

**Universidade de São Paulo**  
**Instituto de Física**

# **Emissão de ondas gravitacionais por fontes compactas: o regime não-linear**

Rodrigo Panosso Macedo  
Orientador: Prof. Dr. Alberto Saa

Tese de doutorado apresentada ao  
Instituto de Física para a obtenção  
do título de Doutor em Ciências

**Comissão Examinadora:**

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa (IMECC-Unicamp)  
Prof. Dr. Élcio Abdalla (IFUSP)  
Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas (IFT-Unesp)  
Prof. Dr. Patricio Anibal Lettelier Sotomayor (IMECC-Unicamp)  
Prof. Dr. Paulo Teotonio Sobrinho (IFUSP)

São Paulo  
2011

**FICHA CATALOGRÁFICA**  
**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação**  
**do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Macedo, Rodrigo Panosso

A emissão de ondas gravitacionais por fontes compactas: o regime não linear– São Paulo, 2011.

Tese (D) – Universidade de São Paulo.  
Instituto de Física – Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alberto Saa

Área de Concentração: Relatividade Geral e Gravitação

Unitermos: 1. Física Teórica; 2. Relatividade (Física);  
3.Teoria de Campos e Ondas

USP/IF/SBI-013/2011

---

## Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer a uma antiga amiga minha dos tempos de colegial. Foi justamente nessa época que meu interesse pela Física se intensificou e, ao pedir a lição de casa para copiar no último minuto ou tirar dúvidas antes das provas, ela fez parte importante desse processo. Quero agradecer também a antiga namorada pelo apoio nos momentos do vestibular e pelo incentivo e companhia em todos os anos da faculdade, mesmo que a um  $\Delta S \approx 235\text{km}$ . Agradeço também a minha noiva, super presente durante o doutorado, período no qual os estudos universitários amadureceram e se tornaram, de fato, uma atividade profissional. E por fim, obrigado a minha esposa por todo carinho, apoio e, principalmente, incentivo e companhia durante nossa vida na Alemanha. Enfim, não há palavras para agradecer a Regina por ser, ao mesmo tempo, todas essas mulheres que me acompanharam e cresceram comigo ao longo desses anos.

Tão importante quanto ela foram também meus pais Luis e Cristina e minha irmã Luiza. Enquanto outros perguntavam “mas você vai dar aula?!?!” ou sorriam e exclamavam “Ah, Educação Física... é um curso legal, eu gostos de esportes”, eles me apoiavam em minhas vontades e sonhos. E se orgulhavam disso! Mas os agradecimentos não se restringem apenas ao momento da escolha profissional. Agradeço pelos momentos de infância que, com certeza, foram cruciais na minha formação. Seja para me presentear ou brincar comigo, desde aquela época eles satisfaziam e aguçavam a minha curiosidade com livrinhos sobre homens da caverna, dinossauros, água, experimentos de eletromagnetismo....E claro, antes de qualquer agência, agradeço a eles também pelo apoio financeiro nessa bolsa de estudos com duração de  $28 + n$  anos, com  $n \rightarrow \infty$ .

Colocar todos os nomes de familiares deixaria esta seção ainda mais longa. São inúmeros tios, tias, primos e primas que contribuíram ao longo de minha vida e a **todos** eles fica meu carinho e agradecimento especial. Em particular, quero citar alguns nomes. Não tanto para agradecer situações relacionadas a mim, mas sim por todos os anos que eles se dedicaram à difícil tarefa de ensinar e educar. Fica meio apoio à profa. tia Ivonete, ao prof. Dr. tio Max e ao prof. tio Argi. Claro que não posso deixar de destacar e agradecer meus avôs Domingos e Abilio e minhas avós Wilma e Ivone. Sei que elas, em algum lugar, estão tão orgulhosas quanto eles que aqui ficaram.

Para fazer uma transição suave entre família/amigos, deixo também fortes beijos e abraços a todos do lado Cazzamatta, em especial para a sogrinha Tânia. A lista de amigos também é grande. Mesmo sem entender nada do que faço, eles acompanham minha vida desde os tempo do campão. Então um muito obrigado a Marcel Colleto e João Leal. Ao meu lado desde pequeno também está Douglas Mendonça, e a ele fica mais um agradecimento. Já na Física, agradeço muito a fiel e implacável companhia de Kleber B. Viera, Reginaldo “Perna” da Silva e Marcelo Gustavo de Souza. Embora eles tenham “virado a casaca”, conversar com eles sobre ciência, engenharia ou, simplesmente, acompanhá-los num bar é sempre um prazer enorme. Junto a esse grupo está o povo “lá da USP de São Paulo”: Eduardo do Carmo, Danilo Liarte e Juliano Neves. A eles agradeço pela companhia e por todas conversas e discussões, tenham ela ocorridas na faculdade, em bares, ou nos finais de tarde de sexta-feira.

No parágrafo internacional agradeço com muito carinho Jörg Hennig, pela companhia e ajuda em me integrar à cultura alemã e agradeço Juan Barranco e Argelia Bernal por me ajudar a sair dela. Agradeço Philipp Mösta pela amizade e “suporte técnico”. Um agradecimento mais do que especial a José Luis Jaramillo pela contribuição no trabalho científico, pela contribuição na minha vida profissional mas, principalmente, pela contribuição na minha vida pessoal. A todos eles digo digo *Thanks a Lot, Muchas Gracias* e *Viele Danke*.

Podendo transitar entre amigos, mas já do lado profissional, agradeço ao meu orientador Alberto Saa pela confiança, apoio e incentivo durante todos esses anos. Com ele aprendi não só a fazer Ciência, como também a cozinar um delicioso coelho na cerveja. Muito obrigado também a Luciano Rezzolla por me aceitar em seu grupo e fazer deste trabalho o que ele é hoje. Por fim, mas não menos importante, obrigado a Fapesp e DAAD pelo apoio financeiro.

## ***Encontros e Desencontros***

*Einstein morreu e, assim que chegou ao céu, Deus mandou chamá-lo.*

- *Einstein! - exclamou Deus, quando o viu.*

- *Todo-Poderoso! - exclamou Einstein, já que estavam usando sobrenomes. E continuou: - Você está muito bem para uma projeção antropomórfica do monoteísmo judaico-cristão.*

- *Obrigado. Você também está com ótimo aspecto.*

- *Para um morto, você quer dizer.*

- *Eu tinha muita curiosidade em conhecê-lo - diz Deus.*

- *É mesmo?*

- *Juro por Mim. Há anos que espero esta chance.*

- *Puxa...*

- *Não é confete, não. É que tem uma coisa que Eu queria lhe perguntar..*

- *Pergunte.*

- *Tudo que você descobriu foi por estudo e observação, certo?*

- *Bem...*

- *Quer dizer, foi preciso que Eu criasse um Copérnico, depois um Newton, etc., para que houvesse um Einstein. Tudo numa progressão natural.*

- *Claro.*

- *E você chegou às suas conclusões estudando o que os outros tinham descoberto e fazendo suas próprias observações de fenômenos naturais. Desvendando os Meus enigmas.*

- *Aliás, parabéns, hein? Não foi fácil. Tive que suar o cardigan.*

- *Obrigado. A gente faz o que pode. Mas a teoria geral da relatividade...*

- *Sim?*

- *Você tirou do nada.*

- *Bem, eu...*

- *Não me venha com modéstia - interrompeu Deus. - Você já está no céu, não precisa mais fingir.*

*Você não chegou à teoria geral da relatividade por observação e dedução. Você a bolou. Foi uma sacada, é ou não é?*

- *É.*

- *Maldição! - gritou Deus.*

- *O que é isso, Todo-Poderoso?*

- *Não se escapa da metafísica. Sempre se chega a um ponto em que não há outra explicação. Eu não agüento isso!*

- *Mas...*

- *Eu não agüento a metafísica!*

*Einstein tentou acalmar Deus.*

- *A minha teoria ainda não está cem por cento provada.*

- *Mas ela está certa. Eu sei. Fui Eu que criei tudo isto.*

- *Pois então? Você fez muito mais do que eu.*

- *Não tente me consolar, Einstein.*

- *Você também criou do nada.*

- *Eu sei! Você não entendeu? Eu sou Deus. Eu sou a minha própria explicação. Mas você não tem desculpa. Com você foi metafísica mesmo.*

- *Desculpe, eu...*

- *Tudo bem, tudo bem. Pode ir.*

- *Tem certeza que não quer que eu...*

- *Não. Pode ir. Eu me recupero. Vai, vai.*

*Quando Einstein saiu, viu que Deus se dirigia ao armário de bebidas.*

Luis Fernando Veríssimo

O Estado de São Paulo, 18/03/2007

## Resumo

A colisão de buracos negros é uma das fontes mais importantes de ondas gravitacionais e, em geral, a emissão anisotrópica da radiação causa um recuo do objeto final. Este cenário já é conhecido há décadas, mas foi somente com o recente avanço na relatividade numérica que as velocidades finais dos objetos radiantes foram computadas com precisão. Os valores encontrados podem ser altos o suficiente para exercerem um importante papel no crescimento de buracos negros super massivos via colisão de galáxias e na abundância de núcleos galáticos ativos contendo buracos negros. Este é um autêntico efeito da não linearidade de Relatividade Geral e esta tese fornece uma nova metodologia estudar alguns aspectos da dinâmica da colisão de buracos negros. Consideramos o horizonte como uma tela canônica que codifica as informações da evolução temporal do espaço-tempo. Com esta hipótese, fenômenos como o *anti-kick*, isto é, uma subta desaceleração do sistema antes de atingir a velocidade final, são explicado em termos da dissipação das deformações do horizonte. Estudamos primeiramente o espaço-tempo de Robinson-Trautman. Uma das solução mais simples das equações de Einstein, esta métrica nos fornece um poderoso modelo para investigar tanto a perda de massa quanto o recuo do objeto final. Mostramos que, quando as configurações iniciais tem simetria especular, a massa do buraco negro remanescente e a energia irradiada são completamente determinadas pela condição inicial. Com isso, obtemos as expressões analíticas dos resultados numéricos obtidos anteriormente na literatura. Além disto, com o auxilio do método espectral de Galerkin, analisamos o regime não linear das equações envolvidas e verificamos que se pode estimar a velocidade de recuo final com boa precisão a partir de medidas da assimetria da condição inicial. Introduzimos na sequência a curvatura efetiva como uma medida das deformações intrínsecas ao horizonte. Além de considerar as deformações gerais, ela também inclui as diferenças entre os hemisférios norte e sul. No espaço-tempo de Robinson-Trautman, essa quantidade se correlaciona de uma forma injetora com a velocidade final. Para superar algumas limitações dessa solução, aplicamos o mesmo procedimento nos resultados da simulação numérica de uma colisão *head-on*. Neste caso, a curvatura efetiva, está na realidade, correlacionada com a aceleração do sistema. Refinamentos e generalizações desta técnica são também discutidos e propostos para trabalhos futuros.

---

## Abstract

Colliding black holes are one of the most important sources of gravitational waves and the anisotropic emission of the radiation generally causes the recoil of the final hole. This scenario has been known for decades, but it is only thanks to the recent progress in numerical relativity that the final velocity have been accurately computed. The values found can be large enough to play an important role in the growth of supermassive black holes via mergers of galaxies and on the number of galaxies containing them. This is a genuine nonlinear effect of general relativity and this thesis provides a new methodology to study some features on the dynamics of the collision. We propose that the horizon is a canonical screen, which encodes the information of its surroundings. With this assumption, phenomena such as the “*anti-kick*”, namely the sudden deceleration before reaching the final velocity, are explained in terms of the dissipation of the horizon’s deformation. We first study the Robinson-Trautman spacetime. One of the simplest solutions of Einstein’s equations, it provides us with a powerful toymodel to investigate both the mass loss of the system and the recoil of the final object. We show that, for the case of reflection-symmetric initial configurations, the mass of the remnant black-hole and the total energy radiated away are completely determined by the initial data, allowing us to obtain analytical expressions for some numerical results that had appeared in the literature. Moreover, by using the Galerkin spectral method to analyze the non-linear regime of the equations involved, we found that the recoil velocity can be estimated with good accuracy from some asymmetry measures of the initial data. Then we introduce the effective curvature as a measure of intrinsic deformations on the horizon. Not only does it account for overall deformation, but also for the differences on the north and south hemispheres. In the Robinson-Trautman spacetime, this quantity correlates in an injective way with the final velocity. To overcome some caveats of this solutions, we apply the same procedure to the results given by numerical simulations of a *head-on* collision. In the case, the effective curvature is actually correlated with the acceleration of the system. Further improvement and generalizations of this technic is also discussed and proposed for future work.



# Sumário

<b>1 Ondas Gravitacionais: Uma Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Regime Linear . . . . .	9
<b>2 Espaços-Tempos Dinâmicos: Ondas Gravitacionais, Buracos Negros e suas energias</b>	<b>25</b>
2.1 Ondas Gravitacionais . . . . .	25
2.2 Horizontes Dinâmicos . . . . .	33
2.3 Massas ADM e de Bondi . . . . .	38
<b>3 Robison-Trautman e Colisão <i>Head-On</i></b>	<b>47</b>
3.1 Solução de Robinson Trautman . . . . .	47
3.1.1 Método de Galerkin . . . . .	54
3.2 Condição Initial de Brill-Lindquist . . . . .	58
<b>4 Resultados</b>	<b>63</b>
4.1 Configuração final em Robinson-Trautman . . . . .	63
4.2 Deformações no Horizonte e o <i>anti-kick</i> . . . . .	69
4.3 Colisão <i>head-on</i> de buracos negros em <i>full GR</i> . . . . .	75
<b>5 Conclusão</b>	<b>81</b>
<b>A Solução de Robinson-Trautman</b>	<b>85</b>
<b>B Código</b>	<b>89</b>



# Lista de Figuras

1.1	Cartoon para a geração do <i>anti-kick</i> em uma colisão <i>head-on</i> de dois buracos negros sem spin e com diferentes massas. Inicialmente o menor será mais rápido e momento linear ´e irradiado para baixo. Como consequência o recuo ´e para cima (etapa 1). Quando surge um ´unico horizonte deformado, a curvatura será maior no hemisfério norte e momento linear ´e irradiado para cima, originando o <i>anti-kick</i> (etapa 2). O buraco negro desacelera ate que a curvatura do horizonte atinga seu valor final e constante (etapa 3). . . . .	6
1.2	Efeitos da passagem de uma onda gravitacional em um anel de partículas. A distância própria entre elas oscila, de acordo com as duas polarizaes. Extraido de <a href="http://www.learner.org/courses/physics/visual/">http://www.learner.org/courses/physics/visual/</a> . . . . .	18
2.1	Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Schwarzschild. As regiões <i>II</i> e <i>IV</i> apresentam $\Theta_{(l)} > 0$ e $\Theta_{(k)} < 0$ , enquanto que $\Theta_{(l)}, \Theta_{(k)} > 0$ em <i>I</i> e $\Theta_{(l)}, \Theta_{(k)} < 0$ em <i>III</i> . Estas expansões se anulam em $\mathcal{H}^+$ e $\mathcal{H}^-$ . . . . .	35
2.2	Energia medida no infinito obtida por limites assintóticos sobre diferentes superfícies. A massa ADM é calculada sobre uma superfície espacial e inclui, dessa forma, a energia na forma de ondas. A massa de Bondi por sua vez, é medida sobre superfícies nulas e exclui, assim, a energia da radiação. . . . .	39

3.1 Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Robinson-Trautman. Condições iniciais $Q(u_0, \theta)$ são impostas sobre uma superfície nula $u_0$ . A solução da equação dinâmica (3.3) existe para $u \geq u_0$ e por isso a área sombreada exclui a região do diagrama que não temos acesso. A equação dinâmica (3.3) evolui a condição inicial e, sobre cada superfície nula $u = \text{constante}$ , o horizonte passado $H^-$ (em azul) é descrito por $r = R(\theta)$ solução de (3.17). No processo, ondas gravitacionais (setas verdes) são emitidas e eliminam as deformações do horizonte passado $H^-$ . A simulação segue até uma superfície final $u_{\text{final}}$ na qual, dentro da precisão numérica, $Q(u_{\text{final}}, \theta)$ equivale à solução estacionária (3.23) que representa o espaço-tempo de Schwarzschild.	51
3.2 Evolução dos coeficientes $b_0$ e $b_1$ que assintoticamente tendem a valores constantes.	56
3.3 Evolução dos coeficientes $b_n$ para $n > 1$ que assintoticamente anulam-se. Note o decaimento exponencial nos instantes finais, como predito no regime linear.	57
3.4 Evolução do horizonte em Robinson Trautman. As deformações presentes inicialmente são suavizadas ao longo da evolução até que o se obtenha simetria esférica.	58
3.5 Topologia para condição inicial de Brill-Lindquist	60
4.1 A fração $\Delta$ da massa de Bondi inicial perdida na forma de ondas gravitacionais para a configuração inicial (3.33), como uma função de $y = 1 - \epsilon$ . A curva concorda com os resultados numéricos de [82, 83]. Entretanto, note que a distribuição não-extensiva proposta nesses trabalhos é apenas uma aproximação para $y \approx 1$ .	64
4.2 Momentos ímpares finais $q_n(\infty)$ , $n = 1, 3, 5$ , como função da velocidade final $v$ obtido por (4.4). Note que $ q_1  >  q_3  >  q_5  > \dots$ para um dado $0 <  v  < 1$	65

4.3 Plot polar de algumas condições iniciais sem simetria especular $Q(0, x)$ da família (4.13). As figuras <i>a</i> , <i>b</i> e <i>c</i> correspondem, respectivamente, aos parâmetros $\alpha = 1/2$ , $\beta = 1$ , $\gamma = 0$ ; $\alpha = \beta = 0$ , $\gamma = -2/3$ ; e $\alpha = 0$ , $\beta = 4$ , $\gamma = 3$ . As linhas pontilhadas estão associadas ao conteúdo de radiação gravitacional dado pela Eq.(3.8) . . . . .	67
4.4 velocidade final $\times q_1(0)$ para algumas condições iniciais. A linha pontilhada é a curva predita por (4.14). Em detalhe temos $q_1(0) \times q_1(\infty)$ . Assumir $q_1(\infty) = q_1(0)$ é, tipicamente, uma boa aproximação. . . . .	67
4.5 Dependência da velocidade de final $v$ (3.23) com relação ao parâmetro $w$ da condição inicial(3.28) como predito por (4.15), e alguns resultados dos cálculos numéricos Note que $v \rightarrow -v$ se $\mu \rightarrow 1/\mu$ . . . . .	68
4.6 Evolução típica do espaço-tempo de RT com $w = -0.5$ na condição inicial (3.28). O painel inferior mostra a evolução da curvatura do horizonte nos pontos $x = 1$ (pólo norte, curva em azul) e $x = -1$ (pólo sul, curva em vermelho). O superior apresenta o recuo $v_k$ , que atinge um valor constante quando a diferença na curvatura torna-se inexistente. . . . .	70
4.7 Velocidade de recuo em função da razão da massa reduzida $\nu$ para $w = -0.425$ . Nossa análise sugere uma decomposição para a curva em dois ramos diferentes: a região indicada por quadrados azuis é caracterizada por pequenos valores na curvatura, mas um alto gradiente ao longo do horizonte; os círculos vermelhos caracterizam valores grandes na curvatura, mas um pequeno gradiente entre os hemisférios. Já a linha pontilhada se refere ao anti-kick de um sistema de buracos negros sem spin na CLA [45], isto é, a velocidade de recuo proveniente apenas da etapa em que um único buraco negro deformado está presente. . . . .	71
4.8 Velocidade final em função da curvatura efetiva. Ao contrário da Fig. 4.7, a relação entre o recuo e a curvatura é agora unívoca. . . . .	72
4.9 Velocidade para condições iniciais 4.24. Note que a aceleração muda de sinal.	73
4.10 Diferença $v_{\text{final}} - v(u)$ contra a curvatura efetiva para condições iniciais (4.24). A relação se mantém unívoca em todos os instantes de tempo. . . . .	74

4.11 Diagrama de Penronse típico para um espaço-tempo que contém um horizonte dinâmico, no qual as superfícies $H^-$ e $\mathcal{J}^+$ estão causalmente desconectadas. As regiões próximas ao buraco negro, onde o campo gravitacional e a dinâmica são extremamente intensos, é responsável tanto pela deformação do horizonte $H^-$ quanto por originar as ondas gravitacionais que se propagaram até $\mathcal{J}^+$ . Busca-se correlações entre as informações codificadas por essas duas telas. . . . .	75
4.12 A evolução temporal da velocidade resulta da integração de funções harmônicas e amortecidas. Tais funções modelam qualitativamente os momentos de massa e, por isso, podemos compreender a dinâmica do buraco negro em termos das deformações do horizonte. . . . .	76
4.13 Evolução temporal da velocidade do buraco negro calculado tanto na zona de radiação, quanto no horizonte. . . . .	77
4.14 Evolução temporal da massa do buraco negro. A linha pontilhada corresponde ao instante a partir do qual existe uma correlação entre a deformação de horizonte e a velocidade de recuo. . . . .	78

# Capítulo 1

## Ondas Gravitacionais: Uma Introdução

Em 1915, Albert Einstein finalmente concluiu a Teoria da Relatividade Geral [1]. Problemas causais com gravitação newtoniana já eram conhecidas pelo cientista desde 1905 e a interpretação geométrica do campo gravitacional possibilitou a elaboração covariante da teoria que, novamente, revolucionaria a ciência.

Logo em 1916, Einstein já apontava duas principais consequências de suas equações de campo: a explicação para o avanço do periélio de Mercúrio [2] e a existência de ondas gravitacionais [3]. Juntamente com o desvio de raios luminosos (já previsto como resultado natural de qualquer teoria que satisfizesse o princípio da equivalência), esses três testes da Relatividade Geral (RG) são apresentados por qualquer referência introdutória à teoria de Einstein [4–9]

Obtida inicialmente no regime linear, a existência de ondas gravitacionais é de extrema importância, pois confirma que a RG é uma teoria causal e perturbações do campo gravitacional se propagarão a uma velocidade finita. Entretanto, diferentemente dos outros dois testes, sua observação direta ainda é um dos grandes desafios da Física e os esforços para a sua detecção têm se intensificado nos últimos anos.

Os detectores nada mais são do que gigantescos interferômetros ou sistemas de massas ressonântes(veja [10] para uma revisão sobre o tema). A primeira geração, liderada pelo projetos Ligo e Virgo, já está em funcionamento, mas, infelizmente, os dados coletados [11–13] ainda apresentam resultados nulos.

Porém, aprimoramentos para aumentar significamente a sensibilidade [14] dos atuais aparelhos e o desenvolvimento de uma segunda e terceira geração de detectores, como Lisa e Einstein Telescope respectivamente, devem garantir detecções confiáveis nas próximas décadas. Serão inúmeras contribuições para diversas áreas: desde a Astrofísica e Cosmologia até aos fundamentos da Física [15]. Muito mais que um simples teste da RG, a aplicação dos conhecimentos adquiridos com a observação das ondas gravitacionais abrirá a janela para uma compreensão mais profunda do universo.

As dificuldades no estudo desse importante resultado da RG não residem somente nos problemas técnicos para sua detecção. O fenômeno levou diversas décadas para ser totalmente compreendido e aceito pela comunidade. A existência de ondas gravitacionais foi questionada, por exemplo, até pelo próprio Einstein (o artigo ficou também conhecido pela controvérsia gerada entre o famoso cientista e os editores do *Physical Review* [16]).

Havia essencialmente três pontos que geravam toda a discordia. À época, questões como como a distinção entre observáveis e sistemas de coordenadas e o significado de singularidades não estavam tão claras, além da sempre problemática definição de energia para a gravidade. Dessa forma, um brevíssimo resumo histórico (detalhado em [17, 18], com as respectivas referências originais) serve para ilustrar como o estudo teórico das ondas gravitacionais auxiliou na compreensão de aspectos importantes da RG.

Em 1922, Arthur S. Eddington chamou a atenção para o cuidado em relação à escolhas de sistemas de coordenadas [19]. Ao afirmar que ondas gravitacionais poderiam se propagar com a “velocidade do pensamento”, o astrônomo mostrou que somente o modo chamado (na época) transverso-transverso apresentava a velocidade da luz em *qualquer* sistema. Todos os outros podiam ter a velocidade que desejássemos. Bastava apenas uma escolha adequada das coordenadas. Além disso, a famosa fórmula do quadrupolo para a perda de energia derivada por Einstein em 1918 [20] (e corrigida aqui por uma fator 2) era válida *apenas* para o tal modo transverso-transverso.

A dúvida de Einstein sobre a realidade da radiação surgiu durante a primeira tentativa de entender ondas gravitacionais além do regime linear. Em 1936, ele e seu aluno N. Rosen buscavam uma solução exata para descrever ondas planas. Durante o trabalho, a dupla percebeu que seria inevitável a introdução de singularidades na métrica. Logo

concluiram que soluções tipo onda regulares e periódicas não existiriam. A correção viria ainda no mesmo ano, quando se percebeu a possibilidade de se evitar a singularidade com a construção de ondas cilíndricas.

Mas existia ainda a grande questão sobre a perda de energia de um sistema gravitacional. Por muito tempo não houve consenso sobre a validade da fórmula do quadrupolo. Diferentes abordagens nas expansões, aproximações e escolhas de sistemas de coordenadas levavam a resultados completamente opostos. Mesmo meio século após o advento da RG, argumentava-se que talvez ondas gravitacionais não carregassem nenhuma energia.

O cenário começou a mudar a partir de meados dos anos 50. Até então, a única conclusão obtida dos confusos e controversos resultados apresentados era que o problema da radiação gravitacional precisava de um estudo mais cuidadoso. Tarefa assumida por importantes cientistas a partir das conferências de Bern (1955) e Chapel Hill (1957). Tais abordagens serão delineadas nas seções seguintes, de acordo com os formalismos e interpretações atualmente adotados.

Para por um ponto final sobre a polêmica discussão, era necessário obter da natureza alguma informação a respeito do assunto. Infelizmente, as “Evidências para a Descoberta da Radiação Gravitacional”, apresentadas por Joseph Weber no Physical Reviews Letters, em 1969 [21], mostraram-se falsas. Foram necessários mais 5 anos para obter a prova final com a descoberta do pulsar binário 1913+16 por Hulse e Taylor [22–24].

Sistemas binários tiveram um papel crucial na observação indireta das ondas gravitacionais e, pelo que tudo indica, também serão essenciais para detecção direta da radiação. Os principais candidatos a detecção pelo atuais aparelhos são compostos por pares de buracos negros e/ou estrelas de neutrons. Assim, muitos dos estudos teóricos buscam estimativas de emissão por essas fontes [25].

Embora o regime linear da RG seja plenamente satisfatório para descrever o celebrado pulsar 1913+16, cuja taxa de variação do período atribuída à emissão de ondas gravitacionais é da ordem de  $\dot{P}_b/P_b \approx 10^{-12}$ , é preciso levar em conta a não-linearidade da teoria para entender e descrever a dinâmica de um sistema binário completamente.

A inclusão dos efeitos não-lineares da RG é feita de diferentes formas. Estudos perturbativos, a exemplo de expansões post-Minkowskiana, post-Newtoniana, *close-limit ap-*

*proximation e effective one body formalism* [26–31], fornecem resultados analíticos que, quando aplicados em sistemas binários, descrevem com excelente precisão a espiral das órbitas iniciais ou as etapas finais da dinâmica.

Em alguns casos particulares, hipóteses simplificam consideravelmente as equações de Einstein. No sistema solar, por exemplo, o movimento dos planetas é precisamente descrito pelo espaço-tempo gerado por um objeto esféricamente simétrico. Já em estudos cosmológicos, argumentos de homogeneidade e isotropia simplificam significativamente as equações e descrevem o universo observável com incrível precisão. Da mesma forma, existem soluções exatas da RG que descrevem espaços-tempo com ondas planas [32], cilíndricas [33] ou até mesmo com ondas emitidas por fontes compactas, como no caso da solução de Robinson Trautman [34].

Em cenários mais realistas porém, não há argumentos que simplifiquem as equações, e, por isso, métodos numéricos são essenciais [25, 35]. A Relatividade Numérica é indispensável, por exemplo, quando os objetos orbitam muito próximos um ao outro até o momento da formação de um único corpo (veja [36] para revisão).

Um dos principais objetivos dos estudos teóricos é obter a forma dos sinais gravitacionais para filtrar os dados obtidos nos detectores. Para isso, um bom modelo realista das fontes astrofísicas e dos sinais por elas emitidos são cruciais. Esta tarefa é mais complicada ao se incluir a matéria, pois é preciso considerar diferentes modelos estelares, equações de estado e detalhes da microfísica envolvida. Por outro lado, a precisão do sinal emitido por sistemas binários de buracos negros está restrita apenas às técnicas numéricas ou aproximações utilizadas. Dessa forma, é mais fácil desenvolver um estudo sistemático para checar a consistência e coerência dos resultados obtidos nas simulações de buracos negros.

Nesse contexto, destacam-se os trabalhos do projeto NINJA (Numerical INjection Analysis project) [37, 38] e SAMURAI [39]. O primeiro busca a obtenção do sinal gravitacional durante toda a evolução de um sistema binário de buracos negros. Sinais obtidos por métodos analíticos nas primeiras etapas da evolução são comparados e “colados” aos dados numéricos que descrevem as etapas finais. Por outro lado, o projeto SAMURAI verificou que os diversos formatos de ondas obtidos por simulações de diferentes grupos

concordam dentro dos respectivos erros numéricos.

Apesar do grande sucesso da área e da enorme expectativa da detecção de ondas gravitacionais nos próximos anos, ainda há muitos detalhes na dinâmica de buracos negros a serem compreendidos. O trabalho apresentado nesta tese de doutorado pretende contribuir significamente nesse sentido ao introduzir e implementar explicitamente uma metodologia para estudar a física nas regiões próximas a um buraco negro.

Assim, argumentaremos que a dinâmica global de um buraco negro, determinada não trivialmente pela reação à emissão de ondas gravitacionais, é entendida pelo estudo de propriedades geométricas intrínsecas ao seu horizonte<sup>1</sup>. Essa abordagem fornece ferramentas para assimilar de maneira simples e intuitiva processos físicos, de outra forma descritos por complexas equações. Um exemplo interessante é fenômeno conhecido como “*anti-kick*”.

De maneira geral, a emissão de ondas gravitacionais durante colapso de buracos negros ocorre de maneira anisotrópica devido a assimetrias do sistema binário (essencialmente diferença nas massas e nos spins) [40]. Uma consequência direta desse processo é o recuo (*kick*) do buraco negro remanescente com velocidades de ordem até 4000 km/s, isto é, valores altos o suficiente para ejetá-los do centro da galáxia e, dessa forma, interferir no processo de formação e crescimento de buracos negros supermassivos. [41–43]

Embora estudos analíticos e numéricos já tenham explicado diversos aspectos do processo de recuo [40], até o momento não se conhecia nenhuma explicação intuitiva para o *anti-kick*, isto é, para uma desaceleração repentina do sistema antes da obtenção da velocidade final. Alguns estudos [44, 45] sugerem que o *anti-kick* ocorre, em geral, após os buracos negros estarem próximos o suficiente para apresentarem um único horizonte.

Muitos dos trabalhos recentes na área buscaram expressões analíticas que relacionassem a configuração inicial do sistema de buracos negros (massas, spins e momento angular orbital) com os parâmetros da solução final (massa, velocidade de recuo e spin) [40]. Nas etapas da colisão validadas por aproximações pós-newtonianas, analogias à teoria eletrromagnética permitem desenvolver uma intuição física para o processo [46]. Porém, nos momentos em que a intensa dinâmica do campo gravitacional impossibilita qualquer aproximação, explicações físicas intuitivas se tornam mais raras. No caso do *anti-kick*,

---

<sup>1</sup>Definições matemáticas precisas desses conceitos serão dadas nos capítulos seguintes

por exemplo, o fenômeno é muitas vezes apresentado apenas como uma consequência matemática, proveniente da integração no tempo de funções oscilatórias e amortecidas. Este trabalho, ao mostrar que o horizonte captura a informação da dinâmica no regime não-linear, é o primeiro a apresentar argumentos físicos para a explicação do *anti-kick*.

Como a configuração final será esfericamente simétrica, as deformações do horizonte serão dissipadas no processo radiativo. Com a hipótese bastante intuitiva de que a emissão de ondas será mais intensa em regiões com maior curvatura, o processo de *kick* e *anti-kick* é compreendido qualitativamente de maneira bastante simples, como apresentado na Fig. 1.1 para uma colisão *head-on* de buracos negros sem spin.

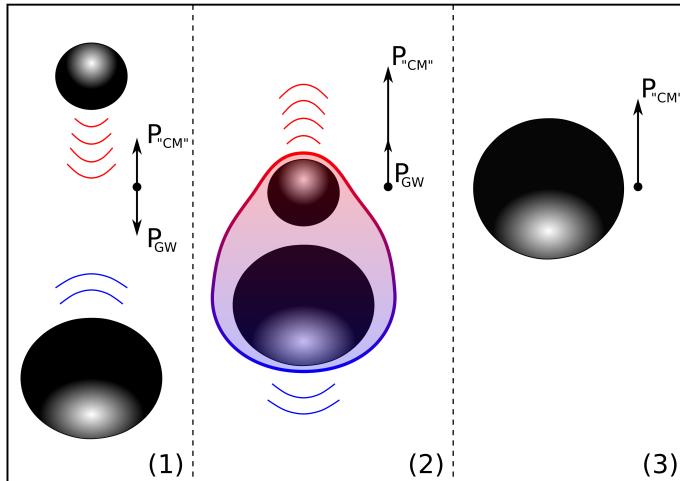


Figura 1.1: Cartoon para a geração do *anti-kick* em uma colisão *head-on* de dois buracos negros sem spin e com diferentes massas. Inicialmente o menor será mais rápido e momento linear é irradiado para baixo. Como consequência o recuo é para cima (etapa 1). Quando surge um único horizonte deformado, a curvatura será maior no hemisfério norte e momento linear é irradiado para cima, originando o *anti-kick* (etapa 2). O buraco negro desacelera até que a curvatura do horizonte atinja seu valor final e constante (etapa 3).

Com o sistema de coordenadas no centro de massa do sistema (corpos + radiação), os buracos negros de menor e maior massa se movem nas direção  $-z$  e  $+z$ , respectivamente. Durante a queda livre, o buraco menor estará mais rápido e, por isso, será mais eficiente em colimar a radiação gravitacional na direção de seu movimento [46]. Nessa primeira etapa então, momento linear será carregado pelas ondas na direção  $-z$  e o centro de massa dos dois buracos negros recuará em  $+z$  (etapa [1]). Quando um único horizonte se forma,

a curvatura fica maior na região do menor buraco negro e, desse modo, a direção com que a radiação é emitida muda e causa a desaceleração do sistema (etapa [2]). O processo segue até a velocidade final de recuo ser atingida, momento em que todas as deformações do horizonte forem dissipadas (etapa [3]).

Obviamente, em cenários realistas, os detalhes do processo se complicam consideravelmente. Conceitualmente, não se pode falar que as emissões partem do buraco negro, já que por definição o horizonte não tem nenhuma relação causal com a região onde as ondas são detectadas. A dinâmica do campo gravitacional se desenvolve intensamente nas regiões próximas ao objeto e, dessa forma, interpreta-se o horizonte e a superfície na zona de radiação sobre o qual as ondas são observadas (idealmente infinito nulo  $\mathcal{J}^+$ ) como telas que codificam a dinâmica de todo o espaço-tempo. Estas informações são claramente governadas pela teoria de Relatividade Geral, mas devido à complexidade e não-linearidade das equações envolvidas, as diversas correlações entre as grandezas em questão são altamente não triviais.

Ao longo da tese, a descrição qualitativa do processo acima será formalizada e feita de forma quantitativa. Focaremos inicialmente nas etapas em que o sistema já apresenta um horizonte comum. Como modelo deste cenário, utilizaremos o espaço-tempo de Robison-Trautman (RT), isto é, uma solução exata que representa um objeto compacto deformado emitindo ondas gravitacionais [34, 47]. Dados provenientes de cálculos analíticos permitem uma comparação com os resultados obtidos por esta solução. Por fim, será apresentado também resultados de simulações numéricas que descrevem o processo completo da colisão *head-on*, sem as simplificações assumidas pela solução de RT.

Como dito, muito mais do que descrever um cenário particular e pouco realista de uma colisão *head-on* de dois buracos negros sem spin, esse trabalho introduz uma nova abordagem. Trata-se de um estudo sistemático das relações entre os graus de liberdade do campo gravitacional em regiões do espaço-tempo próximas ao buraco negro com graus de liberdade radiativos medidos na zona de radiação. Dessa forma, a próxima etapa natural deste projeto é a generalização para colisões de buracos negros com spin que orbitam um ao outro.

O restante deste primeiro capítulo apresenta uma revisão do regime linear das ondas

gravitacionais. Em particular, focaremos nas quantidades invariantes de gauge para verificar quais são, de fato, os graus de liberdade radiativos. Como exemplo tradicional da perda de energia por emissão de ondas gravitacionais, aplicaremos o regime linear para sistemas binários como do pulsar 1913+16.

No capítulo 2, introduziremos os formalismos matemáticos necessários para o estudo de ondas gravitacionais fora do regime linear e buracos negros em espaços tempos dinâmicos, uma vez que esses conceitos não são detalhados durante uma formação básica em RG. Porém, não será possível aprofundar nos detalhes dos formalismos envolvidos nos métodos analíticos e numéricos que usaremos para comparar com os resultados da solução de RT. Nesse caso, indicaremos apenas referências completas sobre os assuntos em questão.

A solução de RT é detalhada no capítulo 3 e na sequência, o capítulo 4 descreverá os principais resultados desta tese. Em particular, confirmaremos que o horizonte captura as informações presentes também na zona de radiação e conseguimos, desta forma, estabelecer correlações entre medidas feitas nas duas regiões. Para isso, introduzimos uma medida efetiva da curvatura que, no espaço-tempo de RT, fornece uma relação unívoca para com o recuo. Esses resultados serão então adaptados aos dados fornecido pelas simulações numéricas. Nesses cálculos mais realistas, mostraremos que a mesma curvatura efetiva relaciona-se não exatamente com a velocidade, mas sim, com a aceleração do sistema. Desta forma, confirmamos a imagem intuitiva apresentada na Fig.1.1. A intensidade e direção do “jato” de onda gravitacional está diretamente ligada às deformações na curvatura do horizonte. A “força” que o buraco negro sente é dada pela curvatura efetiva. Finalizamos com as conclusões no capítulo 5.

Durante todo o trabalho, utilizaremos a convenção de sinais adotada em [5], isto é, a métrica com assinatura positiva  $(-+++)$  e as equações de Einstein escritas  $G_{\mu\nu} = +kT_{\mu\nu}$  ( $k$  uma constante positiva). Além disso, adotaremos ainda a seguinte notação:

- i) Grandezas definidas em todo o espaço-tempo - índices de 0 a 3: letras gregas  $(\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots)$  descrevem as componentes do tensor em uma base coordenada  $\{\partial_\mu\}$ , letras latinas do ínicio do alfabeto  $(a, b, c, \dots)$  descrevem as componentes em uma base tétrada  $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ ;
- ii) Grandezas definidas sobre uma superfície espacial - índices de 1 a 3: letras latinas

do meio do alfabeto ( $i, j, k, l, \dots$ );

- iii) Grandezas definidas sobre uma superfície bi-dimensional (geralmente esferas deformadas) - índices 2 e 3: letras latinas maiúsculas (A,B).

Finalmente, como padrão na área, índices repetidos devem ser somados e os símbolos “,” e “;” representam derivadas simples e covariantes, respectivamente.

## 1.1 Regime Linear

Praticamente todos os textos introdutórios de RG começam com o estudo do regime linear das equações de Einstein [4–8]. Durante séculos, a gravitação Newtoniana foi suficiente para descrever com enorme precisão o sistema solar, de maneira que qualquer nova teoria gravitacional deve apresentar limites capazes de reproduzir os resultados clássicos. No caso da RG, o regime linear é responsável justamente por estabelecer esse limite.

Porém, o regime linear vai muito além da simples recuperação da gravitação newtoniana. Ele prevê também um fenômeno completamente novo: a existência de ondas gravitacionais. Esta importante previsão mostra que, diferentemente da teoria newtoniana, o campo gravitacional é causal e propaga-se com uma velocidade finita.

O procedimento tradicional [4–8, 35, 48] assume uma pequena perturbação sobre o espaço-tempo de Minkowski. Em primeira ordem nessa perturbação, as equações de Einstein se reduzem a uma simples equação de onda, o que mostra que qualquer pequena perturbação se propagará como ondas sobre o espaço-tempo plano de fundo. Contudo, uma introdução ainda mais simples (e bastante didática) é possível [49]. Uma pequena modificação nas relações de causalidade da gravitação newtoniana já fornece estimativas bastante precisas (ao menos no que se refere à ordem de grandeza) para emissão e detecção da radiação gravitacional.

De forma mais precisa, em RG o espaço-tempo é descrito pela métrica

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{com} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (1.1)$$

No qual  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski que descreve o *background*. A notação  $|h_{\mu\nu}|$  refere-se à magnitude de uma componente não nula típica da perturbação  $h_{\mu\nu}$ .

Para que o regime linear seja de fato válido, é necessário também a existência de um sistema de coordenadas em que  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  em uma grande parte do espaço-tempo.

Claro que a RG permite uma total liberdade na escolha de sistema de coordenadas, e a física deve ser completamente independente de como parametrizamos o espaço-tempo. Mas muitas vezes, escolhas adequadas simplificam enormemente os cálculos e facilitam, dessa forma, a interpretação dos resultados obtidos. De maneira geral, no regime linear é suficiente restringir o sistema de coordenadas para que seja aproximadamente lorentziano, no qual  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ .

A restrição acima não limita a escolha do sistema de coordenadas a uma única possibilidade. Dado um sistema aproximadamente lorentziano  $\{x^\alpha\}$ , há ainda diversas transformações que preservam o caráter desejado para a métrica  $\eta_{\mu\nu}$ . Transformações de Lorentz no *background*, por exemplo, são aquelas que levam o sistema original  $\{x^\alpha\}$  em outro  $\{\tilde{x}^\alpha\}$  da forma

$$\tilde{x}^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta. \quad (1.2)$$

Como  $\Lambda^\alpha_\beta$  é a matrix de transformação de Lorentz da relatividade especial, na qual

$$\tilde{\eta}_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1),$$

o novo sistema  $\{\tilde{x}^\alpha\}$  continua aproximadamente lorentziano.

Neste caso,

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu} &= \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu g_{\alpha\beta} = \tilde{\eta}_{\mu\nu} + \tilde{h}_{\mu\nu} \\ \Rightarrow \tilde{h}_{\mu\nu} &= \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu h_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Isso é, a perturbação  $h_{\mu\nu}$  transforma-se como se fosse um tensor em relatividade especial (embora seja apenas uma parte da métrica  $g_{\mu\nu}$ ) e nos permite interpretar um espaço-tempo levemente curvado como um espaço plano sobre o qual está definido um tensor  $h_{\mu\nu}$ . Assim, qualquer quantidade física é escrita em termos de  $h_{\mu\nu}$  e poderá ser interpretada como um campo definido sobre *background* de Minkowski. O tensor de Riemann, por exemplo, é em primeira ordem

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}). \quad (1.4)$$

Consistente ainda com esse ponto de vista, índices são levantados e abaixados apenas com a métrica  $\eta_{\mu\nu}$  do *background*. Dessa forma, em primeira ordem na perturbação a inversa da métrica (1.1) fica

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu},$$

com  $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda}h_{\rho\lambda}$ .

Enquanto transformações de Lorentz no *background* auxiliam na interpretação do significado físico de  $h_{\mu\nu}$ , transformações de gauge simplificam significativamente as equações de Einstein no regime linear. Essas transformações introduzem pequenas mudanças nas coordenadas, isso é,

$$\tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x). \quad (1.5)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta} &= \delta^\alpha_\beta + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}, \\ \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\alpha} &= \delta^\alpha_\beta - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right|^2\right). \end{aligned}$$

Note que, a mudança do sistema de coordenadas introduzida pelo vetor  $\xi^\alpha(x)$  é considerada pequena enquanto  $\left|\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right| \ll 1$ . Assim, em primeira ordem

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu},$$

com  $\xi_\mu = \eta_{\mu\nu}\xi^\nu$ . Essencialmente, a transformação de gauge apenas redefine a perturbação

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu}, \quad (1.6)$$

que continua pequena e não invalida o regime linear. Por outro lado, campos físicos como o tensor de Riemann são invariantes de gauge, já que as alterações na Eq.(1.4), devido à Eq.(1.6), são apenas de segunda ordem.

Com este formalismo estabelecido, podemos nos dedicar a tarefa de escrever as equações de Einstein no regime linear. Para isso, é convincente introduzir

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h,$$

no qual  $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$  é o traço da perturbação. O tensor  $\bar{h}_{\mu\nu}$  recebe o nome de “tensor do traço reverso” pois  $\bar{h} = -h$ , e se transforma com a mudança de gauge dada pela Eq.(1.6) da forma

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} + \eta_{\mu\nu}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha}. \quad (1.7)$$

Em termos de  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , o tensor de Einstein se reduz a

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} [\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\cdot\alpha} + \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{\cdot\alpha\beta} - \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{\cdot\alpha} - \bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{\cdot\alpha} + \mathcal{O}(h_{\mu\nu}^2)].$$

Caso  $\bar{h}_{\mu\nu}{}^{\nu} = 0$ , apenas a primeira parcela  $\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = \square h_{\mu\nu}$  seria diferente de zero e a expressão acima seria ainda mais simples. Obtemos esta simplificação graças à liberdade na escolha do gauge. De fato, se começarmos com um sistema de coordenadas  $A$  em que  $\bar{h}_{\mu\nu}^{(A),\nu} \neq 0$ , podemos escolher  $\xi^\mu$  na transformação (1.5) que satisfaça

$$\square \xi^\mu = \bar{h}_{\mu\nu}^{(A),\nu}. \quad (1.8)$$

Graças à Eq.(1.7), teremos então um novo sistema  $B$  com

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(B),\nu} = 0. \quad (1.9)$$

Devido à semelhança com o Eletromagnetismo, a Eq.(1.9) acima recebe muitas vezes o nome de gauge de Lorenz.

Com isso, temos  $G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha}$  e as equações de Einstein no regime linear ficam simplesmente

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

Einstein apresentou este resultado já em 1916 [3]. Com um conhecimento prévio de Eletromagnetismo, por exemplo, sabemos que no vácuo ( $T_{\mu\nu} = 0$ ) ondas planas

$$\bar{h}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (1.11)$$

são soluções da Eq.(1.10). A teoria da Relatividade Geral então é capaz de descrever a gravitação como uma teoria causal e, mais do que isso, a simples substituição da solução (1.11) na Eq.(1.10) mostra que  $k_\alpha k^\alpha = 0$ , isto é, as ondas se propagam com a velocidade da luz.

