

Universidade de São Paulo

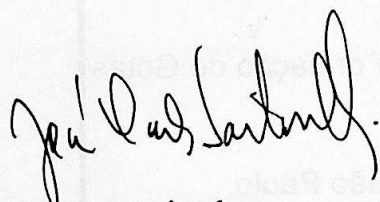
Instituto de Física

Análise Topológica na Dinâmica de Formação de Gotas D'água

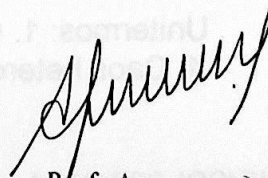
Marcelo Bussotti Reyes

Orientador: José Carlos Sartorelli

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências.



Barca examinadora:
Prof. Dr. José Carlos Sartorelli
Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas
Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo



Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

São Paulo
2001

530.155352

R457a

M

ex. 2

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Análise Topológica da Dinâmica de Formação de Gotas

D'água

Marcelo Bussotti

Orientador: José Carlos Sartorelli

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Reyes, Marcelo Bussotti

Análise Topológica da Dinâmica de Formação de Gotas
D'água. São Paulo, 2001.

Tese (Mestrado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física – Departamento de Física Geral

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Sartorelli
Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Unitermos: 1. Caos; 2. Gotas D'água; 3. Topologia;
4. Caos heteroclíptico; 5. Atratores;

USP/IF/SBI-007/2001

Agradecimentos

Ao Prof. Sartorelli pela ajuda no desenvolvimento do trabalho, pela amizade e pelos conselhos desde os primeiros anos da graduação.

Aos colegas de grupo Reynaldo, Tufaile, Whilk, Mário Sandro, Thiago, Ciro, Viviane e Juliano pela ajuda, pelas dicas, trocas de idéias e pela paciência nos momentos de irritação.

Aos meus pais que possibilitaram a minha chegada até aqui.

Aos meus amigos Ricardo (Dureza), Hirata (Bola), Serra (Zorrói) e Marcos (Bongla) pela amizade, descontração e pela força nos momentos difíceis.

Aos meus primos Flávio, Eduardo, Gustavo, Rodrigo e Duílio pela vitalidade e alegria contagiantes.

Ao pessoal do Laboratório Didático, Marcos, Fabinho, Mané, Dionísio, Canela e Cláudio pelos conhecimentos técnicos e pelos momentos de descontração.

Aos vigias Sílvio, Marquinhos, João Gouveia e Zé pelos cafezinhos e bate-papos nas madrugadas.

Aos meus colegas de apartamento Paolini e Marcelo pela convivência harmoniosa e divertida.

À Fapesp pelo apoio financeiro.

Resumo

Estudamos a dinâmica de formação de gotas d'água introduzindo o ângulo de inclinação que a torneira faz com a vertical como um novo parâmetro de controle. A partir dos tempos T_n entre gotas construímos os diagramas de bifurcações, T_n vs. abertura da torneira, para ângulo de até 26° . Analisamos os dados utilizando conceitos de topologia e de caracterização de sistemas dinâmicos, identificando os pontos fixos e variedades invariantes do sistema em mapas de retorno (T_{n+1} vs. T_n). Verificamos que uma transição abrupta entre atratores caóticos observada com o bico apumado, chamada de "Blue Sky Catastrophe", não ocorre com o bico inclinado. Ao invés disto, duas regiões caóticas se conectam, ocorrendo uma transição entre elas com a diminuição do fluxo d'água. Para os dados obtidos desta transição, encontramos dois pontos fixos imersos nos atratores referentes e verificamos que a dinâmica do sistema está relacionada a um cenário heteroclínico. Para um ângulo de inclinação de 25° , observamos a coexistência de dois atratores e sugerimos que técnicas de controle de caos poderiam ser aplicadas de forma eficiente.

Abstract

We have studied the dynamics of the water drops formation presenting the angle between the nozzle and the vertical direction as a new control parameter. Using the times T_n between drops the bifurcation diagrams, T_n vs. faucet opening, were plotted for angles up to 26° . We have analyzed the data by using topological and characterization of dynamical systems concepts, identifying the fixed points and manifolds of the system in first return maps (T_{n+1} vs. T_n). We have verified that a sudden transition between chaotic attractors observed for the vertical position of the faucet, called Blue Sky Catastrophe, is not observed for nonzero angles. In contrast to that, two chaotic regions connect themselves, performing a transition between them as the flux of water is decreased. We have found two fixed points inside attractors associated to this transition and we have verified that the dynamic of the system is related to a heteroclinic scenario. For 25° of the faucet inclination we have observed the coexistence of two attractors, leading to the suggestion that chaos control techniques could be applied efficiently.

Índice

1. INTRODUÇÃO	2
2. ASPECTOS TEÓRICOS.....	5
2.1. SISTEMAS DINÂMICOS	5
2.2. SEÇÃO DE POINCARÉ E MAPEAMENTOS	5
2.3. DESCRIÇÃO TOPOLÓGICA DE SISTEMAS DINÂMICOS	7
2.3.1. Pontos fixos e variedades invariantes.....	7
2.3.2. Emaranhados homoclínicos e heteroclínicos.....	9
2.3.3. Conjuntos limites, atratores e bacias de atração	12
2.4. RECONSTRUÇÃO DE ATRADORES ATRAVÉS DE SÉRIES TEMPORAIS	13
2.5. RECONSTRUÇÃO DE ATRADORES ATRAVÉS DE SÉRIES DE EVENTOS	13
2.6. DETERMINAÇÃO DOS PONTOS FIXOS INSTÁVEIS IMERSOS NOS ATRADORES.....	15
3. ARRANJO EXPERIMENTAL	16
3.1. SISTEMA HIDRÁULICO	16
3.2. MEDIDA DOS TEMPOS ENTRE GOTAS SUCESSIVAS	16
3.3. MEDIÇÃO DO ÂNGULO DE INCLINAÇÃO DO BICO	18
3.4. AQUISIÇÃO DOS DADOS	20
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	22
4.1. PRIMEIROS DADOS: TRANSIÇÃO ENTRE AS BACIAS DE ATRAÇÃO	22
4.2. TRANSFORMAÇÃO DO PONTO FIXO.....	37
4.3. RESULTADOS COM O APARATO MODIFICADO	41
4.4. ATRADORES DE ALTA PERIODICIDADE.....	49
4.5. REFERÊNCIA PARA A COMPARAÇÃO ENTRE AS SÉRIES DE DADOS.....	52
4.6. COEXISTÊNCIA DE ATRADORES	55
4.7. O SISTEMA PERTURBADO	57
5. CONCLUSÕES.....	60
6. REFERÊNCIAS	62

1. Introdução

Uma torneira pingando, talvez um dos fatos mais corriqueiros da vida da maioria das pessoas, foi proposto por Rössler (1997) como um sistema simples que poderia apresentar comportamento caótico. A constatação da presença de caos foi feita por Shaw (1984), e desde então este fenômeno tem sido considerado um paradigma de sistemas caóticos.

Resultados experimentais (Shaw, 1984) mostraram que a torneira gotejante pode se comportar como um sistema de baixa dimensão, motivando diversos trabalhos baseados em modelos fenomenológicos, como o modelo massa-mola (Shaw, 1984; D'Innocenzo e Renna, 1997; Tufaile *et al.*, 1999). Neste modelo é suposto que a coluna d'água pendurada no bico do tubo onde se formam as gotas é um oscilador cuja massa aumenta com o tempo, e, ao atingir um volume crítico, perde parte desta massa, ejetando uma gota. Este modelo consegue reproduzir algumas características observadas experimentalmente, porém somente para certos intervalos dos parâmetros do experimento. Outro problema deste modelo é a dificuldade de obtermos uma correspondência adequada entre os parâmetros da experiência e os da simulação.

Devido à complexidade da dinâmica de formação de gotas, o tratamento teórico do problema da torneira gotejante exige uma grande quantidade de simplificações e aproximações. As simulações baseadas na hidrodinâmica não têm levado em conta detalhes como, por exemplo, da geometria da extremidade do tubo onde se formam as gotas (Fuchikami, 1998; Ambravaneswaran *et al.*, 2000; Couillet *et al.*, 2000). No entanto, conforme observaram Gonçalves (1996) e Tufaile *et al.* (1999), e como pode ser visto neste trabalho, a dinâmica apresentada pela torneira gotejante depende fortemente de diversos desses detalhes, tais como espessura da parede do tubo, ângulo do chanfro da extremidade e inclinação.

Desta forma, os modelos hidrodinâmicos têm mostrado resultados simplificados demais para descrever a torneira gotejante adequadamente, isto é, com os mesmos detalhes observados nos dados experimentais.

O tratamento geométrico introduzido por Poincaré no início do século tem sido um dos métodos mais bem-sucedidos na descrição dos sistemas caóticos. Esta abordagem

consiste em obter características do sistema através da observação do espaço de fases e das variedades invariantes do sistema. Poincaré (*apud* Alligood *et al.*, 1996) observou que o problema de gravitação envolvendo três corpos apresentava comportamento irregular quando estas variedades se cruzavam. O comportamento irregular observado por Poincaré é atualmente chamado de caos e os cruzamentos de variedades dão origem aos emaranhados homo e heteroclínicos. As variedades dos sistemas caóticos possuem formas bastante sinuosas e, em geral, não temos esperança de descrevê-las em termos de funções simples. Assim, o estudo da topologia dos sistemas que apresentam caos procura identificar propriedades que independem do conhecimento destas formas.

Takens (1981) demonstrou que é possível recuperar informações importantes a respeito do espaço de fases de um sistema através da série temporal de somente uma de suas variáveis e Sauer (1994) estendeu esta idéia para sistemas discretos. Estes trabalhos foram fundamentais para o desenvolvimento de métodos topológicos em trabalhos experimentais, principalmente aqueles que envolvem sistemas cujas equações não são conhecidas, como é o caso da torneira gotejante.

Os trabalhos envolvendo reconstrução de atratores a partir de séries temporais, juntamente com as técnicas geométricas de análise da dinâmica formam um conjunto bastante poderoso de ferramentas para a análise experimental de sistemas dinâmicos. Sartorelli, Pinto e Gonçalves (Sartorelli *et al.* 1994; Pinto *et al.*, 1994; Pinto *et al.*, 1998), utilizaram diversas técnicas de topologia em atratores reconstruídos, verificando experimentalmente diversos resultados teóricos a respeito de rotas para o caos e crises. Pinto *et al.* (2000) identificaram uma “Blue Sky Catastrophe” ao estudar a transição entre dois atratores em função da diminuição da vazão d’água. A “Blue Sky Catastrophe” consiste em uma súbita troca de um atrator caótico por outro, devido a um tangenciamento homoclínico das duas variedades de um ponto de sela. Pinto verificou também que, inclinando o bico da torneira, a dinâmica do sistema é modificada e a “Blue Sky Catastrophe” não é mais observada, mas sim uma dinâmica oriunda da fusão dos dois atratores.

A evidência de que a inclinação do bico da torneira é um parâmetro importante do experimento motivou o presente estudo. O nosso objetivo foi estudar o comportamento dinâmico da experiência da torneira gotejante, introduzindo um novo parâmetro de controle, além da vazão d'água: a inclinação do bico. A análise dos dados utiliza principalmente técnicas e conceitos de topologia, procurando investigar características gerais do sistema dinâmico.

2. Aspectos Teóricos

2.1. Sistemas Dinâmicos

A evolução temporal de um sistema dinâmico determinístico pode ser descrita através de um conjunto de equações diferenciais $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, onde \mathbf{F} é uma função vetorial que age sobre vetores de estado d -dimensionais \mathbf{X} . Todas as soluções do sistema podem ser representadas num espaço d -dimensional, chamado espaço de fases. As soluções da equação acima correspondentes a diferentes condições iniciais geram uma família de curvas orientadas que são chamadas retrato de fases do sistema (Jackson, 1989).

Dentre os sistemas dinâmicos, os não lineares freqüentemente apresentam comportamento irregular, isto é, soluções que não são periódicas e nem assintóticas, mas que permanecem numa região finita do espaço de fases. Este tipo de comportamento normalmente inviabiliza a obtenção de soluções analíticas, já que a grande maioria das funções conhecidas é periódica ou assintótica. No entanto, podemos recorrer a métodos estatísticos (teoria ergódica dos sistemas dinâmicos) ou geométricos (topológicos) para a descrição de sistemas deste tipo.

2.2. Seção de Poincaré e mapeamentos

Sistemas dinâmicos que apresentam comportamento caótico dificilmente podem ser tratados analiticamente. Em geral, obtemos soluções através de processos numéricos relativamente complicados principalmente com relação ao controle dos erros de arredondamento. Existe ainda o problema de velocidade de processamento quando há necessidade de uma grande quantidade de dados.

Em 1980, Poincaré (*apud* Mira, 1997) descobriu que é possível preservar a informação dinâmica de um sistema observando os pontos gerados pelo cruzamento das órbitas deste sistema com um espaço $(d-1)$ -dimensional adequadamente escolhido. Estes pontos definem um mapeamento discreto conhecido como Mapa de Poincaré.

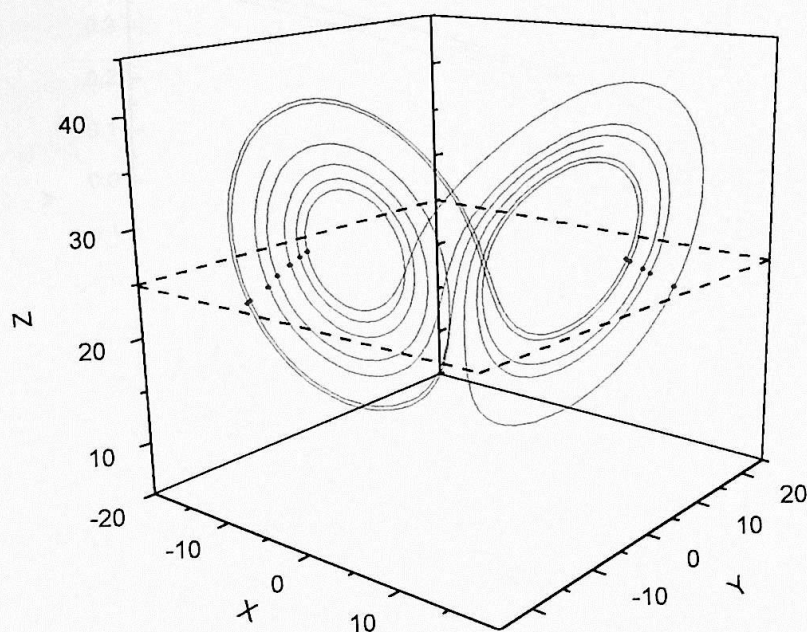


Fig. 2.1: Trajetória tridimensional do sistema de Lorenz (1963) e um exemplo de seção de Poincaré, representada pelo plano $Z=25$. Os pontos são marcados quando as órbitas cruzam o plano de baixo para cima. A seqüência de pontos gerada por estas interseções define um mapeamento discreto com uma dimensão a menos que o conjunto de equações diferenciais.

O conjunto de regras obtido para o mapeamento discreto é mais simples que o gerado pelas equações diferenciais, principalmente sob o aspecto computacional por envolver menos erros numéricos.

Podemos obter mapas que preservem as características fundamentais do sistema de equações diferenciais elaborando relações de recorrência das quais se obtém o valor das variáveis em intervalos discretos de tempo. Um exemplo de mapa discreto no tempo foi introduzido por Henón (1976) para modelar alguns aspectos da dinâmica do sistema de Lorenz:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a - x_n^2 - by_n \\ y_{n+1} &= x_n \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde a e b são parâmetros e x_{n+1} e y_{n+1} são os valores das variáveis dinâmicas x e y obtidos após um intervalo de tempo a partir dos valores x_n e y_n . Os valores de x_n e y_n obtidos através do mapa de Henón não mostrados na Fig. 2.2.

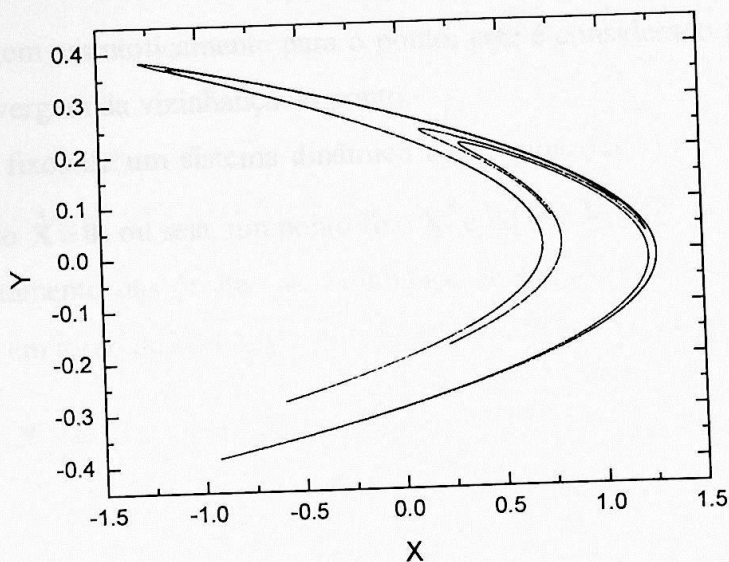


Fig. 2.2: Gráfico obtido através da iteração do Mapa de Henón (Eq. 2.1) para $a=1,4$ e $b=0,3$.

2.3. Descrição topológica de sistemas dinâmicos

Em descrições geométricas de um sistema dinâmico, buscamos trajetórias que possuam características especiais dentre todas as suas possíveis trajetórias. Em geral, a característica procurada é a de invariância com o tempo, o que revela que o sistema se encontra no chamado equilíbrio dinâmico. Este tipo de equilíbrio inclui as soluções estáticas associadas aos pontos fixos, e as estacionárias, associadas a trajetórias periódicas do sistema. No entanto, o equilíbrio dinâmico está relacionado aos comportamentos limites do sistema, e não implica necessariamente no equilíbrio estático nem no estado estacionário (Abraham e Shaw, 1992).

2.3.1. Pontos fixos e variedades invariantes

O ponto fixo é o tipo de trajetória mais simples que apresenta invariância com o tempo. Podemos entendê-lo como um ponto que tomado como condição inicial faz com que o sistema permaneça inalterado com o tempo (equilíbrio estático). A classificação de um ponto fixo é feita de acordo com o comportamento de trajetórias na sua vizinhança. Se estas

trajetórias convergem assintoticamente para o ponto, este é considerado estável, e instável se as trajetórias divergem da vizinhança do ponto.

Os pontos fixos de um sistema dinâmico cujas equações são conhecidas pode ser encontrado fazendo $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$, ou seja, um ponto fixo \mathbf{X}^* é tal que $\mathbf{F}(\mathbf{X}^*) = \mathbf{0}$.

O comportamento das órbitas na vizinhança do ponto pode ser obtido através da expansão de $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ em torno do ponto fixo \mathbf{X}^* , fazendo $\mathbf{X} = \mathbf{X}^* + \delta$, onde $|\delta| \ll 1$. Portanto,

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{\delta} \Rightarrow \dot{\delta} = \mathbf{F}(\mathbf{X}^*) + \left[\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right]_{\mathbf{X}^*} \delta + O(\delta^2) \quad (2.2)$$

onde

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right]_{\mathbf{X}^*} \quad (2.3)$$

é a matriz Jacobiana de \mathbf{F} em relação a \mathbf{X} calculada no ponto fixo \mathbf{X}^* . Desprezando os termos de ordem de δ^2 e superiores, temos:

$$\dot{\delta} = \mathbf{A}\delta. \quad (2.4)$$

Escrevendo δ como uma combinação linear dos autovetores \mathbf{y}_i de \mathbf{A} , a solução para o sistema linearizado pode ser escrita sob a forma (Argyris, 1994):

$$\delta(t) = \sum_{i=1}^d C_i e^{\lambda_i t} \mathbf{y}_i, \quad (2.5)$$

onde C_i são constantes de integração determinadas pelas condições iniciais e λ_i são os autovalores de \mathbf{A} .

A estabilidade dos pontos fixos está associada à parte real dos autovalores. Autovalores cuja parte real é positiva estão associados aos pontos fixos instáveis e autovalores cuja parte real é negativa, aos estáveis. Nos casos em que a parte real dos autovalores é nula (pontos fixos elípticos), devemos recorrer a derivadas de ordem superior para analisar a estabilidade do ponto. A parte imaginária dos autovalores está relacionada ao tipo de convergência das órbitas na vizinhança do ponto fixo: oscilatórias se $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$ ou assintóticas se $\text{Im}(\lambda_i) = 0$. Alguns tipos de pontos fixos são mostrados na Fig. 2.3.

Se tomamos um autovetor \mathbf{y}_j como condição inicial, o que significa que $C_i = 0$ para $i \neq j$, então as órbitas evoluirão sempre sobre este mesmo autovetor. Este fato está relacionado com o conceito de variedades invariantes. Estas variedades são configurações

geométricas do espaço de fases que permanecem inalteradas com a evolução temporal do sistema. Por simplicidade, chamaremos as variedades invariantes somente de variedades.

Chamamos de variedade estável o conjunto de pontos que são levados assintoticamente ao ponto fixo. O conjunto de pontos que seria levado ao ponto fixo caso o tempo fosse revertido é chamado de variedade instável do ponto fixo.

Nos sistemas linearizados, as variedades são obtidas através dos autovetores da matriz A (Eq. 2.3), e são retas quando associadas a autovalores reais; ou planos, quando associados a autovalores complexos.

A Fig. 2.3 mostra alguns tipos de pontos fixos, classificados de acordo com as suas variedades. Utilizando a mesma convenção de Abraham e Shaw (1992), a cor verde representa a variedade estável e a azul representa a variedade instável.

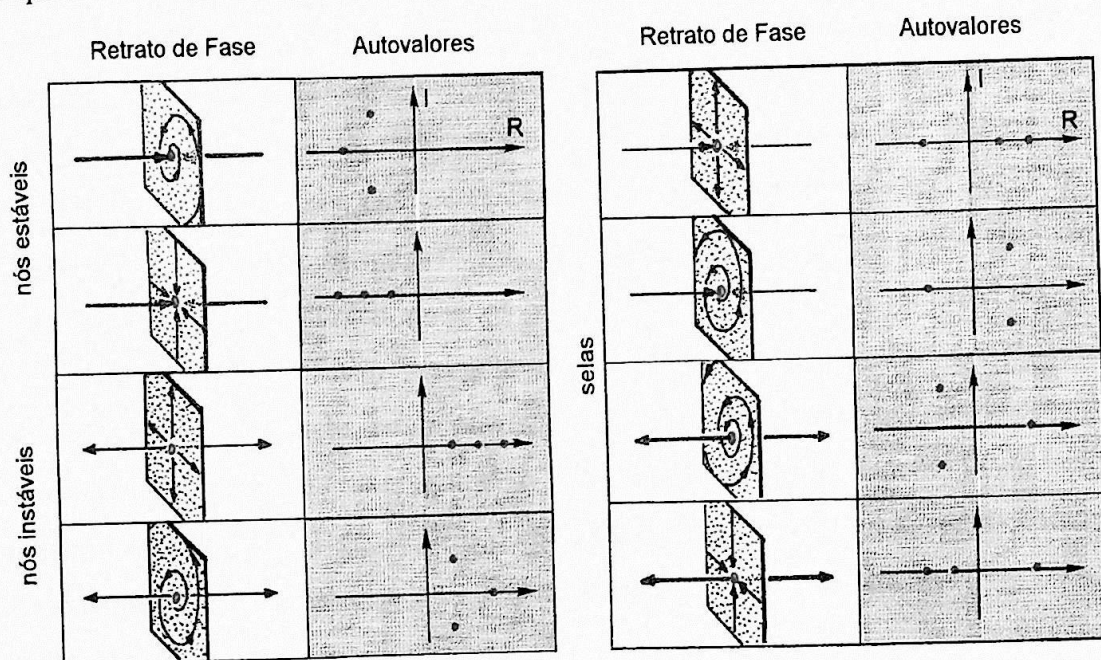


Fig. 2.3. Tipos de pontos fixos encontrados em 3 dimensões. As colunas contendo os desenhos dos planos mostram as variedades invariantes na vizinhança do ponto. As colunas que contêm gráficos mostram os respectivos autovalores do sistema linearizado em torno do ponto. Adaptada de Abraham e Shaw (1992).

