

**Homologia de Contato Cilíndrica
para fluxos de Reeb fracamente convexos**

Ana Kelly de Oliveira

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Pedro Antonio Santoro Salomão

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, Março de 2022

Homologia de Contato Cilíndrica para fluxos de Reeb fracamente convexos

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 23/03/2022. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Pedro Antonio Santoro Salomão (orientador) - IME-USP
- Profa. Dra. Marta Batoreo - UFES
- Prof. Dr. Vinicius Gripp Barros Ramos - IMPA
- Prof. Dr. Miguel Tribolet de Abreu - IST
- Prof. Dr. Leonardo Magalhães Macarini - IST

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me sustentado até aqui. Segundo, a meus colegas do IME, especialmente Carolina Lemos e Keon Choi pelas conversas, por tirarem minhas dúvidas sobre vários temas, por ouvirem minhas lamúrias ao longo do caminho e pelos cafés.

Por último, mas não menos importante, agradeço ao meu orientador, prof. Pedro Salomão, pelo esforço que teve ao me ajudar a dar forma a esse trabalho.

Resumo

OLIVEIRA, A. K. **Homologia de Contato Cilíndrica para fluxos de Reeb fracamente convexos**. 2022. 76 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

A Homologia de Contato Cilíndrica é uma ferramenta essencial no estudo das órbitas de Reeb periódicas. No entanto, pode não estar bem definida devido a alguns problemas de transversalidade envolvendo recobrimento múltiplos de curvas e órbitas com baixo índice. Por exemplo, Hutchings e Nelson provaram que a homologia de contato cilíndrico está bem definida sob a suposição de convexidade dinâmica, ou seja, quando os índices de todas as órbitas de Reeb são de pelo menos 3. Consideramos fluxos de Reeb de formas de contato fracamente convexas, ou seja, formas de contato cujas órbitas de Reeb têm um índice de pelo menos 2. O principal obstáculo na definição do operador de fronteira é a presença de alguns buildings indesejáveis que surgem como SFT-limites de uma família de cilindros pseudo-holomorfos de índice de Fredholm 2. Concentramo-nos em buildings com dois níveis. O primeiro nível contém uma curva com um índice de Fredholm negativo e o segundo nível contém um número finito de planos rígidos assintóticos a mesma órbita de Reeb de índice 2. Usamos a Teoria de Gluing de Hutchings e Taubes para encontrar a continuação da família de cilindros após uma colagem adequada da curva multi-coberta com planos rígidos opostos assintóticos à órbita índice 2. Então a construção do operador diferencial se resume ao caso dinamicamente convexo e a homologia de contato cilíndrico está bem definida. Assumimos que a variedade de contato admite um preenchimento simplético esférico. Esta suposição implica a existência dos planos rígidos opostos requeridos, assintóticos às órbitas de índice 2.

Palavras-chave: homologia de contato cilíndrica, fracamente convexo, gluing.

Abstract

OLIVEIRA, A. K. **Cylindrical Contact Homology in 3-contact manifolds with weakly convex contact forms**. 2022. 76 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

Cylindrical Contact Homology is an essential tool in studying closed Reeb orbits. However, it may not be well-defined due to some transversality problems involving multi-covered curves and low index orbits. For instance, Hutchings and Nelson proved that cylindrical contact homology is well-defined under the dynamical convexity assumption, i.e., when the indices of all Reeb orbits are at least 3. Here, we consider Reeb flows of weakly convex contact forms, i.e., contact forms all whose Reeb orbits have an index of at least 2. The main obstacle in the definition of the boundary operator is the presence of some undesirable buildings that arise as SFT-limits of a family of Fredholm index-2 pseudo-holomorphic cylinders. We focus on buildings with two levels. The first level contains a multi-covered curve with a negative Fredholm index, and the second level contains finitely many rigid planes asymptotic to the same index-2 Reeb orbit. We use Hutchings and Taubes' Gluing Theory to find the continuation of the family of cylinders after a suitable gluing of the multi-covered curve with opposite rigid planes asymptotic to the index-2 orbit. Then the construction of the differential operator boils down to the dynamical convex case, and the cylindrical contact homology is well-defined. We assume that the contact manifold admits an aspherical symplectic filling. This assumption implies the existence of the required opposite rigid planes asymptotic to the index-2 orbits.

Keywords: cylindrical contact homology, weakly convex, gluing.

Sumário

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Conceitos Básicos	3
2.1 Variedades simplética e de Contato	3
2.2 Estruturas de contato overtwisted e tight	4
2.3 Estrutura quase complexa e curvas pseudo-holomorfas	5
2.4 Curvas pseudo-holomorfas em simplectizações	6
2.5 Índices	8
2.5.1 Índice de Conley-Zehnder	8
2.5.2 Índice de Fredholm	10
2.6 Operador Assintótico	11
2.7 Linearização do operador de Cauchy-Riemann e Adjunta formal	13
3 Estoque de calças	17
3.1 Inventário do estoque	17
3.2 Curvas no building do Teorema 3.12 (c.6)	27
3.3 Eliminando calças	31
4 Costurando calças	37
4.1 Pregluing	38
4.2 Gluing	40
4.3 Fibrado de Obstrução	49
4.4 Contando os zeros do Fibrado de Obstrução	57
5 Homologia	65
5.1 Motivação	65
5.2 Homologia de Contato Cilíndrica	66
Referências Bibliográficas	75

Lista de Figuras

3.1	Building com três níveis, gênero 1, dois furos positivos e três furos negativos.	21
3.2	Buildings holomorfos do Teorema 3.11(c)	21
3.3	Buildings holomorfos do Teorema 3.12(c).	24
3.4	Buildings holomorfos a serem eliminados	32
3.5	Trança ζ ao redor de α	32
3.6	Sinais das auto-interseções	33
3.7	O <i>writhe</i> do link orientado γ é $4 - 3 = 1$	33
3.8	Tranças $\zeta_{1,2}^k$ e ζ_{\pm}^k na imagem das curvas w_k que convergem para o building u	35
4.1	Building J-holomorfo em $\mathcal{M}_{J,d}$	37
4.2	Σ_* no caso $d = 2$	39
4.3	Funções β_1 e β_{2k}	39
4.4	Building holomorfo de gênero aritmético 1, três níveis, com um fim positivo e nenhum fim negativo.	59
5.1	Ilustração da compactificação de $\overline{\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}}$ como uma 1-variedade com bordo	70
5.2	Projeção no plano x_1x_2 de $H_k^{-1}(1/6)$ para H_k como em (5.6) com $k = -10$	73
5.3	Projeção no plano x_1x_2 de $H_{a,c,\epsilon}^{-1}(1/7)$ para $H_{a,c,\epsilon}$ como em (5.11) com $\epsilon = 1/3$ e $a = c = 1$	74

Capítulo 1

Introdução

Em 1978, Alan Weinstein formulou uma conjectura que diz que em qualquer variedade de contato compacta $(M, \xi = \ker \lambda)$ o campo de Reeb R_λ possui ao menos uma órbita periódica. Várias pessoas provaram essa conjectura em diferentes contextos. Uma dessas pessoas foi Helmut Hofer que em 1993 publicou o artigo [Hof93] com a prova da Conjectura de Weinstein em S^3 com uma estrutura de contato overtwisted. Para isso, Hofer usou o comportamento assintótico das curvas pseudo-holomorfas em simplificações. O comportamento assintótico usado pode ser expresso da seguinte forma: dados Σ uma superfície de Riemann compacta, $\Gamma \subset \Sigma$ um subconjunto finito, (M, ξ) uma 3-variedade de contato compacta e $u := (a, v) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma curva pseudo-holomorfa, então quando $z \rightarrow z^* \in \Gamma$ segue que v se aproxima de uma órbita de Reeb periódica. As propriedades das curvas pseudo-holomorfas, a partir desse momento, se tornaram uma ferramenta muito usada no estudo das órbitas de Reeb em 3-variedades de contato compactas.

Em 2000, uma outra ferramenta, que surge a partir das curvas pseudo-holomorfas, é introduzida por Eliashberg, Givental e Hofer em [EGH00]. Nesse artigo, os autores discutem sobre alguns invariantes em variedades de contato e, entre eles, está a Homologia de Contato Cilíndrica. Eles provam que se uma estrutura de contato ξ em M admite uma forma de contato que não possui órbitas de Reeb contráteis α tais que $|\alpha| = -1, 0, 1$, então essa homologia está bem-definida e independe da escolha da forma de contato e da estrutura quase-complexa. Desde então, vários trabalhos, como [Yau04], [vK08], [Yau09], [Pat09], [Mom11], [AM12], [Nel15], [HM15], [Go15], [HN16], [BH18], [HM19], [Dig21], mostram a existência dessa Homologia em outros contextos. Em particular, Hutchings e Nelson em [HN16] definem essa homologia em 3-variedades de contato que possuem formas de contato dinamicamente convexas e, além disso, lançam uma sugestão dos possíveis problemas que surgem ao permitir que as formas de contato possuam órbitas de Reeb com índice de Conley-Zehnder 2. Um exemplo de problema é o surgimento de curvas pseudo-holomorfas com índice de Fredholm negativo em um dos níveis de um building J -holomorfo de índice de Fredholm 2.

Este trabalho tem como objetivo dizer algumas condições para que a Homologia de Contato Cilíndrica esteja bem-definida em 3-variedades de contato que possuam uma forma de contato fracamente convexa. Para atingir esse objetivo nos inspiramos nas estratégias usadas por Hutchings e Nelson em [HN16] e também usamos o ferramental da teoria de Gluing contido [HT07], fazendo as devidas modificações para se adaptar ao nosso caso. Também usamos algumas ideias de como lidar com curvas pseudo-holomorfas com índice de Fredholm negativos contido em [BH18]. Algumas das condições que assumimos para que a homologia cilíndrica esteja bem-definida no caso fracamente convexo são topológicas (como, por exemplo, a 3-variedade de contato (M, ξ) possuir um *strong filling* (W, ω) que satisfaz a condição de asfericidade simplética). Outras condições se referem às características das órbitas de Reeb contráteis com índice de Conley-Zehnder 2 e 3. Assim, o resultado principal desse trabalho (Teorema 5.8) é o seguinte:

Teorema 1.1. *Seja $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma 3-variedade de contato coorientável, tight, fechada, conexa e tal que $\pi_2(M) = 0$. Assuma que (M, ξ) possua um strong filling (W, ω) que satisfaça a condição de asfericidade simplética e que λ seja uma 1-forma de contato fracamente convexa e não-degenerada. Seja $J \in \mathcal{J}_{reg}(\lambda)$. Assuma também que toda órbita de Reeb contrátil de índice de Conley-Zehnder 2 é um não-nó e um mergulho e que toda órbita de Reeb contrátil de índice de Conley-Zehnder 3 é um mergulho. Nessas condições, existe uma Homologia de Contato Cilíndrica gerada pelas órbitas boas de R_λ .*

No Capítulo 2 desse trabalho introduzimos algumas notações, definições e resultados básicos importantes para os capítulos subsequentes. No Capítulo 3, primeiro investigamos nas seções 3.1 e 3.2 como é a estrutura dos buildings J -holomorfos que tenham índice de Fredholm 1 e 2 e depois na seção 3.3 verificamos se é possível que seqüências de cilindros J -holomorfos com índice de Fredholm 2 podem convergir para alguns desses buildings J -holomorfos de índice 2 encontrados nas seções anteriores.

No Capítulo 4 tratamos do processo de *gluing* entre curvas pseudo-holomorfas com um fim positivo, $d+1$ fins negativos ($d \geq 1$), índice $2-d$ e d planos pseudo-holomorfos de índice 1. Também nesse capítulo, introduzimos na seção 4.3 a definição do Fibrado de Obstrução característico do nosso caso e investigamos a existência de zeros de duas seções especiais S e S_0 desse fibrado que nos dão informações sobre quando as curvas tratadas nas seções 4.1 e 4.2 são “coláveis”. Na seção 4.4, contamos quantos zeros tem a seção S .

Finalmente, no capítulo 5 definimos a Homologia de Contato Cilíndrica e juntamos todas as condições encontradas ao longo dos capítulos anteriores para dizer quando essa homologia está bem-definida no caso fracamente convexo. Além disso, nesse capítulo damos alguns exemplos de variedades difeomorfas a S^3 dotadas de uma forma de contato fracamente convexa onde todas as hipóteses do teorema principal são satisfeitas e, portanto, onde existe uma Homologia de Contato Cilíndrica.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

2.1 Variedades simplética e de Contato

Definição 2.1. Seja W uma variedade suave. Uma **forma simplética** em W é uma 2-forma $\omega \in \Omega^2(W)$ fechada e não degenerada. O par (W, ω) é chamado de **variedade simplética**.

Definição 2.2. Uma **aplicação simplética** $\varphi : (W_1, \omega_1) \rightarrow (W_2, \omega_2)$ entre variedades simpléticas é uma aplicação diferenciável satisfazendo $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. Se φ for um difeomorfismo então diz-se que φ é um **simplectomorfismo**.

Exemplo 2.3. O exemplo mais importante de variedade simplética é \mathbb{R}^{2n} com a forma simplética canônica

$$\omega_{can} = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i,$$

onde $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ são as coordenadas de \mathbb{R}^{2n} .

Definição 2.4. Seja M uma variedade de dimensão ímpar $2n + 1$. Uma **estrutura de contato** é um campo de hiperplanos maximal não-integrável $\xi \subset TM$, tal que localmente $\xi = \ker \lambda$ e a 1-forma λ satisfaz:

$$\lambda \wedge (d\lambda)^n \neq 0$$

(significando que ela não é identicamente nula em nenhum ponto). Tal 1-forma λ é chamada de **forma de contato**. O par (M, ξ) é chamado de **variedade de contato**.

Quando a 1-forma de contato λ estiver globalmente definida dizemos que (M, ξ) é uma variedade de contato **coorientável** e, as vezes, denotaremos uma variedade de contato coorientável por (M, λ) . Nesse caso, fica subentendido que a distribuição de hiperplanos é dado por $\ker \lambda$.

Definição 2.5. Associado a uma forma de contato λ temos um campo de vetores chamado campo de Reeb R_λ , unicamente definido pelas equações:

(i) $d\lambda(R_\lambda, \cdot) \equiv 0$,

(ii) $\lambda(R_\lambda) \equiv 1$.

Exemplo 2.6. Em \mathbb{R}^{2n+1} com coordenadas cartesianas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z)$, a 1-forma

$$\lambda = dz + \sum_{j=1}^n x_j dy_j$$

é uma forma de contato. A estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$ é a estrutura canônica de \mathbb{R}^{2n+1} e o campo de Reeb associado a essa forma de contato é igual a ∂_z . Quando $n = 1$, ξ é gerado pelos campos de vetores ∂_x e $\partial_y - x\partial_z$.

Definição 2.7. Seja (M, λ) uma variedade de contato coorientável. Uma órbita de Reeb periódica é uma aplicação $\alpha : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow M$ para algum $T > 0$ tal que $\alpha'(t) = R_\lambda(\alpha(t))$. Denotaremos o conjunto de todas as órbitas periódicas do campo de vetores de Reeb R_λ por $\mathcal{P}(\lambda)$.

No nosso contexto, duas órbitas de Reeb são consideradas equivalentes se elas diferem por reparametrização, i.e, composição com qualquer translação de $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ correspondendo a escolhas de um ponto inicial para a órbita.

Definição 2.8. Uma órbita de Reeb é dita **simples** se a aplicação $\alpha : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow M$ for um mergulho. Se $\alpha : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow M$ é uma órbita simples de período T e k um inteiro positivo, então denotaremos por α^k o **k-recobrimento** de α , significando que α^k é a composição de α com a aplicação $\mathbb{R}/kT\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$.

Definição 2.9. Se $\tilde{\alpha}$ é uma órbita periódica de Reeb que é um k -recobrimento de uma órbita simples α , então a **multiplicidade da órbita de Reeb** $\tilde{\alpha}$ é definida por

$$d(\tilde{\alpha}) = k. \quad (2.1)$$

Sejam α uma órbita de Reeb T -periódica e ψ_t o fluxo do campo de Reeb R_λ no tempo t . Então,

$$d\psi_T := P_\alpha : (\xi_{\alpha(0)}, d\lambda) \rightarrow (\xi_{\alpha(0)}, d\lambda). \quad (2.2)$$

define uma aplicação linear simplética.

Definição 2.10. Uma órbita de Reeb periódica α é dita não degenerada se P_α não tem 1 como um auto-valor. Dizemos que a forma de contato λ é não degenerada quando todas as órbitas de Reeb são não degeneradas.

Definição 2.11. Uma órbita periódica de Reeb não degenerada α é:

- elíptica se P_α tem auto valores no círculo unitário,
- hiperbólica positiva se P_α tem auto valores reais positivos e
- hiperbólica negativa se P_α tem auto valores reais negativos.

Definição 2.12. Seja (M, λ) uma 3-variedade de contato. Uma órbita de Reeb $\alpha \in \mathcal{P}(\lambda)$ é dita **ruim** se for um recobrimento par de uma órbita hiperbólica negativa. Se $\alpha \in \mathcal{P}(\lambda)$ não for ruim chamamos ela de **boa**. Denotaremos os conjuntos das órbitas de Reeb periódicas ruins e boas, respectivamente, por $\mathcal{P}^r(\lambda)$ e $\mathcal{P}^b(\lambda)$.

2.2 Estruturas de contato overtwisted e tight

Definição 2.13. Sejam $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma 3-variedade de contato e $F \hookrightarrow M$ uma superfície mergulhada compacta. A estrutura de contato ξ em M induz uma distribuição singular de direções em F dada pelo ortogonal simplético de $(TF \cap \xi)$ com relação a $d\lambda|_\xi$, chamamos essa distribuição de **distribuição característica**. As curvas integrais dessa distribuição formam a chamada **folheação característica**.

Definição 2.14. Seja (M, ξ) uma 3-variedade de contato. Um disco $F \subset M$ é chamado **disco overtwisted** se:

- existe um mergulho $\varphi : D := \{z \in \mathbb{R}^2; \|z\| \leq 1\} \rightarrow M$ tal que $\varphi(D) = F$;
- podemos parametrizar ∂F por uma aplicação $\gamma : S^1 \rightarrow \partial F$ de modo que $\gamma'(\theta) \in \xi_{\gamma(\theta)}$ para todo $\theta \in S^1$;
- $\xi_p \neq T_p F$ para todo $p \in \partial F$;
- existe uma única singularidade da folheação característica $p_0 \in F$, isto é, um ponto tal que $T_{p_0} F = \xi_{p_0}$.

Definição 2.15. Uma estrutura de contato ξ em uma 3-variedade M é chamada **overtwisted** se contém um disco overtwisted. Uma estrutura de contato é chamada **tight** se não é overtwisted.

Sabe-se (pelo Teorema de Darboux para variedades de contato) que toda variedade de contato de dimensão $2n + 1$ é localmente symplectomorfa a \mathbb{R}^{2n+1} com a estrutura de contato dado pelo núcleo de $\lambda_0 := dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i$. Pode-se mostrar também que λ_0 é uma forma de contato tight. Assim, ser uma estrutura overtwisted é uma questão global.

2.3 Estrutura quase complexa e curvas pseudo-holomorfas

Definição 2.16. Seja W uma variedade suave. Um endomorfismo J de TW é chamado de **estrutura quase complexa** em W se $J^2 = -Id$. Chamamos o par (W, J) de variedade quase complexa. Quando (W, ω) é uma variedade simplética chamamos J de ω -compatível quando a aplicação bi-linear $g_J : TW \times TW \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g_J(x, y) := \omega(x, Jy), \quad \forall x, y \in TW$$

é uma métrica Riemanniana, isto é, é simétrica e positiva-definida. A partir da métrica g_J definimos a norma

$$\|x\|_J := \sqrt{g_J(x, Jx)}, \quad x \in TW.$$

Exemplo 2.17. A matriz J_0 escrita em blocos $n \times n$,

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix},$$

é uma estrutura quase complexa ω_{can} -compatível em \mathbb{R}^{2n} .

Definição 2.18. Seja (W, ω) uma variedade simplética. Denotamos por $\mathcal{J}(W, \omega)$ o conjunto de todas as estruturas quase-complexas $J : TW \rightarrow TW$ que são ω -compatíveis.

Observação 2.19. O conjunto $\mathcal{J}(W, \omega)$ é não-vazio e contrátil. Para uma demonstração desse fato ver, por exemplo, [MS98, Proposição 4.1] ou [Wen16, Proposição 1.2].

Definição 2.20. Sejam (Σ, j) uma superfície de Riemann e (W, J) uma variedade quase complexa. Uma aplicação diferenciável $u : \Sigma \rightarrow W$ é dita uma **curva pseudo-holomorfa** ou **J -holomorfa** se satisfaz a equação de Cauchy-Riemann

$$\bar{\partial}_J(u) := \frac{1}{2} (du + J(u) \circ du \circ j) = 0. \quad (2.3)$$

Exemplo 2.21. (a) Aplicações holomorfas entre superfícies de Riemann são, em particular, curvas pseudo-holomorfas.

(b) Tomando \mathbb{C} e \mathbb{C}^2 com coordenadas complexas z e (z, w) , respectivamente, e definindo

$$j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

segue que (\mathbb{C}, i) e (\mathbb{C}^2, j) são variedades quase complexas. A curva $u : (\mathbb{C}, i) \rightarrow (\mathbb{C}^2, j)$ definida por

$$u(z) = (z, 0)$$

é uma curva pseudo-holomorfa.

(c) Sejam $\mathbb{D} = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2; s^2 + t^2 \leq 1\}$ e \mathbb{R}^4 com coordenadas (w, x, y, z) . Dote \mathbb{D} e \mathbb{R}^4 , respectiva-

mente, com as estruturas quase complexas

$$j \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } J(w, x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então $u : (\mathbb{D}, j) \rightarrow (\mathbb{R}^4, J)$ definida por

$$u(s, t) = \left(\frac{\tau^2}{4}(s^2 + t^2 - 1), \tau s, \tau t, -\frac{\tau^2}{2}st \right)$$

é uma curva pseudo-holomorfa para todo $\tau > 0$.

Definição 2.22. Dizemos que uma curva pseudo-holomorfa $u : (\Sigma, j) \rightarrow (W, J)$ é **somewhere injective** se existe um ponto $z \in \Sigma$ tal que

$$du(z) \neq 0, \quad u^{-1}(u(z)) = \{z\}.$$

Definição 2.23. Seja (Σ, j) uma superfície de Riemann e (W, J) uma variedade quase complexa. Uma curva pseudo-holomorfa $u : \Sigma \rightarrow W$ é chamada de um **recobrimento múltiplo** se existe uma superfície de Riemann compacta (Σ', j') , uma curva pseudo-holomorfa $u' : \Sigma' \rightarrow W$ e uma recobrimento ramificado holomorfo $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ tal que

$$u = u' \circ \phi, \quad \deg(\phi) > 1.$$

A curva u é chamada de **simples** se não é um recobrimento múltiplo.

Se uma curva pseudo-holomorfa $u : (\Sigma, j) \rightarrow (W, J)$ é um recobrimento múltiplo, então ela se fatora através de uma curva somewhere injective v e um recobrimento ramificado holomorfo $\varphi : (\Sigma, j) \rightarrow (\Sigma', j')$, isto é, $u = v \circ \varphi$. Para uma demonstração disso no caso de planos de energia finita ver Apêndice em [HWZ95] e uma prova quando o domínio é uma superfície de Riemann fechada pode ser encontrada em [MS04]. A **multiplicidade da curva pseudoholomorfa** u é definida por

$$d(u) = \deg(\varphi). \tag{2.4}$$

Note que a multiplicidade de uma curva pseudoholomorfa é 1 se a curva é *somewhere injective*.

2.4 Curvas pseudo-holomorfas em simplectizações

Definição 2.24. Seja (M, λ) uma variedade de contato. A simplectização de M é o espaço $\mathbb{R} \times M$ munido da estrutura simplética $d(e^a \lambda)$. Aqui a denota a coordenada em \mathbb{R} e λ é vista como uma 1-forma em $\mathbb{R} \times M$ (pull-back pela projeção em M).

A simplectização de uma variedade de contato (M, ξ) possui uma estrutura quase complexa

$$\tilde{J}(a, x)(h, k) = (-\lambda(x)(k), J(x)\pi(k) + hR_\lambda(x)) \tag{2.5}$$

onde $\pi : TM \rightarrow \xi$ é a projeção ao longo de R_λ e J é uma estrutura quase complexa em ξ . Observe que \tilde{J} , nesse caso, é invariante por translações na direção real de $\mathbb{R} \times M$.

Nesse trabalho estamos interessados somente em estruturas quase-complexas como em (2.5). Então, com o objetivo de deixar a notação menos carregada ao longo do texto daremos a seguinte definição:

Definição 2.25. Seja $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma variedade de contato coorientável. Denotamos por

$$\mathcal{J}(\lambda) \subset \mathcal{J}(\mathbb{R} \times M, d(e^a \lambda))$$

o conjunto de todas as estruturas quase-complexas J na simplectização $\mathbb{R} \times M$ que são $d(e^a \lambda)$ -compatíveis e satisfazem as seguintes condições:

- J é invariante por translação na direção real de $\mathbb{R} \times M$,
- $J\partial_a = R_\lambda$ e $JR_\lambda = -\partial_a$,
- $J\xi = \xi$ e $d\lambda(\cdot, J\cdot)|_\xi$ é uma métrica em ξ .

Definição 2.26. Sejam Σ uma superfície de Riemann compacta possivelmente com bordo, $\Gamma \subset \Sigma$ um conjunto finito e $\tilde{u} : (\Sigma \setminus \Gamma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$, $J \in \mathcal{J}(\lambda)$, uma curva pseudo-holomorfa na simplectização $\mathbb{R} \times M$. Defina a energia de Hofer de \tilde{u} por

$$E(\tilde{u}) = \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \tilde{u}^* d\lambda_\phi, \quad (2.6)$$

onde $\Lambda = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1]); \phi' \geq 0\}$ e λ_ϕ é dada por

$$\lambda_\phi(a, u) = \phi(a)\lambda(u).$$

Em [Hof93], Hofer nos mostra que estudar curvas pseudo-holomorfas em simplectizações pode ser uma ferramenta importante para entendermos o comportamento das órbitas de Reeb periódicas. A relação entre curvas pseudo-holomorfas em simplectizações e órbitas de Reeb nesse artigo é a seguinte:

Teorema 2.27 ([Hof93]). *Sejam $\tilde{u} = (a, u) : [0, +\infty) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma curva pseudo-holomorfa não constante de energia (de Hofer) finita. Suponha que $\limsup_{s \rightarrow +\infty, t \in S^1} |a(s, t)| = +\infty$. Então, existe $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tal que para toda sequência $s_k \rightarrow +\infty$, existe uma subsequência, ainda denotada por s_k , e uma órbita de Reeb T -periódica α , tal que $u(s_k, \cdot) \rightarrow \alpha(\epsilon T \cdot)$, em que a convergência é em C^∞ .*

Definição 2.28. Seja $\tilde{u} = (a, u) : (\Sigma \setminus \Gamma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$, $J \in \mathcal{J}(\lambda)$, uma curva pseudo-holomorfa de energia finita. Chamamos os pontos em Γ de furos e chamamos um furo $z^* \in \Gamma$ de:

- **furo positivo** se $\limsup_{z \rightarrow z^*} |a(z)| = +\infty$ e em coordenadas polares $[0, +\infty) \times S^1$ perto de z^* , temos $\epsilon = +1$ no teorema anterior. Nesse caso, pode-se provar que $a(z) \rightarrow +\infty$ quando $z \rightarrow z^*$;
- **furo negativo** se $\limsup_{z \rightarrow z^*} |a(z)| = +\infty$ e em coordenadas polares $[0, +\infty) \times S^1$ perto de z^* , temos $\epsilon = -1$ no teorema anterior. Nesse caso, pode-se provar que $a(z) \rightarrow -\infty$ quando $z \rightarrow z^*$;
- **furo removível** se $\limsup_{z \rightarrow z^*} |a(z)| < +\infty$. Nesse caso, pode-se provar que \tilde{u} se estende suavemente sobre o furo z^* .

Sejam $z^* \in \Gamma$ um furo positivo (negativo) e $U \subset \Sigma \setminus \Gamma$ uma vizinhança de z^* . Se quando $z \rightarrow z^*$, $z \in U$, u se aproxima de uma órbita de Reeb α , chamamos $\tilde{u}(U)$ de um **fim positivo (negativo)** de \tilde{u} **assintótico a α** .

Seja $\tilde{u} : (\Sigma \setminus \Gamma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$ uma curva J -holomorfa de energia finita. Podemos considerar a decomposição de Γ em subconjuntos

$$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-,$$

em que Γ_+ é o conjunto dos furos positivos e Γ_- é o conjunto dos furos negativos. Além disso, se \tilde{u} for uma curva não constante, o Princípio de Máximo nos garante que $\Gamma_+ \neq \emptyset$. De fato, pode-se verificar que $\Delta a \geq 0$.

Como Σ é uma superfície de Riemann, dado $z^* \in \Gamma$ podemos tomar uma parametrização $\varphi : B_r(0) \rightarrow U$ de Σ em torno de z^* tal que $\varphi(0) = z^*$, onde $B_r(0) \subset \mathbb{C}$ é a bola centrada na origem de raio r e $U \subset \Sigma$ é um aberto contendo z^* . Chamamos de **coordenadas cilíndricas** a parametrização de U tal que:

- se z^* é um furo positivo, é dada por

$$\begin{aligned} ([0, +\infty) \times S^1, i) &\rightarrow (U, j) \\ (s, t) &\mapsto \varphi \left(e^{-2\pi(s+it)} \right) \end{aligned}$$

- se z^* é um furo negativo, é dada por

$$\begin{aligned} ((-\infty, 0] \times S^1, i) &\rightarrow (U, j) \\ (s, t) &\mapsto \varphi\left(e^{2\pi(s+it)}\right). \end{aligned}$$

Quando for conveniente denotaremos $Z_+ := [0, +\infty) \times S^1$ e $Z_- := (-\infty, 0] \times S^1$.

Definição 2.29. Sejam $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e $g \geq 0$ um inteiro. Dizemos que duas curvas pseudo-holomorfas $\tilde{u}, \tilde{v} : (\Sigma \setminus \Gamma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$ são equivalentes se elas diferem por biholomorfismos no domínio. Denotamos por

$$\mathcal{M}_g^J(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_l)$$

o espaço das curvas J -holomorfas de gênero g , módulo relação de equivalência, que possuem fins positivos assintóticos às órbitas de Reeb $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ e fins negativos assintóticos às órbitas de Reeb β_1, \dots, β_l .

Observe que podemos definir uma \mathbb{R} -ação em \mathcal{M}_g^J dada por

$$\rho \in \mathbb{R} \mapsto (a + \rho, u), \quad \forall (a, u) \in \mathcal{M}_g^J.$$

Denotamos por

$$\mathcal{M}_g^J(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_l) / \mathbb{R}$$

o quociente de $\mathcal{M}_g^J(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_l)$ por essa ação.

2.5 Índices

Apresentaremos aqui alguns índices importantes relacionados as propriedades das órbitas de Reeb e das curvas pseudo-holomorfas.

2.5.1 Índice de Conley-Zehnder

O primeiro índice que iremos definir é o índice de Maslov que é um inteiro associado a um loop de matrizes simpléticas, podendo ser interpretado como um número de rotação. Esse índice será importante quando estivermos definindo o índice de Conley-Zehnder. Denote por $Sp(2n)$ o grupo de matrizes simpléticas $2n \times 2n$. O Teorema a seguir pode ser encontrado na Seção 2.2 de [MS98].

Teorema 2.30. *Existe uma única aplicação μ , chamada **índice de Maslov**, que atribui um inteiro $\mu(\Psi)$ a cada loop*

$$\Psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow Sp(2n)$$

de matrizes simpléticas e que satisfaz os seguintes axiomas:

- **Homotopia:** *Dois loops em $Sp(2n)$ são homotópicos se, e somente se, tem o mesmo índice de Maslov.*
- **Produto:** *Para dois loops $\Psi_1, \Psi_2 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow Sp(2n)$ temos*

$$\mu(\Psi_1 \Psi_2) = \mu(\Psi_1) + \mu(\Psi_2).$$

Em particular, o loop constante $\Psi(t) \equiv Id$ tem índice de Maslov zero.

- **Soma direta:** *Se $n = n' + n''$ identifique $Sp(2n') \oplus Sp(2n'')$ da maneira óbvia com um subgrupo de $Sp(2n)$. Então*

$$\mu(\Psi' \oplus \Psi'') = \mu(\Psi') + \mu(\Psi'')$$

- **Normalização:** *O loop $\Psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow U(1) \subset Sp(2)$ definido por $\Psi(t) = e^{2\pi it}$ tem índice de Maslov 1.*

Definição 2.31. O ciclo de Maslov é o conjunto

$$\Lambda(2n) = \{\psi \in Sp(2n) \mid \det(\psi - I) = 0\}$$

e o seu complementar em $Sp(2n)$ será denotado por

$$Sp^*(2n) = Sp(2n) \setminus \Lambda(2n).$$

Considere o conjunto

$$\Sigma^*(2n) = \{\Psi : [0, 1] \rightarrow Sp(2n) \text{ contínua ; } \Psi(0) = I, \Psi(1) \in Sp^*(2n)\}.$$

A demonstra o do teorema abaixo pode ser encontrada na Se o 5.1 de [HS13].

Teorema 2.32. *Existe uma única aplica o*

$$\mu_{CZ} : \Sigma^*(2n) \rightarrow \mathbb{Z} \quad (2.7)$$

caracterizada pelas seguintes propriedades:

- **Homotopia:** Se $s \mapsto \Psi_s \in \Sigma^*(2n)$   uma família contínua, isto é, $(s, t) \mapsto \Psi_s(t) \in Sp(2n)$   contínua, então $s \mapsto \mu_{CZ}(\Psi_s)$   constante.
- **Maslov:** Se $\Phi : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (Sp(2n), \{I\})$   contínua e $\Psi \in \Sigma^*(2n)$ então $\mu_{CZ}(\Phi\Psi) = \mu_{CZ}(\Psi) + 2k$, onde k   o  ndice de Maslov de Φ .
- **Soma:** Se $\Psi' \in \Sigma^*(2n')$, $\Psi'' \in \Sigma^*(2n'')$ então $\Psi' \oplus \Psi'' \in \Sigma^*(2(n' + n''))$ satisfaz $\mu_{CZ}(\Psi' \oplus \Psi'') = \mu_{CZ}(\Psi') + \mu_{CZ}(\Psi'')$. Aqui $Sp(2n')$ e $Sp(2n'')$ são vistos como subgrupos do grupo $Sp(2(n' + n''))$ da maneira usual.
- **Normaliza o:** O caminho $\Psi_0 \in \Sigma^*(2)$ dado por

$$\Psi_0(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) & -\sin(\pi t) \\ \sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

satisfaz $\mu_{CZ}(\Psi_0) = 1$.

Agora tome (M, ξ) uma variedade de contato, $\xi = \ker \lambda$ de dimensão $2n + 1$, e $\alpha : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow M$ uma órbita de Reeb. Seja $\tau : \alpha^*\xi \rightarrow \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{2n}$ uma trivializa o simplética, que induz, para cada $t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$, um simplectomorfismo linear

$$\tau_t : (\xi|_{\alpha(t)}, d\lambda|_{\alpha(t)}) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0).$$

Considere $\Psi : [0, T] \rightarrow Sp(2n)$ definida por

$$\Psi(t) = \tau_t \circ d\phi_t \circ (\tau_0)^{-1} \quad \forall t, \quad (2.8)$$

em que ϕ   a curva integral de campo de Reeb R_λ tal que $\phi_0(\alpha(0)) = \alpha(0)$. Note que $\Psi(0) = I$ e que α   não degenerada se, e somente se, $\Psi \in \Sigma^*(2n)$.

Defini o 2.33. Se α   uma órbita de Reeb periódica e não degenerada, então, definimos o ** ndice de Conley-Zehnder** de α como

$$\mu_{CZ}^\tau(\alpha) = \mu_{CZ}(\Psi).$$

Em dimensão $2n + 1 = 3$, uma fórmula explícita do  ndice de Conley-Zehnder bastante usada é:

$$\mu_{CZ}^\tau(\alpha) = \lfloor \theta \rfloor + \lceil \theta \rceil, \quad (2.9)$$

em que θ denota o número de rotação de α com respeito a τ . Se α é hiperbólico, então θ é o número de vezes que o auto espaço da aplicação de primeiro retorno linearizado P_α em (2.2) gira com relação a τ ao longo de α . Se α é elíptica (assim como todas as sua iteradas), então θ é um número irracional. Para mais informações veja Seção 3.2 de [Hut14]. Para ver que (2.9) de fato é o índice de Conley-Zehnder basta ver que ela satisfaz os axiomas do Teorema 2.32.

Se m é um inteiro positivo e se α^m é o m -recobrimento de α , então

$$\mu_{CZ}^\tau(\alpha^m) = \lfloor m\theta \rfloor + \lceil m\theta \rceil. \quad (2.10)$$

Definição 2.34. Em uma variedade de contato (M, λ) , denotaremos por

$$\mathcal{P}_i^b(\lambda) := \left\{ \alpha \in \mathcal{P}^b(\lambda) ; \mu_{CZ}^\tau(\alpha) = i - 1 \right\},$$

onde $\mathcal{P}^b(\lambda)$ é como na Definição 2.12.

2.5.2 Índice de Fredholm

Sejam (M, λ) uma 3-variedade de contato, Σ uma superfície de Riemann fechada, $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e $u : (\Sigma \setminus \Gamma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$ uma curva pseudo-holomorfa não constante de energia finita com k fins positivos em que u é assintótica às órbitas de Reeb $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ e l fins negativos em que u é assintótica às órbitas de Reeb β_1, \dots, β_l . Fixe uma trivialização simplética τ de ξ com respeito a $d\lambda$ sobre as órbitas α_i 's e β_j 's.

Definição 2.35. Definimos a **primeira classe relativa de Chern** do fibrado complexo $u^*\xi$ de dimensão 1 com respeito a trivialização τ , e a denotamos por

$$c_\tau(u) := c_1(u^*\xi, \tau) \in \mathbb{Z}, \quad (2.11)$$

como segue. Primeiro note que a trivialização τ determina uma trivialização de $u^*\xi$ perto dos fins de u , a menos de homotopia. Escolha uma seção genérica σ de $u^*\xi$ que é não nula e constante perto dos fins de u , com relação à trivialização anterior. Definimos então $c_1(u^*\xi, \tau)$ como a contagem algébrica de zeros de σ .

