

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

O Grupo de Renormalização Exato: Abordagem Perturbativa e Teorias Não Comutativas

Ivens Martins Carneiro

Dissertação submetida ao
Instituto de Física da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do grau
de Mestre em Ciências

ORIENTADOR: Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes

São Paulo
2002

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3663
ex. 2

SBI-IFUSP



305M810T3663

C289g

M
ex. 2

O Grupo de Renormalização
Exato: Abordagem Perturbativa e
Teorias Não Comutativas

Van Marck

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Carneiro, Ivens Martins

Grupo de Renormalização Exato: Abordagem
Perturbativa e Teorias não Comutativas.
São Paulo 2002.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física – Departamento Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Teoria Quântica de Campos;
2. Grupo de Renormalização;
3. Teorias não Comutativas.

USP/IF/SBI-026/2002

O Grupo de Renormalização Exato: Abordagem Perturbativa e Teorias Não Comutativas

Ivens Martins Carneiro

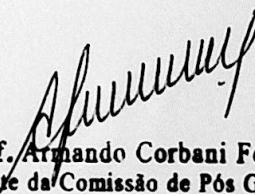
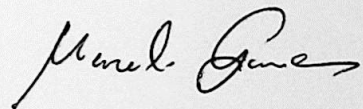
Dissertação submetida ao
Instituto de Física da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do grau
de Mestre em Ciências.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes (IFUSP)
Prof. Dr. Carlos Eugênio Carneiro (IFUSP)
Prof. Dr. Maria Carolina Nemes (UFMG)

Julgado em: 16/4/2002
Conceito: Aprovado



Prof. Armando Corbani Ferraz
presidente da Comissão de Pós Graduação

RESUMO

Um estudo da teoria do campo escalar através dos métodos do Grupo de Renormalização Exato e dos métodos perturbativos usuais é apresentado, em ambos casos de espaços euclidianos comutativo e não-comutativo. É feita uma revisão com os conceitos principais do Grupo de Renormalização Exato (GRE), ilustrando-se o caso da teoria ϕ^4 em $d = 4$. A seguir, demonstra-se a renormalizabilidade perturbativa da teoria ϕ^6 com o uso de uma equação semelhante à equação de Polchinski do GR. Considera-se finalmente a teoria ϕ^6 no espaço não comutativo euclidiano em $d = 3$ e discutem-se os problemas de divergências IV/UV, inclusive no caso em que são adicionados férmions com interações do tipo Yukawa.

ABSTRACT

A study of the theory of the scalar field by the methods of the Exact Renormalization Group and by the usual perturbative methods is presented, in both cases of Euclidean commutative and noncommutative spaces. A review of the main concepts underlying ERG is made, using ϕ^4 theory in $d = 4$ as an illustration. Next, the perturbative renormalizability of ϕ^6 theory is presented, by the use of an equation similar to the Polchinski RG equation. Finally, the ϕ^6 theory on the Euclidean noncommutative space in $d = 3$ is considered and the IR/UV divergencies problem is discussed, including the case of the theory with fermions and Yukawa like interactions added.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Marcelo Gomes, pela orientação e pela paciência,

Às minhas irmãs, pelo seu amor e apoio incondicionais, e aos meus pais, por todas as oportunidades que sempre me proporcionaram, pelo carinho, paciência, confiança e todas as lições que sempre me passaram,

Aos amigos, que sempre trazem algo para nos engrandecer. Em particular àqueles que são minha família em SP: Alexandre, Andrey, Akira, Cléber, Karlúcio e Leônidas.

Aos meus professores na UFPa, Van Sérgio, Licurgo, Jessé, Bassalo, Sérgio Vizeu, Petrus, Marcelo Lima e Paulo de Tarso, por terem me incentivado neste caminho.

À FAPESP, pela concessão de uma bolsa de mestrado – processo 00/02854-7.

A todos os demais que no dia a dia nos ajudam a crescer, e que não citei aqui, meus agradecimentos estão implícitos mas não são menos sinceros.

Conteúdo

1	O Grupo de Renormalização de Wilson	10
1.1	Introdução	10
1.2	Transformações do GR	13
1.2.1	Pontos fixos	19
1.2.2	Relevância, irrelevância e marginalidade.	22
1.3	Equações do GRE	23
1.3.1	Equação de Wegner-Houghton	26
1.3.2	Equação de Polchinski.	32
2	Renormalizabilidade perturbativa de ϕ^6 em (2+1)D	34
2.1	Equação do Grupo de renormalização para a ação efetiva de Legendre.	34
2.2	Condições de contorno.	41
2.3	Iteração das equações e renormalizabilidade.	46
3	Teorias não-comutativas	53
3.1	Introdução	53
3.1.1	A correspondência Weyl-Moyal.	54
3.2	Teoria ϕ^6 não-comutativa.	56
3.3	Férmions e interação de Yukawa.	64
A	Diagramas de Feynman	70
A.1	Função de dois pontos – campo escalar.	70
A.2	Função de quatro pontos – campo escalar.	71
A.3	Função de quatro pontos – laço fermiônico.	72
A.4	Identidade auxiliar.	74

Introdução

O processo de renormalização em TQC surgiu inicialmente no contexto da teoria de perturbações, como um método de eliminar as divergências encontradas nos cálculos de amplitudes de espalhamento da eletrodinâmica quântica (QED). A renormalizabilidade da QED e o cálculo de correções radiativas com enorme concordância com o experimento são fatores conhecidos do sucesso dessa abordagem.

Há outros pontos de vista para o problema da renormalização também, não necessariamente dentro do contexto perturbativo. Uma perspectiva interessante foi introduzida por Wilson [3], que desenvolveu as idéias do grupo de renormalização da Física Estatística, que por sua vez têm origem nas transformações de bloco de spin de Kadanoff [2]. A idéia é encarar o processo de renormalização¹ como um fluxo contínuo dos parâmetros que definem a teoria. O conceito de fluxo das constantes de acoplamento também ocorre no GR de GellMann-Low e Callan-Symanzik e desempenha importante papel no estudo da Física de altas energias. O estudo da estrutura de pontos fixos não triviais da teoria, no entanto, se torna difícil através dos métodos perturbativos usuais, e neste caso o GRE pode fornecer mais informações a respeito. O GRE tem aplicações diversas em TQC, no estudo de comportamento crítico (estudo de pontos fixos não triviais), ou mesmo da renormalizabilidade perturbativa, para citar duas possibilidades.

Exporemos nesta dissertação os conceitos principais envolvidos no GR de Wilson em TQC, com alguns exemplos simples revisados da literatura.

Em 1984, Polchinski [5] utilizou a idéia do GR de Wilson para obter uma prova alternativa da renormalizabilidade perturbativa da teoria ϕ^4 em $d = 4$. A prova de Polchinski é bastante diferente da abordagem perturbativa gráfica usual, pois não envolve a análise de esqueletos de gráficos nem faz uso do teorema de Weinberg.

Utilizaremos um método equivalente ao de Polchinski –introduzido por Bonini² *et al* [27]– para mostrar a renormalizabilidade perturbativa da teoria ϕ^6 em $d = 3$.

A teoria do campo escalar com interação ϕ^6 em $d = 3$ embora bastante simples, pode ser utilizada como laboratório para o desenvolvimento de técnicas a serem eventualmente aplicadas a modelos mais gerais. Como um exemplo de modelo diretamente relacionado, podemos citar o caso de um campo escalar com simetria $U(N)$ e inte-

¹A procedimento de renormalização perturbativa, no caso da TQC, pode ser resumido como sendo uma mudança ou *renormalização* dos parâmetros que definem a teoria de modo a implicar um cancelamento dos infinitos que surgem nos cálculos perturbativos.

²Em [27] foi considerado o caso da teoria ϕ^4 em $d=4$ também, no caso não massivo.

rações $(\phi^*\phi)^3$ e $(\phi^*\phi)^2$, em $d = 3$. Este modelo foi bastante estudado no contexto de correções ao escalonamento na proximidade de um ponto tri-crítico³ [6, 7]. Outros estudos investigaram a estabilidade do vácuo e quebra de simetria [9], e a existência de pontos fixos não triviais através de métodos não perturbativos (expansão $1/N$) [10]. Também em [11], estudou-se, dentro do contexto perturbativo, a estrutura de pontos fixos do modelo $(\phi^*\phi)^3$, com um termo de Chern-Simons, e calcularam-se as correções à dimensão dos operadores compostos $(\phi^*\phi)^n$ induzidas pela presença do termo de Chern-Simons.

Dentro da idéia de investigar generalizações do modelo simples ϕ^6 em $d = 3$, consideraremos neste trabalho o mesmo, porém definido no espaço euclidiano não comutativo(NC).

Teorias de campos em espaços com coordenadas que não comutam têm sido objeto de grande investigação recentemente. Há diversas motivações para o estudo de tais teorias, e seus problemas se apresentam em grande parte abertos à investigação. Apesar de a idéia de quantização do espaço-tempo ser relativamente antiga [29], foram estudos recentes nas áreas de gravitação quântica [12] e supercordas [13] que vieram fornecer evidências (teóricas) para a existência de teorias de campos não comutativas. Um dos problemas conhecidos que a TQC NC apresenta é a mistura infravermelho/ultravioleta (IV/UV), que faz com que divergências que na TQC usual se manifestariam como UV apareçam na respectiva teoria NC como divergências IV. É sabido também, como mostraremos neste trabalho, que o GR de Wilson já em sua construção apresenta uma separação de escalas de energia, devida ao emprego de cortes (“cutoffs”) na definição das teorias. Uma possibilidade que logo se apresenta a nós é a possibilidade de aplicação do GRE à TQC NC, portanto. A fim de melhor entender o comportamento no IV da teoria é conveniente, porém, proceder a uma análise perturbativa da questão, em vez de aplicar apenas as técnicas do GRE. Discutimos as questões relacionadas à estrutura de divergências de ϕ^6 NC na última parte deste trabalho.

O plano da dissertação é o seguinte. No capítulo 1, introduzimos os conceitos básicos com os quais se formula o GRE. Mostramos, em caráter de revisão, uma aplicação simples que reproduz um resultado da teoria de perturbação e comentamos brevemente as possibilidades do aplicação do GRE. No capítulo dois, consideramos o modelo do campo escalar com interação ϕ^6 em $d = 3$ e, como exemplo de utilização de técnicas do GRE, demonstramos –com a abordagem de Polchinski/Bonini– a renormalizabilidade perturbativa desse modelo. No capítulo 3, consideramos a teoria ϕ^6 não comutativa. Investigamos alguns dos problemas de divergências IV/UV e apresentamos as tentativas de solucioná-los. Consideramos como uma dessas possibilidades –e ainda dentro do espírito de estudar generalizações imediatas do modelo– a adição de férmions à teoria, e passamos a considerar um modelo com campos escalar e fermiônico, com interação de Yukawa, em $d = 3$, estudando algumas conseqüências dessa abordagem.

³Um exemplo de sistema físico que pode ser analisado através do modelo $(\phi^*\phi)^3$, que apresenta tricriticalidade é a mistura ${}^3\text{He} - {}^4\text{He}$ [8].

Capítulo 1

O Grupo de Renormalização de Wilson

1.1 Introdução

Renormalização é um conceito importante na construção de teorias físicas. Na Teoria Quântica de Campos (TQC), renormalização é o procedimento através do qual as divergências são removidas sistematicamente dos cálculos perturbativos e absorvidas em uma reparametrização da lagrangiana. O resultado é uma teoria com quantidades físicas livres de infinitos e ainda com poder preditivo, no sentido de que cálculos efetuados em ordens arbitrariamente altas em teoria de perturbação não necessitam da especificação de cada vez mais parâmetros (como cargas e massas de partículas). A este procedimento, que é usualmente adotado nos cálculos perturbativos, chamaremos renormalização perturbativa.

Dentro do contexto de renormalização perturbativa, surge o estudo de como certas grandezas físicas variam em virtude de se considerarem escalas diferentes de energia (escolhas diferentes do chamado ponto de renormalização). Esse estudo se dá através das chamadas equação do grupo de renormalização e equação de Callan-Symanzik, abordagem que aqui denominaremos Grupo de Renormalização (GR) perturbativo. Ainda dentro de tal contexto, surgem os conceitos de evolução de acoplamentos, referindo-se a constantes de acoplamento que dependem da escala de energia que está sendo considerada (“running couplings”) e de função beta, definida usualmente por

$$\beta_i(g_i) = \mu \frac{d}{d\mu} g_i(t) \quad (1.1)$$

e que fornece informação sobre as mudanças dos acoplamentos com a mudança na escala de energia. Na fórmula acima, g_i são os acoplamentos, t é a escala de momentos externos e μ o ponto de renormalização,

Nota-se, portanto, que o procedimento de renormalização perturbativa em TQC está associado ao problema das escalas de energia. Um dos motivos por que isto ocor-

re é que a especificação do ponto de renormalização, que torna as funções de Green univocamente definidas, consiste na escolha de uma escala μ arbitrária de energia¹. Os acoplamentos renormalizados também dependem da escala μ , mas como ela é definida arbitrariamente e podemos mudá-la – mudando, em consequência, os valores dos acoplamentos – a renormalização também pode ser entendida como um procedimento que relaciona acoplamentos em escalas diferentes de energia. Outro fato que é importante notar é que as divergências ultravioleta surgem devido à integração de altos momentos nos laços. Isto poderia sugerir também que pudéssemos evitar as divergências introduzindo, na própria definição da teoria, uma escala $\tilde{\Lambda}$ acima da qual não considerássemos momentos, ou ainda, estudar como as divergências (agora controladas através do controle sobre $\tilde{\Lambda}$) se comportam ao mudarmos $\tilde{\Lambda}$.

Uma idéia de renormalização que tem muitas semelhanças com a descrita acima surge no contexto da Mecânica Estatística e teve origem nos trabalhos de Kadanoff [2], tendo sido aperfeiçoada por Wilson [3] e também introduzida de maneira sistemática em TQC por este último [4]. No estudo das propriedades de escala de certos sistemas, como redes de spins interagentes (o modelo de Ising, por exemplo), ocorre naturalmente uma escala $\tilde{\Lambda}$ máxima (no espaço dos momentos) devida ao espaçamento entre dois spins imediatamente vizinhos na rede, que é o comprimento mínimo $a = \tilde{\Lambda}^{-1}$ que existe no sistema. Por outro lado, as operações de blocamento de spin de Kadanoff levam naturalmente às operações chamadas de transformações do Grupo de Renormalização. As transformações do GR são operações que permitem relacionar o acoplamento entre spins a uma dada escala de comprimento com o acoplamento a uma outra escala de comprimento – o que, em TQC, corresponde a relacionar acoplamentos a diferentes escalas de energia/momento. Este tipo de tratamento em Mecânica Estatística permite que se obtenham corretamente as relações de escala e propriedades relacionadas ao comportamento crítico e a transições de fase de diversos modelos [14].

São estas idéias que motivam o chamado Grupo de Renormalização de Wilson (às vezes chamado Grupo de Renormalização Exato (GRE), ou GR não-perturbativo, para diferenciar claramente da abordagem de Callan-Symanzik e Gell-Mann&Low). O GRE, em TQC, corresponde à realização contínua das transformações do grupo de renormalização usadas na Mecânica Estatística. Esta abordagem, como dissemos acima, tem suas raízes nas transformações de bloco-spin de Kadanoff e nos trabalhos de Wilson sobre renormalização, que datam da década de sessenta e setenta [2, 3, 4]. A abordagem do GR de Wilson é essencialmente não-perturbativa e presta-se a diversas aplicações em TQC, seja para cálculos exatos (apesar de que apenas em algumas situações particulares são possíveis resultados exatos), cálculos dentro de algum esquema de aproximação (esta é a situação mais frequente) ou mesmo para a demonstração de resultados perturbativos, nos moldes desenvolvidos por Polchinski, em 1984 [5]. Desde o artigo de Polchinski, o interesse nas aplicações do GRE em TQC tem se renovado, principalmente como método não-perturbativo para cálculos em TQC. Por

¹Notar que, no entanto, as quantidades diretamente mensuráveis, como elementos de matriz S , não dependem dessa escolha, como é mostrado por exemplo em [31].

não-perturbativo queremos dizer que o ponto de partida não é uma equação para as funções de Green, que são objetos calculados numa dada ordem de perturbação na constante de acoplamento, e sim equações para o funcional gerador ou para a ação da teoria como um todo –embora, eventualmente, resultados perturbativos possam ser obtidos, como já foi dito acima.

Seja uma teoria de um campo escalar, descrita pelo funcional gerador

$$\begin{aligned}
 Z[J] &= \rho \int \mathcal{D}\phi e^{i(S+J\cdot\phi)} \\
 &= \rho \prod_{\phi(x)} \int d\phi(x) e^{i(S+J\cdot\phi)} \\
 &= \rho \prod_{\phi(k)} \int d\phi(k) e^{i(S+J\cdot\phi)}.
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

Vamos usar a notação $J \cdot \phi = \int d^d x J(x)\phi(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} J(k)\phi(-k)$; ρ é um fator de normalização. A abordagem perturbativa à renormalização consiste, resumidamente, em expandir a exponencial da ação S em gráficos e proceder a uma reparametrização de S (ou \mathcal{L}), ordem a ordem em perturbação, de maneira que as partes divergentes dos gráficos sejam canceladas. Este procedimento é executado com a introdução de reguladores (ou cortes, “cutoffs” em inglês) para as partes divergentes (que devem estar ausentes de qualquer quantidade física no final do processo) e na introdução de uma escala μ (que é um parâmetro dimensional), que precisa ser usada para definir de maneira única as subtrações (μ é chamado de ponto de renormalização ou ponto de subtração). O resultado do procedimento é uma teoria finita, o que chamamos teoria renormalizada à escala μ . A abordagem de Wilson, não-perturbativa, baseia-se na introdução de um corte Λ_0 já no funcional gerador da teoria, de modo a controlar os momentos altos e as divergências daí advindas. Para controlar eficazmente altos momentos, implementa-se o corte no espaço euclidiano, pois no caso do espaço de Minkowski, impor simplesmente $k^2 < \Lambda_0^2$ nas integrais deixa a possibilidade de k_0^2 ser grande, \vec{k}^2 também, e ainda assim k^2 ser pequeno. Trabalharemos sempre, portanto, com o funcional gerador euclidiano com corte Λ_0 :

$$Z[J] = \rho \int_{|k_E| < \Lambda_0} \mathcal{D}\phi(k_E) e^{-S_E + J\cdot\phi}
 \tag{1.3}$$

onde $k_E^2 = k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$ e S_E é a ação euclidiana. Omitiremos daqui por diante o subscrito E, em todas as quantidades respectivas, subentendendo-se sempre que as quantidades k, x , etc. são referentes ao espaço euclidiano d-dimensional.

1.2 Transformações do GR

Dada a ação da teoria ϕ^4 ,

$$S[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right] \quad (1.4)$$

ou uma ação mais geral, por exemplo

$$S[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} g_2 \phi^2 + g_4 \phi^4 + g_6 \phi^6 + \dots \right], \quad (1.5)$$

uma transformação do GRE é uma operação que leva o conjunto de parâmetros $\{g_2, g_4, g_6, \dots\}$ chamados parâmetros nus (definidos à escala Λ_0) a um outro conjunto $\{g'_2, g'_4, g'_6, \dots\}$, estes chamados parâmetros renormalizados (definidos a uma outra escala). Tal transformação é implementada em dois passos.

Passo 1: abaixamento do corte (também chamado “coarse-graining”). Dada a função de partição:

$$\mathcal{Z} = \int_{|k| < \Lambda_0} \mathcal{D}\phi(k) e^{-S[\phi]}, \quad (1.6)$$

a idéia é escrever \mathcal{Z} como

$$\mathcal{Z} = \int_{|k| < \Lambda_0/b} \mathcal{D}\phi(k) e^{-S_{ef}[\phi]}, \quad (1.7)$$

em que

$$e^{-S_{ef}[\phi]} = \int_{\Lambda_0/b < |k| < \Lambda_0} \mathcal{D}\phi(k) e^{-S[\phi]}, \quad (1.8)$$

com $b > 1$. S_{ef} é chamada de ação efetiva de Wilson.

Passo 2: mudança de escala. Este passo consiste numa simples mudança de variáveis para comparação de S_{ef} com a ação original. As coordenadas e momentos são reescalados por

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{b} \\ k' &= bk \end{aligned}$$

enquanto o campo ϕ é reparametrizado para $\phi' = \alpha\phi$, em que α depende de b , conforme explicaremos adiante, para que possamos proceder à comparação.

Como ilustração da transformação do GRE, vamos considerar no restante desta seção o caso da teoria ϕ^4 , cujo funcional gerador é dado por

$$\begin{aligned}
Z &= \int_{|k| < \Lambda_0} \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right] + J \cdot \phi \right\} \\
&= \int_{|k| < \Lambda_0} \mathcal{D}\phi(k) \exp \left\{ J \cdot \phi - \left[\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} (k^2 + m^2) \tilde{\phi}(k) \tilde{\phi}(-k) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\lambda}{4!} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_3}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_4}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3) \tilde{\phi}(k_4) (2\pi)^d \delta^d \left(\sum_{i=1}^4 k_i \right) \right] \right\} \quad (1.9)
\end{aligned}$$

em que $\tilde{\phi}(k)$ denota a transformada de Fourier de $\tilde{\phi}(x)$. Devido à dificuldade de lidar com o termo de fonte $J \cdot \phi$, faremos, como em [5], $J = 0$ na faixa de momentos $\Lambda = \frac{\Lambda_0}{b} < |k| < \Lambda_0$, quando utilizarmos o funcional gerador Z . Passaremos também a nos referir com frequência à função de partição \mathcal{Z} , que é o mesmo que Z sem o termo de fonte $J \cdot \phi$.

É usual trabalharmos com quantidades adimensionais, definidas em termos da escala do corte Λ , notando que as dimensões canônicas em unidades de massa das diversas grandezas envolvidas são dadas por:

$$\begin{aligned}
[x] &= -1, & [\phi(x)] &= \frac{d-2}{2} \\
[p] &= 1, & [\tilde{\phi}(k)] &= -\frac{d-2}{2} \\
[\Lambda] &= 1, & [g_n] &= n + d - n \frac{d}{2}
\end{aligned}$$

em que, $g_2 = \frac{m^2}{2}$, $g_4 = \frac{\lambda}{4!}$, etc. Assim, as quantidades adimensionais podem ser escritas dividindo-se pela potência apropriada de Λ :

$$\begin{aligned}
q &= \frac{p}{\Lambda} \\
\varphi_p &= \varphi(p) = \tilde{\phi}(p) \Lambda^{\frac{d+2}{2}} \\
u_n &= g_n \Lambda^{-n-d+n \frac{d}{2}}.
\end{aligned} \quad (1.10)$$

Daqui por diante, exceto quando mencionado o contrário, usaremos quantidades adimensionais, com os símbolos φ, u , etc., sendo que para os momentos continuaremos usando as mesmas letras p, q, k , subentendendo-se sempre que estamos nos referindo a momentos adimensionais, ou seja, momento dividido pela escala $\Lambda(t)$. Usamos $\Lambda(t) = \Lambda_0 e^{-t} = \Lambda_0/b$ como escala para definir as quantidades adimensionais; em particular, $\Lambda_0 = \Lambda(t=0)$ é usado na função de partição (ou no funcional gerador) antes de se efetuar a transformação. Temos, então, antes da transformação:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \int_{|q| < 1} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \left[\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{2} q^2 + u_2 \right) \varphi_q \varphi_{-q} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \prod_{i=1}^4 \int \frac{d^d q_i}{(2\pi)^d} u_4 \varphi_{q_1} \cdots \varphi_{q_4} (2\pi)^d \delta^d \left(\sum_i q_i \right) \right] \right\} \quad (1.11)
\end{aligned}$$

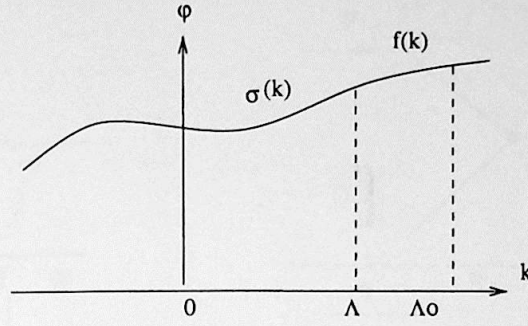


Figura 1.1: Decomposição em modos rápidos e lentos.

Para simplificar a notação estamos usando $\varphi(q) = \varphi_q$, assim como para os argumentos das demais funções σ e f abaixo. Para implementar o primeiro passo da transformação do GRE, dividimos o campo em modos “rápidos e lentos” (v. figura 1.1):

$$\varphi(k) = \sigma(k) + f(k), \quad \text{com} \begin{cases} \sigma(k) = 0 & \text{se } 1/b < |k| \leq 1 \\ f(k) = 0 & \text{se } |k| \leq 1/b \end{cases}$$

Com isto, nota-se que $\sigma(k)f(k) = \sigma(k)f(-k) = 0$ e então a parte quadrática da ação é aditiva e

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}f \exp \left\{ - \left[\int_k \frac{1}{2} (\sigma_k \sigma_{-k} + f_k f_{-k}) (k^2 + 2u_2) + u_4 \int_{k_1 \dots k_4} (\sigma_{k_1} \sigma_{k_2} \sigma_{k_3} \sigma_{k_4} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4\sigma_{k_1} f_{k_2} f_{k_3} f_{k_4} + 6\sigma_{k_1} \sigma_{k_2} f_{k_3} f_{k_4} + 4\sigma_{k_1} \sigma_{k_2} \sigma_{k_3} f_{k_4} + f_{k_1} f_{k_2} f_{k_3} f_{k_4}) \hat{\delta} \left(\sum_{i=1}^4 k_i \right) \right] \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\sigma e^{-S[\sigma]} \mathcal{D}f \exp \left\{ - \left[\int_k \frac{1}{2} f_k f_{-k} (k^2 + 2u_2) + u_4 \int_{k_1 \dots k_4} (4\sigma_{k_1} \sigma_{k_2} \sigma_{k_3} f_{k_4} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 6\sigma_{k_1} \sigma_{k_2} f_{k_3} f_{k_4} + 4\sigma_{k_1} f_{k_2} f_{k_3} f_{k_4} + f_{k_1} f_{k_2} f_{k_3} f_{k_4}) \hat{\delta} \left(\sum_{i=1}^4 k_i \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$= \int \mathcal{D}\sigma \exp \{ -S_{ef}[\sigma] \} \quad (1.13)$$

em que S_{ef} contém, portanto, o resultado da integração sobre os modos rápidos. Usamos acima a notação $\sigma_k = \sigma(k)$, $\int_k = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}$ e $\hat{\delta}(k) = (2\pi)^d \delta^d(k)$. Para ver que S_{ef} tem acoplamentos que diferem da ação original S , podemos escrever alguns termos da exponencial e fazer a expansão gráfica no campo f , que deverá contribuir somente com linhas internas, e cujo propagador será dado por:

$$\langle f(p)f(q) \rangle = \frac{1}{p^2 + 2u_2} (2\pi)^d \delta^d(p+q) \Theta(q), \quad \text{em que} \quad \Theta(q) = \begin{cases} 1, & \text{se } 1/b < |q| < 1 \\ 0, & \text{de outro jeito} \end{cases}$$

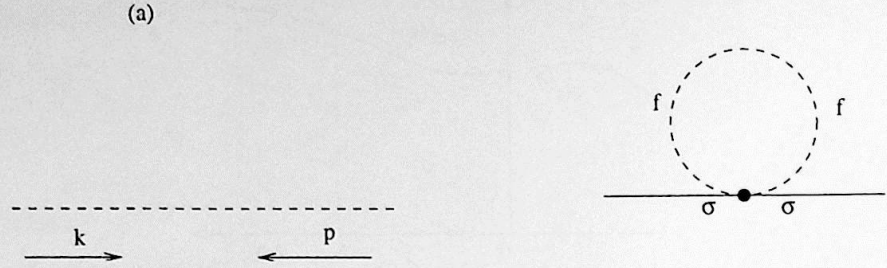


Figura 1.2: (a) Propagador rápido; (b) Gráfico que traz correção ao termo de massa.

conforme representado na figura 1.2(a). Notemos que $m^2/\Lambda_0^2 = 2u_2$, no caso. Supondo $m^2 \ll \Lambda, \Lambda_0$ – o que é razoável, pois queremos tratar da teoria como sendo uma teoria efetiva resultante da integração de altos momentos – as integrais se simplificam, pois na casca de momentos $1/b < |k| < 1$ o termo $2u_2$ pode ser desprezado quando comparado a k^2 .

