



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Propriedades termodinâmicas de redes hierárquicas
via análise de grupo de renormalização no espaço real

Masayuki Hase

Dissertação de mestrado
submetida ao Instituto de
Física da Universidade de
São Paulo

Orientador: Prof. Dr. Silvio R. A. Salinas

Banca examinadora:

Prof. Dr. Evaldo M. F. Curado (CBPF)

Prof. Dr. Silvio R. A. Salinas (IFUSP)

Prof. Dr. Walter F. Wreszinski (IFUSP)

São Paulo
2001

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

INSTITUTO DE FÍSICA
Serviço de Biblioteca e Informação
Tombo: 3613
ed. 1

def. 13/12/01

H 346 p

M

ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Hase, Masayuki

Propriedades Termodinâmicas de Redes Hierárquicas
via Análise de Grupo de Renormalização no Espaço Real.
São Paulo 2001.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física - Departamento de Física Geral

Orientador: Prof. Dr. Silvio Roberto de Azevedo Salinas
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Transições de Fase;
2. Fenômenos Críticos;
3. Redes Hierárquicas.

USP/IF/SBI-075/2001

Resumo

Um método numérico para determinar algumas grandezas termodinâmicas em redes hierárquicas é proposto, verificando previsões da teoria de escala no caso de redes auto-duais com interações ferromagnéticas uniforme e aperiódica no modelo de Ising. Expõe-se, ainda, uma prova de um critério de verificação de ocorrência de transições de fase de primeira ordem via técnicas de grupo de renormalização no espaço real.

Abstract

A numerical method for calculating some thermodynamic quantities is proposed, verifying scaling predictions in ferromagnetic self-dual Ising lattice for uniform and aperiodic iterations. Moreover, a proof of first-order phase transitions' occurrence criterion, by real space renormalization group technique, is exposed.

O autor está em débito com o Professor S.R. Salinas pela profícua orientação, bem como para os membros do grupo, A. Ghosh, A.P. Vieira, P.T.A. Muzy e T.A.S. Haddad.

Manifestações de gratidão...

ao R. Fresneda – pelos diálogos interessantes e pela concessão de seu computador, sem o qual este trabalho não seria possível;

ao J.L.M. Assirati – por ceder materiais de informática e pela instalação e configuração do Linux no equipamento citado no parágrafo anterior;

à S.M. Ramos – pelos proveitosos ensinamentos de Latex, conquanto o agradecimento provém também dos diversos outros auxílios concedidos;

à G.G. Bosco – pelas discussões “construtivas”;

ao C.M. Mendes, E.M. Santos, F. Nascimento, I.L. Silva, M.C. Baldiotti e S.V. Silva;

à C.M.L. Aragão, K.C. Carvalho e N.C. Guisoni por gestos simpáticos;

ao C.E.F. Santos, C.F.S. Rodrigues, E.A. Oliveira, F.C. Cardoso, J.R.N. Chiappin, L.F. Guidi, N. Alves Jr., R.Y. Camargo, R.C. Alamino e S.M. Kurcbart;

aos funcionários do IFUSP – em particular, à M. Silvani e R.T. Rodrigues;

ao A.T.N. Sardão, B.L. Soares, C.C. Yajima, M.F. Cornelio e N.O. Yokomizo pelos aprazíveis debates – embora censuráveis às “pessoas boas e honestas”;

Suporte financeiro do CNPq.

M.H.

XII/2001

Índice

1 Introdução	1
2 Grupo de renormalização no espaço real	4
2.1 Introdução	4
2.2 Grupo de renormalização no espaço real para o modelo de Ising	4
2.3 Transformação de Migdal - Kadanoff	10
2.4 Limitações do grupo de renormalização no espaço real	13
3 Redes Hierárquicas	15
3.1 Introdução	15
3.2 Definições	15
3.3 Características termodinâmicas	18
3.4 Limitações	20
3.5 Previsão da teoria de escala	21
3.6 Cálculo numérico - rede hierárquica uniforme	22
3.7 Aplicação a uma rede hierárquica auto - dual	28
4 Critério de Nienhuis - Nauenberg	33
4.1 Introdução	33
4.2 Critério de Nienhuis - Nauenberg	33
5 Considerações finais	42

Apêndice A

Rede auto - dual com interações aperiódicas	45
A1 Introdução	45
A2 Caso irrelevante	46
A3 Caso relevante	52

Apêndice B

Prova do lema 4.3	61
-------------------	----

Referências Bibliográficas	63
----------------------------	----

Capítulo 1

Introdução

Seja Z_N a função de partição de um modelo de Ising ferromagnético uniforme de N spins, de energia de interação $J > 0$ entre primeiros vizinhos, sob presença de um campo magnético externo H :

$$Z_N(\beta) = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp \left[\beta J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta H \sum_{i=1}^N \sigma_i \right], \quad (1.1)$$

onde β é a temperatura (inversa) do sistema e σ_i são as variáveis de “spins clássicos”, que podem assumir dois valores, $+1$ ou -1 .

A equação (1.1) é a forma mais popular do modelo de Ising na presença de campo externo ([1]).

A investigação das transições de fase apóia-se nos zeros da função de partição ([2], [3]); apesar de (1.1) ser uma soma de funções exponenciais – e portanto uma função sem raízes reais da variável $z = e^{\beta H}$ –, seus zeros (localizados no plano complexo), no limite termodinâmico, “encontram” a reta real.

Até a década de 1970, o obstáculo para a análise da singularidade de equações como (1.1) resumia-se nos métodos de seu cálculo: eles dificilmente conduziam a um comportamento singular esperado. O estudo dos expoentes críticos dos sistemas estava confinado às resoluções exatas via análise termodinâmica do modelo (para examinar, em seguida,

sua criticalidade) ou simulações numéricas. Havia ainda resultados numéricos a partir de extrapolações de séries de altas ou baixas temperaturas com problemas de convergência em regiões próximas do ponto crítico (expansões de altas temperaturas).

Neste cenário, o propósito de Wilson ([4], [5]) foi o desenvolvimento de uma técnica, o grupo de renormalização (RG), que permitia a manutenção da singularidade no cálculo da função de partição no limite termodinâmico (para a determinação da energia livre de Helmholtz), com preocupação especial na sua aplicação à teoria de campo e aos fenômenos críticos. Uma adaptação particularmente direta do RG para “spins clássicos” foi proposta por Niemeijer e van Leeuwen ([6], [7]) (como a expansão em cumulantes), Migdal ([8]) e Kadanoff ([9]) (movimentação de ligações da rede), e Kadanoff ([10]) (tratamento variacional), conquanto as aproximações eram inevitáveis em suas aplicações às redes de Bravais com dimensão superior a um.

As aplicações iniciais do RG apresentaram numerosos trabalhos acerca do comportamento crítico, especialmente aqueles referentes às transições de fase contínuas. No entanto, nada foi estabelecido sobre as transições de fase de primeira ordem, até que nos meados da década de 70. Nienhuis e Nauenberg propuseram, heurísticamente, um critério que decidia a presença destas últimas transições analisando somente as propriedades básicas do esquema de renormalização no espaço real ([11]). Uma versão mais atual de referido critério surgiu anos depois ([12]).

Aparentemente, então, as análises básicas das propriedades críticas via RG estavam completas. Uma questão essencial foi relevada, entretanto, ao final dos anos 70 sobre a sua validade. Artigos foram publicados tratando deste ponto ([13], [14], [15], [16]), mas com poucos progressos.

Na mesma época, alguns trabalhos apontavam a existência de modelos onde o esquema de RG apresentava resultados exatos ([17], [18]). Tais produções inspiraram a sedimentação daquilo que posteriormente denominou-se “redes hierárquicas” ([19], [20], [21], [22], [23], [24]).

O presente trabalho inicia-se com uma breve e resumida apresentação do RG no

capítulo 2 para ressaltar as peculiaridades das redes hierárquicas – abordadas no capítulo 3. O capítulo 4 expõe o critério de Nienhuis - Nauenberg numa linguagem moderna. O apêndice A dedica-se a mostrar um exemplo de aplicação de RG em redes hierárquicas em um caso de maior complexidade do que será apresentado no capítulo 3; trata-se de um caso onde há interações aperiódicas entre spins de uma rede hierárquica. O interesse no estudo deste caso reside na discussão da universalidade para distintas regras que ditam o caráter aperiódico do sistema.

2.1 Introdução

2.2 Grupo de renormalização no espaço real para o modelo de Ising

Capítulo 2

Grupo de renormalização no espaço real

2.1 Introdução

Pretende-se apresentar, neste capítulo, uma análise geral do grupo de renormalização no espaço real em uma linguagem moderna (não aquela originalmente introduzida por Wilson ([4], [5])), bem como suas limitações práticas. O objeto principal de estudo, as redes hierárquicas – introduzidas no capítulo 3 –, são entidades onde o esquema de RG via Migdal-Kadanoff produzem resultados exatos; uma atenção especial, portanto, será voltada a este método, que em redes de Bravais de dimensão maior que um constituem apenas uma aproximação.

2.2 Grupo de renormalização no espaço real para o modelo de Ising

Seja $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ uma rede d -dimensional; a cada sítio associa-se uma variável de spin, que pode assumir dois valores, $+1$ ou -1 ; o espaço de configurações Ω_Λ de Λ é, portanto, $\{+1, -1\}^\Lambda$. Para um dado subconjunto finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, pode-se definir uma função Hamil-

toniana $\mathcal{H} : \Omega_\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ e, a partir desta, a função de partição no sistema a uma temperatura (inversa) β :

$$Z_\Lambda(\beta) = \sum_{X \in \Omega_\Lambda} \exp[-\bar{\mathcal{H}}(X)], \quad (2.1)$$

onde $\bar{\mathcal{H}} = \beta\mathcal{H}$ é a Hamiltoniana reduzida, que deve descrever a interação entre sítios. Em geral, escreve-se

$$-\bar{\mathcal{H}}(\{\sigma_i\}) = \sum_{\omega} K_{\omega} \sigma_{\omega}, \quad (2.2)$$

sendo

$$\sigma_{\omega} := \prod_{i \in \omega} \sigma_i, \quad (2.3)$$

onde ω denota algum subconjunto de spins de Λ .

Na literatura, é bastante comum encontrar (2.2) expresso de uma forma mais explícita como

$$-\bar{\mathcal{H}}(\{\sigma_i\}) = \sum_i H_i \sigma_i + \sum_{i,j} K_{ij} \sigma_i \sigma_j + \dots \quad (2.4)$$

A prescrição do RG no espaço real consiste em agrupar um conjunto de spins $\{\sigma_i\}$ em "células" $\{\tau_a\}$. Os critérios para atribuir um valor a τ_a são arbitrários. O espaço de configurações passa a ser $\Omega_{\Lambda'} = \{+1, -1\}^{\Lambda'}$, sendo $\Lambda' \subset \mathbb{Z}^d$ o conjunto de spins da rede renormalizada. É conveniente impor uma condição de similaridade ao Hamiltoniano reduzido renormalizado $\bar{\mathcal{H}}'$, escrevendo-o como

$$-\overline{\mathcal{H}'}(\{\tau_j\}) = \sum_{\varphi} K'_{\varphi} \tau_{\varphi} \quad (2.5)$$

com

$$\tau_{\varphi} := \prod_{a \in \varphi} \tau_a, \quad (2.6)$$

onde φ representa algum subconjunto de spins de Λ' .

No processo de renormalização, são geradas novas grandezas, K'_{φ} , que desempenham papel análogo ao de K_{ω} na rede original. O conjunto de aplicações que levam o sistema de um Hamiltoniano a outro constitui um semi-grupo, denominado grupo de renormalização.

A transformação de renormalização \mathcal{R} ,

$$\overline{\mathcal{H}'} = \mathcal{R}(\overline{\mathcal{H}}), \quad (2.7)$$

leva o Hamiltoniano $\overline{\mathcal{H}}$ da rede original ao Hamiltoniano da rede renormalizada $\overline{\mathcal{H}'}$. Tal aplicação é escolhida de sorte que as propriedades termodinâmicas críticas dos dois sistemas sejam idênticas; uma condição suficiente para tal consiste em impor a invariância da função de partição. Seja $\Lambda' \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ um conjunto associado ao espaço de configurações da rede renormalizada; deve-se ter

$$Z_{\Lambda'}(\beta') = Z_{\Lambda}(\beta), \quad (2.8)$$

a menos de funções que são “bem-comportadas” a ponto de não interferirem nas informações termodinâmicas críticas.

A equação (2.8) liga os Hamiltonianos $\overline{\mathcal{H}'}$ e $\overline{\mathcal{H}}$, conforme (2.7). Introdz-se, por conveniência, uma função P , com as seguintes propriedades:

$$P : \Omega_{\Lambda'} \times \Omega_{\Lambda} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (2.9)$$

$$(2.10)$$

e

$$\sum_{Y \in \Omega_{\Lambda'}} P(Y, X) = 1. \quad (2.11)$$

A função supracitada é responsável pela passagem de um Hamiltoniano para outro. Seja Y uma configuração de $\Omega_{\Lambda'}$; nesta situação,

$$\exp[-\overline{\mathcal{H}'}(Y) - G] = \sum_{X \in \Omega_{\Lambda}} P(Y, X) \exp[-\overline{\mathcal{H}}(X)], \quad Y \in \Omega_{\Lambda'}, \quad (2.12)$$

onde o termo G será explicado mais adiante. O segundo membro de (2.12) é sempre não negativo - e, por conseguinte, $\overline{\mathcal{H}'}(Y)$ ($Y \in \Omega_{\Lambda'}$) é real -, fato assegurado por (2.9).

Sejam ρ' e ρ distribuições de probabilidade de Gibbs da rede renormalizada e original, respectivamente, definidas na forma usual:

$$\rho(X) := \frac{\exp[-\overline{\mathcal{H}}(X)]}{\sum_{Y \in \Omega_{\Lambda}} \exp[-\overline{\mathcal{H}}(Y)]} \quad X \in \Omega_{\Lambda} \quad (2.13)$$

e

$$\rho'(X) := \frac{\exp[-\overline{\mathcal{H}'}(X)]}{\sum_{Y \in \Omega_{\Lambda'}} \exp[-\overline{\mathcal{H}'}(Y)]} \quad X \in \Omega_{\Lambda'}. \quad (2.14)$$

A equação (2.12) indica que o esquema de RG segue as seguintes etapas:

$$\overline{\mathcal{H}} \rightarrow \rho \rightarrow \rho' \rightarrow \overline{\mathcal{H}'}, \quad (2.15)$$

sendo que é possível, para a primeira etapa, recorrer às equações de Dobrushin - Lanford - Ruelle (DLR) ([25], [26]) – para Hamiltonianas obedecendo a certas condições –; a segunda é direta, sendo uma simples aplicação de (2.8); a última envolve, novamente, a equação DLR.

Notar que a transformação consiste em “substituir” um bloco de spins por uma quantidade efetiva. Tendo em vista que este processo envolve uma redução de graus de liberdade, introduz-se uma função G , que depende somente dos parâmetros presentes na rede original (i.e., independe das variáveis de spins); a ela se associa a energia livre dos spins “dizimados”.

