

Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Departamento de Física Matemática.

Trivialidade do Modelo Sigma Não-Linear $SO(2)$ na Rede Euclidiana em $d = 3$ e $d = 4$

Edgar Rodolfo Rondán Sanabria

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3556 ex. 2

Banca Examinadora

Prof. Dr. Jorge L. deLyra. (IFUSP) (Orientador)
Prof. Dr. Nelson Augusto Alves. (FFCLRP-USP)
Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho. (IFUSP)



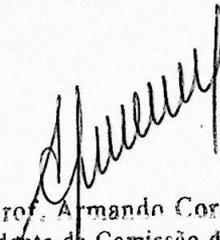
Dissertação apresentada ao
IFUSP para a obtenção do
grau de mestre em ciências.

SBI-IFUSP



305M810T3556

Junho de 2001


Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

Depo. 29/06/2001

550.1
R771+
M
ex.2

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Rondán Sanabria, Edgar Rodolfo

Trivialidade do Modelo Sigma Não-Linear $SO(2)$ na
Rede Euclidiana em $d=3$ e $d=4$. São Paulo, 2001.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Jorge Lacerda de Lyra
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Sigma; 2. Trivialidade;
3. Efetiva; 4. Interagente; 5. Euclidiana.

USP/IF/SBI-044/2001

Resumo

Neste trabalho se estuda a trivialidade do modelo Sigma Não-Linear, partindo da análise da ação efetiva do modelo $\lambda\varphi^4$ com fonte externa. Esta análise é sugerida pela conexão que há entre estes dois modelos, segundo a qual o modelo Sigma Não-Linear sem fonte externa pode ser obtido do modelo $\lambda\varphi^4$ também sem fonte externa. O trabalho baseou-se nesta ligação mas considerando a inclusão de fontes externas pequenas sob a hipótese de que a análise do caso de fontes externas infinitesimais é suficiente para o estudo do limite do contínuo com fonte externa. Esta análise da trivialidade do modelo é feita através de simulações estocásticas na rede euclidiana finita, com condições de contorno periódicas, na fase simétrica do modelo.

Abstract

In this work the triviality of the Non-Linear Sigma model is studied, starting from the analysis of the effective action of the $\lambda\varphi^4$ model with external sources. This analysis is suggested by the connection which exists between these two models, according to which the Non-Linear Sigma model without external sources can be obtained from the $\lambda\varphi^4$ model without external sources. The work was based on this connection, but including small external sources under the hypothesis that the analysis of the case of infinitesimal external sources suffices for the study of the continuum limit with external sources. This analysis of the triviality of the model is performed by means of stochastic simulations on finite euclidian lattices, with periodic boundary conditions, on the symmetric phase of the model.

Agradecimentos

Devo agradecer:

ao professor Dr. Jorge L. de Lima, pela sua orientação e paciência na realização do trabalho, e por toda a atenção dada ao longo do tempo, especialmente durante os períodos de férias, quando não estava disponível no Departamento de Química, com o objetivo de não perder tempo com o trabalho.

Aos professores Dr. José Carlos de Figueiredo e Dr. José Carlos de Figueiredo.

Aos meus pais, Don Pedro e Dona Paqueta.

Dedico este trabalho a meus pais:
Don Pedro Edgar Rondán Escobar
e Dona Paqueta Sanabria de Rondán

A todos os amigos e familiares que me apoiaram e incentivaram durante a realização deste trabalho, especialmente os meus pais, Don Pedro e Dona Paqueta.

A todos os professores do curso.

Tudo o que foi realizado neste trabalho foi possível graças à orientação e paciência do professor Dr. Jorge L. de Lima, do Departamento de Química, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), de Recife, Pernambuco, Brasil. O trabalho foi realizado no Departamento de Química, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), com algumas atividades em El Paso, México, durante a realização do curso de pós-graduação em Química, no âmbito do programa de Mestrado em Química, sob a orientação do professor Dr. Jorge L. de Lima, do Departamento de Química, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).

Agradecimentos

Desejo agradecer:

Ao professor Dr. Jorge L. de Lyra, pela sua orientação, sua paciência na realização deste trabalho, e por deixar sempre claras suas opiniões e críticas, agradeço-lhe também por me dar uma nova concepção da Teoria de Campos com abordagem na rede Euclidiana.

Aos professores que me deram minha atual concepção da Física;

Aos meus amigos do grupo de pesquisa, José, Arnaldo e Francisco, pelo companheirismo e ajuda nas minhas horas de trabalho;

A todos meus amigos (sem citações) que me ajudaram, ampararam e acolheram-me no Brasil no momento da realização deste trabalho, em especial à Marcia;

Ao CNPq e à CAPES pela ajuda financeira.

Todo o trabalho computacional (simulações) desta tese foi efetuado em plataformas Linux nos computadores do Departamento de Física Matemática (DFMA) do Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IFUSP). O código foi gerado quase na sua totalidade na linguagem FORTRAN, com algumas subrotinas em C. Para a melhor manipulação do conjunto de códigos foram usados programas de Shell e uma estrutura de Makefiles. Os gráficos foram gerados pelos pacotes `xmgr` e `xfig`; para a confecção tipográfica foi utilizado o software \LaTeX .

Sumário

1	Introdução	1
2	Teoria Quântica de Campos na Rede	3
2.1	Fundamentos	3
2.2	Observáveis	7
2.3	Modelos Polinomiais Discretos	11
2.3.1	Modelo Gaussiano	11
2.3.2	Modelo $\lambda\varphi^4$	12
2.3.3	Modelo Sigma Não-Linear	14
3	Trivialidade	17
3.1	Papel da Ação Efetiva na Interpretação Física da Teoria	17
3.2	Ação Efetiva do Modelo $\lambda\varphi^4$	22
3.3	Ação Efetiva do Modelo Sigma Não-Linear	25
4	Simulações Estocásticas	27
4.1	Algoritmos de Monte Carlo	27
4.2	Método de Clusters de Wolff	29
4.3	Descrição do Código	31
5	Resultados Numéricos	34
5.1	Procedimento Utilizado na Obtenção dos Pontos de Medida	34
5.2	Resíduos	38
5.3	Resultados Finais	41
6	Conclusões e Perspectivas	46
A	Geradores Funcionais na Rede	48
B	Alguns Cálculos	52
B.1	Variações de j e $\varphi_{(c)}$ Num Mesmo Ponto \vec{n}	52
B.2	Cálculo da Ação Efetiva do Modelo Gaussiano	53
B.3	Cálculo da Constante de Acoplamento Renormalizada λ_R	55

B.4	Cálculo da Média e Módulo da Soma de Vetores Definidos Sobre a Esfera Unitária S_{N-1}	61
C	Gráficos dos Resultados	63
	Referências	83

Capítulo 1

Introdução

Apresentamos neste capítulo uma introdução ao estudo da teoria dos campos de gauge, com ênfase na teoria de Yang-Mills. A teoria dos campos de gauge é uma das áreas mais importantes da física teórica moderna, com aplicações em áreas como a física de partículas elementares e a cosmologia. Neste capítulo, vamos discutir os fundamentos da teoria dos campos de gauge, incluindo a formulação da teoria de gauge, a quantização da teoria de gauge e a renormalização da teoria de gauge. Também vamos discutir a importância da teoria dos campos de gauge na física de partículas elementares e na cosmologia.

Devido à importância da teoria dos campos de gauge na física de partículas elementares e na cosmologia, a teoria dos campos de gauge tornou-se uma das áreas mais importantes da física teórica moderna. A teoria dos campos de gauge é uma das áreas mais importantes da física teórica moderna, com aplicações em áreas como a física de partículas elementares e a cosmologia. Neste capítulo, vamos discutir os fundamentos da teoria dos campos de gauge, incluindo a formulação da teoria de gauge, a quantização da teoria de gauge e a renormalização da teoria de gauge.

Para a maioria dos físicos, a teoria dos campos de gauge é uma das áreas mais importantes da física teórica moderna. A teoria dos campos de gauge é uma das áreas mais importantes da física teórica moderna, com aplicações em áreas como a física de partículas elementares e a cosmologia. Neste capítulo, vamos discutir os fundamentos da teoria dos campos de gauge, incluindo a formulação da teoria de gauge, a quantização da teoria de gauge e a renormalização da teoria de gauge.

No capítulo 2, vamos discutir os fundamentos da teoria dos campos de gauge, incluindo a formulação da teoria de gauge, a quantização da teoria de gauge e a renormalização da teoria de gauge. A teoria dos campos de gauge é uma das áreas mais importantes da física teórica moderna, com aplicações em áreas como a física de partículas elementares e a cosmologia. Neste capítulo, vamos discutir os fundamentos da teoria dos campos de gauge, incluindo a formulação da teoria de gauge, a quantização da teoria de gauge e a renormalização da teoria de gauge.

Após a introdução da teoria dos campos de gauge, vamos discutir a importância da teoria dos campos de gauge na física de partículas elementares e na cosmologia. A teoria dos campos de gauge é uma das áreas mais importantes da física teórica moderna, com aplicações em áreas como a física de partículas elementares e a cosmologia. Neste capítulo, vamos discutir os fundamentos da teoria dos campos de gauge, incluindo a formulação da teoria de gauge, a quantização da teoria de gauge e a renormalização da teoria de gauge.

Por fim, vamos discutir a importância da teoria dos campos de gauge na física de partículas elementares e na cosmologia. A teoria dos campos de gauge é uma das áreas mais importantes da física teórica moderna, com aplicações em áreas como a física de partículas elementares e a cosmologia. Neste capítulo, vamos discutir os fundamentos da teoria dos campos de gauge, incluindo a formulação da teoria de gauge, a quantização da teoria de gauge e a renormalização da teoria de gauge.

Capítulo 1

Introdução

Apesar do avanço de diversas técnicas analíticas hoje disponíveis[†], com o progresso alcançado pelos computadores o cálculo numérico passou a ser uma ferramenta importante, com profundo impacto no desenvolvimento das ciências em geral. Hoje é comum considerar-se que a Física está dividida em experimental, teórica e computacional. Para enfatizar a importância de cálculos numéricos, basta dizer que ainda não sabemos a solução analítica exata do modelo de Ising em três dimensões, mas a partir de simulações numéricas sabemos todas as suas características. Uma das vantagens importantes das simulações é que podemos alterar parâmetros físicos de forma conveniente, o que dificilmente pode-se conseguir experimentalmente (por exemplo, parâmetros de rede, dimensão, temperatura etc.).

Dentre as técnicas numéricas, a de Monte Carlo tem destaque em todas as áreas da Física. Um dos aspectos mais importantes deste método é a sua aplicação na física estatística e na física de partículas elementares. Todo o desenvolvimento das técnicas sofisticadas de Monte Carlo que se usa hoje é devido ao trabalho de Metropolis e colaboradores em 1953 [1].

Para a avaliação da trivialidade do modelo Sigma Não-Linear com fonte externa, usaremos o formalismo da teoria de campos na rede euclidiana, que oferece um laboratório de testes apropriado para este tipo de estudo, graças às simulações estocásticas em computadores.

No capítulo 2 primeiramente são estudados os fundamentos da Teoria Quântica de Campos na Rede (TQCR), ao que se segue o estudo dos observáveis de alguns modelos polinomiais discretos (como o modelo Gaussiano, Sigma Não-Linear e $\lambda\varphi^4$, todos estes sem fontes externas). Neste caso o modelo Sigma Não-Linear é obtido como um limite do modelo $\lambda\varphi^4$.

Antes da avaliação da trivialidade do modelo Sigma Não-Linear, estudamos no capítulo 3 o papel da ação efetiva na interpretação física da teoria. Vê-se também neste capítulo que o fato de se introduzir fontes externas no modelo Sigma Não-Linear

[†]Como, por exemplo, o Método do Campo Médio, que permite fazer um estudo preliminar do modelo, prevendo de forma qualitativamente correta o diagrama de fases em três ou mais dimensões.

irá fazer com que as variáveis de blocos, que são aquelas em termos das quais devemos interpretar a teoria, assumam qualquer valor, sem respeitar uma relação de vínculo como a relação $\vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi} = \sqrt{\beta}$ que é respeitada pelo campo fundamental. Estas variáveis de blocos comportam-se similarmente às variáveis do modelo $\lambda\varphi^4$. Devido a este facto, podemos considerar que a ação efetiva do modelo Sigma Não-Linear tem a mesma forma geral da ação efetiva do modelo $\lambda\varphi^4$ e é esta última que usamos para avaliar a trivialidade do modelo Sigma Não-Linear com fontes externas.

No capítulo 4 estudam-se em detalhe os algoritmos usados para o cálculo numérico, como Metropolis e Clusters de Wolff.

Capítulo 2

Teoria Quântica de Campos na Rede

Antes de abordar o estudo da TQCR, faremos uma breve descrição da Teoria Quântica de Campos no contínuo (TQC).

O estudo das probabilidades dos diferentes processos que podem ocorrer em colisões de partículas, cujas interações possam ser consideradas pequenas, é feito pela teoria de perturbações. As estimativas da teoria de perturbação envolvem o aparecimento de termos divergentes que a tornam um procedimento impraticável. Para obter um esquema sem as divergências, é necessário renormalizar a teoria, procedimento este que é chamado de “renormalização perturbativa”. A origem das divergências está no fato de que os elementos da matriz a serem calculados envolvem produtos de distribuições com argumentos coincidentes. Sabe-se que tal produto não está bem definido. As divergências são absorvidas em redefinições dos parâmetros iniciais que a teoria contém[†].

Em 1974, Kenneth G. Wilson [2] descreveu a teoria de gauge em quatro dimensões numa rede discreta, na qual eliminava-se problemas de divergência ultravioleta.

O problema de achar soluções analíticas para problemas da TQC é enormemente difícil, na maior parte dos casos não se conhece suas soluções. O nosso grupo de pesquisa tem contornado as questões analíticas desse formalismo estudando vários fenômenos no âmbito dos campos escalares, como quebra de simetria, expoentes críticos, trivialidade, entre outros, por métodos de simulações estocásticas na rede euclidiana.

A seguir faremos uma descrição do formalismo matemático que é usado no estudo de problemas da TQCR.

2.1 Fundamentos

Chamaremos de rede euclidiana a um conjunto finito de pontos, que têm uma relação de vizinhança, a qual determina a dimensão da rede. Neste trabalho usaremos por simplicidade redes finitas simétricas como a da Fig.2.1. Esta rede tem condições de

[†]Estes parâmetros são massas, normalização do campo e as constantes de acoplamento.

contorno periódicas, como explicaremos mais adiante. As redes que usaremos têm os seguintes elementos: uma dimensão denotada por d ; *links* que são a união entre sítios, cujo comprimento é denotado por a ; N *vértices* (N é o número de sítios consecutivos em cada uma das d direções de rede); N^d sítios. Classicamente, define-se externamente um comprimento físico L para cada dimensão, estabelecendo-se o volume $V = L^d$. O comprimento a de cada link é dado por $a = L/N$. Estas redes podem ter condições de contorno periódicas ou fixas, no caso da Fig.2.1 a rede tem condições de contorno periódicas, onde os *links* numerados unem-se aos sítios numerados correspondentemente. Neste caso a rede tem $N = 4$ vértices e dimensão $d = 2$.

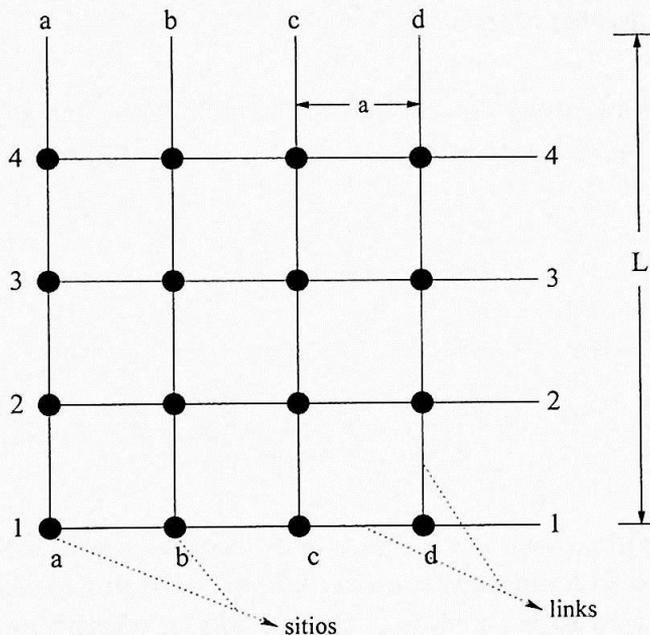


Figura 2.1: Rede euclidiana finita.

Se associamos comprimentos físicos aos links de uma rede finita podemos dizer que esta rede representa grosseiramente o espaço-tempo euclidiano. Não se trata, naturalmente, do espaço-tempo real, pois a representação euclidiana não tem uma direção temporal que se diferencie das outras três.

Não consideramos diretamente a noção de partícula na construção da teoria, ela aparece mais tarde como uma consequência da sua estrutura [4]. Em nossa representação do espaço-tempo definimos campos como funções nos sítios. Nesta tese se estuda campos escalares $\vec{\varphi}$, onde os campos são funções que atribuem a cada um dos N^d sítios um conjunto de valores reais. Estes campos são adimensionais e seu valor pode ser representado por vetores em um espaço interno contínuo[†], como se mostra na Fig.2.2. Nesta figura mostra-se uma rede com dimensão $d = 2$ e o espaço interno, onde se encontram os campos, tem uma dimensão $\mathcal{N} = 2$.

[†]Este espaço interno não é o espaço-tempo. Estes espaços internos podem ter \mathcal{N} dimensões e neles atuam transformações de simetria entre os campos.

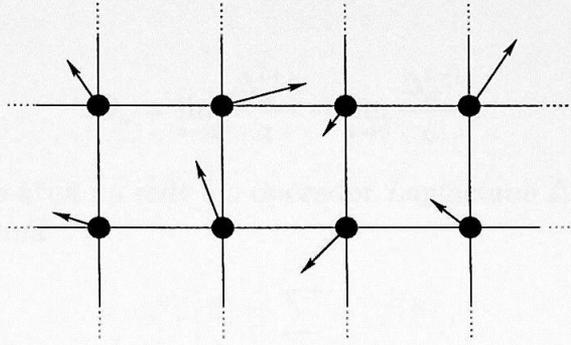


Figura 2.2: Representação dos valores do campo na rede euclidiana.

Vamos descrever a rede por meio de um sistema de coordenadas inteiras que denotaremos por \vec{n} ou n_μ , onde $\mu = 1, \dots, d$. A soma sobre todos os sítios terá a forma

$$\sum_s \equiv \sum_{\vec{n}} \equiv \sum_{n_1=1}^N \dots \sum_{n_d=1}^N .$$

A soma sobre todos os links de uma rede pode ser descrita como

$$\sum_\ell \equiv \sum_\mu \sum_s \equiv \sum_{\mu=1}^d \sum_{n_1=1}^N \dots \sum_{n_d=d}^N .$$

Esta soma é uma soma dupla sobre todos os sítios e todas as direções da rede.

Podemos denotar os campos nos sítios vizinhos (entendemos por vizinhos dois sítios unidos por um link na direção μ) por φ_+ e φ_- , onde φ_+ está no lado positivo do link e φ_- no lado negativo, onde estamos, por simplicidade, usando campos com uma única componente no espaço interno. Sabendo isto, podemos definir a diferença finita como

$$\Delta_\ell \varphi = \Delta_\mu \varphi(s) = \varphi_+ - \varphi_- .$$

Existem operadores de diferenças finitas que atuam sobre a rede, um deles é o operador de diferenças finitas Δ_μ . Este operador é considerado como uma aproximação da *derivada parcial*. Ele pode ser representado como *operador de diferença para a frente* $\Delta_\mu^{(+)}$ ou como *operador de diferença para trás* $\Delta_\mu^{(-)}$. Esses operadores aplicados ao campo φ na rede produzem

$$\Delta_\mu^+ \varphi(\vec{n}) = \varphi(\vec{n} + \hat{n}_\mu) - \varphi(\vec{n}) ,$$

$$\Delta_\mu^- \varphi(\vec{n}) = \varphi(\vec{n}) - \varphi(\vec{n} - \hat{n}_\mu) ,$$

onde \hat{n} é versor da direção μ da rede. O operador de diferenciação parcial ∂_μ no limite do contínuo é definido da forma

$$\partial_\mu = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Delta_\mu^{(+)}}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Delta_\mu^{(-)}}{a}.$$

Outro operador que atua na rede é o operador *Laplaciano* Δ^2 , que pode ser definido a partir de $\Delta_\mu^{(\pm)}$ da forma

$$\Delta^2 \varphi(\vec{n}) = \sum_\mu \Delta_\mu^2 \varphi(\vec{n}),$$

onde

$$\Delta_\mu^2 \varphi(\vec{n}) = \varphi(\vec{n} + \hat{n}_\mu) - 2\varphi(\vec{n}) + \varphi(\vec{n} - \hat{n}_\mu),$$

de onde resulta

$$\Delta^2 \varphi(\vec{n}) = \sum_\mu [\varphi(\vec{n} + \hat{n}_\mu) - 2\varphi(\vec{n}) + \varphi(\vec{n} - \hat{n}_\mu)]. \quad (2.1)$$

Uma vez conhecidos os elementos que atuam na rede e nos campos, falemos agora sobre um dos funcionais[†] mais importante na rede, que é a *ação*. Este funcional é importante porque define completamente a *dinâmica* do modelo. Podemos definir um funcional de ação como

$$S_0[\varphi] = \frac{1}{2} \sum_\ell (\Delta_\ell \varphi)^2 + \frac{\alpha_0}{2} \sum_s \varphi^2(s), \quad (2.2)$$

onde $\alpha_0 \geq 0$.[‡] Este funcional define o que chamamos de *Modelo Gaussiano* ou de *Campo Escalar Livre*. Veremos mais adiante que temos total controle deste modelo para quaisquer valores de N e d .

Veremos agora como o nosso formalismo matemático de representação dos campos na rede está relacionado com a teoria clássica de campos no contínuo. Por simplicidade usaremos o modelo Gaussiano (2.2). Para estabelecer esta relação é necessário tomar o limite $N \rightarrow \infty$. Neste limite assumimos que o comprimento $L = Na$ permanece fixo. Além disso fazemos com que α_0 vá para zero no limite, de uma forma bem definida. Podemos agora escrever a ação (2.2) da forma

$$S_0[\varphi] = \frac{1}{2} \sum_s a^d \sum_\mu \left[\frac{a^{(2-d)/2} \Delta_\mu \varphi(s)}{a} \right]^2 + \frac{\alpha_0}{2a^2} \sum_s a^d [a^{(2-d)/2} \varphi(s)]^2. \quad (2.3)$$

[†]Funcionais são funções que atribuem um valor real a cada uma das possíveis configurações do campo.

[‡]Trata-se de uma condição necessária para que a teoria exista ou seja estável.

Como $N \rightarrow \infty$ e, portanto, $a \rightarrow 0$, a somatória aproxima-se de uma integral riemanniana com elemento de integração $dv = d^d x = a^d$. Observe que é necessário fazer com que α_0 seja igual a $(m_0 a)^2$. Se mantivermos m_0 finito α_0 irá a zero com $1/N^2$ no limite. Definimos também o campo dimensional como $\phi = a^{(2-d)/2} \varphi$. A razão entre as diferenças finitas e a aproxima-se a uma derivada parcial $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$. Isso posto a equação (2.3) pode ser escrita no limite como

$$S_0[\phi] = \frac{1}{2} \int_V d^d x \sum_\mu [\partial_\mu \phi(\vec{x})]^2 + \frac{m_0^2}{2} \int_V d^d x \phi^2(\vec{x}). \quad (2.4)$$

Chamamos este limite de *limite do contínuo* da teoria clássica, onde as coordenadas internas do volume V relacionam-se com as coordenadas inteiras da rede por $x_\mu = n_\mu a$. No limite do contínuo a solução clássica do modelo (2.4) é dada pela equação de Euler-Lagrange

$$-\partial^2 \phi + m_0^2 \phi = 0. \quad (2.5)$$

Em $d = 4$ a versão Lorentziana desta equação é chamada de equação de Klein-Gordon.

Em redes finitas é possível encontrar a solução clássica, para isto podemos trabalhar o termo que contém derivadas finitas na equação (2.2) usando a definição do Laplaciano (2.1), por simplicidade em uma dimensão, obtendo

$$\sum_\ell (\Delta_\ell \varphi)^2 = - \sum_s \varphi(s) \Delta^2 \varphi(s).$$

Usando agora o segundo termo da ação (2.2) e generalizando para redes com dimensão d se obtém

$$-\Delta^2 \varphi + \alpha_0 \varphi = 0. \quad (2.6)$$

Esta equação é chamada de equação de movimento na rede euclidiana.

Como se vê as soluções (2.5) e (2.6) dos modelos no contínuo e na rede tem a mesma forma, o que sugere que os problemas de TQC possam ser resolvidos por meio da TQCR.

2.2 Observáveis

É conveniente escrever os observáveis da teoria na *representação do espaço dos momentos*. Esta representação é de grande importância para a solução dos problemas matemáticos da teoria, bem como para estabelecer sua interpretação física. Os campos definidos nos sítios são funções das suas coordenadas inteiras \vec{n} . Chamamos esta representação de *representação do espaço de coordenadas*. Os campos na representação dos momentos serão obtidos por meio de *transformadas finitas de Fourier*, onde as coordenadas \vec{n} serão mapeadas num novo conjunto de coordenadas inteiras \vec{k} chamados de

modos da rede. Definiremos as transformadas finitas de Fourier $\tilde{\varphi}(\vec{k})$ em redes finitas com condições de contorno periódicas como

$$\tilde{\varphi}(\vec{k}) = \frac{1}{N^d} \sum_{\vec{n}} e^{i\frac{2\pi}{N}\vec{k}\cdot\vec{n}} \varphi(\vec{n}). \quad (2.7)$$

Também se pode fazer a transformação inversa para obter o campo no espaço de coordenadas, que resulta

$$\varphi(\vec{n}) = \sum_{\vec{k}} e^{-i\frac{2\pi}{N}\vec{k}\cdot\vec{n}} \tilde{\varphi}(\vec{k}). \quad (2.8)$$

Em redes finitas com condições de contorno periódicas, os modos com $k_\mu = 0$ e com $k_\mu = N$ são idênticos, e por conseguinte, os modos k_μ e $k_\mu + N$ são os mesmos. Por conveniência tomaremos o intervalo de variação de k_μ de forma simétrica em torno do modo zero. No caso em que N é ímpar, temos

$$k = -\frac{N-1}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N-1}{2},$$

enquanto no caso em que N é par, temos

$$k = -\left(\frac{N}{2} - 1\right), \dots, 0, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right), \frac{N}{2}.$$

A somatória da equação (2.8) no caso de redes finitas terá a forma

$$\sum_{\vec{k}} = \sum_{k_1=k_m}^{k_M} \dots \sum_{k_d=k_m}^{k_M},$$

onde k_m e k_M são os limites mínimo e máximo respectivamente do intervalo de variação das variáveis k_μ .

O fato de que as equações (2.7) e (2.8) são a inversa uma da outra é uma consequência das relações de *ortogonalidade*

$$\sum_{n_1=1}^N \dots \sum_{n_d=1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}\vec{n}\cdot(\vec{k}-\vec{k}')} = N^d \delta_{k_1, k'_1} \dots \delta_{k_d, k'_d}, \quad (2.9)$$

e *completicidade*

$$\sum_{k_1=k_m}^{k_M} \dots \sum_{k_d=k_m}^{k_M} e^{i\frac{2\pi}{N}\vec{n}\cdot(\vec{n}-\vec{n}')} = N^d \delta_{n_1, n'_1} \dots \delta_{n_d, n'_d}. \quad (2.10)$$

Tendo definido os campos no espaço de momentos e no espaço de coordenadas, mostraremos agora os autovalores e autovetores do operador laplaciano Δ^2 . Usando a

definição (2.1), não é difícil mostrar que os autovetores de Δ^2 são as exponenciais que aparecem nas transformadas de Fourier,

$$\Delta^2 e^{i\frac{2\pi}{N}\vec{k}\cdot\vec{n}} = -\rho^2 e^{i\frac{2\pi}{N}\vec{k}\cdot\vec{n}},$$

onde $-\rho^2$ é o autovalor do operador laplaciano e ρ^2 é dado por

$$\rho^2 = \sum_{\mu} \rho_{\mu}^2 = 4 \left[\sin^2 \left(\frac{\pi k_1}{N} \right) + \dots + \sin^2 \left(\frac{\pi k_d}{N} \right) \right].$$

Denominamos de $\rho_{\mu}(k_{\mu})$ os momentos adimensionais na rede. O momento dimensional na rede é definido como $p_{\mu}^{(N)} = \rho_{\mu}(k_{\mu})/a$ e no limite se reduz aos momentos do contínuo p_{μ} .

Definimos agora a *teoria quântica de campos na rede*. As quantidades de interesse físico são os *observáveis* da teoria. Estes observáveis são definidos como médias estatísticas de funcionais do campo. O modelo estatístico estabelece que todas as possíveis configurações dos campos[†] contribuem para o cálculo das médias, com probabilidades relativas definidas pela ação do modelo. Os pesos estatísticos relativos são dados pelo fator de Boltzmann

$$e^{-S[\varphi]}.$$

O *valor esperado* de um certo funcional $\mathcal{O}[\varphi]$ do campo definido na rede é descrito como a média

$$\langle \mathcal{O} \rangle_N = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_s d\varphi(s) \mathcal{O}[\varphi] e^{-S[\varphi]}}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_s d\varphi(s) e^{-S[\varphi]}}. \quad (2.11)$$

Esta integral euclidiana é convergente devido à introdução de uma nova variável temporal τ através de uma rotação de Wick, dada por $\tau = it$. Desta forma o fator $e^{iS[\varphi]}$ da integração funcional no espaço Lorentziano [3]

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int [d\varphi] \mathcal{O}[\varphi] e^{iS[\varphi]}}{\int [d\varphi] e^{iS[\varphi]}}, \quad (2.12)$$

passa a ser $e^{-S[\varphi]}$. Esta substituição de $iS[\varphi]$ por $-S[\varphi]$ torna as integrais (2.11) convergentes, desde que $S[\varphi]$ tenha limite inferior.

As integrais em (2.11) estende-se por todas as configurações possíveis dos campos. O produtório é definido como

[†]Configurações dos campos são todas as possíveis funções-campo que podemos definir na rede, que podem ser descritas no espaço de posições ou no espaço de momentos [5].

$$\prod_s d\varphi(s) = \prod_{n_1=1}^N \dots \prod_{n_d=1}^N d\varphi(\vec{n}).$$

Obviamente temos que $\langle \mathcal{O}[\varphi] \equiv 1 \rangle_N = 1$, mostrando que o denominador de (2.11) estabelece a *normalização* dos valores esperados.

Observáveis definidos como produtos dos campos em sítios diferentes

$$\mathcal{O}[\varphi] = \varphi(\vec{n}_1) \dots \varphi(\vec{n}_n),$$

são de particular interesse. Seus valores esperados[†] são as *funções de correlação*, denotadas no espaço de coordenadas por

$$g_N(\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_n) = \langle \varphi(\vec{n}_1) \dots \varphi(\vec{n}_n) \rangle,$$

e no espaço de momentos por

$$\tilde{g}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) = \langle \tilde{\varphi}(\vec{k}_1) \dots \tilde{\varphi}(\vec{k}_n) \rangle.$$

No caso dos modelos não conterem fonte externa, os valores esperados dos observáveis envolvendo um número ímpar de fatores são nulos, ou seja

$$g(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{2i+1}) = \langle \varphi(\vec{x}_1) \dots \varphi(\vec{x}_{2i+1}) \rangle = 0,$$

$$\tilde{g}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{2i+1}) = \langle \tilde{\varphi}(\vec{k}_1) \dots \tilde{\varphi}(\vec{k}_{2i+1}) \rangle = 0.$$

Segue que as funções de correlação dos nossos modelos sem fonte externa se reduzem àquelas que envolvem um número par de fatores.

Um dos observáveis de grande importância nas simulações dos modelos é a função de correlação de um ponto, ou a média do campo sobre a rede, que denotaremos como

$$\mathcal{O}[\varphi] = \frac{1}{N^d} \sum_s \varphi(s).$$

Estaremos interessados no valor esperado de $\mathcal{O}[\varphi]$ que denotaremos por

$$v = \langle \mathcal{O}[\varphi] \rangle.$$

Para fontes externas constantes o valor esperado de v em uma rede periódica é igual a $\langle \varphi(x) \rangle$ e não é, em geral, nulo quando temos fontes externas. Outra quantidade de interesse é a função de correlação de dois pontos $g(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ que é chamada de *propagador* e que definimos como

$$g(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \langle \varphi(\vec{n}_1) \varphi(\vec{n}_2) \rangle, \quad (2.13)$$

bem como seu equivalente dimensional definido por

$$G(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \langle \phi(\vec{n}_1) \phi(\vec{n}_2) \rangle = a^{2-d} \langle \varphi(\vec{n}_1) \varphi(\vec{n}_2) \rangle. \quad (2.14)$$

[†]Estes valores definem completamente as características físicas do modelo definido pela ação.

2.3 Modelos Polinomiais Discretos

Apresentamos aqui os modelos: Gaussiano, $\lambda\varphi^4$ e Sigma Não-Linear. Primeiramente veremos o modelo Gaussiano por ser este o mais simples. Como um exemplo resolveremos este modelo utilizando os elementos matemáticos do formalismo na rede, para assim poder abordar modelos mais complexos. Em seguida faremos uma breve descrição do modelo *interagente* ou modelo $\lambda\varphi^4$ e, por último descreveremos o modelo *Sigma Não-Linear*.