Como exemplo, o gráfico da figura 1.2(b) vem da contração

$$-u_4 \int_{k_1 \dots k_4} \sigma_{k_1} \sigma_{k_2} f_{k_3} f_{k_4} \hat{\delta}(\sum k_i), \quad (1.14)$$

que fornece:

$$\begin{aligned} & -u_4 \int_{k_1 k_2} \sigma_1 \sigma_2 \int_{k_4} \int_{\frac{1}{b} < |k_3| \leq 1} \frac{1}{k_3^2} \hat{\delta}(k_3 + k_4) \hat{\delta}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) = \\ & -u_4 \int_{k_1 k_2} \sigma_1 \sigma_2 \hat{\delta}(k_1 + k_2) \int_{\frac{1}{b} < |k_3| \leq 1} \frac{1}{k_3^2} = \\ & -u_4 \int_{k_1 k_2} \sigma_1 \sigma_2 \hat{\delta}(k_1 + k_2) \int \frac{d^d \Omega}{(2\pi)^d} \int_{1/b}^1 \frac{q^{d-1} dq}{q^2} = \\ & - \int_k \sigma_k \sigma_{-k} \frac{u_4 2\pi^{d/2}}{(2\pi)^d \Gamma(d/2)} \left[\frac{1}{d-2} - \frac{(1/b)^{d-2}}{d-2} \right] = \\ & - \int_k \sigma_k \sigma_{-k} \left\{ \frac{u_4 2^{1-d}}{\pi^{d/2} \Gamma(d/2)} \left[\frac{1 - b^{2-d}}{d-2} \right] \right\}, \quad (1.15) \end{aligned}$$

sendo a correção a u_2 , devida a este gráfico, a parte entre chaves. De maneira parecida, ao considerarmos o termo de segunda ordem na exponencial de S_{int} , temos as contribuições dadas na figura 1.3. Está subentendido sempre que os campos σ são contraídos com os campos externos respectivos, e que estamos nos concentrando apenas nas contrações que resultam nas linhas internas dos gráficos considerados.

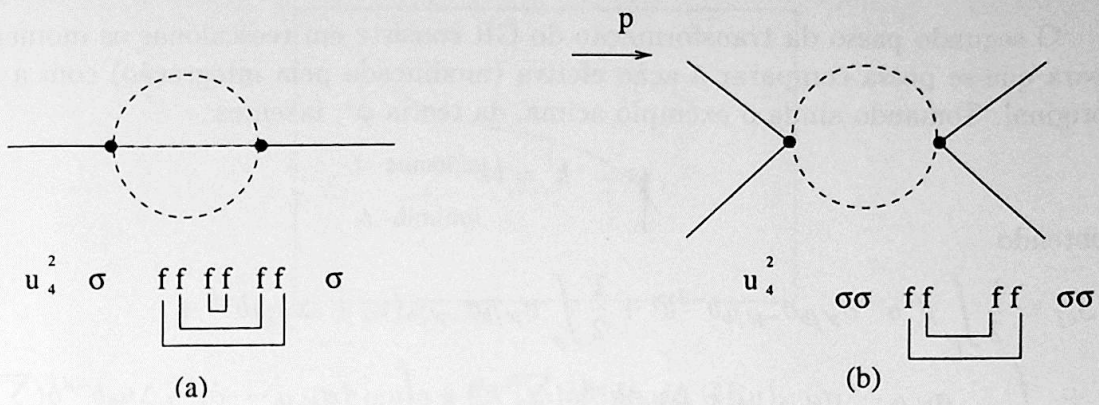


Figura 1.3: Gráficos que trazem correções aos acoplamentos.

O gráfico da figura 1.3(a) fornece uma contribuição de segunda ordem em u_4 para u_2 . Já o gráfico da figura 1.3(b) fornece uma correção para u_4 que é uma função não polinomial do momento externo p (o que significa, no espaço das posições, uma função não local); expandimos essa função em torno de $p = 0$, portanto, e levando-se em consideração o primeiro termo dessa expansão, obtém-se uma correção para u_4 , que chamamos abaixo de \bar{u}_4 , calculada de:

$$\frac{1}{2!}(-u_4)^2 \int d^d x d^d y \sigma^2(x) f(x) f(y) \sigma^2(y) f(x) f(y) = -\bar{u}_4 \int d^d z \sigma^4(z) + \dots \quad (1.16)$$

O cálculo explícito fornece, para $d = 4$, $\bar{u}_4 = \frac{-3}{16\pi^2} u_4^2 \log b$ como resultado das contrações que formam as linhas internas do gráfico –novamente fazendo a aproximação $m^2 \ll \Lambda, \Lambda_0$ e fazendo o cálculo de maneira análoga ao anterior.

Pode-se dizer, então, que o efeito de integrar sobre os modos rápidos, nesta ilustração representado pela soma de diagramas com linhas internas constituídas por propagadores “rápidos”, traz uma mudança para os acoplamentos da teoria efetiva. É claro que para termos todas as mudanças, teríamos que calcular a soma de todos os diagramas conexos, ou então, para obtermos um resultado aproximado, parar a expansão em uma dada potência das constantes de acoplamento, por exemplo. No entanto, esta última opção seria uma abordagem perturbativa (no sentido de expansão nos parâmetros pequenos da lagrangiana), e estamos interessados em métodos não-perturbativos, motivo pelo qual não prosseguiremos com esta abordagem, deixando-a apenas como exemplo de como a integração sobre os modos rápidos modifica os acoplamentos da teoria efetiva. A abordagem do GRE, não-perturbativa, está baseada em equações que fornecem a mudança dos acoplamentos com as transformações, conforme será visto adiante. Uma característica importante do GRE, é que a integração sobre os modos rápidos gera todos os tipos de interações permitidas pelas simetrias do modelo em questão. Isto pode ser visto diretamente da abordagem gráfica feita acima, dado que a expansão de exponencial traz potências diversas de σ e f .

O segundo passo da transformação do GR consiste em reescalonar os momentos, para que se possa comparar a ação efetiva (modificada pela integração) com a ação original. Tomando ainda o exemplo acima, da teoria ϕ^4 , fazemos

$$k' = bk$$

obtendo

$$S_{ef} = \frac{1}{2} \int_{p'} p'^2 b^{-2} \sigma_{p'/b} \sigma_{-p'/b} b^{-d} b^\eta + \frac{1}{2} \int_{p'} \sigma_{p'/b} \sigma_{-p'/b} (u_2 + \Delta u_2) b^{-d} + \quad (1.17)$$

$$+ \int_{k'_1 \dots k'_4} \sigma_{k'_1/b} \dots \sigma_{k'_4/b} (u_4 + \Delta u_4) b^{-d} \hat{\delta}(\sum k'_i) + \int_{k'_1 \dots k'_6} \sigma_{k'_1/b} \dots \sigma_{k'_6/b} \Delta u_6 b^{-d} \hat{\delta}(\sum k'_i) + \dots$$

em que o fator b^η , com η tendo algum valor que depende das correções calculadas, é incluído para absorver as possíveis mudanças na normalização de σ , do tipo $\int_k \frac{1}{2} k^2 \sigma_k \sigma_{-k} \Delta Z$ que surgem na integração dos modos rápidos. η é chamada dimensão anômala do campo. Escrevemos, então,

$$\begin{aligned} \sigma'_{p'} &\equiv \sigma_p b^{\frac{-2-d+\eta}{2}} = \sigma_{p'/b} b^{\frac{-2-d+\eta}{2}} \\ u'_2 &\equiv (u_2 + \Delta u_2) b^{2-\eta} \\ u'_4 &\equiv (u_4 + \Delta u_4) b^{4-d-2\eta} \\ u'_6 &\equiv (u_6 + \Delta u_6) b^{6-2d-3\eta} \end{aligned} \quad (1.18)$$

de modo que

$$\mathcal{Z} = \int_{|k|<1} \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]} = \int_{|k'|<1} \mathcal{D}\sigma' e^{-S_{ef}[\sigma']}, \quad (1.19)$$

(exceto por um fator de normalização), com

$$S_{ef} = \frac{1}{2} \int_{k'} (k'^2 + 2u'_2) \sigma'_{k'} \sigma'_{-k'} + \int_{k'_1 \dots k'_4} u'_4 \sigma'_{k'_1} \dots \sigma'_{k'_4} \hat{\delta}(\sum k'_i) + \quad (1.20)$$

$$+ \int_{k'_1 \dots k'_6} u'_6 \sigma'_{k'_1} \dots \sigma'_{k'_6} \hat{\delta}(\sum k'_i) + \dots$$

Os u'_i são chamados parâmetros renormalizados. É importante notar que os u'_i dependem do parâmetro b da transformação e dos seus valores u_i iniciais (também chamados parâmetros nus). Se fizermos $b \approx 1$ e iterarmos a transformação N vezes, temos a forma em que é usualmente conhecida a transformação do GR:

$$\begin{aligned} b &= 1 + \epsilon, \quad \text{iterando, temos} \\ k' &= (1 + \epsilon)(1 + \epsilon) \dots (1 + \epsilon)k \\ &= \left(1 + \frac{\epsilon}{N}\right)^N k \\ &= e^\epsilon k \quad \text{quando } N \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.21)$$

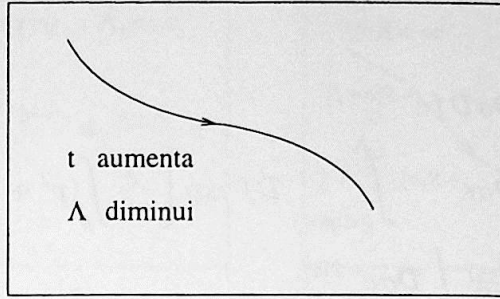


Figura 1.4: Trajetória do GR

Tem-se, assim, com $b = e^t$, uma transformação contínua da ação $S[\varphi]$ parametrizada por t . A ação passa a ser considerada dependente do parâmetro t da transformação, $S = S(t)$, e $\Lambda = \Lambda(t) = \Lambda_0 e^{-t}$. Como as diversas variáveis integradas na ação são mudas, a ação é caracterizada simplesmente por seus acoplamentos (parâmetros $\{u_i\}$ ou $\{u'_i\}$). Escrevendo, então, $u'_i = u_i(t)$, temos

$$S = S(\{u_i(t)\}) = S(\{u_2(t), u_4(t), u_6(t), \dots\}) \quad (1.22)$$

e podemos dizer que S percorre uma curva no espaço gerado pelos acoplamentos $u_2 \times u_4 \times u_6 \dots$,² sendo tal curva parametrizada por t . Essa curva é usualmente chamada de fluxo do GR, ou trajetória do GR.

1.2.1 Pontos fixos

Um ponto fixo é um determinado conjunto de valores para os acoplamentos, $\{u_n^*\}$ tal que $S(\{u_n^*\}, t) = S(\{u_n^*\})$, ou seja, tais que a ação não muda ao efetuar-se uma transformação do GR. $S(t) = S^* = \text{constante}$ para um ponto fixo.

Exemplo: seja um campo livre, escalar, massivo

$$S[\varphi] = \frac{1}{2} \int_p (p^2 + 2u_2) \varphi_p \varphi_{-p}. \quad (1.23)$$

Passo um da transformação do GR:

$$S[\sigma + f] = \frac{1}{2} \int_p (p^2 + 2u_2) (\sigma_p + f_p) (\sigma_{-p} + f_{-p}) \quad (1.24)$$

$$= \frac{1}{2} \int_p (p^2 + 2u_2) \sigma_p \sigma_{-p} + \frac{1}{2} \int_p (p^2 + 2u_2) f_p f_{-p}. \quad (1.25)$$

²Levando em conta que infinitas interações são geradas na transformação, teríamos um espaço de parâmetros de dimensão infinita. Ocorre, no entanto, que nos casos de interesse (vizinhança de pontos fixos, por exemplo), apenas um número finito de acoplamentos é importante e tem-se uma curva num espaço de dimensão finita.

Daí

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}f e^{-S[\sigma+f]} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} &= \int \mathcal{D}\sigma e^{-S[\sigma]} \int_{\frac{1}{b} < |p| < 1} \mathcal{D}f \exp \left[-\frac{1}{2} \int_p (p^2 + 2u_2) f_p f_{-p} \right] \\ &= e^{C(b, u_2)} \int \mathcal{D}\sigma e^{-S[\sigma]}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

em que $C(b, u_2)$ independe de σ e resulta da integração gaussiana sobre f . Esta constante, divergente, é absorvida na normalização da função de partição -ou na energia do vácuo, correspondentemente, em TQC.

Passo dois:

$$\begin{aligned} p' &= bp \\ \sigma'_{p'} &= b^{-1-d/2} \sigma_p \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} S[\sigma] &= \int_{0 < |p| < 1/b} (p^2 + 2u_2) \sigma_p \sigma_{-p} \\ &= \int_{|p'| < 1} b^{-d} (b^{-2} p'^2 + 2u_2) b^{2+d} \sigma_{p'/b} \sigma_{-p'/b} \\ &= \int_{|p'| < 1} (p'^2 + 2u_2 b^2) \sigma'_{p'} \sigma'_{-p'} \end{aligned} \quad (1.29)$$

daí, temos

$$u'_2 = u_2(t) = b^2 u_2 = e^{2t} u_2 \quad (1.30)$$

e em particular, quando $u_2 = 0$, $u_2(t) = 0$, ou seja, $S(u_2 = 0) = S^*$ é invariante, então $u_2 = 0$ é um ponto fixo. Este é o chamado ponto fixo gaussiano (todos os acoplamentos nulos). Esta definição de ponto fixo coincide com aquela do GR perturbativo, se definirmos $\beta_i(u, u_0) = \frac{\partial u_i(t)}{\partial t}$, com $u_0 = u(t=0)$ e tomarmos o limite $u_0 \rightarrow u^*$, em que $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots)$ é um ponto fixo (no caso, $u^* = 0$). Assim, temos a função beta que coincide com aquela definida no caso perturbativo, e temos um ponto fixo quando $\beta_i = 0$ para todo i -como é usualmente definido, naquele caso, um ponto fixo da teoria.

Como num ponto fixo (PF) a ação não muda, então o PF deve ser início ou fim de uma trajetória. Mais propriamente, deveria ser apenas fim de uma trajetória, mas podemos também considerar, por um processo de limite, o caso que o início de uma trajetória é um ponto fixo. Como t sempre aumenta ao longo de uma trajetória (e $\Lambda(t)$ diminui), temos três situações a considerar. A primeira situação corresponderia a $\Lambda = 0$ no fim de uma trajetória. Na segunda situação teríamos uma trajetória como aquela representada na figura 1.5(a), em que começamos em Λ_0 , mas podendo começar

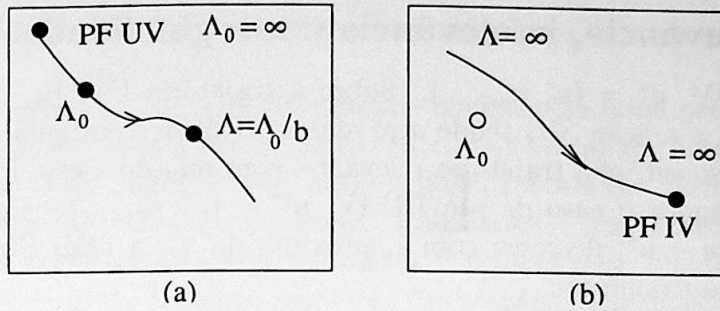


Figura 1.5: (a) Ponto fixo ultravioleta; (b) Ponto fixo infravermelho.

a trajetória com Λ_0 arbitrariamente mais alto, de modo que temos, no $\lim \Lambda_0 \rightarrow \infty$, um ponto fixo no início da trajetória (pois lembrando que $\Lambda = \Lambda_0 e^{-t}$, quando $\Lambda_0 = \infty$ –se esse limite existir– a ação não muda). A terceira situação possível, também é um caso limite, em que o ponto fixo se encontra com $\Lambda = \infty$, no fim de uma “trajetória”, mas com $\Lambda = \infty$ ao longo de toda a “trajetória”, não só em seu fim.

Discutimos a seguir estes casos um por um. O primeiro caso, quando $\Lambda = 0$ no fim de uma trajetória, é às vezes chamado “trivial” em mecânica estatística e não corresponde a um comportamento crítico. Tal caso corresponde a um comprimento de correlação³ nulo, o que geralmente ocorre em temperatura zero ou infinita, com a existência de uma fase homogênea, em que as flutuações do parâmetro de ordem se anulam [15]. No segundo caso, quando $\Lambda = \infty$ no início de uma trajetória, temos o chamado PF ultravioleta (UV). Um sistema físico não pode estar exatamente em tal ponto fixo, pois nele $\Lambda = \infty$ (e por hipótese começamos sempre com Λ_0 finito em \mathcal{Z}), mas pode estar sobre a trajetória que dele flui. Este caso é ilustrado na figura 5(a). O sistema nu ocorre em Λ_0 , enquanto o sistema renormalizado está em $\Lambda = \Lambda_0/b = \mu$. Neste caso é possível tomar o limite $\Lambda_0 \rightarrow \infty$ após a transformação, mantendo os acoplamentos definidos a uma escala μ arbitrária. Dizemos neste caso que a teoria é renormalizável não-perturbativamente, ou seja, quando existem trajetórias baseadas em pontos fixos UV. Este panorama é similar ao que ocorre com teorias que são renormalizáveis perturbativamente e baseadas em liberdade assintótica, como por exemplo a QCD. O terceiro caso, de $\Lambda = \infty$ em toda a “trajetória”, também não pode ter um sistema físico posicionado sobre o ponto fixo, nem tão pouco sobre a “trajetória”, pois $\Lambda = \infty$ sobre toda ela (por isso temos usado trajetória entre aspas). Esta trajetória é um limite de trajetórias físicas, e o ponto fixo, que se encontra no fim de tal trajetória, é o ponto fixo infravermelho (IV). Neste caso a trajetória corresponde a uma linha que divide duas fases diferentes. O caso do PF IV está ilustrado na figura 5(b). Uma discussão mais detalhada e mais exemplos podem ser encontrados em [16, 14].

³O comprimento de correlação pode ser entendido como a distância a partir da qual as correlações entre dois spins vão a zero, ou seja, é uma espécie de alcance efetivo da interação entre dois spins de uma rede [14].

1.2.2 Relevância, irrelevância e marginalidade.

Seja um PF UV, $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots)$. Sobre a trajetória UV, $|u - u^*|$ cresce com t , próximo de u^* , e a ação $S(t)$ tende a se afastar S da ação original S_{Λ_0} . A trajetória é dita neste caso ser uma trajetória relevante, com relação a esse PF.

Considere agora o caso de um PF IV, $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots)$. Então, ao longo da trajetória IV $|u - u^*|$ decresce com t , próximo de u^* , a ação $S(t)$ tende a S^* e a trajetória é dita irrelevante.

Relevância e irrelevância são conceitos relacionados a direções no espaço dos acoplamentos, com respeito a determinados PFs. Vamos tornar este conceito mais claro. Suponhamos que próximo a um ponto fixo apenas N acoplamentos sejam importantes, sendo os demais desprezíveis comparados a estes (tomada como escala de comparação uma potência de algum parâmetro pequeno, por exemplo). Formamos então o vetor \vec{u} :

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

e o vetor tangente à trajetória é $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{u}$. Próximo do PF, temos

$$\frac{dS}{dt} = \mathcal{L}(S - S^*) + \mathcal{Q}(S - S^*) \quad (1.31)$$

em que \mathcal{L} é um operador linear atuando sobre S e \mathcal{Q} contém as contribuições não lineares. S^* é a ação no ponto fixo. Estando próximo do PF, tomamos apenas a parte linear da transformação, e então

$$\frac{d}{dt}(\vec{u} - \vec{u}^*) = R(\vec{u} - \vec{u}^*) \quad (1.32)$$

em que R é uma matriz numérica, independente de t . Diagonalizando essa matriz

$$R\vec{w} = \lambda\vec{w} = \frac{d}{dt}\vec{w} \quad (1.33)$$

e então

$$\vec{w} = \vec{c}e^{\lambda t}, \quad (1.34)$$

com \vec{c} um vetor constante. Escolhendo então uma trajetória ao longo de um dos autovetores \vec{w} , temos três possibilidades:

- a) Se $\lambda > 0$ a direção é dita relevante, pois a ação se afasta do PF;
- b) Se $\lambda < 0$ a direção é dita irrelevante;
- c) Se $\lambda = 0$ a direção é dita marginal, e é necessário ir além da aproximação linear

para obter-se informação sobre a relevância ou irrelevância da correspondente direção.

Notemos que estes conceitos de relevância e irrelevância estão próximos da análise que usualmente se faz do comportamento crítico em Mecânica Estatística. Em outro contexto, na TQC perturbativa, surge também a mesma terminologia, porém com um significado ligeiramente diferente. Polchinski[5], por exemplo, classifica os acoplamentos da lagrangiana como relevantes e irrelevantes, seguindo, porém uma contagem de potências da seguinte maneira. Os acoplamentos classificados como relevantes são aqueles parâmetros que têm dependência em potências não-negativas do corte Λ_0 e, portanto, divergem no limite $\Lambda_0 \rightarrow \infty$ –devendo aparecer na lagrangiana renormalizada, absorvidos nas constantes de acoplamento renormalizadas– enquanto os parâmetros que sob transformação do GRE apresentam dependência em potências negativas de Λ_0 são chamados de irrelevantes –pois não aparecerão na lagrangiana renormalizada.⁴ É importante esclarecer que esta outra classificação nem sempre coincide com aquela apresentada acima.

1.3 Equações do GRE

A abordagem do GRE está baseada em equações que mostram como muda a ação quando se fazem transformações do GR. O primeiro passo da transformação do GRE pode ser formalmente escrito através da atuação de um operador sobre S , na forma⁵

$$\frac{dS}{dt} = \mathcal{G}_{tra} S, \quad (1.35)$$

quando apenas integramos sobre os modos rápidos, enquanto que o segundo passo pode ser representado por

$$\frac{dS}{dt} = \mathcal{G}_{dil} S, \quad (1.36)$$

quando apenas implementamos o reescalonamento.

As equações do GRE diferem entre si apenas na forma de introdução do corte, sendo o segundo passo da transformação, reescalonamento, praticamente o mesmo em todas elas, no caso que estamos tratando, do campo escalar (é claro que se passarmos a considerar férmions, por exemplo, há pequenas modificações no procedimento abaixo –muda a dimensão do campo, obviamente, e torna-se necessário calcular derivadas com a respeito a ambos campos $\bar{\psi}$ e ψ –, mas as equações para o caso fermiônico continuam sendo semelhantes entre si quanto ao reescalonamento [26]). É útil, então,

⁴Desta forma, parâmetros “relevantes” correspondem a acoplamentos super-renormalizáveis e renormalizáveis, enquanto os “irrelevantes” correspondem aos não-renormalizáveis da contagem de potências usual.

⁵Estamos apenas enunciando este aspecto formal, pois adiante vamos deduzir explicitamente no caso de cada equação qual o comportamento de S sob integração dos modos rápidos, sem fazer referência a \mathcal{G}_{tra} .

achar uma expressão geral para \mathcal{G}_{dil} .

Consideremos a ação geral de um campo escalar

$$S[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{p_1 \dots p_n} u_n(p_1, \dots, p_n) \varphi_{p_1} \dots \varphi_{p_n} \hat{\delta}(p_1 + \dots + p_n) \quad (1.37)$$

em que escrevemos dependência de u_n com os momentos para incluir possíveis acoplamentos derivativos e não estamos assumindo a existência de nenhuma simetria particular (como sob $\varphi \rightarrow -\varphi$). Vamos escrever $\frac{\delta}{\delta\varphi_p}$ significando, daqui por diante, $(2\pi)^d \frac{\delta}{\delta\varphi_p}$, para que não tenhamos fatores extra de (2π) nas fórmulas. No reescalonamento, fazemos

$$p' = bp = (1 + \epsilon)p, \quad (1.38)$$

$$S' = S + \epsilon \mathcal{G}_{dil} S \quad (1.39)$$

de modo que

$$\frac{\Delta S}{\epsilon} = \mathcal{G}_{dil} S \quad (1.40)$$

e então $\Delta S = \epsilon \mathcal{G}_{dil} S$ pode ser obtida calculando-se as mudanças em S dada acima, considerando-se como cada componente se comporta sob reescalonamento:

$$(a) \quad \prod_{i=1}^n d^d p_i = (1 + \epsilon)^{-nd} \prod_{i=1}^n d^d p'_i \quad (1.41)$$

$$= (1 - nd\epsilon) \prod_{i=1}^n d^d p'_i + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.42)$$

e ΔS devida a esta mudança, em ordem ϵ , pode ser escrita como

$$\Delta S_a = -\epsilon \left(d \int_p \varphi_p \frac{\delta}{\delta\varphi_p} \right) S \quad (1.43)$$

$$(b) \quad u_n(p_1, \dots, p_n) = u_n(b^{-1}p'_1, \dots, b^{-1}p'_n) \quad (1.44)$$

$$= u_n(p'_1 - \epsilon p'_1, \dots, p'_n - \epsilon p'_n) \quad (1.45)$$

$$= u_n(p'_1, \dots, p'_n) - \sum_j^n \epsilon p'_j \frac{\partial u_n}{\partial p'_j} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.46)$$

de modo que a mudança respectiva em S , em ordem ϵ , se escreve

$$\Delta S_b = -\epsilon \left(\int_p \varphi_p p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{\delta}{\delta\varphi_p} \right) S \quad (1.47)$$

onde a linha sobre a derivada parcial indica que ela não deve atuar sobre as funções delta. De fato,

$$\begin{aligned}
& - \epsilon \left(\int_p \varphi_p p^\mu \frac{\partial'}{\partial p^\mu} \frac{\delta}{\delta \varphi_p} \right) S = \\
& - \epsilon \int_p \varphi_p p^\mu \frac{\partial'}{\partial p^\mu} \frac{\delta}{\delta \varphi_p} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{p_1 \dots p_n} \varphi_{p_1} \dots \varphi_{p_n} u_n(p_1, \dots, p_n) \hat{\delta} \left(\sum_{k=1}^n p_k \right) = \\
& - \epsilon \int_p \varphi_p p^\mu \frac{\partial'}{\partial p^\mu} \sum_{i=1}^n \sum_{n=1}^{\infty} \int_{p_1 \dots p_n} \varphi_{p_1} \dots \bar{\varphi}_{p_i} \dots \varphi_{p_n} \hat{\delta}(p - p_i) u_n(p_1, \dots, p_n) \hat{\delta} \left(\sum_{k=1}^n p_k \right) = \\
& - \epsilon \int_p \varphi_p p^\mu \frac{\partial'}{\partial p^\mu} \sum_{i=1}^n \sum_{n=1}^{\infty} \int_{p_1 \dots \bar{p}_i \dots p_n} \varphi_{p_1} \dots \bar{\varphi}_{\bar{p}_i} \dots \varphi_{p_n} u_n(p_1, \dots; \bar{p}_i \rightarrow p; \dots, p_n) \times \\
& \quad \times \hat{\delta}(p_1 + \dots + p + \dots + p_n), \tag{1.48}
\end{aligned}$$

em que as barras sobre ϕ e p indicam que eles não aparecem nos respectivos termos.

$$(c) \quad \hat{\delta}(p_1 + \dots + p_n) = \hat{\delta}((1 - \epsilon)p'_1 + \dots + (1 - \epsilon)p'_n) \tag{1.49}$$

$$= (1 - \epsilon)^{-d} \hat{\delta}(p_1 + \dots + p_n) \tag{1.50}$$

$$\tag{1.51}$$

de modo que a respectiva mudança na ação é dada por $\Delta S_c = \epsilon dS$, em ordem ϵ .

