

**Número mínimo de soluções
para equação de Yamabe subcrítica
modelada em um fibrado
riemaniano com fibras mínimas**

João Nunes de Araújo Neto

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Doutorado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paolo Piccione

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do IFCE

Data da defesa: 20 de Dezembro de 2019

**Número mínimo de soluções para
equação de Yamabe subcrítica
modelada em um fibrado riemanniano
com fibras mínimas**

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 20/12/2019. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Paolo Piccione (Orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Gaetano Siciliano - IME-USP
- Prof. Dr. Renato Ghini Bettiol - BSBC-CUNY
- Prof. Dr. Ana Claudia da Silva Moreira - UFABC
- Prof. Dr. Francesco Mercuri - UNICAMP

Agradecimentos

Ao Deus formador dos Céus e da terra, agradeço por todo bem que tem feito, em tudo vi a Sua mão, a Ele rendo graças por abrir os caminhos, direcionar meus passos, preparar o pão e confortar meu coração durante o curso, toda glória a Deus pertence.

Agradeço a Alexandra Fernandes, minha amada esposa, pelo amor, apoio e coragem durante todo o curso, juntos conseguimos transpor os obstáculos e ao nosso amado filho João Lucas pela sua alegria inspiradora, o qual sempre nos motivou.

Agradeço a minha mãe Francisca Nunes e aos meus cinco irmãos, Antonio Luis, Antonio Isidório, Neide, Lousimar e Rita, pelos ensinamentos, princípios e caráter que fizeram de mim uma pessoa capaz de enfrentar a vida de forma realista com fé e esperança.

Agradeço também as pessoas que de forma especial marcaram minha vida nesse período em São Paulo, Nykollas Fernandes, um irmão, meu amigo e companheiro de todas as horas, a Josilene Silva, José Aurimar, Graça Fernandes, Leonardo Fernandes, Mateus Evangelista, Michele Silva, José Maria, Gecilene Fernandes, Virgílio Fernandes, Joyce Fernandes, Jean Fernandes, Flávio e aos irmãos em Cristo Jesus da Congregação Las Palmas.

Agradeço aos amigos e colegas que sempre estiveram na torcida, prontos a estender a mão e dá uma palavra de conforto e esperança em momentos difíceis, a saber, Antonio Marcos, Felipe Felix, Marcos Rafael, Daniel Reis, Kaique Matias, Jailson Calado, Yuri Maluf, Jadevilson Cruz, Victor Hugo, Elivaldo Macedo, Rodrigo Santos, Eurípedes Silva, Benigno, Pablo, Edson Sampaio, José Eduardo, Leo Ivo, Rui Eduardo, Oscar, Michael Rodrigues, Francisco José, Arquimedes Albuquerque, Irailma Melo, Roberta da Silva, Pedro Saraiva.

Agradeço ao meu orientador, o Professor Paolo Piccione, pelo direcionamento durante o curso e aos professores Alexandre Fernandes, Mário de Assis, Francisco Regis, Wilson, Gláucio Terra, Gaetano Siciliano e Marcos Alexandrino pelo apoio. Agradeço a disponibilidade da comissão julgadora, a secretaria da Pós-Graduação em Matemática do IME-USP, em particular a Ana Paula, Maju e Henrique Guetti, sempre prontos a ajudar.

Agradeço Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE pelo apoio financeiro.

Resumo

Neto, J. N. A. **Número mínimo de soluções para equação de Yamabe subcrítica modelada em um fibrado riemanniano com fibras mínimas.** 2019. 65 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Neste trabalho, modelamos o Problema de Yamabe em um fibrado riemanniano determinado por uma submersão riemanniana com fibras mínimas. Este modelo consiste de uma equação elíptica subcrítica com os coeficientes adequados ao contexto acima, inspirados pela técnica desenvolvida por Vieri Benci, Claudio Bonanno e Anna Maria Micheletti no artigo *On the multiplicity of solutions of a nonlinear elliptic problem on riemannian manifolds*. Definimos funções usando o conceito de centro de massa riemanniano, de modo que as condições fossem satisfeitas para aplicação da teoria de Lusternik- Schnirelmann garantindo a existência de um número mínimo de soluções para o Problema de Yamabe em um fibrado riemanniano com fibras mínimas.

Palavras-chave: Equações Elípticas, Submersão, multiplicidade.

Abstract

Neto, J. N. A. **Número mínimo de soluções para equação de Yamabe subcrítica modelada em um fibrado riemanniano com fibras mínimas**. 2019. 65 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

In this paper we model the Yamabe Problem in a Riemannian fiber bundle determined by a Riemannian submersion with minimal fibers. This model consists of a subcritical elliptic equation with adequate coefficients to the context above, inspired by the technique developed by Vieri Benci, Claudio Bonanno and Anna Maria Micheletti in the article “On the multiplicity of solutions of a nonlinear elliptic problem on riemannian manifolds”. We define functions using the concept of the riemannian center of mass, so that the conditions are satisfied for the application of Lusternik-Schnirelmann’s theory, ensuring a minimum number of solutions to the Yamabe Problem in such a riemannian fiber bundle.

Keywords: Elliptic equations, Submersion, multiplicity.

Sumário

Introdução	1
1 Geometria Riemanniana	3
1.1 Variedades Diferenciáveis, Espaço Tangente, Aplicações Diferenciáveis	3
1.2 Variedades Riemannianas	7
1.3 Conexão Riemanniana	8
1.4 Geodésica, Vizinhança Normal, Curvaturas	10
1.5 Aplicação Exponencial	11
1.6 Curvaturas	11
1.7 Gradiente, Divergente e Laplaciano	12
1.8 Geometria Conforme	14
1.8.1 Curvatura Riemanniana Conforme	15
1.8.2 Curvatura de Ricci Conforme	16
1.8.3 Curvatura Escalar Conforme	18
2 Os Espaços de Sobolev	19
2.1 O Espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$	19
2.2 O Espaço de Sobolev $W^{1,p}(M)$	22
2.3 As imersões de Sobolev sobre a Variedade M	23
2.4 Um problema Elíptico não linear em variedade riemanniana	24
3 Problema de Yamabe - subcrítico	27
3.1 Problema de Yamabe	27
3.2 Problema de Yamabe Subcrítico	33
4 Número mínimo de soluções para Problema de Yamabe-subcrítico	37
4.1 Centro de Massa Riemanniana	37
4.1.1 A Função Centro de Massa $c_m(r, \eta) : L^1_{r,\eta}(M) \rightarrow M$	40
4.2 Teorema Principal	42
4.2.1 Construção de uma função radial ϕ_ε	44
4.2.2 Demonstração do Teorema Principal	52

Referências Bibliográficas

53

Introdução

A geometria riemaniana surge com a necessidade de generalizar a teoria geométrica desenvolvida para superfícies.

No estudo de superfícies, um resultado clássico de uniformização garante que para uma superfície (M, g) , existe uma função suave $u > 0$ em M e uma métrica $\tilde{g} = u^2 g$ tal que (M, \tilde{g}) possui curvatura gaussiana constante. Dizemos que \tilde{g} é uma métrica conforme (multiplicação de g por uma função positiva). Encontrar métricas conformes é um tema que tem motivado o desenvolvimento da análise geométrica desde o século passado.

D. Hilbert em 1915 [12] prova que uma métrica g sobre uma superfície compacta M é Einstein se e somente se g é ponto crítico do funcional $Y : M \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$Y(g) = \frac{\int_M S_g dv_g}{\text{Vol}_g^{\frac{m-2}{m}}(M)},$$

onde S_g é a curvatura escalar da métrica g , dv_g denota a forma de volume induzida por g , m é a dimensão de M e $\text{Vol}_g(M) = \int_M dv_g$.

Quando Y é restrito a classe conforme $[g]$ da métrica g , decorre que os pontos críticos de Y_g nestas configurações são as métricas conformes a g com curvatura escalar constante.

Em 1960, H. Yamabe [21] formula a seguinte conjectura: “toda variedade Riemaniana compacta (M, g) de dimensão $m \geq 3$, admite uma métrica conforme g com curvatura escalar constante”. Essa conjectura ficou conhecida como Problema de Yamabe, o qual foi completamente resolvido em 1984, com as contribuições de H. Yamabe [21], S. Trudinger [20], T. Aubin [2] e R. Schoen [18].

Consideremos uma variedade riemaniana fechada de dimensão $m \geq 3$. A métrica $\tilde{g} = f^{p_m-2} \cdot g$ conforme a g tem curvatura escalar constante $\mu \in \mathbb{R}$ se e somente se a função positiva f satisfaz a Equação de Yamabe correspondente a g :

$$-a_m \Delta_g f + S_g f = \mu f^{p_m-1},$$

onde $a_m = \frac{4(m-1)}{m-2}$, $p_m = \frac{2m}{m-2}$ é o expoente crítico de Sobolev e S_g denota a curvatura escalar de g .

Considere o funcional Hilbert-Einstein Y_g restrito a classe conforme de g :

$$\begin{aligned} \tilde{g} \in [g] &\Rightarrow \tilde{g} = f^{p_m-2} \cdot g \\ Y(\tilde{g}) &= Y(f^{p_m-2} \cdot g) = Y_g(f) = \frac{E_g(f)}{\|f\|_{p_m}^2}, \end{aligned}$$

onde $E_g(f) = \int_M (a_m \|\nabla f\|^2 + S_g f^2) dv_g$ e $\|f\|_{p_m} = \left(\int_M f^{p_m}\right)^{\frac{1}{p_m}}$. As soluções da equação de Yamabe são os **pontos críticos** do funcional Hilbert-Einstein Y restrito a $[g]$ e dv_g é a forma de volume associada a g .

O funcional Y_g é limitado inferiormente para qualquer métrica g . Além disso o ínfimo é atingido. $\inf(Y_g)$ é chamado constante de Yamabe e denotado por $Y(M, [g])$.

$$Y(M, [g]) = \inf_{f \in C_+^\infty(M)} (Y_g(f)),$$

onde $C_+^\infty(M)$ é o conjunto das funções suave positivas de M .

Quando $Y(M, [g]) \leq 0$ a equação de Yamabe tem uma única solução, a menos de homotetias. Contudo, no caso positivo existem soluções múltiplas, como podemos ver em Obata [15], Schoen [18] e Pollack [17], neste artigo Daniel Pollack mostra que qualquer classe conforme com constante de Yamabe positiva pode ser aproximada na C^0 -topologia por uma classe conforme com um número arbitrariamente grande de métricas, não isométricas, com curvatura escalar constante.

Em 2012 (De Lima, P. Piccione, Zedda) em [8] usando Teoria de Bifurcações obtiveram resultados de multiplicidade de soluções para problema de Yamabe em produto Riemanniano, eles consideraram duas variedades riemannianas compactas sem bordo (M_0, g_0) e (M_1, g_1) definem $M = (M_0 \times M_1, g_\lambda)$, onde $g_\lambda = g_0 \oplus \lambda g_1$, $\lambda \in (0, +\infty)$ é uma família de métricas, provam que existe um conjunto enumerável $\Lambda \subseteq (0, +\infty)$ que se acumula somente em 0 e $+\infty$, tal que:

1. A família (g_λ) é **localmente rígida** em todo ponto de $(0, +\infty) \setminus \Lambda$, isto é, $\forall \bar{\lambda} \in (0, +\infty) \setminus \Lambda$, qualquer métrica de curvatura escalar constante sobre M suficientemente $C^{2,\alpha}$ -próxima à $g_{\bar{\lambda}}$ é homotética à algum elemento da forma $g_{\bar{\lambda}}$.
2. Em cada $\lambda_* \in \Lambda$, a menos de um subconjunto finito, existe um ramo de bifurcação de métricas que não pertencem à família (g_λ) .

Também obtiveram resultados de rigidez e bifurcação quando as curvaturas escalares de g_0 e g_1 não são ambas positivas.

R. Bettiol e P. Piccione também contribuíram muito para o desenvolvimento dessa linha de pesquisa com diversos resultado publicados, veja [5], [6], [7] motivando o trabalho de J. Petean obteve um resultado de multiplicidade em produtos riemannianos usando a teoria de Lusternik-Schnirelmann, ele considerou (M^m, g) e (N^n, h) variedades riemannianas fechadas, de tal forma que $(W^k \cdot g_\delta) = (M \times N, g + \delta h)$ onde $k = m + n$ e $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. Nestas condições, buscou encontrar soluções da equação de Yamabe correspondentes a métrica g_δ no caso é subcrítica ($p_{m+n} < p_n$), além disso ele considerou soluções que dependem de apenas de um dos fatores.

Nesse contexto iniciamos nossa pesquisa, percebemos que seria possível usar o método da variedade de Nehari juntamente com a teoria de Lusternik-Schnirelmann para obter um resultado análogo ao produzido por J. Petean [16], onde ele aplicou o a técnica de Vieri Benci, Claudio Bonanno, e Anna Maria Micheletti [3]. Em síntese nossa pesquisa preenche uma lacuna no que se refere ao Problema de Yamabe, pois obtivemos um resultado de multiplicidade para a equação de Yamabe modela em um fibrado riemanniano com fibras mínimas, tal fibrado é obtido via uma submersão riemanniana, mostramos a existência de outras soluções proximas de uma solução de menor energia. Este trabalho está dividido em quatro capítulos, no capítulos 1 fizemos uma compilação dos resultados preliminares de geometria riemanniana, no capítulo 2 falamos sobre alguns conceitos de espaços de Sobolev, no capítulo 3 falamos sobre o caso subcrítico do problemas de Yamabe e finalmente no capítulo 4 falamos sobre o problema de Yamabe no contexto de fibrados riemanniana e provamos o seguinte resultado de multiplicidade: *Seja (M^m, g_M) uma variedade riemanniana compacta, com $m \geq 3$ e (B^n, g_B) uma variedade riemanniana. Se $\pi : (M^m, g_M) \rightarrow (B^n, g_B)$ é uma submersão riemanniana com fibras mínimas e de curvatura escalar constante positiva, então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existem $Cat(B) + 1$ métricas conformes à $g_M^\varepsilon = g_B + \varepsilon g_F$ com curvatura escalar constante. Onde Cat é a categoria de Lusternik-shnirelmann.*

Capítulo 1

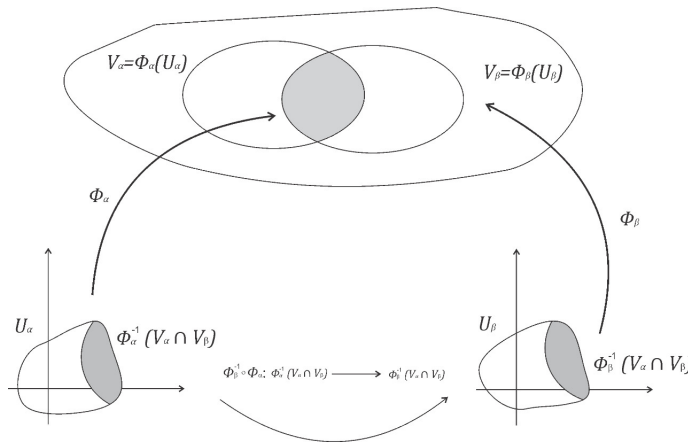
Geometria Riemanniana

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos importantes em geometria riemanniana, definições e propriedades que usaremos no decorrer do texto, não temos o objetivo de demonstrar os resultados clássicos dessa teoria a menos que os mesmos venham a contribuir para a clareza do trabalho de um modo geral. Os resultados seguintes foram baseados em [9] e [14]

1.1 Variedades Diferenciáveis, Espaço Tangente, Aplicações Diferenciáveis

Definição 1.1 Uma variedade diferenciável M , de dimensão m , é um espaço topológico Hausdorff, com base enumerável e uma estrutura diferenciáveis, isto é, uma coleção de cartas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, chamada atlas, onde a aplicação $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, é um homeomorfismo, $U_\alpha \subset \mathbb{R}^m$, para todo α , tal que

1. $M = \cup_\alpha V_\alpha = \cup_\alpha \phi_\alpha(U_\alpha)$,
2. para cada par de cartas $(U_\alpha, \phi_\alpha), (U_\beta, \phi_\beta)$ onde $\phi_\alpha(U_\alpha) \cap \phi_\beta(U_\beta) = V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, as aplicações $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha : \phi_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \phi_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta)$ são diferenciáveis.



Usaremos a notação M^m para denotar um objeto que satisfaz a definição 1.1, o par $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}$ com $p \in \phi_\alpha(U_\alpha)$ é chamado parametrização ou sistema de coordenadas de M^m em p e $\phi_\alpha(U_\alpha)$ chamada vizinhança coordenada de p .

Exemplos 1.2 Os seguintes conjuntos são variedades diferenciáveis: O espaço euclidiano \mathbb{R}^n , o espaço projetivo $P^n(\mathbb{R})$ e a esfera $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$

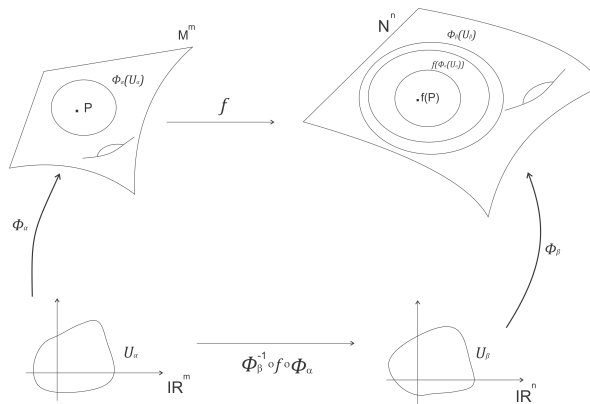
Definição 1.3 O subconjunto $S \subset M^m$ é uma subvariedade, de dimensão n , da variedade M^m , se para todo $p \in S$, existe uma carta (U_α, ϕ_α) de M^m , com $p \in U_\alpha$, tal que $\phi_\alpha(U_\alpha \cap S) = \phi_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbb{R}^n \times \{0\}$.

A definição 1.1 permite estender o conceito de aplicações diferenciáveis em variedades, como aparece a seguinte definição.