2.3.2. Emaranhados homoclínicos e heteroclínicos

As variedades invariantes podem apresentar configurações bastante complicadas no espaço de fases. A priori, não há impedimento ao cruzamento entre variedades, como

acontece, por exemplo, com as trajetórias do sistema. Quando ocorre um cruzamento de variedades de um mesmo ponto fixo, chamamos a interseção de homoclínica; e de heteroclínica se a interseção ocorrer entre variedades de pontos fixos diferentes.

Para exemplificar as implicações de um cruzamento heteroclínico, consideremos dois pontos de sela A e B e suas respectivas variedades no espaço bidimensional. Seja o ponto H de cruzamento da variedade instável de A com a variedade estável de B, chamado de ponto de heteroclínico. Por definição, um ponto pertencente a uma variedade é mapeado nela mesma e, portanto, um ponto heteroclínico deve ser mapeado em outro ponto heteroclínico. A Fig. 2.4 mostra uma representação esquemática deste tipo de cruzamento e as suas sucessivas iterações sucessivas, H^+ e H^{++} .

Como o ponto H^+ é o mapeamento de H, a vizinhança de H deve ser mapeada próxima de H^+ . Como as variedades são contínuas por definição, deve haver uma linha de que une os pontos H e H^+ . A maneira mais imediata de conectar os dois pontos é através de uma linha que parte de H e vai diretamente para H^+ . No entanto, esta conexão não é possível pois causaria uma inconsistência na orientação das variedades (Fig. 2.5). Algumas ligações possíveis são mostradas na Fig. 2.6. Estas ligações sempre geram pelo menos mais um cruzamento heteroclínico, entre os pontos H e H^+ . O mesmo processo ocorre entre os pontos H^+ e H^{++} e assim sucessivamente, gerando um conjunto de infinitos pontos heteroclínicos. Além disto, as variedades instáveis de A se distorcem ao se aproximarem de B, devido à propriedade de estiramento desta região, gerando o emaranhado heteroclínico mostrado na Fig. 2.7. Este cenário é comumente encontrado em sistemas caóticos e está fortemente ligado à presença de comportamentos bastante complexos (Abraham e Shaw, 1992).

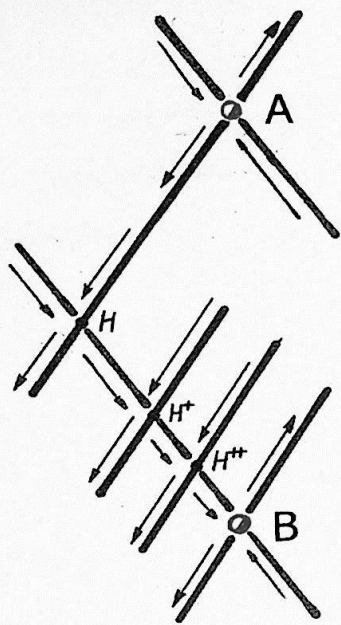


Fig. 2.4 O ponto H representa o cruzamento da variedade instável (azul) do ponto de sela A com a estável (verde) do ponto de sela B. Os pontos H^+ e H^{++} são a primeira e segunda iteradas de H, respectivamente. Adaptado de Abraham e Shaw, 1992.

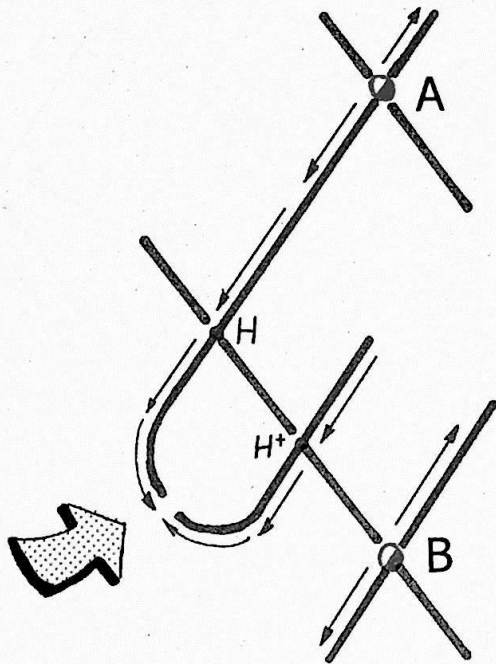


Fig. 2.5: Tentativa de conexão direta entre dois segmentos de uma variedade instável. A conexão não é possível devido ao conflito na orientação das variedades. Adaptado de Abraham e Shaw (1992).

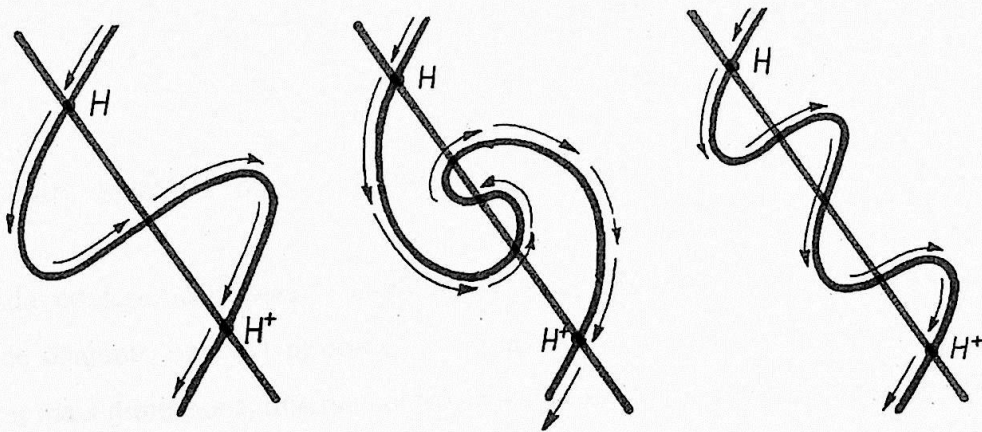


Fig. 2.6: Alguns tipos de conexões entre segmentos de variedades instáveis ligando pontos heteroclínicos sucessivos. Estas ligações são chamadas de assinaturas de Birkhoff. Adaptado de Abraham e Shaw (1992).

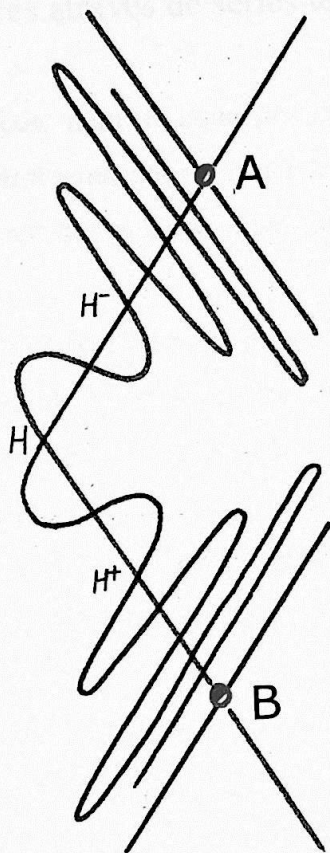


Fig. 2.7: Representação do emaranhado heteroclínico gerado pelo cruzamento da variedade instável do ponto A com a variedade estável do ponto B. Adaptado de Abraham e Shaw (1992).

2.3.3. Conjuntos limites, atratores e bacias de atração

Toda configuração para a qual um sistema dinâmico tende assintoticamente é chamada de conjunto limite. Um ponto fixo estável é o exemplo mais simples, no entanto em duas ou mais dimensões, diversos outros conjuntos limites são permitidos, como ciclos fechados ou toros. Um sistema dinâmico pode apresentar diversos conjuntos limites espalhados ao longo de seu espaço de fases. Se algum domínio leva a um conjunto limite e possui volume nulo, então é chamado de conjunto não-atrativo, e não é observável experimentalmente. Se um domínio do espaço de fases leva a um conjunto limite e tem volume não nulo, então este conjunto limite é observável experimentalmente. Neste caso, o conjunto limite é chamado de atrator e o domínio, de bacia de atração deste atrator.

2.4. Reconstrução de atratores através de séries temporais

Em diversos sistemas físicos, nem as equações de movimento nem as variáveis dinâmicas são conhecidas. Este problema constitui a maior motivação para o estudo da reconstrução da dinâmica de sistemas dos quais se observam séries temporais de uma única variável.

A primeira idéia no sentido de reconstruir o atrator de um sistema dinâmico através de uma série temporal associada a ele foi sugerida por Packard *et al.* (1980). Os autores obtiveram um atrator topologicamente equivalente ao atrator de Rössler (Rössler, 1976), utilizando somente a variável x e suas derivadas ao invés das variáveis originais x, y, z . Com isto os autores forneceram o primeiro indício de que diversas informações sobre a dinâmica do sistema são obtidas mesmo se for considerada somente uma das variáveis.

Outro grande passo nesta linha de pesquisa foi dado por Takens (1981) que demonstrou ser possível reconstruir certas propriedades topológicas do atrator a partir de um vetor obtido de somente uma das variáveis do sistema. O método é conhecido como reconstrução por coordenadas de atraso (*delay plot*). Considere o vetor

$$\xi(t) = \{x(t), x(t-\tau), x(t-2\tau), \dots, x(t-(d-1)\tau)\} \quad (2.6)$$

onde $x(t)$ é a grandeza cuja evolução temporal é observada, τ é um tempo característico e d é a dimensão do vetor. O teorema de Takens mostra que este vetor, sob condições não muito restritivas e para dimensões d suficientemente altas, é uma representação um para um (biunívoca) do atrator original. Isto significa que cada ponto do atrator é representado univocamente por um ponto do vetor gerado pelas coordenadas de atraso e vice-versa.

Desta forma ficou definitivamente provado que atratores de sistemas dinâmicos podem ser reconstruídos através da série temporal obtida a partir de somente uma das variedades deste sistema.

2.5. Reconstrução de atratores através de séries de eventos

Em diversos sistemas físicos, a medida de amplitudes de uma determinada variável não é possível ou desejável, mas sim séries de pulsos ou disparos, também chamadas de

séries de eventos. Isto pode ser observado na experiência da torneira gotejante, onde os tempos entre gotas sucessivas são naturalmente discretos.

Sauer (1994) mostrou que é possível reconstruir a dinâmica de um sistema físico a partir de uma série de intervalos de disparos (ISI - *interspike intervals*).

O método se resume em determinar uma função

$$S(t) = S'(x(t)) > 0 \quad (2.7)$$

e a partir dela e da definição de um instante inicial T_0 e de uma constante Θ , determinar os instantes de tempo $\{T_i\}$ tais que:

$$\Theta = \int_{T_i}^{T_{i+1}} S(t) dt. \quad (2.8)$$

As componentes t_i dos vetores utilizados na reconstrução do atrator são obtidas pelas diferenças $t_i = T_i - T_{i-1}$ e as trajetórias são reconstruídas através dos vetores

$$\xi_i = \{t_i, t_{i-1}, \dots, t_{i-(m+1)}\}, \quad (2.9)$$

onde m é a dimensão da reconstrução. A Fig. 2.8 mostra o atrator de Lorenz reconstruído a partir da série de eventos. É possível observar que as características gerais do atrator são conservadas.

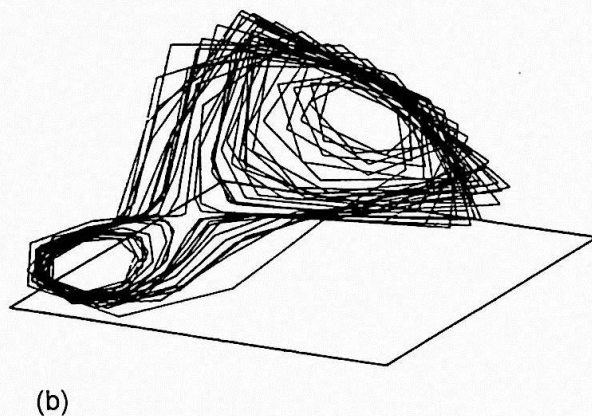
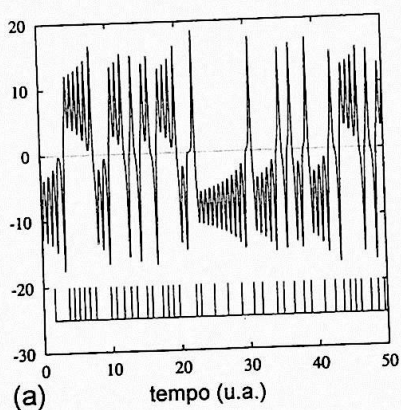


Fig. 2.8: (a) Acima: série temporal da variável X do sistema de Lorenz; abaixo: instantes $\{T_i\}$ de disparos obtidos através dessa série temporal. (b) Reconstrução do atrator de Lorenz através do intervalo entre disparos. O atrator reconstruído preserva as principais características do atrator original. Adaptada de Sauer, 1997.

2.6. Determinação dos pontos fixos instáveis imersos nos atratores

A transformação do ponto fixo (So e Ott, 1995; So *et al.*, 1996) é um método de detecção das órbitas periódicas instáveis imersas em atratores. O método estabelece que é possível estimar a posição destas órbitas periódicas instáveis utilizando a propriedade de que um ponto próximo de um ponto fixo $x^*=f(x^*)$ é mapeado na sua própria vizinhança. Podemos definir uma função densidade de probabilidade $\rho(x)$ que possui singularidades do tipo $|x-x^*|^{-1/2}$. O método consiste em obter um histograma aproximado desta função densidade. Desta forma, o histograma apresenta picos estreitos nas vizinhanças do ponto fixo. Uma característica do método é o surgimento de picos espúrios, dependentes de um parâmetro k , que são eliminados obtendo a média para diversos valores deste parâmetro, tomados aleatoriamente.

Aplicações deste método serão apresentadas na seção 4.2.

3. Arranjo experimental

3.1. Sistema hidráulico

O esquema do sistema hidráulico utilizado no experimento é mostrado na Fig. 3.1. O aparato consiste de um reservatório de aproximadamente 600 litros (c), cujo nível é mantido constante e no qual foi fixado o bico de vidro onde se formam as gotas. Este reservatório é montado sobre uma plataforma de concreto suspensa por cabos de aço, de forma a amortecer as vibrações externas. O abastecimento deste reservatório é feito pelos reservatórios (a) e (b), localizadas a aproximadamente 2 e 2,5 m acima do laboratório, respectivamente. O reservatório (a) recebe a água impulsionada pela bomba, proveniente da caixa coletora inferior (d) localizada no chão do laboratório. O nível da caixa intermediária (c) é mantido constante através de um transbordador, o qual recebe um fluxo constante de água da caixa (b), cujo nível também é mantido constante por um controlador de bóia.

O controle do fluxo d'água através do bico de vidro é feito por uma válvula de agulha controlada por um motor de passo através de um programa computacional. Cada passo no motor é equivalente a $1/8^\circ$.

3.2. Medida dos tempos entre gotas sucessivas

A variável medida no experimento da torneira gotejante é o tempo decorrido entre a passagem de uma gota e a passagem da gota seguinte por um determinado ponto. Esta medida é feita utilizando um laser He-Ne e um fotodiodo a aproximadamente 8 cm abaixo do bico, alinhados de forma que a gota interrompa o feixe de laser ao cair (Fig. 3.1). A medida dos tempos é feita através do sinal induzido no fotodiodo. Enquanto o laser incide sobre o fotodiodo o sinal induzido é de 5 V e, quando não incide, 0 V. A Fig. 3.2 mostra um sinal típico obtido com a passagem de duas gotas sucessivas. O tempo que o sinal se mantém em 0 ou em 5 V é medido através de uma placa contadora cuja resolução é de 1 μ s. O tempo entre uma gota e outra é obtido somando os valores de t_n e δt_n . Maiores detalhes a

respeito do aparato experimental e do seu desenvolvimento podem ser encontrados em (Pinto, 1999).

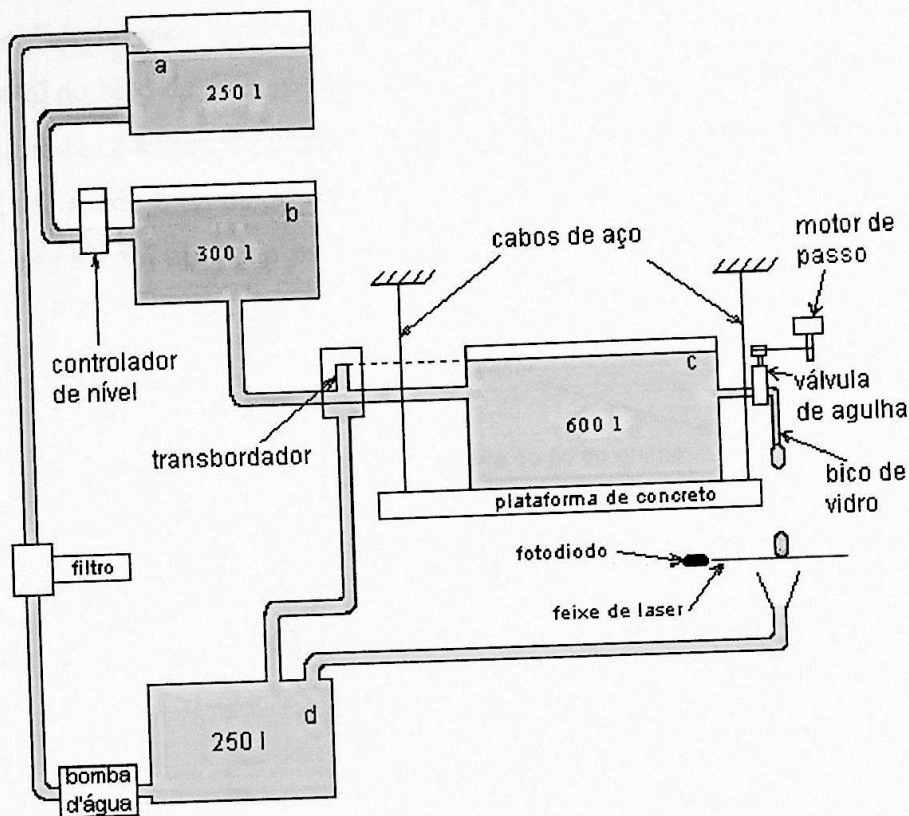


Fig. 3.1: Esquema do sistema hidráulico mostrando a posição dos diversos reservatórios e do bico onde são formadas as gotas. O reservatório de 600 l foi montado sobre uma plataforma de concreto suspensa por quatro cabos de aço para a atenuação da vibração mecânica sobre o experimento.

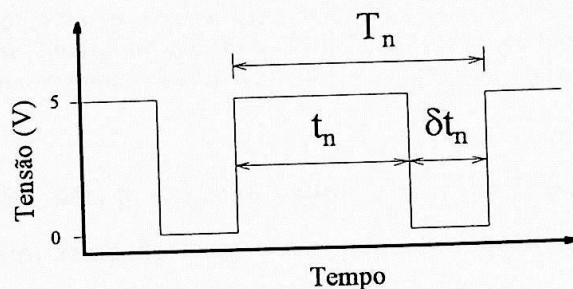


Fig. 3.2: Exemplo de um sinal induzido no fotodiodo pela passagem de duas gotas sucessivas. Enquanto o laser incide sobre o fotodiodo, o sinal induzido se mantém em 5V. No momento em que a gota intercepta o feixe de laser, o sinal se reduz a 0V. A cada mudança de tensão a placa contadora de tempo retorna o tempo entre as duas últimas mudanças, ou seja t_n e δt_n . O tempo entre gotas sucessivas é obtido somando estes dois tempos.

3.3. Medição do ângulo de inclinação do bico

A medição do ângulo de inclinação da torneira foi feita inicialmente através de um transferidor colado no bico, conforme mostrado na Fig. 3.3. Uma haste posicionada sobre a parte horizontal do bico de vidro posiciona o transferidor e suporta o fio de prumo. Quando a torneira é girada, a leitura do ângulo de inclinação é feita diretamente sobre a escala do transferidor, utilizando o fio de prumo.

Este sistema foi utilizado para as medidas de 5° a 25° de inclinação, com variações de 5° .

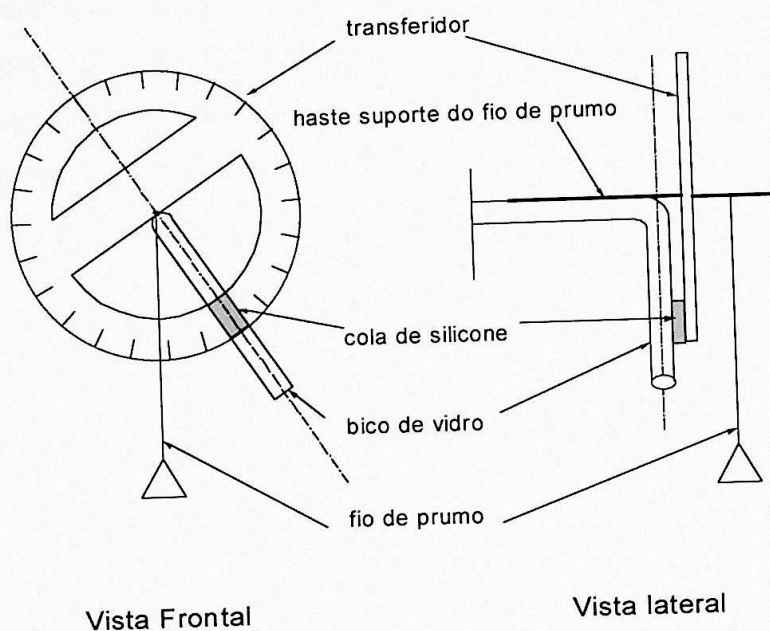


Fig. 3.3: Sistema de medição da inclinação do bico utilizando um transferidor e um fio de prumo. Uma haste posicionada na parte horizontal do bico de vidro é responsável pelo posicionamento do transferidor e do fio de prumo. Quando o bico é girado, a leitura do ângulo é feita diretamente sobre a escala do transferidor.

Para uma medição mais precisa do ângulo de inclinação do bico, foi montado um dispositivo que utiliza um feixe de laser e um pequeno espelho fixado sobre o bico de vidro, conforme mostrado na Fig. 3.4. O feixe de laser é emitido paralelamente ao plano horizontal e refletido pelo espelho, incidindo sobre uma fita graduada posicionada verticalmente a uma distância D do bico. O espelho foi posicionado de maneira a formar um ângulo θ_0 em relação ao eixo de simetria do tubo de vidro, o que faz com que o feixe seja desviado e incida sobre a fita na posição h_0 quando o bico está apurcado. Levando em

conta as grandezas mostradas na Fig. 3.4, a relação entre a medida H da posição de incidência do laser sobre a fita graduada e o ângulo de inclinação θ é:

$$H = (D + h \tan(\theta + \theta_0)) \left(\tan(2(\theta + \theta_0)) - \frac{d}{2} \right), \quad (3.1)$$

onde

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{d}{2} + h_0 \right), \quad (3.2)$$

h é a distância entre o feixe e o eixo de giro do espelho e d é o diâmetro do tubo onde é produzido o laser.

O posicionamento inicial do dispositivo foi feito através de um fio de prumo pendurado em frente ao bico, que permite o seu alinhamento na vertical, por comparação. Nesta situação o espelho foi fixado ao bico e a posição h_0 de incidência do feixe sobre a fita foi anotada. Com esta medida e com a distância d , medida diretamente sobre os espelho, é possível obter o ângulo inicial de inclinação θ_0 (Eq. 3.2).

