

**Estabilidade de ondas viajantes
para a equação de Schrödinger
de tipo cúbico com dois pontos
simétricos de interação**

Luis Andrés Rosso Cerón

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Jaime Angulo Pava

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, processo FAPESP no. 2010/52665-8

São Paulo, outubro de 2015

**Estabilidade de ondas viajantes
para a equação de Schrödinger de tipo cúbico
com dois pontos simétricos de interação**

Esta versão trata-se da tese original do aluno Luis Andrés Rosso Cerón.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Jaime Angulo Pava - IME-USP
- Prof. [Orlando Lopes - IME-USP]
- Prof. [Felipe Linares - IMPA]
- Prof. [Fabio Natali - UEM]
- Prof. [Ademir Pastor - IMECC-UNICAMP]

Resumo

Rosso Cerón, L. A. **Estabilidade de ondas viajantes para a equação de Schrödinger de tipo cúbico com dois pontos simétricos de interação.** 2015. 80 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Este trabalho consiste, fundamentalmente, em estabelecer de forma analítica a existência e estabilidade orbital de soluções *standing-wave* de tipo “peakon”, para a seguinte equação de Schrödinger com dois pontos de interação, determinados por duas deltas de Dirac centradas nos pontos $x = \pm c$ (NLS- δ),

$$i\partial_t u(x, t) + \partial_x^2 u(x, t) + Z[\delta_c(x) + \delta_{-c}(x)]u(x, t) = -|u(x, t)|^2 u(x, t), \quad (1)$$

onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $Z \in \mathbb{R}$ e δ_c é a distribuição delta de Dirac agindo em $x = c > 0$, a saber, para $\psi \in H^1(\mathbb{R})$, $\langle \delta_c, \psi \rangle = \psi(c)$. Para as soluções *standing waves* (ondas estacionárias) associadas à equação (1), i.e., $u(x, t) = e^{i\omega t} \Phi_\omega(x)$, mostramos que é possível determinar o perfil $\Phi_\omega(x)$ da seguinte maneira: entre os pontos c e $-c$ o perfil Φ_ω admite, pelos menos, duas funções suaves e positivas dadas pelas funções elípticas de Jacobi conhecidas como *dnoidal* e *cnoidal*. Já para $c < |x|$, o perfil Φ_ω coincide com uma determinada *translação* do soliton-perfil “*secante hiperbólica*” (é bem conhecido na literatura que o perfil secante hiperbólica está associado à equação (1), no caso em que $Z = 0$).

De fato, mostramos que para o caso $Z > 0$ é possível ajustar, entre os pontos de interação c e $-c$, um perfil periódico de tipo *dnoidal*; e para o caso $Z < 0$ mostramos como é construído entre os pontos de interação um perfil de tipo *cnoidal*. Uma questão crucial que surge no problema da existência de um perfil conveniente é aquela relacionada com a *localização do ponto de interação* $c > 0$. A maneira como respondimos a esta questão foi, de fato, determinante para a obtenção do nosso resultado de estabilidade/instabilidade. Isto se deve a que permitiu o uso de técnicas conhecidas na literatura no desenvolvimento do trabalho. En concreto, a escolha da localização do ponto de interação c , faz com que a segunda derivada do perfil Φ_ω , seja contínua neste ponto.

Baseados em argumentos da teoria de Floquet, teoria de representação de formas bilineares, teoria de extensão de operadores simétricos e a teoria de perturbação analítica para operadores lineares, bem como nos resultados desenvolvidos por Weinstein e Grillakis&Shatah&Strauss, mostramos resultados sobre a estabilidade/instabilidade orbital dessas ondas. Mais precisamente, mostramos que aquelas com um perfil *dnoidal* são instáveis e aquelas com um perfil *cnoidal* são estáveis. Além disto, estudamos o problema de Cauchy para (1) no espaço de energia $H^1(\mathbb{R})$. Para tanto, usaremos informações do espectro do operador com interações pontuais

$$-\Delta_{\pm c, Z} = -\frac{d^2}{dx^2} - Z[\delta_c + \delta_{-c}],$$

o qual representa formalmente uma das famílias de extensões auto-adjuntas do operador

simétrico

$$\begin{cases} -\Delta = -\frac{d^2}{dx^2} \\ D(-\Delta) = \{f \in H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} - \{\pm c\}) : f(\pm c) = 0\}. \end{cases}$$

Palavras-chave: Equação de Schrödinger não-linear, potencial delta de Dirac, funções elípticas de Jacobi, perturbação analítica, teoria de Floquet, estabilidade orbital.

Abstract

Rosso Cerón, L. A. **Stability of travelling waves for the Schrödinger's equation of cubic type with double symmetric delta-interactions wells** . 2015. 80 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

This work consists mainly in establishing an analytical way the existence and orbital stability for the standing-wave solutions of "peakon" type of the following Schrödinger equation with two points of interaction, determined by two Dirac's delta centered at the points $x = \pm c$ (NLS- δ),

$$i\partial_t u(x, t) + \partial_x^2 u(x, t) + Z[\delta_c + \delta_{-c}]u(x, t) = -|u(x, t)|^2 u(x, t), \quad (2)$$

where $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $Z \in \mathbb{R}$ and δ_c is the Dirac's delta distribution in $x = c > 0$, namely, for $\psi \in H^1(\mathbb{R})$, $\langle \delta_c, \psi \rangle = \psi(c)$. For the standing-wave solutions associated to equation (2), i.e., $u(x, t) = e^{i\omega t} \Phi_\omega(x)$, we show that is possible to determine the profile $\Phi_\omega(x)$ as follows: between the points c and $-c$, the profile Φ_ω admits at least two smooth positive functions given by the **Jacobi elliptic functions** of *dnoidal* and *cnoidal* type. For $c < |x|$, the profile Φ_ω coincides with an specific shift of the soliton-profile *hiperbolic secant* profile (it is well-known in the literature that the hiperbolic secant profile is associated to the equation (2) for the case $Z = 0$).

Indeed, we show for the case $Z > 0$ that it is possible to determine a periodic dnoidal profile between the points c and $-c$. On the other hand, for the case $Z < 0$ we establish a periodic cnoidal profile between the points c and $-c$. A crucial question arises in the problem of the existence of a suitable profile is the one related to the location of the interaction point $c > 0$. This question was crucial to the achievement of our stability/instability result. In fact, the choice of location of the interaction point c implies that the second derivative of the profile Φ_ω is continuous at c .

The **stability/instability** theory of these specific profiles are based on the analytic perturbation theory and the framework developed by Weinstein and Grillakis&Shatah&Strauss. More precisely, we show that those ones with a dnoidal profile are unstable and those ones with a cnoidal profile are stable. In addition, we study the Cauchy problem in the energy space $H^1(\mathbb{R})$ for equation (2). For this purpose, it is necessary to study the spectrum of the operator

$$-\Delta_{\pm c, Z} = -\frac{d^2}{dx^2} - Z[\delta_c + \delta_{-c}].$$

This operator can be understood as the family of self-adjoint extension of the symmetric operator

$$\begin{cases} -\Delta = -\frac{d^2}{dx^2} \\ D(-\Delta) = \{f \in H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} - \{\pm c\}) : f(\pm c) = 0\}. \end{cases}$$

Keywords: Non-linear Schrödinger equations, orbital stability, Dirac's delta potential, Jacobian elliptic functions, analytic perturbation, teoria de Floquet, orbital stability.

Conteúdo

Lista de Símbolos	vii
Introdução	ix
1 Preliminares	1
1.1 Estabilidade Orbital	1
1.2 Boa colocação do problema de Cauchy	3
1.3 Interações pontuais	4
1.4 Funções elípticas de Jacobi	6
2 Boa colocação em $H^1(\mathbb{R})$	9
2.1 O operador H_Z	9
2.2 Teoria de boa colocação global	11
3 Existência de soluções de tipo peak-standing waves	13
3.1 Existência de um perfil periódico entre os pontos de interação	14
3.1.1 Perfil dnoidal para $Z > 0$	14
3.1.2 Perfil cnoidal para $Z < 0$	27
4 Teoria de Estabilidade	35
4.1 Análise espectral dos operadores $\mathcal{L}_{1,Z,c}$ e $\mathcal{L}_{2,Z,c}$	35
4.2 Índice de Morse para $\mathcal{L}_{1,Z,c}$	40
4.3 Condição de Convexidade	47
4.4 Prova do Teorema 0.2	50
5 Estudos futuros	53
6 Apêndice	55

Lista de Símbolos

- Denotaremos por \mathbb{N} , \mathbb{R} e \mathbb{C} o conjunto dos números naturais, reais e complexos, respectivamente. Pelo símbolo \mathbb{R}^+ denotaremos ao conjunto dos números reais positivos, i.e., $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.
- Para $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx$ denota o produto interno usual no espaço $L^2(\mathbb{R})$.
- Para $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle_2}$ denota a norma em $L^2(\mathbb{R})$.
- $H^m(\mathbb{R}) = \{\psi \in S^*(\mathbb{R}) : (1+\xi^2)^{\frac{m}{2}}\widehat{\psi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\}$, onde $m = 1$ ou 2 , e $\widehat{\psi}$ é a transformada de Fourier da distribuição ψ . $S^*(\mathbb{R})$ é o espaço das *distribuições temperadas* em \mathbb{R} . Este conjunto coincide com o dual topológico do espaço de Schwartz,

$$S(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| < \infty; \forall m, n \in \mathbb{N}\}.$$

A norma em $H^m(\mathbb{R})$ é definida como

$$\|f\|_{H^m} = \|f\|_m = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^m |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

Introdução

Consideramos a equação de Schrödinger não linear (NLS)

$$i\partial_t u(x, t) + \partial_x^2 u(x, t) + |u(x, t)|^p u(x, t) = 0, \quad (3)$$

onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $0 < p < \infty$. Na literatura atual, é bem conhecido que tal equação dispersiva descreve a evolução de um campo complexo em um meio de dispersão não linear (veja, por exemplo [2], [4], [5], [40] e suas referências). Portanto, a NLS desempenha um papel crucial em muitos campos de pesquisa, e abrange temas diversos tais como: óptica não linear, física de plasmas, dinâmica de fluidos e até mesmo modelos biofísicos .

Do ponto de vista matemático, o estudo da equação NLS (que inclui, por exemplo, a boa colocação local para o problema de valor inicial (PVI), o problema periódico de fronteira sob condições de regularidade mínimas sobre o dado inicial, o comportamento assintótico das soluções, ou bem o estudo da existência de "blow-up") tem crescido consideravelmente nos últimos anos. Neste contexto, a equação NLS, conhecida também como a equação de Gross-Pitaevskii (GP), possui certas extensões que a permitem ser usada para modelar, por exemplo, o *condensado de Bose-Einstein* (BEC) (ver [18]). O BEC é um estado da matéria que ocorre em determinados elementos quando a temperatura fica perto do zero absoluto (o conceito de zero absoluto é devido ao físico-matemático britânico William Thomson, e acontece quando um corpo não possui energia alguma, sendo que as suas moléculas ficam completamente paradas). Neste caso, o modelo a ser estudado tem a forma

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + V(x)u + |u|^p u = 0, \quad (4)$$

onde o potencial $V(x)$ (fenômeno externo) é especificado dentro do contexto a ser pesquisado. Um tipo específico de potencial que surge no BEC (também em óptica não linear) é a equação de Schrödinger com uma interação de tipo delta (NLS- δ),

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + Z\delta(x)u + |u|^p u = 0, \quad (5)$$

onde δ é a distribuição delta de Dirac centrada na origem, a saber, $\langle \delta, v \rangle = v(0)$ para $v \in H^1(\mathbb{R})$ e $Z \in \mathbb{R}$. A equação (5), com $Z \neq 0$, tem sido também considerada em uma variedade ampla de modelos físicos com um ponto de defeito. De fato, nesta situação, a distribuição de Dirac é usada para modelar a aparição de uma impureza centrada na origem (veja [19], [20] e [35]). De maneira específica, a equação (5) está descrita pelo seguinte problema de fronteira (ver Caudrelier&Mintchev&Ragoucy [12])

$$\begin{cases} i\partial_t u(x, t) + \partial_x^2 u(x, t) = -|u(x, t)|^p u(x, t), & x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} [u(x, t) - u(-x, t)] = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} [\partial_x u(x, t) - \partial_x u(-x, t)] = -Zu(0, t) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Portanto, a função $u(x, t)$ deve ser solução para a equação de Schrödinger não linear em \mathbb{R}^+ e \mathbb{R}^- , deve ser contínua em $x = 0$ e satisfazer a *condição de salto na derivada* na origem.

Uma boa literatura tem sido desenvolvida para o modelo (5) nos últimos anos para os problemas de existência e estabilidade de ondas de tipo standing-wave, problemas de boa colocação, espalhamento e interação com solitons (ver [5], [16], [19], [20], [21], [22], [26], [27], [33], [35]).

A equação (5) pode também ser considerada como um modelo misto de interação, a saber; uma interação de um "wide-soliton" (sóliton amplo) com um potencial altamente localizado, neste caso sendo a distribuição delta centrada na origem (ver Holmer&Marzuola&Zworski [26]-[27]). O fenômeno de interação de solitons dispersivos com interações de tipo pontual já foi razoavelmente estudado. Em particular, em Holmer&Zworski [28]- [29], para a equação (5) com $p = 2$, o dado inicial com perfil "travelling-wave" (onda viajante)

$$u(x, 0) = e^{icx} \operatorname{sech}(x - x_0), \quad x_0 \ll -1$$

foi mostrado que para a $|Z| \ll 1$, a solução correspondente à onda viajante para $t > |x_0|/c$ permanece intacta. O caso $Z > 0$ e $|c| \gg 1$ foi examinada em [26], [27] onde foi comprovado como o defeito separa o soliton em duas partes: uma parte é transmitida após o defeito, o outro é refletida no defeito. O caso $Z < 0$ e $|c| \gg 1$ foi considerado em [16].

Outro tipo de potencial externo, $V(x)$, que foi estudado principalmente no contexto do BEC, é o denominado *potencial de interação dupla*. Potenciais de interação dupla constituem um particular interesse em óptica não linear: modelos de guias ópticas paralelas, munidas mediante uma canalização de feixes de luz com caudas evanescentes (condição dispersiva) (ver [2], [7], [11], [17], [25], [32], [36], [38], [39] e [22]). No contexto da óptica, um potencial duplo pode ser criado por um raio laser com duas "corcovas" em um meio de Kerr ([9]-[34]). Neste sentido, um potencial duplo clássico pode ser construído a partir da interação pontual de dois estados unitários (duas interações pontuais), desde que tais interações pontuais unitárias possuam um *rápido decaimento*. Noutras palavras, suponha que $V_0(x)$ representa um potencial unitário (centrado na origem) com decaimento rápido no infinito, e seja $L > 0$; então, $V(x) = V_0(x+L) + V_0(x-L)$ representa um *potencial duplo simétrico* com decaimento rápido. Um clássico exemplo de um potencial simétrico duplo está dado pela seguinte família a dois parâmetros:

$$V(x) = V(x; \sigma, L) = \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-L)}{4\pi\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x+L)}{4\pi\sigma^2}} \right].$$

Esta família de potenciais simétricos duplos tem a propriedade de que converge, quando $\sigma \rightarrow 0^+$, a uma dupla interação delta de Dirac centrada nos pontos $x = \pm L$, a saber: para $L > 0$ fixo, temos, no sentido distribucional,

$$V(x; \sigma, L) \rightarrow \delta_L + \delta_{-L}, \quad \text{quando } \sigma \rightarrow 0^+,$$

onde $\delta_{\pm L}$ representa a distribuição delta de Dirac em $x = \pm L$: para qualquer ϕ na classe de Schwartz, $\langle \delta_{\pm L}, \phi \rangle = \phi(\pm L)$.

Um dos principais objetivos deste trabalho é estudar a existência e estabilidade não-linear das soluções *standing-waves* (ondas estacionárias) associadas ao modelo (4), para $p = 2$, quando o potencial, $V(x)$, é do tipo pontual duplo e simétrico, especificamente iremos a considerar o modelo (doravante NLS- $\delta_{\pm c}$)

$$\begin{cases} i\partial_t u(x, t) + \partial_x^2 u(x, t) + Z[\delta_c(x) + \delta_{-c}(x)]u(x, t) = -|u(x, t)|^2 u(x, t), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (7)$$

com $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $Z \in \mathbb{R}$ e $\delta_{\pm c}$ sendo as distribuições delta de Dirac centradas nos pontos $x = \pm c$. Concretamente, a equação (NLS- $\delta_{\pm c}$) (7), com $Z \neq 0$, está descrita pelo seguinte problema de fronteira

$$\begin{cases} i\partial_t u(x, t) + \partial_x^2 u(x, t) = -u(x, t)|u(x, t)|^2, & x \neq \pm c, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [u(\pm c + \varepsilon, t) - u(\pm c - \varepsilon, t)] = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\partial_x u(\pm c + \varepsilon, t) - \partial_x u(\pm c - \varepsilon, t)] = -Zu(\pm c, t), & t \in \mathbb{R}, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (8)$$

Portanto, $u(x, t)$ deve ser solução da equação de Schrödinger no conjunto $\mathbb{R} - \{\pm c\} = (-\infty, -c) \cup (-c, c) \cup (c, \infty)$; ser contínua em $x = \pm c$ e deve satisfazer a *condição de salto na derivada* nos pontos $x = \pm c$.

A equação (7) foi estudada, por exemplo, por Jackson&Weinstein em [30], sendo que o foco principal foi a análise da dinâmica das soluções "standing-waves". Essas soluções são da forma

$$u(x, t) = e^{i\omega t} \Phi_{\omega, Z, c}(x), \quad (9)$$

para $\omega \in I \subset \mathbb{R}$ e

$$\Phi_{\omega, Z, c} \in \mathcal{D} \left(-\frac{d^2}{dx^2} - Z(\delta_c + \delta_{-c}) \right).$$

Segue então que o perfil $\Phi \equiv \Phi_{\omega, Z, c}$ satisfaz o seguinte problema de fronteira,

$$\begin{cases} -\Phi''(x) + \omega\Phi(x) - \Phi^3(x) = 0, & x \neq \pm c, \\ \Phi \in H^1(\mathbb{R}), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\Phi'(\pm c + \varepsilon) - \Phi'(\pm c - \varepsilon)] = -Z\Phi(\pm c). \end{cases} \quad (10)$$

Para $Z > 0$, em [30], os autores mostram, via uma caracterização variacional, a existência de um perfil "standing-wave" para (10). Mais precisamente, mediante a minimização do funcional Hamiltoniano, \mathcal{H} ,

$$\mathcal{H}(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} |\psi'(x)|^2 - \frac{1}{4} |\psi(x)|^4 dx - \frac{1}{2} Z[|\psi(-c)|^2 + |\psi(+c)|^2], \quad (11)$$

sob a condição

$$\mathcal{N}(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} |\psi(x)|^2 dx = \rho, \quad (12)$$

onde $\rho > 0$ é fixado. Tais minimizadores Φ , chamados de *ground states* (estados fundamentais), satisfazem a equação de Euler-Lagrange determinada pela equação (10), onde a quantidade $\omega = \omega(\rho)$ será um multiplicador de Lagrange para o problema variacional determinado por (11) e (12). Já que $\omega(\rho)$ pertence a um intervalo conveniente, o problema variacional (11)-(12) dá origem a um ramo (família) de soluções estacionárias. Mais ainda, dado que as quantidades \mathcal{H} e \mathcal{N} são conservadas pelo fluxo do modelo (8), temos, via um argumento clássico dado por Cazenave&Lions [13] e Cazenave [14], que o conjunto dos estados fundamentais (*ground states set*)

$$\mathcal{G}_\rho = \{\Phi \in H^1(\mathbb{R}) : \mathcal{H}(\Phi) = \min_\psi \mathcal{H}(\psi), \text{ and } \mathcal{N}(\Phi) = \rho\}, \quad (13)$$

é não linearmente estável pelo fluxo gerado por (8) no espaço de energia $H^1(\mathbb{R})$.

Notamos que um teorema geral para deduzir a existência e a estabilidade das ondas estacionárias para equações de Schrödinger unidimensionais com perturbações singulares do Laplaciano descrito por interações pontuais, foi recentemente estudado em Adami&Noja&Visciglia [1]. Embora vários resultados de estabilidade estabelecem que os “ground states” resultam ser dinamicamente estáveis, deixa sem resposta a questão de características qualitativas detalhadas do perfil da onda estacionária em (9). Como veremos abaixo, é possível demonstrar a existência de pelo menos duas famílias de soluções positivas para o problema de fronteira (10), com um perfil no intervalo $[-c, c]$ dado pelas funções elípticas de Jacobi do tipo dnoidal e cnoidal.

Por outro lado, em [30], foi estabelecido um estudo global detalhado da quebra de simetria via métodos de bifurcação para o modelo (8) através de uma análise geométrica. A existência de um valor distinguido do parâmetro c (the threshold-symmetric valor de c), foi estabelecido na Proposição 5 em [30], de tal modo que temos uma solução simétrica concentrada nos pontos de defeito, isto é, perfis que atingem os seus valores máximos nos dois pontos de defeito. Além disso, obteve-se um valor do parâmetro c , c_{thresh} , tal que para além deste valor limiar há um par de standing waves assimétricas do tipo cnoidal. Mais ainda, para $c \leq c_{thresh}$, o estado simétrico (dnoidal-profile) são linearmente e não-linearmente instáveis, e para $c > c_{thresh}$, o estado assimétrico são não-linearmente orbitalmente estável.

Nosso objetivo neste trabalho será o de estabelecer a existência e estabilidade orbital de uma família de standing-wave para a NLS- $\delta_{\pm c}$, onde o perfil $\Phi_{\omega, Z, c}$, será dado explicitamente pela fórmula

$$\Phi_{\omega, Z, c}(x) = \begin{cases} \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}(x + c - \gamma)), & \text{se } -\infty < x < -c \\ \phi(x), & \text{se } -c \leq x \leq c \\ \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}(x - c + \gamma)), & \text{se } c < x < \infty, \end{cases} \quad (14)$$

onde para c fixado, Z, ω pertencerão a intervalos específicos dependendo de c , aqui γ é um parâmetro de translação dependendo de Z, ω . A função ϕ irá ter um perfil de tipo dnoidal ou cnoidal para os casos de $Z > 0$ ou $Z < 0$, respectivamente (ver Teoremas 3.6 e 3.10 abaixo). Além disso, o perfil ϕ possuirá a propriedade de ser côncava no intervalo $[-c, c]$. Ainda mais, nossa construção do peak-standing waves $\Phi_{\omega, Z, c}$ em (14) garante a sua convergência na $H^1(\mathbb{R})$ -norma para o soliton clássico da NLS ($Z = 0$ em (1)), quando o parâmetro Z vai para 0. Este fato será crucial para estudar o índice de Morse associado a um operador auto-adjunto específico (ver (1.4) abaixo), que será essencial para a nossa teoria de estabilidade.

Agora, a simetria básica associada à equação (8) é a invariância por rotação, ou seja, se $u(x, t)$ é solução de (8), então $V(x, t) \equiv e^{i\theta} u(x, t)$ também é solução para (8) para cada $\theta \in [0, 2\pi]$. A simetria de translação não se aplica neste caso devido à presença dos pontos de defeito. Assim, a nossa noção de estabilidade e instabilidade de soluções de tipo onda estacionária é formulada da seguinte forma:

Definição 0.1 Para $\eta > 0$, consideremos $\Phi_\omega = \Phi_{\omega, Z, c}$ e definimos

$$\mathcal{U}_\eta(\Phi_\omega) = \{v \in H^1(\mathbb{R}) : \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \|v - e^{i\theta} \Phi_\omega\|_{H^1} < \eta\}.$$

Dizemos que uma onda estacionária $e^{i\omega t} \Phi_\omega$ de (8) é orbitalmente estável em $H^1(\mathbb{R})$ pelo fluxo determinado por (8), se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que para qualquer $u_0 \in \mathcal{U}_\eta(\Phi_\omega)$, a solução $u(t)$ de (8), com $u(0) = u_0$, satisfaz $u(t) \in \mathcal{U}_\varepsilon(\Phi_\omega)$, para qualquer $t \geq 0$. Caso contrário, $e^{i\omega t} \Phi_\omega$ é dita ser orbitalmente instável em $H^1(\mathbb{R})$.

Nossa abordagem para a teoria de estabilidade em $H^1(\mathbb{R})$ da família peak-standing waves $\Phi_{\omega,Z,c}$ em (14), será baseado na teoria geral de estabilidade desenvolvida por Grillakis&Shatah& Strauss [23], [24], para um sistema Hamiltoniano que é invariante sob um grupo unitário a um parâmetro de operadores. Assim, nosso principal resultado de estabilidade é o seguinte:

Teorema 0.2 *Seja $c > 0$. Para ω como nos Teoremas 3.6 e 3.10 abaixo, a saber, para $Z \in (0, \frac{\pi}{4c})$ nós temos $\omega \in (\frac{1}{c^2}[\operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})]^2, \frac{\pi^2}{8c^2})$ e para $Z \in (-\infty, 0)$ escolhemos $\omega \in (0, \frac{1}{c^2}[\operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})]^2)$. Consideremos a família de peak-standing waves $\Phi_{\omega,Z,c}$ em (14) (ver (3.33) e (3.45) abaixo). Então, tem-se:*

1. Para $Z > 0$, a peak-standing wave de tipo dnoidal $e^{i\omega t}\Phi_{\omega,Z,c}$ é instável em $H^1(\mathbb{R})$ pelo fluxo determinado pela NLS- $\delta_{\pm c}$ (7).
2. Para $Z < 0$, a peak-standing wave de tipo cnoidal $e^{i\omega t}\tilde{\Phi}_{\omega,Z,c}$ é estável em $H^1(\mathbb{R})$ pelo fluxo determinado pela NLS- $\delta_{\pm c}$ (7).
3. Para $Z > 0$, a peak-standing wave de tipo dnoidal $e^{i\omega t}\Phi_{\omega,Z,c}$ é estável em $H_{par}^1(\mathbb{R})$ pelo fluxo determinado pela NLS- $\delta_{\pm c}$ (7).

Na figura 3.8 abaixo, mostramos o correspondente *diagrama de fase* em coordenadas (Φ, Φ') , associado ao caso $Z > 0$, ou seja o perfil de tipo dnoidal $\Phi \equiv \Phi_{\omega,Z,c}$ dado no Teorema 3.6. Na *condição de salto na derivada* nos pontos $x = \pm c$ (representada pela reta vertical), consideramos o caso $\omega = 2$, e $c = 0,63; 0,64$ e $0,66$. Note que a trajetória da "parte dnoidal" do Φ está no interior da separatrix determinada pelo soliton "secante hiperbólica", e é percorrida no sentido horário- como indicam as setas- (concave profile on $[-c, c]$). A diferença das trajetórias do nosso trabalho com aquele estudado por Jackson&Weinstein em [30], é que estas últimas estão no sentido anti-horário (convex profile on $[-c, c]$). Assim do Teorema 0.2 acima e dos resultados em Jackson&Weinstein podemos concluir que as standing-wave de tipo peakon com um perfil dnoidal em $[-c, c]$ são orbitalmente instáveis.

Agora, na figura 3.11 abaixo mostramos o caso $Z < 0$, ou seja o perfil de tipo cnoidal $\zeta \equiv \tilde{\Phi}_{\omega,Z,c}$ dado no Teorema 3.10. Este diagrama, em coordenadas (ζ, ζ') é para o caso particular em que $\omega = 2$, e $c = 0,63; 0,64$ e $0,65$. Notamos que a trajetória da parte "cnoidal" deste diagrama, a qual está no exterior da separatrix determinada pelo soliton, é percorrida também no sentido horário. O caso de considerar trajetórias cnoidais no sentido anti-horário serão os objetivos de futuros estudos.

A prova do Teorema 0.2 será feita no Capítulo 4. Para este, o uso da teoria de Floquet, resultados sobre a representação de formas bilineares, teoria de extensão para operadores simétricos (teorias de Klein e von Neumann), e da teoria de perturbação analítica de operadores serão ferramentas essenciais em nosso análise. O uso dos projetores de Riesz serão necessários em um argumento de continuação para o estudo do índice de Morse de um específico operador auto-adjunto. O uso de ferramentas de tipo computacional serão de muita utilidade em nosso análise de estabilidade.

Descreveremos brevemente os conteúdos de cada capítulo deste trabalho. No Capítulo 1, apresentamos os preliminares e uma breve revisão de resultados que utilizaremos no nosso trabalho. No Capítulo 2, estudamos a boa colocação local e global do (7) em $H^1(\mathbb{R})$. No Capítulo 3, estabelecemos a teoria de existência de soluções de tipo peak-standing waves satisfazendo (8). O uso da teoria de funções elípticas de Jacobi será de fundamental importância. No Capítulo 4, estabelecemos nossa teoria de estabilidade para os perfis do tipo dado em (14). O uso da teoria de perturbação analítica e da teoria de Floquet serão as ferramentas básicas para este estudo. No Capítulo 5 estabelecemos um conjunto de propostas de

futuros trabalhos, assim como, o andamento de alguns específicos problemas. No Apêndice apresentaremos alguns cálculos relevantes que foram usados no decorrer dos capítulos desta tese.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo faremos uma breve revisão dos principais resultados que utilizaremos para o desenvolvimento do nosso trabalho. Tais resultados, que incluem definições, teoremas e proposições; podem ser consultados nas referências bibliográficas desta tese. Começaremos dando a definição de estabilidade orbital no espaço $H^1(\mathbb{R})$. Em seguida, trataremos sobre o marco fundamental no qual baseamos os resultados obtidos, a saber; os trabalhos desenvolvidos por Grillakis&Shatah&Strauss em [23] e [24]. De maneira precisa, damos as condições suficientes nas quais é possível obter resultados de estabilidade/instabilidade orbital em $H^1(\mathbb{R})$. Finalmente, trataremos sobre os resultados clássicos de boa colocação local em $H^1(\mathbb{R})$ (Cazenave [14]), bem como de algumas propriedades básicas das funções elípticas de Jacobi, as quais constituem nossa principal ferramenta para estabelecer um perfil periódico entre os pontos de interação, c e $-c$, na equação (8).

