

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Teorias de gauge no formalismo de primeira ordem com efeitos de temperatura finita

Xirliane Muniz Vasconcelos

Orientador: Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (Universidade de São Paulo)

Prof. Dr. Alex Gomes Dias (Universidade Federal do ABC)

Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento (Universidade Federal da Paraíba)



São Paulo

2020

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Vasconcelos, Xirliane Muniz

Teorias de gauge no formalismo de primeira ordem com
efeitos de temperatura finita. São Paulo, 2020.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Insti-
tuto de Física. Depto. Física Experimental.

Orientador: Fernando Tadeu Caldeira Brandt

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Teoria de gauge; 2. Yang-Mills; 3. Forma-
lismo de Matsubara; 4. Formalismo de primeira ordem.

USP/IF/SBI-033/2020

University of São Paulo
Physics Institute

First-order formalism gauge theories with finite temperature effects

Xirliane Muniz Vasconcelos

Advisor: Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt

Dissertation submitted to the Physics Institute of the University of
São Paulo, in partial fulfillment of the requirements for the degree
of Master of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (University of São Paulo)

Prof. Dr. Alex Gomes Dias (Federal University of ABC)

Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento (Federal University of Paraíba)

São Paulo
2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente:

Ao meu orientador Fernando pela paciência, pela disponibilidade em tirar minhas dúvidas, por se dispor em me orientar e pela contribuição na condução dos estudos para que este trabalho fosse concluído, obrigada;

Aos meus colegas de mestrado Rafa e Sérgio, pelas correções efetuadas neste trabalho, pelo apoio e companhia neste período de estudos, obrigada;

Aos meus pais, que sempre me apoiaram, à minha mãe Edileusa por ter me ensinado à ser uma mulher forte e independente e ao meu pai José por ter me ensinado à lutar pelos meus sonhos mesmo diante às adversidades, obrigada;

À minha irmã Chirly, por estar sempre ao meu lado me apoiando e incentivando com palavras de carinho, obrigada;

Ao meu sobrinho Matheus por também estar ao meu lado, obrigada;

Às meninas da família: Juliana por desde tenra idade estar ao meu lado sendo uma grande amiga; Luana que é uma amiga e grande companheira nesta vida e Maiara por contribuir com uma amizade divertida e sincera. Agradeço à todas pelas aventuras inesperadas, pelos momentos de diversão com muita comilança e pelas conversas que tornam a vida mais leve e prazerosa, obrigada;

Aos meus tios Lucilene e Valdir por terem me acolhido em sua casa quando eu precisei, por me tratarem com carinho e me auxiliarem, permitindo que eu pudesse concluir meus estudos, obrigada;

Aos meus amigos que fiz no instituto Ana, Bia, Catarina, Caê, Cris, Ge, Isa, Gabi, Gu, Gui, Lu, Grassetti, Lucas, Mai, Mari, Pri, Rafa, Théo, Maya, Yuri, Bem e outros colegas do IFUSP pelos momentos de auxílio e compartilhamento de conhecimento durante o curso, assim como pelos momentos de diversão fora dele, em especial aos amigos Andy, Cris, Gu, Lu, Matheus, Rafa, Maya, Bem pelas pré-estreias assistidas do MCU e de Star Wars, obrigada e "*May the force be with you*";

Aos meus cachorros Blak, Bob e Sakura por sempre me recepcionarem com muita alegria e carinho quando volto para casa e serem um alento na minha vida, obrigada;

Aos meus gatos Daryl e Michionne por me darem muito carinho e também serem um alento na minha vida, obrigada;

À todos os meus amigos e colegas de trabalho do BB que me auxiliaram à conciliar os horários de trabalho com o de estudo e me apoiaram nesta minha dupla jornada, obrigada;

À minha psicóloga Narita que tem me ajudado à me autoconhecer e que com seu trabalho me permitiu continuar, obrigada;

À mim mesma por não desistir de quem eu sou, nem de tudo o que eu sonhei e lutei para conquistar.

Muito, muito obrigada à todos vocês!!!

RESUMO

Este trabalho aborda as teorias de gauge nos formalismos de primeira ordem, em particular a teoria de Yang-Mills. É mostrado que os formalismos de primeira e segunda ordem da teoria de Yang-Mills são equivalentes ao nível clássico. Ambos os formalismos são quantizados e as regras de Feynman correspondentes são obtidas. Para verificar a equivalência ao nível quântico são calculados os diagramas de Feynman de 1-loop à temperatura zero e à temperatura finita, onde é usado o formalismo do tempo imaginário para estudar o comportamento à altas temperaturas. Neste regime é verificado a equivalência das auto-energias dos bósons de gauge, assim como o fato dos demais diagramas possuírem uma dependência subdominante na temperatura equivalente ao o mesmo tipo de divergência logarítmica dos diagramas à temperatura zero.

Palavras-chave: Teorias de gauge, Teoria de Yang-Mills, Formalismos de primeira ordem, Diagramas de 1-loop, Temperatura finita.

ABSTRACT

This work deals with gauge theories in the first-order formalism, in particular, the Yang-Mills theory. It is shown that the first and second-order formalisms of the Yang-Mills theory are equivalent at the classic level. Both formalisms are quantized and the corresponding Feynman rules are obtained. To verify equivalence at the quantum level, one-loop Feynman diagrams are computed at both zero and finite temperature, where imaginary time formalism is used to study the high-temperature behaviour. In this regime, we verify the equivalence of the gauge bosons self-energies, as well as the fact that the other diagrams have a subdominant temperature dependence, which has the same type of logarithmic temperature dependence as the divergent part at zero temperature.

Key-words: Gauge theories, Yang-Mills theory, First order formalisms, 1-Loop diagrams, Finite temperature.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Diagramas de 1-loop no formalismo de 2ª ordem	57
Figura 2 – Diagramas de 1-loop no formalismo de 1ª ordem	61
Figura 3 – Diagramas de 1-loop no formalismo de 1ª ordem modificado	65
Figura 4 – Propagador do glúon no formalismo de segunda ordem até a ordem de g^2 . .	69
Figura 5 – Propagador do glúon no formalismo de primeira ordem até a ordem de g^2 .	69
Figura 6 – Contorno de integração C	78
Figura 7 – Contorno de integração \bar{C}	79
Figura 8 – Contorno de integração	81
Figura 9 – Amplitudes frontais do diagrama I da auto-energia dos campos de glúons. .	86
Figura 10 – Amplitudes frontais do diagrama II da auto-energia dos campos de glúons. .	87
Figura 11 – Amplitude frontal do diagrama III da auto-energia dos campos de glúons. .	88
Figura 12 – Amplitudes frontais do diagrama I da auto-energia dos campos de glúons. .	90
Figura 13 – Amplitudes frontais do diagrama III da auto-energia dos campos de glúons. .	92
Figura 14 – Amplitudes frontais do diagrama IV térmico.	93
Figura 15 – Amplitudes frontais do diagrama V térmico.	96
Figura 16 – Amplitudes frontais do diagrama VI térmico.	98
Figura 17 – Amplitudes frontais do diagrama III térmico.	100
Figura 18 – Amplitudes frontais do diagrama V térmico.	102

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

1MYM ... Formalismo de Primeira Ordem Modificado de Yang-Mills

1PI One Particle Irreducible

1YM Formalismo de primeira ordem de Yang-Mills

2YM Formalismo de segunda ordem de Yang-Mills

GWS Glashow–Weinberg–Salam

HTL Hard Thermal Loops

QCD Cromodinâmica Quântica

QED Eletrodinâmica Quântica

TQC Teoria Quântica de Campos

TQCTF ... Teoria Quântica de Campos à Temperatura Finita

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	TEORIAS DE GAUGE	23
2.1	Teorias abelianas	23
2.1.1	<i>Transformação abeliana global</i>	24
2.1.2	<i>Transformação abeliana local</i>	24
2.2	Teorias não-abelianas	26
2.2.1	<i>Transformação não-abeliana global</i>	26
2.2.2	<i>Transformação não-abeliana local</i>	27
3	QUANTIZAÇÃO DA TEORIA DE YANG-MILLS	31
3.1	Quantização no formalismo de 2ª ordem (2YM)	31
3.1.1	<i>Problema da inversão do operador quadrático</i>	32
3.1.2	<i>O método de Faddeev-Popov</i>	32
3.2	Quantização no formalismo de 1ª ordem (1YM)	36
3.2.1	<i>Problema da inversão da matriz bilinear</i>	37
3.2.2	<i>Equivalência quântica dos formalismos de 1ª e 2ª ordem</i>	39
3.3	Quantização no formalismo modificado (1MYM)	39
3.3.1	<i>Problema da inversão do operador quadrático</i>	41
3.3.2	<i>Equivalência quântica dos formalismos de 1ª ordem modificado e 2ª ordem</i>	42
4	REGRAS DE FEYNMAN	45
4.1	Regras de Feynman para o formalismo de 2ª ordem	45
4.2	Regras de Feynman para o formalismo de 1ª ordem	49
4.3	Regras de Feynman para o formalismo de 1ª ordem modificado	53
5	DIAGRAMAS DE 1-LOOP	57
5.1	Diagramas de 1-loop no formalismo de 2ª ordem	57
5.2	Diagramas de 1-loop no formalismo de 1ª ordem	60
5.3	Diagramas de 1-loop no formalismo de 1ª ordem modificado	65
5.4	Comparação dos valores obtidos nos diferentes formalismos	68

6	REVISÃO DA TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS À TEMPERATURA FINITA (TQCTF)	71
6.1	Relações termodinâmicas	71
6.2	Formalismo de Matsubara	72
6.3	Regras de Feynman térmicas	75
7	FUNÇÕES DE GREEN TÉRMICAS	77
7.1	Cálculo das funções de Green utilizando amplitudes frontais	77
7.2	Hard thermal loops	82
8	DIAGRAMAS DE 1-LOOP TÉRMICOS	85
8.1	Diagramas de 1-loop térmicos no formalismo de 2ª ordem	85
8.2	Diagramas de 1-loop térmicos no formalismo de 1ª ordem	90
8.3	Diagramas de 1-loop térmicos no formalismo de 1ª ordem modificado	100
8.4	Cosiderações sobre os diagramas de 1-loop térmicos nos diferentes formalismos	104
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	105
APÊNDICE A	REGRAS DE FEYNMAN	109
APÊNDICE B	INVERSÃO DE MATRIZ	113
APÊNDICE C	REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL	119
APÊNDICE D	REDUÇÃO DE PASSARINO-VELTMAN	123
APÊNDICE E	CÁLCULOS DOS DIAGRAMAS DE 1-LOOP	125
E.1	Diagramas de 1-loop do formalismo de segunda ordem	127
E.1.1	<i>Diagrama I</i>	127
E.1.2	<i>Diagrama II</i>	130
E.2	Diagramas de 1-loop do formalismo de primeira ordem	133
E.2.1	<i>Diagrama II</i>	135
E.2.2	<i>Diagrama III</i>	135
E.2.3	<i>Diagrama IV</i>	138
E.2.4	<i>Diagrama V</i>	142
E.2.5	<i>Diagrama VI</i>	143
E.3	Diagramas de 1-loop do formalismo de primeira ordem modificado	144
E.3.1	<i>Diagrama I</i>	144
E.3.2	<i>Diagrama II</i>	145
E.3.3	<i>Diagrama III</i>	145

<i>E.3.4</i>	<i>Diagrama IV</i>	145
<i>E.3.5</i>	<i>Diagrama V</i>	145
<i>E.3.6</i>	<i>Diagrama VI</i>	147
APÊNDICE F	CÁLCULOS DAS INTEGRAIS TÉRMICAS	149
REFERÊNCIAS		155

INTRODUÇÃO

Um dos princípios físicos que verificamos na natureza é a relação entre simetria e leis de conservação, através do estudo desta relação é possível compreender a dinâmica do fenômeno físico e construir uma teoria que descreva esta interação.

No início do século XX a simetria de Lorentz foi descoberta de forma independente por Lorentz [1], Einstein [2] e Poincaré [3], possibilitando o desenvolvimento da teoria da relatividade restrita. Segundo esta simetria todos os observadores que estejam em um determinado referencial inercial, mesmo que estejam se movendo um em relação ao outro, obterão as mesmas leis físicas do fenômeno que é observado.

Posteriormente Weyl [4] ao propôr uma descrição unificada da gravitação e do eletromagnetismo em que os vetores podiam alterar também o seu comprimento através de um transporte paralelo, acabou definindo a chamada invariância de gauge¹.

Apesar desta primeira tentativa de unificar o eletromagnetismo e a gravitação não ter tido sucesso, verificou-se que a invariância de gauge implica na conservação das cargas elétricas. Em outro artigo, Weyl [5]² conseguiu derivar o eletromagnetismo a partir da ideia de que a invariância de gauge pode ser tratada como um princípio de simetria e substituindo a derivada ordinária pela derivada covariante.

Assim com o advento do conceito de simetria de gauge juntamente com a quantização do eletromagnetismo foi possível o desenvolvimento no final da década de quarenta da QED³ de forma independente por Sin-Itiro Tomonaga [7], Julian Schwinger [8, 9] and Richard Feynman [10, 11, 12]. A QED descreve a interação dos campos eletromagnéticos, cujos bósons de gauge são fótons, o grupo de simetria da QED é o grupo U(1).

¹ Conhecida também como invariância de calibre, a ideia desenvolvida por Weyl era de que escalas de comprimentos e tempos seriam calibrados por fatores não integráveis $e^{\frac{e}{\hbar} \int dx_\mu A^\mu}$, onde A^μ seria o potencial eletromagnético, possibilitando desta forma que o eletromagnetismo fosse descrito em termos da conexão entre escalas locais.

² Weyl considerou a formulação do princípio de invariância local desenvolvida por Fock em [6].

³ Eletrodinâmica Quântica.

O desenvolvimento da QED serviu como modelo para a elaboração de outras teorias de gauge, que pudessem descrever através dos princípios de simetria outras forças físicas existentes na natureza, tais como: a força fraca, que está presente em fenômenos radioativos e a força forte ou nuclear, que participa de fenômenos físicos nucleares.

Yang e Mills [13] ao estudarem a interação entre prótons e nêutrons, considerando o princípio de simetria de gauge das rotações do spin isotópico acabaram desenvolvendo uma nova teoria, conhecida como teoria de Yang-Mills. Os campos que aparecem na teoria de Yang-Mills não possuem massa, este fato acabou dificultando a aplicação desta teoria para explicar as interações que ocorrem sob forças fortes ou fracas.

De fato, como os fenômenos descritos sob forças fortes ou fracas ocorrem em curto alcance e as partículas envolvidas na interação são massivas, as partículas sem massa da teoria de Yang-Mills eram uma objeção para que a teoria fosse utilizada para descrever tais fenômenos.

Esta dificuldade foi solucionada com o desenvolvimento da teoria eletrofraca de Glashow-Weinberg-Salam [14, 15, 16], que ao adicionarem à teoria um novo campo, chamado campo de Higgs, conseguiram contornar o problema da natureza sem massa dos campos de gauge da teoria de Yang-Mills e possibilitaram a descrição unificada das forças eletromagnéticas e fracas. Na teoria GWS⁴ os bósons de gauge são fótons, bósons W e bósons Z, sendo o grupo de simetria da teoria de GWS o grupo $H = SU(2) \times U(1)$.

No caso das interações fortes foi possível contornar este problema da teoria de Yang-Mills após a descoberta da liberdade assintótica feita por Gross e Wilczek [17] e de forma independente por Politzer [18]. A liberdade assintótica possibilitou a descrição para altas energias das interações entre as partículas que estão a uma pequena distância, na medida em que com esta propriedade as interações são tratadas como assintoticamente fracas, dando origem assim à teoria conhecida como QCD⁵, cujos bósons de gauge são glúons e que possui como grupo de simetria o grupo $G = SU(3)$.

Este trabalho tem como objetivo abordar as teorias de gauge em formalismos de primeira ordem e verificar efeitos térmicos, tendo como base para este estudo a teoria de Yang-Mills, que como vimos é uma teoria de gauge que serviu como impulso para o desenvolvimento de outras teorias como a QCD e a eletrofraca. Assim será desenvolvido alguns resultados já conhecidos, porém através da perspectiva destes formalismos de primeira ordem conforme os artigos de referência [19, 20, 21, 22].

No segundo capítulo será feita uma revisão das teorias de gauge a partir das transformações locais, abordando primeiramente as teorias abelianas, onde será constatado que através das transformações locais abelianas construímos a lagrangiana da teoria da QED e posteriormente abordando as teorias não-abelianas, verificando que a partir das transformações locais

⁴ Glashow-Weinberg-Salam.

⁵ Cromodinâmica Quântica.

não-abelianas obtemos a lagrangiana da teoria da QCD.

No terceiro capítulo será feita a revisão da quantização da teoria de Yang-Mills através do método usual de Faddeev-Popov [23]. Posteriormente será verificado que além do formalismo de segunda ordem comumente utilizado para estudar a teoria de Yang-Mills é possível desenvolver o estudo da teoria em outros formalismos.

Esses outros formalismos são o formalismo de primeira ordem, que possui a vantagem de simplificar os vértices de interação da teoria, eliminando o vértice de interação entre os glúons presente no formalismo de segunda ordem, acrescentando em contrapartida propagadores mistos; e o de primeira ordem modificado, que também não apresenta o vértice quártico de interação entre os glúons, assim como ocorre no formalismo de primeira ordem, além de não apresentar propagadores mistos. Neste capítulo será verificado também a equivalência clássica e quântica dos formalismos de primeira ordem com o formalismo de segunda ordem da teoria de Yang-Mills.

No quarto capítulo serão obtidas as regras de Feynman para cada um dos diferentes formalismos, que serão utilizadas no quinto capítulo ao estudar os diagramas de 1-loop em cada um dos formalismos, tendo em vista verificar através de um cálculo explícito a compatibilidade quântica entre os diferentes formalismos.

Para verificar efeitos térmicos da teoria nos formalismos de primeira ordem é feita uma revisão da teoria quântica de campos à temperatura finita no sexto capítulo, introduzindo o formalismo de Matsubara que será utilizado para abordar a teoria de Yang-Mills à temperatura finita, além de obter as regras de Feynman da teoria térmica.

No sétimo capítulo é desenvolvido o cálculo das funções de Green térmicas utilizando o formalismo de Matsubara e é introduzindo o conceito de amplitudes frontais, além disso é definido o limite de hard thermal loops que no oitavo capítulo será utilizado, juntamente com o resultado obtido no cálculo geral das funções de Green térmicas para calcular os diagramas térmicos de 1-loop da teoria em cada um dos diferentes formalismos.

Neste trabalho foi utilizado o sistema de unidades naturais $\hbar = c = 1$. A métrica de Minkowski, $\eta^{\mu\nu}$, possui por convenção o sinal (+, -, -, -). As coordenadas espaço-temporais x^μ possuem índices gregos como rótulos ($\mu, \nu, \sigma, \dots = 0, 1, 2, 3$), sendo a coordenada temporal designada por $x^0 = t$, enquanto que as coordenadas espaciais apresentam índices latinos ($i, j, k, \dots = 1, 2, 3$). Definiu-se o funcional gerador, assim como as lagrangianas da seguinte forma: no formalismo de segunda ordem respectivamente $Z^{(2YM)}$ e $\mathcal{L}^{(2YM)}$, no formalismo de primeira ordem como $Z^{(1YM)}$ e $\mathcal{L}^{(1YM)}$ e no formalismo de primeira ordem modificado como $Z^{(1MYM)}$ e $\mathcal{L}^{(1MYM)}$.

TEORIAS DE GAUGE

As teorias de gauge são teorias quânticas de campos nas quais as lagrangianas que as descrevem são invariantes sob um conjunto de transformações de gauge que constituem os grupos de simetrias, estes são grupos de Lie cujos geradores formam uma álgebra de Lie.

De fato, um dos pressupostos de uma teoria de gauge é a ideia de que não há apenas transformações globais, mas que a natureza também apresenta simetrias sob transformações locais. Uma transformação global ao ser aplicada a um campo altera a fase do mesmo, porém esta mudança não depende do espaço-tempo, já as chamadas transformações de gauge, são transformações locais que fazem com que os campos associados a uma determinada partícula mudem de fase de forma diferente em cada ponto do espaço-tempo.

As transformações pertencentes aos grupos de Lie podem ser representadas por matrizes e exceto o grupo $U(1)$, cujas transformações representam mudanças de fases, todos os outros grupos de Lie são não-abelianos, isto é, o comutador de dois geradores do grupo é não nulo. No modelo padrão os grupos de simetrias são $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ⁶, já para teorias além do modelo padrão os grupos de simetrias usuais são $SU(N)$ e $SO(N)$.

Conforme o desenvolvimento realizado em [24] verificaremos que uma teoria de gauge é construída a partir de simetrias locais. Primeiramente ao considerarmos a localidade do grupo de simetria $U(1)$, que resultará na lagrangiana da QED e no segundo caso ao considerarmos a localidade do grupo de simetria $SU(N)$, que resultará na lagrangiana de Yang-Mills.

2.1 Teorias abelianas

Uma teoria de gauge é considerada abeliana quando duas transformações pertencentes ao grupo de simetria comutam e desta forma não importa a ordem na qual as transformações são aplicadas ao campo, pois o resultado final será o mesmo. A teoria da QED possui como grupo

⁶ O grupo de gauge da interação forte é o $SU(3)$, já o da interação eletrofraca é o $SU(2) \times U(1)$.

de simetria o grupo de Lie $U(1)$, sendo conseqüentemente uma teoria abeliana, verifiquemos a seguir que ela resulta ao considerarmos a invariância de gauge da lagrangiana de Dirac.

2.1.1 Transformação abeliana global

Considerando a densidade de lagrangina de Dirac para o elétron livre :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\partial - m)\psi(x) \quad (2.1)$$

Sob uma transformação global $U = e^{ig\theta}$, os campos se transformam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{ig\theta}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-ig\theta} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Logo, verificamos que os campos mudam de fase, sem depender da posição espaço-temporal e conseqüentemente temos que a lagrangiana é invariante sob esta transformação global U . Estas transformações globais conservam algum número quântico do sistema.

2.1.2 Transformação abeliana local

Se impormos a dependência da fase em relação à coordenada espaço-temporal, teremos uma transformação local definida como sendo $U(x) = e^{ig\theta(x)}$, sob esta transformação os campos da lagrangiana de Dirac (2.1) se transformam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{ig\theta(x)}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-ig\theta(x)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sob esta transformação local a lagrangiana de Dirac acaba não sendo invariante, como vemos a seguir:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)(i\partial - m)\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x)(i\partial - m)\psi'(x) \\ &= \bar{\psi}(x)(i\partial - m)\psi(x) - \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\partial_\mu\theta(x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Porém podemos fazer com que ela seja invariante, para isso devemos encontrar um termo adequado para a derivada que cancele o termo proporcional à $\partial_\mu\theta(x)$. Definimos com este intuito uma derivada covariante $D_\mu\psi(x)$, que deve se transformar da seguinte forma sob a transformação local:

$$D_\mu\psi(x) \rightarrow D'_\mu\psi'(x) = U(x)D_\mu\psi(x) \quad (2.5)$$

Visando satisfazer esta condição define-se a derivada covariante como sendo:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu(x) \quad (2.6)$$

onde g é uma constante de acoplamento dos campos gluônicos e o campo vetorial $A_\mu(x)$ é introduzido visando eliminar o termo extra da lagrangiana (2.4), que possui dependência de $\partial_\mu \theta(x)$.

Utilizando a definição da derivada covariante (2.6), obtemos que A_μ , para satisfazer a condição (2.5), deverá se transformar da seguinte forma:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{i}{g} U^{-1}(x) \partial_\mu U(x) \quad (2.7)$$

Utilizando este resultado, verifica-se que a derivada covariante se transforma assim:

$$\begin{aligned} D_\mu \rightarrow D'_\mu &= \partial_\mu - igA'_\mu(x) = \partial_\mu - igA_\mu(x) - U^{-1}(x) \partial_\mu U(x) = \\ &= \partial_\mu - igA_\mu(x) + U(x) \partial_\mu U^{-1}(x) = U(x) (\partial_\mu - igA_\mu) U^{-1}(x) = \\ &= U(x) D_\mu U^{-1}(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Uma vez definido como os campos e a derivada covariante se transformam, temos que a invariância da densidade de lagrangiana sob a transformação local é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \bar{\psi}'(x) [iD' - m] \psi'(x) = \\ &= \bar{\psi}(x) U^{-1}(x) U(x) iD U^{-1}(x) U(x) \psi(x) - \bar{\psi}(x) U^{-1}(x) m U(x) \psi(x) = \\ &= \bar{\psi}(x) [iD - m] \psi(x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Para que o campo A_μ possa ser expandido em termos de operadores de criação e aniquilação é preciso de um termo cinético para A_μ , sendo que este termo não deve alterar a invariância da lagrangiana. Para obter este termo cinético utilizamos o comutador das derivadas covariantes:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = \\ &= (\partial_\mu - igA_\mu)(\partial_\nu - igA_\nu) - (\partial_\nu - igA_\nu)(\partial_\mu - igA_\mu) = \\ &= \partial_\mu \partial_\nu - ig \partial_\mu A_\nu - ig A_\nu \partial_\mu - ig A_\mu \partial_\nu - g^2 A_\mu A_\nu - \\ &\quad - \partial_\nu \partial_\mu + ig \partial_\nu A_\mu + ig A_\mu \partial_\nu + ig A_\nu \partial_\mu + g^2 A_\nu A_\mu = \\ &= -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \end{aligned} \quad (2.10)$$

que se transforma invariantemente por gauge da seguinte forma:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] \rightarrow [D'_\mu, D'_\nu] &= U [D_\mu, D_\nu] U^{-1} = \\ &= -ig U (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) U^{-1} = \\ &= -ig (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = [D_\mu, D_\nu] \end{aligned} \quad (2.11)$$

nota-se que o comutador é proporcional ao tensor do campo eletromagnético $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu]$.

Podemos deste modo escrever a densidade de lagrangiana para a parte dinâmica do campo de gauge em termos deste tensor:

$$\mathcal{L}_d = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

Desta forma obtemos a densidade de lagrangiana da QED, que descreve as interações dos elétrons e pósitrons com o campo eletromagnético:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi(x) - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} \quad (2.13)$$

Verifiquemos a seguir o caso de teorias não-abelianas.

2.2 Teorias não-abelianas

A análise feita para uma teoria abeliana pode ser generalizada para teorias de gauge cujos grupos de simetrias não são abelianos, este tipo de simetria é comumente verificada no mundo real, como no caso da rotação tridimensional, onde rotacionar um objeto no eixo-x e depois no eixo-z difere de rotacionar primeiro no eixo-z e só depois no eixo-x, isto significa que em uma transformação não-abeliana a ordem das transformações altera o resultado final.

A teoria de Yang-Mills possui como grupo de simetria o grupo SU(N), sendo consequentemente uma teoria não-abeliana, assim construiremos a lagrangiana desta teoria de forma semelhante ao que foi feito para a teoria da QED.

2.2.1 Transformação não-abeliana global

Considerando a densidade de lagrangiana de Dirac para uma coleção de N campos fermiônicos complexos:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_i(x)(i\not{\partial} - m)\psi_i(x), \quad i=1, \dots, N \quad (2.14)$$

sendo i um índice de simetria interna.

Os campos sob transformações globais se transformam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &\rightarrow \psi'_i(x) = U_{ij}\psi_j(x) \\ \bar{\psi}_i(x) &\rightarrow \bar{\psi}'_i(x) = \bar{\psi}_k(x)U_{ki}^\dagger \end{aligned} \quad (2.15)$$

Sob estas transformações globais a densidade de lagrangiana será invariante quando $U_{ki}^\dagger U_{ij} = \delta_{jk}$, como vemos a seguir:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_i(x)(i\not{\partial} - m)\psi_i(x) &\rightarrow \bar{\psi}'_i(x)(i\not{\partial} - m)\psi'_i(x) = \bar{\psi}_k(x)U_{ki}^\dagger(i\not{\partial} - m)U_{ij}\psi_j(x) = \\ &= \bar{\psi}_k(x)U_{ki}^\dagger U_{ij}(i\not{\partial} - m)\psi_j(x) = \bar{\psi}_k(x)(i\not{\partial} - m)\psi_k(x) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Considerando o grupo SU(N), grupo de simetria da teoria de Yang-Mills, como sendo o grupo de transformação não-abeliana global, verifiquemos algumas propriedades que ela apresenta.

Se as transformações $SU(N)$ forem pequenas elas podem ser escritas da seguinte forma:

$$U_{ij} = \delta_{ij} - i\theta^a T_{ij}^a + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (2.17)$$

onde θ^a é um parametro real e T_{ij}^a geradores de $SU(N)$, com $i, j = 1, \dots, N$ e $a = 1, \dots, (N^2 - 1)$, este intervalo ocorre pois T_{ij}^a é uma matriz complexa $N \times N$ que possui $2N^2$ elementos, considerando as condições $U^\dagger = U^{-1}$ e $\det U = 1$, os elementos dos geradores são restritos para $N^2 - 1$ elementos independentes.

Usando a condição de que a matriz seja unitária, vemos que os geradores são hermitianos:

$$U^\dagger U = \mathbb{1} \Rightarrow T^{a\dagger} = T^a \quad (2.18)$$

Usando a condição de que o determinante deve ser unitário, vemos que os geradores possuem traços nulos:

$$\log(\det U) = 0 \Rightarrow \text{Tr}(\log(1 - i\theta^a T^a)) = 0 \Rightarrow \text{Tr}(T^a) = 0 \quad (2.19)$$

Para $SU(N)$ podemos escolher a condição de normalização como sendo:

$$\text{Tr}(T^a T^b) = T_{ij}^a T_{ji}^b = \frac{\delta_{ab}}{2} \quad (2.20)$$

Como os geradores obedecem a álgebra de Lie, temos:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad a, b, c = 1, \dots, N^2 - 1 \quad (2.21)$$

onde f^{abc} são constantes de estrutura da álgebra e possuem a propriedade de antissimetria.

Devido esta relação de comutação é possível determinar se um grupo é abeliano ou não, no caso em que os geradores do grupo de simetria comutam, o grupo de simetria é chamado de grupo abeliano, do contrário é chamado de não-abeliano.

2.2.2 Transformação não-abeliana local

Conhecendo algumas propriedades do grupo de transformações não abelianas globais $SU(N)$, procederemos agora de forma análoga ao caso da QED, para encontrar a lagrangiana invariante sob transformações não-abelianas locais.

Definindo as transformações dos N campos sob uma transformação local como sendo:

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &\rightarrow \psi'_i(x) = U_{ij}(x) \psi_j(x) \\ \bar{\psi}_i(x) &\rightarrow \bar{\psi}'_i(x) = \bar{\psi}_k(x) U_{ki}^\dagger(x) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Para que haja a invariância da densidade de lagrangiana (2.14), define-se uma derivada covariante que atue sobre os campos fermiônicos conforme (2.6).

Uma grande diferença em relação ao estudo feito na QED é que no caso da teoria não-abeliana tanto A_μ quanto U são matrizes complexas $N \times N$. Impondo a invariância da derivada covariante, temos:

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = U(x)D^\mu U^\dagger(x) \quad (2.23)$$

onde $U^\dagger(x) = U^{-1}(x)$, que permite encontrar a forma como o campo de gauge se transforma:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x) \quad (2.24)$$

Com estes resultados obtêm-se a invariância da densidade de lagrangiana sob a transformação local da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \bar{\psi}'_i(x)[i\not{D}' - m]\psi'_i(x) = \bar{\psi}_k(x)U_{ki}^\dagger(x)U_{ij}(x)iD^\mu U_{ki}^\dagger(x)U_{ij}(x)\psi_j(x) - \\ &- \bar{\psi}_k(x)U_{ki}^\dagger(x)mU_{ij}(x)\psi_j(x) = \bar{\psi}_k(x)[i\not{D} - m]\psi_k(x) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Como foi adicionado um novo campo é preciso adicionar um termo cinético à lagrangiana que seja capaz de descrever a dinâmica do campo A_μ . Conforme vimos na QED, este termo precisa ser quadrático nas derivadas covariantes, logo definimos o comutador das derivadas covariantes como sendo:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= (\partial_\mu - igA_\mu)(\partial_\nu - igA_\nu) - (\partial_\nu - igA_\nu)(\partial_\mu - igA_\mu) = \\ &= -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]) \end{aligned} \quad (2.26)$$

interessante notar que caso os campos de gauge comutem é obtido o resultado anterior (2.10) da QED.

Podemos escrever o tensor da força do campo de glúons em termos do comutador das derivadas covariantes:

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] \quad (2.27)$$

Se consideramos o fato de que o tensor de força deve se transformar invariantemente da seguinte forma:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = U(x)F_{\mu\nu}U^\dagger(x) \quad (2.28)$$

e calculando o traço do produto de dois tensores de força:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \rightarrow \text{Tr}(F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}) &= \text{Tr}(UF_{\mu\nu}U^\dagger UF^{\mu\nu}U^\dagger) = \\ &= \text{Tr}(U^\dagger UF_{\mu\nu}U^\dagger UF^{\mu\nu}) = \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde usamos a propriedade de ciclicidade do traço para obter o resultado. Como (2.29) é invariante, logo podemos escrever o termo dinâmico usando o traço do produto dos tensores de força:

$$\mathcal{L}_d = -\frac{1}{2}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (2.30)$$

Para reescrever este termo dinâmico sem o traço, podemos adotar a representação adjunta, onde o campo de gauge pode ser escrito em termos das bases dos geradores do grupo de simetria T^a da seguinte forma:

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \quad \text{ou} \quad A_\mu^a = 2\text{Tr}(A_\mu T^a) \quad (2.31)$$

onde nota-se que o número dos campos de gauge é o mesmo da dimensão do grupo de Lie.

Da mesma forma, o tensor de força do campo de glúons pode ser escrito em termos das bases dos geradores:

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a \quad (2.32)$$

Assim podemos escrever o tensor de força na forma adjunta como sendo:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= 2\text{Tr}(F_{\mu\nu} T^a) = 2\text{Tr}(\partial_\mu A_\nu T^a) - 2\text{Tr}(\partial_\nu A_\mu T^a) - 2\text{Tr}(ig[A_\mu, A_\nu] T^a) = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - \\ &- 2\text{Tr}(igA_\mu A_\nu [T^b, T^c] T^a) = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - 2\text{Tr}(igA_\mu A_\nu i f^{bca} T^a T^a) = \\ &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \end{aligned} \quad (2.33)$$

e reescrever a densidade de lagrangiana para a parte dinâmica da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_d = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (2.34)$$

esta parte dinâmica do campo de gauge representa a densidade de lagrangiana de Yang-Mills no formalismo de segunda ordem, que descreve a interação entre núcleons.

Se consideramos o grupo SU(3), temos um caso particular deste resultado conhecido como QCD que representa em geral as interações de quarks com campos de glúons, dada pela densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\Psi}_i (i\not{D}_\mu - m) \Psi_i \quad (2.35)$$

que é invariante sob as transformações de simetria de gauge não-abelianas (2.22) e (2.24).

Desta forma, tendo em vista que conforme obtemos em (2.34) a teoria de Yang-Mills é uma teoria de gauge obtida considerando o grupo SU(N) de transformações não-abelianas locais, importante notar que não consideramos a parte dependente dos campos fermiônicos para o estudo nos formalismos de primeira ordem, pois estes formalismos não agem sobre o setor fermiônico.

QUANTIZAÇÃO DA TEORIA DE YANG-MILLS

A teoria de Yang-Mills é tradicionalmente abordada pelo formalismo de segunda ordem cuja lagrangiana é dada por (2.34), primeiramente iremos verificar a quantização da teoria neste formalismo e posteriormente veremos que a teoria pode ser reescrita em outros formalismos que são equivalentes ao formalismo usual.

A quantização de uma teoria consiste em fazer com que um sistema clássico possa ser descrito em termos da teoria quântica de campo, para este fim utilizamos a formulação das integrais de trajetória, que no caso da teoria de Yang-Mills é dada pelo seguinte funcional gerador das funções de Green:

$$Z[J_a^\mu] = \mathcal{N} \int DA_\mu^a e^{iS_{YM}(A_\mu^a) + i \int d^4x J_a^\mu A_\mu^a} = \mathcal{N} \int DA_\mu^a e^{-\frac{1}{2} A_\mu^a K A_\nu^b + iV(A_\mu^a) + i \int d^4x J_a^\mu A_\mu^a} \quad (3.1)$$

onde K é um operador quadrático e $V(A_\mu^a)$ possui os termos de potências maiores que dois de A_μ^a .

3.1 Quantização no formalismo de 2ª ordem (2YM)

Como vimos, a parte dinâmica do campo de gauge (2.34) representa a densidade de lagrangiana de Yang-Mills no formalismo de segunda ordem:

$$\mathcal{L}^{(2YM)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (3.2)$$

com $F_{\mu\nu}^a$ definido de acordo com (2.33).

Assim considerando o funcional gerador no formalismo de integral de trajetória:

$$Z^{(2YM)}[J_a^\mu] = \mathcal{N} \int DA_\mu^a e^{i \int d^4x \mathcal{L}^{(2YM)}(A_\mu^a) + i \int d^4x J_a^\mu A_\mu^a} \quad (3.3)$$

iremos desenvolver a quantização perturbativa da teoria de Yang-Mills seguindo o método desenvolvido por Faddeev e Popov [23]. Nestes cálculos escolhemos $J_\mu^a = 0$ de forma que o funcional gerador⁷ considerado é dado por:

$$Z^{(2YM)}[0] = \mathcal{N} \int DA_\mu^a e^{i \int d^4x \mathcal{L}^{(2YM)}(A_\mu^a)} \quad (3.4)$$

3.1.1 Problema da inversão do operador quadrático

Primeiramente mostraremos que o operador quadrático do funcional gerador (3.4) não possui inversa e conseqüentemente não é possível determinar o propagador dos campos de glúons, para isso consideremos apenas a ação do campo livre⁸ conforme:

$$\begin{aligned} S_{Livre}^{(2YM)}(A_\mu^a) &= -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) = \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x A^{a\mu} \delta^{ab} (-\partial^2 \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu) A^{b\nu} \end{aligned} \quad (3.5)$$

O operador quadrático $K_{\mu\nu}^{ab} = -\frac{1}{2} \delta^{ab} (-\partial^2 \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu)$ possui autovalores nulos, como podemos observar ao fazer com que este operador atue sobre uma derivada total:

$$K_{\mu\nu}^{ab} \partial^\nu \Lambda(x) = -\frac{1}{2} \delta^{ab} (-\partial^2 \partial_\mu \Lambda(x) + \partial_\mu \partial^2 \Lambda(x)) = 0 \quad (3.6)$$

Devido a existência destes autovalores nulos não é possível inverter o operador quadrático, pois não existe um operador $Q^{bc\gamma\nu}$ que satisfaça:

$$K_{\mu\gamma}^{ab} Q^{bc\gamma\nu}(x-y) = \delta^{ac} \delta_\mu^\nu \delta^4(x-y) \quad (3.7)$$

Conseqüentemente para que o operador quadrático $K_{\mu\nu}^{ab}$ do funcional gerador possa ser invertido é preciso remover os modos nulos deste operador fixando o gauge de forma semelhante ao que ocorre na QED, verificaremos a seguir que utilizando o método de Faddeev-Popov conseguimos fixar o gauge e inverter o operador quadrático.

3.1.2 O método de Faddeev-Popov

Para que possamos utilizar o método de Faddeev-Popov conforme [23] é preciso que a medida de integração seja invariante sob transformações de gauge, assim como a ação. A ação é invariante por transformações de gauge dada a própria construção da lagrangiana de Yang-Mills no formalismo de segunda ordem (2.34), que é invariante por gauge.

Para verificarmos a invariância da medida sob a transformação de gauge consideramos a transformação de gauge do campo A_μ dada em (2.24), com $A_\mu = A_\mu^a T^a$, na representação

⁷ Neste trabalho consideramos apenas o funcional gerador sem fontes.

⁸ A ação livre é aquela em que constante de acoplamento g é nula.

adjunta. Escrevendo as matrizes de transformação em termos dos geradores do grupo de Lie, conforme (2.17), temos:

$$U(x) = e^{-i\theta^a(x)T^a} = \mathbb{1} - i\theta^a(x)T^a + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (3.8)$$

Desconsiderando os termos de ordem superior ou igual à θ^2 obtemos que A_μ se transforma da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_\mu^a(x)T^a \rightarrow A_\mu^{a'}(x)T^a &= (\mathbb{1} - i\theta^b(x)T^b)A_\mu^a(x)T^a(\mathbb{1} + i\theta^b(x)T^b) + \\ &+ \frac{i}{g}(\mathbb{1} - i\theta^b(x)T^b)(\partial_\mu(\mathbb{1} + i\theta^b(x)T^b)) = \\ &= A_\mu^a(x)T^a - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^b(x)T^b + \theta^b(x)f^{abc}A_\mu^c(x)T^a \end{aligned} \quad (3.9)$$

ou simplesmente:

$$\begin{aligned} A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^{a'}(x) &= A_\mu^a(x) - \frac{1}{g}\delta^{ab}\partial_\mu\theta^b(x) + \theta^b(x)f^{abc}A_\mu^c(x) = \\ &= A_\mu^a(x) - \frac{1}{g}D_\mu^{ab}\theta^b(x) \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde D_μ^{ab} é a derivada covariante na representação adjunta:

$$D_\mu^{ab} = \delta^{ab}\partial_\mu - gf^{abc}A_\mu^c \quad (3.11)$$

Logo a medida sob a transformação de gauge será invariante, como podemos verificar a seguir:

$$DA_\mu^a \rightarrow DA_\mu^a \det\left(\frac{\partial A_\mu^{a'}}{\partial A_\mu^b}\right) = DA_\mu^a \det(\delta^{ab} + \theta^c f^{abc}) = DA_\mu^a (1 + \mathcal{O}(\theta^2)) \quad (3.12)$$

para resolver o determinante em (3.12) foi usado a identidade:

$$\det(1 + \mathcal{L}) = e^{\text{Tr}\log(1+\mathcal{L})} = 1 + \text{Tr}\mathcal{L} + \mathcal{O}(\mathcal{L}^2) \quad (3.13)$$

Devido a invariância por transformação de gauge do campo gluônico A_μ^a , verificada em (3.10), temos que a integral funcional sobre o campo de gauge (3.30) possui uma degenerescência infinita, isto significa que para cada configuração de campo A_μ^a há infinitas configurações que são equivalentes através de transformações de gauge, logo a integração gera termos redundantes e consequentemente devemos eliminar essa degenerescência.

Para eliminar essa degenerescência, conforme [25], consideramos o espaço de todas as configurações de campos gluônicos denotado por \mathcal{A} , como vimos este possui uma degenerescência infinita de campos fisicamente equivalentes que estão relacionados entre si por uma transformação de gauge, dizemos que estes campos equivalentes pertencem a uma mesma órbita de gauge, logo \mathcal{A} é uma coleção de órbitas de gauge.

Para remover a degenerescência da integração é preciso escolher um campo de cada órbita de gauge, assim escolhemos um subconjunto $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, que contém apenas campos não equivalentes.

Tratando este subconjunto como uma superfície transversal denotada por $f^a(A^{a\mu})$, que satisfaça a condição de fixação de gauge $f^a(A^{a\mu}) = 0$, que podemos definir como sendo:

$$f^a(A^{a\mu}) = G_\mu^a(A^{a\mu}) - \omega^a(x) \quad (3.14)$$

onde G_μ^a é um operador ou vetor e ω^a uma função das coordenadas do espaço-tempo.

Seguindo o procedimento adotado por Faddeev-Popov para conseguir utilizar este resultado na integral e eliminar a degenerescência do integrando, definimos:

$$1 = \int Df^a \delta[f^a(A^{a\mu})] \quad (3.15)$$

onde o funcional delta deve ter dimensão infinita, sendo que ao adicionar esta identidade na integral original acaba fazendo com que a integração seja realizada apenas sob os campos transversais.

Fazendo uma mudança de variáveis $f^a \rightarrow \theta^a$ na integral, obtemos:

$$1 = \int D\theta^b \det\left(\frac{\delta f^a(A^{a\mu})}{\delta \theta^b}\right) \delta[f^a(A^{a\mu}(\theta^b))] \quad (3.16)$$

Resumindo o que foi feito até agora ao considerarmos o funcional gerador da teoria sem fontes (3.4), cuja integral engloba todos os campos incluindo os que são relacionados por transformações de gauge é preciso restringir a integral, para isso utilizamos (3.16) e o reescrevemos da seguinte forma:

$$Z^{(2YM)}[0] = \mathcal{N} \left(\int D\theta^b \right) \int DA_\mu^a e^{i \int d^4x [L^{(2YM)}(A^{a\mu})]} \det\left(\frac{\delta f^a(A^{a\mu})}{\delta \theta^b}\right) \delta[f^a(A^{a\mu}(\theta^b))] \quad (3.17)$$

onde $A_\mu^a(\theta^b)$ é a variável de integração muda. Apesar da integração ($\int D\theta^b$) ser infinita, dado que há infinitos parâmetros da álgebra de Lie, ao calcularmos quantidades físicas este fator será cancelado.

Como a integral (3.17) apresenta dois fatores novos, o funcional delta da fixação de gauge e o determinante, que são ausentes na teoria de perturbação é preciso removê-los para que seja possível calcular expansões perturbativas.

Usando a definição de $f(A^{a\mu})$ dada por (3.14) e notando que a integral (3.17) não depende de $f^a(A^{a\mu})$, assim como não depende de $\omega^a(x)$, além disso atentando ao fato de que podemos multiplicá-la por uma constante sem que haja implicações físicas e escolhendo este fator de multiplicação como sendo:

$$\int Dw^a e^{-i \int d^4x \frac{w^a(x)^2}{2\xi}} \quad (3.18)$$

reescrevemos então (3.17) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
Z^{(2YM)}[0] &\sim \int Dw^a e^{-i \int d^4x \frac{w^a(x)^2}{2\xi}} \int DA_\mu^a e^{i \int d^4x [\mathcal{L}^{(2YM)}(A^{a\mu})]} \det\left(\frac{\delta G_\mu^a(A^{a\mu})}{\delta \theta^b}\right) \delta[G_\mu^a(A^{a\mu}) - \omega^a(x)] = \\
&= \int DA_\mu^a e^{i \int d^4x [\mathcal{L}^{(2YM)}(A^{a\mu})]} \det\left(\frac{\delta G_\mu^a(A^{a\mu})}{\delta \theta^b}\right) \int Dw^a e^{-i \int d^4x \frac{w^a(x)^2}{2\xi}} \delta[G_\mu^a(A^{a\mu}) - \omega^a(x)] = \\
&= \int DA_\mu^a e^{i \int d^4x [\mathcal{L}^{(2YM)}(A^{a\mu}) - \frac{1}{2\xi} (G_\mu^a(A^{a\mu}))^2]} \det\left(\frac{\delta G_\mu^a(A^{a\mu})}{\delta \theta^b}\right)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Deste modo removemos a função delta do integrando, adicionando um expoente em seu lugar.

Precisamos agora resolver o determinante, ele pode ser escrito como sendo uma integral funcional em termos das variáveis de Grassmann, como pode ser visto a seguir:

$$ig \det(A) = \int Dx Dy e^{i \int d^4x_1 d^4x_2 y(x_1)(gA(x_1-x_2))x(x_2)} \tag{3.20}$$

A ideia de Faddeev-Popov ao utilizar este método foi introduzir dois novos campos com spin-estatística ímpar, que são as variáveis de Grassmann conhecidas como fantasmas de Faddeev-Popov.

De fato na integração infinita sobre as variáveis de Grassmann, temos:

$$\int dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_n e^{-x^T A y} = \det A \tag{3.21}$$

se tomarmos o limite de $n \rightarrow \infty$, obtemos a expressão (3.20) do determinante funcional como uma integral de trajetória fermiônica sob duas funções de Grassmann independentes.

Utilizando a expressão do determinante (3.20), reescrevemos o funcional gerador (3.19) da seguinte forma:

$$Z^{(2YM)}[0] \sim \int DA_\mu^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [\mathcal{L}^{(2YM)} - \frac{1}{2\xi} (G_\mu^a(A^{a\mu}))^2]} e^{i \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{c}^a(x_1) (g \frac{\delta G_\mu^a(A^{a\mu}(\theta^a))}{\delta \theta^b}) c^b(x_2)} \tag{3.22}$$

Utilizando (3.10), obtemos:

$$\frac{\delta A^{a\mu}(\theta(x))}{\delta \theta^b(y)} = -\frac{1}{g} \frac{D^{ac\mu}(x) \theta^c(x)}{\delta \theta^b(y)} = -\frac{1}{g} D^{ab\mu}(x) \delta(x-y) \tag{3.23}$$

com este resultado a derivada funcional fica:

$$\begin{aligned}
g \frac{\delta G_\mu^a(A^{a\mu}(\theta(x)))}{\delta \theta^b(y)} &= g \int d^4z \frac{\delta G_\mu^a(A^{a\mu}(\theta(x)))}{\delta(A^{cv}(\theta(z)))} \frac{\delta(A^{cv}(\theta(z)))}{\delta \theta^b(y)} = \\
&= - \int d^4z \frac{\delta G_\mu^a(A^{a\mu}(x))}{\delta(A^{cv}(z))} D^{cbv}(z) \delta(z-y) = - \frac{\delta G_\mu^a(A^{a\mu}(x))}{\delta(A^{cv}(y))} D^{cbv}(y)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

e o funcional gerador será dado por:

$$\begin{aligned}
Z^{(2YM)}[0] &\sim \int DA_\mu^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [\mathcal{L}^{(2YM)}(A^{a\mu}) - \frac{1}{2\xi} (G_\mu^a(A^{a\mu}))^2]} \\
&\quad \times e^{i \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{c}^a(x_1) \left(-\frac{\delta G_\mu^a(A^{a\mu}(x_1))}{\delta(A^{cv}(x_2))}\right) D^{cbv}(x_2) c^b(x_2)}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Este funcional gerador é válido para qualquer condição de fixação de gauge $G_\mu^a(A^{a\mu})$, tais como:

$$\begin{aligned} \text{Gauge de Coulomb} : G_\mu^a(A^{a\mu}) &= (0, \vec{\partial})(A^{a\mu}) \\ \text{Gauge Axial} : G_\mu^a(A^{a\mu}) &= n_\mu(A^{a\mu}) \\ \text{Gauge de Lorenz} : G_\mu^a(A^{a\mu}) &= \partial_\mu A^{a\mu} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Escolhendo o gauge de Lorenz obtemos que o diferencial da equação (3.24) é dado por:

$$\frac{\delta \partial_\mu A^{a\mu}(x_1)}{\delta A^{c\nu}(x_2)} = \partial_\mu \delta_\nu^\mu \delta^{ac} \delta(x_1 - x_2) = \partial_\nu \delta^{ac} \delta(x_1 - x_2) \quad (3.27)$$

assim no gauge de Lorenz o funcional gerador é dado por:

$$Z^{(2YM)}[0] = \int DA_\mu^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 - \bar{c}^a \partial_\mu D^{ab\mu} c^b]} \quad (3.28)$$

Com esse procedimento desenvolvido por Faddeev-Popov obtemos uma nova ação, modificada pelos termos de fixação de gauge e dos campos fantasmas. Dado que esta ação quantizada possui um termo que fixa o gauge, o operador quadrático dela é inversível, permitindo assim que seja possível determinar o propagador dos campos de glúons.