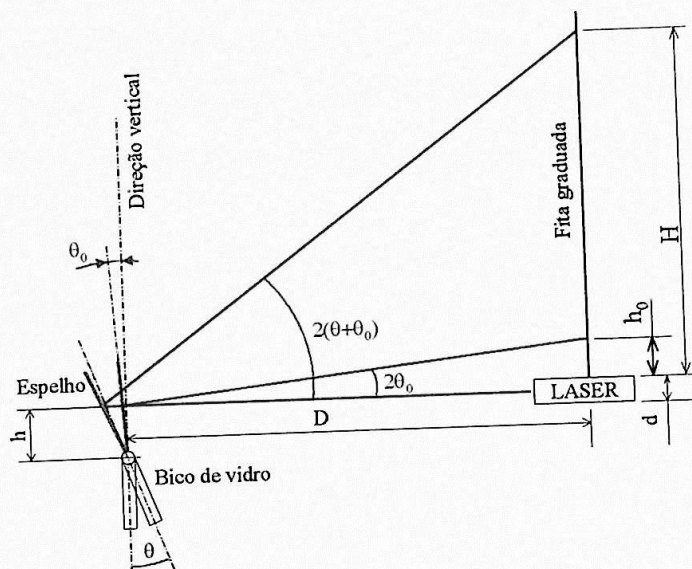


Fig. 3.4: Esquema do dispositivo de medição do ângulo de inclinação do bico de vidro. Este dispositivo utiliza um feixe de LASER e um espelho fixo sobre o bico. Uma fita graduada posicionada verticalmente permite a medição da posição de incidência do laser sobre ela. O ângulo é obtido através da geometria do dispositivo.

3.4. Aquisição dos dados

Os intervalos de tempo T_n medidos pela placa contadora são gravados seqüencialmente em arquivos. Para cada arquivo, a abertura da torneira (vazão d'água) é mantida fixa. Uma rotina computacional cujo fluxograma é mostrado na Fig. 3.5 se encarrega de ler os valores dos tempos medidos pela placa contadora, gravá-los em disco, acionar o motor de passo, esperar durante um período predeterminado e finalmente iniciar a aquisição de um novo arquivo. Esta rotina se repete até que o número de arquivos atinja um valor previamente estabelecido. O período de espera é necessário para que o sistema se estabilize após a mudança da abertura da torneira. Tipicamente esperamos tempos correspondentes a 5000 gotas.

As medidas foram feitas diminuindo a vazão na torneira, partindo de vazões mais altas e fechando o motor de um passo entre cada arquivo. Para cada valor de θ são obtidas seqüências de arquivos, cada um identificado pelo número de passos dados desde a posição de vazão máxima, tomada como passo zero.

Dois parâmetros de controle são utilizados neste estudo da dinâmica da torneira, a inclinação do bico, medida em graus e o fluxo d'água, parametrizado em termos do número de passos do motor.

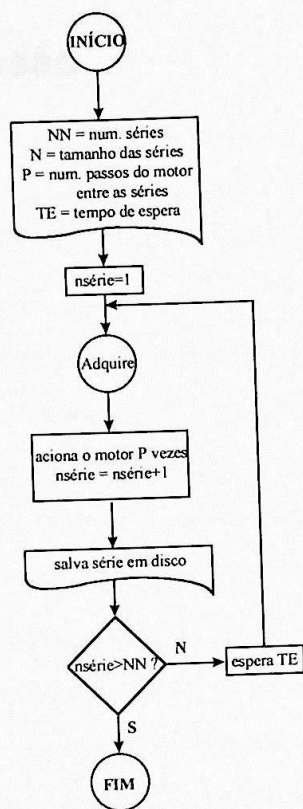


Fig. 3.5: Fluxograma do programa de aquisição de dados. O programa se inicia com a entrada dos parâmetros da aquisição, a quantidade de arquivos, o número de gotas medidas em cada arquivo, o número de passos do motor entre cada arquivo e o número de gotas de espera entre arquivos. A rotina é repetida até que o número de arquivos estabelecido seja alcançado. Retirado de Pinto (1999).

4. Resultados e discussão

4.1. Primeiros dados: Transição entre as bacias de atração

Pinto (1999) obteve dados com o bico da torneira apumado ($\theta = 0$) e observou que para um valor crítico P_c da vazão d'água (abertura da torneira), o sistema apresenta uma mudança abrupta de comportamento. Esta mudança ocorre com a diminuição sucessiva da vazão da torneira e consiste em uma transição entre duas regiões diferentes do espaço de fases: C1 que perde sua estabilidade, e C2 que passa a ser estável e a conter todas as órbitas do sistema. A Fig. 4.1 mostra os diversos valores dos tempos T_n de passagem entre gotas sucessivas em função do número de passos do motor controlador da torneira. Estes gráficos representam o diagrama de bifurcações do sistema e permitem observar eventuais travamentos de frequência, crises, e as regiões ocupadas pelo sistema ao longo da variação do parâmetro de controle (abertura da torneira). A transição observada na Fig. 4.1 foi identificada como uma "Blue Sky Catastrophe" (Pinto e Sartorelli, 2000; Abraham e Stuart, 1986, Abraham e Shaw, 1992) e é descrita a seguir.

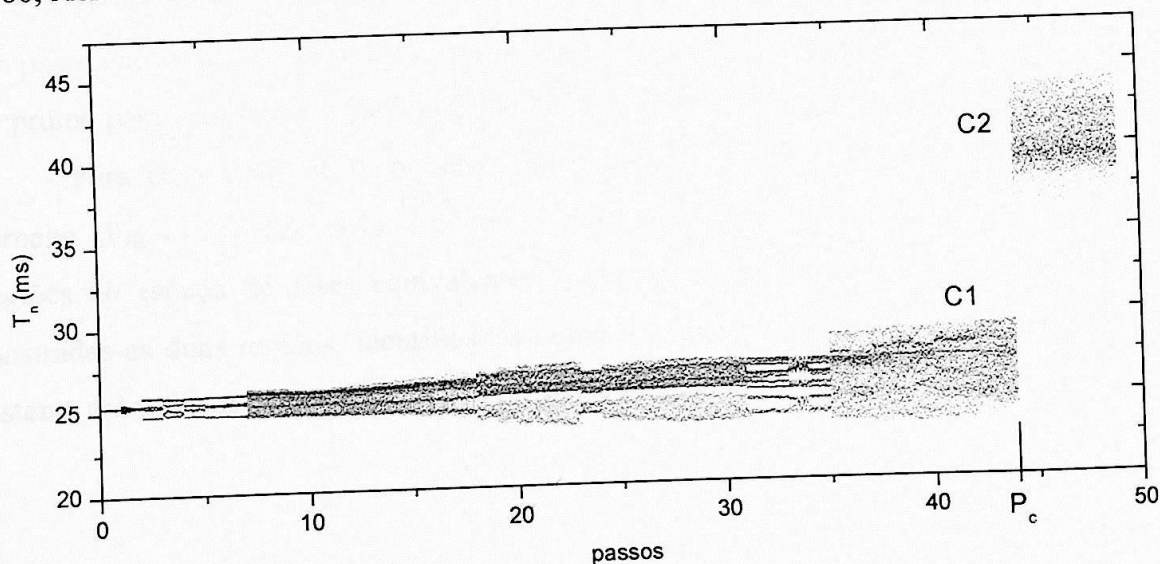


Fig. 4.1: Diagrama de bifurcações dos dados obtidos por Pinto (1999) onde a transição ocorrida entre as regiões C1 e C2 para o valor P_c da abertura da torneira, foi identificada como uma "Blue Sky Catastrophe".

A Fig. 4.2 mostra alguns atratores reconstruídos (T_{n+1} vs. T_n) correspondentes aos dados da Fig. 4.1. Um ponto de sela foi identificado na região intermediária dos atratores e está representado na Fig. 4.2 pela estrela vermelha. Juntamente com os atratores, é mostrada uma representação do retrato de fases do sistema, com as variedades invariantes deste ponto de sela mostradas em azul (variedade instável) e em verde (estável).

O crescimento do atrator (Fig. 4.2(a) a Fig. 4.2(d)) faz com que a variedade instável seja empurrada na direção da estável, até o tangenciamento e a criação de infinitas dobras e pontos homoclínicos. Com isto, o atrator inferior deixa de ser estruturalmente estável, desaparecendo e acarretando a convergência de todas as órbitas para a região Caos2 (Fig. 4.2f).

Inclinando o bico de um ângulo $\theta = 5^\circ$, foi verificado que o comportamento do sistema sofre modificações significativas como, por exemplo, a junção entre o atrator superior e o inferior, formando um único atrator, com órbitas conectando as duas regiões anteriormente desconexas.

Com o objetivo de estudar estas modificações fizemos medidas dos tempos entre gotas em função da vazão para $\theta = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$ e 25° . Para estes ângulos, adquirimos séries de dados de 8192 tempos T_n entre gotas, desprezando 4096 gotas antes de cada série. Para cada valor de θ , adquirimos cerca de 120 arquivos, diminuindo a vazão da torneira de um passo entre cada arquivo. Para a aquisição destes dados utilizamos o transferidor e o fio de prumo para determinar a inclinação do bico, conforme a descrição experimental.

Para cada valor de θ , plotamos os diagramas de bifurcações T_n vs. abertura da torneira (Fig. 4.3 a Fig. 4.7). Em todos estes diagramas, observamos transições entre regiões do espaço de fases equivalentes à observada para $\theta = 0^\circ$. Nos diagramas são mostradas as duas regiões, identificadas como C1, que representa a região ocupada pelo sistema antes da transição, e C2, que representa a região ocupada após a transição.

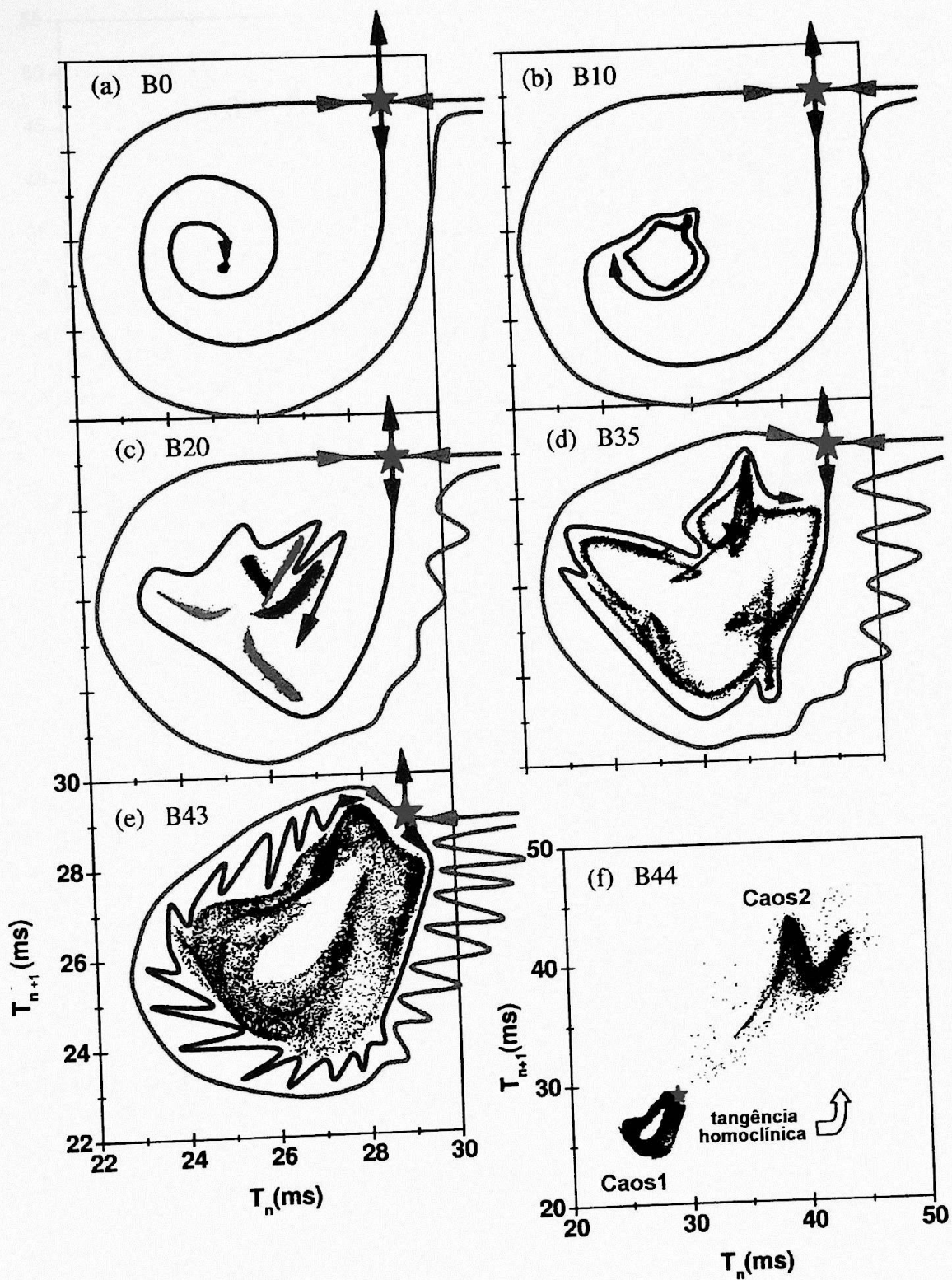


Fig. 4.2: Atratores reconstruídos mostrando a evolução do sistema para uma "Blue Sky Catastrophe". As curvas verdes (azuis) representam a variedade estável (instável) do ponto de sela representado pela estrela. Retirado de Pinto (1999).

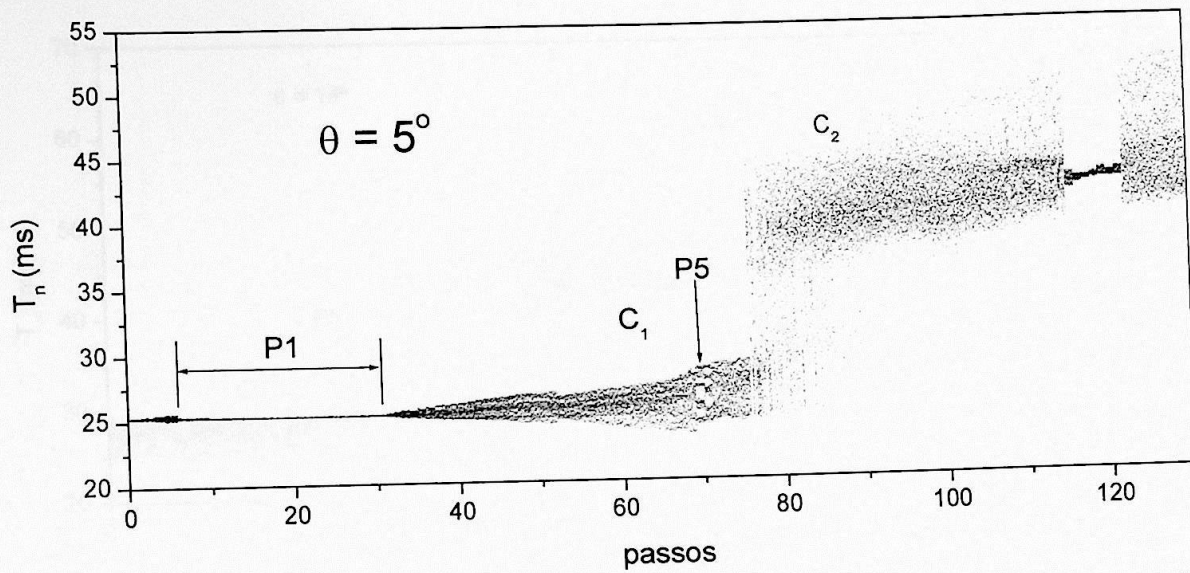


Fig. 4.3: Diagrama de bifurcações para $\theta = 5^\circ$. As duas regiões ocupadas pelo sistema são identificadas como C_1 (antes da transição) e C_2 (após a transição). As regiões identificadas com P_1 e P_5 identificam comportamentos periódicos de período um e 5, respectivamente.

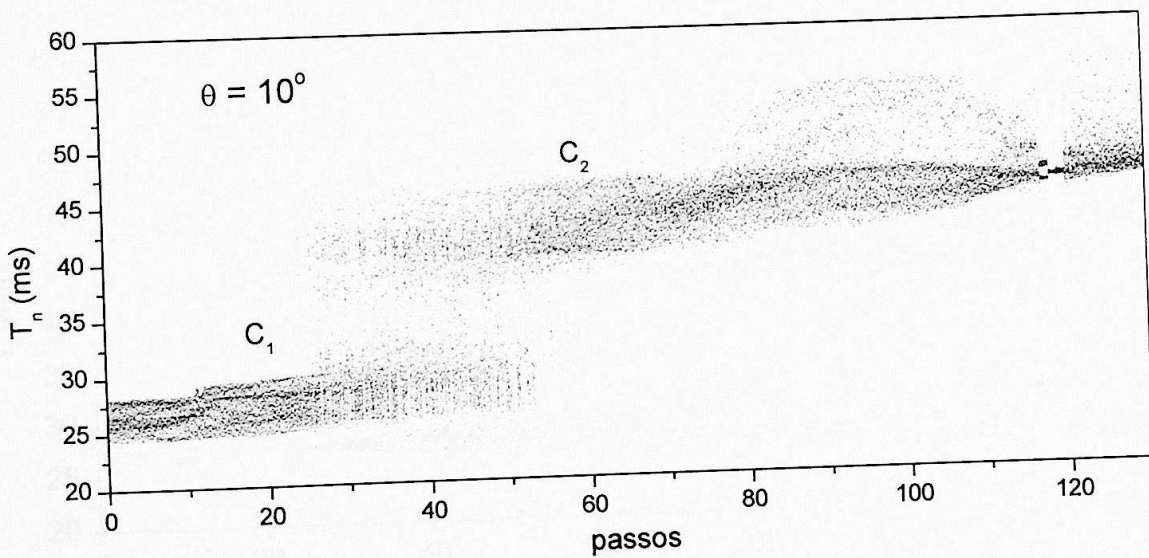


Fig. 4.4: Diagrama de bifurcações para $\theta = 10^\circ$. As duas regiões ocupadas pelo sistema são identificadas como C_1 (antes da transição) e C_2 (após a transição).

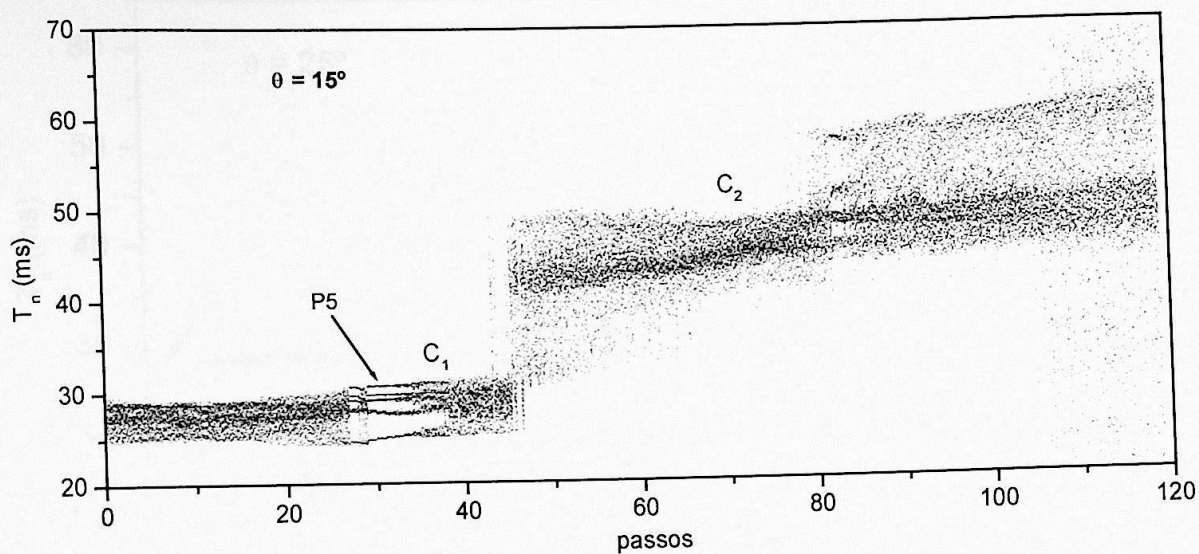


Fig. 4.5: Diagrama de bifurcações para $\theta = 15^\circ$. As duas regiões ocupadas pelo sistema são identificadas como C1 (antes da transição) e C2 (após a transição). A região P5 identifica a região do parâmetro de controle onde o sistema apresenta comportamento periódico de período cinco.

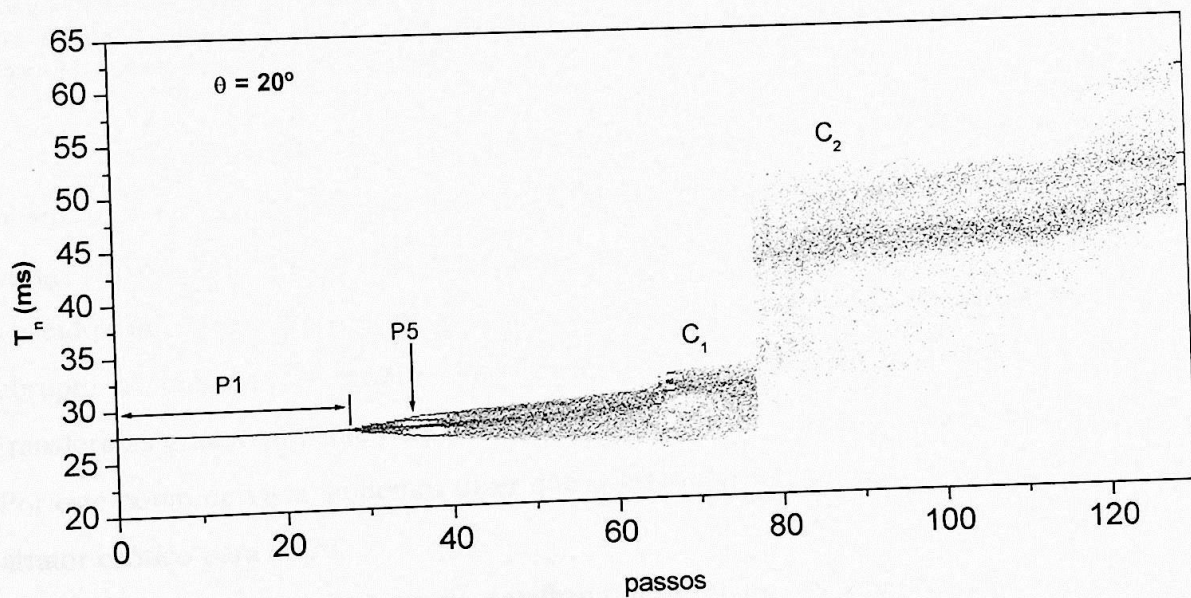


Fig. 4.6: Diagrama de bifurcações para $\theta = 20^\circ$. As duas regiões ocupadas pelo sistema são identificadas como C1 (antes da transição) e C2 (após a transição). P1 e P5 são regiões onde o sistema apresenta comportamento periódico de período um e cinco, respectivamente.