1.1 Estabilidade Orbital

Concretamente, o principal objetivo desta tese consiste em estabelecer a existência e estabilidade orbital para uma família de soluções do tipo standing-wave, $e^{i\omega t}\Phi_{\omega,Z,c}$, associadas à equação NLS- $\delta_{\pm c}$ (ver (7)), sendo que a função $\Phi_{\omega,Z,c}$ está dada explicitamente pela fórmula

$$\Phi_{\omega,Z,c}(x) = \begin{cases} \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}(x+c-\gamma)), & \text{se } -\infty < x < -c \\ \phi(x), & \text{se } -c \leq x \leq c \\ \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}(x-c+\gamma)), & \text{se } c < x < \infty, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $c > 0$ é fixado e Z, ω pertencem a intervalos específicos, os quais dependem de c . Aqui, γ representa uma translação (depende de Z e ω); e ϕ coincide com um perfil do tipo dnoidal ou cnoidal para os casos $Z > 0$ e $Z < 0$, respectivamente.

A simetria básica que possui o modelo NLS- $\delta_{\pm c}$ é a simetria por rotações, isto significa que se $u(x, t)$ é uma solução de (7), então, para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, $v(x, t) = e^{i\theta}u(x, t)$ também é uma solução de (7). A simetria por translações não é obtida devido à presença das interações delta no modelo. Assim, a definição de estabilidade orbital para as soluções standing-wave associadas a este modelo vem dada como segue,

Definição 1.1 Para $\eta > 0$, seja $\Phi_\omega = \Phi_{\omega,Z,c}$ e defina

$$\mathcal{U}_\eta(\Phi_\omega) = \{v \in H^1(\mathbb{R}) : \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \|v - e^{i\theta}\Phi_\omega\|_{H^1} < \eta\}.$$

Diz-se que a solução standing-wave, $e^{i\omega t}\Phi_\omega$, de (7) é orbitalmente estável em $H^1(\mathbb{R})$ pelo fluxo determinado por (7), se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$, com a propriedade de que

para todo $u_0 \in \mathcal{U}_\eta(\Phi_\omega)$, a solução $u(t)$ of (7), com $u(0) = u_0$, satisfaz que $u(t) \in \mathcal{U}_\varepsilon(\Phi_\omega)$, para todo $t \geq 0$. Caso contrário, $e^{i\omega t}\Phi_\omega$ é dita orbitalmente instável em $H^1(\mathbb{R})$.

A teoria de estabilidade orbital em $H^1(\mathbb{R})$ da família "peak-standing-wave" dada em (1.1), está baseada nos trabalhos desenvolvidos por Grillakis&Shatah&Strauss em [23] e [24] para um sistema Hamiltoniano que é invariante sob a ação de um grupo unitário de operadores contendo um parâmetro. Considere o domínio

$$\mathcal{D} = \{f \in H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} \setminus \{\pm c\}) : f'(\pm c^+) - f'(\pm c^-) = -Zf(\pm c)\}, \quad (1.2)$$

então

- O *problema de Cauchy*: o problema de valor inicial (PVI) associado à equação NLS- $\delta_{\pm c}$, (7), é globalmente bem posto em $H^1(\mathbb{R})$.
- A *condição espectral*:

(a) O operador auto adjunto $\mathcal{L}_{2,Z,c}$, definido em $L^2(\mathbb{R})$ por

$$\mathcal{L}_{2,Z,c} = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - \Phi_{\omega,Z,c}^2, \quad (1.3)$$

e cujo domínio é \mathcal{D} , é um operador não-negativo. Além disso, o zero é um autovalor simples cuja auto-função associada é $\Phi_{\omega,Z,c}$.

(b) O operador auto-adjunto $\mathcal{L}_{1,Z,c}$, definido em $L^2(\mathbb{R})$ por

$$\mathcal{L}_{1,Z,c} = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - 3\Phi_{\omega,Z,c}^2, \quad (1.4)$$

com domínio \mathcal{D} , tem núcleo trivial para todo $Z \neq 0$ admissível. Como veremos no trabalho, o sinal de Z faz com que este parâmetro pertença a um determinado intervalo da reta. Esta é a razão para falar de valores admissíveis de Z .

(c) O número de auto-valores negativos de $\mathcal{L}_{1,Z,c}$.

- A *slope condition*: O sinal da quantidade $\partial_\omega \|\Phi_{\omega,Z,c}\|_2^2$.

No Capítulo 4 faremos uma análise detalhada destes operadores, a qual inclui a maneira como eles aparecem na teoria de estabilidade. Da análise dos operadores $\mathcal{L}_{1,Z,c}$ e $\mathcal{L}_{2,Z,c}$ definidos anteriormente, temos o seguinte teorema,

Teorema 1.2 [Grillakis&Shatah&Strauss and Weinstein] *Suponha que $\ker(\mathcal{L}_{2,Z,c}) = [\Phi_{\omega_0,Z,c}]$ e $\ker(\mathcal{L}_{1,Z,c}) = \{0\}$. Então:*

1. O *peak standing-wave*, $e^{i\omega_0 t}\Phi_{\omega_0,Z,c}$, é orbitalmente estável em $H^1(\mathbb{R})$ se

$$n(\mathcal{H}_{\omega_0,Z,c}) = p(\omega_0).$$

2. O *peak standing-wave*, $e^{i\omega_0 t}\Phi_{\omega_0,Z,c}$, é orbitalmente instável em $H^1(\mathbb{R})$ se

$$n(\mathcal{H}_{\omega_0,Z,c}) - p(\omega_0) \text{ é ímpar.}$$

Neste caso,

$$p(\omega_0) = \begin{cases} 1, & \text{se } \partial_\omega \|\Phi_{\omega,Z,c}\|_2^2 > 0 \text{ em } \omega = \omega_0; \\ 0, & \text{se } \partial_\omega \|\Phi_{\omega,Z,c}\|_2^2 < 0 \text{ em } \omega = \omega_0 \end{cases}$$

e

$$\mathcal{H}_{\omega,Z,c} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{1,Z,c} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{2,Z,c} \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Ver [23] e [24] ■

1.2 Boa colocação do problema de Cauchy

Um dos requisitos necessários para o resultado de estabilidade/instabilidade é a boa colocação global do (PVI) NLS- $\delta_{\pm c}$, (7), no espaço $H^1(\mathbb{R})$. Introduzimos a seguir o conceito de *boa colocação local/global*.

Definição 1.3 *Sejam X, Y espaços de Banach, $T_0 \in (0, \infty)$ e seja $F : [0, T_0] \times Y \rightarrow X$ uma função contínua. Dizemos que o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = F(t, u(t)) \in X, \\ u(0) = \phi \in Y, \end{cases} \quad (1.5)$$

é localmente bem posto em Y se

1. *Existe $T \in [0, T_0)$ e uma função $u \in C([0, T], Y)$ tal que $u(0) = \phi$ e a equação diferencial em (1.5) é satisfeita no sentido*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - F(t, u(t)) \right\|_X = 0.$$

Aqui, as derivadas em $t = 0$ e $t = T$ são calculadas pela direita e pela esquerda, respectivamente. (Existência)

2. *O problema (1.5) tem, no máximo, uma solução em $C([0, T]; Y)$. (Unicidade)*
3. *A aplicação $\phi \rightarrow u$ é contínua. Mais precisamente, sejam $\phi_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $\phi_n \rightarrow \phi_\infty$ na topologia de Y , e sejam $u_n \in C([0, T_n]; Y)$ as soluções correspondentes. Seja $T \in [0, T_\infty)$. Então as soluções u_n estão definidas em $[0, T]$, para n suficientemente grande, e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[0, T]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_Y = 0. \quad (\text{Dependência contínua do dado inicial})$$

*Se alguma destas três condições não for satisfeita, dizemos que o problema (1.5) é localmente mau colocado em Y . Se as três condições anteriores são verificadas para todo $t \in [0, \infty)$, dizemos que o problema (1.5) é **globalmente bem posto em Y** .*

Em primeiro lugar, resolvemos o problema da boa colocação local em $H^1(\mathbb{R})$. A prova disto está apoiada, fundamentalmente, em dois fatos: um deles é o seguinte

Teorema 1.4 *Seja X um espaço de Hilbert complexo com produto interno $(\cdot, \cdot)_X$. Seja \mathcal{A} um operador linear auto-adjunto, com $\mathcal{A} \leq 0$ -ou seja $-\mathcal{A}$ é positivo-, e cujo domínio é $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.*

Denote por $X_{\mathcal{A}}$ o completamento de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, ou seja, tal que $\overline{X_{\mathcal{A}}} = X$, associado à norma

$$\|x\|_{X_{\mathcal{A}}}^2 = \|x\|_X^2 - (\mathcal{A}x, x)_X.$$

Sejam também $X_{\mathcal{A}}^ = (X_{\mathcal{A}})^*$ o espaço dual de $X_{\mathcal{A}}$ e $\overline{\mathcal{A}}$ a extensão de \mathcal{A} ao conjunto $(\mathcal{D}(\mathcal{A}))^*$. Finalmente, seja $\tau(t)$ o grupo de isometrias gerado em $(\mathcal{D}(\mathcal{A}))^*$, $X_{\mathcal{A}}^*$, X , $X_{\mathcal{A}}$ ou $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ pelo operador "skew-adjoint" $i\mathcal{A}$. Assuma que $g : X \rightarrow X$ é Lipschitz contínua nos conjuntos*

limitados de X , e que existe $G \in C^1(X_{\mathcal{A}}; \mathbb{R})$ tal que $G'(x) = g(x)$ para todo $x \in X_{\mathcal{A}}$. Assuma também que

$$(g(x), i x)_X = 0, \text{ para } x \in X.$$

Para $x \in X_{\mathcal{A}}$, seja

$$E(x) = \frac{1}{2} \left(\|x\|_{X_{\mathcal{A}}}^2 - \|x\|_X^2 \right) - G(x) = -\frac{1}{2} (\mathcal{A}x, x)_X - G(x),$$

então $E \in C^1(X_{\mathcal{A}}; \mathbb{R})$ e

$$E'(x) = \mathcal{A}x - g(x) \in X_{\mathcal{A}}^*, \text{ para cada } x \in X_{\mathcal{A}}.$$

Segue então que, para cada $x \in X$, existe uma única solução u do problema

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; X) \cap C^1((\mathcal{D}(\mathcal{A}))^*), \\ i \frac{du}{dt} + \overline{\mathcal{A}}u + g(u) = 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = x \end{cases}$$

Além disto, valem as seguintes propriedades:

1. $\|u(t)\|_X = \|x\|_X, \forall t \in \mathbb{R}$ (conservação da carga);
2. Se $x \in X_{\mathcal{A}}$, então $u \in C(\mathbb{R}; X_{\mathcal{A}}) \cap C^1(\mathbb{R}; X_{\mathcal{A}}^*)$ e $E(u(t)) = E(x)$ (conservação da energia);
3. Se $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então $u \in C(\mathbb{R}; \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}; X)$.

Demonstração. Ver [14, Teorema 3.3.1] e [14, Teorema 3.7.1] . ■

1.3 Interações pontuais

Um outro fato que usaremos em nossa teoria de boa colocação é aquele que envolve o espectro do operador

$$-\Delta_{\pm c, Z} = -\frac{d^2}{dx^2} - Z[\delta_c + \delta_c].$$

Esta expressão é entendida como sendo uma família de extensões auto-adjuntas associadas ao operador simétrico

$$\begin{cases} -\Delta = -\frac{d^2}{dx^2} \\ D(-\Delta) = \{f \in H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} - \{\pm c\}) : f(\pm c) = 0\}. \end{cases}$$

De maneira geral, iremos a considerar o *operador de Schrödinger com um número finito de δ -interações*: Sejam $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}$; com $N \in \mathbb{N}$. Sejam também $\gamma = \{-\gamma_j\}_{j=1}^N$ e $X = \{x_j\}_{j=1}^N$. O operador de Schrödinger com N interações de tipo delta de Dirac, está formalmente definido como

$$l_{\gamma, X} = -\frac{d^2}{dx^2} - \sum_{j=1}^N \gamma_j \delta(x - x_j),$$

definido em $L^2(\mathbb{R})$, e com domínio

$$D(l_{\gamma,X}) = \{f \in H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} \setminus X) : f'(x_j^+) - f'(x_j^-) = -\gamma_j f(x_j)\}.$$

A notação $l_{\gamma,X}$ é usada para indicar que a interação delta ocorre nos N pontos do conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$; e tal que, para cada ponto $x_j \in X$ ($j = 1, 2, \dots, N$) vale a condição de salto na derivada $f'(x_j^+) - f'(x_j^-) = -\gamma_j f(x_j)$; para $-\gamma_j \in \gamma$. De forma concreta, este operador pode ser entendido da seguinte maneira: Considere o operador $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ sobre $L^2(\mathbb{R})$, com domínio $\mathcal{D}(A) = H^2(\mathbb{R})$, e sua respectiva restrição

$$\begin{cases} A_0 = A \Big|_{D(A_0)} ; \\ D(A_0) \equiv \{g \in \mathcal{D}(A) : g(x_j) = 0\}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

O adjunto de A_0 , A_0^* , vem dado por (ver Alveberio *et al.* em [3, seção I.3.1])

$$\begin{cases} A_0^* = -\frac{d^2}{dx^2}, \\ D(A_0^*) = D(l_{\gamma,X}). \end{cases}$$

Note que a delta-interação no ponto x_j , denotada por δ_j , é um funcional linear no espaço $H^1(\mathbb{R})$, pois $|\langle \delta_j, \varphi \rangle| = |\varphi(x_j)| \leq c \|\varphi\|_{H^1}$, para todo $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$. Assim, para $\xi \in H^1(\mathbb{R})$, temos o operador $l_{\gamma,X}$

$$\begin{cases} l_{\gamma,X} = -\frac{d^2}{dx^2} \xi(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus X; \\ \xi'(x_j) - \xi'(x_j^-) = -\gamma_j \xi(x_j). \end{cases}$$

Com a notação acima, temos o seguinte

Teorema 1.5 *Sejam γ e X como definidos anteriormente. Então,*

1. *Todos os autovalores de $l_{\gamma,X}$ são negativos e simples. Além disso, se $n(l_{\gamma,X})$ representa o número de autovalores negativos de $l_{\gamma,X}$, então $n(l_{\gamma,X}) \leq N$. Seja σ_p o espectro pontual de $l_{\gamma,X}$, então $k^2 \in \sigma_p \cap (-\infty, 0) \Leftrightarrow \det(\Gamma_{\gamma,X}(k)) = 0$. Aqui*

$$\Gamma_{\gamma,X}(k) = \left(\frac{1}{\gamma_j} \delta_{jl} - G_k(x_j - x_l) \right)_{j,l=1}^N,$$

e δ_{jl} é a delta de Kronecker. A função G_k está definida por

$$G_k(x - x_j) = \frac{i}{2k} e^{ik|x-x_j|}, \quad \text{Im}(k) > 0.$$

2. *Se $E_0 = k_0^2$ pertence a σ_p , então a autofunção associada a E_0 está dada por*

$$\Psi_{E_0}(x) = \sum_{j=1}^N c_j G_{k_0}(x - x_j),$$

onde $(c_1, c_2, \dots, c_N)^T$ é o autovetor da matriz $\Gamma_{\gamma,X}(k_0)$.

3. *O resto do espectro de $l_{\gamma,X}$ é absolutamente contínuo e positivo, isto é, $\sigma_{ess}(l_{\gamma,X}) = \sigma_{abs. cont.}(l_{\gamma,X}) = \mathbb{R}^+$.*

Demonstração. Ver Alveberio *et al.* [3, seção 2.1.3, capítulo II.2] ■

No capítulo 2 mostraremos como usar o Teorema 1.5 no caso particular em que $(x_1, x_2) = (c, -c)$ e $(\gamma_1, \gamma_2) = (Z, -Z)$, ou seja, no caso em que $\gamma = \{Z, -Z\}$ e $X = \{c, -c\}$, para provar a boa colocação local em $H^1(\mathbb{R})$. De fato, usando o Teorema 1.5, definiremos uma norma equivalente à norma usual em $H^1(\mathbb{R})$ e, em virtude do Teorema 1.4, poderemos provar a boa colocação local em $H^1(\mathbb{R})$ para o (PVI) associado à equação (7). Já a boa colocação global do (PVI), seguirá como consequência das quantidades conservadas do modelo (7) (carga e energia, dadas no Teorema 1.4).

Para finalizar este capítulo trateremos de forma rápida a maneira em que aparecem as denominadas funções elípticas de Jacobi, bem como as suas propriedades mais importantes. Para um estudo mais abrangente destes conceitos veja Byrd&Friedman em [10].

1.4 Funções elípticas de Jacobi

Para $-1 \leq y_1 \leq 1$ e $k \in (0, 1)$, considere a função u dada pela fórmula

$$u(y_1; k) \equiv u \equiv \int_0^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\text{sen}^2\theta}} = F(\varphi; k), \quad (1.6)$$

com $y_1 = \text{sen}(\varphi)$. A função u é uma *integral elíptica* clássica, chamada a *integral elíptica de primeiro tipo*. Este tipo de integral aparece de forma natural no estudo da dinâmica de um pêndulo ideal (aquele que suspende um corpo através de um fio inextensível cujo peso é desprezível). Abel e Jacobi foram os primeiros matemáticos interessados no problema de inverter este tipo de integral. Tal problema é análogo ao problema que surge na definição das funções trigonométricas inversas, por exemplo; $y = \text{sen}(u)$ define a inversa da integral

$$u = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (|y| \leq 1).$$

De fato, uma das funções elípticas de Jacobi aparece do processo de inversão da integral (1.6). É a conhecida *função snoidal*. Desta maneira, $y_1 = \text{sen}(\varphi) = \text{sn}(u; k)$, ou simplesmente $y_1 = \text{sn}(u)$, quando não for necessário explicitar o número k ; e $\varphi = \text{am}(u; k)$. A função $\text{sn}(u)$ é uma função elíptica *ímpar* de ordem dois, é *periódica* e de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Da função snoidal é possível definir outras duas funções de classe $C^\infty(\mathbb{R})$; a saber: a função *cnoidal* definida por

$$\text{cn}(u; k) = \sqrt{1 - y_1^2} = \text{cos}(\varphi),$$

e a função *dnoidal*, definida por

$$\text{dn}(u; k) = \sqrt{1 - k^2 y_1^2} = \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi}.$$

As funções *snoidal*, *cnoidal* e *dnoidal* têm períodos fundamentais reais iguais a $4K(k)$; $4K(k)$ e $2K(k)$, respectivamente; onde

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}; k\right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

e é chamada de integral elíptica completa de primeiro tipo. Tais funções verificam as identidades básicas: $sn^2(u) + cn^2(u) = 1$, $k^2 sn^2(u) + dn^2(u) = 1$, $sn(u, 0) = sen(u)$, $cn(u, 0) = cos(u)$, $sn(u, 1) = tanh(u)$ e $cn(u, 1) = dn(u, 1) = sech(u)$. As derivadas das funções elípticas de Jacobi snoidal, cnoidal e dnoidal são, para $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \frac{d sn(\gamma)}{d\gamma} = cn(\gamma)dn(\gamma), \\ \frac{d cn(\gamma)}{d\gamma} = -sn(\gamma)dn(\gamma), \\ \frac{d dn(\gamma)}{d\gamma} = -k^2 sn(\gamma)cn(\gamma). \end{cases}$$

A integral elíptica de segundo tipo está definida por

$$\int_0^{y_1} \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}} dt = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 sen^2 \theta} d\theta = \int_0^{u_1} dn^2(u) du \quad (1.7)$$

$$= E(u_1) \equiv E(am u_1; k) \equiv E(\varphi; k), \quad (1.8)$$

onde $y_1 = sen(\varphi)$, é como na integral (1.6). Este tipo de integral será crucial para determinar a convexidade de uma certa função em nosso resultado de estabilidade/instabilidade orbital. Aqui,

$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}; k\right) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}} dt.$$

é a integral elíptica completa de segundo tipo. Usando programa *Wolfram-Mathematica 9.0*, mostramos abaixo os gráficos de $K(k)$ e $E(k)$, para $k \in (0, 1)$.

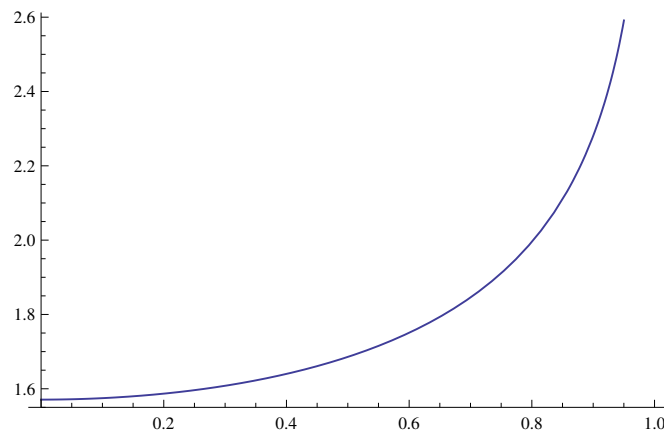


Figura 1.1: Gráfico da função $K(k)$

A função Zeta de Jacobi, $Z(u) = Z(u, k)$, é definida por

$$Z(u_1) = \int_0^{u_1} \left[dn^2(u) - \frac{E(k)}{K(k)} \right] du.$$

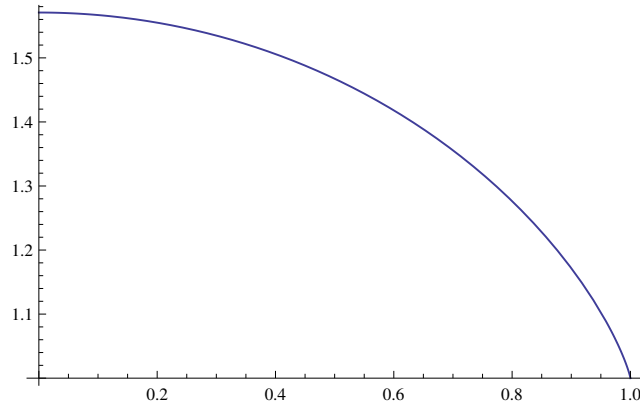


Figura 1.2: Gráfico da função $E(k)$

Esta função é ímpar, periódica de período fundamental $2K(k)$. Além disso, $Z(\pi/2, k) = 0$ e $Z(mK) = 0$, para $m = 0, 1, 2, \dots$.

Em nossa análise iremos também usar as seguintes funções inversas de Jacobi,

$$\begin{aligned} cn^{-1}(y; k) &= \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2 + k^2 t^2)}}, & 0 \leq y < 1, \\ dn^{-1}(y; k) &= \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2 - k'^2)}}, & k' \leq y < 1, \end{aligned} \quad (1.9)$$

com $k' = \sqrt{1 - k^2}$.

O número k que aparece em (1.6) é chamado de *módulo elíptico*. Este número pode ser tomado como sendo real ou imaginário puro. Mas, em aplicações físicas e engenharia, mediante algumas transformações, pode ser tomado no intervalo $(0, 1)$. Ao longo do trabalho, consideraremos $k \in (0, 1)$. O *módulo elíptico complementar*, denotado por k' , é a quantidade $k' = \sqrt{1 - k^2}$.

Capítulo 2

Boa colocação em $H^1(\mathbb{R})$

Provaremos neste capítulo a boa colocação global em $H^1(\mathbb{R})$ do (PVI) associado à equação (7). A base dos resultados é, como mencionado no capítulo anterior, os Teoremas 1.4 e 1.5.

Começaremos fazendo uma descrição rigorosa do operador

$$-\Delta_{\pm c, Z} \equiv H_Z = -\frac{d^2}{dx^2} - Z[\delta_c + \delta_{-c}]; \quad (c, Z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (2.1)$$

definido em $L^2(\mathbb{R})$ e cujo domínio é $\mathcal{D}(H_Z) = \mathcal{D}$, sendo

$$\mathcal{D} = \{f \in H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} \setminus \{\pm c\}) : f'(\pm c^+) - f'(\pm c^-) = -Zf(\pm c)\}, \quad (2.2)$$

Em seguida, mostramos que H_Z não possui autovalores negativos para o caso em que $Z < 0$. Como aplicação do Teorema 1.5, mostraremos que se $Z \in (0, \frac{1}{c}]$, então o operador H_Z possui exatamente *um* autovalor negativo, e se $Z \in (\frac{1}{c}, \infty)$, então H_Z possui exatamente *dois* autovalores negativos. Para a boa colocação local em $H^1(\mathbb{R})$, usaremos os fatos obtidos sobre o espectro de H_Z para definirmos uma norma apropriada que seja equivalente à norma usual em $H^1(\mathbb{R})$. Por fim, as quantidades conservadas (carga e energia) que decorrem do Teorema 1.4 (ver (11) e (12)) garantiram a boa colocação global em $H^1(\mathbb{R})$.

2.1 O operador H_Z

Considere o operador $\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2}$ sobre $L^2(\mathbb{R})$, com domínio $D(\mathcal{H}) = H^2(\mathbb{R})$ e o operador restrição

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} \Big|_{D(\mathcal{H}_0)}, \\ D(\mathcal{H}_0) = \{g \in D(\mathcal{H}) : g(c) = g(-c) = 0\}. \end{cases}$$

O adjunto de \mathcal{H}_0 vem dado por (ver [3, seção I.3.1])

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0^* = -\frac{d^2}{dx^2}, \\ D(\mathcal{H}_0^*) = H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} \setminus \{\pm c\}). \end{cases} \quad (2.3)$$

Seja $c > 0$. Então, por definição, para $\psi \in H^1(\mathbb{R})$; $\langle \delta_c, \psi \rangle = \psi(c)$, e $|\langle \delta_c, \psi \rangle| \leq \|\psi\|_{H^1}$. Logo, as interações delta $\delta_{\pm c}$ definem dois funcionais contínuos em $H^1(\mathbb{R})$. Portanto, $\delta_{\pm c} \in H^{-1}(\mathbb{R})$.

Definição 2.1 *Seja \mathcal{A}_0 um operador simétrico, fechado e densamente definido sobre um espaço de Hilbert X . Denotemos por A_0^* o seu adjunto. Consideremos os subespaços*

$$D_+ = \ker(A_0^* - i), \quad e \quad D_- = \ker(A_0^* + i).$$

D_+ e D_- são chamados os **subespaços de deficiência** associados ao operador A_0 . Chamamos de **índice de deficiência** de A_0 , ao par de números

$$(n_+(A_0), n_-(A_0)),$$

onde $n_+(A_0) = \dim \ker(D_+)$ e $n_-(A_0) = \dim \ker(D_-)$.

O seguinte Lema pode ser provado fazendo uma adaptação da prova feita em Alveberio *et al.* ([3]), bem como em Angulo&Ponce ([5]), para o caso da interação delta centrada na origem, i.e., quando $c = 0$. Com as notações acima, temos o seguinte resultado.