3.2 Quantização no formalismo de 1ª ordem (1YM)

O estudo da teoria de Yang-Mills no formalismo de primeira ordem conforme [20] e [21] é vantajoso na medida em que neste formalismo obtemos uma simplificação dos vértices de interação da teoria, no formalismo de primeira ordem há apenas a interação dos vértices de três pontos $\langle FAA \rangle$, não apresentando mais o vértice quártico de interação entre os glúons $\langle AAAA \rangle$, nem o vértice triplo de interação entre os glúons $\langle AAA \rangle$ presentes no formalismo de segunda ordem, por outro lado neste formalismo de primeira ordem além dos propagadores dos campos do tipo $\langle AA \rangle$ e $\langle FF \rangle$ há também propagadores mistos do tipo $\langle AF \rangle$ e $\langle FA \rangle$.

A densidade de lagrangiana de Yang-Mills no formalismo de primeira ordem é obtida partindo da densidade de lagrangina (3.2) e considerando os campos $F_{\mu\nu}^a$ e $A^{a\mu}$ como campos independentes, conforme [20] ela é dada por:

$$\mathcal{L}^{(1YM)} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (3.29)$$

Assim como no formalismo de segunda ordem, a lagrangiana no formalismo de primeira ordem é invariante sob a transformação local, onde A_μ^a se transforma conforme (3.10) e $F_{\mu\nu}^a$ conforme (2.28), este pode ser reescrito considerando a representação adjunta, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a T^a \rightarrow F_{\mu\nu}^{a'} T^a &= (\mathbb{1} - i\theta^b T^b) F_{\mu\nu}^a T^a (\mathbb{1} + i\theta^b T^b) = \\ &= F_{\mu\nu}^a T^a - i\theta^b T^b F_{\mu\nu}^a T^a + F_{\mu\nu}^a T^a i\theta^b T^b = \\ &= F_{\mu\nu}^a T^a - i\theta^b [T^b, F_{\mu\nu}^a T^a] = F_{\mu\nu}^a T^a - f^{bac} \theta^b F_{\mu\nu}^a T^c = \\ &= F_{\mu\nu}^a T^a + f^{abc} \theta^b F_{\mu\nu}^c T^a \end{aligned} \quad (3.30)$$

ou simplesmente:

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow F_{\mu\nu}^{a'} = F_{\mu\nu}^a + f^{abc} \theta^b F_{\mu\nu}^c \quad (3.31)$$

Já o funcional gerador sem fontes no formalismo de primeira ordem é dado por:

$$Z^{(1YM)}[0] = \mathcal{N} \int DA_{\mu}^a DF_{\mu\nu}^a e^{i \int d^4x \mathcal{L}^{(1YM)}} \quad (3.32)$$

Para verificar a equivalência clássica deste formalismo em relação ao formalismo de segunda ordem utilizamos a equação de Euler-Lagrange para o campo auxiliar, assim como em [20]. De acordo com a equação de Euler-Lagrange da lagrangiana do formalismo de primeira ordem para $F_{\mu\nu}^a$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(1YM)}}{\partial F_{\mu_1\nu_1}^{a_1}} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(1YM)}}{\partial (\partial_{\mu_1} F_{\mu_1\nu_1}^{a_1})} \right) = 0 \quad (3.33)$$

temos:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \delta^{aa_1} \delta_{\mu_1}^{\mu} \delta_{\nu_1}^{\nu} (\partial^{\mu} A^{a\nu} - \partial^{\nu} A^{a\mu} + g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a \delta^{aa_1} \delta_{\mu_1}^{\mu} \delta_{\nu_1}^{\nu} + \frac{1}{4} F^{a\mu\nu} \delta^{aa_1} \delta_{\mu_1}^{\mu} \delta_{\nu_1}^{\nu} = 0 \\ & -\frac{1}{2} (\partial^{\mu_1} A^{a_1\nu_1} - \partial^{\nu_1} A^{a_1\mu_1} + g f^{a_1bc} A^{b\mu_1} A^{c\nu_1}) + \frac{1}{2} F_{\mu_1\nu_1}^{a_1} = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde o campo $F_{\mu\nu}^a$ obtido é dado por:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial^{\mu} A^{a\nu} - \partial^{\nu} A^{a\mu} + g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu} \quad (3.35)$$

interessante notar que devido ao fato de que ao utilizar a equação de Euler-Lagrange para os campos $F_{\mu\nu}^a$ e A_{μ}^a são obtidas equações diferenciais de primeira ordem este formalismo é chamado de formalismo de primeira ordem, ao contrário da equação diferencial de segunda ordem obtida ao utilizar a equação de Euler-Lagrange para o campo A_{μ}^a no formalismo de segunda ordem.

Ao substituir este campo $F_{\mu\nu}^a$ (3.35) na lagrangiana de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1YM)} &= -\frac{1}{2} (\partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a + g f^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c) (\partial^{\mu} A^{a\nu} - \partial^{\nu} A^{a\mu} + g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}) + \\ &+ \frac{1}{4} (\partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a + g f^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c) (\partial^{\mu} A^{a\nu} - \partial^{\nu} A^{a\mu} + g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}) = \\ &= -\frac{1}{4} (\partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a + g f^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c)^2 = \mathcal{L}^{(2YM)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

desta forma reobtemos a lagrangiana de Yang-Mills no formalismo de segunda ordem, mostrando que ambos os formalismos são classicamente equivalentes.

3.2.1 Problema da inversão da matriz bilinear

Sabendo que os formalismos são classicamente equivalentes, podemos desenvolver a quantização perturbativa no formalismo de primeira ordem, novamente ao tentarmos inverter o

operador bilinear obtemos o mesmo problema encontrado no formalismo de segunda ordem, isto significa que o operador bilinear da ação de Yang-Mills no formalismo de primeira ordem não possui inversa.

De fato se considerarmos a ação do campo livre, temos:

$$\begin{aligned}
S_{\text{Livre}}^{(1YM)} &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \right] = \\
&= \int d^4x \left[-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu})) + F_{\mu\nu}^a (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) + \frac{1}{4} F_{\lambda\sigma}^a F^{a\lambda\sigma} \right] = \\
&= \int d^4x \left[-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\lambda\sigma}^a (\partial^\lambda A^{a\sigma} - \partial^\sigma A^{a\lambda}) + \frac{1}{8} (F_{\lambda\sigma}^a F^{a\lambda\sigma} + F_{\lambda\sigma}^a F^{a\lambda\sigma}) \right] = \\
&= \int d^4x \left[\frac{1}{4} A_\mu^a (\partial^\rho \eta^{\gamma\mu} - \partial^\gamma \eta^{\rho\mu}) F_{\rho\gamma}^a - \frac{1}{4} F_{\lambda\sigma}^a (\partial^\lambda \eta^{\sigma\nu} - \partial^\sigma \eta^{\lambda\nu}) A_\nu^a + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8} F_{\lambda\sigma}^a (\eta^{\lambda\rho} \eta^{\sigma\gamma} - \eta^{\lambda\gamma} \eta^{\sigma\rho}) F_{\rho\gamma}^a \right]
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Reescrevendo o integrando na forma matricial, temos:

$$\frac{1}{2} \delta^{ab} \begin{pmatrix} A_\mu^a & F_{\lambda\sigma}^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} (\partial^\rho \eta^{\gamma\mu} - \partial^\gamma \eta^{\rho\mu}) \\ -\frac{1}{2} (\partial^\lambda \eta^{\sigma\nu} - \partial^\sigma \eta^{\lambda\nu}) & \frac{1}{4} (\eta^{\lambda\rho} \eta^{\sigma\gamma} - \eta^{\lambda\gamma} \eta^{\sigma\rho}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\nu^b \\ F_{\rho\gamma}^b \end{pmatrix}$$

sendo a matriz dos operadores bilineares a seguinte:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} (\partial^\rho \eta^{\gamma\mu} - \partial^\gamma \eta^{\rho\mu}) \\ -\frac{1}{2} (\partial^\lambda \eta^{\sigma\nu} - \partial^\sigma \eta^{\lambda\nu}) & \frac{1}{4} (\eta^{\lambda\rho} \eta^{\sigma\gamma} - \eta^{\lambda\gamma} \eta^{\sigma\rho}) \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

Conforme verificamos no apêndice (B), a matriz \mathcal{M} não possui inversa. Logo para que \mathcal{M} possa ser invertida é preciso fixar o gauge.

Dado o mesmo problema encontrado no formalismo de segunda ordem à respeito da degenerescência infinita da integral funcional do campo de gauge A_μ^a , utilizamos o método de Faddeev-Popov para retirar esta degenerescência e obtemos os termos extras de fixação de gauge e dos campos fantasmas idênticos aos obtidos anteriormente, que são respectivamente:

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 \tag{3.39}$$

$$\mathcal{L}_{gh} = -\bar{c}^a \partial_\mu D^{ab\mu} c^b \tag{3.40}$$

Assim a nova lagrangiana de Yang-Mills no formalismo de primeira ordem é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(1YM)} &= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{abc} A^b{}^\mu A^{c\nu}) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 + \\
&\quad + (\partial_\mu \bar{c}^a) D^{ab\mu} c^b
\end{aligned} \tag{3.41}$$

deste modo, além de obter a ação quantizada, o método de Faddeev-Popov fixa um gauge e permite a inversão do termo bilinear da ação.

3.2.2 Equivalência quântica dos formalismos de 1ª e 2ª ordem

Para verificarmos a equivalência quântica dos dois formalismos devemos utilizar o formalismo das integrais de trajetória conforme [21]. Assim, considerando a integral de trajetória do funcional gerador da teoria no formalismo de primeira ordem:

$$Z^{(1YM)}[0] = \mathcal{N} \int DA_\mu^a DF_{\mu\nu}^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [\mathcal{L}^{(1YM)} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}]} \quad (3.42)$$

Se realizarmos a seguinte mudança de variável:

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow f_{\mu\nu}^a + (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c) \quad (3.43)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} Z^{(1YM)}[0] &= \mathcal{N} \int DA_\mu^a DF_{\mu\nu}^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [-\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}]} = \\ &= \mathcal{N} \int DA_\mu^a Df_{\mu\nu}^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [-\frac{1}{2} f_{\mu\nu}^a (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}) + \frac{1}{4} f_{a\mu\nu} f^{a\mu\nu}]} \\ &\quad \times e^{i \int d^4x [\frac{1}{2} f_{a\mu\nu} (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}) - \frac{1}{2} (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu})^2]} \\ &\quad \times e^{i \int d^4x [\frac{1}{4} (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu})^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 - \bar{c}^a \partial_\mu D^{ab\mu} c^b]} = \\ &= \mathcal{N} \int DA_\mu^a Df_{\mu\nu}^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [\frac{1}{4} f_{a\mu\nu} f^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu})^2 + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}]} = \\ &= \mathcal{N} \int DA_\mu^a Df_{\mu\nu}^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [\frac{1}{4} f_{a\mu\nu} f^{a\mu\nu} + \mathcal{L}^{(2YM)} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}]} = \\ &= \mathcal{N} \left(\int Df_{\mu\nu}^a e^{i \int d^4x [\frac{1}{4} f_{a\mu\nu} f^{a\mu\nu}]} \right) \int DA_\mu^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [\mathcal{L}^{(2YM)} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}]} = \\ &= \tilde{\mathcal{N}} \int DA_\mu^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [\mathcal{L}^{(2YM)} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}]} = Z^{(2YM)}[0] \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde a integral que depende de $f_{\mu\nu}^a$ foi fatorizada e tratada como uma constante, consequentemente não alterando o resultado do funcional gerador.

Assim concluímos que com a mudança de variável (3.43) obtemos o funcional gerador sem fontes no formalismo de segunda ordem, confirmando que ambos os formalismos são quanticamente equivalentes. Importante ressaltar que esta equivalência provada é apenas formal, para que pudesse ter uma prova à rigor desta equivalência seria preciso considerar as funções de Green do funcional gerador incluindo as fontes.

3.3 Quantização no formalismo modificado (1MYM)

Além destes dois formalismos pode-se definir um terceiro formalismo, que conforme [21] é originado a partir de uma modificação do formalismo de primeira ordem, por isso é conhecido como formalismo de primeira ordem modificado.

O estudo da teoria de Yang-Mills neste formalismo também não apresenta o vértice quártico $\langle AAAA \rangle$, presente no formalismo de segunda ordem.

Além disso, neste formalismo há uma simplificação nos propagadores dos campos, apresentando apenas os propagadores simples $\langle AA \rangle$ e $\langle FF \rangle$, sem que haja os propagadores mistos do tipo $\langle AF \rangle$ e $\langle FA \rangle$, presentes no formalismo de primeira ordem.

Vejamus a construção deste formalismo partindo da densidade de lagrangiana $\mathcal{L}^{(1YM)}$ dada por (3.29) e realizando a seguinte mudança de variável:

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow G_{\mu\nu}^a + (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) \quad (3.45)$$

logo obtemos a seguinte densidade de lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1MYM)} &= -\frac{1}{2}G_{\mu\nu}^a(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a} + gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu}) - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a} + \\ &+ gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu}) + \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} + \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}) + \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)G^{\mu\nu a} + \\ &+ \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}) = -\frac{1}{2}G_{\mu\nu}^a(gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu}) - \\ &- \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu}) + \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} = \\ &= \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} - \frac{1}{2}(G_{\mu\nu}^a + \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu}) - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 \end{aligned} \quad (3.46)$$

que resulta no seguinte funcional gerador sem fontes:

$$Z^{(1MYM)}[0] = \int DG_{\mu\nu}^a DA_\mu^a e^{i\int d^4x [\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} - \frac{1}{2}(G_{\mu\nu}^a + \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu}) - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2]} \quad (3.47)$$

Podemos verificar a equivalência clássica deste formalismo em relação ao formalismo de segunda ordem utilizando a equação de Euler-Lagrange da lagrangina para o campo $G_{\mu\nu}^a$ no formalismo de primeira ordem modificada:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(1MYM)}}{\partial G_{\mu_1\nu_1}^a} - \partial_{\mu_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(1MYM)}}{\partial (\partial_{\mu_1} G_{\mu_1\nu_1}^a)} \right) = 0 \quad (3.48)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\delta^{aa_1}\delta_{\mu_1}^\mu\delta_{\nu_1}^\nu(gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu}) + \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a\delta^{aa_1}\delta_{\mu_1}^\mu\delta_{\nu_1}^\nu + \frac{1}{4}G^{\mu\nu a}\delta^{aa_1}\delta_{\mu_1}^\mu\delta_{\nu_1}^\nu &= 0 \\ -\frac{1}{2}(gf^{a_1bc}A^{b\mu_1}A^{c\nu_1}) + \frac{1}{2}G_{\mu_1\nu_1}^{a_1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

logo o campo $G_{\mu\nu}^a$ é dado por:

$$G_{\mu\nu}^a = gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu} \quad (3.50)$$

Substituindo este resultado do campo $G_{\mu\nu}^a$ na lagrangiana de primeira ordem modificada temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1MYM)} &= -\frac{1}{4}(gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu})^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu}) - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 = \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu})^2 = \mathcal{L}^{(2YM)} \end{aligned} \quad (3.51)$$

reobtendo assim a lagrangiana de Yang-Mills no formalismo de segunda ordem, logo vemos que ambos os formalismos são classicamente equivalentes.

Ressalta-se que utilizando este valor do campo $G_{\mu\nu}^a$ (3.50) na mudança de variável (3.45), utilizada na construção da densidade de lagrangiana $\mathcal{L}^{(1MYM)}$, temos:

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu} + (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) \quad (3.52)$$

Logo percebemos que a mudança de variável é classicamente equivalente ao campo $F_{\mu\nu}^a$ também obtido em (3.35) para o formalismo de primeira ordem, desta forma é evidente a equivalência clássica entre os três formalismos.

3.3.1 Problema da inversão do operador quadrático

Dada a equivalência clássica deste formalismo em relação aos outros formalismos já estudados, podemos tratar agora da quantização perturbativa neste formalismo. Considerando apenas a ação do campo livre, temos:

$$\begin{aligned} S_{Livre}^{(1MYM)} &= \int d^4x \left[\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 \right] = \\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a \delta^{ab} (\eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma}) G_{\lambda\sigma}^b - \frac{1}{2} A^{a\mu} \delta^{ab} (-\partial^2 \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu) A^{b\nu} \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

Vemos que existem dois operadores quadráticos que são $O^{ab\ \mu\nu,\lambda\sigma} = \frac{1}{4} \delta^{ab} (\eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma})$ e $K_{\mu\nu}^{ab} = \frac{1}{2} \delta^{ab} (-\partial^2 \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu)$, o operador $O^{ab\ \mu\nu,\lambda\sigma}$ é inversível, já o operador $K_{\mu\nu}^{ab}$ não possui inversa, dado que ele possui autovalores nulos, conforme vimos no capítulo (3.1.1), ao considerarmos à quantização da teoria de Yang-Mills no formalismo de segunda ordem.

Assim para que o operador quadrático $K_{\mu\nu}^{ab}$ possa ser invertido é preciso remover os modos nulos dele fixando o gauge.

Ao aplicarmos o método de Faddeev-Popov necessário para quantizar a teoria obtemos a parte da lagrangiana dos campos fantasmas (3.40) e de fixação de gauge (3.39) que torna o operador quadrático $K_{\mu\nu}^{ab}$ inversível.

Assim reescrevemos a lagrangiana de Yang-Mills no formalismo de primeira ordem modificado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1MYM)} &= \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{2} (G_{\mu\nu}^a + \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}) - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 + (\partial_\mu \bar{c}^a) D^{ab\mu} c^b \end{aligned} \quad (3.54)$$

3.3.2 Equivalência quântica dos formalismos de 1ª ordem modificado e 2ª ordem

Conforme vimos anteriormente é preciso utilizar o formalismo de integrais de trajetória para verificar a equivalência quântica dos formalismos. Desta forma, considerando a integral de trajetória do funcional gerador da teoria no formalismo de primeira ordem modificado:

$$Z^{(1MYM)}[0] = \mathcal{N} \int DA_\mu^a DG_{\mu\nu}^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [\mathcal{L}^{(1MYM)} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}]} \quad (3.55)$$

realizamos a seguinte mudança de variável:

$$G_{\mu\nu}^a \rightarrow f_{\mu\nu}^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (3.56)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} Z^{(1MYM)}[0] &= \mathcal{N} \int DA_\mu^a DG_{\mu\nu}^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{2} (G_{\mu\nu}^a + \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (g f^{abc} A^b A^{c\nu})]} \\ &\quad \times e^{i \int d^4x [-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}]} = \\ &= \mathcal{N} \int DA_\mu^a Df_{\mu\nu}^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [\frac{1}{4} f_{\mu\nu}^a f^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} f_{\mu\nu}^a g f^{abc} A^b A^{c\nu} + \frac{1}{4} (g f^{abc} A^b A^{c\nu})^2]} \\ &\quad \times e^{i \int d^4x [-\frac{1}{2} f_{\mu\nu}^a g f^{abc} A^b A^{c\nu} - \frac{1}{2} (g f^{abc} A^b A^{c\nu})^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) g f^{abc} A^b A^{c\nu}]} \\ &\quad \times e^{i \int d^4x [-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}]} = \\ &= \mathcal{N} \int DA_\mu^a Df_{\mu\nu}^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [\frac{1}{4} f_{\mu\nu}^a f^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} (g f^{abc} A^b A^{c\nu})^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2]} \\ &\quad \times e^{i \int d^4x [-\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) g f^{abc} A^b A^{c\nu} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}]} = \\ &= \mathcal{N} \int DA_\mu^a Df_{\mu\nu}^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [\frac{1}{4} f_{\mu\nu}^a f^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{abc} A^b A^{c\nu})^2 + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}]} = \\ &= \mathcal{N} \int DA_\mu^a Df_{\mu\nu}^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [\frac{1}{4} f_{\mu\nu}^a f^{a\mu\nu} + \mathcal{L}^{(2YM)} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}]} = \\ &= \mathcal{N} \left(\int Df_{\mu\nu}^a e^{i \int d^4x [\frac{1}{4} f_{\mu\nu}^a f^{a\mu\nu}]} \right) \int DA_\mu^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [\mathcal{L}^{(2YM)} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}]} = \\ &= \tilde{\mathcal{N}} \int DA_\mu^a D\bar{c}^a Dc^b e^{i \int d^4x [\mathcal{L}^{(2YM)} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}]} = Z^{(2YM)}[0] \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde no último passo a integral que depende de $f_{\mu\nu}^a$ foi fatorizada e tratada como uma constante.

Temos então que com a mudança de variável obtemos o funcional gerador sem fontes no formalismo de segunda ordem, confirmando que ambos os formalismos são quanticamente equivalentes.

A equivalência quântica entre o formalismo de primeira ordem modificado e o de primeira ordem já foi verificada formalmente dado que foi utilizada a mudança de variável (3.45) no funcional gerador sem fontes no formalismo de primeira ordem para obter o funcional gerador sem fontes do formalismo de primeira ordem modificado.

Novamente ressaltamos que como não estão sendo consideradas as fontes nas funções de Green do funcional gerador, esta equivalência não é uma prova explícita da equivalência entre os diferentes formalismos.

Por conseguinte, visando comparar se estes diferentes formalismos são quanticamente equivalentes iremos calcular os diagramas de Feynman da teoria de Yang-Mills nestes diferentes formalismos, atentando para a auto-energia dos campos de glúons, presentes em todos os formalismos.

REGRAS DE FEYNMAN

Com a lagrangiana de Yang-Mills obtida após utilizarmos o método de Faddeev-Popov é possível calcular para o formalismo de segunda ordem e para os formalismos de primeira ordem os propagadores da teoria e as regras de Feynman para os vértices de interação, utilizando respectivamente as derivadas da ação clássica (A.28) e (A.30) obtidas no apêndice (A).

4.1 Regras de Feynman para o formalismo de 2ª ordem

Após usarmos o método de Faddeev-Popov temos que a lagrangiana de Yang-Mills no formalismo de segunda ordem é dada de acordo com (3.28) por:

$$\mathcal{L}^{(2YM)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 + (\partial_\mu \bar{c}^a) D^{ab\mu} c^b \quad (4.1)$$

Considerando a parte quadrática da ação, temos:

$$\begin{aligned} S_{\text{Livre}}^{(2YM)} &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2}A^{a\mu} \delta^a (-\partial^2 \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu) A^{b\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 + (\partial_\mu \bar{c}^a) \delta^{ab} \partial^\mu c^b \right] = \\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{2}A^{a\mu} \delta^{ab} (\partial^2 \eta_{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi})\partial_\mu \partial_\nu) A^{b\nu} + \bar{c}^a (-\delta^{ab} \partial^2) c^b \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

assim identificamos que a teoria possui dois propagadores, o propagador dos bósons de gauge⁹ e o dos campos fantasmas de Faddeev-Popov.

Propagador dos campos de glúons $\langle AA \rangle$

A ação livre relacionada aos campos de glúons é dada por:

$$S_{\text{Livre}}^{\langle AA \rangle} = \int d^4x \frac{1}{2}A^{a\mu} \delta^{ab} (\partial^2 \eta_{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi})\partial_\mu \partial_\nu) A^{b\nu} \quad (4.3)$$

⁹ Os bósons de gauge na teoria de Yang-Mills são os glúons.

Considerando agora a parte de interação da densidade de lagrangiana $\mathcal{L}^{(2YM)}$ ¹⁰, temos:

$$S_{Int}^{(2YM)} = \int d^4x \left[-g\bar{c}^a \partial_\mu f^{abc} A^{b\mu} c^c - \frac{1}{2} g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) - \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu} \right] \quad (4.13)$$

onde podemos identificar que a teoria possui três vértices de interação, um relacionado à interação dos campos fantasmas com o campo de glúon $\langle \bar{c}Ac \rangle$, um referente à interação tripla dos campos de glúons $\langle AAA \rangle$ e outro devido à interação quártica dos campos de glúons $\langle AAAA \rangle$.

Vértice campo de glúon-campos fantasmas $\langle \bar{c}Ac \rangle$

A parte da ação que descreve a interação dos campos fantasmas com o campo de glúon é dada por:

$$S^{\langle \bar{c}Ac \rangle} = - \int d^4x \bar{c}^a \partial_\mu g f^{abc} A^{b\mu} c^c \quad (4.14)$$

Reescrevendo no espaço dos momentos obtemos:

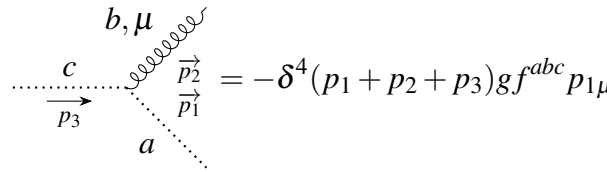
$$\begin{aligned} S^{\langle \bar{c}Ac \rangle} &= -g f^{abc} \int d^4x \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \bar{c}^a(p_1) (-ip_{1\mu}) A^{b\mu}(p_2) c^c(p_3) = \\ &= ig f^{abc} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3) \bar{c}^a(p_1) p_{1\mu} A^{b\mu}(p_2) c^c(p_3) \end{aligned} \quad (4.15)$$

De acordo com (A.30) a regra de Feynman para o vértice $\langle \bar{c}Ac \rangle$ será:

$$\langle \bar{c}Ac \rangle = \frac{i\delta^3 S^{\langle \bar{c}Ac \rangle}}{\delta \bar{c}_i \delta A_j \delta c_k} = V_{ijk} \quad (4.16)$$

onde $V_{ijk} = -\delta^4(p_1 + p_2 + p_3) g f^{abc} p_{1\mu}$, sendo que $i = (a, p_1)$, $j = (c, \mu, p_2)$ e $k = (b, p_3)$.

Desta forma o vértice de interação dos campos fantasmas com o campo de glúon é dada por:



$$= -\delta^4(p_1 + p_2 + p_3) g f^{abc} p_{1\mu} \quad (4.17)$$

Vértice triplo dos campos de glúons $\langle AAA \rangle$

A parte da ação que descreve a interação cúbica dos campos de glúons $\langle AAA \rangle$ é dada por:

$$\begin{aligned} S^{\langle AAA \rangle} &= -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}) = -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu^a g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu} - \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu^a g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu} - \partial_\mu A_\nu^a g f^{abc} A^{b\nu} A^{c\mu}) = \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu^a g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu} - \partial_\mu A_\nu^a g f^{acb} A^{c\nu} A^{b\mu}) = -g f^{abc} \int d^4x \partial_\mu A_\nu^a A^{b\mu} A^{c\nu} \end{aligned} \quad (4.18)$$

¹⁰ A parte da lagrangiana que representa os termos de interação possui dependência da constante de acoplamento g.

Reescrevemos a ação no espaço dos momentos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
S^{<AAA>} &= -g f^{abc} \int d^4x \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} (ip_{1\mu}) \eta_{\nu\lambda} A^{a\lambda}(p_1) A^{b\mu}(p_2) A^{c\nu}(p_3) \\
&\times e^{-i(p_1+p_2+p_3)x} = \\
&= -ig f^{abc} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} (2\pi)^d \delta^4(p_1+p_2+p_3) p_{1\mu} \eta_{\nu\lambda} A^{a\lambda}(p_1) \\
&\times A^{b\mu}(p_2) A^{c\nu}(p_3)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Usando (A.30), a regra do vértice cúbico dos campos de glúons <AAA> será:

$$\langle AAA \rangle = \frac{i\delta^3 S^{<AAA>}}{\delta A_i \delta A_j \delta A_k} = V_{ijk} + V_{ikj} + V_{jik} + V_{jki} + V_{kij} + V_{kji} \tag{4.20}$$

onde $V_{ijk} = \delta^4(p_1+p_2+p_3) g f^{abc} k_{1\mu} \eta_{\nu\lambda}$, sendo que $i = (a, \lambda, p_1)$, $j = (b, \mu, p_2)$ e $k = (c, \nu, p_3)$, desta forma a regra de Feynman para o vértice cúbico dos campos de glúons é dada por:

$$\begin{aligned}
\langle AAA \rangle &= \delta^4(p_1+p_2+p_3) g (f^{abc} p_{1\mu} \eta_{\nu\lambda} + f^{acb} p_{1\nu} \eta_{\mu\lambda} + f^{bac} p_{2\lambda} \eta_{\nu\mu} + f^{bca} p_{2\nu} \eta_{\lambda\mu} + \\
&+ f^{cab} p_{3\lambda} \eta_{\mu\nu} + f^{cba} p_{3\mu} \eta_{\lambda\nu}) = \delta^4(p_1+p_2+p_3) g f^{abc} (p_{1\mu} \eta_{\nu\lambda} - p_{1\nu} \eta_{\mu\lambda} - \\
&- p_{2\lambda} \eta_{\nu\mu} + p_{2\nu} \eta_{\lambda\mu} + p_{3\lambda} \eta_{\mu\nu} - p_{3\mu} \eta_{\lambda\nu})
\end{aligned}$$

Reajustando os termos temos que no espaço dos momentos o vértice cúbico dos campos de glúons é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\begin{array}{c} b, \mu \\ \nearrow \\ a, \lambda \\ \longrightarrow p_1 \\ \searrow \\ c, \nu \end{array} \begin{array}{c} \vec{p}_2 \\ \vec{p}_3 \end{array} = \delta^4(p_1+p_2+p_3) g f^{abc} ((p_1-p_3)_\mu \eta_{\nu\lambda} + (p_2-p_1)_\nu \eta_{\mu\lambda} + (p_3-p_2)_\lambda \eta_{\nu\mu})
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Vértice quártico dos campos de glúons <AAAA>

A parte da ação que descreve a interação quártica dos campos de glúons <AAAA> é dada por:

$$S^{<AAAA>} = -\frac{g^2}{4} \int d^4x f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu} = -\frac{g^2}{4} \int d^4x f^{abc} f^{ade} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} A_\mu^b A_\nu^c A_\rho^d A_\sigma^e \tag{4.22}$$

Reescrevemos a ação no espaço dos momentos conforme:

$$\begin{aligned}
S^{<AAAA>} &= -\frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} \int d^4x \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} A_\mu^b(p_1) A_\nu^c(p_2) \\
&\times A_\rho^d(p_3) A_\sigma^e(p_4) e^{-i(p_1+p_2+p_3+p_4)x} = \\
&= -\frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1+p_2+p_3+p_4) \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \\
&\times A_\mu^b(p_1) A_\nu^c(p_2) A_\rho^d(p_3) A_\sigma^e(p_4)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

A regra do vértice quártico dos campos de glúons $\langle AAAAA \rangle$ é obtida da seguinte forma:

$$\langle AAAAA \rangle = \frac{i\delta^3 \mathcal{S}^{\langle AAAAA \rangle}}{\delta A_i \delta A_j \delta A_k \delta A_l} = 4(V_{ijkl} + V_{ijlk} + V_{ikjl} + V_{iklj} + V_{ilkj} + V_{iljk}) \quad (4.24)$$

onde $V_{ijkl} = -\frac{i}{4}\delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)g^2 f^{abc} f^{ade} \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma}$, sendo que $i = (b, \mu, p_1)$, $j = (c, \nu, p_2)$, $k = (d, \rho, p_3)$ e $l = (e, \sigma, p_4)$, utilizamos a relação $V_{ijkl} = V_{klij} = V_{jikl} = V_{lkji}$ para simplificar os 24 termos da comutação dos índices.

Desta forma a regra de Feynman para o vértice de interação quártica dos campos de glúons no espaço dos momentos é dada por:

$$\begin{aligned} \langle AAAAA \rangle = & -i\delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)g^2 (f^{abc} f^{ade} \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + f^{abc} f^{aed} \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} + \\ & + f^{abd} f^{ace} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} + f^{abd} f^{aec} \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} + f^{abe} f^{adc} \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + f^{abe} f^{acd} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}) \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade de antissimetria da constante de estrutura f^{abc} o vértice quártico dos campos de glúons é dado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \vec{p}_1 \quad \vec{p}_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ b, \mu \quad c, \nu \\ \downarrow \quad \uparrow \\ d, \rho \quad e, \sigma \\ \swarrow \quad \searrow \\ \vec{p}_3 \quad \vec{p}_4 \end{array} = & -i\delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)g^2 \left(f^{abc} f^{ade} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}) + \right. \\ & \left. + f^{abd} f^{ace} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}) + f^{abe} f^{acd} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma}) \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.2 Regras de Feynman para o formalismo de 1ª ordem

Para calcularmos as regras de Feynman no formalismo de primeira ordem consideramos a densidade de lagrangiana $\mathcal{L}^{(1YM)}$ obtida em (3.47):

$$\mathcal{L}^{(1YM)} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 + (\partial_\mu \bar{c}^a) D^{ab\mu} c^b \quad (4.26)$$

A ação livre no formalismo de primeira ordem é dado por:

$$\begin{aligned}
S_{\text{Livre}}^{(1YM)} &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 + (\partial_\mu \bar{c}^a)\delta^{ab}\partial^\mu c^b \right] = \\
&= \int d^4x \left[-\frac{1}{2\xi}\partial_\mu A^{a\mu}\partial^\nu A_\nu^a - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) + F_{\mu\nu}^a(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu})) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8}(F_{\lambda\sigma}^a F^{a\lambda\sigma} + F_{\lambda\sigma}^a F^{a\lambda\sigma}) - \bar{c}^a \delta^{ab} \partial^2 c^b \right] = \int d^4x \left[\frac{1}{2\xi}A_\mu^a \partial^\mu \partial^\nu A_\nu^a - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) \right. \\
&\quad \times F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\lambda\sigma}^a(\partial^\lambda \eta^{\sigma\nu} A_\nu^a - \partial^\sigma \eta^{\lambda\nu} A_\nu^a) + \frac{1}{8}(F_{\lambda\sigma}^a \eta^{\lambda\rho} \eta^{\sigma\gamma} F_{\rho\gamma}^a - F_{\lambda\sigma}^a \eta^{\lambda\gamma} \eta^{\sigma\rho} F_{\rho\gamma}^a) - \\
&\quad \left. - \bar{c}^a \delta^{ab} \partial^2 c^b \right] = \int d^4x \left[\frac{1}{2\xi}A_\mu^a \partial^\mu \partial^\nu A_\nu^a - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\gamma} F_{\rho\gamma}^a - \frac{1}{4}F_{\lambda\sigma}^a(\partial^\lambda \eta^{\sigma\nu} - \right. \\
&\quad \left. - \partial^\sigma \eta^{\lambda\nu}) A_\nu^a + \frac{1}{8}F_{\lambda\sigma}^a(\eta^{\lambda\rho} \eta^{\sigma\gamma} - \eta^{\lambda\gamma} \eta^{\sigma\rho}) F_{\rho\gamma}^a - \bar{c}^a \delta^{ab} \partial^2 c^b \right] = \int d^4x \left[\frac{1}{2\xi}A_\mu^a \partial^\mu \partial^\nu A_\nu^a + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4}A_\mu^a(\partial^\rho \eta^{\gamma\mu} - \partial^\gamma \eta^{\rho\mu}) F_{\rho\gamma}^a - \frac{1}{4}F_{\lambda\sigma}^a(\partial^\lambda \eta^{\sigma\nu} - \partial^\sigma \eta^{\lambda\nu}) A_\nu^a + \frac{1}{8}F_{\lambda\sigma}^a(\eta^{\lambda\rho} \eta^{\sigma\gamma} - \eta^{\lambda\gamma} \eta^{\sigma\rho}) \right. \\
&\quad \left. \times F_{\rho\gamma}^a - \bar{c}^a \delta^{ab} \partial^2 c^b \right]
\end{aligned} \tag{4.27}$$

onde podemos identificar que a teoria possui cinco tipos de propagadores: o propagador dos campos de glúons; o propagador dos campos auxiliares; os propagadores mistos do campo de glúon com o campo auxiliar e o propagador dos campos fantasmas.

Reescrevendo os termos da ação livre, que são bilineares em A_μ^a e $F_{\lambda\sigma}^a$, na forma matricial obtemos:

$$\frac{1}{2}\delta^{ab} \begin{pmatrix} A_\mu^a & F_{\lambda\sigma}^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi}\partial^\mu \partial^\nu & \frac{1}{2}(\partial^\rho \eta^{\gamma\mu} - \partial^\gamma \eta^{\rho\mu}) \\ -\frac{1}{2}(\partial^\lambda \eta^{\sigma\nu} - \partial^\sigma \eta^{\lambda\nu}) & \frac{1}{4}(\eta^{\lambda\rho} \eta^{\sigma\gamma} - \eta^{\lambda\gamma} \eta^{\sigma\rho}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\nu^b \\ F_{\rho\gamma}^b \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

podemos definir a matriz dos operadores bilineares como sendo:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi}\partial^\mu \partial^\nu & \frac{1}{2}(\partial^\rho \eta^{\gamma\mu} - \partial^\gamma \eta^{\rho\mu}) \\ -\frac{1}{2}(\partial^\lambda \eta^{\sigma\nu} - \partial^\sigma \eta^{\lambda\nu}) & \frac{1}{4}(\eta^{\lambda\rho} \eta^{\sigma\gamma} - \eta^{\lambda\gamma} \eta^{\sigma\rho}) \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

sua inversa \mathcal{M}^{-1} conforme anexo (B) é dada por (B.29), assim temos:

$$\mathcal{M}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{p^2}(\eta_{\mu\nu} - \frac{(1-\xi)}{p^2}p_\mu p_\nu) & \frac{i}{p^2}(p_\rho \eta_{\gamma\mu} - p_\gamma \eta_{\rho\mu}) \\ -\frac{i}{p^2}(p_\lambda \eta_{\sigma\nu} - p_\sigma \eta_{\lambda\nu}) & 2(I_{\lambda\sigma,\rho\gamma} - \frac{1}{p^2}L_{\lambda\sigma,\rho\gamma}(p)) \end{pmatrix}$$

onde os termos I e L são conforme (B.28) os seguintes:

$$\begin{aligned}
I_{\lambda\sigma,\rho\gamma} &= \frac{1}{2}(\eta_{\lambda\rho} \eta_{\sigma\gamma} - \eta_{\lambda\gamma} \eta_{\sigma\rho}) \\
L_{\lambda\sigma,\rho\gamma}(p) &= \frac{1}{2}(p_\lambda p_\rho \eta_{\sigma\gamma} + p_\sigma p_\gamma \eta_{\lambda\rho} - p_\lambda p_\gamma \eta_{\sigma\rho} - p_\sigma p_\rho \eta_{\lambda\gamma})
\end{aligned}$$

Obteremos as regras de Feynman para os propagadores da teoria em relação aos campos A_μ^a e $F_{\lambda\sigma}^a$ considerando os termos da matriz \mathcal{M}^{-1} .

Propagador dos campos de glúons <AA>

Utilizando (A.28) e a matriz inversa \mathcal{M}^{-1} o propagador dos campos de glúons <AA> no espaço dos momentos será:

$$Q_{\text{Glúon}}^{ab}{}_{\mu\nu}(p) = -\left(\frac{i\delta^2 S_{\text{Livres}}^{(1YM)}}{\delta A_{\mu_1}^{a_1} \delta A_{\nu_1}^{b_1}}\right)^{-1} = i\left[-\frac{\delta^{a_1 b_1}}{2p^2}\left(\eta_{\mu_1 \nu_1} - \frac{(1-\xi)}{p^2} p_{\mu_1} p_{\nu_1}\right) - \frac{\delta^{b_1 a_1}}{2p^2}\left(\eta_{\nu_1 \mu_1} - \frac{(1-\xi)}{p^2} p_{\nu_1} p_{\mu_1}\right)\right] = -i\delta^{ab} \frac{1}{p^2}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{(1-\xi)}{p^2} p_{\mu} p_{\nu}\right) \quad (4.30)$$

Logo o propagador dos campos de glúons A_{μ}^a é dado por:

$$\begin{array}{c} a, \mu \\ \text{-----} \\ \longrightarrow \\ p \end{array} \begin{array}{c} b, \nu \\ \text{-----} \\ \longleftarrow \\ p \end{array} = -i\delta^{ab} \left(\frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2} - (1-\xi) \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{p^4}\right) \quad (4.31)$$

Propagador campo de glúon-campo auxiliar <AF>

Considerando a matriz inversa \mathcal{M}^{-1} e utilizando (A.28) temos que o propagador <AF> no espaço dos momentos será dado por:

$$Q_{\text{<AF>}}^{ab}{}_{\rho\gamma, \mu}(p) = -\left(\frac{i\delta^2 S_{\text{Livres}}^{(1YM)}}{\delta A_{\mu_1}^{a_1} \delta F_{\rho_1 \gamma_1}^{b_1}}\right)^{-1} = \delta^{ab} \frac{1}{p^2} (p_{\rho} \eta_{\gamma\mu} - p_{\gamma} \eta_{\rho\mu}) \quad (4.32)$$

Logo o propagador campo de glúon-campo auxiliar no espaço dos momentos é dado por:

$$\begin{array}{c} a, \mu \\ \text{-----} \\ \longrightarrow \\ p \end{array} \begin{array}{c} b, \rho\gamma \\ \text{-----} \\ \longrightarrow \\ p \end{array} = \delta^{ab} \frac{1}{p^2} (p_{\rho} \eta_{\gamma\mu} - p_{\gamma} \eta_{\rho\mu}) \quad (4.33)$$

Propagador campo auxiliar-campo de glúon <FA>

Dada a matriz inversa \mathcal{M}^{-1} obtemos o propagador <FA> no espaço dos momentos da seguinte forma:

$$Q_{\text{<FA>}}^{ab}{}_{\lambda\sigma, \nu}(p) = -\left(\frac{i\delta^2 S_{\text{Livres}}^{(1YM)}}{\delta F_{\lambda_1 \sigma_1}^{a_1} \delta A_{\nu_1}^{b_1}}\right)^{-1} = -\delta^{ab} \frac{1}{p^2} (p_{\lambda} \eta_{\sigma\nu} - p_{\sigma} \eta_{\lambda\nu}) \quad (4.34)$$

O propagador do campo auxiliar-campo de glúon é dado por:

$$\begin{array}{c} a, \lambda\sigma \\ \text{-----} \\ \longrightarrow \\ p \end{array} \begin{array}{c} b, \nu \\ \text{-----} \\ \longleftarrow \\ p \end{array} = -\delta^{ab} \frac{1}{p^2} (p_{\lambda} \eta_{\sigma\nu} - p_{\sigma} \eta_{\lambda\nu}) \quad (4.35)$$

Propagador dos campos auxiliares <FF>

Segundo (A.28) e considerando a matriz inversa \mathcal{M}^{-1} o propagador <FF> no espaço dos momentos será:

$$Q_{\text{<FF>}}^{ab}{}_{\lambda\sigma, \rho\gamma}(p) = -\left(\frac{i\delta^2 S_{\text{Livres}}^{(1YM)}}{\delta F_{\lambda_1 \sigma_1}^a \delta F_{\rho_1 \gamma_1}^{b_1}}\right)^{-1} = i\left[\delta^{a_1 b_1} \left(I_{\lambda_1 \sigma_1, \rho_1 \gamma_1} - \frac{1}{p^2} L_{\lambda_1 \sigma_1, \rho_1 \gamma_1}(p)\right) + \delta^{b_1 a_1} \left(I_{\rho_1 \gamma_1, \lambda_1 \sigma_1} - \frac{1}{p^2} L_{\rho_1 \gamma_1, \lambda_1 \sigma_1}(p)\right)\right] = 2i\delta^{ab} \left(I_{\lambda\sigma, \rho\gamma} - \frac{1}{p^2} L_{\lambda\sigma, \rho\gamma}(p)\right) \quad (4.36)$$

Logo o propagador dos campos de auxiliares $F_{\lambda\sigma}^a$ no espaço dos momentos será:

$$a, \lambda \sigma \xrightarrow[p]{\quad} b, \rho \gamma = 2i\delta^{ab} \left(I_{\lambda\sigma, \rho\gamma} - \frac{1}{p^2} L_{\lambda\sigma, \rho\gamma}(p) \right) \quad (4.37)$$

Propagador dos campos fantasmas de Faddeev-Popov $\langle \bar{c}c \rangle$

A ação livre relacionada aos campos fantasmas é a mesma do formalismo de segunda ordem conforme (4.8), assim o propagador dos fantasmas de Faddeev-Popov no espaço dos momentos é dado conforme (4.12).

Considerando agora a parte de interação da densidade de lagrangiana $\mathcal{L}_{YM}^{(1YM)}$:

$$S_{int}^{(1YM)} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu} - g (\partial_\mu \bar{c}^a) f^{abc} A^{c\mu} c^b \right] \quad (4.38)$$

onde podemos identificar dois vértices de interação, um relacionado à interação dos campos fantasmas com o campo de glúon $\langle \bar{c}Ac \rangle$ e outro devido à interação dos campos de glúons com o campo auxiliar $\langle FAA \rangle$.

Vértice campo de glúon-campos fantasmas $\langle \bar{c}Ac \rangle$

A parte da ação de interação que descreve a interação do campo de glúon com os campos fantasmas é a mesma obtida em (4.14), logo o vértice de interação dos campos fantasmas com o campo de glúon é dado, segundo vimos no caso do formalismo de segunda ordem, por (4.17).

Vértice campo de glúon-campo auxiliar $\langle FAA \rangle$

A parte da ação que descreve a interação dos campos de glúons com o campo auxiliar $\langle FAA \rangle$ é dada por:

$$S^{\langle FAA \rangle} = -\frac{1}{2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu} = -\frac{1}{2} \int d^4x F^{a\lambda\sigma} \eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\nu} A^{b\mu} A^{c\nu} \quad (4.39)$$

Reescrevemos a ação no espaço dos momentos obtemos:

$$\begin{aligned} S^{\langle FAA \rangle} &= -\frac{1}{2} g f^{abc} \int d^4x \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} F^{a\lambda\sigma}(p_1) \eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\nu} A^{b\mu}(p_2) A^{c\nu}(p_3) \\ &\times e^{-i(p_1+p_2+p_3)x} = -\frac{1}{2} g f^{abc} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1+p_2+p_3) F^{a\lambda\sigma}(p_1) \\ &\times \eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\nu} A^{b\mu}(p_2) A^{c\nu}(p_3) \end{aligned} \quad (4.40)$$

A regra do vértice campos de glúons-campo auxiliar $\langle FAA \rangle$ de acordo com (A.30), será:

$$\langle FAA \rangle = \frac{i\delta^3 S^{\langle FAA \rangle}}{\delta F_i \delta A_j \delta A_k} = V_{ijk} + V_{ikj} \quad (4.41)$$

onde $V_{ijk} = -\frac{i}{2} \delta^4(p_1+p_2+p_3) g f^{abc} \eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\nu}$, sendo que $i = (a, \lambda, \sigma, p_1)$, $j = (b, \mu, p_2)$ e $k = (c, \nu, p_3)$.

Desta forma a regra de Feynman para o vértice de interação dos campos de glúons com o campo auxiliar é dada por:

$$\langle FAA \rangle = -\frac{i}{2} \delta^4(p_1 + p_2 + p_3) g (f^{abc} \eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\nu} + f^{acb} \eta_{\lambda\nu} \eta_{\sigma\mu})$$

Utilizando a propriedade de antissimetria da constante de estrutura f^{abc} , obtemos que o vértice campos de glúons-campo auxiliar é dado seguinte forma:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} b, \mu \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ c, \nu \end{array} \\ \begin{array}{c} a, \lambda, \sigma \\ \leftarrow \\ \text{---} \\ \rightarrow \\ p_1 \end{array} \end{array} = -\frac{i}{2} \delta^4(p_1 + p_2 + p_3) g f^{abc} (\eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\nu} - \eta_{\lambda\nu} \eta_{\sigma\mu}) \quad (4.42)$$

4.3 Regras de Feynman para o formalismo de 1ª ordem modificado

Considerando a densidade de lagrangiana $\mathcal{L}^{(1MYM)}$ obtida em (3.54):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1MYM)} = & \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{2} (G_{\mu\nu}^a + \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}) - \\ & - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 + (\partial_\mu \bar{c}^a) D^{ab\mu} c^b \end{aligned} \quad (4.43)$$

A ação livre no formalismo de primeira ordem modificado será:

$$\begin{aligned} S_{\text{Livre}}^{(1MYM)} = & \int d^4x \left[\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 + (\partial_\mu \bar{c}^a) \delta^{ab} \partial^\mu c^b \right] = \\ = & \int d^4x \left[\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a \delta^{ab} (\eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma}) G_{\lambda\sigma}^b + \frac{1}{2} A^{a\mu} \delta^{ab} (\partial^2 \eta_{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi}) \partial_\mu \partial_\nu) A^{b\nu} + \right. \\ & \left. + \bar{c}^a (-\delta^{ab} \partial^2) c^b \right] \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde podemos identificar que neste formalismo a teoria possui três tipos de propagadores que são: os propagadores dos campos auxiliares, os propagadores dos campos de glúons e os propagadores dos campos fantasmas.