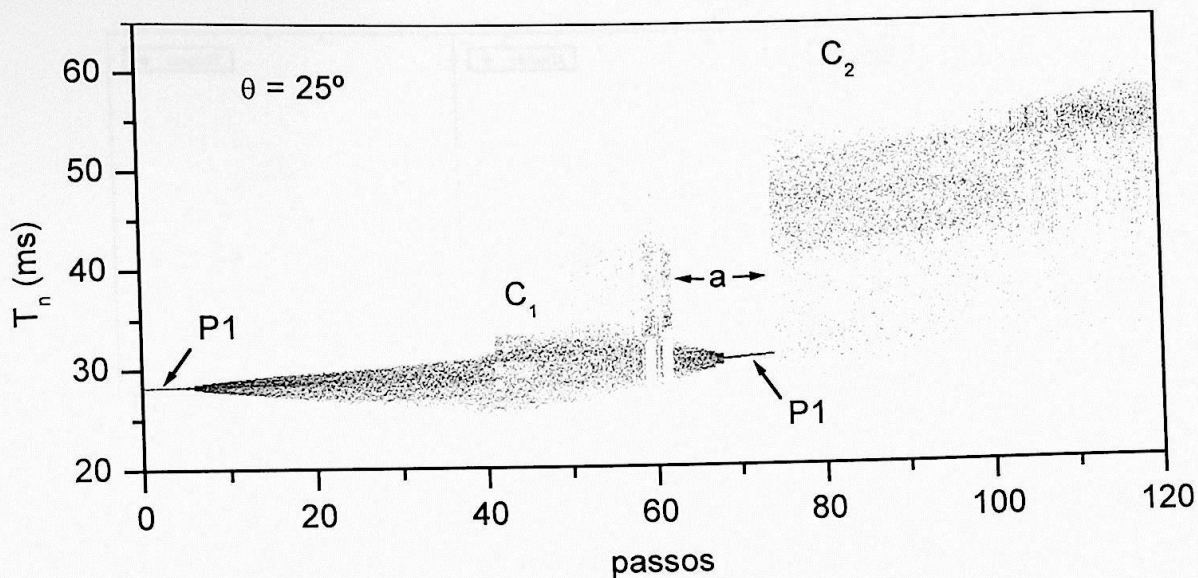


Fig. 4.7: Diagrama de bifurcações para $\theta = 5^\circ$. As duas regiões ocupadas pelo sistema são identificadas como C1 (antes da transição) e C2 (após a transição). As regiões identificadas com P1 mostram as faixas do parâmetro de controle para as quais o sistema é periódico (período um). A faixa (a) mostra a quando o sistema sofre uma súbita volta para o atrator inferior, passando a apresentar um comportamento quase periódico (ciclo limite). Com o aumento do parâmetro o raio do ciclo limite diminui gradativamente, até que o sistema se torna periódico. Após mais alguns passos, o sistema sofre outra transição, passando para a região C2.

Verificamos que, para os valores de θ medidos, a “Blue Sky Catastrophe” não ocorre, isto é, o atrator C1 não é destruído e substituído pelo atrator C2 quando o sistema atinge o parâmetro crítico. Ao invés disto, ocorre a fusão dos atratores C1 e C2, que são visitados intermitentemente, o que pode também ser interpretado como um crescimento abrupto no tamanho do atrator. Além disto, com a diminuição da vazão, as órbitas são transferidas gradativamente para a região C2 até que o sistema não visite mais a região C1. Por este ponto de vista, podemos dizer que o sistema passa por uma transição suave de um atrator caótico para outro.

Para uma observação mais detalhada deste efeito, os atratores correspondentes às séries temporais medidas foram reconstruídos através do mapa de primeiro retorno (T_{n+1} vs. T_n). Identificamos cada atrator com um prefixo alfabético, referente ao ângulo de inclinação do bico, e um número, que corresponde aos passos dados pelo motor. Da Fig. 4.8 à Fig. 4.11 mostramos alguns destes atratores em duas seqüências em mesma escala. Os atratores da seqüência superior mostram a evolução do sistema antes do início da transição e os atratores da parte inferior, após o início da transição.

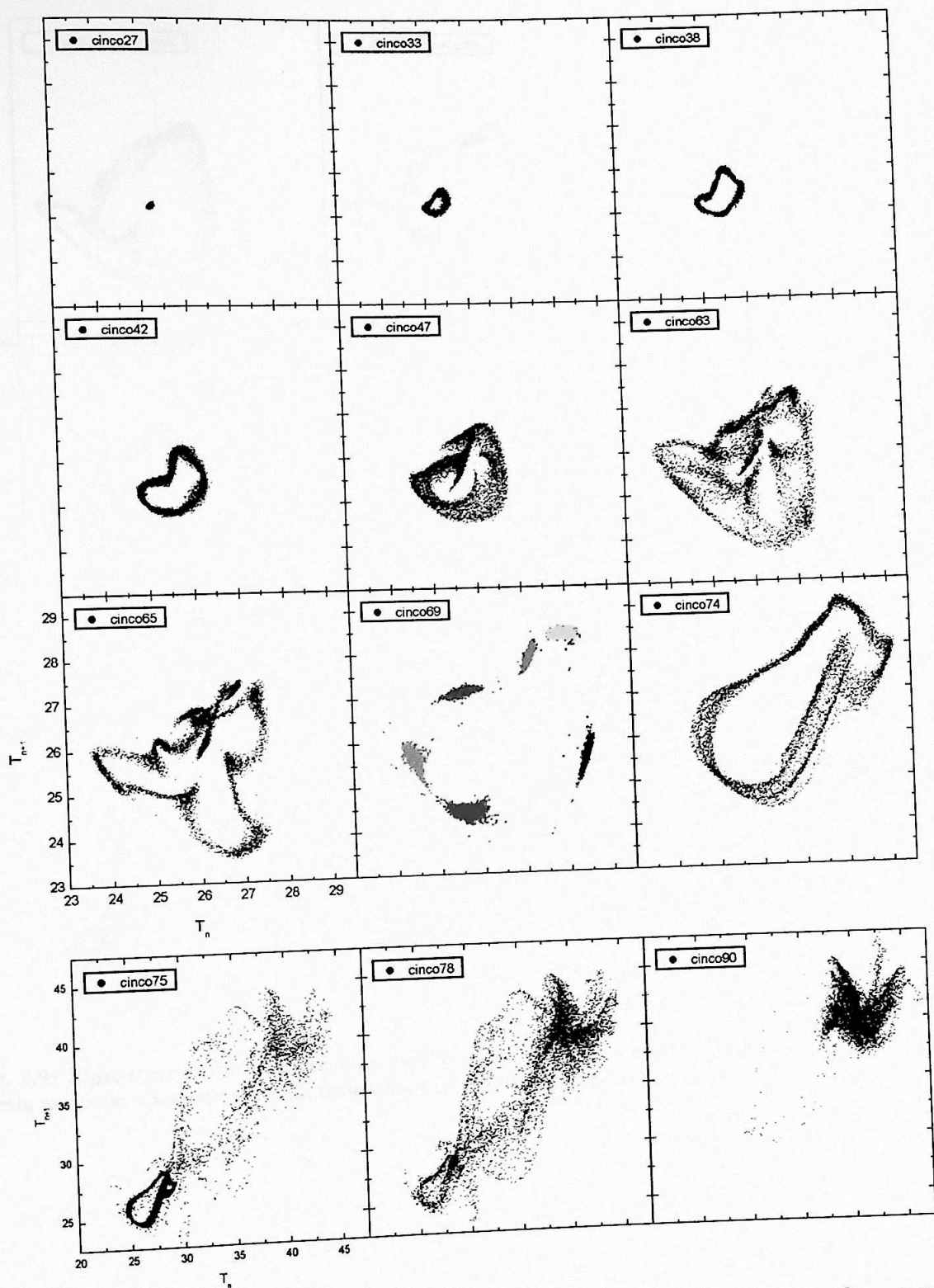


Fig. 4.8: Alguns atratores reconstruídos para $\theta = 5^\circ$. Os atratores superiores mostrados na mesma escala mostram o sistema antes da transição, e os inferiores, após a transição. O atrator colorido foi construído de forma que os pontos são plotados em seis cores diferentes, sucessivamente, e mostra que o sistema apresenta um travamento de frequência cujo período é seis.

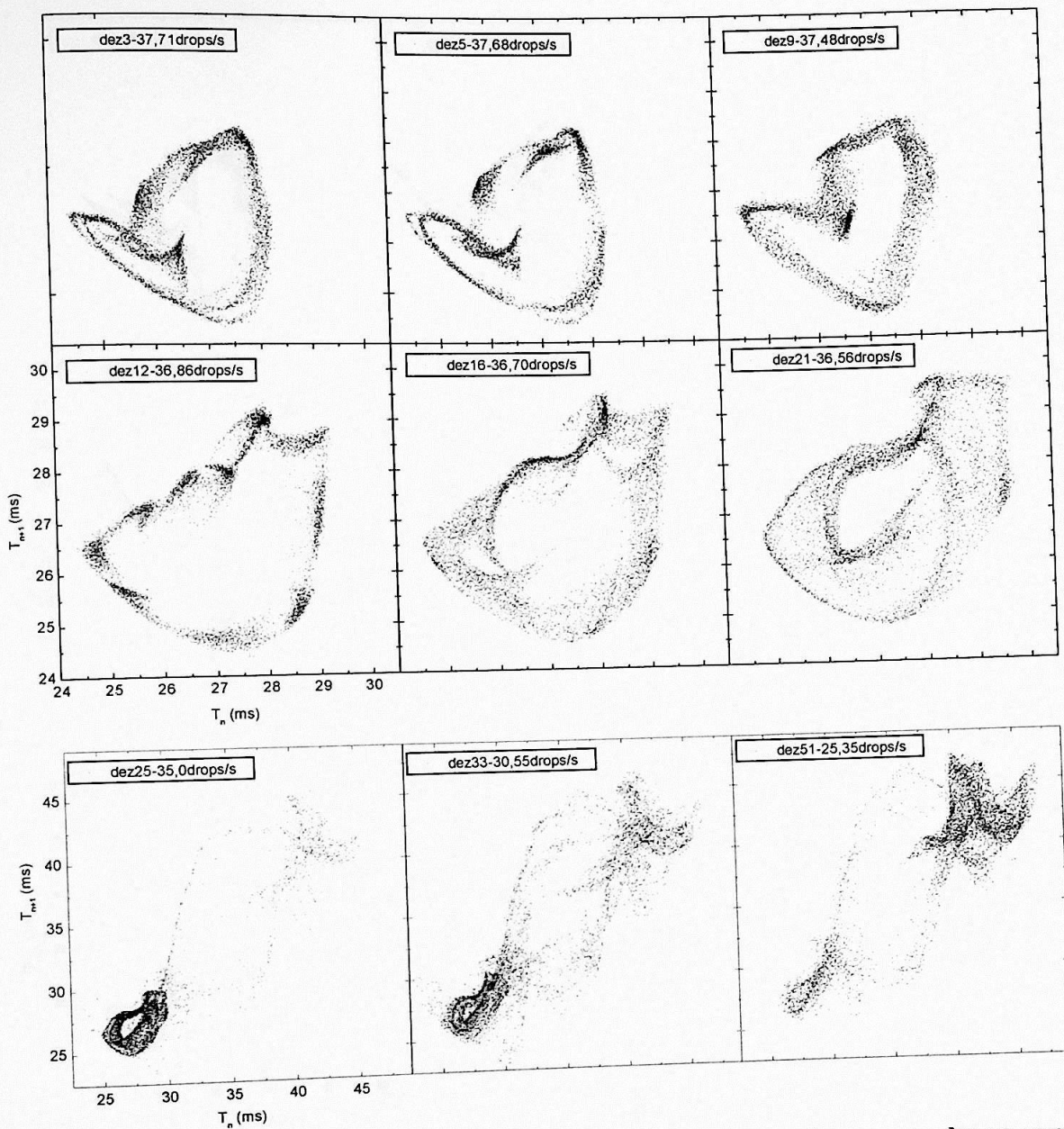


Fig. 4.9: Alguns atratores reconstruídos para $\theta = 10^\circ$. Os atratores superiores mostrados na mesma escala mostram o sistema antes da transição, e os inferiores, após a transição.

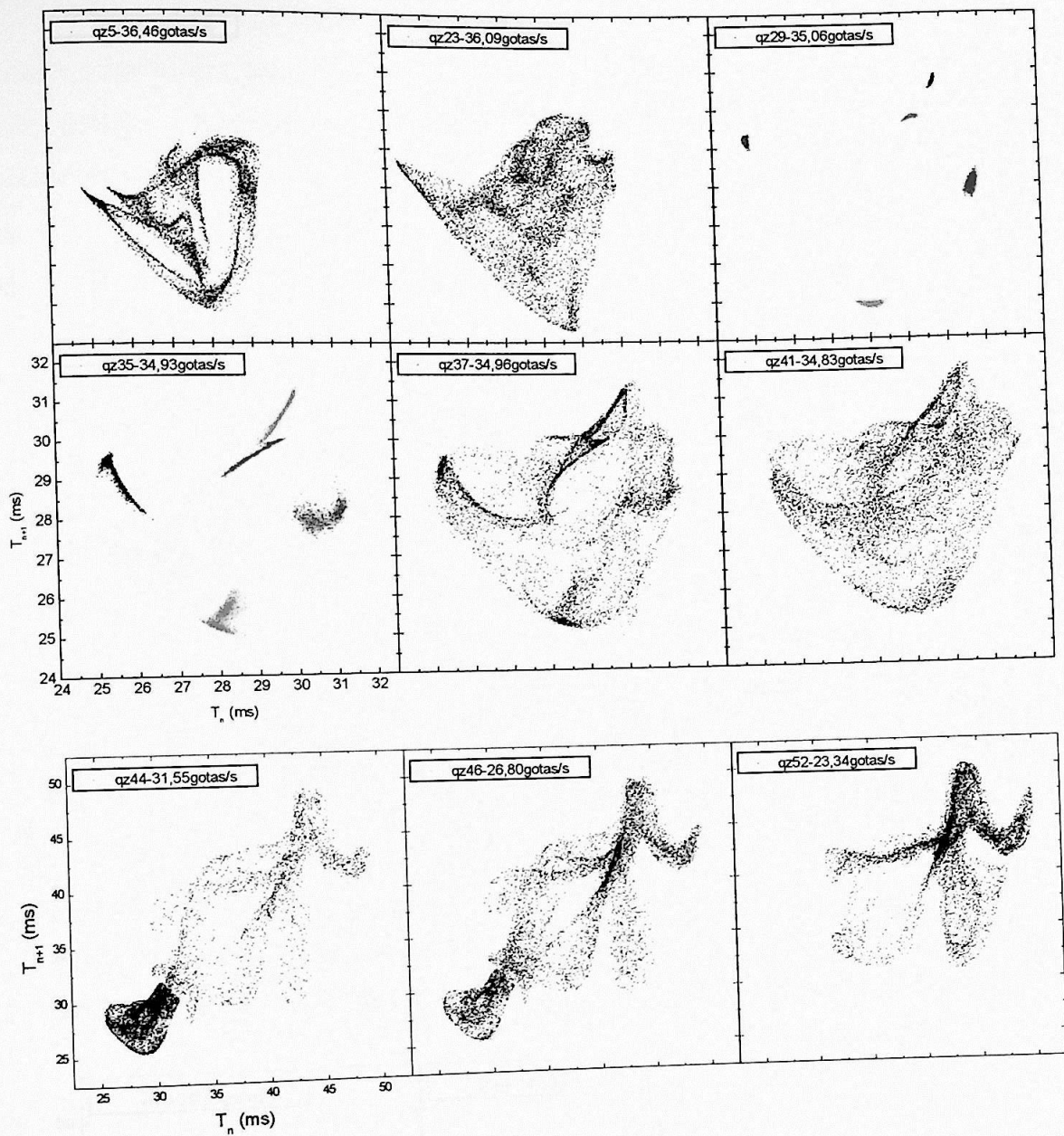


Fig. 4.10: Alguns atratores reconstruídos para $\theta = 15^\circ$. Os atratores superiores mostrados na mesma escala mostram o sistema antes da transição, e os inferiores, após a transição. Os atratores coloridos mostram o sistema em dois travamentos de período cinco.

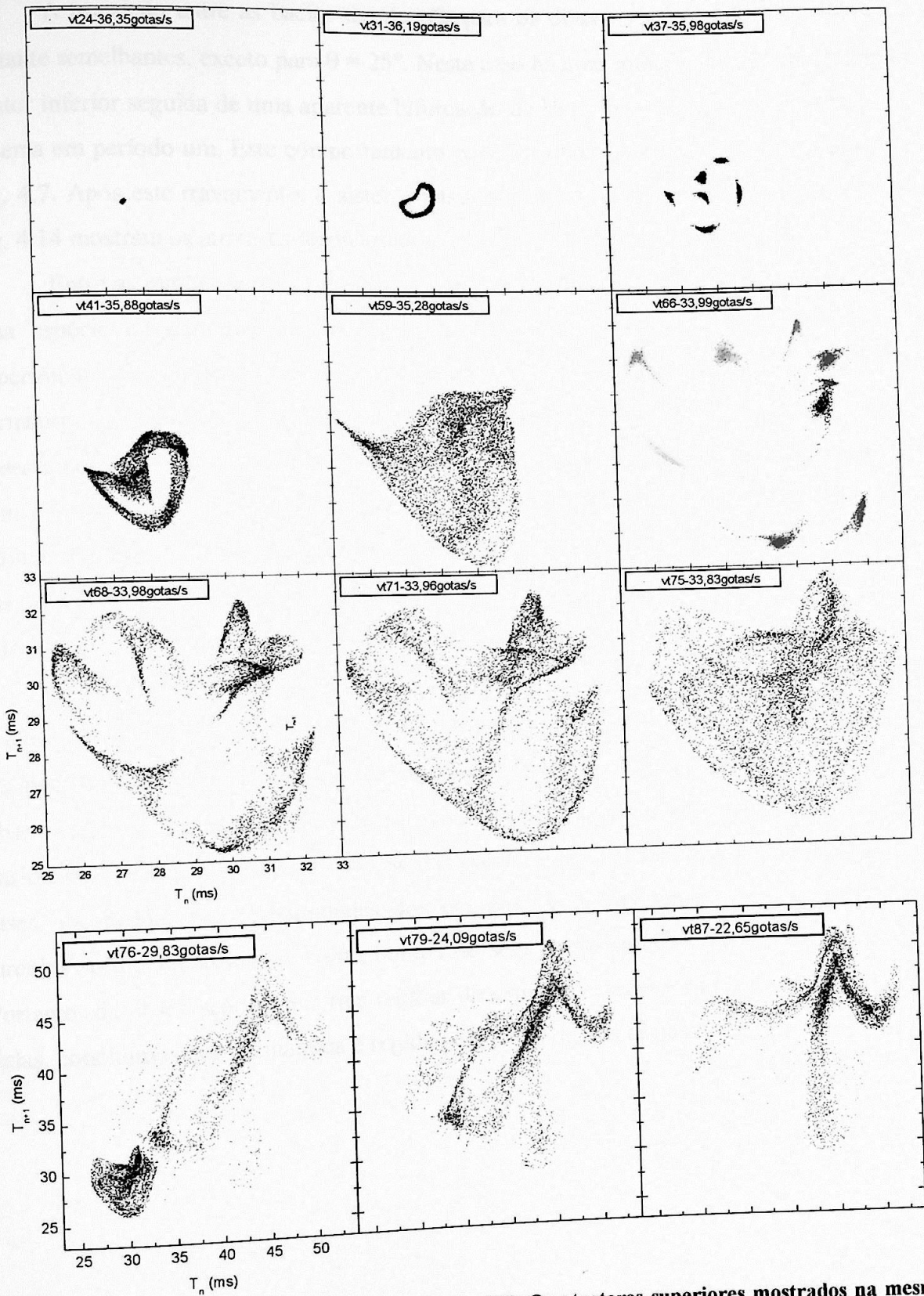


Fig. 4.11: Alguns atratores reconstruídos para $\theta = 20^\circ$. Os atratores superiores mostrados na mesma escala mostram o sistema antes da transição, e os inferiores, após a transição. O atrator colorido mostra um travamento de período nove.

A transição entre as bacias de atração para os diversos valores de θ medidos são bastante semelhantes, exceto para $\theta = 25^\circ$. Neste caso há uma súbita volta do sistema para o atrator inferior seguida de uma aparente bifurcação de Hopf inversa e de um travamento do sistema em período um. Este comportamento pode ser observado na faixa (a) destacada na Fig. 4.7. Após este travamento, o sistema passa para a região superior C2. As Fig. 4.12 a Fig. 4.14 mostram os atratores reconstruídos referentes a este comportamento.

Entre as regiões superior e inferior existe uma região intermediária que serve como uma espécie de caminho de ligação entre elas, para a maioria dos parâmetros do experimento. Os pontos sobre a região intermediária são levados diretamente a C1 ou a C2, permanecendo nestas regiões até que uma nova mudança de região ocorra. No entanto, observamos que existem alguns parâmetros para os quais esta região é visitada juntamente com o atrator inferior ou com o superior. Observamos também que há uma faixa dos parâmetros na qual existe um atrator intermediário, o qual é visitado pela grande maioria das órbitas do sistema. Três exemplos de atratores deste tipo podem ser mostrados na Fig. 4.15, onde a região intermediária é destacada por um retângulo.

A estabilidade desta porção intermediária pode ser observada seguindo algumas órbitas pertencentes a cada uma delas, conforme feito na Fig. 4.16, onde cada conjunto de segmentos da mesma cor representa a trajetória traçada por 50 gotas sucessivas. É possível observar que as órbitas permanecem na mesma região durante diversas gotas. A passagem das órbitas de uma região para outra se dá somente por duas faixas estreitas do espaço de fases, localizadas nas proximidades dos círculos verdes mostrados na Fig. 4.16. Estes círculos foram identificados como pontos de sela, conforme descrito na seção seguinte. Portanto, da observação destas três regiões do espaço de fases e das órbitas em cada uma delas, concluímos que a dinâmica é regida pela fusão de três bacias de atração.

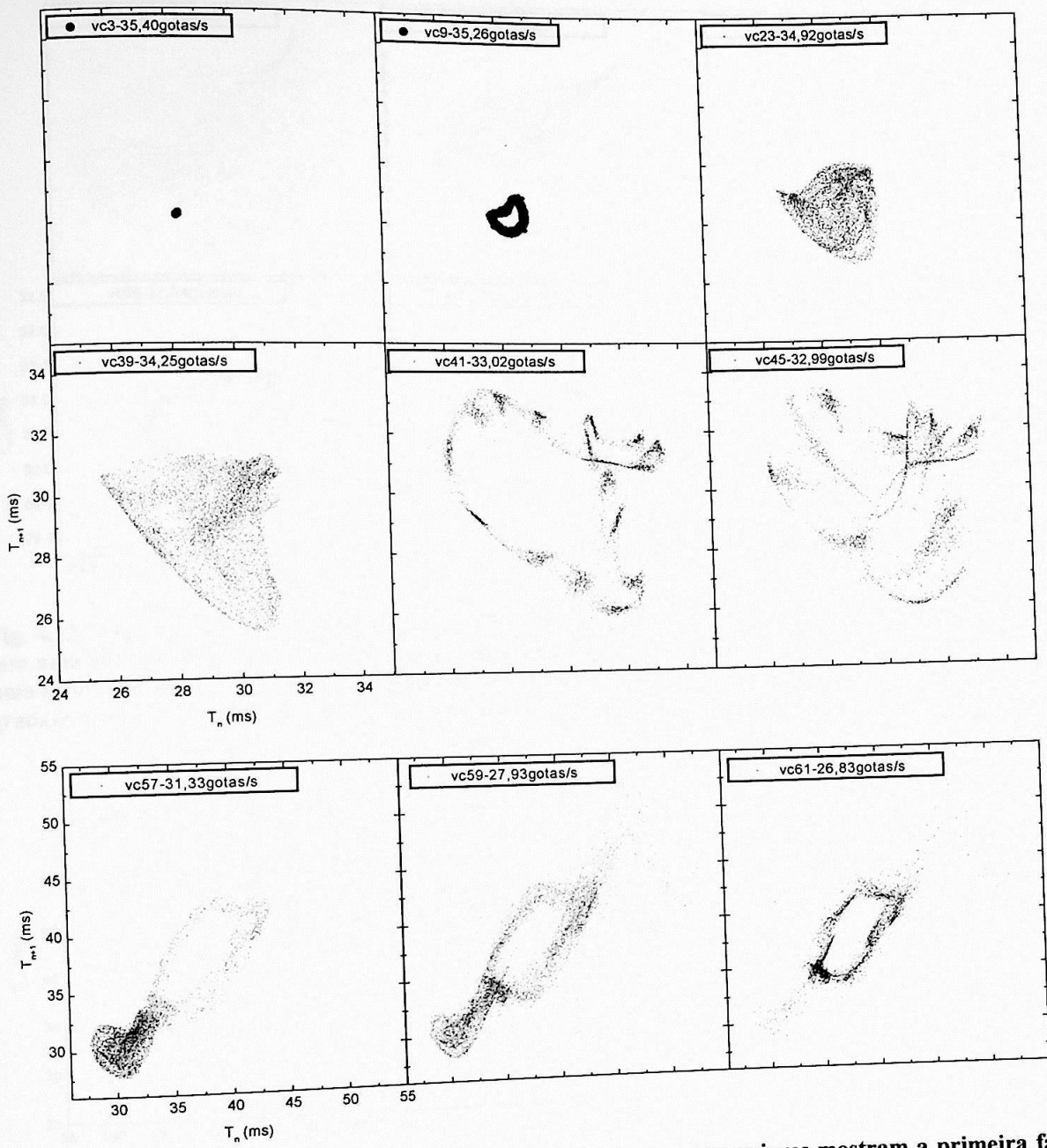


Fig. 4.12: Atratores reconstruídos para $\theta = 25^\circ$. Os seis atratores superiores mostram a primeira fase dos atratores, antes da transição. Os três atratores inferiores mostram o sistema após a primeira crise, onde as três bacias de atração são visitadas intermitentemente. O atrator do canto inferior direito mostra uma situação em que a região intermediária é a mais visitada.

