

**Uma abordagem topológica e dinâmica
à Geometria Fractal**

Gabriela Cristina da Silva

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Dr. Paolo Piccione.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, a autora recebeu auxílio financeiro da FAPESP.

São Paulo, março de 2023

Uma abordagem topológica e dinâmica à Geometria Fractal

Esta versão da dissertação/tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 10/03/2023. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Paolo Piccione (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Fernando Manfio - ICMC-USP
- Prof. Dr. Francesco Mercuri - UNICAMP

Agradecimentos

Quero inicialmente agradecer a Deus por estar comigo em todos os momentos! Entrei no mestrado na época da pandemia: milhares de pessoas estavam morrendo, e eu estava em São Paulo, cursando as disciplinas on-line. Deus me protegeu e me fez chegar até aqui!

Quero agradecer ao meu orientador, Paolo Piccione, pela oportunidade de ter trabalhado com esse tema e pelas discussões e orientações. Por tudo isso, muito obrigada!

Agradeço com muito carinho aos demais membros da banca, o professor Fernando Manfio (ICMC-USP) e o professor Francesco Mercuri (UNICAMP), por terem aceitado o convite e pelas sugestões e correções, as quais foram fundamentais.

Agradeço ao meu esposo, Vinícius, pelo apoio e por estar comigo nesta caminhada! Agradeço aos meus pais, à minha irmã, Júlia, que eu tanto amo, aos meus irmãos, Reginaldo e Carlos Eduardo, à Gabi Alves, minha cunhada, ao meu príncipe, Lorenzo, e aos meus sogros por estarem comigo sempre que precisei e por todo o amor!

Agradeço aos meus amigos Denis e Iuri por todas as discussões e reuniões que fizemos para estudar assuntos envolvendo fractais, e, em especial, agradeço ao meu melhor amigo, Denis, pelas várias discussões e pela revisão de parte do texto!

Agradeço também aos meus amigos Michel, Guilherme, Tiago Silva, Gustavo Cancelier, Caio, Giulia, Amanda Melo, Bruna, Gustavo Ramos, Laís, Kelvyn, João, Cláudia e Luiza pela amizade e por terem tornado as tardes de estudo no IME melhores.

Agradeço, em especial, ao meu irmão Carlos Eduardo por ter me ajudado na elaboração das figuras. Mesmo com a faculdade de medicina agitada, e cheio de provas, ele tirou um tempinho para me ajudar. Por isso, muito obrigada!

Não poderia deixar de agradecer aos professores do IME Cláudio Gorodski, Christian Ortiz, Albert Fisher e Roberto Mossa, com os quais cursei várias disciplinas, as quais me fizeram amadurecer como matemática. Agradeço também ao professor Odilon pelas longas conversas que nos faziam pensar sobre o que é a matemática e ao professor Lucas Oliveira (UFRGS) por ter me aceitado em sua turma na disciplina de IFS, que foi muito legal e me deu uma boa base para entender esses assuntos de fractais.

Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), bolsa nº 2020 / 13512-3, pelo financiamento, apoio e suporte. As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de minha responsabilidade e não refletem necessariamente a visão da FAPESP.

Resumo

SILVA, G. C. **Uma abordagem topológica e dinâmica à Geometria Fractal**. 2023. 131 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Majoritariamente, *fractais* são definidos como atratores de um *Sistema de Funções Iteradas (IFS)*. Definir fractais dessa forma muitas vezes facilita o cálculo de sua dimensão de Hausdorff, uma vez que fazer o cálculo pela definição é, em geral, complicado. O objetivo principal desta dissertação é apresentar, de forma clara, uma demonstração do teorema de Moran — o qual nos garante que, se F é o atrator de um IFS cujas contrações sejam similaridades que satisfaçam a *Condição de Conjunto Aberto (OSC)*, então a dimensão de similaridade de F coincide com sua dimensão Hausdorff. O presente trabalho é uma contribuição ao estudo da Geometria Fractal do ponto de vista topológico e dinâmico. Embora a Geometria Fractal e a Dinâmica Caótica sejam tradicionalmente estudadas de forma independente, em 2014, Barnsley mostrou a presença de caos nos fractais. Neste trabalho, apresentamos um resultado que relaciona dinâmica caótica e fractais. Mais especificamente, provamos que a transformação de mudança associada a um IFS totalmente desconexo composto por duas ou mais transformações é caótica segundo a definição de Devaney.

Palavras-chave: dimensão topológica, dimensão *box-counting*, dimensão de Hausdorff, IFS, atrator, teorema de Moran, dinâmica caótica.

Abstract

SILVA, G. C. **A Topological and Dynamic Approach to Fractal Geometry**. 2023. 131 p. Thesis (Masters) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Mostly, *fractals* are defined as attractors of an *Iterated Function System (IFS)*. Defining fractals in this way often facilitates the calculation of their Hausdorff dimension, since doing the calculation by definition is, in general, complicated. The main objective of this master thesis is to clearly present a proof of Moran's theorem — which guarantees us that, if F is the attractor of an IFS whose contractions are similarities that satisfy the *Set Condition Open (OSC)*, then the similarity dimension of F coincides with its Hausdorff dimension. The present work is a contribution to the study of Fractal Geometry from a topological and dynamic point of view. Although Fractal Geometry and Chaotic Dynamics are traditionally studied independently, in 2014 Barnsley showed the presence of chaos in fractals. In this work, we present a result that relates chaotic dynamics and fractals. More specifically, we prove that the change transformation associated with a totally disconnected IFS composed of two or more transformations is chaotic according to Devaney's definition.

Keywords: topological dimension, *box-counting* dimension, Hausdorff dimension, IFS, attractor, Moran's theorem, chaotic dynamics.

Sumário

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	3
1.2 Organização do documento	4
1.3 Mensagem ao leitor	5
2 Noções básicas sobre teoria da medida	7
2.1 Notação	7
2.2 σ -álgebra, medida e espaço de medida	7
2.3 Medida Exterior e o teorema de Carathéodory	9
3 Fractais Clássicos	13
3.1 O conjunto de Cantor ternário	13
3.2 Triângulo de Sierpinski	18
3.3 Curva de Koch	19
3.4 Conjuntos de Julia	19
4 Dimensão Topológica	23
4.1 Espaços 0-dimensionais	23
4.1.1 Propriedades dos espaços 0-dimensionais	27
4.1.2 Base para a topologia	29
4.2 Dimensão de Cobertura	32
4.3 Dimensão Indutiva Fraca	39
5 Dimensão Box-Counting	43
5.1 Dimensão Box-counting	43
5.2 Propriedades básicas da dimensão box-counting	47
5.3 Limitações da dimensão box-counting	52
5.4 Exemplos Básicos	53
6 Dimensão de Hausdorff	59
6.1 Medida Exterior de Hausdorff	59
6.2 Dimensão de Hausdorff	63
6.2.1 Exemplos Clássicos	67
6.3 Curva de Takagi	71

7	Sistemas de Funções Iteradas	79
8	Dinâmica Caótica nos fractais	85
8.1	Caos de Devaney na aplicação shift	85
8.2	Codificando os fractais	89
8.3	Caos nos fractais	97
9	Teorema de Moran	105
9.1	O Teorema de Moran	105
9.1.1	Exemplos	118
9.2	Variações do teorema de Moran	120
9.2.1	Dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia	121
A	Resultados Utilizados	127
A.1	Capítulo 3	127
A.2	Capítulo 4	127
A.3	Capítulo 6	128
A.4	Capítulo 7	128
A.5	Capítulo 8	128
	Referências Bibliográficas	131

Lista de Figuras

1.1	Exemplos de pseudofractais.	1
1.2	Exemplo de autossimilaridade.	3
3.1	Construção de $C_{\frac{1}{3}}$	14
3.2	Construção do Triângulo de Sierpinski.	18
3.3	Construção da curva de Koch.	20
3.4	Conjunto de Julia para $R(z) = z^2$	22
3.5	Conjunto de Julia para $R(z) = z^2 - 1$	22
3.6	Conjunto de Julia para $R(z) = z^2 - i$	22
5.1	Partições do segmento de reta, quadrado e cubo.	43
5.2	Exemplo tomando $\epsilon = \frac{1}{5}$ para a cobertura da cota superior.	54
5.3	Cobertura de X por duas bolas.	54
6.1	Dimensão de Hausdorff.	63
6.2	Construção da <i>Cantor Dust</i>	68
6.3	Gráfico da função de Takagi.	72
6.4	Caso $k = 1$	76
6.5	Caso $k = 2$	76
6.6	Caso $k = 3$	77
7.1	A δ -vizinhança do compacto A	79
7.2	Atrator do IFS de $C_{\frac{1}{3}}$	84
8.1	Espaço dos códigos associado ao triângulo de Sierpinski.	85
8.2	Conjuntos de condensação.	89
8.3	Exemplo de IFS de condensação.	90
8.4	Aplicação de endereçamento de $C_{\frac{1}{3}}$	96
8.5	Órbita do ponto $\frac{1}{3}$ pela aplicação S	102
8.6	Órbita do ponto $\frac{1}{3} - \frac{1}{3^7}$ pela aplicação S	102
9.1	Ilustração da demonstração. Fonte: autora.	110
9.2	Representando Q por meio de árvores.	114
9.3	OSC no caso do triângulo de Sierpinski	119

Capítulo 1

Introdução

A ideia de fractal é relativamente nova, mas suas origens matemáticas datam do século XIX. O termo *fractal*, que deriva do latim *fractus*, adjetivo do verbo frangere que significa quebrar, fragmentar, foi cunhado por Mandelbrot, em 1975. No fim desse mesmo século, os cientistas notaram que muitas das estruturas complexas presentes no nosso universo não poderiam ser explicadas pela geometria euclidiana. Diante disso, foi necessária a criação de uma nova geometria: a *Geometria Fractal*.

De acordo com Mandelbrot [Man82]: “*nuvens não são esferas, montanhas não são cones, litorais não são círculos, a casca da árvore não é lisa e tampouco a luz viaja em linha reta*”. Fractais perfeitos ou matemáticos não existem no mundo real, pois, no mundo real, um padrão de repetição não ocorre um número infinito de vezes. Apesar disso, a natureza nos fornece numerosos exemplos de fractais aproximados, também chamados de pseudofractais. Alguns desses pseudofractais podem ser observados na Figura 1.1.

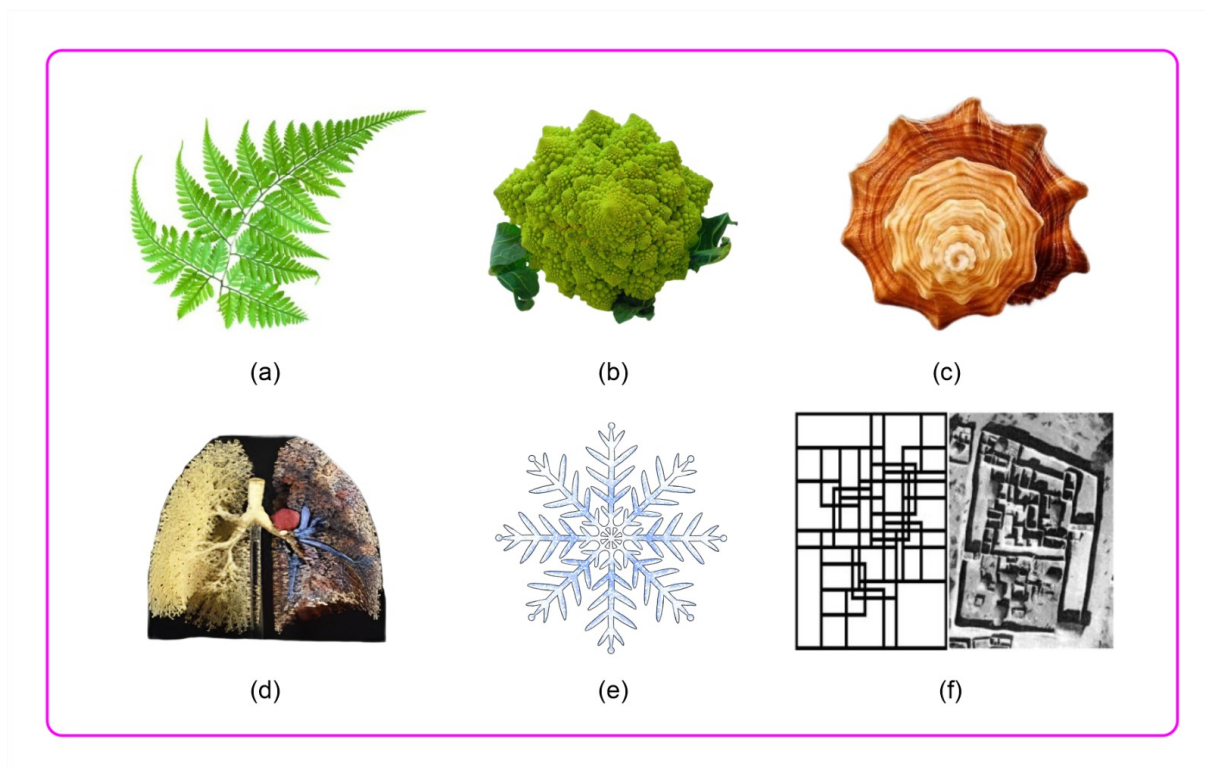


Figura 1.1. Exemplos de pseudofractais.

Fonte: autora.

O primeiro deles ilustrado na Figura 1.1(a) é a samambaia, cujos folíolos são praticamente idênticos entre si. No caso do romanesco ilustrado na Figura 1.1(b) — um vegetal da mesma

família do brócolis —, observar mais de perto uma dada parte do vegetal é como observar o vegetal como um todo, pois cada parte do romanesco é como um minirromanesco. O terceiro exemplo são as conchas do mar ilustrado na Figura 1.1(c), cujas camadas interiores e exteriores apresentam padrões semelhantes. Até mesmo o pulmão humano ilustrado na Figura 1.1(d), um dos órgãos mais fortemente associados aos sistemas respiratório e circulatório, apresenta padrões típicos de um fractal. No caso dos flocos de neve ilustrado na Figura 1.1(e), é fácil ver que cada ramo dos flocos se parece com um floco inteiro. O pseudofractal africano *Logone-Birni* ilustrado na Figura 1.1(f) (ver [Egl99]), por sua vez, é uma cidade localizada em Camarões, na África Central. Essa cidade é formada por grandes e complexos prédios retangulares feitos de argila grossa. O palácio de *Miarré* — que significa chefe — fica no meio da cidade. Ao longo do tempo, foram acrescentados vários fechamentos retangulares aos fechamentos pré-existentes, cada um dos quais compartilhando duas ou mais paredes de fechamentos anteriores. O resultado é um complexo de retângulos dentro de retângulos que se assemelha a um fractal.

Dentro da comunidade científica, ainda não existe um consenso sobre a definição de fractal. Por isso, nos últimos anos, alguns matemáticos propuseram possíveis definições. A primeira delas, que pode ser encontrada em [SA11], foi proposta por Mandelbrot e será apresentada a seguir.

Definição 1.1 (MANDELBROT). Um conjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ é um **fractal** se sua dimensão Hausdorff é maior do que sua dimensão topológica.

Entretanto, até mesmo Mandelbrot considera que esta definição é restritiva, uma vez que, para compreendê-la, é necessário algum conhecimento acerca de teoria da medida e de topologia geral. Uma definição mais intuitiva — a qual apresentaremos agora — foi proposta por Falconer e pode ser encontrada em [Lim19].

Definição 1.2 (FALCONER). Um conjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ é um **fractal** se ele apresenta todas, ou, pelo menos, a maior parte das propriedades a seguir:

1. \mathcal{F} tem “estrutura fina” — ou seja, apresenta detalhes em qualquer escala arbitrariamente pequena;
2. \mathcal{F} é localmente ou globalmente muito irregular para ser descrito em linguagem geométrica tradicional;
3. \mathcal{F} apresenta alguma forma de autossimilaridade — ou seja, cada parte de \mathcal{F} é uma cópia reduzida do todo;
4. a dimensão fractal de \mathcal{F} (definida de algum modo) é maior que sua dimensão topológica;
5. \mathcal{F} pode ser obtido por meio de um processo recursivo simples.

Se seguíssemos a definição de Mandelbrot, excluiríamos vários conjuntos que são fractais de acordo com a definição 1.2. A curva de Takagi, por exemplo, é um fractal cujas dimensões fractal e topológica são ambas iguais a 1. Discutiremos esse exemplo em mais detalhes na seção 6.3.

Com base nas definições 1.1 e 1.2, podemos concluir que um fractal é um conjunto que possui um padrão gerado matematicamente que é reproduzível em qualquer ampliação ou redução, e que a reprodução se parece com o original, ou, pelo menos, tem uma estrutura semelhante. Mais especificamente, os fractais podem ser caracterizados pelas seguintes propriedades:

- (i) **Autossimilaridade:** quando uma porção de um conjunto ou de um contorno se parece com uma cópia do todo, porém numa escala menor (como se pode observar na Figura 1.2).
- (ii) **Complexidade infinita:** diz respeito ao fato de que o processo para geração de um fractal é recursivo.
- (iii) **Dimensão:** a dimensão fractal é um número não inteiro que mede o grau de irregularidade do conjunto, como veremos nos Capítulos 3 e 4.

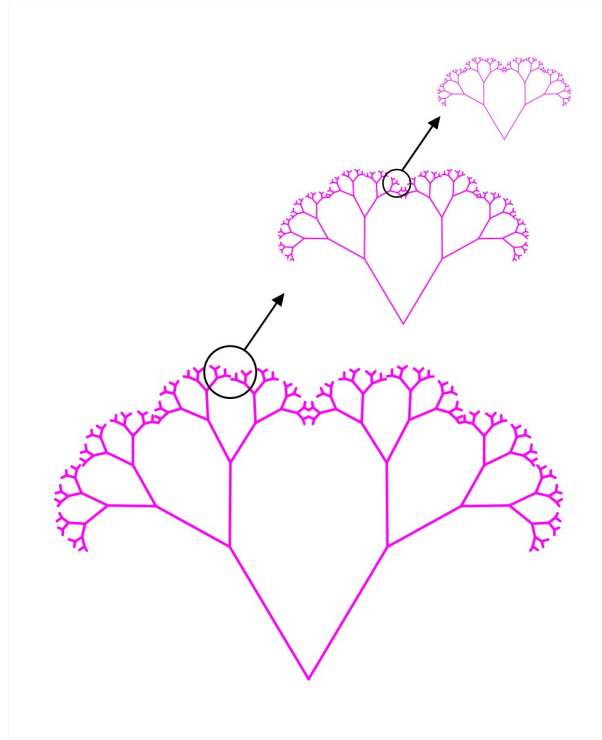


Figura 1.2. *Exemplo de autossimilaridade.*
Fonte: autora.

Em muitos casos, *fractais* são definidos como atratores de um *Sistema de Funções Iteradas (IFS)*. Um sistema de funções iteradas $\{(X, d); S_1, \dots, S_m\}$ é, simplesmente, um espaço métrico completo (X, d) equipado com uma coleção finita $\{S_1, \dots, S_m\}$ de contrações de X em X . Definir fractais por meio de sistemas de funções iteradas muitas vezes facilita o cálculo de sua dimensão de Hausdorff, uma vez que fazer o cálculo pela definição é, em geral, bastante complicado. No capítulo 7, vamos enunciar e provar o teorema de Moran — o qual nos fornece um método que facilita o cálculo da dimensão fractal em muitos casos de interesse.

1.1 Objetivos

O objetivo principal desta dissertação é apresentar, de forma clara, uma demonstração do teorema de Moran — o qual nos garante que, se F é o atrator de um IFS cujas contrações sejam similaridades que satisfaçam a *Condição de Conjunto Aberto (OSC)* (ver [Fal04]), então a dimensão de similaridade de F coincide com sua dimensão Hausdorff. Dentre seus objetivos secundários, por sua vez, podemos citar o estudo:

- de noções básicas de teoria da medida;
- das várias noções de “dimensão topológica”: espaços 0-dimensionais, dimensão de cobertura e dimensão indutiva fraca;
- das várias noções de dimensão fractal — sendo as mais importantes as dimensões *box-counting* e de Hausdorff;
- de exemplos clássicos do cálculo das dimensões *box-counting* e de Hausdorff por meio de suas respectivas definições;
- de sistemas de funções iteradas;
- do Princípio de Distribuição de Massa;

- de resultados sobre o atrator de um sistema de funções iteradas e sua relação com os fractais (tais como, por exemplo, o teorema de Hutchinson); e
- do conceito de Caos segundo Devaney e de sua aplicação ao estudo da dinâmica caótica nos fractais.

1.2 Organização do documento

Para uma visão completa deste trabalho, os capítulos encontram-se assim organizados:

✓ **CAPÍTULO 2:** Neste capítulo faremos uma breve revisão dos conceitos básicos da teoria da medida, tais como: σ -álgebra, medida, espaço de medida, medida de Lebesgue, medidas completas, medidas exteriores e o teorema clássico de Carathéodory.

✓ **CAPÍTULO 3:** Neste capítulo apresentaremos algumas propriedades do conjunto de Cantor ternário. Bem como, o processo de construção de alguns fractais clássicos encontrados na literatura, como por exemplo: o conjunto de Cantor ternário, o triângulo de Sierpinski, a curva de Koch e os famosos conjuntos de Julia.

✓ **CAPÍTULO 4:** Neste capítulo estudaremos os conjuntos 0-dimensionais (provaremos que o conjunto de Cantor ternário, o conjunto dos números racionais e irracionais são 0-dimensionais). Além disso, introduziremos os conceitos de dimensão de cobertura (provaremos que o triângulo de Sierpinski tem dimensão de cobertura igual a 1), por fim, a dimensão indutiva fraca.

✓ **CAPÍTULO 5:** Este capítulo é dedicado ao estudo da dimensão *box-counting*, suas propriedades, limitações e alguns exemplos: intervalo da reta e o conjunto de Cantor ternário.

✓ **CAPÍTULO 6:** Neste capítulo, voltaremos nossa atenção ao estudo da medida exterior de Hausdorff e suas propriedades. Em seguida, definiremos a dimensão de Hausdorff de um subconjunto do \mathbb{R}^n . Posteriormente, calcularemos a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor ternário e do cantor Dust via definição. Por fim, mostraremos que a curva de Takagi é um fractal cujas dimensões fractal e topológica são ambas iguais a 1 e que, portanto, é um exemplo de fractal não contemplado pela definição 1.1.

✓ **CAPÍTULO 7:** Neste capítulo, veremos que, em muitos casos, *fractais* são definidos como atratores de um *sistema de funções iteradas (IFS)*. Definir fractais por meio de sistemas de funções iteradas muitas vezes facilita o cálculo de sua dimensão de Hausdorff, uma vez que fazer o cálculo pela definição é, em geral, bastante complicado. Sendo assim, estudaremos, os conceitos de contração, sistemas de funções iteradas, métrica de Hausdorff, atrator de um IFS, bem como, um exemplo.

✓ **CAPÍTULO 8:** Na primeira parte deste capítulo, apresentaremos o espaço dos códigos associado a um IFS, o conjunto dos pontos periódicos, transitividade topológica e sensibilidade às condições iniciais, bem como, introduzimos o conceito de caos segundo a definição de Devaney [Dev07] e provamos que a aplicação shif (definida em Σ_m) é caótica. Além disso, na segunda parte, exploraremos o conceito de IFS totalmente desconexo, de transformação de mudança S associado a um IFS. Na última parte, utilizaremos os resultados provados na primeira e segunda parte para provar um teorema que dá condições suficientes para que S seja caótica. Em seguida, utilizaremos esse teorema para provar que a aplicação de mudança associado ao IFS (sendo $C_{\frac{1}{3}}$ seu atrator) é caótica segundo a definição de Devaney.

✓ **CAPÍTULO 9:** Neste capítulo, iremos apresentar e demonstrar o teorema de Moran, que

nos garante que se o IFS, $\{\mathbb{R}^n; S_1, \dots, S_m\}$, composto por similaridades definidas em \mathbb{R}^n , que satisfaz a OSC e F o conjunto atrator desse sistema, então a dimensão de similaridade de F — que é o único número real s tal que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ — coincide com a dimensão Hausdorff de F . Para isso, introduziremos o conceito de distribuição de massa, bem como provaremos o teorema de distribuição de massa o qual é importante para obtermos uma cota inferior da dimensão de Hausdorff de $F \subseteq \mathbb{R}^n$ e vários outros resultados essenciais que serão utilizados na demonstração. Em sequência, calcularemos a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor ternário e do triângulo de Sierpinski. Na última parte, provaremos uma versão do teorema de Moran que diz respeito ao caso em que $\{S_1, \dots, S_m\}$ são contrações, mas não necessariamente similaridades, e, por fim, aplicaremos esses resultados para obter uma estimativa da dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia associado ao polinômio $f_c(z) := z^2 + c$ para o caso em que $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$.

1.3 Mensagem ao leitor

Visando a didática e a melhor compreensão do texto, apresentamos várias imagens no decorrer do trabalho. Elas foram construídas por meio dos softwares Math Chá ¹, Geogebra ² e da linguagem de programação Python ³ para plotagem de gráficos. Algumas imagens foram baseadas ou retiradas dos livros [Fal04], [Egl99] e [Sut14]. Para uma melhor compreensão deste trabalho, é necessário que o leitor tenha familiaridade com os conceitos básicos de análise e topologia geral. Desejo a todos uma boa leitura!

¹<https://www.mathcha.io/editor>

²<https://www.geogebra.org/?lang=pt>

³<https://python.org.br>

Capítulo 2

Noções básicas sobre teoria da medida

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições relevantes, tais como, os conceitos de σ -álgebra, medida, espaço de medida, medida de Lebesgue, medidas completas, medidas exteriores e o teorema clássico de Carathéodory. Esses conceitos são importantes para um melhor entendimento da demonstração do teorema de Moran 9.17 presente no capítulo 9. No entanto, o leitor que já estiver familiarizado com os resultados aqui enunciados poderá começar a leitura a partir do capítulo 3. Em suma, este capítulo é baseado no livro “*Real Analysis*” [Fol99], do autor Folland.

2.1 Notação

Utilizaremos ao longo do texto as seguintes notações:

- O conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$ será denotado por \mathbb{N} ;
- O conjunto dos números inteiros, reais, racionais, irracionais e complexos será denotado, respectivamente, por \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{Q} , \mathbb{I} e \mathbb{C} ;
- Dado um conjunto A , o conjunto das partes de A , será denotado por $\mathcal{P}(A) := \{X : X \subseteq A\}$;
- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec X$ denotará $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ (isto é, x é uma sequência a valores no conjunto X);
- $\#A$ denotará a cardinalidade do conjunto A ;
- $B_r(x)$ denotará a bola aberta de raio igual a r e centro x .

2.2 σ -álgebra, medida e espaço de medida

Definição 2.1 (ÁLGEBRA DE CONJUNTOS). Seja X um conjunto não vazio. Uma **álgebra de conjuntos** em X é uma coleção não vazia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X que é fechada sob uniões finitas e complementares, isto é:

1. Se $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{A}$, então $\bigcup_{i=1}^k A_i \in \mathcal{A}$;
2. Se $A_1 \in \mathcal{A}$, então $A_1^c = X \setminus A_1 \in \mathcal{A}$.

Definição 2.2 (σ -ÁLGEBRA). Seja X um conjunto não vazio. Uma **σ -álgebra** \mathcal{A} em X é uma álgebra de conjuntos que é fechada também sob uniões enumeráveis, isto é, para qualquer sequência $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Observação 2.3. As σ -álgebras são fechadas também sob intersecções enumeráveis. De fato, dada uma σ -álgebra \mathcal{A} , resulta da lei de De Morgan que, se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$, então

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left(\underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c}_{\in \mathcal{A}} \right)^c \in \mathcal{A}.$$

Observação 2.4. Qualquer σ -álgebra sobre X contém \emptyset e X . De fato, dada uma σ -álgebra \mathcal{A} sobre X , resulta do fato de que \mathcal{A} é não vazia que existe $A \in \mathcal{A}$ — o que, por sua vez, permite-nos concluir que $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{A}$, e que $X = A \cup A^c \in \mathcal{A}$.

Exemplo 2.5. Se X é um conjunto qualquer, então $\{\emptyset, X\}$ é a menor σ -álgebra de X e $\mathcal{P}(X)$ é a maior σ -álgebra de X . Com efeito, resulta da definição de σ -álgebra e da observação anterior que qualquer σ -álgebra sobre X contém $\{\emptyset, X\}$ e está contida em $\mathcal{P}(X)$.

Exemplo 2.6. A interseção de uma família de σ -álgebra é uma σ -álgebra.

Definição 2.7 (σ -ÁLGEBRA GERADA). Sejam X conjunto, $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. Pelo exemplo 2.6 existe uma σ -álgebra $\sigma(S) \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1. $S \subset \sigma(S)$;
2. Para todo $A \subset \mathcal{P}(X)$ σ -álgebra com $S \subset A$, $\sigma(S) \subset A$.

A saber, $\sigma(S) = \bigcap \{A \subset \mathcal{P}(X) : A \text{ } \sigma\text{-álgebra e } S \subseteq A\}$ chama-se **σ -álgebra gerada por S** .

Definição 2.8 (σ -ÁLGEBRA DE BOREL). Seja (X, τ) espaço topológico. A σ -álgebra $\sigma(\tau)$ chama-se **σ -álgebra de Borel de (X, τ)** e denota-se por $\mathcal{B}(X)$.

Definição 2.9 (MEDIDA). Seja X um conjunto equipado com um σ -álgebra \mathcal{A} . Uma **medida** em \mathcal{A} é uma aplicação $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ que satisfaz:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Se $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ é uma coleção enumerável disjunta, então $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Definição 2.10. (X, \mathcal{A}) é chamado um **espaço mensurável**, os conjuntos em \mathcal{A} são chamados de **conjuntos mensuráveis** e (X, \mathcal{A}, μ) é chamado de **espaço de medida**.

Proposição 2.11. *Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida. Valem as seguintes propriedades*

1. (*Monotonicidade*) Se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. (*Subaditividade enumerável*) Dados $A \in \mathcal{A}$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ com $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.
3. (*Continuidade para cima*) Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ é crescente, então

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

4. (*Continuidade para baixo*) Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ é decrescente, então

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Observação 2.12. Provaremos a propriedade 4 (continuidade para baixo) da proposição seguinte, pois será utilizada no capítulo 3 para mostrar que o conjunto de Cantor tem medida de Lebesgue de, dimensão 1, nula. O leitor poderá encontrar a demonstração dos outros itens em [Fol99].

Demonstração. Podemos supor, descartando os termos iniciais da sequência, que $n_0 = 1$, isto é, que $\mu(A_1) < \infty$. Note que $(A_1 \setminus A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ é crescente e

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_1 \setminus A_n \stackrel{\text{De Morgan}}{=} A_1 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Sendo assim, pela propriedade 3, podemos concluir que

$$\mu \left(A_1 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \quad \square$$

2.3 Medida Exterior e o teorema de Carathéodory

Definição 2.13 (MEDIDA EXTERIOR). Sejam X um conjunto e $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$. Nessas condições, diz-se que μ^* é uma medida exterior se:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2. Para qualquer sequência $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

Observação 2.14. Se $A \subseteq B$, então, para cada $i \in \mathbb{N}$, considere os B_i , tal que $B_i = B$, se $i = 1$, e $B_i = \emptyset$, se $i \geq 2$. Sendo assim, a propriedade de monotonicidade da medida exterior μ^* segue do item 2 da definição 2.13.

Apresentaremos a seguir alguns exemplos de medida exterior.

Exemplo 2.15. Seja

$$\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$$

$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0, & \text{se } A = \emptyset \\ 1, & \text{se } A \neq \emptyset \end{cases}.$$

Afirmamos que μ^* é uma medida exterior. De fato,

- Por definição, $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- Se $A \subseteq B$, então precisamos considerar dois casos:
 - Se $A = \emptyset$, então $\mu^*(A) = 0 \leq \mu^*(B)$;
 - Se $A \neq \emptyset$, então $B \neq \emptyset$ já que $A \subseteq B$, e, portanto $\mu^*(A) = 1 = \mu^*(B)$.
- Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tais que $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Nessas condições,
 - Se $A = \emptyset$, então $\mu^*(A) = 0 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$;
 - Se $A \neq \emptyset$, então como $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_{i_0} \neq \emptyset$, logo

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \geq \mu^*(A_{i_0}) = 1 = \mu^*(A).$$

Exemplo 2.16. Seja

$$\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, +\infty]$$

$$\mu^*(A) := \begin{cases} \#A, & \text{se } A \text{ é finito} \\ \infty, & \text{se } A \text{ é infinito} \end{cases}.$$

- Se $A \neq \emptyset$, então $\#A = 0$, logo $\mu^*(A) = 0$.
- Sejam $A \subseteq \mathbb{N}$ e $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tais que $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Nessas condições:
 - Se $\mathcal{J} := \{i \in \mathbb{N} : A_i \neq \emptyset\}$ for infinito, então $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \infty \geq \mu^*(A)$;
 - Se $\mathcal{J} := \{i \in \mathbb{N} : A_i \neq \emptyset\}$ for finito, teremos, novamente, dois casos a considerar:

* Se existir $i_0 \in \mathcal{J}$ tal que A_{i_0} é infinito, então

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \geq \mu^*(A_{i_0}) = +\infty \leq \mu^*(A).$$

* Se, por outro lado, A_i for finito qualquer que seja $i \in \mathcal{J}$, como $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} A_i$, então $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ será finita (e, portanto, A será também finito). Logo, como $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$,

$$\mu^*(A) = \#A \leq \# \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \# \bigcup_{i \in \mathcal{J}} A_i \leq \sum_{i \in \mathcal{J}} \#A_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Teorema 2.17. *Sejam X conjunto, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\emptyset \in \mathcal{A}$ e $\rho: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\rho(\emptyset) = 0$. Então*

$$\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$$

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i) : A_i \in \mathcal{A} \text{ para todo } i \text{ e } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

é uma medida exterior.

Demonstração. Como $A \subset X \in \mathcal{A}$, μ^* está bem definida.

- $\mu^*(\emptyset) = 0$ (basta tomar $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ com $A_i = \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$).
- Se $A \subseteq B$, e $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ é tal que $B \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, então $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, e, portanto,

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i) : (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ cobre } B \right\} \subset \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i) : (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ cobre } A \right\}.$$

Logo, nesse caso, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

- Seja $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e denote $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Por definição de μ^* , dado $\epsilon > 0$, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe uma família $\{A_i^j\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i^j) \leq \mu^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Como $A \subset \bigcup_{i,j=1}^{\infty} A_i^j$ e

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \rho(A_i^j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \epsilon$$

segue que $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é completamente arbitrário, segue o resultado. \square

Definição 2.18 (PRÉ-MEDIDA EXTERIOR). Com a notação da proposição 2.17, chamaremos ρ de **pré-medida exterior** e μ^* a **medida exterior induzida** por ρ .

A seguir algumas definições fundamentais para compreensão do teorema de Caratheódory.

Definição 2.19 (μ^* -MENSURÁVEL). Seja $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ uma medida exterior. Dizemos que $A \subset X$ é μ^* -**mensurável** se for cumprida a condição de Carathéodory:

$$\forall E \subset X, \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Observação 2.20. Para que condição de Carathéodory seja verificada, basta que, para todo $E \subset X$ com $\mu^*(E) < \infty$,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

Definição 2.21 (CONJUNTO NULO). Dado (X, \mathcal{A}, μ) , $N \subset X$ dizemos que N é nulo se existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(B) = 0$ e $N \subset B$.

Definição 2.22 (MEDIDA COMPLETA). Dizemos que uma medida $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ é **completa** se todo nulo for mensurável, ou seja, se $N \subset X$ é nulo então $N \in \mathcal{A}$.

Por fim, encerraremos esse capítulo enunciando o clássico teorema a seguir.

Teorema 2.23 (CARATHÉODORY). *Sejam X um conjunto e $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ uma medida exterior. Então:*

1. $\sigma(\mu^*) := \{E \subset X : E \text{ é } \mu^* \text{-mensurável}\}$ é uma σ -álgebra e $\mu^* \Big|_{\sigma(\mu^*)}$ é uma medida.
2. Para todo $E \subset X$ tal que $\mu^*(E) = 0$, tem-se $E \in \sigma(\mu^*)$. Em particular, $\mu^* \Big|_{\sigma(\mu^*)}$ é completa

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Fol99]. □

Capítulo 3

Fractais Clássicos

Neste capítulo, apresentaremos o processo de construção e algumas propriedades interessantes dos fractais clássicos que serão utilizados nos próximos capítulos, sendo eles: o conjunto de Cantor ternário, o triângulo de Sierpinski, a curva de Koch e os famosos conjuntos de Julia. As referências utilizadas nesse capítulo foram: [SA11], [Dev99], [Dev07], [Sut14] e [Lom20].

3.1 O conjunto de Cantor ternário

Entre suas muitas contribuições para a Matemática, Cantor inventou a teoria dos conjuntos, que é um ramo da lógica matemática. Uma das mais belas descobertas de Cantor foi a existência de subconjuntos da reta, mostrando que a geometria de subconjuntos de espaços de dimensão topológica igual a 1 podem ser realmente surpreendentes. O exemplo mais famoso é um conjunto que leva seu nome, deu origem ao primeiro objeto fractal criado: o conjunto de Cantor ternário, que neste trabalho será denotado por $C_{\frac{1}{3}}$. Este fractal também é conhecido como poeira de Cantor, e foi apresentado à comunidade matemática em 1883, tendo grande relevância para a definição dos fundamentos matemáticos.

Para a construção de $C_{\frac{1}{3}}$, tomemos o intervalo fechado $I_0 = [0, 1]$ e retiramos o intervalo aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ de $[0, 1]$ (que é o seu terço médio) e obtemos I_1 que é a união disjunta de dois intervalos fechados cada um de comprimento $\frac{1}{3}$, isto é,

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Repetindo esse processo, retiramos, em seguida, os terços médios dos intervalos $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$, que são, respectivamente, os abertos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ e $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, assim obtemos, I_2 que é formado por quatro intervalos fechados de comprimento $\frac{1}{9}$, ou seja,

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Continuando esse processo para os quatro intervalos fechados de I_2 , retirando o terço médio de cada intervalo, obtemos oito intervalos de comprimento $\frac{1}{27}$. Sendo assim,

$$I_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right].$$

Repetindo infinitamente esse processo, para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos obter $I_n \subseteq [0, 1]$ que é constituído pela união disjunta de 2^n intervalos fechados de comprimento $\frac{1}{3^n}$ tal que $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$. Portanto, o conjunto de cantor ternário é definido da seguinte forma:

$$C_{\frac{1}{3}} := \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n.$$

A imagem 3.1 a seguir ilustra a construção do conjunto de Cantor ternário.

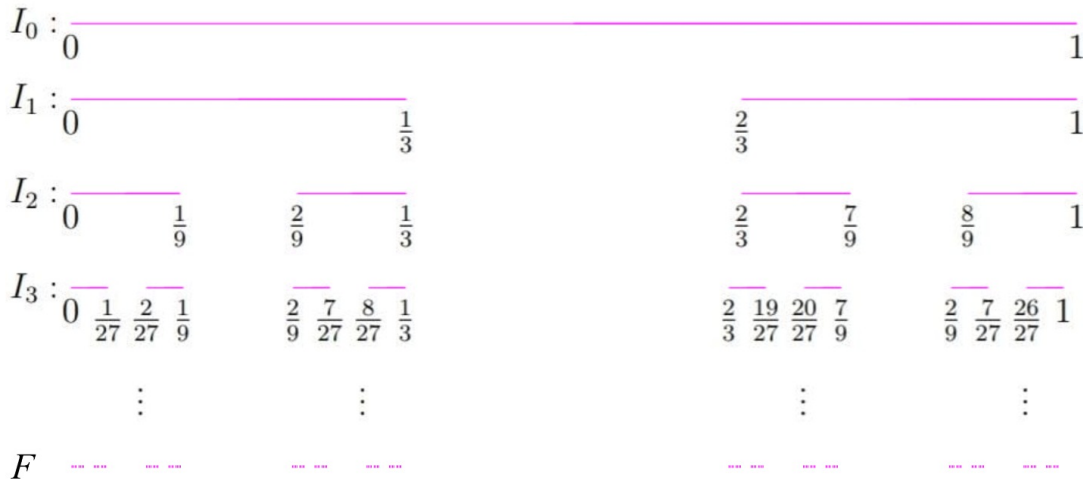


Figura 3.1. Construção de $C_{\frac{1}{3}}$.
Fonte: autora.

A seguir provaremos algumas propriedades interessantes de $C_{\frac{1}{3}}$.

Proposição 3.1. *A soma dos comprimentos dos subintervalos de $[0, 1]$ removidos na construção de $C_{\frac{1}{3}}$ é igual a 1.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, são removidos 2^{n-1} intervalos abertos de comprimento $\frac{1}{3^n}$ na construção de $C_{\frac{1}{3}}$ quando se passa da etapa $n - 1$ para a etapa n . A soma dos comprimentos dos subintervalos de $[0, 1]$ removidos na construção de $C_{\frac{1}{3}}$ é, portanto, igual a $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n}$. É fácil ver, contudo, que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

— a partir do que concluímos, por fim, que a soma dos comprimentos dos subintervalos de $[0, 1]$ removidos na construção do conjunto de Cantor ternário é igual a 1. □

Proposição 3.2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja S_n a soma dos comprimento dos subintervalos de $[0, 1]$ presentes na enésima etapa da construção de $C_{\frac{1}{3}}$. Nessas condições, tem-se*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0.$$

Demonstração. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se 2^n intervalos de comprimento $\frac{1}{3^n}$ presentes na enésima etapa da construção de $C_{\frac{1}{3}}$, podemos concluir que

$$S_n = 2^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0. \quad \square$$

Corolário 3.3. *A medida de Lebesgue de dimensão 1 de $C_{\frac{1}{3}}$ é nula. Isto é, $m^1(C_{\frac{1}{3}}) = 0$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja S_n tal como na proposição anterior. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, I_n é uma reunião de intervalos dois a dois disjuntos, resulta da definição de medida que $m^1(I_n) = S_n$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, podemos concluir, em vista da propriedade de continuidade para baixo de m^1 e da proposição 3.2, que

$$m^1\left(C_{\frac{1}{3}}\right) = m^1\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} I_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(I_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \stackrel{3.2}{=} 0. \quad \square$$

Observação 3.4. Mais informações sobre a medida de Lebesgue podem ser encontradas em [Fol99].

Definição 3.5 (REPRESENTAÇÃO TERNÁRIA). Seja $x \in [0, 1]$, a **representação ternária de x** é $0, x_1 x_2 x_3 \dots$, em que cada um dos dígitos x_n é igual a 0, 1 ou 2, tal que

$$x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \dots + \frac{x_n}{3^n} + \dots$$

A seguinte observação será importante para compreensão do próximo teorema.

Observação 3.6. É fácil ver que $(0, 1)_3 = (0, 02222 \dots)_3$. Para isso, faremos a conversão de $\frac{1}{3}$ da base 10 para a base 3, de 2 modos diferentes. Com efeito, observe que:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3^1} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)_{10} = (0, 1)_3.$$

Outra maneira é utilizar a série geométrica. Primeiramente observe que para $|q| < 1$, vale $S_n = \frac{a_1}{1 - q}$, em que S_n representa a soma dos termos da série geométrica, a_1 é o primeiro termo e q é a razão. Assim, temos:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \dots = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \dots = \frac{\frac{1}{3^2}}{1 - \frac{1}{3}}$$

Utilizaremos este resultado logo abaixo. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{3}{9} = 2 \cdot \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\frac{9}{2}}{9}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{3} - \frac{1}{3}}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\frac{1}{3^2}}{1 - \frac{1}{3}}\right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \dots\right) = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \dots \\ &= \frac{0}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \dots \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)_{10} = (0, 02222 \dots)_3. \end{aligned}$$

Portanto, $\left(\frac{1}{3}\right)_{10} = (0, 1)_3 = (0, 02222 \dots)_3$. Sendo assim, podemos utilizar um raciocínio análogo para mostrar que $(0, 01)_3 = (0, 002222 \dots)_3$, $(0, 001)_3 = (0, 0002222 \dots)_3$, etc. Assim,

podemos afirmar que um ponto pertence ao conjunto de Cantor quando sua representação decimal na base 3 contém apenas os algarismos 0 e 2, ou quando possui um único algarismo 1 como algarismo significativo final (e neste caso, ele poderá ser substituído pela sequência $(0, 2, 2, 2, 2, \dots)$).

Proposição 3.7. $C_{\frac{1}{3}}$ pode ser escrito em base ternária utilizando apenas os algarismos 0 e 2, ou

$$\text{seja, } C_{\frac{1}{3}} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, x_n \in \{0, 2\}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Demonstração. Faremos uma análise dos intervalos removidos em cada etapa da construção de $C_{\frac{1}{3}}$.

- Na primeira etapa da construção de $C_{\frac{1}{3}}$, é removido o intervalo aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Como $\frac{1}{3} = (0, 1)_3$, e $\frac{2}{3} = (0, 2)_3$, podemos concluir que todos os números da forma $(0, 1x_2x_3\dots)_3$ — isto é, que estão entre $(0, 1)_3$ e $(0, 2)_3$ — foram removidos na primeira etapa da construção, com exceção de $\frac{1}{3} = (0, 1)_3$.
- Continuando a análise, na segunda etapa da construção de $C_{\frac{1}{3}}$ são removidos os intervalos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Sendo assim:
 - Observe que no intervalo $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, o número $\frac{1}{9} = (0, 01)_3$ e $\frac{2}{9} = (0, 02)_3$. Portanto, todos os números da forma $x = (0, 01x_3x_4\dots)_3$, isto é, que está entre $(0, 01)_3$ e $(0, 02)_3$ foram removidos na segunda etapa da construção, com exceção do $\frac{1}{9} = (0, 01)_3$.
 - Observe que no intervalo $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, os números $\frac{7}{9} = (0, 21)_3$ e $\frac{8}{9} = (0, 22)_3$. Portanto, podemos concluir que todos os números da forma $x = (0, 21x_3x_4\dots)_3$ foram removidos, com exceção do $\frac{7}{9} = (0, 21)_3$ e $\frac{8}{9} = (0, 22)_3$.
- Na terceira etapa da construção de $C_{\frac{1}{3}}$ são removidos os intervalos $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$ e $\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$. Observe que $\frac{1}{27} = (0, 001)_3$, $\frac{7}{27} = (0, 021)_3$, $\frac{19}{27} = (0, 201)_3$ e que $\frac{25}{27} = (0, 221)_3$. Portanto, todo número das formas $x = (0, 001x_4x_5\dots)_3$, $x = (0, 021x_4x_5\dots)_3$, $x = (0, 201x_4x_5\dots)_3$ e $x = (0, 221x_4x_5\dots)_3$, isto é, que estão entre $(0, 001)_3$ e $(0, 002)_3$, ou $(0, 001)_3$ e $(0, 002)_3$, ou $(0, 201)_3$ e $(0, 202)_3$, ou $(0, 221)_3$ e $(0, 222)_3$, foram removidos na terceira etapa da construção, com exceção dos números $\frac{1}{27} = (0, 001)_3$, $\frac{7}{27} = (0, 021)_3$, $\frac{19}{27} = (0, 201)_3$ e $\frac{25}{27} = (0, 221)_3$.

Aplicando a ideia anterior até a n -ésima etapa, por indução, podemos concluir que ficam restando apenas números cujo representação decimal na base ternária constam apenas algarismos 0 e 2, ou números decimais exatos terminados em 1 que pela observação 3.6 podem ser substituídos por dízimas periódicas que constam apenas algarismos 0 ou 2. \square

A seguir provaremos algumas propriedades de natureza topológica do $C_{\frac{1}{3}}$.

Proposição 3.8. *O conjunto de Cantor ternário:*

1. tem interior vazio;
2. não contém pontos isolados;

3. é compacto; e

4. é não enumerável.

Demonstração. • **Prova do item 1.** Suponha, por absurdo, que $C_{\frac{1}{3}}$ possua um ponto interior x . Nesse caso, podemos fixar $r > 0$ de modo que o intervalo $J := (x - r, x + r) \subseteq C_{\frac{1}{3}}$. No entanto, $m^1(J) = \text{diam}(J) = 2r$, logo, por monotonicidade,

$$m^1(C_{\frac{1}{3}}) \geq m^1(J) = 2r.$$

Mas, pela proposição 3.3, $m^1(C_{\frac{1}{3}}) = 0$. Sendo assim, teríamos $0 \geq m(J) = 2r$, o que seria um absurdo. Portanto, $C_{\frac{1}{3}}$ tem interior vazio.

• **Prova do item 2.** Provaremos que $C_{\frac{1}{3}}$ não possui pontos isolados, ou seja, que todo ponto $x \in C_{\frac{1}{3}}$ é de acumulação. Para isso, vamos analisar dois casos:

– É fácil ver que os extremos dos intervalos presentes em cada etapa da construção de $C_{\frac{1}{3}}$ pertencem todos a $C_{\frac{1}{3}}$, uma vez que, na transição de cada uma das etapas para a seguinte, são removidos somente pontos interiores dos intervalos que estavam presentes na etapa em questão. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$, e seja x o extremo de um dos intervalos presentes na etapa n_0 . Por simplicidade, podemos supor que esse intervalo seja da forma $[b_{n_0}, x]$, em que $b_{n_0} \in C_{\frac{1}{3}}$ (se ele fosse da forma $[x, b_{n_0}]$, a demonstração seria análoga). Nessas condições, é fácil ver que, para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, existe $b_n \in C_{\frac{1}{3}}$ tal que $[b_n, x]$ é um dos intervalos presentes na n -ésima etapa da construção de $C_{\frac{1}{3}}$. Como, porém, o comprimento de cada intervalo presente na n -ésima etapa da construção de $C_{\frac{1}{3}}$ é $\frac{1}{3^n}$, podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}([b_n, x]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0,$$

e, portanto, que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$. Logo, x é ponto de acumulação de $C_{\frac{1}{3}}$.

– Seja $x \in C_{\frac{1}{3}}$ tal que x não seja extremo de nenhum intervalo presente em alguma das etapas da construção de $C_{\frac{1}{3}}$. Nesse caso, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem b_n e c_n em $C_{\frac{1}{3}}$ tais que $x \in [b_n, c_n]$, e $[b_n, c_n]$ é um dos intervalos presentes na n -ésima etapa da construção de $C_{\frac{1}{3}}$. Como, porém, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\text{diam}([b_n, c_n]) = \frac{1}{3^n}$, é imediato ver que $x - \frac{1}{3^n} < b_n < x + \frac{1}{3^n}$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. E, uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[x - \frac{1}{3^n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x + \frac{1}{3^n} \right] = 0,$$

disso concluímos, pelo teorema do confronto, que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$, e, portanto, que x é ponto de acumulação de $C_{\frac{1}{3}}$.

• **Prova do item 3.** Observe que, por construção, $C_{\frac{1}{3}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Sendo assim, $C_{\frac{1}{3}}$ é interseção de intervalos fechados e, portanto, é fechado. Além disso, $C_{\frac{1}{3}}$ é, também, claramente limitado, pois está contido em $[0, 1]$. Consequentemente, $C_{\frac{1}{3}}$ é compacto.

• **Prova do item 4.** Inicialmente, note que $\{0, 2\}^{\mathbb{N}} := \{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots) : \sigma_i \in \{0, 2\}, i \geq 1\}$ é não enumerável. Para ver isso, considere $\rho : \{0, 2\} \rightarrow \{0, 2\}$ tal que $\rho(0) = 2$ e $\rho(2) = 0$ e suponha que $g : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ seja uma bijeção. Nessas condições, é fácil ver que $\sigma := (\rho(g_1(1)), \rho(g_2(2)), \dots) \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, em que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n(n)$ é o n -ésimo termo de $g(n)$, não pertence à imagem de g — o que, por sua vez, é uma contradição. Afirmamos que

existe uma bijeção $f : C_{\frac{1}{3}} \rightarrow \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ (essa aplicação é chamada de endereçamento, conforme veremos no capítulo 8). Portanto, $C_{\frac{1}{3}}$ é não enumerável. \square

No capítulo 4 veremos que $C_{\frac{1}{3}}$ é um conjunto 0-dimensional e no capítulo 5 e 6 veremos que a dimensão de Hausdorff e *box-counting* de $C_{\frac{1}{3}}$ são ambas iguais a $\frac{\log(2)}{\log(3)}$.

3.2 Triângulo de Sierpinski

O matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882–1969) foi amplamente reconhecido pelos seus trabalhos, dado seu nome a este fractal clássico: o triângulo de Sierpinski, que neste trabalho será denotado por \mathcal{T} . Existem inúmeras maneiras para construí-lo, a mais clássica inicia-se a partir de um triângulo equilátero \mathcal{T}^0 de lado 1. Assim, são feitas as marcações dos pontos médios dos lados de um triângulo equilátero de lado 1 e as ligações deles de forma a obter quatro novos triângulos equiláteros. Posteriormente, é removido o triângulo central, obtendo um conjunto \mathcal{T}^1 . O procedimento anterior é repetido, infinitamente, em cada um dos três triângulos restantes, gerando uma sequência $\mathcal{T}^0 \supset \mathcal{T}^1 \supset \dots \supset \mathcal{T}^n \supset \dots$, em que cada \mathcal{T}^n é formado por 3^n regiões triangulares, similares a região inicial, cujos lados medem $\frac{1}{2^n}$ da medida do lado do triângulo inicial. O resultado final é o triângulo de Sierpinski (que pode ser observado pela Figura 3.2) é o conjunto limite dessa sequência de pontos, isto é,

$$\mathcal{T} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}^n.$$

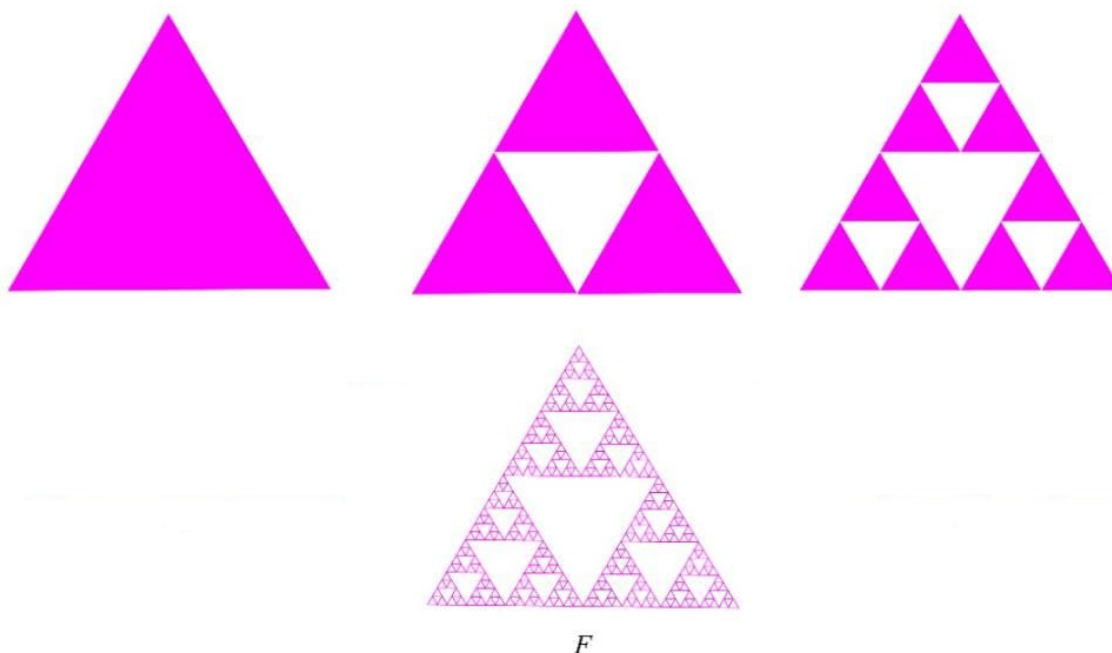


Figura 3.2. Construção do Triângulo de Sierpinski.