A mudança na intensidade de campo se escreve

$$\varphi'(p') = b^{-1 + \frac{\eta}{2} - \frac{d}{2}} \varphi(p) \tag{1.52}$$

então

$$\prod_{i=1}^n \varphi_i(p) = \prod_{i=1}^n \varphi'_i(p') (1 + \epsilon)^{n(1 - \frac{\eta}{2} + \frac{d}{2})} \tag{1.53}$$

e a mudança respectiva na ação é dada por

$$\Delta S_d = \epsilon \frac{d + 2 - \eta}{2} \left(\int_p \varphi_p \frac{\delta}{\delta \varphi_p} \right) S. \tag{1.54}$$

Somando todas as contribuições temos

$$\mathcal{G}_{dil} S = dS - \int_p \varphi_p p^\mu \frac{\partial'}{\partial p^\mu} \frac{\delta}{\delta \varphi_p} S - \frac{d - 2 + \eta}{2} \int_p \varphi_p \frac{\delta}{\delta \varphi_p} S \tag{1.55}$$

Da maneira como foi introduzido na seção anterior, o corte é dito nítido, pois é estabelecida uma fronteira nítida entra modos rápidos e lentos, e não há nenhuma superposição entre eles. Se em vez disso tivéssemos introduzido o corte através de uma função reguladora suave no propagador o corte seria dito suave.

Apresentamos abaixo a equação de Wegner-Houghton (que se refere a corte nítido), dentro da aproximação de potencial local [19, 22], para ilustrar a abordagem do GRE em uma situação simples que requer aproximações para a resolução da equação do GR. Apresentaremos em seguida também a equação de Polchinski (corte suave), que é bastante usada em aplicações com o GRE [5, 17, 23, 24].

1.3.1 Equação de Wegner-Houghton

Para a dedução da equação de Wegner-Houghton parte-se de uma ação do campo escalar com invariância $\varphi \rightarrow -\varphi$, como abaixo

$$S[\varphi] = \sum_{n=2,4,\dots} \int_{q_1 \dots q_n} u_n(q_1, \dots, q_n) \hat{\delta}(q_1 + \dots + q_n) \quad (1.56)$$

$$= \frac{1}{2} \int_q u_2(q) \varphi_q \varphi_{-q} + S_{int}[\varphi] \quad (1.57)$$

$$= S[\sigma] + \frac{1}{2} \int_q' f_q f_{-q} u_2(q) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{q_1}' \dots \int_{q_m}' f_{q_1} \dots f_{q_m} S_{q_1 \dots q_m}^{(n)int} \quad (1.58)$$

em que $S_{q_1 \dots q_m}^{(n)int} = \left. \frac{\delta^n S_{int}}{\delta \varphi_{q_1} \dots \delta \varphi_{q_n}} \right|_{f=0}$ e o campo foi decomposto em modos rápidos e lentos de acordo com

$$\varphi(k) = \sigma(k) + f(k), \quad \text{com} \begin{cases} \sigma(k) = 0 & \text{se } e^{-\delta t} < |k| \leq 1 \\ f(k) = 0 & \text{se } |k| \leq e^{-\delta t}. \end{cases}$$

Lembremos que estamos usando quantidades adimensionais. A linha sobre as integrais é para indicar restrição à faixa de momentos $e^{-\delta t} < |k| \leq 1$. Ocorre que, considerando δt infinitesimal, podemos fazer a integração sobre os modos rápidos da seguinte maneira. Fazemos a expansão da ação em diagramas de Feynmann com linhas internas sendo propagadores rápidos, usando as seguintes regras de Feynmann para o campo f :

(a) Vértice de n linhas rápidas: $-\int_{q_1 \dots q_n}' S_{q_1 \dots q_n}^{(n)int}$

(b) Propagador rápido: $\hat{\delta}(q_1 + q_2) u_2^{-1}(q_1)$

Como as integrais sobre momentos internos estão sempre restritas à camada de espessura δt no espaço dos momentos, apenas gráficos do tipo árvore ou um laço contribuem em ordem δt . Também nos gráficos de um laço só podemos ter vértices com uma ou no máximo duas linhas rápidas em cada um, em ordem δt , pois uma terceira linha ou adicionaria um laço ou traria uma contribuição de ordem superior caso fosse adicionada por fora do laço, conforme é mostrado com detalhe em [22]. Exemplos deste tipo de gráficos são mostrado na figura 6, em que a convenção gráfica para os propagadores rápidos e lentos é a mesma utilizada anteriormente.

Assim, em ordem δt , S é dada por

$$S[\varphi] = S[\sigma] + \int_q' f_q S_q' + \frac{1}{2} \int_q' f_q f_{-q} S_{q, -q}'' \quad (1.59)$$

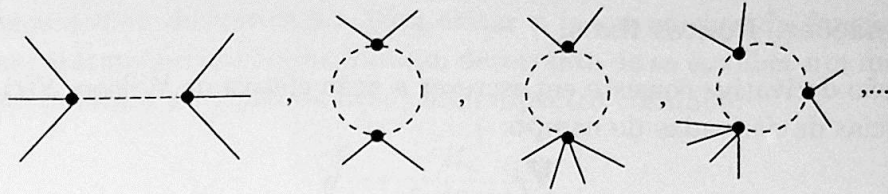


Figura 1.6: Exemplos de gráficos que contribuem, em ordem δt , para a integração sobre modos rápidos.

em que $S'_q = \left. \frac{\delta S}{\delta \varphi_q} \right|_{f=0}$ e $S''_{q,-q} = \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_q \delta \varphi_{-q}} \right|_{f=0}$. Da função de partição

$$\mathcal{Z} = \int_{|q| < e^{-\delta t}} \mathcal{D}\sigma e^{-S_{ef}[\sigma]} = \int_{|q| < e^{-\delta t}} \mathcal{D}\sigma \int_{e^{-\delta t} < |q| < 1} \mathcal{D}f e^{-S[\sigma+f]} \quad (1.60)$$

tem-se, por integração gaussiana:

$$S_{ef}[\sigma] = S[\sigma] - \frac{1}{2} \int'_q S'_q S'_{-q} (S''_{q,-q})^{-1} + \frac{1}{2} \int'_q \ln(S''_{q,-q}), \quad (1.61)$$

omitindo um termo constante (divergente) que é absorvido na normalização do funcional gerador. Por outro lado,

$$\dot{S} = \frac{S_{ef}[\sigma] - S[\varphi]}{\delta t}. \quad (1.62)$$

Como

$$S[\sigma] - S[\varphi] = \delta t \left(dS - \frac{d-2+\eta}{2} \int_k \varphi_k \frac{\delta S}{\delta \varphi_k} - \int_k \varphi_k k^\mu \frac{\partial'}{\partial k^\mu} \frac{\delta S}{\delta \varphi_k} \right) + \mathcal{O}(\delta t^2), \quad (1.63)$$

e lembrando que $\frac{S[\sigma] - S[\varphi]}{\delta t} = \mathcal{G}_{dil} S$, sob reescala, então, considerando uma transformação completa do GR (integração de modos rápidos e reescala), podemos escrever a equação de Wegner-Houghton:

$$\begin{aligned} \dot{S} = \frac{dS}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta t} \left[\int'_k \ln(S''_{k,-k}) - \int'_k S'_{-k} S'_k (S''_{-k,k})^{-1} \right] + \\ + dS + \frac{2-d-\eta}{2} \int_k \varphi_k \frac{\delta S}{\delta \varphi_k} - \int_k k^\mu \frac{\partial'}{\partial k^\mu} \frac{\delta S}{\delta \varphi_k}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Esta é uma equação integro-diferencial, e não são conhecidos métodos gerais para resolver exatamente tais tipos de equações. É necessário, portanto, usar algum esquema de aproximação para tratar tanto esta, quanto as outras equações do GRÉ, como a equação de Polchinski, por exemplo. Apresentamos a seguir a aproximação mais simples, chamada aproximação de potencial local (LPA), e verificamos que se recuperam alguns resultados perturbativos, no caso da teoria ϕ^4 . Outra aproximação bastante usada, é a chamada expansão derivativa, da qual a LPA é um caso particular.

Aproximações. Pontos fixos.

A expansão derivativa consiste em escrever a ação efetiva de Wilson, $S(t)$, em termos de potências de derivadas do campo:

$$S(t) = S_t[\phi] = \int d^d x \{ V(\phi) + \frac{1}{2} Z_\phi (\partial_\mu \phi)^2 + \dots \} \quad (1.65)$$

em que as reticências significam termos com quatro derivadas ou mais. No espaço dos momentos, isso equivale a uma expansão em potências de momento. A aproximação de potencial local, que é um caso particular da expansão derivativa, consiste em restringir ainda mais o espaço das interações possíveis a

$$S(t) = \int_q \left(\frac{1}{2} q^2 + v_2 \right) \varphi_q \varphi_{-q} + \sum_{m=4}^{\infty} v_m \int_{q_1} \cdots \int_{q_m} \varphi_{q_1} \cdots \varphi_{q_m} \hat{\delta}(q_1 + \cdots + q_m), \quad (1.66)$$

em que $\int_q = \int_{|q| \leq 1} \frac{d^d q}{(2\pi)^d}$ e os $v_m = v_m(t)$ independem dos momentos. Lembremos que estamos usando sempre quantidades adimensionais para q, v_m, φ , etc. Ou, equivalentemente, no espaço das posições:

$$S(t) = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi) \right\}. \quad (1.67)$$

Definimos a função geratriz dos acoplamentos por

$$V(x, t) = \sum_{m=2}^{\infty} v_m(t) x^m, \quad (1.68)$$

de modo que $v_m(t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m V}{\partial x^m} \Big|_{x=0}$. Por simplicidade de notação, estamos identificando, daqui em diante, x com o campo ϕ . Substituição da ação acima na equação de Wegner-Houghton leva à equação mais simples

$$(1 + f') \dot{f} = \frac{1}{2} A_d f'' + (1 + f') \left[\left(1 - \frac{d}{2}\right) x f' + \left(1 + \frac{d}{2}\right) f \right], \quad (1.69)$$

em que $A_d = \frac{2^{1-d} \pi^{-d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$.

Para chegarmos a essa equação, partimos da equação de Wegner-Houghton

$$\begin{aligned} \dot{S} = \frac{dS}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta t} \left[\int'_k \ln(S''_{k,-k}) - \int'_k S'_{-k} S'_k (S''_{-k,k})^{-1} \right] + \\ + dS + \frac{2-d-\eta}{2} \int_k \varphi_k \frac{\delta S}{\delta \varphi_k} - \int_k k^\mu \frac{\partial'}{\partial k^\mu} \frac{\delta S}{\delta \varphi_k}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

e procedemos a uma discretização, para evitar o inconveniente da função $\delta^d(0)$ que surgiria num tratamento a volume infinito, decorrente de se escolher um modo ($q = 0$, sobre o qual é feita a projeção da ação) num espectro contínuo:

$$\int_k \rightarrow \frac{R_d}{Ld(2\pi)^d} \sum_k. \quad (1.71)$$

com R_d sendo a área de superfície da esfera d -dimensional e L o número de graus de liberdade, ou seja, total de componentes dos momentos. Isto fornece

$$\begin{aligned} \dot{S} = \frac{dS}{dt} = & \frac{1}{2\delta t} \sum_k' [\ln(S''_{k,-k}) - S'_{-k} S'_k (S''_{-k,k})^{-1}] + \\ & + dS + \frac{2-d-\eta}{2} \sum_k \varphi_k \frac{\delta S}{\delta \varphi_k} - \sum_k k^\mu \frac{\partial'}{\partial k^\mu} \frac{\delta S}{\delta \varphi_k} \end{aligned} \quad (1.72)$$

Estamos considerando a chamada aproximação de potencial local, que consiste em fazer-se

$$\begin{aligned} v_2(q, -q) & \rightarrow \frac{1}{2}q^2 + v_2 \\ v_m(q, -q, 0, \dots, 0) & \rightarrow v_m(0, \dots, 0) \equiv v_m, \quad m \neq 2. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Tais passos levam, após cálculo longo mas sem dificuldades [19], à equação

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) = \frac{R_d}{2(2\pi)^d} \ln \left(1 + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, t) \right) + d \cdot V(x, t) + \frac{1}{2}(2 - \eta - d)x \frac{\partial V}{\partial x}(x, t). \quad (1.74)$$

Assim obtém-se (1.69), com a identificação $f(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x}$, e fazendo $\eta = 0$.

Um detalhe importante de se notar é esse, o fato de que no cálculo acima a dimensão anômala η é nula.⁶ De fato, ao colecionarmos os termos quadráticos em φ e que contêm q^2 na equação (1.72), chegamos a

$$\frac{1}{2}(-d + 2 - \eta)q^2 + \frac{d}{2}q^2 - q^2 = 0, \quad (1.75)$$

de modo que $\eta = 0$ na LPA, portanto.

Na equação (1.69), $A_d = R_d/(2\pi)^d$ é uma constante que depende apenas de d . O efeito de mudarmos A_d é o mesmo de reescalarmos o campo por $\phi \rightarrow \phi/\lambda$. No entanto, próximo a pontos fixos, situação em que toma-se a aproximação linear para as equações, e que corresponde a comportamento crítico, o valor de A_d não é importante, de modo que poderemos sempre proceder a tal reescalonamento e mudar o valor de A_d .

⁶Relembrando, a dimensão anômala η surge diretamente da renormalização da intensidade de campo, conforme definimos na seção 1.2. η traz uma correção ao comportamento assintótico da função de dois pontos; no caso da teoria livre, $G_2(x-y) \rightarrow \frac{1}{|x-y|^{d-2}}$, próximo do ponto crítico, enquanto que com interações este comportamento muda para $G_2(x-y) \rightarrow \frac{1}{|x-y|^{d-2+\eta}}$.

O ponto fixo gaussiano.

Como exemplo simples de cálculo aproximado com o GRE, mostramos abaixo o cálculo do acoplamento efetivo quadrilinear nas vizinhanças do ponto fixo gaussiano. Para localizarmos os pontos fixos da equação diferencial acima, fazemos $f = 0$, obtendo a equação para $f^*(x)$:

$$\frac{1}{2}A_d f^{*''} + (1 + f^{*'}) \left[\left(1 - \frac{d}{2}\right)x f^{*'} + \left(1 + \frac{d}{2}\right)f^* \right] = 0. \quad (1.76)$$

$f^*(x) \equiv 0$ é uma solução da equação acima, que fornece o ponto fixo gaussiano. É conveniente estudar a linearização da solução próximo ao ponto fixo, escrevendo:

$$f(x, t) = f^*(x) + g(x, t) \quad (1.77)$$

e supondo que $g(x, t)$ é pequeno (no caso da teoria ϕ^4 , em $D = 4$ por exemplo, isso corresponderia a g ser linear em ambos massa quadrada e constante de acoplamento, u_2 e u_4 , que são pequenas perto do ponto fixo, que é a origem no plano $u_2 \times u_4$).

A equação linearizada se torna, então

$$\dot{g} = \frac{1}{2}A_d g'' + (1 + g') \left[\left(1 - \frac{d}{2}\right)x g' + \left(1 + \frac{d}{2}\right)g \right]. \quad (1.78)$$

Separando então a dependência em t na equação com

$$g(x, t) = e^{\zeta t} \alpha h(\beta x), \quad (1.79)$$

com $\alpha = \frac{4}{d-2}$, $\beta = \left(\frac{d-2}{2A_d}\right)^{1/2}$ e $y = \beta x$, obtemos:

$$h'' - 2yh' + 4 \frac{1 + \frac{d}{2} - \zeta}{d-2} h = 0, \quad (1.80)$$

de modo que se considerarmos apenas interações limitadas por polinômios (ϕ^2 , ϕ^4 , etc.) ficamos um problema de autovalores que é a equação de Hermite, cujas soluções são os polinômios de Hermite h_1 , h_3 , etc. (pois estamos considerando apenas as interações com potências pares de ϕ , g por conseguinte, sendo um polinômio ímpar em y). Para $d = 4$, por exemplo, os valores possíveis para ζ são dados por:

$$4 \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 4 - \zeta_n}{4-2} = 2n \quad (1.81)$$

com $n = 1, 3, 5, \dots$, ou seja, $\zeta_n = 3 - n$, de modo que há um operador relevante, h_1 , com $\zeta_1 = 2$, e um marginal, h_3 , com $\zeta_3 = 0$, os demais sendo todos irrelevantes (autovalores negativos na aproximação linear).

Para estudar a relevância ou irrelevância do operador marginal (h_3 , com $\zeta_3 = 0$), é necessário ir à próxima aproximação, quadrática, nas equações anteriores. Neste caso, a equação para g é escrita:

$$\dot{g} = \frac{1}{2}A_4 g'' - xg' + 3g - \frac{1}{2}A_4 g'' g'. \quad (1.82)$$

Tem-se que a solução da equação acima apresenta, para t grande, o comportamento⁷[19]:

$$g(x, t) \rightarrow c(t) \left(x^3 - \frac{3}{2} A_4 x \right), \quad (1.83)$$

em que $c(t) = \frac{c(0)}{1+9t \cdot A_4 c(0)}$. Escolhendo então o coeficiente do termo quadrilinear do potencial da maneira usual, $\frac{\lambda}{4!}$, e usando $A_4 = \frac{1}{8\pi^2}$, obtemos o resultado já conhecido da teoria de perturbação para o acoplamento efetivo quadrilinear, na ordem de um laço (lembrando que t aqui, corresponde ao parâmetro $-t$ usualmente adotado na equação de Callan-Symanzik):

$$\lambda(t) = \frac{\lambda(0)}{1 + \frac{3}{16\pi^2} \lambda(0)t}. \quad (1.84)$$

Devemos fazer aqui alguns comentários quanto às aproximações usualmente adotadas no GRE e o estudo de pontos fixos. O ponto fixo gaussiano, como se sabe, sempre ocorre, sendo por isso às vezes chamado de trivial. O estudo dos acoplamentos efetivos nas proximidades do ponto fixo gaussiano pode ser levado a cabo através de métodos perturbativos, mas a procura de pontos fixos não-triviais requer o uso de métodos não-perturbativos. Por outro lado, as equações do GRE necessitam de aproximações para serem resolvidas, e os resultados obtidos precisam ser verificados com a experiência ou comparação com outros métodos, e então surge o problema da validade das aproximações. As aproximações mais utilizadas são as citadas acima: a expansão derivativa e a LPA. Diversos resultados podem ser obtidos dentro destas aproximações [17, 19, 22, 23, 25] geralmente através de métodos numéricos. O estudo da validade da expansão derivativa como aproximação foi feito inicialmente por Morris [20, 21], e desde então ela tem sido utilizada na obtenção de pontos fixos e expoentes críticos, principalmente. Outras tentativas de aproximações para o estudo do GRE também foram feitas, ora envolvendo a LPA, ora envolvendo a expansão derivativa, inclusive para sistemas de férmions e/ou campos de calibre [26], mas nenhuma de maneira sistemática como a expansão derivativa para o campo escalar.

Outra possibilidade de aplicação do GRE é na análise da renormalizabilidade perturbativa de teorias, ou seja, investigar usando o GRE se uma dada teoria é renormalizável perturbativamente ou não [5, 24, 27]. Tal possibilidade foi primeiramente explorada por Polchinski em 1984 [5], que forneceu uma prova alternativa de que a teoria ϕ^4 em $d = 4$ é renormalizável perturbativamente. Os argumentos, seguindo o método de Polchinski para a prova de renormalizabilidade perturbativa, podem ser estendidos para teorias mais gerais, desde que o corte Λ respeite as simetrias da teoria[24].

⁷ t grande na equação acima não deve parecer estranho, pois implica λ pequeno e também momentos baixos, $\Lambda(t) \rightarrow 0$, ou seja, a região próxima do ponto fixo trivial, que tratamos usualmente quando estudamos o grupo de renormalização perturbativo, via equação de Callan-Symanzik, etc.

Dentro de tal contexto, estudos recentes [39] utilizaram o GRE nos moldes de Polchinski para demonstrar a renormalizabilidade perturbativa da teoria ϕ^4 não-comutativa em $d = 4$. Apresentamos abaixo a equação de Polchinski, pois utilizaremos no próximo capítulo uma equação equivalente a ela como base para estudar a renormalizabilidade perturbativa da teoria ϕ^6 em $d = 3$.

1.3.2 Equação de Polchinski.

As diversas equações do GRE diferem basicamente pela maneira que é introduzido o corte, ou seja, se é um corte nítido (Λ_0 diretamente na ação) ou suave (função reguladora suave introduzida no propagador). O corte nítido, que ocorre na equação de Wegner-Houghton, é equivalente a uma função degrau de Heaviside introduzida no propagador, separando modos de altos momentos daqueles de baixos momentos, sem nenhuma intersecção entre essas duas regiões. Dada $S(t)$ ⁸

$$S(t) = \frac{1}{2} \int_p p^2 \varphi_p \varphi_{-p} + S_{int}[\varphi], \quad (1.85)$$

a abordagem de Polchinski [5] originariamente consistia na introdução de um corte no propagador, $\frac{1}{p^2} \rightarrow \frac{K(p^2)}{p^2}$ levando à chamada equação de Polchinski para a ação $S(t)$:

$$\frac{dS}{dt} = \int_q \frac{\partial K(q^2)}{\partial q^2} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_q \delta \varphi_{-q}} - \frac{\delta S}{\delta \varphi_q} \frac{\delta S}{\delta \varphi_{-q}} + \frac{2q^2}{K(q^2)} \varphi_q \frac{\delta S}{\delta \varphi_q} \right), \quad (1.86)$$

em que $K(q^2)$ é uma função reguladora suave, como em [5, 17, 24]. Estamos escrevendo a equação já em quantidades adimensionais, conforme estivemos procedendo neste capítulo. Polchinski utilizou quantidades com dimensão e apresentou originalmente a equação apenas para a parte da ação de interação, razão pela qual sua equação não apresenta o terceiro termo da equação na forma acima (que surge ao passarmos de derivadas com relação a Λ para derivadas com respeito a t e considerarmos a ação incluindo a parte quadrática nos campos). A equação acima é deduzida de maneira simples, embora um pouco trabalhosa, utilizando o fato de que a função de partição (ou o funcional gerador, em TQC) deve ser invariante pela mudança do corte, ou seja, devemos ter $\frac{dZ}{dt} = 0$. Calculando-se a derivada de Z com respeito a t , tem-se:

$$\frac{dZ}{dt} = \int \mathcal{D}\varphi \left[-\frac{1}{2} \int_p \varphi_p \varphi_{-p} p^2 \frac{dK^{-1}}{dt} - \frac{dS_{int}}{dt} \right] e^{-S(t)}. \quad (1.87)$$

Daí, impondo-se a condição *ad hoc*⁹

$$\frac{dS_{int}}{dt} = \int_q \frac{dK(q^2)}{dq^2} \left[\frac{\delta S_{int}}{\delta \varphi_q} \frac{\delta S_{int}}{\delta \varphi_{-q}} - \frac{\delta^2 S_{int}}{\delta \varphi_q \delta \varphi_{-q}} \right], \quad (1.88)$$

⁸Por simplicidade estamos considerando aqui massa nula ou $m^2 \ll \Lambda^2$, de modo que o termo de massa esteja incluído no termo S_{int} , como perturbação. Este detalhe não altera a dedução da equação, que originariamente foi deduzida para o caso massivo.

⁹Esta condição também é chamada, às vezes, de equação de Polchinski.

obtém-se, após substituição no funcional gerador, que a derivada de \mathcal{Z} é escrita como:

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dt} = \int_p 2p^2 \frac{dK(p^2)}{dp^2} \int \mathcal{D}\varphi \frac{\delta}{\delta\varphi_p} \left[\varphi_p K^{-1} + \frac{1}{2p^2} \frac{\delta}{\delta\varphi_{-p}} \right] e^{-S(t)} = 0. \quad (1.89)$$

Se incluirmos, finalmente, o reescalonamento, temos a equação em sua forma mais geral: ¹⁰

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = & \frac{1}{2}(2 - d - \eta) \int_q \varphi_q \frac{\delta S}{\delta\varphi_q} + dS - \int_q \varphi_q q^\mu \frac{\partial'}{\partial q^\mu} \frac{\delta S}{\delta\varphi_q} - \\ & - \int_q \frac{\partial K(q^2)}{\partial q^2} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_q \delta\varphi_{-q}} - \frac{\delta S}{\delta\varphi_q} \frac{\delta S}{\delta\varphi_{-q}} + \frac{2q^2}{K(q^2)} \varphi_q \frac{\delta S}{\delta\varphi_q} \right). \end{aligned} \quad (1.90)$$

Outra equação bastante usada em aplicações com o GRE é a equação para a evolução da ação efetiva de Legendre Γ , que se apresenta de diversas formas –uma revisão que discute as várias equações de GRE é [17]. Uma das formas de equação para a ação efetiva Γ que é equivalente à equação de Polchinski é utilizada no próximo capítulo para re-obter a expansão perturbativa para a teoria ϕ^6 em $d = 3$ e provar a sua renormalizabilidade perturbativa, como exemplo de aplicação do GRE.

¹⁰Como é apresentada em [25]; nesta forma ela é mais apropriada para aproximações. Para nossos propósitos, no entanto, no próximo capítulo será suficiente considerarmos o equivalente à equação (1.88).

Capítulo 2

Renormalizabilidade perturbativa de ϕ^6 em $(2+1)D$

Apresentamos no fim do último capítulo a equação de Polchinski [5], que foi originariamente usada para fornecer uma prova alternativa de que a teoria ϕ^4 é renormalizável perturbativamente. Há abordagens diferentes da de Polchinski, que levam a outras equações, que são, no entanto, equivalentes do ponto de vista do estudo da renormalizabilidade perturbativa da teoria. Em outras palavras, tais abordagens permitem aplicar um método semelhante ao de Polchinski, mas ligeiramente mais intuitivo, como o utilizado por Bonini *et al.* [27], e também por Griguolo & Pietroni [39], e que descrevemos abaixo. Vamos considerar especificamente o caso da teoria ϕ^6 , cuja versão não-comutativa pretendemos abordar no próximo capítulo. Neste capítulo vamos utilizar o método de [27] para demonstrar de uma maneira alternativa a renormalizabilidade perturbativa da teoria no caso comutativo. O argumento segue a partir da introdução de cortes –uma característica do GRE, como vimos– e subtrações que são definidas naturalmente ao separarmos as partes “relevantes” e “irrelevantes” das funções de vértice. Através da resolução iterativa das equações do GRE, que vamos desenvolver abaixo, mostra-se então que funções de vértice em qualquer ordem de perturbação são finitas no UV, ou seja, a renormalizabilidade perturbativa da teoria.

