

Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Departamento de Física-Matemática

Simetria de Escala em Modelos
de Teoria de Campos com Interação Chern-Simons
em 2+1 Dimensões.

Alex Gomes Dias

Orientador: Prof. Dr. Adilson José da Silva.



Banca Examinadora

Prof. Dr. Adilson José da Silva (IFUSP)
Prof. Dr. Marcelo Moraes Guzzo (Unicamp)
Prof. Dr. Oscar José Pinto Éboli (IFUSP)

Dissertação apresentada ao
IFUSP para a obtenção do
grau de mestre em ciências.

Abril de 2001

Prof. Armando Corbani Ferraz
residente da Comissão de Pós Graduação

SBI-IFUSP



305M810T3524

02.04.2001

D5411

M

ex. 2

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Dias, Alex Gomes

Simetria em escala de modelos de teoria de
campos
com interação Chern-Simons em 2+1 dimensões
São Paulo, 2001.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física – Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silva, Adilson José da
Área de Concentração: Física de Partículas
Elementares

Unitermos: 1. Chern-Simons; 2. Simetria de escala;
3. Grupo de renormalização.

USP/IF/SBI-024/2001

Resumo

Estudamos a simetria de escala nas teorias do campo escalar complexo e do campo fermiônico, ambos acoplados minimamente ao campo de gauge abeliano de Chern-Simons. Vimos que, na aproximação de árvore, utilizando o processo algébrico de Dirac, a carga de dilatação gera a transformação de escala esperada, diferente do operador de momento angular que apresenta uma parte de spin anômala. Foi também verificado o fenômeno da quebra da invariância de escala clássica no nível quântico e também a validade das identidades de Ward, através do cálculo direto dos diagramas de Feynman utilizando regularização dimensional.

Abstract

We study the scale symmetry in both complex scalar and fermionic field theories minimally coupled to the gauge abelian Chern-Simons field. We saw that in the tree approximation, using Dirac's algebraic process, the dilatation charge generates the expected scale transformation, differently from angular momentum operator which shows an anomalous spin part. It was also verified the phenomenon of breakdown of the classical scale invariance at the quantum level and the validity of the Ward identities by an explicit calculation of the Feynman diagrams using dimensional regularization

Agradecimentos

São muitos e profundos os agradecimentos que devo fazer, pois é difícil encontrar alguma pessoa que tenha convivido comigo no Instituto de Física, durante o tempo do mestrado, e não me ajudara. Devo, no entanto, frisar meus agradecimentos às amigas e aos amigos: Beatriz W. Hutzler, *Prof^a* Ivone, Marcelo Marques, Marcelo Yamashita, Silvana Perez, Alejandro, Iraidá, Cedric Leão, Alexandre, Daniel, Francisco, Andrea, Andrey, Alessandro, Ivens, Ivan, Mário, João Assirati, João (da secretaria), José Cleriston, Wilson, Lamartine, Takeshi Osada, Massayuki, Arnaldo, Teresa Cristina e Nelson Cortez. Essas pessoas deram-me as forças extras que tanto precisei. Agradeço também aos porteiros Florisvaldo, Sílvio, Marquinhos, João Golveia, José Oliveira, Barbosa, Marcelo, Seu Wilson, Seu Zé, Lázaro, e às meninas da lanchonete, Silvia e Simone pela maneira com que me trataram.

Evidentemente agradeço ao meu orientador Prof. Adílson José da Silva e ao Prof. Marcelo O. Gomes pela ajuda nos problemas que, muitas vezes, extrapolavam os domínios da física.

Ainda necessito dizer que não seria possível concluir este trabalho sem a imensa ajuda de Marcelo da Costa Pires, Edson Akira Asano, Luiz Cleber Tavares de Brito e Angela Dayana Barra Barreira. Essas pessoas sacrificaram várias horas de trabalho e de descanso para pacientemente transcrever para o LaTeX os manuscritos preparados por mim.

Finalizando agradeço à FAPESP pelo auxílio financeiro.

Conteúdo

1	Introdução	7
1.1	Leis de conservação e a invariância de escala.	7
2	Simetrias na teoria clássica e quântica dos campos.	10
2.1	Realização das simetrias na teoria dos campos.	10
2.1.1	O teorema de Noether.	10
2.1.2	O teorema de Wigner.	13
2.1.3	A representação da variação clássica dos campos no nível quântico.	13
2.2	O gerador de dilatações.	15
2.2.1	A corrente clássica de dilatação.	15
2.2.2	A álgebra dos geradores.	17
3	Os modelos em questão.	20
3.1	Teorias de gauge em (2+1) dimensões.	20
3.2	O método de Dirac para a quantização de sistemas vinculados.	24
3.3	A quantização das teorias.	28
3.3.1	O campo escalar complexo acoplado ao campo de Chern-Simons.	28
3.3.2	A anomalia rotacional.	32
3.3.3	O gerador de dilatações para o campo escalar acoplado ao Chern-Simons.	36
3.3.4	O campo fermiônico acoplado ao Chern-Simons.	37
3.3.5	O gerador de dilatações para campo fermiônico acoplado ao Chern-Simons.	41
4	A simetria de escala e o grupo de renormalização.	43
4.1	A dimensão de escala.	43

4.2	As regras de Feynman do modelo e sua renormalização.	46
4.2.1	A análise diagramática do modelo	53
4.3	O grupo de renormalização.	71
5	Conclusões.	78
A	Lema para a inversão de supermatrizes.	80
B	Integrais regularizadas dimensionalmente e dos parâmetros de Feynman.	82

Capítulo 1

Introdução

1.1 Leis de conservação e a invariância de escala.

Como nós sabemos as leis de conservação, isto é, a existência de quantidades que com a dinâmica do sistema não mudam com o tempo, têm um papel importante na física teórica. As conservações de energia, momento e momento angular têm uma origem muito profunda¹ e estão associadas a simetrias expressas através das invariâncias de translação temporal, espacial e rotacional que uma teoria criada para descrever a natureza deve possuir.

Além dessas propriedades básicas, algumas teorias podem apresentar quantidades conservadas adicionais como carga, isospin etc, relacionadas a invariâncias sob transformações pertencentes a um grupo de simetria que atua em um dado espaço, chamado de espaço interno.

Uma classe bem mais restrita de teorias possui também a simetria de escala. Essa simetria significa que é possível realizar transformações (dilatações) nas coordenadas do espaço-tempo na forma $x^\mu \rightarrow e^\alpha x^\mu$, com α igual a uma constante, seguida de uma transformação apropriada para os campos que descrevem a teoria sem que a mesma, pelo menos classicamente, seja modificada.

Essa simetria pode ser considerada como aproximada em certos limites. Exemplos são aquelas teorias cujos termos que possuem parâmetros dimensionais na Lagrangiana, como massas e constantes de acoplamento, podem ser desprezados no limite de altas energias. Uma realização bem simples da idéia da invariância de escala encontra-se [1] na mecânica clássica ao tratarmos da função Hamiltoniana para um sistema de uma única partícula de momento p e coordenada r :

¹Veja L.Landau e E.Lifchitz, Curso de Física Teórica, parágrafo 6

$$H = \alpha(p^n + ar^{-n}). \quad (1.1)$$

Onde α , a e n são constantes. Essa Hamiltoniana continua tendo a mesma forma se forem feitas as transformações: $r \rightarrow \rho^{\frac{1}{n}}r$, $p \rightarrow \rho^{-\frac{1}{n}}p$, e as equações canônicas permanecem invariantes se a transformação para o tempo for $t \rightarrow \rho t$. Em seguida, considerando uma modificação infinitesimal $\rho = 1 + \epsilon$, $\epsilon \ll 1$ e variando H até primeira ordem, chega-se à conclusão de que a quantidade

$$D = -\frac{pr}{n} + Ht \quad (1.2)$$

é independente do tempo. D é chamado gerador de dilatação (Nós veremos as propriedades desse objeto em maiores detalhes quando considerarmos a teoria de campos na formulação Lagrangiana). Em modelos não relativísticos a parte correspondente à energia cinética na Hamiltoniana é usualmente dada por uma função quadrática do momento, isto é, $n = 2$ em (1.1). Mas isso exigiria que o termo de energia potencial fosse uma função que variasse com o inverso do quadrado da distância, excluindo assim os casos mais interessantes. Já, na teoria relativística, considerando um limite onde a massa pode ser desprezada (caso ultrarelativístico), a energia cinética varia linearmente com o momento e o potencial necessário passa a ser um que inclui as forças eletromagnéticas.

Na teoria relativística dos campos, curiosas e importantes características podem ser extraídas estudando as transformações de escala. Pode-se ganhar conhecimento, analisando no limite de altas energias as teorias cuja simetria de escala é quebrada, de como a simetria em questão manifesta-se na natureza. É possível verificar [2] que certas identidades (de Ward) resultantes das referidas transformações, e deduzidas formalmente a partir de uma corrente que reflete como os parâmetros dimensionais quebram a invariância de escala, são falsas quando um particular método de regularização (cutoff) é utilizado para proceder com os cálculos perturbativos. Outra curiosidade é que se pode, através da introdução de um campo escalar auxiliar, transformar qualquer teoria de campos descrita por uma Lagrangiana que aparentemente não contenha esta simetria [2] em uma teoria que a contenha. No entanto os modelos resultantes do processo não são preditivos, ou seja não são renormalizáveis, e tem valor apenas como teorias efetivas da baixa energia.

Uma interessante teoria invariante de escala é a do campo de gauge de Chern-Simons em $2 + 1$ dimensões [13], acoplado ao campo escalar ou espinorial ambos não massivos. Uma característica peculiar de modelos que envolvem o Chern-Simons é que, devido à interação, eles podem descrever partículas cujo momento angular não é necessariamente um número inteiro ou semi-inteiro. Tais partículas são chamadas de any-ons e obedecem a uma estatística intermediária entre bósons e férmions. Esse fato conhecido como anomalia estatística pode ser visto como uma consequência de que o gerador de rotações espaciais, construído via transformações que descrevem as rotações de Lorentz, possui um parte de

spin anômala. Veremos isso em maiores detalhes no capítulo 3, onde discutiremos algumas propriedades algébricas dos modelos acima mencionados.

Essa peculiaridade do gerador de rotações foi uma das motivações para estudarmos o gerador de dilatações, e verificar se há uma outra possível anomalia dimensional ainda no nível clássico ou aproximação de árvore. É sabido do estudo da teoria de perturbações, via -solução da equação de grupo de renormalização, que os campos interagindo com o Chern-Simons adquirem, a partir da ordem de dois loops, uma dimensão de escala anômala no nível das correções quânticas. Abordaremos isso no capítulo 4, onde lidaremos com os cálculos perturbativos. Assim parte do nosso trabalho teve como objetivo saber se há algum indício que pode ser visto classicamente, como o momento angular fracionário, para a manifestação desse fenômeno quântico. Em 1971 num trabalho de R. Jackiw e S. Coleman [8], fora mostrado formalmente que para uma teoria de campos invariante de escala, o gerador de dilatações de fato gera as transformações de dilatação. Mas pelo que pesquisei, naquela época, não se sabia da existência de teorias cujas cargas conservadas podem não gerar as transformações esperadas para os campos.

A utilização de modelos envolvendo o campo de Chern-Simons não está restrito somente ao estudo dos aspectos da teoria de campos usual. Suas aplicações estão, entre outras, na gravitação quântica em dimensões ímpares, na teoria de campos em temperatura finita e também na física da matéria condensada, como no efeito Hall quântico e outros fenômenos quasilanares.

Como todas as teorias modernas, o campo de Chern-Simons é uma teoria de gauge tratando-se portanto de um sistema vinculado. Nós usaremos o procedimento de Dirac para tratar tais sistemas, e estudarmos a álgebra do gerador de dilatações de uma maneira mais consistente.

Capítulo 2

Simetrias na teoria clássica e quântica dos campos.

Neste capítulo, rerepresentaremos alguns resultados clássicos no que concerne a realização das simetrias. A nossa intenção não é fornecer a formulação geral dos teoremas, mas somente o necessário para o desenvolvimento posterior.

2.1 Realização das simetrias na teoria dos campos.

2.1.1 O teorema de Noether.

As leis de conservação na teoria clássica dos campos expressam-se matematicamente através de um teorema de compreensão bastante simples e que foi elucidado no começo do século XX por E. Noether¹. Ele basicamente mostra a existência, para simetrias contínuas, de correntes conservadas quando se realizam transformações em uma Lagrangiana \mathcal{L} cuja ação correspondente $S = \int dt d\vec{x} \mathcal{L}$ é invariante. Por simetrias contínuas entende-se aquelas geradas por transformações pertencentes a uma dada classe que podem ser conectadas umas às outras por meio de sucessivas aplicações infinitesimais.

Considere uma Lagrangiana dependente apenas dos campos φ_r , com o subscrito r rotulando os diversos tipos de campos presentes na teoria², e de suas derivadas primeiras,

¹E. Noether: Invariance Variationsprobleme, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss (Math. phys. Klasse), Göttingen (1918), 235.

²com esta notação, φ_r representa genericamente todos os campos escalares, espinoriais e vetoriais que podem constituir um modelo.

isto é, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_r, \partial_\mu \varphi_r)$. Realiza-se, então, uma modificação infinitesimal na forma dos campos:

$$\varphi'_r(x) = \varphi_r(x) + \delta\varphi_r(x) \quad r = 1, \dots, m; \quad (2.1)$$

que induz uma variação $\delta\mathcal{L}$ em \mathcal{L} sendo no máximo uma divergência; portanto, irrelevante na ação $S = \int d^3\vec{x} dt \mathcal{L}$ se considerarmos que os campos se anulam no infinito. De acordo com Noether, teremos nesse caso uma simetria na teoria, ou seja, uma quantidade conservada. Aqui $\delta\mathcal{L}$ deve ser obtida sem as equações de Euler-Lagrange para o movimento. Assim se $\delta\varphi$ é uma simetria então existe Λ^μ tal que:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \Lambda^\mu. \quad (2.2)$$

Outra forma independente de cálculo com o uso das equações de movimento é simplesmente

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r} \delta\varphi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)} \partial_\mu \delta\varphi_r = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)} \delta\varphi_r \right). \quad (2.3)$$

A equação da continuidade é obtida subtraindo-se uma variação da outra.

$$\partial_\mu \left(\Lambda^\mu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)} \delta\varphi_r \right) = 0. \quad (2.4)$$

Esta é a versão mais simples do teorema de Noether para teorias locais em espaços planos e será suficiente para os nossos propósitos.

A corrente conservada associada à transformação de simetria é então definida como:

$$J^\mu = \Lambda^\mu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)} \delta\varphi_r. \quad (2.5)$$

J^μ pode ser um tensor cuja ordem depende do tipo de transformação considerada.

Integrando (2.5) no espaço-tempo obtemos,

$$\int d\vec{x} \partial_\mu J^\mu(x) = \frac{d}{dt} \int d\vec{x} J^0(x) + \int d\vec{x} \partial_i J^i(x) = 0. \quad (2.6)$$

O último termo é descartado, pois de acordo com o teorema de Gauss a integral da divergência de $J^i(x)$ pode ser transformada em uma integral de superfície; em nosso caso, tomada no infinito espacial onde os campos são, por hipótese, nulos.

Assim obtem-se uma quantidade $\int d\vec{x} J^0$ chamada em algumas ocasiões de carga, conservada durante a evolução do sistema. Esta carga terá um papel importante na construção dos geradores, ao passarmos para a teoria quantizada.

Alguns resultados bem conhecidos são fornecidos pelo teorema quando analisamos a invariância da ação $S = \int dx \mathcal{L}$ sob transformações do grupo inhomogêneo de Lorentz ou grupo de Poincaré que tem ao todo dez parâmetros. São eles:

O tensor canônico de momento energia

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_r)} \partial^\nu \varphi_r - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.7)$$

extraído a partir da lei de conservação diferencial associada a transformações que são translações puras, com quatro parâmetros, nas coordenadas do espaço tempo,

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu.$$

Nesse caso, a quantidade conservada é $P^\nu = \int d\vec{x} \Theta^{0\nu}$. Para certas teorias, o tensor $\Theta^{\mu\nu}$ não é simétrico na troca dos índices μ e ν . Existe, como sabemos, um método devido a Belinfante, para simetrizar o tensor sem alterar o conteúdo físico do mesmo. Isso nos será útil na construção do gerador de rotações no capítulo 3.

O tensor das rotações de Lorentz

$$M^{\mu\nu\lambda} = \Theta^{\mu\lambda} x^\nu - \Theta^{\mu\nu} x^\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_r)} (I^{\nu\lambda})^{rs} \varphi_s. \quad (2.8)$$

Onde $I^{\nu\lambda}$ são os geradores das transformações infinitesimais de Lorentz nos campos, associadas às rotações nas coordenadas do espaço-tempo

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + w^{\mu\nu} x_\nu,$$

onde $w^{\mu\nu}$ é o tensor anti-simétrico dos seis parâmetros da transformação e descrevem a mistura das componentes dos campos cujo spin é maior que zero. A quantidade conservada é o tensor de momento angular M^{ij} e o tensor de boosts $M^{0\nu}$ ou $M^{\nu 0}$

$$M^{\nu\lambda} = \int d\vec{x} \left[\Theta^{0\lambda} x^\nu - \Theta^{0\nu} x^\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_r)} (I^{\nu\lambda})^{rs} \varphi_s \right]. \quad (2.9)$$

As leis de conservação de carga elétrica e de hipercarga são obtidas quando consideramos transformações pertencentes aos grupos de simetria interna.

Para uma certa classe de teorias o conjunto de simetrias possíveis é ainda maior. Elas englobam as simetrias relacionadas a transformação de dilatação (ou de escala); $x^\mu \rightarrow e^\alpha x^\mu$ com $\alpha \in \mathcal{R}$ e a transformação conforme especial, $x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2}$ onde b^μ é um vetor constante. Para que estas duas últimas sejam operações de simetria é necessário que a teoria não possua parâmetros dimensionais como massas e constantes de acoplamento como dissemos antes. Essas transformações junto às do grupo de Poincaré dão origem a um grupo maior com quinze parâmetros ao todo. Vamos nos concentrar, na próxima seção, na transformação de dilatação, que é um dos pontos centrais em nosso estudo.

2.1.2 O teorema de Wigner.

A transformação de simetria pode ser definida, de forma alternativa, como uma mudança em nosso ponto de vista que não altera os resultados de possíveis experimentos.

Na linguagem da mecânica quântica ou da teoria quântica de campos, uma tal transformação significa que se um observador no referencial O olha para um sistema quântico em um estado ψ representado por um raio R ,³ um outro observador no referencial O' , equivalente ao primeiro, olhando para o mesmo sistema, verá este último em um estado diferente ψ' representado por um raio R' no espaço dos estados físicos. No entanto, os dois observadores devem concordar no cálculo de suas amplitudes de transição por exemplo, de um estado ψ em R para um estado ψ_n em R_n , o que significa que, se \mathcal{A} representa a amplitude para o processo, então :

$$\mathcal{A}(R \rightarrow R_n) = \mathcal{A}(R' \rightarrow R'_n). \quad (2.10)$$

é uma condição necessária.

O teorema de Wigner afirma que qualquer transformação de simetria levando raios R em R' pode ser representada por um operador U no espaço de estados físicos conectando os observadores O e O' , de acordo com a relação

$$\psi' = U\psi \quad (2.11)$$

onde o operador U é unitário e linear ou anti-unitário e anti-linear.

As transformações do grupo de Lie⁴ contínuas são representadas por operadores U unitários e lineares. Por outro lado, transformações como inversões temporais, que não podem ser alcançadas por meio de variações contínuas de algum parâmetro podem ser convenientemente representadas por operadores anti-unitários e anti-lineares. A prova desse teorema é um pouco elaborada e não nos será de grande utilidade, motivo pelo qual não a apresentaremos.

2.1.3 A representação da variação clássica dos campos no nível quântico.

Existe uma relação entre os geradores da transformação e o operador campo, representando a variação clássica no nível quântico. Tal relação é obtida diretamente, postulando

³Raio é um conjunto de vetores normalizados de modo que $\psi' = \xi\psi$ com $|\xi| = 1$ então ψ e ψ' pertencem ao mesmo raio. Em suma ψ e ψ' são iguais a menos de uma fase.

⁴Grupo de Lie é o que possui a característica adicional de que seus elementos podem ser levados a identidade por meio da variação contínua de algum parâmetro.

a seguinte conexão entre os elementos de matriz do operador de campo $\hat{\varphi}$ nos referenciais de O e O' :

$$\langle \beta' | \hat{\varphi}_r(x') | \alpha' \rangle = \Lambda(w) \langle \beta | \hat{\varphi}_r(x) | \alpha \rangle \quad (2.12)$$

com $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ e $|\alpha'\rangle, |\beta'\rangle$ sendo os estados inicial e final nos sistemas sem e com linha, Λ^5 sendo uma matriz que atua no espaço interno do dado campo φ_r e w o parâmetro da transformação. Assim de acordo com (2.11), extraímos a lei de transformação para o campo quântico $\hat{\varphi}$

$$U^{-1} \hat{\varphi}_r(x') U = \Lambda(w) \hat{\varphi}_r(x). \quad (2.13)$$

O conjunto de todas as transformações representadas pelos operadores U formam um grupo com uma lei de multiplicação definida como a subsequente aplicação dos elementos.

Para transformações contínuas infinitesimais próximas da identidade, o operador U também o será, podendo ser escrito na forma:

$$U = 1 + iG(w) \quad (2.14)$$

com $w \ll 1$ e G sendo o gerador da transformação com dependência linear em w . A condição de unitariedade $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$ implica que o operador G deve ser Hermitiano. Isso nos leva a escolhê-los como os observáveis da teoria.

Daí então, se a transformação nas coordenadas forem tais que $x' = x + \delta x$ teremos substituindo (2.14) em (2.13), até primeira ordem em δx e w .

$$i[G, \hat{\varphi}_r(x)] = (\delta x^\mu \partial_\mu - \Lambda(w) + 1) \hat{\varphi}_r(x). \quad (2.15)$$

Pode ser mostrado que se escolhermos $G = -\varepsilon_\mu P^\mu$, sendo P^μ o tensor de momento e energia, escrito em termos das variáveis de campo $\varphi_r(x)$ dos respectivos momentos canônicos $\bar{\pi}_r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_r)}$, e fizermos uso das regras de comutação canônicas $[\varphi_r(x), \bar{\pi}_s(y)]_\pm = i\delta_{rs} \delta(\vec{x} - \vec{y})$ teremos para variações $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu$ e $\Lambda = 1$, o seguinte resultado:

$$i\varepsilon_\mu [P^\mu, \hat{\varphi}_r(x)] = \varepsilon_\mu \partial^\mu \hat{\varphi}_r(x). \quad (2.16)$$

O mesmo raciocínio envolvendo o tensor de momento angular, agora com $G = \frac{w_{\mu\nu}}{2} \hat{M}^{\mu\nu}$, para rotações de Lorentz $x'^\mu = x^\mu + w^{\mu\nu} x_\nu$ e $\Lambda(w) = 1 + \frac{w_{\mu\nu}}{2} I^{\mu\nu}$, produz outro resultado bem conhecido ⁶

⁵ $\Lambda(w)$ é a matriz que mistura as componentes do campo clássico

⁶Quando construímos operadores compostos como P^μ e $M^{\mu\nu}$ procuramos escolher uma ordenação de modo a torná-los simétricos e Hermitianos.

$$i w_{\mu\nu} [\hat{M}^{\mu\nu}, \varphi_r(x)] = w_{\mu\nu} (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu + I^{\mu\nu}) \varphi_r(x). \quad (2.17)$$

Para algumas teorias, o comutador (lado esquerdo) calculado a partir do operador (gerador) clássico, não fornece o lado direito de (2.15). Quando isso acontece, dizemos que a teoria possui uma anomalia. Nós estamos particularmente interessados em modelos com uma anomalia rotacional e que poderiam apresentar também alguma outra ligada ao gerador de dilatações.

Essas anomalias também podem estar relacionadas com o produto de campos no mesmo ponto, o que não está bem definido a princípio, na teoria quântica de campos.

2.2 O gerador de dilatações.

2.2.1 A corrente clássica de dilatação.

Uma transformação de dilatação é uma mudança global nas coordenadas do espaço-tempo diferente daquelas do grupo de Poincaré no sentido que o intervalo $ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2$ não é deixado invariante depois da transformação. Os observadores O e O' usam definições para o intervalo cujos valores associados a este são apenas proporcionais para os dois referenciais

$$\Delta s'^2 = a \Delta s^2 \quad (2.18)$$

com a sendo a constante de proporcionalidade. Isso nos diz como as coordenadas estão conectadas nos dois sistemas. Por praticidade adota-se, a seguinte relação

$$x'^\mu = e^\alpha x^\mu, \alpha \in \mathfrak{R}. \quad (2.19)$$

Às vezes isso também é chamado de transformação de escala. Para os campos a transformação é da forma:

$$\varphi_r(x) \rightarrow e^{\alpha d} \varphi_r(e^\alpha x) \quad (2.20)$$

com d sendo uma matriz que atua no espaço interno dos campos e é, em geral, diferente para cada tipo de campo. O conjunto de todas as transformações desse tipo com d fixado e α arbitrário formam um grupo. Para $\alpha \ll 1$ a transformação no campo é da forma:

$$\begin{aligned} \varphi_r'(x) &\approx [1 + \alpha d][\varphi_r(x) + \alpha x^\mu \partial_\mu \varphi_r(x)] \\ &\approx \varphi_r(x) + \alpha [d + x^\mu \partial_\mu] \varphi_r(x) \end{aligned} \quad (2.21)$$

ou seja,

$$\frac{\delta\varphi_r(x)}{\alpha} = [d + x^\mu\partial_\mu]\varphi_r(x). \quad (2.22)$$

Se substituirmos essa variação em (2.3) teremos,

$$\frac{\delta_D\mathcal{L}}{\alpha} = \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)} (d + x^\lambda\partial_\lambda)\varphi_r(x) \right]. \quad (2.23)$$

Outra forma de calcular o mesmo $\delta_D\mathcal{L}$ é:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_D\mathcal{L}}{\alpha} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r}\delta\varphi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\partial_\mu\delta\varphi_r \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r}(d + x^\lambda\partial_\lambda)\varphi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}(d + 1 + x^\lambda\partial_\lambda)\partial_\mu\varphi_r \\ &= \partial_\lambda(x^\lambda\mathcal{L}) - [dim]\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r}d\varphi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}(d + 1)\partial_\mu\varphi_r \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde $[dim]$ é a dimensão do espaço-tempo. A simetria será exata, quando os três últimos termos na equação acima somarem zero. No caso geral, subtraindo (2.24) de (2.23) obtém-se uma equação válida mesmo quando a simetria não é realizada.

