Introdução à Lógica Intuicionista

Fellipe Hernandes de Almeida

Dissertação apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

São Paulo
Agosto de 2023

Introdução à Lógica Intuicionista

Fellipe Hernandes de Almeida

Esta versão da dissertação contém
as correções e alterações sugeridas
pela Comissão Julgadora durante a
defesa da versão original do trabalho,
realizada em 4 de Agosto de 2023.

Uma cópia da versão original está
disponível no Instituto de Matemática e
Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão julgadora:

Prof. Dr. Rogério Augusto dos Santos Fajardo – IME-USP
Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa – UNESP
Prof. Dr. Darllan Conceição Pinto – UFBA

Ficha catalográfica elaborada com dados inseridos pelo(a) autor(a)
Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

```
Almeida, Fellipe Hernandes de
   Introdução à Lógica Intuicionista / Fellipe Hernandes de
Almeida; orientador, Rogério Fajardo. - São Paulo, 2023.
   135 p.


   Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação
em Matemática / Instituto de Matemática e Estatística
/ Universidade de São Paulo.
   Bibliografia
   Versão corrigida


   1. Lógica Intuicionista. I. Fajardo, Rogério. II. Título.
```

Bibliotecárias do Serviço de Informação e Biblioteca
Carlos Benjamin de Lyra do IME-USP, responsáveis pela
estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Maria Lúcia Ribeiro CRB-8/2766; Stela do Nascimento Madruga CRB 8/7534.

Dedico este trabalho à minha mãe, que sempre me apoiou mesmo nos momentos mais difíceis de minha trajetória acadêmica.

Agradecimentos

Agradeço à Universidade de São Paulo pela oportunidade de realizar meu mestrado.

Agradeço ao meu orientador Rogério, pelo apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço à minha mãe Adriana e ao meu amigo Julio, por terem me apoiado e me dado o suporte emocional necessário durante esse período.

Resumo

Fellipe Hernandes de Almeida. **Introdução à Lógica Intuicionista**. Dissertação (Mestrado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Realizamos uma revisão da bibliografia sobre a Lógica Intuicionista, em suas formas sentencial e de primeira ordem. Estudamos as estruturas algébricas utilizadas no estudo de sua semântica, e estudamos seu sistema de dedução natural. Apresentamos as estruturas de reticulados e álgebras de Heyting, e as utilizamos como ferramenta para o estudo da Lógica Sentencial Intuicionista e Lógica de Primeira Ordem Intuicionista.

Palavras-chave: lógica intuicionista. reticulados. álgebras de Heyting. modelos de Kripke. lógica de primeira ordem.

Abstract

Fellipe Hernandes de Almeida. **Introduction to Intuitionistic Logic**. Thesis (Master's).
Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2023.

We carried out a review of the bibliography on Intuitionistic Logic, in its sentential and first-order forms. We studied the algebraic structures used in the study of its semantics, and its system of natural deduction. We present the structures of lattices and Heyting algebras, and use them as a tool for the study of Intuitionistic Sentential Logic and Intuitionistic First-Order Logic.

Keywords: intuitionistic logic. lattices. Heyting algebras. Kripke models. first-order logic.

Sumário

Apêndices

Introdução

Durante o início do século XX, com a descoberta de paradoxos na teoria dos conjuntos de Cantor, vários matemáticos tentaram reformular os fundamentos da Matemática, de modo a evitar os paradoxos recém descobertos. O matemático holandês L. E. J. Brower propôs que a sequência dos números naturais é obtida através de nossa intuição, e todas as outras construções da Matemática são obtidas a partir da sequência dos números naturais, através da aplicação de métodos construtivos finitos.

As ideias de Brower deram origem a uma nova escola de pensamento na Filosofia da Matemática, conhecida como Intuicionismo. Os intuicionistas não consideram válido qualquer princípio que permita provar a existência de um objeto matemático sem exibir os passos de sua construção. Como consequência, o Intuicionismo rejeita princípios amplamente aceitos pelos matemáticos, como o Princípio do Terceiro Excluído e o Axioma da Escolha.

Em 1930, A. Heyting, um dos alunos de Brower, apresentou um sistema lógico baseado no Intuicionismo. A Lógica Intuicionista, como ficou conhecida, é um sistema lógico mais fraco que a Lógica Clássica, no seguinte sentido: toda sentença válida na Lógica Intuicionista é também válida na Lógica Clássica, mas a recíproca não é verdadeira. Além disso, a Lógica Intuicionista descreve não apenas os princípios lógicos da Matemática Intuicionista, mas também de outras abordagens construtivas da Matemática.

Neste trabalho, iremos estudar a Lógica Intuicionista em suas formas sentencial e de primeira ordem. Apresentamos a consequência sintática através de sistemas de dedução natural, e a semântica através de álgebras de Heyting. Utilizamos as ferramentas da álgebra, desenvolvidas nos capítulos 1 e 2, para provar a corretude e a completude dos dois sistemas lógicos.

Capítulo 1

Reticulados

Neste capítulo, estudamos os reticulados, construindo a base para o estudo das álgebras de Heyting no próximo capítulo.

Começamos apresentando sua estrutura algébrica e propriedades básicas. Estudamos a estrutura de ordem dos reticulados e sua relação com a estrutura algébrica. Definimos o conceito de homomorfismo de reticulados e estudamos sua relação com funções monótonas. Apresentamos a construção de reticulados duais e estudamos informalmente o Princípio da Dualidade.

Estudamos também como construir um reticulado completo a partir de um conjunto parcialmente ordenado. Ao final do capítulo, focamos nos reticulados distributivos. Apresentamos sua definição e estudamos a construção de filtros em reticulados distributivos limitados. Encerramos o capítulo estudando os principais resultados sobre ultrafiltros e filtros primos.

1.1 Reticulados

Um **reticulado** é uma estrutura da forma $\langle L, \wedge, \vee \rangle$, onde L (do inglês, *lattice*) é um conjunto não vazio, e $\wedge$ e $\vee$ são operações binárias em L, satisfazendo os seguintes axiomas, para $x, y, z \in L$:

(L1) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;

(L2) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$; **(Leis Associativas)**

(L3) $x \wedge y = y \wedge x$;

(L4) $x \vee y = y \vee x$; **(Leis Comutativas)**

(L5) $x \wedge (x \vee y) = x$;

(L6) $x \vee (x \wedge y) = x$. **(Leis de Absorção)**

Quando não houver risco de ambiguidade, iremos denotar o reticulado $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ pelo seu domínio L. Quando L é unitário, dizemos que L é um **reticulado trivial**.

Reticulados ocorrem frequentemente em diversas áreas da matemática. Abaixo citamos alguns dos exemplos mais comuns.

Exemplo 1.1. Seja X um conjunto. Como a interseção e união de conjuntos satisfazem as propriedades associativa, comutativa e de absorção, a estrutura $\langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup \rangle$ é um reticulado.

Exemplo 1.2. Sejam X um espaço topológico[1] e $\mathcal{O}(X)$ o conjunto dos abertos de X. Como a interseção e união de dois abertos de X é também um aberto de X, a estrutura $\langle \mathcal{O}(X), \cap, \cup \rangle$ é um reticulado.

Analogamente, se $\mathcal{C}(X)$ é o conjunto dos fechados de X, então $\langle \mathcal{C}(X), \cap, \cup \rangle$ é um reticulado.

Exemplo 1.3. Sejam A um anel comutativo com unidade e $\mathcal{I}(A)$ o conjunto dos ideais de A. Sabemos que a interseção de dois ideais de A é também um ideal de A.

Além disso, a soma de dois ideais, definida abaixo, também é um ideal de A:

$$I + J = \{a + b \, : \, a \in I \text{ e } b \in J\}$$

Desse modo, a estrutura $\langle \mathcal{I}(A), \cap, + \rangle$ é um reticulado. Para ilustrar, vamos demonstrar o axioma (L6).

Sejam I e J ideais de A, e seja $a \in I + (I \cap J)$. Sabemos que existem $b \in I$ e $c \in I \cap J$, tais que $a = b + c$. Daí, como $b, c \in I$, segue que $a \in I$, e $I + (I \cap J) \subseteq I$.

Agora, seja $a \in I$. Como $a = a + 0 \in I + (I \cap J)$, segue que $I \subseteq I + (I \cap J)$. Logo, $I + (I \cap J) = I$.

[1] As definições de espaço topológico, conjunto aberto e conjunto fechado podem ser encontradas no Apêndice B.

Exemplo 1.4. Inicialmente, relembramos algumas definições relacionadas à divisibilidade em $\mathbb{N}$. Para $m, n, M \in \mathbb{N}$, dizemos que:

- m divide n ($m \mid n$) quando existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $k \cdot m = n$;
- M é o máximo divisor comum de m e n ($M = \text{mdc}(m, n)$) quando $M \mid m$, $M \mid n$ e para todo $c \in \mathbb{N}$, se $c \mid m$ e $c \mid n$, então $c \mid M$;
- M é o mínimo múltiplo comum de m e n ($M = \text{mmc}(m, n)$) quando $m \mid M$, $n \mid M$ e para todo $c \in \mathbb{N}$, se $m \mid c$ e $n \mid c$, então $M \mid c$.

Para $m, n \in \mathbb{N}$, definimos as seguintes operações:

- $m \wedge n = \text{mdc}(m, n)$;
- $m \vee n = \text{mmc}(m, n)$.

Desse modo, a estrutura $\langle \mathbb{N}, \wedge, \vee \rangle$ é um reticulado. Para ilustrar, vamos demonstrar o axioma (L5).

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $m \mid m$ e $m \mid m \vee n$.

Agora, seja $k \in \mathbb{N}$, tal que $k \mid m$ e $k \mid m \vee n$. Como $k \mid m$, segue que $m \wedge (m \vee n) = m$.

Uma consequência simples dos axiomas de absorção é a idempotência das operações $\wedge$ e $\vee$.

Proposição 1.5. (Idempotência)

Seja L um reticulado. Então, para $x \in L$:

(i) $x \wedge x = x$

(ii) $x \vee x = x$

Demonstração. Seja $x \in L$.

(i) Temos que:

$$\begin{aligned} x \wedge x &= x \wedge (x \vee (x \wedge x)) && \text{Por (L6)} \\ &= x && \text{Por (L5)} \end{aligned}$$

(ii) A prova é análoga à do item anterior.

□

Seja L um reticulado. Dizemos que $z \in L$ é um **zero** de L quando z é um elemento neutro de $\vee$, ou seja, quando satisfaz a seguinte propriedade, para $x \in L$:

$$x \vee z = x$$

Analogamente, dizemos que $u \in L$ é uma **unidade** de L quando u é um elemento neutro de $\wedge$, ou seja, quando satisfaz a seguinte propriedade, para $x \in L$:

$$x \wedge 1 = x$$

Quando L possui zero e unidade, dizemos que L é **limitado**.

Exemplo 1.6. Na tabela abaixo, indicamos o zero e a unidade dos reticulados apresentados nos Exemplos 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4.

Reticulado	Zero	Unidade
$\mathcal{P}(X)$	$\emptyset$	X
$\mathcal{O}(X)$	$\emptyset$	X
$\mathcal{I}(A)$	$\{0\}$	A
$\mathbb{N}$	1	0

Dos axiomas de comutatividade obtemos que o zero e a unidade são únicos.

Proposição 1.7. (Unicidade do zero e da unidade)

Seja L um reticulado. Vale que:

(i) Se L possui um zero, então ele é único;

(ii) Se L possui uma unidade, então ela é única.

Demonstração.

(i) Sejam z e z' zeros de L. Temos que:

$$z = z \vee z' = z' \vee z = z'$$

(ii) A prova é análoga à do item anterior.

□

Iremos denotar o zero e a unidade de L respectivamente por 0_L e 1_L ou, quando não houver risco de ambiguidade, por 0 e 1.

Proposição 1.8. Seja L um reticulado. Então, para $x \in L$:

(i) Se L possui zero, então $x \wedge 0 = 0$;

(ii) Se L possui unidade, então $x \vee 1 = 1$.

Demonstração. Seja $x \in L$.

(i) Suponhamos que L possui zero. Temos que:

$$x \wedge 0 = (x \vee 0) \wedge 0 = 0$$

(ii) A prova é análoga à do item anterior.

□

1.2 Ordem Parcial de um Reticulado

Nesta seção, vamos construir uma relação de ordem parcial em um reticulado qualquer e estudar suas propriedades. Mais detalhes sobre os conceitos relacionados a conjuntos parcialmente ordenados, como as definições de ordem parcial, supremo e ínfimo, podem ser encontrados no Apêndice A.

Em um reticulado L qualquer, definimos a relação $\leq$ da seguinte forma, para $x, y \in L$:

$$x \leq y \text{ se, e somente se, } x \wedge y = x.$$

Proposição 1.9. Seja L um reticulado. Então, $\leq$ é uma ordem parcial.

Demonstração. Sejam $x, y, z \in L$.

(Reflexividade)

Como $\wedge$ é idempotente, sabemos que $x \wedge x = x$. Logo, $x \leq x$.

(Antissimetria)

Suponhamos que $x \leq y$ e $y \leq x$. Temos que:

$$x = x \wedge y = y \wedge x = y$$

Logo, $x = y$.

(Transitividade)

Suponhamos que $x \leq y$ e $y \leq z$. Temos que:

$$x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x$$

Logo, $x \leq z$. □

Exemplo 1.10. Nos exemplos de reticulados de conjuntos (Exemplo 1.1), de abertos (Exemplo 1.2) e de ideais (Exemplo 1.3), a ordem parcial é dada pela relação de inclusão $\subseteq$. Na figura abaixo, ilustramos o diagrama da ordem de um reticulado de conjuntos.

Já no reticulado dos naturais (Exemplo 1.4), a ordem é dada pela relação de divisibilidade $|$.

Alternativamente, podemos definir $\leq$ em função de $\vee$:

Proposição 1.11. Seja L um reticulado. Para $x, y \in L$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $x \leq y$;

(ii) $x \vee y = y$.

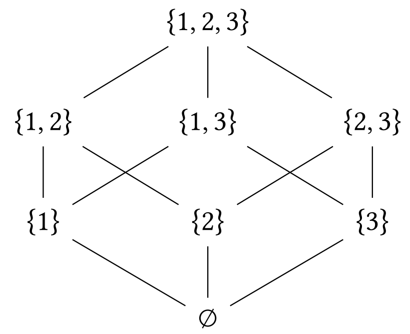

Figura 1.1: *Diagrama da ordem do reticulado* $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$.

Demonstração. Sejam $x, y \in L$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Suponhamos que $x \leq y$, ou seja, $x \wedge y = x$. Temos que:

$$x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$$

Logo, $x \vee y = y$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Suponhamos que $x \vee y = y$. Temos que:

$$x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$$

Logo, $x \leq y$. $\square$

A ordem parcial $\leq$ é compatível com as operações $\wedge$ e $\vee$ do reticulado L.

Proposição 1.12. Sejam L um reticulado e $x, y, z, w \in L$. Vale que:

(i) se $x \leq y$ e $z \leq w$, então $x \wedge z \leq y \wedge w$;

(ii) se $x \leq y$ e $z \leq w$, então $x \vee z \leq y \vee w$.

Demonstração. Suponhamos que $x \leq y$ e $z \leq w$.

(i) Como $x \leq y$, temos que:

$$\begin{aligned} x \leq y &\Rightarrow x \wedge y = x \\ &\Rightarrow x \wedge y \wedge z = x \wedge z \\ &\Rightarrow (x \wedge z) \wedge (y \wedge z) = x \wedge z \\ &\Rightarrow x \wedge z \leq y \wedge z \end{aligned}$$

Além disso, como $z \leq w$, temos que:

$$\begin{aligned} z \leq w &\Rightarrow z \wedge w = z \\ &\Rightarrow y \wedge z \wedge w = y \wedge z \\ &\Rightarrow (y \wedge z) \wedge (y \wedge w) = y \wedge z \\ &\Rightarrow y \wedge z \leq y \wedge w \end{aligned}$$

Logo, como $x \wedge z \leq y \wedge z$ e $y \wedge z \leq y \wedge w$, pela transitivadade de $\leq$ concluímos que $x \wedge z \leq y \wedge w$.

(ii) A prova é análoga à do item anterior.

□

Agora, vamos analisar a relação entre a estrutura algébrica dos reticulados e sua estrutura como um conjunto parcialmente ordenado.

A cada reticulado $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ associamos o conjunto parcialmente ordenado $\langle L, \leq \rangle$, que iremos denotar por $\Phi(L)$.

Lema 1.13. Seja L um reticulado. Então, para $x, y \in L$:

(i) $x \wedge y = \inf\{x, y\}$;

(ii) $x \vee y = \sup\{x, y\}$.

Demonstração. Sejam $x, y \in L$.

(i) Sabemos que:

$$(x \wedge y) \wedge x = x \wedge x \wedge y = x \wedge y$$

$$(x \wedge y) \wedge y = x \wedge y \wedge y = x \wedge y$$

Desse modo, $x \wedge y \leq x$ e $x \wedge y \leq y$. Agora, seja $c \in L$, tal que $c \leq x$ e $c \leq y$. Temos que:

$$c \wedge c \leq x \wedge y \Rightarrow c \leq x \wedge y$$

Logo, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

(ii) A prova é análoga à do item anterior.

□

Seja $\langle P, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado que satisfaz o seguinte axioma:

(L′) Para quaisquer $x, y \in P$, o conjunto $\{x, y\}$ possui ínfimo e supremo.

Pelo axioma acima, podemos definir as seguintes operações, para $x, y \in P$:

- $x \wedge y = \inf\{x, y\}$;
- $x \vee y = \sup\{x, y\}$.

Desse modo, definimos a estrutura algébrica $\langle P, \wedge, \vee \rangle$, que iremos denotar por $\Psi(P)$. O lema seguinte relaciona as estruturas de P e $\Psi(P)$.

Lema 1.14. Sejam P um conjunto parcialmente ordenado, e $x, y \in P$. Se $\{x, y\}$ possui ínfimo e supremo, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $x \leq y$;

(ii) $\inf\{x, y\} = x$;

(iii) $\sup\{x, y\} = y$.

Demonstração. Suponhamos que $\{x, y\}$ possui ínfimo e supremo.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Suponhamos que $x \leq y$. Sabemos que $x \leq x$. Além disso, dado $c \in L$ tal que $c \leq x$ e $c \leq y$, é imediato que $c \leq x$. Logo, $x = \inf\{x, y\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Suponhamos que $\inf\{x, y\} = x$. Sabemos que $x \leq y$ e $y \leq y$. Além disso, dado $c \in L$ tal que $x \leq c$ e $y \leq c$, é imediato que $y \leq c$. Logo, $y = \sup\{x, y\}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Suponhamos que $\sup\{x, y\} = y$. Segue da definição de supremo que $x \leq y$. □

Teorema 1.15. Sejam $\langle L, \wedge_L, \vee_L \rangle$ um reticulado e $\langle P, \leq_P \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado que satisfaz o axioma (L′). Temos que:

(i) $\Phi(L)$ satisfaz o axioma (L′);

(ii) $\Psi(P)$ é um reticulado;

(iii) $\Psi(\Phi(L)) = L$;

(iv) $\Phi(\Psi(P)) = P$.

Demonstração.

(i) Sejam $x, y \in L$. Pelo Lema 1.13, sabemos que $x \wedge_L y = \inf_{\Phi(L)}\{x, y\}$ e $x \vee_L y = \sup_{\Phi(L)}\{x, y\}$. Logo, $\Phi(L)$ satisfaz o axioma (L′).

(ii) Sejam $x, y, z \in P$. Vamos mostrar os Axiomas (L1), (L3) e (L5).

Para (L1), vamos verificar inicialmente que:

$$x \wedge_{\Psi(P)} (y \wedge_{\Psi(P)} z) = \inf_P\{x, y, z\}$$

De fato, seja $i = \inf_P\{x, y, z\}$. Sabemos que $i \leq_P x$, e como $i \leq_P y$ e $i \leq_P z$, temos que:

$$i \leq_P \inf_P\{y, z\} = y \wedge_{\Psi(P)} z$$

Agora, seja $c \in P$, tal que $c \leq_P x$ e $c \leq_P y \wedge_{\Psi(P)} z$. Como $y \wedge_{\Psi(P)} z \leq_P y$ e $y \wedge_{\Psi(P)} z \leq_P z$, temos que $c \leq_P y$ e $c \leq_P z$. Daí, pela definição de i, $c \leq i$.

Logo, $i = \inf_P\{x, y \wedge_{\Psi(P)} z\} = x \wedge_{\Psi(P)} (y \wedge_{\Psi(P)} z)$ e, de forma análoga, obtemos que $i = (x \wedge_{\Psi(P)} y) \wedge_{\Psi(P)} z$. Desse modo:

$$x \wedge_{\Psi(P)} (y \wedge_{\Psi(P)} z) = \inf_P\{x, y, z\} = (x \wedge_{\Psi(P)} y) \wedge_{\Psi(P)} z$$

Para (L3), temos que:

$$x \wedge_{\Psi(P)} y = \inf_P\{x, y\} = \inf_P\{y, x\} = y \wedge_{\Psi(P)} x$$

O Axioma (L5) é consequência do Lema 1.14. De fato, como $x \leq_P x \vee_{\Psi(P)} y$, temos que:

$$x \wedge_{\Psi(P)} (x \vee_{\Psi(P)} y) = \inf_P\{x, x \vee_{\Psi(P)} y\} = x$$

(iii) Sejam $x, y \in L$. Pelo Lema 1.13, temos que:

$$x \wedge_{\Psi(\Phi(L))} y = \inf_{\Phi(L)}\{x, y\} = x \wedge_L y$$

$$x \vee_{\Psi(\Phi(L))} y = \sup_{\Phi(L)}\{x, y\} = x \vee_L y$$

Logo, como as operações de $\Psi(\Phi(L))$ e L coincidem, concluímos que $\Psi(\Phi(L)) = \langle L, \wedge_L, \vee_L \rangle$.

(iv) Sejam $x, y \in P$. Pelo Lema 1.14, temos que:

$$\begin{aligned} x \leq_{\Phi(\Psi(P))} y &\Leftrightarrow x \wedge_{\Psi(P)} y = x \\ &\Leftrightarrow \inf_P\{x, y\} = x \\ &\Leftrightarrow x \leq_P y \end{aligned}$$

Logo, como as ordens de $\Phi(\Psi(P))$ e P coincidem, concluímos que $\Phi(\Psi(P)) = \langle P, \leq_P \rangle$.

□

Pelo teorema acima, sabemos que existe uma bijeção entre reticulados e conjuntos parcialmente ordenados que satisfazem (L′). Assim, podemos definir de forma alternativa o conceito de reticulado como um conjunto parcialmente ordenado que satisfaz o axioma (L′).

Exemplo 1.16. Seja T um conjunto totalmente ordenado. Dados $x, y \in T$, temos que:

$$\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$$

$$\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$$

Assim, T satisfaz o axioma (L′), ou seja, T é um reticulado. Além disso, suas operações $\wedge$ e $\vee$ correspondem às operações de mínimo e máximo, respectivamente.

O zero e a unidade de um reticulado também possuem uma interpretação natural com relação à ordem $\leq$, representando, respectivamente, o menor e o maior elemento de

L.

Proposição 1.17. Sejam L um reticulado e $u \in L$. Então:

(i) u é o zero de L se, e somente se, u é o mínimo de L;

(ii) u é a unidade de L se, e somente se, u é o máximo de L.

Demonstração. Vamos provar o item (i).

($\Rightarrow$) Suponha que u é o zero de L e seja $x \in L$. Sabemos que $u \wedge x = u$. Logo, $u \leq x$, e $u = \min L$.

($\Leftarrow$) Suponha que $u = \min L$ e seja $x \in L$. Sabemos que $u \leq x$, ou seja, $x \vee u = x$. Logo, como o zero é único, obtemos que u é o zero de L.

Para o item (ii), a prova é análoga. □

1.3 Homomorfismos

Sejam L e K reticulados. Dizemos que uma função $h : L \to K$ é um **homomorfismo** de reticulados quando preserva as operações $\wedge$ e $\vee$, ou seja, quando satisfaz as seguintes propriedades, para $x, y \in L$:

(H1) $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$;

(H2) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$.

Exemplo 1.18. Sejam X um conjunto e $A, B \subseteq X$. Definimos uma função $h : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ da seguinte forma:

$$h(C) = A \cap (B \cup C)$$

Vamos verificar que h é um homomorfismo. De fato, dados $C_1, C_2 \in \mathcal{P}(X)$, temos que:

$$\begin{aligned} h(C_1 \cap C_2) &= A \cap [B \cup (C_1 \cap C_2)] \\ &= A \cap (B \cup C_1) \cap (B \cup C_2) \\ &= A \cap (B \cup C_1) \cap A \cap (B \cup C_2) \\ &= h(C_1) \cap h(C_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(C_1 \cup C_2) &= A \cap [B \cup (C_1 \cup C_2)] \\ &= A \cap [(B \cup C_1) \cup (B \cup C_2)] \\ &= [A \cap (B \cup C_1)] \cup [A \cap (B \cup C_2)] \\ &= h(C_1) \cup h(C_2) \end{aligned}$$

Logo, h é um homomorfismo.

Note que, no caso em que $A \neq \emptyset$, $A \neq X$ e $A \subseteq B$, o homomorfismo h não preserva o zero nem a unidade de $\mathcal{P}(X)$:

$$h(\emptyset) = A \cap (B \cup \emptyset) = A \cap B = A \neq \emptyset$$

$$h(X) = A \cap (B \cup X) = A \cap X = A \neq X$$

Como vimos no exemplo anterior, em geral homomorfismos de reticulados não preservam o zero e a unidade. Quando um homomorfismo h preserva o zero e a unidade, dizemos que h é um **homomorfismo de reticulados limitados**.

Proposição 1.19. Sejam L_1, L_2 e L_3 reticulados, e $h : L_1 \to L_2$ e $g : L_2 \to L_3$ homomorfismos. Vale que:

(i) $g \circ h$ é um homomorfismo;

(ii) a função identidade $\mathrm{id}_{L_1} : L_1 \to L_1$ é um homomorfismo.

Demonstração.

(i) Sejam $x, y \in L_1$. Temos que:

$$\begin{aligned}(g \circ h)(x \wedge y) &= g[h(x \wedge y)] \\ &= g[h(x) \wedge h(y)] \\ &= g[h(x)] \wedge g[h(y)] \\ &= (g \circ h)(x) \wedge (g \circ h)(y)\end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos que $(g \circ h)(x \vee y) = (g \circ h)(x) \vee (g \circ h)(y)$. Desse modo, $g \circ h$ é um homomorfismo.

(ii) Sejam $x, y \in L_1$. Sabemos que:

$$\mathrm{id}_{L_1}(x \wedge y) = x \wedge y = \mathrm{id}_{L_1}(x) \wedge \mathrm{id}_{L_1}(y)$$

$$\mathrm{id}_{L_1}(x \vee y) = x \vee y = \mathrm{id}_{L_1}(x) \vee \mathrm{id}_{L_1}(y)$$

Logo, id_{L_1} é um homomorfismo.

□

Pela proposição anterior, temos que a classe dos reticulados e seus homomorfismos formam uma categoria. De forma análoga, obtemos que a classe dos reticulados limitados e seus homomorfismos formam uma categoria.

Seja $h : L \to K$ um homomorfismo. Dizemos que h é uma **imersão** de reticulados quando h é injetor. Quando h é bijetor, dizemos que h é um **isomorfismo** de reticulados.

Proposição 1.20. Sejam L e K reticulados, e $h : L \to K$ um isomorfismo. Vale que:

(i) h^{-1} é um isomorfismo;

(ii) Se L e K possuem zero, então $h(0) = 0$;

(iii) Se L e K possuem unidade, então $h(1) = 1$.

Demonstração.

(i) Sabemos que h^{-1} é uma função bijetora. Assim, basta mostrarmos que h^{-1} é um homomorfismo.

Sejam $x', y' \in K$. Sabemos que existem $x, y \in L$, tais que $h(x) = x'$ e $h(y) = y'$. Daí, temos que:

$$\begin{aligned} h^{-1}(x' \wedge y') &= h^{-1}(h(x) \wedge h(y)) \\ &= h^{-1}(h(x \wedge y)) \\ &= x \wedge y \\ &= h^{-1}(x') \wedge h^{-1}(y') \end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos que $h^{-1}(x' \vee y') = h^{-1}(x') \vee h^{-1}(y')$. Logo, h^{-1} é um homomorfismo, e concluímos que h^{-1} é um isomorfismo.

(ii) Suponha que L e K possuem zero e seja $x' \in K$. Sabemos que existe $x \in L$, tal que $h(x) = x'$. Daí, temos que:

$$x' \vee h(0) = h(x) \vee h(0) = h(x \vee 0) = h(x) = x'$$

Logo, $h(0)$ é um zero de K, e como o zero é único, concluímos que $h(0) = 0$.

(iii) A prova é análoga à do item anterior.

□

Finalizamos esta seção analisando a relação entre homomorfismos de reticulados e funções monótonas[2].

Teorema 1.21. Sejam L e K reticulados, e $f : L \to K$ uma função. Vale que:

(i) Se f é um homomorfismo, então f é monótona;

(ii) Se f é uma imersão de reticulados, então f é uma imersão de ordem;

(iii) f é um isomorfismo de reticulados se, e somente se, f é um isomorfismo de ordem.

Demonstração.

(i) Suponha que f é um homomorfismo e sejam $x, y \in L$, tais que $x \leq y$. Sabemos que $x \wedge y = x$. Desse modo:

$$f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y) = f(x)$$

Logo, $f(x) \leq f(y)$, e f é uma função monótona.

[2] As definições de função monótona, imersão de ordem e isomorfismo de ordem podem ser encontradas no Apêndice A.

(ii) Suponha que f é uma imersão de reticulados. Pelo item anterior, sabemos que f é uma função monótona. Assim, sejam $x, y \in L$, tais que $f(x) \leq f(y)$. Temos que:

$$f(x) = f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y)$$

Daí, como f é injetora, $x = x \wedge y$. Logo, $x \leq y$, e f é uma imersão de ordem.

(iii) ($\Rightarrow$) Suponha que f é um isomorfismo de reticulados. Em particular, f é uma imersão de reticulados e, pelo item anterior, f é uma imersão de ordem. Logo, como f é bijetora, segue que f é um isomorfismo de ordem.

($\Leftarrow$) Suponha que f é um isomorfismo de ordem e sejam $x, y \in L$. Como $x \wedge y \leq x$ e $x \wedge y \leq y$, temos que $f(x \wedge y) \leq f(x)$ e $f(x \wedge y) \leq f(y)$. Desse modo:

$$f(x \wedge y) \leq f(x) \wedge f(y)$$

Além disso, como f é sobrejetora, sabemos que existe $z \in L$, tal que $f(z) = f(x) \wedge f(y)$. Daí, temos que $f(z) \leq f(x)$ e $f(z) \leq f(y)$, e como f é uma imersão de ordem, $z \leq x$ e $z \leq y$. Logo, $z \leq x \wedge y$, e obtemos:

$$f(x) \wedge f(y) = f(z) \leq f(x \wedge y)$$

Assim, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, e de forma análoga obtemos que $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$. Portanto, como f é bijetora, f é um isomorfismo de reticulados.

□

1.4 Reticulados Duais

Dado um reticulado $\langle L, \wedge, \vee \rangle$, definimos a estrutura $L^* = \langle L, \wedge^*, \vee^* \rangle$, em que $\wedge^*$ e $\vee^*$ são operações binárias em L definidas da seguinte forma (para $x, y \in L$):

- $x \wedge^* y = x \vee y$;
- $x \vee^* y = x \wedge y$.

Proposição 1.22. Seja L um reticulado. Então, L^* é um reticulado.

Demonstração. Sejam $x, y, z \in L$. Como L satisfaz o Axioma (L2), sabemos que:

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

Logo, L^* satisfaz o Axioma (L1). De forma análoga, obtemos que L^* também satisfaz os Axiomas de (L2)-(L6).

Portanto, L^* é um reticulado. □

Chamamos L^* de **reticulado dual** de L. Abaixo apresentamos dois exemplos de isomorfismos de reticulados, utilizando o conceito de reticulado dual.

Exemplo 1.23. Seja $h : \mathbb{N} \to \mathcal{I}(\mathbb{Z})$ a função definida por:

$$h(n) = n\mathbb{Z}$$

Vamos verificar que h é um isomorfismo entre o dual de $\mathbb{N}$ e $\mathcal{I}(\mathbb{Z})$.

Inicialmente, verificamos que h é um homomorfismo do dual de $\mathbb{N}$ em $\mathcal{I}(\mathbb{Z})$.

De fato, sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Temos que:

$$h(m \vee n) = \mathrm{mmc}(m, n)\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = h(m) \cap h(n)$$

$$h(m \wedge n) = \mathrm{mdc}(m, n)\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = h(m) + h(n)$$

Finalizamos verificando que h é uma bijeção.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, tais que $h(m) = h(n)$. Como $m \in m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$, temos que $n \mid m$. Analogamente, obtemos que $m \mid n$. Logo, $m = n$, e h é injetora.

Agora, seja $I \in \mathcal{I}(\mathbb{Z})$. Como todo ideal de $\mathbb{Z}$ é principal, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $I = m\mathbb{Z}$. Temos duas possibilidades:

- Se $m \geq 0$, então $m \in \mathbb{N}$ e $h(m) = I$.
- Se $m < 0$, então $-m \in \mathbb{N}$ e $h(-m) = m\mathbb{Z} = I$.

Logo, h é sobrejetora, e h é de fato um isomorfismo.

Exemplo 1.24. Sejam X um conjunto e $h : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ a função definida por:

$$h(A) = X \setminus A$$

Vamos verificar que h é um isomorfismo entre $\mathcal{P}(X)$ e seu dual.

Inicialmente, verificamos que h é um homomorfismo de $\mathcal{P}(X)$ no seu dual. De fato, sejam $A, B \subseteq X$. Temos que:

$$h(A \cap B) = X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) = h(A) \cup h(B)$$

$$h(A \cup B) = X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) = h(A) \cap h(B)$$

Agora, vamos verificar que h é uma bijeção. De fato, seja $B \subseteq X$. Para $A \subseteq X$, temos que:

$$\begin{aligned} h(A) = B &\Leftrightarrow X \setminus A = B \\ &\Leftrightarrow X \setminus (X \setminus A) = X \setminus B \\ &\Leftrightarrow A = X \setminus B \end{aligned}$$

Logo, $A = X \setminus B$ é o único subconjunto $A \subseteq X$ que satisfaz $h(A) = B$. Desse modo, h é bijetora, e h é de fato um isomorfismo.

Como uma consequência simples da definição de reticulado dual, obtemos que o dual do dual de um reticulado L é o próprio L.

Proposição 1.25. Seja L um reticulado. Então, $L^{**} = L$.

Demonstração. Como o dual não muda o domínio do reticulado, temos que L^{**} possui o mesmo domínio de L.

Para as operações, temos que:

$$\wedge_{L^{**}} = \vee_{L^{*}} = \wedge_{L}$$

$$\vee_{L^{**}} = \wedge_{L^{*}} = \vee_{L}$$

Logo, como L^{**} possui o mesmo domínio e operações de L, concluímos que $L^{**} = L$. $\square$

Agora, iremos discutir informalmente o Princípio da Dualidade. As definições e resultados apresentados abaixo podem ser formalizados através da Lógica de Primeira Ordem.

A linguagem dos reticulados que vamos utilizar é composta pelos seguintes símbolos:

- dois símbolos para operações binárias: $\wedge$ e $\vee$;
- um conjunto enumerável de variáveis: $\{v_1, v_2, v_3, \ldots\}$;
- o símbolo de igualdade: $=$;
- dois delimitadores: "(" e ")".

Um **termo** da linguagem dos reticulados é uma sequência de símbolos, construída a partir das variáveis através de um número finito de aplicações das operações $\wedge$ e $\vee$. Mais precisamente, um **termo** é definido indutivamente pelas seguintes regras:

(i) toda variável é um termo;

(ii) se τ_1 e τ_2 são termos, então $(\tau_1 \wedge \tau_2)$ e $(\tau_1 \vee \tau_2)$ são termos;

(iii) apenas as sequências obtidas pelas regras acima são termos.

Seja $\langle L, \wedge_L, \vee_L \rangle$ um reticulado. A **interpretação** de um termo τ em L é uma função da forma[3] $\tau^L : L^{\mathbb{N}} \to L$, definida recursivamente pelas seguintes regras:

(i) Para $i \in \mathbb{N}$, v_i^L é definida por $v_i^L(x) = x_i$;

(ii) Se τ_1 e τ_2 são termos, então $(\tau_1 \wedge \tau_2)^L$ é definida por $(\tau_1 \wedge \tau_2)^L(x) = \tau_1^L(x) \wedge_L \tau_2^L(x)$;

(iii) Se τ_1 e τ_2 são termos, então $(\tau_1 \vee \tau_2)^L$ é definida por $(\tau_1 \vee \tau_2)^L(x) = \tau_1^L(x) \vee_L \tau_2^L(x)$.

[3] Denotamos os elementos de $L^{\mathbb{N}}$ por variáveis não indexadas. Dado $x \in L^{\mathbb{N}}$, denotamos sua i-ésima coordenada por x_i.

Exemplo 1.26. Seja τ a sequência de símbolos abaixo:

$$(v_2 \wedge (v_3 \vee v_8))$$

Como v_3 e v_8 são variáveis, sabemos que v_3 e v_8 são termos. Daí, $(v_3 \vee v_8)$ é um termo, e como v_2 também é um termo, $(v_2 \wedge (v_3 \vee v_8))$ é um termo.

Dado um reticulado L, a interpretação de τ em L é a função $\tau^L : L^{\mathbb{N}} \to L$ definida por:

$$\tau^L(x) = x_2 \wedge_L (x_3 \vee x_8)$$

A diferença entre termos e interpretações é a mesma entre polinômios e funções polinomiais: enquanto um polinômio representa uma expressão formal, uma função polinomial representa uma função em um anel, cuja expressão que a define é dada por um polinômio.

A cada termo τ associamos o seu **dual** τ^*, obtido a partir de τ pela substituição dos símbolos $\wedge$ e $\vee$ por $\vee$ e $\wedge$, respectivamente. Mais precisamente, o dual de um termo é definido recursivamente pelas seguintes regras:

(i) para toda variável v, v^* é v;

(ii) se τ_1 e τ_2 são termos, então $(\tau_1 \wedge \tau_2)^*$ é $(\tau_1^* \vee \tau_2^*)$;

(iii) se τ_1 e τ_2 são termos, então $(\tau_1 \vee \tau_2)^*$ é $(\tau_1^* \wedge \tau_2^*)$.

Assim como o dual do dual de um reticulado L é o próprio L, o dual do dual de um termo τ é o próprio τ.

Proposição 1.27. Seja τ um termo da linguagem dos reticulados. Então, τ^{**} é τ.

Demonstração. Iremos utilizar indução estrutural no termo τ.

(Base) Seja v uma variável. Sabemos que v^{**} é v^* e que v^* é v. Logo, v^{**} é v.

(Hipótese Indutiva) Sejam τ_1 e τ_2 termos, e suponhamos que τ_1^{**} é τ_1 e τ_2^{**} é τ_2.

(Passo Indutivo - $\wedge$) Sabemos que $(\tau_1 \wedge \tau_2)^{**}$ é $(\tau_1^{**} \wedge \tau_2^{**})$. Mas, pela Hipótese Indutiva, $(\tau_1^{**} \wedge \tau_2^{**})$ é $(\tau_1 \wedge \tau_2)$. Logo, $(\tau_1 \wedge \tau_2)^{**}$ é $(\tau_1 \wedge \tau_2)$.

O Passo Indutivo do $\vee$ é análogo ao caso do $\wedge$. □

A interpretação de um termo τ em um reticulado L coincide com a interpretação de τ^* em L^*.