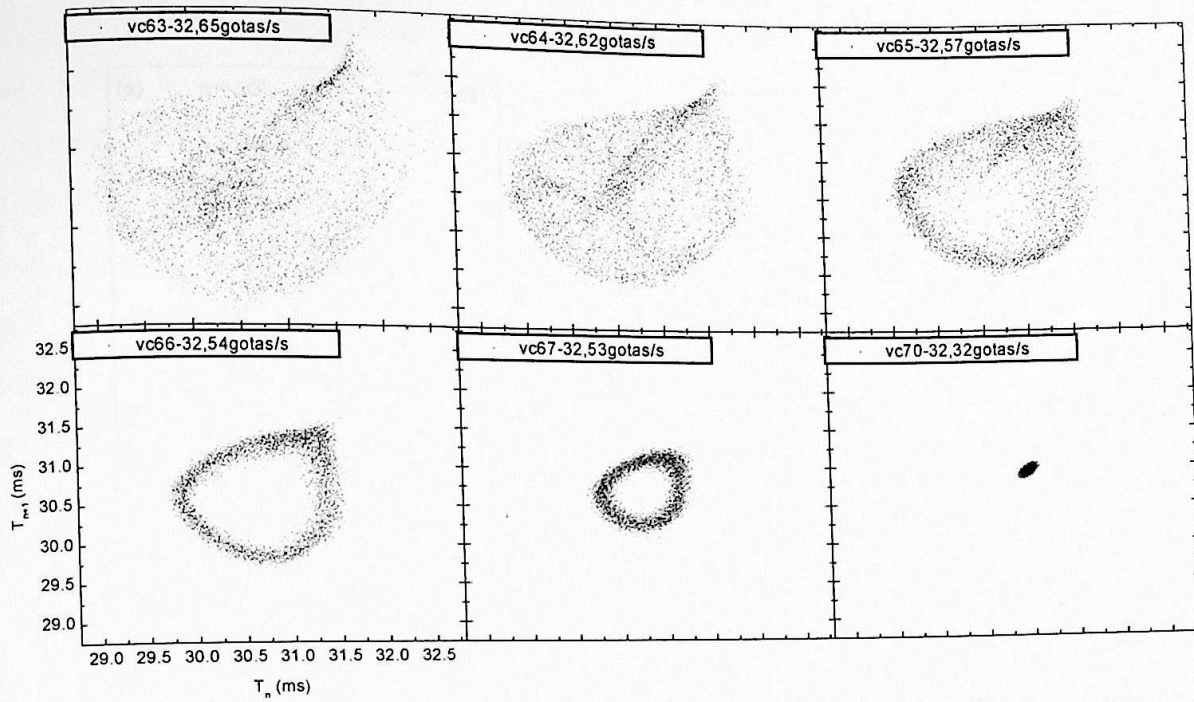


Fig. 4.13: Alguns atratores reconstruídos para $\theta = 25^\circ$, mostrando que após a primeira crise, o sistema tem uma súbita volta para a região inferior (alta vazão) e apresenta um comportamento semelhante a uma bifurcação de Hopf inversa, passando de um atrator caótico para um ciclo limite cujo raio diminui gradativamente com o parâmetro de controle até que o sistema se torna periódico.

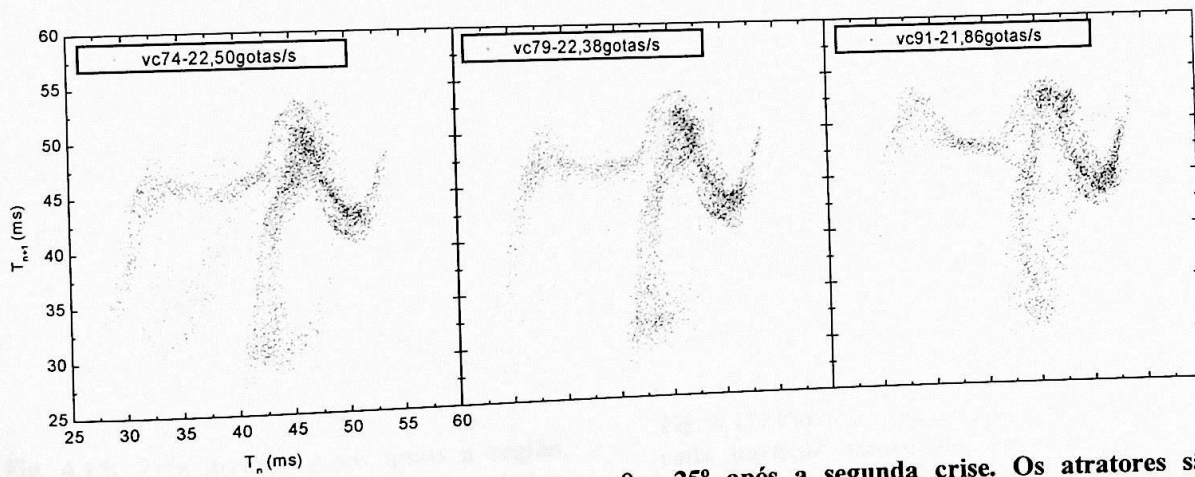


Fig. 4.14: Alguns atratores reconstruídos para $\theta = 25^\circ$ após a segunda crise. Os atratores são semelhantes aos atratores de baixa vazão para outros valores de θ , porém a transição é abrupta, partindo de um atrator periódico de período

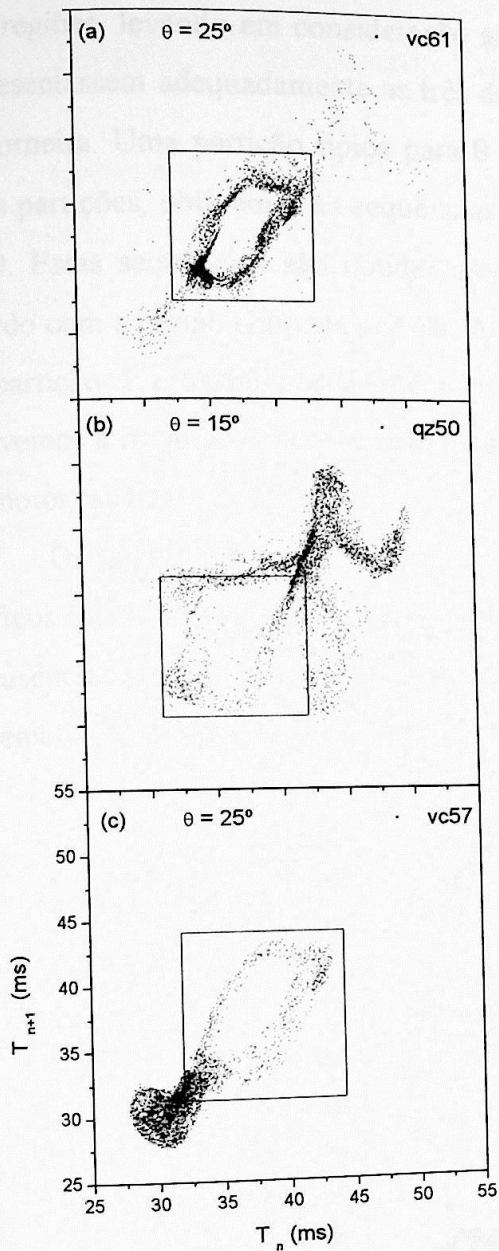


Fig. 4.15: Três atratores nos quais a região intermediária é visitada. Em (a) temos a única situação em que esta região é estável, contendo a grande maioria das órbitas. (b) O atrator intermediário fundido com o atrator superior e em (c) fundido com o atrator inferior.

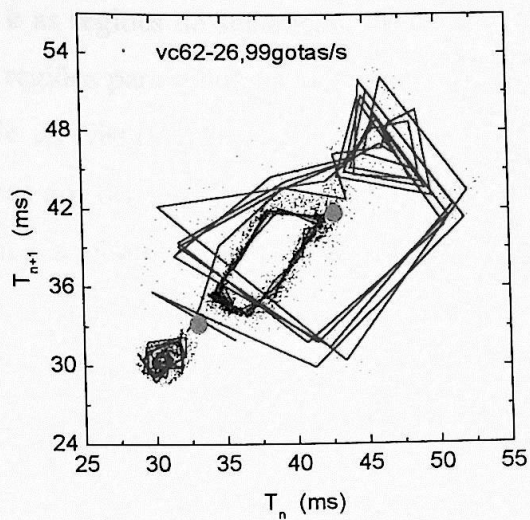


Fig. 4.16: Cada conjunto de segmentos da mesma cor representa 50 gotas em que o sistema visita uma das regiões do espaço de fases.

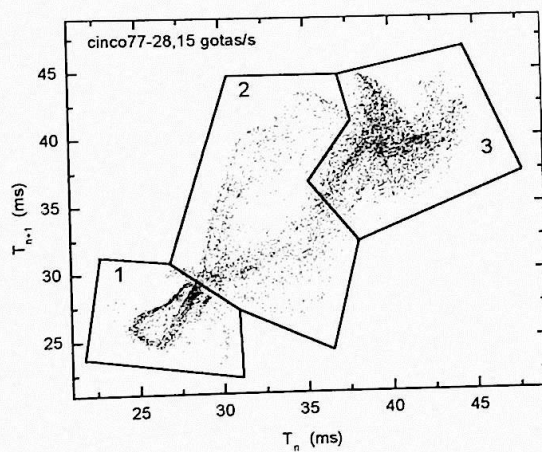


Fig. 4.17: Partição típica feita para $\theta=5^\circ$. Para cada partição associamos um símbolo, e a partir da série de dados obtemos a seqüência simbólica, associando ao ponto, o símbolo da partição à qual ele pertence.

Para o estudo da visitação destas bacias de atração, dividimos o espaço de fases em três regiões, levando em consideração as órbitas e as regiões de separação, de forma que representassem adequadamente as três diferentes regiões para todos os valores da abertura da torneira. Uma partição típica para $\theta = 5^\circ$ pode ser vista na Fig. 4.17. De acordo com estas partições, obtivemos as seqüências simbólicas dos diversos atratores, para cada valor de θ . Estas seqüências são obtidas associando um símbolo a cada ponto do atrator, de acordo com a região ocupada por ele. Associamos o símbolo 1 aos pontos que se localizam na partição 1 e assim por diante. Contando os símbolos de cada seqüência simbólica, obtivemos a freqüência de visitação média de cada partição em função do número de passos do motor (abertura da torneira).

Os gráficos destas freqüências de visitação podem ser vistos na Fig. 4.18. Estes gráficos fornecem um panorama geral do mecanismo de troca da estabilidade dos atratores. A ausência de um padrão neste mecanismo de troca leva à conclusão de que ele depende fortemente do ângulo de inclinação.

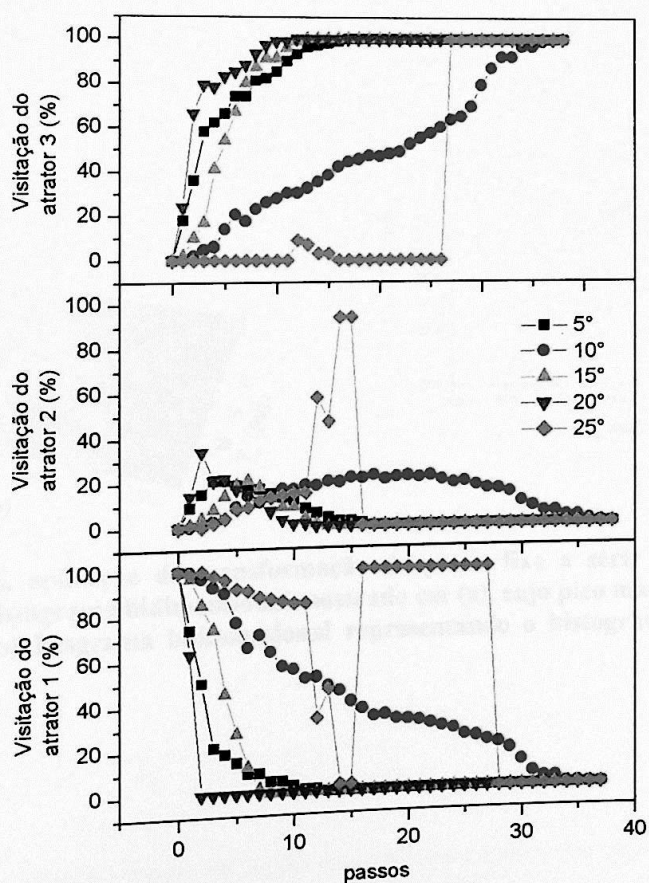


Fig. 4.18: Freqüência de visitação dos atratores em função do número de passos (abertura da torneira). Os atratores são identificados da mesma forma que na Fig. 4.17, isto é, 1 para a região inferior (alta vazão), 2 para a região intermediária e 3 para a região superior (de baixa vazão).

4.2. Transformação do ponto fixo

Utilizamos a técnica da transformação do ponto fixo (TPF) para identificar os possíveis pontos fixos instáveis imersos nos atratores. Pinto (1999) já havia verificado a presença de um ponto fixo instável para $\theta=5^\circ$. A Fig. 4.19 mostra o resultado da transformação aplicada à série cinco75 (Fig. 4.6).

Aplicamos também a TPF a diversas outros atratores após o início da transição. Alguns destes resultados podem ser vistos na Fig. 4.20. Estes resultados mostram a presença de dois pontos fixos instáveis imersos nos atratores, um já observado anteriormente, na região da fronteira entre o atrator inferior e o intermediário e o outro imerso na parte superior do atrator.

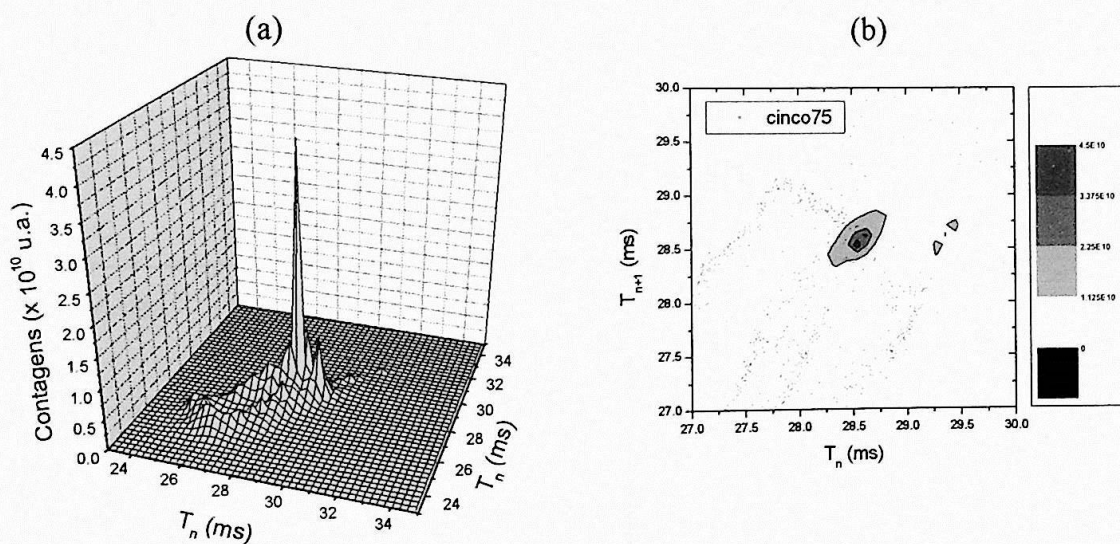


Fig. 4.19: Exemplo da aplicação da transformação do ponto fixo a série cinco75. O resultado da transformação é um histograma bidimensional mostrado em (a), cujo pico maior identifica a posição do ponto fixo instável. (b) Diagrama bidimensional representando o histograma através de curvas de níveis.

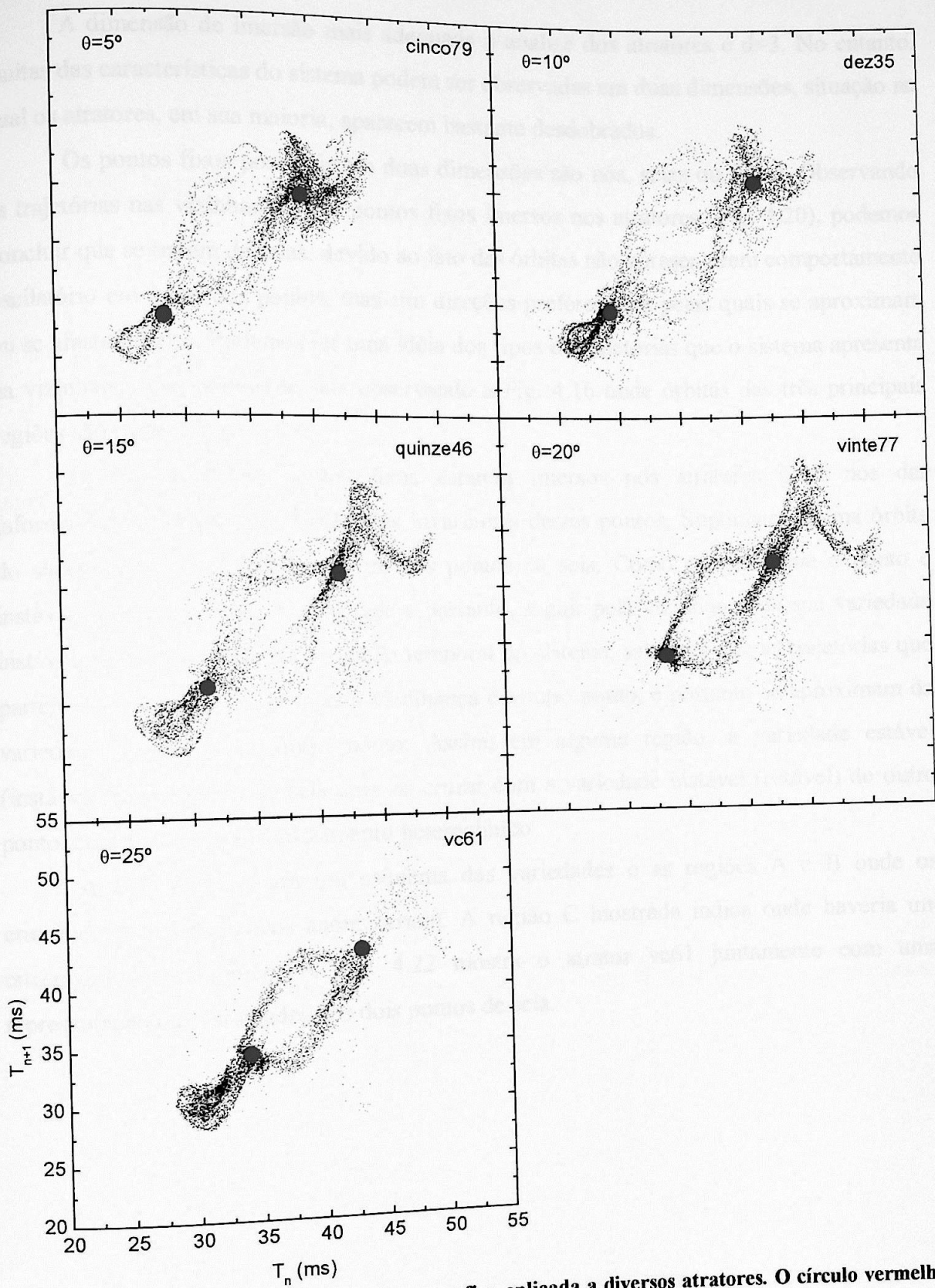


Fig. 4.20: Resultado da transformação do ponto fixo aplicada a diversos atratores. O círculo vermelho mostra a posição ponto fixo instável obtido pela transformação.

A dimensão de imersão mais adequada à análise dos atratores é $d=3$. No entanto, muitas das características do sistema podem ser observadas em duas dimensões, situação na qual os atratores, em sua maioria, aparecem bastante desdobrados.

Os pontos fixos possíveis em duas dimensões são nós, selas ou focos. Observando as trajetórias nas vizinhanças dos pontos fixos imersos nos atratores (Fig. 4.20), podemos concluir que se tratam de selas, devido ao fato das órbitas não apresentarem comportamento oscilatório em torno dos pontos, mas sim direções preferenciais pelas quais se aproximam ou se afastam deles. Podemos ter uma idéia dos tipos de trajetórias que o sistema apresenta na vizinhança dos pontos de sela observando a Fig. 4.16 onde órbitas das três principais regiões são mostradas.

O fato dos dois pontos fixos estarem imersos nos atratores pode nos dar informações a respeito das variedades invariantes destes pontos. Suponhamos uma órbita do sistema nas proximidades de um dos pontos de sela. Como sabemos que o ponto é instável, a órbita deve se afastar dele e portanto, seguir pela vizinhança de sua variedade instável. Pela observação da evolução temporal do sistema, sabemos que as trajetórias que partem de um ponto são levadas à vizinhança do outro ponto, e portanto se aproximam da variedade estável deste outro ponto. Assim, em alguma região, a variedade estável (instável) de um ponto de sela deve se cruzar com a variedade instável (estável) do outro ponto, caracterizando um cruzamento heteroclínico.

A Fig. 4.21 mostra um esquema das variedades e as regiões A e B onde os cruzamentos heteroclínicos aconteceriam. A região C mostrada indica onde haveria um cruzamento homoclínico. A Fig. 4.22 mostra o atrator vc61 juntamente com uma representação das variedades dos dois pontos de sela.

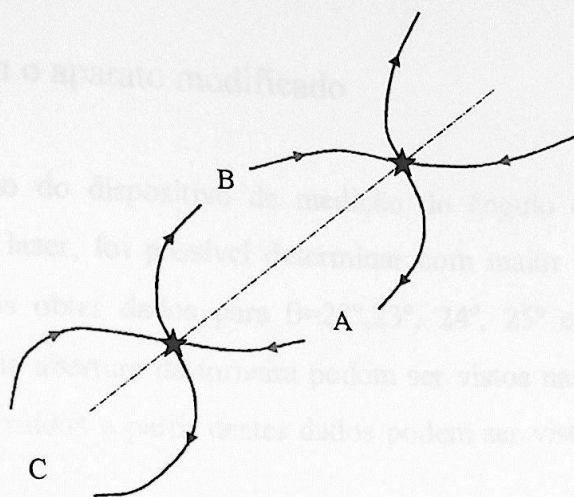


Fig. 4.21: Representação esquemática das variedades dos dois pontos de sela imersos nos atratores. As regiões A, B e C representam as regiões de possíveis conexões entre variedades.