Fonte: autora.

O triângulo de Sierpinski, \mathcal{T} , possui as seguintes propriedades:

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se M_n é o número de triângulos presentes na n -ésima etapa da construção de \mathcal{T} , então $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = +\infty$;
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma S_n dos perímetros dos triângulos presentes na n -ésima etapa da construção \mathcal{T} é igual a $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$. Em particular, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$;

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a área de cada um dos triângulos presentes na n -ésima etapa da construção de \mathcal{T} é igual a $(\frac{1}{4})^n A_0$, em que A_0 é a área do triângulo equilátero inicial. Além disso, se para cada $n \in \mathbb{N}$, W_n é a soma das áreas dos triângulos presentes na n -ésima etapa da construção de \mathcal{T} , então $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$.

No capítulo 4 veremos que o triângulo de Sierpinski tem dimensão de cobertura igual a 1 e no capítulo 7 veremos que a dimensão de Hausdorff e *box-counting* de \mathcal{T} são ambas iguais a $\frac{\log(3)}{\log(2)}$.

3.3 Curva de Koch

O matemático Niels Von Koch deu nome ao fractal curva de Koch, que neste trabalho será denotada por \mathcal{K} , sendo um dos primeiros fractais de curva descoberto. A Curva de Koch é um tipo de curva contínua que não tem tangente em nenhum dos seus pontos. A obtenção da Curva de Koch é dada pelos seguintes processos, segundo Sabogal e Arenas [SA11] (2011):

1. Considere um segmento \mathcal{K}_0 de comprimento ℓ ;
2. Divida o segmento ℓ em três partes idênticas, e substitua o seu terço do meio por um triângulo equilátero sem a sua base, formando então uma linha poligonal \mathcal{K}_1 de quatro segmentos consecutivo (em uma espécie de “ponta de estrela”);
3. Repita o processo anterior nos quatro segmentos restantes, obtendo assim \mathcal{K}_2 .

Em suma, repetindo os procedimentos descritos infinitamente, obtemos uma sequência de conjuntos $\{\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots\}$, cujo limite é a curva de Koch que pode ser observada pela Figura 3.3.

A curva de Koch, \mathcal{K} , possui as seguintes propriedades:

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se K_n é o número de segmentos presentes na n -ésima etapa da construção de \mathcal{K} , então $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = +\infty$;
2. Se para cada $n \in \mathbb{N}$, ℓ_n é o comprimento de cada um dos segmentos presentes na n -ésima etapa da construção de \mathcal{K} , então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = 0$; e
3. Se para cada $n \in \mathbb{N}$, S_n é a soma dos comprimentos dos segmentos presentes na n -ésima etapa da construção de \mathcal{K} , então $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

3.4 Conjuntos de Julia

Nesta seção, apresentaremos os conjuntos de Julia e Fatou, bem como, alguns exemplos. O conjunto de Julia será utilizado no capítulo 7 para o cálculo da sua dimensão de Hausdorff impondo algumas condições.

O conjunto dos números complexos é definido como sendo:

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}.$$

Dessa forma, podemos ampliar o plano de números complexos com um ponto infinito e iremos denotá-lo por:

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

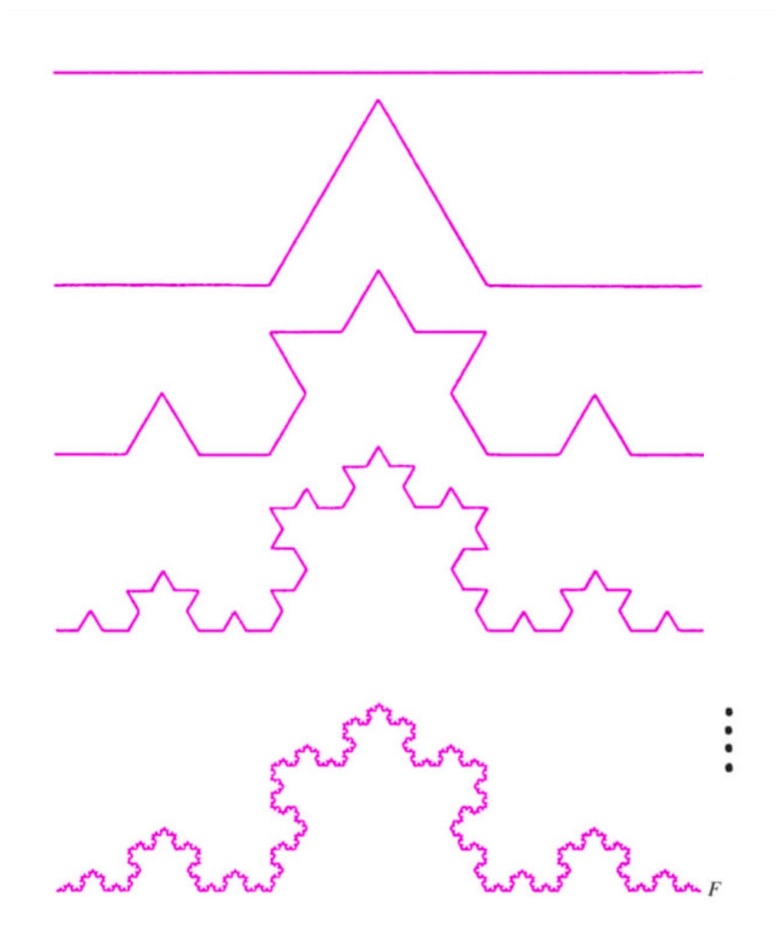


Figura 3.3. Construção da curva de Koch.

Fonte: autora.

na qual ∞ representa um ponto fora de \mathbb{C} . Munindo $\hat{\mathbb{C}}$ com a topologia, $\tau = \{U \subset \mathbb{C} : U \text{ é aberto}\} \cup \{(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\} : K \subset \mathbb{C} \text{ é compacto}\}$, esse conjunto se torna um espaço topológico compacto, Hausdorff, homeomorfo a esfera \mathbb{S}^2 . Seja $N = (0, 0, 1)$ e $S = (0, 0, -1)$ os polos norte e sul, respectivamente, em \mathbb{S}^2 . Assim, podemos definir a projeção estereográfica P_N (correspondente a N) que associa a cada ponto $X \in \mathbb{S}^2 \setminus N$ a interseção da reta (NX) com o plano $t = 0$, dada por:

$$P_N : \mathbb{S}^2 \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, t) \mapsto \frac{x + iy}{1 - t}.$$

Podemos definir também a projeção estereográfica P_S (correspondente a S) compondo com a aplicação conjugação, ou seja $z \mapsto \bar{z}$, dada por:

$$P_S : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, u) \mapsto \frac{x - iy}{1 + u}.$$

As cartas P_N e P_S formam um *atlas holomorfo* para a esfera \mathbb{S}^2 , que é chamada de esfera de Riemann.

Com isso, podemos definir funções holomorfas na esfera de Riemann. Seja $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ uma função racional definida por $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ em que p e q são polinômios tal que

$$\text{grau}(R) = \max\{\text{grau}(p), \text{grau}(q)\} \geq 2.$$

Definiremos a seguir o conceito de família normal que será utilizado para definir o conjunto de Fatou e Julia.

Definição 3.9 (FAMÍLIA NORMAL). Uma família \mathcal{G} de funções holomorfas $g : \mathcal{U} \subset \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ é **normal** se toda sequência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathcal{G} admite uma subsequência $(g_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente em compactos de \mathcal{U} .

Definição 3.10 (FAMÍLIA EQUICONTÍNUA). Uma família de funções é **equicontínua** se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta$ então $d(f_i(x), f_i(y)) < \epsilon$, $\forall i$.

Em análise complexa, uma função f é dita *meromorfa* em uma região $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ se for analítica (isto é, holomorfa) nessa região, com exceção de polos¹ isolados. Sendo assim, um dos resultados muito úteis para provar se uma dada família de funções holomorfas é normal, é o *Teorema de Arzelà* que afirma que se uma família de funções meromorfas $\{g_i : \mathcal{U} \subset \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\}$ é normal se, e somente se, é equicontínua em todo subconjunto compacto de \mathcal{U} .

Definição 3.11 (CONJUNTOS DE FATOU E JULIA). O **conjunto de Fatou** de R é o conjunto dos pontos $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ tal que $\{R^n\}$ é uma família normal em alguma vizinhança de z_0 . O **conjunto de Julia** de R é definido como o complementar do conjunto de Fatou.

Observação 3.12. Nesse trabalho denotaremos o conjunto de Julia por \mathcal{J} , e, focaremos nossa atenção ao estudo de conjuntos de Julia de polinômios quadráticos da forma $f_c(z) = z^2 + c$, em que c é uma constante complexa.

A seguir apresentaremos alguns exemplos de conjuntos de Julia e Fatou.

Exemplo 3.13. Considere

$$\begin{aligned} f: \hat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto z^2, \end{aligned}$$

dessa forma, $f^n(z) = z^{2^n}$. Como $f^n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, em $\{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z| < 1\}$, e $f^n \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$, em $\{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z| > 1\}$. Podemos observar pela Figura 3.4, que o conjunto de Julia de f é o círculo unitário em preto $\{|z| = 1\}$, e seu complementar é o conjunto de Fatou na qual possui duas componentes: $\text{Bas}(\infty)$ em rosa e $\text{Bas}(0)$ em roxo².

Exemplo 3.14. A Figura 3.5 representa o conjunto de Julia (em preto) do polinômio $R(z) = z^2 - 1$.

Exemplo 3.15. A Figura 3.6 representa o conjunto de Julia (em preto) do polinômio $R(z) = z^2 - i$.

O conjunto de Julia possui várias propriedades que podem ser encontradas em [Dev07]. Uma das principais caracterizações do conjunto de Julia é a seguinte:

Teorema 3.16. *O conjunto de Julia \mathcal{J} é o fecho dos pontos periódicos repulsores.*

Demonstração. Suponha o contrário, existe um aberto aberto U com $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ que não contém pontos periódicos, podemos assumir que U não contém polos nem pontos críticos de R . Sejam f_1, f_2 dois ramos de R^{-1} sobre U , como não existem soluções para $R^m(z) = z$ sobre U , então:

$$g_n = \frac{R^n - f_1}{z - f_2} \cdot \frac{R^n - f_2}{z - f_1}$$

omite os valores $0, 1, \infty$ em U . Pelo teorema de Montel A.1, $\{g_n\}$ é normal, logo $\{R^n\}$ é normal, uma contradição. Assim, \mathcal{J} está contido no fecho dos pontos periódicos. Mas \mathcal{J} é perfeito e existem só um número finito de ciclos atratores e neutros. \square

¹um *polo* de um função holomorfa é um determinado tipo de singularidade que se comporta como um singularidade do tipo $\frac{1}{z^n}$ no ponto $z = 0$.

²A bacia de p é por definição o conjunto $\{z \in \hat{\mathbb{C}} : f^n(p) \rightarrow p\}$ e é denotado por $\text{Bas}(p)$

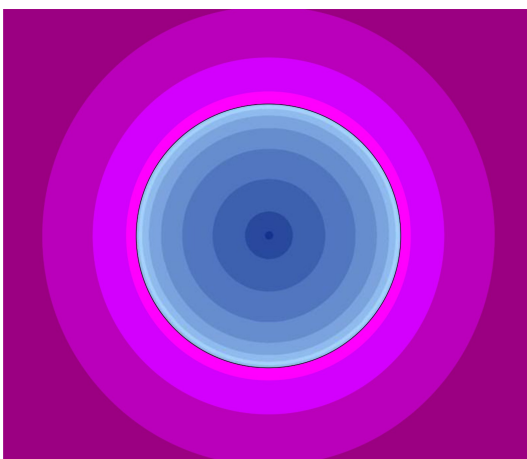


Figura 3.4. *Conjunto de Julia para $R(z) = z^2$.*
Fonte: autora, adaptada de [Sut14].

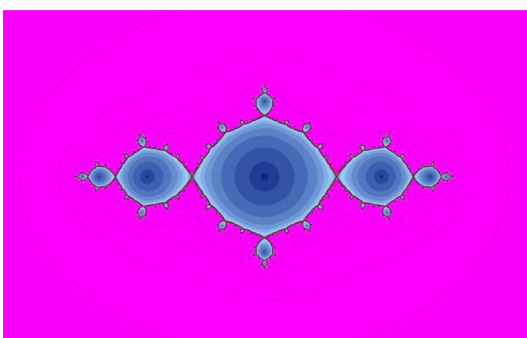


Figura 3.5. *Conjunto de Julia para $R(z) = z^2 - 1$.*
Fonte: autora, adaptada de [Sut14].

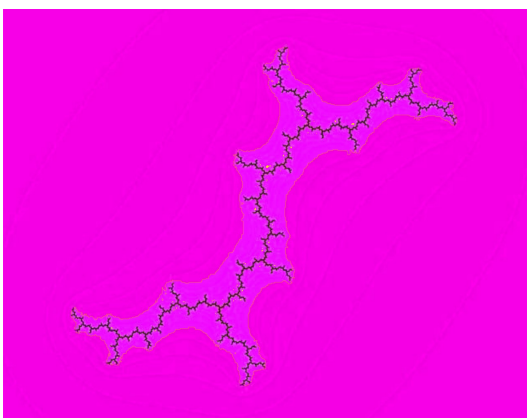


Figura 3.6. *Conjunto de Julia para $R(z) = z^2 - i$.*
Fonte: autora, adaptada de [Sut14].

Capítulo 4

Dimensão Topológica

Neste capítulo introduziremos o conceito dos conjuntos 0-dimensionais e provaremos que o $C_{\frac{1}{3}}$, o conjunto dos números racionais e irracionais são 0-dimensionais. Em seguida, apresentaremos a dimensão de cobertura e provaremos que o triângulo de Sierpinski tem dimensão de cobertura igual a 1. Por fim, exploraremos alguns resultados acerca da dimensão indutiva fraca. Esse capítulo é baseado no livro “*Measure, topology, and fractal geometry*” [Edg08], do autor Edgar.

4.1 Espaços 0-dimensionais

Inicialmente, iremos revisar algumas definições importantes para definirmos os conjuntos 0-dimensionais.

Definição 4.1 (SUBORDINADA). Se \mathcal{A} e \mathcal{B} são coleções de conjuntos, dizemos que \mathcal{B} é **subordinada** a \mathcal{A} se, e somente se, para cada $B \in \mathcal{B}$, existe um $A \in \mathcal{A}$ com $B \subseteq A$.

Definição 4.2 (COBERTURA ABERTA). Seja X um espaço métrico. Dizemos que \mathcal{C} é uma **cobertura aberta** de X se \mathcal{C} é uma coleção de abertos de X tal que $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = X$.

Definição 4.3 (REFINAMENTO). Um **refinamento** de \mathcal{C} é uma cobertura aberta \mathcal{A} de X que é subordinada a \mathcal{C} . Se \mathcal{A} é um refinamento de \mathcal{C} , dizemos que \mathcal{A} refina \mathcal{C} .

Exemplo 4.4. Toda subcobertura de \mathcal{C} é um refinamento de \mathcal{C} . De fato, se \mathcal{C}' é uma subcobertura de \mathcal{C} , então para cada $C' \in \mathcal{C}'$, temos que $C' \in \mathcal{C}$ e que $C' \subseteq C'$.

A proposição seguinte nos permite saber quando uma cobertura aberta possui um refinamento finito.

Proposição 4.5. *Um espaço métrico X é compacto se, e somente se, cada cobertura aberta de X possui um refinamento finito.*

Demonstração. De fato, se X é compacto, então toda cobertura aberta \mathcal{A} de X possui subcobertura finita \mathcal{A}' de X . Como vimos no exemplo 4.4, toda subcobertura finita de \mathcal{A} é um refinamento finito de \mathcal{A} . Suponhamos, agora, que toda cobertura aberta de X possui um refinamento finito. Nesse caso, dada uma cobertura aberta $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ de X , podemos fixar um refinamento $\{B_1, \dots, B_k\}$ de \mathcal{A} . Como $\{B_1, \dots, B_k\}$ refina \mathcal{A} , para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, existe $i_j \in I$ tal que $B_j \subseteq A_{i_j}$. E, como $\bigcup_{j=1}^k B_j = X$, disso concluímos que $\bigcup_{j=1}^k A_{i_j} = X$. \square

Definição 4.6 (CLOPEN). Um subconjunto A de um espaço métrico X será chamado **clopen** se, e somente se, for um conjunto aberto e fechado em X .

Apresentaremos, a seguir, alguns exemplos de conjuntos *clopen*.

Exemplo 4.7. Dado um espaço métrico X , temos que X e \emptyset são subconjuntos clopen de X . Com efeito, é imediato ver que X e \emptyset são ambos abertos. E, uma vez que $X \setminus X = \emptyset$ e $X \setminus \emptyset = X$, disso resulta que X e \emptyset são, também, ambos fechados.

Exemplo 4.8. Sejam \mathbb{R} com a topologia usual e $(0, 1) \cup (2, 3) \subseteq \mathbb{R}$ munido da topologia de subespaço. Note que $(0, 1)$ é aberto em $(0, 1) \cup (2, 3)$, pois $(0, 1)$ é aberto em \mathbb{R} e $(0, 1) \cap ((0, 1) \cup (2, 3)) = (0, 1)$. Por sua vez, é também fácil ver que $(0, 1)$ é fechado em $(0, 1) \cup (2, 3)$, porque $((0, 1) \cup (2, 3)) \setminus (0, 1) = (2, 3)$ é aberto em $(0, 1) \cup (2, 3)$ (pois $(2, 3)$ é aberto em \mathbb{R} e $(2, 3) \cap ((0, 1) \cup (2, 3)) = (2, 3)$).

Exemplo 4.9. Sejam X um conjunto não vazio e $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $x, y \in X$:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y \end{cases}.$$

A topologia induzida pela métrica d é $\tau_d := \{A \subseteq X : \forall x \in A, \exists r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \subseteq A\}$. É fácil ver que, para cada $x \in X$, $\{x\}$ é aberto. Com efeito, dado $x \in X$, temos $\{x\} = B(x, \frac{1}{2})$, uma vez que, para todo $y \in X$,

$$d(x, y) < \frac{1}{2} \Rightarrow x = y.$$

Além disso, para cada $x \in X$, $\{x\}$ é também fechado, pois $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} \{y\}$ é aberto, já que é a reunião de conjuntos abertos.

A proposição a seguir diz respeito à coleção dos conjuntos *clopen* de um espaço métrico.

Proposição 4.10. *A coleção de todos os subconjuntos clopen de X é uma álgebra de conjuntos.*

Demonstração. Seja \mathcal{F} a coleção de todos os subconjuntos clopen de X . Note que:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}$ (pelo exemplo 4.7);
2. se $A \in \mathcal{F}$, então $X \setminus A \in \mathcal{F}$ (pois, se A é aberto, $X \setminus A$ é fechado, e, se A é fechado, $X \setminus A$ é aberto);
3. se $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{F}$, então $\bigcup_{i=1}^k A_i \in \mathcal{F}$ (pois a união de abertos é um aberto, e a união finita de fechados é um fechado).

□

Observação 4.11. Seja \mathcal{F} como na proposição anterior. Nessas condições:

- (i) se $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}$, então $\bigcap_{i=1}^k A_i \in \mathcal{F}$ — pois

$$\begin{aligned} A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F} &\stackrel{(2)}{\Rightarrow} X \setminus A_1, \dots, X \setminus A_k \in \mathcal{F} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \bigcup_{i=1}^k (X \setminus A_i) \in \mathcal{F} \\ &\stackrel{(2)}{\Rightarrow} X \setminus \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^k (X \setminus A_i) \right)}_{=\bigcap_{i=1}^k A_i} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^k A_i \in \mathcal{F}; \end{aligned}$$

- (ii) se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \setminus B \in \mathcal{F}$ — pois

$$A, B \in \mathcal{F} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} A, X \setminus B \in \mathcal{F} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \underbrace{A \cup (X \setminus B)}_{=A \setminus B} \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}.$$

Definição 4.12 (PARTIÇÃO CLOPEN). Uma **partição clopen** de X é uma cobertura aberta de X formada por conjuntos clopen dois a dois disjuntos.

Definição 4.13 (CONJUNTO 0-DIMENSIONAL). Dizemos que um conjunto X é **0-dimensional** se, e somente se, cada cobertura aberta e finita de X possui um refinamento finito que é uma partição clopen.

A seguir, apresentaremos, alguns exemplos de conjuntos 0-dimensionais.

Exemplo 4.14 (CONJUNTO FINITO). Se X é um conjunto finito com a topologia discreta, então X é 0-dimensional, pois qualquer cobertura aberta de X é refinada pela cobertura constituída por todos os subconjuntos unitários de X , a qual é uma partição clopen, pois $\{x\}$ é clopen qualquer que seja $x \in X$ (pelo exemplo 4.9), e, para quaisquer $x, y \in X$ tais que $x \neq y$, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$.

Exemplo 4.15 (CONJUNTO DE CANTOR TERNÁRIO). Seja \mathcal{A} uma cobertura aberta de $C_{\frac{1}{3}}$. Como \mathcal{A} é cobertura de $C_{\frac{1}{3}}$, dado $x \in C_{\frac{1}{3}}$, podemos fixar $A \in \mathcal{A}$ de modo que $x \in A$. Como, porém, $x \in A$, e A é aberto em $C_{\frac{1}{3}}$, podemos, também, fixar um aberto $U \subseteq \mathbb{R}$ de modo que $A = U \cap C_{\frac{1}{3}}$ e um número real $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset U$. E, uma vez que $B_r(x) \subseteq U$, e $U \cap C_{\frac{1}{3}} = A$, é imediato ver que $B_r(x) \cap C_{\frac{1}{3}} \subseteq A$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $3^{-n} < r$, e seja \tilde{I}_x o intervalo presente na enésima etapa da construção de $C_{\frac{1}{3}}$ ao qual x pertence. Como \tilde{I}_x tem comprimento 3^{-n} , e $B_r(x) \cap C_{\frac{1}{3}} \subseteq A$, tem-se $\tilde{I}_x \cap C_{\frac{1}{3}} \subseteq A$. Observe que $\tilde{I}_x \cap C_{\frac{1}{3}}$ é clopen em $C_{\frac{1}{3}}$. De fato,

- $\tilde{I}_x \cap C_{\frac{1}{3}}$ é fechado em $C_{\frac{1}{3}}$, pois \tilde{I}_x é fechado em \mathbb{R} ; e
- é aberto em $C_{\frac{1}{3}}$, pois $C_{\frac{1}{3}} \subset I_n$, e \tilde{I}_x é aberto em I_n ($I_n \setminus \tilde{I}_x$ é fechado em I_n , pois é uma união finita de intervalos fechados).

Se, para cada $x \in C_{\frac{1}{3}}$, escolhermos o intervalo \tilde{I}_x como acima, então

$$\mathcal{A}_1 := \{\tilde{I}_x \cap C_{\frac{1}{3}} : x \in C_{\frac{1}{3}}\}$$

será, claramente, uma cobertura aberta de $C_{\frac{1}{3}}$ formada por conjuntos clopen. Como, porém, conjunto de Cantor ternário é compacto, tal cobertura certamente possui uma subcobertura finita

$$\mathcal{A}_2 := \{L_1, L_2, \dots, L_k\}.$$

Seja $J_1 := L_1$, e, para cada $n \in \{1, \dots, k\}$ tal que $n > 1$, seja $J_n := L_n \setminus \bigcup_{\ell=1}^{n-1} L_\ell$. Como $\bigcup_{i=1}^k J_n = \bigcup_{i=1}^k L_n$, e, para cada $n \in \{1, \dots, k\}$, J_n é clopen (pois a coleção dos conjuntos clopen de $C_{\frac{1}{3}}$ é uma álgebra de conjuntos),

$$\mathcal{A}_3 := \{J_1, \dots, J_k\}$$

é uma cobertura finita de $C_{\frac{1}{3}}$ que refina \mathcal{A} . Sendo assim, para concluirmos que \mathcal{A}_3 é uma partição clopen de $C_{\frac{1}{3}}$, basta mostrarmos que J_1, \dots, J_k são dois a dois disjuntos. Se $k = 1$, não há nada a fazer. Se, por outro lado, $k > 1$, é suficiente notarmos, para tanto, que, para todo $n \in \{2, \dots, k\}$ e todo $x \in C_{\frac{1}{3}}$,

$$\begin{aligned} x \in J_n &\Rightarrow x \in L_n \setminus \bigcup_{\ell=1}^{n-1} L_\ell \\ &\Rightarrow \forall \ell \in \{1, \dots, n-1\}, x \notin L_\ell \\ &\Rightarrow \forall \ell \in \{1, \dots, n-1\}, x \notin J_\ell, \end{aligned}$$

pois disso resulta que $J_n \cap J_\ell = \emptyset$ quaisquer que sejam $n \in \{2, 3, \dots\}$ e $\ell \in \{1, \dots, n\}$ — o que, por sua vez, equivale a dizer que, para quaisquer $n, \ell \in \{1, \dots, k\}$,

$$n \neq \ell \Rightarrow J_n \cap J_\ell = \emptyset.$$

Teorema 4.16. *Em \mathbb{R} , os únicos clopen são \mathbb{R} e \emptyset .*

Demonstração. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Suponha que $A \neq \emptyset$ e $A \neq \mathbb{R}$. Queremos mostrar que A não é clopen, ou equivalente, que A tem um ponto da fronteira. Assim, vamos definir recursivamente duas seqüências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Inicialmente, escolhamos um ponto $x_0 \in A$ já que $A \neq \emptyset$. Além disso, podemos escolher um ponto $y_0 \notin A$ já que $A \neq \mathbb{R}$. Depois que x_n e y_n foram definidos, com $x_n \in A$ e $y_n \in A$, queremos definir x_{n+1} e y_{n+1} . Considere o ponto médio $z_n = \frac{(x_n + y_n)}{2}$. Se $z_n \in A$, então defina $x_{n+1} = z_n$, $y_{n+1} = y_n$, e, se $z_n \notin A$, então defina $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = z_n$. Em qualquer caso, obtemos $x_{n+1} \in A$ e $y_{n+1} \in A$, com $|x_{n+1} - y_{n+1}| = \frac{|x_n - y_n|}{2}$. Então, por indução $|x_n - y_n| = \frac{|x_0 - y_0|}{2^n}$. Assim, $|x_n - y_n| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. E, além disso, $|x_{n+1} - x_n| \leq |x_n - y_n| = \frac{|x_0 - y_0|}{2^n}$, pois $\forall n, p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq |x_0 - y_0| \left[\frac{1}{2^{n+p-1}} + \frac{1}{2^{n+p-2}} + \dots + \frac{1}{2^n} \right] \\ &= |x_0 - y_0| \cdot 2 \left[\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+p}} \right] \\ &\leq \frac{|x_0 - y_0|}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, se tomarmos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|x_0 - y_0|}{2^{n_0-1}} < \epsilon$, teremos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ implica que $\forall p \in \mathbb{N}$ $|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{|x_0 - y_0|}{2^n} \leq \frac{|x_0 - y_0|}{2^{n_0}} < \epsilon$, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy. Seja $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Porque $|x_n - y_n| \rightarrow 0$, temos também $y_n \rightarrow x$. Portanto x é um ponto da fronteira de A . Então A não é um conjunto clopen. Além disso, $\{(-\infty, 1), (-1, +\infty)\}$ é uma cobertura aberta de \mathbb{R} que não possui um refinamento clopen. \square

Corolário 4.17. \mathbb{R} não é 0-dimensional.

Demonstração. Conseqüência imediata do teorema 4.16. \square

Corolário 4.18. *Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a < b$, os únicos subconjuntos clopen do intervalo $[a, b]$ são \emptyset e $[a, b]$. Consequentemente, $[a, b]$ não é 0-dimensional.*

Demonstração. A prova é análoga ao teorema 4.16. \square

Um resultado mais geral é o seguinte:

Teorema 4.19. *Se (X, τ) é um espaço topológico conexo, então \emptyset e X são os únicos subconjuntos clopen de (X, τ) .*

Demonstração. Sejam (X, τ) um espaço topológico conexo e $U \subseteq X$ um subconjunto clopen. Nessas condições, é imediato ver que U e $X \setminus U$ são abertos disjuntos e que $X = U \cup (X \setminus U)$. Logo, como (X, τ) é conexo, U e $X \setminus U$ não podem ser ambos não vazios (pois, caso contrário, (X, τ) seria desconexo). Consequentemente, ou $U = \emptyset$, ou $X \setminus U = \emptyset$ (e $U = X$). \square

A proposição seguinte nos diz que não existe um homeomorfismo entre o intervalo $[0, 1]$ (o qual não é 0-dimensional, pelo corolário 4.18) e o conjunto de Cantor ternário (que é 0-dimensional). Isso por sua vez nos instiga a pensar se a dimensão topológica é um invariante topológico. Responderemos essa pergunta nas próximas seções.

Proposição 4.20. *Não existe uma função contínua e sobrejetora $f: [0, 1] \rightarrow C_{\frac{1}{3}}$, em que $C_{\frac{1}{3}}$ o conjunto de Cantor ternário.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $f: [0, 1] \rightarrow C_{\frac{1}{3}}$ seja sobrejetora. Em seguida, notemos que tanto $M := [0, \frac{1}{3}] \cap C_{\frac{1}{3}}$ quanto $C_{\frac{1}{3}} \setminus M$ são fechados em $C_{\frac{1}{3}}$. Com efeito:

- M é fechado em $C_{\frac{1}{3}}$, pois $[0, \frac{1}{3}]$ é fechado em \mathbb{R} ;
- $C_{\frac{1}{3}} \setminus M$ é fechado em $C_{\frac{1}{3}}$, pois

$$C_{\frac{1}{3}} \setminus M = \left[\frac{2}{3}, 1 \right] \cap C_{\frac{1}{3}}$$

e $[\frac{2}{3}, 1] \cap C_{\frac{1}{3}}$ é fechado em $C_{\frac{1}{3}}$ (dado que $[\frac{2}{3}, 1]$ é fechado em \mathbb{R}).

Observemos, agora, que M e $C_{\frac{1}{3}} \setminus M$ são ambos não vazios. Sendo assim, como f é contínua e sobrejetora, tanto $f^{-1}[M]$ quanto $f^{-1}[C_{\frac{1}{3}} \setminus M]$ são fechados não vazios de $[0, 1]$. Como, porém,

$$f^{-1}[C_{\frac{1}{3}} \setminus M] = [0, 1] \setminus f^{-1}(M),$$

disso resulta que $f^{-1}(M)$ é um subconjunto clopen de $[0, 1]$ o qual não pertence a $\{\emptyset, [0, 1]\}$ — o que, por sua vez, contradiz o corolário 4.18. \square

4.1.1 Propriedades dos espaços 0-dimensionais

Nesta seção apresentaremos algumas caracterizações da definição de espaço 0-dimensional (abordado no teorema seguinte), e também uma propriedade de separação mais forte.

Teorema 4.21. *Seja X um espaço métrico. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. X é 0-dimensional;
2. se $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ é uma cobertura aberta de X , então existem conjuntos $B_1 \subseteq U_1, B_2 \subseteq U_2, \dots, B_k \subseteq U_k$ tais que $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ é uma partição clopen de X ;
3. se $\{U, V\}$ é uma cobertura aberta de X , então existem conjuntos abertos $A \subseteq U$ e $B \subseteq V$ tais que $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$;
4. se $\{U, V\}$ é uma cobertura aberta de X , então existem conjuntos fechados $A \subseteq U$ e $B \subseteq V$ tais que $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$.

Demonstração. • (2) \Rightarrow (3) trivialmente (basta aplicar o item (2) no caso particular em que $k = 2$).

- (2) \Rightarrow (1) (por definição).
- (3) \Leftrightarrow (4), pois, em ambos os casos, os conjuntos A e B são clopen.
- (1) \Rightarrow (2) Suponha que X seja 0-dimensional, então a cobertura aberta $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ é refinada por uma partição clopen \mathcal{W} . Para cada $W \in \mathcal{W}$, existe pelo menos um i tal que $W \subseteq U_i$, escolha um deles e o chame de $i(W)$. Nessas condições, para cada i , seja:

$$B_i = \bigcup \{W \in \mathcal{W} : i(W) = i\}.$$

Então os conjuntos B_j são abertos (pois cada W é aberto e união de abertos é um aberto) e $\bigcup_i B_i \subseteq \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W = X$ (pois $B_i \subseteq \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W$, então $\bigcup_i B_i \subseteq \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W$). Além disso, para todo refinamento $W \in \mathcal{W}$ existe i , e, por definição, para $W \in \mathcal{W}$, existe i tal que $W \subseteq B_i$,

assim $\bigcup_{W \in \mathcal{W}} W \subset \bigcup_i B_i$, portanto, $\bigcup_i B_i = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W$. Ainda, como $\bigcup_{W \in \mathcal{W}} W$ é cobertura de X , temos que $\bigcup_{W \in \mathcal{W}} W = X$. O complementar de B_j é

$$\bigcup \{W \in \mathcal{W} : i(W) \neq j\}.$$

De fato, seja $x \in X \setminus B_j$, como $\bigcup_{W \in \mathcal{W}} W = X$, existe W tal que $x \in W$. Note que $i(W) \neq j$, pois, se $i(W) = j$, então $W \subset B_j$ e $x \in B_j$, portanto, $X \setminus B_j \subset \bigcup \{W \in \mathcal{W} : i(W) \neq j\}$. Além disso, seja $x \in \bigcup \{W \in \mathcal{W} : i(W) \neq j\}$, então existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $i(W) \neq j$ e $x \in W$ e isso implica que $x \notin B_j$, pois se $x \in B_j$ existe W' tal que $i(W') = j$ e $x \in W'$, sendo assim, teríamos que $W' \neq W$ (pois $i(W) \neq j$) e $x \in W' \cap W$, que é um absurdo uma vez que \mathcal{W} é uma partição clopen, dessa forma $\bigcup \{W \in \mathcal{W} : i(W) \neq j\} \subset X \setminus B_j$. Portanto, $X \setminus B_j = \bigcup \{W \in \mathcal{W} : i(W) \neq j\}$. Ademais, $\bigcup \{W \in \mathcal{W} : i(W) \neq j\}$ é aberto (pois cada $W \in \mathcal{W}$ é aberto e união de abertos é um aberto). Portanto, B_j é clopen.

Se $x \in X$, então x pertence no máximo um dos conjuntos de \mathcal{W} (já que \mathcal{W} é uma partição). No entanto, $x \in B_j$, apenas se $x \in W$ para algum W (com $i(W) = i$). Sendo assim, x pertence a no máximo um desses conjuntos B_j , ou seja, os conjuntos B_i são disjuntos. Por fim, falta apenas justificar que $B_i \subset U_i \subset \dots \subset B_k \subset U_k$. De fato, se $x \in B_i$, existe $W \in \mathcal{W}$, tal que $x \in W$ e $i(W) = i$. Mas, como $i(W) = i$, $W \subset U_i$. Logo, $x \in U_i$, e, então $B_i \subset U_i$. Portanto, $\{B_i : i = 1, \dots, k\}$ é partição clopen.

- (3) \Rightarrow (2) Suponha que X tenha a propriedade do item (3). Seja $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ uma cobertura aberta de X . Se $k = 1$, então essa cobertura já é uma partição clopen. Sendo assim, suponha que $k \geq 2$. Escreva $U = U_1$, $V = \bigcup_{i=2}^k U_i$. Então esses conjuntos cobrem X . Pela hipótese (3), existem conjuntos clopen $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ com $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$.

Sejam $B_1 = A$ e $B_i = B \cap U_i$ para $i \geq 2$. Então, $B_i \subseteq U_i$ para todo i , assim, $\bigcup_{i=1}^k B_i = X$, pois:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^k B_i &= B_1 \cup \bigcup_{i=2}^k B_i \\ &= B_1 \cup \bigcup_{i=2}^k B \cap U_i \\ &= A \cup \left(B \cap \bigcup_{i=2}^k U_i \right) \end{aligned}$$

e $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, pois $B_1 \cap B_2 = \underbrace{A \cap B}_{\emptyset} \cap U_2 = \emptyset$. Repita esta construção um finito número de vezes, uma vez para cada subconjunto de dois elementos de $\{1, 2, \dots, k\}$, para organizar a mesma conclusão com todas as interseções de dois dos conjuntos vazios. \square

Sabemos que se A e B são conjuntos fechados disjuntos, então existem U e V com $U \supseteq A$, $V \supseteq B$ e $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$. A proposição seguinte aborda uma propriedade de separação mais forte nos conjuntos 0-dimensionais.

Proposição 4.22. *Seja X um espaço métrico. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. X é 0-dimensional.
2. Para cada par A, B de conjuntos fechados disjuntos, existe um conjunto clopen U com o complemento $V = X \setminus U$ de modo que $U \supseteq A$ e $V \supseteq B$.

Demonstração. Suponha que X seja 0-dimensional, ou seja, toda cobertura aberta e finita de X possui um refinamento finito de X que é uma partição clopen. Sejam A, B conjuntos fechados

disjuntos. Dessa forma, temos que seus complementos $A' = S \setminus A$ e $B' = S \setminus B$ são abertos, uma vez A, B são fechados. Como $A \cap B = \emptyset$, os complementos cobrem:

$$A' \cup B' = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus \underbrace{(A \cap B)}_{=\emptyset} = X.$$

Então, pelo Teorema 4.21 item (3), existem conjuntos abertos U, V com $U \subseteq B, V \subseteq A, U \cap V = X, U \cap V = \emptyset$. Então U, V são clopen, $U \supseteq A$ e $V \supseteq B$. Por outro lado, suponha que (2) seja válido. Seja $\{U_1, U_2\}$ uma cobertura aberta de X . Então os complementos $A = X \setminus U_1, B = X \setminus U_2$ são conjuntos fechados disjuntos, pois sendo U_1, U_2 abertos, temos que A, B são fechados e

$$A \cap B = (X \setminus U_1) \cap (X \setminus U_2) = X \setminus (U_1 \cup U_2) = X \setminus X = \emptyset.$$

Portanto, existe um conjunto clopen V com complemento $U = S \setminus V$ tal que $V \supseteq A, U \supseteq B$. Então $V \subseteq U_2$ e $U \subseteq U_1$, e pelo Teorema 4.21 item (3), X é 0-dimensional. \square

4.1.2 Base para a topologia

Nesta seção veremos mais uma caracterização dos conjuntos 0-dimensionalis que está relacionada à existência de uma base clopen para a sua topologia. Além disso, veremos mais três exemplos de conjuntos 0-dimensionalis: o conjunto dos números racionais (\mathbb{Q}) e dos números irracionais, e um conjunto compacto gerado por aplicações em \mathbb{R}^2 possuindo determinadas propriedades aos quais veremos adiante.

Proposição 4.23. *Seja X um espaço métrico 0-dimensional. Então existe uma base para a topologia de X consistindo de conjuntos clopen.*

Demonstração. Sejam $U \subseteq X$ um conjunto aberto e $x_0 \in U$. A distância $r := \text{dist}(x_0, X \setminus U) > 0$. Então X é coberto pelos dois conjuntos abertos U e $V = \{x \in X : d(x, x_0) > \frac{r}{2}\}$. Esta cobertura é refinada por uma partição clopen A . Isso mostra que existe uma base para a topologia de X consistindo de conjuntos clopen. \square

Veremos agora a recíproca, no caso de X ser compacto, da proposição 4.23.

Proposição 4.24. *Seja X um espaço métrico compacto não vazio. Suponha que exista uma base para a topologia de X que consiste em conjuntos clopen. Então X é 0-dimensional.*

Demonstração. Seja \mathcal{B} uma base para a topologia de X consistindo de conjuntos clopen, e, seja \mathcal{A} uma cobertura aberta de X . Para cada $x \in X$, existe um conjunto aberto $A \in \mathcal{A}$ com $x \in A$, e, portanto, existe algum $B \in \mathcal{B}$ com $x \in B \subseteq A$. Para cada $x \in X$ escolha $B_x \in \mathcal{B}$. Logo,

$$\mathcal{A}_1 = \{B_x : x \in X\}$$

é uma cobertura aberta de X . Por compacidade, existe uma subcobertura finita, digamos $\mathcal{A}_2 = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$. Se escrevermos $J_1 = B_1, J_2 = B_2 \setminus J_1, J_3 = B_3 \setminus J_2$, e assim por diante, obtemos uma cobertura finita $\mathcal{A}_3 = \{J_1, J_2, \dots, J_k\}$ de $C_{\frac{1}{3}}$ por conjuntos clopen, que ainda é subordinado à \mathcal{A} . Os conjuntos J_1, J_2, \dots são disjuntos, então \mathcal{A}_3 é uma partição clopen de X . \square

De modo mais geral, podemos generalizar as proposições 4.23 e 4.24, se colocarmos a hipótese de X ser um espaço métrico separável.

Teorema 4.25. *Seja X um espaço métrico separável. Então X é 0-dimensional se, e somente, se existir uma base para a topologia de X consistindo de conjuntos de clopen.*

Demonstração. A ida da demonstração já foi provada em 4.23. Reciprocamente, suponha que existe uma base \mathcal{B} para a topologia de X que consiste em conjuntos clopen. Seja $\{U, V\}$ uma cobertura aberta de X . Existe uma coleção $U_1 \subseteq \mathcal{B}$ com $\cup U_1 = U$. Pela propriedade de Lindelof A.2, existe

uma subcoleção enumerável $U_2 \subseteq U_1$ com $U_2 = U$. Da mesma forma, existe uma coleção enumerável $V_2 \subseteq \mathcal{B}$ com $V_2 = V$. Enumere esta união, da seguinte forma:

$$U_2 \cup V_2 = \{G_1, G_2, G_3, \dots\}.$$

Os conjuntos G_m são clopen e $G_m = X$. Defina $H_1 = G_1, H_2 = G_2 \setminus G_1$, e em geral $H_m = G_m \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_{m-1})$. Então os conjuntos H_m são clopen, disjuntos, e $H_m = X$. Seja $E = \{H_m : H_m \subseteq U\}$, $F = \{H_m : H_m \subseteq V\}$. Então U, V são abertos, $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$, então U, V são clopen. Também $E \subseteq U$ e $F \subseteq V$. Isso mostra que X é 0-dimensional. \square

Exemplo 4.26 (CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS). O conjunto \mathbb{Q} de números racionais (com a métrica usual) é 0-dimensional. Sabemos que \mathbb{Q} é enumerável e denso em \mathbb{R} , portanto separável. Além disso, $\mathcal{B} = \{(a, b) \subset \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ é uma base da topologia de \mathbb{R} . Dado $x \in \mathbb{R}$ e um aberto $U \subset \mathbb{R}$ tal que $x \in U$, segue da topologia de \mathbb{R} que existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subset U$. Como os $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em \mathbb{R} , podemos fixar $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tais que $a, b \in (x - r, x + r)$. Daí $x \in (a, b)$ e $(a, b) \subset (x - r, x + r) \subset U$. Ademais, afirmamos que \mathcal{B} é uma base da topologia de \mathbb{Q} formada por clopens. De fato, suponha que $a < b$ ambos irracionais. Daí $\mathbb{R} \setminus (a, b) = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ e

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \setminus ((a, b) \cap \mathbb{Q}) &= \mathbb{Q} \cap ((-\infty, a] \cup [b, +\infty)) \\ &= (\mathbb{Q} \cap (-\infty, a]) \cup (\mathbb{Q} \cap [b, +\infty)) \\ &= (\mathbb{Q} \cap (-\infty, a)) \cup (\mathbb{Q} \cap (b, +\infty)) \end{aligned}$$

Logo, (a, b) é fechado em \mathbb{R} . Portanto, \mathbb{Q} é 0-dimensional.

Exemplo 4.27 (CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS). Segue de modo análogo feito no exemplo 4.26 que conjunto dos irracionais (com a métrica usual) é 0-dimensional.

Antes de passarmos ao próximo exemplo, é conveniente recordarmos o conceito de similaridade.

Definição 4.28 (SIMILARIDADE CONTRATIVA). Dado $n \in \mathbb{N}$, dizemos que uma aplicação $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma **similaridade contrativa** se existe $\lambda \in]0, 1[$ tal que $|f(x) - f(y)| = \lambda \cdot |x - y|$ quaisquer que sejam x e y em \mathbb{R}^n . Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma similaridade contrativa, e $\lambda \in]0, 1[$ é tal que $|f(x) - f(y)| = \lambda \cdot |x - y|$ quaisquer que sejam x e y em \mathbb{R}^n , dizemos que λ é o **fator de similaridade** de f .

Observação 4.29. Neste trabalho, só lidaremos com similaridades contrativas. Por essa razão, sempre que mencionarmos o termo “similaridade”, estaremos supondo, implicitamente, que se trata de uma similaridade contrativa.

Exemplo 4.30 (CONJUNTO COMPACTO GERADO POR SIMILARIDADES). Seja $K \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto, e, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, seja $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma similaridade com fator de similaridade $r_i \in [0, 1]$. Nessas condições, se

$$K = \bigcup_{i=1}^n f_i(K),$$

e, além disso, $f_i(K) \cap f_j(K) = \emptyset$ quaisquer que sejam $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tais que $i \neq j$, então K é 0-dimensional.

Para ver isso, considere uma cobertura aberta \mathcal{A} de K . Para cada $x \in K$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$, e, portanto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap K \subseteq A$. Seja $s > 0$. Para cada $i = (i_1, \dots, i_s) \in \{1, \dots, n\}^s$, consideremos $f_{i_1 \dots i_s}(K)$ e notemos que:

$$\text{diam } f_{i_1 \dots i_s}(K) \leq r_{i_1} \dots r_{i_s} \text{diam}(K) \leq \rho_*^s \text{diam}(K),$$

em que $\rho_* := \max\{r_{i_1}, \dots, r_{i_s}\}$.

Observe que $\rho_* < 1$, pois $r_{i_j} < 1$ ($j = 1, \dots, s$). Logo, como $\lim_{s' \rightarrow +\infty} \rho_*^{s'} = 0$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\rho_*^s \text{diam}(K) < r$. Isso se justifica da seguinte forma: pela

desigualdade de Bernoulli, temos

$$1 + s\alpha < \left(\frac{1}{\rho_*}\right) = \frac{1}{\rho_*^s},$$

em que $\alpha = \frac{1}{\rho_*} - 1$. Mas

$$1 + s\alpha > \frac{1}{r'} \Leftrightarrow s > \frac{\frac{1}{r'} - 1}{\alpha} \Leftrightarrow s > \frac{\frac{1}{r'} - 1}{\frac{1}{\rho_*} - 1},$$

em que $r' = \frac{r}{\text{diam}(K)+1}$. Assim,

$$s > \frac{\frac{1}{r'} - 1}{\frac{1}{\rho_*} - 1} \Rightarrow 1 + s\alpha > \frac{1}{r'} \Rightarrow \frac{1}{\rho_*^s} > \frac{1}{r'} \Rightarrow \rho_*^s < r'$$

Com isso,

$$\rho_*^s \text{diam}(K) < r' \text{diam}(K) = r \cdot \underbrace{\frac{\text{diam}(K)}{\text{diam}(K)+1}}_{\leq 1} \leq r.$$

E, portanto, $\rho_*^s \text{diam}(K) < r$.

Observe que

$$K = \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}^s} f_{i_1 \dots i_s}(K).$$

Logo, existe $j = (j_1, \dots, j_s) \in \{1, \dots, n\}^s$ tal que $x \in f_{j_1 \dots j_s}(K)$. Note que $f_{j_1 \dots j_s}(K) \subseteq A$, pois, se $y \in f_{j_1 \dots j_s}(K)$ então $d(x, y) < r$, e, portanto, $y \in B(x, r) \cap K \subseteq A$. Considere

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ f_{i_1^{(x)} \dots i_{s_x}^{(x)}}(K) : x \in K, (i_1^{(x)} \dots i_{s_x}^{(x)}) \in \{1, \dots, n\}^{s_x} \right\}.$$

Observe que \mathcal{A}_1 é uma cobertura aberta de K que refina \mathcal{A} . Mas como K é compacto, temos que existe uma subcobertura finita

$$\mathcal{A}_2 = \left\{ f_{i_1^{(x_1)} \dots i_{s_{x_1}}^{(x_1)}}(K), \dots, f_{i_1^{(x_n)} \dots i_{s_{x_n}}^{(x_n)}}(K) \right\}.$$

Agora, se existirem $1 < j, t < \ell$ tais que $s_j \leq s_t$ e $i_1^{(x_j)} = i_1^{(x_t)}, \dots, i_s^{(x_j)} = i_s^{(x_t)}$, teremos

$$f_{i_1^{(x_t)} \dots i_{s_{x_t}}^{(x_t)}}(K) \subseteq f_{i_1^{(x_j)} \dots i_{s_{x_j}}^{(x_j)}}(K),$$

e conseqüentemente podemos excluir $f_{i_1^{(x_t)} \dots i_{s_{x_t}}^{(x_t)}}(K)$ da cobertura \mathcal{A}_2 . Sendo assim, podemos supor sem perda de generalidade que descartamos tais conjuntos. E observe ainda que \mathcal{A}_2 ainda refina \mathcal{A} e os elementos de \mathcal{A}_2 são clopens e disjuntos. De fato,

- **Clopen:** $f_{i_1 \dots i_s}(K)$ é clopen, pois $f_{i_1 \dots i_s}(K)$ é fechado uma vez que K é compacto e $f_{i_1 \dots i_s}$ é contínua. Além disso, $f_{i_1 \dots i_s}(K)$ é aberto, pois $K \setminus f_{i_1 \dots i_s}(K) = \bigcup_{j \in \{1, \dots, n\}^s, j \neq i} f_{i_1 \dots i_s}(K)$ é união finita de fechados.
- **Disjuntos:** Sejam $s \leq s'$ quaisquer. Assim temos dois casos a considerar.

– 1º caso: Se $s = s'$ e $(i_1, \dots, i_s) \neq (j_1, \dots, j_s)$ temos dois casos a considerar:

* (i) Se $i_1 \neq j_1$ então:

$$f_{i_1 \dots i_s}(K) \cap f_{j_1 \dots j_s}(K) \subset f_{i_1}(K) \cap f_{j_1}(K) = \emptyset$$

- * (ii) Se $i_1 = j_1$ então $\{k = 1, \dots, s : i_k = j_k\} \neq \emptyset$. Como $(i_1, \dots, i_s) \neq (j_1, \dots, j_s)$, temos $t < s$. Note que:

$$\begin{aligned} f_{i_1 \dots i_s}(K) \cap f_{j_1 \dots j_s}(K) &= f_{i_1 \dots i_t}(f_{i_{t+1} \dots i_s}(K)) \cap f_{i_1 \dots i_t}(f_{j_{t+1} \dots j_s}(K)) \\ &= f_{i_1 \dots i_t}(\underbrace{(f_{i_{t+1} \dots i_s}(K) \cap f_{j_{t+1} \dots j_s}(K))}_{\subseteq f_{i_{t+1}}(K) \cap f_{j_{t+1}}(K) = \emptyset}) = \emptyset. \end{aligned}$$

- 2º Caso: Se $s < s'$. Observe que $\{k = 1, \dots, s : i_k \neq j_k\} = \emptyset$.

- * (i) Se $i_1 \neq j_1$ então:

$$f_{i_1 \dots i_s}(K) \cap f_{j_1 \dots j_{s'}}(K) \subset f_{i_1}(K) \cap f_{j_1}(K) = \emptyset.$$

- * (ii) Se $i_1 = j_1$. Seja $t = \max\{k = 1, \dots, s : i_k \neq j_k\}$. Como $(i_1, \dots, i_s) \neq (j_1, \dots, j_s)$, temos $t < s$. Note que:

$$\begin{aligned} f_{i_1 \dots i_s}(K) \cap f_{j_1 \dots j_{s'}}(K) &= f_{i_1 \dots i_t}(f_{i_{t+1} \dots i_s}(K)) \cap f_{i_1 \dots i_t}(f_{j_{t+1} \dots j_{s'}}(K)) \\ &= f_{i_1 \dots i_t}(\underbrace{(f_{i_{t+1} \dots i_s}(K) \cap f_{j_{t+1} \dots j_{s'}}(K))}_{\subseteq f_{i_{t+1}}(K) \cap f_{j_{t+1}}(K) = \emptyset}) = \emptyset. \end{aligned}$$

4.2 Dimensão de Cobertura

Definição 4.31 (ORDEM DE UMA FAMÍLIA). Seja n um inteiro maior do que ou igual a -1 . A **ordem de uma família** \mathcal{A} de conjuntos é menor ou igual a n se a interseção de quaisquer $n + 2$ conjuntos distintos de \mathcal{A} é vazia. Se $n \geq 0$, dizemos que \mathcal{A} tem **ordem** n se tem ordem menor ou igual a n , mas não tem ordem menor ou igual a $n - 1$.

Exemplo 4.32. Uma família de conjuntos \mathcal{A} possui ordem -1 se for vazia ou se for o conjunto unitário $\{\emptyset\}$.