Proposição 1.28. Sejam L um reticulado, $x \in L^{\mathbb{N}}$ e τ um termo. Então, $\tau^L(x) = (\tau^*)^{L^*}(x)$.

Demonstração. Vamos provar por indução estrutural em τ.

(Base) Se τ é v_i, onde $i \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\tau^L(x) = v_i^L(x) = x_i = v_i^{L^*}(x) = (v_i^*)^{L^*}(x) = (\tau^*)^{L^*}(x)$$

(Hipótese Indutiva) Sejam τ_1 e τ_2 termos, e suponhamos que

$$\tau_1^L(x) = (\tau_1^*)^{L^*}(x)$$

$$\tau_2^L(x) = (\tau_2^*)^{L^*}(x)$$

(Passo Indutivo - $\wedge$) Se τ é $\tau_1 \wedge \tau_2$, temos que:

$$\begin{aligned}
\tau^L(x) &= (\tau_1 \wedge \tau_2)^L(x) \\
&= \tau_1^L(x) \wedge_L \tau_2^L(x) \\
&= (\tau_1^*)^{L^*}(x) \vee_{L^*} (\tau_2^*)^{L^*}(x) \\
&= (\tau_1^* \vee \tau_2^*)^{L^*}(x) \\
&= [(\tau_1 \wedge \tau_2)^*]^{L^*}(x) \\
&= (\tau^*)^{L^*}(x)
\end{aligned}$$

Para o Passo Indutivo do $\vee$, a prova é análoga ao caso do $\wedge$. □

Uma **equação** da linguagem dos reticulados é uma sequência de símbolos da forma $\tau_1 = \tau_2$, onde τ_1 e τ_2 são termos.

Dado um reticulado L, dizemos que $\tau_1 = \tau_2$ é **verdadeira** em L quando para todo $x \in L^{\mathbb{N}}$, $\tau_1^L(x) = \tau_2^L(x)$. Quando $\tau_1 = \tau_2$ é verdadeira em qualquer reticulado, dizemos que $\tau_1 = \tau_2$ é **válida**.

Podemos estender a definição de dual de termos para equações: se $\tau_1 = \tau_2$ é uma equação, sua equação dual é dada por $\tau_1^* = \tau_2^*$.

A proposição seguinte relaciona a interpretação de uma equação em um reticulado L com a interpretação da equação dual em L^*.

Proposição 1.29. Sejam L um reticulado e $\tau_1 = \tau_2$ uma equação da linguagem dos reticulados. Então, $\tau_1 = \tau_2$ é verdadeira em L se, e somente se, $\tau_1^* = \tau_2^*$ é verdadeira em L^*.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\tau_1 = \tau_2$ seja verdadeira em L e seja $x \in L^\omega$. Pela Proposição 1.28, temos que:

$$(\tau_1^*)^{L^*}(x) = \tau_1^L(x) = \tau_2^L(x) = (\tau_2^*)^{L^*}(x)$$

Logo, $\tau_1^* = \tau_2^*$ é verdadeira em L^*.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\tau_1^* = \tau_2^*$ seja verdadeira em L^*. Como provado acima, sabemos que $\tau_1^{**} = \tau_2^{**}$ é verdadeira em L^{**}. Logo, pelas Proposições 1.25 e 1.27, $\tau_1 = \tau_2$ é verdadeira em L.

□

Com as ferramentas apresentadas acima, podemos enunciar e provar o Princípio da Dualidade.

Teorema 1.30. **(Princípio da Dualidade - versão semântica)**

Seja $\tau_1 = \tau_2$ uma equação da linguagem dos reticulados. Se $\tau_1 = \tau_2$ é válida, então sua equação dual $\tau_1^* = \tau_2^*$ também é válida.

Demonstração. Suponhamos que $\tau_1 = \tau_2$ é válida e seja L um reticulado. Sabemos que $\tau_1 = \tau_2$ é verdadeira em L^*.

Logo, pela Proposição 1.29, temos que $\tau_1^* = \tau_2^*$ é verdadeira em L^{**}. Assim, pela Proposição 1.25, $\tau_1^* = \tau_2^*$ é verdadeira em L.

Portanto, $\tau_1^* = \tau_2^*$ é válida. □

O Princípio da Dualidade possui uma outra versão, enunciada abaixo[4].

Teorema 1.31. **(Princípio da Dualidade - versão sintática)**

Seja $\tau_1 = \tau_2$ uma equação da linguagem dos reticulados. Se $\tau_1 = \tau_2$ pode ser demonstrada a partir dos axiomas de reticulado, então $\tau_1^* = \tau_2^*$ também pode ser demonstrada a partir dos axiomas de reticulado.

A ideia da prova da versão sintática é transformar a demonstração de $\tau_1 = \tau_2$ em uma demonstração de $\tau_1^* = \tau_2^*$, substituindo cada equação na sequência da demonstração por sua equação dual.

Podemos estender o Princípio da Dualidade para outras definições da teoria dos reticulados. Na proposição abaixo, vemos como os conceitos de zero, unidade e ordem parcial se comportam com relação a dualidade.

Proposição 1.32. Seja L um reticulado e $u, x, y \in L$. Então:

(i) u é o zero de L se, e somente se, u é a unidade de L^*;

(ii) $x \leq_L y$ se, e somente se $y \leq_{L^*} x$.

Demonstração.

(i) Sabemos que as seguintes afirmações são equivalentes:

- para todo $z \in L$, $z \vee_L u = z$;
- para todo $z \in L^*$, $z \wedge_{L^*} u = z$.

Logo, u é o zero de L se, e somente se, u é a unidade de L^*.

(ii) Sabemos que as seguintes afirmações são equivalentes:

- $x \wedge_L y = x$;
- $x \vee_{L^*} y = x$.

Logo, $x \leq_L y$ se, e somente se, $y \leq_{L^*} x$.

[4] Como essa versão requer uma formalização maior, utilizando o conceito de demonstração formal, optamos por apresentar apenas seu enunciado e a ideia central da prova.

□

1.5 Reticulados Completos

Seja L um reticulado. A partir do axioma (L′), sabemos que todo subconjunto finito não vazio de L possui supremo e ínfimo. Se L é limitado, o subconjunto vazio também possui supremo e ínfimo. Porém, para subconjuntos infinitos, essa propriedade nem sempre é verdadeira.

Quando todo subconjunto de L possui supremo e ínfimo, dizemos que L é um **reticulado completo**. Em particular, todo reticulado completo é limitado.

Exemplo 1.33. Pelo Exemplo 1.16, sabemos que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são reticulados. Considere o seguinte conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x \leq \sqrt{2}\}.$$

Em $\mathbb{R}$, sabemos que $\sup A = \sqrt{2}$. Porém, A não possui supremo em $\mathbb{Q}$. Logo, $\mathbb{Q}$ não é um reticulado completo. Em particular, $\mathbb{Q} \cup [0, 2]$ é um reticulado limitado, mas não completo.

Note que $\mathbb{R}$ também não é um reticulado completo, pois $\mathbb{R}$ não é limitado. Porém, a reta real estendida $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ é um reticulado completo.

Seja $A \subseteq L$. Se A possui um ínfimo, definimos:

$$\bigwedge A = \inf A$$

Analogamente, se A possui um supremo, definimos:

$$\bigvee A = \sup A$$

Quando $A = \{x_i \,:\, i \in I\}$, utilizamos a seguinte notação:

$$\bigwedge A = \bigwedge_{i \in I} x_i \text{ e } \bigvee A = \bigvee_{i \in I} x_i$$

Agora, vamos estudar como completar um conjunto parcialmente ordenado, de modo a obter um reticulado completo.

Seja P um conjunto parcialmente ordenado. Um **completamento** de P é um par (L, f), onde L é um reticulado completo e $f \,:\, P \to L$ é uma imersão de ordem.

Para $A \subseteq P$, definimos as seguintes operações:

$$A^u = \{x \in P \,:\, x \text{ é cota superior de } A\};$$

$$A^l = \{x \in P \,:\, x \text{ é cota inferior de } A\}.$$

Lema 1.34. Seja P um conjunto parcialmente ordenado. Então, para $A, B \subseteq P$:

(i) $A \subseteq A^{ul}$ e $A \subseteq A^{lu}$;

(ii) se $A \subseteq B$, então $B^u \subseteq A^u$ e $B^l \subseteq A^l$.

Demonstração. Sejam $A, B \subseteq P$.

(i) Tome $a \in A$ e $x \in A^u$. Como x é cota superior de A, sabemos que $a \leq x$. Desse modo, a é cota inferior de A^u, ou seja, $a \in A^{ul}$.

Logo, $A \subseteq A^{ul}$, e de modo análogo obtemos que $A \subseteq A^{lu}$.

(ii) Suponha que $A \subseteq B$ e considere $b \in B^u$. Sabemos que b é cota superior de B. Assim, para $y \in A \subseteq B$ temos que $y \leq b$, ou seja, $b \in A^u$.

Portanto, $B^u \subseteq A^u$ e, analogamente, $B^l \subseteq A^l$.

□

O **completamento de Dedekind-MacNeille** de P é o conjunto definido por:

$$\mathrm{DM}(P) = \{A \subseteq P : A^{ul} = A\}.$$

Dado $x \in P$, definimos o seguinte conjunto:

$$\downarrow x = \{a \in P : a \leq x\}.$$

Lema 1.35. Seja P um conjunto parcialmente ordenado. Para $x \in P$ e $\mathcal{F}$ uma família não vazio de elementos de $\mathrm{DM}(P)$, valem as seguintes propriedades:

(i) $P \in \mathrm{DM}(P)$;

(ii) $\downarrow x \in \mathrm{DM}(P)$;

(iii) $\bigcap \mathcal{F} \in \mathrm{DM}(P)$.

Demonstração. Sejam $x \in P$ e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de P.

(i) Pelo item (i) do Lema 1.34, sabemos que $P \subseteq P^{ul}$. Além disso, pela definição das operações ^{u} e ^{l}, segue que $P^{ul} \subseteq P$. Logo, $P = P^{ul}$, e $P \in \mathrm{DM}(P)$.

(ii) Vamos verificar que $(\downarrow x)^u = \{a \in P : x \leq a\}$.

($\subseteq$) Seja $a \in (\downarrow x)^u$. Como a é uma cota superior de $\downarrow x$ e $x \in \downarrow x$, segue que $x \leq a$.

($\supseteq$) Seja $a \in P$ tal que $x \leq a$, e considere $b \in \downarrow x$. Como $b \leq x$, temos que $b \leq a$. Logo, a é cota superior de $\downarrow x$, ou seja, $a \in (\downarrow x)^u$.

Desse modo, $(\downarrow x)^u = \{a \in P : x \leq a\}$ e, analogamente, obtemos que $(\downarrow x)^{ul} = \{a \in P : a \leq x\} = \downarrow x$.

(iii) Pelo item (i) do Lema 1.34, sabemos que $\bigcap \mathcal{F} \subseteq (\bigcap \mathcal{F})^{ul}$. Assim, basta mostrarmos que $(\bigcap \mathcal{F})^{ul} \subseteq \bigcap \mathcal{F}$.

Seja $A \in \mathcal{F}$. Pelo Lema 1.34, item (ii), temos que:

$$\bigcap \mathcal{F} \subseteq A \Rightarrow \left(\bigcap \mathcal{F}\right)^{ul} \subseteq A^{ul} = A$$

Logo, $(\bigcap \mathcal{F})^{ul} \subseteq \bigcap \mathcal{F}$, e concluímos que $\bigcap \mathcal{F} \in \mathrm{DM}(P)$.

$\square$

Dada uma família $\mathcal{F}$ de elementos de $\mathrm{DM}(P)$, sua união $\bigcup \mathcal{F}$ nem sempre pertence a $\mathrm{DM}(P)$. Ainda assim, $\mathcal{F}$ sempre possui supremo em $\mathrm{DM}(P)$, dado pela seguinte operação:

$$\bigsqcup \mathcal{F} = \bigcap \{A \in \mathrm{DM}(P) \,:\, \bigcup \mathcal{F} \subseteq A\}$$

Teorema 1.36. Seja P um conjunto parcialmente ordenado. Então, $\mathrm{DM}(P)$ é um reticulado completo.

Demonstração. Como $\mathrm{DM}(P) \subseteq \mathcal{P}(P)$, sabemos que $\mathrm{DM}(P)$ é parcialmente ordenado pela relação de inclusão.

Seja $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{DM}(P)$. Pelo Lema 1.35, temos que $\inf \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F}$ em $\mathrm{DM}(P)$. Assim, basta mostrarmos que $\sup \mathcal{F} = \bigsqcup \mathcal{F}$ em $\mathrm{DM}(P)$.

Note que $\bigsqcup \mathcal{F}$ é cota superior de $\mathcal{F}$, pois $\bigcup \mathcal{F} \subseteq \bigsqcup \mathcal{F}$.

Além disso, dado $C \in \mathrm{DM}(P)$ cota superior de $\mathcal{F}$, sabemos que $\bigcup \mathcal{F} \subseteq C$. Desse modo, $\bigsqcup \mathcal{F} \subseteq C$, pela definição de $\bigsqcup$.

Logo, $\bigsqcup \mathcal{F} = \sup \mathcal{F}$ em $\mathrm{DM}(P)$, e concluímos que $\mathrm{DM}(P)$ é um reticulado completo. $\square$

Associada a $\mathrm{DM}(P)$, temos uma função $\varphi : P \to \mathrm{DM}(P)$, definida por:

$$\varphi(x) = \downarrow x.$$

Proposição 1.37. Seja P um conjunto parcialmente ordenado. Então, φ é uma imersão de ordem.

Demonstração. Sejam $x, y \in P$.

($\Rightarrow$) Suponha que $x \leq y$ e considere $a \in \downarrow x$. Como $a \leq x \leq y$, segue que $a \in \downarrow y$. Logo, $\downarrow x \subseteq \downarrow y$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\downarrow x \subseteq \downarrow y$. Como $x \in \downarrow x$, temos que $x \in \downarrow y$. Assim, $x \leq y$.

Portanto, φ é uma imersão de ordem. $\square$

Desse modo, $(\mathrm{DM}(P), \varphi)$ é um completamento de P. A imersão φ preserva todos os supremos e ínfimos que existem em P.

Lema 1.38. Seja P um conjunto parcialmente ordenado. Valem as seguintes propriedades (para $A \subseteq P$):

(i) se $\sup A$ existe, então $\downarrow \sup A = A^{ul}$;

(ii) se $\inf A$ existe, então $\downarrow \inf A = \bigcap\{\downarrow a \,:\, a \in A\}$.

Demonstração. Seja $A \subseteq P$.

(i) Suponha que $\sup A$ existe.

($\subseteq$) Seja $x \in \downarrow \sup A$, ou seja, $x \leq \sup A$. Dado $c \in A^u$, sabemos que $x \leq \sup A \leq c$. Desse modo, x é cota inferior de A^u, ou seja, $x \in A^{ul}$.

($\supseteq$) Seja $x \in A^{ul}$, ou seja, x é cota inferior de A^u. Como $\sup A \in A^u$, em particular temos que $x \leq \sup A$. Logo, $x \in \downarrow \sup A$.

(ii) Suponha que $\inf A$ existe.

($\subseteq$) Considere $a \in A$. Sabemos que $\inf A \leq a$. Desse modo, $\downarrow \inf A \subseteq \downarrow a$, e $\downarrow \inf A \subseteq \bigcap\{\downarrow a \,:\, a \in A\}$.

($\supseteq$) Seja $x \in \bigcap\{\downarrow a \,:\, a \in A\}$. Dado $a \in A$, sabemos que $x \in \downarrow a$, ou seja, $x \leq a$. Desse modo, x é cota inferior de A, e obtemos que $x \leq \inf A$, ou seja, $x \in \downarrow \inf A$.

□

Teorema 1.39. Seja P um conjunto parcialmente ordenado. Valem as seguintes propriedades (para $A \subseteq P$):

(i) se $\sup A$ existe, então $\varphi(\sup A) = \bigsqcup \varphi(A)$;

(ii) se $\inf A$ existe, então $\varphi(\inf A) = \bigcap \varphi(A)$;

(iii) se P é um reticulado, então φ é uma imersão de reticulados.

Demonstração. Seja $A \subseteq P$.

(i) Suponha que $\sup A$ existe e considere $a \in A$. Como $a \leq \sup A$, temos que $\downarrow a \subseteq \downarrow \sup A$. Desse modo, $\downarrow \sup A$ é cota superior de $\{\downarrow a \,:\, a \in A\}$.

Seja $B \in \mathrm{DM}(P)$ uma cota superior de $\{\downarrow a \,:\, a \in A\}$. Note que, dado $a \in A$, temos que $a \in \downarrow a \subseteq B$. Assim, $A \subseteq B$ e, pelos Lemas 1.34 e 1.38, temos que:

$$\downarrow \sup A = A^{ul} \subseteq B^{ul} = B$$

Logo, $\downarrow \sup A$ é a menor das cotas superiores de $\{\downarrow a \,:\, a \in A\}$, e concluímos que:

$$\varphi(\sup A) = \downarrow \sup A = \bigsqcup\{\downarrow a \,:\, a \in A\} = \bigsqcup \varphi(A)$$

(ii) Suponha que $\inf A$ existe. Pelo Lema 1.38, temos que:

$$\varphi(\inf A) = \downarrow \inf A = \bigcap\{\downarrow a \,:\, a \in A\} = \bigcap \varphi(A)$$

(iii) Suponha que P é um reticulado. Como φ é uma imersão de ordem, sabemos que φ é injetora. Além disso, pelos itens anteriores sabemos que φ preserva os supremos e ínfimos que existem em P. Logo, φ é uma imersão de reticulados.

□

1.6 Reticulados Distributivos

Seja L um reticulado. Dizemos que L é **distributivo** quando satisfaz os seguintes axiomas adicionais, para $x, y, z \in L$:

(D1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(D2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Exemplo 1.40. Como as operações de interseção e união de conjuntos satisfazem os axiomas de distributividade (D1) e (D2), os reticulados de conjuntos (Exemplo 1.1) e de abertos (Exemplo 1.2) são distributivos.

Uma categoria importante no estudo da teoria dos reticulados é a categoria dos reticulados distributivos limitados, denotada por **BDist** (do inglês, *bounded distributive lattice*), formada pelos reticulados distributivos limitados e seus homomorfismos de reticulados limitados. Iremos estudá-la com mais detalhes nas próximas seções deste capítulo.

Exemplo 1.41. O reticulado de ideais (Exemplo 1.3) não é, em geral, distributivo. De fato, seja $\mathbb{Z}[x]$ o anel dos polinômios com coeficientes inteiros. Afirmamos que[5]:

$$\langle x+2\rangle \cap (\langle x\rangle + \langle 2\rangle) \neq (\langle x+2\rangle \cap \langle x\rangle) + (\langle x+2\rangle \cap \langle 2\rangle)$$

Inicialmente, note que $x+2 \in \langle x+2\rangle$, e como $x \in \langle x\rangle$ e $2 \in \langle 2\rangle$, $x+2 \in \langle x\rangle + \langle 2\rangle$. Desse modo, $x+2 \in \langle x+2\rangle \cap (\langle x\rangle + \langle 2\rangle)$.

Além disso, como $x+2$ não tem fatores comuns a x ou a 2, temos que:

$$\begin{aligned}(\langle x+2\rangle \cap \langle x\rangle) + (\langle x+2\rangle \cap \langle 2\rangle) &= \langle (x+2)x\rangle + \langle (x+2)2\rangle \\ &= \langle x^2+2x\rangle + \langle 2x+4\rangle\end{aligned}$$

Dado $p(x) \in \langle x^2+2x\rangle + \langle 2x+4\rangle$, sabemos que existem $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$, tais que:

$$p(x) = p_1(x)(x^2+2x) + p_2(x)(2x+4)$$

Assim, o termo independente de $p(x)$ é da forma $4b_0$, onde b_0 é o termo independente de $p_2(x)$. Logo, como $2 \neq 4a$, para qualquer $a \in \mathbb{Z}$, obtemos que $p(x) \neq x+2$, e concluímos que:

$$x+2 \notin (\langle x+2\rangle \cap \langle x\rangle) + (\langle x+2\rangle \cap \langle 2\rangle)$$

Portanto, o reticulado dos ideais de $\mathbb{Z}[x]$ não é distributivo.

---

[5] Dado $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, denotamos por $\langle p(x)\rangle$ o ideal principal gerado por $p(x)$.

Os axiomas (D1) e (D2) são equivalentes, como vemos na proposição seguinte.

Proposição 1.42. Seja L um reticulado. Então, L satisfaz (D1) se, e somente se, L satisfaz (D2).

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que L satisfaz (D1) e sejam $x, y, z \in L$. Temos que:

$$\begin{aligned}(x \vee y) \wedge (x \vee z) &= [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] \\ &= x \vee [(x \vee y) \wedge z] \\ &= x \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \\ &= x \vee (y \wedge z)\end{aligned}$$

Logo, L satisfaz (D2).

($\Leftarrow$) A prova é análoga à da implicação anterior.

□

Apesar de reticulados em geral não serem distributivos, eles satisfazem parcialmente os axiomas (D1) e (D2):

Proposição 1.43. Seja L um reticulado. Para $x, y, z \in L$, vale que:

(i) $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

(ii) $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Demonstração. Sejam $x, y, z \in L$.

(i) Como $y \vee z \geq y$, temos que:

$$x \wedge (y \vee z) \geq x \wedge y$$

Do mesmo modo, como $y \vee z \geq z$, obtemos:

$$x \wedge (y \vee z) \geq x \wedge z$$

Logo, $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

(ii) É o dual de (i).

□

Como consequência da Proposição 1.43 e da equivalência dos axiomas (D1) e (D2), podemos provar que um reticulado L é distributivo verificando apenas uma desigualdade.

Corolário 1.44. Seja L um reticulado. As seguintes afirmações são equivalentes.

(i) L é distributivo;

(ii) Para $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

(iii) Para $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Exemplo 1.45. Sejam $l, m, n \in \mathbb{N}$ e considere suas decomposições em fatores primos:

$$l = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$$

$$m = p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}$$

$$n = p_1^{t_1} \dots p_k^{t_k}$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
l \wedge (m \vee n) &= \mathrm{mdc}(l, \mathrm{mmc}(m, n)) \\
&= \mathrm{mdc}(l, p_1^{\max\{s_1,t_1\}} \dots p_k^{\max\{s_k,t_k\}}) \\
&= p_1^{\min\{r_1,\max\{s_1,t_1\}\}} \dots p_k^{\min\{r_k,\max\{s_k,t_k\}\}} \\
&= p_1^{\max\{\min\{r_1,s_1\},\min\{r_1,t_1\}\}} \dots p_k^{\max\{\min\{r_k,s_k\},\min\{r_k,t_k\}\}} \\
&= \mathrm{mmc}(p_1^{\min\{r_1,s_1\}} \dots p_k^{\min\{r_k,s_k\}}, p_1^{\min\{r_1,t_1\}} \dots p_k^{\min\{r_k,t_k\}}) \\
&= \mathrm{mmc}(\mathrm{mdc}(l, m), \mathrm{mdc}(l, n)) \\
&= (l \wedge m) \vee (l \wedge n)
\end{aligned}$$

Logo, $\langle \mathbb{N}, \wedge, \vee \rangle$ é um reticulado distributivo.

1.7 Filtros

Nesta seção, iremos restringir nossa discussão à categoria dos reticulados distributivos limitados **BDist**. Desse modo, vamos nos referir a reticulados distributivos limitados simplesmente por reticulados, e a homomorfismos de reticulados limitados simplesmente por homomorfismos.

Seja L um reticulado e $F \subseteq L$. Dizemos que F é um **filtro** de L quando satisfaz as seguintes propriedades:

(F1) $F \neq \emptyset$;

(F2) Para $x, y \in F$, $x \wedge y \in F$;

(F3) Para $a \in L$ e $x \in F$, $a \vee x \in F$.

Podemos substituir (F3) pela propriedade equivalente abaixo:

(F3′) Para $x \in F$ e $y \in L$, se $x \leq y$, então $y \in F$.

Proposição 1.46. Sejam L um reticulado e $F \subseteq L$. Vale que:

(i) F satisfaz (F3) se, e somente se, F satisfaz (F3′);

(ii) Se F é um filtro, então $1 \in F$.

Demonstração.

(i) ($\Rightarrow$) Suponhamos que F satisfaz (F3) e sejam $x \in F$ e $y \in L$. Se $x \leq y$, temos que $y = x \vee y$. Daí, como $x \in F$, por (F3) obtemos que $y \in F$. Logo, F satisfaz (F3′).

($\Leftarrow$) Suponhamos que F satisfaz (F3′) e sejam $a \in L$ e $x \in F$. Sabemos que $x \leq a \vee x$. Daí, como $x \in F$, por (F3′) obtemos que $a \vee x \in F$. Logo, F satisfaz (F3).

(ii) Suponhamos que F é um filtro. Como F é não vazio, sabemos que existe $x \in F$. Logo, por (F3), obtemos que $1 = 1 \vee x \in F$.

□

Exemplo 1.47. Sejam X um conjunto e $\mathcal{F}$ a família dos subconjuntos cofinitos de X, definida por:

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) \,:\, X \setminus A \text{ é finito}\}$$

Vamos verificar que $\mathcal{F}$ é um filtro do reticulado $\mathcal{P}(X)$ (Exemplo 1.1). Sabemos que $\mathcal{F}$ é não vazio, pois $X \in \mathcal{F}$ ($X \setminus X = \emptyset$ é finito).

Agora, sejam $A, B \in \mathcal{F}$. Sabemos que $X \setminus A$ e $X \setminus B$ são finitos. Além disso:

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

Daí, como $(X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ é finito, segue que $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Para finalizar, seja $C \subseteq X$. Temos que:

$$X \setminus (C \cup A) = (X \setminus C) \cap (X \setminus A)$$

Logo, como $(X \setminus C) \cap (X \setminus A)$ é finito, obtemos que $C \cup A \in \mathcal{F}$. Portanto, $\mathcal{F}$ é de fato um filtro de $\mathcal{P}(X)$.

Exemplo 1.48. Sejam X um espaço topológico e $x \in X$. A família das vizinhanças de x é definida por:

$$\mathcal{V}_x = \{U \in \mathcal{O}(X) \,:\, x \in U\}$$

Vamos verificar que $\mathcal{V}_x$ é um filtro do reticulado $\mathcal{O}(X)$ (Exemplo 1.2).

Inicialmente, note que $\mathcal{V}_x$ é não vazio, pois $X \in \mathcal{V}_x$.

Agora, sejam $U, V \in \mathcal{V}_x$. Como $x \in U$ e $x \in V$, temos que $x \in U \cap V$. Desse modo, como $U \cap V$ é aberto, segue que $U \cap V \in \mathcal{V}_x$.

Para finalizar, seja $W \in \mathcal{O}(X)$, tal que $U \subseteq W$. Como $x \in U$, sabemos que $x \in W$. Logo, $W \in \mathcal{V}_x$.

Assim, concluímos que $\mathcal{V}_x$ é de fato um filtro de $\mathcal{O}(X)$.

Exemplo 1.49. Sejam L um reticulado e $x \in L$. Definimos o seguinte conjunto:

$$\uparrow x = \{y \in L \,:\, y \geq x\}$$

Vamos verificar que $\uparrow x$ é um filtro. Sabemos que $\uparrow x$ é não vazio, pois $1 \in \uparrow x$.

Agora, sejam $y, z \in \uparrow x$. Sabemos que $y \geq x$ e $z \geq x$. Daí, temos que:

$$y \wedge z \geq x \wedge x = x$$

Logo, $y \wedge z \in \uparrow x$. Além disso, dado $w \in L$ tal que $y \leq w$, temos que:

$$w \geq y \geq x$$

Desse modo, $w \in \uparrow x$, e concluímos que $\uparrow x$ é de fato um filtro.

Chamamos $\uparrow x$ de **filtro principal** gerado por x.

Proposição 1.50. Seja L um reticulado. Então:

(i) L é o maior filtro de L;

(ii) $\{1\}$ é o menor filtro de L.

Demonstração.

(i) Como L satisfaz trivialmente a definição de filtro, temos que L é um filtro. Além disso, dado um filtro F, sabemos que $F \subseteq L$. Logo, L é o maior filtro de L.

(ii) Como $1 \wedge 1 = 1$ e, para $a \in L$, $a \vee 1 = 1$, temos que $\{1\}$ é um filtro.

Agora, seja F um filtro. Pela Proposição 1.46, sabemos que $1 \in F$, ou seja, $\{1\} \subseteq F$. Logo, $\{1\}$ é o menor filtro de L.

□

Quando F é um filtro diferente de L, dizemos que F é um **filtro próprio** de L.

Proposição 1.51. Sejam L um reticulado e F um filtro de L. Então, F é um filtro próprio se, e somente se, $0 \notin F$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Vamos provar a contrapositiva. Suponhamos que $0 \in F$ e seja $x \in L$. Como $0 \leq x$ e $0 \in F$, temos que $x \in F$. Desse modo, $F = L$, e F não é um filtro próprio.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $0 \notin F$. É imediato que $F \neq L$, ou seja, F é um filtro próprio. □

Agora, vamos analisar algumas das principais técnicas para construção de filtros.

Proposição 1.52. Sejam L e K reticulados, $h : L \to K$ um homomorfismo e F um filtro de K. Então, $h^{-1}(F)$ é um filtro de L.

Demonstração. Como $1 \in F$ e $h(1) = 1$, sabemos que $h(1) \in F$. Logo, $1 \in h^{-1}(F)$, e $h^{-1}(F)$ é não vazio.

Agora, sejam $x, y \in h^{-1}(F)$. Sabemos que $h(x), h(y) \in F$. Daí, obtemos que:

$$h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y) \in F$$

Assim, $x \wedge y \in h^{-1}(F)$.

Para finalizar, seja $a \in L$. Temos que:

$$h(a \vee x) = h(a) \vee h(x) \in F$$

Portanto, $a \vee x \in h^{-1}(F)$, e concluímos que $h^{-1}(F)$ é um filtro de L. □

Proposição 1.53. Sejam L um reticulado e $\mathcal{F}$ uma família não vazia de filtros de L. Então:

(i) $\bigcap \mathcal{F}$ é um filtro;

(ii) se $\mathcal{F}$ é uma cadeia, então $\bigcup \mathcal{F}$ é um filtro.

Demonstração.

(i) Como $1 \in F$ para todo $F \in \mathcal{F}$, sabemos que $1 \in \bigcap \mathcal{F}$, ou seja, $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$.

Sejam $x, y \in \bigcap \mathcal{F}$, $a \in L$ e $F \in \mathcal{F}$. Sabemos que $x, y \in F$. Mas como F é um filtro, $x \wedge y, a \vee x \in F$. Logo, $x \wedge y, a \vee x \in \bigcap \mathcal{F}$.

Portanto, $\bigcap \mathcal{F}$ é um filtro.

(ii) Suponhamos que $\mathcal{F}$ é uma cadeia. Como $1 \in \bigcup \mathcal{F}$, sabemos que $\bigcup \mathcal{F} \neq \varnothing$.

Sejam $x, y \in \bigcup \mathcal{F}$ e $a \in L$. Sabemos que existem $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tais que $x \in F_1$ e $y \in F_2$. Como $\mathcal{F}$ é uma cadeia, podemos supor sem perda de generalidade que $F_1 \subseteq F_2$.

Desse modo, temos que $x, y \in F_2$, e como F_2 é um filtro, temos também que $x \wedge y, a \vee x \in F_2$. Logo, $x \wedge y, a \vee x \in \bigcup \mathcal{F}$.

Portanto, $\bigcup \mathcal{F}$ é um filtro.

□

Seja $B \subseteq L$. O **filtro gerado** por B, denotado por $\langle B \rangle$, é definido por:

$$\langle B \rangle = \bigcap \{F \ : \ F \text{ é um filtro e } F \supseteq B\}$$

Pela Proposição 1.53, sabemos que $\langle B \rangle$ é de fato um filtro. Além disso, como $B \subseteq \langle B \rangle$, $\langle B \rangle$ é o menor filtro de L que contém B. Alternativamente, podemos definir $\langle B \rangle$ descrevendo a forma de seus elementos:

Proposição 1.54. Sejam L um reticulado e $B \subseteq L$. Então, $\langle B \rangle$ é o conjunto de todos os elementos da forma:

$$(a_1 \vee x_1) \wedge \ldots \wedge (a_n \vee x_n)$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in B$ e $a_1, \ldots, a_n \in L$.

Demonstração. Seja F o conjunto dos elementos descritos pela forma acima.

Inicialmente, note que dado $x \in B$, temos que $x = 0 \vee x \in F$. Desse modo, $B \subseteq F$.

Agora, vamos verificar que F é um filtro. Para $n = 0$, a forma dada descreve o elemento 1. Assim, $1 \in F$, e $F \neq \emptyset$.

Sejam $x, y \in F$ e $a \in L$. Sabemos que existem m, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_n \in L$ e $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_n \in F$, tais que:

$$x = (a_1 \vee x_1) \wedge \ldots \wedge (a_m \vee x_m)$$

$$y = (b_1 \vee y_1) \wedge \ldots \wedge (b_n \vee y_n)$$

Daí, temos que:

$$x \wedge y = (a_1 \vee x_1) \wedge \ldots \wedge (a_m \vee x_m) \wedge (b_1 \vee y_1) \wedge \ldots \wedge (b_n \vee y_n)$$

$$\begin{aligned} a \vee x &= a \vee [(a_1 \vee x_1) \wedge \ldots \wedge (a_m \vee x_m)] \\ &= [(a \vee a_1) \vee x_1] \wedge \ldots \wedge [(a \vee a_m) \vee x_m] \end{aligned}$$

Logo, $x \wedge y, a \vee x \in F$, e obtemos que F é de fato um filtro.

Para finalizar, seja G um filtro, tal que $G \supseteq B$ e considere $x \in F$ como descrito acima. Como $x_1, \ldots, x_m \in B \subseteq G$, temos que $a_1 \vee x_1, \ldots, a_m \vee x_m \in G$. Daí, obtemos que:

$$x = (a_1 \vee x_1) \wedge \ldots \wedge (a_m \vee x_m) \in G$$

Portanto, $F \subseteq G$, e concluímos que F é o menor filtro de L que contém B, ou seja, $F = \langle B \rangle$. □

Quando $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$, denotamos $\langle B \rangle$ por $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Além disso, quando $B = B' \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$, denotamos $\langle B \rangle$ por $\langle B', x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Exemplo 1.55. Sejam L um reticulado e $x \in L$. No exemplo 1.49, definimos o filtro $\uparrow x$, chamado de filtro principal gerado por x. Vamos verificar que $\uparrow x$ é o filtro gerado por x, ou seja, $\uparrow x = \langle x \rangle$.

Como $x \leq x$, sabemos que $x \in \uparrow x$. Assim, seja F um filtro tal que $x \in F$, e considere $y \in \uparrow x$. Como $x \leq y$, segue que $y \in F$.

Logo, $\uparrow x \subseteq F$, e concluímos que $\uparrow x$ é o menor filtro que contém x, ou seja, $\uparrow x = \langle x \rangle$.

Finalizamos esta seção apresentando uma forma de caracterizar os elementos do filtro gerado $\langle F, x \rangle$, onde F é um filtro e $x \in L$.

Proposição 1.56. Sejam L um reticulado, F um filtro e $x \in L$. Então:

$$\langle F, x \rangle = \{y \in L \,:\, \text{existe } c \in F, \text{ tal que } c \wedge x \leq y\}.$$

Demonstração. Seja G o conjunto definido por:

$$G = \{y \in L : \text{existe } a \in F, \text{ tal que } a \wedge x \leq y\}$$

Inicialmente, note que dado $a \in F$, temos que $a \wedge x \leq a$. Desse modo, $a \in G$, e $F \subseteq G$. Do mesmo modo, obtemos que $x \in G$.

Agora, sejam $y, z \in G$, e $c \in L$. Sabemos que existem $a, b \in F$, tais que $a \wedge x \leq y$ e $b \wedge x \leq z$. Daí, temos que:

$$(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) \leq y \wedge z \Rightarrow (a \wedge b) \wedge x \leq y \wedge z$$

$$c \vee (a \wedge x) \leq c \vee y \Rightarrow a \wedge x \leq c \vee y$$

Logo, $y \wedge z, c \vee y \in G$, e obtemos que G é um filtro.

Para finalizar, seja G' um filtro tal que $G' \supseteq F \cup \{x\}$, e considere $y \in G$. Sabemos que existe $a \in F$, tal que $a \wedge x \leq y$.

Como $a, x \in G'$, temos que $a \wedge x \in G'$, e $y \in G'$. Portanto, $G \subseteq G'$, e concluímos que $G = \langle F, x \rangle$. □

1.8 Ultrafiltros e Filtros Primos

Nesta seção, continuamos a discussão da seção anterior, nos restringindo apenas a reticulados distributivos limitados.

Sejam L um reticulado e U um filtro próprio de L. Dizemos que U é um **ultrafiltro** (ou **filtro maximal**) de L quando para todo filtro F de L, se $U \subseteq F$, então $F = U$ ou $F = L$. Ou seja, U é um elemento maximal da família dos filtros próprios de L.

Teorema 1.57. (Teorema do Ultrafiltro)

Sejam L um reticulado e F um filtro próprio de L. Então, existe um ultrafiltro U de L, tal que $F \subseteq U$.

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ a família dos filtros próprios que contém F, ou seja:

$$\mathcal{F} = \{G \subseteq L : G \text{ é filtro próprio e } G \supseteq F\}$$

Considere $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ uma cadeia de filtros. Pela Proposição 1.53, temos que $\bigcup \mathcal{C}$ é um filtro. Como $0 \notin G$ para todo $G \in \mathcal{C}$, sabemos que $0 \notin \bigcup \mathcal{C}$, ou seja, $\bigcup \mathcal{C}$ é um filtro próprio.

Além disso, como cada elemento de $\mathcal{C}$ contém F, temos que $\bigcup \mathcal{C} \supseteq F$. Desse modo, $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$, e $\bigcup \mathcal{C}$ é cota superior de $\mathcal{C}$.

Logo, pelo Lema de Zorn[6], $\mathcal{F}$ possui um elemento maximal U. Vamos verificar que U é um ultrafiltro.

Seja G um filtro próprio de L, tal que $U \subseteq G$. Como $F \subseteq U$, segue que $F \subseteq G$, e $G \in \mathcal{F}$. Daí, como U é elemento maximal de $\mathcal{F}$, $U = G$.

---

[6] O enunciado do Lema de Zorn pode ser encontrado no Apêndice A.

Portanto, U é de fato um ultrafiltro. $\square$

Corolário 1.58. Seja L um reticulado não trivial. Então, L possui um ultrafiltro.

Demonstração. Como L possui mais de um elemento, sabemos que $\{1\}$ é um filtro próprio de L. Logo, pelo Teorema do Ultrafiltro, existe um ultrafiltro U em L, tal que $\{1\} \subseteq U$. $\square$

Dado P um filtro próprio de L, dizemos que P é **primo** quando para quaisquer $x, y \in L$, se $x \vee y \in P$, então $x \in P$ ou $y \in P$.

Teorema 1.59. Sejam L um reticulado e F um filtro próprio de L. Se F é um ultrafiltro, então F é primo.

Demonstração. Vamos provar a contrapositiva. Suponha que F não é primo. Sabemos que existem $x, y \in L$ tais que $x \vee y \in F$, $x \notin F$ e $y \notin F$.

Agora, considere o filtro $\langle F, x\rangle$. Sabemos que $F \subseteq \langle F, x\rangle$ e $F \neq \langle F, x\rangle$, pois $x \in \langle F, x\rangle$ e $x \notin F$. Além disso, $\langle F, x\rangle$ é um filtro próprio, ou seja, $\langle F, x\rangle \neq L$.