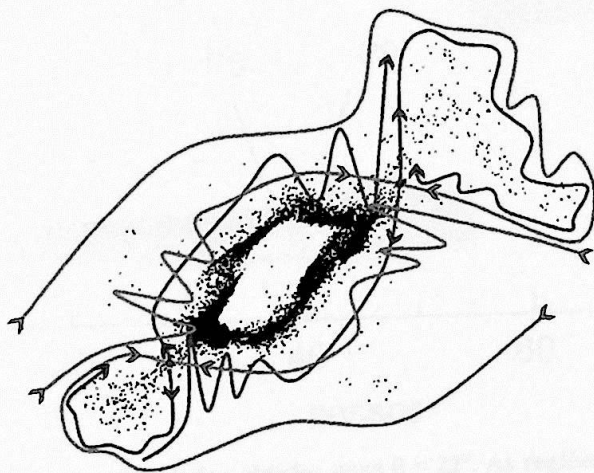


Fig. 4.22: O atrator vc61 mostrado juntamente com uma representação esquemática das variedades (linhas verdes e azuis) dos dois pontos de sela (pontos vermelhos). Os cruzamentos destas variedades dão origem ao emaranhado heteroclínico.

4.3. Resultados com o aparato modificado

Após a instalação do dispositivo de medição do ângulo de inclinação do bico através de um feixe de laser, foi possível determinar com maior precisão o valor deste ângulo. Assim, pudemos obter dados para $\theta=22^\circ, 23^\circ, 24^\circ, 25^\circ$ e 26° . Os diagramas de bifurcações em função da abertura da torneira podem ser vistos nas Fig. 4.23 a Fig. 4.27. Alguns atratores reconstruídos a partir destes dados podem ser vistos nas Fig. 4.28 a Fig. 4.32.

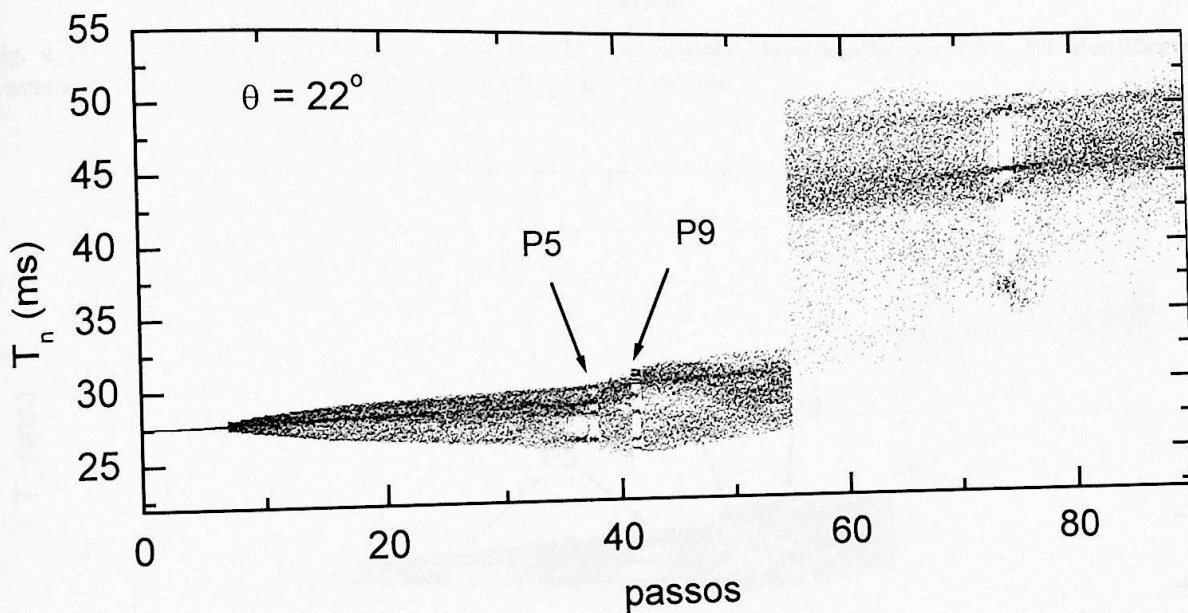


Fig. 4.23: Diagrama de bifurcações dos dados obtidos para $\theta = 22^\circ$. As regiões identificadas por P5 e P9 identificam travamentos do sistema em períodos cinco e 9, respectivamente.

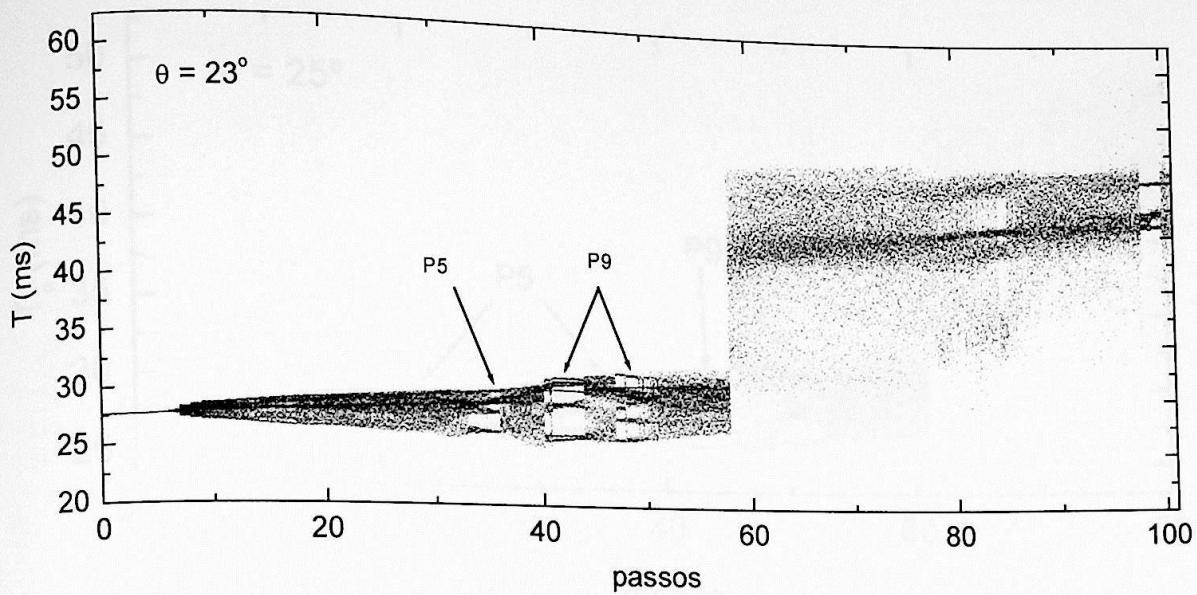


Fig. 4.24: Diagrama de bifurcações para $\theta = 23^\circ$. As regiões identificadas por P5 e P9 identificam travamentos do sistema em períodos cinco e 9, respectivamente.

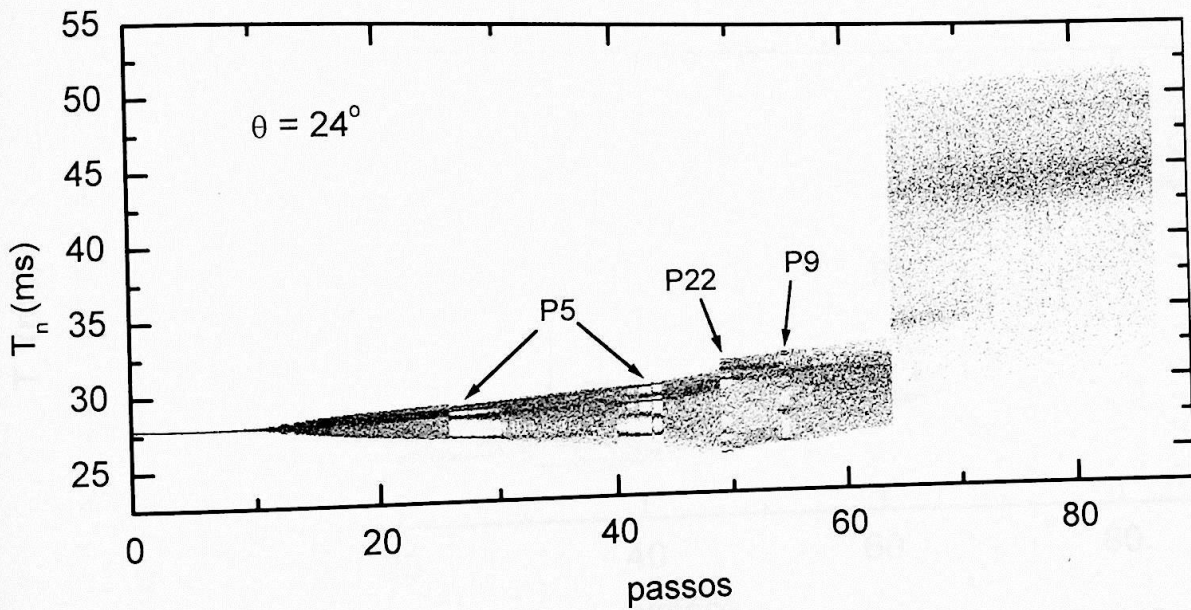


Fig. 4.25: Diagrama de bifurcações para $\theta = 24^\circ$. As regiões identificadas por P5, P9 e P22 identificam travamentos do sistema em períodos cinco, nove e 22, respectivamente. O travamento de período 22 é o de maior periodicidade observada experimentalmente até o momento.

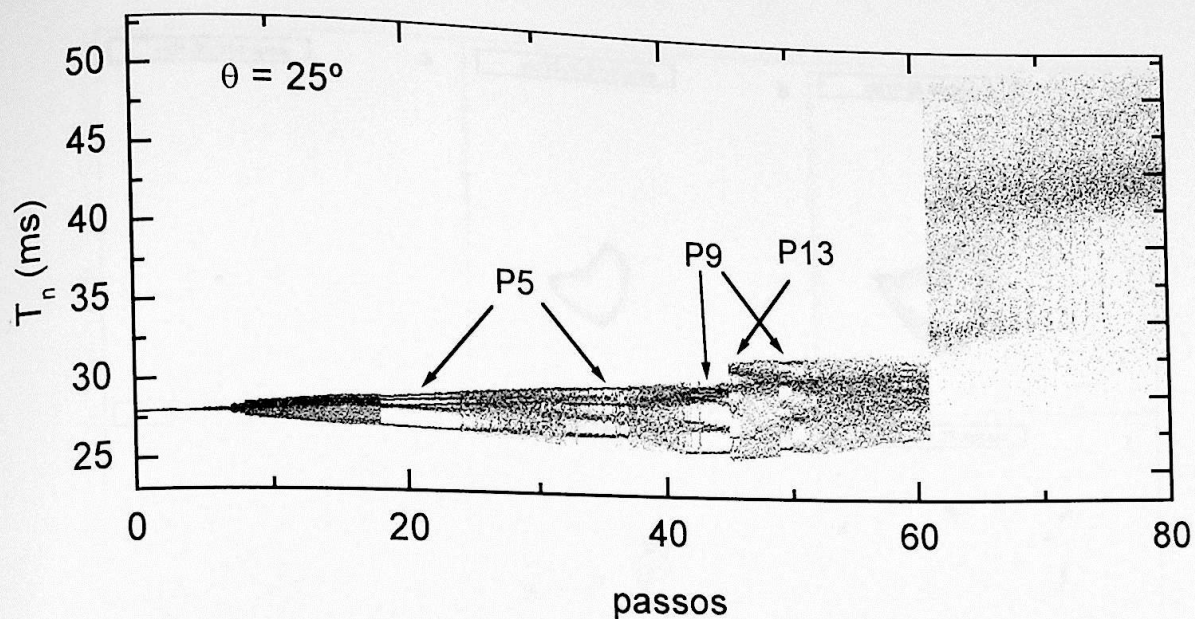


Fig. 4.26: Diagrama de bifurcações para $\theta=25^\circ$. As regiões identificadas por P5, P9 e P13 identificam travamentos de frequência de períodos cinco, nove e 13, respectivamente.

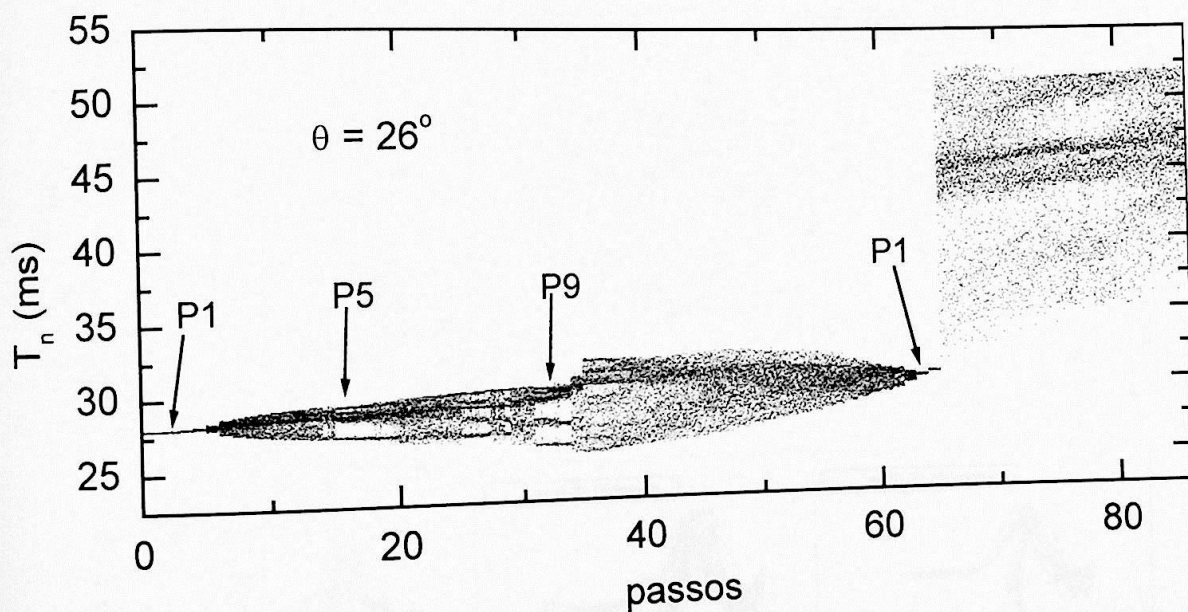


Fig. 4.27: Diagrama de bifurcações para $\theta=26^\circ$. As regiões identificadas por P1, P5 e P9 identificam travamentos de frequência de períodos um, cinco e 9, respectivamente.

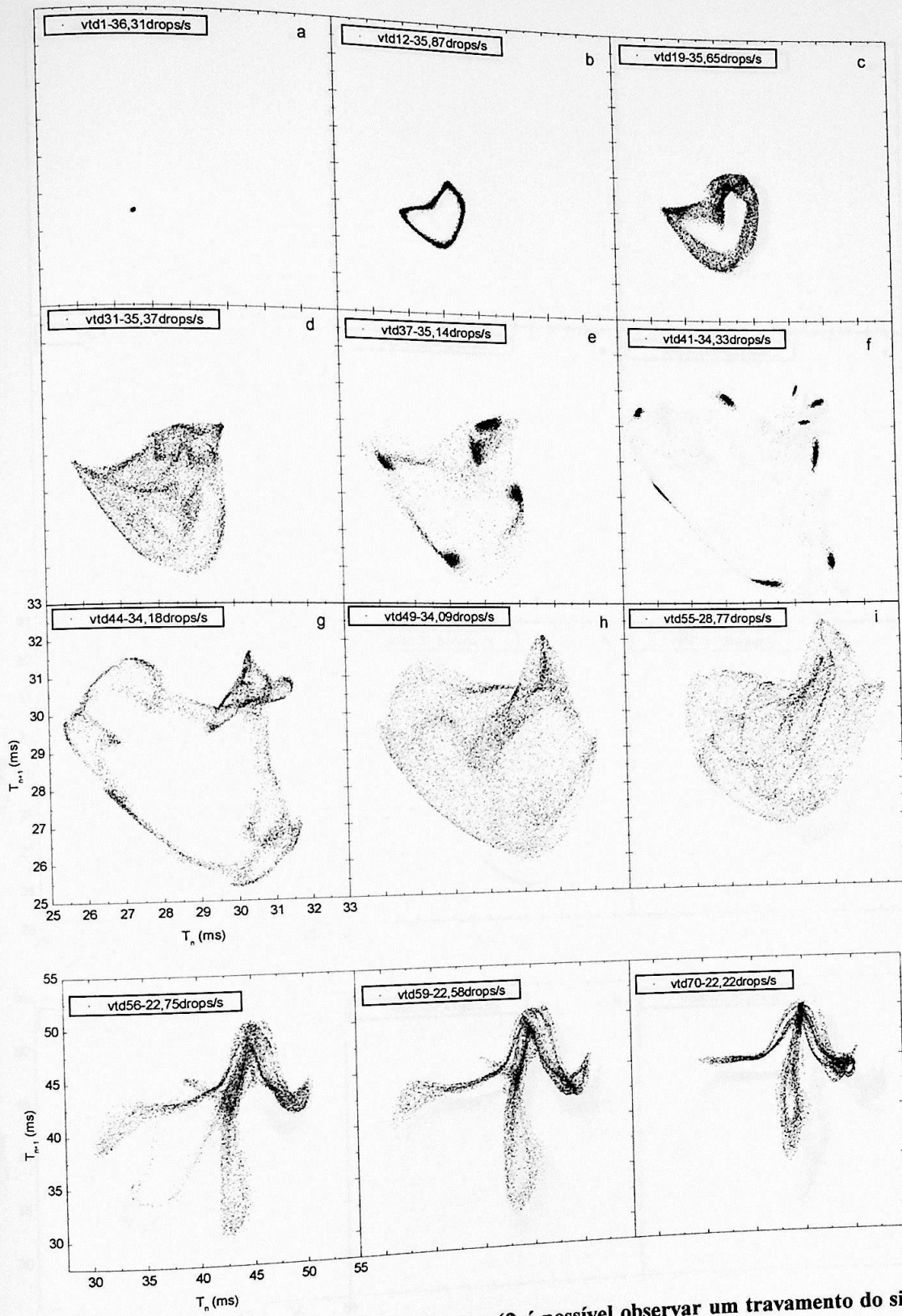


Fig. 4.28: Atratores reconstruídos para $\theta = 22^\circ$. Em (f) é possível observar um travamento do sistema em período nove.

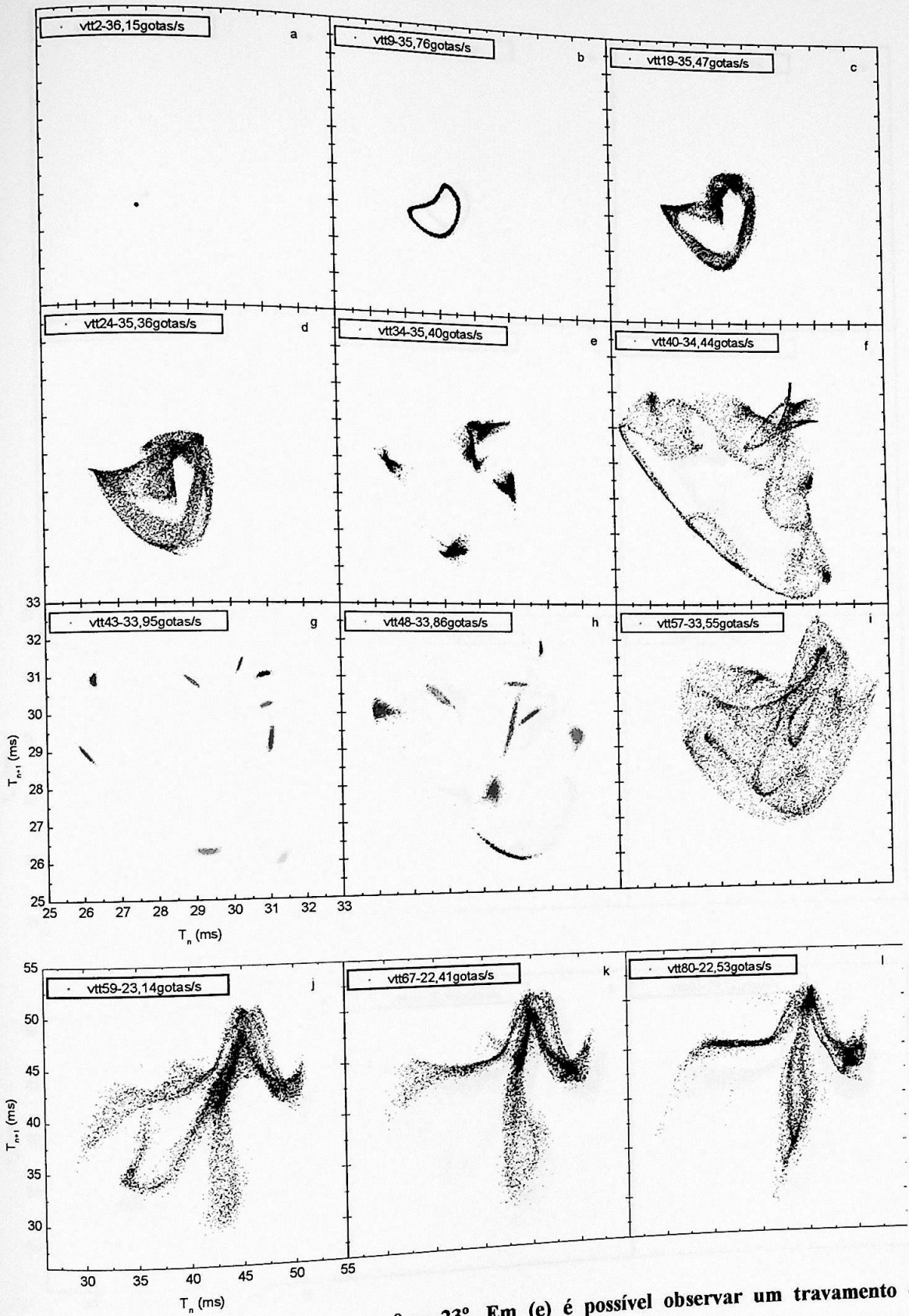


Fig. 4.29: Atratores reconstruídos para $\theta = 23^\circ$. Em (e) é possível observar um travamento de frequência de período cinco, em (g) e (h) de período nove.