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[x_\lambda \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\partial^\lambda\varphi_r - g^{\mu\lambda}\mathcal{L} \right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}d\varphi_r(x) \right] + [dim]\mathcal{L} - \\ - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r}d\varphi_r - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}(d + 1)\partial_\mu\varphi_r = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

ou

$$\partial_\mu D^\mu = -[dim]\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r}d\varphi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}(d + 1)\partial_\mu\varphi_r \quad (2.26)$$

onde se definiu a corrente de dilatação D^μ como:

$$D^\mu = x_\lambda\Theta^{\mu\lambda} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}d\varphi_r \quad (2.27)$$

com $\Theta^{\mu\lambda}$ sendo o tensor canônico de momento e energia.

Para teorias com parâmetros dimensionais, não há como escolher matrizes d tal que o lado direito de (2.26) seja identicamente nulo.

Termos de massa ou que possuem qualquer constante de acoplamento dimensional são então os responsáveis pela quebra da simetria⁷. No entanto, a simetria pode ser tomada como aproximada no limite onde as massas e os parâmetros dimensionais podem ser desprezados. Assim no limite ultra-relativístico, a corrente acima pode ser considerada como aproximadamente conservada, $\partial_\mu D^\mu \approx 0$.

Exemplos de teorias invariantes por transformações de dilatação são a teoria de Maxwell livre em quatro dimensões, a teoria de Chern-Simons acoplada a um campo escalar ou campo espinorial ambos sem massa e em $2 + 1$ dimensões. Para essa classe de teorias, as matrizes d são escolhidas como proporcionais à identidade com o fator de proporcionalidade coincidindo sempre com a dimensão dos campos em unidades de massa.

A natureza das transformações de escala e a análise dimensional são diferentes, pois essa última além de mudar a escala das variáveis dinâmicas da teoria, muda também todos os outros parâmetros dimensionais, sendo simetrias exatas, pois as equações de movimento ficam inalteradas por tais mudanças. Por outro lado, as transformações de escala não mudam os parâmetros numéricos dimensionais da teoria e também, não são simetrias exatas, salvo o caso onde tais parâmetros sejam nulos.

2.2.2 A álgebra dos geradores.

O efeito do gerador de dilatação no nível quântico pode ser visto, estudando a lei de composição do operador unitário U correspondente. Vamos denotar por $T(\alpha, a)$ o operador correspondente à aplicação de uma dilatação nas coordenadas seguida de uma translação a , isto é:

$$x^{\mu'} = e^\alpha x^\mu + a^\mu. \quad (2.28)$$

Agora se realizarmos uma outra aplicação $T_2(\beta, b)$ sobre x' , chegaremos à conclusão de que o resultado das duas aplicações, respeitando a ordem em que elas acontecem, produz o mesmo efeito que a aplicação $T_{12}(\beta + \alpha, \beta a + b)$, ou seja,

$$T_2(\beta, b)T_1(\alpha, a) \equiv T_{12}(\beta + \alpha, \beta a + b). \quad (2.29)$$

No espaço de estados físicos, o operador U que representa a transformação tem a mesma lei de composição acima, isto é, o estado $U(T_2)U(T_1)\psi$ a menos de uma fase deve ser equivalente ao estado $U(T_2, T_1)\psi$. Assumindo que esta fase pode ser colocada igual a

⁷De acordo com Coleman e Jackiw[2] as identidades de Ward para a teoria com quebra de invariância de escala, eq (2.26) são falsas, isto é, elas contém anomalias.

zero ⁸, temos então:

$$U(\beta, b)U(\alpha, a) \equiv U(\beta + \alpha, \beta a + b). \quad (2.30)$$

Para uma transformação infinitesimal próxima da identidade o operador linear e unitário $U(\alpha, a)$ é escrito como

$$U(d\delta, \epsilon) = 1 + i\delta D - i\epsilon_\mu P^\mu \quad (2.31)$$

com D e P^μ sendo os geradores de dilatação e translação respectivamente.

A equação (2.31) quando substituída em (2.30) fornece a seguinte relação:

$$-\alpha\beta D^2 + \beta a_\mu DP^\mu + b_\mu \alpha DP^\mu + b_\mu \alpha P^\mu D - b_\nu a_\mu P^\nu P^\mu = -i\beta a_\mu P^\mu. \quad (2.32)$$

Quando a ordem das transformações em (2.30) é invertida chega-se, pelas mesmas considerações, à relação acima mas com a^μ trocado por b^μ e vice-versa, o mesmo para α e β . Ao subtrair esta outra relação de (2.32), encontramos o comutador:

$$i[D, P^\mu] = P^\mu. \quad (2.33)$$

As rotações de Lorentz ($x^{\mu'} = x^\mu + w^{\mu\nu} x_\nu$) combinadas com dilatações fornecem, quando repetimos o mesmo raciocínio anterior, o comutador nulo para o gerador de rotações e dilatações

$$[D, M^{\mu\nu}] = 0 \quad (2.34)$$

e evidentemente:

$$[D, D] = 0. \quad (2.35)$$

Com isso a álgebra de Lie do grupo de Poincaré

$$\begin{aligned} i[M^{\mu\nu}, M^{\rho,\sigma}] &= g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\sigma\mu} M^{\rho\nu} + g^{\sigma\nu} M^{\rho\mu}, \\ i[P^\mu, M^{\rho\sigma}] &= g^{\mu\rho} P^\sigma + g^{\mu\sigma} P^\rho, \\ i[P^\mu, P^\nu] &= 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

é ampliada com a adição de três novas peças envolvendo o comutador de D com um outro observável (2.33), (2.34) e (2.35), formando um grupo maior se existir a invariância de escala, isto é, se D for uma quantidade conservada.

⁸Pelo formalismo geral dos grupos de simetria é possível mostrar que isso pode ser feito (Weinberg, S. The Quantum Theory of Fields. Vol I cap 2)

Nós verificamos que, para a teoria do campo escalar complexo acoplado ao campo de Chern-Simons, invariante por transformação de escala, a quantidade conservada que surge da equação (2.27)

$$D = x_0 H + \int d\vec{x} \Pi_r (x_i \partial^i + d) \varphi_r \quad (2.37)$$

com a Hamiltoniana $H = \int \Theta^{00} d\vec{x}$ e a definição dos momentos canonicamente conjugados aos φ_r 's, $\Pi_r \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi_r)}$, os comutadores $i[D, H]$ e $i[D, P^i]$ dão o mesmo resultado que (2.33). Para calcular esses comutadores com os geradores construídos a partir das correntes clássicas correspondentes, nós fizemos uso dos comutadores canônicos em tempos iguais, $i[\Pi_r(\vec{x}, t), \varphi_s(\vec{y}, t)] = \delta_{rs} \delta(\vec{x} - \vec{y})$ e $i[\varphi_r(\vec{x}, t), \varphi_s(\vec{y}, t)] = 0$. Para isso é necessário que todas as variáveis φ_r sejam independentes, o que não é verdade para teorias de gauge. Lidaremos com teorias desse tipo no próximo capítulo.

O comutador $[D, M^{ij}]$ também, quando calculado utilizando as expressões clássicas, produz o mesmo resultado das equações (2.34).

Além disso, a variação do operador campo pode ser calculada por meio da equação (2.31)

$$\delta \hat{\varphi}(x) = i[D, \varphi(x)]_{T.I} = (x_\mu \partial^\mu + d) \varphi(x) \quad (2.38)$$

que é uma variação obtida classicamente.

Tudo isso foi feito para mostrar que o gerador de dilatações construído a partir da corrente D^μ , é um bom candidato, pois além de fornecer a álgebra correta com os demais geradores, ele também gera, em tempos iguais, a transformação de dilatação correta para os campos.

O gerador D é uma das peças do grupo conforme que, possui ao todo quinze parâmetros, dez pertencentes ao grupo de Poincaré, um do grupo de dilatações e o restante deles associados às transformações conformes. Não entraremos em discussões a respeito desta última classe pois está fora do nosso objetivo.

Capítulo 3

Os modelos em questão.

Apresentaremos, no presente capítulo, os modelos a serem estudados, cuja escolha foi feita com base na invariância de escala. Eles são a teoria de um campo escalar e a teoria de um campo espinorial, ambas não massivas e acopladas ao campo de Chern-Simons. Como se tratam de sistemas vinculados, utilizaremos o procedimento de Dirac para quantização.

A anomalia rotacional característica destes modelos em (2+1) dimensões também será mostrada. O problema com o gerador de rotações, como dissemos antes, foi uma motivação para nós procurarmos por uma possível anomalia relacionada ao gerador de dilatações.

3.1 Teorias de gauge em (2+1) dimensões.

As teorias modernas da física que têm apresentado maior sucesso até os dias de hoje, incorporam um tipo de simetria originada no estudo do eletromagnetismo clássico. Tal simetria se consagrou como invariância de gauge e, exprime-se por meio de transformações que deixam invariantes os campos físicos, e por consequência, deixam invariantes também as equações de movimento. Na eletrodinâmica clássica a grande virtude das transformações de gauge fora promover, devido a arbitrariedade com que os campos elétrico e magnético podem ser definidos, o desacoplamento das equações, equivalentes às de Maxwell, que envolvem os potenciais vetor e escalar.

Na teoria de campos, o princípio da simetria de gauge ganha importância ainda maior, levando ao melhor entendimento da origem das interações entre partículas dotadas de algum tipo de carga. Um exemplo familiar é o da Lagrangiana que fornece o campo de Dirac livre,

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi) + m\bar{\psi}\psi. \quad (3.1)$$

Uma transformação no espaço interno dos espinores $\psi \rightarrow e^{ie\Lambda(x)}\psi$ e $\bar{\psi} \rightarrow e^{-ie\Lambda(x)}\bar{\psi}$, com $\Lambda(x)$ sendo uma função arbitrária e e sendo independente de x , faz com que a Lagrangiana acima seja modificada por um termo trilinear $-e\partial_\mu\Lambda(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. No entanto, a adição de um campo vetorial A_μ , transformando-se de acordo com $A_\mu \rightarrow A_\mu + e\partial_\mu\Lambda$, interagindo com os espinores através de um termo também trilinear $eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ em \mathcal{L}_{Dirac} , pode calibrar a transformação sofrida pelos espinores deixando $\mathcal{L}_{Dirac} + eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ invariante. A Lagrangiana final resultante desse processo de construção, baseado no princípio de invariância de gauge tem ainda uma parte, \mathcal{L}_{A_μ} que só depende do campo A_μ e que varia, no máximo, por uma divergência, irrelevante para a ação $S = \int dx\mathcal{L}$, com a transformação requerida. Assim o princípio de gauge definiu a forma com a qual o campo de Dirac deve interagir com o campo calibrante (de gauge), levando ao funcional invariante

$$S = \int dx[\mathcal{L}_{Dirac} + eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + \mathcal{L}_{A_\mu}]. \quad (3.2)$$

Isso define as teorias dos campos de gauge acopladas ao campo de Dirac. As possibilidades a serem estudadas são dadas pelas diferentes escolhas que podem ser feitas para a parte cinética, \mathcal{L}_{A_μ} , do campo de gauge. De uma forma mais geral podemos entender o princípio de invariância de gauge como levando a teoria dos campos livres para a teoria dos campos em interação cuja ação é a integral da soma de três partes distintas:

$$S_{inv} = \int dx[\mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_{interaction} + \mathcal{L}_{gauge}].$$

Onde \mathcal{L}_{free} coleciona as Lagrangianas para os campos escalares e espinoriais livres que podem ocorrer num modelo, $\mathcal{L}_{interaction}$ coleciona os termos de interação com os campos de gauge e \mathcal{L}_{gauge} é a coleção dos termos cinéticos para os campos de gauge. Passemos então a discutir algumas possíveis formas para $\mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{interaction}$.

A teoria de Maxwell para o campo eletromagnético fora durante muitos anos o candidato mais natural para a parte, na ação, que depende dos campos de gauge. Sua forma é dada por um invariante relativístico,

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu \quad (3.3)$$

com $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ e $-A_\mu J^\mu$ representando $\mathcal{L}_{interaction}$ sendo que J^μ é uma corrente conservada de matéria. Esta Lagrangiana é manifestamente invariante pela transformação $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu\Lambda$, pois Lagrangianas diferindo por uma divergência são equivalentes. Não há nenhuma restrição quanto à dimensão do espaço-tempo para a qual (3.3) pode ser definida pois basta apenas reduzir (extender) para dimensões menores (maiores) o domínio de valores que o índice discreto μ pode tomar nos campos de gauge A^μ . Isto ocorre, simplesmente fazendo $\mu = 0, 1, \dots, (dim - 1)$ (dim é a dimensão do espaço-tempo). No

entanto, as características do modelo mudam de espaço para espaço. Em (2+1) dimensões esta teoria difere de sua usual correspondente em (3+1) dimensões. A principal diferença está no fato de que o campo magnético passa a ser um pseudo-escalar $B = \epsilon_{ij} \partial^i A^j$, diferente do pseudo-vetor $B = \nabla \times \vec{A}$ ¹ no espaço tridimensional, pois agora o potencial vetor \vec{A} tem apenas duas componentes e a terceira dimensão espacial não existe, neste mundo bidimensional. O campo elétrico $\vec{E} = -\nabla A^0 - \dot{\vec{A}}$ é um vetor de duas componentes.

No início da década de oitenta, consagrou-se no trabalho pioneiro de S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton [13] um campo de gauge em (2+1) dimensões novo até então na teoria dos campos e bastante diferente da forma reduzida da teoria de Maxwell. Tal achado ficou conhecido como campo de Chern-Simons. Sua Lagrangiana é

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho - A_\mu J^\mu. \quad (3.4)$$

À primeira vista, esta teoria não parece ser invariante de gauge devido à aparência do primeiro termo do lado direito da equação acima, no entanto, realizando a transformação $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ obteremos, utilizando a antisimetria do símbolo $\epsilon^{\mu\nu\rho}$, a nova Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho - A_\mu J^\mu + \frac{\kappa}{2} \partial^\mu (\epsilon_{\mu\nu\rho} \Lambda \partial^\nu A^\rho) - (\partial_\mu \Lambda) J^\mu \quad (3.5)$$

que é equivalente à Lagrangiana inicial, se os termos de superfície puderem ser desprezados (no que segue vamos assumir que esta condição sempre é válida) na integral correspondente a ação de Chern-Simons $S_{CS} = \int d^3x \mathcal{L}_{CS}$, tornando-a invariante de gauge. Isto, também, pode ser visto diretamente nas equações clássicas de movimento de A^μ , que são invariantes de gauge.

$$\frac{\kappa}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho} = J_\mu$$

ou

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa} \epsilon^{\mu\nu\rho} J_\rho. \quad (3.6)$$

Desta equação é claro que $\partial_\mu J^\mu = 0$.

Outra característica desta teoria é que ela é de primeira ordem em derivadas espaço-temporais, tornando sua estrutura canônica diferente da teoria de Maxwell.

O símbolo $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ por suas características: anti-simetria e ciclicidade, pode somente ser generalizado para dimensões ímpares, de modo que as interações de Chern-Simons podem somente existir nesses espaços.

¹Pseudo-scalar e pseudo-vetor são objetos de natureza escalar e vetorial respectivamente que não são modificados em uma transformação de paridade.

Diferente de qualquer outro modelo, a teoria livre de Chern-Simons não possui nenhuma dinâmica. Isso pode ser visto diretamente de (3.6) fazendo $J^\mu = 0$. Os efeitos surgem quando esta é acoplada a outros campos.

Existem muitas possibilidades que podem ser estudadas mas nos ocuparemos apenas com duas delas: a teoria do campo escalar complexo sem termo de massa e acoplado ao campo de Chern-Simons

$$\mathcal{L}_{KGCS} = \partial^\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi + ie(A^\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - \partial^\mu \varphi^\dagger A_\mu \varphi) + e^2 A^\mu \varphi^\dagger A_\mu \varphi + \frac{\kappa}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho, \quad (3.7)$$

e a teoria do campo espinorial sem termo de massa e também acoplado ao campo de Chern-Simons

$$\mathcal{L}_{DCS} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) + e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \frac{\kappa}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho. \quad (3.8)$$

Note que nenhuma das duas Lagrangianas possui parâmetros dimensionais, sendo, portanto, invariantes por transformação de escala. A introdução de um termo tipo Maxwell $\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ destruiria completamente a simetria de escala, uma vez que a constante c^{-1} deveria ter dimensão um em unidades de massa de modo a deixar a ação S adimensional. Este é o motivo pelo qual nós não adicionaremos um termo de Maxwell nas teorias que estamos considerando, embora fenômenos interessantes, como a geração de massa devido ao Chern-Simons, aconteçam nesta teoria.

A transformação de gauge nos campos A^μ é acompanhada pelas transformações $\varphi \rightarrow e^{i\Lambda} \varphi$ no campo escalar para a Lagrangiana (3.7) e $\psi \rightarrow e^{i\Lambda} \psi$ nos campos espinoriais na Lagrangiana (3.8), com $\Lambda = \Lambda(x)$ uma função qualquer.

As Lagrangianas (3.7) e (3.8), sendo teorias de gauge, tratam-se de sistemas vinculados, onde as variáveis dinâmicas não são todas independentes e o processo de quantização canônica leva a ambiguidades. Para verificar isso, basta lembrarmos de como é realizada a passagem da mecânica clássica para a mecânica quântica. Esta mudança pode ser feita de forma consistente obtendo os colchetes de Poisson² entre duas variáveis físicas A, B e, em seguida, impondo as relações quânticas de comutação ou anti-comutação com a prescrição $i\hbar$.

$$[A_{op}, B_{op}]_{\pm} = i\hbar \{A, B\} \quad (3.9)$$

onde o subscrito *op* significa que as variáveis tornam-se operadores atuando num espaço de Hilbert de estados físicos. No entanto, nas teorias de gauge esse método leva a ambiguidades. Se, por exemplo, analisarmos a Lagrangiana (3.7) encontraremos que o momento canonicamente conjugado à variável de campo A^0 anula-se, $\Pi_0 \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0$, resultando em

²O colchete é entendido no sentido generalizado incluindo também variáveis Grassmanianas.

vínculo. Isso levaria a uma inconsistência ao considerarmos (3.9), pois Π_{0op} corresponderia ao operador nulo e o colchete de Poisson $\{A_0(x), \Pi_0(y)\}$ é diferente de zero.

A fim de solucionar problemas como este e outros mais, Dirac desenvolveu um método de quantização para sistemas que possuem vínculos.

No que segue, apresentaremos as idéias principais de Dirac, com o intuito de aplicá-las aos modelos em questão.

3.2 O método de Dirac para a quantização de sistemas vinculados.

Uma característica de teorias de campo com vínculos é que elas não permitem que certas "velocidades" $\dot{\varphi}_\alpha$ sejam escritas como função das variáveis φ_α e os momentos canonicamente conjugados a essas últimas, definidos pela relação $\Pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a}$. Teorias assim são também ditas singulares. De um modo geral, a condição, que determina quando uma teoria é singular, é dada pelo anulamento do determinante do jacobiano da transformação, ligando velocidades e momentos

$$\det\left[\frac{\partial \Pi_r}{\partial \dot{\varphi}_s}\right] = \det\left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_r \partial \dot{\varphi}_s}\right] = 0 \quad (3.10)$$

onde $r, s = 1, 2, \dots, m$ com m sendo o número de campos presentes inicialmente. Com isso, a Hamiltoniana obtida através da transformação $(\varphi_r, \dot{\varphi}_r) \rightarrow (\varphi_r, \Pi_r)$ deixa de estar univocamente definida, pois o sistema de equações envolvendo as variáveis de campo, velocidades e momentos, não tem solução única. Conseqüentemente, os momentos Π_r não serão todos independentes.

Seja R é o rank da matriz $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_r \partial \dot{\varphi}_s}$, então para R velocidades é possível escrever

$$\dot{\varphi}_a = f_a(\varphi, \Pi_b, \dot{\varphi}_\alpha) \quad (3.11)$$

com $a, b = 1, \dots, R$ e $\alpha = R + 1, \dots, m$. Assim, se substituirmos (3.11) na definição para os momentos teremos

$$\Pi_r = \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, f_a, \dot{\varphi}_\alpha)}{\partial \dot{\varphi}_r} = g_r(\varphi, \Pi_a, \dot{\varphi}_\alpha) \quad (3.12)$$

para $r = 1, \dots, R$, enquanto que para os demais momentos, devido ao Jacobiano ser singular, teremos

$$\Pi_\alpha = g_\alpha(\varphi, \Pi_a) \quad (3.13)$$

para $\alpha = R+1, \dots, m$. Estas últimas relações (3.13) dão origem as equações \mathcal{V}_α chamadas de vínculos primários

$$\mathcal{V}_\alpha = \Pi_\alpha - g_\alpha(\varphi_r, \Pi_a) = 0. \quad (3.14)$$

Como tínhamos inicialmente $2m$ variáveis e agora os momentos vinculados são em número $m - R$, as equações acima definem uma hipersuperfície \mathcal{V} de dimensão $2m - (m - R) = m + R$ imersa no espaço de fase de dimensão $2m$. Essa hipersuperfície define um subespaço no qual funções diferindo por uma combinação linear dos vínculos primários \mathcal{V}_α passam a ser iguais. Assim dizemos que duas funções F e G são fracamente iguais $F \approx G$, se elas são iguais sobre \mathcal{V} . Isto é,

$$[F - G]/\mathcal{V} = \beta^\alpha \mathcal{V}_\alpha = 0 \quad (3.15)$$

com β^α sendo coeficientes quaisquer de proporcionalidade.

A Hamiltoniana canônica é então definida da maneira usual mas evidenciando aqueles momentos que dependem das velocidades, sendo em número igual ao rank da matriz $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_r \partial \dot{\varphi}_s}$, e aqueles que não dependem das velocidades, sendo em número igual a $m - R$. Desta forma, utilizando as equações (3.11) e (3.13) escreve-se

$$H_c(\varphi, \Pi_a, \dot{\varphi}_\alpha) = \sum_{b=1}^R \Pi_b f^b(\varphi, \Pi_a, \dot{\varphi}_\alpha) + \sum_{\alpha=R+1}^m \dot{\varphi}_\alpha g^\alpha(\varphi, \Pi_a) - \mathcal{L}(\varphi, f^a, \dot{\varphi}_\alpha) \quad (3.16)$$

com $a = 1, \dots, R$. Esta Hamiltoniana não depende explicitamente das velocidades $\dot{\varphi}_\alpha$, pois $\frac{\partial H_c}{\partial \dot{\varphi}_\alpha} = 0$. Assim $H_c = H_c(\varphi, \Pi_a)$.

Outro ponto importante é que podemos definir no sentido fraco as equações

$$\dot{\varphi}_i \approx \frac{\partial}{\partial \Pi_i} [H_c + \sum_{\alpha=R+1}^m \dot{\varphi}_\alpha \mathcal{V}^\alpha] \quad e \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \approx - \frac{\partial}{\partial \varphi_i} [H_c + \sum_{\alpha=R+1}^m \dot{\varphi}_\alpha \mathcal{V}^\alpha], \quad (3.17)$$

que sobre \mathcal{V} reduzem-se as equações canônicas de Hamilton, uma vez que \mathcal{V}_α e suas derivadas anulam-se nesta região. Se $\dot{\Pi}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}$ então, adotando a convenção de soma sobre os índices repetidos, as equações de movimento expressas por meio dos colchetes de Poisson são,

$$\dot{\varphi}_i \approx \{\varphi_i, H_c + \dot{\varphi}_\alpha \mathcal{V}^\alpha\} \quad e \quad \dot{\Pi}_i \approx \{\Pi_i, H_c + \dot{\varphi}_\alpha \mathcal{V}^\alpha\}. \quad (3.18)$$

Não há como determinar as funções restantes $\dot{\varphi}_\alpha$, uma vez que o colchete acima reduz-se para estas a identidades. Essas velocidades indeterminadas são então denominadas funções coeficientes λ_α definindo a Hamiltoniana primária

$$H_p = H_c + \lambda_\alpha \mathcal{V}^\alpha. \quad (3.19)$$

A evolução temporal para qualquer função do espaço de fase $A(\varphi, \Pi)$ sem dependência explícita do tempo é dada por

$$\dot{A}(\varphi, \Pi) \approx \{A(\varphi, \Pi), H_p\}. \quad (3.20)$$

Como as equações de vínculo (3.14) valem para todo intervalo de tempo, deve-se ter

$$\dot{\mathcal{V}}_\alpha \approx \{\mathcal{V}_\alpha, H_p\} \approx \{\mathcal{V}_\alpha, H_c\} + \lambda^\beta \{\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta\} \approx 0. \quad (3.21)$$

Essa equação determina as funções λ_α ou então fornecem novas relações entre as variáveis determinando os chamados vínculos secundários. O processo é então continuado até que todos os vínculos fiquem livres de evolução. No final, são deixados um número n de vínculos

$$\mathcal{V}_\alpha \approx 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (3.22)$$

que são divididos em duas classes:

1) Vínculos de primeira classe: aqueles cujo colchete de Poisson com qualquer outro vínculo anula-se fracamente.

2) Vínculos de segunda classe: são aqueles que, tem pelo menos, um colchete de Poisson não nulo com qualquer outro vínculo.

Na prática, escolhe-se um gauge introduzindo condições adicionais que tornam os vínculos de primeira classe em vínculos de segunda classe. Após fixar o gauge, tem-se um número $l < m$ de vínculos, todos de segunda classe. Eles definem a matriz dos colchetes de Poisson

$$C_{\alpha\beta} = \{\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, l < m \quad (3.23)$$

antisimétrica³. Dirac mostrou que a matriz $C_{\alpha\beta}$ é não singular, de modo que $C_{\alpha\beta}^{-1}$ existe. Com isso, ele definiu novos colchetes para duas funções A e B através das expressões:

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \mathcal{V}_\alpha\} C_{\alpha\beta}^{-1} \{\mathcal{V}_\beta, B\}. \quad (3.24)$$

Com essa definição, o colchete (de Dirac) de uma função A qualquer, com o vínculo \mathcal{V}_α anula-se conforme desejado. Isso acaba com a ambigüidade mencionada na seção anterior.

³Quando a teoria possui campos que anti-comutam $C_{\alpha\beta}$ é uma supermatriz que pode ser simétrica ou não ter simetria definida.