Exemplo 4.33. Uma família \mathcal{A} não vazia de conjuntos não todos vazios possui ordem 0 se, e somente se, seus elementos são conjuntos dois a dois disjuntos. De fato, se \mathcal{A} é formada por conjuntos dois a dois disjuntos, então a ordem de \mathcal{A} é menor ou igual a 0 . Mas, como $\mathcal{A} \neq \emptyset$ e $\mathcal{A} \neq \{\emptyset\}$, a ordem de \mathcal{A} não pode ser -1 . Logo, a ordem de \mathcal{A} é 0 . Reciprocamente, se a ordem de \mathcal{A} é 0 , então a interseção de quaisquer dois conjuntos distintos de \mathcal{A} é vazia, e, portanto, \mathcal{A} é formada por conjuntos dois a dois disjuntos.

A **dimensão de cobertura** de um espaço métrico é um inteiro maior do que ou igual a -1 ou o ∞ (entendido como maior do que todos os números inteiros).

Definição 4.34 (DIMENSÃO DE COBERTURA). Sejam X um espaço métrico e n um inteiro maior do que ou igual a -1 . Nessas condições:

- dizemos que X tem **dimensão de cobertura** menor do que ou igual a n (ou, em símbolos, que $\text{Cov } X \leq n$) se toda cobertura aberta e finita de X possui um refinamento finito de ordem menor do que ou igual a n ;
- dizemos que a **dimensão de cobertura** de X é n (ou, em símbolos, que $\text{Cov } X = n$) se ela for menor do que ou igual a n , mas não menor do que ou igual a $n - 1$.

Se não existir um inteiro n maior do que ou igual a -1 tal que $\text{Cov } X \leq n$, diremos que $\text{Cov } X = \infty$.

Exemplo 4.35. Se $\text{Cov } X = -1$, então a cobertura aberta $\{X\}$ de X é refinada por uma cobertura \mathcal{A} de ordem -1 . Nesse caso, porém, devemos ter, necessariamente, $\mathcal{A} = \emptyset$, ou $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$. E, como \mathcal{A} é, por hipótese, uma cobertura de X , disso resulta, por fim, que $X = \emptyset$. Sendo assim, podemos concluir que $\text{Cov } X = -1$ se, e somente se, $X = \emptyset$.

Proposição 4.36. *Seja S um conjunto não vazio, então $\text{Cov } S = 0$ se, e somente, se S é 0-dimensional.*

Demonstração. Se S é não vazio e $\text{Cov } S = 0$, então qualquer cobertura aberta finita de S , possui um refinamento finito de ordem 0, formado por conjuntos dois a dois disjuntos, conseqüentemente dado $X \subseteq S$ temos que $S \setminus X = \bigcup_{Y \in S, Y \neq X} Y$ é aberto, logo X é fechado e portanto os elementos do refinamento de S forma uma partição clopen. Reciprocamente, qualquer cobertura aberta finita de S possui um refinamento finito que é uma partição clopen, então ele é formado por conjuntos dois a dois distintos, e, portanto tem ordem menor ou igual a 0, conseqüentemente a ordem de S é menor ou igual a 0. Como S é não vazio, temos, necessariamente, que $\text{Cov } S = 0$. \square

Apresentaremos agora algumas caracterizações da definição de dimensão de cobertura (abordado no teorema seguinte).

Teorema 4.37. *Sejam S um espaço métrico e n um inteiro não negativo. São equivalentes:*

1. $\text{Cov } S \leq n$;
2. se $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ é qualquer cobertura aberta finita de S , então existem conjuntos abertos $B_1 \subset U_1, B_2 \subset U_2, \dots, B_k \subset U_k$, tal que $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ é uma cobertura aberta de S com ordem $\leq n$;
3. se $\{U_1, U_2, \dots, U_{n+2}\}$ é uma cobertura aberta de S , então existem conjuntos abertos $B_1 \subset U_1, B_2 \subset U_2, \dots, B_{n+2} \subset U_{n+2}$, tal que $\bigcup_{i=1}^{n+2} B_i = S$ e $\bigcap_{i=1}^{n+2} B_i = \emptyset$;
4. se $\{U_1, U_2, \dots, U_{n+2}\}$ é uma cobertura aberta de S , então existem conjuntos fechados $F_1 \subset U_1, F_2 \subset U_2, \dots, F_{n+2} \subset U_{n+2}$, tal que $\bigcup_{i=1}^{n+2} F_i = S$ e $\bigcap_{i=1}^{n+2} F_i = \emptyset$.

Demonstração. (2) \Rightarrow (3) é claro, pois a afirmação 3 é um caso particular da afirmação 2 para $k = n + 2$.

(2) \Rightarrow (1) segue da definição de dimensão de cobertura de S .

(1) \Rightarrow (2) Suponha $\text{Cov } S \leq n$. A cobertura aberta $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ admite um refinamento finito \mathcal{W} de ordem menor do que ou igual a n . Para cada $W \in \mathcal{W}$ existe pelo menos um i tal que $W \subset U_i$; escolha um deles e chame-o de $i(W)$. Agora para cada i , seja

$$B_i = \{W \in \mathcal{W} : i(W) = i\}.$$

Então os conjuntos B_i são abertos, pois B_i é aberto (uma vez que cada $W \in \mathcal{W}$ é aberto e B_i é união de alguns deles), e $\bigcup_i B_i = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W = S$, visto que:

- $\bigcup_i B_i \subset \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W$, pois cada $i \in \{1, \dots, k\}$, $B_i \subset \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W$.
- $\bigcup_{W \in \mathcal{W}} W \subset \bigcup_i B_i$, pois para cada $W \in \mathcal{W}$ existe pelo menos um $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $W \in B_i$.
- \mathcal{W} é uma cobertura de S , pois todo refinamento é uma cobertura.

Se $x \in S$, então (já que \mathcal{W} tem ordem menor do que ou igual a n) pertence a no máximo $n + 1$ dos conjuntos W (uma vez que a interseção de quaisquer $n + 2$ conjuntos de \mathcal{W} é \emptyset). Mas $x \in B_i$, somente se $x \in W$ para algum W com $i(W) = i$, pela definição de B_i . Então x pertence a no máximo $n + 1$ dos conjuntos B_i , pois cada W pertence a exatamente um B_i .

(3) \Rightarrow (2) Suponha que S tenha a propriedade (3). Seja $\mathcal{A} = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ uma cobertura aberta de S . Se $k \leq n + 1$, então esta própria cobertura já tem ordem menor do que ou igual a n , pois não existe $V_1, V_2, \dots, V_{n+2} \in \mathcal{A}$ tais que $\forall i, j \in \{1, \dots, n + 2\}$, $V_i \neq V_j$ e $\bigcap_{i=1}^{n+2} V_i \neq \emptyset$. Então suponha que $k \geq n + 2$. Agora escreva $W_1 = U_1, W_2 = U_2, \dots, W_{n+1} = U_{n+1}$ e $W_{n+2} = \bigcup_{i=n+2}^k U_i$. Então $\{W_i\}_{i=1}^{n+2}$ cobre S , pois:

- Para cada $i = 1, \dots, n+1$, W_i é aberto (uma vez que $W_i = U_i$ e U_i é aberto). Além disso, W_{n+2} é aberto, visto que cada U_i com $i = n+2, \dots, k$ é aberto e como a união de abertos é um aberto, temos que W_{n+2} é aberto;
- Precisamos mostrar que $\bigcup_{i=1}^{n+2} W_i = S$. Por hipótese, temos que $\bigcup_{i=1}^k U_i = S$. Daí,

$$\bigcup_{i=1}^{n+2} W_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} W_i \right) \cup W_{n+2}.$$

Como, $W_i = U_i$ para $i = 1, \dots, n+1$ e $W_{n+2} = \bigcup_{i=n+2}^k U_i$ segue que:

$$\bigcup_{i=1}^{n+2} W_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i \right) \cup \bigcup_{i=n+2}^k U_i \quad (4.1)$$

$$= \bigcup_{i=1}^k U_i = S. \quad (4.2)$$

Sendo assim, pela hipótese (3), existem conjuntos abertos $V_i \subset W_i$ com $\bigcup_{i=1}^{n+2} V_i = S$ e $\bigcap_{i=1}^{n+2} V_i = \emptyset$. Seja $B_i = V_i$ para $i \leq n+1$ e $B_i = V_{n+2} \cap U_i$ para $i \leq n+2$. Então $B_i \subset U_i$ para todo i , temos que $\bigcup_{i=1}^k B_i = S$. De fato, como $\bigcup_{i=1}^{n+2} V_i = S$ e $B_i = V_i$ para $1 \leq n+1$ e $B_i = V_{n+2} \cap U_i$, $i \geq n+2$ temos:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n+2} V_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i \right) \cup V_{n+2} \quad (4.3)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n+1} B_i \cup V_{n+2} \quad (4.4)$$

$$\subset \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} B_i \right) \cup V_{n+2} \cup \left(\bigcup_{i=n+2}^k B_i \right) \quad (4.5)$$

$$\subset \bigcup_{i=1}^k B_i. \quad (4.6)$$

para a última inclusão, basta justificar que $V_{n+2} \subset \bigcup_{i=n+2}^k B_i$. De fato, seja $x \in V_{n+2}$, então $x \in W_{n+2} = \bigcup_{i=n+2}^k U_i$. Logo, existe i , com $n+2 \leq i \leq k$, tal que $x \in U_i$. Consequentemente, $x \in V_{n+2} \cap U_i = B_i$. Logo, $x \in \bigcup_{j=n+2}^k B_j$. Concluindo, assim, que $S \subset \bigcup_{i=1}^k B_i$. A outra inclusão, $\bigcup_{i=1}^k B_i \subset S$, é imediata, pois $B_i \subset S$. Portanto, $\bigcup_{i=1}^k B_i \subset S$. Além disso, $\bigcap_{i=1}^{n+2} B_i = \emptyset$, pois $\bigcap_{i=1}^{n+2} V_i = \bigcap_{i=1}^{n+2} B_i = \emptyset$. Repetindo essa construção $\binom{k}{n+2} - 1$ vezes, uma vez para cada subconjunto de $\{1, \dots, k\}$ com $n+2$ elementos, para organizar a mesma conclusão com todas as $n+2$ interseções vazias.

(3) \Rightarrow (4) Existem conjuntos abertos $B_i \subset U_i$ ($i = 1, \dots, n+2$) com $\bigcup_{i=1}^{n+2} B_i = S$ e $\bigcup_{i=1}^{n+2} B_i = \emptyset$. Agora $S \setminus B_1 \subseteq \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i$, pois $\bigcup_{i=1}^{n+2} B_i = S$. Note que,

- $S \setminus B_1$ é fechado, pois $(S \setminus B_1)^c = B_1$ que é aberto;
- $\bigcup_{i=2}^{n+2} B_i$, pois a união de aberto é aberto.

Então pela proposição A.3 existe um conjunto aberto V_1 com:

$$S \setminus B_1 \subseteq V_i \subseteq \overline{V_1} \subseteq \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i.$$

Seja $F_1 = S \setminus V_1$. Então nós temos $F_1 \subseteq B_1$ uma vez que

$$(S \setminus B_1)^c \supseteq (V_1)^c \Rightarrow B_1 \supseteq B_1 \supseteq S \setminus V_1 = F_1.$$

e $F_1 \cup \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i = S$, pois se $x \in \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i$, então $x \notin V_1$, pois $V_1 \subset \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i$, logo $x \in S \setminus V_1 = F_1$. Continuando, existe um conjunto aberto V_2 com:

$$S \setminus B_2 \subseteq V_2 \subseteq \overline{V_2} \subset (S \setminus \overline{V_1}) \cup \bigcup_{i=3}^{n+2} B_i.$$

$S \setminus B_2 \subseteq (S \setminus \overline{V_1}) \cup \bigcup_{i=3}^{n+2} B_i$, pois se $x \notin B_2$ e $x \notin \bigcup_{i=3}^{n+2} B_i$, então $x \in S \setminus \overline{V_1}$. Equivalentemente, se $x \in \overline{V_1}$ e $x \notin \bigcup_{i=3}^{n+2} B_i$, então $x \in B_2$. De fato, $\overline{V_1} \subseteq \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i$, logo $x \in B_2$. Agora, seja $F_2 = S \setminus V_2$, então $F_2 \subseteq B_2$ ($(S \setminus B_2)^c \supseteq V_2^c \Rightarrow B_2 \supseteq S \setminus V_2$). e $F_1 \cup F_2 \cup \bigcup_{i=3}^{n+2} B_i = S$. Continuando dessa forma temos o desejado.

(3) \Rightarrow (4) Existem conjuntos fechados F_i tal que $\bigcup_{i=1}^{n+2} F_i = S$ e $\bigcap_{i=1}^{n+2} F_i = \emptyset$. O conjunto fechado F_1 é um subconjunto de um conjunto aberto $U_1 \cap (S \setminus \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i)$, pois $F_1 \subseteq U_1$ e $F_1 \subseteq S \setminus \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i$ (pois se $x \in F_1$, então existe $i \in \{1, \dots, n+2\}$, e, portanto, $x \notin F_i$. Se $x \in S \setminus F_i$ para algum $i \in \{2, \dots, n+2\}$, então $x \in \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i$). Com isso, existe um conjunto aberto B_1 com $F_1 \subseteq B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq U_1 \cap (S \setminus \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i)$. Então, $\overline{B_1} \subseteq U_1$ e $\overline{B_1} \cap \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i = \emptyset$ (pois sabemos que $\bigcap_{i=1}^{n+2} F_i = \emptyset$ e $\overline{B_1} \subseteq U_1$ e $F_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq U_1$). Continuando, existe um conjunto aberto B_2 com $F_2 \subseteq B_2 \subseteq \overline{B_2} \subseteq U_2 \cap (\overline{B_1} \cap \bigcap_{i=1}^{n+2} F_i)$. \square

A caracterização de dimensão de cobertura para espaços métricos compactos de modo mais simples. Para isso vamos precisar da seguinte definição:

Definição 4.38 (REDE DE UMA COBERTURA). Se \mathcal{A} é uma cobertura, então sua **rede** é dada pelo $\sup_{A \in \mathcal{A}} \text{diam } A$.

Teorema 4.39. *Seja S um espaço métrico compacto e seja n um inteiro maior do que ou igual a 1. Então $\text{Cov } S \leq n$ se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$ existe uma cobertura aberta de S de ordem menor ou igual a n e rede menor ou igual a ϵ .*

Demonstração. Suponha que $\text{Cov } S \leq n$, ou seja, cada cobertura aberta finita de S possui um refinamento com ordem menor ou igual a n . Seja $\epsilon > 0$. Como S é compacto, então existe uma subcobertura finita $\mathcal{U} = \{U_i : \forall i = 1, \dots, k, \text{diam } U_i \neq \epsilon\}$ de S . Então existe um refinamento \mathcal{B} de \mathcal{U} de ordem no máximo n . No entanto, a rede de \mathcal{U} é definida pelo $\sup_{U_i \in \mathcal{U}} \text{diam } U_i \neq \epsilon$, já que para todo $i = 1, \dots, k$, $\text{diam } U_i \leq \epsilon$. Suponha que para cada $\epsilon > 0$, exista uma cobertura aberta de S com ordem menor do que ou igual a n e rede menor do que ou igual a ϵ . Seja \mathcal{U} qualquer cobertura aberta finita de S . Resulta do teorema A.5 que o número de Lebesgue r de \mathcal{U} é positivo. Seja \mathcal{B} uma cobertura aberta de S com ordem no máximo n e rede $< \min\{r, \epsilon\}$. Então, pela propriedade que define o número de Lebesgue, \mathcal{B} é um refinamento de \mathcal{U} . Portanto, $\text{Cov } S \leq n$. \square

Teorema 4.40. *Seja S um espaço métrico e $T \subset S$ um subconjunto de S . Então $\text{Cov } T \leq \text{Cov } S$.*

Demonstração. Se $\text{Cov } S = \infty$, não há nada para provar, então assumamos que $\text{Cov } S = n$ para algum inteiro n . Devemos mostrar $\text{Cov } T \leq n$. Isso será feito em três etapas.

1. Primeiro, suponha que T seja fechado. Seja \mathcal{A} uma cobertura aberta de T . Cada elemento $A \in \mathcal{A}$ é da forma $A = E \cap T$, onde E é um conjunto aberto em S . Além disso, $S \setminus T$ é aberto em S . Portanto

$$A_1 = \{E \subseteq S : E \text{ é aberto em } S, E \cap T \in \mathcal{A}\} \cup \{S \setminus T\}$$

é uma cobertura aberta de S , pois $E \subset S$ e $S \setminus T$ são abertos e

$$\{E \subseteq S : E \text{ é aberto em } S, E \cap T \in \mathcal{A}\} \cup \{S \setminus T\} \subseteq S$$

e

$$S \subseteq \{E \subseteq S : E \text{ é aberto em } S, E \cap T \in \mathcal{A}\} \cup \{S \setminus T\},$$

pois se $x \in S$, ou $x \in T$, ou $x \in S \setminus T$. Além disso, se $x \in S \setminus T$, então temos o desejado, mas se $x \in T$, então existe um aberto $E \in \mathcal{A}$ tal que $x \in E \cap T$, em particular $x \in E$. Portanto,

$$S = \{E \subseteq S : E \text{ é aberto em } S, E \cap T \in \mathcal{A}\} \cup \{S \setminus T\}.$$

Com efeito, existe um refinamento \mathcal{A}_2 de \mathcal{A}_1 que é uma cobertura aberta de S de ordem $\neq n$. Então por definição

$$\mathcal{A}_3 = \{E \cap T : E \in \mathcal{A}_2\}$$

é subordinada a \mathcal{A} (pois, para cada $E \cap T \in \mathcal{A}_3$ temos que existe um aberto $U \in \mathcal{A}$ tal que $E \cap T \subseteq U$), uma cobertura de T (pois $T = S \cap T = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_2} A \cap T = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_2} (A \cap T)$) e de ordem menor do que ou igual a n (uma vez que a interseção de quaisquer $n + 2$ elementos de \mathcal{A}_2 é vazia e cada elemento de \mathcal{A}_3 está contida num elemento de \mathcal{A}_2). Então $\text{Cov } T \leq n$.

2. Agora suponha que T seja aberto. Um conjunto aberto T pode ser escrito como uma união enumerável de subconjuntos fechados, $T = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_j$, em que

$$F_j = \left\{ x \in S : \text{dist}(x, S \setminus T) \geq \frac{1}{j} \right\},$$

(pois cada F_j é fechado, uma vez que $\text{dist}(x, \cdot)^{-1}([\frac{1}{j}, +\infty[)$, e além disso, se $x \in F_j$, então $x \notin S \setminus T$, logo $x \in T$. Da mesma forma, se $x \in T$, como T é aberto $S \setminus T$ é fechado, então $\text{dist}(x, S \setminus T) > r$. Dessa forma, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{j} < r$, daí $\text{dist}(x, S \setminus T) > \frac{1}{j}$). Agora pela primeira etapa, $\text{Cov } F_j \neq n$ para todo j . Então, pelo teorema A.4 temos $\text{Cov } T \leq n$.

3. Finalmente, considere o subconjunto geral T de S . Seja $\{U_1, U_2, \dots, U_{n+2}\}$ uma cobertura aberta de T . Para cada U_i , seja V_i um conjunto aberto em S com $U_i = V_i \cap T$. O conjunto $V = \bigcup_{i=1}^{n+2} V_i$ é aberto (pois cada V_i é aberto), então pela segunda, $\text{Cov } V \leq n$. Agora $\{V_1, V_2, \dots, V_{n+2}\}$ é uma cobertura aberta de V , então existem conjuntos abertos $W_i \subseteq V_i$ com $\bigcap_{i=1}^{n+1} W_i = \emptyset$ e $\bigcup_{i=1}^{n+2} W_i = V$. Mas então $W_i \cap T$ são abertos em T , e eles têm interseção vazia e união T . Isso mostra $\text{Cov } T \leq n$, como queríamos. \square

Apresentaremos, a seguir, alguns exemplos da dimensão de cobertura.

Exemplo 4.41 (INTERVALO FECHADO DA RETA). Sejam $a < b$ números reais. Então $\text{Cov } [a, b] = 1$. Para ver isso, tomemos $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ grande o suficiente para que $\frac{1}{n} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Então

$$\left\{ \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n} \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

é uma cobertura aberta de $[a, b]$ com rede $\neq \epsilon$ e ordem igual a 1. De fato, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é imediato ver que, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$x_0 < \frac{k+1}{n} \iff k > x_0 n - 1,$$

e

$$x_0 > \frac{k-1}{n} \iff k < x_0 n + 1.$$

Logo, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{k-1}{n} < x_0 < \frac{k+1}{n} \iff x_0 n - 1 < k < x_0 n + 1.$$

E, como $]x_0n - 1, x_0n + 1[\cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ (pois $\text{diam}(]x_0n - 1, x_0n + 1[) = 2$), disso resulta que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x_0 \in]\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n}[$ — a partir do que concluímos, pela arbitrariedade de $x_0 \in \mathbb{R}$, que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n}[.$$

Note, ainda, que, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$\text{diam}\left(]\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n}[\right) = \frac{k+1}{n} - \left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{2}{n}$$

Logo,

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \text{diam}\left(]\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n}[\right) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2}{n} = \frac{2}{n} < \epsilon.$$

Sejam $k, m \in \mathbb{Z}$ tal que $k + 2 \leq m$, $x_0 \in]\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n}[$ e $y_0 \in]\frac{m-1}{n}, \frac{m+1}{n}[$. Note que

$$\frac{m-1}{n} - \left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{m-k-2}{n} \underset{m \geq k+1}{\geq} 0.$$

Logo, $\frac{k+1}{n} \leq \frac{m-1}{n}$. Sendo assim,

$$x_0 < \frac{k+1}{n} \leq \frac{m-1}{n} < y_0.$$

Por conseguinte,

$$|y_0 - x_0| = y_0 - x_0 > \frac{m-1}{n} - \left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{m-k-2}{n} \geq 0.$$

Logo, $x_0 \neq y_0$. Assim, concluímos que, para quaisquer $k \in \mathbb{Z}$ tais que $k \leq m$,

$$m \geq k + 2 \Rightarrow]\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n}[\cap]\frac{m-1}{n}, \frac{m+1}{n}[= \emptyset.$$

Logo, para quaisquer m e $k \in \mathbb{Z}$ tais que $k \leq m$,

$$]\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n}[\neq \emptyset \Rightarrow m < k + 2 \Rightarrow m \in \{k-1, k+1\}.$$

Dessa forma,

$$\forall k, m \in \mathbb{Z},]\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n}[\cap]\frac{m-1}{n}, \frac{m+1}{n}[\neq \emptyset \Rightarrow m \in \{k-1, k, k+1\}.$$

Por sua vez, é claro que, para todo $k \in \mathbb{Z}$, $] \frac{k-2}{n}, \frac{k}{n}[\cap] \frac{k}{n}, \frac{k+2}{n}[= \emptyset$. Logo, a interseção de quaisquer três intervalos de

$$\left\{]\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n}[: k \in \mathbb{Z} \right\}$$

é vazia.

Teorema 4.42. *A reta real possui dimensão de cobertura igual a 1.*

Demonstração. Sabemos que $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-n, n[$. Mas, pelo exemplo 4.41, $\text{Cov}[-n, n] = 1$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Portanto, resulta do teorema A.6 que $\text{Cov } \mathbb{R} \leq 1$. \square

Teorema 4.43. *O triângulo de Siperpinski, \mathcal{T} , tem dimensão de cobertura igual a 1.*

Demonstração. Seja $k \in \mathbb{N}$, e seja $(T_1^k, T_2^k, \dots, T_{3^k}^k)$ uma enumeração qualquer dos triângulos presentes na k -ésima etapa da construção de \mathcal{T} . É fácil ver que, se a intersecção de quaisquer dois desses triângulos não for um único ponto, então a distância entre eles será $2 \cdot \frac{2^{-k}}{\sqrt{3}}$. Isso porque os lados de cada triângulo não preenchido medem pelo menos 2^{-k} , e, portanto, a altura de cada um desses triângulos é maior do que ou igual a $2 \cdot \frac{2^{-k}}{\sqrt{3}}$.

Para cada $r \in]0, \frac{2^{-k}}{\sqrt{3}}[$ e cada $i \in \{1, \dots, 3^k\}$, seja $N_r(T_i^k) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, T_i^k) < r\}$. Dado $r \in]0, \frac{2^{-k}}{\sqrt{3}}[$, afirmamos que $\mathcal{U}_r^k := \{N_r(T_i^k) : i \in \{1, \dots, 3^k\}\}$ é uma cobertura aberta de \mathcal{T} . Com efeito:

- $N_r(T_i^k)$ é aberto qualquer que seja $i \in \{1, \dots, 3^k\}$, pois, para cada $i \in \{1, \dots, 3^k\}$, $N_r(T_i^k) = d_i^{-1}(]-\infty, r])$, em que

$$\begin{aligned} d_i : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}; \\ x &\mapsto d(x, T_i^k) \end{aligned}$$

- \mathcal{U}_r^k é uma cobertura de \mathcal{T} , pois

$$\mathcal{T} \subseteq \bigcup_{i=1}^{3^k} T_i^k \subset N_r(T_i^k).$$

Vamos mostrar, a seguir, que \mathcal{U}_r^k tem ordem menor do que ou igual a 1. Para isso, fixemos $i, j, l \in \{1, \dots, 3^k\}$ de modo que $i \neq j$, $j \neq l$, e $i \neq l$, e suponhamos, por absurdo, que

$$N_r(T_i^k) \cap N_r(T_j^k) \cap N_r(T_l^k) \neq \emptyset.$$

Nesse caso, existe $x \in N_r(T_i^k) \cap N_r(T_j^k) \cap N_r(T_l^k)$. Como, porém, $x \in N_r(T_i^k)$, podemos fixar $y_i \in T_i^k$ de modo que $d(x, y_i) < r$. Do mesmo modo, como $x \in N_r(T_j^k)$, podemos fixar $z_j \in T_j^k$ de modo que $d(x, z_j) < r$. E, uma vez que $x \in N_r(T_l^k)$, podemos, também, fixar $w_l \in T_l^k$ de modo que $d(x, w_l) < r$. Como, por hipótese, $y_i \in T_i^k$, e $z_j \in T_j^k$, resulta do que observamos no primeiro parágrafo que, ou

$$d(y_i, z_j) = 0, \text{ ou } d(y_i, z_j) \geq 2 \frac{2^{-k}}{\sqrt{3}}.$$

É fácil ver, no entanto, que

$$d(y_i, z_j) \leq \underbrace{d(y_i, x)}_{< r} + \underbrace{d(x, z_j)}_{< r} < 2r < 2 \frac{2^{-k}}{\sqrt{3}},$$

— a partir do que concluímos que $d(y_i, z_j)$ é necessariamente igual a 0, e, portanto, que $y_i = z_j$. Analogamente, como

$$d(y_i, w_l) \leq d(y_i, x) + d(x, w_l) < 2r < 2 \frac{2^{-k}}{\sqrt{3}},$$

podemos concluir que $d(y_i, w_l) = 0$, e, portanto, que $y_i = w_l$. Consequentemente, $y_i = z_j = w_l$ — o que, por sua vez, é um absurdo, pois $T_i^k \cap T_j^k \cap T_l^k = \emptyset$. Logo, $N_r(T_i^k) \cap N_r(T_j^k) \cap N_r(T_l^k)$ é necessariamente vazia. E, como i, j e l em $\{1, \dots, 3^k\}$ são arbitrários, disso decorre, por fim, que a ordem de \mathcal{U}_r^k é, de fato, menor do que ou igual a 1.

Por fim, mostraremos que

$$\text{rede}(\mathcal{U}_r^k) := \sup_{i \in \{1, \dots, 3^k\}} \text{diam}(N_r(T_i^k)) \leq 2^{-k} + 2r.$$

Para isso, tomemos $i \in \{1, \dots, 3^k\}$ e $x, y \in N_r(T_i^k)$ de modo arbitrário. Como, por hipótese, $x \in N_r(T_i^k)$, podemos fixar $x' \in T_i^k$ de modo que $d(x, x') < r$. Da mesma forma, como $y \in N_r(T_i^k)$, podemos fixar $y' \in T_i^k$ de modo que $d(y, y') < r$. Nessas condições, no entanto, é imediato ver que

$$d(x, y) \leq \underbrace{d(x, x')}_{< r} + \underbrace{d(x', y')}_{\leq \text{diam}(T_i^k) = \frac{1}{2^k}} + \underbrace{d(y', y)}_{< r} < 2r + \frac{1}{2^k}$$

— em vista do que concluímos, pela arbitrariedade de x e de y em $N_r(T_i^k)$, que

$$\text{diam}(N_r(T_i^k)) \leq 2r + \frac{1}{2^k}.$$

E, como $i \in \{1, \dots, 3^k\}$ é também arbitrário, disso resulta, por sua vez, que $\text{rede}(\mathcal{U}_r^k) \leq 2r + \frac{1}{2^k}$.

Vamos, agora, provar, finalmente, que $\text{Cov } \mathcal{T} = 1$. Para isso, notemos, inicialmente, que, para cada $\epsilon > 0$, \mathcal{T} possui uma cobertura aberta de ordem menor do que ou igual a 1 e rede menor do que ou igual a ϵ (de fato, resulta do que demonstramos nos parágrafos anteriores que \mathcal{U}_r^k , em que $k \in \mathbb{N} \cap]\log(\frac{1}{\epsilon}), +\infty[$, e $r \in]0, \min\{\frac{\epsilon}{4}, \frac{2^{-k}}{\sqrt{3}}\}[$, é uma tal cobertura). É também fácil ver que \mathcal{T} é fechado, pois

$$\mathcal{T} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{3^k} T_i^k,$$

e, para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $i \in \{1, \dots, 3^k\}$, T_i^k é fechado. Sendo assim, como \mathcal{T} é, evidentemente, limitado, podemos concluir que \mathcal{T} é compacto. Resulta, pois, do teorema 4.39 que $\text{Cov } \mathcal{T} \leq 1$. Entretanto, como \mathcal{T} contém segmentos de reta, que têm dimensão 1, temos também $\text{Cov } \mathcal{T} \geq 1$. Logo, $\text{Cov } \mathcal{T} = 1$. \square

4.3 Dimensão Indutiva Fraca

A dimensão indutiva fraca é definida, como o próprio nome diz, de maneira indutiva e será denotada por $\text{ind } X$. Para cada espaço métrico (X, d) será atribuído uma dimensão (isto é, um número inteiro maior do que ou igual a -1 junto com um símbolo extra do ∞).

Definição 4.44 (DIMENSÃO INDUTIVA FRACA). Seja k um inteiro não negativo e seja (S, d) um espaço métrico. Nessas condições:

1. se $S = \emptyset$, então por definição, $\text{ind } S = -1$.
2. dizemos que $\text{ind } S \leq k$, se existe uma base de S formada por conjuntos cujas fronteiras possuem dimensão indutiva fraca menor do que ou igual a $k - 1$;
3. dizemos que $\text{ind } S = k$ se $\text{ind } S \leq k$, mas $\text{ind } S > k - 1$.

Se não existir um inteiro $k \geq -1$ tal que $\text{ind } S = k$, diremos que $\text{ind } S = \infty$.

Exemplo 4.45. Seja X um conjunto não vazio, e seja $d: X \times X \rightarrow X$ a métrica discreta. Nessas condições, é imediato ver que $\mathcal{B} := \{\{x\} : x \in X\}$ é uma base de (X, d) . Sendo assim, como $X \neq \emptyset$, e, para cada $x \in X$, $\partial\{x\} = \emptyset$, podemos concluir que $\text{ind } X = 0$.

Exemplo 4.46. Sejam a e b números reais tais que $a < b$. Vamos mostrar, a seguir, que $\text{ind}([a, b])$ é igual a 1. Para isso, precisamos provar que $\text{ind}([a, b]) \leq 1$, e que, no entanto, $\text{ind}([a, b]) > 0$. Vamos, inicialmente, mostrar que $\text{ind}([a, b]) > 0$. Para tanto, notemos que, se $\text{ind}([a, b])$ fosse menor do que ou igual a 0, existiria uma base de $[a, b]$ formada por conjuntos com fronteiras vazias. Isso, porém, seria um absurdo, pois, como o intervalo $[a, b]$ é conexo, e

$$[a, b] = A \dot{\cup} \partial(A) \dot{\cup} \text{int}([a, b] \setminus A)$$

qualquer que seja o aberto A de $[a, b]$, os únicos abertos de $[a, b]$ que possuem fronteira vazia em relação à topologia de subespaço de $[a, b]$ são o \emptyset e o próprio $[a, b]$. Logo, $\text{ind}([a, b]) > 0$. Vamos, agora, provar que $\text{ind}([a, b]) \leq 1$. Para isso, observemos, de início, que a coleção

$$\mathcal{B} := \{[a, \alpha[: a < \alpha \leq b\} \cup \{]\beta, \gamma[: a \leq \beta < \gamma \leq b\} \cup \{]\delta, b\} : a \leq \delta < b\}$$

é uma base de $[a, b]$. É imediato ver que a fronteira de cada um dos elementos de \mathcal{B} é um conjunto formado por apenas dois pontos. Consequentemente, podemos pensar na fronteira de cada um desses elementos como sendo um espaço topológico discreto. Resulta, pois, do exemplo 4.45 que as dimensões indutivas fracas das fronteiras dos elementos de \mathcal{B} são todas iguais a 0. E, como \mathcal{B} é base de $[a, b]$, disso concluímos, por fim, que $\text{ind}([a, b])$ é, de fato, menor do que ou igual a 1.

O teorema a seguir nos mostra uma propriedade esperada da dimensão indutiva fraca, que é ser invariante por homeomorfismos.

Teorema 4.47. *Sejam (S, d) e (T, d) espaços homeomorfos. Nessas condições, $\text{ind } S = \text{ind } T$.*

Demonstração. A prova é por indução em $\text{ind } S$. Se $\text{ind } S = -1$, então S é o conjunto vazio, como T é homeomorfo a S , também é vazio, então $\text{ind } T = -1$. Suponha que o teorema seja conhecido para espaços S com $\text{ind } S \geq k$, e considere um espaço S com $\text{ind } S = k + 1$. Seja $h : S \rightarrow T$ um homeomorfismo. Então existe uma base \mathcal{B} para os conjuntos abertos de S consistindo em conjuntos B com $\text{ind } \partial B \leq k$. Agora $\{h(B) : B \in \mathcal{B}\}$ é uma base para os conjuntos abertos de T . Se $B \in \mathcal{B}$, então $h(\partial B) = \partial h(B)$. A restrição de h à ∂B é um homeomorfismo. Pela hipótese de indução, $\text{ind } \partial h(B) = \text{ind } \partial B \leq k$. Então notemos que existe uma base para os conjuntos abertos de T consistindo de conjuntos com fronteira de dimensão indutiva fraca menor do que ou igual a k . Isto mostra que $\text{ind } T \leq k + 1$. Mas se $\text{ind } T \leq k$, então a hipótese de indução mostraria que $\text{ind } S \leq k$, que é falso. Então $\text{ind } T = k + 1$. Portanto, por indução observamos que se $\text{ind } S$ é um número inteiro, então $\text{ind } S = \text{ind } T$. Se $\text{ind } S = \infty$, então $\text{ind } T = k$ é falso para todos os inteiros k , então também $\text{ind } T = \infty$. Portanto, em todos os casos, temos $\text{ind } S = \text{ind } T$. \square

Para finalizar essa seção provaremos dois resultados importante acerca da dimensão indutiva fraca. O leitor poderá consultar o livro [Edg08] para maiores informações sobre as propriedades da dimensão indutiva fraca.

Teorema 4.48. *Seja (S, d) um espaço métrico, e, seja $T \subset S$. Então $\text{ind } T \leq \text{ind } S$.*

Demonstração. O teorema é claramente verdade se $\text{ind } S = \infty$. Sendo assim, vamos supor que $\text{ind } S < \infty$. A demonstração procede por indução em $\text{ind } S$. Se $\text{ind } S = -1$, então S é vazio, então, claramente, $T \subseteq S$ também é vazio, e, portanto, $\text{ind } T = -1$. Suponha que o teorema seja verdadeiro para todos os pares S, T com $T \subseteq S$ e $\text{ind } S \leq k$. Com efeito, considere um par $T \subseteq S$ com $\text{ind } S = k + 1$. Desse modo, é suficiente mostrarmos que existe uma base para os conjuntos abertos de T constituídos por conjuntos com fronteira de dimensão indutiva fraca menor do que ou igual a k . Então, seja $x \in T$, e, seja V um conjunto aberto em T com $x \in V$. Devemos encontrar um conjunto aberto U em T com $x \in U \subseteq V$ e $\text{ind } \partial_T U \leq k$. Como V é aberto em T , existe um conjunto V aberto em S com $V = V \cap T$. Como $\text{ind } S \leq k + 1$, e $x \in V$, existe um conjunto U aberto em S com $x \in U \subseteq V$ e $\text{ind } \partial_S U \leq k$. Seja $U = U \cap T$. Então U é aberto em T , e $x \in U \subseteq V$. Resulta do teorema A.8, que $\partial_T U \subseteq \partial_S U$, então pela hipótese de indução, temos $\text{ind } \partial_T U \leq \text{ind } \partial_S U \leq k$. Assim, existe uma base para os conjuntos abertos de T constituídos por conjuntos U com $\text{ind } \partial_T U \leq k$. Isso significa que $\text{ind } T \leq k + 1$. Portanto, por indução, o teorema é verdadeiro para todos os valores de $\text{ind } S$. \square

Teorema 4.49. *Sejam S, T espaços métricos. Então $\text{ind}(S \times T) \leq \text{ind } S + \text{ind } T$.*

Demonstração. Inicialmente, notemos que:

- se $X = \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$, então

$$\text{ind}(X \times Y) = \text{ind}(\emptyset) = \infty \leq -1 + \text{ind}(Y) = \text{ind} X + \text{ind} Y;$$

- se $\text{ind} X = \infty$ ou $\text{ind} Y = \infty$, então

$$\text{ind}(X \times Y) \leq \infty = \text{ind} X + \text{ind} Y.$$

Sendo assim, vamos aplicar a indução forte. Podemos supor que essa soma $\text{ind} X + \text{ind} Y$ seja finita. Vamos aplicar indução sobre $\text{ind} X + \text{ind} Y$. Com efeito, se $\text{ind} X + \text{ind} Y = -1$ então, ou $X = \emptyset$, ou $Y = \emptyset$. Nesse caso, vale que:

$$\text{ind}(X \times Y) = \text{ind}(\emptyset) = -1 \leq -1 + \text{ind} Y = \text{ind} X + \text{ind} Y.$$

Suponhamos que $\text{ind}(X \times Y) \leq \text{ind} X + \text{ind} Y$ para quaisquer espaços métricos separáveis X e Y tais que $\text{ind} X + \text{ind} Y < k$ (para certo $k \geq 0$) e vamos mostrar que se X e Y são espaços métricos separáveis tais que $\text{ind} X + \text{ind} Y = k$, então $\text{ind}(X \times Y) \leq \text{ind} X + \text{ind} Y$. Sejam $n := \text{ind} X$ e $m := \text{ind} Y$. Observe que, necessariamente, $n \geq 0$ e $m \geq 0$, pois, se $n = -1$ ou $m = -1$, então $\text{ind}(X \times Y) = -1$. Seja $(x, y) \in X \times Y$ e $W \subset X \times Y$ uma vizinhança de (x, y) . Como W é um aberto da topologia produto de $X \times Y$ podemos fixar abertos $U \subset X$ e $V \subset Y$ de modo que $(x, y) \in U \times V$ e $U \times V \subset W$. Ademais, como, por hipótese, $\text{ind} X = n$ e $\text{ind} Y = m$, existem bases \mathcal{B} e $\mathcal{C}_{\frac{1}{3}}$ de X e de Y , respectivamente, tais que, para todo $U' \in \mathcal{B}$, $\text{ind}(\partial U') \leq n - 1$ e para todo $V' \in \mathcal{C}_{\frac{1}{3}}$, $\text{ind}(\partial V') \leq m - 1$. Como \mathcal{B} é base de X , \mathcal{U} é um aberto de X e $x \in \mathcal{U}$, podemos fixar $U' \in \mathcal{B}$ de modo que $x \in U'$ e $U' \subseteq U$. Analogamente, podemos fixar $V' \in \mathcal{C}_{\frac{1}{3}}$ de modo que $y \in V'$ e $V' \subseteq V$. Por fim, observe que

$$x \in U' \subseteq U \text{ e } y \in V' \subseteq V \Rightarrow (x, y) \in U' \times V' \subseteq U \times V \subseteq W.$$

Sendo assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que $U = U'$ e $V = V'$. Observe que $\partial(U \times V) \subseteq (X \times \partial V) \cup (\partial U \times Y)$. Note ainda que

$$\text{ind} X + \text{ind} \partial V \leq n + (m - 1) = (n + m) - 1 = k - 1$$

e

$$\text{ind} Y + \text{ind}(\partial U) \leq m + (n - 1) - 1 = k - 1.$$

Logo, como ∂U e ∂V são separáveis (já que X e Y são separáveis e $\partial U \subseteq X$ e $\partial V \subseteq Y$, resulta da hipótese de indução que:

$$\text{ind}(\partial U \times Y) \leq \text{ind}(\partial U) + \text{ind} Y \leq k - 1$$

e

$$\text{ind}(X \times \partial V) \leq \text{ind} X + \text{ind} \partial V \leq k - 1.$$

Observe agora que $X \times \partial V$ e $\partial U \times Y$ são fechados, pois são produtos cartesianos de fechados, e que $(X \times \partial V) \cup (U \times \partial Y)$ é separável, uma vez que X e Y são separáveis e o produto cartesiano de dois espaços métricos separáveis é separável. Consequentemente, pelo teorema A.7,

$$\text{ind}((X \times \partial V) \cup (\partial U \times Y)) \leq k - 1.$$

E, uma vez que $\partial(U \times V) \subset (X \times \partial V) \cup (\partial U \times Y)$, disso resulta que:

$$\text{ind}(\partial(U \times V)) \leq \text{ind}((X \times \partial V) \cup (\partial U \times Y)) \leq k - 1.$$

Por fim, como $(x, y) \in X \times Y$ e aberto $W \subset X \times Y$ tal que $(x, y) \in W$ são arbitrários, podemos concluir que $X \times Y$ possui uma base formada por abertos cuja fronteira tem dimensão indutiva

menor do que ou igual a $k - 1$. Portanto, $\text{ind}(X \times Y) \leq k = \text{ind } X + \text{ind } Y$.

□

Capítulo 5

Dimensão Box-Counting

Neste capítulo apresentamos a dimensão box-counting, suas propriedades básicas, suas limitações e exemplos clássicos. O conjunto de Cantor ternário, o conjunto dos números racionais e irracionais possuem dimensão topológica igual a 0 como provamos no capítulo 4, embora a geometria desses conjuntos seja bem distinta. Nesse sentido, a dimensão topológica não é adequada para caracterizar os fractais, sendo necessário definir as dimensões *box-counting* e de *Hausdorff*. A referência utilizada neste capítulo foi o livro “*Fractal geometry: mathematical foundations and applications*” [Fal04], do autor Falconer.

5.1 Dimensão Box-counting

Para motivar a definição da dimensão *box-counting* vamos considerar a seguinte situação. Tomemos um intervalo fechado $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, um quadrado de lado 1 contido em \mathbb{R}^2 e um cubo de aresta 1 contido em \mathbb{R}^3 como pode ser observado pela Figura 1.

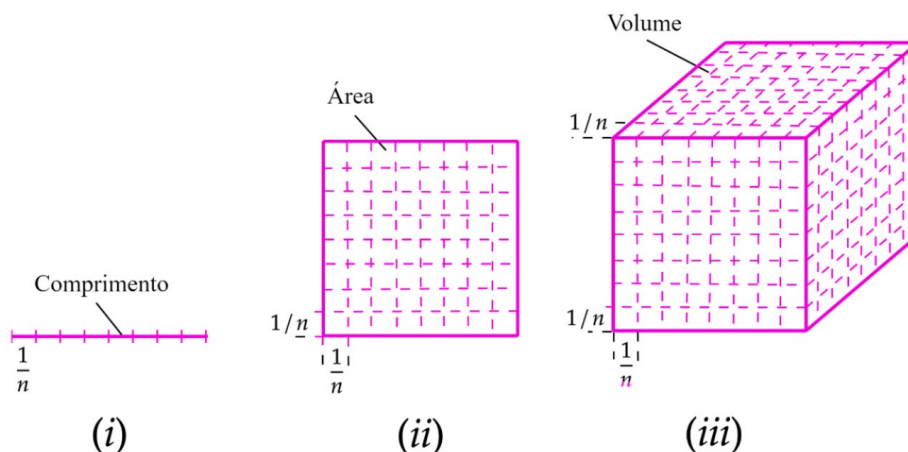


Figura 5.1. Partições do segmento de reta, quadrado e cubo.

Fonte: autora.

Sendo assim, iremos particionar: o intervalo fechado $[0, 1]$ em n intervalos de comprimento $\frac{1}{n}$, o quadrado de lado 1 em n^2 quadrados de lado $\frac{1}{n}$, e por fim, o cubo de aresta 1 em n^3 cubos de aresta $\frac{1}{n}$, com o objetivo de calcular o número total desses objetos em função dos seus diâmetro após particioná-los. Assim, podemos obter os seguintes resultados:

- o número de intervalos de comprimento $\frac{1}{n}$ (a qual denotaremos por N_I) em função do seu

diâmetro $\delta_I := \frac{1}{n}$, é dado por:

$$N_I = \frac{1-0}{\frac{1}{n}} = 1 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 \cdot \delta_I^{-1};$$

- o número de quadrados de lado $\frac{1}{n}$ (a qual denotaremos por N_Q) em função do seu diâmetro $\delta_Q := \frac{\sqrt{2}}{n}$:

$$N_Q = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^{-2} = 2 \cdot \delta_Q^{-2};$$

- na última situação temos que o número de cubos de aresta $\frac{1}{n}$ (a qual denotaremos por N_C) em função do seu diâmetro $\delta_C = \frac{\sqrt{3}}{n}$:

$$N_C = (3\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{n}\right)^{-3} = (3\sqrt{3}) \cdot \delta_C^{-3}.$$

Portanto, dada uma cobertura de diâmetro no máximo δ para um subconjunto F do \mathbb{R}^n , podemos generalizar o resultado apresentado anteriormente da seguinte forma:

$$N_\delta(F) \simeq c \cdot \delta^{-s}. \quad (5.1)$$

em que c e s são constantes reais positivas e $N_\delta(F)$ é o menor número de conjuntos necessários para cobrir F . Assim, dado $0 < \delta < 1$, tomando a função logarítmica e dividindo por $-\log \delta$ em ambos os lados da equação 5.1, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} &\simeq \frac{\log c \delta^{-s}}{-\log \delta} \iff \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \simeq \frac{\log c}{-\log \delta} + \frac{-s \log \delta}{-\log \delta} \\ &\iff s \simeq \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} + \frac{\log c}{\log \delta} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dessa forma, tomando o limite, quando $\delta \rightarrow 0^+$, na equação 5.2, podemos concluir que:

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}, \quad (5.3)$$

e dizemos que F tem dimensão *box* igual a s .

A seguir vamos revisar a definição de diâmetro de um subconjunto de \mathbb{R}^n e defirmos o conceito de δ -cobertura que serão importantes para definirmos a dimensão *box-counting*.

Definição 5.1 (DIÂMETRO). Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ qualquer subconjunto não vazio. O **diâmetro** de U é definido como $\text{diam}(U) = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$.

Definição 5.2 (δ -COBERTURA). Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Nessas condições, se $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma coleção enumerável ou finita de subconjuntos de \mathbb{R}^n cujos diâmetros sejam menores do que ou iguais a δ , e se $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, dizemos que $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma **δ -cobertura** de X . O conjunto das δ -coberturas de X será denotado por $\mathcal{C}_\delta(X)$.

Observação 5.3. Neste capítulo e nos capítulos seguintes, adotaremos uma definição de cobertura um pouco diferente daquela que apresentamos no terceiro capítulo. Mais especificamente, dados $n \in \mathbb{N}$ e $X \subseteq \mathbb{R}^n$, diremos que uma coleção $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de \mathbb{R}^n é uma cobertura de X se $X \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$.

Com o objetivo de motivar a próxima definição vamos provar o seguinte resultado.

Proposição 5.4. Para cada $\delta > 0$ e cada subconjunto limitado $X \subseteq \mathbb{R}^n$, o conjunto

$$\mathcal{A} := \left\{ k : \exists U_1, \dots, U_k \subseteq X \text{ tais que } X \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_i \text{ e, para cada } i \in \{1, \dots, k\}, \text{diam}(U_i) \leq \delta \right\}$$

é não vazio e, portanto, possui um elemento mínimo.

Demonstração. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto limitado, e seja $\delta > 0$ dado. Inicialmente, observe que, se $\mathcal{A} \neq \emptyset$, resulta da boa ordenação dos números naturais que \mathcal{A} possui um elemento mínimo. Sendo assim, o que precisamos mostrar é que, se X é limitado, então $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Para isso, note, antes de qualquer coisa, que, se X é limitado, então \overline{X} é também limitado. Dessa forma, como \overline{X} é fechado, podemos concluir que \overline{X} é compacto. Por sua vez, é imediato ver que

$$\mathcal{C} := \{U \subseteq \mathbb{R}^n : U \text{ é aberto, e } \text{diam } U \leq \delta\}$$

é uma cobertura aberta de \overline{X} . Resulta, pois, da compacidade de \overline{X} que podemos fixar $m \in \mathbb{N}$ e $U_1, \dots, U_m \in \mathcal{C}$ de modo que $\overline{X} \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i$. Consequentemente, $X \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_i$, e, portanto, $m \in \mathcal{A}$ — a partir do que concluímos, por fim, que, de fato, $\mathcal{A} \neq \emptyset$. \square

Definição 5.5. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado, e seja $\delta > 0$. Definimos $N_\delta(X)$, como sendo o número mínimo de conjuntos de X necessários para cobrir X . Isto é,

$$N_\delta(X) = \inf \left\{ k : \exists U_1, \dots, U_k \subseteq X \text{ tal que } X \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_i \text{ e para cada } i \in \{1, \dots, k\}, \text{diam}(U_i) \leq \delta \right\}.$$

Proposição 5.6. Se $\delta \leq \delta'$, então $N_{\delta'}(X) \leq N_\delta(X)$.

Demonstração. Resulta da definição de $N_\delta(X)$ que X pode ser coberto por $N_\delta(X)$ conjuntos U_i com diâmetro menor do que ou igual a δ . Como, porém, $\delta \leq \delta'$, o diâmetro de cada U_i é, em particular, menor do que ou igual a δ' . Consequentemente, $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é, também, uma cobertura de X formada por $N(X, \delta)$ conjuntos com diâmetro menor do que ou igual a δ' . E, sendo assim, deve-se ter, necessariamente, $N_{\delta'}(X) \leq N_\delta(X)$. \square

Definição 5.7 (DIMENSÕES BOX-COUNTING INFERIOR E SUPERIOR). Seja X um subconjunto limitado de \mathbb{R}^n . As **dimensões box-counting inferior e superior** de X são, respectivamente,

$$\underline{\dim}_B X = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \right\} \text{ e} \quad (5.4)$$

$$\overline{\dim}_B X = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \right\}. \quad (5.5)$$

Definição 5.8 (DIMENSÃO BOX-COUNTING). Quando as dimensões inferior e superior, dadas pelas fórmulas 5.4 e 5.5, coincidem nós definimos a **dimensão box-counting** do conjunto X , também conhecida como dimensão de Minkowski, como sendo o número real não-negativo dado pela fórmula abaixo:

$$\dim_B X = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta}. \quad (5.6)$$

Observação 5.9. Ao longo do texto, assumiremos que $\delta > 0$ é suficientemente pequeno para garantir que $-\log \delta$ e quantidades semelhantes sejam estritamente positivas, evitando problemas como por exemplo $\log 0$ ou $\log \infty$.

A proposição seguinte afirma que a dimensão box-counting é invariante sob a escolha da cobertura definida para o conjunto F .

Proposição 5.10. *Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, e suponhamos que existem constantes $A_1, B_1, A_2, B_2 > 0$ tais que*

$$N_\delta(F) \leq A_1 \tilde{N}_{B_1\delta}(F), \quad (5.7)$$

e

$$\tilde{N}_\delta(F) \leq A_2 N_{B_2\delta}(F), \quad (5.8)$$

em que $\tilde{N}_\delta(F)$ é um dos números a seguir (os quais estão associados a alguns dos tipos de coberturas do conjunto F):

- o menor número de conjuntos de diâmetro no máximo δ que cobrem F ;
- o menor número de bolas fechadas de raio δ que cobrem F ;
- o menor número de cubos de aresta δ que cobrem F ;
- o menor número de δ -mesh¹;
- o maior número de bolas disjuntas de raio δ com centros em F .