Lema 2.2 *Sejam $X = L^2(\mathbb{R})$, $A_0 \equiv \mathcal{H}_0$ e $D(A_0) = \mathcal{D}(\mathcal{H}_0)$. Então, A_0 tem as seguintes propriedades:*

1. $\overline{\Gamma(A_0)} = \Gamma(A_0)$, sendo $\Gamma(A_0)$ o gráfico de A_0 . Logo, o operador A_0 é fechado.
2. $\langle A_0 g, h \rangle = \langle g, A_0 h \rangle$, para todo $g, h \in D(A_0)$. (Simetria)
3. $\overline{D(A_0)} = L^2(\mathbb{R})$. (Densidade).
4. $n_{\pm}(A_0) = 2$

O operador H_Z pode ser entendido então como uma extensão auto adjunta do operador restrição definido em (2.3) da seguinte forma, para $\psi \in \mathcal{D}(H_Z)$;

$$\begin{cases} H_Z \psi = -\frac{d^2 \psi}{dx^2}(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm c\}; \\ \psi'(\pm c^+) - \psi'(\pm c^-) = -Z\psi(\pm c). \end{cases} \quad (2.4)$$

Vamos agora usar o Teorema 1.5 dado em Alveberio ([3]) para obter que o espectro pontual, $\sigma_p(H_Z)$ do operador H_Z , satisfaz $\sigma_p(H_Z) \subset (-\infty, 0)$. De fato, para $E_0 \in \sigma_p(H_Z)$, com $E_0 = k_0^2 < 0$, temos para $f \in \ker(A_0^* - k_0^2 I) = \ker(\mathcal{H}_0^* - k_0^2 I)$, que $-f''(x) = k_0^2 f(x)$. Logo, do Teorema 1.5 em Alveberio [3] temos que as soluções desta equação estão geradas pelas funções

$$\left\{ \frac{i}{2k_0} e^{ik_0|x-c|}, \frac{i}{2k_0} e^{ik_0|x+c|} \right\} \quad \text{com } \text{Im}(k_0) > 0.$$

Portanto,

$$f(x) = f_{k_0}(x) = c_1 \frac{i}{2k_0} e^{ik_0|x-c|} + c_2 \frac{i}{2k_0} e^{ik_0|x+c|},$$

onde o par $(c_1, c_2)^T$ é autovetor da matriz

$$\Gamma_{\gamma, X}(k_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{Z} - \frac{i}{2k_0} & -\frac{i}{2k_0} e^{2ik_0 c} \\ -\frac{i}{2k_0} e^{2ik_0 c} & \frac{1}{Z} - \frac{i}{2k_0} \end{pmatrix},$$

sendo $\gamma = \{-Z, Z\}$ e $X = \{-c, c\}$, e que o determinante de $\Gamma_{\gamma, X}(k_0)$ deve ser zero, i.e.,

$$\begin{aligned} \det(\Gamma_{\gamma, X}(k_0)) &= \left(\frac{1}{Z} - \frac{i}{2k_0} \right)^2 + \frac{1}{4k_0^2} e^{4ik_0c} \\ &= \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{\sqrt{|E_0|}Z} - \frac{1}{4E_0} + \frac{1}{4E_0} e^{-4c\sqrt{|E_0|}} = 0. \end{aligned}$$

Se $n(H_Z)$ representa o número de autovalores negativos do operador H_Z , pode-se mostrar que $n(H_Z) = n(D)$; sendo D a matriz

$$\begin{pmatrix} -Z + \frac{1}{2c} & -\frac{1}{2c} \\ -\frac{1}{2c} & -Z + \frac{1}{2Z} \end{pmatrix},$$

onde $n(D)$ é o número de autovalores negativos da matriz D . Um cálculo mostra que

$$\begin{cases} n(D) = 0, & \text{se } Z < 0; \\ n(D) = 1, & \text{se } Z \in (0, \frac{1}{c}], \\ n(D) = 2, & \text{se } Z \in (\frac{1}{c}, \infty). \end{cases}$$

O fato do operador H_Z não possuir autovalores negativos, no caso em que $Z < 0$, segue-se como consequência da sua forma quadrática, a saber: para $f \in \mathcal{D}(H_Z)$, temos

$$\langle H_Z f, f \rangle_2 = - \int_{\mathbb{R}} f''(x) f(x) dx = -Z[|f(-c)|^2 + |f(c)|^2] + \int_{\mathbb{R}} (f'')^2 dx.$$

Já que para $Z < 0$, $\langle H_Z f, f \rangle_2 \geq 0$, tem-se que o operador H_Z não possui autovalores negativos.

Devido à existência dos perfis de tipo Jacobiano no intervalo $[-c, c]$ (ver Capítulo 3), consideraremos apenas o caso em que $Z \in (0, \frac{\pi}{4c}) \subset (0, \frac{1}{c}]$. Portanto, $n(H_Z) = 1$.

2.2 Teoria de boa colocação global

A seguir estabeleceremos nosso resultado de boa colocação global para o problema

$$\begin{cases} i\partial_t u = H_Z u - |u|^2 u, \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (2.5)$$

em $H^1(\mathbb{R})$, sendo H_Z o operador definido em (3.1), o qual é entendido como indica (2.4). De fato, a partir do Teorema 1.4 e aproveitando as leis de conservação da carga \mathcal{N} , definida em (12), e da energia \mathcal{H} , definida em (11), é possível mostrar que o problema (2.5) é globalmente bem posto em $H^1(\mathbb{R})$. Notamos que pode também ser mostrado um resultado de boa colocação local em $H^1(\mathbb{R})$ usando ferramentas do espalhamento inverso baseados no recente trabalho de Duchene&Marzuola&Weinstein ([22]).

Teorema 2.3 *Seja $Z \in (-\infty, \frac{\pi}{4c})$. Para qualquer $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, existe $T = T(\|u_0\|_1) > 0$ e uma única solução $u \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$ de (2.5) tal que $u(0) = u_0$. Além disso, para todo $T' < T$, existe $\delta > 0$ tal que a aplicação **dado-solução***

$$\tilde{u}_0 \in B(u_0; \delta) \mapsto \tilde{u} \in C([0, T']; H^1(\mathbb{R}))$$

é contínua. Mais ainda, as quantidades

$$\mathcal{H}(u) = \frac{1}{2} \|u_x\|_2^2 - \frac{Z}{2} [|u(c)|^2 + |u(-c)|^2] - \frac{1}{4} |u|_{L^4}^4 \quad (\text{Energia})$$

e

$$\mathcal{N}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx \quad (\text{Carga})$$

são conservadas, i.e., $\mathcal{H}(u(t)) = \mathcal{H}(u_0)$ e $\mathcal{N}(u(t)) = \mathcal{N}(u_0)$, para todo $t \in [0, T]$.

Finalmente, se o dado inicial u_0 é par, então a solução $u(t)$ também é par.

Demonstração. Sejam $Z \in (-\infty, \frac{\pi}{4c})$ e $\gamma < 0$ o único autovalor negativo de H_Z , quando $0 < Z < \frac{\pi}{4c}$. Então $H_Z \geq \eta$, onde $\eta = 0$ se $Z \leq 0$ e $\eta = \gamma$ se $Z > 0$. Desta forma, para o operador *autoadjunto* $A \equiv -H_Z + \eta$ sobre $L^2(\mathbb{R})$, com domínio $D(A) = \mathcal{D}$ definido em (2.2), temos $A \leq 0$. Seja $X_A \equiv H^1(\mathbb{R})$ dotado com a norma

$$\begin{aligned} \|u\|_{X_A}^2 &= \|u\|_2^2 - \langle Au, u \rangle_2 = \|u\|_2^2 + \langle H_Z u, u \rangle - \eta \|u\|_2^2 \\ &= \|u_x\|_2^2 + (1 - \eta) \|u\|_2^2 - Z [|u(c)|^2 + |u(-c)|^2]. \end{aligned}$$

De fato, pelo *princípio do mini-max* temos, para $\frac{\pi}{4c} > Z > 0$

$$\gamma = \inf \left\{ \|v_x\|_2^2 - Z [|u(c)|^2 + |u(-c)|^2] : \|v\| = 1, v \in H^1(\mathbb{R}) \right\}.$$

Portanto, para cada $Z \in (-\infty, \frac{\pi}{4c})$, existem números $C_i = C_i(Z) > 0$, $i = 1, 2$, tais que

$$C_1 \|u\|_{H^1}^2 \leq \|u\|_{X_A}^2 \leq C_2 \|u\|_{H^1}^2.$$

Então, a norma $\|\cdot\|_{X_A}$ definida em X_A , é equivalente à norma usual em $H^1(\mathbb{R})$.

Agora, se definimos $g : X_A \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ por $g(u) = |u|^2 u$, então $g \in C(X_A, L^2(\mathbb{R}))$ e

$$\|g(v) - g(u)\|_2 \leq C (\|v\|_{X_A}^2 + \|u\|_{X_A}^2) \|u - v\|_2,$$

para quaisquer $u, v \in X_A$. Além disso, $g = G'$, onde $G \in C^1(X_A, \mathbb{R})$ está definida por $G(u) = \frac{1}{4} |u|^4$. Finalmente, para qualquer $u \in X_A$, $g(u)\bar{u} = |u|^4$, então

$$\langle g(u), iu \rangle_2 = -i \int_{\mathbb{R}} g(u)\bar{u}.$$

Segue-se que $Re(\langle g(u), iu \rangle_2) = 0$. Portanto, a boa colocação local para o problema (2.5), em $H^1(\mathbb{R})$, segue-se do Teorema 1.4, Teorema 3.7.1 em Cazenave [14] e das estimativas de tipo Strichartz em Kovařík&Sacchetti [33].

A boca colocação global para o problema (2.5), em $H^1(\mathbb{R})$, segue-se de argumentos standard baseados na desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, o Teorema de imersão de Sobolev e das leis de conservação da carga (12) e da energia (11). ■

Capítulo 3

Existência de soluções de tipo peak-standing waves

Neste capítulo vamos mostrar a existência de uma solução do tipo standing-wave, $u(x, t) = e^{i\omega t}\Phi_{\omega, Z, c}(x)$, para a equação NLS- $\delta_{\pm c}$ dada em (7), de tal maneira que as condições em (8) sejam satisfeitas. Essas soluções irão a pertencer ao domínio do operador $-\frac{d^2}{dx^2} - Z[\delta_c + \delta_{-c}]$, $Z \neq 0$,

$$-\Delta_{\pm c, Z} \equiv H_Z = -\frac{d^2}{dx^2} - Z[\delta_c + \delta_{-c}]; \quad (c, Z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (3.1)$$

Nossa análise baseia-se na teoria das funções elípticas de Jacobi. Desta maneira, procuramos um perfil $\Phi_{\omega, Z, c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça o seguinte problema

$$\begin{cases} \Phi''_{\omega, Z, c}(x) - \omega\Phi_{\omega, Z, c}(x) + \Phi_{\omega, Z, c}^3(x) = 0, & \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm c\}; \\ \Phi'_{\omega, Z, c}(\pm c^+) - \Phi'_{\omega, Z, c}(\pm c^-) = -Z\Phi_{\omega, Z, c}(\pm c) \end{cases} \quad (3.2)$$

e $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi_{\omega, Z, c}(x) = 0$.

O caso $Z \neq 0$ e $c = 0$ foi estudado por Fukuizumi, Jeanjean, Le Coz, Ohta (ver [19], [20], [35]) para a equação NLS- δ (5) (com $p = 2$). De fato, foi mostrado que a única solução de (3.2) com $c = 0$, módulo rotações, está dada pela função

$$\Phi_{\omega, Z, 0}(x) = \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}\left(\sqrt{\omega}|x| + \tanh^{-1}\left(\frac{Z}{2\sqrt{\omega}}\right)\right), \quad (3.3)$$

para $\omega > Z^2/4$. Para $Z = 0$, o conjunto de soluções suaves para (3.2) sobre \mathbb{R} possui diversos trabalhos relevantes na literatura. De fato, existe uma única solução positiva, Ψ_ω , módulo translações e rotações, de (3.2), dada pelo soliton

$$\Psi_\omega(x) = \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}x), \quad \omega > 0, \quad (3.4)$$

associada à equação cúbica de Schrödinger

$$i\partial_t u + u_{xx} = -|u|^2 u.$$

É conhecido que os perfis peak-standing waves $e^{i\omega t}\Phi_{\omega, Z, 0}$ em (3.3), são orbitalmente estáveis para $Z > 0$ e orbitalmente instáveis para $Z < 0$ (ver [19], [20], [35]). Mais ainda, Cazenave e Lions em [13] mostraram que para $Z = 0$, o soliton $e^{i\omega t}\Psi_\omega$, é orbitalmente estável para todo $\omega > 0$.

Mostraremos a seguir como é possível construir uma família de soluções para o problema (3.2). Em primeiro lugar, consideremos $x \in (-\infty, -c) \cup (c, \infty)$. Baseados na solução dada em (3.4), determinamos uma certa translação desta função. Já para $x \in [-c, c]$, consideramos um perfil elíptico de tipo *dnoidal* ou do tipo *cnoidal*.

3.1 Existência de um perfil periódico entre os pontos de interação

Nesta seção mostraremos a existência de um perfil par para o problema de fronteira (3.2), com $Z \neq 0$. Segue imediatamente de (3.4) que o perfil

$$\Phi_{\omega,Z,c}(x) = \begin{cases} \Psi_{\omega,-b}(x) = \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}(x+c-b)), & \text{se } -\infty < x < -c \\ \Psi_{\omega,b}(x) = \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}(x-c+b)), & \text{se } c < x < +\infty. \end{cases} \quad (3.5)$$

satisfaz a equação (3.2) para todo $x \in (-\infty, -c) \cup (c, \infty)$. Consideramos uma translação de (3.4) dada pelo parâmetro b . Segue imediatamente desta consideração que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi_{\omega,Z,c}(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi'_{\omega,Z,c}(x) = 0.$$

Enfrentamos então o problema de estabelecer uma função, ϕ , definida no intervalo $[-c, c]$ que satisfaça as seguintes propriedades:

1. $\phi(c) = \Psi_{\omega,b}(c^+)$, $\phi(-c) = \Psi_{\omega,-b}(-c^-)$;
2. $\Psi'_{\omega,b}(c^+) - \phi'(c^-) = -Z\phi(c)$, $\phi'(-c^+) - \Psi'_{\omega,-b}(-c^-) = -Z\phi(-c)$.

Dividiremos nosso trabalho em dois casos: o caso $Z > 0$ e o caso $Z < 0$.

3.1.1 Perfil dnoidal para $Z > 0$

Consideremos, para $x \in [-c, c]$, a função

$$\Phi_{\omega,Z,c}(x) = \phi_{\alpha,\beta,\theta}(x) = \alpha \operatorname{dn}(\beta x + \theta; k), \quad (3.6)$$

e suponhamos que $\Phi_{\omega,Z,c}$ é solução de (3.2). É importante recordar que o perfil *dnoidal* é positivo na reta toda. Os parâmetros α, β, θ and b que aparecem em (3.5) e em (3.6), serão determinados tanto da hipótese de que o nosso perfil é par, bem como das propriedades da função dnoidal e das condições de fronteira. Note que para $x \in (-c, c)$ temos

$$\begin{cases} \phi'_{\alpha,\beta,\theta}(x) = -\alpha\beta k^2 \operatorname{cn}(\beta x + \theta; k) \operatorname{sn}(\beta x + \theta; k) \\ \phi''_{\alpha,\beta,\theta}(x) = \alpha\beta k^2 \operatorname{dn}(\beta x + \theta; k) (1 - 2\operatorname{cn}^2(\beta x + \theta; k)), \end{cases}$$

onde $\gamma \mapsto \operatorname{cn}(\gamma; k)$ e $\gamma \mapsto \operatorname{sn}(\gamma; k)$, para $\gamma \in \mathbb{R}$, são as *funções elípticas de Jacobi cnoidal e snoidal*, respectivamente. Segue que, se $\phi_{\alpha,\beta,\theta}$ satisfaz (3.2) em $(-c, c)$, então

$$\alpha^3 \operatorname{dn}(\beta x + \theta; k) \left[\operatorname{dn}^2(\beta x + \theta; k) - \frac{\omega}{\alpha^2} + \frac{\beta^2 k^2}{\alpha^2} (1 - 2\operatorname{cn}^2(\beta x + \theta; k)) \right] = 0.$$

É claro que com o objetivo de que $\phi_{\alpha,\beta,\theta}$ não seja a função nula (nem uma função constante) podemos supor que $\alpha\beta \neq 0$. Logo, da expressão anterior concluímos que

$$\operatorname{dn}^2(\beta x + \theta; k) - \frac{2\beta^2 k^2}{\alpha^2} \operatorname{cn}^2(\beta x + \theta; k) = \frac{\omega - \beta^2 k^2}{\alpha^2}.$$

Vamos usar aqui uma identidade muito útil das funções elípticas de Jacobi, a saber: para $\gamma \in \mathbb{R}$ vale $\operatorname{dn}^2(\gamma; k) - k^2 \operatorname{cn}^2(\gamma; k) = 1 - k^2$. Notamos da última expressão que, para

tornar ela uma identidade em $(-c, c)$, isto é, para que tal expressão seja verificada *para todo* $x \in (-c, c)$; necessário é que

$$k^2 = \frac{2\beta^2 k^2}{\alpha^2}$$

e

$$1 - k^2 = \frac{\omega - \beta^2 k^2}{\alpha^2}.$$

Portanto,

$$\alpha^2 = \frac{2\omega}{2 - k^2} \text{ e } \beta^2 = \frac{\omega}{2 - k^2}.$$

Segue que $\phi_{\alpha,\beta,\theta}$ verifica a equação elíptica (3.2) para todo $x \in (-c, c)$. Pela expressão explícita de $\Phi_{\omega,Z,c}$ em (3.5), e da continuidade de $\Phi_{\omega,Z,c}$ nos pontos $x = \pm c$, escolhemos $\alpha > 0$. Logo $\alpha = \sqrt{\frac{2\omega}{2-k^2}}$. Agora, com o objetivo de que o nosso perfil dnoidal, $\Phi_{\omega,Z,c}$, seja uma função par, e já que o período minimal real da função dnoidal é $2K(k)$, então as *únicas* escolhas possíveis do parâmetro θ são: $\theta = 0$ ou $\theta = K(k)$. A Figura 3.1 mostra o exemplo da função $\phi_{\alpha,\beta,\theta}$ para os casos $\theta = 0$ e $\theta = K(k)$. Devido à paridade do perfil $\Phi_{\omega,Z,c}$

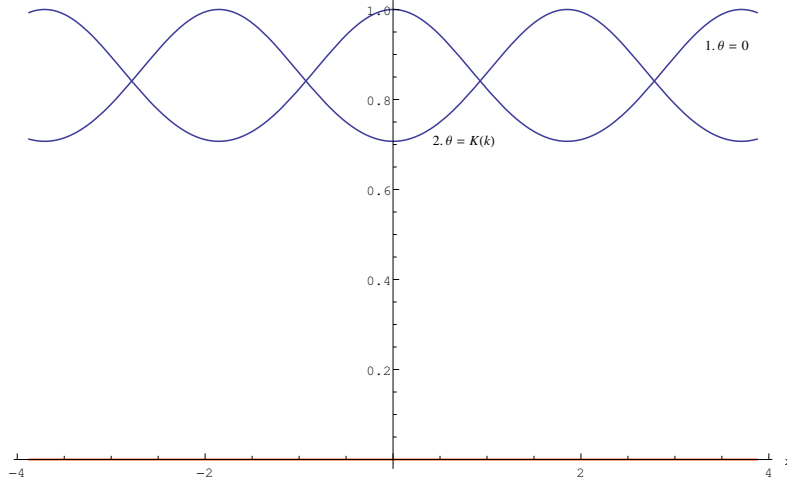


Figura 3.1: $\phi_{\alpha,\beta,\theta}$ com $\theta = 0$ e $\theta = K(k)$. Aqui, $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

podemos escolher então $\beta > 0$. Desta forma: se $\phi_{\alpha,\beta,\theta}$ é um perfil dnoidal, par, e que satisfaz a equação elíptica dada em (3.2) então

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\omega}{2 - k^2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\omega}{2 - k^2}}, \quad \text{e } \theta = 0 \text{ ou } \theta = K(k). \quad (3.7)$$

Consideremos o caso particular em que $\theta = 0$. Então o nosso perfil de tipo peak-standing wave satisfaz

$$\Phi_{\omega,Z,c}(x) = \begin{cases} \Psi_{\omega,-b}(x) = \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}(x + c - b)), & \text{se } -\infty < x < -c \\ \phi_{\alpha,\beta,\theta}(x) = \phi_{\alpha,\beta}(x) = \alpha \operatorname{dn}(\beta x; k), & \text{se } -c \leq x \leq c \\ \Psi_{\omega,b}(x) = \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}(x - c + b)), & \text{se } c < x < +\infty, \end{cases} \quad (3.8)$$

sendo α e β dados em (3.7). É importante notar que, para $\omega > 0$ fixado, a maneira como estabelecemos o perfil dnoidal $\Phi_{\omega,Z,c}$, permite obter uma família não enumerável de funções

$\phi_{\alpha,\beta,\theta}$ (determinadas pelo número $k \in (0, 1)$) que satisfazem a equação elíptica (3.2) no intervalo $(-c, c)$. Além do mais, dado que

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} dn(\gamma; k) = \operatorname{sech}(\gamma),$$

para todo $\gamma \in \mathbb{R}$, então o perfil *secante hiperbólica* é a *solução limite* dentro desta família.

Vamos agora tratar as condições de continuidade e de fronteira que deve satisfazer o perfil $\Phi_{\omega,Z,c}$. Isto vai mostrar, como é de se esperar, certas relações entre os parâmetros α , β , θ , b e Z que aparecem envolvidos em nosso modelo. Começamos com a condição de continuidade. É claro que para $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm c\}$, o perfil $\Phi_{\omega,Z,c}(x)$ dado em (3.8) é contínuo. Nos únicos pontos onde, a priori, $\Phi_{\omega,Z,c}$ não é contínuo são de fato $x = \pm c$. Denotaremos as funções elípticas de Jacobi sem explicitar o seu módulo; de tal maneira que $sn(\gamma)$, $cn(\gamma)$ e $dn(\gamma)$ representarão as respectivas funções $sn(\gamma; k)$, $cn(\gamma; k)$ e $dn(\gamma; k)$; deixando a notação usual (usando o módulo) só naquelas circunstâncias em que seja importante ressaltá-lo. Queremos a seguinte

- 1) Condição de continuidade: necessário é que $\Phi_{\omega,Z,c}(\pm c^+) = \Phi_{\omega,Z,c}(\pm c^-)$. Isto equivale à expressão

$$\operatorname{sech}(\sqrt{\omega}b) = \frac{dn(\beta c)}{\sqrt{2 - k^2}}. \quad (3.9)$$

A seguinte condição garante que $\Phi'_{\omega,Z,c}$ satisfaz a condição de salto.

- 2) Condição de salto na derivada: $\Phi'_{\omega,Z,c}(\pm c^+) - \Phi'_{\omega,Z,c}(\pm c^-) = -Z\Phi_{\omega,Z,c}(\pm c)$. Isto acarreta a equação

$$-\sqrt{\omega}\operatorname{sech}(\sqrt{\omega}b)\tanh(\sqrt{\omega}b) + \frac{\sqrt{\omega}k^2}{2 - k^2}cn(\beta c)sn(\beta c) = -Z\operatorname{sech}(\sqrt{\omega}b), \quad (3.10)$$

ou ainda,

$$\frac{\omega k^4 cn^2(\beta c) sn^2(\beta c)}{(2 - k^2)^2} = (\sqrt{\omega}\tanh(\sqrt{\omega}b) - Z)^2 \operatorname{sech}^2(\sqrt{\omega}b).$$

Dado que $dn^2(\gamma) - k^2 cn^2(\gamma) = 1 - k^2$ e $dn^2(\gamma) = 1 - k^2 sn^2(\gamma)$ ($\gamma \in \mathbb{R}$), a equação anterior fica

$$\frac{\omega(dn^2(\beta c) + k^2 - 1)(1 - dn^2(\beta c))}{(2 - k^2)^2} = (\sqrt{\omega}\tanh(\sqrt{\omega}b) - Z)^2 \operatorname{sech}^2(\sqrt{\omega}b).$$

Usando a condição de continuidade (3.9), obtemos

$$\frac{\omega[(2 - k^2)\operatorname{sech}^2(\sqrt{\omega}b) + k^2 - 1][1 - (2 - k^2)\operatorname{sech}^2(\sqrt{\omega}b)]}{(2 - k^2)^2} = \quad (3.11)$$

$$(\sqrt{\omega}\tanh(\sqrt{\omega}b) - Z)^2 \operatorname{sech}^2(\sqrt{\omega}b). \quad (3.12)$$

Decorre desta equação que

$$2Z\sqrt{\omega}((2 - k^2)\operatorname{sech}(\sqrt{\omega}b))^2 \tanh(\sqrt{\omega}b) = \omega(1 - k^2) + Z^2(2 - k^2)^2 \operatorname{sech}^2(\sqrt{\omega}b) > 0. \quad (3.13)$$

Finalmente, segue desta última expressão que

$$Z\tanh(\sqrt{\omega}b) > 0, \quad \text{ou equivalentemente, } bZ > 0. \quad (3.14)$$

Isto mostra um fato interessante: a sinal de Z determina a forma da curva $\Phi_{\omega,Z,c}$ entorno dos pontos $x = \pm c$. Por exemplo, suponhamos que $\omega = 2$ e $c = 1$. Então $f(x) = 2\operatorname{sech}(\sqrt{2}(x-1))$ é uma translação à direita da função $x \mapsto 2\operatorname{sech}(\sqrt{2}x)$. Suponhamos que $Z > 0$, então (3.14) implica que $b > 0$, assim, fixemos o valor $b = 0,5$. Desta maneira, $h(x) = 2\operatorname{sech}(\sqrt{2}(x-0,5))$ é uma translação à direita de f . A Figura 3.2 mostra os gráficos de f e h . Apartir deste exemplo podemos concluir que, de maneira geral, para $Z > 0$, o ponto maximal da função $\Psi_{\omega,b}$ em (3.8), quando considerada na reta, está à esquerda do ponto $x = c$. Logo então, $\Psi'_{\omega,b}(c^+) < 0$. Agora, ainda neste caso, o ponto maximal de $\Psi_{\omega,-b}$ em (3.8) está à direita do ponto $x = -c$; então $\Psi'_{\omega,-b}(-c^-) > 0$.

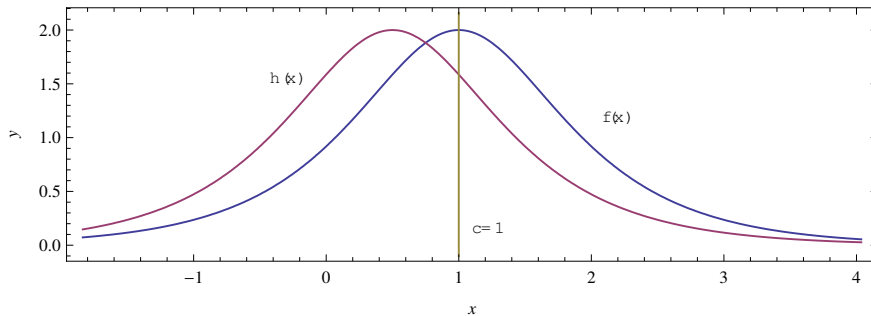


Figura 3.2: Gráficos de f e h

Por outro lado, $Z < 0 \leftrightarrow b < 0$, então o ponto maximal da função $\Psi_{\omega,b}$ em (3.8) (quando considerada na reta toda) está à direita do ponto $x = c$. Assim, $\Psi'_{\omega,b}(c^+) > 0$. Finalmente, neste caso, o ponto maximal de $\Psi_{\omega,-b}$ está à esquerda do ponto $x = -c$, logo $\Psi'_{\omega,-b}(-c^-) < 0$. A conclusão disto é:

se $Z > 0$, então

$$\begin{cases} \Psi'_{\omega,b}(c^+) < 0; \\ \Psi'_{\omega,-b}(-c^-) > 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Se $Z < 0$, então

$$\begin{cases} \Psi'_{\omega,b}(c^+) > 0; \\ \Psi'_{\omega,-b}(-c^-) < 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

De fato, de (3.8) deduzimos que

$$\Psi'_{\omega,b}(c^+) = -\Psi'_{\omega,-b}(-c^-).$$

Mais ainda, pela condição de fronteira (salto na derivada) dada em (3.10), é possível deduzir que

$$\phi'_{\alpha,\beta}(c^+) = -\phi_{\alpha,\beta}(-c^-).$$

Até aqui vemos a maneira em que podem ser determinados os parâmetros α, β, θ e b para o modelo dnoidal proposto em (3.8), a partir das identidades das funções elípticas de Jacobi e das condições de continuidade e de salto na derivada dadas em (3.9) e (3.10), respectivamente.

Por outro lado, ainda nada foi dito sobre os parâmetros c e Z que aparecem no modelo dado em (3.2), exeto nos casos em que $(c, Z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. É importante ressaltar que, com o objetivo de estabelecer nossos resultados de estabilidade/instabilidade não linear para

as soluções standing-wave, iremos a usar a teoria de perturbação analítica, a qual permitirá fazer uma análise espectral do operador $\mathcal{L}_{1,Z,c}$ para $Z \rightarrow 0$. Por esta razão, será *essencial* que o perfil dnoidal, (3.8), convirja para o soliton da forma (3.4). A razão para este fato será então esclarecida: Seja $c > 0$ fixado em (7). Esta condição de fixar o ponto de interação da delta, permitirá obter uma família de equações associadas a (7), a qual estará indexada pelo parâmetro Z . Para determinar o índice de Morse associado ao operador auto adjunto $\mathcal{L}_{1,Z,c}$ precisamos que o perfil dnoidal $\Phi_{\omega,c,Z}$ em (3.8) convirja para uma função da forma

$$\Psi(x) = \sqrt{2\omega^*} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega^*}x), \quad \text{quando } Z \rightarrow 0,$$

para um número $\omega^* > 0$ específico, pois para este tipo de funções (semelhante à solução associada à equação (7), no caso em que $Z = 0$) o espectro do operador correspondente associado,

$$\mathcal{L}_{1,Z,0} = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - 3\Psi^2,$$

é muito bem conhecido pelo Teorema da Oscilação de Sturm-Liouville. Portanto, assumiremos a existência de um certo número $\omega^* > 0$, que será determinado explicitamente como função do parâmetro c , com a propriedade de que

$$\lim_{Z \rightarrow 0} \Phi_{\omega,Z,c}(x) = \Psi(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm c\}. \quad (3.17)$$

Para este propósito é necessário estabelecer a seguinte proposição, que dá uma relação conveniente entre o ponto $c > 0$ e o período minimal da onda dnoidal $\phi = \phi_{\alpha,\beta}$ dada em (3.8).