De fato, suponha para uma contradição que $y \in \langle F, x\rangle$. Pela Proposição 1.56 existe $a \in F$, tal que $a \wedge x \leq y$. Daí, temos que:

$$y = (a \wedge x) \vee y = (a \vee y) \wedge (x \vee y)$$

Logo, como $a \vee y, x \vee y \in F$, segue que $y \in F$, o que é uma contradição. Desse modo, $y \notin \langle F, x\rangle$, e $\langle F, x\rangle$ é um filtro próprio.

Portanto, F não é um ultrafiltro. $\square$

Sejam P um conjunto parcialmente ordenado e $S \subseteq P$. Dizemos que P é **direcionado para cima** quando para quaisquer $x, y \in S$, existe $z \in S$, tal que $x \leq z$ e $y \leq z$. Com essa definição, apresentamos abaixo um dos principais resultados sobre filtros primos.

Teorema 1.60. (Teorema da Separação de Stone e Birkhoff)

Sejam L um reticulado, F um filtro de L e S um subconjunto não vazio de L direcionado para cima, tais que $F \cap S = \emptyset$. Então, existe um filtro primo P, tal que $F \subseteq P$ e $P \cap S = \emptyset$.

Demonstração. Considere a seguinte família de filtros de L:

$$\mathcal{F} = \{G \subseteq L \,:\, G \text{ é filtro}, F \subseteq G \text{ e } G \cap S = \emptyset\}.$$

Vamos verificar que $\mathcal{F}$ satisfaz as hipóteses do Lema de Zorn.

Seja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ uma cadeia. Pela Proposição 1.53, sabemos que $\bigcup \mathcal{C}$ é um filtro. Além disso, como para todo $G \in \mathcal{C}$, $F \subseteq G$, temos que $F \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Temos também:

$$(\bigcup \mathcal{C}) \cap S = \left(\bigcup_{G \in \mathcal{C}} G\right) \cap S = \bigcup_{G \in \mathcal{C}} (G \cap S) = \bigcup_{G \in \mathcal{C}} \emptyset = \emptyset.$$

Logo, $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$, e $\bigcup \mathcal{C}$ é cota superior de $\mathcal{C}$. Desse modo, pelo Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ possui um elemento maximal P.

Agora, iremos verificar que P é um filtro primo.

Sejam $x, y \in L$, tais que $x \vee y \in P$ e suponha para uma contradição que $\langle P, x\rangle \notin \mathcal{F}$ e $\langle P, y\rangle \notin \mathcal{F}$. Como $\langle P, x\rangle$ e $\langle P, y\rangle$ são filtros que contém F, sabemos que $\langle P, x\rangle \cap S \neq \emptyset$ e $\langle P, y\rangle \cap S \neq \emptyset$.

Assim, considere $u \in \langle P, x\rangle \cap S$ e $v \in \langle P, y\rangle \cap S$. Pela Proposição 1.56, existem $p_1, p_2 \in P$, tais que $p_1 \wedge x \leq u$ e $p_2 \wedge y \leq v$. Além disso, como S é direcionado para cima, existe $w \in S$, tal que $u \leq w$ e $v \leq w$.

Desse modo, $u \vee v \leq w$, e obtemos:

$$(p_1 \wedge x) \vee (p_2 \wedge y) \leq u \vee v \leq w.$$

Note que:

$$(p_1 \wedge x) \vee (p_2 \wedge y) = (p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee y) \wedge (x \vee p_2) \wedge (x \vee y) \in P.$$

Logo, $w \in P \cap S$, o que é uma contradição. Assim, $\langle P, x\rangle \in \mathcal{F}$ ou $\langle P, x\rangle \in \mathcal{F}$. Mas, como P é elemento maximal de $\mathcal{F}$, $P = \langle P, x\rangle$ ou $P = \langle P, y\rangle$, ou seja, $x \in P$ ou $y \in P$.

Portanto, P é um filtro primo, o que encerra a prova do teorema. $\square$

Quando S é unitário, o teorema acima pode ser reescrito como:

Corolário 1.61. Sejam L um reticulado, F um filtro de L e $a \in L$, tais que $a \notin F$. Então, existe um filtro primo P, tal que $F \subseteq P$ e $a \notin P$.

Capítulo 2

Álgebras de Heyting

Na Lógica Clássica, as álgebras booleanas tem um papel fundamental no estudo de sua semântica. Para a Lógica Intuicionista, as álgebras de Heyting tem esse mesmo papel, e iremos estudá-las com mais detalhes neste capítulo.

Começamos apresentando o conceito de complemento em reticulados limitados, e suas generalizações para reticulados distributivos limitados. Estudamos o conceito de pseudocomplemento relativo, e as principais propriedades dos reticulados relativamente pseudocomplementados.

Em seguida, estudamos as álgebras de Heyting e suas propriedades. Estudamos também as álgebras booleanas, e vemos que álgebras booleanas são um caso particular de álgebras de Heyting. Finalizamos o capítulo estudando o completamento de Dedekind-MacNeille para álgebras de Heyting.

2.1 Complementos e Pseudocomplementos

Seja x elemento de um reticulado limitado L. Dizemos que $c \in L$ é **complemento** de x quando satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $x \wedge c = 0$;

(ii) $x \vee c = 1$.

Quando todo elemento de L possui um complemento, dizemos que L é **complementado**.

Exemplo 2.1. Seja X um conjunto. Para $A \in \mathcal{P}(X)$, o **complemento** de A é definido por:

$$A^c = X \setminus A$$

Como $A \cap A^c = \emptyset$ e $A \cup A^c = X$, temos que A^c satisfaz a definição de complemento em reticulados, e $\mathcal{P}(X)$ é um reticulado complementado.

Exemplo 2.2. Sejam V um espaço vetorial e $\mathcal{S}(V)$ o conjunto dos subespaços vetoriais de V. De forma similar aos reticulados de ideais, $\mathcal{S}(V)$ é um reticulado com as operações de interseção e soma de subespaços.

Dados $U, W \in \mathcal{S}(V)$, dizemos que V é **soma direta** de U e W quando $U + W = V$ e $U \cap W = \{0\}$. Neste caso, escrevemos $U \oplus W = V$.

Como $\{0\}$ e V são, respectivamente, o zero e a unidade de $\mathcal{S}(V)$, temos que V é soma direta de U e W se, e somente se, W é complemento de U.

O lema seguinte contém o principal argumento utilizado nas provas desta seção.

Lema 2.3. Sejam L um reticulado distributivo limitado e $x, a, b \in L$. Se $x \wedge a = 0$ e $x \vee b = 1$, então $a \leq b$.

Demonstração. Suponha que $x \wedge a = 0$ e $x \vee b = 1$. Temos que:

$$\begin{aligned} a &= a \wedge 1 \\ &= a \wedge (x \vee b) \\ &= (a \wedge x) \vee (a \wedge b) \\ &= 0 \vee (a \wedge b) \\ &= a \wedge b \end{aligned}$$

Logo, $a \leq b$. □

Em geral, um elemento de L pode não ter complemento, ou ter mais de um complemento. Porém, quando L é distributivo, cada elemento de L possui no máximo um complemento.

Proposição 2.4. Sejam L um reticulado distributivo limitado e $x \in L$. Se x possui um complemento, então ele é único.

Demonstração. Sejam c e c' complementos de x.

Como $x \wedge c = 0$ e $x \vee c' = 1$, pelo Lema 2.3 temos que $c \leq c'$. Da mesma forma, como $x \wedge c' = 0$ e $x \vee c = 1$, obtemos que $c' \leq c$.

Logo, $c = c'$. □

Seja $x \in L$. O $\wedge$-**complemento** de x é o elemento definido por:

$$\max\{a \in L \,:\, x \wedge a = 0\},$$

quando este máximo existir.

De forma análoga, o $\vee$-**complemento** de x é o elemento definido por:

$$\min\{a \in L \,:\, x \vee a = 1\},$$

quando este mínimo existir.

Exemplo 2.5. Seja X um espaço topológico. Definimos a seguinte operação[1], para $U \in \mathcal{O}(X)$:

$$-U = \operatorname{int}(U^c)$$

Vamos verificar que $-U$ é o $\wedge$-complemento de U.

Inicialmente, definimos a seguinte família de abertos:

$$\mathcal{A} = \{V \in \mathcal{O}(X) \,:\, U \cap V = \varnothing\}$$

Note que $-U \in \mathcal{A}$, pois:

$$\begin{aligned} U \cap (-U) &= U \cap \operatorname{int}(U^c) \\ &= \operatorname{int}(U) \cap \operatorname{int}(U^c) \\ &= \operatorname{int}(U \cap U^c) \\ &= \operatorname{int}(\varnothing) \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

Além disso, dado $V \in \mathcal{A}$, sabemos que $V \subseteq U^c$. Daí, como V é aberto, temos que:

$$V \subseteq \operatorname{int}(U^c) = -U$$

Logo, $-U = \max \mathcal{A}$, ou seja, $-U$ é o $\wedge$-complemento de U.

Como consequência direta da definição, temos que o $\wedge$-complemento e o $\vee$-complemento são conceitos duais:

Proposição 2.6. Sejam L um reticulado limitado e $c, x \in L$. Então, c é $\wedge$-complemento de x em L se, e somente se, c é $\vee$-complemento de x em L^*.

[1] A definição de $\operatorname{int}(A)$ (interior de A) pode ser encontrada no Apêndice B.

Demonstração. Sabemos que as seguintes afirmações são equivalentes:

- $c = \max_L\{a \in L : x \wedge_L a = 0_L\}$;
- $c = \min_{L^*}\{a \in L^* : x \vee_{L^*} a = 1_{L^*}\}$.

Logo, c é $\wedge$-complemento de x em L se, e somente se, c é $\vee$-complemento de x em L^*. □

Os conceitos de $\wedge$-complemento e $\vee$-complemento, também chamados de pseudocomplementos, são duas formas alternativas de generalizar o conceito de complemento em reticulados distributivos limitados.

Proposição 2.7. Sejam L um reticulado distributivo limitado e x um elemento de L com $\wedge$-complemento c_1 e $\vee$-complemento c_2. Então, $c_1 \leq c_2$.

Demonstração. Como $x \wedge c_1 = 0$ e $x \vee c_2 = 1$, pelo Lema 2.3 concluímos que $c_1 \leq c_2$. □

Proposição 2.8. Sejam L um reticulado distributivo limitado e $c, x \in L$. Então, c é o complemento de x se, e somente se, c é o $\wedge$-complemento e o $\vee$-complemento de x.

Demonstração. Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{a \in L : x \wedge a = 0\}$$

$$B = \{b \in L : x \vee b = 1\}$$

($\Rightarrow$) Suponha que c é o complemento de x. Dado $a \in A$, sabemos que $x \wedge a = 0$. Daí, como $x \vee c = 1$, pelo Lema 2.3 obtemos que $a \leq c$.

Logo, como $c \in A$, segue que $c = \max A$, ou seja, c é o $\wedge$-complemento de x.

De modo análogo, obtemos que c é o $\vee$-complemento de x.

($\Leftarrow$) Suponha que c é o $\wedge$-complemento e o $\vee$-complemento de x. Como $c \in A$ e $c \in B$, segue que $x \wedge c = 0$ e $x \vee c = 1$.

Logo, c é o complemento de x. □

No estudo das álgebras de Heyting, utilizamos apenas o $\wedge$-complemento, ao qual nos referimos simplesmente por **pseudocomplemento**. Denotamos o pseudocomplemento de um elemento $x \in L$ por $-x$.

2.2 Pseudocomplemento Relativo

Sejam x e y elementos de um reticulado L. O **pseudocomplemento de x relativo a y** é o elemento definido por:

$$\max\{a \in L : x \wedge a \leq y\},$$

quando este máximo existir.

Uma forma alternativa de caracterizar o pseudocomplemento relativo é dada pela seguinte proposição:

Proposição 2.9. Sejam L um reticulado e $x, y \in L$. Então, c é pseudocomplemento de x relativo a y se, e somente se, para todo $a \in L$:

$$a \leq c \Leftrightarrow x \wedge a \leq y.$$

Demonstração. Seja $A = \{a \in L \,:\, x \wedge a \leq y\}$.

($\Rightarrow$) Suponha que c é o pseudocomplemento de x relativo a y e considere $a \in L$.

Se $a \leq c$, temos que:

$$x \wedge a \leq x \wedge c \leq y$$

Se $x \wedge a \leq y$, então $a \in A$. Como $c = \max A$, segue que $a \leq c$.

Logo, $a \leq c \Leftrightarrow x \wedge a \leq y$.

($\Leftarrow$) Suponha que para todo $a \in L$:

$$a \leq c \Leftrightarrow x \wedge a \leq y$$

Sabemos que c é cota superior de A.

Além disso, como $c \leq c$, segue que $x \wedge c \leq y$, ou seja, $c \in A$. Logo, $c = \max A$, ou seja, c é o pseudocomplemento de x relativo a y. □

Denotamos o pseudocomplemento de x relativo a y por $x \rhd y$. Quando todo par de elementos de L possui pseudocomplemento relativo, dizemos que L é **relativamente pseudocomplementado**.

Pela proposição anterior, sabemos que $x \rhd y$ satisfaz a seguinte equivalência, para $a \in L$:

$$a \leq x \rhd y \Leftrightarrow x \wedge a \leq y.$$

Exemplo 2.10. Seja X um conjunto. Definimos a seguinte operação, para $A, B \in \mathcal{P}(X)$:

$$A \rhd B = A^c \cup B$$

Vamos verificar que $A \rhd B$ é o pseudocomplemento de A relativo a B.

Considere $\mathcal{A} = \{C \in \mathcal{P}(X) \,:\, A \cap C \subseteq B\}$. Note que $A \rhd B \in \mathcal{A}$, pois:

$$A \cap (A \rhd B) = A \cap (A^c \cup B) = A \cap B \subseteq B$$

Além disso, dado $C \in \mathcal{A}$, temos que:

$$\begin{aligned} A \cap C \subseteq B &\Rightarrow A^c \cup (A \cap C) \subseteq A^c \cup B \\ &\Rightarrow A^c \cup C \subseteq A \rhd B \\ &\Rightarrow C \subseteq A \rhd B \end{aligned}$$

Desse modo, $A \rhd B = \max \mathcal{A}$, ou seja, $A \rhd B$ é o pseudocomplemento de A relativo a B. Logo, $\mathcal{P}(X)$ é um reticulado relativamente pseudocomplementado.

Exemplo 2.11. Seja X um espaço topológico. Para $U, V \in \mathcal{O}(X)$, definimos a seguinte operação:

$$U \rhd V = \operatorname{int}(U^c \cup V)$$

Vamos verificar que $U \rhd V$ é o pseudocomplemento de U relativo a V. De fato, seja $W \in \mathcal{O}(X)$.

($\Rightarrow$) Suponha que $W \subseteq U \rhd V$. Sabemos que:

$$W \subseteq \operatorname{int}(U^c \cup V) \subseteq U^c \cup V$$

Desse modo, obtemos:

$$U \cap W \subseteq U \cap (U^c \cup V) = U \cap V \subseteq V$$

Logo, $U \cap W \subseteq V$.

($\Leftarrow$) Suponha que $U \cap W \subseteq V$. Temos que:

$$U^c \cup V \supseteq U^c \cup (U \cap W) = U^c \cup W \supseteq W$$

Logo, como W é aberto, segue que $W \subseteq \operatorname{int}(U^c \cup V) = U \rhd V$.

Assim, pela Proposição 2.9, $U \rhd V$ é o pseudocomplemento de U relativo a V, e concluímos que $\mathcal{O}(X)$ é um reticulado relativamente pseudocomplementado.

O pseudocomplemento relativo, assim como o pseudocomplemento, possui uma forma dual que não é utilizada no estudo das álgebras de Heyting. O principal exemplo de pseudocomplemento relativo dual é o complemento relativo de conjuntos.

Exemplo 2.12. Seja X um conjunto. Dados $A, B \in \mathcal{P}(X)$, sabemos que $B \setminus A$ é chamado de complemento de A relativo a B.

Vamos verificar que $B \setminus A$ é o pseudocomplemento de A relativo a B no reticulado $\mathcal{P}(X)^*$.

Considere a família $\mathcal{A} = \{C \in \mathcal{P}(X) \,:\, A \cup C \supseteq B\}$. Note que $B \setminus A \in \mathcal{A}$, pois:

$$A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \cap A^c) = A \cup B \supseteq B$$

Além disso, dado $C \in \mathcal{A}$, temos que:

$$\begin{aligned} A \cup C \supseteq B &\Rightarrow (A \cup C) \cap A^c \supseteq B \cap A^c \\ &\Rightarrow C \cap A^c \supseteq B \setminus A \\ &\Rightarrow C \supseteq B \setminus A \end{aligned}$$

Desse modo, $B \setminus A = \min \mathcal{A}$, ou seja, $B \setminus A$ é o pseudocomplemento de A relativo a B em $\mathcal{P}(X)^*$.

Proposição 2.13. Seja L um reticulado relativamente pseudocomplementado. Então, L é distributivo.

Demonstração. Sejam $x, y, z \in L$. Como $x \wedge y \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, temos que:

$$y \leq x \rhd [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)]$$

Da mesma forma, como $x \wedge z \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, obtemos:

$$z \leq x \rhd [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)]$$

Logo:

$$y \vee z \leq x \rhd [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)] \Rightarrow x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Assim, pelo Corolário 1.44, L é distributivo. □

Proposição 2.14. Seja L um reticulado. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) L possui unidade;

(ii) existe $x \in L$, tal que $x \rhd x$ existe;

(iii) para todo $x \in L$, $x \rhd x$ existe.

Demonstração. Inicialmente, note que para qualquer $x \in L$:

$$\{a \in L \,:\, x \wedge a \leq x\} = L$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Suponha que L possui unidade. Temos que:

$$\begin{aligned} 1 &= \max L \\ &= \max\{a \in L \,:\, 1 \wedge a \leq 1\} \\ &= 1 \rhd 1 \end{aligned}$$

Logo, $1 \rhd 1$ existe.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Suponha que existe $x \in L$, tal que $x \rhd x$ existe, e seja $y \in L$. Temos que:

$$\begin{aligned} x \rhd x &= \max\{a \in L : x \wedge a \leq x\} \\ &= \max L \\ &= \max\{a \in L : y \wedge a \leq y\} \\ &= y \rhd y \end{aligned}$$

Logo, $y \rhd y$ existe.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Suponha que para todo $x \in L$, $x \rhd x$ existe. Como $L \neq \emptyset$, sabemos que existe $x \in L$. Além disso, como $x \rhd x$ existe, temos que:

$$\begin{aligned} x \rhd x &= \max\{a \in L : x \wedge a \leq x\} \\ &= \max L \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, L possui unidade. □

Corolário 2.15. Seja L um reticulado relativamente pseudocomplementado. Então, L possui unidade.

Finalizamos esta seção verificando algumas das principais propriedades algébricas do pseudocomplemento relativo.

Proposição 2.16. Seja L um reticulado relativamente pseudocomplementado. Valem as seguintes propriedades (para $x, y, z \in L$):

(i) $x \leq y$ se, e somente se, $x \rhd y = 1$;

(ii) $x \rhd 1 = 1$;

(iii) $1 \rhd y = y$;

(iv) $x \wedge (x \rhd y) = x \wedge y$;

(v) $(x \rhd y) \wedge y = y$;

(vi) $(x \rhd y) \wedge (x \rhd z) = x \rhd (y \wedge z)$;

(vii) $(x \rhd z) \wedge (y \rhd z) = (x \vee y) \rhd z$;

(viii) $(x \rhd y) \wedge (y \rhd z) \leq x \rhd z$;

(ix) $x \rhd (y \rhd z) = (x \wedge y) \rhd z$;

(x) se $x \leq y$, então $y \rhd z \leq x \rhd z$;

(xi) se $y \leq z$, então $x \rhd y \leq x \rhd z$.

Demonstração. Sejam $x, y, z \in L$. Vamos provar os primeiros quatro itens (a prova dos outros itens pode ser encontrada em Rasiowa e Sikorski, 1963).

(i) Temos que:

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow x \wedge 1 \leq y \\ &\Leftrightarrow 1 \leq x \rhd y \\ &\Leftrightarrow x \rhd y = 1 \end{aligned}$$

(ii) Sabemos que $x \leq 1$. Logo, pelo item anterior, $x \rhd 1 = 1$.

(iii) Temos que:

$$\begin{aligned} 1 \rhd y &= \max\{a \in L \,:\, 1 \wedge a \leq y\} \\ &= \max\{a \in L \,:\, a \leq y\} \end{aligned}$$

Considere $A = \{a \in L \,:\, a \leq y\}$. Como $y \in A$ e y é cota superior de A, segue que $y = \max A$. Logo, $1 \rhd y = y$.

(iv) $(\leq)$ Como $x \rhd y \leq x \rhd y$, temos que:

$$\begin{aligned} x \rhd y \leq x \rhd y &\Rightarrow x \wedge (x \rhd y) \leq y \\ &\Rightarrow x \wedge x \wedge (x \rhd y) \leq x \wedge y \\ &\Rightarrow x \wedge (x \rhd y) \leq x \wedge y \end{aligned}$$

$(\geq)$ Como $x \wedge y \leq y$, temos que:

$$\begin{aligned} x \wedge y \leq y &\Rightarrow y \leq x \rhd y \\ &\Rightarrow x \wedge y \leq x \wedge (x \rhd y) \end{aligned}$$

Logo, $x \wedge (x \rhd y) = x \wedge y$.

□

2.3 Álgebras de Heyting

Uma **álgebra de Heyting** é uma estrutura da forma $\langle H, \wedge, \vee, \rhd, 0\rangle$, onde:

- $\langle H, \wedge, \vee\rangle$ é um reticulado relativamente pseudocomplementado e limitado;
- $\rhd$ é a operação de pseudocomplemento relativo no reticulado H;
- 0 é o zero do reticulado H.

Pela Proposição 2.13, sabemos que $\langle H, \wedge, \vee\rangle$ é também um reticulado distributivo.

Quando não houver risco de ambiguidade, iremos denotar a álgebra de Heyting $\langle H, \wedge, \vee, \rhd, 0\rangle$ pelo seu domínio H.

Exemplo 2.17. Vimos que o reticulado de conjuntos (Exemplo 2.10) e o reticulado de abertos (Exemplo 2.11) são reticulados relativamente pseudocomplementados. Como esses reticulados são limitados, também são exemplos de álgebras de Heyting.

Em uma álgebra de Heyting H, todo elemento $x \in H$ possui um pseudocomplemento, dado por $x \rhd 0$.

Proposição 2.18. Sejam H uma álgebra de Heyting e $x \in H$. Então:

$$-x = x \rhd 0.$$

Demonstração. Temos que:

$$\begin{aligned} x \rhd 0 &= \max\{a \in H \ : \ x \wedge a \leq 0\} \\ &= \max\{a \in H \ : \ x \wedge a = 0\} \\ &= -x \end{aligned}$$

□

Abaixo vemos algumas das principais propriedades algébricas do pseudocomplemento em álgebras de Heyting.

Proposição 2.19. Seja H uma álgebra de Heyting. Valem as seguintes propriedades (para $x, y, z \in H$):

(i) se $x \leq y$, então $-y \leq -x$;

(ii) $-0 = 1$ e $-1 = 0$;

(iii) $x \leq --x$;

(iv) $---x = -x$;

(v) $-(x \vee y) = (-x) \wedge (-y)$;

(vi) $-(x \wedge y) \geq (-x) \vee (-y)$;

(vii) $-(x \wedge y) = x \rhd (-y)$.

Demonstração. Sejam $x, y, z \in H$. Vamos provar os primeiros três itens (a prova dos outros itens pode ser encontrada em Rasiowa e Sikorski, 1963).

(i) Pela Proposição 2.16, item (x), temos que:

$$\begin{aligned} x \leq y &\Rightarrow y \rhd 0 \leq x \rhd 0 \\ &\Rightarrow -y \leq -x \end{aligned}$$

(ii) Como $0 \leq 0$, pela Proposição 2.16, item (i), temos que:

$$-0 = 0 \rhd 0 = 1$$

Além disso, pela Proposição 2.16, item (iii), obtemos que:

$$-1 = 1 \rhd 0 = 0$$

(iii) Pela Proposição 2.16, item (iv), temos que:

$$\begin{aligned} x \wedge 0 \leq 0 &\Rightarrow x \wedge (x \rhd 0) \leq 0 \\ &\Rightarrow x \leq (x \rhd 0) \rhd 0 \\ &\Rightarrow x \leq - - x \end{aligned}$$

□

Sejam H_1 e H_2 álgebras de Heyting. Dizemos que uma função $h : H_1 \to H_2$ é um **homomorfismo** de álgebras de Heyting quando satisfaz as seguintes propriedades, para $x, y \in H$:

(1) $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$;

(2) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$;

(3) $h(x \rhd y) = h(x) \rhd h(y)$;

(4) $h(0) = 0$.

Proposição 2.20. Sejam H_1 e H_2 álgebras de Heyting, e $h : H_1 \to H_2$ um homomorfismo. Valem as seguintes propriedades (para $x \in H_1$):

(i) $h(-x) = -h(x)$;

(ii) $h(1) = 1$.

Demonstração. Seja $x \in H_1$.

(i) Temos que:

$$h(-x) = h(x \rhd 0) = h(x) \rhd h(0) = h(x) \rhd 0 = -h(x)$$

(ii) Pelo item anterior, temos que:

$$h(1) = h(-0) = -h(0) = -0 = 1$$

□

Dado um homomorfismo $h : H_1 \to H_2$, dizemos que h é uma **imersão** de álgebras de Heyting quando f é injetor. Quando h é bijetor, dizemos que h é um **isomorfismo** de álgebras de Heyting.

Proposição 2.21. Sejam H_1, H_2 e H_3 álgebras de Heyting, e $h : H_1 \to H_2$ e $g : H_2 \to H_3$ homomorfismos. Então:

(i) $g \circ h$ é um homomorfismo;

(ii) a função identidade $\mathrm{id}_{H_1} : H_1 \to H_1$ é um homomorfismo;

(iii) se h é um isomorfismo, então h^{-1} também é um isomorfismo.

Demonstração. A prova é análoga às provas dos mesmos resultados para homomorfismos de reticulados. □

Pela proposição anterior, temos que a classe das álgebras de Heyting e seus homomorfismos formam uma categoria, denotada por **Heyt**. Em particular, como toda álgebra de Heyting é um reticulado distributivo limitado, e todo homomorfismo de álgebras de Heyting é um homomorfismo de reticulados limitados, obtemos que **Heyt** é uma subcategoria de **BDist**.

2.4 Álgebras Booleanas

Uma **álgebra booleana** é uma estrutura da forma $\langle B, \wedge, \vee, -, 0, 1\rangle$, onde:

- $\langle B, \wedge, \vee\rangle$ é um reticulado distributivo, limitado e complementado;
- $-$ é a operação de complemento no reticulado B;
- 0 e 1 são o zero e a unidade do reticulado B, respectivamente.

Quando não houver risco de ambiguidade, iremos denotar a álgebra booleana $\langle B, \wedge, \vee, -, 0, 1\rangle$ pelo seu domínio B.

Exemplo 2.22. No Exemplo 2.1, vimos que os reticulados de conjuntos são complementados. Como esses reticulados são distributivos e limitados, os reticulados de conjuntos são exemplos de álgebras booleanas.

Em uma álgebra booleana B, todo par de elementos $x, y \in B$ possui um pseudocomplemento relativo, dado por $(-x) \vee y$.

Proposição 2.23. Sejam B uma álgebra booleana e $x, y \in B$. Então:

$$x \rhd y = (-x) \vee y.$$

Demonstração. Seja $a \in B$.

($\Rightarrow$) Suponha que $a \leq (-x) \vee y$. Temos que:

$$\begin{aligned}
a \leq (-x) \vee y &\Rightarrow a \wedge [(-x) \vee y] = a \\
&\Rightarrow x \wedge a \wedge [(-x) \vee y] = x \wedge a \\
&\Rightarrow a \wedge \langle [x \wedge (-x)] \vee (x \wedge y)\rangle = x \wedge a \\
&\Rightarrow a \wedge [0 \vee (x \wedge y)] = x \wedge a \\
&\Rightarrow (x \wedge a) \wedge y = x \wedge a \\
&\Rightarrow x \wedge a \leq y
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Suponha que $x \wedge a \leq y$. Temos que:

$$\begin{aligned} x \wedge a \leq y &\Rightarrow (x \wedge a) \vee y = y \\ &\Rightarrow (-x) \vee (x \wedge a) \vee y = (-x) \vee y \\ &\Rightarrow \langle [(-x) \vee x] \wedge [(-x) \vee a] \rangle \vee y = (-x) \vee y \\ &\Rightarrow \langle 1 \wedge [(-x) \vee a] \rangle \vee y = (-x) \vee y \\ &\Rightarrow a \vee [(-x) \vee y] = (-x) \vee y \\ &\Rightarrow a \leq (-x) \vee y \end{aligned}$$

Logo, $a \leq (-x) \vee y$ se, e somente se, $x \wedge a \leq y$, e concluímos que $x \rhd y = (-x) \vee y$. □

Como toda álgebra booleana B é um reticulado limitado, segue da proposição anterior que B é uma álgebra de Heyting.

Corolário 2.24. Seja B uma álgebra booleana. Então, B é uma álgebra de Heyting.

Exemplo 2.25. Seja $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ o reticulado dos abertos de $\mathbb{R}$. Pelo Exemplo 2.17, sabemos que $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ é uma álgebra de Heyting. Porém, $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ não é uma álgebra booleana.

De fato, considere $U = (0, \infty)$ e suponha para uma contradição que U possui complemento em $\mathcal{O}(\mathbb{R})$. Pela Proposição 2.8, sabemos que $-U$ é o complemento de U. Além disso, temos que:

$$\begin{aligned} U \cup (-U) &= (0, \infty) \cup \operatorname{int}((0, \infty)^c) \\ &= (0, \infty) \cup \operatorname{int}((-\infty, 0]) \\ &= (0, \infty) \cup (-\infty, 0) \end{aligned}$$

Desse modo, $U \cup (-U) \neq \mathbb{R}$, e obtemos que $-U$ não é o complemento de U, o que é uma contradição. Logo, U não possui complemento em $\mathcal{O}(\mathbb{R})$, e concluímos que $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ não é uma álgebra booleana.

2.5 Filtros em Álgebras de Heyting

No Capítulo 1, estudamos o conceito de filtro em reticulados distributivos limitados. Como álgebras de Heyting são, em particular, reticulados distributivos limitados, todas as definições e resultados sobre filtros estudados anteriormente também se aplicam a álgebras de Heyting.

Utilizando o pseudocomplemento relativo, podemos caracterizar o conceito de filtro de forma alternativa.

Proposição 2.26. Sejam H uma álgebra de Heyting e $F \subseteq H$. Então, F é um filtro se, e somente se, satisfaz as seguintes propriedades:

(F1′) $1 \in F$;

(F3″) para $x \in F$ e $y \in H$, se $x \rhd y \in F$, então $y \in F$.

Demonstração.

(⇒) Suponha que F é um filtro. Sabemos que F satisfaz (F1′). Assim, basta verificarmos que F satisfaz (F3″).

Sejam $x \in F$ e $y \in H$, tais que $x \rhd y \in F$. Sabemos que $x \wedge (x \rhd y) \in F$. Além disso, temos que:

$$x \wedge (x \rhd y) = x \wedge y \leq y$$

Logo, $y \in F$, e obtemos que F satisfaz (F3″).

(⇐) Suponha que F satisfaz as propriedades (F1′) e (F3″). Para mostrar que F é um filtro, basta verificarmos que F satisfaz as propriedades:

(F2) para $x, y \in F$, $x \wedge y \in F$;

(F3′) para $x \in F$ e $y \in H$, se $x \leq y$, então $y \in F$.

Sejam $x, y \in F$. Note que:

$$1 = (x \wedge y) \rhd (x \wedge y) = x \rhd (y \rhd (x \wedge y))$$

Por (F1′), temos que $x \rhd (y \rhd (x \wedge y)) \in F$. Logo, por (F3″), $x \wedge y \in F$, e obtemos que F satisfaz (F2).

Agora, seja $b \in H$, tal que $x \leq b$. Temos que:

$$\begin{aligned} x \leq b &\Rightarrow x \rhd b = 1 \\ &\Rightarrow x \rhd b \in F && \text{por (F1}'\text{)} \\ &\Rightarrow b \in F && \text{por (F3}''\text{)} \end{aligned}$$

Portanto, F satisfaz (F3′), e concluímos que F é um filtro. □

Com o pseudocomplemento, obtemos também uma caracterização alternativa para ultrafiltros.

Teorema 2.27. Sejam H uma álgebra de Heyting e F um filtro próprio de H. Então, F é um ultrafiltro se, e somente se, para todo $x \in H$, $x \in F$ ou $-x \in F$.

Demonstração.

(⇒) Suponha que F é um ultrafiltro e considere $x \in H$ tal que $x \notin F$. Sabemos que $F \subseteq \langle F, x \rangle$ e $F \neq \langle F, x \rangle$. Desse modo, como F é um ultrafiltro, $\langle F, x \rangle = H$, ou seja, $0 \in \langle F, x \rangle$. Pela Proposição 1.56, temos que existe $a \in F$, tal que $a \wedge x \leq 0$. Daí, obtemos:

$$a \wedge x \leq 0 \Rightarrow a \leq x \rhd 0 \Rightarrow a \leq -x$$

Logo, como $a \in F$ e $a \leq -x$, segue que $-x \in F$. Assim, para todo $x \in H$, $x \in F$ ou $-x \in F$.

(⇐) Suponha que para todo $x \in H$, $x \in F$ ou $-x \in F$. Considere F' um filtro de H, tal que $F \subseteq F'$ e $F \neq F'$. Sabemos que existe $a \in F'$ tal que $a \notin F$. Desse modo, $-a \in F \subseteq F'$.

Daí, temos que:

$$0 = a \wedge 0 = a \wedge (a \rhd 0) = a \wedge (-a) \in F'$$

Logo, $0 \in F'$, ou seja, $F' = H$. Assim, F é um ultrafiltro.

□

2.6 Álgebras-quociente

Seja H uma álgebra de Heyting. Uma relação de **congruência** em H é uma relação de equivalência $\equiv$ compatível com as operações de H, ou seja, que satisfaz as seguintes propriedades (para $x, y, z, w \in H$):

(1) se $x \equiv y$ e $z \equiv w$, então $x \wedge z \equiv y \wedge w$;

(2) se $x \equiv y$ e $z \equiv w$, então $x \vee z \equiv y \vee w$;

(3) se $x \equiv y$ e $z \equiv w$, então $x \rhd z \equiv y \rhd w$.

Denotamos o conjunto das classes de equivalência de $\equiv$ por $H/\equiv$. Dado $x \in H$, denotamos a classe de equivalência de x com relação a $\equiv$ por $[x]_\equiv$ ou, quando não houver risco de ambiguidade, por $[x]$.

Proposição 2.28. Seja H uma álgebra de Heyting e $\equiv$ uma congruência em H. Valem as seguintes propriedades (para $x, y \in H$):

(i) se $x \equiv y$, então $-x \equiv -y$;

(ii) $[1]$ é um filtro.

Demonstração.

(i) Sejam $x, y \in H$ e suponha que $x \equiv y$. Como $0 \equiv 0$, temos que:

$$x \rhd 0 \equiv y \rhd 0 \Rightarrow -x \equiv -y$$

(ii) Como $1 \equiv 1$, sabemos que $1 \in [1]$. Agora, sejam $x \in [1]$ e $y \in H$, tais que $x \rhd y \in [1]$. Temos que:

$$\begin{aligned} x \equiv 1 &\Rightarrow x \rhd y \equiv 1 \rhd y \\ &\Rightarrow x \rhd y \equiv y \\ &\Rightarrow 1 \equiv y \end{aligned}$$

Logo, $y \in [1]$, e concluímos que $[1]$ é um filtro.

□

Assim como toda congruência $\equiv$ define um filtro $[1]$, podemos definir uma congruência a partir de um filtro. Dado F um filtro de H, definimos a seguinte relação (para $x, y \in H$):

$$x \equiv_F y \text{ se, e somente se, } (x \rhd y) \wedge (y \rhd x) \in F.$$

Lema 2.29. Seja H uma álgebra de Heyting. Valem as seguintes propriedades (para $x, y, z \in H$):

(i) $x \rhd y \leq (x \wedge z) \rhd (y \wedge z)$;

(ii) $x \rhd y \leq (x \vee z) \rhd (y \vee z)$;

(iii) $y \rhd x \leq (x \rhd z) \rhd (y \rhd z)$;

(iv) $x \rhd y \leq (z \rhd x) \rhd (z \rhd y)$.

Demonstração. Sejam $x, y, z \in H$.

(i) Como $y \wedge z \leq y \wedge z$, temos que:

$$\begin{aligned} y \wedge z \leq y \wedge z &\Rightarrow x \wedge y \wedge z \leq y \wedge z \\ &\Rightarrow x \wedge (x \rhd y) \wedge z \leq y \wedge z \\ &\Rightarrow x \rhd y \leq (x \wedge z) \rhd (y \wedge z) \end{aligned}$$

(ii) Como $y \vee z \leq y \vee z$, temos que:

$$\begin{aligned} y \vee z \leq y \vee z &\Rightarrow (x \wedge y) \vee [z \wedge (x \rhd y)] \leq y \vee z \\ &\Rightarrow [x \wedge (x \rhd y)] \vee [z \wedge (x \rhd y)] \leq y \vee z \\ &\Rightarrow (x \vee z) \wedge (x \rhd y) \leq y \vee z \\ &\Rightarrow x \rhd y \leq (x \vee z) \rhd (y \vee z) \end{aligned}$$

(iii) Como $y \wedge x \wedge z \leq z$, temos que:

$$\begin{aligned} y \wedge x \wedge z \leq z &\Rightarrow y \wedge x \wedge (x \rhd z) \leq z \\ &\Rightarrow y \wedge (y \rhd x) \wedge (x \rhd z) \leq z \\ &\Rightarrow (y \rhd x) \wedge (x \rhd z) \leq y \rhd z \\ &\Rightarrow y \rhd x \leq (x \rhd z) \rhd (y \rhd z) \end{aligned}$$

(iv) Como $(z \rhd x) \wedge (x \rhd y) \leq z \rhd y$, segue que:

$$x \rhd y \leq (z \rhd x) \rhd (z \rhd y)$$

□

Proposição 2.30. Sejam H uma álgebra de Heyting e F um filtro. Então, $\equiv_F$ é uma relação de congruência.

Demonstração. Inicialmente, vamos verificar que $\equiv_F$ é uma relação de equivalência.

Sejam $x, y, z \in H$.

- Para a reflexividade, como $1 \in F$, temos que:

$$\begin{aligned} 1 \in F &\Rightarrow (x \rhd x) \wedge (x \rhd x) \in F \\ &\Rightarrow x \equiv_F x \end{aligned}$$

- Para a simetria, suponha que $x \equiv_F y$. Temos que:

$$\begin{aligned} x \equiv_F y &\Rightarrow (x \rhd y) \wedge (y \rhd x) \in F \\ &\Rightarrow (y \rhd x) \wedge (x \rhd y) \in F \\ &\Rightarrow y \equiv_F x \end{aligned}$$

- Para a transitividade, suponha que $x \equiv_F y$ e $y \equiv_F z$. Note que:

$$\begin{aligned} & (x \rhd y) \wedge (y \rhd x) \wedge (y \rhd z) \wedge (z \rhd y) \\ = \ & (x \rhd y) \wedge (y \rhd z) \wedge (z \rhd y) \wedge (y \rhd x) \\ \leq \ & (x \rhd z) \wedge (z \rhd x) \end{aligned}$$

  Daí, como F é um filtro, obtemos que $(x \rhd z) \wedge (z \rhd x) \in F$, ou seja, $x \equiv_F z$.

Para finalizar, vamos verificar que $\equiv_F$ é compatível com as operações de H.

