Operadores hipercíclicos
em espaços vetoriais topológicos

Débora Cristina Brandt Costa

DISSERTACÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENCÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
CIÊNCIAS

Área de concentração: **Matemática**
Orientadora: **Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço**

Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro da FAPESP.

São Paulo, março de 2007.

Operadores hipercíclicos
em espaços vetoriais topológicos

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Débora Cristina Brandt Costa
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 16 de março de 2007.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Mary Lilian Loureno IME-USP
- Prof. Dr. André Arbex Hallack UFJF
- Prof. Dr. Leonardo Pellegrini IME-USP

Aos Meus Pais,

Helga e Darcy.

Agradecimentos

Reservo este espaço para expressar minha gratidão àqueles que, de alguma forma, contribuíram para a concretização deste trabalho.

Primeiramente, agradeço à professora Mary Lilian Lourenço, não apenas pela orientação, mas pela amizade e compreensão ao longo desses últimos três anos. Também sou grata ao prof. André Arbex Hallack, pela disposição em ajudar-me nos assuntos pertinentes à esse trabalho, por ter assistido meus seminários e ter lido várias versões preliminares desta dissertação.

Agradeço à Neusa Rogas Tocha, pelo companheirismo, paciência em me ouvir treinar apresentações e ajudar em muitos momentos no decorrer desse mestrado. Aos meus colegas de graduação e mestrado Eliza R. Andrade, Tatyana Okano, Maria Cristina (Macris) Amaral, Ednei Reis, Márcio M. Onodera, Márcio Villar, Rodnei Silva, Sérgio Malacrida, Carlos Griese e Guilherme Benitez, pela amizade e pela cumplicidade em tantos momentos que passamos juntos nesses vários anos aqui no IME; em especial ao Paulo (Piu) Taneda, Pedro Kaufmann e Fernando (Bolha) Lima, pelo auxílio nos últimos momentos antecedentes à defesa.

O meu muito obrigada aos demais professores e funcionários do IME pela atenção e solicitude com que sempre me trataram nos assuntos acadêmicos e burocráticos.

Também aos meus colegas do Maps Risk, principalmente ao senhor Victor Hugo Pafume, pela boa vontade em me liberar todas as quintas à tarde, para que pudesse concluir esse trabalho.

Tenho muito a agradecer aos meus pais, pelo carinho e compreensão e principalmente ao meu marido Lúcio, pela força, companheirismo, paciência e apoio incondicional em todos os momentos, que só quem ama consegue dedicar.

Por fim, agradeço à Fapesp pelo apoio financeiro.

Resumo

Dado E um espaço vetorial topológico e T um operador linear contínuo em E, diremos que T é hipercíclico se, para algum elemento $x \in E$, a órbita de x sob T, $\mathrm{Orb}(x,T) = \{x, Tx, T^2x, ...\}$, for densa em E. Nosso objetivo será apresentar alguns resultados sobre hiperciclicidade e observar como alguns espaços comportam-se diante dessa classe de operadores.

Abstract

Let E be a topological vector space and T a continuous linear operator on E. We say that T is hypercyclic if, for some $x \in E$, the orbit of x on T, $\mathrm{Orb}(x,T) = \{x, Tx, T^2x, ...\}$, is dense in E. Our aim will be to study some results about hypercyclicity and to observe how some spaces behave regarding this class of operators.

Índice

Notações

Ao longo desta dissertação, estaremos utilizando as seguintes notações:

X	espaço normado
E	espaço vetorial topológico
$\mathbb{N}_0$	o conjunto dos números inteiros não negativos
$\mathbb{N}$	o conjunto dos números naturais
$\mathbb{K}$	o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$l_p(I)$	o espaço de Banach das seqüências $(x_n)_{n\in I}$ $p-$somáveis, onde p é um número natural e $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{Z}$
B_X	a bola unitária fechada de um espaço normado X
B_X°	a bola unitária aberta de um espaço normado X
X^*	o dual topológico de $X,$ munido da sua norma usual
$\mathcal{B}(X,Y)$	o espaço de todas as aplicações lineares limitadas entre os espaços normados X e Y
T^*	o operador adjunto de $T \in \mathcal{B}(X,Y)$,
e_k	a seqüência $(0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$ com 1 na $k-$ésima posição, pertencente a $l_p(\mathbb{N})$
$[x, y]$	o subespaço vetorial gerado pelos elementos x e y
$\mathcal{H}(\mathbb{C})$	o espaço das funções inteiras $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$f^{(n)}$	a derivada n-ésima de $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$
$T^n(x)$	o operador T aplicado n vezes sobre o vetor x

Introdução

Sabemos que a Análise se caracteriza pelo estudo de processos limitantes. Claramente, nem todo processo limitante converge. Entretanto, ao longo do tempo, foram encontrados exemplos de processos que, apesar de divergirem, o faziam de uma maneira maximal. Essa "divergência maximal" está freqüentemente associada ao fenômeno da *universalidade*.

Definição *Dados E e F espaços topológicos, uma família de aplicações contínuas $T_l : E \to F$, $(l \in I)$, é dita universal se o conjunto $\{T_l x : l \in I\}$ for denso em F para algum $x \in E$.*

A importância do estudo das universalidades reside na observação que qualquer processo em Análise que diverge ou se comporta irregularmente parece produzir (em alguns casos) um elemento universal e, se é confirmada a existência, ela é abundante: em muitos casos, quase todo elemento é universal (no sentido de categorias de Baire). Assim, universalidade tem-se mostrado um fenômeno genérico em Análise.

O primeiro exemplo conhecido de operadores universais vem de 1929, com um trabalho de G. D. Birkhoff [6], no qual foi provada a existência de uma função f no espaço de Fréchet $H(\mathbb{C})$ das funções inteiras em $\mathbb{C}$ munido da topologia compacto-aberta, tal que o conjunto $\{f(z), f(1+z), ..., f(n+z), ...\}$ é denso em $H(\mathbb{C})$. Já em 1952, MacLane provou em [18] que existe uma função $f \in H(\mathbb{C})$ tal que o conjunto $\{f, f', ..., f^{(n)}, ...\}$ é denso em $H(\mathbb{C})$.

Durante os últimos 20 anos, um tipo particular de universalidade vem sendo estudado intensamente: em espaços vetoriais topológicos, usualmente espaços de Banach ou Hilbert, considera-se uma seqüência $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de operadores gerada a partir de um único operador linear contínuo T via iteração. Se tal seqüência for universal, dizemos que T é um operador *hipercíclico*. Mais precisamente:

Definição *Sejam E um espaço vetorial topológico e T um operador linear contínuo em E. Diremos que T é hipercíclico se, para algum elemento $x \in E$, a órbita de x sob T, Orb$(x, T) = \{x, Tx, T^2x, ...\}$, for densa em E. Nesse caso, tal elemento*

$x \in E$ será chamado um vetor hipercíclico para T.

Em hiperciclicidade, além dos aspectos de universalidade mencionados acima, temos um terceiro aspecto: hiperciclicidade é uma propriedade geométrica do operador T envolvido. Mais precisamente, um elemento x será hipercíclico se, e somente se, E não possuir subconjuntos fechados T-invariantes não triviais contendo x.

Os primeiros exemplos conhecidos de operadores hipercíclicos em espaços de Banach ou Hilbert são devidos a Rolewicz em 1969 [26]. Considerando determinados espaços de seqüências complexas X ($X = l_p, 1 \leq p < \infty$ ou $X = c_0$), e os operadores T_λ em X, conhecidos na literatura como "weighted backward shifts", definidos por

$$\begin{array}{rcl} T_\lambda : X & \longrightarrow & X \\ (x_1, x_2, ...) & \mapsto & (\lambda x_2, \lambda x_3, ...) \end{array}$$

Rolewicz mostrou que, sempre que $\lambda > 1$, existe um vetor hipercíclico associado a esses operadores.

Embora os exemplos de Rolewicz tenham sido os primeiros em hiperciclicidade em espaços de Banach ou Hilbert, salientamos que, tanto o resultado de Birkhoff quanto o de MacLane, podem ser vistos em termos de operadores hipercíclicos em $H(\mathbb{C})$, como operadores translação e diferenciação respectivamente.

O termo *hiperciclicidade* foi utilizado pela primeira vez por B. Beauzamy [4] e foi motivado pelo bem estabelecido conceito de ciclicidade na teoria de operadores em espaços de Hilbert: dados H um espaço de Hilbert e $T : H \rightarrow H$ um operador linear contínuo, dizemos que um vetor $x \in H$ é cíclico se $[x, Tx, T^2x, ..., T^nx, ...]$ for denso em H. Os vetores cíclicos são importantes no estudo de subespaços invariantes: dado T um operador definido em um espaço de Hilbert H, H não contém subespaços T-invariantes fechados não triviais se, e somente se, todo vetor não nulo do espaço H for cíclico. Assim, como a noção de ciclicidade corresponde ao problema de *subespaço* fechado não trivial T-invariante, a noção de hiperciclicidade corresponde ao problema do *subconjunto* fechado não trivial T-invariante.

Nosso objetivo nesse texto será estudar alguns resultados sobre hiperciclicidade e observar como alguns espaços se comportam em termos dela: se possuem vetores hipercíclicos associados a algum operador ou, no caso de espaços de operadores, se possuem operadores hipercíclicos. Para tal, utilizamos como fontes de estudo os artigos [1], [2], [5], [7] e [28]. Como texto de referência no assunto, recomendamos o artigo [13], o qual apresenta, além de uma introdução histórica ao tema, os principais resultados obtidos até sua publicação. A seguir, daremos uma rápida descrição dos conteúdos que serão apresentados ao longo desta dissertação.

O primeiro capítulo apresentará alguns resultados e definições conhecidos tanto de Análise Funcional como de Análise Complexa. Com isso, pretendemos apresentar os pré-requisitos para o entendimento dessa dissertação, tornando-a o mais auto-consistente possível.

Em seguida, apresentaremos alguns resultados gerais sobre hiperciclicidade existentes nos artigos [1], [7] e [11], juntamente com os primeiros exemplos conhecidos de operadores hipercíclicos em Análise Complexa. Esse será o conteúdo do capítulo dois.

Já no terceiro capítulo mostraremos como certos operadores definidos no espaço de seqüências $l_2(\mathbb{Z})$ comportam-se em relação à hiperciclicidade.

Ainda nesse sentido, o capítulo quatro será dedicado ao comportamento do espaço de Fréchet $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Verificaremos que existem operadores hipercíclicos definidos sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, a saber, os operadores de convolução .

Outro espaço que iremos estudar sob esse aspecto será o espaço dos polinômios m-homogêneos. Observamos que, usaremos uma adaptação na definição de hiperciclicidade para esse caso: rigorosamente, não faria sentido estudar hiperciclicidade nesse espaço quando $m > 1$. Esse será o assunto do quinto capítulo.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas definições e resultados que serão utilizados ao longo deste trabalho.

1.1 Categorias de Baire

No que segue, enunciaremos o Teorema de Baire, pois este será útil no Capítulo 2 para o estudo de vetores hipercíclicos.

Teorema 1.1 (Teorema de Baire) *Seja M um espaço métrico completo. Então toda intersecção enumerável de abertos densos em M é também um subconjunto denso em M.*

Demonstração: Ver [21], página 37.

1.2 Topologias Fraca e Fraca-Estrela

As definições e resultados a seguir serão utilizados no decorrer desta dissertação, mais precisamente ao longo dos Capítulos 4 e 5. Inicialmente, definiremos as topologias fraca e fraca-estrela sobre um espaço de Banach X.

Definição 1.2 *Seja X um espaço de Banach.*

(i) Chamamos de topologia fraca, ou w-topologia, sobre X a topologia gerada pelos conjuntos

$$\mathcal{O} = \{x \in X : |f_j(x - x_0)| < \varepsilon, \text{ para } j = 1, ..., n\},$$

quaisquer que sejam $x_0 \in X$, $f_1, ..., f_n \in X^*$ e $\varepsilon > 0$ e a denotamos tal topologia por $\sigma(X, X^*)$.

(ii) A topologia fraca-estrela, ou w^*-topologia, definida sobre o espaço dual de X, X^*, é a topologia gerada por uma base formada pelos conjuntos

$$\mathcal{O}^* = \{f \in X^* : |(f - f_0)(x_j)| < \varepsilon, \text{ para } j = 1, ..., n\},$$

quaisquer que sejam $f_0 \in X^*$, $x_1, ..., x_n \in X$ e $\varepsilon > 0$. Denotamos tal topologia por $\sigma(X^*, X)$.

Dizemos que uma seqüência é *fracamente convergente (w-convergente)* se convergir com respeito à topologia fraca em X. Analogamente, uma seqüência é dita *fraca-estrela convergente (w^*-convergente)* se convergir com respeito à topologia fraca-estrela em X^*.

A seguir, introduziremos uma proposição que será utilizada ao longo do Capítulo 5, mais precisamente na Proposição 5.14. Visando facilitar a sua demonstração, consideraremos o seguinte resultado:

Lema 1.3 *Seja X um espaço normado separável de dimensão infinita. Então:*

(a) existe uma seqüência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ linearmente independente densa em X.

(b) existe uma seqüência $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ linearmente independente densa em X^* na topologia fraca-estrela.

Demonstração: ([14], página 57, Proposições 3 e 4). $\square$

Proposição 1.4 *Sejam X um espaço de Banach separável de dimensão infinita e X^* o seu dual. Então existem seqüências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ e $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ linearmente independentes tais que*

$$\begin{cases} \overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]} = X, \\ \overline{[x_n^* : n \in \mathbb{N}]}^{w^*} = X^*, \\ x_m^*(x_n) = \delta_n^m. \end{cases}$$

Demonstração: Sejam $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos não nulos de X tais que $\overline{[y_n : n \in \mathbb{N}]} = X$ (cuja existência é garantida pelo Lema 1.3(a)), e $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ uma seqüência tal que $\overline{[y_n^* : n \in \mathbb{N}]}^{w^*} = X^*$ (Lema 1.3(b)).

Observe que, se para todo $n \in \mathbb{N}$, $y_n^*(x_0) = 0$ com $x_0 \in X$, segue que $g^*(x_0) = 0$, para todo $g^* \in [y_n^* : n \in \mathbb{N}]$. Consideremos agora $f \in X^*$, e $R > 0$ tal que $f \in RB_{X^*}$. Como X é um espaço de Banach separável, RB_{X^*} é metrizável na topologia fraca-estrela ([10], Proposição 3.24) e, portanto, separável. Então existe

$(g_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset [y_n^* : n \in \mathbb{N}] \cap RB_{X^*}$ tal que, para todo $x \in X$, temos $\lim\limits_{j\to\infty} g_j^*(x) = f(x)$. Em particular,

$$y_n^*(x_0) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow g_j^*(x_0) = 0,\ \forall j \in \mathbb{N} \Longrightarrow f(x_0) = \lim_{j\to\infty} g_j^*(x_0) = 0.$$

Nesse caso, como f foi escolhido arbitrariamente, segue que $x_0 = 0$, se $y_n^*(x_0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (1).

Feita essa observação, vamos construir indutivamente elementos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X e $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ em X^* tais que

$$\begin{cases} x_m^*(x_n) = \delta_n^m, \\ [y_n : n \in \mathbb{N}] = [x_n : n \in \mathbb{N}], \\ [y_n^* : n \in \mathbb{N}] = [x_n^* : n \in \mathbb{N}]. \end{cases}$$

Comecemos considerando $x_1 = y_1$ e $x_1^* = \frac{y_{k_1}^*}{y_{k_1}^*(y_1)}$, onde k_1 é qualquer inteiro tal que $y_{k_1}^*(y_1) \neq 0$ (como $y_1 \neq 0$, por (1), existe tal k_1). Então Seja h_2 o menor inteiro tal que $y_{h_2}^* \notin [x_1^*]$ e consideremos

$$x_2^* = y_{h_2}^* - x_1^*.y_{h_2}^*(x_1).$$

Pela forma como foi escolhido, $x_2^* \neq 0$. Podemos então tomar

$$x_2 = \frac{y_{k_2} - x_1.x_1^*(y_{k_2})}{x_2^*(y_{k_2})},$$

onde k_2 é qualquer índice tal que $x_2^*(y_{k_2}) \neq 0$ (cuja existência é garantida por (1)). Note que

$$x_1^*(x_1) = \frac{y_{k_1}^*(y_1)}{y_{k_1}^*(y_1)} = 1;$$

$$\begin{aligned} x_1^*(x_2) &= x_1^*\left(\frac{y_{k_2} - x_1.x_1^*(y_{k_2})}{x_2^*(y_{k_2})}\right) = \\ &= \frac{x_1^*(y_{k_2}) - x_1^*(x_1).x_1^*(y_{k_2})}{x_2^*(y_{k_2})} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2^*(x_1) &= (y_{h_2}^* - x_1^*.y_{h_2}^*(x_1))(x_1) = \\ &= y_{h_2}^*(x_1) - x_1^*(x_1).y_{h_2}^*(x_1) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2^*(x_2) &= x_2^*\left(\frac{y_{k_2} - x_1.x_1^*(y_{k_2})}{x_2^*(y_{k_2})}\right) = \\ &= \frac{x_2^*(y_{k_2}) - x_2^*(x_1).x_1^*(y_{k_2})}{x_2^*(y_{k_2})} = 1. \end{aligned}$$

Assim, pela nossa escolha, $x_m^*(x_n) = \delta_n^m$ para $1 \leq m, n \leq 2$.
No próximo passo, seja h_3 o menor inteiro tal que $y_{h_3} \notin [x_1, x_2]$ e consideremos

$$x_3 = y_{h_3} - x_1.x_1^*(y_{h_3}) - x_2.x_2^*(y_{h_3}),$$
$$x_3^* = \frac{y_{k_3}^* - x_1^*.y_{k_3}^*(x_1) - x_2^*.y_{k_3}^*(x_2)}{y_{k_3}^*(x_3)},$$

onde k_3 é qualquer índice tal que $y_{k_3}^*(x_3) \neq 0$. Assim, pode-se mostrar que $x_m^*(x_n) = \delta_n^m$ para $1 \leq m, n \leq 3$.
Continuamos a construção da seqüência dessa mesma forma: no passo $2n$, começamos em X^* e construímos primeiro o elemento x_{2n}^*, enquanto no passo $2n+1$, começamos construindo o x_{2n+1}. Por construção, as seqüências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ são linearmente independentes.

Observe agora que, do modo como foram construídos os vetores x_n, temos que $[y_n : n \in \mathbb{N}] = [x_n : n \in \mathbb{N}]$. De fato, claramente, $[x_n : n \in \mathbb{N}] \subset [y_n : n \in \mathbb{N}]$. Por outro lado, pela forma como foi definido x_1, temos que $y_1 \in [x_1]$. Considerando então y_2, claramente $y_2 \notin [x_1]$, pois y_1 e y_2 são linearmente independentes. Então ou $y_2 \in [x_1, x_2]$ ou o índice 2 é o menor inteiro tal que $y_2 \notin [x_1, x_2]$. Nesse caso, pela forma como x_3 foi construído, segue que $y_2 = x_3 + x_1.x_1^*(y_2) + x_2.x_2^*(y_2)$, ou seja, $y_2 \in [x_1, x_2, x_3]$. Novamente, $y_3 \notin [x_1, x_2, x_3]$, pois y_1, y_2 e y_3 são l.i. Assim, ou $y_3 \in [x_1, x_2, x_3, x_4]$ ou o índice 3 é o menor inteiro tal que $y_3 \notin [x_1, x_2, x_3, x_4]$. Então $y_3 = x_5 + x_1.x_1^*(y_3) + x_2.x_2^*(y_3) + x_3.x_3^*(y_3) + x_4.x_4^*(y_3)$, ou seja, $y_3 \in [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$. Generalizando, $y_n \in [x_1, x_2, x_3, ..., x_{2n-1}]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, mostramos que $[y_n : n \in \mathbb{N}] = [x_n : n \in \mathbb{N}]$. Por um argumento análogo, mostramos que $[y_n^* : n \in \mathbb{N}] = [x_n^* : n \in \mathbb{N}]$. Como $\overline{[y_n : n \in \mathbb{N}]} = X$, e $\overline{[y_n^* : n \in \mathbb{N}]}^{w^*} = X^*$, segue que

$$\begin{cases} [y_n : n \in \mathbb{N}] = [x_n : n \in \mathbb{N}] \quad e \quad \overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]} = X, \\ [y_n^* : n \in \mathbb{N}] = [x_n^* : n \in \mathbb{N}] \quad e \quad \overline{[x_n^* : n \in \mathbb{N}]}^{w^*} = X^*, \\ x_m^*(x_n) = \delta_n^m. \end{cases}$$

□

1.3 Operadores em Espaços de Banach

Sejam X e Y espaços de Banach complexos. Denotaremos por $\mathcal{B}(X, Y)$ o espaço de Banach das aplicações lineares limitadas de X em Y. Se $X = Y$, denotaremos tal espaço por $\mathcal{B}(X)$.

Considerando agora os duais X^* e Y^* de X e Y respectivamente, a aplicação T^* de Y^* em X^* é definida da seguinte forma:
Para cada $g \in Y^*$, $T^*(g)(x) = g(Tx)$, para todo $x \in X$.

Definição 1.5 *Sejam X um espaço de Banach complexo e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. O espectro $\sigma(T)$ de T é definido por*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ não é invertível}\},$$

onde I é o operador identidade. Chamamos de espectro pontual de T, $\sigma_p(T)$, ao conjunto dos autovalores de T, isto é, ao conjunto de todos os $\lambda \in \sigma(T)$ para os quais a aplicação $(T - \lambda I)$ não é injetora.

A próxima proposição nos fornece uma relação entre a aplicação $T \in \mathcal{B}(X)$ e sua adjunta $T^* \in \mathcal{B}(X^*)$, onde X é um espaço de Banach. Tal resultado será utilizado ao longo do Capítulo 2.

Proposição 1.6 *Sejam X um espaço de Banach e $T \in B(X)$. Então o operador T^* será injetor se, e somente se, a imagem de T for densa em X.*

Demonstração: Ver [21], página 290, Teorema 3.1.17(b).

O teorema a seguir diz respeito a extensões de aplicações lineares contínuas definidas sobre espaços de Banach. Tal resultado será utilizado ao longo do Capítulo 4.

Teorema 1.7 *Sejam Y um espaço de Banach e Z um subespaço de um espaço normado X. Se $T : Z \to Y$ for uma aplicação linear contínua, então T possui uma extensão $\tilde{T} : \bar{Z} \to Y$ linear contínua de norma $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.*

Demonstração: Consideremos $x \in \bar{Z}$. Então existe uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Z$ tal que $x_n \to x$. Agora, T é contínua; logo, quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\|\|x_n - x_m\|.$$

Assim, a seqüência $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em Y, uma vez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em X.

Como Y é completo, existe $y \in Y$ tal que $Tx_n \to y$. Definamos então $\tilde{T}x = y$. Note que tal y independe da escolha feita para a seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: de fato, se considerarmos duas seqüências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Z$ convergindo ambas para x, teremos

$$\|Tx_n - Tw_n\| \leq \|T\|\|x_n - w_n\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Logo Tx_n e Tw_n têm o mesmo limite. Assim, $\tilde{T}$ está bem definida.

Vamos mostrar a seguir que $\tilde{T}$ é linear.
Sejam $y, z \in \bar{Z}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ quaisquer. Então existem $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Z$ tal que

$$y = \lim y_n \Longrightarrow \tilde{T}y = \lim Ty_n \text{ e } z = \lim z_n \Longrightarrow \tilde{T}z = \lim Tz_n.$$

Logo

$$\begin{aligned} \tilde{T}y + \lambda\tilde{T}z &= \lim Ty_n + \lambda \lim Tz_n = \lim(Ty_n + \lambda Tz_n) = \\ &= \lim T(y_n + \lambda z_n) = \tilde{T}(y + \lambda z), \end{aligned}$$

pois $y_n + \lambda z_n \to y + \lambda z$.

Dados $x \in \bar{Z}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Z$ com $x_n \to x$, vimos que $\lim Tx_n = \tilde{T}x$. Como T é contínua, $\|Tx_n\| \leq \|T\|\|x_n\|$ para todo n e, pela continuidade da norma temos $\|\tilde{T}x\| \leq \|T\|\|x\|$. Agora

$$\|\tilde{T}\| = \inf\{M > 0 : \|\tilde{T}x\| \leq M.\|x\| \ \forall x\},$$

o que implica em $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Agora, como $\tilde{T}$ é extensão de T, $\|\tilde{T}\| \geq \|T\|$. Portanto $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. $\square$

1.4 Espaços Localmente Convexos

Dado E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ munido de uma topologia τ, dizemos que E é um *espaço vetorial topológico*, ou simplesmente um EVT, se as aplicações

$$\begin{aligned} (x, y) \in E \times E &\to x + y \in E \text{ e} \\ (\lambda, y) \in \mathbb{K} \times E &\to \lambda.y \in E \end{aligned}$$

são contínuas.

Exemplo: Qualquer espaço normado é um espaço vetorial topológico.

Definição 1.8 *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e A um subconjunto de E. Diremos que A é convexo se, para quaisquer x, y em A e para quaisquer $\alpha, \beta \geq 0$ com $\alpha + \beta = 1$, temos que $\alpha x + \beta y \in A$.*

Se X é um espaço normado, as bolas são exemplos de conjuntos convexos.

É fácil ver que a topologia τ de um espaço vetorial topológico E é invariante sob translações, isto é, se $U \subset \tau$, então $a + U \subset \tau$, para todo $a \in E$. Este fato nos garante que, se uma dada propriedade é válida nas vizinhanças de zero em E, ela é válida para qualquer vizinhança em E.

Definição 1.9 *Um espaço vetorial topológico E é denominado espaço localmente convexo (ELC) se cada vizinhança de zero contém uma vizinhança convexa. Nesse caso, diremos que a topologia de E é uma topologia localmente convexa.*

Dado um espaço normado X qualquer, vimos que X é um EVT com a topologia induzida pela norma. As bolas

$$B(0;\varepsilon) = \{x \in X : \|x\|_X < \varepsilon\}$$

com $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças convexas de zero. Conseqüentemente, cada espaço normado é um espaço localmente convexo.

Definição 1.10 *(i) Um espaço vetorial topológico E é dito metrizável se existe uma métrica em E que define sua topologia.*

(ii) Todo espaço localmente convexo metrizável completo será chamado espaço de Fréchet.

Exemplo: Todo espaço de Banach X é um espaço de Fréchet.

Proposição 1.11 *Seja (T_n) uma seqüência de aplicações lineares contínuas definidas de um espaço de Fréchet E com valores em um espaço vetorial topológico Hausdorff F tal que $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ existe para cada $x \in E$. Consideremos a aplicação T definida como*

$$\begin{array}{rcl} T : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & Tx = \lim_{n\to\infty} T_n(x). \end{array}$$

Então T é uma função linear contínua de E em F.

Demonstração: Ver a demonstração em [21], página 200. □

OBS: Na verdade, para a proposição acima ser válida, basta que E seja um espaço vetorial topológico de Baire ([22], página 58). Como todo espaço metrizável completo é de Baire, e trabalharemos no decorrer da dissertação com espaços de Fréchet, optamos por enunciá-lo desta forma.

A seguir vamos estudar algumas topologias localmente convexas a partir de famílias de seminormas.

Definição 1.12 *Seja E um espaço vetorial. Uma função $p : E \to \mathbb{R}$ é chamada de seminorma se verifica as seguintes propriedades:*

(a) $p(x) \geq 0$ *para todo* $x \in E$*;*

(b) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *para todo* $x \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$*;*

(c) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ *para todo* $x, y \in E$*.*

OBS: Uma seminorma p será uma norma se $p(x) = 0$ implicar em $x = 0$.

Dados E um espaço vetorial qualquer e $p : E \to \mathbb{R}$ uma seminorma, consideremos o conjunto

$$U_{p,\varepsilon} = \{x \in E : p(x) < \varepsilon\},$$

onde $\varepsilon > 0$.