Definição 1.4 Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação $f : M^m \rightarrow N^n$ é diferenciável em $p \in M^m$ se dada uma parametrização $\phi_\beta : U_\beta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow N^n$ em $f(p)$ existe uma parametrização $\phi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M^m$ em p tal que $f(\phi_\alpha(U_\alpha)) \subset \phi_\beta(U_\beta)$ e a aplicação é:

$$\phi_\beta^{-1} \circ f \circ \phi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em $\phi_\alpha^{-1}(p)$



Definição 1.5 Seja M^m um variedade diferenciável e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^m$ uma curva diferenciável em M^m . Suponha que $\gamma(0) = p \in M^m$, e seja \mathcal{D} o conjunto das funções diferenciáveis definidas em p . O vetor tangente à curva γ em $t = 0$ é a função $\gamma'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0}, f \in \mathcal{D}$$

$T_p M$ é chamado espaço tangente a M no ponto $p \in M$ e é formado por todos os vetores tangentes a M^m em p . Agora vamos considerar um sistema de coordenadas para uma melhor compreensão dos vetores tangentes em uma variedade. Seja $\phi : U \rightarrow M$ uma carta em $p = \phi(0)$ e $f \in \mathcal{D}$, em

termos desta parametrização

$$\begin{aligned} \gamma'(0)f &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt}f(x_1(t), \dots, x_m(t)) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^m x'_i(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0 \\ &= \left(\sum_{i=1}^m x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) f. \end{aligned}$$

donde obtemos a seguinte expressão para $\gamma'(0)$ no sistema de coordenadas ϕ é

$$\gamma'(0) = \sum_{i=1}^m x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$$

. Observe que $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$ é o vetor tangente em p à curva parametrizada $\gamma(x_i) = \phi(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$, portanto podemos assumir que o conjunto

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)_0 \right\}$$

gera o espaço T_pM .

Proposição 1.6 *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis e seja $f : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável. Para cada ponto $p \in M^m$ e cada vetor $v \in T_pM$, escolha um curva diferenciável $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^m$ com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. A aplicação $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ dada por $df_p(v) = (f \circ \gamma)'(0)$ é linear e não depende da escolha de γ .*

Prova:

Veja Carmo, Manfredo P. do [9]. ■

A aplicação definida anteriormente $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ é chamando diferencial de f em p , o qual é linear e cuja matriz associada as parametrizações $x : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M^m$ e $y : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow N^n$ é dada por $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{n \times m}$.

Definição 1.7 Dizemos que M^m é *orientável* se possui um atlas maximal \mathcal{A} orientado, isto é, o determinante da mudança de coordenadas $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha$ é positivo para quaisquer duas cartas $(U_\alpha, \phi_\alpha), (U_\beta, \phi_\beta)$ deste atlas, em cada ponto de interseção $\phi_\alpha(U_\alpha) \cap \phi_\beta(U_\beta)$.

Definição 1.8 Uma aplicação $f : M^m \rightarrow N^n$ é chamada *difeomorfismo* quando ela é diferenciável, bijetora e sua inversa f^{-1} é diferenciável. Quando $p \in U \subset M^m$ e $f(p) \in V \subset N^n$ se a restrição $f : U \rightarrow V$ é difeomorfismo, dizemos que f é *difeomorfismo local*.

Definição 1.9 Uma aplicação $f : M^m \rightarrow N^n$ é chamada *imersão* quando $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ é injetora para todo $p \in M^m$ e $(m \geq n)$. Além disso, quando f é um homeomorfismo sobre a imagem $f(M^m) \subset N^n$, onde $f(M^m)$ tem a topologia induzida por N^n , f é chamado *mergulho*.

Definição 1.10 Uma aplicação $f : M^m \rightarrow N^n$ é chamada *submersão* quando $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ é sobrejetor para todo $p \in M^m$.

Fato 1.11

- O conjunto $TM = \{(p, v); p \in M^m, v \in T_pM\}$ é uma variedade diferenciável chamada *fibrado tangente de M^m* e tem dimensão $2m$, uma carta para TM é da forma

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^m \rightarrow TM$$

onde

$$\psi_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_m^\alpha, u_1, \dots, u_m) = \left(\phi_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_m^\alpha), \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right)$$

para uma carta (U_α, ϕ_α) que suas coordenadas são indicadas por $(x_1^\alpha, \dots, x_m^\alpha)$, o conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m^\alpha} \right\}$ é uma base associada aos espaços tangentes de $\phi_\alpha(U_\alpha)$.

- Um conjunto $S \subset M^m$ é uma *subvariedade mergulhada* de M^m quando tem a topologia induzida por M^m e a inclusão é um mergulho.
- Dada uma aplicação $f : M^m \rightarrow N^n$, dizemos que ponto $q \in N^n$ é um *valor regular* para f , se df_p é sobrejetora para todo $p \in f^{-1}(q)$.

Teorema 1.12 Seja $f : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável, $n \leq m$ e $q \in N^n$ valor regular de f , então $S = f^{-1}(q)$ é uma subvariedade mergulhada de M , com dimensão $(m - n)$ e $T_pS = \text{Ker}(df)_p$ para todo $p \in S$.

Definição 1.13 Um *campo de vetores diferenciável* X em uma variedade diferenciável M^m é uma aplicação diferenciável $X : M^m \rightarrow TM$ que a cada ponto $p \in M^m$ associa um vetor tangente $X(p) \in T_pM$. Para um sistema de coordenadas $\phi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M^m$ podemos escrever

$$X : M^m \rightarrow TM$$

$$p \mapsto X(p) = \sum_{i=1}^m a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

onde $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^m$ é uma base associada ao sistema de coordenadas x . Donde

$$(Xf)p = \sum_{i=1}^m a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i} = df_p(X)$$

para um função diferenciável $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$.

Denotamos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos diferenciáveis de classe C^∞ em M^m

Proposição 1.14 Sejam X e Y campos de vetores diferenciáveis em uma variedade diferenciável M^m . Então existe um único campo vetorial Z tal que, $Zf = (XY - YX)f$, onde $f \in C^\infty(M)$.

Prova:

Veja página 28 do livro Geometria Riemanniana de Manfredo P. do Carmo [9]. ■

Definição 1.15 O campo vetorial diferenciável Z dado na proposição 1.14 é chamado colchete de Lie dos campos X e Y , notação

$$[X, Y] = XY - YX$$

Proposição 1.16 *Sejam X, Y e Z pertencentes a $\mathfrak{X}(M)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(M)$, então:*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$
2. $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

Prova:

A prova dos itens 1. e 2. decorre diretamente da definição 1.15. Para mostrar o item 3. basta desenvolver a primeira parcela e depois a segunda e terceira parcelas e compará-las.

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z] &= [XY - YX, Z] \\ &= XYZ - YXZ - ZXY + ZYX. \end{aligned}$$

Agora vamos desenvolver as outras duas parcelas,

$$\begin{aligned} [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] &= XYZ - XZY - YZX + ZYX \\ &= YZX - YXZ - ZXY + XZY. \end{aligned}$$

Usando o item 1. concluímos a prova. Para mostra o item 4. basta aplicarmos a definição 1.15

$$\begin{aligned} [fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) \\ &= fgXY + fX(g)Y - gfYX - gY(f)X \\ &= fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X. \end{aligned}$$

■

1.2 Variedades Riemannianas

Definição 1.17 Uma *métrica riemanniana* g em uma variedade diferenciável M^m é uma aplicação $g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, definido em $T_p M \times T_p M$ que varia suavemente com p , tal que, se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ é um sistema de coordenadas em p , $x(x_1, \dots, x_m) = p \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = dx(0, \dots, 1, \dots)$ então

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_m) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_p$$

é uma função diferenciável em U .

Uma variedade diferenciável M^m munida de uma métrica riemanniana g é chamada variedade riemanniana e representada como (M^m, g) e g_{ij} é a expressão local da métrica no sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M^n$.

Exemplos 1.18 *Métrica produto.* Sejam M^m e N^n variedades riemannianas e considere o produto cartesiano $M^m \times N^n$ com estrutura diferenciável produto. Considere as projeções naturais

$$\pi_M : M^m \times N^n \rightarrow M^m$$

$$\pi_N : M^m \times N^n \rightarrow N^n$$

temos uma métrica da seguinte forma

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_M \cdot u, d\pi_M \cdot v \rangle_p + \langle d\pi_N \cdot u, d\pi_N \cdot v \rangle_q$$

para todo $(p, q) \in M^m \times N^n$, $u, v \in T_{(p,q)}M^m \times N^n$.

Podemos agora definir volume de uma variedade riemanniana M^m orientada. Seja $p \in M^m$ e $\phi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M^m$ um sistema de coordenadas em $p \in M^m$ e uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_m\}$ em T_pM ambos com a mesma orientação de M , escrevendo $X_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ na base $\{e_i\}$ teremos $X_i(p) = \sum_{ij} a_{ij}e_j$. Então

$$g_{ik}(p) = \langle X_i, X_j \rangle(p) = \sum_{jl} a_{ij}a_{kl} \langle e_j, e_l \rangle = \sum_j a_{ij}a_{kl}$$

como o $\text{vol}(X_1(p), \dots, X_m(p)) = \text{vol}(e_1, \dots, e_m) \cdot \det(a_{ij}) = \sqrt{\det(g_{ij})}(p)$.

Por conseguinte dado um sistema de coordenadas $\psi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M^m$ em $p \in M^m$ com a mesma orientação de M^m , com $Y_i(p) = \frac{\partial}{\partial y_i}(p)$ e $h_{ij}(p) = \langle X_i, X_j \rangle(p)$

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(g_{ij})}(p) &= \text{vol}(X_1(p), \dots, X_m(p)) \\ &= J \text{vol}(Y_1(p), \dots, Y_m(p)) \\ &= J \sqrt{\det(h_{ij})}(p) \end{aligned}$$

onde $J = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \det(d\psi^{-1} \circ d\phi)(p) > 0$. Para uma região $R \subset \phi(U) \subset M^m$ aberta, conexa com fecho compacto e cuja fronteira de $\phi^{-1}(R)$ tem medida nula em \mathbb{R}^m , temos que

$$\text{vol}(R) = \int_{\phi^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \cdots dx_m$$

1.3 Conexão Riemanniana

Definição 1.19 Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M^m é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz as propriedades abaixo

1. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,
2. $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$,
3. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

4. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$

Diante disto, considere um ponto $p \in M^m$ e um sistema de coordenadas $\phi = (x_1, \dots, x_m)$ em torno de p , sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ podemos escrever

$$X = \sum_i x_i X_i$$

$$Y = \sum_j y_j X_j$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) \\ &= \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i(y_j) X_j. \end{aligned}$$

fazendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, decorre que $\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j + X(y_k) \right) X_k$ donde concluímos que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p)$ e $y_j(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo X

Definição 1.20 Seja M^m uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo X ao longo de uma curva $\gamma : I \rightarrow M^m$ é chamado *paralelo* quando $\frac{DV}{dt} = 0$

Definição 1.21 Seja M^m uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica riemanniana \langle, \rangle . A conexão é chamada *compatível* com a métrica \langle, \rangle , quando para toda curva diferenciável γ e quaisquer pares de campos de vetores paralelos X e Y ao longo de γ , tivermos $\langle X, Y \rangle = c$, uma constante.

Teorema 1.22 Uma conexão afim ∇ em uma variedade riemanniana M^m é compatível com a métrica se e somente se $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

Definição 1.23 Uma conexão ∇ afim em uma variedade riemanniana M^m é chamada *simétrica* quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Considerando um sistema de coordenadas ψ , pela simetria da conexão ∇

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0 \text{ onde } X_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

é equivalente a $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Teorema 1.24 Dada uma variedade riemanniana M^m , existe uma única conexão afim ∇ em M^m satisfazendo as condições:

1. ∇ é simétrica.
2. ∇ é compatível com a métrica riemanniana.

Prova:

Suponhamos que existe uma conexão ∇ , então

1. $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$
2. $Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle$
3. $Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle$

somando as expressões (1) e (2) e subtraindo (3) decorre que

$$\begin{aligned} & X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &= \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle. \end{aligned}$$

portanto

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} \{ X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \} \quad (1.1)$$

$$- \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle. \quad (1.2)$$

mostrar que ∇ está unicamente determinada pela métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Para mostrar a existência da conexão, basta definir como sugerido acima depois mostrar que está bem definida, simétrica e compatível. ■

Considerando um sistema de coordenadas locais, $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ são os coeficientes da conexão ∇ . Se $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ temos:

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\}$$

como g_{km} admite inversa g^{km} , temos

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}$$

1.4 Geodésica, Vizinhança Normal, Curvaturas

Definição 1.25 Seja M^m uma variedade riemanniana munida com sua conexão riemanniana. Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M^m$ é uma geodésica em $t \in I$ se

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$$

Em geometria riemanniana sabemos que dado um ponto $p \in M^m$, existem uma vizinhança V de p em M^m , um número $\varepsilon > 0$ e uma aplicação $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{U} \rightarrow M$, onde $\mathcal{U} = \{(q, w) \in TM; q \in V, w \in T_q M\}$ tal que

$$t \mapsto \gamma(t, q, w)$$

$t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, é a única geodésica de M^m que no instante $t = 0$ passa pelo ponto q com velocidade w , para todo $q \in V$ e cada $w \in T_q M$, com $|w| < \varepsilon$.

1.5 Aplicação Exponencial

Nesse contexto, podemos definir a aplicação exponencial $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$ dada por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right)$$

onde $(q, v) \in \mathcal{U}$ e $\exp(V) = \mathcal{U}$ é chamada *vizinhança normal* em q . Para M^m variedade compacta e TM o fibrado tangente de M .

$$\exp : TM \rightarrow M$$

é de classe C^∞ e existe uma constante $r > 0$ tal que

$$\exp_x|_{B(0,r)} : B(0,r) \rightarrow B_g(x,r)$$

é um difeomorfismo para todo $x \in M$. neste caso dizemos que $\exp(B(0,r)) = B(x,r)$ é a bola normal ou geodésica de centro x e raio r .

Fato 1.26 Considere um atlas em M , onde as cartas são dadas pela aplicação exponencial, $\mathcal{C} := \{(B(q,r), \exp_q^{-1})\}$, para qualquer função $u \in H_g^1(M)$.

$$\int_M |\nabla_g u(x)|^2 d\mu_g := \sum_{B \in \mathcal{C}} \int_B \psi_B(x) |\nabla_g u(x)|^2 d\mu_g \quad (1)$$

onde $\mathcal{P} = \{\psi : M \rightarrow \mathbb{R}\}$ é uma partição da unidade subordinada ao atlas \mathcal{C} . Além disso, se $\text{supp}(u) \subseteq B(x_0, r)$, então

$$\begin{aligned} & \int_{B(x_0, r)} |\nabla_g u(x)|^2 d\mu_g = \\ & \int_{B(0, r)} \left(\sum_{i,j=1}^m g_{x_0}^{ij}(z) \frac{\partial u(\exp_{x_0}(z))}{\partial z_i} \frac{\partial u(\exp_{x_0}(z))}{\partial z_j} \right) |g_{x_0}(z)|^{1/2} dz_1 \dots dz_m \end{aligned}$$

onde g_{x_0} é uma métrica riemanniana em $B(0, r)$, usando as coordenadas normais definidas pela \exp_{x_0} , $g_{x_0}(0) = Id$, $|g_{x_0}(z)| := \det(g_{ij}(z))$, $g^{ij}(z)$ é o inverso de $g_{x_0}(z)$.

Seja r_0 um número positivo tal que para qualquer $r < r_0$ e qualquer $x \in M$ a bola geodésica $B(x, r) \subset (M, g)$ é *fortemente convexa*, isto é, para todo par de pontos $p, p' \in B(x, r)$ existe uma única geodésica minimal, γ , ligando p a p' , totalmente contida em $B(x, r)$, Pela compacidade de M e a positividade da métrica existem constantes positivas $0 < \lambda \leq \Lambda$ tais que

$$\forall x \in M, \forall v \in T_x M, \lambda \|v\|^2 \leq g_x(v, v) \leq \Lambda \|v\|^2 \quad (1.3)$$

implica que $\lambda^m \leq |g_x| \leq \Lambda^m$

1.6 Curvaturas

Definição 1.27 Uma *curvatura* R de uma variedade riemanniana M com conexão ∇ , é uma regra que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação

$$R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

onde $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e ∇ é a conexão riemanniana de M .

Proposição 1.28 (*Primeira Identidade de Bianchi*)

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

Definição 1.29 Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\pi \subset T_p M$, o valor

$$K(x, y) \equiv K(\pi) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}$$

é chamada *curvatura seccional* de π em p , onde x, y é uma base qualquer de π e $|x \wedge y|^2 = |x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2$.

Definição 1.30 Seja $x = z_m \in T_p M$, $|x| = 1$, considere uma base $\{z_1, \dots, z_m\}$ do hiperplano de $T_p M$ ortogonal a x , então

$$\begin{aligned} \text{Ric}(x) &= \sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle \\ S(p) &= \sum_j \text{Ric}(z_j) = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{ij} \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle, \end{aligned}$$

são chamadas respectivamente *Curvatura de Ricci* na direção de x e *Curvatura escalar* em p .

Essas expressões de curvatura independem da escolha da base ortonormal, de fato, considere uma aplicação traço $Q(x, y) = \text{Tr}(z \mapsto R(x, y)y)$ e observe que $\text{Ric}(x) = Q(x, x)$, com relação a curvatura escalar $S(p)$ basta definir como $\langle K(x), y \rangle = Q(x, y)$ onde k é uma aplicação auto-adjunta. Em uma base ortonormal podemos escrever a curvatura escalar como

$$S_g = \sum_{ijk} g^{ik} R_{ijk}^j$$

1.7 Gradiente, Divergente e Laplaciano

Definição 1.31 Seja M uma variedade riemanniana e $f \in C^\infty(M)$, o *gradiente* de f é o campo vetorial em M , denotado ∇f , tal que

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v), \quad p \in M, \quad v \in T_p M.$$

Visto como uma aplicação definida no conjunto $C^\infty(M)$, o gradiente é linear e satisfaz a regra de Leibniz, ou seja, dados $f, g \in C^\infty(M)$ teremos $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$ e $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$. Considere um sistema de coordenadas φ em M e uma função $f \in C^\infty(M)$, podemos escrever gradiente localmente como

$$\nabla f = \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

de fato, suponha que localmente $\nabla f = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, decorre que

$$\left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_i a_i \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_i a_i g_{ij}$$

implica que $a_i = \sum_j g^{jj} \left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_j g^{jj} df \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_j g^{jj} \frac{\partial f}{\partial x_j}$, portanto $\nabla f = \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Conseqüentemente para $u, v \in C^\infty(M)$

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

Definição 1.32 Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, chamamos de *divergente* de X a aplicação $\operatorname{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida da seguinte forma

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{Tr} \left(\begin{array}{ccc} T_p M & \longrightarrow & T_p M \\ v & \longmapsto & (\nabla_v X)(p) \end{array} \right)$$

Decorre que $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$ e $\operatorname{div}(f \cdot X) = f \cdot \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle$, para dois campos quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$.

Considere um sistema de coordenadas φ , e um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, nessa carta $X = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, por definição $\operatorname{div} X(p) = \operatorname{Tr}((\nabla_v X)(p))$ observe que nessas condições temos

$$\begin{aligned} \nabla_v X &= \nabla \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_j \left(a_j \nabla \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_j \left(\sum_k a_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} + \sum_j a_j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

donde concluímos que $\operatorname{div} X = \sum_i \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_j a_j \Gamma_{ij}^i \right)$

Definição 1.33 O *operador de Laplace-Beltrami* é definido como

$$-\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

onde $f \in C^\infty(M)$

Lema 1.34 Nas hipóteses acima, temos que $\Delta f = \frac{-1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{ij} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} \cdot g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$, onde $f \in C^\infty(M)$.