Proposição 3.1 *Suponha que existe um número $\omega^* > 0$ que satisfaz (3.17). Se T_ϕ é o período minimal da função dnoidal ϕ , então $0 < c \leq \frac{T_\phi}{2}$.*

Demonstração. Como o período minimal real da função dnoidal $x \mapsto \operatorname{dn}(x; k)$ é $2K(k)$, então o período minimal da onda ϕ será

$$T_\phi = \frac{2K(k)}{\beta} = 2K(k) \sqrt{\frac{2-k^2}{\omega}}.$$

Suponha que $\frac{T_\phi}{2} < c$, então existem dois pontos $x \in \left[0, \frac{T_\phi}{2}\right)$ e $y \in \left(\frac{T_\phi}{2}, c\right)$ tais que $\phi(x) = \phi(y)$. Pela hipótese, temos que para todo $\gamma \in [0, c)$, $\phi(\gamma) \rightarrow \sqrt{2\omega^*} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega^*}\gamma)$, quando $Z \rightarrow 0$. Em particular, para $x, y \in [0, c)$ devemos ter $\phi(x) \rightarrow \sqrt{2\omega^*} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega^*}x)$ e $\phi(y) \rightarrow \sqrt{2\omega^*} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega^*}y)$. Portanto, $\operatorname{sech}(\sqrt{\omega^*}x) = \operatorname{sech}(\sqrt{\omega^*}y)$, o que é impossível dado que a função secante hiperbólica é estritamente decrescente no intervalo $[0, +\infty)$. ■

Observação 3.2 *(Um perfil não conveniente) Se $c = \frac{T_\phi}{2} = \sqrt{\frac{2-k^2}{\omega}} K(k)$, então*

$$\operatorname{dn}(\beta c; k) = \sqrt{1-k^2},$$

isto é, a função ϕ atinge o seu mínimo no ponto $x = c$, donde segue que $\phi'(c^-) = 0$. Portanto, a condição de continuidade (3.9) e a de salto na derivada (3.10) implicam

$$\frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{2-k^2}} = \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}b), \quad \text{e} \quad \frac{Z}{\sqrt{\omega}} = \tanh(\sqrt{\omega}b),$$

respectivamente. Segue que

$$\frac{1 - k^2}{2 - k^2} + \frac{Z^2}{\omega} = 1. \quad (3.18)$$

Por (3.18) deduzimos que $\alpha = \sqrt{\frac{2\omega}{2-k^2}} = \sqrt{2}|Z|$ e $\beta = \sqrt{\frac{\omega}{2-k^2}} = |Z|$. Neste caso, o perfil $\Phi_{\omega,c,Z}$ em (3.8) fica dado por

$$\Phi_{\omega,Z,c}(x) = \begin{cases} |Z|\sqrt{2(2-k^2)}\operatorname{sech}(Z\sqrt{2-k^2}(x+c-b)), & \text{se } -\infty < x < -c \\ \sqrt{2}|Z|\operatorname{dn}(Zx; k^2), & \text{se } -c \leq x \leq c \\ |Z|\sqrt{2(2-k^2)}\operatorname{sech}(Z\sqrt{2-k^2}(x-c+b)), & \text{se } c < x < +\infty. \end{cases}$$

Então, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixo, deduzimos que

$$\lim_{Z \rightarrow 0} \Phi_{\omega,Z,c}(x) = 0.$$

Como a nossa teoria de estabilidade depende da perturbação analítica dos operadores (1.3) e (1.4), quando Z converge para zero, não é desejável então que o perfil dnoidal $\Phi_{\omega,Z,c}$ em (3.8), convirja para a função nula quando $Z \rightarrow 0$.

Assim, da Proposição 3.1 e da Observação 3.2, podemos supor a seguinte

Condição entre o ponto c e o período minimal da onda dnoidal: Para $k \in (0, 1)$ e $(c, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, supomos que $0 < c < \frac{T_\phi}{2} = \sqrt{\frac{2-k^2}{\omega}}K(k)$.

A figura 3.3 abaixo ilustra o que afirma a Proposição 3.1

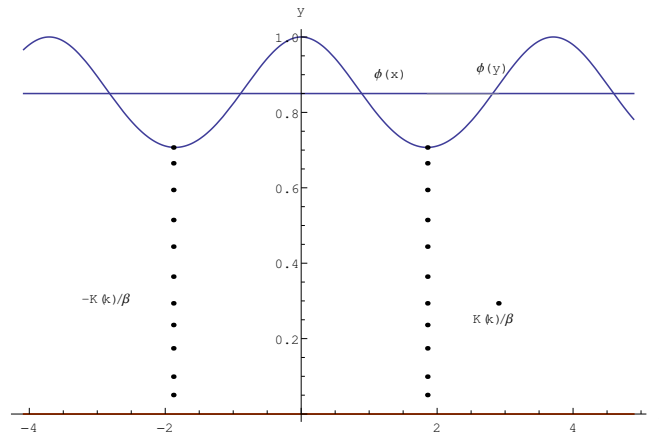


Figura 3.3: Gráfico de ϕ , para $\frac{T_\phi}{2} < c$

Note que da expressão (3.13), deduzida das condições de continuidade (3.9) e salto na derivada (3.10), temos

$$\lim_{Z \rightarrow 0} \omega(1 - k^2) = 0. \quad (3.19)$$

Vamos admitir que os valores admissíveis para ω estão em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que não contém o zero. Portanto, devem existir constantes positivas M e m , com $m < M$; tais que, se $\omega > 0$ é um valor admissível para o modelo (3.8); então $\omega \in I = (m, M)$. Desta maneira, no limite (3.19) devemos ter

$$\lim_{Z \rightarrow 0} k = 1^-. \quad (3.20)$$

Embora esta condição pareça "forçada", ficará claro, nos cálculos a seguir, que é conveniente, porquanto desta maneira; e aproveitando o fato de que $\lim_{k \rightarrow 1^-} dn(\gamma; k) = \operatorname{sech}(\gamma)$ ($\gamma \in \mathbb{R}$), poderemos garantir a valiosa propriedade (3.17).

Em vista de que o período minimal de ϕ é $T_\phi = 2K(k)\sqrt{\frac{2-k^2}{\omega}}$, e levando em consideração a condição anterior sobre ω ; notamos que *sempre* é possível estabelecer a *condição entre c e T_ϕ* , imposta anteriormente. De fato, já que $K(k) \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow 1^-$; se $c > 0$ no modelo (3.8) é *grande*, basta tomar k próximo de 1^- .

Com a seguinte proposição ficará claro o porquê do título desta seção, ou seja, porquê é possível estabelecer um perfil dnoidal entre os pontos de interação c e $-c$ somente quando $Z > 0$. Sob a hipótese sobre ω comentada acima temos o seguinte resultado.

Proposição 3.3 *Seja $\Phi_{\omega, Z, c}$ o perfil dnoidal em (3.8), onde α e β estão dados como em (3.7). Então, para $\phi = \phi_{\alpha, \beta}$ e $Z > 0$ obtemos*

$$\phi'(c^-)\Psi'_{\omega, b}(c^+) > 0, \text{ e, } \phi'(-c^+)\Psi'_{\omega, -b}(-c^-) > 0.$$

Se $Z < 0$, então $\Phi_{\omega, Z, c}$ não satisfaz a segunda condição em (3.2).

Demonstração. A *condição entre c e T_ϕ* , i.e.; $c < \frac{T_\phi}{2}$, implica que para $x \in [-c, c]$ temos $-\frac{T_\phi}{2} < x < \frac{T_\phi}{2}$, ou ainda

$$-K(k) < x\beta < K(k).$$

Portanto,

$$\phi'(x) < 0, \text{ para } 0 < x < c, \text{ e}$$

$$\phi'(x) > 0, \text{ para } -c < x < 0.$$

Decorre disto que $\phi'(c^-) < 0$ e $\phi'(-c^+) > 0$. Segue de (3.15) que

$$\Psi'_{\omega, b}(c^+)\phi'(c^-) \text{ e } \Psi'_{\omega, -b}(-c^-)\phi'(-c^+)$$

são positivos.

Por outro lado, por (3.14) sabemos que $bZ > 0$. Assuma que $Z < 0$, então $b < 0$. Seja $\omega > 0$ fixo. A condição de salto na derivada (3.10) pode-se escrever como

$$\sqrt{\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}b) \tanh(-\sqrt{\omega}b) + \frac{\sqrt{\omega}k^2}{2-k^2} \operatorname{cn}(\beta c) \operatorname{sn}(\beta c) = -Z \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}b). \quad (3.21)$$

Note que $\tanh(-\sqrt{\omega}b) > 0$. De (3.21) segue

$$0 \leq \frac{\sqrt{\omega}k^2}{2-k^2} \operatorname{cn}(\beta c) \operatorname{sn}(\beta c) \leq -Z \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}b). \quad (3.22)$$

Tomando o limite quando $Z \rightarrow 0^-$ em (3.22) temos

$$\operatorname{sech}(\sqrt{\omega}c) \tanh(\sqrt{\omega}c) = 0. \quad (3.23)$$

Aqui foi usado o fato de que $\operatorname{sn}(\gamma; k) \rightarrow \tanh(\gamma)$, quando $k \rightarrow 1^-$. Mas, a equação (3.23) acarreta

$$\operatorname{sech}(\sqrt{\omega}c) = 0 \text{ ou } \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}c) = 1.$$

Como $c > 0$ é fixo, qualquer das duas últimas igualdades é impossível que aconteça. Logo, a segunda condição em (3.2) não pode ser satisfeita se $b < 0$, isto é, se $Z < 0$. ■

A Proposição 3.3 explica a razão pela qual Z deve ser positivo, se queremos ajustar um perfil $\Phi_{\omega,Z,c}$ com uma função dnoidal entre os pontos c e $-c$.

No nosso estudo de estabilidade não omitiremos a condição $0 < c < \frac{T_\phi}{2}$, pois ela irá garantir, como veremos, a possibilidade de determinar o índice de Morse do operador $\mathcal{L}_{1,Z,c}$; número que é vital para as nossas conclusões sobre estabilidade.

Embora o ponto c esteja no intervalo $(0, \frac{T_\phi}{2})$, enfrentamos a questão de saber onde ele está *exatamente* localizado. A proposição seguinte nos dará um argumento para escolher o ponto c como sendo um ponto específico dentro do intervalo $(0, \frac{T_\phi}{2})$. Esta escolha é *bem feita* (não é ambígua) e acarretará boas características sobre o perfil dnoidal $\Phi_{\omega,c,Z}$ em (3.8), no sentido de que muitas contas ficarão relativamente fáceis de fazer.

Proposição 3.4 *Seja $\Phi_{\omega,Z,c}$ o perfil dnoidal dado em (3.8), e $Z > 0$; com*

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\omega}{2-k^2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\omega}{2-k^2}}, \quad e \quad 0 < c < \frac{T_\phi}{2}.$$

Dado que $k \in (0,1)$, então o ponto c deve coincidir com o único ponto em $(0, \frac{T_\phi}{2})$ para o qual vale a relação $\phi''(c) = \Psi''_{\omega,b}(c) = 0$.

Demonstração. Para $Z > 0$ e $0 < c < \frac{T_\phi}{2}$, sejam $s = \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}b)$ e $\gamma = \operatorname{cn}(\beta c)$. De (3.14) sabemos que $b > 0$. Portanto, $\tanh(\sqrt{\omega}b) = \sqrt{1-s^2}$. Já que $0 < c < \frac{T_\phi}{2}$, as quantidades $\operatorname{cn}(\beta c)$ e $\operatorname{sn}(\beta c)$ são positivas, logo $\operatorname{sn}(\beta c) = \sqrt{1-\gamma^2}$.

A condição de salto na derivada, (3.10), se escreve então como

$$-s\sqrt{1-s^2}\sqrt{\omega} + \frac{\sqrt{\omega}k^2}{2-k^2}\sqrt{2s^2-1+k^2-k^2s^2}\sqrt{1-2s^2+s^2k^2} = -Zs,$$

ou equivalentemente,

$$\sqrt{\omega}[(2-k^2)s\sqrt{1-s^2} - k^2\sqrt{2s^2-1+k^2-k^2s^2}\sqrt{1-2s^2+s^2k^2}] = Zs(2-k^2). \quad (3.24)$$

Observe que $k^2\sqrt{2s^2-1+k^2-k^2s^2}\sqrt{1-2s^2+s^2k^2} < (2-k^2)s\sqrt{1-s^2}$, para todo $k \in (0,1)$, então (3.24) é verificada para todo $k \in (0,1)$.

Da condição de continuidade, (3.9), e das identidades elípticas de Jacobi segue-se

$$s^2 = \frac{1-k^2+k^2\operatorname{cn}^2(\beta c)}{2-k^2} = \frac{1-k^2+k^2\gamma^2}{2-k^2}.$$

Agora, isolando γ^2 obtemos

$$\gamma^2 = \frac{2s^2-1+k^2-k^2s^2}{k^2}.$$

Desta maneira, necessário é que $2s^2-1+k^2-k^2s^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2s^2 \geq \frac{2(1-k^2)}{2-k^2}$.

Por outro lado, a identidade

$$\operatorname{sn}^2(\beta c) = 1-\gamma^2 = \frac{1-2s^2+k^2s^2}{k^2}$$

implica que $1-2s^2+k^2s^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1+k^2s^2 \geq 2s^2$. Esta análise mostra que a *condição de continuidade*, (3.9), bem como a *condição de salto na derivada* (3.10) implicam

$$\frac{2(1-k^2)}{2-k^2} \leq 2s^2 \leq 1+k^2s^2. \quad (3.25)$$

Já que $k \in (0, 1)$, tomando o limite quando $k \rightarrow 0^+$ em (3.25), deduzimos

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} s^2 = \frac{1}{2}, \quad (3.26)$$

ou seja, se k varia no intervalo $(0, 1)$ todo; então

$$\operatorname{sech}(\sqrt{\omega}b) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.27)$$

Agora, da condição de continuidade (3.9) e de identidades de funções elípticas de Jacobi, obtemos as equivalências

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} &= \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}b) = \frac{\operatorname{dn}(\beta c)}{\sqrt{2-k^2}} \Leftrightarrow \\ 1 - \frac{k^2}{2} &= \operatorname{dn}^2(\beta c) = 1 - k^2 + k^2 \operatorname{cn}^2(\beta c) \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} &= \operatorname{cn}^2(\beta c). \end{aligned}$$

A seguir, defina $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = A \operatorname{sech}(B(x+C))$, com $A, B, C \in \mathbb{R}$ e $AB \neq 0$. Então $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sech}^2(B(x+C)) = \frac{1}{2}$. Ainda mais, a segunda derivada de ϕ em (3.8) vem dada por

$$\phi''(x) = \frac{\sqrt{2}\omega k^2}{2-k^2} \operatorname{dn}(\beta x)[1-2\operatorname{cn}^2(\beta x)], \quad \text{para } x \in (-c, c).$$

Portanto, como $\omega > 0$ obtemos a relação, $\phi''(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{cn}^2(\beta x) = \frac{1}{2}$.

Desta forma, como para $c < x$, temos $\Psi_{\omega,b}(x) = \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}(x-c+b))$, então obtemos $\Psi''_{\omega,b}(c^+) = 0$, pois $\operatorname{sech}^2(\sqrt{\omega}(c-c+b)) = \frac{1}{2}$. Da mesma forma, obtemos $\phi''(c^-) = 0$. Claramente, nesta situação temos também que

$$\Psi''_{\omega,-b}(-c^-) = \phi''(-c^+) = 0.$$

Isto finaliza a prova. ■

Observação 3.5 1. $\Phi''_{\omega,Z,c}(\pm c) = 0 \Leftrightarrow \Phi^2_{\omega,Z,c}(\pm c) = \omega$. Isto é imediato da Proposição 3.4. Concluímos então que o perfil $\Phi_{\omega,Z,c}$ possui segunda derivada contínua na reta toda. Logo, a primeira equação em (3.2), i.e.,

$$-\Phi^3_{\omega,Z,c}(x) + \omega \Phi_{\omega,Z,c}(x) - \Phi''_{\omega,Z,c}(x) = 0 \quad \text{é satisfeita pontualmente para todo } x \in \mathbb{R} - \{\pm c\}.$$

2. $\operatorname{cn}(\beta c) = \operatorname{sn}(\beta c) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Isto é imediato pela maneira como escolhimos o ponto c , e pelas identidades de Jacobi.

3. $\Psi'_{\omega,b}(c^+) = -\frac{\omega}{\sqrt{2}}$ e $\Psi'_{\omega,-b}(-c^-) = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$. Este é um fato que pode ser mostrado de maneira geral. Suponha que $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, com $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi'(x) = 0$, satisfaz a equação

$$-\Phi^3 + \omega \Phi - \Phi'' = 0,$$

para $\omega > 0$. Então, para $x \in \mathbb{R}$ temos

$$2\Phi^4(x) + 4(\Phi'(x))^2 - 4\omega\Phi^2(x) \equiv 0,$$

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ verifica que $\Phi^2(\pm x_0) = \omega$; então $(\Phi'(\pm x_0))^2 = \frac{\omega^2}{2}$. Como caso particular, tome $\Phi \equiv \Phi_{\omega,Z,c}$ e $x_0 = c$. Devido à condição de salto na derivada (3.10), as derivadas de $\Phi_{\omega,Z,c}$ nos pontos $x = \pm c$ devem ser consideradas unilateralmente. É claro que uma outra forma de provar que $\Psi_{\omega,b}(c^+) = -\frac{\omega}{\sqrt{2}}$ e $\Psi'_{\omega,-b}(-c^-) = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$ é fazendo a conta diretamente da expressão de $\Phi_{\omega,Z,c}$.

4. Já que $Z > 0$ então $b > 0$ e

$$\operatorname{sech}(\sqrt{\omega}b) = \tanh(\sqrt{\omega}b) = \operatorname{cn}(\beta c) = \operatorname{sn}(\beta c) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Segue que a condição de salto na derivada, (3.10), é equivalente à seguinte equação

$$Z = \sqrt{2\omega} \frac{1 - k^2}{2 - k^2}.$$

5. Do item 4. anterior, e dado que

$$\operatorname{sech}(\sqrt{\omega}b) = \operatorname{cn}\left(\sqrt{\frac{\omega}{2 - k^2}}c; k\right) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

temos, para $k \in (0, 1)$,

$$\begin{cases} Z = Z(k) = \frac{\sqrt{2(1-k^2)}}{c\sqrt{2-k^2}} \operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right), \\ \omega = \omega(k) = \frac{2-k^2}{c^2} [\operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right)]^2, \\ b = b(k) = \frac{c}{\sqrt{2-k^2}} \frac{\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right)}. \end{cases} \quad (3.28)$$

Fica claro daqui que os parâmetros α e β , dados em (3.7), podem ser escritos também como função do **módulo** $k \in (0, 1)$. De fato,

$$\beta = \beta(k) = \frac{1}{c} \operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \quad \text{e} \quad \alpha = \alpha(k) = \sqrt{2}\beta(k). \quad (3.29)$$

6. O período da onda dnoidal ϕ está dado por

$$T_\phi = \frac{2K(k)}{\beta} = \frac{2cK(k)}{\operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right)}.$$

Portanto, a condição entre o período da onda ϕ , T_ϕ , e o ponto $x = c$ (ou seja, $c < \frac{T_\phi}{2}$); equivale à desigualdade $\operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) < K(k)$, a qual é verdadeira para todo $k \in (0, 1)$, como mostra a figura 3.4 abaixo.

7. Seja $k \in (0, 1)$, então as funções $k \mapsto \omega(k)$ e $k \mapsto Z(k)$ são **estritamente decrescentes**. Além disso,

$$\omega = \omega(k) \in I_c = \left(\omega^*, \frac{\pi^2}{8c^2}\right), \quad (3.30)$$

onde

$$\omega^* = \lim_{k \rightarrow 1^-} \omega(k) = \left(\frac{\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{c}\right)^2;$$

e

$$Z = Z(k) \in J_c = \left(0, \frac{\pi}{4c}\right), \quad (3.31)$$

sendo

$$\frac{\pi}{4c} = \lim_{k \rightarrow 0^+} Z(k).$$

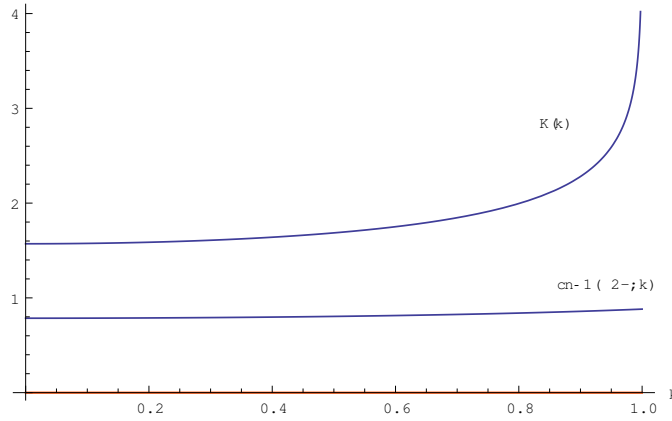


Figura 3.4: Gráficos de $cn^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k)$ e $K(k)$

Com a análise feita até aqui, explicaremos a forma em que determinamos o perfil dnoidal $\Phi_{\omega, Z, c}$, como em (3.8), associado à equação NLS- $\delta_{\pm c}$ (7) e satisfazendo as condições (10).

Defina a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(k) = \frac{1 - k^2}{\sqrt{2 - k^2}} cn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right).$$

Dado que $f'(k) = \frac{k(k^2-3)}{\sqrt{(2-k^2)^3}} cn^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k) + \frac{1-k^2}{\sqrt{2-k^2}} \frac{d}{dk} cn^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k) < 0$, segue que f é uma função *estritamente decrescente*. Como $0 = f(1) < f(k) < \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{4} = f(0)$, para todo $k \in (0, 1)$; então para $c > 0$ fixo, e $Z \in (0, \frac{\pi}{4c})$, o *Teorema do valor intermediário* garante a existência de um *único* número $k \in (0, 1)$ tal que a primeira expressão em (3.28) é satisfeita. O gráfico de f é mostrado na figura 3.5 abaixo, assim como aquele da função $k \mapsto c^2 \omega(k) = (2 - k^2)[cn^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k)]^2$ na figura 3.6.

Ilustraremos o anterior com um exemplo. Seja $c = 0,5$, então os correspondentes intervalos $I_{0,5}$ e $J_{0,5}$ no inciso 7. da observação (3.5) são $I_{0,5} = \left(4 \left[sech^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^2, \frac{\pi^2}{2}\right)$ e $J_{0,5} = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Poderemos determinar o perfil dnoidal $\Phi_{\omega, Z, c}$, apenas quando $Z \in J_{0,5}$. Suponhamos que $Z = 1,5$; então o *único* número em $(0, 1)$ tal que

$$1.5 = 2\sqrt{2} \frac{1 - k^2}{\sqrt{2 - k^2}} cn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right)$$

é $k \approx 0.258761757$. A partir das fórmulas explícitas dadas em (3.28) é possível calcular exatamente os valores para ω e para o parâmetro de translação b . Da mesma maneira, das fórmulas dadas em (3.29), calculamos α e β . O gráfico correspondente do perfil $\Phi_{\omega, Z, c}$ para estes valores, é mostrado na figura 3.7

É claro que pela análise feita acima, temos que o perfil dnoidal $\Phi_{\omega, Z, c}$ em (3.8) pode ser obtido como uma função suave do parâmetro ω , ou então como uma função suave do *módulo* k . Mais ainda, já que para todo $k \in (0, 1)$ temos $\omega \in I_c$ está "longe do zero", obtemos a relação

$$Z \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow k \rightarrow 1^- \tag{3.32}$$

3.1. EXISTÊNCIA DE UM PERFIL PERIÓDICO ENTRE OS PONTOS DE INTERAÇÃO 25

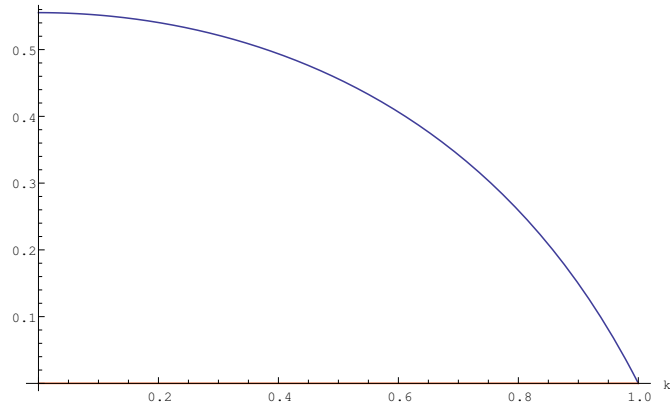


Figura 3.5: Gráfico de $k \in (0, 1) \mapsto \frac{1-k^2}{\sqrt{2-k^2}} \operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right)$

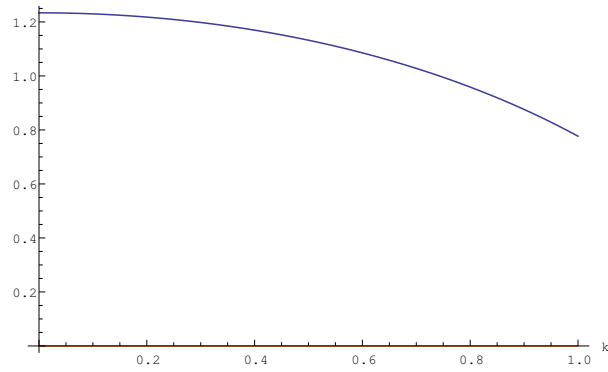


Figura 3.6: Gráfico de $k \in (0, 1) \mapsto c^2 \omega(k) = (2 - k^2) [\operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right)]^2$

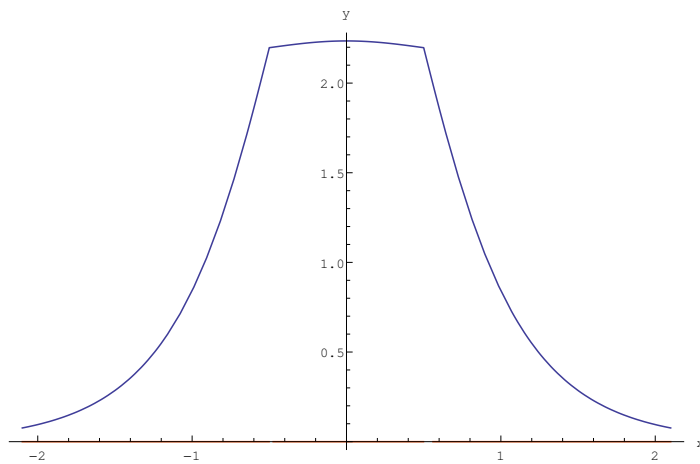


Figura 3.7: Gráfico de $\Phi_{\omega, Z, c}$ para $Z = 1,5$ e $c = 0,5$

Estabelecemos a seguir nosso primeiro Teorema sobre a existência de um perfil periódico de tipo dnoidal para o problema de fronteira (10).

