

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física

# Influência do perfil magnético sobre barreiras de transporte sem cisalhamento

Gabriel Cardoso Grime

Orientador: Prof. Dr. Iberê L. Caldas  
Coorientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Marisa Roberto

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas - Orientador (Universidade de São Paulo)  
Prof. Dr. José Danilo Szezech Jr (Universidade Estadual de Ponta Grossa)  
Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho (Universidade Estadual Paulista)



Assinatura Orientador

São Paulo  
2022

**FICHA CATALOGRÁFICA**  
**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação**  
**do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Grime, Gabriel Cardoso

Influência do perfil magnético sobre barreiras de transporte sem cisalhamento. São Paulo, 2022.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Tokamaks; 2. Turbulência eletrostática; 3. Sistemas Hamiltonianos; 4. Caos.

USP/IF/SBI-027/2022

University of São Paulo  
Physics Institute

# Magnetic profile influence on shearless transport barriers

Gabriel Cardoso Grime

Supervisor: Prof. Dr. Iberê L. Caldas  
Co-supervisor: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Marisa Roberto

Dissertation submitted to the Physics Institute of the  
University of São Paulo in partial fulfillment of the  
requirements for the degree of Master of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas - Supervisor (University of São Paulo)  
Prof. Dr. José Danilo Szezech Jr (State University of Ponta Grossa)  
Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho (São Paulo State University)

São Paulo  
2022

# Agradecimentos

Desejo exprimir os meus agradecimentos a todos aqueles que, de alguma forma, permitiram que esta dissertação se concretizasse. Em especial, agradeço:

Ao Prof. Iberê L. Caldas, por me receber em seu grupo de pesquisa e por seu trabalho excepcional como orientador.

À Prof<sup>a</sup> Marisa Roberto, pelas contribuições ao trabalho e coorientação sempre presente.

Aos colegas do grupo, pelas discussões, sugestões e tempo juntos.

À CAPES e FAPESP (projeto temático nº 2018/03211-6) pelo auxílio financeiro.

*“It is impossible to explain honestly  
the beauties of the laws of nature without  
some deep understanding of mathematics.”  
(Richard P. Feynman)*

# Resumo

Perturbações na borda de plasmas confinados magneticamente geram turbulência e alto transporte de partículas. Este transporte tem origem na deriva  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  causada por flutuações eletrostáticas e pode ser reduzido utilizando perfis específicos de campo elétrico, gerando barreiras de transporte no plasma. Entretanto, os mecanismos de formação dessas barreiras não são bem compreendidos. Nesta dissertação investigamos a influência do perfil de campo magnético do plasma sobre a formação e destruição de barreiras de transporte. Utilizamos um modelo Hamiltoniano que descreve a trajetória de partículas sujeitas à deriva  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , devido aos campos de equilíbrio, e às flutuações eletrostáticas. Integrando numericamente as equações diferenciais deste modelo identificamos órbitas invariantes resistentes à perturbação, nomeadas Barreiras de Transporte sem Cisalhamento (BTSC). Analisamos como essas barreiras são formadas e destruídas variando o perfil do campo magnético. Utilizando um perfil não monotônico encontramos mais de uma BTSC. Aproximando as equações do modelo deduzimos um mapa com dinâmica similar às equações diferenciais. Concluímos que múltiplas BTSC são possíveis utilizando perfil não monotônico de campo magnético e, a partir do mapa, que elas têm origem em bifurcações decorrentes de sua não monotonicidade.

**Palavras-chave:** Tokamak. Transporte. Sistemas Hamiltonianos.

# Abstract

Edge perturbations in magnetic confined plasmas generate turbulence and high particle transport. This transport arise from  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  drift due to electrostatic fluctuations and can be reduced using specific electric field profiles, creating plasma transport barriers. However, the formation mechanisms of these barriers is not well understood. In this work, we investigate the influence of the plasma magnetic field profile on the formation and destruction of transport barriers. We apply a Hamiltonian model to describe the trajectory of particles subject to  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  drift due to equilibrium fields and electrostatic fluctuations. Integrating numerically the equations of this model, we identify perturbation resistant invariant orbits, named Shearless Transport Barriers (STB). We analyze how these barriers are created and destroyed modifying the magnetic profile. Applying nonmonotonic profiles, we find more than one STB. Approximating the model equations we derive a map with similar dynamics to the model's differential equations. We concluded that multiple STB are possible when nonmonotonic magnetic profiles are applied and, from the map, that his origin is from bifurcations due to the nonmonotonicity.

