

**As formas bilineares no estudo
das representações de posets**

Claudia Cavalcante Fonseca

TESE APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
DOUTORA EM CIÊNCIAS

Programa: Pós-Graduação em Matemática (PPG-MAT)
Orientador: Prof. Dr. Kostiantyn Iusenko

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo
10 de Agosto de 2021

**As formas bilineares no estudo
das representações de posets**

Claudia Cavalcante Fonseca

Esta é a versão original da tese elaborada
pela candidata Claudia Cavalcante Fonseca,
tal como submetida à Comissão Julgadora.

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

行くあても帰る場所もないから 頭の中に僕の居場所を作った

(Eu não tinha nenhum lugar pra ir ou voltar, então eu criei um lugar pra mim na minha mente.)

— Amazarashi - あ ん た へ (Antae)

Agradecimentos

"Somos anões encavalitados sobre os ombros de gigantes. Vemos portanto mais coisas do que eles viram e vemos mais longe do que eles. A razão disto não é a acuidade do nosso olhar, tampouco a superioridade da nossa altura, mas o fato de que somos transportados e elevados pela alta estatura dos gigantes."

— Bernardo de Chartres, João de Salisbúria, Isaac Newton e outros "gigantes"

Agradeço primeiramente aos gigantes que descobriram, ou criaram (a gosto do leitor), a teoria das representações, ou, indo mais além, aos que se encantaram pela primeira vez pelo estudo das quantidades e aos que organizaram o pensamento matemático na matemática abstrata. E àqueles que compilaram grandes quantidades de conhecimentos nos livros, nos quais baseei meu conhecimento durante toda minha vida acadêmica.

Com o mesmo reconhecimento, agradeço profundamente a todos os meus professores, que se encarregaram da difícil tarefa de traduzir todos esses conhecimentos, por mais abstratos que fossem, para uma forma que fizesse sentido na minha mente. Em especial, agradeço ao professor Iusenko por toda atenção, paciência e dedicação com a qual me ajudou a compreender cada conceito presente nessa tese e me ensinou a tecer novos resultados a partir dos anteriores.

Agradeço também a todos que tornaram tudo isso possível, CAPES, USP e todos seus funcionários, que dedicam suas vidas a criar novas possibilidades para as pessoas que cruzam seus caminhos.

Por fim, agradeço a todos que fizeram parte da minha vida e que tornaram tudo possível. Em especial, à minha família: Do meu marido Johann, minha mãe Rosângela, meu pai Claudio, irmão Kevin, primos (em especial, Derecky e Júlia), sogros (Marcia e Wilmar) e avós (Maria e Nazaré), que sempre me apoiaram na minha jornada por conhecimento; aos meus quatro filhos (gatos), Sion, Ferris, Nezumi e Aslan, que sempre me atrapalham apenas na medida certa pra eu não estudar demais e pra me lembrar de sorrir mesmo durante dias particularmente difíceis.

Resumo

Claudia Cavalcante Fonseca. **As formas bilineares no estudo das representações de posets:** . Tese (Doutorado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

Um dos maiores propósitos da teoria de representações de álgebras é descrever (da melhor forma possível) todas as representações indecomponíveis (a menos de isomorfismos) de uma dada álgebra. Com as representações matriciais de posets, conseguimos trabalhar este problema no âmbito de matrizes, utilizando classes de equivalência determinadas por algumas operações elementares que dependem do poset e de um vetor de dimensão dado. Neste trabalho, utilizamos as representações subespaçiais de posets, que são suficientemente equivalentes às matriciais para todos os nossos propósitos. No nosso primeiro resultado, calculamos a dimensão da variedade das representações por subespaços de um dado poset S com um vetor de dimensão fixado, mostrando que ela é dada pela forma quadrática de Euler associada a S . No segundo resultado, relacionamos a matriz de Cartan (que, por sua vez, se relaciona à forma quadrática de Euler) de um poset à matriz de Cartan de seu poset diferencial. Então, usamos esta relação para compreender alguns aspectos quanto à estabilidade de representações de um poset dado. A estabilidade de representações constitui uma abordagem geométrica do estudo da classificação de representações indecomponíveis em posets onde elas não são bem comportadas ("tipo selvagem"). Particularmente, estudamos as condições necessárias para a conservação da estabilidade após a diferenciação de uma representação. Como corolário do segundo e terceiro resultados, conseguimos mostrar que todas as representações schurianas de um poset dado são estáveis para uma forma que calculamos explicitamente.

Palavras-chave: Representações de posets. Formas bilineares. Diferenciação e integração de representações de posets.

Abstract

Claudia Cavalcante Fonseca. **Bilinear forms into poset representation:** . Thesis (Doctorate). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2021.

One of the main purposes of theory of algebra representations is to describe (as best as possible) all the indecomposable representations (up to isomorphisms) of a given algebra. With matrix representations of posets, we can tackle this problem in the context of matrices, using equivalence classes determined by some elementary operations that depend on the poset and a given dimension vector. In this work, we use subspace representations of posets, which are sufficiently equivalent to matrix representations for our purposes. In our first result, we calculate the dimension of the variety of subspace representations of a given poset S with a fixed dimension vector, and find its relation with the Euler quadratic form associated with S . In the second result, we relate the Cartan matrix of a poset (which, in its turn, generates the Euler form) to the Cartan matrix of its differential poset. We then use this relation to understand some aspects of the stability of representations of a given poset. The stability of a representation constitutes a geometric approach to the study of the classification of indecomposable representations in posets where they are not well-behaved ("wild type"). In particular, we study the necessary conditions for conservation of stability through differentiation of a representation. As a corollary of the second and third results, we are able to show that any schurian representation of a specific poset are stable to a form that we compute explicitly.

Keywords: Poset representation. Bilinear forms. Differentiation and integration of poset representation.

Lista de Símbolos

$ C $	Quantidade de elementos no conjunto, poset ou aljava C
$\text{Hom}(A, B)$	Homomorfismo entre os espaços vetoriais A e B
$\text{Hom}_{\mathcal{X}}(A, B)$	Homomorfismo entre os módulos A e B sobre a álgebra \mathcal{X}
$\text{End}(\mathbf{V})$	Anel de endomorfismos da representação \mathbf{V}
Ker	Núcleo de uma aplicação
$\text{Stab}_G(x)$	Subgrupo de G que estabiliza $x \in X$ através da ação de G sobre X
$\dim(X)$	Dimensão de X (onde X pode ser uma variedade algébrica ou um espaço vetorial, sempre sobre o corpo k)
Id_n	Matriz identidade $n \times n$
$\text{Mat}_{m \times n}$	Anel de matrizes m por n
$\text{GL}(n)$	Grupo linear geral de matrizes $n \times n$ inversíveis com a operação de multiplicação
$\text{Gr}(d, D)$	Espaço Grassmanniano, que parametriza todos os subespaços vetoriais com dimensão d dentro de um espaço vetorial de dimensão D
\hat{S}	Poset S estendido por um elemento maximal
$\text{cdn}\mathbf{V}$	Vetor coordenada da representação subespacial de posets \mathbf{V}
$\text{dim}\mathbf{V}$	Vetor dimensão da representação subespacial de posets \mathbf{V}
C_S	Matriz de incidência do poset S
sp_S	Categoria de todas as representações subespaciais de um poset S sobre o corpo k
$\text{R}(Q)$	Categoria de todas as representações de uma aljava Q sobre o corpo k
$\text{Fl}_{S, \alpha}$	Variedade relacionada ao poset S com vetor dimensão α
q_S, \hat{q}_S	Formas quadrática de Euler e Tits do poset (ou aljava) S
$\langle \cdot, \cdot \rangle_S$	Forma bilinear de Euler para o poset S
$\Phi_{\hat{S}}$	Matriz de Coxeter-Euler do poset S

Sumário

1	Preliminares	5
1.1	Aljavas e suas representações	10
1.2	Relações entre aljavas e posets	14
1.3	Matriz de Cartan e formas quadráticas	18
1.4	Variedade Poset	23
1.5	Diferenciação de posets e representações	26
1.6	Estabilidade	32
2	Variedade Poset	37
2.1	Resultados auxiliares e notações	37
2.2	Interpretação geométrica da forma quadrática de Euler	40
2.3	Alguns exemplos	43
2.4	Consequências	47
3	As formas quadráticas de Euler de um poset e seu diferencial	49
3.1	Entendendo o problema	49
3.2	A matriz D e representações D -admissíveis	51
3.3	A relação entre os inversos das matrizes de Cartan de S e S'_a	57
4	Estabilidade e Diferenciação	65
4.1	Um estudo da estrutura dos posets diferenciais	66
4.2	A estabilidade de diferenciais de representações positivamente estáveis	75
4.3	Representações schurianas de $(N, 4)$	84
5	Considerações Finais	93
Apêndices		
A	Considerações sobre a integração de representações	95

B Matrizes de Coxeter	99
C Esqueletos da integral de W' em relação a V'	103
D Análise das dimensões das representações schurianas de $(1, 2, 5)$	111
Referências	117

Introdução

A teoria de representações de álgebras se baseia na ideia de representar um objeto mais complexo através de um mais simples e traduzir para este novo objeto as propriedades a serem estudadas no original.

A descrição de W. R. Hamilton para os números complexos como pares ordenados de números reais é um embrião desta prática, mas seus princípios formais assim como as ferramentas necessárias para o trabalho nesse campo foram desenvolvidos por E. Noether, que introduziu a compreensão de representações como módulos e nos deu a primeira teoria geral de representações de grupos e álgebras.

Neste vasto campo de estudo, as representações de aljavas têm um papel muito importante, principalmente porque nos casos em que o corpo k é algebricamente fechado, qualquer álgebra associativa hereditária sobre k tem uma categoria de módulos equivalente à da álgebra de caminhos de uma certa aljava.

Por outro lado, a teoria das representações de conjuntos parcialmente ordenados (posets) tem como objetivo resolver situações que podem ser resumidas a problemas matriciais. Ela foi estruturada pela primeira vez por Nazarova e Roiter [NR72], para resolver a segunda conjectura de Brauer-Thrall para corpos perfeitos, que relaciona o tipo da álgebra ao comprimento de seus módulos. Neste trabalho, em meio às bases da teoria, os autores definiram as representações matriciais de posets, o processo de diferenciação de um poset e de suas representações.

Desde então, uma série de resultados para representações de aljavas e para representações de posets mostraram-se análogos ou semelhantes, sugerindo a conexão entre esses dois campos. Por exemplo, para ambos, as formas bilineares e quadráticas de Euler e de Tits que podem ser definidas a partir de uma aljava ou poset mostraram-se essenciais em alguns resultados importantes envolvendo o tipo da álgebra de caminhos (para aljavas) ou de incidência (para posets) e outras características importantes de cada representação. A importância dessas formas foi observada pela primeira vez nos trabalhos de Gabriel [Gab72b], [Gab72a], [Gab79] e Drozd [Dro74], [DK04], [Dro80]. Essas formas também desempenham um papel fundamental na compreensão das propriedades geométricas e homológicas dessas representações.

No caso das aljavas finitas, a forma quadrática de Tits possui interpretações geométricas e homológicas bem estabelecidas (em [Bon83], uma generalização dessa forma quadrática foi desenvolvida para aljavas com relações).

Quanto às representações de posets, tanto a forma quadrática de Tits quanto a forma

quadrática de Euler desempenham papéis importantes na teoria de representações. A forma quadrática de Tits associada a um poset é conhecida por suas interpretações geométrica e homológica, conforme discutido em [Dro74], [Sim92, Prop 11.93] e [Bon+13], onde foi apresentado um análogo da forma quadrática de Tits para representações de subespaços unitários de posets. Além disso, a forma de Euler associada a um poset possui uma interpretação homológica amplamente reconhecida na literatura (ver, por exemplo, [Sim10, Lema 41] e [Sim09]). Nesse contexto, no Capítulo 2, apresentamos um resultado nosso (publicado em [FoI2019]), que pode ser considerado uma interpretação geométrica da forma quadrática de Euler, pois nos proporciona uma fórmula (análoga à que temos para a forma de Tits para aljavas) para calcular a dimensão da variedade Poset. Particularmente, se $\alpha \in \mathbb{Z}^{|\hat{S}|}$ é um vetor admissível (ver Cap. 2),

$$\dim \text{GL}(\alpha_0) - \dim \text{Fl}_{S,\alpha} = q_S(\alpha).$$

Após o primeiro trabalho de Nazarova e Roiter [NR72], Gabriel [Gab72a] definiu outra família de representações de posets, as representações subespaciais, e as incorporou ao conceito de diferenciação definido no trabalho de Nazarova e Roiter [NR72]. Com essas representações, ele conseguiu resultados análogos aos resultados envolvendo representações matriciais, mas mostrou também que a diferenciação de representações subespaciais consiste de um funtor pleno, denso e aditivo entre as categorias de representações subespaciais de um poset e de seu diferencial.

No Capítulo 3, identificamos uma transformação linear que associa o vetor dimensão de uma representação subespacial \mathbf{V} e o de sua diferencial \mathbf{V}' . Usando essa transformação, estabelecemos uma relação entre as inversas das matrizes de Cartan de um poset S e seu diferencial S'_a e obtivemos um resultado que conecta suas formas bilineares de Euler. Em particular, encontramos uma matriz $D \in \text{Mat}_{\hat{S}, \hat{S}'_a}$ que garante a igualdade $\dim \mathbf{V} \cdot D = \dim \mathbf{V}'$ para uma grande parte das representações do poset S e a igualdade

$$D \cdot C_{\hat{S}'_a}^{-1} \cdot D^{tr} = C_{\hat{S}}^{-1},$$

onde a matriz de Cartan do poset S é denominada por C_S e S'_a é o diferencial de S . Esse resultado representa um avanço no entendimento das dimensões de representações de posets, da forma bilinear de Euler e da própria diferenciação, e fornece uma base para a investigação de propriedades adicionais como a encontrada no Capítulo seguinte.

O Capítulo 4 é inspirado na conexão já existente entre representações schurianas (que possuem seu anel de endomorfismos unidimensional) de aljavas e estabilidade (um conceito que pode ser utilizado para abordar geometricamente aljavas do tipo selvagem). Nesse capítulo, buscamos estudar essa conexão no contexto de representações de posets.

Para posets do tipo finito ([GI09],[FuI2018]) e para os posets primitivos críticos do tipo manso ([MS06], [SY09], [Yak09],[Yak10a], [Yak10b]), toda representação schuriana é estável para alguma forma θ positiva. No entanto, essa afirmação não é verdadeira para posets do tipo selvagem, onde pelo menos uma representação schuriana não é estável para cada poset desse tipo. Além disso, para os demais posets do tipo manso, essa conexão não foi nem comprovada nem desmentida.

O primeiro resultado desse capítulo busca trabalhar sobre posets do tipo manso, explorando a relação entre o conceito de diferenciação de representações e os tipos de posets, e busca mostrar que a diferenciação conserva a condição de estabilidade. Com esse objetivo, encontramos uma transformação linear I que relaciona o vetor dimensão de uma representação ao vetor dimensão de sua integral (dada pela anti-derivada). Trabalhando com esse resultado, verificamos que, sob certas condições, a diferencial de uma representação positivamente estável para θ é também estável para o mapa $\theta \cdot I^r$. Isso revela uma conexão importante entre a estabilidade de uma representação e sua diferenciação, fornecendo uma ferramenta valiosa para investigar as propriedades geométricas das representações de posets.

Como corolário desse resultado, fomos capazes de estender a relação que conecta a condição schuriana à estabilidade para o último poset crítico do tipo manso, o único não primitivo. Com isso, mostramos que todas as representações schurianas dos posets críticos do tipo manso são positivamente estáveis e determinamos a forma que garante essa estabilidade. Por meio dessas descobertas, ampliamos nosso entendimento sobre a relação entre estabilidade e diferenciação, fornecendo novas perspectivas e abrindo caminho para futuras investigações sobre a estrutura e o comportamento de posets mansos. Um artigo com esses últimos resultados está em processo de preparação para publicação.

Capítulo 1

Preliminares

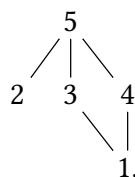
Nesta seção, introduziremos os conceitos fundamentais que formam a base desta pesquisa, buscando fornecer uma visão geral abrangente. No entanto, para aqueles que desejam aprofundar seu entendimento, recomendamos duas obras fundamentais, [Sim92] e [Bar12], que podem servir como referências valiosas para abordagens mais detalhadas dos tópicos abordados ao longo desta tese.

Fixemos um corpo k sobre o qual serão definidos todos os espaços vetoriais e matrizes deste trabalho.

Um *poset* $S \equiv (S, \leq)$ é um conjunto finito S munido de uma ordem parcial denotada por \leq . Denotaremos por \hat{S} a união do poset S ao elemento maximal 0 , com a ordem herdada do poset original acrescida de $s < 0$ para todo $s \in S$. Um poset S é chamado de *primitivo* se pode ser escrito como a união disjunta de conjuntos totalmente ordenados S_i , ou seja, $S = \bigsqcup_{i \in I} S_i$, de forma que não hajam relações de ordem entre elementos de S_i e S_j quando $i \neq j$. Denote por S^{op} o poset dual $S^{op} \equiv (S^{op}, \leq^o)$ com a ordem tal que $r \leq^o s$ se, e somente se, $s \leq r$ in S .

Um poset S pode ser definido através de um grafo cujos vértices são os elementos de S e cuja existência de um caminho entre dois vértices implica que existe relação entre os elementos que eles representam. Além disso, convencionou-se que se há a relação $r < s \in S$, o vértice que representa o elemento r será colocado em alguma linha abaixo do que o vértice representante do elemento s . Tal forma de apresentação é chamada de *Diagrama de Hasse* e será usada no decorrer do trabalho.

Exemplo 1.0.1. O poset $S : \{1, 2, 3, 4, 5; 2 < 5, 1 < 3 < 5, 1 < 4 < 5\}$ pode ser definido pelo seguinte diagrama de Hasse:



A *altura* de um poset é definida como a quantidade de elementos de seu maior subconjunto ordenado ou, mais informalmente, a menor quantidade possível de "linhas" em

seu diagrama de Hasse. Analogamente, a *largura de um poset* é a quantidade máxima de elementos incomparáveis, ou seja, a menor quantidade possível de "colunas" em seu diagrama de Hasse.

Em [NR72], as representações (matriciais) de posets foram utilizadas pela primeira vez para resolver a segunda conjectura de Brauer-Thrall para corpos perfeitos.

Definição 1.0.2 (Representação matricial). *Seja S um poset. Uma k -representação matricial de S é uma matriz bloco*

$$\mathcal{A} = [A_1 | \dots | A_n]$$

sobre k .

O vetor $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ no qual α_0 é a quantidade de linhas na matriz \mathcal{A} e cada α_i com $i \neq 0$ é a quantidade de colunas no bloco A_i é chamado de *vetor coordenada (cdn(\mathcal{A})) da representação matricial \mathcal{A}* .

A soma direta entre duas representações matriciais $\mathcal{A} = [A_1 | \dots | A_n]$ e $\mathcal{B} = [B_1 | \dots | B_n]$ é dada pela expressão

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} := \left[\begin{array}{cc|cc| \dots | cc} A_1 & 0 & A_2 & 0 & \dots & A_n & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & B_2 & \dots & 0 & B_n \end{array} \right].$$

Dizemos que duas representações matriciais \mathcal{A} e \mathcal{B} são equivalentes se \mathcal{A} pode ser convertida a \mathcal{B} através das transformações elementares determinadas a seguir:

- entre linhas (I),
- entre colunas que fazem parte do mesmo bloco (II),
- somas de combinações lineares de colunas do i -ésimo bloco a colunas do j -ésimo bloco desde que $i < j \in S$ (III).

Um morfismo entre duas representações matriciais $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é um par de matrizes (C, D) tais que $C \in \text{GL}(\alpha_0)$ e $D \in \text{GL}(\alpha_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n})$ é a composição de matrizes que correspondem às transformações elementares dos tipos II e III. Assim, se existe um morfismo entre \mathcal{A} e \mathcal{B} , essas representações são ditas equivalentes e todo morfismo é um isomorfismo.

Representações não equivalentes à soma direta de duas representações não nulas são denominadas indecomponíveis e a categoria de todas as representações matriciais de S sobre o corpo k é representada por Mat_S . Como já observamos, nesta categoria, todos os morfismos são isomorfismos.

Um poset S é do tipo finito se a categoria Mat_S tem uma quantidade finita (a menos de equivalências) de representações indecomponíveis. Esta classificação independe do corpo k e Kleiner [Kle72, Teor. 1] encontrou uma caracterização para posets deste tipo. Particularmente, um poset é do tipo finito se, e somente se, ele não contém (como um subposet completo, ou seja, mantendo todas as relações entre os elementos do subposet e apenas elas) um poset com algum dos diagramas de Hasse abaixo:

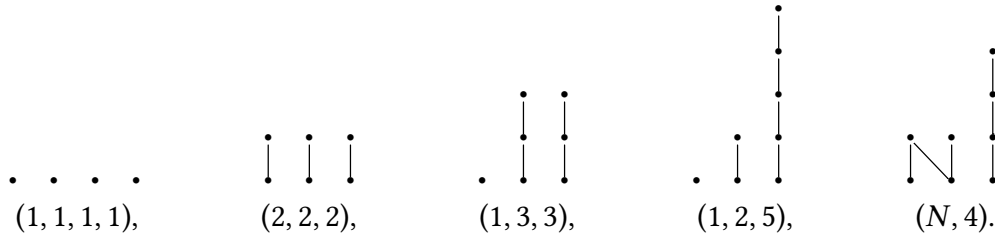


Diagrama 1: Posets críticos do tipo manso

Além desta caracterização importantíssima, este teorema abrange outras formas de identificar posets finitos, algumas das quais veremos no decorrer deste capítulo introdutório.

Um poset pode ainda ser classificado quanto à quantidade de representações como *manso* ou *selvagem*. De fato, em [Naz75, Prop. 1], Nazarova mostrou que há uma dicotomia manso-selvagem, ou seja, um poset não pode ser simultaneamente manso e selvagem. Essa dicotomia, inclusive, foi estendida posteriormente por Drozd [Dro80, Teor. 2] para qualquer álgebra sobre um corpo algebricamente fechado.

Em particular, classificamos uma álgebra (ou, por extensão, um poset) como do tipo *manso* se suas representações indecomponíveis podem ser parametrizadas por uma quantidade qualquer de parâmetros discretos e apenas um parâmetro contínuo. Classificamos essa álgebra (ou poset) como do tipo *selvagem* se o problema de classificar suas representações indecomponíveis envolve a redução simultânea de um par de matrizes por transformações de semelhança.

Ainda em [Naz75], Nazarova identificou que um poset é selvagem se, e somente se, ele contém (como subposet completo) um dos seguintes posets (e, portanto, é manso somente quando não os contém). Essa classificação também independe do corpo k no qual as matrizes estão definidas.

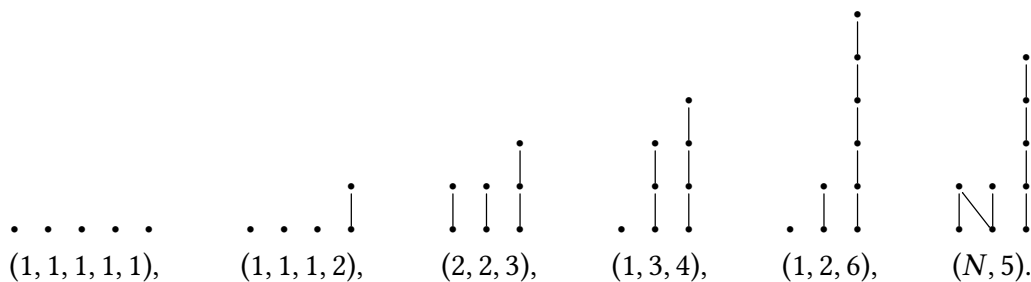


Diagrama 2: Posets críticos do tipo selvagem

Outra forma de considerar representações de posets é a partir de representações subespaciais. Esta forma é compatível com as representações matriciais, no sentido de que a quantidade de representações matriciais indecomponíveis em Mat_S é a mesma que de representações subespaciais indecomponíveis deste poset exceto por uma quantidade finita de representações.

Definição 1.0.3 (Representação Subespacial). *Uma representação subespacial de um poset S é uma $|\widehat{S}|$ -upla de espaços vetoriais sobre um corpo k dada por $\mathbf{V} = (V_0; V_s)_{s \in S}$, de modo que cada V_s é subespaço de V_0 e $V_s \subseteq V_t$ para todo $s < t \in S$.*

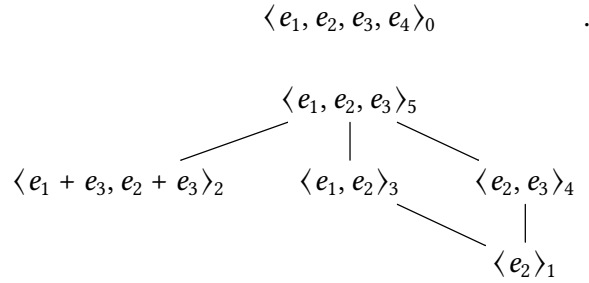
Podemos definir uma representação subespacial \mathbf{V} de um poset S descrevendo-a no diagrama de Hasse do poset estendido \widehat{S} e omitindo as arestas que conectam o espaço ambiente V_0 .

Exemplo 1.0.4. *A representação*

$$\mathbf{V} = ((\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle); (\langle e_2 \rangle), (\langle e_1 + e_3, e_2 + e_3 \rangle), (\langle e_1, e_2 \rangle), (\langle e_2, e_3 \rangle), (\langle e_1, e_2, e_3 \rangle))$$

do poset $S : \{1, 2, 3, 4, 5; 2 < 5, 1 < 3 < 5, 1 < 4 < 5\}$ pode ser apresentada como:

\mathbf{V} :



Essa representação subespacial corresponde à representação matricial dada por:

$$\mathcal{A}_{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Algumas representações matriciais, porém, não podem ser convertidas em representações subespaciais. Isso ocorre quando há mais colunas numa submatriz do que linhas na matriz. Ou seja, quando $\text{cdn}(\mathcal{A})_s > \text{cdn}(\mathcal{A})_0$.

Exemplo 1.0.5. *Considere o poset unitário $S = \{1\}$. A representação*

$$\mathcal{A}_{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

não pode ser convertida em uma representação subespacial, pois essa representação $\mathbf{V} = (V_0, V_1)$ teria a propriedade de que $2 = \dim V_1 > \dim V_0 = 1$.

Uma subrepresentação $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ é dada por $\mathbf{W} = (W_0; W_s)_{s \in S}$ de forma que $W_s \subseteq V_s$ para todo $s \in \widehat{S}$, e esta representação é dita *própria* quando $W_0 \neq V_0$ e $W_s = V_s \cap W_0$ para todo $s \in \widehat{S}$.

Exemplo 1.0.6. *Abaixo apresentamos duas subrepresentações de \mathbf{V} (Exemplo 1.0.4). Entre elas, apenas \mathbf{W} é subrepresentação própria.*

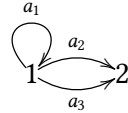
1.1 Aljavas e suas representações

Uma aljava finita é um grafo orientado $Q = (Q_0; Q_1)$, onde Q_0 é um conjunto finito de vértices e Q_1 é um conjunto finito de flechas com dois mapas definidos, *origem* e *alvo* $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$. Um elemento de Q_0 é chamado *fonte* (respectivamente, *poço*) se a pré-imagem dele pelo mapa t (respectivamente, pelo mapa s) é vazia.

Exemplo 1.1.1. A aljava $Q = (\{1, 2\}; \{a_1, a_2, a_3\})$ munida dos mapas s e t abaixo

$$\begin{array}{ll} s : Q_1 \rightarrow Q_0 & t : Q_1 \rightarrow Q_0 \\ a_1 \mapsto 1 & a_1 \mapsto 1 \\ a_2 \mapsto 1 & a_2 \mapsto 2 \\ a_3 \mapsto 1 & a_3 \mapsto 2 \end{array}$$

pode ser representada como o grafo orientado a seguir.



Representações de aljavas frequentemente denotam problemas de classificação de classes de equivalência matriciais definidas de acordo com as operações canônicas entre linhas e colunas. Uma *representação* \mathbf{V} de uma aljava $Q = (Q_0, Q_1)$ sobre o corpo k é dada por uma tupla $((V_i)_{i \in Q_0}; (V_a)_{a \in Q_1})$ de $|Q_0|$ espaços vetoriais V_i e $|Q_1|$ transformações lineares $V_a : V_{s(a)} \rightarrow V_{t(a)}$. Uma representação é estrita se todos os mapas V_a são injetores (para todo $a \in Q_1$). Dizemos que uma representação \mathbf{W} de Q é subrepresentação de \mathbf{V} quando $W_i \subseteq V_i$ para todo vértice $i \in Q_0$ e $V_a|_{W_{s(a)}} = W_a$ para toda flecha $a \in Q_1$. A *soma direta entre duas representações* $\mathbf{V} = ((V_i)_{i \in Q_0}; (V_a)_{a \in Q_1})$ e $\mathbf{W} = ((W_i)_{i \in Q_0}; (W_a)_{a \in Q_1})$ é definida como:

$$\mathbf{V} \oplus \mathbf{W} = \left((V_i \oplus W_i)_{i \in Q_0}; \left(\begin{bmatrix} V_a & 0 \\ 0 & W_a \end{bmatrix} \right)_{a \in Q_1} \right).$$

Uma representação \mathbf{V} é *indecomponível* se não é a soma direta de duas subrepresentações não nulas. O vetor $\dim \mathbf{V} = (\dim V_i)_{i \in Q_0}$ é chamado vetor dimensão de \mathbf{V} .

Definimos um *morfismo* $\Psi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ de representações da aljava Q como a coleção de transformações lineares $\Psi_i : V_i \rightarrow W_i$ para todo $i \in Q_0$ de forma que a composição $W_a \circ \Psi_{s(a)} = \Psi_{t(a)} \circ V_a$ para todo $a \in Q_1$. Caso Ψ_i seja inversível para todo $i \in Q_0$, dizemos que Ψ é um *isomorfismo de representações de Q* . Denote por $R(Q)$ a categoria correspondente de todas as representações de uma aljava Q sobre o corpo k . Ao contrário da categoria de representações de posets, a categoria $R(Q)$ é abeliana, ou seja, além de ser aditiva, possui propriedades desejáveis nos núcleos e conúcleos de seus morfismos.

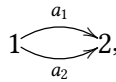
A seguir, definimos as formas bilineares de Euler e quadráticas de Tits associadas à aljava Q :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_Q : \mathbb{Z}^{Q_0} \times \mathbb{Z}^{Q_0} &\rightarrow \mathbb{Z} & (1.1) \quad \hat{q}_Q : \mathbb{Z}^{Q_0} &\rightarrow \mathbb{Z} & (1.2) \\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &\mapsto \sum_{i \in Q_0} \alpha_i \beta_i - \sum_{a \in Q_1} \alpha_{s(a)} \beta_{t(a)}; & \boldsymbol{\alpha} &\mapsto \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle_Q = \sum_{i \in Q_0} \alpha_i^2 - \sum_{a \in Q_1} \alpha_{s(a)} \alpha_{t(a)}. \end{aligned}$$

Dada uma aljava Q , podemos definir sua *matriz de incidência* $C_Q \in \text{Mat}_{Q_0}$ como a soma da matriz Id_{Q_0} à matriz $A \in \text{Mat}_{Q_0}$, de forma que $A_{i,j}$ é a quantidade de flechas com origem no vértice i e alvo no vértice j . Caso Q não possua ciclos orientados, essa matriz é sempre invertível e a forma definida pela sua inversa coincide com a forma bilinear de Euler. Ou seja:

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle_Q = \boldsymbol{\alpha} \cdot C_Q^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta}^{tr}.$$

Exemplo 1.1.2. Dada a aljava sem ciclos orientados



sua matriz de incidência e correspondente inversa são dadas por:

$$C_Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} 1 \quad 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad C_Q^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} 1 \quad 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sua forma bilinear de Euler é dada por:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle_Q &= \sum_{i \in Q_0} \alpha_i \beta_i - \sum_{a \in Q_1} \alpha_{s(a)} \beta_{t(a)} \\ &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 - 2\alpha_1 \beta_2 \\ &= \boldsymbol{\alpha} \cdot C_Q^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta}^{tr} \end{aligned}$$

Uma forma quadrática q é dita positiva (resp. não negativa) se $q(x) > 0$ (resp. $q(x) \geq 0$) para todo vetor x não nulo com coordenadas positivas em seu domínio. Se $\boldsymbol{\alpha}$ é o vetor dimensão de uma representação indecomponível, os trabalhos [NR72] e [Naz73] mostram que nos casos em que a forma quadrática \hat{q}_Q é não-negativa, tem-se $\hat{q}_Q(\boldsymbol{\alpha}) \in \{0, 1\}$. Particularmente, se $\hat{q}_Q(\boldsymbol{\alpha}) = 1$, existe uma única representação indecomponível com vetor dimensão igual a $\boldsymbol{\alpha}$. Se $\hat{q}_Q(\boldsymbol{\alpha}) = 0$, existe uma infinidade de representações indecomponíveis com vetor dimensão igual a $\boldsymbol{\alpha}$.

Gabriel [Gab72b] também mostra que \hat{q}_Q é uma forma positiva se, e somente se, Q é a união disjunta de uma quantidade finita de aljavas cujos grafos associados são grafos de

Dynkin do tipo A_n , D_n , E_6 , E_7 ou E_8 (independentemente da orientação das arestas).

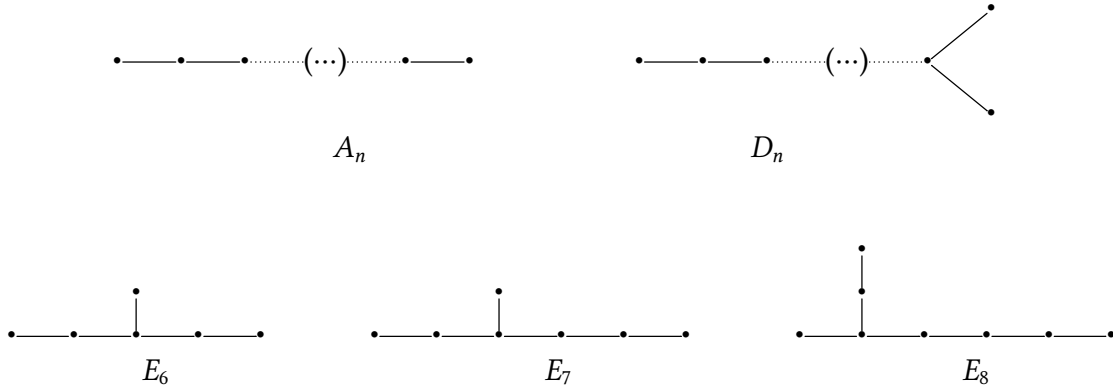


Diagrama 3: Grafos de Dynkin de aljavas do tipo finito

E [Naz73] mostra o resultado análogo para aljavas não-negativas e grafos de Dynkin estendidos, ou seja, \hat{q}_Q é uma forma não-negativa (e não é uma forma positiva) se, e somente se, Q é união disjunta de uma quantidade finita de aljavas cujos grafos associados são grafos de Dynkin estendidos do tipo \tilde{A}_n , \tilde{D}_n , \tilde{E}_6 , \tilde{E}_7 ou \tilde{E}_8 (independentemente da orientação das arestas).

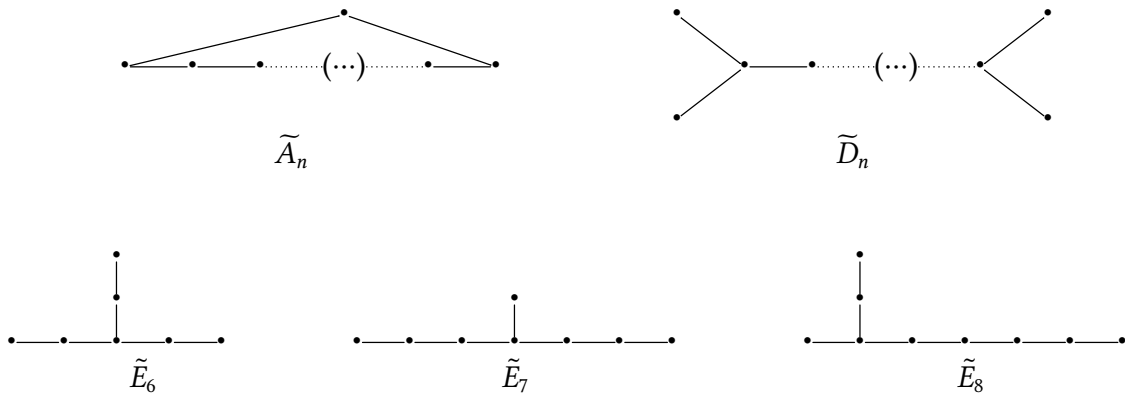


Diagrama 4: Grafos de Dynkin estendido de aljavas do tipo manso

Adicionalmente, o primeiro teorema de [Gab72b] relaciona a finitude das classes de isomorfismo de representações indecomponíveis ao diagrama que representa a aljava através da seguinte constatação:

Teorema ([Gab72b]). *Existe uma quantidade finita de representações indecomponíveis para a aljava Q (classificamos tais aljavas como do tipo finito) se, e somente se, Q é a união disjunta de uma quantidade finita de aljavas cujos grafos associados são grafos de Dynkin do tipo A_n , D_n , E_6 , E_7 ou E_8 .*

Mais tarde, o trabalho de Nazarova [Naz73] nos mostra que as aljavas que estão associadas a um grafo de Dynkin estendido do tipo \tilde{A}_n , \tilde{D}_n , \tilde{E}_6 , \tilde{E}_7 ou \tilde{E}_8 são exatamente

aquelas cujo problema de classificar as representações indecomponíveis não contém o problema de classificar um par de matrizes por transformações de semelhança simultâneas. Analogamente à nomenclatura que utilizamos para posets, chamaremos essas aljavas de *aljavas do tipo manso*; e as aljavas que não são do tipo manso ou finito de *aljavas do tipo selvagem*.

Seja a representação $V = ((V_i)_{i \in Q_0}, (V_a)_{a \in Q_1})$ da aljava Q . Fixando uma base para cada espaço $\{V_i\}_{i \in Q_0}$, podemos identificá-lo com k^{α_i} e cada V_a com uma matriz em $\text{Hom}(k^{\alpha_{s(a)}}, k^{\alpha_{t(a)}})$. Assim, podemos definir a variedade $R_\alpha(Q)$, que parametriza todas as representações com vetor dimensão α , como:

$$R_\alpha(Q) := \bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(k^{\alpha_{s(a)}}, k^{\alpha_{t(a)}});$$

e o grupo algébrico

$$G_\alpha := \prod_{i \in Q_0} \text{GL}_{\alpha_i}(k),$$

que age sobre $R_\alpha(Q)$ através da mudança de base de forma que dois elementos em $R_\alpha(Q)$ são isomorfos se, e somente se, pertencerem à mesma órbita de G_α . Ou seja, as órbitas de G_α estão em bijeção com as classes de isomorfismo de representações de Q com vetor dimensão α .

Além disso, as dimensões da variedade algébrica $R_\alpha(Q)$ e do grupo G_α são

$$\begin{aligned} \dim R_\alpha(Q) &= \sum_{a \in Q_1} \dim \text{Hom}(k^{\alpha_{s(a)}}, k^{\alpha_{t(a)}}) = \sum_{a \in Q_1} (\alpha_{s(a)} \cdot \alpha_{t(a)}), \\ \dim G_\alpha &= \sum_{i \in Q_0} \dim \text{GL}_{\alpha_i}(k) = \sum_{i \in Q_0} \alpha_i^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\dim G_\alpha(Q) - \dim R_\alpha(Q) = \langle \alpha, \alpha \rangle_Q. \quad (1.3)$$

Exemplo 1.1.3. Considere a aljava $Q = (Q_0, Q_1)$ onde $Q_0 = \{1, 2, 3\}$ e $Q_1 = \{a : 1 \rightarrow 2, b : 3 \rightarrow 2\}$ e o vetor $\alpha = (x, y, z)$.

$$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$$

A variedade $R_\alpha(Q)$ é identificada com $\text{Hom}(k^x, k^y) \times \text{Hom}(k^z, k^y)$ e o grupo G_α é identificado com $\text{GL}_1(k) \times \text{GL}_2(k) \times \text{GL}_3(k)$ e a ação de $g = (g_1, g_2, g_3) \in G_\alpha$ em $(A, B) \in R_\alpha(Q)$ é dada por:

$$(g_2 \cdot A \cdot g_1^{-1}, g_2 \cdot B \cdot g_3^{-1}).$$

Assim, $\dim R_\alpha(Q) = x \cdot y + z \cdot y$ e $\dim G_\alpha = x^2 + y^2 + z^2$. Portanto:

$$\dim G_\alpha - \dim R_\alpha(Q) = x^2 + y^2 + z^2 - x \cdot y - z \cdot y = \langle \alpha, \alpha \rangle_Q$$

Para uma aljava Q e um vetor dimensão α , dizemos que uma propriedade é *válida para representações de Q com o vetor dimensão α em geral* se existe um conjunto aberto

(denso, pela topologia de Zariski) de $R_\alpha(Q)$ para o qual ela é válida. Em outras palavras, essas propriedades dependem apenas do vetor dimensão, ocorrendo em "quase" todas as representações com a dimensão especificada. Em [Kac80], Kac mostrou que na decomposição de uma representação $V \in R_\alpha(Q)$ como soma direta de n representações indecomponíveis $V = \bigoplus_{i=1}^n U_i$, em geral, o conjunto de dimensões $\{\beta_i = \dim U_i\}_{i=1}^n$ depende apenas do vetor α e não da representação V considerada. Assim, ele denominou a soma $\alpha = \sum_{i \in I} \beta_i$ de *decomposição canônica do vetor α* e mostrou que $\sum_{i \in I} \beta_i$ é a decomposição canônica de α se cada β_i é um vetor schuriano e $\text{Ext}(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = 0$ para representações em geral com vetores dimensões $\beta_i = \dim \mathbf{R}$ e $\beta_j = \dim \mathbf{S}$. Dando continuidade a esse trabalho, Kac [Kac82] aprimora os resultados supracitados de Nazarova e Gabriel, garantindo que o conjunto de dimensões das representações indecomponíveis de uma aljava Q sobre um corpo algebricamente fechado estão em bijeção com o sistema de raízes positivas associados à matriz de Cartan de Q . Em particular, para cada raiz real (vetor dimensão α para o qual $\hat{q}_Q(\alpha) = 1$) existe uma única representação indecomponível (a menos de isomorfismo) com tal vetor dimensão. E para cada raiz imaginária (vetor dimensão α para o qual $\hat{q}_Q(\alpha) = 0$) existem infinitas classes de isomorfismo de representações com tal vetor dimensão.

Os trabalhos de Kac serviram ainda como base para o trabalho de Schofield [Sch92], que aprofundou o conhecimento que temos sobre a decomposição canônica dos vetores dimensão apresentados anteriormente, estudando especificamente as dimensões de representações schurianas. Seguindo a notação do trabalho de Schofield, indicaremos por $\beta \hookrightarrow \alpha$ sempre que existir uma subrepresentação com vetor β em representações com vetor dimensão α em geral. Um resultado especialmente importante para o Capítulo 4 do presente trabalho é o Teorema 6.1 de Schofield [Sch92]:

Teorema ([Sch92]). *Seja Q uma aljava e α um vetor dimensão para Q . Então α é um vetor schuriano se, e somente se, para todo $\beta \hookrightarrow \alpha$, $\langle \beta, \alpha \rangle_Q - \langle \alpha, \beta \rangle_Q < 0$.*

Em outras palavras, esse resultado nos diz que V é uma representação schuriana, em geral, se, e somente se, a *condição de Schofield* é satisfeita, ou seja,

$$\langle \dim W, \dim V \rangle_Q - \langle \dim V, \dim W \rangle_Q < 0$$

para subrepresentações W de V em geral.

Resultados análogos para posets podem ser demonstrados para algumas famílias de representações de posets. Na Seção 1.4, apresentaremos mais detalhes sobre esses resultados.

1.2 Relações entre aljavas e posets

Podemos definir a álgebra de incidência de um poset S de duas maneiras equivalentes.

Definição 1.2.1 (Álgebra de incidência). *Considere o poset S ordenado de forma crescente ($i \leq j \in S$ implica em $i < j \in \mathbb{N}$). A álgebra de incidência kS é definida como a subálgebra*

de matrizes:

$$\begin{bmatrix} k & k_{1,2} & k_{1,3} & \cdots & k_{1,n} \\ 0 & k & k_{2,3} & \ddots & k_{2,n} \\ 0 & 0 & k & \ddots & k_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{bmatrix}$$

onde $k_{i,j} = k$ se $i \leq j$ e $k_{i,j} = 0$ caso contrário.

Equivalentemente, a álgebra de incidência kS de um poset S é a álgebra sobre k gerada por todos os elementos $e_{i,j}$ onde $i \leq j \in S$ e com a multiplicação definida por $e_{i,j} \cdot e_{k,l} = \delta_{j,k} \cdot e_{i,l}$, na qual $\delta_{j,k} = 1$ caso $j \leq k$ e $\delta_{j,k} = 0$ caso contrário.