Teorema 3.6 *Seja $c > 0$ fixo. Para $Z \in \left(0, \frac{\pi}{4c}\right)$ escolhemos os parâmetros ω, b e $k \in (0, 1)$ tais que $\operatorname{sech}(\sqrt{\omega}b) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{cn}\left(\sqrt{\frac{\omega}{2-k^2}}c; k\right)$ (ver (3.28)). Então, para $\omega \in \left(\frac{1}{c^2}[\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)]^2, \frac{\pi^2}{8c^2}\right)$ o perfil positivo e par*

$$\Phi_{\omega, Z, c}(x) = \begin{cases} \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}(x+c-b)), & \text{se } -\infty < x < -c \\ \sqrt{\frac{2\omega}{2-k^2}} \operatorname{dn}\left(\sqrt{\frac{\omega}{2-k^2}}x; k\right), & \text{se } -c \leq x \leq c \\ \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}(x-c+b)), & \text{se } c < x < \infty \end{cases} \quad (3.33)$$

satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\Phi_{\omega, Z, c} \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{\pm c\}) \cap C(\mathbb{R})$,
2. $\Phi''_{\omega, Z, c}(x) - \omega \Phi_{\omega, Z, c}(x) + \Phi_{\omega, Z, c}^3(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$,
3. $\Phi'_{\omega, Z, c}(\pm c^+) - \Phi'_{\omega, Z, c}(\pm c^-) = -Z \Phi_{\omega, Z, c}(\pm c) \Leftrightarrow Z = \sqrt{2\omega} \frac{1-k^2}{2-k^2}$,
4. $\Phi''_{\omega, Z, c}(\pm c) = 0 \Leftrightarrow \Phi_{\omega, Z, c}(\pm c) = \sqrt{\omega}$,
5. $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \Phi_{\omega, Z, c}(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \Phi'_{\omega, Z, c}(x) = 0$,
6. $\lim_{Z \rightarrow 0^+} |b-c| = \lim_{k \rightarrow 1^-} |b(k) - c| = 0$,
7. Se definirmos $\Psi(x) = \sqrt{2\omega^*} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega^*}x)$, com

$$\omega^* = \left(\frac{\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{c} \right)^2,$$

então para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $\Phi_{\omega, Z, c}(x) \rightarrow \Psi(x)$, quando $Z \rightarrow 0^+$. Mais ainda,

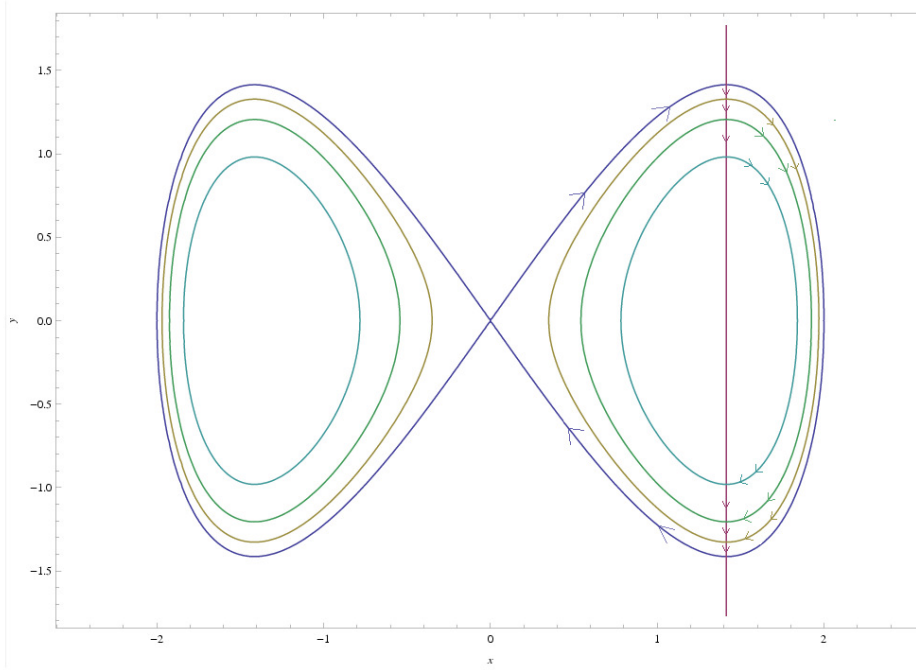
$$\lim_{Z \rightarrow 0^+} \Phi_{\omega, Z, c} \equiv \Psi \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}).$$

8. $\Phi_{\omega, Z, c} \in \mathcal{D}\left(-\frac{d^2}{dx^2} - Z[\delta_c + \delta_{-c}]\right)$.

Demonstração. A prova segue imediatamente da análise feita anteriormente ■

Cabe destacar aqui a razão pela qual no capítulo 2, onde foi tratado o problema da boa colocação global do problema (2.5), escolhimos Z no intervalo $(-\infty, \frac{\pi}{4c})$: isto decorre da maneira de escolher o ponto de interação $x = c$ no intervalo $\left(0, \frac{T_\phi}{2}\right)$; pois nesta situação, o inciso 5. na observação 3.5, implica $0 < Z < \frac{\pi}{4c}$.

Na figura 3.8 abaixo, mostramos o correspondente *diagrama de fase* em coordenadas (Φ, Φ') , associado ao perfil dnoidal $\Phi \equiv \Phi_{\omega, Z, c}$ dado no Teorema 3.6. Na *condição de salto na derivada* nos pontos $x = \pm c$ (representada pela reta vertical), consideramos o caso $\omega = 2$, e $c = 0,63; 0,64$ e $0,66$. Note que a trajetória da "parte dnoidal" da $\Phi_{\omega, Z, c}$ está no interior da separatrix determinada pelo soliton "secante hiperbólica", e é percorrida no sentido horário- como indicam as setas- (convex profile on $[-c, c]$). A diferença das trajetórias do nosso trabalho com aqueles estudados por Jackson&Weinstein em [30], é que estas últimas estão no sentido anti-horário (concave profile on $[-c, c]$).


 Figura 3.8: Diagrama de fase associado ao perfil dnoidal $\Phi_{\omega, Z, c}$

3.1.2 Perfil cnoidal para $Z < 0$

Vamos supor agora que entre os pontos $x = \pm c$, temos um perfil *cnoidal*. Especificamente, uma função do tipo

$$\tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}(x) = \begin{cases} \tilde{\Psi}_{-d}(x) = \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}(x + c - d)), & \text{se } -\infty < x < -c \\ \tilde{\phi}_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\theta}}(x) = \tilde{\alpha} \operatorname{cn}(\tilde{\beta}x + \tilde{\theta}; k), & \text{se } -c \leq x \leq c \\ \tilde{\Psi}_d(x) = \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}(x - c + d)), & \text{se } c < x < +\infty \end{cases} \quad (3.34)$$

Em uma análise totalmente análoga ao caso do perfil dnoidal, supondo que $\tilde{\phi}_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\theta}}$ seja uma solução par da equação elíptica (3.2), devemos ter $\tilde{\theta} = 0$ ou $\tilde{\theta} = 2K(k)$ (pois o período da cnoidal $x \mapsto \operatorname{cn}(x; k)$ é $4K(k)$). Também, para $x \in (-c, c)$, se $\tilde{\alpha}\tilde{\beta} \neq 0$, então

$$\operatorname{dn}^2(\tilde{\beta}x + \tilde{\theta}; k) - \frac{\tilde{\alpha}^2}{2\tilde{\beta}^2} \operatorname{cn}^2(\tilde{\beta}x + \tilde{\theta}; k) = \frac{\tilde{\beta}^2 - \omega}{2\tilde{\beta}^2}.$$

Pelas identidades das funções elípticas de Jacobi se escolhermos, $\frac{\tilde{\alpha}^2}{2\tilde{\beta}^2} = k^2$ e $\frac{\tilde{\beta}^2 - \omega}{2\tilde{\beta}^2} = 1 - k^2$, obtemos

$$\tilde{\alpha}^2 = \frac{2\omega}{2k^2 - 1} k^2, \quad \text{and,} \quad \tilde{\beta}^2 = \frac{\omega}{2k^2 - 1} \quad \text{e} \quad \tilde{\theta} = 0 \quad \text{ou} \quad \tilde{\theta} = 2K(k).$$

Dado que $\omega > 0$, da expressão de $\tilde{\beta}$ acima deduzimos que $2k^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow k^2 > \frac{1}{2}$. Assumiremos, doravante, que $\tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}$ é positivo, com $\tilde{\theta} = 0$. Então para $\frac{1}{2} < k^2 < 1$ e $\tilde{\theta} = 0$, escolhemos

$$\tilde{\alpha} = \sqrt{\frac{2\omega}{2k^2 - 1}} k, \quad \tilde{\beta} = \sqrt{\frac{\omega}{2k^2 - 1}}. \quad (3.35)$$

Nestas circunstâncias, as correspondentes condições de *continuidade* e *salto na derivada* que deve satisfazer o perfil $\tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}$ em (3.34) são:

1) Condição de continuidade: O perfil $\tilde{\Phi}_{\omega,Z,c}$ em (3.34) é contínuo em $x = \pm c$, logo

$$\frac{kc n(\tilde{\beta}c)}{\sqrt{2k^2 - 1}} = \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}d). \quad (3.36)$$

2) Condição de salto na derivada: O perfil $\tilde{\Phi}_{\omega,Z,c}$ verifica a equação

$$-\sqrt{\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}d) \tanh(\sqrt{\omega}d) + \frac{\sqrt{\omega}k}{2k^2 - 1} \operatorname{sn}(\tilde{\beta}c) \operatorname{dn}(\tilde{\beta}c) = -Z \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}d), \quad (3.37)$$

Vamos fazer uma análise sobre a localização do ponto $x = c$. Como $\tilde{\theta} = 0$, e o período minimal da onda cnoidal $\tilde{\phi} \equiv \tilde{\phi}_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$, em (3.34), é

$$T_{\tilde{\phi}} = \frac{4K(k)}{\tilde{\beta}} = 4K(k) \sqrt{\frac{2k^2 - 1}{\omega}}, \quad k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right),$$

então $c \in \left(\frac{3T_{\tilde{\phi}}}{4}, T_{\tilde{\phi}} \right)$ implica a existência de dois pontos $x \in \left(0, \frac{T_{\tilde{\phi}}}{4} \right)$ e $y \in \left(\frac{3T_{\tilde{\phi}}}{4}, c \right)$ tais que $\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(y)$. Sob a mesma ideia que no caso dnoidal, é desejável que o perfil $\tilde{\Phi}_{\omega,Z,c}$ em (3.34), satisfaça que

$$\lim_{Z \rightarrow 0} \tilde{\Phi}_{\omega,Z,c}(x) = \tilde{\Psi}(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm c\}, \quad (3.38)$$

sendo $\tilde{\Psi}$ uma função da forma $\tilde{\Psi}(x) = \sqrt{2\omega^*} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega^*}x)$, para $\omega^* > 0$ específico. De forma particular, se isto for possível, deveríamos ter que $\tilde{\phi}(x) \rightarrow \tilde{\Psi}(x)$ e $\tilde{\phi}(y) \rightarrow \tilde{\Psi}(y)$ quando $Z \rightarrow 0$. Mas, como a função secante hiperbólica é estritamente decrescente em $(0, \infty)$, tal coisa não pode acontecer. Mais ainda, isto implica que, com o objetivo de que o limite (3.38) seja obtido; o ponto c não pode pertencer a algum dos intervalos da forma $\left(\frac{3T_{\tilde{\phi}}}{4}, \frac{5T_{\tilde{\phi}}}{4} \right); \left(\frac{7T_{\tilde{\phi}}}{4}, \frac{9T_{\tilde{\phi}}}{4} \right); \left(\frac{11T_{\tilde{\phi}}}{4}, \frac{13T_{\tilde{\phi}}}{4} \right), \dots$ etc. Com o objetivo de que o perfil $\tilde{\Phi}_{\omega,Z,c}$ seja positivo, supomos a seguinte

Condição entre o ponto c e o período minimal da onda cnoidal: para $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right)$ e $(c, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, supomos que $c < \frac{T_{\tilde{\phi}}}{4} = \sqrt{\frac{2k^2 - 1}{\omega}} K(k)$.

Note que se $c = \frac{T_{\tilde{\phi}}}{4}$, então $\tilde{\Phi}_{\omega,Z,c}(c^-) = \tilde{\phi}(c) = 0$. Portanto, não é possível obter um perfil cnoidal *contínuo* em $[-c, c]$. Isto segue do fato da função secante hiperbólica ser estritamente positiva na reta. Sob esta condição entre c e $T_{\tilde{\phi}}$ temos a seguinte

Proposição 3.7 *Seja $\tilde{\Phi}_{\omega,Z,c}$ o perfil cnoidal dado em (3.34), com $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ definidos como em (3.35), e seja $k^2 > \frac{1}{2}$. Suponha que $0 < c < \frac{T_{\tilde{\phi}}}{4} = \sqrt{\frac{2k^2 - 1}{\omega}} K(k)$.*

- 1) *Se $Z > 0$ então $d > 0$, e não é possível estabelecer um perfil cnoidal $\tilde{\phi} = \phi_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\theta}}$ em $[-c, c]$.*
- 2) *Para $Z < 0$, se for possível estabelecer um perfil cnoidal em $[-c, c]$, satisfazendo a condição de salto na derivada (3.37), necessário é que $d > 0$. Neste caso temos $\tilde{\Psi}'_{-b}(-c^-) \tilde{\phi}'(-c^+) > 0$ e $\tilde{\phi}'(c^-) \tilde{\Psi}'_b(c^+) > 0$.*

Demonstração.

1) Outra forma de escrever a condição (3.37) é

$$\frac{\sqrt{\omega}k \operatorname{sn}(\tilde{\beta}c) \operatorname{dn}(\tilde{\beta}c)}{2k^2 - 1} = \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}d) [\sqrt{\omega} \operatorname{tanh}(\sqrt{\omega}d) - Z].$$

Já que $0 < c < \frac{T_{\tilde{\phi}}}{4}$, então $\operatorname{sn}(\tilde{\beta}c) > 0$. Segue da expressão acima que $Z > 0$ implica $d > 0$.

Por outro lado, sejam $s \equiv \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}d)$ e $\gamma \equiv \operatorname{cn}(\tilde{\beta}c)$. Pela *condição de continuidade* (3.36) temos

$$\gamma^2 = \frac{2k^2 - 1}{k^2} s^2,$$

logo

$$\operatorname{sn}^2(\tilde{\beta}c) = \frac{k^2 - (2k^2 - 1)s^2}{k^2}, \quad \operatorname{dn}^2(\tilde{\beta}c) = 1 - k^2 + (2k^2 - 1)s^2.$$

Note que para todo $k \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ temos $k^2 - (2k^2 - 1)s^2, 1 - k^2 + (2k^2 - 1)s^2 > 0$. Já que $Z > 0$ implica $d > 0$, a *condição de salto na derivada* (3.37) é escrita como

$$\sqrt{\omega} s \sqrt{1 - s^2} - \frac{k\sqrt{\omega}}{2k^2 - 1} \sqrt{k^2 - (2k^2 - 1)s^2} \sqrt{1 - k^2 + (2k^2 - 1)s^2} = Zs,$$

ou equivalentemente

$$\sqrt{\omega} [s(2k^2 - 1)\sqrt{1 - s^2} - k\sqrt{k^2 - (2k^2 - 1)s^2} \sqrt{1 - k^2 + (2k^2 - 1)s^2}] = Zs(2k^2 - 1) > 0.$$

Mas isto implica

$$s(2k^2 - 1)\sqrt{1 - s^2} > k\sqrt{k^2 - (2k^2 - 1)s^2} \sqrt{1 - k^2 + (2k^2 - 1)s^2}. \quad (3.39)$$

Observe que $k^2 - (2k^2 - 1)s^2 = k^2(1 - s^2) + s^2(1 - k^2) > k^2(1 - s^2)$, e, $1 - k^2 + (2k^2 - 1)s^2 > s^2(2k^2 - 1)$, então

$$\sqrt{k^2 - (2k^2 - 1)s^2} \sqrt{1 - k^2 + (2k^2 - 1)s^2} > sk\sqrt{1 - s^2} \sqrt{2k^2 - 1}.$$

De (3.39) obtemos

$$\sqrt{2k^2 - 1} > k^2 \Leftrightarrow 0 > (k^2 - 1)^2,$$

o que claramente é absurdo. Em consequência, se $Z > 0$ não é possível estabelecer uma *onda cnoidal* no intervalo $(-c, c)$.

2) Assuma que $Z < 0$ e $b < 0$. Segue que $\operatorname{tanh}(\sqrt{\omega}b) < 0$ e, com a notação anterior, $|\operatorname{tanh}(\sqrt{\omega}b)| = \sqrt{1 - s^2}$, portanto $\operatorname{tanh}(\sqrt{\omega}b) = -\sqrt{1 - s^2}$. A *condição de salto na derivada*, (3.37), fica então

$$\sqrt{\omega} [s\sqrt{1 - s^2}(2k^2 - 1) + k\sqrt{k^2 - (2k^2 - 1)s^2} \sqrt{1 - k^2 + (2k^2 - 1)s^2}] = -Zs(2k^2 - 1) > 0.$$

Segue, da equação anterior

$$\sqrt{\omega} s \sqrt{1 - s^2} (2k^2 - 1) < -Zs(2k^2 - 1).$$

E portanto $\lim_{Z \rightarrow 0^-} s = 1$, o que é impossível. Desta maneira, se $Z < 0$ então $d > 0$.

A condição sobre os produtos das derivadas segue do fato de que $d > 0$.

■

Observação 3.8 Para $\tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}$ como em (3.34) obtemos, para $x \in (-c, c)$, $\tilde{\phi}''(x) = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}cn(\tilde{\beta}x)[1 - 2dn^2(\tilde{\beta}x)]$. Portanto, já que $c < \frac{T_{\tilde{\phi}}}{4}$ temos, $\tilde{\phi}''(x) = 0 \Leftrightarrow dn^2(\tilde{\beta}x) = \frac{1}{2}$. Além disto, se $\tilde{\phi}''(c) = 0$ então, da condição de continuidade (3.36), vale $sech^2(\sqrt{\omega}b) = \frac{1}{2}$. Logo, a função $\tilde{\Psi}_d(x) = \sqrt{2\omega}sech(\sqrt{\omega}(x - c + d))$ verifica $\tilde{\Psi}_d''(c^+) = 0$.

Embora não exista neste caso cnoidal uma relação básica -ou a priori- similar à Proposição 3.4 como no caso dnoidal que permita dar um argumento para escolher onde está o ponto c , estabeleceremos aqui, baseados na observação anterior 3.8, a mesma condição que no caso $Z > 0$, a saber: c coincidirá com o único ponto em $\left(0, \frac{T_{\tilde{\phi}}}{4}\right)$ tal que $dn(\tilde{\beta}c) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. O ponto $c \in \left(0, \frac{T_{\tilde{\phi}}}{4}\right)$ é, de fato, o único ponto de inflexão da curva $\tilde{\phi}$ em (3.36). É apropriado fazer as seguintes observações, sendo $\tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}$ o perfil cnoidal (3.34) e $Z < 0$

Observação 3.9 (a) A condição de salto na derivada, (3.37) é equivalente á equação

$$Z = -\sqrt{2\omega} \frac{1 - k^2}{2k^2 - 1}. \quad (3.40)$$

Então, já que $dn^{-1}(y; k)$ está bem definida para $\sqrt{1 - k^2} \leq y < 1$, (neste caso particular $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\sqrt{1 - k^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq k^2$), segue-se de (3.40) que Z, ω e d podem ser determinados como funções do módulo elíptico. Concretamente, para $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$,

$$\begin{cases} Z = Z(k) = -\frac{\sqrt{2}(1 - k^2)}{c\sqrt{2k^2 - 1}} dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right), \\ \omega = \omega(k) = \frac{2k^2 - 1}{c^2} [dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right)]^2, \\ d = d(k) = \frac{c}{\sqrt{2k^2 - 1}} \frac{sech^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right)}. \end{cases} \quad (3.41)$$

(b) Dado que para todo $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ temos

$$dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) < K(k), \quad sech^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) < dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

a partir do inciso (a) anterior resulta que para $\tilde{\beta} = \sqrt{\frac{\omega}{2k^2 - 1}}$, a condição entre c e o período minimal da onda $\tilde{\phi}$ é sempre obtida, pois $\tilde{\beta}c = dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) < K(k)$. Mais ainda,

$$\omega \in P_c = \left(0, \frac{1}{c^2} \left[sech^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^2\right). \quad (3.42)$$

(c) Dado que $g(k) = -\frac{1 - k^2}{\sqrt{2k^2 - 1}} dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right)$ é estritamente crescente para $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$, com $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\infty$ e $g(1) = 0$, obtemos que para cada

$$Z \in Q_c = (-\infty, 0) \quad (3.43)$$

3.1. EXISTÊNCIA DE UM PERFIL PERIÓDICO ENTRE OS PONTOS DE INTERAÇÃO 31

existe um único número $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ tal que a primeira equação em (3.41) é verificada (Teorema do valor intermediário).

(d) A função $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \mapsto \omega(k)$ é **estritamente crescente**. Desta análise toda, concluímos que o perfil cnoidal $\tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}$ em (3.34) pode ser construído como uma função suave de ω ; ou então como uma função suave do módulo k .

(e) De (3.41) resulta a vital relação

$$Z \rightarrow 0^- \Leftrightarrow k \rightarrow 1^-. \quad (3.44)$$

Daremos um exemplo da maneira em que pode ser construído um perfil cnoidal $\tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}$. Seja $c = 0, 1$. Então podemos estabelecer nosso perfil cnoidal, por exemplo, para $Z = -1$. De fato, o único número em $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ que satisfaz a relação

$$-1 = -\frac{\sqrt{2}}{0.1} \frac{1 - k^2}{\sqrt{2k^2 - 1}} dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right)$$

é aproximadamente $k \approx 0.96394663$. A figura 3.9 mostra este perfil. A figura 3.10 mostra que a função $\omega(k)$ é **crescente**. Estabeleceremos a seguir o Teorema sobre a existência de um perfil positivo par, de tipo cnoidal para o problema de fronteira (10), com $Z < 0$.

Teorema 3.10 *Seja $c > 0$ fixo. Par $Z \in (-\infty, 0)$ escolhamos os parâmetro ω, d e $k \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ tais que $\operatorname{sech}(\sqrt{\omega}d) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{dn}(\sqrt{\frac{\omega}{2k^2-1}}c; k)$ (ver (3.41)). Então, para $\omega \in (0, \frac{1}{c^2}[\operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})]^2)$ temos que o perfil positivo e par*

$$\tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}(x) = \begin{cases} \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}(x+c-d)), & \text{se } -\infty < x < -c \\ \sqrt{\frac{2\omega}{2k^2-1}} \operatorname{cn}(\sqrt{\frac{\omega}{2k^2-1}}x; k), & \text{se } -c \leq x \leq c \\ \sqrt{2\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}(x-c+d)), & \text{se } c < x < \infty \end{cases} \quad (3.45)$$

satisfaz:

- (a) $\tilde{\Phi}_{\omega, Z, c} \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{\pm c\}) \cap C(\mathbb{R})$,
- (b) $\tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}''(x) - \omega \tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}(x) + \tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}^3(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$,
- (c) $\tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}'(\pm c^+) - \tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}'(\pm c^-) = -Z \tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}(\pm c) \Leftrightarrow Z = -\sqrt{2\omega} \frac{1-k^2}{2k^2-1}$,
- (d) $\tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}''(\pm c) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}(\pm c) = \sqrt{\omega}$,
- (e) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}'(x) = 0$,
- (f) $\lim_{Z \rightarrow 0^-} |d-c| = \lim_{k \rightarrow 1^-} |d(k)-c| = 0$,
- (g) Se definirmos $\tilde{\Psi}(x) = \sqrt{2\omega^*} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega^*}x)$, com

$$\omega^* = \left(\frac{\operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})}{c} \right)^2$$

então para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $\tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}(x) \rightarrow \tilde{\Psi}(x)$, quando $Z \rightarrow 0^-$. Além disto,

$$\lim_{Z \rightarrow 0^-} \tilde{\Phi}_{\omega, Z, c} \equiv \tilde{\Psi} \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}).$$

$$(h) \tilde{\Phi}_{\omega, Z, c} \in \mathcal{D} \left(-\frac{d^2}{dx^2} - Z[\delta_c + \delta_{-c}] \right).$$

Notamos que a maneira como fizemos a construção dos perfis *dnoidal* $\Phi_{\omega, Z, c}$ como no Teorema 3.6, para $Z > 0$, e *cnoidal* $\tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}$ como no Teorema 3.10, para $Z < 0$ é; em ambos os casos, garantindo que a **segunda derivada** de tais perfis seja **contínua** nos pontos $x = \pm c$ (e portanto na reta toda). Esta condição foi inspirada, essencialmente, a partir da Proposição (3.4). Embora particular, esta escolha resulta ser razoável e essencial para nossa teoria de estabilidade: *para ambos os sinais do parâmetro Z , o limite do perfil $\Phi_{\omega, Z, c}$ é o mesmo tipo de soliton Ψ !* Além disso, como ficará claro no seguinte capítulo, este fato será essencial para determinar o índice de Morse do operador $\mathcal{L}_{1, Z, c}$.

Concluimos este capítulo com o correspondente *diagrama de fase* (figura 3.11 abaixo) associado ao perfil *cnoidal* $\zeta \equiv \tilde{\Phi}_{\omega, Z, c}$ no Teorema 3.10. Este diagrama, em coordenadas (ζ, ζ') , é para o caso particular em que $\omega = 2$, e $c = 0,63; 0,64$ e $0,65$. Notamos que a trajetória da parte "cnoidal" deste diagrama, a qual está no exterior da separatrix determinada pelo soliton de tipo "secante hiperbólica", é percorrida também no sentido horário, como aconteceu no diagrama de fase para o caso *dnoidal* (ver figura 3.8). Notamos também a paridade deste perfil e a condição de salto na derivada (reta vertical).

Figura 3.9: Perfil *cnoidal* $\tilde{\Phi}_{\omega,Z,c}$ para $Z = -1$ e $c = 0.1$

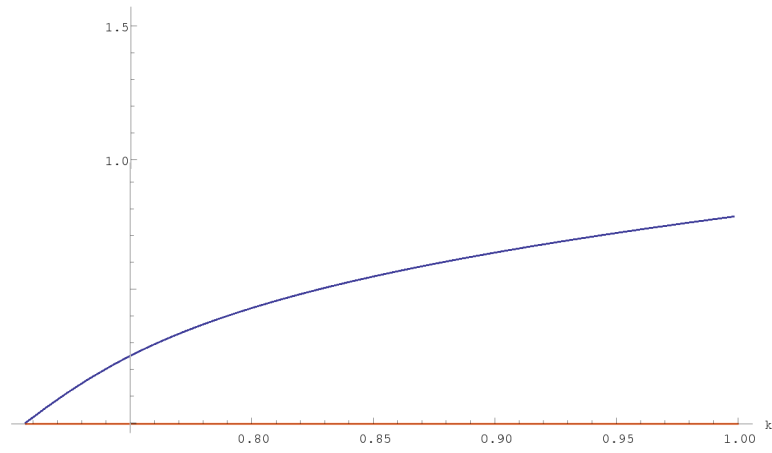


Figura 3.10: Gráfico de $k \in (\frac{1}{\sqrt{2}}; k) \rightarrow c^2\omega(k)$

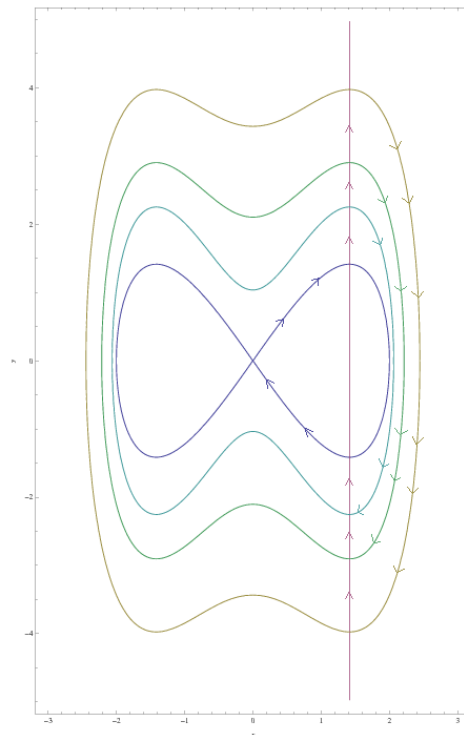


Figura 3.11: Diagrama de fase do perfil cnoidal $\tilde{\Phi}_{\omega,Z,c}$

Capítulo 4

Teoria de Estabilidade

O objetivo deste capítulo é o de estabelecer a prova do resultado de estabilidade não-linear estabelecido no Teorema 0.2 da introdução. Nossa estratégia é seguir a teoria geral desenvolvida por Grillakis&Shatah&Strauss em [24]. Assim, pelo estabelecido na seção 1.1, nosso intuito é aplicar o Teorema 1.2. Iniciaremos com o estudo de específicas condições espectrais dos operadores $\mathcal{L}_{2,Z,c}$ e $\mathcal{L}_{1,Z,c}$ em (1.4) e (1.3), respectivamente. O uso da teoria de Floquet, da representação de formas bilineares e da teoria de perturbação analítica de operadores serão ferramentas essenciais na nossa análise. O uso dos projetores de Riesz serão necessários em um argumento de continuação no estudo do índice de Morse para o operador $\mathcal{L}_{1,Z,c}$. A condição de convexidade da aplicação $\omega \rightarrow \|\Phi_{\omega,Z,c}\|^2$ torna-se um problema tecnicamente complicado de cálculos devido ao uso de funções de tipo elíptico. Para contornar este problema, foi necessário recorrer a ferramentas de tipo computacional.

4.1 Análise espectral dos operadores $\mathcal{L}_{1,Z,c}$ e $\mathcal{L}_{2,Z,c}$

A seguir Φ_Z representará em geral, bem o perfil dnoidal $\Phi_{\omega,Z,c}$ dado no Teorema 3.6, bem o perfil cnoidal $\tilde{\Phi}_{\omega,Z,c}$ no Teorema 3.10.

Lema 4.1 *Seja $Z \neq 0$ e admissível, no sentido de que $Z \in (-\infty, \frac{\pi}{4c})$. Então,*

- (1) $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{2,Z,c}$ é um operador não negativo cujo espectro essencial é $[\omega, \infty)$; e com espectro discreto contido em $[0, \omega)$. O zero é um autovalor simples, com autofunção associada Φ_Z e assim $\ker(\mathcal{L}_2) = [\Phi_Z]$.
- (2) $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{1,Z,c}$ é um operador com espectro essencial igual a $[\omega, +\infty)$, e espectro discreto em $(-\infty, \omega)$.

Demonstração. Já que $\Phi_Z(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow +\infty$, o Teorema de Weyl's mostra que o espectro essencial dos operadores \mathcal{L}_i , para $i = 1, 2$ é como enunciado. Que o espectro discreto seja como afirmado acima, segue de argumentos clássicos (ver Berezin&Shubin [8]).

Agora, de (3.2) segue imediatamente que $\mathcal{L}_2\Phi_Z = 0$. Além do mais, como $\Phi_Z > 0$, pelo Teorema de Frobenius-Perron, temos que $e = \inf \sigma(\mathcal{L}_2)$ é um autovalor simples, portanto deduzimos que $e = 0$. Logo, $\ker(\mathcal{L}_2) = [\Phi_Z]$. ■

Trataremos a seguir um problema delicado, a saber: a estrutura do kernel de $\mathcal{L}_{1,Z,c}$.