**Keywords:** Tokamak. Transport. Hamiltonian Systems.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação esquemática de um tokamak e seus principais componentes	17
Figura 2 – Espaço de fase MPT. O parâmetro de perturbação $K$ controla o tamanho das ressonâncias	26
Figura 3 – Função <i>twist</i> do MPT e do MPNT	27
Figura 4 – Espaço de fase do MPNT	29
Figura 5 – Cenário par de reconexão de separatrizes do MPNT	31
Figura 6 – Cenário ímpar de reconexão de separatrizes do MPNT	33
Figura 7 – Perfis utilizados para velocidade toroidal e campo elétrico de equilíbrio	40
Figura 8 – Perfil monotônico do fator de segurança (a), e seu cisalhamento (b), para alguns valores de $q_a$ .	41
Figura 9 – Condições de ressonância dos modos de oscilação utilizando o perfil monotônico do fator de segurança	42
Figura 10 – Seções de Poincaré utilizando perfil monotônico do fator de segurança	43
Figura 11 – Perfil de $\Omega$ referente à Figura 10a. A condição inicial utilizada foi $\psi_0 = 0$ . O ponto vermelho é o extremo local, caracterizando a curva sem cisalhamento.	43
Figura 12 – Exemplo de quebra da curva sem cisalhamento (em vermelho) utilizando perfil monotônico	44
Figura 13 – Perfil não monotônico do fator de segurança (a) e seu cisalhamento (b) para alguns valores $q_a$ .	45
Figura 14 – Condições de ressonância dos modos de oscilação utilizando o perfil não monotônico do fator de segurança	46
Figura 15 – Seções de Poincaré utilizando perfil não monotônico do fator de segurança	47
Figura 16 – Perfil de $\Omega$ da Figura 15e, utilizando a condição inicial $\psi_0 = 0$	47
Figura 17 – Exemplo de quebra da curva sem cisalhamento (em vermelho) utilizando perfil não monotônico (4.9).	48
Figura 18 – Ampliação da Figura 17	49
Figura 19 – úmero de rotação a tempo finito em função do número de iterações na seção de Poincaré, $N$	50
Figura 20 – Cenário de cadeias gêmeas de período ímpar utilizando perfil monotônico e $q_a = 4.49$	51
Figura 21 – Bifurcação de pontos periódicos utilizando perfil monotônico de do fator de segurança	52
Figura 22 – Cenário par assimétrico utilizando perfil não-monotônico do fator de segurança	53



Figura 23 – Bifurcação de pontos periódicos utilizando perfil não monotônico do fator de segurança . . . . .	54
Figura 24 – Diagrama de bifurcação da curva sem cisalhamento para o perfil não monotônico . . . . .	56
Figura 25 – Sequência de bifurcação da curva sem cisalhamento . . . . .	57
Figura 26 – Bifurcação que gera a terceira curva sem cisalhamento . . . . .	58
Figura 27 – Perfil de $\Omega$ referente às Figuras 26d e 26e . . . . .	59
Figura 28 – Confluência de curvas sem cisalhamento . . . . .	60
Figura 29 – Perfis de $\Omega$ referentes às Figuras 28a e 28a . . . . .	61
Figura 30 – Função <i>twist</i> do MNTQ . . . . .	63
Figura 31 – Comparação entre o MPNT e o MNTQ . . . . .	66
Figura 32 – Cenário de reconexão de separatrizes no MNTQ, variando $\alpha$ . . . . .	67
Figura 33 – Espaço de fase do MNTQ, variando $q_a$ . . . . .	68
Figura 34 – Mesmo que a Figura 33, para valores de $q_a$ distintos . . . . .	69

# Lista de abreviaturas e siglas

BTSC	Barreira de Transporte Sem Cisalhamento
CSC	Curva Sem Cisalhamento
KAM	Kolmogorov–Arnold–Moser
MNTQ	Mapa Não- <i>Twist</i> Quártico
MPNT	Mapa Padrão Não- <i>Twist</i>
MPT	Mapa Padrão <i>Twist</i>
PB	Poincaré-Birkhoff