Além disso, as representações de posets estão associadas aos módulos de $k\widehat{S}$ por uma equivalência de categorias $\mathbf{sp}_S \approx \text{mod}_{sp}(k\widehat{S})$, onde $\text{mod}_{sp}(k\widehat{S})$ é uma subcategoria plena de $\text{mod}(k\widehat{S})$, com os módulos cujo sóculo é projetivo (ver [Sim92, Lem. 5.1, item (c)]).

No estudo de aljavas, a álgebra de caminhos exerce um papel análogo ao de álgebra de incidência para posets. Dada uma aljava Q , um *caminho* de tamanho $m \geq 1$ em Q é uma lista de m flechas ordenadas de forma que o alvo de uma aresta é igual à origem da próxima. Um caminho cuja origem da primeira flecha é igual ao alvo da última é chamado de *ciclo orientado*. Denominaremos o conjunto de todos os caminhos de tamanho m de Q_m (note que Q_1 coincide com o conjunto de flechas de Q). Um *caminho trivial* é um vértice q de Q_0 considerado como uma flecha com *origem* e *alvo* iguais a q . Como há uma identificação entre caminhos triviais e os vértices de Q , denominaremos o conjunto de todos os caminhos triviais de Q_0 .

Para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j \in Q_1$, definimos a composição $i \circ \alpha = \alpha \circ j = \alpha$. Com isso, definimos a álgebra de caminhos de Q como:

$$kQ = kQ_0 \oplus kQ_1 \oplus \cdots \oplus kQ_m \oplus \cdots,$$

onde kQ_m indica $\bigoplus_{\gamma \in Q_m} k\gamma$.

Dados os caminhos $a = \sum_{\alpha \in kQ} \alpha \cdot a_\alpha$ e $b = \sum_{\alpha \in kQ} \alpha \cdot b_\alpha$, onde $\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_m$ e $\beta = \beta_1 \circ \beta_2 \circ \cdots \circ \beta_t$; as operações desta álgebra são definidas a seguir:

$$a + b = \sum_{\alpha \in kQ} \alpha(a_\alpha + b_\alpha) \qquad a \cdot b = \sum_{\alpha, \beta \in kQ} \alpha\beta \cdot (a_\alpha b_\beta),$$

onde $\alpha\beta$ é o caminho $\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_m \circ \beta_1 \circ \beta_2 \circ \cdots \circ \beta_t$ se $t(\alpha_m) = s(\beta_1)$ e $\alpha \cdot \beta = 0$ caso contrário.

A categoria dos módulos da álgebra de caminhos $\text{mod}(kQ)$ da aljava Q é isomorfa à categoria das representações $R(Q)$ da aljava Q .

Como observado por Simson [Sim92, Prop 14.3], uma definição alternativa (e equivalente) à anterior para os casos em que Q não tem ciclos orientados de tamanho maior que 0 é a seguinte:

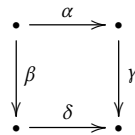
Proposição 1.2.2. *A álgebra de caminhos kQ é isomorfa à subálgebra de matrizes:*

$$\begin{bmatrix} k & k_{1,2} & k_{1,3} & \cdots & k_{1,n} \\ 0 & k & k_{2,3} & \ddots & k_{2,n} \\ 0 & 0 & k & \ddots & k_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{bmatrix}$$

Onde $n = |Q_0|$ e $k_{i,j} = \bigoplus_{\gamma: i \rightarrow j} k\gamma$.

Definimos também uma relação k -linear na aljava Q como uma forma $\omega = \omega_1\lambda_1 + \cdots + \omega_m\lambda_m$, onde $\lambda_j \in k$ e ω_i são caminhos em Q que se iniciam no mesmo vértice e finalizam no mesmo vértice. Um ideal Ω de kQ gerado por caminhos de tamanho ≥ 2 e que contem Q_m para algum $m \geq 2$ é um *conjunto admissível de relações k -lineares*. O par (Q, Ω) é chamado de *aljava delimitada* e a álgebra $k(Q, \Omega) := \frac{kQ}{\Omega}$ é chamada *álgebra de aljava delimitada*. Uma representação da aljava delimitada (Q, Ω) é uma representação da aljava Q cujos mapas $\{V_a\}_{a \in Q_1}$ respeitam as relações definidas pelas equivalências de caminhos em $k(Q, \Omega)$.

Exemplo 1.2.3. *Considere a aljava Q e o conjunto admissível de relações k -lineares Ω abaixo:*



$$\Omega = \langle \alpha\gamma - \beta\delta \rangle$$

Note que Q não possui ciclos orientados de tamanho maior que 0. Assim, a álgebra de caminhos de kQ e a álgebra de aljava delimitada $k(Q, \Omega)$ são respectivamente:

$$kQ = \begin{bmatrix} k & k & k & k^2 \\ 0 & k & 0 & k \\ 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

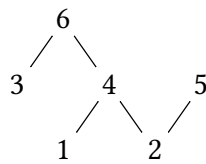
$$k(Q, \Omega) = \begin{bmatrix} k & k & k & k \\ 0 & k & 0 & k \\ 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

A importância desta construção é evidenciada em [Gab72b], onde Gabriel prova que, para qualquer álgebra R de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, é possível encontrar uma aljava delimitada (Q, Ω) de forma que haja uma equivalência entre as categorias $\text{mod}(R)$ e $\text{mod}(k(Q, \Omega))$. Esse resultado ressalta a conexão profunda entre a teoria das álgebras de dimensão finita, a teoria das álgebras de caminhos e, portanto, com

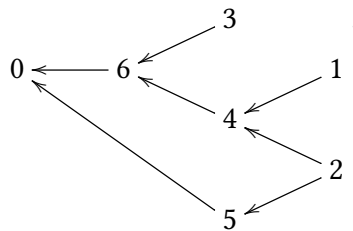
o estudo das representações de aljavas, proporcionando uma ferramenta poderosa para estudar as propriedades dos módulos de álgebras de dimensão finita.

Para expandir alguns resultados de aljavas a uma série de posets, usaremos uma construção cujas propriedades podem ser vistas com detalhes, por exemplo, na Seção 2.1 do trabalho de Weist e Iusenko [WI12] e que possibilita associar a cada poset \mathcal{S} uma aljava $Q(\mathcal{S}) = (Q_0, Q_1)$ sem ciclos orientados e flechas paralelas (ou seja, com a mesma imagem em ambas funções s e t) e com um, e apenas um, poço; de forma que Q_0 é formado pelos elementos em $\widehat{\mathcal{S}}$ e para cada dupla $i < j$ onde não há nenhum elemento t tal que $i < t < j$, existe uma única aresta $\alpha_{i,j} : i \rightarrow j$ em Q_1 .

Exemplo 1.2.4. O poset $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6; 3 < 6, 1 < 4 < 6, 2 < 4, 2 < 5\}$ com o seguinte diagrama de Hasse:



está relacionado à aljava $Q(\mathcal{S})$ dada por:



Através dessa associação, podemos encontrar um conjunto admissível de relações k -lineares Ω em $Q(\mathcal{S})$ de forma que a categoria de representações subespaçiais de \mathcal{S} seja equivalente à subcategoria de representações estritas de $Q(\mathcal{S})$ delimitadas por Ω . Em particular, Ω precisa ser definido como o ideal formado por todas as relações comutativas

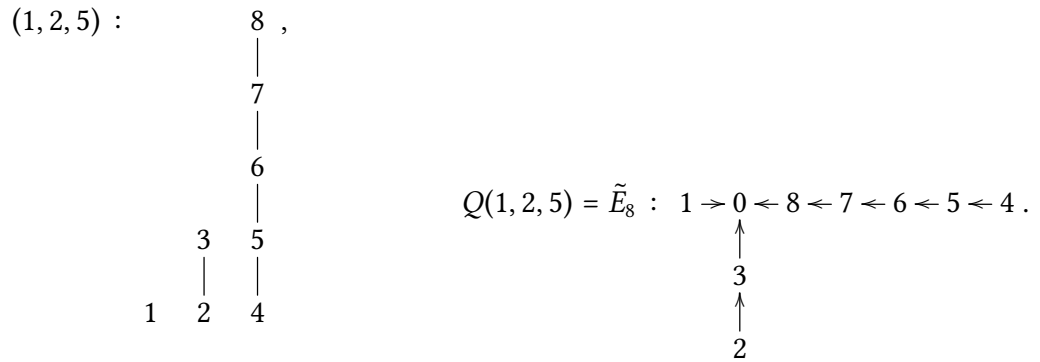
$$\alpha_{i,i_1} \alpha_{i_1,i_2} \cdots \alpha_{i_n,j} - \alpha_{i,j_1} \alpha_{j_1,j_2} \cdots \alpha_{j_m,j}$$

onde $i < i_1 < \cdots < i_n < j$ e $i < j_1 < \cdots < j_m < j$, ou seja, o ideal formado pela subtração de todos os caminhos (dois a dois) que iniciam no mesmo vértice e finalizam também no mesmo vértice.

No exemplo anterior, Ω pode ser definido como o ideal gerado por $\alpha_{2,4} \alpha_{4,6} \alpha_{6,0} - \alpha_{2,5} \alpha_{5,0}$.

Porém, nos casos em que o poset \mathcal{S} é primitivo, não há dois caminhos que possuam a mesma origem e alvo. Assim, suas representações indecomponíveis estão em bijeção (através deste isomorfismo) com as representações de $Q(\mathcal{S})$.

Alguns resultados do Capítulo 4 envolvem representações indecomponíveis do poset $(1, 2, 5)$ associado à aljava relacionada ao grafo de Dynkin estendido \widetilde{E}_8 . Em particular,



Como vimos na Seção 1.1, \tilde{E}_8 é uma aljava do tipo manso, assim, suas representações indecomponíveis \mathbf{V} têm dimensões iguais às raízes da forma de Tits, ou seja, são tais que $\hat{q}_{Q(S)}(\dim \mathbf{V}) = 0$ ou $\hat{q}_{Q(S)}(\dim \mathbf{V}) = 1$. Nos casos em que $\hat{q}_{Q(S)}(\dim \mathbf{V}) = 0$ (resp. $\hat{q}_{Q(S)}(\dim \mathbf{V}) = 1$), dizemos que $\dim \mathbf{V}$ é uma raiz imaginária (resp. raiz real) da forma de Tits. As raízes imaginárias são múltiplas de um mesmo vetor (especificamente $(6; 3; 4, 2; 5, 4, 3, 2, 1)$ no caso de \tilde{E}_8) e as representações com essas dimensões são chamadas *regulares* e são listadas, por exemplo, em [DF73] e Yakymenko [Yak10b]. As raízes reais são dimensões de representações pré-projetivas ou pré-injetivas, que podem ser calculadas através da matriz associada ao funtor de Coxeter, que será apresentada na Seção B.

1.3 Matriz de Cartan e formas quadráticas

Dada uma álgebra básica A de dimensão finita com um conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonais $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, podemos definir a *matriz de Cartan* de A como $C_A = (c_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$, onde $c_{ij} = \dim(e_i \cdot A \cdot e_j)$ para todo i, j em $\{1, 2, \dots, n\}$. Independente do conjunto de idempotentes escolhido, essa matriz é única a menos de permutações entre linhas e colunas.

A matriz de Cartan da álgebra de incidência kS de um poset é uma matriz booleana que pode ser facilmente calculada a partir das relações entre os elementos de S . Em particular, é dada pela matriz quadrada $C_S = (c_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ com $|S|$ linhas e colunas cujas coordenadas são definidas por:

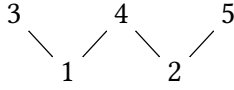
$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \leq j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sempre que a álgebra possui dimensão global finita, sua matriz de Cartan tem determinante igual a 1 ou -1 , o que a torna invertível. No caso dos posets, sua dimensão global é sempre finita e sua matriz de Cartan possui determinante igual a 1.

Além disso, a matriz de Cartan de um poset sempre pode ser escrita como uma matriz unitriangular (inferior ou superior, de acordo com a ordenação dos elementos do poset), portanto é sempre invertível. Se um poset é primitivo, sua matriz de Cartan também pode ser escrita como uma matriz diagonal por blocos, onde cada bloco B_i é triangular e tem todos os elementos não obrigatoriamente nulos iguais a 1.

Exemplo 1.3.1. Considere o poset $S = \{1, 2, 3, 4, 5; 1 < 3, 1 < 4, 2 < 4, 2 < 5\}$.

Seu diagrama de Hasse é dado por:

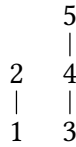


Escrevendo a matriz de Cartan com os elementos na ordem usual $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, obtemos uma matriz unitriangular superior.

$$C_S = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Exemplo 1.3.2. Considere o poset primitivo $S = \{1, 2, 3, 4, 5; 1 < 2, 3 < 4 < 5\}$. Seu diagrama de Hasse e matriz de Cartan podem ser escritos como a seguir:

Seu diagrama de Hasse é dado por:



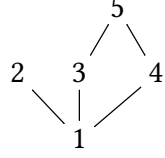
Sua matriz de Cartan na ordem usual forma uma matriz diagonal em blocos, onde cada bloco é uma matriz unitriangular superior.

$$C_S = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Fixaremos algumas notações relacionada à matriz de Cartan e suas submatrizes que serão utilizadas em todo o trabalho. Seja $n \in \mathbb{N}$ e \mathcal{X}, \mathcal{Y} dois subposets de S . Defina E_n a matriz coluna $(1, 1, \dots, 1)^{tr}$ com n elementos e $E_{\mathcal{X}} := E_{|\mathcal{X}|}$. Analogamente, a matriz identidade será denotada por Id_i e $\text{Id}_{\mathcal{X}} := \text{Id}_{|\mathcal{X}|}$.

Utilizaremos a notação C_S para denotar a matriz de Cartan do poset S . Além disso, denotaremos por $C_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}$ a restrição às linhas e colunas correspondentes a \mathcal{X} e \mathcal{Y} respectivamente de C_S e por $C_{\mathcal{X}}$ a matriz $C_{\mathcal{X}, \mathcal{X}}$. Para um vetor dimensão $\alpha \in \mathbb{Z}^{|\mathcal{X}|}$, denotaremos por $\alpha_{\mathcal{X}}$ o vetor formado pelas coordenadas correspondentes aos elementos em \mathcal{X} .

Exemplo 1.3.3. O poset $S = \{1, 2, 3, 4, 5; 1 < 2, 1 < 3, 1 < 4, 3 < 5, 4 < 5\}$ tem os seguintes diagrama de Hasse e matriz de Cartan:



$$C_S = \begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Seccionando-o em três subposets $S = \mathcal{R} \cup \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ dados por $\mathcal{R} = \{1\}$, $\mathcal{X} = \{2, 3, 4\}$ e $\mathcal{Y} = \{5\}$, podemos representar sua matriz de Cartan por:

$$C_S = \begin{array}{c|ccc} & \mathcal{R} & \mathcal{X} & \mathcal{Y} \\ \hline \mathcal{R} & 1 & E_3^{tr} & 1 \\ \mathcal{X} & 0 & \text{Id}_3 & C_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}} \\ \mathcal{Y} & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

A partir da matriz de Cartan de um poset e de seu poset estendido, podemos definir formas inteiras bilineares e quadráticas relacionadas a este poset.

Definição 1.3.4 (Formas de Euler e Tits). *Seja S um poset. As formas bilinear e quadrática de Euler são dadas a seguir:*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_S : \mathbb{Z}^{|\hat{S}|} \times \mathbb{Z}^{|\hat{S}|} &\rightarrow \mathbb{Z} & q_S : \mathbb{Z}^{\hat{S}} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \cdot C_S^{-1} \cdot \beta^{tr}; & \alpha &\mapsto \langle \alpha, \alpha \rangle. \end{aligned}$$

A forma bilinear de Tits por sua vez é definida como:

$$\begin{aligned} d_S : \mathbb{Z}^{|\hat{S}|} \times \mathbb{Z}^{|\hat{S}|} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \sum_{s \in \hat{S}} \alpha_s \beta_s + \sum_{t < s \in S} \alpha_s \beta_t - \beta_0 \sum_{s \in S} \alpha_s, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente, através da matriz de Tits como $\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -E_S & C_S^{tr} \end{bmatrix} \cdot \beta^{tr}$. E, assim como a forma de Euler, também podemos definir a forma quadrática de Tits como $d_S(\alpha, \alpha)$.

Como a forma quadrática de Euler depende exclusivamente da matriz de Cartan e como os posets primitivos têm uma matriz de Cartan que segue um padrão, é possível encontrar a forma quadrática de Euler explicitamente para esses posets. Particularmente, organizando o poset S em m subconjuntos totalmente ordenados cada um com n_i elementos e mantendo 0 como o primeiro elemento, temos:

$$C_{\hat{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ E_{n_1} & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ E_{n_2} & 0 & B_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ E_{n_m} & 0 & \cdots & 0 & B_m \end{bmatrix} \quad C_{\hat{S}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ D_{n_1} & B_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ D_{n_2} & 0 & B_2^{-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ D_{n_m} & 0 & \cdots & 0 & B_m^{-1} \end{bmatrix}$$

onde D_i é a matriz coluna com i elementos, onde o último é -1 e os demais são 0 , B_i é o bloco triangular descrito para posets primitivos no início desta seção com n_i elementos, B_i^{-1} é o bloco de tamanho n_i onde a diagonal é igual a 1 e os elementos imediatamente acima são -1 .

Mais especificamente, para o poset do Exemplo 1.3.2, teríamos:

$$C_{\hat{S}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \quad C_{\hat{S}}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

Assim, um poset primitivo tem sua forma quadrática de Euler igual à forma quadrática de Tits da aljava associada:

$$q_S = \hat{q}_{Q(S)}$$

Ilustrativamente, para o poset do Exemplo 1.3.2, tem-se:

$$q_S(\boldsymbol{\alpha}) = (\alpha_0 - \alpha_2 - \alpha_5) \cdot \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \alpha_2 + \alpha_3 \cdot \alpha_3 + (\alpha_4 - \alpha_3) \cdot \alpha_4 + (\alpha_5 - \alpha_4) \cdot \alpha_5$$

$$q_S(\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 - \alpha_0 \cdot \alpha_2 - \alpha_2 \cdot \alpha_1 - \alpha_0 \cdot \alpha_5 - \alpha_5 \cdot \alpha_4 - \alpha_4 \cdot \alpha_3 = \hat{q}_{Q(S)}(\boldsymbol{\alpha}).$$

Para um poset não primitivo, porém, essa associação não é verdadeira. Isso pode ser observado no poset do Exemplo 1.3.1, cuja matriz de Cartan e sua inversa são dadas por:

$$C_{\hat{S}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \quad C_{\hat{S}}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \end{array},$$

assim, a expressão de sua forma quadrática de Euler é dada por:

$$q_S(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=0}^5 \alpha_i^2 + \alpha_0 \cdot \alpha_1 + \alpha_0 \cdot \alpha_3 - \alpha_0 \cdot \alpha_2 - \alpha_0 \cdot \alpha_4 - \alpha_0 \cdot \alpha_5 - \alpha_1 \cdot \alpha_2 - \alpha_1 \cdot \alpha_4 - \alpha_3 \cdot \alpha_4 - \alpha_3 \cdot \alpha_5,$$

enquanto a forma quadrática de Tits de sua aljava associada é dada por:

$$\hat{q}_{Q(S)}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=0}^5 \alpha_i^2 - \alpha_0 \cdot \alpha_2 - \alpha_0 \cdot \alpha_4 - \alpha_0 \cdot \alpha_5 - \alpha_1 \cdot \alpha_2 - \alpha_1 \cdot \alpha_4 - \alpha_3 \cdot \alpha_4 - \alpha_3 \cdot \alpha_5.$$

Por outro lado, Simson [Sim10, Prop. 4.2] garante uma relação entre as duas formas, mesmo para os casos em que o poset não é primitivo. Particularmente, ele mostra que quando a dimensão global da álgebra de incidência do poset estendido é menor ou igual a 2, a forma bilinear reduzida de Euler é tal que:

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle_S = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle_{Q(S)} + \sum_{i,j \in \hat{S}} r(i,j) \cdot \alpha_i \beta_j,$$

onde $r(i,j) = \dim \text{Ext}_{k\hat{S}}^2(S_{\hat{S}}(i), S_{\hat{S}}(j))$ e $S_{\hat{S}}(h)$ é um $k\hat{S}$ -módulo simples correspondendo a $h \in \hat{S}$.

No Exemplo 1.3.1, a porção destacada $(\alpha_0 \cdot \alpha_1 + \alpha_0 \cdot \alpha_3)$ segue do fato de que $\text{Ext}_{k\hat{S}}^2(S_{\hat{S}}(1), S_{\hat{S}}(0))$ e $\text{Ext}_{k\hat{S}}^2(S_{\hat{S}}(3), S_{\hat{S}}(0))$ têm dimensão 1.

A importância destas formas para problemas de classificação de representações de aljavas e de posets foi evidenciada pela primeira vez nos trabalhos de Gabriel [Gab72b] e Drozd [Dro74] respectivamente. Para aljavas, a forma quadrática de Tits associada a uma aljava finita tem interpretações geométricas (como vimos na seção 1.1), além de ter um papel fundamental no Teorema de Gabriel [Gab72b] para a determinação das aljavas do tipo finito (forma quadrática de Tits positiva definida) e do tipo manso (forma quadrática de Tits positiva indefinida). Por outro lado, como consequência direta de que para duas representações quaisquer \mathbf{V}, \mathbf{W} de Q tem-se $\text{Ext}_Q^i(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = 0$ para todo $i \geq 2$, a forma bilinear de Euler de uma aljava Q nos permite interpretá-la homologicamente, de forma que

$$\langle \dim \mathbf{V}, \dim \mathbf{W} \rangle_Q = \dim \text{Hom}_Q(\mathbf{V}, \mathbf{W}) - \dim \text{Ext}_Q^1(\mathbf{V}, \mathbf{W}).$$

Considere o espaço $\text{Mat}_{S,\alpha}$ de matrizes em Mat_S com vetor dimensão igual a α e o grupo algébrico $G_{S,\alpha} = \text{GL}(\alpha_0) \times H_{S,\alpha}$, onde $H_{S,\alpha} = (c_{ij})_{i,j \in S}$ e $c_{ij} = 0$ se $i \not\leq j$ (representando as transformações elementares da Definição 1.0.2). Considere também a ação

$$\begin{aligned} * : G_{S,\alpha} \times \text{Mat}_{S,\alpha} &\longrightarrow \text{Mat}_{S,\alpha} \\ (B, C) * A &\longmapsto B^{-1} \cdot A \cdot C. \end{aligned}$$

A quantidade de órbitas nesta ação também está relacionada a forma quadrática de Tits. Em particular, a dimensão de $G_{S,\alpha}$ é dada por $\sum_{i=0}^n \alpha_i^2 + \sum_{i < j \in S} \alpha_i \alpha_j$ e a dimensão de $\text{Mat}_{S,\alpha}$ é dada

por $\sum_{i=1}^n \alpha_0 \alpha_i$. Com base nessas observações, Drozd [Dro74, Prop.2, Teor.1] nos garante que através do sinal da forma quadrática de Tits associada a um poset podemos identificar seu tipo como finito, manso ou selvagem. Nos casos em que a forma quadrática é fracamente positiva (isto é, $\hat{q}_S(\alpha) > 0$ sempre que $\alpha \neq 0$ e $\alpha_i \geq 0$ para todo $i \in S$), o poset é do tipo finito. Mais especificamente, quando \hat{q}_S é fracamente positiva, se α é um vetor dimensão para representações subespaciais de posets, $\hat{q}_S(\alpha) = 1$ implica na existência de uma única representação indecomponível com vetor dimensão igual a α (a menos de isomorfismos). Mais tarde, Nazarova e Zavadskij [NZ77] nos permitem identificar o poset como do tipo manso nos casos em que a forma quadrática é fracamente não-negativa (isto é, $\hat{q}_S(\alpha) \geq 0$ sempre que $\alpha \neq 0$ e $\alpha_i \geq 0$ para todo $i \in S$).

A categoria dos módulos prinjetivos da álgebra de incidência $k\hat{S}$, denominada de $\text{prin}(k\hat{S})$ é uma subcategoria hereditária de $\text{mod}(k\hat{S})$ equivalente à categoria Mat_S^{ad} , uma categoria aditiva construída a partir de Mat_S . Esses módulos desempenham um papel importante na demonstração de que existem sequências de Auslander-Reiten em sp_S (ver [Sim92, Sec 11.6]). A esse respeito, se $X, Y \in \text{prin}(k\hat{S})$, podemos extrair da forma bilinear de Tits uma informação homológica sobre $\text{prin}(k\hat{S})$:

$$d_S(\text{cdn}(X), \text{cdn}(Y)) = \dim \text{Hom}_{k\hat{S}}(X, Y) - \dim \text{Ext}_{k\hat{S}}^1(X, Y).$$

Quanto à forma bilinear de Euler associada a um poset, há também uma interpretação homológica: Assim como toda álgebra com dimensão global finita, a forma bilinear gerada pelo inverso de sua matriz de Cartan coincide com a característica de Euler da álgebra de incidência kS , ou seja, $\langle \dim X, \dim Y \rangle_S = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim \text{Ext}_{kS}^i(X, Y)$.

A forma quadrática de Euler, por sua vez, assim como a forma quadrática de Tits, caracteriza os posets quanto ao seu tipo. Em Yuzvinsky [Yuz81, Teor. 6], o autor mostra que formas quadráticas de Euler de posets do tipo finito são fracamente positivas e de posets de outros tipos não o são. No Capítulo 2, nós propomos uma interpretação geométrica para ela, onde encontramos uma igualdade semelhante à Equação 1.3 para a variedade Poset, que será definida na próxima seção.

1.4 Variedade Poset

Dado um poset S e fixando um vetor dimensão $\alpha = (\alpha_0, \alpha_s)_{s \in S} \in \mathbb{Z}^{\hat{S}}$, vamos denotar a variedade projetiva a seguir como *Variedade Poset*:

$$\text{Fl}_{S, \alpha} = \left\{ (V_s)_{s \in S} \in \prod_{s \in S} \text{Gr}(\alpha_s, \alpha_0) \mid V_s \subset V_t \text{ se } s < t \right\}$$

Essa variedade foi inicialmente definida no trabalho de Futorny e Iusenko [FuI2018] como a variedade que parametriza as representações de S com vetor dimensão igual a α . Além disso, ela pode ser vista como uma generalização de algumas variedades importantes, como veremos a seguir.

Exemplo 1.4.1. Considere o poset unitário $S = \{1\}$ e o vetor dimensão $\alpha = (\alpha_0; \alpha_1)$. Neste caso, a Variedade Poset é equivalente ao Grassmaniano $\text{Gr}(\alpha_1, \alpha_0)$, ou seja, o espaço que parametriza todos os subespaços de dimensão α_1 dentro de um espaço de dimensão α_0 .

Assim, a dimensão de $\text{Fl}_{S,\alpha}$ é dada por $\dim\text{Gr}(\alpha_1, \alpha_0) = \alpha_1 \cdot (\alpha_0 - \alpha_1)$ (veja, por exemplo, [Smi16, Pág. 6]), que, por sua vez, se iguala a $\alpha_0^2 - q_S(\alpha)$.

Exemplo 1.4.2. Seja S o poset $\{1, \dots, n\}$ de n elementos incomparáveis dois a dois (uma anticadeia com n elementos).

Neste caso, como não há relações entre os elementos de S , a Variedade Poset é o produto dos Grassmanianos $\prod_{s \in S} \text{Gr}(\alpha_s, \alpha_0)$. Portanto, a dimensão da variedade é a soma das dimensões individuais (veja, por exemplo, [Gat14, Ex. 4.2.8]), que podem ser calculadas como no Exemplo 1.4.1:

$$\dim\text{Fl}_{S,\alpha} = \dim \prod_{s \in S} \text{Gr}(\alpha_s, \alpha_0) = \sum_{s \in S} \dim\text{Gr}(\alpha_s, \alpha_0) = \sum_{s \in S} \alpha_s \cdot (\alpha_0 - \alpha_s)$$

Observe que a expressão $\alpha_0^2 - q_S(\alpha)$ também é dada por $\sum_{s \in S} \alpha_s \cdot (\alpha_0 - \alpha_s)$, seguindo o padrão do exemplo anterior.

Exemplo 1.4.3. Seja S o poset totalmente ordenado $\{1 < \dots < n\}$ (uma cadeia). Neste caso, $\text{Fl}_{S,\alpha}$ é uma variedade flag parcial, cuja dimensão é conhecida (consulte [Bri04, Pág. 7]):

$$\dim\text{Fl}_{S,\alpha} = \sum_{s=2}^n (\alpha_0 - \alpha_s) \cdot (\alpha_s - \alpha_{s-1}),$$

e que, por sua vez, também se iguala a expressão $\alpha_0^2 - q_S(\alpha)$.

Exemplo 1.4.4. Seja S o poset primitivo $\{1, 2, 3, 4, 5, 6; 1 < 4, 2 < 5, 3 < 6\}$, com o diagrama de Hasse a seguir.

$$\begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \\ | & | & | \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Neste caso, a Variedade Poset $\text{Fl}_{S,\alpha}$ é a variedade flag múltipla, definida em [MWZ99]. Sua dimensão corresponde à soma das dimensões das três variedades flag parciais relacionadas a cada subposet cadeia $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$ e $\{3, 6\}$.

Ou seja:

$$\begin{aligned} \dim\text{Fl}_{S,\alpha} &= \dim(\text{Fl}_{\{1,4\},(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_4)} \times \text{Fl}_{\{2,5\},(\alpha_0,\alpha_2,\alpha_5)} \times \text{Fl}_{\{3,6\},(\alpha_0,\alpha_3,\alpha_6)}) \\ &= (\alpha_0 - \alpha_4) \cdot (\alpha_4 - \alpha_1) + (\alpha_0 - \alpha_5) \cdot (\alpha_5 - \alpha_2) + (\alpha_0 - \alpha_6) \cdot (\alpha_6 - \alpha_3) \\ &= \alpha_0^2 - q_S(\alpha). \end{aligned}$$

Note que nos exemplos acima, a dimensão da Variedade Poset pode ser escrita como $\dim\text{Fl}_{S,\alpha} = \alpha_0^2 - q_S(\alpha)$. No Capítulo 2, generalizaremos essa expressão para qualquer variedade poset, desde que o vetor $\alpha = (\alpha_0, \alpha_s)_{s \in S} \in \mathbb{Z}^{\hat{S}}$ esteja restrito a um conjunto de vetores admissíveis, vetores $\alpha = (\alpha_0, \alpha_s)_{s \in S} \in \mathbb{Z}^{\hat{S}}$ para os quais $\alpha_S \cdot C_S^{-1}$ é um vetor de coordenadas não negativas e $\alpha_0 \geq \alpha_s$ para todo $s \in S$.

Numa construção análoga à análise das órbitas da ação do grupo algébrico G_d sobre a variedade $R_d(Q)$ feita no Teorema de Gabriel [Gab72b] apresentado na Seção 1.1, considere o grupo $GL(\alpha_0)$, que age na variedade $Fl_{S,\alpha}$ mudando sua base, portanto, se $g \in G$, então $g \cdot ((V_s)_{s \in \hat{S}}) = (g(V_s))_{s \in \hat{S}}$. Dessa forma, os pontos de uma mesma órbita da ação são representações isomorfas e, assim, as órbitas estão em bijeção com as classes de isomorfismo de representações por subespaços de S com vetor dimensão α . Ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{órbitas da ação} \\ GL(\alpha_0) \text{ em } Fl_{S,\alpha} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Isoclasses das representações} \\ \text{de } S \text{ com dimensão igual a } \alpha \end{array} \right\}.$$

Assim, o padrão que observamos nos exemplos acima pode ser expresso como:

$$\dim GL(\alpha_0) - \dim Fl_{S,\alpha} = q_S(\alpha). \quad (1.4)$$

Ao longo deste trabalho, um dos nossos objetos de estudo serão conjuntos abertos da Variedade Poset (a Variedade Poset é irredutível e, portanto, na topologia de Zariski, todo conjunto aberto não vazio em $Fl_{S,\alpha}$ é denso). Assim, seguindo a notação de Schofield para aljavas que vimos na Seção 1.1, diremos que uma propriedade P é válida para *representações de S em geral com vetor dimensão α* se P é válida para um conjunto aberto na variedade $Fl_{S,\alpha}$. Analogamente, P é válida para *representações de S em geral* se ela é válida para representações de S em geral com vetor dimensão α para quaisquer possíveis vetores dimensão α .

Um subconjunto aberto da Variedade Poset especialmente importante para o nosso trabalho é o conjunto de *representações genéricas*, devido a suas propriedades convenientes de relação entre as dimensões dos espaços.

Definição 1.4.5. *Seja S um poset e V uma representação de S . Diremos que V é uma representação genérica se ela pertence ao conjunto aberto de $Fl_{S,\alpha}$ especificamente determinado pela seguinte propriedade: A intersecção de quaisquer conjuntos de somas de espaços $\bigcap_{j \in J} (\sum_{i \in I_j} V_i)$, com $I_j \subseteq S, J \subset \mathbb{N}$ é a menor possível para o vetor dimensão α .*

Exemplo 1.4.6. *Sejam o poset $S = \{1, 2, 3; 1 < 3, 1 < 2\}$ e as representações V e W de S dadas pelos diagramas a seguir:*

$$\begin{array}{ccc} V : & \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_0 & W : & \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_0 \\ & \begin{array}{c} \langle e_1, e_2 \rangle_2 \quad \langle e_1, e_3 \rangle_3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \langle e_1 \rangle_1 \end{array} & & \begin{array}{c} \langle e_1, e_2 \rangle_2 \quad \langle e_1, e_3 \rangle_3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0_1 \end{array} \end{array}.$$

A representação V é genérica, enquanto a W não é genérica, visto que $V_2 \cap V_3 = V_1$ e $W_2 \cap W_3 \neq W_1$.

Assim, a condição de Schofield, quando aplicada ao contexto de posets, pode ser formulada da seguinte maneira: $\langle \dim W, \dim V \rangle_S - \langle \dim V, \dim W \rangle_S < 0$ para subrepresentações W de V em geral. Em [Ful2018, Prop. 4.2], os autores demonstraram que as representações schurianas de posets primitivos satisfazem a condição de Schofield. Além disso, de acordo

com [Fu12018, Prop. 4.4], as representações sinceras (representações indecomponíveis \mathbf{V} nas quais o vetor \mathbf{dimV} não possui coordenadas nulas e $\dim V_s \neq \dim V_t$ sempre que $s < t$) de posets também a satisfazem.

Em particular como em $\mathcal{S} = (1, 2, 5)$, para cada raiz real α , há apenas uma representação indecomponível \mathbf{V} com dimensão α (a menos de isomorfismos), a desigualdade $\langle \mathbf{dimV}, \mathbf{dimW} \rangle_{\mathcal{S}} - \langle \mathbf{dimW}, \mathbf{dimV} \rangle_{\mathcal{S}} < 0$ é garantida para toda representação \mathbf{V} pré-projetiva ou pré-injetiva e suas subrepresentações próprias \mathbf{W} . Pois, todas são genéricas, já que são únicas para cada vetor dimensão. Este fato nos será útil para alguns resultados do Capítulo 4.

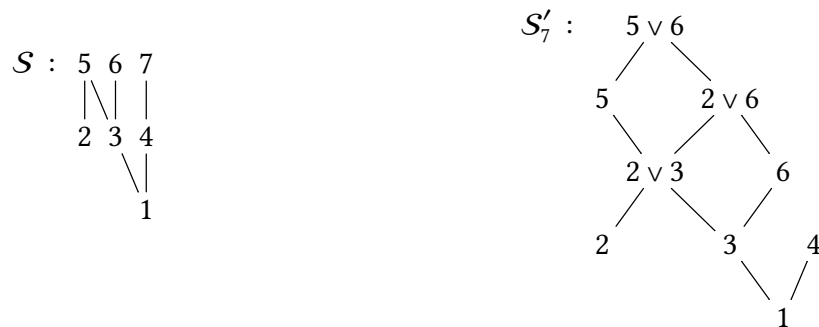
1.5 Diferenciação de posets e representações

A diferenciação de posets e de suas representações foi primeiro definida (para representações matriciais) por Nazarova e Roiter [NR72] para resolver a segunda conjectura de Brauer-Thrall para corpos perfeitos. Elas também desempenham um importante papel no estudo de representações de posets do tipo finito, como demonstrado por Kleiner [Kle72]. Baseando-se nessa construção, Gabriel [Gab72a] definiu o *functor diferenciação* para representações subespaciais de posets. O resultado desta construção é um functor pleno, denso e aditivo, que relaciona a categoria $\mathbf{sp}_{\mathcal{S}}$, de representações subespaciais de um poset \mathcal{S} , e a categoria $\mathbf{sp}_{\mathcal{S}'_a}$, de representações subespaciais de seu diferencial \mathcal{S}'_a .

Definição 1.5.1 (Diferencial de um poset). *Sejam \mathcal{S} um poset, a um elemento maximal em \mathcal{S} , $a^\nabla := \{s \in \mathcal{S} | s < a\}$. Se a largura de $\mathcal{S} \setminus (a^\nabla \cup \{a\})$ é menor ou igual a 2, nós dizemos que \mathcal{S} é a -diferenciável. Neste caso, sua diferencial é definida por $\mathcal{S}'_a = (\mathcal{S} \setminus \{a\}) \cup \Omega$, onde $\Omega = \{r \vee s | r, s, a \text{ são incomparáveis dois a dois em } \mathcal{S}\}$ e a relação \leq em \mathcal{S}'_a se mantém como a original nos elementos presentes em \mathcal{S} e é definida seguindo os itens abaixo nos demais elementos.*

- i) $(t \leq s \vee r) \Leftrightarrow (t \leq s \text{ ou } t \leq r)$ em \mathcal{S} ;
- ii) $(r \vee s \leq t) \Leftrightarrow (r \leq t \text{ e } s \leq t)$ em \mathcal{S} ;
- iii) $(r \vee s \leq r' \vee s') \Leftrightarrow [(r \leq r' \text{ ou } r \leq s') \text{ e } (s \leq r' \text{ ou } s \leq s')]$ em \mathcal{S} .

Exemplo 1.5.2. *A seguir, apresentamos o diagrama de Hasse do poset \mathcal{S} e seu diferencial com relação ao elemento maximal $a = 7 \in \mathcal{S}$.*



Ao estabelecer essa definição, Nazarova e Roiter [NR72] mostraram que os posets \mathcal{S} e

S'_a possuem o mesmo tipo. Para isso, introduziram uma forma de construir representações matriciais de S'_a a partir de representações em S . A seguir, Gabriel [Gab72a] apontou uma forma de fazer o mesmo para representações subespaciais, desta vez com a criação de um funtor $\partial_a : \mathbf{sp}_S \rightarrow \mathbf{sp}_{S'_a}$ que preserva os resultados obtidos pela construção de Nazarova e Roiter [NR72].

Observação 1.5.3. Fixaremos as notações a seguir para um poset a -diferenciável fixo S , de forma que, quando o poset e o elemento maximal forem claros pelo contexto, S e a podem ser suprimidos.

$$M_{S,a} := S \setminus (a^\nabla \cup \{a\}), \quad N_{S,a} := a^\nabla.$$

Essas definições se traduzem para um diagrama de Hasse como o representado a seguir:

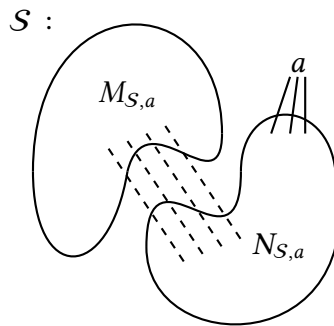


Figura 1.1: Diagrama de Hasse de um poset diferenciável evidenciando as estruturas de M e N

Como o subposet $M_{S,a}$ possui largura menor ou igual a dois, pelo Teorema de Dilworth [Ore62, Theorem 10.2.3] existem no máximo dois subposets maximais disjuntos totalmente ordenados M_I e M_{II} tais que $M_I \dot{\cup} M_{II} = M$. Para cada $w \in \Omega$, adotaremos a notação $r \vee s$, onde $r \in M_I$ e $s \in M_{II}$. Em alguns posets, essa separação $M = M_I \cup M_{II}$ pode ser feita de mais de uma forma, mas todos os nossos resultados independem da forma escolhida.

Definição 1.5.4 (Diferencial de uma representação). Seja $\mathbf{V} = (V_0; V_s)_{s \in S}$ uma representação do poset S . Sua representação diferencial $\partial_a \mathbf{V}$ é dada por $\partial_a \mathbf{V} = (V'_0; V'_s)_{s \in S'_a}$, onde:

- $V'_0 := V_a$;
- $V'_s := V_s \cap V_a$ para todo $s \in S$;
- $V'_{w_1 \vee w_2} = (V_{w_1} + V_{w_2}) \cap V_a$ para todo $w_1 \vee w_2 \in \Omega$.

Desse modo, cada morfismo $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ induz naturalmente um morfismo $\partial_a f : \partial_a \mathbf{V} \rightarrow \partial_a \mathbf{W}$ dado pela restrição de f a V_a .

O funtor redução de Gabriel [Gab72a] leva cada representação de S à sua derivada em S'_a .

$$\begin{aligned} \partial_a : \mathbf{sp}_S &\rightarrow \mathbf{sp}_{S'_a} \\ \mathbf{V} &\mapsto \partial_a \mathbf{V} \end{aligned}$$

O funtor redução é aditivo, pleno e denso e preserva isomorfismos. Assim, para cada representação V' de $\mathbf{sp}_{S'_a}$, há uma representação em \mathbf{sp}_S que possui V' como diferencial. É importante salientar, porém, que essa representação normalmente não é única e existem diferentes formas de obter diferentes representações partindo de seu diferencial. Veremos uma delas a seguir ainda nesta seção.

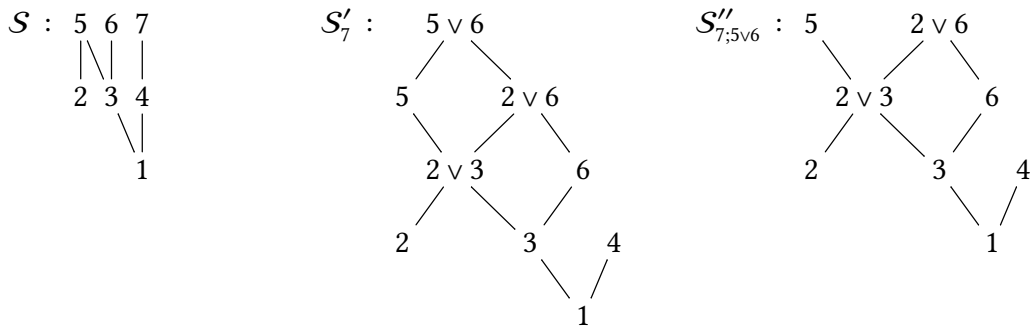
Além disso, a quantidade de classes de isomorfismos de representações indecomponíveis de S é maior do que a quantidade em S'_a . Essa relação foi mostrada em [NR72] para representações matriciais e confirmada para representações subespaciais em [Gab72a], através da seguinte relação:

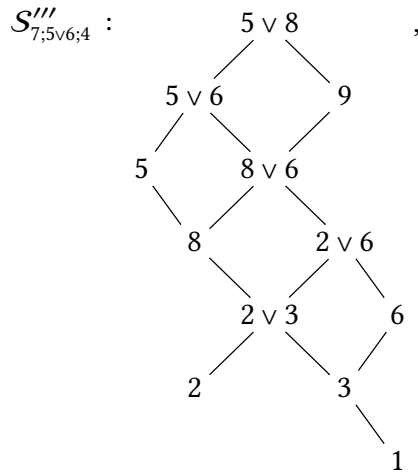
$$\#ind(\mathbf{sp}_S) = \#ind(\mathbf{sp}_{S'_a}) + |S'_a| - |a^\vee| + 1,$$

onde $\#ind(C)$ indica a quantidade de classes de isomorfismos de objetos indecomponíveis na categoria aditiva C .

Constatando que todos os posets com largura 2 são do tipo finito e todos os posets com largura 4 têm uma quantidade infinita de representações indecomponíveis (a menos de isomorfismos), Nazarova e Roiter [NR72] usam a relação entre as quantidades de representações indecomponíveis de S e S'_a (a menos de isomorfismos) para mostrar que um poset é do tipo finito se, e somente se, ele possui largura menor ou igual a 3 e o procedimento de diferenciação resulta num poset vazio em uma quantidade finita de passos. Esse resultado deu origem à classificação de Kleiner [Kle72] dos posets finitos apresentada no início deste capítulo, como aqueles que não possuem como subposet completo algum poset do Diagrama 1.