2.3.1 Modelo Gaussiano

A ação deste modelo foi definida em (2.2). Comumente usamos a ação no espaço dos momentos porque facilita os cálculos das funções de correlação. Depois de obtidos os resultados, fazemos uma transformada inversa de Fourier para obter o resultado no espaço das coordenadas. Usando as equações (2.1), (2.8), (2.9) e (2.10) não é difícil mostrar que a ação (2.2) no espaço dos momentos é

$$S_0[\tilde{\varphi}(\vec{k})] = \frac{N^d}{2} \sum_{\vec{k}} [\rho^2(\vec{k}) + \alpha_0] |\tilde{\varphi}(\vec{k})|^2. \quad (2.15)$$

Por simplicidade usaremos somente campos escalares com uma única componente. O valor esperado da função de correlação de dois pontos no espaço dos momentos $\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \tilde{\varphi}(\vec{k}) \tilde{\varphi}(\vec{k}') \rangle$ só existe no caso $\vec{k} = -\vec{k}'^\dagger$, enquanto que nos casos $\vec{k} = \vec{k}'$ e $\vec{k} \neq \pm\vec{k}'$ ele é zero[†]. Da equação (2.7) tem-se que $\tilde{\varphi}(-\vec{k}) = \tilde{\varphi}^*(\vec{k})$. Portanto o valor esperado do observável fica da forma $\langle \mathcal{O} \rangle = \langle |\tilde{\varphi}(\vec{k})|^2 \rangle$ e seu cálculo fornece

$$\langle |\tilde{\varphi}(\vec{k})|^2 \rangle_0 = \frac{1}{N^d} \frac{1}{\rho^2(\vec{k}) + \alpha_0}, \quad (2.16)$$

sendo $\rho^2(\vec{k})$ os momentos adimensionais que estão definidos na rede euclidiana, com $\vec{k} = (k_1, \dots, k_\mu, \dots, k_d)$ e k_μ variando de k_m até k_M .

O propagador no espaço das coordenadas $\langle \varphi(\vec{x}_1) \varphi(\vec{x}_2) \rangle$ se obtém fazendo a transformada de Fourier dos campos $\varphi(\vec{x}_1)$ e $\varphi(\vec{x}_2)$ e usando a equação (2.8)[§], obtendo-se

$$\langle \varphi(\vec{x}_1) \varphi(\vec{x}_2) \rangle = \sum_{\vec{k}} e^{-i\frac{2\pi}{L}\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} \langle |\tilde{\varphi}(\vec{k})|^2 \rangle. \quad (2.17)$$

Uma propriedade importante deste modelo é a fatoração das suas funções de correlação. Derivando aos dois lados do propagador (2.16) com relação a $-N^d[\rho^2(\vec{k}) + \alpha_0]/2$ obtemos

[†] Esperava-se que seja assim, porque este fato está relacionado com a conservação dos momentos na teoria.

[‡] Pode-se comprovar isto achando o valor esperado do observável para cada um dos modos.

[§] Usa-se esta equação com $\vec{x} = a\vec{n}$.

$$\frac{2}{[N^d(\rho^2 + \alpha_0)]^2} = \frac{\partial}{\partial \left[-\frac{N^d}{2}(\rho^2 + \alpha_0) \right]} \left\{ \frac{\int [\mathbf{d}\tilde{\varphi}] e^{-S_0[\tilde{\varphi}] |\tilde{\varphi}(\vec{k}')|^2}}{\int [\mathbf{d}\tilde{\varphi}] e^{-S_0[\tilde{\varphi}]}} \right\}. \quad (2.18)$$

Deve-se ter cuidado com os modos de Fourier no momento da derivação, porque com $\vec{k} \neq 0$ e $\vec{k} = 0$ as soluções são diferentes. No primeiro caso deve-se ter em conta que os campos no espaço dos momentos são complexos, enquanto que no segundo caso são reais. Efetuando a derivação obtemos para o primeiro caso

$$\langle |\tilde{\varphi}(\vec{k})|^4 \rangle = 2 \langle |\tilde{\varphi}(\vec{k})|^2 \rangle, \quad (2.19)$$

e para o segundo caso

$$\langle |\tilde{\varphi}(\vec{k})|^4 \rangle = 3 \langle |\tilde{\varphi}(\vec{k})|^2 \rangle. \quad (2.20)$$

Fazendo a primeira derivada em (2.18) se obtém a função de correlação de quatro pontos, a qual se fatora em funções de dois pontos. A mesma análise pode ser feita para funções de correlação de $2n$ pontos. Obtém-se para $\vec{k} \neq 0$

$$\langle |\tilde{\varphi}(\vec{k})|^{2n} \rangle = n! \langle |\tilde{\varphi}(\vec{k})|^2 \rangle^n, \quad (2.21)$$

e para $\vec{k} = 0$

$$\langle |\tilde{\varphi}(\vec{k})|^{2n} \rangle = (2n - 1)!! \langle |\tilde{\varphi}(\vec{k})|^2 \rangle^n. \quad (2.22)$$

Todas as funções de correlação do modelo Gaussiano reduzem-se ao seu propagador, ou seja, toda a física deste modelo encontra-se contida na estrutura do propagador. A fatoração significa que não há interações físicas entre os objetos que se propagam, ou que as ondas planas associadas às partículas que estão-se propagando se superpõem linearmente sem interagir umas com as outras.

2.3.2 Modelo $\lambda\varphi^4$

Introduzimos na teoria livre um termo de interação, ou seja, um termo onde o campo tem uma potência par, para que o modelo exista ou seja estável. Isto quer dizer que a ação deve ter um mínimo global [5], sendo que a potência mínima que o campo pode ter neste termo é quatro. Esta ação para campos com uma só componente é da forma

$$S[\varphi] = \frac{1}{2} \sum_{\ell} (\Delta_{\ell}\varphi)^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_s \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \sum_s \varphi^4. \quad (2.23)$$

Se o campo for definido dentro de um espaço interno de simetria $SO(\mathcal{N})$ a ação é

$$S[\vec{\varphi}] = \frac{1}{2} \sum_{\ell} \Delta_{\ell}\vec{\varphi} \cdot \Delta_{\ell}\vec{\varphi} + \frac{\alpha}{2} \sum_s \vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi} + \frac{\lambda}{4} \sum_s (\vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi})^2. \quad (2.24)$$

O produto $\vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi}$ é realizado no espaço interno $SO(\mathcal{N})$. Deve-se ter cuidado na escolha dos parâmetros α e λ da teoria. Para que nossa teoria seja bem comportada deve ser verdade que $\lambda \geq 0$. Se for o caso que $-\infty \leq \alpha \leq \infty$, então $\lambda > 0$ e, se $\lambda = 0$, então α deve ser obrigatoriamente $\alpha \geq 0$ porque de outra forma a teoria não seria bem comportada.

No caso do campo φ ter só uma componente e sendo $\lambda > 0$ e $\alpha < 0$, o potencial $V = (\alpha\varphi^2/2 + \lambda\varphi^4/4)$ tem a forma da Fig.2.3, que mostra que o potencial tem dois mínimos locais em $\varphi = \pm\sqrt{-\alpha/\lambda}$.

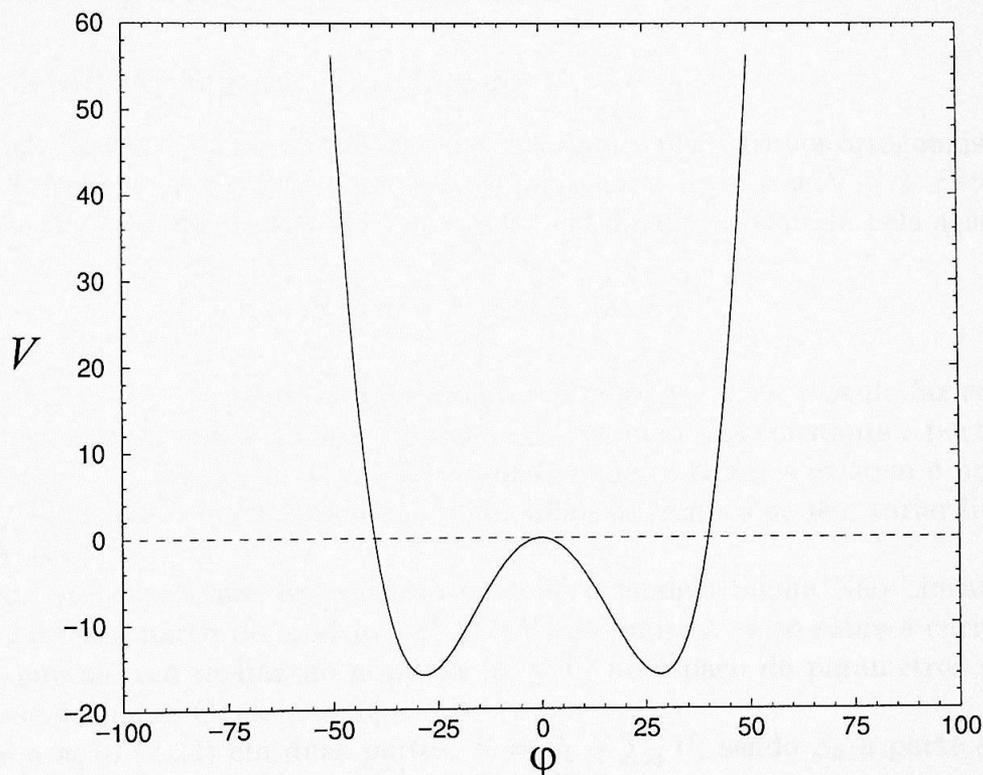


Figura 2.3: O potencial $V(\varphi)$.

A introdução do termo quártico na ação (2.23) torna as integrais funcionais (2.11) não mais Gaussianas e a sua solução analítica não é mais viável. Apesar desta dificuldade analítica este modelo não deixa de ser importante, já que apresenta quebra espontânea de simetria [8].

Para alguns valores de λ e α há quebra de simetria, havendo uma curva de transição de fase [9]. Estamos interessados na curva que separa as duas regiões, aquela na qual há uma solução $v \neq 0$ e aquela na qual não há tal solução. Segundo [9] a solução assintótica da curva na aproximação do campo médio com $\alpha < 0$ e λ pequenos é

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = -\frac{2d}{\mathcal{N} + 2},$$

e, para $\alpha < 0$ e λ grandes,

$$\lambda(\alpha) = \frac{2d}{\mathcal{N}}(\alpha + 2d).$$

Devido à diferença de inclinação das duas curvas, o formato da curva crítica se aproxima da Fig.2.4. A fase quebrada é onde $v \neq 0$ e a fase simétrica onde $v = 0$ no limite do contínuo. Ao tomarmos o limite do contínuo de uma rede finita, na qual estão definidos α e λ , é preciso que a constante renormalizada α_R^\dagger tenda a zero para que a massa renormalizada $m_R^2 = \alpha_R/a^2$ seja finita no limite.

2.3.3 Modelo Sigma Não-Linear

Este modelo faz parte da família de modelos invariantes pelos grupos ortogonais $SO(\mathcal{N})$. Neste modelo os campos existem num espaço interno que é curvo se $\mathcal{N} > 2$. Este modelo é uma coleção de campos escalares livres, com sua dinâmica definida pela ação

$$S[\vec{\varphi}] = \frac{1}{2} \sum_{\ell} (\Delta_{\ell} \vec{\varphi}) \cdot (\Delta_{\ell} \vec{\varphi}), \quad (2.25)$$

com o vínculo $\vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi} = \beta$, sendo β um número real positivo. Este vínculo faz com que o termo que contém a massa na ação do modelo Gaussiano seja constante e portanto não tenha nenhuma participação aqui. A variedade onde os campos existem é uma esfera de raio $\sqrt{\beta}$, enquanto que nos modelos polinomiais os campos podem variar livremente de $-\infty$ a $+\infty$.

Se não tivermos fontes externas no modelo, o modelo Sigma Não-Linear $SO(\mathcal{N})$ pode ser obtido a partir do modelo $\lambda\varphi^4 SO(\mathcal{N})$ no limite $\lambda \rightarrow \infty$ sobre a curva crítica, ou sobre curvas com inclinação negativa ($\alpha \leq 0$) no espaço de parâmetros (Fig.2.4), partindo-se do ponto Gaussiano [9].

Divide-se a ação (2.24) em duas partes, $S = S_k + \sum_s V$, sendo S_k a parte cinética e $\sum_s V$ a parte potencial. A parte cinética é da forma

$$S_k[\vec{\varphi}] = \frac{1}{2} \sum_{\ell} (\Delta_{\ell} \vec{\varphi}) \cdot (\Delta_{\ell} \vec{\varphi}),$$

e a parte potencial da forma

$$V(\varphi) = \frac{\alpha}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4,$$

onde φ é o módulo de $\vec{\varphi}$.

A distribuição do modelo é descrita por

[†]Na referência [10] mostra-se por cálculos perturbativos e simulações estocásticas a solução para o propagador deste modelo, conclui-se que este propagador é similar a (2.16) da teoria livre com α_0 substituído por α_R .

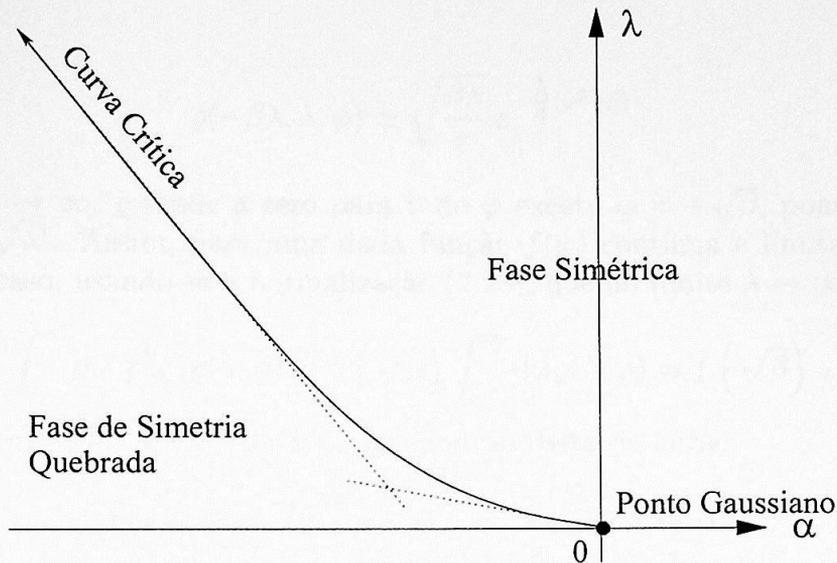


Figura 2.4: Representação aproximada da linha crítica no espaço de parâmetros do modelo $\lambda\varphi^4$.

$$[d\varphi]e^{-S[\bar{\varphi}]} = [d\varphi e^{-V(\varphi)}] e^{-S_k[\bar{\varphi}]} . \quad (2.26)$$

Pode-se multiplicar esta distribuição por qualquer constante que seja independente dos campos sem que isto mude os observáveis. Então pode-se escrever a medida como

$$[d\varphi \varrho(\alpha, \lambda, \varphi)] .$$

Consideramos a parte local normalizada $\varrho(\alpha, \lambda, \varphi)$ da distribuição como

$$\varrho(\alpha, \lambda, \varphi) = \frac{e^{-V(\varphi)}}{\int_0^\infty d\varphi e^{-V(\varphi)}} , \quad (2.27)$$

com a condição de normalização

$$\int_0^\infty d\varphi \varrho(\alpha, \lambda, \varphi) = 1 . \quad (2.28)$$

Examinaremos o comportamento de (2.27) quando $\lambda \rightarrow \infty$ e $\alpha = -\beta\lambda$ para algum β positivo. Fazendo o cálculo da integral do denominador de (2.27) obtêm-se [6], em termos das funções parabólicas cilíndricas \mathbf{D}_ν ,

$$\int_0^\infty d\varphi e^{-V(\varphi)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2\lambda)^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{\alpha^2}{8\lambda}} \mathbf{D}_{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\lambda}} \right) . \quad (2.29)$$

Usando a forma assintótica de $\mathbf{D}_{-\frac{1}{2}}$ [7] e substituindo α em função de λ , reescreve-se a distribuição $\varrho(\alpha, \varphi) = \varrho(\alpha = -\beta\lambda, \lambda, \varphi)$ para valores grandes de λ , como

$$\varrho(-\beta\lambda, \lambda, \varphi) \simeq \sqrt{\frac{\beta\lambda}{\pi}} e^{-\frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - \beta)}.$$

Quando $\lambda \rightarrow \infty$, ϱ tende a zero para todo φ exceto $\varphi = +\sqrt{\beta}$, ponto em que ela diverge com $\sqrt{\lambda}^\dagger$. Assim, para uma dada função $f(\varphi)$ contínua e limitada verifica-se em qualquer caso, usando-se a normalização (2.28), que no limite $\lambda \rightarrow \infty$ temos

$$\int_0^\infty d\varphi f(\varphi) \varrho(\lambda, \varphi) = f(\sqrt{\beta}) \int_0^\infty d\varphi \varrho(\lambda, \varphi) = f(\sqrt{\beta}), \quad (2.30)$$

ou seja, a distribuição $\varrho(\lambda, \varphi)$ tende a uma função delta de Dirac

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varrho(\lambda, \varphi) = \delta(\varphi - \sqrt{\beta}) = 2\sqrt{\beta} \delta(\varphi^2 - \beta).$$

Portanto, nesse limite o valor esperado de um observável se torna

$$\langle \mathcal{O} \rangle_N = \frac{\int [d\varphi \delta(\vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi} - \beta)] \mathcal{O}[\varphi] e^{-S_K[\vec{\varphi}]}}{\int [d\varphi \delta(\vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi} - \beta)] e^{-S_K[\vec{\varphi}]}} ,$$

com a medida

$$[d\varphi \delta(\vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi} - \beta)] = \prod_{\vec{n}} \delta[\vec{\varphi}(\vec{n}) \cdot \vec{\varphi}(\vec{n}) - \beta] \prod_i d\varphi_i(\vec{n}), \quad (2.31)$$

onde as funções delta de Dirac implicam a condição de vínculo $\vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi} = \beta$ e β faz o papel de uma constante inversa de acoplamento.

Com base neste resultado define-se a ação clássica do modelo Sigma Não-Linear como (2.25) sujeita à condição de vínculo $\vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi} = \beta$.

[†]Isto só é válido para o caso $\mathcal{N} > 1$, no caso $\mathcal{N} = 1$ há dois picos em $\varphi = \pm\sqrt{\beta}$.

Capítulo 3

Trivialidade

Veremos nesta seção que a ação efetiva Γ é o funcional que descreve o comportamento dos observáveis da teoria quântica devido à introdução nela de fontes externas. Veremos que descreve este comportamento de forma análoga à forma como S faz o mesmo na teoria clássica. Depois passaremos ao estudo da ação efetiva do modelo $\lambda\varphi^4$ com fonte externa, que será usado para avaliar a trivialidade do modelo Sigma Não-Linear com fonte externa no limite de fontes externas infinitesimais.

3.1 Papel da Ação Efetiva na Interpretação Física da Teoria

Como mostraremos no apêndice A, há relações funcionais bem definidas entre o valor esperado do campo v , que denotamos por $\varphi_{(c)}$, e as fontes externas que são funcionais $j[\varphi_{(c)}]$. O funcional que descreve esta relação é a ação efetiva $\Gamma[\varphi_{(c)}]$. Nesta seção mostraremos que a ação efetiva $\Gamma[\varphi_{(c)}]$ está de fato relacionada à solução da teoria quântica através de um processo de minimização. De forma geral, quando $j = 0$ temos que $\varphi_{(c)} = 0$, enquanto para $j \neq 0$ temos alguma função $\varphi_{(c)}(\vec{n})$. Disto, vemos que as configurações possíveis para $\varphi_{(c)}$ são determinadas pelas configurações possíveis de j . A partir deste conjunto de possíveis fontes, a teoria quântica determina um certo sub-espaço de possíveis $\varphi_{(c)}$ que pode-se encarar como o espaço que é relevante no limite clássico da teoria.

É neste sub-espaço das configurações possíveis do campo clássico $\varphi_{(c)}$ que estudaremos o comportamento de Γ , nas proximidades da configuração $\varphi_{(c)_0}$ associada a um determinado j_0 . Da equação (A.9) do apêndice A a ação efetiva pode ser escrita como

$$\Gamma[\varphi_{(c)}] = -\ln \left\{ \frac{\int [\mathbf{d}\varphi] e^{\sum_{\vec{n}} j(\vec{n})[\varphi(\vec{n}) - \varphi_{(c)}(\vec{n})]} e^{-S}}{\int [\mathbf{d}\varphi] e^{-S}} \right\}, \quad (3.1)$$

além do fato de que Γ é um funcional apenas de $\varphi_{(c)}$, de forma que nesta expressão

j deve ser encarada apenas como um funcional de $\varphi_{(c)}$, através da relação funcional estabelecida entre os dois pela teoria quântica. Assim, dada a ação $\Gamma[\varphi_{(c)}]$ definida desta forma para um dado $\varphi_{(c)}$ qualquer, vamos definir a ação efetiva na presença de uma fonte externa j_0 qualquer, não necessariamente aquela que se relaciona com $\varphi_{(c)}$ pela relação funcional estabelecida pela teoria quântica[†], como

$$\Gamma_{(j)} = \Gamma[\varphi_{(c)}] - \sum_{\vec{n}} j_0(\vec{n})\varphi_{(c)}(\vec{n}). \quad (3.2)$$

Dado um j_0 fixo, esta equação define $\Gamma_{(j)}$ para um $\varphi_{(c)}$ qualquer, de tal forma que a sua variação funcional é dada por

$$d\Gamma_{(j)} = d\Gamma[\varphi_{(c)}] - \sum_{\vec{n}} j_0(\vec{n})d\varphi_{(c)}(\vec{n}).$$

Consideraremos as variações do campo em torno do ponto $\varphi_{(c)_0}$ que corresponde a j_0 , com o intuito de estabelecer que a solução da teoria é um mínimo de $\Gamma_{(j)}$ na presença de j_0 , como

$$d\varphi_{(c)}(\vec{n}) = \varphi'_{(c)}(\vec{n}) - \varphi_{(c)_0}(\vec{n}).$$

Analisemos agora a variação de $\Gamma_{(j)}$ devida à variação do campo, assumindo que as variações são pequenas. Deixemos claro que, na equação de acima, a fonte externa é mantida fixa enquanto $\varphi_{(c)}$ varia. Se fazemos uma variação $\varphi_{(c)} \rightarrow \varphi'_{(c)}$ do campo clássico em torno do ponto $\varphi_{(c)_0}$, onde a variação de $\varphi_{(c)}$ em torno de $\varphi_{(c)_0}$ corresponde a uma variação de j em em torno de j_0 , $j_0 \rightarrow j'[\varphi'_{(c)}]$, então a variação de $\Gamma[\varphi_{(c)}]$ é

$$d\Gamma = \Gamma[\varphi'_{(c)}] - \Gamma[\varphi_{(c)_0}] = -\ln \left\{ \frac{\int [d\varphi] e^{\sum_{\vec{n}} j'(\vec{n})[\varphi(\vec{n}) - \varphi'_{(c)}(\vec{n})]} e^{-S}}}{\int [d\varphi] e^{\sum_{\vec{n}} j_0(\vec{n})[\varphi(\vec{n}) - \varphi_{(c)_0}(\vec{n})]} e^{-S}} \right\}. \quad (3.3)$$

Escrevemos j' da forma $j' = j_0 + dj$ e expandimos a exponencial do numerador da equação (3.3) até a primeira ordem, obtendo

$$d\Gamma = -\ln \left\{ \frac{e^{-\sum_{\vec{n}} j_0(\vec{n})\varphi'_{(c)}(\vec{n})} \int [d\varphi] e^{\sum_{\vec{n}} j_0(\vec{n})\varphi(\vec{n})} \left\{ 1 + \sum_{\vec{n}} [\varphi(\vec{n}) - \varphi'_{(c)}(\vec{n})] dj(\vec{n}) \right\} e^{-S}}}{e^{-\sum_{\vec{n}} j_0(\vec{n})\varphi_{(c)_0}(\vec{n})} \int [d\varphi] e^{\sum_{\vec{n}} j_0(\vec{n})\varphi(\vec{n})} e^{-S}} \right\}. \quad (3.4)$$

[†]Quando adicionamos explicitamente à ação $S[\varphi]$ um termo de fonte externa, escrevemos habitualmente $S_{(j)}[\varphi] = S[\varphi] - \sum_{\vec{n}} j(\vec{n})\varphi(\vec{n})$. A ação efetiva com fonte externa também terá esta forma.

Desta equação retiraram-se de dentro das integrais funcionais os fatores que não dependem de φ . Escrevendo (3.4) em termos de $S_{(j)} = S - \sum_{\vec{n}} j_0(\vec{n})\varphi(\vec{n})$ e usando $\langle \varphi(\vec{n}) \rangle_{(j)} = \varphi_{(c)0}$ e $d\varphi_{(c)} = \varphi'_{(c)} - \varphi_{(c)0}$ obtém-se

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \sum_{\vec{n}} j_0(\vec{n}) [\varphi'_{(c)}(\vec{n}) - \varphi_{(c)0}(\vec{n})] \\ &\quad - \ln \left\{ 1 + \frac{\int [d\varphi] e^{-S_{(j)}} \sum_{\vec{n}} [\varphi(\vec{n}) - \varphi'_{(c)}(\vec{n})] dj(\vec{n})}{\int [d\varphi] e^{-S_{(j)}}} \right\} \\ &= \sum_{\vec{n}} j_0(\vec{n}) d\varphi_{(c)}(\vec{n}) - \ln \left[1 + \sum_{\vec{n}} \langle \varphi(\vec{n}) \rangle_{(j)} dj(\vec{n}) - \sum_{\vec{n}} \varphi'_{(c)}(\vec{n}) dj(\vec{n}) \right] \\ &= \sum_{\vec{n}} j_0(\vec{n}) d\varphi_{(c)}(\vec{n}) - \ln \left[1 - \sum_{\vec{n}} d\varphi_{(c)}(\vec{n}) dj(\vec{n}) \right]. \end{aligned}$$

Expandimos o logaritmo até primeira ordem obtém-se

$$d\Gamma = \sum_{\vec{n}} j_0(\vec{n}) d\varphi_{(c)}(\vec{n}) + \sum_{\vec{n}} d\varphi_{(c)}(\vec{n}) dj(\vec{n}).$$

Então a variação de $\Gamma_{(j)}$ dada em (3.2) é

$$\begin{aligned} d\Gamma_{(j)} &= \sum_{\vec{n}} j_0(\vec{n}) d\varphi_{(c)}(\vec{n}) + \sum_{\vec{n}} d\varphi_{(c)}(\vec{n}) dj(\vec{n}) - \sum_{\vec{n}} j_0(\vec{n}) d\varphi_{(c)}(\vec{n}) \\ &= \sum_{\vec{n}} d\varphi_{(c)}(\vec{n}) dj(\vec{n}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Na seção (B.1) do apêndice B se mostra, usando a definição de $\varphi[j]$ dada na equação (A.2) do apêndice A, que as variações de j e $\varphi_{(c)}$ em um mesmo ponto \vec{n} estão relacionadas por

$$dj(\vec{n}) = \frac{1}{\sigma_{(j)}^2} d\varphi_{(c)}(\vec{n}).$$

Agora, usando esta equação, o resultado final (3.5) pode ser escrito como

$$d\Gamma_{(j)} = \sum_{\vec{n}} \frac{[d\varphi_{(c)}(\vec{n})]^2}{\sigma_{(j)}^2}. \quad (3.6)$$

Para uma certa fonte externa $j_0(\vec{n})$ e um certo funcional $\Gamma[\varphi_{(c)}]$, a equação (3.6) quer dizer que o funcional $\Gamma_{(j)}$ sempre aumenta, para qualquer variação $d\varphi_{(c)}(\vec{n})$ em torno da função $\varphi_{(c)0}(\vec{n})$ determinada pela teoria quântica a partir de $j_0(\vec{n})$. De tudo isto

conclui-se que o funcional $\Gamma_{(j)}[\varphi_{(c)}]$ é mínimo quando $\mathbf{d}\varphi_{(c)}(\vec{n}) \equiv 0$, ou seja, quando $\varphi_{(c)}(\vec{n})$ é a função determinada pela teoria quântica.

Conclui-se que Γ descreve como a teoria quântica comporta-se com a introdução de fontes externas, da mesma forma como S o faz na teoria clássica. Então Γ é de fato a ação clássica que descreve o limite clássico do modelo.

Como se vê no apêndice A as derivadas funcionais de Z e W em relação a j geram todas as funções de correlação da teoria. Para entender melhor o significado de Γ examinaremos as suas derivadas funcionais em relação a $\varphi_{(c)}$. A sua primeira derivada é dada pela equação (A.8) que é da forma

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi_{(c)}]}{\delta\varphi_{(c)}} = j_1[\varphi_{(c)}]. \quad (3.7)$$

Usamos aqui a notação da dependência com \vec{n}_1 através de índices numéricos, como fazemos no apêndice A. Fazendo a deriva funcional a (3.7) em relação a j e levando em conta que a relação entre j e $\varphi_{(c)}$ não é local, obtemos

$$\frac{\delta}{\delta j_2} \frac{\delta\Gamma[\varphi_{(c)}]}{\delta\varphi_{(c)1}} = \frac{\delta j_1}{\delta j_2} = \delta_{1,2}^d. \quad (3.8)$$

Usando a regra da cadeia, a derivada (3.8) pode ser escrita em termos de $\varphi_{(c)}$ como

$$\frac{\delta}{\delta j_2} \frac{\delta\Gamma[\varphi_{(c)}]}{\delta\varphi_{(c)1}} = \sum_3 \frac{\delta\varphi_{(c)3}}{\delta j_2} \frac{\delta^2\Gamma[\varphi_{(c)}]}{\delta\varphi_{(c)3}\delta\varphi_{(c)1}} = \delta_{1,2}^d.$$

Das equações (A.6) e (A.7) do apêndice A temos que

$$\frac{\delta\varphi_{(c)3}}{\delta j_2} = \frac{\delta}{\delta j_2} \frac{\delta W}{\delta j_3} = g_{(c,j)3,2},$$

de onde segue que

$$\sum_3 g_{(c,j)3,2} \frac{\delta^2\Gamma[\varphi_{(c)}]}{\delta\varphi_{(c)3}\delta\varphi_{(c)1}} = \delta_{1,2}^d. \quad (3.9)$$

A segunda derivada funcional de Γ em (3.9) é o inverso do propagador no espaço de posições. Este operador é denotado da seguinte forma

$$\frac{\delta^2\Gamma[\varphi_{(c)}]}{\delta\varphi_{(c)1}\delta\varphi_{(c)2}} = \square_{(c)1,2}, \quad (3.10)$$

onde $g_{(c,j)1,2} = \square_{(c)1,2}^{-1}$. Vamos exemplificar isto no caso do modelo Gaussiano cuja dinâmica está definida pela ação

$$S_0[\varphi] = \frac{1}{2} \sum_{\ell} (\Delta_{\ell}\varphi)^2 + \frac{\alpha_0}{2} \sum_s \varphi^2(s),$$

cuja ação efetiva tem exatamente a mesma forma de S_0 , escrita em termos do campo clássico (isto está demonstrado na seção (B.2) do apêndice B),

$$\Gamma[\varphi_{(c)}] = \sum_{\vec{n}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu} [\Delta_{\mu} \varphi_{(c)}(\vec{n})]^2 + \frac{\alpha_0}{2} \varphi_{(c)}^2(\vec{n}) \right\}. \quad (3.11)$$

Tomando uma primeira derivada funcional desta equação obtém-se

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi_{(c)}]}{\delta \varphi_{(c)1}} = \sum_3 \left\{ \sum_{\mu} [\Delta_{\mu} \varphi_{(c)3}] [\Delta_{\mu} \delta_{1,3}^d] + \alpha_0 \varphi_{(c)3} \delta_{1,3}^d \right\}. \quad (3.12)$$

Pelo fato de que as variáveis $\varphi_{(c)}$ são independentes em todos os pontos, temos que

$$\frac{\delta \varphi_{(c)1}}{\delta \varphi_{(c)2}} = \delta_{1,2}^d.$$

Integrando por partes o primeiro termo de (3.12) e utilizando as funções delta para eliminar as somas obtemos

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi_{(c)}]}{\delta \varphi_{(c)1}} = \sum_3 (-\Delta_{1,3}^2 + \alpha_0 \delta_{1,3}^d) \varphi_{(c)3}.$$

Então a segunda derivação funcional nos dá

$$\frac{\delta^2 \Gamma[\varphi_{(c)}]}{\delta \varphi_{(c)1} \delta \varphi_{(c)2}} = \sum_3 (-\Delta_{1,3}^2 + \alpha_0 \delta_{1,3}^d) \delta_{3,2}^d = -\Delta_{1,2}^2 + \alpha_0 \delta_{1,2}^d. \quad (3.13)$$

Vemos que no caso do modelo Gaussiano o operador $\square_{(c)}$ está relacionado ao operador de Klein-Gordon Euclidiano (2.5). Pode-se escrever o resultado (3.13) na forma de operadores no espaço de configurações como

$$\square_{(c)1,2} = (-\Delta^2 + \alpha_0 I)_{1,2},$$

sendo I o operador identidade. O propagador é a função de Green do operador de Klein-Gordon Euclidiano que satisfaz à equação diferencial finita

$$\sum_3 (-\Delta^2 + \alpha_0 I)_{1,3} g_{(c)3,2} = \delta_{1,2}^d.$$

No limite do contínuo esta equação escrita como uma equação diferencial em termos das quantidades dimensionais,

$$\left(-\sum_{\mu} \partial_{\mu}^2 + m_0^2 \right) G_{(c)}(x_1 - x_2) = \delta^d(x_1 - x_2).$$

Como Γ é quadrática nos campos, observe-se que, se tomarmos derivadas funcionais de ordem mais alta de Γ , estas se anularão. Então fica demonstrado que o propagador é o único conteúdo físico do modelo Gaussiano. Em geral as derivadas de ordem mais altas estão relacionadas com as funções conexas de mais de dois pontos, ou seja, com as interações que existem nos modelos.

3.2 Ação Efetiva do Modelo $\lambda\varphi^4$

Antes de escrever a ação efetiva $\Gamma[\varphi_{(c)}]$ deste modelo é preciso que façamos as seguintes considerações a respeito a $\Gamma[\varphi_{(c)}]$: estamos interessados no análise do regime de momentos baixos e assumiremos que a ação efetiva tenha a mesma simetria da ação fundamental $S[\varphi]$. Levando em conta estas considerações a ação efetiva deste modelo é

$$\Gamma[\varphi_{(c)}] = \frac{1}{2} \sum_{\ell} (\Delta_{\ell} \varphi_{(c)})^2 + \frac{\alpha_R}{2} \sum_s \varphi_{(c)}^2 + \frac{\lambda_R}{4} \sum_s \varphi_{(c)}^4 + \frac{\mu_R}{6} \sum_s \varphi_{(c)}^6 + \dots, \quad (3.14)$$

onde o índice R nas constantes quer dizer que elas são renormalizadas. Só consideraremos a ação até o termo da ordem $\varphi_{(c)}^4$, pois os demais termos não são importantes no limite clássico de comprimentos de onda longos, além do que não contribuem para a função de quatro pontos. Para as derivadas, que estão relacionadas com os modos no espaço de momentos, tomamos aqui apenas os termos com potências mais baixas, da forma k^2 , pois termos de derivadas de ordem superior estariam relacionadas a k^4/α_R , que não contribuem para momentos pequenos.

