Hiperfunções no espaço euclidiano e no toro N-dimensional

Antonio Victor da Silva Junior

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, fevereiro de 2017

Hiperfunções no espaço euclidiano e no toro N-dimensional

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 03/03/2017. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Pedro Tavares Paes Lopes - IME-USP
- Prof. Dr. Luis Antonio Carvalho dos Santos - UFSCar

Agradecimentos

À minha família, por tudo.

Ao Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro, pela sugestão de tema, pela orientação, por todas as aulas e seminários, pela amizade.

Ao "time": Bruno de Lessa Victor, Gabriel Cueva Candido Soares de Araújo, Nicholas Braun Rodrigues, Max Reinhold Jahnke e Luis Fernando Ragognette, por todos os seminários e pela amizade. Particularmente ao Dr. Gabriel de Araújo e ao Dr. Luis Ragognette, por tudo o que me ensinaram sobre feixes e hiperfunções, através de notas e discussões, e ao Max Jahnke, pela ajuda na parte final deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Pedro Tavares Paes Lopes e ao Prof. Dr. Luis Antonio Carvalho dos Santos, por aceitarem prontamente o convite de compor a comissão julgadora, pela leitura cuidadosa do texto e pelas sugestões e correções.

Ao Prof. Dr. Antonio de Pádua Franco Filho e à Profª. Drª. Ofélia Teresa Alas, por tudo que me ensinaram sobre Topologia Geral.

Ao IMPA, pela realização da OBMEP e por coordenar o PICME.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

Resumo

DA SILVA, A. V. **Hiperfunções no espaço euclidiano e no toro N-dimensional**. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

Apresentamos uma construção para a teoria das hiperfunções no espaço euclidiano seguindo a abordagem de André Martineau ([Mar60] e [Mar61]) baseada em funcionais analíticos e aplicando um teorema de dualidade de Jean-Pierre Serre [Ser55]. Estudamos também o teorema de divisão de hiperfunções por funções reais-analíticas, provado em [KS71]. No último capítulo, desenvolvemos alguns aspectos da teoria das hiperfunções no toro.

Palavras-chave: hiperfunções, dualidade de Serre, regularidade analítica global.

Abstract

DA SILVA, A. V. **Hyperfunctions on the Euclidean space and on the N-dimensional torus**. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

We present the hyperfunction theory on the Euclidean space following André Martineau's ([Mar60] and [Mar61]) approach based on analytic functionals and a duality theorem due to Jean-Pierre Serre [Ser55]. We also study a division theorem proved in [KS71]. In the last chapter, we develop some aspects of hyperfunction theory on the torus.

Keywords: hyperfunctions, Serre's duality, global analytic regularity.

Sumário

Lista de Símbolos

$C^{\omega}(\Omega)$	Espaço das funções reais-analíticas no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$
$\Lambda^k C^{\infty}(\Omega)$	Espaço das k-formas de classe C^{∞} no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$
$\Lambda^k \mathcal{D}'(\Omega)$	Espaço das k-correntes no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$
$\mathcal{O}(\Omega)$	Espaço das funções holomorfas no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^N$
$C^{\infty}_{(p,q)}(\Omega)$	Espaço das (p,q)-formas no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^N$
$\mathcal{O}^{(p)}(\Omega)$	Espaço das $(p,0)$-formas no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ com coeficientes holomorfos
$\mathcal{D}_{(p,q)}(\Omega)$	Espaço das (p,q)-formas com suporte compacto no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^N$
$\mathcal{D}'_{(p,q)}(\Omega)$	Espaço das (p,q)-correntes no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^N$
$\mathcal{E}'_{(p,q)}(\Omega)$	Espaço das (p,q)-correntes com suporte compacto no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^N$
$H^{(p,q)}(\Omega)$	Grupo de cohomologia de Dolbeault de bigrau (p,q) no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^N$
$\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$	Polinômios em $z_1, \ldots, z_N$ com coeficientes em $\mathbb{C}$

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Preliminares

A teoria das hiperfunções foi desenvolvida por Mikio Sato ([Sat59] e [Sat60]) a fim de construir um espaço de funções generalizadas análogo ao espaço das distribuições de Schwartz que fosse mais adequado a questões no ambiente analítico. André Martineau ([Mar60] e [Mar61]) introduziu uma nova abordagem à teoria baseada em funcionais analíticos, abordagem esta que seguiremos no presente trabalho (as referências [Hör03] e [Sch70] também desenvolvem a teoria partindo da noção de funcional analítico). As referências principais para este trabalho foram [CT94], [Tre] e [CC].

1.2 Organização do Trabalho

No capítulo 2, desenvolvemos a teoria de hiperfunções em $\mathbb{R}^N$. O capítulo está dividido do seguinte modo: a seção 2.1 contém rudimentos da teoria de feixes e cohomologia com suportes (assim como as distribuições, as hiperfunções formam um feixe sobre $\mathbb{R}^N$, mas o conteúdo desse capítulo desempenha um papel importante também na demonstração de um teorema fundamental sobre funcionais analíticos portados por compactos polinomialmente convexos); na seção 2.2, introduzimos as noções de funcional analítico e portador, noções estas que nos permitirão, em algum sentido, contornar o fato de que não existem funções analíticas não identicamente nulas com suporte compacto, e então desenvolver uma teoria de funções generalizadas naturalmente adequada ao estudo de resolubilidade e regularidade analítica; a seção 2.3.1 contém o importante teorema de dualidade devido a Serre [Ser55] que tem como consequência o teorema fundamental da sub-seção 2.3.3; na seção 2.3, demonstramos o teorema fundamental sobre funcionais analíticos portados por compactos polinomialmente convexos e mostramos que todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$ é polinomialmente convexo; na seção 2.4, é definido o conceito de hiperfunção, são verificadas algumas propriedades básicas e é demonstrado o teorema de divisão de hiperfunções por funções reais-analíticas de [KS71].

No capítulo 3, desenvolvemos a teoria das hiperfunções no toro N-dimensional $\mathbb{T}^N$. O capítulo está dividido do seguinte modo: a seção 3.1 contém a definição de hiperfunção em $\mathbb{T}^N$ e a caracterização em termos do crescimento dos coeficientes de Fourier (proposição 3.1.16); na seção 3.2, estudamos valores de fronteira de funções holomorfas, verificamos que uma função holomorfa definida em um *wedge* $\mathbb{T}^N + i\Gamma_\delta$ admite uma (única) hiperfunção como valor de fronteira e que uma condição de crescimento temperado sobre esta função holomorfa garante que seu valor de fronteira é uma distribuição e verificamos também que toda hiperfunção pode ser escrita como soma de valores de fronteira de funções holomorfas; a seção 3.3 contém uma versão modesta da noção de *suporte essencial*, devida a Sato, para uma hiperfunção μ em $\mathbb{T}^N$, aqui denotado por $\mathfrak{S}(\mu)$, e damos uma caracterização de $\mathfrak{S}(\mu)$ em termos dos coeficientes de Fourier de μ; finalizamos a seção com o teorema *edge-of-the-wedge* clássico; por fim, na seção 3.4, discutimos brevemente Hipoelipticidade Analítica Global em $\mathbb{T}^N$.

1.3 Notação

Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ um subconjunto aberto. Denotamos as coordenadas em Ω por $z = (z_1, \ldots, z_N)$. Logo $z = x + iy$, em que $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ e $z_j = x_j + iy_j$, $1 \leq j \leq N$. Com estas coordenadas denotamos:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$

$$\mathrm{d}z_j = \mathrm{d}x_j + i\mathrm{d}y_j, \quad \mathrm{d}\bar{z}_j = \mathrm{d}x_j - i\mathrm{d}y_j,$$

para $1 \leq j \leq N$.

Dados $p, q \in \{0, \ldots, N\}$, uma (p,q)-*forma diferencial* ω em Ω é uma $(p+q)$-forma diferencial em Ω de classe C^∞ que pode ser expressa por:

$$\omega = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} \omega_{IJ} \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J, \qquad (\star)$$

em que as somas acima são sobre multi-índices ordenados $I = (i_1, \ldots, i_p)$, $J = (j_1, \ldots, j_q)$ e $\mathrm{d}z_I = \mathrm{d}z_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_{i_p}$, $\mathrm{d}\bar{z}_J = \mathrm{d}\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{j_q}$, $\omega_{IJ} \in C^\infty(\Omega)$. Analogamente, uma (p,q)-*corrente* ω em Ω é uma corrente que pode ser expressa pela fórmula $(\star)$ com $\omega_{IJ} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para todos os multi-índices ordenados I, J. O espaço das (p,q)-formas diferenciais em Ω será denotado por $C^\infty_{(p,q)}(\Omega)$ e o espaço das (p,q)-correntes em Ω será denotado por $\mathcal{D}'_{(p,q)}(\Omega)$. Uma (p,q)-forma ou (p,q)-corrente ω tem suporte compacto se, e somente se, cada ω_{IJ} em $(\star)$ tem suporte compacto. O espaço das (p,q)-formas diferenciais em Ω que têm suporte compacto será denotado por $\mathcal{D}_{(p,q)}(\Omega)$ e o espaço das (p,q)-correntes em Ω que têm suporte compacto será denotado por $\mathcal{E}'_{(p,q)}(\Omega)$.
O operador $\bar{\partial}$ dado pela expressão

$$\bar{\partial}\omega = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \omega_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} \mathrm{d}\bar{z}_j \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J,$$

define complexos de operadores diferenciais:

$$C^\infty_{(p,0)}(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} C^\infty_{(p,1)}(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} C^\infty_{(p,N)}(\Omega) \longrightarrow 0,$$

$$\mathcal{D}'_{(p,0)}(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{D}'_{(p,1)}(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{D}'_{(p,N)}(\Omega) \longrightarrow 0,$$

$$\mathcal{D}_{(p,0)}(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{D}_{(p,1)}(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{D}_{(p,N)}(\Omega) \longrightarrow 0,$$

$$\mathcal{E}'_{(p,0)}(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}'_{(p,1)}(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}'_{(p,N)}(\Omega) \longrightarrow 0.$$

O *grupo de cohomologia de Dolbeault* de Ω de bigrau (p,q) é o grupo de cohomologia de grau $q > 0$ do primeiro complexo acima e é denotado por $H^{(p,q)}(\Omega)$, ou seja:

$$H^{(p,q)}(\Omega) = \frac{\operatorname{Ker}\left[\bar{\partial} : C^\infty_{(p,q)}(\Omega) \longrightarrow C^\infty_{(p,q+1)}(\Omega)\right]}{\operatorname{Ran}\left[\bar{\partial} : C^\infty_{(p,q-1)}(\Omega) \longrightarrow C^\infty_{(p,q)}(\Omega)\right]}.$$

Denotamos por $\mathcal{O}(\Omega)$ o *espaço das funções holomorfas* em Ω. Fazendo a identificação $C^\infty(\Omega) = C^\infty_{(0,0)}(\Omega)$, temos $\mathcal{O}(\Omega) = \operatorname{Ker}\left[\bar{\partial} : C^\infty_{(0,0)}(\Omega) \longrightarrow C^\infty_{(0,1)}(\Omega)\right]$ e denotamos por $\mathcal{O}^{(p)}(\Omega)$ o *espaço das* $(p,0)$-*formas holomorfas em* Ω, isto é, as formas $\sum_{|I|=p} \omega_I \mathrm{d}z_I$ com $\omega_I \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Capítulo 2

Hiperfunções no espaço euclidiano

2.1 Feixes e cohomologia

O objetivo desta seção é apresentar a terminologia e as noções mais básicas da teoria de feixes.

2.1.1 Teoria de feixes

2.1.1 Definição. Seja X um espaço topológico. Um *pré-feixe* $(\mathfrak{B}, \mathcal{F}, \rho)$ de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais sobre X consiste de:

1. Uma base de abertos $\mathfrak{B}$ para a topologia de X;
2. Para cada $U \in \mathfrak{B}$, um $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathcal{F}(U)$;
3. Para cada $U, V \in \mathfrak{B}$ com $V \subset U$, uma aplicação $\mathbb{C}$-linear

   $$\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V),$$

   denominada *restrição de U a V*, tal que:

   (a) Para todo $U \in \mathfrak{B}$ vale $\rho_U^U = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(U)}$;

   (b) Para cada $U, V, W \in \mathfrak{B}$ com $W \subset V \subset U$ vale $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$.

   Frequentemente denotaremos o pré-feixe $(\mathfrak{B}, \mathcal{F}, \rho)$ simplesmente por $\mathcal{F}$ deixando subentendidas a base fixada e as aplicações de restrição.

2.1.2 Exemplo. São exemplos de pré-feixes:

(a) Para $X \subset \mathbb{R}^N$ aberto e para $k \in \mathbb{Z}_+$ e $1 \leq p \leq \infty$:
C^k, C^ω, L^p, $\Lambda^k C^\infty$, $\mathcal{D}'$, $\Lambda^k \mathcal{D}'$;

(b) Para $X \subset \mathbb{C}^N$ aberto e $p, q \in \mathbb{Z}_+$:
$\mathcal{O}$, $C^\infty_{(p,q)}$, $\mathcal{O}^{(p)}$, $\mathcal{D}'_{(p,q)}$.

com as restrições usuais.

2.1.3 Definição. Seja X um espaço topológico e seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais sobre X. Dizemos que o pré-feixe $\mathcal{F}$ é um *feixe* se para qualquer família $\{U_i\}_{i\in I}$ de abertos de $\mathfrak{B}$ tal que $U := \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathfrak{B}$ as seguintes condições são satisfeitas:

1. Se $s \in \mathcal{F}(U)$ é tal que $\rho_{U_i}^U(s) = 0 \in \mathcal{F}(U_i)$, $\forall i \in I$, então $s = 0 \in \mathcal{F}(U)$;
2. Se $\{s_i\}_{i\in I}$, com $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $\forall i \in I$, é uma família tal que para toda coleção $\{U_{ij} \in \mathfrak{B} : i, j \in I\}$, com $U_{ij} \subset U_i \cap U_j$, $\forall i, j \in I$, vale $\rho_{U_{ij}}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_{ij}}^{U_j}(s_j)$, então existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$.

2.1.4 Observação. Se a base $\mathfrak{B}$ for fechada por interseções finitas, então a condição (2.) na definição de feixe é equivalente a:

2'. Se $\{s_i\}_{i\in I}$, com $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, é uma família tal que para $U_{ij} := U_i \cap U_j$ vale $\rho^{U_i}_{U_{ij}}(s_i) = \rho^{U_j}_{U_{ij}}(s_j)$, então existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho^{U}_{U_i}(s) = s_i$.

Com efeito, suponha que vale a condição (2.) e seja $\{s_i\}_{i\in I}$, com $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $\forall i \in I$, uma família tal que para $U_{ij} := U_i \cap U_j$ vale $\rho^{U_i}_{U_{ij}}(s_i) = \rho^{U_j}_{U_{ij}}(s_j)$. Então dada uma coleção $\{V_{ij} \in \mathfrak{B} : i, j \in I\}$, com $V_{ij} \subset U_i \cap U_j$, $\forall i, j \in I$, tem-se

$$\rho^{U_i}_{V_{ij}}(s_i) = \rho^{U_{ij}}_{V_{ij}} \circ \rho^{U_i}_{U_{ij}}(s_i) = \rho^{U_{ij}}_{V_{ij}} \circ \rho^{U_j}_{U_{ij}}(s_j) = \rho^{U_j}_{V_{ij}}(s_j),$$

logo, aplicando (2.), existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho^{U}_{U_i}(s) = s_i$, e portanto vale a condição (2'.). Reciprocamente, suponha que vale a condição (2'.) e seja $\{s_i\}_{i\in I}$, com $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $\forall i \in I$, uma família tal que para toda coleção $\{U_{ij} \in \mathfrak{B} : i, j \in I\}$, com $U_{ij} \subset U_i \cap U_j$, $\forall i, j \in I$, vale $\rho^{U_i}_{U_{ij}}(s_i) = \rho^{U_j}_{U_{ij}}(s_j)$. Como $\mathfrak{B}$ é fechada por interseções finitas, podemos escolher $U_{ij} := U_i \cap U_j \in \mathcal{B}$ e aplicar (2'.) para concluir que existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho^{U}_{U_i}(s) = s_i$, e portanto vale a condição (2.).

2.1.5 Exemplo. São exemplos de feixes:

(a) Para $X \subset \mathbb{R}^N$ aberto e para $k \in \mathbb{Z}_+$ e $1 \le p \le \infty$:
C^k, C^ω, $\Lambda^k C^\infty$, $\mathcal{D}'$, $\Lambda^k \mathcal{D}'$;

(b) Para $X \subset \mathbb{C}^N$ aberto e $p, q \in \mathbb{Z}_+$:
$\mathcal{O}$, $C^\infty_{(p,q)}$, $\mathcal{O}^{(p)}$, $\mathcal{D}'_{(p,q)}$.

Note que L^p não é um feixe, $1 \le p \le \infty$, pois não verifica a condição (2.) (uma função que localmente pertence a L^p não necessariamente pertence a L^p).

2.1.6 Definição. Seja X um espaço topológico e seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais sobre X.

1. Para cada $x \in X$ denotamos por $\mathfrak{V}(x) := \{U \in \mathfrak{B} : U \ni x\}$ a família das vizinhanças abertas de x em $\mathfrak{B}$ e definimos $\mathcal{F}(x) := \bigcup_{U\in\mathfrak{V}(x)} \mathcal{F}(U)$;

2. Dados $U, V \in \mathfrak{V}(x)$ e $f \in \mathcal{F}(U)$, $g \in \mathcal{F}(V)$, dizemos que f e g *possuem o mesmo germe em* x se existir $W \in \mathfrak{V}(x)$, com $W \subset U \cap V$, tal que $\rho^U_W(f) = \rho^V_W(g)$;

   Isto define sobre $\mathcal{F}(x)$ uma relação de equivalência denotada por $\sim_x$;

3. Definimos o *caule de* $\mathcal{F}$ *em* $x \in X$ como sendo o quociente $\mathscr{F}_x := \mathcal{F}(x)/\sim_x$ munido da estrutura de $\mathbb{C}$-espaço vetorial naturalmente induzida pelos espaços $\mathcal{F}(U)$, $U \in \mathfrak{V}(x)$, em que a soma é denotada por $+_x$ e o produto por escalar é denotado por $\cdot_x$;

4. Denotamos por $\gamma_x : \mathcal{F}(x) \to \mathscr{F}_x$ a projeção natural.

2.1.7 Observação. Na definição 2.1.6, para $x \in X$ a estrutura de $\mathbb{C}$-espaço vetorial em $\mathscr{F}_x$ naturalmente induzida pelos espaços $\mathcal{F}(U)$, $U \in \mathfrak{V}(x)$, é a seguinte:
Dados $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathscr{F}_x$, tome representantes, ou seja, tome $U, V \in \mathfrak{V}(x)$ e $f \in \mathcal{F}(U)$, $g \in \mathcal{F}(V)$, tais que $\mathfrak{f} = \gamma_x(f)$ e $\mathfrak{g} = \gamma_x(g)$. Existe $W \in \mathfrak{V}(x)$ tal que $W \subset U \cap V$, pois $\mathfrak{B}$ é uma base, definimos então

$$\mathfrak{f} +_x \mathfrak{g} := \gamma_x\left(\rho^U_W(f) +_W \rho^V_W(g)\right),$$

$$\lambda \cdot_x \mathfrak{f} := \gamma_x(\lambda \cdot_U f), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

em que $+_W$ denota a soma no espaço $\mathcal{F}(W)$ e $\cdot_U$ denota o produto por escalar em $\mathcal{F}(U)$. Demonstra-se que estas operações estão bem definidas, *i.e.* não dependem dos representantes nem do aberto W e tornam $\mathscr{F}_x$ um $\mathbb{C}$-espaço vetorial.

2.1.8 Definição. Seja X um espaço topológico e seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais sobre X.

1. Definimos
$$\mathscr{F} := \bigcup_{x\in X} \mathscr{F}_x,$$
e $\pi : \mathscr{F} \to X$ a projeção dada por $\pi(\mathfrak{f}) = x \Leftrightarrow \mathfrak{f} \in \mathscr{F}_x$;

2. Sobre $\mathscr{F}$ consideraremos a seguinte topologia: um subconjunto $\Omega \subset \mathscr{F}$ é aberto se, e somente se, para todo $U \in \mathfrak{B}$ e para todo $f \in \mathcal{F}(U)$ o conjunto $\{x \in U : \gamma_x(f) \in \Omega\}$ é aberto em X;

3. O par $(\mathscr{F}, \pi)$, em que $\mathscr{F}$ está munido da topologia acima, é denominado *espaço étalé* do pré-feixe $\mathcal{F}$.

   Às vezes, por abuso de notação, diremos que $\mathscr{F}$ é o espaço *étalé* de $\mathcal{F}$.

2.1.9 Observação. Verifiquemos que na definição 2.1.8 o item (2.) define de fato uma topologia em $\mathscr{F}$.

(A) Dados $U \in \mathfrak{B}$ e $f \in \mathcal{F}(U)$ os conjuntos $\{x \in U : \gamma_x(f) \in \varnothing\} = \varnothing$ e $\{x \in U : \gamma_x(f) \in \mathscr{F}\} = U$ são abertos de X, logo $\varnothing$ e $\mathscr{F}$ são abertos de $\mathscr{F}$ segundo (2.);

(B) Sejam $\Omega, \Omega' \subset \mathscr{F}$ abertos segundo (2.). Dados $U \in \mathfrak{B}$ e $f \in \mathcal{F}(U)$ temos $\{x \in U : \gamma_x(f) \in \Omega\cap\Omega'\} = \{x \in U : \gamma_x(f) \in \Omega\} \cap \{x \in U : \gamma_x(f) \in \Omega'\}$, logo $\{x \in U : \gamma_x(f) \in \Omega\cap\Omega'\}$ é aberto em X e portanto $\Omega \cap \Omega'$ é aberto em $\mathscr{F}$ segundo (2.);

(C) Seja $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ uma família de abertos de $\mathscr{F}$ segundo (2.). Dado $U \in \mathfrak{B}$ e $f \in \mathcal{F}(U)$ temos $\left\{x \in U : \gamma_x(f) \in \bigcup_{i\in I} \Omega_i\right\} = \bigcup_{i\in I} \{x \in U : \gamma_x(f) \in \Omega_i\}$, logo $\left\{x \in U : \gamma_x(f) \in \bigcup_{i\in I} \Omega_i\right\}$ é aberto em X e portanto $\bigcup_{i\in I} \Omega_i$ é aberto em $\mathscr{F}$ segundo (2.).

De (A), (B) e (C) segue que (2.) define de fato uma topologia em $\mathscr{F}$.

2.1.10 Proposição. *Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{F}$ um pré-feixe de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais sobre X e $\mathscr{F}$ seu espaço étalé. A aplicação $\pi : \mathscr{F} \to X$ é contínua, aberta, sobrejetora e é um homeomorfismo local.*

Demonstração. Dado $A \subset X$ aberto, se $U \in \mathfrak{B}$ e $f \in \mathcal{F}(U)$, então
$$\{x \in U \;:\; \gamma_x(f) \in \pi^{-1}(A)\} = \{x \in U \;:\; \pi(\gamma_x(f)) \in A\} = U \cap A$$
é aberto em X, logo $\pi^{-1}(A)$ é aberto em $\mathscr{F}$ e portanto π é contínua.
Dado $\Omega \subset \mathscr{F}$ aberto temos:
$$\pi(\Omega) = \{\pi(\mathfrak{f}) : \mathfrak{f} \in \Omega\} = \bigcup_{U\in\mathfrak{B}} \bigcup_{f\in\mathcal{F}(U)} \{x \in U : \gamma_x(f) \in \Omega\},$$
logo $\pi(\Omega)$ é aberto em X e portanto π é aberta.
Dado $x \in X$, tomando $0_x \in \mathscr{F}_x$ o elemento nulo de $\mathscr{F}_x$ temos $\pi(0_x) = x$ e portanto π é sobrejetora.
Por fim, dado $\mathfrak{f} \in \mathscr{F}$, existe $x \in X$ tal que $\mathfrak{f} \in \mathscr{F}_x$. Sejam $U \in \mathfrak{V}(x)$ e $f \in \mathcal{F}(U)$ tais que $\mathfrak{f} = \gamma_x(f)$. Seja $\Omega := \{\gamma_y(f) \;:\; y \in U\}$. Temos $\mathfrak{f} \in \Omega$, mostremos que $\Omega \subset \mathscr{F}$ é aberto. Se $V \in \mathfrak{B}$ e $g \in \mathcal{F}(V)$ então
$$B := \{z \in V : \gamma_z(g) \in \Omega\} = \{z \in V \cap U : \gamma_z(g) = \gamma_z(f)\}$$
é aberto em X pois se $z \in B$, então existe $W \in \mathfrak{V}(z)$, com $W \subset V \cap U$, tal que $\rho^V_W(g) = \rho^U_W(f)$. Logo $\gamma_w(g) = \gamma_w(\rho^V_W(g)) = \gamma_w(\rho^U_W(f)) = \gamma_w(f)$ para todo $w \in W$, e portanto $z \in W \subset B$. Como $\pi|_\Omega$ é uma bijeção entre Ω e U segue que π é um homeomorfismo local. □

2.1.11 Definição. Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{F}$ um pré-feixe de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais sobre X e $\mathscr{F}$ seu espaço *étalé*.

1. Dado $U \subset X$, uma aplicação $\sigma : U \to \mathscr{F}$ é dita uma *seção* de $\mathscr{F}$ se
$$\pi(\sigma(x)) = x, \quad x \in U;$$
2. O conjunto das seções contínuas de $\mathscr{F}$ em U será denotado por $\Gamma(U, \mathscr{F})$ e possui uma estrutura de $\mathbb{C}$-espaço vetorial:
$$(\sigma + \sigma')(x) := \sigma(x) +_x \sigma'(x)\ , \quad x \in U, \quad \sigma, \sigma' \in \Gamma(U, \mathscr{F}),$$
$$(\lambda \cdot \sigma)(x) := \lambda \cdot_x \sigma(x)\ , \quad \lambda \in \mathbb{C},\ x \in U,\ \sigma \in \Gamma(U, \mathscr{F}).$$

2.1.12 Observação. No item (2.) da definição 2.1.11, segue diretamente da definição de seção que $\sigma + \sigma'$ e $\lambda \cdot \sigma$ são seções, verifiquemos que são contínuas. Seja $x \in X$. Seja $\Omega \subset \mathscr{F}$ aberto tal que $\sigma(x) +_x \sigma'(x) \in \Omega$. Então quaisquer que sejam $V \in \mathfrak{B}$ e $f \in \mathcal{F}(V)$ o conjunto $B(f) := \{y \in V : \gamma_y(f) \in \Omega\}$ é aberto em X. Sejam $W, W' \in \mathfrak{V}(x)$, $g \in \mathcal{F}(W)$ e $g' \in \mathcal{F}(W')$ tais que $\sigma(x) = \gamma_x(g)$ e $\sigma'(x) = \gamma_x(g')$. Tome $V \in \mathfrak{V}(x)$, com $V \subset W \cap W'$, e $f \in \mathcal{F}(V)$ dada por $f := \rho_V^W(g) +_V \rho_V^{W'}(g')$, em que $+_V$ denota a soma em $\mathcal{F}(V)$. Temos $x \in B(f)$ e $(\sigma + \sigma')(B(f)) \subset \Omega$ pois dado $y \in B(f)$ temos
$$(\sigma + \sigma')(y) = \sigma(y) +_y \sigma'(y) = \gamma_y\left(\rho_V^W(g) +_V \rho_V^{W'}(g')\right) = \gamma_y(f) \in \Omega.$$
Logo $\sigma + \sigma'$ é contínua. Analogamente demonstra-se que $\lambda \cdot \sigma$ é contínua.

2.1.13 Observação. No contexto da definição 2.1.11 tome $\mathfrak{T}$ a coleção de todos os abertos de X e
$$\cdot\,|_V^U : \Gamma(U, \mathscr{F}) \to \Gamma(V, \mathscr{F})\ , \quad U, V \in \mathfrak{T},\ \ V \subset U,$$
a restrição a V de seções contínuas em U, então $(\mathfrak{T}, \Gamma(\ \cdot\ , \mathscr{F}),\ \cdot|)$ é um pré-feixe de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais pois as condições sobre as restrições da definição 2.1.1 neste caso são triviais. Ademais, as condições (1.) e (2.) da definição 2.1.3 também são triviais neste caso, logo $\Gamma(\ \cdot\ , \mathscr{F})$ é um feixe.

2.1.14 Proposição. *Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{F}$ um pré-feixe de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais sobre X e $\mathscr{F}$ seu espaço étalé. Seja $U \subset X$ um subconjunto aberto. Se $\sigma, \sigma' \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ e $\sigma(x) = \sigma'(x)$ para algum $x \in U$, então existe $V \subset U$ vizinhança aberta de x tal que $\sigma(y) = \sigma'(y)$ para todo $y \in V$.*

Demonstração. Com efeito, pela proposição 2.1.10 existe um aberto $\Omega \subset \mathscr{F}$ que contém $\sigma(x)$ tal que $\pi(\Omega) \subset U \subset X$ é aberto e $\pi|_\Omega : \Omega \to \pi(\Omega)$ é homeomorfismo. Tome então $V \subset \pi(\Omega)$ vizinhança aberta de x tal que $\sigma(V) \subset \Omega$ e $\sigma'(V) \subset \Omega$ por continuidade. Para $y \in V$ temos $\pi(\sigma(y)) = y = \pi(\sigma'(y))$ logo $\sigma(y) = \sigma'(y)$, pois π é injetora em Ω. $\square$

2.1.15 Teorema. *Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{F}$ um feixe de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais sobre X e $\mathscr{F}$ seu espaço étalé. Então existem isomorfismos $\mathbb{C}$-lineares*
$$\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \Gamma(U, \mathscr{F})\ , \quad U \in \mathfrak{B},$$
que fazem comutar todos os diagramas
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_V^U} & \mathcal{F}(V) \\ \big\downarrow \varphi_U & & \big\downarrow \varphi_V \\ \Gamma(U, \mathscr{F}) & \xrightarrow{\cdot\,|_V^U} & \Gamma(V, \mathscr{F}) \end{array}$$
em que $U, V \in \mathfrak{B}$ e $V \subset U$.

Demonstração. Dados $U \in \mathfrak{B}$ e $s \in \mathcal{F}(U)$, defina $\varphi_U(s) \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ pondo

$$[\varphi_U(s)](x) := \gamma_x(s)\ , \quad x \in U.$$

A seção $\varphi_U(s)$ é de fato contínua. Com efeito, se $x \in U$ e $\Omega \subset \mathscr{F}$ é uma vizinhança aberta de $[\varphi_U(s)](x)$ então

$$[\varphi_U(s)]^{-1}(\Omega) = \{y \in U : [\varphi_U(s)](y) \in \Omega\} = \{y \in U : \gamma_y(s) \in \Omega\}$$

é aberto em U.