Seja $w \in H$ e suponha que $x \equiv_F y$ e $z \equiv_F w$. Vamos mostrar que $x \rhd z \equiv_F y \rhd w$.

De fato, como F é um filtro, sabemos que $y \rhd x \in F$ e $z \rhd w \in F$. Pelo Lema 2.29, temos que:

$$y \rhd x \leq (x \rhd z) \rhd (y \rhd z) \in F$$

$$z \rhd w \leq (y \rhd z) \rhd (y \rhd w) \in F$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} & [(x \rhd z) \rhd (y \rhd z)] \wedge [(y \rhd z) \rhd (y \rhd w)] \\ \leq \ & (x \rhd z) \rhd (y \rhd w) \in F \end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos que $(y \rhd w) \rhd (x \rhd z) \in F$. Assim, concluímos que $x \rhd z \equiv_F y \rhd w$.

A prova da compatibilidade do $\wedge$ e do $\vee$ é análoga. □

No caso da congruência definida por um filtro F, denotamos o conjunto de suas classes de equivalência por H/F, e a classe de equivalência de um elemento $x \in H$ por $[x]_F$.

Seja F um filtro em H. Definimos as seguintes operações em H/F (para $x, y \in H$):

- $[x] \wedge [y] = [x \wedge y]$;
- $[x] \vee [y] = [x \vee y]$;
- $[x] \rhd [y] = [x \rhd y]$.

Como $\equiv$ é compatível com as operações de H, sabemos que as definições acima estão bem definidas, pois não dependem da escolha de um representante nas classes $[x]$ e $[y]$.

Chamamos a estrutura $\langle H/F, \wedge, \vee, \rhd, [0]\rangle$ de **álgebra-quociente** de H módulo F. Vamos verificar que H/F é uma álgebra de Heyting.

Proposição 2.31. Sejam H uma álgebra de Heyting e F um filtro. Então, H/F é uma álgebra de Heyting.

Demonstração. Sejam $x, y, z \in H$. Inicialmente, vamos mostrar que H/F satisfaz os axiomas de reticulados. Para isso, vamos verificar a associatividade do $\wedge$ (a prova dos outros axiomas é análoga):

$$\begin{aligned}
[x] \wedge ([y] \wedge [z]) &= [x] \wedge [y \wedge z] \\
&= [x \wedge (y \wedge z)] \\
&= [(x \wedge y) \wedge z] \\
&= [x \wedge y] \wedge z \\
&= ([x] \wedge [y]) \wedge z
\end{aligned}$$

A prova de que $[0]$ é o zero de H/F também é análoga à prova acima.

Para finalizar, vamos verificar que $[x] \rhd [y]$ é o pseudocomplemento de $[x]$ relativo a $[y]$. Para isso, considere o seguinte conjunto:

$$A = \{[a] \in H/F \;:\; [x] \wedge [a] \leq [y]\}$$

Note que $[x] \rhd [y] \in A$, pois:

$$\begin{aligned}
[x] \wedge ([x] \rhd [y]) &= [x \wedge (x \rhd y)] \\
&= [x \wedge y] \\
&= [x] \wedge [y] \\
&\leq [y]
\end{aligned}$$

Além disso, dado $[a] \in A$, temos que:

$$\begin{aligned}
[x] \wedge [a] \leq [y] &\Rightarrow [x] \rhd ([x] \wedge [a]) \leq [x] \rhd [y] \\
&\Rightarrow ([x] \rhd [x]) \wedge ([x] \rhd [a]) \leq [x] \rhd [y] \\
&\Rightarrow [1] \wedge ([x] \rhd [a]) \leq [x] \rhd [y] \\
&\Rightarrow [x] \rhd [a] \leq [x] \rhd [y] \\
&\Rightarrow [1] \rhd [a] \leq [x] \rhd [y] \\
&\Rightarrow [a] \leq [x] \rhd [y]
\end{aligned}$$

Logo, $[x] \rhd [y] = \max A$, ou seja, $[x] \rhd [y]$ é o pseudocomplemento de $[x]$ relativo a $[y]$. Portanto, H/F é uma álgebra de Heyting. $\square$

A cada álgebra-quociente H/F, associamos um homomorfismo $\pi_F : H \to H/F$, definido por (para $x \in H$):

$$\pi_F(x) = [x]_F.$$

Chamamos π_F de **projeção canônica** de H sobre H/F. Quando não houver risco de ambiguidade, denotamos π_F simplesmente por π.

Teorema 2.32. (Propriedade Universal da Álgebra-quociente)

Sejam H_1 e H_2 álgebras de Heyting, F um filtro de H_1 e $f : H_1 \to H_2$ um homomorfismo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) existe um único morfismo $\overline{f} : H_1/F \to H_2$, tal que $f = \overline{f} \circ \pi$, ou seja, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & H_2 \\ H_1/F \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

(ii) $F \subseteq f^{-1}(1)$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que existe um único morfismo $\overline{f} : H_1/F \to H_2$, tal que $f = \overline{f} \circ \pi$ e seja $x \in F$. Como $[x] = [1]$, temos que:

$$f(x) = \overline{f}(\pi(x)) = \overline{f}([x]) = \overline{f}([1]) = 1$$

Logo, $x \in f^{-1}(1)$, e concluímos que $F \subseteq f^{-1}(1)$.

($\Leftarrow$) Suponha que $F \subseteq f^{-1}(1)$. Vamos definir a função $\overline{f} : H_1/F \to H_2$ pela seguinte expressão (para $x \in H_1$):

$$\overline{f}([x]) = f(x)$$

Para isso, precisamos garantir que a definição acima não depende do representante de $[x]$, ou seja, para $x, y \in H_1$, se $[x] = [y]$, então $f(x) = f(y)$.

Assim, sejam $x, y \in H_1$, tais que $[x] = [y]$, ou seja, $x \equiv y$. Temos que:

$$\begin{aligned} x \equiv y &\Rightarrow (x \rhd y) \wedge (y \rhd x) \in F \\ &\Rightarrow (x \rhd y) \wedge (y \rhd x) \in f^{-1}(1) \\ &\Rightarrow f((x \rhd y) \wedge (y \rhd x)) = 1 \\ &\Rightarrow f(x) \rhd f(y) = 1 \text{ e } f(y) \rhd f(x) = 1 \\ &\Rightarrow f(x) \leq f(y) \text{ e } f(y) \leq f(x) \\ &\Rightarrow f(x) = f(y) \end{aligned}$$

Desse modo, $\overline{f}$ está bem definida. Como f é um homomorfismo, segue que $\overline{f}$ também é um homomorfismo. Além disso, pela definição de $\overline{f}$, sabemos que $\overline{f} \circ \pi = f$.

Para finalizar, vamos verificar a unicidade de $\overline{f}$. De fato, seja $g : H_1/F \to H_2$ um homomorfismo, tal que $g \circ \pi = f$. Para $x \in H_1$, temos que:

$$g([x]) = (g \circ \pi)(x) = f(x) = (\overline{f} \circ \pi)(x) = \overline{f}([x])$$

Portanto, $g = \overline{f}$, e concluímos que $\overline{f}$ é único. □

2.7 Álgebras Completas

Seja H uma álgebra de Heyting. Dizemos que H é **completa** quando H é um reticulado completo.

Como vimos no capítulo anterior, $\mathrm{DM}(H)$ é um reticulado completo. Vamos verificar que $\mathrm{DM}(H)$ é uma álgebra de Heyting, e que $\varphi : H \to \mathrm{DM}(H)$ é uma imersão de álgebras de Heyting.

Sejam $A, B \subseteq H$. Definimos as seguintes operações:

$$A \wedge B = \{a \wedge b : a \in A \text{ e } b \in B\};$$

$$A \rhd B = \{x \in H : A \cap \downarrow x \subseteq B\}.$$

Dizemos que A é **fechado para baixo** quando para quaisquer $a \in A$ e $x \in H$, se $x \leq a$, então $x \in A$.

Lema 2.33. Seja H uma álgebra de Heyting. Valem as seguintes propriedades (para $A, B \subseteq H$):

(i) A^l é fechado para baixo;

(ii) $A \cap B \subseteq A \wedge B$;

(iii) se A e B são fechados para baixo, então $A \cap B = A \wedge B$;

(iv) $A^u \subseteq (A \wedge B)^u$;

(v) $(A \wedge B)^{ul} = A^{ul} \cap B^{ul}$;

(vi) $A \rhd B$ é fechado para baixo;

(vii) $A \cap (A \rhd B) \subseteq B$.

Demonstração. Sejam $A, B \subseteq H$.

(i) Sejam $a \in A^l$ e $x \in H$, tais que $x \leq a$. Como a é cota inferior de A, segue que x é cota inferior de A, ou seja, $x \in A^l$. Logo, A^l é fechado para baixo.

(ii) Seja $x \in A \cap B$. Como $x \in A$ e $x \in B$, segue que $x = x \wedge x \in A \wedge B$. Logo, $A \cap B \subseteq A \wedge B$.

(iii) Suponha que A e B são fechados para baixo. Pelo item anterior, sabemos que $A \cap B \subseteq A \wedge B$. Vamos verificar que $A \wedge B \subseteq A \cap B$.

Seja $x \in A \wedge B$. Sabemos que existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $x = a \wedge b$. Como $x \leq a$, $x \leq b$, e A e B são fechados para baixo, segue que $x \in A$ e $x \in B$, ou seja, $x \in A \cap B$.

(iv) Sejam $x \in A^u$ e $y \in A \wedge B$. Sabemos que existem $a \in A$ e $b \in B$, tais que $y = a \wedge b$. Como x é cota superior de A, temos que:

$$y = a \wedge b \leq a \leq x$$

Logo, $y \leq x$, e obtemos que x é cota superior de $A \wedge B$, ou seja, $x \in (A \wedge B)^u$. Portanto, $A^u \subseteq (A \wedge B)^u$.

(v) $(\subseteq)$ Pelo item anterior, sabemos que $A^u \subseteq (A \wedge B)^u$ e $B^u \subseteq (A \wedge B)^u$. Daí, pelo Lema 1.34, $(A \wedge B)^{ul} \subseteq A^{ul}$ e $(A \wedge B)^{ul} \subseteq B^{ul}$. Desse modo, $(A \wedge B)^{ul} \subseteq A^{ul} \cap B^{ul}$.

$(\supseteq)$ Sejam $x \in A^{ul} \cap B^{ul}$ e $y \in (A \wedge B)^u$. Vamos verificar que $x \leq y$.

Considere $a \in A$. Como y é cota superior de $A \wedge B$, dado $b \in B$ sabemos que $a \wedge b \leq y$, ou seja, $b \leq a \rhd y$. Desse modo, $B \subseteq {\downarrow}(a \rhd y)$ e, pelo Lema 1.34, $B^{ul} \subseteq {\downarrow}(a \rhd y)$.

Como $x \in B^{ul}$, temos que $x \in {\downarrow}(a \rhd y)$, ou seja, $x \leq a \rhd y$. Daí:

$$x \leq a \rhd y \Rightarrow a \wedge x \leq y \Rightarrow a \leq x \rhd y$$

Assim, $A \subseteq {\downarrow}(x \rhd y)$, e pelo Lema 1.34, $A^{ul} \subseteq {\downarrow}(x \rhd y)$. Como $x \in A^{ul}$, temos que $x \in {\downarrow}(x \rhd y)$, ou seja, $x \leq x \rhd y$. Logo, $x \leq y$, e concluímos que x é cota inferior de $(A \wedge B)^u$, ou seja, $x \in (A \wedge B)^{ul}$.

(vi) Sejam $x \in A \rhd B$ e $y \in H$ tais que $y \leq x$. Sabemos que $A \cap ({\downarrow} x) \subseteq B$. Daí, como $y \leq x$, temos que:

$${\downarrow} y \subseteq {\downarrow} x \Rightarrow A \cap ({\downarrow} y) \subseteq A \cap ({\downarrow} x) \subseteq B$$

Logo, $y \in A \rhd B$, e concluímos que $A \rhd B$ é fechado para baixo.

(vii) Seja $x \in A \cap (A \rhd B)$. Como $x \in A \rhd B$, sabemos que $A \cap ({\downarrow} x) \subseteq B$. Daí, como $x \in A \cap ({\downarrow} x)$, segue que $x \in B$. Logo, $A \cap (A \rhd B) \subseteq B$.

□

Teorema 2.34. Seja H uma álgebra de Heyting. Valem as seguintes propriedades:

(i) DM(H) é uma álgebra de Heyting;

(ii) φ é uma imersão de álgebras de Heyting.

Demonstração.

(i) Sabemos que DM(H) é um reticulado completo. Assim, basta verificarmos que DM(H) possui uma operação de pseudocomplemento relativo.

Sejam $A, B \in$ DM(H). Inicialmente, vamos mostrar que $A \rhd B \in$ DM(H). Pelo Lema 1.34, sabemos que $A \rhd B \subseteq (A \rhd B)^{ul}$.

Considere $x \in (A \rhd B)^{ul}$ e $a \in A \cap (\downarrow x)$. Sabemos que $a \in A = A^{ul}$. Além disso, pelos Lemas 1.34 e 2.33, temos que:

$$A^{ul} \cap (A \rhd B)^{ul} = [A \wedge (A \rhd B)]^{ul} = [A \cap (A \rhd B)]^{ul} \subseteq B^{ul} = B$$

Logo, $a \in B$, e $x \in A \rhd B$. Desse modo, $A \rhd B = (A \rhd B)^{ul}$, ou seja, $A \rhd B \in \mathrm{DM}(H)$.

Agora, vamos verificar que $A \rhd B$ é o pseudocomplemento de A relativo a B. De fato, seja $X \in \mathrm{DM}(H)$.

($\Rightarrow$) Suponha que $X \subseteq A \rhd B$ e considere $x \in A \cap X$. Sabemos que $x \in A \cap (A \rhd B)$. Desse modo, pelo Lema 2.33, $x \in B$, e $A \cap X \subseteq B$.

($\Leftarrow$) Suponha que $A \cap X \subseteq B$ e considere $x \in X$ e $a \in A \cap (\downarrow x)$. Como $X = X^{ul}$, sabemos que X é fechado para baixo e, como $x \in X$, $\downarrow x \subseteq X$. Desse modo, $a \in A \cap X \subseteq B$, e $A \cap (\downarrow x) \subseteq B$.

Logo, $x \in A \rhd B$, e concluímos que $X \subseteq A \rhd B$.

(ii) Sabemos que φ é uma imersão de reticulados limitados. Assim, basta verificarmos que φ preserva o pseudocomplemento relativo.

Sejam $x, y \in H$. Vamos verificar que $\downarrow(x \rhd y) = (\downarrow x) \rhd (\downarrow y)$.

($\subseteq$) Seja $a \in \downarrow(x \rhd y)$. Sabemos que $a \leq x \rhd y$, ou seja, $x \wedge a \leq y$. Desse modo, considere $b \in (\downarrow x) \cap (\downarrow a)$. Como $b \leq x$ e $b \leq a$, segue que $b \leq x \wedge a \leq y$. Logo, $b \in \downarrow y$, e $(\downarrow x) \cap (\downarrow a) \subseteq \downarrow y$, ou seja, $a \in (\downarrow x) \rhd (\downarrow y)$.

($\supseteq$) Seja $a \in (\downarrow x) \rhd (\downarrow y)$. Sabemos que $(\downarrow x) \cap (\downarrow a) \subseteq (\downarrow y)$. Como $x \wedge a \leq x$ e $x \wedge a \leq a$, temo que $x \wedge a \in (\downarrow x) \cap (\downarrow a) \subseteq (\downarrow y)$.

Desse modo, $x \wedge a \leq y$, ou seja, $a \leq x \rhd y$. Logo, $a \in \downarrow(x \rhd y)$.

Portanto, $\downarrow(x \rhd y) = (\downarrow x) \rhd (\downarrow y)$, e concluímos que:

$$\varphi(x \rhd y) = \downarrow(x \rhd y) = (\downarrow x) \rhd (\downarrow y) = \varphi(x) \rhd \varphi(y)$$

$\square$

Capítulo 3

Lógica Sentencial Intuicionista

Neste capítulo, apresentamos a versão sentencial da Lógica Intuicionista. Começamos apresentando sua linguagem, que também pode ser usada para a Lógica Sentencial Clássica.

Apresentamos a consequência sintática através de um sistema de dedução natural, e a consequência semântica através de valorações em álgebras de Heyting. A partir da consequência sintática, construímos as álgebras de Lindenbaum, uma álgebra de Heyting formada por classes de equivalência de fórmulas.

Encerramos o capítulo provando a corretude e a completude do sistema. Apresentamos também uma versão alternativa da semântica, utilizando modelos de Kripke.

3.1 Linguagem

O **alfabeto** da Lógica Sentencial Intuicionista (LSI) é composto pelos seguintes símbolos:

- um conjunto enumerável de variáveis sentenciais:

$$\mathrm{VarS} = \{p_i \,:\, i \in \mathbb{N}\};$$

- uma constante: $\perp$;
- três conectivos binários: $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$;
- dois delimitadores: (e).

A partir dos símbolos no alfabeto, definimos indutivamente as **fórmulas** da LSI pelas seguintes regras:

(i) toda variável sentencial é uma fórmula;

(ii) $\perp$ é uma fórmula;

(iii) se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ e $(\varphi \rightarrow \psi)$ também são fórmulas;

(iv) apenas as expressões obtidas pelo uso das regras acima são fórmulas.

Denotamos o conjunto de todas as fórmulas por For. Esse conjunto também é chamado de **linguagem** da LSI.

Como consequência da construção da linguagem da LSI, obtemos os seguintes resultados:

Teorema 3.1. (Princípio de Indução para Fórmulas)

Seja A um conjunto que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\mathrm{VarS} \subseteq A$;

(ii) $\perp \in A$;

(iii) para $\varphi, \psi \in \mathrm{For}$, se $\varphi, \psi \in A$, então $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \in A$;

Então, $\mathrm{For} \subseteq A$.

Teorema 3.2. (Teorema da Recursão para Fórmulas)

Sejam A um conjunto, $h \,:\, \mathrm{VarS} \cup \{\perp\} \rightarrow A$ uma função e, para cada conectivo binário $*$, uma função $f_* \,:\, A \times A \rightarrow A$. Então, existe uma única função $\overline{h} \,:\, \mathrm{For} \rightarrow A$, tal que:

(i) para todo $p \in \mathrm{VarS}$, $\overline{h}[p] = h(p)$;

(ii) $\overline{h}[\perp] = h(\perp)$;

(iii) para $\varphi, \psi \in \mathrm{For}$ e $*$ um conectivo binário, $\overline{h}[(\varphi * \psi)] = f_*(\overline{h}[\varphi], \overline{h}[\psi])$.

Para mais detalhes sobre definições indutivas, e sobre o Princípio de Indução e Teorema da Recursão para fórmulas, indicamos Enderton, 2001.

Além dos conectivos no alfabeto, definimos também mais dois conectivos adicionais (para $\varphi, \psi \in \text{For}$):

- $(\neg\varphi)$ é definido por $(\varphi \to \bot)$;
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é definido por $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$.

Em geral, para facilitar a escrita de fórmulas, é comum seguirmos algumas regras para omissão de parênteses. Em nosso texto, iremos considerar as seguintes regras:

- omitimos os parênteses mais externos de cada fórmula (e.g. escrevemos $p_1 \to (p_1 \wedge p_2)$ ao invés de $(p_1 \to (p_1 \wedge p_2)))$;
- omitimos os parênteses de conectivos unários, considerando que conectivos unários tem precedência maior que conectivos binários (e.g. escrevemos $\neg p_2 \vee p_4$ ao invés de $(\neg p_2) \vee p_4$);
- omitimos os parênteses em sequências de conjunções e em sequências de disjuções (e.g. escrevemos $p_1 \wedge p_3 \wedge p_5$ ao invés de $(p_1 \wedge p_3) \wedge p_5$ ou $p_1 \wedge (p_3 \wedge p_5)$).

3.2 Dedução Natural

A consequência sintática da LSI é definida indutivamente pelas seguintes regras (para $\Gamma \subseteq \text{For}$ finito e $\varphi, \psi, \theta \in \text{For}$):

Axioma (Ax)

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$

Eliminação do $\bot$ ($\bot$E)

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Introdução do $\wedge$ ($\wedge$I)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}$$

Eliminação do $\wedge$ ($\wedge$E)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Introdução do $\vee$ ($\vee$I)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$$

Eliminação do $\vee$ ($\vee$E)

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \theta \qquad \Gamma, \psi \vdash \theta \qquad \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \theta}$$

Introdução do $\to$ ($\to$I)

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$$

Eliminação do $\to$ ($\to$E)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Lembramos que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ é uma abreviação para $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Quando $\Gamma \vdash \varphi$, dizemos que φ é **consequência sintática** de Γ. No caso de $\Gamma = \emptyset$, dizemos que φ é um **teorema** da LSI, e escrevemos $\vdash \varphi$.

Dado um conjunto de fórmulas Δ, escrevemos $\Gamma \vdash \Delta$ quando para toda fórmula $\delta \in \Delta$, $\Gamma \vdash \delta$.

As regras acima indicam que, a partir das consequências acima da barra, podemos concluir a consequência abaixo da barra. Por exemplo, a regra Introdução do $\to$ indica que se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, então $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

A regra Axioma é o ponto de partida para construir a relação de consequência sintática. Como não há nenhuma consequência acima da barra, a consequência abaixo da barra é sempre verdadeira.

Um dos meios de formalizar a construção indutiva acima é através de sequências finitas que representam a construção de $\Gamma \vdash \varphi$ a partir das regras dadas. No caso da consequência sintática, chamamos essas sequências de demonstrações.

Uma **demonstração** é uma sequência finita $((\Gamma_i, \varphi_i) : 0 \leq i \leq n)$ de pares da forma (Γ, φ), onde Γ é um conjunto de fórmulas e φ é uma fórmula, satisfazendo as seguintes propriedades (para $0 \leq i \leq n$):

(1) (Γ_i, φ_i) é uma instância da regra (Ax), ou seja, $\varphi_i \in \Gamma_i$;

(2) existem $j, k, l < i$, tais que (Γ_i, φ_i) é obtido a partir de (Γ_j, φ_j), (Γ_k, φ_k) e (Γ_l, φ_l) por aplicação de uma das regras ($\perp$E), ($\wedge$I), ($\wedge$E), ($\vee$I), ($\vee$E), ($\to$I) ou ($\to$E).

Normalmente, representamos o par (Γ_i, φ_i) em uma demonstração por $\Gamma_i \vdash \varphi_i$. Quando o último par de uma demonstração D é $\Gamma \vdash \varphi$, dizemos que D é uma demonstração de $\Gamma \vdash \varphi$.

Exemplo 3.3. Sejam φ, ψ, θ e ξ fórmulas. Vamos verificar que:

$$\varphi \vee \psi, \varphi \to \theta, \psi \to \xi \vdash \theta \vee \xi$$

Seja $\Gamma = \{\varphi \vee \psi, \varphi \to \theta, \psi \to \xi\}$. Temos a seguinte demonstração:

$$\begin{array}{rll}
1. & \Gamma, \varphi \vdash \varphi & \text{(Ax)} \\
2. & \Gamma, \varphi \vdash \varphi \to \theta & \text{(Ax)} \\
3. & \Gamma, \varphi \vdash \theta & (\to\text{E}),\ 1,\ 2 \\
4. & \Gamma, \varphi \vdash \theta \vee \xi & (\vee\text{I}),\ 3 \\
5. & \Gamma, \psi \vdash \psi & \text{(Ax)} \\
6. & \Gamma, \psi \vdash \psi \to \xi & \text{(Ax)} \\
7. & \Gamma, \psi \vdash \xi & (\to\text{E}),\ 5,\ 6 \\
8. & \Gamma, \psi \vdash \theta \vee \xi & (\vee\text{I}),\ 7 \\
9. & \Gamma \vdash \varphi \vee \psi & \text{(Ax)} \\
10. & \Gamma \vdash \theta \vee \xi & (\vee\text{E}),\ 4,\ 8,\ 9
\end{array}$$

Também podemos representar a aplicação das regras em forma de árvore:

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi} \quad \dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi \to \theta}}{\Gamma, \varphi \vdash \theta}\,(\to\text{E})}{\Gamma, \varphi \vdash \theta \vee \xi}\,(\vee\text{I}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \psi \vdash \psi} \quad \dfrac{}{\Gamma, \psi \vdash \psi \to \xi}}{\Gamma, \psi \vdash \xi}\,(\to\text{E})}{\Gamma, \psi \vdash \theta \vee \xi}\,(\vee\text{I})}{\Gamma \vdash \theta \vee \xi}\,(\vee\text{E})$$

As regras para a negação e bi-implicação são casos particulares das regras para a implicação e conjunção, respectivamente.

Introdução do ¬ (¬I)

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}$$

Eliminação do ¬ (¬E)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}$$

Introdução do ↔ (↔I)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \psi \to \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi}$$

Eliminação do ↔ (↔E)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi \to \varphi}$$

Pela construção indutiva da relação de consequência sintática, temos o seguinte princípio de indução:

Teorema 3.4. (Princípio de Indução para Consequência Sintática)

Seja $R \subseteq \mathcal{P}(\text{For}) \times \text{For}$ uma relação que satisfaz as seguintes condições:

(i) para todo $\Gamma \subseteq \text{For}$ e $\varphi \in \text{For}$, $(\Gamma \cup \{\varphi\}, \varphi) \in R$;

(ii) R é fechada para as regras de inferência ($\bot$E), ($\wedge$I), ($\wedge$E), ($\vee$I), ($\vee$E), ($\to$I) e ($\to$E).

Então, $\vdash \subseteq R$, ou seja, para todo conjunto de fórmulas Γ e toda fórmula φ, se $\Gamma \vdash \varphi$, então $(\Gamma, \varphi) \in R$.

Utilizando o Princípio de Indução, vamos provar algumas das principais propriedades da consequência sintática.

Teorema 3.5. (Monotonicidade da Consequência Sintátitca)

Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas e φ uma fórmula. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$. Ou seja, temos a seguinte regra de inferência:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi} \text{ (Mon)}$$

Demonstração. Seja Δ um conjunto de fórmulas. Vamos provar por indução em $\Gamma \vdash \varphi$ que $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$, ou seja, vamos mostrar que:

$$\vdash \subseteq R = \{(\Gamma, \varphi) : \Gamma \cup \Delta \vdash \varphi\}$$

(Base - Ax) Sejam Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. Por (Ax), segue que $\Gamma \cup \Delta, \varphi \vdash \varphi$, ou seja, $\Gamma \cup \{\varphi\} \cup \Delta \vdash \varphi$.

(Hipótese Indutiva - $\wedge$I) Sejam Γ um conjunto de fórmulas, e φ e ψ fórmulas. Suponha que $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$ e $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.

(Passo Indutivo - $\wedge$I) Pela Hipótese Indutiva, sabemos que $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$ e $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$. Logo, por ($\wedge$I), obtemos que $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi \wedge \psi$.

(Hipótese Indutiva - $\vee$E) Sejam Γ um conjunto de fórmulas, e φ, ψ e θ fórmulas. Suponha que $\Gamma \cup \{\varphi\} \cup \Delta \vdash \theta$, $\Gamma \cup \{\psi\} \cup \Delta \vdash \theta$ e $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi \vee \psi$.

(Passo Indutivo - $\vee$E) Pela Hipótese Indutiva, sabemos que $\Gamma \cup \Delta, \varphi \vdash \theta$, $\Gamma \cup \Delta, \psi \vdash \theta$ e $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi \vee \psi$. Logo, por ($\vee$E), temos que $\Gamma \cup \Delta \vdash \theta$.

Para as regras ($\perp$E), ($\wedge$E), ($\vee$I) e ($\to$E), a prova é análoga ao caso do ($\wedge$I). Para a regra ($\to$I), a prova é análoga ao caso do ($\vee$E). $\square$

Teorema 3.6. (Transitividade da Consequência Sintática)

Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas e φ uma fórmula. Se $\Gamma \vdash \Delta$ e $\Delta \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$. Ou seja, temos a seguinte regra de inferência:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta \qquad \Delta \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Demonstração. Vamos provar por indução em $\Delta \vdash \varphi$ que para todo conjunto de fórmulas Γ, se $\Gamma \vdash \Delta$, então $\Gamma \vdash \varphi$, ou seja, vamos mostrar que:

$$\vdash \subseteq R = \{(\Delta, \varphi) \ : \ \text{para } \Gamma \subseteq \text{For, se } \Gamma \vdash \Delta, \text{ então } \Gamma \vdash \varphi\}$$

(Base - Ax) Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas e φ uma fórmula, tal que $\Gamma \vdash \Delta \cup \{\varphi\}$. Segue que $\Gamma \vdash \varphi$.

(Hipótese Indutiva - $\to$I) Sejam Δ um conjunto de fórmulas, e φ e ψ fórmulas. Suponha que para todo conjunto de fórmulas Γ, se $\Gamma \vdash \Delta \cup \{\varphi\}$, então $\Gamma \vdash \psi$.

(Passo Indutivo - $\to$I) Seja Γ um conjunto de fórmulas e suponha que $\Gamma \vdash \Delta$. Pela monotonicidade da consequência sintática, temos que $\Gamma, \varphi \vdash \Delta$. Além disso, como $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$, segue que $\Gamma, \varphi \vdash \Delta \cup \{\varphi\}$.

Pela Hipótese Indutiva, obtemos que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Logo, por ($\to$I), concluímos que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

(Hipótese Indutiva - $\to$E) Sejam Δ um conjunto de fórmulas, e φ e ψ fórmulas. Suponha que para todo conjunto de fórmulas Γ, se $\Gamma \vdash \Delta$, então $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

(Passo Indutivo - $\to$E) Seja Γ um conjunto de fórmulas e suponha que $\Gamma \vdash \Delta$. Pela Hipótese Indutiva, temos que $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Logo, por ($\to$E), obtemos que $\Gamma \vdash \psi$.

Para as regras ($\perp$E), ($\wedge$I), ($\wedge$E) e ($\vee$I), a prova é análoga ao caso da regra ($\to$E). Para a regra ($\vee$E), a prova é análoga ao caso da regra ($\to$I). $\square$

3.3 Semântica Algébrica

Seja H uma álgebra de Heyting. Uma **valoração** em H é uma função da forma $v : \text{VarS} \to H$. Pelo Teorema da Recursão para fórmulas, podemos estender v a uma função $v^* : \text{For} \to H$ que satisfaz as seguintes condições (para $p \in \text{VarS}$ e $\varphi, \psi \in \text{For}$):

(1) $v^*[p] = v(p)$;

(2) $v^*[\perp] = 0$;

(3) $v^*[\varphi \wedge \psi] = v^*[\varphi] \wedge v^*[\psi]$;

(4) $v^*[\varphi \vee \psi] = v^*[\varphi] \vee v^*[\psi]$;

(5) $v^*[\varphi \to \psi] = v^*[\varphi] \rhd v^*[\psi]$.

Para a negação, temos que:

$$v^*[\neg\varphi] = v^*[\varphi \to \bot] = v^*[\varphi] \rhd v^*[\bot] = v^*[\varphi] \rhd 0 = -v^*[\varphi]$$

Considere Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. Dizemos que:

- v **satisfaz** φ em H ($H, v \vDash \varphi$) quando $v^*[\varphi] = 1$;
- v **satisfaz** Γ em H ($H, v \vDash \Gamma$) quando para toda fórmula $\gamma \in \Gamma$, $H, v \vDash \gamma$;
- φ é **satisfazível** quando existe uma álgebra de Heyting não trivial H e v uma valoração em H, tais que $H, v \vDash \varphi$;
- φ é **consequência semântica** de Γ ($\Gamma \vDash \varphi$) quando para toda álgebra de Heyting H e toda valoração v em H, se $H, v \vDash \Gamma$, então $H, v \vDash \varphi$;
- φ é **válida** ($\vDash \varphi$) quando $\varnothing \vDash \varphi$.

Exemplo 3.7. Seja p uma variável sentencial. Vamos verificar que:

$$\nvDash p \vee \neg p$$

Considere a álgebra de abertos $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ e uma valoração v em $\mathcal{O}(\mathbb{R})$, tal que $v(p) = (0, \infty)$. Temos que:

$$\begin{aligned} v^*[p \vee \neg p] &= v(p) \cup \mathrm{int}(v(p)^c) \\ &= (0, \infty) \cup \mathrm{int}(-\infty, 0] \\ &= (0, \infty) \cup (-\infty, 0) \end{aligned}$$

Logo, $v^*[p \vee \neg p] \neq \mathbb{R}$, e concluímos que $p \vee \neg p$ não é válida.

O valor de uma fórmula φ depende apenas do valor das variáveis sentenciais que ocorrem em φ. Para verificar esse resultado, definimos recursivamente o conjunto das variáveis sentenciais que ocorrem em φ, denotado por $\mathrm{VarS}[\varphi]$, pelas seguintes regras:

(1) $\mathrm{VarS}[p] = \{p\}$;

(2) $\mathrm{VarS}[\bot] = \varnothing$;

(3) $\mathrm{VarS}[\varphi \wedge \psi] = \mathrm{VarS}[\varphi] \cup \mathrm{VarS}[\psi]$;

(4) $\mathrm{VarS}[\varphi \vee \psi] = \mathrm{VarS}[\varphi] \cup \mathrm{VarS}[\psi]$;

(5) $\mathrm{VarS}[\varphi \to \psi] = \mathrm{VarS}[\varphi] \cup \mathrm{VarS}[\psi]$.

Dada uma álgebra de Heyting H, duas valorações v_1 e v_2 em H, e uma fórmula φ, dizemos que v_1 e v_2 **concordam** nas variáveis sentenciais de φ quando para toda variável sentencial $p \in \mathrm{VarS}[\varphi]$, $v_1(p) = v_2(p)$.

Teorema 3.8. Sejam H uma álgebra de Heyting, v_1 e v_2 valorações em H e φ uma fórmula. Se v_1 e v_2 concordam nas variáveis sentenciais de φ, então $v_1^*[\varphi] = v_2^*[\varphi]$.

Demonstração. Vamos mostrar por indução em φ que se v_1 e v_2 concordam nas variáveis sentenciais de φ, então $v_1^*[\varphi] = v_2^*[\varphi]$.

(Base - VarS) Seja p uma variável sentencial e suponha que v_1 e v_2 concordam nas variáveis sentenciais de p. Como $p \in \mathrm{VarS}[p]$, temos que:

$$v_1^*[p] = v_1(p) = v_2(p) = v_2^*[p]$$

(Hipótese Indutiva - $\wedge$) Sejam φ e ψ fórmulas e suponha que:

- se v_1 e v_2 concordam nas variáveis sentenciais de φ, então $v_1^*[\varphi] = v_2^*[\varphi]$;
- se v_1 e v_2 concordam nas variáveis sentenciais de ψ, então $v_1^*[\psi] = v_2^*[\psi]$.

(Passo Indutivo - $\wedge$) Suponha que v_1 e v_2 concordam nas variáveis sentenciais de $\varphi \wedge \psi$.

Como $\mathrm{VarS}[\varphi] \subseteq \mathrm{VarS}[\varphi \wedge \psi]$, sabemos que v_1 e v_2 concordam nas variáveis de φ. De forma análoga, temos que v_1 e v_2 também concordam nas variáveis sentenciais de ψ. Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} v_1^*[\varphi \wedge \psi] &= v_1^*[\varphi] \wedge v_1^*[\psi] \\ &= v_2^*[\varphi] \wedge v_2^*[\psi] \quad \text{pela Hipótese Indutiva} \\ &= v_2^*[\varphi \wedge \psi] \end{aligned}$$

Para a constante $\bot$, a prova é análoga ao caso das variáveis sentenciais. Para os conectivos $\vee$ e $\to$, a prova é análoga ao caso do $\wedge$. □

Dado um homomorfismo de álgebras de Heyting $h : H_1 \to H_2$ e uma valoração v em H_1, sabemos que $h \circ v$ é uma valoração em H_2. Neste caso, podemos pensar em duas formas de estender o domínio de $h \circ v$ para todas as fórmulas: aplicando diretamente a extensão recursiva, obtendo $(h \circ v)^*$, ou aplicando o homomorfismo à extensão de v, obtendo $h \circ v^*$. Vamos verificar que essas duas extensões coincidem.

Teorema 3.9. Sejam H_1 e H_2 álgebras de Heyting, $h : H_1 \to H_2$ um homomorfismo e v uma valoração em H_1. Vale que:

$$(h \circ v)^* = h \circ v^*$$

Demonstração. Vamos mostrar por indução na fórmula φ que:

$$(h \circ v)^*[\varphi] = (h \circ v^*)[\varphi]$$

(Base - VarS) Seja p uma variável sentencial. Temos que:

$$(h \circ v)^*[p] = (h \circ v)(p) = h(v(p)) = h(v^*[p]) = (h \circ v^*)[p]$$

(Hipótese Indutiva - $\to$) Sejam φ e ψ fórmulas. Suponha que:

$$(h \circ v)^*[\varphi] = (h \circ v^*)[\varphi]$$

$$(h \circ v)^*[\psi] = (h \circ v^*)[\psi]$$

(Passo Indutivo - $\to$) Para $\varphi \to \psi$, temos que:

$$\begin{aligned}
(h \circ v)^*[\varphi \to \psi] &= (h \circ v)^*[\varphi] \rhd (h \circ v)^*[\psi] \\
&= (h \circ v^*)[\varphi] \rhd (h \circ v^*)[\psi] \quad \text{pela Hipótese Indutiva} \\
&= h(v^*[\varphi] \rhd v^*[\psi]) \\
&= h(v^*[\varphi \to \psi]) \\
&= (h \circ v^*)[\varphi \to \psi]
\end{aligned}$$

Para a constante $\perp$, a prova é análoga ao caso das variáveis sentenciais. Para os conectivos $\wedge$ e $\vee$, a prova é análoga ao caso do $\to$. $\square$

Encerramos esta seção com a prova do Teorema da Dedução para a consequência semântica.

Teorema 3.10. (Teorema da Dedução)

Sejam Γ um conjunto de fórmulas e φ e ψ fórmulas. Então, $\Gamma, \varphi \vDash \psi$ se, e somente se, $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que $\Gamma, \varphi \vDash \psi$. Sejam H uma álgebra de Heyting e v uma valoração, tais que $H, v \vDash \Gamma$.

Considere o filtro $F = \{x \in H : v^*[\varphi] \leq x\}$ e π a projeção canônica de H/F. Dado $\gamma \in \Gamma$, temos que:

$$(\pi \circ v)^*[\gamma] = (\pi \circ v^*)[\gamma] = \pi(1) = 1$$

Desse modo, $H/F, \pi \circ v \vDash \Gamma$. Além disso, como $v^*[\varphi] \in F$, temos que:

$$(\pi \circ v)^*[\varphi] = \pi(v^*[\varphi]) = 1$$

Daí, $H/F, \pi \circ v \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$, e como $\Gamma, \varphi \vDash \psi$, segue que $H/F, \pi \circ v \vDash \psi$, ou seja, $(\pi \circ v)^*[\psi] = 1$. Desse modo, obtemos:

$$\begin{aligned}
(\pi \circ v)^*[\psi] = 1 &\Rightarrow \pi(v^*[\psi]) = 1 \\
&\Rightarrow v^*[\psi] \in F
\end{aligned}$$

Logo, $v^*[\varphi] \leq v^*[\psi]$, e temos que:

$$\begin{aligned}
v^*[\varphi] \leq v^*[\psi] &\Rightarrow v^*[\varphi] \rhd v^*[\psi] = 1 \\
&\Rightarrow v^*[\varphi \to \psi] = 1
\end{aligned}$$

Portanto, $H, v \vDash \varphi \to \psi$, e concluímos que $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$. Sejam H uma álgebra de Heyting e v uma valoração, tais que $H, v \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$. Como $H, v \vDash \Gamma$, segue que $H, v \vDash \varphi \to \psi$.