Observação 1.5.5. *Note que o poset S do Exemplo 1.5.2 é um poset do tipo finito (facilmente observável pelo critério de [Kle72]). Portanto, pode ser reduzido a um poset vazio através da diferenciação. Mais especificamente, ao ser reduzido a um poset de largura 2, a cada seguinte passo um elemento (maximal) será eliminado do poset e nenhum será acrescentado (pois, não haverá mais um trio de elementos incomparáveis). A seguir, verificaremos os passos até que ele atinja a largura 2.*

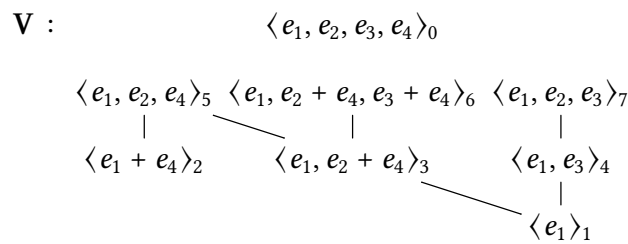




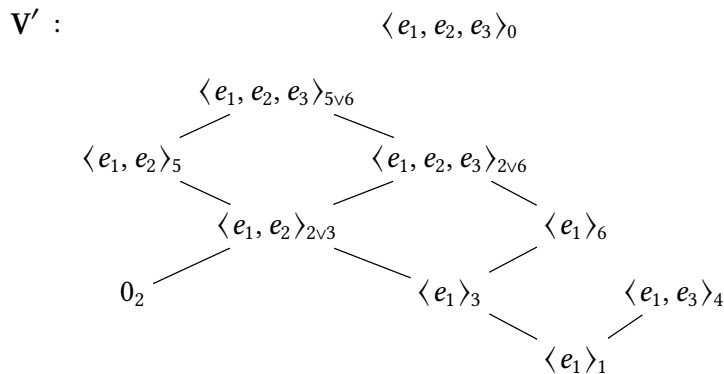
onde nomeamos os elementos $2 \vee 3$ e $2 \vee 6$ gerados no primeiro procedimento de diferenciação como $8 := 2 \vee 3$ e $9 = 2 \vee 6$, para evitar confusão com os elementos $2 \vee 3$ e $2 \vee 6$ gerados a partir do segundo procedimento.

Como $S'''_{7;5\vee 6;4}$ possui largura 2, cada uma das próximas diferenciações elimina um elemento sem adicionar qualquer elemento ao poset. Assim, diferenciado outras 12 vezes, $S'''_{7;5\vee 6;4}$ se torna conjunto vazio.

Exemplo 1.5.6. A seguir, apresentamos uma representação V do poset S do Exemplo 1.5.2 e sua imagem pelo functor diferenciação com relação ao elemento maximal $a = 7 \in S$. Fixe uma base para o espaço ambiente de V , $V_0 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle_0$ e defina V (representada pelo diagrama de Hasse do poset) como



Então, a representação diferencial $V' = \partial_7 V$ é dada por:



No processo de construção do diferencial de representações subespaciais, Gabriel [Gab72a] apresentou um algoritmo que dada uma representação $V' \in \mathbf{sp}_{S'_a}$, constrói uma representação $\int V' = V \in \mathbf{sp}_S$ tal que $\partial_a V = V'$. Essa construção depende da escolha de determinadas seções, portanto não é um funtor e nem única. Temos, portanto, que $\partial_a \int_a V' = V'$, mas em geral $\int_a \partial_a V \neq V$. Porém, essa multiplicidade de representações com a mesma diferencial não ocorre para representações indecomponíveis. A esse respeito, Simson [Sim92, Cor. 6.9, pág. 75] mostra que o funtor ∂_a induz uma correspondência 1-1 entre as classes de isomorfismos de representações indecomponíveis $V \in \mathbf{sp}_S$ cujo subespaço V_a é não nulo e representações indecomponíveis não nulas de S'_a . Portanto, se S é um poset a -diferenciável e $V \in \mathbf{sp}_S$ é uma representação indecomponível tal que $V_a \neq 0$, então $\int_a \partial_a V = V$. Ou ainda, para qualquer representação $V' \in \mathbf{sp}_{S'_a}$ indecomponível e não nula, existe uma única representação indecomponível $V \in \mathbf{sp}_S$ tal que $\partial_a V = V'$.

Assim, quando nos restringimos às representações indecomponíveis, há uma equivalência entre as construções de representações com o mesmo diferencial. Neste trabalho, optamos por utilizar uma versão ligeiramente modificada da construção feita por Drozd e Kubichka [DK04], com o objetivo de tornar mais nítido o vetor dimensão, que será o nosso objeto de estudo no capítulo 4. A esta representação V chamaremos integral de V' e utilizaremos a notação $V = \int_a V'$.

Definição 1.5.7 (Integral de uma representação). *Seja $V' \in \mathbf{sp}_{S'_a}$ e considere as notações usadas na Definição 1.5.1 e na Observação 1.5.3.*

Para cada $w \in \Omega$, defina:

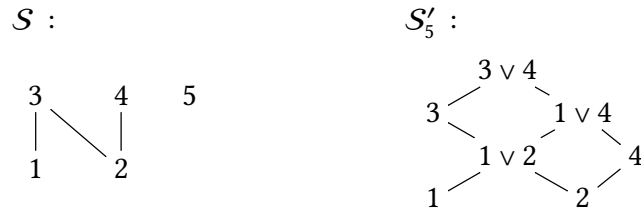
- $X_w^I(V') = \frac{V'_w}{\sum_{u \leq w} V'_u}$;
- uma seção $\iota_w^{V'} : X_w^I(V') \rightarrow V'_w$ da projeção canônica π_w ;
- $X_w^{II}(V') = \text{Im}(\iota_w^{V'} + \text{Id}_{X_w^I(V')})$;
- $\bar{V}_0 = \bigoplus_{w \in \Omega} X_w^I(V')$.

Para cada $m \in M$, defina $\Omega^m := \{r \vee s \in \Omega \text{ tal que } r \leq m \text{ ou } s \leq m\}$.

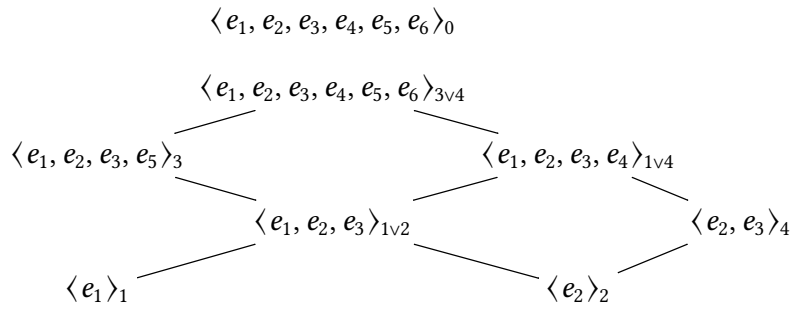
Assim, a integral de V' é definida como $V = (V_0; (V_m)_{m \in M}; V_a; (V_n)_{n \in N})$, onde:

- $V_0 = V'_0 \oplus \bar{V}_0$
- $V_m = V'_m + \sum_{w \in \Omega^m} (X_w^I(V'))$ se $m \in M_I$
- $V_m = V'_m + \sum_{w \in \Omega^m} (X_w^{II}(V'))$ se $m \in M_{II}$
- $V_n = V'_n$ para todo $n \in \{a\} \cup N$

Exemplo 1.5.8. *Sejam S um poset e S'_a seu diferencial em relação ao elemento maximal $a = 5$ dados pelos Diagramas de Hasse a seguir:*



Neste caso, $M_I = \{1, 3\}$, $M_{II} = \{2, 4\}$, $a = 5$, $\Omega = \{1 \vee 2, 1 \vee 4, 3 \vee 4\}$ e $N = \emptyset$. Considere a representação $\mathbf{V}' \in \mathbf{sp}_{\mathcal{S}'_5}$ dada por:



A integral $\mathbf{V} = \int_5 \mathbf{V}'$ é definida como:

$$\begin{aligned} & \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_3^{1v2}, e_4^{1v4}, e_6^{3v4} \rangle, \\ & \langle e_1, e_2, e_3, e_5; e_3^{1v2}, e_4^{1v4}, e_6^{3v4} \rangle_3 \quad \langle e_2, e_3, e_3 + e_3^{1v2}, e_4 + e_4^{1v4}, e_6 + e_6^{3v4} \rangle_4 \quad \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle_5 \\ & \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ & \langle e_1, e_3^{1v2}, e_4^{1v4} \rangle_1 \quad \langle e_2, e_3 + e_3^{1v2} \rangle_2 \end{aligned}$$

Onde:

$$X_{3v4}^I(\mathbf{V}') = \frac{V'_{3v4}}{V'_3 + V'_{1v4}} = \langle e_6^{3v4} \rangle,$$

$$X_{1v2}^I(\mathbf{V}') = \frac{V'_{1v2}}{V'_1 + V'_2} = \langle e_3^{1v2} \rangle e$$

$$X_{1v4}^I(\mathbf{V}') = \frac{V'_{1v4}}{V'_{1v2} + V'_4} = \langle e_4^{1v4} \rangle.$$

Note que $\partial_5 \mathbf{V} = \mathbf{V}'$, pois:

$$(\partial_5 \mathbf{V})_s = V'_s \text{ para todo } s \in \{5\} \cup M \cup N,$$

$$(\partial_5 \mathbf{V})_{1v2} = (V_1 + V_2) \cap V_5 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle,$$

$$(\partial_5 \mathbf{V})_{1v4} = (V_1 + V_4) \cap V_5 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle e$$

$$(\partial_7 \mathbf{V})_{3v4} = (V_3 + V_4) \cap V_a = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle.$$

No apêndice A, mostramos que esse algoritmo de fato constrói uma representação com a diferencial desejada. Ou seja, que dada uma representação V' de S'_a , temos:

$$\partial_a \int_a V' \approx V' \quad (1.5)$$

1.6 Estabilidade

Como discutimos na Seção 1.2, dada uma álgebra \mathcal{R} de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, seus módulos podem ser associados às representações de uma aljava com certas relações admissíveis. Assim, o problema de classificar os módulos de \mathcal{R} a menos de isomorfismos pode ser reformulado como o problema de classificar as órbitas resultantes da ação do grupo $GL(\alpha)$ na variedade $R_\alpha(Q, \Omega)$.

A abordagem da teoria clássica dos invariantes identifica as órbitas fechadas em $R_\alpha(Q, \Omega)$, que correspondem aos módulos semisimples e estão em correspondência biunívoca com os vetores dimensão α . Por meio da teoria geométrica invariante de Mumford (por exemplo, em [MF82]), King [Kin94] considerou espaços cujos pontos correspondem naturalmente às classes de isomorfismo das representações e investigou um subconjunto específico de $R_\alpha(Q, \Omega)$, as representações semiestáveis. Dentro desse subconjunto, existem órbitas fechadas adicionais e o quociente algébrico resultante forma um espaço de módulo mais interessante. Em particular, King mostra que as noções de semiestabilidade e estabilidade, derivadas da teoria geométrica invariante de Mumford, coincidem com conceitos mais algébricos expressos na linguagem de $\text{mod}(\mathcal{R})$.

O conceito de estabilidade para categorias abelianas arbitrárias foi desenvolvido por Rudakov [Rud97], que formalizou as condições de estabilidade para a teoria de representações de aljvas. Nessa categoria, conceitos de estabilidade e semiestabilidade podem ser usados para abordar geometricamente aljvas do tipo selvagem, consideradas “impossíveis” de se classificar. Para isso, é possível definir uma variedade algébrica que parametriza as representações estáveis de uma aljava do tipo selvagem, de forma que as fibras dessa parametrização são exatamente as classes de isomorfismos de representações estáveis da aljava. E fazendo o mesmo com representações semiestáveis, conseguimos as órbitas fechadas pela ação do grupo de mudança de base (que define os isomorfismos de representações de aljvas) como fibras da parametrização. Esta construção pode ser vista com detalhes no trabalho de Reineke [Rei08].

No contexto das representações de posets (categoria aditiva, mas não abeliana), a estabilidade de uma representação foi definida por Futorny e Iusenko [FuI2018].

Definição 1.6.1 (Estabilidade). *Seja θ uma forma não nula em $\text{Hom}(\mathbb{Z}^{\hat{S}}, \mathbb{Z})$. Uma representação $V \in \text{sp}_S$ é θ -(semi) estável se $\theta(\dim V) = 0$ e $\theta(\dim W) < 0$ (resp. $\theta(\dim W) \leq 0$) para toda subrepresentação própria (ver definição na pág. 6) W de V .*

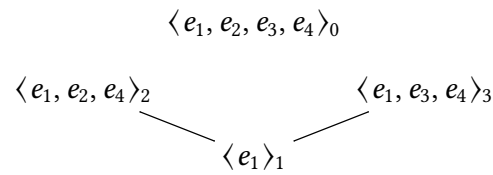
Ao fixar uma base para $\text{Hom}(\mathbb{Z}^{\hat{S}}, \mathbb{Z})$, também podemos representar θ por um vetor $\theta \in \mathbb{Z}^{\hat{S}}$, de forma que V é θ -estável (resp. semi estável) se $\theta \cdot (\dim V)^{tr} = 0$ e $\theta \cdot (\dim W)^{tr} < 0$ (resp. $\theta \cdot (\dim W)^{tr} \leq 0$) para todo $W \subset_p V$.

Em [FuI2018], os autores conectaram as órbitas (semi)estáveis em sp_S à definição

algébrica de (semi)estabilidade e mostraram que toda representação indecomponível \mathbf{V} de um poset finito \mathcal{S} é estável para uma forma θ determinada em termos do vetor dimensão $\dim \mathbf{V}$. Além disso, as transformações de Coxeter (abordadas com mais detalhes no Apêndice B) preservam a estabilidade das representações de posets primitivos.

Nesse sentido, o nosso objetivo no Capítulo 4 consistirá em investigar a preservação da (semi)estabilidade por meio da diferenciação de representações em posets quaisquer.

Exemplo 1.6.2. Considere o poset $\mathcal{S} = \{1, 2, 3; 1 \leq 2, 1 \leq 3\}$, fixe uma base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ para o espaço vetorial V_0 e considere a representação \mathbf{V} com espaço ambiente V_0 e subespaços apresentados no diagrama a seguir:



O vetor dimensão de \mathbf{V} é $(4; 1, 3, 3)$ e os vetores dimensões das subrepresentações próprias de \mathbf{V} são:

$(1; 1, 1, 1)$	$(2; 1, 1, 2)$	$(2; 0, 2, 1)$	$(3; 1, 2, 3)$
$(1; 0, 0, 1)$	$(2; 1, 2, 1)$	$(2; 0, 0, 1)$	$(3; 1, 3, 2)$
$(1; 0, 1, 0)$	$(2; 1, 2, 2)$	$(2; 0, 1, 0)$	
$(1; 0, 1, 1)$	$(2; 0, 1, 1)$	$(2; 1, 1, 1)$	
$(1; 0, 0, 0)$	$(2; 0, 1, 2)$	$(3; 1, 2, 2)$	

Portanto, se existir algum vetor $\theta = (x; y, z, w)$ para o qual \mathbf{V} é θ -semiestável, então θ precisa satisfazer à equação $4x + y + 3z + 3w = 0$ e às inequações:

$$\begin{array}{llll}
 x + y + z + w \leq 0 & 2x + y + z + 2w \leq 0 & 2x + 2z + w \leq 0 & 3x + y + 2z + 3w \leq 0 \\
 x + w \leq 0 & 2x + y + 2z + w \leq 0 & 2x + w \leq 0 & 3x + y + 3z + 2w \leq 0 \\
 x + z \leq 0 & 2x + y + 2z + 2w \leq 0 & 2x + z \leq 0 & \\
 x + z + w \leq 0 & 2x + z + w \leq 0 & 2x + y + z + w \leq 0 & \\
 x \leq 0 & 2x + z + 2w \leq 0 & 3x + y + 2z + 2w \leq 0 &
 \end{array}$$

A partir das últimas três inequações e da primeira equação, obtemos: $x + z + w \geq 0$, $x + z \geq 0$ e $x + w \geq 0$. Porém $x + w \leq 0$ e $x + z \leq 0$ de acordo com as primeiras inequações. Assim, $x = -z = -w$.

Aplicando essa relação na equação $4x + y + 3z + 3w = 0$, temos $y = 2x$. Portanto, a inequação $x + z + w \leq 0$ se torna: $x - x - x \leq 0$ e $-x \leq 0$. Mas, como $x \leq 0$, é necessário que $x = 0$.

Neste caso, $\theta = (x; y, z, w)$ precisa ser $(0; 0, 0, 0)$. Assim, \mathbf{V} não é semiestável.

Assim, mesmo as subrepresentações não próprias da representação \mathbf{V} do exemplo 1.6.3, como $\mathbf{W} = \{V_0; \langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle, 0\}$ também satisfazem a condição $\theta \cdot (\dim \mathbf{W})^{tr} < 0$. Em particular, $(-3; 2, 2, 2) \cdot (2; 1, 1, 0) = -6 + 2 + 2 = -2 < 0$.

Por outro lado, se a forma θ para a qual \mathbf{V} é estável não for positiva, essa condição pode não ser satisfeita por todas as subrepresentações não-próprias.

Exemplo 1.6.5. Considere o poset anti-cadeia $S = \{1, 2, 3, 4\}$ e a representação \mathbf{V} cujo espaço ambiente V_0 tem dimensão 2. Fixe uma base $\{e_1, e_2\}$ para V_0 e defina \mathbf{V} como:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{V} : & & \langle e_1, e_2 \rangle_0 & & & & \\ & & & & & & \\ & \langle e_1 \rangle_1 & & \langle e_2 \rangle_2 & & \langle e_1 + e_2 \rangle_3 & & \langle e_1 - e_2 \rangle_4 \end{array}$$

Considere a forma $\theta = (-5; 4, 4, 4, -2)$ para a qual \mathbf{V} é estável. Note que θ não é positiva, portanto pode haver alguma representação não própria \mathbf{W} de \mathbf{V} tal que $\theta \cdot \dim \mathbf{W} \geq 0$. Um exemplo de representação com essa característica é a subrepresentação \mathbf{U} com espaço ambiente U_0 igual a V_0 e subespaços como no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{U} : & & \langle e_1, e_2 \rangle_0 & & & & \\ & & & & & & \\ & \langle e_1 \rangle_1 & & \langle e_2 \rangle_2 & & \langle e_1 + e_2 \rangle_3 & & 0_4 \end{array}$$

Note que $\theta \cdot (\dim \mathbf{U})^{tr} = -5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 2 > 0$.

Como vimos, todas as representações indecomponíveis de posets do tipo finito são positivamente estáveis. Vamos entender como representações schurianas de posets primitivos (mesmo que não sejam do tipo finito) também são positivamente estáveis e determinar a forma positiva θ para a qual são estáveis.

Observação 1.6.6. Note que

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle_S - \langle \beta, \alpha \rangle_S &= \alpha C_S^{-1} \beta^{tr} - \beta C_S^{-1} \alpha \\ &= \alpha C_S^{-1} \beta^{tr} - \alpha (\beta C_S^{-1})^{tr} \\ &= \alpha C_S^{-1} \beta^{tr} - \alpha C_S^{-tr} \beta^{tr} \\ &= \alpha (C_S^{-1} - C_S^{-tr}) \beta^{tr} \end{aligned}$$

independente dos vetores α e β em $\mathbb{Z}^{\hat{S}}$ e do poset S .

Supondo que S seja primitivo e α seja um vetor dimensão para representações em S , as observações sobre o Teorema de Schofield [Sch92, Teorema 6.1] da Seção 1.4 garantem que α é schuriano se, e somente se, representações \mathbf{V} de S com vetor dimensão α em geral são estáveis com $\theta = \alpha (C_S^{-1} - C_S^{-tr})$.

Em particular, se S é um poset primitivo cujo grafo corresponde a um grafo euclidiano (ou Dynkin estendido) como $(1, 2, 5)$ por exemplo, toda representação pré-projetiva ou pré-injetiva é θ -estável. Note ainda que esse $\theta = \dim \mathbf{V} \cdot (C_S^{-1} - C_S^{-tr})$ é não negativo e, portanto, como a estabilidade é uma condição aberta, existe um $\tilde{\theta}$ positivo tal que \mathbf{V} é $\tilde{\theta}$ -positivamente estável.

Assim, a positividade da forma para a qual a representação é estável pode estar particularmente presente quando trabalhamos com representações schurianas de posets primitivos. Explicitamente, as representações schurianas de um poset S são sempre positivamente estáveis desde que S seja um poset primitivo do tipo finito [GI09, Prop. 3.1] ou um poset primitivo crítico do tipo manso, nomeadamente $(1, 1, 1, 1)$ (por [MS06] e uma descrição das formas por [SY09]), $(2, 2, 2)$ (por [Yak09]), $(1, 3, 3)$ (por [Yak10a]) e $(1, 2, 5)$ (por [Yak10b]) do Diagrama 1. Além disso, qualquer poset do tipo finito também tem essa propriedade [FuI2018, Cor 6.5] e na Seção 4.3, nós mostramos que o único poset crítico do tipo manso não primitivo, $(N, 4)$, também possui essa propriedade.

Capítulo 2

Variedade Poset

Como resumimos na seção 1.3, as formas bilineares e quadráticas exercem um papel fundamental no estudo das representações de aljavas e posets.

Particularmente, vimos que as formas bilinear de Euler e quadrática de Tits possuem interpretações homológicas para aljavas (Seção 1.3). Algo similar ocorre para posets. No trabalho de [Sim10], há um estudo detalhado de quatro formas bilineares relacionadas a posets e relações entre elas. Em particular, a forma bilinear de Euler e a forma bilinear de Tits representam a característica de Euler da álgebra de incidência do poset e , respectivamente, dos seus módulos prinjetivos. Já a forma quadrática (racional) de Tits é fracamente positiva se, e somente se, o poset é do tipo finito [Sim92, Teo. 10.1]. O principal resultado deste capítulo foi publicado por Fonseca e Iusenko [Fol2019] e fornece uma interpretação geométrica para a forma quadrática de Euler relacionada à dimensão da variedade Poset, definida na Seção 1.4. Em particular, mostraremos que se o vetor dimensão α é admissível (como definido na seção a seguir), então

$$q_S(\alpha) = \dim \text{GL}(\alpha_0) - \dim \text{Fl}_{S,\alpha}.$$

2.1 Resultados auxiliares e notações

Para um elemento $s \in S$, defina o conjunto de seus predecessores $s^\vee = \{t \in S \mid t < s\}$. A proposição a seguir é uma variação do Teorema 2 de Mirsky [Mir71].

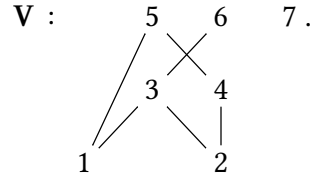
Proposição 2.1.1. *Seja S um poset de altura $h(S)$. Então, existem subposets $\mathcal{T}_i \subset S$, $i \in [1, h(S)]$ unicamente definidos tais que:*

- (i) $S = \mathcal{T}_{h(S)} \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{T}_1$;
- (ii) para cada par i, j com $i < j$ e cada $t \in \mathcal{T}_i$, existe um $s \in \mathcal{T}_j$ tal que $t < s$ em S ;
- (iii) se $(r, s) \in \mathcal{T}_i \times \mathcal{T}_j$ e $r < s$ em S , então $i < j$.

Em particular, \mathcal{T}_i é uma anticadeia em S , ou seja, um conjunto de elementos incomparáveis entre si.

A construção dessa decomposição é feita progressivamente, de forma que colocamos todos os elementos no mesmo nível, verificamos as relações de comparação $i < j$ que há entre eles e passamos todos os menores para o nível inferior. Repetimos o procedimento para o segundo nível, para o terceiro, até que não haja mais relações entre os elementos do nível atual.

Por exemplo, o poset $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; 1 < 3, 2 < 3, 2 < 4 < 5, 1 < 5, 3 < 6\}$ pode ser representado pelo diagrama de Hasse:



Neste caso, $\mathcal{T}_1 = \{1, 2\}$; $\mathcal{T}_2 = \{3, 4\}$ e $\mathcal{T}_3 = \{5, 6, 7\}$.

No decorrer deste capítulo, simplificaremos as notações associadas a estes subposets definindo $E_i := E_{\mathcal{T}_i}$ e $C_{i,j} := C_{\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j}$. Além disso, para cada $\alpha \in \mathbb{Z}^S$, denotaremos o vetor $\alpha_{\mathcal{T}_i}$ por α_i e, para cada $k \in [1, h(S)]$, denotaremos o subposet $\mathcal{T}_{h(S)} \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_k$ por S_k . Em particular, $S_1 = S$.

Dado que \mathcal{T}_i é uma anticadeia, a matriz C_i corresponde à identidade com $|\mathcal{T}_i|$ linhas. Portanto, ao considerar a partição dada na Proposição 2.1.1, podemos escrever C_S e $\alpha \in \mathbb{Z}^S$ como:

$$C_S = \begin{matrix} & \mathcal{T}_{h(S)} & \mathcal{T}_{h(S)-1} & & \mathcal{T}_1 \\ \begin{matrix} \mathcal{T}_{h(S)} \\ \mathcal{T}_{h(S)-1} \\ \vdots \\ \mathcal{T}_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc} \text{Id}_{h(S)} & 0 & \dots & 0 \\ C_{h(S)-1, h(S)} & \text{Id}_{h(S)-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1, h(S)} & C_{1, h(S)-1} & \dots & \text{Id}_1 \end{array} \right] & \text{e} & \alpha = (\alpha_{h(S)}, \dots, \alpha_1). \end{matrix}$$

Visto que C_S é uma matriz triangular inferior, ela pode ser fatorizada em matrizes como as de Frobenius, de forma que $C_S = F_{h(S)-1} \cdot \dots \cdot F_1$ com

$$F_i = \begin{matrix} & \mathcal{T}_{h(S)} & \mathcal{T}_{h(S)-1} & & \mathcal{T}_{i+1} & \mathcal{T}_i & \mathcal{T}_{i-1} & & \mathcal{T}_1 \\ \begin{matrix} \mathcal{T}_{h(S)} \\ \mathcal{T}_{h(S)-1} \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{i+1} \\ \mathcal{T}_i \\ \mathcal{T}_{i-1} \\ \vdots \\ \mathcal{T}_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccccccc} \text{Id}_{h(S)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \text{Id}_{h(S)-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \text{Id}_{i+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_{i, h(S)} & C_{i, h(S)-1} & \dots & C_{i, i+1} & \text{Id}_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \text{Id}_{i-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \text{Id}_1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

e, portanto,

$$C_S^{-1} = F_1^{-1} \cdot \dots \cdot F_{h(S)-1}^{-1}$$

com

$$F_i^{-1} = \begin{matrix} & \mathcal{T}_{h(S)} & \mathcal{T}_{h(S)-1} & \dots & \mathcal{T}_{i+1} & \mathcal{T}_i & \mathcal{T}_{i-1} & \dots & \mathcal{T}_1 \\ \mathcal{T}_{h(S)} & \text{Id}_{h(S)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{T}_{h(S)-1} & 0 & \text{Id}_{h(S)-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{T}_{i+1} & 0 & 0 & \dots & \text{Id}_{i+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{T}_i & -C_{i,h(S)} & -C_{i,h(S)-1} & \dots & -C_{i,i+1} & \text{Id}_i & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{T}_{i-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \text{Id}_{i-1} & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{T}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \text{Id}_1 \end{matrix}.$$

Seja $\alpha = (\alpha_0, \alpha_s)_{s \in S} \in \mathbb{Z}^{\hat{S}}$. Diremos que α é um *vetor dimensão admissível* se $\alpha_s \cdot C_S^{-1}$ é não negativo e $\alpha_0 \geq \alpha_s$ para todo $s \in S$ e denotaremos por Π_S o cone convexo de todos os vetores dimensões admissíveis de S .

Exemplo 2.1.2. Considere o poset

$$S : \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ | & \diagdown \\ 1 & 2 \end{array},$$

a matriz de Cartan de S e sua inversa:

$$C_S = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad e \quad C_S^{-1} = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

As condições para que um vetor dimensão $\alpha \in \mathbb{Z}^{\hat{S}}$ seja admissível são:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_0 \geq 0, \quad \alpha_3 \geq \alpha_1 + \alpha_2 \quad e \quad \alpha_4 \geq \alpha_2.$$

Desta forma, o vetor $(4; 2, 2, 3, 3)$, por exemplo, não é admissível, pois $(2, 2, 3, 3) \cdot C_S^{-1} = (2, 2, -1, 1)$; enquanto o vetor $(4; 2, 2, 4, 3)$ é admissível, pois $(2, 2, 4, 3) \cdot C_S^{-1} = (2, 2, 0, 1)$.

Note que $\{\alpha \cdot C_S^{-1} \mid \alpha \in \Pi_S\} = \mathbb{Z}_+^{\hat{S}}$. Essa é uma consequência da forma como a matriz C_S age sobre os vetores com coordenadas não-negativas. Se $\beta \in \mathbb{Z}^{\hat{S}}$, então $\beta \cdot C_S = \alpha$ é um vetor dimensão de S (visto que $s \leq t \in S$ implica em $\alpha_s \leq \alpha_t$, pois α_t é a soma de α_s com algum outro número não negativo). Assim, todo vetor $\beta \in \mathbb{Z}_+^{\hat{S}}$ é igual a $\alpha \cdot C_S^{-1}$ para algum vetor dimensão $\alpha \in \Pi_S$.

Defina, para cada $\alpha \in \mathbb{Z}^S$ e $k \in [1, h(S)]$, a sequência

$$\alpha^{(1)} := \alpha; \quad \alpha^{(k)} := \alpha^{(k-1)} \cdot F_{k-1}^{-1}. \quad (2.1)$$

E note que

$$\alpha \cdot C_S^{-1} = \alpha \cdot F_1^{-1} \cdot \dots \cdot F_{h(S)-1}^{-1} = \alpha^{(h(S))} \quad (2.2)$$

e $\alpha_S \in \Pi_S$ se, e somente se, todos os vetores $\alpha^{(k)}$ são não negativos.

Denotando por $\alpha_i^{(i)}$ o vetor formado pelas coordenadas de $\alpha^{(i)}$ relativas a \mathcal{T}_i , conseguimos evidenciar outra propriedade desta sequência: $\alpha_i^{(i)} = \alpha_i^{(j)}$ para todo $j \geq i$. Ela é consequência direta da forma triangular inferior da matriz F_i^{-1} , pois, na i -ésima iteração, as coordenadas relacionadas a \mathcal{T}_i são alteradas pela última vez. Assim,

$$\alpha \cdot C_S^{-1} = \alpha^{(h(S))} = (\alpha_{h(S)}^{(h(S))}, \alpha_{h(S)-1}^{(h(S)-1)}, \dots, \alpha_2^{(2)}, \alpha_1^{(1)}).$$

2.2 Interpretação geométrica da forma quadrática de Euler

O resultado que relaciona a dimensão da variedade $\text{Fl}_{S,\alpha}$ à forma quadrática de Euler, o principal teorema deste capítulo, é corolário dos dois lemas a seguir.

Defina a função:

$$d_S : \text{Fl}_{S,\alpha} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(V_s)_{s \in S} \mapsto \dim \left(\sum_{y \in \mathcal{T}_{h(S)}} V_y \right).$$

Lema 2.2.1. *Seja $\alpha \in \mathbb{Z}^{\hat{S}}$ um vetor tal que $\alpha \cdot C_{\hat{S}}^{-1}$ é não negativo. Então, há um subconjunto aberto em $\text{Fl}_{S,\alpha}$ onde d_S atinge seu valor máximo. Este valor máximo é de $\alpha_S \cdot C_S^{-1} \cdot E_S$.*

Demonstração. A prova será feita por indução sobre a altura do poset.

Se $h(S) = 1$, então $\text{Fl}_{S,\alpha} = \prod_{s \in S} \text{Gr}(\alpha_s, \alpha_0)$. Neste caso, $\alpha \cdot C_{\hat{S}}^{-1} = (\alpha_0 - \sum_{s \in S} \alpha_s; \alpha_s)_{s \in S}$. Supondo que $\alpha \cdot C_{\hat{S}}^{-1}$ seja não negativo, tem-se $\sum_{s \in S} \alpha_s \leq \alpha_0$. Portanto, em representações genéricas, que formam um conjunto aberto não vazio U de representações $\mathbf{V} = (V_s)_{s \in S}$ em $\text{Fl}_{S,\alpha}$, as intersecções $V_i \cap (\sum_{j \neq i \in S} V_j)$ são sempre nulas. Assim, a soma $\sum_{s \in S} V_s$ é direta e $d_S(\mathbf{V}) = \dim \sum_{s \in S} V_s = \sum_{s \in S} \alpha_s$ para todo $\mathbf{V} \in U$.

Suponha que $h(S) > 1$ e considere a aplicação a seguir:

$$\pi : \text{Fl}_{S,\alpha} \rightarrow \prod_{s \in \mathcal{T}_1} \text{Gr}(\alpha_s, \alpha_0)$$

$$(V_s)_{s \in S} \mapsto (V_s)_{s \in \mathcal{T}_1}.$$

Lembre que \mathcal{T}_1 é o conjunto de pontos minimais em S e que $S_2 = \mathcal{T}_{h(S)} \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_2 = S \setminus \mathcal{T}_1$. Portanto, a aplicação π é sobrejetiva e as fibras da aplicação π estão em S_2 .

Considere a variedade $\text{Fl}_{S_2, \alpha^{(2), S_2}}$, onde $\alpha^{(2), S_2}$ é o vetor $\alpha^{(2)}$ (descrito na Definição (2.1))

restrito a \mathcal{S}_2 e defina a aplicação

$$d_{\mathcal{S}_2} : \text{Fl}_{\mathcal{S}_2, \alpha^{(2), \mathcal{S}_2}} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(V_s)_{s \in \mathcal{S}_2} \mapsto \dim \left(\sum_{y \in \mathcal{T}_h(\mathcal{S}_2)} V_y \right).$$

Note que $\alpha^{(2)} = \alpha \cdot F_1^{-1}$ e, pela forma de F_1^{-1} , cada coordenada $\alpha^{(2)}_i$ é formada da subtração de α_i por todos os elementos α_j tais que $j \in \mathcal{T}_1$ e $j < i$. Sendo assim,

$$\max d_{\mathcal{S}} = \max d_{\mathcal{S}_2} + \alpha_1 \cdot E_1.$$

Prosseguindo com a hipótese de indução de que $\max d_{\mathcal{S}_2} = \sum_{i=2}^{h(\mathcal{S})} \alpha_i^{(i)} \cdot E_i$, tem-se que:

$$\max d_{\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^{h(\mathcal{S})} \alpha_i^{(i)} \cdot E_i$$

e a Equação (2.2) garante que $\alpha^{(h(\mathcal{S}))} \cdot E_{\mathcal{S}} = \alpha_{\mathcal{S}} \cdot C_{\mathcal{S}}^{-1} \cdot E_{\mathcal{S}}$, finalizando assim a prova deste lema. \square

Assim, temos um valor para a dimensão da soma dos subespaços em uma representação V em um conjunto aberto de $\text{Fl}_{\mathcal{S}, \alpha}$. O próximo lema é parte fundamental do passo de indução que usaremos para a forma quadrática de Euler na demonstração do teorema principal.

Lema 2.2.2. *Sejam \mathcal{S} um poset, x um elemento maximal em \mathcal{S} , $\mathcal{R} = \mathcal{S} \setminus \{x\}$ e $\alpha \in \mathbb{Z}^{\widehat{\mathcal{S}}}$. Então,*

$$q_{\mathcal{S}}(\alpha) = q_{\mathcal{R}}(\alpha_{\mathcal{R}}) - (\alpha_x - \alpha_{x^\vee} \cdot C_{x^\vee}^{-1} \cdot E_{x^\vee})(\alpha_0 - \alpha_x).$$

Demonstração. Se $h(\mathcal{S}) = 1$, a igualdade é verdadeira, pois x^\vee é vazio e $C_{\mathcal{S}}^{-1} = \text{Id}$. Suponha, portanto, $h(\mathcal{S}) \geq 2$.

Escrevendo \mathcal{R} como $\mathcal{J}_x \cup \{x\}$ e α como $(\alpha_0; \alpha_{\mathcal{J}_x}, \alpha_x, \alpha_{x^\vee})$, onde $\mathcal{J}_x = \mathcal{S} \setminus (x^\vee \cup \{x\})$, obtemos as matrizes de incidência de $\widehat{\mathcal{S}}$ e $\widehat{\mathcal{R}}$ relativas a essa decomposição de \mathcal{S} :

$$C_{\widehat{\mathcal{S}}} = \begin{array}{c} 0 \\ \mathcal{J}_x \\ x \\ x^\vee \end{array} \begin{array}{cccc} & \mathcal{J}_x & x & x^\vee \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ E_{\mathcal{J}_x} & C_{\mathcal{J}_x} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ E_{x^\vee} & C_{x^\vee, \mathcal{J}_x} & E_{x^\vee} & C_{x^\vee} \end{bmatrix} \end{array}, \quad C_{\widehat{\mathcal{R}}} = \begin{array}{ccc} 0 & \mathcal{J}_x & x^\vee \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E_{\mathcal{J}_x} & C_{\mathcal{J}_x} & 0 \\ E_{x^\vee} & C_{x^\vee, \mathcal{J}_x} & C_{x^\vee} \end{bmatrix} \end{array}.$$

e suas inversas:

$$C_{\widehat{S}}^{-1} = \begin{matrix} & 0 & J_x & x & x^\vee \\ \begin{matrix} 0 \\ J_x \\ x \\ x^\vee \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{J_x}^{-1}E_{J_x} & C_{J_x}^{-1} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ C_{x^\vee}^{-1}C_{x^\vee, J_x}C_{J_x}^{-1}E_{J_x} & -C_{x^\vee}^{-1}C_{x^\vee, J_x}C_{J_x}^{-1} & -C_{x^\vee}^{-1}E_{x^\vee} & C_{x^\vee}^{-1} \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$C_{\widehat{R}}^{-1} = \begin{matrix} & 0 & J_x & x^\vee \\ \begin{matrix} 0 \\ J_x \\ x^\vee \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -C_{J_x}^{-1}E_{J_x} & C_{J_x}^{-1} & 0 \\ C_{x^\vee}^{-1}C_{x^\vee, J_x}C_{J_x}^{-1}E_{J_x} - C_{x^\vee}^{-1}E_{x^\vee} & -C_{x^\vee}^{-1}C_{x^\vee, J_x}C_{J_x}^{-1} & C_{x^\vee}^{-1} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Logo, suas formas quadráticas de Euler calculam-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} q_S(\boldsymbol{\alpha}) &= (\boldsymbol{\alpha}_0; \boldsymbol{\alpha}_{J_x}, \alpha_x, \boldsymbol{\alpha}_{x^\vee}) \cdot C_{\widehat{S}}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\alpha}_0; \boldsymbol{\alpha}_{J_x}, \alpha_x, \boldsymbol{\alpha}_{x^\vee})^{tr} \\ &= (\alpha_0 - \boldsymbol{\alpha}_{J_x} \cdot C_{J_x}^{-1} \cdot E_{J_x} - \alpha_x + \boldsymbol{\alpha}_{x^\vee} \cdot C_{x^\vee}^{-1} \cdot C_{x^\vee, J_x} \cdot C_{J_x}^{-1})\alpha_0 \\ &\quad + (\boldsymbol{\alpha}_{J_x} \cdot C_{J_x}^{-1} - \boldsymbol{\alpha}_{x^\vee} \cdot C_{x^\vee}^{-1} \cdot C_{x^\vee, J_x} \cdot C_{J_x}^{-1}) \cdot \boldsymbol{\alpha}_{J_x}^{tr} \\ &\quad + (\alpha_x - \boldsymbol{\alpha}_{x^\vee} \cdot C_{x^\vee}^{-1} \cdot E_{x^\vee})\alpha_x + \boldsymbol{\alpha}_{x^\vee} \cdot C_{x^\vee}^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{x^\vee}^{tr} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} q_R(\boldsymbol{\alpha}_R) &= (\boldsymbol{\alpha}_0; \boldsymbol{\alpha}_{J_x}, \boldsymbol{\alpha}_{x^\vee}) \cdot C_{\widehat{S} \setminus \{x\}}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\alpha}_0; \boldsymbol{\alpha}_{J_x}, \boldsymbol{\alpha}_{x^\vee})^{tr} \\ &= (\alpha_0 - \boldsymbol{\alpha}_{J_x} \cdot C_{J_x}^{-1} \cdot E_{J_x} + \boldsymbol{\alpha}_{x^\vee} \cdot C_{x^\vee}^{-1} \cdot C_{x^\vee, J_x} \cdot C_{J_x}^{-1} - \boldsymbol{\alpha}_{x^\vee} \cdot C_{x^\vee}^{-1} \cdot E_{x^\vee})\alpha_0 \\ &\quad + (\boldsymbol{\alpha}_{J_x} \cdot C_{J_x}^{-1} - \boldsymbol{\alpha}_{x^\vee} \cdot C_{x^\vee}^{-1} \cdot C_{x^\vee, J_x} \cdot C_{J_x}^{-1}) \cdot \boldsymbol{\alpha}_{J_x}^{tr} + \boldsymbol{\alpha}_{x^\vee} \cdot C_{x^\vee}^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{x^\vee}^{tr}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} q_S(\boldsymbol{\alpha}) - q_{S \setminus \{x\}}(\boldsymbol{\alpha}_R) &= -\alpha_x \alpha_0 + \boldsymbol{\alpha}_{x^\vee} \cdot C_{x^\vee}^{-1} \cdot E_{x^\vee} \alpha_0 + \alpha_x^2 - \boldsymbol{\alpha}_{x^\vee} \cdot C_{x^\vee}^{-1} \cdot E_{x^\vee} \alpha_x \\ &= -(\alpha_x - \boldsymbol{\alpha}_{x^\vee} \cdot C_{x^\vee}^{-1} \cdot E_{x^\vee})(\alpha_0 - \alpha_x). \end{aligned}$$

□

Com estes lemas provados, enunciamos o principal resultado deste capítulo:

Teorema 2.2.3. *Sejam S um poset finito e $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_s)_{s \in S} \in \mathbb{Z}^{|\widehat{S}|}$ um vetor admissível. Então,*

$$\dim \text{GL}(\alpha_0) - \dim \text{Fl}_{S, \boldsymbol{\alpha}} = q_S(\boldsymbol{\alpha}). \quad (2.3)$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre $|S|$.

Se $S = \{x\}$, então $\dim \text{Fl}_{S, \boldsymbol{\alpha}} = \dim \text{Gr}(\alpha_x, \alpha_0) = \alpha_x(\alpha_0 - \alpha_x)$. E, portanto,

$$\begin{aligned} \dim \text{GL}(\alpha_0) - q_S(\boldsymbol{\alpha}) &= \alpha_0^2 - [\alpha_0 \quad \alpha_x] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_x \end{bmatrix} \\ &= \alpha_0^2 - (\alpha_0 - \alpha_x)\alpha_0 - \alpha_x^2 = \alpha_x(\alpha_0 - \alpha_x). \end{aligned}$$

Suponha, então, que $|S| > 1$, tome um elemento maximal x em S e defina $\mathcal{R} := S \setminus \{x\}$.

Suponha que para \mathcal{R} , o enunciado do Teorema é verdadeiro e defina a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : \text{Fl}_{S,\alpha} &\rightarrow \text{Fl}_{\mathcal{R},\alpha_{\widehat{\mathcal{R}}}} \\ (V_s)_{s \in S} &\mapsto (V_s)_{s \in \mathcal{R}}. \end{aligned}$$

Note que π é sobrejetora e suas fibras têm a forma de $\text{Gr}(\alpha_x - X, \alpha_0 - X)$, onde X é a dimensão de $\sum_{y \leq x} V_y$, e, portanto, no caso geral, pelo Lema 2.2.1, temos:

$$X = \max_{y \in x^\vee} \dim \left(\sum_{y \in x^\vee} V_y \right) = \max d_{x^\vee} = \alpha_{x^\vee} \cdot C_{x^\vee}^{-1} \cdot E_{x^\vee}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dim \text{Fl}_{S,\alpha} &= \dim \text{Fl}_{\mathcal{R},\alpha_{\widehat{\mathcal{R}}}} + \dim \text{Gr}(\alpha_x - X, \alpha_0 - X) \\ \dim \text{Fl}_{S,\alpha} &= \dim \text{Fl}_{\mathcal{R},\alpha_{\widehat{\mathcal{R}}}} + (\alpha_x - \alpha_{x^\vee} \cdot C_{x^\vee}^{-1} \cdot E_{x^\vee})(\alpha_0 - \alpha_x). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como, pela hipótese de indução, $\dim \text{Fl}_{\mathcal{R},\alpha_{\widehat{\mathcal{R}}}} = \dim \text{GL}(\alpha_0) - q_{\mathcal{R}}(\alpha_{\widehat{\mathcal{R}}})$, então:

$$\begin{aligned} \dim \text{Fl}_{S,\alpha} &= \dim \text{GL}(\alpha_0) - q_{\mathcal{R}}(\alpha_{\widehat{\mathcal{R}}}) + (\alpha_x - \alpha_{x^\vee} \cdot C_{x^\vee}^{-1} \cdot E_{x^\vee})(\alpha_0 - \alpha_x) \\ &= \dim \text{GL}(\alpha_0) - (q_{\mathcal{R}}(\alpha_{\widehat{\mathcal{R}}}) - (\alpha_x - \alpha_{x^\vee} \cdot C_{x^\vee}^{-1} \cdot E_{x^\vee})(\alpha_0 - \alpha_x)) \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 2.2.2,

$$\dim \text{Fl}_{S,\alpha} = \dim \text{GL}(\alpha_0) - q_S(\alpha).$$

□

2.3 Alguns exemplos

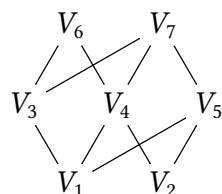
Reproduziremos um passo da indução da demonstração do Teorema 2.2.3 no exemplo a seguir.

