IOSIF FRENCHEL

N.T. 121

SBI-IFUSP
305M810T0121

LIMITE DE BJÖRKEN

e

COMUTADORES A TEMPOS IGUAIS

Tese de Mestrado apresentada ao
Instituto de Física da Universidade
de São Paulo

São Paulo, Novembro 1970

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ex. 1
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
121
INSTITUTO DE FÍSICA

À minha espôsa

Marie - Luise

AGRADECIMENTO

- Ao Prof. J.A.Swieca pela orientação recebida durante a realização dêste trabalho.
- À todos os professôres que me auxiliaram e me incentivaram durante êste período, especialmente aos professôres J. Tiomno e R. Köberle.
- Ao Instituto de Física e ao B.N.D.E. por terem criado as condições necessárias à conclusão dêste trabalho.
- À Marilene e ao Bruno pelo serviço de datilografia e impressão.

ÍNDICE

			pág.
Introdução			
Capítulo. I	:	Álgebra de Correntes	1
Capítulo II	:	Comutadores Anômalos	9
Capítulo III	:	Limite de Björken	21
Capítulo IV	:	Comutadores canônicos em teorias finitas	35
Conclusão			61
Apêndice I			65
Apêndice II			66
REFERÊNCIAS			71

I N T R O D U Ç Ã O

Neste trabalho apresentaremos um estudo sôbre os comutadores a tempos iguais em modêlos de teorias de campos. A motivação para a investigação dos comutadores é o sucesso que a álgebra de correntes teve em duas grande áreas de aplicações: teoremas de baixa energia e regras de soma à altas energias. A finalidade de examinar modêlos de teorias de campo e o fato de que os comutadores decorrentes, que formam a base da álgebra de correntes, são considerados objetos independentes da dinâmica. Assim, apesar da impossibilidade de resolver exatamente a teoria, desejava-se que certos resultados pudessem ser derivados através do uso destas relações independentes do modêlo. Êstes resultados seriam de importância teórica para a estrutura da teoria, e também de importância prática quando fariam previsões experimentais. No capítulo I são apresentados os postulados básicos da álgebra de correntes. São enunciadas as hipóteses fundamentais sôbre os comutadores de correntes e sôbre as divergências das correntes[1]. Devido à natureza dos comutadores a tempos iguais, os resultados baseados no uso destas relações, devem ser cuidadosamente considerados. Consideremos por exemplo a relação de anticomutação dos campos fermiônicos não renormalizados:

$$\left\{ \psi_o(x), \bar{\psi}_o(y) \right\} \Big|_{x_o = y_o} = \gamma^o \, \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

Definindo a corrente de fermions por

$$J_u(x) = \bar{\psi}_o(x) \, \gamma_u \, \psi_o(x)$$

usando uma teoria baseada num modêlo lagrangiano, obteremos, usando as regras de anticomutação acima:

$$\left[J_o(x), J_k(y) \right]_{x_o = y_o} = 0$$

Entretanto, Schwinger[2], mostrou, usando argumentos gerais de covariância, que devemos ter:

$$\left[J_o(x), J_k(y) \right]_{x_o = y_o} = \partial^l \delta(\vec{x} - \vec{y}) \, S_{lk}(\vec{y}, y_o)$$

onde S_{lk} é o chamado têrmo de Schwinger.

Esta contradição, existente mesmo para o caso dos campos livres, é devida ao fato que os produtos bilineares dos operados de campo são objetos singulares, e manipulações formais, com êstes objetos devem ser postos em dúvida.

Um outro exemplo, que evidencia, a priori, a natureza singular dos comutadores a tempos iguais e o anticomutador dos campos fermiônicos renormalizados

$$\Psi(x) = Z^{-1/2}\,\Psi_0(x)$$

$$\left\{\Psi(x), \overline{\Psi}(y)\right\}\Big|_{x_0 = y_0} = Z^{-1}\,\gamma^0\,\delta(\vec{x} - \vec{y})$$

Existem teorias, como por exemplo eletrodinâmica quântica, onde a constante Z^{-1} é infinita. Sendo o produto

$$Z^{-1}\,\delta(\vec{x} - \vec{y})$$

extremamente singular, podemos ver que manipulações indiscriminadas com êstes objetos, podem produzir resultados formais que não são verdadeiros em cálculos explícitos.

No capítulo II apresentaremos dois exemplos que mostrarão o conflito entre as predições formais da álgebra de correntes e os resultados calculados explicitamente.

O primeiro exemplo apresentado foi o decaimento do pion neutro em dois raios gama.

A amplitude mais geral para êste decaimento, ditada pela invariância de Lorentz, conservação da paridade e pela simetria de Bose é:

$$T^{\mu\nu}(p, q) = \xi^{\mu\nu\alpha\beta}\, p_\alpha\, q_\beta\, T(k^2)$$

onde p e q são os momentos dos fotons e k é o momento do pion.

Usando P.C.A.C., e o eletromagnetismo acoplado de maneira mínima, podemos mostrar que a constante efetiva de acoplamento para êste decaimento é nula, para a massa do pion igual a zero:

$$T(0) = 0 \quad (3)$$

Êste resultado pode ser também obtido usando formalmente as regras canônicas de anticomutação:

$$\left[\Psi^+(\vec{x})\ A\Psi(x), \Psi^+(\vec{y})\ B\Psi(\vec{y})\right]_+ = \Psi^+(x)\ [A, B]_+ \Psi(\vec{x})\,\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

onde A e B são quaisquer matrizes 4 x 4 (4).

Entretanto, usando o modêlo σ (5) interagindo com o campo eletromagnético, podemos mostrar, usando um cálculo perturbativo explícito que

$$T(0) = g\,4\pi^2\,m^{-1}$$

onde m é a massa do nucleon. Como segundo exemplo consideramos a regra de soma de Callan-Gross (6). Usando a estrutura formal do comutador

$$C_{ij}(p) = \int d^3x \langle p|[\dot{J}_i(x, 0), J_j(0)]|p\rangle$$

baseada nas regras canônicas de anticomutação para os campos fermiônicos, onde $J_u(x) = \overline{\Psi}(x)\gamma_u\Psi(x)$ é a corrente bilinear nos campos fermiônicos, Callan-Gross mostraram que a secção longitudinal para a eletroprodução de protons à altas energias satisfaz:

$$\lim_{-q^2\to\infty} q^2\sigma_L = 0$$

onde q^2, é a tranferência de momento.

Contudo, usando uma teoria fermiônica com acoplamento escalar, pseudo-escalar ou vetorial, podemos mostrar (7), usando um cálculo perturbativo explícito que:

$$\lim_{-q^2\to\infty} q^2\sigma_L \neq 0$$

irespectivamente do tipo particular de acoplamento. Vemos assim que êstes resultados dos cálculos explícitos evidenciam um conflito com os resultados formais. Sendo que o instrumento

comum usado na obtenção dêstes resultados formais, foram as relações canônicas de comutação, uma posição unificada para o tratamento destas anomalias consiste em modificar os comutadores a tempos iguais de seus valôres canônicos.

Com esta finalidade, lembramos que em teorias de perturbação calculamos produtos cronológicos T* covariantes. Êstes produtos podem ser ambíguos, refletindo as ambiguidades do procedimento de renormalização da teoria. Entretanto estas ambiguidades são sempre polinômios nos momentos externos, e os produtos T, que são definidos como os produtos T* com todos têrmos polinomiais remodidos, não é afetado por estas ambiguidades. Assim escolheremos como definição para o comutador a fórmula de Bjorken-Jonhson-Law[8]:

$$i\int d^3x\, \ell^{-i\vec{q}.\vec{x}} \langle\alpha|[A(\vec{x},0), B(0)]|\beta\rangle =$$

$$\lim_{q_0\to\infty} \int d^4x\, \ell^{iqx} \langle\alpha|\, T\, A(x)\, B(0)|\beta\rangle$$

No capítulo III vamos analizar êste comutador, mostrando como o comutador acima, que será chamado de comutador Björken, permite conciliar os resultados formais com os cálculos explícitos. Esta definição tem várias vantagens:

a) Coincide com outras definições para o comutador, em situações não singulares. Na verdade, Jonhson e Law[9] mostraram que o comutador acima é equivalente à:

$$\langle\alpha||\, A(\vec{x},0), B(0)|\beta\rangle =$$

$$= \lim_{\eta\to 0} |\langle\alpha|\, T\, A(\vec{x},\eta)\, B(0)|\beta\rangle - \langle\alpha|T\, A(\vec{x},-\eta)\, B(0)|\beta\rangle$$

b) Quando a equação de Law não é subtraida, o comutador Björken é expressível como uma soma sôbre funções espectrais, que são relevantes para regras de soma a altas energias[10].

c) Por construção êste comutador será o comutador relevante para regras de soma a altas energias, mesmo em situações singulares.

O programa é portanto o seguinte. Para calcular o elemento de matriz de um comutador de dois operadores, calculamos usando as regras de Feynman o produto T*, removemos todos os polinômios nos momentos externos q, e formamos o limite indicado no comutador Björken. Como um exemplo, calculamos o valor de expectação de vácuo do comutador a tempos iguais:

$$[j_o(x), j_i(y)]|x_o = y_o$$

Foi mostrado que êste comutador produz um têrmo quadráticamente divergente, proporcional a um gradiente da função delta, é um outro têrmo finito proporcional a uma derivada tripla da função delta[11].

Em seguida foi analizado o decaimento $\pi^o \to 2\gamma$. Lembremos que todos os teoremas de baixa energia são derivados com o auxílio das identidades de Ward. Veremos que as identidades de Ward são modificadas em virtude das anomalias presentes no comutador de Björken. Para derivar uma identidade de Ward devemos primeiramente construir produtos T* covariantes, porque em geral os produtos T não são covariantes[12]. Se o têrmo de Schwinger no comutador a tempos iguais

$$[A^u(x), B^v(y)]\, x^o = y^o$$

é conhecido, é fácil construir os têrmos de contato que tornarão covariante o produto T[13]. (Maiores detalhes são apresentados no apêndice II).

Mostraremos que, a condição necessária é suficiente para que as identidades de Ward nos índices u e v, do produto cronológico

$$T^*\, A^u(x)\, B^v(y)$$

sejam simultâneamente satisfeitas, é a ausência dos têrmos de Schwinger no comutador $[A^o, B^o]$. Como será mostrado no capítulo II, o comutador

$$[j_5^u(x), j^v(y)]$$

relevante para o decaimento $\pi^o \to 2\gamma$ possui um têrmo de Schwinger no comutador de

$$[\, j_5^o\,(x),\ j^o\,(y)\,]\ x^o = y^o \qquad (14)$$

Como consequência, não teremos um cancelamento entre os têrmos de Schwinger a divergência dos têrmos de contato. Êste fato, modificará o teorema de baixa energia, produzindo para o decaimento $\pi^o \to 2\gamma$ uma constante de acoplamento igual a constante de acoplamento calculada no modêlo σ.

Finalmente é analizada a regra de soma de Callan-Gross. Mostramos que o comutador:

$$C_{ij}\,(\vec{p}) = \int d^3x\ \langle p|[\, \dot{J}_i\,(\vec{x},\,0),\ J_j\,(0)\,]\ p\rangle$$

tem na teoria de perturbação, uma estrutura diferente daquela obtida usando as regras canônicas de anticomutação para os campos fermiônicos [15]. Neste último caso a estrutura de

$$C_{ij}\,(\vec{p})$$

é:

$$C_{ij}\,(p) = (\delta_{ij}\,p^2 - p_i\,p_j)\,A + B$$

onde A e B são constantes.

Usando teoria de perturbação, acharemos para o comutador $C_{ij}\,(\vec{p})$:

$$C_{ij}(\vec{p}) = (\,\delta_{ij}\ p^2 - p_i\,p_j)\,C + D\ \vec{p}^{\,2}$$

onde C é logarìtmicamente divergente e D é constante. Esta estrutura é obtida calculando explìcitamente

$$\int dx\ e^{\,iqx}\ \langle p|\ T\ |\ J_i(x),\ J_j\,(0)|\ p\rangle$$

é tomando o limite de alta energia do comutador Björken. Mostraremos no capítulo III que esta estrutura é consequência das divergências da teoria e produz, na regra de soma de Callan-Gross uma secção de choque σ_L diferente de zero.

No capítulo IV estudamos a relação existente entre os comutadores canônicos a tempos iguais e a finitude da teoria. Com esta finalidade consideramos o comutador de Björken:

$$i \int d^3x\ e^{\,-i\vec{q}.\vec{x}}\ \langle \alpha|| \ A\,(x,\,0),\ B(0)||\,\beta\rangle\ =$$

$$= \lim_{q_o \to \infty}\ q_o \int d^4x\ e^{\,iqx}\ \langle \alpha|\ T\ A(x)\ B(0)|\beta\rangle$$

Por outro lado, calculamos a amplitude do membro direito, usando do lado esquerdo relações canônicas de comutação para os campos não renormalizados. Por outro lado, calculamos diretamente a amplitude do lado direito da equação acima. Esta amplitude foi calculada explìcitamente, usando teoria de perturbação na ordem mais baixa. Em todos casos considerados, usamos uma teoria finita, isto é, mantemos o limiar Λ da teoria, finito.

Estudamos as seguintes amplitudes:

A. Propagador de Fermions

Consideramos primeiramente o propagador não renormalizado, de fermions.

$$S\,(p) = \int d^4x\, e^{\,ipx}\ \langle 0\ |\ T^*\ \Psi\,(x)\ \bar{\Psi}\ (0)\ |\ 0\rangle$$

Usando as regras canônicas de anticomutação para os campos não renormalizados dos fermions:

$$[\Psi\,(x),\ \bar{\Psi}\,(y)]_+|\delta(x_o - y_o) = \gamma^o\ \delta^{\,4}(x - y)$$

e o comutador de Björken, obtivemos:

$$\lim_{p \to \infty}\ S\,(p) \quad = \frac{i}{\not{p}}$$

Usando teoria de perturbação com limiar finito obtivemos

$$\lim_{p\to\infty} S(p) = \frac{i}{\not p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

B) Propagador de fotons

Em seguida consideramos o propagador de fotons:

$$\overline{\Pi}^{uv}(q) = \int e^{iqx} \langle 0 | T^* A^u(x)\, A^v(0) | 0 \rangle\, d^4x$$

usando as relações canônicas de comutação:

$$[A^u(x), A^v(y)]\; x^o = y^o = 0$$

$$[\dot{A}^u(x), A^v(y)]\; x^o = y^o = g^{uv}\, \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

e o comutador de Björken obteremos:

$$\lim_{q\to\infty} \overline{\Pi}^{uv}(q) = g^{uv}\, \frac{1}{q^2} + O\left(\frac{1}{q^4}\right)$$

C) Função de três pontos

Estudamos depois a função de três pontos não-renormalizada:

$$F^u(p, q) = \iint d^4x\, d^4y\, e^{ipx} e^{-iqy} \langle 0 | T\Psi(x)\, \overline{\Psi}(y)\, j^u(0) | 0 \rangle$$

Usando as regras canônicas de comutação para os campos fermiônicos não renormalizados, teremos, sendo;

$$j^u(x) = \overline{\Psi}(x)\; \gamma^u \Psi(x)$$

$$[j^u(x), \Psi(y)] | x^o = y^o = \gamma^o\, \gamma^u\, \Psi(x)\; \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

Usando êste resultado e o comutador de Björken teremos:

$$\lim_{p_o\to\infty} F^u(p, q) = i\, \frac{\gamma^o\, \gamma^u}{p_o}\, S(q)$$

$$\lim_{q_o} F^u(p, q) = i\, \frac{\gamma^u\, \gamma^o}{p_o}\, S(p)$$

Usando teoria de perturbação, com limiar finito, obteremos para a função de três pontos resultado idêntico.

Finalmente, usando os resultados anteriores, consideramos a amplitude Compton:

$$T^{uv}(q) = \int d^4x\, e^{iqx} \langle p | T\, J^u(x)\, J^v(0) | p \rangle$$

Usando as regras de comutação:

$$[j^o(x), j^u(y)] | (x^o = y^o) = 0$$

$$[j^i(x), j^j(y)] | x^o = y^o = i\, \varepsilon^{ijk}\, j_5^k(x)\, \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

onde

$$j^u(x) = \overline{\Psi}(x)\, \gamma^u \Psi(x) \quad \text{e} \quad j_5^u(x) = \overline{\Psi}(x) \gamma^u \gamma^5 \Psi(x)$$

obtidas com o uso das relações de anticomutação para os campos fermiônicos não renormalizados, e usando o comutador de Björken teremos

$$\lim_{q_o\to\infty} T^{uv}(q) = 0 \qquad \text{se } u = 0 \quad \text{ou} \quad v = 0$$

$$\lim_{q_o\to\infty} T^{ij}(q) = -\frac{\varepsilon^{ijk}}{q_o} \langle p | j_5^k(0) | p \rangle$$

Êste resultado é verificado usando teoria de perturbação com o limiar Λ finito.

Baseados nos exemplos apresentados, e usando procedimentos análogos, qualquer que seja a amplitude considerada, demos uma caracterização diagramática sôbre as relações existentes entre os resultados canônicos e a finitude da teoria. Resumindo, consideremos o propagador $S(p + k)$ que aparece nos cálculos das várias amplitudes, onde p é o momento externo, $\to\infty$, k é o momento interno de integração que aparece nas malhas dos diagramas de Feynman.

Concluimos que, em teorias finitas podemos substituir o propagador $S(p + k)$ por $i\gamma^o/p_o$. Em consequência, obteremos resultados idênticos para as amplitudes, àquêles ob-

tidos usando os comutadores canônicos a tempos iguais. Os resultados obtidos desta maneira devem ser independentes do calibre usado.

Entretanto, usando o calibre covariante de Landau, que aparentemente é finito, alguns autôres mostraram que os resultados calculados explicitamente são diferentes dos resultados canônicos[16]. Como mostraremos no capítulo IV, um cálculo exato revela o fato de que, no calibre de Landau, a teoria é logaritmicamente divergente.

O resultado finito, apontado anteriormente, é devido a um cancelamento formal entre divergências infra-vermelhas e divergências ultravioletas. Na realidade, êste cancelamento formal é incorreto, o que invalida os resultados mencionados acima [16].

Em conclusão, mostramos que em teorias finitas, as relações canônicas de comutação são válidas.

No capítulo final, usando os resultados obtidos no capítulo IV e um estudo feito por vários autôres sôbre o limite de Björken[17], é mostrado que os comutadores canônicos mantém a validez, mesmo se a teoria é divergente ($\Lambda \to \infty$) sòmente quando um dos operadores do comutador é a componente temporal de uma corrente conservada, ou parcialmente conservada. Êste fato é relacionado às condições impostas pela conservação ou pelo P.C.A.C., sôbre a teoria. Por outro lado, teremos o aparecimento de têrmos anômalos, em teorias divergentes, no comutador envolvendo as componentes espaciais das correntes.

Portanto, os comutadores canônicos a tempos iguais são válidos em teorias finitas. Em teorias divergentes, de maneira geral, os comutadores são modificados de seus valôres canônicos.

CAPÍTULO I

As interações fracas e eletromagnéticas das partículas com interação forte (os hadrons) são descritas com o auxílio de correntes. Depois da descoberta da invariância aproximada das interações fortes por SU_3 ficou aparente que SU_3 fornece uma base unificada para descrever as interações fracas e eletromagnéticas. No esquema SU_3, as interações fracas e eletromagnéticas são descritas por um octeto de correntes vetoriais[1].

$$F_j^\lambda (x) \qquad (1)$$

j = índice unitário = 1, 2, ...
λ = índice espacial = 0, 1, 2, 3.

e um octeto de correntes axiais vetoriais:

$$F_j^{5\lambda} (x) \qquad (I.2)$$

As primeiras três componentes do octeto de correntes vetoriais são as correntes de spin isotópico, e a oitava componente é proporcional a corrente de hipercarga. Estas componentes são sempre conservadas:

$$F_j^\lambda (x) = Y_j (x) = \text{corrente de isospin } j = 1, 2, 3$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} F_8^\lambda = Y^\lambda (x) = \text{corrente de hipercarga} \qquad (I.3)$$

As componentes $F_4, \ldots_7$ mudam a estranheza e são conservadas sòmente quando não há quebra de SU_3.

A corrente eletromagnética J_{EM} é construida do octeto de vetôres da seguinte maneira:

$$J_{EM} = e \left(F_3^\lambda + \frac{1}{\sqrt{3}} F_8^\lambda\right) \qquad (I.4)$$

o têrmo proporcional a F_3^λ é a terceira componente de um vetor isotópico, ao passo que o têrmo proporcional a F_8^λ é um

escalar isotópico.

Sendo $I_3 \equiv$ operador do spin isotópico $=$

$$= \int d^3 x\, F_3^o (x)$$

e $Y \equiv$ operador de hipercarga $= \frac{2}{\sqrt{3}} \int d^3 x \;\; F_8^o (x)$ (I.5.a)

teremos a relação de Gell-Mann-Nishijima satisfeita:

$$Q \equiv \int d^3 x\, J_{EM}^o (x) = e\,(I_3 + 1/2\, Y) \qquad (I.5.b)$$

A densidade Lagrangiana de interação que descreve o acoplamento do campo eletromagnético A (x) com os hadrons é:

$$L_{EM} (x) = - A_\lambda (x) \;\; J_{EM}^\lambda \;\; (x) \qquad (I.5.c)$$

Esta interação descreve as propriedades eletromagnéticas dos hadrons para tôdas as ordens na constante de acoplamento e. No caso das interações fracas, não dispomos de uma teoria nas ordens mais elevadas de interação. Assim, escrevemos uma lagrangiana efetiva, cujos elementos de matriz descrevem as interações fracas na ordem mais baixa:

$$L_{eff} = \frac{G}{\sqrt{2}} \;\; (J_\lambda^+ \;\; J^\lambda + J^\lambda \;\; J_\lambda^+) \qquad (I.6)$$

Aqui $G \cong 10^{-5}/M^2$ proton é a constante de Fermi, e a corrente fraca J^λ é soma das partes leptônica e hadrônica:

$$J^\lambda = J_e^\lambda + J^h \qquad (I.6.a)$$

onde:

$$J_e^\lambda = \bar{\nu}_u \gamma^\lambda (1 - \gamma_5)\, u + \bar{\nu}_e \gamma^\lambda (1 - \gamma_5)\, e \qquad (I.6.b)$$

com u e ν_u os campos do *muon* e do seu neutrino (e analogamente para e e ν_e). A corrente hadrônica é construida dos octetos de correntes da seguinte forma:

$$J_h^\lambda = (F_1^\lambda + iF_2^\lambda - F_1^{5\lambda} - i\, F_2^{5\lambda}) \cos \theta_c$$

$$+ (F_4^\lambda + iF_5^\lambda - F_4^{5\lambda} - iF_5^{5\lambda}) \operatorname{sen} \theta_c \qquad (I.6.c)$$

Experimentalmente, o ângulo de Cabilbo θ_c é aproximadamente 15^o.