Daí, como $H, v \vDash \varphi$, temos que:

$$1 = v^*[\varphi \to \psi] = v^*[\varphi] \rhd v^*[\psi] = 1 \rhd v^*[\psi] = v^*[\psi]$$

Logo, $H, v \vDash \psi$, e concluímos que $\Gamma, \varphi \vDash \psi$. □

3.4 Álgebras de Lindenbaum

Seja Γ um conjunto de fórmulas. Definimos a seguinte relação (para $\varphi, \psi \in \mathrm{For}$):

$$\varphi \equiv_\Gamma \psi \text{ se, e somente se, } \Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ e } \Gamma \vdash \psi \to \varphi.$$

Lema 3.11. Sejam Γ um conjunto de fórmulas, e φ, ψ e θ fórmulas. Se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \psi \to \theta$, então $\Gamma \vdash \varphi \to \theta$.

Demonstração. Suponha que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \psi \to \theta$. Temos que:

1. $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$
2. $\Gamma \vdash \psi \to \theta$
3. $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ (Ax)
4. $\Gamma, \varphi \vdash \varphi \to \psi$ (Mon), 1
5. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ ($\to$E), 3, 4
6. $\Gamma, \varphi \vdash \psi \to \theta$ (Mon), 2
7. $\Gamma, \varphi \vdash \theta$ ($\to$E), 5, 6
8. $\Gamma \vdash \varphi \to \theta$ ($\to$I), 7

Logo, $\Gamma \vdash \varphi \to \theta$. □

Proposição 3.12. Seja Γ um conjunto de fórmulas. Então, $\equiv_\Gamma$ é uma relação de equivalência.

Demonstração. Sejam φ, ψ e θ fórmulas.

(Reflexividade)

Por (Ax), sabemos que $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$. Daí, por ($\to$I), $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi$. Logo, $\varphi \equiv_\Gamma \varphi$.

(Simetria)

Suponha que $\varphi \equiv_\Gamma \psi$, ou seja, $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$. Sabemos que $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$ e $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Logo, $\psi \equiv_\Gamma \varphi$.

(Transitividade)

Suponha que $\varphi \equiv_\Gamma \psi$ e $\psi \equiv_\Gamma \theta$. Sabemos que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \psi \to \theta$. Daí, pelo Lema 3.11, temos que $\Gamma \vdash \varphi \to \theta$. Analogamente, obtemos que $\Gamma \vdash \theta \to \varphi$. Logo, $\varphi \equiv_\Gamma \theta$.

Portanto, $\equiv_\Gamma$ é uma relação de equivalência. □

Quando $\varphi \equiv_\Gamma \psi$, dizemos que φ é **equivalente** a ψ segundo Γ. Também podemos descrever essa relação usando a bi-implicação:

$$\varphi \equiv_\Gamma \psi \text{ se, e somente se, } \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Denotamos o conjunto das classes de equivalência de $\equiv_\Gamma$ por $\mathrm{For}/\equiv_\Gamma$. Dada uma fórmula φ, denotamos a classe de equivalência de φ por $[\varphi]_\Gamma$ ou, quando não houver risco de ambiguidade, por $[\varphi]$.

Associada ao conjunto das classes de equivalência, temos uma função da forma $\pi_\Gamma : \mathrm{For} \to \mathrm{For}/\equiv_\Gamma$, definida por (para $\varphi \in \mathrm{For}$):

$$\pi_\Gamma(\varphi) = [\varphi]_\Gamma.$$

Chamamos π_Γ de **projeção canônica** de $\mathrm{For}/\equiv_\Gamma$.

Lema 3.13. Seja Γ um conjunto de fórmulas. Valem as seguintes propriedades (para $\varphi, \psi, \theta, \xi \in \mathrm{For}$):

(i) se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \theta \to \xi$, então $\Gamma \vdash (\varphi \land \theta) \to (\psi \land \xi)$;

(ii) se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \theta \to \xi$, então $\Gamma \vdash (\varphi \lor \theta) \to (\psi \lor \xi)$;

(iii) se $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$ e $\Gamma \vdash \theta \to \xi$, então $\Gamma \vdash (\varphi \to \theta) \to (\psi \to \xi)$.

Demonstração. Sejam φ, ψ, θ e ξ fórmulas. Para o item (iii), suponha que $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$ e $\Gamma \vdash \theta \to \xi$. Temos que:

1.	$\Gamma \vdash \psi \to \varphi$	
2.	$\Gamma \vdash \theta \to \xi$	
3.	$\Gamma, \varphi \to \theta, \psi \vdash \varphi \to \theta$	(Ax)
4.	$\Gamma, \varphi \to \theta, \psi \vdash \psi$	(Ax)
5.	$\Gamma, \varphi \to \theta, \psi \vdash \psi \to \varphi$	(Mon), 1
6.	$\Gamma, \varphi \to \theta, \psi \vdash \varphi$	($\to$E), 4, 5
7.	$\Gamma, \varphi \to \theta, \psi \vdash \theta$	($\to$E), 3, 6
8.	$\Gamma, \varphi \to \theta, \psi \vdash \theta \to \xi$	(Mon), 2
9.	$\Gamma, \varphi \to \theta, \psi \vdash \xi$	($\to$E), 7, 8
10.	$\Gamma, \varphi \to \theta \vdash \psi \to \xi$	($\to$I), 9
11.	$\Gamma \vdash (\varphi \to \theta) \to (\psi \to \xi)$	($\to$I), 10

A prova dos outros itens é análoga. □

Teorema 3.14. Seja Γ um conjunto de fórmulas. Então, $\equiv_\Gamma$ é compatível com os conectivos da LSI, ou seja, para quaisquer fórmulas φ, ψ, θ e ξ:

(i) se $\varphi \equiv_\Gamma \psi$ e $\theta \equiv_\Gamma \xi$, então $\varphi \land \theta \equiv_\Gamma \psi \land \xi$;

(ii) se $\varphi \equiv_\Gamma \psi$ e $\theta \equiv_\Gamma \xi$, então $\varphi \vee \theta \equiv_\Gamma \psi \vee \xi$;

(iii) se $\varphi \equiv_\Gamma \psi$ e $\theta \equiv_\Gamma \xi$, então $\varphi \to \theta \equiv_\Gamma \psi \to \xi$.

Demonstração. Sejam φ, ψ, θ e ξ fórmulas. Vamos mostrar o item (iii) (a prova dos outros itens é análoga).

Suponha que $\varphi \equiv_\Gamma \psi$ e $\theta \equiv_\Gamma \xi$. Sabemos que $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$ e $\Gamma \vdash \theta \to \xi$. Daí, pelo Lema 3.13, temos que $\Gamma \vdash (\varphi \to \theta) \to (\psi \to \xi)$. Analogamente, obtemos que $\Gamma \vdash (\psi \to \xi) \to (\varphi \to \theta)$. Logo, $\varphi \to \theta \equiv_\Gamma \psi \to \xi$. □

Pelo teorema anterior, podemos definir as seguintes operações em $\mathrm{For}/\equiv_\Gamma$ (para $\varphi, \psi \in \mathrm{For}$):

- $[\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$;
- $[\varphi] \vee [\psi] = [\varphi \vee \psi]$;
- $[\varphi] \rhd [\psi] = [\varphi \to \psi]$.

Além das operações acima, definimos também uma constante 0, que representa a classe $[\bot]$. Assim, construímos a estrutura $\langle \mathrm{For}/\equiv_\Gamma, \wedge, \vee, \rhd, 0\rangle$, chamada de **álgebra de Lindenbaum** de Γ, e denotada por $\mathcal{L}_\Gamma$.

Lema 3.15. Sejam φ, ψ e θ fórmulas. As seguintes fórmulas são teoremas da LSI:

(i) $(\varphi \wedge (\psi \wedge \theta)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \wedge \theta)$;

(ii) $(\varphi \vee (\psi \vee \theta)) \leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \vee \theta)$;

(iii) $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$;

(iv) $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$;

(v) $(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \leftrightarrow \varphi$;

(vi) $(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \leftrightarrow \varphi$;

(vii) $(\varphi \vee \bot) \leftrightarrow \varphi$;

(viii) $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \to \theta)$.

Demonstração. Vamos verificar que a fórmula do item (viii) é um teorema da LSI. Temos a seguinte demonstração:

1.	$\varphi \to (\psi \to \theta), \varphi \wedge \psi \vdash \varphi \to (\psi \to \theta)$	(Ax)
2.	$\varphi \to (\psi \to \theta), \varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi$	(Ax)
3.	$\varphi \to (\psi \to \theta), \varphi \wedge \psi \vdash \varphi$	($\wedge$E), 2
4.	$\varphi \to (\psi \to \theta), \varphi \wedge \psi \vdash \psi \to \theta$	($\to$E), 1, 3
5.	$\varphi \to (\psi \to \theta), \varphi \wedge \psi \vdash \psi$	($\wedge$E), 2
6.	$\varphi \to (\psi \to \theta), \varphi \wedge \psi \vdash \theta$	($\to$E), 4, 5
7.	$\varphi \to (\psi \to \theta) \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \theta$	($\to$I), 6
8.	$\vdash (\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \wedge \psi) \to \theta)$	($\to$I), 7
9.	$(\varphi \wedge \psi) \to \theta, \varphi, \psi \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \theta$	(Ax)
10.	$(\varphi \wedge \psi) \to \theta, \varphi, \psi \vdash \varphi$	(Ax)
11.	$(\varphi \wedge \psi) \to \theta, \varphi, \psi \vdash \psi$	(Ax)
12.	$(\varphi \wedge \psi) \to \theta, \varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$	($\wedge$I), 10, 11
13.	$(\varphi \wedge \psi) \to \theta, \varphi, \psi \vdash \theta$	($\to$E), 9, 12
14.	$(\varphi \wedge \psi) \to \theta, \varphi \vdash \psi \to \theta$	($\to$I), 13
15.	$(\varphi \wedge \psi) \to \theta \vdash \varphi \to (\psi \to \theta)$	($\to$I), 14
16.	$\vdash ((\varphi \wedge \psi) \to \theta) \to (\varphi \to (\psi \to \theta))$	($\to$I), 15
17.	$\vdash (\varphi \to (\psi \to \theta)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \to \theta)$	($\leftrightarrow$I), 8, 16

Para os outros itens, a prova é análoga. □

Lema 3.16. Sejam Γ um conjunto de fórmulas, e φ e ψ fórmulas. Então, $\varphi \wedge \psi \equiv_\Gamma \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que $\varphi \wedge \psi \equiv_\Gamma \varphi$, ou seja, $\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ e $\Gamma \vdash \varphi \to (\varphi \wedge \psi)$. Temos a seguinte demonstração:

1.	$\Gamma \vdash \varphi \to (\varphi \wedge \psi)$	
2.	$\Gamma, \varphi \vdash \varphi$	(Ax)
3.	$\Gamma, \varphi \vdash \varphi \to (\varphi \wedge \psi)$	(Mon), 1
4.	$\Gamma, \varphi \vdash \varphi \wedge \psi$	($\to$E), 2, 3
5.	$\Gamma, \varphi \vdash \psi$	($\wedge$E), 4
6.	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	($\to$I), 5

Logo, $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Temos a seguinte demonstração:

1.	$\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi$	(Ax)
2.	$\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \varphi$	($\wedge$E), 1
3.	$\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	($\to$I), 2

Logo, $\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$. Temos também a seguinte demonstração:

1.	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	
2.	$\Gamma, \varphi \vdash \varphi$	(Ax)
3.	$\Gamma, \varphi \vdash \varphi \to \psi$	(Mon), 1
4.	$\Gamma, \varphi \vdash \psi$	($\to$E), 2, 3
5.	$\Gamma, \varphi \vdash \varphi \wedge \psi$	($\wedge$I), 2, 4
6.	$\Gamma \vdash \varphi \to (\varphi \wedge \psi)$	($\to$I), 5

Logo, $\Gamma \vdash \varphi \to (\varphi \wedge \psi)$, e concluímos que $\varphi \wedge \psi \equiv_\Gamma \varphi$. □

Teorema 3.17. Seja Γ um conjunto de fórmulas. Então, $\mathcal{L}_\Gamma$ é uma álgebra de Heyting.

Demonstração. Sejam φ, ψ e θ fórmulas. Vamos verificar a associatividade do $\wedge$ em $\mathcal{L}_\Gamma$.

Pelo Lema 3.15 e pela monotonicidade da consequência sintática, temos que:

$$\begin{aligned} & \vdash (\varphi \wedge (\psi \wedge \theta)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \wedge \theta) \\ \Rightarrow\ & \Gamma \vdash (\varphi \wedge (\psi \wedge \theta)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \wedge \theta) \\ \Rightarrow\ & \varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv_\Gamma (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta \\ \Rightarrow\ & [\varphi] \wedge ([\psi] \wedge [\theta]) = ([\varphi] \wedge [\psi]) \wedge [\theta] \end{aligned}$$

Analogamente, verificamos a validade dos outros axiomas de reticulados, e que $[\bot]$ é o zero de $\mathcal{L}_\Gamma$. Para finalizar, vamos verificar que $\rhd$ é a operação de pseudocomplemento relativo em $\mathcal{L}_\Gamma$. Para isso, vamos mostrar que:

$$[\varphi] \leq [\psi] \rhd [\theta] \text{ se, e somente se, } [\psi] \wedge [\varphi] \leq [\theta]$$

Suponha que $[\varphi] \leq [\psi] \rhd [\theta]$. Temos que:

$$\begin{aligned} [\varphi] \leq [\psi] \rhd [\theta] &\Rightarrow [\varphi] \leq [\psi \to \theta] \\ &\Rightarrow [\varphi] \wedge [\psi \to \theta] = [\varphi] \\ &\Rightarrow \varphi \wedge (\psi \to \theta) \equiv_\Gamma \varphi \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.16, obtemos que $\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \to \theta)$. Daí, temos a seguinte demonstração:

1.	$\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \to \theta)$	
2.	$\vdash (\varphi \to (\psi \to \theta)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \to \theta)$	Lema 3.15
3.	$\Gamma \vdash (\varphi \to (\psi \to \theta)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \to \theta)$	(Mon), 2
4.	$\Gamma \vdash (\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \wedge \psi) \to \theta)$	($\leftrightarrow$E), 3
5.	$\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \theta$	($\to$E), 1, 4

Logo, $\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \theta$, e pelo Lema 3.16 obtemos:

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \theta &\Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta \equiv_\Gamma \varphi \wedge \psi \\ &\Rightarrow ([\varphi] \wedge [\psi]) \wedge [\theta] = [\varphi] \wedge [\psi] \\ &\Rightarrow [\varphi] \wedge [\psi] \leq [\theta] \end{aligned}$$

Assim, $[\psi] \wedge [\varphi] \leq [\theta]$, e de forma análoga provamos a volta.

Portanto, $[\varphi] \rhd [\psi]$ é o pseudocomplemento de $[\varphi]$ relativo a $[\psi]$, e concluímos que $\mathcal{L}_\Gamma$ é uma álgebra de Heyting. □

Pensando na projeção canônica de $\mathrm{For}/\equiv_\Gamma$ como uma função da forma $\pi_\Gamma : \mathrm{For} \to \mathcal{L}_\Gamma$, temos que π_Γ é a extensão recursiva de uma valoração em $\mathcal{L}_\Gamma$.

De fato, considere a valoração i_Γ em $\mathcal{L}_\Gamma$ definida por (para $p \in \mathrm{VarS}$):

$$i_\Gamma(p) = [p]_\Gamma.$$

Teorema 3.18. Seja Γ um conjunto de fórmulas. Então, para $\varphi \in \mathrm{For}$:

$$i^*_\Gamma[\varphi] = \pi_\Gamma[\varphi]$$

Demonstração. Vamos mostrar por indução em φ que $i^*_\Gamma[\varphi] = \pi_\Gamma[\varphi]$.

(Base - VarS) Seja p uma variável sentencial. Temos que:

$$i^*_\Gamma[p] = i_\Gamma(p) = [p]_\Gamma = \pi_\Gamma[p]$$

(Hipótese Indutiva - $\to$) Sejam φ e ψ fórmulas e suponha que:

$$i^*_\Gamma[\varphi] = \pi_\Gamma[\varphi]$$

$$i^*_\Gamma[\psi] = \pi_\Gamma[\psi]$$

(Passo Indutivo - $\to$) Para $\varphi \to \psi$, temos que:

$$\begin{aligned} i^*_\Gamma[\varphi \to \psi] &= i^*_\Gamma[\varphi] \rhd i^*_\Gamma[\psi] \\ &= \pi_\Gamma[\varphi] \rhd \pi_\Gamma[\psi] \quad \text{pela Hipótese Indutiva} \\ &= [\varphi]_\Gamma \rhd [\psi]_\Gamma \\ &= [\varphi \to \psi]_\Gamma \\ &= \pi_\Gamma[\varphi \to \psi] \end{aligned}$$

Para a constante $\perp$, a prova é análoga ao caso das variáveis sentenciais. Para os conectivos $\wedge$ e $\vee$, a prova é análoga ao caso do $\to$. □

A álgebra de Lindenbaum $\mathcal{L}_\emptyset$ tem um papel especial com relação às outras. Chamamos $\mathcal{L}_\emptyset$ de **álgebra de Lindenbaum** da LSI, e a denotamos por $\mathcal{L}$. Dada uma fórmula φ, denotamos $[\varphi]_\varnothing$ simplesmente por $[\varphi]$.

Dado um conjunto de fórmulas Γ, definimos o seguinte conjunto:

$$F(\Gamma) = \{[\varphi] \ : \ \Gamma \vdash \varphi\}$$

Proposição 3.19. Seja Γ um conjunto de fórmulas. Então, $F(\Gamma)$ é um filtro de $\mathcal{L}$.

Demonstração. Inicialmente, note que, como $\Gamma, p_0 \vdash p_0$, temos que $\Gamma \vdash p_0 \to p_0$, ou seja, $F(\Gamma)$ é não vazio.

Sejam φ, ψ e θ fórmulas, tais que $[\varphi], [\psi] \in F(\Gamma)$. Sabemos que $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$.

Por ($\wedge$I), temos que $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$. Logo, $[\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \wedge \psi] \in F(\Gamma)$.

Por ($\vee$I), obtemos que $\Gamma \vdash \theta \vee \varphi$. Desse modo, $[\theta] \vee [\varphi] = [\theta \vee \varphi] \in F(\Gamma)$.

Portanto, $F(\Gamma)$ é um filtro. □

Chamamos $F(\Gamma)$ de **filtro gerado** por Γ. Através desse filtro, podemos construir a álgebra de Lindenbaum $\mathcal{L}_\Gamma$ a partir de $\mathcal{L}$.

Lema 3.20. Sejam Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. Então, $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, $[\varphi]_\Gamma = 1$.

Demonstração. Inicialmente, note que $1 = -0 = [\neg\bot]_\Gamma$.

($\Rightarrow$) Suponha que $\Gamma \vdash \varphi$. Temos a seguinte demonstração:

1.	$\Gamma \vdash \varphi$	
2.	$\Gamma, \varphi, \bot \vdash \bot$	(Ax)
3.	$\Gamma, \varphi \vdash \neg\bot$	($\neg$I), 2
4.	$\Gamma \vdash \varphi \to \neg\bot$	($\to$I), 3
5.	$\Gamma, \neg\bot \vdash \varphi$	(Mon), 1
6.	$\Gamma \vdash \neg\bot \to \varphi$	($\to$I), 5
7.	$\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\bot$	($\leftrightarrow$I), 4, 6

Logo, $\varphi \equiv_\Gamma \neg\bot$, ou seja, $[\varphi]_\Gamma = 1$.

($\Leftarrow$) Suponha que $[\varphi]_\Gamma = 1$, ou seja, que $\Gamma \vdash \varphi \to \neg\bot$ e $\Gamma \vdash \neg\bot \to \varphi$. Temos a seguinte demonstração:

1.	$\Gamma \vdash \neg\bot \to \varphi$	
2.	$\Gamma, \bot \vdash \bot$	(Ax)
3.	$\Gamma \vdash \neg\bot$	($\neg$I), 2
4.	$\Gamma \vdash \varphi$	($\to$E), 1, 3

Desse modo, $\Gamma \vdash \varphi$. □

Teorema 3.21. Seja Γ um conjunto de fórmulas. Então, $\mathcal{L}_\Gamma \cong \mathcal{L}/F(\Gamma)$.

Demonstração. Seja $f : \mathcal{L}_\Gamma \to \mathcal{L}/F(\Gamma)$ a função definida por (para $\varphi \in \text{For}$):

$$f([\varphi]_\Gamma) = [[\varphi]]_{F(\Gamma)}$$

Vamos verificar que f está bem definida. De fato, sejam φ e ψ fórmulas. Temos que:

$$\begin{aligned}
[\varphi]_\Gamma = [\psi]_\Gamma &\Rightarrow \varphi \equiv_\Gamma \psi \\
&\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \\
&\Rightarrow [\varphi \leftrightarrow \psi] \in F(\Gamma) \\
&\Rightarrow ([\varphi] \rhd [\psi]) \wedge ([\psi] \rhd [\varphi]) \in F(\Gamma) \\
&\Rightarrow [\varphi] \equiv_{F(\Gamma)} [\psi] \\
&\Rightarrow [[\varphi]]_{F(\Gamma)} = [[\psi]]_{F(\Gamma)}
\end{aligned}$$

Desse modo, f está bem definida. Além disso, sabemos que f é um homomorfismo, uma vez que as classes de equivalência preservam as operações e conectivos. Para ilustrar, verificamos o caso do $\rhd$:

$$\begin{aligned}
f([\varphi]_\Gamma \rhd [\psi]_\Gamma) &= f([\varphi \to \psi]_\Gamma) \\
&= [[\varphi \to \psi]]_{F(\Gamma)} \\
&= [[\varphi] \rhd [\psi]]_{F(\Gamma)} \\
&= [[\varphi]]_{F(\Gamma)} \rhd [[\varphi]]_{F(\Gamma)} \\
&= f([\varphi]_\Gamma) \rhd f([\psi]_\Gamma)
\end{aligned}$$

Agora, seja $g' : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_\Gamma$ a função definida por (para $\varphi \in \text{For}$):

$$g'([\varphi]) = [\varphi]_\Gamma$$

Verificamos que g' está bem definida. De fato, dadas φ e ψ fórmulas, temos que:

$$\begin{aligned}
[\varphi] = [\psi] &\Rightarrow \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \\
&\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \\
&\Rightarrow [\varphi]_\Gamma = [\psi]_\Gamma
\end{aligned}$$

Logo, g' está bem definida e, de modo análogo ao caso de f, obtemos que g' é também um homomorfismo. Além disso, dado $[\varphi] \in F(\Gamma)$, pelo Lema 3.20 temos que $g'([\varphi]) = [\varphi]_\Gamma = 1$.

Assim, pela Propriedade Universal das Álgebras-quociente, temos que existe um único homomorfismo $g : \mathcal{L}/F(\Gamma) \to \mathcal{L}_\Gamma$, tal que $g' = g \circ \pi_{F(\Gamma)}$. Daí, obtemos:

$$g([[\varphi]]_{F(\Gamma)}) = g(\pi_{F(\Gamma)}([\varphi])) = g'([\varphi]) = [\varphi]_\Gamma$$

Portanto, $g = f^{-1}$, e concluímos que f é um isomorfismo e $\mathcal{L}_\Gamma \cong \mathcal{L}/F(\Gamma)$. □

3.5 Metateoremas

Nesta seção, vamos estudar alguns dos principais resultados sobre a Lógica Sentencial Intuicionista. Começamos verificando a corretude da LSI.

Teorema 3.22. (Teorema da Corretude)

Sejam Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vDash \varphi$.

Demonstração. Vamos verificar por indução em $\Gamma \vdash \varphi$ que $\Gamma \vDash \varphi$.

(Base - Ax) Sejam Γ um conjunto de fórmulas, φ uma fórmula, H uma álgebra de Heyting e v uma valoração em H, tais que $H, v \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$. Segue que $H, v \vDash \varphi$. Logo, $\Gamma, \varphi \vDash \varphi$.

(Hipótese Indutiva - $\wedge$I) Sejam Γ um conjunto de fórmulas, e φ e ψ fórmulas. Suponha que $\Gamma \vDash \varphi$ e $\Gamma \vDash \psi$.

(Passo Indutivo - $\wedge$I) Sejam H uma álgebra de Heyting e v uma valoração em H, tais que $H, v \vDash \Gamma$. Pela Hipótese Indutiva, temos que $H, v \vDash \varphi$ e $H, v \vDash \psi$, ou seja, $v^*[\varphi] = 1$ e $v^*[\psi] = 1$. Daí, obtemos:

$$v^*[\varphi \wedge \psi] = v^*[\varphi] \wedge v^*[\psi] = 1 \wedge 1 = 1$$

Logo, $H, v \vDash \varphi \wedge \psi$, e concluímos que $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$.

(Hipótese Indutiva - $\vee$E) Sejam Γ um conjunto de fórmulas, e φ, ψ e θ fórmulas. Suponha que $\Gamma, \varphi \vDash \theta$, $\Gamma, \psi \vDash \theta$ e $\Gamma \vDash \varphi \vee \theta$.

(Passo Indutivo - $\vee$E) Sejam H uma álgebra de Heyting e v uma valoração em H, tais que $H, v \vDash \Gamma$.

Aplicando o Teorema da Dedução à Hipótese Indutiva, sabemos que $\Gamma \vDash \varphi \to \theta$ e $\Gamma \vDash \psi \to \theta$. Daí, temos que $v^*[\varphi \to \theta] = 1$, $v^*[\psi \to \theta] = 1$ e $v^*[\varphi \vee \psi] = 1$. Desse modo, obtemos:

$$\begin{aligned} v^*[\varphi \vee \psi] = 1 &\Rightarrow (v^*[\varphi] \vee v^*[\psi]) \rhd v^*[\theta] = 1 \rhd v^*[\theta] \\ &\Rightarrow (v^*[\varphi] \rhd v^*[\theta]) \wedge (v^*[\psi] \rhd v^*[\theta]) = v^*[\theta] \\ &\Rightarrow v^*[\varphi \to \theta] \wedge v^*[\psi \to \theta] = v^*[\theta] \\ &\Rightarrow 1 \wedge 1 = v^*[\theta] \\ &\Rightarrow v^*[\theta] = 1 \end{aligned}$$

Logo, $H, v \vDash \theta$, e concluímos que $\Gamma \vDash \theta$.

Para as regras ($\perp$E), ($\wedge$E), ($\vee$I) e ($\to$E), a prova é análoga ao caso da regra ($\wedge$I). Para a regra ($\to$I), é uma consequência direta do Teorema da Dedução. □

A completude da LSI é uma consequência direta da construção das álgebras de Lindenbaum.

Teorema 3.23. (Teorema da Completude)

Sejam Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. Se $\Gamma \vDash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Demonstração. Suponha que $\Gamma \nvdash \varphi$. Sabemos que:

$$i^*_\Gamma[\varphi] = \pi_\Gamma[\varphi] \neq 1$$

Desse modo, $\mathcal{L}_\Gamma, i_\Gamma \nvDash \varphi$. Além disso, como $\mathcal{L}_\Gamma, i_\Gamma \vDash \Gamma$, concluímos que $\Gamma \nvDash \varphi$. □

3.6 Semântica de Kripke

Nesta seção, definimos uma semântica alternativa para a Lógica Sentencial Intuicionista utilizando modelos de Kripke, mais conhecidos por sua aplicação no estudo da semântica de lógicas modais.

Um **modelo de Kripke** é uma estrutura da forma $\mathcal{M} = \langle W, \leq, \Vdash \rangle$, onde:

- W é um conjunto não vazio, cujos elementos são chamados de **estados** ou **mundos possíveis**;
- $\leq$ é uma ordem parcial em W;
- $\Vdash$ é uma relação binária sobre W e VarS;

satisfazendo a seguinte propriedade de monotonicidade (para $w_1, w_2 \in W$ e $p \in$ VarS):

$$\text{se } w_1 \leq w_2 \text{ e } w_1 \Vdash p, \text{ então } w_2 \Vdash p.$$

Estendemos recursivamente a relação $\Vdash$ a uma relação binária sobre W e For pelas seguintes regras (para $w \in W$ e $\varphi, \psi \in$ For):

(1) $w \nVdash \bot$;

(2) $w \Vdash \varphi \wedge \psi$ se, e somente se, $w \Vdash \varphi$ e $w \Vdash \psi$;

(3) $w \Vdash \varphi \vee \psi$ se, e somente se, $w \Vdash \varphi$ ou $w \Vdash \psi$;

(4) $w \Vdash \varphi \to \psi$ se, e somente se, para todo $w' \geq w$, se $w' \Vdash \varphi$, então $w' \Vdash \psi$.

A regra para a negação é um caso particular da regra da implicação:

$$w \Vdash \neg\varphi \text{ se, e somente se, para todo } w' \geq w,\ w' \nVdash \varphi.$$

Por essa extensão, a monotonicidade vale para todas as fórmulas.

Proposição 3.24. Seja $\mathcal{M}$ um modelo de Kripke. Vale a seguinte propriedade (para $w_1, w_2 \in W$ e $\varphi \in$ For):

$$\text{se } w_1 \leq w_2 \text{ e } w_1 \Vdash \varphi, \text{ então } w_2 \Vdash \varphi.$$

Demonstração. Sejam $w_1, w_2 \in W$ tais que $w_1 \leq w_2$. Vamos provar por indução em φ que se $w_1 \Vdash \varphi$, então $w_2 \Vdash \varphi$.

(Base - VarS) Segue do fato de $\mathcal{M}$ ser um modelo de Kripke.

(Base - $\bot$) Vamos provar a contrapositiva. Suponha que $w_2 \nVdash \bot$. Segue da definição de $\Vdash$ que $w_1 \nVdash \bot$. Logo, se $w_2 \nVdash \bot$, então $w_1 \nVdash \bot$.

(Hipótese Indutiva) Sejam φ e ψ fórmulas, tais que:

- se $w_1 \Vdash \varphi$, então $w_2 \Vdash \varphi$;
- se $w_1 \Vdash \psi$, então $w_2 \Vdash \psi$.

(Passo Indutivo - $\wedge$) Para $\varphi \wedge \psi$, temos que:

$$\begin{aligned} w_1 \Vdash \varphi \wedge \psi &\Rightarrow w_1 \Vdash \varphi \text{ e } w_1 \Vdash \psi \\ &\Rightarrow w_2 \Vdash \varphi \text{ e } w_2 \Vdash \psi \quad \text{pela Hipótese Indutiva} \\ &\Rightarrow w_2 \Vdash \varphi \wedge \psi \end{aligned}$$

(Passo Indutivo - $\rightarrow$) Suponha que $w_1 \Vdash \varphi \rightarrow \psi$. Sabemos que para todo $w_1' \geq w_1$, se $w_1' \Vdash \varphi$, então $w_1' \Vdash \psi$.

Seja $w_2' \geq w_2$, tal que $w_2' \Vdash \varphi$. Como $w_1 \leq w_2$, temos que $w_2' \geq w_1$. Logo, $w_2' \Vdash \psi$, e concluímos que $w_2 \Vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Para o conectivo $\vee$, a prova é análoga ao caso do $\wedge$. $\square$

Intuitivamente, podemos entender W como um conjunto de estados de conhecimento. Nesse sentido, a relação $w \leq w'$ indica que em um estado w' temos mais conhecimento que em um estado w. Já a relação $w \Vdash \varphi$ indica que φ é verdadeira segundo w, ou seja, que temos uma prova de φ a partir do conhecimento no estado w.

Dizemos que φ é falsa em w quando sua negação $\neg\varphi$ é verdadeira em w. Note que φ não ser verdadeira em w não indica que ela é falsa em w, indica apenas que não temos uma prova de φ com o conhecimento em w, mas é possível que com mais conhecimento encontremos uma prova.

A monotonicidade de $\Vdash$ indica que quando aumentamos o nosso conhecimento, as fórmulas que antes eram verdadeiras permanecem verdadeiras, uma vez que já construímos provas para elas.

Sejam Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. Dizemos que:

- $\mathcal{M}$ **satisfaz** φ ($\mathcal{M} \Vdash \varphi$) quando para todo $w \in W$, $w \Vdash \varphi$;
- $\mathcal{M}$ **satisfaz** Γ ($\mathcal{M} \Vdash \Gamma$) quando para toda fórmula $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{M} \Vdash \gamma$;
- φ é **K-satisfazível** quando existe um modelo de Kripke $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \Vdash \varphi$;
- φ é **consequência K-semântica** de Γ ($\Gamma \Vdash \varphi$) quando para todo modelo de Kripke $\mathcal{M}$, se $\mathcal{M} \Vdash \Gamma$, então $\mathcal{M} \Vdash \varphi$;
- φ é **K-válida** ($\Vdash \varphi$) quando $\emptyset \Vdash \varphi$.

Agora, vamos estudar a relação entre a semântica de Kripke e a semântica algébrica. Considere H uma álgebra de Heyting e v uma valoração em H. Definimos a estrutura $\mathcal{K}(H, v) = \langle \mathrm{S}(H), \subseteq, \vDash \rangle$, onde:

- $\mathrm{S}(H)$ é o conjunto dos filtros primos de H;
- $\subseteq$ é a relação de inclusão em $\mathrm{S}(H)$;
- $\Vdash$ é a relação definida por (para $F \in \mathrm{S}(H)$ e $p \in \mathrm{VarS}$):

$$F \Vdash p \text{ se, e somente se, } v(p) \in F.$$

Note que, se H é trivial, $\mathrm{S}(H)$ é vazio, e $\mathcal{K}(H, v)$ não é um modelo de Kripke.

Proposição 3.25. Sejam H uma álgebra de Heyting não trivial e v uma valoração em H. Então, $\mathcal{K}(H, v)$ é um modelo de Kripke.

Demonstração. Para verificarmos que $\mathcal{K}(H, v)$, basta verificarmos a monotonicidade de $\Vdash$. Sejam F_1 e F_2 filtros primos, e p uma variável sentencial. Se $F_1 \subseteq F_2$, temos que:

$$F_1 \Vdash p \Rightarrow v(p) \in F_1 \Rightarrow v(p) \in F_2 \Rightarrow F_2 \Vdash p$$

Logo, $\mathcal{K}(H, v)$ é um modelo de Kripke. □

A relação entre $\Vdash$ e v pode ser estendida para todas as fórmulas.

Proposição 3.26. Sejam H uma álgebra de Heyting não trivial, v uma valoração em H, F um filtro primo de H e φ uma fórmula. Vale a seguinte propriedade:

$$F \Vdash \varphi \text{ se, e somente se, } v^*[\varphi] \in F.$$

Demonstração. Sejam H uma álgebra de Heyting não trivial e v uma valoração em H. Vamos provar por indução em φ que para todo filtro primo F de H, $F \Vdash \varphi$ se, e somente se, $v^*[\varphi] \in F$.

(Base - VarS) É consequência imediata da definição de $\mathcal{K}(H, v)$.

(Base - $\bot$) Seja F um filtro primo. Sabemos que $F \nVdash \bot$ e $v^*[\bot] = 0 \notin F$. Logo, $F \Vdash \bot$ se, e somente se, $v^*[\bot] \in F$.

(Hipótese Indutiva) Sejam φ e ψ fórmulas. Suponha que, para todo filtro primo F:

- $F \Vdash \varphi$ se, e somente se, $v^*[\varphi] \in F$;
- $F \Vdash \psi$ se, e somente se, $v^*[\psi] \in F$.

(Passo Indutivo - $\vee$) Seja F um filtro primo. Para $\varphi \vee \psi$, temos que:

$$\begin{aligned} F \Vdash \varphi \vee \psi &\Leftrightarrow F \Vdash \varphi \text{ ou } F \Vdash \psi \\ &\Leftrightarrow v^*[\varphi] \in F \text{ ou } v^*[\psi] \in F && \text{pela Hipótese Indutiva} \\ &\Leftrightarrow v^*[\varphi] \vee v^*[\psi] \in F && \text{pois } F \text{ é um filtro primo} \\ &\Leftrightarrow v^*[\varphi \vee \psi] \in F \end{aligned}$$

(Passo Indutivo - $\to$) Seja F um filtro primo.

($\Rightarrow$) Suponha para uma contradição que $F \Vdash \varphi \to \psi$ e $v^*[\varphi \to \psi] \notin F$, e seja $G' = \langle F, v^*[\varphi] \rangle$.

Note que, se $v^*[\psi] \in G'$, pela Proposição 1.56 existe $x \in F$, tal que $x \wedge v^*[\varphi] \leq v^*[\psi]$. Daí, temos que:

$$\begin{aligned} x \wedge v^*[\varphi] \leq v^*[\psi] &\Rightarrow x \leq v^*[\varphi] \rhd v^*[\psi] \\ &\Rightarrow x \leq v^*[\varphi \to \psi] \\ &\Rightarrow v^*[\varphi \to \psi] \in F \end{aligned}$$

Logo, $v^*[\psi] \notin G'$, e pelo Teorema da Separação existe um filtro primo G tal que $G' \subseteq G$ e $v^*[\psi] \notin G$.

Como $v^*[\varphi] \in G'$, sabemos que $v^*[\varphi] \in G$ e, pela Hipótese Indutiva, $G \Vdash \varphi$. Além disso, como $F \subseteq G' \subseteq G$ e $F \Vdash \varphi \to \psi$, temos que $G \Vdash \varphi \to \psi$. Desse modo, $G \Vdash \psi$ e, pela Hipótese Indutiva, $v^*[\psi] \in G$, o que é uma contradição.

Portanto, se $F \Vdash \varphi \to \psi$, então $v^*[\varphi \to \psi] \in F$.

($\Leftarrow$) Suponha que $v^*[\varphi \to \psi] \in F$ e seja $G \supseteq F$ um filtro primo, tal que $G \Vdash \varphi$. Sabemos que $v^*[\varphi] \rhd v^*[\psi] = v^*[\varphi \to \psi] \in G$ e, pela Hipótese Indutiva, $v^*[\varphi] \in G$.

Daí, como G é um filtro, $v^*[\psi] \in G$ e, pela Hipótese Indutiva, $G \Vdash \psi$. Logo, $F \Vdash \varphi \to \psi$.

Para o conectivo $\wedge$, a prova é análoga ao caso do $\vee$. □

O modelo de Kripke $\mathcal{K}(H, v)$ é equivalente ao modelo algébrico (H, v) no seguinte sentido: $\mathcal{K}(H, v)$ satisfaz uma fórmula φ se, e somente se, v satisfaz φ em H.

Teorema 3.27. Sejam H uma álgebra de Heyting não trivial, v uma valoração em H e φ uma fórmula. Então, $\mathcal{K}(H, v) \Vdash \varphi$ se, e somente se, $H, v \vDash \varphi$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Vamos provar a contrapositiva. Suponha que $H, v \nvDash \varphi$, ou seja, $v^*[\varphi] \neq 1$.

Como $\{1\}$ é um filtro que não contém $v^*[\varphi]$, pelo Teorema da Separação temos que existe um filtro primo F, tal que $v^*[\varphi] \notin F$.

Logo, pela Proposição 3.26, $F \nVdash \varphi$, e concluímos que $\mathcal{K}(H, v) \nVdash \varphi$.

($\Leftarrow$) Suponha que $H, v \vDash \varphi$ e seja F um filtro primo. Como $v^*[\varphi] = 1$, sabemos que $v^*[\varphi] \in F$.