A aplicação φ_U é linear. Com efeito, dados $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos:

$$\begin{aligned}[\varphi_U(s +_U \lambda s')](x) &= \gamma_x(\rho^U_U(s) +_U \lambda\rho^U_U(s')) \\ &= \gamma_x(s) +_x \lambda\gamma_x(s') \\ &= [\varphi_U(s)](x) +_x \lambda[\varphi_U(s')](x)\ , \qquad x \in U,\end{aligned}$$

logo $\varphi_U(s +_U \lambda s') = \varphi_U(s) + \lambda\varphi_U(s')$.

A aplicação φ_U é injetora. De fato, se $s \in \mathcal{F}(U)$ e $\varphi_U(s) = 0$, então para cada $x \in U$ temos $\gamma_x(s) = 0 \in \mathscr{F}_x$. Isto significa que para cada $x \in U$ existe $U_x \in \mathfrak{B}$, $U_x \subset U$, tal que $\rho^U_{U_x}(s) = 0 \in \mathcal{F}(U_x)$. Como a família $\{U_x\}_{x\in U}$ cobre U a condição 1 na definição de feixe garante $s = 0 \in \mathcal{F}(U)$.

A aplicação φ_U é sobrejetora. De fato, seja $\sigma \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ e para cada $x \in U$ sejam $V_x \in \mathfrak{B}$ e $s_x \in \mathcal{F}(V_x)$ tais que $\sigma(x) = \gamma_x(s_x)$, ou seja, s_x é um representante de $\sigma(x) \in \mathscr{F}_x$. Então $[\varphi_{V_x}(s_x)](x) = \sigma(x)$, logo pela proposição 2.1.14 existe $U_x \in \mathfrak{B}$, $U_x \subset V_x$, vizinhança aberta de x, tal que $[\varphi_{V_x}(s_x)](z) = \sigma(z)$ para todo $z \in U_x$. Dada uma coleção $\{U_{xy} \in \mathfrak{B} : x, y \in U\}$, com $U_{xy} \subset U_x \cap U_y$, $\forall x, y \in U$, fixemos arbitrariamente $x, y \in U$. Para cada $z \in U_{xy}$ temos:

$$\begin{aligned}\gamma_z\left(\rho^{U_x}_{U_{xy}}(s_x)\right) &= \gamma_z(s_x) = [\varphi_{V_x}(s_x)](z) = \sigma(z) = \\ &= [\varphi_{V_y}(s_y)](z) = \gamma_z(s_y) = \gamma_z\left(\rho^{U_y}_{U_{xy}}(s_y)\right)\end{aligned}$$

então para cada $z \in U_{xy}$ existe $W_z \in \mathfrak{B}$ uma vizinhança aberta de z, com $W_z \subset U_{xy}$, tal que

$$\rho^{U_{xy}}_{W_z}\left(\rho^{U_x}_{U_{xy}}(s_x) - \rho^{U_y}_{U_{xy}}(s_y)\right) = 0 \in \mathcal{F}(W_z)$$

e como $\{W_z\}_{z\in U_{xy}}$ cobre U_{xy} a condição 1 na definição de feixe garante $\rho^{U_x}_{U_{xy}}(s_x) = \rho^{U_y}_{U_{xy}}(s_y)$. Como $x, y \in U$ são arbitrários e a coleção $\{U_{xy}\}$ acima também é arbitrária a condição 2 na definição de feixe garante que existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho^U_{U_x}(s) = s_x$. Logo

$$[\varphi_U(s)](x) = \gamma_x(s) = \gamma_x\left(\rho^U_{U_x}(s)\right) = \gamma_x(s_x) = \sigma(x)\ , \quad x \in U,$$

Portanto $\varphi_U(s) = \sigma$.

Por fim, verifiquemos que todos os diagramas comutam. Dados $U, V \in \mathfrak{B}$, $V \subset U$, e dado $s \in \mathcal{F}(U)$, temos:

$$\left[\varphi_V\left(\rho^U_V(s)\right)\right](x) = \gamma_x\left(\rho^U_V(s)\right) = \gamma_x(s) = [\varphi_U(s)](x) = [\varphi_U(s)]|^U_V(x),\ x \in V$$

logo $\varphi_V\left(\rho^U_V(s)\right) = \varphi_U(s)|^U_V$, $s \in \mathcal{F}(U)$, e portanto $\varphi_V \circ \rho^U_V = \cdot\,|^U_V \circ \varphi_U$. □

2.1.16 Observação. O teorema 2.1.15, levando em conta a observação 2.1.13, afirma que se $\mathcal{F}$ é um feixe, então $(\mathfrak{B}, \mathcal{F}, \rho)$ e $(\mathfrak{B}, \Gamma(\,\cdot\,, \mathscr{F}), \cdot\,|)$ são indistinguíveis. Como $\Gamma(\,\cdot\,, \mathscr{F})$ está definido para todos os subconjuntos de X, isto nos permite estender a definição de $\mathcal{F}$ pondo $\mathcal{F}(U) := \Gamma(U, \mathscr{F})$, quando U é um aberto que não pertence a $\mathfrak{B}$. Além disso, podemos estender a definição de ρ pondo, para $U, V \subset X$ abertos com $V \subset U$:

$$\rho_V^U := \begin{cases} \cdot\,|_V^U \circ \varphi_U, & \text{se } U \in \mathfrak{B} \text{ e } V \notin \mathfrak{B}, \\ \cdot\,|_V^U, & \text{se } U \notin \mathfrak{B} \text{ e } V \notin \mathfrak{B}, \\ \varphi_V^{-1} \circ \cdot\,|_V^U, & \text{se } U \notin \mathfrak{B} \text{ e } V \in \mathfrak{B}. \end{cases}$$

obtendo assim um feixe sobre X cuja base é formada por todos os abertos de X e que coincide com o feixe original quando nos restringimos à base original.

Por conta do teorema 2.1.15, às vezes diremos que $\mathscr{F}$ é o feixe dos germes de $\mathcal{F}$ ou mesmo nos referiremos a $\mathcal{F}$ ou $\mathscr{F}$ indistintamente.

2.1.2 Cohomologia com suportes

Nesta seção discutiremos as noções necessárias para enunciar e interpretar o teorema 2.1.26. O leitor interessado na demonstração deste teorema pode encontrar um tratamento completo do assunto em [God58] (Ch. II, §4. *Cohomologie à valeurs dans un faisceau*).

2.1.17 Definição. Seja X um espaço de Hausdorff paracompacto. Uma *família de suportes* em X é uma família Φ formada por subconjuntos fechados de X tal que:

1. Se $F \in \Phi$ e $G \subset F$ é fechado, então $G \in \Phi$;
2. Se $F, G \in \Phi$, então $F \cup G \in \Phi$;
3. Se $F \in \Phi$, então existe $G \in \Phi$ tal que $F \subset \operatorname{int} G$.

2.1.18 Exemplo. Seja X um espaço de Hausdorff paracompacto.

(a) Como X é normal, segue que $\Phi := \{F \subset X : F \text{ é fechado}\}$ é uma família de suportes em X;

(b) Se X é localmente compacto, então $\Phi := \{F \subset X : F \text{ é compacto}\}$ é uma família de suportes em X.

2.1.19 Definição. Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{F}$ um feixe de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais sobre X e $\mathscr{F}$ seu espaço *étalé*.

1. Se $\sigma \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ definimos o *suporte* de σ como sendo o conjunto:

$$\operatorname{supp} \sigma := \{x \in X : \sigma(x) \neq 0_x \in \mathscr{F}_x\};$$

2. Se X é de Hausdorff paracompacto e Φ é uma família de suportes em X definimos:

$$\Gamma_\Phi(X, \mathscr{F}) := \{\sigma \in \Gamma(X, \mathscr{F}) : \operatorname{supp} \sigma \in \Phi\}.$$

Quando Φ é como no exemplo 2.1.18 (a) temos $\Gamma_\Phi(X, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$ (veja a observação abaixo), e quando Φ é como no exemplo 2.1.18 (b) denotamos $\Gamma_\Phi(X, \mathscr{F}) = \Gamma_c(X, \mathscr{F})$.

2.1.20 Observação. Na definição 2.1.19 (1.), o suporte de σ é sempre um fechado de X, com efeito, pela proposição 2.1.14, se $\sigma(x) = 0_x$ para algum $x \in X$ então σ se anula em alguma vizinhança de x, portanto o complementar de $\operatorname{supp} \sigma$ é aberto.

2.1.21 Exemplo. Seja $X \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e consideremos sobre X o feixe dos germes de funções de classe C^∞, que será denotado por $\mathscr{C}^\infty$. Dado $U \subset X$ aberto e $f \in C^\infty(U)$, podemos aplicar o teorema 2.1.15 e considerar a seção $\varphi_U(f) \in \Gamma(U, \mathscr{C}^\infty)$. Como $x \in U \setminus \operatorname{supp} f$ se, e somente se, f se anula em uma vizinhança de x, ou seja se, e somente se, o germe de f em x é zero, temos $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} \varphi_U(f)$. Portanto, podemos identificar $\Gamma_c(U, \mathscr{C}^\infty)$ com $C_c^\infty(U)$.

2.1.22 Definição. Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{F}$ um feixe de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais sobre X e $\mathscr{F}$ seu espaço *étalé*.

1. Dizemos que $\mathscr{F}$ é *flácido* se todas as restrições

$$\cdot|_U^X : \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(U, \mathscr{F}), \quad U \subset X \text{ aberto},$$

são sobrejetoras;

2. Se X é de Hausdorff paracompacto e Φ é uma família se suportes em X, dizemos que $\mathscr{F}$ é Φ-*soft* se todas as restrições

$$\cdot|_F^X : \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(F, \mathscr{F}), \quad F \in \Phi,$$

são sobrejetoras.

Quando Φ é como no exemplo 2.1.18 (a) e $\mathcal{F}$ é Φ-*soft* dizemos então que $\mathcal{F}$ é *soft*.

2.1.23 Definição. Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{F}$ um feixe de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais sobre X e $\mathscr{F}$ seu espaço *étalé*. Uma *resolução* para $\mathscr{F}$ é uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\ j\ } \mathscr{G}^{(0)} \xrightarrow{\ d_0\ } \mathscr{G}^{(1)} \xrightarrow{\ d_1\ } \cdots$$

Isto quer dizer que $\left(\mathscr{G}^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de feixes de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais sobre X e $(d_n)_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de aplicações contínuas tal que $d_n\left(\mathscr{G}_x^{(n)}\right) \subset \mathscr{G}_x^{(n+1)}$, $d_n\big|_{\mathscr{G}_x^{(n)}}$ é $\mathbb{C}$-linear, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, $\forall x \in X$, j é contínua tal que $j(\mathscr{F}_x) \subset \mathscr{G}_x^{(0)}$, $j|_{\mathscr{F}_x}$ é $\mathbb{C}$-linear, $\forall x \in X$, e

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}_x \xrightarrow{\ j\ } \mathscr{G}_x^{(0)} \xrightarrow{\ d_0\ } \mathscr{G}_x^{(1)} \xrightarrow{\ d_1\ } \cdots$$

é uma sequência exata[1] para cada $x \in X$.

De modo geral, dados $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ feixes sobre X um *homomorfismo de feixes* é uma aplicação contínua $h : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ tal que $h(\mathscr{F}_x) \subset \mathscr{G}_x$ e $h|_{\mathscr{F}_x} : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ é $\mathbb{C}$-linear para todo $x \in X$.

2.1.24 Definição. Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{F}$ um feixe de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais sobre X e $\mathscr{F}$ seu espaço *étalé*.

1. Se $U \subset X$ é aberto definimos

$$\mathcal{C}^0(U, \mathscr{F}) := \{\sigma : U \to \mathscr{F} \mid \sigma \text{ é uma seção}\},$$

com soma e multiplicação por escalar definidos pelas mesmas expressões que definem a soma e a multiplicação por escalar em $\Gamma(U, \mathscr{F})$;

Munido das restrições usuais para funções segue diretamente da definição que $\mathcal{C}^0(\ \cdot\ , \mathscr{F})$ é um feixe de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais sobre X. Este feixe é denominado o *feixe das seções não necessariamente contínuas* de $\mathscr{F}$, e seu espaço *étalé* é denotado por $\mathscr{C}^0(X, \mathscr{F})$.

As inclusões

$$i_U : \Gamma(U, \mathscr{F}) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(U, \mathscr{F}), \quad U \subset X \text{ aberto},$$

induzem[2] uma aplicação injetora

$$j : \mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{C}^0(X, \mathscr{F}),$$

que permite identificar $\mathscr{F}$ com um sub-espaço *étalé* de $\mathscr{C}^0(X, \mathscr{F})$;

[1] *i.e.*, $\operatorname{Ker} j = 0$, $j(\mathscr{F}_x) = \operatorname{Ker}\left[d_0 : \mathscr{G}_x^{(0)} \to \mathscr{G}_x^{(1)}\right]$ e $d_n\left(\mathscr{G}_x^{(n)}\right) = \operatorname{Ker}\left[d_{n+1} : \mathscr{G}_x^{(n+1)} \to \mathscr{G}_x^{(n+2)}\right]$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, $\forall x \in X$.

[2] *i.e.*, para $x \in X$, $\mathfrak{f} \in \mathscr{F}_x$, $U \subset X$ aberto, $f \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ tal que $\gamma_x(f) = \mathfrak{f}$, definimos $j(\mathfrak{f}) := \gamma_x(i_U(f))$ (estamos tacitamente aplicando o teorema 2.1.15).

2. Definimos[3]

$$\mathscr{Z}^1(X,\mathscr{F}) := \frac{\mathscr{C}^0(X,\mathscr{F})}{\mathscr{F}},$$

$$\mathscr{C}^1(X,\mathscr{F}) := \mathscr{C}^0(X,\mathscr{Z}^1(X,\mathscr{F}));$$

3. Indutivamente, para $n \geq 2$, definimos:

$$\mathscr{Z}^n(X,\mathscr{F}) := \frac{\mathscr{C}^{n-1}(X,\mathscr{F})}{\mathscr{Z}^{n-1}(X,\mathscr{F})},$$

$$\mathscr{C}^n(X,\mathscr{F}) := \mathscr{C}^0(X,\mathscr{Z}^n(X,\mathscr{F}));$$

   Observe que $\mathscr{C}^n(X,\mathscr{F})$ é flácido para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Definimos $d_n : \mathscr{C}^n(X,\mathscr{F}) \to \mathscr{C}^{n+1}(X,\mathscr{F})$, $n \in \mathbb{N}$, como sendo a composição

$$\mathscr{C}^n(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{Z}^{n+1}(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{C}^{n+1}(X,\mathscr{F})$$

   da projeção natural com a inclusão natural.

   A *resolução canônica de Godement* para $\mathscr{F}$ é a resolução

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\ j\ } \mathscr{C}^0(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\ d_0\ } \mathscr{C}^1(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\ d_1\ } \cdots$$

5. Se X é de Hausdorff paracompacto e Φ é uma família de suportes considere o complexo induzido pela resolução de Godement

$$0 \longrightarrow \Gamma_\Phi(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma_\Phi(X,\mathscr{C}^0(X,\mathscr{F})) \longrightarrow \Gamma_\Phi(X,\mathscr{C}^1(X,\mathscr{F})) \longrightarrow \cdots$$

   Definimos

$$H^0_\Phi(X,\mathscr{F}) := \Gamma_\Phi(X,\mathscr{F}),$$

$$\begin{aligned} H^q_\Phi(X,\mathscr{F}) &:= H^q(\Gamma_\Phi(X,\mathscr{C}^*(X,\mathscr{F}))) \\ &:= \frac{\mathrm{Ker}\ [\Gamma_\Phi(X,\mathscr{C}^q(X,\mathscr{F})) \longrightarrow \Gamma_\Phi(X,\mathscr{C}^{q+1}(X,\mathscr{F}))]}{\mathrm{Ran}\ [\Gamma_\Phi(X,\mathscr{C}^{q-1}(X,\mathscr{F})) \longrightarrow \Gamma_\Phi(X,\mathscr{C}^q(X,\mathscr{F}))]}, \quad q \geq 1, \end{aligned}$$

   os *espaços de cohomologia de X com valores em $\mathscr{F}$ e suporte em Φ.*

   Quando Φ é como nos exemplos 2.1.18 (a) ou (b) denotamos os espaços de cohomologia por $H^q(X,\mathscr{F})$ e $H^q_c(X,\mathscr{F})$, $q \geq 0$, respectivamente.

2.1.25 Definição. Sejam X um espaço de Hausdorff paracompacto, $\mathcal{F}$ um feixe de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais sobre X e $\mathscr{F}$ seu espaço *étalé*. Seja Φ uma família de suportes em X. Dizemos que $\mathscr{F}$ é Φ-*acíclico* se $H^q_\Phi(X,\mathscr{F}) = 0$ para $q \geq 1$.

2.1.26 Teorema. *Sejam X um espaço de Hausdorff paracompacto, $\mathcal{F}$ um feixe de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais sobre X e $\mathscr{F}$ seu espaço étalé. Seja Φ uma família de suportes em X.*

1. Se $\mathscr{F}$ é Φ-soft, então $\mathscr{F}$ é Φ-acíclico;

[3]Se $(\mathfrak{B},\mathcal{R},\rho)$ e $(\mathfrak{B},\mathcal{S},\sigma)$ são feixes de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais sobre um espaço topológico X tais que para todo $U \in \mathfrak{B}$, $\mathcal{S}(U)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{R}(U)$, e tais que $\sigma^U_V(s) = \rho^U_V(s)$, $\forall s \in \mathcal{S}(U)$, $\forall U,V \in \mathfrak{B}$, com $V \subset U$, então se definimos $\mathcal{Q}(U) := \mathcal{R}(U)/\mathcal{S}(U)$, $\forall U \in \mathfrak{B}$, e $\kappa^U_V : \mathcal{Q}(U) \to \mathcal{Q}(V)$, $\kappa^U_V\big([r]_{\mathcal{S}(U)}\big) := [\rho^U_V(r)]_{\mathcal{S}(V)}$, $\forall r \in \mathcal{R}(U)$, $\forall U,V \in \mathfrak{B}$, com $V \subset U$, temos um pré-feixe $(\mathfrak{B},\mathcal{Q},\kappa)$ com espaço *étalé* $\mathscr{Q}$. Define-se o feixe quociente entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ como sendo feixe $\Gamma(\,\cdot\,,\mathscr{Q})$. O feixe quociente também é denotado por $\mathscr{R}/\mathscr{S}$.

2. *Se a sequência*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{j} \mathscr{G}^{(0)} \xrightarrow{d_0} \mathscr{G}^{(1)} \xrightarrow{d_1} \cdots$$

é uma resolução de $\mathscr{F}$ *por feixes* Φ*-acíclicos, então*

$$H^q_\Phi(X, \mathscr{F}) = H^q\Big(\Gamma_\Phi\Big(X, \mathscr{G}^{(*)}\Big)\Big), \quad q \geq 1.$$

2.1.27 Aplicação. Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto e $p, q \in \{0, \ldots, N\}$. Seja $\mathscr{C}^\infty_{(p,q)}$ o feixe dos germes de (p, q)-formas em Ω e seja $\mathscr{D}'_{(p,q)}$ o feixe dos germes de (p, q)-correntes em Ω. Ambos estes feixes são *soft*. Com efeito uma (p, q)-forma ou um (p, q)-corrente ω definida em um subconjunto fechado $F \subset \Omega$ se estende a uma vizinhança aberta de F e com uma função de corte podemos obter uma extensão de ω para Ω.

Seja $\mathscr{O}^{(p)}$ o feixe dos germes das formas holomorfas de grau p. O Lema de Dolbeault-Grothendieck (Thm. 2.3.3, em [Hör90] ou Thm. 3, Ch. I, Sec. D, em [GR65]) diz que as sequências[4]

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}^{(p)} \xrightarrow{j} \mathscr{C}^\infty_{(p,0)} \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{C}^\infty_{(p,1)} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{C}^\infty_{(p,N)} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}^{(p)} \xrightarrow{j} \mathscr{D}'_{(p,0)} \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{D}'_{(p,1)} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{D}'_{(p,N)} \longrightarrow 0$$

são exatas, ou seja, são resoluções de $\mathscr{O}^{(p)}$ por feixes acíclicos. Portanto, pelo teorema 2.1.26 temos:

$$H^{(p,q)}(\Omega) = H^q\Big(\Omega, \mathscr{O}^{(p)}\Big) = H^q\Big(C^\infty_{(p,*)}(\Omega)\Big) = H^q\Big(\mathcal{D}'_{(p,*)}(\Omega)\Big)$$

e

$$H^{(p,q)}_c(\Omega) := H^q_c\Big(\Omega, \mathscr{O}^{(p)}\Big) = H^q\big(\mathcal{D}_{(p,*)}(\Omega)\big) = H^q\Big(\mathcal{E}'_{(p,*)}(\Omega)\Big).$$

2.2 Funcionais Analíticos

Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ um subconjunto aberto. Denotaremos por $\mathcal{O}(\Omega)$ a álgebra (sobre $\mathbb{C}$) das funções $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfas munida da topologia da convergência uniforme sobre compactos. Assim, a família de todos os conjuntos $\mathcal{V}_{K,r}$, com $K \subset \Omega$ compacto e $r > 0$, dados por

$$\mathcal{V}_{K,r} := \Big\{ f \in \mathcal{O}(\Omega) : \max_K |f| < r \Big\}$$

é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em $\mathcal{O}(\Omega)$.

2.2.1 Definição. Dado $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto, definimos:

1. O *espaço dos funcionais analíticos em* Ω é o dual topológico de $\mathcal{O}(\Omega)$ e será denotado por $\mathcal{O}'(\Omega)$;

2. Se $\mu \in \mathcal{O}'(\Omega)$ e $K \subset \Omega$ é compacto, dizemos que μ é *portado por* K ou que K é um *portador* para μ se para todo aberto ω com $K \subset \omega \Subset \Omega$ existir $C_\omega > 0$ tal que

$$|\mu(f)| \leq C_\omega \sup_\omega |f|, \quad f \in \mathcal{O}(\Omega).$$

Às vezes denotaremos o valor de $\mu \in \mathcal{O}'(\Omega)$ em $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ por $\langle \mu, f \rangle$.

2.2.2 Proposição. *Para todo* $\mu \in \mathcal{O}'(\Omega)$ *existe* $K \subset \Omega$ *tal que* μ *é portado por* K.

[4] as aplicações j são as aplicações induzidas pelas inclusões $\mathcal{O}^{(p)}(U) \hookrightarrow C^\infty_{(p,0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{D}'_{(p,0)}(U)$, com $U \subset \Omega$ aberto.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como μ é contínuo em $0 \in \mathcal{O}(\Omega)$, existem $K \subset \Omega$ compacto e $r > 0$ tais que se $h \in \mathcal{V}_{K,r}$, então $|\mu(h)| < \varepsilon$. Qualquer que seja $\eta > 0$ temos $rf/(\max_K |f| + \eta) \in \mathcal{V}_{K,r}$, $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Logo

$$|\mu(f)| < \frac{\varepsilon}{r}\left(\max_K |f| + \eta\right), \quad f \in \mathcal{O}(\Omega)$$

Fazendo $\eta \to 0$ segue a tese. □

2.2.3 Observação. Dado $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto, $\mathcal{O}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $C(\Omega)$, o espaço das funções contínuas em Ω. Portanto, pelo teorema de Hahn-Banach, se $\mu \in \mathcal{O}'(\Omega)$, então existe ν uma medida de Radon com suporte compacto em Ω tal que

$$\langle \mu, h \rangle = \int_\Omega h(z) d\nu(z), \quad h \in \mathcal{O}(\Omega).$$

2.2.4 Definição. Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto e $K \subset \Omega$ compacto.

1. Sejam $U, V \subset \Omega$ abertos que contenham K. Dizemos que $f \in \mathcal{O}(U)$ e $g \in \mathcal{O}(V)$ *possuem o mesmo germe em* K se existe $W \subset U \cap V$ aberto, com $K \subset W$, tal que $f(z) = g(z)$, $\forall z \in W$.

   Isto define uma relação de equivalência sobre o conjunto $\bigcup_{U \supset K} \mathcal{O}(U)$, com a união sobre todos os subconjuntos abertos $U \subset \Omega$ que contenham K.

2. Denotaremos por $\mathcal{O}(K)$ o *espaço dos germes em* K *de funções holomorfas definidas em vizinhanças abertas de* K, ou seja, o conjunto das classes de equivalência da relação acima munido da topologia e da estrutura de álgebra sobre $\mathbb{C}$ naturalmente induzidas pelos espaços $\mathcal{O}(U)$.

3. Dados $U, V \subset \Omega$ abertos com $K \subset V \subset U$, denotaremos por

   $$\gamma_V^U : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$$

   a restrição a V de funções holomorfas em U e por

   $$\gamma_K^U : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(K)$$

   a projeção de $\mathcal{O}(U)$ no quociente.

4. Denotaremos o dual topológico de $\mathcal{O}(K)$ por $\mathcal{O}'(K)$.

2.2.5 Observação. Na definição 2.2.4, a topologia de $\mathcal{O}(K)$ é a topologia de limite indutivo dos espaços $\mathcal{O}(U)$, $U \subset \Omega$ aberto que contém K. Esta topologia coincide com a topologia de limite indutivo da sequência de espaços de Banach

$$\mathcal{O}_\infty(U_n) := \left\{ f \in \mathcal{O}(U_n) : \sup_{U_n} |f| < \infty \right\}$$

em que $U_n := \{z \in \Omega : d(z, K) < 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $d(z, K) := \min_{y \in K} |z - y|$, com as restrições $\mathcal{O}_\infty(U_m) \to \mathcal{O}_\infty(U_n)$, $m \leq n$. Ou seja, $\mathcal{O}(K)$ é um espaço DFS e $\mathcal{O}'(K)$ é um espaço FS. Logo $\mathcal{O}(K)$ e $\mathcal{O}'(K)$ são espaços de Montel e portanto reflexivos. O leitor interessado em uma introdução aos espaços FS e DFS pode consultar [Mor93] (*Appendix* A. *Linear Topological Spaces*).

2.2.6 Observação. As propriedades da topologia de $\mathcal{O}(K)$ que mais usaremos são as seguintes:

1. Seja F um espaço de Fréchet. Uma aplicação linear

   $$\mu : \mathcal{O}(K) \to F$$

   é contínua se, e somente se, para cada $U \subset \Omega$ aberto que contém K a aplicação

   $$\mu \circ \gamma_K^U : \mathcal{O}(U) \to F$$

é contínua;

2. Uma sequência $(\mathfrak{f}_n)_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{O}(K)$ converge para $\mathfrak{f} \in \mathcal{O}(K)$ se, e somente se, existem $U \subset \Omega$ aberto que contém K, uma sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{O}(U)$ e $f \in \mathcal{O}(U)$, tais que $\gamma_K^U(f) = \mathfrak{f}$, $\gamma_K^U(f_n) = \mathfrak{f}_n$, $n \in \mathbb{N}$, e $f_n \longrightarrow f$ em $\mathcal{O}(U)$.

Tomando $F := \mathbb{C}$, podemos reconhecer os elementos de $\mathcal{O}'(K)$ pela propriedade (1.).

2.2.7 Definição. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ um subconjunto aberto. Um subconjunto compacto $K \subset \Omega$ é dito um *compacto de Runge em* Ω se para toda vizinhança aberta $U \subset \Omega$ de K existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de K tal que para todo $h \in \mathcal{O}(U)$ existe uma sequência $h_n \in \mathcal{O}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $h_n|_V \longrightarrow h|_V$ em $\mathcal{O}(V)$. Quando $\Omega = \mathbb{C}^N$ dizemos simplesmente que K é *Runge*.

2.2.8 Observação. Consideremos a projeção $\gamma := \gamma_K^\Omega : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(K)$. Pelo[5] teorema de Hahn-Banach, a aplicação transposta

$$^t\gamma : \mathcal{O}'(K) \to \mathcal{O}'(\Omega)$$

é uma aplicação injetora se, e somente se, a projeção γ tem imagem densa. Ou seja, se, e somente se, K é um compacto de Runge em Ω, em vista da propriedade (2.) acima.

2.2.9 Proposição. *Seja $K \subset \Omega$ um compacto de Runge em Ω. Então*

$$^t\gamma\left(\mathcal{O}'(K)\right) = \left\{\lambda \in \mathcal{O}'(\Omega) : \lambda \text{ é portado por } K\right\}.$$

Demonstração. Seja $\mu \in \mathcal{O}'(K)$. Mostraremos que $^t\gamma(\mu)$ é portado por K. Seja $\omega \subset \Omega$ aberto que contém K. Pela observação 2.2.6 temos $\mu \circ \gamma_K^\omega$ é contínua, ou seja, $\mu \circ \gamma_K^\omega \in \mathcal{O}'(\omega)$. Pela proposição 2.2.2 existe $Q \subset \omega$ compacto portador de $\mu \circ \gamma_K^\omega$, logo existe $C_\omega > 0$ tal que $|\mu \circ \gamma_K^\omega(g)| \leq C_\omega \sup_\omega |g|$, $g \in \mathcal{O}(\omega)$. Como

$$\langle ^t\gamma(\mu),\ \cdot\ \rangle = \langle \mu, \gamma(\cdot)\rangle = \mu \circ \gamma = \mu \circ \gamma_K^\omega \circ \gamma_\omega^\Omega$$

temos:

$$|\langle ^t\gamma(\mu), h\rangle| = \left|\mu \circ \gamma_K^\omega\left(\gamma_\omega^\Omega(h)\right)\right| \leq C_\omega \sup_\omega \left|\gamma_\omega^\Omega(h)\right| = C_\omega \sup_\omega |h|\,, \quad h \in \mathcal{O}(\Omega)$$

e portanto $^t\gamma(\mu)$ é portado por K.