2.1 Equação do Grupo de renormalização para a ação efetiva de Legendre.

O ponto de partida é o funcional gerador da teoria ϕ^6 com cortes IV e UV:

$$Z_\Lambda[J] = e^{W_\Lambda[J]} = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_p D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1} \phi_p \phi_{-p} - S_{int}[\phi] + \int_p J_p \phi_{-p} \right\}, \quad (2.1)$$

em que $D_{\Lambda\Lambda_0} = \frac{K_{\Lambda\Lambda_0}(p)}{p^2 + m^2}$, com $K_{\Lambda\Lambda_0}(p) = 1$ para $\Lambda^2 \leq p^2 < \Lambda_0^2$ e se anulando rapidamente fora deste intervalo (estamos agora trabalhando com quantidades com dimensão,

ao contrário de anteriormente). O termo S_{int} é dado por :

$$S_{int}[\phi] = \frac{1}{2} \int_p (\gamma_2(\Lambda_0)p^2 + \gamma_3(\Lambda_0)) \phi_p \phi_{-p} + \frac{\gamma_4(\Lambda_0)}{4!} \int_{p_1} \cdots \int_{p_4} \phi_{p_1} \cdots \phi_{p_4} \hat{\delta}(p_1 + \cdots + p_4) + \frac{\gamma_6(\Lambda_0)}{6!} \int_{p_1} \cdots \int_{p_6} \phi_{p_1} \cdots \phi_{p_6} \hat{\delta}(p_1 + \cdots + p_6). \quad (2.2)$$

Note que estamos agora trabalhando especificamente em $d = 3$, assim todos os momentos são tridimensionais e ainda euclidianos, como antes. Em (2.2) temos os acoplamentos¹ $\gamma_i^B = \gamma_i(\Lambda_0)$ nus (não-renormalizados) da teoria. Eles são obtidos em termos das funções $\gamma^i(\lambda)$ –que serão definidas mais adiante– através das condições de contorno $\gamma_i^B = \gamma^i(\lambda = \Lambda_0)$, conforme é explicado na próxima seção. Essas condições de contorno deverão reproduzir exatamente as condições de normalização da teoria –que é o que garantirá, em última instância, que as partes infinitas de γ_B^i forneçam os contratermos necessários para tornar as funções de Green da teoria finitas.

A partir de (2.1) deduzimos a equação a que o funcional gerador da teoria satisfaz quando muda-se o corte Λ , e, conseqüentemente, obtém-se a equação para a variação da ação sob mudanças de Λ .

Para o funcional gerador obtém-se a equação

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} Z_\Lambda[J] = -\frac{1}{2} \int_q \Lambda \frac{\partial D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}(q)}{\partial \Lambda} \frac{\delta^2 Z_\Lambda[J]}{\delta J_q \delta J_{-q}}, \quad (2.3)$$

por derivação direta do funcional gerador. É conveniente considerarmos a ação efetiva de Legendre, definida como

$$\Gamma_\Lambda[\varphi] = -W_\Lambda[J] + W_\Lambda[0] + \int_q \varphi_q J_{-q}, \quad (2.4)$$

em que $\varphi_p = \frac{\delta W_\Lambda[J]}{\delta J_{-p}}$ é o campo clássico. Lembremos que estamos incluindo fatores de $(2\pi)^3$ nas derivadas funcionais, ou seja, escrevemos $\frac{\delta}{\delta J_p}$, por exemplo, mas significando $(2\pi)^3 \frac{\delta}{\delta J_p}$, para não termos que escrever sempre fatores adicionais ao fazer as operações inversas de integrar (com $\int_p = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$) e efetuar derivadas funcionais. O segundo termo na equação acima é a contribuição para a ação efetiva dos diagramas relacionados à energia do vácuo (ou fator de normalização do funcional gerador) explicitamente subtraída. Assumimos também que a fonte J_q depende de Λ de tal maneira que o último termo acima seja independente de Λ , ou seja, ajustamos uma fonte de tal modo a “compensar” a dependência do campo clássico em Λ nesse termo.

¹Ou fator de renormalização da função de onda, no caso de γ_2 , $1 + \gamma_2 = Z_\phi$; ou ainda massa ao quadrado, no caso de γ_3 , mas vamos nos referir a estas quantidades genericamente como “acoplamentos”.

Derivando (2.4) obtemos, então

$$\begin{aligned} & \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left\{ \Gamma_\Lambda[\varphi] - \frac{1}{2} \int_q D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}(q) \varphi_q \varphi_{-q} \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \int_q \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}(q) \frac{\delta^2 W_\Lambda[J]}{\delta J_q \delta J_{-q}} + \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} W_\Lambda[0]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Para colocar essa equação numa forma apropriada para o desenvolvimento perturbativo, utilizamos a expansão da ação efetiva

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=1} \frac{1}{(2n)!} \int_{p_1 \dots p_{2n}} \varphi_{p_1} \dots \varphi_{p_{2n}} \Gamma_{2n}(p_1, \dots, p_{2n}) \hat{\delta} \left(\sum_{i=1}^{2n} p_i \right), \quad (2.6)$$

e usamos o fato de que o núcleo² da função de dois pontos $\frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_q \delta \varphi_{q'}}$ satisfaz a relação:

$$\int_{q''} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi_q \delta \varphi_{q''}} \frac{\delta^2 W}{\delta J_{-q''} \delta J_{q'}} = \hat{\delta}(q + q'). \quad (2.7)$$

Substituindo em (2.7) as expressões abaixo –em que separamos nos núcleos as partes independentes do campo clássico φ :

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_q \delta \varphi_{q'}} &= \hat{\delta}(q + q') \Gamma_\Lambda^2(q) + \Gamma_{int}^2[q, q', \varphi] \\ \frac{\delta^2 W_\Lambda[J]}{\delta J_q \delta J_{q'}} &= \hat{\delta}(q + q') \frac{1}{\Gamma_\Lambda^2(q)} + W_{int}^2[q, q', J], \end{aligned} \quad (2.8)$$

obtemos uma relação que nos permite eliminar W_{int}^2 da equação de evolução de Γ , (2.5). Essa relação é

$$W_{int}^2[q, q', J] = -\frac{1}{\Gamma_\Lambda^2(q)} \bar{\Gamma}[q, q', \varphi] \frac{1}{\Gamma_\Lambda^2(q')}, \quad (2.9)$$

em que o funcional auxiliar $\bar{\Gamma}$ é definido recursivamente pela equação

$$\bar{\Gamma}[q, q', \varphi] = \Gamma_{int}^2[q, q', \varphi] - \int_{q''} \Gamma_{int}^2[q, -q'', \varphi] \frac{1}{\Gamma_\Lambda^2(q'')} \bar{\Gamma}[q'', q', \varphi]. \quad (2.10)$$

Usamos agora uma expansão semelhante a (2.6) para $\bar{\Gamma}[q, q', \varphi]$:

$$\bar{\Gamma}[\varphi, q, q'] = \sum_{n=1} \frac{1}{(2n)!} \int_{p_1 \dots p_{2n}} \varphi_{p_1} \dots \varphi_{p_{2n}} \bar{\Gamma}_{2n+2}(p_1, \dots, p_{2n}, q, q') \hat{\delta} \left(\sum_{i=1}^{2n} p_i + q + q' \right), \quad (2.11)$$

²Relembrando que a função de vértice própria de dois pontos é dada de (2.6) por $\left. \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_q \delta \varphi_{q'}} \right|_{\varphi=0} = \Gamma^2(q, q')$.

e substituímos em (2.10) ambas expansões de $\bar{\Gamma}$ e Γ , (2.6) e (2.11). Comparamos então, em ambos membros, os coeficientes de termos com potências iguais de φ_{p_i} , para obter a relação abaixo, entre os vértices auxiliares $\bar{\Gamma}_{\Lambda}^{2n+2}(q, p_1, \dots, p_{2n}, q')$ e os vértices próprios:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\Lambda\Lambda_0}^{2n+2}(q, p_1, \dots, p_{2n}, q') &= \Gamma_{\Lambda\Lambda_0}^{2n+2}(q, p_1, \dots, p_{2n}, q') - \\ &- \sum_{l=1}^{n-1} \Gamma_{\Lambda\Lambda_0}^{2l+2}(q, p_{i_1}, \dots, p_{i_{2l}}, -Q) \frac{1}{\Gamma_{\Lambda\Lambda_0}^2(Q)} \bar{\Gamma}_{\Lambda\Lambda_0}^{2n-2l+2}(Q, p_{i_{2l+1}}, \dots, p_{i_{2n}}, q'), \end{aligned} \quad (2.12)$$

na qual $Q = q + p_{i_1} + \dots + p_{i_{2l}}$ e a soma também é sobre todas as $\binom{2n}{2l}$ combinações dos $(i_1 \dots i_{2n})$. Notemos que surge no processo de comparação dos coeficientes uma soma também sobre as combinações dos p_i , porque como o membro esquerdo da equação (2.12) é simétrico na troca dos p_i , o lado direito também deverá ser simétrico –antes de compararmos os coeficientes não era necessário nos preocuparmos com isso, pois as variáveis p_i estavam todas integradas e, por isso, eram indistinguíveis. Na figura (2.1) ilustramos graficamente a equação (2.12) Mais um comentário que ajuda a esclarecer a equação (2.12) é que, se observarmos que o lado direito contém um vértice auxiliar de um número de pontos sempre menor que o do lado esquerdo ($2n + 2 - 2l \leq 2n + 2$), e inserirmos então a definição de vértice auxiliar no vértice auxiliar do lado direito e repetirmos o processo várias vezes, o processo em um dado momento termina e ficamos com uma expressão para o vértice auxiliar apenas em termos das funções próprias de vértice. O resultado desse processo mostramos graficamente nas figuras (2.1) e (2.2). Em particular, para Γ^4 e Γ^6 temos, por exemplo,

$$\bar{\Gamma}_{\Lambda}^4(p_1, p_2, q, q') = \Gamma_{\Lambda}^4(p_1, p_2, q, q') \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\Lambda}^6(p_1, p_2, p_3, p_4, q, q') &= \Gamma_{\Lambda}^6(p_1, p_2, p_2, p_3, p_4, q, q') + \\ &+ \Gamma_{\Lambda}^4(p_1, p_2, q, -Q) \frac{1}{\Gamma_{\Lambda}^2(Q)} \Gamma_{\Lambda}^4(p_3, p_4, Q, q') + \\ &+ \Gamma_{\Lambda}^4(p_1, p_3, q, -Q') \frac{1}{\Gamma_{\Lambda}^2(Q')} \Gamma_{\Lambda}^4(p_2, p_4, Q', q') + \\ &+ \Gamma_{\Lambda}^4(p_1, p_4, q, -Q'') \frac{1}{\Gamma_{\Lambda}^2(Q'')} \Gamma_{\Lambda}^4(p_2, p_3, Q'', q') + \\ &+ \dots + \Gamma_{\Lambda}^4(p_2, p_3, q, -Q^{(m)}) \frac{1}{\Gamma_{\Lambda}^2(Q^{(m)})} \Gamma_{\Lambda}^4(p_1, p_4, Q^{(m)}, q'), \end{aligned} \quad (2.14)$$

em que, por conservação de momento, $Q = p_1 + p_2 + q$, $Q' = p_1 + p_3 + q$, e assim por diante. Ilustramos na figura (2.2) os casos de Γ^6 e Γ^8 . Em tal figura, a soma para o vértice auxiliar de seis pontos, contém, além do primeiro, mais seis termos –relativos às combinações dos momentos externos, conforme explicamos logo abaixo da equação (2.12)–, alguns dos quais foram omitidos e indicados por reticências. Já a soma para

The diagram shows an equation defining auxiliary vertices (hatched squares) in terms of proper vertices (hatched circles). The left side is a hatched square with four external lines: two incoming lines labeled q and q' , and two outgoing lines labeled p_1 and p_{2n} . This is equal to a hatched circle with the same four external lines, minus a sum over all possible partitions of the two outgoing lines. The first term in the sum is a hatched circle with two outgoing lines $p_{i_{2l}}$ and $p_{i_{2l+1}}$, connected to a hatched square with two incoming lines Q and Q' , and two outgoing lines $p_{i_{2l+1}}$ and $p_{i_{2n}}$. The second line of the equation shows a hatched circle with two outgoing lines p_1 and p_{2n} , plus a sum over all partitions $\{\alpha\}$ of the two outgoing lines. Each term in the sum is a hatched circle with two outgoing lines α_1 and α_k , connected to a chain of hatched circles with two outgoing lines Q_{α_1} and Q_{α_2} , and so on, up to α_k .

Figura 2.1: Equação de definição dos vértices auxiliares (quadrados hachurados) em termos dos vértices próprios (círculos hachurados). A soma escrita na primeira linha é sobre as $\binom{2n}{2l}$ combinações dos $(p_{i_1}, \dots, p_{i_{2n}})$. Iterando essa equação obtemos a linha de baixo, em que a soma escrita sobre α é sobre todas as combinações de momentos em vértices tais que α_i seja um subconjunto de p_j , $j = 1 \dots 2n$ e a união dos α_i , $i = 1 \dots k$ seja o conjunto p_j , $j = 1 \dots 2n$. Esta última soma contém alguns termos com sinais negativos e outros positivos, como no caso da função de oito pontos figura seguinte; estes sinais relativos surgem do processo de iteração.

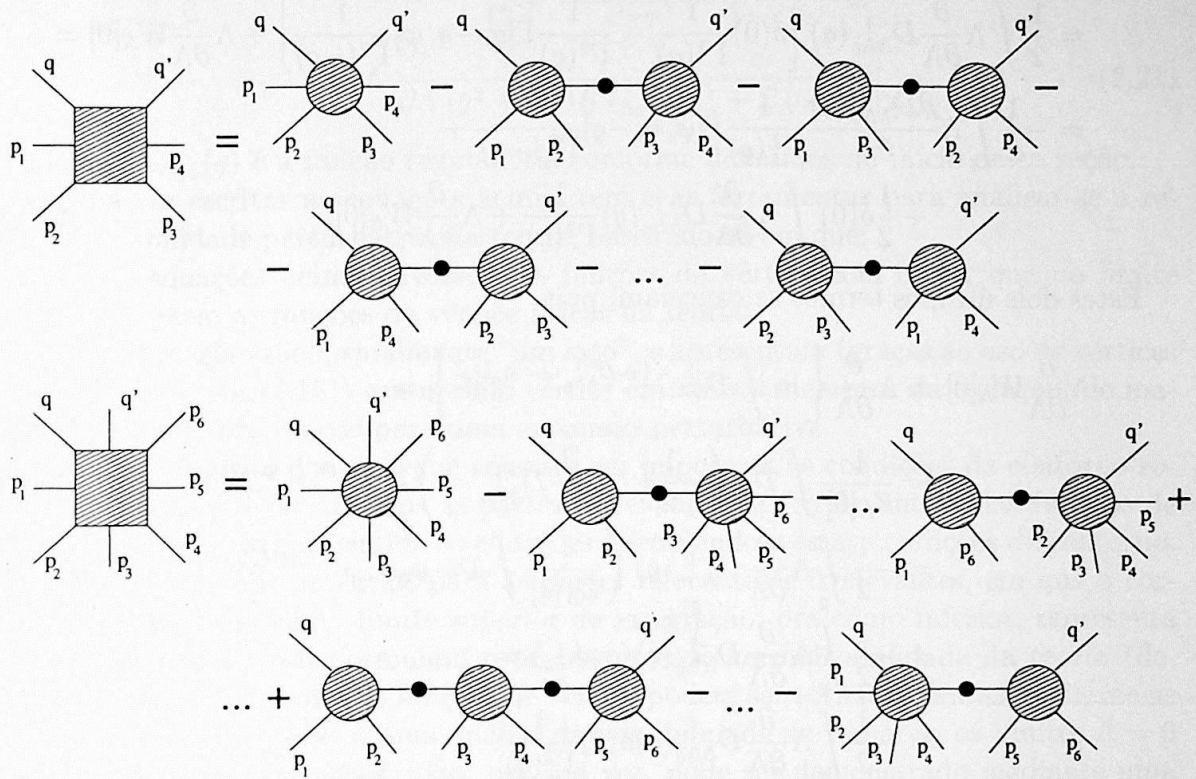


Figura 2.2: Exemplos de vértices auxiliares (quadrados sombreados) de seis e oito pontos. Cada propagador que corre nas linhas marcadas com um círculo preto é completo $-\text{inverso de } \Gamma^2-$ e carrega, por conservação de momento, o momento total vindo dos vértices que estão à sua esquerda.

o vértice auxiliar de oito pontos contém ao todo $15 + 15 \times 6 + 15 = 120$ termos, além do primeiro.

A equação para a ação efetiva, em termos do funcional auxiliar $\bar{\Gamma}$, se torna, então

$$\begin{aligned}
& \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left\{ \Gamma_{\Lambda}[\varphi] - \frac{1}{2} \int_q D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}(q) \varphi_q \varphi_{-q} \right\} = \\
& = \frac{1}{2} \int_q \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}(q) \frac{\delta^2 W_{\Lambda}[J]}{\delta J_q \delta J_{-q}} + \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} W_{\Lambda}[0] = \\
& = \frac{1}{2} \int_q \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}(q) \left[\hat{\delta}(0) \frac{1}{\Gamma^2(q)} - \frac{1}{\Gamma^2(q)} \bar{\Gamma}[q, -q, \varphi] \frac{1}{\Gamma^2(-q)} \right] + \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} W_{\Lambda}[0] = \\
& = -\frac{1}{2} \int_q \Lambda \frac{\partial D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}(q)}{\partial \Lambda} \frac{1}{\Gamma_{\Lambda}^2(q)} \bar{\Gamma}[\varphi, q, -q] \frac{1}{\Gamma_{\Lambda}^2(-q)} + \\
& \quad + \frac{1}{2} \hat{\delta}(0) \int_q \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}(q) \frac{1}{\Gamma^2(q)} + \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} W_{\Lambda}[0]. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Estes dois últimos termos se cancelam, pois

$$\begin{aligned}
\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} W_{\Lambda}[0] & = \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left\{ \ln \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \phi \cdot D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1} \cdot \phi - S_{int}[\phi]} \right\} = \tag{2.16} \\
& = \frac{1}{Z_{\Lambda}[0]} \int \mathcal{D}\phi \left(-\frac{1}{2} \phi \cdot \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1} \cdot \phi \right) e^{-\frac{1}{2} \phi \cdot D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1} \cdot \phi - S_{int}[\phi]} = \\
& = -\frac{1}{2} \int_q \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}(q) \left(\frac{1}{Z_{\Lambda}[0]} \int \mathcal{D}\phi \phi_q \phi_{-q} e^{-\frac{1}{2} \phi \cdot D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1} \cdot \phi - S_{int}[\phi]} \right) = \\
& = -\frac{1}{2} \int_q \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}(q) \langle \phi_q \phi_{-q} \rangle = \\
& = -\frac{1}{2} \int_q \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}(q) \hat{\delta}(0) \frac{1}{\Gamma^2(q)}. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Obtemos, então:

$$\begin{aligned}
& \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left\{ \Gamma_{\Lambda}[\varphi] - \frac{1}{2} \int_q D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}(q) \varphi_q \varphi_{-q} \right\} = \\
& = -\frac{1}{2} \int_q \Lambda \frac{\partial D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}(q)}{\partial \Lambda} \frac{1}{\Gamma_{\Lambda}^2(q)} \bar{\Gamma}[\varphi, q, -q] \frac{1}{\Gamma_{\Lambda}^2(-q)}. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Utilizando agora a definição dos vértices próprios (2.6), podemos escrever as equações ("recursivas", pois uma dada função de vértice aparece em ambos membros de cada equação, o que as torna apropriadas para uma solução perturbativa) satisfeitas por cada uma das funções de vértice:

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Sigma_{\Lambda\Lambda_0}(q) = \frac{1}{2} \int_q \frac{S_{\Lambda\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \Gamma_{\Lambda\Lambda_0}^4(q, p, -p, -q) \tag{2.19}$$

em que m é a massa física e $\Gamma_{\Lambda\Lambda_0}^2(p) = D_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}(p) + \Sigma_{\Lambda\Lambda_0}(p)$. Para os vértices $\Gamma_{\Lambda\Lambda_0}^{2n}$, $n \geq 2$ tem-se

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Gamma_{\Lambda\Lambda_0}^{2n} = \frac{1}{2} \int_q \frac{S_{\Lambda\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \bar{\Gamma}_{\Lambda\Lambda_0}^{2n+2}(q, p_1, \dots, p_{2n}, -q). \quad (2.20)$$

Em ambas equações anteriores, temos o “propagador”:

$$\begin{aligned} \frac{S_{\Lambda\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} &= \frac{1}{q^2 + m^2} \frac{1}{\left[1 + \frac{K_{\Lambda\Lambda_0}(q)\Sigma_{\Lambda\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2}\right]^2} \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} K_{\Lambda\Lambda_0}(q) = \\ &= \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \frac{1}{(q^2 + m^2)K_{\Lambda\Lambda_0}(q)^{-1} + \Sigma_{\Lambda'\Lambda_0}(q)} \Big|_{\Lambda'=\Lambda} \end{aligned} \quad (2.21)$$

no qual $K_{\Lambda\Lambda_0}(q)$ é a função reguladora, conforme definimos no início desta seção.

Uma vez escritas as equações acima, temos as ferramentas para analisar-se a renormalizabilidade perturbativa da teoria, baseando-se em que:

1) As equações acima envolvem as funções de vértice com corte, que no limite $\Lambda = 0$ fornecem as funções de vértice físicas da teoria;

2) As equações são formalmente “um laço”, e apresentam (graças ao uso de vértices auxiliares $\bar{\Gamma}^{2n}$ em (2.15)) um mesmo vértice em ambos membros da equação, de maneira que são apropriadas para uma expansão perturbativa.

O procedimento que se segue consiste em impormos as condições de contorno sobre as equações, e separarmos as partes “relevantes” e “irrelevantes” das funções de vértice, integrando em seguida as equações obedecendo a essas condições de contorno. Isso leva a equações integrais para as partes relevantes e irrelevantes, em que o corte Λ , atuando ora como limite superior de integração, ora como inferior, representa diferentes papéis, transformando o problema da renormalizabilidade da teoria (demonstração de que todas as funções de vértice podem ser tornadas finitas mediante as apropriadas subtrações) a uma análise da possibilidade de tomar-se os limites $\Lambda = 0$ e $\Lambda_0 \rightarrow \infty$ nessas equações. Isso, por sua vez, pode ser demonstrado mediante uma análise dimensional dessas equações, o resultado sendo válido, por indução finita, a qualquer ordem de perturbação. Detalharemos abaixo este procedimento.

2.2 Condições de contorno.

Na seção anterior escrevemos as equações diferenciais para o funcional gerador com cortes infravermelho e ultravioleta e para as funções de Green, também com cortes. Estas não são, portanto, as funções de Green físicas da teoria. Como nossa construção absorve as divergências ultravioleta no corte Λ_0 , e além disso introduzimos o corte infravermelho Λ , as funções de Green físicas serão obtidas nos limites (que deverão ser finitos para uma teoria que seja renormalizável):

$$\Gamma^2(p) = \lim_{\substack{\Lambda \rightarrow 0 \\ \Lambda_0 \rightarrow \infty}} \Gamma_{\Lambda\Lambda_0}^2(p) \quad (2.22)$$

$$\Gamma^4(p_1, \dots, p_4) = \lim_{\substack{\Lambda \rightarrow 0 \\ \Lambda \rightarrow \infty}} \Gamma_{\Lambda \Lambda_0}^4(p_1, \dots, p_4) \quad (2.23)$$

e assim por diante. Já a ação “física”, ou seja, aquela que tem os acoplamentos com os quais as funções de Green acima (que deverão ser finitas) serão computadas, é aquela que contém os acoplamentos nus (“bare couplings”) como na teoria de perturbação usual:

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \frac{1}{2} \int_p ((1 + \gamma_2^B)p^2 + (m^2 + \gamma_3^B)) \phi_p \phi_{-p} + \\ &+ \frac{\gamma_4^B}{4!} \int_{p_1} \cdots \int_{p_4} \phi_{p_1} \cdots \phi_{p_4} \hat{\delta}(p_1 + \cdots + p_4) + \\ &+ \frac{\gamma_6^B}{6!} \int_{p_1} \cdots \int_{p_6} \phi_{p_1} \cdots \phi_{p_6} \hat{\delta}(p_1 + \cdots + p_6). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Notemos que, com relação à notação usualmente adotada em renormalização perturbativa, $1 + \gamma_2^B = Z_\phi$ e $m_B^2 = \frac{m^2 + \gamma_3^B}{1 + \gamma_2^B}$, de modo que m^2 é a massa física ao quadrado; também $g_4^B = \frac{\gamma_4^B}{(1 + \gamma_2^B)^2}$ e $g_6^B = \frac{\gamma_6^B}{(1 + \gamma_2^B)^3}$, a renormalização da intensidade de campo sendo $\phi_p^B = (1 + \gamma_2^B)^{1/2} \phi_p$. Cada um dos acoplamentos acima é obtido de $\gamma_i^B = \gamma_i(\lambda = \Lambda_0)$ e é infinito no limite $\Lambda_0 \rightarrow \infty$,³ mas de tal modo que a parte infinita de cada um fornece o contratermo que cancelará a parte divergente da função de Green respectiva (o contratermo bilinear cancela a parte divergente da função de dois pontos, e assim por diante, como é conhecido). Para que tais cancelamentos se dêem de maneira correta, é necessário impor as condições de normalização⁴:

$$\Sigma(p^2 = \mu^2) = 0 \quad (2.25)$$

$$\left. \frac{d\Sigma}{dp^2} \right|_{p^2 = \mu^2} = 0 \quad (2.26)$$

$$\Gamma^4(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_4) = 0 \quad (2.27)$$

$$\Gamma^6(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_6) = g, \quad (2.28)$$

$$(2.29)$$

³Estamos escrevendo aqui λ minúsculo, para enfatizar que λ é uma variável. Os $\gamma_i(\lambda)$ deverão satisfazer equações integrais que mostraremos abaixo.