Além disso, o colchete de Dirac tem a mesma estrutura algébrica que o colchete de Poisson. Isto é, para variáveis f , g e h , todas bosônicas, valem as seguintes relações:

1.

$$\{f, g\}_D = -\{g, f\}_D$$

2.

$$\{f_1 + h, g\}_D = \{f_1, g\}_D + \{h, g\}_D$$

3.

$$\{fh, g\}_D = f\{h, g\}_D + \{f, g\}_D h$$

mais a identidade de Jacobi

4.

$$\{f, \{g, h\}\}_D + \{g, \{h, f\}\}_D + \{h, \{f, g\}\}_D = 0.$$

Para variáveis quaisquer, incluindo Grassmanianas, o colchete de Dirac é definido em termos do colchete de Poisson generalizado [23]. $C_{\alpha\beta} = \{\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta\}$ passa a ser uma supermatriz das variáveis diversas.

A teoria quantizada é alcançada utilizando o princípio de correspondência

$$[A_{op}, B_{op}]_{\pm} = i\hbar\{A, B\}_D. \quad (3.25)$$

Esse método se estende para a teoria dos campos, simplesmente introduzindo integrações das variáveis intermediárias. Por exemplo, a equação (3.24) torna-se

$$\{A(x), B(y)\}_D = \{A(x), B(y)\} - \int dudv \{A(x), \mathcal{V}_\alpha(u)\} C_{\alpha\beta}^{-1}(u, v) \{\mathcal{V}_\beta(v), B(y)\} \quad (3.26)$$

e o colchete de Poisson é definido como

$$\{A(x), B(y)\} = \int du \left[\frac{\delta A(x)}{\delta \varphi_a(u)} \frac{\delta B(y)}{\delta \Pi_a(u)} - \frac{\delta B(y)}{\delta \varphi_a(u)} \frac{\delta A(x)}{\delta \Pi_a(u)} \right] \quad (3.27)$$

para $A(x)$ e $B(x)$ variáveis bosônicas.

Isto conclui as idéias principais da quantização de Dirac.

Maiores detalhes serão dadas durante a análise dos modelos em questão.

3.3 A quantização das teorias.

3.3.1 O campo escalar complexo acoplado ao campo de Chern-Simons.

Nós começamos com a Lagrangiana (3.7)

$$\mathcal{L}_{KGCS} = (D^\mu \varphi)^\dagger (D_\mu \varphi) + \frac{\kappa}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho \quad (3.28)$$

com $D^\mu = \partial^\mu - iA^\mu$ sendo a derivada covariante⁴, cujos momentos canonicamente conjugados às variáveis de campo $\varphi(x)$, $\varphi(x)^\dagger$ e $A^\mu(x)$ são:

$$\begin{aligned} \Pi_\varphi &= (D^0 \varphi)^\dagger(x), \\ \Pi_{\varphi^\dagger} &= (D^0 \varphi)(x), \\ \Pi_A^\mu(x) &= \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\lambda 0} A_\lambda(x). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Como a última relação acima não envolve "velocidade", ela nos dá os três vínculos primários:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= \Pi_0 \approx 0, \\ \mathcal{V}_i &= \Pi_i - \frac{\kappa}{2} \epsilon^{ij} A^j \approx 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

A Hamiltoniana primária é dada por:

$$\begin{aligned} H_p &= \int d\vec{x} \left[\Pi \dot{\varphi} + \Pi^\dagger \dot{\varphi}^\dagger + \Pi_\mu \dot{A}^\mu - \Pi^\dagger \Pi + (D_i \varphi)^\dagger (D^i \varphi) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho + \lambda_0 \Pi^0 + \lambda_i \left(\Pi^i - \frac{\kappa}{2} \epsilon^{ij} A_j \right) \right] \\ &= \int d\vec{x} \left[\Pi \Pi^\dagger + (D_i \varphi)^\dagger (D^i \varphi) + A_0 [i(\Pi \varphi - \varphi^\dagger \Pi^\dagger) - \epsilon^{ij} \partial^i A^j - \partial^i \Pi_i] + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_0 \Pi^0 + \lambda_i \left(\Pi^i - \frac{\kappa}{2} \epsilon^{ij} A_j \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

⁴Por conveniência a constante de acoplamento e que usualmente aparece nas derivadas covariantes é tomada aqui como igual a unidade. Essa constante é adimensional em (2+1) dimensões.

A primeira equação de consistência fornece o seguinte vínculo secundário:

$$\begin{aligned} S_0 &= \{\mathcal{V}_0(x), H_p\} = - \int dz \frac{\delta \Pi_0(x)}{\delta \Pi_0(z)} \frac{\delta H_p}{\delta A_0(z)} \\ &= i(\Pi^\dagger \varphi^\dagger - \varphi \Pi) + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{ij} \partial^i A^j + \partial^i \Pi_i \approx 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Este vínculo secundário não fornece nenhum outro vínculo, pois sua evolução $\{\mathcal{V}_4, H_p\}$ é identicamente nula. Os outros dois \mathcal{V}_i em (3.30) quando evoluídos determinam a velocidade inexpressível u^i

$$u^j = \frac{i}{\kappa} \epsilon^{kj} [(D^k \varphi)^\dagger \varphi - \varphi^\dagger (D^k \varphi)] = \frac{\epsilon^{kj}}{\kappa} J_k. \quad (3.33)$$

A condição subsidiária que torna \mathcal{V}_i e S_0 em vínculos de segunda classe é escolhida como sendo o Gauge de Coulomb $\partial_i A^i = 0$. E a imposição $\{\partial_i A^i, H_p\} \approx 0$ determina A_0 em função das outras variáveis.

$$\nabla^2 A^0(x) = - \frac{\epsilon^{ij}}{\kappa} \partial^i J^j(x). \quad (3.34)$$

Assim como $\Pi_0 \approx 0$ e A_0 , que aparece na Hamiltoniana primária como multiplicador de Lagrange de S_0 está agora determinado pela equação acima, nós podemos eliminar essas duas variáveis do espaço de fase. Feito isso, resta-nos um conjunto de quatro vínculos de segunda classe,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i &= \Pi_i - \frac{\kappa}{2} \epsilon^{ij} A^j \approx 0, \\ \mathcal{V}_3 &= i(\varphi^\dagger \Pi^\dagger - \Pi \varphi) + \partial^i \Pi_i + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{ij} \partial^i A^j \approx 0, \\ \mathcal{V}_4 &= \partial_i A^i \approx 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

que determinam a matriz $C_{\alpha\beta}(x, y) = \{\mathcal{V}_\alpha(x), \mathcal{V}_\beta(y)\}$:

$$C_{\alpha\beta}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 & -\partial_{1y} \\ \kappa & 0 & 0 & -\partial_{2y} \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla_y^2 \\ -\partial_{1y} & -\partial_{2y} & \nabla_y^2 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.36)$$

Para encontrar a matriz inversa $C_{\alpha\beta}^{-1}(x, y)$, resolvemos o conjunto de equações algébricas

$$\int d\vec{x} C_{\alpha\beta}^{-1}(z, x) C_{\beta\gamma}(x, y) = \delta_{\alpha\gamma} \delta(z - y). \quad (3.37)$$

Se $C_{\alpha\beta}^{-1}(z, x)$ obtida pela relação acima for realmente a inversa de $C_{\alpha\beta}(x, y)$, ela também deve satisfazer as equações:

$$\int d\vec{x} C_{\alpha\beta}(z, x) C_{\beta\gamma}^{-1}(x, y) = \delta_{\alpha\gamma} \delta(z - y). \quad (3.38)$$

Depois de uma pequena álgebra chega-se a :

$$C_{\alpha\beta}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa} & -\frac{\partial_{2y}}{\kappa \nabla_y^2} & 0 \\ -\frac{1}{\kappa} & 0 & \frac{\partial_{1y}}{\kappa \nabla_y^2} & 0 \\ -\frac{\partial_{2y}}{\kappa \nabla_y^2} & \frac{\partial_{1y}}{\kappa \nabla_y^2} & 0 & \frac{1}{\nabla_y^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\nabla_y^2} & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.39)$$

Com isso, os colchetes de Dirac podem ser calculados através de 3.24. Por exemplo, o colchete do campo escalar $\varphi(x)$ com o momento canonicamente conjugado ao campo de Gauge, Π_j , é diferente de zero.

$$\begin{aligned} \{\varphi(x), \Pi_j(y)\}_D &= - \int dz dw \{ \varphi(x), \mathcal{V}_{3z} \} \left[C_{31}^{-1}(z, w) \{ \mathcal{V}_{1w}, \Pi_{jy} \} + \right. \\ &+ C_{32}^{-1}(z, w) \{ \mathcal{V}_{2w}, \Pi_{jy} \} + C_{34}^{-1}(z, w) \{ \mathcal{V}_{4w}, \Pi_{jy} \} \left. \right] = \\ &= i\varphi(x) \int dw \left[\frac{\partial_{w2}}{\kappa \nabla_w^2} \delta(x - w) \cdot \delta^{2j} \frac{\kappa}{2} \delta(w - y) + \right. \\ &+ \frac{\partial_{w1}}{\kappa \nabla_w^2} \cdot \delta^{ij} \frac{\kappa}{2} \delta(x - y) + \frac{1}{\nabla_w^2} \delta(x - w) + \\ &+ \left. \frac{1}{\nabla_w^2} \delta(x - w) \cdot \partial_{wj} \delta(w - y) \right] = \\ &= i\varphi(x) \left[\frac{\delta^{2j}}{2} \frac{\partial_{y2}}{\nabla_y^2} + \frac{\delta^{1j}}{2} \frac{\partial_{y1}}{\nabla_y^2} - \frac{\partial_{yj}}{\nabla_y^2} \right] \delta(x - y) = \\ &= -\frac{i\varphi(x)}{2} \frac{\partial_{yj}}{\nabla_y^2} \delta(x - y). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Os comutadores quânticos são obtidos por meio do princípio de correspondência (3.25). Os resultados são⁵

$$[\varphi_x, \varphi_y] = [\varphi_x, \Pi_y^\dagger] = [\varphi_x, \varphi_y^\dagger] = [\Pi_x, \Pi_y] = [\Pi_x, \Pi_y^\dagger] = 0,$$

⁵Esses comutadores foram determinados pela primeira vez por Girotti et al[18].

$$\begin{aligned}
[\varphi_x, \Pi_y] &= [\varphi_x^\dagger, \Pi_y^\dagger] = i\delta(x-y), \\
[\varphi_x, A_y^j] &= [A_x^j, \varphi_y^\dagger]^\dagger = -\varphi(x) \frac{\epsilon^{jk} \partial_{yk}}{\kappa \nabla_y^2} \delta(x-y), \\
[\varphi_x, \Pi_{yj}] &= [\Pi_{yj}, \varphi_x^\dagger]^\dagger = \frac{\varphi(x)}{2} \frac{\partial_{yj}}{\nabla_y^2} \delta(x-y), \\
[\Pi_x, A_y^j] &= [A_y^j, \Pi_x^\dagger]^\dagger = \Pi_x \frac{\epsilon^{jk} \partial_{yk}}{\kappa \nabla_y^2} \delta(x-y), \\
[\Pi_x, \Pi_{yj}] &= [\Pi_{yj}, \Pi_x^\dagger]^\dagger = -\Pi_x \frac{\partial_{yj}}{\nabla_y^2} \delta(x-y), \\
[A_x^i, A_y^j] &= [A_x^i, \Pi_{yj}] = [\Pi_{xi}, \Pi_{yj}] = 0.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Onde $\frac{\partial_{yk}}{\nabla_y^2} \delta(x-y) = -\frac{1}{2} \frac{x^k - y^k}{(x-y)^2}$ é a derivada $\partial_{yk} G(x, y)$ da função de Green que é solução da equação diferencial:

$$\nabla_x^2 G(x, y) = \delta(x-y). \tag{3.43}$$

Agora os vínculos de segunda classe tornam-se relações entre os operadores, válidas no sentido forte (igualdades). Assim o operador Hamiltoniano (Hermitiano) construído a partir do correspondente clássico é escrito simplesmente como:

$$H = \int d\vec{x} [\Pi \Pi^\dagger(x) + (D^i \varphi)^\dagger (D_i \varphi)(x)]. \tag{3.44}$$

Sendo livre dos termos que possuem constante de acoplamento κ provenientes da interação Chern-Simons. A escolha do ordenamento dos operadores para campos compostos será sempre a mais simples que deixa o conjunto Hermitiano. O campo A^i pode ser determinado como função dos campos escalares. As equações para \mathcal{V}_i e Γ_3 em (3.36) quando combinadas resultam na seguinte relação:

$$\epsilon^{ij} \partial^i A^j = -\frac{i}{\kappa} [\varphi^\dagger \Pi^\dagger - \Pi \varphi] = -\frac{1}{\kappa} J^0. \tag{3.45}$$

Se aplicarmos o operador $\epsilon^{kl} \partial_l$ e fizermos uso de \mathcal{V}_4 em (3.36) obteremos

$$\epsilon^{kl} \epsilon^{ij} \partial_l \partial^i A^j = \partial_l \partial^k A^l - \partial_l \partial^l A^k = -\frac{\epsilon^{kl}}{\kappa} \partial_l J_0 \tag{3.46}$$

ou

$$\nabla^2 A^k = -\frac{\epsilon^{kl}}{\kappa} \partial_l J_0 \quad (3.47)$$

cuja solução é dada em termos da função de Green obedecendo à equação $\nabla^2 G(x, y) = \delta(x - y)$ que para duas dimensões tem a forma:

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln |x - y|$$

de modo que:

$$A^i = -\frac{\epsilon^{ij}}{\kappa} \int d\vec{y} G(\vec{x}, \vec{y}) \partial_{yj} J_y^0 = -\frac{\epsilon^{ij}}{2\pi\kappa} \int d\vec{y} \frac{(x^j - y^j)}{(x - y)^2} J_y^0. \quad (3.48)$$

Uma equação similar pode ser obtida para Π_i substituindo (3.48) em (3.36). Assim vemos que apenas os campos escalares são independentes. Nós poderíamos chegar a esses mesmos resultados diretamente com as equações de Euler-Lagrange devido a simplicidade do modelo. No entanto, isso se justificou na tentativa de aprendermos mais sobre o modelo.

3.3.2 A anomalia rotacional.

Uma característica interessante que pode ser vista, ainda no nível clássico, é que o operador de momento angular, construído a partir do tensor (Belinfante) simétrico de momento e energia $T^{\mu\nu}$, apresenta uma parte anômala de spin. Para mostrar isso, precisamos aprender como obter o tensor de Belinfante para o modelo. A maneira usual de se fazer isso é definindo-o através do tensor canônico (2.7) mais a divergência de uma função $\Omega^{\rho\mu\nu}$, chamada de superpotencial,

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} - \partial_\rho \Omega^{\rho\mu\nu}. \quad (3.49)$$

$\Theta^{\mu\nu}$ para a Lagrangiana (3.7) vale:

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial^\nu \varphi + \partial^\nu \varphi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^\dagger)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)} \partial^\nu A^\lambda - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= (D^\mu \varphi)^\dagger \partial^\nu \varphi + \partial^\nu \varphi^\dagger D^\mu \varphi + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\rho\mu\lambda} A_\rho \partial^\nu A_\lambda - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

$\Omega^{\rho\mu\nu}$ é um tensor anti-simétrico nos dois primeiros índices cuja definição é:

$$\Omega^{\nu\mu\lambda} = \frac{1}{2} (H^{\nu\mu\lambda} - H^{\mu\lambda\nu} + H^{\lambda\nu\mu}) \quad (3.51)$$

com

$$H^{\nu\mu\lambda} = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^r)} (I^{\nu\lambda})_s^r A^s.$$

$I^{\nu\lambda}$ é o gerador do grupo de transformações⁶ definido como $(I^{\nu\lambda})_s^r = -i(g^{\nu r} \delta_s^\lambda - g^{\lambda r} \delta_s^\nu)$.
Munido disto, calcula-se então o tensor $H^{\nu\mu\lambda}$:

$$H^{\nu\mu\lambda} = \frac{\kappa}{2} A_\rho (\epsilon^{\rho\mu\nu} A^\lambda - \epsilon^{\rho\mu\lambda} A^\nu).$$

Substituindo as equações acima em (3.51) e utilizando da anti-simetria de $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ encontra-se a seguinte expressão para a divergência do superpotencial:

$$\partial_\rho \Omega^{\rho\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\sigma\mu\rho} ((\partial_\rho A_\sigma) A^\nu + A_\sigma \partial_\rho A^\nu). \quad (3.52)$$

A adição da divergência do superpotencial dá ao tensor simétrico $T^{\mu\nu}$ o mesmo conteúdo físico do tensor $\Theta^{\mu\nu}$ uma vez que $\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu \Theta^{\mu\nu}$.

Para simplificar a expressão final do tensor de momento-energia simétrico, utilizaremos a equação de movimento para A_μ

$$\kappa \epsilon^{\rho\sigma\mu} \partial_\rho A_\sigma = e J^\mu. \quad (3.53)$$

Essa relação pode ser invertida por meio de uma contração com $\epsilon_{\alpha\beta\mu}$,

$$\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha = \frac{e}{\kappa} \epsilon_{\alpha\beta\mu} J^\mu(x). \quad (3.54)$$

Pelas equações (3.49), (3.50) e (3.52) temos:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = & (D^\mu \varphi)^\dagger \partial^\nu \varphi + \partial^\nu \varphi^\dagger D^\mu \varphi + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\rho\mu\lambda} A_\rho \partial^\nu A_\lambda - g^{\mu\nu} (\mathcal{L}_0 + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\nu A_\gamma) \\ & - \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\sigma\mu\rho} ((\partial_\rho A_\sigma) A^\nu + A_\sigma \partial_\rho A^\nu). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Aqui \mathcal{L}_0 e a Lagrangiana (3.7) sem o termo de Chern-Simons. Os termos que são proporcionais a κ em (3.55) são trabalhados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa}{2} [\epsilon^{\rho\mu\lambda} A_\rho \partial^\nu A_\lambda - g^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma - \epsilon^{\sigma\mu\rho} ((\partial_\rho A_\sigma) A^\nu + A_\sigma \partial_\rho A^\nu)] \\ = & -\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\rho\sigma\mu} (-A_\rho \partial_\delta A_\sigma g^{\delta\nu} + (\partial_\rho A_\sigma) A^\nu + A_\sigma \partial_\rho A_\delta g^{\delta\nu}) - g^{\mu\nu} \frac{e}{2} A^\alpha J_\alpha \\ = & -\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\rho\sigma\mu} (-A_\sigma \partial_\delta A_\rho) g^{\delta\nu} - \frac{e}{2} J^\mu A^\nu - \frac{e}{2} g^{\mu\nu} A^\alpha J_\alpha, \end{aligned} \quad (3.56)$$

⁶Veja por exemplo [4]

com $J^\mu = i[\varphi^\dagger D^\mu \varphi - (D^\mu \varphi)^\dagger \varphi]$. Na penúltima e última linha, usamos (3.53) e a anti-simetria de $\epsilon^{\rho\sigma\mu}$. O termo entre colchetes pode ser simplificado de acordo com (3.54) e a expressão acima reduz-se a :

$$-\frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma\mu}\epsilon_{\rho\delta\gamma}eJ^\gamma A_\sigma g^{\delta\nu} - \frac{1}{2}eJ^\mu A^\nu - g^{\mu\nu}\frac{e}{2}A^\alpha J_\alpha. \quad (3.57)$$

Usando a propriedade $\epsilon^{\rho\sigma\mu}\epsilon_{\rho\delta\gamma} = \delta_\delta^\sigma \delta_\gamma^\mu - \delta_\gamma^\sigma \delta_\delta^\mu$, nós vemos que esses termos juntos nada mais são do que $-eJ^\mu A^\nu$. Após todas essas manipulações, a equação (3.55) fica sendo:

$$T^{\mu\nu} = (D^\mu \varphi)^\dagger D^\nu \varphi + (D^\nu \varphi)^\dagger D^\mu \varphi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_0. \quad (3.58)$$

Assim conseguimos escrever o tensor de Belinfante de uma forma mais compacta. Vale ainda notar que o termo de Chern-Simons não aparece explicitamente no tensor de momento-energia (3.58). Isso é uma característica de teorias que possuem interações desse tipo. Esse resultado não é surpreendente uma vez que para uma teoria pura onde,

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \quad (3.59)$$

tem-se $\Theta^{\mu\nu} = 0$. Isso é uma consequência do fato que diferente da teoria eletromagnética de Maxwell, não há propagação e portanto, não há energia associada ao campo de Chern-Simons no vácuo.

Agora definimos um operador hermitiano de momento angular de acordo com :

$$\mathcal{J} = \int d\vec{x} \epsilon^{jk} x^j T^{0k}. \quad (3.60)$$

Pode ser mostrado que essa definição é equivalente à integral da componente $M^{0\mu\nu}$ do tensor das rotações de Lorentz (2.8).

Para esse modelo, o momento angular \mathcal{J} é escrito explicitamente, fazendo uso das relações (3.30), como

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int d\vec{x} \epsilon^{jk} x^j [\Pi \partial^k \varphi + (\partial^k \varphi)^\dagger \Pi^\dagger - i\Pi A^k \varphi + i\varphi^\dagger A^k \Pi^\dagger] = \\ &= \int d\vec{x} \epsilon^{jk} x^j [\Pi \partial^k \varphi + (\partial^k \varphi)^\dagger \Pi^\dagger] - \int d\vec{x} d\vec{y} \frac{\epsilon^{jk} \epsilon^{kl} x^j (x^l - y^l)}{2\pi\kappa(x-y)^2} [J_x^0 J_y^0 - J_x^0 \delta(x-y)] = \\ &= \int d\vec{x} \epsilon^{jk} x^j [\Pi \partial^k \varphi + (\partial^k \varphi)^\dagger \Pi^\dagger] + \frac{[Q^2 - Q]}{4\pi\kappa}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Onde usamos (3.36) para mover os A^k para direita. Foi também introduzida na última linha a definição do operador de carga $Q = \int d\vec{x} J^0(x)$ com J^0 dado por (3.45). O motivo de chamarmos Q de operador de carga vem das suas propriedades algébricas, mais especificamente dos comutadores $[Q, \varphi^\dagger(x)] = \varphi^\dagger(x)$ e $[Q, \varphi(x)] = -\varphi(x)$ que junto com a hipótese de que este operador aniquila o estado fundamental, $Q|0\rangle = 0$ com $|0\rangle$ representando o estado de vácuo, fornecem os mecanismos para contagem de carga total num sistema com um dado número de partículas e antipartículas representado por um certo estado físico. Por exemplo, o estado $\varphi(x)^\dagger \varphi(y)^\dagger \varphi(z)^\dagger \varphi(w) |0\rangle$ é um auto-estado de Q com autovalor de carga igual a dois pois, $Q\varphi(x)^\dagger \varphi(y)^\dagger \varphi(z)^\dagger \varphi(w) |0\rangle = 2\varphi(x)^\dagger \varphi(y)^\dagger \varphi(z)^\dagger \varphi(w) |0\rangle$. Com isso, vemos que a interação de Chern-Simons é responsável pelo surgimento de uma parte não canônica proporcional a Q e Q^2 no operador de momento angular. Isto pode ser interpretado com um tipo de spin que depende da constante de acoplamento κ .

Podemos também ver como se dá a transformação do campo escalar em uma rotação infinitesimal, $x^i = x^i + \omega \epsilon^{ij} x^j$ com $\omega \ll 1$ utilizando o gerador (3.61). Pela (2.13) o operador campo transforma-se de acordo com a regra⁷, $\varphi'(x') = U\varphi(x)U^{-1}$, desde que neste caso a matriz Λ é igual à identidade. As rotações em torno do eixo fictício z , neste mundo bidimensional, formam um grupo abeliano uma vez que este é constituído de um único elemento \mathcal{J} que obviamente comuta com ele mesmo, $[\mathcal{J}, \mathcal{J}] = 0$. Da equação (2.14) tiramos que para essas rotações $U = 1 + iw\mathcal{J}$ donde vem que o campo sofre uma variação, em primeira ordem em w , dada por:

$$\delta\varphi^\dagger(x) = iw[\mathcal{J}, \varphi^\dagger(x)] = w\epsilon_{ij}x^i\partial^j\varphi^\dagger + \frac{iw}{4\pi\kappa}(Q\varphi^\dagger + \varphi^\dagger Q + \varphi^\dagger).$$

Assim vemos que o estado de uma partícula $|\varphi^\dagger(x)\rangle \equiv \varphi^\dagger(x)|0\rangle$ quando transformado com o gerador (3.61) de uma partícula sofre uma variação:

$$|\delta\varphi^\dagger(x)\rangle = iw[\epsilon_{ij}x^i p^j + \frac{1}{2\pi\kappa}]|\varphi^\dagger(x)\rangle$$

com $p^j = -i\partial^j$. Claramente vemos a presença de uma parte intrínseca ($\frac{1}{2\pi\kappa}$) que não é esperada na transformação de rotação para um campo escalar. O presente resultado refere-se ao gauge de Coulomb que foi escolhido de modo a tornar o conjunto de vínculos em um conjunto de segunda classe, facilitando a quantização.

⁷Nós omitimos e continuaremos omitindo o chapéu que atribui a característica de operador.

3.3.3 O gerador de dilatações para o campo escalar acoplado ao Chern-Simons.

Da mesma forma que foi feito com o operador J , nós construiremos o gerador D para então verificar como será a modificação do campo, de acordo com o comutador $\delta\varphi_D = i[D, \varphi]$. No capítulo 2, nós apresentamos a expressão geral da corrente de dilatação. Para a teoria do campo escalar complexo acoplado ao campo de Gauge A_μ , ela é:

$$D^\mu = x_\lambda [T^{\mu\lambda} + \partial_\rho \Omega^{\rho\mu\lambda}] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\rho)} A_\rho + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \varphi + \varphi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\dagger)} \right]$$

onde novamente substituímos o tensor canônico $\Theta^{\mu\nu}$, pelo tensor de Belinfante mais um superpotencial $\partial_\rho \Omega^{\rho\mu\lambda}$. Isso é feito apenas por conveniência. Para a Lagrangiana \mathcal{L}_{KGCS} , a corrente é dada por:

$$D^\mu = x_\lambda [T^{\mu\lambda} + \partial_\rho \Omega^{\rho\mu\lambda}] + \frac{1}{2} [(D^\mu \varphi)^\dagger \varphi + \varphi^\dagger D^\mu \varphi].$$

Nós não escrevemos a expressão explícita para superpotencial, uma vez que ele não contribuirá para a integral espacial de $\partial^\mu D_\mu$. Assim nosso gerador será dado por:

$$\begin{aligned} D &= \int d\vec{x} [x_\lambda T^{0\lambda} + \frac{1}{2} (\Pi\varphi + \varphi^\dagger \Pi^\dagger)] = \\ &= x_0 H + \int d\vec{x} [x_i (\Pi D^i \varphi + (D^i \varphi)^\dagger \Pi^\dagger) + \frac{1}{2} (\Pi\varphi + \varphi^\dagger \Pi^\dagger)]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Com H dado por (3.44). Vale a pena notar que poderíamos adicionar à Hamiltoniana, um potencial do tipo $V(\varphi, \varphi^\dagger) = \lambda(\varphi\varphi^\dagger)^n$ sem alterar a estrutura algébrica da teoria. No entanto, para que a simetria de escala seja preservada devemos escolher⁸ $n = 3$. Assumindo a forma (3.62), nós podemos calcular a variação no campo. Isto é feito usando as regras (3.36) e depois de um longo cálculo algébrico, checamos que este gerador produz a variação de dilatação. Ou seja,

$$\delta\varphi_D^\dagger = i\alpha [D, \varphi^\dagger(x)] = \alpha [x_\mu \partial^\mu + \frac{1}{2}] \varphi^\dagger(x). \quad (3.63)$$

Então concluímos que diferentemente das rotações, não há nenhuma anomalia associada ao gerador de dilatações D , pelo menos, nesse nível clássico do modelo.