Sendo que històricamente, a álgebra de correntes foram abstraticados da teoria dos campos, vamos discutir brevemente os comutadores numa teoria lagrangiana de campos. Seja

$$| \phi (x) | = \{ \phi_1 (x), \phi_2 (x), \ldots \} \quad e \quad \{ \partial_\lambda \phi (x) \}$$

um conjunto de campos e suas derivadas espaço-temporais. A teoria é descrita pela densidade de Lagrange:

$$L (x) = L \,|\, \{ \phi (x) \}, \{ \partial_\lambda \phi \} \,| \qquad (I.7.a)$$

e as equações de Euler Lagrange:

$$\frac{\delta L (x)}{\delta \phi_j (x)} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \;\; \frac{\delta L}{\delta |(\partial/\partial x^\lambda) \phi_j (x)|} \qquad (I.7.b)$$

Existe um método simples para obter correntes úteis, e deduzir as suas relações de comutação.

Vamos fazer uma transformação infinitesimal local nos campos:

$$\phi_j (x) \dashrightarrow \phi_j (x) + \Lambda (x)\, G_j | \{ \phi (x) \} | \qquad (I.8.a)$$

Na primeira ordem na função de calibre infinitesimal $\Lambda (x)$ temos:

$$\delta L = \frac{\delta L}{\delta \Lambda} + \frac{\delta L}{\delta (\partial \alpha \Lambda)} \partial \alpha \Lambda \qquad (I.8.b)$$

com $$\frac{\delta L}{\delta \Lambda} = \sum_j \left(\frac{\delta L}{\delta (\partial \alpha \phi_j)} \partial \alpha G_j + \frac{\delta L}{\delta \phi_j} G_j \right) \qquad (I.8.c)$$

e

$$\frac{\delta L}{\delta(\partial_\alpha \Lambda)} = \sum_j \frac{\delta L}{\delta(\partial_\alpha \phi_j)} G_j \qquad (I.8.d)$$

Usando as equações de Euler Lagrange, se definirmos por J a corrente relacionada com a tranformação (I.8.a):

$$J \equiv - \frac{\delta L}{\delta(\partial_\alpha \Lambda)} = - \sum_j \frac{\delta L}{\delta(\partial_\alpha \phi_j)} G_j \qquad (I.9.a)$$

teremos que a divergência de J será:

$$J = - \delta L / \delta \Lambda \qquad (I.9.b)$$

Assim a expressão da divergência em têrmos dos campos pode ser obtida diretamente da Lagrangiana. Em particular se

$$\delta L / \delta \Lambda = 0$$

vemso que a corrente J é conservada.

Para estudar as relações de comutação das correntes, vamos especializar para o caso de correntes geradas por transformações lineares de calibre:

$$\phi_j(x) \dashrightarrow \phi_j(x) + \Lambda(x) \sum_\ell f_{j\ell}\, \phi_\ell(x) \qquad (I.10.a)$$

e

$$\phi_j(x) \dashrightarrow \phi_j(x) + \Lambda(x) \sum_\ell g_{j\ell}\, \phi_\ell(x) \qquad (I.10.b)$$

Definindo o momento canônico Π_j por:

$$\Pi_j(x) \equiv \frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta(\partial_o \phi_j(x))}$$

teremos usando a definição (I.9.a) para as correntes:

$$J_f^o(x) = - \frac{1}{2} \sum_{j\ell} f_{je} \left[\Pi_j(x)\, \phi_e(x) \pm \phi_e(x)\, \Pi_j(x) \right]$$
$$J_g^o(x) = - \frac{1}{2} \sum_{j\ell} g_{je} \left[\Pi_j(x)\, \phi_e(x) \pm \phi_e(x)\, \Pi_j(x) \right] \qquad (I.10.c)$$

onde o sinal (+) é para bosons e o sinal (-) é para os fermions.

Usando as relações canônicas de comutação

$$\left[\phi_j(x)\, \phi_{j'}(y) \pm \phi_{j'}(y)\, \phi_j(x)\right] x_o = y_o = 0 =$$
$$= \left[\Pi_j(x)\, \Pi_{j'}(y) \pm \Pi_{j'}(y)\, \Pi_j(x)\right] x_o = y_o \qquad (I.11.a)$$

e

$$\left[\phi_j(x)\, \Pi_{j'}(y) \pm \Pi_{j'}(y)\, \phi_j(x)\right] x^o = y^o = i\, \delta_{jj'}\, \delta(\vec{x} - \vec{y}) \qquad (I.11.b)$$

teremos:

$$\left[J_f^o(x),\, J_g^o(y) \right] | x_o = y_o = - i\, \delta(\vec{x} - \vec{y})\, J^o\, [f, g](x) \qquad (I.11)$$

Em outras palavras o comutador das componentes temporais das correntes construidas de f e g é a componente temporal do comutador construido de [f, g]. Êste comutador não faz referência a estrutura detalhada da Lagrangiana, sendo determinado ùnicamente pela estrutura das transformações de calibre que geram as correntes J_f e J_g. Em particular, vamos supôr que construimos transformações de calibre de um conjunto finito de matrizes f, g, h, ... que satisfazem uma álgebra fechada sob comutação. Então as componentes temporais das correntes correspondentes, sob comutação a tempos iguais, vão formar também uma álgebra fechada.[18]

A hipótese fundamental da álgebra de correntes, formulada por Gell-Man, afirma que as componentes temporais dos octetos decorrentes vetoriais e axiais vetoriais satisfazem para tempos iguais as seguintes relações de comutação:

$$\left[F_k^o(x),\, F_e^o(y) \right] | x^o = y^o = i\, \delta(\vec{x} - \vec{y})\, f_{kem}\, F_m^o(x) \qquad (I.12.a)$$

$$\left[F_k^o(x),\, F_e^{50}(y) \right] | x^o = y^o = i\, \delta(\vec{x} - \vec{y})\, f_{kem}\, F_m^{50}(x) \qquad (I.12.b)$$

$$\left[F_k^{50}(x),\, F_e^{50}(y) \right] x^o = y^o = i\, \delta(\vec{x} - \vec{y})\, f_{kem}\, F_m^o(x) \qquad (I.12.c)$$

onde f_{kem} é um tensor completamente antisimétrico nos seus in

dices [1]. Precisamos conhecer também as relações de comutação entre a componente temporal das correntes com as componentes espaciais das mesmas. Por extensão das hipóteses anteriores, não podemos ter simplesmente:

$$[F_i^o(x), F_j(y)]\, x^o = y^o = i f_{ijk} F_k(x)\, \delta(\vec{x} - \vec{y}) \qquad \text{(I.13.a)}$$

Schwinger[2] mostrou que comutadores desta forma não são consistentes para descrever as correntes físicas. Por exemplo, fazendo $i = j$ e escolhendo uma corrente hermitiana conservada $F_i^u(x)$ teremos de (I.13.a):

$$[F_i^o(x), F_i^u(y)] = 0 \quad \text{se} \quad x^o = y^o$$

Logo:

$$|F_1^o(x), \sum_{e=1}^{e=3} \partial^e F_e^i(y)| = 0 \text{ se } x_o = y_o \qquad \text{(I.13.b)}$$

Usando a conservação da corrente e especializando para $x = y = 0$ teremos:

$$[F_i^o, \partial_o F_i^o(0)| = -i[F_i^o, [H, F_i^o(0)]] = 0$$

Tomando a expectação do vácuo dêste comutador obteremos:

$$0 = 2\, \langle 0|\, F_i^o(0)\, H\, F_i^o(0)|\, 0\rangle =$$

$$= 2 \sum_n E_u\, |\langle 0|\, F_i^o(0)|\, u\rangle|^2 \qquad \text{(I.13.c)}$$

Usando a invariância por transformações de Lorentz vem portanto:

$$\langle 0|\, F_i^u\, |\, u\rangle = 0 \quad \text{o que só é possível se} \quad F_i^u = 0$$

Para evitar estas inconsistências, relações do tipo (I.13.a) devem ser modificadas, adicionando-se ao lado direito um têrmo proporcional uma função delta (o chamado têrmo de Schwinger):

$$[F_k^o(x), F_e^r(y)]\, x^o = y^o = i\delta(\vec{x} - \vec{y})\, f_{kem}\, F_m^r(y) + i(\nabla x)\, t\, [\delta(\vec{x} - \vec{y})\, S_{ke}^{tr}(y)]$$

$$[F_k^o(x), F_e^{5r}(y)]\, x^o = y^o = i\delta(\vec{x} - \vec{y})\, f_{kem}\, F_m^{5r}(y) + i(\nabla x)\, t\, [\delta(\vec{x} - \vec{y})\, S_{ke}^{5r}(y)] \qquad \text{(I.13)}$$

$$[F_k^{50}(x), F_e^{5r}(y)]\, x^o = y^o = i\delta(\vec{x} - \vec{y})\, f_{kem}\, F_m^r(y) + i(\nabla x)\, t\, [\delta(\vec{x} - \vec{y})\, S_{ke}^{55tr}(y)]$$

(18)

A natureza dos têrmos de Schwinger é dependente da dinâmica. Por exemplo na teoria de quark livres S_{ke}^{tr} é um número e infinito. Por outro lado no modêlo sem interação S_{ke}^{tr} é um operador. Também no caso de teorias com interação, o fato de o têrmo de Schwinger ser um número c ou um operador depende do tipo de interação[18].

Muitas das aplicações das álgebras de correntes, necessitam do conhecimento das divergências dos octetos vetoriais e axial-vetoriais. Para o octeto vetorial de correntes é feita a hipótese de que as interações fortes têm a hamiltoniana na forma:

$$H = H_o + g H_8 = H_o + g \int d^3x\, H_8 \qquad \text{(I.14.a)}$$

onde H_o é invariante por SU_3 e H_8 é o oitavo membro de um octeto sendo g o parâmetro da quebra de simetria do grupo SU_3. A generalização da hipótese de correntes vetoriais conservadas toma a forma:

$$\partial_\lambda F_k^\lambda(x) = g\, f_{k8m}\, H_m(x) \qquad \text{(I.14.b)}$$

De acôrdo com esta relação, as correntes $F_{1,2,3,8}$ são conservadas (estas são as correntes de spin isotópico e de hipercarga) ao passo que a divergência de $F_{4,5,6,7}$ é proporcional ao parâmetro g. A hipótese da divergência do octeto axial

vetor tem sua origem numa relação remarcável para a amplitude de decaimento do pion carregado

$$\overline{\pi}^{+} \longrightarrow u^{+} + \nu_u$$

A constante do decaimento do pion definida por:

$$(2q^0)^{1/2} \langle \overline{\pi}^{+}(q) | \; F_1^{5\lambda} + i \, F_2^{5\lambda} \; | \, 0 \rangle =$$

$$= - i q^{\lambda} f_{\pi} / M_{\pi}^2 \qquad \text{(I.15.a)}$$

vale experimentalmente $f \cong 0{,}96 M_{\pi}^3$. Goldberger e Treinman[3] postulando que a divergência da corrente axial-vetorial é proporcional ao campo interpolante do pion:

$$\partial_{\lambda}(F_1^{5\lambda} + i \, F_2^{5\lambda}) = c \, 0^{+} \qquad \text{(I.15.b)}$$

e ainda supondo que

$$\langle p(q_2) | (\Box^2 + M_{\pi}^2) \phi_{\pi} | n(q_1) \rangle$$

que varia lentamente em função da variável $q^2 \equiv (q_2 - q_1)^2$, obtiveram $f = 0{,}83 \times M_{\pi}^3$

Em suma, a hipótese da corrente axial parcialmente conservada P.C.A.C., nos permite substituir os elementos de matriz das divergências do octeto axial-vetorial, pelas correspondentes elementos de matriz envolvendo os mesons pseudo-escalares.

CAPÍTULO II

Vamos neste capítulo, apresentar dois exemplos que evidenciam o conflito entre os resultados formais apresentados anteriormente, e os cálculos explícitos.

Consideremos primeiramente o decaimento $\overline{\pi}^{o} \longrightarrow 2\gamma$[4]

A amplitude invariante para êste processo é obtida contraindo-se os vetores de polarização dos fotons com o tensor:

$$T^{uv}(p, q) = \varepsilon^{uv\alpha\beta} \, p_{\alpha} \, q_{\beta} \, T(k^2) \qquad \text{(II.1)}$$

onde p e q são os momentos dos fotons e $k = p + q$ é o momentum do foton. A fórmula geral acima é ditada pela invariância de Lorentz e a conservação de paridade. Também são satisfeitos a invariância por calibre:

$$p_u \, T^{uv} = 0 = T^{uv} \, q_v$$

e a simetria de Bose:

$$T^{uv}(p, q) = T^{vu}(q, p)$$

Usando a divergência da corrente axial:

$$\partial_u \, A^u = F \, u^2 \, \phi \qquad \text{(II.2)}$$

que no caso da corrente neutral e suposta válida mesmo na presença dos campos eletromagnéticos[5], teremos:

$$T^{uv} = (u^2 - k^2) \langle p_u, q_v | \, \phi(0) | \, 0 \rangle = \qquad \text{(II.3)}$$

$$= - i (F u^2)^{-1} (u^2 - k^2) \, k_{\alpha} \langle p_u, q_v | \, A^{\alpha}(0) | \, 0 \rangle \equiv$$

$$\equiv (F u^2)^{-1} (u^2 - k^2) \, k_{\alpha} \, F^{\alpha uv}(p, q)$$

Agora, se $(F u^2)^{-1}(u^2 - k^2) F^{\alpha uv}(p, q)$ é expandida em potências de p e q, levando em consideração a conservação de paridade e a simetria de Bose, trabalhando em or--

dem mais baixa nas interações eletromagnéticas, a expressão começa com:

$$\xi^{\alpha uvw}\,(p-q)_w \quad C \qquad \text{onde C é uma constante.}$$

Assim, teremos usando as relações (II.1) e (II.3):

$$T(k^2) = -2c + \cdots$$

onde os têrmos adicionais são de ordem k^2 ou mais. Usando a invariância por transformações de calibre devemos ter:

$$p_u\, F^{\alpha uv} = q_v\, F^{\alpha uv} = 0 \qquad \text{(II.4.a)}$$

Isto requer $c = 0$. Portanto:

$$T(0) = 0 \qquad \text{(II.4)}$$

Vamos agora calcular a constante de acoplamento para o decaimento $\pi^0 \longrightarrow 2\gamma$ de maneira explícita, usando um cálculo perturbativo no modêlo σ (5). Neste modêlo, introduzimos além dos nucleons e dos pions, um novo meson escalar σ, como spin isotópico zero. Êle tem interações fortes e desintegra-se imediatamente em dois pions. Experimentalmente, o meson apareceria como um estado ressonante de dois pions com $J = 0$ e $T = 0$. Vamos considerar êste modêlo, interagindo com o campo eletromagnético a_u. A densidade de Lagrange será:

$$L = -1/2\,\partial_v a_u \partial^v a^u + \bar{\psi}[i(\gamma\cdot\partial) + e(\gamma\cdot a) - m + g(\sigma + \phi\gamma_5)]\psi \qquad \text{(II.5)}$$

$$+ 1/2\,(\partial\phi)^2 + 1/2(\partial\sigma)^2 - 1/2\,u^2\phi^2 - 1/2\,(u^2 + \frac{2\lambda}{f})\sigma^2 -$$

$$- \lambda[(\phi^2+\sigma^2)^2 - 2f^{-1}\sigma(\sigma^2+\phi^2)]$$

Nesta expressão $f = g/2m$ e λ e da ordem de g^2.

Fazendo a transformação de calibre:

$$\psi \longrightarrow (1 + v\gamma 5)\psi \;;\; \phi \longrightarrow \phi - 2v\sigma' \;;\; \sigma' \longrightarrow \sigma' + 2v\,\phi \qquad \text{(II.5.a)}$$

onde $\sigma' \equiv \sigma - (2f)^{-1}$ obteremos:

$$A_u \equiv \frac{\delta L}{\delta \partial_u{}^v} = \bar{\psi}_i \gamma_u \gamma_5 + 2(\sigma\partial_u\phi - \phi\partial_u\sigma) - f^{-1}\partial_u\phi \qquad \text{(II.5.b)}$$

e

$$\partial_u A^u = u^2 f^{-1}\phi \qquad \text{(II.5.c)}$$

Na ordem mais baixa, os diagramas relevantes para T^{uv} são dadas pela figura abaixo:

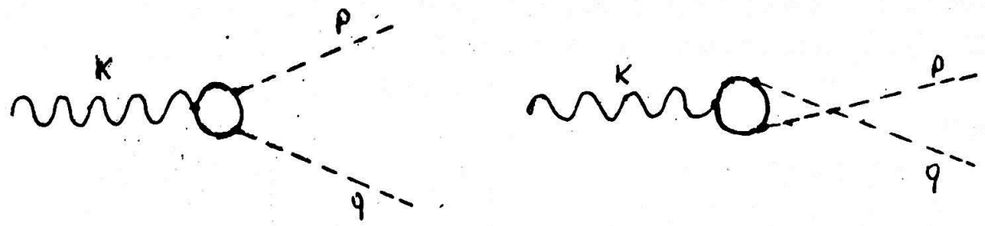


Figura 1

Êstes diagramas tem a seguinte representação:

$$T^{uv}(p, q) = \Gamma^{uv}(p, q) + \Gamma^{vu}(q, p) \qquad \text{(II.6.a)}$$

onde

$$\Gamma^{uv}(p, q) = ig\int d^4r\, Tr\{\gamma^5[\gamma\cdot p + \gamma\cdot r - m]^{-1}\gamma^u[\gamma\cdot r - m]^{-1} \times$$

$$\times\ \gamma^v[\gamma\cdot r - \gamma\cdot q - m]^{-1}\} \qquad \text{(II.6.b)}$$

Esta integral é superficialmente divergente. Contudo quando tomamos o traço, nenhuma potência de r sobrevive no numerador e Γ^{uv} é manifestamente convergente.

Na notação da equação (II.1) obteremos:

$$T(k^2) = 8\bar{\Pi}^2 mg \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[m^2 - k^2 xy \right]^{-1} \qquad \text{(II.7.a)}$$

Portanto

$$T(0) = 4\bar{\Pi}^2 g/m \qquad \text{(II.7)}$$

(O valor físico $T(u^2)$ é sòmente um pouco diferente, por quantidades de ordem u^2/m^2).

O resultado (II.7), prediz para o decaimento $\bar{\Pi}^o \longrightarrow 2\gamma$ uma vida média que está de acôrdo com a experiência (dentro de um êrro de 15%: $\tau|\bar{\Pi}^o \longrightarrow 2\gamma \simeq 10^{-16}$sec).

Para entendermos a razão da discordância entre o resultado formal (P.C.A.C.) (II.4) e o resultado perturbativo (II.7), consideremos a amplitude $F^{\alpha\mu\nu}$ na ordem mais baixa. Os diagramas relevantes para esta amplitude são mostrados na figura abaixo

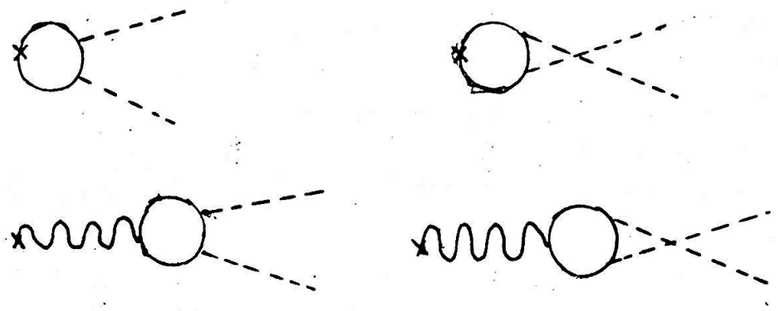


Figura 2 - (x representa a corrente axial)

Êstes diagramas têm a seguinte representação:

$$F^{\alpha\mu\nu}(p, q) = \Gamma^{\alpha\mu\nu}(q,p) + \Gamma^{\alpha\nu\mu}(q, p) - \frac{2mg^{-1} T^{\mu\nu}(p, q)k^\alpha}{k^2 - u^2} \equiv$$

$$\equiv F_1^{\alpha\mu\nu} - \frac{2mg^{-1}k^\alpha}{k^2 - u^2} T^{\mu\nu} \qquad \text{(II.7.c)}$$

onde

$$\Gamma^{\alpha\mu\nu}(p, q) = \int d^4r \, \mathrm{Tr}\gamma_5\gamma^\alpha \left\{ \gamma.p + \gamma.r - m|^{-1}\gamma^\mu|\gamma.r - m|^{-1} \times \right.$$

$$\left. \gamma^\mu|\gamma.r - \gamma.q - m|^{-1} \right\}$$

Na primeira ordem em g, $F_1^{\alpha\mu\nu}$ e $T^{\mu\nu}$ são transformadas de Fourier dos seguintes produtos cronológicos:

$$F_1^{\alpha\mu\nu} = \int d_x \, d_y \, \exp[ipx] \, \exp[iqy] \langle 0| T[A_1^\alpha(0) j^\mu(x) j^\nu(y)]|0\rangle \qquad \text{(II.8.a)}$$

$$T^{\mu\nu} = \int d_x \, d_y \, \exp[ipx] \, \exp[iqy] \langle 0|T[\phi\bar{\Pi}(0) \, j^\mu(x) \, j^\nu(y)]|0\rangle$$

onde

$$A_1^\alpha = i\bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi \; ; \; j^\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \text{ e } \phi\bar{\Pi} = g\bar{\psi}\gamma_5\psi$$

Efetuando uma integração parcial em (II.8.a), usando o comutador a tempos iguais:

$$[A_1^o(\vec{x}), \, j^\mu(\vec{y})] = 0 \qquad \text{(II.8.b)}$$

obteremos:

$$k_\alpha F_1^{\alpha\mu\nu} = \frac{2m}{g} T^{\mu\nu} \qquad \text{(II.8.c)}$$

Assim, usando (II.7.c) teremos o requerimento P.C.A.C. formalmente satisfeito:

$$T^{\mu\nu} = \frac{g}{2m\,u^2} (u^2 - k^2) \, k_\alpha F^{\alpha\mu\nu}(p,q) \qquad \text{(II.9.a)}$$

o comutador (II.8.b) é realmente zero, se usamos as regras da anticomutação canônicas:

$$[\psi^+(\vec{x}) \; A\psi(\vec{x}), \, \psi^+(\vec{y}) \, B\psi(\vec{y})] = \psi^+(\vec{x})[A, B]\psi(\vec{x})\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

onde A e B são quaisquer matrizes 4 x 4.

As condições de invariância de calibre:

$$p_\mu F^{\alpha\mu\nu} = q_\nu F^{\alpha\mu\nu} = 0 \qquad \text{(II.9.b)}$$

$$p_\mu T^{\mu\nu} = q_\nu T^{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(II.9.c)}$$

resultam da mesma forma do fato de que os comutadores canônicos a tempos iguais envolvendo j^o com j^u, A^u e ϕ_π são nulos.