Agora discutiremos a quebra espontânea de simetria que sabemos existir neste modelo. Em rede finitas a simetria está sempre quebrada, com $v \neq 0$ [5]. Se colocarmos no modelo uma pequena fonte externa infinitesimal δj , o campo se orientará espontaneamente na direção da fonte, seja ela negativa ou positiva, sem que o sistema apresente qualquer resistência a esta mudança. Para um δj suficientemente pequeno, isto acontece sem que haja alteração apreciável na energia do sistema, de forma que o potencial efetivo da teoria, dado por

$$V_{eff}[\varphi_{(c)}] = \frac{\alpha_R}{2} \sum_s \varphi_c^2 + \frac{\lambda_R}{4} \sum_s \varphi_c^4 + \frac{\mu_R}{6} \sum_s \varphi_c^6 + \dots,$$

deve apresentar uma região completamente plana em torno de $\varphi_{(c)} = 0$ como mostra a Fig.3.1 [5]. Definimos aqui a quantidade v_R como o valor de $v(\alpha, \lambda, j)$ para j tendendo a zero pelo lado positivo. Os parâmetros α_R e λ_R estão relacionados com a forma da curva nas regiões $\varphi_{(c)} \geq v_R$ e $\varphi_{(c)} \leq v_R$. Se δj troca de sinal também o faz o valor esperado v_R , como se mostra na Fig.3.2. Se re-escrevermos o potencial efetivo em termos do campo clássico deslocado $\varphi'_{(c)} = \varphi_{(c)} - v_R$, podemos então representar o potencial efetivo como mostra a Fig.3.3.

Observe que no limite do contínuo temos que $v_R \rightarrow 0$, pois é necessário que nos aproximemos da curva crítica no limite, onde $v_R = 0$. Assim, se vamos acabar por tomar o limite, podemos fazer a análise tanto em termos de $\varphi'_{(c)}$ quanto em termos de $\varphi_{(c)}$.

Como vamos assumir que a ação efetiva, quando escrita em termos de $\varphi'_{(c)}$, tem as mesmas simetrias da ação fundamental que define o modelo, segue que $\Gamma[\varphi'_{(c)}]$ deve ser composta de termos que tenham a mesma simetria dos termos existentes em $S[\varphi]$, ou seja, que ela deve ter a forma geral

Potencial Efetivo

Como Funcao do Campo Classico

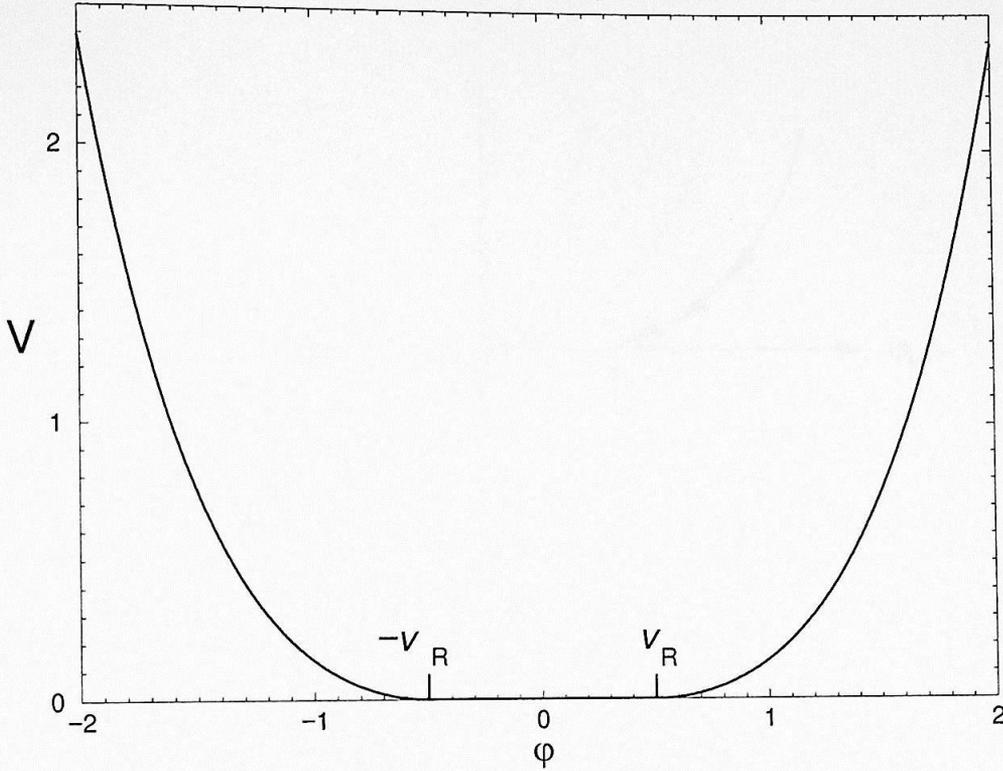


Figura 3.1: Comportamento qualitativo do potencial efetivo em função do campo médio $\varphi_{(c)}$.

$$\Gamma[\varphi'_{(c)}] = \frac{1}{\zeta} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\ell} [\Delta_{\ell} \varphi'_{(c)}]^2 + \frac{\alpha_R}{2} \sum_s \varphi'^2_{(c)}(s) + \frac{\lambda_R}{4} \sum_s \varphi'^4_{(c)}(s) + (\text{outros}) \right\}, \quad (3.15)$$

onde escrevemos explicitamente os termos relevantes para a análise do regime de momentos baixos do modelo, ζ é o resíduo do polo do propagador e “outros” indica termos com mais de quatro potências do campo ou com mais de duas derivadas do campo. Termos com muitas derivadas não contribuem para o regime de momentos baixos e termos com mais de quatro potências do campo não contribuem para a função de quatro pontos. Segundo a referência [5] podemos assumir que $\zeta = 1$, o que parece ser verdadeiro com grande precisão em todos os casos examinados.

Na seção (B.3) do apêndice B se mostra detalhadamente como se obtém a constante λ_R para momentos pequenos, tomando derivadas funcionais da ação efetiva e considerando que ao final dos cálculos deve se colocar $\varphi_{(c)} = 0$, que está relacionada à condição $j = 0$. O resultado é o seguinte:

$$\lambda_R = \frac{1}{6 N^d} \frac{3 \langle |\tilde{\varphi}(\vec{0})|^2 \rangle^2 - \langle |\tilde{\varphi}(\vec{0})|^4 \rangle}{\langle |\tilde{\varphi}(\vec{0})|^2 \rangle^4}. \quad (3.16)$$

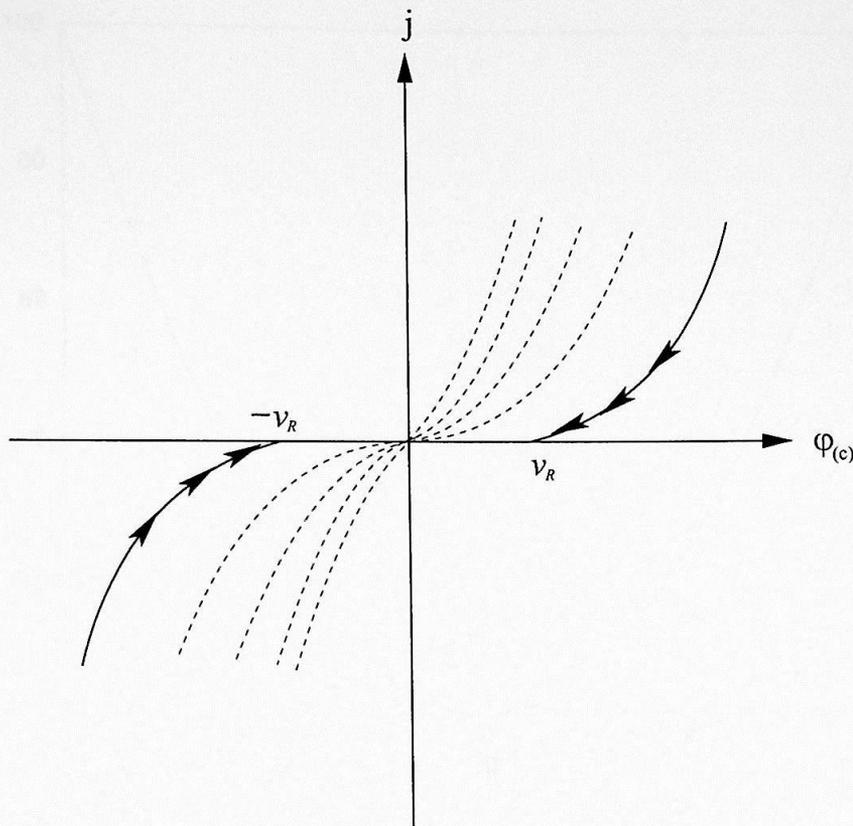


Figura 3.2: Comportamento qualitativo da fonte externa em função do campo médio $\varphi_{(c)}$.

Desta equação pode-se ver que, na teoria livre, o numerador se fatorará (devido às equações 2.21 ou 2.22) e resultará $\lambda_R = 0$, como é de se esperar.

Há outra forma de se obter informações sobre as interações de partículas do modelo. Sabemos que as fontes externas introduzidas no modelo estão relacionadas com os valores esperados e que estas fontes externas alinham os campos em sua direção. Por exemplo, no caso do modelo Gaussiano o mínimo da ação é dado pelo mínimo do potencial, pois o campo alinha-se na direção de j . Sabe-se que o potencial da teoria livre com fonte constante em toda a rede é

$$V = \frac{1}{2} \alpha_0 \varphi^2 - j \varphi.$$

Fazendo a derivação do potencial com respeito ao campo e igualando a zero se tem o campo mínimo ou campo clássico v

$$v = \varphi_{(c)} = \frac{j}{\alpha_0}, \quad (3.17)$$

onde a fonte tem uma relação linear com o campo. Com a introdução do termo quártico na ação, como é no caso no modelo $\lambda \varphi^4$, as coisas mudam e não são tão fáceis assim. Valendo-nos da forma como estão relacionados o campo e a fonte externa no caso do

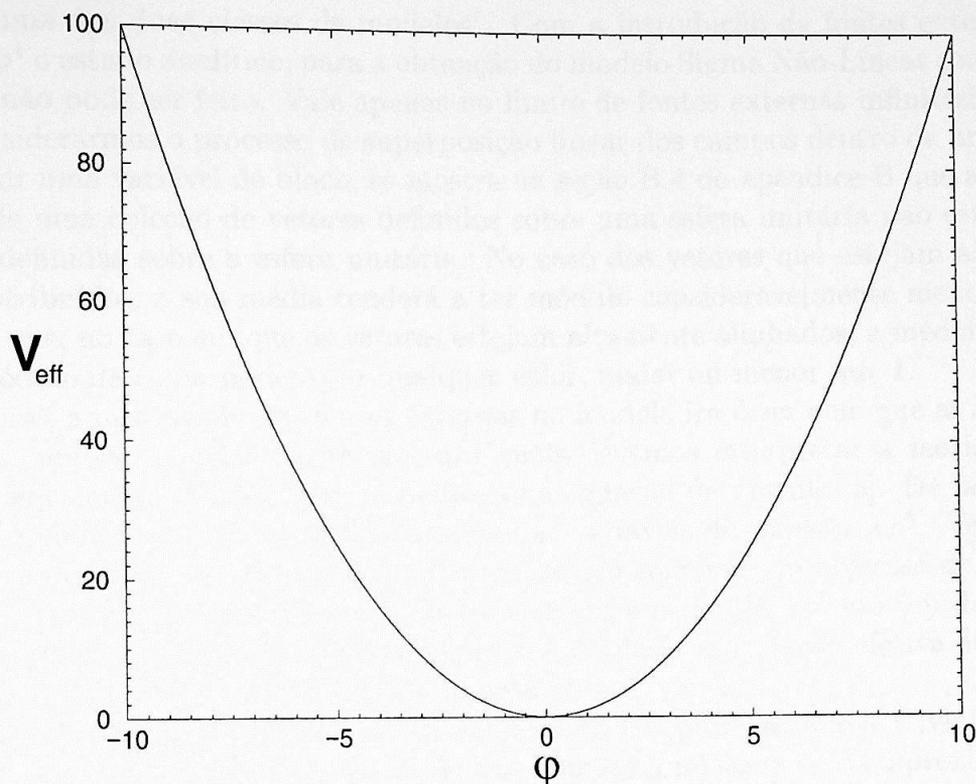


Figura 3.3: Comportamento qualitativo do potencial efetivo em função de $\varphi'_{(c)}$.

modelo Gaussiano (3.17), podemos fazer a mesma coisa para o cálculo do mínimo da ação efetiva (3.15) do modelo $\lambda\varphi^4$ com os termos só até $\varphi_{(c)}^3$, obtendo

$$j(\varphi'_{(c)}) = \alpha_R \varphi'_{(c)} + \lambda_R \varphi_{(c)}^3. \quad (3.18)$$

Como $\varphi'_{(c)} = \varphi_{(c)} - v_R$, então a equação (3.18) fica da forma

$$j(\varphi_{(c)}) = \alpha_R(\varphi_{(c)} - v_R) + \lambda_R(\varphi_{(c)} - v_R)^3. \quad (3.19)$$

Vê-se aqui qual deve ser a relação entre a fonte externa j e o valor esperado do campo $v = \varphi_{(c)}$. Através da exploração numérica desta relação pode-se obter o valor de λ_R .

3.3 Ação Efetiva do Modelo Sigma Não-Linear

Na seção (2.3.3) mostramos que o modelo Sigma Não-Linear sem fonte externa pode ser obtido do modelo $\lambda\varphi^4$ sem fonte externa fazendo $\lambda \rightarrow \infty$. Para entender de forma completa a relação entre as duas classes de modelos é preciso discutir qual é o papel das fontes externas e o processo de superposição envolvido na definição de variáveis de blocos

em cada uma das duas classes de modelos[†]. Com a introdução de fontes externas no modelo $\lambda\varphi^4$ o estudo analítico, para a obtenção do modelo Sigma Não-Linear com fontes externas, não pode ser feito. Vale apenas no limite de fontes externas infinitesimais.

Se considerarmos o processo de superposição linear dos campos dentro de um bloco, para definir uma variável de bloco, se mostra na seção B.4 do apêndice B que a soma e a média de uma coleção de vetores definidos sobre uma esfera unitária não estão, elas mesmas, definidas sobre a esfera unitária. No caso dos vetores que estejam aleatoriamente distribuídos, a sua média tenderá a ter módulo consideravelmente menor que 1, enquanto que, no caso em que os vetores estejam altamente alinhados, a média tenderá a 1. O módulo da soma poderá ter qualquer valor, maior ou menor que 1.

Em geral, a introdução das fontes externas no modelo irá fazer com que as variáveis de blocos, que são aquelas em termos das quais devemos interpretar a teoria, se deformem para qualquer valor, sem respeitar uma equação de vínculo [5]. De fato, estas variáveis de blocos comporta-se similarmente às variáveis do modelo $\lambda\varphi^4$. Vemos que *o vínculo imposto sobre os campos fundamentais não sobrevive ao processo de superposição*, de forma que não há diferença qualitativa entre o $\langle\varphi\rangle$ de $\lambda\varphi^4$ e o $\langle\varphi\rangle$ do modelo Sigma Não-Linear. Devido a este fato, pode-se considerar que a ação efetiva do modelo Sigma Não-Linear é a mesma a $\Gamma[\varphi_{(c)}]$ do modelo $\lambda\varphi^4$.

Nas simulações não convém usar a equação (3.16) para avaliar a trivialidade do modelo Sigma Não-Linear com fonte externa, ou seja, mostrar se λ_R aproxima-se de zero em qualquer limite. Esta técnica não é conveniente porque o resultado terá erros numéricos muito grandes, devido à subtração de valores muito próximos das funções de correlação de dois e quatro pontos no numerador de (3.19). É por este motivo que recorreremos ao outro método, ou seja, usaremos a equação (3.19) para avaliar a trivialidade do modelo.

Nossa proposta para avaliar a trivialidade do modelo Sigma Não-Linear com fonte externa é avaliar qual é o comportamento de $v = \varphi_{(c)}$ em função da variação de j , mantendo α_R constante e medindo $\varphi_{(c)}$. Se o termo cúbico na relação (3.19) correspondente ao modelo Sigma Não-Linear com fonte externa vai a zero no limite do contínuo, correspondendo a um comportamento linear, fica demonstrada a trivialidade. Caso contrário um ajuste polinomial da expressão determina o valor de λ_R .

[†]As variáveis de blocos são definidas como médias de algum tipo sobre os campos contidos em regiões finitas do espaço-tempo, que denominamos de blocos. Tipicamente a média do campo num certo ponto será uma simples média aritmética dos campos dentro do bloco mas, em geral, algum outro tipo de superposição linear ou mesmo não-linear pode estar envolvido. As variáveis de blocos e os correspondentes sistemas de superposição linear que as definem desempenham um papel central na definição das teorias quânticas de campos, pois elas determinam que observáveis físicos podem ser medidos.

Capítulo 4

Simulações Estocásticas

Sabemos que nossa rede é constituída por um número finito de pontos, fato este que nos oferece um processo alternativo para a computação das grandezas fisicamente relevantes, isto é, dos valores esperados dos observáveis. Se sabemos como um determinado modelo está definida na rede euclidiana na forma de um modelo estatístico, então podemos usar métodos e algoritmos da Mecânica Estatística que nos permitem calcular os valores esperados. Nesta seção vamos descrever alguns destes métodos, como o de *Metropolis* e o dos *clusters* de Wolff.

4.1 Algoritmos de Monte Carlo

Para o cálculo do valor esperado de um certo observável se usa a expressão (2.11), que envolve a soma sobre todas as configurações possíveis para o campo $\vec{\varphi}$. Por exemplo no caso mais simples, o modelo de Ising, onde o campo só pode ter dois valores, positivo ou negativo, em cada um dos sítios da rede, no caso de uma rede de $N = 4$ em 4 dimensões, o número total de sítios é 256 e o número total de configurações neste caso seria $2^{256} \approx 10^{79}$, o que é, obviamente, um número impraticavelmente grande. É necessário desenvolver um método no qual se considere só algumas configurações, que se aproxime ao máximo de (2.11), permitindo-nos assim estudar a teoria completa, se não estaríamos restritos a trabalhar em redes muito pequenas e portanto muito distantes do limite do contínuo.

Os método que usamos é o método de Monte Carlo, no qual se gera uma sequência de configurações C_1, C_2, \dots, C_n nas quais são efetuadas medidas dos observáveis. Este método gera cada nova configuração a partir da anterior, através de uma regra devidamente preparada, criando assim uma sequência cuja distribuição aproxima-se da distribuição estatística completa no limite de um grande número de configurações geradas. Esta sequência de configurações é uma sequência de Markov. Um algoritmo que gere essas configurações deve obedecer a várias condições, para que gere uma sequência com a distribuição correta de probabilidades.

Definimos $\mathcal{W}_{C \rightarrow C'}$ como a probabilidade de uma dada configuração C ser transfor-

mada pelo algoritmo em uma configuração C' . A probabilidade \mathcal{W} deve de satisfazer o seguinte:

1. Normalização: dada uma configuração inicial, a soma das probabilidades de se obter todas as outras possíveis configurações tem de ser igual a 1:

$$\sum_{C'} \mathcal{W}_{C \rightarrow C'} = 1.$$

2. Positividade: a probabilidade de se obter a configuração C' a partir da configuração C , deve ser maior ou igual a zero:

$$\mathcal{W}_{C \rightarrow C'} \geq 0.$$

3. Ergodicidade: qualquer configuração C' deve ser acessível num número finito n de passos, partindo-se de qualquer outra configuração C :

$$\mathcal{W}_{C \rightarrow C'}^n = \sum_{C_1} \sum_{C_2} \dots \sum_{C_n} \mathcal{W}_{C \rightarrow C_1} \mathcal{W}_{C_1 \rightarrow C_2} \dots \mathcal{W}_{C_n \rightarrow C'} > 0.$$

4. Balanço detalhado: esta condição garante que, dada uma sequência de configurações C_1, \dots, C_n para n suficientemente grande, a chance de se encontrar uma dada configuração C é proporcional ao fator de Boltzmann $e^{-S[C]}$. Esta condição é da forma

$$\mathcal{W}_{C \rightarrow C'} e^{-S[C]} = \mathcal{W}_{C' \rightarrow C} e^{-S[C']}. \quad (4.1)$$

Mostramos agora como se obtém esta condição.

Se o sistema está em equilíbrio, a transição de C para C' deve manter o sistema em equilíbrio, neste caso a matriz $\mathcal{W}_{C \rightarrow C'}$ tem a distribuição de Boltzmann como autovetor

$$\sum_C \mathcal{W}_{C \rightarrow C'} e^{-S[C]} = e^{-S[C']}.$$

Esta equação define a condição de "balanço". Usando a condição (1) e trocando C' por C , esta equação fica

$$\sum_C [\mathcal{W}_{C \rightarrow C'} e^{-S[C]} - \mathcal{W}_{C' \rightarrow C} e^{-S[C']}] = 0.$$

Esta equação se resolve com a escolha da condição do balanço detalhado (4.1), mostrando que esta última condição é suficiente, apesar de não ser necessária, para garantir que a sequência tenha a distribuição de probabilidades correta.

Descreveremos agora o método de “Metropolis” [11], que é uma realização prática da condição de balanço detalhado. Este método gera configurações do campo que satisfazendo balanço detalhado (4.1) levam à condição de equilíbrio termodinâmico. Dessa forma, “caminha-se” pelo espaço de configurações, medindo-se os observáveis a cada novo passo e tirando-se amostragens periodicamente.

A sequência de passos deste método é a seguinte:

1. Uma configuração C é alterada para C' sorteando-se um sítio aleatoriamente e mudando-se o valor do campo neste sítio. No caso do modelo de Ising, inverte-se o valor do spin σ_i para $-\sigma_i$. Em outros casos realiza-se uma caminhada aleatória do valor das variáveis.
2. Calcula-se a variação do valor da ação com a mudança efetuada: $\Delta S = S[C'] - S[C]$.
3. Define-se a matriz estocástica:

$$W_{C \rightarrow C'} = \begin{cases} 1 & \text{se } S[C] > S[C'] \\ e^{-\Delta S} & \text{se } S[C] < S[C'] \end{cases}, \quad (4.2)$$

que dá a probabilidade de transição $C \rightarrow C'$. A nova configuração é aceita segundo essa probabilidade.

Este processo é repetido um grande número de vezes e para cada nova configuração medimos os observáveis nos quais estamos interessados.

4.2 Método de Clusters de Wolff

No algoritmo de Metropolis a probabilidade de se encontrar o sistema numa certa configuração num determinado passo da evolução do algoritmo é fortemente dependente do estado do sistema no passo anterior. No método de Metropolis, por exemplo no modelo de Ising, apenas N^d estados podem ser alcançados a cada passo, portanto caminha-se muito lentamente no espaço de configurações e as grandezas medidas ficam muito correlacionadas, aumentando os erros estatísticos nas medidas dos observáveis.

Para contornar este problema aguarda-se, para medir os observáveis, um certo número de passos até que o sistema perca a “memória” do passo anterior no qual eles foram medidos. Usa-se a função de autocorrelação

$$\kappa(p) = \frac{\langle f_{C_i} f_{C_{i+p}} \rangle_i - \langle f_{C_i} \rangle_i \langle f_{C_{i+p}} \rangle_i}{\langle f_{C_i}^2 \rangle_i - \langle f_{C_i} \rangle_i^2} \quad (4.3)$$

para calcular quão distantes na sequência devem ser as medidas de uma certa grandeza f para que sejam consideradas independentes. C_i representa a i -ésima configuração, C_{i+p} é a configuração depois de p passos do algoritmo partindo de C_i . A função κ está

normalizada da forma $\kappa(0) = 1$ e, quando f está totalmente decorrelacionada após p passos, temos que $\kappa(p) = 0$.

No método de Metropolis as grandezas estão muito correlacionadas. Para evitar este problema é necessário que se caminhe mais rapidamente no espaço de configurações, alterando-se o valor de campo em vários sítios simultaneamente. Isto se consegue com o algoritmo de "clusters" desenvolvido por Wolff [12, 13].

Descrevemos agora o algoritmo de clusters de Wolf para o modelo Sigma Não-Linear. Para isto escrevemos a ação (2.25) da forma

$$\begin{aligned} S_N[\psi] &= \frac{\beta}{2} \sum_{\ell} (\Delta_{\ell} \vec{\psi})^2 = \frac{\beta}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (\vec{\psi}_j - \vec{\psi}_i)^2 \\ &= \frac{\beta}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (2 - 2\vec{\psi}_i \cdot \vec{\psi}_j) \rightarrow S_N[\psi] = -\beta \sum_{\langle i,j \rangle} (\vec{\psi}_i \cdot \vec{\psi}_j), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde o vínculo $\vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi} = \beta$ é escrito como $\vec{\psi} \cdot \vec{\psi} = 1$ com $\vec{\varphi} = \sqrt{\beta} \vec{\psi}$ e $\langle i, j \rangle$ indica que a operação é efetuada sobre o link que une dois primeiros vizinhos, $\vec{\psi}_i$ e $\vec{\psi}_j$.

Este algoritmo consiste de se juntar um conjunto (cluster) de sítios inter-conectados e de se fazer uma reflexão dos campos em todos os sítios deste cluster.

O algoritmo consiste dos seguintes passos:

1. Sorteia-se um sítio qualquer da rede, cujo campo é designado por $\vec{\psi}(i)$.
2. Escolhe-se aleatoriamente uma direção \hat{r} no espaço interno com \mathcal{N} componentes para cada construção do cluster. Esta direção é mantida fixa durante a construção do cluster.
3. Visitam-se todos os sítios vizinhos do sítio i , cujos campos são denotados por $\vec{\psi}(j)$, e "ativam-se" os links $\ell(i, j)$ com a probabilidade

$$P_{\ell(i,j)} = 1 - \exp \left\{ \min \left[0, -2\beta(\vec{\psi}_i \cdot \hat{r})(\vec{\psi}_j \cdot \hat{r}) \right] \right\}. \quad (4.5)$$

Os sítios vizinhos de i com links ativados fazem parte do cluster. Repete-se estes passos para cada um dos $\vec{\psi}(j)$, ativando-se também seus vizinhos com a probabilidade (4.5) e levando em conta que o algoritmo não modifica links já examinados e sítios já verificados.

4. Refletem-se os campos do cluster segundo o hiperplano $(\mathcal{N} - 1)$ dimensional, cuja normal aponta na direção \hat{r} . Esta reflexão é dada por

$$\vec{\psi}_{i_f} = \vec{\psi}_i - 2(\vec{\psi}_i \cdot \hat{r})\hat{r}, \quad (4.6)$$

onde $\vec{\psi}_{i_f}$ é o campo $\vec{\psi}_i$ depois da reflexão. No caso do modelo de Ising com simetria $O(1)$ a reflexão se reduz à multiplicação por -1 .

4.3 Descrição do Código

A escrita e depuração dos programas é a parte do trabalho que consome mais tempo. Para facilitar o trabalho, a estrutura de programação está organizada num conjunto de sete programas, cada um fazendo uma tarefa específica, até a obtenção dos dados finais. Estes programas são `inpdata`, `mcrelaxer`, `mcsampler`, `statistics`, `mcautocorr`, `results` e `splitter`.

Para cada simulação é fixada a dimensão espaço-temporal d , o grupo de simetria \mathcal{N} , o número de sítios N^d , o valor de β e o valor da fonte externa j . Em vez de β , usamos por conveniência o parâmetro $\theta = \arctan(1/\beta)$.

Mostramos agora que tarefas faz cada um dos programas.

1. O programa `inpdata` é responsável pelo controle dos parâmetros da teoria (tamanho da rede, dimensão, θ , simetria, etc.)[†], dos parâmetros estatísticos (como número de submédias a serem geradas, o número de iterações que deve-se efetuar para cada submédia, número de vezes que se repetirá o cluster, etc.). Este programa é simples e rápido e, no caso de incompatibilidade dos parâmetros, gera erro.
2. O programa `mcrelaxer` é responsável pela geração de uma configuração dos campos relaxada C_0 , depois de um certo número de varreduras ou "sweeps", a partir de qualquer configuração inicial escolhida arbitrariamente. A forma de se medir a relaxação do campo é examinando a função de correlação de um ponto $\langle \varphi \rangle$, que deve ter a forma da Fig.4.1.

Este programa é rápido, porque o número de médias e iterações é muito menor que o do programa `mcsampler`.

3. O programa `mcsampler` é responsável pela geração de configurações partindo da configuração relaxada C_0 . Ele gera uma grande quantidade de configurações até ter uma aproximação do equilíbrio térmico para uma determinada fonte externa. A estrutura deste programa é praticamente a mesma do programa `mcrelaxer`, diferindo só no número de médias e iterações. Nestes dois programas é criada uma estrutura de indexação que reduz as estruturas matriciais a simples vetores, acelerando o processamento. Depois inicia-se um "loop" para a geração de uma média dos valores medidos e calculam-se as transformadas de Fourier do campo a serem usados no cálculo das funções de correlação. Acumulam-se os dados em variáveis temporárias a partir das quais se calculam submédias; a renovação das configurações é realizada pelo algoritmo de cluster. Terminado um conjunto de sweeps, os dados parciais obtidos são armazenados em arquivos, entre eles as submédias e a atual configuração do campo. Repete-se o procedimento até a geração de todas as submédias definidas pelo programa (`inpdata`). Este programa é bastante demorado e para acelerar o processamento se usa a paralelização.

[†]No caso deste trabalho a dimensão d é 3 e 4, o grupo de simetria é $SO(2)$ e a rede tem 4^d sítios.

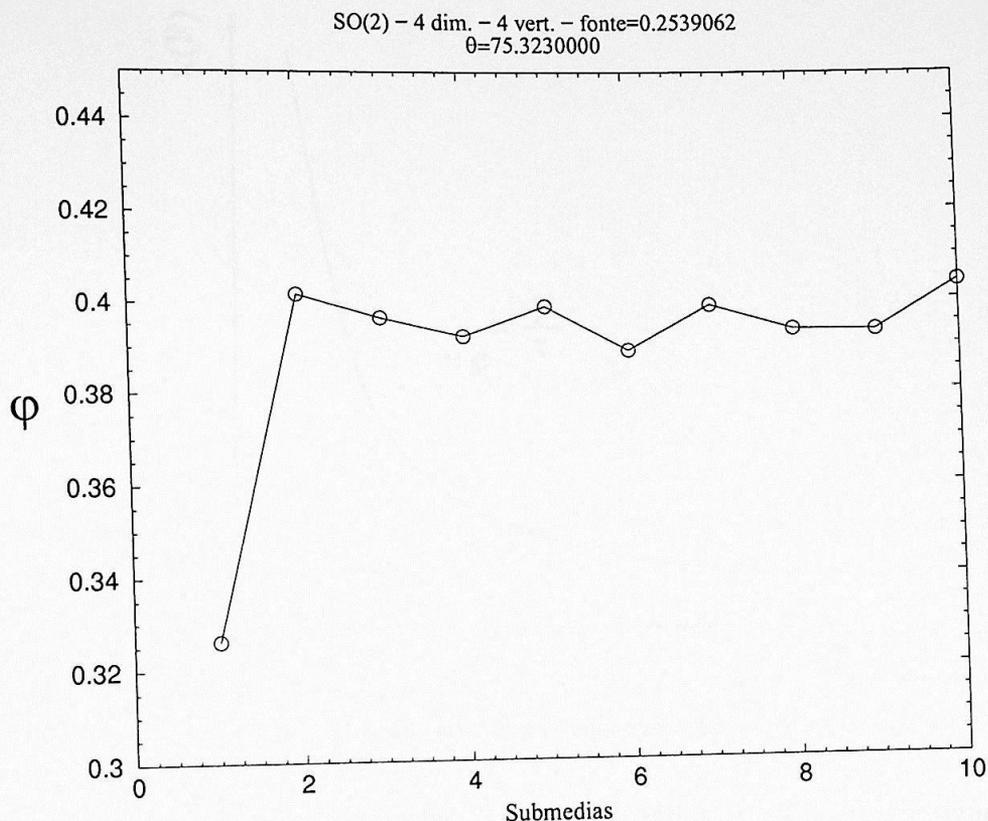


Figura 4.1: Processo de relaxação do campo.

4. O programa `statistics` é responsável pela estatística dos observáveis. Para a avaliação dos erros estatísticos, acumulamos as médias dos observáveis a cada passo do algoritmo e, após um certo número de passos definido no `inpdata`, tiramos as médias dessas medidas, formando uma média parcial. Este programa é rápido e não precisa de paralelização.

5. O programa `mcautocorr` é responsável pelo cálculo das funções de autocorrelação (4.3). A função de autocorrelação mede a correlação entre as configurações de campo e, portanto, a eficiência do algoritmo que gera as configurações. Ela tem um comportamento exponencial como função de p , conforme mostra a Fig.4.2, onde τ é o “tempo de autocorrelação”, com $t = 1, 2, \dots, p$.

Este programa é parecido como o programa `mcrelaxer`, calculando-se apenas um certo número de iterações, que em geral é menor que o do `mcrelaxer`. Depois de terminado o “loop” de iterações, os dados são armazenados em arquivos. Este programa é rápido e não precisa de paralelização.