# Sumário

	Sumário . . . . .	11
1	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>13</b>
2	<b>TRANSPORTE POR ONDAS DE DERIVA . . . . .</b>	<b>15</b>
2.1	Plasma e tokamaks . . . . .	15
2.2	Movimento do centro de guia e deriva elétrica . . . . .	18
2.3	Transporte anômalo e barreiras de transporte . . . . .	19
2.4	Modelo de Horton . . . . .	19
3	<b>SISTEMAS HAMILTONIANOS . . . . .</b>	<b>21</b>
3.1	Definições básicas . . . . .	21
3.2	Sistemas integráveis . . . . .	22
3.3	Sistemas quase-integráveis . . . . .	23
3.4	Mapas simpléticos . . . . .	24
3.4.1	Mapa padrão twist . . . . .	25
3.4.2	Mapa padrão não-twist . . . . .	27
3.4.2.1	Cenários de órbitas periódicas . . . . .	29
3.5	<b>Abordagem Hamiltoniana no Modelo de Horton . . . . .</b>	<b>34</b>
4	<b>INFLUÊNCIA DO PERFIL DO FATOR DE SEGURANÇA . . . . .</b>	<b>38</b>
4.1	Parâmetros do modelo . . . . .	38
4.2	Perfil monotônico . . . . .	40
4.3	Perfil não monotônico . . . . .	45
4.4	Cenários assimétricos de órbitas periódicas . . . . .	50
5	<b>BIFURCAÇÕES NA CURVA SEM CISALHAMENTO . . . . .</b>	<b>56</b>
5.1	Diagrama de bifurcação da curva sem cisalhamento . . . . .	56
5.2	Surgimento de novas CSC no espaço de fase . . . . .	57
5.3	Confluência de curvas sem cisalhamento . . . . .	59
6	<b>MAPA NÃO-<i>TWIST</i> QUÁRTICO . . . . .</b>	<b>62</b>
6.1	O Mapa Não- <i>twist</i> Quártico . . . . .	62
6.2	Influência do fator de segurança . . . . .	67
7	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>70</b>

<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>72</b>
<b>APÊNDICE A – NORMALIZAÇÃO DOS PARÂMETROS</b> . . . . .	<b>77</b>

# 1 Introdução

Produzir energia limpa é fundamental para a redução do aquecimento global no planeta e, conseqüentemente, manutenção da vida humana na Terra [1]. Dentre as fontes de energia limpa e renovável a termofusão nuclear é a mais promissora, pois não produz rejeitos poluentes e seus combustíveis (Deutério e Trítio) são abundantes [2]. O principal dispositivo utilizado para esta finalidade são os tokamaks: câmaras de confinamento magnético de plasmas em formato toroidal [2].

Desde a década de 1950, muitos foram os esforços para a construção de um reator comercial capaz de produzir energia por meio da fusão. Atualmente, vários tokamaks operam em diferentes países, e com finalidades diferentes. Dispositivos menores, como o TCABR em operação no Brasil, são utilizados para pesquisa básica. O maior tokamak, ainda em construção é o ITER (*International Thermonuclear Experimental Reactor*): um consórcio entre diversos países, cujo objetivo é comprovar a viabilidade da fusão nuclear para produção de energia. O custo estimado deste reator está em 15 bilhões de euros [3].

Algumas questões dificultam o sucesso dos tokamaks para termofusão nuclear [4]. Um dos fatores que limitam a eficiência de um tokamak é o alto transporte de partículas e energia para fora do plasma, causado por turbulência [5, 6]. Essa turbulência tem origem na deriva  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  causada por flutuações que se propagam na borda do plasma [6]. Um dos avanços mais importantes no confinamento em tokamaks ocorreu em 1982 com a descoberta de um regime de alto confinamento no tokamak ASDEX, localizado na Alemanha [7]. Desde então, modelos foram propostos para explicar esta melhoria no confinamento, mas não há uma teoria completa capaz de explicá-lo satisfatoriamente [8]. Verifica-se experimentalmente uma correlação entre alterações no perfil de campo elétrico na borda do plasma e criação de barreiras que reduzem o transporte [9].