Como já vimos, usando os resultados formais II.9a II.9.b e II.9.c, resulta que a constante de acoplamento para o decaimento $\pi^o \longrightarrow 2\gamma$ é nula, se a massa do pion é zero. Sendo que êstes resultados podem ser obtidos usando formalmente as regras canônicas de comutação, vemos que o conflito entre os resultados formais e os cálculos explícitos é devido ao uso das relações canônicas de comutação.

O segundo exemplo que mostra as contradições existentes entre os cálculos formais e os resultados explícitos será tomado no domínio da física de altas energias.

A regra de soma de Callan-Gross[6] prediz que a secção total de choque para a foto-absorção de fotons virtuais longitudinais por protons, tende a zero quando a energia dos protons tende a infinito. Para ver isto, usando um cálculo formal, consideremos a amplitude Compton para o espalhamento frontal (virtual) de fotons em protons:

$$T_{uv}(p, q) = i\int d^4x\, e^{iqx}\, \theta(x_o) \langle p|[J_u(\vec{x},o), J_v(0)]|p\rangle \quad (II.10)$$

$$\equiv T_1(q^2, \nu)(-g_{uv} + \frac{q_u q_v}{q^2}) + T_2(q^2, \nu)(P_u - \frac{p.q}{q^2} q_u)(P_v - \frac{p.q}{q^2} q_v)$$

onde $\nu \equiv p.\, q$; J_u representa a corrente eletromagnética, subentendendo que a média sôbre os spins dos protons já foi tomada. Usando argumentos baseados na teoria dos polos de Regge, Harari[21] mostrou que T_2 satisfaz uma relação de dispersão sem subtração ao passo que T_1 requer uma subtração.

Portanto poderemos escrever (sendo $q^2 < 0$):

$$T_2\ (\nu, q^2) = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty \frac{d\nu'\ Ym\ T2(\nu', q^2)}{\nu_1^2 - \nu^2 - i\varepsilon} \quad (II.11.a)$$

$$T_1\ (\nu, q^2) = T_1(0, q^2) + \frac{\nu^2}{\pi^2}\int_o^\infty \frac{d\nu'^2\ Ym\ T1(\nu, q^2)}{\nu_1^2\ (\nu_1^2 - \nu^2 - i\varepsilon)}$$

Usando o fato que $Y\,m\,T_i\ (\nu, q^2) = \pi\, w_i(\nu, q^2)$[22], onde os w_1, 2 são proporcionais a secção de choque inelástica diferencial, para trás e para frente do espalhamento eletron-proton, e são definidos por:

$$\int d^4x\, e^{iqx} \langle p|\, J_u(x,0), J_v(0)|p\rangle \equiv (-g_{uv} + \frac{q_u q_v}{q^2}) W_1(q^2, \nu) +$$

$$+ (p_u - \frac{p.q}{q^2}\, q_u)(p_v - \frac{p.q}{q^2}\, q_v) W_2(q^2, \nu) \quad (II.11.b)$$

teremos; escrevendo as relações (II.11.a) em têrmos da variável $\omega \equiv q^2/\nu$:

$$T_1(\omega, q^2) = T_1(\infty, q^2) - \int_o^4 \frac{d\omega'^2\ W_1(\omega', q^2)}{\omega_1^2 - \omega^2 + i\varepsilon}$$

$$T_2(\omega, q^2) = -\omega^2 \int_o^4 \frac{d\omega'^2\ W_2(\omega', q^2)}{\omega_1^2\,(\omega_1^2 - \omega^2 + i\varepsilon)} \quad (II.12)$$

Usando êste resultado e fazendo $q = (q_o, 0)$ na relação (II.10) teremos

$$T_{ij} = \delta_{ij}[\, T_1(q^2, \infty) - \int_o^4 \frac{d\omega_1^2\ W_1(\omega_1, q^2)}{\omega_1^2 - q_o^2/p_o^2}\,] - \frac{p_i p_j}{m^2}$$

$$\cdot \frac{q_o^2}{p_o^2}\int_o^4 \frac{d\omega_1^2}{\omega_1^2}\, \frac{W_2(\omega', q^2)}{\omega_1^2 - q_o^2/p_o^2} \quad (II.13)$$

Se multiplicarmos esta relação por q_o^2 e fizermos $q_o^2 \longrightarrow -\infty$, obteremos:

$$q_o^2\, T_{ij} = \delta_{ij}[\lim_{q^2 \to -\infty} q^2 T_1(q^2, \infty) + \frac{p_o^2}{m}\int_o^4 \frac{d\omega^2}{\omega_1^2}\,[\delta_{ij}\omega'\, F_1(\omega') -$$

$$- \frac{p_i p_j}{p_o^2}\, F_2(\omega')] \quad (II.14.a)$$

onde as quantidades:

$$F_1(\omega) = \lim_{\substack{q^2 \to -\infty \\ \omega\ fixo}} m\ W_1(\omega, q^2) \quad e \quad F_2(\omega) = \lim_{\substack{q^2 \to -\infty \\ \omega\ fixo}} \nu/m\ W_2(\omega, q^2) \quad (II.14.b)$$

existem e são finitas, se a hipótese de Harari é correta[22].

Por outro lado, usando o teorema de Björken[10], teremos:

$$T_{ij}(q) = \int d^4x\, e^{iqx}\theta(x_o)\langle p|J_i(\vec{x},0), J_j(0)|p\rangle =$$

$$= \lim_{q_o\to\infty} 1/q_o \int d^3x \langle p|[J_i(\vec{x},0), J_j(0)]|p\rangle\ e^{-i\vec{q}\vec{x}} +$$

$$+ 1/q_o^2 \int d^3x\, e^{-i\vec{q}\vec{x}}\langle p|[\frac{\partial}{\partial t} S_i(x,t)|_{t=0}\ J_j(0)]|p\rangle$$

(II.14)

A relação de cruzamento, através da qual a amplitude permanece invariante é: $q_{in} \leftrightarrow -q_{fin}$ e $i \leftrightarrow j$. No nosso caso para o espalhamento frontal, usando-se esta relação de cruzamento, pode-se fàcilmente mostrar que a amplitude $T_{ij}(q)[\vec{q}=0]$, é invariante através da transformação $q_o \leftrightarrow -q_o$ e portanto o têrmo proporcional a $1/q_o$ é necessàriamente nulo. Assim, usando (II.13) e (II.14) podemos escrever:

$$C_{ij}(\vec{p}) \equiv \int d^4x\,\delta(x_o)\langle p|[j^i(x), J_j(0)]|p\rangle = q_o^2\ T_{ij} =$$

$$= \delta_{ij}[\lim_{q^2\to\infty} q^2 T_1(q^2,\infty) + \frac{p_o^2}{m}\int_0^4 \frac{d\omega'^2}{\omega 1}[\delta_{ij}\omega' F_1(\omega') - \frac{p_i p_j}{p_o^2} F_2(\omega')|$$

$q_o \to i\infty$

Multiplicando esta equação por m/p_o^2, e tomando o limite $p_o\to\infty$, mantendo-se fixa a direção $\hat{p}$, obteremos finalmente:

$$\lim_{p_o\to\infty} m/p_o^2\ C_{ij}(\vec{p}) = \int_0^4 \frac{d\omega'^2}{\omega 1}\ [\omega' F_1(\omega')(\delta_{ij}-p_ip_j) - |F_2(\omega') - \omega' F_1(\omega')|\ p_ip_j)$$

(II.16)

vamos usar como modêlo uma teoria onde os fermios, de massa M interagem, através da corrente conservada $j^u = \bar{\psi}\gamma^u\psi$ com os bosons massivos B_u. Usando a equação do movimento:

$$(i\gamma_u\partial^u + M)\psi = -g\gamma_u B^u$$

e as regras canônicas de anticomutação:

$$[\psi(x), \bar{\psi}(y)] + \delta(x_o - y_o) = \gamma_o\delta^4(x-y) \qquad (II.17)$$

obteremos:

$$C_{ij}(\vec{p}) = \int d^3x\langle p|[\dot{j}^i(\vec{x},0), J_j(0)||p\rangle = \qquad (II.18)$$

$$= 2_i\langle p|\bar{\psi}\gamma_i\partial_j\psi - \delta_{ij}\bar{\psi}\vec{\gamma}.\vec{\partial}\psi|p\rangle +$$

$$+ 2g\langle p|\psi\gamma_i B_j\psi - \delta_{ij}\bar{\psi}\vec{\gamma}.\vec{B}\psi|p\rangle + 4M\delta_{ij} + (i\leftrightarrow j)$$

Do caráter tensorial do comutador $C_{ij}(p)$ resulta:

$$C_{ij}(p) = (\delta_{ij}\ p^2 - p_ip_j\ A) + B \qquad (II.18.a)$$

onde A e B são constantes (escalares por transformações de Lorentz) e portanto independentes de p^2.

Como indica a relação (II.14.b) ωF_1 e $F_2 - \omega F_1$ são quantidades positivas. Usando o fato de que[93]

$$F_2(\omega) - \omega F_1(\omega) = 1/4\pi^2\alpha \lim_{q^2\to-\infty} q^2\sigma_L(\omega, q^2) \qquad (II.18.b)$$

onde σ_L é a secção total de choque para a fotoabsorção de fotons virtuais longitudinais, usando (II.16) e (II.18.a) obteremos:

$$4\pi\alpha^2|F_2(\omega) - \omega F_1(\omega)| = \lim_{q^2\to-\infty} q^2\sigma_L(\omega,q^2) = 0 \qquad (II.19)$$

Vamos agora calcular σ_L de maneira explícita, usando a teoria de perturbação, no modêlo de acoplamento vetorial dos fermions. Mostraremos que a secção de choque σ_L é diferente de zero.

Com esta finalidade, vamos considerar a amplitude frontal de Compton com a soma sôbre os spins protons já implícita:

$$T_{uv}(p,q) = \int dx\, e^{iqx}\langle p|\ T^*\ J^u(x)\ J^v(0)|p\rangle \equiv \bar{u}(p)\tilde{T}^{uv}u(p) \qquad (II.20.a)$$

e sua discontinuidade em q_o:

$$C_{uv}(p,q) = \int dx\, e^{iqx}\langle p|[J_u(\vec{x},0), J_v(0)||p\rangle \equiv \bar{u}(p)\tilde{C}_{uv}u(p) \qquad (II.20.b)$$

Podemos decompor a expressão (II.20.b) da seguinte forma:

$$\tilde{C}_{uv} = v^{-1}(p_u+q_u/\omega)(p_v+q_v/\omega)\tilde{F}_2(\omega,v)-(g_{uv}+ q_u q_v)/\omega_v)\tilde{F}_1(\omega,v)$$

(II.20.c)

com $v = p \cdot q$ e $\omega = -q^2/v$ e onde $\tilde{F}_1(\tilde{F}_2)$ é uma quantidade adimensional par (impar) sob a transformação: $\omega \longrightarrow -\omega$ e $v \longrightarrow -v$. Usando as equações (II.14.b) e (II.11.b) vemos que:

$$\lim_{\substack{v\to\infty \\ \omega \text{ fixo}}} \tilde{F}_i(\omega,v) = \lim_{\substack{q^2\to-\infty \\ \omega \text{ fixo}}} \tilde{F}_i(\omega,q^2) = F_i(\omega) < \infty$$

com os $F_i(\omega)$ satisfazendo a regra de soma (II.16)
Usando as equação (II.20.c) vemos que:

$$F_2(\omega) - \omega F_1(\omega) = \lim_{v\to\infty} \frac{\omega^2 p_u p_v}{v} \tilde{C}_{uv} \qquad (II.21)$$

Vamos calcular esta quantidade na ordem mais baixa, mostrando que não é nula, contradizendo assim o resultado formal(II.19) Para isto, precisamos a amplitude para a emissão de um boson. No nosso caso, como estamos interessados, no limite de altas energias, podemos desprezar no cálculo a massa do fermion retendo a massa do boson como um parâmetro de escala. A amplitude para a emissão de um boson é dada pelas seguintes diagramas:

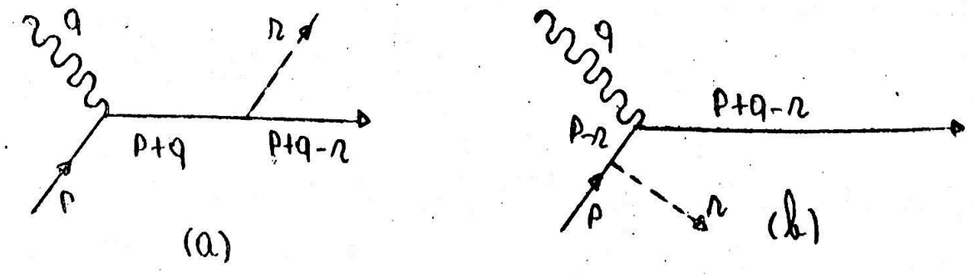


Figura 3

Temos para a amplitude:

$$A_u \equiv A_u^a + A_u^b \qquad (II.22.a)$$

onde:

$$A_u^a = \bar{u}(p+q-r)\,\varepsilon^\alpha(r)\,\gamma_\alpha\, g\, S(p+q)\gamma_u\, u(p)$$

$$A_u^b = \bar{u}(p+q-r)\,\gamma_u S(p-r)\,\varepsilon^\alpha(r)\,\gamma_\alpha\, g\, u(p) \qquad (II.22.b)$$

com $\varepsilon^\alpha(r)$ sendo o vetor de polarização do boson do momentum r. Para a parte imaginária (II.20.b), que determina a secção de choque teremos os seguintes diagramas:

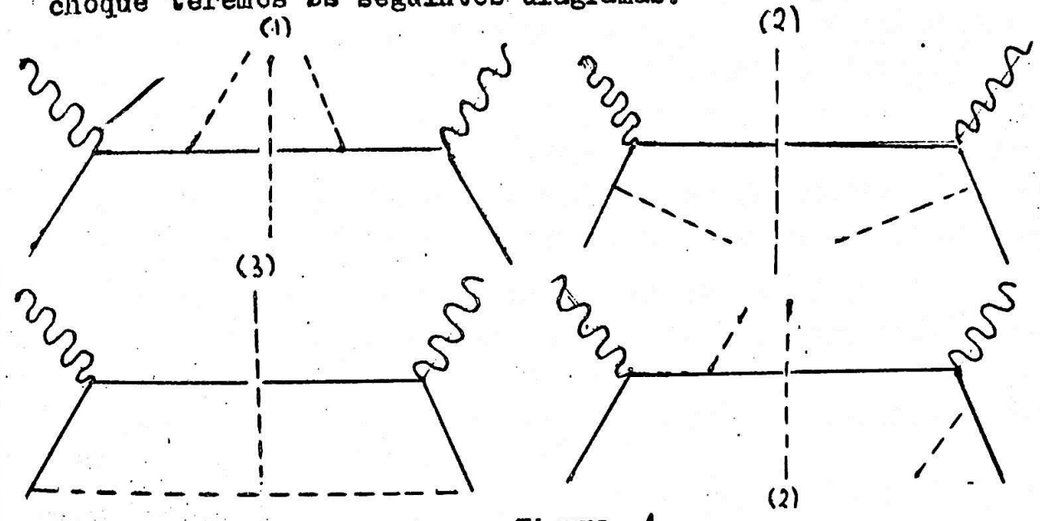


Figura 4

As contribuições dêstes diagramas são:

$$\tilde{C}_{uv} = \tilde{C}^1_{uv} + \tilde{C}^2_{uv} + \tilde{C}^3_{uv} \qquad (II.23)$$

onde:

$$\tilde{C}^1_{uv} = \int d^4r, d^4s\,\theta(r_o)\,\theta(s_o)\,\delta(r^2-u^2)\,\delta(s^2-u^2)\,\delta^4(p+q-r-s)\ X$$
$$X\ \bar{A}^a_u\ (\not{p}+\not{q}-\not{r})\ A^a_v \qquad (II.23.a)$$

$$\tilde{C}^2_{uv} = \int d^4r d^4s\ \theta(r_o)\theta(s_o)\delta(r^2-u^2)\delta(s^2-u^2)\delta^4(p+q-r-s)\ X$$
$$[\bar{A}^a_u\ (\not{p}+\not{q}-\not{r})\ A^b_v + (a \longleftrightarrow b)] \qquad (II.23.b)$$

$$\tilde{C}^3_{uv} = \int d^4r\, d^4s\, \theta(r_o)\, \theta(s_o)\delta(r^2-u^2)\,\delta(s^2-u^2)\delta^4(p+q-r-s)\ X$$

$$X\ \bar{A}^b_u\ (\not{p}+\not{q}-\not{r})A^b_v$$

(II.23.c)

Na camada de massa $p^u p^v \tilde{C}^i_{uv}$ é nula se i = 1 ou i = 2; Assim teremos:

$$F_2 - \omega F_1 = \lim_{v\to\infty} \frac{\omega^2 p^u p^v}{v}\ \tilde{C}_{uv} = \lim_{\substack{v\to\infty \\ q^2=-\omega^v}} \omega^2/v\ \mathrm{Tr}(\not{p} p^u p^v \tilde{C}^3_{uv})$$

Portanto usando as relações (II.18.b) e (II.23.c) obteremos:

$$\lim_{q^2\to-\infty} q^2 \tilde{C}_L(\omega, q^2) \sim \omega^2 g^2 \neq 0 \qquad \text{(II.24)}$$

em contradição com o resultado formal (II.19).

Vimos nestes exemplos a existência de um conflito entre os cálculos formais e os resultados explícitos.

Sendo que os resultados formais foram derivados através do uso das relações canônicas de comutação à tempos iguais, vemos que para a eliminação destas divergências é necessário modificar os comutadores de seus valôres canônicos.

CAPÍTULO III

Portanto a nossa tarefa é calcular comutadores a tempos iguais mantendo uma conexão estreita com o método da solução da teoria, isto é, com a teoria renormalizada da perturbação. Vamos lembrar que na teoria renormalizada usamos produtos T* covariantes, que em geral finitos. No entanto, êstes produtos podem ser ambíguos, refletindo as ambiguidades o modo de como e conduzido o processo de renormalização, i.e, a que ponto é feita a subtração para fazer um particular diagrama de Feynman finito. Contudo estas ambiguidades são sempre polinômios nos momentos externos. Assim, o produto T, que é definido como o produto T* com todos os têrmos polinomiais removidos, não é afetado por estas ambiguidades. Portanto, a solução da teoria produz produtos T finitos e não ambíguos. Logo vamos querer definir o comutador a partir dos produtos T. Vamos escolher, por definição, para o comutador a fórmula de Björken-Jonhnson-Law[10]

$$i\int d^3x\, e^{-i\vec{q}.\vec{x}} \langle\alpha\,|[\,A(\vec{x}, 0), B(0)]\,|\beta\rangle =$$

$$= \lim_{q_o\to\infty} q_o \int d^4x\, e^{iqx} \langle\alpha|\ T\ A(x)\ B(0)|\beta\rangle \qquad \text{(III.1)}$$

Esta definição tem várias vantagens:

a) Em situações não singulares (III.1) coincide com outras definições (usuais) para o comutador.

Por exemplo, Johnson e Law consideram o elemento de matriz na forma

$$P_{n\,m}(x, y) = \langle n|\ T\ A(x)\ B(y)|\ m\rangle \qquad \text{(III.2.a)}$$

que pode ser calculado em qualquer ordem de perturbação usando as regras apropriadas de Feynman. O produto a tempos iguais A (x) B (y) é tomado como o limite de $A(x, x_o)\ B(y, y_o)$ quando $x_o \to y_o + 0$. Seja $M_{n\,m}$ a transformada de Fourier de (III.2.a) definida por :

$$\rho_{nm}(x,y)=\int\frac{dK_1\,dK_2}{(2\pi)^4}\;e^{iK_1x}\,e^{-iK_2y}\,\delta^4(p_n+K_1-p_m-K_2)\,M_{nm}(K_1,K_2)$$

(III.2.b)

Êles calculam então o comutador a tempos iguais $C_{u\,m}(x,\,y)$ tomando o limite $x_o \longrightarrow y_o \pm 0$ C_m (III.2.a) e subtraindo:

$$C_{nm}(\vec{x},\vec{y})=\lim_{x_o\to y_o+0}\rho_{nm}(x,y)-\lim_{x_o\to y_o-o}\rho_{nm}(x,y) \qquad \text{(III.3)}$$

Desta maneira C_{nm} pode ser diretamente calculado de (III.2.b) Introduzindo a variável $p = 1/2(K_1 + K_2)$ eq = 1/2 $(k_1 - k_2)$ teremos:

$$\rho_{nm}(x,y)=e^{iq(x+y)}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\,e^{ip(x-y)}\,M_{nm}(p+q,p-q) \qquad \text{(III.2.c)}$$

o limite a tempos iguais de $P_{n\,m}$ depende do comportamento de M_{nm} para grandes valôres de p_o. Se assumimos que, quando $p_o \longrightarrow \infty$; $M_{nm}(p_o)$ pode ser expandido em tôrno de $p_o \longrightarrow \infty$, então se $x_o \longrightarrow y_o + 0$, a exponencial será $e^{-ip_o|x_o - y_o|}$ e assim $\int dp_o$ pode ser fechada no semiplano superior. No limite, as integrais no eixo real se cancelam em (III.3), sobrando apenas a contribuição do contôrno no infinito (no sentido horário) assim,

$$C_{nm}(\vec{x},\vec{y})=1/(2\pi)^4\,e^{iq(x+y)}\int d^3p\,e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\oint_c dp_o\,M_{nm}= \qquad \text{(III.4)}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\,e^{i\vec{q}(\vec{x}+\vec{y})}\,e^{-2ix_oq_o}\int d^3p\,e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\,\tilde{C}_{nm}(\vec{p},q)$$

O contôrno da integral $(1/p_o)^n$ é: $-2\pi i\,\delta_{n1}$. Portanto sòmente o têrmo de ordem $1/p_o$ dará a contribuição para o comutador C_{nm}.

b) Quando a equação de Law não é subtraida, a relação (III.1) é expressível como uma soma sôbre funções expectrais. Estas somas são relevantes para regras de soma a altas energias. Consideremos por exemplo a amplitude( ):

$$M_{\mu\nu}(q)=i\int d^4x\,\langle A|T j_\mu(x)j_\nu(0)|B\rangle\,e^{iqx}$$

(III.5.a)

e suas partes absorbtivas:

$$p_{uv}(q)=\int d^4x\,e^{iqx}\,\langle A|\,T_{ju}(x)\,jv(0)|\,B\rangle= \qquad \text{(III.5.b)}$$

$$=\sum_n(2\pi)^4\,\delta^4(q+p_A-p_n)\,\langle A|ju(0)|n\rangle\langle n|jv(0)|B\rangle \quad e$$

$$\bar{\rho}_{\mu\nu}(q)=\int d^4x\,e^{-iqx}\langle A|j_\mu(0)j_\nu(x)|B\rangle= \qquad \text{(III.5.c)}$$

$$=\sum_n(2\pi)^4\delta^4(q+p_B-p_n)\langle A|j_\mu(0)|n\rangle\langle n|j_\nu(0)|B\rangle$$

Expandindo (III.5.a) e inserindo um conjunto completo de estados intermediários obteremos:

$$M_{\mu\nu}(q)=\int_0^\infty\frac{dq_o'}{(2\pi)}\left[\frac{\rho_{\mu\nu}(q_o',q_1)}{q_o-q_o'}-\frac{\bar{\rho}_{\mu\nu}(q_o',-q_1)}{q_o+q_o'}\right] \qquad \text{(III.6.a)}$$

Para construir o produto cronológico $M_{uv}(q)$ da amplitude covariante M_{uv}, fazemos $q_o \longrightarrow \infty$, mantendo q| fixo, identificamos todo polinômio em q_o e subtraimos êste polinômio. Podemos observar que o têrmo proporcional a $1/q_o$ quando $q_o \longrightarrow \infty$ é proporcional ao comutador a tempos iguais das correntes:

$$M_{\mu\nu}\underset{q_o\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{q_o}\int\frac{dq_o'}{2\pi}[\rho_{\mu\nu}(q_o',q_1)-\bar{\rho}_{\nu\mu}(q_o',-q_1)]=$$

$$=\frac{1}{q_o}\int d^3x\langle A|[j_\mu(\vec{x},0),j_\nu(0)]|B\rangle e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}+O\left(\frac{1}{q_o^2}\right) \qquad \text{(III.6.b)}$$

c) Por construção o comutador (III.1) vai ser o comutador relevante para as regras de soma para altas energias, mesmo nas situações singulares. Como veremos mais tarde o comutador (III.I) é importante também na construção dos produtos $T^*(\ )$ covariantes, usados nos teoremas de baixa energia. Sabemos que os teoremas de baixas energias são construidos com o auxílio de

identidades de Ward. Em vista das anomalias dos comutadores a tempos iguais estas identidades serão modificadas, removendo o conflito entre os cálculos formais e os resultados calculados explicitamente. O programa é portanto simples. Para calcular o elemento de matriz de um comutador de dois operadores (assumimos que os operadores existem na teoria renormalizada de perturbação) calculamos usando as regras de Feynman o produto covariante T*. Removendo os polinômios nos momentos externos q, formamos em seguida o limite (III.1).