6. O programa `results` mede os comprimentos de correlação dos observáveis ajustando as funções de autocorrelação, já medidas em `mcautocorr`, a uma curva do tipo Fig.4.2. Corrigem-se então as barras de erro por $\sqrt{\tau}$. Este programa efetua

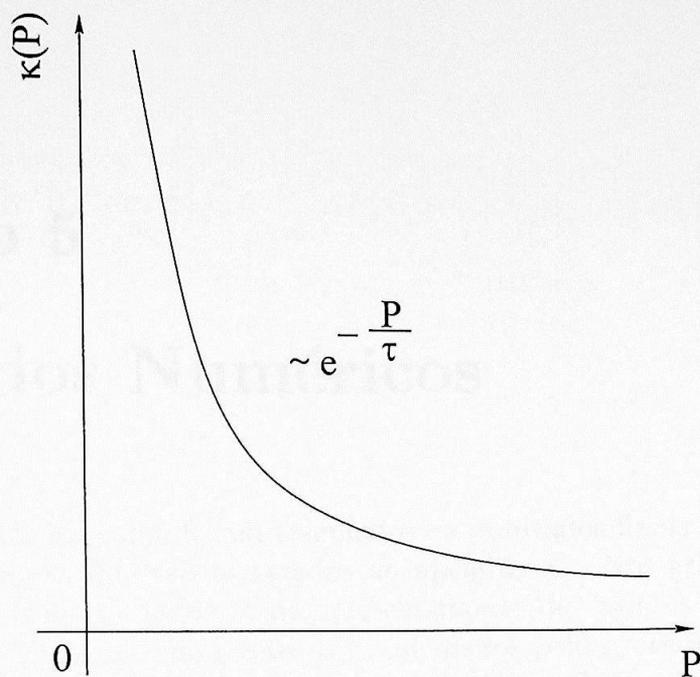


Figura 4.2: Função de autocorrelação em função de p .

o cálculo das grandezas derivadas dos demais dados (massa, magnetização, etc.). Ele é rápido e não precisa de paralelização.

7. O programa splitter separa convenientemente os resultados finais em diversos arquivos, para sua melhor manipulação.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

Nesta seção descrevemos como foram calculados os resultados finais a partir dos dados obtidos nas simulações, que são mostrados no apêndice C. Nos gráficos do apêndice C mostramos os pontos ou dados finais, que chamamos de “pontos de medida” (estes pontos são α_{R_0} e o valor de v no ponto β_{0_j}), calculados pelo procedimento que descreveremos em (5.1). Na seção (5.2) mostramos o resíduo (\mathcal{R}) em função de j para os casos $d = 3$ e $d = 4$. Na seção (5.3) apresentamos os *resultados finais* para os casos $d = 3$ e $d = 4$, ou seja, mostramos os gráficos de j em função de v a partir dos quais avaliaremos a trivialidade do modelo.

5.1 Procedimento Utilizado na Obtenção dos Pontos de Medida

Para cada rede finita[†], queremos medir a magnetização $v(\beta(j), j)$ sob a ação de uma fonte externa j , sob a condição de que a massa renormalizada adimensional $\alpha_R(\beta, j)$ seja constante, o que determina a função $\beta(j)$. Medimos $v(\beta(j), j)$ quando $\alpha_R(\beta, j)$ é igual a $36/N^2$ que denotaremos como α_{R_0} , e o valor de $\beta(j)$ neste ponto denotaremos como β_{0_j} . Para obter-se α_{R_0} , tomamos o comprimento de autocorrelação dimensional χ_R igual a $L'/3$, de onde segue que a massa renormalizada dimensional é $m_R = 1/\chi_R = 3/L'$. Nesta seção denotamos por L o comprimento de uma rede com condições de contorno fixas, e por L' o comprimento máximo que há entre dois pontos de uma rede com condições de contorno periódicas. O comprimento L' em termos de L é da forma $L' = L/2$. Temos então, $a = L/N = 2L'/N$, e $\alpha_{R_0} = (m_R a)^2 = [m_R(2L'/N)]^2 = [(3 \times 2)/N]^2 = 36/N^2$.

Para o cálculo da massa, medimos numericamente a função de dois pontos obtida através das transformadas de Fourier do campo e estimamos α_R através do ajuste ao propagador de uma expressão semelhante ao propagador da teoria livre $(p^2 + m^2)^{-1}$,

[†]Nesta tese só trabalhou-se para redes com $N = 4$.

$$\tilde{g}_{(2),i}(k) = \langle \tilde{\psi}_i^*(k) \tilde{\psi}_i(k) \rangle \sim \frac{1}{N^d} \frac{\mathcal{R}}{\rho^2(k) + \alpha_R}. \quad (5.1)$$

Nesta expressão \mathcal{R} é chamado de resíduo e os $\rho^2(k)$ são os autovalores do Laplaciano na rede e i indica a i -ésima componente do campo. A fonte externa alinha a magnetização na direção da componente 2 do campo[†].

Havendo conseguido pontos suficientes para a identificação do ponto α_{R_0} (em média 5 a 6 pontos), ajusta-se um polinômio de grau 2 nessa vizinhança, conforme se mostra na Fig.5.2 para o caso $N = 4$ e $j = 0,2343750$ em $d = 4$. O valor de α_{R_0} obtido é usado para a determinação de $\beta_{0,j}$ e este é usado para determinar a magnetização pelo ajuste de um polinômio de grau 2 nas vizinhanças deste ponto, como apresentado na Fig.5.4.[§] Para achar os pontos α_{R_0} e $\beta_{0,j}$ no caso em $d = 3$, procede-se da mesma forma que no caso em $d = 4$.

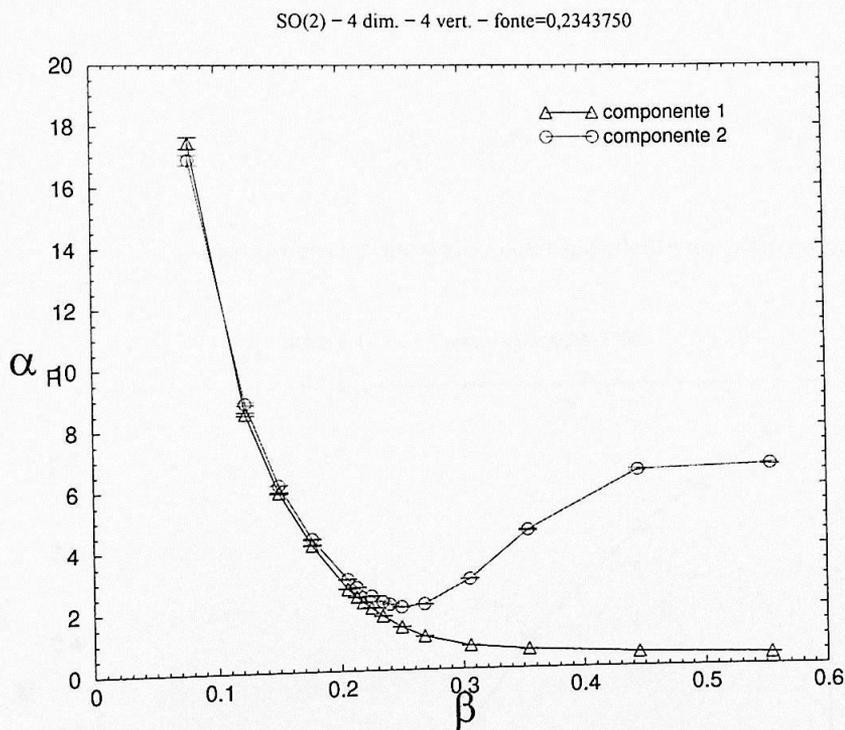


Figura 5.1: Componente 1 e 2 da massa renormalizada (α_R) em função de β .

[†]Por conveniência a fonte externa tem como direção a componente 2 do campo (lembrando que o grupo de simetria do modelo é SO(2)).

[§]Lembremos que nas simulações usamos o campo ψ , enquanto que nos resultados gráficos mostrados usamos φ .

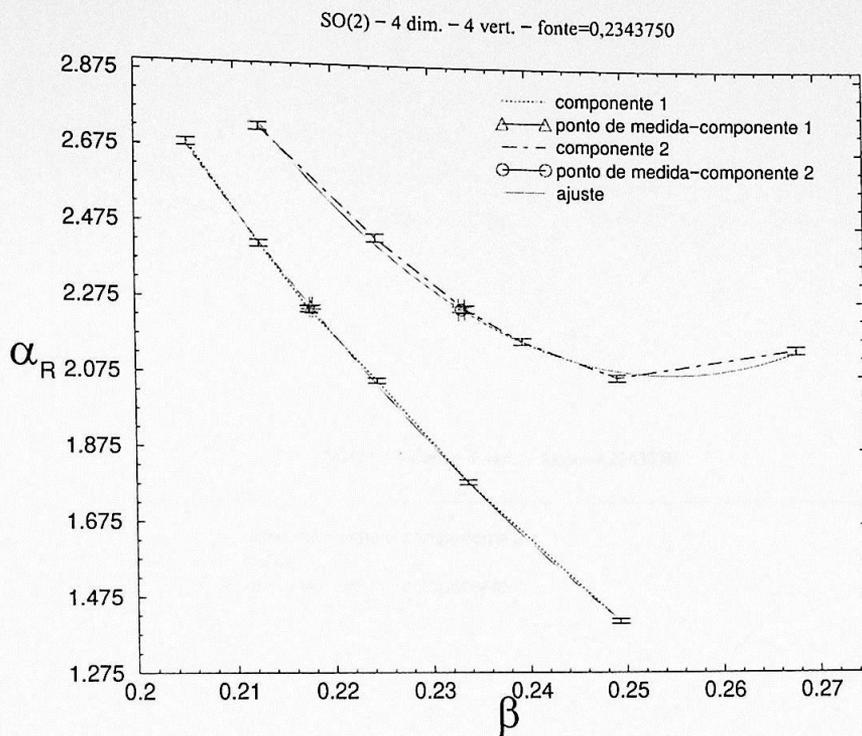


Figura 5.2: Ajuste de um polinômio de grau 2 na região correspondente ao ponto α_{R_0} para a componente 1 e 2 de α_R .

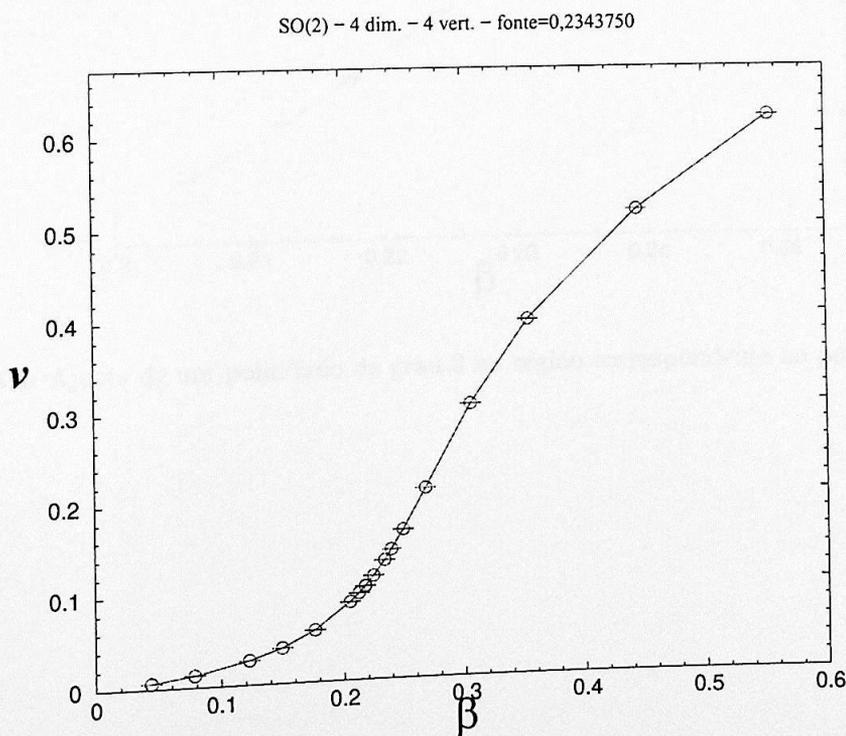


Figura 5.3: Magnetização (v) em função de β .

5.3 Resíduos

Apresentamos os resíduos para cada um dos pontos de medida, de onde se vê que o ponto de ajuste está bem ajustado, com erro de $\pm 0,001$. As figuras 5.3 e 5.4 mostram os resíduos correspondentes a β_0 e β_1 respectivamente, e os resíduos correspondentes a β_2 e β_3 para β_0 e β_1 respectivamente.

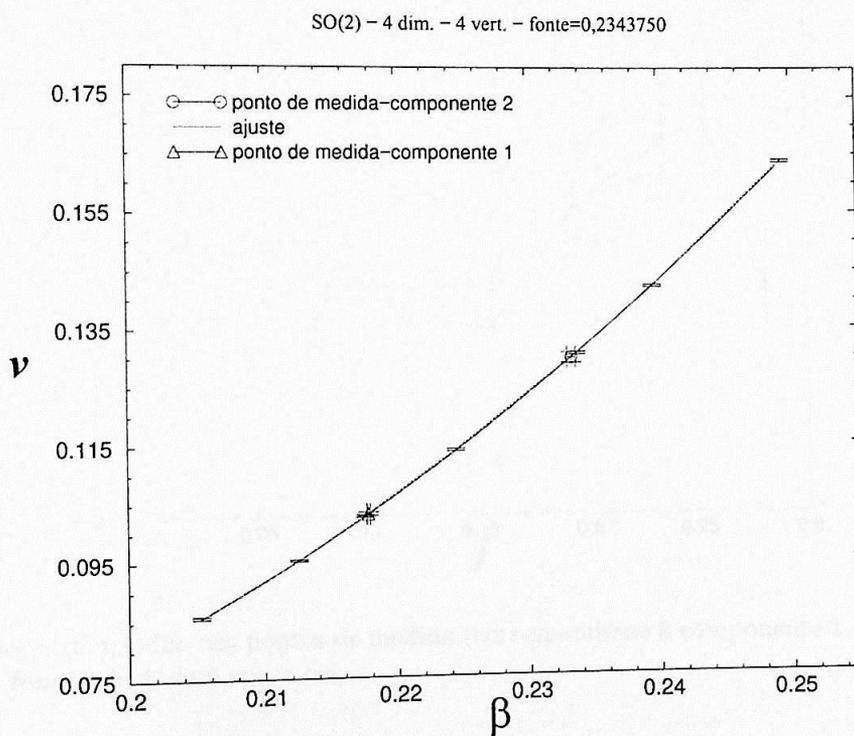


Figura 5.4: Ajuste de um polinômio de grau 2 na região correspondente ao ponto β_0 .

5.2 Resíduos

Aqui apresentamos os resíduos para cada um dos pontos de medida, ou seja, o valor de \mathcal{R} no ponto $\beta_{0,j}$, para cada fonte externa, nas dimensões $d = 3$ e $d = 4$. As figuras Fig.5.5 e Fig.5.7 correspondem à componente 1 de α_R para $d = 3$ e $d = 4$ respectivamente e as figuras Fig.5.6 e Fig.5.8 correspondente à componente 2 de α_R para $d = 3$ e $d = 4$ respectivamente.

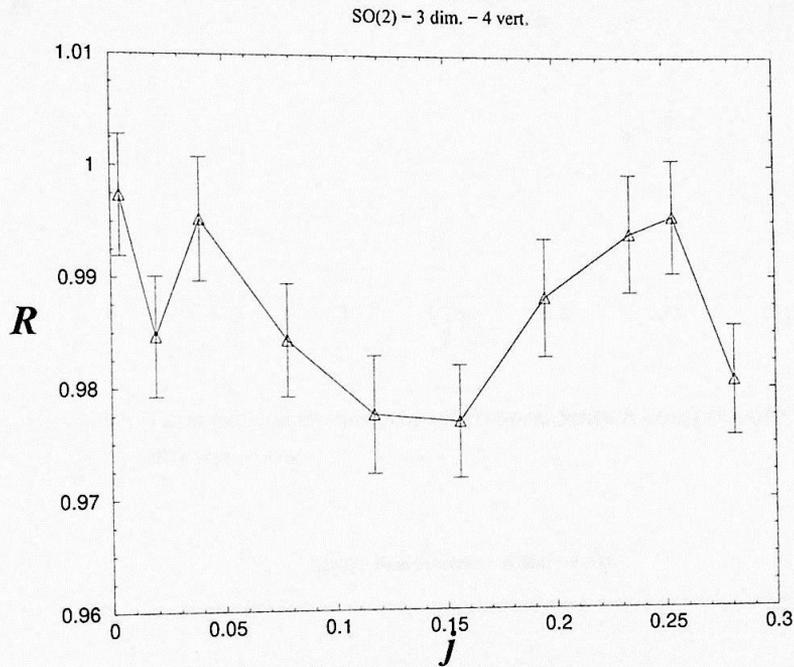


Figura 5.5: Valores do resíduo nos pontos de medida (correspondente à componente 1 de α_R em $d = 3$) em função de j , com $\alpha_R = \alpha_{R_0}$.

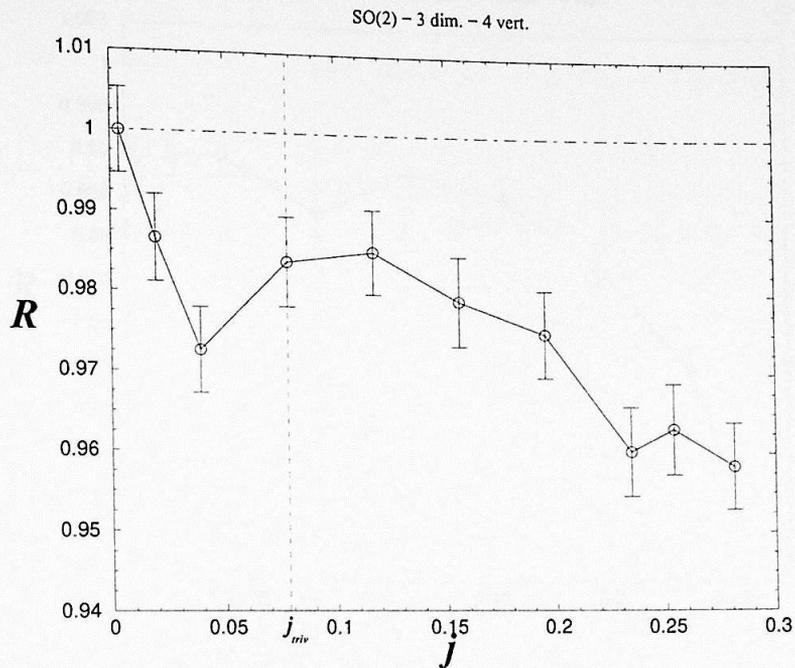


Figura 5.6: Valores do resíduo nos pontos de medida (correspondente à componente 2 de α_R em $d = 3$) em função de j , com $\alpha_R = \alpha_{R_0}$.

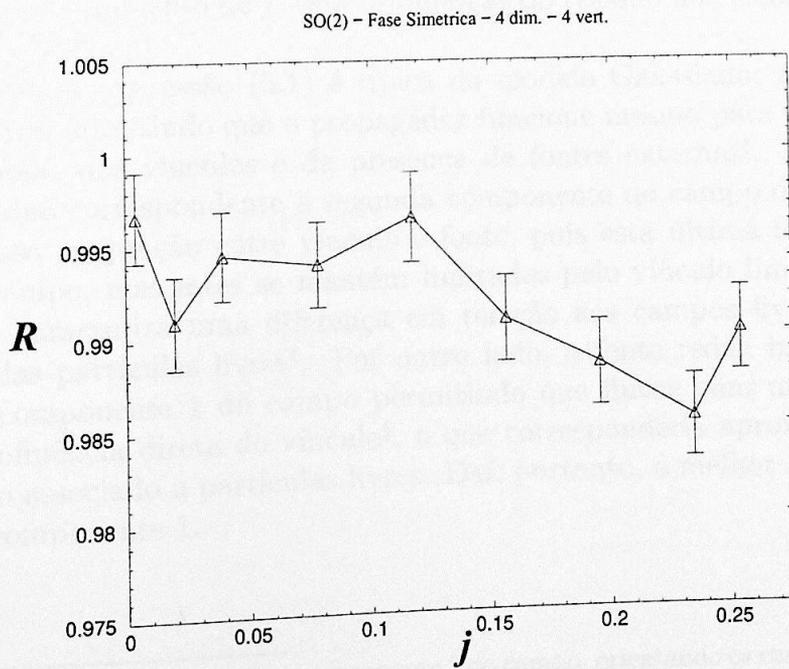


Figura 5.7: Valor do resíduo nos pontos de medida (correspondente à componente 1 de α_R em $d = 4$) em função de j , com $\alpha_R = \alpha_{R_0}$.

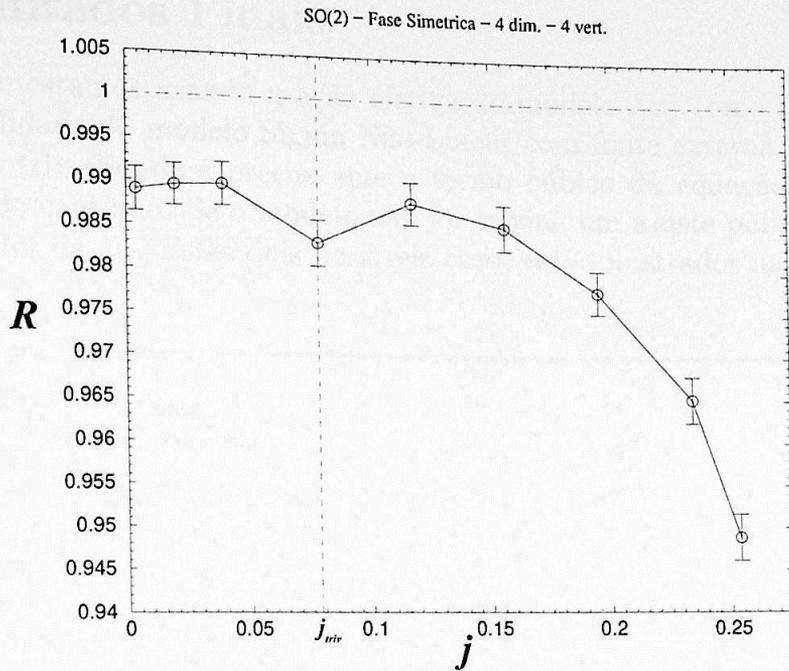


Figura 5.8: Valor do resíduo nos pontos de medida (correspondente à componente 2 de α_R em $d = 4$) em função de j , com $\alpha_R = \alpha_{R_0}$.

Nas figuras 5.5 e 5.7 vê-se que \mathcal{R} oscila próximo e abaixo de 1, e nas figuras 5.6 e 5.8 \mathcal{R} diminui com o aumento de j , esta diminuição do resíduo não é contínua pois esta oscila.

Observe-se que a expressão (5.1) é típica do modelo Gaussiano; ao usarmos essa expressão, estamos admitindo que o propagador funcione mesmo para o modelo Sigma Não-Linear, apesar dos vínculos e da presença de fontes externas[†]. A redução progressiva do resíduo correspondente à segunda componente do campo deve estar ligada justamente a essa conjunção entre vínculo e fonte, pois esta última tenderia a elevar os valores do campo, mas estes se mantêm limitados pelo vínculo limitando suas flutuações, o que caracteriza uma diferença em relação aos campos livres e, portanto, à propagação das partículas livres[‡]. Por outro lado, a fonte reduz bastante o tamanho típico da componente 1 do campo permitindo que flutue com mais liberdade e, eliminando a influência direta do vínculo[§], o que corresponderia aproximadamente ao comportamento associado a partículas livres. Daí, portanto, a melhor adequação desse propagador à componente 1.

[†]Lembramos que j tem como direção a componente 2 do campo, orientando os campos nesta direção.

[‡]Mas para fontes pequenas (menores que j_{triv}) tem-se um comportamento associado a partículas livres, como pode-se ver em Fig.5.11 e Fig.5.13.

[§]A influência do vínculo é, então, indireta, através da componente 2, do campo, isto é, a componente 1 se reduz porque a outra aumenta.

5.3 Resultados Finais

Lembramos que estamos usando a ação efetiva do modelo $\lambda\varphi^4$ como laboratório para avaliar a trivialidade do modelo Sigma Não-Linear com fonte externa. Para que fique demonstrada a trivialidade é preciso que o termo cúbico da equação (3.19) tenda a zero no limite do contínuo. Se o modelo não for trivial, um ajuste polinomial de (3.19) determina o valor de λ_R . Estes dois possíveis casos estão ilustrados na Fig.5.9.

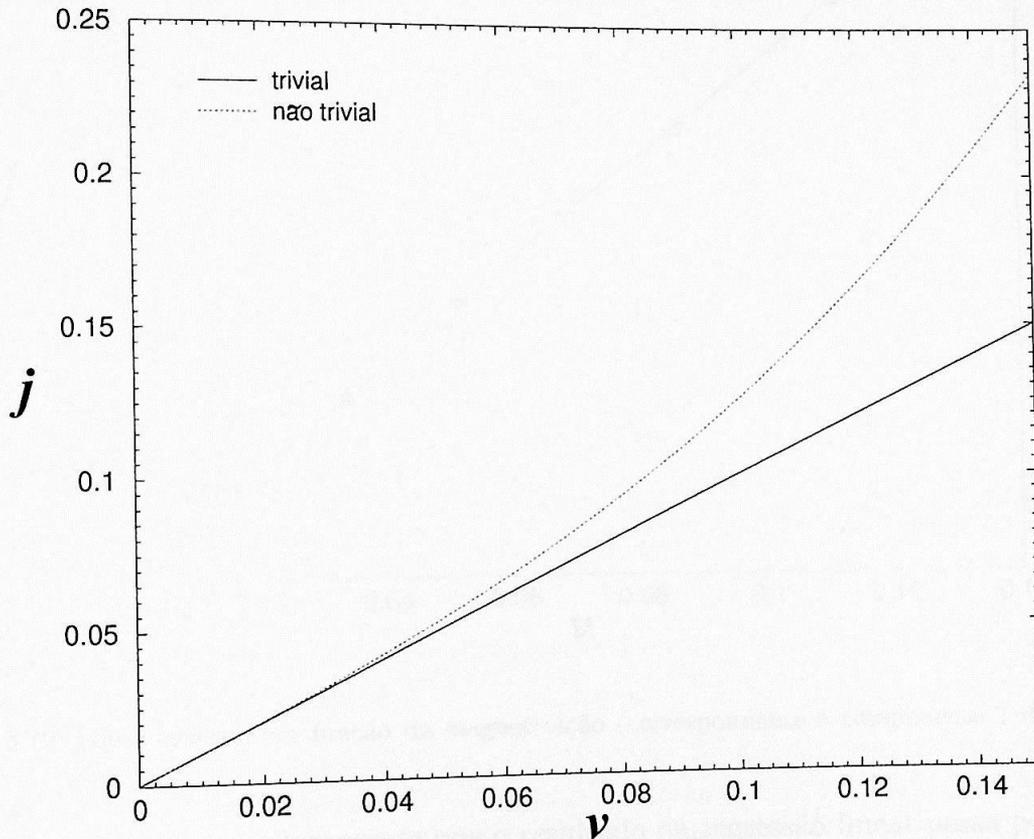


Figura 5.9: Fonte externa em função da magnetização.

Nesta seção apresentamos os resultados finais deste trabalho, a partir dos quais avaliaremos a trivialidade do modelo Sigma Não-Linear com fontes externas. As figuras Fig.5.10 e Fig.5.12 correspondem à componente 1 de α_R para $d = 3$ e $d = 4$ respectivamente e as figuras Fig.5.11 e Fig.5.13 correspondem à componente 2 de α_R para $d = 3$ e $d = 4$ respectivamente. Estas figuras apresentam curvas de j em função de ν , onde os valores de ν são medidos nos pontos β_{0j} para cada uma das fontes externas. O ponto β_{0j} corresponde ao valor de α_R quando é igual a α_{R_0} .

⊙ Para Dimensão 3

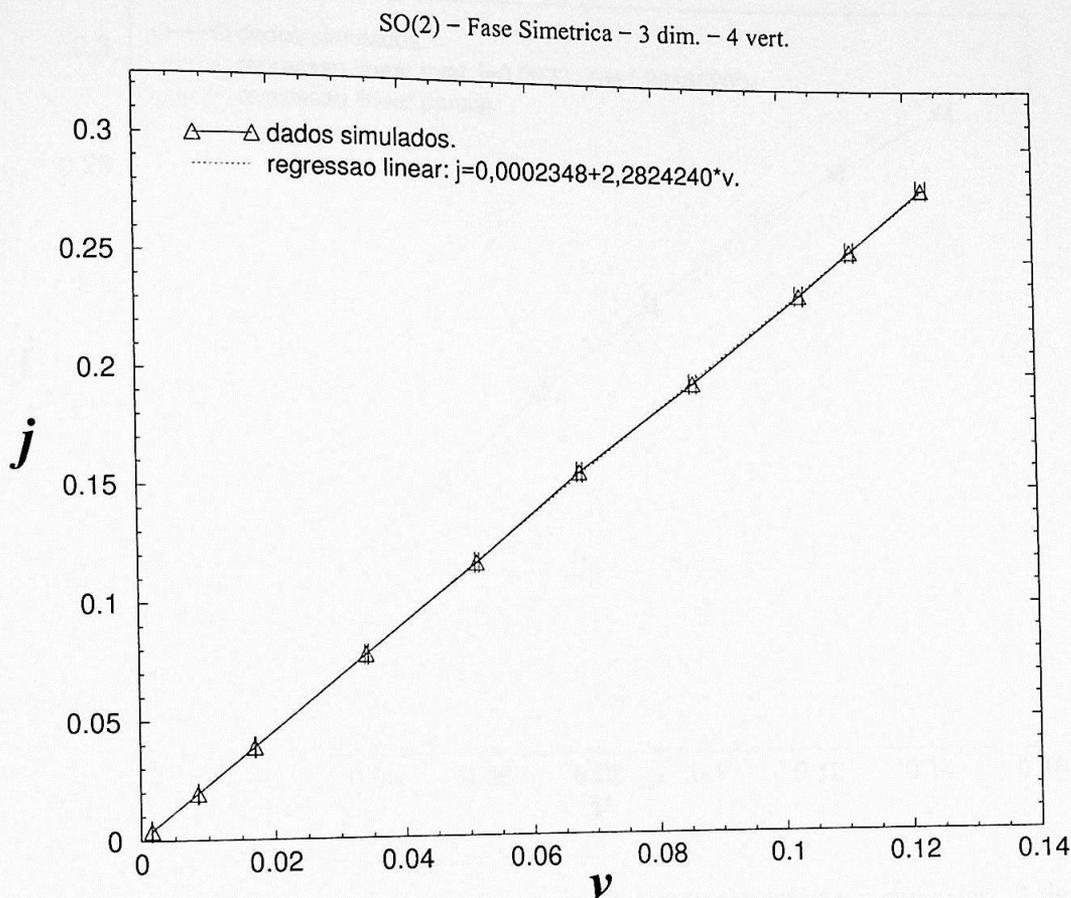


Figura 5.10: Fonte externa em função da magnetização (correspondente à componente 1 de α_R em $d = 3$).

Na figura 5.10 vê-se claramente que o resultado da regressão linear passa por todas as barras de erro dos dados da curva obtida por simulação. Isto quer dizer que o modelo Sigma Não-Linear com fonte externa é trivial no que diz respeito a esta componente, portanto a ação efetiva do modelo $\lambda\varphi^4$ é compatível com a do modelo Sigma Não-Linear. Referente aos comentários sobre as pequenas oscilações dos resíduos correspondentes aos pontos de Fig.5.10, feitas para a figura Fig.5.5 na seção (5.2), vê-se de que estas oscilações e a pouca diminuição dos resíduos referente ao valor 1, não afetam a expressão (5.1). A medida de v é tal que, ao se plotar j em função de v resulta uma linha reta.

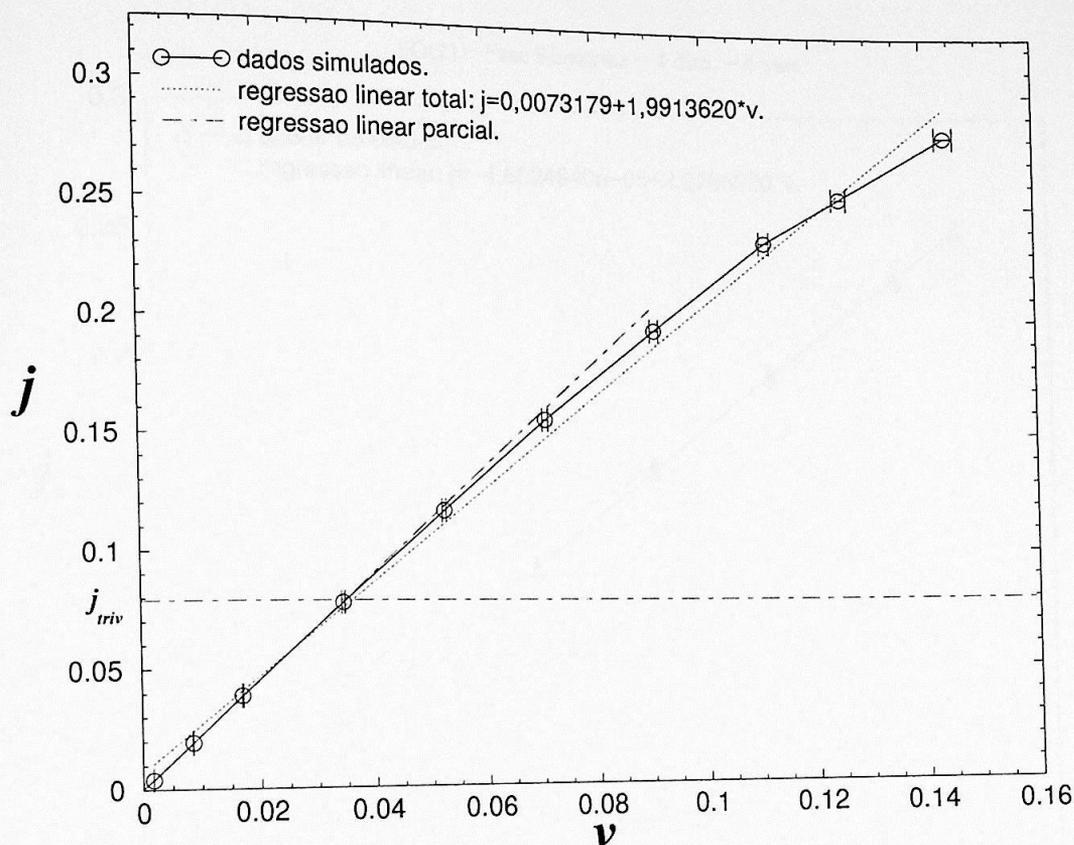


Figura 5.11: Fonte externa em função da magnetização (correspondente a componente 2 de α_R em $d = 3$).