Horton propôs em 1998 um modelo que prevê barreiras de transporte na borda do plasma [10]. Ele analisa o movimento de uma partícula teste imersa na borda do plasma, sujeita à deriva  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  causada pelos campos presentes na região. O campo elétrico é a soma de uma componente de equilíbrio e um termo flutuante, que modela a ação das oscilações causadoras do transporte turbulento. Uma das componentes do campo flutuante gera uma deriva  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  na direção radial, explicando o transporte medido experimentalmente. Cálculos do coeficiente de difusão das partículas mostraram uma grande melhoria no confinamento do plasma quando utilizados perfis não monotônicos de campo elétrico ou campo magnético [10], confirmando resultados experimentais [11].

O modelo de Horton é abordado utilizando técnicas de sistemas Hamiltonianos [12]. Na ausência das oscilações elétricas as equações do modelo indicam que as órbitas

são regulares e que não há transporte. A adição de flutuações resulta na criação de órbitas caóticas, com movimento altamente irregular, que levam ao transporte de partículas de dentro para fora do plasma.

Em geral, sistemas Hamiltonianos com perfis não-monotônicos possuem barreiras que impedem o transporte global no espaço de fase. Tais barreiras são nomeadas *barreira de transporte sem cisalhamento*, pois são caracterizadas por órbitas de cisalhamento nulo. Um dos modelos mais simples, que captura o mecanismo da barreira de transporte sem cisalhamento, é o Mapa Padrão Não-*Twist* (MPNT). Proposto inicialmente para modelar fluxos não monotônicos em fluidos [13], o MPNT é aplicável há diversos sistemas físicos como linhas de campo magnético em tokamaks [14, 15], órbitas planetárias [16] e ao transporte turbulento de partículas devido à deriva  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  [10].

Conjectura-se que barreiras sem cisalhamento de sistemas hamiltonianos reduzem do transporte anômalo em plasmas. Evidências experimentais que corroboram com esta proposição foram obtidas em tokamaks [17] e no Texas Helimak [18]. A partir desses resultados experimentais foram realizados estudos teóricos sobre barreiras de transporte sem cisalhamento em plasmas. As referências [19, 20] indicam que, em tokamaks, perfis não monotônicos de campo elétrico geram barreiras de transporte e que o perfil de velocidade afeta o transporte na borda do plasma. Conclusões similares são obtidas para o Texas Helimak [21]. Os artigos [22, 23] estudam a influência da amplitude das perturbações no plasma e concluem que o transporte é dependente delas. No último, são reportados cenários com mais de uma curva sem cisalhamento.

O confinamento em tokamaks ocorre através de um campo magnético. Dentro e fora do plasma, este campo é altamente não uniforme. Seu perfil radial afeta as propriedades do plasma e é determinante na formação de barreiras de transporte [24]. Assim, o objetivo deste trabalho é investigar o surgimento e destruição de BTSC na borda de tokamaks devido a alterações do perfil radial de campo magnético do plasma. Para desenvolver este estudo, consideramos o sistema dinâmico formado pelas equações diferenciais introduzidas no modelo de Horton [10]. Variando o campo magnético do tokamak obtivemos cenários atípicos de órbitas, decorrentes de bifurcações. Um deles, utilizando perfil não monotônico de campo magnético, encontramos mais de uma barreira sem cisalhamento. Também deduzimos, a partir do modelo de Horton, um mapa aproximado para explicar a origem destas múltiplas barreiras sem cisalhamento.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 2 introduzimos o conceito de plasmas, tokamaks e transporte. No capítulo 3, definições e propriedades básicas envolvendo sistemas Hamiltonianos são apresentadas. Nos capítulos 4 e 5 estão os resultados obtidos analisando a influência do perfil de campo magnético. No capítulo 6, deduzimos um mapa aproximado, capaz de explicar alguns resultados obtidos nos capítulos 4 e 5. Por fim, no capítulo 7, estão as conclusões referentes aos resultados desta dissertação.

