] J. Aragona e S.O. Juriaans. Some structural properties of the topological ring of colombeau generalized numbers. 2001. 15, 19, 24, 64, 71, 72, 75

[AJOS08] J. Aragona, S.O. Juriaans, O.R.B. Oliveira e D. Scarpalezos. Algebraic and geometric theory of the topological ring of colombeau generalized functions. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 51(3):545–564, 2008. 2, 15

[AMMS73] P. Antosik, J. Mikusinski, J. Mikusiński e R. Sikorski. *Theory of distributions: the sequential approach*, volume 41. EP Dutton, 1973. 10

[Bat17] E. Batista. Partial actions: what they are and why we care. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 24(1):35–71, 2017. 5, 64, 66

[BB54] A.S. Besicovitch e A.S. Besicovitch. *Almost periodic functions*, volume 4. Dover New York, 1954. 4, 40

[BE94] R. Bhatia e L. Elsner. The hoffman-wielandt inequality in infinite dimensions. Em *Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Mathematical Sciences*, volume 104, páginas 483–494. Springer, 1994. 4, 37

[Bha07] R. Bhatia. *Perturbation bounds for matrix eigenvalues*. SIAM, 2007. 38

[Bia90] H.A. Biagioni. A nonlinear theory of generalized fonctions. *Lecture notes in mathematics*, 1421, 1990. 19, 53

[Bia06] H.A. Biagioni. *A nonlinear theory of generalized functions*, volume 1421. Springer, 2006. 2

[Bir04] J.C. Birget. The groups of richard thompson and complexity. *International Journal of Algebra and Computation*, 14(05n06):569–626, 2004. 64

[BO92] H.A. Biagioni e M. Oberguggenberger. Generalized solutions to burgers equation. *Journal of differential equations*, 97(2):263–287, 1992. 3

[Boh18] H. Bohr. *Almost periodic functions*. Courier Dover Publications, 2018. 4, 36, 40

[CAC+18] J.F. Colombeau, J. Aragona, P. Catuogno, S.O. Juriaans e C. Olivera. Multiplication of distributions and nonperturbative calculations of transition probabilities. Em *Quantum Theory and Symmetries with Lie Theory and Its Applications in Physics Volume 1: QTS-X/LT-XII, Varna, Bulgaria, June 2017*, páginas 393–401. Springer, 2018. 46, 47, 49, 52

[CF09] W. Cortes e M. Ferrero. Globalization of partial actions on semiprime rings. *Contemporary Mathematics*, 499:27, 2009. 5

[CFM16] W. Cortes, M. Ferrero e E.N. Marcos. Partial actions on categories. *Communications in Algebra*, 44(7):2719–2731, 2016. 5

[CG08] J.F. Colombeau e A. Gsponer. The heisenberg-pauli canonical formalism of quantum field theory in the rigorous setting of nonlinear generalized functions (part i). *arXiv preprint arXiv:0807.0289*, 2008. 1, 4, 28, 29, 32

[CGdS17] W. Cortes, A.R. G. Garcia e S. H. da Silva. A discontinuous differential calculus in the framework colombeau's full algebra, 2017. 5, 23, 55, 56, 57

[CGP08] J.F. Colombeau, A. Gsponer e B. Perrot. Nonlinear generalized functions and the heisenberg-pauli foundations of quantum field theory, 2008. 4, 33

[Chi99] V.V. Chistyakov. The colombeau generalized nonlinear analysis and the schwartz linear distribution theory. *Journal of Mathematical Sciences*, 93(1):42–133, 1999. 2

[CM94] J.F. Colombeau e A. Meril. Generalized functions and multiplication of distributions on $\mathcal{C}^\infty$ manifolds. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 186(2):357–364, 1994. 5

[CM21] W. Cortes e E.N. Marcos. Description of partial actions. *São Paulo Journal of Mathematical Sciences*, 15(2):929–939, 2021. 5

[Col82] J.F. Colombeau. Differential calculus and holomorphy. 1982. 31

[Col83] J.F. Colombeau. A multiplication of distributions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 94(1):96–115, 1983. 1

[Col84] J.F. Colombeau. *New generalized functions and multiplication of distributions.* Elsevier, 1984. 1

[Col85] J.F. Colombeau. *Elementary introduction to new generalized functions.* Elsevier, 1985. 1

[Col90] J.F. Colombeau. Multiplication of distributions. *Bulletin of the american mathematical society*, 23(2):251–268, 1990. 2

[Col92] J.F. Colombeau. Multiplication of distributions. *Lecture Notes in Math*, (1532), 1992. 2