Nessas condições,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{-\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(\tilde{N}_\delta(F))}{-\log \delta}.$$

Demonstração. Aplicando o logaritmo em ambos os lados da desigualdade 5.7 temos que:

$$\log(N_\delta(F)) \leq \log\left(A_1 \tilde{N}_{B_1\delta}(F)\right). \quad (5.9)$$

Assim, tomando $0 < \delta < 1$ suficientemente pequeno, e dividindo por $-\log \delta$ em ambos os lados da desigualdade 5.9, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\log(N_\delta(F))}{-\log \delta} &\leq \frac{\log\left(A_1 \tilde{N}_{B_1\delta}(F)\right)}{-\log \delta} \Leftrightarrow \frac{\log(N_\delta(F))}{-\log \delta} \leq \frac{\log A_1}{-\log \delta} + \frac{\tilde{N}_{B_1\delta}(F)}{-\log \delta - \log B_1 + \log B_1} \\ &\Leftrightarrow \frac{\log(N_\delta(F))}{-\log \delta} \leq \frac{\log A_1}{-\log \delta} + \frac{\tilde{N}_{B_1\delta}(F)}{-\log(B_1\delta) + \log B_1}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Dessa forma, realizando a mudança de variáveis $\delta' = B_1\delta$, temos que se $\delta \rightarrow 0$ então $\delta' \rightarrow 0$, então tomando o limite no segundo termo da desigualdade 5.10, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log A_1}{-\log \delta} + \lim_{\delta' \rightarrow 0} \frac{\tilde{N}_{\delta'}(F)}{-\log \delta' + \log B_1} &= \lim_{\delta' \rightarrow 0} \frac{\tilde{N}_{\delta'}(F)}{-\log \delta' \left(1 + \frac{\log B_1}{-\log \delta'}\right)} \\ &= \lim_{\delta' \rightarrow 0} \frac{\tilde{N}_{B_1\delta}(F)}{-\log \delta'}. \end{aligned}$$

De maneira análoga, aplicando logaritmo em ambos os lados da desigualdade 5.8, temos que:

$$\log \tilde{N}_\delta(F) \leq \log(A_2 N_{B_2\delta}(F)) \quad (5.11)$$

tomando $0 < \delta < 1$ suficientemente pequeno, e dividindo por $-\log \delta$ em ambos os lados da desigualdade 5.11, temos que:

¹A família de cubos da forma $[m_1\delta, (m_1+1)\delta] \times \dots \times [m_n\delta, (m_n+1)\delta]$ em que m_1, \dots, m_n são inteiros é chamada de δ -mesh.

$$\begin{aligned} \frac{\log \tilde{N}_\delta(F)}{-\log \delta} &\leq \frac{\log(A_2 N_{B_2\delta}(F))}{-\log \delta} \Leftrightarrow \frac{\log \tilde{N}_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log A_2}{-\log \delta} + \frac{N_{B_2\delta}(F)}{-\log \delta - \log B_2 + \log B_2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\log \tilde{N}_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{N_{B_2\delta}(F)}{-\log(B_2\delta) + \log B_2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

da mesma forma, realizando a mudança de variáveis $\delta'' = B_2\delta$, temos que se $\delta \rightarrow 0$ então $\delta'' \rightarrow 0$. Então tomando o limite no segundo termo da desigualdade 5.12 temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log A_2}{-\log \delta} + \lim_{\delta'' \rightarrow 0} \frac{N_{\delta''}(F)}{-\log \delta'' + \log B_2} &= \lim_{\delta'' \rightarrow 0} \frac{N_{\delta''}(F)}{-\log \delta'' \left(1 + \frac{\log B_2}{\log \delta''}\right)} \\ &= \lim_{\delta'' \rightarrow 0} \frac{N_{\delta''}(F)}{-\log \delta''}. \end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \tilde{N}_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

□

5.2 Propriedades básicas da dimensão box-counting

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades simples da dimensão box-counting que serão uteis para explicar os exemplos da próxima seção.

Proposição 5.11 (IMAGENS LIPSCHITZ). *Se $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação Lipschitz, ou seja, $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$, para todo $x, y \in X$ então $\underline{\dim}_B f(X) \leq \underline{\dim}_B X$ e $\overline{\dim}_B f(X) \leq \overline{\dim}_B X$.*

Demonstração. Dado uma δ -cobertura $\{U_i\}$ de X então sabemos que $\{U_i \cap X\}$ também é uma δ -cobertura, uma vez que se $\bigcup_i U_i = X$, então $\bigcup_i (U_i \cap X) = (\bigcup_i U_i) \cap X = X \cap X = X$. Além disso, temos que $\{f(U_i \cap X)\}$ é uma $c\delta$ -cobertura de $f(X)$. De fato, como f é Lipschitz temos que:

$$\text{diam}(f(U_i \cap X)) \leq c \cdot \text{diam}(U_i \cap X) \leq c \cdot \text{diam}(U_i) \leq c \cdot \delta.$$

Dessa forma se $c > 1$ temos que:

$$N_{c\delta}(X) \leq N_\delta(X). \quad (5.13)$$

Assim, dado $0 < \delta < 1$, de maneira análoga ao passo feito anteriormente, por 5.13 temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\log N_{c\delta}(X)}{-\log \delta} &\leq \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \Leftrightarrow \frac{\log N_{c\delta}(X)}{-\log \delta - \log c + \log c} \leq \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \\ &\Leftrightarrow \frac{\log N_{c\delta}(X)}{-\log c\delta + \log c} \leq \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \\ &\Leftrightarrow \frac{\log N_{c\delta}(X)}{-\log c\delta \left(1 - \frac{\log c}{\log c\delta}\right)} \leq \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Assim, tomando o \liminf e \limsup na desigualdade 5.14, respectivamente, temos que:

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_{c\delta}(X)}{-\log c\delta \left(1 - \frac{\log c}{\log c\delta}\right)} \right\} \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \right\} \Leftrightarrow \underline{\dim}_B f(X) \leq \underline{\dim}_B X.$$

e

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_{c\delta}(X)}{-\log c\delta \left(1 - \frac{\log c}{\log c\delta}\right)} \right\} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_{\delta}(X)}{-\log \delta} \right\} \Leftrightarrow \overline{\dim}_B f(X) \leq \overline{\dim}_B X.$$

□

Corolário 5.12 (INVARIÂNCIA POR TRANSFORMAÇÕES BI-LIPSCHITZ). *Se $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação bi-Lipschitz, ou seja, dados $x, y \in X$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tal que $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ temos que*

$$c_1 \cdot |x - y| < |f(x) - f(y)| \leq c_2 \cdot |x - y|.$$

Então $\underline{\dim}_B f(X) = \underline{\dim}_B X$ e $\overline{\dim}_B f(X) = \overline{\dim}_B X$.

Demonstração. Se f é bi-Lipschitz, então $f : X \rightarrow f(X)$ é uma bijeção. Com isso dados $x_*, y_* \in f(X)$ tal que $x = f^{-1}(x_*)$ e $y = f^{-1}(y_*)$ temos que

$$|x_* - y_*| = |f(f^{-1}(x_*)) - f(f^{-1}(y_*))| \geq c_1 |f^{-1}(x_*) - f^{-1}(y_*)|.$$

Portanto, como $c_1 > 0$, então $|f^{-1}(x_*) - f^{-1}(y_*)| \geq c \cdot |x_* - y_*|$, em que $c = \frac{1}{c_1} > 0$, logo f^{-1} é Lipschitz. Pela proposição 5.11, temos que:

$$\underline{\dim}_B X = \underline{\dim}_B f^{-1}(f(X)) \leq \underline{\dim}_B f(X) \quad (5.15)$$

e

$$\overline{\dim}_B X = \overline{\dim}_B f^{-1}(f(X)) \leq \overline{\dim}_B f(X). \quad (5.16)$$

Portanto, das desigualdades 5.15 e 5.16, temos que

$$\underline{\dim}_B f(X) = \underline{\dim}_B X \quad \text{e} \quad \overline{\dim}_B f(X) = \overline{\dim}_B X$$

□

Apresentaremos agora mais algumas propriedades básicas da dimensão box-counting.

Proposição 5.13. $\underline{\dim}_B \emptyset = \overline{\dim}_B \emptyset = 0$.

Demonstração. Sabemos que para todo $\delta > 0$, temos que qualquer conjunto de diâmetro δ cobre o \emptyset . Assim temos que:

$$N_{\delta}(\emptyset) = 1. \quad (5.17)$$

Seja δ tal que $0 < \delta < 1$. Dessa forma, tomando a função logarítmica, dividindo por $-\log \delta$ em ambos os lados da equação 5.17, e por último calculando os limites inferior e superior, respectivamente, temos:

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_{\delta}(\emptyset)}{-\log \delta} \right\} = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log 1}{-\log \delta} = 0,$$

e

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_{\delta}(\emptyset)}{-\log \delta} \right\} = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log 1}{-\log \delta} = 0.$$

Portanto, $\underline{\dim}_B \emptyset = \overline{\dim}_B \emptyset = 0$. □

Proposição 5.14 (MONOTONICIDADE). *Se $Y \subseteq X$, então $\underline{\dim}_B Y \leq \underline{\dim}_B X$ e $\overline{\dim}_B Y \leq \overline{\dim}_B X$.*

Demonstração. Vamos considerar uma cobertura por conjuntos de diâmetro no máximo δ para X .

Como

$$\underbrace{\left\{ k \in \mathbb{N} : \exists U_1, \dots, U_k \subseteq X \text{ tais que } X = \bigcup_{i=1}^k U_i \text{ e para cada } i \in \{1, \dots, k\}, \text{diam}(U_i) \leq \delta \right\}}_{:=A}$$

está contido em

$$\underbrace{\left\{ k \in \mathbb{N} : \exists U_1, \dots, U_k \subseteq X \text{ tais que } Y \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_i \text{ e para cada } i \in \{1, \dots, k\}, \text{diam}(U_i) \leq \delta \right\}}_{:=B},$$

podemos concluir que $\inf(B) \leq \inf(A)$, isto, é,

$$N_\delta(Y) = \inf(B) \leq \inf(A) = N_\delta(X). \quad (5.18)$$

Dado δ tal que $0 < \delta < 1$, de maneira análoga ao passo feito anteriormente, por 5.18 temos que:

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(Y)}{-\log \delta} \right\} \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \right\}$$

$$\underline{\dim}_B Y \leq \underline{\dim}_B X$$

Além disso,

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(Y)}{-\log \delta} \right\} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \right\}$$

$$\overline{\dim}_B Y \leq \overline{\dim}_B X.$$

□

Agora apresentaremos alguns resultados de natureza topológica.

Proposição 5.15 (INVARIÂNCIA DO FECHO). *Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado. Se \overline{X} denota o fecho de X , então $\underline{\dim}_B \overline{X} = \underline{\dim}_B X$ e $\overline{\dim}_B \overline{X} = \overline{\dim}_B X$.*

Demonstração. Como $X \subseteq \overline{X}$, segue da propriedade de monotonicidade (proposição 5.14) que $N_\delta(X) \leq N_\delta(\overline{X})$. Além disso, se $\{A_1, \dots, A_n\}$ é uma cobertura de X formada por n conjuntos de diâmetro menor ou igual a δ , então $\{\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_n\}$ é uma cobertura de \overline{X} formada por conjuntos de diâmetro menor ou igual a δ , isso é claro, pois se $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$, então $\overline{X} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{A}_i$. Ademais, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, temos que $\text{diam}(A_i) \leq \delta$, então $\text{diam}(\overline{A}_i) \leq \delta$. Sendo assim, $\{A_1, \dots, A_{N_\delta(X)}\}$ é uma cobertura de X formada por $N_\delta(X)$ conjuntos de diâmetro menor ou igual a δ , então $\{\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_{N_\delta(X)}\}$ é uma cobertura de \overline{X} formada por $N_\delta(X)$ conjuntos de diâmetro menor ou igual a δ . Consequentemente, $N_\delta(\overline{X}) \leq N_\delta(X)$. Com isso, podemos concluir que:

$$N_\delta(X) = N_\delta(\overline{X}). \quad (5.19)$$

Dado $0 < \delta < 1$, de maneira análoga ao passo feito anteriormente, por 5.19 temos que:

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \right\} = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(\overline{X})}{-\log \delta} \right\}$$

$$\underline{\dim}_B X = \underline{\dim}_B \overline{X}$$

além disso,

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \right\} = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(\overline{X})}{-\log \delta} \right\}$$

$$\overline{\dim}_B X = \overline{\dim}_B \overline{X}.$$

□

Proposição 5.16 (CONJUNTOS ABERTOS). *Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $\dim_B F = n$.*

Demonstração. Tomando uma δ -mesh \mathcal{C} , composta por cubos de lado δ para o conjunto F , temos que:

$$N_\delta(F) \geq N_\delta(\mathcal{C}) \geq k \cdot \delta^{-n} \quad (5.20)$$

Assim, dado δ tal que $0 < \delta < 1$, de maneira análoga ao passo feito anteriormente, por 5.20 temos que:

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \right\} \geq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(\mathcal{C})}{-\log \delta} \right\} \geq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log(k \cdot \delta^{-n})}{-\log \delta} \right\}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \right\} &\geq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log k}{-\log \delta} \right\} + \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{-n \log \delta}{-\log \delta} \right\} \\ &\geq 0 + \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{-n \log \delta}{-\log \delta} \right\} \\ \overline{\dim}_B F &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \right\} \geq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{-n \log \delta}{-\log \delta} \right\} = n \end{aligned}$$

Além disso, de modo análogo temos que

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \right\} \geq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{-n \log \delta}{-\log \delta} \right\} = n$$

Como $\overline{\dim}_B F \geq n$ e $\underline{\dim}_B F \geq n$, então para que essas dimensões sejam iguais temos que elas devem ser n , pois se $\overline{\dim}_B > n$ e $\underline{\dim}_B > n$, com essa hipótese não podemos garantir que as dimensões box-counting inferior e superior convergem para o mesmo valor. □

Proposição 5.17 (ESTABILIDADE FINITA). *Sejam F e Y subconjuntos \mathbb{R}^n , então $\overline{\dim}_B(F \cup Y) = \max\{\overline{\dim}_B F, \overline{\dim}_B Y\}$.*

Demonstração. É fácil ver que, se C_1 e C_2 são, respectivamente, uma cobertura de F formada por $N_\delta(F)$ conjuntos de diâmetro menor do que ou igual a δ e uma cobertura de Y formada por $N_\delta(Y)$ conjuntos de diâmetro menor do que ou igual a δ , então $C_1 \cup C_2$ é uma cobertura de $F \cup Y$ formada por no máximo $N_\delta(F) + N_\delta(Y)$ conjuntos de diâmetro menor do que ou igual a δ . Sendo assim, pode-se concluir que

$$N_\delta(F \cup Y) \leq N_\delta(F) + N_\delta(Y),$$

uma vez que se $F \cap Y \neq \emptyset$ temos a desigualdade restrita $N_\delta(F) + N_\delta(Y) > N_\delta(F \cup Y)$. Assim, vamos supor que:

$$N_\delta(F) \leq N_\delta(Y). \quad (5.21)$$

Dado δ tal que $0 < \delta < 1$, de maneira análoga ao passo feito anteriormente, por 5.21 temos que:

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(F \cup Y)}{-\log \delta} \right\} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{N_\delta(F) + N_\delta(Y)}{-\log \delta} \right\}$$

somando $N_\delta(Y)$ em ambos os lados da desigualdade 5.21, temos que:

$$N_\delta(F) + N_\delta(Y) \leq 2N_\delta(Y).$$

Então,

$$\begin{aligned} \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(F \cup Y)}{-\log \delta} \right\} &\leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log(2N_\delta(Y))}{-\log \delta} \right\} \\ &\leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log 2}{-\log \delta} \right\} + \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(Y)}{-\log \delta} \right\} \\ &\leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(Y)}{-\log \delta} \right\}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\overline{\dim}_B(F \cup Y) \leq \overline{\dim}_B Y.$$

A desigualdade $\underline{\dim}_B(F \cup Y) \leq \underline{\dim}_B F$ segue de maneira análoga, supondo que $N_\delta(Y) \leq N_\delta(F)$. \square

Proposição 5.18 (FAIXA DE VALORES). *Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio e limitado, então temos que $0 \leq \underline{\dim}_B X \leq \overline{\dim}_B X \leq n$*

Demonstração. vamos considerar os seguintes casos:

- $0 \leq \underline{\dim}_B X$

Sabemos que $N_\delta(X) \geq 1$, assim vamos analisar a fórmula da dimensão box-counting inferior. Veja que dado δ tal que $0 < \delta < 1$, temos que as funções $-\log \delta$ e $\log(N_\delta(X))$ são sempre positivas, portanto:

$$\underline{\dim}_B X = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \right\} \geq 0$$

e se $N_\delta(X) = 1$, temos que $\underline{\dim}_B X = 0$.

- $\underline{\dim}_B X \leq \overline{\dim}_B X$

Segue essencialmente da definição da dimensão box-counting inferior e superior, de que o ínfimo de um conjunto é sempre menor ou igual que o supremo deste mesmo conjunto. Portanto,

$$\underline{\dim}_B X = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \right\} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \right\} = \overline{\dim}_B X$$

- $\overline{\dim}_B X \leq n$

Podemos cobrir o conjunto X com uma δ -mesh² \mathcal{C} suficientemente grande, tal que $X \subset \mathcal{C}$. Assim, usando a propriedade (2) da monotonicidade, temos que:

$$N_\delta(X) \leq N_\delta(\mathcal{C}) \leq k \cdot \delta^{-n}. \quad (5.22)$$

Dado δ tal que $0 < \delta < 1$, de maneira análoga ao passo feito anteriormente, por meio de 5.22, temos que:

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \right\} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(\mathcal{C})}{-\log \delta} \right\} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log k \cdot \delta^{-n}}{-\log \delta} \right\}$$

² δ -mesh é uma cobertura composta por cubos de lado δ .

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \right\} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log k}{-\log \delta} \right\} + \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{-n \cdot \log \delta}{-\log \delta} \right\}$$

$$\overline{\dim}_B X = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \right\} \leq n.$$

Portanto, $\overline{\dim}_B X \leq n$.

□

Proposição 5.19 (CONJUNTOS FINITOS). *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ não-vazio e finito então $\dim_B X = 0$.*

Demonstração. Vamos provar inicialmente que $\overline{\dim}_B \{x\} = 0$. De fato, para todo $\delta > 0$, qualquer conjunto de diâmetro δ cobre $\{x\}$, então:

$$N_\delta(\{x\}) = 1. \quad (5.23)$$

Dado $0 < \delta < 1$, de maneira análoga ao passo feito anteriormente, por 5.23 temos que:

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(\{x\})}{-\log \delta} \right\} = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log 1}{-\log \delta} \right\} = 0$$

Portanto, $\overline{\dim}_B \{x\} = 0$.

Assim, se $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, então pela proposição 5.17, temos que:

$$\overline{\dim}_B X = \max \{ \overline{\dim}_B \{x_1\}, \dots, \overline{\dim}_B \{x_n\} \} = 0.$$

Além disso, resulta da proposição 5.18 que

$$0 \leq \underline{\dim}_B X \leq \overline{\dim}_B X = 0,$$

e, conseqüentemente, $\underline{\dim}_B X = 0$. Portanto, $\dim_B X = 0$.

□

5.3 Limitações da dimensão box-counting

É intuitivo pensar que uma família enumerável de pontos possui dimensão igual a 0. No entanto, o próximo exemplo irá nos mostrar as limitações da dimensão box-counting.

Exemplo 5.20. Considere o conjunto enumerável

$$X = \left\{ \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

Sejam $0 < \delta < \frac{1}{2}$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} \leq \delta < \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k-1}.$$

É fácil ver que, se $\text{diam } U \leq \delta$, então, como a distância entre quaisquer dois pontos de X é no mínimo $\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}$, e

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} = \frac{1}{k(k-1)} > \delta,$$

no máximo um ponto de $\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}\}$ pode pertencer a U (pois, nesse caso, a distância entre quaisquer dois pontos de U é, necessariamente, menor do que ou igual a δ). Conseqüentemente, são

necessários pelo menos k subconjuntos de diâmetro δ para cobrir X — a partir do que concluímos, por fim, que $N_\delta(X) \geq k$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B(X) &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \\ &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{k(k+1)} \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{2 \log k \log(1 + \frac{1}{k})} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A seguir, notemos que

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} \leq \delta \Rightarrow (k+1)\delta > \frac{1}{k}.$$

Por conseguinte, $[0, \frac{1}{k}] \subseteq [0, \delta] \cup [\delta, 2\delta] \cup \dots \cup [k\delta, (k+1)\delta]$. Por sua vez, é claro também que, para cada $j \in \{1, \dots, \frac{1}{k}\}$, tem-se $j \in [j - \frac{\delta}{2}, j + \frac{\delta}{2}]$. Logo,

$$\mathcal{C} := \left\{ [0, \delta], [\delta, 2\delta], \dots, [k\delta, (k+1)\delta], [1 - \frac{\delta}{2}, 1 + \frac{\delta}{2}], \dots, [\frac{1}{k-1} - \frac{\delta}{2}, \frac{1}{k-1} + \frac{\delta}{2}] \right\}$$

é uma cobertura de X formada por $2k$ elementos. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B X &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2k}{\log(k(k-1))} \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2 + \log k}{2 \log k + \log(1 - \frac{1}{k})} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, como $\frac{1}{2} \leq \underline{\dim}_B(X) \leq \overline{\dim}_B(X) \leq \frac{1}{2}$, podemos concluir que

$$\dim_B(X) = \frac{1}{2}.$$

Em particular, neste exemplo, X é um conjunto enumerável com $\dim_B(X) > 0$ que é uma propriedade indesejável para a sua dimensão.

Por fim, uma das propriedades que gostaríamos que a dimensão *box-counting* cumprisse é a estabilidade infinita, isto é,

$$\dim \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \right) = \sup_{i \geq 1} \dim(X_i).$$

Mas essa propriedade não é válida para a *dimensão box-counting*. Basta considerar o conjunto enumerável $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Como podemos decompor $\mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} x_i$. Resulta do fato de que $\dim_B x_i = 0$, que:

$$\dim_B \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} x_i \right) = \dim(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 1 \neq 0 = \sup_{i \geq 1} \dim_B(x_i).$$

5.4 Exemplos Básicos

Nessa seção calcularemos a dimensão *box-counting* do conjunto unitário, do intervalo da reta e do conjunto de Cantor ternário.

Exemplo 5.21. Seja $X = \{x\}$ um único ponto. Então para qualquer $\delta > 0$, temos que $N(X, \delta) = 1$

já que podemos cobrir x pela única conjunto U tal que $x \in U$. Com isso, podemos concluir que $\overline{\dim}_B(X) = 0$ e, portanto, $\dim_B(X) = 0$.

Exemplo 5.22. (Intervalo da reta). Seja $X = [0, 1]$. Note que para qualquer $\epsilon > 0$ nós temos que

$$\left\lfloor \frac{1}{2\epsilon} \right\rfloor \leq N(X, \epsilon) \leq \left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1$$

em que $\lfloor \cdot \rfloor$ é a parte inteira.

Para cada $i \in \{0, \dots, \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor\}$, seja $x_i := \epsilon i$. É fácil ver que $\{B(x_i, \epsilon) : i \in \{0, \dots, \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor\}\}$ é uma cobertura aberta de X formada por $\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$ bolas $B(x_i, \epsilon)$. Para ver isso, basta notar que $x_{\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor} \in B\left(x_{\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor}, \epsilon\right)$, e que, se $x \in [0, 1)$, e $k := \max\{i \in \{0, \dots, \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor\} : x_i \leq x\}$, então

$$|x - x_k| = x - x_k < x_{k+1} - x_k = \epsilon \cdot (k + 1) - \epsilon \cdot k = \epsilon,$$

e, portanto, $x \in B(x_k, \epsilon)$. Por exemplo, tomando $\epsilon = \frac{1}{5}$, teremos uma cobertura formada por 6 bolas que pode ser observado pela figura 5.2. Por sua vez, para obter o limite inferior, é suficiente

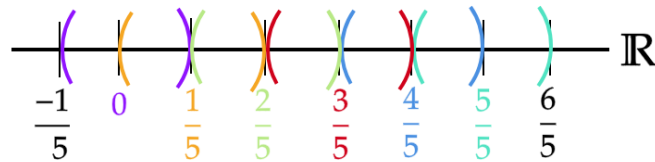


Figura 5.2. Exemplo tomando $\epsilon = \frac{1}{5}$ para a cobertura da cota superior.
Fonte: autora.

observarmos que, para qualquer $x \in X$, $B(x, \epsilon)$ é um intervalo aberto de comprimento 2ϵ em \mathbb{R} . Consequentemente, qualquer cobertura de X por intervalos abertos de comprimento 2ϵ deve possuir pelo menos $\lfloor \frac{1}{2\epsilon} \rfloor$ intervalos. Por exemplo, se tomarmos $\epsilon = \frac{1}{5}$, qualquer cobertura de X por bolas abertas de raio ϵ deve ser formada por pelo menos duas bolas, como pode ser observado pela figura 5.3.

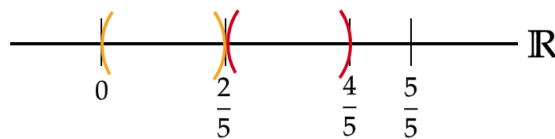


Figura 5.3. Cobertura de X por duas bolas.
Fonte: autora.

Dado $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$, é imediato ver que

$$\frac{1}{\epsilon} < \left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1 \leq \frac{1}{\epsilon} + 1.$$

Sendo assim, temos que:

$$\underbrace{\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}_{=-\log(\epsilon)} < \log\left(\left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1\right) \leq \log\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right),$$

e, conseqüentemente,

$$1 < \frac{\log\left(\left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1\right)}{-\log(\epsilon)} \leq \frac{-\log\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right)}{\log(\epsilon)}.$$

Dessa forma, como

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\log\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right)}{\log(\epsilon)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\log\left(\frac{1+\epsilon}{\epsilon}\right)}{\log(\epsilon)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(\epsilon) - \log(1+\epsilon)}{\log(\epsilon)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[1 - \frac{\log(1+\epsilon)}{\log(\epsilon)} \right] = 1. \end{aligned}$$

Resulta do teorema do confronto que

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\log\left(\left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1\right)}{\log(\epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\log\left(\left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1\right)}{\log(\epsilon)} = 1.$$

Analogamente, como

$$0 < \frac{1}{2\epsilon} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{2\epsilon} \right\rfloor - 1 \leq \frac{1}{2\epsilon},$$

temos

$$\log\left(\frac{1}{2\epsilon} - 1\right) < \log\left(\left\lfloor \frac{1}{2\epsilon} \right\rfloor\right) \leq \log\left(\frac{1}{2\epsilon}\right).$$

Por conseguinte,

$$\frac{-\log\left(\frac{1}{2\epsilon} - 1\right)}{\log(\epsilon)} < \frac{\log\left(\left\lfloor \frac{1}{2\epsilon} \right\rfloor\right)}{\log(\epsilon)} \leq \frac{-\log\left(\frac{1}{2\epsilon}\right)}{\log(\epsilon)}.$$

Logo, como

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\log\left(\frac{1}{2\epsilon} - 1\right)}{\log(\epsilon)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\log\left(\frac{1-2\epsilon}{2\epsilon}\right)}{\log(\epsilon)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(2\epsilon) - \log(1-2\epsilon)}{\log(\epsilon)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ 1 + \frac{1}{\log(\epsilon)} \cdot [\log(2) - \log(1-2\epsilon)] \right\} = 1, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{1}{2\epsilon}\right)}{\log(\epsilon)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{2\epsilon}{2\epsilon}\right)}{\log(\epsilon)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(2) + \log(\epsilon)}{\log(\epsilon)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log(2)}{\log(\epsilon)} + 1 \right\} = 1, \end{aligned}$$

podemos concluir, pelo teorema do confronto que,

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\log\left(\left\lfloor \frac{1}{2\epsilon} \right\rfloor\right)}{\log(\epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\log\left(\left\lfloor \frac{1}{2\epsilon} \right\rfloor\right)}{\log(\epsilon)} = 1.$$

Portanto, $\dim_B(X) = 1$.

Lema 5.23. *Sejam $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência. Nessas condições, se existir uma função $\varphi:]0, 1[\rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \varphi(\epsilon) = +\infty$, e tal que $f(\epsilon) \leq g_{\varphi(\epsilon)}$ qualquer que seja*

$\epsilon \in]0, 1[$, então

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(\epsilon) \leq \limsup_{m \rightarrow +\infty} g_m.$$

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista uma tal φ , e que, no entanto, tenhamos $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon) > \limsup_{m \rightarrow \infty} g_m$. Nesse caso, podemos fixar $B \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(\epsilon) > B > \limsup_{m \rightarrow \infty} g_m.$$

Como, por hipótese, $B > \limsup_{m \rightarrow \infty} g_m$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{m \geq m_0} g_m \leq B$, pois, se $\sup_{m \geq m_0} g_m > B$ qualquer que fosse $m_0 \in \mathbb{N}$, teríamos, necessariamente

$$\limsup_{m_0 \rightarrow \infty} := \lim_{m_0 \rightarrow \infty} \sup_{m \geq m_0} g_m \geq B.$$

Por sua vez, como $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \varphi(\epsilon) = +\infty$, existe $\epsilon_0 \in]0, 1[$ tal que $\varphi(\epsilon) \geq m_0$ qualquer que seja $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$. Além disso, como $\limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(\epsilon) > B$, é fácil ver que podemos fixar $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$ de modo que $f(\epsilon) > B$ (pois, se $f(\epsilon) \leq B$ qualquer que fosse $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$, $\sup_{\epsilon \in]0, \epsilon_0[} f(\epsilon) \leq B$, e, conseqüentemente, $\limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \varphi(\delta) := \inf_{\delta \in]0, 1[} \sup_{\epsilon \in]0, \delta[} f(\epsilon) \leq \sup_{\epsilon \in]0, \epsilon_0[} f(\epsilon) \leq B$). Como, porém, $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$, $\varphi(\epsilon) \geq m_0$, e, portanto,

$$B < f(\epsilon) \leq g_{\varphi(\epsilon)} \leq \sup_{m \geq m_0} g_m \leq B$$

— o que, evidentemente, é uma contradição. \square

Exemplo 5.24 (CONJUNTO DE CANTOR TERNÁRIO). Seja $C_{\frac{1}{3}}$ o conjunto de Cantor ternário usual. É fácil ver que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a coleção formada pelos intervalos presentes no estágio n da construção de $C_{\frac{1}{3}}$ é uma cobertura de $C_{\frac{1}{3}}$. Em outras palavras, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$C_{\frac{1}{3}}^{(n)} := \bigcup_{i_1=0}^1 \dots \bigcup_{i_n=0}^1 \left[\frac{2i_1}{3} + \frac{2i_2}{3^2} + \dots + \frac{2i_n}{3^n}, \frac{2i_1}{3} + \frac{2i_2}{3^2} + \dots + \frac{2i_n}{3^n} + \frac{1}{3^n} \right]$$

contém o conjunto de Cantor. De fato, como $C_{\frac{1}{3}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{\frac{1}{3}}^{(n)}$, temos $C_{\frac{1}{3}} \subseteq C_{\frac{1}{3}}^{(n)}$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Sejam $\epsilon \in]0, \frac{1}{6}[$ e

$$n := \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{1}{3^{k+1}} \leq 2\epsilon \right\}.$$

Temos, evidentemente, $\frac{1}{3^{n+1}} \leq 2\epsilon < \frac{1}{3^n}$. Sendo assim, se, para cada um dos 2^{n+1} intervalos presentes na etapa $n+1$ da construção do conjunto de Cantor, fixarmos um intervalo de comprimento 2ϵ que o contém e, em seguida, considerarmos a coleção formada por esses 2^{n+1} intervalos de comprimento 2ϵ , obteremos uma cobertura de $C_{\frac{1}{3}}$ formada por 2^{n+1} “bolas” de raio ϵ . Logo,

$$N(C_{\frac{1}{3}}, \epsilon) \leq 2^{n+1},$$

e, conseqüentemente,

$$\overline{\dim}_B(C_{\frac{1}{3}}) = - \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(C_{\frac{1}{3}}, \epsilon)}{\log \epsilon} \geq - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log 2^{n+1}}{\log \frac{3^n}{2}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Dado $\delta \in]0, \frac{1}{6}[$, consideremos, agora, uma cobertura de $C_{\frac{1}{3}}$ formada por $N(C_{\frac{1}{3}}, \delta)$ bolas de raio δ (isto é, intervalos de comprimento 2δ). Seja

$$n := \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{1}{3^{k+1}} < 2\delta \right\}.$$

É imediato ver que $\frac{1}{3^{n+1}} < 2\delta \leq \frac{1}{3^n}$. Por conseguinte, como a distância entre quaisquer dois intervalos distintos presentes no nível n da construção do conjunto de Cantor é maior do que ou igual a $\frac{1}{3^n}$, cada uma das bolas dessa cobertura pode intercectar no máximo um desses 2^n intervalos. Sendo assim, como cada um desses intervalos possui pontos do conjunto de Cantor, devemos ter, necessariamente,

$$N(C_{\frac{1}{3}}, \delta) \geq 2^n.$$

Logo,

$$\underline{\dim}_B(C_{\frac{1}{3}}) = -\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(C_{\frac{1}{3}}, \delta)}{\log \delta} \geq -\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log 2^{n+1}}{\log \frac{3^{n+1}}{2}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Por fim, como

$$\frac{\log 2}{\log 3} \leq \underline{\dim}_B(C_{\frac{1}{3}}) \leq \overline{\dim}_B(C_{\frac{1}{3}}) \leq \frac{\log 2}{\log 3},$$

podemos concluir que a dimensão box-counting de $C_{\frac{1}{3}}$ existe e é igual a $\frac{\log 2}{\log 3}$.

Capítulo 6

Dimensão de Hausdorff

Neste capítulo, voltaremos nossa atenção ao estudo da medida exterior de Hausdorff e suas propriedades. Em seguida, definiremos a dimensão de Hausdorff de um subconjunto do \mathbb{R}^n . Posteriormente, calcularemos a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor ternário e da *Cantor Dust* via definição. Por fim, mostraremos que a curva de Takagi é um fractal cujas dimensões fractal e topológica são ambas iguais a 1, mostrando um exemplo de fractal que é excluído pela definição de Mandelbrot 1.1. Utilizamos como referência principal deste capítulo o livro “Fractal geometry: mathematical foundations and applications” [Fal04], do autor Falconer, e como referências complementares [VDE18], [SA11], [Mad06] e [Edg08].

6.1 Medida Exterior de Hausdorff

Definição 6.1. Seja X um subconjunto de \mathbb{R}^n e $d \geq 0$. Para cada $\delta > 0$, definimos:

$$\mathcal{H}_\delta^d(X) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^d : \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_\delta(X) \right\}.$$

Tomando todas as possíveis coberturas de X por conjuntos de diâmetro menor que δ , nosso objetivo é minimizar a soma dos diâmetros. É fácil ver que se δ e δ' são tais que $\delta < \delta'$, então

$$\underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^d : \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_\delta(X) \right\}}_{:=A} \subseteq \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^d : \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{\delta'}(X) \right\}}_{:=B},$$

com isso, $\inf B \leq \inf A$. Consequentemente, a aplicação

$$\begin{aligned} g:]0, +\infty[&\rightarrow [0, +\infty] \\ \delta &\mapsto \mathcal{H}_\delta^d(X) \end{aligned}$$

é monótona não crescente, e, portanto, $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^d(X)$ existe e é igual ao supremo do conjunto $\{\mathcal{H}_\delta^d(X) : \delta > 0\}$. Dividiremos a demonstração disso em dois casos:

- Se o conjunto $\{\mathcal{H}_\delta^d(X) : \delta > 0\}$ é limitado superiormente por um número real, então ele admite um supremo finito L . Dado, então $\epsilon > 0$, existe $\delta_0 \in]0, +\infty[$ tal que $L - \epsilon < g(\delta_0) \leq L$. E como g é não crescente, disso result que para todo $\delta \in]0, \delta_0[$, tem-se

$$L - \epsilon < g(\delta_0) \leq g(\delta) \leq L < L + \epsilon,$$

a partir do que concluímos, pela arbitrariedade do $\epsilon > 0$, que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} g(\delta) = L.$$

- Se o conjunto $\{\mathcal{H}_\delta^d(X) : \delta > 0\}$ não é limitado superiormente por um número real, então para todo $M > 0$ dado, existe $\delta_0 \in]0, +\infty[$ tal que $g(\delta) > M$. Como g é não crescente, para todo $\delta \in]0, \delta_0[$, tem-se

$$g(\delta) \geq g(\delta_0) > M.$$

E como $M > 0$ é arbitrário, resulta da definição de limite que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} g(\delta) = +\infty = \sup \{g(\delta) : \delta > 0\}.$$

Logo, em qualquer um dos casos,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^d(X) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^d(X).$$

Observação 6.2. Na demonstração da proposição a seguir, adotaremos a convenção de que

$$\sum_{A \in \emptyset} A = 0.$$

Proposição 6.3. *Sejam $d \geq 0$ e $\delta > 0$. Nessas condições, a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^d : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow [0, +\infty] \\ X &\mapsto \mathcal{H}_\delta^d(X) \end{aligned} \tag{6.1}$$

é uma medida exterior.

Demonstração. • Como \emptyset é uma cobertura de \emptyset (pois, $\emptyset \subseteq \bigcup_{U \in \emptyset} U$), resulta da observação 6.2 que, para cada $\delta > 0$, tem-se

$$\mathcal{H}_\delta^d(\emptyset) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^d : \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_\delta(\emptyset) \right\} \leq \sum_{U \in \emptyset} (\text{diam}(U))^d = 0.$$

- Para quaisquer $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tais que $A \subseteq B$, $\mathcal{H}^d(A) \leq \mathcal{H}^d(B)$. Para mostrarmos isso, consideremos, inicialmente, $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tais que $A \subseteq B$ e uma δ -cobertura $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de B . Como $A \subseteq B$, $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é, também, uma δ -cobertura de A . Consequentemente,

$$\mathcal{H}_\delta^d(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^d.$$

E, como $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_\delta(B)$ é completamente arbitrária, disso concluímos, por fim, que

$$\mathcal{H}_\delta^d(A) \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(V_i))^d : \{V_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_\delta(B) \right\} = \mathcal{H}_\delta^d(B).$$

- Seja $\epsilon > 0$, e seja $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de subconjuntos de \mathbb{R}^n . Como para cada $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_\delta^d(A_j) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^d : \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_\delta(A_j) \right\}$, para cada $j \in \mathbb{N}$ podemos fixar uma δ -cobertura $\{B_{(i,j)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ de A_j de modo que

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(B_{(i,j)}))^d \leq \mathcal{H}_\delta^d(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}.$$

É fácil ver que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq \bigcup_{i,j=1}^{\infty} B_{(i,j)}$, uma vez que para cada $j \in \mathbb{N}$, $A_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{(i,j)}$. Seja $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uma bijeção, e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $\tilde{B}_k = B_{\varphi(k)}$. Como φ é uma bijeção,

tem-se, evidentemente, $\bigcup_{i,j=1}^{\infty} B_{(i,j)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k$. Logo, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k$, e, portanto, $\mathcal{H}_{\delta}^d\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(\tilde{B}_k))^d$. Como, porém, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^m (\text{diam}(\tilde{B}_k))^d \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} (\text{diam}(B_{(i,j)}))^d$, tem-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(\tilde{B}_k))^d \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam}(B_{(i,j)}))^d.$$

E, como, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(B_{(i,j)}))^d \leq \mathcal{H}_{\delta}^d A_j + \frac{\epsilon}{2^j}$, disso resulta, por fim, que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\delta}^d\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(B_{(i,j)}))^d \right] \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left[\mathcal{H}_{\delta}^d(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\delta}^d(A_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\delta}^d(A_j) + \epsilon. \end{aligned}$$

— a partir do que concluímos, pela arbitrariedade de $\epsilon > 0$, que

$$\mathcal{H}_{\delta}^d\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\delta}^d(A_j). \quad \square$$

Proposição 6.4. Para cada $d \geq 0$ a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^d : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow [0, +\infty] \\ X &\mapsto \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_{\delta}^d(X) \end{aligned} \quad (6.2)$$

é uma medida exterior.

Demonstração. Seja $d \geq 0$. Nessas condições:

- É fácil ver que $\mathcal{H}^d(\emptyset) = 0$, pois para cada $\delta > 0$ $\mathcal{H}_{\delta}^d(\emptyset) = 0$ qualquer que seja $d \geq 0$, sendo assim, tem-se

$$\mathcal{H}^d(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_{\delta}^d(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} 0 = 0.$$

- Para quaisquer $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tais que $A \subseteq B$, $\mathcal{H}^d(A) \leq \mathcal{H}^d(B)$. Para ver isso, basta notar que para cada $\delta > 0$, $\mathcal{H}_{\delta}^d(A) \leq \mathcal{H}_{\delta}^d(B)$, disso resulta que

$$\mathcal{H}^d(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_{\delta}^d(A) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_{\delta}^d(B) = \mathcal{H}^d(B).$$

- Para qualquer sequência $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de \mathbb{R}^n , temos que para cada $\delta > 0$ e cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{H}_{\delta}^d(A_i) \leq \sup_{\epsilon > 0} \mathcal{H}_{\epsilon}^d(A_i) = \mathcal{H}^d(A_i).$$

Consequentemente, para cada $i \in \mathbb{N}$ e cada $\delta > 0$, tem-se

$$\mathcal{H}_{\delta}^d\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\delta}^d(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^d(A_i).$$

Sendo assim,

$$\mathcal{H}^d\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}_{\delta}^d\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^d(A_i).$$

□

Definição 6.5 (MEDIDA EXTERIOR DE HAUSDORFF). A medida exterior \mathcal{H}^d é chamada de **medida exterior de Hausdorff de dimensão d** .

Observação 6.6. Resulta do teorema de Caratheodory que

$$\mathcal{A} := \left\{ A \subseteq X : \forall E \subseteq X, \mathcal{H}^d(E) = \mathcal{H}^d(E \cap A) + \mathcal{H}^d(E \cap A^c) \right\}$$

é uma σ -álgebra, e que $\mathcal{H}^d|_{\mathcal{A}}$ é uma medida.

Observação 6.7. A medida de Hausdorff d -dimensional em \mathbb{R}^n generaliza as ideias de comprimento, área, volume, etc, uma vez que ela é um múltiplo da medida de Lebesgue \mathcal{L}^n , isto é, se $c_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n(\frac{n}{2})!}$ é o volume da bola unitária de \mathbb{R}^n , então $\mathcal{H}^d(A) = \frac{\mathcal{L}^d(A)}{c_n}$, para todo boreliano $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Da mesma forma que a dimensão box-counting possui um bom comportamento com relação as aplicações Lipschitz, veremos a seguir que o mesmo ocorre com a medida de Hausdorff.

Proposição 6.8. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$, e seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$ para $x, y \in X$ e constantes $\alpha > 0$ e $c > 0$. Então para cada s , $\mathcal{H}_{c\delta^\alpha}^{\frac{s}{\alpha}}(f(X)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(X)$.*

Demonstração. Se $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de X . Como

$$\text{diam}(f(X \cap U_i)) \leq c \text{diam}(X \cap U_i)^\alpha \leq c \text{diam}(U_i)^\alpha,$$

disso segue que $\{f(X \cap U_i)\}$ é uma $c\delta^\alpha$ -cobertura de $f(X)$. Portanto,

$$\sum_i \text{diam}(f(X \cap U_i))^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum_i \text{diam}(U_i)^s.$$

Com isso,

$$\mathcal{H}_{c\delta^\alpha}^{\frac{s}{\alpha}}(X) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}_{\delta}^s(X).$$

Tomando $\delta \rightarrow 0$, obtemos

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(X)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(X).$$

O resultado para o caso Lipschitz é imediato ao tomarmos $\alpha = 1$. □

A seguir apresentaremos dois corolários imediatos da proposição 6.8.

Corolário 6.9. *Se f é Lipschitz, então $\mathcal{H}^s(f(X)) \leq c^s \mathcal{H}^s(X)$.*

Demonstração. Consequência imediata da proposição 6.8 tomando $\alpha = 1$. □

Proposição 6.10. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de similaridade com fator de escala $r > 0$. Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$, então $\mathcal{H}^s(f(X)) = r^s \mathcal{H}^s(X)$.*

Demonstração. Já que $|f(x) - f(y)| = r|x - y|$, então

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| = r^{-1}|x - y|$$

para $x, y \in X$. Aplicando a proposição 6.8 para f e a f^{-1} obtemos o desejado. □

6.2 Dimensão de Hausdorff

Nesta seção vamos apresentar a dimensão de Hausdorff, bem como, suas propriedades.

Lema 6.11. *Para cada $A \subset \mathbb{R}^n$ existe um único $d \in [0, \infty]$ de tal modo que:*

$$\mathcal{H}^t(A) = \begin{cases} \infty, & \text{para cada } t < d, \\ 0, & \text{para cada } t > d. \end{cases}$$

Demonstração. Dados $d < t$ e $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ é uma δ -cobertura de A temos que:

$$\begin{aligned} \sum_i (\text{diam } U_i)^t &\leq \sum_i (\text{diam } U_i)^d \cdot \underbrace{(\text{diam } U_i)^{t-d}}_{< \delta} \\ &\leq \delta^{t-d} \cdot \sum_i (\text{diam } U_i)^d. \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todas as possíveis δ -coberturas:

$$\inf \left\{ \sum_i (\text{diam } U_i)^t : U_i \in \mathcal{C}_\delta(A) \right\} \leq \inf \left\{ \delta^{t-d} \sum_i (\text{diam } U_i)^d : U_i \in \mathcal{C}_\delta(A) \right\}.$$

Assim, temos que:

$$\mathcal{H}^t(A) \leq \delta^{t-d} \mathcal{H}_\delta^d(A).$$

Com isso, se $\mathcal{H}^d(A) < \infty$, então $\mathcal{H}_\delta^d(A) < \infty$ para δ suficientemente pequeno. Portanto, tomando o limite quando $\delta \rightarrow 0$ segue $\mathcal{H}^t(A) = 0$ para $t > d$. Analogamente, temos que:

$$\delta^{-(t-d)} \cdot \mathcal{H}^t(A) \leq \mathcal{H}_\delta^d(A).$$

Assim, se $0 < \mathcal{H}^t(A)$, então $0 < \mathcal{H}^t(A) \leq \mathcal{H}_\delta^t(A)$ para todo δ e tomando o limite quando $\delta \rightarrow 0$ segue $\mathcal{H}^d(A) = \infty$ para $t < d$. □

O Lema 6.11 motiva a definição da dimensão de Hausdorff de um determinado conjunto \mathcal{A} , o qual a denotaremos por $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{A}$.

Definição 6.12 (DIMENSÃO DE HAUSDORFF). A **dimensão de Hausdorff** de \mathcal{A} é dado por

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}) = \inf\{d \geq 0 : \mathcal{H}^d(\mathcal{A}) = 0\} = \sup\{d \geq 0 : \mathcal{H}^d(\mathcal{A}) = \infty\}.$$

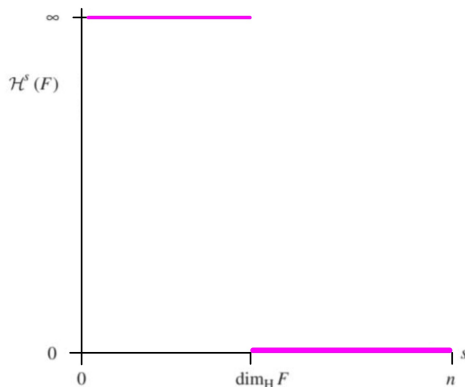


Figura 6.1. Dimensão de Hausdorff.
Fonte: autora.

Observação 6.13. A dimensão de Hausdorff de um conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ é o único número real $d \in [0, +\infty[$ tal que, para todo $s \in [0, +\infty[$,

$$s < d \Rightarrow \mathcal{H}^s(F) = +\infty,$$

e

$$s > d \Rightarrow \mathcal{H}^s(F) = 0.$$

De modo intuitivo, a dimensão de Hausdorff de F é o ponto em que a aplicação \mathcal{H}^s “salta” de $+\infty$ para 0, como podemos observar na Figura 6.1.

Apresentamos a seguir algumas propriedades da dimensão de Hausdorff.

Proposição 6.14. *A dimensão de Hausdorff do conjunto vazio é igual a 0.*

Demonstração. Vimos na proposição 6.4 que $\mathcal{H}^d(\emptyset) = 0$ qualquer que seja $d \geq 0$. Portanto,

$$\dim_{\mathcal{H}} \emptyset = \sup \left\{ d \geq 0 : \mathcal{H}^d(\emptyset) = \infty \right\} = 0,$$

pois, $\mathcal{H}^0(\emptyset) = \infty$, e $\mathcal{H}^d(\emptyset) = 0$ qualquer que seja $d > 0$. □

Proposição 6.15 (MONOTONICIDADE). *Se $A \subseteq B$, então $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq \dim_{\mathcal{H}}(B)$.*

Demonstração. Já que $A \subseteq B$, então toda cobertura de B também será uma cobertura de A . Com isso, decorre, imediatamente, da propriedade da monotonicidade de medida de Hausdorff que garante $\mathcal{H}^d(A) \leq \mathcal{H}^d(B)$ qualquer que seja $d \geq 0$. Como $\mathcal{H}^d(A) \leq \mathcal{H}^d(B)$, se $\mathcal{H}^d(A) = \infty$, então $\mathcal{H}^d(B) = \infty$. Sendo assim,

$$\left\{ d \geq 0 : \mathcal{H}^d(A) = \infty \right\} \subseteq \left\{ d \geq 0 : \mathcal{H}^d(B) = \infty \right\},$$

consequentemente,

$$\sup \left\{ d \geq 0 : \mathcal{H}^d(A) = \infty \right\} \leq \sup \left\{ d \geq 0 : \mathcal{H}^d(B) = \infty \right\}.$$

Portanto, $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq \dim_{\mathcal{H}}(B)$ □

Proposição 6.16 (ESTABILIDADE ENUMERÁVEL). *Se $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma coleção enumerável de subconjuntos de \mathbb{R}^n , então*

$$\dim_{\mathcal{H}} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \right) = \sup_{i \geq 1} \left\{ \dim_{\mathcal{H}}(X_i) \right\}.$$

Demonstração. Para todo $i \in \mathbb{N}$, $X_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$. Sendo assim, pela proposição 6.15 (monotonicidade), para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que

$$\dim_{\mathcal{H}} X_i \leq \dim_{\mathcal{H}} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \right).$$

Como $\dim_{\mathcal{H}} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \right)$ é uma cota superior para $\{\dim_{\mathcal{H}} X_i : i \in \mathbb{N}\}$, podemos concluir que

$$\sup_{i \geq 1} \dim_{\mathcal{H}} X_i \leq \dim_{\mathcal{H}} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \right).$$

Ademais, seja $s \geq \sup_{i \geq 1} \dim_{\mathcal{H}}(X_i)$ qualquer que seja $i \in \mathbb{N}$, consequentemente, $\mathcal{H}^s(X_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por essa razão, pela proposição 6.4 (subaditividade enumerável), temos

$$\mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(X_i) = 0.$$

Disso resulta que

$$\dim_{\mathcal{H}} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \right) \leq s$$

Portanto,

$$\dim_{\mathcal{H}} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \right) \leq \sup_{i \geq 1} \dim_{\mathcal{H}}(X_i).$$

□

Proposição 6.17. *Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto enumerável ou finito, então $\dim_{\mathcal{H}}(X) = 0$.*

Demonstração. Se X é enumerável ou finito, então podemos escrever X como uma união de conjuntos unitários, isto é, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$, X_i é um conjunto unitário. Como para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}^0(X_i) = 1$ e $\mathcal{H}^d(X_i) = 0$ qualquer que seja $d > 0$, podemos concluir que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\dim_{\mathcal{H}} X_i = 0$. Logo resulta da proposição 6.16 (estabilidade enumerável) que

$$\dim_{\mathcal{H}} X = \dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = \sup_{i \geq 1} \dim_{\mathcal{H}} X_i = 0.$$

□

Proposição 6.18. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e suponha que $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição de Holder $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$ para $x, y \in X$. Então $\dim_{\mathcal{H}} f(X) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_{\mathcal{H}}(X)$.*

Demonstração. Como, por hipótese, a desigualdade de Holder é válida, pela proposição 6.8 temos que $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(X)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(X)$ para todo s . Observe que se $\dim_{\mathcal{H}} X < s$, então pela definição da dimensão de Hausdorff $\mathcal{H}^s(X) = 0$, o que implica que $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(X)) = 0$. Portanto, novamente pela definição da dimensão de Hausdorff, $\dim_{\mathcal{H}} f(X) < \frac{s}{\alpha}$. Assim, tomando o ínfimo dos s , temos que

$$\dim_{\mathcal{H}} f(X) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_{\mathcal{H}} X < \frac{s}{\alpha}.$$

□

Corolário 6.19. *Se f é uma aplicação Lipschitz, então $\dim_{\mathcal{H}}(f(X)) \leq \dim_{\mathcal{H}}(X)$*

Demonstração. Consequência imediata da proposição 6.18 tomando $\alpha = 1$. □

Definição 6.20 (APLICAÇÃO BI-LIPSCHITZ). *Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita ser **bi-Lipschitz** se existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|.$$

Observação 6.21. *Se f é bi-Lipschitz, então f é injetora. De fato, assumamos que $f(x) = f(y)$, então*

$$|x - y| \leq \frac{1}{c_1} |f(x) - f(y)| = 0 \implies |x - y| = 0 \implies x = y.$$

Observação 6.22. *Se f é bi-Lipschitz, então $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ é Lipschitz. De fato, observe que a aplicação f^{-1} está bem definido por causa da observação 6.21. Seja $a = f(x)$ e $b = f(y) \in f(X)$. Nós temos que*

$$|f^{-1}(a) - f^{-1}(b)| = |f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(y))| = |x - y| \leq \frac{1}{c_1} |f(x) - f(y)| = \frac{1}{c_1} |a - b|.$$

Proposição 6.23. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma transformação bi-Lipschitz, então $\dim_{\mathcal{H}} f(X) = \dim_{\mathcal{H}}(X)$.*

Demonstração. Pelo corolário 6.19, temos que $\dim_{\mathcal{H}}(f(X)) \leq \dim_{\mathcal{H}}(X)$. Usando a observação 6.22, nós sabemos que f^{-1} é Lipschitz. Portanto, podemos aplicar o corolário 6.19 também em f^{-1} , e daí

$$\dim_{\mathcal{H}}(X) = \dim_{\mathcal{H}}(f^{-1}(f(X))) \leq \dim_{\mathcal{H}}(f(X)).$$

□

Proposição 6.24. Para cada conjunto não vazio limitado $X \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\dim_{\mathcal{H}}(X) \leq \underline{\dim}_B(X) \leq \overline{\dim}_B(X).$$

Demonstração. Suponha que $1 < \mathcal{H}^d(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^d(X)$ para algum $d \geq 0$. Como $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^d(X) > 1$, resulta da definição de limite que existe um $\delta_0 \in [0, 1]$ tal que, para todo $0 < \delta < \delta_0$, $\mathcal{H}_{\delta}^d(X) > 1$. Seja $\{U_1, \dots, U_{N_{\delta}(X)}\}$ uma cobertura de X formada por $N_{\delta}(X)$ conjuntos de diâmetro menor ou igual a δ . Como

$$\mathcal{H}_{\delta}^d(X) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^d : \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{\delta}(X) \right\},$$

podemos concluir que

$$\mathcal{H}_{\delta}^d(X) \leq \sum_{j=1}^{N_{\delta}(X)} (\text{diam}(U_j))^d \leq N_{\delta}(X) \delta^d.$$

Logo, em particular, $1 < N_{\delta}(X) \delta^d$ qualquer que seja $0 < \delta < \delta_0$. Como a função logarítmica na base e é estritamente crescente, disso resulta, por sua vez, que

$$0 = \ln(1) < \ln(N_{\delta}(X) \delta^d) = \ln(N_{\delta}(X)) + d \ln(\delta),$$

qualquer que seja $0 < \delta < \delta_0$. Logo, para todo $0 < \delta < \delta_0$, tem-se

$$d < -\frac{\ln(N_{\delta}(X))}{\ln(\delta)}$$

(pois $\delta < \delta_0 < 1 \Rightarrow \ln(\delta) < 0$). Consequentemente, para todo $0 < \epsilon < \delta_0$,

$$\inf \left\{ -\frac{\ln(N_{\delta}(X))}{\ln(\delta)} : 0 < \delta < \epsilon \right\} \geq d,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B(X) &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} -\frac{\ln(N_{\delta}(X))}{\ln(\delta)} \\ &= \sup_{\epsilon > 0} \inf \left\{ -\frac{\ln(N_{\delta}(X))}{\ln(\delta)} : 0 < \delta < \epsilon \right\} \\ &\geq \inf \left\{ -\frac{\ln(N_{\delta}(X))}{\ln(\delta)} : 0 < \delta < \delta_0 \right\} \geq d. \end{aligned}$$

Sendo assim, para todo $d \geq 0$,

$$d < \dim_{\mathcal{H}}(X) \Rightarrow \mathcal{H}^d(X) = \infty > 1 \Rightarrow s \leq \overline{\dim}_B(X).$$

— a partir do que concluímos, por fim, que $\dim_H(X) \leq \overline{\dim}_B(X)$. □

Definição 6.25 (TOTALMENTE DESCONEXO). Um espaço X é **totalmente desconexo** se seus únicos subconjuntos conexos são os unitários.