Verifica-se, então, a invariância termodinâmica por aplicação de renormalização, somando (2.12) sobre todas as configurações de $\Omega_{\Lambda'}$:

$$\begin{aligned} \sum_{Y \in \Omega_{\Lambda'}} \exp [-\overline{\mathcal{H}'}(Y) - G] &= \sum_{Y \in \Omega_{\Lambda'}} \sum_{X \in \Omega_{\Lambda}} P(Y, X) \exp [-\overline{\mathcal{H}}(X)] \Rightarrow \\ \ln \sum_{Y \in \Omega_{\Lambda'}} \exp [-\overline{\mathcal{H}'}(Y) - G] &= \ln \sum_{X \in \Omega_{\Lambda}} \left[\sum_{Y \in \Omega_{\Lambda'}} P(Y, X) \right] \exp [-\overline{\mathcal{H}}(X)] \Rightarrow \\ G - \ln \sum_{Y \in \Omega_{\Lambda'}} \exp [-\overline{\mathcal{H}'}(Y)] &= - \ln \sum_{X \in \Omega_{\Lambda}} \exp [-\overline{\mathcal{H}}(X)]. \end{aligned}$$

Definindo, de forma usual, as energias livres de Helmholtz

$$F' := - \ln \sum_{Y \in \Omega_{\Lambda'}} \exp [-\overline{\mathcal{H}'}(Y)] \quad (2.16)$$

e

$$F := -\ln \sum_{X \in \Omega_\Lambda} \exp [-\bar{\mathcal{H}}(X)], \quad (2.17)$$

obtém-se

$$G + F' = F, \quad (2.18)$$

que é uma expressão para a transformação da energia livre dos spins.

Supondo que existam N' e N spins na rede renormalizada e original, respectivamente, e sendo b o fator de escala nas transformações, o fator de escala de volume é expresso por $N/N' = b^d$. Definindo as energias livres reduzidas por spin, chega-se a

$$f = g + \frac{1}{b^d} f', \quad (2.19)$$

onde g deve ser uma função analítica. Deve-se lembrar que f e f' são a mesma função, diferindo apenas no argumento.

Sendo o sistema transformado isomórfico ao original, pode-se repetir a renormalização iterativamente; denotando por $\{K_\omega^{(m)}\}$ o conjunto das funções correspondentes às interações entre spins nos vários estágios da transformação (m -ésima iterada), tem-se

$$f(\{K_\omega\}) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{b^{nd}} g(\{K_\omega^{(n)}\}) + \frac{1}{b^{md}} f(\{K_\omega^{(m)}\}). \quad (2.20)$$

Com condições de contorno adequadas, supõe-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b^{nd}} f(\{K_\omega^{(n)}\}) = 0. \quad (2.21)$$

As iterações levam a energia livre para regiões onde $T \rightarrow 0$ ou $T \rightarrow \infty$; nelas, $f(\{K_\omega^{(n)}\})$ deve ser bem comportada (sem singularidades), fato expressado em (2.21).

2.3 Transformação de Migdal-Kadanoff

A proposta central da transformação de Migdal-Kadanoff (MK) consiste em sempre visar reduzir o esquema de RG em um problema cuja complexidade técnica seja a de um modelo unidimensional ([8], [9]).

Introduz-se, inicialmente, o conceito de grafo.

Definição 2.1: *Um grafo G é um conjunto $V(G)$ finito e não vazio de objetos ditos vértices e um subconjunto $E(G)$ das partes de $V(G)$, ditas linhas, que unem os vértices dois a dois; $V(G)$ é o conjunto de vértices e $E(G)$ é o conjunto de linhas do grafo G .*

As linhas são representadas pelos vértices que elas conectam, sendo $E(G)$, portanto, um subconjunto das partes de $V(G)$.

Dada uma rede, a renormalização de MK consiste em eliminar spins por dois processos, considerando que um grafo é uma composição de apenas dois tipos de subgrafos, G_1 e G_2 :

$$G_1 = \begin{cases} V(G_1) = \{u_1, u_2, u_3\} \\ E(G_1) = \{u_1u_2, u_2u_3\} \end{cases}$$

e

$$G_2 = \begin{cases} V(G_2) = \{u_1, u_2\} \\ E(G_2) = \{u_1u_2, u'_1u'_2\}. \end{cases}$$

A dizimação de spins, no caso do subgrafo G_1 , trata de eliminar o vértice u_2 , substituindo as ligações u_1u_2 e u_2u_3 , de energias de interação associadas K_A e K_B (respectivamente),

por $u_1 u_3$, com energia de interação efetiva K' . Para o subgrafo G_2 , a energia de interação efetiva é a soma das duas linhas originais. O grafos finais G'_1 e G'_2 são

$$G'_1 = \begin{cases} V(G'_1) = \{u_1, u_3\} \\ E(G'_1) = \{u_1 u_3\} \end{cases}$$

e

$$G'_2 = \begin{cases} V(G'_2) = \{u_1, u_2\} \\ E(G'_2) = \{u_1 u_2\} \end{cases}$$

As regras acima resumem-se na figura 2.1 abaixo.

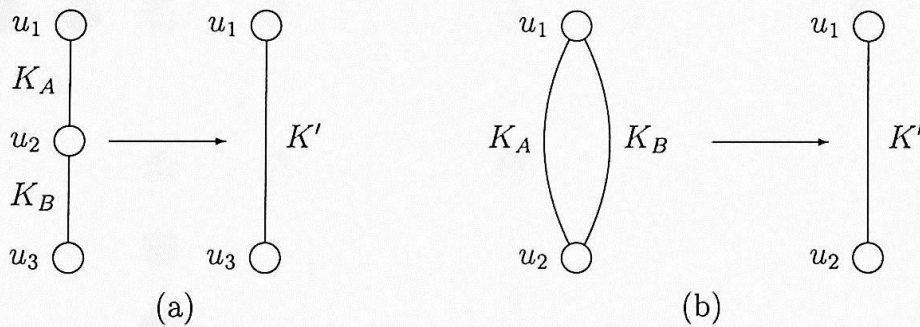


Figura 2.1: Bases da transformação de Migdal - Kadanoff.

A invariância das propriedades termodinâmicas (2.8) por renormalização exige as equações

$$G_1 : K' = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\cosh(K_A + K_B)}{\cosh(K_A - K_B)} \right] \quad (2.22)$$

e

$$G_2 : K' = K_A + K_B. \quad (2.23)$$

Aplicação da transformação de MK em uma rede quadrada

Considere a Figura 2.2 como sendo subconjunto de uma rede quadrada, que é invariante por translação.

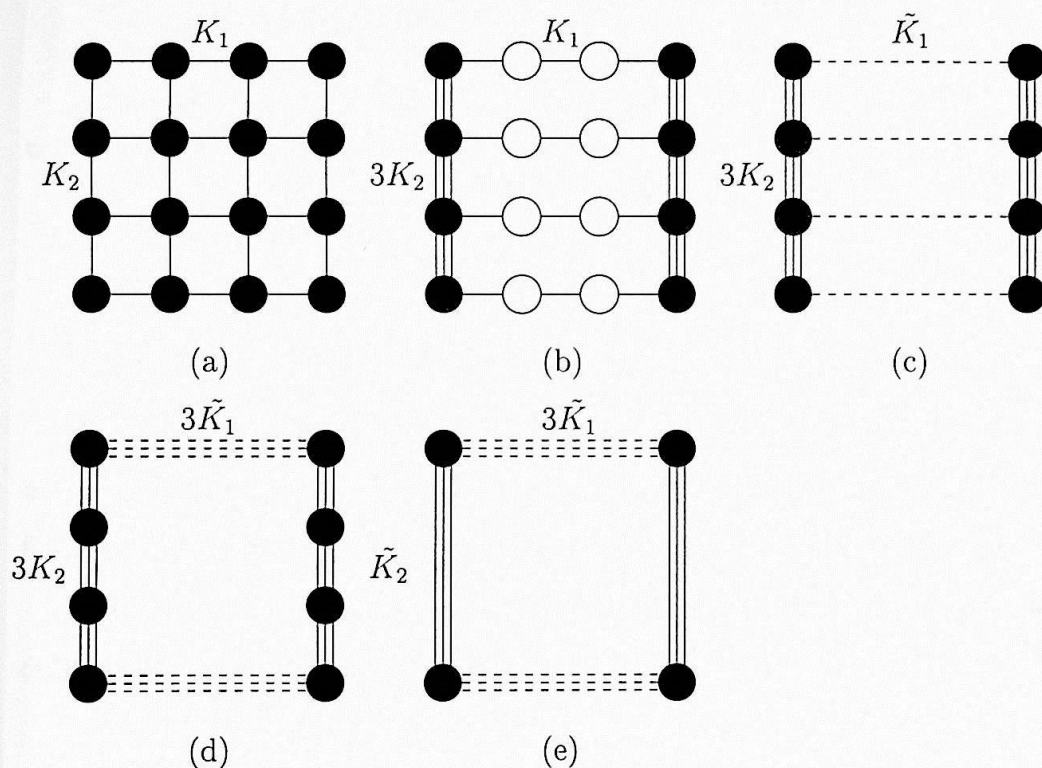


Figura 2.2: Transformação de Migdal-Kadanoff exemplificado numa rede quadrada.

Na Figura 2.2(a), tem-se parte de uma rede quadrada, sendo a energia de interação das linhas horizontais e verticais K_1 e K_2 , respectivamente. Em 2.2(b), cada conjunto de duas linhas contíguas verticais foi deslocado para uma terceira adjacente a uma delas,

formando uma ligação $3K_2$; pode-se, agora, tratar as seis linhas (duas verticais e as quatro horizontais) independentemente como um caso de dizimação de spins em uma dimensão, o que é feito inicialmente para as horizontais, gerando uma ligação efetiva \tilde{K}_1 , ilustrado em 2.2(c). Duas linhas horizontais adjacentes, então, são deslocadas para uma terceira contígua a uma delas, conforme 2.2(d) e, finalmente, dizimam-se os dois spins intermediários verticais explícitos na figura, dando lugar à ligação \tilde{K}_2 .

Os cálculos indicam que

$$K'_1 := 3\tilde{K}_1 = \frac{3}{2} \ln \left[\frac{\exp(3K_1) + \exp(-K_1)}{3 \exp(K_1) + \exp(-3K_1)} \right] \quad (2.24)$$

e

$$K'_2 := \tilde{K}_2 = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\exp(9K_2) + \exp(-3K_2)}{3 \exp(K_2) + \exp(-3K_2)} \right]. \quad (2.25)$$

As expressões (2.24) e (2.25) fornecem os parâmetros de interação renormalizados; neste exemplo, $d = 2$ e $b = 3$, com os graus de liberdade do sistema diminuindo de um fator $b^d = 9$.

Apesar de simples implementação, a transformação de MK não é exata para as redes de Bravais, exceto em uma dimensão.

2.4 Limitações do grupo de renormalização no espaço real

Usualmente, interpreta-se o esquema de RG como uma aplicação em um Hamiltoniano para outro, conforme (2.7); pouco se questiona, entretanto, sobre sua validade. O esquema de RG é aplicável em algumas condições (não muito restritivas), podendo, em outras, ap-

resentar problemas quanto à sua existência e/ou comportamento no limite termodinâmico ([13], [14], [15], [16]).

Quando se recorre ao RG, supõem-se algumas hipóteses com relação à transformação:

(i) A aplicação \mathcal{R} em (2.7) é bem comportada para uma dada classe de Hamiltonianas $\overline{\mathcal{H}}$.

(ii) $\overline{\mathcal{H}'}$ é uma função analítica dos parâmetros $\{K_\omega\}$ envolvidos em $\overline{\mathcal{H}}$.

(iii) Os alcances das interações de $\overline{\mathcal{H}'}$ e $\overline{\mathcal{H}}$ são similares.

(iv) Existe um ponto fixo não-trivial na equação

$$\overline{\mathcal{H}^*} = \mathcal{R}(\overline{\mathcal{H}^*}), \quad (2.26)$$

quando o modelo apresentar uma fase ordenada; $\overline{\mathcal{H}^*}$ descreve um sistema interagente¹.

Os problemas do RG podem estar relacionados com os coeficientes de (2.5) – cujo comportamento no limite termodinâmico pode não estar bem definido –, assim como a medida de probabilidade sobre o espaço de configurações numa rede infinita; nas vizinhanças de uma região crítica, o limite $\Lambda \rightarrow \infty$ para $\rho(X)$, definido em (2.13), pode não ser único.

¹Apresentar-se-á, no apêndice A deste trabalho, uma situação em que existe um ponto fixo do tipo $\overline{\mathcal{H}^*} = \mathcal{R}^{(n)}(\overline{\mathcal{H}^*})$, i.e., da n-ésima iterada da aplicação \mathcal{R} , que governa a criticalidade do sistema.

Capítulo 3

Redes Hierárquicas

3.1 Introdução

O esquema de RG no estudo do comportamento crítico, apresentado no capítulo anterior, conheceu diversas aplicações. Entretanto, para as redes de Bravais, a implementação das técnicas de renormalização era possível apenas sob aproximações.

Uma série de artigos de Griffiths e Kaufman ([19], [20], [21], [22], [23], [24]), no início da década de 80, apontou um interesse nas redes hierárquicas² (definidas abaixo), objeto em que o esquema de renormalização de Migdal-Kadanoff ([8], [9]) fornecia solução exata para sistemas de “spins clássicos” discretos; este fato já havia sido apontado em trabalhos anteriores ([17], [18]). Diferentemente das redes de Bravais, que gozam de simetria translacional, as redes hierárquicas são invariantes por escala – e esta característica permite a exatidão dos resultados obtidos quando tratados no contexto da técnica de RG.

3.2 Definições

Pode-se a um grafo fazer corresponder uma estrutura de rede, identificando os vértices com variáveis de spin; as interações entre eles são representadas com as linhas – a quantidade destas, B , é dita **número de agregação**. Desta forma, é possível associar um

²Existem artigos interessantes envolvendo estas redes, como ([27]) e ([28]).

acoplamento a cada uma das linhas.

Diferentemente das redes de Bravais, que são dotadas de simetria translacional, as redes hierárquicas destacam-se pela sua invariância por escala. A composição de uma rede hierárquica (grafo) resume-se num processo iterativo de substituição de seus subgrafos por um grafo. Pode-se definir redes hierárquicas de uma forma compacta em termos de categorias.

Definição 3.1: *Uma categoria \mathcal{C} consiste em*

a) *uma classe \mathcal{O} de objetos.*

b) *um conjunto $Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ de morfismos, com $X, Y \in \mathcal{O}$.*

c) *uma lei de composição $\mu : Mor_{\mathcal{C}}(X, Y) \times Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow Mor_{\mathcal{C}}(X, Z)$. Para quaisquer $\varphi \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $\psi \in Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, existe um morfismo representado por $\mu(\varphi \times \psi) = \psi \circ \varphi \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Z)$.*

A lei de composição tem duas propriedades; para quaisquer objetos, X, W, Y e Z , com $\varphi \in Mor_{\mathcal{C}}(X, W)$, $\psi \in Mor_{\mathcal{C}}(W, Y)$ e $\lambda \in Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z)$,

i) $(\lambda \circ \psi) \circ \varphi = \lambda \circ (\psi \circ \varphi)$ *(associatividade)*

ii) $\left\{ \begin{array}{l} \varphi \circ 1_X = \varphi \\ 1_Y \circ \psi = \psi \end{array} \right.$ *(existência do morfismo identidade)*

Definição 3.2: *Uma rede hierárquica é uma categoria \mathcal{C}_H cujos objetos são grafos $\{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}^+}$; a classe \mathcal{O}_H de objetos é o conjunto enumerável $\{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}^+}$.*

A seqüência $\{G_i\}$ é construída de sorte que G_b tenha uma estrutura "mais complexa" que G_a para $a < b$, i.e., exige-se que

$$G_a \subset G_b (\iff V(G_a) \subset V(G_b)).$$

Seja $\psi \in \text{Mor}_C(G_m, G_n)$, um morfismo que leva um grafo a outro; ψ tem a seguinte definição:

$$\psi = \begin{cases} 1_{G_m} & m = n \\ (\Theta^\dagger)^{(n-m)} & m < n \\ (\Theta)^{(m-n)} & n < m, \end{cases}$$

sendo que as aplicações Θ^\dagger e Θ ,

$$\Theta^\dagger : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$$

$$\Theta^\dagger(G_m) = G_{m+1}$$

e

$$\Theta : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$$

$$\Theta(G_m) = G_{m-1} \quad (m \neq 0)$$

$$\Theta(G_0) = G_0,$$

definem as regras de composição dos grafos.