Exemplo 2.3.1. *Considere o poset*

$$S = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; 1 < 3, 1 < 4, 1 < 5, 2 < 4, 2 < 5, 3 < 6, 3 < 7, 4 < 6, 4 < 7, 5 < 7)$$

e o vetor dimensão $\alpha = (8; 1, 2, 2, 4, 5, 6, 7)$. Uma representação em $\text{Fl}_{S,\alpha}$ tem a seguinte forma:

$$\mathbf{V} : \quad V_0 \quad ,$$



onde V_0 é o espaço ambiente de dimensão 8 e para cada $i \in \{1, \dots, 7\}$, o espaço V_i tem dimensão α_i .

Aplicaremos o passo de indução da prova do Teorema 2.2.3 para $x = 6 \in S$ (note que 6 é um elemento maximal em S). Veja que $X = \max(\dim(V_3 + V_4))$ e, como $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 4$ e $\min(\dim(V_3 \cap V_4)) = \dim V_1 = 1$, temos: $X = 2 + 4 - 1 = 5$. Neste caso, escrevendo a Equação (2.4) em diagramas de Hasse de forma que os vértices são as dimensões envolvidas, temos:

$$\begin{array}{c} 8 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 6 \quad 7 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 4 \quad 5 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} = 8 - 5 + \begin{array}{c} 8 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 7 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 4 \quad 5 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array}$$

Assim, pela hipótese de indução,

$$\dim \text{Fl}_{\mathcal{R}, \alpha_{\mathcal{R}}} = \dim \text{GL}(\alpha_0) - q_{\mathcal{R}}(\alpha_{\mathcal{R}}) = 8^2 - q_{\mathcal{R}}(8; 7, 2, 4, 5, 1, 2) =$$

$$= 64 - \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 & 2 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{array} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} 8 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{array} \right] = 64 - 29 = 35,$$

onde $\mathcal{R} = S \setminus \{6\}$.

Por outro lado, $\dim \text{Gr}(6 - 5, 8 - 5) = 2$. E, portanto, $\dim \text{Fl}_{S, \alpha} = 2 + 35 = 37$.

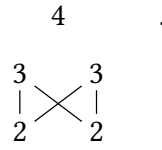
Como podemos ver,

$$\dim \text{Fl}_{S, \alpha} = 64 - \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} 8 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \right] = 64 - 27 = 37.$$

O próximo exemplo mostra que a hipótese de que α é admissível é essencial para a validade do Teorema.

Exemplo 2.3.2. Considere o poset $S = \{1, 2, 3, 4; 1 < 3, 1 < 4, 2 < 3, 2 < 4\}$ e o vetor

dimensão $\alpha = (4; 2, 2, 3, 3)$. O diagrama de Hasse de \widehat{S} com os inteiros α_s em seus vértices correspondentes para todo $s \in \widehat{S}$ tem a forma:



Note que α não é admissível. Em particular, $h(\widehat{S}) = 3$,

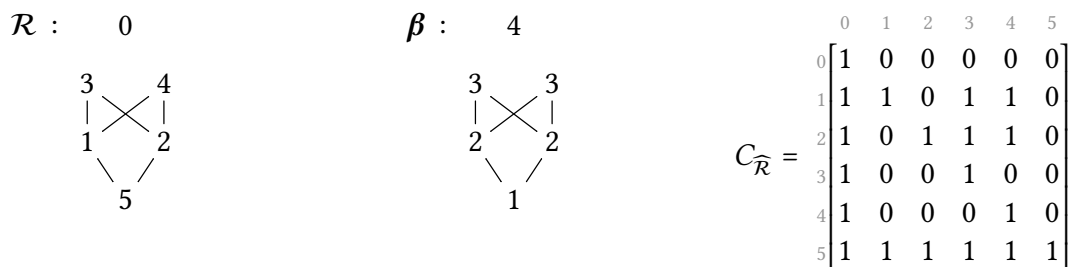
$$C_{\widehat{S}} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_1^{-1} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_2^{-1} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, portanto, $\alpha^{(2)} = \alpha \cdot F_1^{-1} = (0, 2, 2, -1, -1) \notin \mathbb{Z}^{+\widehat{S}}$ e as hipóteses do Teorema 2.2.3 não são satisfeitas. Além disso,

$$\dim \text{Fl}_{S, \alpha} = 7 \neq \dim \text{GL}(\alpha_0) - q_S(\alpha) = 16 - [4 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3] \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 6.$$

Porém, podemos fazer com que este exemplo respeite estas hipóteses modificando a estrutura do poset. Especificamente, seja $\mathcal{R} = S \cup \{5\}$, onde 5 é um ponto minimal e seja $\beta = (4; 2, 2, 3, 3, 1)$.

Como para todo ponto $V \in \text{Fl}_{S, \alpha}$, existe uma intersecção entre V_1 e V_2 (já que ambos têm dimensão 2 e são subespaços de um espaço de dimensão 3) que apenas não é expressa no poset, então $\dim \text{Fl}_{S, \alpha} = \dim \text{Fl}_{\mathcal{R}, \beta}$. Neste caso, temos



E , portanto, $h(\widehat{\mathcal{R}}) = 4$ e, para \mathcal{R} , as matrizes de Frobenius associadas são:

$$F_1^{-1} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, F_2^{-1} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F_3^{-1} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\beta^{(1)} = (4; 2, 2, 3, 3, 1), \quad \beta^{(2)} = (3; 1, 1, 2, 2, 1), \quad \beta^{(3)} = (1; 1, 1, 0, 0, 1), \quad \beta^{(4)} = (1; 1, 1, 0, 0, 1).$$

Portanto, β é um vetor admissível, \mathcal{R} e β satisfazem as hipóteses do Teorema 2.2.3 e

$$\dim \text{Fl}_{S, \alpha} = \dim \text{Fl}_{\mathcal{R}, \beta} = \dim \text{GL}(\beta_0) - q_{\mathcal{R}}(\beta)$$

$$= 16 - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 16 - 9 = 7.$$

Há também vetores não admissíveis para quais a Equação 2.3 é válida, como no exemplo a seguir.

Exemplo 2.3.3. Seja o poset $S = \{1, 2, 3; 1 < 3, 2 < 3\}$ e vetor α dado pelo diagrama abaixo (segundo a mesma notação dos outros exemplos):

$$\alpha : \quad 4 \\ \quad \quad 3 \\ \quad \quad / \quad \backslash \\ \quad 2 \quad \quad 2$$

O vetor α não é admissível, pois:

$$C_{\widehat{S}} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_1^{-1} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_1^{-2} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, portanto, $\alpha^{(2)} = \alpha \cdot F_1^{-1} = (0; 2, 2, -1)$.

Porém, neste caso,

$$\dim \text{Fl}_{S,\alpha} = 7 = 16 - \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 16 - 9 = \dim \text{GL}(\alpha_0) - q_S(\alpha).$$

2.4 Consequências

Seja α um vetor admissível de S . Como no trabalho de Magyar, Weyman e Zelevinsky [MWZ99], diremos que o vetor α é *do tipo finito* se o grupo $\text{GL}(\alpha_0)$ tem uma quantidade finita de órbitas em $\text{Fl}_{S,\alpha}$.

Se o vetor $\alpha' \in \Pi_S$ é tal que $\alpha - \alpha' \in \Pi_S$, diremos que α' é somando de $\alpha \in \Pi_S$. Se α' é somando de um vetor dimensão $\alpha \in \Pi_S$ e $\dim \mathbf{V} = \alpha$, então \mathbf{V} necessariamente é a soma direta de uma representação \mathbf{V}' de dimensão α' e \mathbf{W} de dimensão $\alpha - \alpha'$. Assim, sempre que α é do tipo finito, seus somandos diretos também são.

Suponha que $\alpha \in \Pi_S$ é do tipo finito e, portanto, $\text{Fl}_{S,\alpha} = \bigsqcup_{i=0}^{n<\infty} \mathcal{O}_i$. Como a variedade $\text{Fl}_{S,\alpha}$ é irredutível, ela não pode ser escrita como a união finita de fechados. Assim, há pelo menos uma órbita densa (aberta) na ação de $\text{GL}(\alpha_0)$ sobre $\text{Fl}_{S,\alpha}$. Denominando a órbita densa por \mathcal{O}_0 , considere a representação $\mathbf{V} \in \mathcal{O}_0$. Neste caso, temos:

$$\dim(\text{GL}(\alpha_0) \cdot \mathbf{V}) = \dim \mathcal{O}_0 = \dim \text{Fl}_{S,\alpha} = \dim \text{GL}(\alpha_0) - q_S(\alpha).$$

Sendo assim, usando o Teorema órbita-estabilizador (ou seja, a soma das dimensões do estabilizador e da órbita é igual à dimensão do grupo), $\dim \text{Stab}_{\text{GL}(\alpha_0)} \mathbf{V} = q_S(\alpha)$. Além disso, pela própria definição de estabilizador, $\dim \text{End} \mathbf{V} = \dim \text{Stab}_{\text{GL}(\alpha_0)} \mathbf{V}$ e, portanto:

$$\dim \text{End} \mathbf{V} = q_S(\alpha), \tag{2.5}$$

o que nos leva à primeira consequência:

Proposição 2.4.1. *Seja α um vetor admissível do tipo finito tal que $q_S(\alpha) = 1$. Então existe uma representação schuriana de S com vetor dimensão α .*

Além disso, como $\dim \text{Stab}_{\text{GL}(\alpha_0)} \mathbf{V}$ é sempre maior ou igual a 1, pois $\text{Stab}_{\text{GL}(\alpha_0)} \mathbf{V}$ contém as matrizes escalares $k \cdot \text{Id} \cong k$, a Equação 2.5 também nos permite verificar que:

Proposição 2.4.2. *Seja α um vetor dimensão admissível do tipo finito. Então, $q_S(\alpha') \geq 1$ para qualquer somando α' de α .*

As proposições acima nos permitem formular um teorema análogo ao Teorema 1 de Drozd [Dro74] em termos da variedade $\text{Fl}_{S,\alpha}$ e da forma quadrática de Euler para posets $q_S(\alpha)$ a partir das propriedades anteriores.

Proposição 2.4.3. *Seja S um poset tal que $q_S(\alpha) > 0$ para todo vetor dimensão α não nulo em Π_S . Então:*

- (a) O poset S é do tipo finito;
- (b) Se $q_S(\alpha) = 1$, então existe uma única representação indecomponível de S (a menos de isomorfismos) com dimensão α ;
- (c) Se $q_S(\alpha) > 1$, então não existe representação indecomponível com vetor dimensão α .

Demonstração. Suponha que a forma q_S é positiva quando avaliada em qualquer vetor dimensão não nulo de Π_S . Seja $\beta \in \mathbb{Z}^{\hat{S}}$ e $\alpha = \beta \cdot C_{\hat{S}}$ (portanto $\alpha \in \Pi_S$).

Como $q_S(\alpha) > 0$, então $q_S(\beta \cdot C_{\hat{S}}) > 0$. Ou seja,

$$\begin{aligned} \beta \cdot C_{\hat{S}} \cdot C_{\hat{S}}^{-1} \cdot C_{\hat{S}}^{tr} \cdot \beta^{tr} &> 0 \\ \Rightarrow \beta \cdot C_{\hat{S}}^{tr} \cdot \beta^{tr} &> 0 \\ \Rightarrow \beta \cdot C_{\hat{S}} \cdot \beta^{tr} &> 0 \\ \Rightarrow \hat{q}_S(\beta) &> 0. \end{aligned}$$

Assim, a forma quadrática de Tits de S é fracamente positiva e o trabalho de Drozd [Dro74, Prop.2, Teor.1] garante que S é do tipo finito. Mais especificamente, $\hat{q}_S(\alpha) = 1$ implica na existência de uma única representação indecomponível com vetor dimensão igual a α e, como vimos na Proposição 2.4.1, essa dimensão precisa ser schuriana.

Por outro lado, se $\hat{q}_S(\alpha) > 1$, $\dim \text{Stab}_{\text{GL}(\alpha_0)} \mathbf{V} = \dim \text{End} \mathbf{V} > 1$ para toda \mathbf{V} com vetor dimensão α . Ou seja, não existem representações schurianas com vetor dimensão α . Como S é do tipo finito, toda representação indecomponível é schuriana e, portanto, não existem representações indecomponíveis com dimensão α . \square

Capítulo 3

As formas quadráticas de Euler de um poset e seu diferencial

Neste capítulo, analisaremos a alteração causada no vetor dimensão de uma representação pelo vetor diferenciação de [Gab72a]. Nosso objetivo é relacionar a forma bilinear de Euler de S e de S'_a . Mais especificamente, estabeleceremos uma relação entre as inversas das matrizes de Cartan de um poset a -diferenciável e de seu diferencial. Em seguida, mostraremos que, numa certa família de representações, a matriz $D_S \in \text{Mat}_{\hat{S} \times \hat{S}'_a}(\mathbb{Z})$ também é responsável pela mudança de dimensão de V para V' , ou seja, $\mathbf{dim}V \cdot D_S = \mathbf{dim}\partial_a V$. Assim, se V e W fazem parte dessa família, $\langle \mathbf{dim}V, \mathbf{dim}W \rangle_S = \langle \mathbf{dim}\partial_a V, \mathbf{dim}\partial_a W \rangle_{S'_a}$.

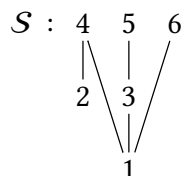
3.1 Entendendo o problema

Como vimos na Seção 1.3, a forma bilinear de Euler é dada por

$$\langle \mathbf{dim}V, \mathbf{dim}W \rangle_S = \mathbf{dim}V \cdot C_{\hat{S}}^{-1} \cdot (\mathbf{dim}W)^{tr}.$$

Esta forma pode ser bastante previsível quando S é primitivo e como vimos no Exemplo 1.3.2, mas em posets não primitivos como o do Exemplo 1.3.1, não é tão simples encontrar um padrão.

Exemplo 3.1.1. *O poset*



tem a seguinte matriz de Cartan e sua respectiva inversa:

$$C_{\widehat{S}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array}, \quad C_{\widehat{S}}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array}.$$

O poset diferencial em relação ao elemento 6 e sua matriz de Cartan são:

$$S'_6 : \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & 4 \vee 5 & & & \\ & & & / \quad \backslash & & & \\ & & 4 \vee 3 & & 2 \vee 5 & & \\ & & / \quad \backslash & & / \quad \backslash & & \\ 4 & & & 2 \vee 3 & & & 5 \\ & & / \quad \backslash & & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & & / \quad \backslash & & & & \\ & & 1 & & & & \end{array} \end{array} \quad e \quad C_{\widehat{S}'_6} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \vee 3 & 2 \vee 5 & 4 \vee 3 & 4 \vee 5 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \vee 3 \\ 2 \vee 5 \\ 4 \vee 3 \\ 4 \vee 5 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array}.$$

E a inversa de sua matriz de Cartan é dada por:

$$C_{\widehat{S}'_6}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \vee 3 & 2 \vee 5 & 4 \vee 3 & 4 \vee 5 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \vee 3 \\ 2 \vee 5 \\ 4 \vee 3 \\ 4 \vee 5 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \end{array}.$$

Nosso objetivo é encontrar uma correspondência entre $C_{\widehat{S}'_a}^{-1}$ e $C_{\widehat{S}}^{-1}$, revelando uma relação existente entre as formas bilineares de Euler de um poset e de seu diferencial. Considerando a disposição da forma bilinear $\mathbf{dimV} \cdot C_{\widehat{S}}^{-1} \cdot \mathbf{dimW}^{tr}$, a relação mais vantajosa seria a existência de uma matriz $D \in \text{Mat}_{\widehat{S} \times \widehat{S}'_a}(\mathbb{Z})$ tal que

$$D \cdot C_{\widehat{S}'_a}^{-1} \cdot D^{tr} = C_{\widehat{S}}^{-1} \quad (3.1)$$

ou de uma matriz $F \in \text{Mat}_{\widehat{S}'_a \times \widehat{S}}(\mathbb{Z})$ tal que $F \cdot C_{\widehat{S}'_a}^{-1} \cdot F^{tr} = C_{\widehat{S}}^{-1}$, desde que D e F sejam capazes de relacionar os vetores dimensões das representações em S aos de seus diferenciais em S'_a , de forma que $\dim \mathbf{V} \cdot D = \dim \partial_a \mathbf{V}$ ou $\dim \mathbf{V}' \cdot F = \dim \int_a \mathbf{V}'$.

Porém, sempre que o conjunto M (notação usada na Observação 1.5.3) tem largura diferente de 1, a quantidade de elementos em \widehat{S}'_a é maior ou igual à quantidade em \widehat{S} . Assim, o posto de $C_{\widehat{S}'_a}^{-1}$ é maior que o posto de $C_{\widehat{S}}^{-1}$. Portanto, é impossível estabelecer a relação dada pela matriz F na maior parte dos posets.

Portanto, nossa análise inicial se voltará para o estudo da transformação linear D que representa a mudança de dimensão de \mathbf{V} para \mathbf{V}' (ou seja, $\dim \mathbf{V} \cdot D = \dim \mathbf{V}'$) e mostrar que essa mesma matriz garante a igualdade 3.1.

3.2 A matriz D e representações D -admissíveis

Seja $\mathbf{V} \in \text{sp}_S$ uma representação com dimensão α , $\mathbf{V}' = \partial_a \mathbf{V}$ e $\alpha' = \dim \mathbf{V}'$. Se \mathbf{V} é genérica (conforme a definição 1.4.5), então:

$$\alpha'_m = \dim(V_m \cap V_a) = \max \left(\alpha_a + \alpha_m - \alpha_0, \dim \sum_{s < a, s < m} V_s \right) \text{ para todo } m \in M; \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \alpha'_{r \vee s} &= \dim((V_r + V_s) \cap V_a) \\ &= \max \left(\min \left(\dim \sum_{r < x, s < x} V_x, \alpha_r + \alpha_s - \dim \sum_{x < r, x < s} V_x \right) + \alpha_a - \alpha_0, \dim \sum_{x < a \text{ e } x < r \text{ ou } s} V_x \right) \\ &\text{ para todo } r \vee s \in \Omega. \end{aligned}$$

Como \mathbf{V} é uma representação genérica, para qualquer subposet $\mathcal{U} \subseteq S$, a dimensão de $\sum_{u \in \mathcal{U}} V_u$ pode ser dada em termos de uma combinação linear das dimensões dos espaços vetoriais V_s com $s \in u^\nabla$, $u \in \mathcal{U}$. Portanto, para todo poset S e representação genérica $\mathbf{V} \in \text{sp}_S$, existe uma transformação $D_{\mathbf{V}} \in \text{Mat}_{\widehat{S} \times \widehat{S}'_a}(\mathbb{Z})$ tal que $\dim \partial_a \mathbf{V} = \dim \mathbf{V} \cdot D_{\mathbf{V}}$. A seguir, destacaremos uma destas transformações e veremos como ela torna a igualdade $C_{\widehat{S}}^{-1} = D_{\mathbf{V}} \cdot C_{\widehat{S}'_a}^{-1} \cdot D_{\mathbf{V}}^{tr}$ verdadeira.

Definição 3.2.1 (Representação D -admissível). *Considere o poset a -diferenciável S . Seja \mathbf{V} uma representação genérica que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. Para cada $m \in M$ tem-se $V_m + V_a = V_0$,
2. para cada $r \vee s \in \Omega$, a intersecção $V_r \cap V_s$ é dada exatamente pela soma dos subespaços relacionados aos elementos menores que eles, ou seja, $\sum_{t < r, t < s} V_t$.

Fixada uma base para V_0 , denominaremos de matriz de diferenciação D_S do poset S (ou, simplesmente D , se o poset for claro) a matriz D que satisfaz a igualdade $\dim \partial_a \mathbf{V} = \dim \mathbf{V} \cdot D$. Neste caso, diremos que \mathbf{V} é uma representação D -admissível.

Supondo \mathbf{V} genérica, o Item 1 equivale a considerar que a intersecção $V_m \cap V_a$ é maior ou igual à soma dos subespaços abaixo deles $\sum_{s < a, s < m} V_s$ e nos permite calcular a dimensão

da intersecção $V_m \cap V_a$ através da fórmula da intersecção de Grassmann (ver, por exemplo, [Car18, Teor 6.21]):

$$\begin{aligned} \dim(V_m \cap V_a) &= \dim V_m + \dim V_a - \dim(V_m + V_a) \\ &= \dim V_m + \dim V_a - \dim V_0. \end{aligned}$$

Ainda tomando como hipótese \mathbf{V} genérica, o Item 2 corresponde a considerar que a dimensão da intersecção $(V_r + V_s) \cap V_a$ é maior ou igual à dimensão da soma dos subespaços abaixo simultaneamente de r ou s e abaixo de a , ou seja,

$$\dim((V_r + V_s) \cap V_a) \geq \dim \sum_{t \in a^{\vee} \cap (r^{\vee} \cup s^{\vee})} V_t.$$

Essa equação pode ser obtida a partir das seguintes etapas de desenvolvimento:

$$(V_r + V_s) \cap V_a \supseteq V_r \cap V_a + V_s \cap V_a = \sum_{t \in r^{\vee} \cap a^{\vee}} V_t + \sum_{t \in s^{\vee} \cap a^{\vee}} V_t \supseteq \sum_{t \in (r^{\vee} \cup s^{\vee}) \cap a^{\vee}} V_t.$$

Sempre que \mathbf{V} é exata e genérica, essas condições são satisfeitas.

Exemplo 3.2.2. Considere o poset $S = \{1, 2, 3, 4; 1 < 2, 1 < 3\}$. Neste caso,

$$M_{S,4} = \{1, 2, 3\}, N_{S,4} = \emptyset \text{ e } \Omega_{S,4} = \{2 \vee 3\}.$$

Assim, $S'_4 = \{1, 2, 3, 2 \vee 3; 1 < 2, 1 < 3, 2 < 2 \vee 3, 3 < 2 \vee 3\}$. E uma representação \mathbf{V} será D -admissível se $V_1 + V_4 = V_0$ e $V_2 \cap V_3 = V_1$.

Considere as representações \mathbf{V} e \mathbf{W} de S definidas pelos diagramas a seguir:

$$\begin{array}{l} \mathbf{V} : \quad \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle_0 \\ \quad \quad \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_2 \quad \langle e_2, e_3, e_4 \rangle_3 \quad \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle_4 \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \langle e_2, e_3 \rangle_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{W} : \quad \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle_0 \\ \quad \quad \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_2 \quad \langle e_2, e_3, e_4 \rangle_3 \quad \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle_4 \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \langle e_2 \rangle_1 \end{array}$$

Então:

$$\begin{aligned} \dim(V'_1) &= \dim(V_1 \cap V_4) = \dim V_1 + \dim V_4 - \dim V_0 = 2 + 4 - 4 = 2 \\ \dim(V'_2) &= \dim(V_2 \cap V_4) = \dim V_2 + \dim V_4 - \dim V_0 = 3 + 4 - 4 = 3 \\ \dim(V'_3) &= \dim(V_3 \cap V_4) = \dim V_3 + \dim V_4 - \dim V_0 = 3 + 4 - 4 = 3 \\ \dim(V'_{2 \vee 3}) &= \dim((V_2 + V_3) \cap V_4) = \dim V_2 + \dim V_3 - \dim V_1 + \dim V_4 - \dim V_0 = \\ &= 3 + 3 - 2 + 4 - 4 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dim(W'_1) &= \dim(W_1 \cap W_4) = \dim W_1 + \dim W_4 - \dim W_0 = 1 + 4 - 4 = 1 \\
\dim(W'_2) &= \dim(W_2 \cap W_4) = \dim W_2 + \dim W_4 - \dim W_0 = 3 + 4 - 4 = 3 \\
\dim(W'_3) &= \dim(W_3 \cap W_4) = \dim W_3 + \dim W_4 - \dim V_0 = 3 + 4 - 4 = 3 \\
\dim(W'_{2\vee 3}) &= \dim((W_2 + W_3) \cap W_4) = \dim W_0 + \dim W_4 - \dim W_0 = 4 + 4 - 4 = 4
\end{aligned}$$

Note que \mathbf{V} satisfaz as condições para ser admissível, ao contrário de \mathbf{W} , já que $W_2 \cap W_3 \neq W_1$. Em particular, as matrizes D_V e D_W são dadas respectivamente por:

$$D_V = D_S = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1\vee 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad e \quad D_W = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1\vee 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Proposição 3.2.3. Considere o poset a -diferenciável S no qual não existe $n \in N$ menor que dois elementos incomparáveis de M simultaneamente. Então, a matriz D_S tem a forma:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & M & N & \Omega \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ M \\ N \\ a \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -E_M^{tr} & 0_{1 \times N} & -E_\Omega^{tr} \\ 0_{M \times 1} & \text{Id}_M & 0_{M \times N} & C_M^{-1} C_{M,\Omega} \\ 0_{N \times 1} & 0_{N \times M} & \text{Id}_N & C_N^{-1} (C_{N,\Omega} - C_{N,M} C_M^{-1} C_{M,\Omega}) \\ 1 & E_M^{tr} & 0_{1 \times N} & E_\Omega^{tr} \end{bmatrix} \end{matrix} \in \text{Mat}_{\hat{S} \times \hat{S}'_a}(\mathbb{Z})$$

Em outras palavras, toda representação D-admissível é tal que:

- $\dim V'_0 = \dim V_a$
- $\dim V'_n = \dim V_n$
- $\dim V'_m = \dim(V_m \cap V_a) = \dim V_m + \dim V_a - \dim V_0$
- $\dim V'_{r\vee s} = \dim((V_r + V_s) \cap V_a) = \mathbf{dimV}|_{M \cup N} \cdot C_{M \cup N}^{-1} \cdot C_{M \cup N, (r\vee s)} + \dim V_a - \dim V_0$

Demonstração. Por definição, como \mathbf{V} é D-admissível, então $\dim((V_r + V_s) \cap V_a) = \dim V_r + \dim V_s - \dim \sum_{t \in r^\vee n s^\vee} V_t + \dim V_a - \dim V_0$. Assim, a proposição equivale a mostrar que

$$\dim V_r + \dim V_s - \dim \sum_{t \in r^\vee n s^\vee} V_t = \mathbf{dimV}|_{M \cup N} \cdot C_{M \cup N}^{-1} \cdot C_{M \cup N, (r\vee s)} \quad (3.3)$$

para quaisquer elementos incomparáveis r e s de M .

Seja $(r, s)^\vee = r^\vee \cup s^\vee$ e $(r, s)^\blacktriangle = (M \cup N) \setminus (r, s)^\vee$. Note que

$$C_{M \cup N}^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (r,s)^\blacktriangle & r & s & (r,s)^\vee \end{matrix} \\ \begin{matrix} (r,s)^\blacktriangle \\ * \\ * \end{matrix} & \begin{bmatrix} C_{(r,s)^\blacktriangle}^{-1} & 0 & 0 \\ * & \text{Id}_2 & 0 \\ * & -C_{(r,s)^\vee}^{-1} \cdot C_{(r,s)^\vee, \{r,s\}} & C_{(r,s)^\vee}^{-1} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad e \quad C_{M \cup N, r\vee s} = \begin{matrix} (r,s)^\blacktriangle \\ r \\ s \\ (r,s)^\vee \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E_2 \\ C_{(r,s)^\vee, r\vee s} \end{bmatrix}.$$

Assim, o produto $C_{M \cup N}^{-1} \cdot C_{M \cup N, rvs}$ resulta em:

$$C_{M \cup N}^{-1} \cdot C_{M \cup N, rvs} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & E_2 & \\ C_{(r,s)^\nabla}^{-1} \cdot [C_{(r,s)^\nabla, rvs} - C_{(r,s)^\nabla, r} - C_{(r,s)^\nabla, s}] & & \end{bmatrix}$$

e a proposição se resume a mostrar que:

$$\dim \sum_{t \in r^\nabla \cap s^\nabla} V_t = \mathbf{dimV}|_{(r,s)^\nabla} \cdot C_{(r,s)^\nabla}^{-1} \cdot [-C_{(r,s)^\nabla, rvs} + C_{(r,s)^\nabla, r} + C_{(r,s)^\nabla, s}]. \quad (3.4)$$

Particularmente, $C_{rvs}^* = [-C_{(r,s)^\nabla, rvs} + C_{(r,s)^\nabla, r} + C_{(r,s)^\nabla, s}]$ é igual a 1 nas linhas m em que $m \leq r$ e $m \leq s$ e igual a 0 nas demais linhas. Ou seja, $(C_{rvs}^*)_m = 1$ se, e somente se, $m \in r^\nabla \cap s^\nabla$. Além disso, $C_{(r,s)^\nabla}^{-1}$ pode ser fatorada em matrizes específicas de cada nível do poset, como na Proposição 2.1.1 no Capítulo 2 em:

$$C_{(r,s)^\nabla}^{-1} = F_1^{-1} \cdot \dots \cdot F_{h((r,s)^\nabla)-1}^{-1}.$$

Assim, há duas possibilidades para a quantidade de elementos maximais em $r^\nabla \cap s^\nabla$.

Caso haja um único elemento maximal t em $r^\nabla \cap s^\nabla$, todos os elementos nos níveis abaixo de t também pertencem a $r^\nabla \cap s^\nabla$. Sendo assim, para todo elemento $i \leq m$, a matriz F_i^{-1} é igual a:

$$F_i^{-1} = \begin{bmatrix} t^\blacktriangle \cup \{t\} & \text{Id}_{h(M \cup N)} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ \{i\} & -C_{i, t^\blacktriangle} & & * & & \\ t^\nabla \setminus \{i\} & 0 & \dots & 0 & \text{Id}_1 & \dots \end{bmatrix},$$

onde $*$ é a linha com coordenadas iguais a -1 na coluna r , s , t e, ocasionalmente, em elementos dos níveis abaixo de t . Assim, o produto $F_t^{-1} \cdot C_{rvs}^*$ resulta em

$$\left(\underbrace{-1}_{t < r, F_t^{-1}} \cdot \underbrace{1}_{r < rvs, C_{rvs}^*} \right) + \left(\underbrace{-1}_{t < s, F_t^{-1}} \cdot \underbrace{1}_{s < rvs, C_{rvs}^*} \right) + \left(\underbrace{1}_{t=t, F_t^{-1}} \cdot \underbrace{1}_{t < rvs, C_{rvs}^*} \right) = -1.$$

Os elementos u do próximo nível do poset $M \cup N$, um nível contendo possivelmente mais de um elemento, são menores que r , s e t . Portanto, $F_u^{-1} \cdot C_{rvs}^*$ resulta em

$$\left(\underbrace{-1}_{u < r, F_u^{-1}} \cdot \underbrace{1}_{r < rvs, C_{rvs}^*} \right) + \left(\underbrace{-1}_{u < s, F_u^{-1}} \cdot \underbrace{1}_{s < rvs, C_{rvs}^*} \right) + \left(\underbrace{-1}_{u < t, F_u^{-1}} \cdot \underbrace{-1}_{F_u^{-1} \cdot C_{rvs}^*} \right) + \left(\underbrace{1}_{u=u, F_u^{-1}} \cdot \underbrace{1}_{F_u^{-1} \cdot C_{rvs}^*} \right) = 0.$$

A partir desse nível, todos os produtos são iguais, pois os elementos já zerados em $F_u^{-1} \cdot C_{rvs}^*$ sempre zeram o produto com seu correspondente em F_k^{-1} para qualquer $k < u$. Desta forma, a Equação 3.3 é satisfeita, já que ambos os lados correspondem a $\dim V_r + \dim V_s - \dim V_t$.

A segunda possibilidade é que haja mais de um elemento maximal em $r^\nabla \cap s^\nabla$. Como a hipótese da proposição garante que não existe nenhum elemento de N em $r^\nabla \cap s^\nabla$, há

apenas dois maximais e eles são elementos de M (pois, a largura de M é sempre menor ou igual a 2 em posets a -diferenciáveis. Assim, $\max\{r^\nabla \cap s^\nabla\} = \{t, u\}$, com t e u incomparáveis e $t \vee u$ em níveis abaixo de $r \vee s$. Neste caso, provaremos que a Equação 3.4 é satisfeita por indução no nível em que se encontra $r \vee s$ (no sentido da altura do elemento no diagrama de Hasse).

Se o elemento $r \vee s$ se encontra no nível mais baixo possível, então r e s são minimais em M e $\dim(V_r + V_s) = \dim V_r + \dim V_s$, pois $r^\nabla \cup s^\nabla$ é vazio. Por esse mesmo motivo, $C_{r \vee s}^*$ é igual a $(0, \dots, 0)^{tr}$, já que não há elementos simultaneamente menores que r e s . Assim, a Equação 3.4 é satisfeita, pois se reduz a $0 = 0$.

Seguindo com a prova por indução, note que

$$\begin{aligned} \dim \sum_{v \in r^\nabla \cap s^\nabla} V_v &= \dim V_t + \dim V_u - \dim(V_t \cap V_u) \\ &= \dim V_t + \dim V_u - \dim \sum_{w \in t^\nabla \cap u^\nabla} V_w, \end{aligned}$$

portanto, pela hipótese de indução,

$$\dim \sum_{v \in r^\nabla \cap s^\nabla} V_v = \dim V_t + \dim V_u - C_{(t,u)^\nabla}^{-1} \cdot C_{t \vee u}^*.$$

Por outro lado, como $r^\nabla \cap s^\nabla = \{t, u\} \cup (t^\nabla \cap u^\nabla)$, então

$$C_{(r,s)^\nabla}^{-1} = \begin{bmatrix} (t,u)^\blacktriangle & & (t,u)^\nabla \\ C_{(t,u)^\blacktriangle}^{-1} & 0 & 0 \\ * & \text{Id}_2 & 0 \\ * & -C_{(t,u)^\nabla}^{-1} \cdot C_{(t,u)^\nabla, \{t,u\}} & C_{(t,u)^\nabla}^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_{r \vee s}^* = \begin{matrix} (t,u)^\blacktriangle \\ t \\ u \\ (t,u)^\nabla \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E_2 \\ C_{(t,u)^\nabla, t \vee u}^* \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} C_{(r,s)^\nabla}^{-1} \cdot C_{r \vee s}^* &= \begin{matrix} (t,u)^\blacktriangle \\ t \\ u \\ (t,u)^\nabla \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E_2 \\ -C_{(t,u)^\nabla}^{-1} \cdot C_{t \vee u}^* \end{bmatrix}, \\ \dim V|_{(r,s)^\nabla} \cdot C_{(r,s)^\nabla}^{-1} \cdot C_{r \vee s}^* &= \dim V_t + \dim V_u - C_{(t,u)^\nabla}^{-1} \cdot C_{t \vee u}^* \quad \text{e} \\ \dim \sum_{t \in r^\nabla \cap s^\nabla} V_t &= \dim V|_{(r,s)^\nabla} \cdot C_{(r,s)^\nabla}^{-1} \cdot C_{r \vee s}^*; \end{aligned}$$

finalizando, assim, a prova por indução de que a Equação 3.4 é verdadeira. \square

Exemplo 3.2.4. Considere o poset S dado por $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6; 1 < 3, 2 < 3, 4 < 6, 5 < 6\}$,

o elemento maximal $a = 6$ e a representação $\mathbf{V} \in \mathbf{sp}_S$ dada pelo diagrama abaixo:

$$\mathbf{V} : \quad \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle_0$$

$$\begin{array}{c} \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_3 \quad \langle e_1 + e_3, e_2, e_4 \rangle_6 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \langle e_1, e_2 \rangle_1 \quad \langle e_2, e_3 \rangle_2 \quad \langle e_2 + e_4 \rangle_4 \quad \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle_5 \end{array}$$

Então, $\mathbf{V}' = \partial_6 \mathbf{V}$ é dada por:

$$\mathbf{V}' : \quad \langle e_1 + e_3, e_2, e_4 \rangle_0$$

$$\begin{array}{c} \langle e_1 + e_3, e_2 \rangle_3 \\ | \\ \langle e_1 + e_3, e_2 \rangle_{1 \vee 2} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \langle e_2 \rangle_1 \quad \langle e_2 \rangle_2 \quad \langle e_2 + e_4 \rangle_4 \quad \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle_5 \end{array}$$

Note que \mathbf{V} é genérica, mas não D-admissível, pois $V_1 \cap V_2 \neq \sum_{t \in r^* \cap s^*} V_t = 0$. Mais especificamente, $V_1 + V_2 = V_3$, logo $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_3 + \dim V_6 - \dim V_0$,

Ou seja:

enquanto que:

$$D_{\mathbf{V}} = \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 1 \vee 2 \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{array}$$

$$D = \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 1 \vee 2 \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

No decorrer deste capítulo, mostraremos que em certas condições, a matriz D garante a igualdade 3.1.

Exemplo 3.2.5. Seja S o poset primitivo e 6-diferenciável $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6; 1 < 2, 3 < 4 < 5\}$.

$$S : \begin{array}{c} 2 \quad 5 \quad 6 \\ | \quad | \\ 1 \quad 4 \\ | \\ 3 \end{array}$$

Como S é primitivo, $C_{M \cup N}^{-1}$ e $C_{M \cup N, \Omega}$ podem ser representado em blocos como:

$$C_{M \cup N}^{-1} = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad | \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C_{M \cup N, \Omega} = \begin{array}{c} 1 \vee 3 \quad 1 \vee 4 \quad 1 \vee 5 \quad | \quad 2 \vee 3 \quad 2 \vee 4 \quad 2 \vee 5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Assim,

$$C_{M \cup N}^{-1} \cdot C_{M \cup N, \Omega}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1v3 & 1v4 & 1v5 & 2v3 & 2v4 & 2v5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \\ e \quad D = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1v3 & 1v4 & 1v5 & 2v3 & 2v4 & 2v5 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Neste caso, como os subposets $M_1 = \{1, 2\}$ e $M_2 = \{3, 4, 5\}$ não possuem comparações entre seus elementos, a intersecção $V_i \cap V_j$ é sempre nula se $(i, j) \in M_1 \times M_2$. Assim, se \mathbf{V} é uma representação D-admissível, $\dim V'_{(ij)} = \dim V_i + \dim V_j + \dim V_6 - \dim V_0$. E, neste caso, a igualdade

$$D \cdot C_{\widehat{S}'_a}^{-1} \cdot D^{tr} = C_{\widehat{S}}^{-1}$$

também é satisfeita. Esse fato pode ser verificado manualmente, mas mostraremos na próxima seção um resultado ainda mais geral, que essa equação é satisfeita para qualquer poset a-diferenciável no qual não exista $s \in S$ tal que $s \leq m$ para todo $m \in M$.

3.3 A relação entre os inversos das matrizes de Cartan de S e S'_a

Teorema 3.3.1. *Seja S um poset a-diferenciável no qual não existe um elemento $s \in S$ tal que $s \leq m$ para todo $m \in M$, S'_a seu diferencial e C_S e $C_{S'_a}$, suas respectivas matrizes de Cartan. Então,*

$$C_S^{-1} = D \cdot C_{S'_a}^{-1} \cdot D^{tr}.$$

Demonstração. Fixando as decomposições $\widehat{S} = \{0\} \cup M \cup \{a\} \cup N$ e $\widehat{S}'_a = \{0\} \cup M \cup N \cup \Omega$ e a ordem crescente em cada um desses subposets, nós temos:

$$C_{S'_a} = \begin{array}{c} 0 \\ M \\ N \\ \Omega \end{array} \left[\begin{array}{cccc} & 0 & N & \Omega \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ E_M & C_M & 0 & C_{M,\Omega} \\ E_N & C_{N,M} & C_N & C_{N,\Omega} \\ E_\Omega & C_{\Omega,M} & 0 & C_\Omega \end{array} \right], \quad C_S = \begin{array}{c} 0 \\ M \\ N \\ a \end{array} \left[\begin{array}{cccc} & 0 & N & a \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ E_M & C_M & 0 & 0 \\ E_N & C_{N,M} & C_N & E_N \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] e$$

$$C_{S'_a}^{-1} = \begin{matrix} & 0 & M & N & \Omega \\ \begin{matrix} 0 \\ M \\ N \\ \Omega \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta_1(C_{M,\Omega}C_{\Omega}^{-1}E_{\Omega} - E_M) & \Delta_1 & 0 & -C_M^{-1}C_{M,\Omega}\Delta_2 \\ * & C_N^{-1}(C_{N,\Omega}C_{\Omega}^{-1}C_{\Omega,M} - C_{N,M})\Delta_1 & C_N^{-1} & C_N^{-1}(C_{N,M}C_M^{-1}C_{M,\Omega} - C_{N,\Omega})\Delta_2 \\ ** & -C_{\Omega}^{-1}C_{\Omega,M}\Delta_1 & 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

onde:

- $\Delta_1 = (C_M - C_{M,\Omega}C_{\Omega}^{-1}C_{\Omega,M})^{-1}$, $\Delta_2 = (C_{\Omega} - C_{\Omega,M}C_M^{-1}C_{M,\Omega})^{-1}$,
- $*$ = $C_N^{-1}[-E_N + C_{N,\Omega}C_{\Omega}^{-1}E_{\Omega} - (C_{N,M} - C_{N,\Omega}C_{\Omega}^{-1}C_{\Omega,M})\Delta_1(C_{M,\Omega}C_{\Omega}^{-1}E_{\Omega} - E_M)]$ e
- $**$ = $-C_{\Omega}^{-1}[E_{\Omega} + C_{\Omega,M}\Delta_1(C_{M,\Omega}C_{\Omega}^{-1}E_{\Omega} - E_M)]$.

Calculando o produto entre as matrizes, tem-se que $C_S^{-1} = D \cdot C_{S'_a}^{-1} \cdot D^{tr}$ se, e somente se,

$$E_M^{tr}C_M^{-1}E_M + T(C_{\Omega,M}C_M^{-1}E_M - E_{\Omega}) = 1, \quad (3.5)$$

$$-E_M^{tr}C_M^{-1} + T(C_{M,\Omega}^{tr}C_M^{-tr} - C_{\Omega,M}C_M^{-1}) = 0; \quad (3.6)$$

$$T(C_{N,\Omega} - C_{N,M}C_M^{-1}C_{M,\Omega}) = 0 \quad (3.7)$$

onde $T = E_M^{tr}C_M^{-1}C_{M,\Omega}\Delta_2 - E_{\Omega}^{tr}\Delta_2$. Portanto, nosso objetivo é provar que as três equações são satisfeitas para os posets nas condições dadas. Para isso, procedemos em dois passos:

Passo 1: Mostraremos que as três equações são válidas para o caso em que

$$T = (1, 0, \dots, 0); \quad (3.8)$$

Passo 2: Provaremos por indução que, de fato, $T = (1, 0, \dots, 0)$.

Passo 1. Como M não tem mínimo global e o poset é a -diferenciável, M tem largura 2 e exatos dois elementos minimais. Portanto, a primeira linha de $C_{M,\Omega}^{tr}$ is $(1, 1, 0, \dots, 0)$, assim como as duas primeiras linhas de C_M^{-tr} são

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$(1, 0, \dots, 0)(C_M^{-1}C_{M,\Omega})^{tr} = (1, 0, \dots, 0)C_{M,\Omega}^{tr}C_M^{-tr} = (1, 1, 0, \dots, 0)C_M^{-tr} = (1, 1, 0, \dots, 0). \quad (3.9)$$

Denote por p e q os elementos minimais de M e, para todo $s \in S$, defina $s^{\Delta} = \{t \in S \mid s \leq t\}$. Assim, $p^{\Delta} \cup q^{\Delta} = M$.

Considere as funções indicadoras dos conjuntos p^{Δ} , q^{Δ} , $p^{\Delta} \cup q^{\Delta}$ e $p^{\Delta} \cap q^{\Delta}$ e denote-as como os vetores $\mathbf{1}_{p^{\Delta}}$, $\mathbf{1}_{q^{\Delta}}$, $\mathbf{1}_{p^{\Delta} \cup q^{\Delta}}$ e $\mathbf{1}_{p^{\Delta} \cap q^{\Delta}}$ definidos da maneira natural. Então:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{p^{\Delta} \cup q^{\Delta}} &= E_M^{tr}, \\ \mathbf{1}_{p^{\Delta}} + \mathbf{1}_{q^{\Delta}} &= (1, 1, 0, \dots, 0)C_M, \\ \mathbf{1}_{p^{\Delta} \cap q^{\Delta}} &= (1, 0, \dots, 0)C_{\Omega,M}, \end{aligned}$$

Além disso, $\mathbf{1}_{p^\Delta \cup q^\Delta} = \mathbf{1}_{p^\Delta} + \mathbf{1}_{q^\Delta} - \mathbf{1}_{p^\Delta \cap q^\Delta}$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= -\mathbf{1}_{p^\Delta \cup q^\Delta} + \mathbf{1}_{p^\Delta} + \mathbf{1}_{q^\Delta} - \mathbf{1}_{p^\Delta \cap q^\Delta} \\ &= -E_M^{tr} + (1, 1, 0, \dots, 0)C_M - (1, 0, \dots, 0)C_{\Omega, M}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Multiplicando à direita ambos os lados por C_M^{-1} e levando em conta a Equação (3.9), temos:

$$-E_M^{tr}C_M^{-1} + (1, 0, \dots, 0)(C_{M, \Omega}^{tr}C_M^{-tr} - C_{\Omega, M}C_M^{-1}) = 0. \quad (3.11)$$

Então, multiplicando (3.11) por $-E_M$ à direita e aplicando (3.9), nós temos

$$\begin{aligned} 0 &= E_M^{tr}C_M^{-1}E_M - (1, 0, \dots, 0)(C_{M, \Omega}^{tr}C_M^{-tr})E_M + (1, 0, \dots, 0)(C_{\Omega, M}C_M^{-1})E_M \\ &= E_M^{tr}C_M^{-1}E_M - (1, 1, 0, \dots, 0)E_M + (1, 0, \dots, 0)(C_{\Omega, M}C_M^{-1})E_M \\ &= E_M^{tr}C_M^{-1}E_M - 2 + (1, 0, \dots, 0)(C_{\Omega, M}C_M^{-1})E_M, \end{aligned}$$

que podemos reescrever como

$$E_M^{tr}C_M^{-1}E_M - (1, 0, \dots, 0)E_\Omega + (1, 0, \dots, 0)(C_{\Omega, M}C_M^{-1})E_M = 1, \quad (3.12)$$

já que $(1, 0, \dots, 0)E_\Omega = 1$.