Proposição 6.26. Cada conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ com $\dim_{\mathcal{H}}(X) < 1$ é totalmente desconexo.

Demonstração. Sejam x e y dois pontos distintos de X . Defina a aplicação

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow [0, \infty] \\ f(z) &= |z - x|. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular reversa temos que

$$|f(z) - f(w)| = ||z - x| - |w - x|| \leq |(z - x) - (w - x)| = |z - w|,$$

então f é Lipschitz, e pelo corolário 6.19, $\dim_{\mathcal{H}} f(X) \leq \dim_{\mathcal{H}} X < 1$. Portanto, $f(X)$ é um subconjunto de \mathbb{R} com $\mathcal{H}^1(f(X)) = 0$, uma vez que $\dim_{\mathcal{H}} f(X) < 1$, temos que $0 \leq \mathcal{H}_{\delta}^1(f(X)) \leq \delta^{1-\dim_{\mathcal{H}} f(X)} \mathcal{H}_{\delta}^{\dim_{\mathcal{H}} f(X)} f(X)$ qualquer que seja $\delta < 1$. Mas,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \underbrace{\mathcal{H}_{\delta}^{(\dim_{\mathcal{H}} f(X))}(f(X))}_{\mathcal{H}^{(\dim_{\mathcal{H}} f(X))} f(X)} < \infty &\implies \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \cdot \mathcal{H}^{(\dim_{\mathcal{H}} f(X))}(f(X)) = 0 \\ &\stackrel{\text{teorema do confronto}}{\implies} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^1(f(X)) = 0 \\ &\implies \mathcal{H}^1(f(X)) = 0. \end{aligned}$$

e, além disso, $\mathbb{R} \setminus f(X)$ é denso em \mathbb{R} . Sendo assim, existe um $r \in \mathbb{R} \setminus f(X)$ tal que $r \in (0, y)$. Note que, para todo $z \in \mathbb{R}^n$,

$$z \in X \stackrel{r \notin f(X)}{\implies} f(z) \neq r \quad (6.3)$$

$$\implies (f(z) < r) \text{ ou } (f(z) > r) \quad (6.4)$$

$$\implies (|z - x| < r) \text{ ou } (|z - x| > r). \quad (6.5)$$

Logo,

$$X = \underbrace{\{z \in X : |z - x| < r\}}_{:=A} \cup \underbrace{\{z \in X : |z - x| > r\}}_{:=B}.$$

Note que A e B são abertos de X , pois $A = f^{-1}((-\infty, r) \cap X)$ e $B = f^{-1}((r, +\infty) \cap X)$. Além disso, $x \in A$, pois $x \in X$ e $|x - x| = 0 < r$ e $y \in B$, pois $y \in X$ e $r < f(y) = |y - x|$, então x e y estão em componentes conexas distintas de X . De fato, suponha por absurdo que x e y pertençam à mesma componente conexa em X , a qual chamaremos de C . Observe que $A \cap C$ e $B \cap C$ são abertos de C , pois A e B são abertos de X tal que

$$(A \cap C) \cap (B \cap C) = \underbrace{(A \cap B)}_{=\emptyset} \cap C = \emptyset \cap C = \emptyset,$$

e

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C = X \cap C = C.$$

Logo, $x \in A \cap C$, e $y \in B \cap C$, que é um absurdo, pois, por hipótese, C é conexo. \square

6.2.1 Exemplos Clássicos

Nessa seção apresentaremos alguns exemplos do cálculo da dimensão de Hausdorff de alguns fractais.

Exemplo 6.27. Seja \mathcal{D} a *Cantor Dust*. Afirmamos que \mathcal{D} tem dimensão de Hausdorff igual a $d := 1$ e, além disso, $1 \leq \mathcal{H}^d(\mathcal{D}) \leq \sqrt{2}$. Para ver isso, note que o k -ésimo estágio da construção da *Cantor Dust*, E_k , consiste em 4^k quadrados de lado 4^{-k} e, portanto, de diâmetro $4^{-k}\sqrt{2}$. Tomando

os quadrados de E_k como δ -cobertura de \mathcal{D} em que $\delta = 4^{-k}\sqrt{2}$, obtemos uma estimativa

$$\mathcal{H}_\delta^1(\mathcal{D}) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^1 : \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_\delta(\mathcal{D}) \right\} \leq \sum_{i=1}^{4^k} (\text{diam}(\mathcal{Q}))^1 = 4^k \left(4^{-k}\sqrt{2} \right) = \sqrt{2}.$$

Portanto,

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{D}) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^1(\mathcal{D}) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Para a estimativa inferior, considere a projeção ortogonal no eixo x , isto é, a aplicação

$$\begin{aligned} \text{proj}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x. \end{aligned}$$

Agora observe que a projeção ortogonal é uma aplicação Lipschitz, pois dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tem-se que

$$|\text{proj}(x_1, y_1) - \text{proj}(x_2, y_2)| = |x_1 - x_2| \leq \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| = \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|.$$

Devido a construção de \mathcal{D} , sua projeção no eixo x é o intervalo unitário $[0, 1]$ como pode ser observado na figura 6.2. Resulta da proposição 6.18 e, de que $\mathcal{H}^1([0, 1]) = 1$, tem-se

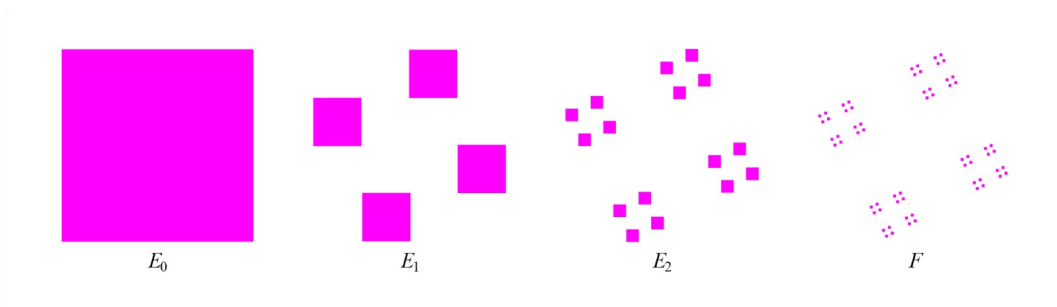


Figura 6.2. Construção da Cantor Dust.

Fonte: autora.

$$\mathcal{H}^1([0, 1]) = \mathcal{H}^1(\text{proj } \mathcal{D}) \leq \mathcal{H}^1(\mathcal{D}).$$

Logo, $\mathcal{H}^1(\mathcal{D}) \geq 1$. Portanto, $\dim_H(\mathcal{D}) = 1$.

Lema 6.28. *Todo subconjunto não vazio e limitado de \mathbb{R} está contido em um intervalo fechado de \mathbb{R} com mesmo diâmetro do conjunto.*

Demonstração. Seja U um subconjunto limitado e não vazio de \mathbb{R} . Como, para quaisquer $x, y \in U$, vale que $\inf(U) \leq x \leq \sup(U)$, e que $\inf(U) \leq y \leq \sup(U)$, temos $|x - y| \leq \sup(U) - \inf(U)$ quaisquer que sejam x e y em U . Por conseguinte, $\text{diam}(U) \leq \sup(U) - \inf(U)$. Seja $\epsilon > 0$. Resulta da definição de supremo que podemos fixar $x' \in U$ de modo que $x' > \sup(U) - \frac{\epsilon}{2}$. Da mesma forma, resulta da definição de ínfimo que podemos fixar $x'' \in U$ de modo que $x'' < \inf(U) + \frac{\epsilon}{2}$. Como $x' > \sup(U) - \frac{\epsilon}{2}$, e $x'' < \inf(U) + \frac{\epsilon}{2}$, é imediato ver que $x' - x'' > \sup(U) - \inf(U) - \epsilon$. Consequentemente, $\text{diam}(U) \geq |x' - x''| \geq x' - x'' > \sup(U) - \inf(U) - \epsilon$. E, como $\epsilon > 0$ é completamente arbitrário, disso concluímos que $\text{diam}(U) \geq \sup(U) - \inf(U)$. Logo, $\text{diam}(U) = \sup(U) - \inf(U)$, e, portanto, $[\inf(U), \sup(U)]$ é um intervalo fechado que contém U e cujo diâmetro é igual ao de U . \square

Lema 6.29. *Se $\alpha \in]0, 1[$, então, para quaisquer $a, b \in [0, +\infty[$, tem-se $(a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$.*

Demonstração. Seja $\alpha \in]0, 1[$, e seja $a \geq 0$. Suponhamos, inicialmente, que $a > 0$ e consideremos a

aplicação

$$f: [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto a^\alpha + x^\alpha - (a+x)^\alpha.$$

Como f é contínua em $[0, +\infty[$, e como, para todo $x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} x < x+a &\Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{x+a} \\ &\stackrel{1-\alpha > 0}{\Rightarrow} \frac{1}{x^{1-\alpha}} > \frac{1}{(x+a)^{1-\alpha}} \\ &\Rightarrow x^{\alpha-1} < (x+a)^{\alpha-1} \\ &\Rightarrow f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} - \alpha(a+x)^{\alpha-1} > 0, \end{aligned}$$

f é estritamente crescente em $[0, +\infty[$. Logo, para todo $b \in [0, +\infty[$, tem-se

$$a^\alpha + b^\alpha - (a+b)^\alpha = f(b) \geq f(0) = 0.$$

Se, por outro lado, $a = 0$, então, para todo $b \in [0, +\infty[$, tem-se, evidentemente,

$$(a+b)^\alpha = b^\alpha = a^\alpha + b^\alpha,$$

de modo que, também nesse caso, $(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$ qualquer que seja $b \in [0, +\infty[$. \square

Exemplo 6.30. O conjunto de Cantor ternário tem dimensão de Hausdorff igual a $d := \frac{\log 2}{\log 3}$, e, além disso, $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^d(C_{\frac{1}{3}}) \leq 1$. Para mostrar isso, notemos, de início, que, para cada $k \in \mathbb{N}$, a coleção $\{E_{k_j} : j \in \{1, \dots, 2^k\}\}$ dos 2^k intervalos da k -ésima etapa da construção de $C_{\frac{1}{3}}$ é uma $\frac{1}{3^k}$ -cobertura de $C_{\frac{1}{3}}$. Disso resulta que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\frac{1}{3^k}}^d(C_{\frac{1}{3}}) &\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^d : \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{\frac{1}{3^k}}(C_{\frac{1}{3}}) \right\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{2^k} (\text{diam}(E_{k_j}))^d = 2^k \cdot \left(\frac{1}{3^k}\right)^d = \frac{2^k}{3^{kd}} \\ &= \frac{2^k}{e^{kd \log(3)}} = \frac{2^k}{e^{k \log(2)}} = \frac{2^k}{2^k} = 1. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\mathcal{H}^d(C_{\frac{1}{3}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{\frac{1}{3^k}}^d(C_{\frac{1}{3}}) \leq 1$.

Agora vamos provar que $\mathcal{H}^d(C_{\frac{1}{3}}) \geq \frac{1}{2}$. Para isso, mostraremos que, para qualquer cobertura $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de $C_{\frac{1}{3}}$ cujos elementos sejam conjuntos limitados, tem-se

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^d \geq \frac{1}{2}. \quad (6.6)$$

E, para tanto, vamos inicialmente provar que, se 6.6 valer no caso em que $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma coleção finita de intervalos fechados e limitados, então valerá qualquer que seja a cobertura $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de $C_{\frac{1}{3}}$ cujos elementos sejam conjuntos limitados.¹

Consideremos, pois, uma cobertura qualquer $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de $C_{\frac{1}{3}}$ cujos elementos sejam conjuntos limitados e suponhamos, sem perda de generalidade, que U_i seja não vazio qualquer que seja $i \in \mathbb{N}$.

¹Na verdade, a desigualdade 6.6 se verifica qualquer que seja a cobertura $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de $C_{\frac{1}{3}}$.

Nessas condições, resulta do lema 6.28 que, para cada $i \in \mathbb{N}$, podemos fixar um intervalo fechado $J_i := [a_i, b_i]$ de modo que $U_i \subseteq J_i$, e $\text{diam}(J_i) = \text{diam}(U_i)$.

Seja $\epsilon > 0$, e, para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $W_i := \left] a_i - \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{2^i} \right)^{\frac{1}{d}}, b_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{2^i} \right)^{\frac{1}{d}} \right[$. Tem-se, evidentemente,

$$C_{\frac{1}{3}} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_i \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i.$$

Logo, $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta do conjunto de Cantor, e, portanto, possui uma subcobertura finita $\{W_{i_1}, \dots, W_{i_k}\}$. Como, para cada $j \in \mathbb{N}$, W_{k_j} é um intervalo aberto, e $W_{i_j} \subseteq \overline{W_{i_j}}$, é imediato ver que $\{\overline{W_{i_1}}, \dots, \overline{W_{i_k}}\}$ é uma cobertura finita de $C_{\frac{1}{3}}$ formada por intervalos fechados. Sendo assim, tem-se, por hipótese, $\sum_{i=1}^k (\text{diam}(\overline{W_{i_j}}))^d \geq \frac{1}{2}$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \sum_{j=1}^k \text{diam}(\overline{W_{i_j}})^d \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(\overline{W_i})^d \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\text{diam}(J_i)^d + \left(\frac{\epsilon}{2^i} \right)^{\frac{1}{d}} \right)^d \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(\text{diam}(J_i)^d + \left(\frac{\epsilon}{2^i} \right)^{\frac{1}{d}} \right)^d}_{\leq \text{diam}(J_i)^d + \frac{\epsilon}{2^i} \text{ (pelo lema 6.29)}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\text{diam}(J_i)^d + \frac{\epsilon}{2^i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\text{diam}(J_i)^d}_{=\text{diam}(U_i)^d} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^d + \epsilon. \end{aligned}$$

E, como $\epsilon > 0$ é completamente arbitrário, disso concluímos, por fim, que

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^d \geq \frac{1}{2}. \quad (6.7)$$

A seguir, mostraremos que, se $\{U_1, \dots, U_N\}$ é uma cobertura de $C_{\frac{1}{3}}$ formada por N intervalos fechados e limitados, então $\sum_{i=1}^N \text{diam}(U_i)^d$ é, de fato, maior do que ou igual a $\frac{1}{2}$. Para tanto, suponhamos, sem perda de generalidade, que cada um desses intervalos possua diâmetro menor do que 1 (se não for esse o caso, é só dividir cada um dos intervalos com diâmetro maior do que ou igual a 1 em tantas partes quantas forem necessárias para que cada um dos subintervalos resultantes possua diâmetro menor do que 1 e considerar a nova cobertura assim construída). Dado que, por hipótese, $\text{diam}(U_i) < 1$ qualquer que seja $i \in \{1, \dots, N\}$, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, podemos fixar $k_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ de modo que $\frac{1}{3^{k_i+1}} \leq \text{diam}(U_i) < \frac{1}{3^{k_i}}$.

Seja $j \in \{1, \dots, N\}$. Como a distância entre quaisquer dois intervalos presentes na k_j -ésima etapa da construção de $C_{\frac{1}{3}}$ é maior do que ou igual a $\frac{1}{3^{k_j}}$, é imediato ver que U_j pode intersectar no máximo um desses intervalos (pois $\text{diam}(U_j) < \frac{1}{3^{k_j}}$). Além disso, é claro também que, se $\ell \in \mathbb{N}$ é tal que $\ell > k_j$, então, como cada intervalo presente na k_j -ésima etapa da construção de $C_{\frac{1}{3}}$ dá origem a $2^{\ell-k_j}$ intervalos presentes na ℓ -ésima etapa, U_j intersecta, no máximo, $2^{\ell-k_j}$ desses intervalos.

Note, ainda, que

$$\begin{aligned} 3^{-(k_j+1)} \leq \text{diam}(U_j) &\Rightarrow 3^{-d(k_j+1)} \leq (\text{diam}(U_j))^d \\ &\Rightarrow \frac{3^{-dk_j}}{3^d} \leq (\text{diam}(U_j))^d \\ &\Rightarrow 3^{-dk_j} \leq 3^d \text{diam}(U_j)^d, \end{aligned}$$

de modo que, para cada $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\ell > k_j$, tem-se

$$2^{\ell-k_j} = 2^\ell 2^{-k_j} = 2^\ell e^{-k_j \log(2)} = 2^\ell e^{-dk_j \log(3)} = 2^\ell 3^{-dk_j} \leq 2^\ell 3^d (\text{diam}(U_j))^d.$$

Seja $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\ell \geq k_i$ qualquer que seja $i \in \{1, \dots, N\}$. Como cada intervalo presente na ℓ -ésima etapa da construção de $C_{\frac{1}{3}}$ é intersectado por algum dos elementos da cobertura, tem-se

$$\begin{aligned} 2^\ell &\leq \sum_{i=1}^N (\text{número de intervalos presentes na } \ell\text{-ésima etapa que são intersectados por } U_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^N 2^{\ell-k_i} \leq \sum_{i=1}^N 2^\ell 3^d (\text{diam}(U_i))^d = 2^\ell 3^d \sum_{i=1}^N \text{diam}(U_i)^d. \end{aligned}$$

E, sendo assim, podemos concluir que, de fato,

$$\sum_{i=1}^N (\text{diam}(U_i))^d \geq \frac{1}{3^d} = \frac{1}{e^{d \log(3)}} = \frac{1}{e^{\log(2)}} = \frac{1}{2}.$$

Finalmente, notemos que, como, para cada $\delta > 0$ e cada δ -cobertura $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de $C_{\frac{1}{3}}$, vale que

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^d \geq \frac{1}{2},$$

temos

$$\mathcal{H}_\delta^d(C_{\frac{1}{3}}) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^d : \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_\delta(C_{\frac{1}{3}}) \right\} \geq \frac{1}{2}$$

qualquer que seja $\delta > 0$, e, por conseguinte, também

$$\mathcal{H}^d(C_{\frac{1}{3}}) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^d(C_{\frac{1}{3}}) \geq \frac{1}{2}.$$

Logo, $1 \leq \mathcal{H}^d(C_{\frac{1}{3}}) \leq \frac{1}{2}$, e, portanto, $\dim_H(C_{\frac{1}{3}}) = d = \frac{\log(2)}{\log(3)}$.

6.3 Curva de Takagi

Nesta seção apresentaremos a função de Takagi, algumas propriedades, provaremos que as dimensões de Hausdorff e a box-counting são ambas iguais a 1. Por fim, mostraremos que a dimensão indutiva da curva de Takagi igual a 1. Utilizamos o artigo [Mad06] como referência principal dessa seção. Começaremos com a seguinte definição:

Definição 6.31 (FUNÇÃO DE TAKAGI). A **função de Takagi** é a função $\tau: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in [0, 1]$,

$$\tau(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^x r_k(t) dt,$$

em que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} r_k: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (-1)^{\lfloor 2^k t \rfloor} \end{aligned}$$

é a k -ésima função de Rademacher.

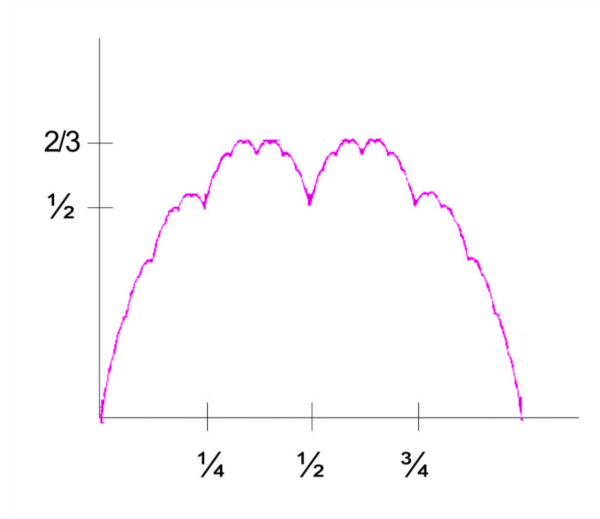


Figura 6.3. Gráfico da função de Takagi.
Fonte: autora.

Lema 6.32. O conjunto dos pontos de descontinuidade de r_k é finito.

Demonstração. O conjunto dos pontos de descontinuidade da função r_k é:

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{n}{2^k} : n \in \{1, \dots, 2^k\} \right\}.$$

De fato, seja $0 \leq t \leq 1$. Temos dois casos a considerar:

- Caso: $t \notin \mathcal{A}$.

Seja $n(t) := \max \{n \in \{0, \dots, 2^k\} : \frac{n}{2^k} < t\}$. Como $t \notin \mathcal{A}$, $n(t) = \emptyset$. Note que

$$\frac{n}{2^k} < t < \frac{n+1}{2^k}.$$

Logo, $n < 2^k < n+1$. Portanto, $r_k(t) := (-1)^{\lfloor 2^k t \rfloor} = (-1)^n$. Além disso, é claro também que para qualquer $s \in (\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k})$, temos que $r_k(s) = (-1)^n$. Consequentemente,

$$\lim_{s \rightarrow t} r_k(s) = (-1)^n = r_k(t).$$

Portanto, r_k é contínua em t . (Dado $\varepsilon > 0$, é claro que se $s \in (\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k})$ então $|r_k(s) - r_k(t)| = |(-1)^n - (-1)^n| = 0 < \varepsilon$).

- Caso: $t \in \mathcal{A}$.

Nesse caso, existe um único $n \in \{1, \dots, 2^k\}$ tal que $t = \frac{n}{2^k}$. Observe que, se $s \in (\frac{n-1}{2^k}, \frac{n}{2^k}) \subseteq [0, 1]$, então $2^k s \in (n-1, n)$, e, portanto, $r_k(s) := (-1)^{\lfloor 2^k s \rfloor} = (-1)^{n-1} \neq (-1)^n = r_k(t)$ e portanto, r_k não é contínua em t .

Observe que a função

$$f: \{1, \dots, 2^k\} \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$n \mapsto \frac{n}{2^k}$$

é uma bijeção. Portanto, \mathcal{A} possui 2^k elementos. Portanto, \mathcal{A} é finito. \square

Proposição 6.33. $r_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ são integráveis.

Demonstração. Inicialmente note que r_k é limitada, uma vez que $\text{Im}(r_k) = \{1, -1\}$ que é finito e, portanto, limitado. Pelo Lema 6.32 o conjunto de pontos de descontinuidade de r_k é finito (e tem medida nula), logo por teorema temos que as r_k são integráveis. \square

Lema 6.34. Para todo inteiro $n \geq 0$,

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \rho_i(x) \leq \frac{2}{3} \cdot 2^{-n}.$$

Demonstração. Inicialmente vamos analisar a soma aos pares:

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \rho_i(x) = \begin{cases} \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{\infty} (\rho_{2i-1}(x) + \rho_{2i}(x)), & \text{para } n \text{ par;} \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n+1}{2} (\rho_{2i}(x) + \rho_{2i+1}(x)), & \text{para } n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Agora iremos analisar a soma $\rho_k(x) + \rho_{k+1}(x)$. Note que essa função é *sawtooth* truncada com período 2^{1-k} e com valor máximo 2^{-k} . Então

$$\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{\infty} \underbrace{\rho_{2i-1}(x) + \rho_{2i}(x)}_{\leq \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{2i-1}}} \leq \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2i-1}} = \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{+\infty} \frac{2}{2^{2i}} = 2 \sum_{i=\frac{n}{2}+1} \frac{1}{4^i} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{4^{\frac{n}{2}+1}}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2^n \cdot 4} = \frac{2}{3} \cdot 2^{-n}.$$

e de modo similar temos que

$$\sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{\infty} \rho_{2i}(x) + \rho_{2i+1}(x) \leq \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{+\infty} 2^{-2i} = \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{\frac{1}{4^{\frac{n+1}{2}}}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot 2^{-n}.$$

\square

Lema 6.35. A função de Takagi τ é contínua.

Demonstração. Observe que para todo $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^n} < \varepsilon &\Leftrightarrow \frac{1}{2^{n-1}} < 3\varepsilon \\ &\Leftrightarrow -(n-1) < \log_2(3\varepsilon) \\ &\Leftrightarrow n-1 > -\log_2(3\varepsilon) \\ &\Leftrightarrow n > -\log_2(3\varepsilon) + 1 \\ &\Leftrightarrow n > \log_2\left(\frac{1}{3\varepsilon}\right) + 1. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, note que, se tomarmos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \log_2\left(\frac{1}{3\varepsilon}\right) + 1$, teremos que, para todo

$n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow n > \log_2 \left(\frac{1}{3\varepsilon} \right) + 1 \\ &\Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^n} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n \rho_i(x) - \underbrace{\sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i(x)}_{=\tau(x)} \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $(\sum_{i=1}^n \rho_i)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a τ em $[0, 1]$. \square

Corolário 6.36. O gráfico de τ , $\text{Gr} := \{(x, \tau(x)) : x \in [0, 1]\} \subseteq \mathbb{R}^2$, é conexo.

Demonstração. Pelo lema 6.35 τ é contínua, com isso a função

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x, \tau(x)) \end{aligned}$$

também é contínua. Por teorema, sabemos que os únicos subconjuntos conexos de \mathbb{R} são os intervalos, assim temos que $[0, 1]$ é conexo, portanto, como f é contínua segue que $f([0, 1]) = \{(x, \tau(x)) : x \in [0, 1]\} = \text{Gr}(\tau)$ é conexo. \square

Proposição 6.37. $\dim_{\mathcal{H}} \text{Gr}(\tau) = \dim_B(\text{Gr}(\tau)) = 1$.

Demonstração. A proposição 6.26 afirma que se um conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ tem $\dim_H(F) < 1$, então F é totalmente desconexo. Pelo corolário 6.36 vimos que $\text{Gr}(\tau)$ é conexo, com isso temos que $\dim_{\mathcal{H}}(\text{Gr}(\tau)) \geq 1$.

Resta mostrarmos que $\dim_{\mathcal{H}}(\text{Gr}(\tau)) \leq 1$. Para isso, particione o intervalo fechado $[0, 1]$ em 2^k segmentos de comprimento 2^{-k} , e, lembremos que:

$$\tau(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i(x) = \sum_{i=1}^k \rho_i(x) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \rho_i(x).$$

Vamos mostrar a seguir que módulo da inclinação de qualquer "parte linear" de qualquer uma das funções poligonais ρ_i é menor do que ou igual a 1. De fato, seja

$$\begin{aligned} \rho_k : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}. \\ x &\longmapsto \int_0^x r_k(t) dt \end{aligned}$$

Com efeito, dado $x \in [0, 1]$, é fácil ver que:

- se $x \in [0, \frac{1}{2^k}[$, então

$$\rho_k(x) = \int_0^x r_k(t) dt = \int_0^x (-1)^{\lfloor 2^k t \rfloor} dt = \int_0^x (-1)^0 dt = \int_0^x 1 dt = x;$$

- se $x \in [\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}]$, então

$$\begin{aligned} \rho_k(x) &= \int_0^x r_k(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2^k}} r_k(t) dt + \int_{\frac{1}{2^k}}^x r_k(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2^k}} (-1)^0 dt + \int_{\frac{1}{2^k}}^x (-1)^1 dt \\ &= \frac{1}{2^k} - x + \frac{1}{2^k} = +\frac{2}{2^k} - x; \end{aligned}$$

- se $x \in [\frac{2}{2^k}, \frac{3}{2^k}]$, então

$$\begin{aligned}\rho_k(x) &= \int_0^{\frac{2}{2^k}} r_k(t) dt + \int_{\frac{2}{2^k}}^x r_k(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2^k}} r_k(t) dt + \int_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{2}{2^k}} r_k(t) dt + \int_{\frac{2}{2^k}}^x 1 dt \\ &= \frac{1}{2^k} - \frac{2}{2^k} + \frac{1}{2^k} = 0 + x - \frac{2}{2^k}.\end{aligned}$$

De modo geral, para cada $j \in \{1, \dots, 2^k\}$ e cada $x \in [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}]$, vale que:

- se j é ímpar, então

$$\varphi_k(x) = \int_0^x r_k(t) dt = \underbrace{\sum_{i=1}^{j-1} \int_{\frac{i-1}{2^k}}^{\frac{i}{2^k}} \underbrace{r_k(t)}_{=(-1)^{i-1}} dt}_{=0} + \underbrace{\int_{\frac{j-1}{2^k}}^x \underbrace{r_k(t)}_{=1} dt}_{=x - \frac{j-1}{2^k}} = x + \frac{1-j}{2^k};$$

- se $j = 2$, então $\rho_k(x) = \frac{2}{2^k} - x = \frac{j}{2^k} - x$;
- se j é par e diferente de 2, então

$$\varphi_k(x) = \int_0^x r_k(t) dt = \underbrace{\sum_{i=1}^{j-2} \int_{\frac{i-1}{2^k}}^{\frac{i}{2^k}} \underbrace{r_k(t)}_{=(-1)^{i-1}} dt}_{=0} + \underbrace{\int_{\frac{j-2}{2^k}}^{\frac{j-1}{2^k}} \underbrace{r_k(t)}_{=1} dt}_{=\frac{j-1}{2^k} - \frac{j-2}{2^k}} + \underbrace{\int_{\frac{j-1}{2^k}}^x \underbrace{r_k(t)}_{=-1} dt}_{=\frac{j-1}{2^k} - x} = \frac{j}{2^k} - x.$$

Sendo assim, para cada $i \in \mathbb{N}$ e cada $j \in \{1, \dots, 2^k\}$, podemos fixar $\xi_i^j \in \{-1, 1\}$ e $\eta_i^j \in \mathbb{R}$ de modo que, para cada $x \in [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}]$, $\varphi_i(x) = \xi_i^j x + \eta_i^j$. Por conseguinte, para cada $k \in \mathbb{N}$, cada $j \in \{1, \dots, k\}$ e cada $x \in [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}]$,

$$\varphi_i(x) + \dots + \varphi_k(x) = (\xi_1^j + \dots + \xi_k^j) x + (\eta_1^j + \dots + \eta_k^j).$$

Como, porém, $\eta_i^j \in \{-1, 1\}$ quaisquer que sejam $i \in \mathbb{N}$ e $j \in \{1, \dots, 2^k\}$, é imediato ver que, para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $j \in \{1, \dots, 2^k\}$, tem-se

$$\left| \xi_1^j + \dots + \xi_k^j \right| \leq \underbrace{\left| \xi_1^j \right|}_{=1} + \dots + \underbrace{\left| \xi_k^j \right|}_{=1} = k.$$

Sabemos, pelo lema, 6.34 que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=k+1}^{\infty} \rho_i(x) \leq \frac{2}{3} \cdot 2^{-k}$. Assim, para cobrirmos completamente $\text{Gr}(\tau)$, precisamos considerar apenas $n_k := 2^k$ retângulos $\{U_{k,\ell}\}_{1 \leq \ell \leq k}$ de altura $2^{-k} \cdot k + \frac{2}{3} \cdot 2^{-k} = 2^{-k} \cdot (\frac{2}{3} + k)$. Pelo teorema de Pitágoras, podemos determinar que esses retângulos tem diâmetro $2^{-k} \sqrt{1 + (k + \frac{2}{3})^2}$.

Vamos analisar o caso em que $k = 3$. Sejam R_1, \dots, R_7 e R_8 os retângulos mostrados na figura 6.6, e, para cada $j \in \{1, \dots, 8\}$, seja y_j a altura da base superior do retângulo R_j . Examinando a figura, é imediato ver que o gráfico de $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3$ está contido em $\bigcup_{j=1}^8 R_j$. Por sua vez, como $0 \leq \sum_{i=3}^{\infty} \rho_i(x) \leq \frac{1}{12}$ qualquer que seja $x \in [0, 1]$, é claro também que, para cada $j \in \{1, \dots, 8\}$ e cada $x \in [\frac{j-1}{8}, \frac{j}{8}]$, $\tau(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i(x) = \rho_1(x) + \rho_2(x) + \rho_3(x) + \sum_{i=4}^{\infty} \rho_i(x) \leq y_j + \frac{1}{12}$. Sendo assim, podemos concluir que, para cada $j \in \{1, \dots, 8\}$ e cada $x \in [\frac{j-1}{8}, \frac{j}{8}]$, $\tau(x)$ pertence a um retângulo de base $\frac{1}{8}$ e altura $\frac{3}{8} + \frac{1}{12}$ (para encontrar esses retângulos, basta substituir cada um dos R_j por um retângulo de mesma base inferior e altura $\frac{3}{8} + \frac{1}{12}$). Logo, o $\text{Gr}(\tau)$ está contido na reunião de 8 retângulos de base $\frac{1}{8}$ e altura $\frac{11}{24}$.

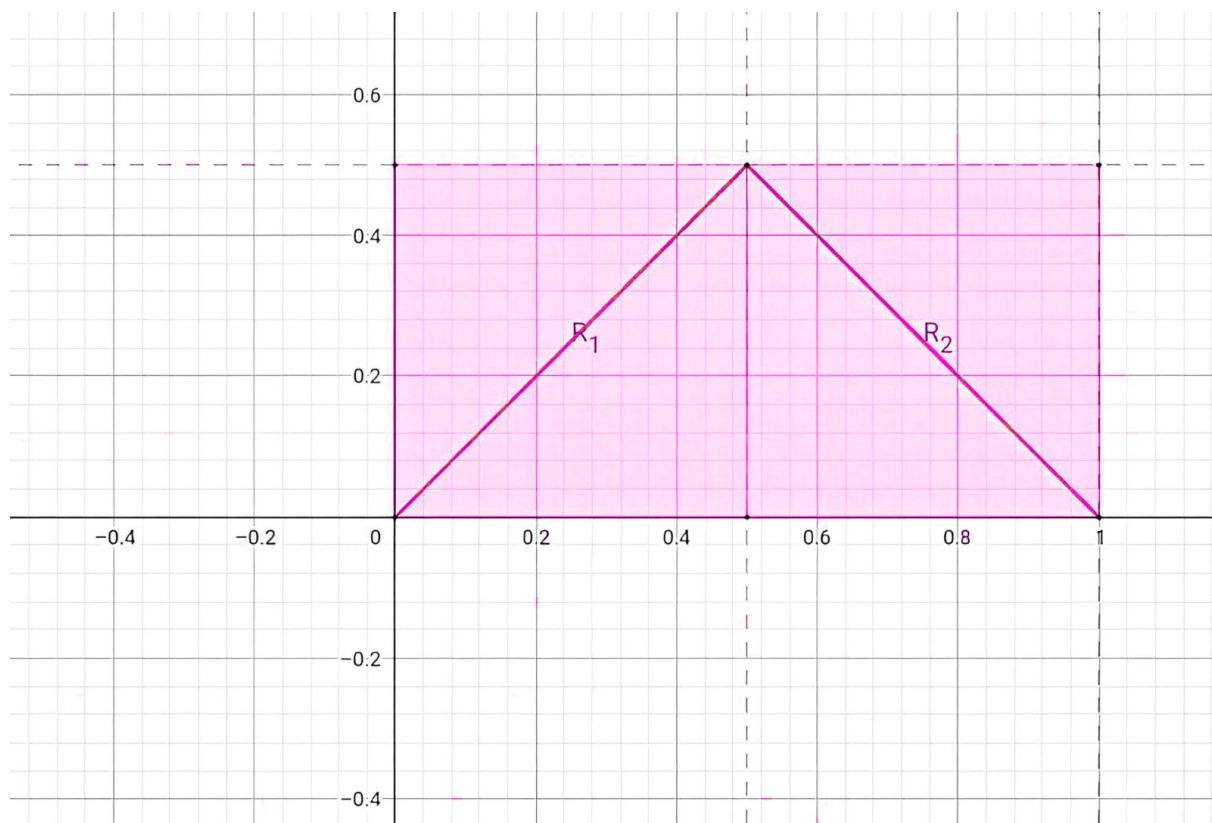


Figura 6.4. *Caso $k = 1$.*

Fonte: autora.



Figura 6.5. *Caso $k = 2$.*

Fonte: autora.

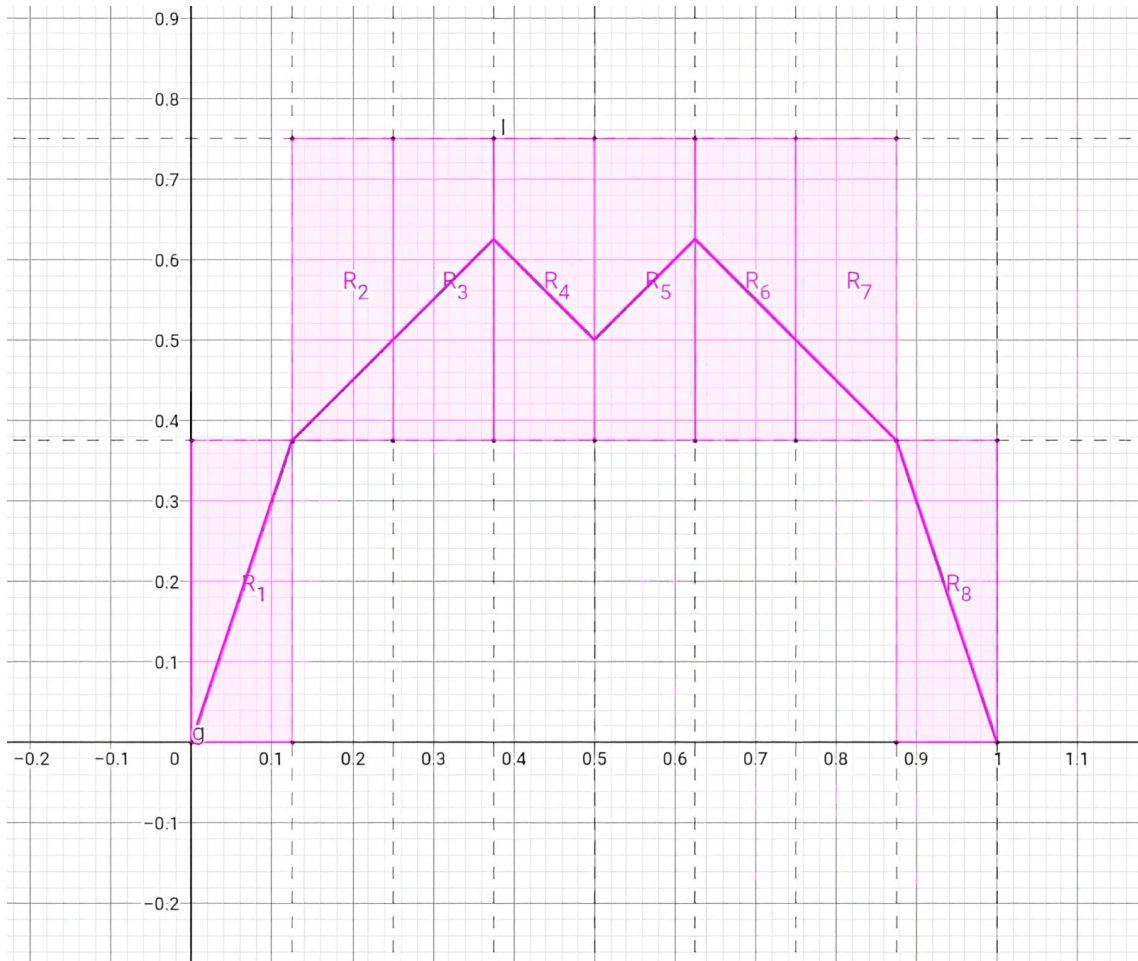


Figura 6.6. Caso $k = 3$.

Fonte: autora.

Seja $\delta_k := 2^{-k} \sqrt{1 + (k + \frac{2}{3})^2}$. Note que $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$, conforme exigido pela hipótese do teorema A.9. Finalmente, precisamos considerar

$$1 \geq \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} = \frac{2^{-k-1} \sqrt{1 + (k + 1 + \frac{2}{3})^2}}{2^{-k} \sqrt{1 + (k + \frac{2}{3})^2}} \geq \frac{1}{2}.$$

Assim, $c := \frac{1}{2}$ satisfará a parte final da hipótese do teorema A.9. Portanto, o lema garante que

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}.$$

Uma vez que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{2^{-k} \sqrt{1 + (k + \frac{2}{3})^2}} = 1,$$

podemos concluir que $\underline{\dim}_B \leq 1$.

Portanto, resulta da proposição 6.24, que $\dim_{\mathcal{H}}(\text{Gr}(\tau)) = \dim_B(\text{Gr}(\tau)) = 1$. \square

Veremos a seguir que a dimensão indutiva fraca da curva de Takagi é igual a 1.

Teorema 6.38. A dimensão indutiva fraca de $\text{Gr}(\tau)$ é igual a 1. Isto é, $\text{ind}(\text{Gr}(\tau)) = 1$.

Demonstração. Inicialmente, notemos que, como τ é contínua, a aplicação

$$\begin{aligned} h: [0, 1] &\longrightarrow \text{Gr}(\tau) \\ x &\longmapsto (x, \tau(x)) \end{aligned}$$

é um homeomorfismo. De fato:

- h é contínua, pois suas componentes são contínuas;
- h é, evidentemente, inversível, e

$$\begin{aligned} \text{proj}: \text{Gr}(\tau) &\longrightarrow [0, 1] \\ (x, \tau(x)) &\longmapsto x \end{aligned}$$

é a inversa de h ; e

- proj é contínua, pois é uma contração.

Sendo assim, resulta do teorema 4.47 que $\text{ind}(\text{Gr}(\tau)) = \text{ind}([0, 1]) = 1$. □

Capítulo 7

Sistemas de Funções Iteradas

Neste capítulo veremos que, em muitos casos, *fractais* são definidos como atratores de um *sistema de funções iteradas (IFS)*. Definir fractais por meio de sistemas de funções iteradas muitas vezes facilita o cálculo de sua dimensão de Hausdorff, uma vez que fazer o cálculo pela definição é, em geral, bastante complicado. Sendo assim, vamos estudar, os conceitos de contração, sistemas de funções iteradas, métrica de Hausdorff, atrator de um IFS, bem como alguns exemplos. As referências utilizadas neste capítulo foram [Fal04] e [Bar14].

Definição 7.1 (CONTRAÇÃO). Dado $n \in \mathbb{N}$, dizemos que uma aplicação $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma **contração** se existe $r \in [0, 1[$ tal que $|S(x) - S(y)| \leq r \cdot |x - y|$ quaisquer que sejam x e y em \mathbb{R}^n . Se $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma contração, e $r \in [0, 1[$ é tal que $|S(x) - S(y)| \leq r \cdot |x - y|$ quaisquer que sejam x e y em \mathbb{R}^n , dizemos que r é o **fator de contração** de S .

Definição 7.2 (SISTEMA DE FUNÇÕES ITERADAS). Um **sistema de funções iteradas** ou *iterated function system (IFS)* é uma estrutura da forma $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ tal que (X, d) é um espaço métrico completo e cada $S_i: X \rightarrow X$, $i = 1, \dots, m$, é uma contração em X . O **fator de contração** de um IFS é o máximo dos fatores de contração das S_1, \dots, S_m .

Definição 7.3 (δ -VIZINHANÇA). Seja (X, d) um espaço métrico e seja $A \subseteq X$, e, seja $\delta > 0$. Definimos a **δ -vizinhança do conjunto** A como sendo o conjunto dos pontos que distam menos do que δ de A , isto é,

$$A_\delta = \{x \in X : |x - a| < \delta \text{ para algum } a \in A\}.$$

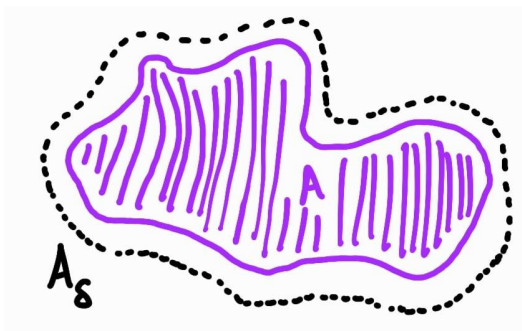


Figura 7.1. A δ -vizinhança do compacto A .

Fonte: autora.

Definiremos a distância entre dois subconjuntos A e B de X , como sendo o menor δ tal que a δ -vizinhança de B contém A e vice-versa:

Definição 7.4 (DISTÂNCIA DE HAUSDORFF). Sejam $A, B \subseteq \mathcal{K}(X)$, então a distância de A e B é dada por

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) := \inf \{\delta > 0 : A \subseteq B_\delta, \text{ e } B \subseteq A_\delta\}.$$

A métrica $d_{\mathcal{H}}$ é conhecida como **métrica de Hausdorff**.

Mais detalhes sobre a métrica de Hausdorff podem ser encontrados no capítulo 9 do livro [Fal04] e no capítulo 3 de [SA11].

Definição 7.5. Seja (X, d) um espaço métrico. Denotaremos por $\mathcal{K}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos compactos não vazios de X , isto é:

$$\mathcal{K}(X) := \{A \subseteq X : A \text{ é compacto, e } A \neq \emptyset\}.$$

A proposição a seguir é um resultado clássico que diz respeito à métrica de Hausdorff.

Proposição 7.6. *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Nessas condições:*

1. $(\mathcal{K}(X), d_{\mathcal{H}})$ é um espaço métrico completo;
2. se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}(X)^{\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, e $A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, então

$$A = \{x \in X : \text{existe } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec X \text{ tal que } x_n \rightarrow x, \text{ e tal que, } \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A_n\}.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Bar14]. □

Definição 7.7 (OPERADOR DE HUTCHINSON). Seja X um espaço métrico. Associado a um IFS iremos definir o **operador de Hutchinson** $\mathcal{H} : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ por:

$$\mathcal{H}(K) = \bigcup_{i=1}^m S_i(K).$$

Observação 7.8. O operador de Hutchinson está bem definido, pois a união de um número finito de compactos de X é compacto.

A seguir, vamos mostrar que o operador de Hutchinson é uma contração com respeito a métrica de Hausdorff. Esse resultado será essencial para provarmos o teorema seguinte.

Proposição 7.9. *Sejam $\{(X, d); S_1, \dots, S_m\}$ um sistema de funções iteradas, e seja $\mathcal{H} : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ o operador de Hutchinson associado a esse IFS. Então \mathcal{H} é uma aplicação Lipschitz com respeito a métrica de Hausdorff.*

Demonstração. Para todo $i = 1, \dots, m$, seja r_i a constante de Lipschitz para a aplicação S_i , com $r_i < 1$. Iremos mostrar que $r_* = \max_{i=1, \dots, m} r_i < 1$ é a constante de Lipschitz de \mathcal{H} . Por definição, para todos os subconjuntos compactos $K_1, K_2 \subseteq X$, temos que

$$d_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}(K_1), \mathcal{H}(K_2)) = d_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(K_1), \bigcup_{i=1}^m S_i(K_2)\right) \leq \max_{i=1, \dots, m} d_{\mathcal{H}}(S_i(K_1), S_i(K_2)),$$

pois se,

$$\Lambda = \left\{ a > 0 : \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i(K_1) \right) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i(K_2) \right)_a \text{ e } \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i(K_2) \right) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i(K_1) \right)_a \right\}$$

e

$$\Lambda'_i = \{a > 0 : S_i(K_1) \subset (S_i(K_2))_a \text{ e } S_i(K_2) \subset (S_i(K_1))_a\}.$$

Como $\Lambda' \subset \Lambda$, temos que:

$$d_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(K_1), \bigcup_{i=1}^m S_i(K_2)\right) = \inf \Lambda \leq \inf \Lambda' \leq \max_{i=1, \dots, m} d_{\mathcal{H}}(S_i(K_1), S_i(K_2)).$$

Assim, como para cada $i = 1, \dots, m$, as aplicações S_i são contrações, temos que:

$$\max_{i=1, \dots, m} d_{\mathcal{H}}(S_i(K_1), S_i(K_2)) = \max_{i=1, \dots, m} r_i \cdot d_{\mathcal{H}}(K_1, K_2).$$

Logo,

$$d_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}(K_1), \mathcal{H}(K_2)) \leq \max_{i=1, \dots, m} r_i \cdot d_{\mathcal{H}}(K_1, K_2).$$

Portanto, \mathcal{H} é uma contração. \square

O seguinte teorema garante que existe um único ponto fixo do operador de Hutchinson, o qual chamaremos de atrator do IFS.

Teorema 7.10 (HUTCHINSON). *Sejam $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS e \mathcal{H} o operador de Hutchinson. Nessas condições, existe um único $A \in \mathcal{K}(X)$ tal que $\mathcal{H}(A) = \bigcup_{i=1}^m S_i(A) = A$. Além disso, para qualquer $K \in \mathcal{K}(X)$, vale que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^n(K) = A.$$

O conjunto A é chamado de **atrator do IFS**.

Demonstração. Pelo proposição 7.9, \mathcal{H} é uma contração em $\mathcal{K}(X)$. E como, vimos na proposição 7.6 que $(\mathcal{K}(X), d_{\mathcal{H}})$ é completo, resulta do teorema do ponto fixo A.11, que a aplicação

$$\mathcal{H}: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$$

possui um único ponto fixo $A \in \mathcal{K}(X)$ tal que

$$\mathcal{H}(A) = \bigcup_{i=1}^m S_i(A) = A.$$

Aplicando a segunda parte do teorema do ponto fixo A.11, obtemos a segunda parte do teorema. \square

Definição 7.11 (CONJUNTO AUTOSSIMILAR). Dizemos que um conjunto é **autossimilar** se é o atrator de um IFS.

Vamos, agora, revisar a definição de k -ésima iterada de uma aplicação, e, a partir disso, deduzir uma fórmula sobre as k -ésimas iteradas do operador de Hutchinson.

Definição 7.12 (k -ÉSIMA ITERADA DE f). Seja X um conjunto não vazio, seja $f: X \rightarrow X$ uma aplicação, e seja $k \in \mathbb{N}$. Nessas condições, dizemos que

$$f^k := \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fatores}}$$

é a k -ésima iterada de f . Por convenção, define-se também $f^0 := \text{id}$, em que $\text{id}: X \rightarrow X$ é a aplicação identidade.

Proposição 7.13. *Sejam $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS. Nessas condições, para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$\mathcal{H}^k(E) = \bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in I_k} (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(E),$$

em que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $I_k := \{(i_1, \dots, i_k) : \forall j \in \{1, \dots, k\}, i_j \in \{1, \dots, m\}\}$

Demonstração. Resulta da definição de \mathcal{H} que

$$\mathcal{H}(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E) = \bigcup_{(i_1) \in I_1} S_{i_1}(E)$$

qualquer que seja $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Além disso, é claro também que, se $k \in \mathbb{N}$ é tal que

$$\mathcal{H}^k(D) = \bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in I_k} (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(D),$$

qualquer que seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$, então, para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{k+1}(E) &= \mathcal{H}^k(\mathcal{H}(E)) \\ &= \mathcal{H}^k\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(E)\right) \\ &= \bigcup_{i=1}^m \mathcal{H}^k(S_i(E)) \\ &= \bigcup_{i=1}^m \left[\bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in I_k} (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(S_i(E)) \right] \\ &= \bigcup_{(i_1, \dots, i_{k+1}) \in I_{k+1}} (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_{k+1}})(E). \end{aligned}$$

Sendo assim, podemos concluir, por indução que

$$\mathcal{H}^k(E) = \bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in I_k} (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(E),$$

quaisquer que sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$. □

Teorema 7.14. *Seja $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS, e seja F seu atrator. Nessas condições, para todo compacto não vazio $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $S_i(E) \subseteq E$ qualquer que seja $i \in \{1, \dots, m\}$, tem-se*

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^k(E).$$

Demonstração. Seja $E \subseteq \mathbb{R}^n$ um compacto não vazio tal que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $S_i(E) \subseteq E$. Resulta dos teoremas 7.10 e 7.6 que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^k(E) \stackrel{7.10}{=} F \stackrel{7.6}{=} \left\{ x \in X : \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \prec X \text{ tal que } x_k \rightarrow x, \text{ e tal que, } \forall k \in \mathbb{N}, x_k \in \mathcal{H}^k(E) \right\}.$$

Sendo assim, dado $x \in F$, podemos fixar uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \prec X$ de modo que $x_k \rightarrow x$, e, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in \mathcal{H}^k(E)$. Vamos mostrar, a seguir, que $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^k(E)$. Para isso, notemos, inicialmente, que, como, por hipótese, $S_i(E) \subseteq E$ qualquer que seja $i \in \{1, \dots, m\}$, para todo

$k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{k+1}(E) &= \bigcup_{(i_1, \dots, i_{k+1}) \in I_{k+1}} (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_{k+1}})(E) \\
&= \bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in I_k} \bigcup_{i_{k+1}=1}^m (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(S_{i_{k+1}}(E)) \\
&= \bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in I_k} (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}) \left(\underbrace{\bigcup_{i_{k+1}=1}^m S_{i_{k+1}}(E)}_{\subseteq E} \right) \\
&\subseteq \bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in I_k} (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(E) = \mathcal{H}^k(E).
\end{aligned}$$

Consequentemente, para quaisquer ℓ e k em \mathbb{N} ,

$$\ell \leq k \Rightarrow \mathcal{H}^k(E) \subseteq \mathcal{H}^\ell(E) \Rightarrow x_k \in \mathcal{H}^\ell(E).$$

Dessa forma, como $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$, e, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}^\ell(E)$ é compacto — pois E é compacto,

$$\mathcal{H}^\ell(E) = \bigcup_{(i_1, \dots, i_\ell) \in I_\ell} (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_\ell})(E),$$

e, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_\ell}$ é contínua — podemos concluir que $x \in \mathcal{H}^\ell(E)$ qualquer que seja $\ell \in \mathbb{N}$, e, portanto, que x de fato pertence a $\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^k(E)$. Como, porém, $x \in F$ é completamente arbitrário, disso decorre que $F \subseteq \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^k(E)$. Para vermos que também vale a inclusão oposta, basta agora observarmos que

$$F = \left\{ y \in X : \exists (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \prec X \text{ tal que } y_k \longrightarrow y, \text{ e tal que, } \forall k \in \mathbb{N}, y_k \in \mathcal{H}^k(E) \right\},$$

e que, para cada $y \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^k(E)$, tem-se

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k,$$

em que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $y_k := y \in \mathcal{H}^k(E)$. □

Observação 7.15. Dados um IFS $\{X; S_1, \dots, S_m\}$, um número natural k , uma seqüência finita $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, m\}^k$ e um ponto $x \in X$, algumas vezes escreveremos $S_{i_1 \dots i_k}$ para indicar a aplicação $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$ e $x_{i_1 \dots i_k}$ para indicar $(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(x)$.