Definição 1.35 (*Submersão Riemanniana*) (M^m, g_M) e (B^n, g_B) variedades riemannianas, $\pi : M \rightarrow B$ uma submersão, M , B e \mathcal{F} são chamados respectivamente de espaço total, base e fibra de π . Pela forma local das submersões $\mathcal{F} = \pi^{-1}(\pi(q))$ é uma subvariedade riemanniana mergulhada de M de dimensão $m - n$ tal que

$$T_q\mathcal{F} = \text{Ker}(d\pi_q) \quad (1.4)$$

$d\pi_q$ é sobrejetiva, sua restrição a $T_q\mathcal{F}^\perp$ induz um isomorfismo

$$(d\pi_q) : T_q\mathcal{F}^\perp \rightarrow T_{\pi(q)}B$$

Um *vetor é vertical* se for tangente a uma fibra e um *campo é vertical* se for inteiramente composto de vetores verticais. Um *vetor é horizontal* se for ortogonal a uma fibra e um *campo é horizontal* se for inteiramente composto de vetores horizontais. Fixado $q \in M$, denotamos por H_q e V_q os conjuntos de vetores tangentes a M em q e respectivamente horizontais, verticais. Segue que H_q e V_q são subespaços vetoriais de T_qM e que vale a decomposição em soma direta ortogonal

$$T_qM = H_q \oplus V_q$$

1.8 Geometria Conforme

Nesta seção vamos reescrever as expressões de conexão riemanniana e curvatura considerando uma métrica conforme a g , que definiremos a seguir, para tanto considere (M^m, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $m \geq 3$ e ψ um sistema de coordenadas.

Definição 1.36 Sejam g e \tilde{g} métricas Riemannianas definidas em M^m . Dizemos que \tilde{g} é *conforme* a g , quando existe uma função $\phi \in C^\infty(M)$ positiva tal que $\tilde{g} = \phi g$. Denotamos $[g]$ a classe conforme de uma métrica g .

Sem perda de generalidade usaremos $\tilde{g} = e^{2f}g$, onde $f \in C^\infty(M)$, como representante da classe $[g]$, localmente $\tilde{g} = \tilde{g}_{ij}dx^i \otimes dx^j = e^{2f}g_{ij}dx^i \otimes dx^j$, portanto $\tilde{g}_{ij} = e^{2f}g_{ij}$ e sua inversa é $\tilde{g}^{ij} = e^{-2f}g^{ij}$.

Seja ∇ a conexão riemanniana em TM associada à métrica g da variedade M^m , seja $\tilde{\nabla}$ a conexão riemanniana associada à métrica conforme $\tilde{g} = e^{2f}g$. Considere $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ campos vetoriais suaves em M^m . Usando a fórmula de Koszul e em seguida a regra de Leibniz temos:

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= X\tilde{g}(Y, Z) + Y\tilde{g}(X, Z) - Z\tilde{g}(Y, X) \\
&\quad - \tilde{g}([X, Y], Z) - \tilde{g}([X, Z], Y) - \tilde{g}([Y, Z], X) \\
&= e^{2f}[2X(f)g(Y, Z) + Xg(Y, Z) + 2Yg(X, Z) + Yg(X, Z) \\
&\quad - 2Z(f)g(X, Y) - Zg(X, Y) - g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X)] \\
&= e^{2f}[2X(f)g(Y, Z) + 2Y(f)g(X, Z) - 2Z(f)g(X, Y)] \\
&\quad + e^{2f}[Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\
&\quad - g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X)] \\
&= e^{2f}[X(f)g(Y, Z) + Y(f)g(X, Z) - Z(f)g(X, Y)] \\
&\quad + e^{2f}[2g(\nabla_X Y, Z)] \\
&\quad \text{(considere } Z(f) = g(\nabla f, Z) \text{ e } \nabla f := \text{grad}_g f) \\
&= 2[X(f)e^{2f}g(Y, Z) + Y(f)e^{2f}g(X, Z) - e^{2f}g(\nabla f, Z)g(X, Y)] \\
&\quad + 2e^{2f}g(\nabla_X Y, Z)
\end{aligned}$$

Decorre que

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= [X(f)\tilde{g}(Y, Z) + Y(f)\tilde{g}(X, Z) - Z(\nabla f, Z)g(X, Y)] + \tilde{g}(\nabla_X Y, Z) \\
&= \tilde{g}(X(f)Y, Z) + \tilde{g}(Y(f)X, Z) - \tilde{g}(g(X, Y)\nabla f, Z) + \tilde{g}(\nabla_X Y, Z) \\
&= \tilde{g}(X(f)Y + Y(f)X - g(X, Y)\nabla f + \nabla_X Y, Z)
\end{aligned}$$

para qualquer campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, Portanto

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - g(X, Y)\nabla f.$$

1.8.1 Curvatura Riemanniana Conforme

Vamos calcular a curvatura riemanniana com respeito à métrica conforme \tilde{g} , por definição

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z,$$

usando o fato demonstrado anteriormente $\tilde{\nabla}_Y Z = \nabla_Y Z + Y(f)Z + Z(f)Y - g(Y, Z)\nabla f$,

Vamos computar cada parcela de $\tilde{R}(X, Y)Z$, assim temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z &= \tilde{\nabla}_X \nabla_Y Z + \tilde{\nabla}_X Y(f)Z + \tilde{\nabla}_X Z(f)Y - \tilde{\nabla}_X g(Y, Z) \nabla f \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z + X(f) \nabla_Y Z + \nabla_Y Z(f)X - g(X, \nabla_Y Z) \nabla f \\
&\quad + XY(f)Z + Y(f) \tilde{\nabla}_X Z + XZ(f)Y + Z(f) \tilde{\nabla}_X Y \\
&\quad - Xg(Y, Z) \nabla f - g(Y, Z) \tilde{\nabla}_X (\nabla f) \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z - X(f) \nabla_Y Z + \nabla_Y Z(f)X - g(X, \nabla_Y Z) \nabla f \\
&\quad + XY(f)Z + Y(f) \nabla_X Z + Y(f)X(f)Z + Y(f)Z(f)X - Y(f)g(X, Z) \nabla f \\
&\quad + XZ(f)Y + Z(f) \nabla_X Y + Z(f)X(f)Y + Z(f)Y(f)X - Z(f)g(X, Y) \nabla f \\
&\quad - Xg(Y, Z) \nabla f - g(Y, Z) [\nabla_X (\nabla f) + X(f) \nabla f + \nabla f(f)X - g(X, \nabla f) \nabla f] \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z - X(f) \nabla_Y Z + \nabla_Y Z(f)X - g(X, \nabla_Y Z) \nabla f \\
&\quad + XY(f)Z + Y(f) \nabla_X Z + Y(f)X(f)Z + Y(f)Z(f)X - Y(f)g(X, Z) \nabla f \\
&\quad + XZ(f)Y + Z(f) \nabla_X Y + Z(f)X(f)Y + Z(f)Y(f)X - Z(f)g(X, Y) \nabla f \\
&\quad - Xg(Y, Z) \nabla f - g(Y, Z) \text{hess}_f(X) - g(Y, Z) \|\nabla f\|^2 X.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - Y(f) \nabla_X Z + \nabla_X Z(f)Y - g(Y, \nabla_X Z) \nabla f \\
&\quad + YX(f)Z + X(f) \nabla_Y Z + X(f)Y(f)Z + X(f)Z(f)Y - X(f)g(Y, Z) \nabla f \\
&\quad + YZ(f)X + Z(f) \nabla_Y X + Z(f)Y(f)X + Z(f)X(f)Y - Z(f)g(Y, X) \nabla f \\
&\quad - Yg(X, Z) \nabla f - g(X, Z) \text{hess}_f(Y) - g(X, Z) \|\nabla f\|^2 Y.
\end{aligned}$$

$$\tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z = \nabla_{[X, Y]} Z + [X, Y](f)Z + Z(f)[X, Y] - g([X, Y], Z) \nabla f,$$

implica em

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z &= \nabla_{[X, Y]} Z + [X, Y](f)Z + Z(f)[X, Y] - g([X, Y], Z) \nabla f \\
&= \nabla_{[X, Y]} Z + X(Y(f))Z - Y(X(f))Z + Z(f) \nabla_X Y - Z(f) \nabla_Y X \\
&\quad - g(\nabla_X Y, Z) \nabla f + g(\nabla_Y X, Z) \nabla f.
\end{aligned}$$

em particular $\nabla_{X, Y}^2 = X(Yf) - (\nabla_X Y)f$, agrupando os termos adequadamente e usando a compatibilidade da métrica com a conexão teremos

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\
&\quad - [\nabla^2 f(Y, Z) - Y(f)Z(f) + g(Y, Z) \|\nabla f\|^2] X \\
&\quad + [\nabla^2 f(X, Z) - X(f)Z(f) + g(X, Z) \|\nabla f\|^2] Y \\
&\quad - g(Y, Z) \text{hess}_f(X) - g(X, Z) \text{hess}_f(Y) \\
&\quad - [Y(f)g(X, Z) - X(f)g(Y, Z)] \nabla f.
\end{aligned}$$

1.8.2 Curvatura de Ricci Conforme

Considere um referencial ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^m$ em TM com respeito à métrica g , podemos definir um referencial ortonormal com respeito a métrica \tilde{g} em TM dado por $\tilde{e}_i = e^{-f} e_i$. A curvatura de

Ricci de M^m para a métrica \tilde{g} é:

$$\begin{aligned}
\text{Ric}_{\tilde{g}}(Y, Z) &= \sum_{i=1}^m \tilde{g}(\tilde{R}(\tilde{e}_i, Y)Z, \tilde{e}_i) \\
&= \sum_{i=1}^m e^{2f} g(\tilde{R}(e^{-f} e_i Y)Z, e^{-f} e_i) \\
&= e^{2f} e^{-2f} \sum_{i=1}^m g(\tilde{R}(e_i, Y)Z, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^m g(\tilde{R}(e_i, Y)Z, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^m g(R(e_i, Y)Z \\
&\quad - [\nabla^2 f(Y, Z) - Y(f)Z(f) + g(Y, Z)\|\nabla f\|^2]e_i \\
&\quad + [\nabla^2 f(e_i, Z) - e_i(f)Z(f) + g(e_i, Z)\|\nabla f\|^2]Y \\
&\quad - g(Y, Z)\text{hess}_f(e_i) - g(e_i, Z)\text{hess}_f(Y) \\
&\quad - [Y(f)g(e_i, Z) - e_i(f)g(Y, Z)]\nabla f)
\end{aligned}$$

Vamos fazer alguns cálculos visando simplificar a expressão do Ricci de \tilde{g} :

$$\sum_i g(\tilde{R}(e_i, Y)Z, e_i) = \text{Ric}_g(Y, Z);$$

$$\sum_i g(g(e_i, Z)\|\nabla f\|^2 Y, e_i) = \sum_i g(e_i, Z)\|\nabla f\|^2 g(Y, e_i) = g(Y, Z)\|\nabla f\|^2.$$

$$\sum_i g(g(Y, Z)\text{hess}_f(e_i), e_i) = \sum_i g(Y, Z)g(\text{hess}_f(e_i), e_i) = g(Y, Z)\text{tr}_g \text{hess}_f = -g(Y, Z)\Delta f;$$

$$\sum_i g(g(e_i, Z)\text{hess}_f(Y), e_i) = \sum_i g(e_i, Z)g(\text{hess}_f(Y), e_i) = g(\text{hess}_f(Y), Z) = \nabla^2 f(Y, Z);$$

$$\sum_i g(Y(f)g(e_i, Z)\nabla f, e_i) = \sum_i Y(f)g(e_i, Z)g(\nabla f, e_i) = Y(f)g(\nabla f, Z) = Y(f)Z(f).$$

$$\begin{aligned}
\sum_i g(\nabla^2 f(e_i, Z)Y, e_i) &= \sum_i \nabla^2 f(e_i, Z)g(Y, e_i) \\
&= \sum_i g(\text{hess}_g f(e_i), Z)g(Y, e_i) \\
&= \sum_i g(\text{hess}_g f(e_i), Z)Y_i \\
&= \sum_i g(\text{hess}_g f(e_i)Y_i, Z) \\
&= g(\text{hess}_f(Y), Z) \\
&= \nabla^2 f(Y, Z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_i g(e_i(f)Z(f)Y, e_i) &= \sum_i e_i(f)Z(f)Yg(Y, e_i) \\
&= \sum_i g(\nabla f, e_i)g(\nabla f, Z)g(Y, e_i) \\
&= g(\nabla f, Y)g(\nabla f, Z) \\
&= Y(f)Z(f);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_i g(e_i(f)g(Y, Z)\nabla f, e_i) &= \sum_i e_i(f)g(Y, Z)g(\nabla f, e_i) \\
&= \sum_i g(\nabla f, e_i)g(Y, Z)g(\nabla f, e_i) \\
&= g(Y, Z)g(\nabla f, \nabla f) \\
&= g(Y, Z)\|\nabla f\|^2
\end{aligned}$$

Portanto, usando as simplificações feitas anteriormente, podemos reescrever o Ricci de \tilde{g}

$$\begin{aligned}
\text{Ric}_{\tilde{g}}(Y, Z) &= \text{Ric}_g(Y, Z) - m\nabla^2 f(Y, Z) + mY(f)Z(f) - mg(Y, Z)\|\nabla f\|^2 \\
&\quad + \nabla^2 f(Y, Z) - Y(f)Z(f) + g(Y, Z)\|\nabla f\|^2 \\
&\quad + g(Y, Z)\Delta f + \nabla^2 f(Y, Z) - Y(f)Z(f) + g(Y, Z)\|\nabla f\|^2 \\
&= \text{Ric}_g(Y, Z) - (m-2)\nabla^2 f(Y, Z) + (m-2)Y(f)Z(f) \\
&\quad - (m-2)g(Y, Z)\|\nabla f\|^2 + g(Y, Z)\Delta f.
\end{aligned}$$

1.8.3 Curvatura Escalar Conforme

A curvatura escalar da métrica \tilde{g} é o traço do tensor de Ricci para \tilde{g} , calculado acima:

$$R_{\tilde{g}} = \sum_i \text{Ric}_{\tilde{g}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i),$$

onde \tilde{e}_i é o referencial ortonormal com respeito à \tilde{g} . Decorre

$$\begin{aligned}
R_{\tilde{g}} &= \sum_i \text{Ric}_{\tilde{g}}(e^{-f}e_i, e^{-f}e_i) \\
&= e^{-2f} \sum_i \text{Ric}_{\tilde{g}}(e_i, e_i) \\
&= e^{-2f} \sum_i [\text{Ric}_g(e_i, e_i) - (m-2)\nabla^2 f(e_i, e_i) + (m-2)e_i(f)e_i(f)] \\
&\quad - (m-2)g(e_i, e_i)\|\nabla f\|^2 + g(e_i, e_i)\Delta f] \\
&= e^{-2f} [R_g + (m-2)\Delta f + (m-2)\|\nabla f\|^2 - (m-2)m\|\nabla f\|^2 + m\Delta f] \\
&= e^{-2f} [R_g + 2(m-1)\Delta f - (m-2)(m-1)\|\nabla f\|^2]
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Os Espaços de Sobolev

2.1 O Espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Sejam M^m uma variedade riemanniana e $\varphi : U \rightarrow M$ um sistema de coordenadas, digamos que $\Omega = x(U)$. Usaremos a notação G para indicar o determinante da matriz $(g_{ij})_m$

Definição 2.1 Seja $u \in L^1(\Omega)$ e $f \in L^1(\Omega)$ será a derivada fraca na direção de x_k de u , denotada por ∂x_k , (no sentido das distribuições) em $\Omega = x(U)$, quando

$$\int_{\Omega} \frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial v}{\partial x_k} dV = - \int_{\Omega} f \frac{u}{\sqrt{G}} dV,$$

para todo $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $\text{supp} v \subset\subset \Omega$ e independe da escolha de parametrização.

Lema 2.2 *Seja $u \in L^1(\Omega)$. Então, u possui derivada ∂x_k fraca em Ω se, e somente se, $u \circ x$ possui derivada fraca $\partial_k(u \circ x)$ em U . Mais ainda, se f é a sua derivada ∂x_k fraca em Ω , então $f \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}$ é a derivada fraca $\partial_k(u \circ x)$ da função $u \circ x$.*

Prova:

Seja $\phi \in C_0^\infty(U)$. Considere $\psi \in C^\infty(\Omega)$ dada por $\psi = \phi \circ x^{-1}$. Temos que $\text{supp} \psi \subset\subset \Omega$, decorre que $(\psi \circ x)(z) = \phi(z)$ consequentemente

$$\partial_k \phi(z) = \partial_k(\psi \circ x)(z) = \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(x(z))$$

para todo $z \in U$. Por definição,

$$\begin{aligned} \int_U (u \circ x) \partial_k \phi(z) dz &= \int_U (u \circ x) \frac{\partial_k(\psi \circ x)}{\sqrt{G \circ x}} \sqrt{G \circ x} dz \\ &= \int_{\Omega} \frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} dV = - \int_{\Omega} \frac{f \psi}{\sqrt{G}} dV \\ &= \int_U (f \circ x) \frac{(\psi \circ x)}{\sqrt{G \circ x}} \sqrt{G \circ x} dz = - \int_U (f \circ x) dz \end{aligned}$$

■

Definição 2.3 Seja $u \in L^1(\Omega)$. Suponha que u possui todas as derivadas ∂x_k fracas em $\Omega = x(U)$, denotadas por $f_k : V \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$. O gradiente fraco de u em $\Omega = x(U)$ é o campo

$$\text{grad}(u) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(p) f_i(p) \frac{\partial}{x_j}, \quad p \in x(U). \quad (2.1)$$

usaremos $\text{grad}(u) = \nabla u$, quando $u \in C^\infty(\Omega)$.

Lema 2.4 Suponha que $u \in L^1(\Omega)$ possui gradiente fraco em Ω . Então para todo $v \in C^\infty(\Omega)$, $\text{supp} v \subset\subset \Omega$, temos

$$\int_{\Omega} \langle \text{grad}(u), \nabla v \rangle dV = - \int_{\Omega} u \Delta v dV.$$

Prova:

por 1.7, temos

$$\langle \text{grad}(u), \nabla v \rangle = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(p) f_i(p) \frac{\partial v}{x_j}, \quad (2.2)$$

onde f_i é a derivada ∂x_i fraca de u .