Finalmente, no caso de $T = (1, 0, \dots, 0)$, a equação (3.7) se resume a

$$(1, 0, \dots, 0) \cdot (C_{N, \Omega} - C_{N, M}C_M^{-1}C_{M, \Omega}) = 0, \quad (3.13)$$

lembrando que a coordenada composta por 1 é relativa ao elemento minimal $p \vee q \in \Omega$. Em outras palavras, precisamos confirmar que a primeira coluna de $C_{N, \Omega}$ (relativa a $p \vee q \in \Omega$) é igual à de $C_{N, M}C_M^{-1}C_{M, \Omega}$.

Lembre que a primeira coluna de $C_{M, \Omega}$ é dada por $(1, 1, 0, \dots, 0)^{tr}$ e as duas primeiras colunas de C_M^{-1} são dadas por $(\text{Id}_2, 0_{2 \times 2}, \dots, 0_{2 \times 2})^{tr}$. Assim, a primeira coluna de $C_M^{-1}C_{M, \Omega}$ é $(1, 1, 0, \dots, 0)^{tr}$. Portanto, cada elemento da primeira coluna de $C_{\Omega, M}C_M^{-1}C_{M, \Omega}$ é dado pela soma dos dois primeiros elementos de sua respectiva linha em $C_{N, M}$. Em outras palavras, para cada linha n , 1 se $n < p$ ou $n < q$ e 0 se $n \neq p$ e $n \neq q$. Note que n não pode ser menor que p e q simultaneamente, pois a hipótese garante que S não tem mínimo global. Como $n < p$ ou $n < q$ implica $n < p \vee q$ e $n \neq p$ e $n \neq q$ implica $n \neq p \vee q$, temos: $(1, 0, \dots, 0) \cdot C_{N, \Omega} = (1, 0, \dots, 0) \cdot C_{N, M}C_M^{-1}C_{M, \Omega}$.

Como (3.11), (3.12) e (3.13) são os casos particulares de (3.6), (3.5) e (3.13) (respectivamente) quando a Equação 3.8 é verdadeira, resta-nos apenas provar essa veracidade, ou seja, $T = (1, 0, \dots, 0)$.

Passo 2. Lembrando que $\Delta_2 = (C_\Omega - C_{\Omega, M}C_M^{-1}C_{M, \Omega})^{-1}$, nós procedemos por indução sobre a quantidade de elementos em M .

Se $|M| = 2$, então

$$C_M^{-1} = \text{Id}_M, \quad C_{M, \Omega} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_\Omega = [1], \quad C_{\Omega, M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$\Delta_2 = (C_\Omega - C_{\Omega, M} C_M^{-1} C_{M, \Omega})^{-1} = \left([1] - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \text{Id}_M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = [1],$$

e,

$$T = E_M^{tr} C_M^{-1} C_{M, \Omega} - E_\Omega^{tr} = (1, 1) \text{Id}_M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Prosseguindo por indução, considere $\tilde{M} = M \cup \{w\}$ (com w um elemento maximal em \tilde{M}), $\tilde{S} = \tilde{M} \cup a \cup N$, $\Omega_w = \tilde{S}'_a \setminus \tilde{S}$ e $\tilde{\Omega} = \Omega \cup \Omega_w$. Assim, temos

$$C_{\tilde{M}} = \begin{array}{c} M \quad w \\ \begin{matrix} M \\ w \end{matrix} \begin{bmatrix} C_M & W \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad C_{\tilde{M}}^{-1} = \begin{array}{c} M \quad w \\ \begin{matrix} M \\ w \end{matrix} \begin{bmatrix} C_M^{-1} & -C_M^{-1} W \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C_{\tilde{M}, \tilde{\Omega}} = \begin{array}{c} \Omega \quad \Omega_w \\ \begin{matrix} M \\ w \end{matrix} \begin{bmatrix} C_{M, \Omega} & X \\ 0 & E_{\Omega_w}^{tr} \end{bmatrix} \end{array} \quad C_{\tilde{\Omega}, \tilde{M}} = \begin{array}{c} M \quad w \\ \begin{matrix} \Omega \\ \Omega_w \end{matrix} \begin{bmatrix} C_{\Omega, M} & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

onde $W = C_{M, \{w\}}$, $X = C_{M, \Omega_w}$, $Y = C_{\Omega, \{w\}}$.

Pela hipótese de indução,

$$E_M^{tr} C_M^{-1} C_{M, \Omega} \Delta_2^{-1} - E_\Omega^{tr} \Delta_2^{-1} = (1, 0, \dots, 0)$$

que, pela definição de Δ_2 , equivale a

$$(E_M^{tr} + (1, 0, \dots, 0) C_{\Omega, M}) C_M^{-1} C_{M, \Omega} = E_\Omega^{tr} + (1, 0, \dots, 0) C_\Omega.$$

Como o elemento mínimo de Ω é $p \vee q$ e M tem largura dois, todos os elementos de Ω são maiores ou iguais a $p \vee q$ e $(1, 0, \dots, 0) C_\Omega = E_\Omega^{tr}$. Desta forma, a hipótese de indução traduz-se para:

$$(E_M^{tr} + (1, 0, \dots, 0) C_{\Omega, M}) C_M^{-1} C_{M, \Omega} = 2E_\Omega^{tr}.$$

Realizando os cálculos para o poset \tilde{S} , a tese de indução é válida se, e somente se as equações a seguir são verdadeiras:

$$\left(E_M^{tr} + (1, 0, \dots, 0) \begin{bmatrix} C_{\Omega, M} \\ 0 \end{bmatrix} \right) C_M^{-1} C_{M, \Omega} = 2E_\Omega^{tr}, \quad (3.14)$$

$$E_{\Omega_w}^{tr} + (1, 0, \dots, 0) \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} E_{\Omega_w}^{tr} - E_M^{tr} C_M^{-1} W E_{\Omega_w}^{tr} + E_M^{tr} C_M^{-1} X$$

$$- (1, 0, \dots, 0) \begin{bmatrix} C_{\Omega, M} \\ 0 \end{bmatrix} C_M^{-1} W E_{\Omega_w}^{tr} + (1, 0, \dots, 0) \begin{bmatrix} C_{\Omega, M} \\ 0 \end{bmatrix} C_M^{-1} X = 2E_{\Omega_w}^{tr}. \quad (3.15)$$

A Equação 3.14 equivale à hipótese de indução. A Equação 3.15, reorganizada e com X ,

Y e Z substituídos, equivale a:

$$(1, 0, \dots, 0) \begin{bmatrix} C_{\Omega, \{w\}} \\ 0 \end{bmatrix} E_{\Omega_w}^{tr} + (E_M^{tr} + (1, 0, \dots, 0) \begin{bmatrix} C_{\Omega, M} \\ 0 \end{bmatrix}) C_M^{-1} (C_{M, \Omega_w} - C_{M, \{w\}} E_{\Omega_w}^{tr}) = E_{\Omega_w}^{tr}.$$

O produto da Equação 3.10 por C_M^{-1} à direita resulta em

$$\left(E_M^{tr} + (1, 0, \dots, 0) \begin{bmatrix} C_{\Omega, M} \\ 0 \end{bmatrix} \right) C_M^{-1} = (1, 1, 0, \dots, 0). \quad (3.16)$$

Observe que para todo $x \vee w \in \Omega_w$ tem-se que todo p minimal em M é menor que $x \vee w$, caso contrário x, w, p seria um trio de elementos incomparáveis em M e a largura de M seria maior que dois. Assim, as duas primeiras linhas de C_{M, Ω_w} resumem-se a $\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{\Omega_w}^{tr} \\ E_{\Omega_w}^{tr} \end{bmatrix}$. E, portanto,

$$(1, 1, 0, \dots, 0) \cdot C_{M, \Omega_w} = 2E_{\Omega_w}^{tr}. \quad (3.17)$$

Por outro lado, há duas opções para as relações dos minimais p e q com o elemento w :

- 1) Ou $p < w$ e $q < w$ e, portanto $p \vee q < w$;
- 2) Ou w é incomparável com p ou q e, portanto, $p \vee q \neq w$.

No primeiro caso,

$$(1, 0, \dots, 0) \begin{bmatrix} C_{\Omega, \{w\}} \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{e} \quad (1, 1, 0, \dots, 0) C_{M, \{w\}} = 2.$$

No segundo caso, a primeira linha de $C_{\Omega, \{w\}}$ é nula e, portanto,

$$(1, 0, \dots, 0) \begin{bmatrix} C_{\Omega, \{w\}} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad (1, 1, 0, \dots, 0) C_{M, \{w\}} = 1.$$

Assim, em ambos os casos,

$$(1, 0, \dots, 0) \begin{bmatrix} C_{\Omega, \{w\}} \\ 0 \end{bmatrix} - (1, 1, 0, \dots, 0) W = -1. \quad (3.18)$$

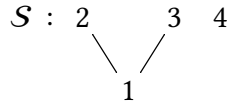
Finalmente, aplicando (3.16),(3.17) e (3.18), temos:

$$\begin{aligned}
(1, 0, \dots, 0) \begin{bmatrix} C_{\Omega, \{w\}} \\ 0 \end{bmatrix} E_{\Omega_w}^{tr} + (E_M^{tr} + (1, 0, \dots, 0) \begin{bmatrix} C_{\Omega, M} \\ 0 \end{bmatrix}) C_M^{-1} (C_{M, \Omega_w} - C_{M, \{w\}} E_{\Omega_w}^{tr}) &= \\
(1, 0, \dots, 0) \begin{bmatrix} C_{\Omega, \{w\}} \\ 0 \end{bmatrix} E_{\Omega_w}^{tr} + (1, 1, 0, \dots, 0) (C_{M, \Omega_w} - C_{M, \{w\}} E_{\Omega_w}^{tr}) &= \\
(1, 0, \dots, 0) \begin{bmatrix} C_{\Omega, \{w\}} \\ 0 \end{bmatrix} E_{\Omega_w}^{tr} + (1, 1, 0, \dots, 0) C_{M, \Omega_w} - (1, 1, 0, \dots, 0) C_{M, \{w\}} E_{\Omega_w}^{tr} &= \\
(1, 0, \dots, 0) \begin{bmatrix} 0 C_{\Omega, \{w\}} \\ 0 \end{bmatrix} E_{\Omega_w}^{tr} + 2E_{\Omega_w}^{tr} - (1, 1, 0, \dots, 0) C_{M, \{w\}} E_{\Omega_w}^{tr} &= \\
((0, \dots, 0, 1) \begin{bmatrix} C_{\Omega, \{w\}} \\ 0 \end{bmatrix} - (1, 1, 0, \dots, 0) C_{M, \{w\}}) E_{\Omega_w}^{tr} + 2E_{\Omega_w}^{tr} &= \\
(-1) E_{\Omega_w}^{tr} + 2E_{\Omega_w}^{tr} &= E_{\Omega_w}^{tr}
\end{aligned}$$

Portanto, a Equação (3.8) é verdadeira e a prova está completa. \square

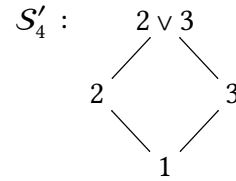
A seguir, faremos algumas verificações sobre a importância das hipóteses do teorema para seu resultado.

Exemplo 3.3.2. *Seja S o poset 4-diferenciável definido pelo diagrama de Hasse a seguir:*



Note que ele não satisfaz a hipótese do Teorema 3.3.1, já que $1 \leq m$ para todo $m \in M = \{1, 2, 3\}$. Verificaremos que, inclusive, a Igualdade 3.1 não é verdadeira para S . Em particular:

$$C_{\tilde{S}}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 1 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 4 & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 2\vee 3 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ 4 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$



$$C_{\tilde{S}'_4}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 2\vee 3 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ 2\vee 3 & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

E, portanto,

$$D \cdot C_{\widehat{S}'_4}^{-1} \cdot D^{tr} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \neq \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = C_{\widehat{S}}^{-1}.$$

Esse Teorema garante uma certa equivalência entre as formas bilineares de Euler do poset original e do diferencial, como observamos no corolário a seguir:

Corolário 3.3.3. *Sejam V e W duas representações D -admissíveis de S , então*

$$\langle \dim V, \dim W \rangle_S = \langle \dim \partial_a V, \dim \partial_a W \rangle_{S'_a}.$$

Demonstração. Como V e W são representações D -admissíveis, então:

$$\begin{aligned} \langle \dim V, \dim W \rangle_S &= \dim V \cdot C_S^{-1} \cdot (\dim W)^{tr} \\ &= \dim V \cdot D C_{S'_a}^{-1} D^{tr} \cdot (\dim W)^{tr} \\ &= \dim \partial_a V \cdot C_{S'_a}^{-1} \cdot (\dim \partial_a W)^{tr} \\ &= \langle \dim \partial_a V, \dim \partial_a W \rangle_{S'_a}. \end{aligned}$$

□

Apesar da hipótese de D -admissibilidade não ser tão natural, em alguns casos, é possível desconsiderar alguns elementos de Ω e trabalhar com uma matriz D alternativa. Na Seção 4.3, resolvemos esse problema diferenciando duas vezes o poset $(1, 2, 5)$ e eliminando, assim, o elemento maximal de $\partial_8(1, 2, 5)$. O mesmo resultado pode ser obtido simplesmente desconsiderando a linha correspondente ao elemento maximal da matriz D . Quando houver mais de um elemento maximal, é possível desconsiderar outros elementos, mas isso pode ter um impacto maior na forma de D . Para estes casos, sugerimos usar os resultados do próximo capítulo, no qual estudamos uma matriz inversa à direita de D e que, de certa forma, complementa os resultados neste capítulo, adicionando mais ferramentas para analisar as mudanças de dimensão durante a diferenciação de uma representação.

Capítulo 4

Estabilidade e Diferenciação

A seguir, promovemos um estudo da relação entre os vetores dimensão de uma representação e da integral descrita na Definição 1.5.7. A partir desse estudo, mostramos que, em geral, a diferencial de uma representação positivamente estável é também estável. O Teorema 4.2.4 também nos permite calcular a forma θ' para a qual V' é estável.

A princípio, iremos analisar a estrutura do poset diferencial (Observação 4.1.1) e definir uma transformação linear $I_{V'}$, com o papel inverso ao de D_V , ou seja, $\dim V' \cdot I_{V'} = \dim \int_a V'$ (Definição 4.1.5). Então, supondo que V é θ -estável, V' é seu diferencial e $\theta' = \theta \cdot I_{V'}^{tr}$,

$$\theta' \cdot \dim V'^{tr} = (\theta \cdot I_{V'}^{tr}) \cdot \dim V'^{tr} = \theta \cdot (\dim V' \cdot I_{V'})^{tr} = \theta \cdot \dim V^{tr} = 0.$$

Porém, não podemos dizer o mesmo do produto de θ' pelas dimensões das subrepresentações próprias W de V , pois $I_{V'}$ não se comporta como o esperado nas subrepresentações próprias W' de V' , ou seja, $\dim W' \cdot I_{V'} \neq \dim \int_a W'$ (Observação 4.1.8). Assim, precisaremos definir outra subrepresentação \tilde{W} de $V = \int_a V'$ que possua a dimensão $\dim W' \cdot I_{V'}$ (Lema 4.2.3) para seguir com o teorema principal deste capítulo (Teorema 4.2.4) como uma consequência direta deste lema, já que, neste caso:

$$\theta' \cdot \dim W'^{tr} = (\theta \cdot I_{V'}^{tr}) \cdot \dim W'^{tr} = \theta \cdot (\dim W' \cdot I_{V'})^{tr} = \theta \cdot \dim \tilde{W}^{tr} < 0.$$

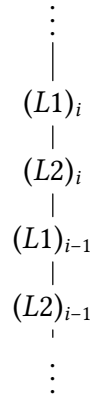
Finalmente, como uma consequência do teorema principal, mostraremos no Teorema 4.3.5 que toda representação schuriana do único poset crítico do tipo manso não primitivo, $(N, 4)$, é positivamente estável. Para isso, integraremos $(N, 4)$ duas vezes, obtendo o poset $(1, 2, 5)$. Mostraremos que toda representação schuriana V' de $(N, 4)$ tem intersecção nula entre seus subespaços minimais ou não tem subrepresentações próprias (Prop. 4.3.4), que sua integral \hat{V} em $(\hat{N}, 4) := \partial_8(1, 2, 5)$ também tem essa propriedade (que chamaremos de quase genérica) e que sua integral dupla V em $(1, 2, 5)$ é schuriana. Assim, utilizaremos o Teorema 4.2.4 para mostrar que toda representação schuriana de $(N, 4)$ é estável para $\theta' = \theta \cdot (I_{\hat{V}} \cdot I_{V'})$. Dado $D^* = (I_{\hat{V}} \cdot I_{V'})^{-1}$, o estudo de D^* -admissibilidade das representações schurianas de $(1, 2, 5)$ feito no Apêndice D.0.3 nos garantirá que θ' é positivo.

4.1 Um estudo da estrutura dos posets diferenciais

As duas observações a seguir fixam algumas notações e conceitos fundamentais para o decorrer deste capítulo. Na Observação 4.1.1, destacamos um padrão presente nas dimensões da representação diferencial e definimos dois casos possíveis para o cálculo da dimensão de cada $X_w^I(V')$ (seguindo a notação na Definição 1.5.7). Na Observação 4.1.2, utilizamo-nos deste padrão e, para cada $V' \in \text{sp}_{S'_a}$, definimos uma transformação $I_{V'}$ tal que $\dim V' I_{V'} = \dim \int_a V'$ (Definição 4.1.5). Finalmente, na observação 4.1.8, analisamos como as subrepresentações próprias de V' se comportam em relação a $I_{V'}$ quanto aos casos definidos na Observação 4.1.1.

Observação 4.1.1. *Seja S um poset a -diferenciável. Por definição, $M_{S,a}$ tem largura um ou dois e, portanto, $M = L_1 \dot{\cup} L_2$, onde $L_1 := \{m \in M \mid \text{para todo } x \in M, \text{ tem-se } m \leq x \text{ ou } x \leq m\}$ e $L_2 := \{m \in M \text{ tal que existe pelo menos um } x \in M, \text{ tal que } x \text{ e } m \text{ são incomparáveis}\}$.*

Sendo assim, o diagrama de Hasse do subposet $M_{S,a} \cup \Omega_{S,a}$ do poset derivado S'_a tem a forma:

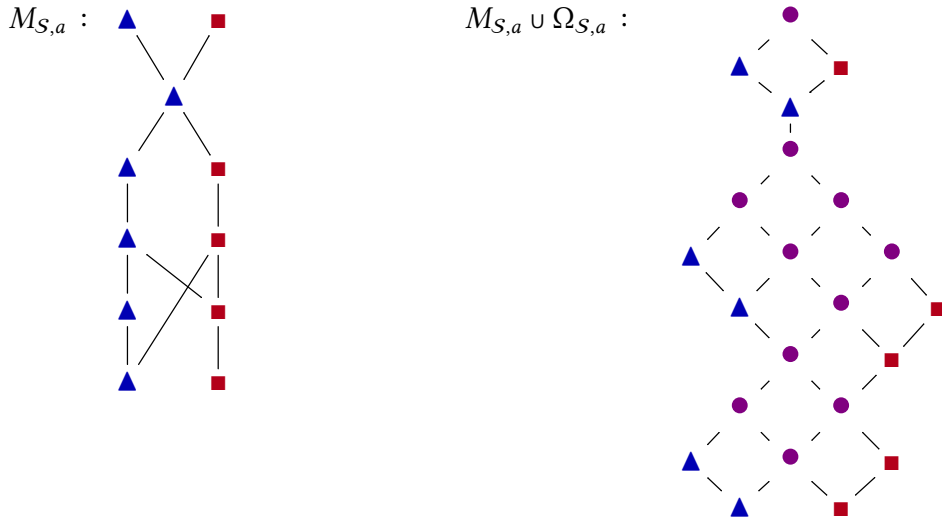


onde cada $(L1)_i$ é uma cadeia formada por elementos do poset em L_1 e cada $(L2)_j$ é um grafo de grade de quadrados (square grid) formado de unidades combinadas entre si e que possuem a forma do diagrama a seguir:



onde $w \in \Omega$, $w_1 \in P \cup \Omega$, $w_2 \in Q \cup \Omega$, $w_3 \in P \cup Q \cup \Omega \cup N$, sendo P e Q duas cadeias tais que $P \subseteq M_I$, $Q \subseteq M_{II}$, $P \cup Q = L_2$ e que, no caso de L_2 ser um subposet primitivo, não têm relações entre si.

As bordas dessa grade de quadrados são determinadas por essas relações entre os elementos de P e Q como no exemplo abaixo:



onde representamos em diferentes cores:

- ▲ Elementos de (um possível) P ,
- elementos de (um possível) Q ,
- elementos de Ω .

Assim, para cada $w \in \Omega$, existem sempre dois elementos maximais em $w^\nabla = \{u < w\}_{u \in S'_a}$ e ambos estão em $M \cup \Omega$. Isso ocorre, pois para $w = r \vee s$, o conjunto w^∇ tem, pelo menos, dois elementos incomparáveis em M , nomeadamente r e s . Além deles, podem existir elementos $t \in S'_a$ tais que $r < t < r \vee s$ ou $s < t < r \vee s$. Mas, nunca os dois simultaneamente, pois, se $r < t$ e $s < t$, obrigatoriamente $r \vee s < t$ e, portanto, $t \notin w^\nabla$.

A partir dessas considerações, note que se \mathbf{V}' é uma representação genérica de S'_a , para cada $r, s \in S'_a$, temos por definição que:

$$\dim(V'_r \cap V'_s) = \max\{\dim V'_r + \dim V'_s - \dim V'_{q_{r,s}}, \dim V'_{p_{r,s}}\},$$

onde $q_{r,s}$ é o menor elemento de S tal que $r \leq q_{r,s}$ e $s \leq q_{r,s}$ e $p_{r,s}$ é o maior elemento de S tal que $p_{r,s} \leq r$ e $p_{r,s} \leq s$ (definimos $\dim V'_{p_{r,s}} := 0$ nos casos em que não existir tal elemento). Outra condição equivalente é que

$$\dim(V'_r + V'_s) = \min\{\dim V'_r + \dim V'_s - \dim V'_{p_{r,s}}, \dim V'_{q_{r,s}}\}$$

para quaisquer espaços V'_r, V'_s , visto que $\dim(V'_r + V'_s) = \dim V'_r + \dim V'_s - \dim(V'_r \cap V'_s)$.

Observação 4.1.2. Se \mathbf{V} é a integral (segundo a Definição 1.5.7) de uma representação $\mathbf{V}' \in S'_a$, então $\dim X_w^I(\mathbf{V}) = \dim X_w^{II}(\mathbf{V}')$ para todo $w \in \Omega$, portanto a dimensão de \mathbf{V} é dada por:

$$\dim V_m = \dim V'_m + \sum_{w \in \Omega^m} \dim X_w^I(\mathbf{V}') \text{ para todo } m \in M \cup \{0\};$$

$$\dim V_a = V'_0;$$

$$\dim V_n = V'_n \text{ para todo } n \in N.$$

Além disso, a Observação 4.1.1 garante que para cada $w \in \Omega$, existem sempre dois elementos maximais w_1 e w_2 em $\{u < w\}_{u \in S'_a}$, ou seja,

$$X_w^I(\mathbf{V}') = \frac{V'_w}{\sum_{u \leq w \in S} V'_u} = \frac{V'_w}{V'_{w_1} + V'_{w_2}}.$$

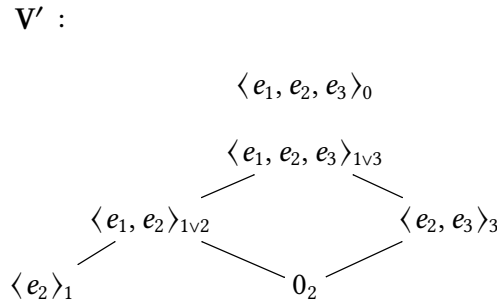
Portanto, se \mathbf{V}' é uma representação genérica de S'_a , há apenas duas opções para o cálculo da dimensão de $X_w^I(\mathbf{V}')$. Seguiremos a notação do Diagrama 4.1 e para o elemento minimal w em Ω , definimos $V'_{w_3} := 0$.

- Caso 1: $\dim(V'_{w_1} \cap V'_{w_2}) = \dim V'_{w_3}$. Assim, $\dim X_w^I(\mathbf{V}') = \dim V'_w - \dim V'_{w_1} - \dim V'_{w_2} + \dim V'_{w_3}$;
- Caso 2: $\dim(V'_{w_1} \cap V'_{w_2}) = \dim V'_{w_1} + \dim V'_{w_2} - \dim V'_w$ e, portanto, $V'_{w_1} + V'_{w_2} = V'_w$. Neste caso, $\dim X_w^I(\mathbf{V}') = 0$.

Definição 4.1.3 (Representação quase genérica). Se cada elemento de Ω de uma representação $\mathbf{V}' \in \mathbf{sp}_{S'_a}$ está em um dos dois casos descritos na Observação 4.1.2, ou seja, se a intersecção $V'_{w_1} \cap V'_{w_2}$ é tão pequena quanto possível para o vetor dimensão α , diremos que \mathbf{V}' é uma representação quase genérica.

O conceito de representação quase genérica é uma generalização do conceito de representação genérica, visto que toda representação genérica é quase genérica, mas nem toda representação quase genérica é genérica.

Exemplo 4.1.4. Seja S o poset $\{1, 2, 3, 4; 2 < 3\}$, S_4 o diferencial de S em relação ao elemento maximal 4 e $\mathbf{V}' \in \mathbf{sp}_{S'_4}$ a representação dada pelo diagrama a seguir:



O conjunto Ω tem dois elementos $1 \vee 2$ e $1 \vee 3$ e, portanto, \mathbf{V}' é quase genérica se verificar duas condições:

- Para $w = 1 \vee 3$, precisamos verificar $V'_{1 \vee 2} + V'_3 = V'_{1 \vee 3}$ ou $V'_{1 \vee 2} \cap V'_3 = V'_2$;
- Para $w = 1 \vee 2$, precisamos verificar $V'_1 + V'_2 = V'_{1 \vee 2}$ ou $V'_1 \cap V'_2 = 0$.

Neste caso, $V'_{1 \vee 2} + V'_3 = V'_{1 \vee 3}$ e $V'_1 \cap V'_2 = 0$, portanto, \mathbf{V}' é quase genérica. Por outro lado, não é genérica, já que

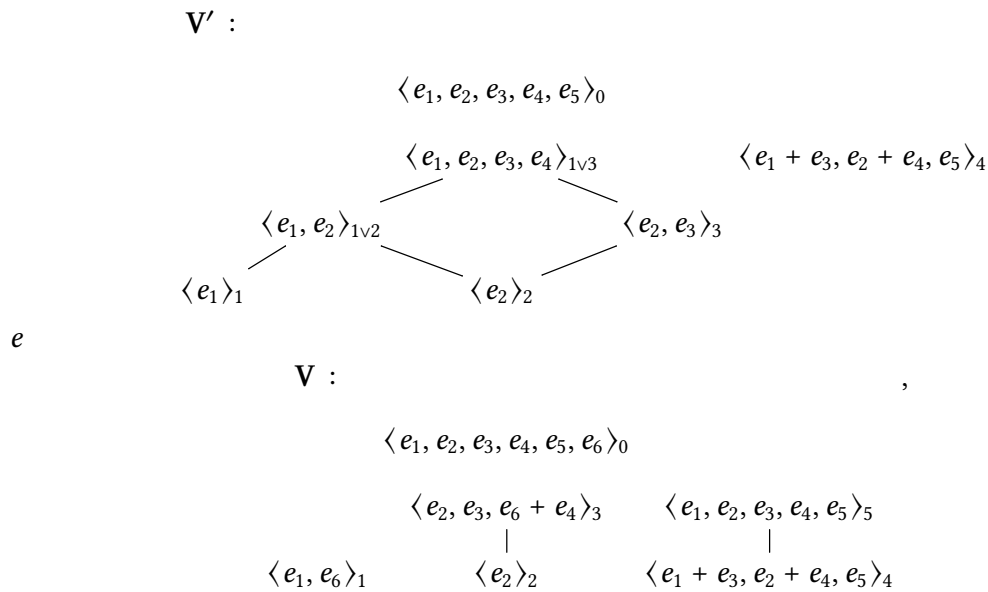
$$1 = \dim(V'_1 \cap V'_3) \neq \max(0, \dim V'_1 + \dim V'_3 - \dim V'_{1 \vee 3}) = 0$$

Definição 4.1.5 (Transformação Linear $I_{V'}$). *Seja $V' \in \mathfrak{sp}_{S'_4}$ uma representação quase genérica. Denotaremos por $I_{V'}$ a transformação linear definida através das regras exploradas na Observação 4.1.2 e que opera no vetor dimensão de V' , levando-o ao vetor dimensão de $V = \int_a V'$. Assim:*

$$\dim V' \cdot I_{V'} = \dim V.$$

Note que também é possível que w esteja em ambos os casos para alguns elementos $w \in \Omega$. Neste caso, as duas possibilidades de cálculo para sua dimensão são válidas e há mais de uma possibilidade para $I_{V'}$.

Exemplo 4.1.6. *Considere o poset $S = \{1, 2, 3, 4, 5; 2 < 3, 4 < 5\}$ e seu diferencial $S'_5 = \{1, 2, 3, 4, 1 \vee 2, 1 \vee 3; 1 < 1 \vee 2, 2 < 1 \vee 2, 1 \vee 2 < 1 \vee 3, 3 < 1 \vee 3\}$. Considere também $V' \in \mathfrak{sp}_{S'_5}$ e a representação integral $V = \int_5 V'$, dadas conforme os diagramas de Hasse a seguir:*



onde representamos o único elemento de $X_{1v3}^I(V')$ por e_6 e $l_{1v3}^{W'}(e_6) = e_4$.

Note que $X_{1v3}^I(V')$ está no Caso 1 e $X_{1v2}^I(V')$ está tanto no Caso 1 quanto no Caso 2. Assim, temos duas opções válidas para $I_{V'}$, a primeira considerando apenas $X_{1v3}^I(V')$ no Caso 1 e a segunda considerando ambos:

$$I_{V'}^1 = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1v2 \\ 1v3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$I_{V'}^2 = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1v2 \\ 1v3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Ambas matrizes operam a conversão de $\dim V'$ para $\dim \int_5 V'$ corretamente. Particularmente,

$$(5; 1, 1, 2, 3; 2, 4) \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1\vee 2 \\ 1\vee 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = (6; 2, 1, 3, 3; 3; 5)$$

e

$$(5; 1, 1, 2, 3; 2, 4) \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1\vee 2 \\ 1\vee 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = (6; 2, 1, 3, 3; 3; 5).$$

Denotando $\dim X_w^I$ por $\dim V' \cdot X_w$ para $w \in \Omega = \{1 \vee 2, 1 \vee 3\}$, temos:

$$X_{1\vee 2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1\vee 2 \\ 1\vee 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1\vee 2 \\ 1\vee 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{ou} \quad X_{1\vee 2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1\vee 2 \\ 1\vee 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1\vee 2 \\ 1\vee 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad e \quad X_{1\vee 3} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1\vee 2 \\ 1\vee 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1\vee 2 \\ 1\vee 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Denotando a coluna de I relacionada a 0 por A e as colunas relacionadas a cada m de M por B_m , a construção de I garante que:

$$\begin{aligned} A &= \delta_5 + X_{1\vee 2} + X_{1\vee 3} \\ B_1 &= \delta_1 + X_{1\vee 2} + X_{1\vee 3} \\ B_2 &= \delta_2 + X_{1\vee 2} \\ B_3 &= \delta_3 + X_{1\vee 2} + X_{1\vee 3} \end{aligned}$$

onde δ_i denota a matriz coluna com 1 na i -ésima posição e 0 nas demais.

Veremos a seguir que, desde que o elemento minimal w em Ω tenha $X_w^I(V')$ no Caso 1,

então $I_{V'}$ é sempre um oposto à direita de D_S . Particularmente para este caso,

$$D \cdot I_{V'}^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1v2 & 1v3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1v2 \\ 1v3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposição 4.1.7. *Seja S um poset, S'_a seu diferencial com relação a um elemento maximal a , seja $V' \in \mathbf{sp}_{S'_a}$ e $V = \int_a V'$. Seja $I_{V'}$ a matriz descrita na Definição 4.1.5 e D_S a matriz de diferenciação de S . Se os conjuntos $\{s \in M \cup N \mid s \leq m \forall m \in M\}$ e $\{(n, m_1, m_2) \in N \times M^2 \mid n \leq m_1, m_2 \text{ com } m_1, m_2 \text{ incomparáveis}\}$ são vazios e $\min(\Omega)$ está no caso 1, então $D_S \cdot I_{V'} = \text{Id}_{\mathcal{S}}$.*

Demonstração. Defina $C_1^0 = \{w \in \Omega \mid X_w^I(V') \text{ está no Caso 1}\}$ e $C_1^m = \{r \vee s \in \Omega \mid X_{r \vee s}^I(V') \text{ está no Caso 1 e } (r \leq m \text{ ou } s \leq m)\}$. Fixada uma base, a matriz da transformação $I_{V'}$ tem a forma:

$$I_{V'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & M & N & a \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ M \\ N \\ \Omega \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ A_M & B_M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id}_N & 0 \\ A_\Omega & B_\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

de modo que A_M e A_Ω controlam as dimensões de V_0 a partir de $\sum_{w \in C_1^0} X_w^I(V')$ e B_M e B_Ω controlam as dimensões de V_m a partir de $\sum_{w \in C_1^m} X_w^I(V')$ para todo $m \in M$.

Usando essa notação,

$$D_S \cdot I_{V'} = \begin{bmatrix} -E_\Omega^{tr} A_\Omega - E_M^{tr} A_M & -E_\Omega^{tr} B_\Omega - E_M^{tr} B_M & 0 & 0 \\ C_M^{-1} C_{M,\Omega} A_\Omega + A_M & C_M^{-1} C_{M,\Omega} B_\Omega + B_M & 0 & 0 \\ C_N^{-1} (C_{N,\Omega} - C_{N,M} C_M^{-1} C_{M,\Omega}) A_\Omega & C_N^{-1} (C_{N,\Omega} - C_{N,M} C_M^{-1} C_{M,\Omega}) B_\Omega & \text{Id}_N & 0 \\ 1 + E_\Omega^{tr} A_\Omega + E_M^{tr} A_M & E_\Omega^{tr} B_\Omega + E_M^{tr} B_M & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a equação $D_S \cdot I_{V'} = \text{Id}_{\mathcal{S}}$ se traduz para:

$$E_\Omega^{tr} A_\Omega + E_M^{tr} A_M = -1 \quad (4.2)$$

$$E_\Omega^{tr} B_\Omega + E_M^{tr} B_M = 0 \quad (4.3)$$

$$C_M A_M + C_{M,\Omega} A_\Omega = 0 \quad (4.4)$$

$$C_{M,\Omega} B_\Omega + C_M B_M = C_M \quad (4.5)$$

$$C_{N,M} C_M^{-1} C_{M,\Omega} A_\Omega = C_{N,\Omega} A_\Omega \quad (4.6)$$

$$C_{N,M} C_M^{-1} C_{M,\Omega} B_\Omega = C_{N,\Omega} B_\Omega \quad (4.7)$$

As submatrizes $A = \begin{bmatrix} A_M \\ A_\Omega \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} B_M \\ B_\Omega \end{bmatrix}$ são definidas de forma que

$$(\dim V'_s)_{s \in M \cup \Omega} \cdot A = \sum_{w \in C_1^0} \dim X_w^I(V')$$

e cada coluna B_m de B satisfaz

$$(\dim V'_s)_{s \in M \cup \Omega} \cdot B_m = \dim V'_m + \sum_{w \in C_1^m} \dim X_w^I(V').$$

Para cada $w \in \Omega$ e $m \in M$, denote por X_w a matriz que satisfaz $(\dim V'_s)_{s \in M \cup \Omega} \cdot X_w = \dim X_w^I(V')$ e por δ_m a matriz coluna $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^{tr}$ que possui 1 na posição m e 0 nas demais. Seguindo essa notação, temos:

- $A = \sum_{w \in C_1^0} X_w$,
- Cada coluna m de B é dada por $\delta_m + \sum_{w \in C_1^m} X_w$.

Note que quando $w = p \vee q$ é o menor elemento de Ω (e a hipótese garante que ele está em C_1^0), então $X_w = \delta_{pq} - \delta_p - \delta_q$ e, portanto, $(E_M^{tr}, E_\Omega^{tr}) \cdot X_w = -1$. Por outro lado, se w é qualquer outro elemento de C_1^0 , usando a notação do Diagrama 4.1, podemos reduzir X_w para $\delta_w - \delta_{w_1} - \delta_{w_2} + \delta_{w_3}$ e $(E_M^{tr}, E_\Omega^{tr}) \cdot X_w = 0$.

Como w minimal está em C_1^s para todo $s \in M \cup \{0\}$, então $(E_M^{tr}, E_\Omega^{tr}) \cdot A = -1$ e $(E_M^{tr}, E_\Omega^{tr}) \cdot B = 0$, o que prova as equações 4.2 e 4.3.

A Equação 4.4 equivale a:

$$\begin{aligned} [C_M, C_{M,\Omega}] \cdot \begin{bmatrix} A_M \\ A_\Omega \end{bmatrix} &= 0 \\ C_{M,M \cup \Omega} \cdot \left(\sum_{w \in C_1^0} X_w \right) &= 0 \\ \sum_{w \in C_1^0} (C_{M,M \cup \Omega} \cdot X_w) &= 0 \end{aligned}$$

onde para cada $m \in M$, $w \in \Omega$ (com a notação do Diagrama 4.1), se $m \not\leq w$, então $(C_{M,M \cup \Omega} \cdot X_w)_m = 0$; se $m \leq w_1 \leq w$ e $m \not\leq w_2$, ou vice-versa, então $(C_{M,M \cup \Omega} \cdot X_w)_m = 1 - 1 = 0$; se $m \leq w_1$ e $m \leq w_2$, obrigatoriamente $m \leq d$ e, portanto, $(C_{M,M \cup \Omega} \cdot X_w)_m = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$. Assim, $C_{M,M \cup \Omega} \cdot X_w = 0$ para todo $w \in \Omega$ e a Equação 4.4 está provada.

Para a Equação 4.5, um argumento semelhante pode ser usado, visto que ele equivale a:

$$\begin{aligned} C_M &= C_{M, M \cup \Omega} \cdot B \\ C_M &= C_{M, M \cup \Omega} \cdot \left(\begin{bmatrix} \text{Id}_M \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\sum_{w \in C_1^m} X_w \right)_{m \in M} \right) \\ C_M &= C_M + \left(\sum_{w \in C_1^m} C_{M, M \cup \Omega} \cdot X_w \right)_{m \in M}. \end{aligned}$$

Como $C_{M, M \cup \Omega} \cdot X_w = 0$ para todo $w \in \Omega$, a Equação 4.5 também está provada.

A partir das equações 4.4 e 4.5, tem-se $C_{M, \Omega} A_\Omega = -C_M A_M$ e $C_{M, \Omega} B_\Omega = C_M (\text{Id}_M - B_M)$. Logo, as equações 4.6 e 4.7 se resumem a:

- $C_{N, \Omega} A_\Omega + C_{N, M} A_M = 0$
- $C_{N, \Omega} B_\Omega + C_{N, M} (B_M - \text{Id}_M) = 0$

Usando o mesmo argumento usado na Equação 4.4 (e que pode ser usado devido à hipótese de não existência de um $n \in N$ menor que dois elementos incomparáveis de M), obtemos $C_{N, M \cup \Omega} \cdot X_w = 0$ para todo $w \in \Omega$. Logo, as equações 4.6 e 4.7 também são verdadeiras. \square

Outra observação que se mostrará importante é acerca do cálculo da dimensão da integral das subrepresentações próprias \mathbf{W}' de \mathbf{V}' . Em geral, $I_{\mathbf{V}'} \neq I_{\mathbf{W}'}$, mas podemos estabelecer uma relação entre as duas transformações que nos será útil adiante.

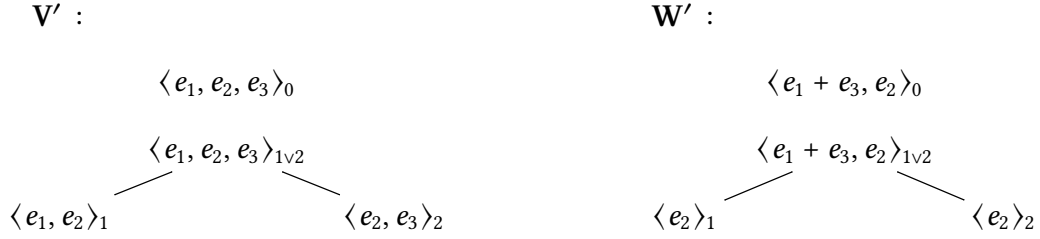
Observação 4.1.8. Para cada $w \in \Omega$, se $X_w^I(\mathbf{V}')$ está no Caso 1 (da Observação 4.1.2), então necessariamente $X_w^I(\mathbf{W}')$ também está no Caso 1, pois, sendo \mathbf{W}' subrepresentação própria e $V'_{w_1} \cap V'_{w_2} = V'_{w_3}$, tem-se

$$W'_{w_1} \cap W'_{w_2} = (V'_{w_1} \cap V'_{w_2}) \cap (W'_0) = V'_{w_3} \cap W'_0 = W'_{w_3}.$$

Portanto, se $\dim X_w^I(\mathbf{V}') \neq 0$, então $\dim X_w^I(\mathbf{W}')$ é calculada segundo $I_{\mathbf{V}'}$ e, portanto, o mesmo ocorre para $X_w^{II}(\mathbf{V}')$.

Porém, se $X_w^I(\mathbf{V}')$ está no Caso 2, nada garante que $X_w^I(\mathbf{W}')$ também está no Caso 2. De fato, $X_w^I(\mathbf{W}')$ pode estar no Caso 1, no Caso 2 ou em nenhum deles (\mathbf{W}' não precisa ser quase genérica). Assim sendo, $\dim X_w^I(\mathbf{W}')$ não pode ser calculada segundo $I_{\mathbf{V}'}$ e, possivelmente, segundo nenhuma transformação linear.

Exemplo 4.1.9. Seja $S = \{1, 2, 3\}$ o poset primitivo de largura 3 e S'_3 seu diferencial. Sejam $\mathbf{V}' \in \text{sp}_{S'_3}$ e \mathbf{W}' , subrepresentação própria de \mathbf{V}' , as representações dadas pelos diagramas de Hasse a seguir:



Note que $X_{1\vee 2}^I(\mathbf{V}')$ está no Caso 2, pois $V'_1 + V'_2 = V'_{1\vee 2}$ (assim, $\dim X_{1\vee 2}^I(\mathbf{V}') = \dim X_{1\vee 2}^{II}(\mathbf{V}') = 0$). Por outro lado, $X_{1\vee 2}^I(\mathbf{W}')$ não está no Caso 2, apesar de também não estar no Caso 1 (não é quase genérica).

Defina $Y_{1\vee 2}$ como o cálculo da dimensão de $X_{1\vee 2}^I(\mathbf{W}')$ a partir de $I_{V'}$, ou seja, $0 = Y_{1\vee 2} \neq \dim X_{1\vee 2}^I(\mathbf{W}') = 1$ e, portanto, $\mathbf{dimW}' \cdot I_{V'} \neq \mathbf{dimW}$. Mais precisamente, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \dim \mathbf{W} &= (\dim W'_0 + \dim X_{1\vee 2}^I(\mathbf{W}'); \dim W'_1 + \dim X_{1\vee 2}^I(\mathbf{W}'), \dim W'_2 + \dim X_{1\vee 2}^{II}(\mathbf{W}'), \dim W'_0) \\
 &= (3; 2, 2; 2),
 \end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}
 (\dim \mathbf{W}') \cdot I_{V'} &= (\dim W'_0 + \dim Y_{1\vee 2}; \dim W'_1 + \dim Y_{1\vee 2}, \dim W'_2 + \dim Y_{1\vee 2}, \dim W'_0) \\
 &= (3; 1, 1; 2)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \dim \mathbf{V} &= (\dim V'_8 + \dim X_{1\vee 2}^I(\mathbf{V}'); \dim V'_1 + \dim X_{1\vee 2}^I(\mathbf{V}'), \dim V'_2 + \dim X_{1\vee 2}^{II}(\mathbf{V}'), \dim V'_8) \\
 &= (3; 2, 2; 3).
 \end{aligned}$$

Note que sempre que $X_w^I(\mathbf{V}')$ está no Caso 1, $Y_w = 0$ e $\dim X_w^I(\mathbf{W}') \geq 0$ para qualquer $w \in \Omega$. Logo, $(\mathbf{dimW}' \cdot I_{V'})_s \leq \dim W_s$ para todo $s \in S$.