Inicialmente, como um exemplo, vamos calcular, o valor de expectação do vácuo do comutador a tempos iguais $[j^0, j^i]$ onde j^u é a corrente eletromagnética. Consideremos o tensor, de polarização do vácuo:

$$T^{uv}(q) = \int d^4x\, e^{iqx} \langle 0|\, T^*\, j^u(x)\, j^v(0)|0\rangle \qquad \text{(III.7.a)}$$

Tôdas as ambiguidades e divergências associadas a êste gráfico podem ser coletadas em um polinômio em q[25]. Removendo êstes têrmos de contato obteremos:

$$T^{\mu\nu}(q) = \frac{i}{(2\pi)^2}\int_0^1 dx\, \ln\left[1-\frac{q^2}{m^2}x(1-x)\right]\cdot \qquad \text{(III.7.b)}$$

$$\cdot\left\{\left[q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu}q^2\right]x(1-x)+\frac{1}{2}m^2 g^{\mu\nu}(171)\right.$$

O sinal (-) no têrmo proporcional a $g^{uv}m^2$ é para a corrente vetorial $j^u = \bar{\psi}\gamma^u\psi$ e o sinal (+) é para a corrente axial-vetor $i\bar{\psi}\gamma^5\gamma^u\psi$. Assumimos que os campos fermiônicos têm sòmente interações renormalizáveis com os bosons.

Vamos considerar, por exemplo o têrmo T, que é importante para o têrmo de Schwinger que aparece no comutador $[j^0, j^i]$. Teremos

$$-iq_0 T^{0k}(q) = \frac{q^k q_0^2}{2\pi^2}\int_0^1 dx\, x(1-x)\ln\left(1-\frac{q^2}{m^2}x(1-x)\right) \qquad \text{(III.8.a)}$$

Despresando do lado direito os têrmos que tendem a zero quando $q_0 \to \infty$, obteremos a seguinte expressão:

$$C^{0k}(q) = \int d^3x\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \langle 0|[j^0(\vec{x},0), j^k(0)]|0\rangle = \lim_{q_0\to\infty} -iq_0 T^{0k} \cong$$

$$= \frac{-q^k}{(2\pi)^2}\int_0^1 dx\left\{-q_0^2 x(1-x)\ln\left(-\frac{q_0^2}{m^2}x(1-x)+m^2\right)\right\} + \frac{q^k \vec{q}^2}{12\pi^2} \qquad \text{(III.8.b)}$$

O coeficiente de $-q^k/2\pi^2$ diverge quadràticamente se $q_0 \to \infty$, isto é interpretado como o têrmo de Schwinger usual, que contém uma derivada da função δ. Contudo, temos em adição a êste têrmo uma expressão finita, proporcional a $q^k\,\vec{q}^2$. Isto constitui uma derivada tripla da função . Assim, teremos de (III.8.b)

$$\langle 0|[j^0(\vec{x},0), j^k(0)]|0\rangle = \langle 0|[j_5^0(\vec{x},0), j_5^k(0)]|0\rangle =$$

$$= i\int \partial^k \delta(\vec{x}) + i/12\pi^2\, \partial^k \nabla\delta(\vec{x}) \qquad \text{(III.9)}$$

onde S é quadràticamente divergente. A derivada tripla não é usualmente encontrada na literatura. Na verdade, frequentemente é dada uma prova[29] com o resultado que:

$$\langle 0|[j^0(0,\vec{x}), j^k(0)]|0\rangle = i\partial^k \delta(\vec{x})\int_0^\infty da^2\, p(a^2)$$

onde p é a função expectral. Contudo, esta prova é válida sòmente quando a integral $\int_0^\infty da^2\, p(a^2)$, converge.[30] Vemos que no presente exemplo, esta quantidade é divergente, e a examinação de (III.8.b) mostra que é precisamente a presença da divergência quadrática $q^k q_0^2$ que é responsável pela aparência do têrmo finito multiplicando a derivada. Vamos agora recalcular o decaimento do pion. Veremos que o fato de que o acoplamento é diferente de zero resulta dos comutadores anômalos e dos têrmos de contato. O argumento mostrará que os têrmos de Schwinger e os têrmos de "seagull" não se cancelam, contrário ao que é assumido comumente. (Para maiores detalhes veja o apêndice).

Consideremos o elemento de matriz (a amplitude)

relevante para o decaimento do pion. Teremos (14)

$$\langle 0|T^*\phi(x)j^\alpha(y)j^\beta(z)|0\rangle = \langle 0|T\,\phi(x)\,j^\alpha(y)\,j^\beta(z)|0\rangle \qquad \text{(III.10)}$$

Os têrmos de seagull, que são definidos como a diferença entre o produto T e o produto T* covariante são ausentes, porque o produto T já e' invariante por transformações de Lorentz é de calibre. Usando agora a equação P.C.A.C, teremos:

$$\partial_u\, j_5^u = \left(\frac{2u^2 m}{g}\right)^{-1} \phi \qquad \text{(III.10.a)}$$

Substituindo em III.10 obteremos:

$$\langle 0|T\phi(x)j^\alpha(y)j^\beta(z)|0\rangle = g/2u^2m\,\partial_u\langle 0|T j_5^u(x)\,j^\alpha(y)\,j^\beta(z)|0\rangle$$

$$-g/2u^2m\,\langle 0|T\,\delta(x_0-y_0)[j_5^0(x),\,j^\alpha(y)]\,j^\beta(z)|0\rangle$$

$$-g/2u^2m\,\langle 0|T\,\delta(x_0-z_0)[j_5^0(x),\,j^\beta(z)]\,j^\alpha(y)|0\rangle$$

(III.11)

Vamos considerar inicialmente o valor de expectação do vácuo da corrente axial vetor que até a ordem e^2 é dado por:

$$\langle 0|j_5^u(x)|0\rangle = S^u(x) +$$

$$-\frac{1}{2}e^2\int d^4y\,dz\,\langle 0|T j_5^u(x)\,j^\alpha(y)\,j^\beta(z)|0\rangle A_\alpha(y)A_\beta(z) \qquad \text{(III.12)}$$

onde S^u é o têrmo de seagull. O produto T não é invariante por transformações de Lorentz, nem por transformações de calibre. O têrmo de seagull (contato) é ùnicamente determinado impondo a condição de que somado ao produto T, produzirá um produto T* invariante por transformações de Lorentz e de calibre. O único têrmo de contato que faz o produto T* invariante por transformações de Lorentz de calibre é:

$$S^0(x) = -e^2/8\pi^2\, A_i(x)\, F_{jk}\,\varepsilon^{ijk}$$

(III.13)

$$S^m(x) = e^2/8\pi^2\, A_j(x)\, F_{ko}(x)\,\varepsilon^{mjk}$$

onde F^{uv} e o tensor eletromagnético do campo $F^{uv} = \frac{\partial A^v}{\partial x_u} - \frac{\partial A^u}{\partial x_v}$

Definindo:

$$S^u(x) = \int d^4y \int d^4z\, A_\alpha(y) A_\beta(z) S^{u\alpha\beta}(x,y,z)$$

poderemos escrever (III.11) na forma:

$$\langle 0|T\,\phi(x)\,j^\alpha(y)\,j^\beta(z)|0\rangle =$$

$$= -g/2u^2m\left\{\partial_u S^{u\alpha\beta}(x,y,z) + C^{\alpha\beta}(x,y,z)\right\}$$

$$+\frac{g}{2u^2m}\left\{\partial_u\left[\langle 0|T j_5^u(x)\,j^\alpha(y)\,j^\beta(z)|0\rangle + S^{u\alpha\beta}(x,y,z)\right]\right\} \qquad \text{(III.14)}$$

onde $C^{\alpha\beta}(x, y, z)$ é a contribuição dos comutadores. Êstes commutadores serão determinados usando a definição (III.1). Seja (III.15)

$$M^{u\alpha\beta}(p,q) = -i\int e^{-ip(x-y)}\, e^{iq(z-x)}\, \langle 0|T j_5^u(x)\,j^\alpha(y)\,j^\beta(z)|0\rangle\, dy\,dz$$

O comutador:

$$N^{u\alpha\beta}(|\vec{p}|, q) \equiv \int e^{-i|\vec{p}|(\vec{x}-\vec{y})}\, e^{iq(z-x)_x} \qquad \text{(III.14.a)}$$

$$x\ \langle 0|\ T\ [\ j_5^u(x),\ j^\alpha(y)]\ x^o = y^o\ j^\beta(z)|0\rangle d^3y\ d^4z$$

é determinado pelo coeficiente do têrmo $1/p_o$ na forma assintótica de $M^{u\alpha\beta}(p, q)$ quando $p_o \longrightarrow$, $M^{u\alpha\beta}$ foi calculada explicitamente por Rosenberg[27]. Da forma explícita obtida por êle, podemos calcular a quantidade $N^{a\alpha\beta}(|\vec{p}|, q)$. (As regras canônicas

dariam resultado nulo para êstes comutadores). Obteremos:

$$N^{u\alpha\beta}(|\vec{p},q) = \begin{cases} ie^2/2\pi^2\ p_i\ q_j\ \varepsilon^{ijB} & u = 0; \alpha = 0 \\ -i\ e^2/4\pi^2\ p_i\ q_j\ \varepsilon^{ijk} & u = 0;\ \ = k_1 = 0 \\ \frac{-ie^2}{4\pi^2}\ q_o\ p_i \varepsilon^{ik\ell} + (\frac{-ie^2}{4\pi^2})\ q_o q_i \varepsilon^{ik\ell} & u = 0; \alpha = k_1\ \beta = \ell \end{cases}$$

(III.15)

Sendo $C(x) = \int d^4y\ d^4z\ A\alpha(y)\ A\beta(z)\ C^{\alpha\beta}(x,y,z)$ obteremos

$$\partial_u S^u(x) + C(x) = e^2/16\pi^2\ F^{uv}\ \tilde{F}_{uv} \qquad \text{(III.16)}$$

onde $\tilde{F}_{uv}$ é o dual do tensor F^{uv}: $\tilde{F}_{uv} = \varepsilon_{uv\alpha\beta}\ F^{\alpha\beta}$.

Assim podemos escrever a amplitude para o decaimento do pion como:

$$A = \frac{g}{2u^2 m}\ \partial_u \int d^4y\ d^4z\ A_\alpha(y)\ AB(z)\{\langle 0|\ T\ j_5^u(x)\ j^\beta(y)\ j(z)|$$

$$|0\rangle + S^{u\alpha\beta}(x,y,z)\ \frac{-g}{2u^2 m}\ \frac{e^2}{16\pi^2}\ F^{uv}\ \tilde{F}_{uv} \qquad \text{(III.17)}$$

o têrmo no parêntese e invariante por transformações de Lorentz e de calibre. Como já vimos, êle não contribui para a constante de acoplamento $\pi^0 \longrightarrow 2\gamma$ (para massa nula do pion). Obteremos:

$$A = \varepsilon(\vec{\varepsilon}^{\alpha} e \vec{\varepsilon}^{\beta} \varepsilon_{uv\alpha\beta}\ p_\alpha\ q_\beta \frac{g}{4\pi^2 m} \qquad \text{(III.18)}$$

$\varepsilon\varepsilon = e\vec{\varepsilon}$ onde $\vec{\varepsilon}$ é o vetor de polarização do foton

que coincide com o cálculo feito no modêlo σ. Êste valor está em boa concordância com a experiência (o êrro de 15%)

$[\pi^0 \dashrightarrow 2\gamma \simeq 10^{-16}$ sec]

Vimos que o têrmo de Schwinger resultante do comutador não cancela os têrmos de contato (III.16).

Portanto, o teorema de baixa energia para $\pi^0 \longrightarrow 2\gamma$ depende crucialmente dos comutadores (anômalos) que produziram o têrmo de S e dos têrmos de contato.

Vamos considerar finalmente a regra de Soma de Callan-Gross. Para determinar a secção de choque σ_L (veja II.19.a) usaremos a relação (II.16):

$$\lim_{\substack{p_o \to \infty \\ \frac{m}{p_o^2}}} C_{ij}(\vec{p}) = \int_0^4 \frac{dw'^2}{w'} \{w' F_1(w')(\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) -$$

$$- [F_2(w') - w' F_1(w')]\ \hat{p}_i \hat{p}_j$$

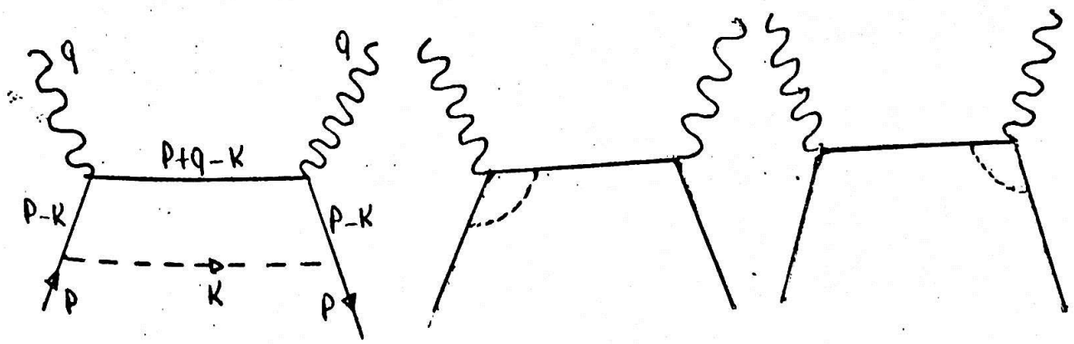
De acôrdo com o nosso programa, calcularemos o comutador :

$$C_{ij}(\vec{p}) = -\int d^3x \langle p||\ J_i(\vec{X}, 0),\ J_j(0)||p\rangle$$

através da sua conexão com a amplitude frontal de Compton T(p,p) (com a média sôbre os spins dos protons) isto é:

$$C_{ij}(\vec{p}) \equiv \lim_{q_o \to \infty} q_o^2\ \tilde{T}_{ij}(p, q) \qquad |q| = 0| \qquad \text{(III.19)}$$

Os gráficos que dão as correções radiativas de segunda ordem para a amplitude de Compton são os seguintes: (devemos incluir também os gráficos cruzados):



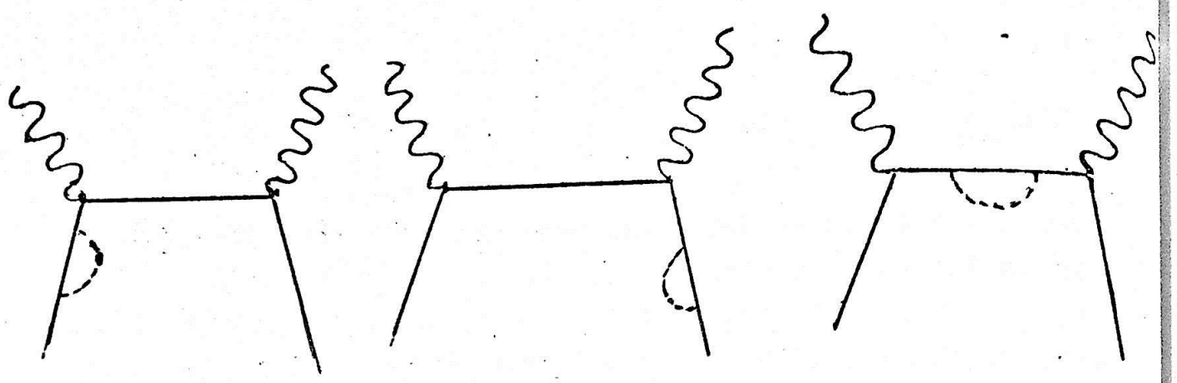


Figura 5

De acôrdo com a teoria (não renormalizada) da perturbação a contribuição dêstes gráficos será a seguinte:

$$\overline{T}_{ij}(p, q) = \bar{u}(p)\, T_{ij}(q)\, u(p) \quad \text{onde} \qquad \text{(III.20.a)}$$

$$\overline{T}_{ij}(q) = T^{a}_{ij}(q) + T^{b}_{ij}(q) + T^{c}_{ij}(q) \quad \text{como:} \qquad \text{(III.20.b)}$$

$$T^{a}_{ij}(q) = \gamma_i\, S(p+q)\gamma_j + \gamma_j\, S(p-q)\gamma_i \qquad \text{(III.20.c)}$$

$$\overline{T}^{b}_{ij}(q) = g^2 \Lambda_i(p, p+q)\, S(p+q)\gamma_j + \Lambda_j(p, p-q)\, S(p-q)\gamma_i\, g^2 +$$

$$+ g^2 \gamma_i\, S(p+q) \Lambda_j(p+q, p) + \gamma_j\, S(p-q)\, \Lambda_i(p-q, p) + \Sigma(p)\, S(p) \gamma_i$$

$$S(p+q)\gamma_j\, g^2 + g^2 \gamma_i\, S(p+q)\, \gamma_j\, S(p) \Sigma(p) + \Sigma(p)\, S(p) \gamma_j S(p-q)\gamma_i +$$

$$+ g^2 \gamma_j\, S(p-q)\gamma_i\, S(p) \Sigma(p) + g^2 \gamma_i\, S(p+q) \Sigma(p+q)\; S(p+q)\gamma_j +$$

$$+ g^2 \gamma_j\, S(p-q) \Sigma(p-q)\; S(p-q)\gamma_i \qquad \text{é:}$$

$$T^{c}_{ij}(q) = g^2 \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 - u^2} \gamma_\alpha\, S(p-k)\gamma_i\, S(p+q-k)\gamma_j\, S(p-k)\gamma^\alpha +$$

$$+ g^2 \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 - u^2} \gamma_\alpha\, S(p-k)\gamma_j\, S(p-q-k)\gamma_j\, S(p-k)$$

Da expressão de $T_{ij}(q)$ o limite para $q_o \to$ será (8):

$$\lim_{q_o \to \infty} T_{ij}(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \left[g^2 \frac{1}{q_o^2} \ln q_o^2 + O(1/q_o^2) \right] \left[p_i \gamma_j + \right.$$

$$\left. + p_j \gamma_i - 2\delta_{ij} \not{p} \cdot \gamma \right] + (g^2 \delta_{ij}\, \vec{p} \cdot \vec{\gamma}\; 1/q_o^2) + O[1/q_o^4 \ln q_o^2]$$

(III.21)

vemos portanto que a estrutura do comutador calculado desta forma, é diferente da estrutura do comutador (II.18a) calculado usando as regras de comutação (para campos não renormalizados) canônicas. A expressão III.21 mostra que o comutador $C_{ij}(p)$ tem a forma:

$$C_{ij}(\not{p}) = (\delta_{ij} \not{p}^2 - p_i p_j)\, A + B + \delta_{ij} \not{p}^2\, C \qquad \text{(III.22)}$$

onde A e logaritmicamente divergente e C é um escalar constante. Usando (III.19.a) e (III.22) teremos que:

$$\lim_{p_o \to \infty} \frac{p_i\, p_j}{p_o^4}\, C_{ij}(p) = C = -1/m \int_0^4 (F_2(W') -$$

$$- W' F_1(W') \frac{dW'^2}{W} \neq 0 \qquad \text{(III.22)}$$

o que mostra como já vimos, que a regra de soma de Callan-Gross não é satisfeita.

$$(\sigma_L \neq 0)$$
$$\lim q_o \to \infty$$

Para entender a razão dêste fato, consideremos por exemplo os diagramas (2) e (3) da figura 5; cujas contribuições serão:

$$T^{(2)}_{ij} = \frac{g^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 - u^2} \gamma_\alpha\, S(p-k)\gamma_i\, S(p+q-k)\gamma^\alpha\, S(p+q)\gamma_j \qquad \text{(III-23.a)}$$

$$T^{(3)}_{ij} = \frac{g^2}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2-u^2}\,\gamma_i\, S(p+q)\,\gamma_\alpha\, S(p+q-k)\,\gamma_j\, S(p-k)\,\gamma^\alpha$$

(III.23.b)

Se, para calcularmos a contribuição de ordem $1/q_o^2$ dêstes diagramas, desprezarmos os momentos de integração k_ν em relação a q_o quando $q_o \longrightarrow \infty$, isto é se fizermos:

$$S(p+q) = \frac{\not p + \not q}{(p+q)^2} \simeq \frac{q_o\,\gamma_o}{q_o^2} = \frac{\gamma_o}{q_o} \quad \text{e:} \qquad \text{(III.23)}$$

$$S(p+q-k) = \frac{\not p + \not q - k}{(p+q-k)^2} = \frac{q\cdot\gamma}{q^2} = \frac{q_o\,\gamma_o}{q_o^2} = \frac{1}{q_o}$$

obteremos:

$$F^{(2)}_{ij} = \frac{g^2}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{q_o^2}\int \frac{d^4k}{k^2-u^2}\,\gamma_i S(p-k)\gamma_j \qquad \text{(III.23.c)}$$

é uma expressão análoga para $T^{(3)}_{ij}$.