Um grafo do M -ésimo estágio pode ser decomposto em grafos de estágios inferiores

$$G_M = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} G_A^\alpha \quad A < M.$$

Por conseguinte, quando é dado um estágio M de um grafo, pode-se definir uma sub-
unidade G_A^α ($A < M$) de G_M ; naturalmente,

$$G_M^\mu \cup G_M^\nu = \begin{cases} V(G_M^\mu) \cup V(G_M^\nu) \\ E(G_M^\mu) \cup E(G_M^\nu). \end{cases}$$

A definição acima apresenta as operações Θ^\dagger e Θ , que podem ser entendidos como sendo uma aplicação e a sua inversa, de sorte que o conjunto destas funções constituem um grupo.

Atribui-se ao índice i de $\{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}^+}$ o estágio de renormalização da rede.

3.3 Características termodinâmicas

Um dos fatores de considerável relevância em modelos estatísticos diz respeito à sua estabilidade termodinâmica. É desejável que funções tais como calor específico e compressibilidade sejam positivas ([21]).

Tendo em vista que existem somente duas operações possíveis no processo de renormalização de Migdal - Kadanoff, como descrito na seção 2.3, a função de partição restrita $Z_p(X)$, $X \in \Omega_\Lambda$, do p -ésimo estágio, para um espaço de configuração Ω_Λ , pode ser escrita como

$$Z_p(X) = \sum_{Y \in \Omega_\Lambda} M_p(X, Y) \prod_{\alpha=1}^B Z_{p-1}(Y^\alpha), \quad (3.1)$$

onde a função M_p é analítica.

Definindo f_N como sendo a energia livre reduzida no N -ésimo estágio de renormalização da rede,

$$f_N := \frac{1}{B^N} \sum_{X \in \Omega_\Lambda} Z_N(X), \quad (3.2)$$

onde B indica o número de agregação da rede no primeiro estágio e, para um dado $X \in \Omega_\Lambda$,

$$Z_N(X) = \exp[-\bar{\mathcal{H}}_N(X) + C_N], \quad (3.3)$$

sendo C_N um termo que independe da configuração $X \in \Omega_\Lambda$.

De (3.1) e (3.3), tem-se

$$\exp[-\bar{\mathcal{H}}_N(X) + \psi_N] = \sum_{Y \in \Omega_\Lambda} M_N(X, Y) \exp\left[\sum_{\alpha=1}^B -\bar{\mathcal{H}}_{N-1}(Y^\alpha)\right], \quad (3.4)$$

sendo

$$\psi_N = C_N - BC_{N-1}. \quad (3.5)$$

Teorema 3.3: *Se, para quaisquer $X \in \Omega_\Lambda$ e $Y \in \Omega_\Lambda$,*

(i) *O Hamiltoniano da célula primitiva for real e finito,*

(ii) *$M(X, Y) \in [0, \infty)$,*

(iii) *Existe Y tal que $M_N(X, Y) > 0 \quad \forall N, X$,*

(iv) *$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{B^N} \max_{X, Y} \ln M_N(X, Y) < \infty$ e*

$$(v) \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{B^N} \min_{\substack{X, Y \\ M_N(X, Y) > 0}} \ln M_N(X, Y) < \infty,$$

então existe o limite

$$f := \lim_{N \rightarrow \infty} f_N. \quad (3.6)$$

Prova: Vide referência ([21]).

■

Teorema 3.4: *Se, além de (i) a (v), a condição*

(vi) *Existe um estágio l a partir da qual para qualquer elemento $X \in \Omega_\Lambda$, existe um $Y \in \Omega_{\Lambda'}$ tal que $M_{N \geq l}(X, Y) > 0$*

for satisfeita, a energia livre (reduzida) é

$$f = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{B^N} \psi_N. \quad (3.7)$$

onde ψ_N é definido em (3.5).

Prova: Vide referência ([21]).

■

3.4 Limitações

Sob certas condições, pode-se mostrar a convexidade da energia livre. Tal aspecto confere, aparentemente, uma respeitabilidade às redes hierárquicas; entretanto, estas têm

uma base frágil quando se tenta atribuir uma dimensão: a dimensionalidade, assim como o fator de escala nas renormalizações, são entes não muito bem definidos. Determinar um valor para a quantidade b^d , “naturalmente identificado com o número de agregação B ”, envolve uma arbitrariedade que compromete a confiabilidade do resultado. Muitas vezes, argumentos para o “cálculo” de b^d em um determinado modelo, quando aplicados em outro, fornecem um número distinto de B ; a consequência disto pode revelar uma inconveniência inaceitável como a obtenção de uma energia livre que não seja convexa ([19]).

Para alguns sistemas, o esquema de renormalização de Migdal - Kadanoff indica outros resultados incômodos. O modelo XY clássico ferromagnético de dimensão superior a dois mostra uma divergência logarítmica da susceptibilidade em temperaturas acima da temperatura crítica.

3.5 Previsão da teoria de escala

Considere os expoentes críticos α e α' :

$$\alpha := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln C(t)}{\ln t} \quad T_c < T \quad (3.8)$$

e

$$\alpha' := \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\ln C(t)}{\ln(-t)} \quad T < T_c. \quad (3.9)$$

Considere a equação (2.19)

$$f = g + \frac{1}{b^d} f', \quad (3.10)$$

onde $f(t)$ é duas vezes derivável em nos pontos da reta $(-1, \infty)$, exceto nos pontos críticos.

Teorema 3.3: *Seja $f(t)$ duas vezes derivável e $C(t) > 0$; então, para temperaturas suficientemente próximas à crítica,*

$$\alpha = 2 - \frac{\ln b^d}{\ln \Lambda}, \quad (3.11)$$

onde

$$\Lambda := \frac{dx'(x_c)}{dx} \quad (3.12)$$

para $x = x(T)$.

Prova: Idéia da demonstração na referência ([29]).

■

3.6 Cálculo numérico – rede hierárquica uniforme

A partir da energia livre reduzida

$$f(\{X_i\}) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{B^n} g(\{X_i^{(n)}\}) + \frac{1}{B^m} g(\{X_i^{(m)}\}), \quad (3.13)$$

deve-se calcular o calor específico C nas regiões próximas à temperatura crítica T_c na tentativa de observar um comportamento assintótico da forma

$$C \sim t^{-\alpha} \quad T > T_c \quad (3.14)$$

e

$$C \sim (-t)^{-\alpha'} \quad T < T_c. \quad (3.15)$$

Da energia livre reduzida, (3.13), extrai-se o calor específico

$$C(T) = \frac{\partial^2}{\partial T^2} [k_B T f(T)] = k_B \left[2 \frac{\partial f(T)}{\partial T} + T \frac{\partial^2 f(T)}{\partial T^2} \right]. \quad (3.16)$$

A equação (3.1) indica que a função de partição, que é uma soma de pesos de Boltzman, pode ser escrita como uma função polinomial de grau s :

$$Z_\Lambda(\zeta) = \sum_{j=0}^s A_j \zeta^j, \quad (3.17)$$

onde $\zeta = \zeta(\beta)$ e os coeficientes A_j são constantes. Os fatores de Boltzman, que são da forma $\exp(1/T)$ apresentam um problema de divergência para pequenos valores de T ; embora a energia livre seja finita a baixas temperaturas, o envolvimento de termos que se apresentam como “infinito” para o computador é deveras incômodo. Para contornar esta questão, é suficiente adotar uma função limitada ζ ao invés de recorrer ao próprio peso de Boltzman (“mudança de variável”); naturalmente, esta função deve ser injetiva. Pode-se, então, expressar (3.13) como

$$f(\{\zeta_i\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{B^n} g(\{\zeta_i^{(n)}\}). \quad (3.18)$$

onde $\zeta_i = \zeta_i(T)$ e $\zeta_i^{(n)}$ é a n -ésima iterada de $\zeta_i^{(0)} = \zeta_i(T)$.

Em geral, uma mudança de variável dos pesos de Boltzmann para ζ introduz uma singularidade em g , de sorte que

$$g(\zeta^{(n)}) = C \ln \left\{ \frac{\sum_{k=0}^m A_k [\zeta^{(n)}]^k}{\sum_{j \neq 0}^r B_j [\zeta^{(n)}]^j} \right\}, \quad (3.19)$$

com $A_0 \neq 0$ e C sendo uma constante.

Seja $\{s_m\}_{m \in \mathbb{Z}^+}$ uma seqüência de funções tal que

$$s_m(T) = \sum_{n=0}^m \frac{1}{B^n} g(\zeta^{(n)}(T)). \quad (3.20)$$

Deve-se lembrar que serão calculados valores para o calor específico em algum intervalo compacto nas proximidades do ponto crítico, onde a função g é analítica; seja $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ este intervalo – tem-se $s_m : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$. Como se está admitindo tacitamente que as condições (i) a (vi) dos teoremas 3.3 e 3.4 estejam satisfeitas, a seqüência $\{s_m\}$ converge; na topologia métrica, toda seqüência convergente é de Cauchy e portanto a convergência de $\{s_m\}$, que tem contradomínio real, é uniforme – o que permite derivar os termos de (3.18) termo a termo. Comentário análogo é feito para a segunda derivada da energia livre em transições de fase contínuas:

$$\frac{\partial f(T)}{\partial T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{B^n} \frac{\partial g(\zeta^{(n)})}{\partial \zeta^{(n)}} \frac{\partial \zeta^{(n)}(T)}{\partial T}, \quad (3.21)$$

onde

$$\frac{\partial \zeta^{(n)}(T)}{\partial T} = \frac{\partial \zeta^{(j)}(\zeta^{(j-1)})}{\partial \zeta^{(j-1)}} \frac{\partial \zeta^{(j-1)}(T)}{\partial T}. \quad (3.22)$$

Da mesma forma,

$$\frac{\partial^2 f(T)}{\partial T^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{B^n} \left\{ \frac{\partial^2 g(\zeta^{(n)})}{\partial \zeta^{(n)2}} \left[\frac{\partial \zeta^{(n)}(T)}{\partial T} \right]^2 + \frac{\partial g(\zeta^{(n)})}{\partial \zeta^{(n)}} \frac{\partial^2 \zeta^{(n)}(T)}{\partial T^2} \right\}.$$

Proposição 3.4: Numa rede hierárquica, escolhida uma função ζ com $\zeta(T^*) = 0$, têm-se

$$\lim_{T \rightarrow T^*} \left[\zeta^{(n)}(T) \frac{\partial g(\zeta^{(n)}(T))}{\partial \zeta^{(n)}} \right] < \infty \quad (3.23)$$

$$\lim_{T \rightarrow T^*} \left[(\zeta^{(n)}(T))^2 \frac{\partial^2 g(\zeta^{(n)}(T))}{\partial \zeta^{(n)2}} \right] < \infty. \quad (3.24)$$

Prova: Seja $\zeta := \zeta(T)$; de (3.19), tem-se

$$\frac{\partial g}{\partial \zeta^{(n)}} = \frac{F_1(\zeta^{(n)})}{\zeta^{(n)}} \quad (3.25)$$

e

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \zeta^{(n)2}} = \frac{F_2(\zeta^{(n)})}{[\zeta^{(n)}]^2}, \quad (3.26)$$

onde

$$F_1(\zeta) = C \left\{ \zeta \left[\frac{\sum_{k=1}^m k A_k \zeta^k}{\sum_{k=0}^m A_k \zeta^k} - \frac{\sum_{j=1}^{r-p} j B_{j+p} \zeta^j}{\sum_{j=0}^{r-p} B_{j+p} \zeta^j} \right] - p \right\} \quad (3.27)$$

e

$$F_2(\zeta) = \zeta \frac{\partial F_1(\zeta)}{\partial \zeta} - F_1(\zeta). \quad (3.28)$$

Nas equações acima, escreveu-se $\sum_{j \neq 0}^r B_j \zeta^j = \zeta^p \sum_{j=0}^{r-p} B_{j+p} \zeta^j$ (vide (3.19)).

É imediato que $F_1(T) < \infty$ e $F_2(T) < \infty$, uma vez que as condições

$$\sum_{k=0}^m A_k \zeta^k \neq 0 \quad (3.29)$$

e

$$\sum_{j=0}^{r-p} B_{j+p} \zeta^j \neq 0 \quad (3.30)$$

são asseguradas.

■

De (2.12), é possível escrever as relações de recorrência das interações:

$$\zeta^{(n)}(\zeta^{(n-1)}) = [\zeta^{(n-1)}]^m M(\zeta^{(m-1)}), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.31)$$

Segue-se, de (3.31), que

$$\frac{\partial \zeta^{(n)}(T)}{\partial T} = \frac{\partial \zeta^{(n)}(\zeta^{(n-1)})}{\partial \zeta^{(n-1)}} \frac{\partial \zeta^{(n-1)}(T)}{\partial T} = [\zeta^{(n-1)}]^{m-1} W_1(\zeta^{(n-1)}) \frac{\partial \zeta^{(n-1)}(T)}{\partial T}, \quad (3.32)$$

onde

$$W_1 (\zeta^{(n-1)}) = m M (\zeta^{(n-1)}) + \zeta^{(n-1)} \frac{\partial M (\zeta^{(n-1)})}{\partial \zeta^{(n-1)}}. \quad (3.33)$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta^{(n)} (T)}{\partial T^2} &= \frac{\partial^2 \zeta^{(n)} (\zeta^{(n-1)})}{\partial \zeta^{(n-1)^2}} \left[\frac{\partial \zeta^{(n-1)} (T)}{\partial T} \right]^2 + \frac{\partial \zeta^{(n)} (\zeta^{(n-1)})}{\partial \zeta^{(n-1)}} \frac{\partial^2 \zeta^{(n-1)} (T)}{\partial T^2} = \\ &= [\zeta^{(n-1)}]^{m-2} W_2 (\zeta^{(n-1)}) \left[\frac{\partial \zeta^{(n-1)} (T)}{\partial T} \right]^2 + \\ &+ [\zeta^{(n-1)}]^{m-1} W_1 (\zeta^{(n-1)}) \frac{\partial^2 \zeta^{(n-1)} (T)}{\partial T^2}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

com

$$W_2 (\zeta^{(n-1)}) = m (m - 1) M (\zeta^{(n-1)}) + 2m \zeta^{(n-1)} \frac{\partial M (\zeta^{(n-1)})}{\partial \zeta^{(n-1)}} + [\zeta^{(n-1)}]^2 \frac{\partial^2 M (\zeta^{(n-1)})}{\partial \zeta^{(n-1)^2}}. \quad (3.35)$$

Definem-se, agora, as funções σ_1 , σ_2 e σ_3 :

$$\sigma_1^{(n)} := \frac{1}{B^n \zeta^{(n)}} \frac{\partial \zeta^{(n)}}{\partial T} = \frac{W_1 (\zeta^{(n-1)})}{B M (\zeta^{(n-1)})} \sigma_1^{(n-1)}, \quad (3.36)$$

$$\sigma_2^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{B^n}} \frac{1}{\zeta^{(n)}} \frac{\partial \zeta^{(n)}}{\partial T} = \frac{1}{\sqrt{B}} \frac{W_1 (\zeta^{(n-1)})}{M (\zeta^{(n-1)})} \sigma_2^{(n-1)}, \quad (3.37)$$

$$\sigma_3^{(n)} := \frac{1}{B^n \zeta^{(n)}} \frac{\partial^2 \zeta^{(n)}}{\partial T^2} = \frac{W_2 (\zeta^{(n-1)})}{B M (\zeta^{(n-1)})} [\sigma_2^{(n-1)}]^2 + \frac{W_1 (\zeta^{(n-1)})}{B M (\zeta^{(n-1)})} \sigma_3^{(n-1)}, \quad (3.38)$$

sendo que

$$\sigma_1^{(0)} = \sigma_2^{(0)} = \frac{1}{\zeta^{(0)}} \frac{\partial \zeta(T)}{\partial T}, \quad (3.39)$$

$$\sigma_3^{(0)} = 0, \quad (3.40)$$

i.e., dada uma condição inicial $\zeta^{(0)}$, é possível calcular as derivadas da energia livre reduzida

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \sum_{n=0}^{\infty} F_1(\zeta^{(n)}) \sigma_1^{(n)}, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ F_2(\zeta^{(n)}) [\sigma_2^{(n)}]^2 + F_1(\zeta^{(n)}) \sigma_3^{(n)} \right\} \quad (3.42)$$

e, por conseguinte, o calor específico.