Utilizando 1.34, juntamente com a definição dos f_k , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \Delta v dV &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[g^{ij} \sqrt{G} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] dV \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{f_i g^{ij}}{\sqrt{G}} \sqrt{G} \frac{\partial v}{\partial x_j} dV \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} f_i g^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} dV \\ &= - \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n g^{ij} f_i \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] dV \\ &= - \int_{\Omega} \langle \text{grad}(u), \nabla v \rangle dV. \end{aligned}$$

Além disso, denotaremos ■

$$\text{grad}(u) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(p) \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad p \in x(U). \quad (2.3)$$

e

$$\langle \text{grad}(u), \text{grad}(u) \rangle = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}. \quad (2.4)$$

Considere o sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \Omega$ com U aberto limitado e tal que é satisfeito 1.3

Definição 2.5 O espaço vetorial $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : |\text{grad}(u)| \in L^p(\Omega)\}$ munido com a norma

$$\|u\|_{W^{1,r}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^r dV + \int_{\Omega} |\text{grad}(u)|^r dV \right)^{\frac{1}{r}}$$

é o espaço de Sobolev $W^{1,p}$ sobre a vizinhança parametrizada Ω . Quando $p = 2$, $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv dV + \int_{\Omega} \langle \text{grad}(u), \text{grad}(v) \rangle dV.$$

decorre de 1.3 e 2.4, que

$$\lambda^p \left(\sum_{i=1}^m |\partial_i(u \circ x)(z)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \leq |\text{grad}(u)|^p(q) \leq \Lambda^p \left(\sum_{i=1}^m |\partial_i(u \circ x)(z)|^2 \right)^{\frac{p}{2}}$$

para todo $z \in U$ e $q = x(z)$. Usando 1.3 implica

$$\lambda^{p+1} \int_U \left[\sum_{i=1}^m |\partial_i(u \circ x)(z)|^2 \right]^{\frac{p}{2}} dz \leq \int_{\Omega} |\text{grad}(u)|^r dV \leq \Lambda^{p+1} \int_U \left[\sum_{i=1}^m |\partial_i(u \circ x)(z)|^2 \right]^{\frac{p}{2}} dz$$

Lema 2.6 A aplicação $\pi : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(U)$, dada por $\pi(u) = u \circ x$ é um isomorfismo. As normas $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ e $\|u\|_{\Omega,1,p} = \|u\|_{W^{1,p}(U)}$ são equivalentes.

Lema 2.7 (Desigualdade de Poincaré) Existe uma constante $C = C_{r,\Omega} > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} |v|^r dV \leq C \int_{\Omega} |\text{grad}(v)|^r dV$$

para todo $v \in W^{1,r}(\Omega)$, com $\text{supp}(v) \subset\subset \Omega$.

O gradiente fraco independe da parametrização escolhida, considere as parametrizações x_{α} e x_{β} tais que $x_{\alpha}(U_{\alpha}) = (\Omega) = x_{\beta}(U_{\beta})$. Suponha que haja dois gradientes fracos para uma função $u \in L^1(\Omega)$, a saber:

$$\text{grad}_{\alpha}(u) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(p) \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) \frac{\partial u}{\partial x_j}, p \in \Omega \quad (2.5)$$

$$\text{grad}_{\beta}(u) = \sum_{k,l=1}^n s^{kl}(p) \frac{\partial u}{\partial y_k}(p) \frac{\partial u}{\partial y_l}, p \in \Omega \quad (2.6)$$

decorre que

$$\begin{aligned} \text{grad}_\alpha(u) &= \sum_{i,j=1}^m \left[\sum_{k,l=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial y_l}(q) s^{lk} \frac{\partial x_j}{\partial y_k}(q) \right] \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) \frac{\partial u}{\partial x_j} \\ &= \sum_{k,l=1}^m s^{lk} \left[\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial y_l}(q) \frac{\partial x_j}{\partial y_k}(q) \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] \\ &= \sum_{k,l=1}^m s^{lk} \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) \frac{\partial x_i}{\partial y_l}(q) \right] \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial x_j}{\partial y_k}(q) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] \end{aligned}$$

donde

$$\text{grad}_\alpha(u) = \sum_{k,l=1}^n s^{lk}(p) \frac{\partial u}{\partial y_k}(p) \frac{\partial}{\partial y_l} = \text{grad}_\beta(u)$$

Lema 2.8 *O gradiente fraco não depende da parametrização escolhida, ou seja, se x_α e x_β são duas parametrizações tais que $x_\alpha(U_\alpha) = (\Omega) = x_\beta(U_\beta)$ então para uma função $u \in L^1(\Omega)$ onde está definida o gradiente fraco $\text{grad}_\alpha(u)$, também existe o gradiente fraco $\text{grad}_\beta(u)$ e deveremos ter*

$$\text{grad}_\alpha(u) = \text{grad}_\beta(u).$$

2.2 O Espaço de Sobolev $W^{1,p}(M)$

Definição 2.9 Seja $u \in L^1(M)$. Suponha que para qualquer vizinhança parametrizada $x_\alpha : U \rightarrow \Omega_\alpha$ o gradiente fraco $\text{grad}_\alpha(u)$ está definido. Então o campo vetorial definido por $\text{grad}(u) = \text{grad}_\alpha(u)$ em Ω_α é chamado de gradiente fraco de u em M .

Pelo lema 2.7, temos a boa definição e além disso a função $u \in L^1(M)$ possui um gradiente fraco. Certamente que $\text{grad}(u) = \nabla u$, quando $u \in C^\infty(M)$. Decorre de modo geral que:

Lema 2.10 *Suponha que $u \in L^1(M)$ possui gradiente fraco em Ω . Então para todo $v \in C^\infty(M)$, temos*

$$\int_M \langle \text{grad}(u), \nabla v \rangle dV = - \int_M u \Delta v dV$$

Definição 2.11 O espaço vetorial $W^{1,p}(M) = \{u \in L^p(M) : |\nabla u| \in L^p(M)\}$ munido com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(M)} = \left(\int_M |u|^p dV + \int_M |\nabla u|^p dV \right)^{\frac{1}{p}}$$

é o espaço de Sobolev $W^{1,p}$ sobre a variedade M . Quando $p = 2$, $H^1(M) = W^{1,2}(M)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1(M)} = \int_M uv dV + \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle dV.$$

2.6:

Lema 2.12 As normas $\|u\|_{W^{1,p}(M)}$ e

$$\|u\|_{1,p}^* = \left[\sum_{n=1}^m \|u\|_{\Omega_{\alpha,1,p}}^p \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{n=1}^m \|u \circ x_{\alpha}\|_{W^{1,p}(U_{\alpha})}^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

são equivalentes em $W^{1,p}(M)$. Aqui, denotamos $\|u\|_{\Omega_{\alpha,1,p}}^p = \|u \circ x_{\alpha}\|_{W^{1,p}(U_{\alpha})}^p$.

Fato 2.13 1. Se $u \in W^{1,p}(M)$, $v \in L^{\infty}(M)$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe $C^1(\mathbb{R})$ tal que $|f'(t)| \leq C$, $\forall t \in \mathbb{R}$, então $v = f \circ u \in W^{1,p}(M)$ e $\nabla v = f'(u)\nabla u$.

2. Se $u \in W^{1,p}(M)$ e $\psi \in C^1(M)$ então $u\psi \in W^{1,p}(M)$ e $\nabla(u\psi) = \psi\nabla u + u\nabla\psi$.

3. Se $u, v \in W^{1,p}(M)$ e $u, v \in L^{\infty}(M)$ então $uv \in W^{1,p}(M)$ e $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$.

2.3 As imersões de Sobolev sobre a Variedade M

Teorema 2.14 (Imersões de Sobolev para variedade compacta) *Seja M uma variedade compacta de dimensão m . Valem as seguintes afirmações:*

i - Se $\frac{1}{s} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{m}$, então $W^{1,p}(M)$ está imerso continuamente em $L^s(M)$;

ii - (Rellich-Kondrachov) A imersão acima é compacta se $\frac{1}{s} > \frac{1}{p} - \frac{1}{m}$.

Fato 2.15 Decorre que existe uma menor constante S_M tal que

$$S_M \left(\int_M |u|^r dV \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_M (|\nabla u|^2 + u^2) dV \quad (2.7)$$

para todo $u \in H^1(M)$. Aqui $2^* = \frac{2m}{m-2}$.

Fato 2.16 Se $u \in W^{1,p}(M) \cap L^{\infty}(M)$, então para cada $s' > 1$, temos $|u|^{s'} \in W^{1,p}(M)$, $\frac{\partial}{\partial x_k}(|u|^{s'}) = s|u|^{s-2}u \frac{\partial}{\partial x_k}$ e conseqüentemente, $\nabla(|u|^{s'}) = s|u|^{s-2}u\nabla u$.

Proposição 2.17 *Sejam $Q \in L^{\frac{m}{2}}(M)$ uma função não negativa e $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory. Se $v \in H^1(M)$ satisfaz em M , no sentido das distribuições, a equação*

$$-\delta v = f(p, v) \quad (2.8)$$

e f verifica, para toda solução fraca u de 2.8,

$$|f(p, u)| \leq (Q(p) + C_0)|u|, \quad (2.9)$$

onde C_0 é uma constante, então $v \in L^r(M)$ para todo $r \in [1, +\infty)$. Mais ainda, existe uma constante positiva $C_p = C(p, C_0, Q)$ tal que

$$\|v\|_{L^{2^*(p+1)}(M)} \leq C_p \|v\|_{L^{2(p+1)}(M)}. \quad (2.10)$$

2.4 Um problema Elíptico não linear em variedade riemanniana

Seja (M, g_M) uma variedade riemanniana compacta, conexa de classe C^∞ , $m = \dim M \geq 3$. Vamos inicialmente observar o seguinte problema elíptico não linear;

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_g u + u = u|u|^{p-2} \\ u > 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

onde Δ_g é o operador de Laplace-Beltrami com $u \in H_{g_M}^1(M)$ onde

$$H_{g_M}^1(M) := \left\{ u : M \rightarrow \mathbb{R} : \int_M (|\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2) d\mu_{g_M} < \infty \right\}$$

e $p = \frac{2m}{m-2}$ é o expoente crítico de Sobolev.

Seja $E_\varepsilon : H^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ o C^2 -funcional definido como

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon^m} \int_M \left(\frac{1}{2} \varepsilon^2 |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{2} |u(x)|^2 - \frac{1}{p} (u^+(x))^p \right) d\mu \quad (2.12)$$

onde $u^+(x) = \max(u(x), 0)$.

Definição 2.18 A variedade de Nehari associada ao funcional E_ε é

$$N(E_\varepsilon) = \left\{ u \in H^1(M) \setminus \{0\} : \int_M (\varepsilon^2 |\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2) d\mu_{g_M} = \int_M (u^+(x))^p, u \neq 0 \right\}$$

os pontos críticos do funcional E_ε em $N(E_\varepsilon)$ são soluções para a equação 2.11.

O mínimo de E_ε é:

$$m(E_\varepsilon) = \min\{E_\varepsilon(u); u \in N(E_\varepsilon)\}$$

O subnível do funcional E_ε é

$$\sum_{m(E_\varepsilon), \delta} = \{u \in N(E_\varepsilon); E_\varepsilon(u) < m(E_\varepsilon) + \delta\}$$

Considere agora o funcional $E : H^1(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$

$$E(v) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{1}{2} |\nabla v(x)|^2 + \frac{1}{2} |v(x)|^2 - \frac{1}{p} (v^+(x))^p \right) dx$$

a variedade de Nehari para E é $N(E)$

$$N(E) = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^m) : \int_{\mathbb{R}^m} (|\nabla v|^2 + |v|^2) dx = \int_{\mathbb{R}^m} (v^+)^p dx, v \neq 0 \right\}$$

Lema 2.19 A variedade de Nehari $N(E)$ é não vazia.

Prova:

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, então para $\lambda = \left(\frac{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{\int_{\Omega} |u|^p dx} \right)^{\frac{1}{p-2}} > 0$, temos que $\lambda u \in N(E)$.

O mínimo é

$$m(E) = \inf\{E(v) : v \in N(E)\} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|U\|_p^p \quad (2.13)$$

Fato 2.20 $m(E) = \inf\{E(v) : v \in N(E)\} > 0$, de fato, como $u \in N(E)$ existe uma constante $\sigma > 0$, tal que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u|^p dx \leq \sigma \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^p$$

Decorre que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq \left(\frac{1}{\sigma}\right), \forall u \in N(E)$$

portanto

$$m \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \left(\frac{1}{\sigma}\right) > 0.$$

Por Gidas, Ni e Nirenberg em [10] existe uma única função positiva radialmente simétrica (em relação a origem) $U \in H^1(\mathbb{R}^m)$ tal que $E(U) = m(E)$, conseqüentemente U satisfaz a equação

$$\begin{cases} -\Delta U + U = U^{p-1} \\ U > 0 \end{cases}$$

uma solução fraca para a equação 2.4 é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} uv|u|^{p-1}$$

por Vieri Benci e Giovanna Cerami em [4] observaram que para $\varepsilon > 0$ podemos definir uma família de soluções $U_{\varepsilon}(x) = U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ satisfazendo a seguinte equação:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta U_{\varepsilon} + U_{\varepsilon} = U_{\varepsilon}^{p_m-1} \\ U_{\varepsilon} > 0 \end{cases}$$

Decorre das contribuições de Gidas, Ni e Nirenberg que a função U é exponencialmente decrescente no infinito, pois $U(|x|)|x|^{\frac{m-1}{2}}e^{|x|} = c_1$ e $U'(|x|)e^{\frac{m-1}{2}|x|} = c_2$ quando $|x| \rightarrow \infty$ com c_1 e c_2 constantes positivas, U_{ε} é um minimizador de E_{ε} restrito a $N(E_{\varepsilon})$ e $m(E) = m(E_{\varepsilon})$

Considere uma sequência minimizante $(u_k)_k \in N(E)$, tal que $u_k(x) \neq 0$ quase sempre em $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Como E é coerciva, $(u_k)_k$ é limitada em $H^1(\Omega)$. Pelas desigualdades de Sobolev temos que a subsequência

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u & \text{em } H_0^1(\Omega) \\ u_k \rightarrow u & \text{em } L^p(\Omega) \\ \text{e} \\ u_k(x) \rightarrow u & \text{quase sempre em } \Omega \end{cases}$$

então $u > 0$ quase sempre, pela semi-continuidade de E temos

$$E(u) \leq \liminf E(u_k) = m(E)$$

temos pelo lema 2.19, que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{\Omega} |u_k|^p dx \rightarrow 0$, pela convergencia forte

$$\int_{\Omega} |u_k| dx \neq 0 \Rightarrow u \neq 0$$

no limite teremos que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \int_{\Omega} |u_k|^p dx$$

Suponhamos que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} < \int_{\Omega} |u_k|^p dx$, considere λ , como no lema 2.19, que implica $\lambda u \in N(E)$ e $0 < \lambda < 1$, então

$$0 < m(E) < E(\lambda u) = \lambda^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \lambda^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \|u_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \lambda^2 m < m$$

uma contradição. portanto temos que existe $u \in N(E)$ positiva, tal que $E(u) = m(E)$

Capítulo 3

Problema de Yamabe - subcrítico

No ano de 1960 o japonês Hidehiko Yamabe, conjecturou que para toda variedade riemanniana compacta de dimensão maior ou igual a 3, sempre existe uma métrica conforme com curvatura escalar constante, foi completamente resolvido em 1984 com contribuições de Yamabe, Trudinger, Aubin e Schoen. Hoje essa conjectura é conhecida como *Problema de Yamabe*.

3.1 Problema de Yamabe

Definição 3.1 Sejam g e \tilde{g} métricas Riemannianas em N^n . Dizemos que \tilde{g} é *conforme* a g , quando existe uma função $\phi \in C^\infty(N)$ positiva tal que $\tilde{g} = \phi g$.

O próximo teorema apresenta um modelo no contexto de equações elípticas para o problema de Yamabe, verificaremos através de alguns cálculos que a curvatura escalar S_g esta relacionada com curvatura escalar da métrica conforme correspondente.

Teorema 3.2 Se g e \tilde{g} são métricas conformes em uma variedade Riemanniana N , onde assumiremos que $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$, onde $u \in C^\infty(N)$, $u > 0$. Então

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} u S_g = \frac{n-2}{4(n-1)} u^{\frac{n+2}{n-2}} S_{\tilde{g}}.$$

é o modelo que relaciona S_g e $S_{\tilde{g}}$.