Propagador dos campos auxiliares <GG>

A ação relacionada aos campos auxiliares $G_{\mu\nu}^a$ é a seguinte:

$$S^{<GG>} = \frac{1}{4} \int d^4x G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} = \frac{1}{4} \int d^4x G_{\mu\nu}^a \delta^{ab} (\eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma}) G_{\lambda\sigma}^b \quad (4.45)$$

O operador quadrático é obtido segundo (A.28) por:

$$\begin{aligned} K_{<GG>}^{ab \mu\nu, \lambda\sigma}(x-y) = & -\frac{i\delta^2 S^{<GG>}}{\delta G_{\mu_1\nu_1}^{a_1}(x) \delta G_{\lambda_1\sigma_1}^{b_1}(y)} = -\frac{i}{4} (\delta^{a_1 b_1} \eta^{\mu_1 \lambda_1} \eta^{\nu_1 \sigma_1} + \delta^{b_1 a_1} \eta^{\lambda_1 \mu_1} \eta^{\sigma_1 \nu_1}) = \\ = & -\frac{i}{2} \delta^{ab} \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} \end{aligned} \quad (4.46)$$

cujo o propagador inverso do operador quádratico é dado por:

$$Q_{\langle GG \rangle}^{ab}{}_{\mu\nu, \lambda\sigma}(x-y) = -\left(\frac{i}{2}\delta^{ab}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\sigma}\right)^{-1} = 2i\delta^{ab}\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma} \quad (4.47)$$

de acordo com (A.13) podemos reescrever no espaço dos momentos da seguinte forma:

$$Q_{\langle GG \rangle}^{ab}{}_{\mu\nu, \lambda\sigma}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2i\delta^{ab}\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma} e^{i(x-y)p} \quad (4.48)$$

Assim o propagador dos campos auxiliares $G_{\mu\nu}^a$ é dado por:

$$a, \mu\nu \xrightarrow[p]{} b, \lambda\sigma = 2i\delta^{ab}\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma} \quad (4.49)$$

Propagador dos campos de glúons $\langle AA \rangle$

A ação livre relacionada aos campos de glúons é a mesma que obtivemos no formalismo de segunda ordem (4.3), logo o propagador dos campos de glúons no espaço dos momentos é dado segundo (4.3).

Propagador dos fantasmas de Faddeev-Popov $\langle \bar{c}c \rangle$

A ação livre relacionada aos campos fantasmas é a mesma de (4.8), assim o propagador dos campos fantasmas de Faddeev-Popov no espaço dos momentos é dado conforme (4.12).

Considerando agora a parte de interação da densidade de lagrangiana $\mathcal{L}^{(1MYM)}$, que é dada por:

$$S_{Int}^{(1MYM)} = i \int d^4x \left[-\frac{1}{2}(G_{\mu\nu}^a + \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu}) - g(\partial_\mu \bar{c}^a) f^{abc} A^{c\mu} c^b \right] \quad (4.50)$$

onde pode-se identificar três vértices de interação, um relacionado à interação dos campos fantasmas com o campo de glúon $\langle \bar{c}Ac \rangle$, um referente à interação tripla dos campos de glúons $\langle AAA \rangle$ e outro devido à interação dos campos de glúons com o campo auxiliar $\langle GAA \rangle$.

Vértice campo de glúon-fantasmas $\langle \bar{c}Ac \rangle$

A parte da ação que descreve a interação dos campos fantasmas com o campo de glúon é dada por:

$$S^{\langle \bar{c}Ac \rangle} = - \int d^4x (\partial_\mu \bar{c}^a) g f^{abc} A^{c\mu} c^b \quad (4.51)$$

mesma ação de (4.14) do formalismo de segunda ordem, logo a regra de Feynman para o vértice campo de glúon-campos fantasmas é dada por (4.17).

Vértice triplo dos glúons $\langle AAA \rangle$

A parte da ação que descreve a interação cúbica dos campos de glúons $\langle AAA \rangle$ é a seguinte:

$$S^{\langle AAA \rangle} = -gf^{abc} \int d^4x \partial_\mu A_\nu^a A^{b\mu} A^{c\nu} \quad (4.52)$$

a mesma dada por (4.18), no caso do formalismo de segunda ordem, logo a regra de Feynman para o vértice triplo dos campos de glúons é idêntica à obtida em (4.21).

Vértice campos de glúons-campo auxiliar <GAA>

A parte da ação que descreve a interação dos campos de glúons com o campo auxiliar <GAA> é dada por:

$$S^{<GAA>} = -\frac{1}{2} \int d^4x G_{\mu\nu}^a g f^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu} = -\frac{1}{2} g f^{abc} \int d^4x G^{a\lambda\sigma} \eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\nu} A^{b\mu} A^{c\nu} \quad (4.53)$$

verificamos que esta ação é idêntica à (4.39), que considera a interação dos campos de glúons com o campo auxiliar F no caso do formalismo de primeira ordem, isto ocorre devido os campos auxiliares F e G representarem campos bosônicos.

Como $S^{<GAA>} = S^{<FAA>}$ é adotado o mesmo procedimento anterior e obtemos conforme (4.42), que o vértice de interação dos campos de glúons com o campo auxiliar G é dado por:

$$\begin{array}{c} b, \mu \\ \swarrow \\ a, \lambda \sigma \\ \longrightarrow \\ p_1 \\ \searrow \\ c, \nu \end{array} \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \vec{p}_2 \\ \text{wavy line} \\ \vec{p}_3 \end{array} = -\frac{i}{2} \delta^4(p_1 + p_2 + p_3) g f^{abc} (\eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\nu} - \eta_{\lambda\nu} \eta_{\sigma\mu}) \quad (4.54)$$

Com as regras de Feynman obtidas nos formalismos de primeira ordem e formalismo usual podemos calcular os diagramas de 1-loop da teoria de Yang-Mills nestes diferentes formalismos.

DIAGRAMAS DE 1-LOOP

No capítulo (3) vimos que os formalismos de primeira ordem e o formalismo usual são quanticamente equivalentes conforme (3.36) e (3.51), para verificar estas equivalências de uma forma mais geral iremos utilizar as regras de Feynman para calcular os diagramas de 1-loop em cada um dos formalismos.

Ao considerar os diagramas de 1-loop é preciso utilizar algum método de regularização para as integrais divergentes que surgem no cálculo destes diagramas, existem diferentes métodos de regularização como o método de corte, o método de Pauli-Villars e o de regularização dimensional.

Neste trabalho os diagramas de 1-loop para cada um dos formalismos da teoria de Yang-Mills serão calculados utilizando o método de regularização dimensional, desenvolvido no apêndice (C).

5.1 Diagramas de 1-loop no formalismo de 2ª ordem

A teoria de Yang-Mills possui os seguintes diagramas de 1-loop no formalismo de 2ª ordem:

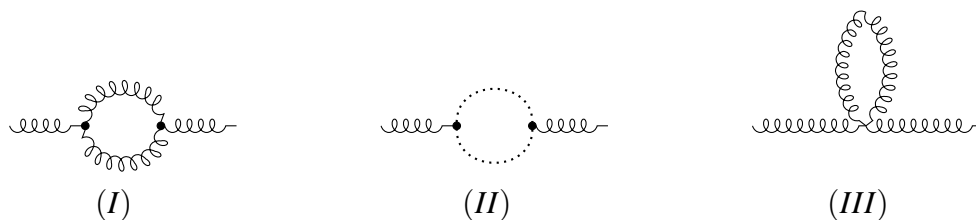


Figura 1 – Diagramas de 1-loop no formalismo de 2ª ordem

Auto-energia dos campos de glúons

A auto-energia dos campos de glúons possui a contribuição dos diagramas (I), (II) e (III).

Diagrama (I)

Utilizando as regras de Feynman obtidas no capítulo (4.1) e considerando a conservação dos momentos, podemos escrever o primeiro diagrama como sendo:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} c, \sigma \quad e, \alpha \\ a, \mu \quad b, \nu \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ d, \gamma \quad f, \beta \end{array} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[g f^{acd} N^{\mu\sigma\gamma} \right] \left[-i\delta^{ce} \left(\frac{\eta^{\sigma\alpha}}{(p+q)^2} - (1-\xi) \frac{(p+q)^\sigma (p+q)^\alpha}{(p+q)^4} \right) \right] \\
 \times \left[-i\delta^{df} \left(\frac{\eta^{\gamma\beta}}{p^2} - (1-\xi) \frac{p^\gamma p^\beta}{p^4} \right) \right] \left[g f^{bef} N^{\nu\alpha\beta} \right]
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde $N^{\mu\sigma\gamma} = [(q-p)_\sigma \eta_{\gamma\mu} + (-2q-p)_\gamma \eta_{\sigma\mu} + (2p+q)_\mu \eta_{\gamma\sigma}]$.

Conforme apêndice (D), podemos transformar esta integral em uma integral escalar através da redução de Passarino-Veltman [26], para isso primeiro determinamos a base tensorial que o diagrama deve possuir.

Se considerarmos que os elementos da base tensorial precisam apresentar a seguinte simetria $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ e o fato da base só depender do momento externo q e da métrica $\eta_{\mu\nu}$, determinamos os seguintes elementos da base tensorial para o diagrama:

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu}^{(1)} &= \eta_{\mu\nu} \\
 T_{\mu\nu}^{(2)} &= q_\mu q_\nu
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Denotando a integral (5.1) por $I_{\mu\nu}^1$, podemos escrevê-la em relação aos elementos da base da seguinte forma:

$$I_{\mu\nu}^1 = C_1 T_{\mu\nu}^{(1)} + C_2 T_{\mu\nu}^{(2)} \tag{5.3}$$

No apêndice (E) utilizando o software Wolfram Mathematica 11 e o pacote FeynCalc para projetar a equação (5.3) em cada uma das componentes da base (5.2) foram determinados os coeficientes C_1 e C_2 , que posteriormente foram usados para reescrever a integral original (5.3).

Com este procedimento a integral $I_{\mu\nu}^1$ é simplificada e passa a apresentar apenas integrais escalares, que conforme (E.15) resultará no seguinte valor para o primeiro diagrama da auto-energia dos campos de glúons:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} c, \sigma \quad e, \alpha \\ a, \mu \quad b, \nu \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ d, \gamma \quad f, \beta \end{array} = - \frac{i i^d g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} 4^{-d-1} \pi^{\frac{3}{2}-\frac{d}{2}} \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) q^{2(\frac{d}{2}-2)} (2((1-\xi)(d-1) \\
 \times ((1-\xi)(d-4) - 8d + 28) - 14d + 12) q^\mu q^\nu) - 2q^2((1-\xi) \\
 \times (d-1)((1-\xi)(d-4) - 8d + 28) - 12d + 10) \eta^{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Diagrama (II)

O segundo diagrama que contribui para a auto-energia dos campos de glúons é obtido utilizando as regras de Feynman do capítulo (4.1) e a conservação dos momentos:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{c} \quad \text{e} \\
 \text{a}, \mu \quad \text{b}, \nu \\
 \text{d} \quad \text{f}
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 \text{p}+q \\
 \text{p} \\
 \text{q}
 \end{array}
 \end{array}
 = - \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[-g f^{cad} (p+q)_\mu \right] \left[\frac{i\delta^{ce}}{(p+q)^2} \right] \left[\frac{i\delta^{df}}{p^2} \right] \left[-g f^{fbe} p_\nu \right] \quad (5.5)$$

A base tensorial para esta integral possui os mesmos componentes dados por (5.2), desta forma denotando a integral (5.5) por $I_{\mu\nu}^2$, podemos escrevê-la em relação aos componentes da base da seguinte forma:

$$I_{\mu\nu}^2 = C_1 T_{\mu\nu}^{(1)} + C_2 T_{\mu\nu}^{(2)} \quad (5.6)$$

Após a determinação dos coeficientes e de resolver a integrais escalares de $I_{\mu\nu}^2$, obtemos conforme (E.29) o seguinte resultado:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{c} \quad \text{e} \\
 \text{a}, \mu \quad \text{b}, \nu \\
 \text{d} \quad \text{f}
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 \text{p}+q \\
 \text{p} \\
 \text{q}
 \end{array}
 \end{array}
 = \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab} 4^{-d} \pi^{\frac{3}{2}-\frac{d}{2}} (1 - i \cot(\frac{\pi d}{2})) q^{2(\frac{d}{2}-2)} ((d-2)q^\mu q^\nu + q^2 \eta^{\mu\nu})}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \quad (5.7)$$

Diagrama (III)

Utilizando as regras de Feynman obtidas no capítulo (4.1) e considerando a conservação dos momentos, temos que o terceiro diagrama que contribui para a auto-energia dos campos de glúons é dado por:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{c}, \gamma \\
 \text{d}, \sigma \\
 \text{a}, \mu \quad \text{b}, \nu
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 \text{p} \\
 \text{q}
 \end{array}
 \end{array}
 = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[-i\delta^{cd} \left(\frac{\eta^{\gamma\sigma}}{p^2} - (1-\xi) \frac{p^\gamma p^\sigma}{p^4} \right) \right] \left[-ig^2 \delta^{ab} \left(f^{cab} f^{ecd} (\eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\gamma}) + f^{eac} f^{ebd} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\gamma\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\gamma}) + f^{ead} f^{ebc} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\gamma\sigma} - \eta_{\mu\gamma} \eta_{\nu\sigma}) \right) \right] \quad (5.8)$$

Utilizando a relação da constante de estrutura $f^{acd} f^{bcd} = C_2(G) \delta^{ab}$, obtemos:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{c}, \gamma \\
 \text{d}, \sigma \\
 \text{a}, \mu \quad \text{b}, \nu
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 \text{p} \\
 \text{q}
 \end{array}
 \end{array}
 = g^2 C_2(G) \delta^{ab} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\frac{(1-\xi) \eta^{\mu\nu}}{p^2} - \frac{(1-\xi) p^\mu p^\nu}{p^4} - \frac{d \eta^{\mu\nu}}{p^2} + \frac{\eta^{\mu\nu}}{p^2} \right] \quad (5.9)$$

porém de acordo com a regularização dimensional as integrais com denominadores simples serão nulas, podemos verificar este fato considerando a integral $\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^4}$.

Primeiramente introduzimos uma escala m e separamos a integral em duas regiões, uma que apresenta divergência UV (que converge para $d < 4$) e a outra que possui divergência IR (que converge para $d > 4$):

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^4} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2(p^2 - m^2)} - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{p^4(p^2 - m^2)} \quad (5.10)$$

Considerando o limite ultravioleta, no qual os momentos são grandes, vemos que a primeira integral pode ser aproximada por $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^4}$ que diverge logicamente, enquanto que a segunda integral que tem seu valor aproximado pela integral $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{p^8}$ possui um valor finito.

Já considerando o limite infravermelho, no qual os momentos são pequenos, teremos que a primeira integral tem seu valor aproximado pela integral $-\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 m^2}$ tendo um valor finito, enquanto que a segunda integral é aproximada por $-\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^4}$ e diverge.

Desta forma com estas considerações obtemos o seguinte resultado:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^4} = \frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right] = 0 \quad (5.11)$$

onde as divergências ultravioleta e infravermelhas são equiparadas no caso da regularização dimensional [27].

Generalizamos este resultado temos que para qualquer integral com denominadores simples o resultado será nulo, conforme a fórmula de Veltman:

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (p^2)^\lambda = 0 \quad \lambda, d \text{ complexos} \quad (5.12)$$

obtida conforme [28]. Consequentemente temos que a integral $I^3 = 0$.

Somando os valores obtidos dos três diagramas e posteriormente determinando a dimensão como sendo $d \rightarrow 4 - 2\epsilon$ e expandindo em torno de ϵ , obtemos que a auto-energia dos campos de glúons é dada por:

$$\Pi_{Glúon}^{ab \mu\nu} = \frac{ig^2 C_2(G) \delta^{ab} (3(1 - \xi) + 10)(q^2 \eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)}{96\pi^2 \epsilon} \quad (5.13)$$

5.2 Diagramas de 1-loop no formalismo de 1ª ordem

A teoria de Yang-Mills no formalismo de primeira ordem possui os diagramas de 1-loop dados conforme (Figura:2).

Auto-energia dos campos de glúons

A auto-energia relacionada aos campos de glúons possui a contribuição dos diagramas (I), (II) e (III).

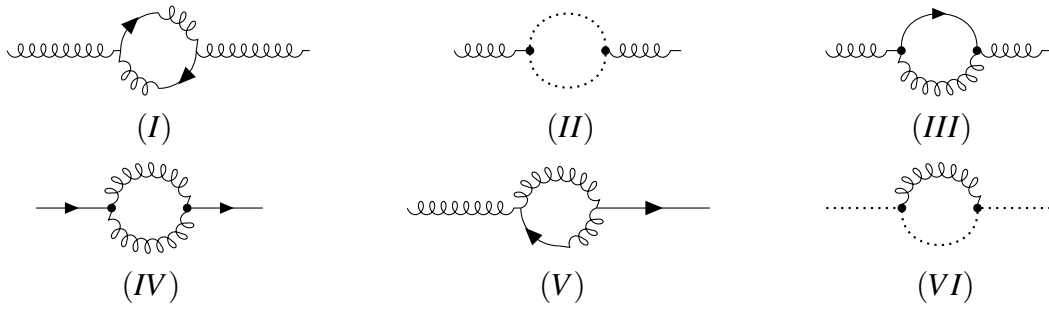


Figura 2 – Diagramas de 1-loop no formalismo de 1ª ordem

Diagrama (I)

Utilizando as regras de Feynman obtidas no capítulo (4.2) e considerando a conservação dos momentos escrevemos o primeiro diagrama da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} c, \lambda \sigma \\ a, \mu \\ q, d, \alpha \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \begin{array}{c} p+q \\ p \\ q \end{array} \begin{array}{c} e, \beta \\ b, \nu \\ f, \gamma \rho \end{array} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[-\frac{i}{2} g f^{cad} (\eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\alpha} - \eta_{\lambda\alpha} \eta_{\sigma\mu}) \right] \left[-\delta^{ce} \left(\frac{1}{(p+q)^2} ((p+q)^\lambda \right. \right. \\
 \times \eta^{\sigma\beta} - (p+q)^\sigma \eta^{\lambda\beta}) \left. \right] \left[-\delta^{df} \left(\frac{1}{p^2} (p_\gamma \eta_{\rho\alpha} - p_\rho \eta_{\gamma\alpha}) \right) \right] \left[-\frac{i}{2} g f^{fbe} \right. \\
 \left. \times (\eta_{\gamma\nu} \eta_{\rho\beta} - \eta_{\gamma\beta} \eta_{\rho\nu}) \right]
 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Como os elementos da base tensorial precisam apresentar a simetria $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ e depende do momento externo q e da métrica $\eta_{\mu\nu}$, temos que as componentes da base são dadas conforme vimos anteriormente por (5.2). Desta forma denominando a integral (8.19) por $I_{\mu\nu}^1$, escrevemos ela em função das componentes da base da seguinte forma:

$$I_{\mu\nu}^1 = C_1 T_{\mu\nu}^{(1)} + C_2 T_{\mu\nu}^{(2)} \quad (5.15)$$

Após solucionar (5.15), conforme apêndice (E), obtemos de acordo com (E.43) o seguinte valor para o diagrama:

$$\begin{array}{c} c, \lambda \sigma \\ a, \mu \\ q, d, \alpha \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \begin{array}{c} p+q \\ p \\ q \end{array} \begin{array}{c} e, \beta \\ b, \nu \\ f, \gamma \rho \end{array} = \frac{i i^d g^2 C_2(G) \delta^{ab} 2^{1-2d} \pi^{\frac{3}{2}-\frac{d}{2}} \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (q^2)^{\frac{d}{2}-2} (q^2 \eta^{\mu\nu} + (d-2) q^\mu q^\nu)}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}
 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Diagrama (II)

O segundo diagrama que contribui para a auto-energia dos campos de glúons, possui o mesmo valor do diagrama II conforme (5.7) obtido no formalismo de segunda ordem.

Diagrama (III)

O terceiro diagrama que contribui para a auto-energia dos campos de glúons, levando em conta as regras de Feynman obtidas no capítulo (4.2) e a conservação dos momentos é dado por:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} c, \lambda \sigma \quad e \gamma \rho \\ a, \mu \quad b, \nu \\ \vec{q} \quad \vec{p} + \vec{q} \quad \vec{q} \\ d, \alpha \quad f, \beta \end{array} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[-\frac{i}{2} g f^{cad} (\eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\alpha} - \eta_{\lambda\alpha} \eta_{\sigma\mu}) \right] \left[2i \delta^{ce} \left(\frac{1}{2} (\eta_{\lambda\gamma} \eta_{\sigma\rho} - \eta_{\lambda\rho} \eta_{\sigma\gamma}) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{1}{2(p+q)^2} ((p+q)_\lambda (p+q)_\gamma \eta_{\sigma\rho} + (p+q)_\sigma (p+q)_\rho \eta_{\lambda\gamma} - (p+q)_\lambda \right. \right. \\
 \left. \left. \times (p+q)_\rho \eta_{\sigma\gamma} - (p+q)_\sigma (p+q)_\gamma \eta_{\lambda\rho}) \right) \right] \left[-i \delta^{df} \left(\frac{\eta^{\alpha\beta}}{p^2} - (1-\xi) \frac{p^\alpha p^\beta}{p^4} \right) \right] \\
 \times \left[-\frac{i}{2} g f^{ebf} (\eta_{\gamma\nu} \eta_{\rho\beta} - \eta_{\gamma\beta} \eta_{\rho\nu}) \right]
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Como os elementos da base tensorial precisam apresentar a seguinte simetria $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, sendo que a base só depende do momento externo q e da métrica $\eta_{\mu\nu}$, temos que as componentes da base são dadas conforme vimos anteriormente por (5.2). Desta forma, denominando o diagrama (5.17) por $I_{\mu\nu}^3$, escrevemos ele em função das componentes da base da seguinte forma:

$$I_{\mu\nu}^3 = C_1 T_{\mu\nu}^{(1)} + C_2 T_{\mu\nu}^{(2)} \tag{5.18}$$

Solucionando os coeficientes de (5.18) e realizando posteriormente a integração, obtemos conforme (E.57) o seguinte valor para o diagrama:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} c, \lambda \sigma \quad e \gamma \rho \\ a, \mu \quad b, \nu \\ \vec{q} \quad \vec{p} + \vec{q} \quad \vec{q} \\ d, \alpha \quad f, \beta \end{array} = \frac{i C_2(G) \delta^{ab} 2^{-d-1} \pi^{1-\frac{d}{2}} g^2 (\cot(\frac{\pi d}{2}) + i) \Gamma(\frac{d}{2}) (q^2)^{\frac{d}{2}-2}}{(d-1) \Gamma(d-2)} \\
 \times (((1-\xi)(d-1) - d) q^\mu q^\nu - ((1-\xi)(d-1) - 1) q^2 \eta^{\mu\nu})
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

A auto-energia dos campos de glúons é obtida pela soma destes três diagramas:

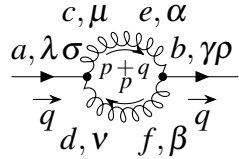
$$\Pi_{Glúon}^{ab \mu\nu} = \frac{i g^2 C_2(G) \delta^{ab} (3(1-\xi) - 2) (q^2 \eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)}{96 \pi^2 \varepsilon} \tag{5.20}$$

onde foi considerado $d \rightarrow 4 - 2\varepsilon$ e o resultado foi expandido em ε .

Diagrama (IV)

Considerando o diagrama que possui vértices de interação dos campos de glúons com o campo auxiliar, utilizando conservação dos momentos e as regras de Feynman obtidas no

capítulo (4.2) obtemos:



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[-\frac{ig}{2} f^{acd} (\eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\nu} - \eta_{\lambda\nu} \eta_{\sigma\mu}) \right] \left[-i\delta^{ce} \left(\frac{\eta^{\mu\alpha}}{(p+q)^2} - (1-\xi) \right) \right. \\
 &\quad \times \frac{(p+q)^\mu (p+q)^\alpha}{(p+q)^4} \left. \right] \left[-i\delta^{df} \left(\frac{\eta^{\nu\beta}}{p^2} - (1-\xi) \frac{p^\nu p^\beta}{p^4} \right) \right] \left[-\frac{ig}{2} f^{bef} \right. \\
 &\quad \times (\eta_{\gamma\alpha} \eta_{\rho\beta} - \eta_{\gamma\beta} \eta_{\rho\alpha}) \left. \right]
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Considerando que a base tensorial precisa apresentar as simetrias $T_{\lambda\sigma,\gamma\rho} = -T_{\sigma\lambda,\gamma\rho} = -T_{\lambda\sigma,\rho\gamma} = T_{\gamma\rho,\lambda\sigma}$ e o fato dela só depender do momento externo q e da métrica, determinamos que para este diagrama temos as seguintes componentes da base:

$$\begin{aligned}
 T_{\lambda\sigma,\gamma\rho}^{(1)} &= \eta_{\lambda\gamma} \eta_{\sigma\rho} - \eta_{\lambda\rho} \eta_{\sigma\gamma} \\
 T_{\lambda\sigma,\gamma\rho}^{(2)} &= q_\lambda (q_\gamma \eta_{\sigma\rho} - q_\rho \eta_{\sigma\gamma}) - q_\sigma (q_\gamma \eta_{\lambda\rho} - q_\rho \eta_{\lambda\gamma})
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

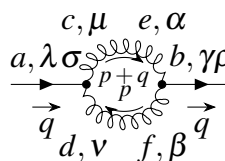
Denotando a integral (5.21) por $I_{\lambda\sigma,\gamma\rho}^4$, reescrevemos a integral em função das componentes da base da seguinte forma:

$$I_{\lambda\sigma,\gamma\rho}^4 = C_1 T_{\lambda\sigma,\gamma\rho}^{(1)} + C_2 T_{\lambda\sigma,\gamma\rho}^{(2)} \tag{5.23}$$

Realizando a projeção desta equação em cada uma das componentes da base (5.22) determinamos os coeficientes C_1 e C_2 e reescrevemos a integral $I_{\lambda\sigma,\gamma\rho}^4$ em termos das componentes $T_{\lambda\sigma,\gamma\rho}^{(1)}$ e $T_{\lambda\sigma,\gamma\rho}^{(2)}$ da base. Assim com $I_{\lambda\sigma,\gamma\rho}^4$ apresentando apenas integrais escalares, obtemos conforme (E.71) o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
 I_{\lambda\sigma,\gamma\rho}^4 &= \frac{i^{d+1} C_2(G) \delta^{ab}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} ((1-\xi) - 2) 4^{-d-1} \pi^{\frac{3}{2}-\frac{d}{2}} g^2 \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) (\bar{q}^2)^{\frac{d}{2}-3} ((1-\xi)(d-4) \\
 &\quad \times (\bar{q}^\gamma (\bar{q}^\lambda \eta^{\rho\sigma} - \bar{q}^\sigma \eta^{\lambda\rho}) + \bar{q}^\rho (\bar{q}^\sigma \eta^{\gamma\lambda} - \bar{q}^\lambda \eta^{\gamma\sigma})) + 4\bar{q}^2 (\eta^{\gamma\lambda} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\gamma\sigma} \eta^{\lambda\rho}))
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Definindo a dimensão como sendo $d \rightarrow 4 - 2\varepsilon$ e expandindo o resultado em torno de ε obtemos conforme (E.73) que o diagrama IV possui o seguinte valor:



$$\begin{aligned}
 &= \frac{ig^2 C_2(G) \delta^{ab} ((1-\xi) - 2) (\eta^{\gamma\sigma} \eta^{\lambda\rho} - \eta^{\gamma\lambda} \eta^{\rho\sigma})}{128\pi^2 \varepsilon}
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Diagrama (V)

O diagrama com vértice de interação entre os campos de glúons e o campo auxiliar, que apresenta propagador misto, será dado de acordo com as regras de Feynman do capítulo (4.2) e conservação dos momentos por:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama} &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\frac{-i}{2} g f^{dac} (\eta_{\gamma\mu} \eta_{\rho\nu} - \eta_{\gamma\nu} \eta_{\rho\mu}) \left[\delta^{df} \left(\frac{1}{p^2} (p_\gamma \eta_{\rho\beta} - p_\rho \eta_{\gamma\beta}) \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. \times \left[-i \delta^{ce} \left(\frac{\eta^{\nu\alpha}}{(p+q)^2} - (1-\xi) \frac{(p+q)^\nu (p+q)^\alpha}{(p+q)^4} \right) \right] \left[\frac{-i}{2} g f^{bef} (\eta_{\lambda\alpha} \eta_{\sigma\beta} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \eta_{\lambda\beta} \eta_{\sigma\alpha}) \right] \right]
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Considerando que as componentes da base tensorial da integral precisam apresentar a seguinte antissimetria $T_{\lambda\sigma,\mu} = -T_{\sigma\lambda,\mu}$ e o fato da base só depender do momento externo q ou da métrica, encontramos apenas a seguinte componente para a base deste diagrama:

$$T_{\lambda\sigma,\mu}^{(1)} = q_\lambda \eta_{\sigma\mu} - q_\sigma \eta_{\lambda\mu} \tag{5.27}$$

Denotando a equação (5.26) por $I_{\lambda\sigma,\mu}^5$, reescrevemos ela em função desta componente da seguinte forma:

$$I_{\lambda\sigma,\mu}^5 = C_1 T_{\lambda\sigma,\mu}^{(1)} \tag{5.28}$$

Realizando a projeção desta equação na componente da base tensorial $T_{\lambda\sigma,\mu}^{(1)}$ determinamos o coeficiente C_1 e conseguimos obter o diagrama apenas em função de integrais escalares, assim conforme (E.81) obtemos:

$$I_{\lambda\sigma,\mu}^5 = - \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab} 4^{-d} \pi^{\frac{3}{2}-\frac{d}{2}} g^2 ((1-\xi)(d-3)+2) (\cot(\frac{\pi d}{2}) + i) (q^2)^{\frac{d}{2}-2} (q^\sigma \eta^{\lambda\mu} - q^\lambda \eta^{\mu\sigma})}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \tag{5.29}$$

Considerando a dimensão $d \rightarrow 4 - 2\varepsilon$ e expandindo em torno de ε temos de acordo com (E.83) que o diagrama será:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama} &= \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab} ((1-\xi)+2) (q^\sigma \eta^{\lambda\mu} - q^\lambda \eta^{\mu\sigma})}{128\pi^2 \varepsilon}
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Além deste diagrama há o diagrama que é inverso dele e que é dado por:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama} &= - \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab} ((1-\xi)+2) (q^\sigma \eta^{\lambda\mu} - q^\lambda \eta^{\mu\sigma})}{128\pi^2 \varepsilon}
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Diagrama (VI)

O último diagrama possui vértices de interação entre o campo de glúon com os campos fantasmas, considerando a conservação dos momentos e as regras de Feynman obtidas em (4.2), o diagrama é dado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} c, \mu \quad e, \nu \\ \text{---} a \quad \text{---} b \\ \begin{array}{c} \text{---} p+q \\ \text{---} p \\ \text{---} q \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} d \\ \text{---} f \end{array} \\ \text{---} q \quad \text{---} q \end{array} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} [g f^{dca} p_\mu] \left[i \frac{\delta^{fd}}{p^2} \right] \left[-i \delta^{ce} \left(\frac{\eta^{\mu\nu}}{(p+q)^2} - (1-\xi) \frac{(p+q)^\mu (p+q)^\nu}{(p+q)^4} \right) \right] \\
 \times \left[-g f^{bef} q_\nu \right]
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Ao contraírmos os índices deste diagrama ele já apresenta apenas integrais escalares, denotando a integral (5.32) como I^6 e realizando a integração escalar obtemos, conforme (E.88), o seguinte valor para a integral:

$$I^6 = \frac{i t^d g^2 C_2(G) \delta^{ab} 2^{1-2d} \pi^{\frac{3}{2}-d} ((1-\xi)(d-3)+2) \csc(\frac{\pi d}{2}) (q^2)^{\frac{d}{2}-1}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \tag{5.33}$$

Considerando a dimensão dada por $d \rightarrow 4 - 2\varepsilon$ e expandindo em torno de ε temos conforme (E.90) que o diagrama é dado por:

$$\begin{array}{c} c, \mu \quad e, \nu \\ \text{---} a \quad \text{---} b \\ \begin{array}{c} \text{---} p+q \\ \text{---} p \\ \text{---} q \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} d \\ \text{---} f \end{array} \\ \text{---} q \quad \text{---} q \end{array} = - \frac{i C_2(G) g^2 \delta^{ab} ((1-\xi)+2) q^2}{64 \pi^2 \varepsilon} \tag{5.34}$$

5.3 Diagramas de 1-loop no formalismo de 1ª ordem modificado

A teoria de Yang-Mills no formalismo de 1ª ordem modificado possui os seguintes seis diagramas de 1-loop:

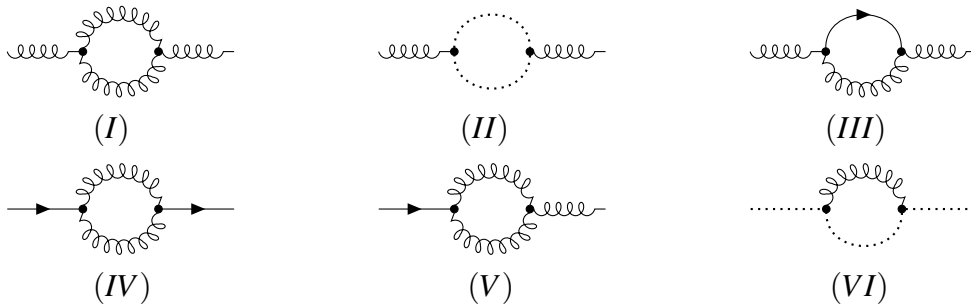


Figura 3 – Diagramas de 1-loop no formalismo de 1ª ordem modificado

Auto-energia dos campos de glúons

Logo os únicos diagramas que contribuem para a auto-energia neste formalismo são os mesmos dois diagramas que contribuem para a auto-energia dos campos de glúons no formalismo de segunda ordem conforme (5.13), assim temos que a auto-energia dos campos de glúons é dada da seguinte forma:

$$\Pi_{Glúon}^{ab \mu\nu} = \frac{ig^2 C_2(G) \delta^{ab} (3(1-\xi) + 10)(q^2 \eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)}{96\pi^2 \varepsilon}$$

Diagrama (IV)

O quarto diagrama que possui vértices de interação entre os campos de campos de glúons e o campo auxiliar é o mesmo obtido em (5.25) no quarto diagrama do formalismo de primeira ordem.

Diagrama (V)

O quinto diagrama possui um vértice de interação entre os campos de glúons e o campo auxiliar e outro vértice de interação cúbica de campos de glúons, que segundo a conservação dos momentos e as regras de Feynman obtidas no capítulo (4.3), será dado por:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} c, \mu \quad e, \alpha \\ a, \lambda \sigma \quad b, \gamma \\ \xrightarrow{q} \quad \xrightarrow{q} \\ d, \nu \quad f, \beta \end{array} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[-\frac{ig}{2} f^{acd} (\eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\nu} - \eta_{\lambda\nu} \eta_{\sigma\mu}) \right] \left[-i\delta^{ce} \left(\frac{\eta^{\mu\alpha}}{(p+q)^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - (1-\xi) \frac{(p+q)^\mu (p+q)^\alpha}{(p+q)^4} \right) \right] \left[-i\delta^{df} \left(\frac{\eta^{\nu\beta}}{p^2} - (1-\xi) \frac{p^\nu p^\beta}{p^4} \right) \right] \\ \times \left[gf^{bef} ((p-q)_\alpha \eta_{\beta\gamma} + (-2p-q)_\gamma \eta_{\alpha\beta} + (p+2q)_\beta \eta_{\gamma\alpha}) \right] \end{aligned} \quad (5.37)$$

Considerando que a base tensorial da integral precisa apresentar a seguinte antissimetria $T_{\lambda\sigma,\gamma} = -T_{\sigma\lambda,\gamma}$ e o fato dela só depender do momento externo q e da métrica, determinamos a seguinte componente para a base do diagrama:

$$T_{\lambda\sigma,\gamma}^{(1)} = q_\lambda \eta_{\gamma\sigma} - q_\sigma \eta_{\gamma\lambda} \quad (5.38)$$

Denotando a equação (5.37) por $I_{\lambda\sigma,\gamma}^5$, reescrevemos o diagrama em função deste elemento da base como sendo:

$$I_{\lambda\sigma,\gamma}^5 = C_1 T_{\lambda\sigma,\gamma}^{(1)} \quad (5.39)$$

Ao realizar a projeção desta equação na componente da base tensorial $T_{\lambda\sigma,\gamma}^{(1)}$ conseguimos determinar o coeficiente C_1 , que substituímos na integral (5.39) e posteriormente realizamos as

considerando apenas uma parte das funções pertencentes ao funcional gerador, pois o cálculo destes diagramas de 1-loop se restringem apenas às funções 1PI¹¹, que contribuem para a ação efetiva.

De fato conforme referência [29], ao serem utilizados os diagramas de 1-loop para calcular o propagador completo dos campos de glúons obtemos o mesmo propagador no formalismo de segunda ordem e no de primeira ordem.

Assim o propagador dos campos de glúons no formalismo de segunda ordem é dado por:

Figura 4 – Propagador do glúon no formalismo de segunda ordem até a ordem de g^2

Já o propagador dos campos de glúons no formalismo de primeira ordem é dado por:

Figura 5 – Propagador do glúon no formalismo de primeira ordem até a ordem de g^2

Observamos que os diagramas de 1-loop são multiplicados por propagadores livres de glúons quando possuem pernas externas de campos de glúons e que no caso em que possuem alguma perna externa de campo auxiliar eles são multiplicados pelo propagador misto no lado desta perna externa dependente do campo auxiliar, assim segundo [30] o resultado obtido para o propagador é dado por:

$$\text{Diagrama} = \frac{ig^2 C_2(G) \delta^{ab} (3\xi - 13)}{96\pi^2 q^4 \epsilon} (q^2 \eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) + \text{Termos finitos} \quad (5.42)$$

Interessante notar que no caso do formalismo de primeira ordem modificado o propagador até a ordem de g^2 possui os mesmos diagramas que contribuem para o propagador até a mesma ordem no formalismo de segunda ordem (Figura:4), isto se deve ao fato de que os outros diagramas de 1-loop do formalismo de primeira ordem modificado não contribuem para o cálculo do propagador devido neste formalismo não existir propagadores mistos que possam ser usados para multiplicar as pernas externas de campo auxiliar.

¹¹ One Particle Irreducible.

Desta forma o valor obtido (A.28) para o propagador até a ordem de g^2 é idêntico nos três formalismos, mostrando assim que os formalismos são quanticamente equivalentes para este cálculo mais geral da função de partição.

Esta compatibilidade é uma demonstração mais geral da compatibilidade quântica dos formalismos, pois o propagador calculado é justamente a derivada segunda da função de partição em relação às fontes dos campos de glúons:

$$\text{diagrama} = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[J_A]}{\delta J_A(x_1) \delta J_A(x_2)} \Big|_{J_A=0} \quad (5.43)$$

Visto a compatibilidade dos formalismos ao calcular o propagador até ordem de g^2 , podemos nos questionar qual o comportamento destes formalismos de primeira ordem no limite de altas temperaturas e desta forma calcular os diagramas de 1-loop térmicos.

REVISÃO DA TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS À TEMPERATURA FINITA (TQCTF)

Até agora abordamos a teoria de Yang-Mills sem considerar efeitos térmicos, assim para podermos verificar o comportamento da teoria no limite de altas temperaturas precisamos de uma teoria que descreva o problema de muitos corpos e cuja dinâmica fundamental seja através de campos quânticos relativísticos.

Deste modo iremos introduzir a TQCTF¹² que além de descrever estes fenômenos físicos, resulta na teoria quântica de campos usual no limite de temperatura zero.

No entanto existem diferentes formalismos para abordar uma TQCTF, existem os chamados formalismos reais como: o de trajetória temporal fechada, desenvolvido por Schwinger [31] ao abordar as teorias por integrais de trajetórias; e o da dinâmica de campos térmicos desenvolvido por Umezawa [32], que utilizou o método de quantização canônica via operadores; além do formalismo imaginário de Matsubara [33], que descreve fenômenos em equilíbrio, mas que pode abordar fenômenos que dependam do tempo ao realizar uma continuação analítica, este último formalismo será o adotado neste trabalho para abordar a teoria à temperatura finita.

6.1 Relações termodinâmicas

Em mecânica estatística sabemos que no caso de um sistema de várias partículas em contato com um reservatório que permite a troca de calor e partículas, é conveniente utilizar o ensemble grande canônico, pois nele a temperatura T , o volume V e o potencial químico μ são constantes, este ensemble mostra-se também adequado ao considerarmos uma teoria de partículas quânticas relativísticas à temperatura finita, pois além de englobar os casos em equilíbrio térmico,

¹² Teoria Quântica de Campos à Temperatura Finita

ele permite descrever a criação e aniquilação de partículas, que surge ao considerarmos os efeitos relativísticos.

Neste ensemble o sistema quântico térmico possui comportamento estático, dado estar em equilíbrio térmico, para determinar os valores médios de energia, assim como quaisquer cargas conservadas, utilizamos a matriz de densidade, definida da seguinte forma:

$$\rho(\beta) = e^{-\beta H - \sum \alpha_i N_i} \quad (6.1)$$

onde a temperatura e os potenciais químicos μ_i são multiplicadores de lagrange, com $\beta = T^{-1}$ e $\alpha_i = -\beta \mu_i$ ¹³.

A função de partição grande canônica é dada por:

$$Z(V, \beta, \mu_i) = \text{Tr} \rho(\beta) \quad (6.2)$$

Como veremos posteriormente a função de partição está relacionada com o funcional gerador da TQCTF, além disso a partir dela podemos determinar as grandezas termodinâmicas:

$$\begin{aligned} \text{Pressão : } P &= \frac{\partial(T \ln Z)}{\partial V} \\ \text{Entropia : } S &= \frac{\partial(T \ln Z)}{\partial T} \\ \text{Densidade de carga : } \mathcal{N}_i &= \frac{\partial(T \ln Z)}{\partial \mu_i} \\ \text{Energia : } \mathcal{E} &= -PV + TS + \mu_i N_i \end{aligned} \quad (6.3)$$

A função de partição (6.2) é difícil de ser determinada ao considerarmos uma expansão perturbativa da constante de acoplamento, isso se deve ao fato de possuir uma soma sobre os valores esperados em todos estados possíveis no espaço de Hilbert, que são infinitos numa TQC¹⁴ [34]. Deste modo, usamos o formalismo de Matsubara para contornar este problema e abordar perturbativamente a função de partição de forma similar à teoria quântica de campos à temperatura zero.

6.2 Formalismo de Matsubara

Introduziremos agora o formalismo de Matsubara que será utilizado para descrever a TQCTF, este formalismo também é conhecido como formalismo do tempo imaginário e será obtido a partir da teoria de campos à temperatura zero.

De fato verificamos anteriormente ao tentarmos realizar as integrais dos diagramas que contribuem para a teoria à temperatura zero que era conveniente realizar uma continuação analítica

¹³ Nos cálculos da TQCTF usamos o ensemble grande canônico considerando os potenciais químicos como sendo zero.

¹⁴ Teoria Quântica de Campos.

para o tempo imaginário através da rotação de Wick:

$$t \rightarrow -it_E \quad (6.4)$$

onde t_E é o tempo euclidiano.

A rotação de Wick faz com que o problema passe do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano, fazendo com que a métrica se transforme da seguinte forma:

$$t^2 - x^2 \rightarrow -(t_E^2 + x^2) \quad (6.5)$$

no espaço do momento teremos $k^0 \rightarrow -ik_4$.

Considerando o funcional gerador para uma teoria genérica sem fontes:

$$Z[0] = \mathcal{N} \int D\phi e^{iS[\phi]} \quad (6.6)$$

Tomando como exemplo o campo escalar cuja a densidade de lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \mathcal{V}(\phi) \quad (6.7)$$

onde ϕ é real e as interações são dadas por \mathcal{V} . Utilizando a definição do funcional gerador (6.6) e realizando a rotação de Wick (6.4) a medida da ação se transformará da seguinte forma:

$$d^d x \rightarrow -idt_E d^D x \equiv -id_E^d x \quad (6.8)$$

onde D é a dimensão espacial e a dimensão espaço-temporal é dada por $d = D + 1$, a ação euclidiana será reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_E[\phi] &= - \int d_E^d x \left[-\frac{1}{2}(\partial_{t_E}\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \mathcal{V}(\phi) \right] \equiv \\ &\equiv \int d_E^d x \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \mathcal{V}(\phi) \right]_E \end{aligned} \quad (6.9)$$

onde $S_E[\phi]$ é a ação euclidiana.

Reescrevemos então o funcional gerador para uma teoria genérica após a rotação de Wick da seguinte forma:

$$Z[0] = \mathcal{N} \int D\phi e^{-S_E[\phi]} \quad (6.10)$$

Veremos que este funcional gerador é utilizado no formalismo de Matsubara para a descrição de uma TQCTF e que o formalismo de Matsubara descreve a função de partição em termos do formalismo de integrais de trajetória que é semelhante ao utilizado na teoria à temperatura zero após a rotação de Wick.

Primeiramente verifiquemos a conexão do funcional gerador com a mecânica estatística, para isso consideramos um sistema de partículas com energia $E(p,q)$ e escrevemos a função de partição clássica do sistema da seguinte forma:

$$Z = \prod_i \int dp_i dq_i e^{-\beta E(p,q)} \quad (6.11)$$

ao fazer a integração nos momentos p e omitindo o fator constante, obtemos:

$$Z \simeq \prod_i \int dq_i e^{-\beta E(q)} \quad (6.12)$$

tomando o limite contínuo $i \rightarrow x$ e $q_i \rightarrow \phi(x)$ obtemos uma integral funcional dependendo da ação euclidiana como em (6.10), assim a ação euclidiana pode ser considerada como um funcional de energia estático para o campo ϕ .

Esta conexão da mecânica estatística e teoria quântica de campos foi primeiramente observada por Bloch [35] que constatou que $e^{-\beta H}$ na função de partição é uma continuação analítica $t \rightarrow -i\beta$ ao longo do eixo temporal imaginário do operador de evolução temporal e^{-iHt} .

No entanto, nosso interesse é na mecânica quântica descrita a partir das interações fundamentais de uma teoria quântica relativística. Assim consideremos a função de partição quântica conforme (6.2), no ensemble grande canônico em equilíbrio:

$$Z(\beta) = \text{tr} \rho(\beta) = \text{tr} e^{-\beta H} = \int D\phi \langle \phi | e^{-\beta H} | \phi \rangle \quad (6.13)$$

utilizamos a continuação analítica $t \rightarrow -i\beta$ e o fato de que uma amplitude de transição da forma $\langle A | e^{-iH} | B \rangle$ em TQC à temperatura zero pode ser escrita na forma de integral, obtemos:

$$Z(\beta) = \mathcal{N} \int D\phi e^{-\int_0^\beta dt_E \int d^D x L_E(\phi)} \equiv \int D\phi e^{-S_E(\beta)} \quad (6.14)$$

Desta forma vemos que a função de partição equivale ao funcional gerador sem fontes da teoria quântica de campo à temperatura zero após a rotação de Wick, com a diferença de que na teoria à temperatura zero o intervalo temporal de integração em t_E é $-\infty \leq t_E \leq \infty$ e no caso da TQCTF o intervalo é limitado à $0 \leq t_E \leq \beta$, além disso o campo de integração deve satisfazer condições de contorno, que no caso bosônico é a condição de periodicidade $\phi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \beta)$ e no caso de campos fermiônicos a condição é a de antiperiodicidade $\phi(\vec{x}, 0) = -\phi(\vec{x}, \beta)$.

Interessante notar que a função de partição $Z(\beta) = Z(\beta, J = 0)$ é um caso particular do funcional gerador da teoria quântica de campos. Assim teremos que um sistema quântico térmico em D dimensões espaciais é descrito por uma teoria de campos euclidiana formulada em $D + 1$ dimensões espaço-temporais

Além disso temos que como os cálculos dos diagramas de Feynman são mais simples no espaço dos momentos, no formalismo de Matsubara como o tempo está limitado à um intervalo finito a transformada de Fourier dependerá apenas de valores discretos, assim teremos a seguinte alteração ao trabalhar no espaço dos momentos:

$$\int dp_0 d^D p f(p_0, \vec{p}) \rightarrow 2\pi T \sum_n \int d^D p f(i\omega_n, \vec{p}) \quad (6.15)$$

onde a componente de energia do momento é substituída pelas frequências de Matsubara, dadas por:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{2n\pi}{\beta} & (\text{bósons}); & \quad n = -\infty, \dots, \infty \\ \omega_n &= \frac{(2n+1)\pi}{\beta} & (\text{férmions}) \end{aligned} \quad (6.16)$$

6.3 Regras de Feynman térmicas

Ao considerar uma TQCTF teremos que as regras de Feynman são obtidas a partir das integrais de caminho da teoria, os vértices são idênticos as regras da teoria euclidiana à temperatura zero, porém os propagadores correspondem ao inverso dos operadores quadráticos da lagrangiana no espaço das funções (anti)periódicas.

Deste modo para encontrar as regras de Feynman substituir todos os momentos da lagrangiana $p \equiv (p_0, \vec{p})$ por $p \equiv (i\omega_n, \vec{p})$, onde as frequências de Matsubara ω_n são dadas conforme vimos por (6.16).

No próximo capítulo será visto como utilizar o formalismo de Matsubara para calcular as funções de Green térmicas em ordem de um loop.

FUNÇÕES DE GREEN TÉRMICAS

Para calcular as funções de Green 1PI térmicas há algumas técnicas que podem ser utilizadas, iremos deduzir a seguir uma expressão geral para qualquer diagrama das funções de Green 1PI, em ordem de um loop, mostrando que após efetuar a soma sobre as frequências de Matsubara podemos escrever em termos de amplitudes frontais as expressões térmicas dos diagramas.

As amplitudes frontais simplificam os cálculos dos diagramas de 1-loop na medida que estabelece que as integrais em p_0 , obtidas a partir das somas das frequências de Matsubara, equivalem à cortes nas linhas internas dos diagramas de 1-loops, que são os propagadores dos diagramas, conservando os momentos em cada vértice, sendo que todos os cortes possíveis existentes nas linhas internas dos loops equivale à permutações cíclicas das amplitudes frontais, conforme [36] e [37]¹⁵.

Deste modo, após as somas das frequências de Matsubara teremos uma integral no momento típico da partícula térmica, cujo integrando é composto por todas as permutações cíclicas das amplitudes frontais.

7.1 Cálculo das funções de Green utilizando amplitudes frontais

Consideramos um diagrama de uma função de Green 1PI térmica em ordem de um loop com L linhas externas, escrevemos da seguinte forma:

$$\mathcal{F} \equiv T \sum_{k_0=i\omega_n} \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \frac{1}{p_0^2 - \vec{p}^2} \frac{1}{(p_0 + q_{10})^2 - (\vec{p} + \vec{q}_1)^2} \cdots \frac{t(p; q_1, \dots, q_L)}{(p_0 - q_{L0})^2 - (\vec{p} - \vec{q}_L)^2} \quad (7.1)$$

onde $t(p; q_1, \dots, q_L)$ depende de índices correspondentes às coordenadas de espaço-tempo.

¹⁵ As amplitudes frontais apresentam uma partícula térmica que mantém seu momento interno após n-interações com os campos externos.

Vemos que há uma integral no vetor momento e uma soma nas frequências de Matsubara que independem da ordem em que são calculados, dado que os propagadores e os vértices da teoria de Yang-Mills são analíticos.