Na figura 5.11 vemos que o resultado da regressão linear feita para toda a curva não coincide com a curva. Entretanto, o resultado da regressão linear feita até um certo valor pequeno de j , que denotamos por j_{triv} , passa por todas as barras de erro dos dados do segmento da curva. Isto mostra que nesta região o modelo é trivial. Vê-se também, que a curva acima de j_{triv} curva-se para baixo, enquanto o esperado seria o que ocorre na Fig.5.9. Isto é como o dito na seção (5.2) referente aos resíduos da componente 2 dos campos, que a partir de j_{triv} o vínculo tem cada vez mais efeito à medida que j aumenta, fazendo com que a curva tenha curvatura para baixo. Portanto a ação efetiva do modelo $\lambda\phi^4$ não é compatível com a do modelo Sigma Não-Linear referente a esta componente. O vínculo tem pouco efeito para j menores que j_{triv} , fazendo que a expressão (5.1) não seja afetada de maneira considerável e que a medida de $v(\beta_{0j})$ para j menores que j_{triv} seja tal que j em função v é uma linha reta. Só para fontes maiores que j_{triv} o vínculo passa a ter mais efeito, fazendo com que os resíduos diminuam e por conseguinte a expressão (5.1) seja afetada com maior grau à medida que j aumenta a partir de j_{triv} . Este fato faz com que a medida de $v(\beta_{0j})$ para j acima de j_{triv} seja tal que a curva de j em função de v resulta com curvatura para baixo.

⊙ Para Dimensão 4

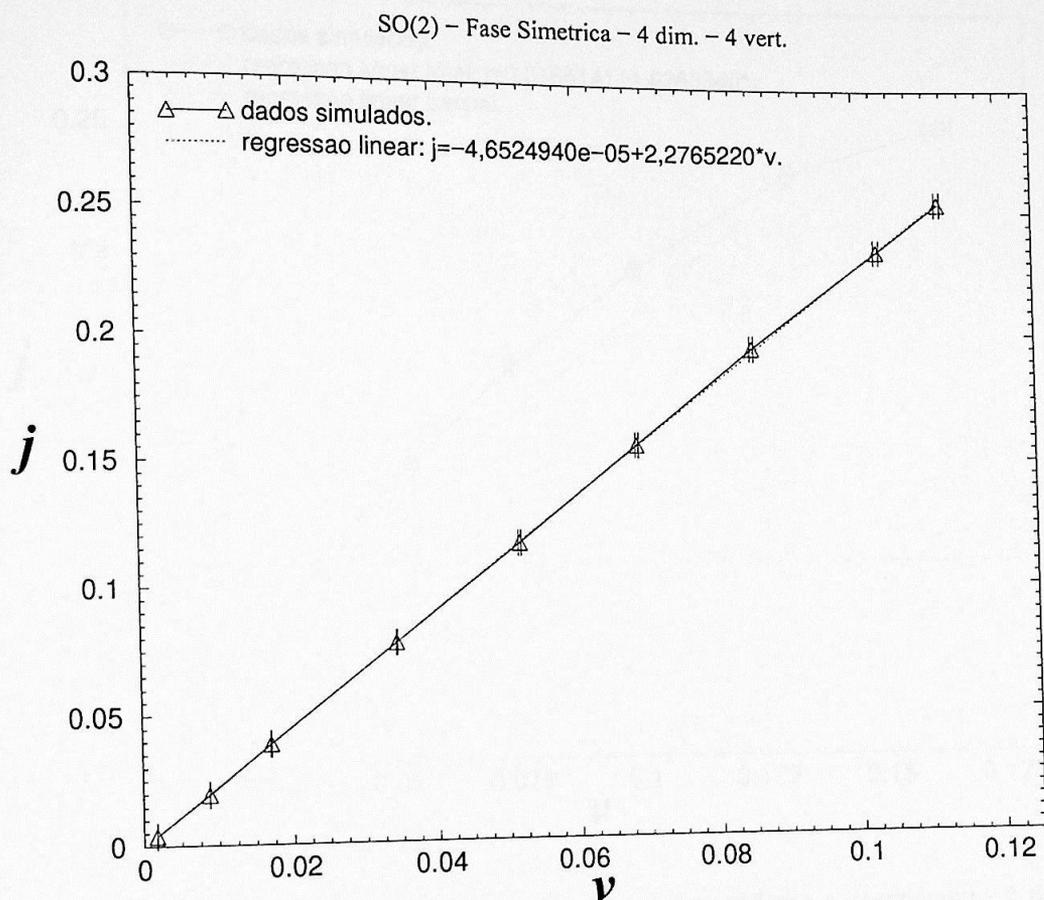


Figura 5.12: Fonte externa em função da magnetização (correspondente à componente 1 de α_R em $d = 4$).

Na figura 5.12 vê-se claramente, como no caso $d = 3$, que o resultado da regressão linear passa por todas as barras de erro dos dados da curva obtida por simulação. Isto quer dizer que o modelo Sigma Não-Linear com fonte externa é trivial no que diz respeito a esta componente, portanto a ação efetiva do modelo $\lambda\varphi^4$ é compatível com a do modelo Sigma Não-Linear. Neste caso, como no caso $d = 3$, as pequenas oscilações de \mathcal{R} perto do valor 1, não tem efeito considerável na expressão (5.1) e a medida de v é tal que j em função de v resulta em uma linha reta.

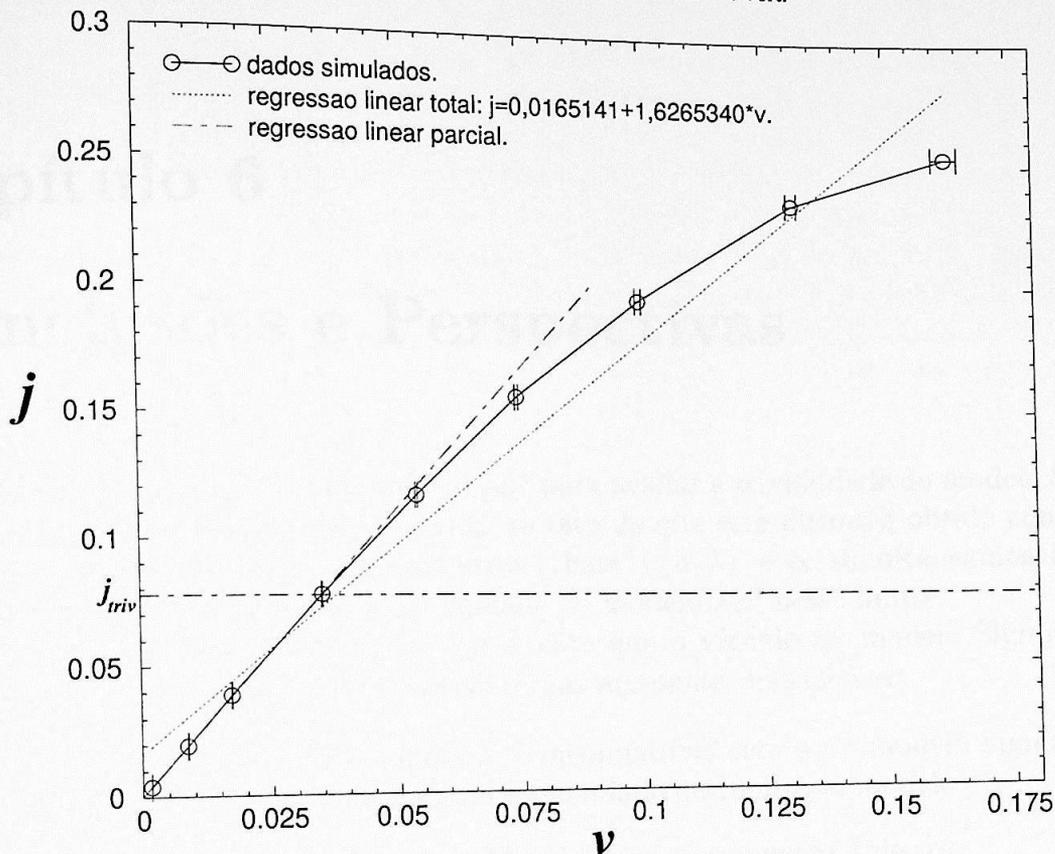


Figura 5.13: Fonte externa em função da magnetização (correspondente à componente 2 de α_R em $d = 4$).

Na figura 5.13 vemos, de forma igual à da Fig.5.11 do caso $d = 3$, que a regressão linear feita para toda a curva não coincide com a curva. Entretanto, a regressão linear feita até j_{triv} , passa por todas as barras de erro dos dados. Isto mostra que nesta região o modelo é trivial. A curva acima de j_{triv} curvam-se para baixo, enquanto o esperado seria o que ocorre na Fig.5.9. Isto é como o dito na seção (5.2) referente aos resíduos da componente 2 dos campos, que a partir de j_{triv} o vínculo tem cada vez mais efeito à medida que j aumenta, fazendo com que a curva tenha curvatura para baixo. Portanto a ação efetiva do modelo $\lambda\varphi^4$ não é compatível com a do modelo Sigma Não-Linear referente a esta componente. Neste caso também o vínculo tem pouco efeito para j menores que j_{triv} , fazendo que a expressão (5.1) não seja afetada de maneira considerável e que a medida de $v(\beta_{0j})$ para j menores que j_{triv} seja tal que j em função de v é uma linha reta. Só para fontes maiores que j_{triv} o vínculo passa a ter mais efeito, fazendo com que os resíduos diminuam e por conseguinte a expressão (5.1) seja afetada com maior grau à medida que j aumenta a partir de j_{triv} . Este fato faz com que a medida de $v(\beta_{0j})$ para j acima de j_{triv} seja tal que a curva de j em função de v resulta com curvatura para baixo.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Consideramos a ação efetiva do modelo $\lambda\varphi^4$ para avaliar a trivialidade do modelo Sigma Não-Linear com fontes externas, devido ao fato de que este último é obtido como um limite do primeiro quando seus parâmetros (“bare”) $(\alpha, \lambda) \rightarrow \infty$ simultaneamente. Isso permite também que se avalie a trivialidade do modelo $\lambda\varphi^4$ nesse limite.

Os resultados obtidos mostram claramente que o vínculo do modelo Sigma Não-Linear associado à presença de fontes externas apresenta dois efeitos:

1. Torna a ação efetiva do modelo $\lambda\varphi^4$ incompatível com a do modelo Sigma Não-Linear para a análise completa da trivialidade deste último modelo.
2. Trivializa a dinâmica do grau de liberdade da componente 1 de α_R .

Dos resultados das figuras 5.10 a 5.13, vemos que o modelo Sigma apresenta trivialidade para a componente 1 em $d = 3$ e $d = 4$, embora seja um fato muito conhecido que o modelo $\lambda\varphi^4$ não seja trivial em $d = 3$, o que indica que a presença do vínculo, característico do modelo Sigma Não-Linear, trivializa a dinâmica da componente 1. O comportamento observado para a componente 2 indica que os dois modelos não são compatíveis na presença de fontes externas, no que diz respeito ao comportamento da componente 2.

Outra indicação dessa diferença é que a condição $\alpha_{R_2} = \text{const.} = \alpha_{R_0}$, cujo valor foi fixado em $36/N^2$, traz como consequência que a curva de j em função v para a componente 1 da massa renormalizada resulte numa linha reta e, para a componente 2, numa curva com curvatura para baixo. Especificamente na fase simétrica, não haveria diferenças em se tomar como referência α_{R_1} ou α_{R_2} constante, já que as curvas de ambas em função de β praticamente coincidem, como se observa na figura 5.1; não há sentido, entretanto, em se considerar $\alpha_{R_1} = \alpha_{R_2}$ na fase quebrada, conforme ilustra a figura citada, já que ocorre aí a quebra de simetria na direção 2. Porém, para fontes de valor mais alto, as diferenças entre as massas renormalizadas são verificadas já nas proximidades da região crítica; como os valores constantes adotados encontram-se próximos desse intervalo, obtêm-se diferentes formas para as curvas, isto é, a quebra de simetria na direção 2 distorce a curva para baixo, além mesmo da reta que se suporia

indicativa de trivialidade, conforme se verifica nas figuras 5.12 e 5.13, em $d = 4$. O mesmo ocorre em $d = 3$, de acordo com as figuras 5.10 e 5.11.

Outro fator a ser considerado é o tamanho das redes analisadas. Não foram efetuadas simulações com redes maiores, que poderiam esclarecer o comportamento da ação efetiva usada no limite do contínuo.

As fontes externas usadas são suficientemente pequenas para o estudo do limite do contínuo do modelo na presença de fontes externas, isto é, para redes com $N = 4$, porque, como se pode ver a partir das figuras 5.10, 5.11, 5.12 e 5.13[†], as curvas claramente tendem a passar pelo ponto de origem das coordenadas à medida em que $j \rightarrow 0$, correspondendo à compatibilidade entre os modelos Sigma Não-Linear e $\lambda\varphi^4$ com $j = 0$. Para redes maiores, como sabemos podem-se usar fontes externas maiores do que aquelas do caso de redes com $N = 4$, porém, estamos interessados em fontes externas que tenham um comportamento $j \rightarrow 0$ de forma que as fontes externas usadas em $N = 4$ serão suficientemente pequenas também para redes maiores.

[†]Nestas figuras ao máximo valor das fontes externas denotaremos por j_{max} , pois para $j > j_{max}$ a linha $\alpha_{R_2} = \alpha_{R_0}$ passa por baixo do ponto de mínimo da região de quebra de simetria, sem cortar em nenhum ponto a curva α_{R_2} em função de β . Para redes maiores o mínimo ficará cada vez mais perto da linha $\alpha_{R_2} = 0$, podendo-se usar fontes maiores que j_{max} sem que a linha $\alpha_{R_2} = \alpha_{R_0}$ fique por baixo do ponto de mínimo, mas se terá também um limite de fonte externa.

Apêndice A

Geradores Funcionais na Rede

A introdução de fontes externas nos modelos muda a sua solução clássica, ou seja, muda a posição do mínimo da ação. No caso quântico esta introdução muda os pesos estatísticos relativos $e^{-S[\varphi]}$ associados a todas as possíveis configurações. As soluções tanto clássica quanto quântica dos modelos com fontes externas estabelecem uma relação funcional bem definida entre o valor esperado do campo v e as fontes j .

Pode-se estudar a teoria quântica usando os *geradores funcionais* das funções de correlação. Este desenvolvimento é geral, válido para qualquer modelo de campos escalares.

Assumimos que temos um modelo de campos escalares cuja dinâmica está definida pela ação $S[\varphi]$ sem fontes externas, que é invariante pela troca de sinal do campo $S[\varphi] = S[-\varphi]$, implicando que $\langle \varphi \rangle = 0$. Adicionamos uma fonte externa ao modelo da forma

$$S_{(j)}[\varphi] = S[\varphi] - \sum_{\vec{n}} j(\vec{n})\varphi(\vec{n}). \quad (\text{A.1})$$

Com a introdução da fonte externa o valor esperado para o campo não é mais nulo. Este valor esperado é uma função de \vec{n} e um funcional de j , da forma

$$\varphi_{(c)}[j] = \langle \varphi(\vec{n}) \rangle_{(j)} = \frac{\int [\mathrm{d}\varphi] \varphi(\vec{n}) e^{-S_{(j)}}}{\int [\mathrm{d}\varphi] e^{-S_{(j)}}}. \quad (\text{A.2})$$

O índice j no valor esperado quer dizer que ele é calculado na distribuição da teoria com a fonte externa $S_{(j)}$. O valor esperado v é denotado por $\varphi_{(c)}$ que é denominado também de *campo clássico*.

Assumimos que o modelo está definido numa rede finita com condições de contorno periódicas. O gerador funcional é

$$Z[j] = \langle e^{\sum_{\vec{n}} j(\vec{n})\varphi(\vec{n})} \rangle = \frac{\int [d\varphi] e^{-S(\varphi)}}{\int [d\varphi] e^{-S}}. \quad (\text{A.3})$$

Consideraremos as derivadas funcionais de $Z[j]$ em relação a $j(\vec{n})$, ou seja, as variações de Z quando variamos j em um único ponto. Fazendo n derivadas funcionais de Z se obtém

$$\frac{\delta^n Z[j]}{\delta j_1 \dots \delta j_n} = \langle \varphi_1 \dots \varphi_n e^{\sum_{\vec{n}} j(\vec{n})\varphi(\vec{n})} \rangle = \frac{\int [d\varphi] \varphi_1 \dots \varphi_n e^{-S(\varphi)}}{\int [d\varphi] e^{-S}},$$

onde denotamos as dependências com as posições \vec{n}_i por meio de índices i . Com $j = 0$ recuperamos as funções de correlação de modelo sem fontes externas,

$$\frac{\delta^n Z[j]}{\delta j_1 \dots \delta j_n} \Big|_{j=0} = \langle \varphi_1 \dots \varphi_n \rangle = g_{1,\dots,n}, \quad (\text{A.4})$$

onde o índice n representa a quantidade de número de pontos que contem a função de correlação. No caso da presença de fontes externas j as funções de correlação são obtidos de

$$\frac{1}{Z[j]} \frac{\delta^n Z[j]}{\delta j_1 \dots \delta j_n} = \langle \varphi_1 \dots \varphi_n \rangle_{(j)} = \frac{\int [d\varphi] \varphi_1 \dots \varphi_n e^{-S(\varphi)}}{\int [d\varphi] e^{-S(\varphi)}} = g_{(j)1,\dots,n}, \quad (\text{A.5})$$

onde o índice (j) indica que o valor esperado é tomado na medida S_j .

O valor esperado $\varphi_{(c)}$ do campo é dado por

$$\varphi_{(c)1}[j] = \frac{1}{Z[j]} \frac{\delta Z[j]}{\delta j_1} = \frac{\delta}{\delta j_1} \ln(Z[j]).$$

Fazendo

$$W[j] = \ln(Z[j]),$$

o valor esperado $\varphi_{(c)}$ pode ser escrito como

$$\varphi_{(c)1}[j] = \langle \varphi_1 \rangle_{(j)} = \frac{\delta W[j]}{\delta j_1} = \frac{1}{Z[j]} \frac{\delta Z[j]}{\delta j_1}. \quad (\text{A.6})$$

W também é um gerador de funções de correlação. Neste caso W gera funções de correlação *conexas* $g_{(c)1,\dots,n}$, enquanto Z gera funções de correlação completas $g_{1,\dots,n}$.

Tomando uma segunda derivada funcional de W , partindo de (A.6) se obtém

$$\frac{\delta^2 W[j]}{\delta j_1 \delta j_2} = \frac{1}{Z[j]} \frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j_1 \delta j_2} - \frac{1}{Z^2[j]} \frac{\delta Z[j]}{\delta j_1} \frac{\delta Z[j]}{\delta j_2} = g_{(j)1,2} - \varphi_{(c)1} \varphi_{(c)2} = g_{(c,j)1,2}. \quad (\text{A.7})$$

Aqui $g_{(j)1,2}$ é o propagador completo na presença de j e $g_{(c,j)1,2}$ é o propagador conexo nas mesmas condições. Para o caso $j = 0$ os dois propagadores coincidem. Para $j \neq 0$, ou nos casos onde $j = 0$ não implica que $\varphi_{(c)=0}$, o resultado que interessa é o propagador conexo $g_{(c,j)1,2}$ dado por W e não o propagador completo $g_{(j)1,2}$ dado por Z . O funcional W pode ser utilizado para escrever as funções de correlação de três, quatro e mais pontos. Se pode escrever Z e W da forma

$$Z[j] = e^{W[j]} = \frac{\int [\mathbf{d}\varphi] e^{\sum_{\vec{n}} j(\vec{n})\varphi(\vec{n})} e^{-S}}{\int [\mathbf{d}\varphi] e^{-S}}.$$

Sabemos que existe uma relação entre cada j e cada $\varphi_{(c)}$, então somos levados a dizer que é possível escrever W como um funcional de $\varphi_{(c)}$ em vez de j . Da equação (A.6) a variação de j em cada ponto é escrita da forma de um *diferencial funcional*

$$dW = \sum_{\vec{n}} \frac{\delta W[j]}{\delta j(\vec{n})} dj(\vec{n}) = \sum_{\vec{n}} \varphi_{(c)}(\vec{n}) dj(\vec{n}),$$

sendo dj variações de j em todos os pontos da rede. Aplicando uma transformada de Legendre a W , pode-se definir um novo funcional Γ

$$\Gamma = \sum_{\vec{n}} j(\vec{n})\varphi_{(c)}(\vec{n}) - W[j].$$

O primeiro termo é o valor esperado de $\sum_{\vec{n}} j(\vec{n})\varphi(\vec{n})$, pois como j não depende de φ temos

$$\left\langle \sum_{\vec{n}} j(\vec{n})\varphi(\vec{n}) \right\rangle = \sum_{\vec{n}} \langle j(\vec{n})\varphi(\vec{n}) \rangle = \sum_{\vec{n}} j(\vec{n}) \langle \varphi(\vec{n}) \rangle = \sum_{\vec{n}} j(\vec{n})\varphi_{(c)}(\vec{n}).$$

A variação de Γ devida à variação de j e portanto de $\varphi_{(c)}$, é

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \sum_{\vec{n}} j(\vec{n}) d\varphi_{(c)}(\vec{n}) + \sum_{\vec{n}} \varphi_{(c)}(\vec{n}) dj(\vec{n}) - dW \\ &= \sum_{\vec{n}} j(\vec{n}) d\varphi_{(c)}(\vec{n}) + \sum_{\vec{n}} \varphi_{(c)}(\vec{n}) dj(\vec{n}) - \sum_{\vec{n}} \varphi_{(c)}(\vec{n}) dj(\vec{n}) \\ &= \sum_{\vec{n}} j(\vec{n}) d\varphi_{(c)}(\vec{n}), \end{aligned}$$

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3556 ex. 2

onde usamos a regra de Leibnitz e a forma diferencial de W . Conclui-se que Γ é um funcional diretamente de φ e, indiretamente de j , sendo que

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi_{(c)}]}{\delta\varphi_{(c)}} = j \quad (\text{A.8})$$

e

$$d\Gamma = \sum_{\vec{n}} j(\vec{n}) d\varphi_{(c)}(\vec{n}).$$

Agora os nossos funcionais podem ser escritos da forma

$$e^{W[j]} = e^{\sum_{\vec{n}} j(\vec{n})\varphi_{(c)}(\vec{n})} e^{-\Gamma[\varphi_{(c)}]} = \frac{\int [d\varphi] e^{\sum_{\vec{n}} j(\vec{n})\varphi(\vec{n})} e^{-S}}{\int [d\varphi] e^{-S}}.$$

O funcional $\Gamma[\varphi_{(c)}]$ é denominado de *ação efetiva* da teoria. A sua definição pode ser escrita da forma

$$e^{-\Gamma[\varphi_{(c)}]} = \left\langle e^{\sum_{\vec{n}} j(\vec{n})[\varphi(\vec{n}) - \varphi_{(c)}(\vec{n})]} \right\rangle = \frac{\int [d\varphi] e^{\sum_{\vec{n}} j(\vec{n})[\varphi(\vec{n}) - \varphi_{(c)}(\vec{n})]} e^{-S}}{\int [d\varphi] e^{-S}}. \quad (\text{A.9})$$

Nota-se que Γ é um funcional diretamente de $\varphi_{(c)}$ e não de j , de forma que as fontes externas que aparecem aqui são funcionais $j[\varphi_{(c)}]$.

Apêndice B

Alguns Cálculos

B.1 Variações de j e $\varphi_{(c)}$ Num Mesmo Ponto \vec{n}

Para podermos mostrar que as variações de $\varphi_{(c)}(\vec{n})$ e $j(\vec{n})$ em um mesmo ponto \vec{n} estão relacionados por

$$d\varphi_{(c)} = [\langle \varphi^2 \rangle_{(j)} - \langle \varphi \rangle_{(j)}^2] dj = \sigma_{(j)}^2 dj,$$

partiremos da definição de $\varphi_{(c)}[j]$, que foi dado na equação (A.2), na qual $\varphi_{(c)}[j]$ está em termos de j . A variação de $\varphi_{(c)}$ no ponto \vec{n}' é

$$d\varphi_{(c)}(\vec{n}') = \frac{\int [d\varphi(\vec{n})] e^{-S_{(j)}} \int [d\varphi(\vec{n})] \varphi(\vec{n}') \sum_{\vec{n}} dj(\vec{n}) \varphi(\vec{n}) e^{-S_{(j)}}}{\left\{ \int [d\varphi(\vec{n})] e^{-S_{(j)}} \right\}^2} - \frac{\int [d\varphi(\vec{n})] \varphi(\vec{n}') e^{-S_{(j)}} \int [d\varphi(\vec{n})] \sum_{\vec{n}} dj(\vec{n}) \varphi(\vec{n}) e^{-S_{(j)}}}{\left\{ \int [d\varphi(\vec{n})] e^{-S_{(j)}} \right\}^2}. \quad (\text{B.1})$$

Estamos interessados na variação de j no ponto \vec{n}' . Portanto só pegamos o termo em que $\vec{n} = \vec{n}'$ das somatórias de (B.1), obtendo

$$d\varphi_{(c)}(\vec{n}') = \frac{dj(\vec{n}') \int [d\varphi(\vec{n})] e^{-S_{(j)}} \int [d\varphi(\vec{n})] \varphi(\vec{n}') \varphi(\vec{n}') e^{-S_{(j)}}}{\left\{ \int [d\varphi(\vec{n})] e^{-S_{(j)}} \right\}^2}$$

$$\frac{\mathbf{d}j(\vec{n}') \int [\mathbf{d}\varphi(\vec{n})] \varphi(\vec{n}') e^{-S(\varphi)} \int [\mathbf{d}\varphi(\vec{n})] \varphi(\vec{n}') e^{-S(\varphi)}}{\left\{ \int [\mathbf{d}\varphi(\vec{n})] e^{-S(\varphi)} \right\}^2}, \quad (\text{B.2})$$

onde colocamos os termos que não dependem de φ fora da integral. Usando a definição (2.12), que é a definição de valor esperado de um certo funcional \mathcal{O} , em (B.2), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\varphi_{(c)}(\vec{n}') &= \langle \varphi(\vec{n}')^2 \rangle_{(j)} \mathbf{d}j(\vec{n}') - \langle \varphi(\vec{n}') \rangle_{(j)} \langle \varphi(\vec{n}') \rangle_{(j)} \mathbf{d}j(\vec{n}') \\ &= [\langle \varphi(\vec{n}')^2 \rangle_{(j)} - \langle \varphi(\vec{n}') \rangle_{(j)}^2] \mathbf{d}j(\vec{n}') \\ &= \sigma_{(j)}^2(\vec{n}') \mathbf{d}j(\vec{n}'). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Fica então demonstrado que as variações de $\varphi_{(c)}$ e j num mesmo ponto são dadas pela relação (B.3).

B.2 Cálculo da Ação Efetiva do Modelo Gaussiano

De igual forma às equações (2.7) e (2.8), podemos definir as transformadas finitas de Fourier de $\tilde{j}(\vec{k})$ em redes finitas com condições de contorno periódicas como

$$\tilde{j}(\vec{k}) = \frac{1}{N^d} \sum_{\vec{n}} e^{i\frac{2\pi}{N} \vec{k} \cdot \vec{n}} j(\vec{n}). \quad (\text{B.4})$$

Também pode-se fazer a transformação inversa para obter a fonte no espaço de coordenadas,

$$j(\vec{n}) = \sum_{\vec{k}} e^{-i\frac{2\pi}{N} \vec{k} \cdot \vec{n}} \tilde{j}(\vec{k}). \quad (\text{B.5})$$

As funções-modo da base de Fourier serão denotadas, por simplicidade, por

$$f_i(j) = e^{i\frac{2\pi}{N} \vec{n}_i \cdot \vec{k}_j}, \quad (\text{B.6})$$

e seus conjugados complexos por

$$f_i^*(j) = e^{-i\frac{2\pi}{N} \vec{n}_i \cdot \vec{k}_j}. \quad (\text{B.7})$$

Usando (B.5) e as funções-modo da base de Fourier na definição da ação efetiva do modelo Gaussiano dado por (3.1), obtém-se

$$\Gamma[\varphi_{(c)1}] = -\ln \left\{ \frac{\int [\mathbf{d}\varphi] e^{\sum_1 j_1 [\varphi_1 - \varphi_{(c)1}]} e^{-S_0[\varphi_1]}}{\int [\mathbf{d}\varphi] e^{-S_0[\varphi_1]}} \right\}. \quad (\text{B.8})$$

Aqui estamos usando a notação usada no apêndice A, onde as dependências com as posições \vec{n}_i dos sítios são denotadas por índices. Transformando a expressão (B.8) ao espaço dos momentos, para a qual usamos as equações (B.5) e (2.8), chegamos a

$$\Gamma = -\ln \left\{ \frac{\int [\mathbf{d}\tilde{\varphi}] e^{\sum_1 \sum_{\vec{k}} f_1^*(1) \tilde{j}(\vec{k}) [\sum_{\vec{k}_2} f_1^*(2) \tilde{\varphi}(\vec{k}_2) - \sum_{\vec{k}_3} f_1^*(3) \tilde{\varphi}_{(c)}(\vec{k}_3)]} e^{-S_0[\tilde{\varphi}(\vec{k})]}}{\int [\mathbf{d}\tilde{\varphi}] e^{-S_0[\tilde{\varphi}(\vec{k})]}} \right\}, \quad (\text{B.9})$$

o termo $S_0[\tilde{\varphi}]$ é dado pela equação (2.15) que é a ação do modelo Gaussiano no espaço dos momentos. Os termos no argumento da exponencial do numerador de (B.9) são denotados por R , a qual pode ser ordenado da forma

$$R = \sum_{\vec{k}, \vec{k}_2} \sum_1 f_1^*(1) f_1^*(2) \tilde{j}(\vec{k}) \tilde{\varphi}(\vec{k}_2) - \sum_{\vec{k}, \vec{k}_3} \sum_1 f_1^*(1) f_1^*(3) \tilde{j}(\vec{k}) \tilde{\varphi}_{(c)}(\vec{k}_3) - S_0[\tilde{\varphi}(\vec{k})].$$

Usando a equação de ortogonalidade (2.9) esta expressão fica da forma

$$\begin{aligned} R &= N^d \sum_{\vec{k}, \vec{k}_2} \delta_{-\vec{k}, \vec{k}_2} \tilde{j}(\vec{k}) \tilde{\varphi}(\vec{k}_2) - N^d \sum_{\vec{k}, \vec{k}_3} \delta_{-\vec{k}, \vec{k}_3} \tilde{j}(\vec{k}) \tilde{\varphi}(\vec{k}_3) - S_0[\tilde{\varphi}(\vec{k})] \\ &= N^d \sum_{\vec{k}} \tilde{j}(\vec{k}) \tilde{\varphi}^*(\vec{k}) - N^d \sum_{\vec{k}} \tilde{j}(\vec{k}) \tilde{\varphi}_{(c)}^*(\vec{k}) - S_0[\tilde{\varphi}(\vec{k})]. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Não é difícil mostrar usando as equações (2.7) e (B.4) que a expressão $\sum_{\vec{k}} \tilde{j}(\vec{k}) \tilde{\varphi}^*(\vec{k})$ é real, portanto esta expressão é equivalente a $1/2 \sum_{\vec{k}} [\tilde{j}(\vec{k}) \tilde{\varphi}^*(\vec{k}) + \tilde{j}^*(\vec{k}) \tilde{\varphi}(\vec{k})]$. Usando esta expressão equivalente em (B.10), obtemos

$$\begin{aligned} R &= \frac{N^d}{2} \sum_{\vec{k}} [\tilde{j}(\vec{k}) \tilde{\varphi}^*(\vec{k}) + \tilde{j}^*(\vec{k}) \tilde{\varphi}(\vec{k})] - N^d \sum_{\vec{k}} \tilde{j}(\vec{k}) \tilde{\varphi}_{(c)}^*(\vec{k}) \\ &\quad - \frac{N^d}{2} \sum_{\vec{k}} [\rho^2(\vec{k}) + \alpha_0] |\tilde{\varphi}(\vec{k})|^2. \end{aligned}$$

Agora fazemos uma mudança de variável da forma $\tilde{\varphi}(\vec{k}) = \tilde{\chi}(\vec{k}) + \tilde{j}(\vec{k}) / [\rho^2(\vec{k}) + \alpha_0]$. Usando esta nova variável e efetuando algumas simplificações, obtemos

$$R = -N^d \sum_{\vec{k}} \tilde{j}(\vec{k}) \tilde{\varphi}_{(c)}^*(\vec{k}) + \frac{N^d}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{|\tilde{j}(\vec{k})|^2}{[\rho^2(\vec{k}) + \alpha_0]} - \frac{N^d}{2} \sum_{\vec{k}} [\rho^2(\vec{k}) + \alpha_0] |\tilde{\chi}(\vec{k})|^2.$$

Colocando R em (B.9) obtemos

$$\Gamma[\tilde{\varphi}_{(c)}(\vec{k})] = -\ln \left\{ \frac{e^{-N^d \sum_{\vec{k}} \tilde{j}(\vec{k}) \tilde{\varphi}_{(c)}^*(\vec{k}) + \frac{N^d}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{|\tilde{j}(\vec{k})|^2}{[\rho^2(\vec{k}) + \alpha_0]}} \int [d\tilde{\varphi}(\vec{k})] e^{-\frac{N^d}{2} \sum_{\vec{k}} [\rho^2(\vec{k}) + \alpha_0] |\tilde{\varphi}(\vec{k})|^2}}}{\int [d\tilde{\varphi}(\vec{k})] e^{-\frac{N^d}{2} \sum_{\vec{k}} [\rho^2(\vec{k}) + \alpha_0] |\tilde{\varphi}(\vec{k})|^2}} \right\}, \quad (\text{B.11})$$

onde estamos colocando os termos que não dependem de $\tilde{\varphi}(\vec{k})$ fora da integral. As integrais do numerador e denominador de (B.11) cancelam-se resultando em

$$\begin{aligned} \Gamma[\tilde{\varphi}_{(c)}(\vec{k})] &= -\ln \left\{ e^{-N^d \sum_{\vec{k}} \tilde{j}(\vec{k}) \tilde{\varphi}_{(c)}^*(\vec{k}) + \frac{N^d}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{|\tilde{j}(\vec{k})|^2}{[\rho^2(\vec{k}) + \alpha_0]}} \right\} \\ &= N^d \sum_{\vec{k}} \tilde{j}(\vec{k}) \tilde{\varphi}_{(c)}^*(\vec{k}) - \frac{N^d}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{|\tilde{j}(\vec{k})|^2}{[\rho^2(\vec{k}) + \alpha_0]}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Para o modelo Gaussiano, a referencia [5] mostra detalhadamente que a teoria quântica estabelece uma relação funcional entre o valor esperado $\varphi_{(c)}$ do campo e a fonte externa, dada por

$$\tilde{\varphi}_{(c)}(\vec{k}) = \frac{\tilde{j}(\vec{k})}{\rho^2(\vec{k}) + \alpha_0}.$$

Usando esta relação em (B.12) obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma[\tilde{\varphi}_{(c)}(\vec{k})] &= N^d \sum_{\vec{k}} \frac{\tilde{j}(\vec{k}) \tilde{j}^*(\vec{k})}{[\rho^2(\vec{k}) + \alpha_0]} - \frac{N^d}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{|\tilde{j}(\vec{k})|^2}{[\rho^2(\vec{k}) + \alpha_0]} \\ &= \frac{N^d}{2} \sum_{\vec{k}} [\rho^2(\vec{k}) + \alpha_0] |\tilde{\varphi}_{(c)}(\vec{k})|^2, \end{aligned}$$

onde vê-se que esta expressão tem a mesma forma de (2.15), só que com $\tilde{\varphi}_{(c)}(\vec{k})$. Portanto a ação efetiva do modelo Gaussiano no espaço das posições é

$$\Gamma[\varphi_{(c)}(\vec{n})] = \sum_{\vec{n}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu} [\Delta_{\mu} \varphi_{(c)}(\vec{n})]^2 + \frac{\alpha_0}{2} \varphi_{(c)}^2(\vec{n}) \right\}.$$

B.3 Cálculo da Constante de Acoplamento Renormalizada λ_R

Para podermos calcular λ_R em termos de observáveis do modelo, valeremos-nos do formalismo de geradores funcionais e da ação efetiva, que foi discutido no apêndice A e na seção (3.1) respectivamente.