[Col07a] J.F. Colombeau. Mathematical problems on generalized functions and the canonical hamiltonian formalism, 2007. 1

[Col07b] J.F. Colombeau. Mathematical problems on generalized functions and the canonical hamiltonian formalism. *arXiv preprint arXiv:0708.3425*, 2007. 4

[Col13] J.F. Colombeau. Nonlinear generalized functions. sao paulo j. *Math. Sci*, 7:2, 2013. 2

[Cor99] P. Cordaro. Teoria das distribuições e análise de fourier. *Notas de Aula IME USP*, 1999. 9

[DE05] M. Dokuchaev e R. Exel. Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 357(5):1931–1952, 2005. 5, 64, 69, 70

[DK] J.J. Duistermaat e J.A.C. Kolk. Distributions: Theory and applications. 2, 8, 10

[dO09] J. de Oliveira. *Métodos geométricos diferenciais generalizados.* Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2009. 58

[dSJ19] J. C. da Silva e O. S. Juriaans. *As álgebras plena de Colombeau e de Aragona: conjuntos internos e aplicações.* Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2019. 59

[Ego90] Y.V. Egorov. A contribution to the theory of generalized functions. *Russian Mathematical Surveys*, 45(5):1, 1990. 2

[Ehr54] L. Ehrenpreis. Solution of some problems of division: Part i. division by a polynomial of derivation. *American Journal of Mathematics*, 76(4):883–903, 1954. 1

[Ehr55] L. Ehrenpreis. Solution of some problems of division: Part ii. division by a punctual distribution. *American Journal of Mathematics*, 77(2):286–292, 1955. 1

[Exe94] R. Exel. Circle actions on c*-algebras, partial automorphisms, and a generalized pimsner-voiculescu exact sequence. *Journal of functional analysis*, 122(2):361–401, 1994. 5, 64

[Exe98] R. Exel. Partial actions of groups and actions of inverse semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126(12):3481–3494, 1998. 5

[Exe17] R. Exel. *Partial dynamical systems, Fell bundles and applications*, volume 224. American Mathematical Soc., 2017. 5

[Fri61] A. Friedman. Local isometric imbedding of riemannian manifolds with indefinite metrics. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 10(4):625–649, 1961. 78

[Gar05] C. Garetto. Topological structures in colombeau algebras: Topological ˜-modules and duality theory. *Acta Applicandae Mathematica*, 88(1):81–123, 2005. 14, 19, 24

[GFKS01] M. Grosser, E. Farkas, M. Kunzinger e R. Steinbauer. *On the foundations of nonlinear generalized functions I and II.* Number 729. American Mathematical Soc., 2001. 2, 56

[GKOS13] M. Grosser, M. Kunzinger, M. Oberguggenberger e R. Steinbauer. *Geometric theory of generalized functions with applications to general relativity*, volume 537. Springer Science & Business Media, 2013. 3

[GKSV02] M. Grosser, M. Kunzinger, R. Steinbauer e J.A. Vickers. A global theory of algebras of generalized functions. *Advances in Mathematics*, 166(1):50–72, 2002. 5, 62

[GKSV12] M. Grosser, M. Kunzinger, R. Steinbauer e J.A. Vickers. A global theory of algebras of generalized functions ii: tensor distributions. *New York J. of Math*, 18:139–199, 2012. 5, 62

[GKV15] P. Giordano, M. Kunzinger e H. Vernaeve. Strongly internal sets and generalized smooth functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 422(1):56–71, 2015. 15, 59, 60

[Gsp08] A. Gsponer. A concise introduction to colombeau generalized functions and their applications in classical electrodynamics. *European Journal of Physics*, 30(1):109, 2008. 1, 3

[GV11] C. Garetto e H. Vernaeve. Hilbert ˜-modules: structural properties and applications to variational problems. *Transactions of the American Mathematical Society*, 363(4):2047–2090, 2011. 14, 19, 24, 25, 26, 27, 36, 54

[HKK14] G. Hörmann, S. Konjik e M. Kunzinger. Symplectic modules over colombeau-generalized numbers. *Communications in Algebra*, 42(8):3558–3577, 2014. 33, 34, 36, 38

[HW53] A.J. Hoffman e H.W. Wielandt. The variation of the spectrum of a normal matrix. *Duke Math. J.*, 20(1):37–39, 1953. 4, 36, 37

[JFAC+17] Colombeau J. F., J Aragona, P Catuogno, S.O. Juriaans e C. Olivera. Multiplication of distributions and nonperturbative calculations of transition probabilities. Em *Quantum Theory And Symmetries*, páginas 393–401. Springer, 2017. 1, 2, 4, 28, 35, 47, 49, 52