Por outro lado, as integrais de \mathbf{V}' e \mathbf{W}' são:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{V} = \int_3 \mathbf{V}' : & & \mathbf{W} = \int_3 \mathbf{W}' : \\
 & \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_0 & \langle e_2, e_1 + e_3, e_4 \rangle_0 \\
 & \swarrow \quad \searrow & \swarrow \quad \searrow \\
 \langle e_1, e_2 \rangle_1 & \langle e_2, e_3 \rangle_2 \quad \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_3 & \langle e_2, e_4 \rangle_1 \quad \langle e_2, e_4 + e_1 + e_3 \rangle_2 \quad \langle e_2, e_1 + e_3 \rangle_3
 \end{array}$$

onde $X_{1\vee 2}^I(\mathbf{V}') = \langle e_4 \rangle$ e $\iota_{1\vee 2}^{\mathbf{W}'}(e_4) = e_1 + e_3$.

Porém, é possível definir uma nova representação de S apenas ignorando os espaços $X_w^I(\mathbf{W}')$ que estejam em desconformidade com $X_w^I(\mathbf{V}')$. Embora não tenha relação com \mathbf{W}' , a

representação

$$\begin{array}{c} \widetilde{\mathbf{W}} : \\ \langle e_1 + e_3, e_2 \rangle_0 \\ \langle e_2 \rangle_1 \quad \langle e_2 \rangle_2 \quad \langle e_1 + e_3, e_2 \rangle_3 \end{array}$$

é uma subrepresentação de \mathbf{V} que respeita a igualdade $\dim \widetilde{\mathbf{W}} = \dim \mathbf{W}' \cdot I_{V'}$.

Mais adiante, o Lema 4.2.3 mostrará que uma representação obtida desta forma sempre é uma subrepresentação de $\mathbf{V} = \int_a \mathbf{V}'$.

4.2 A estabilidade de diferenciais de representações positivamente estáveis

Na seção passada, vimos que para cada $\mathbf{V}' \in \text{sp}_{S'_a}$, a matriz $I_{V'}$ representa a mudança do vetor dimensão de \mathbf{V}' pela integração, mas não representa a mudança do vetor dimensão de suas subrepresentações próprias \mathbf{W}' . Em particular, vimos que existem elementos $w \in \Omega$ tais que $X_w^I(\mathbf{V}')$ está no Caso 1, enquanto $X_w^I(\mathbf{W}')$ não está. Para lidar com esses elementos, definiremos uma representação conveniente cuja dimensão é dada por $\dim \mathbf{W}' \cdot I_{V'}$ como fizemos no Exemplo 4.1.9 e o resultado principal seguirá das propriedades que evidenciaremos no Lema 4.2.3.

Definição 4.2.1. *Seja \mathbf{V}' uma representação de S'_a , \mathbf{W}' uma subrepresentação própria de \mathbf{V}' e C^1 o conjunto $\{w \in \Omega \mid X_w^I(\mathbf{V}')$ está no Caso 1 $\}$.*

Defina a subrepresentação própria $\widetilde{\mathbf{W}}$ de $\int_a \mathbf{W}'$ com espaço ambiente $W'_0 \oplus \bigoplus_{w \in C^1} X_w^I(\mathbf{W}')$, ou seja, $\widetilde{\mathbf{W}} = (W'_0; V_s \cap W'_0)_{s \in S}$. Ou, ainda,

$$\widetilde{\mathbf{W}} = \left(W'_0 \oplus \bigoplus_{w \in C^1} X_w^I(\mathbf{W}'); (W'_r \oplus \sum_{w \in \Omega^r \cap C^1} (X_w^I(\mathbf{V}'))); (W'_s \oplus \sum_{w \in \Omega^s \cap C^1} (X_w^I(\mathbf{V}'))); (W'_n)_{n \in N} \right).$$

Denominaremos a representação $\widetilde{\mathbf{W}}$ de esqueleto da integral de \mathbf{W}' em relação a \mathbf{V}' ou, quando \mathbf{W}' e \mathbf{V}' forem claras, apenas de representação esqueleto.

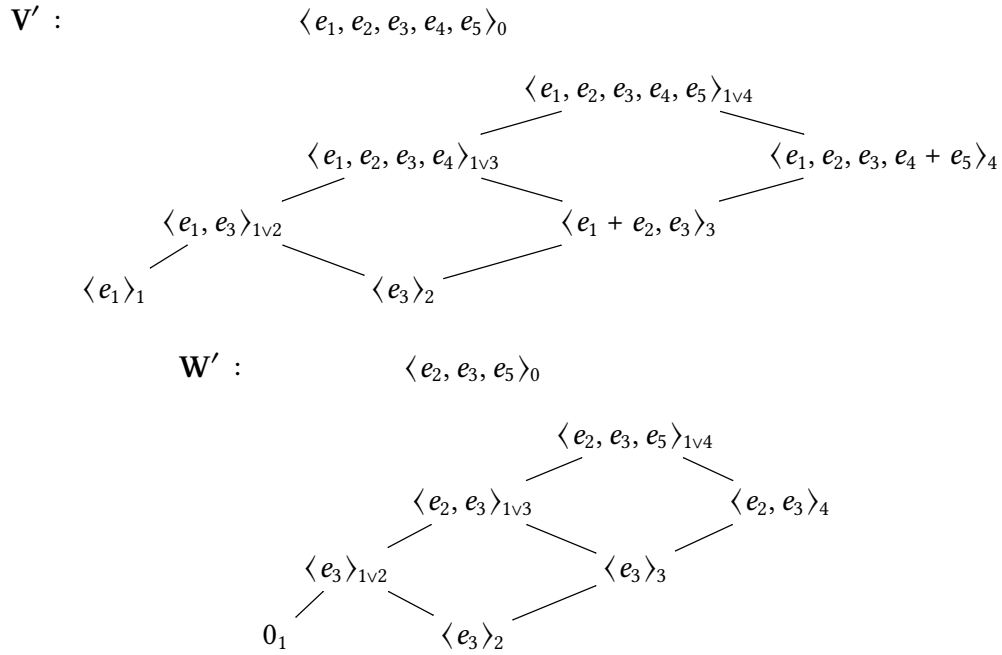
Note que a dimensão de $\widetilde{\mathbf{W}}$ é dada por

$$\begin{aligned} \dim \widetilde{W}_m &= \dim \widetilde{W}'_m + \sum_{w \in \Omega^m \cap C^1} \dim X_w^I(\mathbf{W}') \text{ para todo } m \in M \cup \{0\}; \\ \dim \widetilde{W}_n &= \widetilde{W}'_n \text{ para todo } n \in N \cup \{a\}. \end{aligned}$$

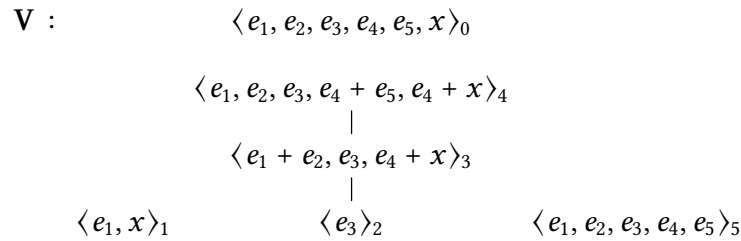
Como para todo $w \in C^1$, tem-se que $X_w^I(\mathbf{W}')$ também está no Caso 1, então $\dim X_w^I(\mathbf{W}') = \dim W'_w - \dim W'_{w_1} - \dim W'_{w_2} + \dim W'_{w_3}$ (segundo a notação do Diagrama 4.1), ou seja, $\dim \widetilde{\mathbf{W}} = \dim \mathbf{W}' \cdot I_{V'}^{\text{tr}}$.

Exemplo 4.2.2. *Sejam S o poset primitivo dado por $\{1, 2, 3, 4, 5; 2 < 3 < 4\}$, S'_5 seu diferen-*

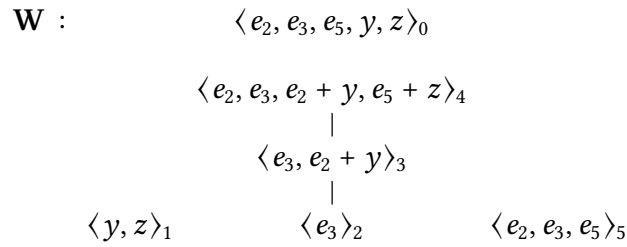
cial e $V' \in \mathfrak{sp}_{S'_5}$ e $W' \subset V'$ as representações dadas pelos diagramas de Hasse a seguir:



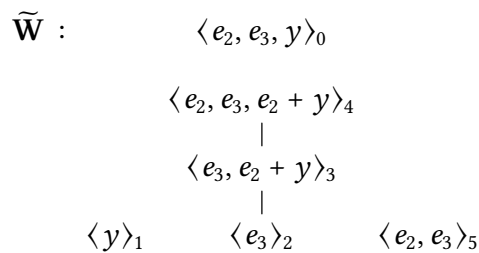
Considere x, y e z os geradores de $X_{1v3}^I(V')$, $X_{1v3}^I(W')$ e $X_{1v4}^I(W')$ respectivamente. Com essa notação, as integrais de V' e W' são dadas por:



e



E sua representação esqueleto é dada por:



A representação esqueleto será fundamental para a demonstração do principal teorema desta seção. Para isso, verificaremos no decorrer do capítulo que \widetilde{W} é subrepresentação de $V = \int_a V'$.

Neste exemplo, isso pode ser observado definindo o homomorfismo injetor de representações definido por:

$$\begin{aligned}\Phi : \widetilde{W}_0 &\rightarrow V_0 \\ e_i &\mapsto e_i \text{ para } i \in \{2, 3\} \\ y &\mapsto e_1.\end{aligned}$$

Este morfismo é construído de forma que $\Phi|_{W'_0} = \text{Id}_{W'_0}$ e usando os morfismos a seguir:

$$\begin{aligned}X_{1v3}^I(W') \hookrightarrow W'_{1v3} &\hookrightarrow V'_{1v3} \approx \frac{V'_{1v3}}{V'_{1v2} + V'_3} \oplus \frac{V'_{1v2}}{V'_1 + V'_2} \oplus V'_1 \oplus V'_3 \\ \langle y \rangle \hookrightarrow \langle e_2, e_3 \rangle &\hookrightarrow \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle \approx \langle x \rangle \oplus 0 \oplus \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 + e_2, e_3 \rangle \\ y \mapsto e_2 &\mapsto e_2 \mapsto (0, 0, -e_1, e_1 + e_2) \\ &e_1 \mapsto (0, 0, e_1, 0) \\ &e_3 \mapsto (0, 0, 0, e_3) \\ &e_4 \mapsto (x, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

de forma que $\Phi(i^{W'}(e_2)) = \Phi(y) = -\alpha^{-1}(\alpha_3(y)) + \alpha_1(y) + \alpha_2(y) = e_1 + 0 + 0 \in V_1$. Construída desta forma, garantimos que $\Phi(e_2 + i^{W'}(e_2)) = \Phi(e_2) + \Phi(i^{W'}(e_2)) = e_2 + e_1 \in V_2$. E, portanto, Φ é morfismo de representações.

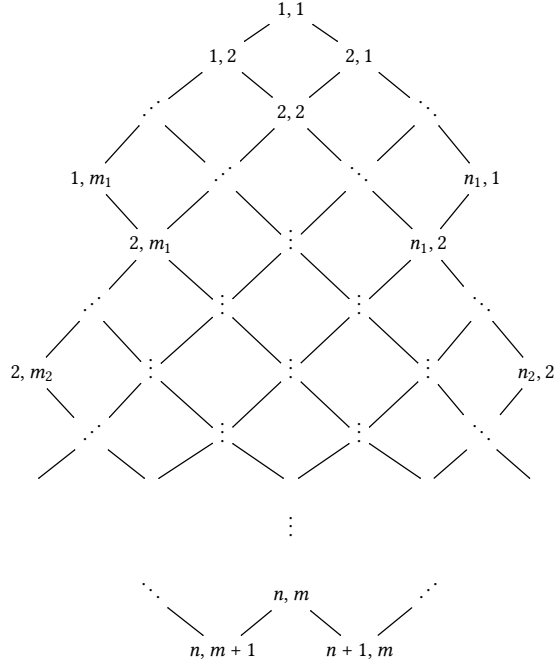
No exemplo anterior, ficou claro que nossa construção de Φ resulta em um morfismo injetor. Mostraremos no lema a seguir que isso sempre ocorre. No Apêndice C, são fornecidos outros exemplos que não apenas ilustram os morfismos mencionados na demonstração do seguinte lema, mas também servem para enriquecer a compreensão de cada etapa do raciocínio.

Lema 4.2.3. *Seja V' uma representação quase genérica de S'_a , W' uma subrepresentação própria de V' e \widetilde{W} sua representação esqueleto. Então, \widetilde{W} é subrepresentação de $V = \int_a V'$.*

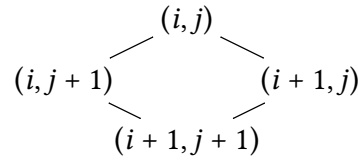
Demonstração. Construiremos um homomorfismo $\Phi : \widetilde{W}_0 \rightarrow V_0$ e provaremos que é um morfismo de representações injetor.

Na Observação 4.1.1, destacamos a estrutura do diagrama de Hasse de S'_a , uma grade de quadrados com as bordas inferiores compostas de elementos em M_I à esquerda e M_{II} à direita. Observemos esta estrutura mais uma vez supondo que o diagrama de Hasse de S

segue a notação abaixo:



Ou seja, cada célula do diagrama tem a notação



na qual $(i, j + 1) \in M_I \cup \Omega$; $(i + 1, j) \in M_{II} \cup \Omega$; $(i + 1, j + 1) \in M \cup \Omega$ e $(i, j) \in \Omega$.

Note que, para cada uma destas células, existem morfismos injetores:

- $\beta_{i,j} : V'_{i,j} \approx \frac{V'_{i,j}}{V'_{i+1,j} + V'_{i,j+1}} \oplus \frac{V'_{i,j+1}}{V'_{i,j+1} \cap V'_{i+1,j}} \oplus V'_{i+1,j}$
- $\gamma_{i,j+1} : \frac{V'_{i,j+1}}{V'_{i,j+1} \cap V'_{i+1,j}} \hookrightarrow \frac{V'_{i,j+1}}{V'_{i+1,j+1}}$ (mapa bijetor apenas nos casos em que $(i, j) \in C^1$)
- $\delta_{i,j+1} : \frac{V'_{i,j+1}}{V'_{i+1,j+1}} \approx \frac{V'_{i,j+1}}{V'_{i,j+2} + V'_{i+1,j+1}} \oplus \frac{V'_{i,j+2}}{V'_{i,j+2} \cap V'_{i+1,j+1}}$

Através da composição conveniente desses morfismos, podemos desmembrar qualquer espaço vetorial $V'_{r \vee s}$ na soma direta de espaços $X_w^I(V')$ com $w \leq r \vee s$; espaços X_i , onde $X_i := \frac{V'_{i, m_i}}{V'_{u_i}}$, $u_i := \max\{u \in S'_a, u < i, m_i\}$ e $i, m_i \in M_I$; e V'_s .

Por exemplo, se $i, j \in \Omega$:

$$V'_{i,j} \xrightarrow{\beta_{i,j}} \frac{V'_{i,j}}{V'_{i+1,j} + V'_{i,j+1}} \oplus \frac{V'_{i,j+1}}{V'_{i,j+1} \cap V'_{i+1,j}} \oplus V'_{i+1,j}$$

$$X_{i,j}^I(\mathbf{V}') \oplus \frac{V'_{i,j+1}}{V'_{i+1,j+1}} \oplus V'_{i+1,j}.$$

$\downarrow \gamma_{i,j+1}$

Se $i+1, j$ não pertencer a M_{II} , ele pertence a Ω , então repetimos o procedimento acima em $V'_{i+1,j}$. E, se $i, j+1$ não pertencer a M_I , aplicamos $\delta_{i,j+1}$ na parcela correspondente:

$$X_{i,j}^I(\mathbf{V}') \oplus \frac{V'_{i,j+1}}{V'_{i+1,j+1}} \oplus V'_{i+1,j}$$

$$X_{i,j}^I(\mathbf{V}') \oplus \frac{V'_{i,j+1}}{V'_{i,j+2} + V'_{i+1,j+1}} \oplus \frac{V'_{i,j+2}}{V'_{i,j+2} \cap V'_{i+1,j+1}} \oplus V'_{i+1,j}.$$

$\downarrow \delta_{i,j+1}$

Repetimos o procedimento até que consigamos o morfismo injetor:

$$V'_{i,j} \hookrightarrow \left(\bigoplus_{k=j}^{m_i} X_{i,k}^I \oplus X_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=j}^{m_{i+1}} X_{i+1,k}^I \oplus X_{i+1} \right) \oplus \cdots \oplus \left(\bigoplus_{k=j}^{m_n} X_{n,k}^I \oplus X_n \right) \oplus V'_{n_j,j}$$

onde $X_i := \frac{V'_{i,m_i}}{V'_{u_i}}$, $u_i := \max\{u \in S'_a, u < i, m_i\}$ e $i, m_i \in M_I$ para todo $i \in \{1, n\}$ e $V'_{n_j,j} \in M_{II}$.

Ou, ainda, convertendo para a notação já conhecida de representação diferencial, que evidencia os elementos de Ω , temos que para cada $r \vee s \in \Omega$:

$$V'_{r \vee s} \hookrightarrow \bigoplus_{w \leq r \vee s \in \Omega} X_w^I \oplus \bigoplus_{i=r}^m \frac{V'_i}{V'_{u_i}} \oplus V'_s$$

onde definimos $V'_{u_i} := 0$ se i é um elemento minimal de M_I .

Compomos esse morfismo com a seção $\iota_{r \vee s}^{\mathbf{W}'} : X_{r \vee s}^I(\mathbf{W}') \hookrightarrow W'_{r \vee s}$ escolhida na integral de \mathbf{W}' e a inclusão $W'_{r \vee s} \hookrightarrow V'_{r \vee s}$ e criamos o morfismo injetor:

$$\alpha^{r \vee s} : X_{r \vee s}^I(\mathbf{W}') \hookrightarrow \bigoplus_{w \leq r \vee s \in \Omega} X_w^I \oplus \bigoplus_{i=r}^m \frac{V'_i}{V'_{u_i}} \oplus V'_s.$$

Os morfismos $\beta_{i,j}$, $\gamma_{i,j}$ e $\delta_{i,j}$ precisam ser definidos de modo que sejam projeções e comutem com as seções $\iota_{i,j}^{\mathbf{V}'}$ escolhidas para a integral de \mathbf{V}' . Em outras palavras, de forma

que o diagrama a seguir seja comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\pi_{rvs}^{\mathbf{W}'}} & \\
 X_{rvs}^I(\mathbf{W}') & \xrightarrow{\alpha} & X_w^I \oplus \bigoplus_{i=1}^r \frac{V'_i}{V'_{u_i}} \oplus V'_s, \\
 & \xrightarrow{l_{rvs}^{\mathbf{W}'}} & \\
 & \xrightarrow{\sum_{w \leq rvs \in \Omega} l_w^{\mathbf{V}'} + \sum_{i=1}^r l_i + \text{Id}_{V'_s}} &
 \end{array}$$

ou ainda, que

$$\left(\sum_{w \leq rvs \in \Omega} l_w^{\mathbf{V}'} + \sum_{i=1}^r l_i + \text{Id}_{V'_s} \right) \circ \alpha = l_{rvs}^{\mathbf{W}'}.$$

Essa escolha sempre é possível devido à própria natureza dos morfismos β , γ e δ , sempre formados como a soma de projeções.

Definiremos também a projeção de $\alpha^{(rvs)}$ por cada um dos espaços vetoriais que são somandos de seu contradomínio, de forma que:

- $\alpha^{(rvs)} = \sum_{w \in \Omega} \alpha_w^{(rvs)} + \sum_{i \in M_I} \alpha_{i,I}^{(rvs)} + \alpha_{s,II}^{(rvs)}$;
- $\alpha_w^{(rvs)} : V'_{rvs} \rightarrow X_w^I$ para todo $w < r \vee s \in \Omega$;
- $\alpha_w^{(rvs)} : V'_{rvs} \rightarrow 0$ para todo $w \neq r \vee s \in \Omega$;
- $\alpha_{i,I}^{(rvs)} : V'_{rvs} \rightarrow \frac{V'_i}{V'_{u_i}}$ para todo $i < r \in M_I$;
- $\alpha_{i,I}^{(rvs)} : V'_{rvs} \rightarrow 0$ para todo $i \neq r \in M_I$;
- $\alpha_{s,II}^{(rvs)} : V'_{rvs} \rightarrow V'_s$.

Assim,

$$\sum_{w \leq rvs \in \Omega} (l_w^{\mathbf{V}'} \circ \alpha_w^{(rvs)}) + \sum_{i=1}^r (l_i^{\mathbf{V}'} \circ \alpha_{i,I}^{(rvs)}) + \alpha_{s,II}^{(rvs)} = l_{rvs}^{\mathbf{W}'}.$$

Para cada $i \vee j \in \Omega$, usaremos $\alpha^{(ivj)}$ e as seções definidas para a integral de \mathbf{V}' para definir o morfismo $\Phi : \widetilde{W}_0 \rightarrow V_0$.

Lembre que

$$\widetilde{W}_0 = W'_0 \oplus \bigoplus_{w \in C^1} X_w^I(\mathbf{W}') \quad e \quad V_0 = V'_0 \oplus \bigoplus_{w \in C^1} X_w^I(\mathbf{V}').$$

Defina $\Phi|_{W'_0} = \text{Id}_{W'_0}$ e, para cada $w = i \vee j \in C^1$, defina:

$$\begin{aligned}
 \Phi|_{X_{ij}^I(\mathbf{W}')} : X_{ij}^I(\mathbf{W}') &\rightarrow V'_i \oplus \bigoplus_{w \leq ivj \in \Omega} X_w^I(\mathbf{V}') \subseteq V_i \\
 x &\mapsto \left(- \sum_{r < i \in M_I} l_{r,I}^{\mathbf{V}'} \circ \alpha_{r,I}^{(ivj)}(x); (\alpha_w^{(ivj)}(x))_{w \leq ivj \in \Omega} \right)
 \end{aligned}$$

Pela própria definição, $\Phi(X_{ivj}^I(\mathbf{W}')) \subseteq V_i$. Para mostrar que Φ realmente é um morfismo de representações, veremos a seguir que $\Phi(X_{ivj}^{II}(\mathbf{W}')) \subseteq V_j$ ou, mais especificamente, que para $x \in X_{ivj}^I(\mathbf{W}')$, temos

$$\Phi(x + i_{ivj}^{\mathbf{W}'}(x)) \in V_j' \oplus \bigoplus_{w \leq ivj \in \Omega} X_w^{II}(\mathbf{V}') \subseteq V_j.$$

$$\begin{aligned} \Phi(x + i_{ivj}^{\mathbf{W}'}(x)) &= \Phi(x) + i_{ivj}^{\mathbf{W}'}(x) \\ &= \left(- \sum_{r < i \in M_I} l_r^{\mathbf{V}'} \circ \alpha_{r,I}^{(ivj)}(x); (\alpha_w^{(ivj)}(x))_{w \leq ivj \in \Omega} \right) + i_{ivj}^{\mathbf{W}'}(x) \\ &= \left(- \sum_{r < i \in M_I} l_r^{\mathbf{V}'} \circ \alpha_{r,I}^{(ivj)}(x); (\alpha_w^{(ivj)}(x))_{w \leq ivj \in \Omega} \right) + \\ &+ \left(\sum_{r=1}^i (l_r^{\mathbf{V}'} \circ \alpha_{r,I}^{(ivj)}(x)) + \alpha_{s,II}^{(ivj)}(x); \sum_{w \leq ivj \in \Omega} (l_w^{\mathbf{V}'} \circ \alpha_w^{(ivj)}(x)) \right) \\ &= \left(\sum_{w \leq ivj \in \Omega} (l_w^{\mathbf{V}'} \circ \alpha_w^{(ivj)}(x)); (\alpha_w^{(ivj)}(x))_{w \leq ivj \in \Omega} \right) + \left(\alpha_{s,II}^{(ivj)}(x); 0 \right) \\ &\in \bigoplus_{w \leq ivj \in \Omega} X_w^{II}(\mathbf{V}') \oplus V_j' \subseteq V_j \end{aligned}$$

Portanto, Φ é morfismo de representações de \mathcal{S} . Resta-nos, provar que Φ é injetora.

Seja $(a, (x_w)_{w \in C^1}) \in W_0' \oplus \bigoplus_{w \in C^1} X_w^I(\mathbf{W}')$ e suponha que $\Phi((a, (x_w)_{w \in C^1})) = 0$. Então:

$$\begin{aligned} \Phi((a, (x_w)_{w \in C^1})) &= (a; 0) + \left(- \sum_{r < i \in M_I} l_r^{\mathbf{V}'} \circ \alpha_{r,I}^{(ivj)}(x_w); (\alpha_w^{(ivj)}(x_w))_{w \leq ivj \in \Omega} \right) \\ &= \left(a - \sum_{r < i \in M_I} l_r^{\mathbf{V}'} \circ \alpha_{r,I}^{(ivj)}(x_w); (\alpha_w^{(ivj)}(x_w))_{w \leq ivj \in \Omega} \right) = (0, 0) \in V_0' \oplus \bigoplus_{ivj \in C^1} X_{ivj}^I \end{aligned}$$

Caso o conjunto de elementos de Ω no Caso 1 para \mathbf{V}' seja vazio, Φ é simplesmente a inclusão de W_0' em V_0' , portanto, injetora. Suponha, portanto, que o conjunto $\tilde{\Omega} := \{w \in C^1 \mid x_w \neq 0\}$ não seja vazio.

Note que o conjunto de elementos maximais de $\tilde{\Omega}$ possivelmente pode ser não unitário, mas existe apenas um elemento $r \in M_I$ maximal tal que $r \vee s$ é maximal em $\tilde{\Omega}$. Fixe esses elementos r e $r \vee s$.

Como $\Phi((a; (x_w)_{w \in C^1})) = 0$ e não existe $x_{r \vee j} \neq 0$ tal que $s < j$, então, observando apenas as coordenadas de Φ relativas a W_0' , temos:

$$W_0' \ni a = \sum_{r < i \in M_I} l_r^{\mathbf{V}'} \circ \alpha_{r,I}^{(ivj)}((x_w)_{w \in C^1}) \in V_r'$$

Portanto, $a \in W'_r$.

Por outro lado, como $r \vee s \in \tilde{\Omega}$, a coordenada relativa ao espaço $X_{r \vee s}^I(x_{r \vee s})$ também é 0. Essa coordenada é dada por $\alpha_{r \vee s}^{(r \vee s)}(x_{r \vee s}) = 0$. Assim,

$$l_{r \vee j}^{V'} \circ \alpha_{r \vee j}^{(r \vee j)}(x_{r \vee j}) \in V'_{r-1 \vee s},$$

onde $r-1 = \max\{i < r, i \in M_I\}$.

Além disso,

$$\sum_{j \leq s \in M_{II}} l_{r, I}^{W'} \circ \alpha_{r, I}^{(r \vee j)}(x_{r \vee j}) \in W'_r.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{j \leq s} l_{r \vee j}^{W'}(x_{r \vee j}) &= \sum_{j \leq s} \left(\sum_{w \leq r \vee s \in \Omega} (l_w^{V'}) + \sum_{i=1}^r (l_i^{V'}) + \text{Id}_s \right) \circ \alpha(x_{r \vee j}) \\ &= \sum_{j \leq s} \left(l_{r \vee j}^{V'} \circ \alpha_{r \vee j}^{(r \vee j)}(x_{r \vee j}) \right) + \left(\sum_{j \leq s \in M_{II}} l_{r, I}^{W'} \circ \alpha_{r, I}^{(r \vee j)}(x_{r \vee j}) \right) + \sum_{j \leq s} \alpha_j^{(j \vee s)}(x_{j \vee s}) \\ &\in V'_{r-1 \vee s} + W'_r + V'_s. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{j \leq s} l_{r \vee j}^{W'}(x_{r \vee j}) = l_{r \vee s}^{W'}(x_{r \vee s}) + \sum_{j < s} l_{r \vee j}^{W'}(x_{r \vee j}) \in W'_r + V'_{r-1 \vee s}$$

e, como $\sum_{j < s} l_{r \vee j}^{W'}(x_{r \vee j}) \in W'_{r-1 \vee s}$, então

$$W'_{r \vee s} \ni l_{r \vee s}^{W'}(x_{r \vee s}) = w_r + v_{i \vee s} \in W'_r + V'_{i \vee s}.$$

Logo, $v_{i \vee s} \in W'_{i \vee s}$. Assim, $l_{r \vee s}^{W'}(x_{r \vee s}) \in (W'_r + W'_{i \vee s}) \cap \text{Im}(l_{r \vee s}^{W'}) = 0$ e, como $l_{r \vee s}^{W'}$ é injetora (como qualquer seção), então $x_{r \vee s} = 0$.

Assim, $r \vee s \notin \tilde{\Omega}$ e $\tilde{\Omega}$ não tem elemento maximal, ou seja, é vazio. E, portanto, $x_w = 0$ para todo $w \in C^1$. E, como observamos anteriormente, como $\Phi(a) = 0$ e $\Phi(a) = a$ por definição, então $a = 0$, o que mostra que Φ é um morfismo injetor de representações entre \tilde{W} e V . \square

Com isso, já possuímos todas as ferramentas necessárias para construir o principal resultado desta seção.

Teorema 4.2.4. *Seja S um poset a -diferenciável e S'_a seu diferencial. Seja $V \in \mathbf{sp}_S$ uma representação θ -positivamente estável e $V' = \partial_a V$ quase genérica. Então, V' é $\theta \cdot I_V^r$ -estável.*

Demonstração. Como V é uma representação estável, o Corolário 2.1 do trabalho de Futorny e Iusenko [FuI2018] garante que ela é schuriana.

O item (b) do Lema de redução de Gabriel [Gab72a] revela que o funtor diferenciação aplicado aos morfismos $\partial_a(U, V) : \text{Hom}(U, V) \rightarrow \text{Hom}(\partial_a U, \partial_a V)$ é sobrejetivo. Assim, se V é schuriana, V' necessariamente também é schuriana e, portanto, indecomponível. Sendo

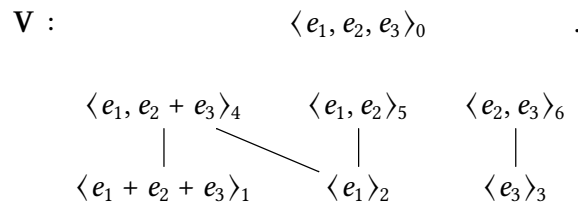
assim, Simson [Sim92, Cor. 6.9, pág. 75] garante que a integral de V' é única e, portanto, igual a V , que podemos calcular sua dimensão através da matriz $I_{V'}$. Assim, por definição, $(\theta \cdot I_{V'}^{tr}) \cdot (\dim V')^{tr} = \theta \cdot (\dim V' \cdot I_{V'})^{tr} = \theta \cdot \dim V'^{tr} = 0$.

Seja W' subrepresentação própria de V' , W a integral de W' e \tilde{W} sua representação esqueleto. Então, pelo Lema 4.2.3, \tilde{W} é subrepresentação de V e, portanto,

$$\theta \cdot I_{V'}^{tr}(\dim W')^{tr} = \theta \cdot (\dim W' \cdot I_{V'})^{tr} = \theta \cdot \dim \tilde{W}^{tr} < 0.$$

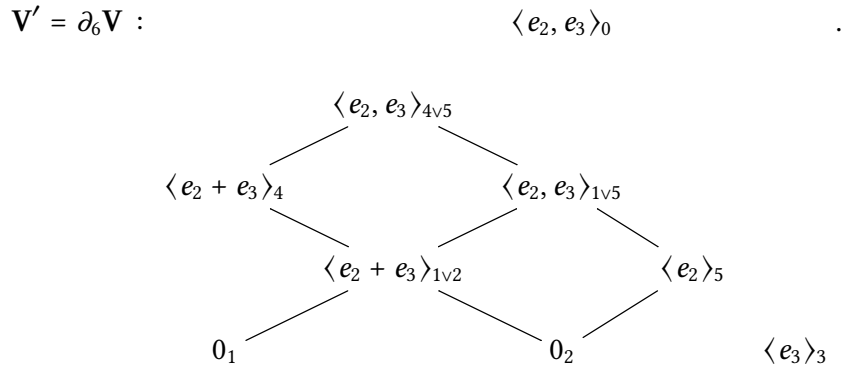
Assim, $\theta \cdot I_{V'}^{tr}(\dim W')^{tr} < 0$ e V' é $\theta \cdot I_{V'}^{tr}$ -estável. □

Exemplo 4.2.5. Considere o poset $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6; 1 < 4, 2 < 4, 2 < 5, 3 < 6\}$ e a representação indecomponível a seguir:



Essa representação é exata e θ -estável com $\theta = (-5; 2, 1, 2, 1, 2, 2)$, pelos resultados em [Fu12018, sec. 4.3].

Sua representação diferencial em relação ao elemento maximal 6 é dada a seguir:



Os espaços a serem considerados para o cálculo de $I_{V'}$ são: $X_{1v2}^I = \langle x \rangle$, $X_{1v5}^I = 0$ e $X_{4v5}^I = 0$. Assim,

$$I_{V'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1v2 & 1v5 & 4v5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

e $\theta' = \theta \cdot I_{V'} = (-3; 1, 0, 2, 1, 2, 1, 0, 0)$. Assim, pelo Teorema 4.2.4, V' é θ' -estável.

De fato, calculando o produto de θ' pela dimensão de V' , temos:

$$(-3; 1, 0, 2, 1, 2, 1, 0, 0) \cdot (\dim V')^{tr} = (-3; 1, 0, 2, 1, 2, 1, 0, 0) \cdot (2; 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2)^{tr} = 0$$

e calculando o produto de θ' pela dimensão de todas as possíveis subrepresentações próprias de V' , temos:

$$\begin{aligned} (-3; 1, 0, 2, 1, 2, 1, 0, 0) \cdot (1; 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1)^{tr} &= -3 + 2 = -1 \\ (-3; 1, 0, 2, 1, 2, 1, 0, 0) \cdot (1; 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1)^{tr} &= -3 + 2 = -1 \\ (-3; 1, 0, 2, 1, 2, 1, 0, 0) \cdot (1; 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)^{tr} &= -3 + 1 + 1 = -1 \\ (-3; 1, 0, 2, 1, 2, 1, 0, 0) \cdot (1; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^{tr} &= -3 \end{aligned}$$

4.3 Representações schurianas de $(N, 4)$

Nesta seção, vamos explorar alguns corolários dos resultados presentes nos Capítulos 3 e 4 e mostrar que todas as representações schurianas em $\mathfrak{sp}_{(N,4)}$ são positivamente estáveis.

Como apontamos no Capítulo 1, os trabalhos de Futorny e Iusenko [FuI2018, Teor. 4.1] e Yakymenko ([MS06], [Yak09], [Yak10a] e [Yak10b]) nos permitem afirmar que toda representação schuriana de posets de representação finita e toda representação schuriana de posets críticos do tipo manso é unitarizável (ou, igualmente para representações schurianas, positivamente estável), exceto se o poset é $(N, 4)$. Com o resultado desta seção, todas as representações schurianas dos posets críticos do tipo manso são positivamente estáveis.

Para esta seção, fixaremos as seguintes notações para $(1, 2, 5)$, $(\widehat{N}, 4) = \partial_8(1, 2, 5)$ e $(N, 4) = \partial_{1 \vee 3}(\widehat{N}, 4)$:

$$(1, 2, 5): \quad (\widehat{N}, 4) = \partial_8(1, 2, 5): \quad (N, 4) = \partial_{1 \vee 3}(\widehat{N}, 4):$$

$$\begin{array}{c} 8 \\ | \\ 7 \\ | \\ 6 \\ | \\ 5 \\ | \\ 4 \\ | \\ 3 \\ | \\ 2 \\ | \\ 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 7 \\ | \\ 6 \\ | \\ 5 \\ | \\ 4 \\ | \\ 3 \\ | \\ 2 \\ | \\ 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 7 \\ | \\ 6 \\ | \\ 5 \\ | \\ 4 \\ | \\ 3 \\ | \\ 2 \\ | \\ 1 \end{array}.$$

Para usar o Teorema 4.2.4, precisaremos mostrar que toda representação schuriana V' de $(N, 4)$ com V'_0 não unidimensional é quase genérica (Proposição 4.3.1), o que implica que $V'_1 \cap V'_3 = 0$. Sendo assim, a integral de V' também é quase genérica, pois é dada por:

$$(\widehat{V}'_0, \widehat{V}'_1, \widehat{V}'_2, \widehat{V}'_3, \widehat{V}'_4, \widehat{V}'_5, \widehat{V}'_6, \widehat{V}'_7, \widehat{V}'_{1 \vee 2}, \widehat{V}'_{1 \vee 3}) = (V'_0, V'_1, V'_2, V'_3, V'_4, V'_5, V'_6, V'_7, V'_{1 \vee 2}, V'_0),$$

já que $M_{(\widehat{N}, 4)} = \{4 < 5 < 6 < 7\}$ tem largura 1 e, portanto, $\Omega_{(\widehat{N}, 4)}$ é vazio.

Note que todo endomorfismo de $\widehat{V}' = \int_{1V3} V'$ também é endomorfismo de V' , assim, $\text{End}\widehat{V}' \subseteq \text{End}V'$ e, portanto, V' schuriana implica em \widehat{V}' schuriana. Por outro lado, também precisaremos garantir que $V = \int_8 \int_{1V3}$ é schuriana (Lema 4.3.3).

Por último, verificaremos que $I_{V'}$ para toda $V' \in \text{sp}_{S'_a}$ é única e se \widehat{V}' é integral de V' , então $I_{\widehat{V}'}$ também é única. Assim, pelo trabalho de Yakymenko [Yak10b], V é positivamente estável e podemos usar o Teorema 4.2.4 pra mostrar que assim também serão \widehat{V}' e V' .

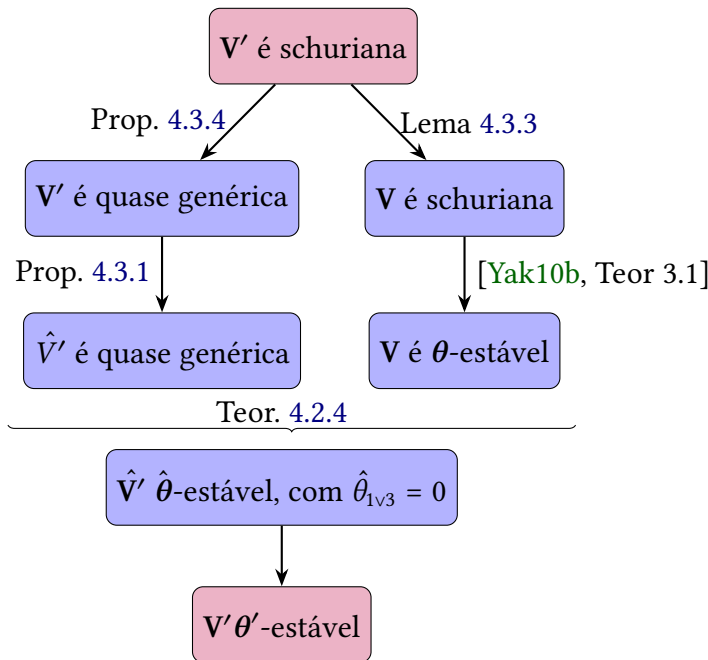


Figura 4.1: Fluxograma - Teorema 4.3.5

No Apêndice D.0.3, também iremos mostrar que todas as representações de $(1, 2, 5)$ são D-admissíveis e, por isso, a forma bilinear de Euler de $(1, 2, 5)$ é, de alguma forma, equivalente à de $(N, 4)$ (quando aplicadas aos vetores dimensão associados por meio da diferencial). Assim, a partir do Corolário 3.3.3, é possível enunciar um resultado análogo ao Teorema de Schofield [Sch92] para aljavas restrito ao poset $(N, 4)$.

Nesse contexto, apesar do nosso objetivo nesta seção ser estudar resultados envolvendo representações indecomponíveis do poset $(N, 4)$ especificamente, nosso primeiro resultado é um pouco mais geral e envolve posets que podem ser separados em dois subposets sem relações entre si e cujo diagrama de Hasse segue o esquema abaixo.

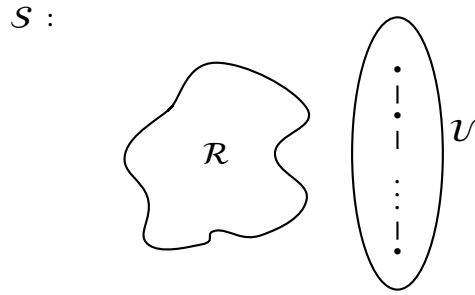


Figura 4.2: Diagrama de Hasse representando os posets generalizados na Proposição 4.3.1

Proposição 4.3.1. *Seja S um poset composto pela união de dois outros posets $S = \mathcal{R} \dot{\cup} \mathcal{U}$ tais que \mathcal{U} é um conjunto totalmente ordenado e não existem relações entre os elementos de \mathcal{R} e \mathcal{U} . Se $\mathbf{V} \in \mathbf{sp}_S$ é uma representação indecomponível, então $\bigcap_{t \in \mathcal{R}} V_t = 0$ ou $\dim V_0 = 1$ (e, portanto \mathbf{V} não possui subrepresentações próprias).*

Demonstração. Seja $\mathcal{U} = \{u_1 < u_2 < \dots < u_n\}$ e $x \in \bigcap_{t \in \mathcal{R}} V_t \neq 0$ e suponha que $\dim V_0 > 1$. Mostraremos que \mathbf{V} não é indecomponível.

Defina uma base B para V_0 que contenha x e que tenha a forma $B = B_1 \dot{\cup} B_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} B_n \dot{\cup} Y$, onde cada B_i é dado por $\{v_1^i, v_2^i, \dots, v_{n_i}^i\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_{n_y}\}$ e para cada $u \in \mathcal{U}$, V_u é gerado pela base $\bigcup_{i < u} B_i$.

Uma forma de definir a base B é seguir o algoritmo descrito abaixo: Se $x \in V_{\tilde{u}}$ para algum $\tilde{u} \neq 1 \in \mathcal{U}$, tome uma base para $V_1 \oplus \langle u \rangle$, estenda essa base a uma base de $V_2 \oplus \langle u \rangle$ e repita o procedimento até $\tilde{u} - 1$. Então, estenda essa base para $V_{\tilde{u}}$ e, novamente, estenda-a para $V_{\tilde{u}+1}$, repetindo o procedimento até conseguir uma base para V_n . Finalmente, estenda-a a uma base de V_0 . Se x não pertence a nenhum V_u com $u \in \mathcal{U}$, o primeiro procedimento do caso anterior é repetido até ampliarmos a uma base de $V_n \oplus \langle x \rangle$ e, então, essa base é ampliada para V_0 .

Essa base deixa claro que podemos decompor a representação V na soma direta de duas representações: $V_{\langle x \rangle} = (\langle x \rangle; \langle x \rangle)_{t \in \mathcal{R}}; \langle x \rangle)_{u \geq \tilde{u} \in \mathcal{U}}; (0)_{u < \tilde{u} \in \mathcal{U}}$ e $\tilde{V} = (Z; (V_t \cap Z)_{t \in \mathcal{R}}; (V_u \cap Z)_{u \in \mathcal{U}})$ onde $Z = \langle B \setminus \{x\} \rangle$ é um conjunto não vazio, já que $\dim V_0 > 1$.