Lema 4.2 *Sejam $Z \neq 0$ e Φ_Z definido como no Teorema 3.6 ou no Teorema 3.10. Então $\mathcal{L}_{1,Z,c}$ tem kernel trivial.*

Demonstração. Dividiremos a prova para os perfis dnoidal e cnoidal.

- a) Caso $Z > 0$. Seja $f \in Ker(\mathcal{L}_{1,Z,c})$. Inicialmente, de (3.2) temos $\Phi_Z \in C^\infty((-\infty, -c) \cup (c, +\infty))$ e para $|x| > c$, vale a relação

$$-\Phi_Z'''(x) + (\omega - 3\Phi_Z^2)\Phi_Z'(x) = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \Phi_Z'(x) = 0.$$

Portanto, do Theorem 3.6 acima e usando Teorema 3.3 in [8], devem existir constantes λ e η tais que

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\phi'_{-b}(x), & \text{se } x < -c, \\ g(x), & \text{se } x \in [-c, c], \\ \eta\phi'_b(x), & \text{se } c < x, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $g \equiv f|_{[-c,c]}$. Agora, dado que para $x \in [-c, c]$ vale $-f''(x) + \omega f(x) - 3\phi^2(x)f(x) = 0$, com

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2\omega}{2-k^2}} dn\left(\sqrt{\frac{\omega}{2-k^2}}x; k\right),$$

então para $\beta = \sqrt{\frac{2-k^2}{\omega}}$, a função $\psi(x) \equiv f(\beta x)$ satisfaz a seguinte equação de Lamé

$$L\psi(x) \equiv \psi''(x) + [k^2 + 4 - 6k^2 sn^2(x; k)]\psi = 0, \quad x \in \left[-\frac{c}{\beta}, \frac{c}{\beta}\right]. \quad (4.2)$$

De (3.2) e do Teorema 3.6 temos $\mathcal{L}_{1,Z,c}\phi'(x) = 0$ para cada $x \in [-c, c]$. Portanto,

$$\Lambda_1(x) \equiv -\frac{2-k^2}{\omega k^2 \sqrt{2}} \phi'(\beta x) = sn(x; k)cn(x; k), \quad x \in \left[-\frac{c}{\beta}, \frac{c}{\beta}\right]$$

pertence ao kernel, $Ker(L)$, de L . Segue, da Teoria de Floquet (veja pg. 532 em Angulo&Ponce [5]) que o problema linear

$$\begin{cases} L\Phi(x) = \Phi''(x) + [k^2 + 4 - 6k^2 sn^2(x; k)]\Phi(x) = 0, & x \in \left[-\frac{c}{\beta}, \frac{c}{\beta}\right] \\ \Phi \in H^2\left(-\frac{c}{\beta}, \frac{c}{\beta}\right), \end{cases}$$

tem por conjunto linearmente independente de soluções em $\left[-\frac{c}{\beta}, \frac{c}{\beta}\right]$, às funções $\{\Lambda_1, \Lambda_2\}$. Aqui, se $Z(x) = Z(x; k)$ representa a função Zeta de Jacobi,

$$Z(x) = \int_0^x \left[dn^2(y; k) - \frac{E(k)}{K(k)} \right] dy,$$

a qual é uma função periódica com período $2K(k)$ e ímpar em x , temos

$$\begin{aligned} \Lambda_2(x) &= x \left[2 - \frac{2-k^2}{1-k^2} \frac{E(k)}{K(k)} \right] \Lambda_1(x) \\ &+ \left[\frac{1}{1-k^2} dn(x) [sn^2(x) - (1-k^2)cn^2(x)] - \frac{2-k^2}{1-k^2} Z(x) \Lambda_1(x) \right] \\ &\equiv x\gamma \Lambda_1(x) + p_1(x), \end{aligned} \quad (4.3)$$

com $\gamma < 0$ e p_1 sendo uma função par em $[-\frac{c}{\beta}, \frac{c}{\beta}]$ (na verdade par e periódica na reta, com período $2K(k)$; se considerarmos Λ_1 definida na reta). Portanto, de (4.2) existem $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$ tais que $\psi(y) = \alpha\Lambda_1(y) + \theta\Lambda_2(y)$, para todo $y \in [-\frac{c}{\beta}, \frac{c}{\beta}]$. Logo,

$$f(x) = \alpha\Lambda_1(x/\beta) + \theta\Lambda_2(x/\beta), \quad \text{para todo } x \in [-c, c]. \quad (4.4)$$

Mostraremos que $\alpha = 0$. De fato, dado que f é contínua, Λ_1 é ímpar, e que Λ_2 é par, obtemos

$$\begin{cases} f(c) = f(c^-) = \alpha\Lambda_1(c^-/\beta) + \theta\Lambda_2(c^-/\beta) \\ f(-c) = f(-c^+) = -\alpha\Lambda_1(c^-/\beta) + \theta\Lambda_2(c^-/\beta). \end{cases} \quad (4.5)$$

Desta maneira,

$$f(c^-) - f(-c^+) = 2\alpha\Lambda_1(c^-/\beta). \quad (4.6)$$

A partir de (4.1), obtemos $f(c^-) = f(c^+) = \eta\varphi'_b(c^+)$ e $f(-c^+) = f(-c^-) = \lambda\varphi'_{-b}(-c^-) = -\lambda\varphi'_b(c^+)$. Então, de (4.6), segue

$$(\eta + \lambda)\varphi'_b(c^+) = 2\alpha\Lambda_1(c^-/\beta). \quad (4.7)$$

Já que $\phi''(c^-) = \phi''(-c^+) = 0$, então $\Lambda'_1(c^-/\beta) = \Lambda'_1(-c^+/\beta) = 0$. Além do mais, $f'(c^+) = \eta\varphi''_b(c^+) = 0 = f'(-c^-)$. As seguintes relações decorrem do fato de que $f \in \mathcal{D}$ e da paridade de Λ_2

$$\frac{\theta}{\beta}\Lambda'_2(-c^+/\beta) = -\frac{\theta}{\beta}\Lambda'_2(c^-/\beta) = -Zf(-c), \quad \frac{\theta}{\beta}\Lambda'_2(c^-/\beta) = Zf(c). \quad (4.8)$$

Segue, de (4.6) que

$$0 = Z(f(c) - f(-c)) = 2\alpha Z\Lambda_1(c^-/\beta).$$

então $\alpha = 0$. Dessa maneira f em (4.4) se escreve como $f(x) = \theta\Lambda_2(x/\beta)$ para cada $x \in [-c, c]$. Mostraremos que $\theta = 0$. Para tanto, vejamos que $Zf(c) = -\frac{2}{\beta}f(0)$. De fato, dado que $f \in \text{Ker}(\mathcal{L}_1)$ então

$$-f'' + \omega f - 3\Phi_Z^2 f \equiv 0. \quad (4.9)$$

Multiplicando (4.9) por Φ'_Z e integrando por partes no intervalo $[0, c]$, deduzimos, pelo Teorema 3.6

$$-\phi' f' \Big|_0^{c^-} + \phi'' f \Big|_0^{c^-} = 0. \quad (4.10)$$

Agora, da construção do perfil dnoidal, sabemos que $\phi'(0) = \phi''(c) = 0$, então $-\phi'(c^-)f'(c^-) = \phi''(0)f(0)$. Decorre, das relações $\phi'(c^-) = -\frac{\omega k^2}{\sqrt{2(2-k^2)}}$ e $\phi''(0) = -\frac{\omega k^2}{2-k^2} \sqrt{\frac{2\omega}{2-k^2}}$ que

$$Zf(c) = f'(c^-) = -2\sqrt{\frac{\omega}{2-k^2}}f(0). \quad (4.11)$$

Por outro lado, $Zf(c) = -\frac{2}{\beta}f(0) = -\frac{2}{\beta}\theta\Lambda_2(0) = -\frac{2}{\beta}\theta p_1(0) = \frac{2}{\beta}\theta$. Consequentemente, $Zf(c) = Z\theta\Lambda_2(c/\beta) = \frac{2}{\beta}\theta$. Da condição $f'(c^-) = Zf(c)$ deduzimos

$$\frac{\theta}{\beta}\Lambda'_2(c^-/\beta) = Z\theta\Lambda_2(c/\beta) = \frac{2}{\beta}\theta. \quad (4.12)$$

Suponha que $\theta \neq 0$. Então, de (4.12) obtemos $\Lambda_2'(c^-/\beta) = 2$. Logo $2 = Z\beta\Lambda_2(c/\beta)$. Vejamos que esta relação não é possível. Dos valores específicos de Z e β obtemos, $Z\beta = \sqrt{2} \frac{1-k^2}{\sqrt{2-k^2}}$. Das relações $dn(c/\beta) = \sqrt{\frac{2-k^2}{2}}$, $\frac{d}{du}dn u = -k^2 snucnu$ e da igualdade

$$\left[\frac{d}{du}dn(u)\right]^2 = (1 - dn^2(u))(dn^2(u) - (1 - k^2)),$$

segue-se $sn(c/\beta)cnu(c/\beta) = \frac{1}{2}$. Então,

$$\Lambda_1(c/\beta) = \frac{1}{2}.$$

Além disso, das identidades elípticas: $k^2 sn^2 u + dn^2 u = 1$ e $sn^2 u + cn^2 u = 1$, obtemos $sn(c/\beta) = cn(c/\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Logo, da definição de p_1 em (4.4) deduzimos

$$p_1(c/\beta) = \frac{k^2}{2(1-k^2)} \sqrt{\frac{2-k^2}{2}} - \frac{2-k^2}{2(1-k^2)} Z(c/\beta).$$

Ainda mais, da definição de Λ_2 em (4.4) e dado que $2 = Z\beta\Lambda_2(c/\beta)$ obtemos a igualdade

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2-k^2}}{1-k^2} \left[2 - \frac{k^2}{2}\right] = \frac{c}{2\beta} \gamma - \frac{2-k^2}{2(1-k^2)} Z(c/\beta). \quad (4.13)$$

Agora, de (3.29) na Observação 3.5 temos

$$Z(c/\beta) = Z\left(cn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right)\right) > 0,$$

pois para todo $k \in (0, 1)$ temos $0 < cn^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k) < \frac{\pi}{2}$, e $Z(x; k) > 0$ se $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Já que $\gamma < 0$, a equação (4.13) é uma contradição. Logo $\theta = 0$ e $f(x)$ é nula em $[-c, c]$. Finalmente, da continuidade de f nos pontos $x = \pm c$ e de (4.1) concluimos que $\eta = \lambda = 0$. Portanto, $f(x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}$.

- b) Caso $Z < 0$. A ideia aqui é a mesma que no caso $Z > 0$. Assim, para $g \in Ker(\mathcal{L}_{1,Z,c})$ existem constantes λ_1 e η_1 tais que

$$g(x) = \begin{cases} \lambda_1 \phi'_{-b}(x), & \text{if } x < -c, \\ h(x), & \text{if } x \in [-c, c], \\ \eta_1 \phi'_b(x), & \text{if } c < x, \end{cases} \quad (4.14)$$

onde $h \equiv g|_{[-c,c]}$ é a restrição de g em $[-c, c]$. Dado que, para $x \in [-c, c]$ temos $-g''(x) + \omega g(x) - 3\tilde{\phi}^2(x)g(x) = 0$, com

$$\tilde{\phi}(x) = \sqrt{\frac{2\omega}{2k^2-1}} kcn\left(\sqrt{\frac{\omega}{2k^2-1}}x; k\right),$$

então, para $r = \sqrt{\frac{2k^2-1}{\omega}}$ segue que $\tilde{\psi}(x) \equiv g(rx)$ satisfaz a seguinte equação de Lamé'

$$\tilde{L}\tilde{\psi}(x) \equiv \tilde{\psi}''(x) + [1 + 4k^2 - 6k^2 sn^2(x; k)]\tilde{\psi} = 0, \quad x \in \left[-\frac{c}{\beta}, \frac{c}{\beta}\right]. \quad (4.15)$$

Além disso, $\mathcal{L}_{1,Z,c}\tilde{\phi}'(x) = 0$ para cada $x \in [-c, c]$. Portanto, a função

$$\Pi_1(x) \equiv -\frac{2k^2 - 1}{\omega k \sqrt{2}} \tilde{\phi}'(rx) = sn(x; k)dn(x; k), \quad x \in \left[-\frac{c}{r}, \frac{c}{r}\right]$$

é tal que $\Pi_1 \in Ker(\tilde{L})$. Segue, da teoria de Floquet (ver Angulo em [5]) que o problema linear

$$\begin{cases} \tilde{L}\Pi(x) = \Pi''(x) + [1 + 4k^2 - 6k^2 sn^2(x; k)]\Pi(x) = 0, & x \in \left[-\frac{c}{r}, \frac{c}{r}\right] \\ \Pi \in H^2\left(-\frac{c}{r}, \frac{c}{r}\right), \end{cases}$$

tem, por conjunto linearmente independente (LI) se soluções, às funções $\{\Pi_1, \Pi_2\}$ on $\left[-\frac{c}{r}, \frac{c}{r}\right]$, com

$$\begin{aligned} \Pi_2(x) &= x \left[1 + \frac{2 - k^2 E(k)}{1 - k^2 K(k)}\right] \Pi_1(x) \\ &+ \left[\frac{cn(x)}{k^2 - 1} [k^4 sn^2(x) + (1 - k^2)dn^2(x)] + \frac{2 - k^2}{1 - k^2} Z(x)\Pi_1(x)\right] \\ &\equiv x\gamma_2\Pi_1(x) + p_2(x), \end{aligned} \quad (4.16)$$

sendo $\gamma_2 > 0$ e p_2 uma função par em $\left[-\frac{c}{r}, \frac{c}{r}\right]$ (ou par e periódica, com período $4K(k)$, se considerarmos Π_1 definida na reta toda). Logo, de (4.15) existem $\alpha_1, \theta_1 \in \mathbb{R}$ tais que $g(x) = \alpha_1\Pi_1(x/r) + \theta_1\Pi_2(x/r)$ para todo $x \in [-c, c]$.

Mostraremos que $\alpha_1 = 0$. Dado que g é contínua, Π_1 é ímpar e Π_2 é par; obtemos

$$g(c^-) - g(-c^+) = 2\alpha_1\Pi_1(c^-/r). \quad (4.17)$$

Por outro lado, como $\tilde{\phi}''(c^-) = \tilde{\phi}''(-c^+) = 0 = \Pi_1'(c^-/r) = \Pi_1'(-c^+/r)$ e $g'(c^+) = \eta_1\varphi_b'(c^+) = 0 = g'(-c^-)$, obtemos $g'(c^-) = \frac{\theta_1}{r}\Pi_2'(c^-/r) = Zg(c)$ e $g'(-c^+) = \frac{\theta_1}{r}\Pi_2'(-c^+/r) = -\frac{\theta_1}{r}\Pi_2'(c^-/r) = -Zg(-c)$. De (4.17) obtemos,

$$2\alpha_1 Z\Pi_1(c^-/r) = 0.$$

Então, $\alpha_1 = 0$. Portanto, $g(x) = \theta_1\Pi_2(x/r)$ para cada $x \in [-c, c]$. Mostraremos a seguir que $\theta_1 = 0$. Inicialmente, vejamos que $Zg(c) = -\frac{2k}{r}g(0)$. De fato, já que $\tilde{L}g = 0$, obtemos, via integração por partes no intervalo $[0, c]$,

$$-\tilde{\phi}'g' \Big|_0^{c^-} + \tilde{\phi}''g \Big|_0^{c^-} = 0. \quad (4.18)$$

Desta maneira, dado que pela construção do perfil cnoidal, temos $\tilde{\phi}'(0) = \tilde{\phi}''(c) = 0$ então $-\tilde{\phi}'(c^-)g'(c^-) = \tilde{\phi}''(0)g(0)$. Logo, a partir das relações $\tilde{\phi}'(c^-) = -\frac{\omega}{\sqrt{2(2k^2-1)}}$ e $\tilde{\phi}''(0) = -\frac{\omega k}{2k^2-1} \sqrt{\frac{2\omega}{2k^2-1}}$ deduzimos

$$Zg(c) = g'(c^-) = -2k \sqrt{\frac{\omega}{2k^2-1}} g(0). \quad (4.19)$$

Observe que $Zg(c) = -\frac{2k}{r}g(0) = -\frac{2k}{r}\theta_1\Pi_2(0) = -\frac{2k}{r}\theta_1 p_2(0) = \frac{2k}{r}\theta_1$. Então $Zg(c) = Z\theta_1\Pi_2(c/r) = \frac{2k}{r}\theta_1$. A condição $g(c^-) = Zg(c)$ implica

$$\frac{\theta_1}{r}\Pi_2'(c^-/r) = \frac{2k}{r}\theta_1. \quad (4.20)$$

Suponha que $\theta_1 \neq 0$. Então, de (4.20) segue $\Pi_2'(c^-/r) = 2k$. Logo então $2k = Zr\Pi_2(c/r)$. Vejamos que esta última equação não pode acontecer. Inicialmente, das expressões específicas para Z e r , temos $Zr = -\sqrt{2}\frac{1-k^2}{\sqrt{2k^2-1}}$. Por outro lado, as relações

$$dn(c/r) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad sn(c/r) = \frac{1}{\sqrt{2k}}, \quad cn(c/r) = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{2k^2-1}{2}},$$

implicam $\Pi_1(c/r) = \frac{1}{2k}$ e,

$$p_2(c/r) = -\frac{k}{2(k^2-1)}\sqrt{\frac{2k^2-1}{2}} + \frac{2-k^2}{2k(1-k^2)}Z(c/r).$$

Desta maneira, da definição de Π_2 in (4.16) e de $2k = Zr\Pi_2(c/r)$ concluímos a igualdade

$$-\frac{2k\sqrt{2k^2-1}}{\sqrt{2}(1-k^2)} - \frac{k\sqrt{2k^2-1}}{2\sqrt{2}(1-k^2)} = \frac{c}{2kr}\gamma_2 + \frac{2-k^2}{2k(1-k^2)}Z(c/r). \quad (4.21)$$

Agora, da Observação 3.9 segue

$$Z(c/r) = Z\left(dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right)\right) > 0,$$

pois para todo $k \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ temos $0 < dn^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k) < \frac{\pi}{2}$, e $0 < Z(x; k)$ se $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Já que $\gamma_2 > 0$, a equação (4.21) é absurda.

Portanto, $\theta_1 = 0$ e então $g(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Com isto termina a prova. ■

A seguinte proposição será usada depois, e descreve as autofunções associadas aos autovalores simples do operador \mathcal{L}_1 .

Proposição 4.3 *Seja $Z \neq 0$. Se λ é um autovalor simples do operador \mathcal{L}_1 , então as correspondentes autofunções associadas a λ são ou pares ou ímpares.*

Demonstração. Seja $v \in D(\mathcal{L}_1) - \{0\}$ tal que $\mathcal{L}_1 v = \lambda v$. Então, já que Φ_Z é par, se definirmos a função ζ por $\zeta(x) \equiv v(-x)$, obtemos $\mathcal{L}_1 \zeta(x) = \lambda \zeta(x)$ para $x \neq \pm c$. A simplicidade de λ implica a existência de $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $v(x) = \beta v(-x)$, para $x \in \mathbb{R}$. Daqui, se $v(c) \neq 0$ então $\beta = 1$ e v é par. Por outro lado, se $v(c) = 0$, de (4.24) temos $v \in H^2(0, +\infty)$ e $v'(x)$ existe para $x > 0$. Devemos ter então $v'(c) = -\beta v'(c)$, e pelo princípio de unicidade de Cauchy, $v'(c) \neq 0$ (de outra forma teríamos $v \equiv 0$ em $(0, \infty)$). Portanto $\beta = -1$, e então $v(x) = -v(-x)$ para todo x . Logo v é uma função ímpar. ■

4.2 Índice de Morse para $\mathcal{L}_{1,Z,c}$

Obter o número de autovalores negativos do operador $\mathcal{L}_{1,Z,c}$ é de vital importância para nosso resultado de estabilidade orbital dos perfis *dnoidal* e *cnoidal* estabelecidos no capítulo 3. Com este objetivo, usaremos nesta seção a *teoria de perturbação analítica para operadores lineares* (ver Kato [31]), bem como alguns argumentos encontrados em Le Coz *et al.* [35]. O trabalho será dividido em vários passos:

- (I) Da análise feita no Capítulo 3 segue-se para Φ_Z , denotando bem o perfil *dnoidal* no Teorema 3.6 ou então o perfil *cnoidal* no Teorema 3.10, a convergência

$$\lim_{Z \rightarrow 0} \Phi_Z \equiv \Psi \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}).$$

$$\text{Aqui, } \Psi(x) \equiv \sqrt{2\omega^*} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega^*}x), \quad \omega^* = \left(\frac{\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{c} \right)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (II) O operador linear $\mathcal{L}_{1,Z,c}$ é o operador autoadjunto definido em $L^2(\mathbb{R})$ associado à seguinte forma bilinear, definida para $u, v \in H^1(\mathbb{R})$, como

$$t_Z[f, g] = -Z[f(c)g(c) + f(-c)g(-c)] + \langle f', g' \rangle_2 + \omega \langle f, g \rangle_2 - \langle 3\Phi_Z^2 f, g \rangle_2 \quad (4.22)$$

De fato, das propriedades dos perfis Φ_Z e da velocidade ω , não é difícil verificar que t_Z é simétrica, limitada inferiormente e fechada. De fato, dos Teoremas 3.6 e 3.10 temos:

$$\begin{aligned} \Phi_Z^2 &\leq \frac{2}{c^2} \left(\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)^2, \quad \text{se } Z > 0; \quad \text{e} \\ \Phi_Z^2 &\leq \frac{2}{c^2} \left(\operatorname{dn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)^2, \quad \text{se } Z < 0. \end{aligned}$$

Assim, como o operador $\mathcal{L}_{2,Z,c}$ é positivo segue-se

$$t_Z[f, f] \geq - \int_{\mathbb{R}} 2\Phi_Z^2 f^2 dx \geq -\frac{4}{c^2} \left(\operatorname{dn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)^2 \|f\|_2^2, \quad (4.23)$$

para todo Z admissível e $f \in H^1(\mathbb{R})$. Segue então da teoria de representação de formas bilineares para operadores, [31, VI. Seção 2.1, Teorema 2.7], que existe um operador autoadjunto $\widetilde{\mathcal{L}}_{1,Z} : D(\widetilde{\mathcal{L}}_{1,Z}) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$D(\widetilde{\mathcal{L}}_{1,Z}) = \{v \in H^1(\mathbb{R}) : \exists w \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tal que } \forall z \in H^1(\mathbb{R}); t_Z[v, z] = \langle w, z \rangle\}, \quad (4.24)$$

e para $v \in D(\widetilde{\mathcal{L}}_{1,Z})$ definimos $\widetilde{\mathcal{L}}_{1,Z}v = w$, onde w é a única função de $L^2(\mathbb{R})$ que satisfaz

$$t_Z[v, z] = \langle \widetilde{\mathcal{L}}_{1,Z}v, z \rangle, \quad \text{para todo } z \in H^1(\mathbb{R}).$$

A seguir, descrevemos explicitamente o operador autoadjunto $\widetilde{\mathcal{L}}_{1,Z}$.

Proposição 4.4 *O domínio do operador $\widetilde{\mathcal{L}}_{1,Z}$ definido em $L^2(\mathbb{R})$ é*

$$D_Z = \{\zeta \in H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} - \{\pm c\}) : \zeta'(\pm c^+) - \zeta'(\pm c^-) = -Z\zeta(\pm c)\}, \quad (4.25)$$

e para $v \in D_Z$ obtemos

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{1,Z}v = -\frac{d^2}{dx^2}v + \omega v - 3\Phi_Z^2v, \quad (4.26)$$

Demonstração. Considere $t_Z = \mathcal{Q}_Z^1 + \mathcal{Q}_\omega^1$, com $\mathcal{Q}_Z^1 : H^1 \times H^1 \rightarrow \mathbb{R}$, e $\mathcal{Q}_\omega^1 : L^2 \times L^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$\mathcal{Q}_Z^1(v, z) = \langle v_x, z_x \rangle - Z[v(c)z(c) + v(-c)z(-c)], \quad \mathcal{Q}_\omega^1(v, z) = \omega \langle v, z \rangle - 3\langle \Phi_Z^2v, z \rangle. \quad (4.27)$$

Denotemos por \mathcal{T}_1 (resp. \mathcal{T}_2) o operador autoadjunto em L^2 associado a \mathcal{Q}_Z^1 (resp. \mathcal{Q}_ω^1). Portanto, $D(\mathcal{T}_1) = D(\widetilde{\mathcal{L}}_{1,Z})$ ($D(\mathcal{T}_2) = L_{per}^2$).

A seguir mostraremos que \mathcal{T}_1 é uma extensão autoadjunta do operador simétrico $-A_Z$ definido em (6.20)-Apêndice. De fato, seja $v \in H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} - \{c\})$ tal que

$$v'(c+) - v'(c-) = -Zv(c), \quad e \quad v(-c) = 0,$$

e defina $w \equiv -v_{xx} \in L^2(\mathbb{R})$. Então, para cada $z \in H^1$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_Z^1(v, z) &= (w, z) + z(-c)[v'(-c-) - v'(-c+)] - z(c)[v'(c+) - v'(c-)] \\ &\quad - Z[v(c)z(c) + v(-c)z(-c)] \\ &= (w, z) + z(-c)[0] - z(c)[-Zv(c)] - Z[v(c)z(c)] = (w, z) \end{aligned}$$

Portanto, $v \in D(\mathcal{T}_1)$ e $\mathcal{T}_1 v = w = -\frac{d^2}{dx^2}v$. Logo, $-A_Z \subset \mathcal{T}_1$. Desta forma, usando a Proposição 6.4 no Apêndice, existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $D(\mathcal{T}_1) = D(-\Delta_{-Z, \gamma})$, o que prova nossa afirmação.

Devemos mostrar agora que $\gamma = -Z$. Tome $v \in D(\mathcal{T}_1)$ com $v(-c) \neq 0$, então

$$(\mathcal{T}_1 v, v) = \gamma |v(-c)|^2 - Z |v(c)|^2 + \int |v_x|^2 dx,$$

deve ser igual a $\mathcal{Q}_Z^1(v, v) = \int |v_x|^2 dx - Z[|v(c)|^2 + |v(-c)|^2]$. Portanto $\beta = -Z$, o que prova Proposição. ■

Pela proposição (4.4) podemos tirar a "til" em $\widetilde{\mathcal{L}}_{1,Z}$ e considerar o operador $\mathcal{L}_{1,Z}$ como foi definido em (1.4).

- (III) O lema a seguir mostra a analiticidade da família de operadores autoadjuntos $\{\mathcal{L}_{1,Z}\}_Z$, indexada pelo parâmetro Z , no sentido (B) de Kato. Este fato permitirá desenvolver em "série de Taylor", tanto a aplicação $Z \mapsto \Phi_Z$ quanto a *função autovalor negativo*, necessária para determinar o número de autovalores negativos de $\mathcal{L}_{1,Z,c}$, dependendo do sinal de Z .

Lema 4.5 *Como uma função de Z , $\{\mathcal{L}_{1,Z}\}_Z$ é uma família analítica de operadores autoadjuntos no sentido (B) de Kato.*

Demonstração. Do Teorema [31, 4.2 Capítulo VII-4.2, pg. 395] é suficiente provar que a família de formas bilineares $(t_Z)_Z$ definida em (4.22), é uma família real-analítica de tipo (B). De fato, esta forma é limitada por baixo e fechada pelo feito anteriormente. A decomposição de t_Z em \mathcal{Q}_Z^1 e \mathcal{Q}_ω^1 , implica que $Z \rightarrow \langle t_Z v, v \rangle$ é analítica. ■

Observação 4.6 *É possível estabelecer uma afirmação similar à Proposição 4.4 e ao Lemma 4.5 para o operador $\mathcal{L}_{2,Z}$ definido em (1.3).*

Pelo Teorema 3.6 sabemos que $\Phi_Z \equiv \Phi_{\omega, Z, c}$ converge em $H^1(\mathbb{R})$ à função

$$\Psi(x) = \sqrt{2\omega^*} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega^*}x).$$

Desta maneira, consideremos o operador $\mathcal{L}_{1,\Psi} : H^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ definido por

$$\mathcal{L}_\Psi = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega^* - 3\Psi^2.$$

Então, de uma imediata aplicação da teoria de Oscilação de Sturm-Liouville, obtemos os seguintes resultados para o operador \mathcal{L}_Ψ definido acima:

Lema 4.7 *O operador \mathcal{L}_Ψ tem exatamente um único autovalor negativo e simples. O segundo autovalor é o zero, que é isolado e simples. Além disso, $\ker(\mathcal{L}_\Psi) = [\Psi']$ e o resto do espectro é positivo.*

Combinando os Lemas 4.5 e 4.7, podemos aplicar o Teorema de Kato-Rellich (ver Reed&Simon [37]) para obter o seguinte resultado.