Consideremos agora P uma família de seminormas em E e o conjunto

$$\mathcal{B}_0 = \{\cap_{p \in P_0} U_{p,\varepsilon} : P_0 \subset P \text{ finito }, \varepsilon > 0\}.$$

Pode-se mostrar que existe uma única topologia localmente convexa τ_0 em E que admite $\mathcal{B}$ como base de vizinhanças de zero. Essa topologia é a mais fraca em E tal que cada $p \in P$ é contínua. Chamamos τ_P de *topologia localmente convexa definida por* P. A demonstração desse fato pode ser encontrada em [22], página 88. Na verdade, toda topologia localmente convexa é gerada por uma família de seminormas.

Exemplo: As topologias fraca w e fraca-estrela w^* definidas anteriormente são geradas a partir de famílias dirigidas de seminormas. De fato, lembrando da definição de conjunto dirigido:

Um conjunto Λ *é dito ser dirigido se existe uma relação* $\prec$ *sobre* Λ *satisfazendo:*

(a) $\lambda \prec \lambda$*, para cada* $\lambda \in \Lambda$*;*

(b) se $\lambda_1 \prec \lambda_2$ *e* $\lambda_2 \prec \lambda_3$*, então* $\lambda_1 \prec \lambda_3$*,*

(c) se $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$*, então existe um* $\lambda_3 \in \Lambda$ *satisfazendo* $\lambda_1 \prec \lambda_3$ *e* $\lambda_2 \prec \lambda_3$*,*

Sejam E um espaço normado e E^* o espaço dual de E. Para cada $A \subset E^*$ finito, definimos a seminorma

$$\begin{aligned} p_A : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto p_A(x) = \max_{y^* \in A} |y^*(x)|. \end{aligned}$$

A família $\{p_A : A \subset E^* \text{ é finito }\}$ é dirigida pela relação

$$A_1 \subset A_2 \Longrightarrow p_{A_2} \leq p_{A_1},$$

e os conjuntos

$$U_{A,\varepsilon} = \{x \in E : p_A(x) < \varepsilon\},$$

onde $\varepsilon > 0$ e $A \subset E^*$ finito, formam uma base de vizinhanças de zero.

Analogamente, definindo a família dirigida de seminormas

$$\begin{aligned} p_B : E^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y^* &\longmapsto p_B(y^*) = \max_{x \in B} |y^*(x)|, \end{aligned}$$

com $B \subset E$ finito, os conjuntos

$$U_{B,\varepsilon} = \{y^* \in E^* : p_B(y^*) < \varepsilon\},$$

onde $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças convexas de zero.

O exemplo a seguir trata de dois espaços dos quais voltaremos a falar nas próximas seções deste capítulo.

Exemplo: Seja E um espaço topológico e consideremos $\mathcal{C}(E)$ o espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$ de todas as funções contínuas definidas em E com valores em $\mathbb{C}$. Consideremos a família de seminormas $p_K : \mathcal{C}(E) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|,$$

onde K é um subconjunto compacto de E. Os conjuntos

$$U_{K,\varepsilon} = \{f \in \mathcal{C}(E) : p_K(f) < \varepsilon\},$$

com $\varepsilon > 0$ formam uma base de vizinhanças abertas convexas de zero e, portanto, induzem uma topologia τ_P localmente convexa. Chamamos essa topologia de *topologia compacto-aberta em* $\mathcal{C}(E)$ e a denotamos por τ_0.

Consideremos agora o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ constituído de todas as funções $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfas. Claramente, $\mathcal{H}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{C})$. Mais ainda: se considerarmos a mesma família de seminormas p_K onde $K \subset \mathbb{C}$ compacto, os conjuntos

$$U_{K,\varepsilon} = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : p_K(f) < \varepsilon\},$$

com $\varepsilon > 0$, formam a base de vizinhanças de zero na topologia τ_0. Logo $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ é subespaço topológico de $\mathcal{C}(\mathbb{C})$, munido da topologia compacto-aberta.

Proposição 1.13 *Sejam E e F dois espaços localmente convexos e sejam P e Q famílias dirigidas de seminormas que definem as topologias de E e F respectivamente. Então uma aplicação linear $T : E \to F$ é contínua se, e só se, dada $q \in Q$, existem $p \in P$ e $c > 0$ tais que $q(Tx) \leq cp(x)$, para todo $x \in E$.*

Demonstração: Seja $q \in Q$ e suponhamos $T : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear contínua. Então existem $p \in P$ e $\delta > 0$ tais que $p(x) \leq \delta \Longrightarrow q(Tx) \leq 1$. Seja $x \in E$ tal que $p(x) \neq 0$, e consideremos $y = \frac{\delta}{p(x)}x$. Então $p(y) = \delta$ e portanto $q(Ty) \leq 1$. Logo

$$q\left(T\left(\frac{\delta}{p(x)}x\right)\right) = \frac{\delta}{p(x)}q(Tx) \leq 1 \Longrightarrow q(Tx) \leq \frac{1}{\delta}p(x).$$

Se $p(x) = 0$, claramente $q(Tx) \leq \frac{1}{\delta}p(x) \leq 1$ e, portanto, a desigualdade acima continua válida. Assim, tomando $c = \frac{1}{\delta}$, segue que $q(Tx) \leq cp(x)$, para todo $x \in E$.

Reciprocamente, suponhamos que para cada $q \in Q$, existem $p \in P$ e $c > 0$ tais que $q(Tx) \leq cp(x)$, para todo $x \in E$. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Se $x \in E$ for tal que $p(x) < \delta$, então $q(Tx) \leq cp(x) \leq c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$. Segue que T é contínua em 0 e, portanto, em E. $\square$

1.5 Espaço $\mathcal{C}(G)$ de Funções Contínuas ($G \subset \mathbb{C}$ aberto)

O desenvolvimento a seguir objetiva mostrar que o espaço das funções contínuas definidas num aberto $G \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{C}(G)$, munido da topologia compacto-aberta é um espaço de Fréchet. Para provar tal afirmação, recordamos que, sendo E um espaço topológico, um subconjunto $A \subset E$ será dito *conexo* se não existirem abertos V e W disjuntos de E tais que $A \cap V \neq \emptyset$, $A \cap W \neq \emptyset$ e $A \subset V \cup W$. Um subconjunto conexo maximal de A será chamado de *componente conexa de* A.

Observemos que quaisquer duas componentes conexas de A são disjuntas e, além disso, A é a união de suas componentes conexas. De fato, se considerarmos V e W duas componentes conexas distintas de A, e supormos $V \cap W \neq \emptyset$, então $V \cup W$ será um subconjunto conexo, contrariando o fato de V e W serem componentes conexas de A.

Proposição 1.14 *Seja G um aberto em $\mathbb{C}$. Então existe uma seqüência $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos compactos de G tal que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Mais ainda: os conjuntos K_n podem ser escolhidos de tal forma que satisfaçam as seguintes condições:*

(a) $K_n \subset intK_{n+1}$;

(b) se K for um subconjunto compacto de G, então $K \subset K_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Dado $z \in G$ qualquer, temos que

$$d(z, \mathbb{C} \setminus G) = \inf\{|z - w| : w \in \mathbb{C} \setminus G\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$K_n = \{z : |z| \leq n\} \cap \{z : d(z, \mathbb{C} \setminus G) \geq \frac{1}{n}\} \subset G.$$

Como $\{z : |z| \leq n\}$ é a imagem inversa do intervalo $[0, n]$ pela função módulo, que é contínua, segue que $\{z : |z| \leq n\}$ é fechado.

Também o conjunto $\{z : d(z, \mathbb{C} \setminus G) < \frac{1}{n}\}$ é imagem inversa do intervalo $[0, n]$ pela função contínua,

$$\begin{array}{rcl} g : G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & g(z) = \inf\{|z - w| : w \in \mathbb{C} \setminus G\}, \end{array}$$

do aberto $(0, 1/n)$. Assim, cada K_n é fechado, e limitado em $\mathbb{C}$. Segue que cada K_n é compacto. Além disso,

$$K_n \subset \left(\{z : |z| < n + 1\} \cap \left\{z : d(z, \mathbb{C} \setminus G) > \frac{1}{n+1}\right\}\right)$$

é aberto, contém K_n e está contido em K_{n+1}. Daí segue o item (a).

Vamos mostrar a seguir que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Para isso, consideremos $z \in G$. Então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|z| \leq n_1$. Também existe $n_2 \in \mathbb{N}$ para o qual $d(z, \mathbb{C} \setminus G) \geq \frac{1}{n_2}$. Sendo então $n = \max\{n_1, n_2\}$, segue que $z \in K_n$. Em outras palavras, $G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Por outro lado, $K_n \subset G$ para todo n. Portanto $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Mais ainda: do fato de G ser aberto, segue que

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int} K_n.$$

Assim, estamos em condições de provar (b): de fato, se K for um subconjunto compacto de G, visto que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ com $K_n \subset K_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_{n_0}$. $\square$

Seja G um aberto em $\mathbb{C}$ tal que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, onde cada K_n é compacto e $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$. Para cada n, definamos $\rho_n(f, g) = \sup_{z \in K_n} \{|f(z) - g(z)|\}$, com $f, g \in \mathcal{C}(G)$.

Definamos também

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}, \tag{1}$$

para $f, g \in \mathcal{C}(G)$ quaisquer. Note que a série (1) é dominada pela série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, que converge.

Lema 1.15 *A função $\rho : \mathcal{C}(G) \times \mathcal{C}(G) \to [0, \infty)$ definida em (1) é uma métrica em $\mathcal{C}(G)$.*

Demonstração: Para ρ ser uma métrica, ρ tem que satisfazer as seguintes propriedades:

(a) $\rho(f, g) \geq 0$, $\forall f, g \in \mathcal{C}(G)$;

(b) $\rho(f, g) = 0 \Longrightarrow f = g$;

(c) $\rho(f, g) = \rho(g, f)$, $\forall f, g \in \mathcal{C}(G)$;

(d) Dados $f, g \in \mathcal{C}(G)$ quaisquer, $\rho(f, g) \leq \rho(f, g) + \rho(f, g)$.

Dos itens acima, o único que não é trivial é o item (d). Para demonstrá-lo, seja F a função de $[0, \infty)$ em $[0, \infty)$ definida por $F(t) = \frac{t}{1+t}$. Observe que F é contínua para todo $t \geq 0$, e $F'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \geq 0$. Logo a função é crescente.

Consideremos agora $f, g, h \in \mathcal{C}(G)$. Para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$|f(z) - g(z)| \leq |f(z) - h(z)| + |h(z) - g(z)|.$$

Particularmente, dado $n \geq 1$, $|f(z) - g(z)| \leq |f(z) - h(z)| + |h(z) - g(z)|$, para todo $z \in K_n$. Assim, $\rho_n(f, g) \leq \rho_n(f, h) + \rho_n(h, g)$, com $\rho_n(f, g), \rho_n(f, h), \rho_n(h, g) \in [0, \infty)$. Então, para cada n,

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} &= F(\rho_n(f,g)) \leq F(\rho_n(f,h) + \rho_n(h,g)) \\
&= \frac{\rho_n(f,h)}{1+[\rho_n(f,h)+\rho_n(h,g)]} + \frac{\rho_n(h,g)}{1+[\rho_n(f,h)+\rho_n(h,g)]} \\
&\leq \frac{\rho_n(f,h)}{1+\rho_n(f,h)} + \frac{\rho_n(h,g)}{1+\rho_n(h,g)}.
\end{aligned}$$

Daí segue que

$$\begin{aligned}\rho(f,g) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[\frac{\rho_n(f,h)}{1+\rho_n(f,h)}+\frac{\rho_n(h,g)}{1+\rho_n(h,g)}\right] \\ &= \rho(f,h)+\rho(h,g).\end{aligned}$$

□

Vimos na seção anterior que a família de seminormas $\{p_K : K \subset G \text{ compacto}\}$ definidas no espaço $\mathcal{C}(G)$ gera uma topologia τ_0 chamada de topologia compacto-aberta. A seguir, vamos mostrar que essa topologia e a gerada pela métrica ρ são equivalentes.

Lema 1.16 *Consideremos o espaço $\mathcal{C}(G)$ munido da métrica ρ definida anteriormente em (1). Dado $\varepsilon > 0$, existem um $\delta > 0$ e um compacto $K \subset G$ tais que, para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$,*

$$\sup_{z\in K}\{|f(z)-g(z)|\} \leq \delta \Longrightarrow \rho(f,g) \leq \varepsilon.$$

Reciprocamente, dados $\delta > 0$ e $K \subset G$ um compacto, existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$,

$$\rho(f,g) \leq \varepsilon \Longrightarrow \sup_{z\in K}\{|f(z)-g(z)|\} \leq \delta.$$

Demonstração: Vimos que existe uma família de compactos $\{K_n\}$ tal que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ e $\{K_n\}$ satisfaz a Proposição 1.14. Então, dado $\varepsilon > 0$, seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=p+1}^{\infty} 1/(2^n) < \varepsilon/2$ e consideremos $K = K_p$.

Por outro lado, do fato da função F definida anteriormente no Lema 1.15 ser contínua, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 \leq t < \delta$,

$$\frac{t}{1+t} < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Tomemos então $f, g \in \mathcal{C}(G)$ tais que $\sup_{z\in K}\{|f(z)-g(z)|\} \leq \delta$.

Como $K_n \subset K$ para todo n com $1 \leq n \leq p$, segue que $0 \leq \rho_n(f,g) < \delta$, para todo $n = 1, ..., p$ e, portanto,

$$\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Assim

$$\begin{aligned}\rho(f,g) &= \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{2^n}\left(\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}\right)+\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}\right)\\ &< \sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{2}\varepsilon+\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \;<\; \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \;<\; \varepsilon\end{aligned}$$

Reciprocamente, sejam $\delta > 0$ e $K \subset G$ um compacto quaisquer. Como

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int} K_n$$

pela Proposição 1.14, existe um $p > 1$ tal que $K \subset K_p$.
Logo

$$\sup_{z\in K}\{|f(z)-g(z)|\} \;\leq\; \sup_{z\in Kp}\{|f(z)-g(z)|\} \;=\; \rho_p(f,g).$$

Consideremos então $\varepsilon > 0$ tal que, se $0 \leq s < 2^p\varepsilon$, $\frac{s}{1-s} < \delta$ (podemos supor a existência de tal ε pela continuidade da função $\frac{s}{1-s}$ para $s \in [0,1)$). Assim,

$$\rho(f,g) < \varepsilon \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_n(f,g)}{2^n(1+\rho_n(f,g))} < \varepsilon \Longrightarrow \frac{\rho_p(f,g)}{1+\rho_p(f,g)} < 2^p\varepsilon.$$

Portanto tomando $s = \frac{\rho_p(f,g)}{1+\rho_p(f,g)}$, teremos que $\sup_{z\in K}\{|f(z)-g(z)|\} \leq \rho_p(f,g) \leq \delta$.

□

Do lema acima, segue que

Lema 1.17 *(a) Um conjunto $\mathcal{O}$ em $(\mathcal{C}(G),\rho)$ é aberto se, e somente se, para cada $f \in \mathcal{O}$, existirem um compacto $K \subset G$ e um $\delta > 0$ tal que*

$$\{g \in \mathcal{C}(G) : \sup_{z\in K}|f(z)-g(z)| < \delta\} \subset \mathcal{O}.$$

(b) Uma seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $(\mathcal{C}(G),\rho)$ converge se, e somente se, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir uniformemente sobre todos os compactos de G.

Proposição 1.18 *O espaço métrico $(\mathcal{C}(G),\rho)$ é completo.*

Demonstração: Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{C}(G)$. Então, para cada compacto $K \subset G$ a seqüência das funções restritas a K, $(f_n|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{z\in K}\{|f_n(z)-f_m(z)|\} < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\, n,m \geq N_\varepsilon. \qquad (2)$$

Em particular, para cada $z \in G$, a seqüência $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ é completo, existe $\xi_z \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \xi_z$. Consideremos então a função $f : G \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \xi_z$; vamos mostrar que f é contínua, e que $f_n|_K \to f|_K$ uniformemente.

Fixemos $\varepsilon > 0$ e seja $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que valha (2). Dado $z \in K$ qualquer, pela definição de f, existe $m_z > N_\varepsilon$ para o qual $|f_{m_z}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, para todo $n > N_\varepsilon$, temos $|f_n(z) - f(z)| < |f_n(z) - f_{m_z}(z)| + |f_{m_z}(z) - f(z)| < \varepsilon$. Segue que $\sup_{z\in K}\{|f_n(z) - f(z)|\} < \varepsilon$, para todo $n \geq N_\varepsilon$. Como n independe de z, a função $f|_K$ é limite uniforme da seqüência $(f_n|_K))_{n\in\mathbb{N}}$, implicando em f ser contínua em K ([8], página 29, Teorema 6.1). Visto que $K \subset G$ foi pêgo arbitrariamente, pela Proposição 1.14, segue que f é contínua em G e, assim, a seqüência $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre compactos para a função contínua f. Portanto, pelo Lema 1.17, $(\mathcal{C}(G), \rho)$ é completo. $\square$

Os resultados anteriores nos garantem que as topologias compacto-aberta τ_0 e a induzida pela métrica ρ definida acima coincidem. Assim, temos que $\mathcal{C}(G)$ é um espaço localmente convexo metrizável completo. Em outras palavras, $\mathcal{C}(G)$ é um *espaço de Fréchet*.

1.6 O Espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ das Funções Inteiras em $\mathbb{C}$.

Vamos a seguir estudar o subespaço topológico $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ de $\mathcal{C}(\mathbb{C})$. Considerando a restrição da métrica ρ definida anteriormente ao $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, para que esse subespaço herde as propriedades de $\mathcal{C}(\mathbb{C})$, é necessário e suficiente mostrar que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ é fechado em $\mathcal{C}(\mathbb{C})$.

Teorema 1.19 (Teorema de Morera) *Seja G um aberto conexo de $\mathbb{C}$ e consideremos uma função contínua $f : G \to \mathbb{C}$ tal que $\int_T f = 0$, para todo caminho triangular T em G. Então f será holomorfa.*

Demonstração: Ver [8], página 86. $\square$

Observamos que a integral definida num caminho triangular T corresponde a soma das integrais definidas nos segmentos que o compõe.

Teorema 1.20 *Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ e f uma função em $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ tal que $f_n \to f$. Então f é holomorfa e $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$, para todo inteiro $k \geq 1$.*

Demonstração: Mostraremos que f é holomorfa aplicando o Teorema de Morera. Sabemos, por hipótese que $f_n \to f$. Então, dado $\varepsilon > 0$, seja $T \subset \mathbb{C}$ um caminho triangular qualquer. Como T é compacto (fechado e limitado), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{z \in T} |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{\Delta T},\ \forall\, n > n_0,$$

com ΔT denotando a área de T. Em particular, para todo $n > n_0$,

$$\Big| \int_T f_n(z)dz - \int_T f(z)dz \Big| \leq \int_T |f_n(z) - f(z)|dz < \frac{\varepsilon}{\Delta T}\Delta T = \varepsilon.$$

Então $\int_T f_n(z)dz \to \int_T f(z)dz$ quando $n \to \infty$. Agora, T é uma caminho fechado e f_n é holomorfa para todo n; logo temos que $\int_T f_n(z)dz = 0$, para todo n e, pela unicidade do limite, $\int_T f(z)dz = 0$. Assim, para qualquer caminho triangular $T \in \mathbb{C}$, $\int_T f(z)dz = 0$; segue do Teorema de Moreira, que f é holomorfa.

Vamos a seguir, mostrar que $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$, para todo inteiro $k \geq 1$, utilizando para isso a estimativa de Cauchy ([8], página 73). Dado $\varepsilon > 0$, fixemos $k \geq 1$ e consideremos $K \subset \mathbb{C}$ um compacto. Então existe $R > 0$ tal que $K \subseteq RB_{\mathbb{C}}$ e, como $f_n \to f$ por hipótese, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{w \in RB_{\mathbb{C}}} |f_n(w) - f(w)| < \varepsilon \frac{R^k}{k!},\ \forall\, n > n_1,$$

uma vez que o conjunto $RB_{\mathbb{C}}$ é compacto. Agora, para cada $z \in K$, encontramos $r_z > 0$ tal que $(r_z B + z) \subseteq RB_{\mathbb{C}}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(v) - f(v)|$ é limitado qualquer que seja $v \in (r_z B + z)$. Aplicando a estimativa de Cauchy,

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{R^k} \sup_{v \in (r_z B + z)} |f_n(v) - f(v)| \leq \frac{k!}{R^k} \sup_{w \in RB_{\mathbb{C}}} |f_n(w) - f(w)| < \varepsilon,$$

para todo $n > n_1$, qualquer que seja $z \in K$. Em particular,

$$\sup_{z \in K} |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| < \varepsilon,\ \forall\, n > n_1.$$

Como K foi escolhido arbitrariamente, seque que $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformemente sobre compactos, para todo inteiro $k \geq 1$. $\square$

Corolário 1.21 *O subespaço $(\mathcal{H}(\mathbb{C}), \rho)$ é um espaço localmente convexo metrizável completo, ou seja, $(\mathcal{H}(\mathbb{C}), \rho)$ é um espaço de Fréchet.*

A seguir, enunciaremos um resultado que será utilizado ao longo do Capítulo 2.

Proposição 1.22 *Sejam K um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ e G uma vizinhança de K tal que $\mathbb{C} \setminus G$ é conexo. Então, para cada função f analítica em G, existe uma seqüência de polinômios $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{C}$ convergindo uniformemente para f em K.*

Omitiremos aqui a demonstração da proposição acima, mas salientamos que tal resultado é uma conseqüência do Teorema de Runge, cujos enunciado e demonstração podem ser encontrados em ([8], páginas 198 a 200).

O próximo resultado será utilizado no Capítulo 4 dessa dissertação. Entretanto, antes de enunciá-lo, iremos definir funções de tipo exponencial.

Definição 1.23 *Uma função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ é dita ser de tipo exponencial quando existem $C > 0$ e $R > 0$ tais que $|f(z)| \leq Ce^{R|z|}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.*

O espaço vetorial constituído por todas as funções de tipo exponencial é denotado por $\mathrm{Exp}(\mathbb{C})$.

Proposição 1.24 *Sejam f uma função holomorfa e*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(x_0)(x - x_0)^n$$

sua série de Taylor em $x_0 \in \mathbb{C}$. Então f é de tipo exponencial se, e somente se, a seqüência $(|f^{(n)}(x_0)|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ for limitada.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que a função f seja de tipo exponencial. Então existem $C > 0$ e $R > 0$ tais que $|f(z)| \leq Ce^{R|z|}$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Vamos mostrar que $(|f^{(n)}(x_0)|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. De acordo com a estimativa de Cauchy ([8], página 73), para cada $n \in \mathbb{N}$ e para todo $\rho > 0$,

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(x_0)| &\leq \left(\frac{n!}{\rho^n}\right) \sup_{|x-x_0|=\rho} |f(x)| \leq \left(\frac{n!}{\rho^n}\right) \sup_{|x-x_0|=\rho} (Ce^{R|x|}) \\ &= \left(\frac{n!}{\rho^n}\right) \sup_{|x-x_0|=\rho} (Ce^{R|(x-x_0)+x_0|}) \leq Ce^{R|x_0|}\left(n!\frac{e^{R\rho}}{\rho^n}\right). \end{aligned}$$

Tomando então $\rho = \frac{n}{R}$, segue que $|f^{(n)}(x_0)| \leq Ce^{R|x_0|}\left(n!\frac{e^n R^n}{n^n}\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Agora, a Fórmula de Stirling garante que, para $n >> 1$, $n! = \frac{n^n}{e^n}$. Nesse caso,

$$|f^{(n)}(x_0)| \leq Ce^{R|x_0|}R^n \Longrightarrow |f^{(n)}(x_0)|^{\frac{1}{n}} \leq (Ce^{R|x_0|})^{\frac{1}{n}}R.$$

Logo $\lim_{n\to\infty} \sup |f^{(n)}(x_0)|^{\frac{1}{n}} < R$ e, portanto, a seqüência $(|f^{(n)}(x_0)|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Reciprocamente, suponhamos que $(|f^{(n)}(x_0)|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e vamos encontrar $C > 0$ e $R > 0$ para os quais $|f(z)| \leq Ce^{R|z|}$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Como $(|f^{(n)}(x_0)|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$

é limitada, existe $M > 0$ tal que $|f^{(n)}(x_0)|^{\frac{1}{n}} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, ou seja, $|f^{(n)}(x_0)| \leq M^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Então

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(x_0)(x-x_0)^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!}|x-x_0|^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}|x-x_0|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(M|x-x_0|)^n \\ &= e^{M|x-x_0|} \leq e^{M|x_0|}e^{M|x|}. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $C = e^{M|x_0|}$ e $R = M$ segue que $|f(z)| \leq Ce^{R|z|}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

□

Capítulo 2

Hiperciclicidade

Conforme mencionamos na introdução desse trabalho, o conceito de famílias universais teve sua origem em um trabalho de G. D. Birkhoff em 1929, onde foi provada a existência de uma função f em $H(\mathbb{C})$ tal que o conjunto $\{f(z), f(1+z), ..., f(n+z), ...\}$ é denso em $H(\mathbb{C})$, quando $H(\mathbb{C})$ está munido da topologia compacto-aberta. Mais tarde, em 1952, MacLane encontrou uma função $f \in H(\mathbb{C})$ tal que o conjunto $\{f, f', ..., f^{(n)}, ...\}$ é denso em $H(\mathbb{C})$. Já o primeiro exemplo conhecido de operadores hipercíclicos em espaços de Banach e Hilbert na literatura foi o desenvolvido por Rolewicz em 1969. A seguir, apresentaremos demonstrações desses resultados. Para os exemplos de Birkhoff e MacLane, seguiremos o artigo [2] e, para o exemplo de Rolewicz, reproduziremos a demonstração original existente no artigo [26]. Feito isso, apresentaremos alguns resultados sobre hiperciclicidade.

Definição 2.1 *Sejam E um espaço vetorial topológico e T um operador linear contínuo em E. Dizemos que T é hipercíclico se, para algum elemento $x \in X$, a órbita de x sob T, $Orb(T, x) = \{x, Tx, T^2x, ...\}$, for densa em E. Nesse caso, tal elemento $x \in E$ será chamado de vetor hipercíclico para T.*

De acordo com a definição de operador hipercíclico, para que um espaço vetorial topológico E tenha algum operador hipercíclico definido em E, E precisa ser separável, ou seja, E precisa conter um subconjunto enumerável denso. Outra observação a ser feita é que não existem operadores hipercíclicos em espaços de dimensão finita, uma vez que todo espaço E de dimensão finita $m > 0$ é isomorfo a $\mathbb{K}^m$. Em particular, se considerarmos um operador linear T definido no espaço E e a forma de Jordan de T em relação a uma base apropriada $\mathcal{B}$, teremos uma das seguintes situações:

$$(i) \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{(m-1)\times(m-1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

no caso de E ter pelo menos um autovalor λ ou

$$(ii) \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & -b & 0 & \ldots & 0 \\ b & a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & B_{(m-2)\times(m-2)} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

no caso de E ser um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e não possuir autovalor. Nesse caso, podemos considerar $a + ib$=$r(cos\varphi + i \text{ sen}\varphi)$, com $r > 0$ e $\varphi \in \mathbb{R}$ ([14]).

Vamos analisar ambos os casos separadamente.

(i) Consideremos $x \in E$ e escrevamos x na base $\mathcal{B}$ como $x = (x_1, x_2, ..., x_m)_{\mathcal{B}}$. Então, tomando $n \in \mathbb{N}$,

$$[T^n]_{\mathcal{B}}. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'_{(m-1)\times(m-1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n x_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

quaisquer que sejam as coordenadas $v_2, ..., v_{m-1}, v_m$.

Supondo $\lambda = |\lambda|(\cos\theta + i \text{ sen}\theta)$ e $x_1 \neq 0$, e tomando $n \to \infty$, teremos três situações:

$$\begin{cases} |\lambda| < 1 & \Rightarrow & |\lambda^n x_1| & \to 0, \\ |\lambda| = 1 & \Rightarrow & |\lambda^n x_1| & = |x_1|, \\ |\lambda| > 1 & \Rightarrow & |\lambda^n x_1| & \to \infty, \end{cases}$$

implicando em $\{\lambda^n x_1 : n \in \mathbb{N}\}$ não ser denso em $\mathbb{K}$.