Definição 2.36. O **índice de Fredholm** de u é definido por

$$\text{ind}(u) = -\chi(u) + 2c_\tau(u) + \sum_{i=1}^k \mu_{CZ}^\tau(\alpha_i) - \sum_{i=1}^l \mu_{CZ}^\tau(\beta_i) \quad (2.12)$$

onde $\chi(u)$ denota a característica de Euler do domínio de u .

Observação 2.37. Se u é uma curva pseudo-holomorfa com domínio conexo e de gênero $g \geq 0$, então

$$\chi(u) = 2 - 2g - k - l. \quad (2.13)$$

Mais informações sobre o índice de Fredholm podem ser encontradas em [Hut14].

Definição 2.38. Denotaremos por

$$\mathcal{M}_{g,p}^J(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_l) \subset \mathcal{M}_g^J(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_l)$$

o conjunto de todas as curvas J -holomorfas $u \in \mathcal{M}_g^J(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_l)$ tais que $\text{ind}(u) = p$. E denotamos o quociente de $\mathcal{M}_{g,p}^J(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_l)$ pela translação na direção real (ver Definição 2.29) por

$$\mathcal{M}_{g,p}^J(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_l) / \mathbb{R}.$$

2.6 Operador Assintótico

Sejam $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma 3-variedade de contato coorientável, $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e α uma órbita de Reeb T -periódica. Seja $Y : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow TM$ um campo de vetores suave ao longo de $\alpha(T\cdot)$. Definimos a derivada de Lie $\mathcal{L}_{R_\lambda} Y$ de Y por

$$\mathcal{L}_{R_\lambda} Y = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} d\psi_{-s}(\alpha(t + s/T))Y(t + s/T)$$

onde ψ_t é o fluxo do campo de Reeb R_λ . Observe que

$$\frac{d}{dt} \psi_t^* \lambda = \psi_t^* \mathcal{L}_{R_\lambda} \lambda = \psi_t^*(i_{R_\lambda} d\lambda + d(i_{R_\lambda} \lambda)) = 0,$$

já que $d\lambda(R_\lambda, \cdot) \equiv 0$ e $\lambda(R_\lambda) = 1$. Então, $\psi_t^* \lambda$ é constante ao longo das órbitas de R_λ e, se $Y(\alpha(t)) \in \xi_{\alpha(t)}$, temos

$$\lambda(d\psi_t(Y)) = \psi_t^* \lambda(Y) = \lambda(Y) = 0 \Rightarrow d\psi_t(Y) \in \xi.$$

Também temos

$$d\psi_t(R_\lambda(\alpha(t_0))) = R_\lambda(\psi_t(\alpha(t_0))) = R_\lambda(\alpha(t + t_0)).$$

Assim, o fluxo ψ_t preserva a decomposição $\mathbb{R}R_\lambda \oplus \xi$ de TM e isso implica que \mathcal{L}_{R_λ} também preserva essa decomposição. Dessa forma, se $Y(t) \in \xi_{\alpha(t)}$, segue que $\mathcal{L}_{R_\lambda} Y(t) \in \xi_{\alpha(t)}$.

Logo, escolhendo uma conexão simétrica ∇ em TM obtemos um operador diferencial $\nabla_t - T\nabla R_\lambda$ que mapeia seções de $\alpha^* \xi$ em seções de $\alpha^* \xi$, já que

$$T \cdot \mathcal{L}_{R_\lambda} Y(t) = \mathcal{L}_{T \cdot R_\lambda} Y(t) = \nabla_{T \cdot R_\lambda} Y - \nabla_Y(T \cdot R_\lambda) = \nabla_t Y - T\nabla_Y R_\lambda.$$

Pode-se mostrar também que esse operador independe da conexão simétrica. Aqui, ∇_t corresponde à derivada covariante com respeito ao parâmetro $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Dotamos $C^\infty(\alpha^* \xi)$ com o produto interno

$$\langle Y_1, Y_2 \rangle_J := \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} d\lambda_{\alpha(t)}(Y_1(t), J_{\alpha(t)} Y_2(t)) dt.$$

Definição 2.39. Definimos o operador diferencial $A_\alpha : H^1(\alpha^* \xi) \subset L^2(\alpha^* \xi) \rightarrow L^2(\alpha^* \xi)$ por

$$A_\alpha Y := -J(\nabla_t Y - T\nabla_Y R_\lambda)$$

e o chamamos de **operador assintótico** associado a α e J . Omitimos J na notação por simplicidade.

Observação 2.40. Pode-se mostrar que A_α é formalmente auto-adjunto, ilimitado e que α é uma órbita não-degenerada se, e somente se, o núcleo de A_α é trivial (ver [HWZ96]). O espectro de A_α é formado por autovalores reais que se acumulam em $\pm\infty$.

Tome uma trivialização unitária τ de $\alpha^* \xi$. A partir dessa trivialização conseguimos uma trivialização induzida para ξ ao longo de um recobrimento α^m fazendo o pull-back de τ via o m -recobrimento

$$\begin{aligned} \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ [t] &\mapsto [mt]. \end{aligned}$$

Quando estivermos lidando com trivializações de ξ ao longo de uma órbita α^m assumiremos que a trivialização vem de uma escolha de trivialização ao longo de uma órbita simples α que α^m cobre.

Em uma trivialização unitária de $\alpha^* \xi$ ao longo de uma órbita periódica simples α , o operador assintótico A_{α^m} toma a forma

$$(A_{\alpha^m} y)(t) = -i \frac{d}{dt} y(t) - S_\infty(t) y(t), \quad t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad (2.14)$$

em que $S_\infty(t), t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, é um loop de matrizes simétricas. Como um autovetor y de A_{α^m} satisfaz uma equação diferencial linear de primeira ordem, segue que esse autovetor nunca se anula. Assim, todo autovetor não trivial nos dá uma aplicação $y : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e, assim, temos um número de *winding* $w(y, \mu) \in \mathbb{Z}$ bem-definido, em que μ é tal que $A_{\alpha^m} y = \mu y$.

O inteiro $w(y, \mu)$ possui as seguintes propriedades:

Teorema 2.41 ([HWZ95]). (a) Se y_1 e y_2 são autovetores de A_{α^m} associados ao autovalor μ , então $w(y_1, \mu) = w(y_2, \mu)$. Por isso, podemos denotar $w(y, \mu)$ apenas por $w(\mu)$.

(b) Sejam y_1 e y_2 autovetores de A_{α^m} associados, respectivamente, aos autovalores μ_1 e μ_2 . Se $\mu_1 \neq \mu_2$ e $w(y_1, \mu_1) = w(y_2, \mu_2)$, então $\text{span}\{y_1(t), y_2(t)\} = \mathbb{R}^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(c) Para todo $k \in \mathbb{Z}$ existem exatamente dois autovalores μ_1 e μ_2 de A_{α^m} , contando multiplicidades, tais que $k = w(\mu_1) = w(\mu_2)$.

(d) Se μ_1 e μ_2 são autovalores de A_{α^m} tais que $\mu_1 \leq \mu_2$, então $w(\mu_1) \leq w(\mu_2)$.

Observe que devido ao Teorema 2.41 podemos ordenar os autovalores de A_{α^m} por

$$\dots \leq \mu_{-2} \leq \mu_{-1} < 0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \quad (2.15)$$

de forma que $w(\mu_i) \leq w(\mu_{i+1})$ para todo inteiro não nulo i diferente de -1 .

Seja $\tilde{u} = (a, u) : (\Sigma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$ uma curva J -holomorfa tal que em um furo positivo $z \in \Gamma$ é assintótica a uma órbita de Reeb não degenerada e T -periódica α . Assuma que $\alpha = \alpha_0^m$, em que α_0 é um orbita de Reeb T_0 -periódica simples ($T = mT_0$). Podemos escolher uma vizinhança de z em Σ e uma vizinhança tubular de α_0 em M , com coordenadas $(\theta, x, y) \in \mathbb{R}/T_0\mathbb{Z} \times B_\delta(0)$, $\delta > 0$ pequeno, de forma que \tilde{u} pode ser vista como uma aplicação $[s_0, +\infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^4$ da forma

$$\tilde{u}(s, t) = (a(s, t), \theta(s, t), z(s, t)),$$

em que $\theta(s, t + 1) = \theta(s, t) + mT_0 \in \mathbb{R}$, e $z(s, t) \in B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^2, \forall (s, t)$.

No artigo [HWZ96], Hofer, Wysocki e Zehnder descrevem o comportamento assintótico de uma curva pseudo-holomorfa de energia-finita perto de um furo $z \in \Gamma$, veja também [Mor03].

Teorema 2.42. Seja $\tilde{u} = (a, u) : [s_0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma curva pseudo-holomorfa de energia finita perto de um furo positivo, como acima. Assuma ainda que \tilde{u} não é um cilindro trivial. Então existem constantes $c \in \mathbb{R}$, $d > 0$ e $M_{ij} > 0$ tais que

$$\begin{aligned} |\partial^{(i,j)}[a(s, t) - Ts - c]| &\leq M_{ij}e^{-ds} \\ |\partial^{(i,j)}[\theta(s, t) - kt]| &\leq M_{ij}e^{-ds} \end{aligned}$$

para todo $s \geq s_0, t \in \mathbb{R}$ e todo muti-índice $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Além disso,

$$z(s, t) = e^{\mu s}(\varphi(t) + h(s, t)),$$

em que φ é um autovetor do operador A_α associado ao autovalor $\mu < 0$ e $h(s, t)$ satisfaz

$$\partial^{(i,j)}h(s, t) \rightarrow 0$$

uniformemente em $t \in \mathbb{R}$, para todo $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Definição 2.43. Sejam $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e $u : (\Sigma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$ uma curva J -holomorfa que em um furo $z \in \Sigma$ é assintótica a uma órbita de Reeb α^m . Seja μ_{-1} o maior autovalor negativo de A_{α^m} . Definimos $w_-^\tau(u; z) \in \mathbb{Z}$ por

$$w_-^\tau(u; z) := w(\mu_{-1}). \quad (2.16)$$

Seja $\varphi(u; z) \in \sigma(A_{\alpha^m})$ o autovetor principal na representação assintótica de u em z do Teorema 2.42. Defina

$$\text{wind}_{\infty}^{\tau}(u; z) := w(\mu_u) \quad (2.17)$$

em que μ_u é tal que $A_{\alpha^m}\varphi(u; z) = \mu_u \cdot \varphi(u; z)$. Aqui, τ é um trivialização unitária de ξ ao longo de α^m .

2.7 Linearização do operador de Cauchy-Riemann e Adjunta formal

Sejam (Σ, j) uma superfície de Riemann compacta e $\Gamma \subset \Sigma$ um conjunto finito. Dado um fibrado vetorial complexo (E, J) sobre $\dot{\Sigma} := \Sigma \setminus \Gamma$, temos também um outro fibrado vetorial sobre $\dot{\Sigma}$:

$$F := \overline{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(T\dot{\Sigma}, E)} \rightarrow \dot{\Sigma},$$

dado pelas aplicações complexo anti-lineares $(T\dot{\Sigma}, j) \rightarrow (E, J)$.

Sejam (M, λ) uma 3-variedade de contato coorientável, $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e $u : (\dot{\Sigma}, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$ uma curva J -holomorfa que é uma imersão. Então, associado a u temos um operador de Cauchy-Riemann

$$D_u : \Gamma(N) \rightarrow \Gamma(F),$$

em que, nesse caso, $E = N$ é o fibrado normal N sobre u . Escolhendo uma conexão simétrica \mathbb{R} -invariante ∇ em $\mathbb{R} \times M$ o operador D_u pode ser definido como

$$D_u \eta = \nabla \eta + J(u) \circ \nabla \eta \circ j + (\nabla_{\eta} J) \circ du \circ j, \quad (2.18)$$

para toda seção suave $\eta \in \Gamma(N)$.

Seja $z^* \in \Gamma$ um furo de u e seja α uma órbita de Reeb periódica que é limite assintótico de u em z^* . Numa vizinhança furada de z^* em Σ , com coordenadas cilíndricas $(s, t) \in Z_+ = [0, +\infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, e numa vizinhança tubular de α , o operador D_u pode ser escrito como

$$D_u = \bar{\partial} + S,$$

onde $\bar{\partial} = \partial_s + J_0 \partial_t$ e $S \in C^{\infty}(Z_{\pm}, \text{End}(\mathbb{R}^2))$. Com isso, podemos definir a adjunta formal de D_u como a aplicação linear

$$D_u^* : \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(E)$$

que satisfaz

$$\langle \xi, D_u \eta \rangle_{L^2(F)} = \langle D_u^* \xi, \eta \rangle_{L^2(E)}, \quad \forall \eta \in C_0^{\infty}(E), \quad \forall \xi \in C_0^{\infty}(F).$$

De acordo com [Wen16], podemos expressar D_u^* , em coordenadas cilíndricas, por

$$D_u^* = -\partial + S^T,$$

em que $\partial := \partial_s - J_0 \partial_t$. Além disso, D_u^* é também um operador de Cauchy-Riemann [Wen16, Proposição 4.18] definido como $D_u^* : W^{k,p}(F) \rightarrow W^{k-1,p}(E)$. Seu núcleo é um espaço de seções contidas em $W^{m,q}(F)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e $q \in (1, \infty)$. Além disso,

$$W^{k-1,p}(F) = \text{image} D_u \oplus \ker D_u^*.$$

Também segue que se $C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$, então

$$C^{-1} D_u^* C = -(\bar{\partial} + \bar{S}),$$

em que $\bar{S}(s, t) = -CS(s, t)^T C$. Mais ainda,

$$\|\bar{S} - \bar{S}_{\infty}\| \rightarrow 0$$

quando $s \rightarrow \infty$ na topologia C^∞ , $\bar{S}_\infty(t) = -CS_\infty(t)C$ e $S_\infty = \lim_{s \rightarrow +\infty} S(s, \cdot)$. Além disso, $\bar{A}_\alpha = -J_0\partial_t - \bar{S}_\infty(t)$ é conjugado a $-A_\alpha = J_0\partial_t + S_\infty(t)$, isto é,

$$C^{-1}\bar{A}_\alpha C = -A_\alpha. \quad (2.19)$$

Logo, \bar{A}_α é não degenerado se e só se $-A_\alpha$ também é não degenerado e

Proposição 2.44. *Se denotarmos $Aut(\mu, A_\alpha)$ o espaço linear gerado pelos autovetores associados ao autovalor μ do operador A_α , então $\varphi \in Aut(\mu, A_\alpha)$ se, e somente se, $C\varphi \in Aut(-\mu, \bar{A}_\alpha)$ para algum autovetor $\varphi \in Aut(\mu, A_\alpha)$.*

Demonstração. Suponha que $\varphi \in Aut(\mu, A_\alpha)$ então pela equação (2.19) temos

$$\mu\varphi = A_\alpha\varphi = -C\bar{A}_\alpha(C\varphi) \Leftrightarrow -\mu C\varphi = \bar{A}_\alpha(C\varphi).$$

Por outro lado, se $v \in Aut(-\mu, \bar{A}_\alpha)$ então

$$-\mu v = \bar{A}_\alpha v = -CA_\alpha(Cv) \Rightarrow \mu Cv = A_\alpha(Cv) \Rightarrow Cv \in Aut(\mu, A_\alpha)$$

e se fizermos $\varphi = Cv$ temos $v = C\varphi$. □

Como estamos supondo que todas as órbitas de Reeb com as quais estamos trabalhando são não-degeneradas segue que zero não é um autovalor do operador A_α . Assim, podemos ordenar os autovalores de A_α da seguinte forma:

$$\cdots \leq \mu_{-2} \leq \mu_{-1} < 0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots$$

como já foi observado em (2.15).

Proposição 2.45. *Se σ é um elemento contido no núcleo de D_u^* , então:*

(a) *na vizinhança de um furo negativo*

$$\sigma(s, t) = e^{-\mu-i s} \varphi(t) + h(s, t) \quad (2.20)$$

para algum $i \geq 1$, em que φ é um autovetor de A_α associado ao autovalor μ_{-i} e $h(s, t) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow -\infty$ na topologia C^∞ .

(b) *na vizinhança de um furo positivo*

$$\sigma(s, t) = e^{-\mu_j s} \varphi(t) + \tilde{h}(s, t) \quad (2.21)$$

para algum $j \geq 1$, em que φ é um autovetor de A_α associado ao autovalor μ_j e $\tilde{h}(s, t) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow +\infty$ na topologia C^∞ .

Demonstração. Darei uma demonstração somente para o item (a) pois a demonstração do item (b) é análoga. Seja $\sigma \in \ker D_u^*$. Na vizinhança de um furo negativo temos

$$0 = D_u^* \sigma = -C(\bar{\partial} + \bar{S}(s, t))(C^{-1}\sigma) \Leftrightarrow 0 = (\bar{\partial} + \bar{S}(s, t))(C^{-1}\sigma).$$

Logo, $C^{-1}\sigma(s, t)$ tem o mesmo comportamento assintótico, numa vizinhança cilíndrica de um furo negativo, que o comportamento assintótico de uma curva J-holomorfa nessa mesma vizinhança, como pode ser visto na equação (24) em [HWZ96]. Assim, pelos mesmos argumentos de [HWZ96] e [Mor03] temos

$$C^{-1}\sigma(s, t) = e^{\mu s} v(t) + h_1(s, t), \quad (2.22)$$

onde $\mu > 0$ é um autovalor e $v(t)$ é um autovetor associado a μ do operador assintótico \bar{A}_α e $h_1(s, t) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow -\infty$ na topologia C^∞ . No entanto, pela Proposição 2.44 os autovalores de \bar{A}_α podem ser ordenados da forma

$$\cdots \leq -\mu_2 \leq -\mu_1 < 0 < -\mu_{-1} \leq -\mu_{-2} \leq \cdots$$

e os autovetores desse operador são da forma $C\varphi(t)$, onde $\varphi(t)$ é um autovetor de A_α . Assim, a equação (2.22) fica da forma

$$C^{-1}\sigma(s, t) = e^{-\mu-is}C\varphi(t) + h_1(s, t)$$

para algum inteiro $i \geq 1$, onde $\varphi \in \text{Aut}(\mu_{-i}, A_\alpha)$. Portanto,

$$\sigma(s, t) = e^{-\mu-is}\varphi(t) + Ch_1(s, t)$$

e como C é um operador linear também temos $Ch_1(s, t) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow -\infty$ na topologia C^∞ . \square

Definição 2.46. Sejam $\sigma \in \ker D_u^*$ e $z \in \Gamma$. Defina por:

- $\text{wind}^\tau(\sigma; z) := w(\mu)$, onde μ é o autovalor principal na representação assintótica de σ em (2.20) caso $z \in \Gamma^-$ ou em (2.21) caso $z \in \Gamma^+$.
- $\text{wind}_\infty^\tau(\sigma) := \sum_{z \in \Gamma^+} \text{wind}^\tau(\sigma; z) - \sum_{z \in \Gamma^-} \text{wind}^\tau(\sigma; z)$
- $\#\sigma$ a soma algébrica dos zeros de σ .

Com essas definições e nos baseando na Proposição 5.6 de [HWZ95] temos

Lema 2.47. Seja $\sigma \in \ker D_u^*$. Então,

$$\#\sigma = \text{wind}_\infty^\tau(\sigma) - \chi(u) + \#\Gamma. \quad (2.23)$$

Além disso, se $\sigma \in \ker D_u^* \setminus \{0\}$, temos $\#\sigma \leq 0$.

Demonstração. Seja $\sigma \in \ker D_u^*$. Então, σ é uma seção de $\overline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\dot{\Sigma}, E) \rightarrow \dot{\Sigma}$ e $D_u^*\sigma = 0$. Tome X um campo de vetores em Σ transversal a seção nula em $T\Sigma$ e tal que os pontos em Γ são seus zeros, onde pontos negativos são fontes e pontos positivos são sorvedouros. Denote por $\#\mathbb{R}X$ e $\#\Gamma X$ a soma algébrica dos zeros de X em Σ e $\dot{\Sigma}$, respectivamente. Se g é o gênero de Σ , temos

$$\#\mathbb{R}X = \chi(u) = 2 - 2g.$$

Então,

$$\#\Gamma X = \chi(u) - \#\Gamma.$$

Por causa de comportamento assintótico de σ perto dos furos, se σ não é identicamente nulo, então σ tem um número finito de zeros. Além disso, $\sigma(z) \neq 0$ perto dos furos.

Seja Y uma seção de $T\dot{\Sigma}$ tal que existe uma função $f : \dot{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $X = fY$. Então, f não se anula perto dos pontos em Γ e

$$\#\mathbb{R}f = \#\Gamma X = \chi(u) - \#\Gamma.$$

Seja $\Phi : N \rightarrow \dot{\Sigma} \times \mathbb{C}$ uma trivialização de N . Defina $F : \dot{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$F(z) = \Phi(z) \circ \sigma(z)(Y(z)).$$

Assim,

$$F(z) = 0 \Leftrightarrow \sigma(z) = 0 \text{ e } \text{wind}(F) = \#\sigma.$$

Disso segue que

$$\begin{aligned} \#\sigma &= \text{wind}(F) = \text{wind}(\Phi \circ \sigma \circ Y) \\ &= \text{wind}(\Phi \circ \sigma \circ X) - \text{wind}(f) \\ &= \text{wind}_\infty^\tau(\sigma) - \chi(u) + \#\Gamma. \end{aligned}$$

Para a segunda parte, observe que na vizinhança de um furo $z \in \Gamma$ um elemento $\sigma \in \ker D_u^*$ satisfaz

$$0 = -C(\bar{\partial} + \bar{S}(s, t))(C^{-1}\sigma) \Leftrightarrow 0 = (\bar{\partial} + \bar{S}(s, t))(C^{-1}\sigma) = (\partial_s + J_0\partial_t + \bar{S}(s, t))(C^{-1}\sigma).$$

Então, pelo Princípio da Similaridade de Carleman podemos escrever

$$C^{-1}\sigma(z) = G(z)\zeta(z),$$

onde $G(z) \in Gl_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ é tal que $J_0(z)G(z) = G(z)i$ e ζ é uma função holomorfa. Assim, nessa vizinhança

$$\sigma(z) = CG(z)\zeta(z).$$

Como os zeros de ζ todos tem índice ≥ 0 e CG inverte a orientação, segue que todos os zeros de $\sigma(z)$ tem índice ≤ 0 . \square

Proposição 2.48. *Suponha que $u \in \mathcal{M}_0^J(\alpha; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_2)$ é uma curva J -holomorfa imersa com um furo positivo em z_0 assintótico a α , um furo negativo em z_1 assintótico a β_1 e d furos negativos em z_2, \dots, z_{d+1} todos assintóticos a β_2 , onde $d \geq 1$. Suponha ainda que $\mu_{CZ}^T(\alpha) - \mu_{CZ}^T(\beta_1) = 2$ e β_2 é uma órbita de Reeb contrátil com índice de Conley-Zehnder 2. Então, $\text{wind}^T(\sigma; z_i) = 1$ para todo $i = 2, \dots, d+1$.*

Demonstração. Primeiro observe que para cada $i = 2, \dots, d+1$ temos

$$\text{wind}^T(\sigma; z_i) \leq \left\lfloor \frac{\mu_{CZ}^T(\beta_2)}{2} \right\rfloor = 1.$$

Para provar a desigualdade inversa, observe que pelo Lema 2.47 temos

$$\text{wind}_{\infty}^T(\sigma) = \#\sigma + \chi(u) - \#\Gamma$$

e $\#\sigma \leq 0$. Então,

$$\text{wind}_{\infty}^T(\sigma) \leq 2 - (d+2) = -d.$$

Por outro lado,

$$\text{wind}_{\infty}^T(\sigma) = \text{wind}^T(\sigma; z_0) - \sum_{i=1}^{d+1} \text{wind}^T(\sigma; z_i). \quad (2.24)$$

Suponha que $\text{wind}^T(\sigma; z_i) < 1$ para todo $2 \leq i \leq d+1$. Observe que

$$\text{wind}^T(\sigma; z_0) \geq \left\lfloor \frac{\mu_{CZ}^T(\alpha)}{2} \right\rfloor \quad \text{e} \quad \text{wind}^T(\sigma; z_1) \leq \left\lfloor \frac{\mu_{CZ}^T(\beta_1)}{2} \right\rfloor$$

e isto implica que

$$\begin{aligned} \text{wind}^T(\sigma; z_0) - \text{wind}^T(\sigma; z_1) &\geq \left\lfloor \frac{\mu_{CZ}^T(\alpha)}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\mu_{CZ}^T(\beta_1)}{2} \right\rfloor \\ &\geq \frac{\mu_{CZ}^T(\alpha) - \mu_{CZ}^T(\beta_1)}{2} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Como $\mu_{CZ}^T(\beta_2) = 2$ segue que o auto-espaço associado ao autovalor μ_{-1} do operador A_{β_2} é 1-dimensional. Se $\tilde{\varphi}$ é um autovetor unitário associado a μ_{-1} , segue que o autovetor principal da representação assintótica de σ em cada um dos furos z_2, \dots, z_{d+1} é da forma $\rho_i \tilde{\varphi}$, onde ρ_i é uma função real que nunca se anula para cada $2 \leq i \leq d+1$, respectivamente. Assim, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\text{wind}^T(\sigma; z_i) = x$ para todo $2 \leq i \leq d+1$. Como estamos supondo que $x < 1$ segue de (2.24) e (2.25) que

$$\text{wind}_{\infty}^T(\sigma) \geq 1 - dx > 1 - d$$

e chegamos em uma contradição. Portanto, para cada $i = 2, \dots, d+1$ temos

$$\text{wind}^T(\sigma; z_i) \geq 1 \Rightarrow \text{wind}^T(\sigma; z_i) = 1.$$

\square

Capítulo 3

Estoque de calças

Neste capítulo, listamos os possíveis *buildings* (ver Definição 3.10) que têm índice de Fredholm 1 e 2, associados a uma forma de contato fracamente convexa (ver Definição 3.9). Além disso, mostramos quais destes *buildings* podem ser limites de uma sequência de cilindros pseudo-holomorfos de índice de Fredholm 2. Este estudo generaliza resultados obtidos por Hutchings e Nelson em [HN16].

3.1 Inventário do estoque

Iniciamos com algumas propriedades básicas do índice de Conley-Zehnder de órbitas periódicas não-degeneradas.

Proposição 3.1. *Seja α uma órbita de Reeb hiperbólica e $d \geq 1$. Então,*

$$\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^d) = d \cdot \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha).$$

Demonstração. Seja θ o número de vezes que o autoespaço da aplicação de primeiro retorno

$$P_{\alpha} : (\xi_{\alpha(0)}, d\lambda) \rightarrow (\xi_{\alpha(0)}, d\lambda)$$

gira com respeito a trivialização τ ao longo de α . Sabe-se que se α é hiperbólica positiva, θ é um inteiro e se α é hiperbólica negativa, θ é um inteiro mais $1/2$. Assim, se α é hiperbólica positiva, temos

$$\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^d) = \lfloor d\theta \rfloor + \lceil d\theta \rceil = 2d\theta = d \cdot \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha).$$

Se α é hiperbólica negativa, temos $\theta = a + 1/2$, $a \in \mathbb{Z}$, então:

- se $d = 2l$, $l > 1$ temos

$$d\theta = 2l \left(a + \frac{1}{2} \right) = 2la + l \in \mathbb{Z}$$

e assim,

$$\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^d) = \lfloor d\theta \rfloor + \lceil d\theta \rceil = 2d\theta = d \cdot \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha).$$

- se $d = 2l + 1$, $l \geq 0$ temos

$$d\theta = (2l + 1) \left(a + \frac{1}{2} \right) = da + l + \frac{1}{2}$$

implicando que

$$\begin{aligned} \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^d) &= \lfloor d\theta \rfloor + \lceil d\theta \rceil = da + l + da + l + 1 \\ &= 2da + 2l + 1 = 2da + d \\ &= d(2a + 1) \\ &= d \cdot \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha). \end{aligned}$$

□

Proposição 3.2. *Seja α uma órbita de Reeb não-degenerada e α^d o d recobrimento de α , então*

$$\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^d) \geq d \cdot \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) - (d - 1).$$

Demonstração. Se α é hiperbólica, pela Proposição 3.1 temos

$$\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^d) = d \cdot \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) \geq d \cdot \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) - (d - 1).$$

Se α é elíptica e θ é o número de rotação associado a α , segue que $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e assim $d\theta \notin \mathbb{Z}$ para todo $d \geq 1$. Com isso, temos

$$\begin{aligned} \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^d) &= 2\lfloor d\theta \rfloor + 1 \\ &\geq 2d\lfloor \theta \rfloor + 1 \\ &= d(2\lfloor \theta \rfloor + 1) - d + 1 \\ &= d \cdot \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) - (d - 1). \end{aligned}$$

□

Ao longo deste capítulo faremos uso dos seguintes resultados.

Lema 3.3. [HT07, Lema 1.7] *Sejam (M, λ) uma 3-variedade de contato, $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e $v : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma curva J -holomorfa. Se v é um recobrimento múltiplo de um cilindro trivial então $\text{ind}(v) \geq 0$.*

Lema 3.4. [HN16, Lema 2.2] *Sejam (M, λ) uma 3-variedade de contato, $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e $v : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma curva J -holomorfa com gênero zero, um fim positivo e um número arbitrário de fins negativos. Se \mathfrak{v} é a curva somewhere injective que v cobre com multiplicidade d e se b é o número de pontos de ramificação dessa cobertura contados com multiplicidade, então*

$$\text{ind}(v) \geq d \cdot \text{ind}(\mathfrak{v}) + 2(1 - d + b).$$

Teorema 3.5. [Wen16, Teorema 7.2] *Sejam (M, λ) uma 3-variedade de contato, g um inteiro não-negativo e $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l$ órbitas de Reeb não-degeneradas. Então existe um subconjunto denso $\mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda) \subset \mathcal{J}(\lambda)$ tal que para cada $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$ as curvas somewhere injective $u \in \mathcal{M}_g^J(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_l)$ são Fredholm-regulares. Além disso, essas curvas formam um subconjunto aberto de*

$$\mathcal{M}_g^J = \mathcal{M}_g^J(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_l),$$

que é uma variedade de dimensão igual a

$$\dim(\mathcal{M}_g^J) = -(2 - 2g - k - l) + 2c_{\tau}(u) + \sum_{i=1}^k \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha_i) - \sum_{i=1}^l \mu_{CZ}^{\tau}(\beta_i) \geq 0.$$

Lema 3.6. [HN16, Lema 2.3] *Sejam (M, λ) uma 3-variedade de contato, $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$ e $v : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma curva J -holomorfa com um fim positivo e n fins negativos. Suponha que v cobre um cilindro não-trivial somewhere injective. Então*

$$\text{ind}(v) \geq n.$$

Lema 3.7. [HN16, Lema 2.5] *Sejam (M, λ) uma 3-variedade de contato, $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$ e $v : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma curva J -holomorfa que é um cilindro não-trivial e $\bar{\mathfrak{v}}$ o cilindro J -holomorfo somewhere injective coberto por v . Então*

$$1 \leq \text{ind}(\bar{\mathfrak{v}}) \leq \text{ind}(v).$$

Dados os resultados acima, estamos prontos para provarmos a seguinte proposição que generaliza o Lema 2.4 de [HN16].

Proposição 3.8. *Sejam (M, λ) uma 3-variedade de contato e $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$. Seja $v : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma curva J -holomorfa de gênero zero com um furo positivo e $n > 1$ fins negativos. Suponha que v não é um recobrimento múltiplo de um cilindro trivial. Então,*

$$\text{ind}(v) \geq 3 - n. \quad (3.1)$$

Além disso,

- i) *Se a curva somewhere injective \mathfrak{v} coberta por v é um cilindro, então a desigualdade (3.1) é estrita.*
- ii) *Se vale a igualdade em (3.1), então v é um recobrimento múltiplo (sem pontos de ramificação) de uma curva somewhere injective de índice 1 que tem um fim positivo e dois fins negativos. Além disso, denotando por d a multiplicidade de recobrimento de v , temos que v tem $d + 1$ furos negativos e $\text{ind}(v) = 2 - d$.*

Demonstração. Seja \mathfrak{v} a curva somewhere injective que é coberta por v . Temos que \mathfrak{v} possui um furo positivo e k furos negativos. Sejam d a multiplicidade de recobrimento de v e b o número de pontos de ramificação de v , contados com multiplicidade.

Se \mathfrak{v} é um cilindro, então segue do Lema 3.6 que $\text{ind}(v) \geq n$. Além disso, como $n > 1$ por hipótese, temos que

$$\text{ind}(v) + n \geq 2n \geq 4.$$

Se \mathfrak{v} tem mais de um fim negativo, então, como $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$, temos que $\text{ind}(\mathfrak{v}) \geq 1$. Pelo Lema 3.4, concluímos que

$$\text{ind}(v) \geq 2 - d + 2b.$$

Pelo Teorema de Riemann-Hurwitz (ver [Oor16] para o caso compacto) segue que

$$\chi(v) = d \cdot \chi(\mathfrak{v}) - b \Rightarrow 2 - 1 - n = d(2 - 1 - k) - b \Rightarrow n = d(k - 1) + 1 + b.$$

Então, como $b \geq 0$, $d \geq 1$ e $k > 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \text{ind}(v) + n &\geq 2 - d + 2b + d(k - 1) + 1 + b \\ &= 3(b + 1) + d(k - 2) \\ &\geq 3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

A desigualdade (3.1) está provada.

Suponha agora que vale a igualdade em (3.1). Segue que \mathfrak{v} não é um cilindro. De fato, se \mathfrak{v} é um cilindro, então, por hipótese, \mathfrak{v} é não-trivial e, como visto acima, $\text{ind}(v) + n \geq 4$, contradição. Isso prova i). Mais ainda, segue das desigualdades em (3.2) que

$$3 = \text{ind}(v) + n \geq 3(b + 1) + d(k - 2) \geq 3 \quad \Rightarrow \quad 3b + 3 + d(k - 2) = 3$$

ou seja,

$$3b + d(k - 2) = 0. \quad (3.3)$$

Mas como $b \geq 0$, $k \geq 2$ e $d \geq 1$ temos

$$3b \geq 0 \text{ e } d(k - 2) \geq 0.$$

Logo, da equação (3.3) segue que

$$3b = d(k - 2) = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ e } k = 2.$$

Usando o Teorema de Riemann-Hurwitz novamente obtemos

$$n = d(k - 1) + 1 + b = d + 1.$$

Assim, o Lema 3.4 nos dá

$$\begin{aligned}
3 - (d + 1) &= \text{ind}(v) \geq d \cdot \text{ind}(\mathfrak{v}) + 2(1 - d) \\
\Rightarrow 2 - d &\geq d \cdot \text{ind}(\mathfrak{v}) + 2 - 2d \\
\Rightarrow d \cdot \text{ind}(\mathfrak{v}) &\leq d \\
\Rightarrow 1 \leq \text{ind}(\mathfrak{v}) &\leq 1 \\
\Rightarrow \text{ind}(\mathfrak{v}) &= 1.
\end{aligned}$$

Isso termina a demonstração do item ii). □

A seguir introduzimos os conceitos de forma de contato fracamente convexa e *building* holomorfo, fundamentais para o desenvolvimento de todo o trabalho.

Definição 3.9. Seja (M, λ) uma variedade de contato coorientável tal que $c_1(\xi)|_{\pi_2(M)} = 0$. Dizemos que uma 1-forma de contato λ é **fracamente convexa** se $\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) \geq 2$ para toda órbita de Reeb periódica e contrátil α . Aqui, τ se refere a uma trivialização da estrutura de contato ao longo de α que se estende a uma trivialização de $u^*\xi$, em que $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ é contínua, satisfaz $u(e^{it}) = \alpha(tT/2\pi)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ e T é o período de α .

Definição 3.10. Seja (W, ω) uma variedade simplética com uma estrutura quase complexa J . Um **building holomorfo** de altura m é uma m -upla $v = (v_1, \dots, v_m)$ tal que

- i) $v_i : \Sigma_i \setminus \Gamma_i \rightarrow W$ é uma curva J -holomorfa para todo $i = 1, \dots, m$.
- ii) Σ_i é uma superfície de Riemann, não necessariamente conexa, para todo $i = 1, \dots, m$.
- iii) para todo $i = 1, \dots, m-1$, se v_i é assintótica às órbitas de Reeb $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ em seus furos negativos, então v_{i+1} é assintótica às mesmas órbitas $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ em seus furos positivos.

Os furos positivos e negativos do building v são, respectivamente, os furos positivos de v_1 e os furos negativos de v_m . O gênero de v é igual ao gênero da superfície obtida colando-se os fins negativos de v_i com os fins positivos de v_{i+1} , $i = 1, \dots, m-1$. Além disso, $\text{ind}(v)$ é igual a soma dos índices de todas as curvas do building v , isto é,

$$\text{ind}(v) = \sum_{i=1}^m \text{ind}(v_i).$$

Cada curva v_i é chamada de nível do building v . Vamos assumir que cada nível tenha pelo menos uma componente conexa que não é um cilindro trivial. Falaremos mais sobre outras propriedades de buildings quando considerarmos limites de sequencias de curvas J -holomorfas com energia uniformemente limitada.

Os teoremas a seguir são generalizações das Proposições 2.7 e 2.8 de [HN16] para o caso fracamente convexo. Tais teoremas descrevem os possíveis *buildings* com índice 1 e 2, que têm 1 furo positivo e no máximo 1 furo negativo.

Teorema 3.11. *Seja (M, λ) uma 3-variedade de contato, onde λ é uma forma de contato não-degenerada e fracamente convexa. Sejam $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$ e $v = (v_1, \dots, v_m)$ um building J -holomorfo de gênero zero com um fim positivo e nenhum fim negativo. Então:*

- (a) $\text{ind}(v) \geq 1$.
- (b) Se $\text{ind}(v) = 1$, então v é um plano.
- (c) Se $\text{ind}(v) = 2$, então vale uma das seguintes opções:
 - (C.1) v é um plano.
 - (C.2) $v = (v_1, v_2)$, em que
 - i) v_1 é um cilindro não trivial e tem índice 1.