Com a temperatura reduzida $t := T/T_c - 1$, ajusta-se a $C(t)$ uma curva da forma

$$A |t|^{-\alpha'} + B \quad T < T_c \quad (3.43)$$

e

$$A |t|^{-\alpha} + B \quad T_c < T \quad (3.44)$$

nas proximidades da temperatura crítica pelo método dos mínimos quadrados.

3.7 Aplicação a uma rede hierárquica auto-dual

Considere um modelo de Ising uniforme ferromagnético na ausência de campo com a seguinte regra de decoração/dizimação [30]:

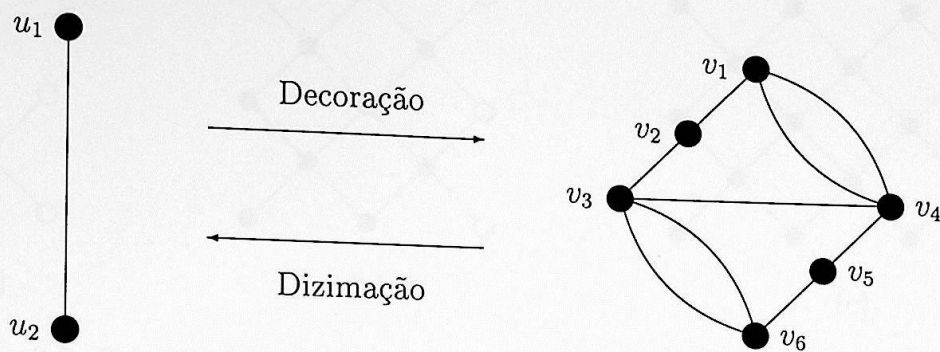


Figura 3.1: Esquema da rede auto-dual.

Uma descrição da rede hierárquica consistiria em definir as seguintes entidades:

$$G_0 = \begin{cases} V(G_0^1) = \{u_1, u_2\} \\ E(G_0^1) = \{u_1 u_2\}. \end{cases}$$

Para uma dada ligação $w_1 w_2$ pertencente ao grafo G_m ,

$$\begin{aligned} \Theta^\dagger(\{w_1 w_2\}) &= G_{m+1}^\alpha \\ &= \begin{cases} V(G_{m+1}^\alpha) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \\ E(G_{m+1}^\alpha) = \{v_1 v_2, v_1 v_4, v_1' v_4', v_2 v_3, v_3 v_4, v_3 v_6, v_3' v_6', v_4 v_5, v_5 v_6\}. \end{cases} \end{aligned}$$

O grafo acima é correspondente a uma família de células apropriada para uma rede quadrada de Ising, se for imposta duas condições de contorno; primeiramente, todos os sítios da linha inferior são ajustados como sendo os mesmos (Figura 3.2); em segundo, os sítios da linha superior e interior (bolas cheias) também devem ter o mesmo estado, sendo este com sinal oposto às da linha inferior. Notar que a auto-dualidade é preservada na correspondência do grafo com a rede original.

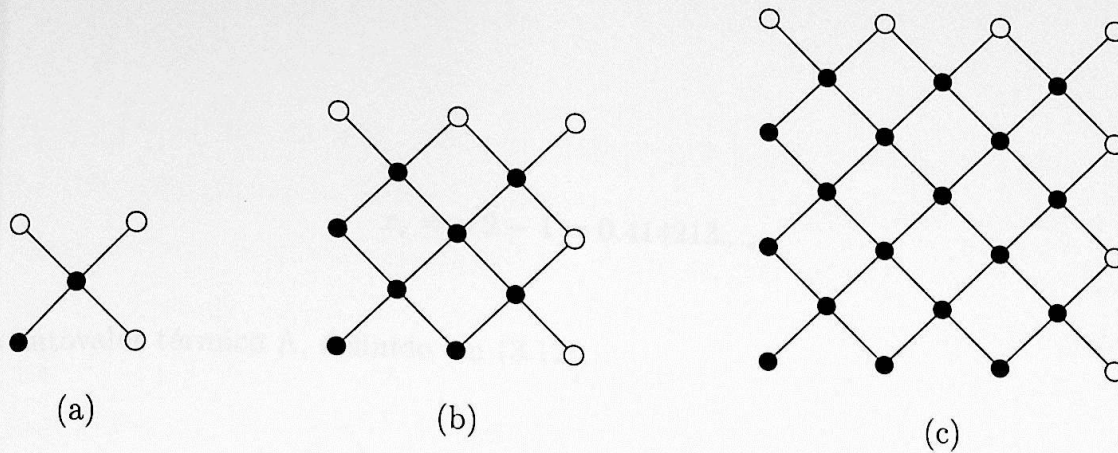


Figura 3.2: Família de células para estudo de uma rede quadrada antiferromagnética de Ising.

Uma última observação é feita com relação à temperatura crítica da rede (Figura 3.1), que é igual à da rede quadrada.

Resolver-se-á, nesta seção, o caso uniforme; a implementação de aperiodicidade na rede auto-dual hierárquica é feita no Apêndice A.

A energia livre dos spins dizimados por spin g e a relação de recorrência da energia de interação x' são dadas por

$$g(x) = \frac{1}{18} \ln \left[\frac{1}{4} \frac{(1 + 2x^2 + 5x^4 + 8x^6)(8 + 5x^2 + 2x^4 + x^6)}{x^4(1 + x^2)^2} \right] \quad (3.45)$$

e

$$x'(x) = \frac{x^3(8 + 5x^2 + 2x^4 + x^6)}{1 + 2x^2 + 5x^4 + 8x^6} \quad (3.46)$$

onde foi usada a função $x := x(T) = \exp(-2J/k_B T)$. Esta convenção revela-se conveniente na medida em que $x([0, \infty)) \subset [0, 1]$, i.e., a imagem de x é limitada – o que não oferece empecilhos computacionais nos pontos críticos triviais.

Previsão da teoria de escala

Da equação (3.46), obtém-se o ponto crítico x_c ,

$$x_c = \sqrt{2} - 1 = 0.414213\dots,$$

e o autovalor térmico Λ , definido em (3.12),

$$\Lambda = \frac{dx'}{dx}(x_c) = \frac{29}{13} = 2.230769\dots,$$

o que leva ao expoente crítico $\alpha = \alpha'$, calculado via (3.11):

$$\alpha = 2 - \frac{\ln 9}{\ln(29/13)} = -0.738498\dots$$

Notar que o fator de escala de volume, b^d , na equação (3.11), foi substituído pelo número de agregação B , conforme as observações da seção 3.4.

Resultados numéricos

O procedimento exposto na seção 3.6 é aplicado à rede auto-dual, apresentada anteriormente. Seguem-se alguns valores do expoente crítico α determinados numericamente na tabela 3.1.

Intervalo (temperatura reduzida)	α, α'	Incerteza do ajuste
$[-8.17 \cdot 10^{-5}, -1.38 \cdot 10^{-7}]$	-0.732	0.005
$[-3.59 \cdot 10^{-7}, -9.39 \cdot 10^{-11}]$	-0.7369	0.0012
$[-3.14 \cdot 10^{-10}, -4.50 \cdot 10^{-13}]$	-0.7382	0.0014
$[3.47 \cdot 10^{-10}, 3.02 \cdot 10^{-6}]$	-0.7416	0.0015
$[4.31 \cdot 10^{-13}, 3.47 \cdot 10^{-10}]$	-0.7391	0.0013

Tabela 3.1: Expoente crítico α para $J/k_B = 1$.

$$T_c = 2,269185314213\dots$$

Notar que o valor de α aproxima-se daquele previsto pela teoria de escala conforme o intervalo tomado é aproximado da temperatura crítica T_c ; observar que $\alpha \approx \alpha'$. Deve-se ressaltar que a incerteza (do ajuste dos mínimos quadrados a funções do tipo (3.43) ou (3.44)) presente na tabela é uma cota inferior (para cada intervalo de temperatura considerado) para o valor de α , uma vez que não há um controle rigoroso sobre a incerteza – inevitável – no próprio valor do expoente crítico ((3.8), (3.9)) que é definido no limite de $|t| \rightarrow 0$.

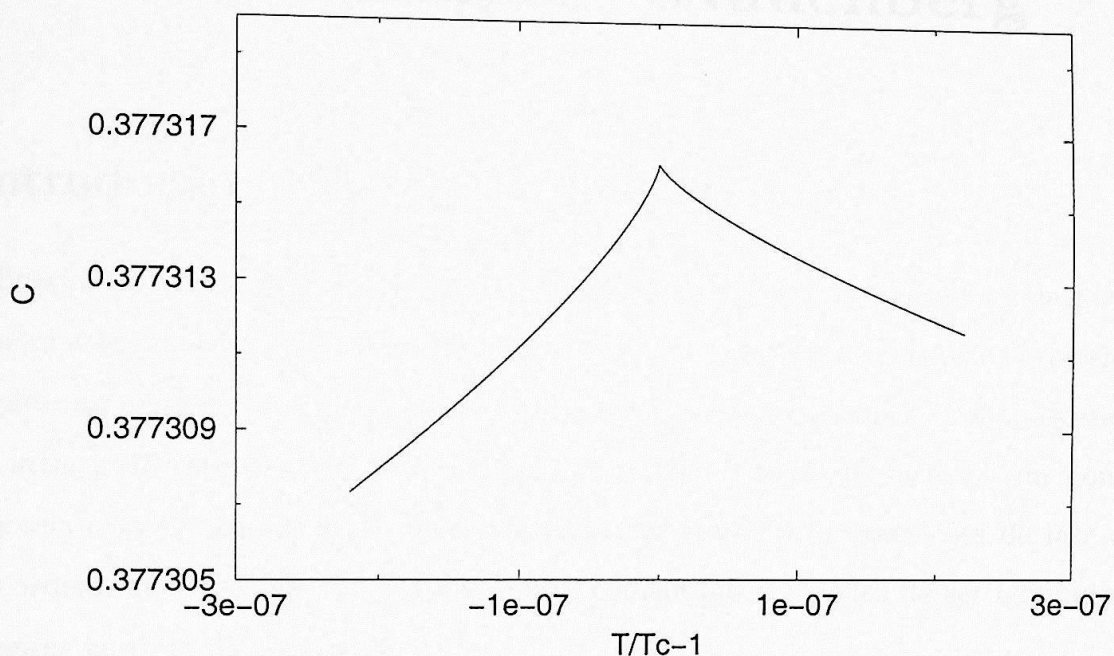


Figura 3.3: Calor específico obtido por meios numéricos para $J/k_B = 1$
 $(T_c = 2.269185314213\dots)$.

Capítulo 4

Critério de Nienhuis - Nauenberg

4.1 Introdução

A aplicação da teoria de RG na mecânica estatística produziu resultados relevantes sobre fenômenos críticos; a análise dos pontos fixos das relações de recorrência revelou informações importantes para o estudo das transições de fase de segunda ordem; existem diversos artigos de revisão acerca do assunto [31], [32]. Apesar do sucesso, um ponto que se observa no promissor início da nova teoria diz respeito às transições de fase de primeira ordem, que fora um assunto não muito comentado – a ponto de ser ignorado – nos primeiros anos da década de 70.

Em 1975, Nienhuis e Nauenberg ([11]) propuseram, dentro do esquema do RG, um critério de verificação de ocorrência de transições de fase de primeira ordem em modelos estatísticos, doravante denominado “critério de Nienhuis-Nauenberg (NN)”. Tal idéia foi posteriormente desenvolvida em um trabalho de Berker e Fisher ([12]) na década de 80.

4.2 Critério de Nienhuis - Nauenberg

Seja $\{X_\alpha\}$, $X_\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha \in [0, n-1] \subset \mathbb{Z}$), o conjunto das variáveis reais associadas às interações entre spins de uma rede e o campo de ordenamento; seja $\{X'_\beta\}$ com $X'_\beta \in \mathbb{R}$ suas renormalizações segundo uma aplicação \mathcal{R}_β :

$$X'_\beta = \mathcal{R}_\beta(\{X_\alpha\}). \quad (4.1)$$

Se os elementos do conjunto da imagem, $\{X'_\beta\}$, for derivável com respeito às variáveis $\{X_\alpha\}$, é possível definir $T_{\beta\alpha}$, a matriz linearizada da transformação \mathcal{R}_β , que deve ser de classe \mathcal{C}^1 :

$$T_{\beta\alpha}(\{X_\alpha\}) = \frac{\partial X'_\beta}{\partial X_\alpha}. \quad (4.2)$$

A criticalidade do sistema é governada pelo ponto fixo X^* , determinável a partir das relações de recorrência provenientes de (4.1). A prescrição usual adotada para o exame do problema ordena o cálculo dos autovalores da matriz de (4.2) no ponto X^* , que permite obter os expoentes críticos universais das funções termodinâmicas na superfície crítica associada ao ponto fixo.

Considere, agora, o domínio $\mathcal{D} = \{\{X_\alpha\} | T < T_c\}$, região abaixo da temperatura crítica T_c . Toda análise deste capítulo considerará a topologia métrica.

Definição 4.1: Um ponto $X^{**} \in \mathcal{D}$, com \mathcal{D} na superfície onde o campo conjugado ao parâmetro de ordem é nulo, e X^{**} distinto de X^* , é dito **ponto fixo de descontinuidade** se possuir uma vizinhança onde as sucessivas aplicações de renormalização convergem a X^{**} .

As sucessivas aplicações das renormalizações geram uma seqüência de pontos

$$(\{X_\alpha\}, \mathcal{R}(\{X_\alpha\}), \mathcal{R}(\mathcal{R}(\{X_\alpha\})), \dots) =$$

$$(\{X_\alpha\}, \mathcal{R}^{(1)}(\{X_\alpha\}), \mathcal{R}^{(2)}(\{X_\alpha\}), \dots),$$

sendo que $\mathcal{R}^{(1)}(\{X_\alpha\}) = \{X'_\beta\}$; por esta convenção, $\{X_\alpha\} = \mathcal{R}^{(0)}(\{X_\alpha\})$, i.e., $\mathcal{R}^{(0)}$ é uma aplicação identidade.