Os gráficos de Feynman correspondentes a Γ^2_{ij} e Γ^3_{ij} serão:

Figura 6.a

Êstes gráficos são diagrama de segunda ordem do vértice $g\bar\psi\gamma_i B_j\psi$. Portanto, os diagramas(2) & (3) darão neste caso o têrmo da amplitude:

$$\frac{g}{q_o^2}\,\langle p|\bar\psi\gamma_i B_j\psi - \delta_{ij}\vec\nabla\cdot\vec B\psi\,|p\rangle \qquad \text{(III.24.a)}$$

Anàlogamente, os diagramas(1), (4), (5) se reduzirão à:

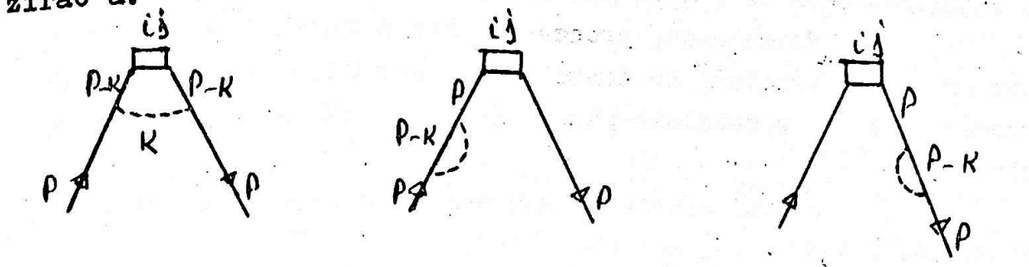


Figura 6.b

que são os diagramas de Feynman para as correções radiativas de segunda ordem para o vértice $\bar\psi\gamma_i\partial_j\psi$. Teremos

$$\bar\Gamma^{(1)}_{ij} + \bar\Gamma^{(4)}_{ij} + \bar\Gamma^{(5)}_{ij} = \frac{g^2}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{q_o^2}\int \frac{d^4k}{k^2-u^2}\,\gamma_\alpha\, S(p-k)\,k_i\cdot$$

$$\cdot\gamma_j\, S(p-k)\,\gamma^\alpha \qquad \text{(III.26)}$$

Portanto os diagramas (1), (4), (5) produzirão a amplitude:

$$\frac{1}{q_o^2}\,\langle p|\bar\psi\gamma_i\partial_j\psi - \delta_{ij}\bar\psi\vec\gamma\cdot\vec\partial\psi\,|p\rangle \qquad \text{(III.24.b)}$$

Vemos também que o diagrama (6) cai formalmente para zero mais depressa de que $1/q_o^2$.

Portanto usando, êste procedimento formal, obteremos:

$$C_{ij}(\vec p) = \langle p|\bar\psi\gamma_i\partial_j\psi - \delta_{ij}\bar\psi\vec\gamma\cdot\vec\partial\psi\,|p\rangle +$$

$$+\langle p|\, g\bar\psi\gamma_i B_j\psi - \delta_{ijg}\bar\psi\vec\gamma\cdot\vec B\psi\,|p\rangle + (i\leftrightarrow j)$$

que é exatamente o comutador obtido usando as regras de comutação canônicas para os campos não renormalizados.

No entanto, procedendo desta maneira formal, deixamos de lado potências, no denominador, nos momentos k de integração, que são essenciais para a convergência da amplitude original.

Assim, achamos o aparecimento de integrais divergentes. De fato:

$$\Gamma^{(2)}_{ij} + F^{(3)}_{ij} = \frac{p_i \gamma_j}{q_o^2} \left(4 \frac{g^2}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{u^2} + \text{parte finita}\right) \text{ e}$$

$(\Lambda = \text{cut - off} \to \infty)$

$$\Gamma^{(1)}_{ij} + \Gamma^{(4)}_{ij} + \Gamma^{(5)}_{ij} = \frac{p_i \gamma_j}{q_o^2} \left(-4/3 \frac{g^2}{16^2} \ln \frac{\Lambda^2}{u^2} + \text{parte finita}\right)$$

Portanto, vemos neste caso que os comutadores anômalos estão relacionados com as divergências da teoria de campo não renormalizada. No próximo capítulo, vamos investigar a relação que existe entre os comutadores canônicos e a finitude da teoria.

CAPÍTULO IV

Vimos no capítulo anterior, que o motivo do aparecimento de resultados não canônicos está relacionado com as divergências da teoria. Neste capítulo vamos mostrar que em teorias finitas, os comutadores calculados usando a teoria de perturbação (limite de Björken), coincide com os valôres canônicos isto é, em teorias finitas, o comportamento é inteiramente canônico.

A. Propagador de fermions

Consideremos o propagador, não renormalizado de fermions:

$$S(p) = \int d^4x \, e^{ipx} \langle 0 | T\Psi(x)\bar{\Psi}(0) | 0 \rangle \qquad \text{(IV.1)}$$

Usando o limite de Björken (III.1) e as regras canônicas de anti-comutação para ós campos não renormalizados:

$$[\Psi(x), \bar{\Psi}(y)] + \delta(x_o - y_o) = \gamma^o \delta^4(x - y) \qquad \text{(IV.1.a)}$$

obteremos:

$$\lim_{p_o \to \infty} S(p_o, \vec{p}) = \frac{i\gamma_o}{p_o} \qquad \text{(IV.1.b)}$$

Sendo o propagador covariante por transformações de Lorentz, e dependente sòmente do quadrivetor p, podemos escrever:

$$\lim_{p \to \infty} S(p) = \frac{i}{\gamma_u p_u} \qquad \text{(IV.1.c)}$$

que é exatamente o resultado bem conhecido sôbre o comportamento assintótico do propagador não renormalizado.

Vamos agora calcular S usando teoria de per-

turbação com limiar finito. O propagador de fermios, com correções de ordem e^2 pode ser escrito como:

$$S(p) = \frac{i}{\not p - m} + \frac{i}{\not p - m}\,[-i\Sigma(p)]\,\frac{i}{\not p - m} \qquad (IV.2)$$

A amplitude $\Sigma(p)$, conhecida como a autoenergia do eletron, é dada pela integral:

$$\Sigma(p) = \frac{i\,e^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{1}{k^2 - u^2 + i\varepsilon}\,\gamma_u\,\frac{1}{\not p - \not k - m + i\varepsilon}\,\gamma^u \qquad (IV.2.a)$$

Esta integral diverge porque temos apenas três potências de k no denominador. Para tomar a integral convergente, introduziremos o regulador covariante de Pauli-Villars:

$$\bar{\Sigma}(p) = \Sigma(p, u) - \Sigma(p, \Lambda) \qquad (IV.2.b)$$

com u uma massa pequena introduzida para evitar as divergências infravermelhas e Λ uma massa grande, porém finita.

Para determinar o comportamento assintótico de (IV.2.b) vamos calcular a função espectral r(a) definida por:

$$\bar{\Sigma}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r(a)\,da}{\not p - a} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r_u(a)\,da}{\not p - a} - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r_\Lambda(a)\,da}{\not p - a} \qquad (IV.2.c)$$

Teremos da expressão IV.2.c:

$$Ym\,\bar{\Sigma}(p) = \frac{\bar{\Sigma}(p + i\varepsilon)\,\Sigma(p - i\varepsilon)}{2i} = \pi\int da\; r(a)\;\delta(p^2 - a^2)(\not p + a) \qquad (IV.3)$$

Portanto:

$$Ym\,\Sigma(p) = \frac{\pi}{2\rho}\,[r(\rho) + r(-\rho)]\not p + \frac{\pi}{2}\,[r(\rho) - r(-\rho)] \qquad (IV.3.a)$$

onde $\rho = (p_o^2 - p^2)^{1/2}$. assim se $Ym\,\bar{\Sigma}(p) = A(p^2)\not p + B(p)$

$$r(\rho) = 1/\pi\,[A\rho + B] \quad e \quad r(-\rho) = 1/\pi\,[A\rho - b] \qquad (IV.3.b)$$

Portanto para determinarmos a função espectral r(a) devemos calcular $Ym\,\Sigma(p)$. Usando o fato que:

$\gamma_u\gamma^u = 4$ e $\gamma_u \not a \gamma^u = -2\not a$ teremos:

$$\bar{\Sigma}(p) = \frac{2\,e^2}{(2\pi)^4}\,i\int d^4k\,\left[\frac{1}{k^2 - u^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2}\right]\frac{\not k - \not p + 2m}{(p-k)^2 - m^2} \qquad (IV.4)$$

onde subentendemos $k^2 \longrightarrow k^2 + i\varepsilon$

Usando a identidade de Feynman:

$$\frac{1}{ab} = \int_o^1 dx\;\frac{1}{|ax + b(1-x)|^2} \qquad (IV.4.a)$$

teremos:

$$\Sigma(p) = \frac{2\,e^2}{(2\pi)^4}\,i\int d^4k\int_o^1 dx(\not k - \not p + 2m)\,\left[\frac{1}{[k^2 - \not p(1-x)]^2 + a^2u]^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{[[k - p(1-x)]^2 + a_\Lambda^2\;]^2}\right]$$

onde $a_M^2 = -m^2 + (p^2 + m^2 - M^2)x - p^2x^2$ e $M^2 = u^2$ ou Λ^2 (IV.4.b)

Sendo esta convergente integral em k, podemos fazer a substituição:

$k' = k - p(1-x)$. Usando integração simétrica obteremos:

$$\Sigma(p) = \frac{2\,e^2}{(2\pi)^4}\;i\int_o^1 dx\int d^4k(2m - \not p\,x)\left[\frac{1}{(k^2 + a^2u)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(k^2 + a_\Lambda^2)^2}\right] \qquad (IV.4.c)$$

Fazendo uma rotação de $\pi/2$ no plano complexo de k_o e fazendo

a substituição $k_o' = iK_o$; $\vec{k}' = \vec{k}$ teremos finalmente:

$$\overline{\sum}(p) = \frac{-2\,e^2}{(2\pi)^4} \int_o^{'} d\alpha \int d^4k\,(2m - \not{p}x)\left[\frac{1}{(k^2-au^2)^2} - \frac{1}{(k^2-a\Lambda^2)^2}\right] \qquad \text{(IV.4.d)}$$

A integração é feita agora numa região 4-dimensional ordinária $k^2 = k_o^2 + |k^2$ e esfèricamente simétrica[25]. Portanto obteremos:

$$\sum(p) = \frac{-e^2}{2\pi^2} \int_o^{'} dx \int_o^{\infty} k^3 dk (2m - \not{p}x)\left[\frac{1}{(k^2-a^2u)^2} - \frac{1}{(k^2-a^2\Lambda)^2}\right] \qquad \text{(IV.4.e)}$$

Usando o fato que $\frac{1}{x + i\xi} = \mathcal{P}(1/x) - i\pi\delta(x)$ obteremos:

$$Ym\,\overline{\sum}(p) = \frac{e^2}{4\pi} \int_o^{'} dx \int_o^{\infty} k^3 dk (2m - \not{p}x)\,|\delta'(k^2-a^2u) - \delta'(k^2-a^2)|$$

Assim teremos para a parte imaginária a seguinte expressão:

$$Ym\,\overline{\sum}(p) = \frac{e^2}{4\pi} \int_o^{'} dx(2m - x\not{p})[\theta(a^2u) - \theta(a^2_\Lambda)] \qquad \text{(IV.5)}$$

O binômio $a_M^2 = -p^2x^2 + (p^2 + m^2 - M^2)x - m^2$ será positivo para valôres de x compreendidos entre as raizes:

$$x_{12} = \frac{(p^2 + m^2 - M^2) \pm \sqrt{(p^2 + m^2 - M^2)^2 - 4m^2p^2}}{2\,p^2} \qquad \text{(IV.5.a)}$$

Podemos observar que o sinal das raizes é o mesmo que o do têrmo: $p^2 + m^2 - M^2$. Logo se $p < (M^2 - m^2)^{1/2}$ então $a_M^2 < 0$, qualquer que seja x, compreendido no intervalo (0,1). Por outro lado:

$\Delta = b^2 - 4ac = [(p + m)^2 - M^2][(p-m)^2 - M^2]$ se $\Delta < 0$ ou:

$(M-m) < p < M + m$ então também $a_M^2 < 0$ qualquer que seja x no intervalo (0,1). Juntando estas duas condições teremos:

$a_M^2 < 0$ se $p < M + m$ (IV.5.b)

ou resulta: $r_u(\not{p} = a) = 0$ se $a < u + m$

$r_\Lambda(\not{p} = a) = 0$ se $a < \Lambda + m$ (IV.5.c)

Para simplificar a discussão, vamos fazer nula a massa do fermion. Usando (IV.5.b) teremos:

$$x_1 = \frac{(p^2 - M^2) \pm (p^2 - M^2)}{2\,p^2} \quad \text{logo} \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 - \frac{M^2}{p^2} \end{matrix} \qquad \text{(IV.5.d)}$$

Usando (IV.5);(IV.5.b) e (IV.5.d) teremos:

$$Ym\,\overline{\sum}(p) = \frac{-e^2}{4\pi}\,\not{p} \int_o^{1-\frac{u^2}{p^2}} dx\,x + \frac{e^2}{4\pi}\,\not{p} \int_o^{1-\frac{\Lambda^2}{p^2}} dx\,x =$$

$$= Ym\sum u - Ym\sum_\Lambda$$

Assim:

$$Ym\sum u = -\frac{e^2}{4\pi}\,\not{p}(1 - \frac{u^2}{p^2})^2 = \pi/2p\,|r_u(p) + r_u(-p)|\not{p} + \pi/2|r_u(p) - r_u(-p)|$$

$$Ym\sum_\Lambda = -\frac{e^2}{8\pi}\,\not{p}\,(1 - \frac{\Lambda^2}{p^2})^2 = \pi/2p|r_\Lambda(p) + r_\Lambda(-p)|\not{p} + \pi/2|\,r_\Lambda(p) - r_\Lambda(-p)| \qquad \text{(IV.6.a)}$$

Assim teremos:

$$r_M(|a|) = r_M(-|a|) = \frac{e^2}{8\pi^2}\,|a|(1 - \frac{M^2}{a^2})^2\,\theta(a^2-M^2) \qquad \text{(IV.6.b)}$$

Substituindo esta relação em (IV.2.c) obteremos:

$$\sum(p) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{\not{p} - a}\,|a|(1 - u^2/a^2)\,\theta(a^2 - u^2) - \frac{e^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{\not{p} - a}\,|a|(1 - \frac{\Lambda^2}{a^2})\,\theta(a^2 - \Lambda^2)$$

Sendo $\frac{1}{\not{p} - a} = \frac{\not{p} + a}{p^2 - a^2}$ e usando integração simétrica obteremos:

$$\bar{\Sigma}(p) = \frac{e^2}{4\pi^2} \not{p} \int_u^\infty \frac{da}{p^2 - a^2} a(1 - u^2/a^2)^2 - \frac{e^2}{4\pi^2} \not{p} \int_\Lambda^\infty \frac{da}{p^2 - a^2}(1 - \frac{\Lambda^2}{a^2})^2$$

(IV.7.b)

Efetuando as integrações obteremos finalmente:

$$\sum(p) = \frac{e^2 \not{p}}{4\pi^2} \log \left| \frac{p^2 - \Lambda^2}{p^2 - u^2} \right| + \frac{e^2 \not{p}}{4\pi^2} \left(\frac{\Lambda^2 - u^2}{p^2} \right) \quad \text{(IV.8)}$$

$$- \frac{e^2}{4^2} \not{p} \frac{\Lambda^2}{p^2}(2 + \frac{\Lambda^2}{p^2}) \log \left| \frac{p^2 - \Lambda^2}{\Lambda^2} \right| + \frac{e^2 \not{p}}{4\pi^2} u^2/p^2(2 + u^2/p^2)$$

$$\log \left| \frac{p^2 - u^2}{u^2} \right|$$

Consideremos agora o limite assintótico quando $p \to \infty$ Usando o fato, importante, que Λ é finito obteremos:

$$\log \frac{p^2 - \Lambda^2}{p^2 - u^2} = \log(1 - \frac{\Lambda^2}{p^2}) - \log(1 - u^2/p^2) \cong - \frac{\Lambda^2 - u^2}{p^2} + O(1/p^4)$$

assim $$\lim_{p \to \infty} \bar{\Sigma}(p) = \frac{e^2 \not{p}}{4\pi^2} \left[\frac{\Lambda^2}{p^2} \log \frac{p^2}{\Lambda^2} + 0 - (1/p^4) \right| \quad \text{(IV.8.a)}$$

Portanto, usando a relação (IV.2) obteremos.

$$\lim_{p \to \infty} S(p) = i/\not{p} + i/\not{p} \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{i\Lambda^2}{\not{p}} \log p^2/\Lambda^2 \therefore i/\not{p} = i/\not{p} + 0 - (1/p^2) \quad \text{(IV.9)}$$

que coincide com o propagador (canônico) (IV.1.c), que foi calculado usando as relações canônicas para os campos não renormalizados. Portanto, se o limiar é finito, os resultados permanecem canônicos, não existindo têrmos anômalos.

B. Propagador de fotons

Consideremos o propagador de fotons:

$$\bar{\Pi}^{uv}(q) = \int e^{iqx} \langle 0 | T^* A^u(x) A^v(0) | 0 \rangle d^4x \quad \text{(IV.10)}$$

Usando as relações canônicas de comutação:

$$|A^u(x), A^v(y)| \; x^o = y^o = 0$$

$$|\dot{A}^u, A^v(y)| \; x^o = y^o = g^{uv} \delta(x - y) \quad \text{(IV.10.a)}$$

e o limite de Björken obteremos:

$\lim_{q_o \to \infty} \bar{\Pi}^{u\gamma}(q) = \frac{g^{uv}}{q_o^2}$ ou como $\bar{\Pi}^{uv}(q)$ é covariante e depende sòmente do quadrivetor q teremos:

$$\lim_{q \to \infty} \bar{\Pi}^{uv}(q) = g^{uv} 1/q^2 \quad \text{(IV.10.b)}$$

Vamos agora calcular o propagador de fotons IV.10 em teoria de perturbação finita, usando correções radiativas até ordem e^2. Até segunda ordem o propagador de fotons pode ser escrito como

$$\bar{\Pi}^{uv}(q) = \frac{g^{uv}}{q^2} + 1/q^2 \, Y^{uv}(q) \, 1/q^2 \quad \text{(IV.11)}$$

onde:

$$Yuv(q) = e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \gamma^u \frac{1}{k - m + i\varepsilon} \gamma^v \frac{1}{\not{k} - \not{q} - m + i\varepsilon} \quad \text{(IV.11.a)}$$

Esta integral diverge em k. Para torná-la finita, introduziremos o regulador covariante de Pauli-Villars:

$$\bar{y}uv(q) \equiv Yuv(q, m) - Yuv(q, M) \quad \text{(IV.11.b)}$$

onde M é uma massa grande, porém finita:

O requerimento de invariância por transformações de calibre implica em: $q^u \, Yuv = 0$ quando $q^2 = 0$ (IV.11.c)

Usando a identidade:

$$\frac{1}{k - m + i} = \frac{i(k + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = (\not{k} + m) \int_o^\infty dz \, e^{iz(k^2 - m^2 + i\varepsilon)} \quad \text{(IV.12.a)}$$

vem

$$I_{uv}(q) = (-4)(-i\,e^2)^2 \int_0^\infty d z_1 \int_0^\infty dz_2 \quad \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \quad x$$

$$x \mid K_u(k-q)_v + k_v(k-q)_u - g_{uv}(k^2 - k.q - m^2) \mid \qquad (IV.12.b)$$

$$x \exp\left(i\, z_1 |k^2 - m^2 + i\xi| + i z_2 |(k-q)^2 - m^2 + i\xi| \right)$$

onde já efetuamos o traço e invertemos a ordem de integração, (naturalmente pensando na integral convergente IV.11.b)

Completando o quadrado na exponencial e mudando a variável de integração para:

$$\ell = k - \frac{q\, z_2}{z_1 + z_2} = k - q + \frac{q\, z_1}{z_1 + z_2} \qquad (IV.12.c)$$

perfazemos as integrais de momentum, usando as identidades:

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} [1, \ell_u, \ell_u \ell_v]\, e^{i\ell^2 (z_1+z_2)} = \frac{1}{16\pi^2 i (z_1+z_2)} \cdot$$

$$\cdot \left[1,\ 0,\ \frac{i g_{uv}}{2(z_1+z_2)}\right] \qquad (IV.12.d)$$

Como resultado:

$$\bar{I}_{uv} = -i \sum_{i=1}^{2} C_i \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty d z_1 \int_0^\infty \left(\exp\left(i |q^2 \frac{z_1 z_2}{z_1+z_2} - (m_i^2 - i\xi)(z_1 + z_2)| \right) \right) x \left(2(g_{uv}q^2 - q_u q_v) \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^2} + g_{uv} \left(\frac{-i}{(z_1+z_2)} - q^2 \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^2} + m_i^2 \right) \right) \qquad (IV.13)$$

onde $C_1 = 1$; $C_2 = -1$ e $m_1 = m$ e $m_2 = M$

Os têrmos proporcionais a guv dão contribuição nula, de maneira que (IV.13) satisfaça condição de calibre (IV.11.c). Usando a identidade:

$$1 = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \cdot \delta\left(1 - \frac{z_1 + z_2}{\lambda}\right) \qquad (IV.13.a)$$

obteremos para Yuv (q) a seguinte expressão:

$$\bar{Y}_{uv}(q) = \frac{2i\alpha}{\pi} (q_u q_v - g_{uv} q^2) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\lambda\, dz_1 dz_2\, z_1 z_2}{\lambda (z_1 + z_2)^4} x$$

$$x\, \delta\left(1 - \frac{z_1 + z_2}{\lambda}\right) x \sum_i C_i \exp\left(i | \frac{q^2 z_1 z_2}{z_1 + z_2} - (m_1^2 - i\xi)(z_1+z_2) | \right) =$$

$$= \frac{2i\alpha}{\pi} (q_u q_v - g_{uv} q^2) \int_0^\infty \int_0^\infty dz_1 dz_2 z_1 z_2\, \delta(1 - z_1 - z_2)\, x$$

$$x \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{2} C_i \exp | i\lambda (q^2 z_1 z_2 - m_i^2 + i\xi) | \right) \qquad (IV.13.b)$$

Portanto:

$$\bar{I}_{uv}(q) \equiv I_{\mu\nu}(q, m^2) - I_{uv}(q, M^2) =$$

$$= \frac{2i\alpha}{\pi} (q_u q_v - g_{uv} q^2) \int_0' dz z(1-z) \log \frac{M^2 - q^2 z(1-z)}{m^2 - q^2 z(1-z)} \qquad (IV.14)$$

$$= \frac{2i\alpha}{\pi} (q_u q_v - g_{uv} q^2) \left[1/6 \log M^2/m^2 + \int_0' z(i-z) \log \frac{1 - q^2/M^2\, z(1-z)}{1 - q^2/m^2 z(1-z)}\, dz \right]$$

Temos (26)

$$V(a) = \int_0' z(1-z) \ln(1 + a z (1-z))\, dz = \qquad (IV.14.a)$$

$$= 1/6 \left[5/3 - 4/a - (1 - 2/a)\left(1 + 4/a\right)^{1/2} \ln \frac{(1-4/a)^{1/2} - 1}{(1 - 4/a)^{1/2} + 1} \right.$$

No nosso caso $a = -q^2/M^2$ ou $-q^2/m^2$. Portanto se M é finito no limite assintótico $q \to \infty$ teremos que $\left| \lim_{q \to \infty} \frac{1}{q(q)} \right| \ll 1$ logo:

$$\lim_{q\to\infty} V|a(q)| = 1/6\left[5/3 - 4/a - (1-2/a)(1+2/a)\,\ell m\frac{-2/a}{2-2/a}\right| =$$

$$\simeq 1/6\left[5/3 - 4/a + \log(-a) - 1/a + O(1/a^2)\right| = 1/6\left[5/3 - 5/a + \right.$$

$$\left. + \log(-a)\right] + O(1/a^2) \qquad \text{(IV.14.b)}$$

Portanto:

$$\bar{I}uv(q) = \frac{2i\alpha}{\pi}(q_u q_v - g_{uv}q^2)\left\{\left[1/6\log M^2/m^2 + 1/6\left[5/3 + \right.\right.\right.$$

$$\left. + 5M^2/q^2 + \log q^2/M^2\right] + O(1/q^4)\left] - 1/6\left[5/3 + \frac{5m^2}{q^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \log q^2/m^2\right]\right\} \qquad \text{(IV.14.c)}$$

Assim obteremos:

$$\lim_{q\to\infty} \bar{I}^{uv}(q) = \frac{2i\alpha}{\pi}(q_u q_v - g_{uv}q^2)\left[5/6\,\frac{M^2-m^2}{q^2} + 1/6\log M^2/m^2 - \right.$$

$$\left. - 1/6\log M^2/q^2 + 1/6\log m^2/q^2\right| = 5/3\,\frac{i\alpha}{\pi}(M^2-m^2)1/q^2$$

$$\cdot(q_u q_v - g_{uv}q^2) \qquad \text{(IV.15)}$$

Substituindo êste resultado em (IV.11) obteremos:

$$\lim_{q\to\infty} \bar{\pi}^{uv}(q) = \frac{g^{uv}}{q^2} + 1/q^4\,\frac{5i\alpha}{3\pi}\,1/q^2(q_u q_v - guvq^2)(M^2 - m^2) =$$

$$= \frac{g^{uv}}{q^2} + O(1/q^4) \qquad \text{(IV.16)}$$

Êste resultado coincide com o resultado canônico (IV.10.b). Vemos também, neste exemplo, que se a teoria é finita, não temos apareçimento de têrmos anômalos. Os resultados permanecem canônicos.