Proposição 4.8 *Existem $Z_0 > 0$ e duas funções analíticas; $\Lambda : (-Z_0, Z_0) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Omega : (-Z_0, Z_0) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ tais que*

- i. $\Lambda(0) = 0$ e $\Omega(0) = \frac{d}{dx}\Psi$,*
- ii. Para cada $Z \in (-Z_0, Z_0)$; $\Lambda(Z)$ é o segundo autovalor negativo de $\mathcal{L}_{1,Z}$, sendo $\Omega(Z)$ o seu correspondente autovetor associado. Além disso, $\Lambda(Z)$ é simples e isolado.*
- iii. Z_0 pode ser escolhido o "suficientemente pequeno" para garantir que, com exceção dos dois primeiros autovalores (negativos) de $\mathcal{L}_{1,z}$; o resto do espectro de $\mathcal{L}_{1,Z}$ seja positivo.*

Demonstração. Do Lema 4.7, separemos o espectro, $\sigma(\mathcal{L}_{1,\Psi})$, do operador $\mathcal{L}_{1,\Psi}$ em duas partes $\sigma_0 = \{\tau_0, 0\}$ e σ_1 por uma curva fechada Γ (por exemplo um círculo) tal que σ_0 pertença à parte interior do plano (domínio) delimitada pela curva Γ e tal que σ_1 no outro domínio (exterior) a Γ (note que $\sigma_1 \subset (a, +\infty)$ for $a > 0$). Do Lema 4.5 segue que $\Gamma \subset \rho(\mathcal{L}_{1,Z})$ para $|Z|$ suficientemente pequeno, e $\sigma(\mathcal{L}_{1,Z})$ é igualmente separado por Γ em duas partes: a parte de $\sigma(\mathcal{L}_{1,Z})$ dentro de Γ consta de um número finito de autovalores, com multiplicidade algébrica total igual a 2 (dois) (lembre que o zero não é um autovalor de $\mathcal{L}_{1,Z}$). Agora, para ϵ pequeno consideremos os contornos

$$\Gamma_1(\tau_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \tau_0| < \epsilon\} \text{ e } \Gamma_2(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \epsilon\},$$

de tal maneira que $\Gamma_1(\tau_0) \cap \Gamma_2(0) = \emptyset$, e que os únicos pontos $\sigma(\mathcal{L}_{1,\Psi})$ no domínio interior de Γ_i sejam τ_0 and 0 . Portanto, da não degeneracidade de τ_0 e 0 , obtemos, do Teorema de Kato-Rellich, a existência de duas funções analíticas, Λ e Ω , definidas em uma vizinhança do zero; tais que os itens *i.*, *ii.* e *iii.* acima são verificados. Isto completa a prova do Lema. ■

Estudaremos agora a maneira como é perturbado o segundo autovalor negativo de $\mathcal{L}_{1,Z}$, a saber, queremos determinar o sinal de $\Lambda(Z)$ para $|Z|$ pequeno.

Teorema 4.9 *Existe Z_1 , com $0 < Z_1 < Z_0$ tal que $\Lambda(Z) > 0$ para qualquer $Z \in (-Z_1, 0)$ e $\Lambda(Z) < 0$ para qualquer $Z \in (0, Z_1)$. Portanto, para Z positivo pequeno (próximo do zero) $\mathcal{L}_{1,Z}$ tem exatamente dois autovalores negativos; e para Z negativo, próximo do zero, $\mathcal{L}_{1,Z}$ tem exatamente um autovalor negativo.*

Demonstração. A analiticidade de Λ , para $|Z|$ pequeno; permite desenvolver $\Lambda(Z)$ em série de Taylor em uma vizinhança do zero. Portanto, da fórmula de Taylor temos

$$\Lambda(Z) = \beta Z + O(Z^2), \quad \text{and} \quad \Omega(Z) = \Psi' + Z\psi_0 + O(Z^2) \quad (4.28)$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$ ($\beta = \Lambda'(0)$) e $\psi_0 \in L^2$ ($\psi_0 = \Omega'(0)$). A afirmação do teorema seguirá se provarmos que $\beta < 0$.

Dos Teoremas 3.6, 3.10, e do fato de Ψ satisfazer a equação

$$-\Psi'' + \omega^*\Psi - \Psi^3 = 0,$$

obtemos que existe $\chi_0 \in H^1$ para Z perto de zero, tal que

$$\Phi_Z = \Psi + Z\chi_0 + O(Z^2). \quad (4.29)$$

Usando (4.29), e substituindo em (3.2), temos, para qualquer $\psi \in H^1$ do teorema de imersão de Sóbolev que

$$Z\langle \mathcal{L}_\Psi \chi_0, \psi \rangle = Z[\Psi(c)\psi(c) + \Psi(-c)\psi(-c)] + O(Z^2). \quad (4.30)$$

Assim derivando a expressão anterior em relação a Z , resulta

$$\langle \mathcal{L}_\Psi \chi_0, \psi \rangle = \Psi(c)\psi(c) + \Psi(-c)\psi(-c) + O(Z). \quad (4.31)$$

Com o objetivo de determinar o sinal de β , a partir do sinal de Z ; vamos desenvolver β como função de Z . Para isso calcularemos $\langle \mathcal{L}_{1,Z}\Omega(Z), \Psi' \rangle$ de duas formas distintas.

(1) Já que $\mathcal{L}_{1,Z}\Omega(Z) = \Lambda(Z)\Omega(Z)$, segue de (4.28) que

$$\langle \mathcal{L}_{1,Z}\Omega(Z), \Psi' \rangle = \beta Z \|\Psi'\|^2 + O(Z^2). \quad (4.32)$$

(2) Pela Proposição 4.4 temos,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{1,Z}\Omega(Z), \Psi' \rangle &= t_Z[\Omega(Z), \Psi'] = \langle (\Omega(Z))', \Psi' \rangle - Z[\Omega(Z)(c)\Psi'(c) + \Omega(Z)(-c)\Psi'(-c)] \\ &\quad + \omega \langle \Omega(Z), \Psi' \rangle - \langle 3\Phi_Z^2 \Omega(Z), \Psi' \rangle \\ &= -Z[\Omega(Z)(c)\Psi'(c) + \Omega(Z)(-c)\Psi'(-c)] + \langle \Omega(Z), \mathcal{L}_\Psi \Psi' \rangle \\ &\quad + (\omega - \omega^*) \langle \Omega(Z), \Psi' \rangle - \langle 3[\Phi_Z^2 - \Psi^2] \Omega(Z), \Psi' \rangle. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Estimaremos agora cada um dos dois últimos termos em (4.33).

• Como $\Phi_Z^2 = \Psi^2 + 2Z\Psi\chi_0 + O(Z^2)$, segue de (4.28), de

$$\mathcal{L}_\Psi(\omega^*\Psi - \Psi^3) = 6\Psi(\Psi')^2,$$

e da relação $\Phi^2(c) = \omega^*$ que

$$\begin{aligned} -\langle 3[\Phi_Z^2 - \Psi^2] \Omega(Z), \Psi' \rangle &= -Z \langle 6\Psi\Psi'\chi_0, \Psi' \rangle + O(Z^2) \\ &= -Z \langle \mathcal{L}_\Psi(\omega^*\Psi - \Psi^3), \chi_0 \rangle + O(Z^2) \\ &= -2Z\Psi(c)[\omega^*\Psi(c) - \Psi^3(c)] + O(Z^2) = O(Z^2). \end{aligned} \quad (4.34)$$

• Para $Z > 0$ podemos mostrar que $\omega(k) - \omega^* = O(Z)$, para todo $k \in (0, 1)$; e no caso $Z < 0$ que $\omega(k) - \omega^* = O(Z)$, para $k \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ (ver Proposição 6.1 no Apêndice), desta maneira obtemos de (4.28) a relação

$$\begin{aligned} (\omega - \omega^*) \langle \Omega(Z), \Psi' \rangle &= (\omega - \omega^*) \|\Psi'\|^2 + Z(\omega - \omega^*) \langle \psi_0, \Psi' \rangle + O(Z^2) \\ &= (\omega - \omega^*) \|\Psi'\|^2 + O(Z^2). \end{aligned} \quad (4.35)$$

• De (4.28) e da imersão de Sóbolev segue-se

$$-Z[\Omega(Z)(c)\Psi'(c) + \Omega(Z)(-c)\Psi'(-c)] = -2Z[\Psi'(c)]^2 + O(Z^2). \quad (4.36)$$

Logo, já que $\mathcal{L}_\Psi \Psi' = 0$, obtemos de (4.32)-(4.34)-(4.35)-(4.36) que

$$\beta \|\Psi'\|^2 = \frac{\omega - \omega^*}{Z} \|\Psi'\|^2 - 2[\Psi'(c)]^2 + O(Z). \quad (4.37)$$

Consideremos agora a função,

$$S(k) = \frac{\omega(k) - \omega^*}{Z(k)} \|\Psi'\|^2 - 2[\Psi'(c)]^2. \quad (4.38)$$

Então, dado que $Z \rightarrow 0$ se e somente se $k \rightarrow 1^-$ podemos mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} S(k) = L < 0. \quad (4.39)$$

A constante L depende do parâmetro c (ver Proposição 6.1 no Apêndice). Finalmente, (4.37) e (4.39) permitem mostrar que $\beta < 0$ para $|Z|$ pequeno (ver Corolário 6.2 no Apêndice). Finalmente, a primeira equação em (4.28) completa a prova. ■

- (IV) Usando as informações anteriores e um argumento clássico baseado nas projetores de Riesz, poderemos deduzir o índice de Morse do operador $\mathcal{L}_{1,Z}$, para todo Z admissível. Denotaremos o índice de Morse de $\mathcal{L}_{1,Z}$ por $n(\mathcal{L}_{1,Z})$.

Teorema 4.10 *Seja $Z \neq 0$ satisfazendo as condições nos Teoremas 3.6 e 3.10. Então*

- i. para $Z > 0$, $n(\mathcal{L}_{1,Z}) = 2$,*
- ii. para $Z < 0$, $n(\mathcal{L}_{1,Z}) = 1$.*

Demonstração. **Lembre que para $Z \neq 0$, $Ker(\mathcal{L}_{1,Z}) = \{0\}$.** Assim, considerando $Z < 0$, definimos Z_∞ por

$$Z_\infty = \inf\{z < 0 : \mathcal{L}_{1,Z} \text{ tem exatamente um autovalor negativo para todo } Z \in (z, 0)\}.$$

Segue-se do Teorema 4.9 que Z_∞ está bem definido e $Z_\infty \in [-\infty, 0)$. Afirmamos que $Z_\infty = -\infty$. Suponha que $Z_\infty > -\infty$. Sejam $N = n(\mathcal{L}_{1,Z_\infty})$ e Γ uma curva fechada (por exemplo um círculo ou um retângulo) tal que

$$0 \in \Gamma \subset \rho(\mathcal{L}_{1,Z_\infty}),$$

e todos os autovalores negativos de \mathcal{L}_{1,Z_∞} pertencem ao domínio interno de Γ (a região interior do plano que fica "dentro" da curva fechada Γ), então de (4.23) temos

$$\mathcal{L}_{1,Z_\infty} \geq M(c)I.$$

Do Lema 4.5 segue que existe $\delta > 0$ pequeno, tal que para $Z \in [Z_\infty - \delta, Z_\infty + \delta]$ temos $\Gamma \subset \rho(\mathcal{L}_{1,Z})$, e para $\xi \in \Gamma$, a aplicação

$$Z \rightarrow (\mathcal{L}_{1,Z} - \xi)^{-1}$$

é analítica. Portanto, a existência de uma família analítica de projeções, $Z \rightarrow P(Z)$, dada por

$$P(Z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\mathcal{L}_{1,Z} - \xi)^{-1} d\xi,$$

implica que,

$$\dim(\text{Rank } P(Z)) = \dim(\text{Rank } P(Z_\infty)) = N, \quad \text{para todo } Z \in [Z_\infty - \delta, Z_\infty + \delta].$$

Segue-se então da definição de Z_∞ , que existe $z_0 \in (Z_\infty, Z_\infty + \delta)$ tal que $\mathcal{L}_{1,Z}$ possui exatamente um autovalor negativo para todo $Z \in (z_0, 0)$. Assim, $\mathcal{L}_{1,Z_\infty + \delta}$ tem um autovalor negativo e $N = 1$, donde $\mathcal{L}_{1,Z}$ tem um autovalor negativo para $Z \in (Z_\infty - \delta, 0)$; o que contradiz a definição de Z_∞ . Portanto, $Z_\infty = -\infty$. Uma análise similar pode ser aplicada para o caso $Z > 0$. ■

Observação 4.11 *A escolha da curva Γ no começo da prova do Teorema 4.10, independe do parâmetro $-\infty < Z < 0$. De fato, para toda $f \in \mathcal{D}$ com $\|f\| = 1$, temos de (4.23)*

$$\langle \mathcal{L}_{1,Z} f, f \rangle \geq -\gamma(c),$$

with $\gamma(c) = \frac{4}{c^2} \left[dn^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]^2$. Logo, $\inf \sigma(\mathcal{L}_{1,Z}) \geq -\gamma(c)$ para todo $-\infty < Z < 0$. Assim, Γ pode ser escolhida como o retângulo $\Gamma = \partial R$, sendo

$$R = \{z \in \mathbb{C} : z = z_1 + iz_2, (z_1, z_2) \in [-\gamma(c) - 1, 0] \times [-a, a], \text{ para algum } a > 0\}.$$

Proposição 4.12 *A função $\Omega(Z)$ definida na Proposição 4.8, associada ao segundo autovalor negativo de $\mathcal{L}_{1,Z}$, pode ser estendida para $Z > 0$ ao conjunto $I_c = (0, \frac{\pi}{4c})$, e para $Z < 0$ ao conjunto $\mathcal{Q}_c = (-\infty, 0)$. Mais ainda, $\Omega(Z) \in H^1(\mathbb{R})$ é uma função **ímpar** de Z .*

Demonstração. Temos, do Lema 4.5 e do Teorema XII.7 in [37] que o conjunto

$$\Gamma_0 = \{(Z, \lambda) | Z \in I_c, \lambda \in \rho(\mathcal{L}_{1,Z})\}$$

é aberto e $(Z, \lambda) \in \Gamma_0 \rightarrow (\mathcal{L}_{1,Z} - \lambda)^{-1}$ é uma função analítica nas duas variáveis. Logo, podemos repetir o argumento dado na Proposição 4.8 em cada ponto Z , e em cada vizinhança de Z para ver que as funções $\Omega(Z)$ e $\Pi(Z)$ são analíticas para $Z \in I_c \cup \mathcal{Q}_c$, ou seja, para cada Z *admissível*. Consideremos o caso $Z < 0$ (o caso $Z > 0$ é similar). Sabemos da Proposição 4.3 e da Proposição 4.8, que a autofunção $\Omega(Z)$ é par ou ímpar e que $\Omega(0) = \frac{d}{dx} \Psi$ é ímpar. Então, da igualdade

$$\lim_{Z \rightarrow 0} \langle \Omega(Z), \Omega(0) \rangle = \|\Omega(0)\|^2 \neq 0,$$

temos $\langle \Omega(Z), \Omega(0) \rangle \neq 0$, para Z perto de 0. Logo, $\Omega(Z)$ é ímpar, em uma vizinhança do zero.

Seja z_∞ , definido por,

$$z_\infty = \inf\{z < 0 : \Omega(Z) \text{ é ímpar para cada } Z \in (z, 0]\}.$$

Suponha que $z_\infty > -\infty$. Se $\Omega(z_\infty)$ é ímpar então, por continuidade, existe $\delta > 0$ tal que $\Omega(z_\infty - \delta)$ é ímpar, o que é uma contradição. Logo, a Proposição 4.3 implica que $\Omega(z_\infty)$ é par. Por outro lado, já que $\Omega(z_\infty)$ é o limite de funções ímpares, obtemos que $\Omega(z_\infty)$ é ímpar. Portanto $\Omega(z_\infty) \equiv 0$, o que é impossível pois $\Omega(z_\infty)$ é uma autofunção. Assim, $z_\infty = -\infty$, e $\Omega(Z)$ é ímpar para todo Z *admissível*. ■

4.3 Condição de Convexidade

Dedicamos esta seção ao estudo da **slope condition**, requerida para o nosso resultado de estabilidade/instabilidade. De maneira precisa, provaremos que se ω é admissível, i.e., $\omega \in I_c \cup P_c$, sendo I_c e P_c como definidos nas observações 3.5 e 3.9, respectivamente; a aplicação $\omega \mapsto \|\Phi_\omega\|_2^2$ tem derivada positiva. Desta maneira concluiremos o resultado de estabilidade/instabilidade para a órbita $\Omega_{\Phi_\omega} = \{e^{i\theta}\Phi_\omega : \theta \in [0, 2\pi]\}$ estabelecido no Teorema 0.2. Como o cálculo da derivada da norma L^2 do profile Φ_ω torna-se altamente complicada pelo uso de específicas integrais elípticas, foi necessário o uso de ferramentas de tipo computacional para finalizar nosso estudo de estabilidade.

Teorema 4.13 *Seja $\omega > 0$ como nos Teoremas 3.6 ou 3.10. Assim, para $Z \in (0, \frac{\pi}{4c})$ temos $\omega \in I_c = (\omega^*, \frac{\pi^2}{8c^2})$, e para $Z \in (-\infty, 0)$ temos $\omega \in (0, \omega^*)$; onde*

$$\omega^* = \left(\frac{\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{c} \right)^2.$$

Então $\partial_\omega \|\Phi_\omega\|_2^2 > 0$, para Φ_ω representando qualquer um dos perfis de tipo dnoidal ou cnoidal, dados nos Teoremas 3.6 e 3.10, respectivamente.

Demonstração. Dividiremos a prova nos casos $Z > 0$ e $Z < 0$.

- 1) Caso $Z > 0$, perfil dnoidal. Das relações dadas em (3.7) e (3.29) podemos escrever os parâmetros $\beta = \sqrt{\frac{\omega}{2-k^2}}$ e $\alpha = \sqrt{2}\beta$ como funções do módulo $k \in (0, 1)$, assim:

$$\beta(k) = \frac{1}{c} \operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right).$$

Portanto, o perfil dnoidal Φ_ω pode ser visto como uma função suave de k ,

$$\phi_k(x) = \sqrt{2}\beta(k) \operatorname{dn}(x\beta(k); k), \quad \text{para } x \in [-c, c],$$

e

$$\varphi_{b(k)}(x) = \sqrt{2\omega(k)} \operatorname{sech}\left(\sqrt{\omega(k)}(x-c) + \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

para $x \in [c, +\infty)$. Para $x \leq -c$, $\Phi_\omega(x) = \varphi_{b(k)}(-x)$.

Agora, para $N(\omega) = \|\Phi_\omega\|_2^2$, consideramos a função suave $k \mapsto N(\omega(k))$. A regra da cadeia implica

$$\frac{d}{dk}(N(\omega(k))) = N'(\omega) \frac{d}{dk}\omega(k). \quad (4.40)$$

Logo, já que para todo $k \in (0, 1)$ temos (ver figura 3.6)

$$\frac{d}{dk}\omega(k) = \frac{1}{c^2} \left[-2k \left(\operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \right)^2 + 2(2-k^2) \operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \frac{\partial}{\partial k} \operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \right] < 0,$$

seguirá, de (4.40), que se $\frac{d}{dk}N(\omega(k)) < 0$ então $\frac{d}{d\omega}N(\omega) > 0$. Da paridade de Φ_ω segue-se

$$N(\omega(k)) = 2 \left[\int_0^c \phi_k^2(x) dx + \int_c^{+\infty} \varphi_{b(k)}^2(x) dx \right].$$

Para $c \leq x$ definamos $a_k(x) \equiv \sqrt{\omega(k)}(x - c) + \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, logo pela construção do perfil dnoidal, $\tanh(a_k(c)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Temos então

$$\begin{aligned} 2 \int_c^\infty \varphi_{b(k)}^2(x) dx &= 4 \frac{(2 - k^2)(cn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right))^2}{c^2} \int_c^\infty \operatorname{sech}^2(a_k(x)) dx \\ &= 4 \frac{(2 - k^2)(cn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right))^2}{c^2} \left[\frac{1}{\sqrt{\omega(k)}} \tanh(a_k(x)) \Big|_c^\infty \right] \\ &= \frac{4}{c} \sqrt{2 - k^2} cn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$2 \int_0^c \phi_k^2(x) dx = 4 \frac{(cn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right))^2}{c^2} \int_0^c dn^2(x\beta(k)) dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x\beta(k) \equiv u$, obtemos

$$\begin{aligned} 2 \int_0^c \phi_k^2(x) dx &= 4 \frac{cn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right)^{c\beta(k)}}{c} \int_0^{c\beta(k)} dn^2(u) du \\ &= 4 \frac{cn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right)}{c} E\left(\frac{\pi}{4}; k\right). \end{aligned}$$

Note que $c\beta(k) = cn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right)$. Aqui $E(\cdot; k)$ representa a integral incompleta de segundo tipo, comentada no começo da tese. Segue-se então que

$$N(\omega(k)) = \frac{4}{c} cn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \left[\sqrt{2 - k^2} \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \right) + E\left(\frac{\pi}{4}; k\right) \right]$$

A seguir, notamos que o sinal da derivada de $N(\omega(k))$ independe do ponto de interação c . A figura 4.1 mostra o gráfico da função $D(k) = \frac{c}{4} N(\omega(k))$, para $k \in (0, 1)$. Vemos, a partir deste gráfico que $\frac{d}{dk} N(\omega(k)) < 0$; portanto $\frac{d}{d\omega} N(\omega) > 0$.

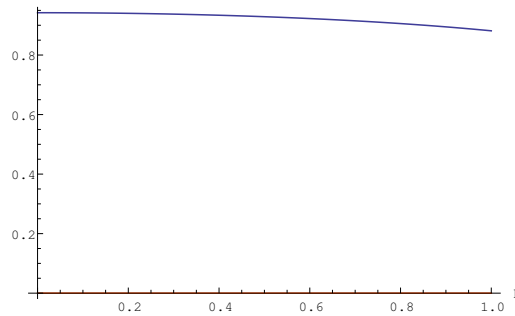


Figura 4.1: Gráfico da função $D(k)$

2) Caso $Z < 0$, perfil cnoidal. A partir do Teorema 3.10 podemos escrever os parâmetros ω , $\tilde{\beta} = \sqrt{\frac{\omega}{2k^2-1}}$ e $\tilde{\alpha} = \sqrt{\frac{\omega}{2k^2-1}}k$ como funções do módulo $k \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$. A saber,

$$\tilde{\beta}(k) = \frac{1}{c}dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right)$$

e

$$\omega(k) = \omega_k = \frac{2k^2 - 1}{c^2} \left(dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \right)^2$$

Logo, o perfil *cnoidal* no Teorema 3.10 está dado por

$$\tilde{\phi}_k(x) = \sqrt{2}k\tilde{\beta}(k)cn(x\tilde{\beta}(k); k), \quad \text{para } x \in [-c, c],$$

e

$$\tilde{\varphi}_{d(k)}(x) = \sqrt{2\omega(k)}sech\left(\sqrt{\omega(k)}(x - c) + sech^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right), \quad \text{para } x \in [c, \infty).$$

Para $x \leq -c$, $\Phi_\omega(x) = \tilde{\varphi}_{d(k)}(-x)$.

Da mesma maneira que no caso dnoidal $Z > 0$, para $N(\omega) = \|\Phi_\omega\|_2^2$, consideramos a função suave $k \mapsto N(\omega(k))$. A regra da cadeia implica então

$$\frac{d}{dk}(N(\omega(k))) = N'(\omega) \frac{d}{dk}\omega(k). \quad (4.41)$$

Dado que para $k \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ (ver gráfica 3.10) temos

$$\frac{d}{dk}\omega(k) = \frac{1}{c^2} \left[4k \left(dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \right)^2 + 2(2k^2 - 1)dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \frac{\partial}{\partial k}dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \right] > 0,$$

seguirá, de (4.41) que se $\frac{d}{dk}N(\omega(k)) > 0$ então $\frac{d}{d\omega}N(\omega) > 0$. Um cálculo totalmente análogo ao caso $Z > 0$ mostra que, para $v_k(x) = \sqrt{\omega(k)}(x - c) + sech^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$ ($c \leq x$) temos

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\infty \tilde{\varphi}_{d(k)}^2(x) dx &= 4 \frac{(2k^2 - 1)(dn^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k))^2}{c^2} \int_c^\infty sech^2(v_k(x)) dx \\ &= \frac{4}{c} \sqrt{2k^2 - 1} dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}\right), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 2 \int_0^c \tilde{\phi}_k^2(x) dx &= \frac{4}{c^2} \left(dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \right)^2 \int_0^c k^2 cn^2(x\tilde{\beta}(k)) dx \\ &= \frac{4}{c^2} \left(dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \right)^2 \left[c(k^2 - 1) + \int_0^c dn^2(x\tilde{\beta}(k)) dx \right] \\ &= \frac{4}{c} dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \left[(k^2 - 1)dn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) + E\left(\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{k\sqrt{2}}\right); k\right) \right]. \end{aligned}$$

Aqui, $\text{sen}^{-1}(\cdot)$ é a função seno inverso. A quantidade $\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)$ está bem definida, por quanto $\frac{1}{2} < k^2$. Portanto,

$$\begin{aligned} N(\omega(k)) &= 2 \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}_{d(k)}^2(x) dx + 2 \int_0^c \tilde{\phi}_k^2(x) dx = \\ &= \frac{4}{c} \sqrt{2k^2 - 1} \text{dn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}\right) \\ &+ \frac{4}{c} \text{dn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \left[(k^2 - 1) \text{dn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) + E\left(\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{k\sqrt{2}}\right); k\right) \right]. \end{aligned}$$

De novo, note que o ponto c não intervêm no cálculo da derivada. A figura 4.4 abaixo mostra o gráfico da função $C(k) = \frac{c}{4} N'(\omega(k))$. Concluimos deste gráfico

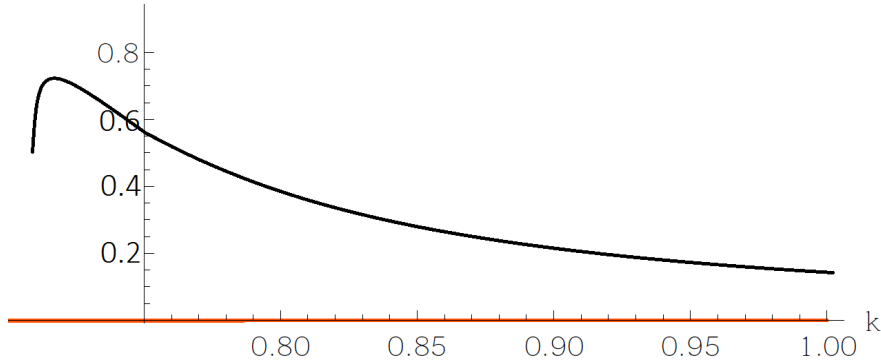


Figura 4.2: Gráfico da função $C(k)$

que $\frac{d}{dk} N(\omega(k)) > 0$, e portanto $\frac{d}{d\omega} N(\omega) > 0$. Isto finaliza a prova do Teorema

■

4.4 Prova do Teorema 0.2

A partir das últimas seções já será possível estabelecer a prova do nosso resultado de estabilidade/instabilidade, Teorema 0.2, associado à órbita $\Omega_{\Phi_{\omega,Z,c}} = \{e^{i\theta} \Phi_{\omega,Z,c} : \theta \in [0, 2\pi]\}$ gerada pelas soluções peak-standing waves $\Phi_{\omega,Z,c}$ como em (3.33) no Teorema 3.6, para o caso $Z > 0$; ou então $\tilde{\Phi}_{\omega,Z,c}$ como em (3.45) no Teorema 3.10, para $Z < 0$. O resultado seguirá como consequência do Teorema 1.2 de Grillakis *et. al* e estabelecido no Capítulo 1. A prova é como segue.

Demonstração. Sabemos, pela construção, que os perfis $\Phi_{\omega,Z,c}$ e $\tilde{\Phi}_{\omega,Z,c}$ estão associados à solução standing-wave do problema (7). A existência global para o (PVI) (7) foi estabelecida na Proposição 2.3 do capítulo 2. Os Lemas 4.1 e 4.2 garantem que $\text{Ker}(\mathcal{L}_{2,Z,c}) = [\Phi_{\omega,Z,c}]$ e $\text{Ker}(\mathcal{L}_{1,Z,c}) = \{0\}$, respectivamente. Agora, pelo Lema 4.13 segue que $p(\omega) = 1$ no Teorema 1.2.

Por outro lado, o Teorema 4.10 garante que, para $Z > 0$ o operador $\mathcal{L}_{1,Z,c}$ possui exatamente dois autovalores negativos. Já para $Z < 0$ o Teorema 4.10 garante que $\mathcal{L}_{1,Z,c}$ possui apenas um autovalor negativo. Assim, para $Z > 0$ temos

$$n(\mathcal{H}_{\omega,Z,c}) - p(\omega) = 1$$

e para $Z < 0$,

$$n(\mathcal{H}_{\omega,Z,c}) = p(\omega) = 1.$$

Portanto, a prova dos itens 1. e 2. do Teorema 0.2 segue-se aplicando o Teorema 1.2.