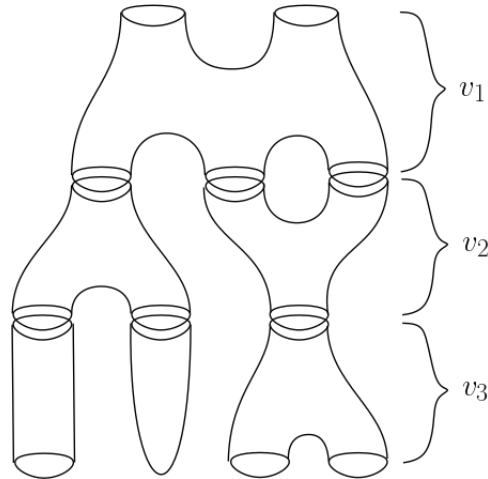


Figura 3.1: Building com três níveis, gênero 1, dois furos positivos e três furos negativos.

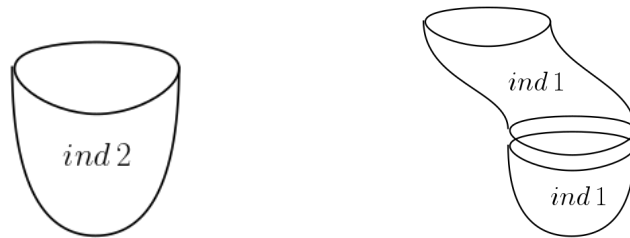


Figura 3.2: Buildings holomorfos do Teorema 3.11(c)

ii) v_2 é um plano de índice 1 cujo fim positivo é assintótico ao fim negativo de v_1 .

Demonstração. (a) A prova será feita por indução sobre m . Suponha que $m = 1$, então, v_1 é um plano e digamos que em seu fim positivo v_1 é assintótica à órbita periódica α . Como λ é fracamente convexa, temos $\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) \geq 2$ e, assim,

$$\text{ind}(v_1) = \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) - 1 \geq 1.$$

Suponha agora que $m > 1$ e assuma que o lema vale para *buildings* de altura até $m - 1$. Seja n o número de fins negativos de v_1 . Então o building holomorfo (v_2, \dots, v_m) é a união de n buildings holomorfos de gênero zero, cada um tendo um fim positivo (em um fim negativo de v_1) e nenhum fim negativo. Pela hipótese de indução, obtemos

$$\text{ind}(v) \geq \text{ind}(v_1) + n. \quad (3.4)$$

Seja v_1 a curva J -holomorfa *somewhere injective* coberta por v_1 . Considere os seguintes casos:

- **Caso 1.** v_1 é um cilindro trivial.

Como o primeiro nível não é um cilindro trivial, temos $n > 1$ e, pelo Lema 3.3, temos $\text{ind}(v_1) \geq 0$. Segue então de (3.4) que $\text{ind}(v) \geq n > 1$.

- **Caso 2.** v_1 é um cilindro não trivial.

Pelo Lema 3.6, segue que $\text{ind}(v_1) \geq n$. Assim, a equação (3.4) nos dá $\text{ind}(v) \geq 2n \geq 2$.

- **Caso 3.** v_1 não é um cilindro.

Nesse caso, temos que $n > 1$. Pela Proposição 3.8, obtemos $\text{ind}(v) \geq 3 - n + n = 3$.

Nos três casos acima, observamos que $\text{ind}(v) > 1$. O item (a) está provado.

Vamos provar o item (b). Na demonstração do item (a), vimos que se $m > 1$, então $\text{ind}(v) > 1$. Logo, se $\text{ind}(v) = 1$, então que $m = 1$, isto é, v é um plano.

Finalmente vamos provar o item (c). Suponha que $\text{ind}(v) = 2$. Se $m = 1$, então v é um plano. Suponha então que $m > 1$. Como na demonstração do item (a), seja n o número de fins negativos de v_1 e seja \mathfrak{v}_1 a curva *somewhere injective* coberta por v_1 . Temos

- Se \mathfrak{v}_1 é o cilindro trivial $\mathbb{R} \times \alpha$, pelo item (a) e Lema 3.3 temos

$$2 = \text{ind}(v) \geq \text{ind}(v_1) + n \geq n \geq 2 \Rightarrow n = 2 \text{ e } \text{ind}(v_1) = 0.$$

Denote por α^{d_1} e α^{d_2} os limites assintóticos de v_1 em seus fins negativos, em que α é uma órbita de Reeb simples. Em particular, v_1 é assintótica a $\alpha^{d_1+d_2}$ em seu fim positivo. Decorre que (v_2, \dots, v_m) é a união de dois buildings, B_1 e B_2 , cujos limites assintóticos são α^{d_1} e α^{d_2} em seus respectivos fins positivos. Ambos não possuem fins negativos.

Pelo item (a), temos $\text{ind}(B_i) \geq 1, i = 1, 2$. Assim, como $\text{ind}(v_1) = 0$ segue que

$$2 = \text{ind}(v) = \text{ind}(B_1) + \text{ind}(B_2) \geq 2 \Rightarrow \text{ind}(B_1) = \text{ind}(B_2) = 1.$$

Pelo item (b), segue que B_1 e B_2 são planos de índice 1, exceto que no caso em que o primeiro nível de precisamente um deles é um cilindro trivial. Isso nos dá duas opções para o building (v_2, \dots, v_m) :

- (i) $m = 2$ e v_2 é formado por dois planos holomorfos de índice 1.
- (ii) $m = 3$, em que:
 - v_2 é formado por um plano de índice 1 e um cilindro trivial e
 - v_3 é um plano de índice 1.

No entanto, como em ambos os casos α^{d_2} é o limite assintótico de um plano de índice 1, temos que

$$\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^{d_2}) = 2.$$

Disso segue que α é hiperbólica e, portanto,

$$\begin{aligned} \text{ind}(v_1) &= 1 + \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^{d_1+d_2}) - \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^{d_1}) - \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^{d_2}) \\ &= 1 + (d_1 + d_2)\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) - d_1 \cdot \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) - d_2 \cdot \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) \\ &= 1, \end{aligned}$$

uma contradição. Concluimos que se $\text{ind}(v) = 2$, então \mathfrak{v}_1 não é um cilindro trivial.

- Se \mathfrak{v}_1 é um cilindro não trivial, então, pelo Lema 3.6 e pelo item (a), temos

$$2 = \text{ind}(v) \geq \text{ind}(v_1) + n \geq 2n \geq 2 \Rightarrow n = 1 \text{ e } \text{ind}(v_1) = 1.$$

Portanto, v_1 é um cilindro de índice 1 e o building (v_2, \dots, v_m) tem índice 1, um furo positivo e nenhum fim negativo. Logo, pelo item (b) segue que $m = 2$ e v_2 é um plano. Portanto, v é um building como em (C.2).

Finalmente, observe que se $\text{ind}(v) = 2$ e $m > 1$, então \mathfrak{v}_1 é um cilindro. De fato, como na demonstração do item (a), Caso 3, vimos que se \mathfrak{v}_1 não é um cilindro, então $\text{ind}(v) \geq 3$. \square

Teorema 3.12. *Seja (M, λ) uma 3-variedade de contato, em que λ é uma forma de contato não-degenerada e fracamente convexa. Assuma que toda órbita contrátil com índice de Conley-Zehnder 2 é simples. Sejam $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$ e $v = (v_1, \dots, v_m)$ um building J -holomorfo não-trivial que tem gênero zero e possui um furo positivo e um furo negativo. Então:*

- (a) $\text{ind}(v) \geq 1$.
- (b) Se $\text{ind}(v) = 1$, então v é um cilindro não trivial.

(c) Se $\text{ind}(v) = 2$, então vale uma das seguintes opções:

(c.1) v é um cilindro não trivial.

(c.2) v tem dois níveis, ambos cilindros não triviais de índice 1.

(c.3) $v = (v_1, v_2)$, em que

- v_1 é um recobrimento múltiplo do cilindro trivial sobre α . Além disso, v_1 tem índice zero, grau $d_1 + d_2$ e possui dois fins negativos, um em α^{d_1} e outro em α^{d_2} .
- v_2 tem duas componentes conexas: uma é um cilindro trivial sobre α^{d_1} e a outra componente é um plano J -holomorfo de índice 2 com fim positivo em α^{d_2} .

(c.4) $v = (v_1, v_2)$, em que

- v_1 é um recobrimento múltiplo do cilindro trivial sobre α . Além disso, v_1 tem índice 1, grau $d_1 + d_2$ e possui dois fins negativos, um em α^{d_1} e outro em α^{d_2} .
- v_2 tem duas componentes conexas: uma é um cilindro trivial sobre α^{d_1} e a outra componente é um plano J -holomorfo de índice 1 com fim positivo em α^{d_2} .

(c.5) $v = (v_1, v_2, v_3)$, em que

- v_1 é um recobrimento múltiplo do cilindro trivial sobre α . Além disso, v_1 tem índice zero, grau $d_1 + d_2$ e possui dois fins negativos, um em α^{d_1} e outro em α^{d_2} .
- v_2 tem duas componentes conexas: uma é um cilindro trivial sobre α^{d_1} e a outra componente é um cilindro não trivial de índice 1 com fim positivo em α^{d_2} e fim negativo em $\tilde{\alpha}$.
- v_3 é um plano J -holomorfo de índice 1 com fim positivo em $\tilde{\alpha}$.

(c.6) $v = (v_1, v_2)$ em que

- v_1 é um d -recobrimento múltiplo (sem pontos de ramificação) de uma curva J -holomorfa *somewhere injective* \mathfrak{v}_1 , em que \mathfrak{v}_1 tem um furo positivo em α_1 , dois furos negativos, um em α_2 e outro em α_3 e $\text{ind}(\mathfrak{v}_1) = 1$. Além disso, v_1 tem índice $2 - d$, tem um furo positivo em α_1^d e $d + 1$ furos negativos, um em α_2^d e os outros d em α_3 .
- v_2 tem $d + 1$ componentes conexas: uma componente é o cilindro trivial sobre α_2^d e as outras componentes são planos J -holomorfos de índice 1 com fim positivo em α_3 .

Demonstração. (a) A prova será feita por indução sobre m . Se $m = 1$, então v é um cilindro (não trivial) e pelo Lema 3.7 segue que $\text{ind}(v) \geq 1$.

Assuma agora que $m > 1$ e o Lema vale para buildings de tamanho até $m - 1$. Seja $n > 0$ o número de fins negativos de v_1 . O building (v_2, \dots, v_m) é a união de n buildings holomorfos de gênero zero A_1, \dots, A_n cada um com um fim positivo nos correspondentes fins negativos de v_1 . Assuma, sem perda de generalidade, que A_1 tem um fim negativo e os buildings A_2, \dots, A_n não têm fins negativos.

Se $n = 1$, então A_1 não é trivial e pela hipótese de indução temos $\text{ind}(A_1) \geq 1$. O mesmo vale para v_1 e, portanto,

$$\text{ind}(v) = \text{ind}(v_1) + \text{ind}(A_1) \geq 2.$$

Suponha que $n > 1$. Se A_1 é trivial temos $\text{ind}(A_1) = 0$ e se A_1 não é trivial segue da hipótese de indução que $\text{ind}(A_1) \geq 1$. Logo, $\text{ind}(A_1) \geq 0$ e do Teorema 3.11 segue que

$$\text{ind}(v) = \text{ind}(v_1) + \sum_{i=1}^n \text{ind}(A_i) \geq \text{ind}(v_1) + n - 1 \quad (3.5)$$

Seja \mathfrak{v}_1 a curva *somewhere injective* que é coberta por v_1 . Considere os seguintes casos:

- **Caso 1.** \mathfrak{v}_1 é um cilindro trivial.

Então, pelo Lema 3.3 e equação (3.5) obtemos

$$\text{ind}(v) \geq n - 1 \geq 1.$$

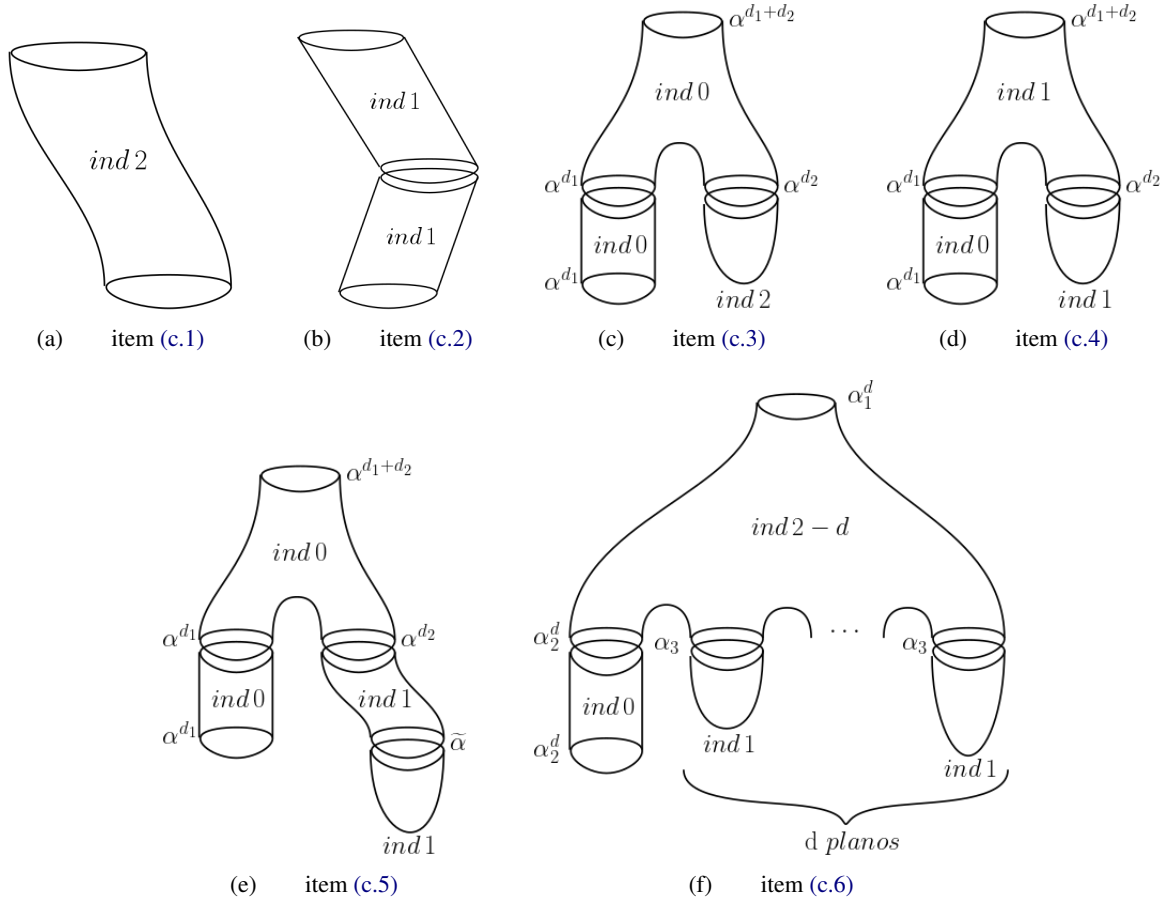


Figura 3.3: Buildings holomorfos do Teorema 3.12(c).

- **Caso 2.** v_1 é um cilindro não trivial

Pelo Lema 3.6 e a equação (3.5) obtemos

$$\text{ind}(v) \geq n + n - 1 = 2n - 1 \geq 3.$$

- **Caso 3.** v_1 não é um cilindro

Da Proposição 3.8 e da equação (3.5) segue que

$$\text{ind}(v) \geq 3 - n + n - 1 = 2.$$

Portanto, em todos os casos obtemos $\text{ind}(v) \geq 1$ e o item (a) está provado.

(b) Suponha que $\text{ind}(v) = 1$. Então, da demonstração do item (a) segue que

1. v é um cilindro não trivial, ou
2. v é um building onde $m > 1$, $n > 1$ e v_1 é um recobrimento de um cilindro trivial $\mathbb{R} \times \alpha$.

Vamos analisar o segundo caso acima. Usando as mesmas notações do item (a) segue da equação (3.5) e do Lema 3.3 que

$$1 = \text{ind}(v) = \text{ind}(v_1) + \sum_{i=1}^n \text{ind}(A_i) \geq \text{ind}(v_1) + n - 1 \geq n - 1 \geq 1 \Rightarrow n = 2.$$

Por outro lado, como $\text{ind}(v_1) \geq 0$ e $\text{ind}(A_1) \geq 0$, temos

$$1 = \text{ind}(v) \geq \text{ind}(v_1) + \text{ind}(A_1) + 1 \Rightarrow 0 \leq \text{ind}(v_1) + \text{ind}(A_1) \leq 0, \tag{3.6}$$

ou seja,

$$\text{ind}(v_1) + \text{ind}(A_1) = 0 \Rightarrow \text{ind}(v_1) = \text{ind}(A_1) = 0.$$

Disso e do item (a) também segue que

$$1 = \text{ind}(v) = \text{ind}(A_2) \Rightarrow A_2 \text{ é um plano.}$$

Logo, $v = (v_1, v_2)$, em que v_1 tem fim positivo em $\alpha^{d_1+d_2}$ e fins negativos em α^{d_1} e α^{d_2} ; v_2 é a união do cilindro trivial $\mathbb{R} \times \alpha^{d_1}$ e um plano de índice 1 com fim positivo em α^{d_2} . Tomando uma trivialização τ' de ξ ao longo de α obtemos uma trivialização induzida de ξ ao longo da curva v_1 . Esta trivialização induz uma trivialização de ξ ao longo de cada um dos limites assintóticos de v_1 , que são recobrimentos de α . Chamaremos essa última trivialização de τ . Vale notar que τ coincide com a trivialização induzida pelas correspondentes iteradas de τ' . Assim, como A_2 é um plano de índice 1, escolhendo uma trivialização conveniente de α^{d_2} que se estende a um plano limitado por essa órbita, segue que o índice de Conley-Zehnder de α^{d_2} é igual a 2. Isso implica que α é uma órbita de Reeb hiperbólica. Assim, temos

$$\begin{aligned} \text{ind}(v_1) &= -(2-3) + \mu_{CZ}^\tau(\alpha^{d_1+d_2}) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha^{d_1}) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha^{d_2}) \\ &= 1 + (d_1 + d_2)\mu_{CZ}^{\tau'}(\alpha) - d_1 \cdot \mu_{CZ}^{\tau'}(\alpha) - d_2 \cdot \mu_{CZ}^{\tau'}(\alpha) \\ &= 1 + (d_1 + d_2)\mu_{CZ}^{\tau'}(\alpha) - (d_1 + d_2)\mu_{CZ}^{\tau'}(\alpha) \\ &= 1, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo, o Caso 2 acima não pode ocorrer.

(c) Suponha que $\text{ind}(v) = 2$. Da demonstração do item (a) segue que:

1. $m = 1$ e v é um cilindro não trivial de índice 2 o que nos dá (c.1); ou
2. $m > 1, n = 1$, isto é, v_1 e A_1 não são triviais; ou
3. $m > 1, n > 1$ e v_1 é o recobrimento de um cilindro trivial $\mathbb{R} \times \alpha$; ou
4. $m > 1, n > 1$ e v_1 não é um cilindro.

Vamos analisar mais de perto os 4 casos acima.

- Se vale o caso 2, então, pelo item (a), temos $\text{ind}(v_1) \geq 1$ e $\text{ind}(A_1) \geq 1$. Logo,

$$2 = \text{ind}(v) = \text{ind}(v_1) + \text{ind}(A_1) \Rightarrow \text{ind}(v_1) = \text{ind}(A_1) = 1.$$

Logo, pelo item (b), segue que v_1 e A_1 são cilindros não triviais e, assim, obtemos (c.2).

- Se vale o caso 3, então temos que considerar dois sub casos: quando A_1 é trivial e quando A_1 não é trivial.

– Se A_1 é trivial, temos $\text{ind}(A_1) = 0$. Logo, pelo Teorema 3.11 e Lema 3.3 segue que

$$2 = \text{ind}(v) = \text{ind}(v_1) + \sum_{i=2}^n \text{ind}(A_i) \geq n - 1 \geq 1$$

implicando que

$$2 \leq n \leq 3 \Rightarrow n = 2 \text{ ou } n = 3.$$

Se $n = 2$, então

$$2 = \text{ind}(v) = \text{ind}(v_1) + \text{ind}(A_2). \quad (3.7)$$

Pelos Lema 3.3 e Teorema 3.11 temos que $\text{ind}(v_1) \geq 0$ e $\text{ind}(A_2) \geq 1$. Logo, para que a equação (3.7) seja verdadeira, temos as seguintes possibilidades:

- (i) $\text{ind}(v_1) = 0$ e $\text{ind}(A_2) = 2$; ou

(ii) $\text{ind}(v_1) = 1$ e $\text{ind}(A_2) = 1$.

Se vale (i), então, pelo Teorema 3.11, segue que ou A_2 é um plano e obtemos (c.3), ou A_2 é um building como no Teorema 3.11(C.2) e, assim, obtemos (c.5). Se vale (ii), então o Teorema 3.11 nos diz que A_2 é um plano e assim obtemos (c.4).

Se $n = 3$, então

$$2 = \text{ind}(v_1) + \text{ind}(A_2) + \text{ind}(A_3).$$

Mas como pelo Teorema 3.11(a) temos $\text{ind}(A_2), \text{ind}(A_3) \geq 1$ segue que

$$\text{ind}(v_1) = 0 \quad \text{e} \quad \text{ind}(A_2) = \text{ind}(A_3) = 1.$$

O Teorema 3.11(b) nos diz que A_2 e A_3 são planos. Assim, como v_1 tem três fins negativos, digamos em $\alpha^{d_1}, \alpha^{d_2}$ e α^{d_3} , podemos assumir sem perda de generalidade que A_2 e A_3 são assintóticos a α^{d_2} e α^{d_3} em seus fins positivos, respectivamente. Tomando uma trivialização τ' de ξ ao longo de α obtemos uma trivialização induzida de ξ ao longo da curva v_1 . Esta trivialização, denotada por τ , induz uma trivialização de ξ ao longo de cada um dos seus limites assintóticos, que são iteradas de α . Note que τ coincide com a trivialização induzida pelas correspondentes iteradas de τ' . Como A_2 e A_3 são planos de índice 1, obtemos que, para uma trivialização conveniente de α^{d_2} , ou α^{d_3} , que se estende a um plano limitado por elas, seus índices são iguais a 2. Em particular, α é hiperbólica. Segue que

$$\begin{aligned} \text{ind}(v_1) &= -(2 - 4) + \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^{d_1+d_2+d_3}) - \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^{d_1}) - \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^{d_2}) - \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^{d_3}) \\ &= 2 + (d_1 + d_2 + d_3)\mu_{CZ}^{\tau'}(\alpha) - d_1 \cdot \mu_{CZ}^{\tau'}(\alpha) - d_2 \cdot \mu_{CZ}^{\tau'}(\alpha) - d_3 \cdot \mu_{CZ}^{\tau'}(\alpha) \\ &= 2, \end{aligned}$$

o que contradiz o fato de $\text{ind}(v_1) = 0$. Logo, v_1 não tem três fins negativos.

- Se A_1 não é trivial, então o item (a) nos diz que $\text{ind}(A_1) \geq 1$. Assim, do Teorema 3.11 e do Lema 3.3, segue que

$$2 = \text{ind}(v) = \text{ind}(v_1) + \text{ind}(A_1) + \sum_{i=2}^n \text{ind}(A_i) \geq 1 + n - 1 = n \geq 2,$$

ou seja, $n = 2$. Por outro lado, como $\text{ind}(A_1), \text{ind}(A_2) \geq 1$

$$2 = \text{ind}(v_1) + \text{ind}(A_1) + \text{ind}(A_2) \Rightarrow \text{ind}(v_1) = 0 \text{ e } \text{ind}(A_1) = \text{ind}(A_2) = 1.$$

No entanto, como vimos no item (b), se $n = 2$, se A_2 é um plano de índice 1 e se v_1 é o recobrimento de um cilindro trivial, então concluímos que $\text{ind}(v_1) = 1$, uma contradição. Portanto, este caso está descartado.

- Suponha agora que vale o caso 4. Então, pelos Teorema 3.11 e Proposição 3.8, temos

$$2 = \text{ind}(v) = \text{ind}(v_1) + \text{ind}(A_1) + \sum_{i=2}^n \text{ind}(A_i) \geq 3 - n + \text{ind}(A_1) + n - 1 = \text{ind}(A_1) + 2,$$

ou seja, $\text{ind}(A_1) = 0$ e pelo item a) segue que A_1 é um cilindro trivial. Por outro lado,

$$2 = \text{ind}(v) \geq \text{ind}(v_1) + n - 1 \Rightarrow \text{ind}(v_1) \leq 3 - n.$$

Logo, disso e da Proposição 3.8 temos

$$3 - n \leq \text{ind}(v_1) \leq 3 - n \Rightarrow \text{ind}(v_1) = 3 - n,$$

isto é, vale a igualdade na Proposição 3.8 aplicado a v_1 . Logo, pela Proposição 3.8 segue que v_1 é um recobrimento (sem pontos de ramificação) de uma curva *somewhere injective* v_1 , onde v_1 tem

índice 1, um fim positivo em α_1 e dois fins negativos, um em α_2 e outro em α_3 . Além disso, v_1 tem $n = d + 1$ furos negativos e $\text{ind}(v_1) = 2 - d$.

Então,

$$2 = \text{ind}(v) = \text{ind}(v_1) + \sum_{i=2}^{d+1} \text{ind}(A_i) = 2 - d + \sum_{i=2}^{d+1} \text{ind}(A_i) \Rightarrow \sum_{i=2}^{d+1} \text{ind}(A_i) = d \quad (3.8)$$

e como pelo Teorema 3.11 temos $\text{ind}(A_i) \geq 1$ para todo $i = 2, \dots, d + 1$ segue da equação 3.8 que

$$\text{ind}(A_i) = 1 \Rightarrow A_i \text{ é um plano, } \forall i = 2, \dots, d + 1.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que A_1 é um cilindro trivial sobre α_2^p e A_{d+1} é assintótico a um recobrimento de α_3 , digamos α_3^q .

Denote por β_i o limite assintótico do furo positivo dos planos A_i , $i = 2, \dots, d + 1$. Segue que tais órbitas são contráteis. Fixe uma trivialização τ_i de ξ ao longo de β_i que se estende para uma trivialização de ξ sobre A_i . Como $\text{ind}(A_i) = 1$, segue que $\mu_{CZ}^{\tau_i}(\beta_i) = 2$. Nesse momento, fazemos uso da hipótese

"toda órbita contrátil com índice 2 é simples",

para concluirmos que as órbitas periódicas β_i , $i = 2, \dots, d + 1$, são contráteis e simples. Em particular, como assumimos que A_{d+1} é assintótico a α_3^q , obtemos $q = 1$.

Suponhamos, por contradição, que A_i é assintótico a α_2 para $i = 2, \dots, D$, para algum $2 \leq D \leq d$ e assintótico a α_3 para $i = D + 1, \dots, d + 1$. Então, os fins negativos de v_1 são, nessa ordem,

$$\alpha_2^p, \underbrace{\alpha_2, \dots, \alpha_2}_{D-1}, \underbrace{\alpha_3, \dots, \alpha_3}_{d-D+1}.$$

Como v_1 é um d -recobrimento de v_1 e as órbitas α_2 e α_3 são simples, obtemos

$$d - D + 1 = d \quad \text{e} \quad p + D - 1 = d.$$

Isso implica $D = 1$, o que é um absurdo. Concluimos que o limite assintótico de A_i é a órbita simples α_3 , para todo $i = 2, \dots, d + 1$, e que A_1 é um cilindro trivial sobre α_2^d .

Resumindo, v é um building tal que:

- v_1 é uma curva cujo furo positivo é α_1^d e cujos $d + 1$ furos negativos são $\alpha_2^d, \alpha_3, \dots, \alpha_3$.
- v_2 é a união de um cilindro trivial sobre α_2^d e d planos J -holomorfos assintóticos a α_3 .
- α_3 é uma órbita periódica simples e contrátil cujo índice de Conley-Zehnder é 2.

□

3.2 Curvas no building do Teorema 3.12 (c.6)

Nessa seção consideramos inicialmente curvas J -holomorfas que aparecem nos buildings do Teorema 3.12 (c.6).

Definição 3.13. Seja $u : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma curva J -holomorfa, onde $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Denote por $\Gamma_0(u) \subset \Gamma$ o subconjunto dos furos pares, isto é, dos furos de Γ em que u é assintótica a uma órbita de Reeb com índice de Conley-Zehnder par. De forma análoga, denote por $\Gamma_1(u) \subset \Gamma$ o conjunto dos furos ímpares.

Lema 3.14. Suponha que $v = (v_1, v_2)$ é um building como no item (c.6) do Teorema 3.12 e que α_1^d, α_2^d sejam órbitas periódicas boas tais que $\mu_{CZ}^{\tau_1}(\alpha_1^d) - \mu_{CZ}^{\tau_2}(\alpha_2^d) = 2$. Então,

- se α_1 e α_2 são ambas hiperbólicas, temos $d = 1$.

- se α_1 é elíptica e α_2 é hiperbólica, segue que α_2 é hiperbólica negativa e $d = 1$.
- se α_1 é hiperbólica e α_2 é elíptica, segue que α_1 é hiperbólica negativa e $d = 1$.

Em particular, se $d > 1$, então $\sharp\Gamma_0(v_1) = d$ e $\sharp\Gamma_1(v_1) = 2$.

Demonstração. Seja v_1 a curva *somewhere injective* coberta por v_1 . Seja τ uma trivialização de ξ ao longo de α_1, α_2 e α_3 , que se estende a uma trivialização de $v_1^*\xi$ e de $w^*\xi$, em que $w : \mathbb{D} \rightarrow M$ é um disco contínuo cujo bordo cobre α_3 . Fica então induzida, pelo d -recobrimento $v_1 \rightarrow v_1$, uma trivialização de $v_1^*\xi$, também denotada por τ , que se estende a trivialização de ξ ao longo de α_1^d e α_2^d .

Temos

$$\begin{aligned} 1 &= \text{ind}(v_1) = -(2 - 3) + \mu_{CZ}^\tau(\alpha_1) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2) - 2 \\ &= 1 + \mu_{CZ}^\tau(\alpha_1) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2) - 2 \\ &= \mu_{CZ}^\tau(\alpha_1) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2) - 1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mu_{CZ}^\tau(\alpha_1) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2) = 2.$$

Em particular, $\mu_{CZ}^\tau(\alpha_1)$ e $\mu_{CZ}^\tau(\alpha_2)$ tem a mesma paridade. Portanto,

- Se α_1 e α_2 forem hiperbólicas, temos

$$2 = \mu_{CZ}^\tau(\alpha_1^d) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2^d) = d(\mu_{CZ}^\tau(\alpha_1) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2)) = 2d \Rightarrow d = 1.$$

- Se α_1 é elíptica e α_2 é hiperbólica, temos

$$\begin{aligned} 2 &= \mu_{CZ}^\tau(\alpha_1^d) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2^d) = (2[d\theta_{\alpha_1}] + 1) - d \cdot \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2) \\ &\geq 2d[\theta_{\alpha_1}] + 1 - d \cdot \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2) = d(2[\theta_{\alpha_1}] + 1) - d + 1 - d \cdot \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2) \\ &= d(\mu_{CZ}^\tau(\alpha_1) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2)) - d + 1 = 2d - d + 1 \\ &= d + 1, \end{aligned}$$

isto é, $d \leq 1$. Assim, $d = 1$.

- Suponha que α_1 é hiperbólica e α_2 é elíptica. Dado $x \in \mathbb{R}$, defina por $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$. Como α_2 é elíptica temos $\theta_{\alpha_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Assim, $0 < \{\theta_{\alpha_2}\} < 1$ implicando que $0 < d\{\theta_{\alpha_2}\} < d$. Dessa forma temos

$$\begin{aligned} \lceil d\theta_{\alpha_2} \rceil &= \lceil d[\theta_{\alpha_2}] + d\{\theta_{\alpha_2}\} \rceil = d[\theta_{\alpha_2}] + \lceil d\{\theta_{\alpha_2}\} \rceil \\ &\leq d[\theta_{\alpha_2}] + d = d([\theta_{\alpha_2}] + 1) \\ &= d\lceil \theta_{\alpha_2} \rceil \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2 &= \mu_{CZ}^\tau(\alpha_1^d) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2^d) = d \cdot \mu_{CZ}^\tau(\alpha_1) - (2\lceil d\theta_{\alpha_2} \rceil - 1) \\ &\geq d \cdot \mu_{CZ}^\tau(\alpha_1) - 2d\lceil \theta_{\alpha_2} \rceil + 1 = d \cdot \mu_{CZ}^\tau(\alpha_1) - d(2\lceil \theta_{\alpha_2} \rceil - 1) - d + 1 \\ &= d(\mu_{CZ}^\tau(\alpha_1) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2)) - d + 1 = 2d - d + 1 \\ &= d + 1 \end{aligned}$$

isto é, $d \leq 1$. Portanto, vale $d = 1$ também nesse caso.

□

O seguinte critério sobre transversalidade automática será útil mais adiante.

Lema 3.15 ([HN16, Lema 4.1]). *Seja (M, λ) uma 3-variedade de contato, em que λ é uma 1-forma de contato não-degenerada e $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Sejam Σ uma superfície fechada, $\Gamma \subset \Sigma$ um conjunto finito, e $u : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma curva J -holomorfa imersa. Denote por g o gênero de Σ . Se $\Sigma \setminus \Gamma$ é conexo e*

$$\text{ind}(u) > 2g - 2 + \#\Gamma_0(u),$$

então D_u é sobrejetiva.

Vamos agora considerar planos J -holomorfos não constantes de índice 1. Conforme Definição 2.38, o conjunto de tais planos assintóticos a uma órbita de Reeb α é denotado por $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)$.

Lema 3.16. *Sejam (M, λ) uma 3-variedade de contato em que λ é uma 1-forma de contato não degenerada e fracamente convexa. Sejam $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e α uma órbita de Reeb periódica. Então $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)/\mathbb{R}$ é uma variedade de dimensão zero compacta.*

Demonstração. Seja $u := (a, \bar{u}) \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)$ um plano com $\text{ind}(u) = 1$. Como a 2-esfera tem gênero zero e $\mu_{CZ}^\tau(\alpha) = 2$, temos

$$2g - 2 + \#\Gamma_0(u) = -2 + 1 = -1 < 1 = \text{ind}(u).$$

Seja $\pi : TM \rightarrow \xi = \ker \lambda$ a projeção ao longo de R_λ . Defina

$$\text{wind}_\pi^\tau(\bar{u}) := \sum_{\pi \circ d\bar{u}(z)=0} \deg(X, z),$$

em que $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma representação de $\pi \circ d\bar{u} \cdot \partial_x$ obtida através de uma trivialização τ de $u^*\xi$. Sabe-se de [HWZ95] que $\text{wind}_\pi^\tau(\bar{u}) = \text{wind}_\infty^\tau(\bar{u}) - 1$ e $\text{wind}_\pi^\tau(\bar{u}) \geq 0$. Como vale

$$\text{wind}_\infty^\tau(\bar{u}) \leq \frac{\mu_{CZ}^\tau(\alpha)}{2} = 1,$$

obtemos

$$0 \leq \text{wind}_\pi^\tau(\bar{u}) \leq 1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{wind}_\pi^\tau(\bar{u}) = 0.$$

Assim, $\pi \circ d\bar{u}$ não possui zeros e isto implica que \bar{u} é uma imersão. Em particular, u também é uma imersão. Portanto, pelo Lema 3.15, segue que D_u é sobrejetora. Dessa forma, podemos concluir que $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)$ é uma variedade de dimensão 1 e $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)/\mathbb{R}$ é uma variedade de dimensão zero.

Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)$. Pelo Teorema da compacidade SFT, existe uma subsequência que converge para um building v , que tem um fim positivo em α , nenhum fim negativo e seu índice de Fredholm é 1. Pelo Teorema 3.11, v é um plano assintótico a α , de onde concluímos que $v \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)$. Portanto, $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)/\mathbb{R}$ é uma variedade compacta. \square

Teorema 3.17 ([Wen10]). *Seja (M, λ) uma 3-variedade de contato, em que λ é uma 1-forma de contato não-degenerada e $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Sejam Σ uma superfície fechada, $\Gamma \subset \Sigma$ um conjunto finito, e $u : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma curva J -holomorfa imersa com fins positivos assintóticos às órbitas de Reeb $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e fins negativos assintóticos às órbitas de Reeb β_1, \dots, β_m . Defina*

$$c(u, \Gamma) := c_\tau(u) - \chi(u) + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \mu_{CZ}^\tau(\alpha_i) - \sum_{j=1}^m \mu_{CZ}^\tau(\beta_j) - \#\Gamma_1(u) \right].$$

em que $c_\tau(u)$ e $\chi(u)$ são como definidos em (2.11) e (2.13), respectivamente. Então,

$$0 \leq \dim \ker D_u \leq \min \{k_1 + 2k_2; k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, k_1 \leq \#\Gamma_0(u) \text{ e } k_1 + k_2 > c(u, \Gamma)\}.$$

Teorema 3.18 ([HT09, Teorema 4.1]). *Seja (M, λ) uma 3-variedade de contato. Existe um subconjunto $\mathcal{J}_{\text{gen}}(\lambda) \subset \mathcal{J}(\lambda)$ tal que se $J \in \mathcal{J}_{\text{gen}}(\lambda)$ e u é uma curva J -holomorfa simples com $\text{ind}(u) \leq 2$, então u é uma imersão.*

Definição 3.19. Sejam $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma 3-variedade de contato e $\pi : TM \rightarrow \xi$ a projeção ao longo do campo de Reeb R_λ . Sejam $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e $u : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma curva J -holomorfa. Defina por $\text{wind}_\pi(u)$ a soma dos índices locais dos zeros de $\pi \circ du$ e por

$$\text{wind}_\infty(u) = \sum_{z \in \Gamma^+} \text{wind}_\infty^\tau(u; z) - \sum_{z \in \Gamma^-} \text{wind}_\infty^\tau(u; z).$$

em que $\text{wind}_\infty^\tau(u; z)$ é como definido na equação (2.17). Como a notação sugere, $\text{wind}_\infty(u)$ não depende da trivialização τ .