C. Função de três-pontos

Consideremos a função de três pontos não renormalizada.

$$F^u(p, q) = \int d^4x\, d^4y\, e^{ipx}\, e^{-iqy}\,\langle 0|\, T\Psi(x)\bar{\Psi}(y)j^u(0)|0\rangle \qquad \text{(IV.17)}$$

Vamos calcular esta amplitude usando as regras canônicas de Comutação. Integrando (IV.17) por partes teremos:

$$F^u(p, q) = \frac{-i}{p_o}\int d^4y\, e^{-iqy}\, d^3x\, e^{ipx}\langle 0|T\Psi(x)\bar{\Psi}(y)\, j^u(0)|0\rangle\Big|_{x_o=-}^{x_o=+}$$

$$+ \frac{i}{p_o}\int d^4y\, e^{-iqy}\int d^4x\,\frac{d}{dx_o}\langle 0|T\Psi(x)\bar{\Psi}(y)j^u(0)|0\rangle \qquad \text{(IV.17.a)}$$

Como os têrmos de superfície são nulos (vamos estar interessados em valôres de p fora da camada de massa) obteremos:

$$F^u(p, q) = i/p_o\int d^4y\, e^{-iqy}\int d^4x\, e^{ipx}\Big\{\langle 0|\, T\,\frac{d}{dx_o}\Psi(x)\bar{\Psi}(y)j^u(0)|0\rangle + \qquad \text{(IV.17.b)}$$

$$+ \delta(x_o-y_o)\langle 0|T\{[\Psi(x), \bar{\Psi}(y)]\, j^u(0)\}0\rangle + \delta(x_o)\langle 0|T\bar{\Psi}(y)$$
$$\cdot[\Psi(x), j^u(0)|]0\rangle\Big\}$$

Suponho que $\langle 0|T\,\dot{\Psi}(x)\bar{\Psi}(y)j^u(0)|0\rangle$ é uma função bem definida de x_o, em teorias finitas (não contém funções δ em x_o) teremos:

$$\lim_{p_o\to\infty}\int d^4x\, e^{ipx}\langle 0|T\dot{\Psi}(x)\bar{\Psi}(y)j^u(0)|0\rangle = 0 \qquad \text{(IV.17.c)}$$

Usando as regras canônicas de comutação: $|j^u = (x)\ u\ (x)|$

$[\Psi(x), \bar{\Psi}(y)| + \delta(x_o - y_o) = \gamma^o\delta^4(x-y)$ teremos:

$$[\Psi(x)j^4(y)]\,\delta(x_o - y_o) = \gamma^o\gamma^u\delta(x)\ \Psi(x)$$

teremos:

$$\lim_{p_o\to\infty} F^u(p, q) = i/p_o\int d^4y\, e^{-iqy}\left[\gamma^o\langle 0|j^u(0)|0\rangle + \gamma^o\gamma^u\langle 0|T\right. \qquad \text{(IV.18.a)}$$

$$\left.\bar{\Psi}(y)\Psi(0)|0\rangle = i/p_o\gamma^o\gamma^u\, S_F(q)\right. \qquad \text{(IV.18.b)}$$

Anàlogamente:

$$\lim_{q_o\to\infty, p_{fixo}} F^u(p, q) = \frac{i\gamma u\gamma^o}{q_o}\ S(p)$$

Vamos agora verificar a relação IV.18, usando a teoria de perturbação com limiar finito. Temos:

$$F^u(p, q) = S(p)\Gamma^u(p, q)\, S(q) \qquad \text{(IV.19.a)}$$

onde S(p) é o propagador de fermions (IV.1) e:

$$\Gamma^u(p, q) = \gamma^u + \Lambda^u(p, q) \qquad \text{(IV.19.b)}$$

com Λ^u a correção do vértice até segunda ordem:

$$\Lambda u(p, q) = -\frac{i e^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{1}{k^2-u^2+i\xi}\gamma_v \frac{1}{\not p-\not k-m+i\varepsilon}\gamma_u \frac{1}{\not q-\not k-m+i}\gamma^v \qquad \text{(IV.19.c)}$$

Usando o regulador de Pauli-Villars:

$$\bar\Lambda u(p, q) \equiv \Lambda u(p, q, m^2) - \Lambda u(p, q, \Lambda^2)$$

onde Λ^2 é uma massa grande, porém finita, e a identidade

$$\frac{1}{k^2}\,\frac{\Lambda^2}{k^2+\Lambda^2} = \int_o^{\Lambda^2} dt \frac{1}{(k^2+t)^2}$$

obteremos:

$$\bar\Lambda u(p, q) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int_{u^2}^{\Lambda^2} \frac{dt}{(k^2-t)^2} \frac{\gamma_v(\not p-\not k+m)(\gamma_u(\not q-\not k+m)\gamma^v}{|(p-k)^2-m^2||(q-k)^2-m^2|} \qquad \text{(IV.20.a)}$$

Usando a identidade de Feynman:

$$\frac{1}{a^2bc} = 6\int_o^{'} dx\int_o^{1-x} dy \frac{1-x-y}{|a+(b-a)x+(c-a)y|^4} \qquad \text{(IV.20.b)}$$

teremos:

$$\bar\Lambda u(p, q) = \frac{-6ie^2}{(2\pi)^4}\int_{u^2}^{\Lambda^2}\int dt\int_o^1 dx\int_o^{1-x} dy \int d^4k \frac{\gamma_v(p-k+m)\gamma_u(q-k+m)\gamma^v}{||k-(px+qy)|^2+A^2|^2} \qquad \text{(IV.20.c)}$$

onde

$$A^2 = (p^2-m^2+t)x + |q^2-m^2+t|y - (px+qy)^2 - t$$

Sendo a integral convergente em k, faremos a translação

$$k' = k + (px + qy)$$ assim

$$\bar\Lambda_u(p, q) = -\frac{6\,ie^2}{(2\pi)^4}\int_{u^2}^{\Lambda^2} dt\int_o^1 dx\int_o^{1-x} dy\int d^4k \frac{\gamma_v N_u \gamma^v}{(k^2+a^2)^4} \qquad \text{(IV.21)}$$

onde

$$N_u = |\not p-\not k-(\not p x+\not q y)+m|\,\gamma_u\,|\not q-k-(\not p x+\not q y)-m|$$

Usando integração simétrica, podemos remover as potências impares de k e substituir $k_u k_v$ por seu valor médio $1/4k^2 g_{uv}$ assim:

$$\bar\Lambda_u(p, q) = \frac{-6ie^2}{(2\pi)^4}\int_{u^2}^{\Lambda^2} dt\int_o^1 dx\int_o^{1-x} dy(1-x-y)\,\gamma_v M_u \gamma^v \qquad \text{(IV.21.a)}$$

com:

$$M_u = |\not p-(\not p x+\not q y)+m|\gamma_u|\not q-(\not p x+\not q y)+m|\int d^4k \frac{1}{(k^2+A^2)^4} - \gamma_u\int d^4k \frac{k^2}{(k^2+A^2)^4}$$

Efetuando a integração em K fica

$$\bar\Lambda_u(p, q) = \frac{\pi^2 e^2}{(2\pi)^4}\int_{u^2}^{\Lambda^2} dt\int_o^1 dx\int_o^{1-x} dy\,(1-x-y)\,\gamma_v\, M_u\, \gamma^v$$

onde (IV.22)

$$M_u = \left\{|\not p-(\not p_x+\not q_y)+m|\gamma_u|\not q-(\not p_x+\not q_y)+m|-2C^u\right\}\cdot 1/c^2 \qquad \text{(IV.22.a)}$$

e

$$C \equiv (p^2-m^2)x+(q^2-m^2)y-(px+qy)^2-t(1-x-y)$$

Vamos determinar o comportamento assintótico de $\bar\Lambda_u(p, q)$ quando p_o tende a infinito $|p^2\to\infty|$.

Para facilitar a análise é conveniente separar o intervalo de integração em x. Vamos introduzir o parâmetro.

$$\xi = \frac{N\Lambda^2}{p^2} \qquad N \gg 1 \qquad \text{(IV.22.b)}$$

Sendo Λ finito o, ξ tenderá a zero quando p^2 tende a infinito

Vamos distinguir três casos.

a) $0 < x < \xi$; b) $\xi < x < |-\xi$; c) $|-\xi < x < 1$

a) Neste caso teremos: $0 < x < \varepsilon$

$$M_u = \left(\not{p}\gamma_u \not{m} + \not{A}(1-y) \not{} - 2c\gamma^u \right) 1/c^2 + R(1/p) \qquad \text{(IV.23.a)}$$

onde

$$C = p^2 x - t\,y(q^2 - m^2 + t) - q^2 y \equiv f(y) + p^2 x$$

$R(1/p)$ representa genèricamente um têrmo de ordem $1/p$ vêzes a ordem dominante em p dos têrmos escritos explicitamente, quando p tende a infinito.

Logo

$$\bar{\Lambda}^a_u(p, q) = \frac{\bar{\Pi} e^2}{(2\bar{\Pi})^4} \int_{u^2}^{\Lambda^2} dt \int_o^{\varepsilon} dx \int_o^{1-x} dy(1-x-y)\, x$$

$$\gamma_v \frac{\not{p}\gamma_u \not{m} + q(1-y) \not{} - 2\gamma^u \not{} f(y) + p^2 x \not{}}{\left| f(y) + p^2 x \right|^2} \gamma^v + R(1/y) \qquad \text{(IV.23.b)}$$

Se efetuarmos a integração em y de 0 até 1, os êrros relativos resultantes serão de ordem $1/p$ em relação a integral (IV.23.b) Êstes têrmos podem ser inseridos na função $R(1/p)$. Portanto obteremos:

$$\bar{\Lambda}^a_u(p, q) = \frac{\bar{\Pi} e^2}{(2\bar{\Pi})^4} \int_{u^2}^{\Lambda^2} dt \int_o^{\varepsilon} dx \int_o^{1} dy\, (1-x-y)\gamma_v$$

$$\frac{\not{p}\gamma_u \not{m} + \not{A}(1-y) \not{} - 2\gamma^u \not{} f + p^2 x) \not{}}{\left| f + p^2 x \right|^2} + R(1/p) \qquad \text{(IV.23.c)}$$

$$= \frac{N\Lambda^2}{p^2} \quad \frac{\bar{\Pi} e^2}{(2\bar{\Pi})^4} \int_{u^2}^{\Lambda^2} dt \int_o^1 dy(1-y)\gamma_v \frac{\not{p}\gamma_u \not{m} + \not{A}(1-y) \not{}}{f(y) \not{} N^2 + f(y) \not{}} \gamma^v -$$

$$- 1/p^2 \, \frac{2\bar{\Pi} e^2}{(2\bar{\Pi})^4} \int_{u^2}^{\Lambda^2} dt \int_o^1 dy(1-y)\gamma_v \gamma_u \gamma^v \log \frac{N\Lambda^2 + f(y)}{f(y)} + R(1/p)$$

Assim

$$\lim_{p \to \infty} \bar{\Lambda}^a_u(p, q) \sim 1/p \qquad \text{(IV.23.d)}$$

b) Sendo $\varepsilon < x < 1 - \varepsilon$ teremos $p^2 x > N\Lambda^2$. Neste caso:

$$M_u = \frac{\not{p}(1-x)\gamma_u \not{} - \not{p}x \not{} - 2\gamma^u p^2 x}{p^4 x^2} + R(1/p) \sim 1/p^2 \quad \text{Portanto}$$

$$\lim_{p \to \infty} \bar{\Lambda}^b_u(p, q) = \frac{\bar{\Pi} e^2}{(2\bar{\Pi})^4} \int_{u^2}^{\Lambda^2} dt \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} dx \int_o^{1-x} dy(1-x-y)\gamma_v M_u \gamma^v \sim 1/p^2$$

(IV.24.a)

c) Sendo $1 - \varepsilon < x < 1$ teremos:

$0 < y < 1-x$ e portanto $y << 1$ neste caso; usando o fato que Λ é finito podemos desprezar $\Lambda^2(1-x)$ em relação a $p^2(1-x)$ portanto obteremos:

$$M_u = \frac{\not{} - \not{p}(1-x) + m \not{} \gamma_u \not{p} - 2\, p^2(1-x)}{p^4 (1-x)^2} + R(1/p) \qquad \text{logo:}$$

$$\bar{\Lambda}^c_u(p, q) = - \frac{\bar{\Pi} e^2}{(2\bar{\Pi})^4} \int_{u^2}^{\Lambda^2} dt \int_{1-\varepsilon}^{1} dx \int_0^{1-x} dy(1-x-y)\gamma_v$$

$$\lim_{p \to \infty} \frac{\not{} \not{p}(1-x) + m \not{} \gamma_u \not{p} - 2p^2(1-x)}{p^4 (1-x)^2} \gamma^v + R(1/p)$$

$$= \frac{-\bar{\Pi} e^2}{(2\bar{\Pi})^4} \int_{u^2}^{\Lambda^2} dt \int_{1-\varepsilon}^{\varepsilon} dx\, \gamma_v \frac{\not{} \not{p}(1-x) + m \not{} \gamma_u \not{p} - 2p^2(1-x) \not{}}{p^4} \gamma^v \sim 1/p^2 \qquad \text{(IV.24,b)}$$

portanto:

$$\lim_{p \to \infty} \bar{\Lambda}_u(p, q) = \lim_{p \to \infty} \bar{\Lambda}^a_u(p, q) + \lim_{p \to \infty} \bar{\Lambda}^b_u(p,q) + \lim_{p \to \infty} \bar{\Lambda}^c_u(p,q) \sim 1/p \qquad \text{(IV.25)}$$

O mesmo resultado seria obtido se formalmente, em (IV.19.c) desprezarmos os momentos de integração em relação a p. Vemos assim que, se a teoria é finita, tal procedimento é correto, no nosso caso,

Usando (IV.19.a) teremos:

$$\lim_{p \to \infty} F^u(p,q) = \lim_{p \to \infty} S(p) \left| \gamma^u + \bar{\Lambda}^u(p,q) \right| S(q) = \frac{i\gamma_o \Box \gamma^u}{p_o} +$$

$$+ O(1/p)] \, S(q) \Big|$$

SERVICO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO 121 INSTITUTO DE FISICA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

onde usamos o fato, já mostrado que:

$\lim_{p\to\infty} S(p) = \frac{i\gamma_o}{p_o}$ assim obteremos:

$$\lim_{p_o\to\infty} F^u(p,q) = \frac{i\gamma_o\gamma^u}{p_o} S_F(q) \qquad \text{(IV.26.a)}$$

que coincide como resultado canônico (IV.18.a). Anàlogamente podemos mostrar que:

$$\lim_{q_o\to\infty} F^u(p,q) = \frac{i\gamma^u\gamma^o}{q_o} S_F(p) \qquad \text{(IV.26.b)}$$

Vemos assim, também neste caso, que se a teoria é finita, os resultados são canônicos.

Amplitude de Compton

Consideremos a amplitude Comton:

$$T^{uv}(q) = \int d^4x\, e^{iqx} \langle p|\, Tj^u(x) j^v(0)|p'\rangle \qquad \text{(IV.27)}$$

Vamos calcular inicialmente esta amplitude, usando as regras canônicas de comutação, através do teorema de Björken. Teremos:

$$\lim_{q_o\to\infty} T^{uv}(q) = i/q_o \int d^3x\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \langle p||j^u(x), j^v(0)||p'\rangle \qquad \text{(IV.27.a)}$$

onde $j^u \equiv \bar{\psi}(x)\gamma_u\psi(x)$ é a corrente conservada de fermions. Usando as regras de comutação canônicas.

$$[j^o(x),\ j^u(y)]\ \delta(x_o - y_o) = 0$$

$$[j^i(x),\ j^j(y)]\ \delta(x_o - y_o) = i\xi_{ijk}\, j_5^k\, \delta^4(x-y) \qquad \text{(IV.27.b)}$$

com $j_5^k \equiv i\bar{\psi}\gamma^u\gamma 5\psi$

teremos

$$\lim_{q_o\to\infty} T^{uv}(q) = 1/q_o \times 0 \quad \text{se } u = 0 \text{ ou } v = 0$$

$$\lim_{q_o\to\infty} T^{ij}(q) = -\frac{\xi^{ijk}}{q_o} \langle p|\, j_5^k\ (0)|p'\rangle \qquad \text{(IV.27.c)}$$

Vamos agora, verificar êste resultado usando teoria de perturbação não renormalizada, com limiar finito. Os diagramas que contribuem para as correções radiativas são mostradas na figura 7. Assim teremos:

$$T^{uv}(q) \equiv u(p)\, M^{uv}(q)\, u(p') \qquad \text{(IV.28)}$$

com

$$M^{uv} = M_o^{uv} + M_1^{uv} + M_2^{uv} \qquad \text{onde}$$

$$M_o^{uv}(q) = \gamma^u S(p+q)\gamma^v + \gamma^v S(p'-q)\gamma^u \qquad \text{(IV.28.a)}$$

$$M_1^{uv}(q) = \gamma^u S(p+q)\textstyle\sum(p+q)\, S(p+q)\gamma^v + \gamma^v S(p'-q)\sum(p'-q) S(p'-q)$$

$$+\Lambda^u(p,\ p+q)\, S(p+q)\gamma^v + \gamma^v(p,\ p'-q)\, S(p'-q)\gamma^u + \qquad \text{(IV.28.b)}$$

$$+\gamma^u S(p+q)\Lambda^v(p+q,\ p') + \gamma^v S(p'-q)\,\Lambda^u(p'-q)p') +$$

$$+\gamma_u S(p+q)\gamma^v S(p)\textstyle\sum(p) + \sum(p)\, S(p)\gamma^u S(p+q)\gamma^v +$$

$$+\gamma^v S(p-q)\gamma^u S(p)\textstyle\sum(p') + \sum(p')\, S(p)\gamma^v S(p'-q)\gamma^u$$

$$M_2^{uv}(q) = \frac{e^2}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2-u^2}\gamma_\alpha S(p-k)\gamma^u S(p+q-k)\gamma^v S(p'-k)\gamma^u, + \qquad \text{(IV.28.c)}$$

$$+\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2-u^2}\gamma_\alpha S(p-k)\gamma^v S(p_1-q-k)\gamma^u S(p_1-k)\gamma^\alpha$$

Teremos:

$\lim_{q_o\to} M_o^{uv}(q) = 1/q_o[\gamma^u\gamma^o\gamma^v - \gamma^v\gamma^o\gamma^u]$ Portanto:

$$\lim_{q_o\to\infty} M_o^{uv}(q) = 0 \qquad \text{se } u = 0 \text{ ou } v = 0$$

$$\lim_{q_o\to} M_o^{ij}(q) = -\frac{i\xi^{ijk}}{q_o}\gamma_5\gamma_k \qquad \text{(IV.29.a)}$$

Para determinar o limite assintótico de $M_1^{uv}(q)$ vamos lembrar os seguintes resultados que já forhm provados:

$$\lim_{q_0\to\infty} \sum(p+q) \sim \frac{\log q^2}{\not q} \qquad \text{(IV.29.b)}$$

$$\lim_{q_0\to\infty} \Lambda^{u}(p,\ p+q) \sim 1/\not q$$

Portanto:

$$\lim_{q_0\to\infty} M_1^{uv}(q) = 1/q_0\left[\gamma^{u}\gamma^{o}\gamma^{v} - \gamma^{v}\gamma^{o}\gamma^{u}\right] S(p')\Sigma(p') + \qquad \text{(IV.29.c)}$$

$$+\Sigma(p)\, S(p)\, 1/q_0\, [\gamma^{u}\gamma^{o}\gamma^{v} - \gamma^{v}\gamma^{o}\gamma^{u}]$$

logo: $\lim_{q_0\to\infty} M_1^{uv}(q) = 0$ se $u = 0$ ou $v = 0$

$$\lim_{q_0\to\infty} M_1^{ij}(q) = \frac{-i\,\varepsilon^{ijk}}{q_0}\left[\gamma_5 k_k\, S(p')\Sigma(p') + \Sigma(p)S(p)\gamma_5\gamma_k\right]$$

Para determinar o comportamento assintótico de $M_2^{uv}(q)$ consideremos a integral:

$$Y^{uv}(q) = \int \frac{d^4k}{k^2 - u^2}\, S(p-k)\gamma^{u} S(q-k)\gamma^{v} S(p_1 - k) \qquad \text{(IV.30)}$$