[JO22] S.O. Juriaans e J. Oliveira. Fixed point theorems for hypersequences and the foundation of generalized differential geometry i: The simplified algebra. *arXiv preprint arXiv:2205.00114*, 2022. 3, 4, 15, 23, 41, 53, 56, 57

[JQ23] Juriaans, S.O. e Queiroz, P.C. Generalized differential geometry. 2023. 23, 80

[KS99] M. Kunzinger e R. Steinbauer. A rigorous solution concept for geodesic and geodesic deviation equations in impulsive gravitational waves. *Journal of Mathematical Physics*, 40(3):1479–1489, 1999. 5, 56

[KS02] M. Kunzinger e R. Steinbauer. Generalized pseudo-riemannian geometry. *Transactions of the american mathematical society*, 354(10):4179–4199, 2002. 5

[Kun96] M. Kunzinger. *Lie transformation groups in Colombeau algebras.* na, 1996. 1, 2, 3, 11, 13, 14, 16, 17

[Lew57] H Lewy. An example of a smooth linear partial differential equation without solution. *Annals of Mathematics*, 66(1):155–158, 1957. 1, 10

[M.11] Dokuchaev M. Partial actions: a survey. *Contemp. Math*, 537:173–184, 2011. 5, 64

[Mal53] B. Malgrange. Équations aux dérivées partielles à coefficients constants. I. Solution élémentaire. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 237:1620–1622, 1953. 1

[Mal54] B. Malgrange. Équations aux dérivées partielles à coefficients constants. 2. équations avec second membre. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 238:196–198, 1954. 1

[Mal56] B. Malgrange. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. Em *Annales de l'institut Fourier*, volume 6, páginas 271–355, 1956. 1

[May08] E. Mayerhofer. On lorentz geometry in algebras of generalized functions. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 138(4):843–871, 2008. 27, 36

[MR99] A. Mallios e E.E. Rosinger. Abstract differential geometry, differential algebras of generalized functions, and de rham cohomology. *Acta Applicandae Mathematica*, 55:231–250, 1999. 5

[Nas54] J. Nash. C1 isometric imbeddings. *Annals of mathematics*, páginas 383–396, 1954. 62

[Nas56] J. Nash. The imbedding problem for riemannian manifolds. *Annals of mathematics*, 63(1):20–63, 1956. 62

[OK99] M. Oberguggenberger e M. Kunzinger. Characterization of colombeau generalized functions by their pointvalues. *Mathematische Nachrichten*, 203(1):147–157, 1999. 2, 13, 57

[Ope21] OpenAI. GPT-3.5 ChatGPT. Version 3.5, 2021. San Francisco, CA: OpenAI.

[OV08] M. Oberguggenberger e H. Vernaeve. Internal sets and internal functions in colombeau theory. *Journal of mathematical analysis and applications*, 341(1):649–659, 2008. 15, 59

[Rob16] A. Robinson. *Non-standard analysis*. Princeton University Press, 2016.

[Sca00] D. Scarpalézos. Colombeau generalized functions: topological structures; microlocal properties. a simplified point of view: part i. *Bulletin (Académie serbe des sciences et des arts. Classe des sciences mathématiques et naturelles. Sciences mathématiques)*, páginas 89–114, 2000. 2, 19, 53

[Sca04] D. Scarpalézos. Colombeau generalized functions: Topological structures; microlocal properties. a simplified point of view. part ii. *Publications de l'Institut Mathematique*, 76(96):111–125, 2004. 19, 53

[Sch54] L. Schwartz. Sur limpossibilite de la multiplication des distributions. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de L Academie des Sciences*, 239(15):847–848, 1954. 1

[Sch66] L. Schwartz. Théorie des distributions. 1966. 1

[Sch12] K. Schmüdgen. *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space*, volume 265. Springer Science & Business Media, 2012. 52

[Ste98] R. Steinbauer. Geodesics and geodesic deviation for impulsive gravitational waves. *Journal of Mathematical Physics*, 39(4):2201–2212, 1998. 56

[TG22] D. Tiwari e P. Giordano. Hyperseries in the non-archimedean ring of colombeau generalized numbers. *Monatshefte für Mathematik*, páginas 1–31, 2022. 53

[Ver08] H. Vernaeve. Banach$\tilde{\ }$-algebras, 2008. 33

[Ver10] H. Vernaeve. Ideals in the ring of colombeau generalized numbers. *Communications in Algebra®*, 38(6):2199–2228, 2010. 65

[Ver11] H. Vernaeve. Isomorphisms of algebras of generalized functions. *Monatshefte für Mathematik*, 162(2):225–237, 2011. 62

Índice Remissivo