Reciprocamente, seja $\lambda \in \mathcal{O}'(\Omega)$ um funcional analítico portado por K. Dado $\mathfrak{f} \in \mathcal{O}(K)$, sejam $U \subset \Omega$ aberto que contém K e $f \in \mathcal{O}(U)$ tais que $\mathfrak{f} = \gamma_K^U(f)$. Como K é Runge em Ω, existe uma sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{O}(\Omega)$ e existe $V \subset U$ aberto que contém K tais que $f_n|_V \longrightarrow f|_V$ em $\mathcal{O}(V)$. Seja $\omega \Subset V$ vizinhança aberta de K. Como λ é portado por K existe $C_\omega > 0$ tal que

$$|\lambda(h)| \leq C_\omega \sup_\omega |h|\,, \quad h \in \mathcal{O}(\Omega),$$

logo a sequência de números complexos $(\lambda(f_n))_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy:

$$|\lambda(f_n) - \lambda(f_m)| \leq C_\omega \sup_\omega |f_n - f_m| \leq C_\omega \left(\max_{\overline{\omega}} |f_n - f| + \max_{\overline{\omega}} |f - f_m|\right) \longrightarrow 0$$

Definimos então

$$\mu(\mathfrak{f}) := \lim_{n\to\infty} \lambda(f_n).$$

Verificaremos que $\mu(\mathfrak{f})$ não depende do representante f que tomamos acima. De fato, se $U' \subset \Omega$ é aberto que contém K e $f' \in \mathcal{O}(U')$ é tal que $\mathfrak{f} = \gamma_K^{U'}(f')$, então tome $(f'_n)_{n=1}^\infty$, V', ω' análogos para f' aos que foram tomados para f. Escolha uma vizinhança aberta $\omega_* \subset \omega \cap \omega'$ de K tal que $f|_{\omega_*} = f'|_{\omega_*}$. Temos $K \subset \omega_* \Subset V \cap V'$. Como λ é portado por K, existe $C_{\omega_*} > 0$ tal que

$$|\lambda(h)| \leq C_{\omega_*} \sup_{\omega_*} |h|, \quad h \in \mathcal{O}(\Omega),$$

[5] e pela reflexividade de todos os espaços em questão.

então temos:

$$|\lambda(f_n) - \lambda(f_n')| \leq C_{\omega_*} \sup_{\omega_*} |f_n - f_n'| \leq C_{\omega_*} \left(\max_{\overline{\omega}_*} |f_n - f| + \max_{\overline{\omega}_*} |f' - f_n'| \right) \longrightarrow 0$$

e portanto $\lim \lambda(f_n) = \lim \lambda(f_n')$. Fica assim definida uma aplicação linear

$$\mu : \mathcal{O}(K) \to \mathbb{C}.$$

Mostraremos que μ é contínua. Dado $U \subset \Omega$ aberto que contém K, considere o funcional linear $\mu \circ \gamma_K^U : \mathcal{O}(U) \to \mathbb{C}$. Seja $\varepsilon > 0$. Como K é Runge em Ω, tome $V \subset U$ aberto que contém K como na definição 2.2.7. Seja $\omega \Subset V$ tal que $K \subset \omega$. Como λ é portado por K, existe $C_\omega > 0$ tal que $|\lambda(h)| \leq C_\omega \sup_\omega |h|$, $h \in \mathcal{O}(\Omega)$. Tome $0 < \delta < \varepsilon / C_\omega$. Se $g \in \mathcal{O}(U)$ é tal que

$$\max_{\overline{\omega}} |g| < \delta,$$

tome $g_n \in \mathcal{O}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $g_n|_V \longrightarrow g|_V$ em $\mathcal{O}(V)$. Temos:

$$\left|\mu \circ \gamma_K^U(g)\right| = \lim_{n\to\infty} |\lambda(g_n)| \leq C_\omega \lim_{n\to\infty} \left(\max_{\overline{\omega}} |g_n - g| + \max_{\overline{\omega}} |g| \right) < \varepsilon$$

Ou seja, a vizinhança $\mathcal{V}_{\overline{\omega},\delta}$ de $0 \in \mathcal{O}(U)$ é aplicada por $\mu \circ \gamma_K^U$ na bola $|z| < \varepsilon$ e portanto $\mu \circ \gamma_K^U$ é contínua. Como $U \subset \Omega$, aberto que contém K, é arbitrário, temos $\mu \in \mathcal{O}'(K)$ pela observação 2.2.6. Por fim, temos

$$\langle {}^t\gamma(\mu), h \rangle = \lim_{n\to\infty} \lambda(h) = \lambda(h) \ , \quad h \in \mathcal{O}(\Omega)$$

Ou seja, ${}^t\gamma(\mu) = \lambda$. □

2.2.10 Observação. De acordo com a proposição acima e as observações precedentes podemos identificar (usando a aplicação ${}^t\gamma$) o espaço $\mathcal{O}'(K)$ com o subespaço de $\mathcal{O}'(\Omega)$ dos funcionais analíticos portados por K sempre que $K \subset \Omega$ é compacto de Runge em Ω. Portanto, feita esta identificação, se $K_1, K_2 \subset \Omega$ são compactos de Runge em Ω e $K_1 \subset K_2$, então $\mathcal{O}'(K_1) \subset \mathcal{O}'(K_2)$, pois todo funcional analítico portado por K_1 com maior razão é portado por K_2. Ademais, se Ω é conexo e $K_1 \neq \varnothing$, então $\mathcal{O}'(K_1)$ é denso em $\mathcal{O}'(K_2)$ pela proposição seguinte.

2.2.11 Proposição. *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ um aberto conexo e $K \subset \Omega$, $K \neq \varnothing$, um compacto de Runge em Ω. Então $\mathcal{O}'(K)$ é denso em $\mathcal{O}'(\Omega)$.*

Demonstração. A aplicação $\gamma : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(K)$ é injetora. Com efeito, se $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $\gamma(h) = 0$, *i.e.* o germe de h em K é zero, então h se anula em uma vizinhança de K. Por continuação analítica e conexidade h se anula em Ω pois $K \neq \varnothing$. Aplicando o teorema de Hahn-Banach segue a tese. □

2.2.12 Definição. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ um aberto e $\mu \in \mathcal{O}'(\Omega)$.

1. Dado $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ definimos $f\mu : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathbb{C}$ pondo

$$f\mu(g) := \mu(fg), \quad g \in \mathcal{O}(\Omega);$$

2. Dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ definimos $\partial_z^\alpha \mu : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathbb{C}$ pondo

$$\partial_z^\alpha \mu(g) := (-1)^{|\alpha|} \mu(\partial_z^\alpha g), \quad g \in \mathcal{O}(\Omega).$$

2.2.13 Observação. Pela proposição 2.2.2 existe $K \subset \Omega$ um compacto portador de μ, logo dados $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, para toda vizinhança aberta $\omega \Subset \Omega$ de K existe $C_\omega > 0$ tal que:

$$|f\mu(g)| \leq C_\omega \sup_\omega |fg| \leq \left(C_\omega \sup_\omega |f| \right) \sup_\omega |g|, \quad g \in \mathcal{O}(\Omega),$$

e

$$|\partial_z^\alpha \mu(g)| \le C_{\omega'} \sup_{\omega'} |\partial_z^\alpha g| \le (C_{\omega'} C_\alpha) \sup_{\omega} |g|, \quad g \in \mathcal{O}(\Omega),$$

em que ω' é uma vizinhança qualquer de K tal que $\omega' \Subset \omega$ e $C_\alpha > 0$ é uma constante obtida aplicando, por exemplo, Thm 2.2.3 em [Hör90] ou estimativas de Cauchy. Logo podemos concluir $f\mu, \partial_z^\alpha \mu \in \mathcal{O}'(\Omega)$. Ademais, quando $K \subset \Omega$ é um compacto Runge em Ω temos que a definição 2.2.12 induz aplicações:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}'(K) &\longrightarrow \mathcal{O}'(K) \qquad\qquad (\dagger) \\ (f, \mu) &\mapsto f\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}'(K) &\longrightarrow \mathcal{O}'(K) \\ \mu &\mapsto \partial_z^\alpha \mu \end{aligned}$$

e a aplicação em ($\dagger$), pela propriedade de Runge, induz uma aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(K) \times \mathcal{O}'(K) &\longrightarrow \mathcal{O}'(K) \\ (\mathfrak{f}, \mu) &\mapsto \mathfrak{f}\mu \end{aligned}$$

definida do seguinte modo: dado $\mathfrak{f} \in \mathcal{O}(K)$ sejam $U \subset \Omega$ vizinhança aberta de K e $f \in \mathcal{O}(U)$ tais que $\mathfrak{f} = \gamma_K^U(f)$. Sejam $V \subset U$ aberto que contém K e $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $f_n|_V \longrightarrow f|_V$ em $\mathcal{O}(V)$. Dado $\omega \Subset V$ vizinhança aberta de K, existe $C_\omega > 0$ tal que:

$$|f_n\mu(g) - f_m\mu(g)| = |\mu((f_n - f_m)g)| \le C_\omega \sup_\omega |f_n - f_m||g| \longrightarrow 0, \quad g \in \mathcal{O}(\Omega),$$

portanto podemos definir

$$\mathfrak{f}\mu(g) := \lim_{n\to\infty} f_n\mu(g), \quad g \in \mathcal{O}(\Omega),$$

Como

$$|\mathfrak{f}\mu(g)| \le C_\omega \lim_{n\to\infty} \left(\sup_\omega |f_n - f| + \sup_\omega |f| \right) \sup_\omega |g|, \quad g \in \mathcal{O}(\Omega),$$

temos $\mathfrak{f}\mu \in \mathcal{O}'(K)$.

Ademais, quando $K_1 \subset K_2 \subset \Omega$ são compactos Runge em Ω, então dados $\mu \in \mathcal{O}'(K_1) \subset \mathcal{O}'(K_2)$, $U \subset \Omega$ uma vizinhança aberta de K_2 e $f \in \mathcal{O}(U)$, temos $\mathfrak{f}_1\mu = \mathfrak{f}_2\mu$, em que $\mathfrak{f}_j = \gamma_{K_j}^U(f)$, $j = 1, 2$.

2.3 Convexidade Polinomial

2.3.1 Dualidade de Serre

2.3.1 Digressão. (Correntes) Enunciaremos alguns fatos sobre correntes, o leitor interessado pode consultar [dR84] para maiores detalhes. Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto e $p, q, p', q' \in \{0, \ldots, N\}$. Dados $\omega \in C^\infty_{(p,q)}(\Omega)$ e $T \in \mathcal{E}'_{(p',q')}(\Omega)$ podemos escrever

$$\omega = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} \omega_{IJ} \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J,$$

$$T = \sum_{|K|=p'} \sum_{|L|=q'} T_{KL} \mathrm{d}z_K \wedge \mathrm{d}\bar{z}_L,$$

em que $\omega_{IJ} \in C^\infty(\Omega)$, $T_{KL} \in \mathcal{E}'(\Omega)$ para todos os multi-índices ordenados I, J, K, L. Para $0 \le p + p' + q + q' \le 2N$ o produto $T \wedge \omega$ é dado por

$$\langle T \wedge \omega, \varphi\rangle := \langle T, \omega \wedge \varphi\rangle, \quad \varphi \in \Lambda^{2N-p-p'-q-q'} C^\infty(\Omega),$$

e para $0 \le p' + q' < 2N$ a derivada exterior $\mathrm{d}T$ é dada por

$$\langle \mathrm{d}T, \varphi\rangle := (-1)^{p'+q'+1}\langle T, \mathrm{d}\varphi\rangle, \quad \varphi \in \Lambda^{2N-p'-q'-1} C^\infty(\Omega),$$

e podemos definir analogamente ∂T e $\bar\partial T$. Temos

$$\mathrm{d}(T \wedge \omega) = \mathrm{d}T \wedge \omega + (-1)^{p'+q'} T \wedge \mathrm{d}\omega,$$

e fórmulas análogas para ∂ e $\bar\partial$. Escrevendo T em coordenadas obtemos a fórmula para $\bar\partial$ da seção 1.3. Quando $p + p' = q + q' = N$ temos $T \wedge \omega \in \Lambda^{2N}\mathcal{E}'(\Omega)$, e podemos definir:

$$\int_\Omega T \wedge \omega := \langle T \wedge \omega, 1\rangle.$$

Por fim a aplicação

$$\mathcal{E}'_{(N-p,N-q)}(\Omega) \ni T \mapsto L_T := \int_\Omega T \wedge \cdot \in C^\infty_{(p,q)}(\Omega)^*$$

é um isomorfismo.

2.3.2 Proposição. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto e $p, q \in \{0, \ldots, N\}$. O diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}'_{(N-p,N-q)}(\Omega) \arrow[r, "(-1)^{p+q+1}\bar\partial"] \arrow[d, "L"] & \mathcal{E}'_{(N-p,N-q+1)}(\Omega) \arrow[d, "L"] \\
C^\infty_{(p,q)}(\Omega)^* \arrow[r, "{}^t\bar\partial"] & C^\infty_{(p,q-1)}(\Omega)^*
\end{tikzcd}$$

comuta.

Demonstração. Quaisquer que sejam $T \in \mathcal{E}'_{(N-p,N-q)}(\Omega)$ e $\omega \in C^\infty_{(p,q-1)}(\Omega)$ temos $T \wedge \omega \in \mathcal{E}'_{(N,N-1)}(\Omega)$ logo:

$$\mathrm{d}(T \wedge \omega) = \bar\partial(T \wedge \omega) = \bar\partial T \wedge \omega + (-1)^{p+q} T \wedge \bar\partial\omega,$$

portanto

$${}^t\bar\partial L_T(\omega) = L_T(\bar\partial\omega) = \int_\Omega T \wedge \bar\partial\omega = \int_\Omega (-1)^{p+q+1}\bar\partial T \wedge \omega = L_{(-1)^{p+q+1}\bar\partial T}(\omega)$$

pois $\int_\Omega \mathrm{d}(T \wedge \omega) = 0$ pelo teorema de Stokes. □

No que segue aplicaremos o seguinte teorema devido a Banach. Uma demonstração pode ser encontrada em [CT94] (Thm. I.6A.1).

2.3.3 Teorema. *Sejam E e F espaços de Fréchet e $u : E \to F$ uma aplicação linear e contínua. São equivalentes:*

(i) $u(E)$ é fechado em F;

(ii) ${}^tu(F^*)$ é fracamente fechado em E^*;

(iii) $(\text{Ker } u)^0 = {}^t u(F^*)$.

2.3.4 Lema. *Sejam E, F e G espaços de Fréchet e*

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$$

aplicações lineares e contínuas. Se $v \circ u = 0$, $u(E)$ é fechado em F e $v(F)$ é fechado em G, então $\text{Ker } v/u(E)$ *é um espaço de Fréchet e*

$$\frac{\text{Ker}\, {}^t u}{{}^t v(G^*)} \simeq \left(\frac{\text{Ker } v}{u(E)}\right)^*$$

Demonstração. Para cada $f \in \text{Ker } {}^t u$ defina $f_\flat$ como sendo a composição

$$\text{Ker}\, v \hookrightarrow F \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

ou seja, $f_\flat = f|_{\text{Ker}\, v}$. Temos $f_\flat(u(x)) = f \circ u(x) = [{}^t u(f)](x) = 0$, para $x \in E$. Logo $f_\flat$ induz uma aplicação

$$f_\sharp : \frac{\text{Ker } v}{u(E)} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Seja $\tau : \text{Ker } {}^t u \to (\text{Ker } v/u(E))^*$ a aplicação dada por $\tau(f) = f_\sharp$.

Se $f \in {}^t v(G^*) \subset \text{Ker}\, {}^t u$, então existe $g \in G^*$ tal que $f = {}^t v(g) = g \circ v$ logo $\tau(f) = (g \circ v)_\sharp = 0$. Reciprocamente, aplicando o teorema 2.3.3, temos que se $f \in \text{Ker}\, {}^t u$ e $f_\sharp = 0$ então $f_\flat \in (\text{Ker}\, v)^0 = {}^t v(G^*)$, portanto $\text{Ker}\, \tau = {}^t v(G^*)$ e τ induz uma aplicação linear injetora

$$\tilde{\tau} : \frac{\text{Ker}\, {}^t u}{{}^t v(G^*)} \longrightarrow \left(\frac{\text{Ker}\, v}{u(E)}\right)^*$$

Mostremos que $\tilde{\tau}$ é sobrejetora. Dado $h \in (\text{Ker}\, v/u(E))^*$ seja $h_1 : \text{Ker}\, v \to \mathbb{C}$ dada por $h_1(y) = h(y + u(E))$. Pelo teorema de Hahn-Banach, podemos estender h_1 a uma aplicação $H \in F^*$. Temos

$$\left[{}^t u(H)\right](x) = H(u(x)) = h_1(u(x)) = h(0) = 0, \quad x \in E,$$

logo $H \in \text{Ker}\, {}^t u$ e temos $H_\flat = h_1$ e $H_\sharp = h$. Portanto $\tilde{\tau}$ é sobrejetora. □

2.3.5 Teorema. (Serre) *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto. Suponha que as aplicações*

$$C^\infty_{(p,q-1)}(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} C^\infty_{(p,q)}(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} C^\infty_{(p,q+1)}(\Omega)$$

tenham imagem fechada. Então $H^{(p,q)}(\Omega)$ é um espaço de Fréchet e

$$H^{(p,q)}(\Omega)^* = H^{N-q}\Big(\mathcal{E}'_{(N-p,*)}(\Omega)\Big) = H_c^{(N-p,N-q)}(\Omega).$$

Demonstração. Basta aplicar o lema 2.3.4 e a proposição 2.3.2. □

2.3.6 Aplicação. Como primeira aplicação do Teorema de Dualidade de Serre, calculemos $H^q\Big(\mathcal{E}'_{(N,*)}(\Omega)\Big)$ em que $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ é um domínio de holomorfia[6]. Temos:

$$H^q\Big(\mathcal{E}'_{(N,*)}(\Omega)\Big) = H^{(0,N-q)}(\Omega)^* = 0, \qquad q = 0, \ldots, N-1,$$

$$H^N\Big(\mathcal{E}'_{(N,*)}(\Omega)\Big) = H^{(0,0)}(\Omega)^* = \mathcal{O}'(\Omega).$$

Com efeito, as aplicações da sequência

[6] *i.e.*, $H^{(p,q)}(\Omega) = 0$, para $q > 0$, Cf. Thm 4.2.8 e Cor. 4.2.6 de [Hör90].

$$0 \longrightarrow C^\infty(\Omega) \xrightarrow{\bar\partial} C^\infty_{(0,1)}(\Omega) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} C^\infty_{(0,N)}(\Omega) \longrightarrow 0$$

têm imagem fechada e Ker $\Big[\bar\partial : C^\infty(\Omega) \to C^\infty_{(0,1)}(\Omega)\Big] = \mathcal{O}(\Omega)$.
Ademais, se $j : \mathcal{O}(\Omega) \hookrightarrow C^\infty(\Omega) = C^\infty_{(0,0)}(\Omega)$ é a inclusão, aplicando a proposição 2.3.2 temos sequências exatas:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{j} C^\infty_{(0,0)}(\Omega) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} C^\infty_{(0,N)}(\Omega) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}'_{(N,0)}(\Omega) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}'_{(N,N)}(\Omega) \xrightarrow{j'} \mathcal{O}'(\Omega) \longrightarrow 0$$

em que j' é dada por:

$$\big[j'(T\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar z)\big](h) := \langle T, h\rangle, \quad T \in \mathcal{E}'(\Omega),\ h \in \mathcal{O}(\Omega),$$

donde podemos concluir:

$$\operatorname{Ran}\Big[\bar\partial : \mathcal{E}'_{(N,N-1)}(\Omega) \to \mathcal{E}'_{(N,N)}(\Omega)\Big] = \Big\{T\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar z \in \mathcal{E}'_{(N,N)}(\Omega) : \langle T, h\rangle = 0, \forall h \in \mathcal{O}(\Omega)\Big\}.$$

2.3.7 Definição. Seja $K \subset \mathbb{C}^N$ compacto. Definimos:

$$\widehat{K} := \Big\{z \in \mathbb{C}^N : |P(z)| \le \sup_K |P|, \forall P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]\Big\}.$$

Quando $K = \widehat{K}$ dizemos que K é *polinomialmente convexo.*

2.3.8 Lema. *Seja $K \subset \mathbb{C}^N$ compacto polinomialmente convexo. Se $U \subset \mathbb{C}^N$ é aberto tal que $K \subset U$, então existe um domínio de holomorfia $V \subset \mathbb{C}^N$ tal que $K \subset V \subset U$.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon_j > 0$, tais que $\varepsilon_j |z_j| < 1$, para todo $z \in K$, $1 \le j \le N$. O conjunto A dado por

$$A := \big\{z \in \mathbb{C}^N \setminus U :\ \varepsilon_j |z_j| \le 1,\ 1 \le j \le N\big\}$$

é compacto. Para cada $z \in A$ existe $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]$ tal que

$$\max_K |P| < 1 < |P(z)|,$$

pois $K = \widehat{K}$. A última desigualdade acima vale em uma vizinhança aberta de z, logo pelo teorema de Heine-Borel existem $P_k \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]$, $1 \le k \le \nu$, tais que

$$\max_K |P_k| < 1\,, \quad 1 \le k \le \nu,$$

$$\forall z \in A\ \ \exists\, k \in \{1, \dots, \nu\} : |P_k(z)| > 1,$$

O conjunto aberto $V \subset \mathbb{C}^N$ dado por

$$V := \big\{z \in \mathbb{C}^N :\ \varepsilon_j |z_j| < 1,\ |P_k(z)| < 1,\ 1 \le j \le N,\ 1 \le k \le \nu\big\} \qquad (\star)$$

é tal que $K \subset V \subset U$.

Por Thm. 2.5.13 em [Hör90] os conjuntos do tipo $(\star)$ são domínios de holomorfia. □

2.3.9 Aplicação. Seja $K \subset \mathbb{C}^N$ compacto polinomialmente convexo. Temos:

$$(\dagger) \qquad H^q\Big(\mathcal{E}'_{(N,*)}(\mathbb{C}^N \setminus K)\Big) = 0, \qquad q = 2, \dots, N-1.$$

Com efeito, dado $\beta \in \mathcal{E}'_{(N,q)}(\mathbb{C}^N \setminus K) \subset \mathcal{E}'_{(N,q)}(\mathbb{C}^N)$ tal que $\bar\partial\beta = 0$, existe $\gamma \in \mathcal{E}'_{(N,q-1)}(\mathbb{C}^N)$ tal que $\bar\partial\gamma = \beta$. De fato, isto segue da aplicação 2.3.6 pondo $\Omega = \mathbb{C}^N$ e do fato que $q \leq N-1$. Como $\operatorname{supp}\beta \Subset \mathbb{C}^N \setminus K$ temos $\bar\partial\gamma = 0$ em uma vizinhança aberta U de K. Pelo lema 2.3.8, tome $V \subset U$ domínio de holomorfia com $K \subset V$. Como $q-1 \geq 1$, existe $\theta \in \mathcal{D}'_{(N,q-2)}(V)$ tal que $\bar\partial\theta = \gamma$ em V. Seja $\chi \in C_c^\infty(V)$ tal que $\chi = 1$ em um aberto $V_0 \subset \mathbb{C}^N$ com $K \subset V_0 \subset V$. Temos $\bar\partial[\gamma - \bar\partial(\chi\theta)] = \beta$, e $\gamma - \bar\partial(\chi\theta) = \gamma - \chi\bar\partial\theta - \bar\partial\chi \wedge \theta = 0$ em V_0, logo $\operatorname{supp}\big(\gamma - \bar\partial(\chi\theta)\big) \Subset \mathbb{C}^N \setminus K$ e portanto temos (†).

Ademais, vale:

$$(\dagger\dagger) \qquad \operatorname{Ran}\Big[\bar\partial : \mathcal{E}'_{(N,N-1)}(\mathbb{C}^N \setminus K) \longrightarrow \mathcal{E}'_{(N,N)}(\mathbb{C}^N \setminus K)\Big] = \\ = \Big\{T\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar z \in \mathcal{E}'_{(N,N)}(\mathbb{C}^N \setminus K) : \langle T, h\rangle = 0, \forall h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)\Big\},$$

com efeito, dado $\alpha \in \mathcal{E}'_{(N,N-1)}(\mathbb{C}^N \setminus K)$ temos $\bar\partial\alpha \in \mathcal{E}'_{(N,N)}(\mathbb{C}^N \setminus K) \subset \mathcal{E}'_{(N,N)}(\mathbb{C}^N)$, logo $\langle\bar\partial\alpha, h\rangle = 0, \forall h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$ pela aplicação 2.3.6. Reciprocamente, se $T\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar z \in \mathcal{E}'_{(N,N)}(\mathbb{C}^N \setminus K)$ é tal que $\langle T, h\rangle = 0, \forall h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$, então pela aplicação 2.3.6 existe $\gamma \in \mathcal{E}'_{(N,N-1)}(\mathbb{C}^N)$ tal que $\bar\partial\gamma = T\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar z$. Podemos repetir o argumento do parágrafo anterior e substituir γ por uma $(N, N-1)$-corrente com suporte compacto contido em $\mathbb{C}^N \setminus K$. Portanto vale (††).

2.3.10 Aplicação. Seja $K \subset \mathbb{C}^N$ compacto polinomialmente convexo. Nosso objetivo agora é provar:

$$H^1\Big(\mathcal{E}'_{(N,*)}(\mathbb{C}^N \setminus K)\Big) = \mathcal{O}(K).$$

Com efeito, dado $\beta \in \mathcal{E}'_{(N,1)}(\mathbb{C}^N \setminus K) \subset \mathcal{E}'_{(N,1)}(\mathbb{C}^N)$ tal que $\bar\partial\beta = 0$, existe $\alpha \in \mathcal{E}'_{(N,0)}(\mathbb{C}^N)$ tal que $\bar\partial\alpha = \beta$. Novamente, isto segue da aplicação 2.3.6 pondo $\Omega = \mathbb{C}^N$. Temos $\alpha = T\mathrm{d}z$ para algum $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}^N)$ e como $\operatorname{supp}\beta \Subset \mathbb{C}^N \setminus K$ concluimos que $U := \mathbb{C}^N \setminus \operatorname{supp}\beta$ é tal que $K \subset U$ e $\bar\partial T = 0$ em U, logo $T|_U \in \mathcal{O}(U)$. Defina então $G : \mathcal{E}'_{(N,1)}(\mathbb{C}^N \setminus K) \to \mathcal{O}(K)$ pondo:

$$G(\beta) := \gamma_K^U(T|_U) \in \mathcal{O}(K).$$

Mostremos que G está bem definida. Seja $\alpha' \in \mathcal{E}'_{(N,0)}(\mathbb{C}^N)$ tal que $\bar\partial\alpha' = \beta$ temos $\bar\partial(\alpha - \alpha') = 0$, logo $\alpha - \alpha' = T'\mathrm{d}z$ para algum $T' \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$, mas como α e α' têm suportes compactos segue que $T' = 0$. A aplicação G é linear. Ademais, vale $\operatorname{supp}\alpha \Subset \mathbb{C}^N \setminus K$ se, e somente se, $G(\beta) = 0$, portanto G induz uma aplicação injetora

$$\tilde G : H^1\Big(\mathcal{E}'_{(N,*)}(\mathbb{C}^N \setminus K)\Big) \longrightarrow \mathcal{O}(K).$$

Mostremos que $\tilde G$ é sobrejetora. Dado $U \subset \mathbb{C}^N$ aberto tal que $K \subset U$ e dado $h \in \mathcal{O}(U)$ tome $\chi \in C_c^\infty(U)$ tal que $\chi = 1$ em um aberto $V \Subset U$ tal que $K \subset V$. Pondo $\beta := \bar\partial(\chi h\mathrm{d}z)$ temos $\beta = 0$ em V e temos $G(\beta) = \gamma_K^U(h)$.

2.3.11 Observação. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto. Usando o fato de que o operador de Laplace é globalmente resolúvel em Ω podemos concluir o teorema de Malgrange (Thm. I.4.3 de [CT94]):

$$H^{(p,N)}(\Omega) = 0.$$

2.3.12 Aplicação. Seja $K \subset \mathbb{C}^N$ compacto polinomialmente convexo. Pelas aplicações 2.3.9 e 2.3.10, segue que no diagrama

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}'_{(N,0)}(\mathbb{C}^N \setminus K) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}'_{(N,N-1)}(\mathbb{C}^N \setminus K) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}'_{(N,N)}(\mathbb{C}^N \setminus K)$$

todas as aplicações têm imagens fracamente fechadas. Pelo teorema 2.3.3 e pela proposição 2.3.2 segue que no diagrama

$$C^\infty_{(0,0)}(\mathbb{C}^N \setminus K) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} C^\infty_{(0,N-1)}(\mathbb{C}^N \setminus K) \xrightarrow{\bar\partial} C^\infty_{(0,N)}(\mathbb{C}^N \setminus K)$$

todas as aplicações têm imagens fechadas. Pelo teorema 2.3.5 (Dualidade de Serre), pelo fato de $\mathcal{O}(K)$ ser reflexivo e pelas aplicações 2.3.9 e 2.3.10 e pela observação 2.3.11 temos:

$$H^{(0,q)}(\mathbb{C}^N \setminus K) = \begin{cases} 0, & q = 1, \dots, N-2, N \\ \mathcal{O}'(K), & q = N-1. \end{cases}$$

2.3.2 Compactos no espaço euclidiano

2.3.13 Proposição. *Seja $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$, e considere a seguinte sequência de funções:*

$$f_k(z) := \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k^2\langle z-y\rangle^2} f(y)dy\ , \quad z \in \mathbb{C}^N,\ k \in \mathbb{N}$$

com $\langle z-y\rangle^2 := (z_1-y_1)^2 + \cdots + (z_N-y_N)^2$. Então $f_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e temos

$$\sup_{\mathbb{R}^N} |f_k - f| \longrightarrow 0\ , \quad k \to \infty$$

Demonstração. Escrevendo $z = x + it$, com $x, t \in \mathbb{R}^N$, podemos derivar sob o sinal de integração com relação a x_j e t_j, $1 \le j \le N$, e concluir $f_k \in C^1(\mathbb{C}^N)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Temos também

$$\frac{\partial}{\partial \bar z_j} f_k(z) = \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial \bar z_j} e^{-k^2\langle z-y\rangle^2} f(y)dy = 0\ , \quad 1 \le j \le N$$

Portanto $f_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Seja $\varepsilon > 0$. Se $\max|f| = 0$ a proposição vale trivialmente, suponha então que $\max|f| > 0$. A função f é uniformemente contínua (pois tem suporte compacto), logo existe $\eta > 0$ tal que se $|y| < \eta$, então $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon/2$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$. Como

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|ky|^2} k^N dy = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|y|^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt\right)^N = \sqrt{\pi}^N$$

existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k > k_0$, então

$$\left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int_{|y|\ge\eta} e^{-k^2|y|^2} dy = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int_{|y|\ge k\eta} e^{-|y|^2} dy < \frac{\varepsilon}{4\max|f|}$$

e para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $k > k_0$ temos

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f(x)| &= \left| \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k^2|x-y|^2} f(y)dy - f(x) \right| \\ &= \left| \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k^2|y|^2} (f(x-y) - f(x))dy \right| \\ &\le \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k^2|y|^2} |f(x-y) - f(x)|dy \\ &\le \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int_{|y|<\eta} e^{-k^2|y|^2} \frac{\varepsilon}{2} dy + \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int_{|y|\ge\eta} e^{-k^2|y|^2} 2\max|f| dy \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

□

2.3.14 Proposição. *Seja $K \subset \mathbb{C}^N$ compacto. Se a restrição $\mathcal{O}(\mathbb{C}^N) \to C(K)$ tem imagem densa, então K é polinomialmente convexo.*

Demonstração. Seja $z^* \in \widehat{K}$. Mostraremos que $z^* \in K$. Seja $\mathcal{O}(\mathbb{C}^N)|_K$ o subespaço de $C(K)$ dado por

$$\mathcal{O}(\mathbb{C}^N)|_K := \{h|_K : h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)\}$$

que por hipótese é denso em $C(K)$. Considere a função

$$\lambda_{z^*} : \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)|_K \to \mathbb{C}$$

dada por $\lambda_{z^*}(h|_K) := h(z^*)$. Esta função está bem definida, com efeito se $h_1, h_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$ são tais que $h_1|_K = h_2|_K$, então

$$|h_1(z^*) - h_2(z^*)| = |(h_1 - h_2)(z^*)| \leq \max_K |h_1 - h_2| = 0$$

pois $z^* \in \widehat{K}$. Ademais, λ_{z^*} é linear e contínua:

$$|\lambda_{z^*}(h|_K)| = |h(z^*)| \leq \max_K |h| \ , \quad h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$$

e é um homomorfismo

$$\lambda_{z^*}(h_1|_K h_2|_K) = \lambda_{z^*}(h_1|_K)\lambda_{z^*}(h_2|_K) \ , \quad h_1, h_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$$

Como $\mathcal{O}(\mathbb{C}^N)|_K$ é denso em $C(K)$, podemos estender λ_{z^*} a $C(K)$ por meio de sequências em $\mathcal{O}(\mathbb{C}^N)|_K$, isto é, podemos definir $\widetilde{\lambda}_{z^*} : C(K) \to \mathbb{C}$ do seguinte modo: seja $f \in C(K)$; existe uma sequência $h_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $\max_K |f - h_n| \longrightarrow 0$; a sequência de números complexos $(\lambda_{z^*}(h_n|_K))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy:

$$|\lambda_{z^*}(h_n|_K) - \lambda_{z^*}(h_m|_K)| \leq \max_K |h_n - h_m| \leq \max_K |h_n - f| + \max_K |f - h_m| \longrightarrow 0$$

portanto converge; definimos então

$$\widetilde{\lambda}_{z^*}(f) := \lim_{n\to\infty} \lambda_{z^*}(h_n|_K)$$

A função $\widetilde{\lambda}_{z^*}$ está bem definida, com efeito se $h'_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$, $n \in \mathbb{N}$, é uma outra sequência com $\max_K |f - h'_n| \longrightarrow 0$, então

$$|\lambda_{z^*}(h_n|_K) - \lambda_{z^*}(h'_n|_K)| \leq \max_K |h_n - h'_n| \leq \max_K |h_n - f| + \max_K |f - h'_n| \longrightarrow 0$$

ademais, a função $\widetilde{\lambda}_{z^*}$ é uma extensão linear e contínua de λ_{z^*}:

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{\lambda}_{z^*}(f)\right| &= \left|\lim_{n\to\infty} \lambda_{z^*}(h_n|_K)\right| = \lim_{n\to\infty} |h_n(z^*)| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \left(\max_K |h_n - f| + \max_K |f|\right) = \max_K |f| \end{aligned}$$

e é um homomorfismo

$$\widetilde{\lambda}_{z^*}(fg) = \lim_{n\to\infty} h_n(z^*)p_n(z^*) = \widetilde{\lambda}_{z^*}(f)\widetilde{\lambda}_{z^*}(g) \ , \quad f, g \in C(K)$$

Acima $p_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$, $n \in \mathbb{N}$, é tal que $\max_K |g - p_n| \longrightarrow 0$.