Para simplificar a discussão faremos a massa de fermion nula. Assim:

$$Y^{uv}(q) \equiv Y_1^{uv}(q) + Y_2^{uv}(q) = \int \frac{d^4k}{k^2-u^2}\, \frac{\not p - \not k}{(p-k)^2}\gamma^{u}\, 1/\not q\,\gamma^{v}\, \frac{\not p_1 - \not k}{(p_1-k)^2} -$$

$$- 1/q^2 \int \frac{d^4k}{k^2-u^2}\, \frac{\not p - \not k}{(p-k)^2}\gamma^{u}\, \frac{q^2\not k - 2qk\not q + k^2\not q}{(q-k)^2}\gamma^{v}\, \frac{\not p_1 - \not k}{(p_1-k)^2} \qquad \text{(IV.30.a)}$$

Sendo cada integral logaritmicamente divergente, vamos introduzir o regulador de Pauli-Villars:

$$Y^{uv}(q) \equiv Y^{uv}(q, u^2) - Y^{uv}(q, \ ^2) \quad \text{com } ^2 \text{ finito}$$

Vamos determinar o limite assintótico de $Y_2^{uv}(q)$. Usando a identidade:

$$\frac{1}{k^2-u^2} - \frac{1}{k^2-\Lambda^2} = \int_{u^2}^{\Lambda^2} \frac{dt}{(k^2-t)^2}$$ teremos:

$$Y_2^{uv}(q) = 1/q^2 \int_{u^2}^{\Lambda^2} \frac{dt}{(k^2-t)^2} \int d^4k\, \frac{\not p - \not k}{(p-k)^2}\gamma^{u}\, \frac{q^2\not k - 2qk\not q + k^2\not q}{(q-k)^2}\gamma^{v}\, \frac{\not p_1 - \not k}{(p_1-k)^2} \qquad \text{(IV.30.b)}$$

Usando a identidade de Feynman:

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4^2} = -24 \int_0^1 dx \int_0^y dy \int_0^z dz\, \frac{1}{|a_4 + (a_3-a_4)x + (a_2-a_3)y + (a_1-a_2)z|^5}$$

vem $$Y_2^{uv}(q) = \frac{-24}{q^2} \int_{u^2}^{\Lambda^2} dt \int_0^1 dx \int_0^y dy \int_0^z dz\, \frac{d^4k}{|k^2 - t + (q^2 + t - 2qk)x + |-q^2 + 2k(q-p)|y + 2k(p-p_1)z|^5} \qquad \text{(IV.30.c)}$$

$$\frac{(\not p - \not k)\gamma^{u}(q^2\not k - 2qk\not q + k^2\not q)\gamma^{v}(\not p_1 - \not k)}{}$$

Sendo $t < \Lambda^2$ finito teremos no limite de q_0 tende a infinito

$$\lim_{q_0\to\infty} Y_2^{uv}(q) = R(1/q) + \qquad \text{(IV.31.a)}$$

$$+ \frac{-24}{q^2} \int_{u^2}^{\Lambda^2} dt \int_0^1 dx \int_0^y dy \int d^4k\, \frac{(\not p - \not k)\gamma^{u}(\not k^2 - 2qk\not q + q^2\not k)\gamma^{v}(\not p_1 - \not k)}{|(k^2-t) + (q^2 - 2qk)(x-y)|^5}$$

onde $R(1/q)$ é um têrmo cuja ordem em q é igual a $1/q$ vêzes a ordem em q do têrmo dominante da integral, quando q tende a infinito. Portanto:

$$\lim_{q_0\to\infty} Y_2^{uv}(q) = \lim_{q_0\to\infty} \frac{-24}{q^2}\ X \qquad \text{(IV.31b)}$$

$$X \int_{u^2}^{\Lambda^2} dt \int_0^1 dx \int_0^x (x-y)\,dy\ d^4k\, \frac{(\not p - \not k)^{u}(q^2\not k - 2qk\not q + k^2\not q)^{v}(\not p_1 - \not k)}{|(k-qy)^2 + q^2 y(1-y) - t|^5}$$

Fazendo a translação $k' = k - qy$ (o que é permitido porque Y_2 converge na integração em d^4k) e efetuando integrações simétricas teremos:

$$\lim_{q_0\to\infty} Y_2^{uv}(q) = \frac{-24}{q^2} \int_{u^2}^{\Lambda^2} dt \int_0^1 dx \int_0^x (x-y)\,dy \int d^4k\, \frac{N^{uv}(k)}{|k^2 + q^2 y(1-y) - t|^5} \qquad \text{(IV.31.c)}$$

onde

$$N^{uv}(k) = q^2y(1-y)(\not p-\not k y)\gamma^u \not q \gamma^v(\not p_1-\not k y) - q^2y(1-y)k\!\!\!/\gamma^u \not q \gamma^v k\!\!\!/$$

$$-q^2(\not p-\not k y)\gamma^u k\!\!\!/\gamma^v k\!\!\!/ - q^2 k\!\!\!/\gamma^u k\!\!\!/\gamma^v(\not p_1-\not k y)+k^2(\not p-\not k y)\gamma^u \not q\gamma^v(\not p_1-\not k y)$$

Usando o fato que:

$$\int \frac{d^4k}{(k^2+a^2)^5} = \frac{i\pi^2}{12}\frac{1}{(a^2)^3} \quad e \quad \int \frac{d^4k\,k^2}{(k^2+a^2)^5} = \frac{i\pi^2}{24}\frac{1}{(a^2)^2} \quad \text{teremos}$$

$$\lim_{q_o\to\infty} Y_2^{uv}(q) = -1/q^2\int_{\mu^2}^{\Lambda^2} dt \int_0^1 dx \int_0^x (x-y)\,dy \left| J_1^{uv} + J_2^{uv} \right| \text{ onde:}$$

$$J_1^{uv} = 2q^2y(1-y)(\not p-\not k y)\gamma^u \not q \gamma^v(\not p_1-\not k y)\frac{1}{|q^2y(1-y)-t|^3} \quad e$$

$$J_2^{uv} = |(\not p-\not k y)\gamma^u \not q\gamma^v(\not p_1-\not k y) - q^2/4\; y(1-y)\gamma\gamma^u \not q\gamma^v\gamma^\alpha + \quad \text{(IV.32.a)}$$

$$-q^2/4(\not p-\not k y)\gamma^u \not q\gamma^v - q^2/4\gamma_\alpha\gamma^u\gamma^\alpha\gamma^v(\not p_1-\not k y)| \times \frac{1}{|q^2y(1-y)-t|^2}$$

Uma análise simples, análoga à que foi feita anteriormente para a determinação do limite assintótico de $\Lambda^u(p,q)$ mostra que:

$$\lim_{q_o\to\infty} Y_2^{uv}(q) \sim 1/q^3 \qquad \text{(IV.32.b)}$$

Substituindo êste resultado em (IV.30.a) obteremos:

$$\lim_{q_o\to} Y^{uv}(q) = \lim_{q_o\to\infty} Y_1^{uv}(q) \qquad \text{(IV.32.c)}$$

Estamos finalmente em condições de determinar o comportamento assintótico de $M_2^{uv}(q)$. Usando as relações (IV.28.c),(IV.30.a) e (IV.32.c) teremos:

$$\lim_{q_o\to\infty} M_2^{uv}(q) = \frac{e^2}{(2\pi)^4}\gamma_\alpha \left| Y_1^{uv}(q) + Y_1^{uv}(-q)\right| =$$

$$= \frac{e^2}{(2\pi)^4}\; 1/q_o \int \frac{d^4k}{k^2-u^2}\; S(p-k)|\gamma^u\gamma^o\gamma^v - \gamma^v\gamma^o\gamma^u| S(p_1-k) \qquad \text{(IV.33.a)}$$

Portanto:

$$\lim_{q_o\to\infty} M_2^{uv}(q) = 0 \quad \text{se } u=0 \text{ ou } v=0 \qquad \text{(IV.33.b)}$$

$$\lim_{q_o\to} M_2^{ij}(q) = \frac{-i\varepsilon^{ijk}}{q_o}\Lambda_5^k$$

Coletando os resultados (IV.29.a)(IV.29.c)e(IV.33b)teremos:

$$\lim_{q_o\to\infty} M^{uv}(q) = 0 \quad \text{se } u=0 \text{ ou } v=0 \qquad \text{(IV.34.a)}$$

$$\lim_{q_o\to\infty} M^{ij}(q) = \frac{-i\varepsilon^{ijk}}{q_o}|\gamma_5\gamma_k + \gamma_5\gamma_k S(p')\Sigma(p') + \Sigma(p)S(p)\gamma_5\gamma_k + \Lambda_k^5|$$

Portanto

$$\lim_{q_o\to\infty} T^{uv}(q) = u(p)\,M^{uv}(q)\,u(p') = 0 \quad \text{se } u=0 \text{ ou } v=0$$

$$\lim_{q_o\to\infty} T^{ij}(q) = \frac{-i\varepsilon^{ijk}}{q_o} < p|\; j_k^5 \;|p'> \qquad \text{(IV.34)}$$

Êste resultado é idêntico ao resultado obtido para a amplitude Compton usando as relações canônicas (IV.27.c).

Baseado nos exemplos apresentados, podemos dar uma caracterização diagramática, sôbre as relações entre os resultados canônicos e a finitude da teoria. Para exemplificar esta caracterização consideremos a representação diagramática da amplitude de Compton de segunda ordem.

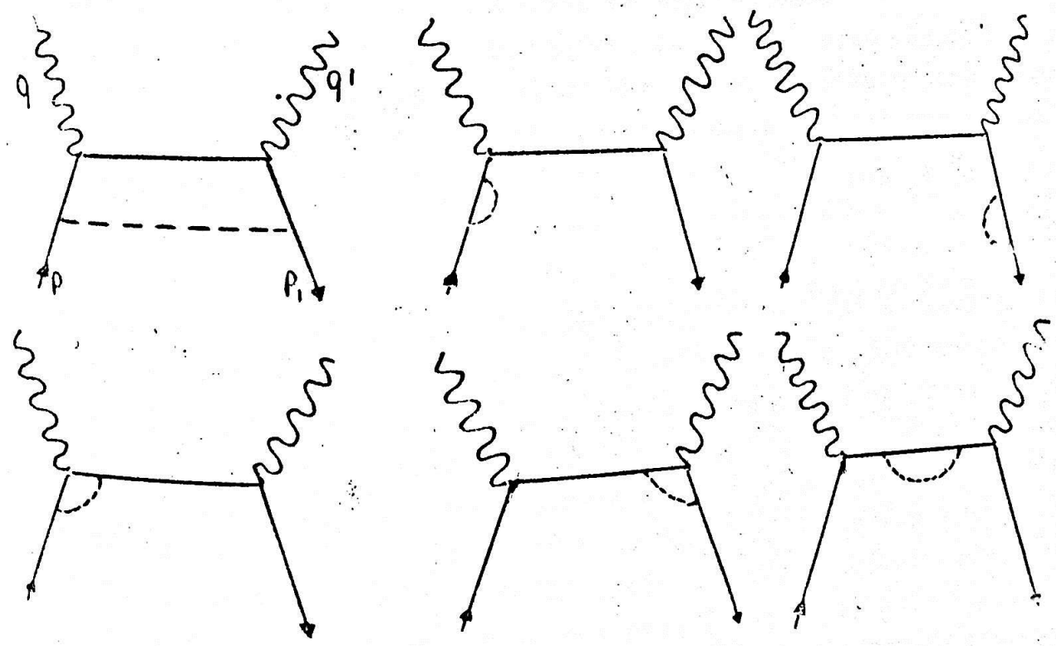
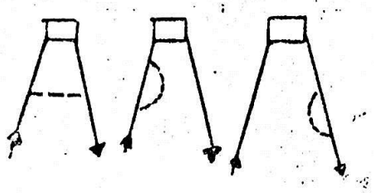


Figura 7a

Nos primeiros três diagramas existe um propagador de fermons carregando o momento q; nas duas diagramas seguintes, temos

dois propagadores como momento q; finalmente no último diagrama temos três propagadores. Essencialmente, mostramos que, sendo a teoria finita, podemos substituir os propagadores por $i\gamma^o/q^o$, obtendo a parte $O(1/q_o)$ da amplitude de Compton, que coincide com os resultados canônicos.



$$\square \equiv i/q_o(\gamma^u\gamma^o\gamma^v - \gamma^v\gamma^o\gamma^u)$$

Figura 7b

Evidentemente a análise acima pode ser feita para qualquer amplitude, procendo-se de maneira análoga, com a conclusão de que; em teorias finitas, podemos fazer, na representação diagramática da amplitude, a substituição mencionada acima, obtendo-se desta maneira os resultados canônicos.

Como resulta do estudo feito anteriormente, esta conclusão deve ser válida independentemente do calibre usado. Vamos mostra agora que as conclusões acima permanecem válidas no calibre covariante de Landau :

$$\partial^u A_u = 0 \qquad \text{(IV.28)}$$

Na literatura ( ) êste calibre aparece como sendo finito. Baseados neste fato, alguns autôres ( ) mostraram que neste calibre, há um conflito entre os resultados obtidos usando as relações canônicas de comutação e os cálculos explícitos obtidos usando teoria de perturbação. Vamos mostrar nesta secção que, na verdade êste calibre é logarìtmicamente divergente, o que invalida os resultados mencionados acima. Mostraremos que um resultado formal finito (incorreto) pode ser obtido se tivermos um cancelamento formal entre divergências infravermelhas (u=0) e divergências ultravioletas ($\Lambda \to \infty$).

Com esta finalidade, escrevemos o propagador de fotons como:

$$D^F_{uv} = \frac{1}{k^2 - u^2 + i\varepsilon}\left(g_{uv} - \frac{k_u k_v}{k^2 + i\varepsilon}\right) \qquad \text{(IV.29)}$$

Assim teremos para o propagador de fermions a expressão.

$$\Sigma(p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{1}{k^2-u^2+i\varepsilon}\left(g_{uv} - \frac{k_u k_v}{k^2 + i\varepsilon}\right)\gamma_u \frac{1}{\not p - \not k + m + i}\gamma^v$$

Subentendendo $k^2 \to k^2 + i\varepsilon$ e introduzindo o regulador de Pauli-Villars teremos:

$$\bar{\Sigma}(p) = \frac{ie^2\Lambda^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{(3\not k - \not p + 3m)\, k^2 - 2pk\not k}{(p-k)^2 - m^2} \frac{1}{(k^2 - \ ^2)(k^2 - u^2)k^2} \qquad \text{(IV.30.b)}$$

Sendo:

$$\frac{1}{(k^2-u^2)k^2(k^2-\Lambda^2)} \equiv \frac{1}{\Lambda^2(\Lambda^2-u^2)}\frac{1}{k^2-\Lambda^2} - \frac{1}{u^2(\Lambda^2-u^2)}\cdot\frac{1}{(k^2-u^2)} + \frac{1}{u^2\Lambda^2}\cdot 1/k^2$$

Para calcular o propagador (IV.30.c) devemos considerar a integral de tipo:

$$Y = \frac{i\, e^2\Lambda^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{(3\not k - \not p + 3m)k^2 - 2pk\not k}{(p-k)^2 - m^2}\frac{1}{k^2 - M^2} \qquad \text{(IV.30.d)}$$

Procedendo de maneira análoga ao cálculo feito para o propagador de fermions, onde apareceu uma integral análoga à integral (IV.30.d) obteremos: (IV.31)

$$\bar{\Sigma}(p) = \frac{2\pi^2 e^2\Lambda^2}{(2\pi)^4}\sum_{i=1}^{3} C_i \int_0^1 dx \int_0^\infty k^3\, dk \frac{3k^2(\not p/2 - \not p x + m) + 2p^2\not p(1-x)^2}{(k^2 - a_i^2)^2}$$

onde

$$C_1 = \frac{1}{\Lambda^2(\Lambda^2-u^2)} \qquad C_2 = \frac{-1}{u^2(\Lambda^2-u^2)} \qquad C_3 = \frac{1}{u^2\Lambda^2}$$

$$a_i^2 = -p^2x^2+(p^2+m^2-M_i^2)x - m^2 \quad \text{com } M_1= \ ; \ M_2= u \ \text{ e } M_3= 0$$

Assim obteremos

$$\mathrm{Im}\,\overline{\Sigma}(p) = \frac{2\pi^3 e^2\Lambda^2}{(2\pi)^4} \sum_i C_i \cdot \not{p}/2 \ X$$

$$X\Big(3/2\, p^2\Big(1-\frac{M_i^2}{p^2}\Big)^4 - \frac{5p^2-6N_i^2}{3}\Big(1-\frac{M_i^2}{p^2}\Big)^3 - \frac{5p^2+3M^2}{2}\Big(1-\frac{M_i^2}{p_2}\Big)^2 + 4p^2\Big(1-\frac{M_i^2}{p_1}\Big)\Big)$$

Assim sendo resulta

$$\overline{\Sigma}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(a)da}{\not{p}-a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r_\Lambda(a)da}{\not{p}-a} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r_u(a)da}{\not{p}-a} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r_o(a)da}{\not{p}-a} \equiv \overline{\Sigma}_\Lambda(p)+\overline{\Sigma}_u(p)+\overline{\Sigma}_o(p) \qquad \text{(IV.31.a)}$$

teremos

$$\Sigma(p) = \frac{e^2\Lambda^2}{16\pi^2}\not{p}\sum_i C_i \int_{M_i^2}^{L^2} \frac{dx}{p^2-x}\Big(\frac{M_i^8}{2x^3}+\frac{M_i^6}{6x^2}-\frac{3M_i^4}{2x}+\frac{M_i^2}{2}+\frac{4x}{3}\Big) \qquad \text{(IV.31.b)}$$

$(L \to \infty)$

Portanto, efetuando a integração obteremos:

$$\overline{\Sigma}_\Lambda = \frac{e^2}{16^2}\not{p}\frac{1}{\Lambda^2-u^2} \ X \qquad \text{(IV.32.a)}$$

$$\Big(\frac{\Lambda^8}{2}\Big(\frac{1}{2\Lambda^4(p^2-\Lambda^2)} - 1/2\,\frac{p^2-2\Lambda^2}{p^4\Lambda^2(p^2-\Lambda^2)} - 1/p^6 \log\frac{p^2-\Lambda^2}{\Lambda^2}\Big) - \frac{\Lambda^2}{2}\log\frac{p^2-L^2}{p^2-\Lambda^2} + \frac{\Lambda^6}{6}\Big(\frac{1}{p^2\Lambda^2}+1/p^4\log\frac{p^2-\Lambda^2}{\Lambda^2}\Big) + 4/3\Big(\Lambda^2 - L^2 - p^2\log\frac{p^2-L^2}{p^2-\Lambda^2}\Big)\Big)$$

$$\Sigma_u = \frac{e^2}{16\pi^2}\not{p}\frac{-\Lambda^2}{u^2(\Lambda^2-u^2)} X \qquad \text{(IV.32.b)}$$

$$\Big(\frac{u^8}{2}\Big[\frac{1}{2u^4(p^2-u^2)} - 1/2\,\frac{p^2-2u^2}{p^4u^2(p^2-u^2)} - 1/p^6\log\frac{p^2-u^2}{u^2}\Big] - \frac{u^2}{2}\cdot\log\frac{p^2-L^2}{p^2-u^2} + \frac{u^6}{6}\Big[\frac{1}{p^2u^2}+1/p^4\log\frac{p^2-u^2}{u}\Big] + \frac{4}{3}\Big|u^2-L^2-p^2\log\frac{p^2-L^2}{p^2-u^2}\Big)\Big)$$

$$\overline{\Sigma}_o = \frac{e^2}{16\pi^2}\not{p}\,1/u^2\Big(-\frac{4}{3}(L^2+p^2\log\frac{p^2-L^2}{p^2})\Big) \qquad \text{(IV.32.c)}$$

Logo:

$$\overline{\Sigma}(p) = \frac{e^2\not{p}}{16\pi^2}\frac{1}{\Lambda^2-u^2}\Big(\frac{\Lambda^8}{2}\Big(\frac{1}{2\Lambda^4(p^2-\Lambda^2)} - 1/2\,\frac{p^2-2\Lambda^2}{p^4\Lambda^2(p^2-\Lambda^2)} - 1/p^6\cdot\log\frac{p^2-\Lambda^2}{\Lambda^2}\Big)\Big) + \frac{e^2\not{p}}{16\pi^2}\frac{1}{\Lambda^2-u^2}\Big(\frac{\Lambda^6}{6}\Big[\frac{1}{p^2\Lambda^2}+\frac{1}{p^4}\log\frac{p^2-\Lambda^2}{\Lambda^2}\Big] + \frac{4}{3}\Lambda^2\Big)$$

$$\frac{-e^2\not{p}}{16\pi^2}\frac{\Lambda^2}{u^2(\Lambda^2-u^2)}\Big(\frac{u^8}{2}\Big[\frac{1}{2u^4(p^2-u^2)} - \frac{1}{2}\frac{p^2-2u^2}{p^4u^2(p^2-u^2)} - \frac{1}{p^6}\log\frac{p^2-u^2}{u^2}\Big]\Big)$$

$$\frac{-e^2\not{p}}{16\pi^2}\frac{\Lambda^2}{u^2(\Lambda^2-u^2)}\Big(\frac{u^6}{6}\Big[\frac{1}{p^2u^2}+\frac{1}{p^4}\log\frac{p^2-u^2}{u^2}\Big] + 4/3\,u^2\Big) +$$

$$+\Big[\log\frac{p^2-2}{p^2-u^2}\Big]\Big[\frac{\Lambda^2}{2(\Lambda^2-u^2)} - \frac{4}{3}\frac{p^2}{\Lambda^2-u^2}\Big] \qquad \text{(IV.33)}$$

Assim obteremos no limite $\Lambda \to \infty$ $(m_N=0)$

$$\overline{\Sigma}(p) = \frac{-e^2}{32\pi^2}\frac{\not{p}}{3} + \frac{e^2}{32\pi^2}\not{p}\log\frac{\Lambda^2}{p^2u^2} = \frac{e^2}{32\pi^2}\not{p}\Big[\log\frac{\Lambda^2}{p^2-u^2} - \frac{1}{3}\Big] \qquad \text{(IV.33.a)}$$

o que mostra que no limite de Λ tende a infinito $\overline{\Sigma}(p)$ é logaritmicamente divergente.

Se, formalmente fizermos u=0 na expressão do numerador de $\overline{\Sigma}_u$ obteremos no limite $\Lambda \to \infty$

$$\overline{\Sigma}(p) = -\frac{e^2}{32\pi^2}\not{p}/3 - \frac{e^2}{32\pi^2}\log L^2/\Lambda^2 \qquad \text{(IV.33.b)}$$

onde $L \to \infty$ e $\Lambda \to \infty$

Se agora fizermos L = obteremos

$$\overline{\Sigma}(p) = \frac{-e^2}{32\pi^2}\not{p}/3 \qquad \text{(IV.33.c)}$$

Vemos assim que o resultado acima resulta de um cancelamento extremamente singular entre divergências infravermelhas (u=0) e divergências ultravioletas ($\Lambda \to \infty$). Êste resultado finito pode ser também obtido fazendo diretamente u=0 no propagador de fotons D^F_{uv} (IV.29). Entretanto, como vimos acima, êste procedimento é incorreto. O calibre de Landau é na verdade logaritmicamente divergente, e que invalida os resultados obtidos baseados no fato de que êste calibre é finito.