(ii) Por outro lado, se T não tem auto-valores

$$[T^n]_{\mathcal{B}}. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^n\cos(n\varphi) & -r^n\text{sen}(n\varphi) & 0 & \ldots & 0 \\ r^n\text{sen}(n\varphi) & r^n\cos(n\varphi) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & B'_{(m-2)\times(m-2)} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r^n \cos(n\varphi)x_1 - r^n \text{sen}(n\varphi)x_2 \\ r^n \text{sen}(n\varphi)x_1 + r^n \cos(n\varphi)x_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

para alguns $w_3, ..., w_m$. Note que

$$\|(r^n(\cos(n\varphi)x_1 - \text{sen}(n\varphi)x_2), r^n(\text{sen}(n\varphi)x_1 + \cos(n\varphi)x_2))\|_2 = |r|^n(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$$

Logo, fazendo o mesmo tipo de análise da feita no caso (i), concluiremos que

$$\{(r^n(\cos(n\varphi)x_1 - \text{sen}(n\varphi)x_2), r^n(\text{sen}(n\varphi)x_1 + \cos(n\varphi)x_2)) : n \in \mathbb{N}\}$$

não pode ser denso em $\mathbb{K}^2$.

Agora, para $j \in \{1, ..., m\}$, consideremos a função

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{K}^m & \longrightarrow & \mathbb{K}^j \\ (y_1, ..., y_{j-1}, y_j, y_{j+1}, ..., y_m) & \longmapsto & (y_1, ..., y_{j-1}, y_j). \end{array}$$

Claramente, f é contínua e sobrejetora. Logo, leva densos de $\mathbb{K}^m$ em densos de $\mathbb{K}^j$. Suponhamos agora que $x = (x_1, ..., x_m)$ seja um vetor hipercíclico associado a T. Então a órbita $\text{Orb}(T, x) = \{T^n(x_1, ..., x_m) : n \in \mathbb{N}\}$ é densa em $\mathbb{K}^m$ e, conseqüentemente, $f(\text{Orb}(T, x))$ também seria densa em $\mathbb{K}^j$. Entretanto, acabamos de demonstrar que para $j = 1, 2$ isso não ocorre. Portanto, $\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$ não é denso em E, qualquer que seja $x \in E$, ou seja, T não pode ser hipercíclico.

Resumindo: *não existem operadores hipercíclicos em espaços de Banach de dimensão finita.*

Sendo assim, de agora em diante, trabalharemos apenas com espaços de Fréchet separáveis de dimensão infinita.

2.1 Exemplos Clássicos

Mencionamos na introdução deste trabalho que o primeiro exemplo conhecido de operadores hipercíclicos foi dado por Birkhoff em 1929 ([6]). A seguir, exibiremos tal exemplo, seguindo para isso a demonstração dada por Aron e Markose no artigo [2].

Teorema 2.2 (Birkhoff) *Existe uma função $f \in H(\mathbb{C})$ com a seguinte propriedade: Dados uma função $g \in H(\mathbb{C})$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer, para todo $R > 0$ existe um número* *natural n tal que $|f(z+n)-g(z)|<\varepsilon$ qualquer que seja z com $|z|\leq R$. Em outras palavras, o operador*

$$\begin{aligned} L : H(\mathbb{C}) &\longrightarrow H(\mathbb{C}) \\ f &\longmapsto L(f), \end{aligned}$$

onde $L(f)(z)=f(z+1)$, $\forall z\in\mathbb{C}$, é hipercíclico.

Demonstração: Sabemos que o espaço dos polinômios com coeficientes complexos $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ é denso em $H(\mathbb{C})$. Como ele é separável, podemos escolher uma seqüência de polinômios $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ densa em $H(\mathbb{C})$. Para facilitar o argumento da demonstração, vamos supor que cada P_j aparece uma quantidade infinita de vezes na seqüência.

Consideremos agora $(D_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de discos fechados disjuntos, cada D_j com raio j e centro c_j de tal forma que $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência crescente de números inteiros positivos. Seja também $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de discos fechados centrados na origem e de tal forma que $D_j\subset E_j$ e $D_{j+1}\cap E_j=\emptyset$. Em outras palavras,

$$\begin{aligned} D_k\subset E_j, &\qquad \text{para todo } 0\leq k\leq j \quad \text{e} \\ D_k\cap E_j=\emptyset, &\qquad \text{para todo } k\geq j. \end{aligned}$$

Vamos a seguir construir a função f.

Seja $Q_1=P_1$ e consideremos $K_1=E_1\cup D_2$.
Como E_1 e D_2 são compactos, segue que K_1 é compacto, e podemos considerar uma função h_1 holomorfa em uma vizinhança de K_1 satisfazendo

$$h_1(z)=\begin{cases} 0 & \text{se } z\in E_1 \\ P_2(z-c_2)-Q_1(z) & \text{se } z\in D_2 \end{cases}$$

uma vez que E_1 e D_2 são disjuntos. Como $\mathbb{C}\setminus K_1$ é conexo por caminhos, pela Proposição 1.22, existe um polinômio Q_2 tal que

$$\|Q_2\|_{E_1}<\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \sup_{z\in D_2}|Q_2-(P_2(z-c_2)-Q_1(z))|<\frac{1}{2}.$$

Repetindo o procedimento acima, podemos encontrar um polinômio Q_3 tal que

$$\|Q_3\|_{E_2}<\frac{1}{2^2} \quad \text{e} \quad \sup_{z\in D_3}|Q_3-h_2(z)|<\frac{1}{2^2},$$

onde $h_2(z)$ é uma função holomorfa em uma vizinhança de $E_2\cup D_3$ tal que $h_2(z)=P_3(z-c_3)-Q_1(z)-Q_2(z)$, para todo $z\in D_3$.

Em geral, seja Q_n um polinômio tal que

$$\|Q_n\|_{E_{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{e} \quad \sup_{z\in D_n} |Q_n - (P_n(z-c_n) - \sum_{j=1}^{n-1} Q_j(z))| < \frac{1}{2^{n-1}}. \qquad (1)$$

Observemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ é de Cauchy. De fato, seja $\varepsilon > 0$. Então, dado K um compacto de $\mathbb{C}$, existe $N \in \mathbb{N}$ para o qual $K \subset E_N$ e $1/(2^N) < \varepsilon$. Assim, para $n > m \geq N$ suficientemente grandes,

$$\begin{aligned}
\sup\nolimits_{z\in K} \quad & |\sum_{j=1}^{n} Q_j(z) - \sum_{j=1}^{m} Q_j(z)| \leq \sup_{z\in E_N} |\sum_{j=1}^{n} Q_j(z) - \sum_{j=1}^{m} Q_j(z)| \\
= \quad & \sup_{z\in E_N} |\sum_{j=m+1}^{n} Q_j(z)| \leq \sup_{z\in E_N} \sum_{j=m+1}^{n} |Q_j(z)| \\
\leq \quad & \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^N} < \varepsilon. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Como esse espaço é completo, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ é convergente. Seja então $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ dada por $f = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ e vamos mostrar que a órbita de f sob translações é densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Para isso, basta mostrar que, dados $\varepsilon > 0$ e $R > 0$, para cada $P_k \in (P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é possível encontrar $l_k \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{|z|\leq R} |f(z + c_{l_k}) - P_k(z)| < \varepsilon$. De fato, como a seqüência $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, para cada $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{|z|\leq R} |g(z) - P_k(z)| < \varepsilon$. Logo,

$$\sup_{|z|\leq R} |f(z + c_{l_k}) - g(z)| \leq \sup_{|z|\leq R} |f(z + c_{l_k}) - P_k(z)| + \sup_{|z|\leq R} |g(z) - P_k(z)| < 2\varepsilon.$$

Conseqüentemente, $\{f(z + c_{l_j}) : j \in \mathbb{N}\} \subset \{f(z + n) : n \in \mathbb{N}\}$ também será denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Consideremos então $P_k \in (P_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Como, por hipótese, P_k aparece uma quantidade infinita de vezes na seqüência, existe $l \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que

$$l > R, \quad \frac{1}{2^{l-1}} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{e} \quad P_l = P_k. \qquad (3)$$

Notemos que, se $z \in \mathbb{C}$ for tal que $|z| \leq R$, então $w = z + c_l \in (RB_{\mathbb{C}} + c_l) \subset (lB_{\mathbb{C}} + c_l) \subset D_l \subset E_l$. Logo

$$\sup\nolimits_{|z|\leq R} \quad |f(z + c_l) - P_k(z)| \quad \leq \quad \sup_{w\in D_l} |f(w) - P_l(w - c_l)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{w\in D_l}\Big|f(w)-\sum_{j=1}^{l}Q_j(w)\Big| + \sup_{w\in D_l}\Big|\sum_{j=1}^{l}Q_j(w)-P_l(w-c_l)\Big| \\
&\leq \sup_{w\in D_l}\Big|\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(w)-\sum_{j=1}^{l}Q_j(w)\Big| + \sup_{w\in D_l}\Big|\sum_{j=1}^{l}Q_j(w)-P_l(w-c_l)\Big| \\
&\leq \sup_{w\in D_l}\sum_{n=l+1}^{\infty}|Q_n(w)| + \sup_{w\in D_l}\Big|\sum_{j=1}^{l}Q_j(w)-P_l(w-c_l)\Big| \\
&\leq \frac{1}{2^l}+\frac{1}{2^{l-1}} < \varepsilon, \quad \text{por (2), (1) e (3) respectivamente.}
\end{aligned}$$

Segue que $\sup\limits_{|z|\leq R}|f(z+c_l)-P_k(z)|<\varepsilon$ e, portanto, o conjunto $\{f(z+n) : n\in\mathbb{N}\}$ é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. $\square$

Em 1952, MacLane provou em [18] que o operador diferenciação definido no espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ é hipercíclico. Novamente, vamos seguir o artigo [2] de Aron e Markose para exibir essa demonstração.

Teorema 2.3 (MacLane) *Existe uma função inteira f tal que $\{f^{(n)} : n\in\mathbb{N}\}$ é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.*

Demonstração: Para construir tal função f, vamos utilizar a aplicação $I:\mathcal{H}(\mathbb{C})\to\mathcal{H}(\mathbb{C})$ definida por

$$I(h)(z)=\int_0^z h(w)dw.$$

Sabemos que o espaço de polinômios é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Pensando em facilitar a demonstração do teorema, estudaremos inicialmente o comportamento de I aplicado ao polinômio $g(z)=z^n$, com $n\in\mathbb{N}$. Como $I(g)(z)=\frac{z^{n+1}}{n+1}$, temos que

$$I^k(g)(z)=\frac{z^{n+k}}{(n+k)...(n+1)}, \quad \text{para todo } \; k\in\mathbb{N}.$$

Então, se considerarmos $z\in\mathbb{C}$, com $|z|\leq R$,

$$|I^k(g)(z)|\leq\frac{R^{n+k}}{(n+k)...(n+1)}\leq R^n\frac{R^k}{k!}, \quad \forall\, k\in\mathbb{N}.$$

Assim, temos que $\sup_{|z|\leq R}|I^k(g)(z)|\to 0$ quando $k\to\infty$.

Dados P um polinômio, $\delta>0$ e $R>0$ quaisquer, existe $\widetilde{k}\in\mathbb{N}$ para o qual $\sup_{|z|\leq R}|I^k(P)(z)|<\delta$ sempre que $k\geq\widetilde{k}$.

Consideremos agora h uma função inteira qualquer. Dados $\varepsilon > 0$ e $M \in \mathbb{N}$, suponhamos $R \geq 2$ e $\delta < \frac{\varepsilon}{M!}$; se $\sup_{|z|\leq R} |h(z)| < \delta$ então, pela estimativa de Cauchy,

$$\sup_{|w|\leq \frac{R}{2}} |h^{(j)}(w)| \leq \frac{j! \sup_{|z|\leq R} |h(z)|}{(R/2)^j} \leq j! \left(\frac{2}{R}\right)^j \delta < \varepsilon$$

para qualquer $j = 0, ..., M$ (lembrando que $0! = 1$).

Assim, dados P um polinômio, $\varepsilon > 0$, $R \geq 2$ e $M \in \mathbb{N}$ quaisquer, existem $\delta < \frac{\varepsilon}{M!}$ e $\widetilde{k} \in \mathbb{N}$ tal que, se $k \geq \widetilde{k}$, então $\sup_{|z|\leq 2R} |I^k(P)(z)| < \delta$. Denotando $I^k(P)(z)$ por $Q(z)$, temos

$$\sup_{|z|\leq R} |Q^{(j)}(z)| < \varepsilon \tag{4}$$

para qualquer $j = 0, ..., M$.

Consideremos uma seqüência de polinômios $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ densa em $H(\mathbb{C})$ tal que cada P_j aparece uma quantidade infinita de vezes na seqüência. Construiremos a função f de tal forma que

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} I^{k_j}(P_j)$$

para índices k_j apropriados.

Consideremos $k_1 = 0, Q_1 = P_1$. Tomando $\varepsilon = 1/2^2$, $R = 2$ e $M = k_1$, por (4) existe um $\widetilde{k} \in \mathbb{N}$ tal que, se $k \geq \widetilde{k}$ e $I^k(P)(z) \equiv Q(z)$, temos

$$\sup_{|z|\leq 2} |Q^{(k_1)}(z)| < \frac{1}{2^2}.$$

Assim, seja $k_2 > \max\{k_1 + \deg P_1, \widetilde{k}\}$. Então, chamando $Q_2 = I^{k_2}(P_2)$, teremos $\sup_{|z|\leq 2} |Q_2(z)| < 1/2^2$.
Procedendo de modo análogo, agora para $\varepsilon = 1/2^3$, $R = 3$ e $M = k_2$, podemos escolher k_3 tal que $k_3 > k_2 + \deg P_2$ e, sendo $Q_3 = I^{k_3}(P_3)$,

$$\begin{aligned}
\sup_{|z|\leq 3} |Q_3(z)| &< \frac{1}{2^3}, \\
\sup_{|z|\leq 3} |Q_3'(z)| &< \frac{1}{2^3}, \\
&(...) \\
\sup_{|z|\leq 3} |Q_3^{(k_2)}(z)| &< \frac{1}{2^3}.
\end{aligned}$$

Em geral, seja $k_n > k_{n-1} + \deg P_{n-1}$ grande o suficiente para que, se $Q_n = I^{k_n}(P_n)$,

$$\begin{aligned}
\sup_{|z|\leq n} |Q_n(z)| &< \frac{1}{2^n}, \\
\sup_{|z|\leq n} |Q'_n(z)| &< \frac{1}{2^n}, \\
&(...) \\
\sup_{|z|\leq n} |Q_n^{(k_n)}(z)| &< \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Note que $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ é de Cauchy. De fato, seja $\varepsilon > 0$. Então, dado K um compacto de $\mathbb{C}$, existe $N \in \mathbb{N}$ para o qual $K \subset NB_{\mathbb{C}}$. Assim, para $n > m \geq N$ suficientemente grandes,

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in K} |\sum_{j=1}^{n} Q_j(z) - \sum_{j=1}^{m} Q_j(z)| &\leq \sup_{z\in NB_{\mathbb{C}}} |\sum_{j=1}^{n} Q_j(z) - \sum_{j=1}^{m} Q_j(z)| \\
&= \sup_{z\in NB_{\mathbb{C}}} |\sum_{j=m+1}^{n} Q_j(z)| \\
&\leq \sup_{z\in NB_{\mathbb{C}}} \sum_{j=m+1}^{n} |Q_j(z)| \\
&\leq \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ é completo, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ é convergente.

Consideremos então a função $f = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ e vamos mostrar que f é a função na qual estamos interessados.

Sejam $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), R > 0$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer e escolhamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > R$ e $(1/2^{n_0-1}) < \varepsilon/2$.

Pela escolha da seqüência de polinômios (P_n), existe $l > n_0$ para o qual

$$\sup_{|z|\leq n_0} |g(z) - P_l(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, lembrando que $Q_j = I^{k_j}(P_j)$, $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{|z|\leq n_0} |g(z) - f^{(k_l)}(z)| = \sup_{|z|\leq n_0} |g(z) - \sum_{j=1}^{\infty} Q_j^{(k_l)}(z)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{|z|\leq n_0} (|g(z) - P_l(z)| + |P_l(z) - \sum_{j=l}^{\infty} Q_j^{(k_l)}(z)|) \\
&\leq \sup_{|z|\leq n_0} |g(z) - P_l(z)| + \sup_{|z|\leq n_0} |\sum_{j=l+1}^{\infty} Q_j^{(k_l)}(z)|) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=l+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^l} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Portanto o conjunto $\{f^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. $\square$

Os dois resultados anteriores exibiram exemplos de hiperciclicidade em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Já em espaços de Banach ou Hilbert, os primeiros exemplos conhecidos na literatura foram dados por Rolewicz em 1969 ([26]): ele construiu vetores hipercíclicos para os operadores conhecidos como "weighted backward shifts" em determinados espaços de seqüências complexas ($l_p(\mathbb{N}), 1 \leq p < \infty$, ou c_0). A seguir, vamos reproduzir sua demonstração para o espaço $l_p(\mathbb{N})$.

Teorema 2.4 (Rolewicz) *Seja $l_p(\mathbb{N})$ $(1 \leq p < \infty)$ o espaço de Banach das seqüências p-somáveis e consideremos, para cada $a \in \mathbb{R}$, o operador T_a definido como*

$$\begin{aligned}
T_a : l_p(\mathbb{N}) &\longrightarrow l_p(\mathbb{N}) \\
(x_1, x_2, ...) &\longmapsto a(x_2, x_3, ...)
\end{aligned}$$

conhecido como "weighted backward shift". Se $a > 1$, então T será hipercíclico.

Demonstração: Sejam

$$\begin{aligned}
T : \quad l_p(\mathbb{N}) &\longrightarrow l_p(\mathbb{N}) \\
(x_1, x_2, ...) &\longmapsto (x_2, x_3, ...)
\end{aligned}
\quad \text{e} \quad
\begin{aligned}
S : \quad l_p(\mathbb{N}) &\longrightarrow l_p(\mathbb{N}) \\
(x_1, x_2, ...) &\longmapsto (0, x_1, x_2, ...)
\end{aligned}$$

os operadores *backward shift* e *forward shift* respectivamente.

Sejam agora $T_a = aT$ e $B = S/a$, onde $a > 1$. Mostraremos que o operador T_a é hipercíclico. Para isso, construiremos o vetor $y \in l_p(\mathbb{N})$ cuja órbita $\text{Orb}(T_a, y)$ é densa em l_p.

Consideremos a seqüência $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset l_p(\mathbb{N})$ tal que, para cada n, $x^n = (x_1^n, x_2^n, ...) \in l_p(\mathbb{N})$ possui apenas uma quantidade finita de coordenadas não nulas. Sabemos que essa seqüência é densa em $l_p(\mathbb{N})$. Seja $k(n)$ o maior índice da coordenada de x^n que não é 0. Tomemos agora uma seqüência $r(n)$ de inteiros positivos tal que

$$\begin{aligned}
r(n) &> \max_{1\leq i\leq n} k(i) \quad \text{e} \qquad (5) \\
||B^{r(n)}x^n|| &= \frac{1}{a^{r(n)}}||x^n|| < \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Sendo $p(n) = \sum_{i=1}^{n} r(i)$, consideremos $y = \sum_{n} B^{p(n)}x^n$; por (5), y está bem definido. Por outro lado, de (5) também segue que $T_a^{r(n)}x^i = 0$, para todo $i < n$. Logo,

$$T_a^{p(n)}y = x^n + \sum_{m=n+1}^{\infty} B^{p(m)-p(n)}x^m.$$

Mas

$$\begin{aligned} \|\sum_{m=n+1}^{\infty} B^{p(m)-p(n)}x^m\| &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \|B^{p(m)-p(n)}x^m\| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{a^{p(m)-p(n)}}\|x^m\| \\ &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{a^{r(m)}}\|x^m\| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Portanto $\|T_a^{p(n)}y - x^n\| \leq \frac{1}{2^n}$.

Vamos, a seguir, provar a densidade de $\mathrm{Orb}(T_a, y)$ em $l_p(\mathbb{N})$. Seja $\varepsilon > 0$; então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$. Considerando agora a subseqüência $(x^k)_{k\in I}$ onde $I = \mathbb{N} \setminus \{n \mid n < m\}$, temos que $(x^k)_{k\in I}$ continua densa em $l_p(\mathbb{N})$. Assim, dado um elemento $z \in l_p(\mathbb{N})$, existe $n \in I$ tal que $\|z - x^n\| < \varepsilon$ e $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Logo,

$$\begin{aligned} \|T_a^{p(n)}y - z\| &\leq \|T_a^{p(n)}y - x^n\| + \|x^n - z\| \\ &\leq \frac{1}{2^n} + \varepsilon < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Como $z \in X$ arbitrário, segue que $\mathrm{Orb}(T_a, y)$ é denso em $l_p(\mathbb{N})$ e, conseqüentemente, T_a é um operador hipercíclico em $l_p(\mathbb{N})$. $\square$

2.2 Alguns Resultados sobre Hiperciclicidade

Consideremos E um espaço de Fréchet. A topologia em E é induzida por uma métrica completa invariante sob translações d. Então, para cada $y \in E$, escrevemos

$$B(y, \varepsilon) = \{x \in E : d(y, x) < \varepsilon\}$$

a bola aberta de centro y e raio $\varepsilon > 0$.

Conforme mencionamos na introdução desse trabalho, sob hipóteses muito naturais, um tipo de Lei Zero-Um Topológica vale: em um espaço de Fréchet, ou o conjunto dos elementos hipercíclicos é vazio, ou quase todo elemento do espaço é hipercíclico. Vamos a seguir demonstrar esse fato, de acordo com o artigo [11].

Proposição 2.5 *Sejam E um espaço de Fréchet separável e T um operador hipercíclico em E. Então E possui um conjunto G_δ denso constituído de vetores hipercíclicos associados a T.*

Demonstração: Seja $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma seqüência densa em E. Como T é contínuo, para cada $n \in \mathbb{N}$, T^n também é contínuo e, assim, $T^{-n}\Big(B\Big(y_j, \frac{1}{k}\Big)\Big)$ é aberto, quaisquer que sejam $n, j, k \in \mathbb{N}$.

Seja $HC(T)$ o conjunto de todos os vetores hipercíclicos para T.Por hipótese, $HC(T)$ é não vazio e, para cada $x \in HC(T)$, a órbita de x sob T, $\mathrm{Orb}(T, x)$, é densa em E. Então, dado $x \in HC(T)$, para cada $j, k \in \mathbb{N}$ existe $n_{j,k} \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_{j,k}}x \in B\Big(y_j, \frac{1}{k}\Big)$. Logo, para cada $j, k \in \mathbb{N}$, $x \in T^{-n_{j,k}}B(y_j, 1/k)$. Considerando então, para cada $j, k \in \mathbb{N}$, o conjunto aberto

$$G_{j,k} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^{-n}\Big(B\Big(y_j, 1/k\Big)\Big),$$

segue que $HC(T) \subset \cap_{j,k\in\mathbb{N}} G_{j,k}$.

Por outro lado, se $x \in \cap_{j,k\in\mathbb{N}} G_{j,k}$, vamos mostrar que $x \in HC(T)$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $z \in E$, existem $j_0, k_0 \in \mathbb{N}$ tais que $1/k_0 < \varepsilon/2$ e $d(z, y_{j_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $x \in G_{j_0,k_0}$, $T^{n_0}x \in B(y_{j_0}, 1/k_0)$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Assim,

$$d(T^{n_0}x, z) \leq d(T^{n_0}x, y_{j_0}) + d(y_{j_0}, z) < \frac{1}{k_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Logo a órbita de x sob T é densa em E, para todo $x \in \cap_{j,k\in\mathbb{N}} G_{j,k}$. Segue que $HC(T) = \cap_{j,k\in\mathbb{N}} G_{j,k}$.

Agora, se x for um vetor hipercíclico para T, para todo $n \in \mathbb{N}$, $T^n x$ também será pois a órbita $\mathrm{Orb}(T, T^n x)$ é igual a órbita $\mathrm{Orb}(T, x)$ menos uma quantidade finita de elementos, permanecendo, portanto, densa no espaço E. Logo $\mathrm{Orb}(T, x) \subset HC(T)$. Daí segue que $HC(T) = \cap_{j,k\in\mathbb{N}} G_{j,k}$ é denso em E. □

Nem sempre é fácil mostrar que um dado operador T num espaço de Fréchet é hipercíclico exibindo o vetor cuja órbita é densa no espaço. Entretanto, existe um critério que nos diz se o operador em questão é hipercíclico. Esse resultado é conhecido como *Critério de Hiperciclicidade.*

Teorema 2.6 (Critério de Hiperciclicidade) *Seja T um operador linear contínuo em um espaço de Fréchet E separável. Suponhamos que existem subconjuntos densos Z e Y de E, uma seqüência de inteiros positivos $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e uma família de aplicações $S_{n_k} : Z \to Z$ tal que*

(i) para cada $y \in Y$, $T^{n_k}y \mapsto 0$, quando $k \to \infty$;

(ii) para cada $z \in Z$, $S_{n_k}z \mapsto 0$, quando $k \to \infty$;

(iii) $T^{n_k} \circ S_{n_k}z \mapsto z$, quando $k \to \infty$, para todo $z \in Z$.

Então T é hipercíclico.

Demonstração: Seja (y_j) uma seqüência enumerável densa em E. Para cada $j, k \in \mathbb{N}$, consideremos novamente os conjuntos $G_{j,k} = \cup_{n\in\mathbb{N}} T^{-n}B(y_j, 1/k)$. Para demonstrarmos o teorema, basta mostrarmos que, para cada j e para cada k, $G_{j,k}$ é denso em E. Ao provarmos isso, pelo Teorema de Baire (Teorema 1.1), teremos que $\cap_{j,k} G_{j,k}$ é denso em E. Como mostramos que todo elemento de $\cap_{j,k} G_{j,k}$ é hipercíclico para T, poderemos concluir que T é hipercíclico.

Fixemos $G_{j,k}$. Para facilitar a notação, denotaremos y_j por y e $1/k$ por ε. Sejam $z \in E$ e $\delta > 0$. Precisamos encontrar um elemento $x \in G_{j,k}$ tal que $d(x, z) < \delta$. Como por hipótese Z e Y são densos em E, existem $y_0 \in Y$ e $z_0 \in Z$ tais que

$$d(y, z_0) < \frac{\varepsilon}{2} \;\text{ e }\; d(z, y_0) < \frac{\delta}{2}.$$

Agora, por (i), $T^{n_k}(y_0) \to 0$ quando $k \to \infty$. Assim, existe um inteiro positivo K_1 para o qual $T^{n_k}y_0 \in B(0, \frac{\varepsilon}{4})$, para todo $k \geq K_1$. Também por (ii) e (iii), $S_{n_k}(z_0) \to 0$ e $T^{n_k} \circ S_{n_k} z_0 \to z_0$ quando $k \to \infty$. Logo, existe um inteiro positivo K_2 para o qual $S_{n_k} z_0 \in B(0, \frac{\delta}{2})$ e $T^{n_k} \circ S_{n_k} z_0 \in B(z_0, \frac{\varepsilon}{4})$, para todo $k \geq K_2$. Fixemos então $k > \max\{K_1, K_2\}$ e consideremos o vetor $x = S_{n_k} z_0 + y_0$ pertencente a E. Como $T^{n_k}x = T^{n_k}(S_{n_k} z_0 + y_0) = T^{n_k} S_{n_k} z_0 + T^{n_k} y_0$ e $z_0 \in Z$,

$$\left.\begin{array}{l} T^{n_k}x \in B(z_0, \frac{\varepsilon}{2}) \\ y \in B(z_0, \frac{\varepsilon}{2}) \end{array}\right\} \Longrightarrow d(T^{n_k}x, y) < \varepsilon.$$

Logo $T^{n_k}x \in B(y, \varepsilon)$, ou seja, $x \in T^{-n_k}(B(y, \varepsilon)) \subset G_{j,k}$. Além disso,

$$\left.\begin{array}{l} x = S_{n_k} z_0 + y_0 \Rightarrow (x - y_0) \in B(0, \frac{\delta}{2}) \Rightarrow x \in B(y_0, \frac{\delta}{2}) \\ z \in B(y_0, \frac{\delta}{2}) \end{array}\right\} \Longrightarrow d(x, z) < \delta.$$

Como z foi escolhido arbitrariamente, segue que $G_{j,k}$ é denso em E, para todos $j, k \in \mathbb{N}$, ou seja, $\cap_{j,k\in\mathbb{N}} G_{j,k}$ é denso em E. $\square$

Aplicando o Critério de Hiperciclicidade no operador diferenciação (MacLane, por exemplo), podemos mostrar de uma maneira bem mais simples que ele é hipercíclico. De fato, se considerarmos $Y = Z = \mathcal{P}$, onde $\mathcal{P}$ é o conjunto dos polinômios, a seqüência de inteiros positivos $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ e a família de aplicações $S_n : Z \to Z$ com $S_n = S^n$, onde S é a aplicação definida por $Sf(z) = \int_0^z f(w)dw$, para todo $f \in \mathcal{P}$, teremos as hipóteses do Critério satisfeitas e, portanto, o operador diferenciação é hipercíclico. Entretanto, perde-se informação: não sabemos quais são os vetores hipercíclicos associados a ele.