Exemplo 7.16. Considere o IFS $\{\mathbb{R}, S_1, S_2\}$ tais que

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x \text{ e } S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Neste caso $\mathcal{H}: \mathcal{K}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R})$ é definido por

$$\mathcal{H}(K) := S_1(K) \cup S_2(K),$$

para todo $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$. Tomemos como conjunto inicial $I_0 = [0, 1]$. Afirmamos que o atrator deste IFS é o conjunto de Cantor ternário. Para provar isso, basta observarmos que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $(\mathcal{K}(\mathbb{R}), d_{\mathcal{H}})$. De fato, para ilustrar a ideia da demonstração vamos calcular $d_{\mathcal{H}}(I_0, I_1) = \inf\{\delta > 0 : I_0 \subseteq (I_1)_\delta \text{ e } I_1 \subseteq (I_0)_\delta\}$. Para tanto, inicialmente, observe que como $I_1 \subseteq I_0$, tem-se $I_1 \subseteq (I_0)_\delta$ qualquer que seja $\delta > 0$. Além disso, é fácil que a partir da Figura 7.2 que para todo $\delta > 0$, tem-se $I_0 \subseteq (I_1)_\delta$ se, e somente se, $\delta \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$.

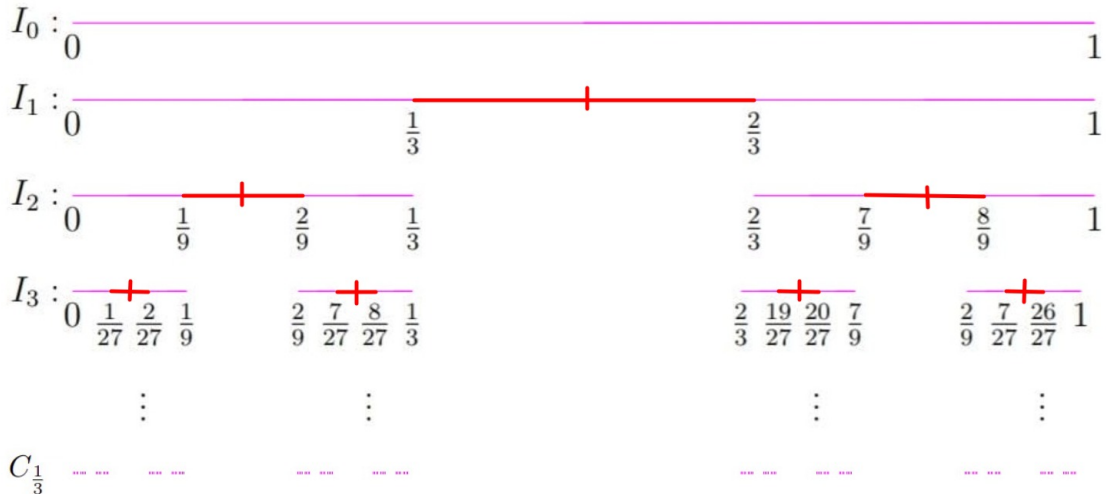


Figura 7.2. Atrator do IFS de $C_{\frac{1}{3}}$.

Fonte: autora.

Consequentemente,

$$\{\delta > 0 : I_0 \subseteq (I_1)_\delta \text{ e } I_1 \subseteq (I_0)_\delta\} = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, +\infty \right[,$$

e, portanto,

$$d_{\mathcal{H}}(I_0, I_1) = \inf \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, +\infty \right[= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}.$$

Procedendo de modo análogo, pode-se mostrar que

$$d_{\mathcal{H}}(I_m, I_n) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{\min\{m,n\}+1}}$$

quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, para cada $\delta > 0$, se tomarmos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{n_0+1}} < \delta$, teremos que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$

$$m, n > n_0 \Rightarrow d_{\mathcal{H}}(I_m, I_n) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{\min\{m,n\}+1}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{n_0+1}} < \delta.$$

Por conseguinte, $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Além disso, é fácil ver que, para cada $i \in \{1, 2\}$, tem-se $S_i([0, 1]) \subseteq [0, 1]$. Sendo assim, resulta do teorema 7.14 que, se F é o atrator do IFS $\{\mathbb{R}; S_1, S_2\}$, então

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^k([0, 1]) = \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k = C_{\frac{1}{3}}.$$

Capítulo 8

Dinâmica Caótica nos fractais

Na primeira parte deste capítulo, apresentaremos o espaço dos códigos associado a um IFS, o conjunto dos pontos periódicos, transitividade topológica e sensibilidade às condições iniciais, bem como, introduzimos o conceito de caos segundo a definição de Devaney [Dev07] e provamos que a aplicação shift é caótica. Além disso, na segunda parte, exploraremos o conceito de IFS totalmente desconexo, de transformação de mudança S associado a um IFS. Na última parte, utilizaremos os resultados provados na primeira e segunda parte para provar um teorema que dá condições suficientes para que S seja caótica. Em seguida, utilizaremos esse teorema para provar que a aplicação de mudança associado ao IFS (sendo $C_{\frac{1}{3}}$ seu atrator) é caótica segundo a definição de Devaney. Esse capítulo foi baseado no livro “*Fractals Everywhere*” [Bar14], do autor Michael F. Barnsley, e nas referências [Dev99], [Dev07] e [dLB19].

8.1 Caos de Devaney na aplicação shift

Definição 8.1 (ESPAÇO DOS CÓDIGOS ASSOCIADO A UM IFS). Seja $\{X; S_1, S_2, \dots, S_m\}$ um IFS. O espaço dos códigos associado ao IFS é o espaço métrico (Σ_m, d_{Σ_m}) , em que

$$\Sigma_m := \{x := (x_1, x_2, x_3, \dots) : \forall j \in \mathbb{N}, x_j \in \{1, \dots, m\}\},$$

e $d_{\Sigma_m} : \Sigma_m \times \Sigma_m \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que, para quaisquer $s := (s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e $t := (t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ em Σ_m ,

$$d_{\Sigma_m}(s, t) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{(m+1)^i}.$$

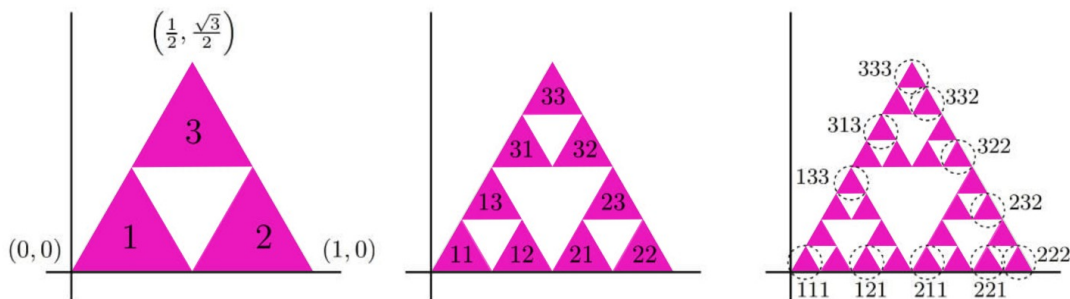


Figura 8.1. Espaço dos códigos associado ao triângulo de Sierpinski.

Fonte: autora, adaptada de [SA11].

Exemplo 8.2. O espaço de códigos associados ao IFS $\{\mathbb{R}^2; S_1, S_2, S_3\}$ em que:

$$S_1(z) := \frac{1}{2}z, S_2(z) := \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, S_3(z) := \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

é $\{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$, como pode ser observado pela Figura 8.1. Em geral, o espaço de códigos associados ao IFS com três contrações é $\{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$.

Observação 8.3. Note que a função distância d_{Σ_m} está bem definida, pois, como

$$\frac{|s_i - t_i|}{(m+1)^i} \leq \frac{m-1}{(m+1)^i}$$

quaisquer que sejam $s, t \in \Sigma_m$ e qualquer que seja $i \in \mathbb{N}$, resulta do critério da comparação e do fato de que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{m-1}{(m+1)^i}$ converge (pois é uma série geométrica de razão $\frac{1}{m+1}$) que, para quaisquer $s, t \in \Sigma_m$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{(m+1)^i}$ também converge. Além disso, como $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{m-1}{(m+1)^i} = 1 - \frac{1}{m}$, para todo par $(s, t) \in \Sigma_m \times \Sigma_m$, tem-se

$$d_{\Sigma_m}(s, t) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{(m+1)^i} \leq 1 - \frac{1}{m}.$$

Proposição 8.4. A função $d_{\Sigma_m} : \Sigma_m \times \Sigma_m \rightarrow \mathbb{R}$ definida anteriormente é uma métrica.

Demonstração. Sejam s, t e r em Σ_m . É claro que $d_{\Sigma_m}(s, t) \geq 0$, pois $\frac{|s_i - t_i|}{(m+1)^i} \geq 0$ qualquer que seja $i \in \mathbb{N}$, e que

$$d_{\Sigma_m}(s, t) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}, s_i = t_i \Leftrightarrow s = t.$$

Além disso, é claro também que $d_{\Sigma_m}(s, t) = d_{\Sigma_m}(t, s)$, uma vez que, para todo $i \in \mathbb{N}$, $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$. Por fim, notemos, ainda, que $d_{\Sigma_m}(r, s) + d_{\Sigma_m}(s, t) \geq d(r, t)$, já que $|r_i - s_i| + |s_i - t_i| \geq |r_i - t_i|$ qualquer que seja $i \in \mathbb{N}$. \square

Proposição 8.5. Sejam $s, t \in \Sigma_m$, e seja $n \in \mathbb{N}$. Nessas condições:

1. se $s_i = t_i$ qualquer que seja $i \in \{1, \dots, n\}$, então $d_{\Sigma_m}(s, t) \leq \frac{m-1}{m \cdot (m+1)^n}$;
2. se $d_{\Sigma_m}(s, t) < \frac{1}{(m+1)^n}$, então $s_i = t_i$ qualquer que seja $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstração.

1. Se $s_i = t_i$ qualquer que seja $i \in \{1, \dots, n\}$, então

$$\begin{aligned} d_{\Sigma_m}(s, t) &:= \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{|s_i - t_i|}{(m+1)^i}}_{=0} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{(m+1)^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{(m+1)^i} \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{m-1}{(m+1)^i} = \frac{m-1}{m \cdot (m+1)^n}. \end{aligned}$$

2. Se $s_j \neq t_j$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$, então $|s_j - t_j| \geq 1$, e, portanto,

$$d_{\Sigma_m}(s, t) := \underbrace{\sum_{i=1}^{j-1} \frac{|s_i - t_i|}{(m+1)^i}}_{\geq 0} + \frac{|s_j - t_j|}{(m+1)^j} + \underbrace{\sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{(m+1)^i}}_{\geq 0} \geq \frac{|s_j - t_j|}{(m+1)^j} \geq \frac{1}{(m+1)^j} \geq \frac{1}{(m+1)^n}.$$

Sendo assim, se $d_{\Sigma_m}(s, t) < \frac{1}{(m+1)^n}$, então, necessariamente, $s_i = t_i$ qualquer que seja i em $\{1, \dots, n\}$. \square

Vamos agora definir uma aplicação em Σ_m .

Definição 8.6 (APLICAÇÃO SHIFT). A aplicação shift em Σ_m é, por definição, a aplicação

$$\begin{aligned} \tau : \Sigma_m &\rightarrow \Sigma_m \\ (x_1, x_2, x_3, \dots) &\mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots). \end{aligned}$$

Proposição 8.7. *A aplicação $\tau: \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$ é contínua em relação à métrica d_{Σ_m} .*

Demonstração. Seja $s := (s_1, s_2, s_3, \dots) \in \Sigma_m$, e seja $\epsilon > 0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m-1}{m \cdot (m+1)^n} = 0$, podemos fixar $n \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{m-1}{m \cdot (m+1)^n} < \epsilon$. Seja $t := (t_1, t_2, t_3, \dots) \in \Sigma_m$ tal que

$$d_{\Sigma_m}(s, t) < \frac{1}{(m+1)^{n+1}}.$$

Resulta da proposição 8.5 que $s_i = t_i$ qualquer que seja $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Consequentemente, $\tau(s) := (s_2, s_3, s_4, \dots)$ e $\tau(t) := (t_2, t_3, t_4, \dots)$ possuem as n primeiras entradas iguais — a partir do que concluímos, novamente pela proposição 8.5, que $d_{\Sigma_m}(\tau(s), \tau(t)) \leq \frac{m-1}{m \cdot (m+1)^n} < \epsilon$. Sendo assim, para qualquer $\omega \in \Sigma_m$,

$$d_{\Sigma_m}(s, \omega) < \frac{1}{(m+1)^{n+1}} \Rightarrow d_{\Sigma_m}(\tau(s), \tau(\omega)) < \epsilon.$$

E, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, disso decorre, por fim, que τ é contínua em s . \square

Nas definições seguintes, vamos supor, implicitamente, que (X, d) seja um espaço métrico.

Definição 8.8 (PONTO PERÍODICO). Seja $f: X \rightarrow X$. Dizemos que $z_0 \in X$ é um **ponto periódico** de f se existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(z_0) = z_0$.

Definição 8.9 (ÓRBITA). Seja $f: X \rightarrow X$ uma aplicação. A **órbita de um ponto** z_0 pela aplicação f é o conjunto

$$O_{z_0} := \left\{ z_n := f^n(z_0) : n \in \{0, 1, 2, \dots\} \right\} = \{z_0, f(z_0), f^2(z_0), \dots\}.$$

Definição 8.10 (CONJUNTO DENSO). Dado um espaço métrico (X, d) , dizemos que um subconjunto A de X é **denso** em (X, d) se, para todo $\epsilon > 0$ e todo $x \in X$, existe um $a \in A$ tal que $d(a, x) < \epsilon$.

Provaremos, a seguir, um resultado importante que será utilizado para mostrarmos que a aplicação shift é caótica segundo a definição de Devaney.

Proposição 8.11. *Seja $\text{Per}(\tau)$ o conjunto dos pontos periódicos de τ . Nessas condições:*

1. $\text{Per}(\tau)$ é denso em (Σ_m, d_{Σ_m}) ; e
2. existe um ponto de Σ_m cuja órbita pela aplicação τ é densa em (Σ_m, d_{Σ_m}) .

Demonstração. Prova do item 1. Para mostrarmos a densidade de $\text{Per}(\tau)$, vamos mostrar que, dado $s := (s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots) \in \Sigma_m$, existe uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\text{Per}(\tau)$ tal que $x_k \rightarrow s$, quando $k \rightarrow \infty$. De fato, para cada $k \in \mathbb{N}$, considere

$$x^{(k)} := (s_1, s_2, \dots, s_k, s_1, s_2, \dots, s_k, \dots).$$

É imediato ver que $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de $\text{Per}(\tau)$. Vamos mostrar, a seguir, que $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a s . Para tanto, dado $\epsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{m-1}{m \cdot (m+1)^{n_0}} < \epsilon$. Decorre da definição de $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ que, para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > n_0$ e cada $i \in \{1, \dots, k\}$, tem-se $s_i = x_i^{(k)}$. Sendo assim, podemos concluir, pela proposição 8.5, que, para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > n_0$, tem-se

$$d_{\Sigma_m}(s, x^{(k)}) \leq \frac{m-1}{m \cdot (m+1)^k} < \frac{m-1}{m \cdot (m+1)^{n_0}} < \epsilon.$$

E, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, disso resulta, por fim, que $x^{(k)} \rightarrow s$.

Prova do item 2. Considere $s^* \in \Sigma_m$ tal que

$$s^* = \left(\underbrace{1, 2, \dots, m}_{1^\circ \text{ bloco}}, \underbrace{\star}_{2^\circ \text{ bloco}}, \dots, \underbrace{\dots}_{n^\circ \text{ bloco}}, \dots \right),$$

em que $\star := 1, 1, 1, 2, \dots, 1, m, 2, 1, 2, 2, \dots, 2, m, \dots, m, 1, m, 2, \dots, m, m$. Observe que, no primeiro bloco, temos todas as combinações possíveis de elementos do conjunto $\{1, \dots, m\}$ com um elemento; no segundo bloco, temos todas as combinações possíveis de elementos do conjunto $\{1, \dots, m\}$ com dois elementos; e assim por diante. No que se segue, provaremos que a órbita de s^* por τ é densa em Σ_m . Para isso, dados $s \in \Sigma_m$ e $\epsilon > 0$, escolhemos $p \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{m-1}{m \cdot (m+1)^p} < \epsilon$. Resulta da definição de s^* que podemos fixar $k \in \mathbb{N}$ de modo que os p primeiros termos $\tau^k(s^*)$ coincidam com os p primeiros termos de s . Como, porém, os p primeiros elementos de $\tau^k(s^*)$ e de s são os mesmos, decorre da proposição 8.5 que

$$d_{\Sigma_m}(s, \tau^k(s^*)) \leq \frac{m-1}{m \cdot (m+1)^p} < \epsilon.$$

E, sendo $s \in \Sigma_m$ e $\epsilon > 0$ completamente arbitrários, disso concluímos que a órbita de s^* por τ é de fato densa em Σ_m . \square

Definição 8.12 (TRANSITIVIDADE TOPOLÓGICA). Sejam (X, d) um espaço métrico e $f: X \rightarrow X$ uma aplicação. Dizemos que f é **topologicamente transitiva** se, para quaisquer abertos não vazios U e V de (X, d) , existe $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Uma caracterização importante do conceito de transitividade topológica é dada pelo teorema seguinte.

Teorema 8.13. *Seja $f: X \rightarrow X$ uma aplicação contínua em um espaço métrico. Nessas condições, se existe algum $x \in X$ tal que a órbita de x por f é densa em X , então f é topologicamente transitivo.*

Demonstração. Suponhamos que exista algum $x \in X$ tal que a órbita de x por f seja densa em X . Sejam U e V subconjuntos abertos e não vazios de X . Como, por hipótese, a órbita de x por f é densa em X , existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $f^n(x) \in U$, e $f^m(x) \in V$. Se $m = n$, $f^m(x) = f^n(x)$, e, por conseguinte, $U \cap V \neq \emptyset$. Sendo assim, podemos supor, de agora em diante, que $m > n$. Nesse caso, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + k$. Consequentemente, $f^k(f^n(x)) = f^{n+k}(x) = f^m(x)$, e, portanto, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Logo, f é topologicamente transitivo. \square

Observação 8.14. No item 2 da proposição 8.11 provamos que existe um ponto de Σ_m cuja órbita pela aplicação τ é densa em Σ_m , e, portanto, resulta do teorema 8.13 que τ é topologicamente transitiva.

Definição 8.15 (SENSIBILIDADE ÀS CONDIÇÕES INICIAIS). Seja (X, d) um espaço métrico, e seja $f: X \rightarrow X$ uma aplicação. Dizemos que f é **sensível às condições iniciais** se existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $x \in X$ e qualquer $\epsilon > 0$, existem $y \in B_\epsilon^d(x)$ e $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ tais que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$.

Observação 8.16. A definição 8.15 nos diz que as órbitas que começam “próximas”, se “distançam” com o passar do tempo.

Proposição 8.17. *A aplicação shift depende sensivelmente das condições iniciais.*

Demonstração. Seja $\delta := \frac{1}{m+1}$. Dados $s \in \Sigma_m$ e $\epsilon > 0$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{m-1}{m \cdot (m+1)^n} < \epsilon$ e fixemos $t \in \Sigma_m$ de modo que $t_j = s_j$ qualquer que seja $j \in \{1, \dots, n\}$, mas $t_{n+1} \neq s_{n+1}$. Como,

por hipótese, $t_j = s_j$ qualquer que seja $j \in \{1, \dots, n\}$, resulta do item 1 da proposição 8.5 que $d_{\Sigma_m}(s, t) \leq \frac{m-1}{m \cdot (m+1)^n} < \epsilon$. E, uma vez que $t_{n+1} \neq s_{n+1}$, temos também

$$\begin{aligned} d_{\Sigma_m}(\tau^{n+1}(t), \tau^{n+1}(s)) &= d_{\Sigma_m}((t_{n+1}, t_{n+2}, \dots), (s_{n+1}, s_{n+2}, \dots)) \\ &= \underbrace{\frac{|t_{n+1} - s_{n+1}|}{m+1}}_{\geq \frac{1}{m+1}} + \underbrace{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{|t_{(n+1)+i} - s_{(n+1)+i}|}{(m+1)^i}}_{\geq 0} \geq \frac{1}{m+1} = \delta \end{aligned}$$

Decorre, portanto, da arbitrariedade de $s \in \Sigma_m$ e de $\epsilon > 0$ que τ é sensível às condições iniciais. \square

Por fim, estamos prontos para definir quais são as condições suficientes para que uma aplicação seja caótica segundo a definição de Devaney [Dev07].

Definição 8.18 (APLICAÇÃO CAÓTICA). Sejam (X, d) um espaço métrico e $f: X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Nessas condições, dizemos que f é **caótica segundo a definição de Devaney** se:

1. f é topologicamente transitiva;
2. f é sensível às condições iniciais; e
3. o conjunto dos pontos periódicos de f é denso em (X, d) .

Exemplo 8.19. Resulta das proposições 8.17 e 8.11 e da observação 8.14 que a aplicação shift é caótica segundo a definição de Devaney.

8.2 Codificando os fractais

Existe uma classe muito especial de fractais, que cumprem com uma das principais características dos fractais: sua autossimilaridade, no sentido de que se ampliarmos uma parte da figura, reconstituímos a figura original, porém essa ampliação não pode ser feita em qualquer parte da figura, se observarmos com uma lupa podemos ver que algumas parte da figura não apresenta cópias menores de si mesmo, como podemos ver na figura 8.2. Eles são atratores de uma certa classe de sistemas iterados de funções, chamados IFS com condensação.

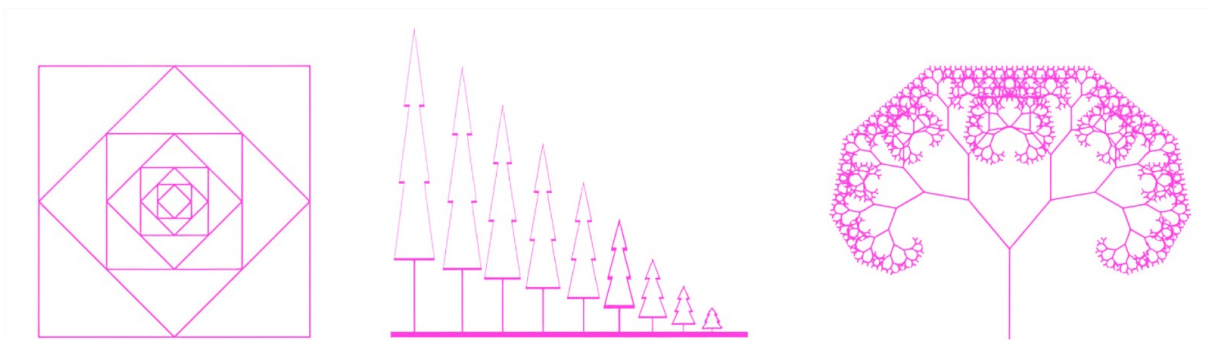


Figura 8.2. Conjuntos de condensação.
Fonte: autora, adaptada de [SA11].

Definição 8.20 (TRANSFORMAÇÃO E CONJUNTO DE CONDENSAÇÃO). Seja (X, d) um espaço métrico, e seja $C \in \mathcal{K}(X)$. Defina uma transformação $S_0: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ por $S_0(B) = C$ para todo $B \in \mathcal{K}(X)$. Então S_0 é chamado de **transformação de condensação** e C é chamado de **conjunto de condensação** associado.

Observação 8.21. Observe que uma transformação de condensação $S_0: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ é uma aplicação constante, portanto é contração com fator de contração igual a zero cujo o ponto fixo é o conjunto de condensação.

Definição 8.22 (IFS DE CONDENSAÇÃO). Seja $\{X; S_1, S_2, \dots, S_m\}$ um IFS com fator de contração $0 \leq s < 1$. Seja $S_0: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ uma **transformação de condensação**. Então $\{X; S_0, S_1, \dots, S_m\}$ é chamado de **IFS com condensação**, com fator de contração igual a s .

Exemplo 8.23. Seja $\{\mathbb{R}^2; S_0, S_1, S_2\}$ em que

$$S_0(F) := \{0\} \times [0, 1], S_1 := \frac{1}{2}ze^{-\frac{i\pi}{4}} + i \text{ e } S_2 := \frac{1}{2}ze^{\frac{i\pi}{4}} + i.$$

Assim, temos que $\mathcal{H}: \mathcal{K}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(F) &:= S_0(F) \cup S_1(F) \cup S_2(F) \\ &= (\{0\} \times [0, 1]) \cup S_1(F) \cup S_2(F). \end{aligned}$$

Tomando $F = (\{0\} \times [0, 1])$, podemos observar na figura 8.3 a sequência

$$K, W(K), W^2(K), \dots, W^n(K), \dots$$

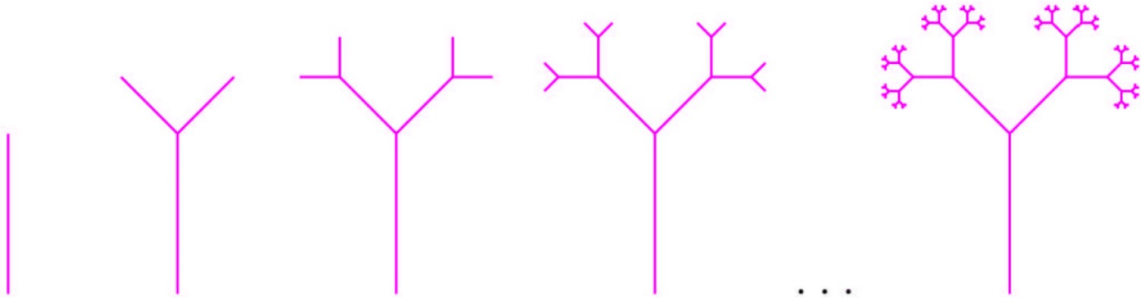


Figura 8.3. Exemplo de IFS de condensação.

Fonte: autora, adaptada de [SA11].

Provaremos a seguir três lemas que serão importantes para demonstrarmos o teorema central desta seção.

Lema 8.24. *Sejam (X, d) um espaço métrico, $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS, e $F \in \mathcal{K}(X)$. Então existe $\tilde{F} \in \mathcal{K}(X)$ tal que $F \subseteq \tilde{F}$, e tal que $S_1, \dots, S_m: \tilde{F} \rightarrow \tilde{F}$. Em outras palavras, $\{\tilde{F}; S_1, \dots, S_m\}$ é um IFS em um espaço compacto.*

Demonstração. Para construir \tilde{F} , vamos considerar o IFS de condensação $\{X; S_0, S_1, \dots, S_m\}$, em que

$$\begin{aligned} S_0: \mathcal{K}(X) &\longrightarrow \mathcal{K}(X). \\ B &\longmapsto F \end{aligned}$$

Pelo teorema 7.10, existe um ponto fixo \tilde{F} da contração

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0: \mathcal{K}(X) &\longrightarrow \mathcal{K}(X) \\ B &\longmapsto S_0(B) \cup \underbrace{S_1(B) \cup \dots \cup S_m(B)}_{=\mathcal{H}(B)} = F \cup \mathcal{H}(B). \end{aligned}$$

Como $\tilde{F} \in \mathcal{K}(X)$, \tilde{F} é compacto. E, como

$$\tilde{F} = \mathcal{H}_0(\tilde{F}) = F \cup \mathcal{H}(\tilde{F}),$$

$F \subseteq \tilde{F}$, e $\mathcal{H}(\tilde{F}) \subseteq \tilde{F}$. Sendo assim, para completarmos a demonstração, basta agora observarmos que

$$\mathcal{H}(\tilde{F}) \subseteq \tilde{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^m S_i(\tilde{F}) \subseteq \tilde{F} \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\}, S_i(\tilde{F}) \subseteq \tilde{F}. \quad \square$$

Lema 8.25. *Seja $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS com fator de contração λ (isto é, $\lambda := \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, em que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, λ_i é o fator de contração de S_i), seja Σ_m o espaço dos códigos associado a esse IFS, seja*

$$\begin{aligned} \phi: \Sigma_m \times \mathbb{N} \times X &\longrightarrow X, \\ (\sigma, n, x) &\longmapsto (S_{\sigma_1} \circ \dots \circ S_{\sigma_n})(x) \end{aligned}$$

seja $F \in \mathcal{K}(X)$, e seja $\tilde{F} \in \mathcal{K}(X)$ como no lema 8.24. Então existe $D \geq 0$ tal que, para todo $\sigma \in \Sigma_m$, quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$ e quaisquer $x_1, x_2 \in \tilde{F}$,

$$d(\phi(\sigma, n, x_1), \phi(\sigma, p, x_2)) \leq D\lambda^{\min\{n, p\}}.$$

Demonstração. Sejam σ, p, n, x_1 e x_2 como no enunciado. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $p \leq n$. Se $p < n$, então

$$\phi(\sigma, n, x_2) = (S_{\sigma_1} \circ \dots \circ S_{\sigma_p} \circ S_{\sigma_{p+1}} \circ \dots \circ S_{\sigma_n})(x_2) = \phi(\sigma, p, x_3),$$

em que $x_3 := (S_{\sigma_{p+1}} \circ \dots \circ S_{\sigma_n})(x_2) \in \tilde{F}$, e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} d(\phi(\sigma, p, x_1), \phi(\sigma, n, x_2)) &= d(\phi(\sigma, p, x_1), \phi(\sigma, p, x_3)) \\ &= d((S_{\sigma_1} \circ \dots \circ S_{\sigma_p})(x_1), (S_{\sigma_1} \circ \dots \circ S_{\sigma_p})(x_3)) \\ &\leq \lambda \cdot d((S_{\sigma_2} \circ \dots \circ S_{\sigma_p})(x_1), (S_{\sigma_2} \circ \dots \circ S_{\sigma_p})(x_3)) \\ &\leq \lambda^2 \cdot d((S_{\sigma_3} \circ \dots \circ S_{\sigma_p})(x_1), (S_{\sigma_3} \circ \dots \circ S_{\sigma_p})(x_3)) \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^p d(x_1, x_3) \\ &\leq \lambda^p D, \end{aligned}$$

em que $D := \text{diam}(\tilde{F})$ (tal D é finito, pois, por hipótese, \tilde{F} é compacto). Se, por outro lado, $p = n$, a demonstração é análoga. \square

Lema 8.26. *O espaço métrico (Σ_m, d_{Σ_m}) é compacto.*

Demonstração. Como $\{1, \dots, m\}$ é finito, é imediato ver que $(\{1, \dots, m\}, \mathcal{P}(\{1, \dots, m\}))$ é compacto. Sendo assim, como $\Sigma_m = \prod_{n \in \mathbb{N}} \{1, \dots, m\}$, resulta do teorema de Tychonoff que Σ_m é compacto em relação à topologia produto — a qual denotaremos por τ_{prod} . Dessa forma, se provarmos que a topologia induzida por τ_{Σ_m} coincide com τ_{prod} , poderemos concluir que (Σ_m, d_{Σ_m}) é um espaço métrico compacto. Para isso, no entanto, é suficiente mostrarmos que, para cada aberto básico não vazio $\prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$ de $(\Sigma_m, \tau_{\text{prod}})$ e cada $\sigma \in \prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta^{d_{\Sigma_m}}(\sigma) \subseteq \prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$, e que, para cada $\alpha \in \Sigma_m$ e cada $r > 0$, existe um aberto básico $\prod_{n \in \mathbb{N}} W_n$ de $(\Sigma_m, \tau_{\text{prod}})$ tal que $\alpha \in \prod_{n \in \mathbb{N}} W_n$, e $\prod_{n \in \mathbb{N}} W_n \subseteq B_r^{d_{\Sigma_m}}(\alpha)$.

Fixemos, inicialmente um aberto básico não vazio $\prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$ de $(\Sigma_m, \tau_{\text{prod}})$ e um ponto σ em $\prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Como, por hipótese, $\prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$ é um aberto básico de $(\Sigma_m, \tau_{\text{prod}})$, resulta da definição de topologia produto que $\mathcal{I} := \{n \in \mathbb{N} : U_i \neq \{1, \dots, m\}\}$ é finito. Seja $n_0 := \max(\mathcal{I})$. Decorre

do lema 8.25 que, se $\omega \in \Sigma_m$ é tal que $d_{\Sigma_m}(\omega, \sigma) < \frac{1}{(m+1)^m}$, então $\omega_i = \sigma_i$ qualquer que seja $i \in \{1, \dots, m\}$. Podemos, pois, concluir que todo $\omega \in \Sigma_m$ tal que $d_{\Sigma_m}(\omega, \sigma) < \frac{1}{(m+1)^m}$ pertence, necessariamente, a $\prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Logo, $B_{\frac{1}{(m+1)^m}}^{d_{\Sigma_m}}(\sigma) \subseteq \prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

Fixemos, agora, $\alpha \in \Sigma_m$ e $r > 0$ de modo arbitrário e tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{m-1}{m \cdot (m+1)^N} < r$. Resulta do item 1 da proposição 8.5 que, se $\omega \in \Sigma_m$ é tal que $\omega_i = \sigma_i$ qualquer que seja i em $\{1, \dots, N\}$, então

$$d_{\Sigma_m}(\omega, \sigma) \leq \frac{m-1}{m \cdot (m+1)^N} < r.$$

Sendo assim, é fácil ver que, se $\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n \in \tau_{\text{prod}}$ é tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$V_n := \begin{cases} \{\alpha_n\}, & \text{se } n \in \{1, \dots, N\} \\ \{1, \dots, m\}, & \text{se } n > N \end{cases},$$

então $\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n \subseteq B_r^{d_{\Sigma_m}}(\alpha)$ — pois, para todo $(\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Sigma_m$,

$$(\omega_1, \omega_2, \dots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} V_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \omega_n \in V_n \Rightarrow \forall n \in \{1, \dots, N\}, \omega_n = \alpha_n \Rightarrow d_{\Sigma_m}(\omega, \alpha) < r. \quad \square$$

Teorema 8.27. *Sejam $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS, A seu atrator e Σ_m o espaço dos códigos associado a esse IFS, e, para cada $\sigma \in \Sigma_m$, cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $x \in X$, seja $\phi(\sigma, n, x)$ tal como no lema 8.25. Nessas condições, para cada $\sigma \in \Sigma_m$ e cada $x \in X$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, x)$ existe, pertence a A e é independente de x . Além disso, a aplicação*

$$\begin{aligned} \varphi: \Sigma_m &\longrightarrow A \\ \sigma &\longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, x) \end{aligned}$$

é contínua e sobrejetora.

Demonstração. Seja $\sigma \in \Sigma_m$, seja $x \in X$, e seja $\tilde{F} \in \mathcal{K}(X)$ tal que $x \in \tilde{F}$, e tal que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $S_i(\tilde{F}) \subseteq \tilde{F}$ (o lema 8.24 nos garante que tal \tilde{F} certamente existe). Nessas condições, resulta do teorema 7.10 que $\mathcal{H}^n(\{x\}) \xrightarrow{d_{\mathcal{H}}} A$, a partir do que concluímos, em particular, que $(\mathcal{H}^n(\{x\}))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{K}(X), d_{\mathcal{H}})$. Sendo assim, como, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi(\sigma, n, x) := (S_{\sigma_1} \circ \dots \circ S_{\sigma_n})(x) \in \bigcup_{i_1, \dots, i_n=1}^m (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n})(\{x\}) = \mathcal{H}^n(\{x\}),$$

decorre do teorema 7.6 que, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, x)$ existir, então ele pertencerá necessariamente a A . Vamos, agora, mostrar que esse limite de fato existe. Para isso, no entanto, basta mostrarmos que $(\phi(\sigma, n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em (X, d) , uma vez que, por hipótese, (X, d) é completo. O fato de que $(\phi(\sigma, n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em (X, d) , porém, é uma consequência direta do lema 8.25. Com efeito, resulta desse lema que existe $D \geq 0$ tal que, para quaisquer p e n em \mathbb{N} e quaisquer x_1 e x_2 em \tilde{F} , tem-se

$$d(\phi(\sigma, n, x_1), \phi(\sigma, p, x_2)) \leq D\lambda^{\min\{n, p\}},$$

em vista do que podemos concluir que, se, para cada $\epsilon > 0$, tomarmos $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $D\lambda^{N_0} < \epsilon$, teremos

$$d(\phi(\sigma, n, x), \phi(\sigma, p, x)) \leq D\lambda^{\min\{n, p\}} \leq D\lambda^{N_0} < \epsilon$$

quaisquer que sejam p e n em \mathbb{N} tais que $p, n > N_0$.

Por fim, precisamos verificar que, se y é outro ponto qualquer de X , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, y).$$

Para ver isso, dado $y \in X$, consideremos, inicialmente, o conjunto $F_y := \{x, y\}$ e notemos que, como F_y é compacto, resulta do lema 8.25 que podemos fixar $D_y \geq 0$ de modo que

$$d((\phi(\sigma, n, x), \phi(\sigma, n, y))) \leq D_y \lambda^n$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, se $L := \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, x)$, e se $M := \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, y)$, então

$$d(L, M) = d\left(\lim_{n \rightarrow \infty} ((\phi(\sigma, n, x), \phi(\sigma, n, y)))\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{d(\phi(\sigma, n, x), \phi(\sigma, n, y))}_{\leq D_y \lambda^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} D_y \lambda^n = 0,$$

e, portanto, $L = M$.

A seguir, mostraremos que φ é contínua em σ . Para isso, fixemos, inicialmente, $\epsilon > 0$ de modo arbitrário e tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^n \cdot D < \frac{\epsilon}{2}$, em que λ é o fator de contração do IFS. Decorre do item 2 da proposição 8.5 que, se $\omega \in \Sigma_m$ é tal que

$$d_{\Sigma_m}(\sigma, \omega) < \frac{1}{(m+1)^n},$$

então $\omega_i = \sigma_i$ qualquer que seja $i \in \{1, \dots, n\}$. Como, porém, $F \subseteq \tilde{F}$, e, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $S_i(\tilde{F}) \subseteq \tilde{F}$, disso resulta, por sua vez, que, se $\omega \in \Sigma_m$ é tal que $d_{\Sigma_m}(\sigma, \omega) < \frac{1}{(m+1)^n}$, e se $p \in \mathbb{N}$ é tal que $p > n$, então

$$\begin{aligned} d(\phi(\sigma, p, x), \phi(\omega, p, x)) &= d((S_{\sigma_1} \circ \dots \circ S_{\sigma_m})(x), (S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_m})(x)) \\ &= d((S_{\sigma_1} \circ \dots \circ S_{\sigma_n} \circ \dots \circ S_{\sigma_p})(x), \underbrace{(S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_n} \circ \dots \circ S_{\omega_p})(x)}_{=S_{\sigma_1} \circ \dots \circ S_{\sigma_n}}) \\ &= d\left(\phi(\sigma, n, \underbrace{(S_{\sigma_{n+1}} \circ \dots \circ S_{\sigma_p})(x)}_{=:x_1 \in \tilde{F}}), \phi(\sigma, n, \underbrace{(S_{\omega_{n+1}} \circ \dots \circ S_{\omega_p})(x)}_{=:x_2 \in \tilde{F}})\right) \\ &= d(\phi(\sigma, n, x_1), \phi(\sigma, n, x_2)) \stackrel{8.25}{\leq} D \lambda^n < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Sendo assim, podemos concluir, em vista da continuidade da métrica d , que, para todo $\omega \in \Sigma_m$,

$$\begin{aligned} d_{\Sigma_m}(\sigma, \omega) < \frac{1}{(m+1)^n} &\Rightarrow d(\varphi(\sigma), \varphi(\omega)) = d\left(\lim_{p \rightarrow \infty} (\phi(\sigma, p, x), \phi(\omega, p, x))\right) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} d(\phi(\sigma, p, x), \phi(\omega, p, x)) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

E, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, isso nos mostra que φ é de fato contínua em σ .

Precisamos, ainda, provar que φ é sobrejetora. Para isso, fixemos $a \in A$ de modo arbitrário e vamos mostrar que $a \in \text{Im}(\varphi)$. Como

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^n(\{x\}),$$

resulta do teorema 7.6 que existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x_n \xrightarrow{d} a$, e tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathcal{H}^n(\{x\})$. Como, por hipótese, $x_n \in \mathcal{H}^n(\{x\})$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos fixar $(i_1^{(n)}, \dots, i_n^{(n)}) \in \{1, \dots, m\}^n$ de modo que

$$x_n = (S_{i_1^{(n)}} \circ \dots \circ S_{i_n^{(n)}})(x).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, fixemos, agora, uma seqüência $\omega^{(n)} := (\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \dots) \in \Sigma_m$ de modo que $\omega_j^{(n)} = i_j^{(n)}$ qualquer que seja $j \in \{1, \dots, n\}$ e notemos que

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{i_1^{(n)}} \circ \dots \circ S_{i_n^{(n)}})(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{\omega_1^{(n)}} \circ \dots \circ S_{\omega_n^{(n)}})(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\omega^{(n)}, n, x).$$

Como (Σ_m, d_{Σ_m}) é compacto (veja o lema 8.26), a seqüência $(\omega^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ possui, necessariamente, uma subsequência convergente $(\omega^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$. Seja $\omega := \lim_{k \rightarrow \infty} \omega^{(n_k)}$, e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja

$$\alpha(k) := \sup\{\ell \in \mathbb{N} : \forall j \in \{1, \dots, \ell\}, \omega_j^{(n_k)} = \omega_j\} \in [0, \infty].$$

É fácil ver que $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(k) = \infty$: com efeito, resulta do item 2 da proposição 8.5 e do fato de que $\omega^{(n_k)} \xrightarrow{d} \omega$ que, para cada $N \in \mathbb{N}$, podemos fixar $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$k > k_0 \Rightarrow d_{\Sigma_m}(\omega^{(n_k)}, \omega) < \frac{1}{(m+1)^N} \stackrel{8.5}{\Rightarrow} \forall j \in \{1, \dots, N\}, \omega_j^{(n_k)} = \omega_j \Rightarrow \alpha(k) \geq N.$$

Vamos mostrar, a seguir, que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$d(\phi(\omega, n_k, x), \phi(\omega^{(n_k)}, n_k, x)) \leq D\lambda^{\alpha(k)}. \quad (8.1)$$

Para tanto, inicialmente fixemos $k \in \mathbb{N}$ de modo arbitrário, e, em seguida, observemos que:

- se $\alpha(k) < n_k$, então, como

$$\begin{aligned} \phi(\omega^{(n_k)}, n_k, x) &= (S_{\omega_1^{(n_k)}} \circ \dots \circ S_{\omega_{n_k}^{(n_k)}})(x) \\ &= \underbrace{(S_{\omega_1^{(n_k)}} \circ \dots \circ S_{\omega_{\alpha(k)}^{(n_k)}})}_{= S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_{\alpha(k)}}} \left(\underbrace{(S_{\omega_{\alpha(k)+1}^{(n_k)}} \circ \dots \circ S_{\omega_{n_k}^{(n_k)}})(x)}_{=: x' \in \tilde{F}} \right) \\ &= (S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_{\alpha(k)}})(x') \\ &= \phi(\omega, \alpha(k), x'), \end{aligned}$$

decorre do lema 8.25 que

$$\begin{aligned} d(\phi(\omega, n_k, x), \phi(\omega^{(n_k)}, n_k, x)) &= d(\phi(\omega, n_k, x), \phi(\omega, \alpha(k), x')) \\ &\stackrel{8.25}{\leq} D\lambda^{\min\{\alpha(k), n_k\}} = D\lambda^{\alpha(k)}; \end{aligned}$$

- se, por outro lado, $\alpha(k) \geq n_k$, então $\omega_j^{(n_k)} = \omega_j$ qualquer que seja $j \in \{1, \dots, n_k\}$, e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} d(\phi(\omega, n_k, x), \phi(\omega^{(n_k)}, n_k, x)) &= d(\phi(\omega, n_k, x), (S_{\omega_1^{(n_k)}} \circ \dots \circ S_{\omega_{n_k}^{(n_k)}})(x)) \\ &= d(\phi(\omega, n_k, x), (S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_{n_k}})(x)) \\ &= d(\phi(\omega, n_k, x), \phi(\omega, n_k, x)) = 0 \leq D\lambda^{\alpha(k)}. \end{aligned}$$

Por fim, notemos que, como $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(k) = \infty$, e como a desigualdade 8.1 se verifica qualquer que

seja $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(\varphi(\omega), a) &= d\left(\lim_{k \rightarrow \infty} (\phi(\omega, n_k, x), \phi(\omega^{(n_k)}, n_k, x))\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{d(\phi(\omega, n_k, x), \phi(\omega^{(n_k)}, n_k, x))}_{\leq D\lambda^{\alpha(k)}} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} D\lambda^{\alpha(k)} = 0, \end{aligned}$$

e, portanto, $a = \varphi(\omega)$ (o que, por sua vez, permite-nos concluir que a de fato pertence a $\text{Im}(\varphi)$). \square

Provaremos, a seguir, dois lemas que serão essenciais para a demonstração do teorema 8.32.

Lema 8.28. *Sejam A o atrator de um IFS $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ e $\varphi: \Sigma_m \rightarrow A$ a aplicação de endereçamento associada a esse IFS. Então*

$$\varphi((\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots)) = S_{\sigma_1}(\varphi(\sigma_2, \sigma_3, \dots))$$

qualquer que seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots) \in \Sigma_m$.

Demonstração. Com efeito, resulta do teorema 8.27 e da continuidade das contrações do IFS que, para todo $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots) \in \Sigma_m$ e todo $x \in X$,

$$\begin{aligned} \varphi((\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{\sigma_1} \circ \dots \circ S_{\sigma_n})(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\sigma_1}((S_{\sigma_2} \circ \dots \circ S_{\sigma_n})(x)) \\ &= S_{\sigma_1}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{\sigma_2} \circ \dots \circ S_{\sigma_n})(x)\right) \\ &= S_{\sigma_1}(\varphi(\sigma_2, \sigma_3, \dots)). \end{aligned} \quad \square$$

Lema 8.29. *Seja $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS. Nessas condições, para todo $(i_1, i_2, \dots) \in \Sigma_m$ e todo $k \in \mathbb{N}$, $x_{i_1 i_2 \dots} = (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(x_{i_{k+1} i_{k+2} \dots})$.*

Demonstração. Dado $(i_1, i_2, \dots) \in \Sigma_m$, resulta do lema 8.28 que

$$x_{i_1 i_2 \dots} = \varphi(i_1, i_2, \dots) \stackrel{8.28}{=} S_{i_1}(\varphi(i_2, i_3, \dots)) = S_{i_1}(x_{i_2 i_3 \dots}).$$

Além disso, é fácil ver que, se $x_{i_1 i_2 \dots} = (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(x_{i_{k+1} i_{k+2} \dots})$ para certo $k \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned} x_{i_1 i_2 \dots} &= (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(x_{i_{k+1} i_{k+2} \dots}) \\ &= (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(\varphi(i_{k+1}, i_{k+2}, \dots)) \\ &\stackrel{8.28}{=} (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})\left(S_{i_{k+1}}(\varphi(i_{k+2}, i_{k+3}, \dots))\right) \\ &= (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_{k+1}})(x_{i_{k+2} i_{k+3} \dots}). \end{aligned}$$

Logo, decorre do princípio da indução que $x_{i_1 i_2 \dots} = (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(x_{i_{k+1} i_{k+2} \dots})$ qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$. \square

Definição 8.30 (ENDEREÇO DE UM PONTO DO ATRATOR DE UM IFS). *Sejam $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS, A seu atrator, Σ_m o espaço dos códigos associado a esse IFS, e $\varphi: \Sigma_m \rightarrow A$ a aplicação construída no teorema 8.27. Dado $a \in A$, chamaremos de **endereço** de a a qualquer elemento do conjunto*

$$\varphi^{-1}(a) := \{x \in \Sigma_m : \varphi(x) = a\}.$$

O conjunto $\varphi^{-1}(a)$ será chamado de **conjunto de endereços** de $a \in A$, e a aplicação φ será chamada de **aplicação de endereçamento** do atrator do IFS. Dados $a \in A$ e $(i_1, i_2, \dots) \in \Sigma_m$, escreveremos $a = x_{i_1 i_2 \dots}$ para indicar que (i_1, i_2, \dots) é um endereço de a .

Exemplo 8.31. Consideremos o IFS $\{\mathbb{R}; S_1, S_2\}$ cujo atrator é $C_{\frac{1}{3}}$. A aplicação de endereçamento de $C_{\frac{1}{3}}$ é

$$\varphi: \Sigma_2 \rightarrow C_{\frac{1}{3}},$$

em que $\Sigma_2 := \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$. Vamos calcular, por exemplo, $\varphi(1, 2, 2, 2, 2, \dots)$ (denotaremos $(1, 2, 2, 2, 2, \dots)$ por $1\bar{2}$). Temos:

$$\begin{aligned} \varphi(1\bar{2}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_1 \circ S_2 \circ S_2 \circ \dots \circ S_2)(1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_1(1) \\ &= S_1(1) = \frac{1}{3} \in C_{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Portanto, $1\bar{2}$ é o endereço de $\frac{1}{3}$, como podemos observar na figura 8.4.

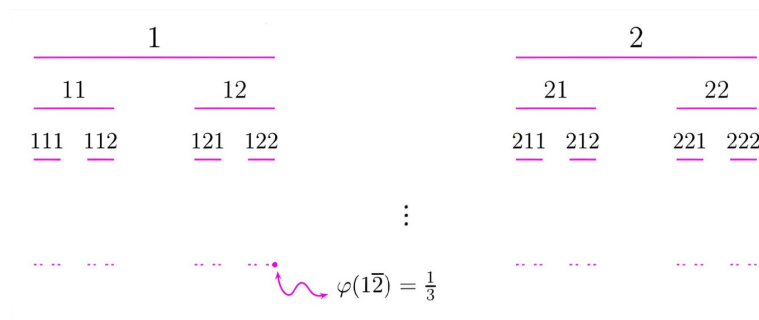


Figura 8.4. Aplicação de endereçamento de $C_{\frac{1}{3}}$.

Fonte: autora, adaptada de [SA11].

Teorema 8.32. Seja $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS e seja F seu atrator. Nessas condições, para todo $(i_1, i_2, \dots) \in \Sigma_m$, e todo compacto não vazio $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $S_i(E) \subseteq E$, qualquer que seja $i \in \{1, \dots, m\}$, tem-se

$$\{x_{i_1 i_2 \dots}\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(E).$$

Demonstração. Seja E um compacto não vazio tal que, para cada $i = 1, \dots, m$, $S_i(E) \subseteq E$, e seja $(i_1, i_2, \dots) \in \Sigma_m$. Resulta do lema 8.29 e do teorema 7.14 que, para cada $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$x_{i_1 i_2 \dots} \stackrel{8.29}{=} (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(\underbrace{x_{i_{k+1} i_{k+2} \dots}}_{\in F \subseteq E}) \in (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(E).$$

Consequentemente, $x_{i_1 i_2 \dots} \in \bigcap_{k=0}^{\infty} (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(E)$. A seguir, notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $(x, y) \in E \times E$, tem-se

$$d\left((S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(x), (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(y)\right) \leq \lambda^k \cdot d(x, y) \leq \lambda^k \cdot \text{diam}(E),$$

em que λ é o fator de contração associado ao IFS. Sendo assim, podemos concluir que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\text{diam}\left((S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(E)\right) \leq \lambda^k \cdot \text{diam}(E)$. E, como $\lambda < 1$, disso resulta, por sua vez, que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{diam}\left((S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(E)\right) = 0.$$

— a partir do que concluimos, por fim, que $\bigcap_{k=0}^{\infty} (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(E)$, possui, no máximo, um

elemento. Logo, como $x_{i_1 i_2 \dots} \in \bigcap_{k=0}^{\infty} (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(E)$, deve se ter, necessariamente,

$$\{x_{i_1 i_2 \dots}\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(E). \quad \square$$

Definição 8.33 (IFS TOTALMENTE DESCONEXO). O IFS é **totalmente desconexo** se cada ponto de seu atrator possui um único endereço, isto é, se a aplicação φ da definição 8.30 é injetora.

A seguir, mostraremos que aplicação φ é um homeomorfismo. Esse fato será essencial para provarmos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 8.34. *Sejam $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS totalmente desconexo, A seu atrator, Σ_m o espaço dos códigos associado a esse IFS, e $\varphi: \Sigma_m \rightarrow A$ a aplicação de endereçamento de A . Nessas condições, φ é um homeomorfismo.*

Demonstração. Resulta do 8.27 que φ é contínua e sobrejetora. Como, porém, o IFS é totalmente desconexo, φ é também injetora e, portanto, possui uma inversa. Vamos mostrar, a seguir, que φ^{-1} é contínua. Para isso, é suficiente provarmos que, para todo fechado $F \subseteq \Sigma_m$, $(\varphi^{-1})^{-1}(F)$ é fechado em A . É fácil ver, no entanto, que $(\varphi^{-1})^{-1}(F) = \varphi(F)$ qualquer que seja $F \subseteq \Sigma_m$, de modo que basta mostrarmos que, para todo fechado F de Σ_m , $\varphi(F)$ é fechado em A .