⁸Curiosamente o termo $\lambda(\varphi\varphi^\dagger)^3$ é de fato necessário para garantir a renormalizabilidade do modelo. Veja capítulo 4 desta dissertação.

3.3.4 O campo fermiônico acoplado ao Chern-Simons.

Neste caso, encontramos que os momentos para a Lagrangiana[14]

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi + \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho \quad (3.64)$$

estão todos vinculados, dando origem aos vínculos primários

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \Pi_0 \approx 0, \\ \phi_i &= \Pi_i - \frac{\kappa}{2}\epsilon_{ij}A^j \approx 0 \quad i = 1, 2 \\ \phi_3 &= \Pi_{\psi_\alpha} + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^0)_\alpha \approx 0 \\ \phi_4 &= \bar{\Pi}_{\bar{\psi}_\alpha} + \frac{i}{2}(\gamma^0\psi)_\alpha \approx 0 \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

A Hamiltoniana primária é:

$$\begin{aligned} H_p &= \int d\vec{x} \left[-\frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^k\partial_k\psi - \partial_k\bar{\psi}\gamma^k) - A_0\left(\frac{\kappa}{2}\epsilon_{ij}\partial^i A^j + \partial^i\Pi_i + e\psi\gamma^0\psi\right) - e\bar{\psi}\gamma^k A_k\psi + \right. \\ &\quad \left. u_0\Pi_0 + u^i\left(\Pi_i - \frac{\kappa}{2}\epsilon_{ij}A^j\right) + \left(\Pi_{\psi_\alpha} + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^0)_\alpha\right)u_3 + u_4\left(\bar{\Pi}_{\bar{\psi}_\alpha} + \frac{i}{2}(\gamma^0\psi)_\alpha\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Nós vamos usar a seguinte definição para a variação temporal de uma função F geral:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \int dz \left[\frac{\delta^L H}{\delta\Pi_i(z)} \frac{\delta^L F}{\delta\varphi^i(z)} - \frac{\delta^L H}{\delta\varphi^i(z)} \frac{\delta^L F}{\delta\Pi_i(z)} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\delta^L H}{\delta\Pi_{\theta_\alpha}(z)} \frac{\delta^L F}{\delta\Theta^\alpha(z)} + \frac{\delta^L H}{\delta\Theta^\alpha(z)} \frac{\delta^L F}{\delta\Pi_{\theta_\alpha}(z)} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde o subscrito L significa derivação à esquerda. Θ_α e $\Pi_{\theta\beta}$ são variáveis Grassmanianas satisfazendo relações de anti-comutação[23]. Essa definição vem das equações de movimento obtidas pela extremização da ação $S = \int dx[\dot{\varphi}_\alpha\Pi_\alpha + \dot{\Theta}_\alpha\Pi_{\alpha\theta} - \mathcal{H}]$. A primeira condição de consistência para a evolução de ϕ_0 fornece um vínculo secundário

$$\begin{aligned} S_0 = \{\phi_0, H_p\} &= \{\Pi_0(x) - \int d\vec{y}A_0(y)\left[\frac{\kappa}{2}\epsilon_{ij}\partial^i A^j + \partial^i\Pi_i + e\bar{\psi}\gamma^0\psi\right]\} \\ &= \partial^i\Pi_i + \frac{\kappa}{2}\epsilon_{ij}\partial^i A^j + e\bar{\psi}\gamma^0\psi \approx 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

S_0 não dá nenhum vínculo adicional uma vez que o colchete $\{S_0, H_p\}$ é identicamente nulo. A evolução temporal dos ϕ_i determinam a equação para os u_i 's,

$$\begin{aligned} \{\phi_i(x), H_p\} &= \left\{ \Pi_i - \frac{\kappa}{2} \epsilon_{ij} A^j, \int d\bar{y} [-A_0 S + u^k (\Pi_k - \frac{\kappa}{2} \epsilon_{kl} A^l) + e \bar{\psi} \gamma^k A^k \psi] \right\} \\ &= -\kappa \epsilon_{ik} u^k - e \bar{\psi} \gamma^i \psi = 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

donde

$$u^i = \frac{e}{\kappa} \epsilon^{ij} \bar{\psi} \gamma^j \psi. \quad (3.70)$$

Os vínculos ϕ_3 e ϕ_4 quando evoluídos, determinam equações para u_3 e u_4 respectivamente. Elas são:

$$\begin{aligned} i u_4 \gamma^0 + i \partial_k \bar{\psi} \gamma^k - e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu &= 0 \\ -i \gamma^0 u_3 + i \gamma^k \partial_k \psi + e \gamma^\mu A_\mu \psi &= 0. \end{aligned} \quad (3.71)$$

A fim de tornar o conjunto $\{\phi_0, \phi_i, \phi_3, \phi_4, S_0\}$ dos colchetes do Poisson generalizados em um conjunto de vínculos de segunda classe novamente introduzimos a condição inicial $\partial_i A^i \approx 0$ cuja evolução temporal é, por 3.67:

$$\begin{aligned} \{\partial_i A^i(x), H_p\} &= \partial_i \partial^i A^0 + \partial_i u^i \approx 0 \\ &= \partial_i \partial^i A^0 + \frac{e}{\kappa} \epsilon^{kl} \partial_k (\bar{\psi} \gamma^l \psi) \approx 0. \end{aligned} \quad (3.72)$$

A evolução temporal deste vínculo fornece uma equação para u_0 . Como no caso do campo escalar, eliminaremos Π_0 e A_0 do espaço de fase uma vez que $\Pi_0 \approx 0$ e A_0 está escrito como função das outras variáveis e aparece apenas como multiplicador de Lagrange do vínculo S_0 em H_p . Assim, é suficiente considerar somente o conjunto de vínculos:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i &= \phi_i = \Pi_i - \frac{\kappa}{2} \epsilon_{ij} A^j \approx 0 \\ \mathcal{V}_3 &= S_0 = \partial^i \Pi_i + \frac{\kappa}{2} \epsilon_{ij} \partial^i A^j + e \bar{\psi} \gamma^0 \psi \approx 0 \\ \mathcal{V}_4 &= \partial_i A^i \approx 0 \\ \mathcal{V}_{5\alpha} &= \Pi_{\psi_\alpha} + \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^0)_\alpha \approx 0 \\ \mathcal{V}_{6\alpha} &= \Pi_{\bar{\psi}_\alpha} + \frac{i}{2} (\gamma^0 \psi)_\alpha \approx 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

A supermatriz dos vínculos é então dada por:

$$C_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 & \partial_{1x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & \partial_{2x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla_x^2 & -e\bar{\psi}_{1x} & e\bar{\psi}_{2x} & e\psi_{1x} & -e\psi_{2x} \\ \partial_{1x} & \partial_{2x} & \nabla_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e\bar{\psi}_{1x} & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -e\bar{\psi}_{2x} & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -e\psi_{1x} & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e\psi_{2x} & 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.74)$$

Para a inversão dessa supermatriz, utilizamos o lema de inversão de supermatrizes [23].

O processo consiste em escrever $C_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{y})$ e $C_{\beta\gamma}^{-1}(\vec{x}, \vec{y})$ como uma expansão das variáveis que as constitui e depois multiplicá-las a fim de encontrar equações matriciais que podem ser resolvidas recursivamente, determinando assim $C_{\beta\gamma}^{-1}(\vec{x}, \vec{y})$. Em nosso caso, temos quatro variáveis Grassmanianas. Duas para cada um dos dois espinores, ψ e $\bar{\psi}$, de duas componentes denominadas por simplicidade de ψ_α^i com $i = 1, 2$ e $\alpha = 1, 2$ sendo que superescrito $i = 1$ refere-se a componente α de ψ e $i = 2$ refere-se à componente α de $\bar{\psi}$. Com isso, a expansão de $C_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{y})$ será:

$$C(\vec{x}, \vec{y}) = C_0(\vec{x}, \vec{y}) + C_{i\alpha}(\vec{x}, \vec{y})\psi_\alpha^i \vec{x}. \quad (3.75)$$

E a inversa procurada por sua vez:

$$C^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) = B_0(\vec{x}, \vec{y}) + B_{i\alpha}(\vec{x}, \vec{y})\psi_\alpha^i \vec{x}. \quad (3.76)$$

A condição $\int d\vec{y} C(\vec{x}, \vec{y}) C^{-1}(\vec{y}, \vec{z}) = I\delta(\vec{x}, \vec{z})$ determina as equações,

$$\int d\vec{y} C_0(\vec{x}, \vec{y}) B_0(\vec{y}, \vec{z}) = I\delta(\vec{x}, \vec{z}), \quad (3.77)$$

$$\int d\vec{y} [C_0(\vec{x}, \vec{y}) B_{i\alpha}(\vec{y}, \vec{z}) + C_{i\alpha}(\vec{x}, \vec{y}) B_0(\vec{y}, \vec{z})] \psi_\alpha^i = 0 \quad e, \quad (3.78)$$

$$\int d\vec{y} C_{i\alpha}(\vec{x}, \vec{y}) B_{j\beta}(\vec{y}, \vec{z}) \psi_\alpha^i \psi_\beta^j = 0. \quad (3.79)$$

Donde concluímos que as matrizes na expansão (3.76) são dadas em função daquelas em (3.75), de acordo com:

$$B_0(\vec{y}, \vec{z}) = C_0^{-1}(\vec{y}, \vec{z}) \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} B_{i\alpha}(\vec{y}, \vec{z}) &= - \int d\vec{u} d\vec{v} C_0^{-1}(\vec{y}, \vec{u}) C_{i\alpha}(\vec{u}, \vec{v}) B_0(\vec{v}, \vec{z}) \\ &= - \int d\vec{u} d\vec{v} C_0^{-1}(\vec{y}, \vec{u}) C_{i\alpha}(\vec{u}, \vec{v}) C_0^{-1}(\vec{v}, \vec{z}). \end{aligned} \quad (3.81)$$

$B_{i\alpha}(\vec{y}, \vec{z})$ dado por (3.81) deve satisfazer a terceira equação em (3.79) automaticamente. Assim, a matriz inversa $C^{-1}(\vec{x}, \vec{y})$ é encontrada pelo simples, embora trabalhoso, cálculo de (3.81). Não procederemos a apresentação desse cálculo devido à grande extensão do processo algébrico que o constitui. Mostraremos apenas o resultado que pode ser verificado sem maiores problemas,

$$C_{\alpha\beta}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa} & \frac{1}{\kappa} \frac{\partial_{2y}}{\nabla_y^2} & 0 & -\frac{i}{\kappa} e\psi^t \frac{\partial_{2x}}{\nabla_x^2} & \frac{i}{\kappa} e\bar{\psi}_y \frac{\partial_{2x}}{\nabla_x^2} \\ -\frac{1}{\kappa} & 0 & -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial_{1y}}{\nabla_y^2} & 0 & \frac{i}{\kappa} e\psi^t \frac{\partial_{1x}}{\nabla_x^2} & -\frac{i}{\kappa} e\bar{\psi}_y \frac{\partial_{1x}}{\nabla_x^2} \\ \frac{1}{\kappa} \frac{\partial_{2y}}{\nabla_y^2} & -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial_{1y}}{\nabla_y^2} & 0 & \frac{1}{\nabla_y^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\nabla_y^2} & 0 & ie\psi_y^t \frac{1}{\nabla_x^2} & -ie\bar{\psi}_y \frac{1}{\nabla_x^2} \\ \frac{i}{\kappa} e\psi_y \frac{\partial_{2x}}{\nabla_x^2} & -\frac{i}{\kappa} e\psi_y \frac{\partial_{1x}}{\nabla_x^2} & 0 & ie\psi_x \frac{1}{\nabla_x^2} & 0 & i\gamma^0 \\ -\frac{i}{\kappa} e\bar{\psi}_x^t \frac{\partial_{2y}}{\nabla_y^2} & \frac{i}{\kappa} e\bar{\psi}_x^t \frac{\partial_{2y}}{\nabla_y^2} & 0 & -ie\bar{\psi}_x^t \frac{1}{\nabla_x^2} & i\gamma^0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.82)$$

onde

$$\psi_x = \begin{pmatrix} \psi_{1x} \\ \psi_{2x} \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}_x = (\bar{\psi}_{1x} \quad \bar{\psi}_{2x}) \quad e \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.83)$$

Os colchetes de Dirac podem agora ser calculados, usando a definição para os colchetes de Poisson generalizados⁹. Os resultados para os comutadores (anti-comutadores), após feita a correspondência $[A, B]_{\pm} = i\{A, B\}_D$, são:

$$[\psi_{\alpha x}, A_y^i] = \frac{e}{\kappa} \psi_{\alpha x} \epsilon^{ij} \frac{\partial_{xj}}{\nabla_x^2} \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

⁹ A definição $\{A, B\} = \int dz \{ [\frac{\delta^L A}{\delta \pi_i(z)} \frac{\delta^L B}{\delta \phi^i(z)} - \frac{\delta^L A}{\delta \phi^i(z)} \frac{\delta^L B}{\delta \pi_i(z)}] - [\frac{\delta^L A}{\delta \Pi_\alpha(z)} \frac{\delta^L B}{\delta \Theta^\alpha(z)} - \frac{\delta^L A}{\delta \Theta^\alpha(z)} \frac{\delta^L B}{\delta \Pi_\alpha(z)}] \}$, foi utilizada para os colchetes generalizados. A soma em i no primeiro colchete refere-se a todos os campos bosônicos e momentos canonicamente conjugados a estes. O mesmo vale para o segundo colchete com a soma em α nos campos fermiônicos denotados por Θ^α .

$$\begin{aligned}
[\bar{\psi}_{\alpha x}, A_y^i] &= -\frac{e}{\kappa} \bar{\psi}_{\alpha x} \epsilon^{ij} \frac{\partial_{xj}}{\nabla_x^2} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\
[\Pi_{\alpha x}, A_y^i] &= -\frac{ie}{2\kappa} \gamma_{\alpha\beta}^0 \bar{\psi}_{\beta x} \epsilon^{ij} \frac{\partial_{xj}}{\nabla_x^2} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\
[\bar{\Pi}_{\alpha x}, A_y^i] &= \frac{ie}{2\kappa} \gamma_{\alpha\beta}^0 \psi_{\beta x} \epsilon^{ij} \partial_{xj} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\
[\psi_{\alpha x}, \psi_{\beta y}]_+ &= [\bar{\psi}_{\alpha x}, \bar{\psi}_{\beta y}]_+ = [A_x^i, A_y^j] = [A_x^i, \Pi_{jy}] = [\Pi_{ix}, \Pi_{jy}] = 0 \quad (3.84) \\
[\psi_{\alpha x}, \bar{\psi}_{\beta y}]_+ &= [\bar{\psi}_{\beta x}, \psi_{\alpha y}]_+ = \gamma_{\alpha\beta}^0 \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\
[\psi_{\alpha x}, \Pi_{\beta y}]_+ &= [\bar{\psi}_{\alpha x}, \bar{\Pi}_{\beta y}]_+ = -\frac{i}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\
[\Pi_{\alpha x}, \Pi_{\beta y}]_+ &= [\bar{\Pi}_{\beta x}, \Pi_{\alpha y}]_+ = \frac{i}{4} \gamma_{\alpha\beta}^0 \delta(\vec{x} - \vec{y}).
\end{aligned}$$

Com essa álgebra, da mesma forma que nós fizemos antes, podemos verificar se o gerador de dilatações a ser construído produz a transformação esperada para o campo.

3.3.5 O gerador de dilatações para campo fermiônico acoplado ao Chern-Simons.

Nesta teoria em $(2 + 1)$ dimensões, os campos A^μ e ψ têm dimensão igual a um em unidades de massa, de modo que teremos:

$$D = \int d\vec{x} [x_\lambda \Theta^{0\lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} A_\mu + \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi})} \psi].$$

Diferentemente do caso do campo escalar, os três últimos termos no integrando, somam-se para zero. O tensor canônico $\Theta^{0\lambda}$ pode ser substituído pelo tensor simétrico $T^{0\lambda}$ pois o superpotencial não contribui. Assim:

$$\begin{aligned}
D &= \int d\vec{x} x_\mu T^{0\mu} = \\
&= \int d\vec{x} [x_0 (-\frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^k \vec{\partial}_k \psi - e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi) + x_k (e \bar{\psi} \gamma^0 A^k \psi + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^0 \vec{\partial}^k \psi)] = \\
&= x_0 H + \int d\vec{x} x_k [e \bar{\psi} \gamma^0 A^k \psi + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^0 \vec{\partial}^k \psi]. \quad (3.85)
\end{aligned}$$

Para obter a variação gerada por D no campo ψ , precisamos calcular apenas o comutador do campo com a integral na equação acima, pois $[\psi, H] = i\partial^0 \psi$. Usando a álgebra em (3.85) nós chegamos depois de um pequeno trabalho a :

$$\begin{aligned}
& [\psi(x), \int d\vec{y} y_k T^{0k}] = \\
& = e x_k A^k \psi(x) + i x_k \partial^k \psi(x) + i \psi(x) + \frac{e^2}{2\pi\kappa} \int d\vec{y} \epsilon^{kl} y_k \frac{(x^l - y^l)}{(x - y)^2} j^0(y) \psi(x) \\
& = e x_k A^k \psi(x) + i x_k \partial^k \psi(x) + i \psi(x) + \frac{e^2}{2\pi\kappa} + e x_i \left[\frac{e \epsilon^{kl}}{2\pi\kappa} \int d\vec{y} \frac{(x^k - y^k)}{(x - y)^2} j^0(y) \right] \psi(x),
\end{aligned} \tag{3.86}$$

com $j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi$. De acordo com as equações de vínculo, o termo entre parênteses é igual a $-A^k(x)$, cancelando o primeiro termo na equação acima.

Nós, então, concluímos que não há nenhuma anomalia relacionada com o gerador D no caso do acoplamento com férmions, ou seja, o comutador $[D, \varphi]$ tem o resultado esperado

$$\delta\psi(x) \equiv \frac{\alpha}{i} [\psi(x), D] = \alpha (x_\mu \partial^\mu + 1) \psi(x).$$

Todo esse trabalho foi feito para verificarmos que a álgebra resultante do processo de quantização de Dirac não modifica o resultado obtido, de acordo com a quantização canônica no que concerne ao gerador D . Todavia, nós sabemos que existe uma anomalia dimensional no nível quântico que passaremos a estudar no próximo capítulo.

Capítulo 4

A simetria de escala e o grupo de renormalização.

Para finalizar, estudaremos no presente capítulo, o significado da transformação de escala, isto é, o que a simetria da teoria clássica prevê para o resultado dos cálculos perturbativos da teoria quântica. Para fazer isso utilizaremos o modelo do campo escalar complexo acoplado minimamente ao Chern-Simons.

Nós também verificaremos, ao tratar perturbativamente o modelo, que o método de regularização dimensional, usado para remover os infinitos dos diagramas, preserva importantes identidades que resultam da simetria de gauge do modelo. Pelo menos no que se refere à parte divergente das funções da série perturbativa até a ordem de aproximação de dois loops. Isso tem sido verificado na literatura presente apenas para uma subclasse de diagramas. Aqui nós analisamos todos os diagramas possíveis na ordem de aproximação considerada. Em seguida, veremos porque a previsão clássica para o comportamento das funções que medem a intensidade das interações não é confirmada, analisando a solução da equação de grupo de renormalização.

4.1 A dimensão de escala.

O desenvolvimento dos métodos funcionais por Schwinger, Jona-Lasinio e outros levou à definição de um objeto no qual todos os processos físicos de uma dada teoria de campos estão incluídos. Esse objeto recebe o nome de ação efetiva¹ Γ . Sua forma é dada por uma

¹A ação efetiva é derivada através de um outro funcional denominado funcional gerador das funções de Green que por sua vez é calculado a partir da Lagrangiana do modelo.

expansão nas diversas combinações de campos clássicos presentes num sistema. Para o modelo (3.7), ela tem a seguinte expressão:

$$\Gamma = \sum_{m,n=0} \frac{1}{m!(n!)^2} \int \dots dx_n \dots dy_n \dots dz_m \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m,2n)}(\dots x_n, \dots y_n, \dots z_m) \dots \varphi(x_n)^\dagger \dots \varphi(y_n) \dots A^{\mu_m}(z_m). \quad (4.1)$$

As funções coeficientes $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m,2n)}$ na expressão acima representam a intensidade da interação da qual participam as partículas representadas pelos $m + 2n$ campos. Elas podem ser calculadas, ordem por ordem, via teoria de perturbação, a partir da união adequada de certos elementos, chamados de vértices e propagadores, extraídos da Lagrangiana que descreve o modelo.

Diagramaticamente uma função $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m,2n)}$ é dada por uma soma infinita de certos gráficos de Feynman de diferentes topologias e números de circuitos fechados denominados loops, que podem ser construídos com os vértices e propagadores da teoria em questão. Somente aqueles gráficos que não podem ser divididos em dois removendo um dos seus propagadores é que compõe essa soma infinita [25]. Gráficos com essa característica são denominados 1PI (*one particle irreducible*). Posto desta forma, as funções coeficientes em (4.1) são a soma de todos os gráficos 1PI que se conectam aos $m + 2n$ campos externos que descrevem as partículas incidentes e resultantes num processo de espalhamento.

Ter o controle das funções coeficientes significa ter o controle do modelo. Isso é válido para qualquer teoria de campos.

Exemplificaremos tudo isso na próxima seção onde lidaremos com os cálculos perturbativos.

Por enquanto, o importante a dizer é que em ordem mais baixa de aproximação, a chamada aproximação de árvore ou em zero loop, a ação efetiva recobre a ação clássica $\Gamma_{(arvore)} = S$. Assim, comparando nesta ordem (4.1) com (3.7) determinamos as $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m,2n)}$ em seus primeiros termos:

$$\Gamma^{(0,2)} = \partial_{x_1} \partial_{y_1} \delta(x_1 - y_1), \quad (4.2)$$

$$\Gamma_{\mu_1}^{(1,2)} = ie[\partial_{y_1 \mu_1} \delta(x_1 - y_1) \delta(x_1 - z_1) - \partial_{x_1 \mu_1} \delta(x_1 - y_1) \delta(y_1 - z_1)], \quad (4.3)$$

$$\Gamma_{\mu_1 \mu_2}^{(2,2)} = 2e^2 g_{\mu_1 \mu_2} \delta(x_1 - y_1) \delta(y_1 - z_1) \delta(z_1 - z_2), \quad (4.4)$$

$$\Gamma_{\mu_1 \mu_2}^{(2,0)} = -\kappa \epsilon_{\mu_1 \rho \mu_2} \partial_{z_2}^\rho \delta(z_1 - z_2), \quad (4.5)$$

e zero para as demais.

Um dos objetivos da teoria de perturbações é, como dissemos, determinar os próximos termos dessas funções.

No último capítulo, vimos que a transformação de dilatação, nos campos $\varphi(x) \rightarrow e^{\alpha d} \varphi(e^\alpha x)$ e $A^\mu \rightarrow e^{\alpha c} A^\mu(e^\alpha x)$ é uma simetria da ação clássica e, portanto, também da ação efetiva na aproximação de árvore, se escolhermos a dimensão de escala d do campo a ser igual a $\frac{1}{2}$ e a dimensão de escala c do campo vetorial como sendo igual a 1. Por sinal, esses dois números coincidem com as dimensões dos respectivos campos no sentido de análise dimensional. Se essa modificação para os campos continuasse a ser uma simetria da ação efetiva plena da teoria quântica ou em uma dada ordem de aproximação, seria então possível descobrir de uma maneira clássica, quero dizer sem considerar os efeitos devidos aos cálculos perturbativos, como as funções $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}$ no espaço dos momentos deveriam escalar. Ou seja, como elas se relacionam quando os momentos externos passam de p para sp . Para descobrir isso, escrevemos (4.1) em termos dos novos campos e funções $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}$ transformadas. Contando que Γ é um adimensional invariante, temos para uma dimensão D arbitrária do espaço-tempo

$$\Gamma = \sum_{m, n=0} \frac{1}{m!(n!)^2} \int \dots dx'_n \dots dy'_n \dots dz'_m \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}(\dots, x_n \dots, y_n \dots, z_m) e^{\alpha f_{mn}} \dots \phi(x'_n) \dots \phi^\dagger(y'_n) \dots A^{\mu_m}(z'_m) \quad (4.6)$$

com $x' = xe^\alpha$ e $f_{mn} = -(m+2n)D + mc + 2nd$. A função $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}$ modificada escrita como uma transformada de Fourier dá

$$\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}(\dots x_n \dots y_n \dots z_m) = \int \dots dp'_{x_n} \dots dp'_{y_n} \dots dq'_m e^{h_{mn}} \tilde{\Gamma}_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}(\dots, p_{x_n} \dots, p_{y_n} \dots, q_m) \quad (4.7)$$

onde $p' = pe^{-\alpha}$ e $h_{mn} = \alpha(m+2n)D + iq'_m z'_m + i(p'_{x_n} x'_n + p'_{y_n} y'_n)$.

Da invariância translacional que significa conservação dos momentos temos

$$\tilde{\Gamma}_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}(\dots, p'_{x_n} e^\alpha \dots, p'_{y_n} \dots, q' e^\alpha) = \delta(\dots + q'_m \dots + (p'_{x_n} + p'_{y_n})) e^{-\alpha D} \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}(\dots, p'_{x_n} e^\alpha, p'_{y_n} e^\alpha, q'_m e^\alpha).$$

Utilizamos no lado direito da expressão acima de uma propriedade da função delta, $\delta(ap) = a^{-1} \delta(p)$.