Porém, é necessário um extremo cuidado com as afirmações do parágrafo anterior. Uma simples analogia entre a Eq.(1.10) com as equações do Eletromagnetismo leva à algumas confusões e até a falsas conclusões. A Eq.(1.10) é válida apenas no gauge de Lorenz (1.9). Neste gauge em particular, *todas* as componentes de  $\bar{h}_{\mu\nu}$  propagam-se a velocidade da luz e sugere a falsa idéia que todos os modos apresentam alguma realidade física. Essa utilileza já é conhecida há muito tempo pela comunidade.

Em 1922, Eddington mostrou que diferentes escolhas do sistema de coordenadas mudam significativamente as equações de Einstein linearizadas [19] e possibilita a obtenção de situações em que algumas componentes da perturbação se propagam a velocidades

maiores que a da luz. Neste caso, ele comenta que a única velocidade de propagação relevante é a “*velocidade do pensamento*”. A expressão caracteriza o caráter ilusório da escolha do sistema de coordenadas. As ondas podem se propagar arbitrariamente rápidas, dependendo apenas da decisão particular de cada pessoa. O resultado, porém, não anula a conclusão sobre a realidade física das ondas, pois não se aplica a todas as componentes de  $\bar{h}_{\mu\nu}$ . Ondas gravitacionais planas eram classificadas na época em três classes: (1) longitudinal-longitudinal; (2) longitudinal-transverso e (3) transverso-transverso. Eddington concluiu que o modo transverso-transverso é o *único* que se propaga na velocidade da luz em *qualquer* sistema de coordenadas e assim, é o único a apresentar alguma realidade física.

Nos livros atuais, esse estudo é feito primeiramente com a observação sobre a não unicidade de um sistema de coordenadas que satisfaça o gauge de Lorenz na Eq.(1.9). De fato, a Eq.(1.8) nos permite ir de um sistema arbitrário para outro no gauge de Lorenz. Mas ainda temos a liberdade de redefinir o vetor  $\xi^\mu(x) \rightarrow \xi^\mu(x) + \zeta^\mu(x)$ . Caso

$$\square \zeta^\mu = 0, \quad (1.12)$$

a Eq.(1.8) não se altera e continua no gauge de Lorenz.

Das 10 componentes livres de  $h_{\mu\nu}$ , os graus de liberdade das ondas gravitacionais serão dados apenas por 2 componentes independentes, já que 8 estarão vinculadas à escolha das coordenadas. No gauge de Lorenz, por exemplo, a Eq.(1.8) impõe 4 vínculos às componentes de  $h_{\mu\nu}$ , que para solução de onda plana (1.11) são escritos como

$$\bar{h}_{\mu\alpha} k^\alpha = 0. \quad (1.13)$$

A Eq.(1.12) por sua vez fornece mais 4 vínculos que são usado para descrever o sistema no gauge Transverso e sem Traço (TT - do inglês *transverse-traceless*), isto é, com

$$h^{TT} = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (1.14)$$

$$h_{0\mu}^{TT} = t^\alpha h_{\alpha\mu}^{TT} = 0 \quad (1.15)$$

para algum vetor tipo tempo  $t^\alpha$ .

A escolha particular do gauge TT é normalmente justificada nos livros apenas por questões de conveniência. É possível porém, estudar as liberdades de gauge com um

pouco mais de cuidado e concluir que, de fato, as componentes TT da perturbação são as únicas a satisfazerem uma equação de onda em *qualquer* sistema de coordenadas [48].

Inicialmente, decompõe-se a perturbação  $h_{\mu\nu}$  em suas componentes escalares  $h_{00}$ , vetoriais  $h_{0i}$  e tensoriais  $h_{ij}$ . Inspirado no conhecido limite newtoniano, assume-se

$$h_{00} = 2\phi. \quad (1.16)$$

A componente vetorial por sua vez é decomposta em suas componentes transversa e longitudinal <sup>2</sup>

$$h_{0i} = \beta_i + \partial_i \gamma \quad \text{com} \quad \partial^i \beta_i = 0. \quad (1.17)$$

Por fim, como em qualquer tensor simétrico, as perturbações tensoriais são decompostas primeiramente em termos do traço  $H = h^i_i$  (que não deve ser confundido com  $h = h^\mu_\mu$ ) e na parte sem traço  $E_{ij}^T$ :

$$h_{ij} = \frac{1}{3}H\delta_{ij} + E_{ij}^T.$$

Por fim, divide-se a componente sem traço  $E_{ij}^T$  em suas componentes transversais  $E_{ij}^{TT} \equiv h_{ij}^{TT}$  e longitudinais  $E_{ij}^{LT} = \partial_{(i}\varepsilon_{j)} + (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)\lambda$ <sup>3</sup>, logo

$$h_{ij} = \frac{1}{3}H\delta_{ij} + h_{ij}^{TT} + \partial_{(i}\varepsilon_{j)} + \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)\lambda, \quad (1.18)$$

com os vínculos  $\partial_i\varepsilon_i = 0$ ,  $\partial_i h_{ij}^{TT} = 0$ ,  $\delta^{ij}h_{ij}^{TT} = 0$ .

O mesmo raciocínio é empregado na decomposição dos vetores envolvidos na transformação de gauge, isto é,  $\xi_\alpha = (\xi_0, \xi_i) = (A, B_i + \partial_i C)$ . A Eq.(1.6) aplicada então à essas parametrizações resulta em

$$\phi \rightarrow \phi - \partial_0 A,$$

$$\beta_i \rightarrow \beta_i - \partial_0 B_i,$$

$$\gamma \rightarrow \gamma - A\partial_0 C,$$

$$H \rightarrow H - 2\nabla^2 C,$$

---

<sup>2</sup>A decomposição segue do teorema de Helmholtz. Qualquer vetor  $\vec{B}$  pode ser escrito como  $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} + \nabla \sigma$ .

Sendo  $\vec{\beta} = \nabla \wedge \vec{A}$  temos o vínculo  $\nabla \cdot \vec{\beta} = \nabla \cdot \nabla \wedge \vec{A} = 0$

<sup>3</sup>Assim como no caso vetorial, as componentes longitudinais são escritas em termos de derivadas de outros campos. Mas enquanto no caso anterior, bastava a derivada de um campo escalar, aqui precisamos de campos escalares e vetoriais para a descrição completa. Além disso, a condição de traço nulo deve ser preservada na decomposição

$$\lambda \rightarrow \lambda - 2C,$$

$$\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i - 2B_i,$$

$$h_{ij}^{TT} \rightarrow h_{ij}^{TT}.$$

Sem qualquer manipulação  $h_{ij}^{TT}$  já é um invariante de gauge, mas com um pouco de álgebra, constroi-se ainda os invariantes

$$\Phi = -\phi + \partial_0 \gamma - \frac{1}{2} \partial_0^2 \lambda,$$

$$\Theta = \frac{1}{3} (H - \nabla^2 \lambda),$$

$$\Xi_i = \beta_i - \frac{1}{2} \partial_0 \epsilon_i.$$

Para impor agora as equações de Einstein sobre as quantidades invariantes de gauge, é necessário decompor ainda o tensor energia momento também em suas componentes escalares, vetoriais e tensoriais da forma

$$T_{00} = \rho,$$

$$T_{0i} = S_i + \partial_i S,$$

$$T_{ij} = P \delta_{ij} + \sigma_{ij} + \partial_{(i} \sigma_{j)} + \left( \partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta^2 \right) \sigma$$

que, além de apresentarem os vínculos  $\partial_i S_i = 0$ ,  $\partial_i \sigma_i = 0$ ,  $\partial_i \sigma_{ij} = 0$  e  $\delta^{ij} \sigma_{ij} = 0$ , provenientes dessa decomposição, satisfazem também

$$\nabla^2 S = \partial_0 \rho$$

$$\nabla^2 \sigma = -\frac{3}{2} (P - \partial_0 S),$$

$$\nabla^2 \sigma_i = 2 \partial_0 S_i$$

devido à conservação  $\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$ .

Esse formalismo, juntamente com todos os vínculos envolvidos, reduz as equações de Einstein a

$$\nabla^2 \Theta = -8\pi\rho, \quad (1.19)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi(\rho + 3P - 3\partial_0 S), \quad (1.20)$$

$$\nabla^2 \Xi_i = -16\pi S_i, \quad (1.21)$$

$$\square h_{ij}^{TT} = -16\pi\sigma_{ij}. \quad (1.22)$$

Note que **apenas as componentes da métrica  $h_{ij}^{TT}$  obedecem uma equação de onda.** As outras variáveis são determinadas por equações de Poisson. Isso mostra que, de fato, os graus de liberdade radiativos do espaço-tempo são representados apenas pelas componentes TT da perturbação.

Após essa análise, podemos voltar ao estudo das soluções da Eq.(1.10), em particular a solução de onda plana (1.11). Temos a liberdade de usar as transformação de Lorentz no *background* descritas acima e orientar o sistema de coordenadas de modo que as ondas se propagem na direção  $z$ . Nesse caso, o vetor de onda será  $k^\alpha = (\omega, 0, 0, \pm\omega)$ , com o sentido de propagação determinado pelo sinal de  $k^z$ . O gauge de Lorenz - Eqs.(1.9) e (1.13) - é então satisfeito se  $C_{0\mu} + C_{3\mu} = 0$ . Resta agora impor as condições do gauge TT. Novamente, utiliza-se uma transformação de Lorentz no *background* para orientar os sistema de coodenadas na direção do vetor tipo-tempo  $t^\alpha$  da Eq.(1.15). Assim  $C_{0\mu} = 0 \rightarrow C_{3\mu} = 0$ . Por fim, a Eq.(1.14) nos dá  $C_{22} = -C_{33}$  e a solução de onda plana no gauge TT fica

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_+ & C_\times & 0 \\ 0 & C_\times & -C_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega(t\mp z)}. \quad (1.23)$$

A nomenclatura dos graus de liberdade na Eq.(1.23) ocorrem devido aos efeitos produzidos em partículas testes com a passagem da frente de onda. Para entender esses efeitos, a primeira tentativa natural seria escrever as equações geodésicas das partículas teste. Mas quando aplicada ao regime linear no gauge TT, essas equações são

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} - \frac{1}{2} (2\partial_0 h_{0i}^{TT} - 2\partial_i h_{00}^{TT})$$

que, graças à Eq.(1.23), se simplificam em

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = 0. \quad (1.24)$$

Embora esse resultado pareça indicar que ondas gravitacionais não apresentam qualquer efeito sobre o movimento das partículas, o que a Eq.(1.24) de fato diz é que as *coordenadas*

de corpos em queda livre não são afetadas pela passagem de ondas. A quantidade relevante nesse caso para observar o efeito da onda é a distância própria entre as partículas testes.

Supondo dois corpos  $A$  e  $B$  colocadas ao longo do eixo x, a distância própria entre eles na ausência de ondas ( $h_{\mu\nu} \equiv 0$ ), é simplesmente  $L_0 = \int_{X_A}^{X_B} dx = X_B - X_A$ . Na presença de ondas, por sua vez,

$$\begin{aligned} L(t) &= \int_{X_A}^{X_B} \sqrt{g_{xx}} dx = \int_{X_A}^{X_B} \sqrt{1 + h_{xx}^{TT}(t, z=0)} dx = L_0 \sqrt{1 + h_{xx}^{TT}(t, z=0)} \\ &\Rightarrow \frac{\delta L}{L_0} \approx \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(t, z=0). \end{aligned}$$

Assim, embora as coordenadas de cada partícula não mude com a passagem da onda, a distância própria entre elas se altera.

De maneira mais formal, o resultado acima é obtido a partir da equação do desvio geodésico

$$\frac{d^2 L^\alpha}{d\tau^2} = R^\alpha_{\mu\nu\beta} t^\mu t^\nu L^\beta,$$

em que  $t^\alpha$  é a velocidade de uma das partículas, e  $L^\alpha$  é o vetor que liga uma a outra. Como podemos colocar uma das duas na origem do sistema e medir os deslocamentos em relação à ela, isto é  $t^\alpha = (1, 0, 0, 0)$  o desvio geodésico fica

$$\frac{\partial^2 L^\alpha}{\partial t^2} = R^\alpha_{00\beta} L^\beta, \quad (1.25)$$

com o tensor de Riemann no regime linear dado pela Eq.(1.4).

Como  $L^\alpha(t) = L_0^\alpha + \delta L^\alpha(t)$ , com  $|\delta \mathbf{L}| \ll |\mathbf{L}|$ , em primeira ordem a Eq.(1.25) é facilmente integrável para fornecer

$$\delta L_\alpha(t) = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta}^{TT} L_0^\beta.$$

Partículas no eixo x, isto é, inicialmente em  $\{L_0, 0, 0\}$  se descolocam com relação à origem segundo

$$\frac{\delta L^x(t)}{L_0} = \frac{1}{2} h_{xx}^{TT} \quad \frac{\delta L^y(t)}{L_0} = \frac{1}{2} h_{xy}^{TT},$$

enquanto que o deslocamento de objetos no eixo y, inicialmente em  $\{0, L_0, 0\}$ , obedece

$$\frac{\delta L^y(t)}{L_0} = \frac{1}{2} h_{yy}^{TT} = -\frac{1}{2} h_{xx}^{TT},$$

$$\frac{\delta L^x(t)}{L_0} = \frac{1}{2} h_{xy}^{TT}.$$

Para simplificar a descrição, considere primeiramente somente a polarização “+”, em que  $C_+ \neq 0$  e  $C_x = 0$ , isto é,  $h_{xy} = 0 \rightarrow \delta L^y(t) = 0$  e  $\delta L^x(t) = 0$  para partículas no eixo x e y, respectivamente. A oscilação é tal que, quando os corpos sobre eixo x se aproximarem da origem, os que estão sobre o eixo y se afastarão e vice-versa. O mesmo ocorre com a polarização “ $\times$ ”, isto é, com  $C_+ = 0$  e  $C_x \neq 0$ . Mas agora, serão partículas dispostas sobre eixos  $x' - y'$ , rotacionados  $45^\circ$  em relação ao original, que oscilarão como descrito acima. A Fig.1.2 mostra os efeitos dessas duas polarizações com a passagem de ondas sobre um anel de partículas inicialmente em repouso no plano  $x - y$ .

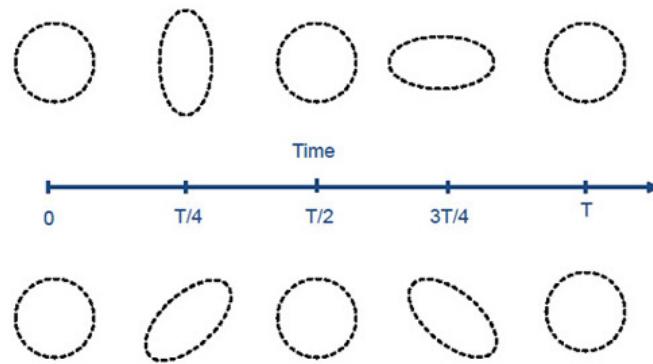


Figura 1.2: Efeitos da passagem de uma onda gravitacional em um anel de partículas. A distância própria entre elas oscila, de acordo com as duas polarizações. Extraído de <http://www.learner.org/courses/physics/visual/>.

O último tópico importante para essa introdução envolve a geração das ondas gravitacionais por fontes astrofísicas. Nesse caso, o lado direito da Eq.(1.10) será diferente de zero numa região finita do espaço e é necessário estabelecer a relação entre o comportamento da fonte e a emissão de ondas. Como descrito em diversos livros que abordam fenômenos ondulatórios (veja [50], exemplo), a Eq.(1.10) é resolvida exatamente por meio da função de Green associada ao operador  $\square$  e a perturbação da métrica é dada por

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4 \int d^3y \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (1.26)$$

Esta solução, embora formalmente exata, pode ser simplificada para extrair algumas informações mais úteis em contextos astrofísicos. A primeira aproximação consiste em colocar o observador a uma distância muito grande da fonte. Isso é necessário justamente pelo fato de que todo o formalismo apresentado só é válido quanto  $\bar{h}_{\mu\nu}$  é pequeno e nas

proximidades da fonte  $\mathcal{O}(\bar{h}_{\mu\nu}) = 1$ . Com a origem das coordenadas perto da fonte, essa aproximação permite trocar  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  por  $r = |\mathbf{x}|$  tanto no denominador quanto no argumento do tensor energia-momento da Eq.(1.26).

Agora, devido a conservação  $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$ , as componentes temporais do tensor satisfazem  $\int T_{0\mu} d^3y = \text{constante}$ . Esse resultado reforça novamente a idéia presente na Eq.(1.22), de que as componentes espaciais da perturbação contém os graus de liberdade radiativos.

A mesma lei de conservação do tensor energia-momento ajuda na manipulação das componentes  $T_{ij}$ . Primeiro note que  $-\partial_0 T_{00} + \partial_i T_{ti} = 0$  e  $-\partial_0 T_{0i} + \partial_i T_{ij} = 0$ <sup>4</sup> implicam  $\partial_0^2 T_{00} = \partial_l \partial_k T_{lk} \Rightarrow x^i x^j \partial_0^2 T_{00} = x^i x^j \partial_l \partial_k T_{lk}$ .

O lado esquerdo é trivialmente substituído por  $\partial_0^2 (T_{00} x^i x^j)$ . Já o lado direito é obtido com a expansão de  $\partial_l \partial_k (T_{lk} x^i x^j)$ . Após algumas (poucas) linhas de cálculo obtem-se  $T_{ij} = \partial_0^2 (T_{00} x^i x^j) + 4\partial_k T_{k(i} x_{j)} - \partial_l \partial_k (T_{lk} x^i x^j)$ . Ao substituir essa expressão na Eq.(1.26), a única parcela sobrevivente após a integração será  $\partial_0^2 (T_{00} x^i x^j)$ . Todas as outras representam divergentes e se anulam pelo teorema de Gauss, já que a superfície de integração encontra-se arbitrariamente afastada da fonte, onde  $T_{ij} = 0$ .

O procedimento acima nada mais é do que uma expansão multipolar das equações de campo, vinculadas à conservação do tensor energia momento, em que retivemos apenas o primeiro termo. O resultado final para as componentes espaciais da perturbação é

$$\bar{h}_{ij} = \frac{2}{r} \frac{d^2}{dt^2} I_{ij}(t-r), \quad (1.27)$$

com  $I_{ij}(t-r) = \int d^3y T_{00}(t-r, \mathbf{y}) y^i y^j$ . Resta obter as compontes TT desse tensor. A parte transversa é obtida com a projeção de  $\bar{h}_{ij}$  na superfície ortogonal à direção  $n^i = \frac{k^i}{k}$  em que a onda se propaga, isto é

$$\bar{h}_{ij}^T = P_i^l P_j^k \bar{h}_{lk},$$

sendo  $P_i^l = \delta_i^j - n^i n_j$  o operador de projeção. Depois extraímos o traço  $\bar{h}_{ij}^{TT} = \bar{h}_{ij}^T - \frac{1}{2} P_{ij} h^T$  para obter

$$\bar{h}_{ij}^{TT} = \frac{2}{r} \left( P_i^l P_j^k - \frac{1}{2} P_{ij} P_{lk} \right) \frac{d^2}{dt^2} I_{ij}.$$

---

<sup>4</sup>A posição dos índices espaciais não importa, já que são sempre operacionados com a métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ . Assim, no contexto de regime linear, índices latinos repetidos sempre devem ser somados, independente de sua posição.

Embora a expressão acima esteja correta, a relação entre a perturbação  $\bar{h}_{ij}^{TT}$  e a fonte é normalmente expressa em termos do tensor do momento de quadrupolo

$$\mathcal{I}_{ij} = I_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}I. \quad (1.28)$$

Como  $(P_i^l P_j^k - \frac{1}{2}P_{ij}P_{lk})\delta_{ij} = 0$ , a parcela  $-\frac{1}{3}\delta_{ij}I$  pode ser adicionada diretamente no resultado derivado para finalmente estabelecer a fórmula do quadrupolo

$$\bar{h}_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) = \frac{2}{r} \left( P_i^l P_j^k - \frac{1}{2}P_{ij}P_{lk} \right) \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{I}_{lk}(t-r). \quad (1.29)$$

A questão mais delicada nesse contexto envolve a energia carregada pelas ondas. As dificuldades não são somente técnicas, mas também conceituais, já que o princípio da equivalência - pilar básico da Relatividade Geral - elimina qualquer possibilidade de definição para energia de um campo gravitacional. Porém, no contexto de regime linear, em que a perturbação é interpretada como um campo tensorial definido sobre um *background* fixo, o caminho seria encontrar o tensor energia-momento para as flutuações  $h_{\mu\nu}$ , como feito em qualquer outra teoria de campo. Embora essa linha de raciocínio seja viável, dificuldades técnicas impedem que haja um senso comum na forma desse tensor. O conforto vem com o fato de que a maioria dessas aproximações prevêm os mesmos resultados para fenômenos físicos mais relevantes, como a taxa com que um sistema binário emite energia.

Até o momento, todas as grandezas necessárias foram calculadas em primeira ordem. No entanto, a exemplo de teorias de campo escalar ou eletromagnetismo, o tensor energia momento costuma ser quadrático no respectivo campo. Assim, é preciso considerar a métrica

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + \epsilon h_{\mu\nu} + \epsilon^2 j_{\mu\nu},$$

refazer os cálculos apresentados e incluir os termos até ordem  $\epsilon^2$ . Introduzimos também uma generalização nesse momento, ao permitir um *background* qualquer  $g_{\mu\nu}^0$ . O tensor de Ricci será, até segunda ordem,

$$R_{\mu\nu} = \epsilon F_{\mu\nu}^{(1)}(h) + \epsilon^2 (F_{\mu\nu}^{(1)}(j) + F_{\mu\nu}^{(2)}(h)),$$

no qual  $F^{(1)}$  e  $F^{(2)}$  são definidos por (barras significam derivadas covariantes com relação a  $g_{\mu\nu}^0$ )

$$F_{\mu\nu}^{(1)}(h) = \frac{1}{2} (-h_{|\mu\nu} - h_{\mu\nu|\alpha}^\alpha + h_{\alpha\mu|\nu}^\alpha + h_{\alpha\nu|\mu}^\alpha),$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{(2)}(h) &= \frac{1}{4}h_{\alpha\beta|\mu}h^{\alpha\beta}|_{\nu} + \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}(h_{\alpha\beta|\mu\nu} + h_{\mu\nu|\alpha\beta} - 2h_{\alpha(\mu|\nu)\beta}) \\ &\quad + h_{\nu}^{\alpha|\beta}h_{\mu[\alpha|\beta]} + \frac{1}{2}\left(h^{\alpha\beta}|_{\beta} - \frac{1}{2}h^{\alpha\alpha}\right)(h_{\mu\nu|\alpha} - 2h_{\alpha(\mu|\nu)}). \end{aligned}$$

Em primeira ordem, as equações de Einstein  $F_{\mu\nu}^{(1)}(h) = 0$  descrevem a dinâmica das ondas gravitacionais como apresentada até o momento. Já em segunda ordem,  $F_{\mu\nu}^{(1)}(j) = -F_{\mu\nu}^{(2)}(h)$  mostra que  $h_{\mu\nu}$  serve de fonte para  $j_{\mu\nu}$ . Explicitamente, em termos do tensor de Einstein,

$$F_{\mu\nu}^{(1)}(j) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}^{(0)}F^{(1)}(j) = 8\pi t_{\mu\nu}$$

com

$$t_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi}\left[F_{\mu\nu}^{(2)}(h) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}^{(0)}F^{(2)}(h)\right]. \quad (1.30)$$

Isso sugere que  $t_{\mu\nu}$  seja interpretado como o tensor de energia-momento para as ondas. Essa interpretação ganha ainda mais força pois, até segunda ordem, as identidades de Biachi implicam em  $t^{\mu\nu}|_{\mu} = 0$ . Entretanto, a Eq.(1.30) não é propriamente um tensor e sua forma se altera com transformações de gauge dada pela Eq.(1.5). De fato, é sempre possível escolher coordenadas que anulem  $t_{\mu\nu}$  num dado ponto. Mas a presença de ondas gravitacionais impede que  $t_{\mu\nu}$  se anule ao longo de toda uma região finita do espaço-tempo e essa característica permite definir, dentro da aproximação em questão, um verdadeiro tensor energia-momento.

O processo para definir esse tensor consiste em fazer uma média da Eq.(1.30) numa região finita do espaço-tempo. Ela deve ser extensa o suficiente para incluir diversos comprimentos de onda, mas pequena quando comparada com a curvatura do *background*. Descrever todas as técnicas envolvidas nesse processo de média seria um trabalho extenso e iria muito além dos objetivos dessa introdução, mas detalhes e referências originais estão em [5] e o resultado final é

$$T_{\mu\nu} = \langle t_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{32\pi} \left\langle \bar{h}_{\alpha\beta|\mu}\bar{h}^{\alpha\beta}|_{\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}_{|\mu}\bar{h}|_{\nu} - 2\bar{h}^{\alpha\beta}|_{\beta}\bar{h}_{\alpha(\mu|\nu)} \right\rangle, \quad (1.31)$$

que no gauge TT se reduz ao tensor de Issacson

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi} \langle h_{\alpha\beta|\mu}^{TT}h^{TT\alpha\beta}|_{\nu} \rangle. \quad (1.32)$$

Com o estudo das ondas planas, vimos que as duas polarizações ficam explicitas no gauge TT e substituindo a Eq.(1.23) em (1.32), e combinando as amplitudes das polarizações  $h^+$  e  $h^\times$  em  $H = h^+ - ih^\times$ , o tensor energia momento se reduz a

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} \Re \langle \partial_\mu H \partial_\nu \bar{H} \rangle. \quad (1.33)$$

Embora esta expressão seja obtida com uso da solução de onda plana, ela é válida também em contextos mais gerais e será útil no capítulo seguinte, quando generalizarmos os métodos para obter o conteúdo radiativo de um espaço-tempo em situações fora do regime linear. No momento vale observar que, para um sistema compacto radiativo, o fluxo de energia numa direção radial será dado pela componente

$$T^{0r} = \frac{d^2 E}{dtdA} = \Re \langle \partial^0 H \partial^r \bar{H} \rangle = -\Re \langle \partial_t H \partial_r \bar{H} \rangle,$$

com  $dA$  o elemento de área ortogonal à direção radial. Para ondas *outgoing*,  $h = h(t-r) \rightarrow \partial_t h = -\partial_r h$  temos finalmente

$$\frac{d^2 E}{dtdA} = \frac{1}{16\pi} \langle |\dot{H}|^2 \rangle. \quad (1.34)$$

Com mais algumas manipulações, o fluxo de energia é escrito em termos da variação do momento de quadrupolo. A substituição da Eq.(1.29) em (1.32) leva a

$$\frac{d^2 E}{dtdA} = \frac{1}{8\pi r^2} \left[ \langle \ddot{\mathcal{I}}_{ij} \ddot{\mathcal{I}}_{ij} \rangle - 2n^i n^k \langle \ddot{\mathcal{I}}_{ij} \ddot{\mathcal{I}}_{jk} \rangle + \frac{1}{2} n^i n^j n^l n^m \langle \ddot{\mathcal{I}}_{ij} \ddot{\mathcal{I}}_{lm} \rangle \right].$$

Basta agora integrar sobre a área. Para uma direção  $r$  qualquer,  $n^i = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  e, por tanto,

$$\begin{aligned} \int dA &= 4\pi r^2, \\ \int n^i n^j dA &= \frac{4\pi}{3} r^2 \delta^{ij}, \\ \int n^i n^j n^l n^m dA &= \frac{4\pi}{15} r^2 (\delta^{ij} \delta^{lm} + \delta^{il} \delta^{jm} + \delta^{im} \delta^{jl}). \end{aligned}$$

temos a famosa fórmula do quadrupolo

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{5} \langle \ddot{\mathcal{I}}_{ij} \ddot{\mathcal{I}}_{ij} \rangle. \quad (1.35)$$

Para fechar esse capítulo, o melhor exemplo é aplicar o formalismo apresentado no estudo das ondas gravitacionais emitidas por um sistema binário. Em uma primeira aproximação, considera-se a órbita dos objetos descrita pela gravitação newtoniana. Seguindo

o procedimento tradicional, as equações de movimento para os corpos de massa  $m_1$  e  $m_2$  são reescritas em termos da distância relativa  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  e o problema se reduz ao movimento de um único corpo de massa  $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$  sob a ação do campo gravitacional gerado por outro de massa  $M = m_1 + m_2$  no centro de massa do sistema. A solução mais geral descreve a elipse

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta)} \quad e,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}.$$

Em termos da energia  $E$  e do momento angular  $L$  do sistema, a excentricidade e o semi-eixo maior são, respectivamente,  $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{M^2\mu^3}}$  e  $a = -\frac{M\mu}{2E}$ . Em coordenadas cartesianas com a origem no centro de massa, a elipse será descrita por

$$x_{CM} = r \cos(\theta), \quad y_{CM} = r \sin(\theta), \quad z_{CM} = 0$$

Como nesse caso a densidade do sistema é  $\rho = \mu \delta(x - x_{CM})\delta(y - y_{CM})\delta(z - z_{CM})$ , as únicas componentes não nulas do tensor de quadrupolo (1.28) são

$$\mathcal{I}_{xx} = \frac{\mu r^2}{6} [1 + 6 \cos(2\theta)], \quad (1.36)$$

$$\mathcal{I}_{yy} = \frac{\mu r^2}{6} [1 - 6 \cos(2\theta)], \quad (1.37)$$

$$\mathcal{I}_{zz} = -\frac{\mu r^2}{3}, \quad (1.38)$$

$$\mathcal{I}_{xy} = \frac{\mu r^2}{2} \sin(2\theta). \quad (1.39)$$

Assim, a Eq.(1.29) fornece as ondas gravitacionais. Restringir o movimento dos corpos para uma órbita circular ( $e = 0$ ), simplifica significativamente as expressões e ajuda a ganhar uma intuição mais profunda sobre o fenômeno. Nesse caso  $r = a = \text{constante}$  é a distância entre os objetos e  $\theta = \Omega t$ , com a frequência obtida pela terceira lei de Kepler  $\Omega = \sqrt{\frac{M}{a^3}}$ . Para um observador ao longo do eixo  $z$ , isto é, com  $n^i = (0, 0, 1)$ , as ondas gravitacionais serão

$$h_{xx}^{TT}(t) = -\frac{4}{r} \mu a^2 \Omega^2 \cos[2\Omega(t - r)], \quad (1.40)$$

$$h_{yy}^{TT}(t) = \frac{4}{r} \mu a^2 \Omega^2 \cos[2\Omega(t - r)], \quad (1.41)$$

$$h_{xy}^{TT}(t) = \frac{4}{r} \mu a^2 \Omega^2 \sin[2\Omega(t - r)]. \quad (1.42)$$

Já para um observador no plano da órbita, digamos ao longo do eixo x em que  $n^i = (1, 0, 0)$ , as ondas são

$$h_{yy}^{TT}(t) = \frac{2}{r} \mu a^2 \Omega^2 \cos[2\Omega(t - r)], \quad (1.43)$$

$$h_{zz}^{TT}(t) = -\frac{2}{r} \mu a^2 \Omega^2 \cos[2\Omega(t - r)]. \quad (1.44)$$

A primeira coisa a se notar é que a frequência das ondas é exatamente o dobro da frequência da fonte. A razão para isso é bastante intuitiva, principalmente no caso em que as massas são iguais. Ao completar metade do ciclo, a configuração do sistema é indistinguível da inicial. Além disso, note que ao longo do eixo z as duas polarizações estão presentes. Assim como ocorre no Eletromagnetismo, a onda apresentará uma polarização circular, pois um observador em z, ao olhar o sistema “por cima”, tem acesso a toda órbita circular dos objetos. Já para observadores “de frente” ao plano da órbita, as duas massas se moverem ao longo de uma linha. Por essa razão, a única polarização presente na ondas gravitacionais é a linear.

Resta agora obter a taxa de variação da energia do sistema e, neste caso é interessante manter a excentricidade  $e \neq 0$  [51]. O conjunto de equações (1.36-1.39) é substituído em (1.35) e a média  $\langle \bullet \rangle = \frac{1}{P} \int_0^P \bullet dt$  é tomada considerando que o período  $P$  da órbita elíptica é ainda obtido pela terceira lei de Kepler  $P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{M}} = 2\pi \sqrt{\frac{M^2 \mu^3}{8|E|}}$  e que  $t \in [0, P] \rightarrow \theta \in [0, 2\pi]$  com  $dt \rightarrow \frac{\mu r^2}{L} d\theta$ .

A taxa com que o sistema binário perde energia em forma de ondas ( $\frac{dE_{\text{bin}}}{dt} = -T^{0r}$ ) é

$$\frac{dE_{\text{bin}}}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{\mu^2 M^3}{a^5 (1 - e^2)^{7/2}} \left( 1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right),$$

que se traduz no decaimento do período

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{192\pi}{5} \frac{\mu M^{3/2}}{a^{5/2} (1 - e^2)^{7/2}} \left( 1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right).$$

Os dados do pulsar binário [24] levam à previsão teórica  $dP/dt = -(2.40242 \pm 0.000002) \times 10^{-12} s/s$ , enquanto que o valor observado é  $dP/dt = -(2.4056 \pm 0.0051) \times 10^{-12} s/s$ .

## Capítulo 2

# Espaços-Tempos Dinâmicos: Ondas Gravitacionais, Buracos Negros e suas energias

### 2.1 Ondas Gravitacionais

Dentre os diversos tópicos abordados no capítulo anterior, a importância do tensor de Riemann deve ser novamente destacada. Os efeitos das ondas gravitacionais sobre partículas testes são essencialmente forças de maré, representadas por componentes desse tensor. Em um espaço-tempo genérico, isto é, no qual nem sempre existe uma distinção clara entre o *background* e as perturbações, o tensor de Riemann é o principal objeto que carregará as informações sobre o conteúdo radiativo [52].

Mais especificamente, o tensor de Weyl é o mais adequado para o estudo das ondas gravitacionais. Definido em  $N$  dimensões como

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{2}{N-2} [g_{\alpha[\mu}R_{\nu]\beta} - g_{\beta[\mu}R_{\nu]\alpha}] + \frac{2}{(N-1)(N-2)}g_{\alpha[\mu}g_{\nu]\beta}R,$$

suas  $(N+2)(N+1)N(N-3)/12$  componentes carregam as informações puramente geométricas do espaço-tempo, já que, das  $N^2(N^2-1)/12$  componentes independentes do tensor de Riemann,  $N(N+1)/2$  estão associadas ao conteúdo de matéria via tensor de Ricci  $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$ .

Antes de seguir com uma análise do tensor de Weyl, é necessário nesse ponto comentar um pouco sobre o formalismo das tétradas, em particular das tétradas nulas. Até o

momento, todas as componentes de tensores foram expressadas em termos de uma base coordenada  $\{\partial_\mu\}$ . Porém, em diversos casos é útil trabalhar com uma base que não depende do sistema de coordenadas.

Em cada ponto do espaço-tempo, podemos introduzir um conjunto de vetores linearmente independentes  $\{\hat{e}_a\}$  tal que  $\hat{e}_a \cdot \hat{e}_b = \eta_{ab}$ , com  $\eta_{ab}$  uma matriz constante (essencialmente as componentes da métrica nessa base em particular). No caso que a tétrada é ortonormal,  $\eta_{ab}$  se reduz ao tensor de Minkowski. Em geral associa-se  $\hat{e}_0 = \hat{t}$  a um vetor unitário tipo tempo, ortogonal a uma dada superfície espacial,  $\hat{e}_0 = \hat{r}$  como o vetor unitário em coordenadas esféricas e  $(\hat{e}_2, \hat{e}_3)$  como vetores unitários nas direções angulares.

Porém, inspirado no estudo de spinores, E.T. Newman e R. Penrose desenvolveram em 1962 um formalismo baseado numa base de tétradas em que os vetores são, na realidade, nulos [53]. Esse formalismo se mostrou particularmente bem adaptado para o estudo de campos radiativos (eletromagnético e gravitacional) e os seguintes parágrafos introduzem os conceitos essenciais para a sequência do trabalho.

Partindo de uma base ortonormal  $\{\hat{e}_a\}$ , podemos construir os seguintes vetores nulos

$$\vec{l} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{t} + \hat{r}), \quad \vec{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{t} - \hat{r}).$$

A escolha acima nos permite interpretar  $\vec{l}$  como um vetor *outgoing* enquanto que  $\vec{k}$  *ingoing*. Enquanto nos restringirmos a quantidades reais, não existirá nenhum outro vetor nulo linearmente independente desses dois. Porém, se permitirmos que os vetores sejam complexos, completamos a base de tétradas nulas com

$$\vec{m} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_2 + i\hat{e}_3), \quad \vec{\bar{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_2 - i\hat{e}_3).$$

Note que os vetores da base satisfazem

$$l_\mu l^\mu = k_\mu k^\mu = m_\mu m^\mu = \bar{m}_\mu \bar{m}^\mu = 0, \tag{2.1}$$

$$l_\mu m^\mu = l_\mu \bar{m}^\mu = k_\mu m^\mu = k_\mu \bar{m}^\mu = 0, \tag{2.2}$$

$$l_\mu k^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = -1, \tag{2.3}$$

isto é, a matriz  $\eta_{ab}$  é

$$\eta_{ab} = \eta^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e a métrica do espaço-tempo assume a forma

$$g_{\mu\nu} = -2l_{(\mu}k_{\nu)} + 2m_{(\mu}\bar{m}_{\nu)}.$$

Entretanto, não existe apenas um conjunto de vetores nulos que satisfaça as Eqs. (2.1)-(2.3). A própria definição está associada a uma base ortonormal, que pode se transformar por rotações arbitrárias e transformações de Lorentz e, ainda assim, manter o caráter ortonormal. Em termos das tétradas nulas, essas transformações são classificadas em três classes.

- Classe I: rotações nulas que preservam  $\vec{l}$

$$\tilde{l}^\mu = l^\mu,$$

$$\tilde{k}^\mu = k^\mu + \bar{a}m^\mu + a\bar{m}^\mu + a\bar{a}l^\mu,$$

$$\tilde{m}^\mu = m^\mu + al^\mu.$$

- Classe II: rotações nulas que preservam  $\vec{k}$

$$\tilde{k}^\mu = k^\mu,$$

$$\tilde{l}^\mu = l^\mu + \bar{b}m^\mu + b\bar{m}^\mu + b\bar{b}k^\mu,$$

$$\tilde{m}^\mu = m^\mu + bk^\mu.$$

- Classe III: boosts no plano  $(\hat{e}_0, \hat{e}_1)$  e rotações no plano  $(\hat{e}_2, \hat{e}_3)$

$$\tilde{l}^\mu = \lambda l^\mu,$$

$$\tilde{k}^\mu = \lambda^{-1}k^\mu,$$

$$\tilde{m}^\mu = e^{i\theta}m^\mu.$$

Note que os 6 graus de liberdades envolvidos no grupo de Lorentz estão presentes nessas transformações nos dois parâmetros reais ( $\lambda, \theta$ ) e nos dois complexos ( $a, b$ ).

Com essa pequena introdução às tétradas nulas, podemos focar novamente no tensor de Weyl. Em 4 dimensões, suas 10 componentes independentes são sintetizadas em 5 escalares complexos, conhecidos como Escalares de Weyl:

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= C_{\alpha\beta\mu\nu} l^\alpha m^\beta l^\mu m^\nu, \\ \Psi_1 &= C_{\alpha\beta\mu\nu} l^\alpha k^\beta l^\mu m^\nu, \\ \Psi_2 &= C_{\alpha\beta\mu\nu} l^\alpha m^\beta \bar{m}^\mu k^\nu, \\ \Psi_3 &= C_{\alpha\beta\mu\nu} l^\alpha k^\beta \bar{m}^\mu k^\nu, \\ \Psi_4 &= C_{\alpha\beta\mu\nu} k^\alpha \bar{m}^\beta k^\mu \bar{m}^\nu.\end{aligned}\tag{2.4}$$

(2.5)

As simetrias do tensor de Weyl<sup>1</sup> permitem que qualquer outra contração de  $C_{\alpha\beta\mu\nu}$  com os vetores das tétrada nula seja expressa como uma combinação de  $\Psi_a$ . Note ainda, que os  $\Psi_a$  são de fato escalares com relação à mudança de coordenadas, mas dependem claramente na escolha da base de tétradas nulas.

Assim, sobre transformações de classe I, os escalares de Weyl se transformam como

$$\tilde{\Psi}_0 = \Psi_0, \tag{2.6}$$

$$\tilde{\Psi}_1 = \Psi_1 + \bar{a}\Psi_0, \tag{2.7}$$

$$\tilde{\Psi}_2 = \Psi_2 + 2\bar{a}\Psi_1 + \bar{a}^2\Psi_0, \tag{2.8}$$

$$\tilde{\Psi}_3 = \Psi_3 + 3\bar{a}\Psi_2 + 3\bar{a}^2\Psi_1 + \bar{a}^3\Psi_0, \tag{2.9}$$

$$\tilde{\Psi}_4 = \Psi_4 + 4\bar{a}\Psi_3 + 6\bar{a}^2\Psi_2 + 4\bar{a}^3\Psi_1 + \bar{a}^4\Psi_0. \tag{2.10}$$

Transformações de classe II implicam em

$$\tilde{\Psi}_0 = \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4, \tag{2.11}$$

$$\tilde{\Psi}_1 = \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4, \tag{2.12}$$

$$\tilde{\Psi}_2 = \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4, \tag{2.13}$$

$$\tilde{\Psi}_3 = \Psi_3 + b\Psi_4, \tag{2.14}$$

$$\tilde{\Psi}_4 = \Psi_4. \tag{2.15}$$

---

<sup>1</sup>Além daquelas já presentes no tensor de Riemann, temos ainda  $C^\alpha_{\mu\alpha\nu} = 0$ .

Estas transformações se relacionam por meio das derivadas  $\Psi_{n-1} = \frac{1}{n} \frac{\partial \Psi_n}{\partial a}$  e  $\Psi_{n+1} = \frac{1}{4-n} \frac{\partial \Psi_n}{\partial b}$  para as transformações de classe I e II, respectivamente. Por fim, transformações de classe III levam a

$$\tilde{\Psi}_0 = \lambda^2 e^{2i\theta} \Psi_0, \quad (2.16)$$

$$\tilde{\Psi}_1 = \lambda e^{i\theta} \Psi_1, \quad (2.17)$$

$$\tilde{\Psi}_2 = \Psi_2, \quad (2.18)$$

$$\tilde{\Psi}_3 = \lambda^{-1} e^{-i\theta} \Psi_3, \quad (2.19)$$

$$\tilde{\Psi}_4 = \lambda^{-2} e^{-2i\theta} \Psi_4. \quad (2.20)$$

Se nos concentrarmos nas transformações de classe II, podemos escolher um parâmetro  $b$  de tal modo que  $\tilde{\Psi}_0 = 0$ . Para isso, basta que  $b$  satisfaça

$$\Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4 = 0. \quad (2.21)$$

Em geral, a equação acima apresenta 4 raízes  $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  complexas e as direções associadas ao novo vetor  $\tilde{l}^\mu$  são conhecidas como direções nulas principais do tensor de Weyl. Caso algumas dessas raízes coincida, o espaço-tempo é dito ser algebricamente especial e segue a classificação de Petrov [35, 54, 55]:

**Petrov tipo I:** Nenhuma das quatro raízes  $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  coincidem.

Após a transformação de classe II que faça  $\Psi_0 = 0$ , pode-se ainda realizar uma transformação de classe I (que não altera o valor de  $\Psi_0$ ) para impor também  $\Psi_4 = 0$ . Assim, em um espaço-tempo de Petrov tipo I, existe sempre tétradas nulas em que apenas  $(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$  são diferentes de zero.

**Petrov tipo II:** duas raízes  $b_1 = b_2$  coincidem.

Por serem raízes duplas,  $b = b_1 = b_2$  anulará não somente a própria Eq.(2.21), como também sua derivada. Assim, além de  $\Psi_0 = 0$ , temos também  $\Psi_1 = 0$ . Em seguida, como no caso anterior, uma transformação de classe I permite fazer  $\Psi_4 = 0$  sem alterar os valores de  $\Psi_0$  e  $\Psi_1$ . Para um espaço-tempo de Petrov tipo II, existe sempre tétradas nulas em que apenas  $(\Psi_2, \Psi_3)$  são diferentes de zero.

**Petrov tipo III:** três raízes  $b_1 = b_2 = b_3$  coincidem.

O mesmo argumento do caso anterior é usado. Nesse caso,  $b = b_1 = b_2 = b_3$  será

raíz da Eq.(2.21), de sua primeira e segunda derivada, o que implica em  $\Psi_0$ ,  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  nulos. Da mesma forma, a transformação de classe I seguinte fará  $\Psi_4 = 0$ , sem alterar  $\Psi_0$ ,  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  e o único escalar não nulo será  $\Psi_3$ .

**Petrov tipo N:** as quatro raízes  $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$  coincidem.

Nesse caso,  $\Psi_0$ ,  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  e  $\Psi_3$  se anulam e  $\Psi_4$  é o único escalar diferente de zero.

**Petrov tipo D:** dois pares de raízes  $b_1 = b_2$ ,  $b_3 = b_4$  coincidem.

Como as raízes coincidem duas a duas, a Eq.(2.11) é reescrita na forma

$$\tilde{\Psi}_0 = \Psi_4(b - b_1)^2(b - b_3)^2.$$

A transformação para os outros escalares é então obtida após sucessivas derivações da expressão acima

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_1 &= \frac{\Psi_4}{2}(b - b_1)(b - b_3)(2b - b_1 - b_3), \\ \tilde{\Psi}_2 &= \frac{\Psi_4}{6} [6b^2 - 6b(b_1 + b_3) + b_1^2 + b_3^2 + 4b_1b_3], \\ \tilde{\Psi}_3 &= \frac{\Psi_4}{2}(2b - b_1 - b_3), \\ \tilde{\Psi}_4 &= \Psi_4.\end{aligned}$$

Como esperado,  $b = b_1 = b_2$  ou  $b = b_3 = b_4$ , anula não somente  $\Psi_0$ , mas também  $\Psi_1$ .

De acordo com os casos anteriores, a etapa seguinte consiste numa segunda transformação de classe de I. Após substituir as expressões acima na Eq.(2.10) temos

$$\Psi_4 \rightarrow \Psi_4 [\bar{a}(b_1 - b_3) + 1]^2.$$

Para que  $\Psi_4$  se anule,  $\bar{a}$  deve satisfazer uma equação quadrática que, por sua vez, também apresenta uma raiz dupla. A escolha de  $\bar{a} = 1/(b_3 - b_1)$  permite então fazer  $\Psi_4 = \Psi_3 = 0$  e para um espaço-tempo de Petrov tipo D, apenas  $\Psi_2$  não se anula.