Sabemos que o modelo $\lambda\varphi^4$ está baseada nas iterações de quatro ou mais pontos, as quais estão relacionadas com os fenômenos de interação entre ondas ou entre partículas no modelo, de tal forma que devemos obter de $W[j]$ a função de quatro pontos para vermos a seguir.

Para podermos calcular esta função de correlação, calculamos primeiramente a terceira derivada funcional de W , valendo-nos da segunda derivada funcional de $W[j]$ obtido em (A.7), de onde obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^3 W[j]}{\delta j_1 \delta j_2 \delta j_3} &= \frac{\delta}{\delta j_1} \left\{ \frac{1}{Z[j]} \frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j_2 \delta j_3} - \frac{1}{Z^2[j]} \frac{\delta Z[j]}{\delta j_2} \frac{\delta Z[j]}{\delta j_3} \right\} \\
&= \frac{1}{Z[j]} \frac{\delta^3 Z[j]}{\delta j_1 \delta j_2 \delta j_3} - \frac{1}{Z^2[j]} \frac{Z[j]}{\delta j_1} \frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j_2 \delta j_3} \\
&\quad - \frac{1}{Z^2[j]} \frac{\delta Z[j]}{\delta j_2} \frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j_1 \delta j_3} - \frac{1}{Z^2[j]} \frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j_1 \delta j_2} \frac{\delta Z[j]}{\delta j_3} - \frac{2}{Z^3[j]} \frac{\delta Z[j]}{\delta j_1} \frac{\delta Z[j]}{\delta j_2} \frac{\delta Z[j]}{\delta j_3} \\
&= g_{(j)1,2,3} - \varphi_{(c)1} g_{(j)2,3} - \varphi_{(c)2} g_{(j)1,3} - \varphi_{(c)3} g_{(j)1,2} + 2 \varphi_{(c)1} \varphi_{(c)2} \varphi_{(c)3} \\
&= g_{(j)1,2,3} - g_{(c,j)1,2} \varphi_{(c)3} - g_{(c,j)2,3} \varphi_{(c)1} - g_{(c,j)3,1} \varphi_{(c)2} - \varphi_{(c)1} \varphi_{(c)2} \varphi_{(c)3} \\
&= g_{(c,j)1,2,3} .
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Lembramos que estamos denotando o valor esperado do campo v , por $\varphi_{(c)}$, e as dependências com as posições \vec{n}_i dos sítios por índices, $\varphi_{(c)}(\vec{n}_1) = \varphi_{(c)1}$.

Para calcular a quarta derivada funcional partimos de $g_{(c,j)1,2,3}$, obtendo

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^4 W[j]}{\delta j_1 \delta j_2 \delta j_3 \delta j_3} &= \frac{\delta g_{(c,j)2,3,4}}{\delta j_1} \\
&= g_{(j)1,2,3,4} \\
&\quad - [g_{(c,j)2,3,4} \varphi_{(c)1} + g_{(c,j)1,3,4} \varphi_{(c)2} + g_{(c,j)1,2,4} \varphi_{(c)3} + g_{(c,j)1,2,3} \varphi_{(c)4}] \\
&\quad - [g_{(c,j)1,2} g_{(c,j)3,4} + g_{(c,j)1,3} g_{(c,j)2,4} + g_{(c,j)1,4} g_{(c,j)2,3}] \\
&\quad - [g_{(c,j)1,2} \varphi_{(c)3} \varphi_{(c)4} + g_{(c,j)1,3} \varphi_{(c)2} \varphi_{(c)4} + g_{(c,j)1,4} \varphi_{(c)2} \varphi_{(c)3} \\
&\quad + g_{(c,j)2,3} \varphi_{(c)1} \varphi_{(c)4} + g_{(c,j)2,4} \varphi_{(c)1} \varphi_{(c)3} + g_{(c,j)3,4} \varphi_{(c)1} \varphi_{(c)2}] \\
&\quad - \varphi_{(c)1} \varphi_{(c)2} \varphi_{(c)3} \varphi_{(c)4} \\
&= g_{(c,j)1,2,3,4} .
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Para relacionar (B.14) com a constante de acoplamento renormalizada, valeremos-nos do discutido na seção (3.1), sobre a ação efetiva e em especial a seção (3.2) onde a constante de acoplamento renormalizada aparece na ação efetiva (3.14).

Partindo da equação (3.9) pode-se escrever, com algumas mudanças de índices e uma soma adicional sobre a rede, a equação

$$\sum_{3,4} g_{(c,j)1,3} g_{(c,j)2,4} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi_{(c)}]}{\delta \varphi_{(c)3} \delta \varphi_{(c)4}} = g_{(c,j)1,2} .$$

Diferenciando isto mais uma vez em relação a j , e usando em seguida a regra da cadeia para re-escrever as derivadas em relação a $\varphi_{(c)}$, como se fez na dedução da equação (3.9), obtemos

$$\sum_{4,5,6} g_{(c,j)1,4} g_{(c,j)2,5} g_{(c,j)3,6} \frac{\delta^3 \Gamma[\varphi_{(c)}]}{\delta \varphi_{(c)4} \delta \varphi_{(c)5} \delta \varphi_{(c)6}} = -g_{(c,j)1,2,3}. \quad (\text{B.15})$$

Isto nos mostra que a derivada funcional tripla de $\Gamma[\varphi_{(c)}]$ está relacionada com a função conexa de três pontos. Em uma linguagem diagramática, podemos dizer que a derivada funcional tripla é um *vértice* do qual saem três *pernas externas* representadas pelos três propagadores que funcionam como funções de transformação, sendo este conjunto de elementos equivalente à função conexa de três pontos. Na Fig.B.1 ilustramos o diagrama correspondente. Diferenciando mais uma vez a expressão (B.15) e depois de alguns cálculos obtém-se

$$\begin{aligned} & \sum_{5,6,7,8} g_{(c,j)1,5} g_{(c,j)2,6} g_{(c,j)3,7} g_{(c,j)4,8} \frac{\delta^4 \Gamma[\varphi_{(c)}]}{\delta \varphi_{(c)5} \delta \varphi_{(c)6} \delta \varphi_{(c)7} \delta \varphi_{(c)8}} \\ &= -g_{(c,j)1,2,3,4} + \sum_{5,6} g_{(c,j)1,2,5} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi_{(c)}]}{\delta \varphi_{(c)5} \delta \varphi_{(c)6}} g_{(c,j)3,4,6} \\ & \quad + \sum_{5,6} g_{(c,j)1,3,5} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi_{(c)}]}{\delta \varphi_{(c)5} \delta \varphi_{(c)6}} g_{(c,j)2,4,6} \\ & \quad + \sum_{5,6} g_{(c,j)1,4,5} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi_{(c)}]}{\delta \varphi_{(c)5} \delta \varphi_{(c)6}} g_{(c,j)2,3,6}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

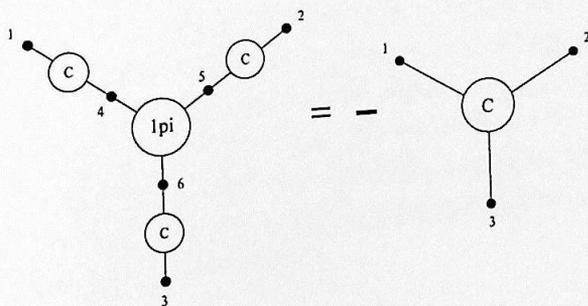


Figura B.1: Representação diagramática da equação para a função de três pontos.

A interpretação diagramática da relação (B.16) é mostrada na Fig.B.2, onde $\square_{(c)}$ representa o inverso do propagador. Neste diagrama pode-se ver que os três últimos termos corresponde a todas as formas possíveis de se construir um processo de quatro pontos com as funções conexas de três pontos e no máximo um $\square_{(c)}$. Devido a isto as funções geradas diretamente por $\Gamma[\varphi_{(c)}]$ são chamadas de "one particle irreducible" ou "1pi", ou seja, são as funções irredutíveis ou que não podem ser separadas em outras pela retirada

de uma linha interna. As versões adimensionais destas funções serão denotadas por γ , com variáveis de posição como argumentos,

$$\frac{\delta^n \Gamma[\varphi(c)]}{\delta \varphi(c)_1 \dots \delta \varphi(c)_n} = \gamma(\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_n) = \gamma_{1, \dots, n}.$$

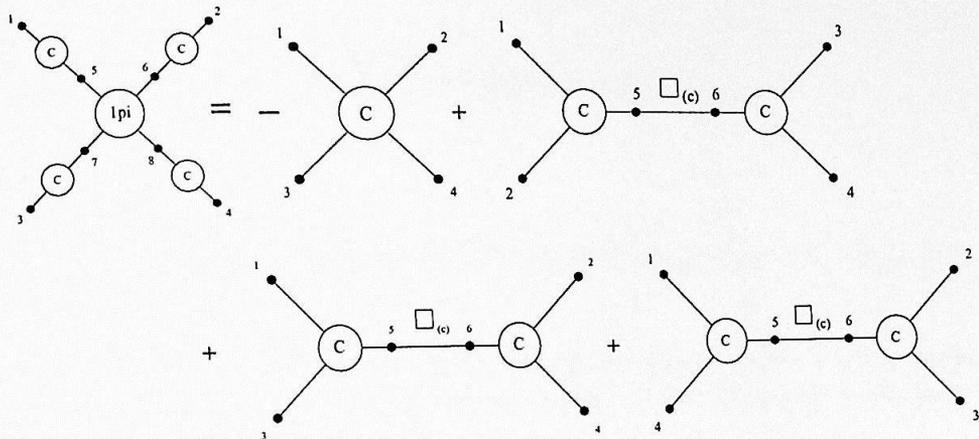


Figura B.2: Representação diagramática da equação para a função de quatro pontos.

Para o caso $j = 0$ temos que $\varphi(c) = 0$ e $g_{(c)1,2,3} = 0$, porque no nosso modelo não temos iterações de três pontos. Neste caso a equação (B.16) pode ser simplificada para

$$\sum_{5,6,7,8} g_{(c)1,5} g_{(c)2,6} g_{(c)3,7} g_{(c)4,8} \frac{\delta^4 \Gamma[\varphi(c)]}{\delta \varphi(c)_5 \delta \varphi(c)_6 \delta \varphi(c)_7 \delta \varphi(c)_8} = -g_{(c)1,2,3,4}. \quad (B.17)$$

É claro que a derivada funcional quádrupla tem o efeito de extrair do termo quártico de $\Gamma[\varphi(c)]$ o seu coeficiente, que será justamente a constante de acoplamento renormalizada. Para podermos fazer isto temos que isolar $\gamma_{5,6,7,8}$, que é a função "1pi", da relação (B.17). Para podermos isolar "1pi" re-escrevemos a equação (B.17) no espaço de momentos. Multiplicamos os dois membros da equação (B.17) pelas funções-modo da base de Fourier $f_1(1)$, $f_2(2)$, $f_3(3)$ e $f_4(4)$; multiplicamos também por $1/N^{4d}$ e pelas somatórias \sum_1 , \sum_2 , \sum_3 e \sum_4 , obtendo-se

$$\begin{aligned} & \sum_{5,6,7,8} \frac{1}{N^d} \sum_1 f_1(1) g_{(c)1,5} \frac{1}{N^d} \sum_2 f_2(2) g_{(c)2,6} \frac{1}{N^d} \sum_3 f_3(3) g_{(c)3,7} \frac{1}{N^d} \sum_4 f_4(4) g_{(c)4,8} \gamma_{5,6,7,8} \\ & = -\frac{1}{N^{4d}} \sum_{1,2,3,4} f_1(1) f_2(2) f_3(3) f_4(4) g_{(c)1,2,3,4}. \end{aligned} \quad (B.18)$$

Para uma função F de n variáveis de posição \vec{n}_i , a expressão no espaço de momentos é escrita como

$$\frac{1}{N^{nd}} \sum_{1, \dots, n} f_1(1) \dots f_n(n) F_{1, \dots, n} = \tilde{F}_{1, \dots, n}. \quad (\text{B.19})$$

Para podermos representar a relação (B.17) no espaço de momentos nos valeremos da expressão (B.19) e da invariância discreta de translação na rede, que é dada pela seguinte relação

$$\frac{1}{N^d} \sum_1 f_1(1) g_{(c)1,2} = f_2(1) \tilde{g}_{(c)1},$$

obtendo-se

$$\sum_{5,6,7,8} f_5(1) \tilde{g}_{(c)1} f_6(2) \tilde{g}_{(c)2} f_7(3) \tilde{g}_{(c)3} f_8(4) \tilde{g}_{(c)4} \gamma_{5,6,7,8} = -\tilde{g}_{(c)1,2,3,4}.$$

Os propagadores $\tilde{g}_{(c)}$ são independentes das somatórias, então os colocamos fora das somatórias e, multiplicando os dois membros por $1/N^{4d}$, obtemos a seguinte expressão

$$\tilde{g}_{(c)1} \tilde{g}_{(c)2} \tilde{g}_{(c)3} \tilde{g}_{(c)4} \frac{1}{N^{4d}} \sum_{5,6,7,8} f_5(1) f_6(2) f_7(3) f_8(4) \gamma_{5,6,7,8} = -\frac{1}{N^{4d}} \tilde{g}_{(c)1,2,3,4}. \quad (\text{B.20})$$

Usando (B.19) temos que

$$\frac{1}{N^{4d}} \sum_{5,6,7,8} f_5(1) f_6(2) f_7(3) f_8(4) \gamma_{5,6,7,8} = \tilde{\gamma}_{1,2,3,4},$$

usando esta expressão em (B.20) temos

$$\tilde{g}_{(c)1} \tilde{g}_{(c)2} \tilde{g}_{(c)3} \tilde{g}_{(c)4} N^{4d} \tilde{\gamma}_{1,2,3,4} = -\tilde{g}_{(c)1,2,3,4},$$

estamos denotando as coordenadas de momento por índices onde $\tilde{g}_{(c)1} = \tilde{g}_{(c)}(\vec{k}_1)$ é o propagador no espaço de momentos. Como os propagadores no espaço de momentos não se anulam, podemos agora isolar a função "1pi", escrevendo-a na forma

$$\tilde{\gamma}_{1,2,3,4} = \frac{-1}{N^{4d}} \frac{\tilde{g}_{(c)1,2,3,4}}{\tilde{g}_{(c)1} \tilde{g}_{(c)2} \tilde{g}_{(c)3} \tilde{g}_{(c)4}}. \quad (\text{B.21})$$

Temos aqui a função "1pi" escrita em termos de valores esperados do modelo no espaço de momentos.

Ao se tomar as derivadas funcionais da ação efetiva $\Gamma[\varphi'_{(c)}]$ dado na equação (3.15), considerando que estamos interessados no caso $j = 0$, devemos perceber que está implícito que devemos colocar $\varphi'_{(c)} = 0$ ao final dos cálculos, pois este é o valor que corresponde à condição $j = 0$ neste modelo. Os termos quadráticos da ação efetiva $\Gamma[\varphi'_{(c)}]$ se

anularão quando tomarmos as derivadas, enquanto que os termos com potências maiores que cinco se anularão devido à condição $\varphi'_{(c)} = 0$, então podemos considerar só o termo da ação efetiva contendo quatro potências do campo e nenhuma derivada,

$$V_{(4)}[\varphi'_{(c)}] = \frac{\lambda_R}{4} \sum_0 \varphi'_{(c)0}{}^4,$$

que é o termo do potencial efetivo que é relevante para momento zero. Tomando a primeira derivada obtemos

$$\frac{\delta V_{(4)}}{\delta \varphi'_{(c)1}} = \lambda_R \sum_0 \varphi'_{(c)0}{}^3 \delta_{0,1} = \lambda_R \varphi'_{(c)1}{}^3.$$

Multiplicando esta equação por $f_1(1)$ e somando em seguida sobre a variável \vec{n}_1 e diferenciando uma segunda vez obtemos

$$\sum_1 f_1(1) \frac{\delta^2 V_{(4)}}{\delta \varphi'_{(c)1} \delta \varphi'_{(c)2}} = \lambda_R \sum_1 f_1(1) 3 \varphi'_{(c)1}{}^2 \delta_{1,2} = 3 \lambda_R f_2(1) \varphi'_{(c)2}{}^2.$$

Multiplicando agora por $f_2(2)$, somando sobre a variável \vec{n}_2 e diferenciando uma terceira vez obtemos

$$\sum_{1,2} f_1(1) f_2(2) \frac{\delta^3 V_{(4)}}{\delta \varphi'_{(c)1} \delta \varphi'_{(c)2} \delta \varphi'_{(c)3}} = 3 \lambda_R \sum_2 f_2(2) f_2(1) 2 \varphi'_{(c)2} \delta_{2,3} = 6 \lambda_R f_3(2) f_3(1) \varphi'_{(c)3}.$$

Repetindo o procedimento uma quarta e última vez obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{1,2,3} f_1(1) f_2(2) f_3(3) \frac{\delta^4 V_{(4)}}{\delta \varphi'_{(c)1} \delta \varphi'_{(c)2} \delta \varphi'_{(c)3} \delta \varphi'_{(c)4}} &= 6 \lambda_R \sum_3 f_3(3) f_3(2) f_3(1) \delta_{3,4} \\ &= 6 \lambda_R f_4(3) f_4(2) f_4(1). \end{aligned}$$

Multiplicando por $f_4(4)$ e somando sobre \vec{n}_4 obtemos para a quarta derivada funcional de V_4

$$\sum_{1,2,3,4} f_1(1) f_2(2) f_3(3) f_4(4) \frac{\delta^4 V_{(4)}}{\delta \varphi'_{(c)1} \delta \varphi'_{(c)2} \delta \varphi'_{(c)3} \delta \varphi'_{(c)4}} = 6 \lambda_R \sum_4 f_4(4) f_4(3) f_4(2) f_4(1).$$

Como esta quarta derivada funcional é igual à função "1pi" de quatro pontos, obtemos

$$\sum_{1,2,3,4} f_1(1) f_2(2) f_3(3) f_4(4) \gamma_{1,2,3,4} = 6 \lambda_R \sum_4 f_4(4) f_4(3) f_4(2) f_4(1).$$

No lado esquerdo desta equação temos N^{4d} vezes a transformada de Fourier quádrupla de $\gamma_{1,2,3,4}$, enquanto do lado direito, lembrando que as funções-modo $f_i(j)$ são exponenciais que satisfazem a relações de ortogonalidade e completicidade, temos N^d vezes uma função delta de Kronecker que expressa a conservação de momento, ou seja

$$N^{4d} \tilde{\gamma}_{1,2,3,4} = 6 \lambda_R N^d \delta_{1+2+3+4}^d.$$

Combinando agora esta equação com a equação (B.21) obtemos a relação final entre a constante de acoplamento renormalizada e as funções de correlação conexas,

$$\lambda_R \delta_{1+2+3+4}^d = -\frac{1}{6} \frac{1}{N^d} \frac{\tilde{g}_{(c)1,2,3,4}}{\tilde{g}_{(c)1} \tilde{g}_{(c)2} \tilde{g}_{(c)3} \tilde{g}_{(c)4}}. \quad (\text{B.22})$$

Para combinações dos momentos que satisfaçam à condição de conservação $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4 = \vec{0}$ a função delta é simplesmente 1 e, assumindo implicitamente a conservação de momento, podemos escrever

$$\lambda_R = -\frac{1}{6} \frac{1}{N^d} \frac{\tilde{g}_{(c)1,2,3,4}}{\tilde{g}_{(c)1} \tilde{g}_{(c)2} \tilde{g}_{(c)3} \tilde{g}_{(c)4}}.$$

Naturalmente, como negligenciamos os termos em $\Gamma[\varphi'_{(c)}]$ com potências maiores dos momentos, esta relação só faz sentido para momentos pequenos. Tomamos portanto o caso de momento zero $\vec{k}_1 = \vec{k}_2 = \vec{k}_3 = \vec{k}_4 = \vec{0}$ para obter, substituindo as funções conexas em termos das funções completas,

$$\lambda_R = \frac{1}{6N^d} \frac{3\langle |\tilde{\varphi}(\vec{0})|^2 \rangle^2 - \langle |\tilde{\varphi}(\vec{0})|^4 \rangle}{\langle |\tilde{\varphi}(\vec{0})|^2 \rangle^4}. \quad (\text{B.23})$$

B.4 Cálculo da Média e Módulo da Soma de Vetores Definidos Sobre a Esfera Unitária $S_{\mathcal{N}-1}$

Denotaremos as componentes dos vetores definidos sobre a esfera unitária por \vec{r}_{l_i} , com $i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$ sendo \mathcal{N} a dimensão da esfera unitária e $l = 1, 2, \dots, n$ onde n é o número de vetores definidos na esfera unitária. O módulo da soma de vetores definidos na esfera é

$$|\vec{r}| = \left| \sum_{l=1}^n (r_{l_1}, r_{l_2}, \dots, r_{l_{\mathcal{N}}}) \right|. \quad (\text{B.24})$$

Sabemos que o módulo de cada um dos vetores definidos na esfera é $|\vec{r}_{l_i}| = 1$, isto é devido ao vínculo $\vec{\psi} \cdot \vec{\psi} = 1$. O máximo valor que pode assumir (B.24) é quando todos os vetores estão alinhados num mesmo sentido. Supondo que todos os vetores estão alinhados na componente \mathcal{N} , então, neste caso o módulo da soma dos vetores é

$$|\vec{r}| = \left| \sum_{l=1}^n \vec{r}_{l_{\mathcal{N}}} \right| = \sum_{l=1}^n |\vec{r}_{l_i}|. \quad (\text{B.25})$$

Como todos os vetores tem módulo igual a um, então de (B.25) obtemos que

$$|\vec{r}| = n. \quad (\text{B.26})$$

E a média destes vetores é

$$|\bar{\vec{r}}| = \frac{|\vec{r}|}{n} = 1.$$

Para todos os casos em que os vetores não estejam alinhados num mesmo sentido o módulo da soma destes vetores será menor que n e a média destes vetores será menor que 1.

Apêndice C

Gráficos dos Resultados

Nesta seção apresentamos os dados obtidos nas simulações, para redes com condições de contorno periódicas com $N = 4$, $d = 3$ e $d = 4$. Mostramos, a massa renormalizada (α_R) em função de β e a magnetização (v) em função de β , para cada uma das fontes externas. Em cada um das figuras apresentamos os pontos de medida que são os pontos que nos interessa, estes pontos são α_{R_0} e o valor de v no ponto β_{0_j} . Quando α_R tem como valor α_{R_0} , a este ponto corresponde um β_{0_j} .

⊙ Para Dimensão 3

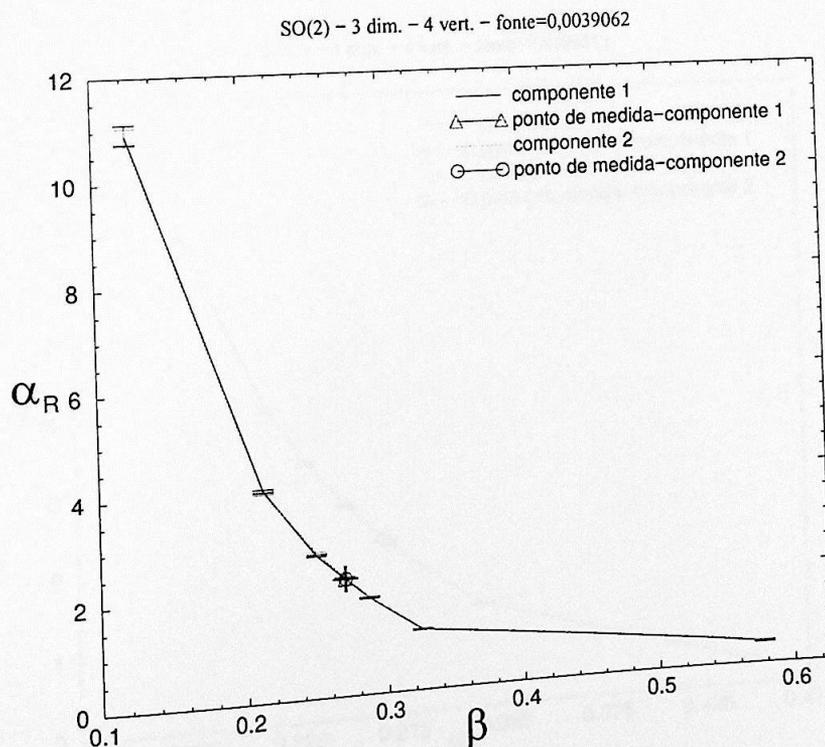


Figura C.1: Massa renormalizada em função de β .

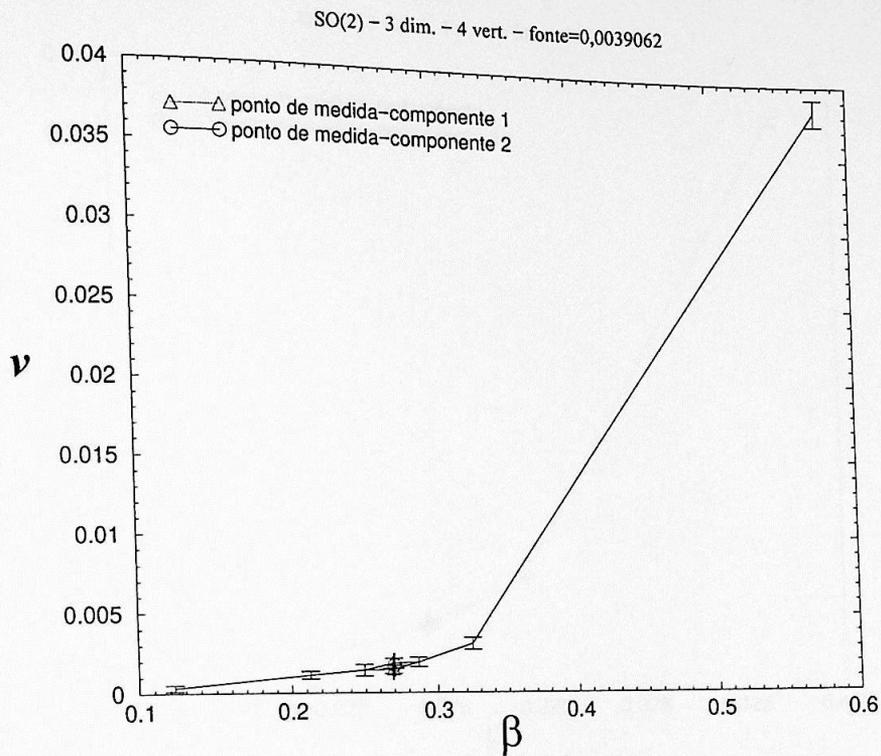


Figura C.2: Magnetização (v) em função de β .

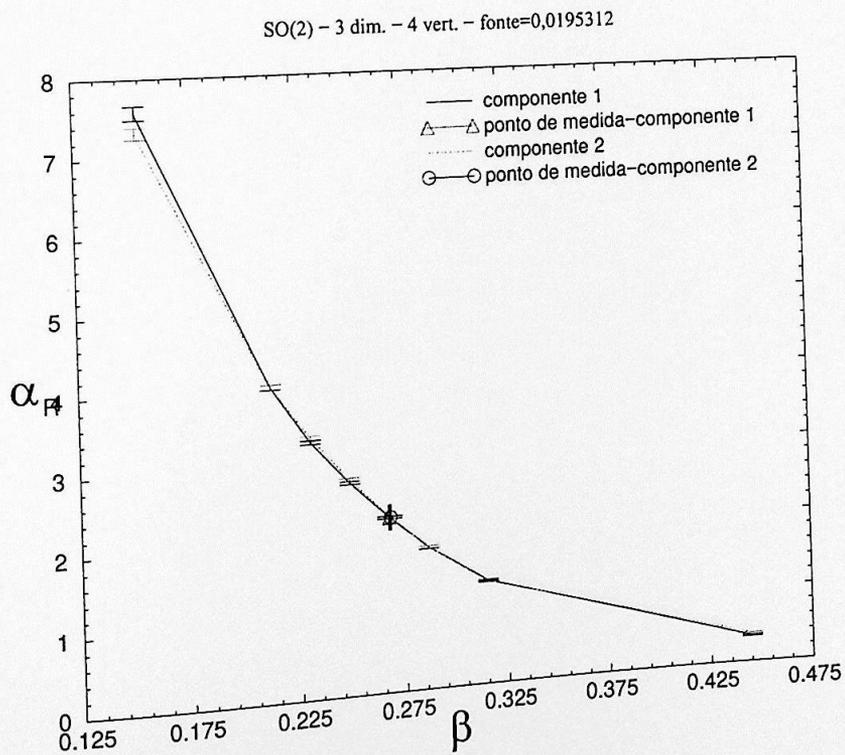


Figura C.3: Massa renormalizada em função de β .

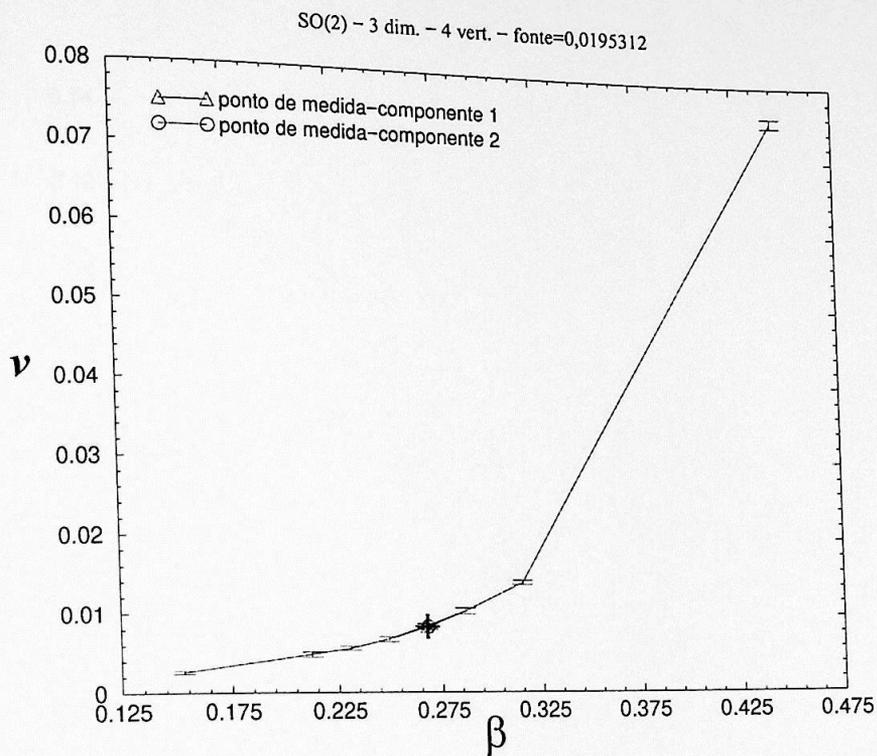


Figura C.4: Magnetização (v) em função de β .

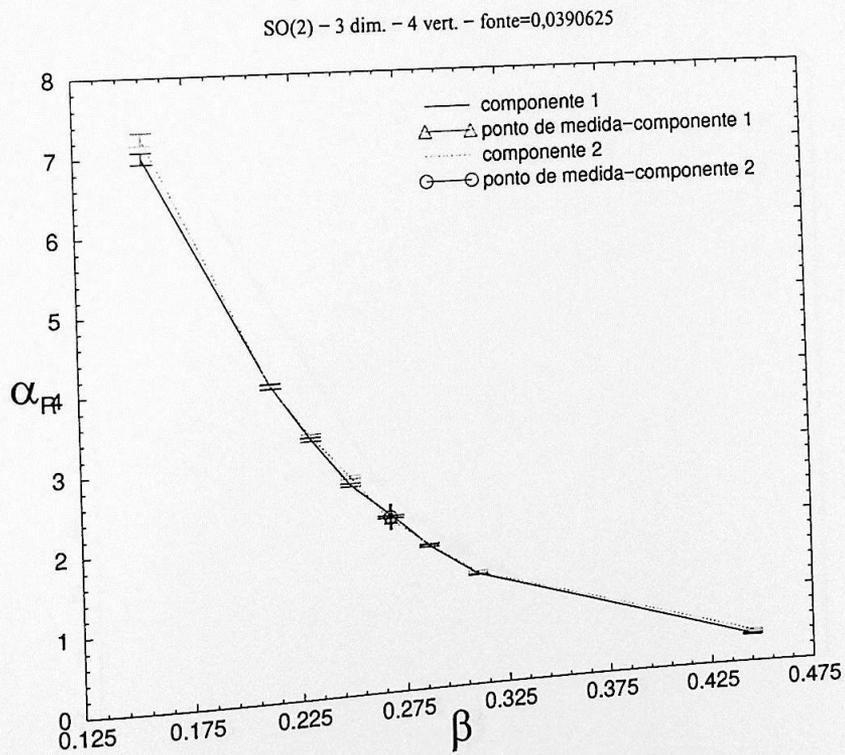


Figura C.5: Massa renormalizada em função de β .