⁴Ou, em outras palavras, para que as subtrações fossem definidas de modo unívoco, se estivéssemos utilizando um esquema perturbativo de regularização-subtração-renormalização, como BPHZ, por exemplo.

ou, equivalentemente,

$$\Gamma^2(p^2 = \mu^2) = m^2 + \mu^2 \quad (2.30)$$

$$\left. \frac{d\Gamma^2(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=\mu^2} = 1 \quad (2.31)$$

$$\Gamma^4(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_4) = 0 \quad (2.32)$$

$$\Gamma^6(\bar{\bar{p}}_1, \dots, \bar{\bar{p}}_6) = g, \quad (2.33)$$

em que \bar{p}_i e $\bar{\bar{p}}_j$ são momentos de referência, tais que $\bar{p}_i \cdot \bar{p}_j = \mu^2 c_{ij}$ e $\bar{\bar{p}}_i \cdot \bar{\bar{p}}_j = \mu^2 c'_{ij}$, com c_{ij} e c'_{ij} constantes convenientemente escolhidas. Na teoria ϕ^4 em $d = 4$ os \bar{p}_i podem ser escolhidos de modo que $\bar{p}_i \cdot \bar{p}_j = \mu^2 \frac{1}{3} (4\delta_{ij} - 1)$ como em [31], por exemplo. Para reescrevermos essas condições em termos das funções de Green com cortes Λ e Λ_0 (às quais passaremos a nos referir como funções de Green cortadas) é conveniente separarmos as partes que possivelmente conterão dependência não negativa em λ . Assim, utilizando expansão de Taylor em torno dos pontos μ^2 , \bar{p}_i e $\bar{\bar{p}}_i$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\lambda\Lambda_0}(p) &= \gamma^3(\lambda) + (p^2 - \mu^2)\gamma^2(\lambda) + \Delta_{\lambda\Lambda_0}^2(p) \\ \Gamma_{\lambda\Lambda_0}^4(p_i) &= \gamma^4(\lambda) + \Delta_{\lambda\Lambda_0}^4(p_i) \\ \Gamma_{\lambda\Lambda_0}^6(p_i) &= \gamma^6(\lambda) + \Delta_{\lambda\Lambda_0}^6(p_i) \end{aligned} \quad (2.34)$$

de onde definimos o vértices “relevantes” (têm a mesma dimensão que λ elevado a alguma potência não-negativa):

$$\begin{aligned} \gamma^2(\lambda) &= \left. \frac{d\Sigma_{\lambda\Lambda_0}(p)}{dp^2} \right|_{p^2=\mu^2} \\ \gamma^3(\lambda) &= \Sigma_{\lambda\Lambda_0}(p)|_{p^2=\mu^2} \\ \gamma^4(\lambda) &= \Gamma_{\lambda\Lambda_0}^4(\bar{p}_i) \\ \gamma^6(\lambda) &= \Gamma_{\lambda\Lambda_0}^6(\bar{\bar{p}}_i) \end{aligned} \quad (2.35)$$

e os demais termos, chamados vértices “irrelevantes”, são tais que $\Delta_{\lambda\Lambda_0}^2(p)|_{p^2=\mu^2} = 0$, $\Delta_{\lambda\Lambda_0}^4(\bar{p}_i) = 0$ e $\Delta_{\lambda\Lambda_0}^6(\bar{\bar{p}}_i) = 0$.

As equações diferenciais que temos para $\Sigma(\lambda)$ e $\Gamma^{2n}(\lambda)$ são de primeira ordem e necessitam, portanto, de uma condição inicial cada uma, que escolheremos de modo a reproduzir as condições de normalização acima, obviamente. Como vamos, no entanto, considerar equações diretamente para os vértices $\gamma^i(\lambda)$ e $\Delta_{\lambda\Lambda_0}^{2n}$, é suficiente observarmos que as condições (2.30) a (2.33) são reproduzidas se impusermos:

$$\begin{aligned} \gamma^2(\lambda = 0) &= 0, & \gamma^3(\lambda = 0) &= 0, \\ \gamma^4(\lambda = 0) &= 0 & \text{e} & \gamma^6(\lambda = 0) = g. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ou seja, impomos que os acoplamentos renormalizados sejam dados em $\lambda = 0$.

É conveniente escrevermos as equações abaixo, para cada vértice relevante e irrelevante, de tal modo que, confrontando com (2.34), vemos que elas implicam as equações que tínhamos anteriormente para $\Sigma_{\lambda\Lambda_0}$ e $\Gamma_{\lambda\Lambda_0}^{2n}$:

$$\begin{aligned}
\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \gamma^2(\lambda) &= \frac{1}{2} \int_q \frac{S_{\lambda\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_{\lambda\Lambda_0}^4(q, p, -p, -q) \Big|_{p^2=\mu^2} \\
\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \gamma^3(\lambda) &= \frac{1}{2} \int_q \frac{S_{\lambda\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \Gamma_{\lambda\Lambda_0}^4(q, p, -p, -q) \Big|_{p^2=\mu^2} \\
\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \gamma^4(\lambda) &= \frac{1}{2} \int_q \frac{S_{\lambda\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \bar{\Gamma}_{\lambda\Lambda_0}^6(q, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_4 - q) \\
\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \gamma^6(\lambda) &= \frac{1}{2} \int_q \frac{S_{\lambda\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \bar{\Gamma}_{\lambda\Lambda_0}^8(q, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_6, -q)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

e

$$\begin{aligned}
\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta_{\lambda\Lambda_0}^2(p) &= \frac{1}{2} \int_q \frac{S_{\lambda\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \Gamma_{\lambda\Lambda_0}^4(q, p, -p, -q) - (p^2 - \mu^2) \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \gamma^2(\lambda) - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \gamma^3(\lambda) \\
\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta_{\lambda\Lambda_0}^4(p_1, \dots, p_4) &= \frac{1}{2} \int_q \frac{S_{\lambda\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \bar{\Gamma}_{\lambda\Lambda_0}^6(q, p_1, \dots, p_4, -q) - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \gamma^4(\lambda) \\
\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta_{\lambda\Lambda_0}^6(p_1, \dots, p_6) &= \frac{1}{2} \int_q \frac{S_{\lambda\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \bar{\Gamma}_{\lambda\Lambda_0}^8(q, p_1, \dots, p_6, -q) - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \gamma^6(\lambda) \\
\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \Gamma_{\lambda\Lambda_0}^{2n}(p_1, \dots, p_{2n}) &= \frac{1}{2} \int_q \frac{S_{\lambda\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \bar{\Gamma}_{\lambda\Lambda_0}^{2n+2}(q, p_1, \dots, p_{2n}, -q), \quad \text{para } n > 3.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Fazendo isto, precisamos, ainda, impor condições iniciais sobre os vértices “irrelevantes” $\Delta_{\lambda\Lambda_0}^{2n}(p_i)$, a exemplo de como fizemos para os “relevantes”, para termos então nossa teoria definida sem ambigüidades. Como desejamos que $\Sigma_{\lambda=\Lambda_0, \Lambda_0}(p)$, $\Gamma_{\lambda=\Lambda_0, \Lambda_0}^4(p_i)$ e $\Gamma_{\lambda=\Lambda_0, \Lambda_0}^6(p_i)$ conttenham como partes divergentes –isto é, com dependência em Λ_0 tal que sejam divergentes quando $\Lambda_0 \rightarrow \infty$ – apenas os termos $\gamma_2(\Lambda_0)$, $\gamma_3(\Lambda_0)$, $\gamma_4(\Lambda_0)$ e $\gamma_6(\Lambda_0)$, que irão constituir os contratermos da ação nua⁵ (“bare”) impomos as condições:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\lambda=\Lambda_0, \Lambda_0}^2(p) &= 0 \\
\Delta_{\lambda=\Lambda_0, \Lambda_0}^4(p_1, \dots, p_4) &= 0 \\
\Delta_{\lambda=\Lambda_0, \Lambda_0}^6(p_1, \dots, p_6) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

⁵É neste sentido que eles são chamados “relevantes”. No limite $\Lambda_0 \rightarrow \infty$ é necessária apenas a especificação destes parâmetros para a definição da teoria.

Também podemos entender estas condições como a restrição de que a ação nua só contenha um número finito de parâmetros a serem especificados, e devemos notar que elas concordam com o requerimento de que numa teoria renormalizável perturbativamente as subtrações gerem contratermos apenas semelhantes àqueles que existem inicialmente na ação. Também do ponto de vista de transformações do GRE, $\lambda = \Lambda_0$ significaria que não foi feita ainda a transformação do GRE, e, portanto, não há “correções radiativas” aos acoplamentos $\gamma_i(\Lambda_0)$ da ação inicial de Wilson –ação com corte Λ_0 , como vimos no capítulo anterior.

Temos agora, então, dadas as equações diferenciais para cada um dos vértices relevantes e irrelevantes, juntamente com as condições iniciais para cada uma das equações. Podemos, portanto, transformá-las no conjunto de equações integrais acopladas:

$$\begin{aligned}
\gamma^2(\lambda) &= \frac{1}{2} \int_0^\lambda \frac{d\lambda'}{\lambda'} \int_q \frac{S_{\lambda'\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma^4(q, p, -p, -q, \lambda') \Big|_{p^2=\mu^2} \\
\gamma^3(\lambda) &= \frac{1}{2} \int_0^\lambda \frac{d\lambda'}{\lambda'} \int_q \frac{S_{\lambda'\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \Gamma^4(q, p, -p, -q; \lambda') \Big|_{p^2=\mu^2} \\
\gamma^4(\lambda) &= \frac{1}{2} \int_0^\lambda \frac{d\lambda'}{\lambda'} \int_q \frac{S_{\lambda'\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \bar{\Gamma}^6(q, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_4, -q; \lambda') \\
\gamma^6(\lambda) &= g + \frac{1}{2} \int_0^\lambda \frac{d\lambda'}{\lambda'} \int_q \frac{S_{\lambda'\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \bar{\Gamma}^8(q, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_6, -q; \lambda') \tag{2.40}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta_{\lambda\Lambda_0}^2(p) &= -\frac{1}{2} \int_\lambda^{\Lambda_0} \frac{d\lambda'}{\lambda'} \int_q \frac{S_{\lambda'\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \Delta \Gamma^4(q, p, -p, -q; \lambda') \\
\Delta_{\lambda\Lambda_0}^4(p_1, \dots, p_4) &= -\frac{1}{2} \int_\lambda^{\Lambda_0} \frac{d\lambda'}{\lambda'} \int_q \frac{S_{\lambda'\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \Delta \bar{\Gamma}^6(q, p_1, \dots, p_4, -q; \lambda') \\
\Delta_{\lambda\Lambda_0}^6(p_1, \dots, p_6) &= -\frac{1}{2} \int_\lambda^{\Lambda_0} \frac{d\lambda'}{\lambda'} \int_q \frac{S_{\lambda'\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \Delta \bar{\Gamma}^8(q, p_1, \dots, p_6, -q; \lambda') \\
\Gamma^{2n}(p_1, \dots, p_{2n}; \lambda', \Lambda_0) &= -\frac{1}{2} \int_\lambda^{\Lambda_0} \frac{d\lambda'}{\lambda'} \int_q \frac{S_{\lambda'\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} \bar{\Gamma}^{2n+2}(q, p_1, \dots, p_{2n}, -q; \lambda'), \quad \text{para } n > 3. \tag{2.41}
\end{aligned}$$

Nas equações para os vértices irrelevantes acima, definimos

$$\begin{aligned}
\Delta\Gamma^4(q, p, -p, -q; \lambda') &= \Gamma^4(q, p, -p, -q; \lambda') - \Gamma^4(q, p, -p, -q; \lambda') \Big|_{p^2=\mu^2} - \\
&\quad - (p^2 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial p'^2} \Gamma^4(q, p', -p', -q; \lambda') \Big|_{p'^2=\mu^2} \\
\Delta\bar{\Gamma}^6(q, p_1, \dots, p_4, -q; \lambda') &= \bar{\Gamma}^6(q, p_1, \dots, p_4, -q; \lambda') - \bar{\Gamma}^6(q, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_4, -q; \lambda') \\
\Delta\bar{\Gamma}^8(q, p_1, \dots, p_6, -q; \lambda') &= \bar{\Gamma}^8(q, p_1, \dots, p_6, -q; \lambda') - \bar{\Gamma}^8(q, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_6, -q; \lambda')
\end{aligned} \tag{2.42}$$

2.3 Iteração das equações e renormalizabilidade.

Obtivemos na seção anterior as equações integrais que as partes relevantes e irrelevantes das funções de vértice –às quais nos referimos por vértices relevantes γ^i e irrelevantes $\Delta\Gamma^{2n}$ – devem satisfazer. É importante observarmos que nessas equações os cortes Λ –que representamos por λ para enfatizar que ele é variável– e Λ_0 têm funções diferentes. λ aparece ora como limite superior nas integrais (no caso dos vértices relevantes), ora como limite inferior (no caso dos vértices irrelevantes), enquanto Λ_0 só aparece como limite superior para as integrais das equações dos vértices irrelevantes. Isto decorre das condições iniciais que impusemos sobre os vértices.

As equações que escrevemos até agora são exatas, no sentido em que nenhuma aproximação foi feita para escrevê-las. Notemos, no entanto, que é necessária alguma solução aproximada ou iterativa pra elas, pois elas apresentam-se acopladas, e nenhuma solução completa é possível de imediato. Uma maneira de lidar com esse acoplamento das equações é percebida notando primeiramente que elas são formalmente equações de um laço, ou seja, um dado vértice é dado pela integral de outro vértice, com um “propagador” do tipo $\frac{S_{\lambda', \Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2}$. Uma solução possível, então, é uma expansão da equações no número de laços, isto é, resolvemos primeiramente as equações usando no segundo membro apenas a expressão a zero-laço, e com isto obtemos todos os vértices a um laço. Em seguida, pode-se tomar a expressão para os vértices a um laço e repetir-se o processo indefinidamente, ou seja, temos uma solução perturbativa das equações, através de uma iteração em laços.

O que precisamos demonstrar a seguir é que as integrais que temos são todas finitas para $\Lambda_0 \rightarrow \infty$ em qualquer ordem dessa expansão perturbativa. As integrais para os vértices relevantes, como pode-se intuir a partir de sua forma, não deverão apresentar problemas, pois elas deverão resultar em algum valor do tipo $\propto \lambda^n$, com $n \geq 0$, já que elas têm λ como limite superior de integração. Realmente isto acontece, como mostraremos abaixo.⁶ Já as integrais para os vértices irrelevantes, mostraremos

⁶Também deveríamos esperar isso com base na própria definição de vértices relevantes, pois, lembrando que eles possivelmente apresentarão dependência em potências positivas de λ , ao fazermos $\lambda = \Lambda_0$, eles deverão fornecer exatamente os contratermos da ação nua.

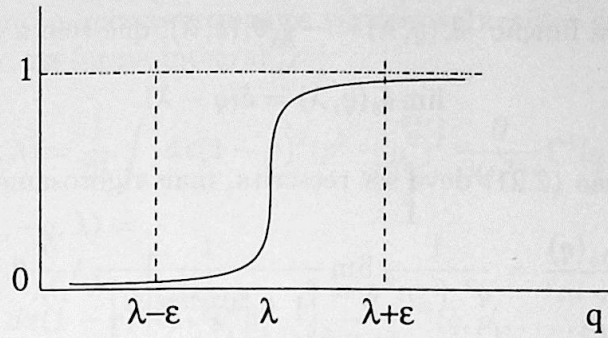


Figura 2.3: Esboço da função reguladora $\theta_\epsilon(q, \lambda)$.

por contagem de potências (análise dimensional) e por indução matemática que elas serão limitadas para $\Lambda_0 \rightarrow \infty$ em qualquer ordem da expansão em laços.

Ainda não especificamos a forma da função reguladora do propagador. Nos interessa especificamente a expressão (2.21):

$$\begin{aligned} \frac{S_{\lambda\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} &= \frac{1}{q^2 + m^2} \frac{1}{\left[1 + \frac{K_{\lambda\Lambda_0}(q)\Sigma_{\lambda\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2}\right]^2} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} K_{\lambda\Lambda_0}(q) = \\ &= \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{(q^2 + m^2)K_{\lambda\Lambda_0}(q)^{-1} + \Sigma_{\lambda\Lambda_0}(q)} \Big|_{\lambda=\Lambda} \end{aligned}$$

É conveniente escolhermos a função reguladora como a função degrau, $K_{\lambda\Lambda_0}(q) = \Theta(\sqrt{q^2} - \lambda)$, em que já supomos $\Lambda_0 \rightarrow \infty$, pois teremos que tomar este limite nas equações dos vértices irrelevantes. Ocorre, no entanto, que a função degrau não é suave, e precisamos aqui de um detalhe técnico para sermos rigorosos em expressões como $\frac{\partial}{\partial \lambda} K_{\lambda\Lambda_0}(q)$. Se inserirmos imediatamente a função degrau e sua derivada (como sendo a função delta de Dirac) na expressão (2.21) acima, ficamos com uma ambigüidade, pois surge um termo do tipo $\Theta(0)$. Utilizamos, então, o procedimento tomado em [20], que consiste em definirmos o regulador $K_{\lambda\Lambda_0}(q)$ como sendo a função $\theta_\epsilon(q, \lambda)$, suave nas variáveis θ, λ e tal que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta_\epsilon(q, \lambda) \leq 1 && \text{para todo } q, \lambda, \\ \theta_\epsilon(q, \lambda) &\approx 0 && \text{para } q < \lambda - \epsilon, \\ \theta_\epsilon(q, \lambda) &\approx 1 && \text{para } q > \lambda + \epsilon. \end{aligned}$$

$\theta_\epsilon(q, \lambda)$ tem a forma esboçada na figura (2.3), e tem a propriedade de

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \theta_\epsilon(q, \lambda) = \Theta(q - \lambda). \quad (2.43)$$

Definimos também a função⁷ $\delta_\epsilon(q, \lambda) = -\frac{\partial}{\partial \lambda} \theta_\epsilon(q, \lambda)$, que tem a propriedade:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(q, \lambda) = \delta(q - \lambda). \quad (2.44)$$

Com isto, a expressão (2.21) deve ser reescrita, mais rigorosamente, como:

$$\begin{aligned} \frac{S_{\lambda\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} &= \frac{1}{q^2 + m^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\left[1 + \frac{\theta_\epsilon(q, \lambda) \Sigma_\lambda(q)}{q^2 + m^2}\right]^2} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \theta_\epsilon(q, \lambda) \\ &= \frac{-\lambda}{q^2 + m^2} \frac{1}{\left[1 + \frac{\theta_\epsilon(q, \lambda) \Sigma_\lambda(q)}{q^2 + m^2}\right]^2} \delta_\epsilon(q, \lambda). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Utilizamos agora a identidade abaixo, que provamos no apêndice A.4:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(q, \lambda) F(\theta_\epsilon(q, \lambda)) = \delta(\lambda - q) \int_0^1 dt F(t, \lambda) \quad (2.46)$$

e então

$$\begin{aligned} \frac{S_{\lambda\Lambda_0}(q)}{q^2 + m^2} &= \frac{-\lambda}{q^2 + m^2} \delta(q - \lambda) \int_0^1 dt \frac{1}{\left[1 + \frac{t \Sigma_\lambda(q)}{q^2 + m^2}\right]^2} \\ &= \frac{-\lambda}{q^2 + m^2} \delta(q - \lambda) \frac{1}{1 + \frac{\Sigma_\lambda(q)}{q^2 + m^2}} \\ &= \frac{-\lambda \cdot \delta(q - \lambda)}{q^2 + m^2 + \Sigma_\lambda(q)}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

o que é um resultado bastante interessante, pois mostra que o “propagador” $\frac{S_\lambda(q)}{q^2 + m^2}$ é nada mais que uma espécie de propagador completo (ou seja, com a auto-energia já levada em conta), porém com momento q restrito ao valor λ , inclusive na auto-energia $\Sigma_\lambda(\lambda)$. Com isto as equações do GR para os vértices se tornam intuitivamente mais claras. Elas são equações relacionando sempre um vértice relevante ou irrelevante de n pontos no membro esquerdo, com um vértice de $n + 2$ pontos no membro direito, sendo que este último tem duas de suas pernas ligadas entre si por um propagador completo $\frac{S_\lambda(q)}{q^2 + m^2}$ e com momento q restrito à variável (de integração) λ' . Finalmente, a diferença entre as equações de vértices relevantes e irrelevantes está no fato que as destes últimos apresentam subtrações explícitas, as quais, como se pode intuir, serão utilizadas para provar a renormalizabilidade da teoria.

⁷Note que temos um sinal menos na definição de $\delta_\epsilon(q, \lambda)$ com a derivada atuando no segundo argumento.

É conveniente, então, reescrevermos os vértices subtraídos como os restos de suas expansões de Taylor, na forma integral [28]:

$$\begin{aligned}
\Delta\Gamma^4(q, p, -p, -q, \lambda) &= \frac{1}{2!} \int_0^1 dx (1-x)^2 (p^2 - \mu^2)^2 \frac{\partial}{\partial (p^2)^2} \Gamma^4(q, p', -p', -q, \lambda) \Big|_{p'^2 = \mu^2 + x(p^2 - \mu^2)} \\
\Delta\bar{\Gamma}^6(q, p_1, \dots, p_4, -q, \lambda) &= \\
&= \int_0^1 dx (1-x) \left[\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^4 p_i^\alpha p_j^\beta \frac{\partial}{\partial p_i'^\alpha} \frac{\partial}{\partial p_j'^\beta} \bar{\Gamma}^6(q, p'_1, \dots, p'_4, -q, \lambda) \right]_{p'_k = \bar{p}_k + x(p_k - \bar{p}_k)} \\
\Delta\bar{\Gamma}^8(q, p_1, \dots, p_6, -q, \lambda) &= \\
&= \int_0^1 dx (1-x) \left[\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^6 p_i^\alpha p_j^\beta \frac{\partial}{\partial p_i'^\alpha} \frac{\partial}{\partial p_j'^\beta} \bar{\Gamma}^8(q, p'_1, \dots, p'_6, -q, \lambda) \right]_{p'_k = \bar{p}_k + x(p_k - \bar{p}_k)}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Nas expressões dos vértices subtraídos $\Delta\bar{\Gamma}^6$ e $\Delta\bar{\Gamma}^8$ acima, é necessário ainda fazer a substituição de um dos momentos pela soma dos demais com sinal trocado, por causa da conservação de momento nos vértices, mas deixamos isto subentendido aqui, por simplicidade de notação. Notemos ainda que, na expressão de $\Delta\Gamma^4$, devemos entender que o resultado da integração em q só deverá depender de p^2 , por isso já escrevemos derivadas apenas com respeito a p^2 . Deveríamos ter escrito, mais propriamente, quatro derivadas com relação a cada um dos quatro momentos p_1, \dots, p_4 de Γ^4 e depois fazer as atribuições $p_1 = q, p_2 = p, \dots$, e então integrar em q ; o resultado seria o mesmo que o escrito acima apesar de em um caso termos uma derivada quarta e em outro uma derivada segunda em p^2 . Vamos, portanto, escrever de uma forma geral $\partial^4 \Gamma^4(q, p, -p, -q, \lambda)$, para nos referirmos às derivadas daquela expressão.

Um último detalhe antes de analisarmos as equações para os vértices é a dependência nos momentos externos. Nossa análise não dependerá da particular configuração de momentos externos. Precisaremos somente mantê-los limitados, menores que um certo valor $\tilde{\Lambda}_0$ grande, por exemplo. Definimos, então:

$$\|f_{2n}(\lambda)\| \equiv \max_{p_i^2 < \tilde{\Lambda}_0^2} |f_{2n}(p_1, \dots, p_{2n}; \lambda)|, \tag{2.49}$$

em que $f_{2n}(\lambda)$ é uma das funções Γ^{2n} , $\bar{\Gamma}^{2n}$, $\partial^m \Gamma^{2n}$ ou $\partial^m \bar{\Gamma}^{2n}$. Com isto, nos concentramos apenas na dependência nos p_i que seja a “pior possível” para nossas integrais, ou seja, estamos maximizando o integrando.

Por contagem de potências (análise dimensional) dos vértices, ou por cálculo explícito –poderíamos proceder a um cálculo perturbativo usando as equações (2.40) e (2.41) conforme já explicamos: usando a expressão a zero laço no membro direito,

obtém-se a expressão a um laço após integração- chegamos facilmente às relações seguintes.

A zero laço:

$$\begin{aligned} \gamma_{(0)}^2 &= 0, & \gamma_{(0)}^3 &= 0, & \gamma_{(0)}^4 &= 0, \\ \Gamma_{(0)}^6 &= g, & \Delta_{(0)}^2 &= 0, & \Delta_{(0)}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

os demais vértices e suas derivadas sendo todos nulos. A um laço, obtemos que o único vértice não nulo se comporta, maximizando a integral, como:

$$\begin{aligned} \gamma_{(1)}^4 &\sim \int_0^\lambda d\lambda' \frac{\delta(q - \lambda')}{\lambda'^2 + \Sigma_{\lambda'}^{(0)}} \|\bar{\Gamma}_{(0)}^6(\lambda')\| \\ &\sim \int_0^\lambda d\lambda' \int |q|^2 d|q| \frac{\delta(q - \lambda')}{q^2 + \Sigma_{\lambda'}^{(0)}} g \sim \lambda. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Para simplificar a contagem de potências estamos supondo, como pode ser notado, $m \ll \lambda$, sem perda de generalidade, pois nos interessam somente altos momentos de integração (λ' grande). A dois laços o único vértice não nulo é

$$\begin{aligned} \gamma_{(2)}^3 &\sim \int_0^\lambda d\lambda' \frac{\delta(q - \lambda')}{\lambda'^2 + \Sigma_{\lambda'}^{(0)}} \|\Gamma_{(1)}^4(\lambda')\| \\ &\sim \int_0^\lambda d\lambda' \int |q|^2 d|q| \frac{\delta(q - \lambda')}{q^2 + \Sigma_{\lambda'}^{(0)}} \lambda' g \sim \lambda^2. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Procederemos agora por indução finita. Vamos então supor válidas as expressões a ℓ laços:

$$\begin{aligned} \gamma_{(\ell)}^2(\lambda') &\sim 1 & \|\Delta_{(\ell)}^2(\lambda')\| &\sim \lambda'^2 \\ \gamma_{(\ell)}^3(\lambda') &\sim \lambda'^2 & \|\Delta_{(\ell)}^4(\lambda')\| &\sim \lambda' \\ \gamma_{(\ell)}^4(\lambda') &\sim \lambda' & \|\Delta_{(\ell)}^6(\lambda')\| &\sim 1 \\ \gamma_{(\ell)}^6(\lambda') &\sim 1 & \|\Gamma_{(\ell)}^{2n}(\lambda')\| &\sim \lambda'^{3-n} \\ & & \|\partial^m \Gamma_{(\ell)}^{2n}(\lambda')\| &\sim \lambda'^{3-n-m}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Estamos escrevendo ~ 1 significando qualquer potência de $\ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$, pois logaritmos não alteram a contagem de potências.