**Petrov tipo O:** O tensor de Weyl é identicamente nulo, isto é, o espaço-tempo é conformalmente plano.

Entre os exemplos típicos de espaços-tempos algebricamente especiais encontram-se as soluções de Schwarzschild e Kerr, que são do tipo D e soluções de onda plana, tipo N. Além

disso, qualquer espaço-tempo conformalmente plano, como Minkowski ou Friedmann-Robertson-Walker, será do tipo O.

Uma das propriedades mais importantes dos escalares de Weyl está relacionada ao seu comportamento assintótico em espaços-tempos associados a fontes isoladas. Sobre condições bastante gerais [53], mostra-se que

$$\Psi_n \sim \frac{1}{r^{5-n}} \quad (2.22)$$

e dessa forma o tensor de Riemann se comporta como

$$R \sim \frac{N}{r} + \frac{III}{r^2} + \frac{II}{r^3} + \frac{I}{r^4}. \quad (2.23)$$

A importância desse resultado, conhecido como “teorema de *peeling*” [56], está justamente na possibilidade de definir a existência de ondas gravitacionais em espaços-tempos genéricos. No exemplo citado acima, soluções exatas que descrevem ondas planas são do tipo N. Assim, a Eq.(2.23) mostra que, muito longe de objetos compactos, o campo gravitacional se comporta como uma onda plana, caracterizado essencialmente pela presença de  $\Psi_4 \neq 0$  que, de acordo com (2.22), decai com  $1/r$  como qualquer campo radiativo.

Os escalares de Weyl constituem apenas uma parte do formalismo de Newman-Penrose. Mais detalhes sobre tal formalismo não são tão relevantes para o resto deste trabalho. Todavia, vale a pena comentar que esta é uma poderosa ferramenta para a demonstração de diversos teoremas em Relatividade Geral. Além do “teorema de *peeling*” já mencionado, o formalismo também auxilia a demonstração do “teorema de Goldberg-Sachs” [57] que será importante no capítulo seguinte. O teorema afirma que, no vácuo, um espaço-tempo é algebricamente especial se e somente se ele admitir uma congruência de geodésicas nulas *shear-free*.

A interpretação física dos escalares  $\Psi_n$  é descrita e detalhada em [58]. O potencial “coulombiano” do campo gravitacional é caracterizado por  $\Psi_2$ , enquanto que  $\Psi_1$  e  $\Psi_3$  representam ondas longitudinais. A presença dessas componentes não contradiz o regime linear, em que somente modos transversais estão presentes. Esse regime só está bem definido no limite em que  $r \rightarrow \infty$  e pelo teorema de *peeling*, esses modos decaem mais rápido do que o esperado em um campo radiativo. Além disso, mostra-se que esses modos estão puramente ligados a escolha do gauge. Finalmente,  $\Psi_4$  e  $\Psi_0$  representam ondas

gravitacionais puramente transversas que entram (*outgoing*) e saem (*ingoing*) do sistema, respectivamente.

Como exemplo, consideremos a onda plana no regime linear que se propaga na direção  $z$ . A solução é dada pela Eq.(1.23) e as únicas componentes não nulas do tensor de Weyl - que coincide com o tensor de Riemann dado pela Eq.(1.4) - são

$$\begin{aligned} C_{\mu x \nu x} &= -C_{\mu y \nu y} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu h_+ \\ C_{\mu y \nu x} &= -\frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu h_\times, \end{aligned}$$

com  $\mu, \nu = t$  ou  $z$ . Por conveniência, vamos definir ondas na direção  $+z$  como *outgoing*, enquanto que ondas na direção  $-z$  *ingoing*. No primeiro caso, as frentes de onda são superfícies  $u = t - z = \text{constante}$  e  $h = h(u) \Rightarrow \partial_z h = -\partial_t h$ . Já no segundo as ondas propagam-se em  $v = t + z$  e  $h = h(v) \Rightarrow \partial_z h = \partial_t h$ .

As tétradas nulas são descritas nesse caso por

$$\begin{aligned} l^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\delta_t^\mu + \delta_z^\mu], \\ k^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\delta_t^\mu - \delta_z^\mu], \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\delta_x^\mu + i\delta_y^\mu], \\ \bar{m}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\delta_x^\mu - i\delta_y^\mu], \end{aligned}$$

e o único escalar de Weyl não nulo é  $\Psi_4 = -i(\ddot{h}_+ - i\ddot{h}_\times)$  para ondas *outgoing* ou  $\Psi_0 = -i(\ddot{h}_+ - i\ddot{h}_\times)$  para ondas *ingoing*.

No capítulo 1, introduzimos a quantidade  $H = h_+ - ih_\times$ , conveniente para escrever o tensor energia-momento das ondas gravitacionais (1.33). Isso nos permite generalizar o fluxo de energia em momento carregado pela radiação, uma vez que  $H \propto -\ddot{\Psi}_4$ . Reexpressando então a Eq.(1.34) em termos de  $\Psi_4$  obtemos

$$\frac{dE}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \oint \left| \int_{-\infty}^t \Psi_4 dt' \right|^2 d\Omega. \quad (2.24)$$

O limite é necessário, já que o tensor de Issacson (1.32) só é definido na aproximação de campo fraco. A média pode ser ignorada nesse caso devido às integrações temporais e angulares.

O fluxo de momento numa direção  $i$  ao longo da direção radial  $r$  é obtido de maneira análoga com a componente  $T_{ir}$  da Eq.(1.33). Assintoticamente, quando a frente de onda é aproximadamente plana,  $\partial_i H \simeq (x_i/r)\partial_r H = -(x_i/r)\partial_t H$  e a expressão no caso mais geral é

$$\frac{dP_i}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \oint l_i \left| \int_{-\infty}^t \Psi_4 dt' \right|^2 d\Omega. \quad (2.25)$$

com  $l_i = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ .

A expressão do fluxo de momento angular, requer um pouco mais de trabalho. Mas como os sistemas estudados nesse projeto não envolvem a emissão de momento angular, fica apenas [35] como referência para as respectivas equações.

## 2.2 Horizontes Dinâmicos

Formalmente, um buraco negro é baseado na noção de seu horizonte de eventos, definido como a fronteira no futuro do passado causal de  $\mathcal{J}^+$ . De outra forma, um horizonte de eventos é a região no espaço-tempo que separa as trajetórias nulas que atigem o infinito nulo, daquelas que caem na singularidade. Essa definição captura muito bem a idéia de que observadores do lado de fora não tem acesso ao que se passa dentro, além de apresentar importantes aplicações matemáticas, como toda a termodinâmica de buraco negros [59]. Entretanto, essa definição é global e exige que a evolução temporal do espaço-tempo seja conhecida completamente para localizar o objeto.

Por outro lado, não conhecemos *a priori* toda a evolução temporal do universo (ou da região que contenha um buraco negro) e assim, quando astrofísicos anunciam a descoberta de um buraco negro no centro de alguma galáxia, com certeza eles se referem a algum objeto muito mais concreto e local do que aquele envolvido na definição de horizonte de eventos. O mesmo problema acontece em relatividade numérica, em que desejamos reproduzir no computador cenários o mais próximo possível da realidade e, assim, estudar a dinâmica e evolução do buraco negro a cada iteração. Recentemente, porém, surgiu um novo formalismo teórico para descrever buracos negros localmente. Baseado na noção de horizontes isolados e dinâmicos, os conceitos deste novo paradigma estão ainda em pleno desenvolvimento, de forma a influenciar e ser influenciado pelo avanço da Relatividade Numérica [60, 61].

Inicialmente, considera-se uma superfície espacial bi-dimensional fechada  $S$  contida no espaço-tempo descrito por  $g_{\mu\nu}$ . Em cada ponto de  $S$  podemos introduzir vetores nulos  $l^\mu$  e  $k^\mu$ . Em geral (espaços assintoticamente planos, por exemplo), há a possibilidade de classificá-los como apontando para fora e para dentro de  $S$ , respectivamente. Esse vetores satisfazem a mesma normalização indicadas nas Eqs.(2.1)-(2.3) e se transformam segundo às classes I, II e III da seção anterior. A métrica induzida em  $S$  é

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + l_\mu k_\nu + l_\nu k_\mu, \quad (2.26)$$

que atua também como operador de projeção sobre  $S$ . Da maneira usual,  $q$  simbolizará o determinante de  $q_{\mu\nu}$ .

Uma maneira intuitiva de visualizar o que ocorre com os raios de luz na presença de um buraco negro é imaginar  $S$  como um anel composto por várias lanternas dispostas radialmente nas regiões internas e externas. Em um espaço-tempo plano, os feixes de luz que apontam para dentro irão convergir para o centro, enquanto os feixes que apontam para fora divergem.  $k^\mu$  e  $l^\mu$  nada mais são, neste caso, do que os vetores tangentes aos respectivos cones de luz. Matematicamente, a taxa com que a superfície  $S$  varia ao longo dessas direções nulas é computada com a derivada de Lie do elemento de área  $\sqrt{q}$  ao longo de  $k^\mu$  e  $l^\mu$ . Esse cálculo leva a

$$\mathcal{L}_l \sqrt{q} = \Theta_{(l)} \sqrt{q} \quad \mathcal{L}_k \sqrt{q} = \Theta_{(k)} \sqrt{q},$$

com as expansões  $\Theta_{(l)}$  e  $\Theta_{(k)}$  dadas por

$$\Theta_{(l)} = q^{\mu\nu} \nabla_\mu l_\nu, \quad (2.27)$$

$$\Theta_{(k)} = q^{\mu\nu} \nabla_\mu k_\nu. \quad (2.28)$$

A convergência ou divergência dos feixes, se traduz no sinal das expansões  $\Theta$ . No caso de um espaço-tempo plano  $\Theta_{(k)} < 0$  e  $\Theta_{(l)} > 0$ . Na presença de um intenso campo gravitacional porém, esses sinais podem mudar. Tome como exemplo a solução de Schwarzschild, cujo diagrama de Penrose é mostrado no Fig.2.1. Nas regiões assintoticamente planas  $II$  e  $IV$ , a expansões  $\Theta_{(l)}$  e  $\Theta_{(k)}$  se comportam como em Minkowski. O buraco negro corresponde à região  $III$ , em que  $\Theta_{(k)} < 0$  e  $\Theta_{(l)} < 0$ . A região  $I$ , por sua vez, apresenta

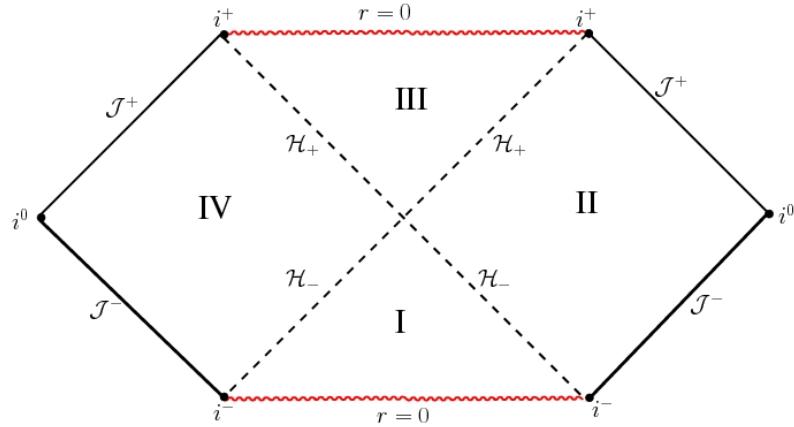


Figura 2.1: Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Schwarzschild. As regiões  $II$  e  $IV$  apresentam  $\Theta_{(l)} > 0$  e  $\Theta_{(k)} < 0$ , enquanto que  $\Theta_{(l)}, \Theta_{(k)} > 0$  em  $I$  e  $\Theta_{(l)}, \Theta_{(k)} < 0$  em  $III$ . Estas expansões se anulam em  $\mathcal{H}^+$  e  $\mathcal{H}^-$ .

$\Theta_{(k)} > 0$  e  $\Theta_{(l)} > 0$  e caracteriza um buraco branco. Note que as superfícies  $\mathcal{H}^+$  e  $\mathcal{H}^-$  apresentam, respectivamente,  $\Theta_{(l)}$  ou  $\Theta_{(k)} = 0$ .

Formalmente, busca-se definições gerais suficientes para uma descrição de buracos negros em qualquer tipo de espaço-tempo, inclusive aqueles em que não se pode distinguir quais vetores apontam para fora e para dentro de  $S$ . Assim, renomearemos os vetores nulos como  $l_+^\mu$  e  $l_-^\mu$  e as respectivas expansões como  $\Theta_+$  e  $\Theta_-$ . Motivado pela descrição anterior, define-se uma superfície aprisionada (*trapped surface*) com aquela em que  $\Theta_+\Theta_- > 0$ . Essa definição inclui tanto a região do buraco negro em que  $\Theta_+ < 0$  e  $\Theta_- < 0$ , quanto a do buraco branco com  $\Theta_+ > 0$  e  $\Theta_- > 0$ . Por sua vez, superfícies aprisionadas marginalmente (*marginally trapped surfaces* - MTS) serão superfícies  $S$  em que uma das duas expansões se anula, no caso, fixaremos  $\Theta_+ = 0$ . O comportamento da expansão do outro vetor nulo permite classificar estas superfícies em passadas ou futuras. Uma superfície aprisionada marginalmente no futuro (*future marginally trapped surfaces* - FMTS) apresenta  $\Theta_- < 0$ , enquanto que para uma superfície aprisionada marginalmente no passado (*past marginally*

*trapped surfaces - PMTS*)  $\Theta_- > 0$ . As MTS podem ser classificadas ainda como sendo internas (*inner*) e externas (*outer*), de acordo com a taxa de variação de  $\Theta_+$  no sentido do outro vetor nulo  $l_-^\mu$ . Assim, em uma superfície externa aprisionada marginalmente (*marginally outer trapped surface*)  $\mathcal{L}_-\Theta_+ < 0$  e em uma superfície interna aprisionada marginalmente (*marginally inner trapped surface*)  $\mathcal{L}_-\Theta_+ > 0$ .

Devemos ressaltar neste ponto que, quando escrito em inglês, há uma grande confusão na literatura atual com relação à nomenclatura *outer* e *inner*. A definição apresentada acima se refere a Hayward [62], mas é comum também encontrar as mesmas palavras definidas segundo Hawking [59]. Para ele, uma *marginally outer trapped surface* é aquela com expansão é nula para os vetores que apontam para fora (*out*), enquanto que *marginally inner trapped surface* se refere quando a expansão dos vetores para dentro (*in*) se anulam. O uso frequente da definição de Hawking ocorre pois, na grande maioria dos cenários com relevância astrofísica, o espaço-tempo permite uma distinção entre quais dos vetores nulos aponta para fora ou para dentro de  $S$ .

Historicamente, Hawking foi, de fato, um dos primeiros a tentar definir localmente um buraco negro [59] em termos de superfícies aprisionadas  $S$  e horizontes aparentes. Suas definições diferiam um pouco das apresentadas acima e restringiam  $S$  a uma dada superfície espacial  $\Sigma_t$ . Porém, notou-se que pequenas mudanças na folhação  $\Sigma_t$  mudam radicalmente o comportamento dos horizontes aparentes. Além disso, nunca foi possível deduzir as leis da termodinâmica de buracos negros de suas definições. A solução proposta nos anos 90 por Hayward [62] foi considerar tubos no espaço-tempo construídos por MTSs, que não dependiam, dessa forma, de uma folhação específica. Assim, um tubo aprisionado marginalmente (*marginally trapped tube - MTT*) é uma superfície tri-dimensional folhada por MTSs.

Em equilíbrio, isto é, quando nenhuma matéria ou radiação cai no horizonte, esse tubo será nulo. Esta situação é formalizada no contexto de horizonte isolado, por incorporar a noção de que a geometria intrínseca desse horizonte não se altera com o tempo, embora o restante do espaço-tempo possa ainda apresentar dinâmica. Matematicamente, define-se um horizonte não expandível (*non-expanding horizon - NEH*) como uma sub-variedade  $\Delta$  do espaço-tempo que satisfaz [60]:

1.  $\Delta$  apresenta topologia  $S^2 \times \mathcal{R}$  e é nulo;
2.  $\Theta_+ = 0$ , para um dos vetores normais  $l_+^\mu$  a  $\Delta$ ;
3. Qualquer equação de movimento é válida em  $\Delta$  e  $-T_{\mu\nu}l^\mu$  é tipo tempo e aponta para o futuro para qualquer vetor  $l^\mu$  nulo apontando para o futuro.

A condição 1 é imposta justamente pelo fato de que um MTT é nulo quando não há matéria ou radiação caindo no buraco negro, e a topologia é a mais adequada para descrever as situações de interesse astrofísico. Já a condição 3 é satisfeita para todos os campos de interesse físico. Por fim, a condição 2 garante que o tubo seja folhado por MTS. Há ainda outros aspectos para garantir a definição de horizontes isolados. Mas os detalhes só são importantes em contextos matemático mais formais. Em relatividade numérica um NEH é suficiente para caracterizar um buraco negro isolado. No caso dinâmico, o MTT não será nulo. Um horizonte dinâmico é então definido como uma MTT espacial, folhado por FMTS.

Neste trabalho estamos particularmente interessados na definição de momentos de multipolos e sua aplicação no contexto de horizontes dinâmicos [60, 63, 64]. Tanto na teoria newtoniana, quanto no eletromagnetismo, essas grandezas apresentam um papel muito importante. Conceitualmente, momentos de multipolos referem-se a duas expansões distintas: aqueles relacionados à fonte, que trazem informações sobre distribuições de massa(carga)/corrente e outra proveniente do comportamento assintótico do campo. No eletromagnetismo, por exemplo, as variações do momento de dipolo estão diretamente relacionadas com o fluxo de energia medido no infinito. Resultado semelhante é alcançado no regime linear da Relatividade Geral, em que o fluxo de ondas gravitacionais é ditado pela variação do momento de quadrupolo da fonte.

O objetivo é introduzir análogos aos momentos de multipolo da fonte para buracos negros em equilíbrio. Para isso é preciso, primeiramente, se restringir a MTSs que apresentem axissimetria, isto é, superfícies  $S$  sobre as quais existe um vetor  $\varphi^A$  tal que  $\mathcal{L}_\phi q_{\mu\nu} = 0$ . Os dois pontos onde  $\varphi^A$  se anulam são chamados pólos de  $S$ . As curvas integrais de  $\phi^A$  são candidatas naturais para as latitudes de  $S$  e as linhas de longitude conectam os dois pólos e são, ao mesmo tempo, ortogonais a  $\varphi^\mu$ . Isto leva a uma definição invariante para coordenadas  $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$  em  $S$ , com  $\tilde{\phi} \in [0, 2\pi)$  o parâmetro afim ao longo de  $\varphi^A$  e  $\tilde{x} = \cos \tilde{\theta} \in [-1, 1]$

dado por

$$\partial_A \tilde{x} = \frac{1}{R_S^2} \tilde{\varepsilon}_{AB} \varphi^B.$$

Na expressão acima,  $R_S = \sqrt{A_S/(4\pi)}$ , com  $A_S$  a área da superfície  $S$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{AB}$  é o tensor de Levi-Civita em  $S$  compatível com  $q_{\mu\nu}$ . A liberdade em  $\tilde{x}$  proveniente da constante de integração é removida impondo  $\oint_S \tilde{x} = 0$ .

Com isso, os momentos de massa e de rotação na expansão multipolar de um horizonte isolado são definidos, respectivamente, como [63]

$$M_n = \frac{R_S^n M_S}{8\pi} \oint_S {}^{(2)}RP_n(\tilde{x}) d\tilde{\Omega}, \quad (2.29)$$

$$J_n = -\frac{R_S^{n-1}}{8\pi} \oint_S \Im\Psi_2 P_n(\tilde{x}) d\tilde{\Omega}, \quad (2.30)$$

com  $P_n$  os polinômios de Legendre,  $M_S = R_S/2$  a definição da massa do horizonte e  $\Psi_2$  o escalar de Weyl (2.4) calculado sobre  $S$ .

A normalização é introduzida para que os momentos tenham dimensões físicas apropriadas. Note que  $M_0 = M_S$  é basicamente a massa do horizonte. Além disso, o momento angular de monopolo  $J_0$  e o momento de dipolo  $M_1$  são nulos, sendo que  $M_1 = 0$  indica que estamos no referencial de repouso do horizonte. No caso de um buraco negro de Schwarzschild, o único momento não nulo é  $M_0$ , enquanto que em Kerr somente os  $M_n$  pares e  $J_n$  ímpares sobrevivem. Embora definidos em termos de horizontes isolados, esses momentos são diretamente aplicados também em horizontes dinâmicos. Infelizmente, não existe nenhuma generalização para superfícies sem simetria axial, embora haja algumas tentativas para introduzir momentos nesses contextos [60, 65].

## 2.3 Massas ADM e de Bondi

Um último tópico para finalizar esse capítulo refere-se ao conceito de massa para o espaço-tempo. Na definição dos momentos de multipolo, a massa da superfície  $S$ , que no caso pode ser um horizonte, é dada por  $M_0$ . Em espaços assintoticamente planos, há essencialmente duas definições para massa: a ADM e a de Bondi [66]. De maneira geral, a massa ADM é uma medida da energia do espaço-tempo calculada sobre superfícies espaciais, enquanto que a de Bondi é feita sobre superfícies nulas. A primeira

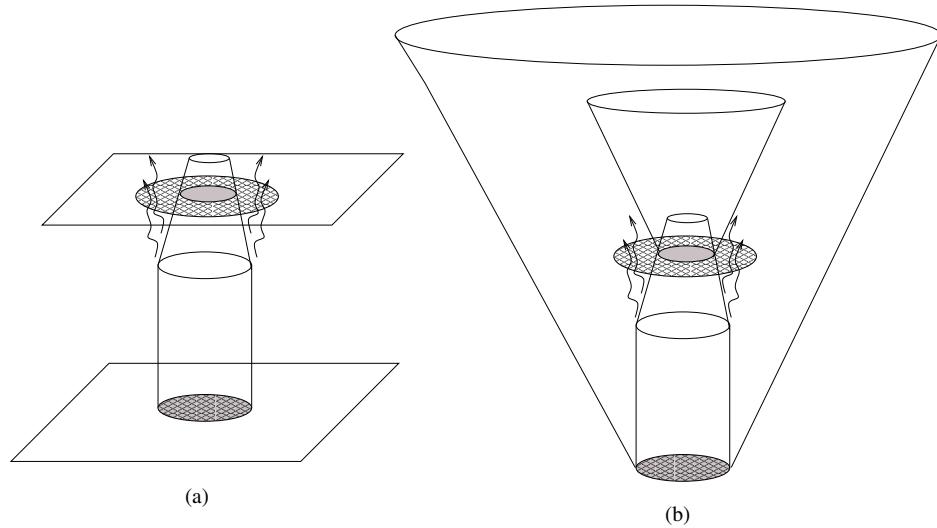


Figura 2.2: Energia medida no infinito obtida por limites assintóticos sobre diferentes superfícies. A massa ADM é calculada sobre uma superfície espacial e inclui, dessa forma, a energia na forma de ondas. A massa de Bondi por sua vez, é medida sobre superfícies nulas e exclui, assim, a energia da radiação.

leva em conta todo o conteúdo de energia do espaço-tempo, inclusive na forma de ondas gravitacionais(Fig.2.2a). Já a segunda consegue medir apenas a massa do objeto compacto, uma vez que as superfícies nulas não interceptam as ondas (Fig.2.2b).

A folhação do espaço-tempo em superfícies espaciais é feita através do formalismo  $3+1$  da Relatividade Geral, em que considera-se o espaço-tempo folhado por superfícies espaciais  $\Sigma_t$ . A geometria entre duas superfícies sucessivas é descrita por três ingredientes:

- A métrica 3-dimensional  $\gamma_{ij}$  que mede a distância própria sobre  $\Sigma_t$ :

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j.$$

- A função lapso (*lapse*)  $\alpha(t, x^i)$  mede o tempo próprio decorrido entre as superfícies  $\Sigma_t$  e  $\Sigma_{t+dt}$  para observadores que se movem perpendicularmente à  $\Sigma_t$ :

$$d\tau = \alpha(t, x^i) dt$$

- A função deslocamento (*shift*)  $\beta^i(t, x^i)$  mede a velocidade relativa entre observadores que se movem perpendicularmente à  $\Sigma_t$  e as linhas que descrevem coordenadas espaciais constantes

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i(t, x^i) dt.$$

As funções  $\alpha(t, x^i)$  e  $\beta^i(t, x^i)$  são especificadas livremente e representam a liberdade na escolha do sistema de coordenadas. Assim, o elemento de linha é escrito como

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.31)$$

em que  $\beta_i \equiv \gamma_{ij} \beta^j$  e daqui para frente assumiremos que índices puramente espaciais serão manipulados com a métrica espacial  $\gamma_{ij}$ .

Para especificar as condições iniciais sobre  $\Sigma_{t_0}$ , devemos prescrever a geometria  $\gamma_{ij}$  dessa superfície. Contudo, é necessário também uma grandeza relacionada, de alguma forma, à derivada temporal de  $\gamma_{ij}$ , uma vez que as equações diferenciais envolvidas na Relatividade Geral são de segunda ordem. O objeto responsável por fornecer essas informações é a curvatura extrínseca, definida como

$$K_{\mu\nu} = -P^\alpha_\mu \nabla_\alpha n_\nu, \quad (2.32)$$

em que  $n^\mu = -\alpha \nabla^\mu t$  é o vetor normal à superfície  $t = \Sigma_t$  e  $P^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + n^\alpha n_\beta$  é o operador de projeção sobre  $\Sigma_t$ . Embora  $K_{\mu\nu}$  seja uma medida da mudança do vetor normal quando transportado paralelamente sobre  $\Sigma_t$ , mostra-se que a Eq.(2.32) equivale a

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_n \gamma_{\mu\nu} \quad (2.33)$$

e assim,  $K_{\mu\nu}$  mede também a “velocidade” da métrica espacial para observadores que se movem perpendicularmente à  $\Sigma_t$ . Mais explicitamente, para coordenadas adaptadas à decomposição 3 + 1 a Eq.(2.33) fica

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i, \quad (2.34)$$

com  $D_i$  a derivada covariante associada à métrica espacial  $\gamma_{ij}$ .

A dinâmica do campo gravitacional é descrita pelas equações de Einstein, que também precisam ser reescritas em termos da decomposição 3 + 1. Os cálculos são trabalhosos, mas podem ser acompanhados em [9, 35, 67] e levam, respectivamente, aos vínculos Hamiltoniano e de Momento

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi\rho, \quad (2.35)$$

$$D_j (K^{ij} - \gamma^{ij} K) = 8\pi j^i, \quad (2.36)$$

com  $\rho = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$  e  $j^i = -P^{i\mu} n^\nu T_{\mu\nu}$ . Se os vínculos forem satisfeitos em uma dada superfície, as identidades de Bianchi garantem que as Eqs.(2.35) e (2.36) continuem válidas em qualquer outro instante.

Por fim, a evolução da curvatura extrínseca é dada por

$$\begin{aligned}\partial_t K_{ij} &= \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{li} \partial_j \beta^l + K_{lj} \partial_i \beta^l - D_i D_j \alpha \\ &+ \alpha \left[ {}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{il} K^l{}_j \right] + 4\pi \alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}],\end{aligned}\quad (2.37)$$

com  $S_{\mu\nu} = P^\alpha{}_\mu P^\beta{}_\nu T_{\alpha\beta}$ .

Na realidade, a decomposição 3 + 1 apresentada aqui está adequada para evoluções numéricas e, embora a Eq.(2.37) seja conhecidas como equações ADM, elas não estão expressas exatamente como nos trabalhos originais de Arnowitt-Deser-Misner, cujo objetivo era desenvolver o formalismo lagrangiano e hamiltoniano da Relatividade Geral. Como em toda teoria física, a formulação lagrangiana se inicia com a introdução de uma ação, definida como a integral da densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$  sobre uma região  $\mathcal{V}$  finita do espaço-tempo. Em vez de trabalhar com a curvatura extrínseca  $K_{ij}$ , originalmente utilizou-se o momento conjugado  $\Pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = -\sqrt{\gamma}(K^{ij} - \gamma^{ij}K)$ .

Além disso, a Relatividade Geral é uma teoria particular, pois envolve também uma integração sobre a fronteira  $\partial\mathcal{V}$ , necessária para que o princípio variacional seja bem posto. O formalismo hamiltoniano herda os termos de fronteira em superfícies bi-dimensionais  $S$ , formadas na interseção da folhação  $\Sigma_t$  e  $\partial\mathcal{V}$ . Para uma dada configuração de campo  $\{\gamma_{ij}, \Pi^{ij}\}$ , solução das equações de Einstein, o valor do hamiltoniano dependerá somente das condições na fronteira  $S$ , que pode ser estendida para o infinito quando o espaço-tempo é assintoticamente plano. Neste caso, o valor do hamiltoniano dependerá de escolhas para o comportamento assintótico das funções *lapse* e *shift*. A massa ADM é então definida como o valor do hamiltoniano quando  $\alpha(t, x^i)$  e  $\beta^i(t, x^i)$  representam translações temporais. Todos os detalhes matemáticos estão muito bem apresentados em [67] e a expressão para a massa ADM é

$$M = \frac{1}{16\pi} \oint_{S \rightarrow \infty} (D_{(\eta)}^j \tilde{\gamma}_{ij} - D_{(\eta)i} \tilde{\gamma}) r^i \sqrt{q} d\Omega,\quad (2.38)$$

com  $\tilde{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij} - \eta_{ij}$ ,  $D_{(\eta)i}$  a derivada covariante do espaço-tempo plano associado a  $\eta_{ij}$  e  $r^i$  o vetor unitário radial a  $S$ .

De maneira geral, pode-se dizer que a massa de Bondi é dada quando o limite  $S \rightarrow \infty$  na Eq.(2.38) é tomado sobre uma superfície nula  $u = \text{constante}$ . Porém, o principal trabalho que analisa as equações de Einstein com o espaço-tempo folhado por superfícies nulas foi feito, com simetria axial, por Bondi em 1962 [68] e generalizado por Sachs para espaços assintoticamente planos logo em seguida [56]. Nossa interesse está restrito ao caso axissimétrico ([7] apresenta uma explanação mais sucinta do tema).

O elemento de linha é escrito na forma

$$ds^2 = - \left( \frac{e^{2\beta} V}{r} - r^2 e^{2\gamma} U^2 \right) du^2 - 2e^{2\beta} dudr - 2r^2 e^{2\gamma} U dud\theta + r^2 (e^{2\gamma} d\theta^2 + e^{-2\gamma} \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.39)$$

O sistema de coordenadas escolhido permite uma expansão ao longo das geodésicas nulas. Assim,  $u = \text{constante}$  representa superfícies nulas, e  $r$  é um parâmetro ao longo das geodésicas nulas, adotado por Bondi, não como o parâmetro afim, mas como a distância luminosa (isto é, tal que  $g_{22}g_{33} = r^4 \sin^2 \theta$ ).  $\theta$  e  $\phi$  são os ângulos polares usuais, definidos em cada esfera  $S^2$  ( $u$  e  $r$  constantes) no infinito nulo  $\mathcal{J}^+$ . Por sua vez,  $V, U, \beta, \gamma$  são funções arbitrárias de  $u, r, \theta$ .

Com a métrica (2.39), as equações de Einstein no vácuo se dividem em duas categorias bem definidas.

As quatro equações principais

$$R_{11} = 0, \quad (2.40)$$

$$R_{22} = 0, \quad (2.41)$$

$$g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} = 0, \quad (2.42)$$

$$R_{33} = 0 \quad (2.43)$$

ditam a evolução dinâmica do sistema. Primeiramente, a função  $\gamma(u_0, r, \theta)$  é especificada sobre uma superfície nula inicial  $N_0$ . A partir daí, as chamadas equações de hipersuperfície (2.40), (2.41) e (2.42) determinam  $\beta(u_0, r, \theta)$ ,  $U(u_0, r, \theta)$  e  $V(u_0, r, \theta)$ , respectivamente. A equação dinâmica (2.43) evolui a condição inicial para o instante seguinte  $\gamma(u_0 + du, r, \theta)$  e recomeça o processo iterativo.

As condições suplementares

$$R_{00} = R_{02} = 0 \quad (2.44)$$

são um análogo aos vínculos presentes na decomposição “3 + 1”. Pode-se facilmente mostrar com as identidades de Bianchi que, se as equações principais são válidas,  $R_{01} = 0$  é trivialmente satisfeita e as equações de (2.44), uma vez válidas em uma dada superfície  $r$  constante, continuarão corretas para qualquer  $r$ .

No processo de resolução das equações principais surgem um total de 5 funções de integração arbitrárias  $H(u, \theta)$ ,  $N(u, \theta)$ ,  $L(u, \theta)$ ,  $M(u, \theta)$  e  $c(u, \theta)$  que, a princípio, também devem ser conhecidas no instante inicial para que o problema fique completamente determinado. Entretanto, considerações sobre as possíveis mudanças de coordenadas e imposições sobre a natureza *outgoing* das ondas reduzem  $H(u, \theta) = L(u, \theta) = 0$ . As condições supplementares vinculam ainda as 3 funções restantes de maneira que basta conhecer apenas  $c(u, \theta)$  para a evolução de todo o sistema ser completa.

Para um estudo sistemático, assume-se todas as funções espandidas em potências de  $\frac{1}{r}$ . Assim, se

$$\gamma = \frac{c(u, \theta)}{r} + \frac{C(u, \theta) - \frac{c^3}{6}}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-4}), \quad (2.45)$$

temos pelas condições de superfície

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{c^2}{4r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}), \\ U &= -\frac{c_\theta + 2c \cot \theta}{r^2} + \frac{2N(u, \theta) + 3cc_\theta \cot \theta}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-4}), \\ V &= r - 2M(u, \theta) + \mathcal{O}(r^{-1}), \end{aligned} \quad (2.46)$$

pelos vínculos

$$\begin{aligned} M_u &= -c_u^2 + \frac{(c_{\theta\theta} + 3c_\theta \cot \theta - 2c)_u}{2}, \\ -3N_0 &= M_\theta + 3cc_{u\theta} + 4cc_u \cot \theta + c_u c_\theta \end{aligned} \quad (2.47)$$

e pela equação dinâmica

$$4C_u = 2c^2 c_u + 2cM + N \cot \theta - N_\theta. \quad (2.48)$$

Interpretações físicas sobre essas funções de integração são obtidas quando a métrica de Bondi(2.39) é analisada no caso estático. Weyl já havia mostrado que, no vácuo, a métrica de qualquer espaço-tempo estático e axissimétrico pode ser escrita como

$$ds^2 = -e^{2\Psi} dt^2 + e^{-2\Psi} [e^{2\sigma} (\rho^2 + dz^2) \rho^2 d\phi^2].$$

As equações de Einstein impõem que  $\Psi$  deve satisfazer (a equação para  $\sigma$  não é importante para a análise)

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0.$$

Com o espaço-tempo plano no infinito, a solução é

$$\Psi = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \Theta), \quad \rho = R \sin \Theta, \quad z = R \cos \Theta$$

e  $a_0$  identifica-se com a massa  $m$  do sistema,  $a_1$  o momento de dipolo  $D$  e  $a_2 = Q + \frac{m^3}{3}$ , em que  $Q$  é o momento de quadrupolo.

O estudo das possíveis mudanças de coordenadas na métrica de Bondi será detalhado em seguida, mas antecipando alguns resultados, a transformação das coordenadas de Bondi  $(u, r, \theta, \phi)$  para as coordendas de Weyl permite identificar os parâmetros  $M, N$  e  $C$  das expansões anteriores com a massa  $m$  e os momentos de dipolo  $D$  e quadrupolo  $Q$  via

$$M = m,$$

$$\begin{aligned} N &= D \sin \theta - m \alpha_\theta, \\ C &= \frac{Q \sin^2 \theta}{2} - \alpha_\theta D \sin \theta + \frac{m \alpha_\theta^2}{2}, \\ c &= -\frac{\alpha_{\theta\theta}}{2} + \frac{\alpha_\theta \cot \theta}{2}, \end{aligned}$$

com  $\alpha(\theta)$  proveniente da transformação das coordenadas. Inspirado nessa análise,  $M(u, \theta)$  é chamada de *aspecto da massa*.

A função  $c(u, \theta)$  é extremamente importante para o estudo das ondas gravitacionais. Em particular, sua derivada  $\partial_u c$  recebe o nome especial de função *news* por conter toda informação acerca do sistema irradiante. O principal resultado do trabalho, que ilustra a importância da função *news*, vem com a definição da massa de Bondi para o sistema como a média angular do aspecto da massa

$$m(u) = \frac{1}{2} \int_0^\pi M(u, \theta) \sin \theta d\theta. \quad (2.49)$$

A imposição de condições de regularidades no eixo de simetria sobre as funções da métrica permitem escrever a taxa de variação da massa de Bondi

$$\partial_u m(u) = -\frac{1}{2} \int_0^\theta (\partial_u c)^2 \sin \theta d\theta,$$

isso é,

*a massa do sistema é constante se e somente se não existe news. Caso exista, a massa decresce monotonicamente enquanto a news continuar.* [68]

Além disso, uma análise do tensor de Riemann mostra que as componentes apresentam parcelas proporcionais a  $r^{-1}$  se e somente se  $\partial_{uu}^2 c \neq 0$ .

Na sequência do trabalho, Bondi aborda as mudanças de coordenadas permitidas para manter a forma da métrica invariante. Assume-se que não só a métrica, mas também as transformações de coordenadas possam ser espandidas em potências de  $r^{-1}$  e o cálculo de  $\bar{g}_{\mu\nu}$  leva a

$$\begin{aligned} u &= a^{(0)}(\bar{u}, \bar{\theta}) + \mathcal{O}(\bar{r}^{-1}), \\ r &= K(\bar{u}, \bar{\theta})\bar{r} + \mathcal{O}(1), \\ \theta &= g^{(0)}(\bar{u}, \bar{\theta}) + \mathcal{O}(\bar{r}^{-1}), \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\text{com } a^{(0)} = \frac{\bar{u}}{K(\bar{\theta})} + \alpha(\bar{\theta}),$$

$$\tan\left(\frac{g^{(0)}}{2}\right) = e^{-\nu} \tan\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right) \quad (\nu \text{ constante})$$

e

$$K = \cosh \nu + \cos \bar{\theta} \sinh \nu. \quad (2.51)$$

Como mencionado anteriormente, uma das utilidades dessas transformações de coordenadas é reescrever a métrica de Bondi estática na forma da métrica de Weyl para interpretar fisicamente cada uma das funções. Uma segunda possibilidade é analisar o caso particular da métrica de Schwarzschild escrita em coordenadas  $(u, r, \theta, \phi)$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)du^2 - 2dudr + r^2d\Omega^2,$$

em que  $\gamma = \beta = U = 0$  e  $V = r - 2M_0$ . Aplicando uma transformação  $K$  à solução de Schwarzschild, obtém-se o aspecto de massa

$$M(\theta) = \frac{M_0}{(\cosh \nu + \cos \theta \sinh \nu)^3}, \quad (2.52)$$

cuja massa de Bondi (2.49) assume o valor

$$m = M_0 \cosh \nu.$$

Esta é exatamente a expressão da energia que um observador no infinito, parado no sistema de coordenadas de Bondi, mede para um objeto de massa  $M_0$  movendo-se com velocidade  $v = \tanh \nu$ . Sachs [69] formaliza essa interpretação ao mostrar que as transformações de coordenadas (2.50) são uma generalização das transformações de Lorentz para espaços-tempos assintoticamente planos. Ele introduz ainda o momento de Bondi para medir sobre a superfície nula, não só a massa, como também a velocidade do objeto compacto.

## Capítulo 3

# Robison-Trautman e Colisão *Head-On*

### 3.1 Solução de Robinson Trautman

No capítulo 2 vimos que as ondas gravitacionais estão associadas à presença do escalar de Weyl  $\Psi_4$  e, pelo teorema *peeling*, o tensor de Riemann se decompõe em potências de  $1/r$ , com cada parcela um tensor algebricamente especial segundo a classificação de Petrov. Uma tentativa de se obter soluções exatas de espaços-tempos radiativos é importante que o tensor de Riemann seja algebricamente especial. Por outro lado, segundo o teorema de Goldberg-Sachs, espaços-tempo com uma congruência de geodésicas nulas shear-free serão necessariamente algebricamente especiais. Assim, no início dos anos 60, I. Robinson e A.Trautman seguiram esse caminho para obter uma solução das equações de Einstein com conteúdo de ondas gravitacionais.

A métrica de Robinson-Trautman é definida geometricamente como a classe de soluções que admitem uma congruências de geodésicas nulas, twist-free, shear-free mas com expansão [34, 47]. Esta solução representa um espaço-tempo radiativo na presença de um objeto compacto deformado sem rotação. De maneira geral, não há nenhuma simetria presente, mas aqui assumimos simetria axial, já que os momentos de multipolo (2.29) e (2.30) só são definidos sob estas condições. No trabalho, eles mostraram que existe um sistema de coordenadas (ver Apêndice A) em que o elemento de linha assume a forma

$$ds^2 = - \left( K(u, \theta) - 2r \ln Q(u, \theta)_{,u} - \frac{2M_\infty}{r} \right) du^2 - 2dudr + \frac{r^2}{Q^2(u, \theta)} d\Omega. \quad (3.1)$$

Aqui,  $u$  são superfícies nulas sobre as quais são definidas as geodésicas com parâmetro afim  $r$  e  $(\theta, \phi)$  são as coordenadas esféricas usuais. Note que toda a dependência em  $r$  é obtida com a integração das equações de Einstein. As equações fornecem ainda o vínculo (com  $\nabla_{\Omega}^2$  o laplaciano em coordenadas esféricas)

$$K = Q^2 [1 + \nabla_{\Omega}^2 \ln Q], \quad (3.2)$$

nada mais do que a curvatura gaussiana do sub-espacô descrito por  $u$  e  $r$  constante. Por fim, a dinâmica é ditada por

$$\partial_u Q = -\frac{Q^3 \nabla_{\Omega}^2 K}{12M_{\infty}}. \quad (3.3)$$

Embora a Eq.(3.3) seja altamente não linear, ela apresenta a constante de movimento

$$q_0 = \oint \frac{1}{Q^2} d\Omega. \quad (3.4)$$

Como  $q_0$  é a área da superfície  $u$  e  $r$  constante, é conveniente sempre normalizar a função  $Q$  de modo que  $q_0 = 4\pi$ . Além disso, mostra-se que para qualquer condição inicial  $Q(u_0, \theta)$  bem comportada, a solução de (3.3) existe para todo  $u \geq u_0$  e sua evolução é tal que, para  $u \rightarrow \infty$ ,  $K(\infty, \theta) = \text{constante}$  [70]. Como será mostrado a seguir, a configuração assintótica corresponde ao espaço-tempo de Schwarzschild.

Uma base de tétradas nulas que descreve a métrica (3.1) é

$$l^{\mu} = \delta_r^{\mu}, \quad (3.5)$$

$$k^{\mu} = \delta_u^{\mu} - \frac{\alpha}{2} \delta_r^{\mu}, \quad (3.6)$$

$$m^{\mu} = \frac{Q}{\sqrt{2}r} \left[ \delta_{\theta}^{\mu} + \frac{i}{\sin \theta} \delta_{\phi}^{\mu} \right], \quad (3.7)$$

com  $\alpha = (K(u, \theta) - 2r \ln Q(u, \theta)_{,u} - \frac{2M_{\infty}}{r})$ . Note que  $l^{\mu}$  é o vetor ortogonal às superfícies nulas  $u = \text{constante}$  utilizado na construção da solução (Apêndice A).

Confirma-se o caráter radiativo do espaço-tempo com a presença do escalar

$$\Psi_4 = -\frac{Q^2}{2r} \partial_u \left[ \frac{\sin \theta}{Q} \partial_{\theta} \left( \frac{Q_{\theta}}{\sin \theta} \right) \right], \quad (3.8)$$

ou ainda com a verificação explícita da decomposição do teorema de *peeling*. Para isso introduz-se uma base de bivetores self-dual [34, 47]

$$N_{ab} = 2l_{[a} m_{b]},$$

$$M_{ab} = 2(l_{[a}l_{b]} + \bar{m}_{[a}m_{b]}) ,$$

$$L_{ab} = 2k_{[a}\bar{m}_{b]},$$

que será utilizada para expandir o tensor  $S_{abcd} = R_{abcd} + i * R_{abcd}$ , no qual  $*R_{abcd} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\epsilon_{abef}R^{ef}_{\phantom{ef}cd}$  é o dual do tensor de Riemann. Uma simples rotina no Maple poupa o trabalho algébrico dessas contas e verifica-se que  $S_{abcd}$  é da forma

$$S_{abcd} = \frac{N_{abcd}}{r} + \frac{III_{abcd}}{r^2} + \frac{D_{abcd}}{r^3}. \quad (3.9)$$

A Eq.(3.9) é exata e o espaço-tempo é algebricamente especial, como esperado pelo teorema de Goldberg-Sachs.

A presença do objeto compacto é verificada com o cálculo de MTS [71–73]. Primeiro devemos adaptar as tétradas nulas (3.5)-(3.7) à uma superfície bi-dimensional

$$S = \begin{cases} u = \text{constante} \\ r = R(\theta_S) \\ \theta = \theta_S \\ \phi = \phi_S, \end{cases} \quad (3.10)$$

cuja geometria é descrita pela métrica

$$ds^2|_S = \frac{Q^2(\theta_S)}{R^2(\theta_S)} (d\theta_S^2 + \sin^2 \theta_S d\phi_S^2), \quad (3.11)$$

sendo  $(\theta_S, \phi_S)$  as coordenadas que descrevem  $S^1$ . Para isso,  $m^\mu = Av_1^\mu + Bv_2^\mu$ , com  $v_1^\mu = \partial_{\theta_S}x^\mu$  e  $v_2^\mu = \partial_{\phi_S}x^\mu$  vetores tangentes a  $S$ . Assim, as tétradas nulas adaptadas a  $S$  ficam

$$l^\mu = \delta_r^\mu, \quad (3.12)$$

$$k^\mu = \delta_u^\mu + \left[ \frac{Q^2}{2r^2}R_\theta - \frac{\alpha}{2} \right] \delta_r^\mu + \frac{Q^2}{r^2}R_\theta \delta_\theta^\mu, \quad (3.13)$$

$$m^\mu = \frac{Q^2}{\sqrt{2}r} \left[ R_\theta \delta_r^\mu + \delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_\phi^\mu \right], \quad (3.14)$$

obtidas com uma rotação nula das Eqs.(3.5)-(3.7) em torno de  $l^\mu$  (Classe I) com  $a = \frac{Q^2}{2r^2}R_\theta$ .