Agora, Proposição 4.12 assegura que o segundo autovalor de $\mathcal{L}_{1,Z,c}$ está associado com uma autofunção ímpar, e assim este irá a desaparecer quando o problema seja restrito ao subespaço das funções pares. Além disso, dado que $\Phi_{\omega,Z,c}$ é uma função par e trivialmente satisfaz que

$$\langle \mathcal{L}_{1,Z,c} \Phi_{\omega,Z,c}, \Phi_{\omega,Z,c} \rangle < 0,$$

para $Z > 0$, obtemos que o primeiro autovalor negativo de $\mathcal{L}_{1,Z,c}$ ainda está presente quando o problema é restrito ao subespaço das funções pares de $H^1(\mathbb{R})$, ou seja, $H_{par}^1(\mathbb{R})$. Portanto, obtemos neste caso que

$$n(\mathcal{H}_{\omega,Z,c}|_{H_{par}^1}) = 1.$$

Portanto, o item 3. do Teorema 0.2 resulta do item 1. do Teorema 1.2 e do Teorema 2.3. Isso termina a prova do teorema. ■

Capítulo 5

Estudos futuros

A generalização natural que admite o modelo NLS- $\delta_{\pm c}$ (7) é a seguinte: considere a equação

$$\begin{cases} i\partial_t u(x, t) + \partial_x^2 u(x, t) + [Z_1 \delta_a(x) + Z_2 \delta_b(x)]u(x, t) = -|u(x, t)|^2 u(x, t), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (5.1)$$

sendo $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $Z_1, Z_2, a, b \in \mathbb{R}$; e δ_a e δ_b as distribuições de Dirac agindo nos pontos $x = a$ e $x = b$; respectivamente. Surgem daqui dois problemas naturais: o primeiro é o de determinar, se possível, soluções do tipo standing-wave associadas ao modelo (5.1); e o segundo, no caso de existirem tais soluções, decidir se elas são orbitalmente estáveis/instáveis no espaço $H^1(\mathbb{R})$.

É claro que a equação (5.1) fornece, a partir da escolha dos parâmetros a, b, Z_1 e Z_2 , equações particulares com dupla interação de Dirac. Por exemplo, assumamos que os sinais de Z_1 e Z_2 são os mesmos, consideremos o seguinte modelo:

Para a e b não nulos, com $a = -b$ e $Z_1 < Z_2$

$$\begin{cases} i\partial_t u(x, t) + \partial_x^2 u(x, t) + [Z_1 \delta_a(x) + Z_2 \delta_{-a}(x)]u(x, t) = -|u(x, t)|^2 u(x, t), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (5.2)$$

Seja $Z \equiv \{Z_1, Z_2\}$. Então, se $u(x, t) = e^{i\omega t} \zeta_{\omega, Z, a}$ é uma solução standing-wave associada à equação (5.2), $\zeta = \zeta_{\omega, Z, c}$ deve satisfazer, no sentido das distribuições, a equação

$$-\zeta'' + \omega\zeta - \zeta^3 - Z_1 \delta_a \zeta - Z_2 \delta_{-a} \zeta \equiv 0.$$

Mais precisamente, para $x \in \mathbb{R} - \{a, -a\}$, ζ satisfaz

$$-\zeta''(x) + \omega\zeta(x) - \zeta^3(x) = 0,$$

e a condição de fronteira

$$\begin{cases} \zeta'(a^+) - \zeta'(a^-) = -Z_1 \zeta(a); \\ \zeta'(-a^+) - \zeta'(-a^-) = -Z_2 \zeta(-a). \end{cases}$$

Para este tipo particular de modelo (5.2) -que de fato constitui uma leve extensão de (7), é possível construir um perfil ζ seguindo as mesmas ideias no caso em que $Z_1 = Z_2$, isto é: para $c < |x|$ consideramos uma translação do soliton-perfil secante

hiperbólica (3.4); e para $|x| \leq c$ consideramos perfis periódicos do tipo *dnoidal* e *cnoidal*. De fato, podem-se seguir as mesmas técnicas que no caso tratado nesta tese -em particular o que tem a ver com a localização dos pontos de interção a e $-a$; como mostrado na Proposição 3.4. O problema mais difícil de tratar para este tipo de modelos radica no cálculo do índice de Morse para o operador associado

$$\mathcal{L}_{1,Z} = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - 3\zeta^2,$$

com domínio

$$D(\mathcal{L}_{1,Z}) = \{f \in \mathcal{D} : f'(a^+) - f'(a^-) = -Z_1 f(a); f'(-a^+) - f'(-a^-) = -Z_2 f(-a)\},$$

onde $\mathcal{D} = H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} - \{\pm a\})$.

Haver suposto que Z_1 e Z_2 possuem o mesmo sinal e que $Z_1 < Z_2$ garantem que, no caso em que Z_1 e Z_2 sejam negativos; tenhamos

$$Z_1 \rightarrow 0^- \implies Z_2 \rightarrow 0^-,$$

e para o caso em que Z_1 e Z_2 sejam positivos

$$Z_2 \rightarrow 0^+ \implies Z_1 \rightarrow 0^+.$$

Estes dois fatos são muito importantes para as convergências dos respectivos perfis dnoidal e cnoidal ajustados entre os pontos a e $-a$; para uma função do tipo secante hiperbólica, semelhante aos resultados obtidos nos Teoremas 3.6 e 3.10. Já sobre isso temos um trabalho em andamento.

Um outro caso particular do modelo (5.1) é supor que a e b não possuem nenhuma relação a priori, do tipo $a = -b$. Neste caso, para a correspondente equação diferencial resultante, fica complexo determinar um perfil associado às soluções standing-wave -porquanto perdemos a vital condição de paridade (ganha no caso especial em que $a = -b$).

Capítulo 6

Apêndice

Justificaremos a seguir várias afirmações que usamos ao longo do nosso trabalho. A seguinte proposição foi usada para provar o Teorem 4.9.

Proposição 6.1 *Considere o soliton $\Psi(x) = \sqrt{2\omega^*} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega^*}x)$, com $\omega^* = \frac{1}{c^2} [\operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})]^2$. Para $Z = Z(k) > 0$ e $\omega = \omega(k)$ como definidos em (3.28); e para $Z = Z(k) < 0$ e $\omega = \omega(k)$ como definidos em (3.41), consideremos a função*

$$S(k) = \frac{\omega(k) - \omega^*}{Z(k)} \|\Psi'\|^2 - 2[\Psi'(c)]^2.$$

Então,

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} S(k) = \frac{[\operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})]^2}{c^4} \left[\frac{4l}{3\sqrt{2}} - [\operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})]^2 \right] \equiv L < 0,$$

com $l = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) [-\sqrt{2} + 3 \ln(1 + \sqrt{2})] \approx 0.5420038597$. Mais ainda, para $Z > 0$ temos $\omega(k) - \omega^* > 0$, e para $Z < 0$ temos $\omega(k) - \omega^* < 0$, com $\omega(k) - \omega^* = O(Z)$.

Demonstração. Consideremos primeiro o caso $Z > 0$ (perfil dnoidal como no Teorema (3.6)). Então,

$$Z = Z(k) = \frac{\sqrt{2}}{c} \frac{1 - k^2}{\sqrt{2 - k^2}} \operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right),$$

e

$$\omega(k) = \frac{2 - k^2}{c^2} \left[\operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \right]^2.$$

Já que para todo $k \in (0, 1)$ temos

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) < \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1, \quad (6.1)$$

segue que

$$\begin{aligned} |\omega(k) - \omega^*| &= \frac{1}{c^2} \left| (2 - k^2) [\operatorname{cn}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k)]^2 - [\operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})]^2 \right| \\ &= \frac{1}{c^2} \left| (1 - k^2) [\operatorname{cn}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k)]^2 + [\operatorname{cn}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k)]^2 - [\operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})]^2 \right| \\ &\leq \frac{1 - k^2}{c^2} [\operatorname{cn}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k)]^2 + \frac{1}{c^2} \left| [\operatorname{cn}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k)]^2 - [\operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})]^2 \right|. \end{aligned}$$

De (6.1) segue

$$\frac{1-k^2}{c^2} [cn^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k)]^2 \leq \frac{1-k^2}{c^2} cn^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k) = Z \frac{\sqrt{2-k^2}}{c\sqrt{2}} \leq \frac{Z}{c}. \quad (6.2)$$

Por outro lado, também de (6.1) segue

$$\frac{1}{c^2} \left| [cn^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k)]^2 - [sech^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})]^2 \right| \leq \frac{2sech^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})}{c^2} \left(sech^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) - cn^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k) \right) \quad (6.3)$$

Além disso, é possível mostrar que para todo $k \in (0, 1)$ obtemos

$$0 < sech^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) - cn^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k) < 1 - k^2.$$

Portanto, (6.1) implica

$$sech^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) - cn^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k) < 1 - k^2 = Z \frac{c}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2-k^2}}{cn^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k)} < Z \frac{c}{cn^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k)} < Z \frac{4c}{\pi}.$$

Finalmente, da desigualdade (6.3) obtemos

$$\frac{1}{c^2} \left| [cn^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k)]^2 - [sech^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})]^2 \right| \leq Z \frac{8}{c\pi} sech^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}). \quad (6.4)$$

Desta maneira, das desigualdade (6.2) e (6.4) temos, para todo $k \in (0, 1)$,

$$|\omega(k) - \omega^*| \leq \left(\frac{1}{c} + \frac{8sech^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})}{c\pi} \right) Z.$$

Portanto, $\omega(k) - \omega^* = O(Z)$. Além do mais, é fácil obter que $\omega^* < \omega(k)$ para todo $k \in (0, 1)$.

Um cálculo simples mostra que

$$\|\Psi'\|^2 = \frac{2}{3} \frac{[sech^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})]^3}{c^3} \tanh^3(\sqrt{\omega^*}x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{4}{3c^3} \left[sech^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]^3,$$

e do valor específico de ω^* segue que $sech^2(\sqrt{\omega^*}c) = \tanh^2(\sqrt{\omega^*}c) = \frac{1}{2}$. Portanto,

$$[\Psi'(c)]^2 = \frac{1}{2}(\omega^*)^2 = \frac{1}{2c^4} [sech^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})]^4.$$

Usando o programa *WolframMathematica* determinamos exatamente a quantidade

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-k^2} \left[(2-k^2) \left(cn^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \right)^2 - \left(sech^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)^2 \right] = l, \quad (6.5)$$

sendo que $l = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) [-\sqrt{2} + 3 \ln(1 + \sqrt{2})] \approx 0.5420038597$. Assim, segue de (6.5) e da continuidade das funções $k \mapsto cn^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k)$ e $k \mapsto \sqrt{2-k^2}$ que

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{\omega(k) - \omega^*}{Z(k)} = \frac{l}{c\sqrt{2}sech^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})} > 0. \quad (6.6)$$

A análise acima mostra que

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{\omega(k) - \omega^*}{Z(k)} \|\Psi'\|^2 - 2[\Psi'(c)]^2 = \frac{(\operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}))^2}{c^4} \left[\frac{4l}{3\sqrt{2}} - (\operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}))^2 \right] < 0. \quad (6.7)$$

Consideremos agora o caso $Z < 0$ (*perfil cnoidal* como no Teorema 3.10). Neste caso, para $k \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ obtemos:

$$Z = Z(k) = -\frac{\sqrt{2}}{c} \frac{1 - k^2}{\sqrt{2k^2 - 1}} \operatorname{dn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right),$$

e

$$\omega(k) = \frac{2k^2 - 1}{c^2} \left[\operatorname{dn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \right]^2.$$

Já que $k \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ então

$$\left[\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]^2 - k^2 \left[\operatorname{dn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \right]^2 < 0. \quad (6.8)$$

Agora,

$$\begin{aligned} |\omega(k) - \omega^*| &= \frac{1}{c^2} \left| (2k^2 - 1) \left(\operatorname{dn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \right)^2 - \left(\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)^2 \right| \\ &= \frac{1}{c^2} \left[\left(\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)^2 - (2k^2 - 1) \left(\operatorname{dn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \right)^2 \right] \\ &\leq \frac{1 - k^2}{c^2} \left(\operatorname{dn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \right)^2. \end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{1 - k^2}{c^2} \left(\operatorname{dn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \right)^2 = |Z| \frac{\sqrt{2k^2 - 1}}{c\sqrt{2}} \operatorname{dn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \leq |Z| \frac{\operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})}{c\sqrt{2}}.$$

Obtemos da última desigualdade que

$$|\omega(k) - \omega^*| \leq |Z| \frac{\operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})}{c\sqrt{2}}.$$

Usando de novo o programa *WolframMathematica* determinamos o seguinte limite

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - k^2} \left[(2k^2 - 1) \left(\operatorname{dn}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; k\right) \right)^2 - \left(\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)^2 \right] = -l; \quad (6.9)$$

onde $l = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) [-\sqrt{2} + 3 \ln(1 + \sqrt{2})]$ é o mesmo que no caso *dnoidal* estudado acima. Segue de (6.9) e da continuidade das funções $k \mapsto \operatorname{dn}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}; k)$ e $k \mapsto \sqrt{2k^2 - 1}$

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{\omega(k) - \omega^*}{Z(k)} = -\frac{1}{\sqrt{2}c \operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})} (-l) = \frac{l}{c\sqrt{2} \operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})} > 0. \quad (6.10)$$

Observe que se ω_{dn} e ω_{cn} denotam as *velocidades* para o perfil *dnoidal* no Teorema 3.6 e *cnoidal* no Teorema 3.10, respectivamente, então obtemos as relações

$$\omega_{cn} < \omega^* < \omega_{dn}.$$

Portanto, os quocientes $\frac{\omega_{dn}-\omega^*}{Z(k)}$ (para $Z > 0$) e $\frac{\omega_{cn}-\omega^*}{Z(k)}$ (para $Z < 0$) são em ambos os casos positivos. Finalmente, no caso $Z < 0$ concluímos

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{\omega(k) - \omega^*}{Z(k)} \|\Psi'\|^2 - 2[\Psi'(c)]^2 = \frac{(\operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}))^2}{c^4} \left[\frac{4l}{3\sqrt{2}} - (\operatorname{sech}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}))^2 \right] = L < 0. \quad (6.11)$$

Isto prova a proposição. ■

Corolário 6.2 Para $|Z|$ pequeno e para $\omega = \omega(k)$ a igualdade

$$\beta \|\Psi'\|^2 = \frac{\omega - \omega^*}{Z} \|\Psi'\|^2 - 2[\Psi'(c)]^2 + O(Z), \quad (6.12)$$

implica que $\beta < 0$.

Demonstração. Consideremos o caso $Z > 0$. Então, para $h(Z) = O(Z)$, existe $M > 0$ com $|h(Z)| \leq MZ$. Da proposição 6.1 temos, para $\epsilon < -L/2$ que

$$\beta \|\Psi'\|^2 < L + \epsilon + h(Z) < L + \epsilon + MZ, \quad (6.13)$$

para $k \in (1 - \delta, 1)$ e $\delta > 0$. A relação $Z = \sqrt{2\omega} \frac{1-k^2}{2-k^2}$ implica que $k^2 = 1 + \frac{Z}{Z - \sqrt{2\omega}}$. Então, já que $Z < \sqrt{2\omega}$; obtemos $k^2 > 1 - \delta$ se e somente se $Z < \frac{\delta}{\delta+1} \sqrt{2\omega}$. Como $\omega(k) > \frac{\pi^2}{8c^2}$, obtemos para Z pequeno com

$$Z < \min \left\{ -\frac{L}{2M}, \frac{\pi \sqrt{2}}{c} \frac{\delta}{4\delta+1} \right\},$$

que a relação (6.13) implica $\beta \|\Psi'\|^2 < \frac{L}{2} + \epsilon < 0$. Logo, $\beta < 0$. O caso $Z < 0$ é similar. Isto prova o Corolário. ■

A seguir, daremos uma ideia da afirmação de que para dois pontos de interação, com $Z \neq 0$ fixo; o operador

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \gamma\delta_{-c} - Z\delta_c, \quad (6.14)$$

pode ser visto como uma família de extensões autoadjuntas associada ao operador simétrico

$$\begin{cases} -A_Z = -\frac{d^2}{dx^2} \\ D(-A_Z) = \{\zeta \in H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} - \{c\}) : \zeta(-c) = 0, \zeta'(c+) - \zeta'(c-) = -Z\zeta(c)\}. \end{cases} \quad (6.15)$$

Este resultado foi usado na Proposição (4.4).

Lema 6.3 Seja $A = -\frac{d^2}{dx^2}$. A restrição $-A_Z \equiv A|_{D(-A_Z)}$, com $D(-A_Z)$ dado por (6.15), é um operador simétrico, densamente definido em $L^2(\mathbb{R})$ com índices de deficiência (1,1). A saber, os elementos de deficiência estão dados pelas fórmulas

$$\begin{cases} \text{para } \lambda = i, & g_i \equiv (A - i)^{-1} \delta_{-c}, \\ \text{para } \lambda = -i, & g_{-i} \equiv (A + i)^{-1} \delta_{-c}, \end{cases} \quad (6.16)$$

$g_{\pm i} \in D(-A_Z^*)$ e $-A_Z^* g_{\pm i} = \pm i g_{\pm i}$. Mais ainda, $n_+(-A_Z) = n_-(-A_Z) = 1$.

Demonstração. A prova segue as mesmas linhas do Lemma 1.2.3 em Albeverio&Kurasov [6]. ■

Presentamos explicitamente agora todas as extensões autoadjuntas do operador simétrico $-A_Z$, as quais estarão parametrizadas pelo número γ . Da teoria de Von Neumann para extensões autoadjuntas de operadores simétricos (ver [37]) obtemos que todas as extensões simétricas de $-A_Z$ são autoadjuntas e coincidem com a restrição do operador $-A_Z^*$. Além do mais, para $\theta \in [0, 2\pi)$ a extensão autoadjunta, $-A_Z(\theta)$, de $-A_Z$ está definida como segue:

$$\begin{cases} D(-A_Z(\theta)) = \{\psi + \lambda g_i + \lambda e^{i\theta} g_{-i} : \psi \in D(-A_Z), \lambda \in \mathbb{C}\}, \\ -A_Z(\theta)(\psi + \lambda g_i + \lambda e^{i\theta} g_{-i}) = -A_Z^*(\psi + \lambda g_i + \lambda e^{i\theta} g_{-i}) = -A_Z\psi + i\lambda g_i - i\lambda e^{i\theta} g_{-i}. \end{cases} \quad (6.17)$$

Agora, da fórmula explícita dos elementos de deficiência $g_{\pm i}$,

$$g_{\pm i}(x) = \frac{i}{2\sqrt{\pm i}} e^{i\sqrt{\pm i}|x+c|}, \quad \text{Im}\sqrt{\pm i} > 0,$$

temos as seguintes expressões básicas para $\zeta \in D(-A_Z(\theta))$,

$$\zeta'(-c+) - \zeta'(-c-) = -\lambda(1 + e^{i\theta}). \quad (6.18)$$

O passo seguinte é encontrarmos γ tal que $\gamma\zeta(-c) = -\lambda(1 + e^{i\theta})$. De fato, depois de alguns cálculos encontramos a fórmula (ver [3])

$$\gamma(\theta) = \frac{-2 \cos(\theta/2)}{\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}. \quad (6.19)$$

Portanto, se θ varia em $[0, 2\pi)$, $\gamma = \gamma(\theta)$ varia em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Para o único ponto $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ tal que $\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$ obtemos $\lim_{\theta \uparrow \theta_0} \gamma(\theta) = +\infty$.

Desta forma, parametrizamos todas as extensões autoadjuntas de $-A_Z$ com a ajuda de γ . Temos então,

Proposição 6.4 *Seja $Z \in \mathbb{R}$ fixo. Todas as extensões autoadjuntas de $-A_Z$ estão dadas, para $-\infty < \gamma \leq +\infty$ pelas fórmulas: para $\gamma \in (-\infty, \infty)$*

$$\begin{cases} -\Delta_{-Z, \gamma} = -\frac{d^2}{dx^2} \\ D(-\Delta_{-Z, \gamma}) = \{\zeta \in H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} - \{\pm c\}) : \zeta'(c+) - \zeta'(c-) = -Z\zeta(c), \\ \zeta'(-c+) - \zeta'(-c-) = \gamma\zeta(-c)\}. \end{cases} \quad (6.20)$$

O caso especial em que $\gamma = 0$ dá origem ao operador com um ponto de interação, $-\Delta_{-Z} = -\frac{d^2}{dx^2} - Z\delta_c$ em $L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{cases} -\Delta_{-Z} = -\frac{d^2}{dx^2} \\ D(-\Delta_{-Z}) = \{\zeta \in H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} - \{c\}) : \zeta'(c+) - \zeta'(c-) = -Z\zeta(c)\}. \end{cases} \quad (6.21)$$

Demonstração. Pelos argumentos esboçados acima, obtemos facilmente que $-A_Z(\theta) \subset -\Delta_{-Z, \gamma}$, com $\gamma = \gamma(\theta)$ dado em (6.19). Mas $-\Delta_{-Z, \gamma}$ é simétrico no correspondente domínio $D(-\Delta_{-Z, \gamma})$, para todo $-\infty < \gamma \leq +\infty$, o que implica a relação $-A_Z(\theta) \subset -\Delta_{-Z, \gamma} \subset (-\Delta_{-Z, \gamma})^* \subset -A_Z(\theta)$. Isto finaliza a Proposição. ■

Bibliografia

- [1] ADAMI, R., NOJA, D. and VISCIGLIA, N., *Constrained energy minimization and ground states for NLS with point defects*. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 18, no. 5, 1155–1188, (2013).
- [2] ALBIEZ, M., GATI, R., FÖLLING, J., HUNSMANN, S., MATTEO, C. and OBERTHALER M. *Direct Observation of Tunneling and Nonlinear Self-Trapping in a Single Bosonic Josephson Junction*, Phys. Rev. Lett. **95**, 010402 (2005).
- [3] ALVEBERIO, S, GESZTESY, F., KROHN, R. and HOLDEN, H. *Solvable Models in quantum mechanics*, AMS Chelsea publishing, (2004).
- [4] ANGULO, J. *Non-Linear stability of periodic travelling-wave solutions for the Schrödinger and modified Korteweg-de Vries equation*, Journal Differential Equations, 1-30, 236, (2007).
- [5] ANGULO, J. and PONCE, G. *The nonlinear Schrödinger equation with a periodic δ -interaction*, Bull. Braz. Math. Soc., New Series **44**(3), 497-551, (2013).
- [6] ALBEVERIO, S. and KURASOV, P., *Singular Perturbations of Differential Operators*, London Mathematical Society, Lecture Note Series, 271, Cambridge University Press, (2000).
- [7] BAMBUSI, D. and SACCHETTI, A. *Exponential times in the one-dimensional Gross-Pitaevskii equation with multiple well potential*, Comm. Math. Phys. **275**, 1-36 (2007).
- [8] BEREZIN, F.A., SHUBIN, M.A. *The Schrödinger Equation*. Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publisher Group, Dordrecht, (1991).
- [9] BOYD, R. W., *Nonlinear Optics*, 3rd edition, Academic Press, (2008).
- [10] BYRD, P.F. and FRIEDMAN, M.D., *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientist*, second ed., Springer-Verlag, New York, (1971).
- [11] CAMBOURNAC, C., SYLVESTRE, T., MAILLOTE, H., VANDERLINDEN B., KOCKAERT, P., EMPLIT, PH. and HAELTERMAN M. *Symmetry-Breaking*

- Instability of Multimode Vector Solitons*, Phys. Rev. Lett. **89**, 083901, (2002).
- [12] CAUDRELIER, V., MINTCHEV, M., and RAGOUCY, E., *Solving the quantum non-linear Schrödinger equation with δ -type impurity*, J. Math. Phys. **46** (4), 042703-1-24, (2005).
- [13] CAZENAVE, T., Lions, P. L. *Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations*, Commun. Math. Phys., 85, pp. 549-561, (1982).
- [14] CAZENAVE, T. *Semilinear Schrödinger Equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, 10, (2003).
- [15] CODDINGTON, E.A., LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw Hill, New-York, Toronto, London, (1955).
- [16] DATCHEV, K. and HOLMER, J., *Fast soliton scattering by attractive delta impurities*, Comm. Partial Differential Equations 34, no. 7-9, 1074–1113, (2009).
- [17] DALFOVO, F., GIORGINI, S., PITAEVSKII, L.P. and STRINGARI, S. *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, Rev. Mod. Phys. **71**, 463-512, (1999).
- [18] DAVIS, K. B., MEWES, M.O., ANDREWS, M. R., VAN DRUTEN, N. J., DURFEE, D.S., KURN, D.M. and KETTERLE, W., *Bose-Einstein condensation in gas of sodium atoms*, Phys. Rev. Lett., 74(22), 3969–3973, (1995).
- [19] FUKUIZUMI, R., OHTA, M. and OZAWA, T. *Nonlinear Schrödinger equation with a point defect*, Ann. I. H. Poincaré- AN **25**, 837-845, (2008).
- [20] FUKUIZUMI, R., JEANJEAN, L. *Stability of standing waves for a nonlinear Schrödinger equation with a repulsive Dirac delta potential*. Discrete and Continuous Dynamical System, pp. 121-136, (2008).
- [21] GOODMAN, R. H., HOLMES, J. and WEINSTEIN, M., *Strong NLS soliton-defect interactions*, Phys. D 192 (2004), 215–248.
- [22] GOODMAN, R. H., MARZUOLA, J. and WEINSTEIN, M. I., *Self-trapping and Josephson tunneling solutions to the nonlinear Schrödinger/Gross-Pitaevskii equation* . Discrete Contin. Dyn. Syst. 35, no. 1, 225–246, (2015).
- [23] GRILLAKIS, M., SHATAH, J. and STRAUSS, W. *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I*, J. Funct. Anal., 74, pp.

- 160-197, (1987).
- [24] GRILLAKIS, M., SHATAH, J. and STRAUSS, W., *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II*, J. Funct. Anal., 94, pp. 308-348, (1990).
- [25] HAYATA, K. and KOSHIBA, M., *Self-localization and spontaneous symmetry breaking of optical fields propagating in strongly nonlinear channel waveguides: limitations of the scalar field approximation*, J. Opt. Soc. Am. B **9**, 1362-1368, (1992).
- [26] HOLMER, J., MARZUOLA, J. and ZWORSKI, M., *Fast soliton scattering by delta impurities*, Comm. Math. Phys., 274(91), 187–216, (2007).
- [27] HOLMER, J., MARZUOLA, J. and ZWORSKI, M., *Soliton alignment by external delta potentials*, J. Nonlinear Sci., 17(4), 349–367, (2007).
- [28] HOLMER, J. and ZWORSKI, M., *Slow soliton interaction with external delta potentials*, J. Modern Dynam., 1, 689–718, (2007).
- [29] HOLMER, J. and ZWORSKI, M., *Soliton interaction with slowly varying potentials*, IMRN, 2008, Article ID rnn026, 36 pages (2008).
- [30] JACKSON, R.K. and WEINSTEIN, M.I., *Geometric Analysis of Bifurcation and Symmetry Breaking in a Gross-Pitaevskii equation*, Journal of Statistical Physics, Vol. 116, Nos. 114, August (2004).
- [31] KATO, T. *Perturbation theory for linear operators, second ed.*, in: Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1980).
- [32] KIRR, E.W., KEVREKIDIS, F.G., SHILZERMAN E. and WEINSTEIN M.I., *Symmetry breaking bifurcation in Nonlinear Schrödinger/Gross-Pitaevskii Equations*, SIAM J. Math. Anal. **40**, 566-604 (2008).
- [33] KOVAŘÍK, H. and SACCHETTI, A. *A nonlinear Schrödinger equation with two symmetric point interactions on one dimension*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 43, 155205, (2010).
- [34] NEWELL, A.C. and MOLONEY, J. V., *Nonlinear Optics*, Advanced Book Program, Westview Press, (2003).
- [35] LE COZ, S., FUKUIZUMI, R., FIBICH, G., KSHERIM, B. and SIVAN, Y. *Instability of bound states of a nonlinear Schrödinger equation with a Dirac potential*, Physica D 237, 1103-1128, (2008).
- [36] RAGHAVAN, S., SMERZI, A., FANTONI, S. and SHENOY, S.R., *Coherent oscillations between two weakly coupled Bose-Einstein condensates:*

Josephson effects, oscillations, and macroscopic quantum self-trapping, Phys. Rev. A **59**, 620-633 (1999).

- [37] REED, M. and SIMON, B. *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of operators*. New York- San Francisco-London: Academic Press. XV, (1978).
- [38] SACCHETTI, A., *Nonlinear double-well Schrödinger equations in the semiclassical limit*, J. Stat. Phys. **119**, 1347-1382 (2005).
- [39] SACCHETTI, A., *Nonlinear time-dependent Schrödinger equations: the Gross-Pitaevskii equation with double-well potential*, J. Evol. Eq. **4**, 345-369 (2004).
- [40] SULEM, C. and SULEM, P-L., *Nonlinear Schrödinger Equations: Self-Focusing and Wave Collapse*, Applied Mathematical Sciences, vol. 139, Springer, New York, (1999).
- [41] WEINSTEIN, M.I. *Nonlinear Schrödinger equation and sharp interpolation estimates*. Comm. Math. Phys., 87, pp. 567–576, (1983)
- [42] WEINSTEIN, M.I. *Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations*, SIAM J. Math. Anal. 16, pp. 472-491, (1985).