Logo, pela Proposição 3.26, $F \Vdash \varphi$, e concluímos que $\mathcal{K}(H, v) \Vdash \varphi$. □

Seja $\mathcal{M}$ um modelo de Kripke. Definimos o seguinte conjunto:

$$H_{\mathcal{M}} = \{X \subseteq W \ : \text{ para } x \in X \text{ e } w \in W, \text{ se } x \leq w, \text{ então } w \in X\}.$$

Dados $X, Y \in H_{\mathcal{M}}$, definimos também:

$$X \rhd Y = \{w \in W \ : \text{ para } x \in X, \text{ se } w \leq x, \text{ então } x \in Y\}.$$

Lema 3.28. Seja $\mathcal{M} = \langle W, \leq, \Vdash \rangle$ um modelo de Kripke. Valem as seguintes propriedades (para $X, Y \in H_{\mathcal{M}}$ e $\varphi \in \text{For}$):

(i) $\emptyset \in H_{\mathcal{M}}$ e $W \in H_{\mathcal{M}}$;

(ii) $X \cap Y \in H_{\mathcal{M}}$ e $X \cup Y \in H_{\mathcal{M}}$;

(iii) $X \rhd Y \in H_{\mathcal{M}}$;

(iv) $\{w \in W \ : \ w \Vdash \varphi\} \in H_{\mathcal{M}}$.

Demonstração. Sejam $X, Y \in H_{\mathcal{M}}$ e φ uma fórmula.

(i) Por vacuidade, sabemos que $\emptyset \in H_{\mathcal{M}}$. Sabemos também que, para $w_1, w_2 \in W$, se $w_1 \leq w_2$, então $w_2 \in W$. Logo, $W \in H_{\mathcal{M}}$.

(ii) Sejam $x \in X \cap Y$ e $w \in W$ tais que $x \leq w$. Como $x \in X$ e $X \in H_{\mathcal{M}}$, temos que $w \in X$. Analogamente, obtemos que $w \in Y$. Logo, $w \in X \cap Y$, e $X \cap Y \in H_{\mathcal{M}}$.

Agora, sejam $y \in X \cup Y$ e $w \in W$ tais que $y \leq w$, e suponha, sem perda de generalidade, que $y \in Y$. Como $y \in Y$ e $Y \in H_{\mathcal{M}}$, segue que $w \in Y$. Logo, $w \in X \cup Y$, e $X \cup Y \in H_{\mathcal{M}}$.

(iii) Sejam $x \in X \rhd Y$ e $w \in W$, tais que $x \leq w$. Considere também $w' \in X$, tal que $w \leq w'$. Como $x \leq w$ e $w \leq w'$, sabemos que $x \leq w'$. Daí, como $x \in X \rhd Y$ e $w' \in X$, obtemos que $w' \in Y$. Logo, $w \in X \rhd Y$, e $X \rhd Y \in H_{\mathcal{M}}$.

(iv) Seja $A = \{w \in W \ : \ w \Vdash \varphi\}$ e considere $x \in A$ e $w \in W$ tais que $x \leq w$. Sabemos que $x \Vdash \varphi$. Daí, pela monotonicidade de $\Vdash$, $w \Vdash \varphi$. Logo, $w \in A$, e $A \in H_{\mathcal{M}}$.

$\square$

Proposição 3.29. Seja $\mathcal{M}$ um modelo de Kripke. Então $\langle H_{\mathcal{M}}, \cap, \cup, \rhd, \emptyset \rangle$ é uma álgebra de Heyting.

Demonstração. Pelo Lema 3.28, sabemos que $H_{\mathcal{M}}$ é fechado para as operações $\cap$, $\cup$ e $\rhd$. Desse modo, temos que $\langle H_{\mathcal{M}}, \cap, \cup \rangle$ é um reticulado, e que $\emptyset$ é o seu zero.

Sejam $X, Y \in H_{\mathcal{M}}$. Vamos verificar que $X \rhd Y$ é o pseudocomplemento de X relativo a Y. Para isso, considere $A \in H_{\mathcal{M}}$.

($\Rightarrow$) Suponha que $A \subseteq X \rhd Y$ e seja $w \in X \cap A$. Como $w \in A$, segue que $w \in X \rhd Y$. Daí, como $w \in X$ e $w \leq w$, temos que $w \in Y$. Logo, $X \cap A \subseteq Y$.

($\Leftarrow$) Suponha que $X \cap A \subseteq Y$ e sejam $w \in A$ e $x \in X$, tais que $w \leq x$. Como $A \in H_{\mathcal{M}}$, segue que $x \in A$. Desse modo, $x \in X \cap Y$, e obtemos que $x \in Y$. Logo, $w \in X \rhd Y$, e $A \subseteq X \rhd Y$.

Portanto, $X \rhd Y$ é de fato o pseudocomplemento de X relativo a Y, e concluímos que $\langle H_{\mathcal{M}}, \cap, \cup, \rhd, \emptyset \rangle$ é uma álgebra de Heyting. $\square$

Associada ao modelo de Kripke $\mathcal{M}$, temos também a seguinte valoração em $H_{\mathcal{M}}$ (para $p \in \mathrm{VarS}$):

$$v_{\mathcal{M}}(p) = \{w \in W \ : \ w \Vdash p\}.$$

Pelo Lema 3.28, sabemos que $v_{\mathcal{M}}$ é de fato uma valoração em $H_{\mathcal{M}}$.

Proposição 3.30. Sejam $\mathcal{M}$ um modelo de Kripke e φ uma fórmula. Então:

$$v^*_{\mathcal{M}}[\varphi] = \{w \in W \,:\, w \Vdash \varphi\}.$$

Demonstração. Vamos provar por indução em φ a igualdade acima.

(Base - VarS) Segue da definição de $v_{\mathcal{M}}$.

(Base - $\bot$) Como $w \nVdash \bot$ para todo $w \in W$, temos que:

$$v^*_{\mathcal{M}}[\bot] = \emptyset = \{w \in W \,:\, w \Vdash \bot\}$$

(Hipótese Indutiva) Sejam φ e ψ fórmulas. Suponha que:

- $v^*_{\mathcal{M}}[\varphi] = \{w \in W \,:\, w \Vdash \varphi\}$;
- $v^*_{\mathcal{M}}[\psi] = \{w \in W \,:\, w \Vdash \psi\}$.

(Passo Indutivo - $\to$) Para $\varphi \to \psi$, temos que:

$$\begin{aligned} v^*_{\mathcal{M}}[\varphi \to \psi] &= v^*_{\mathcal{M}}[\varphi] \rhd v^*_{\mathcal{M}}[\psi] \\ &= \{w \in W \,:\, w \Vdash \varphi\} \rhd \{w \in W \,:\, w \Vdash \psi\} \\ &= \{w \in W \,:\, \text{para } w' \geq w, \text{ se } w' \Vdash \varphi, \text{ então } w' \Vdash \psi\} \\ &= \{w \in W \,:\, w \Vdash \varphi \to \psi\} \end{aligned}$$

Para os conectivos $\wedge$ e $\vee$, a prova é análoga ao caso do $\to$. □

Assim como para o modelo de Kripke $\mathcal{K}(H, v)$, temos que o modelo algébrico $(H_{\mathcal{M}}, v_{\mathcal{M}})$ é equivalente ao modelo de Kripke $\mathcal{M}$.

Teorema 3.31. Sejam $\mathcal{M}$ um modelo de Kripke e φ uma fórmula. Então, $H_{\mathcal{M}}, v_{\mathcal{M}} \vDash \varphi$ se, e somente se, $\mathcal{M} \Vdash \varphi$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que $H_{\mathcal{M}}, v_{\mathcal{M}} \vDash \varphi$, ou seja, $v^*_{\mathcal{M}}[\varphi] = W$. Pela Proposição 3.30, temos que:

$$W = \{w \in W \,:\, w \Vdash \varphi\}$$

Logo, para todo $w \in W$, $w \Vdash \varphi$, ou seja, $\mathcal{M} \Vdash \varphi$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\mathcal{M} \Vdash \varphi$, ou seja, para todo $w \in W$, $w \Vdash \varphi$. Pela Proposição 3.30, temos que:

$$v^*_{\mathcal{M}}[\varphi] = \{w \in W \,:\, w \Vdash \varphi\} = W$$

Logo, $H_{\mathcal{M}}, v_{\mathcal{M}} \vDash \varphi$. □

Capítulo 4

Lógica de Primeira Ordem Intuicionista

Neste capítulo, apresentamos a Lógica de Primeira Ordem Intuicionista. Seguimos uma abordagem análoga ao caso sentencial, apresentando a consequência sintática através de um sistema de dedução natural, e a consequência semântica através de Ω-estruturas, onde Ω é uma álgebra de Heyting completa.

Generalizamos a construção das álgebras de Lindenbaum para a Lógica de Primeira Ordem, e construímos uma Ω-estrutura associada a uma álgebra de Lindenbaum. Utilizamos essa construção para provar a completude do sistema, e também provamos sua corretude.

4.1 Linguagens de Primeira Ordem

Uma **assinatura** de primeira ordem é uma estrutura da forma $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R}, \# \rangle$, onde:

- $\mathcal{F}$ é um conjunto de símbolos, chamados de **símbolos funcionais**;
- $\mathcal{R}$ é um conjunto de símbolos, chamados de **símbolos relacionais**;
- $\#$ é uma função da forma $\# : \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \to \mathbb{N}$, chamada de **aridade**.

Dado um símbolo $s \in \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$ tal que $\#s = n$, dizemos que s é um símbolo de aridade n. Chamamos os símbolos funcionais de aridade 0 de **constantes**.

Para cada assinatura de primeira ordem, podemos construir uma linguagem de primeira ordem. Para isso, considere σ uma assinatura. O **alfabeto** de assinatura σ é composto pelos seguintes símbolos:

- um conjunto enumerável de **variáveis individuais**:

$$\mathrm{VarI} = \{x_i : i \in \mathbb{N}\};$$

- uma constante lógica: $\perp$;
- três conectivos binários: $\wedge$, $\vee$ e $\to$;
- dois quantificadores: $\forall$ e $\exists$;
- três delimitadores: “(", “,” e “)";
- os símbolos funcionais e relacionais de σ.

A partir do alfabeto, definimos indutivamente os **termos** de assinatura σ pelas seguintes regras:

(1) toda variável individual é um termo;

(2) toda constante de σ é um termo;

(3) para $n \in \mathbb{N}^*$, f um símbolo funcional de aridade n e $t_1, \dots, t_n$ termos, $f(t_1, \dots, t_n)$ é um termo;

(4) apenas as expressões obtidas pelo uso das regras acima são termos.

Denotamos o conjunto de todos os termos de assinatura σ por $\mathrm{Ter}(\sigma)$. Assim como para fórmulas na Lógica Sentencial, pela construção de $\mathrm{Ter}(\sigma)$ podemos fazer provas por indução e definições por recursão sobre termos.

Teorema 4.1. (Princípio de Indução para Termos)

Sejam σ uma assinatura de primeira ordem e A um conjunto que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\mathrm{VarI} \subseteq A$;

(ii) se c é uma constante, então $c \in A$;

(iii) para $n \in \mathbb{N}^*$, f um símbolo funcional de aridade n e $t_1, \dots, t_n$ termos, se $t_1, \dots, t_n \in A$, então $f(t_1, \dots, t_n) \in A$.

Então, $\mathrm{Ter}(\sigma) \subseteq A$.

Uma forma alternativa de prova por indução em termos é utilizando o grau de complexidade de termos. Dado t um termo, o **grau de complexidade** de t é definido recursivamente pelas seguintes regras:

(1) toda variável individual tem grau de complexidade 0;

(2) toda constante tem grau de complexidade 0;

(3) se f é um símbolo funcional de aridade $n \in \mathbb{N}^*$ e $t_1, \dots, t_n$ são termos, então $f(t_1, \dots, t_n)$ tem grau de complexidade $\max\{d_1, \dots, d_n\} + 1$, onde d_i é o grau de complexidade de t_i.

A partir dos termos, definimos as **fórmulas atômicas** de assinatura σ pelas seguintes regras:

(1) $\perp$ é uma fórmula atômica;

(2) toda símbolo relacional de aridade 0 é uma fórmula atômica;

(3) para $n \in \mathbb{N}^*$, R um símbolo relacional de aridade n e $t_1, \dots, t_n$ termos, $R(t_1, \dots, t_n)$ é uma fórmula atômica;

(4) apenas as expressões descritas acima são fórmulas atômicas.

As fórmulas atômicas formam a base para a construção indutiva das **fórmulas** de assinatura σ, definidas pelas seguintes regras:

(1) toda fórmula atômica é uma fórmula;

(2) se φ e ψ são fórmulas, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ e $(\varphi \rightarrow \psi)$ também são fórmulas;

(3) se x é uma variável individual e φ é uma fórmula, então $(\forall x \varphi)$ e $(\exists x \varphi)$ também são fórmulas;

(4) apenas as expressões obtidas pelo uso das regras acima são fórmulas.

Denotamos o conjunto de todas as fórmulas de assinatura σ por $\mathrm{For}(\sigma)$. Esse conjunto também é chamado de **linguagem de primeira ordem** de assinatura σ, ou simplesmente **linguagem** de assinatura σ.

Da mesma forma que para termos, também podemos fazer provas por indução e definições por recursão sobre fórmulas.

Teorema 4.2. (Princípio de Indução para Fórmulas)

Sejam σ uma assinatura de primeira ordem e A um conjunto que satisfaz as seguintes condições:

(i) toda fórmula atômica pertence a A;

(ii) para φ e ψ fórmulas, se $\varphi, \psi \in A$, então $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \in A$;

(iii) para x variável individual e φ fórmula, se $\varphi \in A$, então $(\forall x \varphi), (\exists x \varphi) \in A$.

Então, $\mathrm{For}(\sigma) \subseteq A$.

Também podemos fazer provas por indução no grau de complexidade de fórmulas. Dada φ uma fórmula, o **grau de complexidade** de φ é definido recursivamente pelas seguintes regras:

(1) toda fórmula atômica tem grau de complexidade 0;

(2) se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ e $(\varphi \to \psi)$ tem grau de complexidade $\max\{d_1, d_2\} + 1$, onde d_1 é o grau de complexidade de φ e d_2 é o grau de complexidade de ψ;

(3) se φ é uma fórmula e x uma variável individual, então $(\forall x\varphi)$ e $(\exists x\varphi)$ tem grau de complexidade $d + 1$, onde d é o grau de complexidade de φ.

A partir dos símbolos no alfabeto, definimos os conectivos de negação e bi-implicação:

- $(\neg\varphi)$ é definido por $(\varphi \to \bot)$;
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é definido por $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$.

Assim como no caso sentencial, utilizamos algumas regras de omissão de parênteses, para facilitar a escrita de fórmulas:

- omitimos os parênteses mais externos de cada fórmula (e.g. escrevemos $\forall x_2 P(x_2)$ ao invés de $(\forall x_2 P(x_2))$);
- omitimos os parênteses em sequências de conjunções e em sequências de disjuções (e.g. escrevemos $P(x_1) \wedge P(x_3) \wedge P(x_5)$ ao invés de $(P(x_1) \wedge P(x_3)) \wedge P(x_5)$ ou $P(x_1) \wedge (P(x_3) \wedge P(x_5))$);
- omitimos os parênteses de conectivos unários, considerando que conectivos unários tem precedência maior que conectivos binários (e.g. escrevemos $\neg P(x_1) \vee P(x_1)$ ao invés de $(\neg P(x_1)) \vee P(x_1)$);
- omitimos os parênteses de quantificadores, quando não houver risco de ambiguidade (e.g. escrevemos $P(x_0) \wedge \forall x_0 Q(x_0)$ ao invés de $P(x_0) \wedge (\forall x_0 Q(x_0))$, mas não omitimos os parênteses em $(\forall x_0 P(x_0)) \wedge Q(x_0)$).

4.2 Variáveis Livres e Ligadas

Sejam σ uma assinatura e φ uma fórmula. Dizemos que uma ocorrência de uma variável em φ é **livre** quando ela não ocorre no escopo de um quantificador. Quando uma ocorrência de uma variável não é livre, dizemos que essa ocorrência é **ligada** em φ.

Exemplo 4.3. Seja σ uma assinatura com um símbolo relacional P de aridade 1, e considere a seguinte fórmula, que iremos chamar de φ:

$$P(x_1) \wedge \forall x_1 P(x_1).$$

A fórmula φ possui duas ocorrências da variável x_1: a primeira à esquerda do $\wedge$, fora do escopo de $\forall x_1$, e a segunda à direita do $\wedge$, dentro do escopo de $\forall x_1$. Não consideramos a variável em $\forall x_1$ como uma ocorrência de x_1.

Desse modo, a primeira ocorrência de x_1 em φ é livre, e a segunda ocorrência é ligada. Note que uma mesma variável pode possuir ocorrências livres e ligadas em uma mesma fórmula.

Agora, vamos definir formalmente o conjunto das variáveis que ocorrem livres em uma fórmula. Começamos definindo recursivamente o conjunto das variáveis individuais que ocorrem em um termo t, denotado por $\mathrm{VarI}[t]$, pelas seguintes regras (para x variável individual, c constante, f símbolo funcional de aridade $n \in \mathbb{N}^*$ e $t_1, \dots, t_n$ termos):

(1) $\mathrm{VarI}[x] = \{x\}$;

(2) $\mathrm{VarI}[c] = \emptyset$;

(3) $\mathrm{VarI}[f(t_1, \dots, t_n)] = \mathrm{VarI}[t_1] \cup \dots \cup \mathrm{VarI}[t_n]$.

Utilizando a definição acima, definimos recursivamente o conjunto das variáveis que ocorrem livres em uma fórmula φ, denotado por $\mathrm{VLiv}[\varphi]$, pelas seguintes regras (para P e R símbolos relacionais, com $\#P = 0$, $\#R = n$ e $n \in \mathbb{N}^*$, $t_1, \dots, t_n$ termos, φ e ψ fórmulas, e x variável individual):

(1) $\mathrm{VLiv}[\bot] = \mathrm{VLiv}[P] = \emptyset$;

(2) $\mathrm{VLiv}[R(t_1, \dots, t_n)] = \mathrm{VarI}[t_1] \cup \dots \cup \mathrm{VarI}[t_n]$;

(3) $\mathrm{VLiv}[\varphi \wedge \psi] = \mathrm{VLiv}[\varphi \vee \psi] = \mathrm{VLiv}[\varphi \rightarrow \psi] = \mathrm{VLiv}[\varphi] \cup \mathrm{VLiv}[\psi]$;

(4) $\mathrm{VLiv}[\forall x \varphi] = \mathrm{VLiv}[\exists x \varphi] = \mathrm{VLiv}[\varphi] - \{x\}$.

Dado Γ um conjunto de fórmulas, definimos o conjunto das variáveis que ocorrem livres em Γ da seguinte forma:

$$\mathrm{VLiv}[\Gamma] = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathrm{VLiv}[\gamma].$$

Uma das aplicações de VLiv é na definição de sentença. Dizemos que uma fórmula φ é uma **sentença** quando nenhuma variável ocorre livre em φ, ou seja, $\mathrm{VLiv}[\varphi] = \emptyset$.

Similarmente, definimos recursivamente o conjunto das variáveis possivelmente ligadas em uma fórmula φ, denotado por $\mathrm{VLig}[\varphi]$, pelas seguintes regras (para P e R símbolos relacionais, com $\#P = 0$, $\#R = n$ e $n \in \mathbb{N}^*$, $t_1, \dots, t_n$ termos, φ e ψ fórmulas, e x variável individual):

(1) $\mathrm{VLig}[\bot] = \mathrm{VLig}[P] = \mathrm{VLig}[R(t_1, \dots, t_n)] = \emptyset$;

(2) $\mathrm{VLig}[\varphi \wedge \psi] = \mathrm{VLig}[\varphi \vee \psi] = \mathrm{VLig}[\varphi \rightarrow \psi] = \mathrm{VLig}[\varphi] \cup \mathrm{VLig}[\psi]$;

(3) $\mathrm{VLig}[\forall x \varphi] = \mathrm{VLig}[\exists x \varphi] = \mathrm{VLig}[\varphi] \cup \{x\}$.

Dado Γ um conjunto de fórmulas, definimos o conjunto das variáveis possivelmente ligadas em Γ por:

$$\text{VLig}[\Gamma] = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \text{VLig}[\gamma].$$

Sejam t e t' termos, e x uma variável. Definimos recursivamente a substituição de x por t' em t, denotada por $[t]_x^{t'}$, pelas seguintes regras (para y variável, c constante, f símbolo funcional de aridade $n \in \mathbb{N}^*$ e $t_1, \dots, t_n$ termos):

(1) $[y]_x^{t'} = \begin{cases} t', \text{ se } y = x \\ y, \text{ se } y \neq x \end{cases}$;

(2) $[c]_x^{t'} = c$;

(3) $[f(t_1, \dots, t_n)]_x^{t'} = f([t_1]_x^{t'}, \dots, [t_n]_x^{t'})$.

Agora, sejam φ uma fórmula, t um termo e x uma variável. Definimos recursivamente a substituição de todas as ocorrências livres de x por t em φ, denotada por $[\varphi]_x^t$, pelas seguintes regras (para P e R símbolos relacionais, com $\#P = 0$ e $\#R = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $t_1, \dots, t_n$ termos, φ e ψ fórmulas, e y variável):

(1) $[\bot]_x^t = \bot$;

(2) $[P]_x^t = P$;

(3) $[R(t_1, \dots, t_n)]_x^t = R([t_1]_x^t, \dots, [t_n]_x^t)$;

(4) $[\varphi \wedge \psi]_x^t = [\varphi]_x^t \wedge [\psi]_x^t$;

(5) $[\varphi \vee \psi]_x^t = [\varphi]_x^t \vee [\psi]_x^t$;

(6) $[\varphi \to \psi]_x^t = [\varphi]_x^t \to [\psi]_x^t$;

(7) $[\forall y \varphi]_x^t = \begin{cases} \forall y \varphi, \text{ se } y = x \\ \forall y [\varphi]_x^t, \text{ se } y \neq x \end{cases}$;

(8) $[\exists y \varphi]_x^t = \begin{cases} \exists y \varphi, \text{ se } y = x \\ \exists y [\varphi]_x^t, \text{ se } y \neq x \end{cases}$.

Exemplo 4.4. Considere a fórmula φ abaixo:

$$\forall x_1 R(x_1, x_2).$$

Aplicando a substituição de x_2 por x_1, obtemos a fórmula $[\varphi]_{x_2}^{x_1}$, dada por:

$$\forall x_1 R(x_1, x_1).$$

Note que a única ocorrência em φ da variável x_2 é livre, mas está no escopo de $\forall x_1$. Assim, após a substituição, a ocorrência de x_1 no lugar de x_2 é ligada.

Para evitar situações como a do exemplo anterior, apresentamos mais uma definição. Considere φ uma fórmula, t um termo e x uma variável. Dizemos que uma ocorrência livre de x em φ é **livre para** t quando para toda variável $y \in \mathrm{VarI}[t]$, esta ocorrência de x não está no escopo de $\forall y$, nem de $\exists y$. Ou seja, ao substituir esta ocorrência de x por t, todas as ocorrências de variáveis em t permanecem livres.

Quando toda ocorrência livre de x em φ é livre para t, dizemos que a variável x é livre para t em φ.

Considerando a fórmula φ do exemplo anterior, sabemos que a única ocorrência de x_2 em φ é livre. Ela é livre para termos como x_3, $f(x_2, x_4)$ e $g(x_3)$. Porém, como ela está no escopo de $\forall x_1$, ela não é livre para nenhum termo que contenha a variável x_1.

4.3 Dedução Natural

Seja σ uma assinatura. A consequência sintática para a linguagem de assinatura σ é definida recursivamente pelas seguintes regras (para Γ, Δ e Σ conjuntos de fórmulas, φ, ψ e θ fórmulas, x e y variáveis, e t, t_1 e t_2 termos):

Axioma (Ax)

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$

Eliminação do $\bot$ ($\bot$E)

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Introdução do $\wedge$ ($\wedge$I)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Delta \vdash \psi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi \wedge \psi}$$

Eliminação do $\wedge$ ($\wedge$E)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Introdução do $\vee$ ($\vee$I)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$$

Eliminação do $\vee$ ($\vee$E)

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \theta \qquad \Delta, \psi \vdash \theta \qquad \Sigma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma, \Delta, \Sigma \vdash \theta}$$

Introdução do $\to$ ($\to$I)

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$$

Eliminação do $\to$ ($\to$E)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Delta \vdash \varphi \to \psi}{\Gamma, \Delta \vdash \psi}$$

Introdução do $\forall$ ($\forall$I)

$$\frac{\Gamma \vdash [\varphi]^y_x}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$$

$y \notin \mathrm{VLiv}[\Gamma \cup \{\forall x \varphi\}]$
x é livre para y em φ

Eliminação do $\forall$ ($\forall$E)

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x \varphi}{\Gamma \vdash [\varphi]^t_x}$$

x é livre para t em φ

Introdução do $\exists$ ($\exists$I)

$$\frac{\Gamma \vdash [\varphi]^t_x}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$$

x é livre para t em φ

Eliminação do $\exists$ ($\exists$E)

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \varphi \qquad \Delta, [\varphi]^y_x \vdash \psi}{\Gamma, \Delta \vdash \psi}$$

$y \notin \mathrm{VLiv}[\Gamma \cup \Delta \cup \{\exists x \varphi, \psi\}]$
x é livre para y em φ

Lembramos que $\Gamma, \Delta \vdash \varphi$ é uma abreviação de $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$, e $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ é uma abreviação de $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Quando $\Gamma \vdash \varphi$, dizemos que φ é **consequência sintática** de Γ. No caso em que $\Gamma = \emptyset$, dizemos que φ é um **teorema** da LPOI na linguagem de assinatura σ, e escrevemos $\vdash \varphi$.

Note que, além de acrescentar regras para os quantificadores, também flexibilizamos as regras apresentadas para a LSI, no seguinte sentido: as regras da LSI são casos particulares das regras da LPOI.

Uma **demonstração** é uma sequência finita $((\Gamma_i, \varphi_i) : 0 \leq i \leq n)$ de pares da forma (Γ, φ), onde Γ é um conjunto de fórmulas e φ é uma fórmula, satisfazendo as seguintes propriedades (para $0 \leq i \leq n$):

(1) (Γ_i, φ_i) é uma instância da regra (Ax), ou seja, $\varphi_i \in \Gamma_i$;

(2) existem $j, k, l < i$, tais que (Γ_i, φ_i) é obtido a partir de (Γ_j, φ_j), (Γ_k, φ_k) e (Γ_l, φ_l) por aplicação de uma das regras ($\perp$E), ($\wedge$I), ($\wedge$E), ($\vee$I), ($\vee$E), ($\to$I), ($\to$E), ($\forall$I), ($\forall$E), ($\exists$I) ou ($\exists$E).

Quando o último par de uma demonstração D é $\Gamma \vdash \varphi$, dizemos que D é uma demonstração de $\Gamma \vdash \varphi$.

Teorema 4.5. (Princípio de Indução para Consequência Sintática)

Sejam σ uma assinatura e $R \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{For}(\sigma)) \times \mathrm{For}(\sigma)$ uma relação que satisfaz as seguintes condições:

(i) para todo $\Gamma \subseteq \mathrm{For}(\sigma)$ e $\varphi \in \mathrm{For}(\sigma)$, $(\Gamma \cup \{\varphi\}, \varphi) \in R$;

(ii) R é fechada para as regras de inferência ($\perp$E), ($\wedge$I), ($\wedge$E), ($\vee$I), ($\vee$E), ($\to$I), ($\to$E), ($\forall$I), ($\forall$E), ($\exists$I) e ($\exists$E).

Então, $\vdash\ \subseteq R$, ou seja, para todo conjunto de fórmulas Γ e toda fórmula φ, se $\Gamma \vdash \varphi$, então $(\Gamma, \varphi) \in R$.

Agora, vamos estudar algumas propriedades da consequência sintática.

Teorema 4.6. (Monotonicidade da Consequência Sintátitca)

Sejam σ uma assinatura, Γ e Δ conjuntos de fórmulas e φ uma fórmula. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma, \Delta \vdash \varphi$. Ou seja, temos a seguinte regra de inferência:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi}\ (\mathrm{Mon})$$

Demonstração. Suponha que $\Gamma \vdash \varphi$. Se $\Delta = \emptyset$, é imediato que $\Gamma, \Delta \vdash \varphi$. Assim, suponha que $\Delta \neq \emptyset$ e considere $\delta \in \Delta$. Temos a seguinte demonstração:

1.	$\Gamma \vdash \varphi$	
2.	$\Delta \vdash \delta$	(Ax)
3.	$\Gamma, \Delta \vdash \varphi \wedge \delta$	($\wedge$I), 1, 2
4.	$\Gamma, \Delta \vdash \varphi$	($\wedge$E), 3

Logo, $\Gamma, \Delta \vdash \varphi$. □

Teorema 4.7. Sejam σ uma assinatura, Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Gamma' \vdash \varphi$.

Demonstração. Vamos provar por indução em $\Gamma \vdash \varphi$ que existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma' \vdash \varphi$.

(Base - Ax) Sejam Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. Como $\varphi \in \{\varphi\} \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$, segue que $\{\varphi\} \vdash \varphi$.

(Hipótese Indutiva - $\wedge$I) Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas, e φ e ψ fórmulas. Suponha que existem $\Gamma' \subseteq \Gamma$ e $\Delta' \subseteq \Delta$ finitos, tais que $\Gamma' \vdash \varphi$ e $\Delta' \vdash \psi$.

(Passo Indutivo - $\wedge$I) Note que $\Gamma' \cup \Delta' \subseteq \Gamma \cup \Delta$ e $\Gamma' \cup \Delta'$ é finito. Logo, aplicando ($\wedge$I) à Hipótese Indutiva, obtemos que $\Gamma', \Delta' \vdash \varphi \wedge \psi$.

(Hipótese Indutiva - $\vee$E) Sejam Γ, Δ e Σ conjuntos de fórmulas e φ, ψ e θ fórmulas. Suponha que existem $\Gamma' \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$, $\Delta' \subseteq \Delta \cup \{\psi\}$ e $\Sigma' \subseteq \Sigma$ finitos, tais que $\Gamma' \vdash \theta$, $\Delta' \vdash \theta$ e $\Sigma' \vdash \varphi \vee \psi$.

(Passo Indutivo - $\vee$E) Sejam $\Gamma'' = \Gamma' \setminus \{\varphi\}$ e $\Delta'' = \Delta' \setminus \{\psi\}$. Note que $\Gamma'' \cup \Delta'' \cup \Sigma' \subseteq \Gamma \cup \Delta \cup \Sigma$ e $\Gamma'' \cup \Delta'' \cup \Sigma'$ é finito. Além disso, como $\Gamma' \cup \{\varphi\} = \Gamma'' \cup \{\varphi\}$ e $\Delta' \cup \{\psi\} = \Delta'' \cup \{\psi\}$, temos a seguinte demonstração:

1.	$\Gamma' \vdash \theta$	Hipótese Indutiva
2.	$\Delta' \vdash \theta$	Hipótese Indutiva
3.	$\Sigma' \vdash \varphi \vee \psi$	Hipótese Indutiva
4.	$\Gamma', \varphi \vdash \theta$	(Mon), 1
5.	$\Gamma'', \varphi \vdash \theta$	4
6.	$\Delta', \psi \vdash \theta$	(Mon), 2
7.	$\Delta'', \psi \vdash \theta$	6
8.	$\Gamma'', \Delta'', \Sigma' \vdash \theta$	($\vee$E), 3, 5, 7

(Hipótese Indutiva - $\forall$E) Seja Γ um conjunto de fórmulas, φ uma fórmula e x uma variável. Suponha que existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$ finito, tal que $\Gamma' \vdash \forall x \varphi$.

(Passo Indutivo - $\forall$E) Seja t um termo tal que x é livre para t em φ. Aplicando ($\forall$E) à Hipótese Indutiva, obtemos que $\Gamma' \vdash [\varphi]_x^t$.

(Hipótese Indutiva - $\exists$E) Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas, φ e ψ fórmulas, e x e y variáveis tais que $y \notin \mathrm{VLiv}[\Gamma \cup \Delta \cup \{\exists x \varphi, \psi\}]$ e x é livre para y em φ. Suponha que existem $\Gamma' \subseteq \Gamma$ e $\Delta' \subseteq \Delta \cup \{[\varphi]_x^y\}$ finitos, tais que $\Gamma' \vdash \exists x \varphi$ e $\Delta' \vdash \psi$.

(Passo Indutivo - $\exists$E) Seja $\Delta'' = \Delta' \setminus \{[\varphi]_x^y\}$. Note que $\Gamma' \cup \Delta'' \subseteq \Gamma \cup \Delta$ e $\Gamma' \cup \Delta''$ é finito. Além disso, como $\Delta'' \cup \{[\varphi]_x^y\} = \Delta' \cup \{[\varphi]_x^y\}$ e $y \notin \mathrm{VLiv}[\Gamma' \cup \Delta'' \cup \{\exists x \varphi, \psi\}]$, temos a seguinte demonstração:

1.	$\Gamma' \vdash \exists x \varphi$	Hipótese Indutiva
2.	$\Delta' \vdash \psi$	Hipótese Indutiva
3.	$\Delta', [\varphi]_x^y \vdash \psi$	(Mon), 2
4.	$\Delta'', [\varphi]_x^y \vdash \psi$	3
5.	$\Gamma', \Delta'' \vdash \psi$	($\exists$E), 1, 4

Para as regras ($\bot$E), ($\wedge$E), ($\vee$I) e ($\to$E), a prova é análoga ao caso da regra ($\wedge$I).

Para a regra ($\to$I), a prova é análoga ao caso da regra ($\vee$E).

Para a regra ($\forall$I), a prova é análoga ao caso da regra ($\exists$E).

Para a regra (∃I), a prova é análoga ao caso da regra (∀E). □

Agora, vamos estudar algumas mudanças de variáveis em fórmulas que preservam a consequência sintática. Essas mudanças de variáveis serão utilizadas na prova do Teorema da Completude.

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq n \leq 2$. Definimos o seguinte conjunto:

$$\mathrm{VarI}_n = \{x_{3i+n} \,:\, i \in \mathbb{N}\}.$$

Desse modo, temos uma partição do conjunto das variáveis em três conjuntos. Idealmente, VarI_0 representa o conjunto das variáveis ligadas, VarI_1 o conjunto das variáveis livres, e VarI_2 representa um conjunto de variáveis extras, utilizadas em demonstrações como variáveis livres.

Também consideramos combinações dos conjuntos acima (por exemplo, $\mathrm{VarI}_{12} = \mathrm{VarI}_1 \cup \mathrm{VarI}_2$) e os conjuntos de termos gerados por esses conjuntos de variáveis. O principal deles é o conjunto dos termos gerado indutivamente por VarI_{12}, denotado por $\mathrm{Ter}_{12}(\sigma)$.

No restante desta seção, consideramos uma definição de ocorrência de variáveis em fórmulas diferente da apresentada na seção anterior. Dizemos que uma variável x **ocorre** em uma fórmula φ quando x é um símbolo em φ. Desse modo, consideramos como ocorrências de x em φ as ocorrências livres, ligadas e também as ocorrências ao lado de um quantificador.

Sejam φ uma fórmula, x uma variável e x' uma variável que não ocorre em φ. Para o próximo lema, denotamos por φ' a fórmula obtida a partir de φ pela troca de todas as ocorrências de x por x'. Utilizamos a mesma notação para termos, conjuntos de fórmulas e demonstrações.

Lema 4.8. Sejam σ uma assinatura, D uma demonstração e x, x' e w variáveis, tais que $x' \neq w$ e x' e w não ocorrem em D. Então, D' é uma demonstração.

Demonstração. Vamos provar por indução no comprimento de D que se x' e w não ocorrem em D, então D' é uma demonstração.

(Base) Seja $D = ((\Gamma_1, \varphi_1))$ uma demonstração de comprimento 1 e suponha que x' e w não ocorrem em D. Sabemos que $(\Gamma_1, \varphi_1) = (\Gamma \cup \{\varphi\}, \varphi)$, onde Γ é um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. Além disso, x' não ocorre em $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Desse modo, por (Ax) temos que $\Gamma', \varphi' \vdash \varphi'$, e D' é uma demonstração.

(Hipótese Indutiva) Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Suponha que para toda demonstração de comprimento n, se x' e w não ocorrem em D, então D' é uma demonstração.

(Passo Indutivo) Seja $D = ((\Gamma_i, \varphi_i) \,:\, 1 \leq i \leq n+1)$ uma demonstração de comprimento $n+1$ e suponha que x' e w não ocorrem em D.

Considere $D_0 = ((\Gamma_i, \varphi_i) \,:\, 1 \leq i \leq n)$. Como D_0 é uma demonstração de comprimento n e x' e w não ocorrem em D_0, pela Hipótese Indutiva temos que D_0' é uma demonstração.

(Caso ∀I) Suponha que $(\Gamma_{n+1}, \varphi_{n+1})$ foi obtido em D a partir de uma aplicação da regra (∀I). Sabemos que $(\Gamma_{n+1}, \varphi_{n+1}) = (\Gamma, \forall y\varphi)$, onde Γ é um conjunto de fórmulas, φ uma fórmula e y uma variável. Além disso, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq n$ e $(\Gamma_i, \varphi_i) = (\Gamma, [\varphi]^z_y)$, onde z é uma variável tal que $z \notin \mathrm{VLiv}[\Gamma \cup \{\forall y\varphi\}]$ e y é livre para z em φ. Temos duas possibilidades:

- $z = x'$. Note que $y \notin \mathrm{VLiv}[\varphi]$. Caso contrário, x' ocorreria em $[\varphi]^z_y$, o que seria uma contradição. Desse modo, $[\varphi]^z_y$ é a fórmula $[\varphi]^t_y$ para qualquer termo t.

  Sabemos que $w \neq x'$ e w não ocorre em D. Em particular, $w \notin \mathrm{VLiv}[\Gamma' \cup \{(\forall y\varphi)'\}]$ e y' é livre para w em φ'. Como $(\forall y\varphi)'$ é a fórmula $\forall y'\varphi'$, temos que D' é a seguinte demonstração:

$$\left.\begin{array}{rl} \vdots & \vdots \\ i. & \Gamma' \vdash [\varphi']^w_{y'} \\ \vdots & \vdots \end{array}\right\} D'_0$$
$$\begin{array}{rll} n+1. & \Gamma' \vdash \forall y'\varphi' & (\forall\mathrm{I}), i \end{array}$$

- $z \neq x'$. Note que $z' \notin \mathrm{VLiv}[\Gamma' \cup \{(\forall y\varphi)'\}]$ e y' é livre para z' em φ'. Como $(\forall y\varphi)'$ é a fórmula $\forall y'\varphi'$, temos que D' é a seguinte demonstração:

$$\left.\begin{array}{rl} \vdots & \vdots \\ i. & \Gamma' \vdash [\varphi']^{z'}_{y'} \\ \vdots & \vdots \end{array}\right\} D'_0$$
$$\begin{array}{rll} n+1. & \Gamma' \vdash \forall y'\varphi' & (\forall\mathrm{I}), i \end{array}$$

Para a regra (Ax), a prova é análoga à Base.

Para as regras (⊥E), (∧I), (∧E), (∨I), (∨E), (→I) e (→E), a prova é imediata.

Para as regras (∀E), (∃I) e (∃E), a prova é análoga ao caso da regra (∀I). □

Sejam φ uma fórmula, e x e x' variáveis. Dizemos que x' **ocorre no escopo** de x em φ quando a variável x' ocorre em φ no escopo de $\forall x$ ou $\exists x$.

Para o próximo lema, denotamos por φ' a fórmula obtida a partir de φ pela troca de todas as ocorrências ao lado de um quantificador ou ligadas de x por x'. Utilizamos a mesma notação para conjuntos de fórmulas e demonstrações.

Lema 4.9. Sejam σ uma assinatura, D uma demonstração, e x e x' variáveis tais que x' não ocorre no escopo de x em D. Então, D' é uma demonstração.

Demonstração. Vamos provar por indução no comprimento de D que se x' não ocorre no escopo de x em D, então D' é uma demonstração. A prova é análoga à do Lema 4.8, exceto para as regras dos quantificadores.

(Hipótese Indutiva) Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Suponha que para toda demonstração de comprimento n, se x' não ocorre no escopo de x em D, então D' é uma demonstração.