O procedimento usado nêste capítulo, para o cálculo das amplitudes, pode de maneira análoga ser feito para qualquer amplitude, usando qualquer calibre. Assim obtemos a conclusão de que em teorias finitas, os comutadores a tempos iguais são canônicos.

CONCLUSÃO

Vimos nos capítulos I e II que os comutadores canônicos não descrevem corretamente o comportamento assintótico das amplitudes a altas energias. Quando estas amplitudes são calculadas usando teoria de perturbação encontramos resultados anômalos, em discordância com os resultados canônicos. Vamos, baseados nos exemplos mostrados e numa análise feita por R.Jackiw e Y.Gerstein( ), mostrar a relação existente entre o aparecimento dos resultados anômalos e as divergências da teoria. Com esta finalidade, consideremos o produto T* covariante de dois operadores A e B entre estados arbitrários:

$$T^*_{AB}(q) \equiv \int d^4x\, e^{iqx} \langle \alpha |\, T^*\, A(x)\, B(0) | \beta \rangle \qquad (V.1)$$

Vamos assumir que T^*_{AB} é um objeto bem definido, como é o caso por exemplo para as amplitudes de espalhamento numa teoria covariante de perturbação. No espaço de posição T^*_{AB} é composto de um produto ordinário T cronológico que é bem definido, com a excessão de tempos iguais. Assim precisamos especificar os valôres para o produto T*, em tempos iguais introduzindo funções δ e em suas derivadas. No espaço de momentos, êstes têrmos de contato se transforam em polinômios em q_o. Deixando de lado êstes polinômios em q_o no produto $T^*_{AB}(q)$ podemos sem ambiguidade isolar o produto T:

$$T_{AB} = \int d^4x\ \ e^{iqx} \langle \alpha |\, T\, A(x)\, B(0) | \beta \rangle \qquad (V.2)$$

Perfazendo uma integração por partes em x_o, e levando em consideração que os têrmos de superfície se anulam obteremos:

$$T_{AB}(q) = i/q_o \int d^3x\, e^{-i\vec{q}\vec{x}} \langle \alpha | [A(0,\vec{x}), B(0)] | \beta \rangle \qquad (V.3)$$

$$+ i/q_o \int d^4x\, e^{iqx} \langle \alpha |\, T\dot{A}(x)\, B(0) | \beta \rangle$$

O teorema de Björken resulta se assumimos que $\langle \alpha | T\, \dot{A}(x)\, B(0) | \beta \rangle$

bem definida. Ela será então, como função de x_o, no máximo discontínua, mas não possuirá funções δ em x_o. Nesta hipótese:

$$T(\dot{A}B) \equiv \int d^4x\, e^{iqx} \quad |\, T\, \dot{A}\,(x)\, B(0)| \qquad (V.4)$$

decresce para grandes q_o, obtendo:

$$\lim_{q_o \to \infty} T_{AB}\,(q_o, \vec{q}\,) = i\int d^3x\, e^{-i\vec{q}.\vec{x}} \langle \alpha | | A(0,x), B(0) | \beta \rangle \qquad (V.5)$$

É claro que um pré-requisito para isto é a existência de

$$C_{AB}\,(\vec{x}) \equiv \langle \alpha | | A(0,x),\ B(0) | \beta \rangle \qquad (V.6)$$

Contudo se T_{AB} não existe, não podemos concluir de (V.6) a validez da relação (V.5). Na verdade, todos os exemplos encontrados onde se revelou a falsidade de teorema de Björken, mostraram que $T^{*}_{AB}(q)$ não é bem definida, embora $C_{AB}(x)$ pode ser finito[22] [23].

Consideremos agora o caso da componente temporal da corrente: $A = j^o$. Evidentemente $\dot{A} = \partial_i j^i + \partial_u j^u$. Embora podemos assumir que $T_j u_B$ é bem definida, $C_j o_B$ vai em geral conter têrmos divergentes de Schwinger. Contudo, teremos ainda quantidades finitas se fizermos $\vec{q}$ igual a zero. De (V.3) resulta:

$$T^o(q_o, \vec{0}) = i/q_o \langle \alpha | | Q, B(0) | \beta \rangle + i/q_o\, T_{j^o_t}\, B(q_o, 0) \qquad (V.7.a)$$

$$Q \equiv d^3x\, j^o(x) \qquad (V.7.b)$$

$$T_{j^o_t B}\,(q_o, 0) = d^4x\, e^{iq_o x_o} \quad |\, T\, {}_u j^u(x) B(0)| \qquad (V.7.c)$$

onde o índice t indica diferenciação em relação ao tempo.

Para correntes conservadas $T_{j^o_t B}$ é nulo, e assim teremos o teorema BLJ. Para correntes P.C.A.C., podemos interpretar PCAC como a afirmação que $\partial_u j^u$ é um operador bem comportado, de tal forma que seus elemtnos de matriz são finitos. Neste caso $T_{j^o_t B}$ também existe e o teorema de BLJ tem validez. A validez do teorema de BLJ estábelecida acima para as componentes temporais, pode ser ilustrada com o exemplo da amplitude da polarização do vácuo discutida no capítulo II (equação II.7.a). Vimos que:

$$T^{oi}(q) = \frac{1}{(2\pi)^2}\, q_o q_i \int_0^1 dz\, z(1-z)\, \ln \left| \frac{m^2 - z(1-z)q}{z(1-z)\, m^2} \right|$$

Vemos assim que o teorema de B.L.J. vale, para momento $\vec{q}$ nulo, uma vez que neste caso T^{oi} também é nula.

Êste fato é uma consequência das limitações impostas pela conservação das correntes ou pela PCAC. Consideremos por exemplo:

$$T^{*u}(q) \equiv T^{*} j^u B(q) = \int d^4x\, e^{iqx} \langle \alpha | T^{*} j^u(x) B(0) | \beta \rangle \qquad (V.8.a)$$

Em virtude das condições de calibre da teoria, que conduz a conservação ou PCAC, $T^{*} j^u B(q)$ satisfaz a condição de divergência[24]:

$$q_u\, T^{*}(q) = i \int d^3x\ e^{-i\vec{q}.\vec{x}}\, C_j u_B\,(\vec{x}) + \qquad (V.8.b)$$

$$+ i \int d^4x\, e^{iqx} \langle \alpha |\ T^{*} \partial_u j^u(x)\ B(0) | \beta \rangle$$

os têrmos de Schwinger e as divergências dos têrmos de contato necessáriamente se cancelam em virtude das condições de calibre. Resulta assim, que se calcularmos (V.8.b) no referencial, de repouso de q, obteremos (V.7.a), que tem validez para o produto T* covariante e portanto o teorema de Björken é satisfeito para o produto T, quando $\vec{q}$ é nulo.

Consideremos agora o caso das correntes espaciais. Seja $\dot{A} = \dot{J}^i$, mesmo sendo $\int d^3x\, C_j i_B(x)$ bem definida, $\langle \alpha |\ T\, \dot{J}^i(x)\ B(0) | \beta \rangle$, em geral não terá os elementos de matriz finitos porque $\dot{J}^i$, diferentemente de $\dot{J}^o$ não é, em geral, um operador bem comportado. Por exemplo se:

$$J^i = \bar{\psi}\, \gamma\, i \psi \qquad (V.9.a)$$

$$i \partial_u \gamma^u \psi = o \psi \qquad (V.9.b)$$

onde O é um operador local qualquer, então teremos:

$$\dot{J}^i = (\partial\, j \bar{\psi})\, \gamma\, j \gamma\, o \gamma\, i \psi + \bar{\psi} \gamma\, i \gamma\, o \gamma\, j (\partial\, j \psi) + \qquad (V.9.c)$$

$$+ i \bar{\psi} (o \gamma\, o \gamma\, i - \gamma\, i \gamma\, o\ \ o)$$

Vemos assim que a expressão para J^i envolve operadores que não são em geral finitos, numa teoria de perturbação renormalizável, se a teoria é divergente.

No capítulo IV mostramos essencialmente que, se a teoria é finita então $\langle \alpha |\ T J^i(x)\ B(0) | \beta \rangle$ é uma função bem comportada. Assim resulta a validez do teorema de Bjorken e portanto o fato de que em teorias finitas, o comportamento dos comuta-

dores a tempos iguais é canônico.

Contudo, se a teoria é divergente, vemos da análise acima que em geral o teorema de Björken, que afirma que o comportamento a altas energias da amplitude T(q) é governada pelos comutadores canônicos a tempos iguais falha. Assim, em teorias divergentes teremos o aparecimento de têrmos anômalos, que mostram que os resultados canônicos não podem ser mantidos.

-o-o-o-o-o-o-o-
o-o-o-o-o

APÊNDICE I

Notação

Neste trabalho empregaremos a métrica usada por J.D.Bjorken e S.D.Drell no volume "Relativistic Quantum Mechanics"[24]. As coordenadas t, x, y, z, são denotadas pelo quadrivetor contravariante:

$x^u = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \vec{x})$

O vetor covariante é:

$x_u = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z) = g_{uv} x^v$

com o tensor métrico $g_{uv} = g^{uv}$ dado por

$$g_{uv} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

O quadri-momentum de uma partícula é definida por:

$$p^u = (E, px, py, pt) = |(\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}, \vec{p}|$$

O produto escalar de dois quadri-momentos (somando sobre índices repetidos):

$$p_1 \cdot p_2 = p_1^u p_{2u} = p_{1u} p_2^u = E_1 E_2 - p_1 \cdot p_2$$

Para o gradiente quadri-dimensional usaremos a abreviação:

$$\partial_u = \frac{\partial}{\partial x^u} \qquad \partial^u = \frac{\partial}{\partial x_u}$$

O laplaciano quadridimensional é definido por:

$$\Box^2 x = \partial_u \partial^u = \frac{\partial}{\partial x^u} \frac{\partial}{\partial x_u} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)^2$$

As matrizes na equação de Dirac:

$(i \partial_u \gamma^u - mc)\psi = 0$

satisfazem a relação de anticomutação:

$\gamma^u \gamma^v + \gamma^v \gamma^u = 2g^{uv}$ definiremos também $\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

Para outras definições e propriedades das matrizes gama veja o apêndice A do livro mencionado acima.

(25)

APÊNDICE II

Construção de produtos cronológicos T* covariantes

Nas aplicações da álgebra de correntes, é necessário frequentemente construir produtos cronológicos covariantes para as correntes. Como sabemos o produto ordinário T, não é em geral covariante, devido as singularidades dos comutadores das correntes no cone de luz. A covariância é obtida pela adição de um têrmo, chamado têrmo de contato. Para construir êste têrmo usaremos um vetor unitário u^u. $n^2=1$, que permite expressar quantidades não covariantes, como o produto T ou comutadores a tempos iguais, de uma maneira explìcitamente covariante, embora dependente do referencial, através do vetor n^u. Consideremos duas correntes $A^u(x)$ e $B^v(y)$ cujo comutador é conhecido a tempos iguais:

$$\delta[(x-y)n]\,[A^u(x),B^v(y)] = S^{uv}(y,n)\delta^4(x-y)+S^{uv/\alpha}(y,n)P_{\alpha\beta}\,\partial^\beta\delta^4(x-y) \qquad (1)$$

Nesta equação assumimos a existência do têrmo de Schwinger, $S^{uv/\alpha}$ p_μ é um projetor que assegura a não-existência de derivadas temporais da função delta: $P_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta$

Teremos por definição:

$$T^*[A^u(x)\,B^v(y)] = T[A^u(x)B^v(y,n)]+ C^{uv}(x,y,n) \qquad (2)$$

onde

$$T[A^u(x),\,B^v(y),n]=\theta[(x-y)n]\,A^u(x)B^v(y)+\theta[(y-x)n]B^v(y)A^u(x) \qquad (3)$$

$$\hat{C}^{uv}(x,y,t) = C^{uv}(n,y)\,\delta^4(x-y) + C^{uv}(x,\,y)$$

com $C^{uv}(x,\,y)$ - é um têrmo local, covariante (independente de n). Das relações (1), (2), e (3) obteremos

$$p^r_s\frac{\delta}{\delta M^s}\,T(A^u,\,B^v,\,n) = p^{rs}(x-y)_s\,\delta'[(x-y)n]\,[A^u(x),B^v(y)] =$$

$$= -\,S^{uv/s}\,p^r_j\,\delta^4(x-y) \qquad (4)$$

Por outro lado, temos outra conexão entre os produtos T e os comutadores dada pela teorema de Bjorken. Na nossa notação teremos sendo:

$$T^{uv}(q,n) = \int d^4x\, e^{iqx}\, T^{uv}|A^u(x),\,B\,(0),n| \qquad (5)$$

$$\lim_{(q.n)\to\infty}\ (q.n)\,T^{uv}(q,n) = i\int d^4x\, e^{iqx}\delta(x.n)[A^u(x),B^v(0)]$$

Quando êste resultado é combinado com a relação (4) obteremos

$$\lim_{q\cdot n}\ q\cdot n\ p^{ur}\frac{\delta}{\delta q^v}\ T^{\mu v}(q,n)=-p^{uv}\frac{\delta}{\delta n^v}\,T^{\mu v}(q,n) \qquad (6)$$

Esta equação pode ser derivada também ùnicamente de (5) usando a representação integral da função θ. Assim, as nossas considerações serão igualmente válidas para os comutadores definidos via o teorema de Bjorken-Johson-Law.

Usando as relações (1),(2) e(3) obteremos

$$\frac{\delta}{\delta n^\alpha}\,C^{\mu\nu}(y,n)=S^{\mu\nu/\alpha}(y,n) \qquad (7.a)$$

Resulta de (7.a) que o rotacional de S^{uvk} deve ser nulo:

$$\frac{\delta}{\delta n^\beta}\,S^{\mu\nu/\alpha}(y,n)=\frac{\delta}{\delta n^\alpha}\,S^{\mu\nu/\beta}(y,n) \qquad (7.b)$$

Assim, o produto T pode ser feito covariante sòmente se o rotacional do têrmo de Schwinger, é nulo. Pode ser mostrado[14] que (7.b) é uma consequência de que os comutadores a tempos iguais, é portanto o têrmo de Schwinger, são uma restrição à tempos iguais, de um comutador covariante, independente de n, a tempos diferentes. Se a condição (7.b) é satisfeita teremos:

$$C^{uv}(y,n)=\int d n'_\alpha\,S^{uv/\alpha}(y,n') \qquad (7.c)$$

Divergindo a relação (2) com $\partial/\partial x^u$ acharemos:

$$\partial_u T^{*uv}(x,y)=C^{\beta v}(y,n)\partial_\beta\delta^4(x-y)+\partial_u\hat{C}^{uv}(x,y)+ \qquad (8)$$

$$+\theta[(x-y).n]\,\partial_u A^u(x)\,B(y)+\theta[(y-x).n]B^v(y)\,\partial_u A^u(x)+$$

$$+n_u S^{uv}(y,n)\,\delta^4(x-y)+n_u S^{uv/\alpha}(y,n)\,P_{\alpha\beta}\,\partial^\beta\delta^4(x-y)$$

Para correntes conservadas, o produto T no lado direito de(8)

é ausente. Os outros têrmos devem ser covariantes, porque T^* possui esta propriedade. Assim obteremos

$$n_u S^{uv}(y,n) = I^v(y) \tag{9}$$

$$C^{bv}(y,n) + nu\, S^{uv/\alpha}(y,n)p_\alpha\beta = I^{\beta v}(y) \tag{10}$$

onde I^v e $I^{\beta v}$ são covariantes, independentes de n.

Para correntes PCAC obteremos o mesmo resultado se interpretamos PCAC como significando que $\partial_u A^u$ é um operador suficientemente bem comportado, de tal forma que não produz têrmos de Schwinger quando comutado com B^v. Neste caso o produto T no lado direito de (8) é separadamente covariante, e os têrmos restantes satisfazem (9) e (10).

Resultados similares são obtidos se divergimos (2) com $\partial_\mu \partial y^u$:

$$n_v S^{uv}(y,n) - \partial/\partial y^v C^{uv}(y,n) = J^u(y) \tag{11}$$

$$C^{u\beta}(y,n) + n_v S^{uv/\alpha}(y,n) p_\alpha\beta = J^{u\beta}(y) \tag{12}$$

onde J^u e J^{uB} são quantidades covariante, em geral diferentes de Y^u e Y^{uB}.

A solução da equação (9) é:

$$S^{uv}(y,n) = n^u I^v(y) + p^u{}_\alpha S^{\alpha v}(y,n) \tag{13}$$

ao passo que as equações (10) e (12) requerem:

$$n_\alpha C^{\alpha\beta}(y,n) = n_\alpha \bar{I}^{\alpha\beta}(y) \tag{14.a}$$

$$n_\beta C^{\alpha\beta}(y,n) = n_\beta \bar{J}^{\alpha\beta}(y) \tag{14.b}$$

Vemos que a relação (14) implica em:

$$n_\alpha n_\beta (\bar{I}^{\alpha\beta}(y) - \bar{J}^{\alpha\beta}(y)) = 0 \tag{15}$$

que significa que se $I \neq J$, a sua diferença deve ser um tensor de Lorentz covariante antisimétrico no e .

Também podemos escrever (10) e (12) na forma:

$$n_u S^{uv/\alpha}(y,n)\, p^\alpha{}_\beta = I^{\beta v}(y) - C^{\beta v}(y,n) \tag{16.a}$$

$$n_v S^{uv/\alpha}(y,n)\, p_\alpha{}^\beta = J^{u\beta}(y) - C^{u\beta}(y,n) \tag{16.b}$$

que em virtude de (14) dará:

$$n_u n_v S^{uv/\alpha}(y,n) p_\alpha{}^\beta = n_v [\bar{I}^{\beta v}(y) - \bar{J}^{\beta v}(y)]$$
$$= n_u [J^{u\beta}(y) - \bar{I}^{u\beta}(y)] \tag{17}$$

Vemos desta expressão, que o têrmo de Schwinger no comutador é presente sòmente se $I \neq J$. Logo se $\neq 0$, êle deve ser a componente de um tensor de Lorentz antisimétrico. Êste resultado possui grande relevância para o problema do cancelamento dos têrmos de Schwinger com as divergências dos têrmos de contato, hipótese que foi conjeturada por Feynman. Evidentemente esta hipótese se afirma que não temos derivadas da função nas identidades de Ward.

$$\partial/\partial x^u \bar{T}^{*\mu\nu}(x,y) = \bar{T}(\partial_u A^u(x) B^v(y)) + \bar{I}^v(y)\delta^4(x-y)$$
$$+ \bar{I}^{\beta v}(y)\partial_\beta \delta^4(x-y) + \partial/\partial x^u \hat{C}^{uv}(x,y) \tag{18}$$

$$\partial/\partial y^v \bar{T}^{*\mu\nu}(x,y) = \bar{T}[A^u(x)\partial_v B^v(y)] - J^u(x)\delta^4(x-y)$$
$$- J^{u\beta}(y)\partial_\beta \delta^4(x-y)\partial/\partial y^v \hat{C}^{uv}(x,y) \tag{19}$$

Se os têrmos de contato cancelam o têrmo de Schwinger em (18) devemos ter:

$$\tilde{C}^{uv}(x,y) = -\bar{I}^{uv}(x)\delta^4(x-y) + F^{uv}(x,y) \text{ com } \frac{\partial}{\partial x^u} F^{uv}(x,y) = 0 \tag{20.a}$$

Anàlogamente, a segunda identidade requer:

$$\tilde{C}^{uv}(x,y) = -\bar{J}^{uv}(x)\delta^4(x-y) + F_1^{uv}(x,y) \text{ com } \frac{\partial}{\partial y^v} F_1^{uv}(x,y) = 0 \tag{20.b}$$

Vemos que é sempre possível satisfazer a relação (18) ou a relação (19). Contudo, a condição necessária é suficiente para satisfazer (18) e (19) e a ausência do têrmo de Schwinger no comutador a tempos iguais $|A^o, B^o|$ como pode ser visto usando as relações (17),(20.a) e (20.b). Vimos no capítuloIII(equação III-15) que os comutadores relevantes ao decaimento $^o \longrightarrow 2$ $|j_5(x), j(y)|$ possuem um têrmo de Schwinger no comutador $|j_5(x), j^o(y)|$, e assim não existe o cancelamento entre os têrmos de Schwinger e as divergências dos têrmos de contato.

Êste fato modifica o teorema de baixa energia, dando o resultado correto, e mostra que a conjetura de Feynman é incorreta, no caso geral.

REFERÊNCIAS

(1) Stephen L.Adler and Roger Dashen
Current algebras and applications to particle physics

(2) J.Schwinger,
Phys. Rev. 82, 664 (1951)

(3) D. Sutherland
Nuclear Phys. B2, 433 (1967)

(4) J.S.Bell and R.Jackin
Nuclear Cimento 60, 47 (1969)

(5) M.Gell-Mann and M.Levy
Nuovo Cimento 16, 705 (1960)

(6) C.Callan and D.J. Gross
Phys. Rev. Letters 22, 156 (1969)

(7) R.Jackiw and G. Preparata
Phys. Rev. 185, 1748 (1969)

(8) R.Jackiw
Cern Prepint (1969)

(9) K.Johnson and F.Law
Progr. Theoret. Physics, Suppl. 37-38,74(1966)

(10) J.D.Bjorken
Phys. Rev. 148, 1467 (1966)

(11) G.Boulware and R.Jackiw
Phys. Rev. 186 442 (1969)

(12) K. Johnson
Phys. Letters 5, 253 (1963)

(13) R. Dashen and S.Lee,
Phys. Rev. 187, 2017 (1969)

(14) R.Jackiw and K.Johnson
Phys. Rev. 182, 1459 (1969)

(15) R.Jackiw and G.Preparata
Phys. Rev. Letters 22, 975 (1969)

(16) G. Preparata
Phys. Rev, 185, 1929 (1969)

(17) I. Gerstein and R. Jackiw
Phys. Rev. 181, 1955(1969)

(18) B. Renner
Current Algebras and their applications

(19) J. Polkinghome
Nuovo Cimento 52A, 351 (1967)

(20) Goldberger and Treinman
Phys. Rev, 110, 1178 (1958)

(21) H. Harari
Phys. Rev. Letters 17, 1303 (1966)

(22) J. Bjorken
Phys. Rev. 179, 1547 (1969)

(23) L. Hand
Proceedings of the 1967 Symp. on Electron and Photon Interactions

(24) J. Bjorken and S. Drell
Relativistic Quantum Mechanics

(25) David G. Gross and R. Jackiw
Ref. TH. 1068 Cern

(26) Jauch - Rorlich
Theory of photons and Electrons

(27) L. Rosenberg
Physics Rev. 129, 2786 (1963)

(28) S. Gasiorowicz and D. Geffen
Rev. of Mod. Phys. 41, 531 (1969)

(29) S. Okubo
Nuovo Cimento, 44A, 276 (1966)

(30) D. Gross and R. Jackiw
Phys. Rev. 163, 1688 (1967)

o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o
o-o-o-o-o-o-o
o-o-o