## 2 Transporte por ondas de deriva

Este capítulo tem por objetivo discutir o transporte em tokamaks. Por completeza, no início do capítulo definimos o que é um plasma, suas propriedades e as diferentes abordagens teóricas utilizadas para descrevê-lo. No quesito transporte, o capítulo descreve o que são barreiras de transporte em tokamaks e sua relevância. Por fim, apresentamos o modelo de Horton, utilizado neste trabalho, e como o mesmo é obtido a partir da teoria de órbitas.

### 2.1 Plasma e tokamaks

Em resumo, um plasma é formado sob a condição da energia cinética dos elétrons exceder substancialmente a energia de ligação entre um íon e seu elétron de valência [25]. Definimos plasma como: *um gás ionizado que exhibe comportamento coletivo devido a interações coulombianas* [26]. Este gás ionizado, constituído de íons positivos e elétrons, possui propriedades distintas em relação a um gás neutro. A presença de partículas carregadas origina interações eletrostáticas que influenciam no seu movimento. Em um plasma, qualquer separação substancial entre elétrons e íons gera uma força restauradora. Conseqüentemente, a densidade de cargas positivas e negativas é aproximadamente igual.

Entretanto, não podemos atribuir o nome *plasma* a qualquer gás ionizado. Existem critérios objetivos para diferenciá-los. Tais condições dizem respeito a escalas de tempo e comprimento característicos do sistema [27]. Um dos critérios é: o comprimento de Debye ( $\lambda_D$ ) do plasma deve ser muito menor que a dimensão característica do sistema. Definimos  $\lambda_D$  pela equação:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n e^2}} \quad (2.1)$$

onde  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo,  $k_B$  a constante de Boltzmann,  $T_e$  a temperatura dos elétrons,  $e$  a carga do elétron e  $n$  a densidade do plasma<sup>1</sup>.

Outro critério para definir um plasma refere-se a escala de tempo das colisões entre elétrons e átomos neutros. A escala de tempo do movimento coletivo de elétrons é dada pela frequência de plasma dos elétrons,  $\omega_{pe}$ , definida pela equação:

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n e^2}{m_e \epsilon_0}} \quad (2.2)$$

<sup>1</sup> Devido à quasi-neutralidade, a densidade de íons e elétrons são aproximadamente iguais. Sua soma,  $n_i + n_e$ , é definida a densidade do plasma.

Colisões elétron-neutro tendem a amortecer as oscilações naturais do plasma e estabelecer equilíbrio térmico entre elétrons e neutros. Para manter o plasma a frequência de colisão elétron-neutro ( $\omega_{en}$ ) deve ser menor que a colisão de plasma dos elétrons.

Plasmas usados na termofusão nuclear possuem  $T_e \sim 10 \text{ keV}$  e  $n \sim 10^{20} \text{ m}^{-3}$ . Logo,  $\lambda_D \sim 0.1 \text{ mm}$  e  $\omega_{pe} \sim 10^{12} \text{ Hz}$ . O comprimento característico de um reator é da ordem do metro e a  $\omega_{en} \sim \text{MHz}$  [28]. Portanto, descargas em tokamaks satisfazem os critérios de plasma.

Plasmas são sistemas de muitas partículas que interagem mutualmente. Tais sistemas apresentam comportamento emergente e alto grau de não-linearidade: é um sistema complexo. Um único modelo é incapaz de prever toda a gama de fenômenos inerentes ao plasma. Logo, existem quatro abordagens teóricas utilizadas para descrever um plasma, cada uma capturando diferentes aspectos do sistema e sendo utilizadas a depender das circunstâncias. São elas: teoria de órbitas, abordagem estatística (teoria cinética dos gases), teoria de fluidos e a Magnetoidrodinâmica (MHD) [26].

Na *teoria de órbitas*, estuda-se do movimento de uma partícula teste, no plasma, sujeita a ação de campos eletromagnéticos. Esta abordagem é útil no estudo de plasmas com baixa frequência de colisão. A teoria MHD considera o plasma como um único fluido condutor, formado pelo conjunto de elétrons e íons. Faz-se uma aproximação de baixa frequência de colisão e alta condutividade, facilitando a modelagem, mas impõe limitações. Ela é amplamente utilizada no estudo de fenômenos macroscópicos como o equilíbrio de plasmas confinados magneticamente.