As expansões  $\Theta_{(l)}$  e  $\Theta_{(k)}$  restringidas então à superfície  $S$  são

$$\Theta_{(l)} = \frac{2M_\infty}{R}, \quad (3.15)$$

---

<sup>1</sup>O índice S será omitido na sequência do texto.

$$\Theta_{(k)} = Q^2 \nabla_\Omega^2 \ln R - K + \frac{2M_\infty}{R}. \quad (3.16)$$

O sinal positivo de  $\Theta_{(l)} > 0$  já era esperado, uma vez que desde o início fora postulado  $l^\mu$  como descrevendo geodésicas nulas *shear-free*, mas **com expansão**. A MTS será dada então por  $\Theta_{(k)} = 0$  [71–73],

$$Q^2 \nabla_\Omega^2 \ln R = K - \frac{2M_\infty}{R} \quad (3.17)$$

e, pelas definições do capítulo 2, trata-se de uma MTS no passado. Graças a Eq.(3.17), a curvatura intrínseca do horizonte descrito por (3.10) e (3.11) é

$$K_H = \frac{2M_\infty}{R^3}. \quad (3.18)$$

Como mostra o diagrama de Penrose (Fig.3.1), RT é uma deformação das regiões  $I$  e  $II$  do espaço-tempo de Schwarzschild (Fig.2.1). O horizonte futuro  $H^+$  é um horizonte isolado e a dinâmica está presente no horizonte passado  $H^-$ . Entretanto, não podemos usar o termo horizonte dinâmico para essa superfície no sentido da definição apresentada no capítulo 2, já que, naquele caso, o tubo é contruído por *future* MTSs.

Uma vez que o espaço-tempo é folhado por superfícies nulas, podemos medir a massa e o momento do objeto em termos das quantidades introduzidas por Bondi e apresentadas no capítulo 2. Para isso, é preciso obter uma transformação do sistema de coordenada  $(u, r, \theta, \phi)$  que descreve o espaço-tempo de RT para o sistema de Bondi  $(U, R, \Theta, \Phi)$ .<sup>2</sup>

O procedimento, apresentado de maneira bastante completa em [74], é o mesmo descrito em (2.50) e consiste na expansão em potência de  $r^{-1}$  da mudança de coordenadas. Inspirado no elemento de linha do sub-espacô com  $u$  e  $r$  constante, o *ansatz*  $R \sim r/P$  sugere que

$$\begin{aligned} \Theta &= T_0 + \frac{T_1}{r} + \frac{T_2}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}), \\ R &= rK + R_0 + \frac{R_1}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}), \\ U &= U_0 + \frac{U_1}{r} + \frac{U_2}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Dessa forma, a mudança de base para cada componente da métrica de Bondi é analisada sistematicamente uma a uma. Em particular, o aspecto de massa é obtido com a

---

<sup>2</sup>A partir de agora, as coordenadas de Bondi serão representadas por letras maiúsculas para diferenciá-las das coordenadas de Robinson-Trautman.

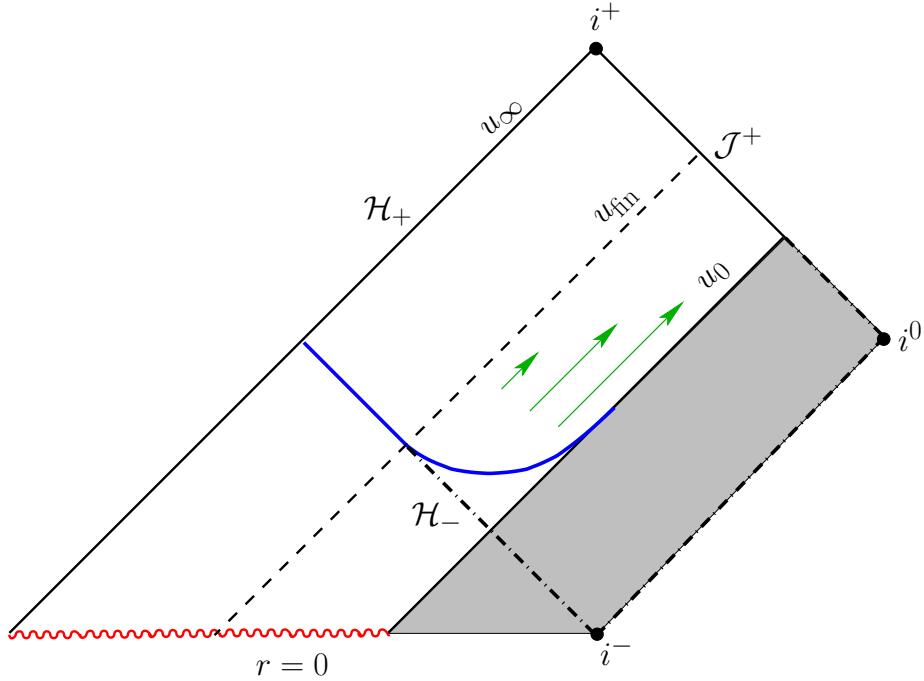


Figura 3.1: Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Robinson-Trautman. Condições iniciais  $Q(u_0, \theta)$  são impostas sobre uma superfície nula  $u_0$ . A solução da equação dinâmica (3.3) existe para  $u \geq u_0$  e por isso a área sombreada exclui a região do diagrama que não temos acesso. A equação dinâmica (3.3) evolui a condição inicial e, sobre cada superfície nula  $u = \text{constante}$ , o horizonte passado  $H^-$  (em azul) é descrito por  $r = R(\theta)$  solução de (3.17). No processo, ondas gravitacionais (setas verdes) são emitidas e eliminam as deformações do horizonte passado  $H^-$ . A simulação segue até uma superfície final  $u_{\text{final}}$  na qual, dentro da precisão numérica,  $Q(u_{\text{final}}, \theta)$  equivale à solução estacionária (3.23) que representa o espaço-tempo de Schwarzschild.

componente  $g_{UU}$  de (2.39) e sua expansão (2.46). No caso de RT, este procedimento leva ao aspecto de massa

$$M = \frac{M_\infty}{Q^3} + (\text{termos que vão a zero no caso não radiativo}), \quad (3.20)$$

cuja a média angular de corresponde à massa de Bondi do sistema (2.49).

Apesar da presença de termos radiativos em (3.20), utilizaremos o momento de Bondi como deduzido em [75, 76]

$$P^\alpha = \frac{M_\infty}{4\pi} \oint \frac{\eta^\alpha}{Q^3} d\Omega, \quad (3.21)$$

com  $\eta^\alpha = (1, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, \cos \theta)$ . Mas é importante ressaltar que muito recentemente uma nova proposta para o cálculo desta quantidade foi apresentada [77].

Como mencionado, a solução assintótica da evolução temporal de qualquer condição inicial  $Q(u_0, \theta)$  é tal que  $K(\infty, \theta) = \text{constante}$ . Pode-se verificar em [78], ou como apresentamos em [79], que isso corresponde a uma função linear

$$Q(\infty, \theta) = a + b \cos(\theta). \quad (3.22)$$

Com a normalização imposta em (3.4) temos  $a^2 - b^2 = 1$ , o que nos permite parametrizar  $a$  e  $b$  em termos de  $\cosh \nu$  e  $\sinh \nu$  respectivamente, ou de  $v = \tanh \nu$

$$S_{\pm}(\theta; v) \equiv Q(\infty, \theta) = \frac{1 \mp v \cos \theta}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (3.23)$$

A interpretação física da solução estacionária (3.23) é bastante direta. Primeiro, observe que o horizonte (3.17) correspondente à esta solução é  $R = 2M_{\infty}$ , isto é, o mesmo de Schwarzschild. Além disso, o momento de Bondi (3.21) associado a (3.23) é

$$P^{\alpha} = \frac{M_{\infty}}{\sqrt{1 - v^2}} [1, 0, 0, \pm v].$$

Assim, a Eq.(3.23) representa um buraco negro de Schwarzschild de massa  $M_{\infty}$  com velocidade  $\pm v$  ao longo do eixo  $z$ , visto por um observador no infinito, parado no sistema de coordenadas de Bondi ( $U, R, \Theta, \Phi$ ).

Para verificar que (3.22) é, de fato, solução estacionária de (3.3), note que  $\partial_u Q(u, x) = 0$  é satisfeita quando

$$(1 - x^2)K_x = A = \text{constante},$$

cujas soluções é

$$K = A \arctan x + B,$$

e  $x = \cos \theta$ .

A imposição da regularidade de  $K$  ( $0 < K < \infty$ ) no intervalo  $[-1, 1]$  implica necessariamente que  $A = 0$ . Logo  $K = B = \text{constante}$ .

Sendo  $K_{\infty}$  o valor assintótico da curvatura gaussiana, a Eq.(3.2) pode ser reescrita, após um rescalonamento  $Q \rightarrow \sqrt{K_{\infty}}Q$ , da forma

$$(1 - x^2)QQ_{xx} - 2xQQ_x - (1 - x^2)Q_x^2 + Q^2 - 1 = 0. \quad (3.24)$$

Soluções do tipo (3.22) são tais que  $Q_{xx} = 0$ . Essa família de soluções está vinculada a uma superfície  $\mathcal{L}$  no espaço de fase tal que

$$\mathcal{L}(x, Q, Q_x) = Q^2 - 1 - 2xQQ_x - (1 - x^2)Q_x^2 = 0, \quad (3.25)$$

como pode ser facilmente verificado com o uso de (3.24). Ainda, com base em (3.24), verifica-se

$$\frac{1}{\mathcal{L}} \frac{d\mathcal{L}}{dx} = \frac{2x}{1-x^2} + \frac{Q_x}{Q}, \quad (3.26)$$

cuja solução é facilmente obtida

$$\mathcal{L} = C \frac{Q(x)}{1-x} \quad (3.27)$$

com  $C$  constante.

Assim, se  $Q(x_0)$  é solução de (3.24) para um dado  $x_0$  tal que  $\mathcal{L}(x_0) = 0$  temos  $C = 0$  e, portanto,  $\mathcal{L}(x) = 0, \forall x \in [-1, 1]$ . Isso é,  $Q(x)$  é da forma  $Q(x) = a + bx$  em todo o domínio. Por outro lado, se existir  $Q(x_0)$  solução de (3.24) com  $\mathcal{L}(x_0) \neq 0$ , a Eq.(3.27) mostra que  $\mathcal{L}$  e, consequentemente,  $Q(x)$  não são regulares nas fronteiras  $x = \pm 1$ . Dessa maneira, conclui-se que a única solução estacionária e regular de (3.3) é necessariamente da forma  $Q_{xx} = 0 \Rightarrow Q(\infty, x) = a + bx$ .

Mesmo que no espaço-tempo de RT o objeto dinâmico seja um buraco branco, esta métrica é um excelente modelo para descrever a emissão de ondas gravitacionais por objetos compactos. Ao incorporar diretamente os efeitos não-lineares na dinâmica, esta solução permite um estudo complementar ao obtido com a introdução de perturbações sobre um *background* de Schwarzschild fixo. De fato, condições iniciais  $Q(u_0, \theta)$  genéricas introduzem deformações na geométrie de Schwarzschild, que são então irradiadas na forma de ondas gravitacionais. Como mostraremos no próximo capítulo, sua simplicidade permite extrair informações que seriam de difícil acesso em outros cenários, como por exemplo a perda da massa pela fonte. Além de uma comparação entre a velocidade de recuo e as simetrias e deformações presentes no objeto.

Por um lado, a folhação em superfícies nulas permite escrever de maneira simples o momento de Bondi e a evolução dinâmica desta solução. Mas, por outro, introduz dificuldades na escolha de condições iniciais que modelem com fidelidade cenários realistas. Os autores de [80], porém, obtiveram a função

$$Q(u_0, \theta) = Q_0 \left( \frac{1}{S_+(\theta; w)} + \frac{\mu}{S_-(\theta; w)} \right)^{-2} \quad (3.28)$$

e a interpretaram como os estágios finais de uma colisão *head-on* de buracos negros (isto é, após um horizonte comum ser formado). Os cálculos e argumentos estão detalhados

no artigo, mas a Eq.(3.28) é essencialmente uma combinação das soluções estacionárias (3.23), isto é, de soluções que representam objetos se movendo nas direções  $+z$  e  $-z$ . No trabalho original, há duas interpretações para o parâmetro  $w$ . Ele representa tanto a velocidade com que os buracos negros se movem um em direção ao outro, quanto uma medida da distância entre os objetos. Por sua vez,  $\mu$  é interpretado como a razão entre as massas desses buracos negros e  $Q_0$  foi introduzido por nós a fim de garantir a normalização  $q_0 = 4\pi$  da constante de movimento (3.4).

Entretanto, preferimos ser um pouco mais cautelosos e considerar, a princípio,  $w$  e  $\mu$  apenas como parâmetros livres que introduzem deformações na geometria de Schwarzschild. Como o objeto dinâmico em RT é, na realidade, um buraco branco, qualquer interpretação ou referência a parâmetros e características típicas de buracos negros deve ser feita com cautela. No capítulo seguinte iremos comparar o modelo descrito pela evolução temporal em RT (3.3) da condição inicial (3.28) com resultados conhecidos em simulações de buracos negros. Essa comparação reforçará, por exemplo, a interpretação de  $\mu$  como uma razão entre massas.

### 3.1.1 Método de Galerkin

Para a evolução numérica da equação dinâmica (3.3), seguimos [81–83] e introduzimos uma decomposição espectral de  $Q(u, x)$ . Esse procedimento é essencialmente uma extensão natural do estudo do regime linear dessa equação, analisado por J. Foster e E.T. Newman [84]. Ainda nos anos 60, eles introduziram pequenas perturbações na solução de Schwarzschild da forma  $Q(u, \theta) = Q_0 [1 + \epsilon_n(u) P_n(\cos \theta)]$ , com  $P_n(\cos \theta)$  os Polinômios de Legendre de grau  $n$ . Para  $|\epsilon_n| \ll 1$ , expande-se todas as funções até primeira ordem em  $\epsilon_n$  e a equação de Robinson-Trautman (3.3) é facilmente resolvida para  $\epsilon_n(u)$

$$\epsilon_n(u) = \epsilon_n(0) \exp \left[ -\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{12Q_0^4} u \right]. \quad (3.29)$$

Como  $n \geq 2$ , já que  $n = 0, 1$  corresponde à solução estacionária (3.23), a Eq.(3.29) mostra que  $\epsilon_n(u) \rightarrow 0$  exponencialmente quando  $u \rightarrow \infty$ , e a métrica de Schwarzschild é recuperada de forma assintótica para uma configuração inicial qualquer.

De modo geral, o método de Galerkin [85] consiste em buscar uma solução aproximada  $\bar{u}$  para uma função genérica  $u$  que satisfaça a equação  $L(u) = f$  com  $L$  um operador

diferencial. Primeiramente, escolhe-se um espaço vetorial normado de dimensão finita  $M$ , chamado espaço teste, com uma base  $\{w_1, \dots, w_n\}$  adequada para  $M$ . Então, a solução aproximada  $\bar{u}$  é expandida na forma

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^N \alpha_j w_j$$

no qual os coeficientes desconhecidos  $\alpha_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  são determinados de maneira que as projeções

$$\langle L(\bar{u}) - f, V \rangle = 0$$

sejam válidas para todo  $V \in M$  ( $\langle \bullet, \bullet \rangle$  representa o produto interno definido em  $M$ , usualmente o de  $L^2$ ). Em problemas com dependência temporal, os coeficientes  $\alpha_j$  são funções desconhecidas do tempo, enquanto que a base é função somente das variáveis espaciais.

Como no caso linear, escolhe-se os Polinômios de Legendre  $P_n(x)$ , cujo produto interno é

$$\langle P_n(x), P_m(x) \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2\delta_{nm}}{2n+1},$$

como as funções de base e decompõe-se a função  $Q(u, \theta)$  da forma [79]

$$Q(u, x) = \sum_{\ell=0}^N b_\ell(u) P_\ell(x). \quad (3.30)$$

Com a decomposição acima, a projeção da Eq.(3.3) em cada uma das funções da base  $P_n(x)$  permite reescrevê-la como um sistema de  $N + 1$  equações diferenciais ordinárias acopladas para a evolução dos coeficientes  $b_n(u)$

$$\dot{b}_\ell = -\frac{2\ell+1}{24M_\infty} \langle Q^3 [(1-x^2)K_x]_x, P_\ell \rangle, \quad \ell = 0, 1, \dots, N. \quad (3.31)$$

O produto interno no lado direto da Eq.(3.31) envolve apenas funções polinomiais em  $x$ . A integração é exata para qualquer  $N$  (realizado com a ajuda de um programa matemático de manipulação algébrica, como Maple por exemplo) e dá origem a polinômios de 5<sup>a</sup> ordem nos modos  $b_\ell$ . Note ainda que, neste caso, nenhuma função transcendental é necessária na aproximação de Galerkin, ao contrário do que ocorre em [82, 83].

O problema de Cauchy para a equação de RT corresponde então à escolha dos valores iniciais para os modos  $b_\ell(u)$ , de acordo com

$$b_\ell(0) = \frac{2\ell+1}{2} \langle Q(0, x), P_\ell \rangle, \quad (3.32)$$

e a resolução do Problema de Valor Inicial dado por (3.31). A precisão da decomposição de Galerkin é determinada pela ordem de truncagem  $N$  em (3.30) que pode ser efetivamente controlada ao longo da evolução em  $u$  pela conservação de  $q_0$  dada por (3.4).

A Eq.(3.31) tem algumas propriedades úteis, independentes de  $N$ . Por exemplo, sua solução estacionária, correspondente à Eq.(3.23), apresenta claramente  $b_\ell = 0$  para  $\ell > 1$  e constantes arbitrárias  $b_0$  e  $b_1$  que satisfazem, no caso normalizado,  $b_0(\infty)^2 - b_1(\infty)^2 = 1$ . A velocidade  $v$  é dada simplesmente por  $v = b_1(\infty)/b_0(\infty)$ . Ainda, para condições iniciais pares -  $Q(u_0, x) = Q(u_0, -x)$ ,  $b_\ell(u) = 0$  para  $\ell$  ímpar, e consequentemente  $v = 0$ . Resultado esperado, decorrente da inexistência de assimetrias no espaço-tempo que levariam à emissão anisotrópica de radiação.

As Figs.3.2 e 3.3 mostram evoluções típicas dos modos  $b_\ell$ , neste caso obtidas pela condição inicial

$$Q(u_0, x) = Q_0 \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2 x^2}}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}, \quad (3.33)$$

sugerida por [82,83] e que representa um esferóide prolato, com perturbações introduzidas por um parâmetro variável  $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 x^3$ .

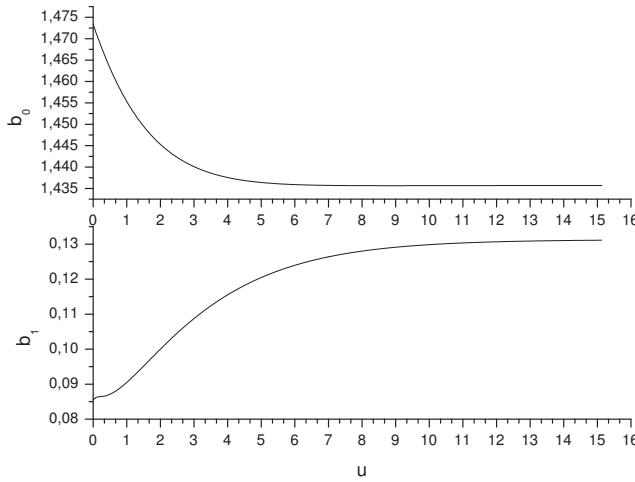


Figura 3.2: Evolução dos coeficientes  $b_0$  e  $b_1$  que assintoticamente tendem a valores constantes.

Para achar o horizonte, o mesmo procedimento é adotado na resolução da Eq.(3.17) [86]. Por conveniência, decompõe-se a variável adimensional  $R' = R/2M_\infty$  da forma

$$\ln R' = - \sum_{\ell=0}^{N_H} c_\ell P_\ell(x). \quad (3.34)$$

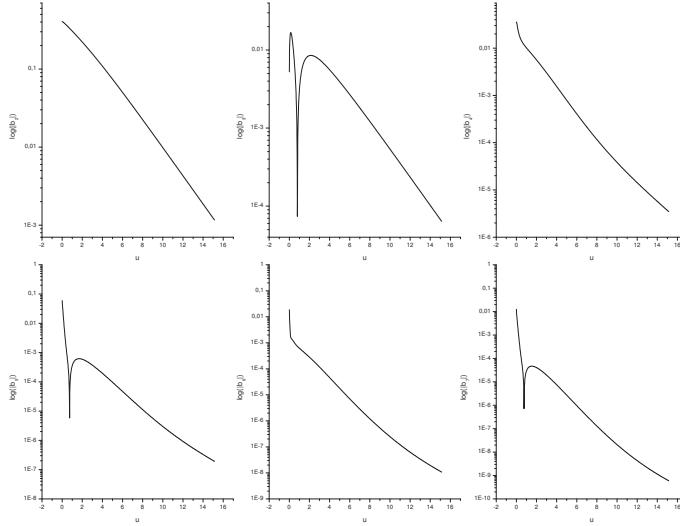


Figura 3.3: Evolução dos coeficientes  $b_n$  para  $n > 1$  que assintoticamente anulam-se. Note o decaimento exponencial nos instantes finais, como predito no regime linear.

Com essa decomposição, a projeção da Eq.(3.17) na base dos Polinômios de Legendre origina o sistema não-linear para os coeficientes  $c_\ell$

$$\frac{2\ell+1}{2\ell(\ell+1)}c_\ell - \left\langle \frac{K}{Q^2}, P_\ell(x) \right\rangle + \left\langle \frac{\exp\left(\sum_{i=0}^{N_H} c_i P_i(x)\right)}{Q^2}, P_\ell(x) \right\rangle = 0, \quad \ell = 0..N_H, \quad (3.35)$$

que os acoplam com os coeficientes  $b_\ell$ .

A evolução numérica da Eq.(3.31) é feita com o método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem, enquanto que utilizamos o método de Newton-Raphson na resolução do sistema algébrico não linear (3.35). Por se tratarem de métodos já tradicionais em cálculo numérico, não nos estenderemos em seus detalhes, encontrados facilmente em qualquer livro de referência básica sobre o assunto [87]. As integrações na esfera são feitas com pontos distribuidos de acordo com a sequência de Fibonacci [88]. A Fig.3.4 apresenta uma evolução típica do horizonte. Note que as deformações iniciais são suavizadas com o passar do tempo e o horizonte assume a forma do de Schwarzschild.

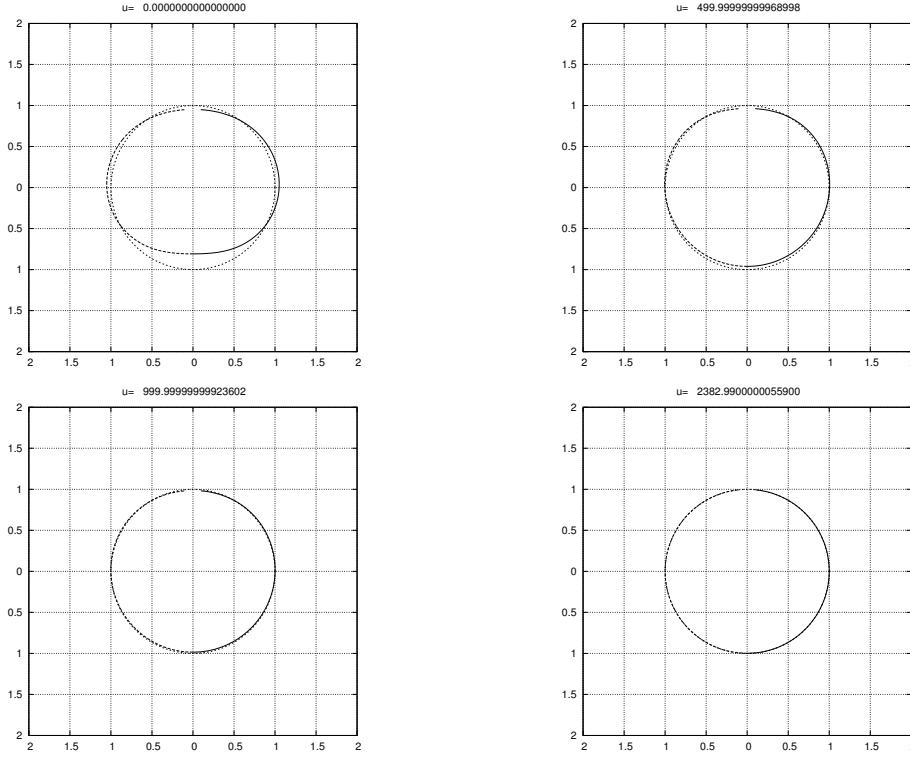


Figura 3.4: Evolução do horizonte em Robinson Trautman. As deformações presentes inicialmente são suavizadas ao longo da evolução até que se obtenha simetria esférica.

### 3.2 Condição Initial de Brill-Lindquist

No capítulo seguinte apresentaremos os principais resultados relacionados ao espaço-tempo de RT, em particular, com o uso da condição inicial (3.28). Para generalizar nossas conclusões, consideraremos também uma colisão *head-on*, evoluídas numericamente em *full GR*. O capítulo 2 já apresentou a decomposição 3 + 1, utilizada nas simulações. Basta agora fornecer condições iniciais que satisfaçam os vínculos (2.35) e (2.36) e descrevam o cenário desejado.

Para soluções no vácuo, o lado direito das Eqs.(2.35) e (2.36) se anulam. O processo normalmente usado para a resolução dos vínculos baseia-se na decomposição conforme de York [35, 89–92], em que a métrica espacial e a curvatura extrínseca são fatoradas em termos da função conforme  $\Psi$

$$\gamma_{ij} = \Psi^4 \hat{\gamma}_{ij},$$

$$K_{ij} = \Psi^{-2} \hat{K}_{ij}.$$

Restringindo às condições iniciais em que  $K = K^i_i = 0$ , os vínculos são reescritos como

$$\widehat{\nabla}^2 \Psi = \frac{1}{8} \left( \Psi \widehat{R} - \Psi^{-7} \widehat{K}_{ij} \widehat{K}^{ij} \right), \quad (3.36)$$

$$\widehat{D}_i \widehat{K}^{ij} = 0, \quad (3.37)$$

em que as grandezas com  $\widehat{\cdot}$  estão associadas à métrica espacial conforme  $\widehat{\gamma}_{ij}$ .

Inicialmente, especifica-se  $\widehat{\gamma}_{ij}$  livremente e então as Eqs.(3.37) são resolvidas para a curvatura extrínseca conforme  $\widehat{K}^{ij}$ . Depois, a resolução da Eq.(3.36) fornece o fator conforme  $\Psi$ . Uma condição inicial bastante útil para a simulação de uma colisão *head-on* é a chamada condição inicial de Brill-Lindquist [35, 93, 94], em que os buracos negros estão inicialmente parados, isto é, a condição é dada sobre uma superfície  $\Sigma_{t_0}$  com simetria temporal em que  $K_{ij} = 0$ <sup>3</sup>. Com isso, a Eq.(2.36) - ou (3.37) - é trivialmente satisfeita e resta apenas a resolução do vínculo hamiltoniano. A escolha da métrica espacial conforme  $\widehat{\gamma}_{ij}$  como plana, reduz a Eq.(3.36) em

$$\nabla_{\text{flat}}^2 \Psi = 0. \quad (3.38)$$

Condições de contorno para a Eq.(3.38) são impostas como  $\Psi = 1$ , de maneira a garantir que o espaço-tempo seja assintoticamente plano. A solução mais trivial de (3.38) é obviamente  $\Psi = 1$  em todo os pontos. Isto é, obtemos condições iniciais para o espaço-tempo de Minkowski. Uma outra solução interessante é

$$\Psi = 1 + \frac{k}{r}, \quad (3.39)$$

que origina a métrica física correspondente ao espaço-tempo de Schwarzschild com massa  $M = 2k$  em coordenadas isotrópicas

$$dl^2 = \left( 1 + \frac{k}{r} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2).$$

Como a Eq.(3.38) é linear, generaliza-se a solução anterior como

$$\Psi = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (3.40)$$

---

<sup>3</sup>A simetria temporal sugere que, evoluções em  $+t$  levam os buracos negros a se aproximarem, enquanto que a evolução em  $-t$  indica que eles estavam se afastando. A superfície  $\Sigma_{t_0}$  é exatamente aquela em que os buracos param de se afastar e começam a colidir.

Esta solução representa  $N$  buracos negros localizados em  $\vec{r}_i$  e momentaneamente parados.

Os parâmetros  $m_i$  são chamados *bare masses*.

A Fig.3.5 apresenta a topologia desta solução em que os buracos negros estão presentes em um espaço-tempo assintoticamente plano. Assim como em Schwarzschild porém, cada ponto singular representa o infinito de uma outra região assintoticamente plana diferente.

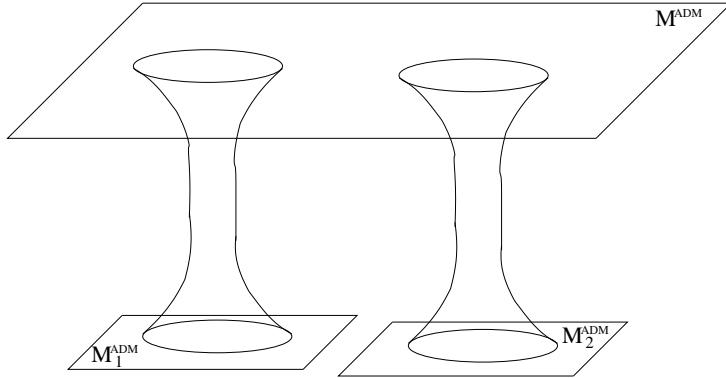


Figura 3.5: Topologia para condição inicial de Brill-Lindquist

Na região assintótica que contém todas as singularidades, a massa ADM (2.38) do conjunto de buracos negros é simplesmente  $M^{(ADM)} = \sum_{i=0}^N m_i$ . Por sua vez, a massa individual de cada buraco negro é obtida com o cálculo da massa ADM nas regiões assintóticas individuais de cada um deles e é dada por

$$M_i^{(ADM)} = m_i \left( 1 + \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{2r_{ij}} \right),$$

com  $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  a distância em coordenadas entre os centros dos buracos negros.

Note que a massa total é

$$M^{(ADM)} = \sum_{i=0}^N M_i^{(ADM)} - \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{2r_{ij}}, \quad (3.41)$$

isto é, ela apresenta um termo relacionado à energia gravitacional, subtraído da soma das massas individuais de cada buraco negro.

Detalhar os processos envolvidos na evolução numérica desta condição inicial está muito além dos objetivos desta tese. Também não conseguiremos apresentar os métodos utilizados na localização dos horizontes. Porém, interessados podem recorrer a [35] para

uma excelente introdução em relatividade numérica e [95, 96] para detalhes técnicos dos códigos utilizados. O capítulo seguinte apresenta os resultados da simulação de um colisão de dois buracos negros. Os parâmetros são tais que  $M_2^{(ADM)}/M_1^{(ADM)} = 0.5$  e  $M^{(ADM)} = 1$  para uma distância  $r_{12} = 10M^{(ADM)}$ .



# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1 Configuração final em Robinson-Trautman

Nossos primeiros estudos focaram na caracterização da configuração final do espaço-tempo de RT em termos de condições iniciais genéricas [79]. A solução estacionária (3.23), correspondente ao espaço-tempo de Schwarzschild, apresenta duas situações bastante distintas, de acordo com o valor da velocidade final. Intuitivamente, espera-se que condições iniciais pares, isto é, com  $Q(u_0, x) = Q(u_0 - x)$ , não apresentem nenhum recuo. A simetria espacial com relação ao plano  $x - y$  indica que a emissão das ondas será exatamente a mesma nos hemisférios norte e sul e, por isso, não apresentará discrepância no fluxo de momento emitido nas direções  $\pm z$ . De fato, como comentado, condições iniciais pares apresentam  $b_\ell = 0$  para  $\ell$  ímpar durante todo  $u$ . Assim a configuração final apresenta necessariamente  $b_1(\infty) = 0 \Rightarrow v = 0$ . Neste caso,  $Q(\infty, x) = 1$  e a fração da massa inicial  $M(0)$  irradiada durante a evolução em  $u$  é calculada exatamente:

$$\Delta = \frac{M(0) - M\infty}{M(0)} = 1 - 2 \left( \int_{-1}^1 \frac{dx}{Q^3(0, x)} \right)^{-1}. \quad (4.1)$$

Como exemplo, vamos considerar a condição inicial utilizada em [82, 83], dado pela Eq.(3.33), mas com  $\epsilon = \text{constante}$ . Graças a normalização da constante de movimento (3.4) como  $q_0 = 4\pi$ , temos  $Q_0^2 = \frac{1}{2\epsilon} \ln\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right)$  e assim

$$\Delta = 1 - \sqrt{\frac{1-\epsilon^2}{8\epsilon^3} \ln^3\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right)}. \quad (4.2)$$

Essa é a expressão analítica exata para os curvas obtidas numericamente em [82, 83]. Para comparação, a Fig.4.1 mostra o log de  $\Delta$  como função de  $y = 1 - \epsilon$ , de acordo

com os autores do trabalho. O procedimento se aplica de maneira análoga para qualquer configuração com simetria especular. A expressão exata de  $\Delta$  é certamente importante para uma investigação estatística das propriedades da emissão de ondas gravitacionais no regime não-linear. Fica claro pela Eq.(4.2) que a distribuição não-extensiva para a perda de massa, proposta em [82, 83], é apenas uma aproximação válida para pequenos  $\epsilon$ .

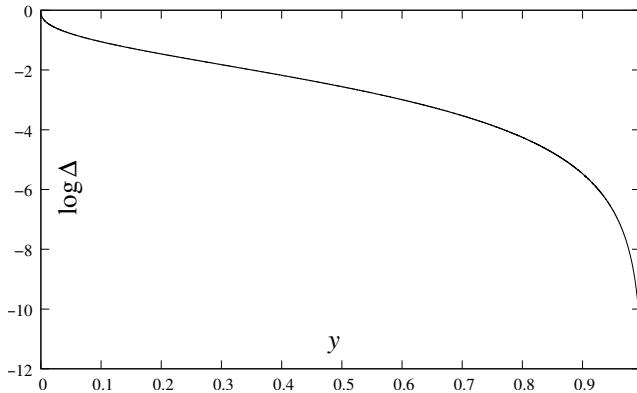


Figura 4.1: A fração  $\Delta$  da massa de Bondi inicial perdida na forma de ondas gravitacionais para a configuração inicial (3.33), como uma função de  $y = 1 - \epsilon$ . A curva concorda com os resultados numéricos de [82, 83]. Entretanto, note que a distribuição não-extensiva proposta nesses trabalhos é apenas uma aproximação para  $y \approx 1$ .

Para condições iniciais mais genéricas, a velocidade final  $v$  determina completamente a configuração. Por estar essencialmente relacionada à parte ímpar de  $Q(u, x)$ , é ideal considerar alguma medida das assimetrias contidas em  $Q(u_0, x)$ . Introduzimos dessa forma, os momentos

$$q_n(u) = \int_{-1}^1 \frac{x^n}{Q^2(u, x)} dx, \quad (4.3)$$

que satisfazem  $-q_0 \leq q_n \leq q_0$ , com  $q_0$  exatamente a constante de movimento (3.4). Para a configuração final, temos

$$\begin{aligned} q_n(\infty) &= (1 - v^2) \int_{-1}^1 \frac{x^n}{(1 + vx)^2} dx \\ &= -\frac{1}{v^n} \left( 2 - n \frac{1 - v^2}{v} \ln \frac{1 + v}{1 - v} \right) - \frac{1 - v^2}{v^{n+1}} \sum_{k=2}^n \sum_{\text{odd } j}^{\frac{k-1}{2}} \frac{(-1)^k}{k-1} \binom{n}{k} \binom{k-1}{j} v^j \end{aligned} \quad (4.4)$$

válido para  $n$  ímpar. A Fig.4.2 apresenta alguns dos momentos finais  $q_n(\infty)$  como função da velocidade  $v$  de (3.23).

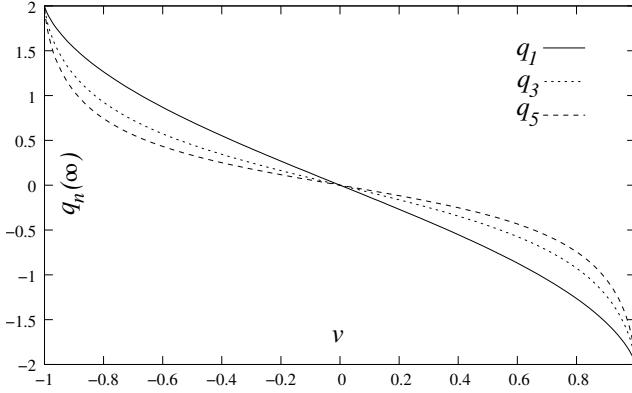


Figura 4.2: Momentos ímpares finais  $q_n(\infty)$ ,  $n = 1, 3, 5$ , como função da velocidade final  $v$  obtido por (4.4). Note que  $|q_1| > |q_3| > |q_5| > \dots$  para um dado  $0 < |v| < 1$

A resolução do sistema (3.31) com condições iniciais (3.32) fornece meios para obter a velocidade  $v$  e possibilita, assim, o estudo de outras quantidades relevantes. A fração da massa irradiada, por exemplo, é neste caso

$$\Delta = 1 - \frac{2}{\sqrt{1-v^2}} \left( \int_{-1}^1 \frac{dx}{Q^3(0,x)} \right)^{-1}. \quad (4.5)$$

Embora os recursos computacionais necessários para a resolução do sistema (3.31) seja relativamente modesto, estimativas analíticas de  $v$  são sempre úteis. Para determiná-lo exatamente, bastaria uma segunda quantidade conservada além de  $q_0$  que, infelizmente, não existe em RT. Por outro lado, a aproximação de Galerkin apresenta uma constante de movimento, que será apenas aproximadamente conservada ao longo de uma solução completa em RT.

Para construir explicitamente essas novas constantes, utilizamos a Eq.(3.3) para obter

$$6m_0\dot{q}_n(u) = \langle x^n, [(1-x^2)K_x]_x \rangle, \quad (4.6)$$

com

$$[(1-x^2)K_x]_x = \sum_{\ell=0}^{2N} a_\ell(u)x^\ell, \quad (4.7)$$

sendo os coeficientes  $a_\ell(u)$  funções quadráticas dos modos  $b_\ell(u)$ . Para  $n$  ímpar, o produto interno em (4.6) seleciona apenas os termos ímpares na soma em  $\ell$  (4.7) e fornece a relação linear entre  $\dot{q}_n(u)$  e  $a_\ell(u)$

$$3m_0\dot{q}_n(u) = \sum_{\text{odd } \ell} \frac{a_\ell(u)}{\ell + n + 1}. \quad (4.8)$$

O lado direito de (4.8) tem exatamente  $N$  termos e, por isso, há no máximo  $N$  equações linearmente independentes do tipo (4.6). Esta relação entre  $\dot{q}_n$  e  $a_\ell(u)$  dada por (4.8) envolve uma matriz do tipo Hilbert [97] e, em particular, é sempre possível encontrar  $N + 1$  números racionais  $\alpha_\ell$  tal que

$$\frac{d}{du} \left( \sum_{\ell=1}^{N+1} \alpha_\ell q_{2\ell-1}(u) \right) = 0. \quad (4.9)$$

A quantidade entre parênteses é conservada ao longo das soluções de (3.31) e assim corresponde à nossa segunda constante. Uma opção é truncar a soma (4.8) em algum  $\ell$  e obter combinações lineares parciais dos momentos que serão constantes ao longo das soluções de (3.31) até desvios proporcionais ao  $\max |a_{\ell+2}(u)|$ . As primeiras de tais combinações lineares são

$$(\ell = 0) \quad q_1, \quad (4.10)$$

$$(\ell = 1) \quad q_1 - \frac{5}{3}q_3, \quad (4.11)$$

$$(\ell = 3) \quad q_1 - \frac{14}{3}q_3 + \frac{21}{5}q_5, \quad (4.12)$$

⋮

Os coeficientes das expressões acima e os  $\alpha_\ell$  de (4.9) são calculados diretamente de (4.8) por métodos como eliminação de Gauss. Porém, nossos resultados numéricos mostram que  $q_1$  predomina sobre os outros. Para isso, utilizamos uma família de condições iniciais simples, mas representativa, dada por

$$Q(0, x) = Q_0 (1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3). \quad (4.13)$$

A Fig.4.3 apresenta alguns exemplos de condição inicial bem como o respectivo conteúdo gravitacional dado pela Eq.(3.8).

Para estas condições iniciais, temos tipicamente  $|q_1(0)| > |q_3(0)| > |q_5(0)| > \dots$ , que concorda com a magnitude dos momentos ímpares da configuração final. Entretanto, para condições muito específicas, esta situação pode falhar e apresentar, por exemplo  $|q_3(0)| > |q_1(0)| > |q_5(0)| > \dots$ . Nestes casos,  $q_1$  irá variar consideravelmente ao longo da evolução em  $u$  de (3.31), mas as combinações dadas por (4.12) ainda serão aproximadamente constantes. A Fig. 4.4 apresenta evidências numéricas que confirmam esses

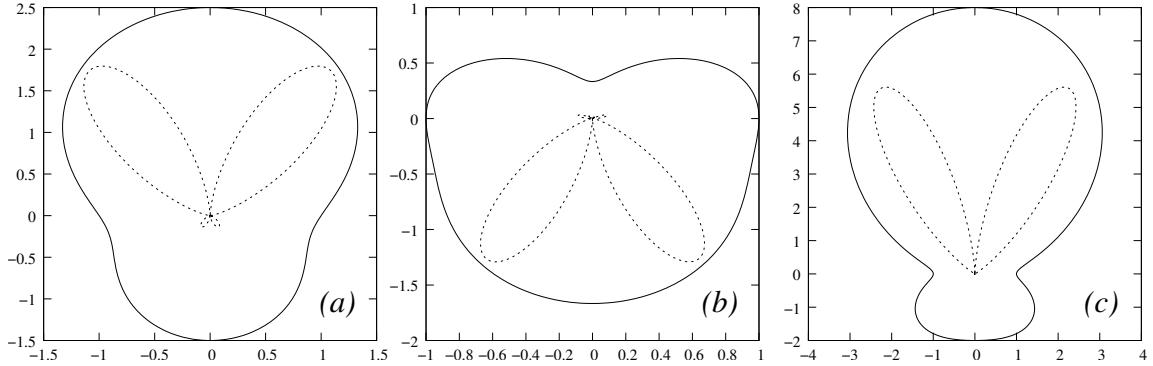


Figura 4.3: Plot polar de algumas condições iniciais sem simetria especular  $Q(0, x)$  da família (4.13). As figuras *a*, *b* e *c* correspondem, respectivamente, aos parâmetros  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ ;  $\alpha = \beta = 0$ ,  $\gamma = -2/3$ ; e  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 4$ ,  $\gamma = 3$ . As linhas pontilhadas estão associadas ao conteúdo de radiação gravitacional dado pela Eq.(3.8)

resultados. Para razões práticas, sempre que  $|q_1(0)| > |q_3(0)| > |q_5(0)| > \dots$ , é razoável assumir  $q_1(\infty) \approx q_1(0)$  e a estimativa para a velocidade final será

$$\frac{1}{v} \left( 2 - \frac{1-v^2}{v} \ln \frac{1+v}{1-v} \right) \approx - \int_{-1}^1 \frac{x}{Q^2(0, x)} dx. \quad (4.14)$$

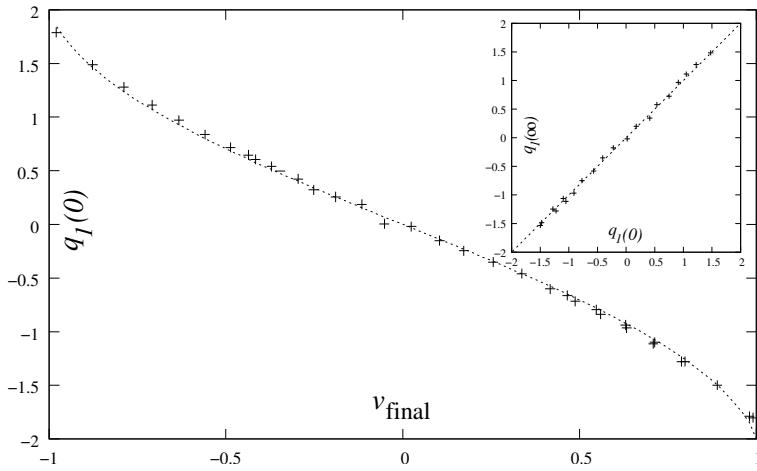


Figura 4.4: velocidade final  $\times q_I(0)$  para algumas condições iniciais. A linha pontilhada é a curva predita por (4.14). Em detalhe temos  $q_I(0) \times q_I(\infty)$ . Assumir  $q_I(\infty) = q_I(0)$  é, tipicamente, uma boa aproximação.

Podemos aplicar o formalismo desenvolvido para a condição inicial (3.28), que representa uma colisão *head-on*. Para  $\mu = 1$  (massas iguais), esta condição é par e, neste caso, a configuração final da evolução é completamente terminada pela constante  $q_0$ . Se  $\mu \neq 1$ ,

a estimativa com o uso de (4.14) fornece

$$\frac{1}{v} \left( 2 - \frac{1-v^2}{v} \ln \frac{1+v}{1-v} \right) \approx -q_1(0) = \frac{(\mu^{-2} - \mu^2) \left( \frac{1}{w^2} \ln \frac{1+w}{1-w} - \frac{2}{w-w^3} \right) + 8(\mu^{-1} - \mu) \left( \frac{\arcsin w}{w^2} - \frac{1}{w\sqrt{1-w^2}} \right)}{\frac{\mu^2 + \mu^{-2}}{1-w^2} + \frac{4(\mu + \mu^{-1})}{\sqrt{1-w^2}} + \frac{3}{w} \ln \left( \frac{1+w}{1-w} \right)}. \quad (4.15)$$

Para valores pequenos de  $w$ , a condição (4.15) se reduz a

$$v = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} w. \quad (4.16)$$

A Fig. 4.5 mostra a dependência de  $v$  com relação a  $w$  para alguns valores de  $\mu$  como predito por (4.15), e alguns resultados dos cálculos numéricos.