No exemplo acima, aplicamos um caso particular do Critério de Hiperciclicidade, conhecido na literatura como Critério de Kitai:

Corolário 2.7 (Critério de Kitai) *Seja T um operador linear contínuo em um espaço de Fréchet E separável. Suponhamos que existem subconjuntos densos Z e Y de E e que existe uma aplicação $S : Z \to Z$ tal que*

(i) para cada $y \in Y$, $T^n y \mapsto 0$, quando $n \to \infty$;

(ii) para cada $z \in Z$, $S^n z \mapsto 0$, quando $n \to \infty$;

(iii) $T \circ S = Id_Z$.
Então T é hipercíclico.

Um resultado interessante para o caso em que X é um espaço de Banach complexo, é o fato de, para cada operador hipercíclico T, existir um subespaço vetorial denso T-invariante em X constituído inteiramente, exceto pelo vetor nulo, de vetores hipercíclicos. Esse teorema foi demonstrado por Bourdon em [7] e pretendemos apresentá-lo aqui. Para isso, antes precisaremos do seguinte resultado:

Proposição 2.8 *Sejam X um espaço de Banach separável e T um operador hipercíclico em X. Então o espectro pontual do operador adjunto T^* é vazio.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que T^* tenha um autovalor λ e que $f \in X^* \setminus \{0\}$ seja o autovetor correspondente. Então, dado $x \in X$ um elemento qualquer,

$$\begin{aligned} \{f \circ T^n(x) : n = 0, 1, 2, ...\} &= \{(T^*)^n(f)(x) : n = 0, 1, 2, ...\} \\ &= \{\lambda^n f(x) : n = 0, 1, 2, ...\}, \end{aligned}$$

que não é denso em $\mathbb{C}$, uma vez que $f(x) \in \mathbb{C}$ está fixo. Como f é sobrejetor, segue que $\{(T^n(x) : n = 0, 1, 2, ...\}$ também não é denso em $\mathbb{C}$ e, conseqüentemente, x não pode ser um vetor hipercíclico para T, qualquer que seja $x \in X$: contradição. $\square$

Sabemos que, dado um operador $T \in B(X)$, onde X é um espaço de Banach, T^* será injetor se, e somente se, a imagem de T for densa em X (Proposição 1.6). Com base nesse resultado, o fato de $\sigma_p(T^*)$ ser vazio implica em $T^* - \lambda I$ ser injetor, para todo $\lambda \in \sigma(T^*)$ e, em particular, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Logo a imagem de $T - \lambda I$ será densa, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, e a proposição anterior pode ser reenunciada da seguinte forma:
Se X for um espaço de Banach separável e $T \in B(X)$ hipercíclico, então $(T - \lambda I)$ terá imagem densa, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.9 *Seja T um operador hipercíclico em X. Então existe um subespaço denso T-invariante de X constituído inteiramente, com exceção do zero, de vetores hipercíclicos para T.*

Demonstração: Seja x um vetor hipercíclico para T. Consideremos também $\mathbb{C}[z]$ a coleção de todos os polinômios em z com coeficientes complexos. Então o subespaço linear

$$M = \{p(T)x : p \text{ é um polinômio em } \mathbb{C}[z]\}$$

é denso em X, uma vez que contém a órbita do vetor hipercíclico x, e é T-invariante. Precisamos mostrar então que qualquer elemento não nulo de M é hipercíclico para T.

Seja $p(T)x$ um elemento qualquer de M. Para mostrar que $p(T)x$ é hipercíclico, ou seja, que $\mathrm{Orb}(T, p(T)x)$ é denso em X, é suficiente mostrar que $p(T)$ tem imagem densa. De fato, como T comuta com $p(T)$, segue que

$$Orb(T, p(T)x) = p(T)Orb(T, x),$$

isto é, a órbita de $p(T)x$ sob T é a imagem de $Orb(T, x)$ sob a aplicação $p(T)$. Agora, se $p(T)$ tiver imagem densa, então $Orb(T, p(T)x)$ será denso, uma vez que será a imagem do conjunto denso $Orb(T, x)$ sob um operador com imagem densa. Portanto, é suficiente mostrar que $p(T)$ tem imagem densa.

Como $p(T)$ é um polinômio em $\mathbb{C}$, podemos decompô-lo totalmente em fatores lineares da forma $T - \lambda I$, com $\lambda \in \mathbb{C}$. Agora, pela Proposição 2.7, como T é hipercíclico, cada um dos fatores $T - \lambda I$ tem imagem densa. Portanto, $p(T)$ tem imagem densa. $\square$

Conforme mencionamos anteriormente, se $x \in E$ for um vetor hipercíclico para um operador linear contínuo T definido em E, onde E é um espaço de Fréchet separável, sabemos que o vetor $T^n x$ também será hipercíclico para T, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Então parece natural nos perguntarmos se tal vetor x será hipercíclico para T^n, qualquer que seja n. Em 1995, utilizando o Teorema 2.8, Ansari provou em [1] o seguinte teorema para espaços de Banach separáveis:

Teorema 2.10 *Se um vetor x em X for hipercíclico para um operador $T \in B(X)$, então x será hipercíclico para T^n, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração: Seja x um vetor hipercíclico para T e consideremos M o subespaço linear $M = \{p(T)x \,:\, p \text{ é um polinômio}\}$. Então M é um subespaço T-invariante. Consideremos agora $A = T\mid_M$. Claramente A é contínuo em M.

Por outro lado, o Teorema 2.8 nos garante que todo vetor de M é hipercíclico para T. Segue que o conjunto $\{y, Ay, A^2y, ...\}$ é denso em M, para todo vetor y em M.

Consideremos agora o conjunto $S = \{x, A^nx, A^{2n}x, ...\}$. Queremos provar que S é denso em M, isto é, que $\overline{S}^M = M$. Claramente, $\overline{S}^M \subset M$. Tomemos então os conjuntos da forma

$$S_k = \cup\{\overline{A^{i_1}S}^M \cap ... \cap \overline{A^{i_k}S}^M \mid 0 \leq i_1 < ... < i_k \leq n-1\},$$

para cada k com $1 \leq k \leq n$. Então, utilizando o fato de $\mathrm{Orb}(A, x)$ ser denso em M,

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & \overline{A^0S}^M \cup \overline{A^1S}^M \cup ... \cup \overline{A^{n-1}S}^M = M \quad \text{e} \\ S_n & = & \overline{A^0S}^M \cap \overline{A^1S}^M \cap ... \cap \overline{A^{n-1}S}^M \end{array}$$

Além disso, cada S_k é fechado em M e $S_n \subset S_{n-1} \subset ... \subset S_1$. Provaremos que

(i) S_k é A-invariante para cada $k = 1, ...n$,

(ii) $0 \in S_n$, e

(iii) $S_n = M$.

Como $S_n \subset \overline{S}^M$, teremos demonstrado o teorema.

(i) Para qualquer $0 \leq i_1 < ... < i_k \leq n-1$, existe $1 \leq j_1 < ... < j_k \leq n$ tal que

$$\begin{array}{rcl} A(\overline{A^{i_1}S}^M \cap ... \cap \overline{A^{i_k}S}^M) & \subset & \overline{A^{i_1+1}S}^M \cap ... \cap \overline{A^{i_k+1}S}^M \\ & = & \overline{A^{j_1}S}^M \cap ... \cap \overline{A^{j_k}S}^M \subset S_k. \end{array}$$

Logo, $A(S_k) \subset S_k$.

(ii) Sabendo que $0 \in S_1$, temos $0 \in \overline{A^iS}^M$ para algum i. Como

$$A(\overline{A^iS}^M) \subset \overline{A^{i+1}S}^M \quad \text{e} \quad \overline{A^nS}^M \subset \overline{S}^M,$$

segue que $0 \in \overline{A^0S}^M \cap ... \cap \overline{A^{n-1}S}^M = S_n$.

(iii) Vimos que $S_1 = M$. Então, se $S_k = M$ para algum k com $1 \leq k < n$, provaremos que $S_{k+1} = M$. Suponhamos por absurdo que $S_{k+1} \neq M$. Como

S_{k+1} é A-invariante e todo vetor não nulo de M é hipercíclico para A, temos $S_{k+1} = \{0\}$. Notemos agora que, se $\{i_1, ...i_k\} \neq \{j_1, ..., j_k\}$, então

$$[\overline{A^{i_1}S}^M \cap ... \cap \overline{A^{i_k}S}^M] \cap [\overline{A^{j_1}S}^M \cap ... \cap \overline{A^{j_k}S}^M] \subset S_{k+1}.$$

Logo

$$\begin{aligned}[(\overline{A^{i_1}S}^M \cap ... \cap \overline{A^{i_k}S}^M) \setminus \{0\}] \quad &\cap \quad [(\overline{A^{j_1}S}^M \cap ... \cap \overline{A^{j_k}S}^M) \setminus \{0\}] \subset S_{k+1} \setminus \{0\} \\ \text{e} \quad S_{k+1} \setminus \{0\} \quad &= \quad \emptyset.\end{aligned}$$

Assim, $S_k \setminus \{0\}$ $(= M \setminus \{0\})$ é uma união finita de conjuntos fechados (relativamente a $M \setminus \{0\}$) da forma

$$[(\overline{A^{i_1}S}^M \cap ... \cap \overline{A^{i_k}S}^M) \setminus \{0\}].$$

Como $S_k \setminus \{0\}$ é conexo (todo espaço vetorial normado é conexo), um dos conjuntos desta forma é igual a $M \setminus \{0\}$ e os outros conjuntos são vazios. Segue desse argumento na demonstração de (i) que $A(M \setminus \{0\}) = \emptyset$; absurdo.

Logo, $M = S_n \subset \overline{S}^M$, implicando no vetor x também ser hipercíclico para T^n, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Capítulo 3

Hiperciclicidade em 'Weighted Shifts' Bilaterais

Vimos no capítulo anterior (Teorema 2.4) que os operadores *weighted backward shifts* definidos em $l_p(\mathbb{N})$ são hipercíclicos. Nosso objetivo agora será estudar operadores similares em termos de hiperciclicidade, definidos não apenas em $l_2(\mathbb{N})$, mas em $l_2(\mathbb{Z})$. Para isso, seguiremos o artigo de Salas [28].

Seja $l_2(\mathbb{Z})$ o espaço de Hilbert das seqüências 2-somáveis em $\mathbb{C}$ munido do produto interno natural .

Definição 3.1 *Um operador T definido em $l_2(\mathbb{Z})$ será chamado de operador weighted forward shift bilateral com respeito à base canônica $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ de $l_2(\mathbb{Z})$ se, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $Te_n = a_n e_{n+1}$, onde $\{a_n : n \in \mathbb{Z}\}$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Analogamente, um operador S definido em $l_2(\mathbb{Z})$ será chamado de operador weighted backward shift bilateral com respeito à base canônica $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ de $l_2(\mathbb{Z})$ se, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $Te_n = b_n e_{n-1}$, onde $\{b_n : n \in \mathbb{Z}\}$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

No decorrer do capítulo, iremos nos referir aos subconjuntos $\{a_n : n \in \mathbb{Z}\}$ por *seqüências de pesos*. Também estaremos supondo sem perda de generalidade que $a_n \in \mathbb{R}$ com $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Essa medida se justifica pelo fato de não trabalharmos com os pesos propriamente ditos (que são números complexos), mas com seus módulos.

Inicialmente, enunciaremos um teorema (Teorema 3.3) que será utilizado ao longo de todo o presente capítulo. Ele fornece uma condição necessária e suficiente sobre a seqüência de pesos associada a um *weighted shift* bilateral para que tal operador seja hipercíclico. Entretanto, para demonstrá-lo precisamos do seguinte lema:

Lema 3.2 *Seja T um operador weighted shift bilateral definido em $l_2(\mathbb{Z})$ e, dados $q \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon > 0$ e $g, h \in [e_j : |j| \leq q]$, vamos supor que existem n arbitrariamente grande e um vetor $u \in [e_j : -q - n \leq j \leq q - n]$ tais que*

(i) $\|u\| < \varepsilon$,

(ii) $\|T^n(u) - g\| < \varepsilon$,

(iii) $\|T^n(h)\| < \varepsilon$.

Então T será hipercíclico.

Demonstração: Vamos exibir explicitamente um vetor hipercíclico f para T. Antes de tudo, observemos que as condições (i) e (ii) implicam em $\|T\| > 1$. De fato, dado que (i) e (ii) valem para todo $\varepsilon > 0$ e $g \in [e_j : |j| \le q]$, valem em particular para $\varepsilon = 1$ e $g \in [e_j : |j| \le q]$ com $\|g\| > 2$. Assim, existem n_1 arbitrariamente grande e $u_1 \in [e_j : -q - n_1 \le j \le \ q - n_1]$ tais que $\|u_1\| < 1$ e $\Big|\|T^{n_1}(u_1)\| - \|g\|\Big| \le \|T^{n_1}(u_1) - g\| < 1$. Logo $\|T^{n_1}(u_1)\| - \|g\| < 1$ e $\|g\| - \|T^{n_1}(u_1)\| < 1$; em particular, $\|T^{n_1}(u_1)\| > \|g\| - 1 > 2 - 1 = 1$. Agora $1 < \|T^{n_1}(u_1)\| \le \|T\|^{n_1}\|u_1\| < \|T\|^{n_1}$. Portanto, $\|T\| > 1$.

Consideremos agora uma seqüência $\{g^k = \sum_{|j|\le k} \langle g^k, e_j\rangle e_j \ : \ k \in \mathbb{N}_0\}$ densa em $l_2(\mathbb{Z})$. Note que

$$g^k = (..., 0, 0, g^k_{-k}, g^k_{-(k-1)}, ..., g^k_{-1}, g^k_0, g^k_1, ..., g^k_{k-1}, g^k_k, 0, 0...).$$

Queremos encontrar $f \in l_2(\mathbb{Z})$ tal que, dado $k \in \mathbb{N}_0$ qualquer, exista $n_k \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^{n_k}(f)$ esteja suficientemente próxima de g^k. Para isso, construiremos uma seqüência convergente $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ em $l_2(\mathbb{Z})$ satisfazendo

$$\lim_{k\to\infty} \|T^{n_k}(f_k) - g^k\| = 0,$$

onde $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ é uma seqüência crescente a ser especificada, e $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ será o vetor desejado.

1 - Seja $\|T\| = M > 1$ e tomemos $n_1 = 0$ e $f_1 = g^1$.

2 - Consideremos $\varepsilon_1 = \frac{1}{M^{n_1}2^2} = \frac{1}{2^2}$.

Note que $g^2, f_1 \in [e_j : |j| \le 2]$. Então pela hipótese do lema, existem $n_2 \in \mathbb{N}_0$ arbitrariamente grande (portanto, $n_2 > n_1 + 1 + 2$) e $f_2 \in [e_j : -2 - n_2 \le j \le 2 - n_2]$ tais que

$$\|f_2\| < \frac{1}{2^2},$$
$$\|T^{n_2}(f_2) - g^2\| < \frac{1}{2^2},$$
$$\|T^{n_2}(f_1)\| < \frac{1}{2^2},$$

3 - Tomando agora $\varepsilon_2 = \frac{1}{M^{n_2}2^3}$, temos que $g^3 \in [e_j : |j| \le 3]$ e

$$(f_1 + f_2) \in [e_j : -2 - n_2 \le j \le 2] \subset [e_j : |j| \le 2 + n_2].$$

Então, novamente pela hipótese do lema, existem $n_3 \in \mathbb{N}_0$ arbitrariamente grande satisfazendo $n_3 > n_2 + 1 + 2 + 3$, e $f_3 \in [e_j : -(2 + n_2) - n_3 \leq j \leq (2 + n_2) - n_3]$ tais que

$$\begin{aligned} \|f_3\| &< \frac{1}{M^{n_2} 2^3}, \\ \|T^{n_3}(f_3) - g^3\| &< \frac{1}{M^{n_2} 2^3}, \\ \|T^{n_3}(f_1 + f_2)\| &< \frac{1}{M^{n_2} 2^3}, . \end{aligned}$$

Procedendo dessa forma, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ encontramos n_k suficientemente grande satisfazendo $n_k > n_{k-1} + 1 + 2 + ... + k$ e $f_k \in [e_j : -(2 + n_2 + ... + n_{k-1}) - n_k \leq j \leq (2 + n_2 + ... + n_{k-1}) - n_k]$ tais que

$$\begin{aligned} \|f_k\| &< \frac{1}{M^{n_{k-1}} 2^k}, \\ \|T^{n_k}(f_k) - g^k\| &< \frac{1}{M^{n_{k-1}} 2^k}, \\ \|T^{n_k}(f_1 + f_2 + ... + f_{k-1})\| &< \frac{1}{M^{n_{k-1}} 2^k}, . \end{aligned}$$

Como a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge, chamamos $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Pela forma como foram escolhidos os vetores f_k, afirmamos que f é hipercíclico para T. De fato,

$$\begin{aligned} \|T^{n_k}(f) - g^k\| &= \|T^{n_k}(\sum_{j=1}^{k-1} f_j) + T^{n_k}(f_k) + \sum_{j=k+1}^{\infty} T^{n_k}(f_j) - g^k\| \leq \\ &\leq \|T^{n_k}(\sum_{j=1}^{k-1} f_j) - g^k\| + \|T^{n_k}(f_k)\| + \sum_{j=k+1}^{\infty} M^{n_k}\|f_j\| < \\ &< \frac{1}{M^{n_{k-1}} 2^k} + \frac{1}{M^{n_{k-1}} 2^k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} M^{n_k} \frac{1}{M^{n_{j-1}} 2^j} = \\ &= \frac{1}{M^{n_{k-1}} 2^{k-1}} + \left(\frac{M^{n_k}}{M^{n_k} 2^{k+1}} + \frac{M^{n_k}}{M^{n_{k+1}} 2^{k+2}} + \frac{M^{n_k}}{M^{n_{k+2}} 2^{k+3}} + ... \right) \end{aligned}$$

Como $M > 1$ e $n_j > n_{j-1} + 1 + 2 + ... + j$, para todo j, segue que

$$\frac{1}{M^{n_{k-1}} 2^{k-1}} + \left(\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{M^{n_{k+1} - n_k} 2^{k+2}} + \frac{1}{M^{n_{k+2} - n_k} 2^{k+3}} + ... \right) < \frac{1}{2^{k-2}},$$

e, portanto, $\|T^{n_k}(f) - g^k\| < \frac{1}{2^{k-2}} \to 0$, quando $k \to \infty$. Como a seqüência $(g^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ é densa no espaço, segue que a órbita $\mathrm{Orb}(f, T)$ é densa no espaço. $\square$

Teorema 3.3 *Seja T um operador weighted forward shift bilateral definido em $l_2(\mathbb{Z})$ com uma seqüência de pesos $\{a_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Então T é hipercíclico se, e somente se,* *dados* $\varepsilon > 0$ *e* $q \in \mathbb{N}_0$, *existe um* n *arbitrariamente grande tal que, para todo* j *com* $j \leq q$,

$$\prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s} = a_j a_{j+1} .... a_{j+n-1} < \varepsilon,$$
$$\prod_{s=1}^{n} a_{j-s} = a_{j-1} a_{j-2} .... a_{j-n} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Demonstração: Suponhamos que T seja hipercíclico. De acordo com a Proposição 2.5, o conjunto de vetores hipercíclicos associados a T, $\mathcal{HC}(T)$, é denso em $l_2(\mathbb{Z})$. Dados $q \in \mathbb{N}_0$ e $\varepsilon > 0$, escolhamos $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{\varepsilon}{(\varepsilon+1)}$. Então podemos encontrar $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ em $\mathcal{HC}(T)$ tal que $\|x - \sum_{|j| \leq q} e_j\| < \delta$, isto é,

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{|j| \leq q} e_j\| &= \|(..., x_{-q-2}, x_{-q-1}, (x_{-q} - 1), (x_{-q+1} - 1), ..., (x_q - 1), x_{q+1}, ...)\| = \\ &= (\sum_{|j| > q} |x_j|^2 + \sum_{|j| \leq q} |x_j - 1|^2)^{\frac{1}{2}} < \delta. \qquad (1) \end{aligned}$$

Assim

$$(\sum_{|j| > q} |x_j|^2)^{\frac{1}{2}} < \delta \implies |x_j| = |\langle x, e_j \rangle| < \delta, \text{ se } |j| > q$$
$$(\sum_{|j| \leq q} |x_j - 1|^2))^{\frac{1}{2}} < \delta \implies |x_j - 1| = |\langle x, e_j \rangle - 1| < \delta, \text{ se } |j| \leq q$$

Observemos que, para todo j com $|j| \leq q$,

$$1 - |\langle x, e_j \rangle| < |1 - \langle x, e_j \rangle| < \delta \Longrightarrow |\langle x, e_j \rangle| > 1 - \delta.$$

Portanto $|\langle x, e_j \rangle| > 1 - \delta$, se $|j| \leq q$ e $|\langle x, e_j \rangle| < \delta$, se $|j| > q$. Mas também

$$\begin{aligned} T(x) &= T((x_j)) = T(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle x, e_j \rangle e_j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle x, e_j \rangle T(e_j) = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \langle x, e_j \rangle e_{j+1}; \quad \text{e} \\ T^2(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j a_{j+1} \langle x, e_j \rangle e_{j+2}; \\ (...) & \\ T^n(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s} \langle x, e_j \rangle e_{j+n}, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Como T é hipercíclico por hipótese, podemos encontrar $n > 2q$ arbitrariamente grande tal que $\|T^n(x) - \sum_{|j|\leq q} e_j\| < \delta$, isto é,

$$
\begin{aligned}
\| \quad T^n(x) \quad - \sum_{|j|\leq q} e_j\| &= \|\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\prod_{s=0}^{n-1} a_{k+s})\langle x, e_k\rangle e_{k+n} - \sum_{|j|\leq q} e_j\| \overset{\substack{l=k+n \\ m=n-s \\ \downarrow}}{=} \\
= \quad & \|\sum_{l\in\mathbb{Z}}(\prod_{m=1}^{n} a_{l-m})\langle x, e_{l-n}\rangle e_l - \sum_{|j|\leq q} e_j\| = \\
= \quad & \|\sum_{|l|>q}(\prod_{m=1}^{n} a_{l-m})\langle x, e_{l-n}\rangle e_l + \sum_{|l|\leq q}(\prod_{m=1}^{n} a_{l-m})(\langle x, e_{l-n}\rangle - 1)e_l\| \overset{\substack{def.\ norma \\ \downarrow}}{=} \\
= \quad & \Big(\sum_{|l|>q} |(\prod_{m=1}^{n} a_{l-m})\langle x, e_{l-n}\rangle e_l|^2 + \sum_{|l|\leq q} |(\prod_{m=1}^{n} a_{l-m})\langle x, e_{l-n}\rangle - 1|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \delta.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
|\prod_{m=1}^{n} a_{l-m}\langle x, e_{l-n}\rangle e_l| < \delta, \text{ se } |l| > q, \tag{2}
$$

$$
|\prod_{m=1}^{n} a_{l-m}\langle x, e_{l-n}\rangle - 1|^2 < \delta, \text{ se } |l| \leq q. \tag{3}
$$

Como $l = k + n$ e $n > 2q$, teremos

$$
|l| > q \implies |k| = |l - n| \leq q, \tag{4}
$$

$$
|l| \leq q \implies |k| > q. \tag{5}
$$

Agora, se tomarmos $|k| = |l - n| \leq q$, teremos $|l| > q$. Logo vale (2). Trocando $(l - n)$ por j,

$$
\prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s}|\langle x, e_j\rangle| < \delta \text{ se } |j| \leq q,
$$

implicando em

$$
\prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s} < \frac{\delta}{|\langle x, e_j\rangle|} < \frac{\delta}{1-\delta}, \text{ se } |j| \leq q.
$$

Por outro lado, para todo j com $|j| \leq q$, vale (3). Como $\delta < 1$,

$$
\prod_{s=1}^{n} a_{j-s}|\langle x, e_{j-n}\rangle| > 1 - \delta, \quad \text{ou seja,} \quad \prod_{s=1}^{n} a_{j-s} > \frac{1-\delta}{|\langle x, e_{j-n}\rangle|}.
$$

Agora, se $|j| \le q$, por (5), $|l-n| > q$. Portanto,

$$\prod_{s=1}^{n} a_{j-s} > \frac{1-\delta}{\delta}, \text{ se } |j| \le q.$$

Como δ foi escolhido com $\delta < \frac{\varepsilon}{(\varepsilon+1)}$, isto é, tal que $\varepsilon > \frac{\delta}{1-\delta}$, para todo j com $|j| \le q$,

$$\prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s} = a_j a_{j+1} \ldots a_{j+n-1} < \varepsilon,$$
$$\prod_{s=1}^{n} a_{j-s} = a_{j-1} a_{j-2} \ldots a_{j-n} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Reciprocamente, suponhamos agora que, dados $\varepsilon > 0$ e $q \in \mathbb{N}_0$, existe um $n > 0$ arbitrariamente grande tal que, para todo j com $j \le q$,

$$\prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s} = a_j a_{j+1} \ldots a_{j+n-1} < \varepsilon, \tag{6}$$
$$\prod_{s=1}^{n} a_{j-s} = a_{j-1} a_{j-2} \ldots a_{j-n} > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{7}$$

Observemos que, dado $f = \sum_{|j| \le q} \langle f, e_j \rangle e_j$, e como $a_j > 0$, para todo $j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \|T^n(f)\| &= \|T^n(\sum_{|j|\le q} \langle f, e_j\rangle e_j)\| = \| \sum_{|j|\le q} \prod_{k=0}^{n-1} a_{k+j} \langle f, e_j \rangle e_j + n\| \overset{(6)}{\le} \\ &\le \| \sum_{|j|\le q} \varepsilon \langle f, e_j\rangle e_j + n)\| < \varepsilon(2q+1)\|f\|. \end{aligned}$$

Além disso, o operador T é bijetor. Consideremos então o operador inverso a T, T^{-1}, dado pela expressão

$$T^{-1}(e_j) = \frac{e_{j-1}}{a_{j-1}}, \text{ para todo } j.$$

O vetor f também pertence ao domínio do operador T^{-n}, satisfazendo

$$\begin{aligned} \|T^{-n}(f)\| &= \|T^{-n}(\sum_{|j|\le q} \langle f, e_j\rangle e_j)\| = \left\| \sum_{|j|\le q} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{j-k}} \right) \langle f, e_j \rangle e_{j-n} \right\| \overset{(7)}{\le} \\ &\le \| \sum_{|j|\le q} \varepsilon \langle f, e_j \rangle e_j - n)\| < \varepsilon(2q+1)\|f\|. \end{aligned}$$

Assim, dados $g, h \in [e_j : |j| \le q]$ com $\|h\| < \frac{1}{2q+1}$ e $\|g\| < \frac{1}{2q+1}$, teremos

$$\begin{cases} \|T^{-n}(g)\| \le \varepsilon(2q+1)\|g\| < \varepsilon, \\ \|T^n(h)\| \le K_1\|h\| < \varepsilon(2q+1)\|h\| < \varepsilon, \end{cases}$$

Tomando $u = T^{-n}(g)$,

$$\begin{cases} \|u\| < \varepsilon\|g\| < \varepsilon, \\ \|T^n(h)\| < \varepsilon\|h\| < \varepsilon, \\ \|T^n(u) - g\| = 0 < \varepsilon. \end{cases}$$

Assim, T satisfaz as três hipóteses do Lema 3.2 e, portanto, segue que T é hipercíclico.