Então Ker $\widetilde{\lambda}_{z^*}$ é um ideal de $C(K)$ e é maximal, pois

$$\frac{C(K)}{\text{Ker } \widetilde{\lambda}_{z^*}} \simeq \mathbb{C}$$

Fato: Um subconjunto $\mathcal{J} \subset C(K)$ é um ideal maximal se, e somente se, existe $w \in K$ tal que $\mathcal{J} = \{f \in C(K) : f(w) = 0\}$.

Com efeito, a função $C(K) \ni f \mapsto f(w) \in \mathbb{C}$ é um homomorfismo cujo núcleo é um ideal maximal. Reciprocamente, suponha, por absurdo, que para cada $w \in K$ exista $f \in \mathcal{J}$ tal que $f(w) \neq 0$. Então $f \neq 0$ em uma vizinhança de w. Pelo teorema de Heine-Borel existem abertos $U_1, \ldots, U_m \subset K$ com $U_1 \cup \cdots \cup U_m = K$ e existem $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{J}$ tais que $f_j(x) \neq 0$, $\forall x \in U_j$, $1 \leq j \leq m$. Seja $f := \overline{f}_1 f_1 + \cdots + \overline{f}_m f_m \in \mathcal{J}$. Temos $f(x) \neq 0$, $\forall x \in K$, e portanto $1/f \in C(K)$. Assim $1 = (1/f)f \in \mathcal{J}$, e então $\mathcal{J} = C(K)$. Uma contradição.

Pelo fato demonstrado acima existe $w \in K$ tal que $\operatorname{Ker} \widetilde{\lambda}_{z^*} = \{f \in C(K) : f(w) = 0\}$. As restrições a K das funções inteiras $\mathbb{C}^N \ni z \mapsto z_j - z_j^* \in \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq N$, pertencem a $\operatorname{Ker} \widetilde{\lambda}_{z^*}$. Portanto $w_j - z_j^* = 0$, $1 \leq j \leq N$. E temos $z^* = w \in K$. □

2.3.15 Proposição. (Oka) *Seja $K \subset \mathbb{C}^N$ compacto polinomialmente convexo. Então K é um compacto de Runge.*

Demonstração. Pelo lema 2.3.8, existem $\varepsilon_j > 0$, $P_k \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$, $1 \leq j \leq N$, $1 \leq k \leq \nu$, tais que pondo

$$V := \left\{z \in \mathbb{C}^N : \ \varepsilon_j |z_j| < 1, \ |P_k(z)| < 1, \ 1 \leq j \leq N, \ 1 \leq k \leq \nu\right\} \qquad (\star)$$

temos $K \subset V \subset U$.

Logo é suficiente mostrar que conjuntos da forma $(\star)$ são abertos de Runge, *i.e.* a restrição $\mathcal{O}(\mathbb{C}^N) \to \mathcal{O}(V)$ tem imagem densa. Mostraremos isto por indução em ν.

Para $\nu = 0$ os conjuntos da forma $(\star)$ são polidiscos centrados na origem, logo pela representação de funções holomorfas em séries de potências segue que os polidiscos são abertos de Runge.

Suponha então que todos os conjuntos da forma $(\star)$ são abertos de Runge quando o número de polinômios é menor ou igual a $\nu - 1$ para $\nu \in \mathbb{N}$ fixado. Então dado V como em $(\star)$ seja

$$\widetilde{V} := \left\{z \in \mathbb{C}^{N+1} : \ \varepsilon_j |z_j| < 1, \ |P_k(z')| < 1, \ 1 \leq j \leq N+1, \ 1 \leq k \leq \nu - 1\right\}$$

com $\varepsilon_{N+1} := 1$ e $z' := (z_1, \ldots, z_N)$ para $z = (z_1, \ldots, z_{N+1})$. Seja $\Sigma \subset \mathbb{C}^{N+1}$ o conjunto dado por

$$\Sigma := \left\{z \in \widetilde{V} : z_{N+1} = P_\nu(z')\right\}$$

Observe que $\Sigma \subset V \times \mathbb{C}$. Seja $\psi \in C^\infty(\widetilde{V})$ tal que

$$\operatorname{supp} \psi \subset \widetilde{V} \cap (V \times \mathbb{C})$$

$$\psi|_\Omega \equiv 1$$

onde $\Omega \subset \mathbb{C}^{N+1}$ é um conjunto aberto tal que $\Sigma \subset \Omega \subset \widetilde{V}$.

Dada $f \in \mathcal{O}(V)$, seja $f^* : V \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f^*(z) := f(z')$. Logo temos $f^* \in \mathcal{O}(V \times \mathbb{C})$.

Defina $\omega \in C^\infty_{(0,1)}(\widetilde{V})$ pondo

$$\omega := \begin{cases} 0, & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\bar{\partial}(\psi f^*)}{z_{N+1} - P_\nu(z')}, & \text{em } \widetilde{V} \setminus \Sigma \end{cases}$$

A $(0,1)$-forma ω está bem definida pois $\bar{\partial}(\psi f^*) = \bar{\partial}\psi \wedge f^* + \psi \bar{\partial} f^* = \bar{\partial}\psi \wedge f^*$ implica $\bar{\partial}(\psi f^*) = 0$ em Ω. Ademais $\bar{\partial}\omega = 0$. Como $\widetilde{V}$ é domínio de holomorfia, existe $g \in C^\infty(\widetilde{V})$ tal que $\bar{\partial} g = \omega$. Defina $F \in C^\infty(\widetilde{V})$ pondo

$$F := \psi f^* - (z_{N+1} - P_\nu(z'))g$$

Temos $\bar{\partial} F = 0$, logo $F \in \mathcal{O}(\widetilde{V})$. Observe que para $z' \in V$ temos $(z', P_\nu(z')) \in \Sigma \subset \widetilde{V}$ e $F(z', P_\nu(z')) = (\psi f^*)(z', P_\nu(z')) = f(z')$. Aplicando a hipótese de indução temos: existe $F_n \in$

$\mathcal{O}(\mathbb{C}^{N+1})$, $n \in \mathbb{N}$, sequência de funções inteiras que converge uniformemente sobre os compactos de $\widetilde{V}$ para F. Defina $f_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$ pondo $f_n(z') := F_n(z', P_\nu(z'))$, $n \in \mathbb{N}$.

Para $Q \subset V$ compacto, defina $\widetilde{Q} := \{(z', P_\nu(z')) : z' \in Q\} \subset \widetilde{V}$. O conjunto $\widetilde{Q}$ é compacto e temos

$$|f(z') - f_n(z')| = |F(z', P_\nu(z')) - F_n(z', P_\nu(z'))| \leq \max_{\widetilde{Q}} |F - F_n|, \quad z' \in Q,$$

Logo

$$\max_Q |f - f_n| \leq \max_{\widetilde{Q}} |F - F_n| \longrightarrow 0,$$

e portanto V é uma aberto de Runge e segue a tese. □

2.3.16 Corolário. *Todo compacto $K \subset \mathbb{R}^N \subset \mathbb{C}^N$ é polinomialmente convexo e, portanto, Runge.*

Demonstração. Dada $f \in C(K)$ seja $F \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tal que $F|_K = f$. Pela proposição 2.3.13 existe $F_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$, $k \in \mathbb{N}$, tal que $\sup_{\mathbb{R}^N} |F_k - F| \longrightarrow 0$. Em particular, $\max_K |F_k - f| \longrightarrow 0$. Portanto aplicando as proposições 2.3.14 e 2.3.15 segue a tese. □

2.3.3 Teorema Fundamental

O objetivo desta seção é provar o seguinte teorema:

2.3.17 Teorema. *Sejam $K_1, K_2 \subset \mathbb{C}^N$ compactos polinomialmente convexos tais que $K_1 \cup K_2$ é polinomialmente convexo. Temos:*

1. *Se $\mu \in \mathcal{O}'(K_1) \cap \mathcal{O}'(K_2)$, então $\mu \in \mathcal{O}'(K_1 \cap K_2)$;*
2. *Se $\mu \in \mathcal{O}'(K_1 \cup K_2)$, então existem $\mu_j \in \mathcal{O}'(K_j)$, $j = 1, 2$, tais que $\mu = \mu_1 + \mu_2$.*

Note que quando $K_1, K_2 \subset \mathbb{C}^N$ são compactos polinomialmente convexos, o mesmo vale para $K_1 \cap K_2$. A demonstração do teorema 2.3.17 será feita em duas partes, primeiro mostraremos o caso $N = 1$ e em seguida o caso $N \geq 2$.

2.3.18 Definição. Seja $K \subset \mathbb{C}$, $K \neq \varnothing$, um subconjunto compacto.

1. Definimos
$$\mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus K) := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K) \ : \ |f(z)| \longrightarrow 0, \ |z| \longrightarrow \infty\};$$
2. Dado $\mu \in \mathcal{O}'(K)$ definimos a *transformada de Cauchy de* μ como sendo a função $\mathfrak{C}\mu : \mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C}$ dada por
$$\mathfrak{C}\mu(z) := \frac{1}{2\pi i} \left\langle \mu, \ \gamma_K^{\mathbb{C}\setminus\{z\}} \left(\frac{1}{z - \cdot} \right) \right\rangle, \quad z \in \mathbb{C} \setminus K.$$

2.3.19 Observação. Seja $K \subset \mathbb{C}$, $K \neq \varnothing$, um subconjunto compacto.

1. O conjunto $\mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus K)$ é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial e a sequência de funções $p_n : \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus K) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, dadas por:
$$p_n(f) := \max_{F_n} |f|, \quad f \in \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus K),$$
em que $F_n := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{dist}(z, K) \geq 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de seminormas em $\mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus K)$ que definem uma topologia de espaço de Fréchet.
2. Na definição da transformada de Cauchy, $\gamma_K^{\mathbb{C}\setminus\{z\}}(1/(z - \cdot))$ é o germe em K da função $1/(z - \cdot) \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{z\})$, como na definição 2.2.4.

2.3.20 Proposição. *Seja $K \subset \mathbb{C}$, $K \neq \varnothing$, um compacto Runge. Então*

$$\mathfrak{C}\left(\mathcal{O}'(K)\right) = \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus K),$$

e $\mathfrak{C} : \mathcal{O}'(K) \to \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus K)$ é um isomorfismo de espaços de Fréchet.

Demonstração. Seja $\mu \in \mathcal{O}'(K)$. Dado $z_0 \in \mathbb{C} \setminus K$, seja $U \subset \mathbb{C}$ uma vizinhança aberta de z_0 tal que $\overline{U} \subset \mathbb{C} \setminus K$. Temos:

$$\mathfrak{C}\mu(z) = \frac{1}{2\pi i}\left\langle \mu,\ \gamma_K^{\mathbb{C}\setminus\{z\}}\left(\frac{1}{z-\cdot}\right)\right\rangle = \frac{1}{2\pi i}\left\langle \mu,\ \gamma_K^{\mathbb{C}\setminus\overline{U}}\left(\frac{1}{z-\cdot}\right)\right\rangle, \quad z \in U.$$

Pelas observações 2.2.6 e 2.2.3 temos $\mu \circ \gamma_K^{\mathbb{C}\setminus\overline{U}} \in \mathcal{O}'(\mathbb{C}\setminus\overline{U})$ e portando existe uma medida de Radon ν com suporte compacto em $\mathbb{C} \setminus \overline{U}$ tal que

$$\mu \circ \gamma_K^{\mathbb{C}\setminus\overline{U}}\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{U}} \frac{1}{z-w} d\nu(w), \quad z \in U,$$

Logo $\mathfrak{C}\mu|_U \in C^1(U)$ e

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\mathfrak{C}\mu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{U}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{z-w}\right) d\nu(w) = 0$$

em U. Como $z_0 \in \mathbb{C} \setminus K$ é arbitrário, temos $\mathfrak{C}\mu \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$.

Além disso, K é Runge, logo μ é portado por K, então dado $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |\mathfrak{C}\mu(z)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\left\langle \mu, \gamma_K^{\mathbb{C}\setminus\{z\}}\left(\frac{1}{z-\cdot}\right)\right\rangle\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\left|\left\langle \mu, \gamma_K^{K_\varepsilon}\left(\frac{1}{z-\cdot}\right)\right\rangle\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi} C_\varepsilon \sup_{K_\varepsilon}\left|\frac{1}{z-\cdot}\right|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus K_{2\varepsilon}, \end{aligned}$$

em que $K_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \ :\ \operatorname{dist}(z, K) < \varepsilon\}$. Isto mostra que $\mathfrak{C}\mu \in \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus K)$ e que $\mathfrak{C}$ é contínua.

Segue diretamente da definição que a aplicação $\mathfrak{C}$ é $\mathbb{C}$-linear. Mostremos que $\mathfrak{C}$ é injetora. Dado $U \subset \mathbb{C}$ um aberto que contém K, escollha $V \Subset U$ um aberto que contém K e uma cadeia α_V formado por segmentos orientados verticais e horizontais em $U \setminus \overline{V}$ tal que:

$$h(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_V} \frac{h(z)}{z-w} dz, \quad w \in \overline{V},$$

para todo $h \in \mathcal{O}(U)$. Para todo $h \in \mathcal{O}(U)$, temos:

$$\begin{aligned} \left\langle \mu, \gamma_K^U(h)\right\rangle &= \left\langle \mu, \gamma_K^V(h|_V)\right\rangle \\ &= \left\langle \mu \circ \gamma_K^V, h|_V\right\rangle \\ &= \left\langle \mu \circ \gamma_K^V, \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_V} \frac{h(z)}{z-\cdot} dz\right\rangle \\ &= \int_{\alpha_V} \frac{1}{2\pi i}\left\langle \mu \circ \gamma_K^V, \frac{h(z)}{z-\cdot}\right\rangle dz \\ &= \int_{\alpha_V} \frac{h(z)}{2\pi i}\left\langle \mu \circ \gamma_K^V, \frac{1}{z-\cdot}\right\rangle dz \\ &= \int_{\alpha_V} h(z)\mathfrak{C}\mu(z) dz, \qquad (\dagger) \end{aligned}$$

Usamos o fato de que a integral se exprime como limite de somas de Riemann para trocar a ordem de $\int$ com $\langle , \rangle$. Logo, se $\mathfrak{C}\mu = 0$ segue de $(\dagger)$ que que $\mu = 0$.

Mostremos que $\mathfrak{C}$ é sobrejetora. Seja $f \in \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus K)$. Dado $U \subset \mathbb{C}$ aberto que contém K tome

$V \subset \mathbb{C}$ e α_V como no parágrafo anterior e defina:

$$\langle \mu, \gamma_K^U(h) \rangle := \int_{\alpha_V} h(z) f(z) dz, \quad h \in \mathcal{O}(U).$$

Temos

$$\left| \langle \mu, \gamma_K^U(h) \rangle \right| \leq \left(\int_{\alpha_V} |f(z)||dz| \right) \sup_U |h|,$$

Logo μ é portado por K e por (†) temos $\mathfrak{C}\mu = f$.

Como $\mathfrak{C}$ é uma bijeção contínua, segue do teorema da aplicação aberta que $\mathfrak{C}$ é um isomorfismo.

□

2.3.21 Observação. Dado $K \subset \mathbb{C}$, $K \neq \varnothing$, o teorema de aproximação de Runge ([Hör90] Thm. 1.3.1, Cor. 1.3.2) diz que são equivalentes:

(a) K é polinomialmente convexo;

(b) K é Runge;

(c) $\mathbb{C} \setminus K$ é conexo.

Demonstração (do teorema 2.3.17 para $N = 1$).
Mostremos (1.). Seja $\mu \in \mathcal{O}'(K_1) \cap \mathcal{O}'(K_2)$. Pela proposição 2.3.20 existem $g_j \in \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus K_j)$, $j = 1, 2$, tais que $g_j(z) = \mathfrak{C}\mu(z)$ para $z \in \mathbb{C} \setminus K_j$. Defina $g : \mathbb{C} \setminus (K_1 \cap K_2) \to \mathbb{C}$ pondo

$$g := \begin{cases} g_1, & \text{em } \mathbb{C} \setminus K_1, \\ g_2, & \text{em } \mathbb{C} \setminus K_2. \end{cases}$$

Como $g_1 = \mathfrak{C}\mu = g_2$ em $(\mathbb{C} \setminus K_1) \cap (\mathbb{C} \setminus K_2)$ temos que g está bem definida e ademais $g \in \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus (K_1 \cap K_2))$. Pela proposição 2.3.20 existe $\mu' \in \mathcal{O}'(K_1 \cap K_2)$ tal que $\mathfrak{C}\mu' = g$. Mas $\mu' \in \mathcal{O}'(K_1 \cap K_2) \subset \mathcal{O}'(K_j)$, logo $\mu' = \mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}\mu') = \mathfrak{C}^{-1} g_j = \mu$.

Mostremos (2.). Seja $\mu \in \mathcal{O}'(K_1 \cup K_2)$. Defina $\Omega_j := \mathbb{C} \setminus K_j$, $j = 1, 2$, e seja $\chi \in C^\infty(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ com $\operatorname{supp} \chi \subset \Omega_1$ e $\operatorname{supp}(1 - \chi) \subset \Omega_2$. Então temos:

$$\operatorname{supp} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} \right) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2.$$

Seja $h := \mathfrak{C}\mu \in \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2)) = \mathcal{O}_0(\Omega_1 \cap \Omega_2)$. Podemos estender $(1 - \chi)h$, χh e $h \partial \chi / \partial \bar{z}$ a Ω_1, Ω_2 e $\Omega_1 \cup \Omega_2$, respectivamente, pondo:

$$\begin{cases} (1 - \chi)h, & \text{em } \Omega_1 \cap \Omega_2, \\ 0, & \text{em } \Omega_1 \setminus \operatorname{supp}(1 - \chi). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \chi h, & \text{em } \Omega_1 \cap \Omega_2, \\ 0, & \text{em } \Omega_2 \setminus \operatorname{supp} \chi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} h \dfrac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}, & \text{em } \Omega_1 \cap \Omega_2, \\ 0, & \text{em } (\Omega_1 \cup \Omega_2) \setminus \operatorname{supp} \left(\dfrac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} \right). \end{cases}$$

As extensões acima estão bem definidas, são de classe C^∞ e continuarão sendo denotadas, respectivamente, por $(1 - \chi)h$, χh e $h \partial \chi / \partial \bar{z}$. Seja $u \in C^\infty(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = h \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}},$$

e defina $h_j : \Omega_j \to \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, pondo:

$$h_1 := (1 - \chi)h + u,$$

$$h_2 := \chi h - u.$$

Em $\Omega_1 \cap \Omega_2$ temos $h_1 + h_2 = h$. Além disso, $h_j \in \mathcal{O}(\Omega_j)$. Com efeito, em $\Omega_1 \cap \Omega_2$ temos:

$$\frac{\partial h_1}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\chi h) + h\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} = 0,$$

e $h_2 = h - h_1$, e fora de $\Omega_1 \cap \Omega_2$ temos $h_1 = u$, $h_2 = -u$ e $\partial u/\partial \bar{z} = 0$.

Seja $R > 0$ tal que para $z \in \mathbb{C}$, $|z| > R$ implica $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Podemos expandir h_1 e h_2 em séries de Laurent em $A := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > R\}$:

$$h_j(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{jn} z^n, \quad z \in A, \quad j = 1, 2.$$

Então $h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (c_{1n} + c_{2n}) z^n$, $z \in A$, e como $h \in \mathcal{O}_0(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ temos $c_{1n} + c_{2n} = 0$ para $n \in \mathbb{Z}_+$. Defina $h_j^* : \Omega_j \to \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, pondo

$$h_j^* := h_j - \sum_{n=0}^{\infty} c_{jn} z^n, \quad j = 1, 2.$$

Temos $h_j^* \in \mathcal{O}_0(\Omega_j)$ e $h_1^* + h_2^* = h$ em $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Logo pela proposição 2.3.20 existem $\mu_j \in \mathcal{O}'(K_j)$ tais que $\mathfrak{C}\mu_j = h_j^*$, $j = 1, 2$. Portanto:

$$\mu_1 + \mu_2 = \mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}\mu_1 + \mathfrak{C}\mu_2) = \mathfrak{C}^{-1}(h_1^* + h_2^*) = \mathfrak{C}^{-1}h = \mu.$$

□

2.3.22 Digressão. (Sequência de Mayer-Vietoris para $\bar{\partial}$) Sejam $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}^N$ abertos. Podemos definir $\jmath = \jmath_{(0,q)}$ e $\imath = \imath_{(0,q)}$, $0 \leq q \leq N$, pondo:

$$\begin{aligned} \jmath : C^\infty_{(0,q)}(\Omega_1) \oplus C^\infty_{(0,q)}(\Omega_2) &\longrightarrow C^\infty_{(0,q)}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \\ (\omega_1, \omega_2) &\mapsto \omega_1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} - \omega_2|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \imath : C^\infty_{(0,q)}(\Omega_1 \cup \Omega_2) &\longrightarrow C^\infty_{(0,q)}(\Omega_1) \oplus C^\infty_{(0,q)}(\Omega_2) \\ \omega &\mapsto (\omega|_{\Omega_1}, \omega|_{\Omega_2}) \end{aligned}$$

Então se $(\omega_1, \omega_2) \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_1) \oplus C^\infty_{(0,q)}(\Omega_2)$ temos: $\bar{\partial}\omega_k = 0$, $k = 1, 2$, implica $\bar{\partial}(\jmath(\omega_1, \omega_2)) = 0$; e $\omega_k = \bar{\partial}\alpha_k$ para $\alpha_k \in C^\infty_{(0,q-1)}(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, implica $\jmath(\omega_1, \omega_2) = \bar{\partial}\alpha$ para $\alpha := \alpha_1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} - \alpha_2|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \in C^\infty_{(0,q-1)}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$. Analogamente, a aplicação $\imath$ leva formas $\bar{\partial}$-fechadas em pares de formas $\bar{\partial}$-fechadas e leva formas $\bar{\partial}$-exatas em pares de formas $\bar{\partial}$-exatas. Portanto, as aplicações $\jmath$ e $\imath$ induzem aplicações em cohomologia:

$$\jmath^* : H^{(0,q)}(\Omega_1) \oplus H^{(0,q)}(\Omega_2) \longrightarrow H^{(0,q)}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

$$\imath^* : H^{(0,q)}(\Omega_1 \cup \Omega_2) \longrightarrow H^{(0,q)}(\Omega_1) \oplus H^{(0,q)}(\Omega_2)$$

Definiremos a aplicação de conexão

$$\delta : H^{(0,q)}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \longrightarrow H^{(0,q+1)}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$$

do seguinte modo: Fixe $\chi \in C^\infty(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ com $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_1$, $\operatorname{supp}(1-\chi) \subset \Omega_2$. Dado $\omega \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, com $\bar\partial\omega = 0$, defina $\omega_k \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, pondo:

$$\omega_1 := \begin{cases} (1-\chi)\omega, & \text{em } \Omega_1 \cap \Omega_2, \\ 0, & \text{em } \Omega_1 \setminus \operatorname{supp}(1-\chi). \end{cases}$$

$$\omega_2 := \begin{cases} -\chi\omega, & \text{em } \Omega_1 \cap \Omega_2, \\ 0, & \text{em } \Omega_2 \setminus \operatorname{supp}\chi. \end{cases}$$

Então $\omega = \omega_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \omega_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2}$. Defina $\beta \in C^\infty_{(0,q+1)}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ pondo:

$$\beta := \begin{cases} \bar\partial\omega_1, & \text{em } \Omega_1, \\ \bar\partial\omega_2, & \text{em } \Omega_2. \end{cases}$$

Segue de $\bar\partial\omega = 0$ que β está bem definido. Ademais, $\bar\partial\beta = 0$, portanto defina:

$$\delta[\omega] := [\beta],$$

em que os colchetes denotam as classes de cohomologia. A aplicação δ está bem definida. Com efeito, se $\omega' \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, com $\bar\partial\omega' = 0$, é tal que $\omega - \omega' = \bar\partial\alpha$ para algum $\alpha \in C^\infty_{(0,q-1)}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ e se $\omega'_k \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, são tais que $\omega' = \omega'_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \omega'_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2}$, então defina $\beta' \in C^\infty_{(0,q+1)}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$:

$$\beta' := \begin{cases} \bar\partial\omega'_1, & \text{em } \Omega_1, \\ \bar\partial\omega'_2, & \text{em } \Omega_2. \end{cases}$$

Segue de $\bar\partial\omega' = 0$ que β' está bem definido. Escolha $\alpha_k \in C^\infty_{(0,q-1)}(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, tais que $\alpha = \alpha_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \alpha_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2}$. Temos:

$$\beta - \beta' = \begin{cases} \bar\partial(\omega_1 - \omega'_1), & \text{em } \Omega_1, \\ \bar\partial(\omega_2 - \omega'_2), & \text{em } \Omega_2. \end{cases} = \begin{cases} \bar\partial(\omega_1 - \omega'_1 - \bar\partial\alpha_1), & \text{em } \Omega_1, \\ \bar\partial(\omega_2 - \omega'_2 - \bar\partial\alpha_2), & \text{em } \Omega_2. \end{cases}$$

De

$$\omega_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \omega_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - (\omega'_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \omega'_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2}) = \omega - \omega' = \bar\partial(\alpha_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \alpha_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2})$$

segue que

$$\omega_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \omega'_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \bar\partial\alpha_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} = \omega_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \omega'_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \bar\partial\alpha_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2}$$

e isto implica que $\beta - \beta'$ é $\bar\partial$-exata e, portanto, δ está bem definida. Observe que mostramos que $\delta[\omega]$ não depende da função χ fixada no início, pois pode ser dada em termos de *qualquer* par $\omega_k \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, tal que $\omega = \omega_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \omega_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2}$.

Definimos então a sequência de Mayer-Vietoris para $\bar\partial$:

$$\cdots \xrightarrow{\jmath^*} H^{(0,q-1)}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \xrightarrow{\delta} H^{(0,q)}(\Omega_1 \cup \Omega_2) \xrightarrow{\imath^*} H^{(0,q)}(\Omega_1) \oplus H^{(0,q)}(\Omega_2) \xrightarrow{\jmath^*}$$

$$\xrightarrow{\jmath^*} H^{(0,q)}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \xrightarrow{\delta} H^{(0,q+1)}(\Omega_1 \cup \Omega_2) \xrightarrow{\imath^*} \cdots \qquad \text{(MV)}.$$

2.3.23 Proposição. *No contexto da digressão 2.3.22, a sequência (MV) é um complexo exato.*

Demonstração. Mostremos que (MV) é um complexo, ou seja, que $\jmath^* \circ \imath^* = 0$, $\delta \circ \jmath^* = 0$ e $\imath^* \circ \delta = 0$.

Segue diretamente da definição que $\jmath^* \circ \imath^* = 0$. Sejam $\omega_k \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_k)$, com $\bar\partial\omega_k = 0$, $k = 1, 2$, temos:

$$\delta(\jmath^*([\omega_1], [\omega_2])) = \delta([\omega_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \omega_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2}]) = 0 \in H^{(0,q+1)}(\Omega_1 \cup \Omega_2),$$

pela definição de δ. Logo $\delta \circ \jmath^* = 0$. Seja $\omega \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, com $\bar\partial\omega = 0$. Seja $\beta \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ como na definição de δ. Temos:

$$\imath^*(\delta[\omega]) = \imath^*[\beta] = ([\bar\partial\omega_1], [\bar\partial\omega_2]) = 0 \in H^{(0,q+1)}(\Omega_1) \oplus H^{(0,q+1)}(\Omega_2),$$

logo $\imath^* \circ \delta = 0$ e portanto (MV) é um complexo.

Mostraremos que (MV) é exato, ou seja, mostraremos:

1. Dados $\omega_k \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_k)$, com $\bar\partial\omega_k = 0$, $k = 1, 2$, tais que $\jmath^*([\omega_1], [\omega_2]) = 0$, existe $\eta \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, com $\bar\partial\eta = 0$, tal que $\imath^*[\eta] = ([\omega_1], [\omega_2])$;
2. Dado $\omega \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, com $\bar\partial\omega = 0$, tal que $\delta[\omega] = 0$, existem $\eta_k \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_k)$, com $\bar\partial\eta_k = 0$, $k = 1, 2$, tais que $\jmath^*([\eta_1], [\eta_2]) = [\omega]$;
3. Dado $\omega \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, com $\bar\partial\omega = 0$, tal que $\imath^*[\omega] = 0$, existe $\eta \in C^\infty_{(0,q-1)}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, com $\bar\partial\eta = 0$, tal que $\delta[\eta] = [\omega]$.