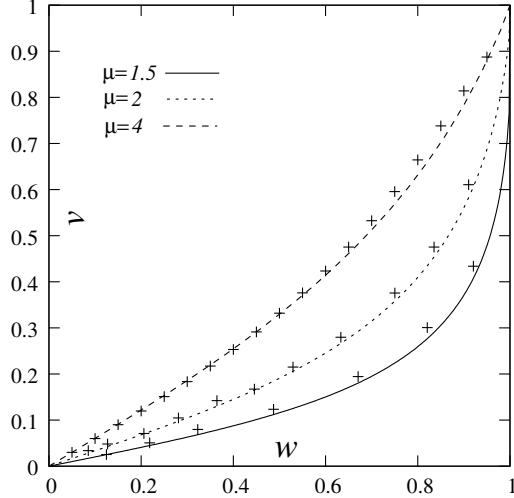


Figura 4.5: Dependência da velocidade de final  $v$  (3.23) com relação ao parâmetro  $w$  da condição inicial(3.28) como predito por (4.15), e alguns resultados dos cálculos numéricicos Note que  $v \rightarrow -v$  se  $\mu \rightarrow 1/\mu$ .

É interessante notar que

$$\lim_{w \rightarrow 1} q_1(0) = 2 \frac{\mu^4 - 1}{\mu^4 + 1} \quad (4.17)$$

para a condição inicial (3.28). Isto implica por (4.15) que existe uma velocidade de recuo máxima para essa configuração

$$\lim_{w \rightarrow 1} |v| = v_{\max} < 1. \quad (4.18)$$

Na realidade, a Eq.(4.15) implica em  $v < w$  para qualquer  $\mu$  (veja Fig. 4.5), comportamento já observado nos estudos numéricos de [80]. A fração da massa irradiada pelas

ondas (4.5) para essa configuração é obtida

$$\Delta = 1 - \frac{2}{\sqrt{1-v^2}} \frac{Q_0^3(u,w)}{h(u,w)}, \quad (4.19)$$

com  $v$  dado por (4.15) e

$$h(u,w) = \frac{2(1+\mu^6)}{(1-w^2)^2} + \frac{8(\mu+\mu^5)}{(1-w^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{15(u^2+u^4)}{1-w^2} + \frac{4(\mu+\mu^5)+40\mu^3}{\sqrt{1-w^2}} + \frac{15(\mu^2+\mu^4)}{2w} \ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right). \quad (4.20)$$

As curvas de (4.19) são similares àquelas mostradas na Fig.(4.1). Em particular, para valores pequenos de  $w$ , temos

$$\Delta = \frac{3}{5} \frac{\mu(5\mu^2 - 8\mu + 5)}{(\mu + 1)^4} w^4 + O(w^6). \quad (4.21)$$

## 4.2 Deformações no Horizonte e o *anti-kick*

Na seção anterior, as estimativas para a velocidade final  $v$  foram obtidas em termos de medidas de assimetrias na condição inicial  $Q(u_0, x)$ . Porém, é difícil associar um significado físico direto para essa função que nos permita relacionar as grandezas  $q_n$  a algum observável. Nesta seção, focaremos nas relações entre a velocidade final e propriedades e deformações do horizonte [98].

A motivação é aquela apresentada na introdução. Espera-se relacionar os graus de liberdades assintóticos (medidos pelas ondas gravitacionais) com a dinâmica de regiões próximas a objetos compactos (medida pelas deformações do horizonte). No caso da solução de RT, o momento de Bondi (3.21) fornece as medidas em  $\mathcal{J}^+$ . Em particular estaremos interessados na velocidade  $v(u) = P^3(u)/P^0(u)$ . Como de maneira geral, temos  $v_0 \equiv v(u_0) \neq 0$ , a quantidade realmente monitorada será  $\bar{v}(u) = \bar{P}^3/\bar{P}^0$  em que,  $\bar{P}^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta(v_0)P^\beta$  e  $\Lambda^\alpha_\beta(v_0)$  é o *boost* necessário para fazer  $\bar{v}(u_0) = 0$ . Já no horizonte, monitoramos a curvatura gaussiana  $K_H$  (3.18) (proporcional ao escalar de Ricci) da superfície  $u = \text{constante}$  e  $r = R(u, x)$ , com  $R(u, x)$  solução de (3.17). Os resultados a seguir se referem à condição inicial da colisão *head-on* (3.28).

A Fig.4.6 mostra uma evolução temporal tanto da velocidade de recuo, quanto da curvatura  $K_H$  nos pólos norte ( $x = 1$ ) e sul ( $x = -1$ ). Inicialmente, os valores da

---

<sup>1</sup>Omitiremos a barra para simplificar a notação no restante do texto

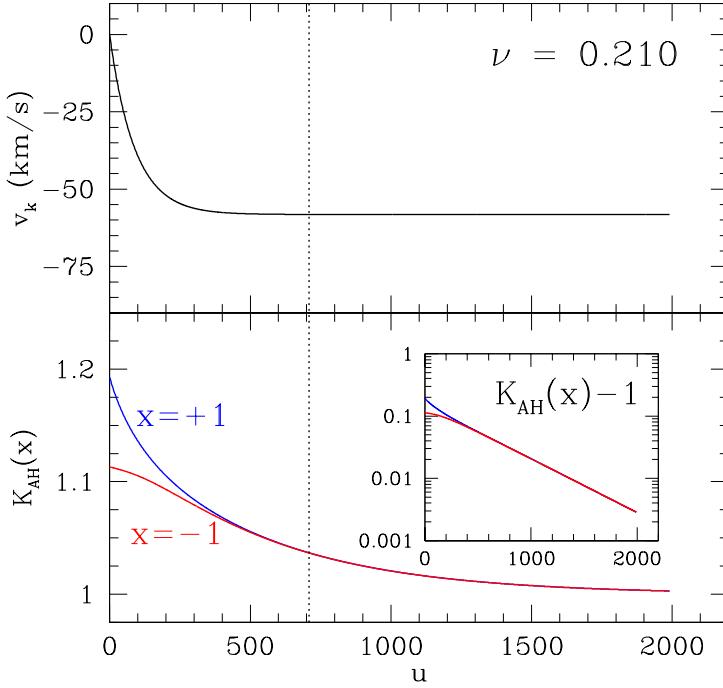


Figura 4.6: Evolução típica do espaço-tempo de RT com  $w = -0.5$  na condição inicial (3.28). O painel inferior mostra a evolução da curvatura do horizonte nos pontos  $x = 1$  (pólo norte, curva em azul) e  $x = -1$  (pólo sul, curva em vermelho). O superior apresenta o recuo  $v_k$ , que atinge um valor constante quando a diferença na curvatura torna-se inexistente.

curvatura nesses pontos são diferentes, com aquele no pólo norte maior que no sul. Essa diferença diminui conforme as ondas são emitidas. O objeto acelera até que a curvatura assuma o mesmo valor nos dois pólos. Em detalhe, note o decaimento exponencial de  $K_{\text{AH}} - 1$ . Este comportamento é típico no espaço-tempo de RT e não depende da escolha particular da condição inicial.

Como comentado, consideramos inicialmente  $\mu$  e  $w$  em (3.28) apenas como parâmetros que introduzem deformações no espaço-tempo de Schwarzschild. A Fig.4.7 dá evidências para a interpretação de  $\mu$ , de fato, como a razão entre as massas. O gráfico apresenta a velocidade final como função da razão da massa reduzida  $\nu = \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{\mu}{(1+\mu)^2}$  para um valor fixo de  $w$ .

A curva é descrita por

$$v = A\nu^2 \sqrt{1 - 4\nu}(1 + B\nu), \quad (4.22)$$

isto é, ela apresenta exatamente a forma funcional descoberta empiricamente em si-

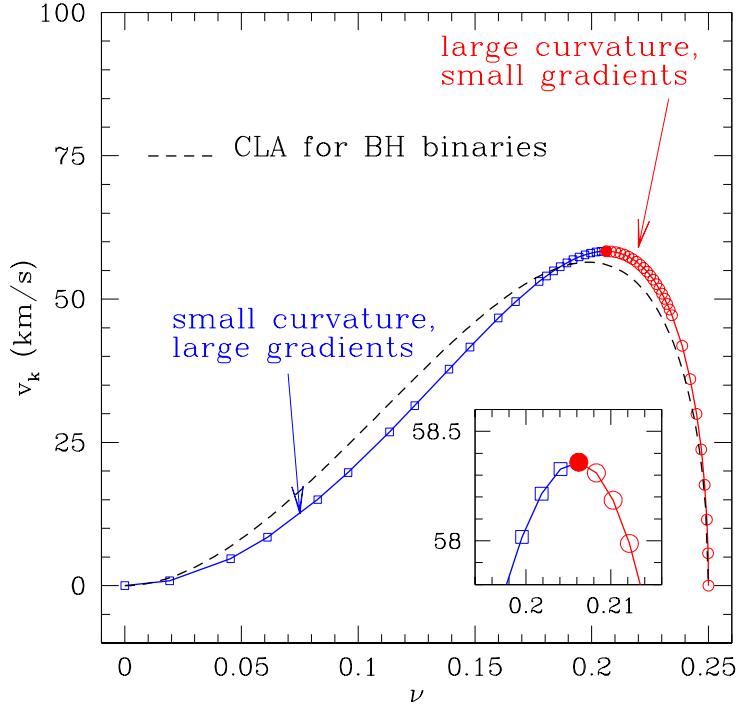


Figura 4.7: Velocidade de recuo em função da razão da massa reduzida  $\nu$  para  $w = -0.425$ . Nossa análise sugere uma decomposição para a curva em dois ramos diferentes: a região indicada por quadrados azuis é caracterizada por pequenos valores na curvatura, mas um alto gradiente ao longo do horizonte; os círculos vermelhos caracterizam valores grandes na curvatura, mas um pequeno gradiente entre os hemisférios. Já a linha pontilhada se refere ao anti-kick de um sistema de buracos negros sem spin na CLA [45], isto é, a velocidade de recuo proveniente apenas da etapa em que um único buraco negro deformado está presente.

mulações numéricas [40] para a previsão do *kick* em termos de assimetrias entre as massas. Os parâmetros  $A$  e  $B$ , dependem neste caso, da escolha particular de  $w$ . Ao variá-lo, conseguimos aumentar ou diminuir a velocidade final do recuo. Uma mudança do sinal, simplesmente inverte os pólos e, como consequência, o sentido do recuo.  $A$  e  $B$  dependem da escolha particular de  $w$ , mas não esperamos encontrar para estes parâmetros os mesmos valores obtidos em relatividade numérica, uma vez que, nas simulações, toda a dinâmica da colisão é considerada<sup>2</sup>. Por outro lado, a aproximação de *Close Limit* (CLA) aborda exatamente cenários em que apenas um horizonte deformado está presente e, ao ajustar  $w$ , conseguimos comparar nossos dados com os resultados dessa aproximação<sup>3</sup> [45]. As duas

<sup>2</sup>Para um recente trabalho sobre a dependência em  $w$  de  $A$  e  $B$  veja [77]

<sup>3</sup>Agradeço a Alexander Le Tiec pelos dados.

curvas não estão exatamente sobrepostas, pois as condições iniciais da (CLA) carregam informações (incluindo momento angular orbital) sobre as etapas anteriores do processo de colisão de buracos negros. Mesmo assim, a semelhança é notável.

Uma possível interpretação é de que a curva é composta por dois ramos diferentes. Um caracterizado por pequenas distorções na curvatura, mas um grande gradiente entre os hemisférios norte e sul. Já o outro apresenta grandes distorções, mas pequena diferença entre os hemisférios. Para ir dessa intuição a uma medida matemática precisa, utilizamos os momentos de multipolo apresentados no capítulo 2 e definidos na Eq.(2.29). De certa forma, os momentos pares (*even*) e ímpares (*odd*) capturaram, respectivamente, as deformações do horizonte, e as diferenças entre os hemisférios. Buscamos uma grandeza, a qual denominamos curvatura efetiva  $K_{\text{eff}}$ , que contenha propriedades globais do horizonte e seja unívoca com relação à velocidade final. Para representar a decomposição da Fig. 4.7 em termos das propriedades do momentos pares e ímpares, sugerimos a fatoração

$$K_{\text{eff}} = f(M_{\text{even}})g(M_{\text{odd}}) \quad (4.23)$$

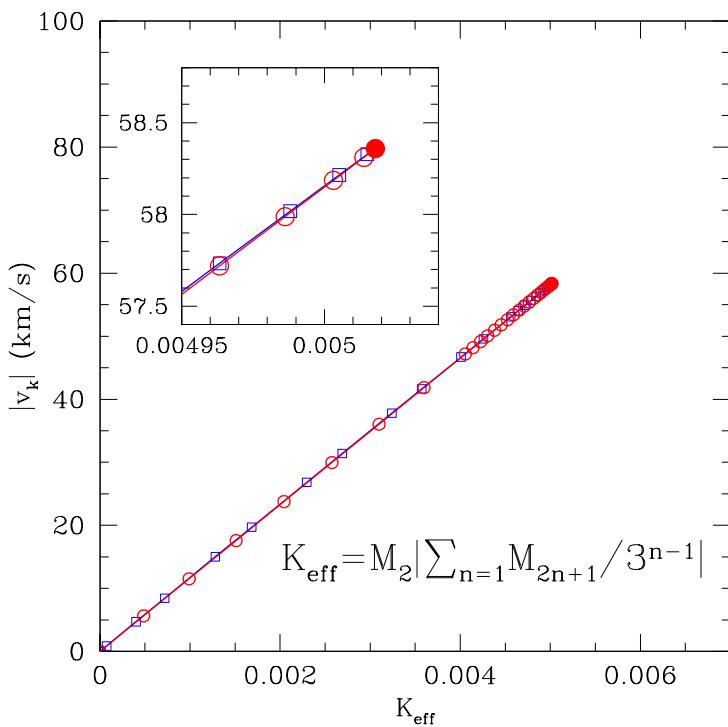


Figura 4.8: Velocidade final em função da curvatura efetiva. Ao contrário da Fig. 4.7, a relação entre o recuo e a curvatura é agora unívoca.

e observamos que  $f(M_{\text{even}})$  e  $g(M_{\text{odd}})$  são lineares nos seus respectivos argumentos.

Para a condição inicial da colisão *head-on*, encontramos a curvatura efetiva  $K_{\text{eff}} = M_2 |\sum_{n=1} M_{2n+1}/3^{n-1}|$  e a Fig. 4.8 mostra que, com essa abordagem, os dois ramos do gráfico na Fig. 4.7 representam a mesma configuração física e, por esse motivo, têm a mesma velocidade de recuo.

Num contexto mais geral, a curvatura efetiva deve incluir também os momentos angulares (2.30) e, por isso, não esperamos que a expressão encontrada seja única. De fato, a expressão da curvatura efetiva muda até para diferentes condições iniciais em RT. Porém, em todos os casos, ela é composta pelo produto de duas funções lineares, uma dependente apenas dos momentos pares e a outra apenas dos ímpares.

Por exemplo, consideramos também a seguinte família de condições iniciais [99]:

$$Q(u_0, x) = Q_0 \left[ \left( \frac{1}{S_+(\theta; w)} + \frac{\mu}{S_-(\theta; w)} \right)^{-2} + x^2 \mu \left( \frac{1}{S_-(\theta; w)} + \frac{\mu}{S_+(\theta; w)} \right)^{-2} \right]. \quad (4.24)$$

A Eq.(4.24) é apenas uma simples combinação de equações do tipo colisão *head-on* (3.28). O parâmetro  $\mu \in [0, 1]$  ainda apresenta propriedades tais que o recuo é nulo para  $\mu = 0$  ou  $\mu = 1$ . Entretanto, a dependência de  $\nu = \frac{\mu}{(1+\mu)^2}$  com relação à velocidade

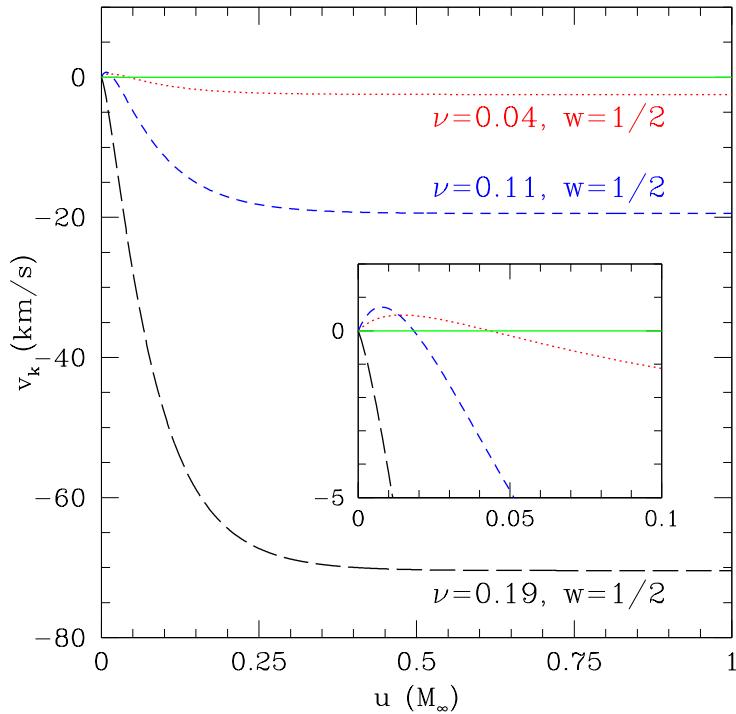


Figura 4.9: Velocidade para condições iniciais 4.24. Note que a aceleração muda de sinal.

final não satisfaz a Eq.(4.22) e, por isso, não podemos considerá-lo como a razão entre as massas. Esta condição inicial apresenta uma característica particular. Para alguns valores de  $\mu$ , a aceleração muda de sinal (Fig.4.9).

Para esta configuração inicial, a curvatura efetiva encontrada foi

$$K_{\text{eff}} = (M_2 + 0.304M_4 + 0.178M_6 + 0.086M_8 - 0.186M_{10})(M_3 + 0.076M_5 - 0.090M_7 - 0.183M_9).$$

Embora os coeficientes variem para cada família de condições iniciais, a expressão acima é válida ao longo de toda a evolução temporal. Como mostra a Fig.4.9, a relação entre a curvatura efetiva e a diferença  $v_{\text{final}} - v(u)$  se mantém unívoca para qualquer  $u$ .

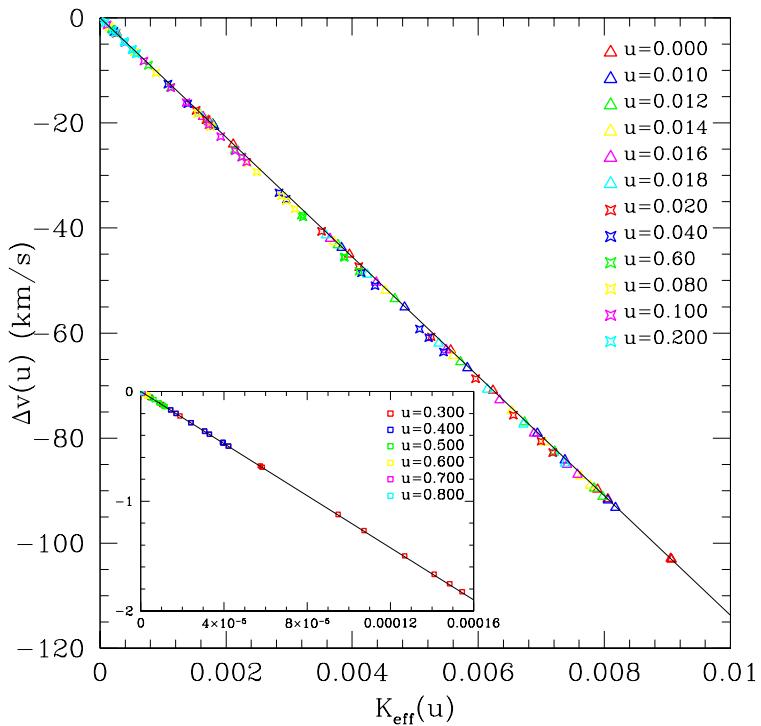


Figura 4.10: Diferença  $v_{\text{final}} - v(u)$  contra a curvatura efetiva para condições iniciais (4.24). A relação se mantém unívoca em todos os instantes de tempo.

A métrica de RT fornece assim uma imagem simples e intuitiva para explicar a aceleração do objeto em termos da dissipação das anisotropias presentes no horizonte. Porém, as limitações dessa solução nos impede de afirmar que esses resultados sejam válidos em contextos mais realistas. O principal empecilho é a descrição do objeto dinâmico por um buraco branco, claramente conectado causalmente com o infinito futuro (Fig.3.1). A seção seguinte mostra a mesma abordagem aplicada numa colisão frontal de buracos negros.

### 4.3 Colisão *head-on* de buracos negros em *full GR*

Existe uma grande mudança conceitual ao passarmos de uma dinâmica ditada por um buraco branco para o espaço-tempo de um buraco negro [99]. A Fig.4.11 mostra um diagrama típico para um espaço-tempo com um horizonte dinâmico. Pelo próprio conceito de buraco negro, a superfície  $H^+$  está causalmente desconectada de  $\mathcal{J}^+$ . Assim que os buracos negros colidem para formar um único horizonte em comum, a região próxima (mas fora) do horizonte estará altamente deformada e apresentará uma dinâmica extremamente intensa. É essa região que deformará o horizonte e emitirá as ondas, tanto para fora quanto para dentro do buraco. A princípio, a dinâmica, tanto em  $H^+$  quanto em  $\mathcal{J}^+$ , é ditada pela Relatividade Geral. Todavia, é difícil de afirmar que há algum tipo de correlação entre as informações codificadas por essas superfícies devido ao alto grau de não-linearidade das equações. Assim, a intuição desenvolvida no espaço-tempo de RT servirá de base para buscar essas correlações.

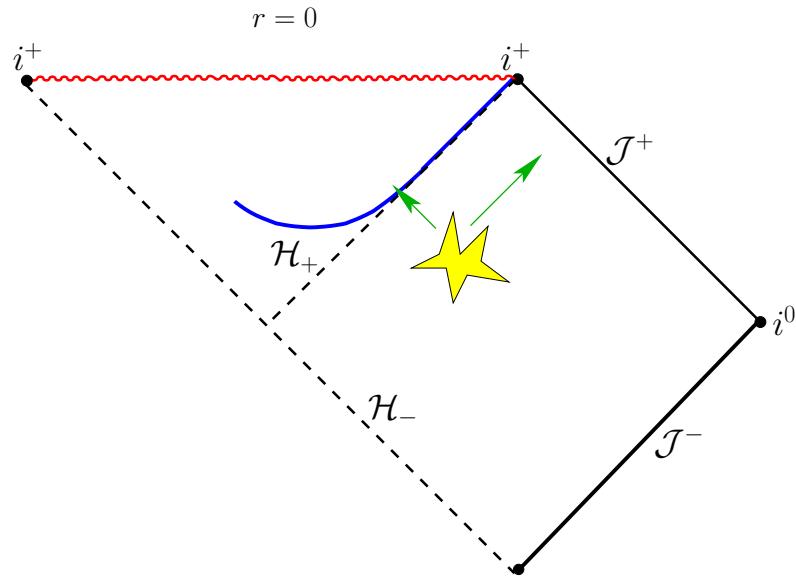


Figura 4.11: Diagrama de Penrose típico para um espaço-tempo que contém um horizonte dinâmico, no qual as superfícies  $H^-$  e  $\mathcal{J}^+$  estão causalmente desconectadas. As regiões próximas ao buraco negro, onde o campo gravitacional e a dinâmica são extremamente intensos, é responsável tanto pela deformação do horizonte  $H^-$  quanto por originar as ondas gravitacionais que se propagaram até  $\mathcal{J}^+$ . Busca-se correlações entre as informações codificadas por essas duas telas.

Em termos matemáticos, o *anti-kick* é apenas uma consequência da integração temporal de funções oscilatórias e amortecidas. De fato, a Fig.4.12 apresenta o comportamento das funções  $f(t) = e^{-t} \cos 5t$  e  $g(t) = e^{-t} \cos 7t$  e o resultado da integração  $V_{\text{model}}(t) = - \int f(t)g(t)dt$ . O comportamento qualitativo de  $V_{\text{model}}(t)$  é exatamente o mesmo que o obtido na evolução temporal da velocidade de recuo do buraco negro. Na realidade,  $f(t)$  e  $g(t)$  são modelos para os momentos  $M_2$  e  $M_3$  como indica a mesma figura.

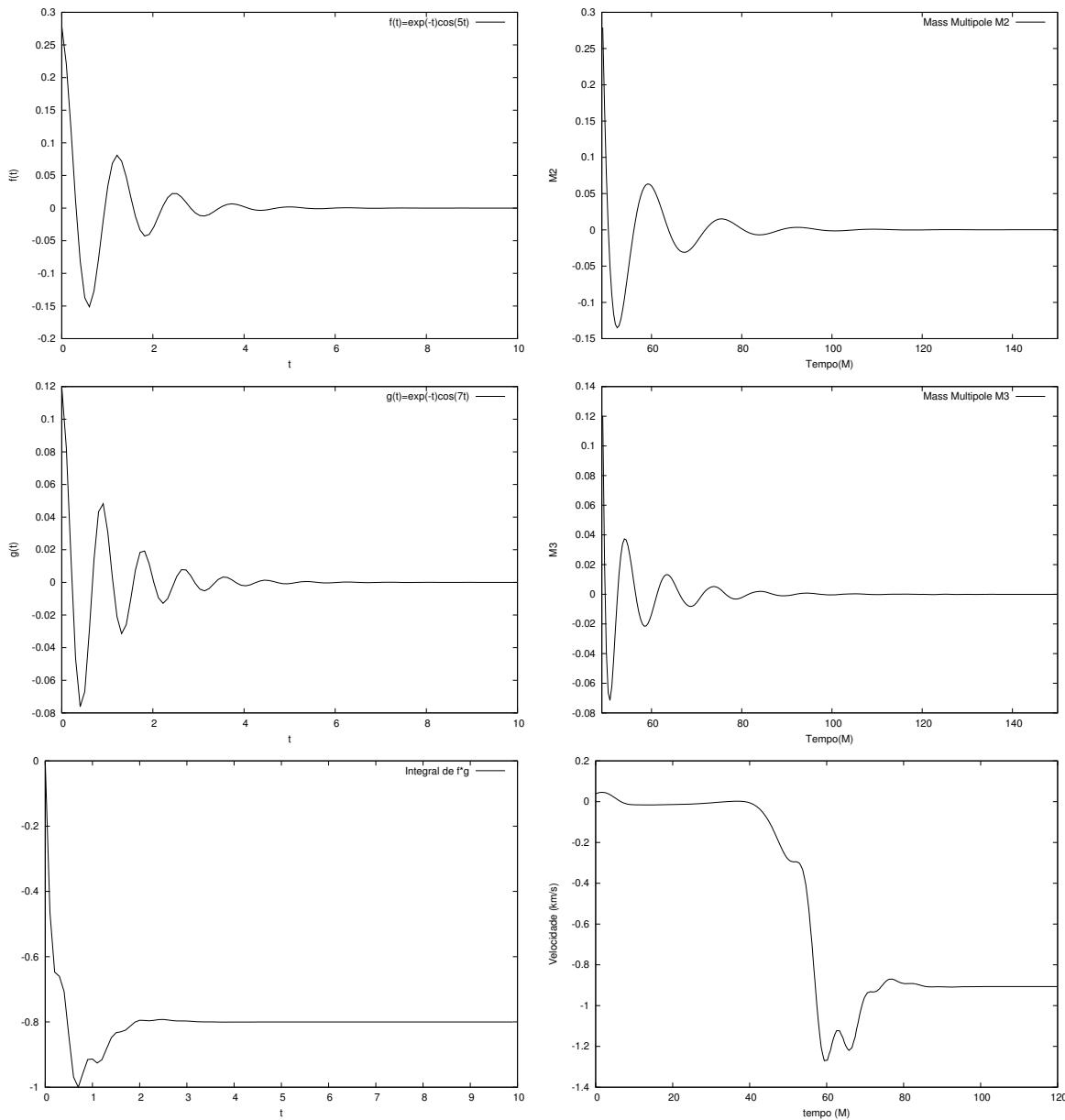


Figura 4.12: A evolução temporal da velocidade resulta da integração de funções harmônicas e amortecidas. Tais funções modelam qualitativamente os momentos de massa e, por isso, podemos compreender a dinâmica do buraco negro em termos das deformações do horizonte.

Mais que uma explicação matemática, podemos compreender tais fenômenos em termos do formato horizonte, como sugerido pela nossa hipótese inicial.

Para quantificar a deformação do buraco negro, introduzimos (como no caso anterior) uma curvatura efetiva  $K_{\text{eff}}$  composta pelo produto de duas funções lineares. Uma dependente apenas dos modos pares, enquanto que a outra apenas dos ímpares. Ao contrário do encontrado em RT, aqui  $K_{\text{eff}}$  está ligada diretamente à aceleração do sistema, isto é,

$$\frac{dv}{dt} \propto K_{\text{eff}}. \quad (4.25)$$

O resultado fortalece a intuição introduzida pela ilustração da Fig.1.1. Embora a radiação não seja emitida pelo buraco buraco negro, podemos pensar nela como um jato que impulsionará o objeto na direção oposta. Esta “força” será mais intensa, quanto maior a deformação do buraco (codificado pelos modos pares) e o recuo ocorre devido a emissão anisotrópica entre os hemisférios norte e sul (dado pelos modos ímpares).

A Fig.4.13 mostra o perfil da velocidade do buraco negro calculada na zona de radiação pela Eq.(2.25). Ela também apresenta a integração da Eq.(4.25) para uma curvatura efetiva  $K_{\text{eff}} = M_2(M_3 + 0.2M_5)$ .

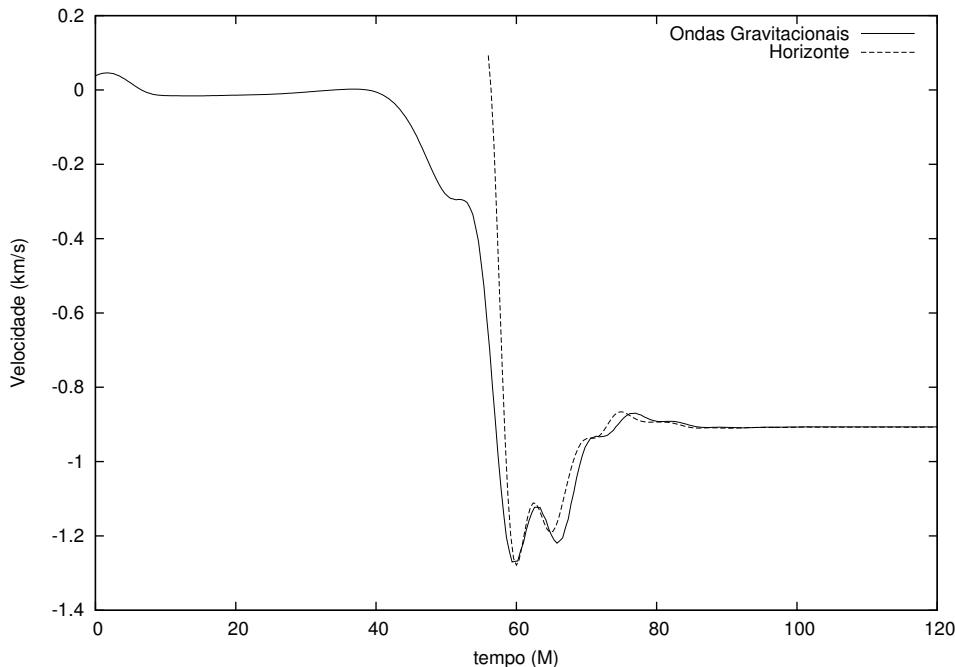


Figura 4.13: Evolução temporal da velocidade do buraco negro calculado tanto na zona de radiação, quanto no horizonte.

Embora o perfil das duas curvas seja essencialmente o mesmo, a velocidade proveniente da Eq.(4.25) está ligeiramente comprimida com relação à outra. Em um espaço-tempo estático, sinais luminosos emitidos em uma região próxima ao buraco negro serão desviados para o vermelho ou para o azul conforme escapam ou caem no potencial gravitacional, respectivamente. Por isso, especula-se que efeitos semelhantes sejam responsáveis para a compressão de um sinal com relação ao outro. Se confirmado, o conhecimento da relação  $t_\infty = t_\infty(t_{\text{horz}})$  será bastante útil para a compreensão dos processos dinâmicos na região próxima ao buraco negro. Porém, não queremos esboçar nenhuma conclusão a respeito, uma vez que não descartamos a hipótese desse efeito ser apenas uma consequência da evolução do sistema de coordenadas durante a simulação, sobre a qual não temos nenhum controle direto.

Ainda, a correlação da velocidade proveniente das medidas só ocorre para  $t > 57M$ . Entretanto, a Fig.4.14 mostra a massa do horizonte comum desde  $t = 48M$ , isto é, desde o primeiro instante em que ele é encontrado. Neste curto intervalo de tempo, a massa do horizonte aumenta em  $\sim 2\%$ , pois este período é justamente aquele no qual a dinâmica é extremamente intensa.

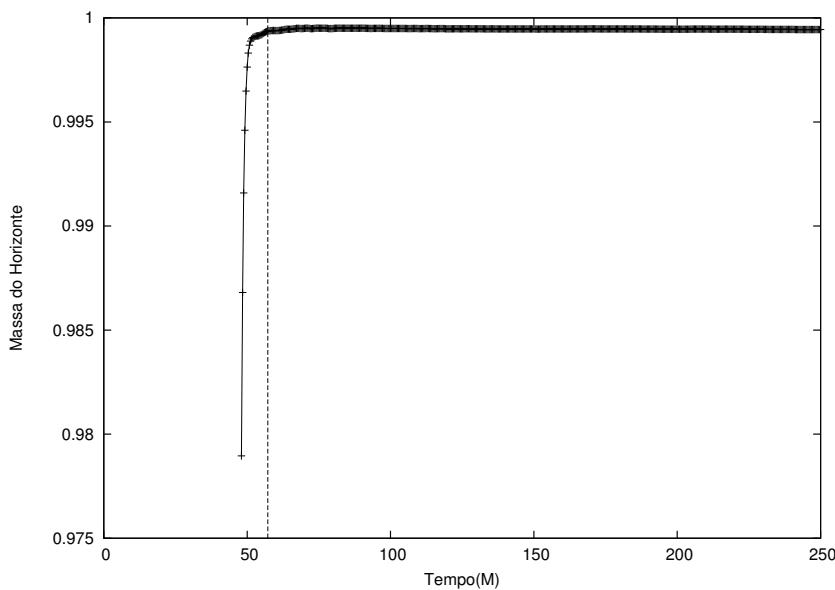


Figura 4.14: Evolução temporal da massa do buraco negro. A linha pontilhada corresponde ao instante a partir do qual existe uma correlação entre a deformação de horizonte e a velocidade de recuo.

Com a metodologia desenvolvida no estudo da solução de RT e expandida para espaços-tempos com buracos negros, nenhuma correlação entre o horizonte e a zona de radiação foi estabelecida no intervalo  $[48M, 57M]$ . Estudos futuros pretendem incluir termos nas medidas da deformação do horizonte que envolvam os momentos angulares. Além disso, espera-se generalizar a expressão para a curvatura efetiva de maneira a estender a correlação entre as duas superfícies para todo o intervalo tempo.



# Capítulo 5

## Conclusão

Nesta tese, estudamos os efeitos não lineares da emissão de ondas gravitacionais por fontes compactas ao introduzir relações entre deformações intrínsecas aos objetos e à velocidade de recuo adquirido por eles após a emissão da radiação.

A hipótese básica é a de que as deformações presentes no horizonte refletem a dinâmica do intenso campo gravitacional dos arredores do buraco negro. A mesma dinâmica é responsável pela propagação da radiação para a zona de radiação e, por isso, buscamos as correlações existentes entre essas duas regiões. Com isso, gostaríamos de compreender diversos fenômenos na dinâmica de buracos negros como a fase de desaceleração do sistema antes da velocidade final de recuo ser atingida (conhecida na literatura como *anti-kick*).

Primeiramente é importante destacar que o *anti-kick* não está restrito exclusivamente a cenários com um horizonte comum circundando os buracos negros. O mesmo efeito ocorre, por exemplo, em processos de espalhamento [100]. Em geral, explica-se esse efeito matematicamente apenas como uma consequência direta da integração de funções que apresentam um comportamento oscilatório e amortecido. Porém, estamos interessados na compreensão física do fenômeno, em particular nas situações em que o sistema apresenta um único horizonte deformado.

A presença do horizonte comum fornece, dessa forma, uma superfície canônica sobre a qual as informações sobre a dinâmica do campo gravitacional são codificadas. Embora todo o espaço-tempo seja evoluído pela teoria da Relatividade Geral, a existência de correlações entre essa superfície e a zona de radiação não é óbvia. Devido ao alto grau de não linearidade das equações, processos como *backscattering* das ondas poderiam compli-

car ou, até mesmo, eliminar qualquer tipo de relação útil entre as informações presentes nas duas regiões.

O foco inicial esteve na solução de Robinson-Trautman, que descreve o espaço-tempo de um objeto compacto emitindo ondas gravitacionais. Sua simplicidade nos permite um controle total das duas regiões de interesse, além de fornecer meios para o estudo da perda de massa do sistema. No caso axissimétrico, há essencialmente dois regimes para analisar a dinâmica dessa solução, dependendo se a condição inicial é par ou não.

No primeiro caso, a expressão para a perda de massa é calculada de maneira exata a partir das condições iniciais pares. Concluímos que a expressão proposta anteriormente na literatura, baseada em distribuições não extensivas, é válida apenas em primeira aproximação. Além disso, quando não há paridades na condição inicial, introduzimos medidas da assimetria entre os hemisférios norte e sul. Essas quantidades obedecem leis de conservação dentro da aproximação utilizada e fornece, assim, meios para estimar a velocidade de recuo final.

Ainda no contexto de Robinson-Trautman, analisamos as deformações do horizonte dentro do formalismo de horizontes dinâmicos, no qual introduzimos os momentos de massa para caracterizar a deformação dessa superfície. Com a construção de um grandeza denominada curvatura efetiva, encontramos uma relação unívoca entre a deformação inicial do horizonte e a velocidade de recuo final. A curvatura efetiva é composta pelo produto de duas funções lineares, uma dependente apenas dos modos pares e outra apenas dos ímpares. Os modos pares representam deformações gerais no horizonte. Já os ímpares carregam informações sobre as diferenças entre os hemisférios norte/sul.

Em colisão de buracos negros sem spin, a velocidade de recuo é trivialmente zero quando as massas são iguais ( $\mu = m_1/m_2 = 1$ ). Se  $\mu = 0$ , apenas um objeto está presente e a velocidade também é nula. Assim, a dependência do módulo da velocidade em função da razão entre as massas apresenta claramente, ao menos um máximo, no intervalo  $\mu \in [0, 1]$ . De fato, simulações numéricas e aproximações pós-newtonianas mostram a existência de apenas um pico em  $\mu \approx 0.76$ . A estrutura funcional da curvatura efetiva sugere a divisão da curva  $v \times \mu$  em dois ramos. Para  $\mu \sim 0$ , a deformação no horizonte não é tão intensa. Porém, a diferença dos valores da curvatura entre os hemisférios norte e sul é suficiente

para gerar o recuo. Já para  $\mu \sim 1$ , por menor que seja a diferença na curvatura entre os hemisférios norte/sul, a deformação será intensa o suficiente para o *kick*.

A decomposição da curvatura efetiva no produto de funções lineares par e ímpar é uma característica geral e não depende da configuração inicial utilizada, o que fortalece a interpretação acima. Entretanto, os coeficientes dessas funções mudam conforme a família de condição inicial adotada. Isto nos impede de estabelecer uma expressão geral o suficiente para prever a velocidade final, a partir apenas da deformação do horizonte. De fato, em contextos mais abrangentes deve-se incluir também medidas para o momento angular e deformações associadas à rotação da fonte.

O ponto fraco na solução de Robinson-Trautman está no fato que o horizonte é composto por *past marginally trapped surfaces*, isto é, a dinâmica é descrita por um buraco branco. Ao contrário de um buraco negro, esse objeto está causalmente conectado com a zona de radiação (em particular o infinito nulo  $\mathcal{J}^+$ ). Assim, com o auxílio de simulações numéricas, estabelecemos as mesmas relações em cenários com maior relevância astrofísica.

Embora a deformação do horizonte seja ainda caracterizada em termos de uma curvatura efetiva com as mesmas propriedades descritas até o momento, a correlação ocorre com a aceleração do sistema. A intuição formada é das ondas atuando como um jato. A “força” que o buraco negro sente é então proporcional à curvatura efetiva. Dois importantes pontos ainda precisam de esclarecimentos.

O primeiro refere-se a uma dilatação temporal do sinal medido na zona de radiação quando comparado com o obtido no horizonte. Embora a relação entre as duas coordenadas temporais possa trazer informações sobre a dinâmica do espaço-tempo, estudos ainda são necessários, pois o fato pode ser apenas um efeito do sistema de coordenadas. O segundo está ligado ao primeiros instantes após o horizonte comum se formar. Nesta fase, em que a dinâmica é a mais intensa, não encontramos nenhuma correlação entre as duas superfícies.

Em estudos futuros tentaremos generalizar a expressão de curvatura efetiva a fim de considerar também os momentos de rotação em sistemas com momento angular. Espera-se também que a expressão seja válida para todo os instantes em que o horizonte comum está presente. Ainda assim, os resultados desta tese mostram que, apesar da não-linearidade

das equações de Einstein, as informações da zona de radiação estão correlacionadas com as deformações intrínsecas do horizonte. A metodologia apresentada fornece meios para compreender melhor os detalhes da dinâmica em regiões do espaço-tempo, outrora descritos por meio de complicadas equações.

## Apêndice A

# Solução de Robinson-Trautman

Para obter a solução de Robinson-Trautman introduz-se uma família de superfícies nulas  $u(x)$  constante, com vetor normal  $l_\mu = -u_{,\mu}$  tal que  $g^{\mu\nu}l_\mu l_\nu = 0$  [34, 101]. As curvas integrais  $\frac{dx^\mu}{dr} = l^\mu$ , geradas pelo campo vetorial  $l^\mu = g^{\mu\nu}l_\nu$ , são geodésicas parametrizadas por  $r$ . Uma escolha natural do sistema de coordenadas é tomar a própria função  $u$  e o parâmetro afim  $r$  para compor a base. Dessa forma, temos  $l_\mu = -\delta_\mu^u$  e  $l^\mu = \delta_r^\mu$ , o que implica  $g^{uu} = g^{uA} = 0$  e  $g^{ur} = -1$  ( $A = 2, 3$  rotula as últimas duas coordenadas restantes  $x^A$ ).

Como  $g^{\mu\gamma}g_{\gamma\nu} = \delta_\nu^\mu$ , é possível obter as relações abaixo que serão utilizadas para escrever a forma geral do elemento de linha  $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ .

$$g_{ru} = -1, g_{rr} = 0, g_{ri} = 0,$$

$$g_{uu} = g^{ri}g_{iu} - g^{rr}, g_{ui} = g^{ri}g_{ij},$$

$$g^{ir} = g_{iu}g^{ij}, g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i,$$

logo

$$ds^2 = -g^{rr}du^2 - 2dudr + g_{AB}(dx^A + g^{rA}du)(dx^B + g^{rB}du). \quad (\text{A.1})$$

O sub-espacô bidimensional é escrito em termos do fator conforme  $\gamma_{AB} = p^2 g_{AB}$  de tal forma que  $\det \gamma_{AB} = 1$ . Para isso, temos  $\det g_{AB} = p^{-4}$  e  $\det g_{\mu\nu} = -\det g_{AB}$ .

A partir do campo  $l^\mu$  constroi-se  $B_{\mu\nu} = l_{\mu;\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu,r}$  e com ele os escalares de expansão e de shear, respectivamente

$$\theta = \frac{1}{2}l^\alpha_{;\alpha} = -(\ln p)_{,r} \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma^2 = \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = l_{(\alpha;\beta)}l^{\alpha;\beta} - \frac{1}{2}(l^\alpha_{;\alpha}) = \frac{1}{4}\gamma^{AB}\gamma^{CD}\gamma_{CB,r}\gamma_{AD,r}. \quad (\text{A.3})$$

Impondo que o espaço-tempo seja shear-free, isto é,  $\sigma^2 = 0$  temos  $\gamma_{AB,r} = 0$ .

Por fim, note que ainda existem possíveis mudanças de coordenadas já que as superfícies nulas são invariantes pela troca  $u = f(u')$ . Isso leva a uma mudança no parâmetro afim  $r = \frac{r'}{f} + r_0(u', x')$  e nas coordenadas  $x^A = x^A(u', x')$ .

Para obter explicitamente as componentes da métrica (A.1), basta resolver as equações de Einstein no vácuo. De  $R_{rr} = 0$  obtém-se

$$R_{rr} = 2(\theta_{,r} + \theta^2) = 0, \quad (\text{A.4})$$

que é facilmente integrada para extrair

$$\theta^{-1} = r_0(u, x) + r. \quad (\text{A.5})$$

Com os graus de liberdade na escolha da origem da coordenada  $r$ , reduz-se  $r_0(u, x) = 0$ .

Ainda, como a expansão  $\theta$  é dada pela Eq.(A.2) tem-se

$$p = r^{-1}P(x, u). \quad (\text{A.6})$$

A dependência em  $r$  de  $g_{AB}$  fica explícita com a introdução de  $h_{AB} = P^{-2}\gamma_{AB}$ , isto é  $g_{AB} = r^2h_{AB}(u, x)$ .