□

Os operadores *weighted backward shifts* bilaterais podem ser caracterizados de uma maneira similar aos operadores *forward shifts* bilaterais. De fato, sendo S um *weighted backward shift* bilateral com uma seqüência de pesos $\{b_n : n \in \mathbb{Z}\}$, note que $S(e_j) = b_j e_{j-1}$, $(j \in \mathbb{Z})$ pode ser visto como $S(e_{-j}) = b_{-j} e_{-(j+1)}$, $(j \in \mathbb{Z})$. Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$S^n(e_j) = \prod_{l=0}^{n-1} b_{(j-l)} e_{(j-n)}, \quad \forall\, j \in \mathbb{Z}.$$

Assim, uma versão análoga ao Teorema 3.3 vale para esse tipo de operadores, ou seja:

Teorema 3.4 *Seja T um operador weighted backward shift bilateral definido em $l_2(\mathbb{Z})$ com uma seqüência de pesos $\{a_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Então T é hipercíclico se, e somente se, dados $\varepsilon > 0$ e $q \in \mathbb{N}_0$, existe um n arbitrariamente grande tal que, para todo j com $j \leq q$,*

$$\prod_{s=0}^{n-1} a_{j-s} = a_j a_{j+1} \ldots a_{j+n-1} < \varepsilon,$$
$$\prod_{s=1}^{n} a_{j+s} = a_{j-1} a_{j-2} \ldots a_{j-n} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Corolário 3.5 *Existe um operador hipercíclico T definido em $l_2(\mathbb{Z})$ cujo operador adjunto T^* também é hipercíclico.*

Para demonstrar esse corolário, basta considerar T um operador *weighted forward shift* bilateral definido em $l_2(\mathbb{Z})$ com uma seqüência de pesos $\{a_n : n \in \mathbb{Z}\}$ tal que $\{a_n : n \in \mathbb{Z}\}$ e $\{a_{-n} : n \in \mathbb{Z}\}$ satisfaçam o Teorema 3.3, uma vez que o operador adjunto a T, T^*, é dado por $T^*(e_j) = b_j e_{j-1}$, com $b_j = a_{j-1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, isto é, T^* é um operador *weighted backward shift* bilateral.

Em [27], Salas constrói um tal operador. Optamos por não reproduzir tal construção aqui nesta dissertação devido à sua complexidade.

Corolário 3.6 *Se T for um operador weighted shift bilateral definido em $l_2(\mathbb{Z})$ cuja seqüência de pesos $\{a_n : n \in \mathbb{Z}\}$ satisfaz $a_n = a_{-n}$, então T não é hipercíclico.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que T é hipercíclico. Então, de acordo com o Teorema 3.3, dados quaisquer $\varepsilon > 0$ e $q \in \mathbb{N}_0$, existe um n arbitrariamente grande ($n > 2q$) tal que, para todo j com $j \leq q$,

$$\prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s} = a_j a_{j+1} .... a_{j+n-1} < \varepsilon \quad \text{e} \quad \prod_{s=1}^{n} a_{j-s} = a_{j-1} a_{j-2} .... a_{j-n} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Em particular, tomando $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon < \left(\frac{a_0}{\|T\|}\right)^{\frac{1}{2}}$, encontramos n arbitrariamente grande para que $a_n > \|T\|$ e valha as desigualdades acima. Agora, se $j = 0$,

$$\prod_{s=0}^{n-1} a_s = a_0 a_1 .... a_{n-1} < \varepsilon \quad \text{e} \quad \prod_{s=1}^{n} a_{-s} = a_{-1} a_{-2} .... a_{-n} = a_1 a_2 ... a_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Logo

$$\left.\begin{array}{l} a_0 a_1 .... a_{n-1} a_n < \varepsilon a_n \\ a_0 a_1 a_2 ... a_n > \frac{1}{\varepsilon} a_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow a_0 < \varepsilon^2 a_n.$$

Como n é tal que $a_n > \|T\|$, teremos $\frac{a_0}{\|T\|} < \frac{a_0}{a_n} < \varepsilon^2$. Entrentanto, ε foi escolhido de forma que $\varepsilon^2 < \left(\frac{a_0}{\|T\|}\right)$: contradição. $\square$

Os próximos resultados tratam de operadores definidos em $(l_2(\mathbb{Z}))^m$, onde m é um inteiro positivo e, para cada k com $1 \leq k \leq m$, a componente k-ésima desses operadores corresponde à um operador *weighted shift* bilateral em $l_2(\mathbb{Z})$. Salientamos ainda que trabalharemos com a norma natural definida em $(l_2(\mathbb{Z}))^m$: se $(x_1, ...x_m) \in (l_2(\mathbb{Z}))^m$, então $\|(x_1, ...x_m)\| = \max_{1 \leq k \leq m} \|x_k\|$.

Consideremos $T_1, T_2, ..., T_m$ operadores definidos em $l_2(\mathbb{Z})$. Denotaremos por $\bigoplus_{k=1}^{m} T_k$ o operador definido em $(l_2(\mathbb{Z}))^m$ por

$$\bigoplus_{k=1}^{m} T_k(x_1, x_2, ..., x_m) \stackrel{def}{=} (T_1 x_1, T_2 x_2, ..., T_m x_m), \ \ \forall\, x_1, x_2, ..., x_m \in l_2(\mathbb{Z}).$$

Teorema 3.7 *Sejam $T_1, T_2, ..., T_m$ operadores weighted shifts bilaterais em $l_2(\mathbb{Z})$, com $T_k(e_n) = a_{k,n} e_{n+1}$. Então o operador $\bigoplus_{k=1}^{m} T_k$ será hipercíclico em $(l_2(\mathbb{Z}))^m$ se, e somente se, dados $\varepsilon > 0$ e $q \in \mathbb{N}_0$, existir um n arbitrariamente grande tal que, para todo j com $j \leq q$,*

$$\max_{1 \leq k \leq m} \prod_{s=0}^{n-1} a_{k,j+s} < \varepsilon, \quad e \quad \min_{1 \leq k \leq m} \prod_{s=1}^{n} a_{k,j-s} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Demonstração: Suponhamos que o operador $T = \bigoplus_{k=1}^{m} T_k$ seja hipercíclico. Então o conjunto dos operadores hipercíclicos associados a T, $\mathcal{HC}(T)$, é denso em $(l_2(\mathbb{Z}))^m$. Assim, dado $q \in \mathbb{N}_0$ e sendo $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a base canônica de $l_2(\mathbb{Z})$, existe $x = ((x_{1,n})_{n\in\mathbb{Z}}, (x_{2,n})_{n\in\mathbb{Z}}, ..., (x_{m,n})_{n\in\mathbb{Z}}) \in \mathcal{HC}(T)$ tal que

$$\|x - \underbrace{\Big(\sum_{|j|\leq q} e_j, \sum_{|j|\leq q} e_j, ..., \sum_{|j|\leq q} e_j\Big)}_{m \text{ vezes}}\| < \delta, \quad \text{para algum } \delta > 0, \quad \text{isto é,}$$

$$\begin{aligned}
\|x - \underbrace{\Big(\sum_{|j|\leq q} e_j, \sum_{|j|\leq q} e_j, ..., \sum_{|j|\leq q} e_j\Big)}_{m \text{ vezes}}\| &= \\
&= \max_{1\leq k\leq m} \|(..., x_{k,(-q-1)}, x_{k,(-q)} - 1, x_{k,(-q+1)} - 1, ..., x_{k,q} - 1, x_{k,(q+1)}, ...)\| \\
&= \max_{1\leq k\leq m} ((\sum_{|j|>q} |x_{k,j}|^2 + \sum_{|j|\leq q} |x_{k,(j-1)}|^2)^{\frac{1}{2}}) < \delta.
\end{aligned}$$

Assim, para todo k com $1 \leq k \leq m$,

$$(\sum_{|j|>q} |x_{k,j}|^2 + \sum_{|j|\leq q} |x_{k,(j-1)}|^2)^{\frac{1}{2}} < \delta.$$

Observemos que a equação acima nada mais é do que a equação (1) da demonstração do Teorema 3.3. Logo, dado $\varepsilon > 0$, para cada $1 \leq k \leq m$, existe $n_k \in \mathbb{N}_0$ tal que, para todo j com $j \leq q$,

$$\prod_{s=0}^{n_k-1} a_{k,j+s} = a_{k,j}a_{k,j+1}....a_{k,j+n-1} < \varepsilon,$$
$$\prod_{s=1}^{n_k} a_{k,j-s} = a_{k,j-1}a_{k,j-2}....a_{k,j-n} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Como a escolha de n_k depende exclusivamente de q e ε e m é finito, segue que existe n tal que

$$\max_{1\leq k\leq m} \prod_{s=0}^{n-1} a_{k,j+s} < \varepsilon \quad \text{e} \quad \min_{1\leq k\leq m} \prod_{s=1}^{n} a_{k,j-s} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Reciprocamente, dados $\varepsilon > 0$ e $q \in \mathbb{N}_0$, seja $n \in \mathbb{N}_0$ tal que, para todo j com $j \leq q$,

$$\max_{1\leq k\leq m} \prod_{s=0}^{n-1} a_{k,j+s} < \varepsilon \quad \text{e} \quad \min_{1\leq k\leq m} \prod_{s=1}^{n} a_{k,j-s} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Então para cada k com $1 \leq k \leq m$, $\prod_{s=0}^{n-1} a_{k,j+s} = a_{k,j}a_{k,j+1}....a_{k,j+n-1} < \varepsilon$ e $\prod_{s=1}^{n} a_{k,j-s} = a_{k,j-1}a_{k,j-2}....a_{k,j-n} > \frac{1}{\varepsilon}$. A idéia da demonstração é provar que, embora não seja um operador *weighted shift* bilateral, o Lema 3.2 vale para T.

Consideremos o operador $f = (f_1, ..., f_m)$ com $f_k \in l_2(\mathbb{Z})$ para $1 \leq k \leq m$, e $f_k = \sum_{|j|\leq q}\langle f_k, e_j\rangle e_j$. Então

$$\begin{aligned}\|T^n(f)\| &= \max_{1\leq k\leq m} \|T_k^n(\sum_{|j|\leq q}\langle f_k, e_j\rangle e_j)\| = \max_{1\leq k\leq m} \|\sum_{|j|\leq q}(\prod_{k=0}^{n-1} a_{k,(k+j)})\langle f_k, e_j\rangle e_{j+n}\| \\ &< \max_{1\leq k\leq m} \|\sum_{|j|\leq q} \varepsilon\langle f_k, e_j\rangle e_j) < \varepsilon(2q+1) \max_{1\leq k\leq m} \|f_k\| = \varepsilon(2q+1)\|f\|.\end{aligned}$$

Como, para cada k, T_k é bijetor, podemos definir os operadores inversos T_k^{-1} dados por $T_k^{-1}(e_j) = \frac{e_{j-1}}{a_{k,(j-1)}}$, para todo j. Assim, sendo $T^{-1} = \bigoplus_{k=1}^m T_k^{-1}$, o vetor f também pertence ao domínio do operador T^{-n}, satisfazendo

$$\begin{aligned}\|T^{-n}(f)\| &= \max_{1\leq k\leq m} \|T_k^{-n}\Big(\sum_{|j|\leq q}\langle f_k, e_j\rangle e_j\Big)\| = \max_{1\leq k\leq m} \left\|\sum_{|j|\leq q}\left(\prod_{s=1}^{n}\frac{1}{a_{k,j-s}}\right)\langle f_k, e_j\rangle e_{j-n}\right\| \\ &\leq \max_{1\leq k\leq m} \|\sum_{|j|\leq q} \varepsilon\langle f_k, e_j\rangle e_j) < \varepsilon(2q+1) \max_{1\leq k\leq m} \|f_k\| = \varepsilon(2q+1)\|f\|.\end{aligned}$$

para todo n. Assim, dados $g = (g_k)_{1\leq k\leq m}$, $h = (h_k)_{1\leq k\leq m}$, com $g_k, h_k \in [e_j : |j| \leq q]$ e com $\|g_k\| < \frac{1}{2q+1}$, $\|h_k\| < \frac{1}{2q+1}$ para cada k, teremos $\|g\| < \frac{1}{2q+1}$ e $\|h\| < \frac{1}{2q+1}$, e

$$\begin{aligned}\|T^{-n}(g)\| &= \max_{1\leq k\leq m} \|T_k^{-n}(g_k)\| < \max_{1\leq k\leq m} (2q+1)\varepsilon\|g\| < \varepsilon, \quad \text{e} \\ \|T^n(h)\| &< \max_{1\leq k\leq m} (2q+1)\varepsilon\|h\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Tomando $u = T^{-n}(g)$,

$$\begin{cases}\|u\| < \varepsilon < \varepsilon, \\ \|T^n(h)\| < \varepsilon < \varepsilon, \\ \|T^n(u) - g\| = 0 < \varepsilon.\end{cases}$$

Logo T satisfaz as três hipóteses do Lema 3.2. Vamos agora mostrar que o Lema vale para T.

Para cada k com $1 \leq k \leq m$, consideremos as seqüências $\{g_k^n = \sum_{|j|\leq n}\langle g_k^n, e_j\rangle e_j : n \in \mathbb{N}_0\}$ densas em $l_2(\mathbb{Z})$. Assim, a seqüência $(g^n)_{n\in\mathbb{N}_0} = ((g_1^n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (g_2^n)_{n\in\mathbb{N}_0}, ..., (g_m^n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ é densa em $(l_2(\mathbb{Z}))^m$. Conforme a demonstração do Lema 3.2, queremos construir um vetor $f = (f_1, ..., f_m) \in (l_2(\mathbb{Z}))^m$ tal que, para cada k, $f_k = \sum_{j=1}^{\infty} f_{k,j}$ e $\lim_{j\to\infty} \|T_k^{n_j}(f_{k,j}) - g_k^j\| = 0$.

Sabemos que, para cada k, $\|T_k\| > 1$ e, assim, $\|T\| = \max_{1 \leq k \leq m} \|T_k\| > 1$.

1 - Seja $\|T\| = M > 1$ e tomemos $n_1 = 0$ e $f_{k,1} = g_k^1$, para cada k.

2 - Consideremos $\varepsilon_1 = \frac{1}{M^{n_1}2^2} = \frac{1}{2^2}$.

Note que $g_k^2, f_{k,1} \in [e_j : |j| \leq 2]$, para cada k. Então existem $n_2 \in \mathbb{N}_0$ arbitrariamente grande (portanto, $n_2 > n_1 + 1 + 2$) e $f_{k,2} \in [e_j : -2 - n_2 \leq j \leq 2 - n_2]$ para cada k tais que

$$\begin{aligned} \|f_2\| &= \max_{1 \leq k \leq m} \|f_{k,2}\| < \frac{1}{2^2}, \\ \|T^{n_2}(f_2) - g_2\| &= \max_{1 \leq k \leq m} \|T_k^{n_2}(f_{k,2}) - g_k^2\| < \frac{1}{2^2}, \\ \|T^{n_2}(f_1)\| &= \max_{1 \leq k \leq m} \|T_k^{n_2}(f_{k,1})\| < \frac{1}{2^2}, \end{aligned}$$

3 - Tomando agora $\varepsilon_2 = \frac{1}{M^{n_2}2^3}$, temos que $g_k^3 \in [e_j : |j| \leq 3]$ para todo k e

$$(f_{k,1} + f_{k,2}) \in [e_j : -2 - n_2 \leq j \leq 2] \subset [e_j : |j| \leq 2 + n_2], \ \forall k.$$

Novamente, existem $n_3 \in \mathbb{N}_0$ arbitrariamente grande satisfazendo $n_3 > n_2 + 1 + 2 + 3$, e $f_{k,3} \in [e_j : -(2 + n_2) - n_3 \leq j \leq (2 + n_2) - n_3]$ para todo k tais que

$$\begin{aligned} \|f_3\| &= \max_{1 \leq k \leq m} \|f_{k,3}\| < \frac{1}{M^{n_2}2^3}, \\ \|T^{n_3}(f_3) - g^3\| &= \max_{1 \leq k \leq m} \|T_k^{n_3}(f_{k,3}) - g_k^3\| < \frac{1}{M^{n_2}2^3}, \\ \|T^{n_3}(f_1 + f_2)\| &= \max_{1 \leq k \leq m} \|T_k^{n_3}(f_{k,1})\| < \frac{1}{M^{n_2}2^3},. \end{aligned}$$

Procedendo dessa forma, para cada $i \in \mathbb{N}_0$ encontramos n_i suficientemente grande satisfazendo $n_i > n_{i-1} + 1 + 2 + ... + i$ e $f_{k,i} \in [e_j : -(2 + n_2 + ... + n_{i-1}) - n_i \leq j \leq (2 + n_2 + ... + n_{i-1}) - n_i]$ tais que

$$\begin{aligned} \|f_i\| &= \max_{1 \leq k \leq m} \|f_{k,i}\| < \frac{1}{M^{n_{i-1}}2^i}, \\ \|T^{n_i}(f_i) - g^i\| &= \max_{1 \leq k \leq m} \|T_k^{n_i}(f_{k,i}) - g_k^i\| < \frac{1}{M^{n_{i-1}}2^i}, \\ \|T^{n_i}(f_1 + f_2 + ... + f_{i-1})\| &= \max_{1 \leq k \leq m} \|T_k^{n_i}(f_{k,i})\| < \frac{1}{M^{n_{i-1}}2^i},. \end{aligned}$$

Para cada k, seja $f_k = \sum_{i=1}^{\infty} f_{k,i}$. Pela forma como foram escolhidos os vetores $f_{k,i}$, f_k está bem definida, e $f = (f_1, ..., f_m)$ é hipercíclico para T. De fato,

$$\begin{aligned} \|T^{n_i}(f) - g^i\| &= \|T^{n_i}(f_1, ...f_m) - g^i\| = \max_{1 \leq k \leq m} \|T_k^{n_i}(f_k) - g_k^i\| \\ &= \max_{1 \leq k \leq m} \|T_k^{n_i}(\sum_{j=1}^{i-1} f_{k,j}) + T_k^{n_i}(f_{k,i}) + \sum_{j=i+1}^{\infty} T_k^{n_i}(f_{k,j}) - g_k^i\| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \max_{1\leq k\leq m} \|T_k^{n_i}(\sum_{j=1}^{i-1} f_{k,j}) - g_k^i\| + \|T_k^{n_i}(f_{k,i})\| + \sum_{j=i+1}^{\infty} M^{n_j}\|(f_j)\| \\
&< \frac{1}{M^{n_{i-1}}2^i} + \frac{1}{M^{n_{i-1}}2^i} + \sum_{j=i+1}^{\infty} M^{n_j}\frac{1}{M^{n_{j-1}}2^j} = \\
&= \frac{1}{M^{n_{i-1}}2^{i-1}} + M^{n_i}\left(\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{1}{M^{n_{j-1}}2^j}\right) \\
&< \frac{1}{2^{i-2}} \longrightarrow 0 \text{ quando } i \to \infty.
\end{aligned}
$$

Como a seqüência $((g_1^n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (g_2^n)_{n\in\mathbb{N}_0}, ..., (g_m^n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ é densa no espaço, segue que a órbita $\mathrm{Orb}(T, f)$ é densa no espaço e, portanto, $T = \bigoplus_{k=1}^{m} T_k$ é hipercíclico. $\square$

Corolário 3.8 *Existem operadores hipercíclicos T_1 e T_2 definidos em $l_2(\mathbb{Z})$ tais que $T_1 \bigoplus T_2$ não é hipercíclico.*

Demonstração: Basta tomarmos T_1 e T_2 operadores *weighted forward shifts* bilaterais com seqüências de pesos $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ e $(b_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ respectivamente, as quais satisfazem as hipóteses do Teorema 3.3 separadamente, mas não as condições do Teorema 3.7, por exemplo, tais que $\max\{\prod_{k=0}^{s} a_k, \prod_{k=0}^{s} b_k\} > 1$. $\square$

Consideremos agora a restrição dos operadores *weighted shifts* sobre o espaço de Hilbert $l_2(\mathbb{N}_0)$, a saber, o operador *weighted forward shift* unilateral

$$
\begin{aligned}
T : l_2(\mathbb{N}_0) &\longrightarrow l_2(\mathbb{N}_0) \\
(x_0, x_1, ...) &\longmapsto (0, a_1x_0, a_2x_1, ...),
\end{aligned}
$$

e o operador *weighted backward shift* unilateral

$$
\begin{aligned}
S : l_2(\mathbb{N}_0) &\longrightarrow l_2(\mathbb{N}_0) \\
(x_0, x_1, ...) &\longmapsto (a_0x_1, a_1x_2, ...),
\end{aligned}
$$

onde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ é uma seqüência de inteiros positivos limitada.

Observamos que no capítulo 2, já havíamos exibido a demonstração que, se a seqüência $\{a_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ for tal que $a_n = a > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, então o operador *weighted backward shift* unilateral é hipercíclico. Gostaríamos agora de encontrar um resultado mais abrangente, semelhante ao Teorema 3.3, que fornecesse condições necessárias e suficientes para que para tais operadores fossem hipercíclicos. Entretanto, o operador *weighted forward shift* unilateral T nunca será hipercíclico:

De fato, sendo n um inteiro positivo, consideremos a projeção contínua P de $l_2(\mathbb{N}_0)$ no subespaço $[e_k : k < n]$. Então, para todo $z \in l_2(\mathbb{N}_0)$, $P(z) \in [e_k : k < n]$ e $P(P(z)) = P(z)$.

Seja x um vetor hipercíclico para T. Então a órbita $\mathrm{Orb}(T, x)$ é densa no espaço $l_2(\mathbb{N}_0)$ e, uma vez que a projeção P é contínua, o conjunto $P(\ \mathrm{Orb}(T, x))$ é denso em $[e_k : k < n]$. Entretanto, dado $j \geq 0$,

$$\begin{aligned} T^j(x) &= T^j(x_1, x_2, ...) \\ &= (\underbrace{0, ..., 0}_{j-1}, \prod_{s=1}^{j-1} a_{(j+s)} x_j, \prod_{s=1}^{j} a_{((j+1)+s)} x_{j+1}, ...). \end{aligned}$$

Assim, para $j > n$, $P(T^j(x)) = 0$. Dessa forma, o conjunto $P(\ \mathrm{Orb}(T, x))$ tem uma quantidade finita de elementos e, portanto, não pode ser denso em $[e_k : k < n]$. Segue que x não é hipercíclico para T, qualquer que seja $x \in l_2(\mathbb{N}_0)$.

Diante disso, exibiremos um resultado semelhante ao Teorema 3.3 para os operadores *weighted backward shifts* unilaterais definidos em $l_2(\mathbb{N}_0)$. Entrentanto, precisaremos da seguinte proposição:

Proposição 3.9 *Sejam T um operador hipercíclico definido em um espaço de Hilbert H e B um subespaço fechado de H T^*-invariante. Então T restrito a B ($T\mid_B$) será hipercíclico em B.*

Demonstração: Dado $y \in B^\perp$ qualquer, sabemos que $\langle x, y \rangle = 0$, $\forall x \in B$. Como $B \subset H$ é um subespaço T^*-invariante, $\langle x, T(y) \rangle = \langle T^*(x), y \rangle = 0$, $\forall x \in B$, ou seja, $B^\perp$ é T-invariante.

Seja P a projeção contínua de H em B: então $P(x) \in B, \forall x \in H$. Em particular, se $x \in H$, existem $x_1 \in B$ e $x_2 \in B^\perp$ tais que $x = x_1 + x_2$, e

$$\begin{aligned} PT(I - P)(x) &= (PT - PTP)(x_1 + x_2) = PT(x_1 + x_2) - PTP(x_1 + x_2) \\ &= P(Tx_1 + Tx_2) - PT(x_1). \end{aligned}$$

Como $x_2 \in B^\perp$ e $B^\perp$ é T-invariante, $PT(x_2) = 0$ e $P(Tx_1 + Tx_2) - PT(x_1) = P(Tx_1) - PT(x_1) = 0$. Segue que

$$PT(I - P)(x) = 0, \ \ \forall x \in H \Longrightarrow PT(I - P) \equiv 0.$$

Usando essa identidade, encontramos a seguinte expressão para T^n:

$$\begin{aligned} T^n &= (PTP)^n + [(TP)^n - (PT)^n] + [T(TP)^{n-1} - (TP)^n] + ... \\ &\quad +[T^{j-1}(TP)^{n-(j-1)} - T^{j-2}(TP)^{n-(j-2)}] + ... \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+[T^{n-2}(TP)^2 - T^{n-3}(TP)^3] + [T^{n-1}P - T^{n-2}(TP)^2] \\
&+(T^n - T^{n-1}P) \\
= \ & (PTP)^n + \sum_{k=1}^{n}((1-P)T)^k(PT)^{n-k}P + ((1-P)T(1-P))^n.
\end{aligned}
$$

Segue que, dados quaisquer vetores $b \in B$ e $x \in H$,

$$
\begin{aligned}
\|T^n x \ - \ b\| &= \\
&= \|(PTP)^n x + \sum_{k=1}^{n}((1-P)T)^k(PT)^{n-k}P(x) + ((1-P)T(1-P))^n(x) - b\| \\
&\geq \|(PTP)^n x - b\| = \|(T\mid_B)^n x - b\| = \|T^n(Px) - b\|.
\end{aligned}
$$

Portanto, se x for um vetor hipercíclico para T, o vetor Px será hipercíclico para $T\mid_B$. $\square$

Teorema 3.10 *Para $1 \leq k \leq m$, seja T_k um operador weighted forward shift unilateral com seqüências de pesos positivos $\{a_{k,n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ definido em $l_2(\mathbb{N}_0)$. Então o operador $\bigoplus_{k=1}^{m} T_k$ será hipercíclico se, e somente se, $\sup_{n\in\mathbb{N}_0}(\min_{1\leq k\leq m}(\prod_{s=1}^{n} a_{k,s})) = \infty$.*

Demonstração: Suponhamos que $T = \bigoplus_{k=1}^{m} T_k$ seja hipercíclico. Então existe $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathcal{HC}(T)$, onde $x_k = (x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}_0} \in l_2(\mathbb{N}_0)$ $(1 \leq k \leq m)$, tal que, dados quaisquer $\varepsilon > 0$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ com $y_k = (y_{k,n})_{n\in\mathbb{N}_0} \in l_2(\mathbb{N}_0)$ $(1 \leq k \leq m)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ para o qual $\|T^{n_0}(x) - y\| < \varepsilon$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\max_{1\leq k\leq m} |\prod_{s=0}^{n} a_{k,s}x_{k,n+1} - y_{k,1}|^2 &\leq \max_{1\leq k\leq m}(\sum_{j>0} |\prod_{s=0}^{n} a_{k,j+n-s}x_{k,n+j} - y_{k,j}|^2) \\
&= \max_{1\leq k\leq m} \|T^{n_0}(x_{k,n}) - (y_k,n)\|^2 \\
&= \|T^{n_0}(x) - y\|^2 < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Supondo por absurdo que $\sup_{n\in\mathbb{N}_0}(\prod_{s=1}^{n} a_{k,s}) < \infty$ para todo k $(1 \leq k \leq m)$, temos que existe $M \in \mathbb{N}_0$ tal que $|\prod_{s=0}^{n} a_{k,s}| < M$, para todos $n \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq k \leq m$. Assim, tomando $y \in (l_2(\mathbb{N}_0))^m$ tal que $y_{k,1} > \frac{M}{\|(x_{k,n})\|_\infty} + \varepsilon$, teremos

$$
\varepsilon < \max_{1\leq k\leq m} |\prod_{s=0}^{n} a_{k,s}x_{k,n+1} - y_{k,1}| < \varepsilon,
$$

o que é uma contradição. Portanto $\sup_{n\in\mathbb{N}_0}(\min_{1\leq k\leq m}\prod_{s=1}^{n} a_{k,s}) = \infty$.