O ponto fixo de descontinuidade é, portanto, um ponto de acumulação do conjunto cujos elementos são constituídos pelos termos da seqüência supracitada.

O critério de ocorrência de transições de fase de primeira ordem de Nienhuis - Nauenberg aplica-se nos pontos fixos de descontinuidade. Seja b^d - com b sendo o fator de escala e d a dimensionalidade do sistema - o fator de escala de volume.

Teorema 4.2 (Nienhuis - Nauenberg): *Dado um modelo de Ising ferromagnético uniforme na presença de um campo externo constante, o autovalor magnético é igual ao fator de escala de volume se há transição de fase com descontinuidade na magnetização no ponto fixo de descontinuidade.*

Prova: Considere o expoente crítico $1/\delta$:

$$\frac{1}{\delta} := \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\ln |M(H)|}{\ln |H|}, \quad (4.3)$$

onde

$$M(H) = \frac{\partial f(K^{**}, H)}{\partial H} \quad (4.4)$$

é a magnetização definida na superfície $K = K^{**}$; a magnetização é uma função limitada.

Considere, ainda, a relação de renormalização da energia livre (2.12)

$$f(K, H) = g(K, H) + \frac{1}{b^d} f(K', H'). \quad (4.5)$$

A função $g(K, H)$ é analítica; $f(K, H)$ também o é, exceto, talvez, em um número enumerável de pontos (fixos). Por conseguinte, supondo que $f(K, H)$ seja analítica em

K , existe uma vizinhança de $(K^{**}, 0)$ em que $f(K, H)$ é derivável em relação a H – exceto no próprio $(K^{**}, 0)$; então

$$\frac{\partial f(K, H)}{\partial H} = \frac{\partial g(K, H)}{\partial H} + \frac{1}{b^d} \frac{\partial f(K', H')}{\partial K'} \frac{\partial K'(K, H)}{\partial H} + \frac{1}{b^d} \frac{\partial f(K', H')}{\partial H'} \frac{\partial H'(K, H)}{\partial H} \Rightarrow$$

$$M(H) = V(H) + M(H')\Lambda(H), \quad (4.6)$$

onde $(K, H) \neq (K^{**}, 0)$ e

$$V(K, H) := \frac{\partial g(K, H)}{\partial H} + \frac{1}{b^d} \frac{\partial f(K', H')}{\partial K'} \frac{\partial K'(K, H)}{\partial H} \quad \text{e} \quad \Lambda(K, H) := \frac{\partial H'(K, H)}{\partial H}.$$

Seja (K^{**}, h_1) e (K^{**}, h_2) com $h_1 > 0$ e $h_2 < 0$; sejam $h'_1 := H'(K^{**}, h_1)$ e $h'_2 := H'(K^{**}, h_2)$; em (4.6):

$$M(h_1) = V(h_1) + \frac{1}{b^d} M(h'_1)\Lambda(h_1) \quad (4.7)$$

e

$$M(h_2) = V(h_2) + \frac{1}{b^d} M(h'_2)\Lambda(h_2). \quad (4.8)$$

De (4.7) e (4.8),

$$\begin{aligned} |M(h_1) - M(h_2)| &= \left| V(h_1) - V(h_2) + \frac{1}{b^d} [M(h'_1)\Lambda(h_1) - M(h'_2)\Lambda(h_2)] \right| \leq \\ &\leq |V(h_1) - V(h_2)| + \frac{1}{b^d} |\Lambda(h_1)| |M(h'_1) - M(h'_2)| + \\ &+ \frac{1}{b^d} |M(h'_2)| |\Lambda(h_1) - \Lambda(h_2)| \end{aligned} \quad (4.9)$$

e

$$\begin{aligned} |M(h_1) - M(h_2)| &= \left| V(h_1) - V(h_2) + \frac{1}{b^d} [M(h'_1)\Lambda(h_1) - M(h'_2)\Lambda(h_2)] \right| \geq \\ &\frac{1}{b^d} |\Lambda(h_1)| |M(h'_1) - M(h'_2)| - |V(h_1) - V(h_2)| - \\ &-\frac{1}{b^d} |M(h'_2)| |\Lambda(h_1) - \Lambda(h_2)|. \end{aligned} \quad (4.10)$$

As funções V e Λ são contínuas e limitadas definidas num conjunto relativamente compacto E (onde se observa o comportamento crítico); V e Λ são, portanto, uniformemente contínuas em E . Logo, para qualquer $\epsilon/2 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se

$$|h_1 - h_2| < \delta_1 \quad (K^{**}, h_1), (K^{**}, h_2) \in E, \quad (4.11)$$

então

$$|V(h_1) - V(h_2)| < \epsilon/2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{b^d} |M(h'_2)| |\Lambda(h_1) - \Lambda(h_2)| < \epsilon/2. \quad (4.12)$$

Satisfeita a condição (4.11), de (4.9), (4.10) e (4.12), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^d} |\Lambda(h_1)| |M(h'_1) - M(h'_2)| - \epsilon &\leq |M(h_1) - M(h_2)| \\ &\leq \frac{1}{b^d} |\Lambda(h_1)| |M(h'_1) - M(h'_2)| + \epsilon. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Sendo (4.13) válida para qualquer $\epsilon > 0$,

$$|M(h_1) - M(h_2)| = \frac{1}{b^d} |\Lambda(h_1)| |M(h'_1) - M(h'_2)|. \quad (4.14)$$

O teorema de Taylor admite escrever h'_1 e h'_2 como

$$h'_\alpha(h_\alpha) = \frac{\partial H'(0)}{\partial H} h_\alpha + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 H'(\bar{c}_\alpha)}{\partial H^2} h_\alpha^2 = \Lambda h_\alpha + c_\alpha h_\alpha^2 \quad \alpha = 1, 2, \quad (4.15)$$

sendo \bar{c}_1 (\bar{c}_2) um número entre 0 e h_1 (h_2 e 0).

Naturalmente,

$$\Lambda := \Lambda(0) = \frac{\partial H'(0)}{\partial H} \quad \text{e} \quad c_\alpha := \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 H'(\bar{c}_\alpha)}{\partial H^2} \quad \alpha = 1, 2.$$

Reestruturando (4.14), com a escolha de h_1 e h_2 , h'_1 e h'_2 de forma que $M(h_1) - M(h_2) \neq 0$ e $M(h'_1) - M(h'_2) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \ln |M(h_1) - M(h_2)| &= \ln |M(h'_1) - M(h'_2)| + \ln \frac{|\Lambda(h_1)|}{b^d} \Rightarrow \\ \frac{\ln |M(h_1) - M(h_2)|}{\ln |h_1 - h_2|} \ln |h_1 - h_2| &= \frac{\ln |M(h'_1) - M(h'_2)|}{\ln |h'_1 - h'_2|} \ln |h'_1 - h'_2| + \\ &+ \ln \frac{|\Lambda(h_1)|}{b^d} \Rightarrow \\ \left[\frac{\ln |M(h_1) - M(h_2)|}{\ln |h_1 - h_2|} - \frac{\ln |M(h'_1) - M(h'_2)|}{\ln |h'_1 - h'_2|} \right] \ln |h_1 - h_2| - \\ - \frac{\ln |M(h'_1) - M(h'_2)|}{\ln |h'_1 - h'_2|} \ln \left| \Lambda + \frac{1}{2} \frac{c_1 h_1^2 - c_2 h_2^2}{h_1 - h_2} \right| &= \ln \frac{|\Lambda(h_1)|}{b^d}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Tomando-se os limites $h_1 \downarrow 0$ e $h_2 \uparrow 0$ em (4.16), tem-se

$$\begin{aligned}
& \lim_{h_1 \downarrow 0, h_2 \uparrow 0} \left\{ \left[\frac{\ln |M(h_1) - M(h_2)|}{\ln |h_1 - h_2|} - \frac{\ln |M(h'_1) - M(h'_2)|}{\ln |h'_1 - h'_2|} \right] \ln |h_1 - h_2| \right\} = \\
& = \lim_{h_1 \downarrow 0, h_2 \uparrow 0} \left[\frac{\ln |M(h'_1) - M(h'_2)|}{\ln |h'_1 - h'_2|} \ln \left| \Lambda + \frac{1}{2} \frac{c_1 h_1^2 - c_2 h_2^2}{h_1 - h_2} \right| + \ln \frac{|\Lambda(h_1)|}{b^d} \right] = \\
& = \frac{1}{\delta} \ln |\Lambda| + \ln \frac{|\Lambda|}{b^d}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Lema 4.3: *O primeiro membro de (4.17) é igual a zero.*

Prova: Apêndice B.

Do lema acima, (4.17) pode ser expresso como

$$\frac{1}{\delta} \ln \Lambda + \ln \left| \frac{\Lambda}{b^d} \right| = 0. \tag{4.18}$$

Uma descontinuidade em $(K^{**}, 0)$ da magnetização implica em $\Lambda = b^d$. Neste ponto, (4.14) assume a forma

$$|M(0^+) - M(0^-)| = \frac{1}{b^d} |\Lambda(0^+)| |M(0^+) - M(0^-)|. \tag{4.19}$$

Por hipótese, no ponto fixo de descontinuidade $|M(0^+) - M(0^-)| \neq 0$ e, por conseguinte, $\Lambda = b^d$. ■

Notar que a transição de fase de primeira ordem no caso acima é vista como sendo um caso limite de uma transição de segunda ordem, com $\delta \rightarrow \infty$. O teorema acima pode ser estendida trivialmente para o modelo de Potts ([33], [34]).

Teorema 4.4: *Dado um modelo de Potts, seja $\{\Lambda_\alpha\} \subset \mathbb{R}^{(n)}$, com $\alpha \in I \subset \mathbb{N}$ (I é um conjunto finito de índices), o conjunto de autovalores da matriz de linearização das transformações de renormalização calculado no ponto fixo de descontinuidade. Existem dois índices, $\zeta_0, \zeta_1 \in I$ tais que $\Lambda_{\zeta_0} = \Lambda_{\zeta_1} = b^d$ se há transição de fase de primeira ordem no sistema.*

Prova: Análoga ao teorema 4.3.

A matriz $T_{\beta\alpha}$, calculada no ponto de descontinuidade, tem a forma

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} b^d & \text{par} & 0 \\ & \text{par} & \\ 0 & & \\ & 0 & \text{ímpar} \\ 0 & & \text{ímpar} \end{pmatrix}$$

com presença de blocos par e ímpar, correspondentes às estruturas que apresentam simetria par e ímpar com respeito à “reflexão” de spins. A primeira coluna de $T_{\beta\alpha}$ segue da arbitrariedade de adicionar uma constante em uma das relações de recorrência:

$$X'_0 = b^d X_0 + \tilde{\mathcal{R}}_\beta(\{X_{\alpha \neq 0}\}),$$

$$X'_{\beta \neq 0} = \mathcal{R}_\beta(\{X_{\alpha \neq 0}\}).$$

Por conseguinte, existe pelo menos um índice ζ_0 em que $\Lambda_{\zeta_0} = b^d$ (no caso, $\zeta_0 = 0$); a presença de um $\zeta_1 \neq \zeta_0$ satisfaz a hipótese do teorema 4.2, que leva a apontar a ocorrência de uma transição de fase de primeira ordem; caso contrário, a transição observada será de segunda ordem. Da matriz $T_{\beta\alpha}$ é possível, ainda, conseguir uma informação adicional com respeito à primeira situação:

Corolário 4.5: *Se existe um autovalor de $T_{\beta\alpha}$ com valor b^d em seu bloco par, a transição de fase de primeira ordem envolve calor latente; no bloco ímpar, descontinuidade no parâmetro de ordem.*

Em geral, em sistemas de m componentes que apresentam transições de fase de primeira ordem, espera-se que existam pelo menos m autovetores distintos (cada um correspondente a uma fase) com autovalores b^d . No caso de redes hierárquicas, existe uma arbitrariedade na definição do fator de escala e da dimensão da rede. Impõe-se, então, a igualdade $B = b^d$, em que B é o número de agregação.

Capítulo 5

Considerações finais

Uma breve análise deste trabalho destaca alguns pontos relevantes: inicialmente, foi escolhido um modelo conhecido na literatura – as redes hierárquicas – como objeto central de estudo, sendo este redefinido na linguagem de categorias. Apresentou-se, em seguida, a técnica computacional usada para extração de algumas informações de seu comportamento crítico; através do método numérico proposto, pode-se calcular as derivadas primeira e segunda da energia livre sem recorrer à técnica de diferenças finitas.

Um dos problemas do cálculo numérico diz respeito ao cálculo de derivadas de uma função. Esta questão é contornada no presente trabalho aproveitando-se uma notável propriedade das redes hierárquicas, que é a invariância por escala. Conseqüentemente, pode-se extrair o expoente crítico α com uma certa segurança para poder confrontá-la com as previsões da teoria de escala.

O ponto central reside justamente nesta comparação. Como as redes hierárquicas são entidades que carecem de analogias com modelos físicos existentes, não se tem uma idéia segura do significado das grandezas neste trabalho que estão usualmente presentes na termodinâmica. De fato, o único personagem cuja existência está razoavelmente bem definida é a energia livre de Helmholtz, de acordo com a interpretação de dizimação de spins: é aceitável conceber como energia livre do sistema a soma das energias livres dos spins dizimados nas várias etapas de renormalização. O conceito de temperatura, estando atrelado à idéia de energia, permite invocar o conceito de calor específico, que

está relacionado com a segunda derivada da energia livre. O expoente crítico α , portanto, surge através da aplicação automática das leis conhecidas da termodinâmica.

Por outro lado, os outros expoentes críticos requerem maior cuidado em sua definição. É perigoso definir, por exemplo, o expoente β quando não se tem em mente uma idéia clara do que seja a magnetização em redes hierárquicas; da mesma forma, não se define impunemente o conceito de comprimento de correlação. Naturalmente, é possível defini-las de forma arbitrária e a partir disso calcular todos os expoentes críticos; na literatura, predominam definições como “dimensão fractal” de redes hierárquicas. Este último já fora imaginado como sendo um critério de decidir a classe de universalidade de uma dada rede hierárquica; contra - exemplos, no entanto, existem ([35]).

Este trabalho, assim como em outros citados da literatura, em nada contribui para esclarecer uma questão ainda não definida, que é a dimensionalidade das redes hierárquicas. Os cálculos numéricos apresentados esquivaram-se deste incômodo obstáculo definindo a “energia livre por ligação”, i.e., recorreu-se à grandeza B (número de agregação) ao invés do tradicional fator b^d - fator de escala b e dimensão d . Apesar desta manobra, a única conclusão a ser mencionada refere-se ao “sucesso” do emprego do número de agregação; não há evidências de sua validade universal. Urge lembrar que este “sucesso” diz respeito à verificação de consistência do método adotado; em outros termos, adotando B tanto na teoria de escala, assim como no cálculo de energia livre, o expoente crítico α é o mesmo.