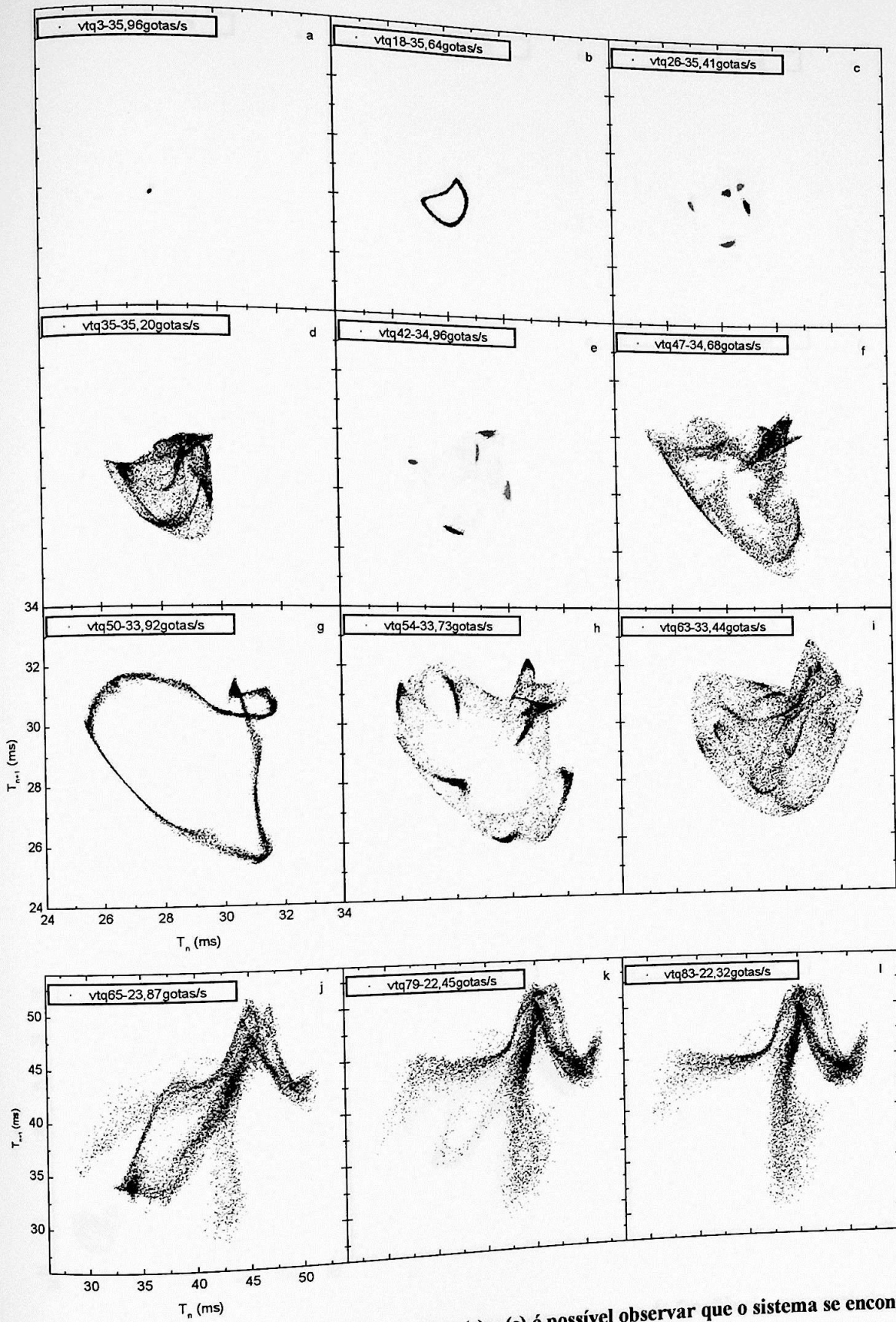


Fig. 4.30: Atratores reconstruídos para $\theta=24^\circ$. Em (c) e (e) é possível observar que o sistema se encontra travado em período cinco.

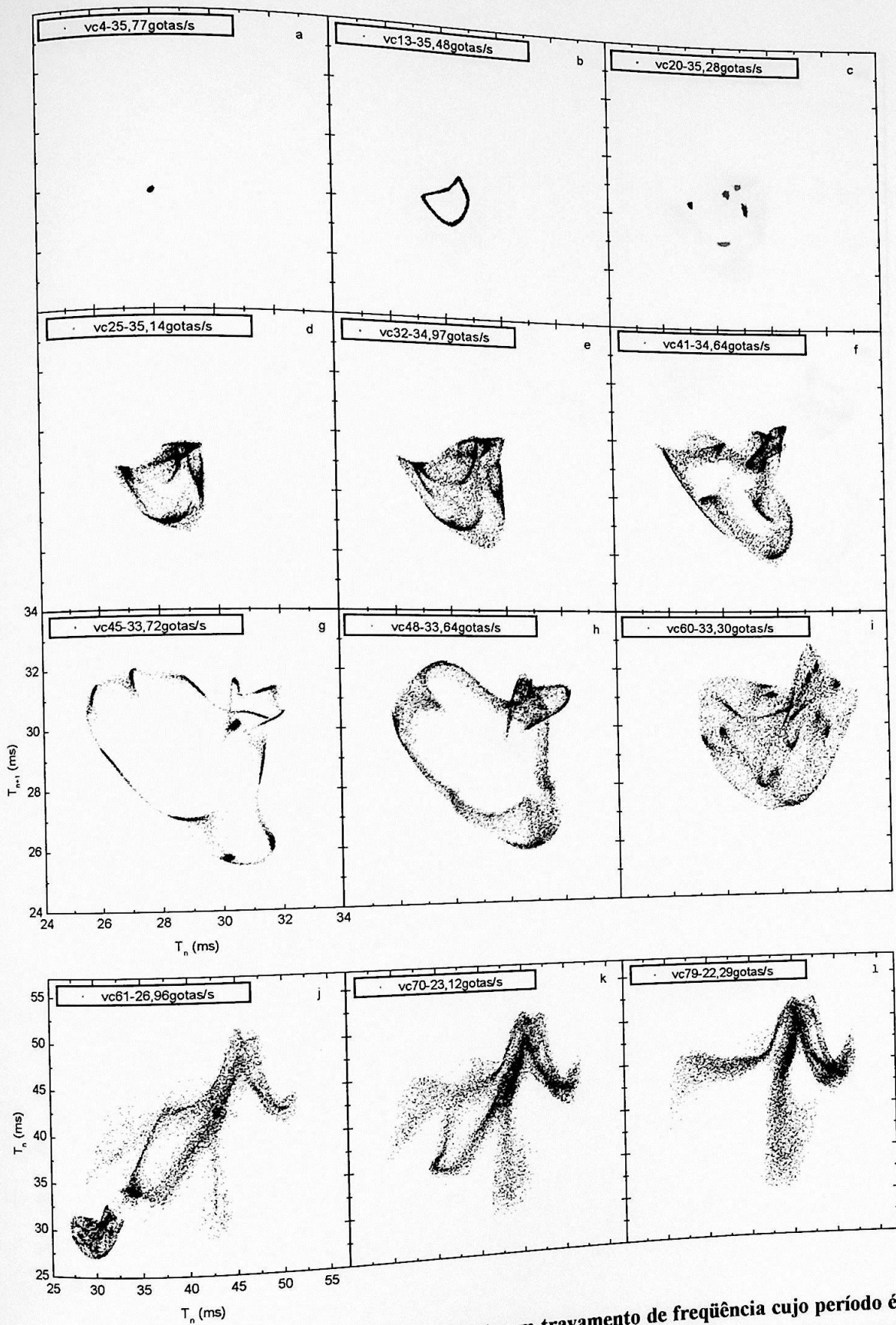


Fig. 4.31: Atratores $\theta=25^\circ$. Em (c) o sistema apresenta um travamento de frequência cujo período é 5. Em (j) a transição acontece sem a mudança na abertura da torneira.

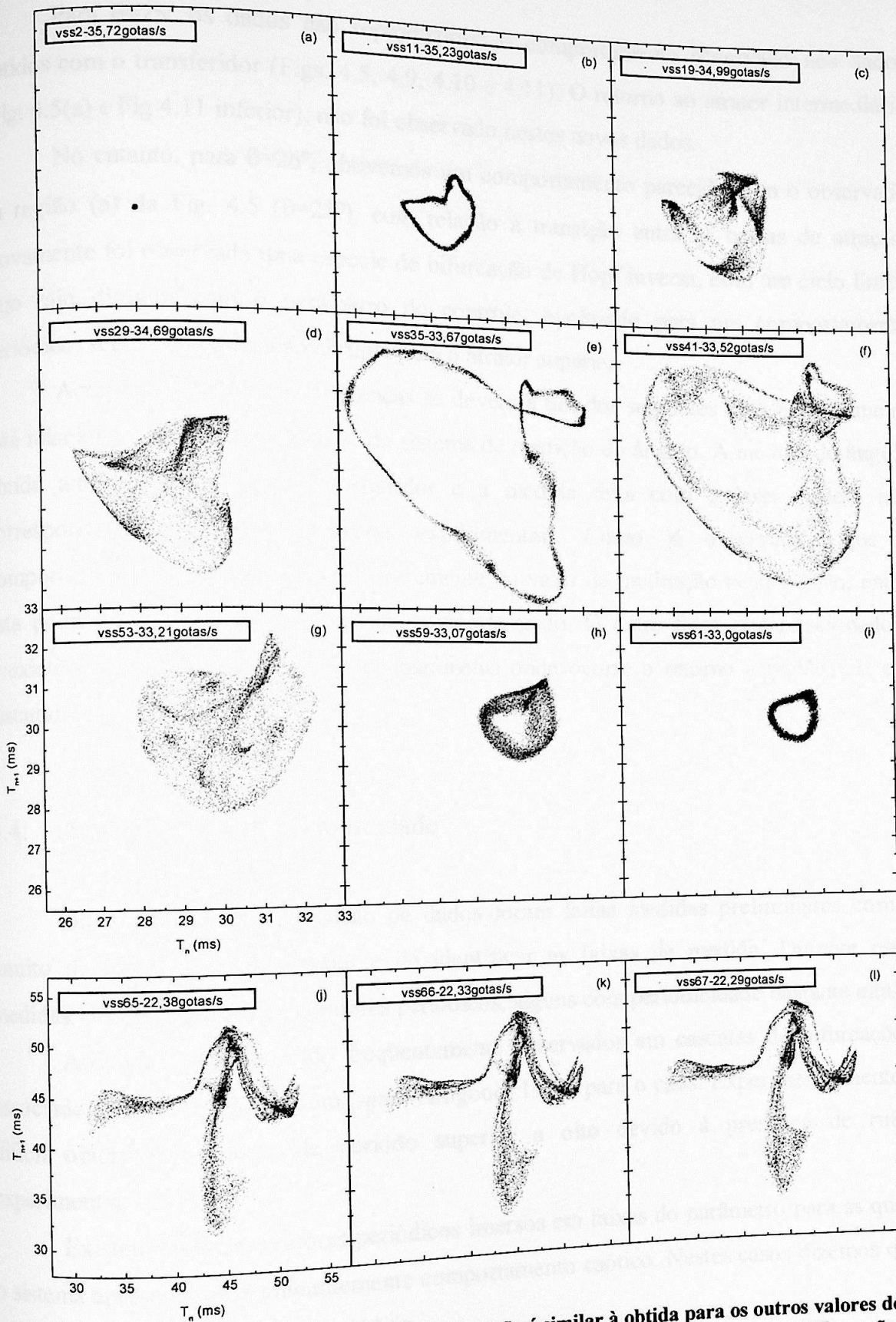


Fig. 4.32: Atratores $\theta=26^\circ$. Até (g) a rota para a transição é similar à obtida para os outros valores de θ , no entanto, em (h) podemos observar uma redução no tamanho do atrator iniciando a bifurcação de Hopf inversa, tal como foi observado para $\theta = 25^\circ$ nos dados obtidos com o transferidor.

Para $\theta=25^\circ$ os dados não reproduziram o comportamento observado nos dados obtidos com o transferidor (Figs. 4.5, 4.9, 4.10 e 4.11). O retorno ao atrator intermediário (Fig. 4.5(a) e Fig 4.11 inferior), não foi observado nestes novos dados.

No entanto, para $\theta=26^\circ$, obtivemos um comportamento parecido com o observado na região (a) da Fig. 4.5 ($\theta=25^\circ$), com relação à transição entre as bacias de atração. Novamente foi observada uma espécie de bifurcação de Hopf inversa, com um ciclo limite cujo raio diminui com o parâmetro de controle, evoluindo para um comportamento periódico, seguido da transição abrupta para o atrator superior.

Acreditamos que estas diferenças se devem a um dos seguintes fatores: o primeiro está relacionado com a modificação do sistema de medição do ângulo. A medida do ângulo obtida anteriormente com o transferidor e a medida feita com o laser podem não corresponder, devido às incertezas experimentais. Como já observamos que o comportamento do sistema depende fortemente do valor de inclinação neste região, então esta pode ser a causa da mudança do comportamento. O outro fator está relacionado à coexistência de atratores na faixa do parâmetro onde ocorre o retorno à região C1, e é discutido na seção 4.6.

4.4. Atratores de alta periodicidade

Durante a fase de aquisição de dados foram feitas medidas preliminares com o intuito de ajustar o equipamento e de identificar as faixas de medida. Durante estas medidas, obtivemos diversos atratores periódicos, alguns com periodicidade bastante alta.

Atratores periódicos são freqüentemente observados em cascatas de bifurcações, associados à rota de Feigenbaum (*apud* Alligood, 1996) para o caos. Experimentalmente é difícil obtermos atratores de período superior a oito devido à presença de ruído experimental.

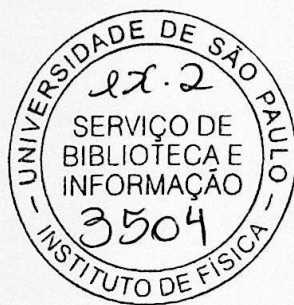
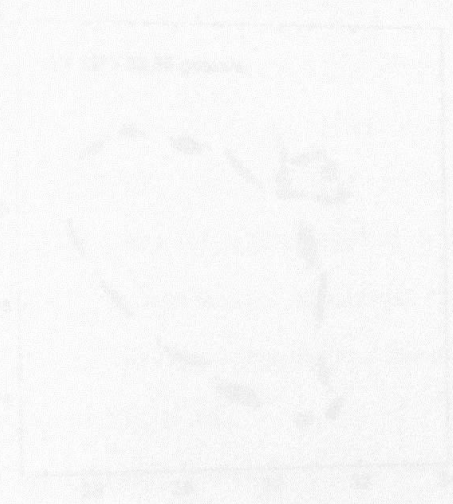
Existem também atratores periódicos imersos em faixas do parâmetro para as quais o sistema apresenta predominantemente comportamento caótico. Nestes casos dizemos que o atrator configura uma janela periódica.

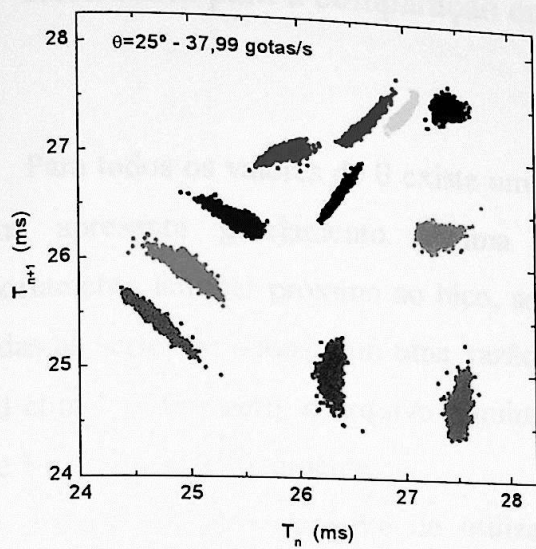
Janelas periódicas normalmente são observadas para faixas bastante estreitas dos parâmetros de controle. Além disto, quando maior a periodicidade, mais estreita é a faixa do parâmetro na qual ela surge.

Assim, o fato de observarmos atratores de periodicidade bastante altas mostra que o parâmetro de controle da experiência é bastante estável.

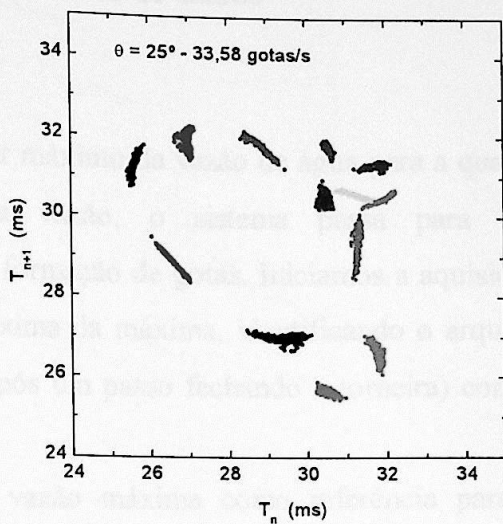
A Fig. 4.33 mostra alguns atratores de alta periodicidade obtidos durante a aquisição dos dados. Os gráficos foram feitos representando cada ponto de uma cor diferente, até que o número de pontos igual à periodicidade do sistema fosse alcançado. A partir deste ponto, as cores são repetidas. Desta forma, o fato das cores não se misturarem mostra que a ordem de visitação de cada porção do atrator é mantida.

Outro aspecto que estes atratores periódicos podem revelar é quão estável é o sistema com relação ao ruído intrínseco.

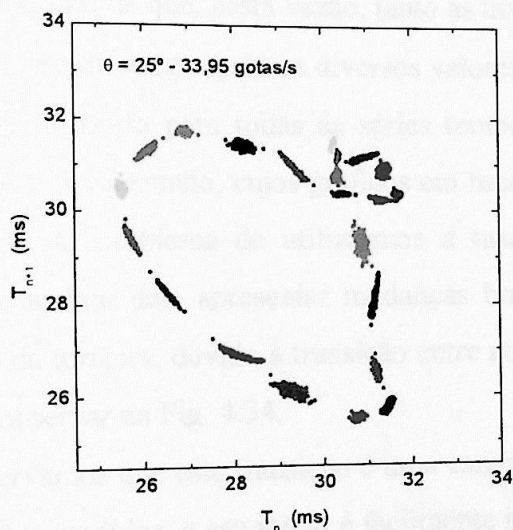




(a)



(b)



(c)

Fig. 4.33: Alguns atratores periódicos obtidos. (a) Atrator de período 11, (b) período 13 e (c) período 22.

4.5. Referência para a comparação entre as séries de dados

Para todos os valores de θ existe um valor máximo da vazão de água para a qual o sistema apresenta gotejamento. Acima desta vazão, o sistema passa para um comportamento laminar próximo ao bico, sem a formação de gotas. Iniciamos a aquisição de todas as séries de dados com uma vazão próxima da máxima, identificando o arquivo inicial com o índice zero, o arquivo seguinte (após um passo fechando a torneira) com o índice 1 e assim sucessivamente.

Existe um inconveniente de utilizar a vazão máxima como referência para o controle de parâmetro, que é o fato de que, nesta vazão, tanto as taxas de gotejamento como o comportamento do sistema são diferentes para os diversos valores de θ .

Um parâmetro usual utilizado para todas as séries temporais é a taxa média de gotejamento, medida em gotas por segundo, cujos gráficos em função do número de passos são mostrados na Fig. 4.34. O problema de utilizarmos a taxa de gotejamento como parâmetro de controle está no fato dela apresentar mudanças bruscas de comportamento com a variação da abertura da torneira, devido à transição entre atratores de alta para baixa vazão, conforme podemos observar na Fig. 4.34.

Por outro lado, observamos que esta transição é uma característica comum às séries temporais de todos os ângulos medidos, e seu início é facilmente identificado. Desta forma, sugerimos que uma referência mais adequada para estabelecer uma referência para as séries temporais é o número de passos dados em relação ao início da transição, ou seja, que todas as séries deveriam iniciar a transição no mesmo valor do parâmetro.

Esta mesma técnica foi utilizada para a determinação da visitação das três partições na seção 4.1. O gráfico mostrando as taxas médias de gotejamento modificadas para que a transição acontecesse no passo 65 pode ser visto na Fig. 4.35. Com esta modificação podemos observar que existe uma regularidade um pouco maior no comportamento, principalmente acima de 30 gotas por segundo, porém nenhum padrão de comportamento relevante foi identificado.

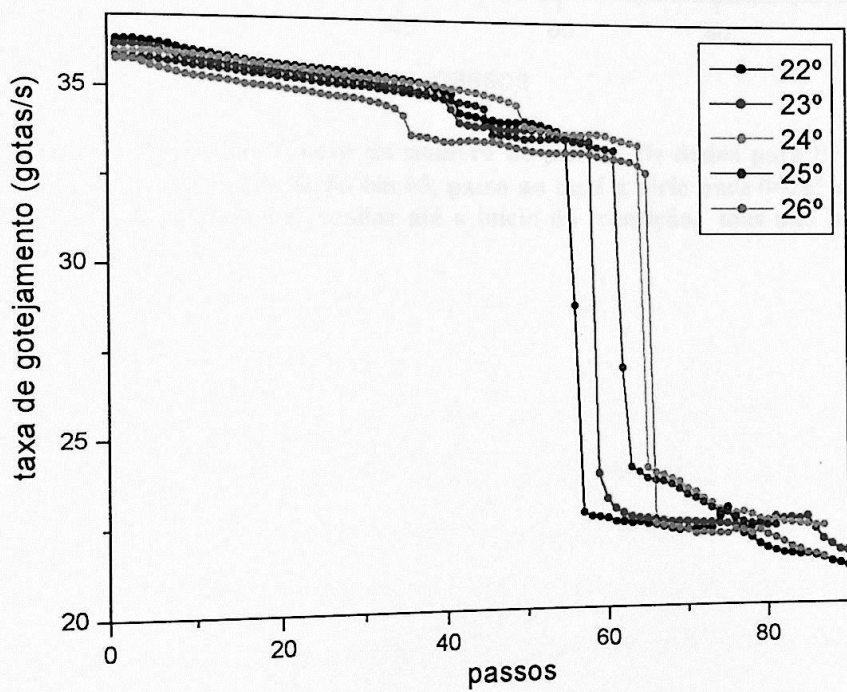
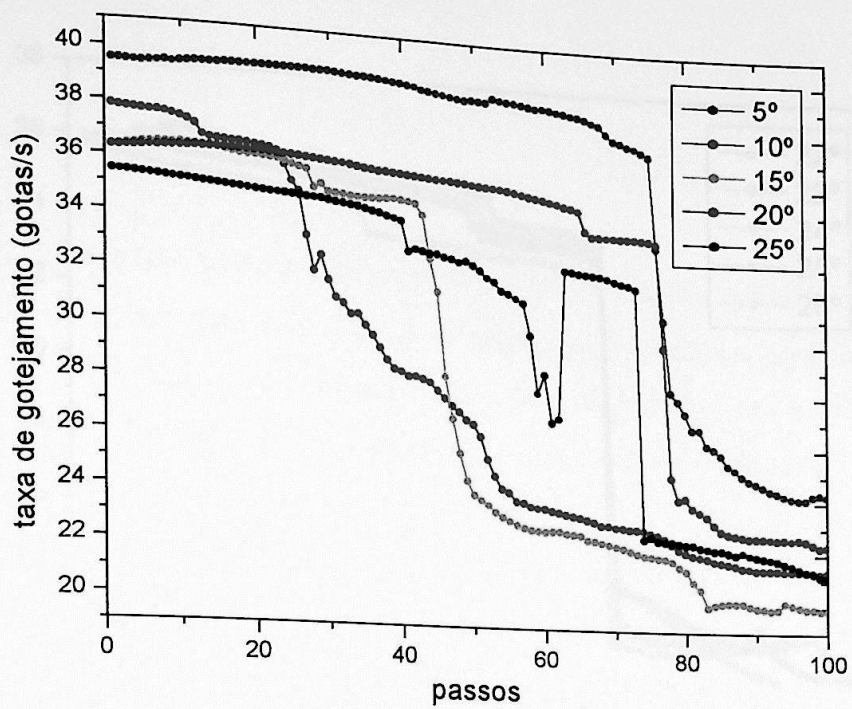


Fig. 4.34: A taxa de gotejamento média em função do número de passos dados a partir da posição de vazão máxima. Podemos observar que o início da transição é caracterizado por uma variação abrupta da vazão (próximo ao passo 60), o que pode ser utilizado como uma referência para as diversas séries temporais.