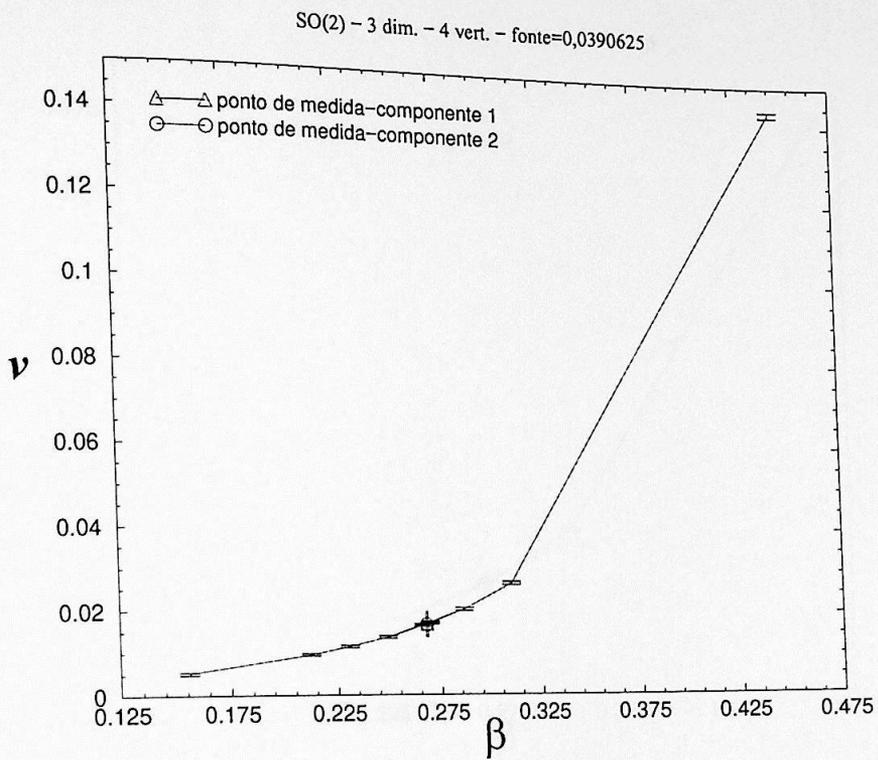


Figura C.6: Magnetização (v) em função de β .

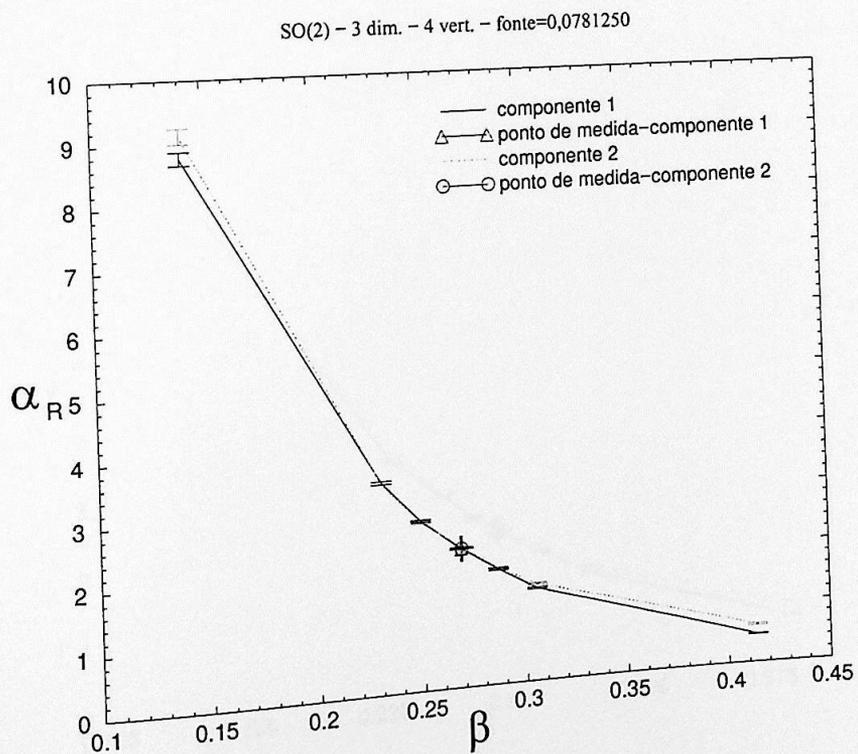


Figura C.7: Massa renormalizada em função de β .

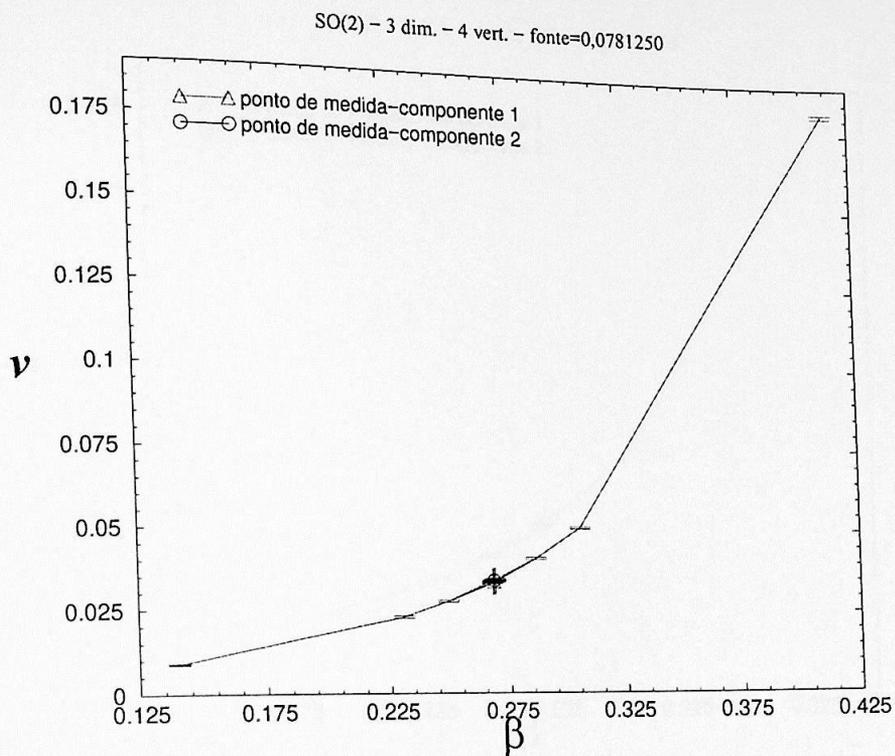


Figura C.8: Magnetização (v) em função de β .

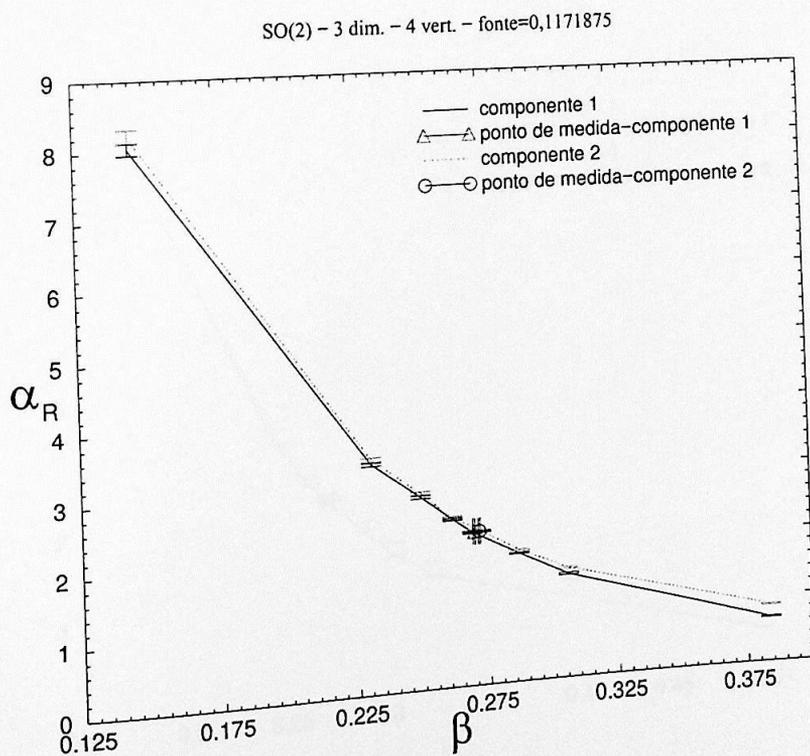


Figura C.9: Massa renormalizada em função de β .

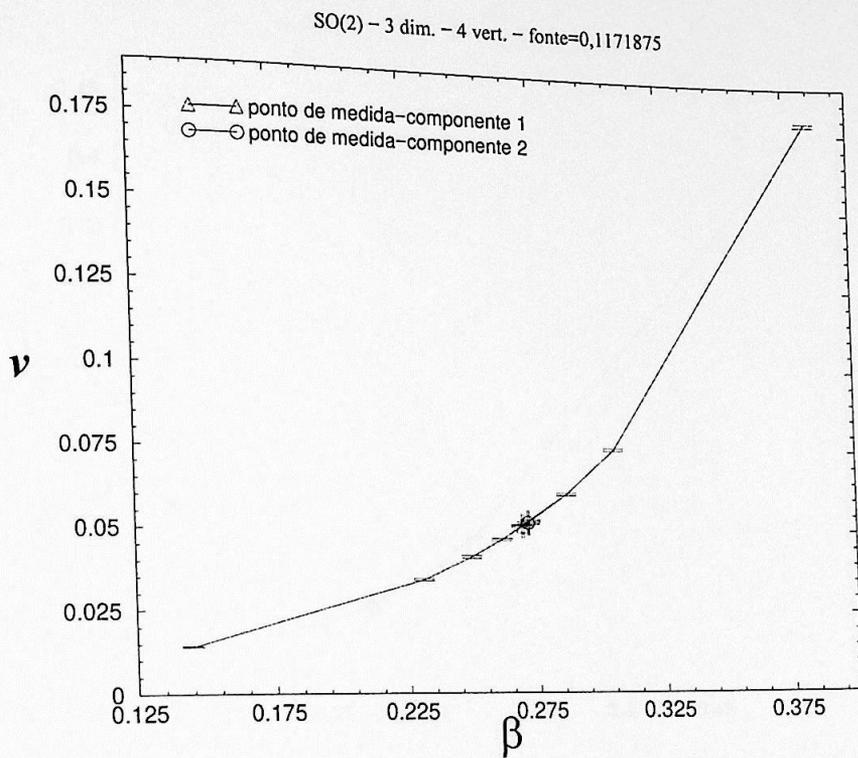


Figura C.10: Magnetização (v) em função de β .

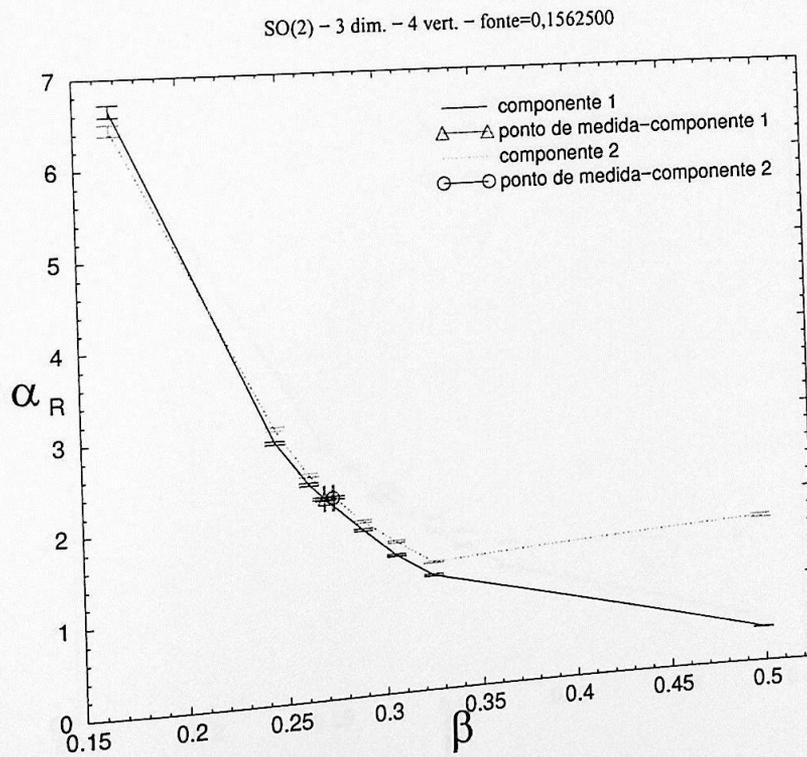


Figura C.11: Massa renormalizada em função de β .

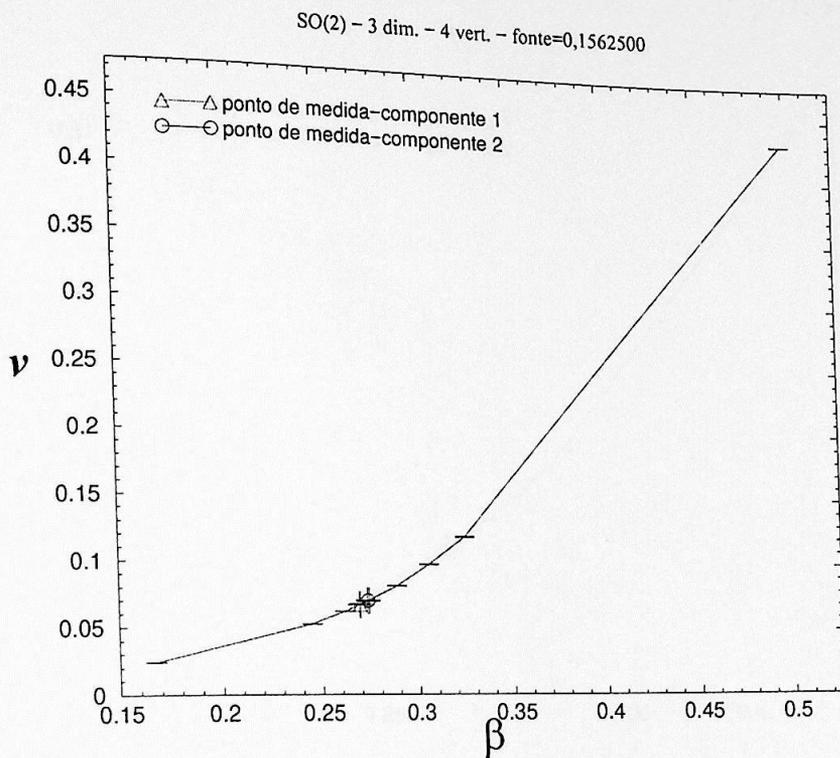


Figura C.12: Magnetização (v) em função de β .

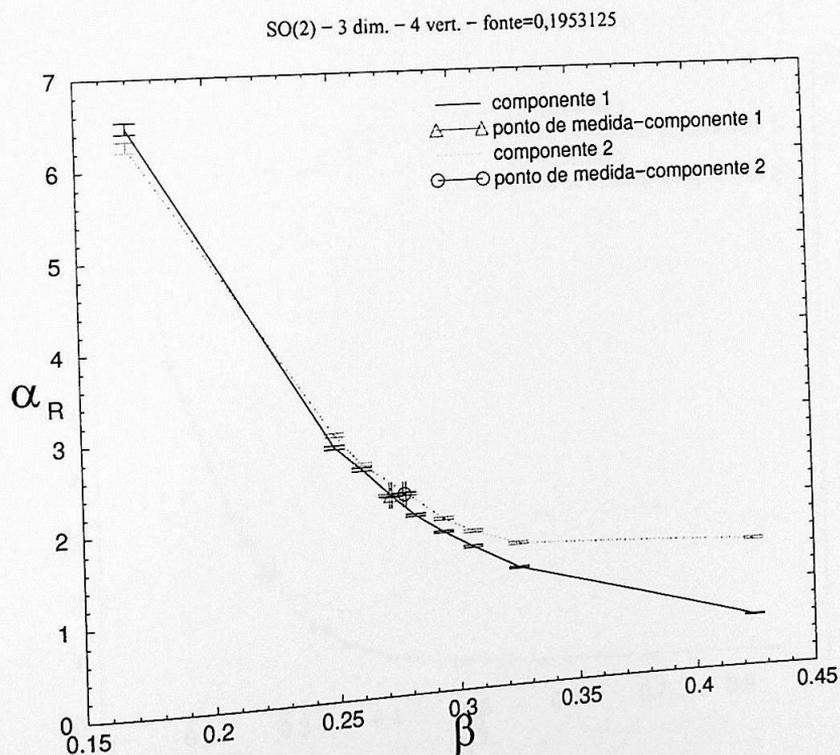


Figura C.13: Massa renormalizada em função de β .

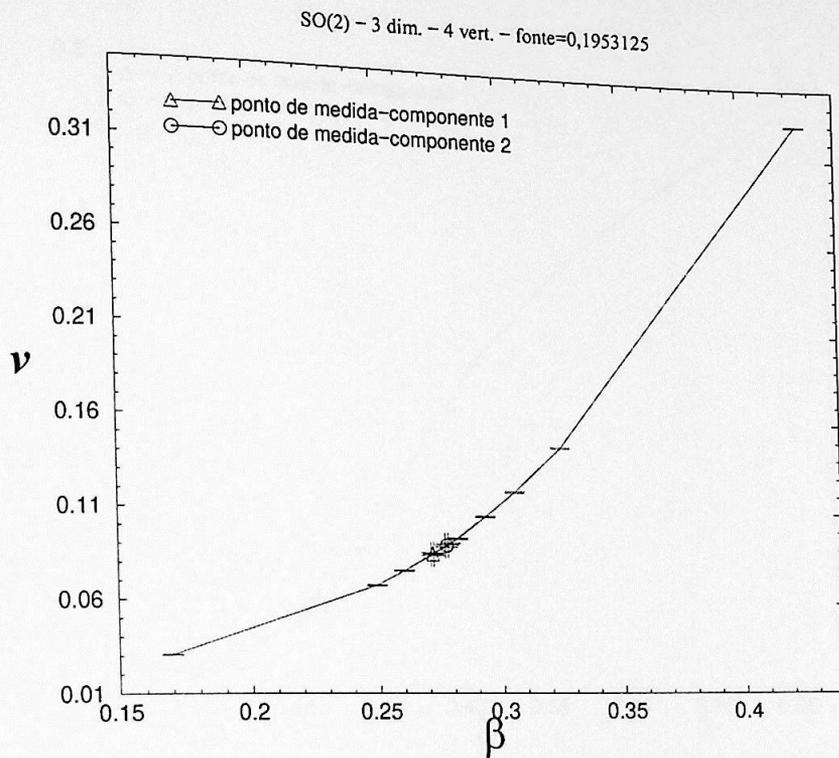


Figura C.14: Magnetização (v) em função de β .

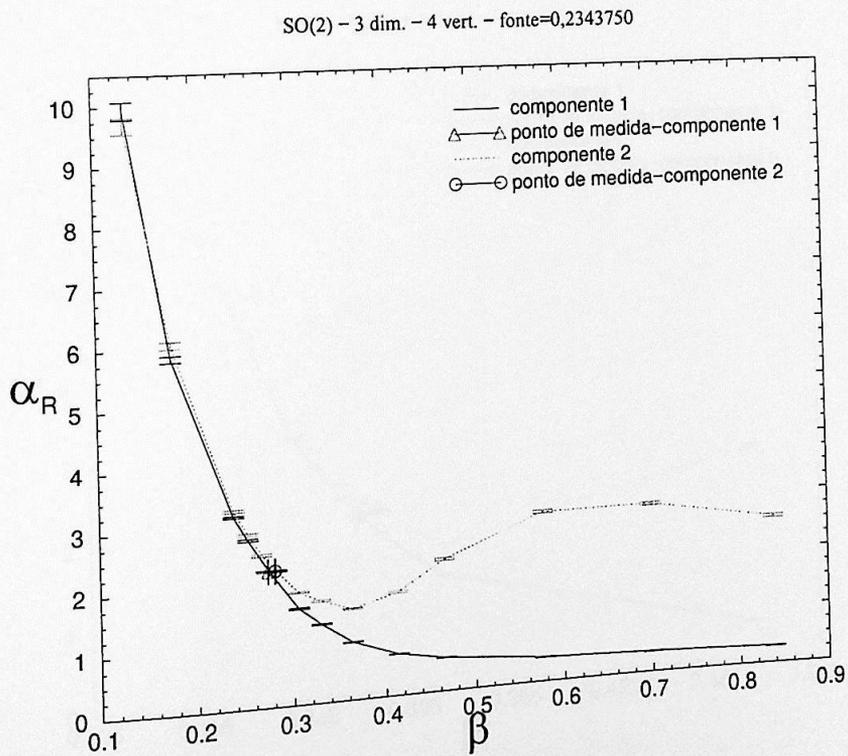


Figura C.15: Massa renormalizada em função de β .

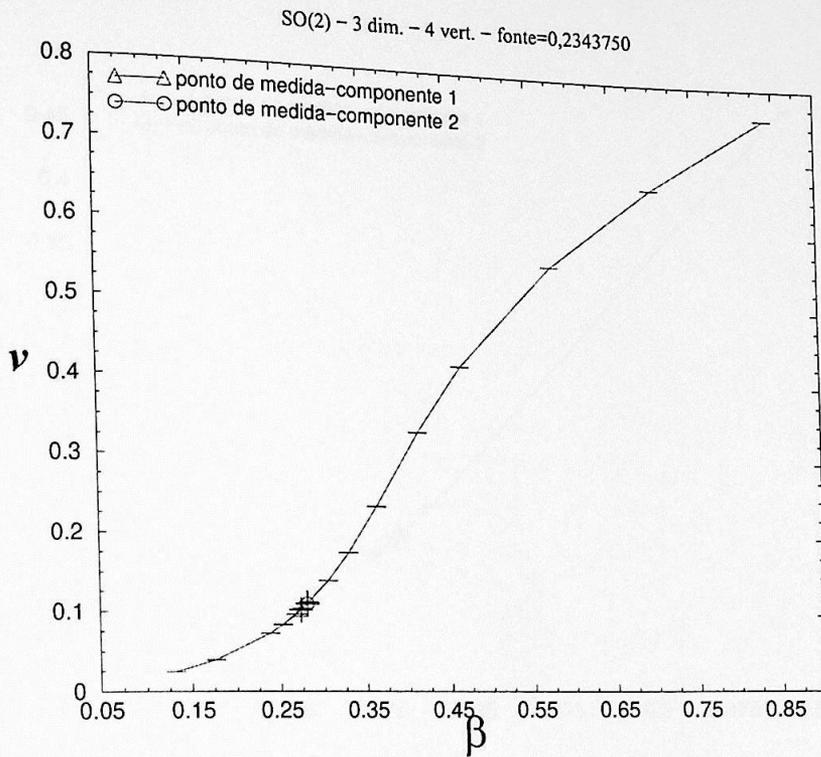


Figura C.16: Magnetização (v) em função de β .

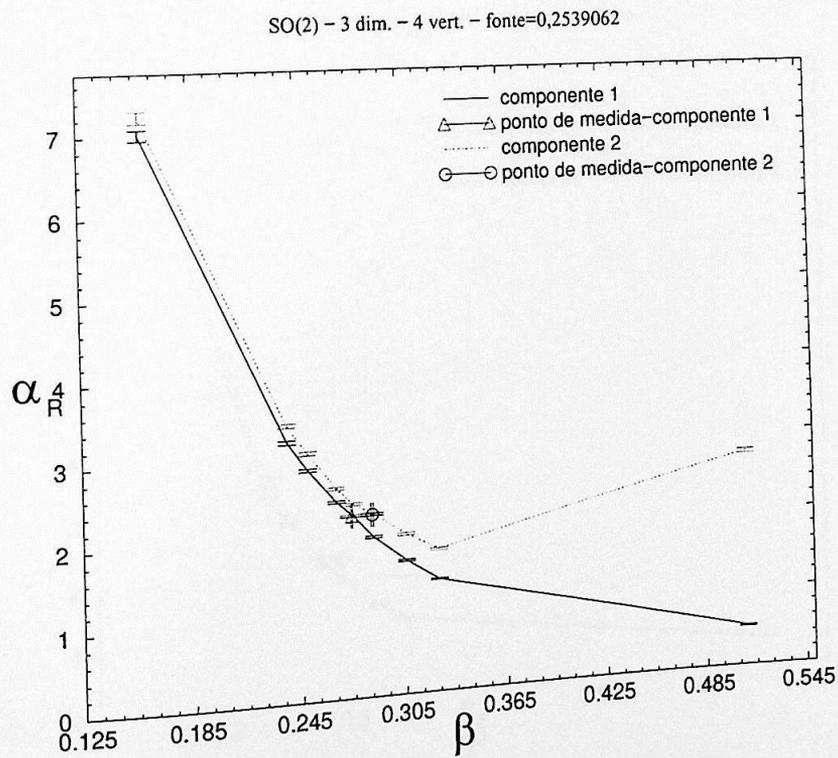


Figura C.17: Massa renormalizada em função de β .

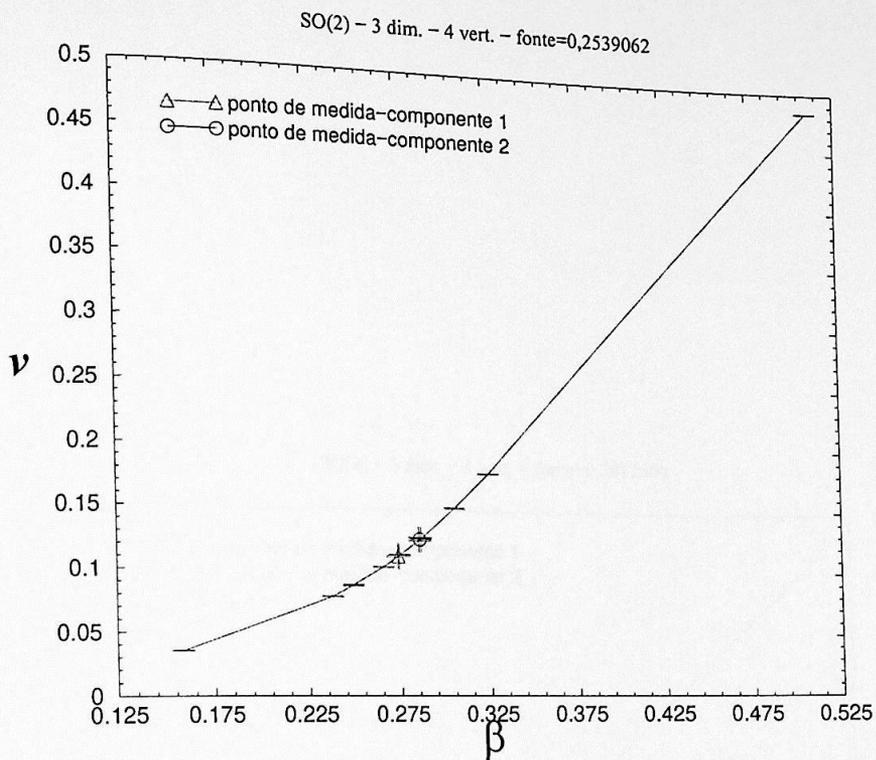


Figura C.18: Magnetização (v) em função de β .

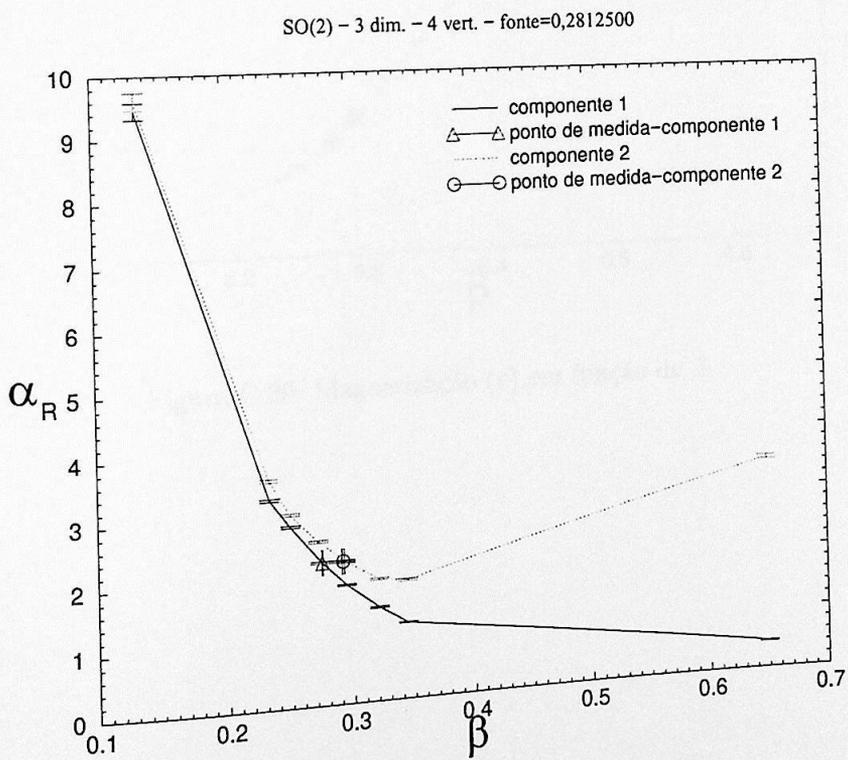


Figura C.19: Massa renormalizada em função de β .

SO(2) - 3 dim. - 4 vert. - fonte=0,2812500

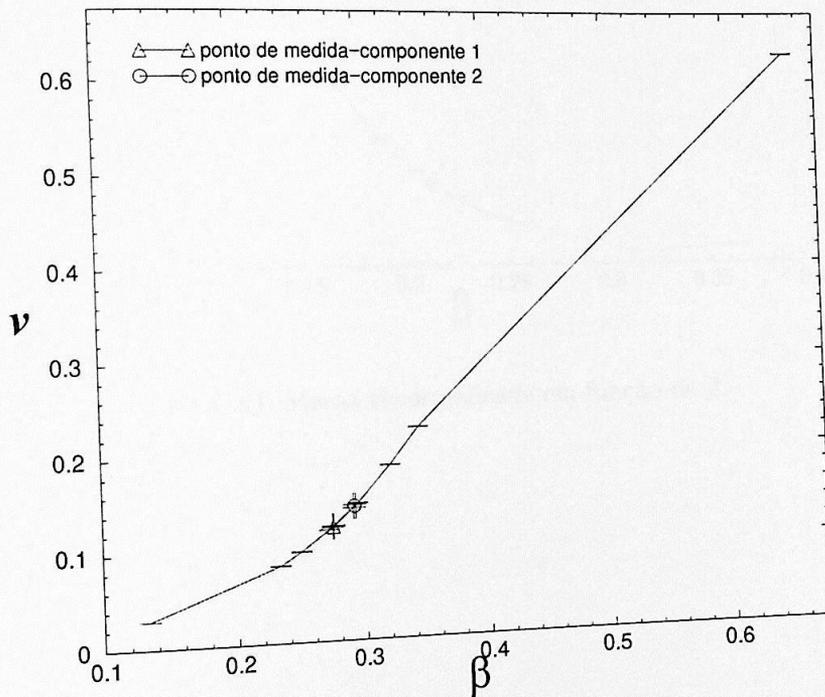


Figura C.20: Magnetização (v) em função de β .

⊙ Para Dimensão 4

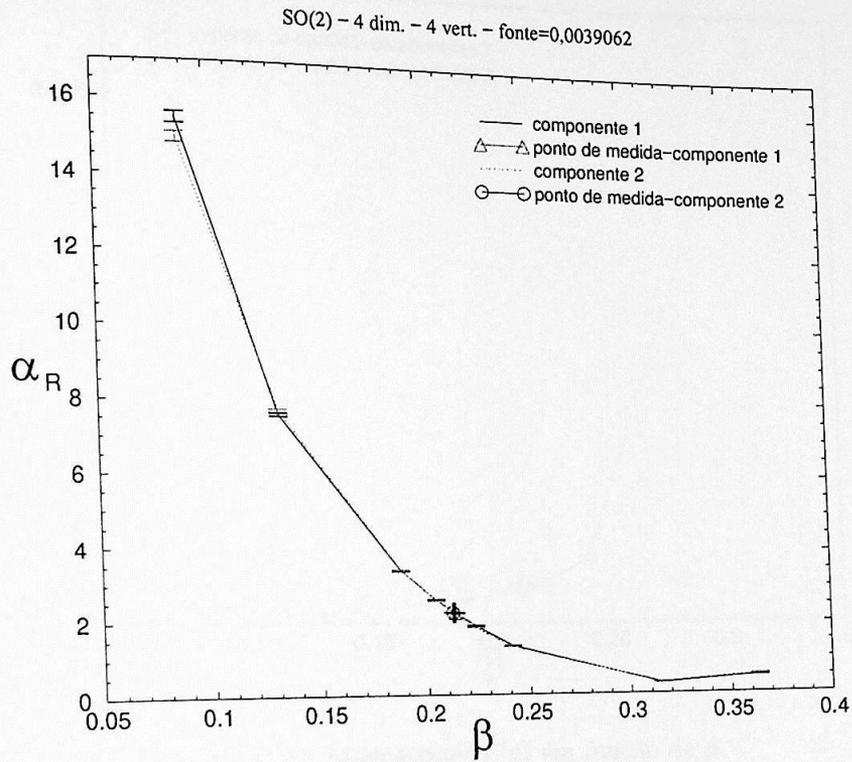


Figura C.21: Massa renormalizada em função de β .