Reciprocamente, consideremos o operador $S = \bigoplus_{k=1}^{m} S_k$ definido em $(l_2(\mathbb{Z}))^m$ tal que, para cada k com $1 \leq k \leq m$,

$$S_k(e_n) = \begin{cases} a_{k,n}e_{n-1} & \text{se} \quad n > 0, \\ \frac{1}{2}e_{n-1} & \text{se} \quad n \leq 0. \end{cases}$$

Assim, para cada k, S_k é um operador *weighted backward shift* cuja seqüência de pesos $\{b_{k,n} : n \in \mathbb{Z}\}$ é tal que $b_{k,n} = a_{k,n}$ para $n > 0$ e $b_{k,-n} = \frac{1}{2}$ se $n \leq 0$.

Suponhamos agora que $\sup_{n\in\mathbb{N}_0}(\min_{1\leq k\leq m}\prod_{s=1}^{n} a_{k,s} = \infty$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo n_0 tal que $\prod_{s=1}^{n_0} a_{k,s} > \dfrac{1}{\varepsilon}$, para todo k com $1 \leq k \leq m$.

Além disso, se considerarmos $q \in \mathbb{N}_0$ um elemento qualquer, existe $n \in \mathbb{N}_0$ suficientemente grande para que $n > q$, $n > n_0$ e

$$\begin{aligned} \max_{1\leq k\leq m}\prod_{s=0}^{n-1} b_{k,q-s} &= \max_{1\leq k\leq m}\{b_{k,q}b_{k,q-1}...b_{k,q-n+1}\} = \max_{1\leq k\leq m}\{a_{k,q}a_{k,q-1}...a_{k,1}\frac{1}{2^{n-q}}\} < \varepsilon, \quad \text{e} \\ \min_{1\leq k\leq m}\prod_{s=1}^{n} b_{k,q+s} &= \min_{1\leq k\leq m}\{b_{k,q+1}b_{k,q+1}...b_{k,q+n}\} = \min_{1\leq k\leq m}\{a_{k,q+1}a_{k,q+2}...a_{k,q+n}\} > \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Logo, para todo $j \in \mathbb{Z}$ com $|j| \leq q$,

$$\max_{1\leq k\leq m}\prod_{s=0}^{n-1} b_{k,j-s} < \varepsilon, \quad \text{e} \quad \min_{1\leq k\leq m}\prod_{s=1}^{n} b_{k,j+s} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Então, pelo Teorema 3.3, segue que S é hipercíclico.

Observe que $S^* = \bigoplus_{k=1}^{m} S_k^*$ onde $S_k^*(e_j) = b_{k,j+1}e_{j+1}$, para todos $j \in \mathbb{Z}$ e k com $1 \leq k \leq m$. Além disso, $(l_2(\mathbb{N}_0))^m$ pode ser visto como um subespaço fechado de $(l_2(\mathbb{Z}))^m$, e, dado $(y_1, y_2, ..., y_m) \in l_2(\mathbb{N}_0)^m$ com $y_k = (y_{k,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ $(1 \leq k \leq m)$,

$$\begin{aligned} S_k^*(y_{k,n}) &= S^*(\sum_{n>0} y_{k,n}e_n) = \sum_{n>0} y_{k,n}S_k^*(e_n) \\ &= \sum_{n>0} y_{k,n}(b_{k,n+1}e_{n+1}) \in l_2(\mathbb{N}_0), \quad \text{onde } \ 1 \leq k \leq m. \end{aligned}$$

Logo $(l_2(\mathbb{N}_0))^m$ é S^*-invariante e, de acordo com a Proposição 3.9, segue que $S\mid_{(l_2(\mathbb{N}_0))^m} = T$ é hipercíclico. □

Corolário 3.11 *Seja T um operador weighted shift hipercíclico. Então $T\oplus T\oplus ...\oplus T$ é também hipercíclico.*

Demonstração: Observe que podemos reescrever o operador $T \oplus T \oplus ... \oplus T$ como $\bigoplus_{k=1}^{m} T_k$, onde $T_k = T$ para todo k com $1 \leq k \leq m$. Assim, se T for um operador *weighted forward shift* bilateral, cuja seqüência de pesos é dada por $\{a_n : n \in \mathbb{Z}\}$, pelo Teorema 3.3, dados $\varepsilon > 0$ e $q \in \mathbb{N}_0$, existe n arbitrariamente grande tal que, para todo j com $j \leq q$, $\prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s} = a_j a_{j+1} .... a_{j+n-1} < \varepsilon$, e $\prod_{s=1}^{n} a_{j-s} = a_{j-1} a_{j-2} .... a_{j-n} > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Em particular,

$$\max_{1 \leq k \leq m} \prod_{s=0}^{n-1} a_{k,j+s} = \prod_{s=0}^{n-1} a_{j+s} < \varepsilon, \quad \text{e}$$
$$\min_{1 \leq k \leq m} \prod_{s=1}^{n} a_{k,j-s} = \prod_{s=1}^{n} a_{j-s} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Logo, pelo Teorema 3.7 segue que $\bigoplus_{k=1}^{m} T_k$ é hipercíclico. Um argumento semelhante vale caso T seja um operador *weighted backward shift* bilateral (Teoremas 3.4 e 3.7).

A última possibilidade para T é ser um operador *weighted backward shift* unilateral (vimos que não existe *weighted forward shift* unilateral hipercíclico). Nesse caso, se $\{a_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ for a seqüência de pesos positivos associada a T, aplicando o Teorema 3.10 para $m = 1$, temos que $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \prod_{s=1}^{n} a_s = \infty$. Então

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} (\min_{1 \leq k \leq m} (\prod_{s=1}^{n} a_{k,s})) = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \prod_{s=1}^{n} a_s = \infty.$$

Novamente, pelo Teorema 3.10, segue que $\bigoplus_{k=1}^{m} T_k = T \oplus T \oplus ... \oplus T$ é hipercíclico.

□

Capítulo 4

Os Operadores de Convolução

No decorrer deste capítulo, trabalharemos com o espaço de Fréchet das funções inteiras $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, munido da topologia compacto-aberta τ_0.

Nosso objetivo será estudar os operadores de convolução em termos de hiperciclicidade. Também estudaremos um resultado similar ao Teorema 2.9 para esses operadores. Para isso, seguiremos o artigo científico [2] de R. Aron e D. Markose.

Seja $\mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ o conjunto formado pelos operadores lineares contínuos em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ que comutam com translações, ou seja, dados $L \in \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$, $a \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, temos que $L(\tau_a f) = \tau_a(Lf)$, onde $\tau_a f(z) = f(z+a)$. Chamamos os elementos desse conjunto de *operadores de convolução*.

Como exemplos de operadores de convolução, temos os operadores definidos no capítulo 2: o operador translação τ_a e o operador diferenciação $L(f) = f'$.

O conjunto $\mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ claramente é um espaço vetorial complexo. Além disso, ele possui estrutura de álgebra sob a composição de operadores. O que não é nada imediato é o fato dele ser uma álgebra comutativa. Como iremos utilizar esse fato no decorrer deste capítulo, iremos exibir sua demonstração agora.

Consideremos o espaço vetorial das funções inteiras de tipo exponencial $\text{Exp}(\mathbb{C})$ introduzido na Seção 1.6 (Definição 1.23) e o espaço vetorial dos funcionais lineares contínuos definidos em $(\mathcal{H}(\mathbb{C}), \tau_0)$, isto é, $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$.

Proposição 4.1 *Os espaços $\mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$, $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$ e $Exp(\mathbb{C})$ são isomorfos como espaços vetoriais.*

Demonstração: Definamos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C})) &\longrightarrow \mathcal{H}'(\mathbb{C}) \\ L &\longmapsto \psi(L), \end{aligned}$$

onde $\psi(L)(f) = L(f)(0)$, para cada $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Provaremos que ψ é um isomorfismo entre esses dois espaços.

Inicialmente, precisamos mostrar que, para cada $L \in \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$, $\psi(L) \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$. Como claramente $\psi(L)$ é linear, basta mostrar que é contínua. De fato, seja (f_n) uma seqüência em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ convergindo uniformemente sobre compactos para $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Dados $\varepsilon > 0$, $L \in \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ e $K \subset \mathbb{C}$ um compacto com $0 \in K$, pela Proposição 1.13, existem uma constante $M > 0$ e um compacto $K' \subset \mathbb{C}$ para os quais

$$\begin{aligned}\sup_{z\in K}|L(f_n)(z) - L(f)(z)| &= \sup_{z\in K}|L(f_n - f)(z)| \\ &\leq M. \sup_{w\in K'}|f_n(w) - f(w)|.\end{aligned}$$

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{w\in K'}|f_n(w) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{M}$, qualquer que seja $n > n_0$. Assim

$$|\psi(L)(f_n) - \psi(L)(f)| = |L(f_n)(0) - L(f)(0)| \leq M \sup_{w\in K'}|f_n(w) - f(w)| \leq \varepsilon$$

para todo $n > n_0$. Segue que $\psi(L)(f_n)$ converge para $\psi(L)(f)$, implicando em $\psi(L) \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$ para todo $L \in \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$. A seguir, vamos provar que ψ é sobrejetora.

Para cada $T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$, consideremos agora a função associada

$$\begin{aligned}L_T : \mathcal{H}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C}) \\ f &\longmapsto L_T(f),\end{aligned}$$

onde $L_T(f)(w) = T(\tau_w f)$, para todo $w \in \mathbb{C}$.

Note que, para cada $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $L_T(f)$ pertence a $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Além disso, a função L_T pertence a $\mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$, pois L_T é linear, contínua e comuta com as translações: De fato, sejam $K \subset \mathbb{C}$ um compacto e (f_n) uma seqüência em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ convergindo uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ para uma função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Vamos mostrar que $L_T(f_n)$ converge para $L_T(f)$ em K.

Como $T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$, pela Proposição 1.13, existem $M > 0$ e um compacto $K' \subset \mathbb{C}$ para os quais $|T(g)| \leq M \sup_{z\in K'}|g(z)|$, para todo $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Seja agora $\varepsilon > 0$ e consideremos $K'' \subset \mathbb{C}$ um compacto tal que $K + K' \subset K''$. Então existe $n_{\varepsilon,K''} \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{z\in K''}|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{M}$, $\forall\, n > n_{\varepsilon,K''}$. Como

$$\sup_{b\in K}|L_T(f_n)(b) - L_T(f)(b)| = \sup_{b\in K}|T(\tau_b f_n) - T(\tau_b f)|,$$

para cada $b \in K$, segue que

$$\begin{aligned}|T(\tau_b f_n) &- T(\tau_b f)| \leq M \sup_{z\in K'}|\tau_b(f_n - f)(z)| = M \sup_{z\in K'}|(f_n - f)(z + b)| \\ &\leq M \sup_{w\in(K+K')\subset K''}|(f_n - f)(w)| \leq M \sup_{w\in K''}|(f_n - f)(w)| < M\frac{\varepsilon}{M}.\end{aligned}$$

Assim $\sup_{b\in K}|T(\tau_b f_n) - T(\tau_b f)| < \varepsilon$, para todo $n > n_{\varepsilon,K''}$. Portanto $L_T(f_n)$ converge para $L_T(f)$ em K, implicando em L_T ser contínua.

Finalmente L_T comuta com as translações pois, para cada $v \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \tau_v \circ L_T(f)(w) &= L_T(f)(w+v) = T(\tau_{w+v}(f)) = T(\tau_w(\tau_v(f))) = \\ &= L_T(\tau_v(f))(w) = L_T \circ \tau_v(f)(w), \ \ \forall\, w \in \mathbb{C},\ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Para mostrar que ψ é isomorfismo, vamos exibir sua aplicação inversa. Considerando então a aplicação

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{H}'(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C})) \\ T &\longmapsto L_T, \end{aligned}$$

temos que

(i) $\psi \circ \theta(T) = \psi(L_T) = T$, para cada $T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$ e

(ii) $\theta \circ \psi(L) = L$ para cada $L \in \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$.
Logo $\theta = \psi^{-1}$ e, conseqüentemente, $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$ e $\mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ são isomorfos.

Vamos agora mostrar que $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$ e $\mathrm{Exp}(\mathbb{C})$ são isomorfos. Para isso, consideremos a função

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{H}'(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{Exp}(\mathbb{C}) \\ T &\longmapsto \varphi(T), \end{aligned}$$

onde $\varphi(T)(\lambda) = T(g_\lambda)$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, sendo $g_\lambda(z) = e^{\lambda z}$, para todo $z \in \mathbb{C}$ e vamos provar que φ é um isomorfismo entre os espaços $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$ e $\mathrm{Exp}(\mathbb{C})$. É fácil verificar que φ é linear. Também, para cada $T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$, $\varphi(T)$ é holomorfa. De fato, sendo $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\varphi(T)(\lambda+\delta) - \varphi(T)(\lambda)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{T(g_{(\lambda+\delta)}) - T(g_\lambda)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} T\left(\frac{g_{(\lambda+\delta)} - g_\lambda}{\delta}\right).$$

Agora, para cada $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{(g_{(\lambda+\delta)} - g_\lambda)(z)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{e^{(\lambda+\delta)z} - e^{\lambda z}}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{e^{\lambda z}(e^{\delta z} - 1)}{\delta} = z e^{\lambda z}.$$

Assim, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi(T)'(\lambda) = T(h_\lambda)$, com $h_\lambda(z) = z e^{\lambda z}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Além de holomorfa, note que $\varphi(T)$ é de tipo exponencial: pela continuidade de T, existem constantes $C, R > 0$ para as quais

$$|T(h)| \leq C \max_{|z| \leq R} |h(z)|, \ \ \forall h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}).$$

Em particular, se $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$|\varphi(T)(\lambda)| \ = \ |T(g_\lambda)| \leq C \max_{|z| \leq R} |e^{\lambda z}| = C e^{R|\lambda|}.$$

Falta mostrarmos φ que é bijetora.

Dada uma função inteira $g \in \text{Exp}(\mathbb{C})$, consideremos a função

$$\begin{array}{rcl} T_g : \mathcal{H}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} f^{(n)}(0). \end{array}$$

Observemos que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} f^{(n)}(0) \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_n \left| \frac{g^{(n)}(0)}{n!} f^{(n)}(0) \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sup_n |g^{(n)}(0)|^{\frac{1}{n}} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}}.$$

Agora, como $g \in \text{Exp}(\mathbb{C})$, segue da Proposição 1.24 que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_n |g^{(n)}(0)|^{\frac{1}{n}} < \infty.$$

Como f é uma função inteira, temos $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sup_n \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \sup{}_n |g^{(n)}(0)|^{\frac{1}{n}} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Assim, pelo Teste da Raíz, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} f^{(n)}(0)$ converge absolutamente e, portanto, converge em $\mathbb{C}$.

Facilmente, verificamos que T_g é linear, para cada $g \in \text{Exp}(\mathbb{C})$. Vamos provar que T_g é contínua. Para isso, consideremos a seqüência de funções $(H_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tais que

$$\begin{array}{rcl} H_m : \mathcal{H}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} f^{(n)}(0). \end{array}$$

Claramente, para todo $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $H_m(f) \to T_g(f)$ quando $m \to \infty$. Por outro lado, para cada m inteiro, H_m é linear e contínua: seja $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ convergindo uniformemente sobre compactos para $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Então, pelo Teorema 1.20, $(f_j^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre compactos para $f^{(k)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$. Em particular, para cada k, $f_j^{(k)}(0) \longrightarrow f^{(k)}(0)$ em $\mathbb{C}$, quando $j \to \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro $N > 0$ tal que

$$|f_j^{(k)}(0) - f^{(k)}(0)| < \frac{\varepsilon}{M}, \ \forall j > N, \ \forall\, k \in \mathbb{N},$$

com $M > \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{|g^{(n)}(0)|}{n!}$. Assim, para $j > N$,

$$|H_m(f_j) - H_m(f)| = \left| \sum_{n=0}^{m} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}(f_j - f)^{(n)}(0) \right| < \frac{\varepsilon}{M} \sum_{n=0}^{m} \frac{|g^{(n)}(0)|}{n!} < \varepsilon.$$

Segue que H_m é contínua, para todo $m \geq 0$ e, portanto, pela Proposição 1.11, $T_g \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$, qualquer que seja $g \in$Exp$(\mathbb{C})$.

Consideremos agora a função

$$\begin{aligned} \eta : \mathrm{Exp}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{H}'(\mathbb{C}) \\ g &\longmapsto T_g. \end{aligned}$$

Note que

(i) $\eta \circ \varphi(T) = T_{\varphi(T)} = T$,

(ii) $\varphi \circ \eta(g) = g$.

Logo, $\eta = \varphi^{-1}$ e, portanto, Exp$(\mathbb{C})$ é isomorfo a $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$. $\square$

Conforme mencionamos anteriormente, nossa intenção é mostrar que o espaço $\mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ é uma álgebra comutativa sob composição de operadores.

Observemos que o espaço Exp$(\mathbb{C})$ é uma álgebra comutativa sob multiplicação pontual. De fato, se $f, g, h \in$ Exp$(\mathbb{C})$, existem $C_f, C_g, C_h > 0$ e $R_f, R_g, R_h > 0$ tais que $|f(z)| \leq C_f e^{R_f|z|}$, $|g(z)| \leq C_g e^{R_g|z|}$ e $|h(z)| \leq C_h e^{R_h|z|}$ e

$$|(f(z) + g(z))h(z)| \leq (|f(z)| + |g(z)|)|h(z)| \leq 2(max\{C_f, C_g\}C_h)e^{(max\{R_f,R_g\}+R_h)|z|}.$$

Logo $(f + g)h \in$ Exp$(\mathbb{C})$ para quaisquer $f, g, h \in$ Exp$(\mathbb{C})$, e é imediato completar a verificação de que Exp$(\mathbb{C})$ é uma álgebra.

Já o espaço $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$ não possui um candidato imediato à operação multiplicação. Para suprir essa falta, definiremos a seguinte aplicação:

Dados $S, T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$, seja $S * T : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ com $S * T(f) = S(T * f)$, onde

$$\begin{aligned} T * f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \lambda &\longmapsto T * f(\lambda) = T(\tau_\lambda f) \end{aligned} \qquad (1)$$

para cada $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Vamos mostrar a seguir que $S * T$ é contínua . Para isso, consideremos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ convergindo uniformemente sobre compactos para $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$; mostraremos que $S * T((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ converge para $S * T(f)$. Como $S, T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$, pela Proposição 1.13, existem $M_1, M_2 > 0$ e compactos $K_1, K_2 \subset \mathbb{C}$ tais que

$$|S(g)| \leq M_1 \sup_{\lambda\in K_1} |g(\lambda)|, \; \forall\, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \;\text{ e }\; |T(h)| \leq M_2 \sup_{z\in K_2} |h(z)|, \; \forall\, h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}).$$

Sejam $\varepsilon > 0$ e $K \subset \mathbb{C}$ um compacto tal que $K_1 + K_2 \subset K$; então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ para o qual $\sup_{w\in K} |f_n(w) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{M_1.M_2}$, para todo $n \geq n_0$. Assim

$$\begin{aligned}
|S * T(f_n) - S * T(f)| &= |S(T * f_n) - S(T * f)| \\
&\leq M_1 \sup_{\lambda\in K_1} |T * f_n(\lambda) - T * f(\lambda)| \\
&= M_1 \sup_{\lambda\in K_1} |T(\tau_\lambda f_n) - T(\tau_\lambda f)| \\
&\leq M_1 \sup_{\lambda\in K_1} (M_2 \sup_{z\in K_2} |\tau_\lambda f_n(z) - \tau_\lambda f(z)|) \\
&\leq M_1 M_2 \sup_{w\in K} |f_n(w) - f(w)|) \\
&\leq M_1 M_2 \frac{\varepsilon}{M_1.M_2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Segue que $S * T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$.

Feitas essas considerações, segue que:

Proposição 4.2 *Os espaços Exp$(\mathbb{C})$, $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$ e $\mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ são isomorfos como álgebras.*

Demonstração: Consideremos as aplicações ψ e φ definidas anteriormente. Vimos que ambas eram bijetoras. Mostraremos agora que tais aplicações são homomorfismos entre as álgebras $\mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ e $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$, e $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$ e Exp$(\mathbb{C})$ respectivamente.

Sejam $L_1, L_2 \in \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ dois operadores quaisquer e consideremos $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Então,

$$\begin{aligned}
\psi(L_2) * f(w) &= \psi(L_2)(\tau_w f) = L_2(\tau_w f)(0) \\
&= L_2(f)(w), \;\; \text{para todo } w \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\psi(L_1) * \psi(L_2)(f) &= \psi(L_1)(\psi(L_2) * f) = \psi(L_1)(L_2(f)) \\
&= L_1(L_2(f))(0) = \psi(L_1 \circ L_2)(f), \;\; \text{para todo } f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})
\end{aligned}$$

Segue que ψ é um isomorfismo, isto é, um homomorfismo bijetor entre as álgebras $\mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ e $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$.

Por outro lado, consideremos agora $T_1, T_2 \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Considerando então a função $g_\lambda(z) = e^{\lambda z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$ definida anteriormente,

$$\begin{aligned} T_2 * g_\lambda(w) &= T_2(\tau_w g_\lambda) = T_2(g_\lambda(w).g_\lambda) \\ &= g_\lambda(w) T_2(g_\lambda), \text{ para todo } w \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Assim, a função $w \mapsto T_2 * g_\lambda(w)$ é igual à função $w \mapsto g_\lambda(w)T_2(g_\lambda)$ (2) e

$$\begin{aligned} \varphi(T_1).\varphi(T_2)(\lambda) &= \varphi(T_1)(\lambda).\varphi(T_2)(\lambda) = T_1(g_\lambda)T_2(g_\lambda), \text{ onde } T_2(g_\lambda) \in \mathbb{C} \\ &= T_1(g_\lambda.(T_2(g_\lambda))) \overset{(2)}{=} T_1(T_2 * g_\lambda) \\ &= T_1 * T_2(g_\lambda) = \varphi(T_1 * T_2)(\lambda), \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Segue que φ é um isomorfismo (homomorfismo bijetor) entre as álgebras $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$ e $\text{Exp}(\mathbb{C})$. $\square$

De posse dessa proposição, vamos observar como o espaço dos operadores de convolução comportam-se em relação a hiperciclicidade.

Teorema 4.3 *Seja $L \in \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ um operador convolução que não é múltiplo da identidade. Então L é hipercíclico.*

Demonstração: Dado $L \in \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$, pelos isomorfismos ψ e φ definidos na Proposição 4.1, existe um único $g_L \in \text{Exp}(\mathbb{C})$ associado a L tal que $\varphi(\psi(L)) = g_L$. Assim considerando a expansão de g_L em série de Taylor, $g_L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_L^{(n)}(0)}{n!} z^n$ $(z \in \mathbb{C})$, temos que

$$\begin{aligned} L(f)(w) &= \psi^{-1}(\varphi^{-1}(g_L))(f)(w) = \psi^{-1}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_L^{(n)}(0)}{n!} f^{(n)}\Big)(w) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_L^{(n)}(0)}{n!} (\tau_w f)^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_L^{(n)}(0)}{n!} (f)^{(n)}(w), \end{aligned}$$

para todos $w \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Agora note que L será um múltiplo da identidade se, e somente se, a função associada g_L for constante: de fato, se $L = \alpha I$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$g_L(\lambda) = \varphi(\psi(\alpha I))(\lambda) = (\alpha I)(e^{\lambda 0}) = \alpha e.$$

Por outro lado, se g_L for constante, $g_L^{(n)}(z) = 0$ para todos $z \in \mathbb{C}$ e $n > 0$. Logo

$$L(f)(w) = g(0)f(w), \ \forall w \in \mathbb{C}, \ \forall f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}),$$

ou seja, $L = kI$, onde $k = g(0)$.

Como, pela hipótese do teorema, L não é múltiplo da identidade, segue que g_L não é constante. Além disso, para cada $b \in \mathbb{C}$ fixo, a função $f_b(z) = e^{bz}$ é um autovetor de L:

$$L(f_b)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j {f_b}^{(j)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j b^j f_b(z) = g_L(b) f_b(z).$$

Afirmação: Para cada aberto não vazio V de $\mathbb{C}$, o espaço $F = [f_b : b \in V]$ é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

De fato, dado $b \in V$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, temos que $b + \delta \in V$. Também, para cada $z \in \mathbb{C}$,

$$\left| \frac{e^{(b+\delta)z} - e^{bz}}{\delta} - ze^{bz} \right| = \left| \frac{e^{bz}(e^{\delta z} - 1 - \delta z)}{\delta} \right| \to 0, \quad \text{quando} \quad \delta \to 0.$$

Logo $\displaystyle\lim_{\delta \to 0} \frac{e^{(b+\delta)z} - e^{bz}}{\delta} = ze^{bz}$ e, assim, ze^{bz} pertence ao fecho de F. Procedendo de maneira análoga iteradas vezes, mostra-se que $z^n e^{bz}$ pertence ao fecho de F, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Tomemos agora $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ qualquer e consideremos $g(z) = e^{-bz} f(z)$ para algum $b \in \mathbb{C}$. Expandindo g pela série de Taylor, temos que existe uma seqüência complexa $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $g(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$. Logo $f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j e^{bz}$ uniformemente em cada compacto e, pela definição de F, segue que f pertence ao fecho de F, conforme queríamos demonstrar.

Consideremos agora os conjuntos

$$V = \{b \in \mathbb{C} : |g_L(b)| < 1\} \ \text{ e } \ W = \{b \in \mathbb{C} : |g_L(b)| > 1\}.$$

Observe que ambos os conjuntos são abertos e não vazios, uma vez que g_L não é constante por hipótese.

Vamos aplicar o Critério de Kitai (Corolário 2.7) para L, considerando os conjuntos densos $Y = [f_b : b \in V]$ e $Z = [f_b : b \in W]$, e a aplicação $S : Z \to Z$ definida da seguinte forma: para cada $b \in W$,

$$S(f_b)(z) = \frac{f_b(z)}{g_L(z)}.$$

Claramente, S é linear. Como, para cada $h \in Z$, existem $b_1, b_2, ..., b_n \in W$ tais que $h(z) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_{b_j}(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$S(h)(z) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j S(f_{b_j})(z) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{f_{b_j}(z)}{g_L(z)}.$$

Assim,

(i) Para cada $b \in V$, $|g_L(b)| < 1$ e, portanto, $L^n(f_b) = g_L(b)^n f_b \to 0$ quando $n \to \infty$.

(ii) Para cada $b \in W$, $|g_L(b)| > 1$ e, portanto, $S^n(f_b) = \frac{f_b}{g_L(b)^n} \to 0$ quando $n \to \infty$.

(iii) $L \circ S(h) = h$, para todo $h \in Z$.

Portanto, L é um operador hipercíclico. $\square$

Observemos que, no decorrer da demonstração, mostramos que o subespaço $[f_b : b \in \mathbb{C}]$ é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Como $[f_b : b \in \mathbb{C}] \subset Im(L)$, para qualquer operador de convolução L não múltiplo da identidade, segue imediatamente que

Corolário 4.4 *Todo operador de convolução não nulo possui imagem densa.*

Na verdade, pode-se mostrar que todo operador de convolução não nulo é sobrejetor. Para tal, precisaremos do seguinte lema:

Lema 4.5 *Suponhamos g_1, g_2, g_3 três elementos de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ tais que $g_1 = g_2.g_3$ e $g_2 \neq 0$. Se $g_1, g_2 \in Exp(\mathbb{C})$, então $g_3 \in Exp(\mathbb{C})$.*

Demonstração: [20], página 302.

Proposição 4.6 *Sejam $L_1, L_2 \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$ com $L_2 \neq 0$. Suponhamos que, para todo polinômio complexo P e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$,*

$$L_2 * (g_{P,\lambda}) = 0 \Longrightarrow L_1(g_{P,\lambda}) = 0.$$

onde $g_{P,\lambda}(z) = P(z)e^{\lambda z}$. Então $\frac{\varphi(L_1)}{\varphi(L_2)} \in Exp(\mathbb{C})$, onde φ é o isomorfismo definido na demonstração da Proposição 4.1.