(1.) Sejam $\omega_k \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_k)$, com $\bar\partial\omega_k = 0$, $k = 1, 2$, tais que $\jmath^*([\omega_1], [\omega_2]) = 0$. Logo existe $\alpha \in C^\infty_{(0,q-1)}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ tal que $\omega_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \omega_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2} = \bar\partial\alpha$. Escolha $\alpha_k \in C^\infty_{(0,q-1)}(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, tais que $\alpha = \alpha_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \alpha_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2}$. Seja $\eta \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ dado por:

$$\eta := \begin{cases} \omega_1 - \bar\partial\alpha_1, & \text{em } \Omega_1, \\ \omega_2 - \bar\partial\alpha_2, & \text{em } \Omega_2. \end{cases}$$

A $(0, q)$-forma η está bem definida pois temos:

$$\omega_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \bar\partial\alpha_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} = \omega_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \bar\partial(\alpha - \alpha_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2}) = \omega_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \bar\partial\alpha_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2},$$

ademais, vale $\bar\partial\eta = 0$ e $\imath^*[\eta] = ([\omega_1], [\omega_2])$.

(2.) Seja $\omega \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, com $\bar\partial\omega = 0$, tal que $\delta[\omega] = 0$. Sejam $\omega_k \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ e $\beta \in C^\infty_{(0,q+1)}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ como na definição de δ, ou seja, $\delta[\omega] = [\beta]$. Então existe $\alpha \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ tal que $\bar\partial\alpha = \beta$. Defina $\eta_k := \omega_k - \alpha|_{\Omega_k} \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_k)$, $k = 1, 2$. Temos $\bar\partial\eta_k = \bar\partial\omega_k - \beta|_{\Omega_k} = 0$, $k = 1, 2$ e $\jmath^*([\eta_1], [\eta_2]) = [(\omega_1 - \alpha|_{\Omega_1})|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - (\omega_2 - \alpha|_{\Omega_2})|_{\Omega_1\cap\Omega_2}] = [\omega_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \omega_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2}] = [\omega]$.

(3.) Seja $\omega \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, com $\bar\partial\omega = 0$, tal que $\imath^*[\omega] = 0$. Então existem $\alpha_k \in C^\infty_{(0,q-1)}(\Omega_k)$, tais que $\omega|_{\Omega_k} = \bar\partial\alpha_k$, $k = 1, 2$. Defina $\eta := \alpha_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} - \alpha_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2} \in C^\infty_{(0,q-1)}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$. Temos $\bar\partial\eta = 0$ e $\delta[\eta] = [\omega]$ pela definição de δ. □

Demonstração (do teorema 2.3.17 para $N \geq 2$).
Pela aplicação 2.3.12 e pela proposição 2.3.23, tomando $\Omega_k := \mathbb{C}^N \setminus K_k$, $k = 1, 2$, e $q := N - 1$ temos uma sequência exata:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}'(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\imath'} \mathcal{O}'(K_1) \oplus \mathcal{O}'(K_2) \xrightarrow{\jmath'} \mathcal{O}'(K_1 \cup K_2) \longrightarrow 0$$

em que $\imath'(\mu) := (\mu, \mu)$, para $\mu \in \mathcal{O}'(K_1 \cap K_2)$, e $\jmath'(\mu_1, \mu_2) := \mu_1 - \mu_2$, para $\mu_k \in \mathcal{O}'(K_k)$, $k = 1, 2$, são as aplicações induzidas por $\imath^*$ e $\jmath^*$ pela aplicação 2.3.12. O fato de esta sequência ser exata implica diretamente (1.) e (2.). □

2.3.24 Definição. Denotaremos por $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^N)$ o subespaço de $\mathcal{O}'(\mathbb{C}^N)$ dado por

$$\mathcal{O}'(\mathbb{R}^N) := \{\mu \in \mathcal{O}'(\mathbb{C}^N) : \text{ existe } K \subset \mathbb{R}^N \text{ compacto portador de } \mu\}$$

2.3.25 Corolário. *Sejam $\mu \in \mathcal{O}'(\mathbb{R}^N)$ e $S \subset \mathbb{R}^N$ dado por*

$$S := \bigcap \left\{K \subset \mathbb{R}^N : K \text{ é compacto portador de } \mu\right\},$$

então S é um compacto portador de μ.

Demonstração. Seja $K_0 \subset \mathbb{R}^N$ compacto portador de μ. E consideremos

$$\mathcal{F} := \{K \subset K_0 : K \text{ é compacto portador de } \mu\} \neq \varnothing.$$

Temos $S = \bigcap \mathcal{F}$.

Se $S = \varnothing$, então pela propriedade da interseção finita para K_0, existe $F \subset \mathcal{F}$ finito tal que $\bigcap F = \varnothing$. Pelo teorema 2.3.17 temos $S = \varnothing = \bigcap F$ porta μ.

Suponha então $S \neq \varnothing$. Dado $\omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto com $S \subset \omega$ defina

$$\mathcal{F}' := \mathcal{F} \cup \{K_0 \setminus \omega\}.$$

A coleção $\mathcal{F}'$ é formada por fechados de K_0 e $\bigcap \mathcal{F}' = S \cap (K_0 \setminus \omega) = \varnothing$. Logo existe $F \subset \mathcal{F}'$ finito tal que $\bigcap F = \varnothing$. Como $S \neq \varnothing$, temos $K_0 \setminus \omega \in F$. Logo temos $F = \{K_0 \setminus \omega\}$ ou existem $K_1, \ldots, K_\nu \in \mathcal{F}$ tais que

$$K_1 \cap \cdots \cap K_\nu \cap (K_0 \setminus \omega) = \varnothing.$$

No primeiro caso temos $S \subset K_0 \subset \omega$ e portanto, como K_0 porta μ existe $C_\omega > 0$ tal que $|\mu(h)| \leq C_\omega \sup_\omega |h|$, $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$. No segundo caso $S \subset K_1 \cap \cdots \cap K_\nu \subset \omega$ e pelo teorema 2.3.17 temos $K_1 \cap \cdots \cap K_\nu$ porta μ, logo existe $C_\omega > 0$ tal que $|\mu(h)| \leq C_\omega \sup_\omega |h|$, $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$.

Como ω é uma vizinhança arbitrária de K, segue a tese. □

2.3.26 Definição. Dado $\mu \in \mathcal{O}'(\mathbb{R}^N)$, o conjunto S no corolário 2.3.25 é o menor portador de μ. Diremos que este conjunto é o *suporte* de μ e o denotaremos por supp μ.

2.3.27 Observação. A restrição $\mathcal{O}(\mathbb{C}^N) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tem imagem densa. Com efeito, todo elemento de $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ é limite de uma sequência de funções de classe C^∞ e suporte compacto e como já vimos estas podem ser aproximadas uniformemente por funções inteiras restritas a $\mathbb{R}^N$. Portanto, pelo teorema de Hahn-Banach a transposta desta restrição é uma aplicação injetora $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{O}'(\mathbb{C}^N)$. As estimativas de Cauchy nos permitem então identificar $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ com um subespaço de $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^N)$.

2.3.28 Proposição. *No contexto da observação 2.3.27, se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ então o suporte de u como distribuição coincide com o suporte de u como funcional analítico em $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Seja K o suporte de u como funcional analítico em $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^N)$ e Q o suporte de u como distribuição. Temos $K \subset Q$. Com efeito, dados $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ aberto em $\mathbb{C}^N$ tal que $Q \subset \Omega$, tome $\omega \Subset \Omega$ aberto com $Q \subset \omega$ e então existe $C_\omega > 0$ tal que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C_\omega \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\overline{\omega} \cap \mathbb{R}^N} |\partial^\alpha \varphi|, \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N),$$

em que k é a ordem de u. Segue das estimativas de Cauchy que u como funcional analítico em $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^N)$ é portado por $\overline{\omega}$ para todo $\omega \Subset \Omega$ tal que $Q \subset \omega$, portanto u é portado por Q. Reciprocamente, se $x_0 \in \mathbb{R}^N$ não pertence a K, então existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^N$ de x_0 (aberta em $\mathbb{R}^N$) tal que $U \Subset \mathbb{R}^N \setminus K$. Se $\varphi \in C_c^\infty(U)$, então tome a sequência de funções inteiras $\varphi_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$, $k \in \mathbb{N}$, da proposição 2.3.13. Existe $\Omega \Subset \mathbb{C}^N$ vizinhança aberta de K (aberto em $\mathbb{C}^N$) disjunta de $\overline{U}$ tal que dado $\eta > 0$ existe $k_\eta \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq k_\eta$ implica $|\varphi_k(z)| < \eta$ para $z \in \Omega$. Como u é portado por K, existe $C_\Omega > 0$ tal que

$$|\langle u, h \rangle| \leq C_\Omega \sup_\Omega |h|, \quad h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N).$$

Seja $\epsilon > 0$. Tomanto $\eta := \varepsilon/C_\Omega$ teremos $|\langle u, \varphi_k \rangle| \leq \varepsilon$ para $k \geq k_\eta$. Logo $|\langle u, \varphi \rangle| \leq \varepsilon$ e como ε é arbitrário, temos $\langle u, \varphi \rangle = 0$, portanto $Q \subset K$. □

2.4 Hiperfunções

2.4.1 O feixe das hiperfunções no espaço euclidiano

2.4.1 Definição. Seja $U \subset \mathbb{R}^N \subset \mathbb{C}^N$ um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$.

1. Temos $\overline{U}$ e ∂U compactos polinomialmente convexos (portanto Runge) (pelo corolário 2.3.16). Definimos o *espaço das hiperfunções em U* como sendo o $\mathbb{C}$-espaço vetorial quociente

$$\mathcal{B}(U) := {\mathcal{O}'(\overline{U})}\big/{\mathcal{O}'(\partial U)}$$

e denotamos por $[\mu]_U$ a projeção de $\mu \in \mathcal{O}'(\overline{U})$ no quociente.

2. Dado $V \subset U$ aberto de $\mathbb{R}^N$ temos a decomposição

$$\overline{U} = \overline{V} \cup (\overline{U} \setminus V),$$

e $\overline{V}$, $\overline{U} \setminus V$ são compactos polinomialmente convexos. Então dado $\mu \in \mathcal{O}'(\overline{U})$ podemos aplicar o teorema 2.3.17 e escrever $\mu = \mu_1 + \mu_2$ em que $\mu_1 \in \mathcal{O}'(\overline{V})$ e $\mu_2 \in \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus V)$. Definimos então

$$\rho_V^U([\mu]_U) := [\mu_1]_V.$$

2.4.2 Proposição. *Dados $U, V \subset \mathbb{R}^N$ abertos limitados com $V \subset U$, aplicação*

$$\rho_V^U : \mathcal{B}(U) \to \mathcal{B}(V)$$

está bem definida, é $\mathbb{C}$-linear, e temos:

1. *Para todo aberto limitado $U \subset \mathbb{R}^N$ vale $\rho_U^U = Id_{\mathcal{B}(U)}$;*

2. *Para abertos limitados $U, V, W \subset \mathbb{R}^N$ com $W \subset V \subset U$ vale $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$.*

Ademais, cada aplicação $\rho_V^U : \mathcal{B}(U) \to \mathcal{B}(V)$ é sobrejetora.

Demonstração. Mostraremos que a aplicação ρ_V^U não depende de representantes de classe de equivalência nem da decomposição de funcionais analíticos usada para defini-la. Com efeito, sejam $\mu, \mu' \in \mathcal{O}'(\overline{U})$ tais que $\mu - \mu' \in \mathcal{O}'(\partial U)$ e sejam $\mu_1, \mu_1' \in \mathcal{O}'(\overline{V})$, $\mu_2, \mu_2' \in \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus V)$ tais que $\mu = \mu_1 + \mu_2$ e $\mu' = \mu_1' + \mu_2'$. Temos $\mu_1 - \mu_1' \in \mathcal{O}'(\overline{V})$ e escrevendo

$$\mu_1 - \mu_1' = (\mu - \mu') + (\mu_2' - \mu_2)$$

temos $\mu_1 - \mu_1' \in \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus V)$. De fato, como $\partial U \subset \overline{U} \setminus V$ temos $\mathcal{O}'(\partial U) \subset \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus V)$, logo $\mu - \mu' \in \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus V)$. Pelo teorema 2.3.17 temos $\mu_1 - \mu_1' \in \mathcal{O}'\left(\overline{V} \cap (\overline{U} \setminus V)\right) = \mathcal{O}'(\partial V)$ e ρ_V^U está bem definida.

Mostraremos agora que ρ_V^U é $\mathbb{C}$-linear. Sejam $\mu, \mu' \in \mathcal{O}'(\overline{U})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Sejam $\mu_1, \mu_1' \in \mathcal{O}'(\overline{V})$, $\mu_2, \mu_2' \in \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus V)$ tais que $\mu = \mu_1 + \mu_2$ e $\mu' = \mu_1' + \mu_2'$. Temos

$$\mu + \lambda\mu' = (\mu_1 + \lambda\mu_1') + (\mu_2 + \lambda\mu_2')$$

com $\mu_1 + \lambda\mu_1' \in \mathcal{O}'(\overline{V})$ e $\mu_2 + \lambda\mu_2' \in \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus V)$. Então

$$\begin{aligned}\rho_V^U\left([\mu]_U + \lambda[\mu']_U\right) &= \rho_V^U\left([\mu + \lambda\mu']_U\right) = \left[\mu_1 + \lambda\mu_1'\right]_V = \\ &= [\mu_1]_V + \lambda[\mu_1']_V = \rho_V^U([\mu]_U) + \lambda\rho_V^U([\mu']_U)\end{aligned}$$

pois já mostramos que ρ_V^U não depende de decomposições e $[\cdot]_U : \mathcal{O}'(\overline{U}) \to \mathcal{B}(U)$, $[\cdot]_V : \mathcal{O}'(\overline{V}) \to \mathcal{B}(V)$ são $\mathbb{C}$-lineares.

A afirmação (1.) é trivial, basta considerar a decomposição $\mu = \mu + 0$. Mostraremos (2.). Seja $\mu \in \mathcal{O}'(\overline{U})$. Temos a decomposição $\overline{U} = \overline{V} \cup (\overline{U} \setminus V)$ e logo podemos escrever $\mu = \mu_1 + \mu_2$ com $\mu_1 \in \mathcal{O}'(\overline{V})$ e $\mu_2 \in \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus V)$. Também temos a decomposição $\overline{V} = \overline{W} \cup (\overline{V} \setminus W)$ e logo podemos escrever $\mu_1 = \mu_3 + \mu_4$ com $\mu_3 \in \mathcal{O}'(\overline{W})$ e $\mu_4 \in \mathcal{O}'(\overline{V} \setminus W)$. Assim, temos $\mu = \mu_3 + (\mu_2 + \mu_4)$ com $\mu_2 + \mu_4 \in \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus W)$, pois

$$\begin{aligned} W \subset V \ &\Rightarrow\ \overline{U} \setminus V \subset \overline{U} \setminus W, \\ V \subset U \ &\Rightarrow\ \overline{V} \setminus W \subset \overline{U} \setminus W, \end{aligned}$$

logo $\mu_2 \in \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus V) \subset \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus W)$ e $\mu_4 \in \mathcal{O}'(\overline{V} \setminus W) \subset \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus W)$. Portanto:

$$\rho_W^V\left(\rho_V^U([\mu]_U)\right) = \rho_W^V([\mu_1]_V) = [\mu_3]_W = \rho_W^U([\mu]_U).$$

Por fim, verificaremos a sobrejetividade. Se $U, V \subset \mathbb{R}^N$ são abertos limitados com $V \subset U$, então $\overline{V} \subset \overline{U}$ e logo $\mathcal{O}'(\overline{V}) \subset \mathcal{O}'(\overline{U})$. Assim dado $\mu \in \mathcal{O}'(\overline{V})$ temos $\rho_V^U([\mu]_U) = [\mu]_V$. $\square$

2.4.3 Observação. Pela proposição 2.4.2 acima, definindo $\mathfrak{L}$ por

$$\mathfrak{L} := \left\{U \subset \mathbb{R}^N : U \text{ é aberto limitado}\right\},$$

teremos um pré-feixe de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais $(\mathfrak{L}, \mathcal{B}, \rho)$ sobre $\mathbb{R}^N$. Nosso próximo objetivo é mostrar que $\mathcal{B}$ é na verdade um feixe sobre $\mathbb{R}^N$.

2.4.4 Lema. *Sejam $V, U \subset \mathbb{R}^N$ abertos limitados com $V \subset U$ e seja $s \in \mathcal{B}(U)$. Então $\rho_V^U(s) = 0 \in \mathcal{B}(V)$ se, e somente se, para todo $\mu \in \mathcal{O}'(\overline{U})$ tal que $s = [\mu]_U$ tem-se* supp $\mu \subset \overline{U} \setminus V$.

Demonstração. Se $\rho_V^U(s) = 0$ e $\mu \in \mathcal{O}'(\overline{U})$ é tal que $s = [\mu]_U$, então escrevendo $\mu = \mu_1 + \mu_2$ com $\mu_1 \in \mathcal{O}'(\overline{V})$, $\mu_2 \in \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus V)$, temos $\mu_1 \in \mathcal{O}'(\partial V)$ pois $0 = \rho_V^U(s) = [\mu_1]_V$. Como $\partial V = \overline{V} \cap (\overline{U} \setminus V) \subset \overline{U} \setminus V$, temos $\mu_1 \in \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus V)$ e portanto $\mu \in \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus V)$. Como o suporte de μ é o menor compacto de $\mathbb{R}^N$ que porta μ temos supp $\mu \subset \overline{U} \setminus V$.

Reciprocamente, se $\mu \in \mathcal{O}'(\overline{U})$ é tal que $s = [\mu]_U$ e se supp $\mu \subset \overline{U} \setminus V$, então $\mu \in \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus V)$. Podemos então escrever $\mu = 0 + \mu$ e obter $\rho_V^U(s) = [0]_V = 0 \in \mathcal{B}(V)$. $\square$

2.4.5 Teorema. *Seja $\{U_i\}_{i \in I}$ uma família de abertos limitados de $\mathbb{R}^N$ tal que $U := \bigcup_{i \in I} U_i$ é limitado. Se $s \in \mathcal{B}(U)$ é tal que $\rho_{U_i}^U(s) = 0$, $\forall i \in I$, então $s = 0$.*

Demonstração. Seja $\mu \in \mathcal{O}'(\overline{U})$ um representante de s. Pelo lema 2.4.4 temos supp $\mu \subset \overline{U} \setminus U_i$, $i \in I$, logo

$$\text{supp } \mu \subset \bigcap_{i \in I} \overline{U} \setminus U_i = \overline{U} \setminus U = \partial U.$$

Portanto $\mu \in \mathcal{O}'(\partial U)$, ou seja, $s = 0 \in \mathcal{B}(U)$. $\square$

2.4.6 Digressão. (Envelopes) Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto. Dado $S \subset U$ um subconjunto arbitrário define-se o *envelope de S em U*, denotado por $\mathcal{J}(S)$, como sendo a união[7] de S com as componentes conexas relativamente compactas de $U \setminus S$. Para completar a demonstração de que $\mathcal{B}$ é um feixe, faremos uso das seguintes propriedades sobre envelopes:

1. Se $S \subset U$, então $\mathcal{J}(\mathcal{J}(S)) = \mathcal{J}(S)$;

2. Se $S_1 \subset S_2 \subset U$, então $\mathcal{J}(S_1) \subset \mathcal{J}(S_2)$;

3. Se $K \subset U$ é compacto, então $\mathcal{J}(K)$ é compacto;

[7] *i.e.*, $\mathcal{J}(S) = S \cup \bigcup\{C : C \text{ é componente conexa de } U \setminus S \text{ e } \overline{C} \cap U \text{ é compacto}\}$.

4. Se $V \subset U$ é aberto, então $\mathcal{J}(V)$ é aberto.

Para o leitor interessado nas demonstrações, indicamos as referências [Nar73] (§ 3.10, Not. 3.10.1, Prop. 3.10.2, Prop. 3.10.3 e Prop. 3.10.5) e [Mal55] (§ 2, Def. 4, Lem. 1 e Lem. 2).

2.4.7 Lema. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^N$ abertos limitados com $V \subset U$. Se $\mathcal{J}(V) = V$, então $\mathcal{O}'(\partial U)$ é denso em $\mathcal{O}'(\overline{U} \setminus V)$.*

Demonstração. Observe inicialmente que $\mathcal{J}(V) = V$ se, e somente se, $U \setminus V$ não possui componentes conexas compactas. A inclusão $\mathcal{O}'(\partial U) \hookrightarrow \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus V)$ resulta de transpor a aplicação

$$(\dagger) \quad \mathcal{O}(\overline{U} \setminus V) \to \mathcal{O}(\partial U)$$

que associa a cada germe em $\overline{U} \setminus V$ de função holomorfa em uma vizinhança aberta (em $\mathbb{C}^N$) de $\overline{U} \setminus V$ o germe dessa função em ∂U. Pelo teorema de Hahn-Banach e pelo fato de $\mathcal{O}(\overline{U} \setminus V)$ e $\mathcal{O}(\partial U)$ serem reflexivos, é suficiente mostrar que a aplicação (†) é injetora. Sejam então $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ vizinhança aberta de $\overline{U} \setminus V$ e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tais que $\gamma^{\Omega}_{\partial U}(f) = 0$. Isto quer dizer que existe $\omega \subset \mathbb{C}^N$ vizinhança aberta de ∂U tal que $\gamma^{\Omega}_{\omega}(f) = 0$. Tomando restrições, se necessário, podemos supor que cada componente conexa de Ω intercepta $\overline{U} \setminus V$. Se ω intercepta cada componente conexa de Ω, então pelo teorema de identidade segue que $f = 0$ e temos a injetividade. Seja Ω' uma componente conexa de Ω e suponha por absurdo que $\Omega' \cap \omega = \varnothing$. Então Ω' intercepta alguma componente conexa, digamos U', de $U \setminus V$. Por conexidade isto implica $U' \subset \Omega'$ e logo $U' \cap \omega = \varnothing$. Portanto, como U' é fechado em $U \setminus V$, segue que U' é fechado em $\mathbb{R}^N$ e então, por já ser limitado, é compacto, uma contradição com a hipótese do lema. Logo ω intercepta cada componente conexa de Ω e segue a tese. □

2.4.8 Lema. *Seja $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência crescente de abertos limitados de $\mathbb{R}^N$ tal que $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ é limitado e $\mathcal{J}(U_n) = U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Seja $s_n \in \mathcal{B}(U_n)$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $\rho^{U_n}_{U_m}(s_n) = s_m$ sempre que $1 \leq m \leq n$. Então existe $s \in \mathcal{B}(U)$ tal que $\rho^{U}_{U_n}(s) = s_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Aplicando o lema 2.4.7, temos $\mathcal{O}'(\partial U)$ denso em $\mathcal{O}'(\overline{U} \setminus U_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{O}'(\overline{U} \setminus U_n)$ denso em $\mathcal{O}'(\overline{U} \setminus U_m)$ sempre que $1 \leq m \leq n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja d_n uma métrica invariante por translações em $\mathcal{O}'(\overline{U} \setminus U_n)$ que induz sua topologia de espaço de Fréchet e tome um representante $\mu_n \in \mathcal{O}'(\overline{U}_n)$ para s_n. Fixado $n \in \mathbb{N}$, sejam $\mu^{(1)}_n \in \mathcal{O}'(\overline{U}_n)$ e $\mu^{(2)}_n \in \mathcal{O}'(\overline{U}_{n+1} \setminus U_n)$ tais que $\mu_{n+1} = \mu^{(1)}_n + \mu^{(2)}_n$. Como $\rho^{U_{n+1}}_{U_n}(s_{n+1}) = s_n$, temos $\mu^{(1)}_n - \mu_n \in \mathcal{O}'(\partial U_n)$ logo

$$\mu_{n+1} - \mu_n = \left(\mu^{(1)}_n - \mu_n\right) + \mu^{(2)}_n \in \mathcal{O}'(\overline{U}_{n+1} \setminus U_n) \subset \mathcal{O}'(\overline{U} \setminus U_n),$$

logo por densidade podemos escolher $\omega_n \in \mathcal{O}'(\partial U)$ tal que

$$(\dagger) \qquad d_m(\mu_{n+1} - \mu_n, \omega_n) < \frac{1}{2^n}, \quad 1 \leq m \leq n,$$

Defina então $\mu'_1 := \mu_1$ e $\mu'_n := \mu_n - \sum_{m=1}^{n-1} \omega_m$ para $n > 1$. Aplicando o fato de d_1 ser invariante por translações, temos:

$$\begin{aligned}
d_1\big(\mu'_{n+k}-\mu'_n,0\big) &= d_1\left(\mu_{n+k}-\mu_n-\sum_{m=n}^{n+k-1}\omega_m,\ 0\right)\\
&= d_1\left(\sum_{m=n}^{n+k-1}\mu_{m+1}-\mu_m-\omega_m,\ 0\right)\\
&= d_1\left(\mu_{n+1}-\mu_n-\omega_n,\ -\sum_{m=n+1}^{n+k-1}\mu_{m+1}-\mu_m-\omega_m\right)\\
&\le d_1(\mu_{n+1}-\mu_n-\omega_n,0)+d_1\left(0,\ -\sum_{m=n+1}^{n+k-1}\mu_{m+1}-\mu_m-\omega_m\right)\\
&= d_1(\mu_{n+1}-\mu_n-\omega_n,0)+d_1\left(\sum_{m=n+1}^{n+k-1}\mu_{m+1}-\mu_m-\omega_m,\ 0\right)\\
&\le \sum_{m=n}^{n+k-1} d_1(\mu_{m+1}-\mu_m-\omega_m,\ 0)\\
&\le \sum_{m=n}^{n+k-1}\frac{1}{2^m}\\
&< \frac{1}{2^{n-1}},
\end{aligned}$$

para todo $n,k\in\mathbb{N}$. Logo $(\mu'_n)_{n=1}^{\infty}$ converge em $\mathcal{O}'(\overline{U})$ para, digamos, μ. Seja $s:=[\mu]_U$. Mostremos que $\rho^U_{U_n}(s)=s_n$. Temos que $\mu-\mu_n$ é o limite de $\mu'_{k+1}-\mu_n$ quando $k\longrightarrow\infty$ e

$$\mu'_{k+1}-\mu_n=\mu_{k+1}-\sum_{m=1}^{k}\omega_m-\mu_n=\sum_{m=n}^{k}(\mu_{m+1}-\mu_m-\omega_m)-\sum_{m=1}^{n-1}\omega_m,$$

mas $\sum_{m=n}^{k}(\mu_{m+1}-\mu_m-\omega_m)$ converge em $\mathcal{O}'(\overline{U}\setminus U_n)$ por (†). Logo $\mu-\mu_n$ pertence a $\mathcal{O}'(\overline{U}\setminus U_n)$. Sejam $\mu^{(1)}\in\mathcal{O}'(\overline{U}_n)$ e $\mu^{(2)}\in\mathcal{O}'(\overline{U}\setminus U_n)$ tais que $\mu=\mu^{(1)}+\mu^{(2)}$. Temos $\mu^{(1)}-\mu_n=\mu-\mu_n-\mu^{(2)}\in\mathcal{O}'(\overline{U}\setminus U_n)$, e como $\mu^{(1)}-\mu_n\in\mathcal{O}'(\overline{U}_n)$ segue que $\mu^{(1)}-\mu_n\in\mathcal{O}'(\partial U_n)$ e portanto $\rho^U_{U_n}(s)=\big[\mu^{(1)}\big]_{U_n}=[\mu_n]_{U_n}=s_n$. □

2.4.9 Teorema. *Seja $\{U_j\}_{j\in J}$ uma família de abertos limitados de $\mathbb{R}^N$ tal que $U:=\bigcup_{j\in J}U_j$ é limitado e seja $s_j\in\mathcal{B}(U_j)$, $j\in J$, tal que $\rho^{U_i}_{U_{ij}}(s_i)=\rho^{U_j}_{U_{ij}}(s_j)$ para $i,j\in J$ e $U_{ij}:=U_i\cap U_j$. Então existe $s\in\mathcal{B}(U)$ tal que $\rho^U_{U_j}(s)=s_j$, $\forall j\in J$.*

Demonstração. Mostremos que o teorema vale quando $J=\{1,2\}$. Aplicando a proposição 2.4.2 tome $s'_j\in\mathcal{B}(U)$ tal que $\rho^U_{U_j}(s'_j)=s_j$, $j=1,2$, e tome representantes $\mu_j\in\mathcal{O}'(\overline{U})$, $[\mu_j]_{U_j}=s'_j$. Como $\rho^U_{U_{12}}(s'_1-s'_2)=\rho^{U_1}_{U_{12}}(s_1)-\rho^{U_2}_{U_{12}}(s_2)=0$, temos $\operatorname{supp}(\mu_1-\mu_2)\subset\overline{U}\setminus U_{12}$ pelo lema 2.4.4. Como

$$\overline{U}\setminus U_{12}=\overline{U_1\cup U_2}\setminus U_{12}=\big(\overline{U}_1\cup\overline{U}_2\big)\setminus(U_1\cap U_2)=\big(\overline{U}_2\setminus U_1\big)\cup\big(\overline{U}_1\setminus U_2\big),$$

existem $\lambda_1\in\mathcal{O}\big(\overline{U}_2\setminus U_1\big)$ e $\lambda_2\in\mathcal{O}\big(\overline{U}_1\setminus U_2\big)$ tais que $\mu_1-\mu_2=\lambda_1-\lambda_2$. Tome então $s:=[\mu_1-\lambda_1]_U=[\mu_2-\lambda_2]_U$. Temos $\rho^U_{U_j}(s)=\rho^U_{U_j}(s'_j)-\rho^U_{U_j}([\lambda_j]_U)=s_j$, $j=1,2$, pois pelo lema 2.4.4 temos $\rho^U_{U_j}([\lambda_j]_U)=0$. Por indução finita temos que o teorema vale para J finito.

Suponha que $J=\mathbb{N}$. Seja $\{U'_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma cobertura[8] de U tal que $\overline{U'_n}\subset U_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Para cada

[8]esta cobertura existe pois U é um espaço topológico normal.