Se a transformação configura uma invariância de Γ , então deve ser válida a seguinte relação (as linhas foram omitidas):

$$\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}(\dots, sp_{x_n} \dots, sp_{y_n} \dots, sq_m) = s^{D-mc-2nd} \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}(\dots, p_{x_n} \dots, p_{y_n} \dots, q_m) \quad (4.8)$$

com $s = e^\alpha$. Em nosso caso $D = 3$.

A equação (4.8) é a forma com a qual as funções $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}$, chamadas de vértices próprios, deveriam escalar também no nível quântico, se a simetria prevalecesse ali. Com isso, vemos que a invariância clássica significa um comportamento característico para as funções de vértice 1PI dado pela fórmula acima onde $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}$ cresceria com a escala para $2m + 2n < 6$. Para $2m + 2n = 6$, por exemplo a aniquilação partícula - antipartícula em duas partículas de gauge, as funções 1PI não deveriam ser alteradas com a escala de energia. Quando $2m + 2n > 6$ observa-se um decrescimento que tende a zero no limite $s \rightarrow 0$ mostrando uma aproximação da teoria livre.

Veremos posteriormente ao obter $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}(sp, sq)$ através da equação de grupo de renormalização que esta função não apresenta exatamente o comportamento ditado por (4.8). Isso significa que esta simetria não esta sendo preservada no nível quântico onde são calculadas as correções para a teoria clássica.

4.2 As regras de Feynman do modelo e sua renormalização.

Nesta seção, procederemos com o tratamento perturbativo do modelo. Estabeleceremos primeiro as regras de Feynman que possibilitam, de uma forma sistemática, obter as correções quânticas para (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5). Passaremos então a calcular os termos da série perturbativa a fim de extrair os elementos necessários para analisar as propriedades de escala das funções $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}$. É bem conhecido da teoria quântica de campos que certos termos da série perturbativa, não somente para este modelo, são dados por integrais divergentes. Para superar este problema, métodos de renormalização foram criados por Pauli, Villars, Bogoliobov, Parasiuk, Heep, Zimmerman, 't Hooft, Veltman, S. Weinberg e outros. Esses métodos consistem em remover os infinitos das integrais, de uma maneira consistente. Além disso, eles podem dizer se um dado modelo pode ou não ser tratado perturbativamente, fornecendo também os elementos, para os modelos tratáveis chamados renormalizáveis, que permitem estudar o comportamento dos mesmos em certos limites de energia. Utilizaremos o método de regularização dimensional de G. 't Hooft e M. Veltman [27] pela sua simplicidade e também porque constitui uma das principais partes da nosso trabalho verificar que esse método respeita certas relações: as chamadas identidades de Ward, vistas serem válidas na aproximação de árvore.

Como dissemos anteriormente, o campo de Chern-Simons não se propaga no vácuo de modo que seu propagador, o objeto que representa a propagação de um quanta de energia criado em um certo ponto do espaço-tempo até a sua subsequente destruição em um outro ponto do espaço-tempo, não pode ser obtido da mesma maneira que o do campo de Maxwell livre [26]. Assim, somos levados a usar as técnicas de integração funcional

que permitem a extração do propagador de maneira direta. Isso é feito a partir de um, a princípio mal definido, funcional gerador das funções de Green do modelo,

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\varphi^\dagger \mathcal{D}\varphi e^{i \int dx \mathcal{L}_{KGCS}}. \quad (4.9)$$

Como é sabido, devido a ação ser invariante sobre as transformações de gauge $\varphi(x) \rightarrow e^{i\Lambda(x)}\varphi(x)$, $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x)$ a expressão (4.9) é infinita pois existem integrações nos campos vetoriais conectados uns aos outros e que não modificam o integrando. Isso é uma característica comum a todas as teorias de gauge. O problema foi resolvido com o trabalho de Faddeev e Popov onde fora proposto um funcional gerador equivalente mas com a liberdade de gauge, e portanto a parte infinita, removida através de um termo de fixação de gauge. O preço pago por isso é que campos fantasmas, que não estavam presentes originalmente na Lagrangiana, surgem e podem se acoplar aos campos já existentes.

Quando o método de Faddeev-Popov é aplicado a \mathcal{L}_{KGCS} com um termo de fixação de gauge tipo Lorentz $\frac{1}{2\xi}\partial_\mu A^\mu$, o funcional gerador (4.9) é substituído por:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}c^\dagger \mathcal{D}c \mathcal{D}\varphi^\dagger \mathcal{D}\varphi e^{i \int dx [\mathcal{L}_{KGCS} + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \partial_\mu c^\dagger \partial^\mu c]}. \quad (4.10)$$

Essa expressão final mostra que os campos fantasmas c^\dagger e c não se acoplam a nenhum campo de modo que as integrações correspondentes podem ser absorvidas num fator de normalização.

Os propagadores são então definidos como sendo o inverso da parte quadrática dos campos que estão no expoente do integrando em (4.10). Mais precisamente eles são soluções das equações,

$$\partial_\mu \partial^\mu \Delta_F(x-y) = -i\delta(x-y) \quad e \quad (4.11)$$

$$[\epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_x^\nu - \frac{1}{\xi} \partial_\mu^x \partial_\rho^x] \Delta_F^{\rho\sigma}(x-y) = -i\delta_\mu^\sigma \delta(x-y) \quad (4.12)$$

para o campo escalar e vetorial respectivamente.

As soluções destas equações são obtidas com o auxílio da transformada de Fourier. Para a primeira delas, a solução é escrita imediatamente como uma integral da forma

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{-ik(x-y)} \frac{i}{k^2 + i\eta}. \quad (4.13)$$

A parte imaginária $+i\eta$, com η sendo um número real positivo, no numerador do integrando em (4.13), é uma prescrição adotada para contornar os pólos no integrando, sendo

equivalente às condições de contorno que fazem $\Delta_F(x-y)$ representar a propagação de uma partícula de energia positiva indo da posição y até a posição x do espaço tempo com $x_0 > y_0$, e de uma partícula de energia negativa, interpretada como anti-partícula, indo da posição x até y com $y_0 > x_0$. Para a equação (4.12), escrevemos a solução como um ansatz da forma,

$$\Delta_F^{\rho\sigma}(x-y) = \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{-ik(x-y)} \tilde{\Delta}^{\rho\sigma}(k) \quad (4.14)$$

onde $\tilde{\Delta}^{\rho\sigma}(k) = A\epsilon^{\rho\alpha\sigma}k_\alpha + Bk^\rho k^\sigma$. A e B são determinados substituindo (4.14) em (4.12). Fazendo isso encontramos a solução para o propagador do campo vetorial,

$$\Delta_F^{\rho\sigma}(x-y) = \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{-ik(x-y)} \left[\epsilon^{\rho\sigma\alpha} \frac{k_\alpha}{k^2 + i\eta} - i\xi \frac{k^\rho k^\sigma}{[k^2 + i\eta]^2} \right]. \quad (4.15)$$

Estaremos adotando também o gauge de Landau, tomando o limite $\xi \rightarrow 0$, eliminando o último termo entre colchetes em (4.15). Essa prescrição é adotada na eletrodinâmica quântica.

Existe um resultado na literatura [9] mostrando que os gauges de Landau e de Coulomb, esse último sendo usado como uma condição subsidiária no capítulo anterior, são equivalentes no sentido que a matriz \mathcal{S} de espalhamento independe da escolha feita.

Os vértices desta teoria, que representam a intensidade com que os campos interagem, podem ser extraídos, como dissemos antes, da ação efetiva na aproximação de árvore. Essas funções de vértice são usualmente dadas no espaço dos momentos, desde que os cálculos perturbativos são também realizados neste mesmo espaço. A primeira delas corresponde ao acoplamento trilinear cuja parte na ação efetiva é escrita no espaço dos momentos como

$$\int dx dy dz \Gamma_\mu^{(1,2)} \varphi^\dagger(x) \varphi(y) A^\mu(z) = -i \int \frac{dq dl dk}{(2\pi)^6} \delta(q+l+k) \Gamma_\mu(l, q) \tilde{\varphi}^\dagger(q) \tilde{\varphi}(l) \tilde{A}^\mu(k). \quad (4.16)$$

Com $\Gamma_\mu(l, q) = -ie(l-q)_\mu$ sendo a função de vértice trilinear. Vale a pena notar no lado direito da expressão (4.16) que apenas duas das três variáveis de integração são independentes por causa da função delta de conservação de momento e energia. Isso vai de encontro ao mais primitivo conceito que, por exemplo, num processo onde duas partículas reagem resultando numa terceira, o momento e a energia dessa última são funções das mesmas quantidades iniciais das partículas reagentes. E a ação efetiva é a soma sobre todas as possibilidades de configurações de momentos possíveis para os campos do processo vezes a função que mede a intensidade com que estes interagem. Repetindo essa análise para o termo quadrilinear determina-se então $\Gamma_{\mu\nu} = ie^2 g_{\mu\nu}$ como sendo a função de vértice quadrilinear.

Antes de estabelecer a representação gráfica dos propagadores e vértices que possibilitam determinar de uma maneira sistemática as próximas contribuições para as funções $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}$ de $m + 2n$ pontos, precisamos novamente dizer que essas correções são divergentes. Para sanar esse problema utilizando a teoria de renormalização, desenvolvida durante o final da década de 60 e o início da década de 70, fora criada a idéia que a Lagrangiana inicial da teoria está definida em termos de funções, ditas não renormalizadas e onde os infinitos podem ser absorvidos. Isso é usualmente representado com um subscrito zero em todos os parâmetros e campos do modelo,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi_0^\dagger \partial^\mu \varphi_0 + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} A_0^\mu \partial^\nu A_0^\rho - ie_0 (\varphi_0^\dagger \partial_\mu \varphi_0 - \partial_\mu \varphi_0^\dagger \varphi_0) A_0^\mu + e_0^2 \varphi_0^\dagger \varphi_0 A_0^\mu A_{\mu 0}. \quad (4.17)$$

Note que o parâmetro κ do campo de Chern-Simons foi posto igual à unidade. Não há problemas em fazer isso, uma vez que ele pode ser absorvido nos campos simplesmente definindo uma nova constante de acoplamento $\frac{e}{\kappa}$. No método de regularização dimensional [27], a Lagrangiana (4.17) é escrita numa dimensão arbitrária em função de campos e parâmetros, sem o subscrito zero, ditos renormalizados mais a adição de termos extras, os chamados contratermos de renormalização, cuja finalidade é eliminar os possíveis infinitos advindos das seguintes ordens de aproximação. Assim, escrevemos (4.17) na forma

$$\mathcal{L} = (1 + A) \partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} (1 + B) \epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho - ie \mu^{\frac{\epsilon}{2}} (1 + C) A^\mu (\varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - \partial_\mu \varphi^\dagger \varphi) + e^2 \mu^\epsilon (1 + E) A^\mu A_\mu \varphi^\dagger \varphi. \quad (4.18)$$

Os coeficientes A , B , C e E dos contratermos serão escolhidos, como veremos adiante, de modo a cancelar eventuais infinitos que podem surgir nos cálculos perturbativos. μ é um parâmetro com dimensão de massa e que mantém a carga e adimensional. E $\epsilon = 3 - D$, com D sendo a dimensão do espaço tempo, é a potência necessária para que a ação, $S = \int d^D x \mathcal{L}$, permaneça também adimensional. Com essas definições, a expressão (4.18) parece ambígua, porque o tensor $\epsilon_{\mu\nu\rho}$, e conseqüentemente o campo de Chern-Simons, não pode ser estendido para qualquer espaço, mas somente para aqueles com um número ímpar de dimensões. Esse não é um problema que traz maiores conseqüências uma vez que quando o limite $\epsilon \rightarrow 0$ é tomado os resultados dos cálculos perturbativos mostram-se em acórdância com [15] onde outro método de renormalização, BPHZ modificado, foi usado. Comparando (4.17) com (4.18) vemos que as quantidades renormalizadas e não renormalizadas relacionam-se da seguinte forma:

$$\varphi_0 = (1 + A)^{\frac{1}{2}} \varphi = Z_\varphi^{\frac{1}{2}} \varphi \quad (4.19)$$

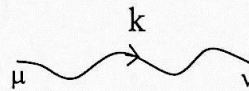
$$A_0^\mu = (1 + B)^{\frac{1}{2}} A^\mu = Z_A^{\frac{1}{2}} A^\mu \quad (4.20)$$

$$e_0 = e\mu^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{(1+C)}{(1+A)(1+B)^{\frac{1}{2}}} = e\mu^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{(1+C)}{Z_\varphi Z_A^{\frac{1}{2}}} \quad (4.21)$$

$$e_0^2 = e^2 \mu^\epsilon \frac{(1+E)}{Z_\varphi Z_A}. \quad (4.22)$$

Essas relações serão importantes, quando estudarmos as propriedades de escala das funções $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}$ renormalizadas.

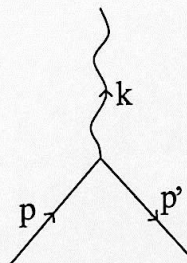
Com essas antecipações, estabelecemos a representação gráfica dos propagadores e vértices que constituem as regras de Feynman a serem utilizadas para proceder com os cálculos perturbativos em dimensão arbitrária. Para fazer isso, é preciso apenas substituir o parâmetro e por $e\mu^{\frac{\epsilon}{2}}$, dando as funções que medem a intensidade do acoplamento campos a dimensão correta. A representação será então:



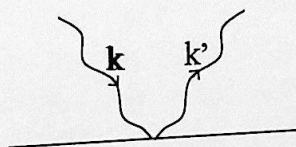
$$= \epsilon^{\mu\nu\rho} \frac{k_\rho}{k^2 + i\eta}$$



$$= \frac{i}{p^2 + i\eta}$$



$$= -ie\mu^{\epsilon/2} (p+p')^\mu$$



$$= ie^2 \mu^\epsilon g^{\mu\nu}$$

x fator combinatorial



Essas regras são iguais àsquelas da eletrodinâmica escalar, sem o termo de massa na Lagrangiana, exceto pelo propagador do campo de gauge cuja característica deve-se aos modelos com acoplamento ao campo de Maxwell, que tem propagador proporcional ao inverso do quadrado do momento.

As funções $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}$ de $m + 2n$ pontos são, na teoria de perturbações, dadas por uma soma infinita de todos os diagramas irreduzíveis que se podem formar com a união adequada de propagadores e vértices. Tal soma é entendida como uma expansão no número de loops, isso é, no número de circuitos fechados por onde fluem os momentos que não entram e nem saem dos diagramas. Esses são os chamados momentos de integração.

A função de dois pontos, $\Gamma^{(0,2)}$ é então representada diagramaticamente como uma soma sobre todas as tais figuras que se pode formar com as regras de Feynman.

$$\Gamma^{(0,2)}(p) = -[\text{---}]^{-1} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots$$

Como fora dito, diagramas a partir do segundo termo, considerados como sendo as correções quânticas, da expansão acima podem conter infinitos de modo que a série pode vir a ser divergente. A maneira de contornar o problema, é redefinir o primeiro termo da série como $ip^2(1 + A)$ com A sendo escolhido de forma conveniente para tornar finita aquela função. Isso corresponde à idéia de reparametrização expressa em (4.17) e (4.18).

Quando os infinitos das funções $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}$ de um modelo podem ser eliminados através de um número finito de contratermos, diz-se que este modelo é renormalizável. Em outras palavras, modelos que podem ser renormalizados são aqueles que possuem um número finito de funções divergentes de vértice primitivo. Durante o processo de renormalização, pode ocorrer que termos que não estavam presentes na Lagrangiana de partida precisem ser introduzidos, gerando com isso novos vértices primitivos de interação na aproximação de árvore e, conseqüentemente, dando ao modelo mais parâmetros. Esses são os chamados termos induzidos por renormalização. Obviamente eles devem também ser finitos em número. A Lagrangiana (4.17) é um dos modelos renormalizáveis em teoria quântica de campos.

Outro ponto importante é que existem relações entre as funções $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}$ que já são verificadas na aproximação de árvore. Essas relações são deduzidas formalmente a partir de certas simetrias, que, por sua vez, estão fortemente ligadas a princípios de conservação, e recebem o nome de identidades de Ward. Dentre elas, destacam-se aquelas provenientes da simetria de gauge, refletindo a conservação da corrente de carga elétrica. A primeira delas relaciona as funções de dois e três pontos de acordo com:

$$k^\mu \Gamma_\mu(p + k, p) = -e\mu^{\frac{\epsilon}{2}} [\Gamma^{(0,2)}(p + k) - \Gamma^{(0,2)}(p)] \quad \text{ou}$$

$$-ie\mu^{\frac{\epsilon}{2}}k^\mu(2p+k)_\mu = -e\mu^{\frac{\epsilon}{2}}[i(p+k)^2 - ip^2]. \quad (4.23)$$

A segunda delas tem a mesma forma, mas relacionando as funções de três e quatro pontos,

$$l^\mu\Gamma_{\mu\nu}(k, l, p) = -e\mu^{\frac{\epsilon}{2}}[\Gamma_\nu(p+l, p+k+l) - \Gamma_\nu(p, p+k)] \quad \text{ou}$$

$$2ie^2\mu^\epsilon l^\mu g_{\mu\nu} = -e\mu^{\frac{\epsilon}{2}}[-ie\mu^{\frac{\epsilon}{2}}(2p+2l+k)_\nu + ie\mu^{\frac{\epsilon}{2}}(2p+k)_\nu]. \quad (4.24)$$

Deseja-se que essas identidades sejam também válidas para uma ordem qualquer de aproximação. Por isso, deve-se ter um método de cálculo que preserve as identidades de Ward, para realizar o cômputo das quantidades de interesse. O método de G.'t Hooft e M. Veltman [27] tem apresentado bastante sucesso para as teorias da eletrodinâmica quântica e do campo escalar complexo acoplado minimamente ao campo de Maxwell. Uma de suas principais virtudes é definir a parte divergente das integrais de uma maneira unívoca de modo que os infinitos quando cancelados pelos contratermos de renormalização, deixam as funções $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}$ finitas também univocamente definidas. E isso é crucial na verificação da identidades. Como advertido pelos seus autores, o método pode falhar na verificação de identidades de Ward que envolvem o tensor $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ dando origem a anomalias. Embora, em (4.23) e (4.24) do modelo em questão, não apareça explicitamente este tensor, ele está presente no propagador do campo de gauge estando, portanto, implícito nelas.

Um dos propósitos do nosso trabalho é verificar se o método de regularização dimensional [27] preserva as identidades (4.23) e (4.24) no que se refere a parte infinita dos diagramas, até a ordem de aproximação de dois loops. Em [14], foi verificado essa validade delas para apenas uma classe de diagramas que compõe as funções de dois, três e quatro pontos. Nós analisaremos todos os diagramas de Feynman possíveis que contribuem para a ordem de aproximação considerada, verificando explicitamente a validade de tais identidades.

Uma informação bem conhecida que pode ser extraída de (4.23) e (4.24) é que se o método de renormalização utilizado as respeita, é possível relacionar os coeficientes dos contratermos de renormalização de uma maneira trivial. Seguindo a notação preestabelecida, daqui em diante as funções $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}$ sem o subscrito zero serão entendidas como sendo aquelas que incluem os coeficientes dos contratermos e, portanto finitas e ditas renormalizadas. Voltando para a ação efetiva (4.1) e escrevendo os campos renormalizados em termos dos não renormalizados, e concentrando-nos, por enquanto, nas funções de dois e três pontos, estabelece-se as relações, determinando as correspondentes não renormalizadas, com subscrito zero:

$$\Gamma_0^{(0,2)} = Z_\varphi^{-1}\Gamma^{(0,2)} \quad (4.25)$$

$$\Gamma_{\mu 0}^{(1,2)} = Z_\varphi^{-1}Z_A^{-\frac{1}{2}}\Gamma_\mu^{(1,2)}. \quad (4.26)$$

Escrevendo (4.23) usando (4.26) e (4.26) deduz-se outra relação entre a carga renormalizada e não renormalizada

$$k^\mu \Gamma_{\mu 0}(p+k, p) = -\frac{e\mu^{\frac{\epsilon}{2}}}{Z_A^{\frac{1}{2}}} [\Gamma^{(0,2)}(p+k) - \Gamma^{(0,2)}(p)] \quad \text{ou}$$

$$e_0 = \frac{e\mu^{\frac{\epsilon}{2}}}{Z_A^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.27)$$

Comparando isso com (4.22) descobre-se a relação $Z_\varphi = 1 + C$. Donde conclui-se imediatamente que $A = C$. Agora quadrando (4.22) e utilizando dessa última igualdade, de (4.22) conclui-se também que $Z_\varphi = 1 + E$ e, portanto, $A = C = E$. Essa informação é de grande importância, pois muitos cálculos podem ser evitados se o método de renormalização adotado preservar as identidades de Ward.

4.2.1 A análise diagramática do modelo

Procederemos agora com a análise gráfica, baseados na regras de Feynman apresentadas anteriormente, para as funções de interesse. Estaremos interessados em nosso trabalho, apenas nos diagramas que possuem infinitos, pois além de nos permitir verificar a validade das identidades de Ward para a parte infinita das funções de vértice, eles também determinam os coeficientes dos contratermos de renormalização que serão necessários na próxima seção onde lidaremos com o grupo de renormalização.

Mostraremos como são realizados os cálculos via método de regularização dimensional tratando primeiramente da função de dois pontos $\Gamma_{\mu\nu}^{(2,0)}(p)$. Sua expansão diagramática até a ordem de dois loops que corresponde também a aproximação de e^4 na constante de acoplamento é,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{(2,0)}(p) = [\text{wavy line}] \Gamma^{(1+B)} + \text{diagram } P_{\mu\nu}^2 + \text{diagram } P_{\mu\nu}^3 + \text{diagram } P_{\mu\nu}^4 + \text{diagram } P_{\mu\nu}^5 + \text{diagram } P_{\mu\nu}^6 + \text{diagram } P_{\mu\nu}^7 + \text{diagram } P_{\mu\nu}^8 + \text{diagram } P_{\mu\nu}^9 + \text{diagram } P_{\mu\nu}^{10} + \text{diagram } P_{\mu\nu}^{11} + \dots$$

As correções quânticas acima são comumente chamadas de tensores de polarização do vácuo. O segundo termo, $P_{\mu\nu}^2$ desta expansão é a primeira correção quântica constituída

por um único vértice quadrilinear. Esta figura representa a integral, de um loop, sobre o momento k que circula no circuito fechado. De acordo com as regras estabelecidas, este diagrama equivale à seguinte integral:

$$\mathbf{P2}_{\mu\nu} = ie^2 \mu^\varepsilon g_{\mu\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i}{k^2 + i\eta}. \quad (4.28)$$

Para calcular essa integral lançamos mão das fórmulas do **apêndice B** que fornece as integrais regularizadas dimensionalmente, no espaço de Minkowisk, a serem utilizadas no método. Fazendo isso encontra-se o resultado,

$$\mathbf{P2}_{\mu\nu} = ie^2 \mu^\varepsilon g_{\mu\nu} \frac{1}{2^D} \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{[-i\eta]^{-\frac{D}{2}}} = 0. \quad (4.29)$$

Desde que o limite $\eta \rightarrow 0$ é sempre tomado no final. Esse resultado parece absurdo já que quando $D = 3$ a integral é linearmente divergente. Mas isso deve ser considerado como resultado da aplicação do método e, uma de suas características.

A informação contida em (4.29) será de grande utilidade pois os diagramas contendo $\mathbf{P2}_{\mu\nu}$ como um subdiagrama terão, em razão do fato acima, seus cálculos evitados.

Concentremo-nos agora no terceiro termo, $\mathbf{P3}_{\mu\nu}$, que também é uma das primeiras correções quânticas a serem consideradas. Este equivale a seguinte integral:

$$\mathbf{P3}_{\mu\nu} = -2[-ie\mu^{\frac{\varepsilon}{2}}]^2 \frac{1}{2!} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2k+p)_\mu (2k+p)_\nu}{(k+p)^2 k^2}. \quad (4.30)$$

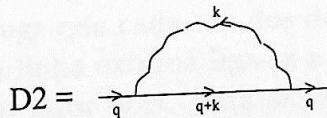
A parte imaginária $i\eta$ está subentendida em cada um dos denominadores do integrando. O fator dois multiplicando a integral vem da contagem de possibilidades que se tem para formar esta mesma figura utilizando os dois vértices trilineares que a compõe. Esta contagem é feita empregando o seguinte raciocínio: uma das duas linhas externas, que representam campo de gauge externo de entrada ou saída, pode ligar-se a qualquer um dos dois vértices trilineares que possuem uma linha de gauge cada, dando fator dois. A outra linha externa deve ligar-se com a linha de gauge do vértice restante, dando fator um. Para as linhas internas, respeitando a conservação de corrente, só existe uma maneira para ligá-las, dando fator um. Multiplicando tudo isso tem-se o fator 2. O fator $\frac{1}{2!}$ vem da ordem no número de vértices pois temos dois trilineares. Assim multiplicando esse dois números determina-se o fator combinatorial um para o diagrama. A solução da integral

é obtida reduzindo primeiro o denominador do integrando com auxílio das integrais dos parâmetros de Feynman (B.4), expostas no **apêndice B**, para depois fazer uso das integrais regularizadas. Fazendo isso teremos,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P3}_{\mu\nu} &= -\frac{[-ie\mu^{\frac{\epsilon}{2}}]^2}{(2\pi)^D} \int d^D k \int_0^1 dx \frac{(2k+p)_\mu(2k+p)_\nu}{[k^2 + 2kp(1-x) + p^2(1-x)]^2} \\
 &= \frac{ie^2\mu^\epsilon}{2^D\pi^{\frac{D}{2}}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-D/2)}{[-p^2x(1-x)]^{2-\frac{D}{2}}} [p_\mu p_\nu(1-4x+4x^2) + \frac{2g_{\mu\nu}p^2}{1-D/2}x(1-x)] \\
 &= \frac{e^2\mu^\epsilon}{2^4} \frac{[p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}p^2]}{[p^2]^{2-D/2}}. \tag{4.31}
 \end{aligned}$$

Na passagem da penúltima para a última linha, utilizou-se para resolver a integral em x a fórmula (B.5) e também foi tomado, por conveniência, o limite $\epsilon \rightarrow 0$ nos fatores numéricos. Deve ser notado que o resultado final é finito embora a integral de partida (4.31), por contagem de potências, fosse linearmente divergente. Isso é uma outra propriedade do método, que faz com que todas os diagramas de um loop se tornem finitos em espaço de dimensões ímpar. A razão disso, vem do fato de se ter no argumento da função gama, nas integrais regularizadas, um número semi-inteiro, fazendo com que a mesma esteja fora de seus pólos que compreendem todos os números inteiros negativos e o zero. Assim teremos de nos preocupar somente com os diagramas de dois loops.