Proposição 3.20 ([HWZ95, Proposição 5.6]). *Sejam (M, λ) uma 3-variedade de contato em que λ é uma 1-forma de contato não-degenerada e $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Seja $u : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma curva J -holomorfa. Então,*

$$\text{wind}_\pi(u) = \text{wind}_\infty(u) - \chi(\Sigma) + \#\Gamma.$$

Lema 3.21. *Seja $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma 3-variedade de contato, em que λ é uma 1-forma de contato não-degenerada, e seja $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Sejam Σ uma superfície de Riemann fechada de gênero zero e $v_1 : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ o primeiro nível de um building como no Teorema 3.12-(c.6), isto é, v_1 é uma curva J -holomorfa com índice de Fredholm $2 - d$, um furo positivo onde u é assintótica a α_1^d e $d + 1$ furos negativos, um deles onde u é assintótica a α_2^d e os outros d furos onde u é assintótica a α_3 , sendo $\mu_{CZ}^\tau(\alpha_3) = 2$. Se $d > 1$, então o campo translação na direção real ∂_a é transversal à curva v_1 , isto é, $\partial_a \notin dv_1(z)(T_z(\Sigma \setminus \Gamma))$, $\forall z \in \Sigma \setminus \Gamma$. Em particular, sempre é possível escolher um representante do fibrado normal v_1^*N ao longo de v_1 que contenha a direção ∂_a .*

Demonstração. Seja $\Gamma = \{z_1, z_2, z_3^1, \dots, z_3^d\}$, em que:

- v_1 é assintótica a α_1^d em z_1 .
- v_1 é assintótica a α_2^d em z_2 .
- v_1 é assintótica a α_3 em z_3^i para todo $1 \leq i \leq d$.

Como $\mu_{CZ}^\tau(\alpha_3) = 2$, temos $\text{wind}_\infty^\tau(v_1; z_3^i) = 1$ para todo $1 \leq i \leq d$. Aplicando a Proposição 3.20 à curva v_1 , temos

$$\begin{aligned} \text{wind}_\pi(v_1) &= \text{wind}_\infty^\tau(v_1; z_1) - \text{wind}_\infty^\tau(v_1; z_2) - d - 2 + d + 2 \\ &= \text{wind}_\infty^\tau(v_1; z_1) - \text{wind}_\infty^\tau(v_1; z_2). \end{aligned}$$

Se $d > 1$, então, pelo Lema 3.14, as órbitas α_1^d e α_2^d são necessariamente elípticas. Logo

$$\text{wind}_\infty^\tau(v_1; z_1) \leq \frac{\mu_{CZ}^\tau(\alpha_1^d) - 1}{2} \quad \text{e} \quad \text{wind}_\infty^\tau(v_1; z_2) \geq \frac{\mu_{CZ}^\tau(\alpha_2^d) + 1}{2}.$$

Como $\text{ind}(v_1) = 2 - d$ implica que $\mu_{CZ}^\tau(\alpha_1^d) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2^d) = 2$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{wind}_\pi(v_1) = \text{wind}_\infty^\tau(v_1; z_1) - \text{wind}_\infty^\tau(v_1; z_2) \\ &\leq \frac{\mu_{CZ}^\tau(\alpha_1^d) - 1}{2} - \frac{\mu_{CZ}^\tau(\alpha_2^d) + 1}{2} \\ &= \frac{\mu_{CZ}^\tau(\alpha_1^d) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2^d)}{2} - 1 \\ &= \frac{2}{2} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Concluimos que $\text{wind}_\pi(v_1) = 0$, ou seja, $\pi \circ dv_1$ não possui zeros.

Podemos decompor $T(\mathbb{R} \times M)$ da seguinte forma $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}\langle R_\lambda \rangle \oplus \xi)$. Então, se $v_1 = (a_1, u_1)$ podemos escrever

$$dv_1(\eta) = (da_1(\eta), \lambda(\eta)R_\lambda + \pi \circ du_1(\eta)).$$

Se ∂_a não é transversal a v_1 , então existe um vetor $0 \neq X(z) \in T_z(\Sigma \setminus \Gamma)$ tal que

$$dv_1(X(z)) = \partial_a \Rightarrow \pi \circ du_1(X(z)) = 0,$$

e chegamos a uma contradição. Portanto, ∂_a é transversal a v_1 . \square

No restante do trabalho, sempre que estivermos trabalhando com v_1 como sendo o primeiro nível de um building como no Teorema 3.12-(c.6), usaremos o fibrado normal v_1^*N obtido do Lema 3.21.

Lema 3.22. *Seja (M, λ) uma 3-variedade de contato, em que λ é uma 1-forma de contato não-degenerada, e seja $J \in \mathcal{J}_{\text{gen}}(\lambda)$. Seja v_1 o primeiro nível de um building como no Teorema 3.12-(c.6), isto é, v_1 é uma curva J -holomorfa com índice de Fredholm $2 - d$, um furo positivo onde u é assintótica a α_1^d e $d + 1$ furos negativos, um deles onde u é assintótica a α_2^d e os outros d furos onde u é assintótica a α_3 , sendo $\mu_{CZ}^\tau(\alpha_3) = 2$. Além disso, v_1 é o d -recobrimento sem pontos de ramificação de uma curva *somewhere injective* \mathbf{v}_1 de índice 1. Se $d > 1$, então o operador D_{v_1} como definido em (2.18) é tal que $\dim \ker D_{v_1} = 1$.*

Demonstração. Seja v_1^*N o fibrado normal de v_1 obtido no Lema 3.21. Conforme (2.18), o operador D_{v_1} é dado por

$$\begin{aligned} D_{v_1} : \Gamma(v_1^*N) &\rightarrow \Gamma(\overline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\Sigma, v_1^*TN)) \\ \zeta &\mapsto \bar{\partial}_J \zeta + (\nabla_\zeta J)dv_1 \circ j, \end{aligned}$$

em que $J \in \mathcal{J}_{\text{gen}}(\lambda)$, ∇ é uma conexão simétrica e \mathbb{R} -invariante em $\mathbb{R} \times M$ e

$$\bar{\partial}_J \zeta = \nabla \zeta + J(v_1)\nabla \zeta \circ j.$$

Seja $\zeta = \partial_a$ o campo translação constante na direção real. Pelo Lema 3.21 temos $\zeta \in v_1^*N$. Como J é \mathbb{R} -invariante, segue que $\bar{\partial}_J \zeta = (\nabla_\zeta J)dv_1 \circ j = 0$, ou seja, $D_{v_1}(\partial_a) \equiv 0$. Assim, $\dim \ker D_{v_1} \geq 1$.

Por outro lado, como \mathbf{v}_1 é uma curva *somewhere injective* e $\text{ind}(\mathbf{v}_1) = 1$, segue do Teorema 3.18 que \mathbf{v}_1 é uma imersão. Assim, o d -recobrimento v_1 de \mathbf{v}_1 também é uma imersão. Considere τ uma trivialização de $v_1^*\xi$ que se estenda a uma trivialização de ξ sobre um disco com bordo em α_3 . Lembre que $\text{ind}(v_1) = 2 - d$ implica que $\mu_{CZ}^\tau(\alpha_1^d) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2^d) = 2$. Como $d > 1$, segue do Lema 3.14 que $\#\Gamma_0(v_1) = d$. Assim,

$$\begin{aligned} c(v_1, \Gamma) &= c_\tau(v_1) - \chi(v_1) + \frac{1}{2}[\mu_{CZ}^\tau(\alpha_1^d) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2^d) - d\mu_{CZ}^\tau(\alpha_3) - \#\Gamma_1(v_1)] \\ &= 0 - (2 - d - 2) + \frac{1}{2}[2 - 2d - 2] \\ &= d - d = 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 3.17, segue que

$$\dim \ker D_{v_1} \leq \min \{k_1 + 2k_2 ; k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, k_1 \leq d \text{ e } k_1 + k_2 > 0\} = 1.$$

Concluimos que $\dim \ker D_{v_1} = 1$. \square

3.3 Eliminando calças

Iniciamos essa seção enunciado o seguinte resultado de Hutchings e Nelson.

Lema 3.23 ([HN16] Proposição 3.1). *Seja (M, λ) uma 3-variedade de contato, em que λ é uma forma de contato não degenerada. Sejam $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e $u = (u_1, u_2)$ um building J -holomorfo tal que:*

- u_1 é um recobrimento múltiplo do cilindro trivial sobre α de índice zero, grau $d + 1$ e com dois fins negativos, um em α^d e outro em α .
- u_2 é uma curva J -holomorfa com duas componentes conexas: uma é um cilindro trivial sobre α^d e a outra é um plano J -holomorfo de índice 2 com fim positivo em α .

Então u não está no fecho do espaço de moduli $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha^{d+1}, \alpha^d)/\mathbb{R}$.

O resultado acima será usado diretamente no nosso trabalho, veja Teorema 3.12 (c.3). Usaremos os mesmos argumentos na demonstração do Lema 3.23 para mostrarmos que uma sequência de cilindros de índice de Fredholm 2 não pode convergir para qualquer um dos seguintes buildings:

- Caso 1. $u = (u_1, u_2)$ é um building J -holomorfo em que:
 - u_1 é uma curva J -holomorfa de índice 1 que é um $d + 1$ recobrimento de um cilindro trivial sobre α com fim positivo em α^{d+1} e fins negativos em α^d e α .
 - u_2 é formada por duas componentes conexas: uma é o cilindro trivial sobre α^d e a outra é um plano de índice 1 com fim positivo em α .
- Caso 2. $u = (u_1, u_2, u_3)$ é um building J -holomorfo em que:
 - u_1 é um recobrimento múltiplo de um cilindro trivial sobre α de índice zero e grau $d + 1$ com dois fins negativos, um em α^d e outro em α .
 - u_2 é formada por duas componentes conexas: uma é um cilindro trivial sobre α^d e a outra é um cilindro de índice 1 com fim positivo em α e fim negativo em $\tilde{\alpha}$.
 - u_3 é formada por um plano J -holomorfo de índice 1 com fim positivo em $\tilde{\alpha}$.

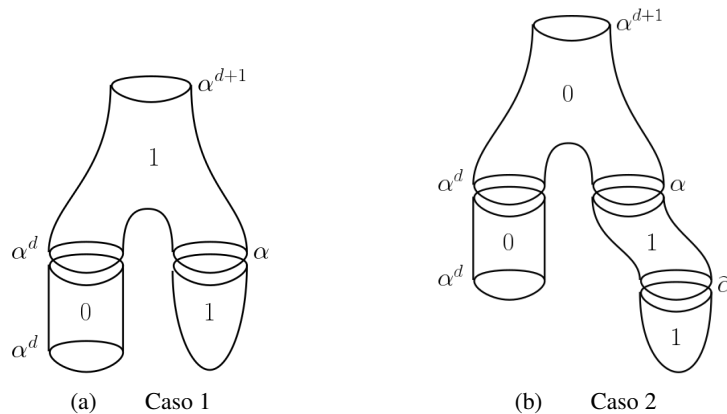


Figura 3.4: Buildings holomorfos a serem eliminados

Em toda a seção vamos assumir que α é um mergulho. Antes de investigarmos o que acontece com sequências de cilindros J -holomorfos que convergem para os buildings como nos Casos 1 e 2 acima, introduziremos alguns objetos e notações. Em [Hut09], Hutchings define tranças e *writhe* como segue:

Definição 3.24 ([Hut09, Definição 2.7]). Uma trança ao redor de uma órbita de Reeb mergulhada α é um link orientado ζ contido em uma vizinhança tubular N de α tal que a projeção $\zeta \rightarrow \alpha$ é uma submersão que preserva a orientação.

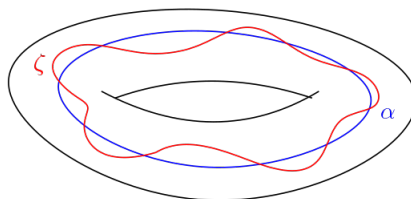


Figura 3.5: Trança ζ ao redor de α

Definição 3.25. Seja $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção de um link orientado $\tilde{\gamma} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, em que $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma projeção. Assumimos que γ contém apenas auto-intersecções duplas. A cada auto-intersecção de γ , é atribuído um valor $+1$ ou -1 conforme o tipo de auto-intersecção, veja figura abaixo. Convencionamos que twists anti-horários contribuem positivamente. Chamamos a soma de todos esses valores de *writhe* do link orientado γ e o denotamos por $w(\gamma)$.

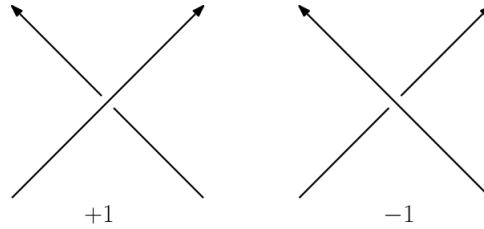


Figura 3.6: Sinais das auto-intersecções

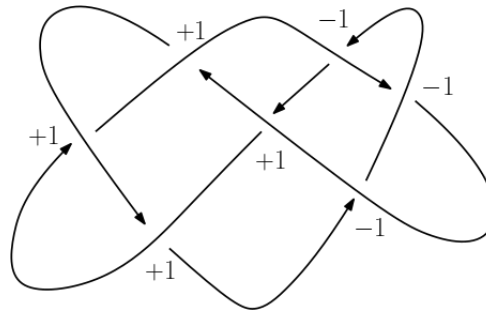


Figura 3.7: O writhe do link orientado γ é $4 - 3 = 1$.

Definição 3.26 ([Hut09, Definição 2.8]). Sejam α uma órbita de Reeb mergulhada, τ uma trivialização de $\alpha^*\xi$ e ζ é uma trança ao redor de α . Estenda a trivialização τ de modo a obter um difeomorfismo $\phi_\tau : V \rightarrow S^1 \times D$ entre uma vizinhança tubular V de α e $S^1 \times D$ de modo que a projeção $\zeta \rightarrow S^1$ seja uma submersão. Identificamos ainda $S^1 \times D$ com um toro sólido de \mathbb{R}^3 através do difeomorfismo que preserva orientação $f : S^1 \times D \rightarrow \mathbb{R}^3$, dado por

$$(\theta, x, y) \mapsto \left(1 + \frac{x}{2}\right) (\cos \theta, \sin \theta, 0) - \left(0, 0, \frac{y}{2}\right).$$

Seja $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ a projeção canônica no plano θx . Definimos o *writhe* de ζ e denotamos por $w_\tau(\zeta) \in \mathbb{Z}$ como sendo o *writhe* do link orientado $p \circ f \circ \phi_\tau(\zeta)$ em \mathbb{R}^2 , isto é,

$$w_\tau(\zeta) := w(p \circ f \circ \phi_\tau(\zeta)).$$

Definição 3.27. Seja $u = (a, v) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma curva J -holomorfa, em que $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Suponha que u possua um fim positivo assintótico à órbita de Reeb α . Em uma vizinhança tubular de α em M , adaptada a uma trivialização τ de $\alpha^*\xi$, podemos fazer a seguinte identificação: $v(s, t) = (\theta(s, t), z(s, t))$, em que $\theta(s, t) \in S^1$ e $z(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Seja

$$t \mapsto \zeta_{R_+}(t) := (a(R_+, t), \theta(R_+, t), z(R_+, t)), \quad t \in S^1,$$

a trança obtida intersectando-se u ($[R_+, \infty) \times S^1$) com $\{R_+\} \times M$, para $R_+ > 0$ suficientemente grande. Definimos

$$\text{wind}^\tau(\zeta) := \text{wind}(t \mapsto z(R_+, t)). \quad (3.9)$$

Vale ressaltar que $\text{wind}^\tau(\zeta)$ independe de R_+ , se R_+ for suficientemente grande.

Analogamente, se u possui um fim negativo em β e ζ é a trança obtida intersectando u ($(-\infty, 0] \times S^1$)

com $\{R_-\} \times M$, para $-R_-$ suficientemente grande, definimos

$$\text{wind}^\tau(\zeta) := \text{wind}(t \mapsto z(R_-, t)).$$

Lema 3.28 ([HWZ95]). *Seja $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ um plano pseudo-holomorfo de energia finita com um fim positivo assintótico a uma órbita de Reeb não-degenerada α . Considere uma trivialização de $\alpha^*\xi$ que se estenda a uma trivialização de $u^*\xi$. Seja ζ a interseção do fim positivo de u com $\{R_+\} \times M$. Então, se $R_+ \gg 0$, temos*

$$\text{wind}^\tau(\zeta) \geq 1.$$

Lema 3.29 ([HN16] Lema 3.2). *Seja $u : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma curva J -holomorfa, em que $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Assuma que u não é parte de um cilindro trivial ou uma componente multiplamente recoberta. Seja α uma órbita de Reeb mergulhada e assumamos que u possui um fim positivo em α^d , $d > 0$. Seja ζ a interseção desse fim positivo de u com $\{R_+\} \times M$. Se $R_+ \gg 0$, temos*

$$w_\tau(\zeta) \leq (d-1)\text{wind}^\tau(\zeta) \leq (d-1)\lfloor \mu_{CZ}^\tau(\alpha^d)/2 \rfloor.$$

Lema 3.30 ([HN16] Lema 3.3). *Seja $u : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma curva J -holomorfa, em que $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Assuma que u não é parte de um cilindro trivial ou uma componente multiplamente recoberta. Seja α uma órbita de Reeb mergulhada e assumamos que u possui um fim negativo em α^d , $d > 0$. Seja ζ a interseção desse fim negativo de u com $\{R_-\} \times M$. Se $R_- \ll 0$, temos*

$$w_\tau(\zeta) \geq (d-1)\text{wind}^\tau(\zeta) \leq (d-1)\lceil \mu_{CZ}^\tau(\alpha^d)/2 \rceil.$$

Lema 3.31 ([HN16] Lema 3.5). *Sejam α uma órbita de Reeb mergulhada com vizinhança tubular N e τ uma trivialização de $\alpha^*\xi$. Seja u uma curva J -holomorfa, $J \in \mathcal{J}(\lambda)$, cuja imagem está contida em $[R_-, R_+] \times N$. Assuma que u não possui componentes multiplamente recobertas. Seja $\zeta_+ - \zeta_-$ o bordo de u , em que ζ_\pm é uma trança em $\{R_\pm\} \times N$. Então,*

$$\chi(u) + w_\tau(\zeta_+) - w_\tau(\zeta_-) \geq 0,$$

em que $\chi(u)$ é a característica de Euler do domínio de u .

A demonstração do Lema a seguir é baseada na demonstração do Lema 3.23.

Lema 3.32. *Sejam (M, λ) uma 3-variedade de contato fechada e $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Seja $u = (u_1, u_2)$ um building J -holomorfo como no Caso 1. Então, u não está no fecho de $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha^{d+1}, \alpha^d)/\mathbb{R}$.*

Demonstração. Primeiro observe que, uma vez que existe um plano J -holomorfo de índice 1 assintótico à órbita de Reeb α , temos $\mu_{CZ}^\tau(\alpha) = 2$, em que τ é uma trivialização de $\alpha^*\xi$ que se estende a uma trivialização de ξ sobre um disco com bordo em α . Concluimos que α é hiperbólica.

Suponha que existe uma sequência de curvas $\bar{w}_k \in \mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha^{d+1}, \alpha^d)/\mathbb{R}$ que converge para $u = (u_1, u_2)$. Denote por w_k uma parametrização de \bar{w}_k . Fixe N uma vizinhança tubular de α e um número real $\varepsilon > 0$ tal que

$$\text{dist}\left(u_2(u_2^{-1}(\{0\} \times N)), \alpha\right) \geq \varepsilon.$$

Para k suficiente grande, segue que $w_k^{-1}((-\infty, 0] \times M)$ possui duas componentes conexas: uma é um meio cilindro C_k e a outra é um disco fechado D_k , de modo que:

- $\zeta_1^k = w_k(C_k) \cap (\{0\} \times N)$ é uma trança cuja projeção sobre α tem grau d e

$$\text{dist}(\zeta_1^k, \alpha) \leq \varepsilon/3,$$

- $\zeta_2^k = w_k(D_k) \cap (\{0\} \times N)$ é uma trança cuja projeção sobre α tem grau 1 e

$$\text{dist}\left(\zeta_2^k, u_2(u_2^{-1}(\{0\} \times N))\right) \leq \varepsilon/3$$

- $\zeta_+^k = w_k(w_k^{-1}([0, +\infty) \times M)) \cap (\{R_+\} \times N)$, $R_+ \gg 0$, é uma trança cuja projeção sobre α tem grau $d + 1$.
- $\zeta_-^k = w_k(w_k^{-1}((-\infty, 0] \times M)) \cap (\{R_-\} \times N)$, $R_- \ll 0$, é uma trança cuja projeção sobre α tem grau d .

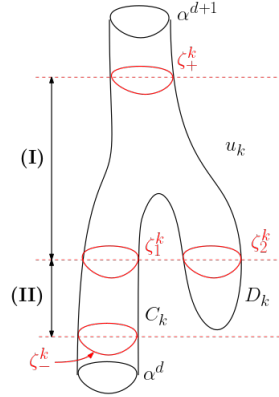


Figura 3.8: Tranças $\zeta_{1,2}^k$ e ζ_{\pm}^k na imagem das curvas w_k que convergem para o building u .

Veja que, pelas definições acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 \text{dist}(\zeta_1^k, \zeta_2^k) &\geq \text{dist}(\zeta_1^k, u_2(u_2^{-1}(\{0\} \times N))) - \text{dist}(\zeta_2^k, u_2(u_2^{-1}(\{0\} \times N))) \\
 &\geq \text{dist}(\alpha, u_2(u_2^{-1}(\{0\} \times N))) - \text{dist}(\alpha, \zeta_1^k) - \text{dist}(\zeta_2^k, u_2(u_2^{-1}(\{0\} \times N))) \\
 &\geq \varepsilon - \varepsilon/3 - \varepsilon/3 \\
 &= \varepsilon/3,
 \end{aligned}$$

ou seja, ζ_1^k e ζ_2^k não se intersectam. Assim, $\zeta_1^k \cup \zeta_2^k$ é uma trança cujo writhe é dado pela fórmula

$$w_\tau(\zeta_1^k \cup \zeta_2^k) = w_\tau(\zeta_1^k) + 2d \text{wind}^\tau(\zeta_2^k) + w_\tau(\zeta_2^k)$$

(ver equação (2.9) de [Hut09]). Como ζ_2^k se projeta em α com grau 1, segue que ζ_2^k é um nó trivial. Portanto,

$$w_\tau(\zeta_2^k) = 0.$$

Usando o Lema 3.31 na parte de w_k que tem como bordo $\zeta_+^k - (\zeta_1^k \cup \zeta_2^k)$ (ver região I da figura 3.8), obtemos

$$-1 + w_\tau(\zeta_+^k) - w_\tau(\zeta_1^k \cup \zeta_2^k) \geq 0.$$

Usando o mesmo Lema 3.31 na parte de w_k que tem como bordo $\zeta_1^k - \zeta_-^k$ (ver região II da figura 3.8), obtemos

$$w_\tau(\zeta_1^k) - w_\tau(\zeta_-^k) \geq 0.$$

Assim, obtemos

$$2d \text{wind}^\tau(\zeta_2^k) = w_\tau(\zeta_1^k \cup \zeta_2^k) - w_\tau(\zeta_1^k) \leq -1 + w_\tau(\zeta_+^k) - w_\tau(\zeta_-^k)$$

Lembrando que $\mu_{CZ}^\tau(\alpha) = 2$ e usando o Lema 3.29 em w_k , obtemos

$$w_\tau(\zeta_+^k) \leq d \left\lfloor \frac{\mu_{CZ}^\tau(\alpha^{d+1})}{2} \right\rfloor = d \left\lfloor (d+1) \frac{\mu_{CZ}^\tau(\alpha)}{2} \right\rfloor = d(d+1)$$

Usando o Lema 3.29 em D_k , obtemos

$$\text{wind}^\tau(\zeta_2^k) \leq \left\lfloor \frac{\mu_{CZ}^\tau(\alpha)}{2} \right\rfloor = 1.$$

Por outro lado, pelo Lema 3.28, temos $\text{wind}^\tau(\zeta_2^k) \geq 1$. Concluimos que

$$\text{wind}^\tau(\zeta_2^k) = 1.$$

Usando o Lema 3.30 em C_k , obtemos

$$w_\tau(\zeta_-^k) \geq (d-1) \left\lceil \frac{\mu_{CZ}^\tau(\alpha^d)}{2} \right\rceil \geq (d-1) \left\lceil d \cdot \frac{\mu_{CZ}^\tau(\alpha)}{2} \right\rceil = d(d-1).$$

Juntando essas informações, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq -1 + w_\tau(\zeta_+^k) - w_\tau(\zeta_-^k) - 2d \text{wind}^\tau(\zeta_2^k) \\ &\leq -1 + d(d+1) - d(d-1) - 2d \\ &= -1, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto, não existe uma sequência em $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha^{d+1}, \alpha^d)/\mathbb{R}$ que converge para o building u , isto é, u não está no fecho de $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha^{d+1}, \alpha^d)/\mathbb{R}$. \square

Lema 3.33. *Sejam (M, λ) uma 3-variedade de contato fechada e $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Seja $u = (u_1, u_2, u_3)$ um building J -holomorfo como descrito no Caso 2. Então u não está no fecho de $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha^{d+1}, \alpha^d)/\mathbb{R}$.*

Demonstração. Observe que, como existe um plano J -holomorfo de índice 1 assintótico a $\tilde{\alpha}$, segue que $\mu_{CZ}^\tau(\tilde{\alpha}) = 2$. E como existe um cilindro J -holomorfo de índice 1 com fim positivo em α e fim negativo em $\tilde{\alpha}$, segue que $\mu_{CZ}^\tau(\alpha) = 3$, ou seja, α é uma órbita elíptica ou hiperbólica negativa. Assim, o setup do problema é o mesmo que o tratado na demonstração do Lema 3.23. Concluimos, então, que não existe uma sequência em $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha^{d+1}, \alpha^d)/\mathbb{R}$ que converge para o building u . \square

Capítulo 4

Costurando calças

Sejam (M, λ) uma 3-variedade de contato fechada e $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Seja (v_1, v_2) um building J -holomorfo de gênero zero, um fim positivo, um fim negativo e dois níveis, em que:

- O primeiro nível v_1 é um d -recobrimento de uma curva J -holomorfa somewhere injective. Além disso, v_1 tem índice $2 - d$, possui um fim positivo assintótico à órbita de Reeb α_1^d e $d + 1$ furos negativos $z_k, k = 0, \dots, d$, tais que em z_0 a curva v_1 é assintótica à órbita de Reeb α_2^d e nos outros d furos v_1 é assintótica à órbita de Reeb α_3 .
- O segundo nível é a união de um cilindro trivial sobre α_2^d e d planos J -holomorfos $v_{2k}, k = 1, \dots, d$, de índice 1 com furo positivo em w^k assintótico a α_3 .

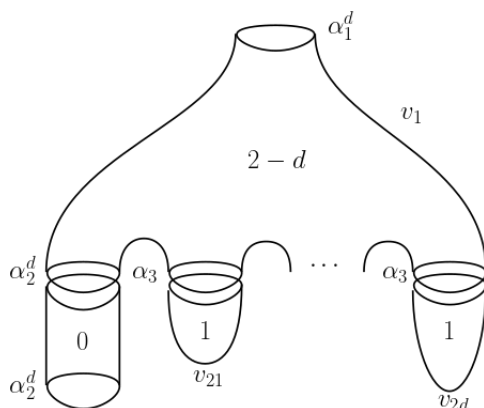


Figura 4.1: Building J -holomorfo em $\mathcal{M}_{J,d}$.

Neste capítulo, estudamos famílias de cilindros J -holomorfos de índice 2 que se quebram em um building (v_1, v_2) como acima. Fixando-se α_1^d e α_2^d satisfazendo $\mu_{CZ}^\tau(\alpha_1^d) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2^d) = 2$, estudamos a colagem entre os planos de v_2 e a curva em v_1 , a fim de obtermos uma família a um parâmetro de cilindros assintóticos a α_1^d no furo positivo e a α_2^d no furo negativo, que se quebra no building (v_1, v_2) em um de seus fins. Para fazermos tal colagem, seguimos as técnicas desenvolvidas por Hutchings e Taubes em [HT09], combinadas com ideias de Bao e Honda em [BH18]. Provamos também, sob certas hipóteses de asfericidade do preenchimento simplético da variedade de contato, a existência de um número par de fins dessas famílias de cilindros que se quebram em buildings do tipo (v_1, v_2) como acima, para α_1^d e α_2^d fixados. Estes resultados estão sintetizados no seguinte teorema.

Teorema 4.1. *Seja (M, ξ) uma 3-variedade de contato coorientável, tight, fechada, conexa e tal que $\pi_2(M) = 0$. Assuma que (M, ξ) possui um strong filling (W, ω) que satisfaça a condição de asfericidade simplética. Sejam λ uma forma de contato fracamente convexa, não-degenerada tal que $\ker \lambda = \xi$ e $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$. Assuma, ainda, que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

- Se α é uma órbita de Reeb contrátil com $\mu_{CZ}^\tau(\alpha) = 2$, então α é um não-nó.

- Se α é uma órbita de Reeb contrátil com $\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) = 3$, então α é um mergulho.

Então, fixadas órbitas de Reeb α_1^d e α_2^d tais que $\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha_1^d) - \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha_2^d) = 2$, valem as seguintes afirmações:

- Existe um número par de buildings (v_1, v_2) satisfazendo as condições do início deste capítulo;
- O número de fins das famílias a um parâmetro de cilindros em $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1^d; \alpha_2^d)/\mathbb{R}$ que convergem para algum desses buildings em (i) é par.

Para provarmos o Teorema acima, contamos os zeros de uma certa seção do fibrado de obstrução associado ao building (v_1, v_2) . A paridade de fins das famílias em $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1^d; \alpha_2^d)/\mathbb{R}$ que convergem para algum desses buildings segue da contagem destes zeros e da paridade de planos J -holomorfos assintóticos a uma dada órbita periódica contrátil de índice 2, conforme o teorema a seguir.

Teorema 4.2. *Sejam (M, ξ) uma variedade de contato, λ uma forma de contato e $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$ como no Teorema 4.1. Seja α uma órbita de Reeb não-degenerada simples tal que $\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) = 2$. Então, temos $\#\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)/\mathbb{R} = 0$ ou $\#\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)/\mathbb{R} = 2$. Mais ainda, se $\#\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)/\mathbb{R} = 2$, então os planos se aproximam de α por direções opostas.*

A paridade dos resultados acima será crucial para posteriormente mostrarmos que uma homologia de contato cilíndrica está bem definida para formas de contato não-degeneradas fracamente convexas.

4.1 Pregluing

Definição 4.3. Denotaremos o conjunto de todos os buildings J -holomorfos (v_1, v_2) como descritos no início deste capítulo por $\mathcal{M}_{J,d} = \mathcal{M}_{J,d}(\alpha_1^d, \alpha_2^d)$, em que os limites assintóticos α_1^d e α_2^d estão fixados.

Sejam $(v_1, v_2) \in \mathcal{M}_{J,d}$ e α_3 a órbita de Reeb que é limite assintótico dos planos de v_2 . Denote por $D \subset \mathbb{R}^2$ o disco aberto centrado na origem e de raio $\delta > 0$ pequeno. Pelo trabalho de Hofer, Wysocki e Zehnder em [HWZ96], veja também Lema 2.1 de [HT09], segue que, após identificarmos de maneira apropriada $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times D$ com uma vizinhança de $\mathbb{R} \times \alpha_3$ em $\mathbb{R} \times M$, tal que $\alpha \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$, obtemos o seguinte:

- a curva J -holomorfa $v_1 : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ mapeia uma vizinhança U_k de um furo negativo z_k de v_1 , $1 \leq k \leq d$, em uma vizinhança de $\mathbb{R} \times \alpha_3$, tal que nessas coordenadas,

$$U_k \simeq (-\infty, 0] \times S^1 \quad \text{e} \quad v_1|_{U_k}(s, t) = (s, t, \eta_{1k}(s, t)),$$

em que $\eta_{1k} : (-\infty, 0] \times S^1 \rightarrow D$ é tal que $\partial^{(i,j)}\eta_{1k}(s, t) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow -\infty$ uniformemente em t para todo multi-índice (i, j) .

- para cada $1 \leq k \leq d$, a curva J -holomorfa $v_{2k} : \Sigma_k \simeq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ mapeia uma vizinhança V_k do furo positivo $w^k = \infty$ em uma vizinhança de $\mathbb{R} \times \alpha_3$, tal que nessas coordenadas,

$$V_k \simeq [0, +\infty) \times S^1 \quad \text{e} \quad v_{2k}|_{V_k}(s, t) = (s, t, \eta_{2k}(s, t)),$$

em que $\eta_{2k} : [0, +\infty) \times S^1 \rightarrow D$ é tal que $\partial^{(i,j)}\eta_{2k}(s, t) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow +\infty$ uniformemente em t para todo multi-índice (i, j) .

Para cada $T_0, T_k \gg 0$, denote por v_{1,T_0} a aplicação v_1 transladada por $s \mapsto s + T_0$, e denote por v_{2k,T_k} a aplicação v_{2k} transladada por $s \mapsto s - T_k$. Seja Σ_{1,T_0} a região de v_{1,T_0} que satisfaz $s \geq T_0$, e seja Σ_{2k,T_k} a região de v_{2k,T_k} que satisfaz $s \leq -T_k$ para todo k . Desta forma, U_k corresponde à região $U'_k \equiv (-\infty, T_0]$ de v_{1,T_0} para todo k , e V_k corresponde à região $V'_k \equiv [-T_k, +\infty)$ de v_{2k,T_k} para todo k . Considere os cilindros finitos $C_k = [-T_k, T_0] \times S^1$ para $1 \leq k \leq d$. Note que C_k pode ser identificado com os correspondentes cilindros $[-T_k, T_0] \times S^1$ em U'_k e V'_k . Seja

$$\Sigma_* := \left(\Sigma_{1,T_0} \bigcup_{k=1}^d C_k \cup \Sigma_{2k,T_k} \right) / \sim,$$

em que $\{T_0\} \times S^1 \subset \partial C_k$ está naturalmente identificado com a k -ésima componente negativa de bordo $\{T_0\} \times S^1 \subset \Sigma_{1,T_0}$ e $\{-T_k\} \times S^1 \subset \partial C_k$ está identificado com o bordo $\{-T_k\} \times S^1 \subset \Sigma_{2k,T_k}$.

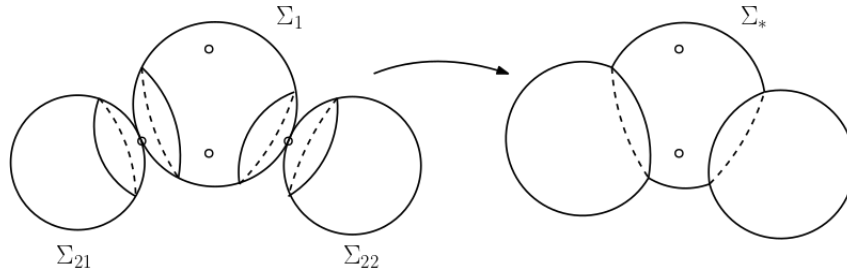


Figura 4.2: Σ_* no caso $d = 2$.

Tome $T_0, T_k \gg 0$ para $k = 1, \dots, d$, e fixe constantes $0 < h < 1$, $hr \gg 1$ tais que $5r < T_0, T_k$ para todo k . Escolha uma função suave crescente $\beta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$\beta(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \leq 0, \\ 1, & \text{se } s \geq 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Defina funções $\beta_1, \beta_{2k} : \Sigma_* \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$\beta_1 = \begin{cases} 1, & \text{em } \Sigma_{1,T_0}, \\ 0, & \text{em } \Sigma_{2j,T_j} \quad \forall j, \\ \beta\left(\frac{s-hr}{hr}\right), & \text{em } C_j = [-T_j, T_0] \times S^1, \forall j. \end{cases} \quad (4.2)$$

e

$$\beta_{2k} = \begin{cases} 0, & \text{em } \Sigma_{1,T_0}, \\ 0, & \text{em } \Sigma_{2j,T_j} \cup C_j, \quad \forall j \neq k, \\ 1, & \text{em } \Sigma_{2k,T_k}, \\ \beta\left(\frac{-s-hr}{hr}\right), & \text{em } C_k = [-T_k, T_0] \times S^1, \end{cases} \quad (4.3)$$

para todo k .

Finalmente, o **pre-geuing** de v_1 e v_2 é a aplicação $v_* : \Sigma_* \rightarrow \mathbb{R} \times M$ definida por

$$v_* = \begin{cases} v_{1,T_0}, & \text{em } \Sigma_{1,T_0}, \\ v_{2k,T_k}, & \text{em } \Sigma_{2k,T_k}, \quad \forall k, \\ (s, t, \beta_1(s)\eta_{1k,T_0}(s, t) + \beta_{2k}(s)\eta_{2k,T_k}(s, t)), & \text{em } C_k = [-T_k, T_0] \times S^1, \forall k, \end{cases}$$

em que $\eta_{1k,T_0}(s, t) := \eta_{1k}(s - T_0, t)$ e $\eta_{2k,T_k}(s, t) := \eta_1(s + T_k, t)$.

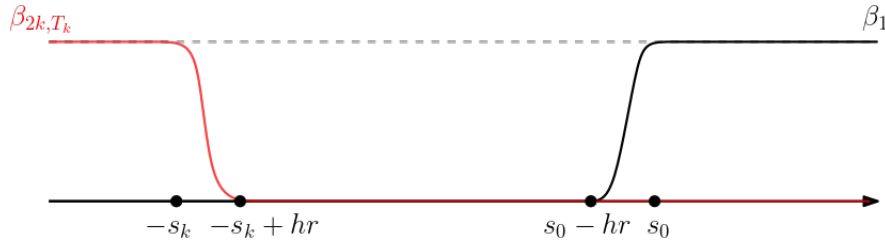


Figura 4.3: Funções β_1 e β_{2k} .

No que segue, para que a notação não fique muito carregada, escreveremos v_1 em vez de v_{1,T_0} e v_{2k} ao invés de v_{2k,T_k} .