Demonstração: Seja λ um zero de ordem k de $\varphi(L_2)$. Então, para todo natural $j < k$, teremos $(\varphi(L_2))^{(j)}(\lambda) = 0$, ou seja,

$$\frac{d^j L_2(e^{\lambda z})(\lambda)}{d\lambda^j} = \frac{d^j}{d\lambda^j}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}L_2(z^n)\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}L_2(z^{n+j}) = L_2(z^j e^{\lambda z})$$

Assim, para cada $j < k$, $\frac{d^j L_2(g_\lambda)(\lambda)}{d\lambda^j} = L_2(g_{P,\lambda,j}) = 0$, onde $g_{P,\lambda,j}(z) = z^j e^{\lambda z}$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} L_2 * (g_{P,\lambda,j}) \equiv 0 \implies & \; L_2 * (g_{P,\lambda,j})(w) = 0, \; \forall\, w \in \mathbb{C} \\ \implies & \; L_2(\tau_w(g_{P,\lambda,j})) = 0, \; \forall\, w \in \mathbb{C} \\ \implies & \; L_2(g_{P,\lambda,j}) = 0. \end{aligned}$$

Desta forma, pela hipótese do teorema, temos que $L_1(g_{P,\lambda,j}) = 0$, ou seja, λ é um zero de ordem no mínimo k de $\varphi(L_1)$. Portanto

$$\frac{\varphi(L_1)}{\varphi(L_2)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$$

implicando, pelo Lema 4.5, em $\frac{\varphi(L_1)}{\varphi(L_2)} \in$Exp$(\mathbb{C})$. $\square$

Teorema 4.7 *Todo operador de convolução não nulo é sobrejetor.*

Dmonstração: Utilizaremos na demonstração o seguinte resultado de R. M. Dieudonné e L. Schwartz ([9]):

Se $u : E \to F$ é uma aplicação linear entre espaços de Fréchet E e F, então u é sobrejetora se, e somente se, o adjunto de u, u', for injetor e tiver imagem fechada na topologia fraca-estrela em E'.

Assim, para demonstrar o teorema, basta mostrarmos que, dado L um operador de convolução não nulo, o adjunto L' tem imagem fechada na topologia fraca-estrela e é injetor.

Suponhamos que $L'(S) = 0$, para algum $S \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$. Então, para todo $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$,

$$L'(S)(f) = S(Lf) = S(\psi(L) * (f)) = S * \psi(L)(f) = 0,$$

ou seja, se considerarmos $T = \psi(L)$, segue que $S * T = 0$. Logo, pelo isomorfismo φ definido na Proposição 4.1, $\varphi(T)\varphi(S) \equiv 0$, implicando em $\varphi(T) \equiv 0$ ou $\varphi(S) \equiv 0$, uma vez que $\varphi(T), \varphi(S) \in$ Exp$(\mathbb{C}) \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Como L foi considerado não nulo e φ e ψ são isomorfismos, $\varphi(T)$ não pode ser nulo. Assim, $\varphi(S) = 0$ e, portanto, S necessariamente é o funcional identicamente nulo. Segue que L' é injetora.

A seguir, vamos mostrar que L' tem imagem fechada na topologia fraca-estrela. Para isso, seja F o conjunto $\{f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : L(f) = 0\}$ e consideremos V o conjunto $\{T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C}) : T(f) = 0,\ \forall f \in F\}$.

Observemos que V é fechado na topologia fraca-estrela. De fato, se $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma seqüência em V convergindo fracamente para um funcional $T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$, $T_n(f) \to T(f)$, para todo $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, isto é, $|T_n(f) - T(f)| \to 0$, quando $n \to \infty$. Agora $T_n(f) = 0$ para todo $f \in F$, e isto implica em $T(f) = 0$, para todo $f \in F$. Segue que $T \in V$ e, portanto V é fraco-estrela fechado, e $\cap_{f\in F}\{T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C}) : T(f) = 0\}$ também é fraco-estrela fechado.

Seja $S \in Im(L')$. Então existe $T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$ para o qual $S = L'(T)$. Agora, se $f \in F$, $L(f) = 0$ e

$$S(f) = L'(T)(f) = T(L(f)) = T(0) = 0,$$

uma vez que T é linear. Logo, $S(f) = 0$, para todo $f \in F$; isto implica que $S \in F^{\perp}$. Assim, $Im(L') \subset F^{\perp}$.

Por outro lado, seja $T \in F^{\perp}$. Pelas definições de φ e ψ, temos $\psi(L) \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$ $\varphi(T), \varphi\circ\psi(L) \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C})$. Suponhamos que $\psi(L)*(g_{P,\lambda}) = 0$, onde $g_{P,\lambda}(z) = P(z)e^{\lambda z}$, com P um polinômio complexo e $\lambda \in \mathbb{C}$ quaisquer, e $*$ a operação definida em (1). Então para cada $w \in \mathbb{C}$,

$$0 \;=\; \psi(L) * (g_{P,\lambda})(w) = \psi(L)(\tau_w g_{P,\lambda}) = L(g_{P,\lambda})(w).$$

Logo $L(g_{P,\lambda}) \equiv 0$ e, uma vez que T é linear, segue que $T(L(g_{P,\lambda})) = 0$. Assim, pela Proposição 4.6,

$$\frac{\varphi(T)}{\varphi \circ \psi(L)} \in \ \mathrm{Exp}(\mathbb{C}).$$

Como $\mathrm{Exp}(\mathbb{C})$ é uma álgebra, existe um funcional linear S tal que $\varphi(T) = \varphi(S)\varphi(\psi)(L)$, ou seja, $T = S * \psi(L)$, já que ψ é isomorfismo. Logo, para todo $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$,

$$T(f) = S * \psi(L)(f) = S(\psi(L) * f) = S(L(f)) = L'(S)(f).$$

Portanto, T pertence a imagem de L'. Na verdade, acabamos de mostrar que:

$$F^{\perp} = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : L(f) = 0\}^{\perp} = L'(\mathcal{H}'(\mathbb{C})).$$

Pelo Teorema de Dieudonné-Schwartz citado acima, segue que L é sobrejetora. $\square$

Uma pergunta natural a ser feita diz respeito ao Teorema 2.9: será que os operadores de convolução possuem subespaço denso invariante constituído inteiramente, exceto pela função nula, de funções hipercíclicas? A resposta é positiva e segue imediatamente do teorema anterior.

Corolário 4.8 *Dado um operador de convolução L que não é um múltiplo da identidade, existe um espaço vetorial M denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ L-invariante cujos elementos não nulos são hipercíclicos para L.*

Demonstração: Consideremos o subespaço vetorial

$$M = \{P(L)(f) : P \text{ é um polinômio}\}.$$

Claramente, M é L-invariante e, para cada P não nulo, $P(L)$ é um operador de convolução. Assim, de acordo com o teorema anterior, $P(L)$ tem imagem densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Como L^n também tem imagem densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\text{Orb}(P(L)(f), L) = \{L^n(P(L)(f)) : n \in \mathbb{N}\} = P(L)\{L^n(f) : n \in \mathbb{N}\}$$

é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Em outras palavras, qualquer elemento não nulo de M é hipercíclico para L. $\square$

Capítulo 5

Polinômios d-Homogêneos em Espaços de Banach

Inicialmente, apresentaremos algumas definições e resultados de polinômios homogêneos contínuos. Como referências mais completas sobre o assunto, recomendamos [23] e [25], textos estes utilizados para o presente estudo. Na seqüência, definiremos hiperciclicidade de polinômios homogêneos e trataremos de alguns resultados obtidos por N. Bernardes ([5]) nessa direção.

5.1 Polinômios Homogêneos em Espaços Normados

Definição 5.1 *Consideremos $m \in \mathbb{N}$ e $E_1, E_2, ..., E_m, F$ espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $A : E_1 \times E_2 \times ... \times E_m \longrightarrow F$ é m-linear, ou multilinear, se for linear em cada variável, isto é, se as funções*
$x_i \longmapsto A(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_m)$ forem lineares.

Denotaremos por $\mathcal{L}_a(E_1, E_2, ..., E_m; F)$ o espaço vetorial de todas as aplicações m-lineares de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_m$ em F.

Se $E_1 = E_2 = ... = E_m = E$, denotaremos $\mathcal{L}_a(E_1, E_2, ..., E_m; F)$ por $\mathcal{L}_a(^m E; F)$. Observemos também que $\mathcal{L}_a(^0 E; F) = F$ e $\mathcal{L}_a(^1 E; F) = \mathcal{L}_a(E; F)$.

Se $E_1, E_2, ..., E_m$ forem espaços normados, podemos mostrar que $E_1 \times E_2 \times ... \times E_m$ também será normado considerando qualquer uma das seguintes normas:

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq m} \|x_i\|_{E_i} \\ \|x\|_p &= (\|x_1\|_{E_1}^p + ... + \|x_m\|_{E_m}^p)^{1/p}, \;\; (1 \leq p < \infty). \end{aligned}$$

Tais normas são equivalentes e geram a mesma topologia em $E_1 \times E_2 \times ... \times E_m$ - a saber, a topologia produto. Sem perda de generalidade, usaremos a primeira norma acima como a usual em $E_1 \times E_2 \times ... \times E_m$ e a denotaremos simplesmente por $\|.\|$. Quando for necessário trabalhar com outra norma, indicaremos qual estará sendo utilizada.

Teorema 5.2 *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $E_1, E_2, ..., E_m$ e F espaços normados sobre um corpo $\mathbb{K}$. Se $A : E_1 \times E_2 \times ... \times E_m \longrightarrow F$ for uma aplicação multilinear, então são equivalentes as seguintes afirmações:*

(a) A é contínua;

(b) A é contínua na origem;

(c) existe uma constante $M > 0$ tal que $\|A(x_1, ..., x_m)\| \leq M\|x_1\|...\|x_m\|$, para qualquer $(x_1, ..., x_m) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_m$.

Demonstração: A implicação $(a) \Rightarrow (b)$ é imediata. Vamos a seguir demonstrar $(b) \Rightarrow (c)$. Suponhamos que A é contínua na origem. Assim, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que, qualquer que seja $x \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_m$ com $\|x\| \leq \delta$, $\|A(x)\| \leq 1$. Consideremos $x = (x_1, x_2..., x_m) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_m$ tal que $\|x_j\| \neq 0$ para todo $j = 1, ..., m$. Então $\left\|\left(\frac{\delta x_1}{\|x_1\|}, \frac{\delta x_2}{\|x_2\|}, ..., \frac{\delta x_m}{\|x_m\|}\right)\right\| \leq \delta$. Logo

$$\begin{aligned} \|A\left(\frac{\delta x_1}{\|x_1\|}, \frac{\delta x_2}{\|x_2\|}, ..., \frac{\delta x_m}{\|x_m\|}\right)\| &\leq 1 \\ \Longrightarrow \|\frac{\delta^m}{2^m}A\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \frac{x_2}{\|x_2\|}, ..., \frac{x_m}{\|x_m\|}\right)\| &\leq 1 \\ \Longrightarrow \|A(x_1, x_2, ..., x_m)\| \leq \frac{2^m}{\delta^m}\|x_1\|\|x_2\|, ..., \|x_m\|. \end{aligned}$$

Observemos que, caso $\|x_j\| = 0$ para algum $j = 1, ..., m$, $\|A(x_1, ..., x_m)\| = 0$. Logo, tomando $M = \frac{2^m}{\delta^m} > 0$, segue que

$$\|A(x_1, ..., x_m)\| \leq M\|x_1\|...\|x_m\|,$$

para qualquer $(x_1, ..., x_m) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_m$.

Finalmente, provemos a implicação $(c) \Rightarrow (a)$. Para isso, mostraremos que A é uniformemente contínua sobre limitados, o que resulta em A ser contínua no espaço todo.

Seja $y = (y_1, ..., y_m) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_m$. Então qualquer que seja $x = (x_1, ..., x_m) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_m$, temos que

$$\begin{aligned} A(x) - A(y) &= A(x_1, x_2, ..., x_m) - A(y_1, y_2, ..., y_m) = A(x_1 - y_1, ..., x_m) \\ &+ A(y_1, x_2 - y_2, x_3..., x_m) + ... + A(y_1, y_2..., y_{m-1}, x_m - y_m). \end{aligned}$$

Assim, por (c),

$$\begin{aligned} \|A(x) - A(y)\| &\leq \|A(x_1 - y_1, ..., x_m)\| + \|A(y_1, x_2 - y_2, x_3..., x_m)\| + ... \\ &+ \|A(y_1, y_2..., y_{m-1}, x_m - y_m)\| \\ &\leq M\|(x_1 - y_1\|\|x_2\|...\|x_m\|\| + M\|y_1\|\|x_2 - y_2\|...\|x_m\| + ... \\ &+ M\|y_1\|\|y_2\|...\|y_{m-1}\|\|x_m - y_m\| \end{aligned}$$

Por outro lado, se $\|x\| < r$ e $\|y\| < r$, então $\|x_j\| < r$ e $\|y_j\| < r$ para todo $j = 1, ..., m$. Logo

$$\|A(x) - A(y)\| \leq Mr^{m-1}(\sum_{j=1}^{m} \|x_j - y_j\|).$$

Segue que A é uniformemente contínua sobre limitados e, portanto, contínua. $\square$

Denotaremos o espaço vetorial de todas as aplicações m-lineares contínuas de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_m$ em F por $\mathcal{L}(E_1, E_2, ..., E_m; F)$.

Mostraremos a seguir que podemos definir uma norma sobre o espaço vetorial das aplicações multilineares contínuas, tornando-o um espaço normado.

Proposição 5.3 *Seja $m \in \mathbb{N}$ e sejam $E_1, E_2, ..., E_m$ e F espaços normados sobre um corpo $\mathbb{K}$. Então a função*

$$\begin{aligned} \|.\| : \mathcal{L}(E_1, E_2, ..., E_m; F) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \|A\|, \end{aligned}$$

com $\|A\| = \sup\{\|A(x)\| : x \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_m, \|x\|_\infty \leq 1\}$, é uma norma em $\mathcal{L}(E_1, E_2, ..., E_m; F)$.

Demonstração: Sabemos que A é contínua se, e somente se, existir $M > 0$ tal que $\|A(x)\| \leq M\|x\|$, para todo $x \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_m$. Em outras palavras, A é contínua se, e somente se, $\|A\| < \infty$. Também da definição de $\|A\|$, segue que $\|A\| \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2, ..., E_m; F)$.

Suponhamos que $\|A\| = 0$. Para qualquer $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_m$ com $\|x\|_\infty \leq 1$, temos

$$\|A(x)\| \leq 0 \Longrightarrow A(x) = 0.$$

Então, para qualquer $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_m$, temos

$$\|A(x)\| = \left\| A(\frac{x_1}{\|x_1\|}, ..., \frac{x_m}{\|x_m\|}) \right\| \|x_1\| ... \|x_m\| = 0.$$

Logo $A(x) = 0$, para todo $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_m$ e, portanto, $A \equiv 0$. Segue que

$$\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A \equiv 0.$$

Seja $\alpha \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned}\|\alpha A\| &= \sup\{\|\alpha A(x)\| : \|x\|_\infty \leq 1\} \\ &= |\alpha| \sup\{\|A(x)\| : \|x\|_\infty \leq 1\} = |\alpha|\|A\|.\end{aligned}$$

Logo $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Consideremos agora $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(E_1, E_2, ..., E_m; F)$.
Então para todo $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_m$ tal que $\|x\|_\infty \leq 1$, temos que

$$\|A_1(x) + A_2(x)\| \leq \|A_1(x)\| + \|A_2(x)\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|.$$

Portanto,

$$\|A_1 + A_2\| = \sup\{\|A_1(x) + A_2(x)\| : \|x\|_\infty \leq 1\} \leq \|A_1\| + \|A_2\|.$$

Segue que $\|.\|$ é norma em $\mathcal{L}(E_1, E_2, ..., E_m; F)$. $\square$

Observemos que, para cada $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2, ..., E_m; F)$, $M = \|A\|$ satisfaz o Teorema 5.2(c). Realmente, qualquer que seja $x = (x_1, ..., x_m) \in E_1 \times ... \times E_m$, o vetor $(\frac{x_1}{\|x_1\|}, ..., \frac{x_m}{\|x_m\|})$ tem norma 1 e, portanto,

$$\left\| A\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, ..., \frac{x_m}{\|x_m\|}\right) \right\| \leq \|A\|,$$

ou seja, $\|A(x_1, ..., x_m)\| \leq \|A\|\|x_1\|...\|x_m\|$. Além disso, se M for tal que $\|A(x_1, ..., x_m)\| \leq M\|x_1\|...\|x_m\|$ então, para todo $x = (x_1, ..., x_m) \in E_1 \times ... \times E_m$ com $\|x\| \leq 1$, temos $\|A(x)\| \leq M$. Logo $\|A\| = \sup\{\|A(x)\| : \|x\|_\infty \leq 1\} \leq M$, implicando em $\|A\| \leq M$. Segue que

$$\|A\| = \inf\{M : \|A(x)\| \leq M\|x_1\|...\|x_m\|, \forall x = (x_1, ..., x_m) \in E_1 \times ... \times E_m\}.$$

De agora em diante, trabalharemos apenas sobre dois espaços E e F. Além disso, para cada $m \in \mathbb{N}$, consideraremos o conjunto S_m formado pelas permutações de $\{1, 2, ..., m\}$.

Definição 5.4 *Sejam E e F espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Dizemos que uma aplicação m-linear $A : E^m \to F$ é simétrica se, para quaisquer $x_1, ..., x_m \in E$, $\sigma \in S_m$,*

$$A(x_1, ..., x_m) = A(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}).$$

Denotaremos por $\mathcal{L}_{as}(^mE;F)$ o espaço vetorial das aplicações m-lineares simétricas de E^m em F e, supondo E e F espaços normados, por $\mathcal{L}_s(^mE;F)$ o espaço vetorial das aplicações m-lineares simétricas contínuas de E^m em F. Caso $E = \mathbb{K}$, $\mathcal{L}_s(^mE;\mathbb{K}) = \mathcal{L}_s(^mE)$.

Observemos que, se $A \in \mathcal{L}_a(^mE;F)$, podemos definir $A_s \in \mathcal{L}_{as}(^mE;F)$ a partir de A, da seguinte forma

$$\begin{aligned} A_s : E^m &\longrightarrow F \\ (x_1, ..., x_m) &\longmapsto A_s(x_1, ..., x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, ... x_{\sigma(m)}). \end{aligned}$$

Para simplificar a notação a seguir, para cada $k \in \mathbb{N}$ e para cada $\gamma = (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{N}_0^k$, definiremos $|\gamma| = n_1 + ... + n_k$ e $\gamma! = n_1!...n_k!$.

Definição 5.5 *Sejam E e F espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Sejam também A uma aplicação m-linear de E^m em F e $k \in \mathbb{N}$. Para cada $(x_1, ..., x_k) \in E^k$ e para cada $(n_1, ..., n_k) \in \mathbb{N}_0^k$ com $n_1 + ... + n_k = m$, definimos*

$$Ax_1^{n_1}...x_k^{n_k} = \begin{cases} A(\underbrace{x_1, ..., x_1}_{n_1 vezes}, \underbrace{x_2, ..., x_2}_{n_2 vezes}, ..., \underbrace{x_k, ..., x_k}_{n_k vezes}), & se\ m \geq 1, \\ A & se\ m = 0. \end{cases}$$

De posse dessas definições, temos o seguinte teorema:

Teorema 5.6 (Fórmula de Leibniz) *Sejam E, F espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$ e A uma aplicação m-linear simétrica de E^m em F. Então, quaisquer que sejam $x_1, ..., x_k \in E$, temos que*

$$A(x_1 + ... + x_k)^m = \sum_{|\gamma|=m} \frac{m!}{n_1!n_2!...n_k!} Ax_1^{n_1}...x_k^{n_k},$$

onde $\gamma = (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{N}_0^k$.

Demonstração: Ver [25], página 18, Teorema 1.13.

O próximo teorema nos mostra que uma aplicação multilinear simétrica depende apenas de seus valores na diagonal do espaço E^m.

Teorema 5.7 (Fórmula de Polarização) *Sejam E, F espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$ e A uma aplicação m-linear simétrica de E^m em F. Então*

$$A(x_1, ..., x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \varepsilon_1 ... \varepsilon_m A(\varepsilon_1 x_1 + ... + \varepsilon_m x_m)^m,$$

quaisquer que sejam $x_1, ..., x_m \in E$.

Demonstração: Ver [25], página 20, Teorema 1.15.

Definição 5.8 *Sejam E e F espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Diremos que uma função $P : E \to F$ é um polinômio homogêneo de grau m, ou polinômio m-homogêneo, se existir uma aplicação m-linear $A : E^m \to F$ tal que $P(x) = Ax^m$, para todo $x \in E$.*

Denotaremos por $\mathcal{P}_a(^mE; F)$ o espaço vetorial de todos os polinômios m-homogêneos de E^m em F. Novamente, se $F = \mathbb{K}$, $\mathcal{P}_a(^mE; \mathbb{K}) = \mathcal{P}_a(^mE)$.

Teorema 5.9 *Sejam E e F espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Se P for um polinômio m-homogêneo de E em F, então existe uma única aplicação m-linear simétrica $A : E^m \to F$ tal que $P(x) = Ax^m$, para todo $x \in E$.*

Demonstração: Consideremos P um polinômio m-homogêneo de E em F. Então, por definição, existe uma aplicação m-linear $A : E^m \to F$ tal que $P(x) = Ax^m$, para todo $x \in E$, não necessariamente simétrica. Consideremos então a aplicação m-linear simétrica A_s definida por

$$A_s(x_1, ..., x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}).$$

Note que

$$A_s x^m = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} Ax^m = \frac{1}{m!} m! Ax^m = Ax^m = P(x).$$

Assim, mostramos que existe uma aplicação m-linear simétrica tal que $P(x) = Ax^m$. Vamos a seguir mostrar que tal aplicação é única:
Pela fórmula de polarização, segue que uma aplicação multilinear simétrica depende apenas de seu valores na diagonal do espaço em questão. Então supondo a existência de uma outra m-linear simétrica A'_s tal que $A'_s x^m = P(x) = A_s x^m$, como A'_s e A_s coincidem na diagonal, elas devem coincidir em todo o domínio, ou seja, $A'_s = A_s$.
□

Para enfatizar a correspondência entre um polinômio homogêneo e a multilinear simétrica associada, denotaremos por $\hat{A}$ o polinômio associado a A e por $\check{P}$ a multilinear simétrica associada a P.

O teorema a seguir fornece critérios para a continuidade de um polinômio homogêneo.

Teorema 5.10 *Sejam E e F espaços normados sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sejam também $m \in \mathbb{N}$, $P : E \to F$ um polinômio m-homogêneo e $A : E^m \to F$ a aplicação m-linear simétrica tal que $\hat{A} = P$. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

(a) A é contínua;

(b) P é contínuo;

(c) P é contínuo na origem;

(d) existe uma constante $M > 0$ tal que $\|P(x)\| \leq M\|x\|^m$, para todo $x \in E$.

Demonstração: Se $m = 0$, todas as afirmações são equivalentes. Consideremos então $m \geq 1$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Suponhamos A contínua e seja ι a inclusão de E em E^m. Visto que ι é contínua e, para todo $x \in E$,

$$A \circ \iota(x) = A(\underbrace{x, ..., x}_{mvezes}) = Ax^m = P(x),$$

segue que P é contínuo.

$(b) \Rightarrow (c)$ é imediato.

$(c) \Rightarrow (d)$ Suponhamos que P é contínuo na origem. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que, para todo $x \in E$ com $\|x\| < r$, $\|P(x) - P(0)\| = \|P(x)\| \leq 1$.

Em particular, se $x \neq 0$,

$$\left\|\frac{rx}{2\|x\|}\right\| = \frac{r}{2} < r, \quad \text{e, portanto,} \quad \left\|P\left(\frac{rx}{2\|x\|}\right)\right\| = \frac{r^m\|Ax^m\|}{2\|x\|^m} \leq 1.$$

Logo, para todo $x \in E$ não nulo, $\|Ax^m\| \leq \frac{2}{r^m}\|x\|^m$. Como a desigualdade acima também é valida para $x = 0$, tomando $M = \frac{2}{r^m}$ segue que

$$\|P(x)\| \leq M\|x\|^m, \forall x \in E.$$

$(d) \Rightarrow (a)$ Seja $M > 0$ tal que $\|P(x)\| \leq M\|x\|^m$, para todo $x \in E$ e consideremos $x_1, ..., x_m \in E$ tal que $\|x_j\| \leq 1/m$ para cada $j = 1, ..., m$. Então, pela Fórmula de Polarização (Teorema 5.7),

$$\begin{aligned} \|A(x_1..., x_m)\| &\leq \frac{1}{2^m m!} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m}} |\varepsilon_1|...|\varepsilon_m| \|A(\varepsilon_1 x_1 + ... + \varepsilon_m x_m)^m\| \\ &= \frac{1}{2^m m!} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \|P(\varepsilon_1 x_1 + ... + \varepsilon_m x_m)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^m m!}\sum_{\substack{\varepsilon_j=\pm 1\\ 1\leq j\leq m}} M\|\varepsilon_1 x_1 + ... + \varepsilon_m x_m\|^m\\
&= \frac{1}{2^m m!}\sum_{\substack{\varepsilon_j=\pm 1\\ 1\leq j\leq m}} M(\|x_1\| + ... + \|x_m\|)^m\\
&= \frac{1}{2^m m!}\sum_{\substack{\varepsilon_j=\pm 1\\ 1\leq j\leq m}} M = \frac{1}{2^m m!}2^m.M = \frac{M}{m!}.
\end{aligned}$$

Logo, quando $\|x_j\| \leq 1/m$ para cada $j = 1, ..., m$, temos

$$\|A(x_1, ..., x_m)\| \leq \frac{M}{m!}.$$

Mas, para quaisquer $x_1, .., x_m \in E$ não nulos, podemos definir $y_j = \frac{x_j}{m\|x_j\|}$, $(j = 1, ..., m)$. Então $\|y_j\| \leq \frac{1}{m}$ e

$$\|A(y_1..., y_m)\| = \frac{\|A(x_1..., x_m)\|}{m^m\|x_1\|...\|x_m\|} \leq \frac{M}{m!},$$

ou seja,

$$\|A(x_1..., x_m)\| \leq \frac{m^m}{m!}M\|x_1\|...\|x_m\|,$$

para $x_1, .., x_m \in X$ não nulos. Como a desigualdade acima também é válida se tomarmos $x_j = 0$ para algum j, segue que A é contínua. □

Proposição 5.11 *Sejam $m \in \mathbb{N}_0$, E, F dois espaços normados sobre um corpo $\mathbb{K}$ e P um polinômio m-homogêneo contínuo. Então*

(a) $\sup_{\|x\|=1}\|P(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|P(x)\| = \inf\{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M\|x\|^m\}$;

(b) $\|P\| = \sup_{\|x\|=1}\|P(x)\|$ *é norma em* $\mathcal{P}(^mE; F)$.

Demonstração: (a) Claramente, $\sup_{\|x\|=1}\|P(x)\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1}\|P(x)\|$. Dado qualquer $x \in E$ não nulo com $\|x\| \leq 1$, seja $y = \frac{x}{\|x\|}$. Então

$$\|P(y)\| = \|Ay^m\| = \frac{\|Ax^m\|}{\|x\|} \geq \|Ax^m\| = \|P(x)\|.$$

Logo, $\|P\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|P(x)\|$. Agora, se considerarmos $x = 0$, $P(x) = 0$ e a desigualdade continua válida. Assim

$$\sup_{\|x\|\leq 1}\|P(x)\| = \sup_{\|x\|=1}\|P(x)\|.$$

A seguir, vamos mostrar que $\sup_{\|x\|\leq 1}\|P(x)\| = \inf\{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M\|x\|^m\}$. Seja $M \geq 0$ tal que $\|P(x)\| \leq M\|x\|^m$, para todo $x \in E$. Se $\|x\| \leq 1$, então $\|P(x)\| \leq M$ e, assim, $\sup_{\|x\|\leq 1}\|P(x)\| \leq M$. Segue que

$$\sup_{\|x\|\leq 1}\|P(x)\| \leq \inf\{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M\|x\|^m\}.$$

Por outro lado, considerando $x \in E$ não nulo, temos

$$\left\|P\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \frac{\|P(x)\|}{\|x\|^m} \leq \sup_{\|z\|\leq 1}\|P(z)\|.$$

Logo $\|P(x)\| \leq \sup_{\|z\|\leq 1}\|P(z)\|\|x\|^m$, mesmo para $x = 0$. Então

$$\sup_{\|z\|\leq 1}\|P(z)\| \in \{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M\|x\|^m\}.$$

Logo $\inf\{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M\|x\|^m\} \leq \sup_{\|z\|\leq 1}\|P(z)\|$.