$n \in \mathbb{N}$, defina $s'_n := \rho^{U_n}_{U'_n}(s_n)$. Seja $U'_{ij} := U'_i \cap U'_j$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$, então para $n, m \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned}\rho^{U'_n}_{U'_{nm}}(s'_n) = \rho^{U'_n}_{U'_{nm}} \circ \rho^{U_n}_{U'_n}(s_n) = \rho^{U_n}_{U'_{nm}}(s_n) = \rho^{U_{nm}}_{U'_{nm}} \circ \rho^{U_n}_{U_{nm}}(s_n) = \\ = \rho^{U_{nm}}_{U'_{nm}} \circ \rho^{U_m}_{U_{nm}}(s_m) = \rho^{U_m}_{U'_{nm}}(s_m) = \rho^{U'_m}_{U'_{nm}} \circ \rho^{U_m}_{U'_m}(s_m) = \rho^{U'_m}_{U'_{nm}}(s'_m).\end{aligned}$$

Suponha que existe $s \in \mathcal{B}(U)$ tal que $\rho^{U}_{U'_n}(s) = s'_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então $U_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} (U_n \cap U'_m)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Defina $W_{nm} := U_n \cap U'_m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$. Temos:

$$\begin{aligned}\rho^{U_n}_{W_{nm}} \circ \rho^{U}_{U_n}(s) = \rho^{U}_{W_{nm}}(s) = \rho^{U'_m}_{W_{nm}} \circ \rho^{U}_{U'_m}(s) = \rho^{U'_m}_{W_{nm}}(s'_m) = \rho^{U'_m}_{W_{nm}} \circ \rho^{U_m}_{U'_m}(s_m) = \\ = \rho^{U_m}_{W_{nm}}(s_m) = \rho^{U_{nm}}_{W_{nm}} \circ \rho^{U_m}_{U_{nm}}(s_m) = \rho^{U_{nm}}_{W_{nm}} \circ \rho^{U_n}_{U_{nm}}(s_n) = \rho^{U_n}_{W_{nm}}(s_n),\end{aligned}$$

quaisquer que sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Como $U_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} W_{nm}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, esta identidade que acabamos de provar, juntamente com o teorema 2.4.5 (de unicidade), garante que $\rho^{U}_{U_n}(s) = s_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e temos o teorema. Em suma, podemos supor sem perda de generalidade que $U_n \Subset U$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Seja $U''_n := U_1 \cup \cdots \cup U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ainda temos $U''_n \Subset U$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Aplicando teorema no caso já demonstrado de uniões finitas, existe $s''_n \in \mathcal{B}(U''_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tal que $\rho^{U''_n}_{U_j}(s''_n) = s_j$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$. Note que $U''_n \cap U''_m = U''_{\min\{n,m\}}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, então temos $\rho^{U''_n}_{U''_{\min\{n,m\}}}(s''_n) = s_{\min\{n,m\}} = \rho^{U''_m}_{U''_{\min\{n,m\}}}(s''_m)$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$. Suponha que existe $s \in \mathcal{B}(U)$ tal que $\rho^{U}_{U''_n}(s) = s''_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então:

$$\rho^{U}_{U_n}(s) = \rho^{U''_n}_{U_n} \circ \rho^{U}_{U''_n}(s) = \rho^{U''_n}_{U_n}(s''_n) = s_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, também podemos supor que $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ é crescente e que $\rho^{U_n}_{U_m}(s_n) = s_m$, sempre que $1 \leq m \leq n$. Seja $V_n := \mathcal{J}(U_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = U$. Aplicando 2.4.6 (itens (2.) e (3.)) temos $V_n \subset \mathcal{J}(\overline{U}_n) \Subset U$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pelo teorema de Heine-Borel, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um conjunto finito $F_n \subset \mathbb{N}$ tal que $V_n \subset \overline{V}_n \subset \bigcup_{m \in F_n} U_m = U_{M_n}$, em que $M_n := \max F_n$. Aplicando o item (4) de 2.4.6 temos que V_n é aberto, $\forall n \in \mathbb{N}$. Podemos considerar então:

$$t_n := \rho^{U_{M_n}}_{V_n}(s_{M_n}) \in \mathcal{B}(V_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ainda temos $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ crescente e $\rho^{V_n}_{V_m}(t_n) = t_m$, sempre que $1 \leq m \leq n$:

$$\begin{aligned}\rho^{V_n}_{V_m}(t_n) = \rho^{V_n}_{V_m} \circ \rho^{U_{M_n}}_{V_n}(s_{M_n}) = \rho^{U_{M_n}}_{V_m}(s_{M_n}) = \rho^{U_{M_n}}_{V_m} \circ \rho^{U_{\max\{M_n,M_m\}}}_{U_{M_n}}\left(s_{\max\{M_n,M_m\}}\right) = \\ = \rho^{U_{\max\{M_n,M_m\}}}_{V_m}\left(s_{\max\{M_n,M_m\}}\right) = \rho^{U_{M_m}}_{V_m} \circ \rho^{U_{\max\{M_n,M_m\}}}_{U_{M_m}}\left(s_{\max\{M_n,M_m\}}\right) = \rho^{U_{M_m}}_{V_m}(s_{M_m}) = t_m.\end{aligned}$$

Definindo $V_{ij} := V_i \cap V_j$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$, e dados $n, k \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned}\rho^{V_n}_{V_{nk}}(t_n) = \rho^{V_n}_{V_{nk}} \circ \rho^{U_{M_n}}_{V_n}(s_{M_n}) = \rho^{U_{M_n}}_{V_{nk}}(s_{M_n}) = \rho^{U_{M_nM_k}}_{V_{nk}} \circ \rho^{U_{M_n}}_{U_{M_nM_k}}(s_{M_n}) = \\ = \rho^{U_{M_nM_k}}_{V_{nk}} \circ \rho^{U_{M_k}}_{U_{M_nM_k}}(s_{M_k}) = \rho^{U_{M_k}}_{V_{nk}}(s_{M_k}) = \rho^{V_k}_{V_{nk}} \circ \rho^{U_{M_k}}_{V_k}(s_{M_k}) = \rho^{V_k}_{V_{nk}}(t_k).\end{aligned}$$

Mais uma vez, se existir $s \in \mathcal{B}(U)$ tal que $\rho^{U}_{V_n}(s) = t_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então:

$$\rho^{U}_{U_n}(s) = \rho^{V_n}_{U_n} \circ \rho^{U}_{V_n}(s) = \rho^{V_n}_{U_n}(t_n) = \rho^{V_n}_{U_n} \circ \rho^{U_{M_n}}_{V_n}(s_{M_n}) = \rho^{U_{M_n}}_{U_n}(s_{M_n}) = s_n.$$

Ou seja, podemos supor também $U_n = \mathcal{J}(U_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, (substituindo $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ por $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ por $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, levando em conta o item (1.) de 2.4.6). Conseguimos então reduzir o caso $J = \mathbb{N}$ às condições do lema 2.4.8, logo o teorema vale quando J é enumerável.

Suponha por fim que J é infinito não-enumerável. Podemos extrair $J' \subset J$ enumerável tal que $\bigcup_{j \in J'} U_j = U$. Aplicando o que já provamos para $\{s_j\}_{j \in J'}$ temos que existe $s \in \mathcal{B}(U)$ tal que $\rho^{U}_{U_j}(s) = s_j$ para $j \in J'$. Para cada $i \in J \setminus J'$ temos $U_i = \bigcup_{j \in J'} U_{ij}$ e como $\rho^{U}_{U_{ij}}(s) = \rho^{U_j}_{U_{ij}}(s_j) =$

$\rho^{U_i}_{U_{ij}}(s_i)$ segue do teorema 2.4.5 (de unicidade) que $\rho^{U}_{U_j}(s) = s_j$ para $j \in J$. □

2.4.10 Definição. Pelos teoremas 2.4.5 e 2.4.9 temos que $\mathcal{B}$ é um feixe de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais, logo podemos considerar o feixe dos germes de hiperfunções $\mathscr{B}$ e definir o *espaço das hiperfunções* em $U \subset \mathbb{R}^N$, um aberto não necessariamente limitado, como sendo o espaço

$$\mathcal{B}(U) := \Gamma(U, \mathscr{B}),$$

pela observação 2.1.16.

2.4.11 Proposição. *O feixe $\mathscr{B}$ é flácido.*

Demonstração. Pela proposição 2.4.2 já sabemos que a restrição $\Gamma(U, \mathscr{B}) \to \Gamma(V, \mathscr{B})$ é sobrejetora quando $V \subset U$ são abertos limitados de $\mathbb{R}^N$. Dado $V \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $v \in \mathcal{B}(V)$, considere então o conjunto

$$\mathfrak{Z} := \left\{(U, u) : U \subset \mathbb{R}^N \text{é aberto, } V \subset U, u \in \mathcal{B}(U) \text{ e } \rho^U_V(u) = v\right\},$$

com a seguinte ordem parcial:

$$(U, u) \preccurlyeq (U', u') \iff U \subset U' \text{ e } \rho^{U'}_U(u') = u.$$

Dada uma cadeia $\mathcal{C} \subset \mathfrak{Z}$ tome $\widetilde{U} := \bigcup\left\{U \subset \mathbb{R}^N \mid \exists\, u \in \mathcal{B}(U) : (U, u) \in \mathcal{C}\right\}$. Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia e $\mathscr{B}$ é um feixe existe $\tilde{u} \in \mathcal{B}(\widetilde{U})$ tal que $\rho^{\widetilde{U}}_U(\tilde{u}) = u$ e portanto $(U, u) \preccurlyeq (\widetilde{U}, \tilde{u})$ para todo $(U, u) \in \mathcal{C}$. Logo $\mathfrak{Z}$ é indutivo e $(v, V) \in \mathfrak{Z}$. Pelo Lema de Zorn o conjunto $\mathfrak{Z}$ possui um elemento maximal (U_*, u_*). Suponha por absurdo $U_* \neq \mathbb{R}^N$. Tome então $x \in \mathbb{R}^N \setminus U_*$ e V_* uma vizinhança aberta limitada de x. Pelo que observamos no início desta demonstração, existe $v_* \in \mathcal{B}(V_*)$ tal que

$$\rho^{V_*}_{U_* \cap V_*}(v_*) = \rho^{U_*}_{U_* \cap V_*}(u_*),$$

logo, como $\mathscr{B}$ é um feixe, existe $u'_* \in \mathcal{B}(U_* \cup V_*)$ tal que $\rho^{U_* \cup V_*}_{U_*}(u'_*) = u_*$ e $\rho^{U_* \cup V_*}_{V_*}(u'_*) = v_*$ e temos $(U_*, u_*) \preccurlyeq (U_* \cup V_*, u'_*)$ e $(U_*, u_*) \neq (U_* \cup V_*, u'_*)$, uma contradição. Portanto $u_* \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ e $\rho^{\mathbb{R}^N}_V(u_*) = v$. □

2.4.12 Proposição. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto compacto e $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ tal que* $\operatorname{supp} u = K$. *Então existe um único $\mu \in \mathcal{O}'(\mathbb{R}^N)$ com* $\operatorname{supp} \mu = K$ *tal que para qualquer vizinhança aberta limitada $U \subset \mathbb{R}^N$ de K têm-se $[\mu]_U = u|_U$.*

Demonstração. Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ vizinhança aberta de K. Temos $u|_U \in \mathcal{B}(U)$. Tome um representante $\mu \in \mathcal{O}'(\overline{U})$ de $u|_U$. Se $x \in U \setminus K$, então existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de x tal que $\rho^U_V(s|_U) = 0$. Pelo lema 2.4.4 temos $\operatorname{supp} \mu \subset \overline{U} \setminus V$, portanto $x \notin \operatorname{supp} \mu$. Isto quer dizer que $\operatorname{supp} \mu \subset K$. Reciprocamente, suponha por absurdo que existe $x_* \in K \setminus \operatorname{supp} \mu$. Logo existe uma vizinhança aberta $V \subset U \setminus \operatorname{supp} \mu$ de x_*. Então $\operatorname{supp} \mu \subset \overline{U} \setminus V$ e novamente pelo lema 2.4.4 temos $\rho^U_V(u|_V) = \rho^U_V([\mu]_U) = 0$ e portanto $x_* \notin K$, uma contradição.

Se $U' \subset \mathbb{R}^N$ é outra vizinhança aberta de K e $\mu' \in \mathcal{O}'(\overline{U'})$ é tal que $[\mu']_{U'} = u|_{U'}$, então $\operatorname{supp} \mu' = K$. Temos $\mu - \mu' \in \mathcal{O}'(U \cup U')$ e $[\mu - \mu']_{U \cup U'} = 0$ pois vista como seção de $\mathscr{B}$ esta hiperfunção se anula. Portanto aplicando o teorema 2.3.17 temos $\mu - \mu' \in \mathcal{O}'(K \cap \partial(U \cup U')) = \mathcal{O}'(\varnothing)$, ou seja, $\mu = \mu'$. □

2.4.13 Proposição. *Existe um homomorfismo de feixes injetor $j : \mathscr{D}' \longrightarrow \mathscr{B}$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{u} \in \mathscr{D}'$, então existe $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $\mathfrak{u} \in \mathscr{D}'_x$. Tome um representante de $\mathfrak{u}$, ou seja, tome $U \subset \mathbb{R}^N$ vizinhança aberta limitada de x e $u \in \mathcal{D}'(U)$ tal que $\mathfrak{u}$ é o germe em x de u. Usando uma função de corte podemos supor $u \in \mathcal{E}'(U)$. Pela proposição 2.3.28 temos $u \in \mathcal{O}'(\overline{U})$, definimos então

$$j(\mathfrak{u}) := \gamma_x([u]_U)\,.$$

A aplicação $j : \mathscr{D}' \longrightarrow \mathscr{B}$ está bem definida. Com efeito se $U' \subset \mathbb{R}^N$ é outra vizinhança aberta limitada de x e $u' \in \mathcal{E}'(U')$ é tal que $\mathfrak{u}$ é o germe em x de u', então temos $u - u' \in \mathcal{E}'(U \cup U')$ e o germe em x da distribuição $u - u'$ é zero, logo x não pertence ao suporte de $u - u'$ como distribuição. Pela proposição 2.3.28 este suporte coincide com o suporte de $u - u'$ como funcional analítico e este por sua vez coincide com o suporte de $[u - u']_{U \cup U'}$ como seção de $\mathscr{B}$, portanto $\gamma_x\left([u - u']_{U \cup U'}\right) = 0$ e segue que j está bem definida. Ademais, o raciocínio acima também prova que j é injetora. □

2.4.2 Divisão de hiperfunções por funções reais-analíticas

2.4.14 DEFINIÇÃO. Sejam $U, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ abertos, U limitado.

1. Dados $\mu \in \mathcal{O}'(\overline{U})$ e $\mathfrak{f} \in \mathcal{O}(\overline{U})$ definimos $\mathfrak{f}[\mu]_U := [\mathfrak{f}\mu]_U$;

2. Dados $u \in \mathcal{B}(\Omega)$ e $f \in C^\omega(\Omega)$, escolha $\{U_j\}_{j \in J}$ uma cobertura aberta de Ω com $U_j \Subset \Omega$, $\forall j \in J$, e escolha uma vizinhança $\Omega_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^N$ de Ω aberta em $\mathbb{C}^N$ e $f_{\mathbb{C}} \in \mathcal{O}(\Omega_{\mathbb{C}})$ tais que $f_{\mathbb{C}}|_\Omega = f$, e denote $\mathfrak{f}_j := \gamma^{\Omega_{\mathbb{C}}}_{\overline{U}_j}(f_{\mathbb{C}}) \in \mathcal{O}(\overline{U}_j)$. Definimos fu como sendo a única hiperfunção cuja restrição a U_j é $\mathfrak{f}_j u|_{U_j}$.

2.4.15 OBSERVAÇÃO. No contexto da definição 2.4.14 temos que o item (1.) não depende de representantes. Com efeito, se $\mu' \in \mathcal{O}'(\overline{U})$ é tal que $\mu - \mu' \in \mathcal{O}(\partial U)$, então $\mathfrak{f}(\mu - \mu') \in \mathcal{O}(\partial U)$, logo $[\mathfrak{f}\mu']_U = [\mathfrak{f}\mu]_U$. Ademais, se $V \subset U$ é aberto, então $\rho^U_V(\mathfrak{f}[\mu]_U) = \mathfrak{f}\rho^U_V([\mu]_U)$. Com efeito, se $\mu_1 \in \mathcal{O}'(\overline{V})$ é tal que $\rho^U_V([\mu]_U) = [\mu_1]_V$, então $\mathfrak{f}\mu_1 \in \mathcal{O}'(\overline{V})$.

Portanto, no item (2.), fu está bem definida e não depende da cobertura fixada. De fato, do parágrafo anterior temos

$$\rho^{U_j}_{U_j \cap U_k}(\mathfrak{f}_j u|_{U_j}) = \mathfrak{f}_j \rho^{U_j}_{U_j \cap U_k}(u|_{U_j}) = \mathfrak{f}_k \rho^{U_k}_{U_j \cap U_k}(u|_{U_k}) = \rho^{U_k}_{U_j \cap U_k}(\mathfrak{f}_k u|_{U_k}),$$

e se $\{V_\ell\}_{\ell \in L}$ é uma outra cobertura como a de (2.) e $\mathfrak{f}'_\ell := \gamma^{\Omega_{\mathbb{C}}}_{\overline{V}_\ell}(f_{\mathbb{C}}) \in \mathcal{O}(\overline{V}_\ell)$, então:

$$\rho^{U_j}_{U_j \cap V_\ell}(\mathfrak{f}_j u|_{U_j}) = \mathfrak{f}_j \rho^{U_j}_{U_j \cap V_\ell}(u|_{U_j}) = \mathfrak{f}'_\ell \rho^{V_\ell}_{U_j \cap V_\ell}(u|_{V_\ell}) = \rho^{V_\ell}_{U_j \cap V_\ell}(\mathfrak{f}'_\ell u|_{V_\ell}).$$

2.4.16 LEMA. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Seja $\{U_j\}_{j=1}^\infty$ uma cobertura aberta localmente finita de Ω tal que $U_j \Subset \Omega$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Dado $u \in \mathcal{B}(\Omega)$, existem $u_j \in \mathcal{B}(U_j)$, com $\operatorname{supp} u_j \subset U_j$, $j \in \mathbb{N}$, tais que $u = \sum_{j=1}^\infty u_j$.*

Demonstração. Seja $\{V_j\}_{j=1}^\infty$ uma cobertura aberta de Ω tal que $V_j \Subset U_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Para cada $J \subset \mathbb{N}$ defina $V_J := \bigcup_{j \in J} V_j$. Seja $\mathfrak{Z}$ o conjunto formado por todas as famílias $(u_j)_{j \in J}$, em que $J \subset \mathbb{N}$ e $u_j \in \mathcal{B}(\Omega)$, $j \in J$, são hiperfunções que verificam:

(i) Para todo $j \in J$ tem-se $\operatorname{supp} u_j \subset U_j$;

(ii) Restringindo a V_J temos $u = \sum_{j \in J} u_j$.

O conjunto $\mathfrak{Z}$ é não-vazio. Com efeito, tome $j_0 \in \mathbb{N}$ arbitrariamente, defina $J := \{j_0\}$ e seja

$$v_{j_0} \in \mathcal{B}\big(V_{j_0} \cup \big(\Omega \setminus \overline{V}_{j_0}\big)\big)$$

a hiperfunção dada por

$$v_{j_0} := \begin{cases} u, & \text{em } V_{j_0}, \\ 0, & \text{em } \Omega \setminus \overline{V}_{j_0}. \end{cases}$$

Pela proposição 2.4.11, existe $u_{j_0} \in \mathcal{B}(\Omega)$ tal que $u_{j_0}\Big|_{V_{j_0} \cup (\Omega \setminus \overline{V}_{j_0})} = v_{j_0}$ e portanto $(u_{j_0}) \in \mathfrak{Z}$. Sobre $\mathfrak{Z}$ consideremos a seguinte ordem parcial

$$(u_j)_{j \in J} \preccurlyeq \left(u'_j\right)_{j \in J'} \iff J \subset J' \text{ e } u_j = u'_j \text{ para } j \in J.$$

Dada uma cadeia $\mathcal{C} \subset \mathfrak{Z}$ tome $\widetilde{J} := \bigcup\{J \subset \mathbb{N} \mid \forall j \in J\ \exists u_j \in \mathcal{B}(\Omega) : (u_j)_{j\in J} \in \mathcal{C}\}$. Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia temos $(u_j)_{j\in\widetilde{J}} \in \mathfrak{Z}$. Com efeito, a condição (i) é diretamente verificada. Por outro lado, dado $x \in V_{\widetilde{J}}$ existe uma vizinhança de x que intercepta apenas um número finito dos elementos de $\{U_j : j \in \widetilde{J}\}$ logo existem $j_1, \dots, j_k \in \widetilde{J}$ tais que $x \in U_j \iff j \in \{j_1, \dots, j_k\}$, e como $\mathcal{C}$ é uma cadeia existe $J_0 \subset \mathbb{N}$ tal que $j_1, \dots, j_k \in J_0$ e $(u_j)_{j\in J_0} \in \mathcal{C}$, assim, aplicando a condição (i), temos:

$$\sum_{j\in\widetilde{J}} u_j(x) = \sum_{j\in J_0} u_j(x) = u(x),$$

portanto está verificada a condição (ii). Ademais, temos $(u_j)_{j\in J} \preccurlyeq (u_j)_{j\in\widetilde{J}}$ para todo $(u_j)_{j\in J} \in \mathcal{C}$. Logo $\mathfrak{Z}$ é indutivo. Pelo Lema de Zorn o conjunto $\mathfrak{Z}$ possui um elemento maximal $(u_j)_{j\in J^*}$. Então é suficiente mostrarmos que $J^* = \mathbb{N}$ para obter a tese. Suponha por absurdo que exista $j_* \in \mathbb{N} \setminus J^*$. Seja $\Omega_* := V_{J^*} \cup V_{j_*} \cup \left(\Omega \setminus \overline{V}_{j_*}\right)$ e defina $v_* \in \mathcal{B}(\Omega_*)$ pondo:

$$v_* := \begin{cases} u - \sum_{j\in J^*} u_j, & \text{em } V_{J^*} \cup V_{j_*}, \\ 0, & \text{em } \Omega \setminus \overline{V}_{j_*}. \end{cases}$$

Note que v_* está bem definida pois $(u_j)_{j\in J^*} \in \mathfrak{Z}$ e a condição (ii) nos garante isto. Aplicando a proposição 2.4.11 seja $u_{j_*} \in \mathcal{B}(\Omega)$ tal que $u_{j_*}|_{\Omega_*} = v_*$. Logo $\operatorname{supp} u_{j_*} \subset \overline{V}_{j_*} \subset U_{j_*}$. Ademais, para $x \in V_{J^*} \cup V_{j_*}$ temos $u_{j_*}(x) = u(x) - \sum_{j\in J^*} u_j(x)$. Portanto $(u_j)_{j\in J^*\cup\{j_*\}} \in \mathfrak{Z}$ e isto contradiz o fato de $(u_j)_{j\in J^*}$ ser maximal. $\square$

2.4.17 Lema. *Sejam $K \subset \mathbb{C}^N$ compacto e $\mathfrak{f} \in \mathcal{O}(K)$. O ideal $\mathcal{I}_{\mathfrak{f}} := \{\mathfrak{g}\mathfrak{f} : \mathfrak{g} \in \mathcal{O}(K)\}$ gerado por $\mathfrak{f}$ é sequencialmente fechado em $\mathcal{O}(K)$.*

Demonstração. Seja $(\mathfrak{g}_n\mathfrak{f})_{n=0}^\infty$ uma sequência em $\mathcal{I}_{\mathfrak{f}}$ que converge para digamos $\mathfrak{h} \in \mathcal{O}(K)$. Pela observação 2.2.6, existe uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{C}^N$ de K e existem $f, h, g_n \in \mathcal{O}(U)$ tais que $\gamma_K^U(f) = \mathfrak{f}$, $\gamma_K^U(h) = \mathfrak{h}$, $\gamma_K^U(g_n) = \mathfrak{g}_n$, $n \in \mathbb{N}$, e $g_n f \longrightarrow h$ em $\mathcal{O}(U)$. Mostremos a seguinte afirmação:

(†) Se $z \in K$ é tal que $\gamma_z(f) \neq 0$, então existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de z e existe $Q \in \mathcal{O}(V)$ tais que $h = Qf$ em V.

Com efeito, com uma mudança linear de coordenadas podemos supor $z = 0$ e que existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f(0, \dots, 0, z_N)/z_N^k$ é uma função holomorfa que não se anula na origem. Aplicando o teorema de divisão de Weierstrass ([Hör90] Thm. 6.1.1) existe um polidisco $\Delta \subset \mathbb{C}^N$ centrado na origem e existem $Q, R \in \mathcal{O}(\Delta)$ tais que $h = Qf + R$ em Δ e R é um polinômio em z_N (cujos coeficientes são funções holomorfas em $z_1, \dots, z_{N-1}$) que é nulo ou tem grau $\leq k - 1$. Temos:

$$g_n f - h = g_n f - (Qf + R) = (g_n - Q)f - R,$$

e o membro à direita é uma expressão para a divisão de $g_n f - h$ por f. Pelo Thm. 6.1.1 em [Hör90], existe $C > 0$, uma constante que depende apenas de f, tal que:

$$\sup_\Delta |g_n - Q| \leq C \sup_\Delta |g_n f - h|,$$

e logo (supondo $\overline{\Delta}$ contido no domínio de $g_n f - h$) temos:

$$\sup_\Delta |R| \leq \sup_\Delta |g_n - Q||f| + \sup_\Delta |g_n f - h| \leq \left(C \sup_\Delta |f| + 1\right) \sup_\Delta |g_n f - h| \longrightarrow 0,$$

portanto $R = 0$ em Δ e temos (†).

Para cada $z \in K$ tome uma vizinhança aberta conexa $V_z \subset \mathbb{C}^N$ de z como em (†), caso $\gamma_z(f) \neq 0$, ou tal que $f|_{V_z} = 0$, caso contrário. Pelo teorema de Heine-Borel podemos concluir que existem $V_1, \dots, V_\ell \subset \mathbb{C}^N$ abertos conexos tais que $K \subset V_1 \cup \dots \cup V_\ell$ e, reindexando se necessário, existe também $r \leq \ell$ de modo que:

(1) Para $1 \leq j \leq r$ temos $f|_{V_j} \not\equiv 0$;

(2) Para $1 \leq j \leq r$ existe $Q_j \in \mathcal{O}(V_j)$ tal que $h = Q_j f$ em V_j;

(3) Para $r < j \leq \ell$ temos $f|_{V_j} \equiv 0$.

Consideremos então $U_1 := V_1 \cup \cdots \cup V_r$ e $U_2 := V_{r+1} \cup \cdots \cup V_\ell$. Pelo princípio da identidade, (1) + (3) implicam $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ e (1) + (2) implicam que existe $Q^* \in \mathcal{O}(U_1)$ tal que $h = Q^* f$ em U_1. Definindo

$$Q := \begin{cases} Q^*, & \text{em } U_1, \\ 0, & \text{em } U_2. \end{cases}$$

temos $\mathfrak{h} = \gamma_K^{U_1 \cup U_2}(Qf) \in \mathcal{I}_{\mathfrak{f}}$. □

Faremos uso do seguinte teorema ([Köt79] Ch. 7, §33 (6.)).

2.4.18 TEOREMA. *Sejam E, F espaços de Fréchet-Montel e seja $\varphi : E \to F$ uma aplicação linear e contínua tal que $\varphi(E)$ é denso em F. Então $\varphi(E) = F$ se, e somente se, ${}^t\varphi(F^*)$ é sequencialmente fechado em E^*.*

2.4.19 COROLÁRIO. *Seja $K \subset \mathbb{R}^N \subset \mathbb{C}^N$ um compacto conexo e seja $\mathfrak{f} \in \mathcal{O}(K)$, $\mathfrak{f} \neq 0$. Então para todo $\mu \in \mathcal{O}'(K)$ existe $\nu \in \mathcal{O}'(K)$ tal que $\mu = \mathfrak{f}\nu$.*

Demonstração. Definindo $\varphi : \mathcal{O}'(K) \to \mathcal{O}'(K)$ pondo $\varphi(\mu) = \mathfrak{f}\mu$, temos

$$\mathcal{O}'(K)^* \simeq \mathcal{O}(K)$$

e ${}^t\varphi : \mathcal{O}(K) \to \mathcal{O}(K)$ é dada por ${}^t\varphi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{f}\mathfrak{g}$. Logo ${}^t\varphi(\mathcal{O}(K)) = \mathcal{I}_{\mathfrak{f}}$ é sequencialmente fechado pelo lema 2.4.17 e, aplicando o teorema 2.4.18, é suficiente mostrarmos que $\varphi(\mathcal{O}'(K))$ é denso em $\mathcal{O}'(K)$ para concluir a tese. Pelo teorema de Hahn-Banach, é suficiente mostrar que ${}^t\varphi$ é injetora. Seja $\mathfrak{g} \in \mathcal{O}(K)$ tal que $\mathfrak{f}\mathfrak{g} = 0$. Tomando uma vizinhança aberta conexa $U \subset \mathbb{C}^N$ de K e $f, g \in \mathcal{O}(U)$ tais que $\mathfrak{f} = \gamma_K^U(f)$ e $\mathfrak{g} = \gamma_K^U(g)$ temos, pelo princípio da identidade, que $f^{-1}(0)$ tem interior vazio, pois $\mathfrak{f} \neq 0$. Logo $U \setminus f^{-1}(0)$ é um aberto denso em U no qual g se anula e por continuidade podemos concluir que $g \equiv 0$ e portanto $\mathfrak{g} = 0$. □

2.4.20 TEOREMA. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto conexo. Dado $f \in C^\omega(\Omega)$, $f \not\equiv 0$, a aplicação*

$$\mathcal{B}(\Omega) \ni u \mapsto fu \in \mathcal{B}(\Omega)$$

é sobrejetora.

Demonstração. Seja $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência de abertos conexos localmente finita tal que $U_n \Subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$. Pelo lema 2.4.16 existem $u_n \in \mathcal{B}(\Omega)$ com $\operatorname{supp} u_n \subset U_n$, $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tome um representante $\mu_n \in \mathcal{O}'(\overline{U}_n)$ de $u_n|_{U_n}$ e escolha uma vizinhança $\Omega_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^N$ de Ω aberta em $\mathbb{C}^N$ e $f_{\mathbb{C}} \in \mathcal{O}(\Omega_{\mathbb{C}})$ tais que $f_{\mathbb{C}}|_\Omega = f$, e denote $\mathfrak{f}_n := \gamma_{\overline{U}_n}^{\Omega_{\mathbb{C}}}(f_{\mathbb{C}}) \in \mathcal{O}(\overline{U}_n)$. Pelo corolário 2.4.19, existem $\nu_n \in \mathcal{O}'(\overline{U}_n)$, com $\operatorname{supp} \nu_n \subset U_n$, tais que $\mu_n = \mathfrak{f}_n \nu_n$, $n \in \mathbb{N}$. Seja $v_n \in \mathcal{B}(\Omega)$ tal que $v_n|_{U_n} = [\nu_n]_{U_n}$ e $v_n|_{\Omega \setminus \overline{U}_n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, e defina $v := \sum_{n=1}^\infty v_n$, temos:

$$u = \sum_{n=1}^\infty u_n = \sum_{n=1}^\infty f v_n = fv,$$

pois $u_n|_{U_n} = [\mu_n]_{U_n} = [\mathfrak{f}_n \nu_n]_{U_n} = \mathfrak{f}_n [\nu_n]_{U_n} = (f v_n)|_{U_n}$ e os suportes de u_n e v_n estão ambos contidos em U_n, $n \in \mathbb{N}$. □

⋆ ⋆ ⋆

É possível definir o feixe das hiperfunções $\mathscr{B}_\Omega$ em uma variedade real-analítica Ω. Pode-se mostrar ([Gra58]) que existe um mergulho $\Omega \hookrightarrow \mathcal{M}$ de Ω em uma variedade de Stein $\mathcal{M}$ de modo que Ω é real maximal em $\mathcal{M}$. Se Ω for compacta, então:

$$\mathscr{B}(\Omega) = \mathcal{O}'_{\mathcal{M}}(\Omega) := \text{“espaço dos funcionais analíticos em } \mathcal{O}'(\mathcal{M}) \text{ portados por } \Omega\text{”}.$$

A definição do próximo capítulo é motivada por esta observação.