4.2 Gluing

Denote por N o fibrado normal de v_* . Sejam $\mathcal{H}_0(\Sigma_*, \Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes N)$ o espaço de Banach que é o completamento das seções com suporte compacto de $\Lambda^{0,1}T\Sigma_* \otimes N$ com respeito a norma

$$\|\xi\| = \left(\int_{\Sigma_*} |\xi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sup_{z \in \Sigma_*} \sup_{\rho \in [0,1]} \rho^{-1} \int_{|z| < \rho} |\xi|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e $\mathcal{H}_1(\Sigma_*, N)$ o completamento das seções de suporte compacto de N com respeito a norma

$$\|\xi\|_* = \|\xi\| + \|\nabla \xi\|.$$

Seja ψ_1 uma seção do fibrado normal de v_1 e ψ_{2k} uma seção do fibrado normal de v_{2k} , $1 \leq k \leq d$, em que $\|\psi_1\|_* < \varepsilon$ e $\|\psi_{2k}\|_* < \varepsilon$ para cada $1 \leq k \leq d$. Deformamos v_* do seguinte modo:

$$v = \exp_{v_*} (\beta_1 \psi_1 + \beta_{21} \psi_{21} + \dots + \beta_{2d} \psi_{2d}) \quad (4.4)$$

em que \exp_{v_*} é uma aplicação exponencial que identifica o fibrado normal de v_* com uma vizinhança tubular de v_* em $\mathbb{R} \times M$. As aplicações \exp_{v_1} e $\exp_{v_{2k}}$ podem ser escolhidas de forma que

$$\exp_{v_1} \psi_1 = (s, t, \eta_{1k} + \psi_1) \text{ e } \exp_{v_{2k}} \psi_{2k} = (s, t, \eta_{2k} + \psi_{2k})$$

em $[-T_k, T_0] \times S^1$, $1 \leq k \leq d$. Também escolhemos \exp_{v_*} de forma apropriada para que

$$\exp_{v_*} (\beta_1 \psi_1 + \beta_{21} \psi_{21} + \dots + \beta_{2d} \psi_{2d}) = (s, t, \beta_1 \eta_{1k} + \beta_{2k} \eta_{2k} + \beta_1 \psi_1 + \beta_{2k} \psi_{2k})$$

em $[-T_k, T_0] \times S^1$ para todo $1 \leq k \leq d$.

Definição 4.4 ([HT09]). Uma função $F(\psi)$ é chamada de *quadrática de tipo 1* se puder ser escrita como

$$F(\psi) = P(\psi) + Q(\psi) \cdot \nabla \psi,$$

em que P e Q são aplicações de fibrados com derivada uniformemente limitada para qualquer ordem na direção da fibra e satisfazem

$$|P(\psi)| < c|\psi|^2 \text{ e } |Q(\psi)| < c|\psi|$$

para algum $c > 0$.

Observação 4.5. Sejam $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^4$ e $\xi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^4$. Então

$$\begin{aligned} 2\bar{\partial}_J(u + \xi) &= d(u + \xi) + J(u + \xi) \circ d(u + \xi) \circ j \\ &= du + d\xi + J(u + \xi) \circ (du + d\xi) \circ j \\ &= du + d\xi + J(u) \circ (du + d\xi) \circ j + (J(u + \xi) - J(u)) \circ (du + d\xi) \circ j \\ &= du + J(u) \circ du \circ j + d\xi + J(u) \circ d\xi \circ j + ((\nabla_\xi J)_u + \varepsilon(\xi)) \circ (du + d\xi) \circ j \\ &= 2\bar{\partial}_J(u) + d\xi + J(u) \circ d\xi \circ j + (\nabla_\xi J)_u \circ du \circ j + (\nabla_\xi J)_u \circ d\xi \circ j + \varepsilon(\xi) \circ (du + d\xi) \circ j \\ &= 2\bar{\partial}_J(u) + 2D_u(\xi) + (\nabla_\xi J)_u \circ d\xi \circ j + \varepsilon(\xi) \circ (du + d\xi) \circ j \\ &= 2\bar{\partial}_J(u) + 2D_u(\xi) + 2R(\xi) \end{aligned}$$

em que

$$R(\xi) := \frac{1}{2} [(\nabla_\xi J)_u \circ d\xi \circ j + \varepsilon(\xi) \circ (du + d\xi) \circ j]$$

e $\varepsilon(\xi) = o(|\xi|)$, isto é, para todo $\delta > 0$ existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que

$$\forall |\xi| < \tilde{\delta} \Rightarrow |\varepsilon(\xi)| \leq \delta|\xi|.$$

Definindo

$$\tilde{R}(\xi) := R(\xi) - \frac{1}{2}(\nabla_{\xi} J)_u \circ d\xi \circ j$$

segue que para todo $\epsilon > 0$ existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que $|\tilde{R}(\xi)| \leq \epsilon$ sempre que $|\xi| < \tilde{\delta}$.

Lema 4.6. *Existem funções*

$$\Theta_1 : \mathcal{H}_1(\Sigma_1, N) \times \mathcal{H}_1(\Sigma_{21}, N) \times \cdots \times \mathcal{H}_1(\Sigma_{2d}, N) \rightarrow \mathcal{H}_0(\Sigma_*, \Lambda^{0,1}T\Sigma_* \otimes N)$$

e

$$\Theta_{2k} : \mathcal{H}_1(\Sigma_1, N) \times \mathcal{H}_1(\Sigma_{2k}, N) \rightarrow \mathcal{H}_0(\Sigma_*, \Lambda^{0,1}T\Sigma_* \otimes N),$$

$1 \leq k \leq d$, tais que v é J -holomorfa se

$$\beta_1\Theta_1 + \beta_{21}\Theta_{21} + \cdots + \beta_{2d}\Theta_{2d} = 0, \quad (4.5)$$

em que

$$\begin{aligned} \Theta_1(\psi_1, \psi_{21}, \dots, \psi_{2d}) &= D_1\psi_1 + F(\psi_1) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d (\partial_s \beta_{2k})(\eta_{2k} + \psi_{2k})d\bar{z} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \left[(\nabla_{\psi_1} J)(\partial_s \beta_{2k})\psi_{2k} + \beta_{2k}(\nabla_{\psi_1} J)\nabla\psi_{2k} + 2\tilde{R}_{1k}(\psi_1, \psi_{2k}) \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{2k}(\psi_1, \psi_{2k}) &= D_{2k}\psi_{2k} + F_k(\psi_{2k}) + \frac{1}{2}(\partial_s \beta_1)(\eta_{1k} + \psi_1)d\bar{z} \\ &\quad + \frac{1}{2} [(\nabla_{\psi_{2k}} J)(\partial_s \beta_1)\psi_1 + \beta_1(\nabla_{\psi_{2k}} J)\nabla\psi_1] + \tilde{R}_{2k}(\psi_1, \psi_{2k}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

(4.8)

e F, F_k são quadráticas de tipo I.

Demonstração. Longe das vizinhanças de colagem temos $v = \exp_{v_*}(\psi_1)$ ou $v = \exp_{v_*}(\psi_{2k})$, $k = 1, \dots, d$. E de acordo com a Seção 2.1 de [HT09] segue que v é J -holomorfa se, e somente se, equações da forma $D_1\psi_1 + F(\psi_1) = 0$ e $D_{2k}\psi_{2k} + F_k(\psi_{2k}) = 0$ são satisfeitas, em que F e F_k são funções quadrática do tipo I.

Agora vamos calcular o operador de Cauchy-Riemann em v em uma vizinhança $[-T_k, T_0] \times S^1$. Defina $\eta_k := \beta_1\eta_{1k} + \beta_{2k}\eta_{2k}$. Segue da Observação 4.5 que

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_J(v) &= \bar{\partial}_J(s, t, \eta_k + \beta_1\psi_1 + \beta_{2k}\psi_{2k}) \\ &= \bar{\partial}_J[(s, t, \eta_k) + (0, 0, \beta_1\psi_1 + \beta_{2k}\psi_{2k})] \\ &= \bar{\partial}_J(s, t, \eta_k) + D_{(s,t,\eta_k)}(0, 0, \beta_1\psi_1 + \beta_{2k}\psi_{2k}) + R(0, 0, \beta_1\psi_1 + \beta_{2k}\psi_{2k}). \end{aligned}$$

Note que $D_{(s,t,\eta_k)}(0, 0, \beta_1\psi_1 + \beta_{2k}\psi_{2k})$ coincide com o operador $D_{(s,t,\eta_k)}$ restrito ao fibrado normal N de v_* aplicado ao campo $\beta_1\psi_1 + \beta_{2k}\psi_{2k}$, por isso, denotaremos

$$D(\beta_1\psi_1 + \beta_{2k}\psi_{2k}) := D_{(s,t,\eta_k)}|_N(\beta_1\psi_1 + \beta_{2k}\psi_{2k}) = D_{(s,t,\eta_k)}(0, 0, \beta_1\psi_1 + \beta_{2k}\psi_{2k}).$$

Com essa notação temos

$$\bar{\partial}_J(v) = \bar{\partial}_J(s, t, \eta_k) + D(\beta_1\psi_1 + \beta_{2k}\psi_{2k}) + R(0, 0, \beta_1\psi_1 + \beta_{2k}\psi_{2k}). \quad (4.9)$$

Escrevendo em coordenadas locais, para cada $i = 1, 2k$, temos

$$\begin{aligned}
D(\beta_i(s)\psi_i(s, t)) &= \bar{\partial}_J\left(\beta_i(s)\psi_i(s, t)\right) + \frac{1}{2}(\nabla_{\beta_i\psi_i}J) \circ dv_* \circ j \\
&= \frac{1}{2}\left[\partial_s\left(\beta_i(s)\psi_i(s, t)\right) + J(v_*)\partial_t\left(\beta_i(s)\psi_i(s, t)\right)\right] ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\partial_t\left(\beta_i(s)\psi_i(s, t)\right) - J(v_*)\partial_s\left(\beta_i(s)\psi_i(s, t)\right)\right] dt + \frac{1}{2}\beta_i(\nabla_{\psi_i}J) \circ dv_* \circ j \\
&= \frac{1}{2}\left[\partial_s(\beta_i)(s)\psi_i(s, t) + \beta_i(s)\partial_s(\psi_i)(s, t) + J(v_*)(\beta_i(s)\partial_t(\psi_i)(s, t))\right] ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\beta_i(s)\partial_t(\psi_i)(s, t) - J(v_*)(\partial_s(\beta_i)(s)\psi_i(s, t) + \beta_i(s)\partial_s(\psi_i)(s, t))\right] dt \\
&\quad + \frac{1}{2}\beta_i(\nabla_{\psi_i}J) \circ dv_* \circ j \\
&= \frac{1}{2}\left[\partial_s(\beta_i)(s)\psi_i(s, t)ds - J(v_*)\partial_s(\beta_i)(s)\psi_i(s, t)dt\right] + \frac{1}{2}\beta_i(\nabla_{\psi_i}J) \circ dv_* \circ j \\
&\quad + \frac{1}{2}\beta_i(s)\left[(\partial_s(\psi_i)(s, t) + J(v_*)\partial_t(\psi_i)(s, t))ds\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\beta_i(s)\left[(\partial_t(\psi_i)(s, t) - J(v_*)\partial_s(\psi_i)(s, t))dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\partial_s(\beta_i)(s)\left[\psi_i(s, t)ds - J(v_*)\psi_i(s, t)dt\right] + \beta_i(s)D_i(\psi_i)
\end{aligned}$$

em que escrevemos o índice i em D_i apenas para destacar que estamos nos referindo ao operador D da curva indexada por i . Também temos

$$\begin{aligned}
2\bar{\partial}_J(s, t, \eta_k) &= 2\bar{\partial}_J\left(s, t, \beta_1(s)\eta_{1k}(s, t) + \beta_{2k}(s)\eta_{2k}(s, t)\right) \\
&= (1, 0, \partial_s(\beta_1)\eta_{1k} + \beta_1\partial_s(\eta_{1k}) + \partial_s(\beta_{2k})\eta_{2k} + \beta_{2k}\partial_s(\eta_{2k}))ds \\
&\quad + J(0, 1, \beta_1\partial_t(\eta_{1k}) + \beta_{2k}\partial_t(\eta_{2k}))ds + (0, 1, \beta_1\partial_t(\eta_{1k}) + \beta_{2k}\partial_t(\eta_{2k}))dt \\
&\quad - J(1, 0, \partial_s(\beta_1)\eta_{1k} + \beta_1\partial_s(\eta_{1k}) + \partial_s(\beta_{2k})\eta_{2k} + \beta_{2k}\partial_s(\eta_{2k}))dt \\
&= \left((1, 0, \beta_1\partial_s(\eta_{1k})) + J(0, 1, \beta_1\partial_t(\eta_{1k}))\right)ds \\
&\quad + \left((0, 1, \beta_1\partial_t(\eta_{1k})) - J(1, 0, \beta_1\partial_s(\eta_{1k}))\right)dt \\
&\quad + \left((0, 0, \beta_{2k}\partial_s(\eta_{2k})) + J(0, 0, \beta_{2k}\partial_t(\eta_{2k}))\right)ds \\
&\quad + \left((0, 0, \beta_{2k}\partial_t(\eta_{2k})) - J(0, 0, \beta_{2k}\partial_s(\eta_{2k}))\right)dt \\
&\quad + (0, 0, \partial_s(\beta_1)\eta_{1k})ds + (0, 0, \partial_s(\beta_{2k})\eta_{2k})ds \\
&\quad - J(0, 0, \partial_s(\beta_1)\eta_{1k})dt - J(0, 0, \partial_s(\beta_{2k})\eta_{2k})dt
\end{aligned}$$

Veremos agora cada uma das equações acima separadamente. Mas primeiro observe que usando a decomposição $T(\mathbb{R} \times M) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}\langle R_\lambda \rangle \times \ker \lambda$, o operador J tem representação

$$J_{(s,t,x)}(w_1, w_2, w_3) = (-w_2, w_1, iw_3).$$

Então, como v_1 é J-holomorfa, temos

$$\partial_s(\eta_{1k}) + i\partial_t(\eta_{1k}) = 0,$$

e como

$$J(0, 1, \beta_1\partial_t(\eta_{1k})) = (-1, 0, i\beta_1\partial_t(\eta_{1k})),$$

segue que

$$(1, 0, \beta_1 \partial_s(\eta_{1k})) + J(0, 1, \beta_1 \partial_t(\eta_{1k})) = \left(0, 0, \beta_1 (\partial_s(\eta_{1k}) + i \partial_t(\eta_{1k}))\right) = (0, 0, 0).$$

Assim,

$$\left((1, 0, \beta_1 \partial_s(\eta_{1k})) + J(0, 1, \beta_1 \partial_t(\eta_{1k}))\right) ds + \left((0, 1, \beta_1 \partial_t(\eta_{1k})) - J(1, 0, \beta_1 \partial_s(\eta_{1k}))\right) dt = (0, 0, 0).$$

De forma similar, como v_2 também é J-holomorfa, temos

$$\left((0, 0, \beta_{2k} \partial_s(\eta_{2k})) + J(0, 0, \beta_{2k} \partial_t(\eta_{2k}))\right) ds + \left((0, 0, \beta_{2k} \partial_t(\eta_{2k})) - J(0, 0, \beta_{2k} \partial_s(\eta_{2k}))\right) dt = (0, 0, 0).$$

Logo,

$$2\bar{\partial}_J(s, t, \eta) = \partial_s(\beta_1)\eta_{1k}(ds - idt) + \partial_s(\beta_{2k})\eta_{2k}(ds - idt),$$

em que estamos identificando o vetor $(0, 0, \partial_s(\beta_i)\eta_i)$ com $\partial_s(\beta_i)\eta_i$, $i = 1, 2k$. Também temos

$$\begin{aligned} R(0, 0, \beta_1 \psi_1 + \beta_{2k} \psi_{2k}) &= \frac{1}{2}(\nabla_{\beta_1 \psi_1 + \beta_{2k} \psi_{2k}} J) d(\beta_1 \psi_1 + \beta_{2k} \psi_{2k}) j + \tilde{R}(\beta_1 \psi_1 + \beta_{2k} \psi_{2k}) \\ &= \frac{1}{2}(\beta_1 \nabla_{\psi_1} J + \beta_{2k} \nabla_{\psi_{2k}} J) \left(d(\beta_1 \psi_1) + d(\beta_{2k} \psi_{2k})\right) j + \tilde{R}(\beta_1 \psi_1 + \beta_{2k} \psi_{2k}) \\ &= \frac{1}{2} \beta_1 (\nabla_{\psi_1} J) \left((\partial_s \beta_1) \psi_1 + \beta_1 \nabla \psi_1 + (\partial_s \beta_{2k}) \psi_{2k} + \beta_{2k} \nabla \psi_{2k}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \beta_{2k} (\nabla_{\psi_{2k}} J) \left((\partial_s \beta_1) \psi_1 + \beta_1 \nabla \psi_1 + (\partial_s \beta_{2k}) \psi_{2k} + \beta_{2k} \nabla \psi_{2k}\right) \\ &\quad + \tilde{R}(\beta_1 \psi_1 + \beta_{2k} \psi_{2k}) \end{aligned}$$

e observe que $\tilde{R}(\beta_1 \psi_1 + \beta_{2k} \psi_{2k})$ pode ser escrito na forma

$$\tilde{R}(\beta_1 \psi_1 + \beta_{2k} \psi_{2k}) = \beta_1 \tilde{R}_{1k}(\psi_1, \psi_{2k}) + \beta_{2k} \tilde{R}_{2k}(\psi_1, \psi_{2k}),$$

de modo que exista uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\tilde{R}_{1k}(\psi_1, \psi_{2k})\| \leq C \beta_{2k} \|\psi_1\| \|\psi_{2k}\| + C \|\psi_1\|^2$$

e

$$\|\tilde{R}_{2k}(\psi_1, \psi_{2k})\| \leq C \|\psi_1\|^2 \|\psi_{2k}\| + C \|\psi_{2k}\|^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_J(v) &= \frac{1}{2}\partial_s(\beta_1)\eta_{1k}(ds - idt) + \frac{1}{2}\partial_s(\beta_{2k})\eta_{2k}(ds - idt) + \beta_1 D_1(\psi_1) + \beta_{2k} D_2(\psi_1) \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_s(\beta_1)(\psi_1 ds - J(v_*)\psi_1 dt) + \frac{1}{2}\partial_s(\beta_{2k})(\psi_{2k} ds - J(v_*)\psi_{2k} dt) \\
&\quad + R(0, 0, \beta_1\psi_1 + \beta_{2k}\psi_{2k}) \\
&= \beta_1 \left[D_1(\psi_1) + \frac{1}{2}\partial_s(\beta_{2k})(\eta_{2k}(ds - idt) + (\psi_{2k} ds - J(v_*)\psi_{2k} dt)) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2}(\nabla_{\psi_1} J)(\partial_s \beta_{2k})\psi_{2k} + \beta_{2k}(\nabla_{\psi_1} J)\nabla\psi_{2k} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(\nabla_{\psi_1} J)(\partial_s \beta_1)\psi_1 + \frac{1}{2}\beta_1(\nabla_{\psi_1} J)\nabla\psi_1 + \tilde{R}_{1k}(\psi_1, \psi_{2k}) \right] \\
&\quad + \beta_{2k} \left[D_2(\psi_{2k}) + \frac{1}{2}\partial_s(\beta_1)(\eta_1(ds - idt) + (\psi_1 ds - J(v_*)\psi_1 dt)) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2}(\nabla_{\psi_{2k}} J)(\partial_s \beta_1)\psi_1 + \beta_1(\nabla_{\psi_{2k}} J)\nabla\psi_1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(\nabla_{\psi_{2k}} J)(\partial_s \beta_{2k})\psi_{2k} + \frac{1}{2}\beta_{2k}(\nabla_{\psi_{2k}} J)\nabla\psi_{2k} + \tilde{R}_{2k}(\psi_1, \psi_{2k}) \right]
\end{aligned}$$

em que

$$F(\psi_1) := \frac{1}{2}(\nabla_{\psi_1} J)(\partial_s \beta_1)\psi_1 + \frac{1}{2}\beta_1(\nabla_{\psi_1} J)\nabla\psi_1$$

e

$$F_k(\psi_{2k}) := \frac{1}{2}(\nabla_{\psi_{2k}} J)(\partial_s \beta_{2k})\psi_{2k} + \frac{1}{2}\beta_{2k}(\nabla_{\psi_{2k}} J)\nabla\psi_{2k}$$

são funções quadráticas do tipo I. □

Assim, precisamos encontrar $\psi_1, \psi_{21}, \dots, \psi_{2d}$ que sejam soluções das seguintes equações:

$$D_{2k}\psi_{2k} + \mathcal{F}_{2k}(\psi_1, \psi_{2k}) = 0, \forall k = 1, \dots, d, \quad (4.10a)$$

$$D_1\psi_1 + (Id - \Pi)\mathcal{F}_1(\psi_1, \psi_{21}, \dots, \psi_{2d}) = 0, \quad (4.10b)$$

$$\Pi\mathcal{F}_1(\psi_1, \psi_{21}, \dots, \psi_{2d}) = 0. \quad (4.10c)$$

em que Π é a projeção ortogonal em $\ker D_1^*$ e

$$\mathcal{F}_1(\psi_1, \psi_{21}, \dots, \psi_{2d}) = \Theta_1(\psi_1, \psi_{21}, \dots, \psi_{2d}) - D_1\psi_1$$

$$\mathcal{F}_{2k}(\psi_1, \psi_{2k}) = \Theta_{2k}(\psi_1, \psi_{2k}) - D_{2k}\psi_{2k}.$$

Lema 4.7. *Para todo $k = 1, \dots, d$, existem números reais $c, \varepsilon > 0$ e $r \gg 0$ tais que para cada $\|\psi_1\|_* < \varepsilon$ existe um único $\|\psi_{2k}(\psi_1)\|_* < \varepsilon$ que é uma solução de (4.10a), isto é,*

$$\Theta_{2k}(\psi_1, \psi_{2k}) = 0.$$

Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\psi_{2k}\|_* \leq Cr^{-1}(e^{-\mu_k T_0} + \|\psi_1\|_*), \quad (4.11)$$

onde μ_k é um auto-valor positivo do operador assintótico A_{α_3} .

Demonstração. Seja \mathcal{H}_-^k o L^2 -complemento ortogonal de $\ker D_{2k}$ em $\mathcal{H}_1(\Sigma_*, N)$ correspondendo a v_{2k} . Como $D_{2k}|_{\mathcal{H}_-^k}$ é sobrejetora, já que os planos v_{2k} são regulares, esse operador possui inversa a direita D_{2k}^{-1} .

Denote $\mathcal{B}^k \subset \mathcal{H}_-^k$ a bola centrada na origem e raio ε . Defina

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} : \mathcal{B}^k &\rightarrow \mathcal{H}_-^k \\ \psi_{2k} &\mapsto -D_{2k}^{-1} \left[F_k(\psi_{2k}) + \frac{1}{2}(\partial_s \beta_1)(\eta_{1k} + \psi_1) d\bar{z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [(\nabla_{\psi_{2k}} J)(\partial_s \beta_1)\psi_1 + \beta_1(\nabla_{\psi_{2k}} J)\nabla\psi_1] + \tilde{R}_{2k}(\psi_1, \psi_{2k}) \right] \end{aligned}$$

No que segue mostraremos que \mathfrak{T} satisfaz as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

1. \mathfrak{T} mapeia a bola \mathcal{B}^k em si mesma. De fato, como D_{2k}^{-1} é limitado e existe um autovalor $\mu_k > 0$ do operador assintótico A_{α_3} tal que $\|\eta_{1k}\| < Ce^{-\mu_k T_0}$ temos

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{T}(\psi_{2k})\|_* &\leq c_1\|\psi_{2k}\|^2 + c_1\|\psi_{2k}\|\|\nabla\psi_{2k}\| + c_2r^{-1}(e^{-\mu_k T_0} + \|\psi_1\|) + c_3r^{-1}\|\psi_{2k}\|\|\psi_1\| \\ &\quad + c_3\|\psi_{2k}\|\|\nabla\psi_1\| + c_4\|\psi_1\|^2\|\psi_{2k}\| + c_4\|\psi_{2k}\|^2 \\ &\leq c_1\|\psi_{2k}\|(\|\psi_{2k}\| + \|\nabla\psi_{2k}\|) + c_2r^{-1}(e^{-\mu_k T_0} + \|\psi_1\|) \\ &\quad + c_5\|\psi_{2k}\|(\|\psi_1\| + \|\nabla\psi_1\|) + c_4\|\psi_{2k}\|(\|\psi_1\|^2 + \|\psi_{2k}\|) \\ &\leq c_1\|\psi_{2k}\|_*\|\psi_{2k}\|_* + c_2r^{-1}(e^{-\mu_k T_0} + \|\psi_1\|_*) + c_5\|\psi_{2k}\|_*\|\psi_1\|_* \\ &\quad + c_4\|\psi_{2k}\|_*(\|\psi_1\|_*^2 + \|\psi_{2k}\|_*) \\ &< (c_1 + 2c_2 + c_5 + c_4\varepsilon + c_4)\varepsilon^2 < \varepsilon \end{aligned}$$

se escolhermos $0 < \varepsilon \ll 1$ e $r \gg 1$ apropriados de modo que $\varepsilon^2 \ll \varepsilon$ e $r^{-1} < \varepsilon$.

2. \mathfrak{T} é uma contração. De fato, dados $\psi_{2k}, \bar{\psi}_{2k} \in \mathcal{B}^k$ e usando que

$$F_k(\psi_{2k}) := \frac{1}{2}(\nabla_{\psi_{2k}} J)(\partial_s \beta_{2k})\psi_{2k} + \frac{1}{2}\beta_{2k}(\nabla_{\psi_{2k}} J)\nabla\psi_{2k}$$

temos

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{T}(\psi_{2k}) - \mathfrak{T}(\bar{\psi}_{2k})\|_* &\leq c\|F_k(\psi_{2k}) - F_k(\bar{\psi}_{2k}) + \frac{1}{2}[(\nabla_{\psi_{2k}} J)(\partial_s \beta_1)\psi_1 + \beta_1(\nabla_{\psi_{2k}} J)\nabla\psi_1] \\ &\quad - \frac{1}{2}[(\nabla_{\bar{\psi}_{2k}} J)(\partial_s \beta_1)\psi_1 + \beta_1(\nabla_{\bar{\psi}_{2k}} J)\nabla\psi_1] + \tilde{R}_{2k}(\psi_1, \psi_{2k}) - \tilde{R}_{2k}(\psi_1, \bar{\psi}_{2k})\| \\ &\leq c\left\| \frac{1}{2}(\partial_s \beta_{2k}) \left((\nabla_{\psi_{2k}} J)\psi_{2k} - (\nabla_{\bar{\psi}_{2k}} J)\bar{\psi}_{2k} + (\nabla_{\psi_{2k}} J)\bar{\psi}_{2k} - (\nabla_{\bar{\psi}_{2k}} J)\psi_{2k} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_{2k}}{2} \left((\nabla_{\psi_{2k}} J)\nabla\psi_{2k} - (\nabla_{\bar{\psi}_{2k}} J)\nabla\bar{\psi}_{2k} + (\nabla_{\psi_{2k}} J)\nabla\bar{\psi}_{2k} - (\nabla_{\bar{\psi}_{2k}} J)\nabla\psi_{2k} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\partial_s \beta_1)(\nabla_{\psi_{2k}-\bar{\psi}_{2k}} J)\psi_1 + \frac{1}{2}\beta_1(\nabla_{\psi_{2k}-\bar{\psi}_{2k}} J)\nabla\psi_1 \right\| + c_1\|\psi_{2k} - \bar{\psi}_{2k}\| \\ &= c\left\| \frac{1}{2}(\partial_s \beta_{2k}) \left((\nabla_{\psi_{2k}} J)(\psi_{2k} - \bar{\psi}_{2k}) + (\nabla_{\psi_{2k}-\bar{\psi}_{2k}} J)\bar{\psi}_{2k} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_{2k}}{2} \left((\nabla_{\psi_{2k}} J)(\nabla\psi_{2k} - \nabla\bar{\psi}_{2k}) + (\nabla_{\psi_{2k}-\bar{\psi}_{2k}} J)\nabla\bar{\psi}_{2k} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\partial_s \beta_1)(\nabla_{\psi_{2k}-\bar{\psi}_{2k}} J)\psi_1 + \frac{1}{2}\beta_1(\nabla_{\psi_{2k}-\bar{\psi}_{2k}} J)\nabla\psi_1 \right\| + c_1\|\psi_{2k} - \bar{\psi}_{2k}\| \\ &\leq c_2\|\psi_{2k}\|\|\psi_{2k} - \bar{\psi}_{2k}\| + c_3\|\psi_{2k} - \bar{\psi}_{2k}\|\|\bar{\psi}_{2k}\| + c_4\|\psi_{2k}\|\|\nabla\psi_{2k} - \nabla\bar{\psi}_{2k}\| \\ &\quad + c_5\|\psi_{2k} - \bar{\psi}_{2k}\|\|\nabla\bar{\psi}_{2k}\| + c_6\|\psi_{2k} - \bar{\psi}_{2k}\|(\|\psi_1\| + \|\nabla\psi_1\|) + c_1\|\psi_{2k} - \bar{\psi}_{2k}\| \\ &\leq c_7\|\psi_{2k}\|_*\|\psi_{2k} - \bar{\psi}_{2k}\|_* + c_8\|\psi_{2k} - \bar{\psi}_{2k}\|_*\|\bar{\psi}_{2k}\|_* + c_9\|\psi_{2k} - \bar{\psi}_{2k}\|_*\|\psi_1\|_* \\ &\quad + c_1\|\psi_{2k} - \bar{\psi}_{2k}\|_* \\ &\leq \left[c_{10} \left(\|\psi_{2k}\|_* + \|\bar{\psi}_{2k}\|_* + \|\psi_1\|_* \right) + c_1 \right] \|\psi_{2k} - \bar{\psi}_{2k}\|_* \end{aligned}$$

onde $0 \leq c_1 < 1$ e

$$c_{10} \left(\|\psi_{2k}\|_* + \|\bar{\psi}_{2k}\|_* + \|\psi_1\|_* \right) + c_1 < 1$$

para $0 < \varepsilon \ll 1$.

Logo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, para cada ψ_1 existe um único $\psi_{2k}(\psi_1) \in \mathcal{B}^k$ que satisfaz (4.10a).

Para a segunda parte, como ψ_{2k} é tal que $\mathfrak{T}(\psi_{2k}) = \psi_{2k}$ temos

$$\begin{aligned} \|\psi_{2k}\|_* &\leq c_1 \|\psi_{2k}\|_*^2 + c_2 r^{-1} (e^{-\mu_k T_0} + \|\psi_1\|_*) + c_4 \|\psi_{2k}\|_* \|\psi_1\|_* + \varepsilon \|\psi_{2k}\|_* (\|\psi_1\| + 1) \\ &\leq c_1 \|\psi_{2k}\|_* + c_2 r^{-1} (e^{-\mu_k T_0} + \|\psi_1\|_*) + c_5 \varepsilon \|\psi_{2k}\|_* + \varepsilon \|\psi_{2k}\|_* (\varepsilon + 1) \end{aligned}$$

Assim,

$$\|\psi_{2k}\|_* \leq \frac{c_2}{1 - c_1 - c_4 \varepsilon - \varepsilon(\varepsilon + 1)} r^{-1} (e^{-\mu_k T_0} + \|\psi_1\|_*).$$

□

Agora substituindo na equação (4.10b) os $\psi_{2k}(\psi_1)$, $1 \leq k \leq d$, encontrados no Lema 4.7, obtemos o seguinte Lema.

Lema 4.8. *Existem $c, \varepsilon > 0$, $r \gg 0$ e um único $\|\psi_1\|_* < \varepsilon$ que é uma solução da equação (4.10b). Além disso, existe $C > 0$ tal que*

$$\|\psi_1\|_* \leq C r^{-1} \sum_{k=1}^d (e^{\mu_k T_k} + \|\psi_{2k}\|_*), \quad (4.12)$$

onde μ_k é um auto-valor negativo do operador assintótico A_{α_3} .

Demonstração. Para simplificar, denote por

$$Q(\psi_1, \psi_{21}, \dots, \psi_{2d}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d (\partial_s \beta_{2k})(\eta_{2k} + \psi_{2k}) d\bar{z} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d [(\nabla_{\psi_1} J)(\partial_s \beta_{2k}) \psi_{2k} + \beta_{2k} (\nabla_{\psi_1} J) \nabla \psi_{2k}].$$

Observe que D_1 não é injetora, pois pelo Lema 3.22 temos $\dim \ker D_1 = 1$. No entanto, se \mathcal{H}_+ é o L^2 -complemento ortogonal do $\ker D_1$ em $\mathcal{H}_1(\Sigma_*, N)$ correspondendo a v_1 , então $D_1|_{\mathcal{H}_+}$ é injetora. Denote $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}_+$ a bola centrada na origem e raio ε . Assim, podemos definir

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} : \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{H}_+ \\ \psi_1 &\mapsto -D_1^{-1} (Id - \Pi) (F(\psi_1) + Q(\psi_1, \psi_{21}, \dots, \psi_{2d})). \end{aligned}$$

1. \mathfrak{T} mapeia a bola \mathcal{B} em si mesma. De fato, tome $\|\psi_{2k}\|_* < \varepsilon$ para todo $1 \leq k \leq d$. Então,

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{T}(\psi_1)\|_* &\leq c_1 \|F(\psi_1) + Q(\psi_1, \psi_{21}, \dots, \psi_{2d})\| \\
&\leq c_2 \|\psi_1\|^2 + c_2 \|\psi_1\| \|\nabla \psi_1\| + c_1 r^{-1} \sum_{k=1}^d (e^{\mu_k T_k} + \|\psi_{2k}\|) \\
&\quad + \sum_{k=1}^d (c_1 r^{-1} \|\psi_1\| \|\psi_{2k}\| + c_1 \|\psi_1\| \|\nabla \psi_{2k}\| + \|\tilde{R}_{1k}(\psi_1, \psi_{2k})\|) \\
&\leq c_2 \|\psi_1\| (\|\psi_1\| + \|\nabla \psi_1\|) + c_1 r^{-1} \sum_{k=1}^d (e^{\mu_k T_k} + \|\psi_{2k}\|_*) \\
&\quad + \sum_{k=1}^d c_3 \|\psi_1\| (\|\psi_{2k}\| + \|\nabla \psi_{2k}\| + c_4 \|\psi_1\| (\|\psi_{2k}\| + \|\psi_1\|)) \\
&\leq c_2 \|\psi_1\|_*^2 + c_1 r^{-1} \sum_{k=1}^d (e^{\mu_k T_k} + \|\psi_{2k}\|_*) + \sum_{k=1}^d c_3 \|\psi_1\|_* \|\psi_{2k}\|_* \\
&\quad + \sum_{k=1}^d c_4 \|\psi_1\|_* (\|\psi_{2k}\|_* + \|\psi_1\|_*) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

contanto que escolhamos $\varepsilon > 0$ pequeno de modo que $\varepsilon^2 \ll \varepsilon$ e r grande apropriado.

2. \mathfrak{T} é uma contração. Abaixo usaremos o fato de que

$$F(\psi_1) := \frac{1}{2} (\nabla_{\psi_1} J)(\partial_s \beta_1) \psi_1 + \frac{1}{2} \beta_1 (\nabla_{\psi_1} J) \nabla \psi_1.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{F}(\psi_1) - \mathfrak{F}(\bar{\psi}_1)\|_* &\leq c\|F(\psi_1) - F(\bar{\psi}_1) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d [(\nabla_{\psi_1} J)(\partial_s \beta_{2k})\psi_{2k} + \beta_{2k}(\nabla_{\psi_1} J)\nabla\psi_{2k}] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d [(\nabla_{\bar{\psi}_1} J)(\partial_s \beta_{2k})\psi_{2k} + \beta_{2k}(\nabla_{\bar{\psi}_1} J)\nabla\psi_{2k}] \\
&\quad + \sum_{k=1}^d \|\tilde{R}_{1k}(\psi_1, \psi_{2k}) - \tilde{R}_{1k}(\bar{\psi}_1, \psi_{2k})\| \\
&\leq c\|\frac{1}{2}(\partial_s \beta_1)\left((\nabla_{\psi_1} J)\psi_1 - (\nabla_{\psi_1} J)\bar{\psi}_1 + (\nabla_{\psi_1} J)\bar{\psi}_1 - (\nabla_{\bar{\psi}_1} J)\bar{\psi}_1\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\beta_1\left((\nabla_{\psi_1} J)\nabla\psi_1 - (\nabla_{\psi_1} J)\nabla\bar{\psi}_1 + (\nabla_{\psi_1} J)\nabla\bar{\psi}_1 - (\nabla_{\bar{\psi}_1} J)\nabla\bar{\psi}_1\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d [(\nabla_{\psi_1 - \bar{\psi}_1} J)(\partial_s \beta_{2k})\psi_{2k} + \beta_{2k}(\nabla_{\psi_1 - \bar{\psi}_1} J)\nabla\psi_{2k}] \| \\
&\quad + c_1\|\psi_1 - \bar{\psi}_1\| \\
&= c\|\frac{1}{2}(\partial_s \beta_1)\left((\nabla_{\psi_1} J)(\psi_1 - \bar{\psi}_1) + (\nabla_{\psi_1 - \bar{\psi}_1} J)\bar{\psi}_1\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\beta_1\left((\nabla_{\psi_1} J)(\nabla\psi_1 - \nabla\bar{\psi}_1) + (\nabla_{\psi_1 - \bar{\psi}_1} J)\nabla\bar{\psi}_1\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d [(\nabla_{\psi_1 - \bar{\psi}_1} J)(\partial_s \beta_{2k})\psi_{2k} + \beta_{2k}(\nabla_{\psi_1 - \bar{\psi}_1} J)\nabla\psi_{2k}] \| + c_1\|\psi_1 - \bar{\psi}_1\| \\
&\leq c_2 r^{-1}\|\psi_1\|\|\psi_1 - \bar{\psi}_1\| + c_3 r^{-1}\|\psi_1 - \bar{\psi}_1\|\|\bar{\psi}_1\| + c_4\|\psi_1\|\|\nabla\psi_1 - \nabla\bar{\psi}_1\| \\
&\quad + c_5\|\psi_1 - \bar{\psi}_1\|\|\nabla\bar{\psi}_1\| + \sum_{k=1}^d \left(c_6\|\psi_1 - \bar{\psi}_1\|\|\psi_{2k}\| + c_7\|\psi_1 - \bar{\psi}_1\|\|\nabla\psi_{2k}\|\right) \\
&\quad + c_1\|\psi_1 - \bar{\psi}_1\| \\
&\leq c_8\|\psi_1\|\left(\|\psi_1 - \bar{\psi}_1\| + \|\nabla\psi_1 - \nabla\bar{\psi}_1\|\right) + c_9\|\psi_1 - \bar{\psi}_1\|\left(\|\bar{\psi}_1\| + \|\nabla\bar{\psi}_1\|\right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^d c_{10}\|\psi_1 - \bar{\psi}_1\|\left(\|\psi_{2k}\| + \|\nabla\psi_{2k}\|\right) + c_1\|\psi_1 - \bar{\psi}_1\| \\
&\leq c_8\|\psi_1\|_*\|\psi_1 - \bar{\psi}_1\|_* + c_9\|\psi_1 - \bar{\psi}_1\|_*\|\bar{\psi}_1\|_* + \sum_{k=1}^d c_{10}\|\psi_1 - \bar{\psi}_1\|_*\|\psi_{2k}\|_* \\
&\quad + c_1\|\psi_1 - \bar{\psi}_1\|_* \\
&\leq \left[c_{11}\left(\|\psi_1\|_* + \|\bar{\psi}_1\|_* + \sum_{k=1}^d \|\psi_{2k}\|_*\right) + c_1 \right] \|\psi_1 - \bar{\psi}_1\|_*
\end{aligned}$$

onde $0 \leq c_1 < 1$. Como para $\varepsilon > 0$ bem pequeno temos

$$c_{11}\left(\|\psi_1\|_* + \|\bar{\psi}_1\|_* + \sum_{k=1}^d \|\psi_{2k}\|_*\right) + c_1 < 1$$

segue que \mathfrak{F} é uma contração.