Segue que

$$\sup_{\|z\|\leq 1}\|P(z)\| \leq \inf\{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M\|x\|^m\}.$$

(b) A demonstração segue de modo análogo à Proposição 5.3. □

5.2 Existência de Polinômio Hipercíclicos

É natural pensar em introduzir o conceito de hiperciclicidade para polinômios homogêneos em espaços de Banach, no seguinte sentido: sendo E um espaço de Banach separável de dimensão infinita, $d \geq 2$ um inteiro positivo, e $\mathcal{P}(^dE;E)$ o espaço vetorial dos polinômios d-homogêneos em E, diremos que $P \in \mathcal{P}(^dE;E)$ é *hipercíclico* se, para algum elemento $x \in E$, a órbita de x sob P, $\mathrm{Orb}(P,x) = \{x, Px, P^2x, ...\}$, for densa em E. Nesse caso, tal elemento $x \in E$ é chamado de *vetor hipercíclico para P*. Entretanto, em 1998, Bernardes mostrou em [5] que não existem polinômios hipercíclicos d-homogêneos quando $d \geq 2$, conforme o resultado a seguir.

Proposição 5.12 *Dados E um espaço de Banach separável de dimensão infinita e d um inteiro com $d \geq 2$, nenhum polinômio $P \in \mathcal{P}(^dE;E)$ é hipercíclico.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que exista um polinômio $P \in \mathcal{P}(^dE;E)$ hipercíclico. Então $\|P\| > 0$ e existe um vetor $x \in E$ tal que a órbita $\mathrm{Orb}(P,x)$ é densa em E, ou seja, qualquer elemento de E pode ser aproximado por uma seqüência de potências de P em x. Assim, dado $\varepsilon = \min\{1, \frac{1}{\|P\|}\}$, existe um inteiro $k \geq 0$ tal que $\|P^k x\| < \varepsilon$. Por outro lado, para quaisquer que sejam $y \in E$ e $j > 1$,

$$\begin{aligned} \|P^j(y)\| &\leq \|P\|\|P^{j-1}(y)\|^d \leq \|P\|^{1+d}\|P^{j-2}(y)\|^{d^2} \leq ... \\ &\leq \|P\|^{1+d+...+d^{j-1}}\|y\|^{d^j}. \end{aligned}$$

Vamos a seguir observar o que ocorre com os elementos da órbita $\mathrm{Orb}(P, x)$ a partir do inteiro k:

$$\|P^j(P^k(x))\| \leq \|P\|^{1+d+...+d^{j-1}}\|P^k(x)\|^{d^j}.$$

Assim, analisando as possibilidades para a norma $\|P\|$, temos dois casos:

(i) Se $\|P\| < 1, \min\{1, \frac{1}{\|P\|}\} = 1$ e

$$\|P^j(P^k(x))\| < \|P\|^{1+d+...+d^{j-1}} \longrightarrow 0 \text{ quando } j \to \infty.$$

(ii) Caso $\|P\| \geq 1$, $\min\{1, \frac{1}{\|P\|}\} = \frac{1}{\|P\|}$ e

$$\|P^j(P^k(x))\| \leq \|P\|^{1+d+...+d^{j-1}}\|P^k(x)\|^{d^j} \leq \Big(\|P\|\|P^k(x)\|\Big)^{d^j},$$

uma vez que $1 + d + ... + d^{j-1} = \frac{d^j - 1}{d-1} < \frac{d^j}{d-1} < d^j$, para todo $j > 1$. Agora $\|P^k(x)\| < \frac{1}{\|P\|}$ e $\|P\| \geq 1$, implicando em $\|P\|\|P^k(x)\| < 1$. Logo

$$\|P^j(P^k(x))\| \leq \Big(\|P\|\|P^k(x)\|\Big)^{d^j} \longrightarrow 0 \text{ quando } j \to \infty.$$

Assim, por (i) e (ii), a órbita $\mathrm{Orb}(P, x)$ é limitada em E, ou seja, existe $M > 0$ tal que $\|P^n(x)\| < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Isto contradiz a hiperciclicidade de x em P, uma vez que se $y \in E$ com $\|y\| > M + 1$, temos que

$$1 < \Big|\|P^n(x)\| - \|y\|\Big| \leq \|P^n(x) - y\|, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo a órbita $\mathrm{Orb}(P, x)$ não pode ser densa em E, e, portanto, P não é hipercíclico.

□

Assim, não existem polinômios hipercíclicos em $\mathcal{P}(^dE; E)$ se $d \geq 2$. Entretanto, Bernardes mostrou que, se enfraquecemos as exigências e investigarmos a existência de um tipo de polinômios denominados supercíclicos, poderemos obter a proposição 5.14. Na realidade, em [5], Bernardes introduz esse conceito de superciclicidade baseado no mesmo conceito para operadores lineares:

Definição 5.13 *Sejam X um espaço de Banach e T um operador linear contínuo em X. Diremos que T é supercíclico se, para algum elemento $x \in X$, o conjunto $\{\lambda T^n x : n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C}\}$ for denso em X. Nesse caso, tal elemento $x \in X$ será chamado de vetor supercíclico para T.*

Essa definição gera a idéia de polinômios supercíclicos, assim como no caso da hiperciclicidade visto anteriormente. De fato, supondo E um espaço de Banach separável de dimensão infinita, $d \geq 2$ um inteiro positivo, dizemos que $P \in \mathcal{P}(^d E; E)$ é *supercíclico* se, para algum elemento $x \in E$, o conjunto formado pelos múltiplos de sua órbita, $\{\lambda P^n x : \lambda \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\}$, for denso em E. Nesse caso, tal elemento $x \in E$ será chamado de *vetor supercíclico para P*.

Proposição 5.14 *Dados E um espaço de Banach separável de dimensão infinita e d um inteiro com $d \geq 2$, existe um polinômio $P \in \mathcal{P}(^d E; E)$ supercíclico.*

Demonstração: Pela Proposição 1.4, existem seqüências $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E e $(b_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ em E^* tais que

$$\begin{cases} b_m^*(b_n) = \delta_n^m \\ \overline{[b_n : n \in \mathbb{N}]} = E, \\ \overline{[b_n^* : n \in \mathbb{N}]}^{\omega^*} = E^*. \end{cases}$$

Vamos assumir $\|b_n\| = 1$ para todo $\mathbb{N}$.
Sejam $Y = [b_n : n \in \mathbb{N}]$ e $c_n = \|b^*_{(n-1)d+1}\| \|b^*_{(n-1)d+2}\| ... \|b^*_{nd}\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Note que

$$c_1 = \|b_1^*\| \|b_2^*\| ... \|b_d^*\| \ , \ c_2 = \|b_{d+1}^*\| \|b_{d+2}^*\| ... \|b_{2d}^*\| \ , ...$$

Queremos construir um polinômio contínuo P que seja supercíclico e, nesse sentido, precisamos inicialmente encontrar uma aplicação multilinear contínua simétrica.

Dados $x^1, ..., x^d \in Y$, consideremos $M = \max_{1\leq j\leq d} \|x^j\|$ e a série dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^*_{((n-1)d+1)}(x^1).b^*_{((n-1)d+2)}(x^2)...b^*_{(nd)}(x^d)}{2^n c_n} b_n.$$

Observe que esta série é convergente: de fato,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{k} \frac{b^*_{((n-1)d+1)}(x^1).b^*_{((n-1)d+2)}(x^2)...b^*_{(nd)}(x^d)}{2^n c_n} b_n \right\| &\leq \\ \leq \sum_{n=1}^{k} \frac{|b^*_{((n-1)d+1)}(x^1)|...|b^*_{(nd)}(x^d)|}{2^n \|b^*_{(n-1)d+1}\| ... \|b^*_{nd}\|} \|b_n\| & \\ \leq \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2^n}\right) \frac{\|b^*_{((n-1)d+1)}\| \|x^1\| ... \|b^*_{(nd)}\| \|x^d\|}{\|b^*_{(n-1)d+1}\| ... \|b^*_{nd}\|} & \\ \leq \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2^n}\right) \|x^1\| ... \|x^d\| \leq \sum_{n=1}^{k} (\max_{1\leq j\leq d} \|x^j\|)^d \left(\frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{M^d}{2^n}\right). & \end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{M^d}{2^n}\right) \to M^d$ quando $k \to \infty$, a série é convergente. Na verdade, a série acima é finita: como $x^1, ..., x^d \in Y$, existem $k_1, ...k_d \in \mathbb{N}$ tais que $x^j = \sum_{l=1}^{k_j} b_l^*(x^i)b_l$, para todo $1 \leq j \leq d$. Desta forma,

$$\frac{b^*_{((n-1)d+1)}(x^1).b^*_{((n-1)d+2)}(x^2)...b^*_{(nd)}(x^d)}{2^n c_n}b_n = 0, \ \ \forall\, n > \left(\frac{\max\{k_1, ..., k_d\} - 1}{d}\right) + 1.$$

Assim $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^*_{((n-1)d+1)}(x^1).b^*_{((n-1)d+2)}(x^2)...b^*_{(nd)}(x^d)}{2^n c_n}b_n \in Y$, e podemos definir a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rcl} A : Y^d & \longrightarrow & Y \\ (x^1, ..., x^d) & \longmapsto & A(x^1, ..., x^d) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^1_{((n-1)d+1)}.x^2_{((n-1)d+2)}...x^d_{(nd)}}{2^n c_n}b_n, \end{array}$$

onde $x^j_k = b^*_k(x^j)$, para todos $j, k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$A(x^1, ..., x^d) = \frac{x^1_1.x^2_2...x^d_d}{2c_1}b_1 + \frac{x^1_{(d+1)}.x^2_{(d+2)}...x^d_{(2d)}}{2^2c_2}b_2 + ...$$

e facilmente mostra-se que A é uma aplicação multilinear contínua, uma vez que $\|A(x^1, ..., x^d)\| \leq \|x^1\|...\|x^d\|$. No entanto, A não é simétrica: de fato, supondo $d = 2$ e A simétrica, teríamos que ter $A(x^1, x^2) = A(x^2, x^1)$ para quaisquer $x^1, x^2 \in Y$. Entretanto, tomando $x^1 = b_1$ e $x^2 = b_1 + b_2$, temos

$$\begin{aligned} A(x^1, x^2) = A(b_1, b_1 + b_2) &= \frac{b_1}{2c_1}, \\ A(x^2, x^1) = A(b_1 + b_2, b_1) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto A não é simétrica para $d = 2$.
Consideremos então a multilinear simétrica associada a A

$$\begin{array}{rcl} A_s : Y^d & \longrightarrow & Y \\ (x^1, ..., x^d) & \longmapsto & A_s(x^1, ..., x^d) = \frac{1}{d!}\sum_{\sigma \in S_d} A(x^{\sigma(1)}, ..., x^{\sigma(d)}), \end{array}$$

onde S_d é o grupo de permutação, e o polinômio

$$\begin{array}{rcl} P : Y & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & A_s x^d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{((n-1)d+1)}.x_{((n-1)d+2)}...x_{(nd)}}{2^n c_n}b_n. \end{array}$$

Como A_s é uma aplicação d-linear simétrica contínua, segue do Teorema 5.9 que P é um polinômio d-homogêneo contínuo em Y.

Tendo definido um polinômio P em Y, vamos agora estendê-lo para E. Observe que, como Y é denso em E, para cada $y \in E$, existe uma seqüência $(y^m)_{m\in\mathbb{N}}$ em Y tal que $y = \lim\limits_{m\to\infty} y^m$. Consideremos então a aplicação $\tilde{P}$ definida em E por $\tilde{P}(y) = \lim\limits_{m\to\infty} P(y^m)$ para $y \in E$. Note que, se $x, y \in E$ forem tais que $y = \lim\limits_{m\to\infty} y^m$ e $x = \lim\limits_{m\to\infty} x^m$ com $(y^m)_{m\in\mathbb{N}}, (x^m)_{m\in\mathbb{N}} \subset Y$ e $\tilde{P}(x) \neq \tilde{P}(y)$, então para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon_m > 0$ tal que $\|P(x^m) - P(y^m)\| > \varepsilon_m$. Logo

$$\varepsilon_m < \|P(x^m) - P(y^m)\| = \|A_s(x^m)^d - A_s(y^m)^d\| \leq \|A_s\|\|x^m - y^m\|^d,$$

implicando em $x \neq y$ e, portanto, em $\tilde{P}$ estar bem definida. Claramente $\tilde{P}$ é um polinômio d-homogêneo contínuo em E que, por abuso de linguagem, chamaremos de P.

Note também que, para todo $x \in Y$,

$$\begin{aligned} P^2x &= P\Bigg(\frac{x_1.x_2...x_d}{2c_1}b_1 + \frac{x_{(d+1)}.x_{(d+2)}...x_{(2d)}}{2^2c_2}b_2 + \frac{x_{(2d+1)}.x_{(2d+2)}...x_{(3d)}}{2^3c_3}b_3 + ... \\ &\quad + \frac{x_{((d-1)d+1)}...x_{((d-1)d+d-1)}x_{d^2}}{2^dc_d}b_d + ...\Bigg) = \\ &= \frac{\Big(x_1.x_2...x_d\Big)\Big(x_{(d+1)}.x_{(d+2)}...x_{2d}\Big)...\Big(x_{((d-1)d+1)}...x_{((d-1)d+(d-1))}x_{d^2}\Big)}{(2c_12^2c_2...2^dc_d)2c_1}b_1 \\ &\quad + \frac{\Big(x_{d^2+1}...x_{(d+1)d}\Big)...\Big(x_{((2d-1)d+1)}...x_{((2d-1)d+d-1)}x_{2d^2}\Big)}{(2^{d+1}c_{d+1}...2^{2d}c_{2d})2^2c_2}b_2 + ... \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P^2x &= \frac{x_1...x_{d^2}}{M_{2,1}}b_1 + \frac{x_{d^2+1}...x_{2d^2}}{M_{2,2}}b_2 + \frac{x_{2d^2+1}...x_{3d^2}}{M_{2,3}}b_3 + ... \\ P^3x &= \left(\frac{x_1...x_{d^3}}{M_{3,1}}\right)b_1 + \left(\frac{x_{d^3+1}...x_{2d^3}}{M_{3,2}}\right)b_2 + \left(\frac{x_{2d^3+1}...x_{3d^3}}{M_{3,3}}\right)b_3 + ... \\ &(...) \\ P^mx &= \left(\frac{x_1...x_{d^m}}{M_{m,1}}\right)b_1 + \left(\frac{x_{d^m+1}...x_{2d^m}}{M_{m,2}}\right)b_2 + \left(\frac{x_{2d^m+1}...x_{3d^m}}{M_{m,3}}\right)b_3 + ... \end{aligned}$$

com $M_{m,j} = (2^{((j-1)d^{m-1}+1)+((j-1)d^{m-1}+2)+...+jd^{m-1}}c_{(j-1)d^{m-1}+1}...c_{jd^{m-1}})2^jc_j$, para todos $j \geq 1$ e $m \geq 2$.

Afirmação: P é um polinômio supercíclico.

Para provarmos tal afirmação, encontraremos um vetor supercíclico associado a P.

Seja $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência qualquer em Y densa em E (observe que existe tal seqüência, uma vez que Y é denso em E). Então podemos assumir que para cada

$n \in \mathbb{N}$,

$$r_n = a_{n,1}b_1 + ... + a_{n,d^{m_n}}b_{d^{m_n}},$$

onde $m_n \geq 1$ e $a_{n,j} \neq 0$, para todo $j = 1, ..., m_n$ (caso $a_{n,j} = 0$ para algum j, basta substituir r_n por $r'_n = r_n + a'_{n,j}b_j$ de forma que $a'_{n,j} \neq 0$ seja suficientemente pequeno para não comprometer a densidade da seqüência). Assim,

$$r_1 = a_{1,1}b_1 + ... + a_{1,d^{m_1}}b_{d^{m_1}}, \quad r_2 = a_{2,1}b_1 + ... + a_{2,d^{m_2}}b_{d^{m_2}} \quad ...$$

Nosso objetivo agora será construir uma seqüência de vetores $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a partir da seqüência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (densa em E), satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \|z_n\| &< \frac{1}{2^n}, \\ \|P^{m_1+...+m_{j-1}+j}(z_n)\| &\leq \frac{\lambda_j}{2^n}, \text{ para } 1 \leq j < n, \\ P^{m_1+...+m_{n-1}+n}(z_1 + z_2 + ... + z_n) &= \lambda_n r_n \text{ para algum } \lambda_n > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Provaremos então que o vetor dado por $y = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ é supercíclico para P.

Vamos encontrar $z_1 = y_1b_1 + ... + y_{d^{(m_1+1)}}b_{d^{(m_1+1)}}$ tal que $\|z_1\| < \frac{1}{2}$ e $P(z_1) = \lambda_1 r_1$, para algum $\lambda_1 > 0$, ou seja, tal que

$$\frac{y_1...y_d}{M_{1,1}}b_1 + \frac{y_{(d+1)}...y_{(2d)}}{M_{1,2}}b_2 + ... \frac{y_{d(d^{m_1}-1)+1}...y_{d^{m_1+1}}}{M_{1,d^{m_1}}}b_{d^{m_1}} = \lambda_1(a_{1,1}b_1 + ... + a_{1,d^{m_1}}b_{d^{m_1}})$$

Consideremos então $z'_1 = (a_{1,1}b_1 + M_{1,1}b_2 + b_3 + ... + b_d) + (a_{1,2}b_{d+1} + M_{1,2}b_{d+2} + b_{d+3} + ... + b_{2d}) + ... + (a_{1,d^{m_1}}b_{d^{(m_1-1)}+1} + M_{1,d^{(m_1)}}b_{d^{(m_1-1)}+2} + b_{d^{(m_1-1)}+3} + ... + b_{d^{m_1}d})$, e tomemos $z_1 = \frac{z'_1}{2^2\|z'_1\|}$. Claramente,

$$\begin{aligned} \|z_1\| &= \frac{\|z'_1\|}{2^2\|z'_1\|} \quad \text{e} \\ P(z_1) &= \left(\frac{1}{2^2\|z'_1\|}\right)^d \left(\frac{a_{1,1}M_{1,1}1...1}{M_{1,1}}b_1 + \frac{a_{1,2}M_{1,2}1...1}{M_{1,2}}b_2 + ... \frac{a_{1,d^{m_1}}M_{1,d^{m_1}}1...1}{M_{1,d^{m_1}}}b_{d^{m_1}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2^{2d}\|z'_1\|^d}\right) r_1 = \lambda_1 r_1. \end{aligned}$$

Vamos agora construir um vetor $z_2 = y_{d^{m_1+1}+1}b_{d^{m_1+1}+1} + ... + y_{d^{(m_1+m_2+2)}}b_{d^{(m_1+m_2+2)}}$ satisfazendo $\|z_2\| < \frac{1}{2^2}$, $\|P(z_2)\| \leq \frac{\lambda_1}{2^2}$, e $P^{m_1+2}(z_1 + z_2) = \lambda_2 r_2$ para algum $\lambda_2 > 0$, ou seja, com

$$\begin{aligned} P^{m_1+2}(z_1 + z_2) &= \left(\frac{\lambda_1(y_1...y_{(d^{m_1+1})})y_{(d^{m_1+1}+1)}...y_{d^{m_1+2}}}{M_{m_1+2,1}}\right)b_1 + \\ &\quad + \left(\frac{y_{(d^{m_1+2}+1)}...y_{2d^{m_1+2}}}{M_{m_1+2,2}}\right)b_2 + \\ &\quad + \left(\frac{y_{(2d^{m_1+2}+1)}...y_{3d^{m_1+2}}}{M_{m_1+2,3}}\right)b_3 + ... \\ &= \lambda_2(a_{2,1}b_1 + ... + a_{2,d^{m_2}}b_{d^{m_2}}). \end{aligned}$$

Consideremos z_2' definido da seguinte forma:

$$y_{d^{m_1+1}+1} = \frac{1}{y_1 ... y_{d^{m_1+1}}}, \quad y_{d^{m_1+1}+2} = a_{1,2}, \quad y_{d^{m_1+1}+3} = M_{1,2};$$

e para todos os índices j com $d^{m_1+1} + 4 \leq j \leq d^{(m_1+m_2+2)}$, vale

$$\begin{cases} y_j &= a_{2,\frac{(j-1)}{d^{m_1+2}}+1} & \text{sempre que} & 1 \equiv j \bmod(d^{m_1+2}) \\ y_j &= M_{2,\frac{(j-2)}{d^{m_1+2}}+1} & \text{sempre que} & 2 \equiv j \bmod(d^{m_1+2}) \\ y_j &= \lambda_1 & \text{sempre que} & 0 \equiv j \bmod(d) \\ y_j &= 1 & \text{caso contrário.} & \end{cases}$$

Então $z_2 = \frac{z_2'}{2^3\|z_2'\|}$ será tal que $\|z_2\| < \frac{1}{2^2}$,

$$\begin{aligned} \|P(z_2)\| &= \frac{1}{2^{3d}\|z_2'\|^d} \left\| \sum_{n=(d^{m_1-1})}^{(d^{m_1+m_2+1})} \frac{y_{((n-1)d+1)} \cdot y_{((n-1)d+2)} \cdots y_{(nd)}}{2^n c_n} b_n \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{3d}\|z_2'\|^d} \sum_{n=(d^{m_1-1})}^{(d^{m_1+m_2+1})} \frac{|b^*_{((n-1)d+1)}(z_2)| ... |b^*_{((n-1)d)}(z_2)|\lambda_1}{2^n \|b^*_{(n-1)d+1}\| ... \|b^*_{nd}\|} \|b_n\| \\ &\leq \frac{1}{2^{3d}\|z_2'\|^d} \sum_{n=(d^{m_1-1})}^{(d^{m_1+m_2+1})} \left(\frac{\lambda_1}{2^n}\right) \frac{\|b^*_{((n-1)d+1)}\| \|z_2\| ... \|b^*_{((n-1)d)}\| \|z_2\|}{\|b^*_{(n-1)d+1}\| ... \|b^*_{nd}\|} \\ &\leq \frac{1}{2^{3d}\|z_2'\|^d} \sum_{n=(d^{m_1-1})}^{(d^{m_1+m_2+1})} \left(\frac{\lambda_1}{2^n}\right) \|z_2\| \leq \frac{\lambda_1}{2^2} \end{aligned}$$

e $P^{m_1+2}(z_1 + z_2') = \lambda_2 r_2$.

Continuando esse processo, obtemos os vetores z_n da forma

$$z_n = y_{d^{(m_1+...+m_{n-1}+n-1)}+1} b_{d^{(m_1+...+m_{n-1}+n-1)}+1} + ... + y_{d^{(m_1+...+m_{n-1}+n)}+1} b_{d^{(m_1+...+m_{n-1}+n)}+1}$$

satisfazendo (1). Como a seqüência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ é absolutamente convergente e, como E é completo, existe $y = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \in E$. Também pela forma como foram construídos os vetores z_n $(n \in \mathbb{N})$,

$$P^{m_1+...+m_{n-1}+n}(y) = P^{m_1+...+m_{n-1}+n}(z_1 + z_2 + ... + z_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} P^{m_1+...+m_{n-1}+n}(z_j).$$

Vamos mostrar que y é supercíclico para P. Observe que

$$\begin{aligned} &\| \quad \frac{1}{\lambda_n} P^{m_1+...+m_{n-1}+n}(y) - r_n\| = \\ &= \quad \|\frac{1}{\lambda_n} P^{m_1+...+m_{n-1}+n}(z_1 + z_2 + ... + z_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} P^{m_1+...+m_{n-1}+n}(z_j) - r_n\| \end{aligned}$$

$$\leq \|\frac{1}{\lambda_n}P^{m_1+...+m_{n-1}+n}(z_1+z_2+...+z_n)-r_n\|+\|\frac{1}{\lambda_n}\sum_{j=n+1}^{\infty}P^{m_1+...+m_{n-1}+n}(z_j)\|$$

$$\leq \|\frac{1}{\lambda_n}\lambda_n r_n-r_n\|+\|\frac{1}{\lambda_n}\sum_{j=n+1}^{\infty}P^{m_1+...+m_{n-1}+n}(z_j)\|$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\to 0 \text{ quando } n\to\infty.$$

Como a seqüência $(r_n)_{\mathbb{N}}$ é densa em E, segue que y é supercíclico para P.

$\square$

Referências

[1] Ansari, S. I., *Hypercyclic and cyclic vectors*, J. Funct. Anal. **128** (1995), 374-383.

[2] Aron, R. and Markose, D., *On universal functions*, J. Korean Math. Soc. **41** (2004), 65-76.

[3] Beauzamy, B., *Introduction to Banach Spaces and their Geometry.* North-Holland Mathematics Studies n 68, Notas de Matemática n 86. Springer-Verlag, New York, 1982.

[4] Beauzamy, B., *Un opérateur, sur l'espace de Hilbert, dont tous les polynômes sont hypercycliques.*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **303** (1986) 923-925.

[5] Bernardes Jr., N. C., *On orbits of polynomial maps in Banach spaces*, Quaest. Math. **21** (1998), 311-318.

[6] Birkhoff, G. D., *Démonstration d'un théoreme élémentaire sur les fonctions entiéres.*, C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929) 473-475.

[7] Bourdon, P. S., *Invariant manifolds of hypercyclic vectors*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 845-847.

[8] Conway, J., *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[9] Dieudonné, R. M. and Schwartz, L., *La dualité dans les espaces* $(\mathcal{F})$ *et* $(\mathcal{LF})$, Ann. Inst. Fourier (Grenoble),I(1949), 61-101.

[10] Fabián, M., Habala, P., Hájek, P., Montesinos, V. M., Pelant, J. and Zizler, V., *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[11] Gethner, R. M. and Shapiro, J. H., *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. A.M.S. **100**, 2 (1987), 281-288.

[12] Godefroy, G. and Shapiro, J. H., *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds.*, J. Funct. Anal. **98** (1991) 229-269.

[13] Grosse-Erdmann, K. -G., *Universal families and hypercyclic operators.*, Bull. Amer. Math. Soc. **3** (1999) 345-381.

[14] Halmos, P. R., *Finite-Dimensional Vector Spaces.*, D. Van Nostrand Company Inc., New York (1958).

[15] Herrero, D. A., *Limits of hypercyclic and supercyclic operators.*, J. Funct. Anal. **99** (1991), 179-190.

[16] Kitai, C., *Invariant closed sets for linear operators.*, Thesis, University of Toronto, Toronto, 1982.

[17] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., *Classical Banach Spaces I*, Ed. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[18] MacLane, G. R., *Sequences of derivatives and normal families.*, J. Analyse Math. **2** (1952/53) 72-87.

[19] Maddox, I. J., *Elements of Functional Analysis*, Ed. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[20] Malgrange, B., *Existence et approximation des solutions des équations.*, Annales de l'Institut Fourier. **6** (1956) 271-355.

[21] Megginson, R. E., *An Introduction to Banach Space Theory.*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[22] Mujica, J., *Notas de Espaços Vetoriais Topológicos*, IMECC-UNICAMP, 2001.

[23] Mujica, J. *Complex Analysis in Banach Spaces* North-Holland, New York, 1986.

[24] Nachbin, L. *Lectures on the Theory of Distribution*, Textos de Matemática **15**, Recife (1964) 226.

[25] Pellegrini, L., *Um Teorema de Hahn-Banach para Polinômios Homogêneos*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, 2001.

[26] Rolewicz, S., *On orbits of elements.*, Studia Math. **32** (1969) 17-22.

[27] Salas, H. N., *A hypercyclic operator whose adjoint is also hypercylic*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 765-770.

[28] Salas, H. N., *Hypercyclic weighted shifts*, Amer. Math. Soc. **347** (1995), 993-1003.