Temos agora todos os ingredientes para demonstrar, por indução, que as integrais para os vértices irrelevantes são finitas quando $\Lambda_0 \rightarrow \infty$. Escrevemos, a partir de

(2.40) e (2.41) as equações com os integrandos maximizados, relacionando vértices a $\ell + 1$ laços com os vértices a ℓ laços, de maneira semelhante a (2.51) e (2.52) acima:

$$\begin{aligned}\gamma_{(\ell+1)}^3(\lambda) &\lesssim \int_0^\lambda d\lambda' \frac{\delta(q-\lambda')}{\lambda'^2 + \Sigma_{\lambda'}^{(\ell-\ell')}} \|\Gamma_{(\ell')}^4(\lambda')\| \\ \gamma_{(\ell+1)}^2(\lambda) &\lesssim \int_0^\lambda d\lambda' \frac{\delta(q-\lambda')}{\lambda'^2 + \Sigma_{\lambda'}^{(\ell-\ell')}} \|\partial^2 \Gamma_{(\ell')}^4(\lambda')\| \\ \gamma_{(\ell+1)}^4(\lambda) &\lesssim \int_0^\lambda d\lambda' \frac{\delta(q-\lambda')}{\lambda'^2 + \Sigma_{\lambda'}^{(\ell-\ell')}} \|\bar{\Gamma}_{(\ell')}^6(\lambda')\| \\ \gamma_{(\ell+1)}^6(\lambda) &\lesssim \int_0^\lambda d\lambda' \frac{\delta(q-\lambda')}{\lambda'^2 + \Sigma_{\lambda'}^{(\ell-\ell')}} \|\bar{\Gamma}_{(\ell')}^8(\lambda')\|,\end{aligned}$$

(2.54)

$$\begin{aligned}\|\Gamma_{(\ell+1)}^{2n}(\lambda)\| &\lesssim \int_\lambda^\infty d\lambda' \frac{\delta(q-\lambda')}{\lambda'^2 + \Sigma_{\lambda'}^{(\ell-\ell')}} \|\bar{\Gamma}_{(\ell')}^{2n+2}(\lambda')\| \\ \|\Delta_{(\ell+1)}^2(\lambda)\| &\lesssim \lambda^4 \int_\lambda^\infty d\lambda' \frac{\delta(q-\lambda')}{\lambda'^2 + \Sigma_{\lambda'}^{(\ell-\ell')}} \|\partial^4 \Gamma_{(\ell')}^4(\lambda')\| \\ \|\Delta_{(\ell+1)}^4(\lambda)\| &\lesssim \lambda^2 \int_\lambda^\infty d\lambda' \frac{\delta(q-\lambda')}{\lambda'^2 + \Sigma_{\lambda'}^{(\ell-\ell')}} \|\partial^2 \bar{\Gamma}_{(\ell')}^6(\lambda')\| \\ \|\Delta_{(\ell+1)}^6(\lambda)\| &\lesssim \lambda^2 \int_\lambda^\infty d\lambda' \frac{\delta(q-\lambda')}{\lambda'^2 + \Sigma_{\lambda'}^{(\ell-\ell')}} \|\partial^2 \bar{\Gamma}_{(\ell')}^8(\lambda')\|,\end{aligned}$$

(2.55)

e para os vértices derivativos:

$$\begin{aligned}\|\partial^m \Gamma_{(\ell+1)}^{2n}(\lambda)\| &\lesssim \int_\lambda^\infty d\lambda' \frac{\delta(q-\lambda')}{\lambda'^2 + \Sigma_{\lambda'}^{(\ell-\ell')}} \|\partial^m \bar{\Gamma}_{(\ell')}^{2n+2}(\lambda')\| \\ \|\partial^m \Delta_{(\ell+1)}^2(\lambda)\| &\lesssim \lambda^4 \int_\lambda^\infty d\lambda' \frac{\delta(q-\lambda')}{\lambda'^2 + \Sigma_{\lambda'}^{(\ell-\ell')}} \|\partial^{4+m} \Gamma_{(\ell')}^4(\lambda')\| \\ \|\partial^m \Delta_{(\ell+1)}^4(\lambda)\| &\lesssim \lambda^2 \int_\lambda^\infty d\lambda' \frac{\delta(q-\lambda')}{\lambda'^2 + \Sigma_{\lambda'}^{(\ell-\ell')}} \|\partial^{2+m} \bar{\Gamma}_{(\ell')}^6(\lambda')\| \\ \|\partial^m \Delta_{(\ell+1)}^6(\lambda)\| &\lesssim \lambda^2 \int_\lambda^\infty d\lambda' \frac{\delta(q-\lambda')}{\lambda'^2 + \Sigma_{\lambda'}^{(\ell-\ell')}} \|\partial^{2+m} \bar{\Gamma}_{(\ell')}^8(\lambda')\|,\end{aligned}$$

(2.56)

Inserindo agora (2.53) nas expressões acima, é imediato verificar que (2.53) também valem para $(\ell + 1)$ laços, o que completa nossa prova por indução de que as integrais para os vértices são todas finitas. Isto significa que cada uma das integrais para os vértices relevantes e irrelevantes fornece como resultado um número, que depende de λ (e dos momentos externos ainda, obviamente). Ao tomarem-se esses resultados, e fazer-se $\lambda = 0$ em (2.34) obtêm-se os valores das funções de Green físicas, finitas, $\Sigma(p)$ e $\Gamma^{2n}(p_i)$.⁸

Como última observação chamamos atenção para o fato que os vértices relevantes crescem com λ , como devia se esperar. Calculando as integrais dos vértices relevantes $\gamma^i(\lambda)$ a uma dada ordem de perturbação e fazendo $\lambda = \Lambda_0$, obtemos exatamente os contratermos que constam na ação nua, o que está de acordo com o procedimento usual de renormalização perturbativa.⁹ Com isto, terminamos a demonstração de que a teoria ϕ^6 em $d = 3$ é renormalizável perturbativamente.

⁸Que são, lembrando, $\Sigma(p) = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \Lambda_0 \rightarrow \infty}} \Sigma_{\lambda\Lambda_0}(p)$ e $\Gamma^{2n}(p_i) = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \Lambda_0 \rightarrow \infty}} \Gamma_{\lambda\Lambda_0}^{2n}(p_i)$.

⁹E, claro, como contrapartida, em $\lambda = 0$ os vértices relevantes vão a zero, ficando apenas as contribuições físicas, dependentes apenas dos momentos externos, para as funções de Green, conforme explicado no parágrafo acima.

Capítulo 3

Teorias não-comutativas

3.1 Introdução

Estudar a quantização de teorias em espaços não-comutativos é uma idéia relativamente antiga, tendo suas origens em fins da década de quarenta, com a proposta de Snyder [29]. Em TQC, uma motivação inicial para considerar a não-comutatividade das coordenadas era uma tentativa para eliminar os infinitos que existiam na abordagem perturbativa. A idéia por trás de tal proposta era a seguinte. Postulando-se a existência de um comprimento mínimo além do qual medidas de posição não façam sentido, escreve-se uma relação de comutação entre as coordenadas, de modo que passa a existir uma relação de incerteza posição \times posição, análoga à relação de incerteza posição \times momento da Mecânica Quântica de partículas.¹ A teoria quantizada apresentaria, então, uma não-localidade que se refletiria na eliminação de divergências — pois estas se devem às interações, que são produtos locais de campos. Esta idéia, no entanto, não se tornou popular por causa do enorme sucesso dos métodos de renormalização perturbativa.

Nos últimos anos, entretanto, houve uma retomada no estudo de Teorias Quânticas de Campos em espaços não-comutativos. Grande parte da motivação para tal é o fato de estudos relacionados com a dinâmica de cordas abertas em presença de um campo de fundo anti-simétrico, terem oferecido evidências para a existência de teorias de campo não-comutativas. Alguns artigos de revisão abordam estes aspectos e oferecem uma introdução ao estudo da TQC não-comutativa [30, 33, 34].

Teorias de Campo em um espaço-tempo não-comutativo apresentam novas características em relação à TQC ordinária, que têm sido muito investigadas recentemente. Alguns dos estudos que podemos citar analisam: a unitariedade e causalidade da matriz S [35], mistura infra-vermelho/ultravioleta [32], propriedades relacionadas à renormalizabilidade perturbativa [32, 38], dentre outros. A despeito de novos problemas relacionados com a renormalizabilidade de teorias não-comutativas (NC), já

¹A quantização segue um procedimento padrão, conhecido como correspondência Weyl-Moyal [42], que é utilizado neste capítulo.

demonstrou-se a consistência de alguns modelos, como o modelo de Wess-Zumino NC [36] e a versão supersimétrica do modelo sigma não-linear [37].

Dentro deste contexto, vamos discutir neste capítulo alguns dos problemas que surgem na teoria do campo escalar com interação ϕ^6 no espaço não-comutativo, relacionando-os, quando possível, à teoria ϕ^6 ordinária e à aplicação de técnicas que têm se mostrado úteis para o tratamento desses problemas.

3.1.1 A correspondência Weyl-Moyal.

A não-comutatividade das coordenadas é implementada através da definição do comutador:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

em que \hat{x}^μ são operadores e $\Theta^{\mu\nu}$ um número-c. Como conseqüência desta relação de comutação, desaparece a noção usual de ponto no espaço, e torna-se necessária uma maneira de substituir funções clássicas de x por operadores quânticos apropriados. Tal tarefa pode ser realizada com a quantização do espaço-tempo através das funções de distribuição de Wigner, e utilizando a ordenação de Weyl [42] para relacionar as funções de x com os operadores quânticos apropriados. Seguindo a ordenação de Weyl, introduzimos o operador

$$T(k) = e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}, \quad (3.2)$$

que tem as propriedades:

$$\begin{aligned} T^\dagger(k) &= T(-k) \text{ se } \hat{x}_\mu^\dagger = \hat{x}_\mu; \\ T(k)T(k') &= T(k+k')e^{-\frac{i}{2}k_\mu k'_\nu \Theta^{\mu\nu}}; \\ \text{Tr}T(k) &= \hat{\delta}(k) = (2\pi)^d \delta^d(k_\mu). \end{aligned} \quad (3.3)$$

A propriedade (3.3) é obtida utilizando-se a fórmula de Baker-Hausdorff-Campbell. Definindo o operador

$$\begin{aligned} \Phi &= \int d^d x \frac{d^d k}{(2\pi)^d} T(k) e^{ik_\mu x^\mu} \phi(x) = \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} T(k) \tilde{\phi}(k), \end{aligned} \quad (3.4)$$

chamado operador de Weyl, temos que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx} \text{Tr}[\Phi T^\dagger(k)] \\ &= \text{Tr} \left[\Phi \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx} T^\dagger(k) \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

A função clássica $\phi(x)$ acima é chamada função distribuição de Wigner, e as relações 3.5 e 3.4, fornecem uma correspondência biunívoca entre os operadores de Weyl e as funções distribuição de Wigner, que é chamada correspondência Weyl-Wigner.

Por outro lado, o efeito da não-comutatividade das coordenadas sobre as funções de x pode ser escrito como uma deformação da álgebra das funções clássicas numa álgebra não-comutativa, sendo o produto de tal álgebra o chamado produto Moyal[42], que é definido por

$$\phi_1(x) \star \phi_2(x) = \lim_{x \rightarrow y} e^{\frac{i}{2} \Theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}} \phi_1(y) \phi_2(x). \quad (3.6)$$

O produto Moyal também pode ser escrito, utilizando 3.4, como

$$\begin{aligned} \phi_1(x) \star \phi_2(x) &= \lim_{x \rightarrow y} e^{\frac{i}{2} \Theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}} \phi_1(y) \phi_2(x) = \\ &= \int_{k_1 k_2} \tilde{\phi}_1(k_1) \tilde{\phi}_2(k_2) e^{-i(k_1+k_2)x - \frac{i}{2} k_1^\mu \Theta_{\mu\nu} k_2^\nu} = \\ &= \int_{k k_1 k_2} e^{-ikx - \frac{i}{2} k_1^\mu \Theta_{\mu\nu} k_2^\nu} Tr [T(k_1 + k_2) T^\dagger(k)] \tilde{\phi}_1(k_1) \tilde{\phi}_2(k_2) = \\ &= \int_k e^{-ikx} Tr [\Phi_1 \Phi_2 T^\dagger(k)], \end{aligned} \quad (3.7)$$

em que estamos utilizando para $\int_{k_1 \dots k_n}$ e para as transformadas de Fourier a mesma notação dos capítulos anteriores. Uma propriedade importante do produto Moyal que decorre das relações acima e pode ser imediatamente verificada é que

$$\int d^d x \phi_1(x) \star \phi_2(x) \star \dots \star \phi_n(x) = Tr [\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n], \quad (3.8)$$

o que implica que permutações cíclicas não alteram o produto Moyal (integrado em x) de campos no mesmo "ponto" x . O procedimento descrito brevemente até aqui, forma a chamada correspondência Weyl-Moyal, utilizada para definir teorias de campos em espaços não-comutativos. Terminamos esta seção listando outras propriedades que nos serão úteis mais adiante:

$$\begin{aligned} \int d^d x \phi_1(x) \star \phi_2(x) &= Tr [\Phi_1 \Phi_2] = \\ &= \int_{k_1 k_2} Tr [T(k_1) T(k_2)] \tilde{\phi}_1(k_1) \tilde{\phi}_2(k_2) = \\ &= \int_k \tilde{\phi}_1(k) \tilde{\phi}_2(-k), \end{aligned} \quad (3.9)$$

²Vê-se claramente de (3.6) que tal produto é não local, razão pela qual usamos as aspas.

que implica que termos quadráticos nos campos não são modificados pela introdução do produto Moyal e, para um produto de $n > 2$ campos

$$\begin{aligned} & \int d^d x \phi_1(x) \star \phi_2(x) \star \cdots \star \phi_n(x) = \\ & = \int_{k_1 \cdots k_n} \hat{\delta}(k_1 + \cdots + k_n) \tilde{\phi}(k_1) \cdots \tilde{\phi}(k_n) \exp\left(-i \sum_{i < j} k_{ij}\right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

em que $k_{ij} = \frac{1}{2} k_i^\mu \Theta_{\mu\nu} k_j^\nu$, sendo aqui necessário manter a ordem dos índices na exponencial, devido à não-comutatividade do produto Moyal.

3.2 Teoria ϕ^6 não-comutativa.

De acordo com o procedimento descrito na seção anterior, definimos nossa teoria no espaço não comutativo pela ação

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \phi(-\square + m^2) \phi + \frac{g}{6!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \star \phi \star \phi(x) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \int_k (k^2 + m^2) \phi_k \phi_{-k} + \frac{g}{6!} \int_{k_1 \cdots k_6} \phi_{k_1} \phi_{k_2} \cdots \phi_{k_6} \hat{\delta}(k_1 + \cdots + k_6) \times \\ & \quad \times e^{-i(k_{12} + k_{13} + k_{14} + k_{15} + k_{16} + k_{23} + \cdots + k_{46} + k_{56})}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pela relação 3.8, lembremos que é importante manter a ordem cíclica dos campos no vértice de interação acima. Mas, por outro lado, como no vértice ϕ^6 todos os campos são indistinguíveis, o termo de interação é completamente simétrico pela troca de quaisquer dois campos ϕ_{p_i} . Como o elemento de integração e a função delta também são completamente simétricos, então apenas a parte simétrica da exponencial contribui para a interação, e poderíamos simetrizar totalmente esta exponencial pela troca de quaisquer dois momentos entre si. Com isto a ordem dos campos não seria mais importante. Vamos, no entanto, continuar trabalhando com a exponencial, fazendo as simetriações, eventualmente, no final dos cálculos.

Temos então as regras de Feynman da figura 3.1, em que o fator de fase adicional a cada vértice, em comparação com a teoria comutativa, é

$$f(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) = e^{-i(k_{12} + k_{13} + k_{14} + k_{15} + k_{16} + k_{23} + \cdots + k_{46} + k_{56})}. \quad (3.12)$$

Estamos incluindo o fator $\frac{1}{6!}$ explicitamente no vértice por causa da maneira que fazemos a contagem do fator de simetria, dada no apêndice A. As regras de Feynman para a teoria não comutativa são, então, semelhantes àsquelas da teoria comutativa, modificadas agora somente por uma fase adicional em cada vértice. Tal fase poderá conter uma dependência dos momentos internos dos laços ou não. No primeiro caso,

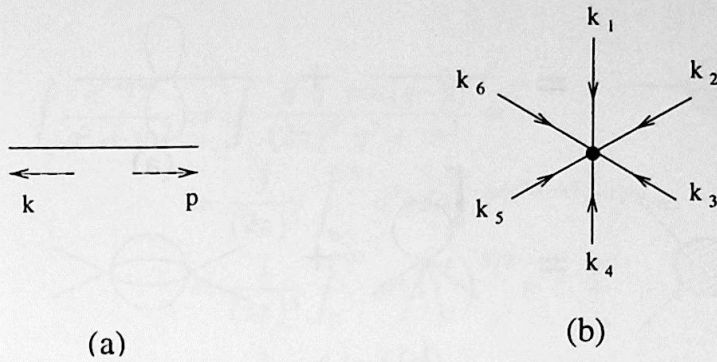


Figura 3.1: Regras de Feynman para a teoria ϕ^6 . (a) propagador: $\frac{1}{p^2+m^2}\hat{\delta}(k+p)$ e (b) vértice: $\frac{-g}{6!}f(k_1, k_2, \dots, k_6)$.

costuma-se representar essa dependência através de diagramas de Feynman que ao serem construídos num plano apresentam interseções de propagadores, cada interseção representando uma fase em que ocorrem os dois momentos dos propagadores que se cruzam. Como estes diagramas podem ser construídos sem interseções apenas numa outra superfície que não seja o plano, eles são chamados diagramas não-planares. No segundo caso, como a fase não depende dos momentos de integração dos laços, ela é fatorada e tem-se uma integral igual à respectiva da teoria comutativa. Nos diagramas não-planares, a fase atuará como um regulador nas integrais divergentes no UV, eventualmente tornando-as finitas, porém “à custa” do surgimento de novas divergências infravermelhas, que ocorrerão não no nível do integrando, mas no resultado da integração, quando o momento externo se anular –isto é conhecido como “mistura IV/UV” [32]. A estrutura UV proveniente dos gráficos planares é a mesma do caso comutativo. A estrutura de divergências da teoria precisa ser analisada com cuidado, portanto.

Voltemos ao caso específico da teoria ϕ_x^6 . Se analisarmos, como é padrão, o grau de divergência superficial (UV) dos diagramas de Feynman, temos que

$$D = 3 - \frac{N}{2}, \quad (3.13)$$

em que N é o número de linhas externas do diagrama, de modo que apenas diagramas com duas, quatro ou seis linhas externas são superficialmente UV-divergentes. Na figura 3.2 representamos os diagramas que contribuem, em ordens mais baixas em g , para as funções de dois, quatro e seis pontos. Estamos utilizando uma representação gráfica sem nos preocuparmos com a distinção entre diagramas planares e não planares³, e vamos utilizar essa terminologia apenas para fazer referência à dependência da fase com os momentos de integração, conforme explicamos acima.

³Ou seja, estamos representando por um diagrama apenas, desenhado no plano e sem interseções, as partes planares e não planares.

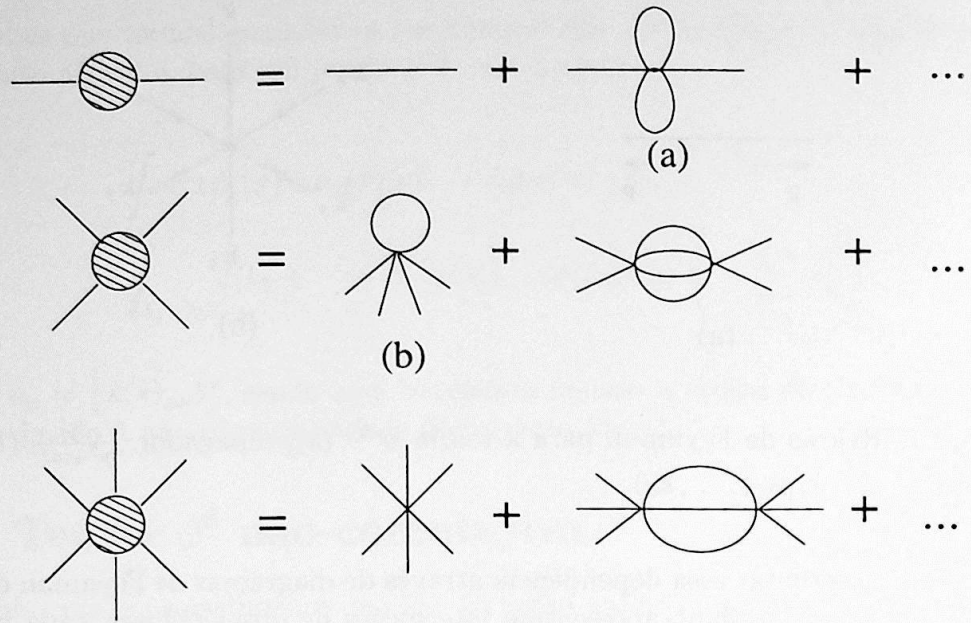


Figura 3.2: Diagramas de Feynman para as funções de 2,4 e 6 pontos da teoria ϕ^6 – (a) e (b) são as correções de ordem g .

Consideremos as funções de Green próprias de dois, quatro e seis pontos, cujas expansões diagramáticas são dadas na figura 3.2. Em ordem g , temos que considerar apenas os gráficos (a) e (b). Calculando primeiramente a contribuição do gráfico (a), obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{-g}{6!} \left\{ 30 \left(\int_q \frac{1}{q^2 + m^2} \right)^2 + 24 \int_{q_1 q_2} \frac{1}{q_1^2 + m^2} \frac{1}{q_2^2 + m^2} e^{-iq_1 \cdot \bar{p}} + 12 \int_{q_1 q_2} \frac{1}{q_1^2 + m^2} \frac{1}{q_2^2 + m^2} e^{-iq_1 \cdot \bar{q}_2} + \right. \\
 & + 12 \int_{q_1 q_2} \frac{1}{q_1^2 + m^2} \frac{1}{q_2^2 + m^2} e^{-iq_1 \cdot \bar{q}_2 - iq_2 \cdot \bar{p}} + 6 \int_{q_1 q_2} \frac{1}{q_1^2 + m^2} \frac{1}{q_2^2 + m^2} e^{-iq_1 \cdot \bar{p} - iq_1 \cdot \bar{q}_2 - ip \cdot \bar{q}_2} + \\
 & \left. + 6 \int_{q_1 q_2} \frac{1}{q_1^2 + m^2} \frac{1}{q_2^2 + m^2} e^{-iq_1 \cdot \bar{p} - ip \cdot \bar{q}_2} \right\}, \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

em que $q \cdot \bar{p} = q^\mu \Theta_{\mu\nu} p^\nu$ e p é o momento externo. As contrações que levam a tais integrais estão explicitadas no apêndice A.1. No caso da teoria comutativa, este gráfico corresponde a um produto de integrais associadas aos dois laços. Devido à não comutatividade, na situação presente existem fatores de exponenciais que misturam essas integrais. As integrais acima podem ser avaliadas usando parametrização de

Schwinger:

$$\begin{aligned}
\int_q \frac{e^{-iq \cdot \tilde{p}}}{q^2 + m^2} &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\cos(q \cdot \tilde{p})}{q^2 + m^2} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3 q d\alpha e^{-\alpha(q^2 + m^2) - iq \cdot \tilde{p}} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\alpha \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} e^{-\alpha - \frac{\tilde{p}^2}{4\alpha}} = \\
&= \frac{1}{4\pi^{3/2}} \left(\frac{4m^2}{\tilde{p}^2}\right)^{\frac{1}{4}} K_{1/2}(m\sqrt{\tilde{p}^2}) \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Na última passagem acima, usamos [41]

$$\frac{2}{z^\lambda} K_\lambda(xz) = \int_0^\infty t^{-\lambda-1} e^{-\frac{x}{t}} \left(t + \frac{z^2}{t}\right) dt \tag{3.16}$$

e escrevemos $\tilde{p}^\mu = \Theta^{\mu\nu} p_\nu$, de modo que $\tilde{p}^2 = \Theta_{\mu\lambda} p^\lambda \Theta^{\mu\nu} p_\nu = -p^\lambda (\Theta^2)_{\lambda\nu} p^\nu$. Com as fórmulas acima, obtemos, para as integrais a calcular, as expressões

$$\begin{aligned}
&\frac{-g}{24} \left(\int_q \frac{1}{q^2 + m^2} \right)^2 + \\
&+ \frac{-g}{30} \int_{q_1 q_2} \frac{\cos(p \cdot \tilde{q}_1)}{q_1^2 + m^2} \frac{1}{q_2^2 + m^2} + \tag{3.17}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{-g}{60} \int_{q_1 q_2} \frac{\cos(q_1 \cdot \tilde{q}_2)}{q_1^2 + m^2} \frac{1}{q_2^2 + m^2} + \tag{3.18}$$

$$+ \frac{-g}{60} \int_{q_1 q_2} \frac{\cos(p \cdot \tilde{q}_1) \cos(q_1 \cdot \tilde{q}_2)}{(q_1^2 + m^2)(q_2^2 + m^2)} + \tag{3.19}$$

$$+ \frac{-g}{120} \int_{q_1 q_2} \frac{\cos(p \cdot \tilde{q}_1) \cos(p \cdot \tilde{q}_2)}{(q_1^2 + m^2)(q_2^2 + m^2)} + \tag{3.20}$$

$$+ \frac{-g}{120} \int_{q_1 q_2} \frac{\cos(p \cdot \tilde{q}_1) \cos(p \cdot \tilde{q}_2) \cos(q_1 \cdot \tilde{q}_2)}{(q_1^2 + m^2)(q_2^2 + m^2)} = \tag{3.21}$$

$$= \frac{-g}{24} I_0^2 + \frac{-g}{30} \frac{1}{4\pi^{3/2}} \left(\frac{4m^2}{\tilde{p}^2} \right)^{1/4} K_{1/2}(m\sqrt{\tilde{p}^2}) I_0 + \quad (3.22)$$

$$+ \frac{-g}{60} \frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_q \left(\frac{4m^2}{\tilde{q}^2} \right)^{1/4} K_{1/2}(m\sqrt{\tilde{q}^2}) \frac{1}{q^2 + m^2} + \quad (3.23)$$

$$+ \frac{-g}{60} \frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_q \left(\frac{4m^2}{\tilde{q}^2} \right)^{1/4} \frac{K_{1/2}(m\sqrt{\tilde{q}^2}) e^{-iq\tilde{p}}}{(q^2 + m^2)} + \quad (3.24)$$

$$+ \frac{-g}{120} \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{\tilde{p}^2} e^{-2m\sqrt{\tilde{p}^2}} + \quad (3.25)$$

$$+ \frac{-g}{120} \left\{ \frac{1}{2} \int_q \left[\frac{1}{2\pi} \frac{e^{-m\sqrt{(\tilde{p}+\tilde{q})^2} - iq\tilde{p}}}{(q^2 + m^2)\sqrt{(\tilde{p} + \tilde{q})^2}} + \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-m\sqrt{(\tilde{p}-\tilde{q})^2} - iq\tilde{p}}}{(q^2 + m^2)\sqrt{(\tilde{p} - \tilde{q})^2}} \right] \right\} \quad (3.26)$$

de onde podemos observar que o gráfico calculado para a função de dois pontos apresenta, na parte planar, como neste caso era de se esperar, a mesma divergência UV, I_0^2 , que na teoria comutativa –em que I_0 é a integral divergente, regularizada. As integrações são todas simétricas em alguma troca de variáveis (em $q_1 \leftrightarrow -q_1$ ou $q_1 \leftrightarrow q_2$, por exemplo), de maneira que podemos escrever exponenciais ou cossenos onde apropriado. Notemos ainda que à exceção da parte planar e da segunda integral, as demais são todas finitas no UV, graças ao comportamento regulador das exponenciais e das funções de Bessel modificadas $K_{1/2}(x)$, que vão a zero para $x \rightarrow \infty$. Surgem, no entanto, novas divergências, infravermelhas, que não existiam na teoria comutativa, quando fazemos o momento externo indo a zero. Esta peculiaridade é a chamada mistura IV/UV [32]. Notemos que o termo mais divergente para $p \rightarrow 0$ vem da quinta integral, e é proporcional a $\frac{1}{\tilde{p}^2}$, que é obtido utilizando-se a expansão de função de Bessel modificada em torno da origem [41]:

$$K_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) \quad (3.27)$$

Considerando, por sua vez, a correção em ordem mais baixa de g para a função de quatro pontos –gráfico da figura 3.2(b)– temos a expressão:

$$\frac{-g}{6!} e^{-i(p_{12}+p_{13}+p_{23})} \times 6 \int_q \frac{1}{q^2 + m^2} \left\{ 24 + 6 \sum_{j=1}^4 e^{-i(q\tilde{p}_j)} + 4 \sum_{j=2,3,4} e^{-i[q\cdot(\tilde{p}_1+\tilde{p}_j)]} \right\} \quad (3.28)$$