Assim, se $\dim V_0 > 1$ e existe um $x \in \bigcap_{t \in \mathcal{R}} V_t$, então \mathbf{V} não é indecomponível. □

Esse resultado aplicado especificamente ao poset $(N, 4)$ nos diz que uma representação schuriana (portanto, indecomponível) $\mathbf{V}' \in \mathbf{sp}_{(N,4)}$ ou não tem subrepresentações próprias ou $V'_1 \cap V'_2 = 0$. Portanto, \mathbf{V}' é quase genérica e assim também o é $\widehat{V}' = \int_{I_{V_3}} \mathbf{V}'$. Além disso, as transformações $I_{V'}$ e $I_{\widehat{V}'}$ têm apenas uma forma possível, visto que $X_{I_{V_2}}^I(\widehat{V}')$ está no Caso 1, $X_{I_{V_3}}^I(\widehat{V}')$ está no Caso 2 e, como $M_{(\widehat{N},4)}$ tem largura 1, não há elementos em $\Omega_{(\widehat{N},4)}$ a serem considerados para o cálculo de sua integral em $\mathbf{sp}_{(N,4)}$. Evidenciaremos ambas a seguir:

Observação 4.3.2. *Sejam $(1, 2, 5)$, $(\widehat{N}, 4) = \partial_8(1, 2, 5)$, $(N, 4) = \partial_{I_{V_3}}(\widehat{N}, 4)$ os posets definidos no início desta seção. Seja \mathbf{V}' uma representação quase genérica schuriana de $(N, 4)$, $\widehat{V}' =$*

$\int_{1 \vee 3} \mathbf{V}' e \mathbf{V} = \int_8 \widehat{\mathbf{V}}'$. Então, $I_{V'}$ e $I_{\widehat{V}'}$ assumem as formas:

$$I_{V'} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \vee 2 \\ 1 \vee 3 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \vee 2 \\ 1 \vee 3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{\widehat{V}'} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \vee 2 \\ 1 \vee 3 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \vee 2 \\ 1 \vee 3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{V}' \cdot (I_{V'} \cdot I_{\widehat{V}'})$$

e, como $I_{V'} \cdot I_{\widehat{V}'}$ é uma matriz inversível, sua inversa à direita e à esquerda é a mesma, particularmente:

$$I_{V'} \cdot I_{\widehat{V}'} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \vee 2 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \vee 2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$D^* = (I_{V'} \cdot I_{\widehat{V}'})^{-1} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \vee 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como esperado, a matriz $D^* := (I_{V'} \cdot I_{\widehat{V}'})^{-1}$ equivale à matriz $D_{(1,2,5)}$ sem a coluna relacionada ao elemento $1 \vee 3$.

O item (b) do Lema de Redução de Gabriel [Gab72a] nos garante que se uma representação $U \in \mathfrak{sp}_S$ é schuriana, ∂U também é, mas o inverso não é verdade em geral. Porém, especificamente para representações de $(1, 2, 5)$ que são integrais das integrais de representações em $(N, 4)$, a Proposição 4.3.1 nos permite concluir o inverso, ou seja, que uma

representação \mathbf{V}' schuriana gera uma representação $\mathbf{V} = \int_8 \int_{1v3} \mathbf{V}'$ também schuriana.

Lema 4.3.3. *Seja $\mathbf{V}' \in \mathbf{sp}_{N,4}$ uma representação schuriana com espaço ambiente não unidimensional (ou seja, $\dim V'_0 > 1$). Então, $\mathbf{V} = \int_8 \int_{1v3} \mathbf{V}'$ também é schuriana.*

Demonstração. Seja $\varphi \in \text{End} \mathbf{V}$. Nosso objetivo é mostrar que φ precisa ser um múltiplo da identidade.

Lembre que

$$\mathbf{V} = (V_0; V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8) = (V'_0 \oplus X_{1v2}^I; V'_1 \oplus X_{1v2}^I, V'_2 \oplus X_{1v2}^{II}, V'_3 \oplus X_{1v2}^{II}, V'_4, V'_5, V'_6, V'_7, V'_8)$$

$$\text{e, portanto, } \varphi : V'_0 \oplus \frac{V'_{1v2}}{V'_1 \oplus V'_2} \rightarrow V'_0 \oplus \frac{V'_{1v2}}{V'_1 \oplus V'_2} \text{ pode ser representado como } \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{0,0} & \varphi_{1v2,0} \\ \varphi_{0,1v2} & \varphi_{1v2,1v2} \end{bmatrix},$$

$$\text{onde } \varphi_{i,j} : \tilde{V}'_i \rightarrow \tilde{V}'_j \text{ são morfismos, com } \tilde{V}'_0 := V'_0 \text{ e } \tilde{V}'_{1v2} = \frac{V'_{1v2}}{V'_1 \oplus V'_2}.$$

Como φ é endomorfismo de representações em $\mathbf{sp}_{(1,2,5)}$ e $V'_0 = V_8$, então $\varphi(V'_0) \subseteq V'_0$, logo $\varphi_{0,1v2} = 0$ e $\text{Im}(\varphi_{0,0}) \subseteq V'_0$ e $\varphi_{0,0}$ é um endomorfismo do espaço vetorial $V'_0 = V_8$. Além disso, para $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$, se $x \in V_i \cap V_8$, então $\varphi(x) \in V_i \cap V_8$. Portanto, $\varphi(V'_i) \subseteq V'_i$.

Por outro lado, se $x \in V'_{1,2} = (V_1 \oplus V_2) \cap V_8$, então $x = v_1 + v_2$, com $v_i \in V_i$ e $v_1 + v_2 \in V_8 = V'_0$. Logo, $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \in V_1 \oplus V_2$ e, portanto, $\varphi(x) \in (V_1 \oplus V_2) \cap V'_0 = V'_{1,2}$. Consequentemente, $\varphi_{0,0}$ é um endomorfismo de representações de \mathbf{V}' e, portanto, é um múltiplo da identidade. Suponha $\varphi_{0,0}(x) = \lambda \cdot x$ para todo $x \in V'_0$.

Como φ é um endomorfismo da representação \mathbf{V} , precisa ser invariante em relação a V_1 e a V_2 . Desta forma, para todo $v_{1v2} \in X_{1v2}^I(\mathbf{V}')$, tem-se:

$$\varphi(v_{1v2}) = \varphi_{1v2,0}(v_{1v2}) + \varphi_{1v2,1v2}(v_{1v2}) \in V'_1 \oplus X_{1v2}^I(\mathbf{V}'),$$

logo, $\varphi(v_{1v2}) = v_1 + x_{1v2}$, com $v_1 \in V'_1$ e $x_{1v2} \in X_{1v2}^I(\mathbf{V}')$.

Por outro lado, $v_{1v2} + \iota_{1v2}(v_{1v2}) \in V_2$, assim:

$$\begin{aligned} \varphi(v_{1v2} + \iota_{1v2}(v_{1v2})) &= \lambda \cdot (\iota_{1v2}(v_{1v2})) + \varphi(v_{1v2}) = v_2 + (y_{1v2} + \iota_{1v2}(y_{1v2})) \in V'_2 \oplus X_{1v2}^{II}(\mathbf{V}') \\ \varphi(v_{1v2}) &= -\lambda \cdot (\iota_{1v2}(v_{1v2})) + v_2 + (y_{1v2} + \iota_{1v2}(y_{1v2})), \end{aligned}$$

com $v_2 \in V'_2$ e $y_{1v2} \in X_{1v2}^I(\mathbf{V}')$. Assim:

$$\varphi(v_{1v2}) = v_2 + y_{1v2} + \iota_{1v2}(y_{1v2}) - \lambda(\iota_{1v2}(v_{1v2})) = v_1 + x_{1v2}$$

$$\text{e } X_{1v2}^I(\mathbf{V}') \ni -y_{1v2} + x_{1v2} = v_2 - v_1 - \lambda(\iota_{1v2}(v_{1v2})) + \iota_{1v2}(y_{1v2}) \in V'_0.$$

E, como $X_{1v2}^I(\mathbf{V}') \cap V'_0 = 0$, então $x_{1v2} = y_{1v2}$ e $v_2 - v_1 - \lambda(\iota_{1v2}(v_{1v2})) + \iota_{1v2}(y_{1v2}) = 0$.

Analogamente,

$$V'_1 \oplus V'_2 \ni v_2 - v_1 = \lambda(\iota_{1v2}(v_{1v2})) - \iota_{1v2}(y_{1v2}) \in \text{Im}(\iota_{1v2}).$$

E, como $\text{Im}(\iota_{1v2}) \cap (V_1 \oplus V_2) = 0$ e $V'_1 \cap V'_2 = 0$, tem-se: $v_1 = v_2 = 0$ e $\lambda(\iota_{1v2}(v_{1v2})) = \iota_{1v2}(y_{1v2})$.

Assim, $\varphi(v_{1v2}) = x_{1v2} = y_{1v2} \in \frac{V'_{1v2}}{V'_1 \oplus V'_2}$ e $\varphi_{1v2,0} = 0$.

Além disso, $\lambda(\iota_{1v_2}(v_{1v_2})) = \iota_{1v_2}(y_{1v_2})$ e, como ι_{1v_2} é injetivo, $y_{1v_2} = \lambda \cdot v_{1v_2}$. Assim, todo $\varphi \in \text{End}V$ pode ser representado como:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{0,0} & \varphi_{1v_2,0} \\ \varphi_{0,1v_2} & \varphi_{1v_2,1v_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

e, portanto, V é uma representação schuriana. \square

Logo, toda representação quase genérica e schuriana $V' \in \mathfrak{sp}_{(N,4)}$ dá origem a uma representação schuriana $V \in \mathfrak{sp}_{(1,2,5)}$ através da integral de \hat{V}' . A próxima proposição revela que todas as representações schurianas de $(N, 4)$ que estamos interessados são quase genéricas.

Proposição 4.3.4. *Seja V' uma representação schuriana de $(N, 4)$ tal que $\dim V'_8 > 1$. Então V' é quase genérica.*

Demonstração. Como V' é schuriana, \hat{V}' e, pelo Lema 4.3.3, $V = \int_a \hat{V}'$ também são schurianas.

Como relembramos na seção 1.1, V é pré-projetiva, pré-injetiva ou regular. Nos casos em que V é pré-injetiva ou pré-projetiva, V é genérica, pois é a única representação (a menos de isomorfismos) com determinado vetor dimensão.

Além disso, se $\dim V'_8 \neq 1$, V é D^* -admissível (Proposição D.0.3) e o vetor dimensão de V' é calculado segundo D^* . Assim, se V é genérica:

$$\begin{aligned} \dim(V'_1 \cap V'_2) &= 0 \text{ (pela Proposição 4.3.1), logo } X_{1v_2}^I(V') \text{ está no Caso 1.} \\ \dim(V'_3 \cap V'_{1v_2}) &= \dim(((V_1 + V_2) \cap V_3) \cap V_8) = \max(\dim((V_1 + V_2) \cap V_3) + \dim V_8 - \dim V_0, 0) \\ &= \max(\dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 + \dim V_8 - 2\dim V_0, \dim V_2 + \dim V_8 - \dim V_0) \\ &= \max(\dim V'_{1v_2} + \dim V'_3 - \dim V'_8, \dim V'_2) \end{aligned}$$

E, portanto, V' é quase genérica.

Caso V não seja genérica, V é regular. Assim, V' é uma das representações listadas nas Equações D.1. E, portanto, $\dim(V'_{1v_2} \cap V'_3) = 2 = \dim V'_{1v_2} + \dim V'_3 - \dim V'_8$ e V' é quase genérica. \square

Desta forma, aliando nossos resultados ao trabalho de Yakymenko [Yak10b, Teor 3.1] e ao Teorema 4.2.4, podemos afirmar que:

Teorema 4.3.5. *Seja $V' \in \mathfrak{sp}_{(N,4)}$ uma representação schuriana, $V = \int_8 \int_{1v_3} \hat{V}'$ e $I = I_V \cdot I_{\hat{V}'}$. Então, V' é θ' -positivamente estável.*

Além disso, se $\dim V'_0 > 1$, então $\theta' = \theta \cdot I^{tr}$ onde θ é o mapa para o qual V é estável.

Demonstração. Se $\dim V'_0 = 1$, V' não tem subrepresentações próprias e, portanto, é θ -estável com $\theta = (-\sum_{s \in (N,4)} \dim V_s; 1, 1, 1; 1, 1, 1, 1; 1)$. Portanto, nossa demonstração se focará nas representações com dimensão do espaço ambiente maior que 1.

Para estes casos, vimos, na Proposição 4.3.4, que V' é quase genérica e, no Lema 4.3.3, que V é schuriana. Assim, pelo Teorema 3.1 de Yakymenko [Yak10b], V é θ -positivamente estável para algum $\theta \in \mathbb{Z}^9$. Pela Proposição 4.3.1, $V'_1 \cap V'_2 = 0$ e, portanto, $\hat{V}' = \partial_8 V$ é quase genérica. Assim, V é θ -estável e seu diferencial \hat{V}' é quase genérica, portanto, pelo Teorema 4.2.4, \hat{V}' é $\theta \cdot I_{V'}^{tr}$ -estável.

Como V é θ -positivamente estável, pelo Teorema 4.2.4, \hat{V}' é $\hat{\theta} = \theta \cdot I_{V'}^{tr}$ -estável.

Note que $\hat{\theta}_{1v3} = 0$, assim V' é estável para $\theta' = (\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_s)_{s \in (N,4)}$, em outras palavras, para $\theta' = \theta \cdot I^{tr}$ (já que I^{tr} é a própria matriz $I_{V'}$, desprovida da última linha).

Em particular, observe que como o único elemento de Ω no Caso 2 foi retirado, as subrepresentações próprias W' de V' possuem todas a mesma matriz de conversão de dimensões para a integração, ou seja, $I_{W'} = I_{V'}$. Resta-nos mostrar que θ' é positivo.

Lembre que a Observação 1.6.6 nos garante que se V é pré-projetiva ou pré-injetiva, θ pode ser aproximado de $\dim V \cdot (C_{(1,2,5)}^{-1} - C_{(1,2,5)}^{-tr})$ tanto quanto precisarmos. Além disso, como I^{tr} é uma transformação linear e, portanto, contínua, podemos aproximar $\theta' = \theta \cdot I^{tr}$ indefinidamente de $\dim V \cdot (C_{(1,2,5)}^{-1} - C_{(1,2,5)}^{-tr}) \cdot I^{tr}$. Assim, provar que conseguimos encontrar um vetor positivo para o qual V' é estável equivale a mostrar que $\dim V \cdot (C_{(1,2,5)}^{-1} - C_{(1,2,5)}^{-tr}) \cdot I^{tr}$ é um vetor não negativo.

Apresentamos uma análise das dimensões de representações schurianas de $(1, 2, 5)$ no Apêndice D. A seguir, utilizaremos algumas relações encontradas nesta análise, especificamente nos Lemas D.0.1 e D.0.2.

Denote $\dim V$ por α . Então $\alpha \cdot (C_{(1,2,5)}^{-1} - C_{(1,2,5)}^{-tr}) = (-\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_8; \alpha_0, \alpha_3, \alpha_0 - \alpha_2; \alpha_5, \alpha_6 - \alpha_4, \alpha_7 - \alpha_5, \alpha_8 - \alpha_6, \alpha_0 - \alpha_7)$ e, portanto, $\tilde{\theta} := \alpha \cdot (C_{(1,2,5)}^{-1} - C_{(1,2,5)}^{-tr}) \cdot I_{(N,4)}^{tr}$ é dado por:

$$\begin{array}{lll} \tilde{\theta}_0 = -\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_8 + \alpha_0 - \alpha_7 & \tilde{\theta}_3 = \alpha_0 - \alpha_2 & \tilde{\theta}_6 = \alpha_7 - \alpha_5 \\ \tilde{\theta}_1 = \alpha_1 + \alpha_8 - \alpha_0 + \alpha_2 & \tilde{\theta}_4 = \alpha_5 & \tilde{\theta}_7 = \alpha_8 - \alpha_6 \\ \tilde{\theta}_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_8 - 2\alpha_0 + \alpha_2 & \tilde{\theta}_5 = \alpha_6 - \alpha_4 & \tilde{\theta}_{1v2} = -\alpha_1 - \alpha_8 + 2\alpha_0 - \alpha_2 \end{array}$$

Além disso, como α é dimensão de uma representação de $(1, 2, 5)$, as coordenadas 3, 4, 5, 6 e 7 são automaticamente não-negativas.

Por outro lado, o Lema D.0.1 garante que se V é pré-projetiva, $\alpha_0 \leq \alpha_2 + \alpha_8$, $\alpha_0 \leq \alpha_1 + \alpha_3$ e $\alpha_0 \geq \alpha_1 + \alpha_2$ e o Lema D.0.2 garante que se V é pré-injetiva, $\alpha_0 \leq \alpha_2 + \alpha_8$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_8 \geq 2\alpha_0$ e $\alpha_0 \geq \alpha_1 + \alpha_2$. Assim, $\tilde{\theta}_1$, $\tilde{\theta}_2$ e $\tilde{\theta}_{1v2}$ são não-negativos também.

Nos casos em que V é regular, θ é dado explicitamente pelas equações a seguir (utili-

zando a notação dada por Yakymenko [Yak10b] para denotar as representações regulares).

$$\begin{aligned} \theta_{\Gamma_1(1;-\lambda)} &= (-6; 3; 2, 2; 1, 1, 1, 1, 1); & \theta_{\Gamma_2(1;1)} &= (-6; 3; 2, 2; 1, 1, 1, 1, 1); \\ \theta_{\Gamma_1(1;0)} &= (-34; 15; 12, 12; 6, 6, 6, 6, 3); & \theta_{\Gamma_1(1;\infty)} &= (-71; 36; 24, 24; 12, 12, 12, 12, 6); \\ \theta_{\Gamma_2(1;0)} &= (-61; 24; 24, 18; 12, 12, 12, 6, 6); & \theta_{\Gamma_2(1;\infty)} &= (-61; 36; 18, 18; 12, 12, 6, 6, 12); \\ \theta_{\Gamma_3(1;0)} &= (-55; 30; 18, 12; 12, 12, 6, 6, 6); & \theta_{\Gamma_3(1;\infty)} &= (-67; 30; 24, 24; 12, 12, 12, 6, 12); \\ \theta_{\Gamma_1(1;1)} &= (-55; 30; 18, 12; 12, 12, 6, 6, 6); & \theta_{\Gamma_4(1;\infty)} &= (-65; 30; 18, 24; 12, 12, 12, 12, 12). \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \theta_{\Gamma_1(1;-\lambda)} \cdot I^{tr} &= (-5; 2; 1, 2; 1, 1, 1, 1, 1); & \theta_{\Gamma_2(1;1)} \cdot I^{tr} &= (-5; 2; 1, 2; 1, 1, 1, 1, 1); \\ \theta_{\Gamma_1(1;0)} \cdot I^{tr} &= (-31; 10; 7, 12; 6, 6, 6, 6, 5); & \theta_{\Gamma_1(1;\infty)} \cdot I^{tr} &= (-65; 23; 11, 24; 12, 12, 12, 12, 13); \\ \theta_{\Gamma_2(1;0)} \cdot I^{tr} &= (-55; 19; 19, 18; 12, 12, 12, 6, 5); & \theta_{\Gamma_2(1;\infty)} \cdot I^{tr} &= (-49; 25; 7, 18; 12, 12, 6, 6, 11); \\ \theta_{\Gamma_3(1;0)} \cdot I^{tr} &= (-49; 25; 13, 12; 12, 12, 6, 6, 5); & \theta_{\Gamma_3(1;\infty)} \cdot I^{tr} &= (-55; 19; 13, 24; 12, 12, 12, 6, 11); \\ \theta_{\Gamma_1(1;1)} \cdot I^{tr} &= (-49; 25; 13, 12; 12, 12, 6, 6, 5); & \theta_{\Gamma_4(1;\infty)} \cdot I^{tr} &= (-55; 23; 11, 24; 12, 12, 12, 12, 7). \end{aligned}$$

E, portanto, $\tilde{\theta}$ é não-negativo, garantindo assim que podemos escolher um θ' positivo para o qual V' é estável. \square

Corolário 4.3.6. *Seja α um vetor dimensão para o poset $(N, 4)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- α é schuriano
- [Condição de Schofield] Se $\alpha = \dim V'$, então, em geral, para toda W' subrepresentação própria de V' , tem-se $\langle \alpha, \dim W' \rangle_{(N,4)} - \langle \dim W', \alpha \rangle_{(N,4)} < 0$.

Demonstração. Por um lado, se V' respeita a condição de Schofield, V' é estável para $\theta = \alpha \cdot (C_{(N,4)}^{-1} - C_{(N,4)}^{-tr})$ e, portanto, $\alpha = \dim V'$ é um vetor schuriano (consequência direta do resultado em [Fu12018, Cor 2.1]).

Por outro lado, seja α vetor schuriano de $(N, 4)$, V' uma representação tal que $\dim V' = \alpha$, selecionada de forma que $V = \int_8 \int_{1 \vee 3} V'$ seja uma representação genérica. Se $\dim V'_0 = 1$, a afirmação claramente é verdade, pois V' não possui subrepresentações próprias. Suponha, então, que $\dim V'_0 > 1$.

Vimos no Teorema 4.3.5 que, neste caso, representações V' de $(N, 4)$ são $\theta \cdot I^{tr}$ -estáveis, onde $\theta = \dim V \cdot (C_{(1,2,5)}^{-1} - C_{(1,2,5)}^{-tr})$ (este θ é garantido pelo Teorema 6.1 de Schofield [Sch92], pois $(1, 2, 5)$ é um poset primitivo).

Além disso, o Apêndice D nos mostra que toda representação indecomponível genérica de $(1, 2, 5)$ é D^* -admissível, onde $D^* = I^{-1}$. Em outras palavras, $\dim V \cdot I^{-1} = \dim V'$ e $\dim V = \dim V' \cdot I$.

Assim, aplicando o Corolário 3.3.3, temos:

$$\begin{aligned} \langle \dim V, \dim W \rangle_{(1,2,5)} - \langle \dim W, \dim V \rangle_{(1,2,5)} &< 0 \\ \langle \dim V', \dim W' \rangle_{(N,4)} - \langle \dim W', \dim V' \rangle_{(N,4)} &< 0. \end{aligned}$$

E, portanto, V' satisfaz a condição de Schofield. \square

Capítulo 5

Considerações Finais

Nesta tese, investigamos as formas quadrática e bilinear de Euler para poset, e obtivemos alguns resultados inspirados nos resultados já conhecidos para aljavas. Em particular, destacamos três principais resultados. Primeiro, conseguimos uma expressão como a fórmula de Tits para calcular a dimensão da variedade poset usando a forma quadrática de Euler, o que nos permitiu obter uma compreensão mais profunda das propriedades geométricas dessas variedades. Segundo, estabelecemos uma relação entre as formas bilineares de Euler de um poset e seu diferencial, o que nos permitiu investigar as propriedades de estabilidade das representações em relação a essas formas e chegar ao terceiro resultado, no qual mostramos que, em geral, se uma representação é positivamente estável para uma forma θ , então seu diferencial também é estável para uma forma calculada a partir da primeira. Como um corolário do último resultado, mostramos que todas as representações schurianas de posets críticos do tipo manso são positivamente estáveis. O que nos levanta a possibilidade de que talvez essa propriedade seja verdadeira para todos os posets do tipo manso.

Esses resultados contribuem para o estudo das representações de posets, fornecendo novas ferramentas e técnicas para estudar as propriedades das formas quadrática e bilinear de Euler em variedades poset. Além disso, nossos resultados sugerem possíveis aplicações dessas formas em outras áreas da álgebra e teoria de representação.

No entanto, ainda existem questões em aberto que podem ser exploradas em futuras pesquisas. Um possível caminho de pesquisa futuro é a classificação das representações estáveis que não são positivamente estáveis. Seria interessante investigar se existem padrões ou estruturas subjacentes que possam ser identificados e utilizados na classificação dessas representações. Além disso, verificar a estabilidade das representações diferenciais de representações estáveis não-positivamente pode ser um tema de estudo promissor.

Em conclusão, os resultados obtidos nesta tese fornecem uma nova compreensão das formas quadrática e bilinear de Euler em variedades poset e abrem caminho para futuras pesquisas nessa área. Agradecemos novamente às instituições de apoio, em especial a CAPES, e aos colaboradores que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Apêndice A

Considerações sobre a integração de representações

Proposição A.0.1. *Seja V' uma representação de S'_a e V sua integral conforme a Definição 1.5.7. Então, $\partial_a V \approx V'$.*

Demonstração. Da definição de integral, tem-se:

- $V_0 = V'_0 \oplus \bar{V}_0$;
- $V_m = V'_m + \sum_{w \in \Omega^m} (X_w^I(V'))$ se $m \in M_I$;
- $V_m = V'_m + \sum_{w \in \Omega^m} (X_w^{II}(V'))$ se $m \in M_{II}$;
- $V_n = V'_n$ para todo $n \in \{a\} \cup N$.

Seja $W = \partial_a V$. Então, $W_n = V_n = V'_n$ para todo $n \in \{a\} \cup N$ e $W_m = V_m \cap V_a = V_m \cap V'_0 = V'_m$ para todo $m \in M = M_I \cup M_{II}$.

Veremos que o mesmo ocorre para os elementos em $p \vee q \in (M_I \times M_{II}) \cap \Omega$. Note que:

$$\begin{aligned}
 W_{p \vee q} &= (V_p + V_q) \cap V_a \\
 W_{p \vee q} &= \left[\left(V'_p + \sum_{w \in \Omega^p} X_w^I(V') \right) + \left(V'_q + \sum_{w \in \Omega^q} X_w^{II}(V') \right) \right] \cap V'_0 \\
 &= \left[V'_p + V'_q + \sum_{w \in \Omega^p, w \notin \Omega^q} X_w^I(V') + \sum_{w \in \Omega^q, w \notin \Omega^p} X_w^{II}(V') + \sum_{w \in \Omega^p \cap \Omega^q} (X_w^I(V') + X_w^{II}(V')) \right] \cap V'_0 \\
 &= \left[V'_p + V'_q + \sum_{w \in \Omega^p, w \notin \Omega^q} X_w^I(V') + \sum_{w \in \Omega^q, w \notin \Omega^p} X_w^{II}(V') + \sum_{w \in \Omega^p \cap \Omega^q} \text{Im}(t_w) \right] \cap V'_0 \\
 &= V'_p + V'_q + \sum_{w \in \Omega^p \cap \Omega^q} \text{Im}(t_w).
 \end{aligned}$$

Como V'_p , V'_q e $\text{Im}(t_w)$ estão contidos em $V'_{p \vee q}$ para todo $w \in \Omega^p \cap \Omega^q$, então $W_{p \vee q} \subseteq V'_{p \vee q}$.

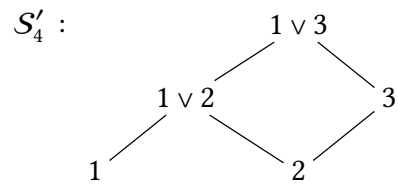
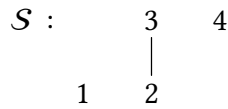
Por outro lado, note que $\Omega^p \cap \Omega^q = \{w \leq p \vee q\}_{w \in \Omega}$. Assim, fixe $x \in V'_{p \vee q}$ e note que a própria estrutura do poset implica que x pode ser escrito como a soma de elementos de $X^I_{p \vee q}(V')$ a elementos dos subespaços relacionados aos elementos do poset menores que $p \vee q$, em outras palavras,

$$x = \sum_{M \ni s \leq p \vee q} v_s + \sum_{\Omega \ni w \leq p \vee q} l_w(y_w),$$

onde $v_s \in V'_s$ e $y_w \in X^I_w(V')$.

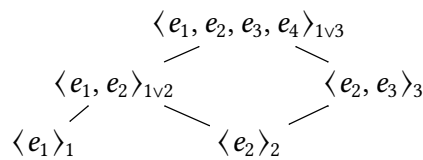
E, portanto, $V'_{p \vee q} \subseteq W_{p \vee q}$. Assim, $W_{p \vee q} = V'_{p \vee q}$ para todo $p \vee q \in \Omega$, o que finaliza nossa demonstração. \square

Exemplo A.0.2. Considere o poset S e seu diferencial S'_4 :



Seja V' a representação de S'_a dada pelo diagrama:

$$V' : \quad \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle_0 \quad .$$



Então,

$$X^I_{1 \vee 3}(V') = \frac{V'_{1 \vee 3}}{V'_{1 \vee 2} + V'_3} = \langle e_4^{1 \vee 3} \rangle$$

$$X^I_{1 \vee 2}(V') = \frac{V'_{1 \vee 2}}{V'_1 + V'_2} = 0.$$

Assim, a integral $\mathbf{V} = \int_4 \mathbf{V}'$ é a representação dada pelo diagrama a seguir:

$$\mathbf{V} : \quad \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_4^{1\nu 3} \rangle_0 \quad .$$

$$\begin{array}{ccc} & \langle e_2, e_3, e_4 + e_4^{1\nu 3} \rangle_3 & \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle_4 \\ & | & \\ \langle e_1, e_4^{1\nu 3} \rangle_1 & \langle e_2 \rangle_2 & \end{array}$$

Diferenciando \mathbf{V} em relação ao mesmo elemento maximal 4, obtemos a representação original, pois:

$$\begin{aligned} (\partial_4 \mathbf{V})_1 &= V_1 \cap V_4 = \langle e_1, e_4^{1\nu 3} \rangle \cap \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle = \langle e_1 \rangle = V'_1, \\ (\partial_4 \mathbf{V})_2 &= V_2 \cap V_4 = \langle e_2 \rangle \cap \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle = \langle e_2 \rangle = V'_2, \\ (\partial_4 \mathbf{V})_3 &= V_3 \cap V_4 = \langle e_2, e_3, e_4 + e_4^{1\nu 3} \rangle \cap \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = V'_3, \\ (\partial_4 \mathbf{V})_{1\nu 2} &= (V_1 + V_2) \cap V_4 = (\langle e_1, e_4^{1\nu 3} \rangle + \langle e_2 \rangle) \cap \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle = V'_{1\nu 2}, \\ (\partial_4 \mathbf{V})_{1\nu 3} &= (V_1 + V_3) \cap V_4 = (\langle e_1, e_4^{1\nu 3} \rangle + \langle e_2, e_3, e_4 + e_4^{1\nu 3} \rangle) \cap \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle = V'_{1\nu 3}. \end{aligned}$$

Apêndice B

Matrizes de Coxeter

Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle : G \times G \rightarrow \mathbb{Z}$ uma forma bilinear não degenerada definida em um grupo G abeliano de ordem finita. A *transformação de Coxeter* correspondente a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é definida como a transformação $\Phi : G \rightarrow G$ que torna a igualdade $\langle v, w \rangle = -\langle w, \Phi(v) \rangle$ verdadeira para todo $v, w \in G$ [Lad08].

Considere a matriz $\Phi_{\hat{S}}$ tal que $\Phi(v) = v \cdot \Phi_{\hat{S}}$. Para a forma bilinear de Euler, temos que $\langle v, w \rangle = \langle -w, \Phi(v) \rangle$ se resume a:

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle -w, v \cdot \Phi_{\hat{S}} \rangle \\ v \cdot C_{\hat{S}}^{-1} \cdot w^{tr} &= -w \cdot C_{\hat{S}}^{-1} \cdot \Phi(v)^{tr} \\ v \cdot C_{\hat{S}}^{-1} \cdot w^{tr} &= -v \cdot \Phi_{\hat{S}} \cdot C_{\hat{S}}^{-tr} \cdot w^{tr} \\ v \cdot C_{\hat{S}}^{-1} \cdot w^{tr} + v \cdot \Phi_{\hat{S}} \cdot C_{\hat{S}}^{-tr} \cdot w^{tr} &= 0 \\ v \cdot (C_{\hat{S}}^{-1} + \Phi_{\hat{S}} \cdot C_{\hat{S}}^{-tr}) \cdot w^{tr} &= 0. \end{aligned}$$

Como a transformação $\Phi_{\hat{S}}$ precisa tornar essa igualdade verdadeira independente dos valores de $v, w \in \mathbb{Z}^{|\hat{S}|}$, então:

$$\begin{aligned} C_{\hat{S}}^{-1} + \Phi_{\hat{S}} \cdot C_{\hat{S}}^{-tr} &= 0 \\ \Phi_{\hat{S}} &= -C_{\hat{S}}^{-1} \cdot C_{\hat{S}}^{tr}. \end{aligned}$$

Portanto, a transformação de Coxeter correspondente à forma bilinear de Euler para posets é dada por:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Z}^{|\hat{S}|} &\rightarrow \mathbb{Z}^{|\hat{S}|} \\ \alpha &\rightarrow -\alpha \cdot C_{\hat{S}}^{-1} \cdot C_{\hat{S}}^{tr} \end{aligned}$$

Seguindo a nomenclatura no trabalho de Simson [Sim10, Sec 2], chamaremos $\Phi_{\hat{S}} := -C_{\hat{S}}^{-1} \cdot C_{\hat{S}}^{tr}$ de *Matriz de Coxeter-Euler do poset S* .

A transformação de Coxeter-Euler (e, portanto, a matriz de Coxeter-Euler) é importante principalmente devido à sua participação na teoria de Auslander-Reiten de representações.

Como vimos na Seção 1.1, ainda antes da classificação de posets finitos, Gabriel [Gab72b] havia feito o mesmo para aljavas. Seu resultado fundamental observou que para que uma aljava seja do tipo finito é necessário e suficiente que o grafo relacionado a ela seja um grafo de Dynkin de um entre os tipos A_n , D_n , E_6 , E_7 ou E_8 (independentemente da orientação). Para compreender a relação entre os grafos de Dynkin e o tipo finito das aljavas, Bernstein, Gel'fand e Ponomarev [BGP73] definiram a *transformação de Coxeter (para representações)* e observaram que a transformação de Coxeter-Euler modifica o vetor dimensão das representações em conformidade com essa transformação. Como uma consequência desse trabalho, é possível verificar que as representações pré-projetivas e pré-injetivas podem ser encontradas pela aplicação das transformações de Coxeter às representações indecomponíveis projetivas e, respectivamente, aplicação dos inversos dessas transformações às representações indecomponíveis injetivas. Assim, as dimensões das representações não-regulares de qualquer aljava podem ser calculadas através de sua matriz de Coxeter [ASS10, Prop 4.14].

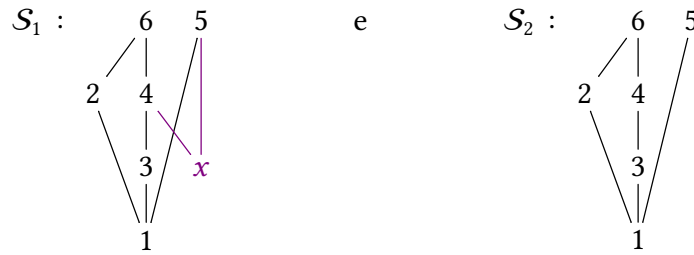
Para posets, as transformações de Coxeter foram definidas por Drozd [Dro74], que conseguiu resultados análogos aos de Bernstein, Gel'fand e Ponomarev [BGP73]. Porém as dimensões das representações geradas a partir das transformações de Coxeter não podem ser calculadas através de suas matrizes de Coxeter, exceto para posets primitivos (cujas representações podem ser analisadas através de suas aljavas associadas). Essa propriedade será usada no Apêndice D.0.3, onde analisaremos a D-admissibilidade das representações schurianas do poset $(1, 2, 5)$.

Além dessa diferença, há outros resultados válidos para aljavas que não o são para posets. Por exemplo, uma matriz M é chamada de *periódica* (resp. fracamente periódica) quando existe um número real k tal que $M^k - \text{Id} = 0$ (resp. $M^k - \text{Id}$ é nilpotente). Sato [Mas05, Teor. 2.8, Teor. 3.4] mostrou que se uma forma quadrática é positiva (resp. não-negativa), sua matriz de Coxeter correspondente é periódica (resp. fracamente periódica). A partir deste resultado, Ladkani [Lad08, Prop 3.1] mostrou que para matrizes de Coxeter-Euler de aljavas sem ciclos orientados, a afirmação reversa também é válida. Ou seja, a transformação de Coxeter-Euler de uma aljava sem ciclos orientados é periódica (resp. fracamente periódica) se, e somente se, a forma de Euler associada a esta aljava é positiva (resp. não-negativa) ou, equivalentemente, seu grafo correspondente é um diagrama de Dynkin do tipo A , D ou E (resp. diagrama de Dynkin estendido do tipo \tilde{A} , \tilde{D} ou \tilde{E}). Posteriormente, Simson [Sim10, Prop. 3.13] mostrou que a matriz de Coxeter-Euler é periódica (resp. fracamente periódica) se, e somente se, a matriz de Coxeter da matriz relacionada à forma quadrática de Tits é periódica (resp. fracamente periódica). Usando a associação construída na Seção 1.2, verifica-se que se S é um poset primitivo, o resultado de Ladkani [Lad08, Prop 3.1] também é válido, ou seja, S é do tipo finito (resp. manso) se, e somente se, a transformação de Coxeter-Euler é periódica (resp. fracamente periódica).

Originalmente, tínhamos como objetivo ampliar este resultado para uma família maior de posets, buscando relações entre a periodicidade da transformação de Coxeter-Euler e seu tipo. Porém, encontramos exemplos que sugerem que não há uma correlação forte entre essas propriedades.

Por exemplo, considere os posets representados pelos diagramas de Hasse a se-

guir:



Suas respectivas matrizes de Coxeter-Euler são

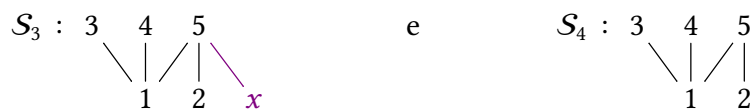
$$\Phi_{\hat{S}_1} = \begin{bmatrix} 0 & x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Phi_{\hat{S}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

matrizes com os polinômios característicos

$$p(x)_{\Phi_{\hat{S}_1}} = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x - 1)^2(x + 1)^2 \quad \text{e} \quad p(x)_{\Phi_{\hat{S}_2}} = x^7 + x^6 - x^5 - 3x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 1$$

respectivamente. O resultado [Mas05, Teor 2.6] facilita nossa verificação garantindo que uma matriz de Coxeter-Euler é fracamente periódica se, e somente se, seu polinômio característico é o produto de polinômios ciclotômicos. Assim, a transformação $\Phi_{\hat{S}_1}$ é fracamente periódica (com período igual a 12), enquanto a $\Phi_{\hat{S}_2}$ é não periódica.

Considere também os posets a seguir:



Suas respectivas matrizes de Coxeter-Euler são

$$\Phi_{\hat{S}_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & x & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Phi_{\hat{S}_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

com polinômios característicos

$$p(x)_{\Phi_{\mathcal{S}_3}} = (x^2 + 1)(x - 1)^2(x + 1)^3 \quad \text{e} \quad p(x)_{\Phi_{\mathcal{S}_4}} = (x^2 + x + 1)(x - 1)^2(x + 1)^2$$

respectivamente. Assim, a transformação $\Phi_{\mathcal{S}_3}$ é periódica (com período igual a 4), enquanto a $\Phi_{\mathcal{S}_4}$ é fracamente periódica (com período igual a 6).

Esses exemplos sugerem que não há uma relação clara entre a quantidade de representações e a periodicidade das matrizes de Coxeter-Euler. Por exemplo, para cada representação do poset \mathcal{S}_2 (resp. \mathcal{S}_4), podemos criar pelo menos uma representação em \mathcal{S}_1 (resp. \mathcal{S}_3) e se duas representações de \mathcal{S}_2 (resp. \mathcal{S}_4) são não-isomorfas, suas respectivas extensões em \mathcal{S}_1 (resp. \mathcal{S}_3) também são não-isomorfas. Assim, a quantidade de representações nos posets à direita (\mathcal{S}_2 e \mathcal{S}_4) é menor que nos posets à esquerda (\mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_3). Por outro lado, as matrizes de Coxeter-Euler de \mathcal{S}_2 e \mathcal{S}_4 têm um grau menor de periodicidade do que as matrizes de Coxeter-Euler de \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_3 , o inverso do que ocorre nos posets primitivos e aljavas.

Apêndice C

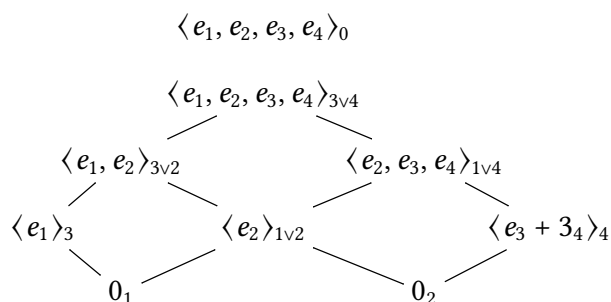
Esqueletos da integral de W' em relação a V'

Este apêndice visa proporcionar uma compreensão mais concreta e intuitiva dos conceitos e resultados discutidos na demonstração do Lema 4.2.3. Para isso, apresentamos uma série de exemplos cuidadosamente selecionados que ilustram os principais conceitos utilizados. Eles são projetados para auxiliar o leitor a conectar os pontos entre a demonstração e representações reais, tornando a compreensão do lema mais acessível e completa.

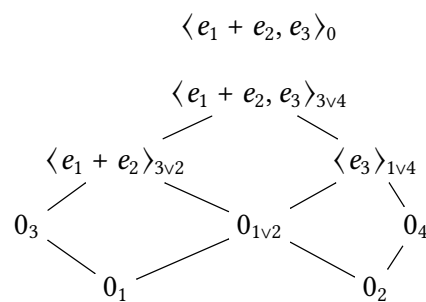
Para todos os exemplos deste apêndice, usaremos a notação \bar{x}_w (ou apenas \bar{x} quando não houver dúvida sobre o valor de w) para nos referir aos elementos de $X_w^I(W')$ para os quais $i_w^{W'}(x) = x$ ou de $X_w^I(V')$ para os quais $i_w^{V'}(x) = x$.

Exemplo C.0.1. Considere o poset $S = \{1, 2, 3, 4, 5; 1 < 3, 2 < 4\}$, seu diferencial S'_5 e as representações $V', W' \in \mathbf{sp}_{S'_5}$ dadas pelos diagramas a seguir.

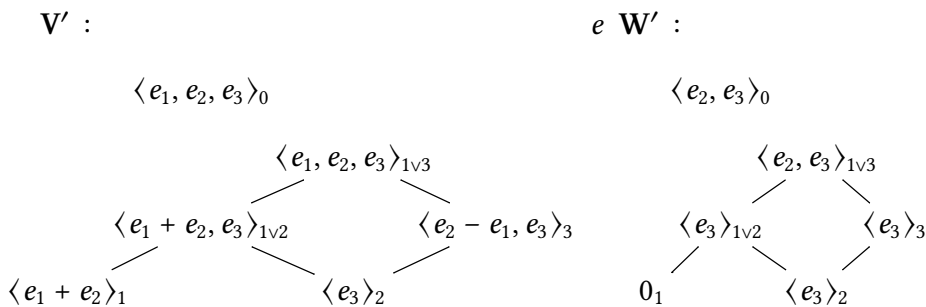
V' :



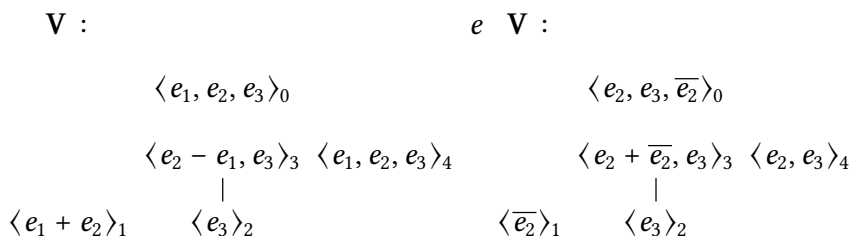
e W' :



Exemplo C.0.2. Considere o poset $S = \{1, 2, 3, 4; 2 < 3\}$, seu diferencial S'_4 e as representações $V', W' \in \text{sp}_{S'_4}$ dadas pelos diagramas a seguir.



Suas integrais são, respectivamente:



Neste caso, também temos $\tilde{W} = W$. Para criar o morfismo injetor $\Phi : W \rightarrow V$ como no exemplo anterior, precisamos definir o morfismo α_{1v3} de forma que

$$l_{1v3}^{W'}(\bar{e}_2) = e_2 = l_{1v3}^{V'}(\alpha_{1v3}(\bar{e}_2)) + l_{1v2}^{V'}(\alpha_{1v2}(\bar{e}_2)) + l_1^{V'}(\bar{e}_2) + l_3^{V'}(\bar{e}_2).$$

$$\begin{aligned} \alpha_{1v3} : X_{1v3}^I &\rightarrow X_{1v3}^I \oplus X_{1v2}^I \oplus V_1' \oplus V_3' \\ \langle \bar{e}_2 \rangle &\rightarrow 0 \oplus 0 \oplus \langle e_1 + e_2 \rangle_1 \oplus \langle e_3, e_2 - e_1 \rangle_3 \\ \bar{e}_3 &\mapsto (0, 0, \frac{e_2 + e_1}{2}, \frac{e_2 - e_1}{2}) \end{aligned}$$

Assim, $\alpha_{1v3}(\bar{e}_2) = \frac{e_2 + e_1}{2} + \frac{e_2 - e_1}{2} = e_2$.

Definido desta forma, Φ também é um morfismo (injetor) de representações, já que

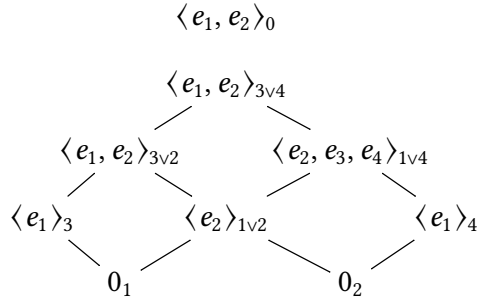
$$\Phi(\bar{e}_2) = -\frac{e_2 + e_1}{2} \text{ e } \Phi(\bar{e}_2 + e_2) = \frac{e_2 - e_1}{2} \in V_3.$$

Para os próximos exemplos, veremos dois casos em que $l_w^{W'}(x_w) = l_u^{W'}(x_u)$, onde $x_w, x_u \in X_w^I(W'), X_u^I(W')$ para dois elementos distintos $u, w \in \Omega$.