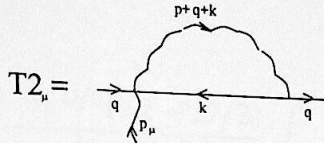
Passemos então a analisar os diagramas de dois loops. O termo seguinte, $\mathbf{P4}_{\mu\nu}$, é composto por duas integrações disjuntas sendo, portanto finito. De fato, como pode ser visto diretamente em sua expressão, ele é nulo. Os termos $\mathbf{P5}_{\mu\nu}$ e $\mathbf{P6}_{\mu\nu}$ possuem em suas composições o subdiagrama **D2** nulo,



$$\mathbf{D2} = [ie\mu^{\frac{\epsilon}{2}}]^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i(2q+k)_\alpha \epsilon^{\beta\alpha\rho} k_\rho (2q+k)_\beta}{(q+k)^2 k^2} = 0 \tag{4.32}$$

devido ao tensor $\epsilon^{\beta\alpha\rho}$ ser anti-simétrico.

Quanto a $\mathbf{P7}_{\mu\nu}^0$ e $\mathbf{P8}_{\mu\nu}^0$, esses também possuem um subdiagrama, $\mathbf{T2}_\mu^0$ nulo.



$$\begin{aligned}
 \mathbf{T2}_\mu &= ie^3 \mu^{\frac{3\epsilon}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{g_{\mu\beta} \epsilon^{\beta\alpha\rho} (p+q+k)_\rho (p+q-k)_\alpha}{k^2 (p+q+k)^2} \\
 &= -\frac{2ie^3 \mu^{\frac{3\epsilon}{2}} \epsilon_\mu^{\alpha\rho}}{(2\pi)^D} \int d^D k \int_0^1 dx \frac{(p+q)_\rho k_\alpha}{[k^2 + 2k(p+k)(1-x) + (p+q)^2(1-x)]^2} \\
 &= -\frac{e^3 \mu^{\frac{3\epsilon}{2}} \epsilon_\mu^{\alpha\rho}}{4\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 dx \frac{(p+q)_\rho (p+q)_\alpha}{[-(p+q)^2(1-x)]^{2-D/2}} = 0. \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

Fazendo com que $\mathbf{P7}_{\mu\nu}$ e $\mathbf{P8}_{\mu\nu}$ não contribuam. O diagrama $\mathbf{P9}_{\mu\nu}$ pode, como em $\mathbf{P4}_{\mu\nu}$, ser considerado como o produto de duas integrações disjuntas, sendo portanto finito. Para $\mathbf{P10}_{\mu\nu}$, temos a seguinte integral, linearmente divergente,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P10}_{\mu\nu} &= \frac{8}{2!} [ie^2 \mu^\epsilon]^2 \int \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} \frac{ig_{\mu\beta}}{(q+k)^2} \frac{\epsilon^{\beta\alpha\rho} k_\rho}{k^2} \frac{ig_{\alpha\nu}}{(q+p)^2} \\
 &= 4 \frac{e^4 \mu^{2\epsilon} \epsilon_{\mu\nu\rho}}{(2\pi)^D} \int d^D q d^D k \frac{k^\rho}{(q+k)^2 k^2 (q+p)^2}. \tag{4.34}
 \end{aligned}$$

O fator combinatorial vem da contagem: uma das linha externas pode ligar-se a qualquer uma das duas linhas de gauge que cada um dos dois vértices quadrilineares possui, dando um fator quatro. A outra linha externa liga-se a qualquer uma das duas linhas de gauge do vértice restante, dando fator dois. Para as linhas internas há uma única possibilidade de se conectarem umas às outras, dando fator um. Multiplicando tudo isso e dividindo por $0!2!$ que vem da ordem no número de vértices, nenhum trilinear e dois quadrilineares, obtém-se o fator combinatorial quatro. Fazendo primeiro a integral sobre k , a qual denotaremos por $I(q)$, teremos:

$$I^\rho(q) = \int d^D k \frac{k^\rho}{(q+k)^2 k^2} = \int d^D k k^\rho \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 + 2kq(1-x) + q^2(1-x)]^2}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i\pi^{D/2}\Gamma(2-D/2)}{[-q^2]^{2-D/2}} \int_0^1 dx x^{-2+D/2}(1-x)^{-1+D/2} \\
&= -i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(2-D/2)\Gamma(-1+D/2)\Gamma(D/2)}{\Gamma(-1+D)} \frac{q^\rho}{[-q^2]^{2-D/2}}. \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Substituindo $I^\rho(q)$ em (4.34) para então fazer a integração sobre q ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P10}_{\mu\nu} &= -4 \frac{ie^4 \mu^{2\varepsilon}}{2^{2D} \pi^{5D/2}} \frac{\Gamma(2-D/2)\Gamma(-1+D/2)\Gamma(D/2)}{\Gamma(-1+D)[-1]^{2-D/2}} \int d^D q \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho} q^\rho}{[q^2]^{2-D/2}(q+p)^2} \\
&= 4 \frac{i^{8-D} e^4 \mu^{2\varepsilon} \epsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho}{2^{2D} \pi^D [-1]^{2-D/2} [-p]^{3-D}} \frac{\Gamma(3-D)\Gamma^2(-1+D/2)\Gamma(D/2)}{\Gamma(-2+3D/2)} \\
&= 4 \frac{e^4 \epsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho}{(2^2 \pi)^3} \left[\frac{\mu^2}{4\pi p^2} \right]^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \frac{\Gamma^2(1/2 - \varepsilon/2)}{\frac{3}{2} - \frac{\varepsilon}{2}}. \quad (4.36)
\end{aligned}$$

Para obter $\mathbf{P10}_{\mu\nu}$ no limite $\varepsilon \rightarrow 0$, é preciso expandir todos os fatores com dependência em ε . Utilizando a expansão $[\frac{\mu^2}{4\pi p^2}]^\varepsilon = e^{\varepsilon \ln[\frac{\mu^2}{4\pi p^2}]} = 1 + \varepsilon \ln[\mu^2/4\pi p^2] + \mathcal{O}[\varepsilon^2]$, (B.7) para extrair o pólo de $\Gamma(\varepsilon)$ e (B.9) para $\Gamma(1/2 - \varepsilon/2)$, determina-se:

$$\mathbf{P10}_{\mu\nu} = 4 \frac{e^4 \epsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho}{96\pi^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln\left[\frac{\mu^2}{4\pi p^2}\right] + 2\ln 2 + \frac{4}{3} \right]. \quad (4.37)$$

A parte infinita está sendo representada pelo termo singular $1/\varepsilon$. Vemos, neste resultado, a presença de um fator com a forma $\ln[\frac{\mu^2}{p^2}]$. Isso é uma característica que se reflete, em geral, em todos os diagramas divergentes. Assim, para que se tenha uma teoria de perturbações aceitável exige que o parâmetro μ seja da mesma ordem do momento de entrada p . A escala de energia do processo é então definida com a escolha desse parâmetro. O comportamento com a mudança de escala de energia das funções $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}$ renormalizadas está então relacionado com a maneira na qual estas funções variam com μ .

Daqui em diante, não estaremos mais preocupados com a parte finita dos diagramas, de modo que faremos $D = 3$ onde for possível. No entanto, deve sempre ser subentendido

nas linhas que seguem, uma parte livre de infinitos e dependente dos vários parâmetros que compõe os diagramas. Resta agora calcular $\mathbf{P11}_{\mu\nu}$. Sua expressão é,

$$\begin{aligned} \mathbf{P11}_{\mu\nu} &= [ie\mu^{\frac{\epsilon}{2}}]^4 \int \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} \frac{i(2k+2q+p)_\mu i(2p+2k+q)_\beta i\epsilon^{\beta\alpha\rho} q_\rho i(2k+p)_\nu}{(k+q)^2(p+k+q)^2(p+k)^2} \frac{1}{q^2} \frac{1}{k^2} (2k+q)_\alpha \\ &= \frac{e^4 \mu^{\frac{\epsilon}{2}} \epsilon^{\beta\alpha\rho} p_\beta}{2^4 \pi^6} \int d^D q d^D k \frac{(2k+2q+p)_\mu q_\rho (2k+p)_\nu k_\alpha}{(k+q)^2(p+k+q)^2(p+k)^2 q^2 k^2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Para fazer esta integral, realizamos primeiro a integração em q ,

$$\begin{aligned} I_{\mu\rho}(k,p) &= \int d^D q \frac{(2k+2q+p)_\mu q_\rho}{(k+q)^2(p+k+q)^2 q^2} \\ &= \int d^D q \frac{(2k+2q+p)_\mu q_\rho}{(p+k+q)^2} \int_0^1 dx \frac{1}{[q^2 + 2kq(1-x) + k^2(1-x)]^2} \\ &= \int d^D q \int_0^1 dx dy \frac{2y(2k+2q+p)_\mu q_\rho}{[q^2 + 2q(k(1-xy) + p(1-x)) + (p+k)^2(1-y) + k^2(1-x)y]^3} \\ &= \int_0^1 dx dy \frac{-i\pi^2 y}{2[a^2 - b]^{3-D/2}} [-(2k+p)_\mu a_\rho + 2a_\mu a_\rho - 2g_{\mu\rho}(a^2 - b)] \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde, $a_\mu = k_\mu(1-xy) + p_\mu(1-y)$ e $b = (p+k)^2(1-y) + k^2(1-x)y$. Substituindo $I_{\mu\rho}(k,q)$ em (4.38) e usando a identidade $\epsilon^{\beta\alpha\rho} p_\beta k_\alpha a_\rho = 0$ tem-se que,

$$\mathbf{P11}_{\mu\nu} = \frac{ie^4 \mu^{2\epsilon} \epsilon^{\beta\alpha} p_\beta}{2^4 \pi^4} \int_0^1 dx dy y \int d^D k \frac{(2k+p)_\nu k_\alpha}{(p+k)^2 k^2 [a^2 - b]^{2-D/2}}.$$

Para facilitar as manipulações, passaremos a escrever $a^2 - b = L[k^2 + 2kpM + p^2N]$ com,

$$L = -(1-xy)xy \quad M = -\frac{(1-y)xy}{L} \quad N = -\frac{(1-y)y}{L}. \quad (4.40)$$

Assim,

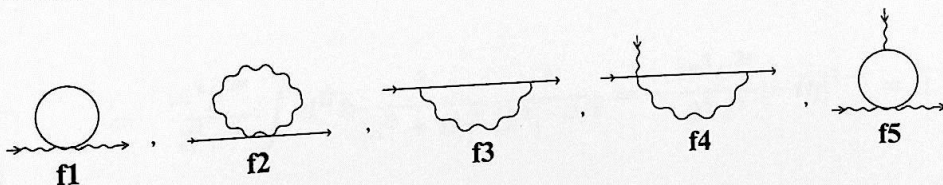
$$\mathbf{P11}_{\mu\nu} = \frac{ie^4 \mu^{2\epsilon} \epsilon^{\beta\alpha} p_\beta}{2^4 \pi^4} \int_0^1 \frac{dx dy y}{L^{2-D/2}} \int d^D k \frac{(2k+p)_\nu k_\alpha}{(p+k)^2 k^2 [k^2 + 2kpM + p^2N]^{2-D/2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3ie^4 \mu^{2\varepsilon} \epsilon^{\beta\alpha} \mu p^\beta}{2^6 \pi^4} \int d^D k \int_0^1 \frac{dx dy dz dw}{L^{2-D/2}} \frac{yz^{1-D/2} w^{2-D/2} (2k+p)_\nu k_\alpha}{[k^2 + 2kp(Mzw + 1 - w) + p^2(Nzw + 1 - w)]^{4-D/2}} \\
&= \frac{ie^4 \mu^{2\varepsilon} \epsilon_{\beta\nu\mu} p^\beta}{2^4 \pi^3} \int_0^1 \frac{dx dy dz dw}{L^{2-D/2}} \frac{yz^{1-D/2} w^{2-D/2}}{[p^2((Mzw + 1 - w)^2 - Nzw - 1 + w)]^\varepsilon} \Gamma(\varepsilon) \\
&= \frac{ie^4 \epsilon_{\beta\nu\mu} p^\beta}{2^4 \pi^3} \int_0^1 dx dy dz dw \frac{yz^{1-D/2} w^{2-D/2}}{L^{2-D/2}} \frac{1}{\varepsilon} \\
\mathbf{P11}_{\mu\nu} &= \frac{e^4 \epsilon_{\beta\nu\mu} p^\beta}{24\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + \text{finito}. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Na passagem da última para a penúltima linha, tomamos o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ e utilizamos o resultado (B.6), $\int_0^1 dx dy \frac{y}{L^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2i}$, provado no **apêndice B**. Note que a parte infinita de $\mathbf{P11}_{\mu\nu}$ em (4.42) cancela-se com a parte infinita de $\mathbf{P10}_{\mu\nu}$ em (4.37), fazendo com que o coeficiente B do contratermo de renormalização do termo de Chern-Simons em (4.18) seja, por consequência disso, finito. De fato, desde que estaremos utilizando o esquema de subtração mínima de G. 't Hooft e S. Weinberg, que prescreve a escolha dos coeficientes dos contratermos para eliminar apenas a parte infinita das funções de vértice, teremos $B = 0$.

Esse resultado é conhecido como uma extensão do teorema de Coleman-Hill que mostra que o Campo de Chern-Simons acoplado a campos com termos de massa na Lagrangiana, não precisa de renormalização infinita. (4.42) e (4.37) concordam com [14] no que concerne a infinitos.

Passemos, então, a analisar a função de dois pontos $\Gamma^{(0,2)}(p)$. A discussão anterior simplificará bastante o nosso trabalho daqui em diante. Antes de escrever a expansão colecionemos um conjunto de diagramas nulos:



estaria contribuindo. Já que teríamos, neste caso, o valor do pólo do propagador do campo escalar deslocado do zero, de modo que o denominador de $\mathbf{P3}_{\mu\nu}$ em (4.31) seria substituído por, $p^2 \rightarrow p^2 - m^2$ o que tornaria $\mathbf{D11}$ diferente de zero. O mesmo aconteceria com outros diagramas que, por força do limite $\eta \rightarrow 0$, são nulos.

O próximo diagrama $\mathbf{D12}$ tem sua expressão escrita de uma forma simplificada,

$$\mathbf{D12} = 2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{i}{q^2} \mathbf{M}(p+q). \quad (4.43)$$

Com $\mathbf{M}(p+q)$ sendo a integral sobre o momento que circula nas linhas de gauge,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(p+q) &= [ie^2 \mu^\epsilon]^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} g_{\alpha\gamma} \frac{\epsilon^{\beta\delta\rho} k_\rho}{k^2} g_{\beta\delta} \frac{\epsilon^{\gamma\delta\nu} (k+p+q)_\nu}{(k+p+q)^2} \\ &= \frac{e^4 \mu^{2\epsilon}}{2^2 \pi^3} \int d^D k \left[\frac{1}{(k+p+q)^2} + \frac{k_\nu (p+q)^\nu}{k^2 (k+p+q)^2} \right] \\ &= \frac{e^4 \mu^{2\epsilon}}{2^2 \pi^3} \int_0^1 dx \int d^D k \frac{k_\nu (p+q)^\nu}{[k^2 + 2kp(1-x) + (p+q)^2(1-x)]^2} \\ &= \frac{ie^4 \mu^{2\epsilon}}{2^2 \pi} \frac{1}{[-(p+q)^2]^{1-D/2}} \int_0^1 dx x^{-2+D/2} (1-x)^{-1+D/2} \\ &= -\frac{e^4 \mu^{2\epsilon}}{2^3} \frac{1}{[(p+q)^2]^{1-D/2}} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Na segunda linha, usou-se a relação $\epsilon_{\gamma\delta\rho} \epsilon^{\gamma\delta\nu} = 2\delta_\rho^\nu$. Substituindo (4.44) em (4.43),

$$\begin{aligned} \mathbf{D12} &= -\frac{ie^4 \mu^{2\epsilon}}{2^5 \pi^3} \int d^D q \frac{1}{q^2 [(p+q)^2]^{1-D/2}} \\ &= \frac{ie^4 \mu^{2\epsilon}}{2^6 \pi^3} \int_0^1 dx \int d^D q \frac{(1-x)^{-D/2}}{[q^2 + 2qp(1-x) + p^2(1-x)]^{-2+D/2}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{ie^4 \mu^{2\varepsilon} \Gamma(2-D)}{2^6 \pi^2 [-p^2]^{2-D}} \int_0^1 dx x^{-2+D} (1-x)^{-2+D/2} =$$

$$\mathbf{D12} = -\frac{ie^4 p^2}{48\pi^2 \varepsilon} + \text{finito} \quad (4.45)$$

Na passagem da penúltima para a última linha, usamos a propriedade $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.
 Passemos para o termo seguinte **D13**. Este é um diagrama quadraticamente divergente correspondendo à expressão,

$$\begin{aligned} \mathbf{D13} &= [-ie^2 \mu^{\varepsilon/2}]^4 \int \frac{d^D q d^D k}{(2\pi)^{2D}} \frac{i(2q+k)_\alpha i(2p+2k+q)_\delta (2p+2q+k)_\beta i(2p+q)_\gamma}{(p+k)^2 (p+q+k)^2 (p+q)^2} \frac{\epsilon^{\beta\alpha\rho} k_\rho \epsilon^{\gamma\delta\sigma} q_\sigma}{k^2 q^2} \\ &= -\frac{ie^4 \mu^{2\varepsilon}}{2^2 \pi^6} \epsilon^{\beta\alpha\rho} \epsilon^{\gamma\delta\sigma} p_\alpha p_\gamma \int d^D q d^D k \frac{k_\delta k_\rho q_\beta q_\rho}{(p+k)^2 (p+q+k)^2 (p+q)^2 k^2 q^2}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Escolhemos fazer primeiro a integral $I_{\beta\sigma}(k, p)$ em q ,

$$\begin{aligned} I_{\beta\sigma}(k, p) &= \int d^D q \frac{q_\beta q_\rho}{(p+q+k)^2 (p+q) q^2} = \int d^D q q_\beta q_\rho \int_0^1 \frac{2y}{[q^2 + 2qa + b]^3} \\ &= -i\pi^{3/2} \int_0^1 dx dy \frac{y}{[a^2 - b]^{3-D/2}} [a_\beta a_\sigma \Gamma(3-D/2) - \frac{g_{\beta\sigma}}{2} \Gamma(2-D/2) [a^2 - b]] \\ &= -\frac{i\pi^2}{2} \int_0^1 dx dy \frac{y}{[a^2 - b]^{3-D/2}} [a_\beta a_\sigma - g_{\beta\sigma} [a^2 - b]] \end{aligned} \quad (4.47)$$

com $a_\beta = p_\beta(1-x)y + (p+k)_\beta(1-y)$ e $b = p^2(1-x)y + (p+k)^2(1-y)$. Desde que $\epsilon^{\beta\alpha\rho} \epsilon^{\gamma\delta\sigma} p_\alpha p_\gamma k_\delta k_\rho a_\beta = 0$, apenas o termo proporcional a $g_{\beta\sigma}$ contribuirá quando $I_{\beta\sigma}$ é substituído em (4.46),

$$\mathbf{D13} = \frac{e^4 \mu^{2\varepsilon}}{2^3 \pi^4} \epsilon_\sigma^{\alpha\rho} \epsilon^{\gamma\delta\sigma} p_\alpha p_\gamma \int_0^1 dx dy y \int d^D k \frac{k_\rho k_\delta}{(p+k)^2 k^2 [a^2 - b]^{2-D/2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^4 \mu^{2\varepsilon}}{2^3 \pi^4} \epsilon_\sigma^{\alpha\rho} \epsilon^{\gamma\delta\sigma} p_\alpha p_\gamma \int \int_0^1 \frac{d^D k dx dy dz dw}{L^{2-D/2}} \frac{\frac{3}{4} y z^{1-D/2} w^{2-D/2} k_\rho k_\delta}{[k^2 + 2pk(Mzw + 1 - w) + p^2(Nzw + 1 - w)]^{4-D/2}} \\
&= \frac{e^4 \mu^{2\varepsilon}}{2^3 \pi^3} p^2 \int_0^1 \frac{dx dy dz dw}{L^{2-D/2}} \frac{y z^{1-D/2} w^{2-D/2} \Gamma(\varepsilon)}{[p^2((Mzw + 1 - w)^2 - (Nzw + 1 - w))]} \\
&= -\frac{ie^4 p^2}{12\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + \text{finito}
\end{aligned}$$

com,

$$L = -y(1 - y), \quad LM = -xy(1 - y) \quad e \quad LN = -(1 - xy)xy. \quad (4.48)$$

O último diagrama a ser considerado, **D14**, tem o seu cálculo simplificado, pois possui $\mathbf{P3}_{\mu\nu}$ em (4.31), calculado anteriormente, como subdiagrama. Este é dado por um integral logaritmicamente divergente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{D14} &= [-ie\mu^{\frac{\varepsilon}{2}}]^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i(2p+k)_\alpha \epsilon^{\beta\alpha\rho} k_\rho}{(p+k)^2} \mathbf{P3}_{\gamma\beta}(k) \frac{\epsilon^{\delta\gamma\nu} k_\nu}{k^2} (2p+k)_\delta \\
&= i \frac{e^4 \mu^{2\varepsilon}}{2^5 \pi^3} \epsilon^{\beta\alpha\rho} \epsilon^{\delta}_{\beta}{}^\nu p_\alpha p_\delta \int d^D k \frac{k_\rho k_\nu}{(p+k)^2 [k^2]^{3-D/2}} \\
&= i \frac{3e^4 \mu^{2\varepsilon}}{2^6 \pi^3} \epsilon^{\beta\alpha\rho} \epsilon^{\delta}_{\beta}{}^\nu p_\alpha p_\delta \int d^D k \int_0^1 dx \frac{k_\rho k_\nu (1-x)^{2-D/2}}{[k^2 + 2kp(1-x) + p^2(1-x)]^{4-D/2}} \\
&= i \frac{e^4}{2^5 \pi^2} \epsilon^{\beta\alpha\rho} \epsilon^{\delta}_{\beta\rho} p_\alpha p_\delta \int_0^1 dx (1-x)^{2-D/2} \Gamma(\varepsilon) \\
\mathbf{D14} &= -\frac{ie^4 p^2}{24\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + \text{finito}. \tag{4.49}
\end{aligned}$$

Com isso, acabamos por determinar a parte infinita dos diagramas que contribuem para a auto energia do campo escalar.

Colecionando os resultados dos cálculos, a função de dois pontos $\Gamma^{(0,2)}(p)$ tem em aproximação de dois loops os seguintes diagramas com infinitos,

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} = \frac{-2ie p^2}{96 \pi^2 \epsilon} + \text{finito}$$

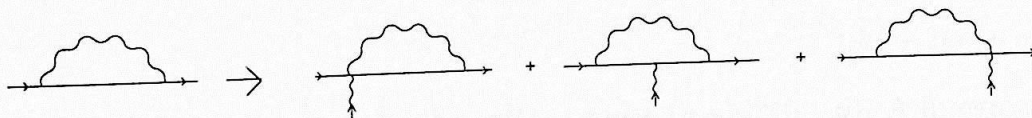
$$\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} = \frac{-ie p^2}{12 \pi^2 \epsilon} + \text{finito}$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} = \frac{-ie^4 p^2}{24 \pi^2 \epsilon} + \text{finito}$$

Somando os termos proporcionais a $\frac{1}{\epsilon}$, temos o valor $A = \frac{7e^4}{48\pi^2} \frac{1}{\epsilon}$ para o coeficiente do contra termo cinético em (4.18).

O modo mais fácil de se obter a expansão diagramática para a função de três pontos $\Gamma_\mu^{(1,2)}(p, l)$, está em partir dos diagramas de auto-energia da função de dois pontos $\Gamma^{(0,2)}(p)$, inserindo uma linha de propagação do campo de gauge de todas as maneiras possíveis, a fim de formar as figuras irreduzíveis desejadas.

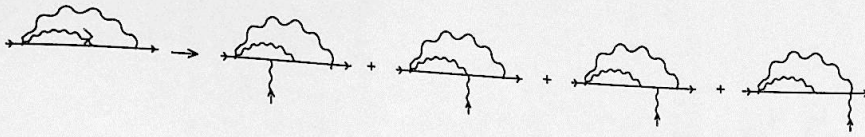
Ao tentar fazer isso, logo se percebe que o número de diagramas que surgem é grande, pois um único diagrama pode dar origem a vários outros, como por exemplo o primeiro termo que dá origem a uma série com três elementos:



Seria interessante, então, ao invés de começar a investigar termo a termo da expansão como fizemos até agora, dividir a análise por famílias de diagramas que são originados das auto-energias como na figura anterior. Espera-se que cada família relacione-se, através das identidades de Ward, com o elemento que a originou. Verificaremos que isso, realmente acontece no método de cálculo aqui utilizado.

Olhando para a expansão em diagramas de $\Gamma^{(0,2)}(p)$ verificamos que inserindo uma linha do propagador do campo de gauge, que precisamos nos preocupar com as famílias geradas por **D7**, **D9**, **D12**, **D13** e **D14** pois as demais são compostas de elementos nulos, por conterem subdiagramas nulos, ou finitos por contagem de potências.