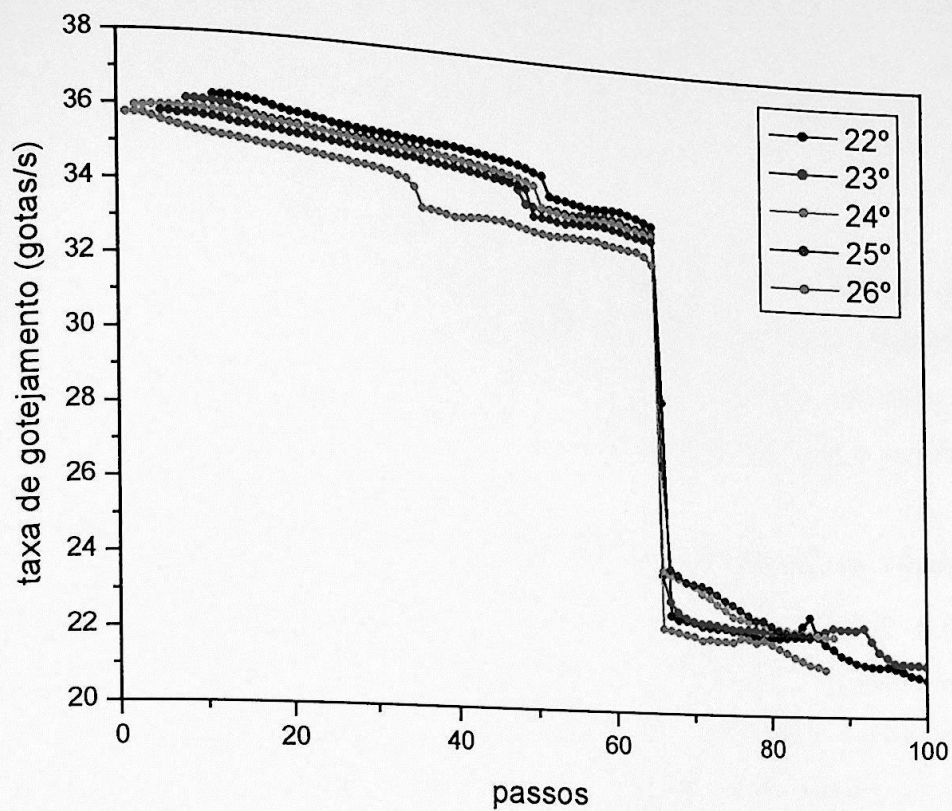


Fig. 4.35: Taxa de gotejamento em função do número de passos. Os dados para $\theta=22^\circ$ a 25° foram ajustados de forma a iniciarem a transição em 65, passo no qual a série para $\theta=26^\circ$ sofre a transição. Podemos observar um comportamento similar até o início da transição, mas não há um padrão de comportamento após a crise.

4.6. Coexistência de atratores

Como obtivemos comportamentos diferentes em duas medidas para $\theta = 25^\circ$, adquirimos novos dados para este ângulo de inclinação. Medimos aproximadamente 24 arquivos com 65536 T_n para cada valor da abertura da torneira, em torno da região de transição. Os dados correspondentes a estas medidas podem ser vistos nas Fig. 4.36 a Fig. 4.38.

Para estes dados, a bifurcação de Hopf inversa foi novamente obtida e é mostrada no detalhe (b) da Fig. 4.36. Nesta mesma figura, podemos observar que, até o sexto passo do motor, o sistema se encontrava na região C1 do espaço de fases (atratores (a) e (b) da Fig. 4.38). Quando o sétimo passo é dado, o sistema permanece inicialmente na região inferior, mas passa repentinamente para o atrator superior após algumas gotas (Fig. 4.38c). Após esta transição, o sistema passa a visitar a região superior a maior parte do tempo, mas ainda é possível observar alguns retornos do sistema à região inferior (Fig. 4.37 e Fig. 4.38(e) e Fig. 4.38(f)). Com a diminuição da vazão, o sistema volta definitivamente à região inferior e começa a descrever a bifurcação de Hopf inversa, sem qualquer retorno à parte superior (detalhe (b) da Fig. 4.36).

Observando o comportamento do sistema nas três medidas feitas (seções 4.1 e 4.3 e nesta seção), vemos que para $\theta=25^\circ$ o sistema pode efetuar a transição para o atrator superior de duas maneiras distintas. A primeira, passando a visitar tanto C1 como C2, com o aumento do número de órbitas em C2 a cada modificação do abertura da torneira. A outra, iniciando a transição e retornando a C1, passando por uma bifurcação de Hopf inversa, depois para C2, conforme foi visto nos dados mostrados nesta seção e na seção 4.1.

A observação destes dois comportamentos diferentes para o mesmo valor de θ e a visitação alternada das duas regiões (Fig. 4.37 e Fig. 4.38), nos levou à suspeita de que o sistema apresenta coexistência de atratores nesta faixa da abertura da torneira.

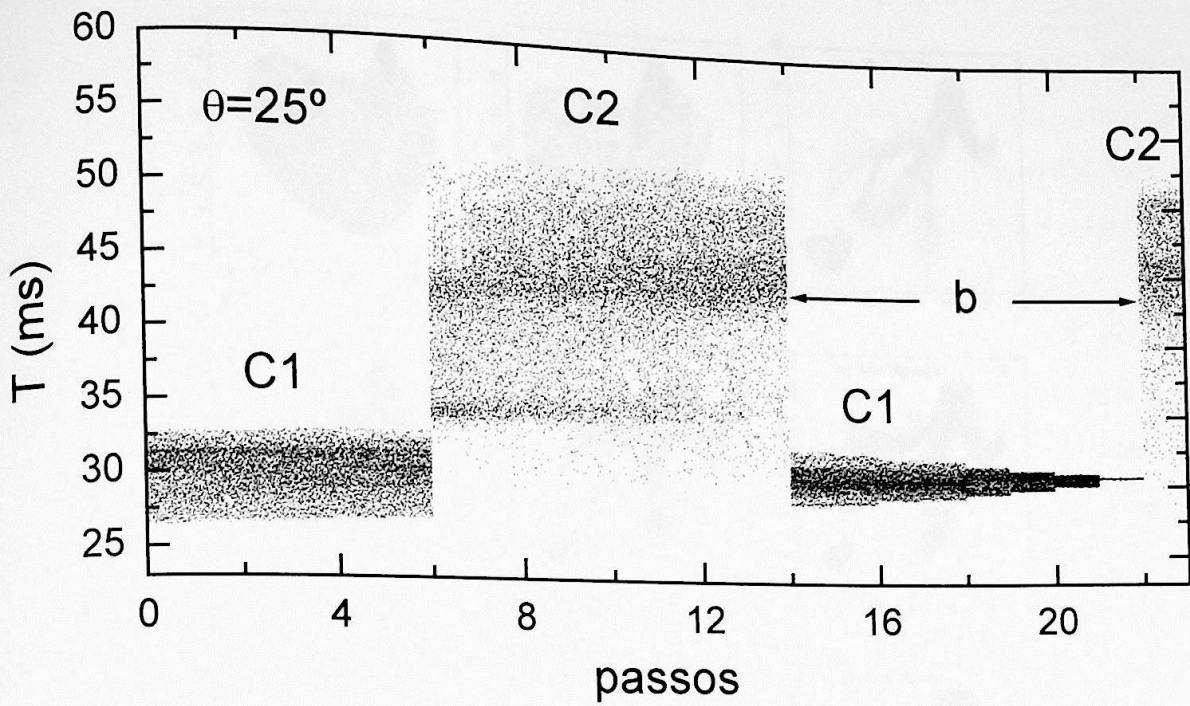


Fig. 4.36: Diagrama de bifurcações para $\theta = 25^\circ$. A faixa (b) do parâmetro de controle mostra onde o sistema descreve a bifurcação de Hopf inversa.

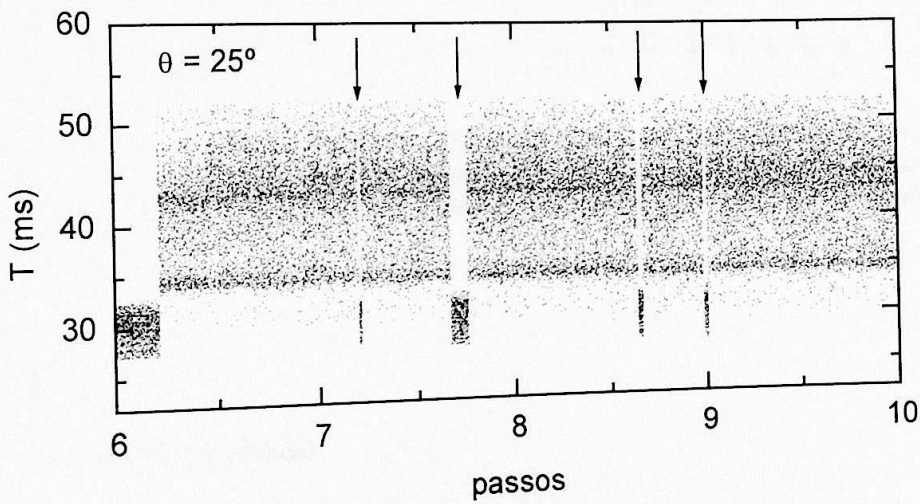


Fig. 4.37: Detalhe do diagrama de bifurcações da Fig. 4.36. As setas indicam as regiões em que o sistema visita o atrator inferior.

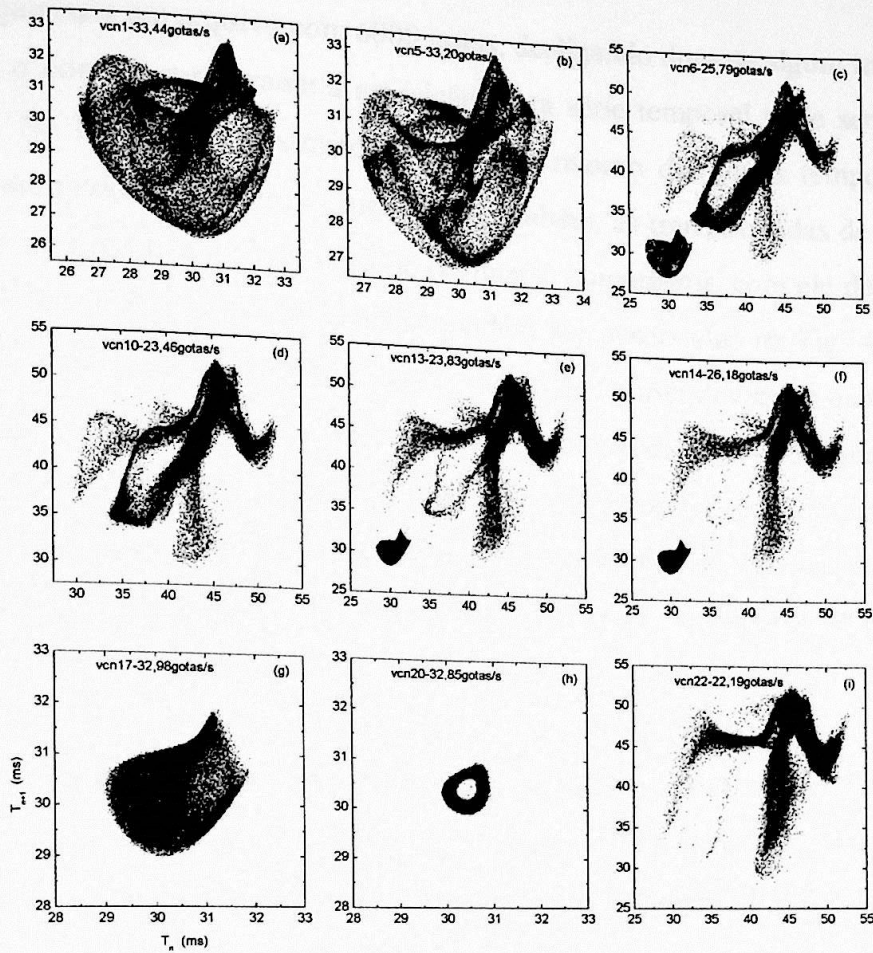


Fig. 4.38: Atratores reconstruídos para $\theta=25^\circ$. Os gráficos (a) e (b) mostram dois atratores antes do início da transição. Nos gráficos (c) a (f) observamos visitas das regiões superior e inferior. Em (g) e (h) são mostrados atratores no início da bifurcação de Hopf inversa e em (i) o atrator após a transição final.

4.7. O sistema perturbado

Durante a fase de ajustes, enquanto o equipamento estava sendo testado, um compressor de ar localizado em uma sala adjacente foi ligado. Antes disto, o sistema se encontrava em regime periódico (ponto fixo), em alta vazão (~ 40 gotas/s). Com o acionamento do compressor, o sistema passou a apresentar um comportamento quase-periódico, e passamos a observar um ciclo limite. Quando o compressor foi desligado, o sistema voltou a se comportar periodicamente, tal qual antes do acionamento do compressor.

Adquirimos um arquivo com 6000 gotas, desligando durante algum tempo e ligando novamente o compressor durante a aquisição. Esta série temporal pode ser observada na Fig. 4.39a. Na Fig. 4.39b mostramos o mapa de retorno das séries temporais periódica (azul) e quase-periódica (verde). Calculamos, também, as transformadas de Fourier (FFT) para estes dados nas três etapas, antes de desligar o compressor, com ele desligado e após tê-lo ligado novamente. As transformadas podem ser observadas na Fig. 4.40. Notamos, nesta figura, o aparecimento pico nas transformadas de Fourier das séries quase-periódicas.

Podemos concluir, pela observação dos gráficos da Fig. 4.39, que o sistema se comporta da mesma forma antes e depois do compressor ter sido desligado. Podemos imaginar que o compressor exerce uma perturbação periódica no sistema, devido à rotação aproximadamente constante do seu motor. Esta perturbação é a responsável pela introdução de uma nova frequência no sistema, necessária para a existência de um comportamento quase-periódico.

Se aplicamos a perturbação quando o sistema apresenta comportamento periódico, todas as frequências envolvidas podem ser obtidas, a frequência de gotejamento antes e após a perturbação, e a frequência da perturbação (forçamento). Esta última pode ser variada experimentalmente com facilidade, bem como a amplitude da perturbação, constituindo dois novos parâmetros de controle do sistema.

Recentemente, Tufaile *et al.* (2001) identificaram uma rota inteira de quase-periodicidade para o caos, aplicando um forçamento periódico sobre uma mistura de água e glicerina onde são formadas bolhas. Alguns dos resultados deste trabalho se assemelham com o comportamento mostrado nas Fig. 4.39 e Fig. 4.40, com a passagem de atratores periódicos para quase-periódicos quando a perturbação é aplicada. Devido à semelhança entre os dois sistemas, acreditamos que o estudo sistemático da dinâmica de formação da gotas com a introdução destes dois novos parâmetros de controle seja uma proposta bastante promissora para trabalhos futuros.

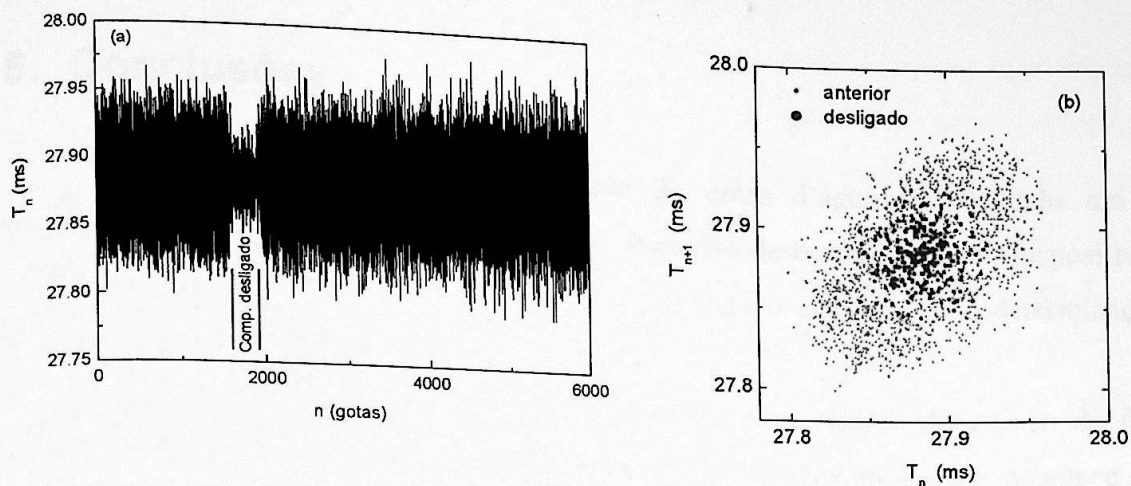


Fig. 4.39: (a) Série temporal com as três fases do sistema, a inicial e a última com o compressor ligado e a intermediária com o compressor desligado. b) Reconstrução dos atratores da série anterior (verde) e da série intermediária (azul).

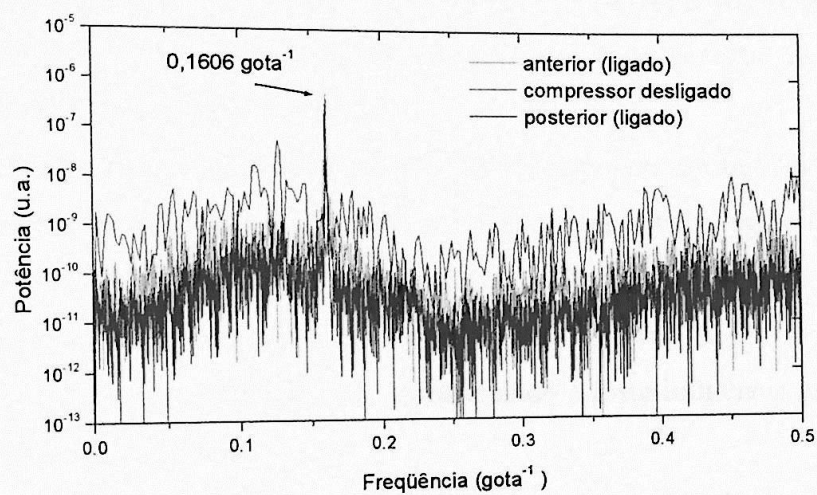


Fig. 4.40: Transformadas de Fourier dos dados correspondentes às três fases do sistema, anterior e posterior, com o compressor ligado e a intermediária, com o compressor desligado.

5. Conclusões

Estudamos a dinâmica de formação de gotas d'água introduzindo um novo parâmetro de controle: a inclinação do bico. Para isto desenvolvemos um dispositivo que utiliza um feixe de laser e um espelho preso ao bico, o que permite a determinação do ângulo de forma acurada.

Observamos que existe uma transição entre duas regiões do espaço de fases à medida em que diminuimos a vazão da torneira. Diferentemente do que acontece para o bico aprumado, onde foi observada uma "Blue Sky Catastrophe", verificamos que, para todos os valores de θ medidos, a transição é caracterizada pela fusão de duas regiões do espaço de fases, formando um único atrator. Identificamos dois pontos de sela imersos nos atratores, o que nos levou à conclusão de que a dinâmica do sistema está relacionada à existência de emaranhados heteroclínicos.

Dividindo cada espaço de fases em três partes, calculamos a frequência de visitação em cada uma delas, quantificando a transferência das órbitas entre a região de alta para a de baixa vazão em função da abertura da torneira.

Observamos que pequenas variações de ângulos em torno de 25° produzem grandes diferenças no comportamento do sistema, evidenciando a forte influência das condições de contorno na dinâmica do sistema.

Observamos janelas de alta periodicidade (períodos 11, 16 e 22) nunca antes observadas neste experimento. Estas janelas são encontradas em faixas muito estreitas de vazão, o que indica que este parâmetro é controlado adequadamente.

As medidas longas feitas na região da transição entre as regiões do espaço de fases permitiram a observação da coexistência de atratores para uma faixa estreita de vazão. Esta observação é uma evidência de que, nesta situação, é possível fazer com que o sistema mude de região através de pequenas perturbações.

Calculamos a taxa de gotejamento em função da abertura da torneira e verificamos que, no início da transição entre as bacias de atração, esta taxa apresenta uma descontinuidade. Esta característica torna a taxa de gotejamento inadequada para a comparação entre as séries de ângulos de inclinação diferentes. Sugerimos que o início da transição entre as bacias seja tomado como referência para comparação entre as séries.

Verificamos que uma perturbação periódica aplicada ao sistema modifica a sua dinâmica, fazendo com que um atrator de período 1 passe a apresentar um comportamento quase-periódico, indicando assim um novo parâmetro de controle para o experimento.

6. Referências

- Abraham R.H. e Shaw C.D. (1992): *Dynamics: the geometry of behavior – 2nd edition*, Addison-Wesley: Redwood City.
- Alligood K.T., Sauer T.D. e Yorke J.A. (1996): *Chaos: an introduction to dynamical system*, Springer-Verlag, New Yorke.
- Ambavaneswaran B., Phillips S.D. e Basaran, O.S. (2000): Theoretical analysis of a dripping faucet, *Phys. Rev. Let.* **85**, 5332-5335.
- Argyris J., Faust G., Haase M. (1994): *An exploration of chaos*, North-Holland, Amsterdam.
- Coulet P., Mahadevan L., Riera C. (2000): Return map for the chaotic dripping faucet, *Prog. Theor. Phys. Sup.* **139**, 507-516.
- D’Innocenzo A. e Renna L. (1997): Modelling leaky-faucet, *Phys. Rev. E* **55**, 6776.
- De Gennes P.G., Badoz J. (1997): *Objetos frágeis*, Ed. da Unicamp, São Paulo.
- Gonçalves W. (1996): *A experiência da torneira gotejante*, Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Ciências.
- Fuchikami N., Ishioka s., Kiono K. (1998): Simulations of a dripping faucet, *chaodyn/9811020*.
- Jackson, E.A. (1989): *Perspectives of non-linear dynamics*, Cambridge, New York.
- Heggel R., Kantz H., Schreiber T. (1999): Practical implementation of non-linear time series methods: The TISEAN package, *Chaos* **9**, 413.
- Kennel M.B., Brown R., and Abarbanel H.D.I. (1992): Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction, *Phys. Rev.* **A45**, 3403.
- Mira C. (1997): Some historical aspects of non-linear dynamics: possible trends for the future, *Int. J. Bif. Chaos* **7**, 2145-2173.
- Molnar G, Szucs A, Rozsa KS, (2000): Analysis and modulation of spike trains and oscillations in identified neural network of *Lymnaea stagnalis* L. *Acta Biol. Hung.* **51**: (2-4) 231-235.

- Packard N., Crutchfield J., Farmer D. e Shaw R. (1980): Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett.* **45**, 712.
- Pinto R.D., Gonçalves W.M., Sartorelli J.C. (1994): Hopf Bifurcation in a leaky-faucet experiment, *Phys. Rev. E* **52**, 6896-6899.
- Pinto R.D., Gonçalves W.M., Sartorelli J.C., Caldas I.L., Baptista M.S. (1998): Interior crisis in a dripping faucet experiment, *Phys. Rev. E* **58**, 4009-4011.
- Pinto R.D. (1999): *Comportamento complexo na experiência da torneira gotejante*, Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Ciências.
- Pinto R.D. e Sartorelli J.C. (2000): Homoclinic tangency and chaotic attractor disappearance in a dripping faucet experiment, *Phys. Rev. E* **61**, 342-347.
- Pitts E. (1973): The stability of pendent liquid drops. Part 1: Drops formed in a narrow gap, *J. Fluid. Mech.* **59**, 753-767.
- Pitts E. (1974): The stability of pendent liquid drops. Part 2: Axial symmetry, *J. Fluid. Mech.* **63**, 487-508
- Pitts E. (1976): The stability of a drop hanging from a tube, *J. Inst. Math. Appl.* **17**, 387-397.
- da Rocha M.S.F. (1995): *Determinação da evolução temporal da formação de gotas*, Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências.
- Rössler O. (1977): Synergetics: a workshop, Haken H., Springer Verlag: Berlim, 174-183.
- Sartorelli J.C., Gonçalves W.M. e Pinto R.D. (1994): Crisis and intermittence in a leaky-faucet experiment, *Phys. Rev. E* **49**, 3963-3975.
- Sauer T. (1994): Reconstruction of dynamical systems from interspike intervals, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3811.
- Scott, S.K. (1991): *Chemical Chaos*, Oxford.
- So P., Ott E., Schiff S.J., Sauer T. e Grebogi C. (1996): Detecting unstable periodic orbits in chaotic experimental data, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4705-4708.
- Soltzberg L.J., Boucher M.M., Crane D.M. e Pazar S.S. (1987): Far from equilibrium - the flashback oscillator, *J. Chem. Educ.*, **64**, 1043-6.

Takens F. (1981): Detecting Strange attractors in turbulence, *Lec. Not. in Math.* 898, Springer-Verlag.

Tufaile A., W.M., Sartorelli J.C. (2001): The circle map dynamics in a air bubble formation, submetido à *Phys. Rev.*

Tufaile A., Pinto R.D., Gonçalves W.M., Sartorelli J.C. (1999): Simulations in a dripping faucet experiment, *Phys. Lett. A* **255**, 58-64.