Seja F um fechado de Σ_m . Como F é fechado em Σ_m , e Σ_m é compacto, F também é compacto. Resulta, portanto, da continuidade de φ que $\varphi(F)$ é compacto em A , a partir do que concluímos, em particular, que $\varphi(F)$ é fechado em A . E, sendo F um fechado arbitrário de Σ_m disso resulta, por fim, que φ^{-1} é contínua. \square

Observação 8.35. Uma demonstração alternativa do fato de que φ^{-1} é contínua pode ser encontrada no apêndice A.5.

8.3 Caos nos fractais

Nesta seção, utilizaremos os resultados das seções anteriores para provar o teorema central deste capítulo, o qual afirma que a transformação de mudança S associada a um IFS totalmente desconexo é caótica segundo a definição de Devaney.

Observação 8.36. Seja $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS, e seja A seu atrator. Como

$$A = \bigcup_{i=1}^m S_i(A),$$

$S_i(A) \subseteq A$ qualquer que seja $i \in \{1, \dots, m\}$, e, portanto, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, podemos pensar na restrição de S_i a A como sendo uma aplicação de A em A .

Lema 8.37. *Seja $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS, e seja A seu atrator. Nessas condições, se esse IFS for totalmente desconexo, então, para cada $n \in \{1, \dots, m\}$, a transformação $S_n: A \rightarrow A$ será injetora.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que o IFS $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ seja totalmente desconexo, e que, no entanto, exista $n \in \{1, \dots, m\}$ tal que $S_n: A \rightarrow A$ não seja injetora. Como, por hipótese, $S_n: A \rightarrow A$ não é injetora, podemos fixar $(i_1, i_2, \dots), (j_1, j_2, \dots) \in \Sigma_m$ de modo que $x_{i_1 i_2 \dots} \neq x_{j_1 j_2 \dots}$, e $S_n(x_{i_1 i_2 \dots}) = S_n(x_{j_1 j_2 \dots})$. Nesse caso, porém, teríamos

$$x_{ni_1 i_2 \dots} \stackrel{8.29}{=} S_n(x_{i_1 i_2 \dots}) = S_n(x_{j_1 j_2 \dots}) \stackrel{8.29}{=} x_{nj_1 j_2 \dots},$$

e, conseqüentemente, o ponto $a := x_{ni_1 i_2 \dots}$ possuiria dois endereços distintos — o que, por sua vez, seria um absurdo, pois o IFS é totalmente desconexo. \square

Lema 8.38. *Seja $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS totalmente desconexo, e seja A seu atrator. Nessas condições, $S_i(A) \cap S_j(A) = \emptyset$ quaisquer que sejam i e j em $\{1, \dots, m\}$ tais que $i \neq j$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existam $a \in A$ e $n, q \in \{1, \dots, m\}$ tais que $n \neq q$, e tais que $a \in S_n(A) \cap S_q(A)$. Como, por hipótese, $a \in S_n(A) \cap S_q(A)$, podemos fixar (i_1, i_2, \dots) e (j_1, j_2, \dots) em Σ_m de modo que $a = S_n(x_{i_1 i_2 \dots})$, e $a = S_q(x_{j_1 j_2 \dots})$. Nesse caso, porém, é fácil ver que

$$x_{ni_1 i_2 \dots} \stackrel{8.29}{=} S_n(x_{i_1 i_2 \dots}) = a = S_q(x_{j_1 j_2 \dots}) \stackrel{8.29}{=} x_{qj_1 j_2 \dots},$$

e, como $n \neq q$, disso resulta que (n, i_1, i_2, \dots) e (q, j_1, j_2, \dots) são endereços distintos de a — o que, por sua vez, é um absurdo, já que, por hipótese, o IFS é totalmente desconexo. \square

Teorema 8.39. *Seja $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS, e seja A seu atrator. Nessas condições, o IFS $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ é totalmente desconexo se, e somente se, as transformações $S_1, \dots, S_m: A \rightarrow A$ são injetoras, e, além disso, $S_i(A) \cap S_j(A) = \emptyset$ quaisquer que sejam i e j em $\{1, \dots, m\}$ tais que $i \neq j$.*

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que o IFS seja totalmente desconexo. Nesse caso, resulta dos lemas 8.37 e 8.38 que, para cada $n \in \{1, \dots, m\}$, a aplicação $S_n: A \rightarrow A$ é injetora, e que $S_i(A) \cap S_j(A) = \emptyset$ quaisquer que sejam i e j em $\{1, \dots, m\}$ tais que $i \neq j$.

Suponhamos, agora, que $S_1, \dots, S_m: A \rightarrow A$ sejam injetoras, que $S_i(A) \cap S_j(A) = \emptyset$ quaisquer que sejam i e j em $\{1, \dots, m\}$ tais que $i \neq j$, e que, no entanto, exista um ponto $a \in A$ com mais de um endereço. Nesse caso, podemos fixar (i_1, i_2, \dots) e (j_1, j_2, \dots) em Σ_m de modo que (i_1, i_2, \dots) e (j_1, j_2, \dots) sejam endereços distintos de a . Como (i_1, i_2, \dots) é um endereço de a ,

$$a = x_{i_1 i_2 \dots} \stackrel{8.29}{=} S_{i_1}(x_{i_2 i_3 \dots}) \in S_{i_1}(A).$$

Da mesma forma, como (j_1, j_2, \dots) é um endereço de a ,

$$a = x_{j_1 j_2 \dots} \stackrel{8.29}{=} S_{j_1}(x_{j_2 j_3 \dots}) \in S_{j_1}(A).$$

Logo, $a \in S_{i_1}(A) \cap S_{j_1}(A)$, e, portanto, $S_{i_1}(A) \cap S_{j_1}(A) \neq \emptyset$. Resulta, pois, da hipótese de que $S_n(A) \cap S_q(A) = \emptyset$ quaisquer que sejam n e q em $\{1, \dots, m\}$ tais que $n \neq q$ que $i_1 = j_1$. Apesar disso, como $(i_1, i_2, \dots) \neq (j_1, j_2, \dots)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $i_k \neq j_k$. Consequentemente, $\{k \in \mathbb{N} : i_k \neq j_k\}$ é não vazio e, portanto, possui mínimo. Seja $\ell := \min\{k \in \mathbb{N} : i_k \neq j_k\}$. Como $i_1 = j_1$, é claro que $\ell > 1$. Além disso, é claro também que

$$(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_{\ell-1}})(x_{i_\ell i_{\ell+1} \dots}) \stackrel{8.29}{=} x_{i_1 i_2 \dots} = a = x_{j_1 j_2 \dots} \stackrel{8.29}{=} (S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_{\ell-1}})(x_{j_\ell j_{\ell+1} \dots})$$

— a partir do que concluímos, em vista da hipótese de que $S_1, \dots, S_m: A \rightarrow A$ são injetoras, que $x_{i_\ell i_{\ell+1} \dots} = x_{j_\ell j_{\ell+1} \dots}$. Sendo assim, como

$$x_{i_\ell i_{\ell+1} \dots} \stackrel{8.29}{=} S_{i_\ell}(x_{i_{\ell+1} \dots}) \in S_{i_\ell}(A),$$

e

$$x_{j_\ell j_{\ell+1} \dots} \stackrel{8.29}{=} S_{j_\ell}(x_{j_{\ell+1} \dots}) \in S_{j_\ell}(A),$$

resulta do fato de que $x_{i_\ell i_{\ell+1} \dots} = x_{j_\ell j_{\ell+1} \dots}$ que $S_{i_\ell}(A) \cap S_{j_\ell}(A)$ é não vazia — o que é um absurdo, pois $i_\ell \neq j_\ell$. Portanto, se $S_n: A \rightarrow A$ é injetora qualquer que seja $n \in \{1, \dots, m\}$, e se $S_i(A) \cap S_j(A) = \emptyset$ quaisquer que sejam i e j em $\{1, \dots, m\}$ tais que $i \neq j$, então, necessariamente, cada ponto de A possui um único endereço, e, por conseguinte, o IFS é totalmente desconexo. \square

Definição 8.40 (TRANSFORMAÇÃO DE MUDANÇA ASSOCIADA A UM IFS). Seja $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS totalmente desconexo, e seja A seu atrator. A **transformação de mudança** associada a

esse IFS é, por definição, a aplicação $S: A \rightarrow A$ tal que, para cada $a \in A$,

$$S(a) = S_i^{-1}(a),$$

em que i é o único $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $a \in S_j(A)$, e em que S_i é vista como uma transformação em A .

Definição 8.41 (APLICAÇÕES TOPOLOGICAMENTE CONJUGADAS). Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) dois espaços métricos, e sejam $f: X \rightarrow X$ e $g: Y \rightarrow Y$ duas aplicações quaisquer. Nessas condições, dizemos que f e g são **topologicamente conjugadas** se existe um homeomorfismo $h: X \rightarrow Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$.

Vamos provar, a seguir, um resultado clássico na área de sistemas dinâmicos. Mais especificamente, mostraremos que, se duas aplicações são topologicamente conjugadas, e se uma delas é caótica, então a outra também é. Para isso vamos, inicialmente, provar dois lemas que serão essenciais para a demonstração desse resultado.

Lema 8.42. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos, e sejam $f: X \rightarrow X$ e $g: Y \rightarrow Y$ aplicações topologicamente conjugadas pelo homeomorfismo $h: X \rightarrow Y$. Nessas condições, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$h \circ f^n = g^n \circ h.$$

Demonstração. Como f e g são topologicamente conjugadas, tem-se, evidentemente,

$$h \circ f^1 = h \circ f = g \circ h = g^1 \circ h.$$

Por sua vez, é claro também que, se $h \circ f^n = g^n \circ h$ para certo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned} h \circ f^{n+1} &= h \circ (f^n \circ f) = (h \circ f^n) \circ f = (g^n \circ h) \circ f = g^n \circ (h \circ f) \\ &= g^n \circ (g \circ h) = (g^n \circ g) \circ h = g^{n+1} \circ h. \end{aligned}$$

Sendo assim, resulta do princípio da indução que $h \circ f^n = g^n \circ h$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. \square

Lema 8.43. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos, e sejam $f: X \rightarrow X$ e $g: Y \rightarrow Y$ duas aplicações quaisquer. Nessas condições, se f e g são topologicamente conjugadas por um homeomorfismo $h: X \rightarrow Y$, então g e f são topologicamente conjugadas por $h^{-1}: Y \rightarrow X$.*

Demonstração. Com efeito, se f e g são topologicamente conjugadas por um homeomorfismo $h: X \rightarrow Y$, então

$$\begin{aligned} h^{-1} \circ g &= (h^{-1} \circ g) \circ (h \circ h^{-1}) = h^{-1} \circ (g \circ h) \circ h^{-1} = h^{-1} \circ (h \circ f) \circ h^{-1} \\ &= (h^{-1} \circ h) \circ (f \circ h^{-1}) = f \circ h^{-1}, \end{aligned}$$

e, portanto, g e f são topologicamente conjugadas por h^{-1} . \square

Teorema 8.44. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos compactos, e sejam $f: X \rightarrow X$ e $g: Y \rightarrow Y$ aplicações topologicamente conjugadas pelo homeomorfismo $h: X \rightarrow Y$. Nessas condições, f é caótica em (X, d_X) se, e somente se, g é caótica em (Y, d_Y) .*

Demonstração. Antes de qualquer outra coisa, notemos que, em vista do lema 8.43, basta mostrarmos que, se f é caótica em (X, d_X) , então g é caótica em (Y, d_Y) . Dividiremos a demonstração dessa afirmação em três partes:

- Inicialmente, vamos mostrar que, se $\text{Per}(f)$ é denso em (X, d_X) , então $\text{Per}(g)$ é denso em (Y, d_Y) . Para isso, suponhamos que $\text{Per}(f)$ seja denso em (X, d_X) e consideremos um aberto não vazio U de (Y, d_Y) . Como, por hipótese, h é um homeomorfismo, $h^{-1}(U)$ é um aberto não vazio de (X, d_X) . Sendo assim, resulta do fato de que $\text{Per}(f)$ é denso em (X, d_X) que existe

um ponto periódico x_0 de f em $h^{-1}(U)$. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(x_0) = x_0$, e seja $y_0 := h(x_0)$. Como $x_0 \in h^{-1}(U)$, é imediato ver que y_0 é um ponto de U . Além disso, é claro também que

$$g^N(y_0) = g^N(h(x_0)) \stackrel{8.42}{=} h(f^N(x_0)) = h(x_0) = y_0.$$

Logo, y_0 é um ponto periódico de g que pertence a U . E, como U é um aberto não vazio qualquer de (Y, d_Y) , disso concluímos que todo aberto não vazio de (Y, d_Y) intersecta $\text{Per}(g)$, e, portanto, que $\text{Per}(g)$ é denso em (Y, d_Y) .

- Suponhamos, agora, que aplicação f seja topologicamente transitiva em (X, d_X) , e vamos mostrar que, nesse caso, g é topologicamente transitiva em (Y, d_Y) . Sejam U e W dois abertos não vazios de (Y, d_Y) . Como h é um homeomorfismo, $h^{-1}(U)$ e $h^{-1}(W)$ são abertos não vazios de (X, d_X) . Resulta, pois, da transitividade topológica de f em (X, d_X) que podemos fixar $x_0 \in h^{-1}(U)$ e $N \in \mathbb{N}$ de modo que $f^N(x_0) \in h^{-1}(W)$. É fácil ver, no entanto, que $x_0 \in h^{-1}(U) \Rightarrow h(x_0) \in U$, e que

$$f^N(x_0) \in h^{-1}(W) \Rightarrow g^N(h(x_0)) \stackrel{8.42}{=} h(f^N(x_0)) \in W,$$

de modo que podemos concluir que $g^N(U) \cap W \neq \emptyset$. E, como os abertos não vazios U e W de (Y, d_Y) são quaisquer, disso resulta que g é topologicamente transitiva em (Y, d_Y) .

- Por fim, vamos provar que, se f é sensível às condições iniciais em (X, d_X) , então g é sensível às condições iniciais em (Y, d_Y) . Para tanto, suponhamos que f seja sensível às condições iniciais em (X, d_X) e fixemos uma constante de sensibilidade $\epsilon_0 > 0$ para f . Como, por hipótese, (Y, d_Y) é compacto, e $h^{-1}: Y \rightarrow X$ é contínua, h^{-1} é, também, uniformemente contínua. Consequentemente, podemos fixar $\delta_0 > 0$ de modo que, para quaisquer y_1 e y_2 em Y tais que $d_Y(y_1, y_2) < \delta_0$, tenhamos $d_X(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2)) < \epsilon_0$. Mostraremos que δ_0 é uma constante de sensibilidade para g . Para isso, fixemos, inicialmente, $y_0 \in Y$ e $\gamma > 0$ de modo arbitrário e, em seguida, consideremos o ponto $x_0 := h^{-1}(y_0) \in h^{-1}(B_\gamma(y_0))$. Como h é contínua, e $B_\gamma(y_0)$ é aberto em (Y, d_Y) , $h^{-1}(B_\gamma(y_0))$ é aberto em (X, d_X) . Resulta, portanto, do fato de que f é sensível às condições iniciais em (X, d_X) que podemos fixar $x_1 \in h^{-1}(B_\gamma(y_0))$ e $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$d_X(f^N(x_0), f^N(x_1)) \geq \epsilon_0.$$

Seja $y_1 := h(x_1)$. É imediato ver que $x_1 \in h^{-1}(B_\gamma(y_0)) \Rightarrow y_1 \in B_\gamma(y_0)$. Além disso, como

$$\begin{aligned} d_X\left(h^{-1}(g^N(y_0)), h^{-1}(g^N(y_1))\right) &= d_X\left(h^{-1}\left(g^N(h(x_0))\right), h^{-1}\left(g^N(h(x_1))\right)\right) \\ &= d_X(f^N(x_0), f^N(x_1)) \geq \epsilon_0, \end{aligned}$$

é claro também que $d_Y(g^N(y_0), g^N(y_1)) \geq \delta_0$ (pois, se $d_Y(g^N(y_0), g^N(y_1)) < \delta_0$, teríamos, necessariamente, $d_X(h^{-1}(g^N(y_0)), h^{-1}(g^N(y_1))) < \epsilon_0$). E, como $y_0 \in Y$ e $\gamma > 0$ são completamente arbitrários, isso completa a prova de que δ_0 é, de fato, uma constante de sensibilidade para g — a partir do que concluímos, por fim, que g é sensível às condições iniciais em (Y, d_Y) . \square

Teorema 8.45. *Sejam $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS totalmente desconexo e A seu atrator, e seja S a transformação de mudança associada a esse IFS. Sejam também Σ_m o espaço de códigos associado ao IFS e $\tau: \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$ tal que $\sigma(i_1, i_2, i_3, \dots) = (i_2, i_3, i_4, \dots)$ qualquer que seja $(i_1, i_2, i_3, \dots) \in \Sigma_m$. Nessas condições, S e σ são topologicamente conjugadas.*

Demonstração. De fato, o homeomorfismo que torna a S e τ conjugadas é a aplicação de en-

dereçamento φ , construída no teorema 8.27. Com efeito, para todo $(i_1, i_2, \dots) \in \Sigma_m$, tem-se

$$\begin{aligned} (S \circ \varphi)(i_1, i_2, \dots) &= S(\varphi(i_1, i_2, \dots)) \stackrel{8.28}{=} S\left(S_{i_1}(\varphi(i_2, i_3, \dots))\right) \\ &= S_{i_1}^{-1}\left(S_{i_1}(\varphi(i_2, i_3, \dots))\right) = \varphi(i_2, i_3, \dots) \\ &= \varphi(\sigma(i_1, i_2, \dots)) = (\varphi \circ \tau)(i_1, i_2, \dots). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 8.46. *A transformação de mudança associado a um IFS totalmente desconexo com duas ou mais transformações é caótica segundo a definição de Devaney.*

Demonstração. Na seção 8.1, provamos que τ é caótica. Como τ e S são topologicamente conjugadas, resulta do teorema 8.44 que S é caótica segundo a definição de Devaney. \square

Vamos explorar os resultados provados no conjunto de Cantor ternário.

Exemplo 8.47 (CONJUNTO DE CANTOR TERNÁRIO). Seja $C_{\frac{1}{3}}$ o conjunto de Cantor ternário e sejam $S_1, S_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x \text{ e } S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Como já vimos, $C_{\frac{1}{3}}$ é o atrator do IFS $\{\mathbb{R}; S_1, S_2\}$. Observe que S_1 e S_2 são inversíveis, e que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $S_1^{-1}(x) = 3x$, e $S_2^{-1}(x) = 3x - 2$. Além disso, como, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} a \in C_{\frac{1}{3}} &\Rightarrow 0 \leq a \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{a}{3} \leq \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow S_1(a) \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a \in C_{\frac{1}{3}} &\Rightarrow 0 \leq a \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{a}{3} + \frac{2}{3} \leq 1 \\ &\Rightarrow S_2(a) \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{aligned}$$

podemos concluir que $S_1(C_{\frac{1}{3}}) \subseteq [0, \frac{1}{3}]$ e $S_2(C_{\frac{1}{3}}) \subseteq [\frac{2}{3}, 1]$, e, portanto, que $S_1(C_{\frac{1}{3}}) \cap S_2(C_{\frac{1}{3}}) = \emptyset$ (pois $[0, \frac{1}{3}] \cap [\frac{2}{3}, 1] = \emptyset$). Logo, resulta, respectivamente, dos teoremas 8.39 e 8.46 que o IFS $\{\mathbb{R}; S_1, S_2\}$ é totalmente desconexo, e que a transformação de mudança associada a esse IFS é caótica segundo a definição de Devaney.

Seja $S: C_{\frac{1}{3}} \rightarrow C_{\frac{1}{3}}$ a transformação de mudança associada ao IFS $\{\mathbb{R}; S_1, S_2\}$. Dado $a \in C_{\frac{1}{3}}$, é fácil ver que

$$S(a) := \begin{cases} 3a, & \text{se } a \in S_1(C_{\frac{1}{3}}) \\ 3a - 2, & \text{se } a \in S_2(C_{\frac{1}{3}}) \end{cases}.$$

Para ilustrar o fato de que a transformação de mudança associada ao IFS $\{\mathbb{R}; S_1, S_2\}$ é sensível às condições iniciais, vamos observar o que acontece com as órbitas dos pontos $\frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \frac{1}{3^n} \in C_{\frac{1}{3}}$ pela transformação de mudança S , em que $\epsilon > 0$, e n é um número natural maior do que $\frac{\ln(\frac{1}{\epsilon})}{\ln(3)}$. Não é difícil ver que

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{3}\right) = \left\{\frac{1}{3}, 1\right\},$$

e

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^n}\right) = \left\{ \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3^n}, 1 - \frac{1}{3^{n-1}}, 1 - \frac{1}{3^{n-2}}, \dots, 1 - \frac{1}{3}, 0 \right\}.$$

Sendo assim, podemos concluir que as órbitas de pontos que são “suficientemente próximos” (isto é, que distam no máximo $\frac{1}{3^n}$) acabam se “afastando” completamente. As figuras 8.5 e 8.6 mostram, respectivamente, as órbitas dos pontos $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3} - \frac{1}{3^7}$ no caso em que $\epsilon = 0,001$, e $n = 7$.

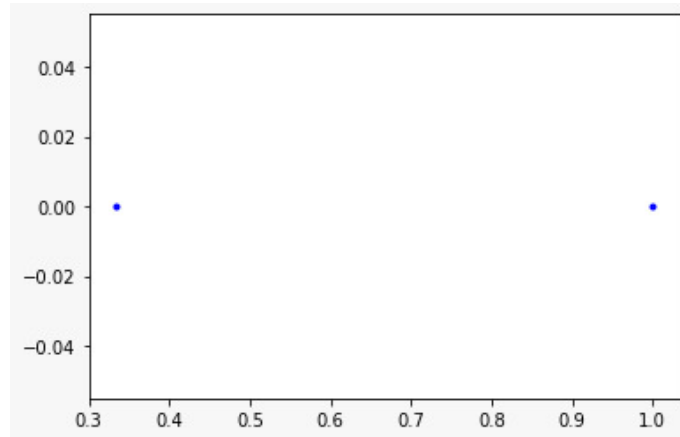


Figura 8.5. Órbita do ponto $\frac{1}{3}$ pela aplicação S .

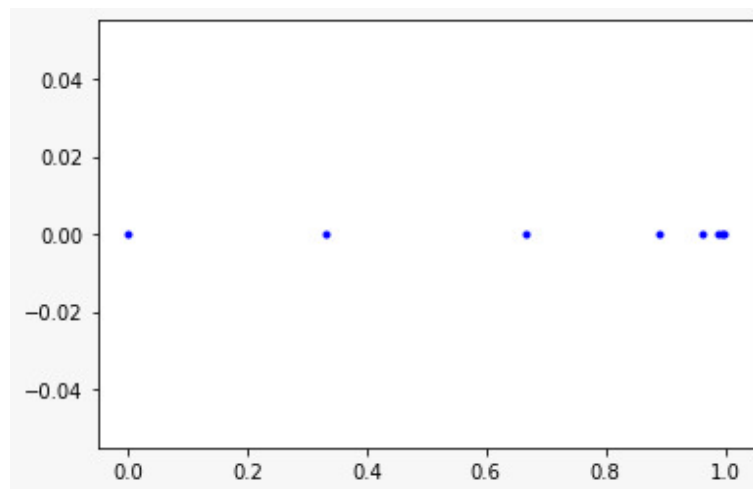


Figura 8.6. Órbita do ponto $\frac{1}{3} - \frac{1}{3^7}$ pela aplicação S .

As figuras 8.5 e 8.6 sugerem que, mesmo que dois pontos distintos de $C_{\frac{1}{3}}$ estejam muito próximos, em alguma iterada, eles irão se “afastar” a pelo menos uma determinada distância. Isso decorre do fato de que a transformação de mudança S associada ao IFS do atrator $C_{\frac{1}{3}}$ é sensível às condições iniciais. Vamos, agora, compreender isso via definição. Seja $\delta < \frac{1}{3}$, seja $x \in C_{\frac{1}{3}}$ e seja $\epsilon > 0$. Precisamos mostrar que existem $y \in C_{\frac{1}{3}}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $|x - y| < \epsilon$, mas $|S^n(x) - S^n(y)| > \delta$. Para isso consideremos inicialmente $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^k} < \epsilon$ (basta tomar qualquer $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > \frac{\ln(\frac{1}{\epsilon})}{\ln(3)}$). Consideremos também $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ tal que $x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \dots + \frac{x_k}{3^k} + \dots$ ¹ e tomemos $y = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \dots + \frac{x_k}{3^k} + \frac{y_{k+1}}{3^{k+1}} + \dots$ em que para cada $n \in \{k+1, k+2, \dots\}$, $y_n \in \{0, 2\}$ e $y_n \neq x_n$. Como $(x_1, x_2, x_3, \dots), (x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots) \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ e para cada $n \in \{k+1, k+2, \dots\}$ tem-se $x_n \neq y_n$, consequentemente $x \neq y$.

¹Como $x \in C_{\frac{1}{3}}$, existe uma representação de x na base ternária cujos dígitos sejam apenas 0 ou 2 (ver proposição 3.7).

Além disso, é claro também que

$$\begin{aligned}
 x - y &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{x_i}{3^i} - \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{y_i}{3^i} \\
 &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{1}{3^i} \underbrace{(x_i - y_i)}_{\leq 2} \\
 &\leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \\
 &= \frac{2 \cdot \frac{1}{3^{k+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3^k}.
 \end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $y - x \leq \frac{1}{3^k}$. Logo, $|x - y| \leq \frac{1}{3^k}$.

Vamos mostrar, a seguir, que existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^n(x)$ e $S^n(y)$ não pertencem ambos a $S_1(C_{\frac{1}{3}})$ (que está contido no intervalo $[0, \frac{1}{3}]$), nem a $S_2(C_{\frac{1}{3}})$ (que está contida no intervalo $[\frac{2}{3}, 1]$). Disso resultará por sua vez, que existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $|S^n(x) - S^n(y)| \geq \frac{1}{3} > \delta$. Com efeito, se $S^n(x)$ e $S^n(y)$ pertencesse ambos a $S_1(C_{\frac{1}{3}})$ qualquer que fosse $n \in \mathbb{N}$, teríamos $S^n(x) = 3 \cdot S^{n-1}(x)$ e $S^n(y) = 3 \cdot S^{n-1}(y)$, e, portanto, teríamos também,

$$|S^n(x) - S^n(y)| = 3 \cdot |S^{n-1}(x) - S^{n-1}(y)| = \dots = 3^n \cdot |x - y|,$$

qualquer que fosse $n \in \mathbb{N}$.

Como, porém, $x \neq y$, disso resultaria que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S^n(x) - S^n(y)| = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \underbrace{|x - y|}_{\neq 0} = +\infty.$$

— o que, por sua vez, seria um absurdo pois, deveríamos ter $|S^n(x) - S^n(y)| \geq \frac{1}{3}$ qualquer que fosse $n \in \mathbb{N}$. De modo análogo, mostra-se que $S^n(x)$ e $S^n(y)$ não podem pertencer ambos a $S_2(C_{\frac{1}{3}}) \subseteq [\frac{2}{3}, 1]$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 9

Teorema de Moran

Uma vez verificado que todo sistema de funções iteradas admite um único atrator, é interessante determinar um método para calcular suas dimensões. Neste capítulo iremos apresentar e demonstrar o teorema de Moran que nos garante que se o IFS, $\{\mathbb{R}^n; S_1, \dots, S_m\}$, composto por similaridades definidas em \mathbb{R}^n , que satisfaz a OSC e F o conjunto atrator desse sistema, então a dimensão de similaridade de F — que é o único número real s tal que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ — coincide com a dimensão Hausdorff de F . Para isso, introduziremos o conceito de distribuição de massa, bem como provaremos o teorema de distribuição de massa o qual é importante para obtermos uma cota inferior da dimensão de Hausdorff de $F \subseteq \mathbb{R}^n$ e vários outros resultados essenciais que serão utilizados na demonstração. Em sequência, calcularemos a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor ternário e do triângulo de Sierpinsk. Na última parte, provaremos uma versão do teorema de Moran que diz respeito ao caso em que $\{S_1, \dots, S_m\}$ são contrações, mas não necessariamente similaridades, e, por fim, aplicaremos esses resultados para obter uma estimativa da dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia associado ao polinômio $f_c(z) := z^2 + c$ para o caso em que $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$. As referências utilizadas neste capítulo foram [Fal04], [Bar14], [SA11] e [VDE18].

9.1 O Teorema de Moran

Iniciaremos, provando uma série de resultados que serão essenciais para a demonstração do teorema central deste capítulo.

Lema 9.1. *Seja $X := \{1, \dots, m\}$, sejam $r_1, \dots, r_m \in]0, 1[$, e seja s o único número real t tal que $\sum_{i=1}^m r_i^t = 1$. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$ e cada $C \subseteq X^k := \{(i_1, \dots, i_k) : \forall j \in \{1, \dots, k\}, i_j \in X\}$, consideremos, também, o conjunto*

$$I_C := \{(i_1, i_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}} : (i_1, i_2, \dots, i_k) \in C\}.$$

Seja $\mathcal{A} := \{I_C : k \in \mathbb{N}, C \subseteq X^k\}$, e seja $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $C \subseteq X^k$,

$$\mu(I_C) := \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in C} (r_{i_1} \dots r_{i_k})^s.$$

Nessas condições:

1. \mathcal{A} é uma álgebra de conjuntos;
2. μ é uma medida finitamente aditiva que vale 1 em $X^{\mathbb{N}}$; e

¹Observe que $X^{\mathbb{N}}$ é, simplesmente, uma notação alternativa para o conjunto Σ_m , que foi definido no capítulo anterior.

3. a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}: \mathcal{P}(X^{\mathbb{N}}) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\longmapsto \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) : \forall i \in \mathbb{N}, B_i \in \mathcal{A}, e A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right\} \end{aligned}$$

é uma medida exterior.

Demonstração. 1. Vamos mostrar que \mathcal{A} é uma álgebra. De fato:

- É claro que $X^{\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, pois $X^{\mathbb{N}} = I_{X^k}$ qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$.
- Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m \leq n$, $C_1 \subseteq X^m$, $C_2 \subseteq X^n$ e

$$C' = \{(i_1, \dots, i_n) \in C_2 : (i_1, \dots, i_m) \in C_1\}.$$

É fácil ver que

$$\begin{aligned} I_{C_1} \cap I_{C_2} &= \{(i_1, i_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}} : (i_1, \dots, i_m) \in C_1 \text{ e } (i_1, \dots, i_n) \in C_2\} \\ &= \{(i_1, i_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}} : (i_1, \dots, i_n) \in C'\} \\ &= I_{C'}. \end{aligned}$$

Logo, $I_{C_1} \cap I_{C_2} \in \mathcal{A}$.

- Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $C \subseteq X^k$. Note que

$$\begin{aligned} X^{\mathbb{N}} \setminus I_C &= \{(i_1, i_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}} : (i_1, \dots, i_k) \notin C\} \\ &= \{(i_1, i_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}} : (i_1, \dots, i_k) \in C\} \\ &= I_{X^k \setminus C}. \end{aligned}$$

Consequentemente, $X^{\mathbb{N}} \setminus I_C \in \mathcal{A}$.

- Se $m, n \in \mathbb{N}$, $C_1 \subseteq X^m$, e $C_2 \subseteq X^n$, então

$$I_{C_1} \cup I_{C_2} = X^{\mathbb{N}} \setminus \left(\underbrace{(X^{\mathbb{N}} \setminus I_{C_1})}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{(X^{\mathbb{N}} \setminus I_{C_2})}_{\in \mathcal{A}} \right) \in \mathcal{A}.$$

Portanto, \mathcal{A} é uma álgebra.

2. Vamos mostrar que μ é uma medida finitamente aditiva.

- Se $C, D \subseteq X^k$ são disjuntos, então

$$\begin{aligned} \mu(I_C \cup I_D) &= \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in C \cup D} (r_{i_1} \dots r_{i_k})^s \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in C} (r_{i_1} \dots r_{i_k})^s + \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in D} (r_{j_1} \dots r_{j_k})^s \quad (*) \\ &= \mu(I_C) + \mu(I_D). \end{aligned}$$

- Se $C \subseteq X^k$ e $D \subseteq X^\ell$ são disjuntos e $k > \ell$, então $C \times X^{\ell+k}, D \subseteq X^\ell$ também são disjuntos e, portanto,

$$\mu(I_{C \times X^{\ell+k}} \cup I_D) \stackrel{(*)}{=} \mu(I_{C \times X^{\ell+k}}) + \mu(I_D).$$

Mas, evidentemente, $I_{C \times X^{\ell-k}} \cup I_D = I_C \cup I_D$. Sendo assim, para concluirmos que $\mu(I_C \cup I_D) = \mu(I_C) + \mu(I_D)$, basta mostrarmos que $\mu(I_{C \times X^{\ell-k}}) = \mu(I_C)$. Mas

$$\begin{aligned} \mu(I_{C \times X^{\ell-k}}) = \mu(I_C) &\Leftrightarrow \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in C, (t_1, \dots, t_{\ell-k}) \in X^{\ell-k}} (r_{i_1} \dots r_{i_k})^s (r_{t_1} \dots r_{t_{\ell-k}})^s \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in C} (r_{i_1 \dots i_k})^s \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{(i_1, \dots, i_k) \in C} (r_{i_1 \dots i_k})^s \right) \underbrace{\left(\sum_{(t_1, \dots, t_{\ell-k}) \in X^{\ell-k}} (t_1, \dots, t_{\ell-k})^s \right)}_{:=B} \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in C} (r_{i_1 \dots i_k})^s \\ &\Leftrightarrow B = 1. \end{aligned}$$

Dessa forma, como

$$\begin{aligned} \sum_{(t_1, \dots, t_{\ell-k}) \in X^{\ell-k}} (r_{t_1} \dots r_{t_{\ell-k}})^s &= \sum_{t_1 \in X} \sum_{t_2 \in X} \dots \sum_{t_{\ell-k} \in X} r_{t_1}^s \dots r_{t_{\ell-k}}^s \\ &= \underbrace{\left(\sum_{t_1 \in X} r_{t_1}^s \right)}_{=1} \underbrace{\left(\sum_{t_2 \in X} r_{t_2}^s \right)}_{=1} \dots \underbrace{\left(\sum_{t_{\ell-k} \in X} r_{t_{\ell-k}}^s \right)}_{=1} = 1, \end{aligned}$$

podemos concluir que $\mu(I_C \cup I_D) = \mu(I_C) + \mu(I_D)$.

- Como

$$1 = \sum_{i_1=1}^m r_{i_1}^s = \mu(I_{X^1}) = \mu(X^{\mathbb{N}}) = \mu(X^{\mathbb{N}} \cup \emptyset) = \mu(X^{\mathbb{N}}) + \mu(\emptyset) = 1 + \mu(\emptyset),$$

tem-se $\mu(\emptyset) = 0$.

Portanto, μ é uma medida finitamente aditiva.

3. Como μ é uma pré-medida exterior (pois μ é uma medida finitamente aditiva), resulta do teorema 2.17 que $\tilde{\mu}$ é uma medida exterior. □

No que se segue, consideremos um IFS $\{X; S_1, \dots, S_m\}$, cujo atrator denotaremos por F .

Definição 9.2. Seja

$$\begin{aligned} \nu: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\longmapsto \tilde{\mu} \left(\left\{ (i_1, i_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}} : x_{i_1 i_2 \dots} \in A \right\} \right), \end{aligned}$$

em $\tilde{\mu}$ corresponde à medida do lema 6.32.

Observação 9.3. Note que, para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$, tem-se $\nu(A) = \nu(A \cap F)$, pois $x_{i_1 i_2 \dots} \in F$ qualquer que seja $(i_1, i_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}}$.

Proposição 9.4. ν é uma medida exterior.

Demonstração. Vamos mostrar que ν é uma medida exterior.

- $\nu(\emptyset) = \tilde{\mu}(\{(i_1 i_2 \dots) \in X^{\mathbb{N}} : x_{i_1 i_2 \dots} \in \emptyset\}) = \tilde{\mu}(\emptyset) = 0$;
- para quaisquer $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, se $A \subseteq B$, então

$$\{(i_1 i_2 \dots) \in X^{\mathbb{N}} : x_{i_1 i_2 \dots} \in A\} \subseteq \{(i_1 i_2 \dots) \in X^{\mathbb{N}} : x_{i_1 i_2 \dots} \in B\}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \tilde{\mu}(\{(i_1 i_2 \dots) \in X^{\mathbb{N}} : x_{i_1 i_2 \dots} \in A\}) \\ &\leq \tilde{\mu}(\{(i_1 i_2 \dots) \in X^{\mathbb{N}} : x_{i_1 i_2 \dots} \in B\}) \\ &= \nu(B); \text{ e} \end{aligned}$$

- se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de subconjuntos de \mathbb{R}^n , então

$$\{(i_1 i_2 \dots) \in X^{\mathbb{N}} : x_{i_1 i_2 \dots} \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(i_1 i_2 \dots) \in X^{\mathbb{N}} : x_{i_1 i_2 \dots} \in A_n\},$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \tilde{\mu}\left(\{(i_1 i_2 \dots) \in X^{\mathbb{N}} : x_{i_1 i_2 \dots} \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\}\right) \\ &= \tilde{\mu}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(i_1 i_2 \dots) \in X^{\mathbb{N}} : x_{i_1 i_2 \dots} \in A_n\}\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{\mu}\left(\{(i_1 i_2 \dots) \in X^{\mathbb{N}} : x_{i_1 i_2 \dots} \in A_n\}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n). \end{aligned}$$

□

Definição 9.5 (SUPORTE DE UMA MEDIDA EXTERIOR). Se $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ é uma medida exterior, então o **suporte de μ** (o qual denotaremos por $\text{spt}(\mu)$), é, por definição, $\text{spt}(\mu) := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$, em que $\mathcal{F} := \{F \subseteq \mathbb{R}^n : F \text{ é fechado, e } \mu(\mathbb{R}^n \setminus F) = 0\}$.

Definição 9.6 (MEDIDA EM UM SUBCONJUNTO DE \mathbb{R}^n). Dizemos que uma medida exterior $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ é uma **medida em $A \subseteq \mathbb{R}^n$** se $\text{spt}(\mu) \subseteq A$.

Definição 9.7 (DISTRIBUIÇÃO DE MASSA). Dizemos que uma medida $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ é uma **distribuição de massa** se $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < +\infty$ e se μ é uma medida em um subconjunto limitado de \mathbb{R}^n .

Observação 9.8. Note que, como μ é uma distribuição de massa em F , $\mu(\mathbb{R}^n \setminus F) = 0$, pois $\text{sup } \mu \subseteq F$ e $\mathbb{R}^n \setminus F \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \text{sup } \mu$. No entanto, como $\mu(\mathbb{R}^n \setminus \text{sup } \mu) = 0$, por monotonicidade, $\mu(\mathbb{R}^n \setminus F) = 0$. Disso resulta que $\mu(F) > 0$, pois

$$0 < \mu(\mathbb{R}^n) = \mu(F \cup (\mathbb{R}^n \setminus F)) = \mu(F) + \underbrace{\mu(\mathbb{R}^n \setminus F)}_{=0} = \mu(F).$$

Lema 9.9. ν é uma distribuição de massa em F .

Demonstração. Vamos mostrar que ν é uma distribuição de massa em F . De fato:

- F é limitado, pois é compacto;
- como

$$\begin{aligned}\nu(\mathbb{R}^n) &= \nu(F) + \underbrace{\nu(\mathbb{R}^n \setminus F)}_{=0} \\ &= \tilde{\mu}\left(\{(i_1 i_2 \dots) \in X^{\mathbb{N}} : x_{i_1 i_2 \dots} \in F\}\right) + 0 \\ &= \tilde{\mu}(X^{\mathbb{N}}) = \mu(X^{\mathbb{N}}) = 1,\end{aligned}$$

temos $0 < \nu(\mathbb{R}^n) < +\infty$;

- como F é fechado (pois é compacto), e

$$\nu(\mathbb{R}^n \setminus F) = \tilde{\mu}\left(\{(i_1, i_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}} : x_{i_1 i_2 \dots} \in \mathbb{R}^n \setminus F\}\right) = \tilde{\mu}(\emptyset) = 0,$$

$\text{spt}(\nu) \subseteq F$.

□

Provaremos, a seguir, o teorema do Princípio de Distribuição de Massa (PDM), o qual será utilizado na demonstração do teorema de Moran.

Teorema 9.10 (PRINCÍPIO DE DISTRIBUIÇÃO DE MASSA). *Seja μ uma distribuição de massa em F . Suponhamos, também, que, para algum $d > 0$, existam números $c > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que $\mu(U) \leq c \cdot \text{diam}(U)^d$ qualquer que seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\text{diam}(U) \leq \delta$. Nessas condições, tem-se $\mathcal{H}^d(F) \geq \frac{\mu(F)}{c} > 0$, e $d \leq \dim_{\mathcal{H}}(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F)$.*

Demonstração. Resulta da monotonicidade e da subaditividade enumerável de μ e de nossas hipóteses sobre d que, para todo $\delta \in]0, \epsilon[$ e toda δ -cobertura $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de F , vale que

$$\mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) = \sum_{i=1}^{\infty} c \cdot (\text{diam}(U_i))^d \leq c \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^d.$$

Em vista disso, podemos concluir que

$$\mathcal{H}_{\delta}^d(F) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^d : \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{\delta}(F) \right\} \geq \frac{\mu(F)}{c}$$

qualquer que seja $\delta \in]0, \epsilon[$. Consequentemente,

$$\mathcal{H}^d(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_{\delta}^d(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}.$$

Como, porém, μ é, por hipótese, uma distribuição de massa em F , decorre da observação 9.8 que $\mu(F) > 0$. Sendo assim, temos também $\mathcal{H}^d(F) > 0$ — a partir do que concluímos, por fim, que

$$d \leq \dim_{\mathcal{H}}(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F). \quad \square$$

Provaremos agora uma sequência de lemas que serão utilizados na demonstração teorema de Moran.

Lema 9.11. *Seja $\Lambda \subset \mathbb{N}$, e seja $\{\mathcal{A}_j\}_{j \in \Lambda}$ uma coleção de abertos disjuntos de \mathbb{R}^n tal que, para todo $j \in \Lambda$, existem $A_1, A_2, r > 0$ e $x_j, y_j \in \mathbb{R}^n$ tais que*

$$B_{A_1 r}(x_j) \subset \mathcal{A}_j \subset B_{A_2 r}(y_j).$$

Nessas condições, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a bola $B_r(x)$ intersecta no máximo $\frac{(1+2A_2)^n}{A_1^n}$ elementos da família $\{\overline{A}_j\}_{j \in \Lambda}$.

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ um ponto arbitrário, e considere a bola $B_r(x)$. Suponha que exista $j \in \Lambda$ tal que $\overline{A}_j \cap B_r(x) \neq \emptyset$. Por hipótese, podemos fixar $y_j \in \mathbb{R}^n$ de modo que $\overline{A}_j \subset B_{A_2 r}(y_j)$. É fácil ver que \overline{A}_j está inteiramente contido na bola de raio $r + 2A_2 r = (1 + 2A_2)r$ centrada em x . De fato, sejam $z \in \overline{A}_j \subseteq \overline{B_{A_2 r}(y_j)}$ e $x' \in \overline{A}_j \cap B_r(x) \subseteq \overline{B_{2r}(y_j)} \cap B_r(x)$. Tem-se

$$\begin{aligned} d(z, x) &\leq \underbrace{d(z, y_j)}_{\leq A_2 r} + \underbrace{d(y_j, x')}_{A_2 r} + \underbrace{d(x, x')}_{< r} \\ &< 2A_2 r + r \\ &= (1 + 2A_2)r. \end{aligned}$$

Logo, $\overline{A}_j \subseteq B_{(1+2A_2)r}(x)$. Consequentemente, a bola $B_{(1+2A_2)r}(x)$ contém todos os elementos da

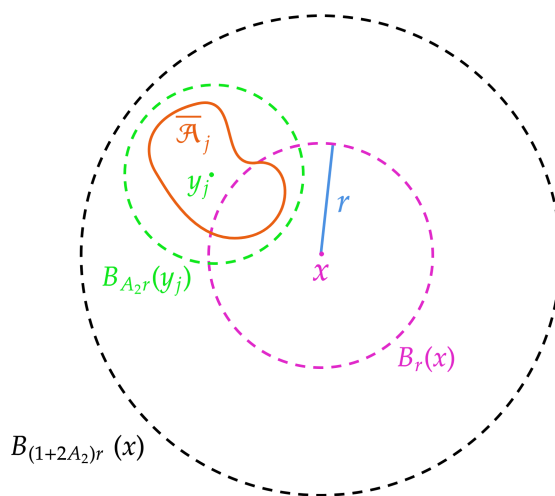


Figura 9.1. Ilustração da demonstração.

Fonte: autora.

família $\{\overline{A}_j\}_{j \in \Lambda}$ que intersectam $B_r(x)$. Por outro lado, cada aberto A_j contém uma bola $B_{A_1 r}(x_j)$. Como o volume total dessas bolas deve ser menor ou igual a $(1 + 2A_2)^n r^n$, concluímos que deve haver $q \leq \frac{(1+2A_2)^n}{A_1^n}$ elementos de $\{\overline{A}_j\}_{j \in \Lambda}$ que intersectam $B_r(x)$. \square

Lema 9.12. *Seja V um aberto de \mathbb{R}^n que contenha uma bola fechada de raio A_1 , e, seja S uma r -similaridade. Nessas condições, $S(V)$ contém uma bola fechada de raio rA_1 .*

Demonstração. Inicialmente, observe que se S é uma r -similaridade, então $\frac{1}{r}S$ é uma isometria de \mathbb{R}^n , pois

$$\left\| \left(\frac{1}{r}S \right) (x) - \left(\frac{1}{r}S \right) (y) \right\| = \frac{1}{r} \|S(x) - S(y)\| = \frac{1}{r} \cdot r \|x - y\| = \|x - y\|.$$

Sabemos que isometrias do \mathbb{R}^n são sobrejetoras (ver [Con]). Com isso, $\frac{1}{r}S$ é sobrejetora. Vamos mostrar, a seguir, que disso resulta que $S(B_{A_1}(x)) = B_{rA_1}(S(x))$. Para isso, notemos, inicialmente, que $S(B_{A_1}(x)) \subseteq S(B_{rA_1}(x))$, pois, para todo $z \in B_{A_1}(x)$, tem-se

$$d(S(z), S(x)) = rd(z, x) < rA_1.$$

Vamos agora mostrar que $B_{rA_1}(S(x)) \subseteq S(B_{A_1}(x))$. Para tanto, comecemos fixando $y \in B_{rA_1}(S(x))$ de modo arbitrário. Como S é sobrejetora, podemos, também, fixar $z \in \mathbb{R}^n$ de modo que $S(x) = y$.

É fácil ver que

$$d(z, x) = \frac{1}{r}d(S(z), S(x)) = \frac{1}{r}d(x, y) < \frac{1}{r}(rA_1) = A_1.$$

— o que por sua vez, prova que $z \in B_{A_1}(x)$. Consequentemente, $y \in S(B_{A_1}(x))$. E, como $y \in B_{rA_1}(S(x))$ é completamente arbitrário, disso concluímos, por fim, que $B_{rA_1}(S(x)) \subseteq S(B_{A_1}(x))$. Portanto, se $B_{A_1}(x) \subseteq V$, então $B_{rA_1}(S(x)) = S(B_{A_1}(x)) \subseteq S(V)$. \square

Definição 9.13 (DIMENSÃO DE SIMILARIDADE). Seja $\{\mathbb{R}^n; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS, tal que as contrações S_1, \dots, S_m sejam similaridades, seja F seu atrator, e, para cada $i = 1, \dots, m$, seja r_i o fator de similaridade de S_i . A **dimensão de similaridade** de $F \subseteq \mathbb{R}^n$ é, por definição, o único número real s tal que $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$.

Vamos provar a seguir que o número real s da definição 9.13 é de fato único.

Proposição 9.14. Para cada $i \in \mathcal{I} := \{1, \dots, m\}$ seja $r_i \in]0, 1[$. Nessas condições, existe um único número real s tal que $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$.

Demonstração. Como para cada $i \in \mathcal{I}$, $r_i \in]0, 1[$, temos que

$$s \mapsto \sum_{i=1}^m r_i^s$$

é decrescente, uma vez que para cada $i \in \mathcal{I}$, r_i^s é decrescente. Por sua vez,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m r_i^s = 0$$

e

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \sum_{i=1}^m r_i^s = +\infty.$$

Em particular, fixe $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\sum_{i=1}^m r_i^{s_1} < 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^m r_i^{s_2} > 1.$$

Resulta do teorema do valor intermediário que existe um s tal que $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$. Como f é estritamente decrescente, temos que s é único. \square

Definição 9.15 (OSC). Dizemos que um IFS $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ satisfaz a **condição do conjunto aberto** ou **open set condition** (OSC) se existe um conjunto limitado, aberto e não vazio $\mathcal{O} \subseteq X$ tal que

$$\bigcup_{i=1}^m S_i(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O},$$

e tal que $S_i(\mathcal{O}) \cap S_j(\mathcal{O}) = \emptyset$ quaisquer que sejam $i, j \in \{1, \dots, m\}$ tais que $i \neq j$.

Lema 9.16. Seja $\{\mathbb{R}^n; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS consistindo de similaridades com fatores correspondentes $\{r_1, \dots, r_m\}$, e, seja F seu atrator, e, seja s o único número real tal que $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$. Suponha que esse IFS satisfaça a OSC. Nessas condições, a medida exterior ν , da definição 9.2, satisfaz as hipóteses do lema 9.11: isto é, existem números reais positivos q , s e r tais que $\nu(U) \leq q \text{diam}(U)^s$ qualquer que seja $U \subseteq F$ tal que $\text{diam}(U) \leq r$.

Demonstração. Provaremos, inicialmente, um caso particular: seja \mathcal{B} uma bola fechada de \mathbb{R}^n de raio $r < 1$, e, seja $V \subseteq \mathbb{R}^n$ o conjunto aberto que satisfaz OSC. Pela observação 9.3, ν é uma medida exterior definida em $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mu(\mathbb{R}^n \setminus F) = 0$, o qual resulta que $\nu(\mathcal{B}) = \nu(\mathcal{B} \cap F)$. Dessa

forma, com o objetivo de estimar $\nu(\mathcal{B})$, vamos cobrir $\mathcal{B} \cap F$ por meio de conjuntos que são obtidos tomando a imagem de V pelas composições das similaridades, isto é, $(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(V) = V_{i_1 \dots i_k}$, tal que $1 \leq i_j \leq m$. Sendo assim, estimaremos a medida exterior ν desta cobertura. Para fazer isso, precisamos escolher as sequências correspondentes (i_1, \dots, i_k) de modo as condições do lema sejam satisfeitas para todo $V_{i_1 \dots i_k}$, ou seja, procuramos encontrar sequências finitas (i_1, \dots, i_k) que satisfaçam as seguintes propriedades:

1. fixados A_1 e A_2 números reais, cada $V_{i_1 \dots i_k}$ deve conter uma bola fechada de \mathbb{R}^n de raio $A_1 r$ e estar contida em uma bola fechada de \mathbb{R}^n de raio $A_2 r$;
2. $V_{i_1 \dots i_k} \cap V_{j_1 \dots j_k} = \emptyset$, se $(i_1, \dots, i_k) \neq (j_1, \dots, j_k)$, isto é, todos os $V_{i_1 \dots i_k}$ são dois a dois disjuntos;
3. $F \cap \mathcal{B} \subseteq \bigcup V_{i_1 \dots i_k}$.

ETAPA 1

Seja $I = \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq m\}$, ou seja, o conjunto de todas as sequências infinitas com entradas tomando valores em $\{1, \dots, m\}$, e, seja $I_{i_1 \dots i_k} = \{(i_1, \dots, i_k, q_{k+1}, \dots) : 1 \leq q_j \leq m\}$ consistindo em todas as sequências em I com termos iniciais (i_1, \dots, i_k) .

Inicialmente, vamos trucar cada sequência $(i_1, i_2, \dots) \in I$ após o primeiro termo k tal que

$$\min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\} r \leq r_{i_1} \dots r_{i_k} \leq r. \quad (9.1)$$

Este termo único sempre existe, uma vez que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k} \leq \underbrace{\left(\max_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\} \right)^k}_{:=g < 1} = g^k.$$

Logo, como $\lim_{k \rightarrow +\infty} g^k = 0$, podemos fixar $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $g^{k_0} \leq r$. Consequentemente, $r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_{k_0}} \leq r$. Por conseguinte, $\{k \in \mathbb{N} : r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k} \leq r\} \neq \emptyset$, e, portanto, possui mínimo. Observe que $r_{i_1} \leq \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\} \cdot r$ é válido sempre, pois $r < 1$. Sendo assim, temos alguns casos a considerar:

- Se $r_{i_1} < r$ basta tomar $k = 1$. Se, por outro lado, $r_{i_1} > r$, então, necessariamente,

$$r_{i_1} r_{i_2} \geq \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\} r.$$

Suponhamos que $r_{i_1} > r$. Nesse caso, como $r_{i_2} \geq \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\}$, tem-se

$$r_{i_1} r_{i_2} \geq \left(\min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\} \right) r.$$

- Se $r_{i_1} r_{i_2} \leq r$, basta tomar $k = 2$. Caso contrário, $r_{i_1} r_{i_2} > r$, e, portanto,

$$r_{i_1} r_{i_2} r_{i_3} \geq \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\} r.$$

- Suponhamos que $r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_\ell} > r$. Nesse caso, como

$$r_{i_{\ell+1}} \geq \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\},$$

teremos, necessariamente,

$$r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_{\ell+1}} = \underbrace{(r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_\ell})}_{>r} \underbrace{r_{i_{\ell+1}}}_{\geq \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\}} \geq \left(\min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\} \right) \cdot r.$$

Denotaremos por Q o conjunto de seqüências finitas obtidas truncando cada seqüência infinita como descrito acima.