Temos novamente, portanto, o problema das divergências IV. Os detalhes do cálculo encontram-se no apêndice A.2. Notemos que tanto na parte planar como na não-planar o fator de fase independente do momento de integração –fatorado fora da integral– que surge é o mesmo que ocorreria junto a um vértice quadrilinear na

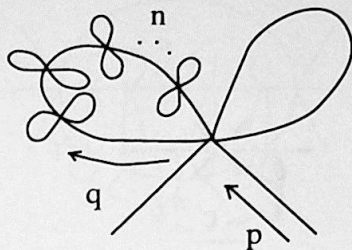


Figura 3.3: Múltiplas inserções da correção para a função de dois pontos na integração de um laço.

ação, ou seja, é $e^{-i(k_{12}+k_{13}+k_{23})}$, e deve aparecer novamente nos diagramas de ordem mais alta da mesma função de quatro pontos. Isto é um resultado geral [40] que é interessante notar. Vamos nos concentrar por enquanto no problema das divergências infravermelhas, deixando para discutirmos depois o UV –pois este último apresenta muita semelhança com o caso comutativo. Observando a divergência IV dominante da função de dois pontos, nota-se que em ordens mais altas ela implica divergências cada vez piores pois, considerando-se um gráfico como o da figura 3.3, em que há n inserções da correção que calculamos acima, tem-se

$$\int_q \frac{1}{(q^2 + m^2)^{(n+1)}} \left(\frac{c}{\bar{q}^2} \right)^n \quad (3.29)$$

de modo que para n suficientemente alto temos uma divergência IV no integrando ($c = -\frac{g}{60} \frac{1}{8\pi^2}$). Uma das maneiras de possivelmente se eliminar esse problema seria recorrer-se a uma re-soma do propagador, o que foi sugerido por Minwalla *et al* [32] e utilizado por Griguolo&Pietroni [39] no caso da teoria ϕ^4 NC. Re-somar o propagador consiste em somarmos e subtrairmos a divergência dominante da função de dois pontos em nossa ação,

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int_p \left\{ \left(p^2 + m^2 + \frac{c}{\bar{p}^2} \right) \phi_p \phi_{-p} - \frac{c}{\bar{p}^2} \phi_p \phi_{-p} \right\} + \frac{g}{6!} \int_{p_1 \dots p_6} \phi_{p_1} \phi_{p_2} \dots \phi_{p_6} \times \\ \times \hat{\delta}(k_1 + \dots + k_6) e^{-i(k_{12}+k_{13}+k_{14}+k_{15}+k_{23}+\dots+k_{46}+k_{56})} \quad (3.30)$$

e considerar agora o vértice bilinear como interação e o propagador modificado como vê-se na ação acima. Com esta mudança, nota-se que não é modificado o comportamento ultravioleta dos gráficos, já que o propagador $(p^2 + m^2 + \frac{c}{\bar{p}^2})^{-1}$ é essencialmente o mesmo, para $p \rightarrow \infty$, embora o valor de correções (finitas) radiativas vá, obviamente, ser modificado. Isto implica que o comportamento infravermelho do gráfico 3.2(a) se repete –pois ele decorre do comportamento do integrando no ultravioleta– e fornece, como antes, uma divergência $\frac{c}{\bar{p}^2}$, que vai ser cancelada exatamente ao se

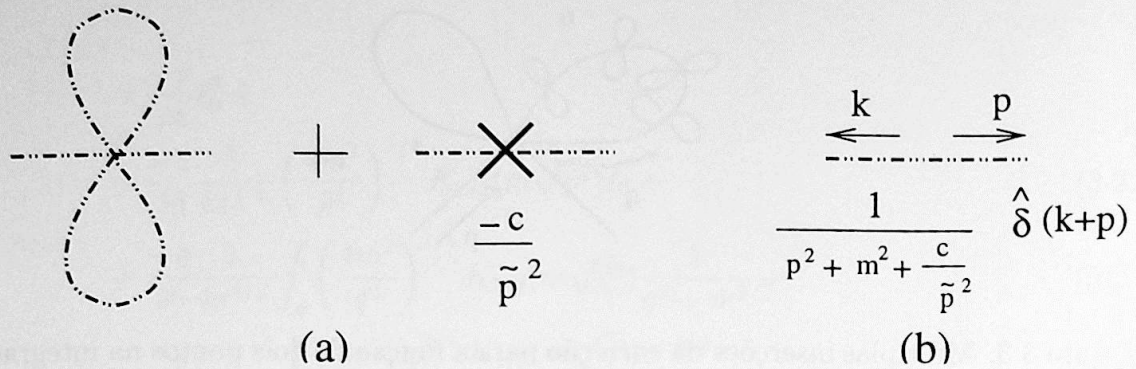


Figura 3.4: (a) Correções para a função de dois pontos em ordem mais baixa com propagador re-somado e levando-se em conta a interação bi-linear. (b) Propagador re-somado.

considerarmos o gráfico que possui apenas o vértice bilinear recém-adicionado à ação, conforme ilustramos na figura 3.4.⁴

Quando consideramos a função de quatro pontos, notamos que também inserções múltiplas do diagrama calculado poderiam trazer problemas IV em ordens mais altas. De fato, considerando um gráfico como o da figura 3.5, em que há n inserções da correção da função de quatro pontos –uma delas está marcada com um quadro tracejado– vemos que há uma divergência como

$$\int_q \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{q}^2}} \right)^n \frac{1}{(q^2 + m^2)^{n+1}} \quad (3.31)$$

que resulta de se fazer primeiramente as integrais de todos os laços como aquele que está marcado com um quadro tracejado, e em seguida integrar-se no momento q , que pode ser escolhido circulando como na figura. Esse tipo de divergência é o pior caso possível, em que há várias inserções sobre o mesmo propagador, aquele em que corre momento q . Essa divergência seria ainda pior no caso de uma teoria não massiva, em que teríamos

$$\int_q \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{q}^2}} \right)^n \frac{1}{(q^2)^{n+1}} \quad (3.32)$$

Se notarmos, no entanto, que o propagador re-somado, da maneira que indicamos acima, se anula para $q \rightarrow 0$, proporcionalmente a \tilde{q}^2 , e que sempre a inserção de n vértices numa certa linha faz com que o número de propagadores ao longo dessa linha seja $n + 1$, como na figura 3.5, então se torna claro que, na teoria re-somada

⁴Uma questão importante que surge aqui é a identificação de um novo parâmetro de expansão perturbativa válido, pois a inclusão de g dessa maneira no propagador torna sem sentido a expansão perturbativa em potências de g .

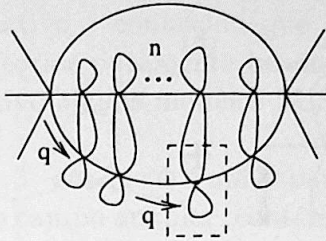


Figura 3.5: Múltiplas inserções da correção para a função de quatro pontos na integração de um laço em que corre momento q .

(em que todos os propagadores livres devem ser consistentemente substituídos pelos propagadores re-somados), esses propagadores cancelam as divergências advindas das inserções, e não temos mais o problema das divergências IV na função de quatro pontos, mesmo no caso não masivo.

Em resumo, o procedimento de re-soma parece satisfatório para tratar do problema IV que surge na função de dois pontos, pois a divergência em tal caso pode ser convenientemente absorvida através de uma mudança no propagador.⁵ No caso da função de quatro pontos, apesar de em ordem mais baixa termos também divergências IV, a re-soma do propagador garante que em ordens mais altas não há uma piora do comportamento divergente UV/IV. Minwalla *et al* [32], analisando os casos das teorias ϕ^4 e ϕ^3 NC, sugere que todas as divergências IV devidas à mistura IV/UV podem ser convenientemente re-somadas, e vemos aqui que essa parece uma afirmativa correta, pelo menos no caso da nossa teoria.

Discutamos agora brevemente o setor UV da teoria. Observemos que no caso da função de dois pontos, há apenas duas contribuições divergentes no UV. Uma é a contribuição vinda da parte planar, que pode ser subtraída mediante a inclusão de um contra-termo na ação, da mesma maneira que no caso comutativo (renormalização de massa). A outra contribuição, vinda de 3.22, pode ser eliminada através de um contratermo quártico $\frac{\lambda_0}{5} \frac{1}{4!} \phi_*^4$. Isto corresponderia à “renormalização” de um acoplamento quártico λ_0 , de modo que quando se somar a contribuição de ordem λ_0 para a função de dois pontos (indicada na figura 3.6) ela se cancela exatamente com a parte divergente vinda de 3.22. Este contratermo, ϕ_*^4 , também vai cancelar exatamente a divergência UV que vem do primeiro termo de 3.28 em ordem mais baixa, conforme ilustramos na figura 3.6. Outras divergências UV surgem apenas em ordens mais altas em g ou λ_0 , de modo que poderíamos dizer que a teoria é perturbativamente “renormalizável” no UV.⁶ Alguns estudos têm utilizado esta terminologia, no caso

⁵Há como mencionamos, o problema da validade da expansão perturbativa neste caso, além de saber qual a correta interpretação do “novo propagador”, mas deixamos essas questões para uma futura investigação. A re-soma parece mais apropriada apenas para uso em algum processo iterativo, como em [39], apesar de que mesmo em tal caso não é clara, a princípio, a resposta a estas questões.

⁶Supondo que nossa ação já tivesse um termo de interação quadrilinear inicialmente, por exemplo. No presente caso nós não consideramos um tal termo desde o início em nossa ação porque, sendo

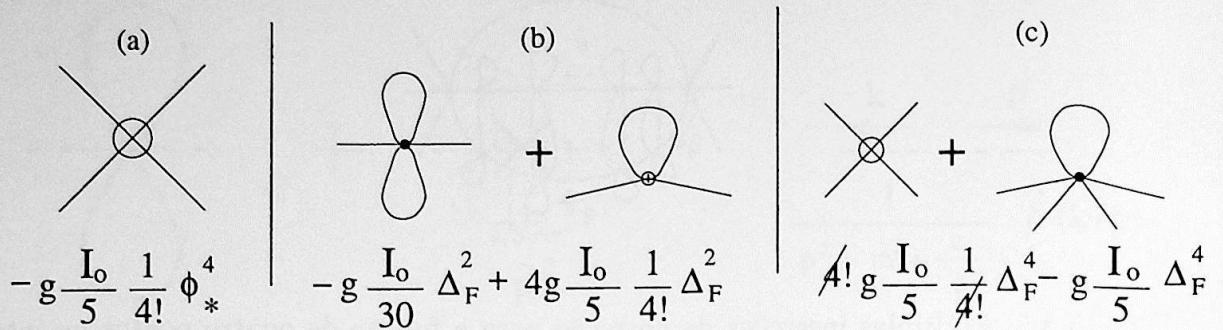


Figura 3.6: (a) Contra-termo para a função de quatro pontos. (b) Contribuições não planares do tipo $\frac{I_0}{\sqrt{p^2}}$ para a função de dois pontos que se cancelam, na teoria “renormalizada”. Omitimos a integral não planar $\int_q \frac{e^{-iq \cdot \bar{p}}}{q^2 + m^2}$ de ambos termos. (c) Cancelamento das divergências UV da função de quatro pontos (parte planar).

de teorias similares à que estamos considerando aqui (ϕ^4 NC e $(\phi^* \phi)^2$ NC, [38, 39]), mas é importante notar que a “renormalizabilidade” aqui em questão é obtida com contra-termos que têm mesma forma dos termos da ação do modelo, mas que não são contra-termos locais. Em resumo, *se os momentos externos forem mantidos a valores não-nulos*, é possível mostrar que as divergências UV da teoria podem ser removidas através de contratermos que têm a mesma forma daqueles que constam inicialmente na ação. Isso foi mostrado explicitamente no caso das teorias citadas acima. No caso de [39], isso foi feito utilizando-se a técnica explicada no capítulo anterior, para provar a “renormalizabilidade” UV em as todas ordens. No entanto, ao considerarem-se em [39] momentos externos no IV, mesmo dentro do contexto do GRE, verifica-se a persistência dos problemas de mistura IV/UV. Isto sugere que outros métodos para tratamento das divergências IV/UV sejam investigados.⁷

3.3 Férmions e interação de Yukawa.

Um procedimento alternativo à re-soma que descrevemos acima consiste em determinar novas interações que possam melhorar o comportamento IV/UV. Por exemplo, a adição de interações fermiônicas poderia “melhorar” o comportamento das

uma interação desse tipo super-renormalizável no sentido usual, teríamos mais divergências IV a considerar.

⁷Em [39] o GRE é utilizado juntamente com o processo de re-soma para tratar do IV. Em tal estudo, porém, faz-se recurso a um procedimento de ajuste de fluxos, em que os parâmetros de duas teorias são ajustados para que seja obtida uma teoria livre de infinitos IV/UV. Este procedimento de ajuste implica, no entanto, na necessidade de introdução de duas condições de contorno a mais sobre os acoplamentos, além de que as teorias ajustadas são, a princípio, de natureza distinta. Não é claro em tal caso qual o papel físico das duas condições de normalização extra nem a natureza das teorias definidas por meio de tal ajuste das condições de contorno.

divergências. No caso comutativo é conhecido que teorias supersimétricas são em geral menos divergentes que teorias puramente bosônicas ou puramente fermiônicas. Também no caso não-comutativo alguns modelos SUSY apresentam o desejável cancelamento de divergências [36].

O modelo Φ^4 SUSY em $d = 3$ –em que Φ é um super-campo–, quando projetado em componentes e eliminando-se o campo auxiliar, contém um campo escalar com a auto-interação ϕ^6 , e férmions com uma interação de Yukawa $\psi^2\phi^2$ [43]. Não consideramos um modelo supersimétrico em nosso caso. Em vez disso, analisamos, em ordem mais baixa, a contribuição para função de quatro pontos do campo escalar obtida a partir da ação:

$$\begin{aligned}
S[\phi, \psi, \bar{\psi}] = & \frac{1}{2} \int_k k^2 \phi_k \phi_{-k} + \frac{g}{6!} \int_{k_1 \dots k_6} \hat{\delta}(k_1 + \dots + k_6) \phi_{k_1} \star \phi_{k_2} \star \phi_{k_3} \star \phi_{k_4} \star \phi_{k_5} \star \phi_{k_6} + \\
& + \int_k \bar{\psi}_k \not{k} \psi_{-k} + \int_{k_1 \dots k_4} \hat{\delta}(k_1 + \dots + k_4) A \bar{\psi}_{k_1} \star \psi_{k_2} \star \phi_{k_3} \star \phi_{k_4} - \\
& - \int_{k_1 \dots k_4} \hat{\delta}(k_1 + \dots + k_4) A \psi_{k_1} \star \bar{\psi}_{k_2} \star \phi_{k_3} \star \phi_{k_4} + \\
& + \int_{k_1 \dots k_4} \hat{\delta}(k_1 + \dots + k_4) B \bar{\psi}_{k_1} \star \phi_{k_2} \star \psi_{k_3} \star \phi_{k_4}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

em que A e B são “pesos” das interações, e os férmions são férmions de Majorana, de modo que o número de graus de liberdade bosônicos seja igual ao de graus de liberdade fermiônicos, como ocorreria numa teoria supersimétrica. A idéia por trás deste procedimento é verificar se existe uma relação simples entre A, B e g, de modo que as divergências devidas à mistura IV/UV sejam canceladas⁸. Note que começamos com um modelo não-massivo aqui, mas isto não traz alterações relevantes no que estamos discutindo, pois o que nos interessa inicialmente é a divergência IV advinda da não comutatividade em ordem mais baixa em g da função de quatro pontos do campo escalar, e tal divergência não é modificada por termos $m = 0$. A existência de uma relação simples entre A, B e g forneceria, então, evidências sobre um possível cancelamento de divergências quando passássemos a considerar o caso da teoria super-simétrica Φ^4 NC, já que no caso supersimétrico, as constantes de acoplamento hexalinear e de Yukawa estão vinculadas pela super-simetria.

Às regras de Feynman da figura 3.1, adicionam-se aquelas mostradas na figura 3.7. Os gráficos relevantes para nosso cálculo são dados na figura 3.8. A função de quatro pontos, em ordem mais baixa em g, A e B, receberá, então, além da contribuição já calculada devida à interação ϕ^6 , a contribuição devida ao gráfico da figura 3.8(f). Tal gráfico corresponde, na verdade, às integrais explicitadas no apêndice A, referentes às partes planares e não planares, obtidas com as contrações utilizando-se dois vértices do tipo A (ordem A^2), dois vértices do tipo B (ordem B^2), e um vértice de cada

⁸Um procedimento semelhante foi utilizado por Aref’eva [38] no estudo da renormalizabilidade da teoria ϕ^4 NC complexa, até dois laços.

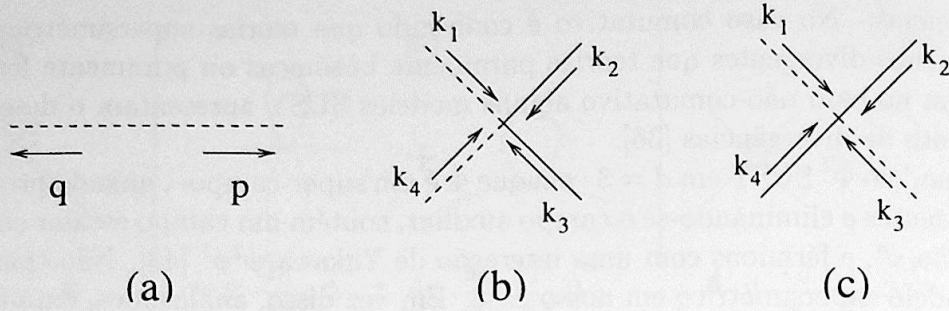


Figura 3.7: Regras de Feynman adicionais à teoria ϕ^6 devidas às interações de Yukawa e aos férmions. (a) Propagador do férmion: $\hat{\delta}(q+p)_{\bar{p}}$; (b) Vértice do tipo A: $-2A \cos(k_{12})e^{-ik_{13}-ik_{23}}$; (c) Vértice do tipo B: $-Be^{-ik_{12}-ik_{13}-ik_{23}}$.

tipo (ordem AB). Estamos trabalhando com férmions de Majorana (férmions reais), de maneira que ψ e $\bar{\psi}$ não são independentes, estão relacionados pela conjugação de carga. Obtivemos para aquele gráfico, a expressão:

$$\begin{aligned}
& - \text{tr} \int_q \frac{1}{\not{q}} \frac{1}{\not{q} + \not{P}} \left\{ \frac{1}{2!} A^2 \left[24 + 8 \left(e^{-iq \cdot (\bar{p}_1 + \bar{p}_2)} + e^{-iq \cdot (\bar{p}_1 + \bar{p}_3)} + e^{-iq \cdot (\bar{p}_1 + \bar{p}_4)} \right) \right] e^{-i(p_{12} + p_{13} + p_{23})} + \right. \\
& + AB \cdot 12 \left[e^{-iq \cdot \bar{p}_1} + e^{-iq \cdot \bar{p}_2} + e^{-iq \cdot \bar{p}_3} + e^{-iq \cdot \bar{p}_4} \right] e^{-i(p_{12} + p_{13} + p_{23})} + \\
& + \frac{1}{2!} B^2 \cdot 8 \left[\left(e^{-ip_{12} - ip_{34}} e^{-i(p_1 + p_4) \cdot \bar{q}} \right) + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4) + \left(e^{-ip_{12} + ip_{34}} e^{-i(p_1 + p_3) \cdot \bar{q}} \right) + \right. \\
& \left. \left. + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4) \right] \right\}, \tag{3.34}
\end{aligned}$$

conforme explicitado no apêndice A.3. Esta expressão simplifica-se um pouco mais para:

$$\begin{aligned}
& - \text{tr} \int_q \frac{1}{\not{q}} \frac{1}{\not{q} + \not{P}} \left\{ \frac{1}{2!} A^2 \left[24 + 8 \left(e^{-iq \cdot (\bar{p}_1 + \bar{p}_2)} + e^{-iq \cdot (\bar{p}_1 + \bar{p}_3)} + e^{-iq \cdot (\bar{p}_1 + \bar{p}_4)} \right) \right] e^{-i(p_{12} + p_{13} + p_{23})} + \right. \\
& + AB \cdot 12 \left[e^{-iq \cdot \bar{p}_1} + e^{-iq \cdot \bar{p}_2} + e^{-iq \cdot \bar{p}_3} + e^{-iq \cdot \bar{p}_4} \right] e^{-i(p_{12} + p_{13} + p_{23})} + \\
& + \frac{1}{2!} B^2 \cdot 8 \left[e^{+ip_{12}} 2 \cos(p_1 + p_2) e^{-i(p_1 + p_2) \cdot \bar{q}} + e^{+ip_{13}} 2 \cos(p_1 + p_3) e^{-i(p_1 + p_3) \cdot \bar{q}} + \right. \\
& \left. + e^{+ip_{14}} 2 \cos(p_1 + p_4) e^{-i(p_1 + p_4) \cdot \bar{q}} \right] \left. \right\}. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Há um pequeno abuso de notação na expressão acima, que é o uso de P no propagador fermiônico para representar indistintamente momentos diferentes para cada

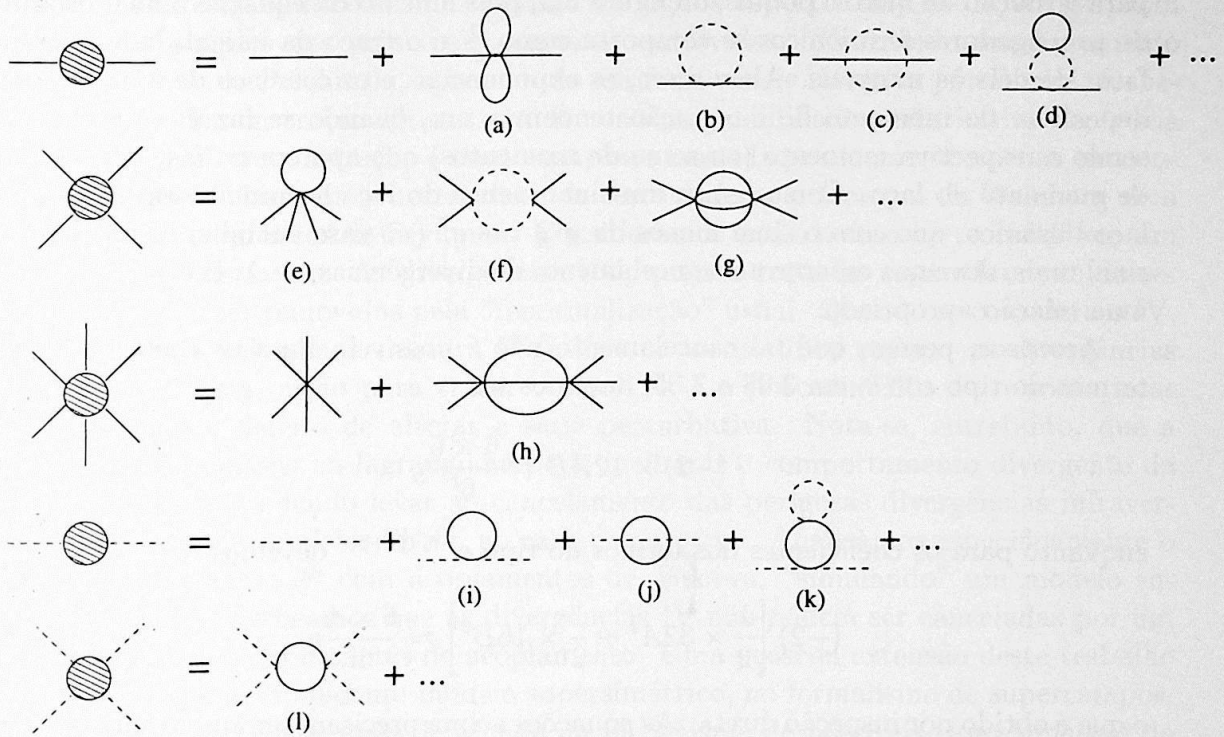


Figura 3.8: Contribuições em ordens mais baixas em g , A e B para as funções próprias de dois, quatro e seis pontos do campo escalar e de dois e quatro pontos do campo fermiônico.

uma das parcelas da expressão entre chaves. P deve ser entendido como sendo o momento total que entra em cada gráfico, ou seja, ora $p_1 + p_2$, ora $p_1 + p_3$ ora $p_1 + p_4$. Cometemos tal abuso aqui porque como estamos interessados nas divergências IV que surgem graças ao comportamento UV do integrando, o valor específico que P toma em cada gráfico é irrelevante para $q \rightarrow \infty$, de modo que para analisarmos essas divergências podemos então tomar $P = 0$ sem perda de generalidade. Observando o comportamento do integrando acima para $\bar{P} \rightarrow 0$, em que \bar{P} representa um momento ou uma soma de momentos que aparecem juntamente com q em cada uma das exponenciais, vemos que ele tem a mesma estrutura do gráfico calculado anteriormente para a função de quatro pontos, da figura 3.2, pois no caso da equação 3.35 o produto de propagadores fermiônicos se comporta como $\frac{1}{q^2}$ e o traço da identidade traz um fator de dois às integrais. Além disso, as exponenciais e os cossenos de 3.35 que não dependem do momento de integração tendem a um, quando se faz $\bar{P} \rightarrow 0$, com \bar{P} sendo o respectivo momento (ou soma de momentos) que aparece na fase dependente de momento do laço. Como temos um sinal menos do laço fermiônico em relação ao laço bosônico, que com o sinal menos de $\not{q} \not{q} = -q^2$ (no caso euclidiano) fornece um sinal mais, devemos esperar um cancelamento de divergências, se A, B e g satisfizerem uma relação apropriada.

Acontece, porém, que tal cancelamento não é possível. Para os coeficientes dos termos do tipo $e^{-iq \cdot \bar{p}_i}$ em 3.28 e 3.35, devemos ter:

$$(-2) \times 12AB = \frac{6 \times 6}{6!} g \quad (3.36)$$

enquanto para os coeficientes dos termos do tipo $e^{-iq \cdot (\bar{p}_i + \bar{p}_j)}$ devemos ter:

$$(-2) \left[\frac{1}{2} \times 32A^2 + \frac{1}{2} \times 16B^2 \right] = \frac{6 \times 4}{6!} g, \quad (3.37)$$

o que é obtido por inspeção direta. As equações acima precisam ser ambas satisfeitas, e isso é impossível com acoplamentos reais, como pode ser visto resolvendo uma simples equação do segundo grau. Chegamos à conclusão, portanto, de que nossa abordagem perturbativa simplificada do problema, com a inclusão de interações com coeficientes a ajustar não resolve o problema das divergências IV/UV. Para compreendermos melhor o mecanismo por trás da possibilidade ou impossibilidade de cancelamentos de divergências como o que investigamos aqui poderíamos considerar um modelo já de partida supersimétrico, e proceder a um tratamento com formalismo de supercampos, por exemplo. Alternativamente, poderíamos considerar interações mais gerais que as consideradas aqui. Deixamos estas possibilidades para uma futura investigação, em caráter de extensão deste trabalho.