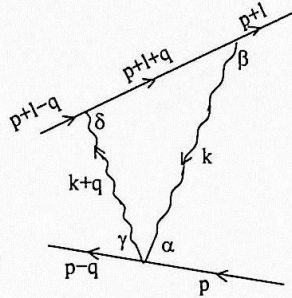
D7 gera a família T^{D7} de quatro elementos:



Na qual os dois últimos elementos, $T^{D7} 3_\mu$ e $T^{D7} 4_\mu$, são nulos por possuírem um subdiagrama nulo. O primeiro deles, $T^{D7} 1_\mu$, tem a seguinte expressão,

$$T^{D7} 1_\mu(p, l) = -2ie\mu^{\frac{\epsilon}{2}} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{i(2p+l-2q)_\mu i}{(p-q)^2(p+l-q)^2} T(p+l, q). \quad (4.50)$$

Onde $T(p+l, q)$ é o triângulo escalar,



$$\begin{aligned} &= ie^2 \mu^\epsilon [-ie\mu^{\frac{\epsilon}{2}}]^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^D} \frac{\epsilon^{\beta\alpha\rho} k_\rho}{k^2} g_{\alpha\gamma} \frac{\epsilon^{\gamma\delta\sigma} (k+q)_\sigma}{(k+q)^2} \frac{i(2p+2l-q+k)_\delta}{(p+l+k)^2} (2p+2l+k)_\beta \\ &= \frac{2^2 e^4 \mu^{2\epsilon}}{(2\pi)^D} \epsilon^{\beta\alpha\rho} \epsilon_{\alpha\delta\sigma} (p+l-q)_\delta (p+l)_\beta \int dk k_\rho (k+q)^\sigma \int_0^1 dx dy \frac{y\Gamma(3)}{[k^2 + 2ka + b]^3} \end{aligned}$$

com $a = q(1-x)y + (p+l)(1-y)$ e $b = q^2(1-x)y + (p+l)^2(1-y)$. A integração em k é então feita dando

$$T(p', q) = -\frac{ie^4 \mu^{2\epsilon}}{2^2 \pi} \epsilon^{\beta\alpha\rho} \epsilon_{\alpha\delta\sigma} (p'-q)_\delta p'_\beta \int_0^1 dx dy \frac{y[a_\rho a^\sigma - g_\rho^\sigma (a^2 - b) - q^\sigma a_\rho]}{[a^2 - b]^{3-\frac{D}{2}}}. \quad (4.51)$$

Onde $p' = p+l$. Por simples contagem de potências, vemos que apenas a integral do segundo termo entre colchetes acima, dará contribuição divergente, quando T é substituído na expressão (4.50). Assim devemos nos preocupar apenas com

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{\text{D}\tau} \mathbf{1}_\mu(p, l) &= \frac{-e^5 \mu^{\frac{5\epsilon}{2}}}{2^4 \pi^4} \epsilon^{\beta\alpha\rho} \epsilon_{\alpha\delta\rho} p_\beta \int dq \frac{(2p+l-2q)_\mu (p'-q)^\delta}{(p-q)^2 (p'-q)^2} \int_0^1 dx dy \frac{y}{[a^2-b]} \\
&= \frac{e^5 \mu^{\frac{5\epsilon}{2}} p'^\delta}{2^3 \pi^4} \int dq \frac{2q_\mu q_\delta}{(p-q)^2 (p'-q)^2} \int_0^1 dx dy \frac{y}{[a^2-b]^{2-\frac{D}{2}}} \\
&= \frac{3e^5 \mu^{\frac{5\epsilon}{2}} p'^\delta}{2^4 \pi^4} \int dq q_\mu q_\delta \int_0^1 dx dy dz dw \frac{y z^{1-\frac{D}{2}} w^{2-\frac{D}{2}}}{L^{2-\frac{D}{2}} [q^2 + 2qc + d]^{4-\frac{D}{2}}} \\
&= \frac{e^5 \mu^{\frac{5\epsilon}{2}} p'_\mu}{2^3 \pi^3} \int_0^1 dx dy dz dw \frac{y z^{1-\frac{D}{2}} w^{2-\frac{D}{2}} \Gamma(\epsilon)}{L^{2-\frac{D}{2}} [C^2 - D]^\epsilon} \\
&= \frac{e^5 p'_\mu}{8\pi^3} \int_0^1 dx dy \frac{y}{[(1-x)^2 y^2 - (1-x)y]^{\frac{1}{2}} \epsilon}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{T}^{\text{D}\tau} \mathbf{1}_\mu(p, l) = -\frac{ie^5}{12\pi^2} p'_\mu \frac{1}{\epsilon} + \text{finito}. \quad (4.52)$$

com

$$\begin{aligned}
L &= (1-x)^2 y^2 - (1-x)y \\
c_\mu &= p'_\mu \left[\frac{(1-x)y(1-y)}{L} z - 1 + z \right] w - p_\mu (1-w) \\
d &= p'^2 \left[-\frac{(1-y)y}{L} z + 1 - z \right] w + p^2 (1-w)
\end{aligned} \quad (4.53)$$

O cálculo de $\mathbf{T}^{\text{D}\tau} \mathbf{2}_\mu(p, l)$ é simplificado uma vez que sua expressão é escrita como,

$$\mathbf{T}^{\text{D}\tau} \mathbf{2}_\mu(p, l) = -4ie\mu^{\frac{\epsilon}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i(2p+2l+k)_\beta \epsilon^{\beta\alpha\rho} k_\rho}{(p+l+k)^2 k^2} U_{\mu\alpha}(p+k) \quad (4.54)$$

com a função $U_{\mu\alpha}(p+k)$ valendo,

$$U_{\mu\alpha}(p+k) = -\frac{ie^4 \mu^{2\epsilon}}{(2\pi)^D} \epsilon_{\mu\alpha\nu} \int d^D q \frac{q^\nu}{(p+k+q)^2 q^2}$$

$$= -\frac{ie^4 \mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^D} \epsilon_{\mu\alpha\nu} I^\nu(p+k) = \frac{ie^4 \mu^{2\varepsilon}}{2^4} \frac{\epsilon_{\mu\alpha\nu} (p+k)^\nu}{[(p+k)^2]^{2-D/2}}. \quad (4.55)$$

A função I^ν fora calculada em (4.35). Colocando isso em (4.54) ficamos com:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{\mathbf{D}7} \mathbf{2}_\mu(p, l) &= \frac{ie^5}{2^4 \pi^3} \epsilon^{\beta\alpha\rho} \epsilon_{\mu\alpha\nu} p'_\beta \int d^D k \int_0^1 dx dy \frac{k_\rho (p+k)^\nu \frac{3}{4} (1-x)^{1-D/2} y^{2-D/2}}{[k^2 + 2ka + b]^{4-D/2}} \\ &= \frac{ie^5}{2^4 \pi^3} \epsilon^{\beta\alpha\rho} \epsilon_{\mu\alpha\nu} p'_\beta \int_0^1 dx dy \frac{-\pi (1-x)^{-1/2} y^{1/2}}{[a^2 - b]} [-a_\rho p^\nu + a_\rho a^\nu - \frac{\delta_\rho^\nu}{2} \Gamma(\varepsilon) [a^2 - b]] \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}^{\mathbf{D}7} \mathbf{2}_\mu(p, l) = \frac{ie^5 p'_\mu}{12\pi^2 \varepsilon} + \text{finito} \quad (4.56)$$

com $a = p(1-x)y + p'(1-y)$ e $b = p^2(1-x)y + p'^2(1-y)$.

Notemos que as partes infinitas de $\mathbf{T}^{\mathbf{D}7} \mathbf{1}_\mu$ e $\mathbf{T}^{\mathbf{D}7} \mathbf{2}_\mu$ cancelam-se. Isso está de acordo com as expectativas, uma vez que a família originou-se de um diagrama nulo de auto energia. A mesma coisa acontece com os diagramas provindos de $\mathbf{D}9$, já que estes podem ser obtidos dos elementos de $\mathbf{T}_\mu^{\mathbf{D}7}$ simplesmente fazendo a substituição $p' \rightarrow p$.

Passemos então às famílias $\mathbf{T}_\mu^{\mathbf{D}12}$, $\mathbf{T}_\mu^{\mathbf{D}13}$ e $\mathbf{T}_\mu^{\mathbf{D}14}$. Elas são mostradas na tabela I, no final deste capítulo.

-Família $\mathbf{T}_\mu^{\mathbf{D}12}$, único elemento $\mathbf{T}^{\mathbf{D}12} \mathbf{1}_\mu$.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{\mathbf{D}12} \mathbf{1}_\mu &= -2ie\mu^{\frac{\varepsilon}{2}} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{i(2p+l+2q)_\mu i}{(p+q)^2(p+q+l)^2} M(q) \\ &= \frac{ie^5}{2^7 \pi^3} \int d^D q \int_0^1 dx dy \frac{x^{D/2} y^{1-D/2} (2p+l+2q)_\mu}{[q^2 + 2qa + b]^{3-D/2}} \\ &= \frac{ie^5}{2^6 \pi^2} \int_0^1 dx dy x^{D/2} y^{1-D/2} [(2p+l)_\mu - 2a_\mu] \Gamma(\varepsilon) \\ \mathbf{T}^{\mathbf{D}12} \mathbf{1}_\mu &= \frac{ie^5}{48\pi^2} (p'+p) \frac{1}{\varepsilon} + \text{finito} \end{aligned} \quad (4.57)$$

com a_μ e b iguais aos de (4.56).

-Família $\mathbf{T}^{\text{D13}}_{\mu}$
 contém sete elementos mas, por contagem de potências, apenas os dois primeiros são divergentes.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{\text{D13}}_{1\mu} &= -2e^5 \mu^{\frac{5\varepsilon}{2}} \int \frac{d^D k d^D q}{(2\pi)^{2D}} \frac{g_{\mu\alpha} \epsilon^{\beta\alpha\rho} k_{\rho} i(2p' + 2k + q)_{\gamma} i \epsilon^{\delta\gamma\nu} q_{\nu} i(2p' + 2q + k)_{\beta} (2p' - q)_{\delta}}{(p' + k)^2 k^2 (p' + k + q)^2 q^2 (p' + q)^2} \\ &= \frac{ie^5 \epsilon^{\beta}_{\mu}{}^{\rho} \epsilon^{\delta\gamma\nu} p_{\delta}}{2^2 \pi^6} \int d^D k \frac{k_{\rho} k_{\gamma}}{(p' + k)^2 k^2} I_{\nu\beta}(k, p') + \text{finito} \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}^{\text{D13}}_{1\mu} = \frac{ie^5 \epsilon^{\beta}_{\mu}{}^{\rho} \epsilon^{\delta\gamma\nu} p'_{\delta}}{2^2 \pi^6} \left[\frac{\pi^4}{6} \frac{1}{\varepsilon} g_{\nu\beta} g_{\rho\gamma} + \text{finito} \right] = \frac{ie^5}{12\pi^3} \frac{1}{\varepsilon} p'_{\mu} + \text{finito}. \quad (4.58)$$

Com $I_{\sigma\beta}(k, p')$ dado em (4.47). O valor entre colchetes da integral em k pode ser deduzido das linhas de (4.48).

A parte divergente de $\mathbf{T}^{\text{D13}}_{2\mu}$ pode ser obtida de $\mathbf{T}^{\text{D13}}_{1\mu}$ simplesmente fazendo $p' \rightarrow p$ de modo que

$$\mathbf{T}^{\text{D13}}_{2\mu} = \frac{ie^5}{12\pi^3} \frac{1}{\varepsilon} p_{\mu} + \text{finito}. \quad (4.59)$$

-Família $\mathbf{T}^{\text{D14}}_{\mu}$
 contém seis elementos mas apenas os dois primeiros, $\mathbf{T}^{\text{D14}}_{1\mu}$ e $\mathbf{T}^{\text{D14}}_{2\mu}$, são divergentes.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{\text{D14}}_{1\mu} &= 2ie^3 \mu^{\frac{3\varepsilon}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{g_{\mu\delta} i(2p' + k)_{\beta} \epsilon^{\beta\alpha\rho} k_{\rho} \mathbf{P}3_{\alpha\gamma}(k) \frac{\epsilon^{\gamma\delta\nu} k_{\nu}}{k^2}}{(p' + k)^2 k^2} \\ &= -\frac{ie^5}{2^5 \pi^3} \epsilon_{\beta\gamma\rho} \epsilon^{\gamma}_{\mu}{}^{\nu} p'^{\beta} \int d^D k \frac{k^{\rho} k_{\nu}}{(p' + k)^2 [k^2]^{3-D/2}} + \text{finito} \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}^{\text{D14}}_{1\mu} = -\frac{ie^5}{2^5 \pi^3} \epsilon_{\beta\gamma\rho} \epsilon^{\gamma}_{\mu}{}^{\nu} p'^{\beta} \left[\frac{2\pi}{3} g_{\nu}^{\rho} \frac{1}{\varepsilon} + \text{finito} \right] = \frac{ie^5 p'_{\mu}}{24\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + \text{finito}. \quad (4.60)$$

Pelo mesmo argumento anterior, o valor de $\mathbf{T}^{\text{D14}}_{2\mu}$ é, então,

$$\mathbf{T}^{\text{D14}}_{2\mu} = \frac{ie^5 p_{\mu}}{24\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + \text{finito}. \quad (4.61)$$

Assim, vemos que as partes infinitas dessas famílias e dos diagramas que as originam são de fato iguais. Somando então os infinitos dos diagramas de três pontos tem-se a igualdade $C = A$ dos coeficientes dos contratermos de renormalização, corroborando a validade das identidades de Ward entre as funções de dois e três pontos, no que diz respeito às quantidades infinitas das mesmas.

A última verificação a ser feita será a da relação entre as funções de três e quatro pontos. Novamente, analisando todas as famílias que podem ser construídas a partir dos diagramas de três pontos somos levados aos cinco conjuntos mostrados na tabela II, no **final deste capítulo**, que possuem entre seus elementos diagramas divergentes.

Daremos início com a família $Q_{D_9}^{D_7} 1_{\mu\nu}$ formada da união de $T^{D_7} 1_{\mu}$ e $T^{D_9} 1_{\mu}$. Trata-se de um conjunto de nove elementos, mas apenas os dois primeiros são divergentes.

$$Q_{D_9}^{D_7} 1.1_{\mu\nu} = 4ie^2 \mu^\varepsilon g_{\nu\beta} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i}{(p+k+l)^2} \frac{\epsilon^{\beta\alpha\rho} k_\rho}{k^2} T_{\alpha\mu}(k, l, m) \quad (4.62)$$

com,

$$\begin{aligned} T_{\alpha\mu}(k, l, m) &= -e^3 \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{g_{\alpha\delta} i (2p+2k+2q+l)_\mu i}{(p+k+q)^2 (p+k+q+l)^2} \frac{\epsilon^{\gamma\delta\sigma} q_\sigma}{q^2} (2p+2l+2k+q)_\gamma \\ &= \frac{ie^4}{2^2 \pi^3} \epsilon^{\gamma\alpha\sigma} (p+l+k)_\gamma \int d^D q \frac{(2p+2k+2q+l)_\mu q_\sigma}{(p+k+q)^2 (p+k+q+l)^2 q^2} \\ &= \frac{ie^4}{2^2 \pi^3} \epsilon^{\gamma\alpha\sigma} (p+l+k)_\gamma \int_0^1 dx dx \frac{-i\pi^2 [-(2k+2p+l)_\mu a_\sigma + 2a_\mu a_\sigma - 2g_{\mu\sigma} [a^2 - b]]}{2[a^2 - b]^{3-D/2}}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

A contribuição divergente de (4.64), quando este é substituído em (4.62), vem do seu último termo entre colchetes acima, de modo que

$$\begin{aligned} Q_{D_9}^{D_7} 1.1_{\mu\nu} &= \frac{e^6 \epsilon_\nu^{\alpha\rho} \epsilon_\mu^{\gamma\alpha}}{2^3 \pi^4} \int d^D k \int_0^1 \frac{dx dy dz dw}{[-xy(1-xy)]^{2-D/2}} \frac{\frac{3}{4} y z^{1-D/2} w^{2-D/2}}{[k^2 + 2kf + g]^{4-D/2}} + \text{finito} \\ &= \frac{ie^6 g_{\mu\nu}}{12\pi^2 \varepsilon} + \text{finito} \end{aligned} \quad (4.64)$$

com, $f = f(x, y, z, w, l, m, p)$ e $g = g(x, y, z, w, l, m, p)$. Uma vez que $Q_{D_9}^{D_7} 1.2_{\mu\nu}$ tem a mesma forma de $Q_{D_9}^{D_7} 1.1_{\mu\nu}$ tem-se também,

$$Q_{D_9}^{D_7} 1.2_{\mu\nu} = \frac{ie^6 g_{\mu\nu}}{12\pi^2 \varepsilon} + \text{finito}. \quad (4.65)$$

A próxima família, $Q_{D_9}^{D7} 2_{\mu\nu}$, é formada pela união de $T^{D7} 2_{\mu}$ e $T^{D9} 2_{\mu}$. Trata-se de um conjunto de seis elementos mas apenas os dois primeiros são divergentes.

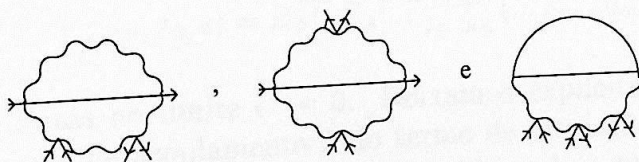
$$\begin{aligned}
 Q_{D_9}^{D7} 2.1_{\mu\nu} &= 8ie^2 \mu^\epsilon g_{\nu\beta} \int d^D k (2\pi)^D \frac{i}{(p+l+k)^2} \frac{\epsilon^{\beta\alpha\rho} k_\rho}{k^2} U_{\mu\alpha}(p, l, k) \\
 &= -\frac{ie^6}{2^3 \pi^3} \epsilon_\nu^{\alpha\rho} \epsilon_{\mu\alpha}^\sigma \int_0^1 d^D k \frac{k_\rho (p+k)_\sigma}{(p+l+k)^2 k^2 [(p+k)^2]^{2-D/2}} + \text{finito} \\
 &= -\frac{ie^6 g_{\mu\nu}}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{finito}.
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

E pelo mesmo motivo anterior,

$$Q_{D_9}^{D7} 2.2_{\mu\nu} = -\frac{ie^6 g_{\mu\nu}}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{finito}. \tag{4.67}$$

Como esperado, os infinitos das famílias $Q_{D_9}^{D7} 1_{\mu\nu}$ e $Q_{D_9}^{D7} 2_{\mu\nu}$ cancelam-se. Além dessas, outras famílias de diagramas de quatro pontos, contendo elementos divergentes, que se originam de diagramas nulos ou finitos, surgem. Mas o cancelamento das partes divergentes sempre ocorrerá, garantindo normalidade. Assim os conjuntos de quatro pontos que restam são aqueles provindos de **D12**, **D13** e **D14**, mostrados na tabela II. Nenhum problema no cálculo das integrais ocorre, e os resultados confirmam a relação entre famílias. Levando em conta o fator combinatorial dois, associado ao vértice quadrilinear, a conclusão final é que o coeficiente E do contratermo de $e^2 A^\mu A_\mu \varphi^\dagger \varphi$ tem o valor, $E = C = A$ validando as identidades de Ward para a aproximação de dois loops.

Deve-se ainda dizer que existem diagramas de seis pontos, referentes a função $\Gamma^{(0,6)}$, que possuem infinitos. Estes são:



Isso leva a necessidade da introdução de um termo do tipo $\lambda(\varphi^\dagger \varphi)^3$ para gerar um vértice de seis linhas que, junto com o coeficiente do contratermo correspondente, renormaliza a função de seis pontos escalares. A inclusão desse novo vértice ocasiona o surgimento de um diagrama divergente contribuindo para $\Gamma^{(0,2)}$ na aproximação de quatro loops. Mas como foi mostrado em [14] o valor deste é,

$$\text{Diagrama} \equiv \frac{i\lambda^2}{2^{13} 3^2 \pi^4} \left[\frac{p^2}{\epsilon} + 2p^2 \ln\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right) + \text{finito} \right]$$

Escolhendo um λ da ordem de e^2 , a contribuição acima passa a ser muito pequena quando comparada a **D12**, **D13** e **D14**. Nestas condições, pode descartar-se essa quantidade e considerar que os coeficientes dos contratermos de renormalização dependem apenas da carga renormalizada e . Isso facilitará os cálculos posteriores, sem comprometer a análise que se deseja mostrar.

Os diagramas de quatro pontos escalares que podem ser formados, introduzindo um vértice quadrilinear dentre as linhas de gauge dos diagramas de dois loops da função de dois pontos $\Gamma^{(0,2)}$, embora possam parecer divergentes, não o são. O motivo disso está no fato do campo de Chern-Simons, e, por consequência, o seu propagador, ser composto pelo tensor anti-simétrico $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ que, muitas vezes, torna trivial as integrações nos loops subseqüentes, deixando o resultado final livre de infinitos e fazendo com que a auto-interação polinomial $\lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2$ não se faça ser induzida.

Concluimos assim a discussão sobre a renormalização do modelo e a verificação das identidades de Ward.

Passemos então ao estudo da propriedade de escala das funções $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m,2n)}$ renormalizadas.

4.3 O grupo de renormalização.

As relações entre as quantidades não-renormalizadas e renormalizadas (4.20) e (4.21) permitem deduzir a partir da ação efetiva a seguinte igualdade para as funções de $m+2n$ pontos

$$\Gamma_{0\mu_1 \dots \mu_m}^{(m,2n)}(\dots, p_n, \dots, q_m, e_0, \lambda_0, \epsilon) = Z_\varphi^{-\frac{2n}{2}} Z_A^{-\frac{m}{2}} \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m,2n)}(\dots, p_n, \dots, q_m, e, \lambda, \mu, \epsilon) \quad (4.68)$$

onde as $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m,2n)}$ são finitas no limite $\epsilon \rightarrow 0$. Deixamos explícita nas funções gama, a dependência da constante de acoplamento λ do termo de interação que garante a renormalizabilidade do modelo, embora estaremos desconsiderando a sua contribuição para os demais elementos.

Para fazer a renormalização, introduziu-se o parâmetro μ com dimensão de massa a fim de deixar a constante de acoplamento e adimensional. Além disso, μ também define a escala de energia, pois as funções de $m+2n$ pontos contêm potências de $\ln[\frac{\mu^2}{p^2}]$ com p sendo um momento externo típico.

Uma teoria de perturbações aplicável exige a escolha de μ da ordem de p . Assim é importante estudar o comportamento dessas funções numa mudança de escala de energia.

As propriedades de escala para a teoria renormalizada são ditadas pela equação de grupo de renormalização, obtida através da aplicação do operador $\mu \frac{d}{d\mu}$ na equação acima escrita em termos das mesmas, nada mais são do que referências nas quais definem-se as quantidades renormalizadas ou seja, finitas, que são os objetos com interpretação física, apenas o lado esquerdo de (4.68) possui dependência do parâmetro μ .

Essa dependência se dá por meio do coeficiente Z_φ que, na consideração feita, é função somente de $e(\mu)$, e também por meio do argumento da função $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}$. Assim, tem-se a seguinte equação:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_e \frac{\partial}{\partial e} + \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - 2n\gamma_{d_\varphi} - m\gamma_{d_A} \right] \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}(\dots, p_n, \dots, q_m, e, \lambda, \mu, \epsilon) = 0 \quad (4.69)$$

com

$$\beta_e = \mu \frac{de}{d\mu}, \quad \gamma_{d_\varphi} = \frac{1}{2} \frac{\mu}{Z_\varphi} \frac{\partial Z_\varphi}{\partial \mu}, \quad \gamma_{d_A} = \frac{1}{2} \frac{\mu}{Z_A} \frac{\partial Z_A}{\partial \mu}, \quad \beta_\lambda = \mu \frac{d\lambda}{d\mu}. \quad (4.70)$$

Outra equação é obtida, ao analisar as propriedades de homogeneidade das funções 1PI. Lembrando que, em unidades de massa, a dimensão dos campos φ e A^μ num espaço-tempo de dimensão D arbitrária são $\frac{D-2}{2}$ e $\frac{D-1}{2}$ respectivamente. Então da ação efetiva, descobre-se por análise dimensional o valor $d_{m, 2n} = \frac{\epsilon}{2}(m+2n+2) - mc - 2nd + D$, lembrando que c e d são a dimensão de escala dos campos de gauge e escalar respectivamente, para a dimensão de $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}$. A fim de facilitar a comparação com a transformação clássica anterior substituímos $1 = c$ e $1/2 = d$. Logo também temos a seguinte equação

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + s \frac{\partial}{\partial s} - d_{m, 2n} \right] \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}(\dots, sp_n, \dots, sq_m, e, \lambda, \mu, \epsilon) = 0 \quad (4.71)$$

s é a variável utilizada para escalar os momentos. Sua solução é

$$\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}(\dots, sp_n, \dots, sq_m, s\mu, e, \lambda) = s^{d_{m, 2n}} \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m, 2n)}(\dots, p_n, \dots, q_m, \mu, e, \lambda). \quad (4.72)$$

No limite $\epsilon \rightarrow 0$. Eliminando $\mu \frac{\partial}{\partial \mu}$ de (4.69) com (4.71) encontramos a equação que sumariza o comportamento das funções 1PI renormalizadas, quando escalamos os seus momentos externos

$$\left[-s \frac{\partial}{\partial s} + \beta_e \frac{\partial}{\partial e} + \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - d_{m,2n} - m\gamma_{d_A} - 2n\gamma_{d_\phi}\right] \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m,2n)}(\dots, sp_n, \dots, sq_m, e, \lambda, \mu) = 0. \quad (4.73)$$

Equações desse tipo são utilizadas para estudar o comportamento assintótico de teorias com parâmetros dimensionais como massas, que podem deixar de ser importantes no limite de altas energias. É também possível verificar que, nessas escalas de energia, a transformação de dilatação pode vir a ser considerada como uma simetria aproximada para teorias que não a possuem. Os coeficientes definidos em (4.70) poderiam, em princípio, depender da parte finita dos contratermos, caso outra prescrição de renormalização fosse adotada.

A função β_e é calculada via (4.22), agora simplificada para $e_0 = e\mu^{\frac{\epsilon}{2}}$,

$$\mu \frac{\partial e_0}{\partial \mu} = \frac{\epsilon}{2} \mu^{\frac{\epsilon}{2}} e + \mu^{1+\frac{\epsilon}{2}} \frac{de}{d\mu} = 0 \quad (4.74)$$

de onde concluímos $\beta_e = 0$ no limite $\epsilon \rightarrow 0$. Diferente da eletrodinâmica quântica, QED, cuja função β_e indica um crescimento da constante de acoplamento com a escala de energia, invalidando a teoria de perturbações no regime de altas energias, e também da cromodinâmica quântica que apresenta um decréscimo da constante de acoplamento com o crescimento da energia dando origem ao fenômeno da liberdade assintótica. A teoria em questão possui a característica peculiar de que o parâmetro e não varia com a escala de energia.

γ_{d_ϕ} é obtida diretamente de (4.70) com $Z_\phi = 1 + A = 1 + \frac{7e^4}{48\pi^2} \frac{1}{\epsilon}$ o que dá

$$\gamma_{d_\phi} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{7e^4}{48\pi^2} \frac{1}{\epsilon}\right)} \left[\frac{7e^3}{12\pi^2} \frac{\mu}{\epsilon} \frac{de}{d\mu} \right] \approx -\frac{7e^4}{48\pi^2} \quad (4.75)$$

usando (4.74). A rigor, teríamos ainda em (4.75) o acréscimo de um termo proporcional a λ^2 . Mas o cálculo da função β_λ , incluindo o diagrama de quatro loops mostra que o resultado em (4.75) é de fato a parte dominante.

γ_{d_A} é igual a zero, pois como dissemos antes, o campo de Chern-Simons não precisa de renormalização infinita na ordem de aproximação considerada implicando $B = 0$ e consequentemente $Z_A = 1$.