A seguir, o cálculo de  $R_{rA}$  leva a

$$R_{rA} = \frac{1}{2}h_{AB}r^2(r^4g^{rB}_{,r})_{,r} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Novamente, a solução de (A.7) é trivialmente obtida para a função  $g^{rA}$

$$g^{rA} = f^A(x, u)r^{-3} + e^A(x, u). \quad (\text{A.8})$$

Por sua vez,  $R_{ur}$  resulta em (sendo  $h = \det h_{AB} = P^{-4}$ )

$$R_{ur} = \frac{1}{2}r^{-2}(r^2g^{rr}_{,r})_{,r} - r^{-1}(\ln \sqrt{h})_{,u} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Com isso, a dependência em  $r$  de  $g^{rr}$  fica

$$g^{rr} = K(u, x) - 2r \ln P_{,u} + \frac{B(x, u)}{r}. \quad (\text{A.10})$$

A função  $K(u, x)$  é obtida em  $R_{AB} = 0$ , com  $R_{AB}$  dado por

$$\begin{aligned} R_{AB} &= \tilde{R}_{AB} - h_{AB} \left[ (rg_{rr})_{,r} + rg^{rC}_{,C} + rg^{rC} \ln \sqrt{h}_{,C} - r \ln \sqrt{h}_{,u} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} [r^2 (2h_{k(A} g^{rC}_{,B)} + g^{rC} h_{AB,C})]_{,r} - \frac{1}{2} r^4 g^{rC}_{,r} g^{rl}_{,r} h_{AC} h_{AB} + rh_{AB,u}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Aqui,  $\tilde{R}_{AB}$  representa o tensor de Ricci do sub-espacô compreendido pelas coordenadas  $x^A$  dado pelas superfícies  $u$  e  $r$  constantes. Ao substituir as eqs.(A.8) e (A.10) em (A.11) temos uma expressão em termos de potências de  $r$ . As seguintes relações são obtidas quando anulamos os coeficientes de cada parcela :

$$\tilde{R}_{AB} = Kh_{AB}, \quad (\text{A.12})$$

$$h_{AB} \left( -\ln \sqrt{h}_{,u} + e^C_{,C} + e^C \ln \sqrt{h}_{,C} \right) = 2h_{C(A} e^C_{,B)} + e^C h_{AB,C} - h_{AB,u}, \quad (\text{A.13})$$

$$h_{AB} \left( f^C_{,C} + f^C \ln \sqrt{h}_{,r} \right) = 2h_{C(A} f^C_{,B)} + f^C h_{AB,C}, \quad (\text{A.14})$$

$$f^C f^D h_{CA} h_{BD} = 0. \quad (\text{A.15})$$

Ao multiplicar a Eq.(A.12) por  $h^{AB}$  verifica-se que  $K = \frac{\tilde{R}}{2}$ , justamente a curvatura gaussiana da superfície bidimensional dada por  $u$  e  $r$  constantes. Além disso, de (A.15) nota-se imediatamente que  $f^A = 0$ , (também solução de (A.14)). Com isso a Eq.(A.8) simplifica-se em  $g^{rA} = e^A$ . Novamente é utilizada a liberdade na redefinição das coordenadas para fazer  $e^A = 0$ . Isso restringe agora a mudança de  $x^A$  apenas em  $x^A = x^A(x')$

Com as considerações acima, a eq.(A.13) fica  $h_{AB,u} = h_{AB} \ln \sqrt{h}_{,u}$ . Essa equação apresenta como soluções  $h_{AB} = \sqrt{h} \gamma_{AB}(x)$ . Note que  $\det h_{AB} = h = h \det \gamma_{AB}$ , logo  $\det \gamma_{AB} = 1$ . Assim, temos agora  $\gamma_{AB}, r = \gamma_{AB}, u = 0$  e  $h_{AB} = P^{-2}(x, u) \gamma_{AB}(x)$ .

Finalmente a componente  $R_{uA} = 0$  fornece

$$R_{uA} = \frac{1}{2} g^{rr}_{,Ar} + \frac{1}{2} (h^{BC} h_{AC,u})_{,B} + \frac{1}{2} h^{BC} h_{AC,u} \ln \sqrt{h}_{,B} - \frac{1}{4} h^{BC} h^{DE} h_{CD,u} h_{BE,A} - \ln \sqrt{h}, uA. \quad (\text{A.16})$$

Considerando  $g^{rr}$  dado por (A.10),  $h_{AB} = \sqrt{h}\gamma_{AB}$  e  $\gamma^{AB} = h^{-\frac{1}{2}}\gamma^{AB}$  a eq.(A.16) se reduz a  $B_{,A} = 0$ , isto é  $B = B(u)$ .

Com as expressões de (A.8) e (A.10), bem como as considerações feitas sobre a métrica no sub-espacô dado por  $u$  e  $r$  constantes, vemos que a eq.(A.1) corresponde à métrica de Robinson-Trautman

$$ds^2 = - \left( K(u, x) - 2r \ln P_{,u} + \frac{B(u)}{r} \right) du^2 - 2dudr + r^2 K^2 \gamma_{AB} dx^A dx^B.$$

A última equação a ser resolvida é  $R_{uu} = 0$ , que leva à equação dinâmica

$$3B \ln P_{,u} - B_{,u} + \frac{1}{4}(\tilde{R}_{,A} h^{AB})_{,B} - \frac{1}{2} R_A h^{AB} \ln P_{,B} = 0.$$

As duas últimas parcelas, nada mais são do que  $\nabla^2 K/2$  e assim a equação de Robinson-Trautman fica

$$\frac{\nabla^2 K}{2} + 3B \ln P_{,u} - B_{,u} = 0.$$

Há ainda liberdade na escolha de coordenadas que não foram utilizadas na resolução das equações. Basicamente, ainda podemos reparametrizar  $u = u(u') \rightarrow r = r'/\dot{u}$ . O que leva a  $B' = B\dot{u}^3$  e  $K' = K\dot{u}^2$ . Assim, podemos escolher  $B' = -2M_\infty = \text{constante}$ .

Ao assumir o sub-espacô  $u$  e  $r$  constante com topologia  $S^2$  e lembrar que durante a resolução assumimos  $\det\gamma_{AB} = 1$ , as coordenadas  $x^A$  são, em geral, escolhidas como as projeções estereográficas  $q = x/(1-z) = \cos\phi \cot(\theta/2)$  e  $p = y/(1-z) = \sin\phi \cot(\theta/2)$ . Porém, muitos dos teoremas associados ao espaço-tempo de Robinson-Trautman são demonstrados mais facilmente com as projeções estereográficas complexas  $\zeta = (q+ip)/\sqrt{2} = e^\phi \cot\frac{\theta}{2}/\sqrt{2}$ . No caso em que esse sub-espacô é a esfera  $S^2$ , o fator conforme assume o valor  $P_0 = \frac{1}{2} + \zeta\bar{\zeta} = 1/(2\sin^2(\theta/2))$ . Para as simulações numéricas é conveniente trabalhar com as usuais coordenadas esféricas  $(\theta, \phi)$  e com a função  $Q = P/P_0$ . A métrica fica então:

$$ds^2 = - \left( K - 2r \ln Q_{,u} - \frac{2M_\infty}{r} \right) du^2 - 2dudr + \frac{r^2}{Q^2} d\Omega, \quad (\text{A.17})$$

a curvatura gaussiana

$$K = Q^2 [1 + \nabla^2 \ln Q], \quad (\text{A.18})$$

e a equação de Robinson-Trautman

$$\partial_u Q = -\frac{Q^3 \nabla^2 K}{12M_\infty}. \quad (\text{A.19})$$

# Apêndice B

## Código

### Evolução Temporal e cálculos sobre simulações prontas

```
program RTAxi
implicit none
integer N,l,Nass,NHor,i,k,option,Nmm,Ncurv,j
real*8 m0,err,errcte, erro,cte,ass0,u,del,cmin,cmax,delcurv,h,R,Q0norm
real*8 ut,modv,ass1,ass2,ass3,ass4,ass5,ass6,ass7,moddb,v,Qinf,MassAH,x,Q
parameter(N=5,m0=1.0d3,NHor=5,del=1.0d-2,h=1.0d-2,Nmm=20,Ncurv=20)
real*8 b(0:N), c(0:NHor),P(0:3),bt(0:N),db(0:N),fb1(0:N),fb2(0:N),fb3(0:N),fb4(0:N),a(0:NHor)
real*8 bi(0:N), ci(0:NHor),Pi(0:3),ai(0:NHor),Preli(0:3),Prel(0:3),pgwu(0:3),pgw(0:3)
real*8 ass1,assi2,assi3,assi4,assi5,assi6,assi7,DeltaE,DeltaErel,v0,DeltaPz,DeltaPzrel,vrel
real*8 MultiMod(0:Nmm), Khorz,xm1,x0,x1,MM,xx1(0:377)
!Dim xx1 = F2 na integracao Fibonacci na funcao MM
real*8 KK(0:200),xt(0:200),xrt(0:377),A1,A2,d(0:Ncurv),mu,eta,Kinf,dt,lixo, &
A1x,A2x,dmax(0:Ncurv),dnorm(0:Ncurv)
real*8 dprodAll(Ncurv), dprodEven(int( (1.0d0*Ncurv+1.0d0)/2 )), Q0,news,&
Psi4RT, Psi4Bondi,Moments,MassMoment
character(3) arq
character(4) arq2
integer Nrk
parameter(Nrk=10000)
real*8 sol(2,0:Nrk),Ri,R0,xi,xf, GWzN,GWzS,newsN,newsS,ModesPsi4,Kav
common /constante/ cte
common /massratio/ mu
cte=2.0d0
x0=0.0d0
xm1=-1.0d0
x1=1.0d0

!Opcao=1 Evolucao Normal
!Opcao=2 Obter Curvatura/MultModes de simulacoes prontas
!Opcao=3 visualicao do Horizonte
!Opcao=4 Obter Conteudo Radiativo Psi4
!Opcao=5 Curvatura e Modes para Initial Data all mass ratios
!Opcao=6 Testar novas ID
!Opcao=7 Obter evolucao temporal de Momentos para sim. prontas
!Opcao=8 Momentos para Initial Data all mass ratios
!Opcao=9 Expansao de geod. outgoing

option=6
if(option.eq.1) then
goto 10
end if
if(option.eq.2) then
```

```

goto 20
end if
if(option.eq.3) then
goto 30
end if
if(option.eq.4) then
goto 40
end if
if(option.eq.5) then
goto 50
end if
if(option.eq.6) then
goto 60
end if
if(option.eq.7) then
goto 70
end if
if(option.eq.8) then
goto 80
end if
if(option.eq.9) then
goto 90
end if

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!Extrinsic Curvature 04.05.2010!!!!!!!!!!!!!!
90 open(unit=1,file='CoefGal_b.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=2,file='CoefGalHorz_c.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=99,file='Horizon_TimeEvol.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=98,file='OutExpansion_TimeEvol.dat', form='formatted', status='unknown')
open(unit=97,file='HorizonPoles_TimeEvol.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=96, file='OutExpansionPoles_TimeEvol.dat', form='formatted', status='unknown')
write(99,*) "#time u x HorizonRadius R(u,x)"
write(98,*) "#time u x Expansion Theta_plus(u,x)"
write(97,*) "#time u HorizonRadius R(u,x=1) HorizonRadius R(u,x=-1)"
write(96,*) "#time u Expansion Theta_plus(u,x=1) Expansion Theta_plus(u,x=-1)"

do
read(1,*,end=11) u, (b(i), i=0,N)
11 read(2,* , end=13) u, (c(i), i=0,NHor)
print*, u

do j=0,50
x=xm1+j*(x1-xm1)/50
write(99,*) u, x, R(x,c,NHor)
!Theta_plus=1.0d0/R(x,c,NHor)
write(98,*) u, x, 1.0d0/R(x,c,NHor)
end do
write(99,*)
write(98,*)

write(97,*) u, R(x1,c,NHor), R(xm1,c,NHor)
!Theta_plus=-1.0d0/R(x,c,NHor)
write(96,*) u, 1.0d0/R(x1,c,NHor), 1.0d0/R(xm1,c,NHor)

end do
13 close(1)
close(2)
close(99)
close(98)
close(97)
close(96)
stop
!!!!!!!!!!!!!!

```

```

!!!!!!!!!!!!!!Q(0,x) dado Ri(0,x) - 2 semestre 2009 / 23.03.2010!!!!!!!!!!!!!!
!call coefRi(a,Nhor)
!call coeffHor(c,NHor,a)
!call RKQ(sol,Nrk,Nhor,a)
!call coef2(b,N,sol,Nrk)
!call norm2(Q0norm,b,N)
!do l=0,Nhor
!b(l)=Q0norm*b(l)
!end do
!do i=0,50
! x=xm1+i*(x1-xm1)/50
! write(3,*), x, Q(x,b,N)
! end do
! write(3,*)

!write(1,*), (b(i), i=0,N)
!stop
!!!!!!!!!!!!!!!!

!!!!!!!!!!!!!!Statistical Mass Moments 18.03.2010!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!ATENCAO!!!!!!!!!!!!!!
! Chegar a decomposicao de Galerkin N utilizada na Simulacao. Arquivo: InformacoesIniciais.dat !
! Verificar se parametros estao de acordo !!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!

70 open(unit=1,file='CoefGal_b.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=99,file='CoefGalHorz_c.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=2,file='Moments_TimeEvol.dat',form='formatted',status='unknown')
do
read(1,*), u, (b(i), i=0,N)
read(99,*), u, (c(i), i=0,N)
print*, u

write(2,*), u, (MassMoment(l,c,Nhor,b,N), l=0,10)
end do

stop
!!!!!!!!!!!!!!Moments all mass ratio 19.03.2010!!!!!!!!!!!!!!
80 open(unit=55,file='Moments.all.dat',form='formatted',status='unknown')

do k=0,100
mu=k*1.0d0/100
eta=mu/(1+mu)**2
write(99,'(I3)',k)
close(99)
open(99)
read(99,*), arq
close(99)
if(k.ge.0.and.k.lt.10) then
arq='00'//arq
end if
if(k.ge.10.and.k.lt.100) then
arq='0'//arq
end if
print*, mu, arq

call norm1(Q0norm)
call coef(b,N,Q0norm)
do l=0,Nhor
c(l)=0.0d0
end do
call Horizon(c,b,N,Nhor)

```

```

write(55,*), eta, (MassMoment(l,c,Nhor,b,N), l=0,10)
end do

close(55)
stop

!!!!!!!!!!!!!!Conteudo de GW - News e Psi4 - 26.02.2010/06.05.2010!!!!!!!!!!!!!!
!mu=0.43d0
!call norm1(Q0norm)
!call coef (b,N,Q0norm)
!do l=0,Nhor !Chute inicial do Horizonte: Schwarzschild
!c(l)=0.0d0
!end do
!call Horizon (c,b,N,Nhor)

40 open(unit=1,file='..../HeadOnCooked/mu=0.05/CoefGal_b.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=99,file='..../HeadOnCooked/mu=0.05/CoefGalHorz_c.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=2,file='Psi4_TimeEvolution.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=20,file='ModesPsi4_TimeEvolution.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=3,file='Psi4_TimeEvolution.yg',form='formatted',status='unknown')
open(unit=4,file='Psi4Polar_TimeEvolution.yg',form='formatted',status='unknown')
open(unit=41,file='Psi4Polar2_TimeEvolution.yg',form='formatted',status='unknown')

k=0
do
read(1,*), u, (b(i), i=0,N)
read(99,*), u, (c(i), i=0,N)
call diffang(xx1,xrt,b,N,c,Nhor)

write(20,*), u, (ModesPsi4(i,b,N,xx1,m0), i=0,20)
!GWzS=0.0d0
!do i=1,500 !1,377
!xi=xm1+(i-1)*(x1-xm1)/500
!xf=xm1+(i)*(x1-xm1)/500
!function f(x)=x*|Psi4(x)|
!GWzS=GWzS+(xf-xi)*( xf*dabs(news(xf,b,N))+xi*dabs(news(xi,b,N)))/2.0d0
!end do
!print*, u,GwzS

!GWzN=0.0d0
!do i=1,500 !1,377
!xi=x0+(i-1)*(x1-x0)/500
!xf=x0+(i)*(x1-x0)/500
!function f(x)=x*|Psi4(x)|
!GWzN=GWzN+(xf-xi)*( dabs(news(xf,b,N))+dabs(news(xi,b,N)) )/2.0d0
!end do
!print*, u,GwzN
!print*, GwzS-GwzN
!pause

write(98,'(I4)') k
close(98)
open(98)
read(98,*), arq2
close(98)
if(k.ge.0.and.k.lt.10) then
arq2='000'//arq2
end if
if(k.ge.10.and.k.lt.100) then
arq2='00'//arq2
end if
if(k.ge.100.and.k.lt.1000) then

```

```

arq2='0'//arq2
end if
print*, u, k, arq2

open(unit=21,file='Psi4_u',//arq2//".dat",form='formatted',status='unknown')

x=xm1
do i=0,100
x=xm1+i*(x1-xm1)/100
write(21,*) x,dacos(x), dabs(psi4Bondi(x,b,N,m0))
end do
close(21)

do i=0,100
x=xm1+i*(x1-xm1)/100
write(2,*), x, dabs(psi4Bondi(x,b,N,m0))
end do
write(2,*)

write(3,*), "Time=",u
do i=0,100
x=xm1+i*(x1-xm1)/100
write(3,*), x, dabs(psi4Bondi(x,b,N,m0))
end do
write(3,*)

!call diffang(xx1,xrt,b,N,c,Nhor)
write(4,*), "Time=",u
do i=0,100
x=xm1+i*(x1-xm1)/100
write(4,*), dsqrt(1-x**2)*dabs(psi4RT(x,b,N,m0)), x*dabs(psi4RT(x,b,N,m0))
end do
do i=0,100
x=xm1+i*(x1-xm1)/100
write(4,*), -dsqrt(1-x**2)*dabs(psi4RT(x,b,N,m0)), x*dabs(psi4RT(x,b,N,m0))
end do
write(4,*)

if(k.ge.0.and.k.le.20)then
write(41,*), "Time=",u
do i=0,100
x=xm1+i*(x1-xm1)/100
write(41,*), dsqrt(1-x**2)*dabs(psi4Bondi(x,b,N,m0)), x*dabs(psi4Bondi(x,b,N,m0))
end do
do i=0,100
x=xm1+i*(x1-xm1)/100
write(41,*), -dsqrt(1-x**2)*dabs(psi4Bondi(x,b,N,m0)), x*dabs(psi4Bondi(x,b,N,m0))
end do
write(41,*)
end if

k=k+1
end do

41 close(1)
close(99)
close(3)
close(4)
stop
!!!!!!!!!!!!!!tentativas de novas ID 23.02.2010!!!!!!!!!!!!!!
!mu=1.0d0
60 call norm1(QOnorm)
call coef (b,N,QOnorm)

```

```

open(unit=1,file='Q_mu.eq.0.5.w.eq.0.5_axi.dat',form='formatted',status='unknown')
do i=0,100
x=xm1+i*(x1-xm1)/100
write(1,*) dacos(x), Q(x,b,N)
end do
close(1)
!write(*,*) "Plotar Q para ver se tem zeros"

do l=0,Nhor !Chute inicial do Horizonte: Schwarzschild
c(l)=0.0d0
end do
call Horizon (c,b,N,NHor)
open(unit=2,file='R_mu.eq.0.5.w.eq.0.5_axi.dat',form='formatted',status='unknown')
do i=0,100
x=xm1+i*(x1-xm1)/100
write(2,*) dacos(x), R(x,c,NHor)
end do
close(2)
stop

call BondMom(Pi,b,N)
print*, Pi(0), Pi(3)
v0=Pi(3)/Pi(0)
print*, "Initial Velocity:", v0
print*, "Curvature North"
print*, Khorz(x1,c,Nhor), abs(Khorz(x1,c,Nhor)-1.0d0)
print*, "Curvature South"
print*, Khorz(xm1,c,Nhor), abs(Khorz(xm1,c,Nhor)-1.0d0)
do i=0,100
x=xm1+i*(x1-xm1)/100
write(1,*) x, R(x,c,NHor)
write(2,*) x, Khorz(x,c,Nhor), 1.0d0/R(x,c,NHor)**3
end do
stop
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!Initial MultiModes and Curvature versus mu!!!!!!!!!!!!!!
50 open(unit=55,file='MultiMod_MAh.dat',form='formatted',status='unknown')

do k=0,100
mu=k*1.0d0/100
mu=0.05
eta=mu/(1+mu)**2
write(99,'(I3)') k
close(99)
open(99)
read(99,*) arq
close(99)
if(k.ge.0.and.k.lt.10) then
arq='00'//arq
end if
if(k.ge.10.and.k.lt.100) then
arq='0'//arq
end if
print*, mu !arq

call norm1(QOnorm)
call coef (b,N,QOnorm)
do l=0,Nhor
c(l)=0.0d0
end do
call Horizon (c,b,N,NHor)

```

```

!!! Normalizacao MAH=1.0 -> Gives normalised multimods initially !!!!!!!!
call MassaAH(MassaAH,c,b,Nhor,N)
QOnorm=(MassaAH)**(1.0d0/3)
do l=0,N
  b(l)=QOnorm*b(l)
end do
call Horizon (c,b,N,NHor)
call assimetria(ass0,b,N,0)
Qinf=dsqrt(2.0d0/ass0)
Kinff=Qinf**6
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
open(unit=21,file='Horizon_MAH_ '//arg//".dat",form='formatted',status='unknown')
open(unit=22,file='Curvature_MAH_ '//arg//".dat",form='formatted',status='unknown')

x=xm1
do i=0,200
  x=xm1+i*(xm1-xm1)/200
  write(22,*) x,dacos(x), Khorz(x,c,Nhor), Qinf**6
  write(21,*) x,dacos(x), R(x,c,Nhor), 1.0d0/Qinf**2
end do
close(22)
close(21)

open(unit=1,file='MultiMod_MAh_ '//arg//".dat",form='formatted',status='unknown')
call diffang(xx1,xrt,b,N,c,Nhor)
do i=0,Nmm
  MultiMod(i)=MM(i,b,N,c,Nhor,xx1)
  write(1,*) i, MultiMod(i)
end do
close(1)

write(55,*)
  eta , (MultiMod(i), i=0,Nmm)

end do

close(55)
stop

!!!!!!!!!!!!!!Evolucao Curvatura!!!!!!!!!!!!!!!!

!!!!!!!!!!!!!!ATENCAO!!!!!!!!!!!!!!
! Chegar a decomposicao de Galerkin N utilizada na Simulacao. Arquivo: InformacoesIniciais.dat !
! Verificar se parametros estao de acordo !!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!

20 open(unit=1,file='CoefGal_b.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=2,file='CoefGalHorz_c.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=3,file='Curvature_TimeEvol.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=30,file='Curvature2_TimeEvol.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=13,file='CurvPoles_TimeEvol.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=40,file='Curvature_TimeEvolution.yg',form='formatted',status='unknown')
open(unit=41,file='Curvature2_TimeEvolution.yg',form='formatted',status='unknown')
open(unit=10,file='Modes_TimeEvol.dat',form='formatted',status='unknown')

l=0
k=0
do
  read(1,*) u, (b(i), i=0,N)
  read(2,*) u, (c(i), i=0,Nhor)

  call diffang(xx1,xrt,b,N,c,Nhor)
  do i=0,Nmm
    MultiMod(i)=MM(i,b,N,c,Nhor,xx1)
  end do
end do

```

```

end do

write(10,*)
  u , ( MultiMod(i)/(MultiMod(0)**(i+1)), i=0,Nmm) !
  !!!!!!!!!

print*, l,u
  if(l.eq.0) then
call assimetria(ass0,b,N,0)
Qinf=dsqrt(2.0d0/ass0)
Kinf=Qinf**6

  end if

do i=0,100
  x=xm1+i*(x1-xm1)/100
  write(3,*)
    u,x, Khorz(x,c,Nhor), dabs(Kinf-Khorz(x,c,Nhor))
  end do
  write(3,*)

do i=0,377
  write(30,*)
    u,xx1(i), Khorz(xrt(i),c,Nhor)
  end do
  write(30,*)

write(13,*)
  u,Khorz(xm1,c,Nhor), Khorz(x1,c,Nhor), Khorz(xm1,c,Nhor)- Khorz(x1,c,Nhor)

write(40,*)
  "Time=",u
do i=0,100
  x=xm1+i*(x1-xm1)/100
  write(40,*)
    x, Khorz(x,c,Nhor)
end do
  write(40,*)

write(41,*)
  "Time=",u
do i=0,377
  write(41,*)
    xx1(i), Khorz(xrt(i),c,Nhor)
end do
  write(41,*)

l=l+1
end do
close(1)
close(2)
close(3)
close(30)
close(40)
close(41)
close(13)
close(10)
stop
!!!!!!!!

!!!!!!Horizon Visualisation!!!!!!
30 open(unit=1,file='CoefGal_b.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=2,file='CoefGalHorz_c.dat',form='formatted',status='unknown')
read(1,*)
  u , (b(i), i=0,N)
read(2,*)
  u , (c(i), i=0,NHor)

!call norm1(Q0norm)
!call coef (b,N,Q0norm)
!do l=0,Nhor !Chute inicial do Horizonte: Schwarzschild
!c(l)=0.0d0
!end do
!call Horizon (c,b,N,NHor)

```

```

x=-1.0d0
do while(x.lt.1.0d0)
write(3,*) x,dacos(x), R(x,c,Nhor)
write(4,*) x,dacos(x), R(x,c,Nhor)/Q(x,b,N)
x=x+5.0d-3
end do
close(3)
close(4)
call system('gnuplot ../../ScriptGNU/horiz.gnu')
stop
!!!!!!!!!!!!!!
10 call norm1(Q0norm)
call coef (bi,N,Q0norm)

!Nova normalizacao

!PO_rel=M0
!call BondMom(Pi,bi,N)
!v0=-Pi(3)/Pi(0)
!Preli(0)=Pi(0)/sqrt(1-v0**2)+v0*Pi(3)/sqrt(1-v0**2)
!Preli(3)=Pi(3)/sqrt(1-v0**2)+v0*Pi(0)/sqrt(1-v0**2)
!Q0norm=(Preli(0))**((1.0d0/3))
!!!!!!!!!!!!

!Mah=M0
!do l=0,Nhor !Chute inicial do Horizonte: Schwarzschild
!c(l)=0.0d0
!end do
!call Horizon (c,bi,N,Nhor)
!call MassaAH(MassaAH,c,bi,Nhor,N)
!Q0norm=(MassaAH)**((1.0d0/3))

!do l=0,N
!bi(l)=Q0norm*bi(l)
!b(l)=bi(l)
!end do

open(unit=1,file='InformacoesIniciais.dat',form='formatted',status='unknown')
err=erro(N,b,Q0norm)

call assimetria(ass0,b,N,0)
errcte=dabs(ass0-cte)*100/cte

!if (errcte.gt.1.0d0) then
!open(unit=2,file='Erros.dat',form='formatted',status='unknown')
!write(2,*) "ATENCAO: Constante de Movimento com erro maior que 1%"
!write(2,*) "Aumentar o N"
!write(2,*) "Erro (%) na Constante de Movimento=",errcte
!close(2)
!stop
!end if

write(1,*) "Parametro Massa M0=", m0
write(1,*) "Rescalonamento de Q", Q0norm
write(1,*) "Rescalonamento de R", 1.0d0/Q0norm **2
write(1,*) "Decomposicao de Galerkin: N=", N
write(1,*) "Erro (%) em Galerkin=",err
write(1,*) "Coeficientes de Galerkin"
write(1,*) "Coeficientes de Galerkin"
do l=0,N
  write(1,*) "b_",l,"=",bi(l)
end do
write(1,*) "Constante de Movimento: q0=",ass0
write(1,*) "Erro (%) na Constante de Movimento=", errcte

```

```

call BondMom(Pi,b,N)
v0=-Pi(3)/Pi(0)
Preli(0)=Pi(0)/sqrt(1-v0**2)+v0*Pi(3)/sqrt(1-v0**2)
Preli(3)=Pi(3)/sqrt(1-v0**2)+v0*Pi(0)/sqrt(1-v0**2)
write(1,*) "Massa de Bondi Inicial: Mi=", Pi(0)
!write(1,*) "Momento de Bondi Inicial: Px=", Pi(1)
!write(1,*) "Momento de Bondi Inicial: Py=", Pi(2)
write(1,*) "Momento de Bondi Inicial: Pz=", Pi(3)
write(1,*) "Velocidade Inicial", v0
write(1,*) "Massa de Bondi Relativo Inicial: P0rel=", Preli(0)
write(1,*) "Momento de Bondi Relativo: Pzrel=", Preli(3)

```

```

call assimetria(assi1,b,N,1)
write(1,*) "Medidas de Assimetria: q1=", assi1
call assimetria(assi2,b,N,2)
write(1,*) "Medidas de Assimetria: q2=", assi2
call assimetria(assi3,b,N,3)
write(1,*) "Medidas de Assimetria: q3=", assi3
call assimetria(assi4,b,N,4)
write(1,*) "Medidas de Assimetria: q4=", assi4
call assimetria(assi5,b,N,5)
write(1,*) "Medidas de Assimetria: q5=", assi5
call assimetria(assi6,b,N,6)
write(1,*) "Medidas de Assimetria: q6=", assi6
call assimetria(assi7,b,N,7)
write(1,*) "Medidas de Assimetria: q7=", assi7

```

```

do l=0,Nhor !Chute inicial do Horizonte: Schwarzschild
c(l)=0.0d0
end do
call Horizon (c,b,N,Nhor)
do l=0,Nhor
ci(l)=c(l)
end do

```

```
call coefAH(ai,NHor,c)
```

```

write(1,*) "Decomposicao de Galerkin para Horizonte: NHor=", NHor
write(1,*) "Coeficientes de Galerkin para Horizonte"
  write(1,*) "Decomposicao de lnR"
  do l=0,NHor
    write(1,*) "c_ ",l,"=",ci(l)
  end do
  write(1,*) "Decomposicao de R"
  do l=0,NHor
    write(1,*) "a_ ",l,"=",ai(l)
  end do

```

```

write(1,*) "Curvatura do Horizonte em x=1", Khorz(x1,c,Nhor)
write(1,*) "Curvatura do Horizonte em x=0", Khorz(x0,c,Nhor)
write(1,*) "Curvatura do Horizonte em x=-1", Khorz(xm1,c,Nhor)

```

```

call diffang(xx1,b,N,c,Nhor)
do i=0,Nmm
MultiMod(i)=MM(i,b,N,c,Nhor,xx1)
end do
write(1,*) "Multipolos de Massa do Horizonte"
do l=0,Nmm
write(1,*) "MM_ ",l,"=",MultiMod(l)
end do
call MassaAH(MassaAH,c,b,Nhor,N)

```

```
write(1,*) "Massa do Horizonte: MassaAH=", MassaAH
```

```

write(1,*)
write(1,*)
write(1,*)
write(1,*)

close(1)

open(unit=1,file='u.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=20,file='CoefGal_b.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=21,file='CoefGal_b_Norm.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=30,file='P.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=31,file='P_rel.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=40,file='CoefGalHorz_c.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=41,file='CoefGalHorz_c_Norm.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=60,file='CoefHorz.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=61,file='CoefHorz_Norm.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=50,file='MassAH.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=51,file='Horiz.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=10,file='q0.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=11,file='Assimetria.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=12,file='Assimetria_Norm.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=70,file='Curvature.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=71,file='DeltaCurvature.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=72,file='MultModes.dat',form='formatted',status='unknown')

12 u=0.0d0
i=0
k=0
do l=0,3
pgw(l)=0.0d0
end do
delcurv=10*del
!modc=10*del
do while (delcurv.ge.del)!(modc.ge.del)
!do l=1,Nhor
!cControl(l-1)=c(l)
!end do
!modc=modv(cControl,NHor-1)
call Extreme (cmin,cmax,N,b)
delcurv=cmax-cmin

!Saida de Dados:
if(i.eq.100*k) then !Computar saida de dados a cada 100 passos da evolucao de RungeKutta
write(1,*)
!Coeficientes Galerkin
write(20,*)
write(21,*)

!Momento de Bondi
call BondMom(P,b,N)
Prel(0)=P(0)/sqrt(1-v0**2)+v0*P(3)/sqrt(1-v0**2)
Prel(3)=P(3)/sqrt(1-v0**2)+v0*P(0)/sqrt(1-v0**2)
write(30,*)
write(31,*)
!Coeficientes do Horizonte

call Horizon (c,b,N,Nhor)
write(40,*)
write(41,*)

call coefAH(a,Nhor,c,m0)
write(60,*)
write(61,*)

! Curvatura do Horizonte
write(70,*)
write(71,*)

```

```

! Multipolos de Massa do Horizonte
call diffang(xx1,b,N,c,Nhor)
do i=0,Nmm
MultiMod(i)=MM(i,b,N,c,Nhor,xx1)
end do
write(72,*) u,(MultiMod(l),l=0,Nmm)

!Massa Horizonte
call MassaAH(MassaAH,c,b,Nhor,N)
write(50,*) u, MassAH
!Horizonte
write(51,*) u,k
x=-1.0d0
do while(x.lt.1.0d0)
write(51,*) x,dacos(x), R(x,c,Nhor)
x=x+1.0d-1
end do
!Assimetrias q_n
call assimetria(ass0,b,N,0)
write(10,*) u, ass0
call assimetria(ass1,b,N,1)
call assimetria(ass2,b,N,2)
call assimetria(ass4,b,N,4)
call assimetria(ass5,b,N,5)
call assimetria(ass6,b,N,6)
call assimetria(ass7,b,N,7)
write(11,*) u, ass1,ass2,ass3,ass4,ass5,ass6,ass7
write(12,*) u, ass1/assi1,ass2/assi2,ass3/assi3,ass4/assi4,ass5/assi5,ass6/assi6,ass7/assi7
k=k+1
end if

call funcdiff(fb1,m0,N,b)

ut=u+h/2.0d0

do l=0,N
bt(l)=(l)+h*fb1(l)/2.0d0
end do
call funcdiff(fb2,m0,N,bt)

ut=u+h/2.0d0

do l=0,N
bt(l)=b(l)+h*fb2(l)/2.0d0
end do

call funcdiff(fb3,m0,N,bt)
ut=u+h

do l=0,N
bt(l)=b(l)+h*fb3(l)
end do
call funcdiff(fb4,m0,N,bt)

do l=0,N
db(l)=(h/6.0d0)*(fb1(l)+2.0d0*fb2(l)+2.0d0*fb3(l)+fb4(l))
b(l)=b(l)+db(l)
end do !fecha loop RK coef vetor b

if(i.eq.0)then
moddb=modv(db,N)
if(moddb.ge.1.0d0) then
open(unit=2,file='Erros.dat',form='formatted',status='unknown')
write(2,*) "ATENCAO: Divergencia no Runge Kutta"

```

```

write(2,*) "Diminuir Passo ou aumentar parametro m0"
close(2)
stop
end if
end if
open(unit=99,file='InfoEvol.dat',form='formatted',status='unknown')
write(99,*) "u ",u, " Del Curv=", delcurv, " Incremento nos Coeficientes=",moddb, " Constante de Movimento=",ass0
write(99,*) b
close(99)
call EnerMomRad(Pgwu,b,N)
do l=0,3
pgw(l)=pgw(l)+h*pgvu(l)
end do
u=u+h
i=i+1
end do
write(1,*) u
! Coeficientes Galerkin
write(20,*) u,(b(l), l=0,N)
write(21,*) u,(b(l)/bi(l), l=0,N)

! Momento de Bondi
call BondMom(P,b,N)
Pre1(0)=P(0)/sqrt(1-v0**2)+v0*P(3)/sqrt(1-v0**2)
Pre1(3)=P(3)/sqrt(1-v0**2)+v0*P(0)/sqrt(1-v0**2)
write(30,*) u,(P(l), l=0,3)
write(31,*) u,Pre1(0),Pre1(3)
! Coeficientes do Horizonte
call Horizon (c,b,N,Nhor)
write(40,*) u,(c(l),l=0,Nhor)
write(41,*) u,(c(l)/ci(l),l=0,Nhor)
call coefAH(a,Nhor,c,m0)
write(60,*) u,(a(l),l=0,Nhor)
write(61,*) u,(a(l)/ai(l),l=0,Nhor)
! Curvatura do Horizonte
write(70,*) u, Khorz(x1,c,Nhor), Khorz(xm1,c,Nhor)
write(71,*) u, ( Khorz(xm1,c,Nhor)-Khorz(xm1,c,Nhor) )
! Multipolos de Massa do Horizonte
call diffang(xx1,b,N,c,Nhor)
do i=0,Nmm
MultiMod(i)=MM(i,b,N,c,Nhor,xx1)
end do
write(72,*) u,(MultiMod(l),l=0,Nmm)
! Massa Horizonte
call MassaAH(MassaAH,c,b,Nhor,N)
write(50,*) u, MassaAH/m0
! Horizonte
write(51,*) u,k
x=-1.0d0
do while(x.lt.1.0d0)
write(51,*) x,dacos(x), R(x,c,Nhor)
x=x+5.0d-3
end do
! Assimetrias q_n
call assimetria(ass0,b,N,0)
write(10,*) u, ass0
call assimetria(ass1,b,N,1)
call assimetria(ass2,b,N,2)
call assimetria(ass3,b,N,3)
call assimetria(ass4,b,N,4)
call assimetria(ass5,b,N,5)
call assimetria(ass6,b,N,6)
call assimetria(ass7,b,N,7)
write(11,*) u, ass1,ass2,ass3,ass4,ass5,ass6,ass7

```

```

write(12,*)
u, ass1/assi1,ass2/assi2,ass3/assi3,ass4/assi4,ass5/assi5,ass6/assi6,ass7/assi7

close(1)
close(20)
close(30)
close(40)
close(50)
close(60)
close(10)
close(11)
close(70)
close(71)
close(72)

open(unit=1,file='InformacoesFinais.dat',form='formatted',status='unknown')
Qinf=1/dsqrt(b(0)**2-b(1)**2)
v=-b(1)/b(0)
vrel=Prel(3)/Prel(0)
DeltaE=Pi(0)-P(0)
DeltaErel=Preli(0)-Prel(0)
DeltaPz=Pi(3)-P(3)
DeltaPzrel=Preli(3)-Prel(3)
write(1,*) "Velocidade de Recuo: v=",v
write(1,*) "Velocidade de Recuo Relativo: v=",vrel
write(1,*) "Constante de Movimento: Qinf=",Qinf
write(1,*) "Coeficientes de Galerkin"
do l=0,N
  write(1,*) "b_ ",l,"=",b(l)
end do
write(1,*) "Constante de Movimento: q0=",ass0
write(1,*) "Massa de Bondi Final: Mf=", P(0)
write(1,*) "Variacao Massa de Bondi: Delta=", DeltaE
!write(1,*) "Momento de Bondi Final: Px=", P(1)
!write(1,*) "Momento de Bondi Final: Py=", P(2)
write(1,*) "Momento de Bondi Final: Pz=", P(3)
write(1,*) "Variacao Momento Z de Bondi: Delta=", DeltaPz
write(1,*) "Energia Total Irradiada: E=", Pg(0)
!write(1,*) "Momento Total Irradiado: Prx=", Pg(1)
!write(1,*) "Momento Total Irradiado: Pry=", Pg(2)
write(1,*) "Momento Total Irradiado: Prz=", Pg(3)
write(1,*) "Massa de Bondi Relativa Final: Mrefl=", Prel(0)
write(1,*) "Variacao Massa Relativa de Bondi: Delta=", DeltaErel
write(1,*) "Momento de Bondi Relativo Final: Pz=", Prel(3)
write(1,*) "Variacao Momento Z Relativo de Bondi: Delta=", DeltaPzrel
write(1,*) "Medidas de Assimetria: q1=", ass1
write(1,*) "Medidas de Assimetria: q2=", ass2
write(1,*) "Medidas de Assimetria: q3=", ass3
write(1,*) "Medidas de Assimetria: q4=", ass4
write(1,*) "Medidas de Assimetria: q5=", ass5
write(1,*) "Medidas de Assimetria: q6=", ass6
write(1,*) "Medidas de Assimetria: q7=", ass7
write(1,*) "Decomposicao de Galerkin para Horizonte: NHor=", NHor
write(1,*) "Coeficientes de Galerkin para Horizonte"
do l=0,NHor
  write(1,*) "c_ ",l,"=",c(l)
end do
write(1,*) "Decomposicao de R"
do l=0,NHor
  write(1,*) "a_ ",l,"=",ai(l)
end do
write(1,*) "Curvatura do Horizonte em x=1", Khorz(x1,c,Nhor)
write(1,*) "Curvatura do Horizonte em x=0", Khorz(x0,c,Nhor)
write(1,*) "Curvatura do Horizonte em x=-1", Khorz(x1,c,Nhor)

```

```

call diffang(xx1,b,N,c,Nhor)
do i=0,Nmm
MultiMod(i)=MM(i,b,N,c,Nhor,xx1)
end do
write(1,*) "Multipolos de Massa do Horizonte"
do l=0,Nmm
write(1,*) "MM_",l,"=",MultiMod(l)
end do
write(1,*) "Massa do Horizonte: MassaAH=", MassAH
write(1,*) "Relacao da Energia:",P(0)**2, P(3)**2+(MassAH)**2
write(1,*) "Relacao da Energia Relativa:",Prel(0)**2, Prel(3)**2+(MassAH)**2
close(1)
!call system('gnuplot ../../bondi.gnu')
!call system('gnuplot ../../ass.gnu')
!call HorizRead
99 stop

end program

```

## Condição Inicial

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! Input da superficie inicial Q(u0,x)=Q0(x)      !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! Funcao Normalizada
function Q0(x,Q0norm)
implicit none
real*8 Q0,Q0norm,g,x
Q0=Q0norm*g(x)
end function
! Funcao Nao Normalizada
function g(x)
implicit none
!real*8 g,x,mu,w,w2,A
!common /massratio/ mu
!A=-0.091689057d0!89d0!8999d0
!w=0.5d0
!w2=-0.5d0
!g=( 1.0d0/dsqrt(1.0d0-w*x)+mu/dsqrt(1.0d0+w*x))**(-2.0d0)+(1.0-A*x**2)*(1.+x)/4.0d0 !+mu*x**2*(1.0d0/dsqrt(1.0d0+w*x)+mu/dsqrt(1.0d0-w*x))**(-2.0d0)

!g=1.0+(1.0-mu)*w*x+mu*dsqrt(1-x**2)
!real*8 g,x,mu, A,B,C,cc
!common /massratio/ mu!,cc
!A=0.5d0
!B=0.75d0
!C=-0.5d0
!g=1.0d0+x*A*(mu-1.0d0)/(1.0d0+mu)+x**2*B*mu/((1+mu)**2)+x**3*C*mu*(mu-1.0d0)/((1+mu)**3)

real*8 g,x,w,mu
w=0.5d0
mu=0.5d0
g=(1.0/dsqrt(1-w*x)+mu/dsqrt(1+w*x))**(-2.0d0)
end function

! Normalizacao (dada Q0)
subroutine norm1(Q0norm)
implicit none
integer fibN, fibNmax
parameter (fibN=20,fibNmax=14)
integer fib(1:fibN),j,l,F1,F2
real*8 Q0norm,dx,pi,x,x1,g,cte
data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/
common /constante/ cte

```

```

pi=dacos(-1.0d0)
F1=int(fib(fibNmax-1))
F2=int(fib(fibNmax))
dx=2.0d0/F2

Q0norm=0.0d0
do j=0,F2,1
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dsin(pi*x)/pi
Q0norm=Q0norm+(1.0d0+dcos(pi*x))*( 1.0d0/(g(x1)**2) )
end do

Q0norm=Q0norm*dx
Q0norm=dsqrt(Q0norm/cte)
return
end subroutine

! Solucao Estacionaria
function S(x)
implicit none
real*8 s,x,w,e0,e1
e0=5.0d0
e1=0.0d0
w=0.999d0
s=e0+e1*x+(1-w*x)/dsqrt(1-w**2)
end function

```

## Decomposição de Galerkin

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!Calculo dos coeficiente iniciais !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
subroutine coef(b,N,Q0norm)
implicit none
integer fibN, fibNmax
parameter (fibN=20,fibNmax=14)
integer fib(1:fibN),j,l,N,F1,F2
real*8 Q0,dx,b(0:N),pi,x,x1,PL,Q0norm
data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/
pi=dacos(-1.0d0)

F1=int(fib(fibNmax-1))
F2=int(fib(fibNmax))
dx=2.0d0/F2

do l=0,N
b(l)=0.0d0
do j=0,F2,1
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dsin(pi*x)/pi
b(l)=b(l)+(1.0d0+dcos(pi*x))*(Q0(x1,Q0norm)*PL(l,x1))
end do
b(l)=b(l)*dx
b(l)=(2*l+1)*b(l)/2.0d0
end do
return
end subroutine
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! Expansão Q(u,x) em polinomios de Legendre !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
function Q(x,b,N)
implicit none
integer N,i
real*8 x,PL, b(0:N),q

```

```

q=0.0d0
do i=0,N
q=q+b(i)*PL(i,x)
end do
end function
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! Expansão Qx(u,x) em polinomios de Legendre !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
function Qx(x,b,N)
implicit none
integer N,i
real*8 x,PLx, b(0:N),qx

qx=0.0d0
do i=0,N
qx=qx+b(i)*PLx(i,x)
end do
end function
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! Expansão LaplacianQ(u,x) em polinomios de Legendre !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
function d2Q(x,b,N)
implicit none
integer N,i
real*8 x,PL, b(0:N),d2Q
d2Q=0.0d0
do i=0,N
d2Q=d2Q-i*(i+1)*b(i)*PL(i,x)
end do
end function
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! Expansão Qxx(u,x) em polinomios de Legendre
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
function Qxx(x,b,N)
implicit none
integer N,i
real*8 x,PLxx, b(0:N),qxx
qxx=0.0d0
do i=0,N
qxx=qxx+b(i)*PLxx(i,x)
end do
end function
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! Erro da Decomposicao de Galerkin !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
function erro(N,b,Q0norm)
implicit none
integer N

real*8 b(0:N), Q0,Q,erro,errotemp,x,Q0norm
erro=0.0d0
x=-1.0d0

do while(x.le.1.0d0)
errotemp=dabs(Q0(x,Q0norm)-Q(x,b,N))*100/dabs(Q0(x,Q0norm))
if(errotemp.gt.erro)then
erro=errotemp
end if
x=x+1.0d-2
end do
end function
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! Extremos de Q !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

```

```

subroutine ExtremeQ (cmin,cmax,N,b)
implicit NONE
integer N
real*8 b(0:N),x,q, h,cmin,cmax,ctemp

x=-1.0d0
h=1.0d-3
do while(x.le.1.0)
ctemp=Q(x,b,N)
if(x.eq.-1.0d0) then
cmin=ctemp
cmax=ctemp
goto 10
end if

if(ctemp.le.cmin) then
cmin=ctemp
end if
if(ctemp.ge.cmax) then

cmax=ctemp
end if
10 x=x+h
end do
end subroutine
!!!!!!!!!!!!!!
! Decomposicao de Galerkin de Q !
! obtido pela sol. do Horizonte !
!!!!!!!!!!!!!!
subroutine coef2(b,N,sol,Nrk)
implicit none
integer fibN, fibNmax
parameter (fibN=20,fibNmax=16)
integer fib(1:fibN),j,l,N, jj,Nrk,F1,F2
real*8 Q0,dx,b(0:N),pi,x,x1,PL,Q0norm
real*8 theta,thetai, thetaf,h,sol(2,0:Nrk)
data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/

pi=dacos(-1.0d0)
thetai=0.0d+1.0d-14
thetaf=pi-1.0d-14
h=(thetaf-thetai)/Nrk
F1=fib(fibNmax-1)
F2=fib(fibNmax)
dx=2.0d0/F2

do l=0,N
b(l)=0.0d0
do j=0,F2
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dasin(pi*x)/pi
theta=dacos(x1)
jj=int((theta-thetai)/h)
b(l)=b(l)+(1.0d0+dcos(pi*x))*(sol(1,jj)*PL(l,x1))
end do

b(l)=b(l)*dx
b(l)=(2*l+1)*b(l)/2.0d0
end do
return
end subroutine

!Normalizacao (Q obtido pelo Horizonte R)