(Passo Indutivo) Seja $D = ((\Gamma_i, \varphi_i) : 1 \leq i \leq n+1)$ uma demonstração de comprimento $n+1$ e suponha que x' não ocorre no escopo de x em D.

Considere $D_0 = ((\Gamma_i, \varphi_i) : 1 \leq i \leq n)$. Como D_0 é uma demonstração de comprimento n e x' não ocorre no escopo de x em D_0, pela Hipótese Indutiva temos que D_0' é uma demonstração.

(Caso ∀I) Suponha que $(\Gamma_{n+1}, \varphi_{n+1})$ foi obtido em D a partir de uma aplicação da regra (∀I). Sabemos que $(\Gamma_{n+1}, \varphi_{n+1}) = (\Gamma, \forall y\varphi)$, onde Γ é um conjunto de fórmulas, φ uma fórmula e y uma variável. Além disso, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq n$ e $(\Gamma_i, \varphi_i) = (\Gamma, [\varphi]_y^z)$, onde z é uma variável tal que $z \notin \mathrm{VLiv}[\Gamma \cup \{\forall y\varphi\}]$ e y é livre para z em φ.

Note que $z \notin \mathrm{VLiv}[\Gamma' \cup \{(\forall y\varphi)'\}]$. Temos duas possibilidades:

- $y = x$. Neste caso, temos que $x' \notin \mathrm{VLiv}[\varphi]$. Caso contrário, x' ocorreria no escopo de x em $\forall y\varphi$, o que é uma contradição. Desse modo, $x' \notin \mathrm{VLiv}[\varphi']$, e $[\varphi']_y^z$ é a fórmula $[[\varphi']_y^{x'}]_{x'}^z$.

  Como x' é livre para z em $[\varphi']_y^{x'}$ e $(\forall y\varphi)$ é a fórmula $\forall x'[\varphi']_y^{x'}$, temos que D' é a seguinte demonstração:

$$\begin{array}{rll} \vdots & \vdots & \\ i. & \Gamma' \vdash [[\varphi']_y^{x'}]_{x'}^z & \\ \vdots & \vdots & \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}\vdots\\ i.\\ \vdots\end{array}}\right\} D_0'$$
$$\begin{array}{rll} n+1. & \Gamma' \vdash \forall x'[\varphi']_y^{x'} & (\forall\mathrm{I}), i \end{array}$$

- $y \neq x$. Neste caso, y é livre para z em φ'. Caso contrário, $z = x'$ e y ocorreria no escopo de x em φ. Daí, x' ocorreria no escopo de x em $[\varphi]_y^z$, o que é uma contradição.

  Desse modo, como $(\forall y\varphi)'$ é a fórmula $\forall y\varphi'$, temos que D' é a seguinte demonstração:

$$\begin{array}{rll} \vdots & \vdots & \\ i. & \Gamma' \vdash [\varphi']_y^z & \\ \vdots & \vdots & \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}\vdots\\ i.\\ \vdots\end{array}}\right\} D_0'$$
$$\begin{array}{rll} n+1. & \Gamma' \vdash \forall y\varphi' & (\forall\mathrm{I}), i \end{array}$$

Para as regras (∀E), (∃I) e (∃E), a prova é análoga ao caso da regra (∀I). □

Seja φ uma fórmula. Denotamos por φ^* a fórmula obtida da seguinte forma:

(1) trocamos simultaneamente todas as ocorrências em φ de variáveis da forma x_i por x_{3i+1}, obtendo φ';

(2) trocamos simultaneamente todas as ocorrências ao lado de um quantificador ou ligadas em φ' de variáveis da forma x_{3i+1} por x_{3i}, obtendo φ^*.

Desse modo, $\mathrm{VLiv}[\varphi^*] \subseteq \mathrm{VarI}_1$ e $\mathrm{VLig}[\varphi^*] \subseteq \mathrm{VarI}_0$. Como termos não possuem variáveis ligadas, nem ao lado de um quantificador, denotamos por t^* o termo obtido a partir de t pela aplicação da troca descrita em (1). Para um conjunto de fórmulas Γ, definimos $\Gamma^* = \{\gamma^* : \gamma \in \Gamma\}$.

Teorema 4.10. Sejam σ uma assinatura, Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. Então, $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, $\Gamma^* \vdash \varphi^*$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que $\Gamma \vdash \varphi$. Pelo Teorema 4.7, existe $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito, tal que $\Gamma_0 \vdash \varphi$.

Seja n o maior índice de variável que ocorre em $\Gamma_0 \cup \{\varphi\}$. Pelo Lema 4.8, podemos trocar a variável x_n em $\Gamma_0 \vdash \varphi$ por x_{3n+1}, e preservar a consequência sintática.

Repetindo esse processo para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq i < n$ em ordem decrescente, obtemos que $\Gamma_0' \vdash \varphi'$, onde Γ_0' e φ' representam a troca descrita em (1) aplicada em Γ_0 e φ, respectivamente.

Analogamente, utilizando o Lema 4.9, obtemos que $\Gamma_0^* \vdash \varphi^*$ e, pela monotonicidade, concluímos que $\Gamma^* \vdash \varphi^*$.

($\Leftarrow$) A prova é análoga a ($\Rightarrow$). Primeiro desfazemos a troca descrita em (2), e em seguida desfazemos a troca descrita em (1), seguindo a ordem crescente no índice das variáveis. $\square$

4.4 Semântica Algébrica

Sejam σ uma assinatura e Ω uma álgebra de Heyting completa. Uma Ω-estrutura de primeira ordem para a linguagem de assinatura σ é uma estrutura da forma $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{F}^{\mathcal{M}}, \mathcal{R}^{\mathcal{M}} \rangle$, onde:

- M é um conjunto não vazio;
- $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$ é uma função que associa a cada símbolo funcional n-ário f uma função n-ária $f^{\mathcal{M}} : M^n \to M$;
- $\mathcal{R}^{\mathcal{M}}$ é uma função que associa a cada símbolo relacional n-ário R uma função n-ária $R^{\mathcal{M}} : M^n \to \Omega$.

Considere $\mathcal{M}$ uma Ω-estrutura. Uma **valoração** em $\mathcal{M}$ é uma função da forma $v : \mathrm{VarI} \to M$. Estendemos recursivamente v a uma função $v^* : \mathrm{Ter}(\sigma) \to M$ pelas seguintes regras (para x variável, c constante, f símbolo funcional de aridade $n \in \mathbb{N}^*$ e $t_1, \dots, t_n$ termos):

(1) $v^*[x] = v(x)$;

(2) $v^*[c] = c^{\mathcal{M}}$;

(3) $v^*[f(t_1, \dots, t_n)] = f^{\mathcal{M}}(v^*[t_1], \dots, v^*[t_n])$.

Sejam v_1 e v_2 valorações em $\mathcal{M}$ e t um termo. Dizemos que v_1 e v_2 **concordam** nas variáveis individuais de t quando para toda variável $x \in \mathrm{VarI}[t]$, $v_1(x) = v_2(x)$.

Teorema 4.11. Sejam σ uma assinatura, Ω uma álgebra de Heyting completa, $\mathcal{M}$ uma Ω-estrutura, v_1 e v_2 valorações em $\mathcal{M}$ e t um termo. Se v_1 e v_2 concordam nas variáveis individuais de t, então:

$$v_1^*[t] = v_2^*[t].$$

Demonstração. Vamos provar por indução no termo t que se v_1 e v_2 concordam nas variáveis individuais de t, então $v_1^*[t] = v_2^*[t]$.

(Base - VarI) Seja x uma variável individual e suponha que v_1 e v_2 concordam nas variáveis individuais de x. Como $x \in \mathrm{VarI}[x]$, temos que:

$$v_1^*[x] = v_1(x) = v_2(x) = v_2^*[x]$$

(Hipótese Indutiva - f) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $t_1, \dots, t_n$ termos. Suponha que, para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq n$, se v_1 e v_2 concodam nas variáveis individuais de t_i, então $v_1^*[t_i] = v_2^*[t_i]$.

(Passo Indutivo - f) Seja f um símbolo funcional n-ário e suponha que v_1 e v_2 concordam nas variáveis individuais de $f(t_1, \dots, t_n)$.

Dado $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq n$, sabemos que $\mathrm{VarI}[t_i] \subseteq \mathrm{VarI}[f(t_1, \dots, t_n)]$. Desse modo, v_1 e v_2 concordam nas variáveis individuais de cada t_i, e temos que:

$$\begin{aligned} v_1^*[f(t_1, \dots, t_n)] &= f^{\mathcal{M}}(v_1^*[t_1], \dots, v_1^*[t_n]) \\ &= f^{\mathcal{M}}(v_2^*[t_1], \dots, v_2^*[t_n]) \quad \text{pela Hipótese Indutiva} \\ &= v_2^*[f(t_1, \dots, t_n)] \end{aligned}$$

Para constantes, a prova é análoga ao caso das variáveis individuais. □

Seja v uma valoração em $\mathcal{M}$. Se x é uma variável e $a \in M$, definimos a seguinte valoração em $\mathcal{M}$ (para $y \in \mathrm{VarI}$):

$$v_x^a(y) = \begin{cases} a, \text{ se } y = x \\ v(y), \text{ se } y \neq x \end{cases}.$$

Abaixo vemos algumas das principais propriedades dessa notação, e sua relação com a substituição.

Proposição 4.12. Sejam σ uma assinatura, Ω uma álgebra de Heyting completa, $\mathcal{M}$ uma Ω-estrutura e v uma valoração em $\mathcal{M}$. Valem as seguintes propriedades (para x e y variáveis e $a, b \in M$):

(i) se $x \neq y$, então $(v_x^a)_y^b = (v_y^b)_x^a$;

(ii) se $x = y$, então $(v_x^a)_y^b = v_y^b$.

Demonstração. Sejam x e y variáveis individuais e $a, b \in M$.

(i) Suponha que $x \neq y$ e considere $z \in \mathrm{VarI}$. Temos três possibilidades:

- $z = x$ e $z \neq y$. Neste caso, temos que:

$$(v_x^a)_y^b(z) = v_x^a(z) = a = (v_y^b)_x^a(z)$$

- $z \neq x$ e $z = y$. Neste caso, temos que:

$$(v_x^a)_y^b(z) = b = v_y^b(z) = (v_y^b)_x^a(z)$$

- $z \neq x$ e $z \neq y$. Neste caso, temos que:

$$(v_x^a)_y^b(z) = v_x^a(z) = v(z) = v_y^b(z) = (v_y^b)_x^a(z)$$

Logo, $(v_x^a)_y^b = (v_y^b)_x^a$.

(ii) Suponha que $x = y$ e considere $z \in$ VarI. Temos duas possibilidades:

- $z = x$ ($z = y$). Neste caso, temos que:

$$(v_x^a)_y^b(z) = b = v_y^b(z)$$

- $z \neq x$ ($z \neq y$). Neste caso, temos que:

$$(v_x^a)_y^b(z) = v_x^a(z) = v(z) = v_y^b(z)$$

Logo, $(v_x^a)_y^b = v_y^b$.

□

Teorema 4.13. Sejam σ uma assinatura, Ω uma álgebra de Heyting completa, $\mathcal{M}$ uma Ω-estrutura, v uma valoração em $\mathcal{M}$, t e t' termos e x uma variável. Vale a seguinte propriedade:

$$\left(v_x^{v^*[t']}\right)^*[t] = v^*[[t]_x^{t'}].$$

Demonstração. Vamos provar por indução no termo t que $\left(v_x^{v^*[t']}\right)^*[t] = v^*[[t]_x^{t'}]$.

(Base - VarI) Seja y uma variável individual. Se $y = x$, temos que:

$$\left(v_x^{v^*[t']}\right)^*[y] = \left(v_x^{v^*[t']}\right)^*[x] = v_x^{v^*[t']}(x) = v^*[t'] = v^*[[x]_x^{t'}] == v^*[[y]_x^{t'}]$$

Se $y \neq x$, temos que:

$$\left(v_x^{v^*[t']}\right)^*[y] = v_x^{v^*[t']}(y) = v(y) = v^*[y] = v^*[[y]_x^{t'}]$$

Logo, $\left(v_x^{v^*[t']}\right)^*[y] = v^*[[y]_x^{t'}]$.

(Hipótese Indutiva - f) Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $t_1, \ldots, t_n$ termos. Suponha que, para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq n$, $\left(v_x^{v^*[t']}\right)^*[t_i] = v^*[[t_i]_x^{t'}]$

(Passo Indutivo - f) Seja f um símbolo funcional n-ário. Pela Hipótese Indutiva, temos que:

$$\begin{aligned}\left(v_x^{v^*[t']}\right)^*[f(t_1, \ldots, t_n)] &= f^{\mathcal{M}}\left(\left(v_x^{v^*[t']}\right)^*[t_1], \ldots, \left(v_x^{v^*[t']}\right)^*[t_n]\right) \\ &= f^{\mathcal{M}}(v^*[[t_1]_x^{t'}], \ldots, v^*[[t_n]_x^{t'}]) \\ &= v^*[f([t_1]_x^{t'}, \ldots, [t_n]_x^{t'})] \\ &= v^*[[f(t_1, \ldots, t_n)]_x^{t'}]\end{aligned}$$

Para constantes, a prova é análoga ao caso das variáveis individuais. □

Dada v uma valoração em $\mathcal{M}$, definimos recursivamente uma função $\mathcal{M}_v : \mathrm{For} \to \Omega$ pelas seguintes regras (para P e R símbolos relacionais, com $\#P = 0$, $\#R = n$ e $n \in \mathbb{N}^*$, $t_1, \dots, t_n$ termos, φ e ψ fórmulas, e x variável individual):

(1) $\mathcal{M}_v[\bot] = 0$;

(2) $\mathcal{M}_v[P] = P^{\mathcal{M}}$;

(3) $\mathcal{M}_v[R(t_1, \dots, t_n)] = R^{\mathcal{M}}(v^*[t_1], \dots, v^*[t_n])$;

(4) $\mathcal{M}_v[\varphi \wedge \psi] = \mathcal{M}_v[\varphi] \wedge \mathcal{M}_v[\psi]$;

(5) $\mathcal{M}_v[\varphi \vee \psi] = \mathcal{M}_v[\varphi] \vee \mathcal{M}_v[\psi]$;

(6) $\mathcal{M}_v[\varphi \to \psi] = \mathcal{M}_v[\varphi] \rhd \mathcal{M}_v[\psi]$;

(7) $\mathcal{M}_v[\forall x \varphi] = \inf\limits_{a \in M} \mathcal{M}_{v_x^a}[\varphi]$;

(8) $\mathcal{M}_v[\exists x \varphi] = \sup\limits_{a \in M} \mathcal{M}_{v_x^a}[\varphi]$.

Chamamos $\mathcal{M}_v[\varphi]$ de **valor** de φ em $\mathcal{M}$ segundo v. Dado um conjunto de fórmulas Γ, o **valor** de Γ em $\mathcal{M}$ segundo v, denotado por $\mathcal{M}_v[\Gamma]$, é definido por:

$$\mathcal{M}_v[\Gamma] = \inf_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{M}_v[\gamma].$$

Sejam Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. Dizemos que:

- v **satisfaz** φ em $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}, v \vDash \varphi$) quando $\mathcal{M}_v[\varphi] = 1$;
- v **satisfaz** Γ em $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}, v \vDash \Gamma$) quando para toda fórmula $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{M}, v \vDash \gamma$;
- φ é **satisfazível** quando existe uma álgebra de Heyting completa Ω não trivial, $\mathcal{M}$ uma Ω-estrutura e v uma valoração em $\mathcal{M}$, tais que $\mathcal{M}, v \vDash \varphi$.
- φ é **consequência semântica** de Γ ($\Gamma \vDash \varphi$) quando para toda álgebra de Heyting completa Ω, $\mathcal{M}$ Ω-estrutura e v valoração em $\mathcal{M}$, se $\mathcal{M}, v \vDash \Gamma$, então $\mathcal{M}, v \vDash \varphi$.
- φ é **válida** ($\vDash \varphi$) quando $\emptyset \vDash \varphi$.

Sejam v_1 e v_2 valorações em $\mathcal{M}$ e φ uma fórmula. Dizemos que v_1 e v_2 **concordam** nas variáveis livres de φ quando para toda variável $x \in \mathrm{VLiv}[\varphi]$, $v_1(x) = v_2(x)$.

Com essa definição, estendemos o Teorema 4.11 para valores de fórmulas.

Teorema 4.14. Sejam σ uma assinatura, Ω uma álgebra de Heyting completa, $\mathcal{M}$ uma Ω-estrutura, v_1 e v_2 valorações em $\mathcal{M}$ e φ uma fórmula. Se v_1 e v_2 concordam nas variáveis livres de φ, então:

$$\mathcal{M}_{v_1}[\varphi] = \mathcal{M}_{v_2}[\varphi].$$

Demonstração. Vamos provar por indução na fórmula φ que para quaisquer valorações v_1 e v_2 em $\mathcal{M}$, se v_1 e v_2 concordam nas variáveis livres de φ, então $\mathcal{M}_{v_1}[\varphi] = \mathcal{M}_{v_2}[\varphi]$.

(Base - R) Sejam $n \in \mathbb{N}^*$, R um símbolo relacional n-ário e $t_1, \dots, t_n$ termos. Considere v_1 e v_2 valorações em $\mathcal{M}$ e suponha que v_1 e v_2 concordam nas variáveis livres de $R(t_1, \dots, t_n)$.

Dado $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq n$, sabemos que $\mathrm{VarI}[t_i] \subseteq \mathrm{VLiv}[R(t_1, \dots, t_n)]$. Logo, como v_1 e v_2 concordam nas variáveis individuais de cada t_i, temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{v_1}[R(t_1, \dots, t_n)] &= R^{\mathcal{M}}(v_1^*[t_1], \dots, v_1^*[t_n]) \\ &= R^{\mathcal{M}}(v_2^*[t_1], \dots, v_2^*[t_n]) \quad \text{pelo Teorema 4.11} \\ &= \mathcal{M}_{v_2}[R(t_1, \dots, t_n)]\end{aligned}$$

(Hipótese Indutiva - $\to$) Sejam φ e ψ fórmulas. Suponha que para v_1 e v_2 valorações em $\mathcal{M}$:

- se v_1 e v_2 concordam nas variáveis livres de φ, então $\mathcal{M}_{v_1}[\varphi] = \mathcal{M}_{v_2}[\varphi]$;
- se v_1 e v_2 concordam nas variáveis livres de ψ, então $\mathcal{M}_{v_1}[\psi] = \mathcal{M}_{v_2}[\psi]$.

(Passo Indutivo - $\to$) Sejam v_1 e v_2 valorações em $\mathcal{M}$ tais que v_1 e v_2 concordam nas variáveis livres de $\varphi \to \psi$.

Note que, como $\mathrm{VLiv}[\varphi] \subseteq \mathrm{VLiv}[\varphi \to \psi]$, v_1 e v_2 concordam nas variáveis livres de φ. Da mesma forma, v_1 e v_2 concordam nas variáveis livres de ψ. Logo, temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{v_1}[\varphi \to \psi] &= \mathcal{M}_{v_1}[\varphi] \rhd \mathcal{M}_{v_1}[\psi] \\ &= \mathcal{M}_{v_2}[\varphi] \rhd \mathcal{M}_{v_2}[\psi] \quad \text{pela Hipótese Indutiva} \\ &= \mathcal{M}_{v_2}[\varphi \to \psi]\end{aligned}$$

(Hipótese Indutiva - $\forall$) Seja φ uma fórmula. Suponha que, para v_1 e v_2 valorações em $\mathcal{M}$, se v_1 e v_2 concordam nas variáveis livres de φ, então $\mathcal{M}_{v_1}[\varphi] = \mathcal{M}_{v_2}[\varphi]$.

(Passo Indutivo - $\forall$) Seja x uma variável e considere v_1 e v_2 valorações em $\mathcal{M}$ tais que v_1 e v_2 concordam nas variáveis livres de $\forall x \varphi$.

Sabemos que $\mathrm{VLiv}[\forall x \varphi] = \mathrm{VLiv}[\varphi] - \{x\}$. Assim, não podemos garantir que v_1 e v_2 concordam nas variáveis livres de φ, pois é possível que $x \in \mathrm{VLiv}[\varphi]$, e v_1 e v_2 podem não concordar em x.

Mas, para cada $a \in M$, $(v_1)_x^a$ e $(v_2)_x^a$ concordam nas variáveis livres de φ. Logo, temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{v_1}[\forall x \varphi] &= \inf_{a \in M} \mathcal{M}_{(v_1)_x^a}[\varphi] \\ &= \inf_{a \in M} \mathcal{M}_{(v_2)_x^a}[\varphi] \quad \text{pela Hipótese Indutiva} \\ &= \mathcal{M}_{v_2}[\forall x \varphi]\end{aligned}$$

Para $\perp$ e símbolos relacionais de aridade 0, a prova é análoga ao caso dos símbolos relacionais de aridade $n \in \mathbb{N}^*$.

Para os conectivos $\wedge$ e $\vee$, a prova é análoga ao caso do $\to$.

Para o quantificador $\exists$, a prova é análoga ao caso do $\forall$. $\square$

Também podemos estender o Teorema 4.13 para valores de fórmulas.

Teorema 4.15. Sejam σ uma assinatura, Ω uma álgebra de Heyting completa, $\mathcal{M}$ uma Ω-estrutura, v uma valoração em $\mathcal{M}$, φ uma fórmula, t um termo e x uma variável. Se x é livre para t em φ, então:

$$\mathcal{M}_{v_x^{v^*[t]}}[\varphi] = \mathcal{M}_v[[\varphi]_x^t].$$

Demonstração. Vamos provar por indução na fórmula φ que para toda valoração v em $\mathcal{M}$, se x é livre para t em φ, então $\mathcal{M}_{v_x^{v^*[t]}}[\varphi] = \mathcal{M}_v[[\varphi]_x^t]$.

(Base - R) Sejam R um símbolo relacional de aridade $n \in \mathbb{N}^*$ e $t_1, \dots, t_n$ termos. Considere v uma valoração em $\mathcal{M}$. Temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{v_x^{v^*[t]}}[R(t_1, \dots, t_n)] &= R^{\mathcal{M}}(v_x^{v^*[t]}[t_1], \dots, v_x^{v^*[t]}[t_n]) \\
&= R^{\mathcal{M}}(v[[t_1]_x^t], \dots, v[[t_n]_x^t]) \quad \text{pelo Teorema 4.13} \\
&= \mathcal{M}_v[R([t_1]_x^t, \dots, [t_n]_x^t)] \\
&= \mathcal{M}_v[[R(t_1, \dots, t_n)]_x^t]
\end{aligned}$$

Logo, se x é livre para t em $R(t_1, \dots, t_n)$, então $\mathcal{M}_{v_x^{v^*[t]}}[R(t_1, \dots, t_n)] = \mathcal{M}_v[[R(t_1, \dots, t_n)]_x^t]$.

(Hipótese Indutiva - $\rightarrow$) Sejam φ e ψ fórmulas. Suponha que para toda valoração v em $\mathcal{M}$:

- se x é livre para t em φ, então $\mathcal{M}_{v_x^{v^*[t]}}[\varphi] = \mathcal{M}_v[[\varphi]_x^t]$;
- se x é livre para t em ψ, então $\mathcal{M}_{v_x^{v^*[t]}}[\psi] = \mathcal{M}_v[[\psi]_x^t]$.

(Passo Indutivo - $\rightarrow$) Seja v uma valoração em $\mathcal{M}$ e suponha que x é livre para t em $\varphi \rightarrow \psi$. Em particular, x é livre para t em φ e ψ, e temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{v_x^{v^*[t]}}[\varphi \rightarrow \psi] &= \mathcal{M}_{v_x^{v^*[t]}}[\varphi] \rhd \mathcal{M}_{v_x^{v^*[t]}}[\psi] \\
&= \mathcal{M}_v[[\varphi]_x^t] \rhd \mathcal{M}_v[[\psi]_x^t] \quad \text{pela Hipótese Indutiva} \\
&= \mathcal{M}_v[[\varphi]_x^t \rightarrow [\psi]_x^t] \\
&= \mathcal{M}_v[[\varphi \rightarrow \psi]_x^t]
\end{aligned}$$

(Hipótese Indutiva - $\forall$) Seja φ uma fórmula. Suponha que para toda valoração v em $\mathcal{M}$, se x é livre para t em φ, então $\mathcal{M}_{v_x^{v^*[t]}}[\varphi] = \mathcal{M}_v[[\varphi]_x^t]$.

(Passo Indutivo - $\forall$) Seja y uma variável e considere v uma valoração em $\mathcal{M}$ e $a = v^*[t]$. Suponha que x é livre para t em $\forall y\varphi$. Temos três possibilidades:

- $y = x$. Neste caso, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{v_x^a}[\forall y\varphi] &= \inf_{b \in M} \mathcal{M}_{(v_x^a)_y^b}[\varphi] \\
&= \inf_{b \in M} \mathcal{M}_{v_y^b}[\varphi] \qquad \text{pela Proposição 4.12} \\
&= \mathcal{M}_v[\forall y\varphi] \\
&= \mathcal{M}_v[[\forall y\varphi]_x^t]
\end{aligned}$$

- $y \neq x$ e $x \in \mathrm{VLiv}[\varphi]$. Como x é livre para t em $\forall y\varphi$, sabemos que $y \notin \mathrm{VarI}[t]$ e x é livre para t em φ. Note que, como $y \notin \mathrm{VarI}[t]$, pelo Teorema 4.11:

$$(v_y^b)^*[t] = v^*[t] = a$$

Desse modo, podemos aplicar a Hipótese Indutiva para a valoração v_y^b, e obtemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{v_x^a}[\forall y\varphi] &= \inf_{b\in M} \mathcal{M}_{(v_x^a)_y^b}[\varphi] \\
&= \inf_{b\in M} \mathcal{M}_{(v_y^b)_x^a}[\varphi] && \text{pela Proposição 4.12} \\
&= \inf_{b\in M} \mathcal{M}_{v_y^b}[[\varphi]_x^t] && \text{pela Hipótese Indutiva} \\
&= \mathcal{M}_v[\forall y[\varphi]_x^t] \\
&= \mathcal{M}_v[[\forall y\varphi]_x^t]
\end{aligned}$$

- $y \neq x$ e $x \notin \mathrm{VLiv}[\varphi]$. Em particular, $x \notin \mathrm{VLiv}[\forall y\varphi]$, e obtemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{v_x^a}[\forall y\varphi] &= \mathcal{M}_v[\forall y\varphi] && \text{pelo Teorema 4.14} \\
&= \mathcal{M}_v[[\forall y\varphi]_x^t]
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{M}_{v_x^a}[\forall y\varphi] = \mathcal{M}_v[[\forall y\varphi]_x^t]$.

Para $\bot$ e símbolos relacionais de aridade 0, a prova é análoga ao caso de símbolos relacionais de aridade $n \in \mathbb{N}^*$.

Para os conectivos $\wedge$ e $\vee$, a prova é análoga ao caso do $\to$.

Para o quantificador $\exists$, a prova é análoga ao caso do $\forall$. □

Finalizamos esta seção verificando que a troca de variáveis * preserva a consequência semântica.

Lema 4.16. Sejam σ uma assinatura, Ω uma álgebra de Heyting completa, $\mathcal{M}$ uma Ω-estrutura, v_1 e v_2 valorações em $\mathcal{M}$, t um termo e φ uma fórmula. Se $v_1(x_i) = v_2(x_{3i+1})$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então:

(i) $v_1^*[t] = v_2^*[t^*]$;

(ii) $\mathcal{M}_{v_1}[\varphi] = \mathcal{M}_{v_2}[\varphi^*]$.

Demonstração. Para o item (i), a prova é análoga à do Teorema 4.11. Para o item (ii), a prova é análoga à do Teorema 4.14, exceto para a passo indutivo dos quantificadores. Assim, vamos provar o passo indutivo do $\forall$ abaixo.

Para facilitar a notação, denotamos valorações da forma $v_{x_i}^a$ por v_i^a.

(Hipótese Indutiva - $\forall$) Seja φ uma fórmula. Suponha que, para v_1 e v_2 valorações em $\mathcal{M}$, se $v_1(x_i) = v_2(x_{3i+1})$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então $\mathcal{M}_{v_1}[\varphi] = \mathcal{M}_{v_2}[\varphi^*]$.

(Passo Indutivo - $\forall$) Seja x_n uma variável individual. Note que, para $a \in M$ e $i \in \mathbb{N}$, $(v_1)_n^a(x_i) = (v_2)_{3n+1}^a(x_{3i+1})$. Assim, podemos aplicar a Hipótese Indutiva para as valorações

$(v_1)^a_n$ e $(v_2)^a_{3n+1}$. Além disso, sabemos que $x_{3_n} \notin \mathrm{VLiv}[\varphi^*]$ e x_{3n+1} é livre para x_{3n} em φ^*. Desse modo, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{v_1}[\forall x_n \varphi] &= \inf_{a \in M} \mathcal{M}_{(v_1)^a_n}[\varphi] & \\
&= \inf_{a \in M} \mathcal{M}_{(v_2)^a_{3n+1}}[\varphi^*] & \text{pela Hipótese Indutiva} \\
&= \inf_{a \in M} \mathcal{M}_{((v_2)^a_{3n+1})^a_{3n}}[\varphi^*] & \text{pelo Teorema 4.14} \\
&= \inf_{a \in M} \mathcal{M}_{((v_2)^a_{3n})^a_{3n+1}}[\varphi^*] & \text{pela Proposição 4.12} \\
&= \inf_{a \in M} \mathcal{M}_{(v_2)^a_{3n}}[[\varphi^*]^{x_{3n}}_{x_{3n+1}}] & \text{pelo Teorema 4.15} \\
&= \mathcal{M}_{v_2}[\forall x_{3n}[\varphi^*]^{x_{3n}}_{x_{3n+1}}] & \\
&= \mathcal{M}_{v_2}[(\forall x_n \varphi)^*] &
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.17. Sejam σ uma assinatura, Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. Então, $\Gamma \vDash \varphi$ se, e somente se, $\Gamma^* \vDash \varphi^*$.

Demonstração. Vamos provar que se $\Gamma \vDash \varphi$, então $\Gamma^* \vDash \varphi^*$ (a prova da recíproca é análoga).

Suponha que $\Gamma \vDash \varphi$ e sejam Ω uma álgebra de Heyting completa, $\mathcal{M}$ uma Ω-estrutura e v' uma valoração em $\mathcal{M}$ tais que $\mathcal{M}, v' \vDash \Gamma^*$. Considere v a valoração definida por $v(x_i) = v'(x_{3i+1})$ para $i \in \mathbb{N}$.

Pelo Lema 4.16, $\mathcal{M}_v[\gamma] = \mathcal{M}_{v'}[\gamma^*]$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Desse modo, $\mathcal{M}, v \vDash \Gamma$, e como $\Gamma \vDash \varphi$, segue que $\mathcal{M}, v \vDash \varphi$.

Aplicando o Lema 4.16 para φ, obtemos que $\mathcal{M}, v' \vDash \varphi^*$. Portanto, $\Gamma^* \vDash \varphi^*$. □

4.5 Álgebras de Lindenbaum

No capítulo anterior, apresentamos a construção das álgebras de Lindenbaum para a Lógica Sentencial Intuicionista. Para a Lógica de Primeira Ordem a construção é a mesma, e a maior parte dos resultados se aplicam com demonstrações análogas. Desse modo, começamos esta seção com uma breve revisão das definições e resultados do capítulo anterior.

Sejam σ uma assinatura e Γ um conjunto de fórmulas. Definimos a seguinte relação (para $\varphi, \psi \in \mathrm{For}(\sigma)$):

$$\varphi \equiv_\Gamma \psi \text{ se, e somente se, } \Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ e } \Gamma \vdash \psi \to \varphi.$$

Sabemos que $\equiv_\Gamma$ é uma relação de equivalência (Proposição 3.12). Quando $\varphi \equiv_\Gamma \psi$, dizemos que φ é **equivalente** a ψ segundo Γ.

Denotamos o conjunto das classes de equivalência de $\equiv_\Gamma$ por $\mathrm{For}(\sigma)/\equiv_\Gamma$, e a classe de equivalência de uma fórmula φ por $[\varphi]_\Gamma$ ou, quando não houver risco de ambiguidade, por $[\varphi]$.

Sabemos que $\equiv_\Gamma$ é compatível com os conectivos da LPOI (Teorema 3.14), e que as seguintes operações estão bem definidas (para $\varphi, \psi \in \mathrm{For}(\sigma)$):

- $[\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$;
- $[\varphi] \vee [\psi] = [\varphi \vee \psi]$;
- $[\varphi] \rhd [\psi] = [\varphi \to \psi]$.

Além das operações acima, definimos também a constante $0 = [\bot]$. Assim, construímos a estrutura $\langle \mathrm{For}(\sigma)/{\equiv_\Gamma}, \wedge, \vee, \rhd, 0\rangle$, chamada de **álgebra de Lindenbaum** de Γ, e denotada por $\mathcal{L}_\Gamma$.

Como vimos no Teorema 3.17, $\mathcal{L}_\Gamma$ é uma álgebra de Heyting. Lembramos também os seguintes resultados, que caracterizam a unidade e a ordem parcial de $\mathcal{L}_\Gamma$ (para $\varphi, \psi \in \mathrm{For}(\sigma)$):

- $[\varphi]_\Gamma = 1$ se, e somente se, $\Gamma \vdash \varphi$ (Lema 3.20);
- $[\varphi]_\Gamma \leq [\psi]_\Gamma$ se, e somente se, $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ (Lema 3.16).

Agora, vamos estudar os resultados específicos para o caso da LPOI. Começamos verificando a relação entre os quantificadores e as operações de supremo e ínfimo em $\mathcal{L}_\Gamma$.

Proposição 4.18. Sejam σ uma assinatura, Γ um conjunto de fórmulas, φ uma fórmula e x uma variável, tais que $\mathrm{VLiv}[\Gamma] \subseteq \mathrm{VarI}_1$, $\mathrm{VLig}[\varphi] \subseteq \mathrm{VarI}_0$ e $x \in \mathrm{VarI}_0$. Valem as seguintes propriedades:

(i) $[\forall x\varphi]_\Gamma = \inf\{[[\varphi]^t_x]_\Gamma \,:\, t \in \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)\}$;

(ii) $[\exists x\varphi]_\Gamma = \sup\{[[\varphi]^t_x]_\Gamma \,:\, t \in \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)\}$.

Demonstração.

(i) Seja $t \in \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)$. Vamos verificar que $[\forall x\varphi]_\Gamma \leq [[\varphi]^t_x]_\Gamma$. Note que, como $\mathrm{VLig}[\varphi] \subseteq \mathrm{VarI}_0$, x é livre para t em φ. Daí, temos a seguinte demonstração:

1.	$\Gamma, \forall x\varphi \vdash \forall x\varphi$	(Ax)
2.	$\Gamma, \forall x\varphi \vdash [\varphi]^t_x$	$(\forall\mathrm{E})$, 1
3.	$\Gamma \vdash (\forall x\varphi) \to [\varphi]^t_x$	$(\to\mathrm{I})$, 2

Seja ψ uma fórmula e suponha que para todo termo $t \in \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)$, $[\psi]_\Gamma \leq [[\varphi]^t_x]_\Gamma$. Como VarI_2 é infinito e $\mathrm{VLiv}[\{\forall x\varphi, \psi\}]$ é finito, existe $y \in \mathrm{VarI}_2$ tal que $y \notin \mathrm{VLiv}[\{\forall x\varphi, \psi\}]$. Note que $y \notin \mathrm{VLiv}[\Gamma \cup \{\forall x\varphi, \psi\}]$ e x é livre para y em φ. Desse modo, como $\Gamma \vdash \psi \to [\varphi]^y_x$, temos a seguinte demonstração:

1. $\Gamma \vdash \psi \to [\varphi]^y_x$
2. $\Gamma, \psi \vdash \psi \to [\varphi]^y_x$ (Mon), 1
3. $\Gamma, \psi \vdash \psi$ (Ax)
4. $\Gamma, \psi \vdash [\varphi]^y_x$ ($\to$E), 2, 3
5. $\Gamma, \psi \vdash \forall x \varphi$ ($\forall$I), 4
6. $\Gamma \vdash \psi \to \forall x \varphi$ ($\to$I), 5

Logo, $[\psi]_\Gamma \leq [\forall x \varphi]_\Gamma$, e concluímos que:

$$[\forall x \varphi]_\Gamma = \inf\{[[\varphi]^t_x]_\Gamma \ : \ t \in \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)\}$$

(ii) A prova é análoga à do item anterior.

□

Pelo completamento de Dedekind-MacNeille, podemos assumir que $\mathcal{L}_\Gamma$ é uma álgebra de Heyting completa. Desse modo, definimos uma $\mathcal{L}_\Gamma$-estrutura $\mathcal{M}_\Gamma$ da seguinte forma:

- $M_\Gamma = \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)$;
- $\mathcal{F}^{\mathcal{M}_\Gamma}$ associa a cada símbolo funcional f de aridade $n \in \mathbb{N}$ a função $f^\Gamma \ : \ \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)^n \to \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)$ definida por (para $t_1, \dots, t_n \in \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)$):

$$f^\Gamma[t_1, \dots, t_n] = f(t_1, \dots, t_n);$$

- $\mathcal{R}^{\mathcal{M}_\Gamma}$ associa a cada símbolo relacional R de aridade $n \in \mathbb{N}$ a função $R^\Gamma \ : \ \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)^n \to \mathcal{L}_\Gamma$ definida por (para $t_1, \dots, t_n \in \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)$):

$$R^\Gamma[t_1, \dots, t_n] = [R(t_1, \dots, t_n)]_\Gamma.$$

Definimos também a seguinte valoração $i_\Gamma \ : \ \mathrm{VarI} \to \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)$ (para $n \in \mathbb{N}$):

$$i_\Gamma(x_n) = \begin{cases} x_n, \text{ se } x_n \in \mathrm{VarI}_{12} \\ x_{n+1}, \text{ se } x_n \in \mathrm{VarI}_0 \end{cases}$$

Quando não houver risco de ambiguidade, denotamos a valoração i_Γ simplesmente por i.

Lema 4.19. Sejam σ uma assinatura e Γ um conjunto de fórmulas. Então, para $t \in \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)$:

$$i^*_\Gamma[t] = t.$$

Demonstração. Vamos provar a igualdade acima por indução no termo $t \in \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)$.

(Base - VarI) Seja $x \in \mathrm{VarI}_{12}$. Temos que:

$$i^*[x] = i(x) = x$$

(Hipótese Indutiva - f) Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $t_1, \dots, t_n \in \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)$. Suponha que $i^*[t_j] = t_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$.

(Passo Indutivo - f) Seja f um símbolo funcional n-ário. Temos que:

$$\begin{aligned} i^*[f(t_1, \dots, t_n)] &= f^\Gamma[i^*[t_1], \dots, i^*[t_n]] \\ &= f^\Gamma[t_1, \dots, t_n] && \text{pela Hipótese Indutiva} \\ &= f(t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

Para constantes, a prova é análoga ao caso para variáveis individuais. □

Teorema 4.20. Sejam σ uma assinatura, Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula, tais que $\mathrm{VLiv}[\Gamma] \subseteq \mathrm{VarI}_1$, $\mathrm{VLiv}[\varphi] \subseteq \mathrm{VarI}_{12}$ e $\mathrm{VLig}[\varphi] \subseteq \mathrm{VarI}_0$. Vale a seguinte propriedade:

$$(\mathcal{M}_\Gamma)_{i_\Gamma}[\varphi] = \pi_\Gamma[\varphi].$$

Demonstração. Vamos provar por indução no grau de complexidade da fórmula φ que se $\mathrm{VLiv}[\varphi] \subseteq \mathrm{VarI}_{12}$ e $\mathrm{VLig}[\varphi] \subseteq \mathrm{VarI}_0$, então $(\mathcal{M}_\Gamma)_i[\varphi] = \pi_\Gamma[\varphi]$.