Prova:

Considere um sistema de coordenadas $x : U \rightarrow N^n$, expressando \tilde{g} nesse sistema, temos $\tilde{g}_{ij} = u^r g_{ij}$ e $\tilde{g}^{ij} = u^{-r} g^{ij}$ onde $r = \frac{4}{n-2}$. Usando a expressão dos símbolos de Christoffel no sistema de coordenadas x e fazendo $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, decorre que

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{ij}^l &= \frac{1}{2} \sum_k (\partial_i \tilde{g}_{jk} + \partial_j \tilde{g}_{ik} - \partial_k \tilde{g}_{ij}) \tilde{g}^{kl} \\
&= \frac{1}{2} \sum_k [\partial_i (u^r g_{jk}) + \partial_j (u^r g_{ik}) - \partial_k (u^r g_{ij})] u^{-r} g^{kl} \\
&= \frac{1}{2} r u^{-1} \sum_k (g_{jk} \partial_i u + g_{ik} \partial_j u - g_{ij} \partial_k u) g^{kl} + \frac{1}{2} \sum_k (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) g^{kl} \\
&= \Gamma_{ij}^l + \frac{1}{2} r u^{-1} \left[\sum_k (g_{kj}^j \partial_i u) + \sum_k (g_{ik} g^{kl} \partial_j u) - \sum_k (g_{ij} g^{kl} \partial_k u) \right] \\
&= \Gamma_{ij}^l + \frac{1}{2} r u^{-1} \left[\delta_{ji} \partial_i u + \delta_{il} \partial_j u - \sum_k (g_{ij} g^{kl} \partial_k u) \right].
\end{aligned}$$

A curvatura escalar $S_{\tilde{g}}$ é dada por

$$S_{\tilde{g}} = \sum_{ijk} \tilde{g}^{ik} \tilde{R}_{ijk}^j,$$

implica

$$S_{\tilde{g}} = \sum_{ijk} u^{-r} g^{ik} \left[\partial_j \tilde{\Gamma}_{jk}^j + \sum_s \tilde{\Gamma}_{ik}^s \tilde{\Gamma}_{js}^j - \sum_s \tilde{\Gamma}_{jk}^s \tilde{\Gamma}_{is}^j \right].$$

Substituindo $\tilde{\Gamma}_{ij}^l$ em $S_{\tilde{g}}$ teremos:

$$u^r S_{\tilde{g}} = \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \left[\Gamma_{ik}^j + \frac{1}{2} r u^{-1} \left(\delta_{kj} \partial_i u + \delta_{ij} \partial_k u - \sum_m g_{ik} g^{mj} \partial_m u \right) \right] + \quad (\text{Y.1})$$

$$- \sum_{ijk} g^{ik} \partial_i \left[\Gamma_{jk}^j + \frac{1}{2} r u^{-1} \left(\delta_{kj} \partial_j u + \delta_{jj} \partial_k u - \sum_m g_{jk} g^{mj} \partial_m u \right) \right] + \quad (\text{Y.2})$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{ijks} g^{ik} \left[\Gamma_{ik}^s + \frac{1}{2} r u^{-1} \left(\delta_{ks} \partial_i u + \delta_{is} \partial_k u - \sum_m g_{ik} g^{ms} \partial_m u \right) \right] \cdot \\
&\cdot \left[\Gamma_{js}^j + \frac{1}{2} r u^{-1} \left(\delta_{sj} \partial_j u + \delta_{jj} \partial_s u - \sum_p g_{js} g^{pj} \partial_p u \right) \right] + \quad (\text{Y.3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \sum_{ijks} g^{ik} \left[\Gamma_{jk}^s + \frac{1}{2} r u^{-1} \left(\delta_{ks} \partial_j u + \delta_{js} \partial_k u - \sum_m g_{jk} g^{ms} \partial_m u \right) \right] \cdot \\
&\cdot \left[\Gamma_{is}^j + \frac{1}{2} r u^{-1} \left(\delta_{sj} \partial_i u + \delta_{ij} \partial_s u - \sum_l g_{is} g^{lj} \partial_l u \right) \right]. \quad (\text{Y.4})
\end{aligned}$$

Vamos agora detalhar cada parcela da expressão $u^r S_{\bar{g}}$ e verificar se é possível relacioná-la com alguma estrutura já conhecida

$$\begin{aligned}
Y.1 &= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \Gamma_{ik}^j + \frac{ru^{-1}}{2} \sum g^{ik} \delta_{kj} \partial_{ji} u + \frac{ru^{-1}}{2} \sum g^{ik} \delta_{ij} \partial_{jk} u + \\
&\quad - \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j (g_{ik} g^{mj} \partial_m u) - \frac{ru^{-2}}{2} \sum_{ijk} g^{ik} \delta_{kj} \partial_j u \partial_i u + \\
&\quad - \frac{ru^{-2}}{2} \sum_{ijk} g^{ik} \delta_{ij} \partial_j u \partial_k u + \frac{ru^{-2}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} g_{ik} \partial_j u \partial_m u \\
&= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \Gamma_{ik}^j + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ki} u + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{jk} g^{jk} \partial_{jk} u + \\
&\quad - \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j (g_{ik} g^{mj} \partial_m u) - \frac{ru^{-2}}{2} \sum_{jk} g^{jk} \partial_j u \partial_k u + \\
&\quad - \frac{ru^{-2}}{2} \sum_{jk} g^{jk} \partial_j u \partial_k u + \frac{nr u^{-2}}{2} \sum_{mj} g^{mj} \partial_j u \partial_m u \\
&= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \Gamma_{ik}^j + ru^{-1} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ki} u - \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j (g_{ik}) g^{mj} \partial_m u + \\
&\quad - \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} g_{ik} \partial_j (g^{mj}) \partial_m u - \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} g_{ik} g^{mj} \partial_{mj} u + \\
&\quad + \frac{(n-2)ru^{-2}}{2} \sum_{jk} g^{jk} \partial_j u \partial_k u \\
&= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \Gamma_{ik}^j + ru^{-1} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ki} u - \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j (g_{ik}) g^{mj} \partial_m u + \\
&\quad - \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{jm} \partial_j (g^{mj}) \partial_m u - \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{jm} g^{mj} \partial_{mj} u + 2u^{-2} \sum_{jk} g^{jk} \partial_j u \partial_k u \\
&= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \Gamma_{ik}^j - 2u^{-1} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ki} u - \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j (g_{ik}) g^{mj} \partial_m u + \\
&\quad + \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{mi} \partial_j (g_{ik}) g^{ik} \partial_m u + 2u^{-2} \sum_{jk} g^{jk} \partial_j u \partial_k u.
\end{aligned}$$

onde $\partial_j(g^{mj}) = -\sum_{ik} g^{mi} \partial_j(g_{ik}) g^{jk}$, agora vamos para a segunda parcela de $u^r S_{\bar{g}}$

$$\begin{aligned}
Y.2 &= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \Gamma_{jk}^j + \sum_{ijk} g^{ik} \partial_i \left[\frac{ru^{-1}}{2} \left(\delta_{kj} \partial_j u + \delta_{jj} \partial_k u - \sum_m g_{jk} g^{mj} \partial_m u \right) \right] \\
&= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \Gamma_{jk}^j + \sum_{ik} g^{ik} \partial_i \left[\sum_j \frac{nr u^{-1}}{2} \left(\delta_{kj} \partial_j u + \delta_{jj} \partial_k u - \sum_m g_{jk} g^{mj} \partial_m u \right) \right] \\
&= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_i \Gamma_{jk}^j + \frac{nr}{2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_i (u^{-1} \partial_k u) \\
&= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_i \Gamma_{jk}^j - \frac{nr u^{-2}}{2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_i u \partial_k u + \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u.
\end{aligned}$$

a terceira parcela de $u^r S_{\bar{g}}$

$$\begin{aligned}
Y.3 &= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s + \Gamma_{js}^j \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \left(\delta_{sj} \partial_j u + \delta_{jj} \partial_s u - \sum_p g_{js} g^{pj} \partial_p u \right) + \\
&\quad + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{js}^j \left(\delta_{ks} \partial_i u + \delta_{is} \partial_k u - \sum_m g_{ik} g^{ms} \partial_m u \right) \\
&\quad + \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijks} g^{ik} \left(\delta_{ks} \partial_i u + \delta_{is} \partial_k u - \sum_m g_{ik} g^{ms} \partial_m u \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(\delta_{sj} \partial_j u + \delta_{jj} \partial_s u - \sum_p g_{js} g^{pj} \partial_p u \right) \\
&= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^j + \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{iks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \partial_s u + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijs} g^{is} \Gamma_{js}^j \partial_i u + \\
&\quad \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{jks} g^{sk} \Gamma_{js}^j \partial_k u - \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{jms} g^{ms} \Gamma_{js}^j \partial_m u + \\
&\quad \frac{nr^2 u^{-2}}{4} \sum_{iks} g^{ik} \delta_{ks} \partial_i u \partial_s u + \frac{nr^2 u^{-2}}{4} \sum_{iks} g^{ik} \delta_{is} \partial_k u \partial_s u + \\
&\quad - \frac{nr^2 u^{-2}}{4} \sum_{iksm} g^{ik} g_{ik} g^{ms} \partial_m u \partial_s u \\
&= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s + \Gamma_{js}^j + \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{iks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \partial_s u + \frac{(2-n)ru^{-1}}{2} \sum_{jks} g^{ks} \Gamma_{js}^j \partial_k u + \\
&\quad + \left(\frac{nr^2 u^{-2}}{2} - \frac{n^2 r^2 u^{-2}}{4} \right) \sum_{ks} g^{ks} \partial_k u \partial_s u \\
&= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^j + \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{iks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \partial_s u + 2u^{-1} \sum_{jks} g^{ks} \Gamma_{js}^j \partial_k u \\
&\quad + \frac{4nu^{-2}}{2-n} \sum_{ks} g^{ks} \partial_k u \partial_s u.
\end{aligned}$$

A última parcela a ser estudada é

$$\begin{aligned}
Y_4 &= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^j + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{jk}^s \left(\delta_{sj} \partial_i u + \delta_{ij} \partial_s u - \sum_l g_{is} g^{lj} \partial_l u \right) + \\
&+ \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{is}^j \left(\delta_{ks} \partial_j u + \delta_{js} \partial_k u - \sum_m g_{jk} g^{ms} \partial_m u \right) + \\
&\frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijks} g^{ik} \left(\delta_{ks} \partial_j u + \delta_{js} \partial_k u - \sum_m g_{jk} g^{ms} \partial_m u \right) \cdot \\
&\cdot \left(\delta_{sj} \partial_i u + \delta_{ij} \partial_s u - \sum_l g_{is} g^{lj} \partial_l u \right) \\
&= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^j + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijs} g^{is} \Gamma_{is}^j \partial_j u + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{iks} g^{ik} \Gamma_{is}^s \partial_k u + \\
&- \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijksl} g^{ik} \Gamma_{jk}^s g_{is} g^{jl} \partial_l u + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijs} g^{is} \Gamma_{is}^j \partial_j u + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{iks} g^{ik} \Gamma_{is}^s \partial_k u + \\
&- \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijksm} g^{ik} \Gamma_{is}^j g_{jk} g^{ms} \partial_m u + \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijks} g^{ik} \delta_{ks} \partial_j u \delta_{sj} \partial_i u \\
&+ \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijks} g^{ik} \delta_{ks} \partial_j u \delta_{ij} \partial_s u - \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijksl} g^{ik} \delta_{ks} \partial_j u g_{is} g^{jl} \partial_l u + \\
&+ \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijks} g^{ik} \delta_{js} \partial_k u \delta_{sj} \partial_i u + \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijks} g^{ik} \delta_{js} \partial_k u \delta_{ij} \partial_s u + \\
&- \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijksl} g^{ik} \delta_{js} \partial_k u g_{is} g^{jl} \partial_l u + \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijksm} g^{ik} g_{jk} g^{ms} \partial_m u \delta_{sj} \partial_i u + \\
&- \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijksm} g^{ik} g_{jk} g^{ms} \partial_m u \delta_{ij} \partial_s u + \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijkml} g^{ik} g_{jk} g^{ms} \partial_m u g_{is} g^{jl} \partial_l u \\
&= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^j + ru^{-1} \sum_{ijk} g^{ik} \Gamma_{ik}^j \partial_j u + \frac{(2-n)r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ik} g^{ik} \partial_k u \partial_i u.
\end{aligned}$$

Ao observar as expressões Y.1, Y.2, Y.3 e Y.4, percebemos que ao somarmos a primeira parcela de cada uma delas obtemos S_g e agora vamos somar os respectivos resultados encontrados

$$\begin{aligned}
u^r S_{\tilde{g}} &= Y.1 + Y.2 + Y.3 + Y.4 \\
&= S_g - 2u^{-1} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u - \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j (g_{ik}) g^{mj} \partial_m u + \\
&\quad + \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{mi} \partial_j (g_{ik}) g^{kj} \partial_m u + 2u^{-2} \sum_{jk} g^{jk} \partial_j u \partial_k u + \\
&\quad + \frac{nr u^{-2}}{2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_i u \partial_k u - \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u + \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{iks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \partial_s u \\
&\quad - 2u^{-1} \sum_{jks} g^{ks} \Gamma_{js}^j \partial_k u + \frac{4nu^{-2}}{2-n} \sum_{ks} g^{ks} \partial_k u \partial_s u - ru^{-1} \sum_{ijk} g^{ik} \Gamma_{ik}^j \partial_j u + \\
&\quad - \frac{4u^{-2}}{2-n} \sum_{ks} g^{ks} \partial_k u \partial_s u.
\end{aligned}$$

decorre que

$$\begin{aligned}
u^{r+1} S_{\tilde{g}} &= u S_g - \frac{4(n-1)}{n-2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u - \frac{r}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j (g_{ik}) g^{mj} \partial_m u + \\
&\quad + \frac{nr}{2} \sum_{ijkm} g^{mi} \partial_j (g_{ik}) g^{kj} \partial_m u + 2 \sum_{ijk} g^{ik} \Gamma_{ik}^j \partial_j u - 2 \sum_{jks} g^{ks} \Gamma_{js}^j \partial_k u.
\end{aligned}$$

Considere a expressão dos símbolos de Christoffel em termos de componentes da métrica

$$\sum_{ijk} g^{ik} \Gamma_{ik}^j \partial_j u - \sum_{jks} g^{ks} \Gamma_{js}^j \partial_k u = \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_l (g_{js}) \partial_k u - \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_s (g_{jl}) \partial_k u.$$

Substituindo a sentença anterior em 4.1, obtemos

$$\begin{aligned}
u^{r+1} S_{\tilde{g}} &= u S_g - \frac{4(n-1)}{n-2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u - \frac{r}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j (g_{ik}) g^{mj} \partial_m u + \\
&\quad + \frac{nr}{2} \sum_{ijkm} g^{mi} \partial_j (g_{ik}) g^{kj} \partial_m u + 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_l (g_{js}) \partial_k u + \\
&\quad - 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_s (g_{jl}) \partial_k u.
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{n-2}{n-1} u^{\frac{n+2}{n-2}} S_{\tilde{g}} &= \frac{n-2}{n-1} u S_g - 4 \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u - 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_s (g_{jl}) \partial_k u + \\
&\quad + 4 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_l (g_{js}) \partial_k u.
\end{aligned}$$

Considere a última parcela do lado direito desta igualdade, podemos reescre-la da seguinte forma

$$4 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_l (g_{js}) \partial_k u = 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_l (g_{js}) \partial_k u + 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_l (g_{js}) \partial_k u.$$

portanto

$$\begin{aligned} \frac{n-2}{n-1} u^{\frac{n+2}{n-2}} S_{\tilde{g}} &= \frac{n-2}{n-1} u S_g - 4 \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u + \\ &+ 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} [\partial_l (g_{js}) + \partial_j (g_{ls}) - \partial_s (g_{jl})] \partial_k u \\ &= \frac{n-2}{n-1} u S_g - 4 \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u + 4 \sum_{jik} g^{jl} \Gamma_{jl}^k \partial_k u \\ &= \frac{n-2}{n-1} u S_g - 4 \sum_{jl} g^{jl} \left(\partial_{jl} u - \sum_k \Gamma_{jl}^k \partial_k u \right). \end{aligned}$$

como

$$\Delta_g u = \sum_{jl} g^{jl} \left(\partial_{jl} u - \sum_k \Gamma_{jl}^k \partial_k u \right).$$

implica

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} u S_g = \frac{n-2}{4(n-1)} u^{\frac{n+2}{n-2}} S_{\tilde{g}}.$$

■

3.2 Problema de Yamabe Subcrítico

Como vimos na seção anterior o Problema de Yamabe subcrítico consiste em determinar soluções para o problema elíptico seguinte

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \mu u^{p-1}$$

onde $2 < p < 2^*$, $\mu \in \mathbb{R}$, vamos considerar o funcional associado ao problema acima $Y : N \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$Y(u) = \int_N |\nabla u|^2 dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_N S_g u^2 dV$$

Além disso $H_p = \{u \in H^1(N); \|u\|_{L^p(N)} = 1\}$ e $\mu_p = \inf_{u \in H_p} (Y_g(u))$

Teorema 3.3 *Seja (N, g) uma variedade riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$. Dado $p \in (2, 2^*)$, então existe uma solução $u = u_r \in C^\infty(N)$ da equação*

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \mu_p u^{p-1}$$

considerando que $\int_N u^p dV_g = 1$.

Prova:

Dado $u \in H_p$

$$\begin{aligned} \left| \int_N S_g u^2 dV \right| &\leq \int_N |S_g| |u|^2 dV \\ &\leq \|S_g\|_{L^\infty(N)} \int_N |u|^2 dV \\ &\leq \|S_g\|_{L^\infty(N)} \|u\|_{L^p(N)}^2 [\lambda(N)]^{2s} \\ &\leq \kappa. \end{aligned}$$

onde $\lambda(N) = \int_N dV$ e $s = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. Decorre que $Y(u) < \infty$ e $\int_N S_g u^2 dV \geq -\kappa$, donde

$$\begin{aligned} Y(u) &= \int_N |\nabla u|^2 dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_N S_g u^2 dV \\ &\geq \frac{n-2}{4(n-1)} \int_N S_g u^2 dV \\ &\geq -\kappa \cdot \frac{n-2}{4(n-1)} \end{aligned}$$

concluimos que μ é finito.

Fato 3.4 Existe $u = u_p \in H_p$, $u \geq 0$, tal que $Y(u) = \mu_p$.

Considere u_k uma sequência minimizante para μ_p , isto é, $(u_i \in H_p, \forall k$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} Y(u_k) = \mu_p)$. Observe que $u_k \geq 0$, uma vez que $u \in H^1(N) \Rightarrow |u| \in H^1(N)$ e $|\nabla|u|| \leq |\nabla u|$, além disso

$$Y(u_k) = \int_N |\nabla|u_k||^2 dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_N S_g |u_k|^2 dV \leq Y(u_k)$$

donde $Y(|U_k|) \rightarrow \mu_p$.

Observe que

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{H^1(N)}^2 &= \|\nabla u_k\|_{L^2(N)}^2 + \|u_k\|_{L^2(N)}^2 \\ &= \int_N |\nabla u_k|^2 dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_N S_g u_k^2 dV + \\ &\quad - \frac{n-2}{4(n-1)} \int_N S_g u_k^2 dV + \|u_k\|_{L^2(N)}^2 \\ &= Y(u_k) - \frac{n-2}{4(n-1)} \int_N S_g u_k^2 dV + \|u_k\|_{L^2(N)}^2 \\ &\leq Y(u_k) + \left(\frac{n-2}{4(n-1)} \|S_g\|_{L^\infty(N)} + 1 \right) \|u_k\|_{L^2(N)}^2. \end{aligned}$$

Para $k \rightarrow \infty$ para que $Y(u_k) = \mu_p + 1$, usando $\|u_k\|_{L^2(N)}^2 \leq \|u_k\|_{L^p(N)}^2 [\lambda(N)]^{2s}$, implica para

alguma constante α que

$$\|u_k\|_{H^1(N)}^2 \leq (\mu_p + 1) + \left(\frac{n-2}{4(n-1)} \|S_g\|_{L^\infty(N)} + 1 \right) \alpha$$

assim sendo u_k é limitada.

Sabendo que u_k é limitado, considere $u \in H^1(N)$ de modo que u_k convirja fracamente para u , por Rellich-Kondrakov existe subsequência u_k (abuso de notação) tal que u_k converge para u na norma $L^p(N)$.

Agora

$$\|u_k\| \leq \liminf \|u_k\|_{H^1(N)}^2 \leq \liminf (\|\nabla u_k\|_{L^2(N)}^2 + \|u_k\|_{L^2(N)}^2)$$

segue

$$\|\nabla u\|_{L^2(N)}^2 + \|u\|_{L^2(N)}^2 \leq \liminf \|\nabla u_k\|_{L^2(N)}^2 + \|u_k\|_{L^2(N)}^2$$

portanto

$$\|\nabla u\|_{L^2(N)}^2 \leq \liminf \|\nabla u_k\|_{L^2(N)}^2$$

Podemos então mostrar que $Y(u) = \mu_p$, de fato

$$\begin{aligned} \mu_p \leq Y(u) &= \int_N |\nabla u|^2 dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_N S_g |u|^2 dV \\ &\leq \liminf \|\nabla u_k\|_{L^2(N)}^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_N S_g |u_k|^2 dV \\ &= \liminf \left(\int_N |\nabla u_k|^2 dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_N S_g |u_k|^2 dV \right) \\ &= \liminf Y(u) = \mu_p. \end{aligned}$$

Pelo teorema dos multiplicadores de Lagrange, existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_N \langle \nabla u, \nabla \xi \rangle dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_N S_g u \xi dV = \rho \int_N u^{p-1} \xi dV$$

fazendo $\xi = u$, teremos $Y(u) = \rho$ e $\rho = \mu_p$ donde concluímos que u é solução fraca para 3.3; para concluirmos que u é positiva devemos aplicar o Princípio do Máximo após verificação das hipóteses.