```

```

subroutine norm2(Q0norm,b,N)
implicit none
integer fibN, fibNmax
parameter (fibN=20,fibNmax=14)
integer fib(1:fibN),j,l,N,F1,F2
real*8 Q0norm,dx,pi,x,x1,b(0:N),g1,Q,cte
data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/
common /constante/ cte
pi=dacos(-1.0d0)
F1=int(fib(fibNmax-1))
F2=int(fib(fibNmax))
dx=2.0d0/F2

Q0norm=0.0d0
do j=0,F2,1
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dsin(pi*x)/pi
g1=1.0d0/Q(x1,b,N)**2
Q0norm=Q0norm+(1.0d0+dcos(pi*x))*(g1 )
end do

Q0norm=Q0norm*dx
Q0norm=dsqrt(Q0norm/cte)
return
end subroutine

```

## Curvatura

```
!!!!!!!!!!!!!!!
subroutine Extreme (cmin,cmax,N,b)
implicit NONE
integer N,i
real*8 curv,b(0:N),x, PL, q, h,cmin,cmax,ctemp
x=-1.0d0
i=0
h=1.0d-3
do while(x.le.1.0)
  ctemp=curv(N,b,x)
  if(i.eq.0) then
    cmin=ctemp
    cmax=ctemp
  goto 10
  end if

  if(ctemp.le.cmin) then
    cmin=ctemp
  end if
  if(ctemp.ge.cmax) then
    cmax=ctemp
  end if
10 x=x+h
  i=i+1
end do
end subroutine
```

### Equação de Robinson-Trautman

```
!!!!!!!!!!!!!!!
! Funcao Diferencial db/dy=f(b,u) !
!!!!!!!!!!!!!!!
function fbRT(m0,N,b,x)
real*8 t
integer N, NControl
real*8 b(0:N),fbRT,x,m0
NControl=10
if(NControl.ne.N) then
open(unit=2,file='Erros.dat',form='formatted',status='unknown')
write(2,*)
  "ATENCAO: Equacao de Robson-Trautman truncada em ordem N diferente"
write(2,*)
  "Ajustar N"
write(2,*)
  "Truncamento de Q",N
write(2,*)
  "Truncamento de fb(Q)",NControl
close(2)
stop
end if

t1 = b(10)
t2 = x ** 2
t3 = t2 ** 2
t4 = t3 ** 2
t8 = b(9)
t9 = t4 * x
t12 = b(8)
t15 = 0.6435D4 / 0.128D3 * t12 - 0.109395D6 / 0.256D3 * t1
t18 = b(7)
t20 = -0.6435D4 / 0.32D2 * t8 + 0.429D3 / 0.16D2 * t18
t21 = t2 * x
t22 = t3 * t21
t25 = b(6)
t28 = -0.3003D4 / 0.32D2 * t12 + 0.231D3 / 0.16D2 * t25 + 0.45045D5 / 0.128D3 * t1
t29 = t3 * t2
t33 = b(5)
t35 = 0.9009D4 / 0.64D2 * t8 - 0.693D3 / 0.16D2 * t18 + 0.63D2 / 0.8D1 * t33
t36 = t3 * x
```

```

t38 = b(4)
t43 = 0.35D2 / 0.8D1 * t38 + 0.3465D4 / 0.64D2 * t12 - 0.315D3 / 0.16D2 * t25 - 0.15015D5 / 0.128D3 * t1
t48 = b(3)
t50 = -0.1155D4 / 0.32D2 * t8 - 0.35D2 / 0.4D1 * t33 + 0.315D3 / 0.16D2 * t18 + 0.5D1 / 0.2D1 * t48
t52 = b(2)
t58 = 0.3D1 / 0.2D1 * t52 - 0.15D2 / 0.4D1 * t38 - 0.315D3 / 0.32D2 &
* t12 + 0.3465D4 / 0.256D3 * t1 + 0.105D3 / 0.16D2 * t25
t60 = b(1)
t61 = 0.35D2 / 0.16D2 * t18
t62 = 0.3D1 / 0.2D1 * t48
t63 = 0.15D2 / 0.8D1 * t33
t64 = 0.315D3 / 0.128D3 * t8
t73 = 0.46189D5 / 0.256D3 * t1 * t4 * t2 + 0.12155D5 / 0.128D3 * t8 * &
t9 + t15 * t4 + t20 * t22 + t28 * t29 + t35 * t36 + t43 * t3 + &
t50 * t21 + t58 * t2 + (t60 - t61 - t62 + t63 + t64) * x - 0.5D1 &
/ 0.16D2 * t25 + b(0) - t52 / 0.2D1 + 0.3D1 / 0.8D1 * t38 + 0.35D2 &
/ 0.128D3 * t12 - 0.63D2 / 0.256D3 * t1
t74 = t73 ** 2
t75 = t74 * t73
t94 = 0.230945D6 / 0.128D3 * t1 * t9 + 0.109395D6 / 0.128D3 * t8 * &
t4 + 0.8D1 * t15 * t22 + 0.7D1 * t20 * t29 + 0.6D1 * t28 * t36 + &
0.5D1 * t35 * t3 + 0.4D1 * t43 * t21 + 0.3D1 * t50 * t2 + 0.2D1 * &
t58 * x + t60 - t61 - t62 + t63 + t64
t96 = 0.1D1 / t73
t99 = 0.1D1 - t2
t121 = 0.2078505D7 / 0.128D3 * t1 * t4 + 0.109395D6 / 0.16D2 * t8 &
* t22 + 0.56D2 * t15 * t29 + 0.42D2 * t20 * t36 + 0.30D2 * t28 * t3 &
+ 0.20D2 * t35 * t21 + 0.12D2 * t43 * t2 + 0.6D1 * t50 * x + 0.3D1 * &
t52 - 0.15D2 / 0.2D1 * t38 - 0.315D3 / 0.16D2 * t12 + 0.3465D4 / 0.128D3 &
* t1 + 0.105D3 / 0.8D1 * t25
t122 = t99 * t121
t124 = t94 ** 2
t126 = 0.1D1 / t74
t128 = 0.1D1 - 0.2D1 * x * t94 * t96 + t122 * t96 - t99 * t124 * t126
t129 = t73 * t128
t134 = x * t121
t158 = 0.2078505D7 / 0.16D2 * t1 * t22 + 0.765765D6 / 0.16D2 * t8 &
* t29 + 0.336D3 * t15 * t36 + 0.210D3 * t20 * t3 + 0.120D3 * t28 * &
t21 + 0.60D2 * t35 * t2 + 0.24D2 * t43 * x - 0.3465D4 / 0.16D2 * &
t8 - 0.105D3 / 0.2D1 * t33 + 0.945D3 / 0.8D1 * t18 + 0.15D2 * t48
t159 = t99 * t158
t161 = t126 * t94
t164 = t124 * t94
t166 = 0.1D1 / t75
t169 = -0.2D1 * t94 * t96 - 0.4D1 * t134 * t96 + 0.4D1 * x * t124 &
* t126 + t159 * t96 - 0.3D1 * t122 * t161 + 0.2D1 * t99 * t164 * t166
t217 = t121 ** 2
t221 = t124 ** 2
t223 = t74 ** 2
fbRT = -t75 * (-0.2D1 * x * (0.2D1 * t129 * t94 + t74 * t169) + t99 &
* (0.2D1 * t124 * t128 + 0.4D1 * t73 * t169 * t94 + 0.2D1 * t129 &
* t121 + t74 * (-0.6D1 * t121 * t96 + 0.6D1 * t124 * t126 - 0.6D1 &
* x * t158 * t96 + 0.18D2 * t134 * t161 - 0.12D2 * x * t164 * t166 &
+ t99 * (0.14549535D8 / 0.16D2 * t1 * t29 + 0.2297295D7 / 0.8D1 &
* t8 * t36 + 0.1680D4 * t15 * t3 + 0.840D3 * t20 * t21 + 0.360D3 * &
t28 * t2 + 0.120D3 * t35 * x + 0.105D3 * t38 + 0.10395D5 / 0.8D1 &
* t12 - 0.945D3 / 0.2D1 * t25 - 0.45045D5 / 0.16D2 * t1) * t96 - 0.4D1 &
* t159 * t161 + 0.12D2 * t122 * t166 * t124 - 0.3D1 * t99 * t217 * t126 &
- 0.6D1 * t99 * t221 / t223))) / m0 / 0.12D2
end function

function fbx(x,b,N,m0)
real*8 t
integer N,Ncontrol

```

```

real*8 x, b(0:N),m0
NControl=10
if(NControl.ne.N) then
open(unit=2,file='Erros.dat',form='formatted',status='unknown')
write(2,*) "ATENCAO: Equacao de Robson-Trautman truncada em ordem N diferente"
write(2,*) "Ajustar N"
write(2,*) "Truncamento de Q ",N
write(2,*) "Truncamento de fb(Q) ",NControl
close(2)
stop
end if

t1 = b(10)
t2 = x ** 2
t3 = t2 ** 2
t4 = t3 ** 2
t8 = b(9)
t9 = t4 * x
t13 = b(8)
t15 = -0.109395D6 / 0.256D3 * t1 + 0.6435D4 / 0.128D3 * t13
t17 = b(7)
t20 = 0.429D3 / 0.16D2 * t17 - 0.6435D4 / 0.32D2 * t8
t21 = t2 * x
t22 = t3 * t21
t26 = b(6)
t28 = 0.45045D5 / 0.128D3 * t1 - 0.3003D4 / 0.32D2 * t13 + 0.231D3 &
/ 0.16D2 * t26
t29 = t3 * t2
t33 = b(5)
t35 = 0.9009D4 / 0.64D2 * t8 - 0.693D3 / 0.16D2 * t17 + 0.63D2 / 0.8D1 * t33
t36 = t3 * x
t39 = b(4)
t43 = 0.3465D4 / 0.64D2 * t13 + 0.35D2 / 0.8D1 * t39 - 0.15015D5 / 0.128D3 * t1 - 0.315D3 / 0.16D2 * t26
t45 = b(3)
t50 = 0.5D1 / 0.2D1 * t45 - 0.35D2 / 0.4D1 * t33 - 0.1155D4 / 0.32D2 * t8 + 0.315D3 / 0.16D2 * t17
t53 = b(2)
t58 = -0.15D2 / 0.4D1 * t39 + 0.3D1 / 0.2D1 * t53 - 0.315D3 / 0.32D2 * &
t13 + 0.3465D4 / 0.256D3 * t1 + 0.105D3 / 0.16D2 * t26
t60 = 0.3D1 / 0.2D1 * t45
t61 = 0.15D2 / 0.8D1 * t33
t62 = 0.35D2 / 0.16D2 * t17
t63 = b(1)
t64 = 0.315D3 / 0.128D3 * t8
t73 = 0.46189D5 / 0.256D3 * t1 * t4 * t2 + 0.12155D5 / 0.128D3 * t8 &
* t9 + t15 * t4 + t20 * t22 + t28 * t29 + t35 * t36 + t43 * t3 + t50 &
* t21 + t58 * t2 + (-t60 + t61 - t62 + t63 + t64) * x + b(0) + &
0.35D2 / 0.128D3 * t13 - t53 / 0.2D1 + 0.3D1 / 0.8D1 * t39 - 0.5D1 &
/ 0.16D2 * t26 - 0.63D2 / 0.256D3 * t1
t74 = t73 ** 2
t93 = 0.230945D6 / 0.128D3 * t1 * t9 + 0.109395D6 / 0.128D3 * t8 * t4 + &
0.8D1 * t15 * t22 + 0.7D1 * t20 * t29 + 0.6D1 * t28 * t36 + 0.5D1 * &
t35 * t3 + 0.4D1 * t43 * t21 + 0.3D1 * t50 * t2 + 0.2D1 * t58 * x - &
t60 + t61 - t62 + t63 + t64
t95 = 0.1D1 / t73
t98 = 0.1D1 - t2
t120 = 0.2078505D7 / 0.128D3 * t1 * t4 + 0.109395D6 / 0.16D2 * t8 * t22 &
+ 0.56D2 * t15 * t29 + 0.42D2 * t20 * t36 + 0.30D2 * t28 * t3 + 0.20D2 &
* t35 * t21 + 0.12D2 * t43 * t2 + 0.6D1 * t50 * x - 0.15D2 / 0.2D1 * &
t39 + 0.3D1 * t53 - 0.315D3 / 0.16D2 * t13 + 0.3465D4 / 0.128D3 * t1 + 0.105D3 / 0.8D1 * t26
t121 = t98 * t120
t123 = t93 ** 2
t125 = 0.1D1 / t74
t127 = 0.1D1 - 0.2D1 * x * t93 * t95 + t121 * t95 - t98 * t123 * t125
t128 = t73 * t127

```

```

t129 = t128 * t93
t133 = x * t120
t157 = 0.2078505D7 / 0.16D2 * t1 * t22 + 0.765765D6 / 0.16D2 * t8 &
* t29 + 0.336D3 * t15 * t36 + 0.210D3 * t20 * t3 + 0.120D3 * t28 * &
t21 + 0.60D2 * t35 * t2 + 0.24D2 * t43 * x + 0.15D2 * t45 - 0.105D3 &
/ 0.2D1 * t33 - 0.3465D4 / 0.16D2 * t8 + 0.945D3 / 0.8D1 * t17
t158 = t98 * t157
t160 = t125 * t93
t163 = t123 * t93
t165 = t74 * t73
t166 = 0.1D1 / t165
t169 = -0.2D1 * t93 * t95 - 0.4D1 * t133 * t95 + 0.4D1 * x * t123 &
* t125 + t158 * t95 - 0.3D1 * t121 * t160 + 0.2D1 * t98 * t163 * t166
t170 = t74 * t169
t176 = t73 * t169
t185 = x * t157
t209 = 0.14549535D8 / 0.16D2 * t1 * t29 + 0.2297295D7 / 0.8D1 * t8 &
* t36 + 0.1680D4 * t15 * t3 + 0.840D3 * t20 * t21 + 0.360D3 * t28 &
* t2 + 0.120D3 * t35 * x + 0.10395D5 / 0.8D1 * t13 + 0.105D3 * t39 &
- 0.45045D5 / 0.16D2 * t1 - 0.945D3 / 0.2D1 * t26
t210 = t98 * t209
t214 = t166 * t123
t217 = t120 ** 2
t218 = t98 * t217
t221 = t123 ** 2
t223 = t74 ** 2
t224 = 0.1D1 / t223
t227 = -0.6D1 * t120 * t95 + 0.6D1 * t123 * t125 - 0.6D1 * t185 * &
t95 + 0.18D2 * t133 * t160 - 0.12D2 * x * t163 * t166 + t210 * t95 &
- 0.4D1 * t158 * t160 + 0.12D2 * t121 * t214 - 0.3D1 * t218 * t125 &
- 0.6D1 * t98 * t221 * t224
t229 = 0.2D1 * t123 * t127 + 0.4D1 * t176 * t93 + 0.2D1 * t128 * t120 + t74 * t227
t233 = 0.1D1 / m0
t277 = t120 * t125
t307 = 0.30D2 * t218 * t166 * t93 + t98 * (0.43648605D8 / 0.8D1 * &
t1 * t36 + 0.11486475D8 / 0.8D1 * t8 * t3 + 0.6720D4 * t15 * t21 + &
0.2520D4 * t20 * t2 + 0.720D3 * t28 * x + 0.135135D6 / 0.8D1 * t8 &
- 0.10395D5 / 0.2D1 * t17 + 0.945D3 * t33) * t95 - 0.8D1 * x * t209 &
* t95 - 0.24D2 * t163 * t166 + 0.36D2 * t277 * t93 + 0.32D2 * t185 &
* t160 + 0.24D2 * x * t217 * t125 + 0.48D2 * x * t221 * t224 - 0.96D2 &
* t133 * t214 + 0.20D2 * t158 * t214 - 0.60D2 * t121 * t224 * t163 - &
0.12D2 * t157 * t95 - 0.5D1 * t210 * t160 - 0.10D2 * t158 * t277 + &
0.24D2 * t98 * t221 * t93 / t223 / t73
fbx = -t74 * (-0.2D1 * x * (0.2D1 * t129 + t170) + t98 * t229) * t233 &
* t93 / 0.4D1 - t165 * (-0.4D1 * t129 - 0.2D1 * t170 - 0.4D1 * x * &
t229 + t98 * (0.6D1 * t93 * t127 * t120 + 0.6D1 * t123 * t169 + 0.6D1 &
* t73 * t227 * t93 + 0.6D1 * t176 * t120 + 0.2D1 * t128 * t157 + t74 * t307)) * t233 / 0.12D2
end function

function fbxx(x,b,N,m0)
real*8 t
integer N,Ncontrol
real*8 x, b(0:N),m0
NControl=10
if(NControl.ne.N) then
open(unit=2,file='Erros.dat',form='formatted',status='unknown')
write(2,*) "ATENCAO: Equacao de Robson-Trautman truncada em ordem N diferente"
write(2,*) "Ajustar N"
write(2,*) "Truncamento de Q ",N
write(2,*) "Truncamento de fb(Q ) ",NControl
close(2)
stop
end if
t1 = b(10)

```

```

t2 = x ** 2
t3 = t2 ** 2
t4 = t3 ** 2
t8 = b(9)
t9 = t4 * x
t12 = b(8)
t15 = 0.6435D4 / 0.128D3 * t12 - 0.109395D6 / 0.256D3 * t1
t18 = b(7)
t20 = -0.6435D4 / 0.32D2 * t8 + 0.429D3 / 0.16D2 * t18
t21 = t2 * x
t22 = t3 * t21
t25 = b(6)
t28 = -0.3003D4 / 0.32D2 * t12 + 0.231D3 / 0.16D2 * t25 + 0.45045D5 / 0.128D3 * t1
t29 = t3 * t2
t33 = b(5)
t35 = 0.9009D4 / 0.64D2 * t8 - 0.693D3 / 0.16D2 * t18 + 0.63D2 / 0.8D1 * t33
t36 = t3 * x
t38 = b(4)
t43 = 0.35D2 / 0.8D1 * t38 + 0.3465D4 / 0.64D2 * t12 - 0.315D3 / 0.16D2 * t25 - 0.15015D5 / 0.128D3 * t1
t48 = b(3)
t50 = -0.1155D4 / 0.32D2 * t8 - 0.35D2 / 0.4D1 * t33 + 0.315D3 / 0.16D2 * t18 + 0.5D1 / 0.2D1 * t48
t52 = b(2)
t58 = 0.3D1 / 0.2D1 * t52 - 0.15D2 / 0.4D1 * t38 - 0.315D3 / 0.32D2 * t12 + &
0.3465D4 / 0.256D3 * t1 + 0.105D3 / 0.16D2 * t25
t60 = b(1)
t61 = 0.35D2 / 0.16D2 * t18
t62 = 0.3D1 / 0.2D1 * t48
t63 = 0.15D2 / 0.8D1 * t33
t64 = 0.315D3 / 0.128D3 * t8
t73 = 0.46189D5 / 0.256D3 * t1 * t4 * t2 + 0.12155D5 / 0.128D3 * t8 * &
t9 + t15 * t4 + t20 * t22 + t28 * t29 + t35 * t36 + t43 * t3 + t50 * &
t21 + t58 * t2 + (t60 - t61 - t62 + t63 + t64) * x - 0.5D1 / 0.16D2 * &
t25 + b(0) - t52 / 0.2D1 + 0.3D1 / 0.8D1 * t38 + 0.35D2 / 0.128D3 * t12 - 0.63D2 / 0.256D3 * t1
t92 = 0.230945D6 / 0.128D3 * t1 * t9 + 0.109395D6 / 0.128D3 * t8 * t4 &
+ 0.8D1 * t15 * t22 + 0.7D1 * t20 * t29 + 0.6D1 * t28 * t36 + 0.5D1 * &
t35 * t3 + 0.4D1 * t43 * t21 + 0.3D1 * t50 * t2 + 0.2D1 * t58 * x + t60 &
- t61 - t62 + t63 + t64
t94 = 0.1D1 / t73
t97 = 0.1D1 - t2
t119 = 0.2078505D7 / 0.128D3 * t1 * t4 + 0.109395D6 / 0.16D2 * t8 &
* t22 + 0.56D2 * t15 * t29 + 0.42D2 * t20 * t36 + 0.30D2 * t28 * t3 + &
0.20D2 * t35 * t21 + 0.12D2 * t43 * t2 + 0.6D1 * t50 * x + 0.3D1 * &
t52 - 0.15D2 / 0.2D1 * t38 - 0.315D3 / 0.16D2 * t12 + 0.3465D4 / &
0.128D3 * t1 + 0.105D3 / 0.8D1 * t25
t120 = t97 * t119
t122 = t92 ** 2
t124 = t73 ** 2
t125 = 0.1D1 / t124
t127 = 0.1D1 - 0.2D1 * x * t92 * t94 + t120 * t94 - t97 * t122 * t125
t128 = t73 * t127
t129 = t128 * t92
t133 = x * t119
t157 = 0.2078505D7 / 0.16D2 * t1 * t22 + 0.765765D6 / 0.16D2 * t8 * &
t29 + 0.336D3 * t15 * t36 + 0.210D3 * t20 * t3 + 0.120D3 * t28 * &
t21 + 0.60D2 * t35 * t2 + 0.24D2 * t43 * x - 0.3465D4 / 0.16D2 * t8 &
- 0.105D3 / 0.2D1 * t33 + 0.945D3 / 0.8D1 * t18 + 0.15D2 * t48
t158 = t97 * t157
t160 = t125 * t92
t163 = t122 * t92
t165 = t124 * t73
t166 = 0.1D1 / t165
t169 = -0.2D1 * t92 * t94 - 0.4D1 * t133 * t94 + 0.4D1 * x * t122 &
* t125 + t158 * t94 - 0.3D1 * t120 * t160 + 0.2D1 * t97 * t163 * t166
t170 = t124 * t169

```

```

t174 = t122 * t127
t176 = t73 * t169
t177 = t176 * t92
t179 = t128 * t119
t185 = x * t157
t190 = x * t163
t209 = 0.14549535D8 / 0.16D2 * t1 * t29 + 0.2297295D7 / 0.8D1 * t8 &
* t36 + 0.1680D4 * t15 * t3 + 0.840D3 * t20 * t21 + 0.360D3 * t28 &
* t2 + 0.120D3 * t35 * x + 0.105D3 * t38 + 0.10395D5 / 0.8D1 * t12 &
- 0.945D3 / 0.2D1 * t25 - 0.45045D5 / 0.16D2 * t1
t210 = t97 * t209
t214 = t166 * t122
t217 = t119 ** 2
t218 = t97 * t217
t221 = t122 ** 2
t222 = t97 * t221
t223 = t124 ** 2
t224 = 0.1D1 / t223
t227 = -0.6D1 * t119 * t94 + 0.6D1 * t122 * t125 - 0.6D1 * t185 * t94 &
+ 0.18D2 * t133 * t160 - 0.12D2 * t190 * t166 + t210 * t94 - 0.4D1 &
* t158 * t160 + 0.12D2 * t120 * t214 - 0.3D1 * t218 * t125 - 0.6D1 * t222 * t224
t228 = t124 * t227
t229 = 0.2D1 * t174 + 0.4D1 * t177 + 0.2D1 * t179 + t228
t231 = -0.2D1 * x * (0.2D1 * t129 + t170) + t97 * t229
t233 = 0.1D1 / m0
t241 = t92 * t127
t246 = t73 * t227
t253 = x * t209
t269 = 0.43648605D8 / 0.8D1 * t1 * t36 + 0.11486475D8 / 0.8D1 * t8 &
* t3 + 0.6720D4 * t15 * t21 + 0.2520D4 * t20 * t2 + 0.720D3 * t28 &
* x + 0.135135D6 / 0.8D1 * t8 - 0.10395D5 / 0.2D1 * t18 + 0.945D3 * t33
t270 = t97 * t269
t274 = x * t217
t282 = t125 * t119
t285 = t221 * t92
t288 = 0.1D1 / t223 / t73
t293 = t224 * t163
t296 = t166 * t92
t307 = -0.8D1 * t253 * t94 + t270 * t94 + 0.32D2 * t185 * t160 + 0.24D2 &
* t274 * t125 + 0.48D2 * x * t221 * t224 - 0.5D1 * t210 * t160 &
- 0.10D2 * t158 * t282 + 0.24D2 * t97 * t285 * t288 - 0.12D2 * t157 &
* t94 - 0.60D2 * t120 * t293 + 0.30D2 * t218 * t296 - 0.96D2 * t133 &
* t214 + 0.20D2 * t158 * t214 + 0.36D2 * t282 * t92 - 0.24D2 * t163 * t166
t309 = 0.6D1 * t241 * t119 + 0.6D1 * t122 * t169 + 0.6D1 * t246 * t92 &
+ 0.6D1 * t176 * t119 + 0.2D1 * t128 * t157 + t124 * t307
t344 = t166 * t119
t372 = 0.120D3 * t158 * t344 * t92 - 0.270D3 * t218 * t224 * t122 + &
0.60D2 * t217 * t125 - 0.10D2 * x * t269 * t94 - 0.20D2 * t209 * &
t94 + 0.50D2 * t253 * t160 - 0.6D1 * t270 * t160 + 0.80D2 * t157 &
* t125 * t92 + 0.100D3 * t185 * t282 - 0.300D3 * t274 * t296 + &
0.600D3 * t190 * t224 * t119
t378 = t157 ** 2
t419 = -0.240D3 * x * t285 * t288 - 0.15D2 * t210 * t282 - 0.10D2 * &
t97 * t378 * t125 + 0.360D3 * t222 * t288 * t119 - 0.120D3 * t97 &
* t221 * t122 / t223 / t124 - 0.120D3 * t158 * t293 + 0.30D2 * t97 &
* t217 * t119 * t166 - 0.240D3 * t344 * t122 + t97 * (0.218243025D9 &
/ 0.8D1 * t1 * t3 + 0.11486475D8 / 0.2D1 * t8 * t21 + 0.20160D5 * t15 &
* t2 + 0.5040D4 * t20 * x - 0.135135D6 / 0.2D1 * t12 + 0.10395D5 * t25 &
+ 0.2027025D7 / 0.8D1 * t1) * t94 - 0.200D3 * t185 * t214 + 0.120D3 * &
t221 * t224 + 0.30D2 * t210 * t214
fbxx = -t73 * t231 * t233 * t122 / 0.2D1 - t124 * (-0.4D1 * t129 - 0.2D1 &
* t170 - 0.4D1 * x * t229 + t97 * t309) * t233 * t92 / 0.2D1 &
- t124 * t231 * t233 * t119 / 0.4D1 - t165 * (-0.12D2 * t174 - 0.24D2 &
* t177 - 0.12D2 * t179 - 0.6D1 * t228 - 0.6D1 * x * t309 + t97 * (0.6D1 &

```

```

* t217 * t127 + 0.24D2 * t92 * t169 * t119 + 0.8D1 * t241 * t157 + 0.12D2 &
* t122 * t227 + 0.8D1 * t73 * t307 * t92 + 0.12D2 * t246 * t119 + 0.8D1 * &
t176 * t157 + 0.2D1 * t128 * t209 + t124 * (t372 + t419)) * t233 / 0.12D2
end function

subroutine funcdiff(fb,m0,N,b)
implicit NONE
integer fibN, fibNmax
parameter (fibN=20,fibNmax=16)
integer fib(1:fibN),j,l,N
real*8 Q0,dx,b(0:N),pi,x,x1,F1,F2,PL,fb(0:N),fbRT,m0
data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/

pi=dacos(-1.0d0)
F1=fib(fibNmax-1)
F2=fib(fibNmax)
dx=2.0d0/F2

do l=0,N
fb(l)=0.0d0

do j=0,F2,1
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dsin(pi*x)/pi
fb(l)=fb(l)+(1.0d0+dcos(pi*x))*(fbRT(m0,N,b,x1)*PL(l,x1))
end do
fb(l)=fb(l)*dx
fb(l)=(2*l+1)*fb(l)/2.0d0
end do
return
end subroutine

```

## Horizonte

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!Funcoes Gerais!!!!!!!!!!!!!!
!!!!
! Horizonte Aparente Inicial      !
!!!!
function Ri(x)
implicit none
real*8 Ri,x
Ri=(1.0d0 + (1.0d0-x**2)*(x+1.0d0/4)/4 )**(-1.0d0/3)
end function
!!!!
! Galerkin Horizonte Inicial    !
!!!!
subroutine coefRi(a,Nhor)
implicit none
integer fibN, fibNmax
integer Nhor
parameter (fibN=20,fibNmax=14)
integer fib(1:fibN),j,l,F1,F2
real*8 dx,pi,x,x1,PL,a(0:Nhor),Ri
data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/

pi=dacos(-1.0d0)
F1=int(fib(fibNmax-1))
F2=int(fib(fibNmax))
dx=2.0d0/F2

do l=0,Nhor
a(l)=0.0d0

```

```

do j=0,F2,1
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dsin(pi*x)/pi
a(1)=a(1)+(1.0d0+dcos(pi*x))*(Ri(x1)*PL(1,x1))
end do

a(1)=a(1)*dx
a(1)=(2*l+1)*a(1)/2.0d0
end do
return
end subroutine

function R0(x,a,Nhor)
implicit none
integer Nhor,i
real*8 R0,x,PL,a(0:Nhor)

R0=0.0d0
do i=0,Nhor
R0=R0+a(i)*PL(i,x)
end do
end function

function ROx(x,a,Nhor)
implicit none
integer Nhor,i
real*8 ROx,x,PLx,a(0:Nhor)
ROx=0.0d0
do i=0,Nhor
ROx=ROx+a(i)*PLx(i,x)
end do
end function

function d2R0(x,a,Nhor)
implicit none
integer Nhor,i
real*8 d2R0,x,PL,a(0:Nhor)
d2R0=0.0d0
do i=0,Nhor
d2R0=d2R0-i*(i+1)*a(i)*PL(i,x)
end do
end function

function d2lnR0(x,a,Nhor)
integer Nhor
real*8 x,d2lnR0,R0,Rx,d2R0, R0t,a(0:Nhor)

R0t=R0(x,a,Nhor)
d2lnR0=d2R0(x,a,Nhor)/R0t-(1.0d0-x**2)*(ROx(x,a,Nhor)/R0t)**2
end function
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! Horizonte Aparente R(u,x)=2m0*exp(-lambda) !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!


function R(x,c,NHor)
implicit none
integer NHor,i
real*8 x,c(0:NHor),lambda,R
R=dexp(-lambda(x,c,NHor))
end function

function d2lnR(x,c,NHor)
implicit none
integer NHor,i
real*8 x,PL, c(0:NHor),d2lnR

```

```

d2lnR=0.0d0
do i=0,Nhor
d2lnR=d2lnR+i*(i+1)*c(i)*PL(i,x)
end do
end function
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! Expans?o lambda(u,x) em polinomios de Legendre !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

function lambda(x,c,Nhor)
implicit none
integer Nhor,i
real*8 x,PL, c(0:Nhor),lambda
lambda=0.0d0
do i=0,Nhor
lambda=lambda+c(i)*PL(i,x)
end do
end function
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!Calculo dos coeficiente c dada decomposicao a !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
subroutine coefHor(c,Nhor,a)
implicit none
integer fibN, fibNmax
parameter (fibN=20,fibNmax=14)
integer fib(1:fibN),j,l,Nhor
real*8 R0,dx,c(0:Nhor),pi,x,x1,F1,F2,PL,a(0:Nhor)
data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/

pi=dacos(-1.0d0)
F1=fib(fibNmax-1)
F2=fib(fibNmax)
dx=2.0d0/F2

do l=0,Nhor
c(l)=0.0d0

do j=0,F2,1
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dsin(pi*x)/pi
c(l)=c(l)+(1.0d0+dcos(pi*x))*(dlog(R0(x1,a,Nhor))*PL(l,x1))
end do
c(l)=c(l)*dx
c(l)=-(2*l+1)*c(l)/2.0d0
end do
return
end subroutine
!!!!!!!!!!!!!!
!Calculo dos coeficiente a dada decomposicao c !
!!!!!!!!!!!!!!

subroutine coefAH(a,Nhor,c)
implicit none
integer fibN, fibNmax
parameter (fibN=20,fibNmax=13)
integer fib(1:fibN),j,l,N,Nhor
real*8 Q0,dx,a(0:Nhor),pi,x,x1,F1,F2,PL,c(0:Nhor),R,m0
data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/

pi=dacos(-1.0d0)
F1=fib(fibNmax-1)

```

```

F2=fib(fibNmax)
dx=2.0d0/F2

do l=0,NHor
a(l)=0.0d0

do j=0,F2,1
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dsin(pi*x)/pi
a(l)=a(l)+(1.0d0+dcos(pi*x))*(R(x1,c,NHor)*PL(l,x1))
end do
a(l)=a(l)*dx
a(l)=(2*l+1)*a(l)/2.0d0
a(l)=a(l)
end do
return
end subroutine
!!!!!!!!!!!!!!
! Massa do Horizonte Aparente !
!!!!!!!!!!!!!!
subroutine MassaAH(MassaAH, c,b,Nhor,N)
implicit none
integer fibN, fibNmax, Nhor,N
parameter (fibN=20,fibNmax=13)
integer fib(1:fibN),j,l
real*8 MassAH,dx,pi,x,x1,F1,F2,Q,R,b(0:N), c(0:N),AAH
data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/

pi=dacos(-1.0d0)
F1=fib(fibNmax-1)
F2=fib(fibNmax)
dx=2.0d0/F2

AAH=0.0d0
do j=0,F2,1
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dsin(pi*x)/pi
!Rotinas do Horizonte resolvem para R'=R/2M0
!A area/massa deve ser calculada em termos de R=2M0*R'
!Por isso o fator de 2 na integracao abaixo
AAH=AAH+(1.0d0+dcos(pi*x))*( (2*R(x1,c,NHor)/Q(x1,b,N))**2)
end do
AAH=AAH*dx

MassAh=dsqrt(AAH/8.0d0)
return

end subroutine
!!!!!!!!!!!!!!
! Curvatura do Horizonte !
!!!!!!!!!!!!!!
function Khorz(x,c,Nhor)
implicit none
integer Nhor
real*8 Khorz, c(0:Nhor), R,x

Khorz=1.0d0/R(x,c,Nhor)**3 !(curv(N,b,x)-d2lnR(x,c,Nhor)*Q(x,b,N)**2)/(R(x,c,Nhor)**2)
end function

function KMM(xx,MultiMod,Nmm)
implicit none
integer Nmm, i

```

```

real*8 Kmm,MultiMod(0:Nmm),xx,P1

KMM=0.0d0
do i=0,Nmm
Kmm=Kmm+MultiMod(i)*PL(i,xx)
end do
end function
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!Boundary Condition - Shooting Method!!!!!!!!!!!!!!!!

! Funcao diferencial para R
subroutine funcR(fr,r,theta,b,N)
integer N
real*8 fr(2),r(2),x,curv,q,b(0:N), theta,pi
pi=dacos(-1.0d0)
x=dcos(theta)
fr(1)=r(2)
fr(2)=r(1)*curv(N,b,x)/(Q(x,b,N)**2)+r(2)*(r(2)/r(1)-dcos(theta)/dsin(theta))-1.0d0/(Q(x,b,N)**2)
end subroutine

subroutine funczr(fzr,zr,r,theta,b,N)
integer N
real*8 fzr(2),r(2),x,curv,Q,b(0:N), theta,pi,zr(2), FR,FRtheta
pi=dacos(-1.0d0)
x=dcos(theta)

FR=curv(N,b,x)/(Q(x,b,N)**2)-(r(2)/r(1))**2
FRtheta=2*r(2)/r(1)-dcos(theta)/dsin(theta)
fzr(1)=zr(2)
fzr(2)=zr(1)*FR+zr(2)*FRtheta
end subroutine

! Runke Kutta para R
subroutine RKR(solr,Nrk,N,b)
implicit none
integer l, Nrk, i, N,M, j, Nenc
parameter(M=10000)
real*8 h,thetai,thetaf,pi,b(0:N),tol1,tol2,difr, difrtheta,solr(2,0:Nrk)
real*8 thetapt, thetapt, rp(2),rpt(2), frp1(2),frp2(2),frp3(2),frp4(2),solp(2,0:Nrk),w(2),wt(2),fw1(2),fw2(2),fw3(2),fw4(2),t
real*8 thetam, thetam, rm(2),rmt(2), frm1(2),frm2(2),frm3(2),frm4(2),solm(2,0:Nrk),z(2),zt(2),fz1(2),fz2(2),fz3(2),fz4(2),s
real*8 g(2),Jac(2,2),del(2)
pi=dacos(-1.0d0)
do i=0,Nrk
solp(1,i)=0.0d0
solp(2,i)=0.0d0
solm(1,Nrk-i)=0.0d0
solm(2,Nrk-i)=0.0d0
end do

thetai=0.0d0+1.0d-14
thetaf=pi-1.0d-14
h=(thetaf-thetai)/NRK
tol1=5.0d-8
tol2=5.0d-8

Nenc=Nrk/2

t=1.0d0
s=1.0d0
do j=1,M

rp(1)=t
rp(2)=0.0d0
w(1)=1.0d0
w(2)=0.0d0

```

```

do i=0,Nenc-1
thetap=thetai+i*h
solp(1,i)=rp(1)
solp(2,i)=rp(2)
call funcR(frp1,rp,thetap,b,N)
call funcZR(fw1,w,wp,thetap,b,N)
thetapt=thetap+h/2.0d0

do l=1,2
rpt(l)=rp(l)+h*frp1(l)/2.0d0
wt(l)=w(l)+h*fw1(l)/2.0d0
end do

call funcR(frp2,rpt,thetapt,b,N)
call funcZR(fw2,wt,wp,thetapt,b,N)
thetapt=thetap+h/2.0d0
do l=1,2
rpt(l)=rp(l)+h*frp2(l)/2.0d0
wt(l)=w(l)+h*fw2(l)/2.0d0
end do

call funcR(frp3,rpt,thetapt,b,N)
call funcZR(fw3,wt,wp,thetapt,b,N)
thetapt=thetap+h
do l=1,2
rpt(l)=rp(l)+h*frp3(l)
wt(l)=w(l)+h*fw3(l)
end do

call funcR(frp4,rpt,thetapt,b,N)
call funcZR(fw4,wt,wp,thetapt,b,N)
do l=1,2
rp(l)=rp(l)+(h/6.0d0)*(frp1(l)+2.0d0*frp2(l)+2.0d0*frp3(l)+frp4(l))
w(l)=w(l)+(h/6.0d0)*(fw1(l)+2.0d0*fw2(l)+2.0d0*fw3(l)+fw4(l))
end do
end do

thetap=thetai+i*h
solp(1,i)=rp(1)
solp(2,i)=rp(2)

print*, "Condições Iniciais"
print*, j,t,s

rm(1)=s
rm(2)=0.0d0
z(1)=1.0d0
z(2)=0.0d0

do i=Nrk, Nenc+1,-1
thetam=thetai+i*h
solm(1,i)=rm(1)
solm(2,i)=rm(2)
call funcR(frm1,rm,thetam,b,N)
call funcZR(fz1,z,rm,thetam,b,N)

thetamt=thetam-h/2.0d0

do l=1,2
rmt(l)=rm(l)-h*frm1(l)/2.0d0
zt(l)=z(l)-h*fz1(l)/2.0d0
end do

```

```

call funcR(frm2,rmt,thetamt,b,N)
call funcZR(fz2,zt,rm,thetamt,b,N)

thetamt=thetam-h/2.0d0

do l=1,2
rmt(l)=rm(l)-h*frm2(l)/2.0d0
zt(l)=z(l)-h*fz2(l)/2.0d0
end do

call funcR(frm3,rmt,thetamt,b,N)
call funcZR(fz3,zt,rm,thetamt,b,N)
thetamt=thetam-h

do l=1,2
rmt(l)=rm(l)-h*frm3(l)
zt(l)=z(l)-h*fz3(l)
end do

call funcR(frm4,rmt,thetamt,b,N)
call funcZR(fz4,zt,rm,thetamt,b,N)
do l=1,2
rm(l)=rm(l)-(h/6.0d0)*(frm1(l)+2.0d0*frm2(l)+2.0d0*frm3(l)+frm4(l))
z(l)=z(l)-(h/6.0d0)*(fz1(l)+2.0d0*fz2(l)+2.0d0*fz3(l)+fz4(l))

end do
end do

thetam=thetai+i*h
solm(1,i)=rm(1)
solm(2,i)=rm(2)
g(1)=rp(1)-rm(1)
g(2)=rp(2)-rm(2)
print*, g

if(dabs(g(1)).le.tol1.and.dabs(g(2)).lt.tol2) then
print*, "Match"
do i=0,Nenc
thetap=thetai+(i)*h
solr(1,i)=solp(1,i)
solr(2,i)=solp(2,i)
end do
do i=Nenc+1,Nrk
thetap=thetai+(i)*h
solr(1,i)=solm(1,i)
solr(2,i)=solm(2,i)
end do
return
end if
Jac(1,1)=w(1)
Jac(1,2)=-z(1)
Jac(2,1)=w(2)
Jac(2,2)=-z(2)
call gauss2(del,g,Jac)
t=dabs(t+del(1))
s=dabs(s+del(2))
end do
do i=0,Nrk/2
thetap=thetai+(i)*h
write(3,*) thetap/pi, solp(1,i),solp(2,i)
end do
do i=Nrk/2+1,Nrk
thetap=thetai+(i)*h

```

```

write(3,*)
  thetap/pi, solm(1,i),solm(2,i)
end do

print*, "No Match: Sorry"
stop
end subroutine

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! Decomposicao de Galerkin de R !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
subroutine coefR(a,NHor,solr,Nrk)
implicit none
integer fibN, fibNmax
parameter (fibN=20,fibNmax=16)
integer fib(1:fibN),j,l,NHor, jj,Nrk
real*8 dx,a(0:NHor),pi,x,x1,F1,F2,PL
real*8 theta,thetai, thetaf,h,solr(2,0:Nrk)
data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
      377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/
pi=dacos(-1.0d0)
thetai=0.0d0+1.0d-14
thetaf=pi-1.0d-14
h=(thetaf-thetai)/Nrk

F1=fib(fibNmax-1)
F2=fib(fibNmax)
dx=2.0d0/F2

do l=0,NHor
  a(l)=0.0d0
  do j=0,F2
    x=-1.0d0+j*dx
    x1=x+dsin(pi*x)/pi
    theta=dacos(x1)
    jj=int((theta-thetai)/h)
    a(l)=a(l)+(1.0d0+dcos(pi*x))*(solr(1,jj)*PL(l,x1))
  end do
  a(l)=a(l)*dx
  a(l)=(2*l+1)*a(l)/2.0d0
end do
return
end subroutine

!!!!!!!!!!!!!!Double Decomposition - Newton Method!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!
! Calculo do Horizonte Aparente !
!!!!!!!!!!!!!!
subroutine Horizon (c,b,N,NHor)
implicit none
integer N,NHor,i
real*8 modv
real*8 b(0:N),c(0:NHor),s(1:NHor+1)

do
  call gauss (s,NHor,c,b,N)
  do i=0,NHor
    c(i)=c(i)+s(i+1)
  end do
  print*, modv(s,NHor)
  if (modv(s,NHor).lt.1.0d-8) exit
end do
return
end subroutine
!!!!!!!!!!!!!!

```

```

! Eliminacao de Gauss -      !
! Resolucao de Sist Linear  !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

subroutine gauss (s,NHor,c,b,N)
implicit none
integer NHor,N,i,l,k,j,mm,jj
real*8 Jx(1:(NHor+2),1:(NHor+2)),s(1:NHor+1),c(0:NHor),Jt(1:(NHor+2)),F(1:NHor+1),p,q
real*8 b(0:N),v(0:NHor),w(0:NHor),z(0:NHor,0:NHor)

call coefSL(Z,W,V,b,C,NHor,N)

!sistema nao linear f0(c0,...,cM)=0, ... , fM(c0,...,cM)=0
do j=0,NHor
  F(j+1)=(2*j*(j+1))*c(j)/(2*j+1)+V(j)+W(j)
!Matrix Jacobiana extedida Jij=dyi/dxj

  do jj=0,NHor
    if(j.eq.jj) then
      Jx(j+1,jj+1)=1.0d0*(2*j*(j+1))/(2*j+1)+Z(j,jj)
    else
      Jx(j+1,jj+1)=Z(j,jj)
    end if
  end do

  JX(j+1,NHor+2)=-F(j+1)

end do
do i=1,NHor

  l=i
  do
    if (Jx(l,i).ne.0.0d0) exit
    if(l.eq.NHor+1) then
      write(*,*) "sistema sem solucao unica"
      stop
    end if
    l=l+1
  end do

  if(l.ne.i) then
    do k=1,(NHor+2)
      Jt(k)=Jx(l,k)
      Jx(l,k)=Jx(i,k)
      Jx(i,k)=Jt(k)
    end do
    end if

    do mm=(i+1),NHor+1
      p=Jx(mm,i)/Jx(i,i)
      do k=1,(NHor+2)
        Jx(mm,k)=Jx(mm,k)-p*Jx(i,k)
      end do
    end do
    end do

    if(Jx(NHor+1,NHor+1).eq.0.0d0) then
      write(*,*) "Sistema sem solucao unica"
      stop
    end if

    s(NHor+1)=Jx(NHor+1,(NHor+2))/Jx(NHor+1,NHor+1)
    i=NHor
    do while(i.ge.1)
      q=0.0d0
      do

```

```

do k=(i+1),NHor+1
q=q+Jx(i,k)*s(k)
end do

s(i)=(Jx(i,(NHor+2))- q)/(Jx(i,i))
i=i-1
end do
write(2,*) s
end subroutine
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!Calculo das Parcelas do Sistema Linear !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
subroutine coefSL(Z,W,V,b,C,NHor,N)
implicit none
integer fibN, fibNmax
parameter (fibN=20,fibNmax=16)
integer fib(1:fibN),j,l,N,NHor,ll
real*8 Q,dx,pi,x,x1,F1,F2,PL,R
real*8 b(0:N),C(0:NHor),V(0:NHor),W(0:NHor),Z(0:NHor,0:NHor),curv,lambda
real*8 qt,Plt,curvt,Rt,Pmt
data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/

pi=dacos(-1.0d0)
F1=fib(fibNmax-1)
F2=fib(fibNmax)
dx=2.0d0/F2

do l=0,NHor
V(l)=0.0d0
W(l)=0.0d0

do j=0,F2,1
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dasin(pi*x)/pi

qt=Q(x1,b,N)
Plt=PL(l,x1)
curvt=curv(N,b,x1)
Rt=R(x1,c,NHor)