As equações obtidas dentro do contexto da teoria do RG parecem ser bastante úteis nos domínios das redes hierárquicas, pois aparentemente aquelas foram obtidas independentes do sistema em consideração; entretanto, todas as deduções das fórmulas pressupunham uma rede “real”, i.e., dimensão e fator de escala eram tratados como entes bem definidos. Removendo esta base, como é o caso das redes hierárquicas, todas as relações deduzidas via RG perdem seu status. Está-se assumindo, tacitamente, que existe alguma constante que representa aquilo que em redes realísticas está associado ao fator de escala volumétrico; supondo a existência desta incógnita - o que parece ser razoável -, pode-se escrever as equações conhecidas no contexto da teoria de escala e RG, ficando apenas a indefinição

nos conceitos supracitados.

No capítulo 4, foi apresentada uma dedução do teorema de Nienhuis - Nauenberg. Novamente, tal resultado pode ser aceitavelmente compreendido em situações realísticas, sendo sua validade duvidosamente considerada em redes hierárquicas; afinal, não é imediato tomar uma definição e significado de manifestações de magnetização nesses modelos. Recorre-se, mais uma vez, à estratégia de adotar o número de agregação B no lugar do fator de reescala volumétrica b^d no contexto das redes hierárquicas.

No apêndice que sucede este capítulo, há uma aplicação das técnicas numéricas, apresentadas no capítulo 3, a redes hierárquicas que não são uniformes; em particular, escolheu-se decorar as ligações da rede segundo regras ditadas por seqüências de Fibonacci; tal fato oferece uma complexidade a mais, mas contornável – sem resolver, no entanto, a questão da dimensionalidade. Neste modelo, a escolha dessas regras distinguiu dois casos, cada uma delas pertencentes a classes de universalidade distintas: existe uma situação onde a flutuação geométrica decorrente da aperiodicidade é irrelevante; o comportamento crítico deste caso é ditado pelo mesmo ponto fixo das relações de recorrência do modelo uniforme (mostrado no capítulo 3). Por outro lado, quando a flutuação é relevante, a criticalidade passa a ser determinada por outras entidades ([36]).

Conhece-se muito pouco sobre redes hierárquicas no atual estágio; os trabalhos referentes a esta área contentam-se em verificar as validades das célebres equações típicas provenientes de técnicas do RG no espaço real a partir de definições arbitrárias de dimensão ou artifícios que contornem esta dificuldade.

Apêndice A

Rede auto-dual com interações aperiódicas

A1 Introdução

Examinaram-se duas seqüências generalizadas de Fibonacci para a configuração da rede; a primeira é gerada pela regra

$$A \rightarrow AAB$$

$$B \rightarrow AAA$$

e a segunda, por

$$A \rightarrow ABB$$

$$B \rightarrow AAA.$$

A2 Caso irrelevante

Considere a seguinte rede hierárquica com a seguinte regra de decoração/dizimação:

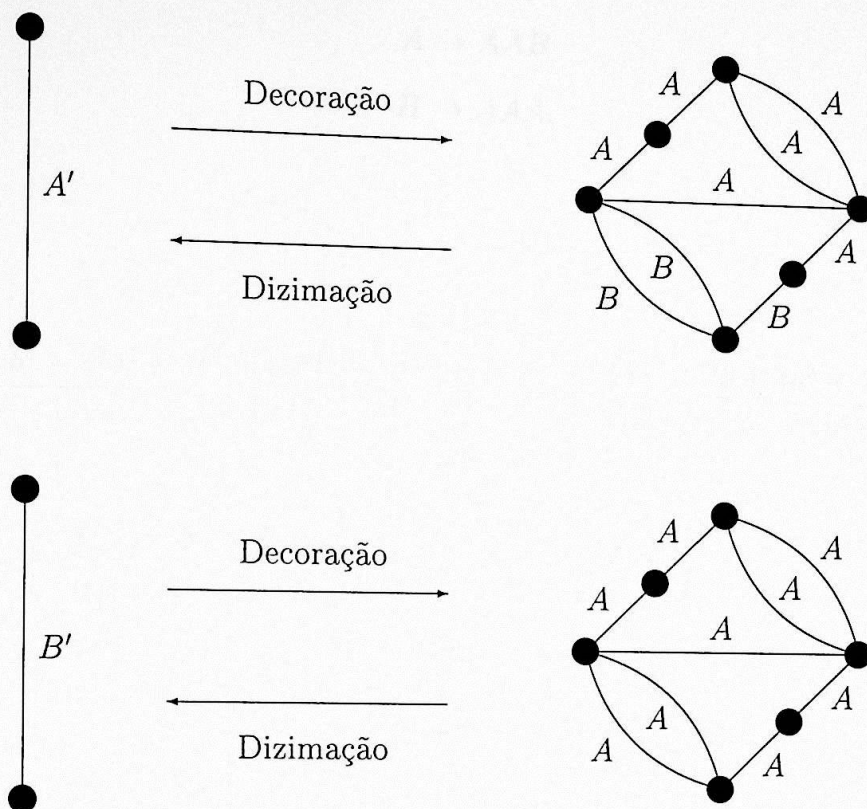


Figura A.1: Esquema da rede auto-dual com regra de decoração
 $A \rightarrow AAB$ e $B \rightarrow AAA$.

Trata-se de um caso de flutuação irrelevante; nota-se tal comportamento a partir da matriz de substituição, que é dada por

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analisando a linearização nas proximidades do ponto fixo, verifica-se que se trata de um ponto de sela, e sua classe de universalidade é a mesma do modelo uniforme, o expoente crítico α deve ser, portanto, $-0.738498\dots$, o que será verificado.

A montagem das relações de recorrência em casos não-uniformes requer um cuidado especial; para a rede auto-dual aperiódica com a regra

$$A \rightarrow AAB$$

$$B \rightarrow AAA,$$

tem-se

$$a' = \frac{b^3 + a^2b^3 + ab^2 + 2a^3b^2 + a^5b^2 + a^4b^3 + a^6b^3 + 2a^2b + 4a^3 + 2a^4b}{1 + a^2 + ab + 2a^3b + a^5b + a^4 + a^6 + 2a^2b^2 + 4a^3b^3 + 2a^4b^2} \quad (\text{A.1})$$

e

$$b' = \frac{a^3(8 + 5a^2 + 2a^4 + a^6)}{1 + 2a^2 + 5a^4 + 8a^6}. \quad (\text{A.2})$$

As variáveis escolhidas foram

$$a := \exp\left(-\frac{2J_A}{T}\right) \quad \text{e} \quad b := \exp\left(-\frac{2J_B}{T}\right).$$

A introdução de

$$r' := \frac{a'}{b'} = r'(a, b, r), \quad (\text{A.3})$$

que é uma função de a , b e $r = a/b$ revela-se deveras útil nos cálculos das derivadas da energia livre. Naturalmente,

$$r^{(n+1)} = r^{(n+1)}(a^{(n)}, b^{(n)}, r^{(n)}). \quad (\text{A.4})$$

Da série

$$f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{B^n} g(a^{(n)}(T), b^{(n)}(T)), \quad (\text{A.5})$$

vem

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{B^n} \left[\frac{\partial g}{\partial a^{(n)}} \frac{\partial a^{(n)}}{\partial T} + \frac{\partial g}{\partial b^{(n)}} \frac{\partial b^{(n)}}{\partial T} \right]. \quad (\text{A.6})$$

Tem-se, ainda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{B^n} \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial a^{(n)2}} \left[\frac{\partial a^{(n)}}{\partial T} \right]^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial b^{(n)2}} \left[\frac{\partial b^{(n)}}{\partial T} \right]^2 + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial a^{(n)} \partial b^{(n)}} \left[\frac{\partial a^{(n)}}{\partial T} \frac{\partial b^{(n)}}{\partial T} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial g}{\partial a^{(n)}} \frac{\partial^2 a^{(n)}}{\partial T^2} + \frac{\partial g}{\partial b^{(n)}} \frac{\partial^2 b^{(n)}}{\partial T^2} \right\}. \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

É possível obter as seguintes igualdades:

$$\frac{\partial g}{\partial a^{(n)}} = \frac{F_a^{(n)}}{a^{(n-1)}}, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial g}{\partial b^{(n)}} = \frac{F_b^{(n)}}{a^{(n-1)}}, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial a^{(n)2}} = \frac{F_{aa}^{(n)}}{[a^{(n-1)}]^2}, \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial b^{(n)2}} = \frac{F_{bb}^{(n)}}{[a^{(n-1)}]^2}, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial a^{(n)} \partial b^{(n)}} = \frac{F_{ab}^{(n)}}{[a^{(n-1)}]^2}, \quad (\text{A.12})$$

em que F_a, F_b, F_{aa}, F_{bb} e F_{ab} são funções limitadas; todas elas são funções de $a^{(n)}, b^{(n)}$ e $r^{(n)}$. Definem-se, ainda

$$\frac{\partial a^{(n)}}{\partial a^{(n-1)}} = [a^{(n-1)}]^2 W_{aa}^{(n-1)}, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial a^{(n)}}{\partial b^{(n-1)}} = [a^{(n-1)}]^2 W_{ab}^{(n-1)}, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial b^{(n)}}{\partial a^{(n-1)}} = [a^{(n-1)}]^2 W_{ba}^{(n-1)}, \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial^2 a^{(n)}}{\partial a^{(n-1)^2}} = a^{(n-1)} W_{aaa}^{(n-1)}, \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial^2 a^{(n)}}{\partial a^{(n-1)} \partial b^{(n-1)}} = a^{(n-1)} W_{aab}^{(n-1)}, \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial^2 a^{(n)}}{\partial b^{(n-1)^2}} = a^{(n-1)} W_{abb}^{(n-1)}, \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial^2 b^{(n)}}{\partial a^{(n-1)^2}} = a^{(n-1)} W_{baa}^{(n-1)}, \quad (\text{A.19})$$

e

$$S_a^{(n)} := \frac{1}{B^n} \frac{1}{a^{(n)}} \frac{\partial a^{(n)}}{\partial T} = \frac{1}{Br^{(n)}N^{(n-1)}} \left[W_{aa}^{(n-1)} S_a^{(n-1)} + W_{ab}^{(n-1)} S_b^{(n-1)} \right], \quad (\text{A.20})$$

$$S_b^{(n)} := \frac{1}{B^n} \frac{1}{a^{(n)}} \frac{\partial b^{(n)}}{\partial T} = \frac{1}{Br^{(n)}N^{(n-1)}} \left[W_{ba}^{(n-1)} S_a^{(n-1)} \right], \quad (\text{A.21})$$

$$\tilde{S}_a^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{B}^n} \frac{1}{a^{(n)}} \frac{\partial a^{(n)}}{\partial T} = \frac{1}{\sqrt{B}r^{(n)}N^{(n-1)}} \left[W_{aa}^{(n-1)} \tilde{S}_a^{(n-1)} + W_{ab}^{(n-1)} \tilde{S}_b^{(n-1)} \right], \quad (\text{A.22})$$

$$\tilde{S}_b^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{B}^n} \frac{1}{a^{(n)}} \frac{\partial a^{(n)}}{\partial T} = \frac{1}{\sqrt{B}r^{(n)}N^{(n-1)}} \left[W_{aa}^{(n-1)} \tilde{S}_a^{(n-1)} \right], \quad (\text{A.23})$$

$$S_{aa}^{(n)} := \frac{1}{B^n} \frac{1}{a^{(n)}} \frac{\partial^2 a^{(n)}}{\partial T^2} = \frac{1}{Br^{(n)}N^{(n-1)}} \left\{ W_{aaa}^{(n-1)} \left[\tilde{S}_a^{(n-1)} \right]^2 + 2W_{aab}^{(n-1)} \tilde{S}_a^{(n-1)} \tilde{S}_b^{(n-1)} + \right. \\ \left. + W_{abb}^{(n-1)} \left[\tilde{S}_b^{(n-1)} \right]^2 + W_{aa}^{(n-1)} S_{aa}^{(n-1)} + W_{ab}^{(n-1)} S_{bb}^{(n-1)} \right\}, \quad (\text{A.24})$$

$$S_{bb}^{(n)} := \frac{1}{B^n} \frac{1}{a^{(n)}} \frac{\partial^2 b^{(n)}}{\partial T^2} = \frac{1}{Br^{(n)}N^{(n-1)}} \left\{ W_{bab}^{(n-1)} S_a^{(n-1)} + W_{ba}^{(n-1)} S_{aa}^{(n-1)} \right\}, \quad (\text{A.25})$$

onde

$$b^{(n)} = a^{(n-1)} N^{(n-1)}, \quad (\text{A.26})$$

de (A.2).

Com as expressões acima, é imediato que

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ F_a^{(n)} S_a^{(n)} + F_b^{(n)} S_b^{(n)} \right\}. \quad (\text{A.27})$$

Notar que é suficiente determinar apenas o primeiro termo da somatória ($n = 0$) para calcular a primeira derivada da energia livre, visto que os demais termos são obtidos recursivamente (equações (A.1), (A.2), (A.4) e (A.8) a (A.26)). Comentário idêntico é feito ao cálculo da segunda derivada de f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ F_{aa}^{(n)} \left[\tilde{S}_a^{(n)} \right]^2 + F_{bb}^{(n)} \left[\tilde{S}_b^{(n)} \right]^2 + 2F_{ab}^{(n)} \left[\tilde{S}_a^{(n)} \right] \left[\tilde{S}_b^{(n)} \right] + \right. \\ \left. + F_a^{(n)} S_{aa}^{(n)} + F_b^{(n)} S_{bb}^{(n)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Seguem-se alguns valores de α determinados numericamente.

Intervalo (temperatura reduzida)	α, α'	Incerteza do ajuste
$[-9.91 \cdot 10^{-5}, -1.78 \cdot 10^{-7}]$	-0.734	0.003
$[-1.78 \cdot 10^{-7}, -2.36 \cdot 10^{-10}]$	-0.7377	0.0015
$[-2.36 \cdot 10^{-10}, -2.08 \cdot 10^{-13}]$	-0.7385	0.0012
$[3.38 \cdot 10^{-11}, 9.12 \cdot 10^{-8}]$	-0.740	0.003

Tabela A.1: Expoente crítico α para $J_A/k_B = 2$ e $J_B/k_B = 1$
 $T_c = 3.708367661874\dots$

Repete-se o mesmo comentário feito no capítulo 3: a incerteza do ajuste é apenas uma cota inferior de incerteza para o expoente calculado.