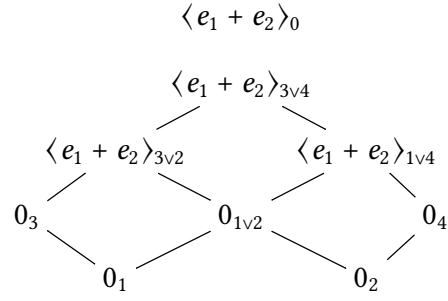
Exemplo C.0.3. Considere o poset $S = \{1, 2, 3, 4, 5; 1 < 3, 2 < 4\}$, seu diferencial S'_5 e as

representações $V', W' \in \mathfrak{sp}_{S_5'}$ dadas pelos diagramas a seguir.

V' :



e W' :



Suas integrais são, respectivamente:

V :

$$\begin{array}{c} \langle e_1, e_2 \bar{e}_2 \rangle_0 \\ \langle e_1, \bar{e}_2 \rangle_3 \quad \langle e_1, \bar{e}_2 + e_2 \rangle_4 \quad \langle e_1, e_2 \rangle_5 \\ | \quad | \\ \langle \bar{e}_2 \rangle_1 \quad \langle \bar{e}_2 + e_2 \rangle_2 \end{array}$$

e

W :

$$\begin{array}{c} \langle e_1 + e_2, \overline{(e_1 + e_2)_{1v4}}, \overline{(e_1 + e_2)_{3v2}} \rangle_0 \\ \overline{\langle (e_1 + e_2)_{1v4}, (e_1 + e_2)_{3v2} \rangle}_3 \quad \overline{\langle (e_1 + e_2)_{1v4} + e_1 + e_2, (e_1 + e_2)_{3v2} + e_1 + e_2 \rangle}_4 \quad \langle e_1 + e_2 \rangle_5 \\ | \quad | \\ \overline{\langle (e_1 + e_2)_{1v4} \rangle}_1 \quad \overline{\langle (e_1 + e_2)_{3v2} + e_1 + e_2 \rangle}_2 \end{array}$$

Neste caso, a representação esqueleto \tilde{W} também é a própria W . E α_{1v4} e α_{3v2} são dados a seguir.

$$\begin{array}{l} \alpha_{1v4} : \quad X_{1v4}^I \rightarrow X_{1v4}^I \oplus X_{1v2}^I \oplus V'_1 \oplus V'_4 \\ \overline{\langle (e_1 + e_2)_{1v4} \rangle} \rightarrow 0 \oplus \langle \bar{e}_2 \rangle \oplus 0 \oplus \langle e_1 \rangle \\ \overline{(e_1 + e_2)_{1v4}} \mapsto (0, \bar{e}_2, 0, e_1) \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_{3v2} : \quad X_{3v2}^I \rightarrow X_{3v2}^I \oplus X_{1v2}^I \oplus V'_3 \oplus V'_2 \\ \overline{\langle (e_1 + e_2)_{3v2} \rangle} \rightarrow 0 \oplus \langle \bar{e}_2 \rangle \oplus 0 \oplus \langle e_1 \rangle \\ \overline{(e_1 + e_2)_{3v2}} \mapsto (0, \bar{e}_2, 0, e_1). \end{array}$$

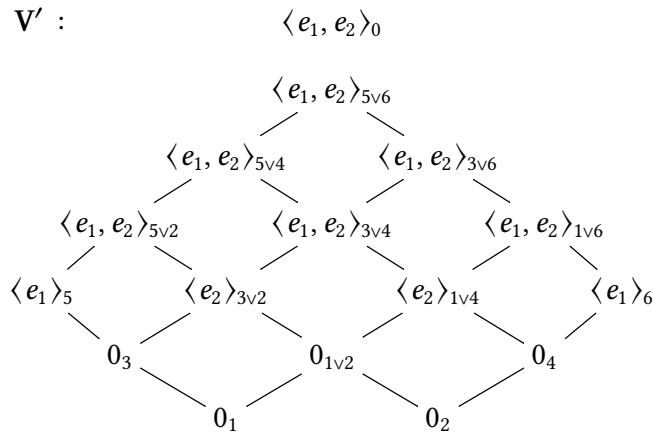
Assim,

$$\begin{aligned} \Phi(\overline{(e_1 + e_2)_{1v4}}) &= \overline{e_2} \\ \Phi(\overline{(e_1 + e_2)_{3v2}}) &= -e_1 + \overline{e_2} \\ \Phi(\overline{(e_1 + e_2)_{1v4}} + e_1 + e_2) &= \overline{e_2} + e_1 + e_2 \\ \Phi(\overline{(e_1 + e_2)_{3v2}} + e_1 + e_2) &= \overline{e_2} + e_2 \end{aligned}$$

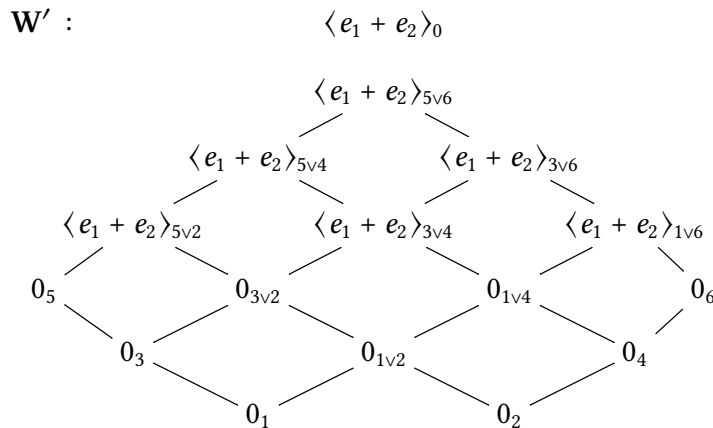
e, assim, Φ é um morfismo de representações.

Como podemos ver, $e_1 \notin W'_0$. Caso contrário, $\Phi(\overline{(e_1 + e_2)_{1v4}}) = \Phi(\overline{(e_1 + e_2)_{1v4}} + e_1)$ e Φ não seria injetora. Como vimos na demonstração do Lema 4.2.3, isso sempre acontece.

Exemplo C.0.4. Considere o poset $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; 1 < 3 < 5, 2 < 4 < 6\}$, seu diferencial S'_7 e as representações $V', W' \in \text{sp}_{S'_7}$ dadas pelos diagramas a seguir.



e



Suas integrais são, respectivamente:

V' :

$$\begin{array}{ccc} & \langle e_1, e_2, \overline{e_{23v2}}, \overline{e_{21v4}}, \overline{e_1} \rangle_0 & \\ & | & \\ \langle e_1, \overline{e_{23v2}}, \overline{e_{21v4}}, \overline{e_1} \rangle_5 & \langle e_1, \overline{e_{23v2}} + e_2, \overline{e_{21v4}} + e_2, e_1, \overline{e_1} \rangle_6 & \langle e_1, e_2 \rangle_7 \\ & | & \\ \langle \overline{e_1}, \overline{e_{23v2}}, \overline{e_{21v4}} \rangle_3 & \langle \overline{e_1} + e_1, \overline{e_{23v2}} + e_2, \overline{e_{21v4}} + e_2 \rangle_4 & \\ & | & \\ \langle \overline{e_{21v4}} \rangle_1 & \langle \overline{e_{21v4}} + e_2 \rangle_2 & \end{array}$$

e

W' :

$$\begin{array}{ccc} & \langle e_1 + e_2, \overline{e_1 + e_{25v2}}, \overline{e_1 + e_{23v4}}, \overline{e_1 + e_{21v6}} \rangle_0 & \\ & | & \\ \langle \overline{e_1 + e_{25v2}}, \overline{e_1 + e_{23v4}}, \overline{e_1 + e_{21v6}} \rangle_5 & \langle \overline{e_1 + e_{25v2}} + e_1 + e_2, \overline{e_1 + e_{23v4}} + e_1 + e_2, & \langle e_1 + e_2 \rangle_7 \\ & \overline{e_1 + e_{21v6}} + e_1 + e_2 \rangle_6 & \\ & | & \\ \langle \overline{e_1 + e_{23v4}}, \overline{e_1 + e_{21v6}} \rangle_3 & \langle \overline{e_1 + e_{25v2}} + e_1 + e_2, \overline{e_1 + e_{23v4}} + e_1 + e_2 \rangle_4 & \\ & | & \\ \langle \overline{e_1 + e_{21v6}} \rangle_1 & \langle \overline{e_1 + e_{25v2}} + e_1 + e_2 \rangle_2 & \end{array}$$

Como nos demais exemplos, a representação esqueleto \widetilde{W} também é a própria W .

Os morfismos α são dados a seguir.

$$\begin{array}{l} \alpha_{5v2} : X_{5v2}^I(W') \rightarrow X_{5v2}^I(V') \oplus X_{3v2}^I \oplus X_{1v2}^I \oplus V'_2 \oplus V'_5 \\ \langle \overline{(e_1 + e_2)_{5v2}} \rangle \rightarrow 0 \quad \oplus \langle \overline{(e_2)_{3v2}} \rangle \oplus 0 \quad \oplus 0 \quad \oplus \langle e_1 \rangle \\ \langle \overline{(e_1 + e_2)_{5v2}} \rangle \mapsto (0 \quad , \overline{(e_2)_{3v2}} \quad , 0 \quad , 0 \quad , e_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha_{3v4} : X_{3v4}^I(W') \rightarrow X_{3v4}^I(V') \oplus X_{3v2}^I \oplus X_{1v4}^I \oplus \frac{V'_{1v2}}{V'_2} V'_3 \oplus V'_4 \\ \langle \overline{(e_1 + e_2)_{3v4}} \rangle \rightarrow \langle \overline{e_1} \rangle \quad \oplus \langle \overline{(e_2)_{3v2}} \rangle \oplus \langle \overline{(e_2)_{1v4}} \rangle \oplus 0 \quad \oplus 0 \oplus 0 \\ \langle \overline{(e_1 + e_2)_{3v4}} \rangle \mapsto (\overline{e_1} \quad , 0 \quad , \overline{(e_2)_{1v4}} \quad , 0 \quad , 0, 0) \end{array}$$

Ou

$$\langle \overline{(e_1 + e_2)_{3v4}} \rangle \mapsto (\overline{e_1} \quad , \overline{(e_2)_{3v2}} \quad , 0 \quad , 0 \quad , 0, 0)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{1v6} : \quad X_{1v6}^I(\mathbf{W}') &\rightarrow X_{1v6}^I(\mathbf{V}') \oplus X_{1v4}^I \oplus X_{1v2}^I \oplus V'_1 \oplus V'_6 \\ \langle \overline{(e_1 + e_2)_{1v6}} \rangle &\rightarrow 0 \quad \oplus \langle \overline{(e_2)_{1v4}} \rangle \oplus 0 \quad \oplus 0 \quad \oplus \langle e_1 \rangle \\ \langle \overline{(e_1 + e_2)_{1v6}} \rangle &\mapsto (0 \quad , \overline{(e_2)_{1v4}} \quad , 0 \quad , 0 \quad , e_1) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Phi(\overline{(e_1 + e_2)_{5v2}}) &= -e_1 + \overline{(e_2)_{3v2}} \\ \Phi(\overline{(e_1 + e_2)_{5v2} + e_1 + e_2}) &= e_2 + \overline{(e_2)_{3v2}} \\ \Phi(\overline{(e_1 + e_2)_{3v4}}) &= \overline{e_1} + \overline{(e_2)_{3v2}} \text{ ou } \overline{e_1} + \overline{(e_2)_{1v4}} \\ \Phi(\overline{(e_1 + e_2)_{3v4} + e_1 + e_2}) &= \overline{e_1} + \overline{(e_2)_{3v2}} \text{ ou } \overline{e_1} + \overline{(e_2)_{1v4}} \\ \Phi(\overline{(e_1 + e_2)_{1v6}}) &= \overline{(e_2)_{3v4}} \\ \Phi(\overline{(e_1 + e_2)_{1v6} + e_1 + e_2}) &= e_1 + e_2 + \overline{(e_2)_{3v2}} \end{aligned}$$

e, assim, Φ é um morfismo injetor de representações.

Apêndice D

Análise das dimensões das representações schurianas de $(1, 2, 5)$

Considere a matriz $D^* = \Gamma^{-1}$ definida na Observação 4.3.2. Estendendo a notação do Capítulo 3, diremos que uma representação $V \in \mathbf{sp}_{(1,2,5)}$ é D^* -admissível se $\dim V \cdot D^* = \dim \partial_8 \partial_{1 \vee 3} V$. Portanto, para $\alpha = \mathbf{dim} V$, sempre que as condições a seguir forem satisfeitas, V é D^* -admissível:

- V é genérica;
- $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha_0$ (equivalentemente, se $V_1 \cap V_2 = 0$);
- $\alpha_0 \leq \alpha_i + \alpha_8$ para $i \in \{1, 2, 3\}$.

Nosso objetivo neste apêndice é mostrar que toda representação indecomponível de $(1, 2, 5)$ com $\dim V_8 > 1$ é D^* -admissível.

Em particular, as dimensões indecomponíveis de $(1, 2, 5)$ são classificadas em regulares, pré-injetivas e pré-projetivas. Se $V \in \mathbf{sp}_{(1,2,5)}$ é uma representação indecomponível regular, então ela possui vetor dimensão $\alpha = (\alpha_0; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8) = (6; 3, 2, 4; 1, 2, 3, 4, 5)$ e é isomorfa a uma das representações listadas por Yakymenko [Yak10b, Sec 2.7]. Portanto, a representação $V' = \partial_{1 \vee 3} \partial_8 V$ associada à sua derivada é isomorfa a uma das representações a seguir:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}(1; -\lambda) &= (\langle e_1, e_2, e_3, e_5, e_6 \rangle_0; \langle e_1 + e_5, e_2 + e_6 \rangle_1; \langle e_2 + e_3 \rangle_2, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_3 \\
&\quad \langle e_5 \rangle_4, \langle e_5, e_6 \rangle_5, \langle \lambda e_1 + e_3, e_5, e_6 \rangle_6, \langle e_1, e_3, e_5, e_6 \rangle_7; \langle e_1 + e_5, e_2, e_3, e_6 \rangle_{1\nu 2}) \\
\tilde{\Gamma}_1(1; 0) &= (\langle e_1, e_2, e_3, e_5, e_6 \rangle_0; \langle e_1 + e_5, e_2 + e_6 \rangle_1; \langle e_2 + e_3 \rangle_2, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_3 \\
&\quad \langle e_5 \rangle_4, \langle e_5, e_6 \rangle_5, \langle e_1 + e_3, e_5, e_6 \rangle_6, \langle e_1, e_3, e_5, e_6 \rangle_7; \langle e_1 + e_5, e_2, e_3, e_6 \rangle_{1\nu 2}) \\
\tilde{\Gamma}_2(1; 0) &= (\langle e_1, e_2, e_3, e_5, e_6 \rangle_0; \langle e_1 + e_5, e_2 + e_6 \rangle_1; \langle e_2 \rangle_2, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_3 \\
&\quad \langle e_5 + e_6 \rangle_4, \langle e_5, e_6 \rangle_5, \langle e_1 + e_3, e_5, e_6 \rangle_6, \langle e_1, e_3, e_5, e_6 \rangle_7; \langle e_1 + e_5, e_2, e_3, e_6 \rangle_{1\nu 2}) \\
\tilde{\Gamma}_3(1; 0) &= (\langle e_1, e_2, e_3, e_5, e_6 \rangle_0; \langle e_1 + e_5, e_2 + e_6 \rangle_1; \langle e_2 + e_3 \rangle_2, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_3 \\
&\quad \langle e_5 + e_6 \rangle_4, \langle e_5, e_6 \rangle_5, \langle e_3, e_5, e_6 \rangle_6, \langle e_1, e_3, e_5, e_6 \rangle_7; \langle e_1 + e_5, e_2, e_3, e_6 \rangle_{1\nu 2}) \\
\tilde{\Gamma}_1(1; 1) &= (\langle e_1, e_2, e_3, e_5, e_6 \rangle_0; \langle e_1 + e_5, e_2 + e_6 \rangle_1; \langle e_2 + e_3 \rangle_2, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_3 \\
&\quad \langle e_5 + e_6 \rangle_4, \langle e_5, e_6 \rangle_5, \langle e_3 - e_1, e_5, e_6 \rangle_6, \langle e_1, e_3, e_5, e_6 \rangle_7; \langle e_1 + e_5, e_2, e_3, e_6 \rangle_{1\nu 2}) \\
\tilde{\Gamma}_2(1; 1) &= (\langle e_1, e_2, e_4, e_5, e_6 \rangle_0; \langle e_1 + e_5, 2e_1 + e_6 \rangle_1; \langle e_2 + e_4 \rangle_2, \langle e_1, e_2, e_4 \rangle_3 \\
&\quad \langle e_6 \rangle_4, \langle e_5, e_6 \rangle_5, \langle e_4, e_5, e_6 \rangle_6, \langle e_1 + e_2, e_4, e_5, e_6 \rangle_7; \langle e_2 + e_5, e_2 + e_4, 2e_1 + e_6, e_1 + e_2 \rangle_{1\nu 2}) \\
\tilde{\Gamma}_1(1; \infty) &= (\langle e_1, e_2, e_3, e_5, e_6 \rangle_0; \langle e_1 + e_5, e_2 + e_6 \rangle_1; \langle e_2 + e_3 \rangle_2, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_3 \\
&\quad \langle e_6 \rangle_4, \langle e_5, e_6 \rangle_5, \langle e_1 + e_3, e_5, e_6 \rangle_6, \langle e_1, e_3, e_5, e_6 \rangle_7; \langle e_1 + e_5, e_2, e_3, e_6 \rangle_{1\nu 2}) \\
\tilde{\Gamma}_2(1; \infty) &= (\langle e_1, e_2, e_3, e_5, e_6 \rangle_0; \langle e_1 + e_5, e_2 + e_6 \rangle_1; \langle e_3 \rangle_2, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_3 \\
&\quad \langle e_5 + e_6 \rangle_4, \langle e_5, e_6 \rangle_5, \langle e_1 + e_3, e_5, e_6 \rangle_6, \langle e_1, e_3, e_5, e_6 \rangle_7; \langle e_1 + e_5, e_2, e_3, e_6 \rangle_{1\nu 2}) \\
\tilde{\Gamma}_3(1; \infty) &= (\langle e_1, e_2, e_3, e_5, e_6 \rangle_0; \langle e_1 + e_5, e_2 + e_6 \rangle_1; \langle e_2 + e_3 \rangle_2, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_3 \\
&\quad \langle e_5 + e_6 \rangle_4, \langle e_5, e_6 \rangle_5, \langle e_1, e_5, e_6 \rangle_6, \langle e_1, e_3, e_5, e_6 \rangle_7; \langle e_1 + e_5, e_2, e_3, e_6 \rangle_{1\nu 2}) \\
\tilde{\Gamma}_4(1; \infty) &= (\langle e_1, e_2, e_4, e_5, e_6 \rangle_0; \langle e_1, e_2 + e_5 \rangle_1; \langle e_2 + e_4 \rangle_2, \langle e_1, e_2, e_4 \rangle_3 \\
&\quad \langle e_6 \rangle_4, \langle e_5, e_6 \rangle_5, \langle e_4, e_5, e_6 \rangle_6, \langle e_1 + e_2, e_4, e_5, e_6 \rangle_7; \langle e_1, e_2 - e_6, e_2 + e_5, e_2 + e_4 \rangle_{1\nu 2})
\end{aligned} \tag{D.1}$$

Assim, toda representação V' 1 \vee 3-diferencial da representação 8-diferencial de uma representação schuriana regular V (1, 2, 5) possui vetor dimensão (5; 2; 3, 1; 4, 3, 2, 1; 4) e, portanto, tem-se $\dim V' = \dim V \cdot D^*$.

Caso V seja uma representação schuriana pré-projetiva ou pré-injetiva, V necessariamente é genérica, já que o primeiro Teorema de Gabriel [Gab72b] garante que há apenas uma representação (a menos de isomorfismo) para cada vetor dimensão como argumentamos na Seção 1.4. Assim, resta-nos verificar os outros itens que garantem sua D^* -admissibilidade: $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha_0$ e $\alpha_0 \leq \alpha_i + \alpha_8$ para $i \in \{1, 2, 3\}$.

Como vimos no Apêndice B, as dimensões de representações indecomponíveis pré-projetivas e pré-injetivas podem ser obtidas das representações projetivas (respectivamente, injetivas) através da multiplicação da matriz de Coxeter (resp., do inverso da matriz de Coxeter) por seus vetores dimensão.

No decorrer deste capítulo, vamos denominar a matriz de Coxeter do poset (1, 2, 5) por $\Phi := \Phi_{(1,2,5)} = -C_{(1,2,5)}^{tr} C_{(1,2,5)}^{-1}$ com a ordem fixada $(\widehat{1, 2, 5}) = (0; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$. As-

sim,

$$\Phi = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{e} \quad \Phi^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Para $\mathcal{S} = (1, 2, 5)$, existem nove representações indecomponíveis projetivas $\{P(s)\}_{s \in \widehat{\mathcal{S}}}$ e uma injetiva $\{I(0)\}$, com as seguintes dimensões:

$$\begin{aligned} P(1) : \alpha^1 &:= (1; 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); & P(2) : \alpha^2 &:= (1; 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0); \\ P(3) : \alpha^3 &:= (1; 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); & P(4) : \alpha^4 &:= (1; 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1); \\ P(5) : \alpha^5 &:= (1; 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1); & P(6) : \alpha^6 &:= (1; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1); \\ P(7) : \alpha^7 &:= (1; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1); & P(8) : \alpha^8 &:= (1; 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1); \\ P(0) : \alpha^0 &:= (1; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); & I(0) : \tilde{\alpha}^0 &:= (1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Todas têm a dimensão do espaço vetorial associado a 8 menor ou igual a 1, portanto não estamos interessados em analisar sua D^* -admissibilidade. A seguir, iremos analisar as dimensões que se originam delas a partir da aplicação das matrizes de Coxeter, ou seja, as dimensões das representações pré-projetivas e pré-injetivas de (1, 2, 5).

Lema D.0.1. *Seja $\mathbf{V} \in \mathbf{sp}_{(1,2,5)}$ uma representação pré-projetiva tal que $\dim V_8 > 1$. Então, \mathbf{V} é D^* -admissível.*

Demonstração. Seja $\alpha = \dim \mathbf{V}$. As condições necessárias e suficientes para a D^* -admissibilidade de uma representação genérica \mathbf{V} de (1, 2, 5) são:

1. $\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha_0}$,
2. $\boxed{\alpha_0 \leq \alpha_2 + \alpha_8}$,
3. $\boxed{\alpha_0 \leq \alpha_1 + \alpha_8}$.

O produto de α por Φ nos garante que:

1. $(\Phi \alpha)_1 + (\Phi \alpha)_2 \leq (\Phi \alpha)_0 \iff \boxed{\alpha_3 + \alpha_4 \leq \alpha_0}$;
2. $(\Phi \alpha)_0 \leq (\Phi \alpha)_2 + (\Phi \alpha)_8 \iff \boxed{\alpha_0 \leq \alpha_1 + \alpha_3}$;
3. $(\Phi \alpha)_0 \leq (\Phi \alpha)_1 + (\Phi \alpha)_8 \iff \boxed{0 \leq \alpha_2}$;

Portanto, $\dim V_0 \leq \dim V_1 + \dim V_8$ para toda representação \mathbf{V} com dimensão $\Phi^i \cdot \alpha$, para qualquer $i \geq 1$.

Por outro lado, note que

$$1. (\Phi\alpha)_3 + (\Phi\alpha)_4 \leq (\Phi\alpha)_0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_1 + \alpha_5 \leq \alpha_0}$$

$$2. (\Phi\alpha)_0 \leq (\Phi\alpha)_1 + (\Phi\alpha)_3 \Leftrightarrow \boxed{0 \leq \alpha_4};$$

Portanto, $\dim V_0 \leq \dim V_2 + \dim V_8$ para toda representação \mathbf{V} com dimensão $\Phi^i \cdot d$, para qualquer $i \geq 2$ ou se $\alpha_0 \leq \alpha_1 + \alpha_3$. Resta-nos verificar as condições em que $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha_0$ ou, equivalentemente, $\alpha_1 + \alpha_6 \leq \alpha_0$.

Veja que:

$$\begin{aligned} (\Phi\alpha)_1 + (\Phi\alpha)_5 &\leq (\Phi\alpha)_0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_2 + \alpha_6 \leq \alpha_0}; \\ (\Phi\alpha)_2 + (\Phi\alpha)_6 &\leq (\Phi\alpha)_0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_7 \leq 2\alpha_0}; \\ (\Phi\alpha)_1 + (\Phi\alpha)_3 + (\Phi\alpha)_7 &\leq 2(\Phi\alpha)_0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_8 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \leq 2\alpha_0}; \\ (\Phi\alpha)_8 + (\Phi\alpha)_1 + (\Phi\alpha)_2 + (\Phi\alpha)_4 &\leq 2\alpha_0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 \leq 2\alpha_0}; \\ (\Phi\alpha)_1 + (\Phi\alpha)_2 + (\Phi\alpha)_3 + (\Phi\alpha)_5 &\leq 2(\Phi\alpha)_0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 \leq 2\alpha_0}; \\ (\Phi\alpha)_1 + (\Phi\alpha)_3 + (\Phi\alpha)_4 + (\Phi\alpha)_6 &\leq 2(\Phi\alpha)_0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_7 \leq 2\alpha_0}; \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_7 &\leq 2\alpha_0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_5 \leq \alpha_0 \text{ e } \boxed{\alpha_2 + \alpha_7 \leq \alpha_0} \\ (\Phi\alpha)_2 + (\Phi\alpha)_7 &\leq (\Phi\alpha)_0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_8 \leq 2\alpha_0}; \\ (\Phi\alpha)_1 + (\Phi\alpha)_3 + (\Phi\alpha)_8 &\leq 2(\Phi\alpha)_0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \leq \alpha_0}; \\ (\Phi\alpha)_1 + (\Phi\alpha)_2 + (\Phi\alpha)_4 &\leq (\Phi\alpha)_0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_3 + \alpha_5 \leq \alpha_0}; \\ (\Phi\alpha)_3 + (\Phi\alpha)_5 &\leq (\Phi\alpha)_0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_1 + \alpha_6 \leq \alpha_0}; \\ (\Phi\alpha)_1 + (\Phi\alpha)_6 &\leq (\Phi\alpha)_0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_2 + \alpha_7 \leq \alpha_0}. \end{aligned}$$

Como já observamos, nenhuma representação indecomponível projetiva tem dimensão do espaço relacionado ao elemento 8 maior ou que 1. O mesmo ocorre com as representações com dimensões $\Phi\alpha^i$ para $i \in \{0, \dots, 7, a\}$, como podemos observar na lista:

$$\begin{aligned} \Phi\alpha^1 &= (1; 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1) & \Phi\alpha^2 &= (2; 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1) & \Phi\alpha^3 &= (1; 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \\ \Phi\alpha^4 &= (2; 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1) & \Phi\alpha^5 &= (2; 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1) & \Phi\alpha^6 &= (2; 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\ \Phi\alpha^7 &= (1; 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) & \Phi\alpha^8 &= (2; 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1) & \Phi\alpha^0 &= (2; 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Por outro lado, as representações com dimensões $\Phi^2 \cdot P(i)$ para $i \in \{0, \dots, 7, a\}$, listadas abaixo:

$$\begin{aligned} \Phi^2\alpha^1 &= (2; 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1) & \Phi^2\alpha^2 &= (2; 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 2) & \Phi^2\alpha^3 &= (1; 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1) \\ \Phi^2\alpha^4 &= (3; 1, 1, 2, 0, 1, 1, 1, 2) & \Phi^2\alpha^5 &= (3; 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2) & \Phi^2\alpha^6 &= (2; 1, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 1) \\ \Phi^2\alpha^7 &= (1; 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1) & \Phi^2\alpha^8 &= (3; 1, 1, 2, 0, 0, 1, 1, 2) & \Phi^2\alpha^0 &= (3; 1, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 2) \end{aligned}$$

têm dimensões que respeitam todas as equações em destaque e, portanto, as equações iniciais são verdadeiras para dimensões formadas do produto dos vetores dimensão de representações projetivas com todas as potências de Φ maiores ou iguais a 2. Assim, para

toda representação \mathbf{V} indecomponível pré-projetiva de (1, 2, 5) com dimensão $\alpha = \Phi^j.P(i)$ para $i \in \{0, \dots, 7, 8\}$ e $j \geq 2$, tem-se:

1. $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha_0$,
2. $\alpha_0 \leq \alpha_2 + \alpha_8$,
3. $\alpha_0 \leq \alpha_1 + \alpha_8$;

e, portanto, \mathbf{V} é D^* -admissível. □

Lema D.0.2. *Seja $\mathbf{V} \in \text{sp}_{(1,2,5)}$ uma representação pré-injetiva tal que $\dim V_8 > 1$. Então, \mathbf{V} é D^* -admissível.*

Demonstração. Todas as dimensões de representações pré-injetivas são calculadas através do produto $\Phi^{-i}.\alpha$, onde $\alpha = (1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ é a dimensão da única representação injetiva de (1, 2, 5). Para que uma representação genérica \mathbf{V} seja D^* -admissível, ela precisa respeitar as seguintes equações:

1. $\alpha_0 \leq \alpha_2 + \alpha_8$,
2. $\alpha_0 \leq \alpha_1 + \alpha_8$,
3. $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha_0$.

Seguindo a mesma construção que o lema anterior, temos:

1. $(\Phi^{-1}\alpha)_0 \leq (\Phi^{-1}\alpha)_2 + (\Phi^{-1}\alpha)_8 \Leftrightarrow \alpha_0 \leq \alpha_1 + \alpha_7$,
2. $(\Phi^{-1}\alpha)_0 \leq (\Phi^{-1}\alpha)_1 + (\Phi^{-1}\alpha)_8 \Leftrightarrow \alpha_0 \leq \alpha_3 + \alpha_7$,
3. $(\Phi^{-1}\alpha)_1 + (\Phi^{-1}\alpha)_2 \leq (\Phi^{-1}\alpha)_0 \Leftrightarrow \alpha_8 \leq \alpha_0$.

Portanto, se \mathbf{V} é uma representação indecomponível pré-injetiva diferente de $I(0)$, então $\dim V_1 + \dim V_2 \leq \dim V_0$.

Dando sequência à análise das demais condições, temos:

1. $(\Phi^{-1}\alpha)_0 \leq (\Phi^{-1}\alpha)_1 + (\Phi^{-1}\alpha)_7 \Leftrightarrow \alpha_0 \leq \alpha_3 + \alpha_6$ que, por sua vez, implica $\alpha_0 \leq \alpha_3 + \alpha_7$ (item 2).

Assim, resta-nos verificar em que casos a desigualdade $\alpha_0 \leq \alpha_3 + \alpha_6$ é satisfeita.

$$\begin{aligned}
(\Phi^{-1}\alpha)_3 + (\Phi^{-1}\alpha)_6 &\geq (\Phi^{-1}\alpha)_0 \iff \boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 \geq \alpha_0} \\
(\Phi^{-1}\alpha)_1 + (\Phi^{-1}\alpha)_2 + (\Phi^{-1}\alpha)_5 &\geq (\Phi^{-1}\alpha)_0 \iff \boxed{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_4 \geq 2\alpha_0} \\
(\Phi^{-1}\alpha)_1 + (\Phi^{-1}\alpha)_3 + (\Phi^{-1}\alpha)_8 + (\Phi^{-1}\alpha)_4 &\geq 2(\Phi^{-1}\alpha)_0 \iff \boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_7 \geq 2\alpha_0} \\
(\Phi^{-1}\alpha)_1 + (\Phi^{-1}\alpha)_2 + (\Phi^{-1}\alpha)_3 + (\Phi^{-1}\alpha)_7 &\geq 2(\Phi^{-1}\alpha)_0 \iff \boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_8 + \alpha_6 \geq 2\alpha_0} \\
(\Phi^{-1}\alpha)_1 + (\Phi^{-1}\alpha)_2 + (\Phi^{-1}\alpha)_8 + (\Phi^{-1}\alpha)_6 &\geq 2(\Phi^{-1}\alpha)_0 \iff \boxed{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 \geq 2\alpha_0} \\
(\Phi^{-1}\alpha)_1 + (\Phi^{-1}\alpha)_3 + (\Phi^{-1}\alpha)_7 + (\Phi^{-1}\alpha)_5 &\geq 2(\Phi^{-1}\alpha)_0 \iff \boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 \geq 2\alpha_0} \\
(\Phi^{-1}\alpha)_1 + (\Phi^{-1}\alpha)_2 + (\Phi^{-1}\alpha)_3 + (\Phi^{-1}\alpha)_4 + \\
&\quad + (\Phi^{-1}\alpha)_6 \geq 2(\Phi^{-1}\alpha)_0 \iff \boxed{2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_5 \geq 3\alpha_0} \\
(\Phi^{-1}\alpha)_1 + (\Phi^{-1}\alpha)_2 + (\Phi^{-1}\alpha)_3 + (\Phi^{-1}\alpha)_4 + \\
&\quad + (\Phi^{-1}\alpha)_6 \geq 2(\Phi^{-1}\alpha)_0 \iff \boxed{2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_5 \geq 3\alpha_0} \\
2(\Phi^{-1}\alpha)_1 + (\Phi^{-1}\alpha)_2 + (\Phi^{-1}\alpha)_3 + (\Phi^{-1}\alpha)_8 + \\
&\quad + (\Phi^{-1}\alpha)_5 \geq 3(\Phi^{-1}\alpha)_0 \iff \boxed{3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_4 + \alpha_7 \geq 3\alpha_0} \\
3(\Phi^{-1}\alpha)_1 + (\Phi^{-1}\alpha)_2 + (\Phi^{-1}\alpha)_3 + (\Phi^{-1}\alpha)_8 + \\
&\quad + (\Phi^{-1}\alpha)_4 + (\Phi^{-1}\alpha)_7 \geq 3\alpha_0 \iff \alpha_1 + \alpha_7 \geq \alpha_0 \text{ e} \\
&\quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 \geq 2\alpha_0
\end{aligned}$$

Nem todas as condições destacadas são válidas para $I(0)$, cuja dimensão do espaço relativo ao elemento 8 é igual a 1. Porém, todas são válidas para a representação pré-injetiva com dimensão $\Phi^{-1}(1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = (2; 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2)$. Portanto, todas as representações pré-injetivas, com exceção de $I(0)$ são D^* -admissíveis.

□

E, finalmente, como corolário dos lemas D.0.1 e D.0.2, podemos enunciar o principal resultado deste apêndice:

Proposição D.0.3. *Seja V uma representação indecomponível (equivalentemente, schuriana) de $(1, 2, 5)$. Então, $\dim V_8 \leq 1$ ou V é D^* -admissível.*

Referências

- [ASS10] Ibrahim Assem, Daniel Simson e Andrzej Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras*. Vol. 1. New York, USA: Cambridge Univ. Press, 2010 (ver p. 100).
- [Bar12] Michael Barot. *Introduction to the representation theory of algebras*. Vol. 1. Springer Cham, 2012 (ver p. 5).
- [BGP73] Joseph H. Bernstein, Izrail M. Gel'fand e Vladimir A. Ponomarev. “Coxeter Functors And Gabriel’s Theorem”. Em: *Russian Mathematical Surveys* 28.2 (1973), pp. 17–32 (ver p. 100).
- [Bon+13] Vitalij M. Bondarenko et al. “Systems of subspaces of a unitary space”. Em: *Linear Algebra and its Applications* 438.5 (2013), pp. 2561–2573 (ver p. 2).
- [Bon83] Klaus Bongartz. “Algebras and Quadratic Forms”. Em: *Journal of the London Mathematical Society* s2-28.3 (1983), pp. 461–469 (ver p. 1).
- [Bri04] Michel Brion. *Lectures on the geometry of flag varieties*. 2004. arXiv: [math/0410240](https://arxiv.org/abs/math/0410240) (ver p. 24).
- [Car18] James B. Carrell. *Groups, Matrices, and Vector Spaces: A Group Theoretic Approach to Linear Algebra*. Springer-Verlag, New York, 2018 (ver p. 52).
- [DF73] Peter Donovan e Mary R. Freislich. *The Representation Theory of Finite Graphs and Associated Algebras*. Carleton mathematical lecture notes. Carleton University, 1973 (ver p. 18).
- [DK04] Yuriy A. Drozd e Eugene A. Kubichka. “Dimensions of finite type for representations of partially ordered sets”. Em: *Algebra and Discrete Mathematics* 3.3 (2004), pp. 21–37 (ver p. 1, 30).
- [Dro74] Yuriy A. Drozd. “Coxeter transformations and representations of partially ordered sets”. Em: *ǰFunktional. Anal. i Prilozhen.* 8.3 (1974), pp. 34–42 (ver pp. 1, 2, 22, 23, 47, 48, 100).
- [Dro80] Yuriy A. Drozd. “Tame and wild matrix problems”. Em: *Representation Theory II*. Ed. por Vlastimil Dlab e Peter Gabriel. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1980, pp. 242–258 (ver pp. 1, 7).
- [FoI2019] Claudia C. Fonseca e Kostyantyn Iusenko. “On dimension of poset variety”. Em: *Linear Algebra and its Applications* (2018) (ver pp. 2, 37).
- [FuI2018] Vyacheslav Futorny e Kostyantyn Iusenko. “Stable representations of posets”. Em: *Journal of Pure and Applied Algebra* 223.12 (2019), pp. 5251–5278 (ver pp. 2, 23, 25, 26, 32, 34, 36, 82–84, 91).
- [Gab72a] Peter Gabriel. “Représentations indécomposables des ensembles ordonnés”. Em: *Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres* 26 (1972) (ver pp. 1, 2, 26–28, 30, 49, 82, 87).

- [Gab72b] Peter Gabriel. “Unzerlegbare Darstellungen I”. Em: *Manuscripta Mathematica* 6.1 (1972), pp. 71–103 (ver pp. 1, 11, 12, 16, 22, 25, 100, 112).
- [Gab79] Peter Gabriel. “Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras”. Em: *Representation Theory I: Proceedings of the Workshop on the Present Trends in Representation Theory*. Ed. por Vlastimil Dlab e Peter Gabriel. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1979, pp. 1–71 (ver p. 1).
- [Gat14] Andreas Gathmann. *Algebraic Geometry*. Notes for a class taught at the University of Kaiserslautern 2002/2003. University of Kaiserslautern, 2014, p. 133 (ver p. 24).
- [GI09] Roman Grushevoy e Kostyantyn Iusenko. “On The Unitarization Of Linear Representations Of Primitive Partially Ordered Sets”. Em: *Modern Analysis and Applications* (2009), pp. 279–294 (ver pp. 2, 36).
- [Kac80] Victor G. Kac. “Infinite Root Systems, Representations of Graphs and Invariant Theory.” Em: *Inventiones mathematicae* 56 (1980), pp. 57–92 (ver p. 14).
- [Kac82] Victor G. Kac. “Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory II”. Em: *Journal of Algebra* 78 (1982), pp. 141–162 (ver p. 14).
- [Kin94] Alastair D. King. “Moduli of representations of finite dimensional algebras”. Em: *The Quarterly Journal of Mathematics* 45.4 (1994), pp. 515–530 (ver p. 32).
- [Kle72] Mark M. Kleiner. “Partially ordered sets of finite type”. Em: *Studies in the theory of representations* 28 (1972), pp. 32–41 (ver pp. 6, 26, 28).
- [Kle84] Mark M. Kleiner. “Schur’s lemma for partially ordered sets of finite type”. Em: *Journal of Algebra* 88.2 (1984), pp. 435–437 (ver p. 9).
- [Lad08] Sefi Ladkani. “On the periodicity of Coxeter transformations and the non-negativity of their Euler forms”. Em: *Linear Algebra and its Applications* 428.4 (2008), pp. 742–753 (ver pp. 99, 100).
- [Mas05] Sato Masahisa. “Periodic Coxeter matrices and their associated quadratic forms”. Em: *Linear Algebra and its Applications* 406 (2005), pp. 99–108 (ver pp. 100, 101).
- [MF82] David Mumford e John Fogarty. *Geometric invariant theory*. Springer-Verlag, 1982 (ver p. 32).
- [Mir71] Leon Mirsky. “A Dual of Dilworth’s Decomposition Theorem”. Em: *The American Mathematical Monthly* 78.8 (1971), pp. 876–877 (ver p. 37).
- [MS06] Yulia P. Moskaleva e Yurii S. Samoilenko. “Systems of n subspaces and representations of $*$ -algebras generated by projections”. Em: *Methods of Functional Analysis and Topology* 12.1 (2006), pp. 57–73 (ver pp. 2, 36, 84).
- [MWZ99] Peter Magyar, Jerzy Weyman e Andrei Zelevinsky. “Multiple Flag Varieties of Finite Type”. Em: *Advances in Mathematics* 141.1 (1999), pp. 97–118 (ver pp. 24, 47).
- [Naz73] Lyudmila A. Nazarova. “Representations Of Quivers Of Infinite Type”. Em: *Mathematics of the USSR-Izvestiya* 7.4 (1973), pp. 749–792 (ver pp. 11, 12).
- [Naz75] Lyudmila A. Nazarova. “Partially Ordered Sets Of Infinite Type”. Em: *Mathematics of the USSR-Izvestiya* 9.5 (1975), pp. 911–938 (ver p. 7).
- [NR72] Lyudmila A. Nazarova e Andrey V. Roiter. “Representations of the partially ordered sets”. Em: *Studies in the theory of representations* 28 (1972), pp. 5–31 (ver pp. 1, 2, 6, 11, 26–28).

REFERÊNCIAS

- [NZ77] Lyudmila A. Nazarova e Alexander G. Zavadskij. “Partially ordered sets of tame type”. Em: *Matrix Problems* (1977), pp. 122–143 (ver p. 23).
- [Ore62] Oystein Ore. *Theory of graphs*. Vol. XXXVIII. American Mathematical Society Colloquium Publications. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1962 (ver p. 27).
- [Rei08] Markus Reineke. “Moduli of Representations of Quivers”. Em: *Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics* (2008) (ver p. 32).
- [Rud97] Alexei Rudakov. “Stability for an Abelian Category”. Em: *Journal of Algebra* 197.1 (1997), pp. 231–245 (ver p. 32).
- [Sch92] Aidan Schofield. “General Representations of Quivers”. Em: *Proceedings of the London Mathematical Society* s3-65.1 (1992), pp. 46–64 (ver pp. 14, 35, 85, 91).
- [Sim09] Daniel Simson. “Incidence coalgebras of intervally finite posets, their integral quadratic forms and comodule categories”. Em: *Colloquium Mathematicum* 115.2 (2009), pp. 259–295 (ver p. 2).
- [Sim10] Daniel Simson. “Integral bilinear forms, Coxeter transformations and Coxeter polynomials of finite posets”. Em: *Linear Algebra and its Applications* 433.4 (2010), pp. 699–717 (ver pp. 2, 22, 37, 99, 100).
- [Sim92] Daniel Simson. *Linear representations of partially ordered sets and vector space categories*. Yverdon, Switzerland ; Philadelphia, Pa.: Gordon e Breach Science Publishers, 1992 (ver pp. 2, 5, 15, 16, 23, 30, 37, 83).
- [Smi16] Evgeny Smirnov. “Grassmannians, flag varieties and Gelfand–zetlin polytopes”. Em: *Recent Developments in Representation Theory* 673 (2016), pp. 179–226 (ver p. 24).
- [SY09] Yurii S. Samoilenko e Danylo Yu. Yakymenko. “On n -tuples of subspaces in linear and unitary spaces”. Em: *Methods of Functional Analysis and Topology* 15.1 (2009), pp. 48–60 (ver pp. 2, 36).
- [WI12] Thorsten Weist e Kostyantyn Iusenko. “Unitarizable Representations of Quivers”. Em: *Algebras and Representation Theory* 16.5 (2012), pp. 1349–1383 (ver p. 17).
- [Yak09] Danylo Yu. Yakymenko. “Unitarization of representations of a partially ordered set associated with a graph \widetilde{E}_6 ”. Em: *Ukrainian Mathematical Journal* 61.10 (2009), pp. 1672–1683 (ver pp. 2, 36, 84).
- [Yak10a] Danylo Yu. Yakymenko. “Unitarization of Schur representations of a partially ordered set associated with \widetilde{E}_7 ”. Em: *Ukrainian Mathematical Journal* 62.6 (2010), pp. 982–988 (ver pp. 2, 36, 84).
- [Yak10b] Danylo Yu. Yakymenko. “Unitarization of Schur representations of a poset corresponding to \widetilde{E}_8 ”. Em: *Methods of Functional Analysis and Topology* 16.3 (2010), pp. 264–270 (ver pp. 2, 18, 36, 84, 85, 89–91, 111).
- [Yuz81] Sergey Yuzvinsky. “Linear Representations of Posets, their Cohomology and a Bilinear Form”. Em: *European Journal of Combinatorics* 2.4 (1981), pp. 385–397 (ver p. 23).