Além disso o integrando não deve possuir pólos ao longo do eixo imaginário, usando o teorema de Cauchy reproduzimos a soma nas frequências de Matsubara, cujas funções são definidas no espaço dos momentos em uma integral no plano complexo p_0 .

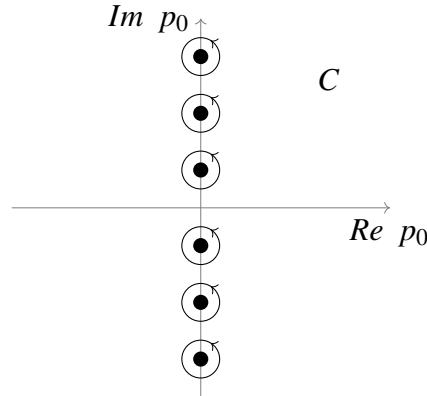


Figura 6 – Contorno de integração C

Desta forma, utilizando o caminho de integração C, conforme (Figura:6), identificando que os valores assumidos pelas frequências de Matsubara ω_n para bósons de gauge são idênticos aos valores dos pólos de uma cotangente hiperbólica com argumento igual a $\frac{\beta p_0}{2}$, podemos escrever a versão integral da soma de ω_n da seguinte forma:

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p_0 = i\omega_n, \vec{p}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dp_0 \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) f(p_0, \vec{p}), \quad (7.2)$$

onde $\omega_n = 2\pi nT$, com n inteiro.

No caso da soma para os férmions os valores assumidos pelas frequências ω_n são pólos de uma tangente hiperbólica com argumento igual a $\frac{\beta p_0}{2}$ e a soma pode ser escrita da seguinte forma:

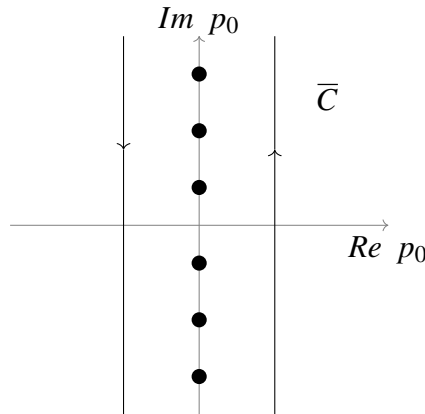
$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p_0 = i\omega_n, \vec{p}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dp_0 \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) f(p_0, \vec{p}) \quad (7.3)$$

onde $\omega_n = (2n + 1)\pi T$, com n inteiro.

De acordo com o teorema dos resíduos podemos deformar o contorno de integração que engloba os pólos da função $f(p_0, \vec{p})$ sem alterar o valor final da integral.

Assim deformando o contorno de integração C, conforme o novo contorno \bar{C} dado pela (Figura:7) podemos reescrever a soma da seguinte forma:

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{i-\delta}^{-i-\delta} dp_0 f(p_0, \vec{p}) \frac{1}{2} \left[\coth\left(\frac{1}{2}\beta p_0\right) \right]^{\pm 1} + \int_{-i+\delta}^{i+\delta} dp_0 f(p_0, \vec{p}) \frac{1}{2} \left[\coth\left(\frac{1}{2}\beta p_0\right) \right]^{\pm 1} \right] \quad (7.4)$$

Figura 7 – Contorno de integração \bar{C}

onde $\left[\coth \left(\frac{1}{2} \beta p_0 \right) \right]^{-1}$ refere-se ao caso dos férmions.

Dado que a integração é realizada em todas as direções espaciais do quadrimomento podemos realizar $p_0 \rightarrow -p_0$ e $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ na primeira integral, sem alterar o valor de $f(p_0, p)$, assim obtemos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i+\delta}^{i+\delta} dp_0 (f(p_0, \vec{p}) + p \rightarrow -p) \frac{1}{2} \left[\coth \left(\frac{1}{2} \beta p_0 \right) \right]^{\pm 1} \quad (7.5)$$

Usando a identidade algébrica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\coth \left(\frac{1}{2} \beta p_0 \right) \right]^{\pm 1} &= \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{1}{2} \beta p_0} \pm e^{-\frac{1}{2} \beta p_0}}{e^{\frac{1}{2} \beta p_0} \mp e^{-\frac{1}{2} \beta p_0}} = \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{1}{2} \beta p_0} \pm e^{-\frac{1}{2} \beta p_0} \pm e^{-\frac{1}{2} \beta p_0} \mp e^{\frac{1}{2} \beta p_0}}{e^{\frac{1}{2} \beta p_0} \mp e^{-\frac{1}{2} \beta p_0}} = \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{e^{\beta p_0 \mp 1}} = \frac{1}{2} \pm N_{B,F}(p_0) \end{aligned} \quad (7.6)$$

obtemos a seguinte forma geral para a soma sobre as frequências de Matsubara:

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p_0 = i\omega_n, \vec{p}) = \int_{-i}^i \frac{dp_0}{4\pi i} [f(p_0, \vec{p}) + p \rightarrow -p] \pm \int_{-i+\delta}^{i+\delta} \frac{dp_0}{2\pi i} [f(p_0, \vec{p}) + p \rightarrow -p] N_{B,F}(p_0) \quad (7.7)$$

Após a soma das frequências de Matsubara podemos observar que a contribuição da ordem de 1-loop para uma função de Green térmica 1PI se decompõe na soma de uma parte euclidiana, que é independente da temperatura e idêntica à teoria de temperatura zero após a rotação de Wick e uma parte dependente da temperatura, que no limite $T \rightarrow 0$ tende a zero e tem por característica ser ponderada por uma distribuição estatística, que para bósons é a distribuição de Bose-Einstein¹⁶ e para os férmions¹⁷ é a distribuição de Fermi-Dirac.

Na segunda integral a temperatura possui um papel de "cut-off" que impede o surgimento de divergências ultravioletas, pois devido seu decaimento exponencial as distribuições térmicas

¹⁶ A distribuição de Bose-Einstein é dada por $N_B(p_0) = \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1}$.

¹⁷ A distribuição de Fermi-Dirac é dada por $N_F(p_0) = -\frac{1}{e^{\beta p_0} + 1}$.

acabam amortizando qualquer crescimento advindo de $f(\pm p)$, não necessitando da regularização dimensional utilizada na teoria à temperatura zero.

Como a parte de temperatura nula já foi abordada anteriormente iremos focar apenas na parte térmica das funções de Green 1PI térmicas. Desta forma, substituindo o resultado obtido para a soma sobre as frequências de Matsubara, na expressão geral para as funções de Green térmicas, obtemos a seguinte expressão para a parte dependente da temperatura:

$$\int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \int_{-i+\delta}^{i+\delta} \frac{dp_0}{(2\pi i)} N_{B,F}(p_0) [f(p_0, \vec{p}) + p \rightarrow -p] \quad (7.8)$$

Como iremos calcular posteriormente os diagramas de 1-loop térmicos da teoria de Yang-Mills levando em consideração apenas as funções de dois pontos, verifiquemos o cálculo geral para estas funções de dois pontos, onde temos que $f(p_0, \vec{p})$ assume a seguinte forma:

$$f(p_0, \vec{p}) = \frac{t(p; k)}{(p-p)^i (k-k)^j} \quad (7.9)$$

com $k = p + q$. Para calcular a integral em p_0 usamos a seguinte decomposição:

$$\frac{1}{(p-p)^i (k-k)^j} = \frac{1}{(p_0 + |\vec{p}|)^i} \frac{1}{(p_0 + q_0 + |\vec{p} + \vec{q}|)^j} \frac{1}{(p_0 - |\vec{p}|)^i} \frac{1}{(p_0 + q_0 - |\vec{p} + \vec{q}|)^j} \quad (7.10)$$

e reescrevemos a integral da seguinte forma:

$$\int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \int_{-i+\delta}^{i+\delta} \frac{dp_0}{(2\pi i)} \mathcal{I}(p_0, \vec{p}) \quad (7.11)$$

com o integrando $\mathcal{I}(p_0, \vec{p})$ dado por:

$$\mathcal{I}(p_0, \vec{p}) = N_{B,F}(p_0) \left[\frac{1}{(p_0 + |\vec{p}|)^i} \frac{1}{(p_0 + q_0 + |\vec{p} + \vec{q}|)^j} \frac{1}{(p_0 - |\vec{p}|)^i} \frac{t(p; p+q)}{(p_0 + q_0 - |\vec{p} + \vec{q}|)^j} + p \rightarrow -p \right] \quad (7.12)$$

Fechando o contorno no plano direito, através de um semicírculo de raio R , conforme (Figura:8) de forma que ao fazermos o raio tendendo ao infinito o módulo do integrando decaia mais rápido que uma exponencial decrescente.

Considerando o teorema de resíduos para pólos múltiplos:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \mathcal{I}(p_0, \vec{p}) dp_0 = \sum_{j=1}^n \text{Res}_j[\mathcal{I}(p_0, \vec{p})] \quad (7.13)$$

onde cada resíduo é dado por:

$$\text{Res}_{p_0=p}[\mathcal{I}(p_0, \vec{p})] = \frac{1}{(i-1)!} \lim_{p_0 \rightarrow p} \frac{d^{i-1}}{dp_0^{i-1}} [(p_0 - p)^i \mathcal{I}(p_0, \vec{p})] \quad (7.14)$$

em que p é o pólo e m o índice do denominador do integrando.

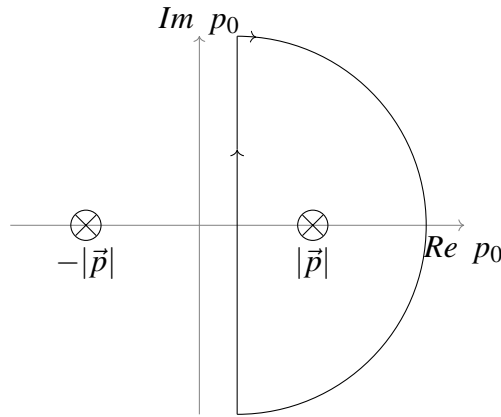


Figura 8 – Contorno de integração

Notando que a integral em p_0 de (7.11) possui pólos no interior do contorno nos pontos em que $p_0 = |\vec{p}|$ e $p_0 = |\vec{p} + \vec{q}| - q_0$, teremos que o resíduo para $p_0 = |\vec{p}|$ é dado por:

$$\begin{aligned} Res_{p_0=|\vec{p}|}[\mathcal{S}(p_0, \vec{p})] &= \frac{1}{(i-1)!} \lim_{p_0 \rightarrow |\vec{p}|} \frac{\partial^{i-1}}{\partial p_0^{i-1}} \left((p_0 - |\vec{p}|)^i \frac{N_{B,F}(p_0)}{(p_0 + |\vec{p}|)^i} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{(p_0 + q_0 + |\vec{p} + \vec{q}|)^j} \frac{1}{(p_0 - |\vec{p}|)^i} \frac{t(p; p+q)}{(p_0 + q_0 - |\vec{p} + \vec{q}|)^j} \right) = \quad (7.15) \\ &= \frac{1}{(i-1)!} \lim_{p_0 \rightarrow |\vec{p}|} \frac{\partial^{i-1}}{\partial p_0^{i-1}} \left(\frac{N_{B,F}(p_0)}{(p_0 + |\vec{p}|)^i} \frac{t(p; p+q)}{((p+q)(p+q))^j} \right) \end{aligned}$$

e para $p_0 = |\vec{p} + \vec{q}| - q_0$ dado por:

$$\begin{aligned} Res_{p_0=|\vec{p}+\vec{q}|-q_0}[\mathcal{S}(p_0, \vec{p})] &= \frac{1}{(j-1)!} \lim_{p_0 \rightarrow |\vec{p}+\vec{q}|-q_0} \frac{\partial^{j-1}}{\partial p_0^{j-1}} \left((p_0 - |\vec{p} + \vec{q}| + q_0)^j \frac{N_{B,F}(p_0)}{(p_0 + |\vec{p}|)^i} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{(p_0 + q_0 + |\vec{p} + \vec{q}|)^j} \frac{1}{(p_0 - |\vec{p}|)^i} \frac{t(p; p+q)}{(p_0 + q_0 - |\vec{p} + \vec{q}|)^j} \right) = \\ &= \frac{1}{(j-1)!} \lim_{p_0 \rightarrow |\vec{p}+\vec{q}|-q_0} \frac{\partial^{j-1}}{\partial p_0^{j-1}} \left(\frac{N_{B,F}(p_0)}{(p_0 + |\vec{p}|)^i} \frac{t(p; p+q)}{(p_0 + q_0 + |\vec{p} + \vec{q}|)^j} \right) \quad (7.16) \end{aligned}$$

Realizando a seguinte mudança $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \vec{q}$ no último resíduo, reescrevemos ele da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Res_{p_0=|\vec{p}+\vec{q}|-q_0}[\mathcal{S}(p_0, \vec{p})] &= \frac{1}{(j-1)!} \lim_{p_0 \rightarrow |\vec{p}|-q_0} \frac{\partial^{j-1}}{\partial p_0^{j-1}} \left(\frac{N_{B,F}(p_0)}{(p_0^2 - |\vec{p} + \vec{q}|^2)^i} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{t(p_0, \vec{p} - \vec{q}; p_0 + q_0, \vec{q})}{(p_0 + q_0 + |\vec{p}|)^j} \right). \quad (7.17) \end{aligned}$$

Logo a integral (7.11) será dada por:

$$\begin{aligned} & - \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \left[\frac{1}{(i-1)!} \lim_{p_0 \rightarrow |\vec{p}|} \frac{\partial^{i-1}}{\partial p_0^{i-1}} \left(\frac{N_{B,F}(p_0)}{(p_0 + |\vec{p}|)^i} \frac{t(p; p+q)}{((p+q)(p+q))^j} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(j-1)!} \lim_{p_0 \rightarrow |\vec{p}|-q_0} \frac{\partial^{j-1}}{\partial p_0^{j-1}} \left(\frac{N_{B,F}(p_0)}{(p_0^2 - |\vec{p} + \vec{q}|^2)^i} \frac{t(p_0, \vec{p} - \vec{q}; p_0 + q_0, \vec{q})}{(p_0 + q_0 + |\vec{p}|)^j} \right) + p \rightarrow -p \right] \quad (7.18) \end{aligned}$$

Usando a periodicidade das distribuições térmicas $N_{B,F}(x+p_0) = N_{B,F}(p_0)$ (x é o módulo de alguma combinação de momentos) e redefinindo o momento de integração \vec{p} , conforme [38], temos:

$$\begin{aligned} & - \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \left[\frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1}}{\partial p_0^{i-1}} \left(\frac{N_{B,F}(p_0)}{(p_0 + |\vec{p}|)^i} \frac{t(p; p+q)}{((p+q)(p+q))^j} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(j-1)!} \frac{\partial^{j-1}}{\partial p_0^{j-1}} \left(\frac{N_{B,F}(p_0)}{((p+q)(p+q))^i} \frac{t(-(p+q); p)}{(p_0 + |\vec{p}|)^j} \right) + p \rightarrow -p \right]_{p_0=|\vec{p}|} \end{aligned} \quad (7.19)$$

No caso em que $i = j = 1$, conforme veremos ao considerar o calibre de Feynman na teoria de Yang-Mills, obtemos:

$$\begin{aligned} & - \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \left[\frac{N_{B,F}(p_0)}{(p_0 + |\vec{p}|)} \frac{t(p; p+q)}{(p+q)^2} + \frac{N_{B,F}(p_0)}{(p+q)^2} \frac{t(-(p+q); p)}{(p_0 + |\vec{p}|)} + p \rightarrow -p \right]_{p_0=|\vec{p}|} = \\ & = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_{B,F}(|\vec{p}|)}{2|\vec{p}|} \mathcal{A}(p; q) \end{aligned} \quad (7.20)$$

onde o momento de integração p foi redefinido e $\mathcal{A}(p; q)$ são as amplitudes frontais das funções de dois pontos, esta forma de expressar as funções de Green 1PI térmicas é extremamente conveniente para o cálculo dos diagramas de 1-loop.

7.2 Hard thermal loops

Ao considerar as funções de Green térmicas iremos nos restringir à região de HTL¹⁸, na qual podemos separar as escalas de distância média entre as partículas, da ordem de $\frac{1}{T}$, das escalas de comprimentos de onda de excitações coletivas, da ordem de $\frac{1}{gT}$, onde g representa o parâmetro perturbativo¹⁹.

Assim em termos de funções de Green térmicas, essas contribuições de HTL são caracterizadas pelo momentos das partículas térmicas p tendo a mesma ordem da temperatura T , enquanto que os momentos externos q_i associados às excitações coletivas possuem a mesma ordem de gT , logo neste limite consideramos $p \gg q_i$.

Essa região apresenta as maiores contribuições do integrando dado que o momento interno p possui a mesma ordem da temperatura T e anula o efeito de amortização das funções de distribuição Bose-Einstein, no caso dos bósons, ou Fermi-Dirac, no caso dos férmions.

A separação das escalas é consistente com a seguinte expansão em série de potências dos momentos externos presentes nas amplitudes frontais:

$$\frac{1}{q^2 \pm 2(p \cdot q)} = \pm \frac{1}{2(p \cdot q) \left(1 \pm \frac{q^2}{2(p \cdot q)} \right)} = \pm \frac{1}{2(p \cdot q)} \left(1 \mp \frac{q^2}{2(p \cdot q)} + \dots \right) \quad (7.21)$$

¹⁸ Hard Thermal Loops

¹⁹ O parâmetro perturbativo g é tipicamente a constante de acoplamento.

Além desta expansão em série é importante verificarmos se há a existência de dependência de momentos nos vértices das amplitudes frontais $\mathcal{A}(p; q)$ das funções de Green térmicas para assim considerarmos apenas os termos de maior ordem em p , obtendo então os diagramas térmicos no limite de altas temperaturas.

DIAGRAMAS DE 1-LOOP TÉRMICOS

Tendo em vista as regras de Feynman térmicas conforme capítulo (6.3) e a função de Green térmica para o cálculo de qualquer diagrama de Feynman da ordem de 1-loop (7.19), verificaremos a seguir o cálculo dos diagramas de 1-loop térmicos da teoria de Yang-Mills nos formalismos de primeira ordem e no formalismo de segunda ordem, visando observar o comportamento da teoria nestes diferentes formalismos no limite de alta temperatura.

8.1 Diagramas de 1-loop térmicos no formalismo de 2ª ordem

Conforme vimos anteriormente (Figura:1) a auto-energia térmica dos campos de glúons da teoria de Yang-Mills no formalismo de 2ª ordem possui a contribuição de três diagramas.

O diagrama I térmico conforme o formalismo de Matsubara será dado por:

$$\left[\begin{array}{c} c, \sigma \quad e, \alpha \\ a, \mu \quad b, \nu \\ \vec{q} \quad \vec{p} + \vec{q} \quad \vec{q} \\ d, \gamma \quad f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} = T \sum_{p_0=i\omega_n} \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \frac{1}{2} V_{\mu\gamma\sigma}^{acd}(q, p, -p-q) W_{\sigma\alpha}^{ce}(p+q) \quad (8.1)$$

$$\times W_{\gamma\beta}^{df}(p) V_{\nu\alpha\beta}^{bef}(-q, p+q, -p),$$

onde $W_{\mu\nu}^{ab}(p) = -i\delta^{ab}(\frac{\eta^{\mu\nu}}{p^2} - (1-\xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^4})$ e $V_{\mu\sigma\gamma}^{abc}(p, q, k) = gf^{abc}[(p-k)_\sigma \eta_{\mu\gamma} + (q-p)_\gamma \eta_{\mu\lambda} + (k-q)_\mu \eta_{\sigma\lambda}]$.

Ao considerar a parte térmica (7.8) obtida ao realizar a soma sobre as frequências de Matsubara obtemos uma integral em p que é ponderada pela distribuição de Bose-Einstein e que depende da soma das amplitudes frontais (7.20) presentes na (Figura:9). Considerando o gauge de Feynman, que apresenta apenas pólos simples ao realizar a integral em p_0 , temos que a

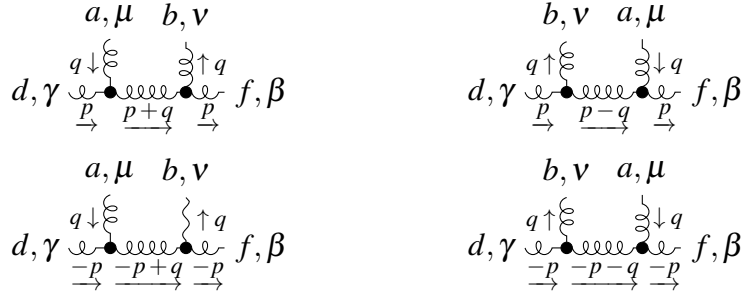


Figura 9 – Amplitudes frontais do diagrama I da auto-energia dos campos de glúons.

contribuição do diagrama I para a auto-energia térmica dos campos de glúons será dada por:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} c, \sigma \quad e, \alpha \\ a, \mu \quad b, \nu \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \vec{q} \quad \vec{q} \\ d, \gamma \quad f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} &= - \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{2|\vec{p}|} \frac{(-i)\delta^{df}\eta^{\gamma\beta}}{2} \left[V_{\mu\sigma\gamma}^{acd}(q, -p-q, p) (-i)\delta^{ce} \right. \\
 &\times \frac{\eta^{\sigma\alpha}}{(p+q)^2} V_{\nu\beta\alpha}^{bfe}(-q, -p, p+q) + V_{\nu\sigma\gamma}^{bcd}(-q, -p+q, p) (-i)\delta^{ce} \\
 &\left. \times \frac{\eta^{\sigma\alpha}}{(p-q)^2} V_{\mu\beta\alpha}^{afe}(q, -p, p-q) + p \rightarrow -p \right]_{p^2=0}
 \end{aligned} \quad (8.2)$$

Após a contração dos índices, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} c, \sigma \quad e, \alpha \\ a, \mu \quad b, \nu \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \vec{q} \quad \vec{q} \\ d, \gamma \quad f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} &= - \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} \left[\frac{(4d-6)p^\mu p^\nu}{2(p \cdot q)(1 + \frac{q^2}{2(p \cdot q)})} + \right. \\
 &+ \frac{(2d-3)p^\nu q^\mu}{2(p \cdot q)(1 + \frac{q^2}{2(p \cdot q)})} + \frac{(2d-3)p^\mu q^\nu}{2(p \cdot q)(1 + \frac{q^2}{2(p \cdot q)})} + \frac{(d-6)q^\mu q^\nu}{2(p \cdot q)(1 + \frac{q^2}{2(p \cdot q)})} + \\
 &\left. + \frac{(2(p \cdot q) + 5q^2)\eta^{\mu\nu}}{2(p \cdot q)(1 + \frac{q^2}{2(p \cdot q)})} + p \rightarrow -p \right]
 \end{aligned} \quad (8.3)$$

Para verificarmos os efeitos da temperatura impomos o limite de HTL, expandindo até segunda ordem os denominadores do integrando conforme (7.21) e obtemos:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} c, \sigma \quad e, \alpha \\ a, \mu \quad b, \nu \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \vec{q} \quad \vec{q} \\ d, \gamma \quad f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} &= - \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} \left[- \frac{(2d-3)q^2 p^\mu p^\nu}{(p \cdot q)^2} \right. \\
 &\left. - \frac{(d-6)q^2 q^\mu q^\nu}{2(p \cdot q)^2} + \frac{(2d-3)(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu)}{(p \cdot q)} + 2\eta^{\mu\nu} - \frac{5q^4 \eta^{\mu\nu}}{2(p \cdot q)^2} \right]
 \end{aligned} \quad (8.4)$$

No limite HTL também consideramos a dependência dos denominadores em relação aos momentos e numa primeira aproximação temos:

$$\frac{p_\mu q_\nu}{(p \cdot q)} \sim \frac{p_\nu q_\mu}{(p \cdot q)} \sim 1; \quad \frac{q^2 q_\nu q_\mu}{(p \cdot q)^2} \sim \frac{q^2}{p^2} \ll 1 \quad e \quad \frac{q^4}{(p \cdot q)^2} \sim \frac{q^2}{p^2} \ll 1 \quad (8.5)$$

consequentemente consideramos apenas os termos do primeiro tipo, dados que estes são dominantes em relação aos outros termos. Deste modo, aplicando essa regra o diagram I térmico será dado por:

$$\left[\begin{array}{c} c, \sigma \quad e, \alpha \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ d, \gamma \quad f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} = \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} \left[\frac{(2d-3)q^2 p^\mu p^\nu}{(p \cdot q)^2} - \frac{(2d-3)(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu)}{(p \cdot q)} - 2\eta^{\mu\nu} \right] \quad (8.6)$$

O diagrama II térmico será dado conforme o formalismo de Matsubara por:

$$\left[\begin{array}{c} c \quad e \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ d \quad f \end{array} \right]_{\text{Térmico}} = -T \sum_{k_0=i\omega_n} \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} [-g f^{cad}(p+q)_\mu] \left[\frac{i\delta^{ce}}{(p+q)^2} \right] \left[\frac{i\delta^{df}}{p^2} \right] [-g f^{fbe} p_\nu] \quad (8.7)$$

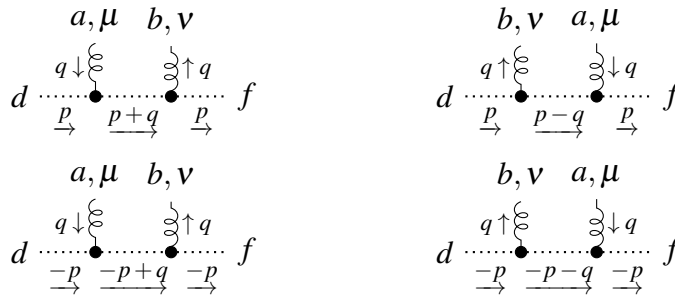


Figura 10 – Amplitudes frontais do diagrama II da auto-energia dos campos de glúons.

A parte térmica da soma das frequências de Matsubara é ponderada pela distribuição de Bose-Einstein e depende das amplitudes frontais (7.20) presentes na (Figura:10), logo reescrevemos o diagrama II térmico da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{c} c \quad e \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ d \quad f \end{array} \right]_{\text{Térmico}} = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{2|\vec{p}|} i\delta^{df} \left[-g f^{cad}(p+q)_\mu \frac{i\delta^{ce}}{(p+q)^2} (-1)g \right. \\ \left. \times f^{fbe}(p)_\nu - g f^{cbd}(p-q)_\nu \frac{i\delta^{ce}}{(p-q)^2} (-1)g f^{fae} p_\mu + p \rightarrow -p \right]_{p^2=0} \quad (8.8)$$

Realizando a contração dos índices, obtemos que a contribuição do diagrama III térmico para a auto-energia dos campos de glúons é dada por:

$$\left[\begin{array}{c} d, \sigma \\ a, \mu \end{array} \begin{array}{c} \vec{p} \\ q \end{array} \begin{array}{c} c, \gamma \\ b, \nu \end{array} \begin{array}{c} q \\ q \end{array} \right]_{T\acute{e}rmico} = - \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} (2-2d) \eta^{\mu\nu} \quad (8.13)$$

Conseqüentemente a auto-energia térmica dos campos de glúons no limite HTL é escrito da seguinte forma:

$$\Pi_{Glúon}^{ab,\mu\nu} = \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} \left[\frac{(2d-4)q^2 p^\mu p^\nu}{(p \cdot q)^2} + (2d-4) \eta^{\mu\nu} - (2d-4) \times \frac{(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu)}{(p \cdot q)} \right] \quad (8.14)$$

Considerando $p = |\vec{p}|(1, \hat{p})$ e $D = d-1$ podemos reescrever $\Pi_{Glúon}^{ab,\mu\nu}$ na forma de integrais do ângulo sólido da seguinte forma:

$$\Pi_{Glúon}^{ab,\mu\nu} = \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2} \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \int d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^{d-3}}{e^{\beta|\vec{p}|-1}} 2(d-2) \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{(P^\mu q^\nu + P^\nu q^\mu)}{(P \cdot q)} + \frac{q^2 P^\mu P^\nu}{(P \cdot q)^2} \right] \quad (8.15)$$

onde definimos o quadrivetor $P = \frac{p}{|\vec{p}|} \equiv (1, \hat{p})$ e a integral em $d|\vec{p}|$ é dada por (F.21), conforme anexo (F), logo temos que a auto-energia térmica dos glúons é dada por:

$$\Pi_{Glúon}^{ab,\mu\nu} = \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab} T^{d-2} \Gamma(d-2) \zeta(d-2)}{2} \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} 2(d-2) \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{(P^\mu q^\nu + P^\nu q^\mu)}{(P \cdot q)} + \frac{q^2 P^\mu P^\nu}{(P \cdot q)^2} \right] \quad (8.16)$$

Conforme [39], esta auto-energia dos glúons está presente na ação efetiva térmica²⁰ obtida a partir da equação de transporte²¹. De fato esta auto-energia irá contribuir para o termo dominante da ação efetiva térmica que possui uma dependência de T^2 , desta forma a ação efetiva térmica é dada por:

$$\Gamma_{T\acute{e}rmico} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \tilde{A}_\mu(p) \Pi_{Glúon}^{ab,\mu\nu}(p) \tilde{A}_\nu(p) + \dots \quad (8.17)$$

onde $A_\mu(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{ixp} \tilde{A}_\mu(p)$.

²⁰ A ação efetiva térmica encapsula todos os efeitos de altas temperaturas.

²¹ Através da equação de transporte é introduzida uma corrente que pode ser definida em termos da distribuição no espaço de fase e que pode ser expressa em termos de derivadas funcionais da ação efetiva térmica.

8.2 Diagramas de 1-loop térmicos no formalismo de 1ª ordem

Vejamos agora os diagramas presentes na teoria de Yang-Mills no formalismo de 1ª ordem, que conforme vimos anteriormente possui a contribuição de seis diagramas (Figura:2).

O diagrama I térmico conforme o formalismo de Matsubara será dado por:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} c, \lambda \sigma \\ a, \mu \\ d, \alpha \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{q} \\ \xrightarrow{p} \\ \xrightarrow{q} \end{array} \begin{array}{c} e, \beta \\ b, \nu \\ f, \gamma \rho \end{array} \right]_{T\acute{e}rmico} &= T \sum_{k_0=i\omega_n} \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \left[-\frac{i}{2} g f^{cad} (\eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\alpha} - \eta_{\lambda\alpha} \eta_{\sigma\mu}) \right] \\
 &\times \left[-\delta^{ce} \left(\frac{1}{(p+q)^2} ((p+q)^\lambda \eta^{\sigma\beta} - (p+q)^\sigma \eta^{\lambda\beta}) \right) \right] \left[-\delta^{df} \right. \\
 &\times \left. \left(\frac{1}{p^2} (p_\gamma \eta_{\rho\alpha} - p_\rho \eta_{\gamma\alpha}) \right) \right] \left[-\frac{i}{2} g f^{fbe} (\eta_{\gamma\nu} \eta_{\rho\beta} - \eta_{\gamma\beta} \eta_{\rho\nu}) \right] \quad (8.18)
 \end{aligned}$$

A parte térmica depende das amplitudes frontais presentes na (Figura:12).

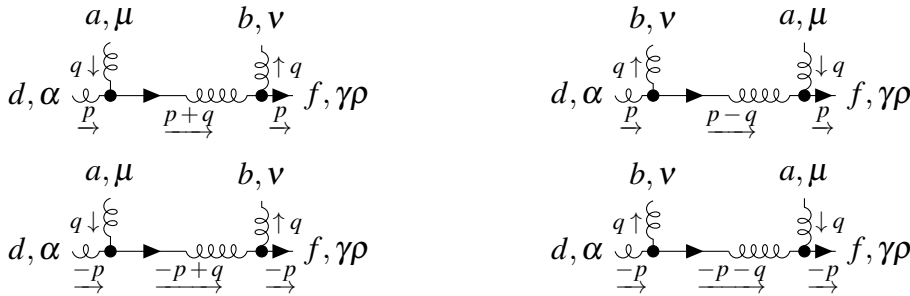


Figura 12 – Amplitudes frontais do diagrama I da auto-energia dos campos de glúons.

Assim após a integração em p_0 , obtemos:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} c, \lambda \sigma \\ a, \mu \\ d, \alpha \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{q} \\ \xrightarrow{p} \\ \xrightarrow{q} \end{array} \begin{array}{c} e, \beta \\ b, \nu \\ f, \gamma \rho \end{array} \right]_{T\acute{e}rmico} &= - \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{2|\vec{p}|} \left[-\delta^{df} (p_\gamma \eta_{\rho\alpha} - p_\rho \eta_{\gamma\alpha}) \left[\mathcal{V}_{\lambda\sigma,\mu\alpha}^{cad} \right. \right. \\
 &\times \left. \left. \mathcal{W}_{\lambda\sigma\beta}^{ce}(p+q) \mathcal{V}_{\gamma\rho,\nu\beta}^{fbe} + \mathcal{V}_{\lambda\sigma,\nu\alpha}^{cbd} \mathcal{W}_{\lambda\sigma\beta}^{ce}(p-q) \mathcal{V}_{\gamma\rho,\mu\beta}^{fae} \right] + \right. \\
 &\left. + p \rightarrow -p \right]_{p^2=0} \quad (8.19)
 \end{aligned}$$

onde $\mathcal{V}_{\lambda\sigma,\mu\nu}^{abc} = -\frac{i}{2} g f^{abc} (\eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\nu} - \eta_{\lambda\nu} \eta_{\sigma\mu})$ e $\mathcal{W}_{\mu\nu\alpha}^{ab}(p) = -\delta^{ab} \frac{1}{p^2} (p^\mu \eta^{\nu\alpha} - p^\nu \eta^{\mu\alpha})$.

Realizando a contração dos índices, obtemos:

$$\left[\begin{array}{c} c, \lambda \sigma \\ a, \mu \\ d, \alpha \end{array} \begin{array}{c} e, \beta \\ b, \nu \\ f, \gamma \rho \end{array} \right]_{\text{Térmico}} = \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} \left[\frac{(2d-2)p^\mu p^\nu}{2(p \cdot q) \left(1 - \frac{q^2}{2(p \cdot q)}\right)} - \right. \\ \left. + \frac{(d-1)(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu)}{2(p \cdot q) \left(1 - \frac{q^2}{2(p \cdot q)}\right)} + p \rightarrow -p \right] \quad (8.20)$$

Aplicando o limite HTL, conforme (7.21), obtemos:

$$\left[\begin{array}{c} c, \lambda \sigma \\ a, \mu \\ d, \alpha \end{array} \begin{array}{c} e, \beta \\ b, \nu \\ f, \gamma \rho \end{array} \right]_{\text{Térmico}} = \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} \left[\frac{(d-1)q^2 p^\mu p^\nu}{(p \cdot q)^2} - \right. \\ \left. - \frac{(d-1)(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu)}{(p \cdot q)} \right] \quad (8.21)$$

O diagrama II térmico será igual ao obtido no formalismo de segunda ordem (8.10), já o diagrama III térmico será dado, de acordo com o formalismo de Matsubara da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{c} c, \lambda \sigma \quad e \gamma \rho \\ a, \mu \\ d, \alpha \end{array} \begin{array}{c} b, \nu \\ f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} = T \sum_{k_0=i\omega_n} \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \left[-\frac{i}{2} g f^{cad} (\eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\alpha} - \eta_{\lambda\alpha} \eta_{\sigma\mu}) \right] \left[2i \delta^{ce} \right. \\ \times \left(\frac{1}{2} (\eta_{\lambda\gamma} \eta_{\sigma\rho} - \eta_{\lambda\rho} \eta_{\sigma\gamma}) - \frac{1}{2(p+q)^2} ((p+q)_\lambda (p+q)_\gamma \eta_{\sigma\rho} + \right. \\ \left. + (p+q)_\sigma (p+q)_\rho \eta_{\lambda\gamma} - (p+q)_\lambda (p+q)_\rho \eta_{\sigma\gamma} - (p+q)_\sigma \right. \\ \left. \times (p+q)_\gamma \eta_{\lambda\rho}) \right] \left[-i \delta^{df} \left(\frac{\eta^{\alpha\beta}}{p^2} - (1-\xi) \frac{p^\alpha p^\beta}{p^4} \right) \right] \left[-\frac{i}{2} g f^{ebf} \right. \\ \left. \times (\eta_{\gamma\nu} \eta_{\rho\beta} - \eta_{\gamma\beta} \eta_{\rho\nu}) \right] \quad (8.22)$$

As amplitudes frontais presentes no cálculo do diagrama III térmico são dadas conforme (Figura:13).

Considerando o calibre de Feynman, teremos apenas a contribuição dos pólos simples,

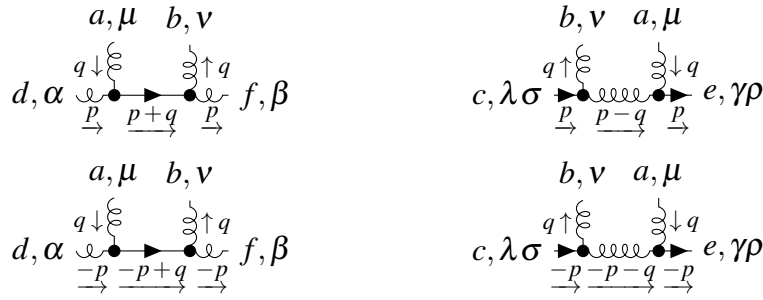


Figura 13 – Amplitudes frontais do diagrama III da auto-energia dos campos de glúons.

que resultará em:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} c, \lambda \sigma \quad e \gamma \rho \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ d, \alpha \quad f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} &= - \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{2|\vec{p}|} \left[(-i) \delta^{df} \eta^{\alpha\beta} \left[\gamma_{\lambda\sigma, \mu\alpha}^{cad} 2i\delta^{ce} \left(\frac{1}{2} (\eta_{\lambda\gamma} \eta_{\sigma\rho} - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - \eta_{\lambda\rho} \eta_{\sigma\gamma} \right) - \frac{1}{2(p+q)^2} L_{\lambda\sigma, \gamma\rho}(p+q) \gamma_{\gamma\rho, \nu\beta}^{ebf} \right] + (-i) \delta^{ce} L_{\lambda\sigma, \gamma\rho}(-p) \right. \\
 &\quad \left. \times \left[\gamma_{\lambda\sigma, \nu\alpha}^{cbd} (-i) \delta^{df} \frac{\eta^{\alpha\beta}}{(p-q)^2} \gamma_{\gamma\rho, \mu\beta}^{eaf} \right] + p \rightarrow -p \right]_{p^2=0} \quad (8.23)
 \end{aligned}$$

onde $V_{\lambda\sigma, \mu\nu}^{abc} = -\frac{i}{2} g f^{abc} (\eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\nu} - \eta_{\lambda\nu} \eta_{\sigma\mu})$.

Realizando a contração dos índices, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} c, \lambda \sigma \quad e \gamma \rho \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ d, \alpha \quad f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} &= -\frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} \left[\frac{(d-2)(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu)}{2(p \cdot q) \left(1 + \frac{q^2}{2(p \cdot q)}\right)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(d-2)q^\mu q^\nu}{2(p \cdot q) \left(1 + \frac{q^2}{2(p \cdot q)}\right)} + \frac{2(d-2)p^\mu p^\nu}{2(p \cdot q) \left(1 + \frac{q^2}{2(p \cdot q)}\right)} - (d-2)\eta^{\mu\nu} + p \rightarrow -p \right] \quad (8.24)
 \end{aligned}$$

Impondo a condição de HTL, conforme (7.21), teremos os seguintes termos relevantes:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} c, \lambda \sigma \quad e \gamma \rho \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ d, \alpha \quad f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} &= \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} \left[\frac{(d-2)q^2 p^\mu p^\nu}{(p \cdot q)^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(d-2)(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu)}{(p \cdot q)} + (2d-4)\eta^{\mu\nu} \right] \quad (8.25)
 \end{aligned}$$

Na última passagem foi considerado a dependência em relação aos momentos considerados numa primeira aproximação apenas os termos conforme (8.5).

Logo a auto-energia térmica dos campos de glúons será a soma destes três diagramas:

$$\begin{aligned}
\Pi_{Glúon}^{ab,\mu\nu} &= \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} \left[\frac{(d-1)q^2 p^\mu p^\nu}{(p \cdot q)^2} - (d-1) \frac{(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu)}{pq} + \right. \\
&+ \frac{(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu)}{pq} - \frac{q^2 p^\mu p^\nu}{(p \cdot q)^2} + \frac{(d-2)q^2 p^\mu p^\nu}{(p \cdot q)^2} - \frac{(d-2)(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu)}{(p \cdot q)} + \\
&\left. + 2(d-2)\eta^{\mu\nu} \right] = \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} 2(d-2) \left[\frac{q^2 p^\mu p^\nu}{(p \cdot q)^2} - \right. \\
&\left. - \frac{(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu)}{pq} + \eta^{\mu\nu} \right] \quad (8.26)
\end{aligned}$$

A integral obtida para a auto-energia térmica dos campos de glúons pode ser reescrita em termos de integrais do ângulo sólidos e é idêntica à (8.16), obtida no formalismo de segunda ordem e consequentemente contribui para o termo dominante da ação efetiva térmica conforme (8.17).

O diagrama IV térmico será dado conforme o formalismo de Matsubara da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c} c, \mu \quad e, \alpha \\ a, \lambda \sigma \quad b, \gamma \rho \\ \vec{q} \quad \vec{p+q} \quad \vec{q} \\ d, \nu \quad f, \beta \end{array} \right]_{Térmico} &= T \sum_{k_0=i\omega_n} \frac{1}{2} \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \left[-\frac{ig}{2} f^{acd} (\eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\nu} - \eta_{\lambda\nu} \eta_{\sigma\mu}) \right] \left[-i\delta^{ce} \right. \\
&\times \left(\frac{\eta^{\mu\alpha}}{(p+q)^2} - (1-\xi) \frac{(p+q)^\mu (p+q)^\alpha}{(p+q)^4} \right) \left[-i\delta^{df} \left(\frac{\eta^{\nu\beta}}{p^2} - (1-\xi) \right) \right. \\
&\times \left. \left. \frac{p^\nu p^\beta}{p^4} \right) \right] \left[-\frac{ig}{2} f^{bef} (\eta_{\gamma\alpha} \eta_{\rho\beta} - \eta_{\gamma\beta} \eta_{\rho\alpha}) \right] \quad (8.27)
\end{aligned}$$

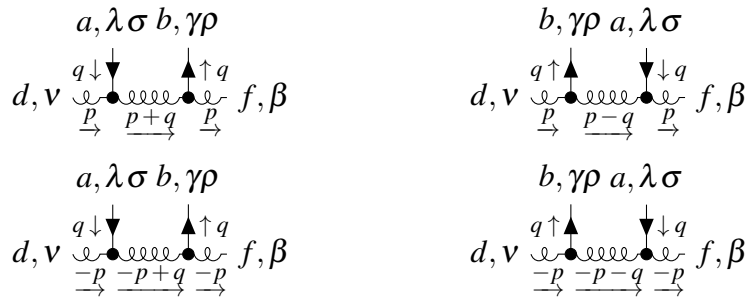


Figura 14 – Amplitudes frontais do diagrama IV térmico.

Com as amplitudes frontais dadas pela (Figura:14), teremos que após a integral em p_0 o

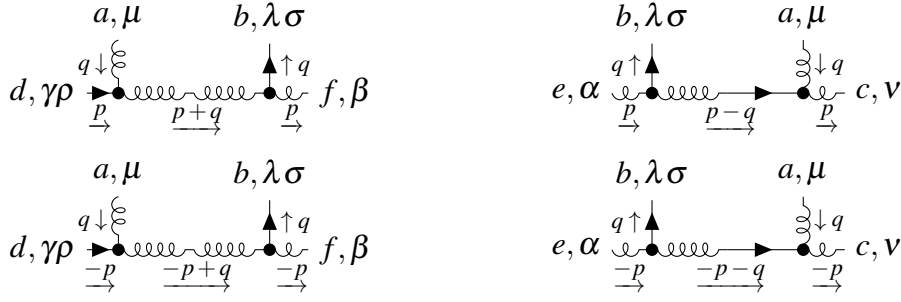


Figura 15 – Amplitudes frontais do diagrama V térmico.

No calibre de Feynman $\xi = 1$ obtemos com estas amplitudes frontais a seguinte integral:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} a, \mu \\ \text{gluon } q \\ d, \gamma\rho \\ \text{gluon } p+q \\ b, \lambda\sigma \\ \text{gluon } q \\ f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} &= - \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{2|\vec{p}|} \left[\delta^{df} (p_\gamma \eta_{\rho\beta} - p_\rho \eta_{\gamma\beta}) \mathcal{V}_{\gamma\rho, \mu\nu}^{dac} \right. \\
 &\times (-i) \delta^{ce} \frac{\eta^{\nu\alpha}}{(p+q)^2} \mathcal{V}_{\lambda\sigma, \alpha\beta}^{bef} + (-i) \delta^{ce} \eta^{\nu\alpha} \mathcal{V}_{\lambda\sigma, \alpha\beta}^{bef} \delta^{fd} \frac{1}{(p-q)^2} \\
 &\left. \times ((p-q)^\gamma \eta^{\rho\beta} - (p-q)^\rho \eta^{\gamma\beta}) \mathcal{V}_{\gamma\rho, \mu\nu}^{dac} + p \rightarrow -p \right]_{p^2=0} \quad (8.37)
 \end{aligned}$$

onde $\mathcal{V}_{\lambda\sigma, \mu\nu}^{abc} = -\frac{i}{2} g f^{abc} (\eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\nu} - \eta_{\lambda\nu} \eta_{\sigma\mu})$.

Contraindo os índices, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} a, \mu \\ \text{gluon } q \\ d, \gamma\rho \\ \text{gluon } p+q \\ b, \lambda\sigma \\ \text{gluon } q \\ f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} &= \frac{ig^2 C_2(G) \delta^{ab}}{4} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} \left[- \frac{(q^\sigma \eta^{\mu\lambda} - q^\lambda \eta^{\mu\sigma})}{2(p \cdot q) (1 - \frac{q^2}{2(p \cdot q)})} + \right. \\
 &+ \frac{(p^\sigma \eta^{\lambda\mu} - p^\lambda \eta^{\mu\sigma})}{2pq (1 - \frac{q^2}{2(p \cdot q)})} - \frac{(p^\sigma \eta^{\lambda\mu} - p^\lambda \eta^{\mu\sigma})}{2pq (1 - \frac{q^2}{2(p \cdot q)})} + p \rightarrow -p \left. \right] \quad (8.38)
 \end{aligned}$$

No limite de HTL os termos relevantes serão:

$$\left[\begin{array}{c} a, \mu \\ \text{gluon } q \\ d, \gamma\rho \\ \text{gluon } p+q \\ b, \lambda\sigma \\ \text{gluon } q \\ f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} = - \frac{ig^2 C_2(G) \delta^{ab}}{8} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} \left[\frac{q^2 (q^\sigma \eta^{\mu\lambda} - q^\lambda \eta^{\mu\sigma})}{(p \cdot q)^2} \right] \quad (8.39)$$

Considerando $p = |\vec{p}|(1, \hat{p}) \equiv Tu(1, \hat{p})$, podemos reescrever a integral na forma de

integrais do ângulo sólido, da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagrama} \\ \text{Térmico} \end{array} \right] = -\frac{ig^2 C_2(G) \delta^{ab}}{8} \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \int d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^{d-5}}{e^{\beta|\vec{p}|-1}} \left[\frac{q^2 (q^\sigma \eta^{\mu\lambda} - q^\lambda \eta^{\mu\sigma})}{(P \cdot q)^2} \right] \quad (8.40)$$

onde foi definido o quadrivetor $P = \frac{p}{|\vec{p}|} \equiv (1, \hat{p})$ e a integração em $d|\vec{p}|$ é dada conforme anexo (F) por (F.21), resultando:

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagrama} \\ \text{Térmico} \end{array} \right] = -\frac{ig^2 C_2(G) \delta^{ab} T^{d-4}}{16} \Gamma(d-4) \zeta(d-4) \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \left[\frac{q^2 (q^\sigma \eta^{\mu\lambda} - q^\lambda \eta^{\mu\sigma})}{(P \cdot q)^2} \right] \quad (8.41)$$

Assim como vimos no diagrama V térmico, este diagrama possui uma dependência logarítmica na temperatura em $d = 4$, podemos confirmar também que ele possui a mesma estrutura da divergência obtida à temperatura zero (5.30).

Usando o resultado da integral (F.32), reescrevemos (8.41), da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagrama} \\ \text{Térmico} \end{array} \right] = -\frac{ig^2 C_2(G) \delta^{ab} T^{d-4}}{2^d \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d-2}{2})} \Gamma(d-4) \zeta(d-4) (q^\sigma \eta^{\mu\lambda} - q^\lambda \eta^{\mu\sigma}) \quad (8.42)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável $d \rightarrow 4 - 2\varepsilon$ e expandindo em ε obtemos a seguinte integral:

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagrama} \\ \text{Térmico} \end{array} \right] = -\frac{ig^2 C_2(G) \delta^{ab} (q^\sigma \eta^{\mu\lambda} - q^\lambda \eta^{\mu\sigma})}{64\pi^2 \varepsilon} \quad (8.43)$$

Comparando com o resultado à temperatura zero (5.30), que no gauge de Feynman é dado por:

$$\text{diagrama} = \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab} (q^\sigma \eta^{\lambda\mu} - q^\lambda \eta^{\mu\sigma})}{64\pi^2 \varepsilon} \quad (8.44)$$

vemos que o resultado do diagrama térmico obtido apresenta divergência logarítmica idêntica à do digrama à temperatura zero.

Realizando a contração dos índices, obtemos:

$$\left[\begin{array}{c} c, \lambda \sigma \quad e \gamma \rho \\ a, \mu \quad b, \nu \\ \vec{q} \quad \vec{q} \\ d, \alpha \quad f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} = \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} \left[(2d-2) \eta^{\nu\mu} \right] \quad (8.56)$$

Assim a auto-energia térmica dos campos de glúons será a soma destes três primeiros diagramas:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{Glúon}}^{ab, \mu\nu} &= \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} \left[\frac{(2d-3) q^2 p^\mu p^\nu}{(p \cdot q)^2} - \frac{(2d-3)}{(p \cdot q)} (p^\mu q^\nu + \right. \\ &\quad \left. + p^\nu q^\mu) - 2\eta^{\mu\nu} + \frac{(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu)}{(p \cdot q)} - \frac{q^2 p^\mu p^\nu}{(p \cdot q)^2} - (2-2d)\eta^{\nu\mu} \right] = \\ &= \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} 2(d-2) \left[\frac{q^2 p^\mu p^\nu}{(p \cdot q)^2} - \frac{(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu)}{(p \cdot q)} + \eta^{\nu\mu} \right] \end{aligned} \quad (8.57)$$

A integral obtida para a auto-energia térmica dos campos de glúons pode ser reescrita em termos de integrais do ângulo sólidos e é idêntica à (8.16), obtida no formalismo de segunda ordem e no formalismo de primeira ordem, fazendo parte da ação efetiva térmica (8.17).