⋆ ⋆ ⋆

Capítulo 3

Hiperfunções no toro

3.1 O espaço das hiperfunções no toro

3.1.1 Definição. Denotamos por $\mathbb{T}^N := \mathbb{R}^N/(2\pi\mathbb{Z})^N$ *toro de dimensão* N.

1. Dado $\delta > 0$, definimos

$$T(\delta) := \left\{x + iy : x \in \mathbb{T}^N, y \in \mathbb{R}^N, |y| < \delta\right\},$$

e também definimos $T(\infty) := \left\{x + iy : x \in \mathbb{T}^N, y \in \mathbb{R}^N\right\}$.

2. Para $0 < \delta \leq \infty$ denotamos por $\mathcal{O}(T(\delta))$ o espaço das funções holomorfas em $T(\delta)$ e para $\delta < \infty$ denotamos por $\mathcal{O}_\infty(T(\delta))$ o espaço de Banach das funções holomorfas limitadas em $T(\delta)$.

3.1.2 Definição. Uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ é *real-analítica* se todo ponto $x_0 \in \mathbb{T}^N$ admite uma vizinhança V tal que a série $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} (\partial^\alpha \varphi)(x_0)(x - x_0)^\alpha/\alpha!$ é absolutamente somável para cada $x \in V$ e

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} \frac{(\partial^\alpha \varphi)(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha, \quad x \in V.$$

O conjunto das funções reais-analíticas em $\mathbb{T}^N$ será denotado por $C^\omega\big(\mathbb{T}^N\big)$.

3.1.3 Observação. Temos a seguinte caracterização para funções reais-analíticas: se $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, então $\varphi \in C^\omega\big(\mathbb{T}^N\big)$ se, e somente se, existe $C > 0$ tal que:

$$\max_{\mathbb{T}^N} |\partial^\alpha \varphi| \leq C^{|\alpha|+1}\alpha!\,, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^N.$$

3.1.4 Observação. O limite indutivo dos espaços $\mathcal{O}_\infty(T(\delta))$ quando $\delta \to 0$ é naturalmente identificado com $C^\omega\big(\mathbb{T}^N\big)$ e o mune de uma topologia DFS.

3.1.5 Definição. Seguindo [CC], definimos $\mathcal{B}\big(\mathbb{T}^N\big)$ o *espaço das hiperfunções em* $\mathbb{T}^N$ com sendo o dual topológico de $C^\omega\big(\mathbb{T}^N\big)$, portanto um espaço FS.

3.1.6 Definição. Seja $\lambda : \mathcal{O}(T(\infty)) \to \mathbb{C}$ uma função linear.

1. Dizemos que λ é *portada por* $\mathbb{T}^N$ se para todo $\delta > 0$ existe $C_\delta > 0$ tal que:

$$(\dagger) \qquad |\lambda(h)| \leq C_\delta \sup_{T(\delta)} |h|\,, \quad h \in \mathcal{O}(T(\infty)).$$

2. Se λ é portada por $\mathbb{T}^N$ definimos

$$\|\lambda\|_{[\delta]} := \inf\left\{C_\delta : \text{ vale } (\dagger)\right\}.$$

3.1.7 Observação. Toda funçao em $C^\omega(\mathbb{T}^N)$ pode ser aproximada em algum $\mathcal{O}_\infty(T(\delta))$ por uma sequência em $\mathcal{O}(T(\infty))$, então como na seção 2.2 podemos identificar $\mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$ com o espaço dos funcionais lineares em $\mathcal{O}(T(\infty))$ portados por $\mathbb{T}^N$, munido da família de seminormas $\|\cdot\|_{[\delta]}$, $\delta > 0$.

3.1.8 Exemplo. Dado $\psi \in L^1(\mathbb{T}^N)$, a função

$$C^\omega(\mathbb{T}^N) \ni \varphi \mapsto \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{T}^N} \psi(x)\varphi(x)dx \in \mathbb{C}$$

pertence a $\mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$. Ademais, esta função é identicamente nula se, e somente se, $\psi = 0$. Então podemos identificar esta função com ψ e teremos uma cópia de $L^1(\mathbb{T}^N)$ contida em $\mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$.

Aplicando o Teorema de Banach-Steinhaus temos a seguinte proposição:

3.1.9 Proposição. *Seja $\mu_n \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$, $n \in \mathbb{N}$, tal que para cada $\varphi \in C^\omega(\mathbb{T}^N)$ a sequência de números complexos $(\mu_n(\varphi))_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy. Se definimos*

$$\mu(\varphi) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(\varphi)\,, \quad \varphi \in C^\omega(\mathbb{T}^N)\,,$$

então $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$.

3.1.10 Definição. Dada $\varphi \in L^1(\mathbb{T}^N)$, denotaremos os coeficientes de Fourier de φ por:

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx\,, \quad \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

3.1.11 Observação. Se $\varphi \in L^2(\mathbb{T}^N)$, então

$$\varphi = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \widehat{\varphi}(\xi)e_\xi,$$

em que $e_\xi : \mathbb{T}^N \to \mathbb{C}$ é dada por $e_\xi(x) := e^{ix\cdot\xi}$.

3.1.12 Proposição. *Seja $\varphi \in C^\omega(\mathbb{T}^N)$, então existem $C, \varepsilon > 0$ tais que:*

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \le Ce^{-\varepsilon|\xi|}\,, \quad \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Reciprocamente, se $\nu : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{C}$ é uma função tal que existem $C, \varepsilon > 0$ que verificam:

$$|\nu(\xi)| \le Ce^{-\varepsilon|\xi|}\,, \quad \xi \in \mathbb{Z}^N,$$

então definindo

$$\varphi := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \nu(\xi)e_\xi,$$

temos $\varphi \in C^\omega(\mathbb{T}^N)$ e $\nu = \widehat{\varphi}$.

Demonstração. Tome $\delta > 0$ tal que φ se extende a uma função em $\mathcal{O}_\infty(T(\delta))$, logo pelo teorema de Cauchy temos

$$\begin{aligned}
|\widehat{\varphi}(\xi)| &= \left|\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx\right| \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\left|\int_{\mathbb{T}^N} e^{-i(x+iy)\cdot\xi}\varphi(x+iy)dx\right| \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{T}^N} e^{y\cdot\xi}|\varphi(x+iy)|dx, \quad \xi \in \mathbb{Z}^N,
\end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^N$, $|y| < \delta$. Tomando $y := -(\delta/2)\xi/|\xi|$, para cada $\xi \in \mathbb{Z}^N$, obtemos a primeira parte da proposição com $\varepsilon = \delta/2$.

Reciprocamente, a estimativa sobre o decaimento de ν garante que a série converge uniformemente sobre os compactos de $T(\delta)$ para $\delta := \varepsilon/2$. □

3.1.13 Definição. Seja $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$, definimos:

$$\widehat{\mu}(\xi) := \mu(e_{-\xi}) \ , \quad \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

3.1.14 Observação. Usando a identificação do exemplo 3.1.8, se $\psi \in L^1(\mathbb{T}^N) \subset \mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$, temos:

$$\psi\left(e_{-\xi}\right) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\cdot\xi} \psi(x) dx \ , \quad \xi \in \mathbb{Z}^N,$$

ou seja, as duas interpretações para $\widehat{\psi}$ coincidem.

3.1.15 Definição. Seja $\varepsilon > 0$. Se $\nu : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{C}$ é uma função definimos:

$$\|\nu\|_{(\varepsilon)} := \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{-\varepsilon|\xi|} |\nu(\xi)|,$$

$$\mathcal{F}_{(\varepsilon)}(\mathbb{T}^N) := \left\{ \nu : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{C} \ \mid \ \|\nu\|_{(\varepsilon)} < \infty \right\}.$$

3.1.16 Proposição. *A aplicação $\mu \mapsto \widehat{\mu}$ define um isomorfismo de espaços de Fréchet*

$$\mathcal{B}(\mathbb{T}^N) \to \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{(\varepsilon)}(\mathbb{T}^N).$$

Demonstração. Sejam $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$ e $\varepsilon > 0$. Para todo $\xi \in \mathbb{Z}^N$ temos:

$$\begin{aligned} e^{-\varepsilon|\xi|} |\widehat{\mu}(\xi)| &= e^{-\varepsilon|\xi|} \left|\mu(e_{-\xi})\right| \\ &\leq e^{-\varepsilon|\xi|} C_\delta \sup_{z \in T(\delta)} \left| e^{-iz\cdot\xi} \right| \\ &= e^{-\varepsilon|\xi|} C_\delta \sup_{|y| < \delta} \left| e^{y\cdot\xi} \right| \\ &\leq C_\delta e^{(\delta - \varepsilon)|\xi|}. \end{aligned}$$

Tomando $0 < \delta < \varepsilon$ podemos concluir:

$$\|\widehat{\mu}\|_{(\varepsilon)} \leq \|\mu\|_{[\delta]},$$

logo $\widehat{\mu} \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{(\varepsilon)}(\mathbb{T}^N)$ e $\mu \mapsto \widehat{\mu}$ é contínua. Para provar que a aplicação é um isomorfismo de espaços de Fréchet é suficiente mostrar que ela é bijetora e aplicar o teorema da aplicação aberta.

Mostraremos que a aplicação é sobrejetora. Seja $\nu \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{(\varepsilon)}(\mathbb{T}^N)$. Defina $\mu_n \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$, $n \in \mathbb{N}$, pondo

$$\mu_n := \sum_{|\xi| \leq n} \nu(\xi) e_\xi \in C^\omega(\mathbb{T}^N) \subset \mathcal{B}(\mathbb{T}^N).$$

Fixe $\varphi \in C^\omega(\mathbb{T}^N)$. Se $m, k \in \mathbb{N}$ e $m > k$, temos:

$$\mu_m(\varphi) - \mu_k(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} \sum_{k < |\xi| \leq m} \nu(\xi) e^{ix\cdot\xi} \varphi(x) dx = \sum_{k < |\xi| \leq m} \nu(\xi) \widehat{\varphi}(-\xi).$$

Aplicando a proposição 3.1.12, existem $C, \varepsilon' > 0$ tal que:

$$|\mu_m(\varphi) - \mu_k(\varphi)| \leq C \sum_{k<|\xi|\leq m} |\nu(\xi)| e^{-\varepsilon'|\xi|}.$$

Como $\nu \in \mathcal{F}_{(\varepsilon'/2)}(\mathbb{T}^N)$, temos:

$$|\mu_m(\varphi) - \mu_k(\varphi)| \leq \|\nu\|_{(\varepsilon'/2)} \sum_{k<|\xi|\leq m} e^{-\varepsilon'|\xi|/2} \longrightarrow 0,\ k \to \infty.$$

Logo, pela proposição 3.1.9, a função $\mu : C^\omega(\mathbb{T}^N) \to \mathbb{C}$ dada por:

$$\mu(\varphi) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(\varphi), \quad \varphi \in C^\omega\left(\mathbb{T}^N\right),$$

pertence a $\mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$. Mostraremos que $\widehat{\mu} = \nu$. Para todo $\xi \in \mathbb{Z}^N$ temos:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(\xi) &= \mu\left(e_{-\xi}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} \sum_{|\xi'|\leq n} \nu(\xi) e^{ix\cdot\xi'} e^{-ix\cdot\xi} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}^N} \sum_{|\xi'|\leq n} \nu(\xi) e^{ix\cdot(\xi'-\xi)} dx \\
&= \nu(\xi),
\end{aligned}$$

pois

$$\int_{\mathbb{T}^N} e^{ix\cdot(\xi'-\xi)} dx = \begin{cases} (2\pi)^N, & \text{se } \xi' = \xi \\ 0, & \text{se } \xi' \neq \xi \end{cases}, \qquad \xi', \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Mostraremos agora que a aplicação é injetora. É suficiente mostrar que dado $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$ temos:

$$\mu(\varphi) = \left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \widehat{\mu}(\xi) e_\xi\right)(\varphi) := \lim_{n\to\infty} \sum_{|\xi|\leq n} \widehat{\mu}(\xi) e_\xi(\varphi), \quad \varphi \in C^\omega\left(\mathbb{T}^N\right).$$

Observe que, com o que provamos até agora, já sabemos que o limite acima está bem definido e $\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \widehat{\mu}(\xi) e_\xi \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$, e com esta identidade temos: $\widehat{\mu} = 0$ implica $\mu = 0$. Para $\varphi \in C^\omega(\mathbb{T}^N)$ podemos aplicar a proposição 3.1.12:

$$\begin{aligned}
\mu(\varphi) &= \mu\left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \widehat{\varphi}(\xi) e_\xi\right) \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \widehat{\varphi}(\xi) \mu(e_\xi) \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \widehat{\varphi}(\xi) \widehat{\mu}(-\xi) \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \widehat{\varphi}(-\xi) \widehat{\mu}(\xi) \\
&= \left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \widehat{\mu}(\xi) e_\xi\right)(\varphi).
\end{aligned}$$

□

3.2 Valores de fronteira de funções holomorfas

3.2.1 DEFINIÇÃO. Sejam $\delta > 0$ e $\Gamma \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\Gamma \neq \varnothing$, um cone[1] aberto convexo[2].

1. Definimos $\Gamma_\delta := \{y \in \Gamma : |y| < \delta\}$;
2. Denotamos por $\mathbb{T}^N + i\Gamma_\delta$ o seguinte subconjunto aberto de $T(\infty)$:
$$\left\{x + iy : x \in \mathbb{T}^N, y \in \Gamma_\delta\right\},$$
e em geral para qualquer conjunto $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}^N$ definimos:
$$\mathbb{T}^N + iA := \left\{x + iy : x \in \mathbb{T}^N, y \in A\right\};$$
3. Dados $f \in \mathcal{O}\big(\mathbb{T}^N + i\Gamma_\delta\big)$ e $v \in \Gamma_\delta$ definimos $\mu_v^f : \mathcal{O}(T(\infty)) \to \mathbb{C}$ pondo:
$$\mu_v^f(h) := \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N + i\{v\}} f(z)h(z)dz$$

3.2.2 OBSERVAÇÃO. Segundo a definição acima temos: μ_v^f é linear e portada por $\mathbb{T}^N + i\{v\}$:
$$\left|\mu_v^f(h)\right| \leq \left(\frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} |f(x+iv)|dx\right) \max_{\mathbb{T}^N + i\{v\}} |h| \leq C \sup_{\Omega} |h|, \quad h \in \mathcal{O}(T(\infty)),$$
em que $C := \|f(\cdot + iv)\|_{L^1(\mathbb{T}^N)}$ e Ω é qualquer vizinhança aberta de $\mathbb{T}^N + i\{v\}$.

3.2.3 PROPOSIÇÃO. *Sejam $\delta > 0$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\Gamma \neq \varnothing$, um cone aberto convexo e $f \in \mathcal{O}\big(\mathbb{T}^N + i\Gamma_\delta\big)$. Se $v, v' \in \Gamma_\delta$, então $\mu_v^f = \mu_{v'}^f$.*

Demonstração. Suponha $v \neq v'$. Qualquer que seja $h \in \mathcal{O}(T(\infty))$ temos[3]:
$$\begin{aligned}
\mu_{v'}^f(h) - \mu_v^f(h) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N + i\{v'\}} f(z)h(z)dz - \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N + i\{v\}} f(z)h(z)dz \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\partial\{\mathbb{T}^N + i[v,v']\}} f(z)h(z)dz \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N + i[v,v']} \mathrm{d}[f(z)h(z)dz] \\
&= 0,
\end{aligned}$$
pois $\mathrm{d}[f(z)h(z)dz] = \big(\partial + \bar{\partial}\big)\,[f(z)h(z)dz] = 0$. □

3.2.4 COROLÁRIO. *Dados $\delta > 0$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\Gamma \neq \varnothing$, um cone aberto convexo, $f \in \mathcal{O}\big(\mathbb{T}^N + i\Gamma_\delta\big)$ e $v \in \Gamma_\delta$, então $\mu_v^f \in \mathcal{B}\big(\mathbb{T}^N\big)$.*

Demonstração. Seja $0 < \delta' < \delta$. Definindo $v' := (\delta'/\delta)v$, temos:
$$\mathbb{T}^N + i\{v'\} \subset T(\delta').$$
Como $\mu_v^f = \mu_{v'}^f$, temos: μ_v^f é portado por $\mathbb{T}^N + i\{v'\}$. Logo existe $C_{\delta'} > 0$ tal que
$$\left|\mu_v^f(h)\right| \leq C_{\delta'} \sup_{T(\delta')} |h|, \quad h \in \mathcal{O}(T(\infty)).$$

[1] *i.e.*, $ty \in \Gamma, \forall y \in \Gamma, \forall t > 0$.
[2] *i.e.*, $(1-t)y_1 + ty_2 \in \Gamma, \forall y_1, y_2 \in \Gamma, \forall t \in [0,1]$.
[3] em que $[v, v'] := \{(1-t)v + tv' : 0 \leq t \leq 1\}$.

Como δ' pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, concluímos que μ_v^f é portado por $\mathbb{T}^N$. $\square$

3.2.5 Definição. Dados $\delta > 0$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\Gamma \neq \varnothing$, um cone aberto convexo e $f \in \mathcal{O}\big(\mathbb{T}^N + i\Gamma_\delta\big)$ definimos o *valor de fronteira de* f como sendo a hiperfunção

$$\mathrm{b}_\Gamma f := \mu_v^f,$$

em que $v \in \Gamma_\delta$ pode ser escolhido arbitrariamente pela proposição 3.2.3.

3.2.6 Proposição. *Sejam* $\delta > 0$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\Gamma \neq \varnothing$, *um cone aberto convexo e* $f \in \mathcal{O}\big(\mathbb{T}^N + i\Gamma_\delta\big)$. *Se* $v \in \Gamma_\delta$, *então a família* $f(\cdot + itv) \in C^\omega\big(\mathbb{T}^N\big) \subset \mathcal{B}\big(\mathbb{T}^N\big)$, $0 < t < 1$, *converge para* $\mathrm{b}_\Gamma f$ *em* $\mathcal{B}\big(\mathbb{T}^N\big)$ *quando* $t \longrightarrow 0$.

Demonstração. Qualquer que seja $h \in \mathcal{O}(T(\infty))$, temos:

$$\begin{aligned}
|[f(\cdot + itv)](h) - \mathrm{b}_\Gamma f(h)| &= \left| \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} f(x + itv)h(x)dx - \mathrm{b}_\Gamma f(h) \right| \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \left| \int_{\mathbb{T}^N + itv} f(z)h(z - itv)dz - \mathrm{b}_\Gamma f(h) \right| \\
&= \left| \mu_{tv}^f(h(\cdot - itv)) - \mu_{tv}^f(h) \right| \\
&= \left| \mu_{tv}^f(h(\cdot - itv) - h) \right| \\
&= \left| \mu_v^f(h(\cdot - itv) - h) \right| \longrightarrow 0, \quad t \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

pois $h(\cdot - itv) \longrightarrow h$ em $\mathcal{O}(T(\infty))$ quando $t \longrightarrow 0$. $\square$

3.2.7 Observação. Segue da proposição 3.2.6 que se $\delta > 0$ e $f \in \mathcal{O}(T(\delta))$ então qualquer que seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ cone aberto convexo, $\Gamma \neq \varnothing$, temos $\mathrm{b}_\Gamma f = f|_{\mathbb{T}^N}$.

3.2.8 Proposição. *Sejam* $\delta > 0$ *e* $\Gamma \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\Gamma \neq \varnothing$, *um cone aberto convexo. A aplicação* $\mathrm{b}_\Gamma : \mathcal{O}\big(\mathbb{T}^N + i\Gamma_\delta\big) \to \mathcal{B}\big(\mathbb{T}^N\big)$ *é injetora.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{O}\big(\mathbb{T}^N + i\Gamma_\delta\big)$ tal que $\mathrm{b}_\Gamma f = 0$. Dado $v \in \Gamma_\delta$, temos:

$$0 = \mathrm{b}_\Gamma f(h) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N + i\{v\}} f(z)h(z)dz\,, \quad h \in \mathcal{O}(T(\infty)).$$

Para provar que $f = 0$ é suficiente mostrar que $f|_{\mathbb{T}^N + i\{v\}} = 0$ e isto é equivalente a provar:

$$\frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N + i\{v\}} f(z)\varphi(z - iv)dz = 0, \quad \varphi \in C^\infty\big(\mathbb{T}^N\big)\,.$$

Dado $\varphi \in C^\infty\big(\mathbb{T}^N\big)$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N + i\{v\}} f(z)\varphi(z - iv)dz &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} f(x + iv)\varphi(x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} f(x + iv) \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{\varphi}(\xi) e^{ix\cdot\xi} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{\varphi}(\xi) \int_{\mathbb{T}^N + i\{v\}} f(z) e^{i(z - iv)\cdot\xi} dz \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

3.2.9 Proposição. *Sejam $\delta > 0$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\Gamma \neq \varnothing$, um cone aberto convexo e $f \in \mathcal{O}\big(\mathbb{T}^N + i\Gamma_\delta\big)$. Se existem $m \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que*

$$|f(x+iy)| \leq \frac{C}{|y|^m}, \quad x \in \mathbb{T}^N, y \in \Gamma_\delta,$$

então $\mathrm{b}_\Gamma f \in \mathcal{D}'\big(\mathbb{T}^N\big)$.

Demonstração. Para todo $\xi \in \mathbb{Z}^N$ temos:

$$\widehat{\mathrm{b}_\Gamma f}(\xi) = \mathrm{b}_\Gamma f\,(e_{-\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N + i\{v\}} f(z) e^{-iz\cdot\xi} dz,$$

em que $v \in \Gamma_\delta$ pode ser escolhido arbitrariamente. Para $x \in \mathbb{T}^N$, $\xi \in \mathbb{Z}^N$, podemos escrever a fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned} e^{-i(x+iv)\cdot\xi} &= e_{-\xi}(x+iv) \\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} \partial^\alpha e_{-\xi}(x) \frac{(iv)^\alpha}{\alpha!} + (m+1) \int_0^1 (1-t)^m \sum_{|\alpha|=m+1} \partial^\alpha e_{-\xi}(x+itv) \frac{(iv)^\alpha}{\alpha!} dt. \end{aligned}$$

e usando $\partial^\alpha e_{-\xi}(x) = e^{-ix\cdot\xi}(-i\xi)^\alpha$ obtemos:

$$\begin{aligned} \left| e^{-i(x+iv)\cdot\xi} \right| &\leq \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{(|v||\xi|)^{|\alpha|}}{\alpha!} + (m+1) \sum_{|\alpha|=m+1} e^{|v||\xi|} \frac{(|v||\xi|)^{|\alpha|}}{\alpha!} \\ &\leq C' \left[(|v||\xi|)^m + e^{|v||\xi|} (|v||\xi|)^{m+1} \right], \quad |v||\xi| \geq 1, \end{aligned}$$

em que $C' > 0$ é uma constante. Portanto, para $|\xi| > 1/\delta$ escolhemos $v \in \Gamma_\delta$ com $|v| = 1/|\xi|$ e obtemos:

$$\begin{aligned} \left| \widehat{\mathrm{b}_\Gamma f}(\xi) \right| &\leq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} |f(x+iv)| \left| e^{-i(x+iv)\cdot\xi} \right| dx \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} \frac{CC'}{|v|^m} \left[(|v||\xi|)^m + e^{|v||\xi|} (|v||\xi|)^{m+1} \right] dx \\ &= CC'(1+e)|\xi|^m \end{aligned}$$

e segue que $\mathrm{b}_\Gamma f \in \mathcal{D}'\big(\mathbb{T}^N\big)$. □

3.2.10 Definição. Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ um cone.

1. Dizemos que $\mathcal{C}$ é *agudo* se existe $\xi_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tal que:

$$\overline{\mathcal{C}} \setminus \{0\} \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \;:\; \xi \cdot \xi_0 > 0 \right\};$$

2. Denotamos por $\mathrm{ch}\,\mathcal{C}$ a envoltória convexa fechada de $\mathcal{C}$ em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, ou seja, a interseção de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ que são convexos, fechados em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e contêm $\mathcal{C}$;

3. Denotamos por $\mathcal{C}^\circ$ o *cone polar de* $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}^\circ := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \;:\; \xi \cdot \eta \geq 0, \forall \eta \in \mathcal{C} \right\}.$$

3.2.11 Observação. Segue diretamente da definição que se $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ é um cone, então $\mathcal{C}^\circ$ é sempre um cone fechado em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e se $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ são cones, então $\mathcal{C}_2^\circ \subset \mathcal{C}_1^\circ$.

3.2.12 Proposição. *Seja* $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$. *Então existem* $\Gamma_j \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\Gamma_j \neq \varnothing$, *cones abertos convexos e existem* $f_j \in \mathcal{O}(\mathbb{T}^N + i\Gamma_j)$, $1 \leq j \leq k$, *tais que*

$$\mu = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{b}_{\Gamma_j} f_j.$$

Demonstração. Sejam $\mathcal{C}_j \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\mathcal{C}_j \neq \varnothing$, $1 \leq j \leq k$, cones agudos dois a dois disjuntos tais que $\mathbb{R}^N \setminus \{0\} = \mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_k$. Mostraremos que existe $c > 0$ e existem cones abertos convexos $\Gamma_j \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\Gamma_j \neq \varnothing$, $1 \leq j \leq k$, tais que

$$y \cdot \xi > c|y||\xi|, \quad y \in \Gamma_j, \xi \in \mathcal{C}_j, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Para cada $1 \leq j \leq k$ fixe $\xi^{(j)} \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\left|\xi^{(j)}\right| = 1$, tal que

$$\overline{\mathcal{C}_j} \setminus \{0\} \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \ : \ \xi \cdot \xi^{(j)} > 0\right\}.$$

A função

$$\overline{\mathcal{C}_j} \cap S^{N-1} \ni \xi \mapsto \xi \cdot \xi^{(j)} \in \mathbb{R}$$

tem um mínimo $c_j > 0$. Defina

$$c := \min_{1 \leq j \leq k} c_j/2,$$

$$\Gamma_j := \left\{y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} : y \cdot \xi > c|y||\xi|, \forall \xi \in \overline{\mathcal{C}_j}\right\}, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Os cones Γ_j são convexos. Com efeito, se $y, y' \in \Gamma_j$, $0 \leq t \leq 1$, então para $\xi \in \overline{\mathcal{C}_j}$ temos:

$$(ty + (1-t)y') \cdot \xi = t(y \cdot \xi) + (1-t)(y' \cdot \xi) > tc|y||\xi| + (1-t)c|y'||\xi| \geq c|ty + (1-t)y'||\xi|$$

e esta condição também nos garante $ty + (1-t)y' \neq 0$. Ademais $\Gamma_j \neq \varnothing$ pois $\xi^{(j)} \in \Gamma_j$. Mostremos então que os cones Γ_j são abertos. Seja $y_0 \in \Gamma_j$. Para cada $\eta \in \overline{\mathcal{C}_j}$ existem cones abertos $V_\eta, U_\eta \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tais que $y_0 \in V_\eta$, $\eta \in U_\eta$ e $y \cdot \theta > c|y||\theta|$ para $y \in V_\eta$, $\theta \in U_\eta$. Pela compacidade de $\overline{\mathcal{C}_j} \cap S^{N-1}$, existem $\eta^{(\ell)} \in \overline{\mathcal{C}_j}$, $1 \leq \ell \leq p$, tais que $\overline{\mathcal{C}_j} \subset U_{\eta^{(1)}} \cup \cdots \cup U_{\eta^{(p)}}$. Tome $V := V_{\eta^{(1)}} \cap \cdots \cap V_{\eta^{(p)}}$ e teremos $y_0 \in V \subset \Gamma_j$.

Redefina $\mathcal{C}_1$ acrescentando $0 \in \mathbb{R}^N$. Temos:

$$\mu = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{\mu}(\xi) e_\xi = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{\xi \in \mathcal{C}_j \cap \mathbb{Z}^N} \widehat{\mu}(\xi) e_\xi \right).$$

Defina para $1 \leq j \leq k$:

$$f_j(x + iy) := \sum_{\xi \in \mathcal{C}_j \cap \mathbb{Z}^N} \widehat{\mu}(\xi) e^{i(x+iy)\cdot\xi}, \quad x \in \mathbb{T}^N, y \in \Gamma_j.$$

Mostraremos que $f_j \in \mathcal{O}(\mathbb{T}^N + i\Gamma_j)$ e aplicando a proposição 3.2.6 teremos:

$$\sum_{j=1}^{k} \mathrm{b}_{\Gamma_j} f_j = \sum_{j=1}^{k} \lim_{t \to 0} f_j\left(\cdot + it\xi^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{\xi \in \mathcal{C}_j \cap \mathbb{Z}^N} \lim_{t \to 0} \widehat{\mu}(\xi) e^{i\left(\cdot + it\xi^{(j)}\right)\cdot\xi} \right) = \mu.$$

Acima os limites são tomados em $\mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$.

Mostremos então que a série que define f_j converge uniformemente sobre os subconjuntos compactos de $\mathbb{T}^N + i\Gamma_j$. Seja $K \subset \mathbb{T}^N + i\Gamma_j$ compacto, então existe $d > 0$ tal que $|\mathrm{Im}\,(z)| \geq d$ para

$z \in K$. Para $x + iy \in K$, $\xi \in \mathcal{C}_j \cap \mathbb{Z}^N$, temos:

$$\left|\widehat{\mu}(\xi)e^{i(x+iy)\cdot\xi}\right| \leq \|\widehat{\mu}\|_{(\varepsilon)}e^{\varepsilon|\xi|-y\cdot\xi} \leq \|\widehat{\mu}\|_{(\varepsilon)}e^{\varepsilon|\xi|-c|y||\xi|} \leq \|\widehat{\mu}\|_{(\varepsilon)}e^{(\varepsilon-cd)|\xi|},$$

logo tomando $0 < \varepsilon < cd$ segue a tese. □

3.3 Análise microlocal

3.3.1 Definição. Seja $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$.

1. Seja $\xi_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Dizemos que μ é *microlocalmente analítica em* ξ_0 se existirem cones abertos convexos $\Gamma_j \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\Gamma_j \neq \varnothing$, $1 \leq j \leq k$, tais que:
   (a) Para $y \in \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ vale $\xi_0 \cdot y < 0$;
   (b) Existe $\delta > 0$ e existem $f_j \in \mathcal{O}(\mathbb{T}^N + i\Gamma_{j\delta})$, $1 \leq j \leq k$, tais que:
   $$\mu = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{b}_{\Gamma_j} f_j.$$
2. Denotamos por $\mathfrak{S}(\mu)$ o subconjunto de $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ formado por todos os vetores nos quais μ não é microlocalmente analítica.

3.3.2 Definição. Seja $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$.

1. Seja $\xi_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Dizemos que μ é *real-analítica em* ξ_0 se existe um cone aberto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ com $\xi_0 \in \mathcal{C}$ e constantes $C, a > 0$ tais que:
   $$|\widehat{\mu}(\xi)| \leq Ce^{-a|\xi|}, \quad \xi \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^N;$$
2. Denotamos por $\mathfrak{s}(\mu)$ o subconjunto de $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ formado por todos os vetores nos quais μ não é real-analítica.