■

Capítulo 4

Número mínimo de soluções para Problema de Yamabe-subcrítico

4.1 Centro de Massa Riemanaiana

Agora falaremos um pouco sobre a teoria desenvolvida por H. Karcher e K. Grove em [13] e [11]. Seja A um espaço de medida de volume 1 (frequentemente será uma variedade riemanaiana compacta ou um conjunto finito de pontos). Seja M uma variedade riemanaiana completa e $B(m, r)$ um bola fortemente convexa aberta de raio r centrada em m em M . Chamamos qualquer função mensurável $f : A \rightarrow B(m, r)$ uma distribuição de massa em $B(m, r)$.

$$P_f : \bar{B}_r \rightarrow \mathbb{R}, \quad P_f(m) = \frac{1}{2} \int_A d(m, f(a)) da \quad (4.1)$$

Teorema 4.1 $\text{grad}P_f(m) = - \int_A \exp_m^{-1} f(a) da$. Quando $m \in \partial B(m, r)$, $\text{grad}P_f(m)$ é uma média sobre os vetores apontando para fora. P_f tem somente mínimo na bola compacta $\overline{B(m, r)}$.

Se a curvatura seccional de M em $B(m, r)$ é no máximo 0, então ao longo de qualquer geodésica $\gamma : I \rightarrow B(m, r)$,

$$\frac{d^2}{dt^2} P_f(\gamma(t)) \geq \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle. \quad (1.2.2)$$

Se a curvatura seccional de M em $B(m, r)$ é no máximo $\Delta (> 0)$, então (com $S_\Delta(t) = \Delta^{-1/2} \sin(\Delta^{1/2}t)$) ao longo de qualquer geodésica $\gamma : I \rightarrow B(m, r)$

$$\frac{d^2}{dt^2} P_f(\gamma(t)) \geq 2f \cdot \frac{S'\Delta}{S\Delta} (2f) \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle. \quad (1.2.3)$$

Assuma $2f < \frac{1}{2}\pi\Delta^{1/2}$. Neste caso (1.2.2) e (1.2.3) declara que P_f é função convexa de $B(m, r)$.

Prova:

Seja $\gamma : I \rightarrow B(m, r)$ uma geodésica e considere uma família

$$\{c_a(s, t) = \exp_{f(a)}(s \cdot \exp_{f(a)}^{-1} \gamma(t))\}$$

de geodésicas de $f(a)$ para $\gamma(t)$. Denote

$$c'_a = \frac{d}{ds}c_a(s, t) \quad \dot{c}_a = \frac{d}{dt}c_a(s, t)$$

Sabemos que $d(f(a), \gamma(a)) = |c'_a(s, t)|$ independe de s e que $s \mapsto \dot{c}_a(s, t)$ é uma família de campos de Jacobi. Considere as seguinte identidades $\frac{D}{dt}c' = \frac{D}{ds}\dot{c}$, $\frac{D}{ds}c' = 0$, $|c'|$ independe de s , $\frac{d}{ds}\langle \dot{c}, c' \rangle = \langle \frac{D}{ds}\dot{c}, c' \rangle$, $\left(\frac{d}{dt}\right)c_a(0, 1) = 0$, $\frac{d}{dt}(\exp_{f(a)}(s \cdot \exp_{f(a)}^{-1}(\gamma(t))))|_0 = d(\exp_{f(a)})_0(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P_f(\gamma(t)) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_A \langle c'_a(s, t), c'_a(s, t) \rangle da \\ &= \frac{1}{2} \int_A \frac{d}{dt} \langle c'_a(S, t), c'_a(S, t) \rangle da \\ &= \frac{1}{2} \int_A \left\langle \frac{D}{dt}c'_a(S, t), c'_a(S, t) \right\rangle + \left\langle c'_a(S, t), \frac{D}{dt}c'_a(S, t) \right\rangle da \\ &= \frac{1}{2} \int_A 2 \left\langle \frac{D}{dt}c'_a, c'_a \right\rangle da = \int_A \left\langle \frac{D}{dt}c'_a, c'_a \right\rangle da \\ &= \int_A \left\langle \frac{D}{dS}\dot{c}_a, c'_a \right\rangle da \\ &= \int_A \left(\int_0^1 \left\langle \frac{D}{dS}\dot{c}_a, c'_a \right\rangle ds \right) da \\ &= \int_A \int_0^1 \frac{D}{dS} \langle \dot{c}_a, c'_a \rangle da \\ &= \int_A \langle \dot{c}_a, c'_a \rangle|_0^1 da = \int_A \langle \dot{c}_a(1, t), c'_a(1, t) \rangle - \langle \dot{c}_a(0, t), c'_a(1, t) \rangle da \\ &= \int_A \langle \dot{c}_a(1, t), c'_a(1, t) \rangle da \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{c}_a(1, t) &= \frac{d}{dt} c_a(1, t) \\
&= \frac{d}{dt} (\exp_{f(a)}(1 \cdot \exp_{f(a)}^{-1}(\gamma(t)))) \\
&= \frac{d}{dt} (\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t) \\
c'_a(1, t) &= \frac{d}{ds} c(1, t) \\
&= \frac{d}{ds} (\exp_{f(a)}(s \cdot \exp_{f(a)}^{-1}(\gamma(t))))|_{s=1} \\
&= d_s (\exp_{f(a)}(s \cdot \exp_{f(a)}^{-1}(\gamma(t)))) \cdot \exp_{f(a)}^{-1}(\gamma(t)) \\
&= d(\exp_{f(a)})(\exp_{f(a)}^{-1}(\gamma(t)) \exp_{f(a)}^{-1}(\gamma(t))) \\
&= -\exp_{\gamma(t)}^{-1}(f(a))
\end{aligned}$$

Decorre que:

$$\frac{d}{dt} P_f(\gamma(t)) = \int_A \langle \dot{c}_a(1, t), c'_a(1, t) \rangle da$$

$$\frac{d}{dt} P_f(\gamma(t)) = \int_A \langle \dot{\gamma}(t), -\exp_{\gamma(t)}(f(a)) \rangle da$$

$$\text{então } \text{grad}(P_f(\gamma(t))) = - \int_A \exp_{\gamma(t)}(f(a)) da.$$

Observe que $\dot{c}(1, t) = \dot{\gamma}(t)$ e $c'_a(1, t) = -\exp_{\gamma(t)}^{-1}(f(a))$ são vetores tangentes das geodésicas de $f(a)$ para $\gamma(t)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} P_f(\gamma(t)) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} P_f(\gamma(t)) \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\int_A \langle \dot{c}_a(1, t), c'_a(1, t) \rangle da \right) \\
&= \int_A \left\langle \frac{d}{dt} \dot{c}_a(1, t), c'_a(1, t) \right\rangle da + \int_A \left\langle \dot{c}_a(1, t), \frac{d}{dt} c'_a(1, t) \right\rangle da \\
&= \int_A \left\langle \dot{c}_a(1, t), \frac{D}{ds} c'_a(1, t) \right\rangle da
\end{aligned}$$

$$\text{ou } \frac{D}{dt} (\text{grad})(P_f(\gamma(t))) = \int_A \frac{D}{dt} \frac{d}{dt} c_a(1, t) da.$$

Nós denotamos o campo de Jacobi \dot{c}_a ao longo de $s \mapsto c_a(s, t)$ por $J_a(s) = c_a(s, t)$.

$$J(0) = 0, J(1) = \gamma(t), \text{ independe de } a, \text{ e } \left(\frac{D}{ds} \dot{c}_a(1, t) \right) = J'(1).$$

Para a componente normal $(1, \dot{c}_a)$ deste campo de Jacobi, nós temos a cota inferior [13](A5.1) ao longo de geodésicas de comprimento menor ou igual a $2r$.

$$\langle J'(1)^{norm}, J(1) \rangle \geq \langle J(1)^{norm}, J(1) \rangle \cdot 2r \left(\frac{S'\Delta}{S\Delta} \right) (2r)$$

enquanto que para a componente tangencial

$$J'(1)^{tan} = J(1)^{tan}$$

[13](ver A0.3)

Isto prova as relações (1.2.2) e (1.2.3). ■

Definição 4.2 (Centro de Massa) Supondo (1.2.2) e (1.2.3), a função convexa P_f tem um único mínimo em $B(m, r)$. Chamaremos esse ponto de mínimo de centro de massa $cm(f)$ de f .

4.1.1 A Função Centro de Massa $c_m(r, \eta) : L^1_{r, \eta}(M) \rightarrow M$

(M, g) variedade riemanniana fechada, $V \subseteq M$ subconjunto fortemente convexo ($x, y \in V$, existe um único γ segmento geodésico normal ligando x a y , inteiramente contido em V). Uma vez que M é fechado, existe $r_0 > 0$, de modo que para todo $x \in M$ e $r \leq r_0$ a bola geodésica de raio r contida em x , $B(x, r)$ é fortemente convexa.

Seja $u \in L^1(M)$ não negativa. Considere a função contínua $P_u : M \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$x \mapsto P_u(x) = \int_M d(x, y)^2 u(y) dv_g(y)$$

Se r é suficientemente pequeno e o suporte de u está contido em $B(x, r)$, então H. Karcher e K. Grove em [11] e [13] Definiram o centro de massa riemanniano da função u o qual foi chamado centro de massa da medida dado por $u dv_g$, com o único mínimo global da função P_u , como visto na seção anterior. A função P_u é estritamente convexa em uma bola pequena, e o mínimo pode não ser alcançado fora dessa bola. Vamos denotar $L^{1,r}(M)$ espaço de funções $u \in L^1(M)$ com suporte em alguma bola geodésica $B(x, r)$. Note que $c_m : L^{1,r}(M) \rightarrow M$ dada por $u \mapsto P_u$ define uma função contínua $L^1(M) \rightarrow C^0(M)$ com imagem na família de funções com único mínimo, e o mínimo depende continuamente na C^0 -topologia de tais funções.

J. Petean em [16] está interessado em estender o conceito de centro de massa Riemanniano para funções que não são suportadas em bolas pequenas. Isto não é possível em geral, pois P_u em geral tem mais que um mínimo. Contudo J. Petean dá uma boa definição de centro de massa para funções que se concentram em pequenas bolas, vejamos:

Dado $u \in L^1(M)$ e $r > 0$, uma (u, r) -funções concentração é

$$C_{u,r} = \frac{\int_{B(x,r)} |u| dv_g}{\|u\|_1}$$

Observe que $C_{u,r} : M \rightarrow [0, 1]$ é contínua, de fato: se $r \geq \text{diam}(M) \Rightarrow C_{u,r} \equiv 1$ e $\forall x \in M$ temos

$$\lim_{r \rightarrow 0} C_{u,r}(x) = 0.$$

O r -coeficiente de concentração de u é o maximo de $C_{u,r}$

$$C_r(u) = \sup_{x \in M} \frac{\int_{B(x,r)} |u| dv_g}{\|u\|_1}$$

$\forall \mu \in (0, 1)$, seja $L_{r,\mu}^1 := \{u \in L^1(M); c_r(u) > \mu\}$ ($C_{u,r}$, C_r depende de g), iremos fixar g e escrever $L_{r,\mu}^1(M, g) = L_{r,\mu}^1(M)$.

$\forall \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$ considere a função contínua e linear $\varphi_\eta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$t \mapsto \varphi_\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 1 - \eta \\ 1 & \text{se } t \geq \eta \end{cases} \quad \text{é linear e crescente em } [1 - \eta, \eta].$$

Fixe $r < (\frac{1}{2})r_0$ e $\forall u \subseteq L_{r,\eta}^1(M)$ seja

$$\Phi_{r,\eta}(u)(x) := \varphi_\eta(c_{u,r}(x)) \cdot u(x)$$

.

Lema 4.3 $\forall u \in L_{r,\eta}^1(M)$ o suporte de $\Phi_{r,\eta}(u)$ está contido em uma bola geodésica de raio $2r$ (centrada em um ponto de máxima concentração).

Dado $x \in M$; $C_{u,r}$ tem um máximo $C_{u,r}(x) \geq \eta$.

Se $d(x, y) > 2r \Rightarrow B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset \Rightarrow C_{u,r}(y) \leq 1 - \eta$ $C_{u,r} : M \rightarrow [0, 1]$. Portanto

$$\Phi_{r,\eta}(u)(y) = \underbrace{\varphi_\eta(C_{u,r}(y))}_{\leq 1 - \eta} \cdot u(x) = 0$$

e o suporte de $\Phi_{r,\eta}(u)$ está contido em $B(x, 2r)$.

Teorema 4.4 Para qualquer $r < (\frac{1}{2})r_0$ e $\eta > \frac{1}{2}$ existe uma função contínua $c_m(r, \eta) : L_{r,\eta}^1(M) \rightarrow M$ tal que se $x \in M$ verifica $C_{u,r}(x) > \eta$ então $c_m(r, \eta)(u) \in B(x, 2r)$.

Definição 4.5 $c_m(r, \eta) : L_{r,\eta}^1(M) \rightarrow M$ pela prescrição $u \mapsto c_m(r, \eta) = cm(\Phi_{r,\eta}(u))$

$$\begin{aligned} cm(\Phi_{r,\eta}(u))(x) &= cm(\Phi_{r,\eta}(u)(x)) \\ &= cm(\varphi_\eta(C_{u,r}(x)) \cdot u(x)) \\ &= cm(u(x)) \\ &= \text{Min}P_u(x) = \text{Min} \int_M (d(x, y))^2 \cdot u(y) dv_g(y). \end{aligned}$$

Definição 4.6 Qualquer função $c_m(r, \eta)(u)$ como no teorema 4.4 será chamada (r, η) -centro de massa Riemanniano de u .

4.2 Teorema Principal

Nessa seção vamos expor os resultado principal da nossa pesquisa, inicialmente precisamos apresentar alguns resultado necessarios para a demonstração.

Definição 4.7 (Categoria de Lusternik-Schnirelmann): O subconjunto A do espaço topológico X é dito contrátil em X se a inclusão $i : A \hookrightarrow X$ é homotópica a função constante de A para B . A tem (LS)-categoria igual a k em X ($cat(A, X) = k$) se k é a menor quantidade de subconjuntos fechados contrateis de X que cobre A , considere $cat(X) := cat(X, X)$.

Teorema 4.8 *Seja J um C^1 -funcional em uma variedade de Banach completa $C^{1,1}M$. Se J é limitado inferiormente e satisfaz (PS)-condição, então ele tem pelo menos $cat(J^d)$ pontos críticos em J^d , onde $J^d := \{u \in M : J(u) < d\}$. Além disso se M é contrátil e $cat(J^d) > 1$ então existe pelo menos um ponto crítico $u \notin J^d$.*

Teorema 4.9 *Sejam X, Y espaços topológicos. Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ são contínuas e tais que $g \circ f \stackrel{homot}{\cong} Id_X$, então $cat(X) \leq cat(Y)$.*

Teorema 4.10 *Seja (M^m, g_M) uma variedade riemanniana compacta, com $m \geq 3$ e (B^n, g_B) uma variedade riemanniana. Se $\pi : (M^m, g_M) \rightarrow (B^n, g_B)$ é uma submersão riemanniana com fibras mínimas e de curvatura escalar constante positiva, então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existem $cat(B) + 1$ métricas conformes à $g_M^\varepsilon = g_B + \varepsilon g_{\mathcal{F}}$ com curvatura escalar constante.*

Considere $(M^m, g_B + \varepsilon^2 g_{\mathcal{F}})$, onde ambas as métricas g_B e $g_{\mathcal{F}}$ tem curvatura escalar constante, respectivamente S_{g_B} e $S_{g_{\mathcal{F}}}$, em nosso contexto uma métricas conformes a g_M^ε será

$$\tilde{g} = u^{\frac{4}{m-2}} \cdot g_M^\varepsilon$$

onde u satisfaz a $(g_B + \varepsilon^2 g_{\mathcal{F}})$ -Equação de Yamabe no caso subcritico,

$$-a_m \varepsilon + (S_{g_B} + \varepsilon^{-2} S_{g_{\mathcal{F}}})u = u^{p_m - 1} \quad (4.2)$$

para $a_m = \frac{4(m-1)}{m-2}$ e $p_m = \frac{2m}{m-2}$ é o expoente crítico de Sobolev. As funções $u : B \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ que satisfazem a equação 4.2 são consideradas como funções de M , caso contrário a equação 4.2 deixará de ser subcritica, de fato, por hipótese $m > n$ isso implica que $p_m < p_n$.

Dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma que $(S_{g_B} + \varepsilon^{-2} S_{g_{\mathcal{F}}})$ é positivo, podemos reescrever a equação 4.2 da seguinte forma

$$-a_m \Delta_g u + (S_{g_B} + \varepsilon^{-2} S_{\mathcal{F}})u = (\varepsilon^{-2} S_{\mathcal{F}})u^{p_m - 1}$$

Normalizando $g_{\mathcal{F}}$ e supondo que $S_{\mathcal{F}} = a_n$, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$-\varepsilon^{-2} \Delta_g u + ((S_{g_B}/a_m)\varepsilon^2 + 1)u = u^{p_m - 1}$$

Seja $J_\varepsilon : H^1(B) \rightarrow \mathbb{R}$ o C^2 funcional energia associado a equação anterior, definido definido como

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon^m} \int_B \left(\frac{1}{2} \varepsilon^2 \|\nabla u\|^2 + \frac{S_{g_B} \varepsilon^{-2} + a_m}{2a_m} u^2 - \frac{1}{p_m} (u^+)^{p_m} \right) d\mu \quad (4.3)$$

a variedade de Nehari associada ao funcional $J_\varepsilon(u)$ é:

$$N_\varepsilon = \left\{ u \in H^1(B) \setminus \{0\} : \int_B (\varepsilon^2 |\nabla u|^2 + (S_{g_B}/a_m)\varepsilon^2 + 1)u^2 d\mu_{g_B} = \int_B (u^+)^{p_m} \right\}$$

O mínimo de J_ε é definido como

$$\mathbf{m}_\varepsilon = \inf_{u \in N_\varepsilon} J_\varepsilon(u) = \varepsilon^{-m}(1/2 - 1/p_m) \inf_{u \in N_\varepsilon} \int (u^+)^{p_m} d\mu$$

e $\Sigma_{\varepsilon, \mathbf{m}_\varepsilon + \delta} = \{u \in N_\varepsilon; J_\varepsilon(u) < \mathbf{m}_\varepsilon + \delta\}$ é o subnível do funcional J_ε . Provar o teorema 4.10 equivale a mostrar que a $(g_B + \varepsilon g_{\mathcal{F}})$ -Equação de Yamabe tem $\text{cat}(B) + 1$ soluções, pela teoria de Lusternik-Schnirelmann.