O diagrama IV térmico será igual ao (8.50) que foi obtido no formalismo de primeira ordem.

O diagrama V de acordo com o formalismo de Matsubara será dado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} c, \mu \quad e, \alpha \\ a, \lambda \sigma \quad b, \gamma \\ \vec{q} \quad \vec{q} \\ d, \nu \quad f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} &= T \sum_{k_0=i\omega_n} \frac{1}{2} \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \left[-\frac{ig}{2} f^{acd} (\eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\nu} - \eta_{\lambda\nu} \eta_{\sigma\mu}) \right] \left[-i\delta^{ce} \right. \\ &\quad \times \left(\frac{\eta^{\mu\alpha}}{(p+q)^2} - (1-\xi) \frac{(p+q)^\mu (p+q)^\alpha}{(p+q)^4} \right) \left[-i\delta^{df} \left(\frac{\eta^{\nu\beta}}{p^2} - (1-\xi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \frac{p^\nu p^\beta}{p^4} \right) \right] \left[g f^{bef} ((p-q)_\alpha \eta_{\beta\gamma} + (-2p-q)_\gamma \eta_{\alpha\beta} + (p+2q)_\beta \eta_{\gamma\alpha}) \right] \end{aligned} \quad (8.58)$$

Com as amplitudes frontais dadas pela (Figura:18) e considerando o calibre de Feynman,

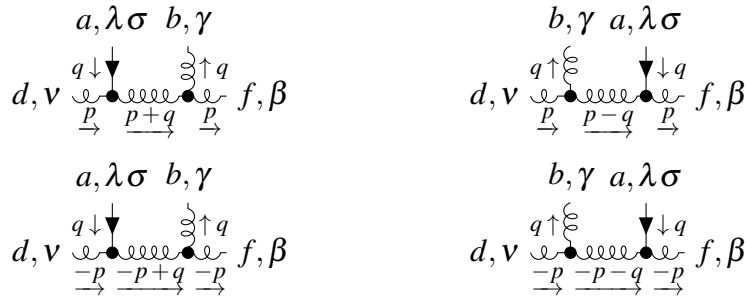


Figura 18 – Amplitudes frontais do diagrama V térmico.

obtemos:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} c, \mu \quad e, \alpha \\ a, \lambda \sigma \quad b, \gamma \\ \xrightarrow{q} \quad \xrightarrow{q} \\ d, \nu \quad f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} &= - \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{2|\vec{p}|} \frac{(-i)\delta^{df}\eta^{\nu\beta}}{2} \left[\gamma_{\lambda\sigma, \mu\nu}^{acd} (-i)\delta^{ce} \frac{\eta^{\mu\alpha}}{(p+q)^2} \right. \\
 &\quad \times V_{\gamma\beta\alpha}^{bfe}(-q, -p, p+q) + V_{\gamma\mu\nu}^{bcd}(-q, -p+q, p) (-i)\delta^{ce} \frac{\eta^{\mu\alpha}}{(p-q)^2} \\
 &\quad \left. \times \gamma_{\lambda\sigma, \alpha\beta}^{aef} + p \rightarrow -p \right]_{p^2=0}
 \end{aligned} \tag{8.59}$$

onde $\gamma_{\lambda\sigma, \mu\nu}^{abc} = -\frac{i}{2} g f^{abc} (\eta_{\lambda\mu} \eta_{\sigma\nu} - \eta_{\lambda\nu} \eta_{\sigma\mu}) \epsilon V_{\mu\sigma\gamma}^{abc}(p, q, k) = g f^{abc} [(p-k)_\sigma \eta_{\mu\gamma} + (q-p)_\gamma \eta_{\mu\lambda} + (k-q)_\mu \eta_{\sigma\lambda}]$.

Realizando a contração dos índices, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} c, \mu \quad e, \alpha \\ a, \lambda \sigma \quad b, \gamma \\ \xrightarrow{q} \quad \xrightarrow{q} \\ d, \nu \quad f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} &= \frac{3ig^2 C_2(G) \delta^{ab}}{4} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} \left[\frac{q^\sigma \eta^{\gamma\lambda} - q^\lambda \eta^{\gamma\sigma}}{2(p \cdot q)(1 - \frac{q^2}{2pq})} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{q^\sigma \eta^{\gamma\lambda} - q^\lambda \eta^{\gamma\sigma}}{2(p \cdot q)(1 + \frac{q^2}{2(p \cdot q)})} + p \rightarrow -p \right]
 \end{aligned} \tag{8.60}$$

No limite de HTL, a integral é dada por:

$$\left[\begin{array}{c} c, \mu \quad e, \alpha \\ a, \lambda \sigma \quad b, \gamma \\ \xrightarrow{q} \quad \xrightarrow{q} \\ d, \nu \quad f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} = \frac{3ig^2 C_2(G) \delta^{ab}}{8} \int \frac{d^{D-1} p}{(2\pi)^{D-1}} \frac{N_B(|\vec{p}|)}{|\vec{p}|} \left[\frac{q^2 (q^\sigma \eta^{\gamma\lambda} - q^\lambda \eta^{\gamma\sigma})}{(p \cdot q)^2} \right] \tag{8.61}$$

Considerando $p = |\vec{p}|(1, \hat{p}) \equiv Tu(1, \hat{p})$, podemos reescrever a integral na forma de

integrais do ângulo sólido, da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{c} c, \mu \quad e, \alpha \\ a, \lambda \sigma \quad b, \gamma \\ \vec{q} \quad \vec{p} + \vec{q} \quad \vec{q} \\ d, \nu \quad f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} = \frac{3ig^2 C_2(G) \delta^{ab}}{8} \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \int d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^{d-5}}{e^{\beta|\vec{p}|} - 1} \left[\frac{q^2 (q^\sigma \eta^{\gamma\lambda} - q^\lambda \eta^{\gamma\sigma})}{(P \cdot q)^2} \right] \quad (8.62)$$

onde foi definido o quadrivetor $P = \frac{p}{|\vec{p}|} \equiv (1, \hat{p})$ e a integração em $d|\vec{p}|$ é dada conforme anexo (E) por (F.21), resultando:

$$\left[\begin{array}{c} c, \mu \quad e, \alpha \\ a, \lambda \sigma \quad b, \gamma \\ \vec{q} \quad \vec{p} + \vec{q} \quad \vec{q} \\ d, \nu \quad f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} = \frac{3ig^2 C_2(G) \delta^{ab} T^{d-4}}{8} \Gamma(d-4) \zeta(d-4) \times \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \left[\frac{q^2 (q^\sigma \eta^{\gamma\lambda} - q^\lambda \eta^{\gamma\sigma})}{(P \cdot q)^2} \right] \quad (8.63)$$

Este diagrama possui uma dependência logarítmica na temperatura em $d = 4$ que pode ser comparado ao valor obtido na teoria à temperatura zero (5.41).

Usando o resultado da integral (F.32), reescrevemos (8.63), da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{c} c, \mu \quad e, \alpha \\ a, \lambda \sigma \quad b, \gamma \\ \vec{q} \quad \vec{p} + \vec{q} \quad \vec{q} \\ d, \nu \quad f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} = \frac{3ig^2 C_2(G) \delta^{ab} T^{d-4}}{2^d \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d-2}{2})} \Gamma(d-4) \zeta(d-4) (q^\sigma \eta^{\gamma\lambda} - q^\lambda \eta^{\gamma\sigma}) \quad (8.64)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável $d \rightarrow 4 - 2\varepsilon$ e expandindo em ε obtemos a seguinte integral:

$$\left[\begin{array}{c} c, \mu \quad e, \alpha \\ a, \lambda \sigma \quad b, \gamma \\ \vec{q} \quad \vec{p} + \vec{q} \quad \vec{q} \\ d, \nu \quad f, \beta \end{array} \right]_{\text{Térmico}} = \frac{3ig^2 C_2(G) \delta^{ab} (q^\sigma \eta^{\gamma\lambda} - q^\lambda \eta^{\gamma\sigma})}{64\pi^2 \varepsilon} \quad (8.65)$$

Comparando com o resultado à temperatura zero (5.41), que no gauge de Feynman é dado por:

$$\begin{array}{c} c, \mu \quad e, \alpha \\ a, \lambda \sigma \quad b, \gamma \\ \vec{q} \quad \vec{p} + \vec{q} \quad \vec{q} \\ d, \nu \quad f, \beta \end{array} = - \frac{3g^2 C_2(G) \delta^{ab} (q^\sigma \eta^{\lambda\gamma} - q^\lambda \eta^{\gamma\sigma})}{64\pi^2 \varepsilon} \quad (8.66)$$

vemos que a divergência logarítmica do diagrama térmico obtido é idêntico à divergência do digrama à temperatura zero.

Já diagrama VI térmico será igual ao obtido em (8.48) no formalismo de primeira ordem.

8.4 Cosiderações sobre os diagramas de 1-loop térmicos nos diferentes formalismos

Verificamos que a auto-energia térmica dos glúons no limite de HTL são idênticas no formalismo de segunda ordem e nos formalismos de primeira ordem. Observamos ainda que as auto-energias térmicas dos glúons são transversais no gauge de Feynman e fazem parte do termo dominante da ação efetiva térmica que é invariante de gauge.

Além disso vemos que a dependência na temperatura das auto-energias térmicas dos glúons é da ordem de T^{d-2} , assim em $d = 4$ as auto-energias apresentam dependência dominante proporcional à T^2 .

Outro fato que percebemos no limite de altas temperaturas é que os diagramas térmicos IV, V e VI presentes nos formalismos de primeira ordem apresentam dependência logarítmica na temperatura em $d = 4$, sendo subdominante em relação aos termos da ação efetiva térmica que possuem contribuições proporcionais à T^2 .

Devido esta dependência logarítmica na temperatura estes diagramas acabam apresentando uma ligação com os diagramas IV, V e VI da teoria à temperatura zero na medida que estas divergências logarítmicas são semelhantes às divergências ultravioletas encontradas à temperatura zero.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal neste trabalho foi o de abordar as teorias de gauge em formalismos de primeira ordem, devido a simplificação que estes formalismos provocam nos vértices de interação da teoria. Para desenvolver este estudo foi escolhido a teoria de Yang-Mills como base para verificar a equivalência destes formalismos com o formalismo usual, além de verificar efeitos térmicos que a teoria apresenta sob à perspectiva destes formalismos de primeira ordem.

Desta forma, após ter realizado uma revisão das teorias de gauge a partir de transformações locais e ter desenvolvido a quantização da teoria de Yang-Mills no formalismo usual, foram utilizados os formalismos de primeira ordem na teoria de Yang-Mills eliminando assim o vértice quártico presente no formalismo de segunda ordem e no caso do formalismo de primeira ordem não modificado, acrescentando propagadores mistos à teoria.

Através das equações de Euler-Lagrange foi verificado a equivalência clássica entre o formalismo de segunda ordem da teoria de Yang-Mills com o formalismo de primeira ordem e com o de primeira ordem modificado, conforme respectivamente os valores de (3.36) e (3.51), já a equivalência quântica foi verificada em (3.44) e (3.57).

Porém como não foram consideradas as fontes nas funções de Greens utilizadas para obter a equivalência quântica entre os formalismos, foram estudados os diagramas de 1-loop em cada um dos formalismos, tendo em vista verificar de uma forma mais geral esta compatibilidade, no caso da auto-energia dos glúons presente em todos os formalismos verificamos que no formalismo de segunda ordem, cujo resultado é dado por (5.13) é o mesmo obtido para a auto-energia dos glúons no formalismo de primeira ordem modificado, isso é facilmente verificado dado que nestes formalismos há apenas a contribuição dos diagramas I e II que são os idênticos em ambos os formalismos.

No caso do formalismo de primeira ordem o valor obtido para a auto-energia dos glúons é dada por (5.20), apresentando a mesma estrutura transversal que aparece na auto-energia dos glúons no formalismo de segunda ordem, diferindo apenas por um fator multiplicativo. Porém ao

utilizar a auto-energia dos glúons para calcular o propagador completo dos glúons como mostra a referência [29], os propagadores são idênticos nos diferentes formalismos, mostrando então a compatibilidade quântica dos formalismos neste cálculo.

Com estes resultados obtidos optamos por verificar qual seria o comportamento da teoria de Yang-Mills nestes formalismos de primeira ordem no limite de altas temperaturas, assim após uma breve revisão da teoria quântica de campos à temperatura finita, introduzindo o formalismo de Matsubara, foi verificado que a parte dependente da temperatura das funções de Green pode ser descrita em termos de amplitudes frontais (7.20).

Analisamos os diagramas de 1-loop da teoria no limite de altas temperaturas (região de HTL; (7.21)), caracterizado por momentos internos da ordem da temperatura, enquanto que os momentos externos são bem menores comparados aos internos.

Na região de HTL verificamos que as contribuições principais são da ordem de T^2 e as contribuições subdominantes são da ordem de $\ln(T)$. Assim verificamos que as auto-energias dos glúons são idênticas nos diferentes formalismos (8.16), cuja a dependência dominante na temperatura em quatro dimensões é proporcional à T^2 , além disso elas apresentam a propriedade de transversalidade no gauge de Feynman e fazem parte do termo dominante da ação efetiva térmica (8.17) que é invariante de gauge.

Outro fato que notamos no limite de altas temperaturas é que os diagramas térmicos IV, V e VI presentes no formalismo de primeira ordem, dados respectivamente por: (8.34), (8.43) e (8.52), assim como os diagramas IV (8.34), V(8.65) e VI (8.43), presentes no formalismo de primeira ordem modificado, apresentam em quatro dimensões dependência logarítmica na temperatura o que faz com que eles não alterem o termo dominante da ação efetiva térmica. Além disso estes diagramas estão relacionados com os diagramas do formalismo de primeira ordem IV (8.35), V (8.44) e VI (8.53), assim como os do formalismo de primeira ordem modificado IV (8.35), V (8.66) e VI (8.53) da teoria à temperatura zero, devido essas contribuições logarítmicas possuírem mesma estrutura das contribuições advindas dos termos de pólos ultravioletas da teoria à temperatura zero.

Consequentemente ao considerar o limite de altas temperaturas verificamos que os resultados obtidos nos formalismos de primeira ordem são consistentes com os resultados já conhecidos da teoria de Yang-Mills nesta região no formalismo de segunda ordem, mostrando que os formalismos de primeira ordem podem ser utilizados no lugar do formalismo de segunda ordem para cálculos físicos. Este tipo de formalismo de primeira ordem abordado neste trabalho pode ser utilizado para estudar outras teorias de gauges, sendo de grande valia devido simplificações que ocasionam em relação aos formalismos usuais.

Como por exemplo podemos citar a utilização do formalismo de primeira ordem na teoria da gravitação, de fato o formalismo de segunda ordem da ação de Einstein-Hilbert, que descreve a teoria da gravitação, apresenta infinitos vértices de interação e com a utilização do

formalismo de primeira ordem, que no caso da gravitação é conhecido como formalismo de Palatini, estes vértices infinitos são simplificados há apenas uma quantidade finita de vértices tri-lineares. Sendo portanto este um campo de estudo interessantíssimo à ser abordado em futuras pesquisas.

REGRAS DE FEYNMAN

Para obtermos as regras de Feynman utilizamos a ação efetiva como funcional gerador das funções 1PI, vide [41].

Deste modo considerando o funcional gerador das funções de Green conexas $W[J]$ escrito em função do funcional gerador das funções de Green conexas e desconexas $Z[J]$ da seguinte forma:

$$W[J] = i \ln Z[J] \quad (\text{A.1})$$

onde o funcional gerador $Z[J]$ para uma teoria genérica é dado por:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int D\phi e^{iS[\phi] + i \int d^4x J(x)\phi(x)} \quad (\text{A.2})$$

Considerando a derivada segunda de $W[J]$ em relação à J , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} &= -\frac{i}{Z} \int D\phi e^{i[S[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x)]} \phi(x)\phi(y) + \frac{i}{Z^2} \int D\phi e^{i[S[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x)]} \phi(x) \\ &\times \int D\phi e^{i[S[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x)]} \phi(y) = -i[\langle \phi(x)\phi(y) \rangle - \langle \phi(x) \rangle \langle \phi(y) \rangle] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Como o termo $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle$ é expresso pelos diagramas:

$$\text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \quad (\text{A.4})$$

o segundo diagrama desconectado de (A.4) cancela o segundo termo da equação (A.3), assim apenas o diagrama conectado de $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle$ contribui no resultado da derivada segunda de $W[J]$, desta forma temos:

$$\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} = -i \langle \phi(x)\phi(y) \rangle_{con} \quad (\text{A.5})$$

Este cálculo pode ser estendido para derivadas de ordem n de $W[J]$, pois sempre haverá diagramas desconexos que serão cancelados pelos outros termos da derivada, logo a fórmula

geral é escrita da seguinte forma:

$$\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} = (i)^{n+1} \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle_{con} \quad (\text{A.6})$$

Devido estes resultados verificamos o motivo para que $W[J]$ ser conhecido como funcional gerador das funções de correlação conectadas.

Se definimos o campo clássico como sendo o valor esperado do vácuo:

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle \phi(x) \rangle \quad (\text{A.7})$$

e escrevendo a ação efetiva como sendo a transformada funcional de Legendre de $W[J]$:

$$\Gamma[\phi_c] = -W[J] - \int d^4x J(x) \phi_c(x) \quad (\text{A.8})$$

de forma que sua derivada em relação ao campo clássico resulta em:

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = -J(x) \quad (\text{A.9})$$

já ao considerarmos a derivada deste resultado em relação à J , obtemos:

$$\frac{\delta}{\delta J(y)} \frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = -\delta(x-y) \quad (\text{A.10})$$

utilizando a regra da cadeia, podemos reescrever este resultado da seguinte forma:

$$\delta(x-y) = - \int d^4z \frac{\delta \phi_c(z)}{\delta J(y)} \frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(z) \delta \phi_c(x)} = \int d^4z \frac{\delta^2 W}{\delta J(y) \delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(z) \delta \phi_c(x)} \quad (\text{A.11})$$

Obtendo desta forma a seguinte relação:

$$\left(\frac{\delta^2 W}{\delta J \delta J} \right) = \left(\frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c \delta \phi_c} \right)^{-1} \equiv -iD^{-1}(x-y) \quad (\text{A.12})$$

onde o propagador no espaço dos momentos é dado por:

$$D(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{D}(p) e^{i(x-y)p} \quad (\text{A.13})$$

De forma semelhante considerando a relação entre a derivada terceira de $\Gamma[\phi_c]$ e a de $W[J]$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x) \delta J(y) \delta J(z)} &= \frac{\delta}{\delta J(z)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)} \right)^{-1} = \int d^4w D(z-w) \frac{\delta}{\delta \phi_c(w)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c \delta \phi_c} \right)^{-1} = \\ &= \int d^4w (-D(z-w)) \int d^4u \int d^4v (-iD(x-u)) \frac{\delta^3 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(u) \delta \phi_c(v) \delta \phi_c(w)} (-iD(y-v)) = \\ &= i \int d^4w d^4u d^4v D(x-u) D(y-v) D(z-w) \frac{\delta^3 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(u) \delta \phi_c(v) \delta \phi_c(w)} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

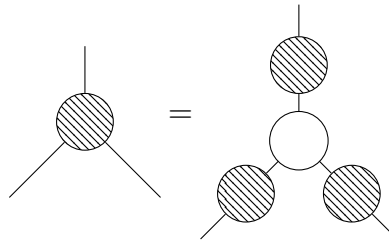
onde usamos a seguinte propriedade da diferenciação de matrizes inversas:

$$\frac{\delta}{\delta\phi_c} \Gamma^{-1}(\phi_c) = -\Gamma^{-1} \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_c} \Gamma^{-1} \quad (\text{A.15})$$

Segundo a fórmula (A.6) a derivada terceira de $W[J]$ é dada por:

$$\frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x) \delta J(y) \delta J(z)} = \langle \phi(x) \phi(y) \phi(z) \rangle_{con} \quad (\text{A.16})$$

A relação (A.14) diz que a função conectada de três pontos (A.16) pode ser expressa diagramamente extraindo os propagadores, conforme a seguinte exemplificação:



$$\quad \quad \quad (\text{A.17})$$

onde cada círculo pintado representa a soma dos diagramas conectados, enquanto o círculo branco representa a derivada terceira da ação efetiva $i\Gamma[\phi_c]$. Logo percebemos que a derivada terceira de $i\Gamma[\phi_c]$ é a função de correlação conectada com todos os três propagadores removidos, conhecida como função de três pontos de 1PI:

$$\frac{\delta^3 \Gamma[\phi_c]}{\delta\phi(x) \delta\phi(y) \delta\phi(z)} = -i \langle \phi_c(x) \phi_c(y) \phi_c(z) \rangle_{1PI} \quad (\text{A.18})$$

extendendo para derivadas de ordem n de $\Gamma[\phi_c]$, obtemos a seguinte fórmula geral para as funções de n -pontos de 1PI:

$$\frac{\delta^n \Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x_1) \dots \delta\phi_c(x_n)} = -i \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle_{1PI} \quad (\text{A.19})$$

Agora vejamos a relação da ação efetiva com a ação clássica conforme [42], utilizando as definições de $W[J]$ dada em (A.1), de $Z[J]$ dada em (A.2) e $\Gamma[\phi_c]$ dada em (A.8) obtemos a seguinte relação:

$$e^{\frac{i}{\hbar} \Gamma[\phi_c]} = \int D\phi \ e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi] + \frac{i}{\hbar} \int d^4x J(x) (\phi(x) - \phi_c(x))} \quad (\text{A.20})$$

onde \hbar foi adicionada por questões dimensionais. Utilizando (A.9) temos:

$$e^{\frac{i}{\hbar} \Gamma[\phi_c]} = \int D\phi \ e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi] - \frac{i}{\hbar} \int d^4x \frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} (\phi(x) - \phi_c(x))} \quad (\text{A.21})$$

Fazendo a seguinte mudança de variável $\phi \rightarrow \phi + \phi_c$, obtemos:

$$e^{\frac{i}{\hbar} \Gamma[\phi_c]} = \int D\phi \ e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi + \phi_c] - \frac{i}{\hbar} \int d^4x \frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} \phi(x)} \quad (\text{A.22})$$

Ao expandir $S[\phi + \phi_c]$ em série de Taylor dos campos ϕ_c :

$$S[\phi_c + \phi] = S[\phi] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n S_n(x_1, \dots, x_n | \phi_c) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \quad (\text{A.23})$$

onde:

$$S_n(x_1, \dots, x_n | \phi_c) = \frac{\delta^n S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x_1) \dots \delta \phi_c(x_n)} \quad (\text{A.24})$$

Logo reescrevemos (A.22) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}(\Gamma[\phi_c] - S[\phi_c])} &= \int D\phi e^{\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \frac{\delta^2 S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x_1) \delta \phi_c(x_2)} \phi(x_1) \phi(x_2) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \frac{\delta^n S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x_1) \dots \delta \phi_c(x_n)} \phi(x_1) \dots \phi(x_n)} \\ &\quad \times e^{-\int d^4x \frac{i}{2} \left(\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} - \frac{\delta S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} \right) \phi(x)} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Considerando a expansão de $\Gamma[\phi_c]$ em \hbar :

$$\Gamma[\phi_c] = S[\phi_c] + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \Gamma^{(n)}[\phi_c] \quad (\text{A.26})$$

e substituindo $\phi \rightarrow \hbar^{\frac{1}{2}} \phi$, obtemos:

$$\begin{aligned} e^{i \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^{n-1} \Gamma^{(n)}[\phi_c]} &= \int D\phi e^{i \left(\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \frac{\delta^2 S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x_1) \delta \phi_c(x_2)} \phi(x_1) \phi(x_2) \right.} \\ &\quad \left. \times e^{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\hbar^{\frac{n}{2}-1}}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \frac{\delta^n S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x_1) \dots \delta \phi_c(x_n)} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) - \int d^4x \hbar^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} - \frac{\delta S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} \right) \phi(x)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

O termo $\frac{\delta \Gamma^{(n)}}{\delta \phi_c} \phi$ terá contribuições das partículas redutíveis que cancelam os diagramas redutíveis que surgem dos outros termos, sobrando apenas a contribuição dos diagramas 1PI. Consequentemente, o primeiro termo da integral determina o propagador da teoria, enquanto que as outras derivadas resultaram nos vértices de interação da teoria.

Deste modo verificamos que as derivadas da ação efetiva coincide com as derivadas da ação clássica, logo podemos utilizar a ação clássica como funcional gerador. Assim a partir da equação (A.12), obtemos a seguinte derivada da ação clássica que será utilizada para obter os propagadores da teoria:

$$-\frac{i\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} = D^{-1}(x-y) \quad (\text{A.28})$$

Considerando a equação (A.19) em que a ação efetiva gera as funções de Green 1PI, conseguimos obter as regras de Feynman para os vértices da teoria através da seguinte relação:

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle_{1PI} \equiv \frac{i\delta^n S[\phi]}{\delta \phi(x_1) \dots \delta \phi(x_n)} \quad (\text{A.29})$$

que pode ser reescrita utilizando a notação compacta, da seguinte forma:

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle_{1PI} \equiv \frac{i\delta^n S[\phi]}{\delta \phi_i \delta \phi_j \delta \phi_k \dots} = V_{ijk\dots} + \text{permutações de } ijk\dots \quad (\text{A.30})$$

nesta notação compacta consideramos $iS_\phi = V_{ijk\dots} \phi_i \phi_j \phi_k \dots$ e os índices i, j, k, \dots como sendo coleções dos índices de cor, dos índices de Lorentz e dos momentos.

INVERSÃO DE MATRIZ

Iremos realizar a inversão das matrizes dos termos bilineares (3.38) e (4.29) da lagrangiana livre de Yang-Mills no formalismo de primeira ordem. Para realizar a inversão utilizamos o software Wolfram Mathematica 11 e o pacote FeynCalc.

Primeiramente foram definidos a métrica, o quadrivetor e o produto escalar que foram depois utilizados ao longo dos cálculos, respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{mt}[\mu_ , \nu_] &= \text{MetricTensor}[\mu, \nu, \text{Dimension} \rightarrow D] \\ \text{fv}[\mathbf{p}_ , \mu_] &= \text{FourVector}[p, \mu] \\ \text{sp}[\mathbf{p}_ , \mathbf{q}_] &= \text{ScalarProduct}[p, q] \end{aligned}$$

Para inverter as matrizes utilizamos a seguinte relação encontrada em [20]:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} X^{-1} & -X^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CX^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CX^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

onde $X = A - BD^{-1}C$.

No caso da matriz (3.38), temos:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\partial^\rho \eta^{\gamma\mu} - \partial^\gamma \eta^{\rho\mu}) \\ -\frac{1}{2}(\partial^\lambda \eta^{\sigma\nu} - \partial^\sigma \eta^{\lambda\nu}) & \frac{1}{4}(\eta^{\lambda\rho} \eta^{\sigma\gamma} - \eta^{\lambda\gamma} \eta^{\sigma\rho}) \end{pmatrix}^{-1} \quad (\text{B.2})$$

Para calcular os termos da matriz inversa, determinaremos a inversa de D e posteriormente a inversa de X.

Definindo D como:

$$\begin{aligned} D[\lambda_ , \sigma_ , \rho_ , \gamma_] &= 1/4(\text{mt}[\lambda, \rho]\text{mt}[\sigma, \gamma] - \text{mt}[\lambda, \gamma]\text{mt}[\sigma, \rho]) \\ &\frac{1}{4} \left(g^{\gamma\sigma} g^{\lambda\rho} - g^{\gamma\lambda} g^{\rho\sigma} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Definimos a componente da base tensorial que a inversa de D deve apresentar da seguinte forma:

$$\text{ten1}[\lambda_-, \sigma_-, \rho_-, \gamma_-] = \text{mt}[\lambda, \rho] \text{mt}[\sigma, \gamma] - \text{mt}[\lambda, \gamma] \text{mt}[\sigma, \rho]$$

$$g^{\gamma\sigma} g^{\lambda\rho} - g^{\gamma\lambda} g^{\rho\sigma}$$
(B.4)

Escrevendo a inversa de D em termos da componente da base tensorial:

$$\text{tensD}[\lambda_-, \sigma_-, \rho_-, \gamma_-] = C_1 \text{ten1}[\lambda, \sigma, \rho, \gamma]$$

$$C_1 (g^{\gamma\sigma} g^{\lambda\rho} - g^{\gamma\lambda} g^{\rho\sigma})$$
(B.5)

Definindo a equação identidade resultante do produto de D com sua inversa:

$$\text{eqD}[\lambda_-, \sigma_-, \rho_-, \gamma_-] = \text{Contract}[D[\lambda, \sigma, \alpha, \beta] \text{tensD}[\alpha, \beta, \rho, \gamma]] - 1/2(\text{mt}[\lambda, \rho] \text{mt}[\sigma, \gamma] - \text{mt}[\lambda, \gamma] \text{mt}[\sigma, \rho])$$

$$\frac{1}{2} C_1 g^{\gamma\sigma} g^{\lambda\rho} - \frac{1}{2} C_1 g^{\gamma\lambda} g^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} (g^{\gamma\lambda} g^{\rho\sigma} - g^{\gamma\sigma} g^{\lambda\rho})$$
(B.6)

Determinando o coeficiente C_1 de (B.5):

$$\text{solD} = \text{Solve}[\{\text{Contract}[\text{eqD}[\lambda, \sigma, \alpha, \beta] \text{ten1}[\alpha, \beta, \rho, \gamma]] == 0\}, \{C_1\}] [[1]]$$

$$\{C_1 \rightarrow 1\}$$
(B.7)

Obtendo o valor da inversa de D:

$$\text{Dinv}[\lambda_-, \sigma_-, \rho_-, \gamma_-] = \text{tensD}[\lambda, \sigma, \rho, \gamma] / \text{solD}$$

$$g^{\gamma\sigma} g^{\lambda\rho} - g^{\gamma\lambda} g^{\rho\sigma}$$
(B.8)

Com a inversa de D determinada podemos calcular X e sua inversa, primeiro definimos A, B e C, da seguinte forma:

$$A_C = 0$$

$$0$$
(B.9)

$$B[\rho_-, \gamma_-, \mu_-] = I/2(\text{fv}[p, \rho] \text{mt}[\gamma, \mu] - \text{fv}[p, \gamma] \text{mt}[\rho, \mu])$$

$$\frac{1}{2} i (\bar{p}^\rho g^{\gamma\mu} - \bar{p}^\gamma g^{\mu\rho})$$
(B.10)

$$C[\lambda_-, \sigma_-, \nu_-] = -I/2(\text{fv}[p, \lambda] \text{mt}[\sigma, \nu] - \text{fv}[p, \sigma] \text{mt}[\lambda, \nu])$$

$$-\frac{1}{2} i (\bar{p}^\lambda g^{\nu\sigma} - \bar{p}^\sigma g^{\lambda\nu})$$
(B.11)

Utilizamos $\partial = ip$ para definir os termos no espaço dos momentos. Logo X foi calculado desta forma:

$$X_C[\mu_-, \nu_-] = A_C - \text{Contract}[B[\rho, \gamma, \mu] \text{ Dinv}[\lambda, \sigma, \rho, \gamma] C[\lambda, \sigma, \nu]] \quad (\text{B.12})$$

$$\{\bar{p}^2 g^{\mu\nu} - \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu\}$$

Definindo a primeira componente da base tensorial que a inversa de X deve ter:

$$\text{ten1X}[\mu_-, \nu_-] = \text{mt}[\mu, \nu] \quad (\text{B.13})$$

$$g^{\mu\nu}$$

Definindo a segunda componentes da base tensorial que a inversa de X deve ter:

$$\text{ten2X}[\mu_-, \nu_-] = \text{fv}[p, \mu] \text{fv}[p, \nu] / \text{sp}[p, p] \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\bar{p}^\mu \bar{p}^\nu}{\bar{p}^2}$$

Escrevemos a inversa de X em termos das componentes da base:

$$\text{tenX}[\mu_-, \nu_-] = C_1 \text{ten1X}[\mu, \nu] + C_2 \text{ten2X}[\mu, \nu] \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{C_2 \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu}{\bar{p}^2} + C_1 g^{\mu\nu}$$

Definindo a equação identidade resultante do produto de X com sua inversa:

$$\text{eqX}_C[\mu_-, \nu_-] = \text{Contract}[X_C[\mu, \alpha] \text{tenX}[\alpha, \nu]] - \text{mt}[\mu, \nu] \quad (\text{B.16})$$

$$\{C_1 \bar{p}^2 g^{\mu\nu} - C_1 \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu - g^{\mu\nu}\}$$

Determinando o coeficiente C_1 de (B.15):

$$\text{solX}_C = \text{Solve}[\text{Contract}[\text{eqX}_C[\mu, \alpha] \text{ten1X}[\alpha, \nu]] == 0, \text{Contract}[\text{eqX}_C[\mu, \alpha] \text{ten2X}[\alpha, \nu]] == 0, \{C_1\}] \quad (\text{B.17})$$

{ }

Logo X não possui inversa e a matriz (3.38) não é inversível.

No caso da matriz (4.29), temos:

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu & \frac{1}{2} (\partial^\rho \eta^{\gamma\mu} - \partial^\gamma \eta^{\rho\mu}) \\ -\frac{1}{2} (\partial^\lambda \eta^{\sigma\nu} - \partial^\sigma \eta^{\lambda\nu}) & \frac{1}{4} (\eta^{\lambda\rho} \eta^{\sigma\gamma} - \eta^{\lambda\gamma} \eta^{\sigma\rho}) \end{array} \right)^{-1} \quad (\text{B.18})$$

Como o termo que representa D de (B.18) é o mesmo de (B.2) temos o mesmo inverso do termo D obtido em B.8. Com este valor podemos calcular X e sua inversa, primeiro definimos

o termo A que é o termo que difere do caso não quantizado, da seguinte forma:

$$A_Q[\mu_-, \nu_-] = -1/(\xi)fv[p, \mu]fv[p, \nu] - \frac{\bar{p}^\mu \bar{p}^\nu}{\xi} \quad (B.19)$$

Utilizamos $\partial = ip$ para definir o termo no espaço dos momentos. Definindo X da matriz bilinear quantizada da seguinte forma:

$$X_Q[\mu_-, \nu_-] = A_Q[\mu, \nu] - \text{Contract}[B[\rho, \gamma, \mu] \text{ Dinv}[\lambda, \sigma, \rho, \gamma] C[\lambda, \sigma, \nu]] - \bar{p}^2 g^{\mu\nu} - \frac{\bar{p}^\mu \bar{p}^\nu}{\xi} + \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu \quad (B.20)$$

A equação identidade resultante do produto de X com sua inversa é dada da seguinte forma:

$$eqX_Q[\mu_-, \nu_-] = \text{Contract}[X_Q[\mu, \alpha] \text{ten}X[\alpha, \nu]] - \text{mt}[\mu, \nu] - C_1 \bar{p}^2 g^{\mu\nu} - \frac{C_1 \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu}{\xi} + C_1 \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu - \frac{C_2 \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu}{\xi} - g^{\mu\nu} \quad (B.21)$$

A solução dos coeficientes C_1 e C_2 de (B.15) será:

$$\text{sol}X_Q = \text{Solve}[\{\text{Contract}[eqX_Q[\mu, \alpha] \text{ten}1X[\alpha, \nu]] == 0, \text{Contract}[eqX_Q[\mu, \alpha] \text{ten}2X[\alpha, \nu]] == 0\}, \{C_1, C_2\}] [[1]] \quad (B.22)$$

$$\left\{ C_1 \rightarrow -\frac{1}{\bar{p}^2}, C_2 \rightarrow -\frac{\xi-1}{\bar{p}^2} \right\}$$

Sendo a inversa de X:

$$X_{\text{inv}}[\mu_-, \nu_-] = \text{ten}X[\mu, \nu] / \text{sol}X \quad (B.23)$$

$$\left(-\frac{g^{\mu\nu}}{\bar{p}^2} - \frac{(\xi-1)\bar{p}^\mu \bar{p}^\nu}{\bar{p}^4} \right)$$

O termo $-X^{-1}BD^{-1}$ da inversa será dado por:

$$\text{Contract}[-X_{\text{inv}}[\mu, \nu] B[\rho, \gamma, \mu] \text{ Dinv}[\lambda, \sigma, \rho, \gamma]] \quad (B.24)$$

$$\frac{i}{\bar{p}^2} (\bar{p}^\lambda g^{\nu\sigma} - \bar{p}^\sigma g^{\lambda\nu})$$

O seguinte termo da inversa $-D^{-1}CX^{-1}$ será:

$$\text{Contract}[-\text{Dinv}[\lambda, \sigma, \rho, \gamma] C[\lambda, \sigma, \nu] X_{\text{inv}}[\mu, \nu]] \quad (B.25)$$

$$\frac{i}{\bar{p}^2} (\bar{p}^\gamma g^{\mu\rho} - \bar{p}^\rho g^{\gamma\mu})$$

O seguinte termo da inversa $D^{-1} + D^{-1}CX^{-1}BD^{-1}$ será:

$$\text{Contract}[\text{Contract}[\text{Dinv}[\alpha_1, \beta_1, \rho, \gamma] C[\alpha_1, \beta_1, \nu] X_{\text{inv}}[\mu, \nu]] B[\alpha_2, \beta_2, \mu] \text{ Dinv}[\lambda, \sigma, \alpha_2, \beta_2]] \quad (B.26)$$

$$\frac{\bar{p}^\rho \bar{p}^\sigma g^{\lambda\gamma}}{\bar{p}^2} - \frac{\bar{p}^\lambda \bar{p}^\rho g^{\gamma\sigma}}{\bar{p}^2} - \frac{\bar{p}^\gamma \bar{p}^\sigma g^{\lambda\rho}}{\bar{p}^2} + \frac{\bar{p}^\gamma \bar{p}^\lambda g^{\rho\sigma}}{\bar{p}^2} + g^{\gamma\lambda} (-g^{\rho\sigma}) + g^{\gamma\sigma} g^{\lambda\rho}$$

Reajustando os termos temos:

$$\begin{aligned} D^{-1} + D^{-1}CX^{-1}BD^{-1} &= g^{\lambda\rho} g^{\sigma\gamma} - g^{\lambda\gamma} g^{\sigma\rho} + \frac{1}{\bar{p}^2} (\bar{p}^\lambda \bar{p}^\gamma g^{\sigma\rho} + \bar{p}^\sigma \bar{p}^\rho g^{\lambda\gamma} - \bar{p}^\lambda \bar{p}^\rho g^{\sigma\gamma} - \bar{p}^\sigma \bar{p}^\gamma g^{\lambda\rho}) = \\ &2(I^{\lambda\sigma,\rho\gamma} - \frac{1}{\bar{p}^2} L^{\lambda\sigma,\rho\gamma}(p)) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

onde os termos I e L são definidos como sendo:

$$\begin{aligned} I^{\lambda\sigma,\rho\gamma} &= \frac{1}{2} (g^{\lambda\rho} g^{\sigma\gamma} - g^{\lambda\gamma} g^{\sigma\rho}) \\ L^{\lambda\sigma,\rho\gamma}(p) &= \frac{1}{2} (\bar{p}^\lambda \bar{p}^\rho g^{\sigma\gamma} + \bar{p}^\sigma \bar{p}^\gamma \eta^{\lambda\rho} - \bar{p}^\lambda \bar{p}^\gamma \eta^{\sigma\rho} - \bar{p}^\sigma \bar{p}^\rho \eta^{\lambda\gamma}) \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Desta forma, vemos que a matriz inversa quantizada (B.18) do formalismo de primeira ordem é da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{g^{\mu\nu}}{\bar{p}^2} - \frac{(\xi-1)\bar{p}^\mu \bar{p}^\nu}{\bar{p}^4} \right) & \frac{i}{\bar{p}^2} (\bar{p}^\lambda g^{\nu\sigma} - \bar{p}^\sigma g^{\lambda\nu}) \\ \frac{i}{\bar{p}^2} (\bar{p}^\gamma g^{\mu\rho} - \bar{p}^\rho g^{\gamma\mu}) & 2(I^{\lambda\sigma,\rho\gamma} - \frac{1}{\bar{p}^2} L^{\lambda\sigma,\rho\gamma}(p)) \end{pmatrix} \quad (\text{B.29})$$

A partir dela é possível obter os propagadores no respectivo formalismo.

REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL

Para o cálculo dos diagramas de Feynman de 1-loop da teoria de Yang-Mills nos formalismos de primeira ordem e no formalismo usual tratado no capítulo (5), vimos que dentre os métodos de regularização usamos a regularização dimensional, vejamos a seguir um pouco mais sobre esta técnica de regularização.

A regularização dimensional é um método de regularização desenvolvido por Bollini e Giambiagi [43] visando contornar o problema dos infinitos que surgem nos cálculos envolvendo diagramas de Feynman. Na regularização dimensional redefinimos a dimensão da integral divergente [44], fazendo com que ela fique finita e torne-se convergente.

Assim na regularização dimensional a integral 4-dimensional é substituída por uma integral d-dimensional, dizemos que esta nova definição é uma continuação analítica da anterior, sendo que o resultado final da integração é válido inclusive no limite em que $d \rightarrow 4$. Com esta substituição na dimensão a medida da integral é escrita como sendo $\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}$, o vetor d-momento é dado por $p^\mu = (p^0, p^1, \dots, p^{d-1})$ e a contração da métrica será $\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = d$.

Vejamos como funciona a regularização dimensional no caso de diagramas de Feynman de 1-loop que pode ser escrito em d-dimensão da seguinte forma:

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\mathcal{N}(p_i, m_i, q_j)}{(p_1^2 - m_1^2)(p_2^2 - m_2^2)\dots(p_n^2 - m_n^2)} \quad (\text{C.1})$$

onde n é o número das linhas internas do loop e p_i é o momento da partícula de massa m_i propagando na i -enésima linha. Devido a conservação de momento nos vértices e em todo o diagrama temos que apenas um momento será independente, denotamos este por p , já q_j representa os momentos externos e \mathcal{N} uma função dos momentos internos e externos que é determinada de acordo com as regras de Feynman para o diagrama estudado.

Para calcular integrais do tipo (C.1) usamos a parametrização de Feynman para reescrever

o denominador do integrando conforme a seguinte regra:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_n \frac{(n-1)! \delta(1-x_1-\dots-x_n)}{(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n)^n} \quad (\text{C.2})$$

onde $A = p_i^2 + m_i^2$.

Vejamus como exemplo a parametrização de Feynman no caso em que o denominador do integrando possui dependência de dois momentos distintos:

$$\frac{1}{A_1 A_2} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \frac{\delta(1-x_1-x_2)}{(x_1 A_1 + x_2 A_2)^2} = \int_0^1 dx_1 \frac{1}{(x_1 A_1 + (1-x_1) A_2)^2} \quad (\text{C.3})$$

Para generalizar a expressão anterior para potências de A_1 e A_2 , realizamos a derivada de (C.3) algumas vezes e obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1^\alpha A_2^\beta} &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx_1 dx_2 \frac{\delta(1-x_1-x_2) x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1}}{(x_1 A_1 + x_2 A_2)^{\alpha+\beta}} = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx_1 \frac{x_1^{\alpha-1} (1-x_1)^{\beta-1}}{(x_1 A_1 + (1-x_1) A_2)^{\alpha+\beta}} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Calculemos o caso particular da integral (C.1) em que $\mathcal{N} = 1$, ou seja, que não há termos com algum índice tensorial no integrando, este tipo de integral é denominada de integral escalar e é dada da seguinte forma:

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p_1^2 - m_1^2)(p_2^2 - m_2^2) \dots (p_n^2 - m_n^2)} \quad (\text{C.5})$$

Conforme foi dito anteriormente os momentos p_i devido a conservação dos momentos podem ser expressos em termos do momento independente p e dos momentos externos q_j . Logo podemos reescrever a integral da seguinte forma:

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 - m_1^2)((p+q_1)^2 - m_2^2) \dots ((p+q_{n-1})^2 - m_n^2)} \quad (\text{C.6})$$

Além disso como a integral possui invariância translacional é possível realizarmos um shift no momento p da seguinte forma $p \rightarrow P = p + l$, onde l é uma constante escolhida visando com que o denominador não dependa de qualquer combinação linear na variável de integração, definida da seguinte forma:

$$l = - \sum_{j=1}^n x_{j+1} q_j \quad (\text{C.7})$$

Assim considerando a parametrização de Feynman e o shift, (C.6) é reescrita assim:

$$\int \frac{d^d P}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \frac{(n-1)! \delta(1-x_1-\dots-x_n)}{(P^2 - \Delta)^n} \quad (\text{C.8})$$

onde Δ não depende da variável de integração e é obtida ao completarmos o quadrado no denominador, assim Δ é definida por:

$$\Delta = \sum_{i,j} x_i x_j q_{i-1} q_{j-1} - \sum_i x_i q_{i-1}^2 + \sum_i x_i m_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j (m_i^2 + m_j^2 - (q_{i-1} - q_{j-1})^2) \quad (\text{C.9})$$

Ao integrar em P , utilizamos o fato da integral d -dimensional estar no espaço de Minkowski e que ao realizarmos uma rotação em 90 graus no plano complexo P_0 , fazemos com que a integral passe para o espaço euclidiano, com este processo chamado de rotação de Wick obtemos $P_0 = iP_{0E}$, com P_{0E} real, sendo o vetor espacial dado por $\bar{P} = \bar{P}_E$ e a derivação do vetor d -dimensional por $dP = idP_E$, já o quadrado dele é $P^2 = -P_E^2$, com $P_E^2 = P_{0E}^2 + \bar{P}_E^2$.

Assim após a rotação de Wick e considerando $\Delta > 0$ temos:

$$\int \frac{d^d P}{(2\pi)^d} \frac{1}{(P^2 - \Delta)^n} = \frac{i}{(-1)^n} \int \frac{d^d P_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(P_E^2 + \Delta)^n} \quad (\text{C.10})$$

Considerando a integração no sistema de coordenadas polares em d -dimensão temos que a unidade de integração pode ser reescrita como $d^d P = P_E^{d-1} dP_E d\Omega_D$, onde:

$$\int d\Omega_D = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \quad (\text{C.11})$$

é a área da esfera em d -dimensão, assim obtemos:

$$\int \frac{d^d P}{(2\pi)^d} \frac{1}{(P^2 - \Delta)^n} = \frac{i2\pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d (-1)^n \Gamma(\frac{d}{2})} \int dP_E \frac{P_E^{d-1}}{[P_E^2 + \Delta]^n} = \frac{i\pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d (-1)^n \Gamma(\frac{d}{2})} \int dP_E^2 \frac{(P_E^2)^{\frac{d}{2}-1}}{[P_E^2 + \Delta]^n} \quad (\text{C.12})$$

realizando a seguinte substituição $x = \frac{\Delta}{P_E^2 + \Delta}$, temos:

$$\frac{i\pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d (-1)^n \Gamma(\frac{d}{2})} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}} \int_0^1 dx x^{n-1-\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-n+1} \quad (\text{C.13})$$

usando a definição da função beta:

$$B(a, b) = \int_0^1 dx x^{a-1} (1-x)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (\text{C.14})$$

Obtemos assim que o resultado da integral em P é dado por:

$$\int \frac{d^d P}{(2\pi)^d} \frac{1}{(P^2 - \Delta)^n} = \frac{i}{(-1)^n (4\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \quad (\text{C.15})$$

Substituindo este resultado na integral (C.8), obtemos que a integral escalar resulta em:

$$\int \frac{d^d P}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \frac{(n-1)! \delta(1-x_1-\dots-x_n)}{(P^2 - \Delta)^n} = \frac{i}{(-1)^n (4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \int_0^1 dx_1 \dots dx_n (n-1)! \delta(1-\sum_i x_i) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}} \quad (\text{C.16})$$

Restando apenas as integrais em x . Este tipo de integral escalar será utilizado conforme apêndice (E) para calcular os diagramas de 1-loop da Teoria de Yang-Mills nos diferentes formalismos.

REDUÇÃO DE PASSARINO-VELTMAN

O método da regularização dimensional pode ser aplicado não somente às integrais escalares conforme visto no apêndice (C), mas pode também ser aplicado de forma semelhante para integrais cujo numerador dependa dos momentos internos, porém dado que estes cálculos são mais complicados é possível simplificar estas integrais à integrais escalares.

Para isto utilizamos o método de redução de Passarino-Veltman [26] para remover qualquer dependência da variável de integração no numerador [45].

Definimos a seguinte integral:

$$I_{\mu_1 \dots \mu_r}^n(q_1, \dots, q_{n-1}, m_0, m_1, \dots, m_{n-1}) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p_{\mu_1} \dots p_{\mu_r}}{A_0 A_1 \dots A_{n-1}} \quad (\text{D.1})$$

onde n é o número dos propagadores e r a ordem do tensor, além disso temos que o inverso do propagador é escrito da seguinte forma:

$$A_0 = p^2 - m_0^2 \quad e \quad A_i = (p + q_i)^2 - m_i^2, \quad \text{com } i = 1, \dots, r$$

Seguindo o método de Passarino-Veltman primeiro é preciso determinar quais são as componentes da base tensorial que compõe a equação tensorial da integral, para isso consideramos fatores de simetria que a base tensorial precisa apresentar. Após obtidos as componentes da bases tensorial, definimos que a integral pode ser dada por uma combinação dos elementos desta base.

Por exemplo, se considerarmos que a integral possua dependência apenas dos momentos externos q_1 e q_2 escrevemos ela como combinação destes elementos da base, obtendo assim:

$$I_\mu = C_1 q_{1\mu} + C_2 q_{2\mu} \quad (\text{D.2})$$

onde C_i são os coeficientes compostos por integrais escalares.

Para determinar os coeficientes C_i da expressão (D.2) nós contraímos essa expressão com cada um dos elementos da base, desta forma obtemos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} q_1^\mu I_\mu &= C_1 q_1^2 + C_2 q_1 \cdot q_2 \\ q_2^\mu I_\mu &= C_1 q_1 \cdot q_2 + C_2 q_2^2 \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

onde utilizamos as seguintes relações: entre o produto de pares de momentos temos $q^\mu q^\nu = \frac{\eta^{\mu\nu} q^2}{d}$; entre o produto de termos ímpares de momentos temos $q^\mu q^\nu q^\sigma = \frac{\eta^{\mu\nu} q^2 q^\sigma}{d}$, porém no caso em que tenhamos uma dependência ímpar dos momentos as integrais são nulas.