Devido ao alto grau de complexidade do plasma, para cada fenômeno escolhemos uma (ou mais) abordagem(s). Para modelar o confinamento de plasmas em tokamaks e controlar seu formato e posição, a teoria MHD é suficiente. Para fenômenos cuja escala de tempo é pequena, em comparação às colisões no plasma, o equilíbrio entre as espécies não é atingido e as abordagens de dois fluidos e/ou teoria cinética são necessárias. Para estudar o transporte anômalo em tokamaks, nenhuma das três abordagens citadas acima é exequível. Portanto, a teoria de órbitas é utilizada.

Tokamak é um acrônimo russo para “toroidal’naya kamera v magnitnykh katushkakh” (câmara de confinamento magnético toroidal). Trata-se de um dispositivo toroidal para confinamento magnético de plasmas, cujo objetivo é a fusão termonuclear [28]. O campo magnético é a soma de um campo toroidal, produzido pelas bobinas de campo toroidal, e uma componente poloidal, produzida, principalmente, pela corrente do plasma. O sistema também possui bobinas que geram campo poloidal necessário para equilíbrio de forças, controle de posição e formato do plasma. As linhas de campo magnético resultante são helicoidais. Uma representação de um tokamak está na [Figura 1](#). A corrente de plasma é produzida pelo solenoide central: uma bobina de campo magnético poloidal localizada no centro do tokamak. O campo magnético gerado pelo ele é variável. Devido à lei de



Faraday, esta variação induz um campo elétrico circular na direção toroidal, responsável pelo *breakdown* do plasma e por manter sua corrente elétrica.

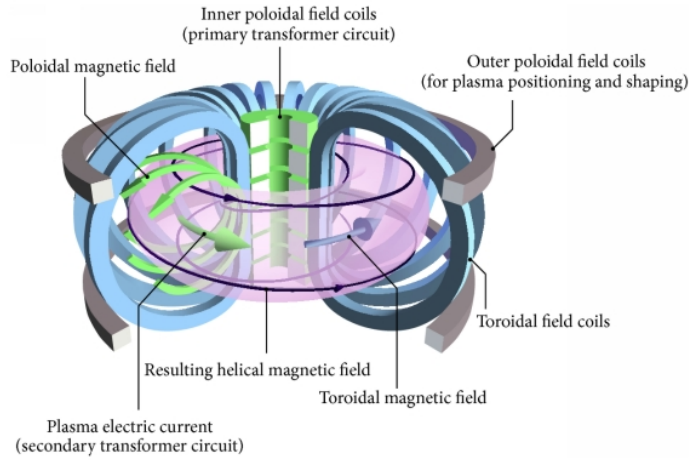


Figura 1 – Representação esquemática de um tokamak e seus principais componentes. A soma dos campos toroidal e poloidal forma linhas de campo helicoidais. Retirado de [29].

Tokamaks, assim como toros, possuem um raio maior  $R$  e um raio menor  $a$ . O quociente  $R/a$  é chamada razão de aspecto. Esta grandeza mede a toroidicidade do sistema e é um fator determinante para diversas propriedades como instabilidades MHD e ganho de fusão [30, 31]. Nesta dissertação consideramos tokamaks de grande razão de aspecto e desprezamos os efeitos da geometria toroidal na modelagem do equilíbrio do plasma. Modelamos o tokamak por uma coluna de plasma cilíndrica e periódica, ou seja, as tampas do cilindro coincidem. Trata-se de um cilindro com a topologia de um toro. Efeitos de curvatura toroidal, no equilíbrio, não são considerados, simplificando o sistema de coordenadas.

Podemos modelar a helicidade das linhas de campo pelo fator de segurança  $q$ . Para qualquer linha de campo fechada podemos definir seu fator de segurança como a curvatura média. Em geral, as componentes toroidal e poloidal são funções da posição em um tokamak. Se o sistema possuir simetria cilíndrica, o fator de segurança será uma função da coordenada radial  $q = q(r)$ . Para um tokamak em aproximação cilíndrica, o perfil do fator de segurança é definido por:

$$q(r) = \frac{rB_\phi}{RB_\theta} \quad (2.3)$$

onde  $B_\phi$  é a magnitude do campo toroidal e  $B_\theta$ , do campo poloidal.