3.3.3 Lema. *Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ um cone agudo. Temos:*

(i) $\operatorname{int}(\mathcal{C}^\circ) \neq \varnothing$;

(ii) $\mathcal{C}^{\circ\circ} = \operatorname{ch}\mathcal{C}$.

Demonstração. (i) Seja $\xi_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tal que

$$\overline{\mathcal{C}} \setminus \{0\} \subset \left\{\eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} : \eta \cdot \xi_0 > 0\right\}.$$

Temos $\xi_0 \in \mathcal{C}^\circ$. Mostremos que existe uma vizinhança aberta U de ξ_0 tal que:

$$\overline{\mathcal{C}} \setminus \{0\} \subset \left\{\eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} : \eta \cdot \zeta > 0,\ \forall \zeta \in U\right\}.$$

Com efeito, para cada $\eta \in \overline{\mathcal{C}} \cap S^{N-1}$ existem abertos $V_\eta \ni \eta$, $U_\eta \ni \xi_0$ tais que $\beta \cdot \zeta > 0$ quaisquer que sejam $\beta \in V_\eta$, $\zeta \in U_\eta$. Pelo teorema de Heine-Borel existem $\eta^{(j)} \in \overline{\mathcal{C}} \cap S^{N-1}$, $1 \leq j \leq k$, tais que $\overline{\mathcal{C}} \cap S^{N-1} \subset V_{\eta^{(1)}} \cup \cdots \cup V_{\eta^{(k)}}$. Basta então tomar $U := U_{\eta^{(1)}} \cap \cdots \cap U_{\eta^{(k)}}$ e teremos $\xi_0 \in U \subset \mathcal{C}^\circ$.

(ii) Como $\mathcal{C}^{\circ\circ}$ é fechado em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e contém $\mathcal{C}$, só precisamos mostrar que $\mathcal{C}^{\circ\circ}$ é convexo para concluir $\operatorname{ch}\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^{\circ\circ}$. Se $\xi, \xi' \in \mathcal{C}^{\circ\circ}$ e $0 \leq t \leq 1$ temos

$$(t\xi + (1-t)\xi') \cdot \alpha = t(\xi \cdot \alpha) + (1-t)(\xi' \cdot \alpha) \geq 0, \quad \alpha \in \mathcal{C}^\circ,$$

e resta então mostrar que $t\xi + (1-t)\xi' \neq 0$, $0 \leq t \leq 1$. Suponha por absurdo que existam $\xi, \xi' \in \mathcal{C}^{\circ\circ}$ e $0 < t < 1$ tais que $t\xi + (1-t)\xi' = 0$. Assim, se $\alpha \in \mathcal{C}^\circ$, então $0 \leq t(\xi \cdot \alpha) = -(1-t)(\xi' \cdot \alpha) \leq 0$, logo temos $\xi \cdot \alpha = \xi' \cdot \alpha = 0$. Aplicando (i), sejam $\xi_0 \in \operatorname{int}(\mathcal{C}^\circ)$ e $\rho > 0$ tais que $\xi_0 + \rho\eta/|\eta| \in \mathcal{C}^\circ$ para todo $\eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Temos $0 = \xi \cdot (\xi_0 + \rho\eta/|\eta|) = \rho\xi \cdot \eta/|\eta|$. Logo $\xi \cdot \eta = 0$ para todo $\eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, uma contradição. Portanto $\mathcal{C}^{\circ\circ}$ é convexo.

Reciprocamente, se $\xi \notin \operatorname{ch}\mathcal{C}$ então existe um hiperplano de $\mathbb{R}^N$ que separa ξ de $\operatorname{ch}\mathcal{C}$, ou seja, existe $\xi_* \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tal que $\xi \cdot \xi_* < 0$ e $\eta \cdot \xi_* > 0$ para todo $\eta \in \operatorname{ch}\mathcal{C}$. Então $\xi_* \in \mathcal{C}^\circ$ e portanto $\xi \notin \mathcal{C}^{\circ\circ}$. $\square$

3.3.4 Proposição. *Seja $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$. Então $\mathfrak{S}(\mu) = \mathfrak{s}(\mu)$.*

Demonstração. Seja $\xi_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e suponha que μ é microlocalmente analítica em ξ_0. Mostraremos que μ é real-analítica em ξ_0. Sejam Γ_j, δ e f_j como na definição 3.3.1. Tome $v_j \in \Gamma_{j\delta}$, $1 \le j \le k$. Para $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ temos:

$$\frac{1}{(2\pi)^N}\left|\int_{\mathbb{T}^N + i\{v_j\}} f_j(z)e^{-iz\cdot\xi}dz\right| = \frac{1}{(2\pi)^N}\left|\left(\int_{\mathbb{T}^N} f_j(x+iv_j)e^{-ix\cdot\xi}dx\right)e^{v_j\cdot\xi}\right|$$
$$\le C_j e^{v_j\cdot\xi},$$

em que $C_j := \|f_j(\cdot + iv_j)\|_{L^1(\mathbb{T}^N)}$. Como $v_j \cdot \xi_0 < 0$, escolha $a_j > 0$ tal que $v_j \cdot \xi_0/|\xi_0| < -a_j$. Existe um cone aberto V_j com $\xi_0 \in V_j$ tal que $v_j \cdot \xi/|\xi| < -a_j$ para $\xi \in V_j$. Defina então:

$$\mathcal{C} := V_1 \cap \cdots \cap V_k,$$

$$C := k \max_{1\le j\le k} C_j,$$

$$a := \min_{1\le j\le k} a_j.$$

Então $\mathcal{C}$ é um cone aberto, $\xi_0 \in \mathcal{C}$, e para $\xi \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^N$ temos:

$$|\widehat{\mu}(\xi)| = \left|\sum_{j=1}^k \widehat{\mathrm{b}_{\Gamma_j} f_j}(\xi)\right| \le \sum_{j=1}^k C_j e^{v_j\cdot\xi} \le Ce^{-a|\xi|}.$$

Portanto $\mathfrak{s}(\mu) \subset \mathfrak{S}(\mu)$.

Reciprocamente, suponha que μ é real-analítica em $\xi_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Então existe um cone aberto $\mathcal{C}_0 \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ com $\xi_0 \in \mathcal{C}_0$ e existem $C, a > 0$ tais que:

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \le Ce^{-a|\xi|}, \quad \xi \in \mathcal{C}_0 \cap \mathbb{Z}^N.$$

Escolha cones agudos $\mathcal{C}_j \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\mathcal{C}_j \ne \varnothing$, $1 \le j \le k$, tais que:

1. Para $1 \le j \le k$ temos $\xi_0 \notin \operatorname{ch}\mathcal{C}_j = \mathcal{C}_j^{\circ\circ}$;

2. Os conjuntos $\mathcal{C}_j$, $j = 0, \dots, k$, são dois a dois disjuntos e vale

$$\mathbb{R}^N \setminus \{0\} = \mathcal{C}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_k.$$

Por (1.) podemos tomar $\mathcal{C}'_j \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ cone aberto convexo e agudo tal que $\operatorname{ch}\mathcal{C}_j \subset \mathcal{C}'_j$ e $\xi_0 \notin \overline{\mathcal{C}'_j} = \operatorname{ch}\mathcal{C}'_j$, $1 \le j \le k$. Aplicando o lema 3.3.3, temos $\left(\mathcal{C}'_j\right)^{\circ\circ} = \overline{\mathcal{C}'_j} \setminus \{0\}$, logo $\xi_0 \notin \left(\mathcal{C}'_j\right)^{\circ\circ}$ e portanto existe $y^{(j)} \in \left(\mathcal{C}'_j\right)^\circ$ tal que $\xi_0 \cdot y^{(j)} < 0$, $1 \le j \le k$. Para cada $1 \le j \le k$, mostremos que $\xi \cdot y^{(j)} > 0$ para todo $\xi \in \mathcal{C}_j$. Com efeito, de $y^{(j)} \in \left(\mathcal{C}'_j\right)^\circ \subset \mathcal{C}_j^\circ$ segue que $\xi \cdot y^{(j)} \ge 0$ para todo $\xi \in \mathcal{C}_j$. Suponha por absurdo que para algum $\xi_* \in \mathcal{C}_j$ temos $\xi_* \cdot y^{(j)} = 0$. Então tome $\rho > 0$ tal que $\xi_* + \rho\eta/|\eta| \in \mathcal{C}'_j$ para todo $\eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Temos $0 \le (\xi_* + \rho\eta/|\eta|) \cdot y^{(j)} = (\rho/|\eta|)\eta \cdot y^{(j)}$ e tomando $\eta = -y^{(j)}$ chegamos a uma contradição.

Pelo mesmo raciocínio no início da demonstração da proposição 3.2.12, existe $c > 0$ e existem cones abertos convexos $\Gamma_j \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $y^{(j)} \in \Gamma_j$, $1 \leq j \leq k$, tais que:

(a) Para $y \in \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ vale $\xi_0 \cdot y < 0$;

(b) Para $1 \leq j \leq k$ temos:
$$\xi \cdot y > c|\xi||y|, \quad \xi \in \mathcal{C}_j, y \in \Gamma_j.$$

Redefina $\mathcal{C}_0$ acrescentando $0 \in \mathbb{R}^N$. Por (2.) temos:
$$\mu = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{\mu}(\xi) e_\xi = \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{\xi \in \mathcal{C}_j \cap \mathbb{Z}^N} \widehat{\mu}(\xi) e_\xi \right),$$
e definindo para $1 \leq j \leq k$:
$$f_j(x+iy) := \sum_{\xi \in \mathcal{C}_j \cap \mathbb{Z}^N} \widehat{\mu}(\xi) e^{i(x+iy)\cdot\xi}, \quad x \in \mathbb{T}^N, y \in \Gamma_j,$$
temos $f_j \in \mathcal{O}\big(\mathbb{T}^N + i\Gamma_j\big)$ pois vale (b) e logo podemos fazer o mesmo argumento da demonstração da proposição 3.2.12. Determinaremos agora $\delta > 0$ tal que
$$f_0(x+iy) := \sum_{\xi \in \mathcal{C}_0 \cap \mathbb{Z}^N} \widehat{\mu}(\xi) e^{i(x+iy)\cdot\xi}, \quad x \in \mathbb{T}^N, y \in \mathbb{R}^N, |y| < \delta,$$
define uma função em $\mathcal{O}(T(\delta))$. Para $\xi \in \mathcal{C}_0 \cap \mathbb{Z}^N$ temos:
$$\left|\widehat{\mu}(\xi) e^{i(x+iy)\cdot\xi}\right| \leq C e^{-a|\xi| - y\cdot\xi} \leq C e^{(|y|-a)|\xi|}, \quad x \in \mathbb{T}^N, y \in \mathbb{R}^N,$$
logo tomando $0 < \delta < a$ a série que define f_0 converge uniformemente sobre os compactos de $T(\delta)$ e isto implica $f_0 \in \mathcal{O}(T(\delta))$. Pela observação 3.2.7 podemos redefinir f_1 incorporando f_0 em $\mathbb{T}^N + i\Gamma_{1\delta}$ e obter $\mu = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{b}_{\Gamma_j} f_j$. Isto implica, em conjunto com (a), que μ é microlocalmente analítica em ξ_0. $\square$

3.3.5 Proposição. *Sejam $\mu \in \mathcal{B}\big(\mathbb{T}^N\big)$ e $\Gamma_j \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\Gamma_j \neq \varnothing$, $1 \leq j \leq k$, cones abertos convexos. São equivalentes:*

(i) Dados cones abertos convexos $\Gamma'_j \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\Gamma'_j \neq \varnothing$, com $\overline{\Gamma'_j} \setminus \{0\} \subset \Gamma_j$, $1 \leq j \leq k$, existe $\delta > 0$ e existem $f_j \in \mathcal{O}\Big(\mathbb{T}^N + i\Gamma'_{j\delta}\Big)$, $1 \leq j \leq k$, tais que:
$$\mu = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{b}_{\Gamma'_j} f_j.$$

(ii) $\mathfrak{S}(\mu) \subset \Gamma_1^\circ \cup \cdots \cup \Gamma_k^\circ$.

Demonstração. Mostremos que (i) implica (ii). Se $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e $\xi \notin \Gamma_j^\circ$, $1 \leq j \leq k$, então existem $y^{(j)} \in \Gamma_j$ tais que $y^{(j)} \cdot \xi < 0$, $1 \leq j \leq k$. Para cada $1 \leq j \leq k$, tome um cone aberto e convexo $\Gamma'_j \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, com $y^{(j)} \in \Gamma'_j$ e $\overline{\Gamma'_j} \setminus \{0\} \subset \Gamma_j$, tais que $\xi \cdot y < 0$ para $y \in \Gamma'_j$. Por (i) existe $\delta > 0$ e existem $f_j \in \mathcal{O}\Big(\mathbb{T}^N + i\Gamma'_{j\delta}\Big)$, $1 \leq j \leq k$, tais que $\mu = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{b}_{\Gamma'_j} f_j$. Como $\xi \cdot y < 0$ para $y \in \Gamma'_1 \cup \cdots \cup \Gamma'_k$, segue que $\xi \notin \mathfrak{S}(\mu)$.

Mostremos que (ii) implica (i). Sejam dados cones abertos convexos $\Gamma'_j \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\Gamma'_j \neq \varnothing$, com $\overline{\Gamma'_j} \setminus \{0\} \subset \Gamma_j$, $1 \leq j \leq k$. Escolha cones abertos convexos $\Gamma''_j \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tais que
$$\overline{\Gamma'_j} \setminus \{0\} \subset \Gamma''_j \subset \overline{\Gamma''_j} \setminus \{0\} \subset \Gamma_j, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Defina

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &:= (\Gamma_1'')^\circ, \\
\mathcal{C}_2 &:= (\Gamma_2'')^\circ \setminus \mathcal{C}_1, \\
&\cdots \\
\mathcal{C}_k &:= (\Gamma_k'')^\circ \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{k-1}), \\
\mathcal{C}_0 &:= \mathbb{R}^N \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_k).
\end{aligned}
$$

Assim os cones $\mathcal{C}_j$, $1 \le j \le k$, são dois a dois disjuntos e $\mathbb{R}^N = \mathcal{C}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_k$. Além disso, temos:

(a) Existe $c > 0$ tal que:

$$\xi \cdot y > c|\xi||y|, \quad \xi \in \mathcal{C}_j, \ y \in \Gamma_j', \quad 1 \le j \le k;$$

(b) $\overline{\mathcal{C}_0} \cap (\Gamma_1^\circ \cup \cdots \cup \Gamma_k^\circ) = \varnothing$.

Mostremos (a). As funções

$$\left((\Gamma_j'')^\circ \cap S^{N-1}\right) \times \left(\overline{\Gamma_j'} \cap S^{N-1}\right) \ni (\xi, y) \mapsto \xi \cdot y \in \mathbb{R}, \quad 1 \le j \le k,$$

são estritamente positivas. Com efeito, dado $1 \le j \le k$ temos $\overline{\Gamma_j'} \setminus \{0\} \subset \Gamma_j''$ e portanto $\xi \cdot y \ge 0$ para $\xi \in (\Gamma_j'')^\circ$, $y \in \overline{\Gamma_j'}$. Suponha por absurdo que existem $\xi_* \in (\Gamma_j'')^\circ$, $y_* \in \overline{\Gamma_j'}$ com $\xi_* \cdot y_* = 0$. Seja $\rho > 0$ tal que $y_* + \rho\eta/|\eta| \in \Gamma_j''$ para todo $\eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Então $0 \le \xi_* \cdot (y_* + \rho\eta/|\eta|) = (\rho/|\eta|)\xi_* \cdot \eta$ e tomando $\eta = -\xi_*$ chegamos a uma contradição. Por compacidade, sejam $c_j > 0$ os respectivos mínimos destas funções. Definindo $c := \min\{c_j/2 : 1 \le j \le k\}$, observando que $\mathcal{C}_j \subset (\Gamma_j'')^\circ$, temos (a).

Mostremos (b). Suponha por absurdo que existe $\eta_* \in \overline{\mathcal{C}_0} \cap \Gamma_j^\circ$ para algum j. O mesmo raciocínio do parágrafo anterior permite concluir que $\eta_* \cdot y > 0$ para todo $y \in \Gamma_j$. Seja $c_* > 0$ tal que $\eta_* \cdot y \ge c_*$ para todo $y \in \overline{\Gamma_j''} \cap S^{N-1}$. Tomando uma sequência $\eta^{(\ell)} \in \mathcal{C}_0$, $\ell \in \mathbb{N}$, tal que $\eta^{(\ell)} \longrightarrow \eta_*$ temos:

$$\eta^{(\ell)} \cdot y = \left(\eta^{(\ell)} - \eta_*\right) \cdot y + \eta_* \cdot y \ge c_* - \left|\eta^{(\ell)} - \eta_*\right|, \quad y \in \overline{\Gamma_j''} \cap S^{N-1},$$

logo existe $\ell_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\eta^{(\ell)} \in (\Gamma_j'')^\circ$ para $\ell \ge \ell_0$. Então

$$
\begin{aligned}
\eta^{(\ell_0)} \in \mathcal{C}_0 \cap (\Gamma_j'')^\circ &= \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_0 \cap (\Gamma_j'')^\circ \\
&= \mathcal{C}_0 \cap (\mathbb{R}^N \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_k)) \cap (\Gamma_j'')^\circ \\
&= \mathcal{C}_0 \cap \left((\Gamma_j'')^\circ \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_k)\right) \\
&\subset \mathcal{C}_0 \cap \left((\Gamma_j'')^\circ \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{j-1})\right) \\
&= \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_j \\
&= \varnothing,
\end{aligned}
$$

uma contradição. Logo temos (b).

Como $\mathfrak{S}(\mu) \subset \Gamma_1^\circ \cup \cdots \cup \Gamma_k^\circ$, podemos aplicar (b), juntamente com a proposição 3.3.4, e concluir que μ é real-analítica em cada $\xi \in \overline{\mathcal{C}_0}$. Pelo teorema de Heine-Borel existem $\xi^{(\ell)} \in \overline{\mathcal{C}_0} \cap S^{N-1}$, $1 \le \ell \le p$ e existem cones abertos $\mathcal{C}_\ell' \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, com $\xi^{(\ell)} \in \mathcal{C}_\ell'$, e existem $C_\ell, a_\ell > 0$ tais que:

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \le C_\ell e^{-a_\ell|\xi|}, \quad \xi \in \mathcal{C}_\ell' \cap \mathbb{Z}^N, \quad 1 \le \ell \le p,$$

com $\overline{\mathcal{C}_0} \subset \mathcal{C}_1' \cup \cdots \cup \mathcal{C}_p'$. Tomando $C := \max_{1 \le \ell \le p} C_\ell$ e $a := \min_{1 \le \ell \le p} a_\ell$, temos:

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \le Ce^{-a|\xi|}, \quad \xi \in \overline{\mathcal{C}_0} \cap \mathbb{Z}^N.$$

Por fim, temos:

$$\mu = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{\mu}(\xi) e_\xi = \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{\xi \in \mathcal{C}_j \cap \mathbb{Z}^N} \widehat{\mu}(\xi) e_\xi \right),$$

e definindo para $1 \leq j \leq k$:

$$f_j(x+iy) := \sum_{\xi \in \mathcal{C}_j \cap \mathbb{Z}^N} \widehat{\mu}(\xi) e^{i(x+iy)\cdot\xi}, \quad x \in \mathbb{T}^N, y \in \Gamma_j',$$

temos $f_j \in \mathcal{O}\big(\mathbb{T}^N + i\Gamma_j\big)$ pois vale (a) e logo podemos fazer o mesmo argumento da demonstração da proposição 3.2.12. Determinaremos agora $\delta > 0$ tal que

$$f_0(x+iy) := \sum_{\xi \in \mathcal{C}_0 \cap \mathbb{Z}^N} \widehat{\mu}(\xi) e^{i(x+iy)\cdot\xi}, \quad x \in \mathbb{T}^N, y \in \mathbb{R}^N, |y| < \delta,$$

define uma função em $\mathcal{O}(T(\delta))$. Para $\xi \in \mathcal{C}_0 \cap \mathbb{Z}^N$ temos:

$$\left| \widehat{\mu}(\xi) e^{i(x+iy)\cdot\xi} \right| \leq C e^{-a|\xi| - y\cdot\xi} \leq C e^{(|y|-a)|\xi|}, \quad x \in \mathbb{T}^N, y \in \mathbb{R}^N,$$

logo tomando $0 < \delta < a$ a série que define f_0 converge uniformemente sobre os compactos de $T(\delta)$ e isto implica $f_0 \in \mathcal{O}(T(\delta))$. Pela observação 3.2.7 podemos redefinir f_1 incorporando f_0 em $\mathbb{T}^N + i\Gamma'_{1\delta}$ e obter $\mu = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{b}_{\Gamma_j'} f_j$. Portanto temos (i). □

3.3.6 Teorema. (Edge-of-the-wedge) *Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ cone aberto convexo, $\Gamma \neq \varnothing$, e sejam $\delta > 0$, $f_+ \in \mathcal{O}\big(\mathbb{T}^N + i\Gamma_\delta\big)$ e $f_- \in \mathcal{O}\big(\mathbb{T}^N - i\Gamma_\delta\big)$ tais que $\mathrm{b}_\Gamma f_+ = \mathrm{b}_{(-\Gamma)} f_-$. Então existem $0 < \delta' < \delta$ e $f \in \mathcal{O}(T(\delta'))$ tais que:*

$$f = \begin{cases} f_+, & \text{em } \mathbb{T}^N + i\Gamma_{\delta'}, \\ f_-, & \text{em } \mathbb{T}^N - i\Gamma_{\delta'}. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $\mu := \mathrm{b}_\Gamma f_+ = \mathrm{b}_{(-\Gamma)} f_-$. Aplicando a proposição 3.3.5 temos $\mathfrak{S}(\mu) \subset \Gamma^\circ \cap (-\Gamma)^\circ$. Mas $\Gamma^\circ \cap (-\Gamma)^\circ = \varnothing$. Com efeito, suponha por absurdo que existe $\xi_* \in \Gamma^\circ \cap (-\Gamma)^\circ$, então $\xi_* \cdot y = 0$ para todo $y \in \Gamma$ pois $\xi_* \cdot y \geq 0$ e $\xi_* \cdot (-y) \geq 0$ para todo $y \in \Gamma$. Escolha $y_0 \in \Gamma$ e seja $\rho > 0$ tal que $y_0 + \rho\eta/|\eta| \in \Gamma$ para todo $\eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Temos $0 = \xi_* \cdot (y_0 + \rho\eta/|\eta|) = (\rho/|\eta|)\xi_* \cdot \eta$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Tomando $\eta = \xi_*$ chegamos a uma contradição.

Logo $\mu \in C^\omega\big(\mathbb{T}^N\big)$ e portanto existem $0 < \delta' < \delta$ e $f \in \mathcal{O}(T(\delta'))$ tais que $\mu = f|_{\mathbb{T}^N}$. Aplicando a proposição 3.2.8 segue a tese. □

3.4 Aplicações

3.4.1 Definição. Seja $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Dizemos que P é *globalmente analítico hipoelíptico*, abreviadamente *(GAH)*, se para todo $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ tal que $Pu \in C^\omega\big(\mathbb{T}^N\big)$ tem-se $u \in C^\omega\big(\mathbb{T}^N\big)$.

Em [Gre72] é demonstrado o seguinte resultado:

3.4.2 Teorema. *Seja $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Então P é* (GAH) *se, e somente se, para todo $K > 0$ existe $N_K > 0$ tal que*

$$|P(\xi)| \geq e^{-K|\xi|}, \quad |\xi| > N_K.$$

3.4.3 Definição. Seja $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Dizemos que P é *(GAH) em $\xi_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$* se para todo $\mu \in \mathcal{B}\big(\mathbb{T}^N\big)$ tem-se:

$$\xi_0 \notin \mathfrak{S}(P\mu) \implies \xi_0 \notin \mathfrak{S}(\mu).$$

3.4.4 Teorema. *Seja* $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$. *Seja* $\xi_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ *e suponha que exista* $\mathcal{C}_0 \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ *cone aberto com* $\xi_0 \in \mathcal{C}_0$ *tal que para todo* $K > 0$ *existe* $N_K > 0$ *tal que*

$$|P(\xi)| \geq e^{-K|\xi|}, \qquad \xi \in \mathcal{C}_0,\ |\xi| > N_K,$$

então P *é* (GAH) *em* ξ_0.

Demonstração. Seja $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$ e suponha que $\xi_0 \notin \mathfrak{S}(P\mu)$. Pela proposição 3.3.4 segue que $P\mu$ é real-analítica em ξ_0. Logo existe um cone aberto $\mathcal{C}$ com $\xi_0 \in \mathcal{C}$ e constantes $C, a > 0$ tais que

$$Ce^{-a|\xi|} \geq \left|\widehat{P\mu}(\xi)\right| = |P(\xi)||\widehat{\mu}(\xi)| \geq e^{-K|\xi|}|\widehat{\mu}(\xi)|, \quad \xi \in \mathcal{C}\cap\mathcal{C}_0,\ |\xi| > N_K,$$

para $K > 0$. Basta então tomar $0 < K < a$, o cone $\mathcal{C}\cap\mathcal{C}_0 \ni \xi_0$ e uma constante conveniente (para lidar com $|\xi| \leq N_K$), e podemos concluir que μ é real-analítica em ξ_0. Portanto $\xi_0 \notin \mathfrak{s}(\mu) = \mathfrak{S}(\mu)$. □

3.4.5 Corolário. *Seja* $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$. *Se* P *é* (GAH), *então para todo* $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$ *tal que* $P\mu \in C^\omega(\mathbb{T}^N)$ *tem-se* $\mu \in C^\omega(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Com efeito, se $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$ é tal que $P\mu \in C^\omega(\mathbb{T}^N)$, então $\mathfrak{S}(\mu) = \mathfrak{S}(P\mu) = \varnothing$. □

3.4.6 Observação. Note que pela definição 3.4.3 e pelo corolário 3.4.5 temos que P é (GAH) se, e somente se, P é (GAH) em ξ_0 para todo $\xi_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

3.4.7 Observação. Em [Gre72] encontra-se um teorema no qual se exibe um exemplo em $\mathbb{T}^2$ de um operador P que não é (GAH) e tem a forma $P = D_1 - \alpha D_2$, em que $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Mostraremos a seguir que P é (GAH) em todo $(\xi_1^0, \xi_2^0) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\ell_1 \cup \ell_2)$, em que $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{R}^2$ são as retas dadas pelas equações

$$\begin{aligned} \ell_1 &: \quad \xi_1 - \alpha\xi_2 = 0,\\ \ell_2 &: \quad \xi_1 + \alpha\xi_2 = 0. \end{aligned}$$

Observe que $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2 \setminus (\ell_1 \cup \ell_2)$, e este exemplo então demonstra que a análise microlocal de um operador em $\mathbb{T}^N$ não pode se restringir a direções em $\mathbb{Z}^N$.

Dado $0 \leq r < 1$ considere os cones

$$\mathcal{C}_1(r) := \left\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : |\xi_1| \leq r|\alpha\xi_2|\right\},$$

$$\mathcal{C}_2(r) := \left\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : |\xi_2| \leq r|\xi_1/\alpha|\right\}.$$

Se $(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{C}_1(r)$, então temos

$$|P(\xi_1, \xi_2)| = |\xi_1 - \alpha\xi_2| \geq |\alpha\xi_2| - |\xi_1| \geq (1 - r)|\alpha\xi_2|.$$

Analogamente, se $(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{C}_2(r)$, então $|P(\xi_1, \xi_2)| \geq (1 - r)|\xi_1/\alpha|$. Pelo teorema 3.4.4 temos que P é (GAH) em $\bigcup_{0\leq r<1} (\mathcal{C}_1(r) \cup \mathcal{C}_2(r)) = \mathbb{R}^2 \setminus (\ell_1 \cup \ell_2)$.

Referências Bibliográficas

[CC] G. Chinni e P. D. Cordaro. On global analytic and Gevrey hypoellipticity on the torus and the Métivier inequality. A aparecer em Communications in PDE, 2017. 1, 41

[CT94] P. D. Cordaro e F. Treves. *Hyperfunctions on Hypo-Analytic Manifolds*. Princeton University Press, 1ª edição, 1994. 1, 16, 19

[dR84] G. de Rham. *Differentiable Manifolds: Forms, Currents, Harmonic Forms*. Springer, 1984. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 266. 15

[God58] R. Godement. *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*. Hermann, 1958. 8

[GR65] R. C. Gunning e H. Rossi. *Analytic Functions of Several Complex Variables*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1ª edição, 1965. 11

[Gra58] H. Grauert. On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds. *Ann. Math.*, **68**:460–472, 1958. 39

[Gre72] S. J. Greenfield. Hypoelliptic vector fields and continued fractions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **31**:115–118, 1972. 53, 54

[GW72] S. J. Greenfield e N. R. Walach. Global hypoellipticity and Liouville numbers. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **31**:112–114, 1972.

[Hör90] L. Hörmander. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. North-Holland, 3ª edição, 1990. 11, 15, 17, 18, 25, 37

[Hör03] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer, 2ª edição, 2003. Reprint of the 2nd Ed. 1990. 1

[KS71] J.-M. Kantor e P. Schapira. Hyperfonctions associées aux faisceaux analytiques réels cohérents. *An. Acad. Brasil. Ci.*, **43**:299–306, 1971. iii, v, 1

[Köt79] G. Köthe. *Topological Vector Spaces. II.* Springer-Verlag, Berlin, 1979. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 237. 38

[Mal55] B. Malgrange. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. *Ann. Inst. Fourier*, **6**:271–355, 1955. 32

[Mar60] A. Martineau. Fonctions analytiques et distributions; support des fonctionelles analytiques, 1959-1960. 4e année, n. 19. iii, v, 1

[Mar61] A. Martineau. Les hyperfonctions de M. Sato, 1960-1961. 13e année, n. 214. iii, v, 1

[Mor93] M. Morimoto. *An Introduction to Sato's Hyperfunctions*. American Mathematical Society, 1ª edição, 1993. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 129. 12

[Nar73] R. Narasimhan. *Analysis of Real and Complex Manifolds*. Elsevier Science Publishing Co. , Inc., U.S., 2ª edição, 1973. 32

[Pet05] G. Petronilho. Periodic Gevrey ultradistributions in $\mathbb{R}^n$, Maio 2005. Notas de um mini-curso ministrado na Primeira Escola Brasileira de Equações Diferenciais, realizado na Unicamp, SP.

[Sat59] M. Sato. Theory of hyperfunctions. I. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. I*, **8**:139–193, 1959. 1

[Sat60] M. Sato. Theory of hyperfunctions. II. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. I*, **8**:387–437, 1960. 1

[Sch70] P. Schapira. *Théorie des hyperfonctions.* Springer Verlag, 1970. Lecture notes in mathematics vol. 126. 1

[Ser55] J.-P. Serre. Un théorème de dualité. *Comm. Math. Helv.*, **29**:9–26, 1955. iii, v, 1

[Tre] F. Treves. Aspects of analytic PDE. Versão preliminar de livro a ser publicado. 1

[Tre67] F. Treves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Academic Press New York, 1967.