Logo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, para $\psi_{21}, \dots, \psi_{2d}$ pequenos existe um único $\psi_1 \in \mathcal{B}$ que é solução de (4.10b).

Para a segunda parte, temos

$$\begin{aligned} \|\psi_1\|_* &\leq c_2\|\psi_1\|_*^2 + c_1r^{-1}\sum_{k=1}^d(e^{\mu_k T_k} + \|\psi_{2k}\|_*) + \sum_{k=1}^d c_3\|\psi_1\|_*\|\psi_{2k}\|_* + c_4\|\psi_1\|_*(\|\psi_{2k}\|_* + \|\psi_1\|_*) \\ &\leq c_2\|\psi_1\|_* + c_1r^{-1}\sum_{k=1}^d(e^{\mu_k T_k} + \|\psi_{2k}\|_*) + \sum_{k=1}^d c_3\|\psi_1\|_*\varepsilon + c_4\|\psi_1\|_*\varepsilon + c_4\|\psi_1\|^2 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\psi_1\|_* \leq \frac{c_1}{1 - c_2 - d(c_3 + c_4) - c_4} r^{-1} \sum_{k=1}^d (e^{\mu_k T_k} + \|\psi_{2k}\|_*).$$

□

Lema 4.9. *Para cada building J -holomorfo $(v_1, v_2) \in \mathcal{M}_{J,d}$ existem constantes $c, \varepsilon > 0$, $r \gg 0$ e seções $\psi_1, \psi_{21}, \dots, \psi_{2d}$ que são soluções, simultaneamente, para as equações (4.10a) e (4.10b).*

Demonstração. Pelo Lema 4.7, existem $c_1, \varepsilon_1 > 0$, r_1 grande e seções $\|\psi_{2k}(\psi_1)\|_* < \varepsilon_1$, nos fibrados normais das curvas $v_{2k}, 1 \leq k \leq d$, que solucionam a equação (4.10a). Substitua essas seções $\psi_{2k}(\psi_1)$ na equação (4.10b). Agora pelo Lema 4.8, existem $c_2, \varepsilon_2 > 0$, r_2 grande e uma seção $\|\psi_1\|_* < \varepsilon_2$ no fibrado normal de v_1 que satisfazem a equação (4.10b). Assim, $c = \max\{c_1, c_2\}$, $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ e $r = \max\{r_1, r_2\}$ obtemos as seções $\psi_1, \psi_{21}, \dots, \psi_{2d}$ que procurávamos. □

Lema 4.10. *Seja $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$. Então, para cada building J -holomorfo $(v_1, v_2) \in \mathcal{M}_{J,d}$ tal que $\text{ind}(v_1) = 1$ existem $c, \varepsilon > 0$, $r \gg 0$ e seções ψ_1, ψ_{21} que são soluções, simultaneamente, para as equações (4.10a), (4.10b) e (4.10c).*

Demonstração. Se $(v_1, v_2) \in \mathcal{M}_{J,d}$ é tal que $\text{ind}(v_1) = 1$, então v_2 possui duas componentes conexas: um cilindro trivial sobre α_2 e um plano J -holomorfo de índice de fredholm 1. Assim, v_1 é uma curva *somewhere injective* e, como $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$, segue do Teorema 3.5 que a curva v_1 é regular, isto é, D_1 é sobrejetora. Então,

$$0 = \dim \text{coker } D_1 = \dim \ker D_1^* \Rightarrow \ker D_1^* = \{0\},$$

e, assim, a equação (4.10c) é trivialmente satisfeita. As soluções das outras equações vem do Lema 4.9. □

O Lema 4.10 acima nos diz que quando $d = 1$ as curvas v_1 e v_2 de um building $(v_1, v_2) \in \mathcal{M}_{J,d}$ são sempre “coláveis”. Resta saber agora, para o caso $d > 1$, quais planos em $\mathcal{M}_1^J(\alpha_3; \emptyset)$ satisfazem a equação (4.10c), em que ψ_1 e os ψ_{2k} ’s nessa equação são os que obtemos no Lema 4.9.

4.3 Fibrado de Obstrução

Introduziremos agora o Fibrado de Obstrução

$$\mathcal{O} \rightarrow [R, +\infty)^d \times (\mathcal{M}_1^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R})^d \quad (4.13)$$

cuja fibra sobre $(T_1, \dots, T_d, [u_1], \dots, [u_d]) =: (\mathbf{T}, [\mathbf{u}])$ é

$$\mathcal{O}_{(\mathbf{T}, [\mathbf{u}])} := \text{Hom}(\ker D_1^*, \mathbb{R}).$$

Definimos a seguinte seção S de \mathcal{O} :

$$S(\mathbf{T}, \mathbf{u})(\sigma) = \langle \sigma, \mathcal{F}_1 \rangle, \quad (4.14)$$

em que $\sigma \in \ker D_1^*$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno de L^2 .

Observação 4.11. Observe que se (\mathbf{T}, \mathbf{u}) é um zero de S , então

$$0 = S(\mathbf{T}, \mathbf{u})(\sigma) = \langle \sigma, \mathcal{F}_1 \rangle, \quad \forall \sigma \in \ker D_1^*,$$

ou seja,

$$\mathcal{F}_1 \perp \ker D_1^* \implies \Pi \mathcal{F}_1 = 0.$$

Por esse motivo, todo o esforço dessa seção será concentrado em descobrir se a seção S possui zeros.

Pelo Teorema 2.42 segue que

$$\eta_{2k}(s, t) = e^{\mu(s+T_k)} \bar{\varphi}(t) + h_k(s, t), \quad (4.15)$$

em que $\mu < 0$, $\bar{\varphi}$ são, respectivamente, autovalor e autovetor (associado a μ) do operador assintótico A_{α_3} e $h_k(s, t) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$ na topologia C^∞ . A menos de translações, podemos assumir que $\bar{\varphi} = c_k \varphi$, em que $c_k \in \{-1, 1\}$ e φ é um vetor unitário.

Como já vimos em (2.15) podemos enumerar os autovalores de A_{α_3} da seguinte forma:

$$\cdots \leq \mu_{-3} \leq \mu_{-2} \leq \mu_{-1} < 0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \cdots \quad (4.16)$$

Como $\mu_{CZ}^r(\alpha_3) = 2$, então

$$\max\{w(\mu_i) ; \mu_i < 0\} = 1 \implies w(\mu) \leq 1.$$

Por outro lado, por [HWZ95] também temos $w(\mu) \geq 1$ e assim, concluímos que $w(\mu) = 1$. Como α_3 é uma órbita hiperbólica, o auto-espaço associado a μ tem dimensão 1 e pelo Teorema 2.41 existe um autovalor $\bar{\mu} > 0$ tal que $w(\mu) = w(\bar{\mu})$. Pelo Teorema 2.41, segue que a aplicação $\mu \mapsto \text{wind}^r(\mu)$ é não decrescente. Além disso, existem dois autovalores com o mesmo *winding number* (contando multiplicidade). Concluímos que $\mu = \mu_{-1}$.

Como os autovetores de A_{α_3} formam uma base ortonormal para L^2 podemos definir $p : \ker D_1^* \rightarrow \langle \mu_{-1} \rangle$ como sendo a projeção canônica no auto-espaço associado a μ_{-1} . Defina também, para todo $\zeta \in [0, 1]$, a aplicação

$$S_\zeta(\mathbf{T}, \mathbf{u})(\sigma) = \left\langle \zeta \sigma + (1 - \zeta) p(\sigma), \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d c_k \partial_s(\beta_{2k}) e^{\mu_{-1}(s+T_k)} \varphi_{-1}(t) + \beta(\zeta) \cdot \tilde{\mathcal{F}}_1 \right\rangle,$$

em que

$$\tilde{\mathcal{F}}_1(s, t) := \mathcal{F}_1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d c_k \partial_s(\beta_{2k}) e^{\mu_{-1}(s+T_k)} \varphi_{-1}(t),$$

φ_{-1} é o vetor unitário que gera $\langle \mu_{-1} \rangle$ e as funções β e β_{2k} são como descritas em (4.1) e (4.3), respectivamente. Observe que

$$S_0(\mathbf{T}, \mathbf{u})(\sigma) = \left\langle p(\sigma), \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d c_k \partial_s(\beta_{2k}) e^{\mu_{-1}(s+T_k)} \varphi_{-1}(t) \right\rangle.$$

Lema 4.12. *Sejam $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$ e $(v_1, v_2) \in \mathcal{M}_{J,d}$. Considere o Fibrado de Obstrução construído a partir do building (v_1, v_2) . Suponha que $\text{ind}(v_1) = 2 - d$, onde $d > 1$. Suponha também que existam, a menos de translação, apenas um plano em $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)$ se aproximando da órbita de Reeb α_3 com autovetor principal φ_{-1} e apenas um plano em $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)$ se aproximando de α_3 com autovetor principal $-\varphi_{-1}$. Então, para cada $T_1 \geq R$ existe uma única $(d-1)$ -upla (T_2, \dots, T_d) e existe um número par de d -uplas de planos $([u_1], \dots, [u_d]) \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R}^d$ tais que*

$$S_0\left(T_1, T_2(T_1), \dots, T_d(T_1), [u_1], \dots, [u_d]\right) = 0.$$

Demonstração. Seja $(\mathbf{T}, \mathbf{u}) \in [R, +\infty)^d \times \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)^d/\mathbb{R}$. Observe que como $\text{ind}(u_1) = 1$ e $\dim \ker D_1 = 1$ (ver Lema 3.22), segue que

$$\dim \ker D_1^* = \dim \text{coker } D_1 = d - 1.$$

Assim, se $d > 1$ temos

$$\dim \ker D_1^* > 0.$$

Pelo Lema 2.45-(a), na vizinhança de um dos furos z_k , $k = 1, \dots, d$, um elemento $\sigma \in \ker D_1^*$ satisfaz

$$\sigma(s, t) = e^{-\mu-i s} \varphi(t) + \tilde{h}(s, t),$$

para algum $i > 0$, em que $\mu_{-i} < 0$ é como em (4.16), φ é um autovetor do operador assintótico A_{α_3} associado a μ_{-i} , e $\tilde{h}(s, t) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$. Pela Proposição 2.48, o *winding* local de σ perto de qualquer um desses furos negativos é

$$\text{wind}^T(\sigma; z_k) = 1.$$

Então, também temos que $\mu_{-i} = \mu_{-1}$ e $\varphi = b_k \varphi_{-1}$, em que $b_k \in \mathbb{R}$. Assim, na vizinhança de cada furo z_k , $1 \leq k \leq d$, temos $p(\sigma) = b_k e^{-\mu-1 s} \varphi_{-1}(t) \neq 0$. Denote por I_k o intervalo onde a função $\partial_s(\beta_{2k})$ é diferente de zero. Temos

$$\begin{aligned} S_0(\mathbf{T}, \mathbf{u})(\sigma) &= \left\langle b_k e^{-\lambda-1 s} \varphi_{-1}(t), \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d c_k \partial_s(\beta_{2k}) e^{\mu-1(s+T_k)} \varphi_{-1}(t) \right\rangle_{L^2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \left\langle b_k e^{-\mu-1 s} \varphi_{-1}(t), c_k \partial_s(\beta_{2k}) e^{\lambda-1(s+T_k)} \varphi_{-1}(t) \right\rangle_{L^2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \int_{\Sigma_1} \left(b_k e^{-\mu-1 s} \varphi_{-1}(t) \right) \left(c_k \partial_s(\beta_{2k}) e^{\mu-1(s+T_k)} \varphi_{-1}(t) \right) d\text{vol}_{\Sigma_1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \int_{I_k \times S^1} b_k c_k e^{\mu-1 T_k} \partial_s(\beta_{2k})(s) \varphi_{-1}(t)^2 ds \wedge dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d b_k c_k e^{\mu-1 T_k} \left(\int_{I_k} \partial_s(\beta_{2k})(s) ds \right) \left(\int_{S^1} \varphi_{-1}(t)^2 dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d b_k c_k e^{\mu-1 T_k}. \end{aligned}$$

A última igualdade acima vale pois, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_{I_k} \partial_s(\beta_{2k})(s) ds = 1 - 0 = 1$$

e, por definição,

$$\int_{S^1} \varphi_{-1}(t)^2 dt = \|\varphi_{-1}\|_{L^2}^2 = 1.$$

Observe que $v_1 = \mathbf{v}_1 \circ \phi$, em que ϕ é um d-recobrimento e \mathbf{v}_1 é uma curva *somewhere injective* que v_1 cobre. Como $\dim \ker D_{v_1}^* = d - 1$ e, para $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$ genérico, temos $\dim \ker D_{v_1}^* = 0$, já que, nesse caso, \mathbf{v}_1 é uma curva regular (ver Teorema 3.5), então, se tomarmos um elemento $\sigma \in \ker D_{v_1}^* \setminus \{0\}$, não podemos escrever $\sigma = \bar{\sigma} \circ \phi$ para algum $\bar{\sigma} \in \ker D_{v_1}^*$. Isso significa que na vizinhança de cada furo z_k o comportamento assintótico de σ pode ser diferente, isto é, b_k pode ser diferente de b_j para $k \neq j$.

Se $(\mathbf{T}, \mathbf{u}) \in [R, +\infty)^d \times (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R})^d$ é tal que $S_0(\mathbf{T}, \mathbf{u}) = 0$, então temos

$$\sum_{k=1}^d b_k(\sigma) c_k e^{\mu-1 T_k} = 0, \quad \forall \sigma \in \ker D_1^* \Leftrightarrow e^{\mu-1 T_1} = - \sum_{k=2}^d \frac{b_k(\sigma) c_k}{b_1(\sigma) c_1} e^{\mu-1 T_k}, \quad \forall \sigma \in \ker D_1^* \quad (4.17)$$

Dado $\sigma \in \ker D_1^*$, denote por

$$\sigma^k(s, t) = e^{-\mu-i s} b_k(\sigma) \varphi_{-1}(t) + h^k(s, t)$$

a representação assintótica de σ perto do furo negativo z_k . Sejam $b \in \mathbb{R}$ e $\sigma_1, \sigma_2 \in \ker D_1^*$, temos

$$\begin{aligned} (\sigma_1 + b\sigma_2)^k(s, t) &= \sigma_1^k(s, t) + b\sigma_2^k(s, t) \\ &= e^{-\mu-i s} b_k(\sigma_1) \varphi_{-1}(t) + h_1^k(s, t) + e^{-\mu-i s} b b_k(\sigma_2) \varphi_{-1}(t) + b h_2^k(s, t) \\ &= e^{-\mu-i s} (b_k(\sigma_1) + b b_k(\sigma_2)) \varphi_{-1}(t) + (h_1^k + b h_2^k)(s, t). \end{aligned}$$

Logo, $b_k(\sigma_1 + b\sigma_2) = b_k(\sigma_1) + b b_k(\sigma_2)$. Substituindo isso na equação (4.17) temos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^d b_k(\sigma_1 + b\sigma_2) c_k e^{-\mu-1 T_k} \\ &= \sum_{k=1}^d (b_k(\sigma_1) + b b_k(\sigma_2)) c_k e^{-\mu-1 T_k} \\ &= \sum_{k=1}^d b_k(\sigma_1) c_k e^{-\mu-1 T_k} + b \sum_{k=1}^d b_k(\sigma_2) c_k e^{-\mu-1 T_k}. \end{aligned}$$

Assim, se verificarmos que a equação (4.17) é satisfeita para todos os elementos de uma base de $\ker D_1^*$, então (4.17) é satisfeita para todos os elementos de $\ker D_1^*$.

Como $\dim \ker D_1^* = d - 1$, seja $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{d-1}\}$ uma base de $\ker D_1^*$. Então, queremos saber se o sistema

$$\begin{cases} \tilde{b}_1(\sigma_1) x_1 + \dots + \tilde{b}_{d-1}(\sigma_1) x_{d-1} = -e^{\mu-1 T_1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_1(\sigma_{d-1}) x_1 + \dots + \tilde{b}_{d-1}(\sigma_{d-1}) x_{d-1} = -e^{\mu-1 T_1} \end{cases} \quad (4.18)$$

possui solução e, caso tenha solução, se é única, em que

$$x_i := \frac{c_{i+1}}{c_1} e^{\mu-1 T_{i+1}}, \quad \tilde{b}_i(\sigma_j) := \frac{b_{i+1}(\sigma_j)}{b_1(\sigma_j)}, \quad i = 1, \dots, d-1$$

e c_1, T_1 estão fixados (que é equivalente a fixar uma parametrização do primeiro plano u_1). Seja

$$B := \begin{bmatrix} \tilde{b}_1(\sigma_1) & \dots & \tilde{b}_{d-1}(\sigma_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_1(\sigma_{d-1}) & \dots & \tilde{b}_{d-1}(\sigma_{d-1}) \end{bmatrix}.$$

Defina, para cada $i = 1, \dots, d-1$,

$$y_i = \left(\tilde{b}_1(\sigma_i), \dots, \tilde{b}_{d-1}(\sigma_i) \right).$$

Suponha que $\{y_1, \dots, y_{d-1}\}$ seja um conjunto linearmente dependente, isto é, existem i e números reais $a_j \in \mathbb{R}$ tais que

$$y_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{d-1} a_j y_j \Rightarrow \tilde{b}_k(\sigma_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{d-1} a_j \tilde{b}_k(\sigma_j), \forall k \Rightarrow b_{k+1}(\sigma_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{d-1} a_j b_{k+1}(\sigma_j), \forall 1 \leq k \leq d-1.$$

Tomando

$$\bar{\sigma} = \sigma_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{d-1} a_j \sigma_j,$$

então $\bar{\sigma} \in \ker D_1^*$ e, para cada $k = 2, \dots, d$, temos

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_k(s, t) &= \sigma_i^k(s, t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{d-1} a_j \sigma_j^k(s, t) \\ &= e^{-\mu-1s} \left(b_k(\sigma_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{d-1} a_j b_k(\sigma_j) \right) \varphi_{-1}(t) + h_i^k(s, t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{d-1} a_j h_j^k(s, t). \end{aligned}$$

Logo, $b_k(\bar{\sigma}) = 0$, o que é um absurdo. Assim, $\{y_1, \dots, y_{d-1}\}$ é um conjunto linearmente independente, isto é, B é inversível e o sistema (4.18) possui solução única $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$.

Portanto, para cada c_1 e T_1 , existem únicos $(\bar{c}_2, \dots, \bar{c}_d) \in \{-1, 1\}^{d-1}$ e $(\bar{T}_2, \dots, \bar{T}_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$ tais que

$$\bar{x}_i = \frac{\bar{c}_{i+1}}{c_1} e^{\mu-1\bar{T}_{i+1}}, \quad \forall 1 \leq i \leq d-1.$$

Chame de $-u$ o plano em $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)$ no qual o autovetor principal do operador assintótico associado a essa curva tem sinal oposto ao de u . Observe que se trocarmos c_1 por $-c_1$ no sistema (4.18), o que equivale a tomar o plano $-u_1$ em vez de u_1 no início de nossa construção, então,

$$\bar{x}_i = \frac{-\bar{c}_{i+1}}{-c_1} e^{\mu-1\bar{T}_{i+1}}, \quad \forall 1 \leq i \leq d-1$$

é solução desse sistema, isto é, $(T_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_d, -u_1, \dots, -u_d)$ também é um zero de S_0 . Logo, fixado T_1 o conjunto de planos $([u_1], \dots, [u_d]) \in (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R})^d$ tais que existem $(T_2, \dots, T_d) \in [R, +\infty)^{d-1}$ satisfazendo

$$S_0(T_1, T_2, \dots, T_d, u_1, \dots, u_d) = 0,$$

é par. □

Em vista do Lema 4.12, no que segue, deixaremos a primeira coordenada da base do Fibrado de Obstrução livre, e nas $d-1$ seguintes, faremos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} [R - T_1, +\infty)^{d-1} &\rightarrow [R, +\infty)^{d-1} \\ (\rho_1, \dots, \rho_{d-1}) &\mapsto (T_1 + \rho_1, \dots, T_1 + \rho_{d-1}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Definição 4.13. Definimos $\sharp S_\zeta^{-1}(0)$ como sendo a contagem de zeros de S'_ζ módulo \mathbb{Z}_2 , em que S'_ζ é uma perturbação de S_ζ que coincide com S_ζ no bordo de um compacto $K \subset [R - T_1, +\infty)^{d-1} \times (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R})^d$, e tal que todos os seus zeros são regulares, isto é, S'_ζ é transversal a seção nula em todo $(\mathbf{T}, \mathbf{u}) \in S_\zeta^{-1}(0)$.

Lema 4.14. *Seja $\varepsilon > 0$ o número real obtido no Lema 4.9. Então, existem um conjunto compacto $K \subset [R - T_1, +\infty)^{d-1}$ e um número real $\tilde{C} > 0$ tais que se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $\frac{\log \varepsilon}{\mu-1} < a \leq b < \frac{\log \tilde{C} \varepsilon^2}{\mu-1}$, temos*

$$([a, b] \times \partial K \times (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R})^d) \cap S_\zeta^{-1}(0) = \emptyset, \quad (4.20)$$

para todo $\zeta \in [0, 1]$. Além disso, fixado $T_1 \geq R$, o compacto $\{T_1\} \times K \times (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R})^d$ contém todos os zeros de $S_0(T_1)$, em que $S_0(T_1)$ é S_0 com a coordenada T_1 fixa.

Demonstração. Fixe os planos $[u_1], \dots, [u_d] \in (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R})^d$ e a translação do primeiro plano de forma que

$$\frac{\log \varepsilon}{\mu-1} < T_1 < \frac{\log \tilde{C} \varepsilon^2}{\mu-1},$$

em que \tilde{C} é um número real que será explicitado mais a frente.

Pelo Lema 4.12, existe $(\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_{d-1}) \in [R - T_1, +\infty)^{d-1}$ tal que $(T_1, T_1 + \hat{\rho}_1, \dots, T_1 + \hat{\rho}_{d-1}, u_1, \dots, u_d)$ é um zero de S_0 . Suponha que para todo compacto $\tilde{K} \subset [R - T_1, \infty)^{d-1}$ contendo $(\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_{d-1})$ existam $\zeta \in [0, 1]$ e $(\rho_1, \dots, \rho_{d-1}) \in \partial\tilde{K}$ tais que

$$S_\zeta(T_1, T_1 + \rho_1, \dots, T_1 + \rho_{d-1}, u_1, \dots, u_d) \equiv 0.$$

Então, obtemos sequências (ζ_n) e $(\rho_{k,n})$ tais que

$$S_{\zeta_n}(T_1, T_1 + \rho_{1,n}, \dots, T_1 + \rho_{d-1,n}, u_1, \dots, u_d) \equiv 0$$

e $\rho_{k,n} \rightarrow +\infty$ para algum $1 \leq k \leq d - 1$. Podemos reordenar os índices de forma que $\rho_{k_i,n}$ seja limitado para $i = 1, \dots, \hat{d}$ e $\rho_{k_i,n} \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ para $i = \hat{d} + 1, \dots, d - 1$. Passando para uma subsequência temos $\zeta_{n_j} \rightarrow \bar{\zeta}$ para algum $\bar{\zeta} \in [0, 1]$ e $\rho_{k_i,n_j} \rightarrow \bar{\rho}_i$ para algum $\bar{\rho}_i \in [R - T_1, +\infty)$, $i = 1, \dots, \hat{d}$. Ainda denotaremos essas subsequências por (ζ_n) e $(\rho_{k_i,n})$, respectivamente.

Note que quando $T_k \rightarrow +\infty$ a aplicação β_{2k,T_k} converge pontualmente para a função constante igual a 1. Assim, para todo $\sigma \in \ker D_1^*$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{\zeta_n}(T_1, T_1 + \rho_{1,n}, \dots, T_1 + \rho_{d-1,n}, u_1, \dots, u_d)\sigma \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}c_1b_1(\sigma)e^{\mu-1T_1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d-1} [c_k b_k(\sigma)e^{\mu-1(T_1+\rho_{k,n})}] + \beta(\zeta_n)\langle \sigma_{\zeta_n}, \tilde{\mathcal{F}}_1 \rangle \\ &= \frac{1}{2}c_1b_1(\sigma)e^{\mu-1T_1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\hat{d}} [c_{k_i} b_{k_i}(\sigma)e^{\mu-1(T_1+\bar{\rho}_i)}] + \beta(\bar{\zeta}) \left\langle \sigma_{\bar{\zeta}}, \frac{1}{2}\partial_s(\beta_{21})(h_1(s + T_1, t) + \psi_{21}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\hat{d}} [\partial_s(\beta_{2k_i})(h_{k_i}(s + T_1 + \bar{\rho}_i, t) + \psi_{2k_i})] + F(\psi_1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\hat{d}} (\nabla_{\psi_1} J) \partial_s(\beta_{2k_i}) \psi_{2k_i} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\hat{d}} \beta_{2k_i} (\nabla_{\psi_1} J) \nabla \psi_{2k_i} + \frac{1}{2} (\nabla_{\psi_1} J) \partial_s(\beta_{21}) \psi_{21} + \frac{1}{2} \beta_{21} (\nabla_{\psi_1} J) \nabla \psi_{21} + \tilde{R}_{11}(\psi_1, \psi_{21}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{\hat{d}} \tilde{R}_{1k_i}(\psi_1, \psi_{2k_i}) \right\rangle \end{aligned}$$

ou seja, para todo $\sigma \in \ker D_1^* \setminus \{0\}$, temos

$$\begin{aligned} e^{\mu-1T_1} &= -\chi(\sigma)^{-1} \beta(\bar{\zeta}) \left\langle \sigma_{\bar{\zeta}}, \partial_s(\beta_{21})(h_1(s + T_1, t) + \psi_{21}) + \sum_{i=1}^{\hat{d}} [\partial_s(\beta_{2k_i})(h_{k_i}(s + T_1 + \bar{\rho}_i, t) + \psi_{2k_i})] \right. \\ &\quad \left. + 2F(\psi_1) + \sum_{i=1}^{\hat{d}} [(\nabla_{\psi_1} J) \partial_s(\beta_{2d}) \psi_{2k_i} + \beta_{2k_i} (\nabla_{\psi_1} J) \nabla \psi_{2k_i}] + (\nabla_{\psi_1} J) \partial_s(\beta_{21}) \psi_{21} \right. \\ &\quad \left. + \beta_{21} (\nabla_{\psi_1} J) \nabla \psi_{21} + 2\tilde{R}_{11}(\psi_1, \psi_{21}) + 2 \sum_{i=1}^{\hat{d}} \tilde{R}_{1k_i}(\psi_1, \psi_{2k_i}) \right\rangle \end{aligned}$$

em que

$$\chi(\sigma) := c_1b_1(\sigma) + \sum_{i=1}^{\hat{d}} [c_{k_i} b_{k_i}(\sigma)e^{\mu-1\bar{\rho}_i}].$$

Chame

$$\begin{aligned}
v &:= \partial_s(\beta_{2d})(h_1(s + T_1, t) + \psi_{21}) + \sum_{i=1}^{\hat{d}} [\partial_s(\beta_{2k_i})(h_{k_i}(s + T_1 + \bar{\rho}_i, t) + \psi_{2k_i})] + 2F(\psi_1) \\
&+ \sum_{i=1}^{\hat{d}} [(\nabla_{\psi_1} J) \partial_s(\beta_{21}) \psi_{2k_i} + \beta_{2k_i} (\nabla_{\psi_1} J) \nabla \psi_{2h_i}] + (\nabla_{\psi_1} J) \partial_s(\beta_{21}) \psi_{21} + \beta_{21} (\nabla_{\psi_1} J) \nabla \psi_{21} \\
&+ 2\tilde{R}_{11}(\psi_1, \psi_{21}) + 2 \sum_{i=1}^{\hat{d}} \tilde{R}_{1k_i}(\psi_1, \psi_{2k_i})
\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
|\beta(\bar{\zeta})(\sigma_{\bar{\zeta}}, v)| &\leq \beta(\bar{\zeta}) \|\sigma_{\bar{\zeta}}\| \|v\| \\
&\leq \beta(\bar{\zeta}) \|\sigma_{\bar{\zeta}}\| [C_1 r^{-1} (e^{\mu-1} T_1 + \|\psi_{21}\|) + \sum_{i=1}^{\hat{d}} C_2 r^{-1} (e^{\mu-1} (T_1 + \bar{\rho}_i) + \|\psi_{2k_i}\|) \\
&\quad + 2C_3 (\|\psi_1\|^2 + \|\psi_1\| \|\nabla \psi_1\|) + \sum_{i=1}^{\hat{d}} (C_4 r^{-1} \|\psi_1\| \|\psi_{2k_i}\| + C_5 \|\psi_1\| \|\nabla \psi_{2k_i}\|) \\
&\quad + C_6 r^{-1} \|\psi_1\| \|\psi_{21}\| + C_7 \|\psi_1\| \|\nabla \psi_{21}\| + 2\|\tilde{R}_{11}(\psi_1, \psi_{21})\| + 2 \sum_{i=1}^{\hat{d}} \|\tilde{R}_{1k_i}(\psi_1, \psi_{2k_i})\|] \\
&\leq \beta(\bar{\zeta}) \|\sigma_{\bar{\zeta}}\| [C_1 r^{-1} (e^{\mu-1} T_1 + \|\psi_{21}\|_*) + \sum_{i=1}^{\hat{d}} C_2 r^{-1} (e^{\mu-1} (T_1 + \bar{\rho}_i) + \|\psi_{2k_i}\|_*) \\
&\quad + 2C_3 \|\psi_1\|_*^2 + \sum_{i=1}^{\hat{d}} C_8 \|\psi_1\|_* \|\psi_{2k_i}\|_* + C_9 \|\psi_1\|_* \|\psi_{21}\|_* + C_{10} \beta_{21} \|\psi_1\| \|\psi_{2k}\| + C_{10} \|\psi_1\|^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\hat{d}} C_{11} \beta_{2k_i} \|\psi_1\| \|\psi_{2k}\| + C_{11} \|\psi_1\|^2] \\
&\leq \beta(\bar{\zeta}) \|\sigma_{\bar{\zeta}}\| [C_1 r^{-1} (e^{\mu-1} T_1 + \varepsilon) + \sum_{i=1}^{\hat{d}} C_2 r^{-1} (e^{\mu-1} (T_1 + \bar{\rho}_i) + \varepsilon) + 2C_3 \varepsilon^2 + \sum_{i=1}^{\hat{d}} C_8 \varepsilon^2 \\
&\quad + C_9 \varepsilon^2 + C_{12} \varepsilon^2 + C_{13} \varepsilon^2] \\
&= \beta(\bar{\zeta}) \|\sigma_{\bar{\zeta}}\| [C_1 r^{-1} (e^{\mu-1} T_1 + \varepsilon) + \sum_{i=1}^{\hat{d}} C_2 r^{-1} (e^{\mu-1} (T_1 + \bar{\rho}_i) + \varepsilon) + C_{14} \varepsilon^2].
\end{aligned}$$

Observe que, se μ é um número real não nulo e $\sigma \in \ker D_1^* \setminus \{0\}$, então temos

$$\chi(\mu\sigma)^{-1} \|(\mu\sigma)_{\bar{\zeta}}\| = \chi(\sigma)^{-1} \|(\sigma)_{\bar{\zeta}}\|.$$

Tomando uma base $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{d-1}\}$, podemos identificar $\ker D_1^*$ com \mathbb{R}^{d-1} , cujas coordenadas são x_1, \dots, x_{d-1} . Assim, $L(x_1, \dots, x_{d-1}) := \chi(\sigma(x_1, \dots, x_{d-1}))^{-1} \|(\sigma(x_1, \dots, x_{d-1}))_{\bar{\zeta}}\|$ fica totalmente definida pelos valores tomados no subconjunto

$$S := \{x_1 + \dots + x_{d-1} - 1 = 0; 0 \leq x_i \leq 1, \forall 1 \leq i \leq d-1\}.$$

Como S é um subconjunto compacto, tomando $c := \max\{L(x_1, \dots, x_{d-1}); (x_1, \dots, x_{d-1}) \in S\}$, temos

$$\chi(\sigma)^{-1} \|(\sigma)_{\bar{\zeta}}\| \leq c, \forall \sigma \in \ker D_1^* \setminus \{0\}.$$

Então, se r for grande o suficiente, temos

$$|b_d(\sigma)^{-1}| |\beta(\bar{\zeta}) \langle \sigma_{\bar{\zeta}}, v \rangle| \leq c(C_1 + \hat{d}C_2 + C_{14})\varepsilon^2, \quad \forall \sigma \in \ker D_1^* \setminus \{0\}.$$

Assim, fazendo $\tilde{C} = c(C_1 + \hat{d}C_2 + C_{14})$, temos

$$e^{\mu_{-1}T_1} = |c_d e^{\mu_{-1}T_1}| \leq \tilde{C}\varepsilon^2 \Rightarrow \mu_{-1}T_1 \leq \log(\tilde{C}\varepsilon^2) \Rightarrow T_1 \geq \frac{\log(\tilde{C}\varepsilon^2)}{\mu_{-1}}$$

o que contradiz nossa hipótese inicial. Portanto, obtemos um compacto $K_{([u_1], \dots, [u_{d-1}])} \subset [R - T_1, +\infty)^{d-1}$ tal que

$$[a, b] \times \partial(K_{([u_1], \dots, [u_{d-1}])}) \times \{([u_1], \dots, [u_{d-1}])\} \cap S_{\bar{\zeta}}^{-1}(0) = \emptyset$$

para todo $\zeta \in [0, 1]$. Assim, como $\mathcal{M}_1^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R}$ é uma 0-variedade compacta, isto é, um número finito de pontos, segue que

$$K = \bigcup_{([u_1], \dots, [u_{d-1}]) \in (\mathcal{M}_1^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R})^{d-1}} K_{([u_1], \dots, [u_{d-1}])}$$

é um compacto que satisfaz (4.20). \square

Observação 4.15. Se deixarmos T_0 variar, fazendo, por exemplo, $T_0 = T_1 \pm \rho$ com $\rho \in \mathbb{R}$ apropriado, e fizermos $\varepsilon = 1/T$ nos Lema 4.7 e Lema 4.8, então segue que, nas coordenadas em (4.20),

$$\lim_{T_1 \rightarrow +\infty} \|\psi_{2k}\|_* = \lim_{T_1 \rightarrow +\infty} \|\psi_1\|_* = 0,$$

$1 \leq k \leq d$. Além disso, para todo $T_1 \in [R, +\infty)$, existe $T > 0$ tal que

$$T < e^{-\mu_{-1}T_1} < \frac{T^2}{\tilde{C}} \Rightarrow \frac{\log 1/T}{\mu_{-1}} < T_1 < \frac{\log \tilde{C}/T^2}{\mu_{-1}}.$$

Corolário 4.16. Para cada $T_1 \geq R$ existe um compacto $K \subset [R - T_1, +\infty)^{d-1}$ que contém os zeros de $S_0(T_1)$ e tal que o número $\#(S_{\bar{\zeta}}^{-1}(0) \cap \{(T_1)\} \times K \times (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R})^d)$ não depende de $\zeta \in [0, 1]$.

Definição 4.17. Dado $\delta > 0$, seja $\tilde{\mathcal{G}}_\delta(v_1, v_2)$ o conjunto de aplicações que são δ -próximas, no sentido da Definição 7.1 de [HT09], de algum building J -holomorfo $(v_1, v_2) \in \mathcal{M}_{J,d}$. Seja $\mathcal{G}_\delta(v_1, v_2)$ o subconjunto de $\tilde{\mathcal{G}}_\delta(v_1, v_2)$ tal que se $v \in \mathcal{G}_\delta(v_1, v_2)$, então v é J -holomorfa.

Definição 4.18. Dadas coordenadas $(T_1, \dots, T_d, [u_1], \dots, [u_d]) \in [R, +\infty)^d \times (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R})^d$, defina por $v(T_1, \dots, T_d, u_1, \dots, u_d)$ a curva como na construção de (4.4).

Definição 4.19. Dado $\delta > 0$, defina $\mathcal{U}_\delta \subset [R, +\infty)^d \times (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R})^d$ o conjunto de elementos $(T_1, \dots, T_d, [u_1], \dots, [u_d])$ tais que $v(T_1, \dots, T_d, u_1, \dots, u_d)$ pertencem a $\tilde{\mathcal{G}}_\delta(v_1, v_2)$.

Teorema 4.20 ([HT09], Teorema 7.3). Dado $\delta > 0$ temos:

- Se $R' > 0$ é suficientemente grande com respeito a δ , então $[R', +\infty)^d \times (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R})^d$ está contido em \mathcal{U}_δ .
- Se $r > 1$ for escolhido suficientemente grande e $\delta > 0$ for suficientemente pequeno com respeito a r , então a Aplicação de Gluing, que é definida por

$$\begin{aligned} G : S^{-1}(0) &\rightarrow \mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1, \alpha_2) \\ (T_1, \dots, T_d, u_1, \dots, u_d) &\mapsto v(T_1, \dots, T_d, u_1, \dots, u_d) \end{aligned} \quad (4.21)$$

restringe-se a um homeomorfismo

$$G : S^{-1}(0) \cap \mathcal{U}_\delta \rightarrow \mathcal{G}_\delta(v_1, v_2). \quad (4.22)$$

4.4 Contando os zeros do Fibrado de Obstrução

Definição 4.21. Seja $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma $(2n - 1)$ -variedade de contato coorientada fechada. Uma $(2n)$ -variedade simplética compacta (W, ω) é chamada um *strong filling* de (M, ξ) se $\partial W = M$ e existe um campo de vetores de Liouville Y definido em uma vizinhança de ∂W que aponta para fora transversalmente e satisfaz $\lambda = i_Y \omega|_M$.