Conclusão

Iniciamos este trabalho com uma revisão de alguns aspectos do GR de Wilson, com ilustrações simples dos principais conceitos envolvidos. Utilizando um argumento semelhante ao de Polchinski, apresentado em forma mais intuitiva por Bonini, fornecemos uma demonstração alternativa da renormalizabilidade perturbativa da teoria ϕ^6 em $d = 3$. A demonstração é muito simples e baseada praticamente apenas em contagem de potências, sem a necessidade de se considerar o teorema de Weinberg nem a topologia dos gráficos de Feynman. Consideramos então o caso da teoria ϕ^6 em um espaço não-comutativo. As divergências UV, quando tratadas separadamente do setor IV, podem ser removidas pela “renormalização” usual. Quando se considera o IV, porém, temos a chamada mistura IV/UV, e se torna difícil separar as divergências IV das UV. Uma opção para tratar o setor IV é o procedimento de re-soma, mas ele apresenta o defeito de alterar a série perturbativa. Nota-se, entretanto, que a presença de férmions na lagrangiana pode melhorar o comportamento divergente da teoria, inclusive podendo levar ao cancelamento das perigosas divergências infravermelhas, como em modelos SUSY no caso comutativo. Analisamos especificamente o caso de uma teoria ϕ^6 com acoplamentos de Yukawa, “simulando” um modelo supersimétrico, e verificamos que as divergências IV não podem ser canceladas por um simples ajuste das constantes de acoplamento. Uma possível extensão deste trabalho é o estudo do correspondente modelo supersimétrico, no formalismo de supercampos, para uma compreensão mais detalhada do mecanismo de possíveis cancelamentos de divergências IV/UV. Outras possibilidades seriam considerar outras generalizações do modelo ϕ^6 , como modelos de campos escalares complexos com simetria $U(N)$, com campos de calibre, por exemplo, para o estudo de propriedades como quebras de simetria.

Apêndice A

Diagramas de Feynman

A.1 Contrações envolvidas no cálculo da função de dois pontos da teoria ϕ^6 .

Apresentamos aqui as contrações envolvidas no cálculo do diagrama 3.1(a). Para começar, notemos que no caso da teoria comutativa, tal diagrama teria fator de simetria igual a $1/8$, que é obtido multiplicando o fator de $\frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$ do vértice por 90, que é o número de contrações diferentes que levam à mesma expressão. O valor 90 é obtido por simples contagem das contrações possíveis entre os campos para formar aquele gráfico.

Passando agora ao caso não-comutativo, notemos que, obviamente, nem todas as contrações diferentes levam à mesma expressão analítica, pois elas diferirão agora pelos fatores de fase. Nossa tarefa é agrupar aquelas contrações diferentes que levam a fatores de fase iguais. As 90 possíveis contrações e os grupos de contrações equivalentes são obtidas da figura A.1.

É importante notar também que os números 1 a 6 foram incluídos apenas nas primeiras figuras, para tornar mais clara a contagem, e deveriam ser subentendidos também nas figuras seguintes; eles significam as variáveis k_1 a k_6 da figura 3.1. Os fatores de seis ou três escritos explicitamente nas figuras referem-se às possibilidades de ligar, na primeira contração –que é indicada por uma linha tracejada na figura– dois campos adjacentes (fator 6), dois campos que têm um outro campo entre eles (também fator 6), ou dois campos que têm dois entre eles (fator 3). As contrações dos campos externos sempre fornecem um fator de 2 adicional a todos os gráficos, que escrevemos explicitamente nas figuras. Finalmente, devemos tomar o cuidado de não contar duas vezes a mesma contração, razão pela qual inserimos os fatores de meio em algumas das figuras. Somando o número de contrações possíveis, temos $6 \times 2 \times (\frac{3}{2} \times 2 \times 1)$ (primeira linha) + $6 \times 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times 2 \times (2 + 2 \times \frac{1}{2})$ (segunda linha) + $6 \times 2 \times \frac{1}{2} \times 2$ (terceira linha) = 90, sendo que elas se dividem em seis grupos:

(a) $6 \times 2 \times \frac{3}{2} \times 6 \times 1 \times 2 = 30$ contribuições com a fase 1;

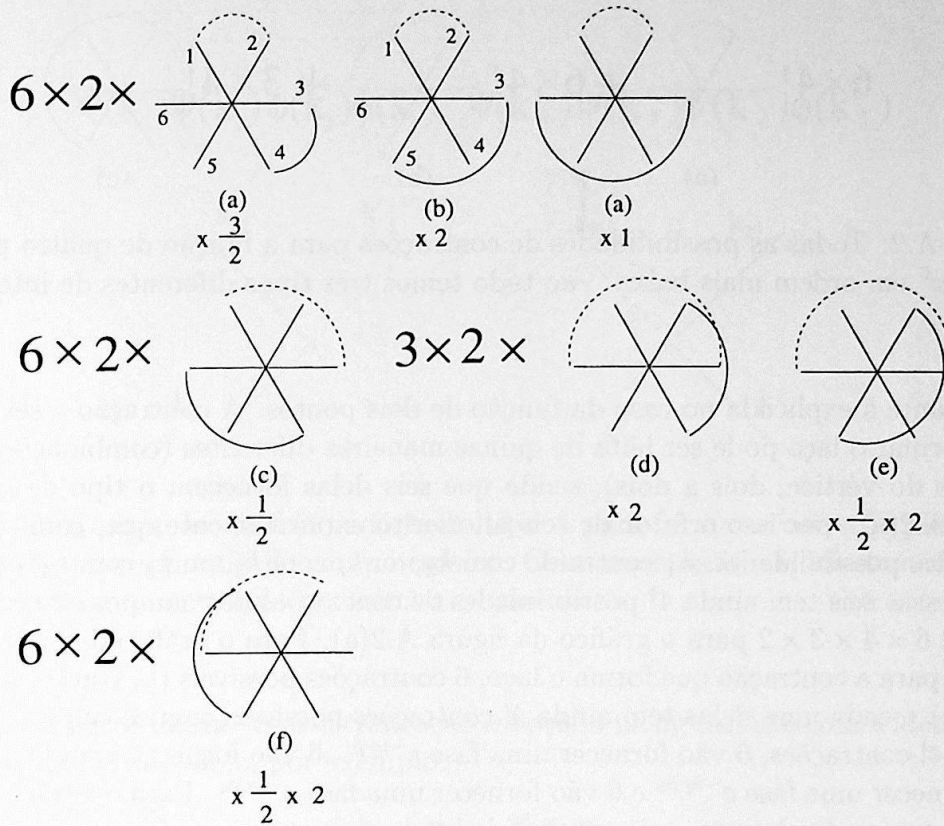


Figura A.1: Todas as possibilidades de contrações para a função de dois pontos da teoria ϕ^6 em ordem mais baixa. As contrações que levam a integrais com fatores de fase iguais estão indicadas com a mesma letra, de (a) a (f) –ao todo seis tipos diferentes de integrais.

- (b) $6 \times 2 \times 2 = 24$ contribuições com a fase $e^{-iq_1 \cdot \bar{p}}$;
- (c) $6 \times 2 \times \frac{1}{2} = 6$ contribuições com a fase $e^{-iq_1 \cdot \bar{p} - ip \cdot \bar{q}_2}$;
- (d) $3 \times 2 \times 2 = 12$ contribuições com a fase $e^{-iq_1 \cdot \bar{q}_2 - iq_2 \cdot \bar{p}}$;
- (e) $3 \times 2 \times \frac{1}{2} \times 2 = 6$ contribuições com a fase $e^{-iq_1 \cdot \bar{p} - iq_1 \cdot \bar{q}_2 - ip \cdot \bar{q}_2}$;
- (f) $6 \times 2 \times \frac{1}{2} \times 2 = 12$ contribuições com a fase $e^{-iq_1 \cdot \bar{q}_2}$;

A.2 Contrações envolvidas no cálculo da função de quatro pontos.

Para a função de quatro pontos, temos, por sua vez, as contrações mostradas na figura A.2. No caso da teoria comutativa, teríamos um fator de simetria igual a $\frac{1}{6!} \times 360 = \frac{1}{2}$. No caso não comutativo, temos também 360 possibilidades de contrações, sendo agrupadas em três tipos, mostrados na figura. Procedemos a uma contagem

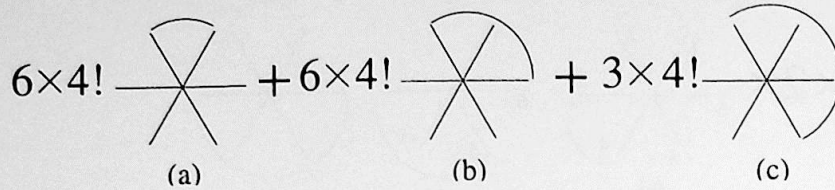


Figura A.2: Todas as possibilidades de contrações para a função de quatro pontos da teoria ϕ^6 em ordem mais baixa. –ao todo temos três tipos diferentes de integrais.

semelhante à explicada no caso da função de dois pontos. A contração a ser efetuada para formar o laço pode ser feita de quinze maneiras diferentes (combinações dos seis campos do vértice, dois a dois), sendo que seis delas fornecem o tipo de gráfico da figura A.2(a) –por isso o fator de seis ali escrito explicitamente que, como antes, dá conta das possibilidades: k_1 contraído com k_2 , ou k_2 com k_3 , ou k_3 com k_4 , etc.–; cada uma dessas seis tem ainda $4!$ possibilidades de contrações dos campos externos, o que fornece $6 \times 4 \times 3 \times 2$ para o gráfico da figura A.2(a). Para o gráfico da figura A.2(b), temos, para a contração que forma o laço, 6 contrações possíveis (k_1 com k_3 , ou k_2 com k_4 , etc.) e cada uma delas tem ainda $4!$ contrações possíveis com os campos externos; dessas $4!$ contrações, 6 vão fornecer uma fase $e^{-iq \cdot \tilde{p}_1}$, 6 vão fornecer uma fase $e^{-iq \cdot \tilde{p}_2}$, 6 vão fornecer uma fase $e^{-iq \cdot \tilde{p}_3}$ e 6 vão fornecer uma fase $e^{-iq \cdot \tilde{p}_4}$. Para o gráfico da figura A.2(c), temos, finalmente, três possibilidades de contração para formar o laço (k_1 com k_4 , k_2 com k_5 , ou k_3 com k_6) e cada uma delas tem ainda $4!$ possibilidades de fazer as contrações com os campos externos, sendo que destas, 8 fornecem a fase $e^{-iq \cdot (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)}$, 8 fornecem a fase $e^{-iq \cdot (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_3)}$ e 8 fornecem a fase $e^{-iq \cdot (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_4)}$. temos então, no total, as $(6 + 6 + 3) \times 4! = 360$ contrações possíveis, agrupadas em três tipos de integrais, diferindo pela forma do fator de fase: $6 \times 4!$ sem fase dependente do momento interno, $6 \times 4!$ com fase do tipo $-iq \cdot \tilde{p}_i$ e $3 \times 4!$ com fase do tipo $-iq \cdot (\tilde{p}_i + \tilde{p}_j)$, resultando a expressão que escrevemos em 3.28 (e onde já estão levados em conta os diagramas que diferem por *crossing*, ou seja, apenas pela troca de momentos externos).

A.3 Contrações que fornecem a parte de laço fermiônico da função de quatro pontos do campo escalar.

Vamos mostrar aqui como é calculada a correção mostrada na figura 3.6(1). Temos aqui três casos a considerar. O primeiro, é fazer as contrações usando dois vértices do tipo A. Em tal caso, o número total de contrações possíveis é $2 \times 4!$, pois há duas possibilidades diferentes de contrações para formar o laço fermiônico e para cada uma delas $4!$ possibilidades de contrair os campos escalares, externos. Uma das maneiras de formar o laço fermiônico resulta em fase independente de momentos externos, enquanto a outra resulta numa fase do tipo $-iq \cdot (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_j)$ com $j = 2, 3, 4$. A parte

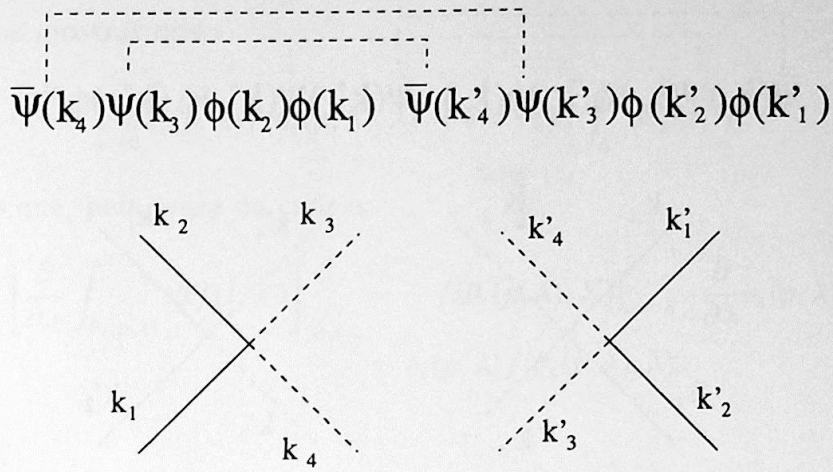


Figura A.3: Contração de dois vértices do tipo A para formar a correção planar para a função de quatro pontos do campo escalar. Os momentos k_i e k'_i são tomados todos convencionalmente entrando nos vértices, como antes.

planar resulta imediatamente da contração esboçada na figura A.3, com a identificação de momentos feita abaixo, por exemplo.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= p_1; & k'_1 &= p_3 \\
 k_2 &= p_2; & k'_2 &= p_4 \\
 k_3 &= q; & k'_3 &= q + p \\
 k_4 &= -q - p; & k'_4 &= -q
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

Como as $4!$ contrações dos campos externos neste caso fornecem todas a mesma expressão, temos então um fator 24 na frente do termo planar. Já no caso do diagrama de Feynman da figura A.4, as $4!$ contrações diferem entre si pelas trocas $p_2 \leftrightarrow p_3$ e $p_2 \leftrightarrow p_4$, razão pela qual temos um fator de $8 = \frac{4!}{3}$ na frente de cada um desses termos. Abaixo escrevemos a associação de momentos para apenas uma dessas contrações, como exemplo, as demais sendo obtidas facilmente fazendo as substituições apropriadas.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= p_1; & k'_1 &= p_3 \\
 k_2 &= p_2; & k'_2 &= p_4 \\
 k_3 &= q; & k'_3 &= -q \\
 k_4 &= -q - p; & k'_4 &= q + p
 \end{aligned}
 \tag{A.2}$$

A fase obtida com esta associação é $e^{-i(k_{12}+k_{13}+k_{23}+k'_{12}+k'_{13}+k'_{23})} = e^{-iq \cdot (\bar{p}_1 + \bar{p}_2)} e^{-ip_{12} - ip_{34}}$, conforme dito acima.

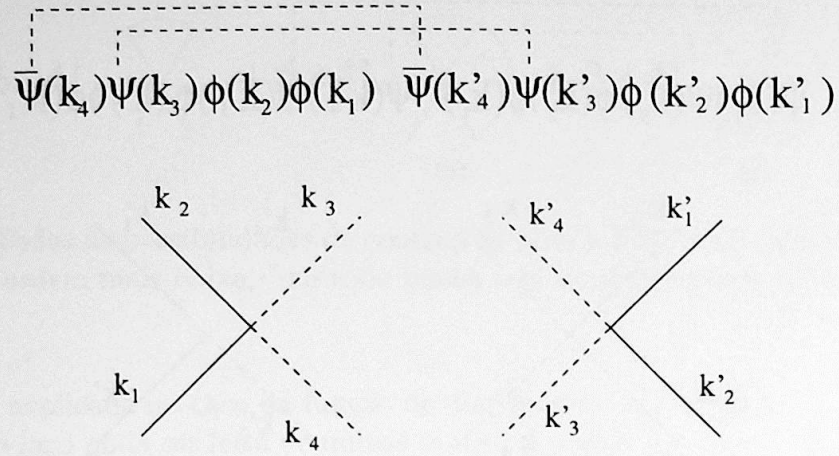


Figura A.4: Contração de dois vértices do tipo A para formar a correção não planar para a função de quatro pontos do campo escalar. Os momentos k_i e k'_i são tomados todos convencionalmente entrando nos vértices, como antes.

Lembremos aqui um detalhe. Estamos considerando na nossa ação férmions de Majorana, que são férmions que obedecem à relação $\psi^\alpha = \bar{\psi}^\beta C^{\alpha\beta}$ (ou $\psi^t = \bar{\psi}C$), em que C é a chamada matriz conjugação de carga, que tem as propriedades:

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^t \quad \text{e} \quad C^t = -C. \quad (\text{A.3})$$

Desta forma, as contrações entre férmions serão dadas por:

$$S_{\bar{\psi}\psi} = S(p) = \frac{1}{\not{p}} \quad (\text{A.4})$$

$$S_{\psi\psi} = \langle \psi_\alpha \psi_\beta \rangle = \langle \psi_\alpha \bar{\psi}_\rho \rangle C_{\rho\beta} = \left(\frac{1}{\not{p}} C \right)_{\alpha\beta} \quad (\text{A.5})$$

$$S_{\bar{\psi}\bar{\psi}} = \langle \bar{\psi}_\alpha \bar{\psi}_\beta \rangle = \langle \bar{\psi}_\lambda \bar{\psi}_\beta \rangle C_{\lambda\alpha}^{-1} = - \left(C^{-1} \frac{1}{\not{p}} \right)_{\alpha\beta} \quad (\text{A.6})$$

$$(\text{A.7})$$

e assim, temos

$$\langle \psi_\alpha \psi_\beta \rangle \langle \bar{\psi}^\alpha \bar{\psi}^\beta \rangle = -\text{tr}(S^2). \quad (\text{A.8})$$

A.4 Identidade auxiliar.

Prova da identidade (2.46):

Queremos mostrar que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(p, \lambda) f(\theta_{\epsilon}(p, \lambda), \lambda) = \delta(\lambda - p) \int_0^1 dt f(t, \lambda). \quad (\text{A.9})$$

Notemos que, pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\theta_{\epsilon}(p, \lambda)}^1 dt f(t, \lambda') \right]_{\lambda'=\lambda} &= -f(\theta_{\epsilon}(p, \lambda), \lambda')|_{\lambda'=\lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \theta_{\epsilon}(p, \lambda) \\ &= \delta_{\epsilon}(p, \lambda) f(\theta_{\epsilon}(p, \lambda), \lambda). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(p, \lambda) f(\theta_{\epsilon}(p, \lambda), \lambda) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\theta_{\epsilon}(p, \lambda)}^1 dt f(t, \lambda') \right]_{\lambda'=\lambda} = \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \theta_{\epsilon}(p, \lambda) \int_0^1 dt f(t, \lambda') \right]_{\lambda'=\lambda} \right\} = \\ &= \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \theta_{\epsilon}(p, \lambda) \int_0^1 dt f(t, \lambda') \right]_{\lambda'=\lambda} \right\} = \\ &= \delta(\lambda - p) \int_0^1 dt f(t, \lambda), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

desde que f seja contínua em $\lambda', \lambda = p$ no limite $\epsilon \rightarrow 0$.

Bibliografia

- [1] Alves, V. S., Gomes, M., Pinheiro, S. V. L., Silva, A. J., “*Perturbative Gross-Neveu model coupled to a Chern-Simons field: A renormalization group study*”, *Phys. Rev. D* **59**, 045002 (1999).
- [2] Kadanoff, L. P., “*Scaling laws for Ising models near T_c* ”, *Physics* **2**, 263 (1966).
- [3] Wilson, K.G., “*Renormalization Group and Critical Phenomena. I. Renormalization Group and the Kadanoff Scaling Picture*”, *Phys. Rev. B* **4**, 3174 (1971).
- [4] Wilson, K. G., Kogut, J. “*The renormalization group and the ϵ -expansion*”, *Phys. Rep. C* **12**, 77 (1974).
- [5] Polchinski, J., “*Renormalization and effective lagrangians*”, *Nucl. Phys. B* **231**, 269 (1984).
- [6] Brezin, E., Le Guillou J.C., e Zinn-Justin, J. “*Phase Transition and Critical Phenomena*”, vol. 6, (eds. Domb, C. e Green, M.) Academic Press (1976).
- [7] Aragão de Carvalho, C.A., *Nucl. Phys. B* **119**, 401 (1976).
- [8] Blume, M., Emery, V.J., e Griffiths, R.B., *Phys. Rev. A* **4**, 1071 (1971).
- [9] Townsend, P.K., *Phys. Rev D* **12**, 2269 (1975); *Phys. Rev D* **14**, 1715 (1976); *Nucl. Phys. B* **118**, 199 (1977).
- [10] Pisarki, R. *Phys. Rev. Lett.* **48**, 574 (1982).
- [11] Alves, V. S., Gomes, M. Pinheiro, S.L.V., “*A Renormalization Group study of the $(\phi^* \phi)^3$ model coupled to a Chern-Simons field*”, *Phys. Rev. D* **61**, 065003 (2000), hep-th/0001221
- [12] Doplicher, S., Fredenhagen, K. e Roberts, J.E., “*The Quantum Structure of Spacetime at the Planck scale and Quantum Fields*”, *Comm. Math. Phys.* **172**, 187 (1995).
- [13] Seiberg, N e Witten, E., “*String Theory and Noncommutative Geometry*”, *JHEP* **9909**, 032, (1999), hep-th/9908142.

- [14] Huang, K., *“Statistical Mechanics”*, Cardy, J.; *“Scaling and Renormalization in Statistical Physics”*, Cambridge University Press (1996).
- [15] Creswick, R. J., Farach, H. A., Poole, C. P., *“Introduction to Renormalization Group Methods in Physics”*, J. Wiley and Sons Inc., N.-Y. London (1992).
- [16] Huang, K. *“Quantum Field Theory”- From Operators to Path Integrals*, J. Wiley and Sons Inc., N.-Y. London (1998).
- [17] Bagnuls, C., Bervillier, C., *“Exact Renormalization Group Equations. An Introductory Review.”*, hep-th/0002034.
- [18] Wegner, F. J. e Houghton, A., *Phys. Rev.* **A8**, 401 (1973).
- [19] Hasenfratz, A., Hasenfratz, P. *“Renormalization group study of scalar field theories”*, *Nucl. Phys.* **B 270** [FS16], 687 (1986).
- [20] Morris, T., *“The Exact Renormalization Group and Approximate Solutions”*, *Int. J. Mod. Phys.* **A 9**, 2411 (1994).
- [21] Morris, T., *“Derivative expansion of the exact renormalization group”*, *Phys. Lett.* **B 329**, 241 (1994); *“Momentum scale expansion of sharp cutoff flow equations”*, *Nucl. Phys.* **B 458**, 477 (1996) *“Derivative expansion of the renormalization group in $O(N)$ scalar field theory”*, hep-th/9704202.
- [22] Comellas, J., Travesset, A., *“ $O(N)$ models within the local potential approximation”*, *Int. J. Mod. Phys.* **A9**, 2411 (1994).
- [23] Comellas, J., *“Polchinski equation, reparameterization invariance and the derivative expansion”*, hep-th/9705129.
- [24] Ball, R. D., Thorne, R. S., *“Renormalizability of effective scalar field theory”*, *Annals Phys.* **236**, 117 (1994), hep-th/9310042.
- [25] Ball, R. D., Haagensen, P. E., Latorre, J. I. e Moreno, E. *“Scheme Independence and the Exact Renormalization Group”*, (1994), hep-th/9411122.
- [26] Comellas, J., hep-th/9609236; Kubyshin, Yu., *Int. J. Mod. Phys.* **B 12**, 1321 (1998), hep-th/9702082; Comellas, J., Kubyshin, Yu., Moreno, E., hep-th/9512086; Aoki, K-I., Morikawa, K., Sumi, J-I., Terao, H., Tomoyose, M., *Prog. Theor. Phys.* **102**, 1151 (1999), hep-th/9908042; Kubota, K-I, Terao, H., hep-th/0101073.
- [27] Bonini, M., D’Attanasio, M., e Marchesini, G., *“Perturbative renormalization and infrared finiteness in the Wilson renormalization group: the massless scalar case”*, *Nucl. Phys.* **B 409**, 441 (1993), hep-th/9301114.
- [28] Lima, E.L., *“Curso de Análise” - 3a. ed.*, IMPA, Rio de Janeiro (1989).

- [29] Snyder, H., “*Quantized Space-Time*”, *Phys. Rev.* **71**, 38 (1947).
- [30] Gomes, M., “*Renormalization in Noncommutative Field Theory*”, lecture notes, XI Jorge André Swieca Summer School – Particles and Fields, Campos do Jordão-SP, 2001.
- [31] Gomes, M., “*Teoria Quântica dos Campos I e II*”, notas de aula, IFUSP, 2000.
- [32] Minwalla, S., Van Raamsdonk e Seiberg, N., “*Noncommutative Perturbative Dynamics*”, *JHEP* **0002**, 020 (2000), hep-th/9912072.
- [33] Szabo, R. J., “*Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces*”, (2001), hep-th/0109162.
- [34] Douglas, M. e Nekrasov, N. A. “*Noncommutative Field Theory*”, (2001) hep-th/0106048.
- [35] Gomis, J. e Mehen, T., “*Space-Time Noncommutative Field Theories and Unitarity*”, *Nucl. Phys. B* **591**, 265 (2000), hep-th/0005129; Seiberg, N., Susskind, L. e Toumbas, N., “*Space/Time Noncommutativity and Causality*”, *JHEP* **0006:044** (2000), hep-th/0005015.
- [36] Girotti, H. O., Gomes, M., Rivelles, V. O., e da Silva, A. J., “*A Consistent Noncommutative Field Theory: the Wess-Zumino Model*”, *Nucl. Phys. B* **587**, 299 (2000), hep-th/0005272; Bichl, A. A., Grimstrup, J. M., Grosse, H., Popp, L., Schweda, M. e Wulkenhaar, R. “*The Superfield formalism applied to the noncommutative Wess-Zumino model*”, *JHEP* **0010:046** (2000), hep-th/0007050.
- [37] Girotti, H. O., Gomes, M., Rivelles, V. O., e da Silva, A. J., “*The Noncommutative Supersymmetric Nonlinear Sigma Model*” (2001), hep-th/0102101.
- [38] Aref’eva, I. Ya., Belov, D. M. e Koshelev, A. S., “*Two-loop Diagrams in Noncommutative ϕ_4^4 Theory*”, *Phys. Lett. B* **476**, 431 (2000), hep-th/9912075.
- [39] Griguolo, L. e Pietroni, M. “*Wilsonian Renormalization Group and the Non-Commutative IR/UV Connection*”, *JHEP* **0105**, 032 (2001), hep-th/0104217.
- [40] Filk, T. “*Divergences in a field theory on quantum space*”, *Phys. Lett. B* **376**, 53 (1996).
- [41] Gradshteyn, I.S. e Ryzhik, I.M. “*Table of Integrals, Series and Products*”, Academic Press (1980).
- [42] Weyl, H., “*The Theory of Groups and Quantum Mechanics*”, Dover, New York (1931); Wigner, E.P., *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932); Groenewold, H.J., *Physica XII* **7**, 405 (1946); Moyal, J.E., *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **45**, 99 (1949); Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A e Sternheimer, D., *Ann. Phys.* **111**, 61

(1978); Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A e Sternheimer, D., *Ann. Phys.* **111**, 111 (1978).

[43] McKeon, D.G.C. e Nguyen, K. "*Yukawa coupling in three dimensions. II*", *Phys. Rev. D* **60**, 085009 (1999)