Fato 4.11 Kazuo Akutagawa, Luiz Florit e Jimmy Petean em seu trabalho *On Yamabe constants of Riemannian products* de 2006 [1] e Jimmy Petean em [16], estudaram para $\varepsilon > 0$ o comportamento da constante de Yamabe em uma variedade produto. Aplicando o teorema 1.1 de [1] a variedade produto $(N \times M, g + \varepsilon^2 h)$ formada por duas variedades riemanianas fechadas, a saber (N^m, h) de curvatura escalar constante positiva e (M^n, g) . Podemos restringir o $(g + \varepsilon^2 h)$ -funcional de Yamabe as funções que dependam somente de (M, g) . Seja

$$Y_M(N \times M, \varepsilon^2 h + g) = \inf_{u \in H^1(M) \setminus \{0\}} (Y_{\varepsilon^2 h + g}(u))$$

a constante de Yamabe, para a métrica euclidiana g_E em \mathbb{R}^n , Jimmy Petean em [16] mostra que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_M(N \times M, \varepsilon^2 h + g) = Y_{\mathbb{R}^n}(N \times \mathbb{R}^n, h + g_E)$$

para $V = \text{Vol}(N, h)$ então $V^{\frac{-2}{m}} h$ tem volume 1 e $S_{V^{\frac{-2}{n}} h} = V^{\frac{2}{m}} \mathbf{a}$, onde $\mathbf{a} = \frac{4((m+n)-1)}{(m+n)-2}$, $\mathbf{p} = \frac{2(m+n)}{(m+n)-2}$ o expoente crítico de Sobolev. Decorre por [1] teorema 1.4 que:

$$Y_{\mathbb{R}^n}(N \times \mathbb{R}^n, h + g_E) = \mathbf{a} V^{\frac{2}{(m+n)}} ((m+n)(\tilde{\mathbf{m}}(E)))^{\frac{2}{m+n}}$$

onde $\tilde{\mathbf{m}}(E) = \frac{\mathbf{p}-2}{2\mathbf{p}} \|U\|_{\mathbf{p}}^{\mathbf{p}-2}$.

Alem disso quando $u \in H^1(M) - 0$,

$$Y_{\varepsilon^2 h + g}(u) = \text{Vol}(N, \varepsilon^2 h)^{1-\frac{2}{p}} \frac{\int_M \mathbf{a} \|\nabla u\|^2 + (\varepsilon^2 S_h + S_g) u^2 dv_g}{\|u\|_p^2}$$

então segue do teorema 4.11 que:

$$Y_{\mathbb{R}^n}(N \times \mathbb{R}^n, h + g_E) = \text{Vol}_{\varepsilon \rightarrow 0}(N, \varepsilon^2 h)^{\frac{2}{m+n}} \inf_{u \in H^1(M)} \frac{\mathbf{a} \int_M \mathbf{a} \|\nabla u\|^2 + (1 + \varepsilon^2 S_g/\mathbf{a}) u^2 dv_g}{\varepsilon^2 \|u\|_p^2}$$

Como o ínfimo do lado direito é atingido por funções positivas e o quociente é invariante por homotetias, podemos tomar o infimo sobre a variedade de Nehari correspondente, portanto:

$$Y_{\mathbb{R}^n}(N \times \mathbb{R}^n, h + g_E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{a} \varepsilon^{\frac{-2n}{m+n}} V^{\frac{2}{m+n}} \inf_{u \in N_\varepsilon} \left(\int_M u^p \right)^{\frac{p-2}{p}} = \mathbf{a} V^{\frac{2}{(m+n)}} ((m+n)(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{m}_\varepsilon))^{\frac{2}{m+n}}$$

implica que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{m}_\varepsilon = \mathbf{m}(E)$$

de modo análogo a 4.11, ocorre com os funcionais J_ε 4.3 e E 2.12

4.2.1 Construção de uma função radial ϕ_ε

Defina $\varphi_r : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$,

$$\varphi_r(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{r}{2} \\ 0 & \text{se } r \leq t \end{cases}$$

suave e $|\varphi'_r(t)| \leq \frac{2}{r}$, onde r é definido na seção 1.5. Fixado $q \in B$ e $\varepsilon > 0$. Vamos definir em B a seguinte função

$$\mathcal{W}_{q,\varepsilon}(x) := \begin{cases} U_\varepsilon(\exp_q^{-1}(x))\varphi_r(|\exp_q^{-1}(x)|) & \text{se } x \in B_g(q, r) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$U_\varepsilon(z) = U(z/\varepsilon)$ 2.4 é uma função positiva, esfericamente simétrica. Consequentemente $\mathcal{W}_{q,\varepsilon}^+(x) = \mathcal{W}_{q,\varepsilon}(x)$. Além disso o suporte de $\mathcal{W}_{q,\varepsilon} : B \rightarrow \mathbb{R}$ esta contido em $B(q, r)$.

Fato 4.12 Para qualquer função $u \in H_g^1(B)$, $u^+ \not\equiv 0$ ($\int_M u^+ > 0$), existe uma única $\lambda(u) \in \mathbb{R}_+$, tal que $\lambda(u)u \in N_\varepsilon$ onde

$$\lambda^{p_m-2}(u) = \frac{\int_B \varepsilon^2 |\nabla_g u(x)|^2 + (\varepsilon^2(S_g/a_m) + 1)u(x)^2 d\mu_g}{\int_B (u(x)^+)^{p_m} d\mu_g}$$

A função $\mathcal{W}_{q,\varepsilon} \in H_g^1(B)$.

Definição 4.13

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon : B &\rightarrow N_\varepsilon \\ x &\mapsto \phi_\varepsilon(x) := \lambda(\mathcal{W}_{q,\varepsilon})\mathcal{W}_{q,\varepsilon} \end{aligned}$$

.

Teorema 4.14 Para todo $\varepsilon > 0$, a função $\phi_\varepsilon : B \rightarrow N_\varepsilon$ é contínua. Além disso para algum $\delta > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que se $\varepsilon < \varepsilon_0$ então $\phi_\varepsilon(q) \in \sum_{\varepsilon, m(E)+\delta}$ para todo $q \in M$.

Prova:

A prova desse teorema é baseada na proposição 4.2 da referencia [3]. Fixado $\varepsilon > 0$, quando consideramos $\lambda(u)$ como uma função de $u \in H^1(B)$, temos que $\lambda(u)$ é contínua, logo basta mostrar que $\mathcal{W}_{q,\varepsilon}$ é continua, i.e,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{W}_{q_k, \varepsilon} - \mathcal{W}_{q, \varepsilon}\| = 0 \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla \mathcal{W}_{q_k, \varepsilon} - \nabla \mathcal{W}_{q, \varepsilon}\| = 0$$

para qualquer seqüência $(q_k) \subset B$ tal que $q_k \rightarrow q$ quando $k \rightarrow \infty$. Como o suporte de $\mathcal{W}_{q,\varepsilon}$

está contido na bola $B(q, r)$, temos

$$\int_B (\mathcal{W}_{q_k, \varepsilon} - \mathcal{W}_{q, \varepsilon})^2 d\mu = \int_{B(q, r)} (\mathcal{W}_{q_k, \varepsilon} - \mathcal{W}_{q, \varepsilon})^2 d\mu.$$

Considere o conjunto

$$Z_k = [B(q_k, r) \setminus B(q, r)] \cup [B(q, r) \setminus B(q_k, r)]$$

Quando $k \rightarrow \infty$ temos $q_k \rightarrow q$, consequentemente teremos $\mu(Z_k) \rightarrow 0$. então

$$\int_{Z_k} (\mathcal{W}_{q_k, \varepsilon} - \mathcal{W}_{q, \varepsilon})^2 d\mu \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow \infty$.

Agora vamos considerar $\eta_k(z) := \exp_{q_k}^{-1}(\exp_q(z))$ e $A_k := \exp_q^{-1}(B(q, r) \cap B(q_k, r))$, observe que para $k \rightarrow \infty$ temos $\eta_k(z) \rightarrow z$ e $A_k \rightarrow B(0, r)$, ou seja, $Z_k \cup \exp_q(A_k) \rightarrow B(q, r)$, podemos reescrever a integral da seguinte forma

$$\int_{B(q_k, r)} (\mathcal{W}_{q_k, \varepsilon} - \mathcal{W}_{q, \varepsilon})^2 d\mu \rightarrow \int_{Z_k} (\mathcal{W}_{q_k, \varepsilon} - \mathcal{W}_{q, \varepsilon})^2 d\mu + \int_{\exp_q(A_k)} (\mathcal{W}_{q_k, \varepsilon} - \mathcal{W}_{q, \varepsilon})^2 d\mu$$

é suficiente mostrar que

$$\int_{\exp_q(A_k)} (\mathcal{W}_{q_k, \varepsilon}(x) - \mathcal{W}_{q, \varepsilon}(x))^2 d\mu \rightarrow 0$$

para $k \rightarrow \infty$.

Observe que

$$\eta_k(z) = \exp_{q_k}^{-1}(\exp_q(z)) \Rightarrow \eta_k(\exp_q^{-1}(x)) = \exp_{q_k}^{-1}(\exp_q(\exp_q^{-1}(x))) = \exp_{q_k}^{-1}(x)$$

$$\text{e } x = \exp_{q_k}(\eta_k(\exp_q^{-1}(x)))$$

Dai

$$\begin{aligned} & \int_{\exp_q(A_k)} (\mathcal{W}_{q_k, \varepsilon}(x) - \mathcal{W}_{q, \varepsilon}(x))^2 d\mu \\ &= \int_{A_k} (\mathcal{W}_{q_k, \varepsilon}(\exp_{q_k}(\eta_k(\exp_q^{-1}(x)))) - \mathcal{W}_{q, \varepsilon}(x))^2 d\mu \\ &= \int_{A_k} (U_\varepsilon(\exp_{q_k}^{-1}(\exp_{q_k}(\eta_k(\exp_q^{-1}(x)))) \cdot \varphi_r(|\exp_{q_k}^{-1}(\exp_{q_k}(\eta_k(\exp_q^{-1}(x)))|)) \\ &\quad - U_\varepsilon(\exp_q^{-1}(x)) \varphi_r(|\exp_q^{-1}(x)|))^2 d\mu \\ &= \int_{A_k} (U_\varepsilon(\eta_k(z)) \cdot \varphi_r(\eta_k(z)) - U_\varepsilon(z) \cdot \varphi_r(z))^2 |g_q(z)|^{\frac{1}{2}} dz \\ &\leq^i 2 \int_{A_k} (U_\varepsilon(\eta_k(z)) |\varphi_r(\eta_k(z)) - \varphi_r(z)|)^2 |g_q(z)|^{\frac{1}{2}} dz + 2 \int_{A_k} (\varphi_r(z) |U_\varepsilon(\eta_k(z)) - U_\varepsilon(z)|)^2 |g_q(z)|^{\frac{1}{2}} dz \\ &\leq^{ii} K \int_{A_k} |\eta_k(z) - z| |g_q(z)|^{\frac{1}{2}} dz \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Decorre do cálculo acima que $\mathcal{W}_{q, \varepsilon}(x)$ é continua.

A desigualdade (i) é justificada pelo seguinte fato:

$$\begin{aligned}
 & (U_\varepsilon(\eta_k(z)) \cdot \varphi_r(\eta_k(z)) - U_\varepsilon(z) \cdot \varphi_r(z))^2 \\
 &= (U_\varepsilon(\eta_k(z)) \cdot \varphi_r(\eta_k(z)) - U_\varepsilon(\eta_k(z)) \cdot \varphi_r(z) + U_\varepsilon(\eta_k(z)) \cdot \varphi_r(z) - U_\varepsilon(z) \cdot \varphi_r(z))^2 \\
 &= (U_\varepsilon(\eta_k(z))(\varphi_r(\eta_k(z)) - \varphi_r(z)) + \varphi_r(z)(U_\varepsilon(\eta_k(z)) - U_\varepsilon(z)))^2 \\
 &\leq 2(U_\varepsilon(\eta_k(z))|\varphi_r(\eta_k(z)) - \varphi_r(z)|)^2 + 2(\varphi_r(z)|U_\varepsilon(\eta_k(z)) - U_\varepsilon(z)|)^2 \\
 &\text{Na linha acima usamos a seguinte relação; } \|u + v\|^2 \leq 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2
 \end{aligned}$$

A desigualdade (ii) é uma aplicação do teorema do valor médio e a limitação das funções $U_\varepsilon(z)$ e $\varphi_r(z)$, dessa forma aparece a constante $K = K(\varepsilon, r)$, Analogamente teremos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla \mathcal{W}_{q_k, \varepsilon} - \nabla \mathcal{W}_{q, \varepsilon}\| = 0$$

A segunda parte do teorema é mostrar que $\phi_\varepsilon(q) \in \sum_{\varepsilon, m(E) + \delta}$, ou seja, $J_\varepsilon(\phi_\varepsilon(q)) < m(E) + \delta$, para tanto vamos mostrar inicialmente que os três limites abaixo valem uniformemente com respeito a $q \in B$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^n} |\mathcal{W}_{q, \varepsilon}|_2^2 = |U|_2^2, \quad (4.4)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^n} |\nabla \mathcal{W}_{q, \varepsilon}|_2^2 = |\nabla U|_2^2, \quad (4.5)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^n} |\mathcal{W}_{q, \varepsilon}|_{p_m}^{p_m} = |U|_{p_m}^{p_m} \quad (4.6)$$

Fixado $q \in B$, por definição $\mathcal{W}_{q, \varepsilon} \in H^1(B)$, temos

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \int_B |\mathcal{W}_{q, \varepsilon}|^2 d\mu = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(0, r)} U_\varepsilon^2(z) \cdot \varphi_r^2(|z|) \cdot |g_q(z)|^{\frac{1}{2}} dz$$

Vamos estimar a seguinte diferença:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{\varepsilon^n} |\mathcal{W}_{q, \varepsilon}|_2^2 - |U|_2^2 \right| \\
 &= \left| \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(0, r)} U_\varepsilon^2(z) \cdot \varphi_r^2(|z|) \cdot |g_q(z)|^{\frac{1}{2}} dz - \int_{\mathbb{R}^n} U^2 dz \right| \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} U^2(w) \cdot \varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}^2(|w|) \cdot |g_q(\varepsilon w)|^{\frac{1}{2}} dw - \int_{\mathbb{R}^n} U^2 dw \right| \left[w := \frac{z}{\varepsilon} \Rightarrow z = \varepsilon w \text{ e } dw = \frac{dz}{\varepsilon} \right] \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} U^2(w) \left(\varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}^2(|w|) \cdot |g_q(\varepsilon w)|^{\frac{1}{2}} - 1 \right) dw \right| \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} U^2(w) \left| \varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}^2(|w|) \cdot |g_q(\varepsilon w)|^{\frac{1}{2}} - 1 \right| dw \\
 &= \int_{B(0, s)} U^2(w) \left| \varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}^2(|w|) \cdot |g_q(\varepsilon w)|^{\frac{1}{2}} - 1 \right| dw + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, s)} U^2(w) \left| \varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}^2(|w|) \cdot |g_q(\varepsilon w)|^{\frac{1}{2}} - 1 \right| dw
 \end{aligned}$$

Quando $s \rightarrow \infty$ implica que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,s)} U^2(w) \left| \varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}^2(|w|) \cdot |g_q(\varepsilon w)|^{\frac{1}{2}} - 1 \right| dw \rightarrow 0$$

Fixado $s > 0$ suficientemente grande, pela regularidade da \exp vale que $|z| < s$, decorre que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}^2(|w|) \cdot |g_q(\varepsilon w)|^{\frac{1}{2}} - 1 \right| = 0$$

uniformemente com relação a $q \in B$ e $z \in B(0, s)$, de fato, $|\varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}^2(|w|)| \leq 1$ e $|g_q(0)| \leq 1$. Portanto temos a prova da sentença (4.4), a sentença (4.6) decorre de modo análoga.

Vamos provar o limite (4.5) usando os argumentos anteriores

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^n} |\nabla \mathcal{W}_{q,\varepsilon}|_2^2 - |\nabla U|_2^2 \right| \\ &= \left| \int_{B(0,r)} \sum_{i,j=1}^n g_q^{ij}(z) \frac{\partial U_\varepsilon(z) \varphi_r(|z|)}{\partial z_i} \frac{\partial U_\varepsilon(z) \varphi_r(|z|)}{\partial z_j} |g_q(z)|^{1/2} dz - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^n g_q^{ij} \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial U}{\partial z_j} |g_q|^{1/2} dz \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^n g_q^{ij}(\varepsilon w) \frac{\partial U(w) \varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}(|w|)}{\partial w_i} \frac{\partial U(w) \varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}(|w|)}{\partial w_j} |g_q(\varepsilon w)|^{1/2} dw - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^n g_q^{ij} \frac{\partial U}{\partial w_i} \frac{\partial U}{\partial w_j} |g_q|^{1/2} dw \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^n g_q^{ij}(\varepsilon w) \left(\frac{\partial U(w) \varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}(|w|)}{\partial w_i} \frac{\partial U(w) \varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}(|w|)}{\partial w_j} - \frac{\partial U(w)}{\partial w_i} \frac{\partial U(w)}{\partial w_j} \right) |g_q(\varepsilon w)|^{1/2} dw \right| \\ &\leq_{(I_1)} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial U(w)}{\partial w_i} \frac{\partial U(w)}{\partial w_j} |\varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}(|w|) g_q^{ij}(\varepsilon w)| |g_q(\varepsilon w)|^{1/2} - \delta_{ij} \right| dw \\ &+_{(I_2)} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{i,j=1}^n g_q^{ij}(\varepsilon w) \left| U(w) \varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}(|w|) \left(\frac{\partial U(w)}{\partial w_i} \frac{\partial \varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}(|w|)}{\partial w_j} + \frac{\partial U(w)}{\partial w_j} \frac{\partial \varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}(|w|)}{\partial w_i} \right) \right| \right| |g_q(\varepsilon w)|^{1/2} dw \\ &+_{(I_3)} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{i,j=1}^n g_q^{ij}(\varepsilon w) \left| U^2(w) \frac{\partial \varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}(|w|)}{\partial w_i} \frac{\partial \varphi_{\frac{r}{\varepsilon}}(|w|)}{\partial w_j} \right| \right| |g_q(\varepsilon w)|^{1/2} dw \end{aligned}$$

considere as integrais I_1 , I_2 e I_3 , pela definição da função $\varphi_r(z)$, temos que $|\varphi_r(|z|)| \leq 1$ e $|\varphi_r'(|z|)| \leq \frac{2}{r}$, nós temos que existe uma constante $\mathcal{C} > 0$ dependendo somente da variedade B tal que;

$$I_2 + I_3 \leq \frac{4n\mathcal{C}\varepsilon}{r} \int_{\mathbb{R}^n} \left(U(w) |\nabla U(w)| + \frac{\varepsilon}{r} U^2(z) \right) dz$$

logo $I_2 + I_3 \rightarrow 0$ uniformemente em $q \in B$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, pela limitação de U , a integral I_1 converge para 0 de maneira analoga a aos limites (4.4) e (4.6). Como $\phi_\varepsilon(q) \in N_\varepsilon$, temos

$$J_\varepsilon(\phi_\varepsilon(q)) = J_\varepsilon(\lambda(\mathcal{W}_{q,\varepsilon}) \mathcal{W}_{q,\varepsilon}) = \frac{1}{\varepsilon^m} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_m} \right) [\lambda(\mathcal{W}_{q,\varepsilon})]^{p_m} |\mathcal{W}_{q,\varepsilon}|_{p_m}^{p_m}$$

além disso pela definição de $\lambda(\mathcal{W}_{q,\varepsilon})\mathcal{W}_{q,\varepsilon}$ e pelo limites (4.4),(4.5) e (4.6), temos;

$$\lambda(\mathcal{W}_{q,\varepsilon}) \rightarrow 1 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0$$

decorre que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\lambda(\mathcal{W}_{q,\varepsilon})\mathcal{W}_{q,\varepsilon}) = E(U) = m(E)$$

portanto $\phi_\varepsilon(q) \in \sum_{\varepsilon, m(E)+\delta}$ ■

Considere uma partição finita $\mathcal{P}_\varepsilon = \{P_j^\varepsilon\}_{j \in \Lambda}$ para B .