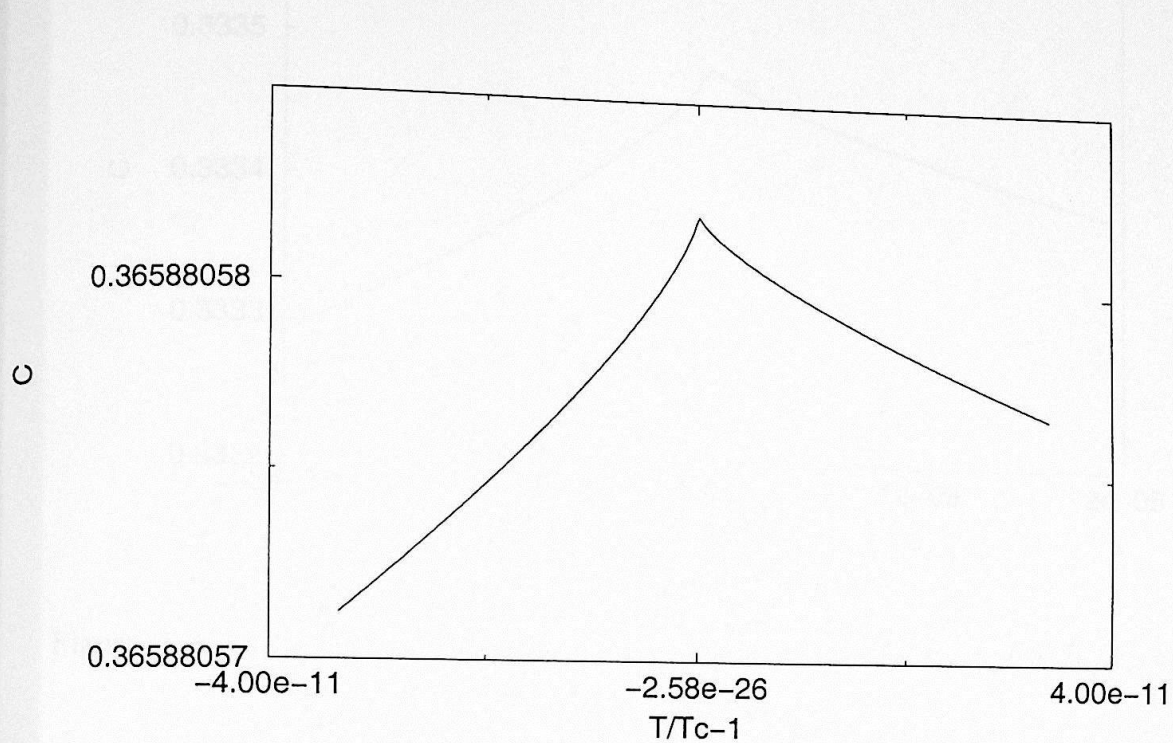


Figura A.2: Calor específico obtido numericamente para $J_A/k_B = 2$ e $J_B/k_B = 1$.
($T_c = 3.708367661874...$)

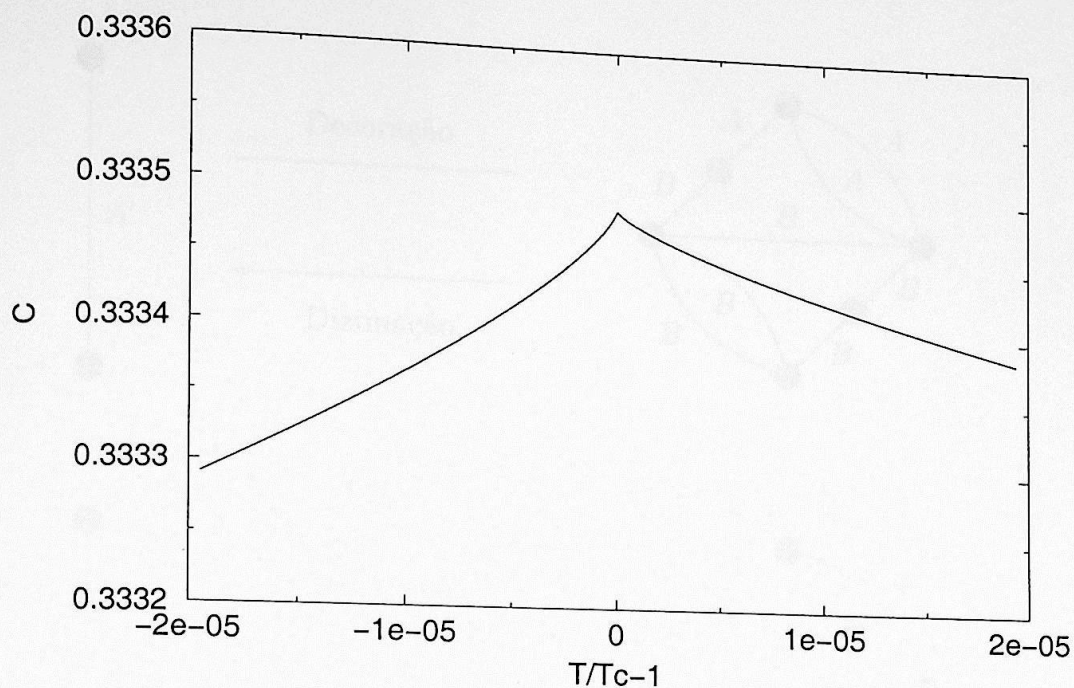


Figura A.3: Calor específico obtido numericamente para $J_A/k_B = 1$ e $J_B/k_B = 2$.
 $(T_c = 2.573122074744\dots)$

Intervalo (temperatura reduzida)	α, α'	Incerteza do ajuste
$[-4.74 \cdot 10^{-5}, -2.91 \cdot 10^{-8}]$	-0.735	0.007
$[-8.06 \cdot 10^{-7}, -1.84 \cdot 10^{-9}]$	-0.737	0.005
$[-2.89 \cdot 10^{-9}, -1.87 \cdot 10^{-12}]$	-0.7384	0.0013
$[9.93 \cdot 10^{-11}, 3.60 \cdot 10^{-6}]$	-0.7403	0.0011

Tabela A.2: Expoente crítico α para $J_A/k_B = 1$ e $J_B/k_B = 2$
 $T_c = 2.573122074744\dots$

A3 Caso relevante

Considere a rede auto-dual com interações aperiódicas com regras de decoração ditas pela seguinte estrutura:

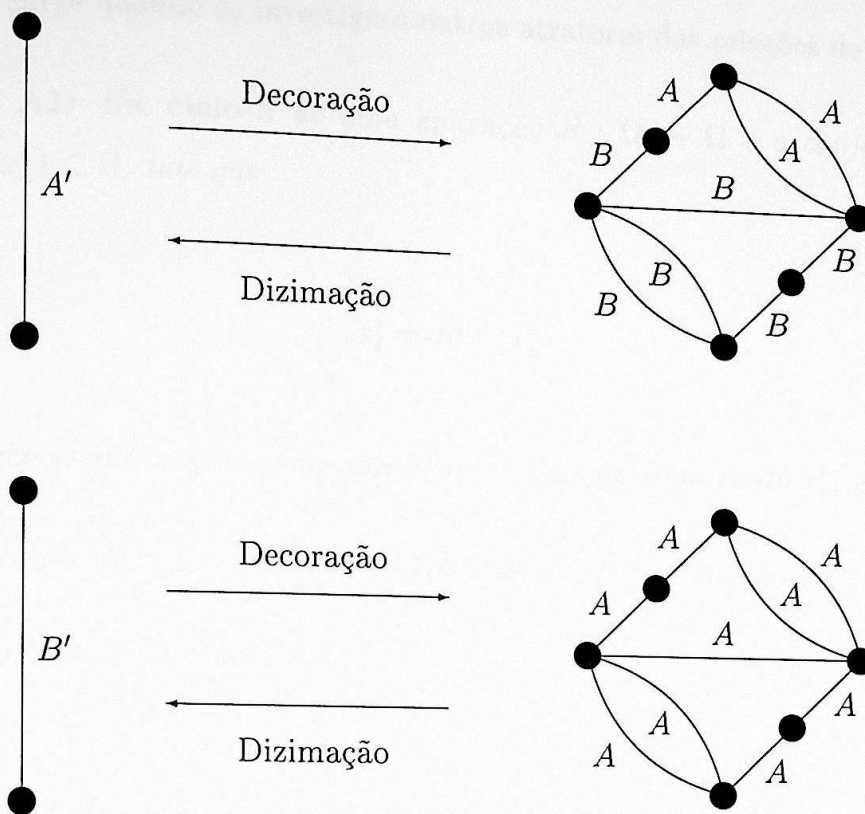


Figura A.4: Esquema da rede auto-dual com regra de decoração
 $A \rightarrow ABB$ e $B \rightarrow AAA$.

A prescrição para obter numericamente o expoente crítico α é exatamente a mesma do caso anterior. Existem, entretanto, alguns pontos distintos: primeiramente, o ponto fixo do caso uniforme (que governa a criticalidade do caso aperiódico anterior) é instável para a rede com a seqüência

$$A \rightarrow ABB$$

$$B \rightarrow AAA.$$

Em outros termos, os dois autovalores da matriz jacobiana associada à linearização das relações de recorrência em torno do referido ponto são ambos maiores que 1. Neste caso, o comportamento crítico do sistema deve ser ditado por uma outra entidade. A proposta

de solução surge quando se investigam outros atratores das relações de recorrência.

Definição A1: Um ciclo- n de uma aplicação $R : \Omega \rightarrow \Omega$ é o conjunto de n pontos, $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\} \subset \Omega$, tais que

$$x_i^* = R^{(n)}(x_i^*),$$

onde $R^{(n)}$ representa n sucessivas aplicações da função R ao ponto x_i^* , com $i \in [1, n] \subset \mathbb{N}$.

Pelo método numérico de Newton-Raphson na determinação dos pontos do ciclo-2, obteve-se

$$(a_1^*, b_1^*) = (0.103709425673172\dots, 0.534078747948997\dots) \quad (\text{A.29})$$

e

$$(a_2^*, b_2^*) = (0.467451677894381\dots, 0.008789691893951\dots). \quad (\text{A.30})$$

Determinaram-se, ainda, os valores para Λ_1 e Λ_2 , definidos por

$$\Lambda_1 = \max \left[\left| \frac{dR^{(2)}(a_1^*, b_1^*)}{da} \right|, \left| \frac{dR^{(2)}(a_1^*, b_1^*)}{db} \right| \right] \quad (\text{A.31})$$

e

$$\Lambda_2 = \min \left[\left| \frac{dR^{(2)}(a_2^*, b_2^*)}{da} \right|, \left| \frac{dR^{(2)}(a_2^*, b_2^*)}{db} \right| \right], \quad (\text{A.32})$$

lembrando que o teorema de Perron-Frobenius garante a existência de um autovalor positivo para matrizes positivas, como é o caso de $\frac{dR^{(2)}}{da}$ ou $\frac{dR^{(2)}}{db}$, onde $R^{(2)}$ é a segunda recursão de a' e b' em (a, b) . Da matriz $\frac{dR^{(2)}}{da}$, bem como de $\frac{dR^{(2)}}{db}$,

$$\Lambda_1 = 4.317461346... \quad (\text{A.33})$$

e

$$\Lambda_2 = 0.044495391... \quad (\text{A.34})$$

Previsão da teoria de escala - seqüências de período 3

A expressão análoga à equação (3.11) tem a forma

$$\alpha = 2 - n \frac{\ln B}{\ln \Lambda_1}, \quad (\text{A.35})$$

onde n é o ciclo em questão ($n = 2$); tem-se, então,

$$\alpha = -1.004407303... \quad (\text{A.36})$$

Cálculo Numérico - seqüências de período 3

A aplicação dos métodos numéricos apresentados anteriormente leva aos seguintes resultados:

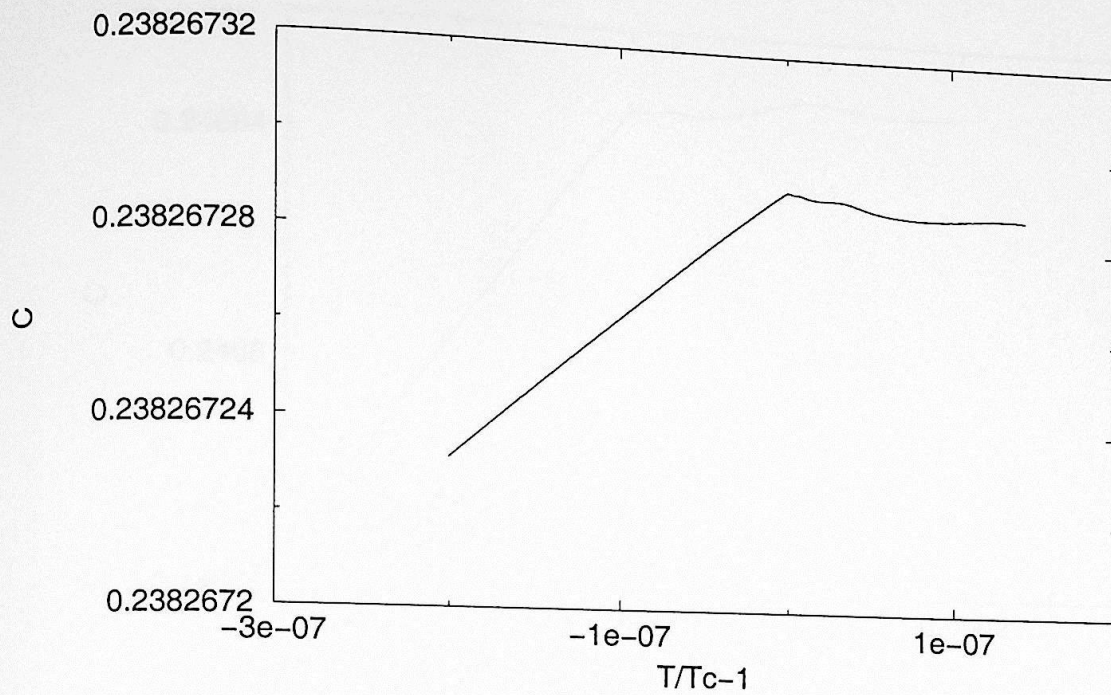


Figura A.5: Calor específico obtido numericamente para $J_A/k_B = 2$ e $J_B/k_B = 1$.
 ($T_c = 2.895388581304\dots$)

Intervalo (temperatura reduzida)	α, α'	Incerteza do ajuste
$[-1.342 \cdot 10^{-4}, -2.008 \cdot 10^{-7}]$	-1.037	0.003
$[-2.964 \cdot 10^{-6}, -4.505 \cdot 10^{-10}]$	-1.0423	0.0011
$[-2.008 \cdot 10^{-7}, -1.051 \cdot 10^{-10}]$	-1.0468	0.0017
$[4.90 \cdot 10^{-7}, 1.59 \cdot 10^{-3}]$	-1.350	0.002

Tabela A.3: Expoente crítico α para $J_A/k_B = 2$ e $J_B/k_B = 1$
 $T_c = 2.895388581304\dots$

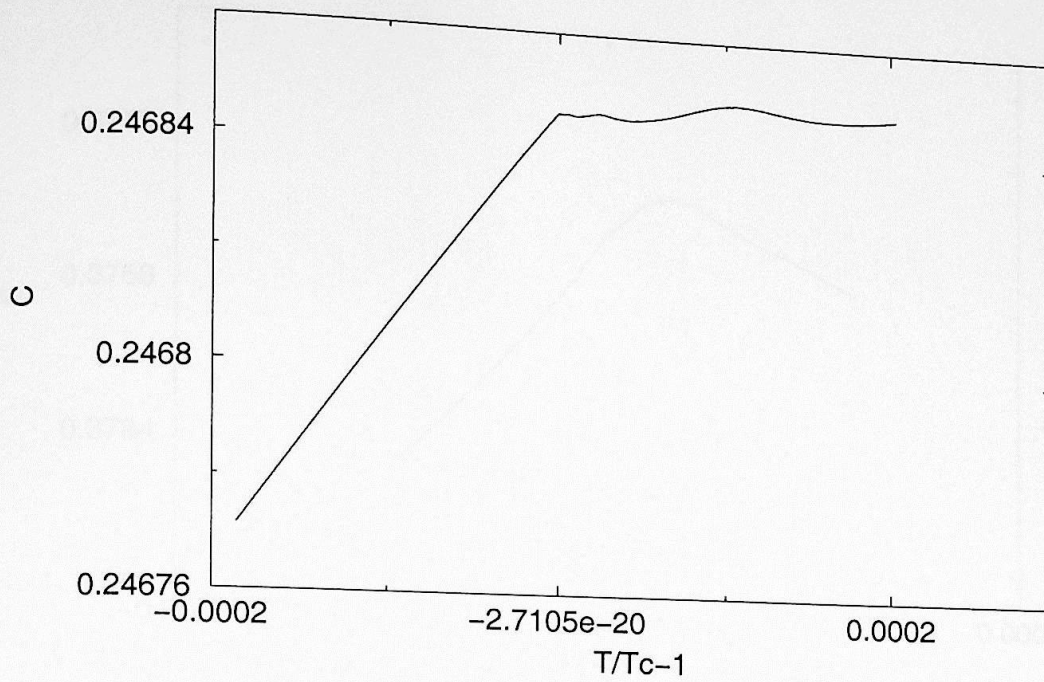


Figura A.6: Calor específico obtido numericamente para $J_A/k_B = 1$ e $J_B/k_B = 2$.
 $(T_c = 2.569978306243\dots)$