A partir das expressões de (D.3) obtemos um sistema, que pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} q_1^\mu I_\mu \\ q_2^\mu I_\mu \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} q_1^2 & q_1 \cdot q_2 \\ q_2 \cdot q_1 & q_2^2 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_{ij}} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

que é facilmente resolvido invertendo a matriz \mathcal{M}_{ij} , obtendo assim a seguinte expressão matricial para os coeficientes C_i :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{q_1^2 q_2^2 - (q_1 \cdot q_2)^2} \begin{pmatrix} q_2^2 & -q_1 \cdot q_2 \\ -q_2 \cdot q_1 & q_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^\mu I_\mu \\ q_2^\mu I_\mu \end{pmatrix} \quad (\text{D.5})$$

com os coeficientes C_i determinados substituímos o resultado na equação original (D.2).

Para reduzir as integrais de tensores de graus mais elevados, o mesmo procedimento é adotado, isto é, encontrando uma base que possua elementos que dependam apenas dos momentos externos e que satisfaça determinada simetria. Quando o grau do tensor do numerador da integral for maior ou igual à 2, além dos momentos externos a base dependerá da métrica.

Com a base determinada, a integral pode ser escrita como uma combinação dos elementos da base, em seguida é feita a projeção desta expressão em cada um dos vetores da base, determinando os coeficientes C_i que apresentam apenas integrais escalares, reescrevendo em seguida a integral original em termos dos elementos da base e das integrais escalares.

CÁLCULOS DOS DIAGRAMAS DE 1-LOOP

Iremos abordar os cálculos feitos no software Wolfram Mathematica 11, com o pacote FeynCalc, das integrais obtidas no cálculo das divergências de 1-loop em cada um dos formalismos. Primeiramente foram definidos a métrica, o quadrivetor e o produto escalar que foram depois utilizados ao longo dos cálculos, eles respectivamente foram definidos como sendo:

$$\text{mt}[\underline{\mu}, \underline{\nu}] = \text{MetricTensor}[\underline{\mu}, \underline{\nu}, \text{Dimension} \rightarrow D]$$

$$\text{fv}[\underline{p}, \underline{\mu}] = \text{FourVector}[p, \mu]$$

$$\text{sp}[\underline{p}, \underline{q}] = \text{ScalarProduct}[p, q]$$

Foi ainda definido de acordo com a parametrização de Feynman a seguinte substituição dos denominadores:

$$\text{subInt}[\underline{a}, \underline{b}] = \text{sp}[p, p]^{-a} \text{sp}[Q, Q]^{-b} \rightarrow \frac{\text{Ifo}[a, b]}{s_0} \quad (\text{E.1})$$

onde $Q = p + q$, a integral definida como Ifo dependente dos termos a e b dados de acordo com o resultado (E.3), sendo que a divisão pelo parâmetro s_0 servirá para eliminar as integrais com denominadores simples, que conforme vimos pela fórmula de Veltman (5.12) são nulas. Além dessas definições foi utilizado o resultado obtido para as integrais esclares (C.16).

Como os denominadores dos diagramas de 1-loop apresentam apenas dois momentos nos denominadores, usamos (C.4) para simplificar as integrais, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2)^a ((p+q)^2)^b} &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int \frac{d^d P}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{x^{a-1} (1-x)^{b-1}}{(P^2 - \Delta)^{a+b}} = \\ &= \frac{i}{(-1)^{a+b} (4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(a+b - \frac{d}{2})}{\Gamma(a+b)} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (q^2)^{\frac{d}{2} - a - b} \int_0^1 dx \frac{x^{a-1} (1-x)^{b-1}}{(-x(1-x))^{a+b - \frac{d}{2}}} = \\ &= \frac{i}{(-1)^{2(a+b) - \frac{d}{2}} (4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(a+b - \frac{d}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (q^2)^{\frac{d}{2} - a - b} \int_0^1 dx x^{-b + \frac{d}{2} - 1} (1-x)^{-a + \frac{d}{2} - 1} = \\ &= \frac{i}{(-1)^{2(a+b) - \frac{d}{2}} (4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(a+b - \frac{d}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (q^2)^{\frac{d}{2} - a - b} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - b) \Gamma(\frac{d}{2} - a)}{\Gamma(d - a - b)} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

onde $\Delta = -\frac{1}{2}(xy)[(q_0 - q_1)^2 + (q_1 - q_0)^2] = -xyq^2$, no caso temos $q_0 = 0$ e $q_1 = q$.

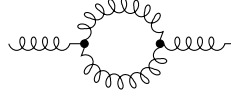
Desta forma foi definido que o resultado da integral escalar dependendo dos parâmetros a e b , onde $a+b = n$, será o seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Ifx}[\underline{a}, \underline{b}] &= I/(-1)^{(2a+2b-D/2)} \text{sp}[q, q]^{(D/2-a-b)}/(4\text{Pi})^{(D/2)} \text{Gamma}[a+b-D/2] \\ &\times \text{Gamma}[D/2-a] \text{Gamma}[D/2-b]/(\text{Gamma}[a] \text{Gamma}[b] \text{Gamma}[D-a-b]) \\ &\frac{i(-1)^{(-2a-2b+D/2)} 2^{-D} \pi^{-D/2} \Gamma(a+b-\frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2}-a) \Gamma(\frac{D}{2}-b) (\bar{q}^2)^{-a-b+\frac{D}{2}}}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(D-a-b)} \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

E.1 Diagramas de 1-loop do formalismo de segunda ordem

E.1.1 Diagrama I

Para o seguinte diagrama:



A contração dos índices da equação (5.1) é dada por:

$$\begin{aligned} \text{iso} = & 1/2 \text{Contract}[(g(\text{fv}[q-p, \sigma] \text{mt}[\gamma, \mu] + \text{fv}[2p+q, \mu] \text{mt}[\sigma, \gamma] + \text{fv}[-2q-p, \gamma] \text{mt}[\sigma, \mu])) \\ & (-I(\text{mt}[\sigma, \alpha]/\text{sp}[p+q, p+q] - (c_\xi \text{fv}[p+q, \sigma]/(\text{sp}[p+q, p+q] \text{sp}[p+q, p+q]) \\ & \text{fv}[p+q, \alpha])))(-I(\text{mt}[\gamma, \beta]/\text{sp}[p, p] - (c_\xi \text{fv}[p, \gamma] \text{fv}[p, \beta])/(\text{sp}[p, p] \text{sp}[p, p])) \\ & (g(\text{fv}[p-q, \alpha] \text{mt}[\beta, \nu] + \text{fv}[-2p-q, \nu] \text{mt}[\beta, \alpha] + \text{fv}[p+2q, \beta] \text{mt}[\nu, \alpha]))] \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(-\frac{4c_\xi g^{\mu\nu} (\bar{p}\cdot\bar{q})^2 g^2}{\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} - \frac{c_\xi g^{\mu\nu} g^2}{\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2} + \frac{2g^{\mu\nu} g^2}{\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2} - \frac{4c_\xi g^{\mu\nu} (\bar{p}\cdot\bar{q}) g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{2g^{\mu\nu} (\bar{p}\cdot\bar{q}) g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{2c_\xi \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu (\bar{p}\cdot\bar{q}) g^2}{\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} + \right. \\ & \frac{3c_\xi \bar{q}^\mu \bar{p}^\nu (\bar{p}\cdot\bar{q}) g^2}{\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{3c_\xi \bar{p}^\mu \bar{q}^\nu (\bar{p}\cdot\bar{q}) g^2}{\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{5g^{\mu\nu} \bar{q}^2 g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} - \frac{c_\xi \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu \bar{q}^2 g^2}{\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{c_\xi \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{4D\bar{p}^\mu \bar{p}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} - \\ & \frac{6\bar{p}^\mu \bar{p}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{c_\xi \bar{q}^\mu \bar{p}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{2D\bar{q}^\mu \bar{p}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} - \frac{3\bar{q}^\mu \bar{p}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{c_\xi \bar{p}^\mu \bar{q}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{2D\bar{p}^\mu \bar{q}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} - \\ & \frac{3\bar{p}^\mu \bar{q}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} - \frac{c_\xi \bar{q}^\mu \bar{q}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{D\bar{q}^\mu \bar{q}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} - \frac{6\bar{q}^\mu \bar{q}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{c_\xi^2 \bar{q}^\mu \bar{q}^\nu (\bar{p}\cdot\bar{q})^2 g^2}{\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \frac{2c_\xi g^{\mu\nu} \bar{q}^2 g^2}{(\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \\ & \frac{c_\xi^2 \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu \bar{q}^4 g^2}{\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \frac{c_\xi \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu g^2}{(\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{2c_\xi \bar{q}^\mu \bar{q}^\nu g^2}{(\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{c_\xi g^{\mu\nu} \bar{p}^2 g^2}{(\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \frac{c_\xi \bar{q}^\mu \bar{p}^\nu (\bar{p}\cdot\bar{q}) g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \frac{c_\xi \bar{p}^\mu \bar{q}^\nu (\bar{p}\cdot\bar{q}) g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \\ & \left. - \frac{c_\xi g^{\mu\nu} \bar{q}^4 g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{c_\xi^2 \bar{q}^\mu \bar{p}^\nu (\bar{p}\cdot\bar{q}) \bar{q}^2 g^2}{\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{c_\xi^2 \bar{p}^\mu \bar{q}^\nu (\bar{p}\cdot\bar{q}) \bar{q}^2 g^2}{\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{2c_\xi \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu \bar{q}^2 g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \frac{c_\xi \bar{q}^\mu \bar{q}^\nu \bar{q}^2 g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{q}^2)^2} \right) \end{aligned}$$

Fazendo a projeção de (E.4) com o elemento da base $T_{\mu\nu}^{(1)}$ de (5.2) obtemos:

$$\begin{aligned} \text{I iso} = & \text{Expand}[\text{ScalarProductExpand}[\text{Contract}[\text{iso} \text{mt}[\mu, \nu]]/\{\text{sp}[p, q] \rightarrow 1/2(\text{sp}[Q, Q] - \\ & \text{sp}[p, p] - \text{sp}[q, q])\}]] \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

$$\begin{aligned} & -\frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^6}{8\bar{p}^4 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{8\bar{p}^4} - \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{8\bar{Q}^4} - \frac{c_\xi Dg^2 \bar{q}^4}{2\bar{p}^4 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi Dg^2 \bar{q}^4}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{\bar{p}^4} - \frac{c_\xi Dg^2 \bar{Q}^2}{2\bar{p}^4} - \\ & \frac{c_\xi Dg^2 \bar{p}^2}{2\bar{Q}^4} + \frac{c_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{\bar{Q}^4} + \frac{3c_\xi g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{3c_\xi g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} - \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2}{\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{3c_\xi g^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^4} + \frac{3c_\xi g^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^4} + \frac{3c_\xi g^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^4} - \frac{c_\xi g^2}{4\bar{p}^2} - \frac{3c_\xi g^2 \bar{q}^2}{2\bar{Q}^4} - \\ & \frac{c_\xi g^2}{4\bar{Q}^2} + \frac{3Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{3Dg^2}{2\bar{p}^2} + \frac{3Dg^2}{2\bar{Q}^2} - \frac{3g^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{3g^2}{2\bar{p}^2} - \frac{3g^2}{2\bar{Q}^2} \end{aligned}$$

Fazendo a projeção de (E.4) com o elemento da base $T_{\mu\nu}^{(2)}$ de (5.2) obtemos:

$$\begin{aligned} \text{II iso} = & \text{Expand}[\text{ScalarProductExpand}[\text{Contract}[\text{iso} \text{fv}[q, \mu] \text{fv}[q, \nu]]/\{\text{sp}[p, q] \rightarrow 1/2(\text{sp}[Q, Q] - \\ & \text{sp}[p, p] - \text{sp}[q, q])\}]] \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

$$\begin{aligned} & -\frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^4} - \frac{c_\xi g^2 \bar{p}^2 \bar{q}^2}{4\bar{Q}^4} + \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^4}{8\bar{p}^4} - \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2}{4\bar{p}^2} + \frac{c_\xi g^2 \bar{Q}^4}{8\bar{p}^4} - \frac{c_\xi g^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^2} - \frac{c_\xi g^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2 \bar{p}^4}{8\bar{Q}^4} - \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2}{4\bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^4}{8\bar{Q}^4} + \\ & \frac{Dg^2 \bar{Q}^2}{2\bar{p}^2} + \frac{Dg^2 \bar{p}^2}{2\bar{Q}^2} - \frac{g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{g^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2} - \frac{3g^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^2} - \frac{3g^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^2} + \frac{g^2 \bar{q}^2}{2\bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2}{4} - Dg^2 + \frac{3g^2}{2} \end{aligned}$$

A integral escrita em termos dos elementos da base dada por (5.3), contraída com o elemento da base $T_{\mu\nu}^{(1)}$, será dada por:

$$\begin{aligned} \text{eq1iso} = \text{sl1iso} == & \mathbf{DC}_1 + \mathbf{C}_2 \text{sp}[q, q] \\ & \text{(E.7)} \\ & -\frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^6}{8\bar{p}^4 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{8\bar{p}^4} - \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{8\bar{Q}^4} - \frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^4}{2\bar{p}^4 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^4}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^2}{\bar{p}^4} - \\ & \frac{c_\xi D g^2 \bar{Q}^2}{2\bar{p}^4} - \frac{c_\xi D g^2 \bar{p}^2}{2\bar{Q}^4} + \frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^2}{\bar{Q}^4} + \frac{3c_\xi g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{3c_\xi g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} - \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2}{\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{3c_\xi g^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^4} + \frac{3c_\xi g^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^4} + \frac{3c_\xi g^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^4} - \frac{c_\xi g^2}{4\bar{p}^2} - \\ & \frac{3c_\xi g^2 \bar{q}^2}{2\bar{Q}^4} - \frac{c_\xi g^2}{4\bar{Q}^2} + \frac{3D g^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{3D g^2}{2\bar{p}^2} + \frac{3D g^2}{2\bar{Q}^2} - \frac{3g^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{3g^2}{2\bar{p}^2} - \frac{3g^2}{2\bar{Q}^2} = \mathbf{C}_2 \bar{q}^2 + \mathbf{C}_1 D \end{aligned}$$

A integral escrita em termos dos elementos da base conforme (5.3), contraída em relação ao elemento da base $T_{\mu\nu}^{(2)}$, será dada por:

$$\begin{aligned} \text{eq2iso} = \text{sl2iso} == & \text{sp}[q, q] \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \text{sp}[q, q]^2 \\ & \text{(E.8)} \\ & -\frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^4} - \frac{c_\xi g^2 \bar{p}^2 \bar{q}^2}{4\bar{Q}^4} + \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^4}{8\bar{p}^4} - \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2}{4\bar{p}^2} + \frac{c_\xi g^2 \bar{Q}^4}{8\bar{p}^4} - \frac{c_\xi g^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^2} - \frac{c_\xi g^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2 \bar{p}^4}{8\bar{Q}^4} - \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2}{4\bar{Q}^2} + \\ & \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^4}{8\bar{Q}^4} + \frac{D g^2 \bar{Q}^2}{2\bar{p}^2} + \frac{D g^2 \bar{p}^2}{2\bar{Q}^2} - \frac{g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{g^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2} - \frac{3g^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^2} - \frac{3g^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^2} + \frac{g^2 \bar{q}^2}{2\bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2}{4} - D g^2 + \frac{3g^2}{2} = \mathbf{C}_1 \bar{q}^2 + \mathbf{C}_2 \bar{q}^4 \end{aligned}$$

Determinando os coeficientes C_1 e C_2 de (5.3):

$$\text{soliso} = \text{Solve}[\{\text{eq1iso}, \text{eq2iso}\}, \{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2\}] \quad \text{(E.9)}$$

$$\begin{aligned} \{ \{ C_1 \rightarrow & -\frac{1}{8(D-1)\bar{p}^4 \bar{q}^2 \bar{Q}^4} \\ & (c_\xi g^2 \bar{p}^8 - 8c_\xi g^2 \bar{q}^2 \bar{p}^6 + 4c_\xi D g^2 \bar{q}^2 \bar{p}^6 - 2c_\xi g^2 \bar{Q}^2 \bar{p}^6 + 4D g^2 \bar{Q}^2 \bar{p}^6 - 6g^2 \bar{Q}^2 \bar{p}^6 + c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4 \bar{p}^4 + 13c_\xi g^2 \bar{q}^4 \bar{p}^4 - \\ & - 8c_\xi D g^2 \bar{q}^4 \bar{p}^4 + 2c_\xi g^2 \bar{Q}^4 \bar{p}^4 - 8D g^2 \bar{Q}^4 \bar{p}^4 + 12g^2 \bar{Q}^4 \bar{p}^4 - 12D g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2 \bar{p}^4 + 16g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2 \bar{p}^4 - 2c_\xi^2 g^2 \bar{q}^6 \bar{p}^2 - 6c_\xi g^2 \bar{q}^6 \bar{p}^2 + \\ & + 4c_\xi D g^2 \bar{q}^6 \bar{p}^2 - 2c_\xi g^2 \bar{Q}^6 \bar{p}^2 + 4D g^2 \bar{Q}^6 \bar{p}^2 - 6g^2 \bar{Q}^6 \bar{p}^2 - 12D g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^4 \bar{p}^2 + 16g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^4 \bar{p}^2 - 2c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^2 \bar{p}^2 + \\ & + 8c_\xi g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^2 \bar{p}^2 - 12D g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^2 \bar{p}^2 + 10g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^2 \bar{p}^2 + c_\xi^2 g^2 \bar{q}^8 + c_\xi g^2 \bar{Q}^8 - 8c_\xi g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^6 + 4c_\xi D g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^6 + c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^4 + \\ & 13c_\xi g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^4 - 8c_\xi D g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^4 - 2c_\xi^2 g^2 \bar{q}^6 \bar{Q}^2 - 6c_\xi g^2 \bar{q}^6 \bar{Q}^2 + 4c_\xi D g^2 \bar{q}^6 \bar{Q}^2, \\ C_2 \rightarrow & -\frac{1}{8(D-1)\bar{p}^4 \bar{q}^4 \bar{Q}^4} \\ & (-c_\xi D g^2 \bar{p}^8 + 6c_\xi g^2 \bar{q}^2 \bar{p}^6 - 2c_\xi D g^2 \bar{q}^2 \bar{p}^6 - 4D^2 g^2 \bar{Q}^2 \bar{p}^6 + 2c_\xi D g^2 \bar{Q}^2 \bar{p}^6 + 6D g^2 \bar{Q}^2 \bar{p}^6 - c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4 \bar{p}^4 - 12c_\xi g^2 \bar{q}^4 \bar{p}^4 + \\ & + 7c_\xi D g^2 \bar{q}^4 \bar{p}^4 + 8D^2 g^2 \bar{Q}^4 \bar{p}^4 - 2c_\xi D g^2 \bar{Q}^4 \bar{p}^4 - 12D g^2 \bar{Q}^4 \bar{p}^4 - 2c_\xi g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2 \bar{p}^4 + 2c_\xi D g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2 \bar{p}^4 + 8D g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2 \bar{p}^4 - \\ & - 12g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2 \bar{p}^4 + 2c_\xi^2 g^2 \bar{q}^6 \bar{p}^2 + 6c_\xi g^2 \bar{q}^6 \bar{p}^2 - 4c_\xi D g^2 \bar{q}^6 \bar{p}^2 - 4D^2 g^2 \bar{Q}^6 \bar{p}^2 + 2c_\xi D g^2 \bar{Q}^6 \bar{p}^2 + 6D g^2 \bar{Q}^6 \bar{p}^2 - \\ & - 2c_\xi g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^4 \bar{p}^2 + 2c_\xi D g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^4 \bar{p}^2 + 8D g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^4 \bar{p}^2 - 12g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^4 \bar{p}^2 + 2c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^2 \bar{p}^2 - 8c_\xi g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^2 \bar{p}^2 + 14D g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^2 \bar{p}^2 - \\ & - 12g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^2 \bar{p}^2 - c_\xi^2 g^2 \bar{q}^8 - c_\xi D g^2 \bar{Q}^8 + 6c_\xi g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^6 - 2c_\xi D g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^6 - c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^4 - 12c_\xi g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^4 + 7c_\xi D g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^4 + \\ & + 2c_\xi^2 g^2 \bar{q}^6 \bar{Q}^2 + 6c_\xi g^2 \bar{q}^6 \bar{Q}^2 - 4c_\xi D g^2 \bar{q}^6 \bar{Q}^2) \} \} \end{aligned}$$

Substituindo o coeficiente C_1 pelo valor determinado:

$$\text{solC1iso} = \text{Expand}[\mathbf{C}_1 / \text{soliso}][[1]] \quad \text{(E.10)}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-c_\xi^2 g^2 \bar{q}^6}{8(D-1)\bar{p}^4 \bar{Q}^4} - \frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^4}{2(D-1)\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4}{4(D-1)\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{3c_\xi g^2 \bar{q}^4}{4(D-1)\bar{p}^4 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^4}{2(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{3c_\xi g^2 \bar{q}^4}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \\
& \frac{3Dg^2 \bar{q}^2}{2(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2}{(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{5g^2 \bar{q}^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^2}{(D-1)\bar{p}^4} - \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{8(D-1)\bar{p}^4} - \frac{13c_\xi g^2 \bar{q}^2}{8(D-1)\bar{p}^4} + \frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^2}{(D-1)\bar{Q}^4} - \\
& \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{8(D-1)\bar{Q}^4} - \frac{13c_\xi g^2 \bar{q}^2}{8(D-1)\bar{Q}^4} - \frac{c_\xi D g^2 \bar{Q}^2}{2(D-1)\bar{p}^4} + \frac{c_\xi g^2 \bar{Q}^2}{(D-1)\bar{p}^4} + \frac{3Dg^2}{2(D-1)\bar{p}^2} - \frac{2g^2}{(D-1)\bar{p}^2} + \frac{3Dg^2}{2(D-1)\bar{Q}^2} - \frac{2g^2}{(D-1)\bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2 \bar{p}^2}{(D-1)\bar{Q}^4} - \\
& \frac{c_\xi D g^2 \bar{p}^2}{2(D-1)\bar{Q}^4} + \frac{Dg^2}{(D-1)\bar{q}^2} - \frac{c_\xi g^2}{4(D-1)\bar{q}^2} - \frac{3g^2}{2(D-1)\bar{q}^2} - \frac{c_\xi g^2 \bar{Q}^4}{8(D-1)\bar{p}^4 \bar{q}^2} - \frac{Dg^2 \bar{Q}^2}{2(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^2} + \frac{c_\xi g^2 \bar{Q}^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^2} + \frac{3g^2 \bar{Q}^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^2} - \\
& \frac{Dg^2 \bar{p}^2}{2(D-1)\bar{Q}^2 \bar{q}^2} + \frac{c_\xi g^2 \bar{p}^2}{4(D-1)\bar{Q}^2 \bar{q}^2} + \frac{3g^2 \bar{p}^2}{4(D-1)\bar{Q}^2 \bar{q}^2} - \frac{c_\xi g^2 \bar{p}^4}{8(D-1)\bar{Q}^4 \bar{q}^2}
\end{aligned}$$

Substituindo o coeficiente C_2 pelo valor determinado:

$$\text{solC}_2 \text{iso} = \text{Expand}[\text{C}_2 / \text{soliso}] [[1]]$$

(E.11)

$$\begin{aligned}
& \frac{c_\xi D \bar{Q}^4 g^2}{8(D-1)\bar{p}^4 \bar{q}^4} + \frac{c_\xi D \bar{Q}^2 g^2}{4(D-1)\bar{p}^4 \bar{q}^2} - \frac{3c_\xi \bar{Q}^2 g^2}{4(D-1)\bar{p}^4 \bar{q}^2} + \frac{D^2 \bar{Q}^2 g^2}{2(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^4} - \frac{c_\xi D \bar{Q}^2 g^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^4} - \frac{3D \bar{Q}^2 g^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^4} - \frac{c_\xi D g^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^2} - \frac{Dg^2}{(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^2} + \\
& \frac{c_\xi g^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^2} + \frac{3g^2}{2(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^2} + \frac{c_\xi D \bar{q}^2 g^2}{2(D-1)\bar{p}^4 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi^2 \bar{q}^2 g^2}{4(D-1)\bar{p}^4 \bar{Q}^2} - \frac{3c_\xi \bar{q}^2 g^2}{4(D-1)\bar{p}^4 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi^2 g^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2}{(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{3g^2}{2(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \\
& \frac{c_\xi D g^2}{4(D-1)\bar{q}^2 \bar{Q}^2} - \frac{Dg^2}{(D-1)\bar{q}^2 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2}{4(D-1)\bar{q}^2 \bar{Q}^2} + \frac{3g^2}{2(D-1)\bar{q}^2 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi D \bar{p}^2 g^2}{4(D-1)\bar{q}^4 \bar{Q}^2} - \frac{7c_\xi D g^2}{8(D-1)\bar{p}^4} - \frac{D^2 g^2}{(D-1)\bar{q}^4} + \frac{c_\xi^2 g^2}{8(D-1)\bar{p}^4} + \frac{3c_\xi g^2}{2(D-1)\bar{p}^4} + \\
& \frac{c_\xi D \bar{q}^2 g^2}{2(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^4} - \frac{c_\xi^2 \bar{q}^2 g^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^4} - \frac{7c_\xi D g^2}{8(D-1)\bar{Q}^4} + \frac{c_\xi^2 g^2}{8(D-1)\bar{Q}^4} + \frac{3c_\xi g^2}{2(D-1)\bar{Q}^4} + \frac{c_\xi D \bar{p}^2 g^2}{4(D-1)\bar{q}^2 \bar{Q}^4} - \frac{3c_\xi \bar{p}^2 g^2}{4(D-1)\bar{q}^2 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi D g^2}{4(D-1)\bar{q}^4} + \frac{3Dg^2}{2(D-1)\bar{q}^4} + \\
& \frac{c_\xi D \bar{p}^4 g^2}{8(D-1)\bar{q}^4 \bar{Q}^4} - \frac{7Dg^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{D^2 \bar{p}^2 g^2}{2(D-1)\bar{q}^4 \bar{Q}^2} - \frac{3D \bar{p}^2 g^2}{4(D-1)\bar{q}^4 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi^2 \bar{q}^4 g^2}{8(D-1)\bar{p}^4 \bar{Q}^4} - \frac{3c_\xi \bar{q}^2 g^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^4}
\end{aligned}$$

Substituindo os denominadores das integrais presentes na constante C_1 , teremos:

$$\text{C}_1 \text{fiso} = \text{Expand}[\text{s0 solC}_1 \text{iso}] / \text{.subDen}[2, 2] / \text{.subDen}[2, 1] / \text{.subDen}[1, 2] / \text{.subDen}[1, 1] / \text{s0} \rightarrow 0$$

(E.12)

$$\begin{aligned}
& -\frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^6 \text{Ifo}(2,2)}{8(D-1)} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4 \text{Ifo}(1,2)}{4(D-1)} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4 \text{Ifo}(2,1)}{4(D-1)} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(1,1)}{4(D-1)} - \frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^4 \text{Ifo}(1,2)}{2(D-1)} + \frac{3c_\xi g^2 \bar{q}^4 \text{Ifo}(1,2)}{4(D-1)} - \\
& \frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^4 \text{Ifo}(2,1)}{2(D-1)} + \frac{3c_\xi g^2 \bar{q}^4 \text{Ifo}(2,1)}{4(D-1)} - \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(1,1)}{D-1} + \frac{3Dg^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(1,1)}{2(D-1)} - \frac{5g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(1,1)}{4(D-1)}
\end{aligned}$$

Substituindo os denominadores das integrais presentes na constante C_2 , teremos:

$$\text{C}_2 \text{fiso} = \text{Expand}[\text{s0 solC}_2 \text{iso}] / \text{.subDen}[2, 2] / \text{.subDen}[2, 1] / \text{.subDen}[1, 2] / \text{.subDen}[1, 1] / \text{s0} \rightarrow 0$$

(E.13)

$$\begin{aligned}
& \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4 \text{Ifo}(2,2)}{8(D-1)} - \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(1,2)}{4(D-1)} - \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(2,1)}{4(D-1)} + \frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(1,2)}{2(D-1)} - \frac{3c_\xi g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(1,2)}{4(D-1)} + \frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(2,1)}{2(D-1)} - \\
& \frac{3c_\xi g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(2,1)}{4(D-1)} - \frac{c_\xi^2 g^2 \text{Ifo}(1,1)}{4(D-1)} + \frac{c_\xi g^2 \text{Ifo}(1,1)}{D-1} - \frac{7Dg^2 \text{Ifo}(1,1)}{4(D-1)} + \frac{3g^2 \text{Ifo}(1,1)}{2(D-1)}
\end{aligned}$$

Na substituição dos denominadores dada por (E.1), definimos que era $\frac{\text{Ifo}(a,b)}{s_0}$ agora ao multiplicarmos os valores das constantes por s_0 , os termos com s_0 que restam são apenas aqueles cujo denominador não foi substituído pela parametrização de Feynman, estes termos são integrais de denominadores simples que conforme vimos em (5.12) são nulas, logo fazemos com que s_0 tenda à zero e desconsideramos estes termos.

Rescrevendo a integral (5.3) em relação às componentes da base da seguinte forma:

$$\text{resiso} = \text{FullSimplify}[\text{Factor}[\text{C}_1 \text{fiso mt}[\mu, \nu] + \text{C}_2 \text{fiso fv}[q, \mu] \text{fv}[q, \nu]] / \text{Ifo}[2, 1] \rightarrow \text{Ifo}[1, 2]]$$

(E.14)

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{8(D-1)} g^2 (\bar{q}^2 g^{\mu\nu} (c_\xi \bar{q}^2 (c_\xi \bar{q}^2 \text{Ifo}(2,2) - 4 \text{Ifo}(1,2) (c_\xi - 2D + 3)) - 2 \text{Ifo}(1,1) ((c_\xi - 4) c_\xi + 6D - 5)) + \bar{q}^\mu \bar{q}^\nu (c_\xi \bar{q}^2 (4 \text{Ifo}(1,2) \\
& (c_\xi - 2D + 3) - c_\xi \bar{q}^2 \text{Ifo}(2,2) + 2 \text{Ifo}(1,1) ((c_\xi - 4) c_\xi + 7D - 6)))
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado da integral escalar (E.3):

$$\text{resfiso} = \text{FullSimplify}[\text{resiso} /. \text{Ifo} \rightarrow \text{Ifx}] \quad (\text{E.15})$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\frac{D+1}{2})} i^D 4^{-D-1} \pi^{\frac{3}{2}-\frac{D}{2}} g^2 \csc(\frac{\pi D}{2}) (\bar{q}^2)^{\frac{D}{2}-2} (2(c_\xi(D-1)(c_\xi(D-4)-8D+28)-14D+12)\bar{q}^\mu \bar{q}^\nu - 2\bar{q}^2(c_\xi(D-1)(c_\xi(D-4)-8D+28)-12D+10)g^{\mu\nu})$$

Realizando a seguinte substituição da dimensão:

$$\% /. D \rightarrow 4 - 2\varepsilon \quad (\text{E.16})$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}(5-2\varepsilon))} i^{4-2\varepsilon} 4^{2\varepsilon-5} \pi^{\frac{1}{2}(2\varepsilon-4)+\frac{3}{2}} g^2 \csc(\frac{1}{2}\pi(4-2\varepsilon)) (\bar{q}^2)^{\frac{1}{2}(4-2\varepsilon)-2} (2(c_\xi(3-2\varepsilon)(-2c_\xi\varepsilon-8(4-2\varepsilon)+28)-14(4-2\varepsilon)+12)\bar{q}^\mu \bar{q}^\nu - 2\bar{q}^2(c_\xi(3-2\varepsilon)(-2c_\xi\varepsilon-8(4-2\varepsilon)+28)-12(4-2\varepsilon)+10)g_{\{4-2\varepsilon,4-2\varepsilon\}}^{\mu\nu})$$

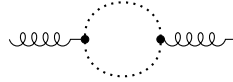
Expandindo em série de ε obtemos o valor final para o diagrama:

$$\text{FullSimplify}[\text{Normal}[\text{Series}[\%, \{\varepsilon, 0, -1\}]]] \quad (\text{E.17})$$

$$-\frac{ig^2(2(3c_\xi+11)\bar{q}^\mu \bar{q}^\nu - (6c_\xi+19)\bar{q}^2 q^{\mu\nu})}{192\pi^2\varepsilon}$$

E.1.2 Diagrama II

Para o diagrama a seguir:



A contração dos índices da equação (5.5) é dada por:

$$\text{iiso} = -\text{Expand}[\text{ScalarProductExpand}[\text{Contract}[-(-\text{gfv}[\mathbf{p} + \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}])(I/\text{sp}[\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p} + \mathbf{q}])(I/\text{sp}[\mathbf{p}, \mathbf{p}])(-\text{gfv}[\mathbf{p}, \mathbf{v}])]]] \quad (\text{E.18})$$

$$-\frac{g^2 \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu}{\bar{p}^2(2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)} - \frac{g^2 \bar{p}^\nu \bar{q}^\mu}{\bar{p}^2(2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)}$$

Fazendo a projeção de (E.18) com o elemento da base $T_{\mu\nu}^{(1)}$ dada por (5.2) obtemos:

$$\text{sI1iiso} = \text{Expand}[\text{ScalarProductExpand}[\text{Contract}[\text{iiso} \text{ mt}[\boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}]]] /. \text{sp}[\mathbf{p}, \mathbf{q}] \rightarrow 1/2(\text{sp}[\mathbf{Q}, \mathbf{Q}] - \text{sp}[\mathbf{p}, \mathbf{p}] - \text{sp}[\mathbf{q}, \mathbf{q}])] \quad (\text{E.19})$$

$$\frac{g^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{g^2}{2\bar{p}^2} - \frac{g^2}{2\bar{Q}^2}$$

Fazendo a projeção de (E.18) com o elemento da base $T_{\mu\nu}^{(2)}$ dada por (5.2) obtemos:

$$\text{sI2iiso} = \text{Expand}[\text{ScalarProductExpand}[\text{Contract}[\text{iiso} \text{ fv}[\mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}] \text{ fv}[\mathbf{q}, \mathbf{v}]]] /. (\text{sp}[\mathbf{p}, \mathbf{q}] \rightarrow 1/2(\text{sp}[\mathbf{Q}, \mathbf{Q}] - \text{sp}[\mathbf{p}, \mathbf{p}] - \text{sp}[\mathbf{q}, \mathbf{q}]))] \quad (\text{E.20})$$

$$\frac{g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{g^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^2} - \frac{g^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^2} + \frac{g^2}{2}$$

A integral escrita em termos dos elementos da base (5.6), contraída em relação ao elemento da base $T_{\mu\nu}^{(1)}$, será dada por:

$$\text{eq1iiso} = \text{sI1iiso} == DC_1 + C_2 \text{sp}[q, q] \quad (\text{E.21})$$

$$\frac{g^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{g^2}{2\bar{p}^2} - \frac{g^2}{2\bar{Q}^2} = C_2 \bar{q}^2 + C_1 D$$

A integral escrita em termos dos elementos da base conforme (5.6), contraída em relação ao elemento da base $T_{\mu\nu}^{(2)}$, será dada por:

$$\text{eq2iiso} = \text{sI2iiso} == \text{sp}[q, q] C_1 + C_2 \text{sp}[q, q]^2 \quad (\text{E.22})$$

$$\frac{g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{g^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^2} - \frac{g^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^2} + \frac{g^2}{2} = C_1 \bar{q}^2 + C_2 \bar{q}^4$$

Determinando os coeficientes C_1 e C_2 de (5.6):

$$\text{soliiso} = \text{Solve}[\{\text{eq1iiso}, \text{eq2iiso}\}, \{C_1, C_2\}] \quad (\text{E.23})$$

$$\left\{ \left\{ C_1 \rightarrow \frac{g^2 (-2\bar{p}^2 \bar{q}^2 - 2\bar{p}^2 \bar{Q}^2 + \bar{p}^4 - 2\bar{q}^2 \bar{Q}^2 + \bar{q}^4 + \bar{Q}^4)}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2}, C_2 \rightarrow -\frac{g^2 (-2D\bar{p}^2 \bar{Q}^2 + D\bar{p}^4 - D\bar{q}^4 + D\bar{Q}^4 - 2\bar{p}^2 \bar{q}^2 - 2\bar{q}^2 \bar{Q}^2 + 2\bar{q}^4)}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^2} \right\} \right\}$$

Substituindo o coeficiente C_1 pelo valor determinado:

$$\text{solC1iiso} = \text{Expand}[C_1/\text{soliiso}][[1]] \quad (\text{E.24})$$

$$\frac{g^2 \bar{Q}^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^2} + \frac{g^2 \bar{q}^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{g^2 \bar{p}^2}{4(D-1)\bar{q}^2 \bar{Q}^2} - \frac{g^2}{2(D-1)\bar{p}^2} - \frac{g^2}{2(D-1)\bar{q}^2} - \frac{g^2}{2(D-1)\bar{Q}^2}$$

Substituindo o coeficiente C_2 pelo valor determinado:

$$\text{solC2iiso} = \text{Expand}[C_2/\text{soliiso}][[1]] \quad (\text{E.25})$$

$$-\frac{Dg^2 \bar{Q}^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^4} - \frac{Dg^2 \bar{p}^2}{4(D-1)\bar{q}^4 \bar{Q}^2} + \frac{g^2}{2(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^2} + \frac{Dg^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{g^2}{2(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{g^2}{2(D-1)\bar{q}^2 \bar{Q}^2} + \frac{Dg^2}{2(D-1)\bar{q}^4}$$

Substituindo os denominadores das integrais da constante C_1 , utilizando (E.1), teremos:

$$C_1 \text{fiiso} = \text{Expand}[\text{s0solC1iiso}]/\text{.subDen}[2, 2]/\text{.subDen}[2, 1]/\text{.subDen}[1, 2]/\text{.subDen}[1, 1]/\text{.s0} \rightarrow 0 \quad (\text{E.26})$$

$$\frac{g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(1,1)}{4(D-1)}$$

Substituindo os denominadores das integrais da constante C_2 , utilizando (E.1), teremos:

$$C_2 \text{fiiso} = \text{Expand}[\text{s0solC2iiso}]/\text{.subDen}[2, 2]/\text{.subDen}[2, 1]/\text{.subDen}[1, 2]/\text{.subDen}[1, 1]/\text{.s0} \rightarrow 0 \quad (\text{E.27})$$

$$\frac{Dg^2 \text{Ifo}(1,1)}{4(D-1)} - \frac{g^2 \text{Ifo}(1,1)}{2(D-1)}$$

Rescrevendo a integral (5.6) em relação às componentes da base, obtemos:

$$\text{resiiso} = \text{Factor}[C_1 \text{fiiso} \text{mt}[\mu, \nu] + C_2 \text{fiiso} \text{fv}[q, \mu] \text{fv}[q, \nu]]/\text{Ifo}[2, 1] \rightarrow \text{Ifo}[1, 2] \quad (\text{E.28})$$

$$\frac{g^2 \text{Ifo}(1,1) (D \bar{q}^\mu \bar{q}^\nu + \bar{q}^2 g^{\mu\nu} - 2 \bar{q}^\mu \bar{q}^\nu)}{4(D-1)}$$

Substituindo o resultado da integral escalar (E.3):

$$\text{resfiso} = \text{FullSimplify}[\text{resiiso}/.\text{Ifo} \rightarrow \text{Ifx}]$$

(E.29)

$$\frac{4^{-D} \pi^{\frac{3}{2} - \frac{D}{2}} g^2 (1 - i \cot(\frac{\pi D}{2})) (\bar{q}^2)^{\frac{D}{2} - 2} ((D-2) \bar{q}^\mu \bar{q}^\nu + \bar{q}^2 g^{\mu\nu})}{\Gamma(\frac{D+1}{2})}$$

Realizando a seguinte substituição da dimensão:

$$\%/.D \rightarrow 4 - 2\epsilon$$

(E.30)

$$\frac{4^{2\epsilon-4} \pi^{\frac{1}{2}(2\epsilon-4) + \frac{3}{2}} g^2 (1 - i \cot(\frac{1}{2} \pi(4-2\epsilon))) (\bar{q}^2)^{\frac{1}{2}(4-2\epsilon)-2} (\bar{q}^2 g_{\{4-2\epsilon, 4-2\epsilon\} \mu\nu} + (2-2\epsilon) \bar{q}^\mu \bar{q}^\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2}(5-2\epsilon))}$$

Expandindo em série de ϵ obtemos o seguinte valor para o diagrama considerado:

$$\text{Normal}[\text{Series}[\%, \{\epsilon, 0, -1\}]]$$

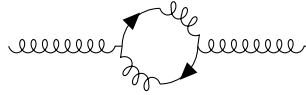
(E.31)

$$\frac{i g^2 (\bar{q}^2 q^{\mu\nu} + 2 \bar{q}^\mu \bar{q}^\nu)}{192 \pi^2 \epsilon}$$

E.2 Diagramas de 1-loop do formalismo de primeira ordem

Diagrama I

Para o seguinte diagrama:



A contração dos índices da equação (8.19) é dada por:

$$\begin{aligned} \text{ipo} = & -\text{Contract}[(-I/2g(\text{mt}[\lambda, \mu]\text{mt}[\sigma, \alpha] - \text{mt}[\lambda, \alpha]\text{mt}[\sigma, \mu]))((-1/\text{sp}[p+q, p+q]) \\ & (\text{fv}[p+q, \lambda]\text{mt}[\beta, \sigma] - \text{fv}[p+q, \sigma]\text{mt}[\beta, \lambda]))(-1/\text{sp}[p, p](\text{fv}[p, \gamma]\text{mt}[\rho, \alpha] \\ & - \text{fv}[p, \rho]\text{mt}[\alpha, \gamma]))(-I/2g(\text{mt}[\gamma, \nu]\text{mt}[\rho, \beta] - \text{mt}[\gamma, \beta]\text{mt}[\rho, \nu]))] \\ & \frac{Dg^2 \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu}{\bar{p}^2(2(\bar{p}\cdot\bar{q})+\bar{p}^2+\bar{q}^2)} + \frac{Dg^2 \bar{p}^\nu \bar{q}^\mu}{\bar{p}^2(2(\bar{p}\cdot\bar{q})+\bar{p}^2+\bar{q}^2)} - \frac{g^2 \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu}{\bar{p}^2(2(\bar{p}\cdot\bar{q})+\bar{p}^2+\bar{q}^2)} - \frac{2g^2 \bar{p}^\nu \bar{q}^\mu}{\bar{p}^2(2(\bar{p}\cdot\bar{q})+\bar{p}^2+\bar{q}^2)} + \frac{g^2 \bar{p}^\mu \bar{q}^\nu}{\bar{p}^2(2(\bar{p}\cdot\bar{q})+\bar{p}^2+\bar{q}^2)} \end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

Fazendo a projeção de (E.32) com o elemento da base $T_{\mu\nu}^{(1)}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{sI1ipo} = & \text{Expand}[\text{ScalarProductExpand}[\text{Contract}[\text{ipo} \text{mt}[\mu, \nu]]]/.\{\text{sp}[p, q] \rightarrow 1/2(\text{sp}[Q, Q] - \\ & \text{sp}[p, p] - \text{sp}[q, q])\}] \\ & - \frac{Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{Dg^2}{2\bar{p}^2} + \frac{Dg^2}{2\bar{Q}^2} + \frac{g^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{g^2}{2\bar{p}^2} - \frac{g^2}{2\bar{Q}^2} \end{aligned} \quad (\text{E.33})$$

Fazendo a projeção de (E.32) com o elemento da base $T_{\mu\nu}^{(2)}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{sI2ipo} = & \text{Expand}[\text{ScalarProductExpand}[\text{Contract}[\text{ipo} \text{fv}[q, \mu]\text{fv}[q, \nu]]]/.\{\text{sp}[p, q] \rightarrow \\ & 1/2(\text{sp}[Q, Q] - \text{sp}[p, p] - \text{sp}[q, q])\}] \\ & - \frac{Dg^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{Dg^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^2} + \frac{Dg^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^2} + \frac{g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{g^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^2} - \frac{g^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^2} - \frac{Dg^2}{2} + \frac{g^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{E.34})$$

A integral escrita em termos dos elementos da base conforme (5.15), contraída em relação ao elemento da base $T_{\mu\nu}^{(1)}$, será dada por:

$$\begin{aligned} \text{eq1ipo} = \text{sI1ipo} = & DC_1 + C_2 \text{sp}[q, q] \\ & - \frac{Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{Dg^2}{2\bar{p}^2} + \frac{Dg^2}{2\bar{Q}^2} + \frac{g^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{g^2}{2\bar{p}^2} - \frac{g^2}{2\bar{Q}^2} = C_2 \bar{q}^2 + C_1 D \end{aligned} \quad (\text{E.35})$$

A integral escrita em termos dos elementos da base conforme (5.15), contraída em relação ao elemento da base $T_{\mu\nu}^{(2)}$, será dada por:

$$\begin{aligned} \text{eq2ipo} = \text{sI2ipo} = & \text{sp}[q, q] C_1 + C_2 \text{sp}[q, q]^2 \\ & - \frac{Dg^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{Dg^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^2} + \frac{Dg^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^2} + \frac{g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{g^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^2} - \frac{g^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^2} - \frac{Dg^2}{2} + \frac{g^2}{2} = C_1 \bar{q}^2 + C_2 \bar{q}^4 \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

Determinando os coeficientes C_1 e C_2 de (5.15):

$$\text{solipo} = \text{Solve}[\text{eq1ipo}, \text{eq2ipo}, C_1, C_2] \quad (\text{E.37})$$

$$\left\{ \left\{ C_1 \rightarrow -\frac{-2g^2\bar{p}^2\bar{q}^2 - 2g^2\bar{p}^2\bar{Q}^2 + g^2\bar{p}^4 - 2g^2\bar{q}^2\bar{Q}^2 + g^2\bar{q}^4 + g^2\bar{Q}^4}{4\bar{p}^2\bar{q}^2\bar{Q}^2}, \right. \right. \\ \left. \left. C_2 \rightarrow -\frac{g^2(2D\bar{p}^2\bar{Q}^2 - D\bar{p}^4 + D\bar{q}^4 - D\bar{Q}^4 + 2\bar{p}^2\bar{q}^2 + 2\bar{q}^2\bar{Q}^2 - 2\bar{q}^4)}{4\bar{p}^2\bar{q}^4\bar{Q}^2} \right\} \right\}$$

Substituindo o coeficiente C_1 pelo valor determinado:

$$\text{solC1ipo} = \text{Expand}[C_1/\text{solipo}][[1]] \quad (\text{E.38})$$

$$-\frac{g^2\bar{Q}^2}{4\bar{p}^2\bar{q}^2} - \frac{g^2\bar{q}^2}{4\bar{p}^2\bar{Q}^2} - \frac{g^2\bar{p}^2}{4\bar{q}^2\bar{Q}^2} + \frac{g^2}{2\bar{p}^2} + \frac{g^2}{2\bar{q}^2} + \frac{g^2}{2\bar{Q}^2}$$

Substituindo o coeficiente C_2 pelo valor determinado:

$$\text{solC2ipo} = \text{Expand}[C_2/\text{solipo}][[1]] \quad (\text{E.39})$$

$$\frac{Dg^2\bar{Q}^2}{4\bar{p}^2\bar{q}^4} + \frac{Dg^2\bar{p}^2}{4\bar{q}^4\bar{Q}^2} - \frac{Dg^2}{4\bar{p}^2\bar{Q}^2} - \frac{Dg^2}{2\bar{q}^4} - \frac{g^2}{2\bar{p}^2\bar{q}^2} + \frac{g^2}{2\bar{p}^2\bar{Q}^2} - \frac{g^2}{2\bar{q}^2\bar{Q}^2}$$

Substituindo os denominadores das integrais da constante C_1 , utilizando (E.1), teremos:

$$C_1fipo = \text{Expand}[\text{s0solC1ipo}]/.\text{subDen}[2, 2]/.\text{subDen}[2, 1]/.\text{subDen}[1, 2]/.\text{subDen}[1, 1]/.\text{s0} \rightarrow 0 \quad (\text{E.40})$$

$$-\frac{1}{4}g^2\bar{q}^2\text{Ifo}(1, 1)$$

Substituindo os denominadores das integrais da constante C_2 , utilizando (E.1), teremos:

$$C_2fipo = \text{Expand}[\text{s0solC2ipo}]/.\text{subDen}[2, 2]/.\text{subDen}[2, 1]/.\text{subDen}[1, 2]/.\text{subDen}[1, 1]/.\text{s0} \rightarrow 0 \quad (\text{E.41})$$

$$\frac{1}{2}g^2\text{Ifo}(1, 1) - \frac{1}{4}Dg^2\text{Ifo}(1, 1)$$

Reescrevendo a integral (5.15) em relação às componentes da base:

$$\text{resipo} = \text{Factor}[C_1fipo \text{ mt}[\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}] + C_2fipo \text{ fv}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\mu}]\text{fv}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\nu}]] \quad (\text{E.42})$$

$$-\frac{1}{4}g^2\text{Ifo}(1, 1) (D\bar{q}^\mu\bar{q}^\nu + \bar{q}^2g^{\mu\nu} - 2\bar{q}^\mu\bar{q}^\nu)$$

Substituindo o resultado da integral escalar (E.3):

$$\text{resfipo} = \text{FullSimplify}[\text{resipo}/.\text{Ifo} \rightarrow \text{Ifx}] \quad (\text{E.43})$$

$$\frac{i^{D+1}2^{1-2D}\pi^{\frac{3}{2}} - \frac{D}{2}g^2 \csc\left(\frac{\pi D}{2}\right)(\bar{q}^2)^{\frac{D}{2}-2}((D-2)\bar{q}^\mu\bar{q}^\nu + \bar{q}^2g^{\mu\nu})}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}$$

Realizando a seguinte substituição da dimensão:

$$\%/.D \rightarrow 4 - 2\epsilon \quad (\text{E.44})$$

$$\frac{i^{5-2\epsilon} 2^{1-2(4-2\epsilon)} \pi^{\frac{1}{2}(2\epsilon-4)+\frac{3}{2}} g^2 \csc\left(\frac{1}{2}\pi(4-2\epsilon)\right) (\bar{q}^2)^{\frac{1}{2}(4-2\epsilon)-2} (\bar{q}^2 g_{\{4-2\epsilon, 4-2\epsilon\}}^{\mu\nu} + (2-2\epsilon)\bar{q}^\mu \bar{q}^\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(3-2\epsilon)\right)}$$

Expandindo em série de ϵ obtemos o seguinte valor final para o diagrama:

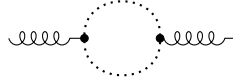
Normal[Series[%, { ϵ , 0, -1}]]

$$-\frac{ig^2(\bar{q}^2 q^{\mu\nu} + 2\bar{q}^\mu \bar{q}^\nu)}{64\pi^2 \epsilon}$$

(E.45)

E.2.1 Diagrama II

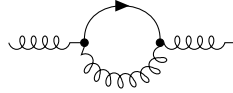
Para o diagrama a seguir:



O desenvolvimento é o mesmo que o descrito para o caso do diagrama II no formalismo de segunda ordem.