O perfil do fator de segurança é uma grandeza determinante para uma descarga em tokamaks. Alguns limites de operação impõe restrição ao seu valor na borda do plasma

$q(r = a) = q_a$ , por exemplo, a condição de Kruskal-Shafranov [27]. Aplicando a lei de Ampère para calcular o campo poloidal, obtemos:

$$q_a = \frac{2\pi a^2 B_\phi}{\mu_0 R I_p} \quad (2.4)$$

em que  $I_p$  é a corrente de plasma, cuja medida experimental é simples e precisa.

## 2.2 Movimento do centro de guia e deriva elétrica

O movimento de partículas, em tokamaks, é uma sobreposição de diversos movimentos. A presença de campos eletromagnéticos não uniformes e/ou variáveis no tempo, promove diversas derivas, aumento de energia, entre outros. Ao tratar o movimento individual das partículas em um plasma confinado magneticamente, partimos do caso mais simples: carga em uma região de campo magnético uniforme. Nestas condições o movimento resultante é helicoidal em torno das linhas de campo  $\mathbf{B}$ . Tal movimento é formado pela sobreposição de uma velocidade uniforme na direção do campo e um movimento circular uniforme no plano perpendicular [26]. O centro instantâneo deste movimento circular é chamado *Centro de Guia* (CG). Portanto, a equação de movimento do CG em um campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$  é

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} \quad (2.5)$$

o que implica uma velocidade constante  $v_{\parallel}$  paralela às linhas de campo magnético. Contudo, em um plasma não há, apenas, campos magnéticos. A presença de um campo elétrico  $\mathbf{E}$  introduz uma deriva ao movimento do CG da partícula. Tal deriva, chamada *deriva elétrica*, é dada por:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (2.6)$$

Adicionando a deriva elétrica à equação de movimento do CG (2.5), obtemos

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.7)$$

que representa o movimento do CG de um íon, ou elétron, em uma região com campo elétrico  $\mathbf{E}$  e magnético  $\mathbf{B}$ . A equação (2.7) captura dois aspectos essenciais do movimento: (i) a partícula se move na direção paralela ao campo magnético com velocidade constante e (ii) possui uma deriva  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Esta equação tem validade para campos magnéticos sem curvatura, pois, neste caso, outras derivas surgem.

## 2.3 Transporte anômalo e barreiras de transporte

Em tokamaks, o transporte na borda do plasma medido experimentalmente é uma ou duas ordens de grandeza maior em comparação à teoria neoclássica, que considera apenas efeitos difusivos [5]. Esta diferença entre o transporte medido e o neoclássico, nomeamos de transporte anômalo. Um modelo completo para o transporte anômalo ainda não existe. A literatura indica que ele ocorre pelo transporte radial devido à deriva  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  causada por flutuações eletrostáticas na borda do plasma [32, 6]. Tais flutuações são decorrentes de ondas de deriva que se propagam poloidalmente na borda do plasma. O campo elétrico resultante dessas oscilações tem uma componente poloidal  $\mathbf{E}_\theta$ . Logo, a deriva  $\mathbf{E}_\theta \times \mathbf{B}_\phi$  é radial, mecanismo pelo qual ocorre o transporte anômalo.

Observações experimentais indicam que, em certas descargas de tokamaks, o coeficiente de transporte na borda do plasma é reduzido, melhorando o confinamento de partículas. Esta redução é consequência de uma barreira de transporte, que pode ser obtida por um feixe de partículas neutras aquecidas [7], ou pela ação de um eletrodo polarizado na fronteira do plasma [33]. Verifica-se experimentalmente que estas barreiras estão relacionadas a um cisalhamento negativo do campo elétrico radial na região da barreira [9].