Intervalo (temperatura reduzida)	α, α'	Incerteza do ajuste
$[-3.807 \cdot 10^{-4}, -1.192 \cdot 10^{-6}]$	-1.0377	0.0010
$[-3.232 \cdot 10^{-6}, -2.429 \cdot 10^{-9}]$	-1.045	0.0012
$[-1.192 \cdot 10^{-6}, -9.459 \cdot 10^{-11}]$	-1.052	0.003
$[2.69 \cdot 10^{-12}, 1.46 \cdot 10^{-9}]$	-0.921	0.003

Tabela A.4: Expoente crítico α para $J_A/k_B = 1$ e $J_B/k_B = 2$
 $T_c = 2.569978306243\dots$

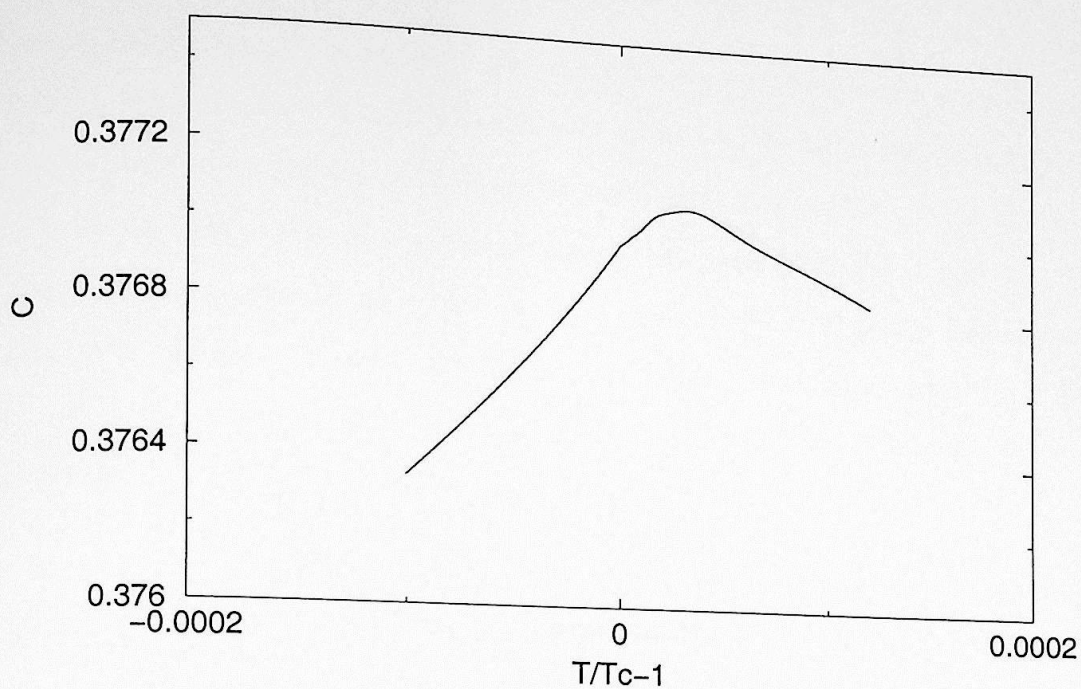


Figura A.7: Calor específico obtido numericamente para $J_A/k_B = 2$ e $J_B/k_B = 1.99$.
 ($T_c = 4.528905354488\dots$)

Intervalo (temperatura reduzida)	α, α'	Incerteza do ajuste
$[-2.00 \cdot 10^{-3}, -7.827 \cdot 10^{-8}]$	-0.9021	0.0011
$[-1.182 \cdot 10^{-6}, -9.911 \cdot 10^{-10}]$	-1.018	0.0019
$[-7.827 \cdot 10^{-8}, -1.079 \cdot 10^{-10}]$	-1.021	0.003
$[1.43 \cdot 10^{-7}, 2.09 \cdot 10^{-5}]$	-1.072	0.011

Tabela A.5: Expoente crítico α para $J_A/k_B = 2$ e $J_B/k_B = 1.99$
 $T_c = 4.528905354488\dots$

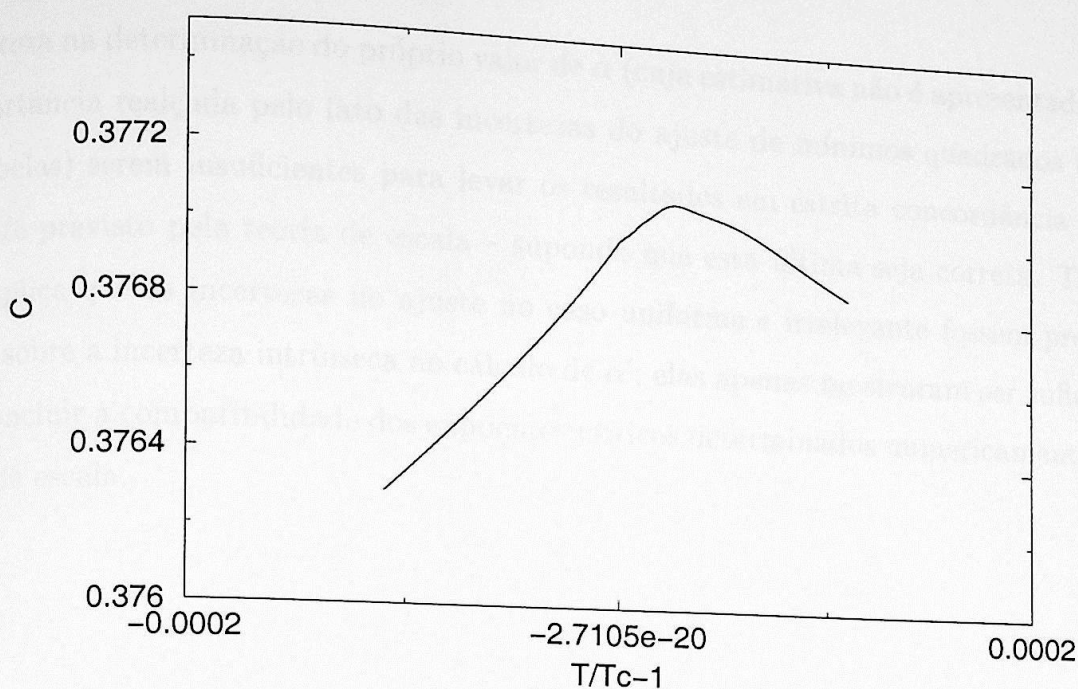


Figura A.8: Calor específico obtido numericamente para $J_A/k_B = 2$ e $J_B/k_B = 2.01$.
 ($T_c = 4.547430388433\dots$)

Intervalo (temperatura reduzida)	α, α'	Incerteza do ajuste
$[-9.464 \cdot 10^{-5}, -8.542 \cdot 10^{-8}]$	-0.937	0.002
$[-8.542 \cdot 10^{-8}, -9.525 \cdot 10^{-11}]$	-1.022	0.003
$[-1.945 \cdot 10^{-8}, -7.291 \cdot 10^{-11}]$	-1.0222	0.0011
$[2.11 \cdot 10^{-6}, 5.65 \cdot 10^{-4}]$	-1.095	0.004

Tabela A.6: Expoente crítico α para $J_A/k_B = 2$ e $J_B/k_B = 2.01$
 $T_c = 4.547430388433\dots$

Cada um dos valores de α' obtidos acima são provenientes da média dos expoentes acima e abaixo da temperatura crítica. Quando $J_A = J_B$, recupera-se o caso uniforme. Notar que, se $J_A \neq J_B$, o sistema é levado a uma outra classe de universalidade, em que $\alpha' \neq -0.738\dots$. Um outro ponto a ser abordado neste caso relevante refere-se ao comportamento fraco da singularidade; os cálculos apontam que $\alpha' \approx -1$, e a região crítica é de difícil acesso numérico. Diferentemente da rede auto-dual uniforme e do caso irrelevante,

a incerteza na determinação do próprio valor de α (cuja estimativa não é apresentada) tem a importância realçada pelo fato das incertezas do ajuste de mínimos quadrados (dados nas tabelas) serem insuficientes para levar os resultados em estrita concordância com o expoente previsto pela teoria de escala – supondo que esta última seja correta. Tal fato não implica que as incertezas no ajuste no caso uniforme e irrelevante fossem predominantes sobre a incerteza intrínseca no cálculo de α' ; elas apenas mostraram ser suficientes para concluir a compatibilidade dos expoentes críticos determinados numericamente e via teoria de escala.

Apêndice B

Prova do lema 4.3

Lema: Dados $h_\alpha, h'_\alpha, M(h'_\alpha), M(h_\alpha)$ ($\alpha = 1, 2$) definidos no capítulo 4,

$$\lim_{h_1 \downarrow 0, h_2 \uparrow 0} \left[\frac{\ln |M(h_1) - M(h_2)|}{\ln |h_1 - h_2|} - \frac{\ln |M(h'_1) - M(h'_2)|}{\ln |h'_1 - h'_2|} \right] \ln |h_1 - h_2| = 0.$$

Prova: Próximo da criticalidade,

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} h'_1(h_1) = \lim_{h_2 \rightarrow 0} h'_2(h_2) = 0,$$

$$\lim_{h_1 \downarrow 0, h_2 \uparrow 0} \frac{\ln |M(h_1) - M(h_2)|}{\ln |h_1 - h_2|} = \lim_{h'_1 \downarrow 0, h'_2 \uparrow 0} \frac{\ln |M(h'_1) - M(h'_2)|}{\ln |h'_1 - h'_2|} = x,$$

i.e., para qualquer $\epsilon/2 \in (0, 1/2)$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$|h_1 - h_2| < \delta_1 \Rightarrow \left| \frac{\ln |M(h_1) - M(h_2)|}{\ln |h_1 - h_2|} - x \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|h'_1 - h'_2| < \delta_2 \Rightarrow \left| \frac{\ln |M(h'_1) - M(h'_2)|}{\ln |h'_1 - h'_2|} - x \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ com $|h_1 - h_2| < \delta$, tem-se

$$\begin{aligned} & \left| \left[\frac{\ln |M(h_1) - M(h_2)|}{\ln |h_1 - h_2|} - \frac{\ln |M(h'_1) - M(h'_2)|}{\ln |h'_1 - h'_2|} \right] \ln |h_1 - h_2| \right| < \\ & < \left| \left[\frac{\ln |M(h_1) - M(h_2)|}{\ln |h_1 - h_2|} - x + x - \frac{\ln |M(h'_1) - M(h'_2)|}{\ln |h'_1 - h'_2|} \right] \ln |\delta| \right| < \\ & < \left| \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \right) \ln |\delta| \right| = |\epsilon \ln |\delta||. \end{aligned}$$

Para $0 < \epsilon < \delta < 1$, a escolha $\delta = \epsilon$ prova o lema, visto que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\epsilon \ln |\epsilon|| = 0.$$

Se $0 < \delta < \epsilon < 1$, é suficiente tomar $\delta = n\epsilon$ (sendo n qualquer inteiro que satisfaz a desigualdade $\epsilon < n\delta$).

■

Referências Bibliográficas

- [1] Salinas SRA, *Introdução à Física estatística*, Editora da Universidade de São Paulo, 1997
- [2] Yang CN, Lee TD, *Phys. Rev.* **87**, 404 (1952)
- [3] Lee TD, Yang CN, *Phys. Rev.* **87**, 410 (1952)
- [4] Wilson KG, *Phys. Rev. B* **4**, 3174 (1971)
- [5] Wilson KG, *Phys. Rev. B* **4**, 3184 (1971)
- [6] Niemeijer Th, van Leeuwen JMJ, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 1411 (1973)
- [7] Niemeijer Th, van Leeuwen JMJ, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, C Domb e MS Green, eds. (Academic, London, 1976), Vol. 6, p.425
- [8] Migdal AA, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **69**, 1457 (1975) [*Sov. Phys. - JETP* **42**, 743 (1976)]
- [9] Kadanoff LP, *Ann. Phys. (N.Y.)* **100**, 359 (1976)
- [10] Kadanoff LP, Houghton A, Yalabik MC, *J. Stat. Phys.* **14**, 171 (1976)
- [11] Nienhuis B, Nauenberg M, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 477 (1975)
- [12] Fisher ME, Berker AN, *Phys. Rev. B* **26**, 2507 (1982)
- [13] Griffiths RB, Pearce PA, *J. Stat. Phys.* **20**, 499 (1979)

- [14] Griffiths RB, Pearce PA, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 917 (1978)
- [15] Griffiths RB, in *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai* (Esztergom, 1979), p.463
- [16] Griffiths RB, *Physica A* **106**, 59 (1981)
- [17] Berker AN, Ostlund S, *J. Phys. C* **12**, 4961 (1979)
- [18] Bleher PM, Zalys E, *Commun. Math. Phys.* **67**, 17 (1979)
- [19] Kaufman M, Griffiths RB, *Phys. Rev. B* **24**, 496 (1981)
- [20] Kaufman M, Griffiths RB, *J. Phys. A* **15**, L239 (1982)
- [21] Griffiths RB, Kaufman M, *Phys. Rev. B* **26**, 5022 (1982)
- [22] Kaufman M, Griffiths RB, *Phys. Rev. B* **26**, 5282 (1982)
- [23] Kaufman M, Griffiths RB, *Phys. Rev. B* **28**, 3864 (1983)
- [24] Kaufman M, Griffiths RB, *Phys. Rev. B* **30**, 244 (1984)
- [25] Dobrushin RL, *Functional Anal. Appl.* **2**, 292 (1968)
- [26] Lanford III OE, Ruelle D, *Commun. Math. Phys.* **13**, 194 (1969)
- [27] Tsallis C, Magalhães ACN, *Phys. Rep.* **268**, 305 (1996)
- [28] Haddad TAS, Pinho STR, Salinas SR, *Phys. Rev. E* **61**, 3330 (2000)
- [29] Derrida B, in *Phénomènes critiques, systèmes aléatoires, théories de jauge*, K Osterwalder e R Stora, eds. (Elsevier, Amsterdam, 1986), Vol. 6, p.425.
- [30] deOliveira PMC, *J. Physique* **47**, 1107 (1986)
- [31] Fisher ME, *Rev. Mod. Phys.* **46**, 597 (1974)

- [32] Wilson KG, Kogut J, *Phys. Rept.* **12C**, 75 (1974)
- [33] Potts RB, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **48**, 106 (1952)
- [34] Wu FY, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 235 (1982)
- [35] Hu B, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2316 (1985)
- [36] Haddad TAS, *Comportamento crítico universal em ferromagnetos de Potts com interações aperiódicas*, Dissertação de mestrado, Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo (1999)