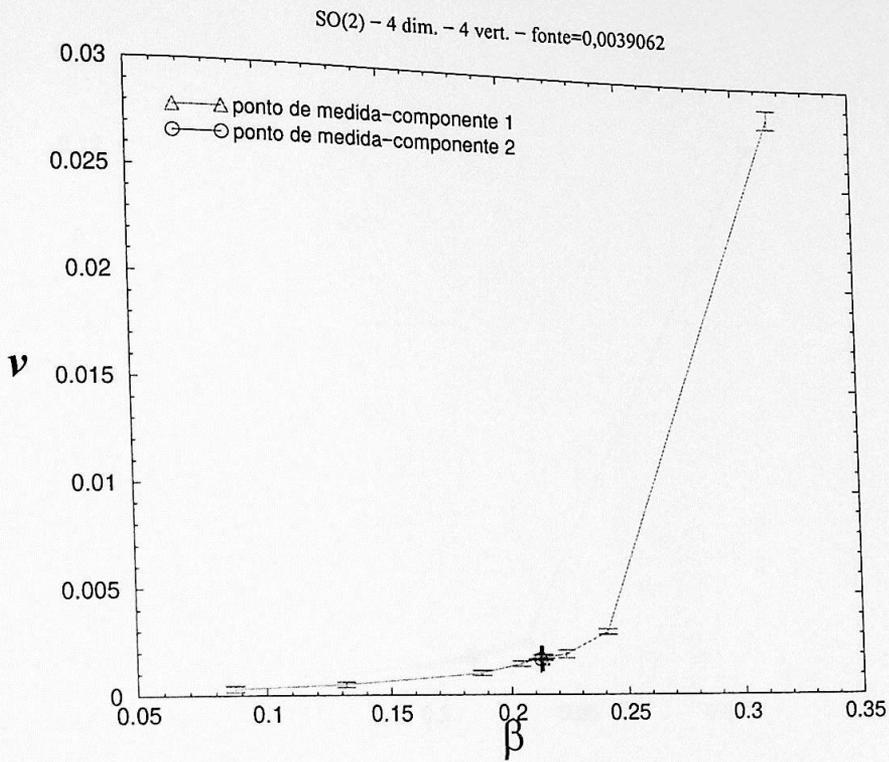


Figura C.22: Magnetização (v) em função de β .

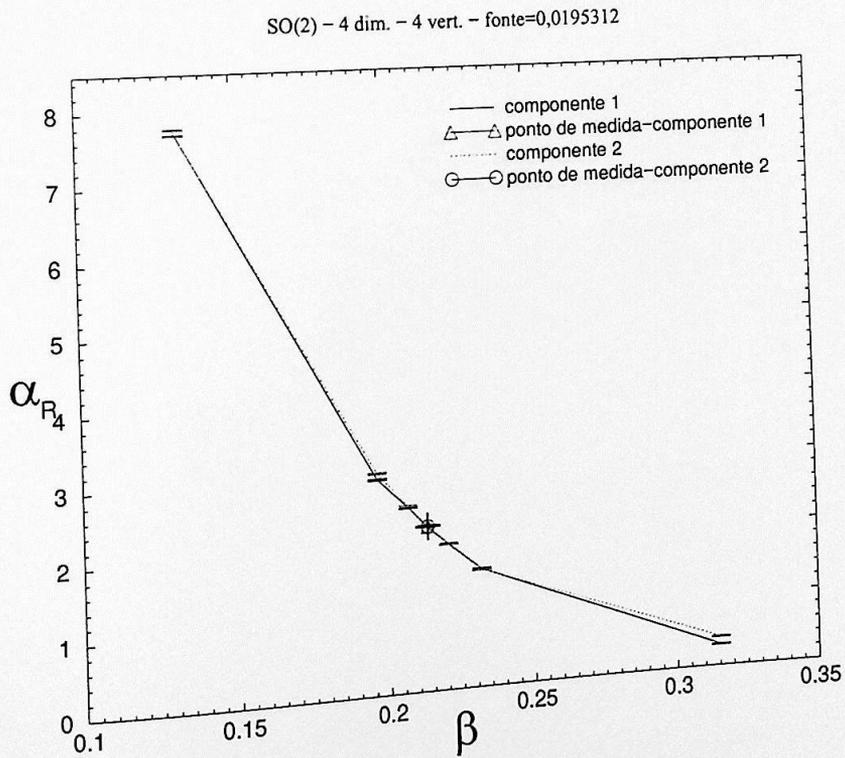


Figura C.23: Massa renormalizada em função de β .

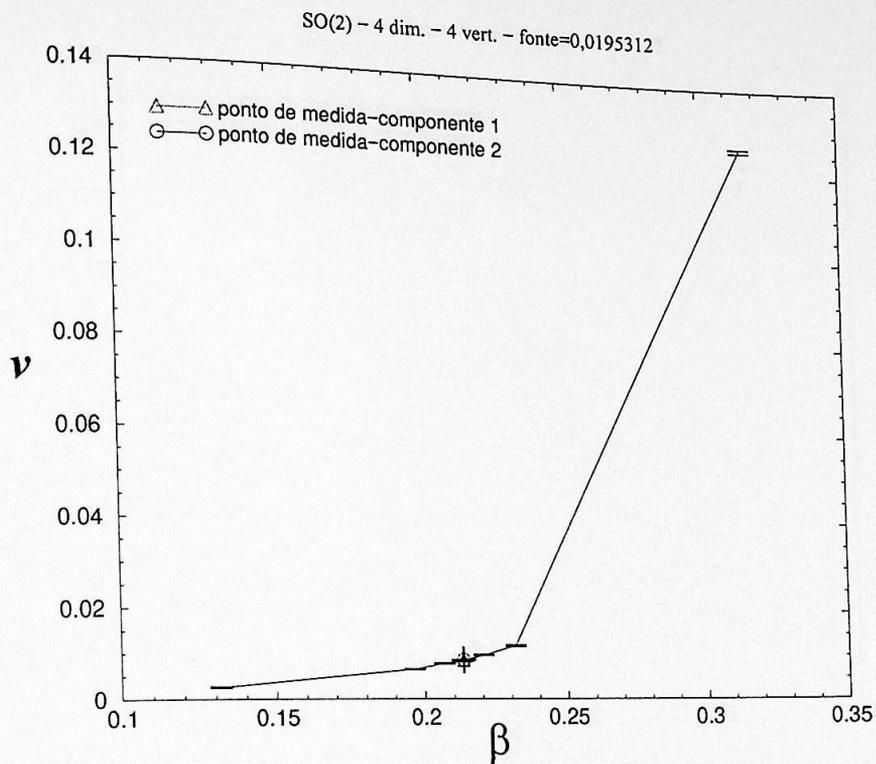


Figura C.24: Magnetização (v) em função de β .

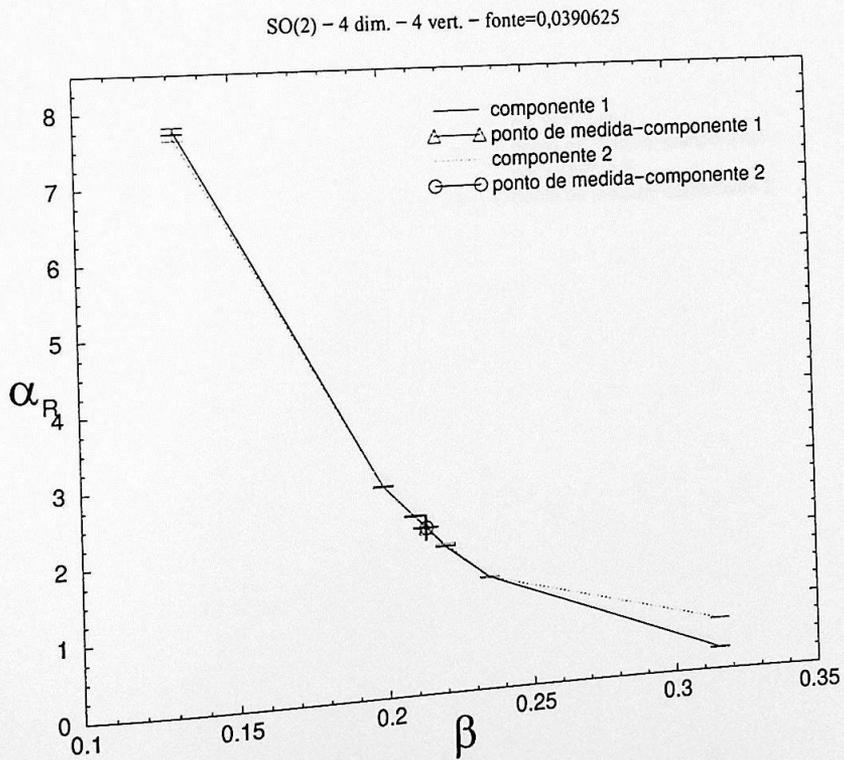


Figura C.25: Massa renormalizada em função de β .

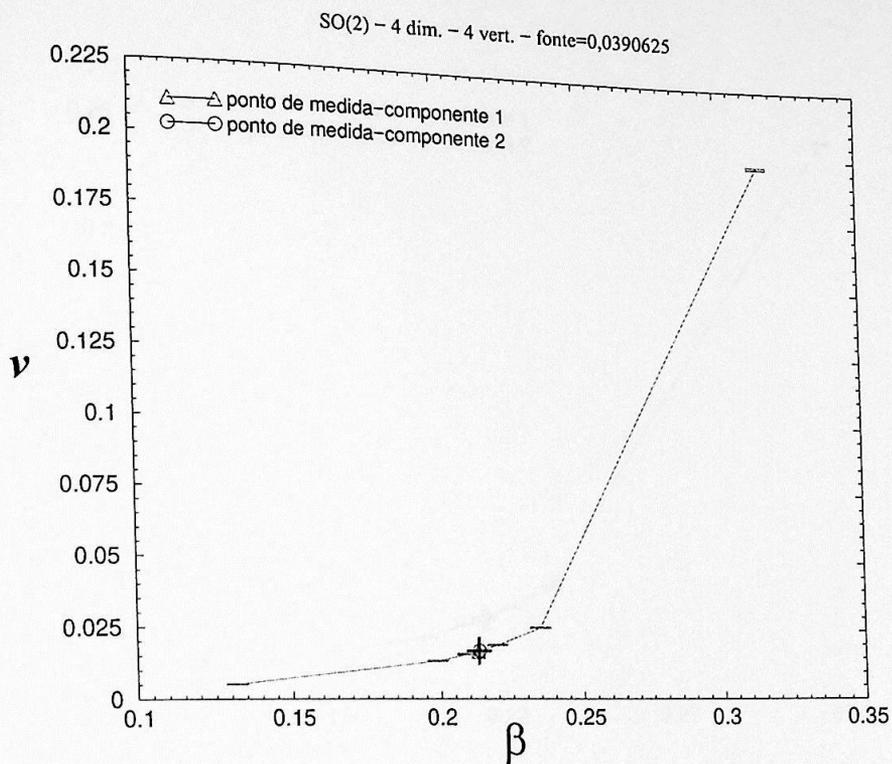


Figura C.26: Magnetização (v) em função de β .

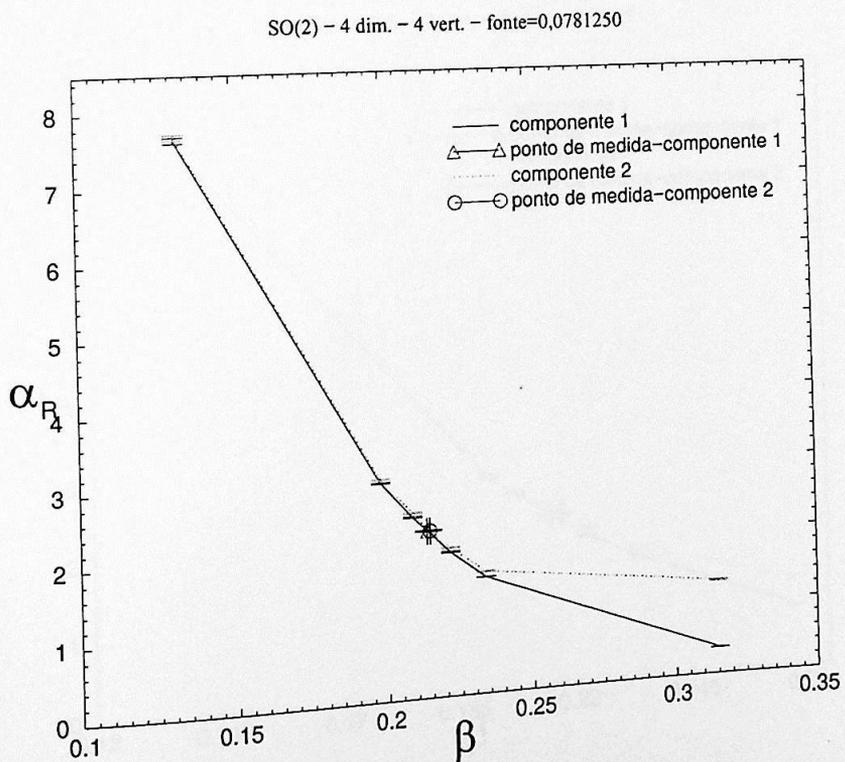


Figura C.27: Massa renormalizada em função de β .

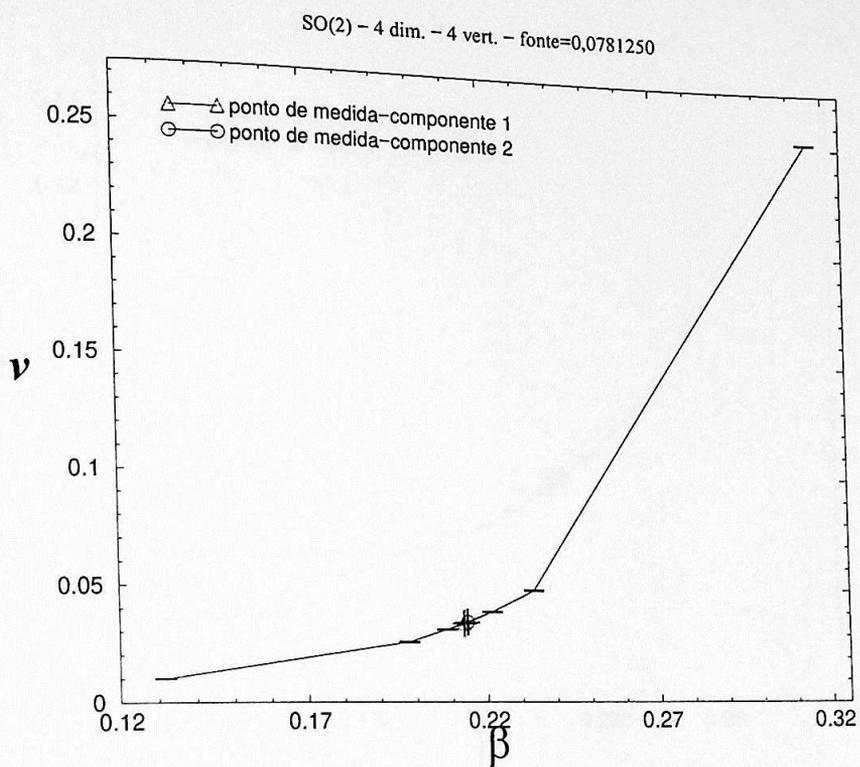


Figura C.28: Magnetização (v) em função de β .

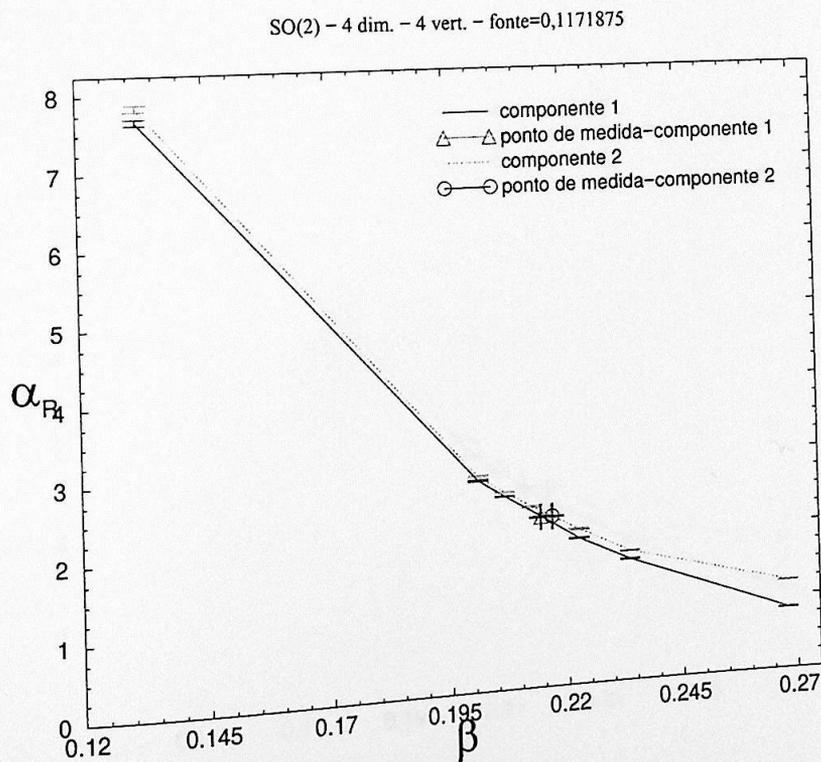


Figura C.29: Massa renormalizada em função de β .

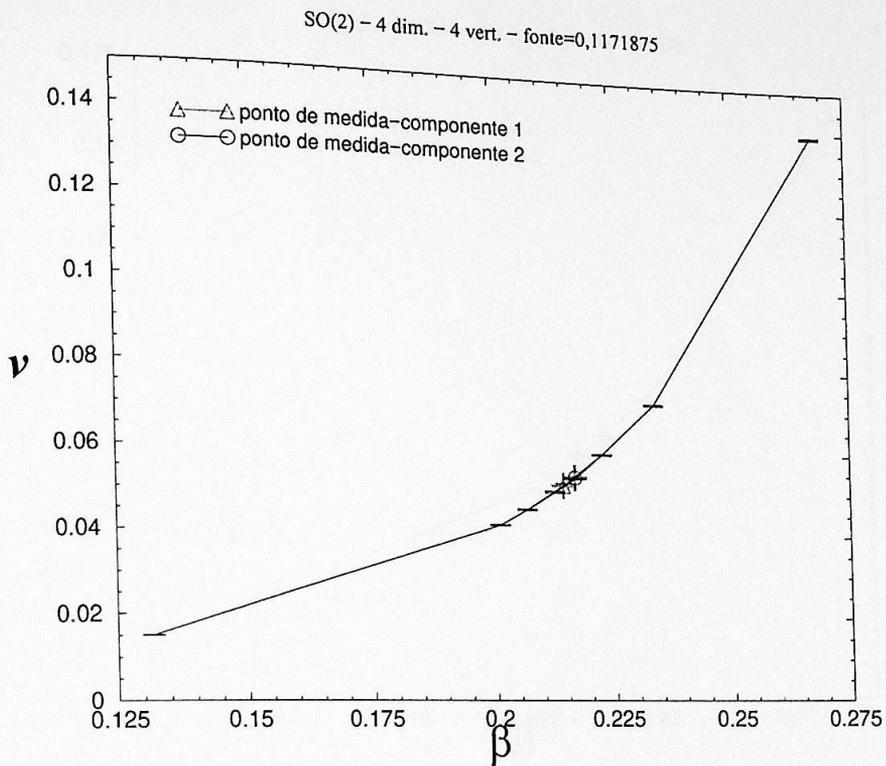


Figura C.30: Magnetização (v) em função de β .

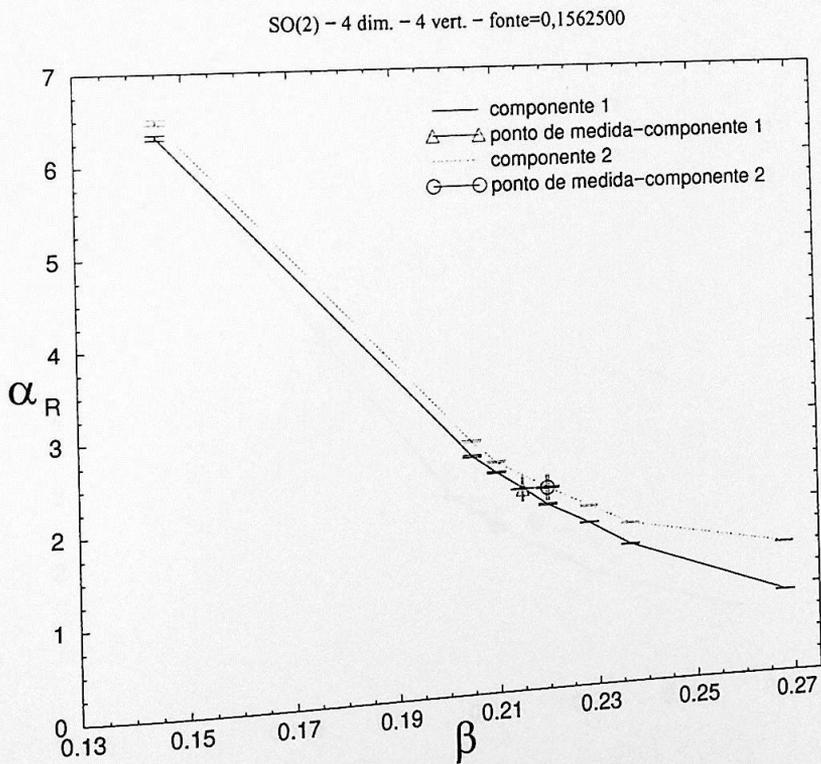


Figura C.31: Massa renormalizada em função de β .

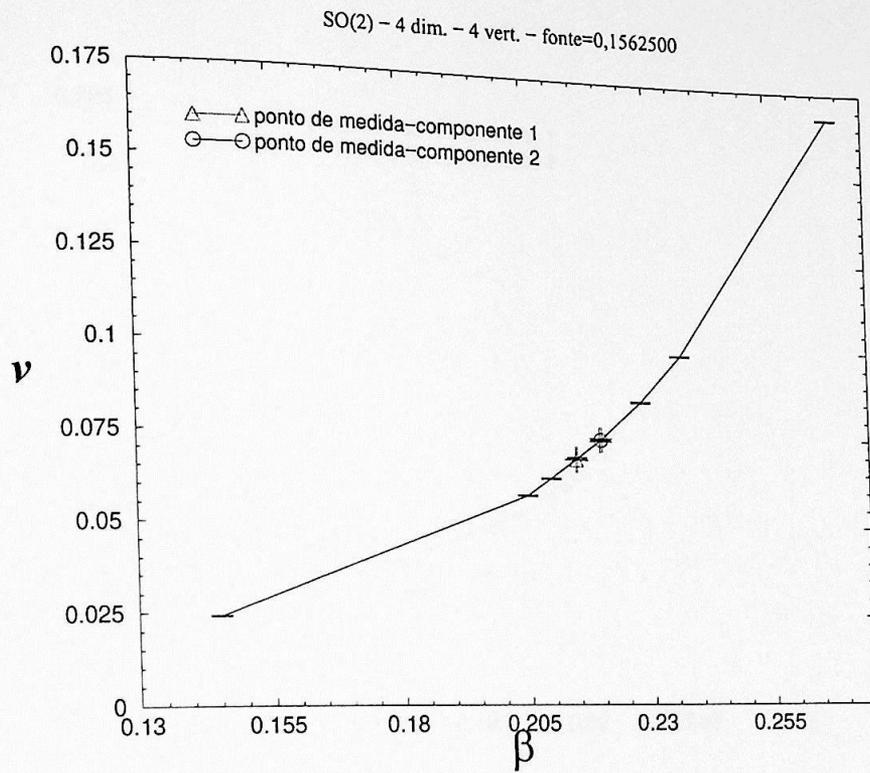


Figura C.32: Magnetização (v) em função de β .

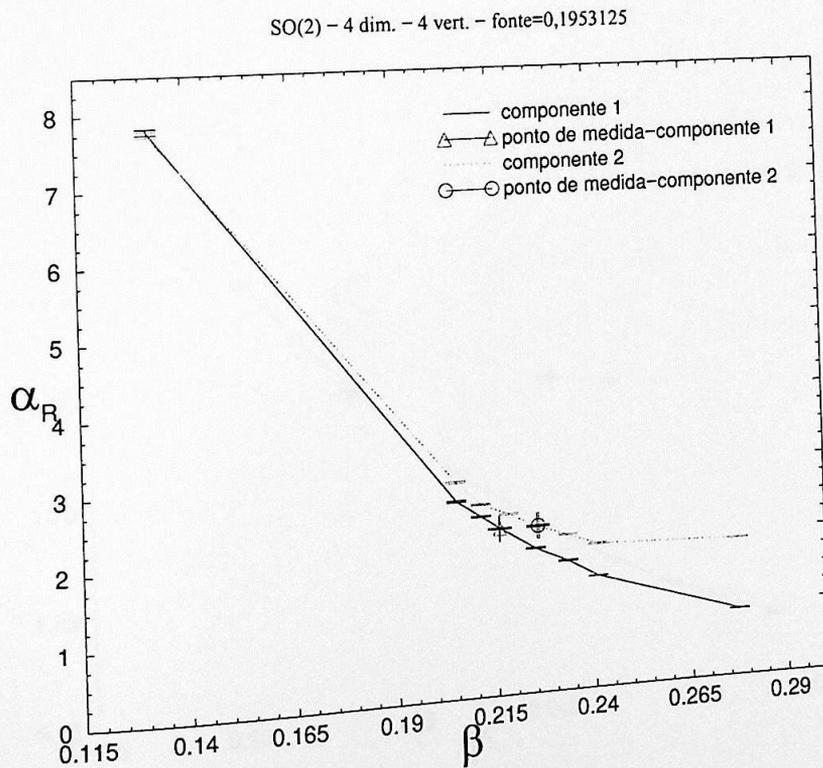


Figura C.33: Massa renormalizada em função de β .

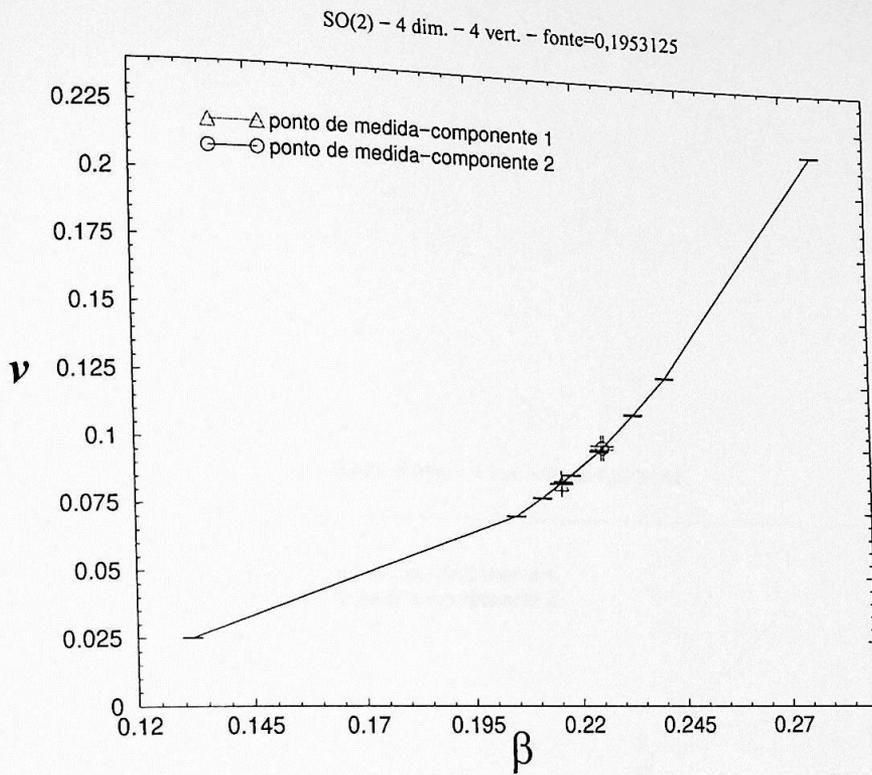


Figura C.34: Magnetização (v) em função de β .

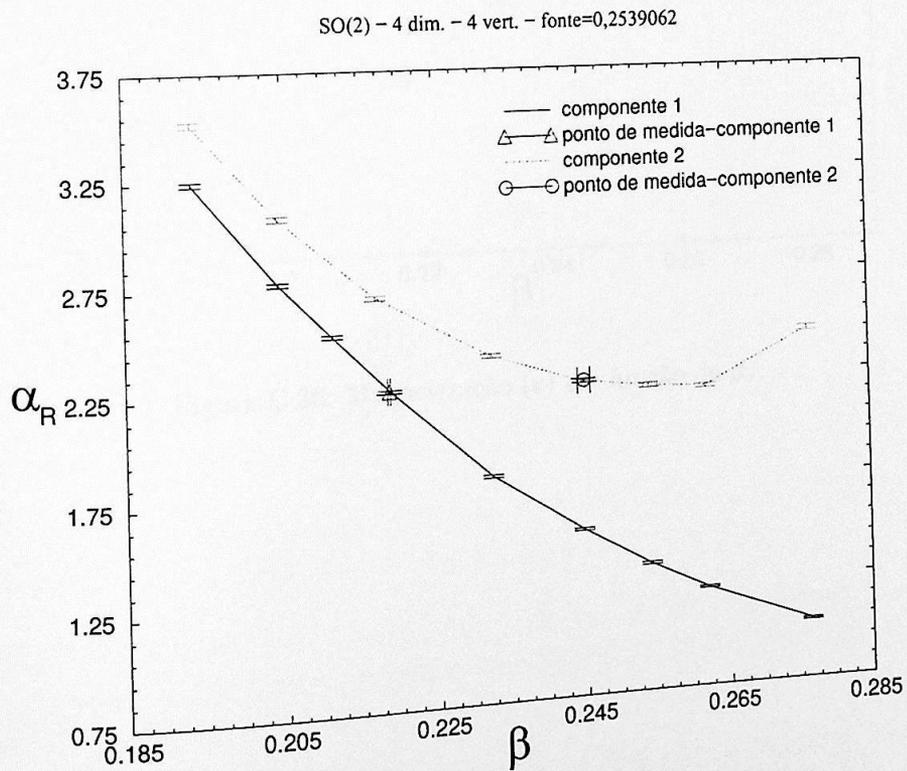


Figura C.35: Massa renormalizada em função de β .

Referências Bibliográficas

SO(2) -4 dim. - 4 vert. - fonte=0,2539062

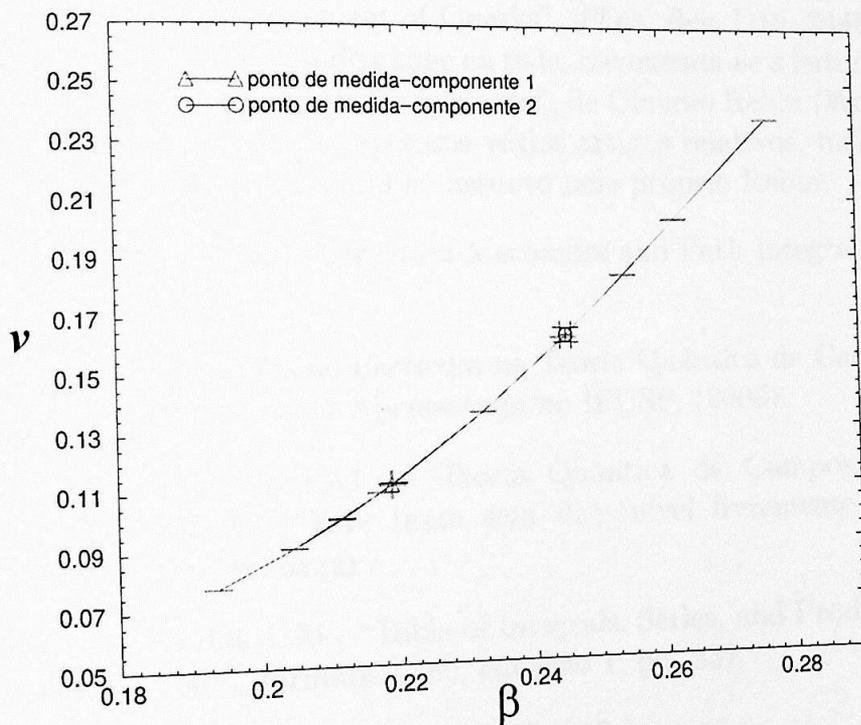


Figura C.36: Magnetização (v) em função de β .

Referências Bibliográficas

- [1] Metropolis N., Rosenbluth A., Rosenbluth M., Teller A. e Teller E., *J. Chem. Phys.* 21, 1087 (1953).
- [2] Wilson, Kenneth G., "Confinement of Quarks", *Phys. Rev. D*10, 2445-2459 (1974). Para uma introdução às teorias de gauge na rede, recomenda-se a leitura de "Lattice Gauge Theories and Monte Carlo Simulations", de Claudio Rebbi (World Scientific 1983), em que se encontram reimpressos vários artigos relativos, inclusive este de Wilson, após uma introdução geral ao assunto pelo próprio Rebbi.
- [3] Feynman R. P, Hibbs A. R., "Quantum Mechanics and Path Integrals", Mc Graw-Hill (1965).
- [4] Perez, Silvana, "O Conceito de Partícula na Teoria Quântica de Campos na Rede Euclidiana", Tese de Mestrado Apresentada no IFUSP, (2000).
- [5] deLyra, Jorge L., Grupo LATT, "Teoria Quântica de Campos, Uma Abordagem Radical na Rede", Este texto esta disponível livremente no endereço: <http://latt.if.usp.br/bazar/> .
- [6] Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M., "Table of Integrals, Series, and Products", 40^a ed., Academic Press (1965), fórmula 3.462, equação 1, pp. 337.
- [7] *Ibid.* [6], fórmula 9.246, equação 2, pp. 1065-1066.
- [8] deLyra, Jorge L., Martins André C. R., "Symmetry Breaking on a Finite Euclidean Lattice", *Nuclear Physics B*432, 621-640 (1994).
- [9] deLyra, Jorge L., Foong, S. K., Gallivan, T. E., "Finite Lattice Systems With True Critical Behaviour", *Phys. Rev. D*46, 1643-1657 (1992).
- [10] Martins, André C. Rocha, "Um Estudo Sobre Quebra de Simetria e Comportamento Crítico em Teorias Quânticas de Campos na Rede", Tese de Doutorado Apresentado no IFUSP, (1996).
- [11] Kaku, Michio, "Quantum Field Theory - A Modern Introduction", Oxford University Press (1993).

- [12] Wolff, Ulli, "Collective Monte Carlo Updating for Spin Systems", *Phys. Rev. Lett.*, v.62, n.º 4, (1989).
- [13] Wang, Jian-Sheng, e Swendsen Robert H., "Cluster Monte Carlo Algorithms", *Physica A*, 167, 565-567 (1990).