E.2.2 Diagrama III

Para o seguinte diagrama:



A contração dos índices da equação (5.17) é dada por:

$$\begin{aligned} \text{iiipo} = & \text{Contract}[(-I/2g(\text{mt}[\lambda, \mu]\text{mt}[\sigma, \alpha] - \text{mt}[\lambda, \alpha]\text{mt}[\sigma, \mu]))(2I(1/2(\text{mt}[\gamma, \lambda]\text{mt}[\sigma, \rho] - \\ & - \text{mt}[\rho, \lambda]\text{mt}[\sigma, \gamma]) - (1/(2\text{sp}[p+q, p+q]))(\text{fv}[p+q, \gamma]\text{fv}[p+q, \lambda]\text{mt}[\sigma, \rho] + \\ & \text{fv}[p+q, \sigma]\text{fv}[p+q, \rho]\text{mt}[\gamma, \lambda] - \text{fv}[p+q, \rho]\text{fv}[p+q, \lambda]\text{mt}[\sigma, \gamma] - \text{fv}[p+q, \sigma] \\ & \text{fv}[p+q, \gamma]\text{mt}[\lambda, \rho])))(-I(\text{mt}[\alpha, \beta]/\text{sp}[p, p] - c_\xi(\text{fv}[p, \beta]\text{fv}[p, \alpha]) / (\text{sp}[p, p]\text{sp}[p, p])) \\ & (-I/2g(\text{mt}[\gamma, \nu]\text{mt}[\rho, \beta] - \text{mt}[\gamma, \beta]\text{mt}[\rho, \nu])))] \end{aligned}$$

(E.46)

$$\begin{aligned} & \frac{c_\xi g^{\mu\nu} g^2}{\bar{p}^2} - \frac{c_\xi \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu g^2}{\bar{p}^4} - \frac{Dg^{\mu\nu} g^2}{\bar{p}^2} + \frac{g^{\mu\nu} g^2}{\bar{p}^2} - \frac{c_\xi g^{\mu\nu} g^2}{\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2} + \frac{2g^{\mu\nu} (\bar{p} \cdot \bar{q}) g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{g^{\mu\nu} g^2}{\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2} - \\ & \frac{c_\xi g^{\mu\nu} (\bar{p} \cdot \bar{q})^2 g^2}{\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{2c_\xi \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu (\bar{p} \cdot \bar{q}) g^2}{\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{c_\xi \bar{q}^\mu \bar{p}^\nu (\bar{p} \cdot \bar{q}) g^2}{\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{c_\xi \bar{p}^\mu \bar{q}^\nu (\bar{p} \cdot \bar{q}) g^2}{\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \\ & \frac{g^{\mu\nu} \bar{q}^2 g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{c_\xi \bar{p}^\mu \bar{p}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{D\bar{p}^\mu \bar{p}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} - \frac{2\bar{p}^\mu \bar{p}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \\ & \frac{D\bar{q}^\mu \bar{p}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} - \frac{2\bar{q}^\mu \bar{p}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{D\bar{p}^\mu \bar{q}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} - \frac{2\bar{p}^\mu \bar{q}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} - \\ & \frac{c_\xi \bar{q}^\mu \bar{q}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{D\bar{q}^\mu \bar{q}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} - \frac{2\bar{q}^\mu \bar{q}^\nu g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} - \frac{2c_\xi g^{\mu\nu} (\bar{p} \cdot \bar{q}) g^2}{\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} \end{aligned}$$

Fazendo a projeção de (E.46) com o elemento da base $T_{\mu\nu}^{(1)}$ dada em (5.2), obtemos:

$$\begin{aligned} \text{sI1iiipo} = & \text{Expand}[\text{ScalarProductExpand}[\text{Contract}[\text{iiipo mt}[\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}]]/\{\text{sp}[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \rightarrow 1/2(\text{sp}[\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}] - \\ & \text{sp}[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}] - \text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}])\}]/\{\text{sp}[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \rightarrow 1/2(\text{sp}[\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}] - \text{sp}[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}] - \text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}])\}] \\ & (E.47) \\ & - \frac{c_\xi Dg^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^4} - \frac{c_\xi Dg^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^4} + \frac{c_\xi Dg^2}{2\bar{p}^2} - \frac{c_\xi Dg^2}{4\bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^4}{2\bar{p}^4 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2}{\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2}{\bar{p}^4} + \\ & \frac{c_\xi g^2 \bar{Q}^2}{2\bar{p}^4} - \frac{c_\xi g^2}{\bar{p}^2} + \frac{c_\xi g^2}{2\bar{Q}^2} - \frac{D^2 g^2}{\bar{p}^2} + \frac{3Dg^2}{\bar{p}^2} - \frac{2g^2}{\bar{p}^2} \end{aligned}$$

Fazendo a projeção de (E.46) com o elemento da base $T_{\mu\nu}^{(2)}$ dada em (5.2), obtemos:

$$\begin{aligned} \text{sI2iiipo} = & \text{Expand}[\text{ScalarProductExpand}[\text{Contract}[\text{iiipo fv}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\mu}] \text{fv}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\nu}]]/\text{sp}[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \rightarrow \\ & \{1/2(\text{sp}[\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}] - \text{sp}[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}] - \text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}])\}]/\{\text{sp}[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \rightarrow 1/2(\text{sp}[\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}] - \text{sp}[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}] - \text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}])\}] \\ & (E.48) \\ & \frac{Dg^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2} + \frac{Dg^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^2} + \frac{Dg^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^2} - \frac{Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{Q}^2} - \frac{g^2 \bar{q}^4}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{g^2 \bar{q}^2}{\bar{p}^2} - \frac{g^2 \bar{Q}^2}{2\bar{p}^2} - \frac{g^2 \bar{p}^2}{2\bar{Q}^2} + \frac{g^2 \bar{q}^2}{\bar{Q}^2} - \frac{Dg^2}{2} + g^2 \end{aligned}$$

A integral escrita em termos dos elementos da base, conforme (5.18), contraída em relação ao elemento da base $T_{\mu\nu}^{(1)}$, será dada por:

$$\begin{aligned} \text{eq1iiipo} = \text{sI1iiipo} = & D\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2 \text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}] \\ & (E.49) \\ & - \frac{c_\xi Dg^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^4} - \frac{c_\xi Dg^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^4} + \frac{c_\xi Dg^2}{2\bar{p}^2} - \frac{c_\xi Dg^2}{4\bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^4}{2\bar{p}^4 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2}{\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2}{\bar{p}^4} + \\ & \frac{c_\xi g^2 \bar{Q}^2}{2\bar{p}^4} - \frac{c_\xi g^2}{\bar{p}^2} + \frac{c_\xi g^2}{2\bar{Q}^2} - \frac{D^2 g^2}{\bar{p}^2} + \frac{3Dg^2}{\bar{p}^2} - \frac{2g^2}{\bar{p}^2} = \boldsymbol{C}_2 \bar{q}^2 + \boldsymbol{C}_1 D \end{aligned}$$

A integral escrita em termos dos elementos da base conforme (5.18), contraída em relação ao elemento da base $T_{\mu\nu}^{(2)}$, será dada por:

$$\begin{aligned} \text{eq2iiipo} = \text{sI2iiipo} = & \text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}] \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2 \text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}]^2 \\ & (E.50) \\ & \frac{Dg^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2} + \frac{Dg^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^2} + \frac{Dg^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^2} - \frac{Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{Q}^2} - \frac{g^2 \bar{q}^4}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{g^2 \bar{q}^2}{\bar{p}^2} - \frac{g^2 \bar{Q}^2}{2\bar{p}^2} - \frac{g^2 \bar{p}^2}{2\bar{Q}^2} + \frac{g^2 \bar{q}^2}{\bar{Q}^2} - \frac{Dg^2}{2} + g^2 = \\ & \boldsymbol{C}_1 \bar{q}^2 + \boldsymbol{C}_2 \bar{q}^4 \end{aligned}$$

Determinando os coeficientes \boldsymbol{C}_1 e \boldsymbol{C}_2 de (5.18):

$$\text{soliipo} = \text{Solve}[\{\text{eq1iiipo}, \text{eq2iiipo}\}, \{\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2\}] \quad (E.51)$$

$$\begin{aligned}
\{ \{ C_1 \rightarrow & -\frac{1}{4(D-1)\bar{p}^4\bar{q}^2\bar{Q}^2} \\
& (Dg^2\bar{p}^6 - 2g^2\bar{p}^6 - 2c_\xi g^2\bar{q}^2\bar{p}^4 + c_\xi Dg^2\bar{q}^2\bar{p}^4 - 2Dg^2\bar{q}^2\bar{p}^4 + 4g^2\bar{q}^2\bar{p}^4 - 2Dg^2\bar{Q}^2\bar{p}^4 + 4g^2\bar{Q}^2\bar{p}^4 + 4c_\xi g^2\bar{q}^4\bar{p}^2 - \\
& 2c_\xi Dg^2\bar{q}^4\bar{p}^2 + Dg^2\bar{q}^4\bar{p}^2 - 2g^2\bar{q}^4\bar{p}^2 + Dg^2\bar{Q}^4\bar{p}^2 - 2g^2\bar{Q}^4\bar{p}^2 + 4D^2g^2\bar{q}^2\bar{Q}^2\bar{p}^2 + 4c_\xi g^2\bar{q}^2\bar{Q}^2\bar{p}^2 - 2c_\xi Dg^2\bar{q}^2\bar{Q}^2\bar{p}^2 - \\
& 14Dg^2\bar{q}^2\bar{Q}^2\bar{p}^2 + 12g^2\bar{q}^2\bar{Q}^2\bar{p}^2 - 2c_\xi g^2\bar{q}^6 + c_\xi Dg^2\bar{q}^6 - 2c_\xi g^2\bar{q}^2\bar{Q}^4 + c_\xi Dg^2\bar{q}^2\bar{Q}^4 + 4c_\xi g^2\bar{q}^4\bar{Q}^2 - 2c_\xi Dg^2\bar{q}^4\bar{Q}^2), \\
C_2 \rightarrow & -\frac{1}{4(D-1)\bar{p}^4\bar{q}^4\bar{Q}^2} \\
& (-D^2g^2\bar{p}^6 + 2Dg^2\bar{p}^6 + 2D^2g^2\bar{q}^2\bar{p}^4 + 2c_\xi g^2\bar{q}^2\bar{p}^4 - c_\xi Dg^2\bar{q}^2\bar{p}^4 - 4Dg^2\bar{q}^2\bar{p}^4 + 2D^2g^2\bar{Q}^2\bar{p}^4 - 4Dg^2\bar{Q}^2\bar{p}^4 - \\
& D^2g^2\bar{q}^4\bar{p}^2 - 4c_\xi g^2\bar{q}^4\bar{p}^2 + 2c_\xi Dg^2\bar{q}^4\bar{p}^2 + 2Dg^2\bar{q}^4\bar{p}^2 - D^2g^2\bar{Q}^4\bar{p}^2 + 2Dg^2\bar{Q}^4\bar{p}^2 - 2D^2g^2\bar{q}^2\bar{Q}^2\bar{p}^2 - 4c_\xi g^2\bar{q}^2\bar{Q}^2\bar{p}^2 + \\
& 2c_\xi Dg^2\bar{q}^2\bar{Q}^2\bar{p}^2 + 8Dg^2\bar{q}^2\bar{Q}^2\bar{p}^2 - 8g^2\bar{q}^2\bar{Q}^2\bar{p}^2 + 2c_\xi g^2\bar{q}^6 - c_\xi Dg^2\bar{q}^6 + 2c_\xi g^2\bar{q}^2\bar{Q}^4 - c_\xi Dg^2\bar{q}^2\bar{Q}^4 - 4c_\xi g^2\bar{q}^4\bar{Q}^2 + \\
& 2c_\xi Dg^2\bar{q}^4\bar{Q}^2) \} \}
\end{aligned}$$

Substituindo o coeficiente C_1 pelo valor determinado:

$$\text{solC}_1\text{iipo} = \text{Expand}[\text{C}_1/\text{soliipo}][[1]]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{c_\xi Dg^2\bar{q}^4}{4(D-1)\bar{p}^4\bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2\bar{q}^4}{2(D-1)\bar{p}^4\bar{Q}^2} + \frac{c_\xi Dg^2\bar{q}^2}{2(D-1)\bar{p}^2\bar{Q}^2} - \frac{c_\xi g^2\bar{q}^2}{(D-1)\bar{p}^2\bar{Q}^2} + \frac{c_\xi Dg^2\bar{q}^2}{2(D-1)\bar{p}^4} - \frac{c_\xi g^2\bar{q}^2}{(D-1)\bar{p}^4} - \frac{c_\xi Dg^2\bar{Q}^2}{4(D-1)\bar{p}^4} + \\
& \frac{c_\xi g^2\bar{Q}^2}{2(D-1)\bar{p}^4} + \frac{c_\xi Dg^2}{2(D-1)\bar{p}^2} - \frac{c_\xi g^2}{(D-1)\bar{p}^2} - \frac{c_\xi Dg^2}{4(D-1)\bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2}{2(D-1)\bar{Q}^2} - \frac{D^2g^2}{(D-1)\bar{p}^2} - \frac{Dg^2\bar{Q}^2}{4(D-1)\bar{p}^2\bar{q}^2} + \frac{g^2\bar{Q}^2}{2(D-1)\bar{p}^2\bar{q}^2} - \\
& \frac{Dg^2\bar{q}^2}{4(D-1)\bar{p}^2\bar{Q}^2} + \frac{g^2\bar{q}^2}{2(D-1)\bar{p}^2\bar{Q}^2} - \frac{Dg^2\bar{p}^2}{4(D-1)\bar{q}^2\bar{Q}^2} + \frac{g^2\bar{p}^2}{2(D-1)\bar{q}^2\bar{Q}^2} + \frac{7Dg^2}{2(D-1)\bar{p}^2} - \frac{3g^2}{(D-1)\bar{p}^2} + \frac{Dg^2}{2(D-1)\bar{q}^2} - \frac{g^2}{(D-1)\bar{q}^2} + \\
& \frac{Dg^2}{2(D-1)\bar{Q}^2} - \frac{g^2}{(D-1)\bar{Q}^2}
\end{aligned} \tag{E.52}$$

Substituindo o coeficiente C_2 pelo valor determinado:

$$\text{solC}_2\text{iipo} = \text{Expand}[\text{C}_2/\text{soliipo}][[1]]$$

$$\begin{aligned}
& \frac{c_\xi Dg^2\bar{Q}^2}{4(D-1)\bar{p}^4\bar{q}^2} - \frac{c_\xi g^2\bar{Q}^2}{2(D-1)\bar{p}^4\bar{q}^2} + \frac{c_\xi Dg^2\bar{q}^2}{4(D-1)\bar{p}^4\bar{Q}^2} - \frac{c_\xi g^2\bar{q}^2}{2(D-1)\bar{p}^4\bar{Q}^2} - \frac{c_\xi Dg^2}{2(D-1)\bar{p}^2\bar{q}^2} + \frac{c_\xi g^2}{(D-1)\bar{p}^2\bar{q}^2} - \frac{c_\xi Dg^2}{2(D-1)\bar{p}^4} - \\
& \frac{c_\xi Dg^2}{2(D-1)\bar{p}^2\bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2}{(D-1)\bar{p}^2\bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2}{(D-1)\bar{p}^4} + \frac{c_\xi Dg^2}{4(D-1)\bar{q}^2\bar{Q}^2} - \frac{c_\xi g^2}{2(D-1)\bar{q}^2\bar{Q}^2} + \frac{D^2g^2\bar{Q}^2}{4(D-1)\bar{p}^2\bar{q}^4} + \frac{D^2g^2\bar{p}^2}{4(D-1)\bar{q}^4\bar{Q}^2} + \\
& \frac{D^2g^2}{2(D-1)\bar{p}^2\bar{q}^2} + \frac{D^2g^2}{4(D-1)\bar{p}^2\bar{Q}^2} - \frac{D^2g^2}{2(D-1)\bar{q}^2\bar{Q}^2} - \frac{D^2g^2}{2(D-1)\bar{q}^4} - \frac{Dg^2\bar{Q}^2}{2(D-1)\bar{p}^2\bar{q}^4} - \frac{Dg^2\bar{p}^2}{2(D-1)\bar{q}^4\bar{Q}^2} - \frac{2Dg^2}{(D-1)\bar{p}^2\bar{q}^2} \\
& + \frac{2g^2}{(D-1)\bar{p}^2\bar{q}^2} - \frac{Dg^2}{2(D-1)\bar{p}^2\bar{Q}^2} + \frac{Dg^2}{(D-1)\bar{q}^2\bar{Q}^2} + \frac{Dg^2}{(D-1)\bar{q}^4}
\end{aligned} \tag{E.53}$$

Substituindo os denominadores das integrais presentes na constante C_1 , utilizando (E.1), teremos:

$$\text{C}_1\text{fiipo} = \text{Expand}[\text{s0solC}_1\text{iipo}]/\text{subDen}[2, 2]/\text{subDen}[2, 1]/\text{subDen}[1, 2]/\text{subDen}[1, 1]/$$

$$\text{s0} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{c_\xi Dg^2\bar{q}^4\text{Ifo}(2,1)}{4(D-1)} + \frac{c_\xi g^2\bar{q}^4\text{Ifo}(2,1)}{2(D-1)} + \frac{c_\xi Dg^2\bar{q}^2\text{Ifo}(1,1)}{2(D-1)} - \frac{c_\xi g^2\bar{q}^2\text{Ifo}(1,1)}{D-1} - \frac{Dg^2\bar{q}^2\text{Ifo}(1,1)}{4(D-1)} + \frac{g^2\bar{q}^2\text{Ifo}(1,1)}{2(D-1)}
\end{aligned} \tag{E.54}$$

Substituindo os denominadores das integrais presentes na constante C_2 , utilizando (E.1),

teremos:

$$C_2 f_{iiipo} = \text{Expand}[s0 \text{sol} C_2 i_{iiipo}] /. \text{subDen}[2, 2] /. \text{subDen}[2, 1] /. \text{subDen}[1, 2] /. \text{subDen}[1, 1] /. s0 \rightarrow 0 \quad (\text{E.55})$$

$$\frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(2, 1)}{4(D-1)} - \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(2, 1)}{2(D-1)} - \frac{c_\xi D g^2 \text{Ifo}(1, 1)}{2(D-1)} + \frac{c_\xi g^2 \text{Ifo}(1, 1)}{D-1} + \frac{D^2 g^2 \text{Ifo}(1, 1)}{4(D-1)} - \frac{D g^2 \text{Ifo}(1, 1)}{2(D-1)}$$

Reescrevendo a integral (5.18) em relação às componentes da base:

$$\text{res}_{iiipo} = \text{Factor}[C_1 f_{iiipo} \text{mt}[\mu, \nu] + C_2 f_{iiipo} \text{fv}[q, \mu] \text{fv}[q, \nu]] /. \text{Ifo}[2, 1] \rightarrow \text{Ifo}[1, 2] \quad (\text{E.56})$$

$$\frac{(D-2)g^2(\bar{q}^\mu \bar{q}^\nu (c_\xi \bar{q}^2 \text{Ifo}(2, 1) + \text{Ifo}(1, 1)(D-2c_\xi)) - \bar{q}^2 g^{\mu\nu} (c_\xi \bar{q}^2 \text{Ifo}(2, 1) + (1-2c_\xi) \text{Ifo}(1, 1)))}{4(D-1)}$$

Substituindo a integral escalar (E.3):

$$\text{res}_{fiiipo} = \text{FullSimplify}[\text{res}_{iiipo} /. \text{Ifo} \rightarrow \text{Ifx}] \quad (\text{E.57})$$

$$\frac{i^{2-D-1} \pi^{1-\frac{D}{2}} g^2 (\cot(\frac{\pi D}{2}) + i) \Gamma(\frac{D}{2}) (\bar{q}^2)^{\frac{D}{2}-2} ((c_\xi (D-1) - D) \bar{q}^\mu \bar{q}^\nu - (c_\xi (D-1) - 1) \bar{q}^2 g^{\mu\nu})}{(D-1) \Gamma(D-2)}$$

Realizando a seguinte substituição da dimensão:

$$\% /. D \rightarrow 4 - 2\varepsilon \quad (\text{E.58})$$

$$\frac{i^{2-2\varepsilon-1} \pi^{1-\frac{1}{2}(2\varepsilon-4)+1} g^2 (\cot(\frac{\pi(4-2\varepsilon)}{2}) + i) \Gamma(\frac{1}{2}(4-2\varepsilon)) (\bar{q}^2)^{\frac{1}{2}(4-2\varepsilon)-2} (\bar{q}^2 g_{\{4-2\varepsilon, 4-2\varepsilon\}}^{\mu\nu} - (-c_\xi(4-2\varepsilon) + c_\xi + 1) \bar{q}^\mu \bar{q}^\nu + (c_\xi(3-2\varepsilon) + 2\varepsilon - 4) \bar{q}^2 g^{\mu\nu})}{(3-2\varepsilon) \Gamma(2-2\varepsilon)}$$

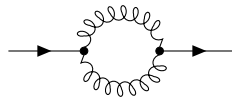
Expandindo em série de ε obtemos que o diagrama é o seguinte:

$$\text{FullSimplify}[\text{Normal}[\text{Series}[\%, \{\varepsilon, 0, -1\}]]] \quad (\text{E.59})$$

$$\frac{i g^2 ((1-3c_\xi) \bar{q}^2 q^{\mu\nu} + (3c_\xi - 4) \bar{q}^\mu \bar{q}^\nu)}{96 \pi^2 \varepsilon}$$

E.2.3 Diagrama IV

Para o seguinte diagrama:



A contração dos índices da equação (8.28) é dada por:

$$\begin{aligned} \text{ivpo} = & \text{Contract}[1/2(-I/2g(\text{mt}[\lambda, \mu] \text{mt}[\sigma, \nu] - \text{mt}[\lambda, \nu] \text{mt}[\sigma, \mu]))(-I(\text{mt}[\beta, \nu]/(\text{sp}[p, p]) - \\ & c_\xi(\text{fv}[p, \nu] \text{fv}[p, \beta]) / (\text{sp}[p, p] \text{sp}[p, p]))(-I(\text{mt}[\alpha, \mu]/(\text{sp}[p+q, p+q]) - c_\xi(\text{fv}[p+q, \mu] \\ & \text{fv}[p+q, \alpha]) / (\text{sp}[p+q, p+q] \text{sp}[p+q, p+q]))(-I/2g(\text{mt}[\gamma, \alpha] \text{mt}[\rho, \beta] - \text{mt}[\gamma, \beta] \text{mt}[\rho, \alpha]))] \end{aligned} \quad (\text{E.60})$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{ic_\xi \bar{p}^\sigma g^{\gamma\lambda} (\bar{p} \cdot \bar{q}) g^2}{2\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{ic_\xi \bar{p}^\lambda g^{\gamma\sigma} (\bar{p} \cdot \bar{q}) g^2}{2\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} - \frac{ic_\xi \bar{p}^\sigma g^{\gamma\lambda} g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{3i\bar{q}^\sigma g^{\gamma\lambda} g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \\
& \frac{ic_\xi \bar{p}^\lambda g^{\gamma\sigma} g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} - \frac{3i\bar{q}^\lambda g^{\gamma\sigma} g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{ic_\xi \bar{p}^\gamma \bar{q}^\lambda \bar{p}^\sigma g^2}{4\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} - \frac{ic_\xi \bar{p}^\gamma \bar{p}^\lambda \bar{q}^\sigma g^2}{4\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \\
& \frac{ic_\xi \bar{p}^\sigma g^{\gamma\lambda} g^2}{4(\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \frac{ic_\xi \bar{q}^\sigma g^{\gamma\lambda} g^2}{4(\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{ic_\xi \bar{p}^\lambda g^{\gamma\sigma} g^2}{4(\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{ic_\xi \bar{q}^\lambda g^{\gamma\sigma} g^2}{4(\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \\
& \frac{ic_\xi^2 \bar{q}^\gamma \bar{q}^\lambda \bar{p}^\sigma (\bar{p} \cdot \bar{q}) g^2}{4\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{ic_\xi^2 \bar{q}^\gamma \bar{p}^\lambda \bar{q}^\sigma (\bar{p} \cdot \bar{q}) g^2}{4\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{ic_\xi \bar{p}^\sigma g^{\gamma\lambda} \bar{q}^2 g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{ic_\xi \bar{q}^\sigma g^{\gamma\lambda} \bar{q}^2 g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \\
& \frac{ic_\xi \bar{p}^\lambda g^{\gamma\sigma} \bar{q}^2 g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \frac{ic_\xi \bar{q}^\lambda g^{\gamma\sigma} \bar{q}^2 g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{ic_\xi^2 \bar{p}^\gamma \bar{q}^\lambda \bar{p}^\sigma \bar{q}^2 g^2}{4\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \frac{ic_\xi^2 \bar{p}^\gamma \bar{p}^\lambda \bar{q}^\sigma \bar{q}^2 g^2}{4\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \\
& \frac{ic_\xi \bar{p}^\gamma \bar{q}^\lambda \bar{p}^\sigma g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \frac{ic_\xi \bar{q}^\gamma \bar{q}^\lambda \bar{p}^\sigma g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{ic_\xi \bar{p}^\gamma \bar{p}^\lambda \bar{q}^\sigma g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{ic_\xi \bar{q}^\gamma \bar{p}^\lambda \bar{q}^\sigma g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2}
\end{aligned}$$

Fazendo a projeção de (E.60) com o elemento da base $T_{\lambda\sigma,\gamma\rho}^{(1)}$ dada em (5.22), obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{sI1vpo} = & \text{Expand}[\text{Contract}[\text{ivpo}(\text{mt}[\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\lambda}]\text{mt}[\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma}] - \text{mt}[\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\sigma}]\text{mt}[\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}])]/\{\text{sp}[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \rightarrow \\
& 1/2(\text{sp}[\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}] - \text{sp}[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}] - \text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}])\}] \quad (\text{E.61})
\end{aligned}$$

$$\frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{4\bar{p}^4 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4}{8\bar{p}^4 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi^2 g^2}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi^2 g^2}{8\bar{p}^4} - \frac{c_\xi^2 g^2}{8\bar{Q}^4} - \frac{c_\xi Dg^2}{\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2}{\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{D^2 g^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{Dg^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2}$$

Fazendo a projeção de (E.60) com o elemento da base $T_{\lambda\sigma,\gamma\rho}^{(2)}$ dada em (5.22), obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{sI2vpo} = & \text{Expand}[\text{Contract}[\text{ivpo}(\text{fv}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\lambda}](\text{fv}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\gamma}]\text{mt}[\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma}] - \text{fv}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\rho}]\text{mt}[\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\sigma}]) - \\
& \text{fv}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\sigma}](\text{fv}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\gamma}]\text{mt}[\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}] - \text{fv}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\rho}]\text{mt}[\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\lambda}]))]/\{\text{sp}[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \rightarrow 1/2(\text{sp}[\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}] - \\
& \text{sp}[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}] - \text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}])\}] \quad (\text{E.62})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^6}{8\bar{p}^4 \bar{q}^4} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{8\bar{p}^4} - \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{8\bar{Q}^4} - \frac{c_\xi Dg^2 \bar{q}^4}{8\bar{p}^4 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi Dg^2 \bar{q}^4}{8\bar{p}^2 \bar{Q}^4} - \frac{c_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{4\bar{p}^4} - \\
& -\frac{c_\xi Dg^2 \bar{Q}^2}{8\bar{p}^4} - \frac{c_\xi Dg^2 \bar{p}^2}{8\bar{Q}^4} + \frac{c_\xi Dg^2}{8\bar{p}^2} + \frac{c_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{4\bar{Q}^4} + \frac{c_\xi Dg^2}{8\bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} - \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^4} + \frac{c_\xi g^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^4} + \frac{c_\xi g^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^4} - \\
& -\frac{c_\xi g^2}{4\bar{p}^2} - \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2}{2\bar{Q}^4} - \frac{c_\xi g^2}{4\bar{Q}^2} + \frac{Dg^2 \bar{q}^2}{\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{g^2 \bar{q}^2}{\bar{p}^2 \bar{Q}^2}
\end{aligned}$$

A integral escrita em termos dos elementos da base, conforme (5.23), contraída em relação ao elemento da base $T_{\lambda\sigma,\gamma\rho}^{(1)}$, será dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{eq1fvpo} = \mathbf{sI1vpo} = & (2D^2 - 2D)\mathbf{C}_1 + (4D\text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}] - 4\text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}])\mathbf{C}_2 \\
& -\frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4}{8\bar{p}^4 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{4\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi^2 g^2}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi^2 g^2}{8\bar{p}^4} - \frac{c_\xi^2 g^2}{8\bar{Q}^4} - \frac{c_\xi Dg^2}{\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2}{\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{D^2 g^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{Dg^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} = \\
\mathbf{C}_2 (4D\bar{q}^2 - 4\bar{q}^2) + & \mathbf{C}_1 (2D^2 - 2D) \quad (\text{E.63})
\end{aligned}$$

A integral escrita em termos dos elementos da base, conforme (5.23), contraída em relação ao elemento da base $T_{\lambda\sigma,\gamma\rho}^{(2)}$, será dada por:

$$\mathbf{eq2fvpo} = \mathbf{sI2vpo} = (4D\text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}] - 4\text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}])\mathbf{C}_1 + (4D\text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}]^2 - 4\text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}]^2)\mathbf{C}_2 \quad (\text{E.64})$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^6}{8\bar{p}^4 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{8\bar{p}^4} - \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{8\bar{Q}^4} - \frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^4}{8\bar{p}^4 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^4}{8\bar{p}^2 \bar{Q}^4} - \frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^2}{4\bar{p}^4} \\
& - \frac{c_\xi D g^2 \bar{Q}^2}{8\bar{p}^4} - \frac{c_\xi D g^2 \bar{p}^2}{8\bar{Q}^4} + \frac{c_\xi D g^2}{8\bar{p}^2} + \frac{c_\xi D g^2 \bar{q}^2}{4\bar{Q}^4} + \frac{c_\xi D g^2}{8\bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} - \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^4} + \frac{c_\xi g^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^4} + \frac{c_\xi g^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^4} - \frac{c_\xi g^2}{4\bar{p}^2} \\
& \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2}{2\bar{Q}^4} - \frac{c_\xi g^2}{4\bar{Q}^2} + \frac{D g^2 \bar{q}^2}{\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{g^2 \bar{q}^2}{\bar{p}^2 \bar{Q}^2} = C_1 (4D\bar{q}^2 - 4\bar{q}^2) + C_2 (4D\bar{q}^4 - 4\bar{q}^4)
\end{aligned}$$

Determinando os coeficientes C_1 e C_2 de (5.3):

soliso = Solve[{eq1fivpo, eq2fivpo}, {C₁, C₂}]

$$\begin{aligned}
\{ \{ C_1 \rightarrow & -\frac{1}{16(D-1)\bar{p}^4 \bar{q}^2 \bar{Q}^4} \\
& (4c_\xi g^2 \bar{p}^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2 + 2c_\xi g^2 \bar{p}^4 \bar{q}^2 - c_\xi g^2 \bar{p}^2 \bar{q}^4 + c_\xi g^2 \bar{p}^4 \bar{Q}^2 + c_\xi g^2 \bar{p}^2 \bar{Q}^4 - c_\xi g^2 \bar{p}^6 + 2c_\xi g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^4 - c_\xi g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^2 - c_\xi g^2 \bar{Q}^6 - \\
& - 4Dg^2 \bar{p}^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2 + 4g^2 \bar{p}^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2), \\
C_2 \rightarrow & -\frac{1}{32(D-1)\bar{p}^4 \bar{q}^4 \bar{Q}^4} \\
& (-2c_\xi^2 g^2 \bar{p}^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2 + c_\xi^2 g^2 \bar{p}^4 \bar{q}^2 - 2c_\xi^2 g^2 \bar{p}^2 \bar{q}^4 + c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^4 - 2c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^2 + c_\xi^2 g^2 \bar{q}^6 + 4c_\xi D g^2 \bar{p}^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2 - \\
& 2c_\xi D g^2 \bar{p}^4 \bar{q}^2 + c_\xi D g^2 \bar{p}^2 \bar{q}^4 - c_\xi D g^2 \bar{p}^4 \bar{Q}^2 - c_\xi D g^2 \bar{p}^2 \bar{Q}^4 + c_\xi D g^2 \bar{p}^6 - 2c_\xi D g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^4 + c_\xi D g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^2 + c_\xi D g^2 \bar{Q}^6 - \\
& 8c_\xi g^2 \bar{p}^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2) \} \}
\end{aligned} \tag{E.65}$$

Substituindo o coeficiente C_1 pelo valor determinado:

solC₁fivpo = Expand[C₁/.solsfivpo][[1]]

$$\begin{aligned}
& \frac{c_\xi g^2 \bar{Q}^2}{16(D-1)\bar{p}^4 \bar{q}^2} + \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2}{16(D-1)\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2}{16(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi g^2 \bar{p}^2}{16(D-1)\bar{q}^2 \bar{Q}^4} - \frac{c_\xi g^2}{16(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^2} - \frac{c_\xi g^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \\
& \frac{c_\xi g^2}{8(D-1)\bar{p}^4} - \frac{c_\xi g^2}{16(D-1)\bar{q}^2 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi g^2}{8(D-1)\bar{Q}^4} + \frac{Dg^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{g^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2}
\end{aligned} \tag{E.66}$$

Substituindo o coeficiente C_2 pelo valor determinado:

solC₂fivpo = Expand[C₂/.solsfivpo][[1]]

$$\begin{aligned}
& \frac{c_\xi^2 g^2}{16(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{32(D-1)\bar{p}^4 \bar{Q}^4} - \frac{c_\xi^2 g^2}{32(D-1)\bar{p}^4 \bar{q}^2} + \frac{c_\xi^2 g^2}{16(D-1)\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi^2 g^2}{16(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^4} - \frac{c_\xi^2 g^2}{32(D-1)\bar{q}^2 \bar{Q}^4} - \\
& \frac{c_\xi D g^2 \bar{Q}^2}{32(D-1)\bar{p}^4 \bar{q}^4} - \frac{c_\xi g^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi D g^2}{8(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2} - \frac{c_\xi D g^2 \bar{p}^2}{32(D-1)\bar{q}^4 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi D g^2}{16(D-1)\bar{p}^4 \bar{q}^2} + \frac{c_\xi D g^2}{32(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^4} - \frac{c_\xi D g^2}{32(D-1)\bar{p}^4 \bar{Q}^2} - \\
& \frac{c_\xi D g^2}{32(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{c_\xi D g^2}{32(D-1)\bar{q}^4 \bar{Q}^2} + \frac{c_\xi D g^2}{16(D-1)\bar{q}^2 \bar{Q}^4}
\end{aligned} \tag{E.67}$$

Substituindo os denominadores das integrais contidas na constante C_1 , utilizando (E.1) teremos:

C₁fivpo = Expand[s0 solC₁fivpo]/.subDen[2,2]/.subDen[2,1]/.subDen[1,2]/.subDen[1,1]/.s0 →

0

$$\frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(1,2)}{16(D-1)} + \frac{c_\xi g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(2,1)}{16(D-1)} - \frac{c_\xi g^2 \text{Ifo}(1,1)}{4(D-1)} + \frac{Dg^2 \text{Ifo}(1,1)}{4(D-1)} - \frac{g^2 \text{Ifo}(1,1)}{4(D-1)} \tag{E.68}$$

Substituindo os denominadores das integrais contidas na constante C_2 , utilizando (E.1) teremos:

$$\mathbf{C_2fivpo} = \mathbf{Expand[s0 solC_2fivpo]/.subDen[2,2]/.subDen[2,1]/.subDen[1,2]/.subDen[1,1]/.s0} \rightarrow \mathbf{0} \quad (\text{E.69})$$

$$-\frac{c_\xi^2 g^2 \bar{q}^\gamma \text{Ifo}(2,2)}{32(D-1)} + \frac{c_\xi^2 g^2 \text{Ifo}(1,1)}{16(D-1)\bar{q}^2} - \frac{c_\xi D g^2 \text{Ifo}(1,1)}{8(D-1)\bar{q}^2} + \frac{c_\xi g^2 \text{Ifo}(1,1)}{4(D-1)\bar{q}^2} + \frac{c_\xi^2 g^2 \text{Ifo}(1,2)}{16(D-1)} + \frac{c_\xi^2 g^2 \text{Ifo}(2,1)}{16(D-1)} - \frac{c_\xi D g^2 \text{Ifo}(1,2)}{32(D-1)} - \frac{c_\xi D g^2 \text{Ifo}(2,1)}{32(D-1)}$$

Reescrevendo a integral (5.23) em relação às componentes da base:

$$\mathbf{resivpo} = \mathbf{Factor[C_1fivpo (mt[\gamma, \lambda]mt[\rho, \sigma] - mt[\gamma, \sigma]mt[\rho, \lambda]) + C_2fivpo (fv[q, \lambda](fv[q, \gamma]mt[\rho, \sigma] - fv[q, \rho]mt[\gamma, \sigma]) - fv[q, \sigma](fv[q, \gamma]mt[\rho, \lambda] - fv[q, \rho]mt[\gamma, \lambda]))]/.Ifo[2,1]} \rightarrow \mathbf{Ifo[1,2]} \quad (\text{E.70})$$

$$-\frac{1}{32(D-1)D\bar{q}^2} g^2 \left(\text{Ifo}(2,2) \bar{q}^\rho \bar{q}^\sigma g^{\gamma\lambda} \bar{q}^4 c_\xi^2 - \text{Ifo}(2,2) \bar{q}^\lambda \bar{q}^\rho g^{\gamma\sigma} \bar{q}^4 c_\xi^2 - \text{Ifo}(2,2) \bar{q}^\gamma \bar{q}^\sigma g^{\lambda\rho} \bar{q}^4 c_\xi^2 + \text{Ifo}(2,2) \bar{q}^\gamma \bar{q}^\lambda g^{\rho\sigma} \bar{q}^4 c_\xi^2 - 2 \text{Ifo}(1,1) \bar{q}^\rho \bar{q}^\sigma g^{\gamma\lambda} c_\xi^2 + 2 \text{Ifo}(1,1) \bar{q}^\lambda \bar{q}^\rho g^{\gamma\sigma} c_\xi^2 + 2 \text{Ifo}(1,1) \bar{q}^\gamma \bar{q}^\sigma g^{\lambda\rho} c_\xi^2 - 2 \text{Ifo}(1,1) \bar{q}^\gamma \bar{q}^\lambda g^{\rho\sigma} c_\xi^2 - 2 \text{Ifo}(1,2) \bar{q}^\rho \bar{q}^\sigma g^{\gamma\lambda} \bar{q}^2 c_\xi^2 - 2 \text{Ifo}(2,1) \bar{q}^\rho \bar{q}^\sigma g^{\gamma\lambda} \bar{q}^2 c_\xi^2 + 2 \text{Ifo}(1,2) \bar{q}^\lambda \bar{q}^\rho g^{\gamma\sigma} \bar{q}^2 c_\xi^2 + 2 \text{Ifo}(2,1) \bar{q}^\lambda \bar{q}^\rho g^{\gamma\sigma} \bar{q}^2 c_\xi^2 - 2 \text{Ifo}(1,2) \bar{q}^\gamma \bar{q}^\lambda g^{\rho\sigma} \bar{q}^2 c_\xi^2 - 2 \text{Ifo}(2,1) \bar{q}^\gamma \bar{q}^\lambda g^{\rho\sigma} \bar{q}^2 c_\xi^2 + 2 \text{Ifo}(1,2) g^{\gamma\sigma} g^{\lambda\rho} \bar{q}^4 c_\xi + 2 \text{Ifo}(2,1) g^{\gamma\sigma} g^{\lambda\rho} \bar{q}^4 c_\xi - 2 \text{Ifo}(1,2) g^{\gamma\lambda} g^{\rho\sigma} \bar{q}^4 c_\xi - 2 \text{Ifo}(2,1) g^{\gamma\lambda} g^{\rho\sigma} \bar{q}^4 c_\xi + 4 D \text{Ifo}(1,1) \bar{q}^\rho \bar{q}^\sigma g^{\gamma\lambda} c_\xi - 8 \text{Ifo}(1,1) \bar{q}^\rho \bar{q}^\sigma g^{\gamma\lambda} c_\xi - 4 D \text{Ifo}(1,1) \bar{q}^\lambda \bar{q}^\rho g^{\gamma\sigma} c_\xi + 8 \text{Ifo}(1,1) \bar{q}^\lambda \bar{q}^\rho g^{\gamma\sigma} c_\xi - 4 D \text{Ifo}(1,1) \bar{q}^\gamma \bar{q}^\sigma g^{\lambda\rho} c_\xi + 8 \text{Ifo}(1,1) \bar{q}^\gamma \bar{q}^\sigma g^{\lambda\rho} c_\xi + 4 D \text{Ifo}(1,1) \bar{q}^\gamma \bar{q}^\lambda g^{\rho\sigma} c_\xi - 8 \text{Ifo}(1,1) \bar{q}^\gamma \bar{q}^\lambda g^{\rho\sigma} c_\xi + D \text{Ifo}(1,2) \bar{q}^\rho \bar{q}^\sigma g^{\gamma\lambda} \bar{q}^2 c_\xi + D \text{Ifo}(2,1) \bar{q}^\rho \bar{q}^\sigma g^{\gamma\lambda} \bar{q}^2 c_\xi - D \text{Ifo}(1,2) \bar{q}^\lambda \bar{q}^\rho g^{\gamma\sigma} \bar{q}^2 c_\xi - D \text{Ifo}(2,1) \bar{q}^\lambda \bar{q}^\rho g^{\gamma\sigma} \bar{q}^2 c_\xi - D \text{Ifo}(1,2) \bar{q}^\gamma \bar{q}^\sigma g^{\lambda\rho} \bar{q}^2 c_\xi - D \text{Ifo}(2,1) \bar{q}^\gamma \bar{q}^\sigma g^{\lambda\rho} \bar{q}^2 c_\xi - 8 \text{Ifo}(1,1) g^{\gamma\sigma} g^{\lambda\rho} \bar{q}^2 c_\xi + 8 \text{Ifo}(1,1) g^{\gamma\sigma} g^{\lambda\rho} \bar{q}^2 - 8 D \text{Ifo}(1,1) g^{\gamma\lambda} g^{\rho\sigma} \bar{q}^2 + 8 \text{Ifo}(1,1) g^{\gamma\lambda} g^{\rho\sigma} \bar{q}^2 \right)$$

Substituindo a integral escalar :

$$\mathbf{resfivpo} = \mathbf{FullSimplify[resivpo/.Ifo} \rightarrow \mathbf{Ifx]} \quad (\text{E.71})$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} i^{D+1} (c_\xi - 2) 4^{-D-1} \pi^{\frac{3}{2} - \frac{D}{2}} g^2 \csc\left(\frac{\pi D}{2}\right) \left(\bar{q}^2\right)^{\frac{D}{2}-3} \left(c_\xi (D-4) \left(\bar{q}^\gamma \left(\bar{q}^\lambda g^{\rho\sigma} - \bar{q}^\sigma g^{\lambda\rho}\right) + \bar{q}^\rho \left(\bar{q}^\sigma g^{\gamma\lambda} - \bar{q}^\lambda g^{\gamma\sigma}\right)\right) + 4\bar{q}^2 \left(g^{\gamma\lambda} g^{\rho\sigma} - g^{\gamma\sigma} g^{\lambda\rho}\right)\right)$$

Realizando a seguinte substituição da dimensão (E.3):

$$\%/.D \rightarrow 4 - 2\epsilon \quad (\text{E.72})$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(3-2\epsilon)\right)} i^{5-2\epsilon} (c_\xi - 2) 4^{2\epsilon-5} \pi^{\frac{1}{2}(2\epsilon-4) + \frac{3}{2}} g^2 \csc\left(\frac{\pi(4-2\epsilon)}{2}\right) \left(\bar{q}^2\right)^{\frac{1}{2}(4-2\epsilon)-3} \left(4\bar{q}^2 \left(g_{\{4-2\epsilon,4-2\epsilon\}}^{\gamma\lambda} g_{\{4-2\epsilon,4-2\epsilon\}}^{\rho\sigma}\right) - 8_{\{4-2\epsilon,4-2\epsilon\}}^{\gamma\sigma} g_{\{4-2\epsilon,4-2\epsilon\}}^{\lambda\rho}\right) - 2c_\xi \epsilon \left(\bar{q}^\gamma \left(\bar{q}^\lambda g_{\{4-2\epsilon,4-2\epsilon\}}^{\rho\sigma} - \bar{q}^\sigma g_{\{4-2\epsilon,4-2\epsilon\}}^{\lambda\rho}\right) + \bar{q}^\rho \left(\bar{q}^\sigma g_{\{4-2\epsilon,4-2\epsilon\}}^{\gamma\lambda} - \bar{q}^\lambda g_{\{4-2\epsilon,4-2\epsilon\}}^{\gamma\sigma}\right)\right)\right)$$

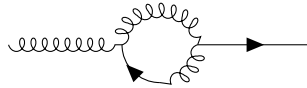
Expandindo em série de ε obtemos o seguinte valor para o diagrama:

$$\text{Normal}[\text{Series}[\%, \{\varepsilon, 0, -1\}]] \quad (E.73)$$

$$\frac{i(c_\xi - 2)g^2(\bar{g}^{\gamma\sigma}\bar{g}^{\lambda\rho} - \bar{g}^{\gamma\lambda}\bar{g}^{\rho\sigma})}{128\pi^2\varepsilon}$$

E.2.4 Diagrama V

Para o seguinte diagrama:



A contração dos índices da equação (8.37) é dada por:

$$\begin{aligned} \text{vpo} = & \text{Contract}[(-I/2g(\text{mt}[\gamma, \mu]\text{mt}[\rho, \nu] - \text{mt}[\gamma, \nu]\text{mt}[\rho, \mu]))(1/(\text{sp}[\rho, \rho])(\text{fv}[\rho, \gamma]\text{mt}[\rho, \beta] - \\ & \text{fv}[\rho, \rho]\text{mt}[\gamma, \beta]))(-I(\text{mt}[\alpha, \nu]/(\text{sp}[\rho + q, \rho + q]) - (c_\xi/(\text{sp}[\rho + q, \rho + q]\text{sp}[\rho + q, \rho + q]) \\ & \text{fv}[\rho + q, \nu]\text{fv}[\rho + q, \alpha])))(-I/2g(\text{mt}[\lambda, \alpha]\text{mt}[\sigma, \beta] - \text{mt}[\lambda, \beta]\text{mt}[\sigma, \alpha]))] \quad (E.74) \\ & - \frac{ic_\xi g^2 \bar{p}^\sigma g^{\lambda\mu}}{2(2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)^2} - \frac{ic_\xi g^2 \bar{q}^\sigma g^{\lambda\mu}}{2(2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)^2} + \frac{ic_\xi g^2 \bar{p}^\lambda g^{\mu\sigma}}{2(2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)^2} + \frac{ic_\xi g^2 \bar{q}^\lambda g^{\mu\sigma}}{2(2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)^2} - \frac{ic_\xi g^2 \bar{p}^\sigma g^{\lambda\mu}(\bar{p}\cdot\bar{q})}{2\bar{p}^2(2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)^2} \\ & - \frac{ic_\xi g^2 \bar{q}^\sigma g^{\lambda\mu}(\bar{p}\cdot\bar{q})}{2\bar{p}^2(2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)^2} + \frac{ic_\xi g^2 \bar{p}^\lambda g^{\mu\sigma}(\bar{p}\cdot\bar{q})}{2\bar{p}^2(2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)^2} + \frac{ic_\xi g^2 \bar{q}^\lambda g^{\mu\sigma}(\bar{p}\cdot\bar{q})}{2\bar{p}^2(2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)^2} + \frac{ig^2 \bar{p}^\sigma g^{\lambda\mu}}{2\bar{p}^2(2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)} - \frac{ig^2 \bar{p}^\lambda g^{\mu\sigma}}{2\bar{p}^2(2(\bar{p}\cdot\bar{q}) + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)} \end{aligned}$$

Fazendo a projeção de (E.74) com o elemento da base $T_{\lambda\sigma,\mu}^{(1)}$ dada em (5.27), obtemos:

$$\begin{aligned} \text{sI1vpo} = & \text{Expand}[\text{Contract}[\text{vpo}(\text{mt}[\sigma, \mu]\text{fv}[q, \lambda] - \text{mt}[\lambda, \mu]\text{fv}[q, \sigma])]/\{\text{sp}[\rho, q] \rightarrow 1/2(\text{sp}[\rho, \rho] - \\ & \text{sp}[\rho, \rho] - \text{sp}[q, q])\}] \quad (E.75) \\ & - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi Dg^2}{4\bar{p}^2} + \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi g^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^4} - \frac{ic_\xi g^2}{4\bar{p}^2} - \frac{ic_\xi g^2 \bar{q}^2}{2\bar{Q}^4} + \frac{iDg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{iDg^2}{2\bar{p}^2} + \\ & \frac{iDg^2}{2\bar{Q}^2} - \frac{ig^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{ig^2}{2\bar{p}^2} - \frac{ig^2}{2\bar{Q}^2} \end{aligned}$$

A integral escrita em termos dos elementos da base conforme (5.28), contraída em relação ao elemento da base $T_{\lambda\sigma,\mu}^{(1)}$, será dada por:

$$\begin{aligned} \text{eq1vpo} = \text{sI1vpo} = & (2D\text{sp}[q, q] - 2\text{sp}[q, q])C_1 \quad (E.76) \\ & - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi Dg^2}{4\bar{p}^2} + \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi g^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^4} - \frac{ic_\xi g^2}{4\bar{p}^2} - \frac{ic_\xi g^2 \bar{q}^2}{2\bar{Q}^4} + \frac{iDg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \\ & \frac{iDg^2}{2\bar{p}^2} + \frac{iDg^2}{2\bar{Q}^2} - \frac{ig^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{ig^2}{2\bar{p}^2} - \frac{ig^2}{2\bar{Q}^2} = C_1 (2D\bar{q}^2 - 2\bar{q}^2) \end{aligned}$$