Nessa seção vamos assumir que (M, λ) é uma 3-variedade de contato que possui um strong filling (W, ω) que satisfaz uma condição chamada **asfericidade simplética**, isto é:

Para toda aplicação $f \in C^\infty(S^2, W)$ temos

$$\int_{S^2} f^* \omega = 0. \quad (4.23)$$

Observação 4.22. Note que se $\pi_2(W) = 0$, então a condição acima é satisfeita.

Seja $\iota : M \hookrightarrow W$ a inclusão de M em W . A existência de um campo de vetores de Liouville em uma vizinhança de ∂W nos permite encontrar um $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança de M em (W, ω) que é simplectomorfa a

$$\left((-\varepsilon, 0] \times M, d(e^r \tilde{\lambda}) \right),$$

em que $\tilde{\lambda} := \iota^*(i_Y \omega)$. Isso nos permite ‘colar’ uma meia simplectização de M no bordo de W como segue:

Definição 4.23. Definimos por $(\widehat{W}, \widehat{\omega}) := (W, \omega) \cup_M ([0, +\infty) \times M, d(e^s \lambda))$ a variedade simplética obtida identificando-se $\{0\} \times M$ com $\partial W = M$, em que $\lambda = \lambda|_M$.

Para o que segue, também será preciso tomar uma estrutura quase-complexa suave \widehat{J} em \widehat{W} compatível com $\widehat{\omega}$ tal que se escolhermos uma estrutura quase-complexa suave J_W em W , a aplicação \widehat{J} satisfaz:

$$\widehat{J} = \begin{cases} J, & \text{em } [1, +\infty) \times M \\ J_W, & \text{em } W \end{cases}, \quad (4.24)$$

em que J é a estrutura quase-complexa em $\mathbb{R} \times M$. (Mais informações sobre a variedade simplética $(\widehat{W}, \widehat{\omega})$ podem ser encontradas em [Wen16]).

Definição 4.24. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ órbitas de Reeb periódicas e $g \geq 0$. Vamos definir

$$\mathcal{M}_g^{\widehat{J}}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \widehat{W}),$$

como sendo o espaço de curvas \widehat{J} -holomorfas $u : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \widehat{W}$ de energia finita que têm fins positivos assintóticos a $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ e gênero g , módulo reparametrizações holomorfas no domínio. E denotamos o subconjunto de $\mathcal{M}_g^{\widehat{J}}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \widehat{W})$ formado pelas curvas com índice de Fredholm p por $\mathcal{M}_{g,p}^{\widehat{J}}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \widehat{W})$.

Observação 4.25. Observe que com a definição acima, $\mathcal{M}_{0,1}^{\widehat{J}}(\alpha; \widehat{W})$ é o espaço de planos \widehat{J} -holomorfos $u : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{W}$ de energia finita, índice de Fredholm 1, gênero zero e que têm fim positivo assintótico a α .

Nesse ponto precisamos estender nossa definição de building para incluir aqueles que são limites de seqüências de curvas com imagens no filling \widehat{W} .

Definição 4.26. Seja (Σ, j) uma superfície de Riemann fechada mas não necessariamente conexa. Chamamos de **superfície de Riemann nodal** com $l \geq 0$ pontos marcados e $N \geq 0$ nódulos a upla $(\Sigma, j, \Lambda, \Delta)$ em que $\Lambda \subset \Sigma$ é um conjunto ordenado de l pontos e $\Delta \subset \Sigma \setminus \Lambda$ é um conjunto não-ordenado de $2N$ pontos equipado com uma involução $\sigma : \Delta \rightarrow \Delta$. Cada par $\{z, \sigma(z)\}$, $z \in \Delta$, é chamado de um **nódulo**. Também dizemos que $(\Sigma, j, \Lambda, \Delta)$ é **estável** se cada componente conexa de $\Sigma \setminus (\Lambda \cup \Delta)$ tem característica de Euler negativa. Chamamos de **gênero aritmético** de $\Sigma \setminus (\Lambda \cup \Delta)$ o gênero da superfície fechada $\widehat{\Sigma}$ obtida fazendo somas conexas em Σ em cada nódulo $\{z, \sigma(z)\} \subset \Delta$.

Definição 4.27 ([Wen16]). Dados inteiros $g, m, N_+ \geq 0$, definimos um building holomorfo de altura $1|N_+$ com gênero aritmético g e m pontos marcados, como uma upla

$$\mathbf{u} = (\Sigma, j, \Gamma^+, \Lambda, \Delta^{\text{nd}}, \Delta^{\text{br}}, L, \Phi, u),$$

em que cada um dos dados são definidos como segue:

- O domínio $(\Sigma, j, \Gamma^+ \cup \Lambda, \Delta^{\text{nd}} \cup \Delta^{\text{br}})$ é uma superfície de Riemann nodal estável não necessariamente conexa de gênero aritmético g , em que $|\Lambda| = m$ e assumimos que a involução em $\Delta^{\text{nd}} \cup \Delta^{\text{br}}$ preserva os subconjuntos Δ^{nd} e Δ^{br} . Os pontos de Λ são os pontos marcados e os pontos em Γ^+ são seus furos positivos.
- A aplicação L é chamada de estrutura de nível e é uma função localmente constante

$$L : \Sigma \rightarrow \{0, 1, \dots, N\},$$

que atinge todos os valores em $\{0, \dots, N\}$, exceto possivelmente por 0 e satisfaz:

- (1) $L(z^+) = L(z^-)$ para cada nóculo $\{z^+, z^-\} \subset \Delta^{\text{nd}}$;
 - (2) Cada par $\{z^+, z^-\} \subset \Delta^{\text{br}}$ pode ser rotulado de forma que $L(z^+) - L(z^-) = 1$;
 - (3) $L(\Gamma^+) = \{N_+\}$.
- A aplicação Φ é uma escolha de aplicação ortogonal que reverte a orientação para cada par $\{z^+, z^-\} \subset \Delta^{\text{br}}$.
 - u é tal que

$$u : (\dot{\Sigma} := \Sigma \setminus (\Gamma^+ \cup \Delta^{\text{br}}), j) \rightarrow \bigcup_{N \in \{0, \dots, N_+\}} (\widehat{W}_N, J_N)$$

em que

$$(\widehat{W}_N, J_N) := \begin{cases} (\mathbb{R} \times M, J), & N \in \{1, \dots, N_+\} \\ (\widehat{W}, \widehat{J}), & N = 0 \end{cases}$$

e u manda $\dot{\Sigma} \cap L^{-1}(N)$ em \widehat{W}_N para cada N de forma que a restrição $u|_{\dot{\Sigma} \cap L^{-1}(N)}$ é uma curva pseudo-holomorfa cujo domínio não é necessariamente conexo.

Notação 4.28. Para cada $N = 0, \dots, N_+$ chamaremos

$$u_N : (\dot{\Sigma}_N, j) \rightarrow \begin{cases} (\mathbb{R} \times M, J), & \text{se } N > 0 \\ (\widehat{W}, \widehat{J}), & \text{se } N = 0 \end{cases}.$$

o N -ésimo nível de u , em que $\dot{\Sigma}_N := (\Sigma \setminus (\Gamma^+ \cup \Delta^{\text{br}})) \cap L^{-1}(N)$.

Observação 4.29. Observe que a forma como estamos numerando os níveis aqui é diferente da forma como numeramos os níveis na definição de building do capítulo 3.

Lembre que estamos denotando por τ uma escolha de trivialização da distribuição de hiperplanos ξ ao longo de toda órbita periódica simples.

Definição 4.30. Dadas duas aplicações J -holomorfas u e v em $\mathbb{R} \times M$, definimos o **número de interseção relativo** $i^\tau(u, v)$ de u e v por

$$i^\tau(u, v) = \text{int}(u, v_\tau),$$

em que v_τ é uma aplicação obtida perturbando-se v próximo dos furos em uma direção determinada pela trivialização τ , e $\text{int}(u, v_\tau)$ denota o número de interseção computado perturbando-se u e v_τ em subconjuntos compactos dos seus domínios de modo que sejam transversais e então conta-se as interseções com sinal.

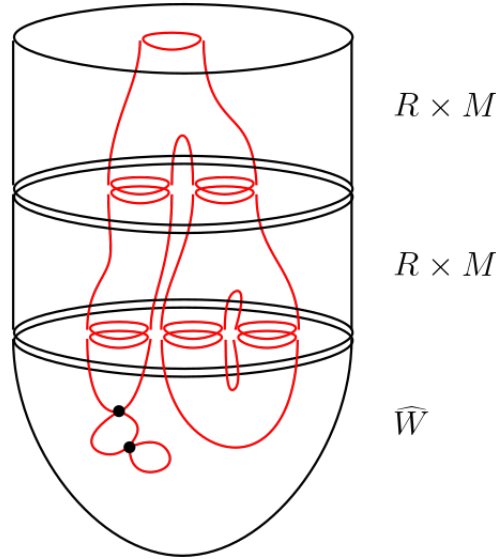


Figura 4.4: Building holomorfo de gênero aritmético 1, três níveis, com um fim positivo e nenhum fim negativo.

Definição 4.31. Sejam $u : (\Sigma \setminus \Gamma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$ e $v : (\Sigma' \setminus \Gamma', j') \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$ curvas pseudo-holomorfas. Definimos o **número de interseção generalizado** $[u] * [v]$ entre u e v como segue: assumindo que u é assintótica em $z \in \Gamma$ a uma órbita de Reeb $\alpha_z^{d_z}$ e similarmente que v é assintótica em $w \in \Gamma'$ a uma órbita de Reeb $\alpha_w^{d_w}$, definimos

$$[u] * [v] := i^\tau(u, v) + \sum_{\substack{(z,w) \in \Gamma \times \Gamma' \\ \alpha_z = \alpha_w \\ d_z d_w > 0}} d_z d_w \max \left\{ \frac{\lfloor \mu_{CZ}^\tau(\alpha_z^{d_z})/2 \rfloor}{|d_z|}, \frac{\lfloor \mu_{CZ}^\tau(\alpha_w^{d_w})/2 \rfloor}{|d_w|} \right\}.$$

Seja α uma órbita periódica simples par, ou o recobrimento duplo de uma órbita hiperbólica ímpar. Em ambos os casos, o auto-espaço associado a μ_{-1} , o maior autovalor negativo do operador assintótico A_α , tem dimensão 1. O Lema 5.13 de [Sie11] nos diz que $m\mu_{-1}$ é o maior autovalor negativo de A_{α^m} , que $\ker(A_{\alpha^m} - m\mu_{-1})$ é 1-dimensional para todo inteiro positivo m e que se $\varphi_{-1} \in \ker(A_\alpha - \mu_{-1}I)$ é uma base, então $\varphi_{-1}^m(t) := \varphi_{-1}(mt)$ é uma base para $\ker(A_{\alpha^m} - m\mu_{-1}I)$.

Considere agora uma curva J -holomorfa $u : (\Sigma \setminus \Gamma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$ que em um furo $z \in \Sigma$ é assintótica a α^m para algum $m > 0$. Então, por um caso especial do Teorema 3.7 de [Sie11], segue que existe $\varphi_u \in \ker(A_\alpha - \mu_{-1}I)$, possivelmente zero, tal que (após uma reparametrização no domínio)

$$u = (ms, mt, e^{\mu_{-1}ms} \varphi_u(mt) + h_u(s, t)), \quad \forall t, s \gg 0, \quad (4.25)$$

é uma representação assintótica de u perto de z . Considere uma outra curva J -holomorfa $v : (\Sigma' \setminus \Gamma', j') \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$ que um furo $z' \in \Sigma'$ é assintótica a α^n , $n > 0$. Pela mesma discussão acima, encontramos $\varphi_v \in \ker(A_\alpha - \mu_{-1}I)$ tal que

$$v = (ns, nt, e^{\mu_{-1}ns} \varphi_v(nt) + h_v(s, t)) \quad (4.26)$$

é uma representação assintótica de v perto de z' . Quando os vetores φ_u e φ_v forem ambos não nulos, dizemos que u e v se aproximam de um recobrimento de α na **mesma direção** (por **direções opostas**) se existe $c > 0$ (resp. $c < 0$) tal que

$$\varphi_u = c\varphi_v.$$

Observação 4.32. Vale esclarecer que em (4.25) não estamos usando a notação que Siefring costuma usar, mas a notação usada por Hofer, Wysocki e Zehnder.

Observação 4.33. Observe que α ter índice de Conley-Zehnder par é essencial para que possamos comparar duas curvas que tenham fins assintóticos a um recobrimento de α , já que o Teorema de Siefring usado só se

aplica nessa condição.

Teorema 4.34 ([Sie11, Teorema 2.5]). *Seja α uma órbita periódica simples par, ou o recobrimento duplo de uma órbita hiperbólica ímpar. Sejam $u := (\bar{a}, \bar{u}) : (\Sigma \setminus \Gamma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$ e $v := (\bar{b}, \bar{v}) : (\Sigma' \setminus \Gamma', j') \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$ curvas pseudo-holomorfas conexas. Assuma que nos furos $z \in \Gamma$ e $w \in \Gamma'$, u e v são assintóticas a um recobrimento de α na mesma direção e que não existem vizinhanças U de z e V de w tais que $\bar{u}(U \setminus \{z\}) = \bar{v}(V \setminus \{w\})$. Então,*

$$[u] * [v] > 0.$$

Definição 4.35. *Seja $u : (\Sigma \setminus \Gamma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$ uma curva pseudo-holomorfa. Denote por $[u; z]$ o fim de u que é assintótico a órbita de Reeb α^d no furo $z \in \Gamma$, em que d é um inteiro positivo. Definimos*

$$d_0(u; z) := w_-^\tau(u; z) - \text{wind}_\infty^\tau(u; z),$$

em que $w_-^\tau(u; z)$ e $\text{wind}_\infty^\tau(u; z)$ são como definidos em (2.16) e (2.17), respectivamente.

Teorema 4.36 ([Sie11, Corolário 5.9]). *Sejam $u : (\Sigma \setminus \Gamma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$ e $v : (\Sigma' \setminus \Gamma', j') \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$ curvas pseudo-holomorfas e assuma que nenhuma componente de u ou v estejam contidas em um cilindro trivial. Então, são equivalentes:*

1. *O número de interseção generalizado $[u] * [v] = 0$.*
2. *Valem todos os seguintes itens:*
 - (a) *A aplicação u não intersecta quaisquer dos limites assintóticos positivos de v .*
 - (b) *A aplicação v não intersecta quaisquer dos limites assintóticos positivos de u .*
 - (c) *Se α é uma órbita periódica tal que em $z \in \Gamma$ a curva u é assintótica a α^{d_z} e em $z' \in \Gamma'$ a curva v é assintótica a $\alpha^{d_{z'}}$, então: se d_z e $d_{z'}$ são ambos positivos, obtemos $d_0(u; z) = 0$ e*

$$\frac{w_-^\tau(u; z)}{d_z} \geq \frac{w_-^\tau(v; z')}{d_{z'}}. \quad (4.27)$$

Definição 4.37. *Sejam M uma 3-variedade suave e k um inteiro positivo. Chamamos um loop $P \subset M$ de um k -não-nó se existe uma imersão de um disco $\phi : D \rightarrow M$ tal que*

- $\phi : D \setminus \partial D \rightarrow M \setminus P$ é um mergulho;
- $\phi : \partial D \rightarrow P$ é um k -recobrimento.

Quando P for um 1-não-nó, o chamaremos apenas de não-nó.

Teorema 4.38 ([HWZ95, Teorema 1.3]). *Seja (M, λ) uma 3-variedade de contato compacta, conexa (orientável), em que λ é uma 1-forma de contato tight. Sejam $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e $u := (\bar{a}, \bar{u}) : \mathbb{C} \rightarrow (\mathbb{R} \times M, J)$ um plano J -holomorfo de energia finita não constante com fim positivo assintótico a uma órbita de Reeb α e tal que $d(u) = k$ (ver (2.4)). Suponha que α é uma órbita não-degenerada tal que $\mu_{CZ}^\tau(\alpha) \leq 3$ e que, além disso, α é um k -não-nó com respeito a classe de homotopia de u . Então, $\bar{u}(\mathbb{C}) \cap \alpha(\mathbb{R}) = \emptyset$.*

Teorema 4.39 ([HWZ95, Teorema 1.4]). *Sejam (M, λ) uma 3-variedade de contato fechada e $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Sejam $u := (\bar{a}, \bar{u}), v := (\bar{b}, \bar{v}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ dois planos J -holomorfos de energia finita assintóticos a uma mesma órbita de Reeb não-degenerada α . Assuma que:*

- *o número de Chern do fibrado complexo $(u \sharp v)^* \xi \rightarrow S^2$ calculado na classe fundamental de S^2 é zero, em que $u \sharp v : S^2 = \mathbb{C} \cup \bar{\mathbb{C}} \rightarrow M$ e $\bar{\mathbb{C}}$ é o conjunto dos números complexos com a orientação oposta ao domínio de u ao longo do círculo α no infinito;*
- $d(u) = d(v)$;
- $\mu_{CZ}^\tau(\alpha) \leq 3$;

- $\bar{u}(\mathbb{C}) \cap \alpha(\mathbb{C}) = \emptyset = \bar{v}(\mathbb{C}) \cap \alpha(\mathbb{C})$.

Então, $\bar{u}(\mathbb{C}) = \bar{v}(\mathbb{C})$ ou $\bar{u}(\mathbb{C}) \cap \bar{v}(\mathbb{C}) = \emptyset$.

Teorema 4.40 (Wendl, Teorema 7.2 em [Wen16]). *Sejam (M, λ) um 3-variedade de contato que possui um strong filling (W, ω) e $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l$ órbitas de Reeb não degeneradas. Seja $(\widehat{W}, \hat{\omega}) = (W, \omega) \cup_M ([0, +\infty) \times M, d(e^s \lambda))$ a variedade simplética da Definição 4.23. Fixe $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e um aberto $U \subset W^r$, em que*

$$W^r := W \cup_M ((0, r] \times M), \quad r > 0.$$

Então, existe um subconjunto denso

$$\mathcal{J}_{\text{reg}}^U(\widehat{W}, \hat{\omega}) \subset \left\{ \hat{J} \in \mathcal{J}(\widehat{W}, \hat{\omega}); \hat{J} = J \text{ em } \widehat{W} \setminus U \right\}$$

tal que se $\hat{J} \in \mathcal{J}_{\text{reg}}^U(\widehat{W}, \hat{\omega})$, toda curva $u \in \mathcal{M}_g^{\hat{J}}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_l; \widehat{W})$ que possui um ponto injetivo em U é Fredholm-regular. Além disso, essas curvas formam uma variedade suave de dimensão

$$-(2 - 2g - k - l) + 2c_\tau(u) + \sum_{i=1}^k \mu_{CZ}^\tau(\alpha_i) - \sum_{i=1}^l \mu_{CZ}^\tau(\beta_i).$$

Teorema 4.41. *Seja (M, ξ) uma 3-variedade de contato coorientável, tight, compacta, conexa e tal que $\pi_2(M) = 0$. Assuma que M possui um strong filling W que satisfaz a condição de asfericidade simplética. Seja λ uma forma de contato fracamente convexa tal que $\ker \lambda = \xi$ e $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Seja α uma órbita de Reeb não-degenerada simples tal que $\mu_{CZ}^\tau(\alpha) = 2$. Suponha que α é um não-nó. Então, ou não existem planos J -holomorfos de índice 1 com furo positivo assintótico a α , ou existem, a menos de translação, somente dois desses planos J -holomorfos e, além disso, eles se aproximam de α por direções opostas.*

Demonstração. Se $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)/\mathbb{R} = \emptyset$, então está acabado. Agora para o restante da demonstração assuma que $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)/\mathbb{R} \neq \emptyset$.

Tomando $\hat{J} \in \mathcal{J}_{\text{reg}}^U(\widehat{W}, \hat{\omega})$, então pelo Teorema 4.40 segue que $\mathcal{M}_{0,1}^{\hat{J}}(\alpha; \widehat{W})$ é uma variedade de dimensão 1. Observe que todo plano J -holomorfo cuja imagem está inteiramente contida em $[1, +\infty) \times M$ também é \hat{J} -holomorfo, já que $\hat{J}|_{[1, +\infty) \times M} = J$. Seja \bar{u} um plano J -holomorfo com furo positivo assintótico a órbita de Reeb α e cuja imagem está inteiramente contida em $[1, +\infty) \times M$. A menos de translação podemos assumir que o ponto de mínimo de \bar{u} está em $\{1\} \times M$. Tome X a componente conexa de $\mathcal{M}_{0,1}^{\hat{J}}(\alpha; \widehat{W})$ que contém $\bar{u} = (\bar{a}, \bar{v})$. Como X possui a família a 1-parâmetro dada pelas translações de \bar{u} , isto é, $\bar{u}_\rho(z) = (\bar{a}(z) + \rho, \bar{v}(z))$ para $\rho \geq 0$, segue que X não é difeomorfo a S^1 . Logo, X é difeomorfa a um intervalo aberto.

Tome $(u_n) \subset X$ uma sequência de planos de energia finita tal que $u_0 = \bar{u}$ e que converge para o extremo de X que não corresponde as translações de \bar{u} . Pelo Teorema de Compacidade SFT, (u_n) possui uma subsequência (que ainda chamaremos de u_n) que converge para um building \mathbf{u} com gênero aritmético zero e onde $|\Gamma^+| = 1$, isto é, o building possui apenas um furo positivo.

Suponha que \mathbf{u} é um building tal que $N_+ = 0$, então, \mathbf{u} tem imagem em \widehat{W} . Assim, segue que \mathbf{u} é um plano com furo positivo assintótico a α ou um plano com esferas não constantes anexadas. Mas, como X é maximal segue que \mathbf{u} não é um plano pois, caso contrário, sempre podemos estender a sequência u_n . Nesse caso, \mathbf{u} é um plano com esferas não constantes anexadas. No entanto, a condição de asfericidade simplética

junto com $\partial_s u = -\widehat{J}(u)\partial_t u$ nos dão

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S^2} u^* \omega = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\partial_s u, \partial_t u) ds dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \omega(-\widehat{J}(u)\partial_t u, \partial_t u) ds dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\partial_t u, \widehat{J}(u)\partial_t u) ds dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \|\partial_t(u)\|_{\widehat{J}}^2 ds dt > 0 \end{aligned}$$

e também chegamos em uma contradição.

Vamos analisar agora o caso em que $N_+ \geq 1$. Nesse caso, u_{N_+} é uma curva J -holomorfa com um fim positivo assintótico a α e p furos negativos. Suponha que $p \geq 1$. Como α é simples segue que u_{N_+} é uma curva *somewhere injective*. Assim, $\text{ind}(u_{N_+}) \geq 1$ e chamando de β_1, \dots, β_p os fins negativos de u_{N_+} temos

$$\begin{aligned} \text{ind}(u_{N_+}) &= -\chi(u_{N_+}) + \mu_{CZ}^\tau(\alpha) - \sum_{i=1}^p \mu_{CZ}^\tau(\beta_i) \\ &= -(2 - 1 - p) + 2 - \sum_{i=1}^p \mu_{CZ}^\tau(\beta_i) \\ &= p + 1 - \sum_{i=1}^p \mu_{CZ}^\tau(\beta_i). \end{aligned}$$

Logo,

$$p + 1 - \sum_{i=1}^p \mu_{CZ}^\tau(\beta_i) \geq 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^p \mu_{CZ}^\tau(\beta_i) \leq p.$$

Como λ é fracamente convexa e os β_i 's são contráteis segue que $\mu_{CZ}^\tau(\beta_i) \geq 2$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$ e assim, temos

$$2p \leq \sum_{i=1}^p \mu_{CZ}^\tau(\beta_i) \leq p \Rightarrow p \leq 0$$

e chegamos em uma contradição, pois assumimos inicialmente que $p \geq 1$.

Portanto, $p = 0$, isto é, u é um plano J -holomorfo com furo positivo assintótico a α . Observe agora que u não é uma reparametrização de \bar{u} , pois caso contrário, $\mathcal{M}_{0,1}^{\widehat{J}}(\alpha; \widehat{W})$ não seria uma variedade. Assim, como para cada $[\bar{u}] \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)/\mathbb{R}$ obtemos um segundo plano J -holomorfo u com furo positivo assintótico a α tal que $[u] \neq [\bar{u}]$, segue que $\sharp \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)/\mathbb{R} \geq 2$.

Para a segunda parte da demonstração tome dois planos distintos $[u], [v] \in \mathcal{M}_{0,1}^{\widetilde{J}}(\alpha, \emptyset)/\mathbb{R}$, em que $u = (\tilde{a}_u, \tilde{u})$ e $v = (\tilde{a}_v, \tilde{v})$. Observe que

$$\text{wind}_\infty^\tau(u; \infty) = \text{wind}_\infty^\tau(v; \infty) = 1,$$

pois $\mu_{CZ}^\tau(\alpha) = 2$ e, além disso, o auto-espço do operador assintótico A_α cujos elementos tem *winding number* 1 é um espço 1-dimensional. Assim, tomando as representações assintóticas de u e v temos

$$u = (s, t, e^{\mu s} \varphi_u(t) + h_u(s, t)) \text{ e } v = (s, t, e^{\mu s} \varphi_v(t) + h_v(s, t)),$$

em que μ é um autovalor negativo do operador assintótico A_α e $\varphi_u = c\varphi_v$ com $c \neq 0$.

Suponha que $c > 0$, isto é, φ_u e φ_v tem a mesma direção. Como (M, ξ) é compacta, conexa, tight e α é uma órbita de Reeb não degenerada simples, $\mu_{CZ}^\tau(\alpha) = 2$ e α é um não-nó, então segue do Teorema 4.38 que u não intersecta o limite assintótico positivo de v , assim como v também não intersecta o limite assintótico positivo de u . Além disso, a equação (4.27) é trivialmente satisfeita e temos $d_0(u; \infty) = 0$ já que,

no nosso caso, o maior autovalor negativo do operador assintótico A_α coincide com o autovalor principal no qual u se aproxima de α . Logo, pelas equivalências do Teorema 4.36 obtemos $[u] * [v] = 0$. Por outro lado, o fato de u não intersectar a órbita α junto com as hipóteses de $\pi_2(M) = 0$ e $\mu_{CZ}^\tau(\alpha) = 2$ nos permitem usar o Teorema 4.39 e concluir que não existem vizinhanças do infinito U e V tais que $\tilde{u}(U) = \tilde{v}(V)$ (pois caso contrário, se houver tais vizinhanças do infinito, temos $\tilde{u}(C) = \tilde{v}(C)$, isto é, u é uma translação de v , o que contradiz $[u] \neq [v]$). Assim, as hipóteses do Teorema 4.34 são satisfeitas e, com isso, obtemos $[u] * [v] > 0$. Logo, como $[u] * [v]$ não pode ser simultaneamente zero e maior que zero, concluímos que $c < 0$, isto é, u e v se aproximam de α em direções opostas. Em particular, também conseguimos que $\sharp \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)/\mathbb{R} \leq 2$, pois caso houvesse um terceiro plano em $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)/\mathbb{R}$, dois desses planos teriam, necessariamente, de se aproximar de α na mesma direção e a discussão acima mostra que isso leva a uma contradição.

Portanto, $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \emptyset)/\mathbb{R}$ possui exatamente dois planos J -holomorfos que se aproximam de α por direções opostas. \square

Corolário 4.42. *Seja (M, ξ) uma 3-variedade de contato coorientável, tight, fechada, conexa e tal que $\pi_2(M) = 0$. Assuma que (M, ξ) possua um strong filling (W, ω) que satisfaz a condição de asfericidade simplética. Sejam λ uma forma de contato fracamente convexa, não-degenerada tal que $\ker \lambda = \xi$ e $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Assuma ainda que a seguinte condição é satisfeita: se α é uma órbita de Reeb contrátil com $\mu_{CZ}^\tau(\alpha) = 2$, então α é um não-nó e um mergulho. Nessas condições, fixados $T_1 \geq R$ e $K \subset [R - T_1, +\infty)^{d-1}$ compacto (na construção do fibrado de Obstrução) temos*

$$\sharp \left(S^{-1}(0) \cap \{T_1\} \times K \times (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R})^d \right) = 0 \pmod{2}. \quad (4.28)$$

Demonstração. No caso em que $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R} = \emptyset$, então (4.28) é trivialmente satisfeita. Agora suponha que $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R} \neq \emptyset$. Pelo Teorema 4.41 segue que existem planos que se aproximam de α_3 por direções opostas. Assim, podemos usar o Lema 4.12 e concluir que para $T_1 \geq R$ existe uma única $(d-1)$ -upla (T_2, \dots, T_d) e existe um número par de d -uplas de planos $([u_1], \dots, [u_d]) \in (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R})^d$ tais que

$$S_0(T_1, \dots, T_d, u_1, \dots, u_d) = 0.$$

Além disso, pelo Corolário 4.16, fixado $T_1 \geq R$, segue que

$$\sharp S^{-1}(0) = \sharp S_0^{-1}(0) \pmod{2}$$

em compactos $K \subset [R - T_1, +\infty)^{d-1}$. Portanto, a equação (4.28) é satisfeita, como queríamos. \square

Definição 4.43. *Sejam α_1, α_2 órbitas de Reeb periódicas e $d \geq 1$ tais que $\mu_{CZ}^\tau(\alpha_1^d) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2^d) = 2$. Defina o conjunto $\widetilde{\mathcal{M}}_{J,d} := \widetilde{\mathcal{M}}_{J,d}(\alpha_1^d, \alpha_2^d)$ da seguinte forma: $\widetilde{\mathcal{M}}_{J,1} := \mathcal{M}_{J,1}$ e para $d > 1$,*

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{J,d} = \{(v_1, v_2) \in \mathcal{M}_{J,d}; (v_{21}, \dots, v_{2d}) \in S^{-1}(0)\}.$$

Os resultados desse capítulo podem ser resumidos no seguinte teorema:

Teorema 4.44. *Seja (M, ξ) uma 3-variedade de contato coorientável, tight, fechada, conexa e tal que $\pi_2(M) = 0$. Assuma que (M, ξ) possua um strong filling (W, ω) que satisfaça a condição de asfericidade simplética. Sejam λ uma forma de contato fracamente convexa, não-degenerada tal que $\ker \lambda = \xi$ e $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$. Assuma ainda que a seguinte condição é satisfeita: se α é uma órbita de Reeb contrátil com $\mu_{CZ}^\tau(\alpha) = 2$, então α é um não-nó e um mergulho. Então, fixados órbitas de Reeb α_1^d e α_2^d tais que $\mu_{CZ}^\tau(\alpha_1^d) - \mu_{CZ}^\tau(\alpha_2^d) = 2$ e $(v_1, v_2) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{J,d}$, existe uma seqüência de cilindros em $\mathcal{M}_2^J(\alpha_1^d; \alpha_2^d)$ que converge para (v_1, v_2) , isto é, o subconjunto $\widetilde{\mathcal{M}}_{J,d}$ de $\mathcal{M}_{J,d}$ satisfaz $\widetilde{\mathcal{M}}_{J,d} \subset \overline{\mathcal{M}_2^J(\alpha_1^d; \alpha_2^d)}$. Além disso, $\sharp \widetilde{\mathcal{M}}_{J,d} = 0 \pmod{2}$.*

Demonstração. Seja $(v_1, v_2) \in \mathcal{M}_{J,d}$. Na seção 4.1 construímos uma curva v_* (ela depende de translações T_0, T_1, \dots, T_d) na vizinhança de (v_1, v_2) com fim positivo em α_1^d e fim negativo em α_2^d . No entanto, v_* não é necessariamente J -holomorfa. Na seção 4.2 perturbamos v_* por meio de seções $\psi_1, \psi_{21}, \dots, \psi_{2d}$ para a

obter uma curva v (ver equação (4.4)). Pelo Lema 4.6 segue que $v \in \mathcal{M}_2^J(\alpha_1^d; \alpha_2^d)$ se for possível encontrar seções $\psi_1, \psi_{21}, \dots, \psi_{2d}$ que satisfazem as equações (4.10a), (4.10b), (4.10c). Quando $d = 1$, o Lema 4.10 nos diz que podemos encontrar ψ_1 e ψ_{21} tais que v é J-holomorfa. Agora, quando $d > 1$ o Lema 4.9 nos diz que podemos encontrar tais seções que satisfazem simultaneamente as equações (4.10a) e (4.10b). A equação (4.10c) restante é satisfeita exatamente quando o building (v_1, v_2) é tal que os planos v_{21}, \dots, v_{2d} que compõem o nível v_2 são um zero da seção S do fibrado de obstrução. Finalmente, Corolário 4.42 nos diz que $\#\widetilde{\mathcal{M}}_{J,d} = 0 \pmod{2}$. \square

Capítulo 5

Homologia

5.1 Motivação

Seja (M, λ) uma variedade de contato compacta. Considere $S^1 \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Por meio da próxima proposição vemos que as trajetórias do campo de Reeb são pontos críticos do funcional $\mathcal{A} : C^\infty(S^1, M) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{A}(\alpha) = \int_{S^1} \alpha^* \lambda. \quad (5.1)$$

Proposição 5.1. *Seja $\alpha \in C^\infty(S^1, M)$ e suponha que $\dot{\alpha}(s) \neq 0$ para todo $s \in S^1$. Então, α é um ponto crítico de \mathcal{A} se, e somente se, α é uma reparametrização de uma órbita fechada do campo de Reeb de período $\mathcal{A}(\alpha)$.*

Demonstração. Seja $\alpha_t : S^1 \rightarrow M, t \in [0, 1]$, uma família a 1-parâmetro de curvas suaves com $\alpha_0 = \alpha$ tal que

$$X = \left. \frac{d}{dt} \alpha_t \right|_{t=0}.$$

Veja que

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_\alpha(X) &= \left. \frac{d}{dt} (\mathcal{A} \circ \alpha_t) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left(\int_{S^1} \alpha_t^* \lambda \right) \right|_{t=0} \\ &= \int_{S^1} \left. \frac{d}{dt} \alpha_t^* \lambda \right|_{t=0} \\ &= \int_{S^1} \alpha^* (\mathcal{L}_X \lambda) \\ &= \int_{S^1} \alpha^* (i_X d\lambda + d(i_X \lambda)) \\ &= \int_{S^1} d\lambda(X, \dot{\alpha}(s)) ds + \int_{S^1} \alpha^* (d(i_X \lambda)) \\ &= \int_{S^1} d\lambda(X, \dot{\alpha}(s)) ds \end{aligned}$$

Então, se α for uma órbita fechada do campo de Reeb, temos

$$d\lambda(X, \dot{\alpha}(s)) = 0$$

para todo campo de vetores X ao longo de α . Assim,

$$d\mathcal{A}_\alpha(X) = 0 \quad \forall X,$$

ou seja, α é um ponto crítico de \mathcal{A} .

Por outro lado, se α é um ponto crítico de \mathcal{A} temos

$$\int_{S^1} d\lambda(X, \dot{\alpha}(s)) ds = 0$$

para todo campo de vetores X ao longo de α . Suponha que

$$d\lambda(X, \dot{\alpha}(s)) \neq 0$$

para algum campo de vetores X ao longo de α . Sem perda de generalidade, assumamos também que existe $s_0 \in S^1 \simeq \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ tal que

$$d\lambda(X, \dot{\alpha}(s_0)) > 0$$

Por continuidade, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$d\lambda(X, \dot{\alpha}(s)) > 0, \quad \forall s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \subset \mathbb{R}/T\mathbb{Z}.$$

Seja f uma função bump tal que $f(s_0) = 1$ e $\text{supp} f \subset (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$. Então, fX é um campo de vetores ao longo de α tal que

$$d\lambda(f(s)X, \dot{\alpha}(s)) \geq 0 \quad \forall s \in S^1.$$

Assim, temos

$$\int_{S^1} d\lambda(f(s)X, \dot{\alpha}(s)) > 0,$$

o que contradiz o fato de α ser ponto crítico de \mathcal{A} . Logo,

$$d\lambda(X, \dot{\alpha}(s)) = 0$$

para todo campo de vetores X ao longo de α e todo $s \in S^1$. E isso implica que $\dot{\alpha}$ é proporcional a R_λ . Se $\lambda(\dot{\alpha}) > 0$, então α é uma parametrização de uma órbita de Reeb T -periódica γ

$$\int_{S^1} \alpha^* \lambda = \int_{[0, T]} \gamma^* \lambda = \int_0^T \lambda(\dot{\gamma}(s)) ds = T \tag{5.2}$$

é o período de γ . □

Dado o princípio variacional acima associado as órbitas de Reeb periódicas, veremos a seguir que é possível construir uma versão da Teoria de Morse para o funcional ação \mathcal{A} .

5.2 Homologia de Contato Cilíndrica

Homologia de Contato Cilíndrica (que definiremos a seguir) pode ser considerada como uma variação da Homologia de Morse para o funcional ação \mathcal{A} . Como na Homologia de Morse, os complexos de cadeias da Homologia de Contato Cilíndrica são gerados por pontos críticos de \mathcal{A} . O equivalente às linhas do fluxo gradiente ligando dois pontos críticos é um cilindro pseudo-holomorfo com fins assintóticos às duas órbitas de Reeb. E o operador assintótico associado a uma órbita periódica, que representa o fluxo de Reeb linearizado ao longo de uma órbita periódica faz o papel da Hessiana de \mathcal{A} em um ponto crítico. A escolha da estrutura quase-complexa corresponde a escolha da métrica Riemanniana.

Uma primeira diferença entre essas duas homologias é que, enquanto na Homologia de Morse usamos todos pontos críticos do funcional para gerar o complexo de cadeias, na Homologia de Contato Cilíndrica usamos apenas um subconjunto dos pontos críticos de \mathcal{A} , mais precisamente, o conjunto das órbitas periódicas boas (veja Definição 2.12). Escolhemos apenas esse subconjunto por questões de orientabilidade, como é bem explicado em [BM04]. Manteremos essa convenção, apesar de que nesse trabalho não nos preocupamos com orientabilidade. Uma segunda diferença entre essas homologias é que na Homologia de

Morse usa-se o índice de Morse para graduar o complexo de cadeias. Na Homologia de Contato Cilíndrica usa-se o índice de Conley-Zehnder (a menos de uma constante).