(Base - R) Sejam $n \in \mathbb{N}^*$, R um símbolo relacional n-ário e $t_1, \dots, t_n$ termos. Considere φ a fórmula $R(t_1, \dots, t_n)$ e suponha que $\mathrm{VLiv}[\varphi] \subseteq \mathrm{VarI}_{12}$ e $\mathrm{VLig}[\varphi] \subseteq \mathrm{VarI}_0$.

Note que, para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq n$, $\mathrm{VarI}[t_i] \subseteq \mathrm{VarI}_{12}$, ou seja, $t_i \in \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)$. Desse modo, temos que:

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_\Gamma)_i[R(t_1, \dots, t_n)] &= R^\Gamma[i^*[t_1], \dots, i^*[t_n]] \\ &= R^\Gamma[t_1, \dots, t_n] && \text{pelo Lema 4.19} \\ &= [R(t_1, \dots, t_n)]_\Gamma \\ &= \pi_\Gamma[R(t_1, \dots, t_n)] \end{aligned}$$

(Hipótese Indutiva) Seja $n \in \mathbb{N}$. Suponha que para toda fórmula φ com grau de complexidade menor ou igual a n, se $\mathrm{VLiv}[\varphi] \subseteq \mathrm{VarI}_{12}$ e $\mathrm{VLig}[\varphi] \subseteq \mathrm{VarI}_0$, então $(\mathcal{M}_\Gamma)_i[\varphi] = \pi_\Gamma[\varphi]$.

(Passo Indutivo) Seja φ uma fórmula com grau de complexidade $n + 1$ e suponha que $\mathrm{VLiv}[\varphi] \subseteq \mathrm{VarI}_{12}$ e $\mathrm{VLig}[\varphi] \subseteq \mathrm{VarI}_0$.

(Caso $\rightarrow$) Suponha que φ é da forma $\psi \rightarrow \theta$, onde ψ e θ são fórmulas. Sabemos que $\mathrm{VLiv}[\psi] \subseteq \mathrm{VarI}_{12}$, $\mathrm{VLig}[\psi] \subseteq \mathrm{VarI}_0$, $\mathrm{VLiv}[\theta] \subseteq \mathrm{VarI}_{12}$ e $\mathrm{VLig}[\theta] \subseteq \mathrm{VarI}_0$. Desse modo, como o grau de complexidade de ψ e θ é menor ou igual a n, temos que:

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_\Gamma)_i[\psi \rightarrow \theta] &= (\mathcal{M}_\Gamma)_i[\psi] \rhd (\mathcal{M}_\Gamma)_i[\theta] \\ &= \pi_\Gamma[\psi] \rhd \pi_\Gamma[\theta] && \text{pela Hipótese Indutiva} \\ &= [\psi]_\Gamma \rhd [\theta]_\Gamma \\ &= [\psi \rightarrow \theta]_\Gamma \\ &= \pi_\Gamma[\psi \rightarrow \theta] \end{aligned}$$

(Caso $\forall$) Suponha que φ é da forma $\forall x \psi$, onde ψ é uma fórmula e x uma variável.

Note que, para cada $t \in \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)$, x é livre para t em ψ, $[\psi]^t_x$ tem grau de complexidade n, $\mathrm{VLiv}[[\psi]^t_x] \subseteq \mathrm{VarI}_{12}$ e $\mathrm{VLig}[[\psi]^t_x] \subseteq \mathrm{VarI}_0$. Desse modo, temos que:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}_\Gamma)_i[\forall x \psi] &= \inf\{(\mathcal{M}_\Gamma)_{i^t_x}[\psi] \;:\; t \in \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)\} \\
&= \inf\{(\mathcal{M}_\Gamma)_{i^{i^*[t]}_x}[\psi] \;:\; t \in \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)\} && \text{pelo Lema 4.19} \\
&= \inf\{(\mathcal{M}_\Gamma)_i[[\psi]^t_x] \;:\; t \in \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)\} && \text{pelo Teorema 4.15} \\
&= \inf\{\pi_\Gamma[[\psi]^t_x] \;:\; t \in \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)\} && \text{pela Hipótese Indutiva} \\
&= \inf\{[[\psi]^t_x]_\Gamma \;:\; t \in \mathrm{Ter}_{12}(\sigma)\} \\
&= [\forall x \psi]_\Gamma && \text{pela Proposição 4.18} \\
&= \pi_\Gamma[\forall x \psi]
\end{aligned}$$

Para $\bot$ e símbolos relacionais de aridade 0, a prova é análoga ao caso de símbolos relacionais de aridade $n \in \mathbb{N}^*$.

Para os conectivos $\wedge$ e $\vee$, a prova é análoga ao caso do $\to$.

Para o quantificador $\exists$, a prova é análoga ao caso do $\forall$. □

4.6 Metateoremas

Lema 4.21. Sejam σ uma assinatura, Ω uma álgebra de Heyting completa, $\mathcal{M}$ uma Ω-estrutura, v uma valoração em $\mathcal{M}$, Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\mathcal{M}_v[\Gamma] \leq \mathcal{M}_v[\varphi]$.

Demonstração. Vamos provar por indução em $\Gamma \vdash \varphi$ que para toda valoração v em $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_v[\Gamma] \leq \mathcal{M}_v[\varphi]$.

(Base - Ax) Sejam Γ um conjunto de fórmulas, φ uma fórmula e v uma valoração em $\mathcal{M}$. Temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_v[\Gamma \cup \{\varphi\}] &= \mathcal{M}_v[\Gamma] \wedge \mathcal{M}_v[\varphi] \\
&\leq \mathcal{M}_v[\varphi]
\end{aligned}$$

(Hipótese Indutiva - $\wedge$I) Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas, e φ e ψ fórmulas. Suponha que para toda valoração v em $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_v[\Gamma] \leq \mathcal{M}_v[\varphi]$ e $\mathcal{M}_v[\Delta] \leq \mathcal{M}_v[\psi]$.

(Passo Indutivo - $\wedge$I) Seja v uma valoração em $\mathcal{M}$. Temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_v[\Gamma \cup \Delta] &= \mathcal{M}_v[\Gamma] \wedge \mathcal{M}_v[\Delta] \\
&\leq \mathcal{M}_v[\varphi] \wedge \mathcal{M}_v[\psi] && \text{pela Hipótese Indutiva} \\
&= \mathcal{M}_v[\varphi \wedge \psi]
\end{aligned}$$

(Hipótese Indutiva - $\vee$E) Sejam Γ, Δ e Σ conjuntos de fórmulas e φ, ψ e θ fórmulas. Suponha que para toda valoração v em $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_v[\Gamma \cup \{\varphi\}] \leq \mathcal{M}_v[\theta]$, $\mathcal{M}_v[\Delta \cup \{\psi\}] \leq \mathcal{M}_v[\theta]$ e $\mathcal{M}_v[\Sigma] \leq \mathcal{M}_v[\varphi \vee \psi]$.

(Passo Indutivo - $\vee$E) Seja v uma valoração em $\mathcal{M}$. Pela Hipótese Indutiva, temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_v[\Gamma \cup \{\varphi\}] \leq \mathcal{M}_v[\theta] &\Rightarrow \mathcal{M}_v[\Gamma] \wedge \mathcal{M}_v[\varphi] \leq \mathcal{M}_v[\theta] \\ &\Rightarrow \mathcal{M}_v[\Gamma] \leq \mathcal{M}_v[\varphi] \rhd \mathcal{M}_v[\theta]\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos que $\mathcal{M}_v[\Delta] \leq \mathcal{M}_v[\psi] \rhd \mathcal{M}_v[\theta]$. Logo:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_v[\Gamma] \wedge \mathcal{M}_v[\Delta] \leq (\mathcal{M}_v[\varphi] \rhd \mathcal{M}_v[\theta]) \wedge (\mathcal{M}_v[\psi] \rhd \mathcal{M}_v[\theta]) \\ \Rightarrow \quad & \mathcal{M}_v[\Gamma \cup \Delta] \leq (\mathcal{M}_v[\varphi] \vee \mathcal{M}_v[\psi]) \rhd \mathcal{M}_v[\theta] \\ \Rightarrow \quad & \mathcal{M}_v[\Gamma \cup \Delta] \wedge \mathcal{M}_v[\Sigma] \leq (\mathcal{M}_v[\varphi] \vee \mathcal{M}_v[\psi]) \wedge ((\mathcal{M}_v[\varphi] \vee \mathcal{M}_v[\psi]) \rhd \mathcal{M}_v[\theta]) \\ \Rightarrow \quad & \mathcal{M}_v[\Gamma \cup \Delta \cup \Sigma] \leq (\mathcal{M}_v[\varphi] \vee \mathcal{M}_v[\psi]) \wedge \mathcal{M}_v[\theta] \\ \Rightarrow \quad & \mathcal{M}_v[\Gamma \cup \Delta \cup \Sigma] \leq \mathcal{M}_v[\theta]\end{aligned}$$

(Hipótese Indutiva - $\forall$E) Sejam Γ um conjunto de fórmulas, φ uma fórmula e x uma variável. Suponha que para toda valoração v em $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_v[\Gamma] \leq \mathcal{M}_v[\forall x\varphi]$.

(Passo Indutivo - $\forall$E) Seja t um termo tal que x é livre para t em φ e considere v uma valoração em $\mathcal{M}$. Temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_v[\Gamma] &\leq \mathcal{M}_v[\forall x\varphi] && \text{pela Hipótese Indutiva} \\ &= \inf_{a \in M} \mathcal{M}_{v_x^a}[\varphi] \\ &\leq \mathcal{M}_{v_x^{v^*[t]}}[\varphi] \\ &= \mathcal{M}_v[[\varphi]_x^t] && \text{pelo Teorema 4.15}\end{aligned}$$

(Hipótese Indutiva - $\exists$E) Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas, φ e ψ fórmulas e x e y variáveis tais que $y \notin \text{VLiv}[\Gamma \cup \Delta \cup \{\exists x\varphi, \psi\}]$ e x é livre para y em φ. Suponha que para toda valoração v em $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_v[\Gamma] \leq \mathcal{M}_v[\exists x\varphi]$ e $\mathcal{M}_v[\Delta \cup \{[\varphi]_x^y\}] \leq \mathcal{M}_v[\psi]$.

(Passo Indutivo - $\exists$E) Seja v uma valoração em $\mathcal{M}$ e considere $a \in M$. Como $y \notin \text{VLiv}[\Gamma \cup \Delta \cup \{\psi\}]$, pela Hipótese Indutiva e Teorema 4.14 temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{v_y^a}[\Delta \cup \{[\varphi]_x^y\}] \leq \mathcal{M}_{v_y^a}[\psi] &\Rightarrow \mathcal{M}_{v_y^a}[\Delta] \wedge \mathcal{M}_{v_y^a}[[\varphi]_x^y] \leq \mathcal{M}_{v_y^a}[\psi] \\ &\Rightarrow \mathcal{M}_{v_y^a}[[\varphi]_x^y] \leq \mathcal{M}_{v_y^a}[\Delta] \rhd \mathcal{M}_{v_y^a}[\psi] \\ &\Rightarrow \mathcal{M}_{v_y^a}[[\varphi]_x^y] \leq \mathcal{M}_v[\Delta] \rhd \mathcal{M}_v[\psi]\end{aligned}$$

Note que $\mathcal{M}_{v_y^a}[[\varphi]_x^y] = \mathcal{M}_{v_x^a}[\varphi]$. De fato, como $(v_y^a)^*[y] = a$, pelo Teorema 4.15 temos que $\mathcal{M}_{v_y^a}[[\varphi]_x^y] = \mathcal{M}_{(v_y^a)_x^a}[\varphi]$. Daí, temos duas possibilidades:

- $x = y$. Neste caso, pela Proposição 4.12 temos que:

$$\mathcal{M}_{(v_y^a)_x^a}[\varphi] = \mathcal{M}_{v_x^a}[\varphi]$$

- $x \neq y$. Como $y \notin \text{VLiv}[\exists x\varphi]$ e $\text{VLiv}[\exists x\varphi] = \text{VLiv}[\varphi] \setminus \{x\}$, sabemos que $y \notin \text{VLiv}[\varphi]$.

Desse modo, pelo Teorema 4.14 obtemos que:

$$\mathcal{M}_{(v^a_y)^a_x}[\varphi] = \mathcal{M}_{v^a_x}[\varphi]$$

Logo, $\mathcal{M}_{v^a_x}[\varphi] \leq \mathcal{M}_v[\Delta] \rhd \mathcal{M}_v[\psi]$ para todo $a \in M$, e pela Hipótese Indutiva temos que:

$$\begin{aligned} \sup_{a\in M} \mathcal{M}_{v^a_x}[\varphi] \leq \mathcal{M}_v[\Delta] \rhd \mathcal{M}_v[\psi] &\Rightarrow \mathcal{M}_v[\exists x\varphi] \leq \mathcal{M}_v[\Delta] \rhd \mathcal{M}_v[\psi] \\ &\Rightarrow \mathcal{M}_v[\Gamma] \leq \mathcal{M}_v[\Delta] \rhd \mathcal{M}_v[\psi] \\ &\Rightarrow \mathcal{M}_v[\Gamma] \wedge \mathcal{M}_v[\Delta] \leq \mathcal{M}_v[\psi] \\ &\Rightarrow \mathcal{M}_v[\Gamma \cup \Delta] \leq \mathcal{M}_v[\psi] \end{aligned}$$

Para as regras ($\perp$E), ($\wedge$E), ($\vee$I) e ($\to$E), a prova é análoga ao caso da regra ($\wedge$I).

Para a regra ($\to$I), a prova é análoga ao caso da regra ($\vee$E).

Para a regra ($\forall$I), a prova é análoga ao caso da regra ($\exists$E).

Para a regra ($\exists$I), a prova é análoga ao caso da regra ($\forall$E). □

Teorema 4.22. (Teorema da Corretude)

Sejam σ uma assinatura, Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vDash \varphi$.

Demonstração. Suponha que $\Gamma \vdash \varphi$ e considere Ω uma álgebra de Heyting completa, $\mathcal{M}$ uma Ω-estrutura e v uma valoração em $\mathcal{M}$, tais que $\mathcal{M}, v \vDash \Gamma$. Sabemos que $\mathcal{M}_v[\Gamma] = 1$ e, pelo Lema 4.21, $\mathcal{M}_v[\Gamma] \leq \mathcal{M}_v[\varphi]$.

Logo, $\mathcal{M}_v[\varphi] = 1$, ou seja, $\mathcal{M}, v \vDash \varphi$. Portanto, $\Gamma \vDash \varphi$. □

A completude da LPOI é uma consequência da troca de variáveis * e da construção da $\mathcal{L}_\Gamma$-estrutura $\mathcal{M}_\Gamma$.

Teorema 4.23. (Teorema da Completude)

Sejam σ uma assinatura, Γ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. Se $\Gamma \Vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Demonstração. Vamos provar a contrapositiva. Suponha que $\Gamma \nvdash \varphi$. Pelo Teorema 4.10, sabemos que $\Gamma^* \nvdash \varphi^*$. Note que $\mathrm{VLiv}[\Gamma^* \cup \{\varphi^*\}] \subseteq \mathrm{VarI}_1$ e $\mathrm{VLig}[\Gamma^* \cup \{\varphi^*\}] \subseteq \mathrm{VarI}_0$.

Seja $\gamma \in \Gamma$. Como $\Gamma^* \vdash \gamma^*$, pelo Teorema 4.20 temos que:

$$(\mathcal{M}_{\Gamma^*})_i[\gamma^*] = \pi_{\Gamma^*}[\gamma^*] = 1$$

Desse modo, $\mathcal{M}_{\Gamma^*}, i_{\Gamma^*} \vDash \Gamma^*$. Analogamente, obtemos que $\mathcal{M}_{\Gamma^*}, i_{\Gamma^*} \nvDash \varphi^*$. Logo, $\Gamma^* \nvDash \varphi^*$ e, pelo Teorema 4.17, concluímos que $\Gamma \nvDash \varphi$. □

Apêndice A

Conjuntos Parcialmente Ordenados

A.1 Ordens Parciais

Seja P um conjunto. Uma **ordem parcial** em P é uma relação binária $\leq$ em P, que satisfaz os seguintes axiomas, para $x, y, z \in P$:

(P1) $x \leq x$; **(Reflexividade)**

(P2) se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$; **(Antissimetria)**

(P3) se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$. **(Transitividade)**

Chamamos a estrutura $\langle P, \leq \rangle$ de **conjunto parcialmente ordenado**.

Quando não houver risco de ambiguidade, denotaremos $\langle P, \leq \rangle$ simplesmente por P. Quando for necessário diferenciar duas ou mais ordens parciais, denotaremos a ordem parcial de P por $\leq_P$.

Também iremos utilizar as notações usuais para relações de ordem definidas abaixo, para $x, y \in P$:

- $x < y$ se, e somente se, $x \leq y$ e $x \neq y$;
- $x \geq y$ se, e somente se, $y \leq x$;
- $x > y$ se, e somente se, $y < x$.

Dada uma ordem parcial $\leq$ em um conjunto T, dizemos que $\leq$ é uma **ordem total** (ou **ordem linear**) em T quando satisfaz o seguinte axioma adicional, para $x, y \in T$:

(T) $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Neste caso, dizemos que $\langle T, \leq \rangle$ é um **conjunto totalmente ordenado**.

A.2 Supremos e Ínfimos

Sejam P um conjunto parcialmente ordenado e $A \subseteq P$. Dizemos que $c \in P$ é uma **cota superior** de A quando, para todo $x \in A$, $x \leq c$. Analogamente, quando para todo $x \in A$, $x \geq c$, dizemos que c é uma **cota inferior** de A.

Dizemos que $s \in P$ é um **supremo** de A quando s satisfaz as seguintes propriedades:

(i) s é cota superior de A;

(ii) para todo $c \in P$, se c é cota superior de A, então $s \leq c$.

De forma análoga, dizemos que $i \in P$ é um **ínfimo** de A quando i satisfaz as seguintes propriedades:

(i) i é cota inferior de A;

(ii) para todo $c \in P$, se c é cota inferior de A, então $c \leq i$.

Proposição A.1. Sejam P um conjunto parcialmente ordenado e $A \subseteq P$. Vale que:

(i) se A possui um supremo, então ele é único;

(ii) se A possui um ínfimo, então ele é único.

Demonstração.

(i) Sejam s e s' supremos de A. Sabemos que s e s' são cotas superiores de A. Daí, como s e s' são supremos de A, $s \leq s'$ e $s' \leq s$. Logo, $s = s'$.

(ii) A prova é análoga à do item anterior.

□

Denotamos o supremo de A por $\sup A$, e o ínfimo de A por $\inf A$, quando existirem.

Seja $m \in A$. Dizemos que m é um **máximo** de A quando para todo $x \in A$, $x \leq m$. Analogamente, dizemos que m é um **mínimo** de A quando para todo $x \in A$, $m \leq x$.

Proposição A.2. Sejam P um conjunto parcialmente ordenado, $A \subseteq P$ e $m \in A$.

(i) se $\sup A$ existe e $\sup A \in A$, então $\sup A$ é um máximo de A;

(ii) se m é um máximo de A, então $m = \sup A$;

(iii) se $\inf A$ existe e $\inf A \in A$, então $\inf A$ é um mínimo de A;

(iv) se m é um mínimo de A, então $m = \inf A$.

Demonstração.

(i) Suponha que A possui supremo e $\sup A \in A$. Dado $x \in A$, sabemos que $x \leq \sup A$. Logo, $\sup A$ é um máximo de A.

(ii) Suponha que m é um máximo de A. Por definição, sabemos que m é uma cota superior de A.

Seja $c \in P$, tal que c é cota superior de A. Como $m \in A$, segue que $m \leq c$. Logo, $m = \sup A$.

(iii) Análogo à prova do item (i).

(iv) Análogo à prova do item (ii).

□

Como consequência da proposição anterior, o máximo e o mínimo de A, quando existem, são únicos. Denotamos o máximo de A por $\max A$, e o mínimo de A por $\min A$.

A.3 Lema de Zorn

Agora, considere $m \in P$. Dizemos que m é um **elemento maximal** de A quando para todo $x \in A$, se $m \leq x$, então $m = x$. Analogamente, dizemos que m é um **elemento minimal** de A quando para todo $x \in A$, se $m \geq x$, então $m = x$.

Dado $C \subseteq P$, dizemos que C é uma **cadeia** em P quando $\leq$ é uma ordem total em C, ou seja, para quaisquer $x, y \in C$, $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Abaixo, apresentamos um dos principais resultados sobre conjuntos parcialmente ordenados, equivalente ao Axioma da Escolha.

Teorema A.3. (Lema de Zorn)

Seja P um conjunto parcialmente ordenado. Se toda cadeia em P possui cota superior, então P possui um elemento maximal.

Uma prova do Lema de Zorn pode ser encontrada em Halmos, 2001.

A.4 Funções Monótonas

Sejam P_1 e P_2 conjuntos parcialmente ordenados e $f : P_1 \to P_2$ uma função. Dizemos que f é **monótona** quando satisfaz a seguinte propriedade, para $x, y \in P_1$:

$$\text{se } x \leq y, \text{ então } f(x) \leq f(y).$$

Proposição A.4. Sejam P_1, P_2 e P_3 conjuntos parcialmente ordenados, e $f : P_1 \to P_2$ e $g : P_2 \to P_3$ funções monótonas. Então:

(i) $g \circ f$ é uma função monótona;

(ii) a função identidade $\mathrm{id}_{P_1} : P_1 \to P_1$ é monótona.

Demonstração.

(i) Sejam $x, y \in P_1$. Temos que:

$$\begin{aligned} x \leq y &\Rightarrow f(x) \leq f(y) \\ &\Rightarrow g(f(x)) \leq g(f(y)) \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(y) \end{aligned}$$

Logo, $g \circ f$ é monótona.

(ii) Sejam $x, y \in P_1$. É imediato que se $x \leq y$, então $\mathrm{id}_{P_1}(x) \leq \mathrm{id}_{P_1}(y)$. Logo, id_{P_1} é uma função monótona.

□

Pela proposição anterior, a classe dos conjuntos parcialmente ordenados e das funções monónotas forma uma categoria.

Dizemos que f é uma **imersão** de ordem quando a propriedade das funções monótonas é uma bi-implicação, ou seja, para $x, y \in P_1$:

$$x \leq y \text{ se, e somente se, } f(x) \leq f(y).$$

Quando f é uma imersão bijetora, dizemos que f é um **isomorfismo** de ordem.

Proposição A.5. Sejam P_1 e P_2 conjuntos parcialmente ordenados, e $f : P_1 \to P_2$ uma função monótona. Então:

(i) se f é uma imersão, então f é injetora;

(ii) se f é um isomorfismo, então f^{-1} também é um isomorfismo.

Demonstração.

(i) Suponha que f é uma imersão e considere $x, y \in P_1$ tais que $f(x) = f(y)$. Como $f(x) \leq f(y)$, sabemos que $x \leq y$. Analogamente, segue que $y \leq x$. Logo, $x = y$, e f é injetora.

(ii) Suponha que f é um isomorfismo. Sabemos que f^{-1} é bijetora. Assim, basta verificarmos que f^{-1} é uma imersão de ordem.

Sejam $x, y \in P_2$. Como f é sobrejetora, sabemos que existem $x', y' \in P_1$ tais que $f(x') = x$ e $f(y') = y$. Daí, temos que:

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow f(x') \leq f(y') \\ &\Leftrightarrow x' \leq y' \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(f(x')) \leq f^{-1}(f(y')) \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(x) \leq f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Logo, f^{-1} é uma imersão, e concluímos que f^{-1} é um isomorfismo.

□

Apêndice B

Topologia

B.1 Espaços Topológicos

Seja X um conjunto e $\mathcal{T}$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathcal{T}$ é uma **topologia** em X quando satisfaz as seguintes propriedades:

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$;

(T2) para $U, V \in \mathcal{T}$, $U \cap V \in \mathcal{T}$;

(T3) para $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$, $\bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{T}$.

Neste caso, dizemos que $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ é um **espaço topológico**. Chamamos os elementos de $\mathcal{T}$ de **conjuntos abertos** de X. Quando $U \in \mathcal{T}$, dizemos que U é **aberto** em X.

Quando não houver risco de ambiguidade, denotamos o espaço $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ simplesmente por X, e denotamos sua topologia $\mathcal{T}$ por $\mathcal{O}(X)$.

Seja X um espaço topológico e considere $\mathcal{B}$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma **base** para a topologia $\mathcal{O}(X)$, ou que $\mathcal{B}$ **gera** a topologia $\mathcal{O}(X)$, quando:

(B1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}(X)$;

(B2) para quaisquer $U \in \mathcal{O}(X)$ e $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subseteq U$.

Chamamos os elementos de $\mathcal{B}$ de **abertos básicos** de X.

Proposição B.1. Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{B}$ uma base para $\mathcal{O}(X)$ e $U \subseteq X$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) U é aberto;

(ii) para todo $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subseteq U$;

(iii) existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, tal que $U = \bigcup \mathcal{F}$.

Demonstração.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Suponha que U é aberto e seja $x \in U$. Como $\mathcal{B}$ é uma base, sabemos que existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subseteq U$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Suponha que para todo $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subseteq U$. Para cada $x \in U$, escolhemos um $B_x \in \mathcal{B}$ que satisfaz $x \in B_x \subseteq U$, e definimos $\mathcal{F} = \{B_x : x \in U\}$.

Desse modo, temos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ e $\bigcup \mathcal{F} \subseteq U$. Além disso, como para todo $x \in U$, vale que $x \in B_x \subseteq \bigcup \mathcal{F}$, obtemos que $U \subseteq \bigcup \mathcal{F}$.

Logo, $U = \bigcup \mathcal{F}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Suponha que existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, tal que $U = \bigcup \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ é uma família de abertos, segue que $\bigcup \mathcal{F} = U$ é aberto. □

Proposição B.2. Sejam X um conjunto e $\mathcal{B}$ uma família de subconjuntos de X. Então, $\mathcal{B}$ gera uma topologia em X se, e somente se, $\mathcal{B}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B$;

(ii) para quaisquer $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que $\mathcal{B}$ gera uma topologia $\mathcal{T}$ em X.

(i) Seja $x \in X$. Como X é aberto em $\langle X, \mathcal{T} \rangle$, sabemos que existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subseteq X$. Em particular, $x \in B$.

(ii) Sejam $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$. Como B_1 e B_2 são abertos em $\langle X, \mathcal{T} \rangle$, sabemos que $B_1 \cap B_2$ também é aberto. Desse modo, existe $B_3 \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\mathcal{B}$ satisfaz as propriedades (i) e (ii). Definimos a seguinte família de subconjuntos de X:

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X : \text{para todo } x \in U, \text{ existe } B \in \mathcal{B}, \text{ tal que } x \in B \subseteq U\}$$

Vamos verificar que $\mathcal{T}$ é uma topologia.

Por vacuidade, sabemos que $\emptyset \in \mathcal{T}$. Além disso, pela propriedade (i), para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subseteq X$. Desse modo, $X \in \mathcal{T}$.

Agora, sejam $U, V \in \mathcal{T}$ e $x \in U \cap V$. Sabemos que existem $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, tais que $x \in B_1 \subseteq U$ e $x \in B_2 \subseteq V$. Logo $x \in B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V$.

Pela propriedade (ii), sabemos que existe $B_3 \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Assim, $x \in B_3 \subseteq U \cap V$, e obtemos que $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Para finalizar, seja $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$ e $x \in \bigcup \mathcal{F}$. Sabemos que existe $U \in \mathcal{F}$, tal que $x \in U$. Como $U \in \mathcal{T}$, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subseteq U$. Logo, $x \in B \subseteq \bigcup \mathcal{F}$, e concluímos que $\bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{T}$. □

Dizemos que $F \subseteq X$ é um **conjunto fechado** de X, ou que F é **fechado** em X, quando $X \setminus F$ é aberto. Denotamos a família dos conjuntos fechados de X por $\mathcal{C}(X)$.

Proposição B.3. Seja X um espaço topológico. Valem as seguintes propriedades:

(i) $\emptyset$ e X são conjuntos fechados;

(ii) para F_1 e F_2 conjuntos fechados, $F_1 \cup F_2$ é um conjunto fechado;

(iii) para qualquer família $\mathcal{F}$ de conjuntos fechados, $\bigcap \mathcal{F}$ é um conjunto fechado.

Demonstração.

(i) Como $X \setminus \emptyset = X$ e $X \setminus X = \emptyset$ são abertos, temos que $\emptyset$ e X são fechados.

(ii) Sejam F_1 e F_2 conjuntos fechados. Sabemos que $X \setminus F_1$ e $X \setminus F_2$ são abertos. Desse modo, $(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2)$ é aberto, e temos que:

$$(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$$

Logo, $F_1 \cup F_2$ é fechado.

(iii) Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos fechados e considere o seguinte conjunto:

$$\mathcal{F}' = \{X \setminus F \,:\, F \in \mathcal{F}\}$$

Sabemos que $\mathcal{F}'$ é uma família de abertos. Desse modo, $\bigcup \mathcal{F}'$ é aberto, e temos que:

$$\bigcup \mathcal{F}' = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} X \setminus F = X \setminus \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = X \setminus \bigcap \mathcal{F}$$

Logo, $\bigcap \mathcal{F}$ é fechado.

□

B.2 Interior e Fecho

Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. O **interior** de A, denotado por int A, é o maior conjunto aberto contido em A, ou seja:

$$\operatorname{int}(A) = \bigcup \{U \in \mathcal{O}(X) \,:\, U \subseteq A\}.$$

Chamamos os elementos de $\operatorname{int}(A)$ de **pontos interiores** de A. Desse modo, $x \in X$ é um **ponto interior** de A quando existe $U \subseteq X$ aberto, tal que $x \in U \subseteq A$.

Abaixo verificamos algumas das principais propriedades algébricas do interior.

Proposição B.4. Seja X um espaço topológico. Valem as seguintes propriedades, para $A, B \subseteq X$:

(i) $\operatorname{int}(A) \subseteq A$;

(ii) $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A)$;

(iii) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$;

(iv) se $A \subseteq B$, então $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(B)$;

(v) $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(A \cup B)$.

Demonstração. Sejam $A, B \subseteq X$.

(i) Seja $x \in \operatorname{int}(A)$. Sabemos que existe $U \subseteq X$ aberto, tal que $x \in U \subseteq A$. Logo, $x \in A$.

(ii) ($\subseteq$) Seja $x \in \operatorname{int}(\operatorname{int}(A))$. Sabemos que existe $U \subseteq X$ aberto, tal que $x \in U \subseteq \operatorname{int}(A)$.

Pelo item anterior, temos que $\operatorname{int}(A) \subseteq A$. Desse modo, $x \in U \subseteq A$, e obtemos que $x \in \operatorname{int}(A)$.

($\supseteq$) Seja $x \in \operatorname{int}(A)$. Sabemos que existe $U \subseteq X$ aberto, tal que $x \in U \subseteq A$.

Como U é aberto e $U \subseteq A$, temos que $U \subseteq \operatorname{int}(A)$. Logo, $x \in U \subseteq \operatorname{int}(A)$, e concluímos que $x \in \operatorname{int}(\operatorname{int}(A))$.

(iii) ($\subseteq$) Seja $x \in \operatorname{int}(A \cap B)$. Sabemos que existe $U \subseteq X$ aberto, tal que $x \in U \subseteq A \cap B$.

Daí, temos que $x \in U \subseteq A$, e obtemos que $x \in \operatorname{int}(A)$. De forma análoga, obtemos também que $x \in \operatorname{int}(B)$. Assim, $x \in \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$.

($\supseteq$) Seja $x \in \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$. Sabemos que existem $U, V \subseteq X$ abertos, tais que $x \in U \subseteq A$ e $x \in V \subseteq B$.

Desse modo, temos que $x \in U \cap V$ e $U \cap V \subseteq A \cap B$. Como $U \cap V$ é aberto, concluímos que $x \in \operatorname{int}(A \cap B)$.

(iv) Suponha que $A \subseteq B$. Utilizando a igualdade do item anterior, temos que:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Rightarrow A \cap B = A \\ &\Rightarrow \operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \\ &\Rightarrow \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) = \operatorname{int}(A) \\ &\Rightarrow \operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(B) \end{aligned}$$

(v) Como $A, B \subseteq A \cup B$, pelo item anterior temos que $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(A \cup B)$ e $\operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(A \cup B)$. Daí, obtemos que:

$$\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(A \cup B)$$

□

Também podemos caracterizar os conjuntos abertos de X através da operação de interior.

Proposição B.5. Sejam X um espaço topológico e $U \subseteq X$. Então, U é aberto se, e somente se, $\operatorname{int}(U) = U$.

Demonstração.

(⇒) Suponha que U é aberto. Como U é o máximo do conjunto $\{V \in \mathcal{O}(X) : V \subseteq U\}$, segue que $\mathrm{int}(U) = U$.

(⇐) Suponha que $\mathrm{int}(U) = U$. Como $\mathrm{int}(U)$ é uma união de conjuntos abertos, temos que $\mathrm{int}(U)$ é aberto, ou seja, U é aberto. □

Seja $A \subseteq X$. O **fecho** de A, denotado por $\overline{A}$ ou $\mathrm{cl}(A)$, é o menor conjunto fechado que contém A, ou seja:

$$\overline{A} = \bigcap\{F \in \mathcal{C}(X) : A \subseteq F\}.$$

Podemos caracterizar os elementos de $\overline{A}$ através do conceito de ponto aderente. Dado $x \in X$, dizemos que x é um **ponto aderente** de A quando para todo $U \subseteq X$ aberto, se $x \in U$, então $A \cap U \neq \emptyset$.

Proposição B.6. Sejam X um espaço topológico, $A \subseteq X$ e $x \in X$. Então $x \in \overline{A}$ se, e somente se, x é ponto aderente de A.

Demonstração.

(⇒) Suponha que $x \in \overline{A}$. Sabemos que para todo $F \subseteq X$ fechado, se $A \subseteq F$, então $x \in F$.

Seja $U \subseteq X$ aberto, tal que $x \in U$. Como U^c é fechado e $x \notin U^c$, temos que $A \nsubseteq U^c$. Desse modo, $A \cap U \neq \emptyset$, e concluímos que x é ponto aderente de A.

(⇐) Suponha que x é ponto aderente de A e seja $F \subseteq X$ fechado, tal que $A \subseteq F$. Como F^c é aberto e $A \cap F^c = \emptyset$, temos que $x \notin F^c$, ou seja $x \in F$. Logo, $x \in \overline{A}$. □

Outra forma alternativa de caracterizar o fecho de um conjunto A é através do interior de A.

Proposição B.7. Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Então:

$$\overline{A} = (\mathrm{int}(A^c))^c.$$

Demonstração. Seja $x \in X$. Sabemos que $x \in \mathrm{int}(A^c)$ se, e somente se, existe $U \subseteq X$ aberto, tal que $x \in U$ e $U \subseteq A^c$.

Como $U \subseteq A^c$ é equivalente a $A \cap U = \emptyset$, temos que $x \in (\mathrm{int}(A^c))^c$ se, e somente se, para todo $U \subseteq X$ aberto, se $x \in U$, então $A \cap U \neq \emptyset$.

Logo, $x \in (\mathrm{int}(A^c))^c$ se, e somente se, x é ponto aderente de A, e concluímos que $(\mathrm{int}(A^c))^c = \overline{A}$. □

A partir da proposição anterior, obtemos as propriedades do fecho como consequência das propriedades do interior.

Proposição B.8. Seja X um espaço topológico. Valem as seguintes propriedades, para $A, B \subseteq X$:

(i) $A \subseteq \overline{A}$;

(ii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(iv) se $A \subseteq B$, então $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;

(v) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Demonstração. Sejam $A, B \subseteq X$.

(i) Pela Proposição B.4, temos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{int}(A^c) \subseteq A^c &\Rightarrow (A^c)^c \subseteq (\operatorname{int}(A^c))^c \\ &\Rightarrow A \subseteq \overline{A} \end{aligned}$$

(ii) Pela Proposição B.4, temos que:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}} &= (\operatorname{int}[(\overline{A})^c])^c \\ &= (\operatorname{int}\{\langle[\operatorname{int}(A^c)]^c\rangle^c\})^c \\ &= \langle\operatorname{int}[\operatorname{int}(A^c)]\rangle^c \\ &= (\operatorname{int}(A^c))^c \\ &= \overline{A} \end{aligned}$$

(iii) Pela Proposição B.4, temos que:

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= (\operatorname{int}((A \cup B)^c))^c \\ &= (\operatorname{int}(A^c \cap B^c))^c \\ &= (\operatorname{int}(A^c) \cap \operatorname{int}(B^c))^c \\ &= (\operatorname{int}(A^c))^c \cup (\operatorname{int}(B^c))^c \\ &= \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

(iv) Suponha que $A \subseteq B$. Pela Proposição B.4, temos que:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Rightarrow B^c \subseteq A^c \\ &\Rightarrow \operatorname{int}(B^c) \subseteq \operatorname{int}(A^c) \\ &\Rightarrow (\operatorname{int}(A^c))^c \subseteq (\operatorname{int}(B^c))^c \\ &\Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B} \end{aligned}$$

(v) Pela Proposição B.4, temos que:

$$\begin{aligned} & \operatorname{int}(A^c) \cup \operatorname{int}(B^c) \subseteq \operatorname{int}(A^c \cup B^c) \\ \Rightarrow\ & (\operatorname{int}(A^c \cup B^c))^c \subseteq (\operatorname{int}(A^c) \cup \operatorname{int}(B^c))^c \\ \Rightarrow\ & (\operatorname{int}((A \cap B)^c))^c \subseteq (\operatorname{int}(A^c))^c \cap (\operatorname{int}(B^c))^c \\ \Rightarrow\ & \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

□

Proposição B.9. Sejam X um espaço topológico e $F \subseteq X$. Então, F é fechado se, e somente se, $\overline{F} = F$.

Demonstração. Temos as seguintes equivalências:

- F é fechado se, e somente se, F^c é aberto;
- F^c é aberto se, e somente se, $\text{int}(F^c) = F^c$ (Proposição B.5);
- $\text{int}(F^c) = F^c$ se, e somente se, $\overline{F} = F$.

Logo, F é fechado se, e somente se, $\overline{F} = F$. □

Referências

[Davey e Priestley 2002] B. A. Davey e H. A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order.* 2ª ed. Cambridge University Press, 2002.

[Enderton 2001] Herbert B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic.* 2ª ed. Harcourt/Academic Press, 2001 (citado na pg. 58).

[Fitting 1969] Melvin Chris Fitting. *Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing.* North Holland Publishing Company, 1969.

[Halmos 2001] Paul R. Halmos. *Teoria Ingênua dos Conjuntos.* Editora Ciência Moderna, 2001 (citado na pg. 111).

[Mendelson 1977] Elliot Mendelson. *Álgebra Booleana e Circuitos de Chaveamento.* McGraw-Hill do Brasil, 1977.

[Mints 2002] Grigori Mints. *A Short Introduction to Intuitionistic Logic.* Kluwer Academic Publishers, 2002.

[Miraglia 1987] Francisco Miraglia. *Cálculo Proposicional: uma interação da álgebra e da lógica.* Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1987.

[Miraglia 2020] Francisco Miraglia. *An Introduction to Partially Ordered Structures and Sheaves.* Lógica no Avião, 2020.

[Munkres 2000] James R. Munkres. *Topology.* 2ª ed. Prentice Hall, 2000.

[Rasiowa 1974] Helena Rasiowa. *An algebraic approach to non-classical logics.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1974.

[Rasiowa e Sikorski 1963] Helena Rasiowa e Roman Sikorski. *The Mathematics of Metamathematics.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1963 (citado nas pgs. 42, 44).

[Sørensen e Urzyczyn 2006] Morten Heine Sørensen e Pawel Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard isomorphism.* Elsevier, 2006.

Índice remissivo