Agora a (4.69) fica bastante simplificada e para resolvê-la fazemos a mudança $\mu \rightarrow \mu(t) = e^t \mu$ definindo a função $\bar{\lambda}(t)$ com a condição $\bar{\lambda}(t=0) = \lambda$. Assim a nova equação a ser resolvida é

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\bar{\lambda}(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} - 2n\gamma_{d_\phi}(\bar{\lambda}, e) \right] \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(m,2n)}(\dots, p_n, \dots, q_m, e^t \mu, e, \bar{\lambda}(t)) = 0 \quad (4.76)$$

que pode ser integrada imediatamente, pois as derivadas entre colchetes equivalem à derivação total em t . O resultado é

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu_1, \dots, \mu_m}^{(m, 2n)}(\dots, p_n, \dots, q_m, \mu, e, \lambda) &= \Gamma_{\mu_1, \dots, \mu_m}^{(m, 2n)}(\dots, p_n, \dots, q_m, e^t \mu, e, \bar{\lambda}(t)) e^{-2n \int_0^t dt \gamma_{d\varphi}} \\ &= s^{-2n \gamma_{d\varphi}} \Gamma_{\mu_1, \dots, \mu_m}^{(m, 2n)}(\dots, p_n, \dots, q_m, s\mu, e, \bar{\lambda}(s)).\end{aligned}\quad (4.77)$$

Na última linha fez-se $e^t = s$.

Os momentos são então escalados e a propriedade (4.72) utilizada para determinar a forma na qual as funções renormalizadas escalam,

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu_1, \dots, \mu_m}^{(m, 2n)}(\dots, sp_n, \dots, sq_m, \mu, e, \lambda) &= s^{d_{m, 2n} - 2n \gamma_{d\varphi}} \Gamma_{\mu_1, \dots, \mu_m}^{(m, 2n)}(\dots, p_n, \dots, q_m, \mu, e, \bar{\lambda}(s)) \\ &= s^{D - mc - 2n[d - \frac{7e^4}{48\pi^2}]} \Gamma_{\mu_1, \dots, \mu_m}^{(m, 2n)}(\dots, p_n, \dots, q_m, \mu, e, \bar{\lambda}(s)).\end{aligned}\quad (4.78)$$

A relação (4.78) acima mostra-nos um desvio da fórmula esperada classicamente (4.8). Isso significa que a transformação $\varphi(x) \rightarrow e^{\alpha d} \varphi(e^\alpha x)$, $A^\mu(x) \rightarrow e^{\alpha c} A^\mu(e^\alpha x)$ não configura uma simetria quando as correções quânticas são levadas em conta. Dizemos então que ocorreu uma quebra da invariância de escala. Vemos, claramente, a mudança na dimensão de escala do campo escalar, $d \rightarrow d - \frac{7e^4}{48\pi^2}$. O valor $\gamma_{d\varphi}$ é a chamada dimensão de escala anômala e não deve ser confundida com aquela obtida por meio de análise dimensional. Esta última, como dissemos antes, vem sempre a ser uma transformação de simetria para qualquer teoria, a outra, como acabamos de ver, não.

Ainda deve ser dito que $\gamma_{d\varphi}$ tende a diminuir o valor da dimensão de escala do campo escalar, o que vai contra uma conjectura [6] na qual os campos bosônicos, interagindo com Chern-Simons, sofreriam acréscimos em suas dimensões de escala, aproximando-as dos campos fermiônicos com valor $d = 1$ em 2+1 dimensões.

Essa suposição, que como vemos, não é corroborada pelos cálculos, deve-se ao estudo do fenômeno de transmutação estatística onde bósons podem mudar sua estatística primeiro para uma fracionária e depois para a de Fermi-Dirac, alterando o seu momento angular intrínseco de um número inteiro para semi-inteiro. Vimos a manifestação desse fenômeno no capítulo anterior quando estudamos o momento angular anômalo.

Tabela I : Conjuntos de diagramas originados das fontes de divergencia 10. Apenas a parte infinita e apresentada e a abreviacao S.P.I. significa " sem parte infinita".

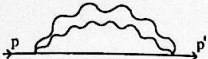
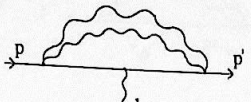

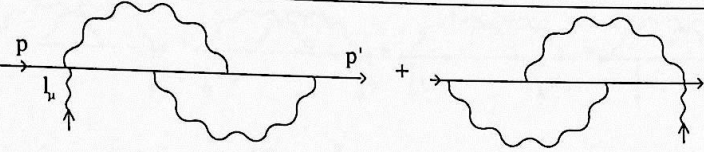
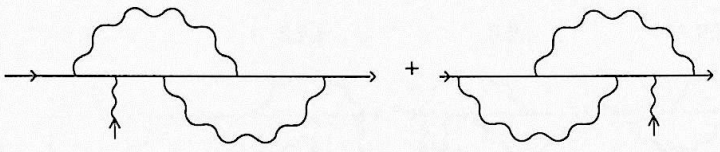
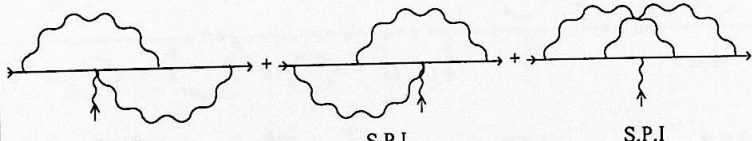
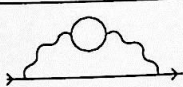
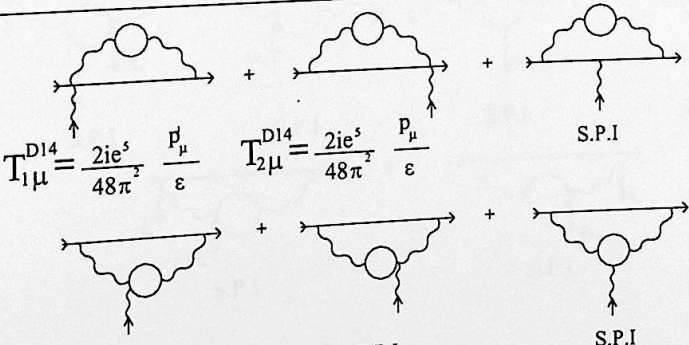
Fonte	Conjunto
 <p data-bbox="252 454 326 491">D12</p>	 $T_{\mu}^{D12} = \frac{2ie^5}{96\pi^2} \frac{(p+p')_{\mu}}{\epsilon}$
 <p data-bbox="257 698 326 735">D13</p>	 $T_{1\mu}^{D13} = \frac{2ie^5}{24\pi^2} \frac{p'_{\mu}}{\epsilon}$ $T_{2\mu}^{D13} = \frac{2ie^5}{24\pi^2} \frac{p_{\mu}}{\epsilon}$
	 <p data-bbox="635 1056 682 1088">S.P.I</p> <p data-bbox="1050 1056 1097 1088">S.P.I</p>
	 <p data-bbox="556 1304 603 1325">S.P.I</p> <p data-bbox="823 1304 870 1325">S.P.I</p> <p data-bbox="1081 1293 1128 1315">S.P.I</p>
 <p data-bbox="263 1532 332 1569">D14</p>	 $T_{1\mu}^{D14} = \frac{2ie^5}{48\pi^2} \frac{p'_{\mu}}{\epsilon}$ $T_{2\mu}^{D14} = \frac{2ie^5}{48\pi^2} \frac{p_{\mu}}{\epsilon}$ <p data-bbox="1050 1530 1097 1563">S.P.I</p> <p data-bbox="603 1767 650 1800">S.P.I</p> <p data-bbox="831 1757 878 1789">S.P.I</p> <p data-bbox="1066 1735 1113 1767">S.P.I</p>

Tabela II : conjuntos de diagramas originados das fontes de divergência de tres pontos.

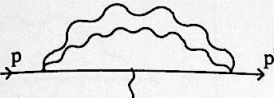
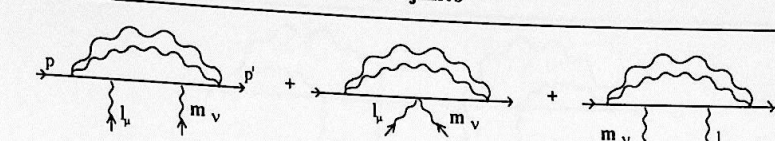
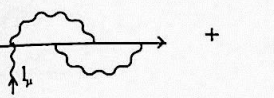
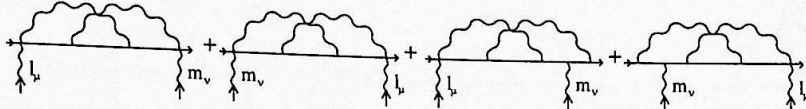

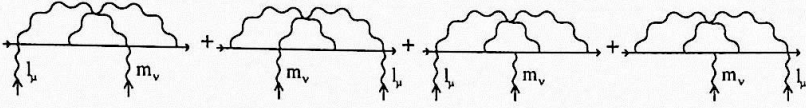

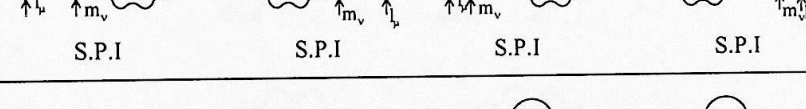
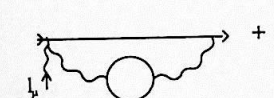
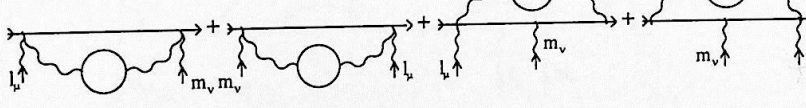
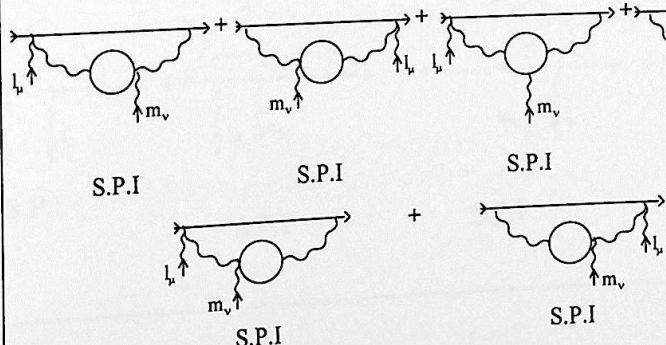
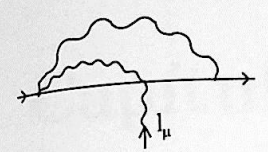
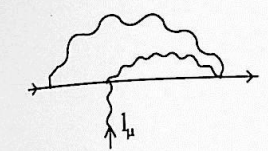
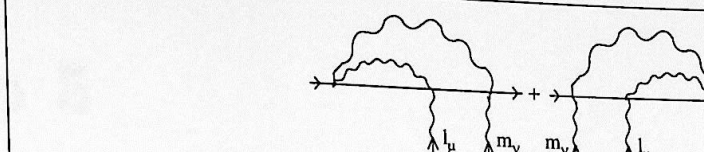
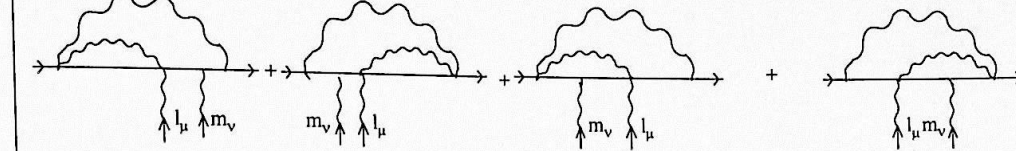
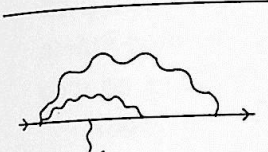
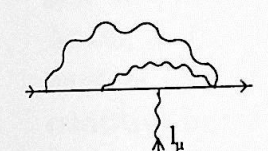
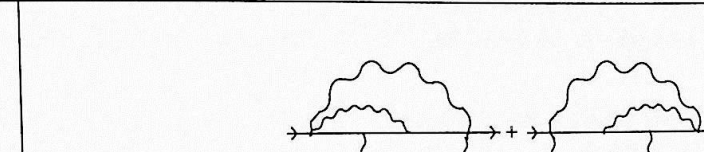
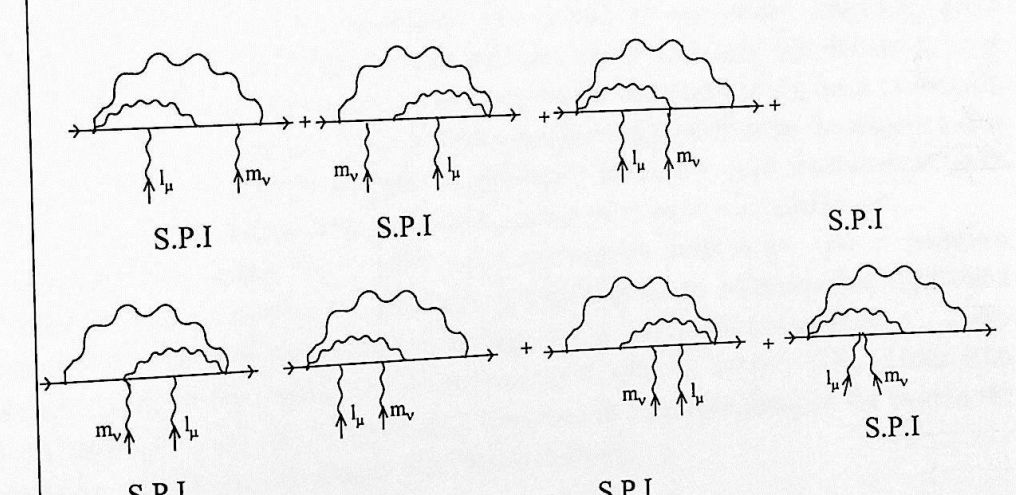
Fonte	Conjunto
 <p>T_{μ}^{D12}</p>	 $-\frac{2ie^{\sigma}}{24\pi^2} \frac{g_{\mu\nu}}{\epsilon} + \frac{4ie^{\sigma}}{32\pi^2} \frac{g_{\mu\nu}}{\epsilon} + \frac{-2ie^{\sigma}}{24\pi^2} \frac{g_{\mu\nu}}{\epsilon}$
 <p>$T_{1\mu}^{D13}$</p>	 $-\frac{4ie^{\sigma}}{48\pi^2} \frac{g_{\mu\nu}}{\epsilon} \quad -\frac{4ie^{\sigma}}{48\pi^2} \frac{g_{\mu\nu}}{\epsilon} \quad \text{S.P.I} \quad \text{S.P.I}$
 <p>$T_{2\mu}^{D13}$</p>	 <p>S.P.I S.P.I S.P.I S.P.I</p>
 <p>$T_{2\mu}^{D14}$</p>	 $-\frac{4ie^{\sigma}}{96\pi^2} \frac{g_{\mu\nu}}{\epsilon} \quad -\frac{4ie^{\sigma}}{96\pi^2} \frac{g_{\mu\nu}}{\epsilon} \quad \text{S.P.I} \quad \text{S.P.I}$
 <p>$T_{1\mu}^{D14}$</p>	 <p>S.P.I S.P.I S.P.I S.P.I</p>  <p>S.P.I S.P.I</p>

Tabela II : Continuacao.

 <p>$T_{2\mu}^{D7}$</p>  <p>$T_{2\mu}^{D9}$</p>	 $Q_{D9,2\mu\nu}^{D7} = \frac{-8ie^6}{96\pi^2} \frac{g_{\mu\nu}}{\epsilon} - \frac{-8ie^6}{96\pi^2} \frac{g_{\mu\nu}}{\epsilon}$  <p>S.P.I S.P.I S.P.I S.P.I</p>
 <p>$T_{1\mu}^{D7}$</p>  <p>$T_{1\mu}^{D9}$</p>	 $Q_{D9,1\mu\nu}^{D7} = \frac{4ie^6}{48\pi^2} \frac{g_{\mu\nu}}{\epsilon} - \frac{4ie^6}{48\pi^2} \frac{g_{\mu\nu}}{\epsilon}$  <p>S.P.I S.P.I S.P.I</p> <p>S.P.I S.P.I S.P.I S.P.I</p>

Capítulo 5

Conclusões.

Estudando a simetria de dilatação no nível clássico, vimos que, para as teorias abelianas em questão, do campo escalar complexo e a do campo espinorial, ambas acopladas minimamente com o campo de gauge de Chern-Simons, não existe nenhuma anomalia relacionada com os geradores de dilatação.

Nossa análise foi feita, usando o procedimento de Dirac de tratamento de teorias com vínculos para determinar a álgebra dos geradores do grupo de Poincaré e do grupo conforme, de uma forma mais rigorosa. Isso estende a conclusão dos autores de [8] que mostraram, além de outras coisas, que a carga de dilatação para a teoria do campo escalar sem acoplamento com campos de gauge, é o gerador das transformações de dilatação. Assim, o resultado obtido a partir do operador não local de momento angular, para mostrar, de outra maneira, a possibilidade das entidades anyônicas que obedecem a uma estatística intermediária entre bósons e férmions não implica o surgimento de uma anomalia para a dimensão de escala dos campos. Talvez uma análise mais profunda da álgebra dos geradores poderia dizer se a única característica evidente é mesmo o spin fracionário para as partículas descritas pelos modelos, considerando também o caso não abeliano.

Concluimos, também, ao computar o efeito das correções quânticas, que o método de regularização dimensional mostrou-se eficiente, respeitando as identidades de Ward amplamente utilizadas em [16], mesmo com a presença do símbolo anti-simétrico $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ não implicando em nenhuma inconsistência até a ordem estudada (2 loops) [27]. Com isso confirmamos os resultados de [16] para os contra termos de renormalização da teoria do campo escalar acoplada ao campo de gauge de Chern-Simons.

Finalizando, verificamos que a invariância clássica não prevalece já na segunda ordem de perturbação, quando diagramas de dois loops são levados em conta, desde que a dimensão de escala dos campos escalares é decrescida pelo valor $\frac{-7e^4}{48\pi^2}$, no esquema de subtração mínima, confirmando o fenômeno da quebra de simetria de escala por correções radiativas.

Apêndice A

Lema para a inversão de superderivadas.

Apêndice A

Lema para a inversão de supermatrizes.

Lema: Seja uma matriz $C(q^i, \theta^\alpha)$, função das variáveis q^i e θ^α que comutam e anticomutam respectivamente,

$$C(q^i, \theta^\alpha) = C_0(q^i) + C_\alpha(q^i)\theta^\alpha + C_{\alpha\beta}(q^i)\theta^\beta\theta^\alpha + \dots \quad (\text{A.1})$$

(onde C_0 , C_α e $C_{\alpha\beta} \dots$ são matrizes) possui uma inversa, se e somente se sua componente $C_0(q^i)$ possui uma inversa.

Prova: Considere B a inversa da matriz C ,

$$B(q^i, \theta^\alpha) = B_0(q^i) + B_\alpha(q^i)\theta^\alpha + B_{\alpha\beta}(q^i)\theta^\beta\theta^\alpha + \dots \quad (\text{A.2})$$

A condição

$$CB = I \quad (\text{A.3})$$

implica

$$C_0 B_0 = I, \quad (\text{A.4})$$

$$C_0 B_\alpha + C_\alpha B_0 = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$C_0 B_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(C_\alpha B_\beta - C_\beta B_\alpha) + C_{\alpha\beta} B_0 = 0, \quad (\text{A.6})$$

Esse sistema de equações pode ser resolvido, se e somente se C_0 possui uma inversa. Nesse caso, a solução é única e tem a forma

$$B_0 = C_0^{-1}, \quad (\text{A.7})$$

$$B_\alpha = -C_0^{-1}C_\alpha C_0^{-1}, \quad (\text{A.8})$$

$$B_{\alpha\beta} = \left[\frac{1}{2}C_0^{-1}(C_\beta C_0^{-1}C_\alpha C_0^{-1} - C_\alpha C_0^{-1}C_\beta C_0^{-1}) - C_0^{-1}C_{\alpha\beta}C_0^{-1} \right], \quad (\text{A.9})$$

·
·
·

A inversa à esquerda é também a inversa à direita, isto é, temos,

$$CB = BC = I \quad (\text{A.10})$$

mesmo tendo números θ^α que anticomutam. Isto completa a prova.

Apêndice B

Integrais regularizadas dimensionalmente e dos parâmetros de Feynman.

As integrais regularizadas mais utilizadas no cálculo dos diagramas, definidas no espaço de Minkowisk são:

$$\int d^D k \frac{1}{(k^2 + 2k \cdot p - M^2)^\alpha} = i^{1+2\alpha} \pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)(p^2 + M^2)^{\alpha - \frac{D}{2}}} \quad (\text{B.1})$$

$$\int d^D k \frac{k_\mu}{(k^2 + 2k \cdot p - M^2)^\alpha} = i^{1+2\alpha} \pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)(p^2 + M^2)^{\alpha - \frac{D}{2}}} (-p^\mu) \quad (\text{B.2})$$

$$\int d^D k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2k \cdot p - M^2)^\alpha} = \frac{i^{1+2\alpha} \pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\alpha)(p^2 + M^2)^{\alpha - \frac{D}{2}}} [p_\mu p_\nu \Gamma(\alpha - \frac{D}{2}) - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \Gamma(\alpha - 1 - \frac{D}{2})(p^2 + M^2)]. \quad (\text{B.3})$$

Para aplicar as fórmulas acima, primeiramente reduzimos os vários propagadores que compõem um gráfico com o auxílio das integrais paramétricas

$$\frac{1}{a_1^\alpha a_2^\alpha \dots a_n^\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \frac{x_1^{\alpha_1-1} \dots x_n^{\alpha_n-1} \delta(1 - \sum_i x_i)}{[a_1 x_1 + \dots a_n x_n]^{\sum_i \alpha_i}}. \quad (\text{B.4})$$

As integrais dos parâmetros de Feynman são resolvidas na etapa final com o uso da fórmula

$$\int_0^1 dx x^{-1+\alpha} (1-x)^{-1+\beta} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (\text{B.5})$$

Outra integral útil no cálculo dos diagramas é a seguinte:

$$I = \int_0^1 dx dy \frac{y}{L^{\frac{1}{2}}} = \int_0^1 dx dy \frac{y}{[-(1-xy)xy]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2i}. \quad (\text{B.6})$$

Para provar isso, faz-se a mudança de variáveis $x' = xy$ de modo que,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{i} \int_0^1 dy \int_0^y dx' \frac{1}{[(1-x')x']^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{i} \int_0^1 dy \left\{ -\sin^{-1}(-2x'+1) \Big|_0^y \right\} \\ &= \frac{1}{i} \int_0^1 dy \left\{ -\sin^{-1}(-2y+1) + \frac{\pi}{2} \right\} \end{aligned}$$

fazendo outra mudança, $y' = -2y + 1$, obtém-se o resultado desejado:

$$I = \frac{1}{2i} \int_{-1}^1 dy' \sin^{-1} y' + \frac{\pi}{2i} = \frac{\pi}{2i}.$$

A função $\Gamma(-n+x)$ no limite $x \rightarrow 0$ tem a seguinte expansão:

$$\Gamma(-n+x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{x} + \psi_1(n+1) + \mathcal{O}(x) \right], \quad (\text{B.7})$$

com

$$\psi_1(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma \quad (\text{B.8})$$

e, $\gamma = 0.577$.

Outra expansão útil é:

$$\Gamma(1/2 - \varepsilon/2) = \pi^{1/2} + \frac{\varepsilon}{2} \pi^{1/2} (\gamma + 2 \ln 2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{B.9})$$

Bibliografia

- [1] R. Jackiw, Phys. Today.(Jan**1972**).
- [2] S. Coleman, Aspects of symmetry (Cambridge Uni. press).
- [3] C. R. Hagen, Ann. Phys. **157**,342-359 (1984).
- [4] Greiner, Field Quantization (Springer-Verlag,1996).
- [5] P. de Sousa Gerbert,(UCLA 90 TEP).
- [6] W. Chen, Nucl. Phys. **B435**, 673 (1995).
- [7] C. G. Callan,Jr ,S. Coleman, Ann.Phys:**59**,42-73(1970).
- [8] S. Coleman e R. Jackiw, Ann. Phys. **67**, 552-598 (1971).
- [9] M. Kaku, Quantum Field Theory, ed Oxford.
- [10] M. Gomes, Teoria Quântica dos Campos (não publicado).
- [11] G. V. Dunne, hep-th/9902115 **16 Feb 1999**.
- [12] H. Flemming, Rev. Bras. Fis., Vol.17 ,**2** 1987.
- [13] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Ann. Phys. **140**; 372-411(1982).
- [14] M. Fleck., A. Foerster and H. O. Girotti, M. Gomes, J. R. S. Nascimento and A. J.da Silva, Journal of Modern Physics A, Vol. 12, number 16 (1997) 2889-2901 .
- [15] L. C. Albuquerque, M. Gomes and A. J.da Silva, hep-th/0005258 26 May 2000.
- [16] V. S. Alves, M. Gomes, S. L. V. Pinheiro, A. J.da Silva , Phys.Rev D. **61**,065003 (2000).

- [17] J. Barcelos-Neto, A. Das and W. Scherer, *Acta Physica Polonica* **B18**, 269-288(1987).
- [18] A. Foerster and H. O. Girotti, *Phys. Lett. B* **230**, 83-87(1989).
- [19] P. de Sousa Gerbert, *Phys.Rev D.* **42**,543-551 (1990).
- [20] S. Coleman, *Journal of Mathematical Physics* **7** 787(1966).
- [21] P. A. M. Dirac, *Rev. of Mod. Phys.* **21**,392-399(1949).
- [22] P. A. M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University(New York, 1964).
- [23] M. Henneaux e C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems* (Princeton University Press, 1992).
- [24] S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev. D*, **7**, 1888-1910 (1973).
- [25] C. Nash, *Relativistic Quantum Fields*, (ed. Academic Press, 1978)
- [26] C. Itzykson and J-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, 1985 pag 136-137.
- [27] G. 't Hooft e M. Veltman, *Nucl.Phys.* **B44** (1972) 189-213.
- [28] G. 't Hooft, *Nucl.Phys.* **B61** (1973) 465-468 .
- [29] G. W. Semenoff, P. Sodano and Yong-Shi Wu., *Phys.Rev.Lett*, (1989) Vol 62, Num 7, pag 715.
- [30] F. Wilczek, *Phys.Rev.Lett*, (1982) Vol 48 Num 17 pag 1144.
- [31] W. Chen e M. Li, *Phys.Rev.Lett.* (1993), Vol 70 Num 7, pag 884.