Definição 5.2. Sejam $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma 3-variedade de contato coorientável, fechada, onde λ é uma 1-forma de contato não-degenerada. Denotaremos por $CC(M, \lambda)$ o espaço vetorial sobre \mathbb{Z}_2 gerado por $\mathcal{P}^b(\lambda)$ (ver Definição 2.12). Podemos ainda estabelecer uma graduação nesse espaço atribuindo a cada órbita de Reeb α o inteiro

$$|\alpha| = \mu_{CZ}^\tau(\alpha) - 1.$$

Assim, podemos considerar o subespaço vetorial

$$CC_i(M, \lambda) := \text{espaço vetorial sobre } \mathbb{Z}_2 \text{ gerado por } \mathcal{P}_i^b(\lambda),$$

em que $\mathcal{P}_i^b(\lambda)$ é como na Definição 2.34. Seja $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Definimos o operador linear $\partial_i^J : CC_i(M, \lambda) \rightarrow CC_{i-1}(M, \lambda)$ tal que nos geradores de $CC_i(M, \lambda)$, ∂_i^J é definido da seguinte forma: seja $\alpha \in \mathcal{P}_i^b(\lambda)$, definimos

$$\partial_i^J(\alpha) = \sum_{\beta \in \mathcal{P}_{i-1}^b(\lambda)} \sum_{u \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \beta)/\mathbb{R}} \left(\frac{d(\alpha)}{d(u)} \pmod{2} \right) \beta, \quad (5.3)$$

em que $d(u), d(\alpha) \in \mathbb{Z}$ são como definidos, respectivamente, em (2.4) e (2.1). E $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \beta)$ é o espaço de cilindros J-holomorfos com fim positivo em α , fim negativo em β , gênero zero e índice de Fredholm 1 (ver Definição 2.38). Estendemos ∂_i^J para o restante de $CC_i(M, \lambda)$ linearmente.

Da definição acima surge naturalmente a pergunta de quando o operador ∂_i^J está bem-definido e sob quais circunstâncias temos $\partial_{i-1}^J \circ \partial_i^J = 0$. No que segue, apresentamos condições suficientes para essas duas questões.

Observação 5.3. A aplicação ∂^J está bem-definida quando o somatório no lado direito de (5.3) é finito, isto é, quando as condições abaixo são simultaneamente satisfeitas:

1. Para cada órbita de Reeb $\alpha \in \mathcal{P}^b(\lambda)$, o conjunto

$$\left\{ \beta \in \mathcal{P}^b(\lambda) ; \mu_{CZ}^\tau(\beta) = \mu_{CZ}^\tau(\alpha) - 1 \text{ e } \exists u \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \beta)/\mathbb{R} \right\}$$

é finito.

2. $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \beta)/\mathbb{R}$ é um conjunto finito para quaisquer órbitas de Reeb $\alpha, \beta \in \mathcal{P}^b(\lambda)$ tais que $\mu_{CZ}^\tau(\beta) = \mu_{CZ}^\tau(\alpha) - 1$.

Lema 5.4 ([HN16, Lema 4.2]). *Seja (M, λ) uma 3-variedade de contato, em que λ é uma forma de contato não-degenerada. Seja $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$ (ver Teorema 3.5). Então:*

- (i) $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \beta)/\mathbb{R}$ é uma 0-variedade para quaisquer órbitas de Reeb $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(\lambda)$.
- (ii) $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha; \beta)/\mathbb{R}$ é uma 1-variedade sempre que $\alpha, \beta \in \mathcal{P}^b(\lambda)$.
- (iii) Se $\alpha, \beta \in \mathcal{P}^b(\lambda)$, então a função

$$\begin{aligned} d : \mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha; \beta)/\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{N}^* \\ u &\mapsto d(u) \end{aligned}$$

é localmente constante.

Lema 5.5. *Sejam (M, λ) uma 3-variedade de contato fechada, em que λ é uma forma de contato não-degenerada e fracamente convexa. Assuma que toda órbita contrátil com índice de Conley-Zehnder 2 é simples. Seja $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$ (ver Teorema 3.5). Então, ∂^J está bem-definido.*

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathcal{P}^b(\lambda)$. Defina o conjunto

$$B := \left\{ \beta \in \mathcal{P}^b(\lambda) ; \mu_{CZ}^{\tau}(\beta) = \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) - 1 \text{ e } \exists u \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \beta)/\mathbb{R} \right\}.$$

Observe que como u não é um cilindro trivial, segue que $\int u^* d\lambda > 0$ (ver [HWZ95, Teorema 6.11]). Assim, se T_α e T_β são, respectivamente, os períodos de α e β , então

$$0 < \int u^* d\lambda = T_\alpha - T_\beta \Rightarrow T_\beta < T_\alpha.$$

Como λ é uma forma de contato não degenerada em M segue que existe uma quantidade finita de órbitas de Reeb T -periódicas com $T \leq T_\alpha$. Assim, o conjunto B é finito e o item 1 da Observação 5.3 está verificado.

Como $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$, segue pela parte (i) do Lema 5.4 que $\mathcal{M}_1^J(\alpha; \beta)/\mathbb{R}$ é uma 0-variedade para quaisquer órbitas de Reeb periódicas $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(\lambda)$. Agora, tomando uma sequência de cilindros v_k em $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \beta)/\mathbb{R}$, existe, pelo Teorema de compacidade SFT, uma subsequência que converge para um building v que tem um fim positivo assintótico a α , um fim negativo assintótico a β , e cujo índice de Fredholm é 1. Pelo Teorema 3.12 (b), segue que v é um elemento de $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \beta)/\mathbb{R}$. Portanto, $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha; \beta)/\mathbb{R}$ é uma 0-variedade compacta e o item 2 da Observação 5.3 também está verificado. \square

Lema 5.6 ([HN16, Lema 4.3]). *Sejam (M, λ) uma 3-variedade de contato e $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$. Sejam $\alpha_1, \bar{\alpha}, \alpha_2 \in \mathcal{P}(\lambda)$, em que $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{P}^b(\lambda)$ e $\bar{\alpha} = \gamma^{d(\bar{\alpha})}$ para uma órbita de Reeb simples γ . Fixe um ponto $p = \gamma(\bar{t})$ na imagem de $\bar{\alpha}$. Tome cilindros J -holomorfos $u_1 \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \bar{\alpha})/\mathbb{R}$, $u_2 \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}; \alpha_2)/\mathbb{R}$ e parametrizações $\phi_i : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ de u_i , $i = 1, 2$, respectivamente, tais que*

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \pi_M \phi_1(s, 0) = p = \lim_{s \rightarrow +\infty} \pi_M \phi_2(s, 0), \quad (5.4)$$

em que $\pi_M : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ é a projeção canônica. Então a quantidade de fins de $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}$ que convergem para o building (u_1, u_2) é

$$\frac{\text{mdc}(d(u_1), d(u_2))d(\bar{\alpha})}{d(u_1)d(u_2)} = \frac{\#\{(\phi_1, \phi_2) ; \phi_1 \text{ e } \phi_2 \text{ satisfazem (5.4)}\}}{\#\{\mathbb{Z}/d(\bar{\alpha}) \cdot (\phi_1, \phi_2) ; \phi_1 \text{ e } \phi_2 \text{ estão fixados}\}},$$

em que a ação de $\mathbb{Z}/d(\bar{\alpha})$ nos pares (ϕ_1, ϕ_2) é dada por

$$j \cdot (\phi_1, \phi_2)(s, t) = (\phi_1, \phi_2)(s, j/d(\bar{\alpha}) + t), \quad j \in \mathbb{Z}/d(\bar{\alpha}).$$

Além disso, cada um dos fins de $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}$ que convergem para o building (u_1, u_2) consiste de cilindros com multiplicidade igual a $\text{mdc}(d(u_1), d(u_2))$.

Lema 5.7 ([HN16, Lema 2.5-(b)]). *Sejam (M, ξ) uma 3-variedade de contato e $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$. Sejam u um cilindro J -holomorfo não trivial com um fim positivo e um fim negativo. Seja \bar{u} o cilindro J -holomorfo somewhere injective que u cobre. Se $\text{ind}(u) = 1$ e u tem um fim em uma órbita de Reeb ruim, então o correspondente fim de \bar{u} também é uma órbita de Reeb ruim.*

Uma vez que (5.3) está bem definida, apresentamos a seguir hipóteses sobre formas de contato fracamente convexas tais ∂_i^J é um operador de bordo e, portanto, fica bem definida uma homologia do complexo de cadeias $(CC(M, \lambda), \partial^J)$.

Teorema 5.8. *Seja $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma 3-variedade de contato coorientável, tight, fechada, conexa e tal que $\pi_2(M) = 0$. Assuma que (M, ξ) possua um strong filling (W, ω) que satisfaça a condição de asfericidade simplética (ver (4.23)) e que λ seja uma 1-forma de contato fracamente convexa e não-degenerada. Seja $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$. Assuma ainda que as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) toda órbita de Reeb contrátil de índice de Conley-Zehnder 2 é um não-nó e um mergulho;
- (ii) toda órbita de Reeb contrátil de índice de Conley-Zehnder 3 é um mergulho.

Nestas condições, vale $\partial_{i-1}^J \circ \partial_i^J = 0$ para todo i .

Demonstração. Primeiro observe que dado $\alpha_1 \in \mathcal{P}_i^b(\lambda)$ temos

$$\partial_{i-1}^J \circ \partial_i^J(\alpha_1) = \sum_{\alpha_2 \in \mathcal{P}_{i-2}^b(\lambda)} \sum_{\bar{\alpha} \in \mathcal{P}_{i-1}^b(\lambda)} \sum_{u_1 \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \bar{\alpha})/\mathbb{R}} \sum_{u_2 \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}; \alpha_2)/\mathbb{R}} \left(\frac{d(\alpha_1)d(\bar{\alpha})}{d(u_1)d(u_2)} \pmod{2} \right) \alpha_2.$$

Pelos itens (ii) e (iii) do Lema 5.4, segue que $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}$ é uma 1-variedade e a multiplicidade das curvas é constante em cada componente conexa. Assim, para cada componente conexa X de $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}$, podemos associar o inteiro $d(X) := d(u)$, em que $u \in X$.

Afirmção 1. Para quaisquer órbitas de Reeb $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{P}^b(\lambda)$ a variedade $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}$ possui uma compactificação $\overline{\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}}$ que é uma 1-variedade compacta com bordo.

Demonstração da Afirmção 1. Seja u_k uma sequência em $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}$. Pelo Teorema da Compacidade SFT, existe uma subsequência que converge para um building u de índice 2. Pelo Teorema 3.12 segue que u é um dos seguintes casos:

- (i) um cilindro de índice 2.
- (ii) um building com dois níveis, ambos cilindros de índice 1.
- (iii) um building com dois níveis (u_1, u_2) , em que $u_1 \in \mathcal{M}_{0,0}^J(\gamma^{d_1+d_2}; \gamma^{d_1}, \gamma^{d_2})$ e u_2 é a união de um cilindro trivial sobre γ^{d_1} e um plano J -holomorfo de índice 2 com fim positivo em γ^{d_2} .
- (iv) um building com dois níveis (u_1, u_2) , em que $u_1 \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\gamma^{d_1+d_2}; \gamma^{d_1}, \gamma^{d_2})$ e u_2 é a união de um cilindro trivial sobre γ^{d_1} e um plano J -holomorfo de índice 1 com fim positivo em γ^{d_2} .
- (v) um building com três níveis (u_1, u_2, u_3) , em que $u_1 \in \mathcal{M}_{0,0}^J(\gamma^{d_1+d_2}; \gamma^{d_1}, \gamma^{d_2})$, u_2 é a união de um cilindro trivial sobre γ^{d_1} e um cilindro de índice 1 com fim positivo em γ^{d_2} e fim negativo em uma órbita de Reeb $\tilde{\gamma}$ e $u_3 \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\tilde{\gamma}; \emptyset)$.
- (vi) um building com dois níveis (u_1, u_2) , em que
 - u_1 é um d -recobrimento múltiplo (sem pontos de ramificação) de uma curva pseudoholomorfa somewhere injective u_1 , em que $u_1 \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\gamma_1; \gamma_2, \gamma_3)$. Além disso, u_1 tem índice $2 - d$, tem um furo positivo em γ_1^d e $d + 1$ furos negativos, um em γ_2^d e os outros d em γ_3 .
 - u_2 tem $d+1$ componentes: uma componente é o cilindro trivial sobre γ_2^d e as outras componentes são planos J -holomorfos de índice 1 com fim positivo em γ_3 .

Observe que nos casos (iii), (iv) e (v) temos $\alpha_1 = \gamma^{d_1+d_2}$, $\alpha_2 = \gamma^{d_1}$ e no caso (vi) temos $\alpha_1 = \gamma_1^d$ e $\alpha_2 = \gamma_2^d$.

Se u é como no item (iii), então a órbita γ^{d_2} é contrátil (já que existe um plano J -holomorfo de índice 2 com fim positivo assintótico a γ^{d_2}) e $\mu_{CZ}^T(\gamma^{d_2}) = 3$. Assim, como, por hipótese, toda órbita de Reeb contrátil com índice de Conley-Zehnder 3 é um mergulho, segue que γ^{d_2} é um mergulho, isto é, $d_2 = 1$. No entanto, o Lema 3.23 nos diz que nenhuma subsequência de u_k pode convergir para u nesse caso. Assim, um building como no item (iii) não está no bordo de $\overline{\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}}$.

Se u é como no item (iv), então $\mu_{CZ}^T(\gamma^{d_2}) = 2$. Como essa órbita é contrátil segue, por hipótese, que γ^{d_2} é um mergulho e isto implica que $d_2 = 1$. Assim, o Lema 3.32 nos diz que nenhuma subsequência de u_k converge para u nesse caso. Finalmente, se u é como no item (v) segue que $\tilde{\gamma}$ é uma órbita contrátil e $\mu_{CZ}^T(\tilde{\gamma}) = 2$. Como existe um cilindro J -holomorfo de índice 1 com fim positivo em γ^{d_2} e fim negativo em $\tilde{\gamma}$ segue que γ^{d_2} também é contrátil e tem índice de Conley-Zehnder 3. Então, por hipótese, $d_2 = 1$ e do Lema 3.33 segue que nenhuma subsequência de u_k converge para u . Logo, buildings como nos itens (iv) e (v) também não pertencem ao bordo de $\overline{\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}}$.

Logo,

$$\overline{\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R} \cup \bigcup_{\bar{\alpha}} (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \bar{\alpha})/\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}; \alpha_2)/\mathbb{R}) \cup \mathcal{M}_J,$$

em que \mathcal{M}_J é como na Definição 4.3.

Como cada nível de um building em $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \bar{\alpha})/\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}; \alpha_2)/\mathbb{R}$ tem índice 1, segue que, para $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$, esse building é formado por curvas J -holomorfas regulares. Logo, o Teorema de Gluing “usual” (isto é, a mesma construção no Capítulo 4 com u_1 sendo uma curva regular com só um fim negativo) nos garante que fixado $(u_1, u_2) \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \bar{\alpha})/\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}; \alpha_2)/\mathbb{R}$ existe uma família a 1-parâmetro de cilindros de índice 2 que converge para (u_1, u_2) . Já os buildings em \mathcal{M}_J estão no bordo de $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}$ pela construção que fizemos no Capítulo 4. Portanto,

$$\overline{\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}} = \mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R} \cup \bigcup_{\bar{\alpha}} (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \bar{\alpha})/\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}; \alpha_2)/\mathbb{R}) \cup \mathcal{M}_J,$$

em que

$$\partial \left(\overline{\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}} \right) = \bigcup_{\bar{\alpha}} (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \bar{\alpha})/\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}; \alpha_2)/\mathbb{R}) \cup \mathcal{M}_J.$$

Vale notar que para os elementos $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_J$ só existe um fim de uma componente conexa de $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}$ que converge para u , já que as órbitas de Reeb que são limites assintóticos dos planos em \mathbf{u} são mergulhos. O mesmo não acontece com os elementos em $\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \bar{\alpha})/\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}; \alpha_2)/\mathbb{R}$, como é mostrado no Lema 5.6. Nesse Lema vemos que para cada building $(u_1, u_2) \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \bar{\alpha})/\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}; \alpha_2)/\mathbb{R}$ existem

$$c(u_1, u_2) = \frac{\text{mdc}(d(u_1), d(u_2))d(\bar{\alpha})}{d(u_1)d(u_2)}$$

fins de $\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}$ que convergem para (u_1, u_2) , correspondendo a quantidade de parametrizações distintas (ϕ_1^j, ϕ_2^j) de (u_1, u_2) , $j = 1, \dots, c(u_1, u_2)$. No entanto, se considerarmos as parametrizações distintas (ϕ_1^j, ϕ_2^j) , $j = 1, \dots, c(u_1, u_2)$, em vez da classe de equivalência (u_1, u_2) (o que equivale a acrescentar um ponto no bordo de cada componente conexa que converge para (u_1, u_2)) segue que $\overline{\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}}$ é uma 1-variedade compacta com bordo.

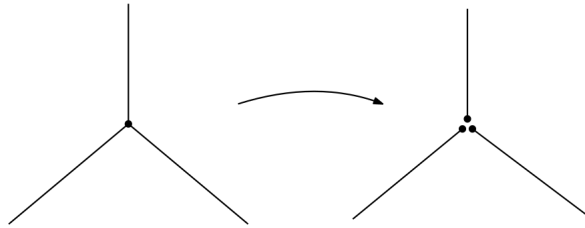


Figura 5.1: Ilustração da compactificação de $\overline{\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R}}$ como uma 1-variedade com bordo

□

Afirmção 2. Vale a seguinte igualdade

$$\sum_{X \in \pi_0(\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R})} \frac{\#\partial X}{d(X)} = \sum_{\bar{\alpha} \in \mathcal{P}^b(\lambda)} \sum_{u_1 \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \bar{\alpha})/\mathbb{R}} \sum_{u_2 \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}; \alpha_2)/\mathbb{R}} \left(\frac{d(\bar{\alpha})}{d(u_1)d(u_2)} \pmod{2} \right),$$

em que $\#\partial X$ é contado módulo 2.

Demonstração da Afirmação 2. Como vimos na Afirmação 1

$$\sum_{X \in \pi_0(\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R})} \#\partial X = \# \left\{ \bigcup_{\bar{\alpha}} (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \bar{\alpha})/\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}; \alpha_2)/\mathbb{R}) \right\} + \#\mathcal{M}_J.$$

Para órbitas de Reeb periódicas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, definimos $\mathcal{N}_{d=1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \subset \mathcal{M}$ como o conjunto dos buildings (u_1, u_2) , em que $u_1 \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \alpha_2, \alpha_3)$ e u_2 é a união de um cilindro trivial sobre α_2 e um plano J -holomorfo de índice 1 com furo positivo assintótico a α_3 . Pelo que foi mostrado no Capítulo 4 temos

$$\#\mathcal{M}_J = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \#\mathcal{N}_{d=1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \sum_{d \geq 2} \sum_{u_1 \in \mathcal{M}_{0,2-d}^J(\alpha_1; \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_3)/\mathbb{R}} \#S^{-1}(0),$$

em que a seção S do Fibrado de Obstrução depende do inteiro $d \geq 2$, das órbitas de Reeb $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e da curva J -holomorfa u_1 . Observe que

$$\#\mathcal{N}_{d=1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \# \{ \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \alpha_2, \alpha_3)/\mathbb{R} \} \cdot \# \{ \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R} \}.$$

Pelo Teorema 4.41 segue que

$$\#\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_3; \emptyset)/\mathbb{R} = 0 \pmod{2}$$

o que implica que

$$\#\mathcal{N}_{d=1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0 \pmod{2}.$$

Fixados $d \geq 2$, órbitas de Reeb $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{P}(\lambda)$ e

$$u_1 \in \mathcal{M}_{0,2-d}^J(\alpha_1; \alpha_2, \underbrace{\alpha_3, \dots, \alpha_3}_{d \text{ vezes}})/\mathbb{R}$$

segue do Corolário 4.42 que $\#S^{-1}(0) = 0 \pmod{2}$. Logo, $\#\mathcal{M}_J = 0 \pmod{2}$.

Vamos considerar agora $\# \left[(\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1, \bar{\alpha})/\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}, \alpha_2)/\mathbb{R}) \right]$ nos casos em que $\bar{\alpha}$ é uma órbita de Reeb boa e quando é uma órbita de Reeb ruim.

Caso 1: Suponha que $\bar{\alpha} \in \mathcal{P}^b(\lambda)$. Pelo Lema 5.6 segue que

$$\# \bigcup_{\bar{\alpha} \in \mathcal{P}^b(\lambda)} (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \bar{\alpha})/\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}; \alpha_2)/\mathbb{R}) = \sum_{\bar{\alpha} \in \mathcal{P}^b(\lambda)} \sum_{u_1 \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \bar{\alpha})/\mathbb{R}} \sum_{u_2 \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}; \alpha_2)/\mathbb{R}} \frac{k(u_1, u_2)d(\bar{\alpha})}{d(u_1)d(u_2)},$$

onde $k(u_1, u_2) := \text{mdc}(d(u_1), d(u_2))$. Mas se (u_1, u_2) é um ponto de bordo da componente conexa $X \in \pi_0(\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R})$, o Lema 5.6 também nos diz que $d(X) = k(u_1, u_2)$. Assim,

$$\frac{k(u_1, u_2)d(\bar{\alpha})}{d(u_1)d(u_2)} \cdot \frac{1}{d(X)} = \frac{k(u_1, u_2)d(\bar{\alpha})}{d(u_1)d(u_2)} \cdot \frac{1}{k(u_1, u_2)} = \frac{d(\bar{\alpha})}{d(u_1)d(u_2)}$$

Caso 2: Suponha que $\bar{\alpha} \in \mathcal{P}^r(\lambda)$. Pelos mesmos argumentos do Caso 1 temos

$$\# \bigcup_{\bar{\alpha} \in \mathcal{P}^r(\lambda)} (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \bar{\alpha})/\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}; \alpha_2)/\mathbb{R}) = \sum_{\bar{\alpha} \in \mathcal{P}^r(\lambda)} \sum_{u_1 \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \bar{\alpha})/\mathbb{R}} \sum_{u_2 \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}; \alpha_2)/\mathbb{R}} \frac{k(u_1, u_2)d(\bar{\alpha})}{d(u_1)d(u_2)}.$$

No entanto, se $(u_1, u_2) \in \mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \bar{\alpha})/\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}; \alpha_2)/\mathbb{R}$ com $\bar{\alpha} \in \mathcal{P}^r(\lambda)$, segue do Lema 5.7 que o fim negativo da curva somewhere injective \bar{u}_1 que u_1 cobre e o fim positivo da curva somewhere injective \bar{u}_2 que u_2 cobre são órbitas ruins. Chame γ_1 e $\bar{\gamma}$ os fins positivo e negativo, respectivamente, de \bar{u}_1 . Pelo Lema 3.7 temos

$$1 \leq \text{ind}(\bar{u}_1) \leq 1 \Rightarrow 1 = \text{ind}(\bar{u}_1) = \mu_{CZ}^{\bar{\gamma}}(\gamma_1) - \mu_{CZ}^{\bar{\gamma}}(\bar{\gamma}). \quad (5.5)$$

Como $\bar{\gamma} \in \mathcal{P}^r(\lambda)$, isto é, $\bar{\gamma}$ é o recobrimento par de uma órbita hiperbólica negativa segue que $\mu_{CZ}^{\bar{\gamma}}(\bar{\gamma}) =$

$\mu_{CZ}^{\tau}(\gamma^{2n}) = 2n \cdot \mu_{CZ}^{\tau}(\gamma)$. E isso junto com a equação (5.5) implicam que $\mu_{CZ}^{\tau}(\gamma_1)$ é ímpar. Assim, γ_1 é uma órbita hiperbólica negativa, mas como $\alpha_1 = \gamma^{d(u_1)}$ é uma órbita boa segue que $d(u_1)$ é ímpar. Com o mesmo tipo de argumento acima também chegamos a conclusão que $d(u_2)$ é ímpar.

Observe que $d(u_1)$ divide $d(\alpha_i)$, $i = 1, 2$. Assim, se existe $q_i \in \mathbb{Z}$ tal que

$$d(\bar{\alpha}) = d(u_i)(2q_i + 1),$$

então $d(\bar{\alpha})$ é um produto de números ímpares e, portanto, também é ímpar. Mas isso contradiz o fato de $\bar{\alpha}$ ser uma órbita ruim. Então, para cada $i = 1, 2$, existe $p_i \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{d(\bar{\alpha})}{d(u_i)} = 2p_i \Rightarrow \frac{d(\bar{\alpha})}{2} = p_i d(u_i), \quad p_i > 0,$$

isto é, $d(\bar{\alpha})/2$ é um múltiplo comum de $d(u_1)$ e $d(u_2)$. Logo, existe $r > 0$ tal que

$$\frac{d(\bar{\alpha})}{2} = r \cdot \text{mmc}(d(u_1), d(u_2)).$$

Logo,

$$\frac{k(u_1, u_2)d(\bar{\alpha})}{d(u_1)d(u_2)} = 2r \cdot \frac{\text{mdc}(d(u_1), d(u_2)) \cdot \text{mmc}(d(u_1), d(u_2))}{d(u_1)d(u_2)} = 2r,$$

ou seja,

$$\frac{1}{d(X)} \left[\# \bigcup_{\bar{\alpha} \in \mathcal{P}^r(\lambda)} (\mathcal{M}_{0,1}^J(\alpha_1; \bar{\alpha})/\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{0,1}^J(\bar{\alpha}; \alpha_2)/\mathbb{R}) \right] = 0 \pmod{2}.$$

□

Portanto, pela Afirmação 2 temos

$$\partial_i^J \circ \partial_{i-1}^J(\alpha_1) = \sum_{\alpha_2 \in \mathcal{P}_{i-2}^b(\lambda)} \sum_{X \in \pi_0(\mathcal{M}_{0,2}^J(\alpha_1; \alpha_2)/\mathbb{R})} \left(\# \partial X \cdot \frac{d(\alpha_1)}{d(X)} \right) \alpha_2 = 0 \pmod{2},$$

pois como X é uma 1-variedade com bordo segue que $\# \partial X = 0 \pmod{2}$. □

Exemplo 5.9. Em [dPS18, Sal04], de Paulo e Salomão encontram níveis de energia que são difeomorfos a S^3 em \mathbb{R}^4 cuja restrição do fluxo Hamiltoniano é equivalente a um fluxo de Reeb fracamente convexo. Tais níveis de energia estão associados às seguintes funções Hamiltonianas

$$H_k = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{x_1^2 + kx_2^2}{2} + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^2, \quad (5.6)$$

para todo $k < 0$ e

$$H_b = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + bx_1^2x_2 - \frac{x_2^3}{3}, \quad (5.7)$$

para $0 < b < 1$. Ver [dPS18, Corolário 1.10 e Observação 1.11].

Os níveis de energia em questão ocorrem para energias um pouco acima do nível crítico. Perto de cada um desses níveis de energia existem um campo de Liouville Y_E definido em uma vizinhança de $M_E := H^{-1}(E)$ que é transverso a M_E e uma 1-forma de contato $\lambda_E := i_{Y_E}\omega_0|_{M_E}$ que é tight em M_E , em que

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^2 dy_i \wedge dx_i$$

é a forma simplética canônica de \mathbb{R}^4 (ver [dPS18, Proposição 2.1]). Assim, $(M_E, \ker \lambda_E)$ possui um strong filling (W_E, ω_0) , em que W_E é uma 4-variedade difeomorfa a bola unitária fechada de \mathbb{R}^4 cujo bordo é

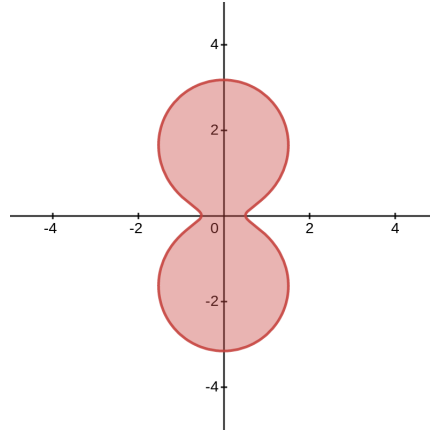


Figura 5.2: *Projeção no plano x_1x_2 de $H_k^{-1}(1/6)$ para H_k como em (5.6) com $k = -10$.*

difeomorfo a S^3 . Logo, $\pi_2(W_E) = 0$ e a condição de asfericidade simplética é satisfeita em W_E . Além disso, λ_E admite apenas uma órbita periódica com índice de Conley-Zehnder 2 em M_E que é hiperbólica e um não-nó. Todas as outras órbitas periódicas α são tais que $\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) \geq 3$ (ver [dPS18, Proposição 2.2]). Dessa forma, tomando uma órbita de Reeb $\alpha \in \mathcal{P}(\lambda_E)$ obtemos o seguinte:

- Se α é a órbita hiperbólica tal que $\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) = 2$ e $d > 1$, temos

$$\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^d) = d \cdot \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) \geq 4; \quad (5.8)$$

- Se $\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^d) = 3$ para algum $d > 1$, então da equação (5.8) segue que

$$\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) \neq 2 \Rightarrow \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) \geq 3. \quad (5.9)$$

Assim, a Proposição 3.2 junto com (5.9) nos dão

$$3 = \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^d) \geq d \cdot \mu_{CZ}^{\tau}(\alpha) - (d - 1) \geq 3d - d + 1 = 2d + 1 \Rightarrow 2d \leq 2 \Rightarrow d \leq 1$$

e chegamos em uma contradição.

- Se $\mu_{CZ}^{\tau}(\alpha^d) = 2$ para algum $d > 1$, usando os mesmos argumentos do item anterior chegamos em uma contradição.

Logo, as órbitas periódicas com índice de Conley-Zehnder 2 e 3 são todas mergulhos.

No Hamiltoniano (5.6) a projeção de M_E no plano x_1x_2 (região de Hill associada à energia E) é limitada pela curva pinçada difeomorfa a S^1 como na Figura 5.2. No Hamiltoniano (5.7) existe um subconjunto N_E difeomorfo a uma 3-bola fechada contendo uma órbita de Conley-Zehnder 2, mas para conseguir a 3-esfera M_E é preciso tomar uma cópia de N_E e colar esses dois subconjuntos ao longo de ∂N_E .

Apesar de a forma de contato λ_E citada acima ser degenerada, após uma perturbação C^∞ -pequena a forma λ'_E resultante é não-degenerada e todas as propriedades citadas acima se mantêm. Portanto, pelo Teorema 5.8 obtemos uma Homologia de Contato Cilíndrica através do complexo de cadeias $(CC(M_E, \lambda'_E), \partial^J)$.

Exemplo 5.10. No trabalho posterior [dPS19], de Paulo e Salomão apresentam outras famílias de Hamiltonianos em \mathbb{R}^4 dados por

$$H_{a,b} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + ax_1^2 + 4bx_2^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + 4y_2^2)^2, \quad a < 0 < b, \quad (5.10)$$

e

$$H_{a,c,\epsilon} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} - \epsilon x_1 + \frac{a^2}{3}x_1^3 + \frac{c^2}{2}x_2^2, \quad a, c, \epsilon > 0 \quad (5.11)$$

tais que a variedade de contato $(M_E, \ker \lambda_E)$ difeomorfa a 3-esfera possui as mesmas propriedades citadas no Exemplo 5.9, em que (5.10) e (5.11) têm comportamentos semelhantes, respectivamente, a (5.6)

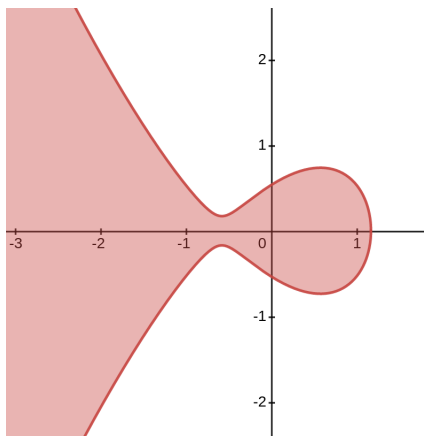


Figura 5.3: *Projeção no plano x_1x_2 de $H_{a,c,\epsilon}^{-1}(1/7)$ para $H_{a,c,\epsilon}$ como em (5.11) com $\epsilon = 1/3$ e $a = c = 1$*

e (5.7). Então, também obtemos uma Homologia de Contato Cilíndrica através do complexo de cadeias $(CC(M_E, \lambda'_E), \partial^J)$.

Veja outros exemplos em [Sch20].

Referências Bibliográficas

- [AM12] Miguel Abreu and Leonardo Macarini. Contact homology of good toric contact manifolds. *Compositio Mathematica*, 148(1):304–334, 2012. 1
- [BH18] E. Bao and K. Honda. Definition of cylindrical contact homology in dimension three. *Journal of Topology*, 11(4):1002–1053, 2018. 1, 37
- [BM04] F. Bourgeois and K. Mohnke. Coherent orientations in symplectic field theory. *Math. Z.*, pages 123–146, 2004. 66
- [Dig21] Leo Digiosia. Cylindrical contact homology of links of simple singularities. *arXiv:2107.07102*, 2021. 1
- [dPS18] Naiara V. de Paulo and Pedro A. S. Salomão. Systems of transversal sections near critical energy levels of hamiltonian systems in \mathbb{R}^4 . *Memoirs of the American Mathematical Society*, 252(1202):1–105, 2018. 72, 73
- [dPS19] Naiara V. de Paulo and Pedro A. S. Salomão. On the multiplicity of periodic orbits and homoclinics near critical energy levels of hamiltonian systems in \mathbb{R}^4 . *Transactions of the American Mathematical Society*, 372(2):859–887, 2019. 73
- [EGH00] Y. Eliashberg, A. Givental, and H. Hofer. Introduction to symplectic field theory. *Geom. Funct. Anal.*, no. Special Volume(Parte II):560–673, 2000. 1
- [Gol15] Roman Golovko. The cylindrical contact homology of universally tight sutured contact solid tori. *Pacific Journal of Mathematical*, 274(1):73–96, 2015. 1
- [HM15] U. Hryniewicz and L. Macarini. Local contact homology and applications. *Journal of Topology and analysis*, 07(02):167–238, 2015. 1
- [HM19] Sebastian Haney and Thomas E. Mark. Cylindrical contact homology of 3-dimensional brieskorn manifolds. *arXiv:1910.07114*, 2019. 1
- [HN16] Michael Hutchings and Jo Nelson. Cylindrical contact homology for dynamically convex contact forms in three dimension. *Journal of Symplectic Geometry*, 14(4):983–1012, 2016. 1, 17, 18, 20, 29, 31, 34, 67, 68
- [Hof93] H. Hofer. Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the weinstein conjecture in dimension three. *Inventiones mathematicae*, 114(3):515–564, 1993. 1, 7
- [HS13] U. L. Hryniewicz and Pedro A. S. Salomão. *Introdução à Geometria Finsler*. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. 9
- [HT07] Michael Hutchings and Clifford Henry Taubes. Gluing pseudoholomorphic curves along branched covered cylinders I. *J. Symplectic Geom.*, 5:43–137, 2007. 1, 18
- [HT09] Michael Hutchings and Clifford Henry Taubes. Gluing pseudoholomorphic curves along branched covered cylinders II. *J. Symplectic Geom.*, 7(1):29–133, 03 2009. 29, 37, 38, 40, 41, 56

- [Hut09] Michael Hutchings. The embedded contact homology index revisited. pages 263–297, 2009. [32](#), [33](#), [35](#)
- [Hut14] Michael Hutchings. Lectures notes on embedded contact homology. *Contact and Symplectic Topology, Bolya Society Mathematical Studies, Springer*, 26:389–484, 2014. [10](#)
- [HWZ95] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Properties of pseudoholomorphic curves in symplectisations II: Embedding controls and algebraic invariants. *Geometric and functional analysis*, 5(2):270–328, 1995. [6](#), [12](#), [15](#), [29](#), [30](#), [34](#), [50](#), [60](#), [68](#)
- [HWZ96] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Properties of pseudoholomorphic curves in symplectisations I : Asymptotics. *Annales de l’I.H.P. Analyse non linéaire*, 13(3):337–379, 1996. [11](#), [12](#), [14](#), [38](#)
- [Mom11] Al Momin. Cylindrical contact homology on complements of reeb orbits. *Journal of Modern Dynamics*, 5(3):409–472, 2011. [1](#)
- [Mor03] Eduardo Mora. Pseudoholomorphic cylinders in symplectisations. *PhD thesis, New York University*, 2003. [12](#), [14](#)
- [MS98] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, 1998. [5](#), [8](#)
- [MS04] D. McDuff and D. Salamon. *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology*. Colloquium Publications 2473-3946. American Mathematical Society, 2004. [6](#)
- [Nel15] Jo Nelson. Automatic transversality in contact homology I: Regularity. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 85:125–179, 2015. [1](#)
- [Oor16] Frans Oort. The riemann-hurwitz formula. *The legacy of Bernhard Riemann after one hundred and fifty years*, 35:567–594, 2016. [19](#)
- [Pat09] J. Pati. Contact homology of S^1 -bundles over some symplectically reduced orbifolds. *arXiv:0910.5934*, 2009. [1](#)
- [Sal04] Pedro A. S. Salomão. Convex energy levels of hamiltonian systems. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 4(2):439–454, 2004. [72](#)
- [Sch20] A Schneider. Global surfaces of section for dynamically convex reeb flows on lens spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 373(4):2775–2803, 2020. [74](#)
- [Sie11] Richard Siefring. Intersection theory of punctured pseudoholomorphic curves. *Geom. Topol.*, 15(4):2351–2457, 2011. [59](#), [60](#)
- [vK08] O. van Koert. Contact homology of brieskorn manifolds. *Forum Mathematicum*, 20(2):317–339, 2008. [1](#)
- [Wen10] Chris Wendl. Automatic transversality and orbifolds of punctured holomorphic curves in dimension four. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 85:347 – 407, 02 2010. [29](#)
- [Wen16] Chris Wendl. Lectures on symplectic field theory. *arXiv:1612.01009*, 2016. [5](#), [13](#), [18](#), [57](#), [58](#), [61](#)
- [Yau04] Mei-Lin Yau. Cylindrical contact homology of subcritical stein-fillable contact manifolds. *Geom. Topol.*, 8(3):1243–1280, 2004. [1](#)
- [Yau09] Mei-Lin Yau. Cylindrical contact homology of a dehn twist. *International Journal of Mathematical*, 20(12):1479–1525, 2009. [1](#)