Definição 4.15 (Partição boa) Dado um $\varepsilon > 0$ dizemos que uma partição $\mathcal{P}_\varepsilon = \{P_j^\varepsilon\}_{j \in \Lambda}$, com Λ finito, de uma variedade B é partição boa se:

1. Para todo $j \in \Lambda$ o conjunto P_j^ε é fechado;
2. $P_j^\varepsilon \cap P_i^\varepsilon \subseteq \partial P_j^\varepsilon \cap \partial P_i^\varepsilon$ para todo $i \neq j$;
3. Existe $\varepsilon > 0$ tais que existem pontos $q_j^\varepsilon \in P_j^\varepsilon$ para todo j , satisfazendo $B(q_j^\varepsilon, \varepsilon) \subseteq P_j^\varepsilon \subseteq B(q_j^\varepsilon, s_2(\varepsilon)) \subseteq B(q_j^\varepsilon, s_1(\varepsilon))$;
4. Todo ponto $x \in B$ está contido em no máximo N bolas $B(q_j^\varepsilon, s_1(\varepsilon))$, onde N não depende de ε ;
5. Os números s_1, s_2 podem ser escolhidos de modo que $s_1 \geq s_2 \geq (1 + 1/K)\varepsilon$, onde K não depende de ε .

Iremos supor que ε_0 do teorema 4.14 é suficientemente pequeno de forma que a variedade B tenha uma partição boa.

Teorema 4.16 *Existe uma constante $\gamma > 0$ tal que para qualquer $\delta > 0$ fixado e qualquer $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0(\delta))$, onde $\varepsilon_0(\delta)$ é como em 4.14, considere uma partição boa $\mathcal{P}_\varepsilon = \{P_j^\varepsilon\}_{j \in \Lambda}$ da variedade B e uma função $u \in \sum_{\varepsilon, m(E)+\delta}$, então existe um conjunto $\tilde{P}_j^\varepsilon \in \mathcal{P}_\varepsilon$ tal que*

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\tilde{P}_j^\varepsilon} |u^+|^p d\mu \geq \gamma$$

Prova:

Fixado $\delta > 0$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\delta)$. Para qualquer função $u \in N_\varepsilon$ e qualquer partição boa $\mathcal{P}_\varepsilon = \{P_j^\varepsilon\}_{j \in \Lambda}$, denotamos u_j^+ como sendo a restrição de u^+ ao conjunto P_j^ε . Como $u \in N_\varepsilon$, decorre que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_B (\varepsilon^2 |\nabla u|^2 + \left(\frac{S_{g_B}}{a_m} \varepsilon^2 + 1 \right) u^2) d\mu_{g_B} &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_B (u^+)^{p_m} d\mu_{g_B} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \sum_j \int_{P_j^\varepsilon} (u^+)^{p_m} d\mu_{g_B} \\ &= \sum_j \frac{|u_j^+|_{p_m}^{p_m-2}}{\varepsilon^{\frac{n(p_m-2)}{p_m}}} \cdot \frac{|u_j^+|_{p_m}^2}{\varepsilon^{\frac{2n}{p_m}}} \\ &\leq \max_j \left\{ \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n(p_m-2)}{p_m}}} \cdot |u_j^+|_{p_m}^{p_m-2} \right\} \sum_j \frac{1}{\varepsilon^{\frac{2n}{p_m}}} \cdot |u_j^+|_{p_m}^2 \end{aligned}$$

Agora vamos definir uma função cut-off

$$\chi_\varepsilon(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } t \leq s_2(\varepsilon) \\ 0 & \text{se } t > s_1(\varepsilon) \end{cases}$$

onde $s_1(\varepsilon), s_2(\varepsilon)$ são definidas junto com a partição boa, vamos supor também que $|\chi'_\varepsilon| \leq \frac{K}{\varepsilon}$. Defina agora

$$\tilde{u}_j(x) = u^+(x) \chi_\varepsilon(|x - q_j^\varepsilon|)$$

onde $\tilde{u}_j(x) \in H^1(B)$

Agora vamos estimar

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\varepsilon^{pm}} \cdot |u_j^+|_{p_m}^2 &\leq \frac{1}{\varepsilon^{pm}} \cdot |\tilde{u}_j|_{p_m}^2 && (P_j^\varepsilon \subseteq B(q_j^\varepsilon, s_2(\varepsilon))) \\
 &\leq C ||| \tilde{u}_j |||_\varepsilon^2 && (\text{usando a desigualdade de Sobolev}) \\
 &= C ||| \tilde{u}_j |_{P_j^\varepsilon} |||_\varepsilon^2 + C ||| \tilde{u}_j |_{B(q_j^\varepsilon, s_1(\varepsilon)) \setminus P_j^\varepsilon} |||_\varepsilon^2 \\
 &= C ||| u_j^+ |_{P_j^\varepsilon} |||_\varepsilon^2 + C ||| \tilde{u}_j |_{B(q_j^\varepsilon, s_1(\varepsilon)) \setminus P_j^\varepsilon} |||_\varepsilon^2
 \end{aligned}$$

onde C é a constante da desigualdade de Sobolev e

$$||| u |||_\varepsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_B (\varepsilon^2 |\nabla u|^2 + \left(\frac{S_{g_B}}{a_m} \varepsilon^2 + 1 \right) |u|^2) d\mu$$

Decorre que

$$\begin{aligned}
 &C ||| \tilde{u}_j |_{B(q_j^\varepsilon, s_1(\varepsilon)) \setminus P_j^\varepsilon} |||_\varepsilon^2 = \\
 &= C \cdot \frac{1}{\varepsilon^n} \left(\int_{B(q_j^\varepsilon, s_1(\varepsilon)) \setminus P_j^\varepsilon} \varepsilon^2 |\nabla \tilde{u}_j|^2 d\mu + \left(\frac{S_{g_B}}{a_m} \varepsilon^2 + 1 \right) \int_{B(q_j^\varepsilon, s_1(\varepsilon)) \setminus P_j^\varepsilon} |\tilde{u}_j|^2 d\mu \right) \\
 &\leq C \cdot \frac{1}{\varepsilon^n} \left(\int_{B(q_j^\varepsilon, s_1(\varepsilon)) \setminus P_j^\varepsilon} (\varepsilon^2 |\nabla u^+|^2 + K^2 |u^+|^2) d\mu + \left(\frac{S_{g_B}}{a_m} \varepsilon^2 + 1 \right) \int_{B(q_j^\varepsilon, s_1(\varepsilon)) \setminus P_j^\varepsilon} |u^+|^2 d\mu \right) \\
 &\quad \text{usamos o fato de que } u_j \leq u^+
 \end{aligned}$$

Decorre da observação anterior que

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\varepsilon^{pm}} \cdot |u_j^+|_{p_m}^2 \\
 &= C ||| u_j^+ |||_\varepsilon^2 + C \cdot \frac{1}{\varepsilon^n} \left(\int_{B(q_j^\varepsilon, s_1(\varepsilon)) \setminus P_j^\varepsilon} (\varepsilon^2 |\nabla u^+|^2 + K^2 |u^+|^2) d\mu + \left(\frac{S_{g_B}}{a_m} \varepsilon^2 + 1 \right) \int_{B(q_j^\varepsilon, s_1(\varepsilon)) \setminus P_j^\varepsilon} |u^+|^2 d\mu \right) \\
 &= C ||| u_j^+ |||_\varepsilon^2 + C \cdot \frac{1}{\varepsilon^n} \left(\int_{B(q_j^\varepsilon, s_1(\varepsilon)) \setminus P_j^\varepsilon} \left(\varepsilon^2 |\nabla u^+|^2 + (K^2 + 1) \left(\frac{S_{g_B}}{a_m} \varepsilon^2 + 1 \right) |u^+|^2 \right) d\mu \right) \\
 &= C ||| u_j^+ |||_\varepsilon^2 + C(K^2 + 1) ||| u^+ |||_\varepsilon^2
 \end{aligned}$$

Aplicando o samatório em j , temos

$$\begin{aligned}
 \sum_j \frac{1}{\varepsilon^{pm}} \cdot |u_j^+|_{p_m}^2 &\leq \sum_j C ||| u_j^+ |||_\varepsilon^2 + C(K^2 + 1) N ||| u^+ |||_\varepsilon^2 \\
 &\leq C(K^2 + 2) N \cdot \frac{1}{\varepsilon^n} \int_B (\varepsilon^2 |\nabla u|^2 + \left(\frac{S_{g_B}}{a_m} \varepsilon^2 + 1 \right) |u|^2) d\mu
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon^n} \int_B (\varepsilon^2 |\nabla u|^2 + \left(\frac{S_{g_B}}{a_m} \varepsilon^2 + 1 \right) u^2) d\mu \leq \\
& \leq \max_j \left\{ \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n(p_m-2)}{p_m}}} \cdot |u_j^+|_{p_m}^{p_m-2} \right\} \sum_j \frac{1}{\varepsilon^{p_m}} \cdot |u_j^+|_{p_m}^2 \\
& \leq \max_j \left\{ \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n(p_m-2)}{p_m}}} \right\} \cdot C(K^2 + 2)N \cdot \frac{1}{\varepsilon^n} \int_B (\varepsilon^2 |\nabla u|^2 + \left(\frac{S_{g_B}}{a_m} \varepsilon^2 + 1 \right) |u|^2) d\mu
\end{aligned}$$

Podemos concluir que

$$\max_j \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon^n} \int_{p_j^\varepsilon} |u^+|_m^p \right)^{\frac{p_m-2}{p_m}} \right\} \geq \frac{\overbrace{1}^\gamma}{C(K^2 + 2)N}$$

■

Teorema 4.17 *Fixe $r < r_0$, para $\eta < 1$ existem $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tais que para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\delta \in (0, \delta_0)$ e $u \in \sum_{\varepsilon, m_\varepsilon + \delta}$, existe $x \in B$ tal que*

$$\int_{B(x,r)} (u^+)^p \geq \eta \int_B (u^+)^p$$

Prova:

Suponhamos que o teorema seja falso, portanto existem $\eta < 1$ e uma sequencia de números positivos (ε_k) e (δ_k) tal que $\varepsilon_k \rightarrow 0$ e $\delta_k \rightarrow 0$ e $u_k \in \sum_{\varepsilon_k, m_{\varepsilon_k} + \delta_k}$ de forma que

$$\int_{B(x,r)} (u^+)^p < \int_B (u_k^+)^p$$

para k suficientemente grande, existe $x_k \in B$ para $\gamma > 0$ fixado, decorre que

$$\frac{1}{\varepsilon_k^n} \int_{B(x_k, 2\varepsilon_k)} (u_k^+)^p \geq \gamma$$

o lema 3.4 de [16] fornece uma função $\tilde{u}_k = u_{k_j} + u_{k_i}$ tal que $\tilde{u}_k \in \sum_{\varepsilon_k, m_{\varepsilon_k} + 2\delta_k}$, onde u_{k_j} tem suporte em uma bola centrada em x_k e $\text{supp} u_{k_j} \cap \text{supp} u_{k_i} = \emptyset$, com $u_j = \tilde{u}_k$ em $B_{\varepsilon_k}(x_k)$ e fora de $B_r(x_k)$.

$$\frac{1}{\varepsilon_k^n} \int_B (u_{k_j}^+)^p \geq \gamma$$

além disso

$$\frac{1}{\varepsilon_k^n} \int_B (u_{k_i}^+)^p \geq \frac{1}{\varepsilon_k^n} (1 - \eta) \geq \int_B (u_k^+)^p \geq (1 - \eta) \frac{2p}{p-2} m_\varepsilon$$

Pelo corolário 3.3 de [16] exists $\delta_1 > 0$ que não depende de k e uma constante ρ que depende de δ_1 portando $J_{\varepsilon_k}(\tilde{u}_k) \geq \rho(\delta_1) \cdot m_\varepsilon$, contudo para um k arbitrariamente grande teremos $J_{\varepsilon_k}(\tilde{u}_k) <$

$m_\varepsilon + 2\delta < \rho(\delta_1)m_\varepsilon$. Contradição e portanto o teorema é verdadeiro. ■

4.2.2 Demonstração do Teorema Principal

Prova:

Demonstração do Resultado Principal-Teorema 3.1 Fixados os valores $r < (1/2)r_0$ e η próximo de 1, considere ε_0, δ_0 como nas hipóteses dos Teorema 4.17. Teorema 4.14 garante a continuidade da função $\phi_\varepsilon : B \rightarrow N_\varepsilon$. Para $\varepsilon < \varepsilon_0$ o Teorema 4.17 mostra que se $u \in \sum_{\varepsilon, m_\varepsilon + \delta}$ teremos que $(u^+)^p \in L^1_{r, \eta}(B)$, Agora observe a função contínua $\psi_\varepsilon := c_m(r, \eta) : L^1_{r, \eta}(B) \rightarrow B$, por construção o suporte de ψ_ε está contido na bola geodésica $B(x, 2r)$, para $2r < r_0$, dessa forma teremos que

$$\psi_\varepsilon \circ \phi_\varepsilon(x) \in B(x, 2r)$$

além disso podemos definir uma homotopia entre $\psi_\varepsilon \circ \phi_\varepsilon : B \rightarrow B$ e Id_B , pela unicidade da geodésica minimizante que liga $(\psi_\varepsilon \circ \phi_\varepsilon)(x)$ a x . Pelo Teorema 4.9 teremos $cat(B) \leq cat(\sum_{\varepsilon, m_\varepsilon + \delta})$ aplicando o teorema 4.8, podemos concluir que J_ε tem pelo menos $cat(B) + 1$ pontos críticos. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Kazuo Akutagawa, Luis A Florit, and Jimmy Petean. On yamabe constants of riemannian products. *arXiv preprint math/0603486*, 2006.
- [2] Thierry Aubin et al. Métriques riemanniennes et courbure. *Journal of Differential Geometry*, 4(4):383–424, 1970.
- [3] Vieri Benci, Claudio Bonanno, and Anna Maria Micheletti. On the multiplicity of solutions of a nonlinear elliptic problem on riemannian manifolds. *Journal of Functional Analysis*, 252(2):464–489, 2007.
- [4] Vieri Benci and Giovanna Cerami. The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 114(1):79–93, 1991.
- [5] Renato Bettiol and Paolo Piccione. Multiplicity of solutions to the yamabe problem on collapsing riemannian submersions. *Pacific Journal of Mathematics*, 266(1):1–21, 2013.
- [6] Renato G Bettiol and Paolo Piccione. Bifurcation and local rigidity of homogeneous solutions to the yamabe problem on spheres. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 47(3-4):789–807, 2013.
- [7] Renato G Bettiol, Paolo Piccione, Bianca Santoro, et al. Bifurcation of periodic solutions to the singular yamabe problem on spheres. *Journal of Differential Geometry*, 103(2):191–205, 2016.
- [8] LL De Lima, Paolo Piccione, and Michela Zedda. On bifurcation of solutions of the yamabe problem in product manifolds. In *Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, volume 29, pages 261–277. Elsevier, 2012.
- [9] M.P. do Carmo. *Geometria riemanniana*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.
- [10] Basilis Gidas, Wei-Ming Ni, and Louis Nirenberg. Symmetry and related properties via the maximum principle. *Communications in Mathematical Physics*, 68(3):209–243, 1979.
- [11] Karsten Grove and Hermann Karcher. How to conjugate π_1 -close group actions. *Mathematische Zeitschrift*, 132(1):11–20, 1973.
- [12] David Hilbert. Die grundlagen der physik. *Mathematische Annalen*, 92(1):461–472, 1924.
- [13] Hermann Karcher. Riemannian center of mass and mollifier smoothing. *Communications on pure and applied mathematics*, 30(5):509–541, 1977.

- [14] Ana Claudia da Silva Moreira. *Técnicas de bifurcação para o problema de Yamabe em variedades com bordo*. PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- [15] Morio Obata. The conjectures on conformal transformations of riemannian manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 77(2):265–270, 1971.
- [16] Jimmy Petean. Multiplicity results for the yamabe equation by lusternik-schnirelmann theory. *arXiv preprint arXiv:1611.01177*, 2016.
- [17] Daniel Pollack. Nonuniqueness and high energy solutions for a conformally invariant scalar equation. *Comm. Anal. Geom*, 1(3-4):347–414, 1993.
- [18] Richard Schoen et al. Conformal deformation of a riemannian metric to constant scalar curvature. *Journal of Differential Geometry*, 20(2):479–495, 1984.
- [19] Gaetano Siciliano. Multiple positive solutions for a schrödinger–poisson–slater system. *Journal of mathematical analysis and applications*, 365(1):288–299, 2010.
- [20] Neil S Trudinger. Remarks concerning the conformal deformation of riemannian structures on compact manifolds. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 22(2):265–274, 1968.
- [21] Hidehiko Yamabe. On a deformation of riemannian structures on compact manifolds. 1960.