V(l)=V(l)+(1.0d0+dcos(pi*x))*( curvt*Plt/(qt**2)      )
W(l)=W(l)+(1.0d0+dcos(pi*x))*( Plt/(Rt*qt**2)  )
end do
V(l)=-V(l)*dx
W(l)=W(l)*dx

do ll=0,NHor
Z(l,ll)=0.0d0
do j=0,F2,1
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dasin(pi*x)/pi

qt=Q(x1,b,N)
Plt=PL(l,x1)
Pmt=PL(ll,x1)
Rt=R(x1,c,NHor)
Z(l,ll)=Z(l,ll)+(1.0d0+dcos(pi*x))*( Plt*Pmt/(Rt*qt**2)      )
end do
Z(l,ll)=Z(l,ll)*dx
end do
end do
return

```

```

end subroutine

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! Calculo de Q dado R
!versao 2: Shooting method
! Q_theta(0)=Q_theta(Pi)=0
!Evoluir de cada fronteira e fazer o match
!em ponto intermediario.
!Newton-Raphson para recalcular pontos de saida !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!Boundary Condition - Shooting Method!!!!!!!!!!!!!!
! Funcao diferencial para Q
subroutine funcQ(fq,q,theta,a,Nhor)
integer Nhor
real*8 fq(2),q(2),x,d2lnR0,R0,a(0:Nhor), theta,pi
pi=dacos(-1.0d0)
x=dcos(theta)
fq(1)=q(2)
fq(2)=q(1)*(d2lnR0(x,a,Nhor)-1.0d0)+q(2)*(q(2)/q(1)-dcos(theta)/dsin(theta))+1.0d0/(R0(x,a,Nhor)*q(1))
end subroutine

subroutine funcz(fz,z,q,theta,a,Nhor)
integer Nhor
real*8 fz(2),q(2),x,d2lnR0,R0,a(0:Nhor), theta,pi,z(2), FQ,FQtheta
pi=dacos(-1.0d0)
x=dcos(theta)
FQ=(d2lnR0(x,a,Nhor)-1.0d0)-( q(2)**2+1.0d0/R0(x,a,Nhor))/(q(1)**2)
FQtheta=2*q(2)/q(1)-dcos(theta)/dsin(theta)
fz(1)=z(2)
fz(2)=z(1)*FQ+z(2)*FQtheta
end subroutine

! Runke Kutta para Q
subroutine RKQ(sol,Nrk,Nhor,a)
implicit none
integer l, NRK, i, Nhor,M, j, Nenc,try
parameter(M=10000)
real*8 h,thetai,thetaf,pi,a(0:Nhor),tol1,tol2,difq, difqtheta,sol(2,0:Nrk),v
real*8 thetап, thetапт, qp(2),qpt(2), fqp1(2),fqp2(2),fqp3(2),fqp4(2),solp(2,0:Nrk),v(2),wt(2),fw1(2),fw2(2),fw3(2),fw4(2),t
real*8 thetam, thetamт, qm(2),qmt(2), fqm1(2),fqm2(2),fqm3(2),fqm4(2),solm(2,0:Nrk),z(2),zt(2),fz1(2),fz2(2),fz3(2),fz4(2),s
real*8 g(2),Jac(2,2),del(2)
pi=dacos(-1.0d0)
do i=0,Nrk
solp(1,i)=0.0d0
solp(2,i)=0.0d0
solm(1,Nrk-i)=0.0d0
solm(2,Nrk-i)=0.0d0
end do

thetai=0.0d0+1.0d-14
thetaf=pi-1.0d-14
h=(thetaf-thetai)/NRK
tol1=5.0d-14!5.0d-2!h**2
tol2=5.0d-14!5.0d-1

!Solucao Estacionaria:
!q1(theta)=Q(theta)=[1-v*cos(theta)]/sqrt(1-v^2)
!q2(theta)=Qtheta(theta)=v*sin(theta)/sqrt(1-v^2)
!Condicao Inicial:
!Q(0)=(1-v)/sqrt(1-v^2)
!Qx(0)=0

Nenc=Nrk/2 !Nrk/2!10!Nrk-10
10 v=0.0d0

```

```

t=5.0d0
s=5.0d0
do j=1,M

  qp(1)=t
  qp(2)=0.0d0
  !qm(1)=s
  !qm(2)=0.0d0
  w(1)=1.0d0
  w(2)=0.0d0
  !z(1)=1.0d0
  !z(2)=0.0d0

  do i=0,Nenc-1
    thetap=thetai+i*h
    !thetam=thetaf-i*h
    solp(1,i)=qp(1)
    solp(2,i)=qp(2)
    !solm(1,Nrk-i)=qm(1)
    !solm(2,Nrk-i)=qm(2)

    call funcQ(fqp1,qp,thetap,a,Nhor)
    !call funcQ(fqm1,qm,thetam,a,Nhor)
    call funcZ(fw1,w,qp,thetap,a,Nhor)
    !call funcZ(fz1,z,qm,thetam,a,Nhor)
    thetapt=thetap+h/2.0d0
    !thetamt=thetam-h/2.0d0

    do l=1,2
      qpt(l)=qp(l)+h*fqp1(l)/2.0d0
      !qmt(l)=qm(l)-h*fqm1(l)/2.0d0
      wt(l)=w(l)+h*fw1(l)/2.0d0
      !zt(l)=z(l)-h*fz1(l)/2.0d0
    end do

    call funcQ(fqp2,qpt,thetapt,a,Nhor)
    !call funcQ(fqm2,qmt,thetamt,a,Nhor)
    call funcZ(fw2,wt,qp,thetapt,a,Nhor)
    !call funcZ(fz2,zt,qm,thetamt,a,Nhor)

    thetapt=thetap+h/2.0d0
    !thetamt=thetam-h/2.0d0

    do l=1,2
      qpt(l)=qp(l)+h*fqp2(l)/2.0d0
      !qmt(l)=qm(l)-h*fqm2(l)/2.0d0
      wt(l)=w(l)+h*fw2(l)/2.0d0
      !zt(l)=z(l)-h*fz2(l)/2.0d0
    end do

    call funcQ(fqp3,qpt,thetapt,a,Nhor)
    !call funcQ(fqm3,qmt,thetamt,a,Nhor)
    call funcZ(fw3,wt,qp,thetapt,a,Nhor)
    !call funcZ(fz3,zt,qm,thetamt,a,Nhor)
    thetapt=thetap+h
    !thetamt=thetam-h

    do l=1,2
      qpt(l)=qp(l)+h*fqp3(l)
      !qmt(l)=qm(l)-h*fqm3(l)
      wt(l)=w(l)+h*fw3(l)
      !zt(l)=z(l)-h*fz3(l)
    end do
  end do
end do

```

```
call funcQ(fqp4,qpt,thetapt,a,Nhor)
```

```
!call funcQ(fqm4,qmt,thetamt,a,Nhor)
```

```
call funcZ(fw4,wt,qp,thetapt,a,Nhor)
```

```
!call funcZ(fz4,zt,qm,thetamt,a,Nhor)
```

```
do l=1,2
```

```
qp(1)=qp(1)+(h/6.0d0)*(fqp1(1)+2.0d0*fqp2(1)+2.0d0*fqp3(1)+fqp4(1))
```

```
!qm(1)=qm(1)-(h/6.0d0)*(fqm1(1)+2.0d0*fqm2(1)+2.0d0*fqm3(1)+fqm4(1))
```

```
w(1)=w(1)+(h/6.0d0)*(fw1(1)+2.0d0*fw2(1)+2.0d0*fw3(1)+fw4(1))
```

```
!z(1)=z(1)-(h/6.0d0)*(fz1(1)+2.0d0*fz2(1)+2.0d0*fz3(1)+fz4(1))
```

```
end do
```

```
end do
```

```
thetap=thetai+i*h
```

```
!thetam=thetaf-i*h
```

```
solp(1,i)=qp(1)
```

```
solp(2,i)=qp(2)
```

```
!solm(1,Nrk-i)=qm(1)
```

```
!solm(2,Nrk-i)=qm(2)
```

```
print*, "Condicoes Iniciais"
```

```
print*, j,t,s
```

```
!qp(1)=t
```

```
!qp(2)=0.0d0
```

```
qm(1)=s
```

```
qm(2)=0.0d0
```

```
!w(1)=1.0d0
```

```
!w(2)=0.0d0
```

```
z(1)=1.0d0
```

```
z(2)=0.0d0
```

```
do i=Nrk, Nenc+1,-1 !0,NRK/2-1
```

```
!thetap=thetai+i*h
```

```
thetam=thetai+i*h
```

```
!solp(1,i)=qp(1)
```

```
!solp(2,i)=qp(2)
```

```
solm(1,i)=qm(1)
```

```
solm(2,i)=qm(2)
```

```
!call funcQ(fqp1,qp,thetap,a,Nhor)
```

```
call funcQ(fqm1,qm,thetam,a,Nhor)
```

```
!call funcZ(fw1,w,qp,thetap,a,Nhor)
```

```
call funcZ(fz1,z,qm,thetam,a,Nhor)
```

```
!thetapt=thetap+h/2.0d0
```

```
thetamt=thetam-h/2.0d0
```

```
do l=1,2
```

```
!qpt(1)=qp(1)+h*fqp1(1)/2.0d0
```

```
qmt(1)=qm(1)-h*fqm1(1)/2.0d0
```

```
!wt(1)=w(1)+h*fw1(1)/2.0d0
```

```
zt(l)=z(l)-h*fz1(1)/2.0d0
```

```
end do
```

```
!call funcQ(fqp2,qpt,thetapt,a,Nhor)
```

```
call funcQ(fqm2,qmt,thetamt,a,Nhor)
```

```
!call funcZ(fw2,wt,qp,thetapt,a,Nhor)
```

```
call funcZ(fz2,zt,qm,thetamt,a,Nhor)
```

```
!thetapt=thetap+h/2.0d0
```

```
thetamt=thetam-h/2.0d0
```

```
do l=1,2
```

```

!qpt(1)=qp(1)+h*fqp2(1)/2.0d0
qmt(1)=qm(1)-h*fqm2(1)/2.0d0
!wt(1)=w(1)+h*fw2(1)/2.0d0
zt(1)=z(1)-h*fz2(1)/2.0d0
end do

!call funcQ(fqp3,qpt,thetapt,a,Nhor)
call funcQ(fqm3,qmt,thetamt,a,Nhor)
!call funcZ(fw3,wt,qp,thetapt,a,Nhor)
call funcZ(fz3,zt,qm,thetamt,a,Nhor)
!thetapt=thetapt+h
thetamt=thetamt-h

do l=1,2
!qpt(l)=qp(l)+h*fqp3(l)
qmt(l)=qm(l)-h*fqm3(l)
!wt(l)=w(l)+h*fw3(l)
zt(l)=z(l)-h*fz3(l)
end do

!call funcQ(fqp4,qpt,thetapt,a,Nhor)
call funcQ(fqm4,qmt,thetamt,a,Nhor)
!call funcZ(fw4,wt,qp,thetapt,a,Nhor)
call funcZ(fz4,zt,qm,thetamt,a,Nhor)
do l=1,2
!qp(l)=qp(1)+(h/6.0d0)*(fqp1(1)+2.0d0*fqp2(1)+2.0d0*fqp3(1)+fqp4(1))
qm(l)=qm(1)-(h/6.0d0)*(fqm1(1)+2.0d0*fqm2(1)+2.0d0*fqm3(1)+fqm4(1))
!w(l)=w(1)+(h/6.0d0)*(fw1(1)+2.0d0*fw2(1)+2.0d0*fw3(1)+fw4(1))
z(l)=z(1)-(h/6.0d0)*(fz1(1)+2.0d0*fz2(1)+2.0d0*fz3(1)+fz4(1))

end do
end do

!thetap=thetai+i*h
thetam=thetai+i*h
!solp(1,i)=qp(1)
!solp(2,i)=qp(2)
solm(1,i)=qm(1)
solm(2,i)=qm(2)

g(1)=qp(1)-qm(1)
g(2)=qp(2)-qm(2)
print*, g
!pause

if(dabs(g(1)).le.tol1.and.dabs(g(2)).lt.tol2) then
print*, "Match"
do i=0,Nenc
thetap=thetai+(i)*h
sol(1,i)=solp(1,i)
sol(2,i)=solp(2,i)
!write(3,*) thetap/pi, solp(1,i),solp(2,i)
end do
!close(3)
do i=Nenc+1,Nrk
thetap=thetai+(i)*h
sol(1,i)=solm(1,i)
sol(2,i)=solm(2,i)
!write(4,*) thetap/pi, solm(1,i),solm(2,i)
end do
!close(4)
return
end if
Jac(1,1)=w(1)

```

```

Jac(1,2)=-z(1)
Jac(2,1)=w(2)
Jac(2,2)=-z(2)
call gauss2(del,g,Jac)
t=t+del(1)!dabs(t+del(1))
s=s+del(2)!dabs(s+del(2))
end do
Nenc=Nrk-Nenc
goto 10

do i=0,Nrk/2
thetap=thetai+(i)*h
write(3,*) thetap/pi, solp(1,i),solp(2,i)
end do
do i=Nrk/2+1,Nrk
thetap=thetai+(i)*h
write(3,*) thetap/pi, solm(1,i),solm(2,i)
end do

print*, "No Match: Sorry"
stop
end subroutine

subroutine gauss2(s,g,Jac)
implicit none
integer NHor,N,i,l,k,j,mm,jj
real*8 Jx(1:(1+1),1:(1+2)),s(1:1+1),Jt(1:(1+2)),p,q
real*8 Jac(1:1+1,1:1+1),g(2)
N=1 !Rotina copiada de outro programa em que N era a decomposicao de Galerkin. Os vetores iam de 0 ate N, logo todo o calculo aqui foi feito para 1 ate N+1. No caso temos Dimensao 2.
do j=1,N+1

!Matrix Jacobiana extedida Jij=dyi/dxj
do jj=1,N+1
Jx(j,jj)=Jac(j,jj)
end do
Jx(j,N+2)=-g(j)
end do
!do j=1,N+1
!write(1,*) (Jx(j,jj) ,jj=1,N+2)
!end do
do i=1,N
l=i

do
if (Jx(l,i).ne.0.0d0) exit
if(l.eq.N+1) then
write(*,*) "sistema sem solucao unica"
stop
end if
l=l+1
end do

if(l.ne.i) then
do k=1,(N+2)
Jt(k)=Jx(1,k)
Jx(1,k)=Jx(i,k)
Jx(i,k)=Jt(k)
end do
end if

do mm=(i+1),N+1
p=Jx(mm,i)/Jx(i,i)
do k=1,(N+2)
Jx(mm,k)=Jx(mm,k)-p*Jx(i,k)
end do
end if

do mm=(i+1),N+1
p=Jx(mm,i)/Jx(i,i)
do k=1,(N+2)
Jx(mm,k)=Jx(mm,k)-p*Jx(i,k)
end do
end if

```

```

end do
end do
end do

if(Jx(N+1,N+1).eq.0.0d0) then
write(*,*) "Sistema sem solucao unica"
stop
end if

s(N+1)=Jx(N+1,(N+2))/Jx(N+1,N+1)
i=N
do while(i.ge.1)

q=0.0d0
do k=(i+1),N+1
q=q+Jx(i,k)*s(k)
end do
s(i)=(Jx(i,(N+2))- q)/(Jx(i,i))
i=i-1
end do
end subroutine
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!Double Decompostion-Continuation Method!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!Calculo das Parcelas do Sistema Linear !
! (Problema Inverso) !
!!!!!!!!!!!!!!
subroutine FuncNaoLinear(F,N,Nhor,b,c,Nit)
implicit none
integer fibN, fibNmax
parameter (fibN=20,fibNmax=14)
integer fib(1:fibN),j
real*8 g1,g2,dx,pi,x,x1,phi1,phi2,F1,F2
integer N,Nhor,l,m,i,k,Nit
real*8 P1,b(0:N),R,c(0:Nhor),Q,h,d2lnR
real*8 F(1:N+1),V(0:N), W(0:N), Z(0:N),curv
real*8 qt,Rt,Plt,curvt,d2lnRt, cte,Qf
data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/
common /constante/ cte
Qf=dsqrt(2.0d0/cte)
h=1.0d0/Nit

pi=dacos(-1.0d0)
F1=fib(fibNmax-1)
F2=fib(fibNmax)
dx=2.0d0/F2

do l=0,N
V(l)=0.0d0
W(l)=0.0d0
Z(l)=0.0d0

do j=0,F2,1
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dasin(pi*x)/pi
phi1=j*F1*pi/F2
phi2=pi+phi1

qt=Q(x1,b,N)
Plt=PL(l,x1)
curvt=curv(N,b,x1)
Rt=R(x1,c,Nhor)
d2lnRt=d2lnR(x1,c,Nhor)
g1=Plt*curvt

```

```

V(1)=V(1)+(1.0d0+dcos(pi*x))*(g1)
g1=-Plt/(Qf*Rt)
W(1)=W(1)+(1.0d0+dcos(pi*x))*(g1)
g1=-qt**2*d2lnRt*Plt
Z(1)=Z(1)+(1.0d0+dcos(pi*x))*(g1)
end do

V(1)=V(1)*dx
W(1)=W(1)*dx
Z(1)=Z(1)*dx
F(1+1)=V(1)+W(1)+Z(1)
F(1+1)=h*F(1+1)
end do
return
end subroutine

subroutine coefSL2(Jac,N,Nhor,b,c)
implicit none
integer fibN, fibNmax
parameter (fibN=20,fibNmax=14)
integer fib(1:fibN),j
real*8 g1,g2,dx,pi,x,x1,phi1,phi2,F1,F2
integer N,NHor,l,m,i,k,Nel
real*8 Pl,b(0:N),R,c(0:Nhor),Q,d2lnR
real*8 Jac(1:N+1, 1:N+1),dcurv(0:N),dV(0:N, 0:N), dZ(0:N,0:N)
real*8 qt,Plt,Pmt,d2lnRt
data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
           377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/

pi=dacos(-1.0d0)
F1=fib(fibNmax-1)
F2=fib(fibNmax)
dx=2.0d0/F2

do l=0,N
do m=0,N
dV(l,m)=0.0d0
dZ(l,m)=0.0d0
Jac(l+1,m+1)=0.0d0

do j=0,F2,1
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dsin(pi*x)/pi
phi1=j*F1*pi/F2
phi2=pi+phi1
qt=Q(x1,b,N)
Pmt=PL(m,x1)
Plt=PL(l,x1)
d2lnRt=d2lnR(x1,c,Nhor)

call diffCurvb(dcurv,b,N,x1)
g1=Plt*dcurv(m)
dV(l,m)=dV(l,m)+(1.0d0+dcos(pi*x))*(g1)
g1=-2*qt*d2lnRt*Plt*Pmt
dZ(l,m)=dZ(l,m)+(1.0d0+dcos(pi*x))*(g1)
end do
dV(l,m)=dV(l,m)*dx
dZ(l,m)=dZ(l,m)*dx
Jac(l+1,m+1)=dV(l,m)+dZ(l,m)
end do
end do
return
end subroutine
!!!!!!!!!!!!!!!

```

```

! Eliminacao de Gauss -
! Resolucao de Sist Linear2 !
! (Problema Inverso)      !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
subroutine gauss3(s,F,NHor,c,b,N)
implicit none
integer NHor,N,i,l,k,j,mm,jj
real*8 Jx(1:(N+1),1:(N+2)),c(0:NHor),s(1:N+1),Jt(1:(N+2)),F(1:N+1),p,q
real*8 b(0:N),Jac(1:N+1,1:N+1)

call coefSL2(Jac,N,Nhor,b,c)
do j=1,N+1
!Matrix Jacobiana extedida Jij=dyi/dxj

do jj=1,N+1
Jx(j,jj)=Jac(j,jj)
end do
Jx(j,N+2)=-F(j)
end do
!do j=1,N+1
!write(*,*) (Jx(j,jj) ,jj=1,N+2)
!end do

do i=1,N
l=i
do
if (Jx(l,i).ne.0.0d0) exit
if(l.eq.N+1) then
write(*,*) "sistema sem solucao unica"
stop
end if
l=l+1
end do

if(l.ne.i) then
do k=1,(N+2)
Jt(k)=Jx(l,k)
Jx(l,k)=Jx(i,k)
Jx(i,k)=Jt(k)
end do
end if

do mm=(i+1),N+1
p=Jx(mm,i)/Jx(i,i)
do k=1,(N+2)
Jx(mm,k)=Jx(mm,k)-p*Jx(i,k)
end do
end do
end do

if(Jx(N+1,N+1).eq.0.0d0) then
write(*,*) "Sistema sem solucao unica"
stop
end if
s(N+1)=Jx(N+1,(N+2))/Jx(N+1,N+1)
i=N
do while(i.ge.1)
q=0.0d0

do k=(i+1),N+1
q=q+Jx(i,k)*s(k)
end do
s(i)=(Jx(i,(N+2))- q)/(Jx(i,i))

```

```

i=i-1
end do
end subroutine
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! Calculo dos Coeficientes Inicias !
! dado o Horizonte Aparente      !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
subroutine CoefIniHor(c,b,N,Nhor)
implicit none
integer N,Nhor,i,Nit,l
real*8 mody
real*8 b(0:N),c(0:Nhor),s1(1:N+1),s2(1:N+1),s3(1:N+1),s4(1:N+1),bt(0:N), F(1:N+1)
Nit=5
call FuncNaoLinear(F,N,Nhor,b,c,Nit)
do i=1,Nit
print*, i
print*, b
call gauss3(s1,F,Nhor,c,b,N)
do l=0,N
bt(l)=b(l)+s1(l+1)/2
end do
call gauss3(s2,F,Nhor,c,bt,N)
do l=0,N
bt(l)=b(l)+s2(l+1)/2
end do
call gauss3(s3,F,Nhor,c,bt,N)
do l=0,N
bt(l)=b(l)+s3(l+1)
end do
call gauss3(s4,F,Nhor,c,bt,N)
do l=0,N
b(l)=b(l)+(s1(l+1)+2.0d0*s2(l+1)+2.0d0*s3(l+1)+s4(l+1))/6.0d0
end do
end do
end subroutine

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!Residuo!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!
! Residuo do Horizonte de Eventos !
!!!!!!!!!!!!!!
function Res(b,N,c,Nhor,x)
implicit none
integer N, Nhor
real*8 b(0:N), c(0:Nhor), x, Res, curv,d2lnR,R,Q

Res=d2lnR(x,c,Nhor)-(curv(N,b,x)-1.0d0/R(x,c,Nhor))/(Q(x,b,N)**2)
end function
! Modulo do Residuo
function ModRes(b,N,c,Nhor)
implicit none
integer fibN, fibNmax
parameter (fibN=20,fibNmax=18)
integer fib(1:fibN),j,l,N,Nhor,ll
real*8 dx,pi,x,x1,F1,F2
real*8 b(0:N),C(0:Nhor),Res, ModRes
data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
           377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/
pi=dacos(-1.0d0)
F1=fib(fibNmax-1)
F2=fib(fibNmax)
dx=2.0d0/F2

ModRes=0.0d0
do j=0,F2,1

```

```

x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dsin(pi*x)/pi
ModRes=ModRes+(1.0d0+dcos(pi*x))*( Res(b,N,c,Nhor,x1) **2 )
end do

ModRes=ModRes*dx
ModRes=dsqrt(ModRes)
return
end function
!!!!!!!!!!!!!!Multipoles Modes!!!!!!!!!!!!!!
function MM(Nmm,b,N,c,Nhor,xx)
implicit none
integer Nmm,N,Nhor
real*8 MM,b(0:N), c(0:Nhor)
real*8 Rah,xx1,Q,R,Mah

integer fibN, fibNmax
parameter (fibN=20,fibNmax=13)
integer fib(1:fibN),j,F1,F2
real*8 dx,pi,x,x1,PL,g1,xx(0:377)
data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/
pi=dacos(-1.0d0)

F1=int(fib(fibNmax-1))
F2=int(fib(fibNmax))
dx=2.0d0/F2
call MassaAH(Mah, c,b,Nhor,N)
Rah=2.0*Mah

MM=0.0d0

do j=0,F2,1
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dsin(pi*x)/pi
xx1=xx(F2-j)!xx1=xx(x1) !Nova variavel angular, adaptada ao Modos
!Na rotina calculamo R'=R/2M0, logo R=2M0*R' e por isso o fator de 2 na integral abaixo

g1=PL(Nmm,xx1)/(2.0d0*R(x1,c,NHor)*Q(x1,b,N)**2      )
MM=MM+(1.0d0+dcos(pi*x))*( g1 )
end do
MM=MM*dx
MM=Rah***(Nmm+1)*MM/2.0d0

return
end function

subroutine diffang(xx1,x1,b,N,c,Nhor)
implicit none
integer N,Nhor,i
real*8 b(0:N), c(0:Nhor),y,x,xi,xf,h,Q,R,Rah,k1,k2,k3,k4,xp,Mah
integer F,j
parameter(F=377)
real*8 pi,x1(0:F),xx1(0:F),dx
call MassaAH(Mah, c,b,Nhor,N)
Rah=2.0*Mah
pi=dacos(-1.0d0)
dx=2.0d0/F

xx1(0)=1.0d0
do j=0,F
xp=-1.0d0+j*dx
x1(F-j)=xp+dsin(pi*xp)/pi
end do

```

```

do j=1,F
xi=x1(j-1)
xf=x1(j)
h=(xf-xi)/10

x=xi
y=xx1(j-1)
do i=1,10
k1=(2*R(x,c,Nhor)/(Rah*Q(x,b,N)))**2
k2=(2*R(x+0.5*h,c,Nhor)/( Rah*Q(x+0.5*h,b,N) ) )**2
k3=(2*R(x+0.5*h,c,Nhor)/(Rah*Q(x+0.5*h,b,N) ))**2
k4=(2*R(x+h,c,Nhor)/(Rah*Q(x+h,b,N) ))**2
y=y+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
x=xi+i*h
end do
xx1(j)=y
end do

if (xx1(F).lt.-1.0d0)then
xx1(F)=-1.0d0
end if
return
end subroutine

function MassMoment(i,c,Nhor,b,N)
implicit none
integer i,Nhor,N
real*8 c(0:Nhor), MassMoment,KHorz,KahMed, MassAh, AAh,b(0:N),Q,R
integer fibN, fibNmax
parameter (fibN=20,fibNmax=14)
integer fib(1:fibN),j,l
real*8 dx,pi,x,x1,F1,F2,PL
data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/

pi=dacos(-1.0d0)
F1=fib(fibNmax-1)
F2=fib(fibNmax)
dx=2.0d0/F2
call MassaAH(MassaAH,c,b,Nhor,N)
Aah=8*MassaAH**2
!Media da curvatura <Kah>
KahMed=0.0d0
do j=0,F2,1
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dsin(pi*x)/pi
KahMed=KahMed+(1.0d0+dcos(pi*x))*(Khorz(x1,c,Nhor)*(2*R(x1,c,Nhor)/Q(x1,b,N))**2)
end do
KahMed=KahMed*dx
KahMed=KahMed/Aah
if(i.eq.0)then
MassMoment= KahMed
return
else
MassMoment=0.0d0
do j=0,F2,1
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dsin(pi*x)/pi
MassMoment=MassMoment+(1.0d0+dcos(pi*x))*(( KahMed-Khorz(x1,c,Nhor) )**((1.*i)*(2*R(x1,c,Nhor)/Q(x1,b,N))**2 ))
end do
MassMoment=MassMoment*dx
MassMoment=MassMoment/Aah
return

```

```
end if
end function
```

## Momento de Bondi

```
!!!!!!!!!!!!!!!
! Bondi Momentum      !
!!!!!!!!!!!!!!!

subroutine BondMom(P,b,N)
implicit none
integer fibN, fibNmax
parameter (fibN=20,fibNmax=14)
integer fib(1:fibN),j,l,N,k
real*8 Q,dx,P(0:3),pi,x,x1,F1,F2,b(0:N),g1(0:3),g2(0:3),phi1,phi2
data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/
pi=dacos(-1.0d0)
F1=fib(fibNmax-1)
F2=fib(fibNmax)
dx=2.0d0/F2

p(0)=0.0d0
p(1)=0.0d0
p(2)=0.0d0
p(3)=0.0d0

do j=0,F2,1
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dsin(pi*x)/pi
phi1=j*F1*pi/F2
phi2=pi+phi1

g1(0)=1.0d0/Q(x1,b,N)**3
g2(0)=1.0d0/Q(x1,b,N)**3
p(0)=p(0)+(1.0d0+dcos(pi*x))*(g1(0)+g2(0))

g1(1)=(dsqrt(1-x1**2)*dcos(phi1))/(Q(x1,b,N))**3
g2(1)=(dsqrt(1-x1**2)*dcos(phi2))/(Q(x1,b,N))**3
p(1)=p(1)+(1.0d0+dcos(pi*x))*(g1(1)+g2(1))

g1(2)=(dsqrt(1-x1**2)*dsin(phi1))/(Q(x1,b,N))**3
g2(2)=(dsqrt(1-x1**2)*dsin(phi2))/(Q(x1,b,N))**3
p(2)=p(2)+(1.0d0+dcos(pi*x))*(g1(2)+g2(2))

g1(3)=x1/(Q(x1,b,N))**3
g2(3)=x1/(Q(x1,b,N))**3
p(3)=p(3)+(1.0d0+dcos(pi*x))*(g1(3)+g2(3))

end do
p(0)=p(0)*pi*dx/(4*pi)
p(1)=p(1)*pi*dx/(4*pi)
p(2)=p(2)*pi*dx/(4*pi)
p(3)=p(3)*pi*dx/(4*pi)
end subroutine
```

## Medidas de Assimetria

```
!!!!!!!!!!!!!!!
! Assimetria      !
!!!!!!!!!!!!!!!

subroutine assimetria(ass,b,N,Nass)
implicit none
integer fibN, fibNmax
parameter (fibN=20,fibNmax=13)
integer fib(1:fibN),j,l,N,Nass
real*8 Q,dx,ass,pi,x,x1,F1,F2,b(0:N)
```

```

data fib/ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, &
       377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946/
pi=dacos(-1.0d0)
F1=fib(fibNmax-1)
F2=fib(fibNmax)
dx=2.0d0/F2

ass=0.0d0
do j=0,F2,1
x=-1.0d0+j*dx
x1=x+dsin(pi*x)/pi
ass=ass+(1.0d0+dcos(pi*x))*( x1**(Nass)/(Q(x1,b,N)**2) )
end do
ass=ass*dx
return
end subroutine

```

## Polinômios de Legendre

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!Calculo    polinomios de Legendre !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
function PL(l,x)
implicit none
integer l,m,i,ll,mp
real*8 PL,x,Pmm, somx2,fact,Pmmp1,Pll

m=0
! Argumentos invalidos para computar Polinomio Associado de Legendre
if(abs(m).gt.l.or.dabs(x).gt.1.0d0) then
write(*,*) "Problem in Legendre"
print*, l, x
write(*,*) "Error: Bad Arguments"
stop
end if
mp=abs(m)
! Computar P_m,m(x)
Pmm=1.0d0
if(mp.gt.0) then
somx2=dsqrt(1-x*x)
fact=1.0d0
do i=1,mp,1
pmm=pmm*(-fact*somx2)
fact=fact+2.0d0
end do
end if

if(l.eq.mp) then
PL=Pmm
return
else
! Computar P_m,m+1
Pmmp1=x*(2*mp+1)*pmm
if(l.eq.(mp+1))then
PL=pmmp1
return
else
! Computar P_l,m, para l>m+1
do ll=(mp+2),l,1
Pll=(x*(2*ll-1)*Pmmp1-(ll+mp-1)*Pmm)/(ll-mp)
Pmm=Pmmp1
Pmmp1=pll
end do
PL=Pll
return

```

```

end if
end if
end function
!!!!!!!!!!!!!!!
! Derivada Pol Legendre      !
!com rel. a x=cos(theta)      !
!!!!!!!!!!!!!!!

! Primeira
function PLx(l,x)
implicit none
integer l,m,mp
real*8 x,PLx,PL,PLtheta
m=0
mp=abs(m)

if(x.eq.1.0d0) then
x=x-1.0d-10
end if
if (x.eq.-1.0d0)then
x=x+1.0d-10
end if

if (mp.eq.0) then
PLx=(l+1)*(x*PL(l,x)-PL(l+1,x))/(1-x**2)
return

else
if(mp.eq.1) then
PLtheta=-(l+mp)*(l-mp+1)*PL(l,(mp-1),x)/2
PLx=-PLtheta/dsqrt(1-x**2)
return
else
PLtheta=(PL(l,(mp+1),x)-(l+mp)*(l-mp+1)*PL(l,(mp-1),x))/2
PLx=-PLtheta/dsqrt(1-x**2)
return
end if

end if
end function
! Segunda
function Plxx(l,x)
implicit none
integer l
real*8 x,PL,PLx, PLxx
if(x.eq.1.0d0) then
x=x-1.0d-10
end if
if (x.eq.-1.0d0)then
x=x+1.0d-10
end if
PLxx=(2*x*PLx(l,x)-l*(l+1)*PL(l,x))/(1-x**2)
return
end function

```

## Funções Auxiliares

```

!!!!!!!!!!!!!!!
! Cálculo de módulo de vetores      !
!!!!!!!!!!!!!!!
function modv(v,N)
implicit none
integer N,i
real*8 modv,v(0:N)
modv=0.0d0
do i=0,N

```

```

modv=modv+v(i)**2
end do
modv=dsqrt(modv)

end function
!!!!!!!!!!!!!!
! Fatorial !
!!!!!!!!!!!!!!
function fat(n)
implicit none
integer n,i
real*8 fat

i=n
fat=1.0d0
if(n.lt.0)then
write(*,*) "erro: fatorial de numero negativo"
stop
end if
if(n.eq.0.or.n.eq.1) then
return
else
do while(i.ge.1)
fat=fat*i
i=i-1
end do
return
end if
end function

```

## Visualização Horizonte

```

subroutine HorizRead
implicit none
real*8 x,theta, u, R,uread,m0,pi,phi
integer k,i,l
character(13) filename
pi=dacos(-1.0d0)

open(unit=1,file='Horiz1.dat',form='formatted',status='unknown')
open(unit=2,file='Horiz2.dat',form='formatted',status='unknown')
l=0
do
read(1,*) u,k
read(2,*) u,k
open(3)
open(4)
do i=2,1101
read(1,*) x, theta, R
write(3,*) pi/2-theta, R
read(2,*) x, theta, R
write(4,*) pi/2-theta, R
end do
close(3)
close(4)
call script(filename,k,u)
CALL SYSTEM('gnuplot horiz.gnu')
call system('convert -rotate 90 '//filename//'.eps '//filename//'.jpg')
if(l.ne.k) exit
l=l+1
end do
call system('mencoder "mf://*.jpg" -mf fps=100 -o Horizon.avi -ovc lavc -lavcopts vcodec=mpeg4v2:vbitrate=800')
call system('rm -f *.jpg')
stop

```

```
end subroutine
subroutine script(filename,l,u)
implicit none
character(6) nl,numero
character(13) filename
integer l
real*8 u
open(98)
write(98,*) l
rewind(98)
if(l.ge.0.and.l.lt.10) then
read(98,*) nl
numero='00000'//nl
end if
if(l.ge.10.and.l.lt.100) then
read(98,*) nl
numero='0000'//nl
end if
if(l.ge.100.and.l.lt.1000) then
read(98,*) nl
numero='000'//nl
end if
if(l.ge.1000.and.l.lt.10000) then
read(98,*) nl
numero='00'//nl
end if
if(l.ge.10000.and.l.lt.100000) then
read(98,*) nl
numero='0'//nl
end if
if(l.ge.100000.and.l.lt.1000000) then
read(98,*) nl
numero=nl
end if

close(98)
filename='Horizon'//numero
open(unit=99,file='horiz.gnu',form='formatted',status='unknown')
write(99,*) 'reset'
write(99,*) 'set terminal postscript enhanced'
write(99,*) 'unset mouse'
write(99,*) 'set grid'
write(99,*) 'set polar'
write(99,*) 'set size square'
write(99,*) 'set xrange [-15:15]'
write(99,*) 'set yrange [-15:15]'
write(99,*) 'set title "u='',u,'"'
write(99,*) 'f(t)=1'
write(99,*) 'set output '//filename//'.eps'
write(99,*) 'plot "fort.3" t"" with lines -1'
write(99,*) 'set output '//filename//'.eps'
write(99,*) 'replot "fort.3" using (pi-$1):($2) t"" with lines -1'
write(99,*) 'set output '//filename//'.eps'
write(99,*) 'replot "fort.4" t"" with lines -1'
write(99,*) 'set output '//filename//'.eps'
write(99,*) 'replot "fort.4" using (pi-$1):($2) t"" with lines -1'
write(99,*) 'set output '//filename//'.eps'
write(99,*) 'replot f(t) t"" with lines '
close(99)
end subroutine
```



# Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, Zur Allgemeinen Relativitätstheorie, in *The Collected Papers of Albert Einstein. Vol.6.*
- [2] A. Einstein, Erklaerung der Perihelbewegung des Merkur aus der Allgemeinen relativitaetstheorie, in *The Collected Papers of Albert Einstein. Vol.6.*
- [3] A. Einstein, Naherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation, in *The Collected Papers of Albert Einstein. Vol.6.*
- [4] B. F. Schutz, *A first course in general relativity* (Cambridge University Press, 1985).
- [5] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman, San Francisco, 1973).
- [6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley and Sons, New York, 1972).
- [7] R. d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity* (Oxford University Press, Oxford, 1992).
- [8] S. M. Carroll, (1997), gr-qc/9712019.
- [9] R. M. Wald, *General relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [10] S. Rowan and H. Jim, Living Rev. Relativ. **3**, 3 (2000).
- [11] Virgo, F. Acernese *et al.*, Class. Quant. Grav. **26**, 085009 (2009), 0812.4870.
- [12] LIGO Scientific, B. P. Abbott *et al.*, (2009), 0905.3710.
- [13] LIGO Scientific, B. P. Abbott *et al.*, (2010), 1003.2481.

- [14] J. R. Smith and LIGO Scientific Collaboration, *Class. Quantum Grav.* **26**, 114013 (2009), 0902.0381.
- [15] B. F. S. B.S. Sathyaprakash, *Living Reviews in Relativity* **12** (2009).
- [16] D. Kennefick, *Physics Today* **58**, 43 (2009).
- [17] D. Kennefick, (1997), gr-qc/9704002.
- [18] D. Kennefick, *Traveling at the speed of thought* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2007).
- [19] A. S. Eddington, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A102**, 268 (1922).
- [20] A. Einstein, Über Gravitationswellen, in *The Collected Papers of Albert Einstein. Vol. 7*.
- [21] J. Weber, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 1320 (1969).
- [22] R. Hulse and J. Taylor, *Astrophys. J.* **195**, L51 (1975).
- [23] J. H. Taylor and J. M. Weisberg, *Astrophys. J.* **253**, 908 (1982).
- [24] J. M. Weisberg and J. H. Taylor, *ASP Conf. Ser.* **328**, 25 (2005), astro-ph/0407149.
- [25] F. Pretorius, (2007), 0710.1338.
- [26] B. S. Kostas D. Kokkotas, *Living Reviews in Relativity* **2** (1999).
- [27] H. T. Misao Sasaki, *Living Reviews in Relativity* **6** (2003).
- [28] L. Blanchet, *Living Reviews in Relativity* **9** (2006).
- [29] Y. I. Toshifumi Futamase, *Living Reviews in Relativity* **10** (2007).
- [30] R. H. Price and J. Pullin, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3297 (1994).
- [31] T. Damour and A. Nagar, (2009), 0906.1769.
- [32] H. Bondi, F. A. E. Pirani, and I. Robinson, *Proc. R. Soc. London A* **251**, 519 (1959).

- [33] A. Einstein and N. Rosen, J. Franklin. Inst. **223**, 43 (1937).
- [34] I. Robinson and A. Trautman, Proc. Roy. Soc. Lond. **A265**, 463 (1962).
- [35] M. Alcubierre, *Introduction to 3 + 1 Numerical Relativity* (Oxford University Press, Oxford, UK, 2008).
- [36] I. Hinder, Class. Quant. Grav. **27**, 114004 (2010), 1001.5161.
- [37] B. Aylott *et al.*, Class. Quant. Grav. **26**, 165008 (2009), 0901.4399.
- [38] B. Aylott *et al.*, Class. Quant. Grav. **26**, 114008 (2009), 0905.4227.
- [39] M. Hannam *et al.*, Phys. Rev. D **79**, 084025 (2009), 0901.2437.
- [40] L. Rezzolla, Class. Quant. Grav. **26**, 094023 (2009), 0812.2325.
- [41] D. Merritt, M. Milosavljevic, M. Favata, S. A. Hughes, and D. E. Holz, Astrophys. J. **607**, L9 (2004), astro-ph/0402057.
- [42] D. Merritt, J. D. Schnittman, and S. Komossa, arXiv:0809.5046 (2008), 0809.5046.
- [43] S. Komossa and D. Merritt, Astrophys. J. **683**, L21 (2008), 0807.0223.
- [44] D. Pollney *et al.*, Phys. Rev. D **76**, 124002 (2007), arXiv:0707.2559.
- [45] A. Le Tiec, L. Blanchet, and C. M. Will, Class. Quant. Grav. **27**, 012001 (2010), 0910.4594.
- [46] A. G. Wiseman, Phys. Rev. D **46**, 1517 (1992).
- [47] M. M. D. Kramer, H. Stephani and E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, 1980).
- [48] E. E. Flanagan and S. A. Hughes, New J. Phys. **7**, 204 (2005), gr-qc/0501041.
- [49] B. F. Schutz, Am. J. Phys. **52**, 412 (1984).
- [50] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1975).
- [51] P. C. Peters and J. Mathews, Phys. Rev. **131**, 435 (1963).

- [52] F. A. E. Pirani, Phys. Rev. **105**, 1089 (1957).
- [53] E. T. Newman and R. Penrose, J. Math. Phys. **3**, 566 (1962), erratum in J. Math. Phys. **4**, 998 (1963).
- [54] A. Z. Petrov, *Einstein Spaces* (Pergamon Press, Oxford, 1969).
- [55] F. A. E. Pirani, Acta. Phys. Polon. **15**, 389 (1956).
- [56] R. Sachs, Proc. Roy. Soc. London **A270**, 103 (1962).
- [57] J. M. Stewart, *Advanced general relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
- [58] P. Szekeres, J. Math. Phys **6**, 1387 (1965).
- [59] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of spacetime* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973).
- [60] A. Ashtekar and B. Krishnan, Living Rev. Relativ. **7**, 10 (2004), gr-qc/0407042.
- [61] E. Gourgoulhon and J. L. Jaramillo, Physics Reports **423**, 159 (2006), gr-qc/0503113.
- [62] S. A. Hayward, Phys. Rev. D **49**, 6467 (1994), gr-qc/9306006.
- [63] A. Ashtekar, J. Engle, T. Pawłowski, and C. Van Den Broeck, Class. Quant. Grav. **21**, 2549 (2004), gr-qc/0401114.
- [64] E. Schnetter, B. Krishnan, and F. Beyer, Phys. Rev. D **74**, 024028 (2006), gr-qc/0604015.
- [65] M. Jasiulek, Class. Quant. Grav. **26**, 245008 (2009), 0906.1228.
- [66] J. L. Jaramillo and E. Gourgoulhon, (2010), 1001.5429.
- [67] E. Poisson, *Advanced General Relativity* (<http://www.physics.uoguelph.ca/poisson/research/agr.pdf>, 2002).
- [68] H. Bondi, M. G. J. van der Burg, and A. W. K. Metzner, Proc. R. Soc. London **A269**, 21 (1962).

- [69] R. Sachs, Phys. Rev. **128**, 2851 (1962).
- [70] P. Chrusciel, Commun. Math. Phys. **137**, 289 (1991).
- [71] K. Tod, Class. Quant. Grav. **6**, 1159 (1989).
- [72] E. W. M. Chow and A. W. C. Lun, J. Austral. Math. Soc. Serv. B **41**, 217 (1999), gr-qc/9503065.
- [73] W. Natorf and J. Tafel, Class. Quant. Grav. **25**, 195012 (2008), 0805.3978.
- [74] U. von der Gonna and D. Kramer, Class. Quant. Grav. **15**, 215 (1998), gr-qc/9711001.
- [75] K. Tod, Proc. R. Soc. London **A388**, 457 (1983).
- [76] D. Singleton, Class. Quantum Grav. **7**, 1333 (1990).
- [77] R. F. Aranha, I. D. Soares, and E. V. Tonini, Phys. Rev. **D82**, 104033 (2010).
- [78] L. Derry, R. Isaacson, and J. Winicour, Phys. Rev. **185**, 1647 (1969).
- [79] R. P. Macedo and A. Saa, Phys. Rev. D **78**, 104025 (2008), 0809.3039.
- [80] R. F. Aranha, H. P. de Oliveira, I. Damiao Soares, and E. V. Tonini, Int. J. Mod. Phys. **D17**, 2049 (2008), 0804.3610.
- [81] D. A. Prager and A. W.-C. Lun, J. Austral. Math. Soc. Ser.B. Applied Mathematics **41**, 271 (1999).
- [82] H. P. de Oliveira and I. Damiao Soares, Phys. Rev. D **70**, 084041 (2004), gr-qc/0403091.
- [83] H. P. de Oliveira and E. L. Rodrigues, Class. Quant. Grav. **25**, 205020 (2008), 0803.4278.
- [84] J. Foster and E. Newman, J. Math. Phys. **8**, 189 (1967).
- [85] J. L. P. Holmes and G. Berkooz, *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).

- [86] H. P. de Oliveira, E. L. Rodrigues, and I. D. Soares, (2009), 0912.4067.
- [87] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, 2nd ed. (Cambridge University Press, New York, 1992).
- [88] J. H. Hannay and J. F. Nye, Journal of Physics A: Mathematical and General **37**, 11591 (2004).
- [89] J. W. York, Phys. Rev. Lett. **26**, 1656 (1971).
- [90] J. W. York, Phys. Rev. Lett. **28**, 1082 (1972).
- [91] J. W. York, J. Math. Phys. **14**, 456 (1973).
- [92] J. W. York, Kinematics and dynamics of general relativity, in *Sources of gravitational radiation*, edited by L. L. Smarr, pp. 83–126, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1979.
- [93] D. S. Brill and R. W. Lindquist, Phys. Rev. **131**, 471 (1963).
- [94] R. W. Lindquist, Jour. Math. Phys. **4**, 938 (1963).
- [95] <http://www.cactuscode.org>.
- [96] <http://einstein toolkit.org>.
- [97] M. D. Choi, J. Amer. Math. Monthly **90**, 301 (1983).
- [98] L. Rezzolla, R. P. Macedo, and J. L. Jaramillo, Phys. Rev. Lett. **104**, 221101 (2010), 1003.0873.
- [99] R. P. Macedo, L. R. José Luis Jaramillo, and P. Mösta, in preparation (2011).
- [100] U. Sperhake, E. Berti, V. Cardoso, F. Pretorius, and N. Yunes, (2010), 1011.3281.
- [101] J. Podolsky and M. Ortaggio, Class. Quant. Grav. **23**, 5785 (2006), gr-qc/0605136.