Determinando os coeficientes C_1 de (5.28):

$$\text{solvpo} = \text{Solve}[\{\text{eq1vpo}\}, \{C_1\}] \quad (E.77)$$

$$\left\{ \left\{ C_1 \rightarrow \frac{2ic_\xi g^2 \bar{p}^2 \bar{q}^2 - ic_\xi g^2 \bar{p}^4 - ic_\xi g^2 \bar{q}^4 + ic_\xi g^2 \bar{Q}^4 + 2ig^2 \bar{p}^2 \bar{Q}^2 + 2ig^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2 - 2ig^2 \bar{Q}^4}{8\bar{p}^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^4} \right\} \right\}$$

Substituindo o coeficiente C_1 pelo valor determinado:

$$\text{solC}_1 \text{vpo} = \text{Expand}[\text{C}_1 / \text{solvpo}][[1]]$$

(E.78)

$$-\frac{ic_\xi g^2 \bar{q}^2}{8\bar{p}^2 \bar{Q}^4} - \frac{ic_\xi g^2 \bar{p}^2}{8\bar{Q}^2 \bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi g^2}{8\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{ic_\xi g^2}{4\bar{Q}^4} - \frac{ig^2}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{ig^2}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{ig^2}{4\bar{q}^2 \bar{Q}^2}$$

Substituindo os denominadores das integrais da constante C_1 , utilizando (E.1), teremos:

$$\text{C}_1 \text{fvpo} = \text{Expand}[\text{s0solC}_1 \text{vpo}] / \text{.subDen}[2, 2] / \text{.subDen}[2, 1] / \text{.subDen}[1, 2] / \text{.subDen}[1, 1] / \text{s0} \rightarrow 0$$

(E.79)

$$-\frac{1}{8} ic_\xi g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(1, 2) + \frac{1}{4} ig^2 \text{Ifo}(1, 1)$$

Reescrevendo a integral (5.28) em relação às componentes da base:

$$\text{resvpo} = \text{Factor}[\text{C}_1 \text{fvpo}(\text{mt}[\sigma, \mu] \text{fv}[q, \lambda] - \text{mt}[\lambda, \mu] \text{fv}[q, \sigma]) / \text{Ifo}[2, 1] \rightarrow \text{Ifo}[1, 2]]$$

(E.80)

$$-\frac{1}{8} ig^2 (2\text{Ifo}(1, 1) - c_\xi \bar{q}^2 \text{Ifo}(1, 2)) (\bar{q}^\sigma g^{\lambda\mu} - \bar{q}^\lambda g^{\mu\sigma})$$

Substituindo a integral escalar (E.3):

$$\text{resfvpo} = \text{FullSimplify}[\text{resvpo} / \text{Ifo} \rightarrow \text{Ifx}]$$

(E.81)

$$-\frac{4^{-D} \pi^{\frac{3}{2} - \frac{D}{2}} g^2 (c_\xi (D-3) + 2) (\cot(\frac{\pi D}{2}) + i) (\bar{q}^2)^{\frac{D}{2} - 2} (\bar{q}^\sigma g^{\lambda\mu} - \bar{q}^\lambda g^{\mu\sigma})}{\Gamma(\frac{D-1}{2})}$$

Realizando a seguinte substituição da dimensão:

$$\%/.D \rightarrow 4 - 2\varepsilon$$

(E.82)

$$-\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}(3 - 2\varepsilon))} 4^{-(4-2\varepsilon)} \pi^{\frac{1}{2}(2\varepsilon-4) + \frac{3}{2}} g^2 (c_\xi (1 - 2\varepsilon) + 2) (\cot(\frac{1}{2}\pi(4 - 2\varepsilon)) + i) (\bar{q}^2)^{\frac{1}{2}(4-2\varepsilon) - 2} (\bar{q}^\sigma g_{\{4-2\varepsilon, 4-2\varepsilon\}}^{\lambda\mu} - \bar{q}^\lambda g_{\{4-2\varepsilon, 4-2\varepsilon\}}^{\mu\sigma})$$

Expandindo em série de ε obtemos que o diagrama será:

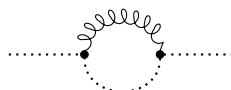
$$\text{Normal}[\text{Series}[\%, \{\varepsilon, 0, -1\}]]$$

(E.83)

$$\frac{(c_\xi + 2) g^2 (\bar{q}^\sigma g^{\lambda\mu} - \bar{q}^\lambda g^{\mu\sigma})}{128\pi^2 \varepsilon}$$

E.2.5 Diagrama VI

Para o seguinte diagrama:



(E.84)

A contração dos índices da equação (5.17) é dada por:

$$\begin{aligned} \text{vipo} = & -\text{Expand}[\text{ScalarProductExpand}[\text{Contract}[-(\text{gfv}[\mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}])(I/\text{sp}[\mathbf{p}, \mathbf{p}])(-I/(\text{sp}[\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p} + \mathbf{q}])) \\ & (\text{mt}[\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}] - c_{\xi}(\text{fv}[\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{v}]\text{fv}[\mathbf{p} + \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}])/(\text{sp}[\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p} + \mathbf{q}])))(\text{gfv}[\mathbf{q}, \mathbf{v}]])] \\ & - \frac{c_{\xi} g^2 (\bar{p} \cdot \bar{q})^2}{\bar{p}^2 (2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)^2} - \frac{c_{\xi} g^2 (\bar{p} \cdot \bar{q})}{(2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)^2} - \frac{c_{\xi} g^2 \bar{q}^2}{(2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)^2} - \frac{c_{\xi} g^2 \bar{q}^2 (\bar{p} \cdot \bar{q})}{\bar{p}^2 (2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)^2} + \frac{g^2 (\bar{p} \cdot \bar{q})}{\bar{p}^2 (2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)} \end{aligned} \quad (\text{E.85})$$

Simplificando o produto escalar dos momentos p e q :

$$\begin{aligned} \text{sI1vipo} = & \text{Expand}[\text{vipo}/\{\text{sp}[\mathbf{p}, \mathbf{q}] \rightarrow 1/2(\text{sp}[\mathbf{Q}, \mathbf{Q}] - \text{sp}[\mathbf{p}, \mathbf{p}] - \text{sp}[\mathbf{q}, \mathbf{q}])\}] \\ & \frac{c_{\xi} g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{c_{\xi} g^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^4} - \frac{c_{\xi} g^2}{4\bar{p}^2} - \frac{c_{\xi} g^2 \bar{q}^2}{2\bar{Q}^4} - \frac{g^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \frac{g^2}{2\bar{p}^2} - \frac{g^2}{2\bar{Q}^2} \end{aligned} \quad (\text{E.86})$$

Substituindo os denominadores da integral, utilizando (E.1), teremos:

$$\begin{aligned} \text{resvipo} = & \text{Expand}[\text{sO sI1vipo}]/\text{.subDen}[2, 2]/\text{.subDen}[2, 1]/\text{.subDen}[1, 2]/\text{.subDen}[1, 1]/\text{s0} \rightarrow 0 \\ & \frac{1}{4} c_{\xi} g^2 \bar{q}^4 \text{Ifo}(1, 2) - \frac{1}{2} g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(1, 1) \end{aligned} \quad (\text{E.87})$$

Substituindo a integral escalar (E.3):

$$\begin{aligned} \text{resfvipo} = & \text{FullSimplify}[\text{resvipo}/\text{Ifo} \rightarrow \text{Ifx}] \\ & \frac{i i^D 2^{1-2D} \pi^{\frac{3}{2}-D} g^2 (c_{\xi} (D-3)+2) \csc(\frac{\pi D}{2}) (\bar{q}^2)^{\frac{D}{2}-1}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \end{aligned} \quad (\text{E.88})$$

Realizando a seguinte substituição da dimensão:

$$\begin{aligned} \%/.D \rightarrow 4 - 2\varepsilon \\ & \frac{i i^{(4-2\varepsilon)} 2^{1-2(4-2\varepsilon)} \pi^{\frac{3}{2}(2\varepsilon-4)+\frac{3}{2}} g^2 (c_{\xi} (1-2\varepsilon)+2) \csc(\frac{1}{2}\pi(4-2\varepsilon)) (\bar{q}^2)^{\frac{1}{2}(4-2\varepsilon)-1}}{\Gamma(\frac{1}{2}(3-2\varepsilon))} \end{aligned} \quad (\text{E.89})$$

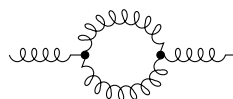
Expandindo em série de ε o diagrama resultante será:

$$\begin{aligned} \text{Normal}[\text{Series}[\%, \{\varepsilon, 0, -1\}]] \\ & - \frac{i(c_{\xi} + 2)g^2 \bar{q}^2}{64\pi^2 \varepsilon} \end{aligned} \quad (\text{E.90})$$

E.3 Diagramas de 1-loop do formalismo de primeira ordem modificado

E.3.1 Diagrama I

Para o seguinte diagrama:



O desenvolvimento é o mesmo que o descrito para o diagrama I no formalismo de segunda ordem.

E.3.2 Diagrama II

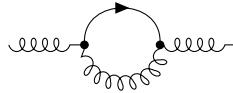
Para o diagrama à seguir:



O desenvolvimento é o mesmo que o descrito para o diagrama II no formalismo de segunda ordem.

E.3.3 Diagrama III

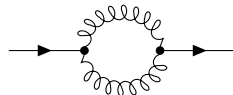
Para o seguinte diagrama:



O desenvolvimento é o mesmo que o descrito para o diagrama III no formalismo de primeira ordem.

E.3.4 Diagrama IV

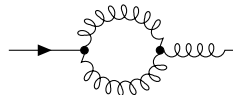
Para o seguinte diagrama:



O desenvolvimento é o mesmo que o descrito para o diagrama IV no formalismo de primeira ordem.

E.3.5 Diagrama V

Para o seguinte diagrama:



A contração dos índices da equação (5.37) é dada por:

$$\begin{aligned} \text{vpom} = & \text{Contract}[1/2(-I/2g(\text{mt}[\lambda, \mu]\text{mt}[\sigma, \nu] - \text{mt}[\lambda, \nu]\text{mt}[\sigma, \mu]))(-I(\text{mt}[\nu, \beta]/\text{sp}[p, p] - \\ & c_{\xi}\text{fv}[p, \nu]\text{fv}[p, \beta]/(\text{sp}[p, p]\text{sp}[p, p])))(-I(\text{mt}[\mu, \alpha]/\text{sp}[p+q, p+q] - c_{\xi}\text{fv}[p+q, \mu] \\ & \text{fv}[p+q, \alpha]/(\text{sp}[p+q, p+q]\text{sp}[p+q, p+q])))(g(\text{fv}[p-q, \alpha]\text{mt}[\gamma, \beta] + \text{fv}[-2p-q, \gamma] \\ & \text{mt}[\alpha, \beta] + \text{fv}[p+2q, \beta]\text{mt}[\gamma, \alpha]))] \end{aligned}$$

(E.91)

$$\begin{aligned}
& -\frac{ic_\xi \bar{p}^\sigma g^{\gamma\lambda} (\bar{p} \cdot \bar{q}) g^2}{2\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{ic_\xi \bar{p}^\lambda g^{\gamma\sigma} (\bar{p} \cdot \bar{q}) g^2}{2\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} - \frac{ic_\xi \bar{p}^\sigma g^{\gamma\lambda} g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{3i\bar{q}^\sigma g^{\gamma\lambda} g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \\
& \frac{ic_\xi \bar{p}^\lambda g^{\gamma\sigma} g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} - \frac{3i\bar{q}^\lambda g^{\gamma\sigma} g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \frac{ic_\xi \bar{p}^\gamma \bar{q}^\lambda \bar{p}^\sigma g^2}{4\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} - \frac{ic_\xi \bar{p}^\gamma \bar{p}^\lambda \bar{q}^\sigma g^2}{4\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)} + \\
& \frac{ic_\xi \bar{p}^\sigma g^{\gamma\lambda} g^2}{4(\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{ic_\xi \bar{p}^\lambda g^{\gamma\sigma} g^2}{4(\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{ic_\xi \bar{q}^\lambda g^{\gamma\sigma} g^2}{4(\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \frac{ic_\xi \bar{q}^\gamma \bar{q}^\lambda \bar{p}^\sigma (\bar{p} \cdot \bar{q}) g^2}{4\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \\
& \frac{ic_\xi \bar{q}^\gamma \bar{p}^\lambda \bar{q}^\sigma (\bar{p} \cdot \bar{q}) g^2}{4\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{ic_\xi \bar{p}^\sigma g^{\gamma\lambda} \bar{q}^2 g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{ic_\xi \bar{q}^\sigma g^{\gamma\lambda} \bar{q}^2 g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \frac{ic_\xi \bar{q}^\sigma g^{\gamma\lambda} g^2}{4(\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \\
& \frac{ic_\xi \bar{p}^\lambda g^{\gamma\sigma} \bar{q}^2 g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \frac{ic_\xi \bar{q}^\lambda g^{\gamma\sigma} \bar{q}^2 g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{ic_\xi \bar{p}^\gamma \bar{q}^\lambda \bar{p}^\sigma \bar{q}^2 g^2}{4\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \frac{ic_\xi \bar{p}^\gamma \bar{p}^\lambda \bar{q}^\sigma \bar{q}^2 g^2}{4\bar{p}^4 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \\
& \frac{ic_\xi \bar{p}^\gamma \bar{q}^\lambda \bar{p}^\sigma g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} + \frac{ic_\xi \bar{q}^\gamma \bar{q}^\lambda \bar{p}^\sigma g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{ic_\xi \bar{p}^\gamma \bar{p}^\lambda \bar{q}^\sigma g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2} - \frac{ic_\xi \bar{q}^\gamma \bar{p}^\lambda \bar{q}^\sigma g^2}{4\bar{p}^2 (\bar{p}^2 + 2(\bar{p} \cdot \bar{q}) + \bar{q}^2)^2}
\end{aligned}$$

Fazendo a projeção de (E.91) com o elemento da base $T_{\lambda\sigma,\gamma}^{(1)}$ dada em (5.38) obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{sI1vpom} &= \text{Expand}[\text{Contract}[\text{vpom}(\text{mt}[\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\gamma}]\text{fv}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\sigma}] - \text{mt}[\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\sigma}]\text{fv}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\lambda}])]/\text{.sp}[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \rightarrow \\
& \quad 1/2(\text{sp}[\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}] - \text{sp}[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}] - \text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}])] \rightarrow \quad (E.92)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^6}{8\bar{p}^4 \bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{8\bar{p}^4} - \frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{8\bar{Q}^4} - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^4 \bar{Q}^2} - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \\
& \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^4} - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^4} - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi Dg^2}{4\bar{p}^2} + \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi Dg^2}{4\bar{Q}^2} + \frac{3ic_\xi g^2 \bar{q}^4}{8\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{3ic_\xi g^2 \bar{q}^4}{8\bar{p}^2 \bar{Q}^4} - \frac{3ic_\xi g^2 \bar{q}^2}{4\bar{p}^4} + \frac{3ic_\xi g^2 \bar{Q}^2}{8\bar{p}^4} + \\
& \frac{3ic_\xi g^2 \bar{p}^2}{8\bar{Q}^4} - \frac{3ic_\xi g^2}{8\bar{p}^2} - \frac{3ic_\xi g^2 \bar{q}^2}{4\bar{Q}^4} - \frac{3ic_\xi g^2}{8\bar{Q}^2} + \frac{3iDg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{3ig^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2}
\end{aligned}$$

A integral escrita em termos dos elementos da base, conforme (5.39), contraída em relação ao elemento da base $T_{\lambda\sigma,\gamma}^{(1)}$ dada em (5.38), será dada por:

$$\mathbf{eq1vpom} = \mathbf{sI1vpom} == (2D\text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}] - 2\text{sp}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}])\mathbf{C}_1 \quad (E.93)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^6}{8\bar{p}^4 \bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{8\bar{p}^4} - \frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{8\bar{Q}^4} - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^4 \bar{Q}^2} - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^4}{4\bar{p}^2 \bar{Q}^4} - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} + \\
& \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^4} - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{Q}^2}{4\bar{p}^4} - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{p}^2}{4\bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi Dg^2}{4\bar{p}^2} + \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{2\bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi Dg^2}{4\bar{Q}^2} + \frac{3ic_\xi g^2 \bar{q}^4}{8\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{3ic_\xi g^2 \bar{q}^4}{8\bar{p}^2 \bar{Q}^4} - \frac{3ic_\xi g^2 \bar{q}^2}{4\bar{p}^4} + \frac{3ic_\xi g^2 \bar{Q}^2}{8\bar{p}^4} + \\
& \frac{3ic_\xi g^2 \bar{p}^2}{8\bar{Q}^4} - \frac{3ic_\xi g^2}{8\bar{p}^2} - \frac{3ic_\xi g^2 \bar{q}^2}{4\bar{Q}^4} - \frac{3ic_\xi g^2}{8\bar{Q}^2} + \frac{3iDg^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{3ig^2 \bar{q}^2}{2\bar{p}^2 \bar{Q}^2} = \mathbf{C}_1 (2D\bar{q}^2 - 2\bar{q}^2)
\end{aligned}$$

Determinando o coeficiente \mathbf{C}_1 de (5.39):

$$\mathbf{solvpom} = \text{Solve}[\{\mathbf{eq1vpom}\}, \{\mathbf{C}_1\}] \quad (E.94)$$

$$\begin{aligned}
\{\{\mathbf{C}_1 \rightarrow \frac{1}{16(D-1)\bar{p}^4 \bar{q}^2 \bar{Q}^4} i(2c_\xi^2 g^2 \bar{p}^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2 - c_\xi^2 g^2 \bar{p}^4 \bar{q}^2 + 2c_\xi^2 g^2 \bar{p}^2 \bar{q}^4 - c_\xi^2 g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^4 + 2c_\xi^2 g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^2 - \\
c_\xi^2 g^2 \bar{q}^6 - 4c_\xi Dg^2 \bar{p}^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2 + 4c_\xi Dg^2 \bar{p}^4 \bar{q}^2 - 2c_\xi Dg^2 \bar{p}^2 \bar{q}^4 + 2c_\xi Dg^2 \bar{p}^4 \bar{Q}^2 + 2c_\xi Dg^2 \bar{p}^2 \bar{Q}^4 - 2c_\xi Dg^2 \bar{p}^6 + \\
4c_\xi Dg^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^4 - 2c_\xi Dg^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^2 - 2c_\xi Dg^2 \bar{Q}^6 - 6c_\xi g^2 \bar{p}^4 \bar{q}^2 + 3c_\xi g^2 \bar{p}^2 \bar{q}^4 - 3c_\xi g^2 \bar{p}^4 \bar{Q}^2 - 3c_\xi g^2 \bar{p}^2 \bar{Q}^4 + 3c_\xi g^2 \bar{p}^6 - \\
6c_\xi g^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^4 + 3c_\xi g^2 \bar{q}^4 \bar{Q}^2 + 3c_\xi g^2 \bar{Q}^6 + 12Dg^2 \bar{p}^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2 - 12g^2 \bar{p}^2 \bar{q}^2 \bar{Q}^2)\}\}
\end{aligned}$$

Substituindo o coeficiente \mathbf{C}_1 pelo valor determinado:

$$\mathbf{solC}_1 \text{vpom} = \text{Expand}[\mathbf{C}_1/\mathbf{solvpom}][[1]] \quad (E.95)$$

$$\begin{aligned} & \frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{8(D-1)\bar{p}^4 \bar{Q}^2} - \frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^4}{16(D-1)\bar{p}^4 \bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^2}{8(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi^2 g^2}{8(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{ic_\xi^2 g^2}{16(D-1)\bar{p}^4} - \frac{ic_\xi^2 g^2}{16(D-1)\bar{Q}^4} - \\ & \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{Q}^2}{8(D-1)\bar{p}^4 \bar{q}^2} + \frac{3ic_\xi g^2 \bar{Q}^2}{16(D-1)\bar{p}^4 \bar{q}^2} - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{8(D-1)\bar{p}^4 \bar{Q}^2} + \frac{3ic_\xi g^2 \bar{q}^2}{16(D-1)\bar{p}^4 \bar{Q}^2} - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^2}{8(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^4} + \frac{3ic_\xi g^2 \bar{q}^2}{16(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^4} - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{p}^2}{8(D-1)\bar{q}^2 \bar{Q}^4} + \\ & \frac{3ic_\xi g^2 \bar{p}^2}{16(D-1)\bar{q}^2 \bar{Q}^4} + \frac{ic_\xi Dg^2}{8(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^2} - \frac{3ic_\xi g^2}{16(D-1)\bar{p}^2 \bar{q}^2} - \frac{ic_\xi Dg^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{3ic_\xi g^2}{8(D-1)\bar{p}^4} + \frac{ic_\xi Dg^2}{4(D-1)\bar{Q}^4} - \frac{3ic_\xi g^2}{8(D-1)\bar{Q}^4} + \\ & \frac{ic_\xi Dg^2}{4(D-1)\bar{p}^4} + \frac{ic_\xi Dg^2}{8(D-1)\bar{q}^2 \bar{Q}^2} - \frac{3ic_\xi g^2}{16(D-1)\bar{q}^2 \bar{Q}^2} + \frac{3iDg^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2} - \frac{3ig^2}{4(D-1)\bar{p}^2 \bar{Q}^2} \end{aligned}$$

Substituindo os denominadores das integrais da constante C_1 , utilizando (E.1), teremos:

$$C_1 \text{fvpom} = \text{Expand}[\text{s0sol}C_1 \text{vpom}]/.\text{subDen}[2,2]/.\text{subDen}[2,1]/.\text{subDen}[1,2]/.\text{subDent}[1,1]/.\text{s0} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} & - \frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^4 \text{Ifo}(2,2)}{16(D-1)} + \frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(1,2)}{8(D-1)} + \frac{ic_\xi^2 g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(2,1)}{8(D-1)} - \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(1,2)}{8(D-1)} + \frac{3ic_\xi g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(1,2)}{16(D-1)} - \frac{3ig^2 \text{Ifo}(1,1)}{4(D-1)} - \\ & \frac{ic_\xi Dg^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(2,1)}{8(D-1)} + \frac{3ic_\xi g^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(2,1)}{16(D-1)} + \frac{ic_\xi^2 g^2 \text{Ifo}(1,1)}{8(D-1)} - \frac{ic_\xi Dg^2 \text{Ifo}(1,1)}{4(D-1)} + \frac{3iDg^2 \text{Ifo}(1,1)}{4(D-1)} \end{aligned} \quad (\text{E.96})$$

Reescrevendo a integral (5.39) em relação à componente da base:

$$\begin{aligned} \text{resvpom} &= \text{Factor}[C_1 \text{fvpom} (\text{mt}[\lambda, \gamma] \text{fv}[q, \sigma] - \text{mt}[\sigma, \gamma] \text{fv}[q, \lambda])]/.\text{Ifo}[2,1] \rightarrow \text{Ifo}[1,2] \\ & - \frac{1}{16(D-1)} ig^2 (c_\xi^2 \bar{q}^4 \text{Ifo}(2,2) - 2c_\xi^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(1,2) - 2c_\xi^2 \bar{q}^2 \text{Ifo}(2,1) + 2c_\xi D\bar{q}^2 \text{Ifo}(1,2) + 2c_\xi D\bar{q}^2 \text{Ifo}(2,1) - 3c_\xi \bar{q}^2 \text{Ifo}(1,2) - \\ & - 3c_\xi \bar{q}^2 \text{Ifo}(2,1) - 2c_\xi^2 \text{Ifo}(1,1) + 4c_\xi D\text{Ifo}(1,1) - 12D\text{Ifo}(1,1) + 12\text{Ifo}(1,1)) (\bar{q}^\sigma g^{\gamma\lambda} - \bar{q}^\lambda g^{\gamma\sigma}) \end{aligned} \quad (\text{E.97})$$

Substituindo a integral escalar (E.3):

$$\begin{aligned} \text{resfvpom} &= \text{FullSimplify}[\text{resvpom}/.\text{Ifo} \rightarrow \text{Ifx}] \\ & - \frac{2^{-2D-1} \pi^{\frac{3}{2}-\frac{D}{2}} g^2 (c_\xi (c_\xi (D-4) - 4D + 18) - 12) \cot(\frac{\pi D}{2} + 1) (\bar{q}^2)^{\frac{D}{2}-2} (\bar{q}^\sigma g^{\gamma\lambda} - \bar{q}^\lambda g^{\gamma\sigma})}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \end{aligned} \quad (\text{E.98})$$

Realizando a seguinte substituição da dimensão:

$$\begin{aligned} \%/.D &\rightarrow 4 - 2\varepsilon \\ & - \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}(3 - 2\varepsilon))} 2^{-2(4-2\varepsilon)-1} \pi^{\frac{1}{2}(2\varepsilon-4)+\frac{3}{2}} g^2 (c_\xi (-2c_\xi \varepsilon - 4(4-2\varepsilon) + 18) - 12) \cot(\frac{1}{2}\pi(4-2\varepsilon) + i) \\ & \times (\bar{q}^2)^{\frac{1}{2}(4-2\varepsilon)-2} (\bar{q}^\sigma g_{\{4-2\varepsilon, 4-2\varepsilon\}}^{\gamma\lambda} - \bar{q}^\lambda g_{\{4-2\varepsilon, 4-2\varepsilon\}}^{\gamma\sigma}) \end{aligned} \quad (\text{E.99})$$

Expandindo em série de ε obtemos que o diagrama será:

$$\begin{aligned} \text{Normal}[\text{Series}[\%, \{\varepsilon, 0, -1\}]] \\ & - \frac{(c_\xi - 6)g^2 (\bar{q}^\lambda q^{\gamma\sigma} - \bar{q}^\sigma q^{\gamma\lambda})}{128\pi^2 \varepsilon} \end{aligned} \quad (\text{E.100})$$

E.3.6 Diagrama VI

Para o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{c} \text{.....} \bullet \text{-----} \bullet \text{.....} \\ \quad \quad \quad \curvearrowright \\ \quad \quad \quad \text{.....} \end{array} \quad (\text{E.101})$$

O desenvolvimento é o mesmo que o descrito para o diagrama VI no formalismo de primeira ordem.

CÁLCULOS DAS INTEGRAIS TÉRMICAS

No capítulo (8) a auto-energia térmica dos campos de glúons foi dada por (8.15), se consideramos que a parte tensorial do integrando obedece à seguinte propriedade de transversalidade:

$$q^\mu \mathcal{J}^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{F.1})$$

onde $\mathcal{J}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{(P^\mu q^\nu + P^\nu q^\mu)}{(P \cdot q)} + \frac{q^2 P^\mu P^\nu}{(P \cdot q)^2}$, obtemos os seguintes tensores para a base que obedecem a propriedade de transversalidade:

$$T_1^{\mu\nu} = \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - \eta^{\mu\nu} \quad (\text{F.2})$$

$$T_2^{\mu\nu} = (u^\mu - \frac{(q \cdot u)}{q^2} q^\mu)(u^\nu - \frac{(q \cdot u)}{q^2} q^\nu) \quad (\text{F.3})$$

onde o vetor u é o vetor da velocidade do banho térmico, cujo valor é $u = (1, \vec{0})$.

Assim a integral pode ser reescrita da seguinte forma:

$$I^{\mu\nu} = C_1 T_1^{\mu\nu} + C_2 T_2^{\mu\nu} \quad (\text{F.4})$$

onde $I^{\mu\nu}$ é a integral de $\mathcal{J}^{\mu\nu}$.

Realizando a projeção em cada uma das componentes da base, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} T_{1\mu\nu} I^{\mu\nu} &= C_1 T_{1\mu\nu} T_1^{\mu\nu} + C_2 T_{1\mu\nu} T_2^{\mu\nu} \\ T_{2\mu\nu} I^{\mu\nu} &= C_1 T_{2\mu\nu} T_1^{\mu\nu} + C_2 T_{2\mu\nu} T_2^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Resolvendo estas equações, considerando apenas os termos de $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, obtemos os seguin-

tes valores para os coeficientes:

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{q^4(P.u)^2}{(d-2)(P.q)^2((q.u)^2 - q^2u^2)} + \frac{P^2q^4u^2}{(d-2)(P.q)^2((q.u)^2 - q^2u^2)} - \frac{P^2q^2(q.u)^2}{(d-2)(P.q)^2((q.u)^2 - q^2u^2)} + \\
&+ \frac{2q^2(P.u)(q.u)}{(d-2)(P.q)((q.u)^2 - q^2u^2)} + \frac{dq^2u^2}{(d-2)((q.u)^2 - q^2u^2)} - \frac{3q^2u^2}{(d-2)((q.u)^2 - q^2u^2)} + \\
&+ \frac{2(q.u)^2}{(d-2)((q.u)^2 - q^2u^2)} - \frac{d(q.u)^2}{(d-2)((q.u)^2 - q^2u^2)} \\
C_2 &= \frac{dq^6(P.u)^2}{(d-2)(P.q)^2((q.u)^2 - q^2u^2)^2} - \frac{q^6(P.u)^2}{(d-2)(P.q)^2((q.u)^2 - q^2u^2)^2} - \frac{2q^2(q.u)^2}{(d-2)((q.u)^2 - q^2u^2)^2} + \\
&+ \frac{P^2q^4(q.u)^2}{(d-2)(P.q)^2((q.u)^2 - q^2u^2)^2} - \frac{2dq^4(P.u)(q.u)}{(d-2)(P.q)((q.u)^2 - q^2u^2)^2} + \frac{2q^4(P.u)(q.u)}{(d-2)(P.q)((q.u)^2 - q^2u^2)^2} + \\
&+ \frac{q^4u^2}{(d-2)((q.u)^2 - q^2u^2)^2} + \frac{dq^2(q.u)^2}{(d-2)((q.u)^2 - q^2u^2)^2} - \frac{P^2q^6u^2}{(d-2)(P.q)^2((q.u)^2 - q^2u^2)^2}
\end{aligned} \tag{F.6}$$

Dado o valor de $u = (1, \vec{0})$, temos que $(P.u) = 1$, $(q.u) = q_0$ e $(u.u) = 1$, assim utilizando estes valores reescrevemos os coeficientes da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{q^4}{(d-2)(P.q)^2(q_0^2 - q^2)} + \frac{2q^2q_0}{(d-2)(P.q)(q_0^2 - q^2)} + \frac{dq^2}{(d-2)(q_0^2 - q^2)} - \frac{3q^2}{(d-2)(q_0^2 - q^2)} + \\
&+ \frac{2q_0^2}{(d-2)(q_0^2 - q^2)} - \frac{dq_0^2}{(d-2)(q_0^2 - q^2)} = -\frac{q^4}{(d-2)(q_0 - |\vec{q}|\cos\theta)^2(\vec{q}^2)} + \frac{(d-3)q^2}{(d-2)(\vec{q}^2)} - \\
&- \frac{q_0^2}{(\vec{q}^2)} + \frac{2q^2q_0}{(d-2)(q_0 - |\vec{q}|\cos\theta)(\vec{q}^2)} \\
C_2 &= \frac{dq^6}{(d-2)(P.q)^2(q_0^2 - q^2)^2} - \frac{q^6}{(d-2)(P.q)^2(q_0^2 - q^2)^2} - \frac{2dq^4q_0}{(d-2)(P.q)(q_0^2 - q^2)^2} + \\
&+ \frac{2q^4q_0}{(d-2)(P.q)(q_0^2 - q^2)^2} + \frac{q^4}{(d-2)(q_0^2 - q^2)^2} + \frac{dq^2q_0^2}{(d-2)(q_0^2 - q^2)^2} - \frac{2q^2q_0^2}{(d-2)(q_0^2 - q^2)^2} = \\
&= \frac{(d-1)q^6}{(d-2)(q_0 - |\vec{q}|\cos\theta)^2(\vec{q}^2)^4} - \frac{2(d-1)q^4q_0}{(d-2)(q_0 - |\vec{q}|\cos\theta)(\vec{q}^2)^4} + \frac{q^4}{(d-2)(\vec{q}^2)^4} + \frac{q^2q_0^2}{(\vec{q}^2)^4}
\end{aligned} \tag{F.7}$$

nas últimas passagens utilizou-se o fato de que o produto entre os momentos pode ser reescrito da seguinte forma $(P.q) = (q_0 - |\vec{q}|\cos\theta)$ e que $q_0^2 - q^2 = q_0^2 - q_0^2 + \vec{q}^2 = \vec{q}^2$.

Deste modo, obtemos que a auto-energia térmica dos campos de glúons é dada por:

$$\begin{aligned}
\Pi_{Bóson}^{ab,\mu\nu} &= \frac{g^2C_2(G)\delta^{ab}}{2} \left[\int d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^{d-3}}{e^{\beta|\vec{p}|-1}} \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} 2 \left(-\frac{q^4}{(q_0 - |\vec{q}|\cos\theta)^2(\vec{q}^2)} + \frac{2q^2q_0}{(q_0 - |\vec{q}|\cos\theta)(\vec{q}^2)} + \right. \right. \\
&+ \left. \frac{(d-3)q^2}{\vec{q}^2} - \frac{(d-2)q_0^2}{(\vec{q}^2)} \right) T_1^{\mu\nu} + \int d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^{d-3}}{e^{\beta|\vec{p}|-1}} \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} 2 \left(\frac{(d-1)q^6}{(q_0 - |\vec{q}|\cos\theta)^2(\vec{q}^2)^4} - \right. \\
&- \left. \frac{2(d-1)q^4q_0}{(q_0 - |\vec{q}|\cos\theta)(\vec{q}^2)^4} + \frac{q^4}{(\vec{q}^2)^4} + \frac{(d-2)q^2q_0^2}{(\vec{q}^2)^4} \right) T_2^{\mu\nu} \left. \right]
\end{aligned} \tag{F.8}$$

Notamos que existem três tipos de integrais, que representamos da seguinte forma:

$$I_1 = \int d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^{d-3}}{e^{\beta|\vec{p}|-1}} \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \tag{F.9}$$

$$I_2 = \int d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^{d-3}}{e^{\beta|\vec{p}|-1}} \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{q_0 - |\vec{q}|\cos\theta} \quad (\text{F.10})$$

$$I_3 = \int d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^{d-3}}{e^{\beta|\vec{p}|-1}} \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{(q_0 - |\vec{q}|\cos\theta)^2} \quad (\text{F.11})$$

Calculando a primeira integral dada na forma de integrais do ângulo sólido:

$$I_1 = \int d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^{d-3}}{e^{\beta|\vec{p}|-1}} \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \quad (\text{F.12})$$

A integral da superfície esférica em D-1 dimensão, conforme [41], será:

$$\int \Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \quad (\text{F.13})$$

Já a integral no momento, será dada fazendo a seguinte mudança de variável $\vec{p} \rightarrow uT$, com o momento sendo um múltiplo da temperatura, assim escrevemos ela da seguinte forma:

$$\int d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^{d-3}}{e^{\beta|\vec{p}|-1}} = T^{d-2} \int du \frac{u^{d-3}}{e^u - 1} \quad (\text{F.14})$$

onde u é uma constante qualquer, como $|\vec{p}|$ resulta em valores positivos de u , podemos expandir o fator de distribuição de Bose-Einstein da seguinte forma:

$$\frac{1}{e^u - 1} = \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-nu} \quad (\text{F.15})$$

com esta expressão reescrevemos a integral em u da seguinte forma:

$$\int_0^{\infty} du u^{d-3} \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-nu} \quad (\text{F.16})$$

usando a seguinte regra, obtemos:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^{\infty} du u^a e^{-nu} = (-1)^a \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{d^a}{dn^a} \int_0^{\infty} du e^{-nu} = (-1)^a \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{d^a}{dn^a} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a!}{n^{a+1}} \quad (\text{F.17})$$

Utilizando a função Zeta:

$$\zeta(a+1) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a!}{n^{a+1}} \quad (\text{F.18})$$

e a função Gamma:

$$\Gamma(a+1) = a! \quad (\text{F.19})$$

reescrevemos a integral em u da seguinte forma:

$$\int du \frac{u^{d-3}}{e^u - 1} = \Gamma(d-2)\zeta(d-2) \quad (\text{F.20})$$

e conseqüentemente a integral em \vec{p} será:

$$\int d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^{d-3}}{e^{\beta|\vec{p}|} - 1} = T^{d-2} \Gamma(d-2) \zeta(d-2) \quad (\text{F.21})$$

Considerando a integral na parte angular e na parte do momento, temos que a primeira integral resulta em:

$$I_1 = \frac{T^{d-2} \Gamma(d-2) \zeta(d-2)}{2^{d-2} \pi^{\frac{d-1}{2}} \Gamma(\frac{d-1}{2})} \quad (\text{F.22})$$

Calculando a segunda integral dada na forma de integrais do ângulo sólido, que diferentemente da primeira possui uma dependência do ângulo polar no denominador:

$$I_2 = \int d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^{d-3}}{e^{\beta|\vec{p}|} - 1} \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{q_0 - |\vec{q}| \cos\theta} \quad (\text{F.23})$$

A parte da integral no momento será a mesma obtida em (F.21). Verifiquemos então apenas a parte angular, que é reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{q_0 - |\vec{q}| \cos\theta} &= \int \frac{d\Omega_{d-2}}{(2\pi)^{d-1}} \int_0^\pi d\theta_{d-3} \frac{\text{sen}^{d-3}\theta_{d-3}}{q_0 - |\vec{q}| \cos\theta_{d-3}} = \\ &= \frac{1}{2^{d-2} \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d-2}{2})} \int_0^\pi d\theta_{d-3} \frac{\text{sen}^{d-3}\theta_{d-3}}{q_0 - |\vec{q}| \cos\theta_{d-3}} \end{aligned} \quad (\text{F.24})$$

onde a integral em Ω_{d-2} é a integral da superfície esférica conforme (F.13).

Fazendo a seguinte mudança de variável $q_0 - |\vec{q}| \cos\theta_{d-3} = x$ redefinimos a integral em θ_{d-3} como sendo uma integral em x :

$$\int_0^\pi d\theta_{d-3} \frac{\text{sen}^{d-3}\theta_{d-3}}{q_0 - |\vec{q}| \cos\theta_{d-3}} = \int_{q_0+|\vec{q}|}^{q_0-|\vec{q}|} dx - \frac{1}{|\vec{q}|x} \quad (\text{F.25})$$

onde usamos $d\theta_{d-3} = -\frac{dx}{|\vec{q}| \text{sen}\theta_{d-3}}$.

Realizando a integral obtemos:

$$\int_{q_0+|\vec{q}|}^{q_0-|\vec{q}|} dx - \frac{1}{|\vec{q}|x} = \frac{1}{|\vec{q}|} \ln \left[\frac{q_0 + |\vec{q}|}{q_0 - |\vec{q}|} \right] \quad (\text{F.26})$$

A integral angular resultante será:

$$\int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{q_0 - |\vec{q}| \cos\theta} = \frac{1}{2^{d-2} \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d-2}{2}) |\vec{q}|} \ln \left[\frac{q_0 + |\vec{q}|}{q_0 - |\vec{q}|} \right] \quad (\text{F.27})$$

Deste modo a segunda integral obtida é dada por:

$$I_2 = \frac{T^{d-2} \Gamma(d-2) \zeta(d-2)}{2^{d-2} \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d-2}{2}) |\vec{q}|} \ln \left[\frac{q_0 + |\vec{q}|}{q_0 - |\vec{q}|} \right] \quad (\text{F.28})$$

Calculando a terceira integral dada na forma de integrais do ângulo sólido, que também possui uma dependência do ângulo polar no denominador:

$$I_3 = \int d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^{d-3}}{e^{\beta|\vec{p}|-1}} \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{(q_0 - |\vec{q}|\cos\theta)^2} \quad (\text{F.29})$$

A integral no momento será a mesma obtida em (F.21). Já a integral na parte angular será:

$$\int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{(q_0 - |\vec{q}|\cos\theta)^2} = \frac{1}{2^{d-2}\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d-2}{2})} \int_0^\pi d\theta_{d-3} \frac{\text{sen}^{d-3}\theta_{d-3}}{(q_0 - |\vec{q}|\cos\theta_{d-3})^2} \quad (\text{F.30})$$

após a mudança de variável a reescrevemos como sendo:

$$\int_0^\pi d\theta_{d-3} \frac{\text{sen}^{d-3}\theta_{d-3}}{(q_0 - |\vec{q}|\cos\theta_{d-3})^2} = \int_{q_0-|\vec{q}|}^{q_0+|\vec{q}|} dx - \frac{1}{|\vec{q}|x^2} = -\frac{2}{q^2} \quad (\text{F.31})$$

Realizando a integral obtemos:

$$\int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{(q_0 - |\vec{q}|\cos\theta)^2} = -\frac{1}{2^{d-2}\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d-2}{2}) q^2} \quad (\text{F.32})$$

que junto com a integral no momento resulta no seguinte valor para a terceira integral:

$$I_3 = -\frac{T^{d-2} \Gamma(d-2) \zeta(d-2)}{2^{d-3}\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d-2}{2}) q^2} \quad (\text{F.33})$$

Assim a auto-energia térmica dos campos de glúons é dada utilizando os resultados das integrais (F.22), (F.28) e (F.33) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Pi_{Bóson}^{\mu\nu} &= g^2 C_2(G) \delta^{ab} \left[\left(\frac{(d-3)q^2}{\vec{q}^2} - \frac{(d-2)q_0^2}{\vec{q}^2} \right) I_1 + \frac{2q^2 q_0}{\vec{q}^2} I_2 - \frac{q^4}{\vec{q}^2} I_3 \right] T_1^{\mu\nu} + \\ &+ \left[\left(\frac{q^4}{\vec{q}^4} + \frac{(d-2)q^2 q_0^2}{\vec{q}^4} \right) I_1 - \frac{2(d-1)q^4 q_0}{\vec{q}^4} I_2 + \frac{(d-1)q^6}{\vec{q}^4} I_3 \right] T_2^{\mu\nu} = \\ &= \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{2^{d-2}\pi^{\frac{d-1}{2}} \Gamma(\frac{d-1}{2})} T^{d-2} \Gamma(d-2) \zeta(d-2) \mathcal{F}^{\mu\nu}(q) \end{aligned} \quad (\text{F.34})$$

onde $\mathcal{F}^{\mu\nu}(q)$ é uma função que depende dos momentos externos e dos tensores da base, dada conforme:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\mu\nu}(q) &= \left[-\frac{(d-3)q^2}{\vec{q}^2} - \frac{(d-2)q_0^2}{\vec{q}^2} + \frac{2q^2 q_0}{|\vec{q}|^3 \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{d-2}{2})} \ln \left[\frac{q_0 + |\vec{q}|}{q_0 - |\vec{q}|} \right] + \frac{q^2}{\vec{q}^2 \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{d-2}{2})} \right] T_1^{\mu\nu} \\ &+ \left[\frac{q^4}{\vec{q}^4} + \frac{(d-2)q^2 q_0^2}{\vec{q}^4} - \frac{2(d-1)q^4 q_0}{|\vec{q}|^5 \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{d-2}{2})} \ln \left[\frac{q_0 + |\vec{q}|}{q_0 - |\vec{q}|} \right] - \frac{(d-1)q^4}{\vec{q}^4 \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{d-2}{2})}{\Gamma(\frac{d-2}{2})} \right. \\ &\times \left. \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \right] T_2^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{F.35})$$

REFERÊNCIAS

- 1 LORENTZ, H. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light. *Royal Academy*, v. 6, p. 809, 1904. Citado na página 19.
- 2 EINSTEIN, A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, v. 322, p. 891–921, 1905. Citado na página 19.
- 3 POINCARÉ, H. Sur la dynamique de l'électron. *Académie des Sciences*, v. 140, p. 1504–1508, 1905. Citado na página 19.
- 4 WEYL, H. Gravitation and electricity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1918, p. 465, 1918. Citado na página 19.
- 5 WEYL, H. Electron and gravitation. *Z. Phys.*, v. 56, p. 330–352, 1929. Citado na página 19.
- 6 FOCK, V. On the invariant form of the wave equations and the equations of motion for a charged point mass. *Z. Phys.*, v. 39, p. 226–232, 1926. Citado na página 19.
- 7 TOMONAGA, S. On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields*. *Progress of Theoretical Physics*, v. 1, n. 2, p. 27–42, 08 1946. Citado na página 19.
- 8 SCHWINGER, J. S. On Quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, v. 73, p. 416–417, 1948. Citado na página 19.
- 9 SCHWINGER, J. S. Quantum electrodynamics i: A covariant formulation. *Phys. Rev.*, v. 74, p. 1439, 1948. Citado na página 19.
- 10 FEYNMAN, R. P. Space - time approach to quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, v. 76, p. 769–789, 1949. Citado na página 19.
- 11 FEYNMAN, R. P. The Theory of positrons. *Phys. Rev.*, v. 76, p. 749–759, 1949. Citado na página 19.
- 12 FEYNMAN, R. P. Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction. *Phys. Rev.*, v. 80, p. 440–457, 1950. Citado na página 19.
- 13 YANG, C.-N.; MILLS, R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, v. 96, p. 191–195, 1954. Citado na página 20.
- 14 GLASHOW, S. L. The renormalizability of vector meson interactions. *Nucl. Phys.*, v. 10, p. 107–117, 1959. Citado na página 20.
- 15 WEINBERG, S. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 19, p. 1264–1266, Nov 1967. Citado na página 20.
- 16 SALAM, A. Weak and Electromagnetic Interactions. *Conf. Proc.*, C680519, p. 367–377, 1968. Citado na página 20.

- 17 GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 30, p. 1343–1346, Jun 1973. Citado na página 20.
- 18 POLITZER, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 30, p. 1346–1349, Jun 1973. Citado na página 20.
- 19 MCKEON, D. G. C. The first order formalism for Yang-Mills theory. *Can. J. Phys.*, v. 72, p. 601–607, 1994. Citado na página 20.
- 20 BRANDT, F. T.; MCKEON, D. G. C. Perturbative Calculations with the First Order Form of Gauge Theories. *Phys. Rev.*, D91, n. 10, p. 105006, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 20, 36, 37 e 113.
- 21 BRANDT, F. T.; MCKEON, D. G. C. Radiative Corrections and the Palatini Action. *Phys. Rev.*, D93, n. 10, p. 105037, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 20, 36 e 39.
- 22 BRANDT, F. T.; FRENKEL, J.; MCKEON, D. G. C. Renormalization of a diagonal formulation of first order Yang-Mills theory. *Phys. Rev.*, D98, n. 2, p. 025024, 2018. Citado na página 20.
- 23 FADDEEV, L. D.; POPOV. Perturbation Theory for Gauge-invariant Fields. *50 Years of Yang-Mills Theory*, p. 40–60, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 32.
- 24 DAS, A. *Lectures on quantum field theory*. NY: World Scientific, 2008. Citado na página 23.
- 25 FLICKER, F. Faddeev popov ghosts. 2012. Citado na página 33.
- 26 PASSARINO, G.; VELTMAN, M. J. G. One Loop Corrections for $e^+ e^-$ Annihilation Into $\mu^+ \mu^-$ in the Weinberg Model. *Nucl. Phys.*, B160, p. 151–207, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 123.
- 27 AUSTBURY, A.; CAMPBELL, B. A.; KHANNA F. C.; VINCTER, M. G. *Proceedings, 17th Lake Louise Winter Institute on Fundamental Interactions (LLWI 2002)*. NY: World Scientific. Citado na página 60.
- 28 LEIBBRANDT, G. Introduction to the Technique of Dimensional Regularization. *Rev. Mod. Phys.*, v. 47, p. 849, 1975. Citado na página 60.
- 29 FRENKEL, J.; TAYLOR, J. C. BRST renormalization of the first order Yang–Mills theory. *Annals Phys.*, v. 387, p. 1–13, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 106.
- 30 FILHO, R. T. R. C. Teorias de calibre no formalismo de 1ª ordem. *Dissertação de Mestrado em Física*. Citado na página 69.
- 31 SCHWINGER, J. S. Brownian motion of a quantum oscillator. *J. Math. Phys.*, v. 2, p. 407–432, 1961. Citado na página 71.
- 32 UMEZAWA, H.; MATSUMOTO, H.; TACHIKI, M. *Thermo field dynamics and condensed states*. [S.l.]: North-holland, 1982. Citado na página 71.
- 33 MATSUBARA, T. A New Approach to Quantum Statistical Mechanics. *Prog. Theor. Phys.*, v. 14, p. 351–378, 1955. Citado na página 71.

- 34 DAS, A. *Finite Temperature Field Theory*. NY: World Scientific, 1997. Citado na página 72.
- 35 BLOCH, C. Sur la détermination de l'état fondamental d'un système de particules. *Nuclear Physics*, v. 7, p. 451 – 458, 1958. Citado na página 74.
- 36 KAPUSTA, J. I.; GALE, C. *Finite-temperature field theory: Principles and applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. Citado na página 77.
- 37 BELLAC, M. L. *Thermal Field Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. Citado na página 77.
- 38 BRANDT, F. T.; FRENKEL, J.; MACHADO, F. R. Finite temperature gluon self-energy in a class of general temporal gauges. *Phys. Rev.*, D61, p. 125014, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 95.
- 39 BRANDT, F. T.; FRENKEL, J.; MACHADO, F. R. Thermal forward scattering amplitudes in temporal gauges (talk given at 30th international conference on high-energy physics (ichep 2000), osaka, japan, to be published in the proceedings. 2000. Citado na página 89.
- 40 BRANDT, F. T.; FRENKEL, J. High temperature $\ln(T)$ contributions in thermal field theory. *Phys. Rev.*, D55, p. 7808–7814, 1997. Citado na página 95.
- 41 PESKIN, M. E.; SCHRÖDER, D. V. *An Introduction To Quantum Field Theory*. Boulder: Westview Press, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 109 e 151.
- 42 BUCHBINDER, I. L.; ODINTSOV, S. D.; SHAPIRO, I. L. *Effective action in quantum gravity*. Bristol: Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 1992. Citado na página 111.
- 43 BOLLINI, C. G.; GIAMBIAGI, J. J. Dimensional regularization in configuration space. *Phys. Rev.*, D53, p. 5761–5764, 1996. Citado na página 119.
- 44 MUTA, T. *Foundations of quantum chromodynamics. Second edition*. NY: World Sci. Lect. Notes Phys., 1998. Citado na página 119.
- 45 DEVARAJ, G.; STUART, R. G. Reduction of one loop tensor form-factors to scalar integrals: A General scheme. *Nucl. Phys.*, B519, p. 483–513, 1998. Citado na página 123.