Vamos escolher A_1 e A_2 de modo que o conjunto aberto V contenha uma bola de raio A_1 e esteja contido em uma bola de raio A_2 .

Dada $(i_1, \dots, i_k) \in Q$, sabemos que $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$ é uma similaridade com fator $r_{i_1} \dots r_{i_k}$. Consequentemente, pelo lema 9.12, o conjunto correspondente $V_{i_1 \dots i_k}$ contém uma bola de raio $r_{i_1} \dots r_{i_k} A_1$ e está contido em uma bola de raio $r_{i_1} \dots r_{i_k} A_2$. Com efeito:

- $V \subseteq B_{A_2}(x) \implies (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(V) \subseteq (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(B_{A_2}(x))$; e
- $(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(B_{A_2}(x)) \subseteq B_{r_{i_1} \dots r_{i_k} A_2}((S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(x))$, pois, para todo $y \in B_{A_2}(x)$, tem-se

$$\begin{aligned} d(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(y), S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(x) &= r_{i_1} \dots r_{i_k} \cdot d(y, x) \\ &< r_{i_1} \dots r_{i_k} \cdot A_2. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $(i_1, \dots, i_k) \in Q$, resulta da desigualdade 9.1 que qualquer $V_{i_1 \dots i_k}$ contém uma bola de raio $\min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\} A_1 r$ e está contido em uma bola de raio $A_2 r$.

ETAPA 2

Observe que se $(i_1, \dots, i_k) \in Q$, então nenhuma outra seqüência em Q começará com os termos exatos i_1, \dots, i_k nessa ordem, pois se $(i_1, \dots, i_k) \in Q$, então

$$\min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\} r \leq r_{i_1} \dots r_{i_k} \leq r,$$

e, portanto, resulta da definição de Q que os primeiros k termos de nenhuma outra seqüência de Q podem ser, respectivamente, i_1, \dots, i_k (pois, se tivéssemos $(j_1, \dots, j_\ell) \in Q$, com $\ell > k$, e $j_1 = i_1, \dots, j_k = i_k$, então $r_{i_1} \dots r_{i_k} \notin \left[\left(\min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\} \right) r, r \right]$). Sendo assim, duas seqüências em Q diferem sempre em pelo menos um termo.

Como V é o conjunto aberto para o qual a OSC é satisfeita, a imagem de (subconjuntos de) V sob diferentes S_i é disjunta, e, conseqüentemente, dois conjuntos $V_{i_1 \dots i_k}$ e $V_{j_1 \dots j_\ell}$, correspondendo a diferentes seqüências em Q , são imagens sob diferentes S_i , como acabamos de estabelecer. Portanto, qualquer par de tais conjuntos é disjunto.

ETAPA 3

Nesta etapa, vamos mostrar que

$$F = \bigcup_Q F_{i_1 \dots i_k} \subseteq \bigcup_Q \bar{V}_{i_1 \dots i_k}.$$

Para isso, provaremos, inicialmente, que $S_i(\bar{V}) \subseteq \bar{V}$ qualquer que seja $i \in \{1, \dots, m\}$. Sejam $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ e $x \in \bar{V}$ dois elementos quaisquer. Como, por hipótese, $x \in \bar{V}$, podemos fixar uma seqüência $(x_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ de pontos de V de modo que $\lim_{\ell \rightarrow \infty} x_\ell = x$. Por conseguinte,

$$S_{i_0}(x) = S_{i_0} \left(\lim_{\ell \rightarrow \infty} x_\ell \right) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \underbrace{S_{i_0}(x_\ell)}_{\in S_{i_0}(V) \subseteq V} \in \bar{V}.$$

E, como $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ e $x \in \bar{V}$ são completamente arbitrários, disso concluímos, por fim, que $S_i(\bar{V}) \subseteq \bar{V}$ qualquer que seja $i \in \{1, \dots, m\}$. Resulta, pois, do teorema 7.14 que

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^k(\bar{V}) \subseteq \bar{V}$$

— o que, por sua vez, permite-nos concluir que $F_{i_1 \dots i_k} \subseteq \bar{V}_{i_1 \dots i_k}$ qualquer que seja $(i_1, \dots, i_k) \in Q$, e, conseqüentemente, também que $\bigcup_Q F_{i_1 \dots i_k} \subseteq \bigcup_Q \bar{V}_{i_1 \dots i_k}$.

Resta-nos mostrar que $F = \bigcup_Q F_{i_1 \dots i_k}$. Para ilustrar a ideia por trás da demonstração vamos começar com um exemplo. Consideremos o caso em que

$$Q = \{1, 21, 2211, 2212, 2213, 222, 223, 231, 232, 233, 31, 32, 33\},$$

e $m = 3$. Representaremos o conjunto Q por meio de diagramas de “árvores”. Inicialmente, vamos tomar todos os elementos de Q que começam com o algarismo 1, e, assim, vamos representá-los por meio de uma árvore, e todos os elementos que começam com o algarismo 2 por meio de uma segunda árvore, e todos os elementos que começam com o algarismo 3 por meio de uma terceira árvore. Como só temos um elemento de Q que começa com 1, a árvore correspondente terá apenas 1 “vértice”. A árvore que corresponde aos elementos que começam com o algarismo 2, por sua vez, se ramifica, inicialmente, em três “galhos”. O elemento 2211, por exemplo, está representado na segunda árvore pela ramificação 2211, como podemos observar na Figura 9.2.

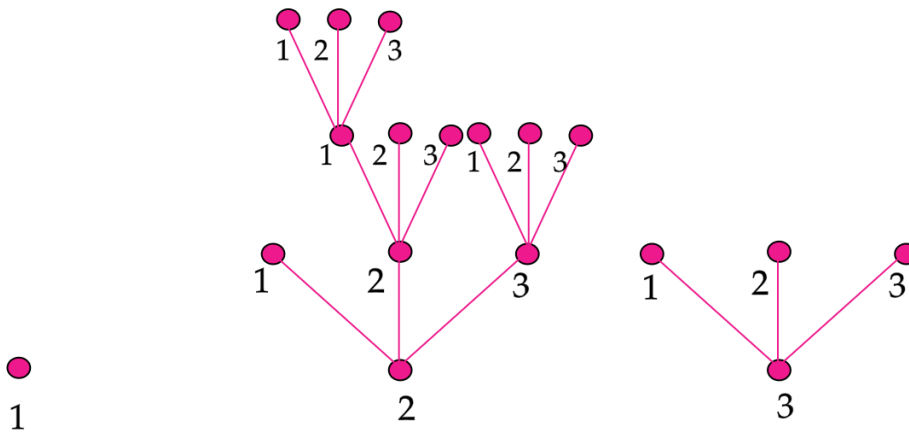


Figura 9.2. Representando Q por meio de árvores.

Fonte: autora.

Agora utilizaremos essas árvores para escrever F como uma união apropriada. O passo seguinte da demonstração é notar que

$$F = F_1 \cup F_2 \cup F_3.$$

Como a árvore que inicia com o elemento 1 não se ramifica o termo F_1 da decomposição de F ficará inalterado. Como, por sua vez, a árvore que começa com 2 se ramifica em três galhos, escreveremos

$$F_2 = F_{21} \cup F_{22} \cup F_{23}.$$

Da mesma forma, como a árvore que começa com 3 se ramifica em três galhos, escreveremos

$$F_3 = F_{31} \cup F_{32} \cup F_{33}.$$

Como o vértice 21 não se ramifica, o termo F_{21} ficará inalterado. Por outro lado, como o vértice

22 se ramifica, vamos decompor

$$F_{22} = F_{221} \cup F_{222} \cup F_{223}.$$

Da mesma forma, como o vértice 23 se ramifica, escreveremos

$$F_{23} = F_{231} \cup F_{232} \cup F_{233}.$$

Continuando esse processo com os demais vértices, concluiremos que

$$\begin{aligned} F &= F_1 \cup F_2 \cup F_3 \\ &= F_1 \cup (F_{21} \cup F_{22} \cup F_{23}) \cup (F_{31} \cup F_{32} \cup F_{33}) \\ &= F_1 \cup F_{21} \cup (F_{221} \cup F_{222} \cup F_{223}) \cup (F_{231} \cup F_{232} \cup F_{233}) \cup (F_{31} \cup F_{32} \cup F_{33}) \\ &= F_1 \cup F_{21} \cup (F_{2211} \cup F_{2212} \cup F_{2213}) \cup (F_{222} \cup F_{223}) \cup (F_{231} \cup F_{232} \cup F_{233}) \cup (F_{31} \cup F_{32} \cup F_{33}). \end{aligned}$$

No caso geral, seguindo uma estratégia semelhante considerando m árvores, uma para cada um dos possíveis valores das entradas de Q e representamos os elementos de Q por meio dessas m árvores e em seguida utilizamos cada uma dessas árvores para decompor F de maneira apropriada.

Seja Q_1 o conjunto das seqüências $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ tais que $\mathcal{B} \cap V_{i_1 \dots i_k} \neq \emptyset$. Diante disso, como vimos que, na etapa 1 e 2, $V_{i_1 \dots i_k}$ satisfaz as condições do lema 9.11, podemos concluir que existem $q = \frac{(1+2A_2)^n}{A_1^n \left(\min_{i \in \{1, \dots, m\}} r_i \right)^n}$ seqüências em Q_1 .

ETAPA 4

Notemos, agora, que

$$\nu(\mathcal{B}) = \nu(F \cap \mathcal{B}) = \tilde{\mu} \left\{ (i_1, i_2, \dots) : x_{i_1 i_2 \dots} \in \mathcal{B} \cap F \right\} \leq \tilde{\mu} \left\{ \bigcup_{Q_1} I_{j_1 \dots j_k} \right\}.$$

A última desigualdade se justifica devido à propriedade de monotonicidade da medida, uma vez que, dado $(i_1, i_2, \dots) \in I$ tal que $x_{i_1 i_2 \dots} \in \mathcal{B} \cap F$, resulta da definição de Q que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(i_1, \dots, i_k) \in Q$. Como, porém, $x \in \mathcal{B}$, e

$$\{x\} \stackrel{8.32}{=} \bigcap_{\ell=0}^{\infty} V_{i_1 \dots i_\ell} \subseteq V_{i_1 \dots i_k},$$

podemos concluir, em particular, que $V_{i_1 \dots i_k} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Logo, $(i_1, \dots, i_k) \in Q_1$, e, portanto,

$$(i_1, i_2, \dots) \in I_{i_1 \dots i_k} \subseteq \bigcup_{Q_1} I_{j_1 \dots j_k}.$$

Além disso, decorre da propriedade de subatividade enumerável de $\tilde{\mu}$ que

$$\tilde{\mu} \left\{ \bigcup_{Q_1} I_{j_1 \dots j_k} \right\} \leq \sum_{Q_1} \tilde{\mu}(I_{i_1 \dots i_k}).$$

Logo,

$$\nu(B) \leq \sum_{Q_1} \tilde{\mu}(I_{i_1 \dots i_k}) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{Q_1} (r_{i_1} \dots r_{i_k})^s \stackrel{9.1}{\leq} \sum_{Q_1} r^s \leq qr^s.$$

Diante disso, encontramos valores positivos q e s tais que $\nu(B) \leq qr^s$ para todas as bolas de raio $r < 1$. Já que qualquer conjunto $U \subseteq F$ está contido em uma bola de raio igual ao $\text{diam}(U)$, temos que $\nu(U) \leq qr^s$. Portanto, ν satisfaz as condições do lema. \square

Teorema 9.17 (MORAN). *Seja $\{\mathbb{R}^n; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS cujas contrações sejam similaridades, seja F seu atrator, e, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, seja r_i o fator de similaridade de S_i . Suponha que esse IFS satisfaça a OSC, e seja s a dimensão de similaridade de F (a qual definimos como sendo o único número real t tal que $\sum_{i=1}^m r_i^t = 1$). Nessas condições, $\dim_{\mathcal{H}} F = \dim_B F = s$, e, além disso, $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.*

Demonstração. Primeiramente iremos mostrar que $\dim_{\mathcal{H}} F \leq s$. Para isso, seja

$$I_k = \{(i_1, \dots, i_k) : i_j \in \{1, \dots, m\}\},$$

ou seja, a coleção de todas as palavras com k entradas tomando valores em $\{1, \dots, m\}$. Uma vez que F é atrator desse IFS e que a união das imagens de uma aplicação é a aplicação da união, segue por indução que

$$F = \bigcup_{I_k} F_{i_1 \dots i_k}, \quad (9.2)$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$. O caso $k = 1$ é verdade, uma vez $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F) = \bigcup_{I_1} S_{i_1}$. Vamos supor que a equação 9.2 seja verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$ e vamos provar que é verdadeira também para $k + 1$. De fato, note que

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F) = \bigcup_{I_1} S_{i_1} \left(\bigcup_{I_k} F_{j_1 \dots j_k} \right) = \bigcup_{I_{k+1}} F_{i_1 \dots i_{k+1}}.$$

Consequentemente, $\{F_{i_1 \dots i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in I_k\}$ é uma cobertura de F . Já que $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$ é uma similaridade com fator $r_{i_1} \dots r_{i_k}$, nos temos que

$$\begin{aligned} \text{diam}(F_{i_1 \dots i_k}) &= \sup \{d(S_{i_1 \dots i_k}(x), S_{i_1 \dots i_k}(y)) : x, y \in F\} \\ &= \sup \{r_{i_1 \dots i_k} \cdot d(x, y) : x, y \in F\} \\ &= r_{i_1} \dots r_{i_k} \cdot \sup \{d(x, y) : x, y \in F\} \\ &= r_{i_1} \dots r_{i_k} \cdot \text{diam}(F). \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \sum_{I_k} (\text{diam}(F_{i_1 \dots i_k}))^s &= \sum_{I_k} (r_{i_1} \dots r_{i_k})^s \cdot (\text{diam}(F))^s \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i_1=1}^m r_{i_1}^s \right) \left(\sum_{i_2=1}^m r_{i_2}^s \right) \dots \left(\sum_{i_k=1}^m r_{i_k}^s \right)}_{=1} \text{diam}(F)^s \\ &= \text{diam}(F)^s. \end{aligned}$$

Observe que

$$\text{diam}(F_{i_1 \dots i_k}) = r_{i_1} \dots r_{i_k} \text{diam}(F) \leq \max\{r_{i_1}, \dots, r_{i_k}\}^k \text{diam}(F),$$

já que $r_{i_j} \leq \max\{r_{i_1}, \dots, r_{i_k}\}$, com $j = 1, \dots, k$. Com isso, dado qualquer $\delta > 0$, podemos fixar um $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, se $k > k_0$, então $\max\{r_{i_1}, \dots, r_{i_k}\}^k < \frac{\delta}{\text{diam}(F)+1}$. Logo, se $k > k_0$, então $\max\{r_{i_1}, \dots, r_{i_k}\}^k \text{diam}(F) < \delta$. Sendo assim, como

$$\mathcal{H}_{\delta}^s = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^s : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i = F \text{ e } \text{diam}(U_i) \leq \delta \right\},$$

temos que

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \sum_{I_k} \text{diam}(F_{i_1 \dots i_k}) = (\text{diam}(F))^s.$$

Assim,

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \leq (\text{diam}(F))^s.$$

Portanto, $\dim_{\mathcal{H}} F \leq s$ (já que F é limitado (pois F é compacto), então $\text{diam}(F) < \infty$, logo não podemos ter que a $\dim_{\mathcal{H}} F > s$, uma vez que se esse fosse o caso temos que $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ para todo $s > \dim_{\mathcal{H}} F$).

Para ver que $\dim_{\mathcal{H}} F \geq s$, note que pelo lema 9.16, $\nu(U) \leq \text{diam}(U)^s q$, o qual resulta do Princípio de Distribuição de Massa 9.10 que $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{1}{q} > 0$, e, conseqüentemente, $\dim_{\mathcal{H}} F \geq s$. Portanto, $\dim_{\mathcal{H}} F = s$.

Vamos agora provar que $\dim_B F = s$. Para isso, de modo semelhante ao que foi feito no lema 9.16, cobriremos F com os conjuntos $\bar{V}_{i_1 \dots i_k}$ (com $(i_1, \dots, i_k) \in Q$). Dado $0 < r < 1$, escolha Q como no lema 9.16. Como $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$, podemos concluir, por indução, que $\sum_Q (r_{i_1} \dots r_{i_k})^s = 1$, e, além disso, como

$$\left(\min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\} \right) \cdot r \leq r_{i_1} \dots r_{i_k},$$

temos que Q possui no máximo $\left(\min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\} \right)^{-s} r^{-s}$ seqüências. Ademais, para toda seqüência $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ sabemos que $r_{i_1} \dots r_{i_k} \leq r$. Logo,

$$\text{diam}(\bar{V}_{i_1 \dots i_k}) = r_{i_1} \dots r_{i_k} \text{diam}(\bar{V}) \leq r \text{diam}(\bar{V}).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B F &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \left(\left(\min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\} \right)^{-s} r^{-s} \right)}{-\log(r \text{diam}(V))} \\ &= \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{-\left(\log \left(\min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\} \right)^s + \log r^s \right)}{-\left(\log(\text{diam}(V)) + \log r \right)} \\ &= \limsup_{r \rightarrow 0} \left[s \cdot \left(\frac{\log \left(\min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\} \right) + \log r}{\log(\text{diam}(V)) + \log r} \right) \right] \\ &= s \cdot \limsup_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\log \left(\min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\} \right) + \log r}{\log(\text{diam}(V)) + \log r} \right) \\ &= s \cdot \limsup_{r \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\log r \left(\frac{\log \left(\min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{r_i\} \right)}{\log r} + 1 \right)}{\log r \left(\frac{\log(\text{diam}(V))}{\log r} + 1 \right)} \right)}_{=1} = s. \end{aligned}$$

— por sua vez, concluímos que $s = \dim_{\mathcal{H}}(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F) \leq s$. Portanto, $\dim_B(F) =$

s. □

9.1.1 Exemplos

Exemplo 9.18 (CONJUNTO DE CANTOR TERNÁRIO). Consideremos o IFS $\{\mathbb{R}; S_1, S_2\}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$S_1(x) := \frac{1}{3}x, \text{ e } S_2(x) := \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

É imediato ver que S_1 e S_2 são similaridades, e que os fatores de similaridade de S_1 e de S_2 são ambos iguais a $\frac{1}{3}$. Além disso, pode-se mostrar que o conjunto de Cantor ternário, $C_{\frac{1}{3}}$, é o atrator desse IFS. Para que possamos utilizar o teorema 9.17 para calcular a dimensão de Hausdorff de $C_{\frac{1}{3}}$, precisamos mostrar que o IFS $\{\mathbb{R}; S_1, S_2\}$ satisfaz a condição de conjunto aberto. Para isso, no entanto, basta considerarmos o aberto $\mathcal{O} :=]0, 1[$ e observarmos que:

- $S_1(\mathcal{O}) =]0, \frac{1}{3}[$ — pois, se $x \in]0, 1[$, então $\frac{x}{3} \in]0, \frac{1}{3}[$, e, se $y \in]0, \frac{1}{3}[$, então

$$S_1^{-1}(y) = 3y \in]0, 1[;$$

- $S_2(\mathcal{O}) =]\frac{2}{3}, 1[$ — pois, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in]0, 1[\Rightarrow \frac{x}{3} \in]0, \frac{1}{3}[\Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \in]\frac{2}{3}, 1[\Rightarrow S_2(x) \in]\frac{2}{3}, 1[,$$

e, para todo $y \in \mathbb{R}$,

$$y \in]\frac{2}{3}, 1[\Rightarrow 3y \in]2, 3[\Rightarrow 3y - 2 \in]0, 1[\Rightarrow S_2^{-1}(y) \in]0, 1[;$$

- $]0, \frac{1}{3}[\cup]\frac{2}{3}, 1[\subseteq]0, 1[$; e
- $]0, \frac{1}{3}[\cap]\frac{2}{3}, 1[= \emptyset$.

Resulta do teorema 9.17 que a dimensão de Hausdorff de $C_{\frac{1}{3}}$ coincide com sua dimensão de similaridade — a qual, por sua vez, é o único número real s tal que

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1.$$

Consequentemente, $\dim_{\mathcal{H}}(C_{\frac{1}{3}}) = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Exemplo 9.19 (TRIÂNGULO DE SIERPINSKI). O atrator do IFS $\{\mathbb{R}^2; S_1, S_2, S_3\}$ tal que, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$S_1(x, y) := \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right), S_2(x, y) := \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right), \text{ e } S_3(x, y) := \left(\frac{x}{2}, \frac{y+1}{2}\right)$$

é o triângulo de Sierpinski. Para calcularmos sua dimensão de Hausdorff por meio do teorema de Moran, precisamos verificar que esse IFS satisfaz a OSC. Para isso, consideremos, inicialmente, os abertos

$$\mathcal{O} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, \text{ e } 0 < y < 1 - x\},$$

$$\mathcal{O}_1 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \frac{1}{2}, \text{ e } 0 < y < \frac{1}{2} - x \right\},$$

$$\mathcal{O}_2 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x < 1, \text{ e } 0 < y < 1 - x \right\}$$

e

$$\mathcal{O}_3 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \frac{1}{2}, \text{ e } \frac{1}{2} < y < 1 - x \right\},$$

os quais podem ser observados pela Figura 9.3.

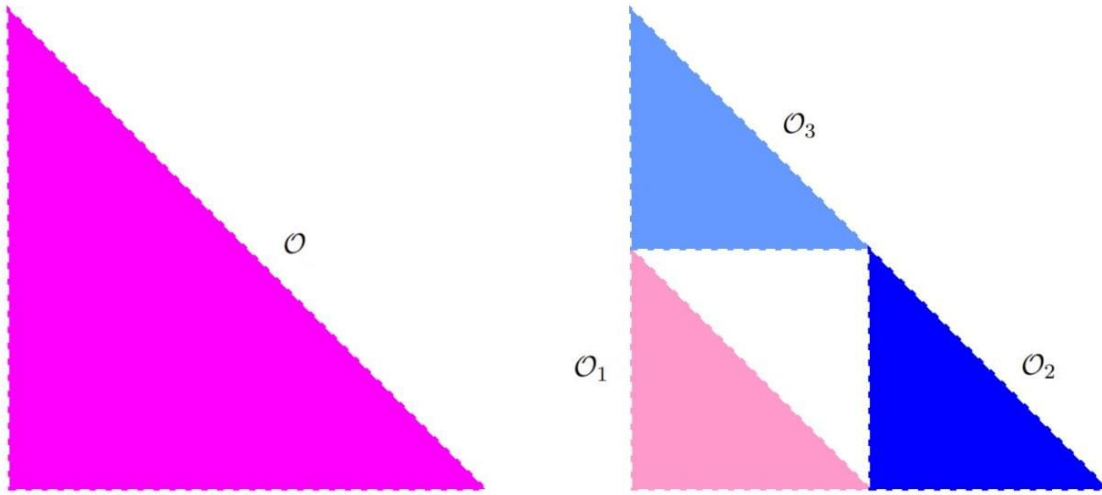


Figura 9.3. OSC no caso do triângulo de Sierpinski

Fonte: autora.

Como $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}$, e, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{O} &\Rightarrow 0 < x < 1, \text{ e } 0 < y < 1 - x \\ &\Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}, \text{ e } 0 < \frac{y}{2} < \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \\ &\Rightarrow \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right) \in \mathcal{O}_1 \\ &\Rightarrow S_1(x, y) \in \mathcal{O}_1, \end{aligned}$$

temos $S_1(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}$. Da mesma forma, como $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}$, e, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{O} &\Rightarrow 0 < x < 1, \text{ e } 0 < y < 1 - x \\ &\Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}, \text{ e } 0 < \frac{y}{2} < \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{x+1}{2} < 1, \text{ e } 0 < \frac{y}{2} < 1 - \left(\frac{x+1}{2} \right) \\ &\Rightarrow \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2} \right) \in \mathcal{O}_2 \\ &\Rightarrow S_2(x, y) \in \mathcal{O}_2, \end{aligned}$$

temos $S_2(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}$. E, por fim, como $\mathcal{O}_3 \subseteq \mathcal{O}$, e, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{O} &\Rightarrow 0 < x < 1, \text{ e } 0 < y < 1 - x \\ &\Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}, \text{ e } 0 < \frac{y}{2} < \frac{1-x}{2} \\ &\Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}, \text{ e } 0 < \frac{y+1}{2} < 1 - \frac{x}{2} \\ &\Rightarrow \left(\frac{x}{2}, \frac{y+1}{2} \right) \in \mathcal{O}_3 \\ &\Rightarrow S_3(x, y) \in \mathcal{O}_3, \end{aligned}$$

temos também $S_3(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}_3 \subseteq \mathcal{O}$. Logo, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, $S_i(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}_i \subseteq \mathcal{O}$. Sendo assim, para concluirmos que $S_1(\mathcal{O})$, $S_2(\mathcal{O})$ e $S_3(\mathcal{O})$ são dois a dois disjuntos, basta notarmos que $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset$ quaisquer que sejam i e j em $\{1, 2, 3\}$ tais que $i \neq j$. É, contudo, imediato ver que $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$, e que $\mathcal{O}_2 \cap \mathcal{O}_3 = \emptyset$. E, uma vez que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \in \mathcal{O}_1 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2}, \text{ e } 0 < y < \frac{1}{2} - x \Rightarrow y < \frac{1}{2},$$

e

$$(x, y) \in \mathcal{O}_3 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2}, \text{ e } \frac{1}{2} < y < 1 - x \Rightarrow y > \frac{1}{2},$$

$\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_3$ é também vazia. Resulta, pois, do teorema 9.17 e do fato de que os fatores de similaridade de S_1 , de S_2 e de S_3 são todos iguais a $\frac{1}{2}$ que a dimensão de Hausdorff de \mathcal{T} é o único número real s tal que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1.$$

Por conseguinte, $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{T}) = \frac{\log 3}{\log 2}$.

9.2 Variações do teorema de Moran

Podemos adaptar os cálculos realizados na demonstração do teorema de Moran afim de obtermos uma estimativa da dimensão do conjunto autossimilar F gerado por uma coleção de contrações que não são similaridades.

Proposição 9.20. *Sejam um IFS $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ e F o seu atrator. Então $\dim_{\mathcal{H}} F \leq s$ e $\dim_B F \leq s$, em que s é a dimensão de similaridade de F .*

Demonstração. Estas estimativas seguem essencialmente da prova do teorema de Moran, observando que temos a desigualdade $\text{diam}(F_{i_1 \dots i_k}) \leq r_{i_1} \dots r_{i_k} \text{diam}(F)$ para cada conjunto F , em vez de igualdade. \square

A proposição seguinte nos fornece uma cota inferior para dimensão de Hausdorff de F no caso em que as componentes $S_i(F)$ são disjuntas.

Proposição 9.21. *Sejam um IFS $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ e F seu atrator. Assuma que o atrator F satisfaça $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$, com essa união disjunta. Nessas condições, $\dim_{\mathcal{H}} F \geq s$, no qual $\sum_{i=1}^m b_i^s = 1$.*

Demonstração. Seja $d > 0$ a distância mínima entre qualquer par dos conjuntos compactos disjuntos $S_1(F), \dots, S_m(F)$, isto é,

$$d = \min_{i \neq j} \inf \left\{ |x - y| : x \in S_i(F), y \in S_j(F) \right\}.$$

E, seja $F_{i_1 \dots i_k} = (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(F)$. Defina μ por $\mu(F_{i_1 \dots i_k}) = (b_{i_1} \dots b_{i_k})^s$. Como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mu(F_{i_1 \dots i_k i}) &= \sum_{i=1}^m (b_{i_1} \dots b_{i_k} b_i)^s \\ &= (b_{i_1} \dots b_{i_k})^s \underbrace{\sum_{i=1}^m b_i^s}_{=1} \\ &= (b_{i_1} \dots b_{i_k})^s \\ &= \mu(F_{i_1 \dots i_k}) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^m F_{i_1 \dots i_k i}\right), \end{aligned}$$

μ é uma distribuição de massa em F , e $\mu(F) = 1$. Sendo assim, se $x \in F$, então existe um única sequência infinita (i_1, i_2, \dots) tal que $x \in F_{i_1 \dots i_k}$ para cada k . Para $0 < r < d$, seja k o menor inteiro tal que

$$b_{i_1} \dots b_{i_k} d \leq r \leq b_{i_1} \dots b_{i_{k-1}} d.$$

Se (i'_1, \dots, i'_k) é disjunto de (i_1, \dots, i_k) , os conjuntos $F_{i'_1 \dots i'_k}$ e $F_{i_1 \dots i_k}$ são disjuntos e separados por uma distância de pelo menos $b_{i_1} \dots b_{i_k} d > r$, pois se j é o menor inteiro tal que $i_j \neq i'_j$, então $F_{i_j \dots i_k} \subseteq F_{i_j}$ e $F_{i'_j \dots i'_k} \subseteq F_{i'_j}$ estão separados por d , logo $F_{i_1 \dots i_k}$ e $F_{i'_1 \dots i'_k}$ estão separados por pelo menos $b_{i_1} \dots b_{i_{j-1}} d$. Disso segue que $F \cap B_r(x) \subseteq F_{i_1 \dots i_k}$. Logo,

$$\mu(F \cap B_r(x)) \leq \mu(F_{i_1 \dots i_k}) = (b_{i_1} \dots b_{i_k})^s \leq d^{-s} r^s.$$

Sendo assim, se $U \cap F \neq \emptyset$, então $U \subseteq B_r(x)$ para algum $x \in F$ com $r = \text{diam}(U)$. Consequentemente,

$$\mu(U) \leq d^{-s} \text{diam}(U)^s,$$

resulta do teorema do Princípio de Distribuição de Massa 9.10, que $\mathcal{H}^s(F) > 0$, logo $\dim_{\mathcal{H}}(F) \geq s$. \square

9.2.1 Dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia

Definição 9.22. Para cada $c \in \mathbb{C}$, seja $J(f_c)$ o conjunto de Julia associado ao polinômio

$$f_c(z) := z^2 + c.$$

A seguir, aplicaremos as proposições provadas na seção 9.2 para mostrar que, para todo $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c|$ seja suficientemente grande, tem-se $\dim_{\mathcal{H}} J(f_c) \simeq \frac{2 \log 2}{\log(4|c|)}$.

Teorema 9.23. *Suponha que $c \in \mathbb{C}$ seja tal que $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$. Nessas condições, $J(f_c)$ é o atrator do IFS cujas contrações são os dois ramos da inversa de f_c sobre o disco fechado de centro na origem e raio $|2c|^{\frac{1}{2}}$. Além disso, se $|c|$ for suficientemente grande, então*

$$\dim_B J(f_c) = \dim_{\mathcal{H}} J(f_c) \simeq \frac{2 \log 2}{\log(4|c|)}.$$

Demonstração. Por simplicidade, nesta demonstração, vamos denotar f_c simplesmente por f . Como $f(z) = z^2 + c$ qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$, para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $z \neq c$, há dois valores possíveis para $f^{-1}(z)$ (a saber, $(z - c)^{\frac{1}{2}}$ e $-(z - c)^{\frac{1}{2}}$). Seja $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |2c|^{\frac{1}{2}}\}$. Se $f(z) \in D$, como

$$2 \leq |c| \implies 2 \cdot |c| \leq |c| \cdot |c| \implies \sqrt{2}|c|^{\frac{1}{2}} \leq |c|,$$

pela desigualdade triangular,

$$|z^2| \leq |z^2 + c| + |c| = |f(z)| + |c| \leq |2c|^{\frac{1}{2}} + |c| \leq |c| + |c| = 2|c|.$$

Então $|z| \leq |2c|^{\frac{1}{2}}$, disso resulta que $f^{-1}(D) \subseteq D$. Note que, $f(z) \in D$ se, e somente, se $|z^2 + c| \leq |2c|^{\frac{1}{2}}$, ou seja, se z^2 estiver no disco D_0 de centro $-c$ e raio $|2c|^{\frac{1}{2}}$. Como $0 \notin D_0$ (pois, $d(0, -c) = |c| > |2c|^{\frac{1}{2}}$), a “raiz quadrada” de D_0 , isto é, $\{z : z^2 \in D_0\} = f^{-1}(D)$, compreende duas regiões disjuntas, D_1 e D_2 digamos, em lados opostos de alguma linha reta passando por 0.

Sejam

$$A := \{z : z^2 \in D_0\} = f^{-1}(D)$$

e

$$B := \{z^2 : z \in A\}.$$

Para cada $w \in B$, podemos fixar $z_w \in A$ de modo que $z_w^2 = w$. Sejam $D_1 := \{z_w : w \in B\}$ e $D_2 := \{-z_w : w \in B\}$ e observe que :

1. $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, pois, para todo $w \in B$,

$$z_w = -z_w \Leftrightarrow 2z_w = 0 \Leftrightarrow z_w = 0;$$

2. $D_1, D_2 \subseteq A$, por construção;

3. $A \subseteq D_1 \cup D_2$, pois, se $z \in A$, e $w := z^2$, então

$$\begin{aligned} z_w^2 = z^2 &\Leftrightarrow z_w^2 - z^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (z_w + z)(z_w - z) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = z_w \text{ ou } z = -z_w; \end{aligned}$$

4. $f(D_1) = \{z_w^2 + c : w \in B\} = \{(-z_w)^2 + c : w \in B\} = f(D_2)$; além disso,

$$\begin{aligned} f(D_1) &= \{z_w^2 + c : w \in D\} \\ &= \{w + c : w \in B\} \\ &= \{z^2 + c : z \in A\} \\ &= \{f(z) : z \in f^{-1}(D)\} \\ &= f(f^{-1}(D)) = D, \end{aligned}$$

logo, $f(D_1) = f(D_2) = D$;

5. para quaisquer w_1 e w_2 em B ,

$$f(zw_1) = f(zw_2) \Leftrightarrow \underbrace{zw_1^2}_{=w_1} + c = \underbrace{zw_2^2}_{=w_2} + c \Leftrightarrow w_1 = w_2 \Leftrightarrow zw_1 = zw_2;$$

analogamente, para quaisquer w_1 e w_2 em B ,

$$f(-zw_1) = f(-zw_2) \Leftrightarrow zw_1 = zw_2.$$

As aplicações

$$\begin{aligned} f_1 : D_1 &\rightarrow D \\ z &\mapsto f(z) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_2: D_2 &\rightarrow D \\ z &\mapsto f(z) \end{aligned}$$

são bijetoras (pelos itens 4 e 5); portanto, como $D_1, D_2 \subseteq f^{-1}(D) \subseteq D$, podemos considerar suas inversas $S_1, S_2: D \rightarrow D$. Para cada $i \in \{1, 2\}$, tem-se

$$|S_i(z_1) - S_i(z_2)| = |(z_1 - c)^{\frac{1}{2}} - (z_2 - c)^{\frac{1}{2}}| = \frac{|z_1 - z_2|}{|(z_1 - c)^{\frac{1}{2}} + (z_2 - c)^{\frac{1}{2}}|}.$$

Logo, considerando o menor e o maior valor de $\frac{|z_1 - z_2|}{|(z_1 - c)^{\frac{1}{2}} + (z_2 - c)^{\frac{1}{2}}|}$ quando z_1 e z_2 variam em D , podemos concluir que

$$\frac{1}{2} \cdot (|c| + |2c|^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{|S_i(z_1) - S_i(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leq \frac{1}{2} \cdot (|c| - |2c|^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}.$$

quaisquer que sejam $i \in \{1, 2\}$ e $z_1, z_2 \in D$.

O limite superior é menor que 1 se $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$, no caso em que S_1 e S_2 são contrações em D . Pelo corolário 7.10, existe um único atrator compacto não vazio $F \subseteq D$ do IFS $\{\mathbb{C}; S_1, S_2\}$ tal que $S_1(F) \cup S_2(F) = F$. Além disso, como $F \subseteq D$, e $S_1(D)$ e $S_2(D)$ são disjuntos, $S_1(F)$ e $S_2(F)$ também são disjuntos. É claro que F é o conjunto de Julia $J = J(f_c)$. Uma maneira de ver isso é notar que D contém pelo menos um ponto z de J (por exemplo, um ponto fixo repulsor de f_c). Observe que para todo $z \in \mathbb{C}$, tem-se:

$$\begin{aligned} z^2 + c = z &\Leftrightarrow z^2 - z + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + c - \frac{1}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - c \\ &\Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - c} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{1 - 4c}), \end{aligned}$$

com $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$. Logo, $z_1 := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c})$ e $z_2 := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c})$ são os pontos fixos de f_c . Então, $f'(z_1) = 2z_1 = 1 + \sqrt{1 - 4c}$,

$$|f'(z_1)| > 1 \iff |1 + \sqrt{1 - 4c}| > 1.$$

Podemos aplicar a desigualdade do paralelogramo² para os vetores z_1 e z_2 , obtendo:

$$\begin{aligned} |1 + \sqrt{1 - 4c}|^2 + |1 - \sqrt{1 - 4c}|^2 &= 2(|1|^2 + |\sqrt{1 - 4c}|^2) \\ &= 2 \left(1 + \underbrace{|1 - 4c|}_{>0, \text{ pois } c \neq \frac{1}{4}} \right) > 2 \end{aligned}$$

Logo, ou $|1 + \sqrt{1 - 4c}| > 1$, ou $|1 - \sqrt{1 - 4c}| > 1$. Falta mostrarmos que pelo menos um dos

²Observe que \mathbb{C} é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} em relação as operações usuais de adição e de multiplicação por escalar. Além disso, como podemos definir em \mathbb{C} um produto interno compatível com a norma usual, a desigualdade do paralelogramo é válida. Logo, para quaisquer $v, u \in \mathbb{C}$, tem-se $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$

pontos fixos z_1 e z_2 pertencem a D . Se

$$z_1 \in D \Leftrightarrow |z_1| \leq \sqrt{2|c|} \Leftrightarrow |1 + \sqrt{1 - 4c}| \leq 2\sqrt{2|c|}.$$

Agora precisamos verificar se $|1 + \sqrt{1 - 4c}| \leq 2\sqrt{2|c|}$. Note que :

$$|\sqrt{1 - 4c}|^2 \leq 1 + |\sqrt{1 - 4c}| < \underbrace{1}_{< \frac{|c|}{4}} + 4|c| < \frac{9}{2}|c|, \text{ pois } |c| > 2.$$

Portanto, $|\sqrt{1 - 4c}| < \sqrt{\frac{9}{2}|c|}$. Logo,

$$|1 + \sqrt{1 - 4c}| \leq 1 + |\sqrt{1 - 4c}| < 1 + \sqrt{\frac{9}{2}|c|}.$$

Observe que:

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{\frac{9}{2}|c|} < \sqrt{8|c|} &\Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{\frac{9}{2}|c|} + \frac{9}{2}|c| < 8|c| \\ &\Leftrightarrow 1 + 3\sqrt{2|c|} + \frac{9}{2}|c| < 8|c| \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{2|c|} < \underbrace{\frac{7}{2}|c| + 1}_{> 0, \text{ pois } |c| > 2} \\ &\Leftrightarrow \frac{49}{4}|c|^2 - 25|c| + 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow 49|c|^2 - 100|c| + 4 > 0 \\ &\Leftrightarrow |c| > 2. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$|1 + \sqrt{1 - 4c}| \leq 1 + |\sqrt{1 - 4c}| < 1 + \sqrt{\frac{9}{2}|c|} < \sqrt{8|c|} = 2\sqrt{2|c|},$$

do que resulta que $|z_1| = \frac{1}{2}|1 + \sqrt{1 - 4c}| < \sqrt{2|c|}$. De modo análogo, podemos provar que $|z_2| < \sqrt{2|c|}$. Portanto, $z_1, z_2 \in D$.

Sabemos que pelo teorema 3.16 $J = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f_c^{-k}(z)} \subseteq D$, pois $f_c^{-k}(D) \subseteq D$. Com efeito, J é um subconjunto compacto não vazio de D satisfazendo $J = f_c^{-1}(J)$, equivalentemente, $J = S_1(J) \cup S_2(J)$. Assim, $J = F$ por unicidade do atrator de um IFS.

Finalmente, para estimar a dimensão de $J(f_c) = F$, aplicamos as proposições 9.2 e 9.21. Assim, os limites inferior e superior para $\dim_{\mathcal{H}} J(f_c)$ são dados pela solução da equação

$$2 \left(\frac{1}{2} \left(|c| \pm |2c|^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^s = 1.$$

Seja $k = |c| \pm |2c|^{\frac{1}{2}}$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
 2 \left(\left(\frac{1}{2} \right) \cdot \left(|c| \pm |2c|^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^s = 1 &\Leftrightarrow 2 \left(\left(\frac{1}{2} \right) \cdot k^{-\frac{1}{2}} \right)^s = 1 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2^s} \right) \cdot \left(k^{-\frac{s}{2}} \right) = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow k^{-\frac{s}{2}} = 2^{s-1} \\
 &\Leftrightarrow \log \left(k^{-\frac{s}{2}} \right) = \log \left(2^{s-1} \right) \\
 &\Leftrightarrow \left(-\frac{s}{2} \right) \cdot \log(k) = (s-1) \cdot \log(2) \\
 &\Leftrightarrow 2 \cdot \left(-\frac{s}{2} \right) \cdot \log(k) = (s-1) \cdot 2 \cdot \log(2) \\
 &\Leftrightarrow (-s) \cdot \log(k) = s \cdot \log(2^2) - 2 \cdot \log(2) \\
 &\Leftrightarrow 2 \cdot \log(2) = s \cdot \log(4) + s \cdot \log(k) \\
 &\Leftrightarrow 2 \cdot \log(2) = s \cdot (\log(4) + \log(k)) \\
 &\Leftrightarrow 2 \cdot \log(2) = s \cdot \log(4k) \\
 &\Leftrightarrow s = \frac{2 \cdot \log(2)}{\log(4k)}.
 \end{aligned}$$

Portanto, $\dim_{\mathcal{H}} J(f_c) = s = \frac{2 \cdot \log(2)}{\log(4(|c| \pm |2c|^{\frac{1}{2}}))}$.

□

Apêndice A

Resultados Utilizados

A.1 Capítulo 3

Teorema A.1 (MONTEL). *Seja \mathcal{G} uma família de funções meromorfas em um domínio \mathcal{U} . Se existem três valores fixos que são omitidos para toda $g \in \mathcal{G}$, isto é, existem $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$ tais que:*

$$\{a, b, c\} \cap \left(\bigcup_{g \in \mathcal{G}} g(\mathcal{U}) \right) = \emptyset,$$

então \mathcal{G} é uma família normal.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Dev07]. □

A.2 Capítulo 4

As demonstrações de todos os teoremas enunciados nesse capítulo podem ser encontradas em [Edg08].

Teorema A.2 (PROPRIEDADE DE LINDELÖF). *Se (S, d) é um espaço métrico, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *existe um conjunto enumerável D denso em S ;*
2. *S possui uma base enumerável;*
3. *cada cobertura aberta de S possui uma subcobertura enumerável.*

Proposição A.3. *Suponha que F é fechado e U é aberto. Se $F \subseteq U$, então existe um aberto V com $F \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.*

Teorema A.4. *Seja n um inteiro positivo e seja S um espaço métrico. Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $F_i \subseteq S$ um conjunto fechado. Se $\text{Cov } F_i \leq n$ para todo i , então $\text{Cov } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \leq n$.*

Teorema A.5. *Seja (S, d) um espaço métrico, e seja \mathcal{U} uma cobertura aberta de S . Então existe um número positivo r tal que para qualquer conjunto $A \subseteq S$, com $\text{diam}(A) < r$, existe um conjunto $U \in \mathcal{U}$ com $A \subseteq U$,*

O número r com a propriedade do teorema acima é conhecido como número de Lebesgue da cobertura \mathcal{U} .

Teorema A.6. *Seja n um inteiro positivo e seja S um espaço métrico. Para cada, $i \in \mathbb{N}$, seja $F_i \subseteq S$ um conjunto fechado. Se $\text{Cov } F_i \leq n$ para todo i , então $\text{Cov } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \leq n$.*

Teorema A.7. *Seja (S, d) um espaço métrico, e sejam F_1, F_2 subconjuntos fechados. Se $\text{Cov } F_1 \leq 1$ e $\text{Cov } F_2 \leq 1$, então $\text{Cov}(F_1 \cup F_2) \leq 1$.*

Teorema A.8. *Seja (S, d) um espaço métrico, $A \subseteq S$, e $T \subseteq S$. Então $\partial_T(A \cap T) \subseteq \partial_S A$.*

A.3 Capítulo 6

Teorema A.9. *Suponha que F pode ser coberto por n_k conjuntos de diâmetro no máximo δ_k com $\delta_k \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Então*

$$\dim_{\mathcal{H}} \leq \underline{\dim}_B F \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}.$$

Além disso, se $n_k \delta_k^s$ permanece limitado quando $k \rightarrow \infty$, então $\mathcal{H}^s(F) < \infty$. Se $\delta_k \rightarrow 0$, mas $\delta_{k+1} \geq c \delta_k$ para algum $0 < c < 1$, então

$$\overline{\dim}_B F \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Fal04]. □

A.4 Capítulo 7

Definição A.10 (PONTO FIXO). Seja $f : X \rightarrow X$, dizemos que $x \in X$ é um **ponto fixo** de f se satisfaz $f(x) = x$.

Teorema A.11 (TEOREMA DO PONTO FIXO). *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \rightarrow X$ uma contração. Então f tem um único ponto fixo, isto é, existe um único ponto $p \in X$ tal que $f(p) = p$. Além disso, para qualquer $x \in X$ temos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [SA11]. □

A.5 Capítulo 8

Teorema A.12 (TYCHONOFF). *Se $((X_i, \tau_i))_{i \in I}$ é uma família de espaços topológicos compactos, e τ_{prod} é a topologia produto associada a essa família, então $(\prod_{i \in I} X_i, \tau_{prod})$ é também compacto.*

Lema A.13. *Seja (X, d) um espaço métrico, e sejam K_1 e K_2 compactos de (X, d) . Nessas condições, existem $x_0 \in K_1$ e $y_0 \in K_2$ tais que $|x_0 - y_0| \leq |x - y|$ quaisquer que sejam $x \in K_1$ e $y \in K_2$.*

A seguir, apresentaremos uma demonstração alternativa de que a aplicação de endereçamento do atrator de um IFS totalmente desconexo é um homeomorfismo.

Teorema A.14. *Sejam $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ um IFS totalmente desconexo, A seu atrator, Σ_m o espaço dos códigos associado a esse IFS, e $\varphi : \Sigma_m \rightarrow A$ a aplicação de endereçamento de A . Nessas condições, φ é um homeomorfismo.*

Demonstração. Resulta do teorema 8.27 que φ é contínua e sobrejetora. E, como, por hipótese, o IFS é totalmente desconexo, φ é também injetora. Sendo assim, basta mostrarmos que φ^{-1} é contínua.

Seja $(i_1, i_2, \dots) \in \Sigma_m$. Vamos mostrar, a seguir, que φ^{-1} é contínua em $x_{i_1 i_2 \dots}$. Para isso, precisamos provar que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $(j_1, j_2, \dots) \in \Sigma_m$,

$$d(x_{i_1 i_2 \dots}, x_{j_1 j_2 \dots}) < \delta \Rightarrow d(\varphi^{-1}(x_{i_1 i_2 \dots}), \varphi^{-1}(x_{j_1 j_2 \dots})) < \epsilon.$$

Como, porém, para todo $(j_1, j_2, \dots) \in \Sigma_m$,

$$d_{\Sigma_m}(\varphi^{-1}(x_{i_1 i_2 \dots}), \varphi^{-1}(x_{j_1 j_2 \dots})) = d((i_1, i_2, \dots), (j_1, j_2, \dots)),$$

isso equivale a mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $(j_1, j_2, \dots) \in \Sigma_m$,

$$d(x_{i_1 i_2 \dots}, x_{j_1 j_2 \dots}) < \delta \Rightarrow d((i_1, i_2, \dots), (j_1, j_2, \dots)) < \epsilon.$$

Fixemos, pois, $\epsilon > 0$ de modo arbitrário e consideremos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{m-1}{m(m+1)^n} < \epsilon$. Resulta do item 1 da proposição 8.5 que, se $(j_1, j_2, \dots) \in \Sigma_m$ é tal que $j_1 = i_1, j_2 = i_2, \dots, j_n = i_n$, então $d((i_1, i_2, \dots), (j_1, j_2, \dots)) \leq \frac{m-1}{m(m+1)^n}$. Em vista disso, para concluirmos que

$$d((i_1, i_2, \dots), (j_1, j_2, \dots)) < \epsilon,$$

basta encontrarmos $\delta > 0$ tal que, para todo $(j_1, j_2, \dots) \in \Sigma_m$,

$$d(x_{i_1 i_2 \dots}, x_{j_1 j_2 \dots}) < \delta \Rightarrow i_1 = j_1, \dots, i_n = j_n.$$

Para tanto, notemos, inicialmente, que, dado $(j_1, j_2, \dots) \in \Sigma_m$ tal que $(j_1, j_2, \dots) \neq (i_1, i_2, \dots)$, tem-se, necessariamente, $(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n})(A) \cap (S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_n})(A) = \emptyset$. Com efeito, se

$$a \in (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n})(A) \cap (S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_n})(A),$$

existiriam $(\alpha_1, \alpha_2, \dots), (\beta_1, \beta_2, \dots) \in \Sigma_m$ tais

$$a = (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n})(x_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}) = x_{i_1 \dots i_n \alpha_1 \alpha_2 \dots},$$

e

$$a = (S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_n})(x_{\beta_1 \beta_2 \dots}) = x_{j_1 \dots j_n \beta_1 \beta_2 \dots},$$

e, conseqüentemente, o ponto a teria dois endereços — o que seria um absurdo, pois, por hipótese, o IFS $\{X; S_1, \dots, S_m\}$ é totalmente desconexo. Por sua vez, como A é compacto, e, para cada $(j_1, j_2, \dots) \in \Sigma_m$, $S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_n}$ é contínua, é imediato ver que $(S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_n})(A)$ é compacto qualquer que seja $(j_1, j_2, \dots) \in \Sigma_m$. Conseqüentemente, para para cada $(j_1, j_2, \dots) \in \Sigma_m$ tal que $(j_1, j_2, \dots) \neq (i_1, i_2, \dots)$, $(S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_n})(A)$ e $(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n})(A)$ são compactos disjuntos, e, portanto, resulta do lema A.13 que a distância entre eles é positiva.

Como

$$\mathcal{I}_n := \{(j_1, \dots, j_n) : (j_1, \dots, j_n) \neq (i_1, \dots, i_n), \text{ e, } \forall \ell \in \{1, \dots, n\}, j_\ell \in \{1, \dots, m\}\}$$

é finito (pois possui $m^n - 1$ elementos), o conjunto

$$\mathcal{D}_n := \{d((S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_n})(A), (S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n})(A)) : (j_1, \dots, j_n) \in \mathcal{I}_n\}$$

é também finito, e, portanto, possui mínimo. Seja $\delta := \min(\mathcal{D}_n)$. Decorre da observação feita no parágrafo anterior que $\delta > 0$. Além disso, resulta da definição de \mathcal{D}_n e do fato de que $\delta = \min(\mathcal{D}_n)$ que, para todo $(j_1, j_2, \dots) \in \Sigma_m$,

$$d(x_{i_1 i_2 \dots}, x_{j_1 j_2 \dots}) < \delta \Rightarrow (j_1, j_2, \dots) \notin \mathcal{I}_n \Rightarrow j_1 = i_1, \dots, j_n = i_n.$$

Sendo assim, podemos concluir que, para todo $(j_1, j_2, \dots) \in \Sigma_m$,

$$d(x_{j_1 j_2 \dots}, x_{i_1 i_2 \dots}) < \delta \Rightarrow d_{\Sigma_m}((j_1, j_2, \dots), (i_1, i_2, \dots)) < \frac{m-1}{m(m+1)^n} < \epsilon.$$

E, como $(i_1, i_2, \dots) \in \Sigma_m$ e $\epsilon > 0$ são completamente arbitrários, disso resulta, por fim, que φ^{-1} é contínua. \square

Referências Bibliográficas

- [Bar14] M. F. Barnsley. *Fractals everywhere*. Academic press, 1^o edição, 2014. 79, 80, 85, 105
- [Con] K. Conrad. Isometries of \mathbb{R}^n . Disponível em <https://docplayer.net/6807402-Isometries-of-r-n-keith-conrad.html>. 110
- [Dev99] R. Devaney. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems, Theory and Experiments*. Modern Computing and Indigenous Design, 1^o edição, 1999. 13, 85
- [Dev07] R. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. CRC Press, 1^o edição, 2007. 4, 13, 21, 85, 89, 127
- [dLB19] D. de L. Brandão. Sobre o caos de devaney e implicações. Dissertação de Mestrado, Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), March 2019. 85
- [Edg08] G. A. Edgar. *Measure, topology, and fractal geometry*. JNew York: Springer, 1^o edição, 2008. 23, 40, 59, 127
- [Egl99] R. Eglash. *African fractals*. Modern Computing and Indigenous Design, 1^o edição, 1999. 2, 5
- [Fal04] K. Falconer. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, 1^o edição, 2004. 3, 5, 43, 59, 79, 80, 105, 128
- [Fol99] G. B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, 1^o edição, 1999. 7, 8, 11, 15
- [Lim19] M. A. Lima. Conhecendo a geometria fractal a partir de conceitos básicos da geometria euclidiana plana. Dissertação de Mestrado, Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós Graduação em Matemática, Florianópolis, March 2019. 2
- [Lom20] L. Lomonaco. O conjunto de mandelbrot e suas cópias. <https://youtu.be/2xagAQfW5z0>, August 2020. Último acesso em 01/07/2021. 13
- [Mad06] Z. Maddock. Properties of the takagi function. *Ann Arbor, v. 1001*, página 48109, 2006. 59, 71
- [Man82] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: WH freeman, 1^o edição, 1982. 1
- [SA11] S. Sabogal e G. Arenas. Una introducción a la geometría fractal. Relatório técnico, Universidad Industrial Santander, Austin, USA, 2011. 2, 13, 19, 59, 80, 85, 89, 90, 96, 105, 128
- [Sut14] S. Sutherland. An introduction to julia and fatou sets. *International Conference on Fractals and Wavelets*, página 20, 2014. 5, 13, 22
- [VDE18] Jesper VAN DEN EIJDEN. Fractal dimension of self-similar sets. Dissertação de Mestrado, Tese (doutorado) - Radboud University, March 2018. 59, 105