## 2.4 Modelo de Horton

Para desenvolver o estudo da influência de oscilações eletrostáticas no transporte de partículas, consideraremos o sistema dinâmico baseado nas equações diferenciais do modelo de Horton [10]. Este modelo tem como ponto de partida a equação de movimento do centro de guia de uma partícula imersa em uma região de campo eletromagnético, equação (2.7), que utiliza coordenadas polares locais,  $\mathbf{x} = (r, \theta, \phi)$ , obtidas a partir da aproximação cilíndrica de um tokamak com grande razão de aspecto. Neste sistema de coordenadas,  $\phi$  é o ângulo toroidal e o par  $(r, \theta)$  são as coordenadas polares medidas sobre o eixo do toro. O campo elétrico  $\mathbf{E}$  possui duas contribuições: uma componente radial  $\mathbf{E}_r$  de equilíbrio e uma componente flutuante  $\tilde{\mathbf{E}} = -\nabla\tilde{\phi}$  referente às oscilações eletrostáticas<sup>2</sup>. Nestas condições, as componentes da eq. (2.7) ficam:

<sup>2</sup> Em plasmas, devido à presença de matéria carregada, é possível a propagação de ondas cujo campo magnético é constante no tempo. Neste caso,  $\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$ . Logo, o campo elétrico é derivado a partir de um potencial  $\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)$ .

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{rB} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} \quad (2.8a)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{r} \frac{B_{\theta}}{B} + \frac{1}{rB} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} - \frac{E_r}{rB} \quad (2.8b)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{R} \quad (2.8c)$$

O campo magnético é a soma das componentes poloidal e toroidal,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\phi} + \mathbf{B}_{\theta}. \quad (2.9)$$

Em tokamaks com grande razão de aspecto  $B_{\phi} \gg B_{\theta}$ , logo, aproxima-se  $B \approx B_{\phi}$ . A componente poloidal do campo magnético pode ser escrita em função do fator de segurança, segundo a equação (2.3). Nestas condições, as equações de movimento (2.8) ficam:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{rB_{\phi}} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} \quad (2.10a)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{Rq} + \frac{1}{rB_{\phi}} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} - \frac{E_r}{rB_{\phi}} \quad (2.10b)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{R} \quad (2.10c)$$

A modelagem do potencial flutuante é tema de discordância na literatura. Há modelos, como o de Hasegawa–Mima, que propõe uma perturbação que varia radialmente [34, 17]. Já o modelo de Horton, no qual este trabalho é baseado, considerara flutuações localizadas somente na borda do plasma. O caso mais geral de uma flutuação localizada na borda é um espectro de ondas de modos de oscilação espacial e temporal, definido pela equação

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{m,l,n} \phi_n \cos(m\theta - l\phi - n\omega_0 t) \quad (2.11)$$

onde  $m$  e  $l$  são, respectivamente, os modos oscilação poloidal e toroidal. Já  $\omega_0$  é a frequência angular do primeiro modo temporal  $n = 1$ .

## 3 Sistemas Hamiltonianos

O modelo de Horton pode ser estudado utilizando a abordagem de sistemas Hamiltonianos, utilizada neste trabalho. Neste capítulo revisaremos os principais resultados referentes a sistemas Hamiltonianos quase-integráveis. Abordaremos sistemas Hamiltonianos a tempo contínuo (fluxos) e discreto (mapas simpléticos) e como ambos se relacionam.

### 3.1 Definições básicas

Sistemas Hamiltonianos são caracterizados por uma função Hamiltoniana  $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$  do par de variáveis  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$  e  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$  e, em geral, do tempo  $t$ . O conjunto  $\{q_i, i = 1, N\}$  é formado pelas coordenadas generalizadas e  $\{p_i, i = 1, N\}$ , os momentos generalizados. Define-se o número de graus de liberdade do sistema como a quantidade de coordenadas (ou momentos) generalizados,  $N$ . A evolução temporal de  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$  ocorre no espaço de fase  $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ ,  $2N$ -dimensional, governada pelas equações canônicas de Hamilton [35]:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}. \quad (3.1)$$

As equações canônicas concedem propriedades particulares a sistemas Hamiltonianos. Por exemplo, o teorema de Liouville afirma que as trajetórias no espaço de fase comportam-se como em um fluido incompressível. Matematicamente, seja  $\mathbf{F} = (-\partial H/\partial q, \partial H/\partial p)$  o fluxo de trajetórias Hamiltonianas no espaço de fase, então,  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$  [36]. Algumas consequências deste teorema são fundamentais para sistemas caóticos, por exemplo, o teorema da recorrência de Poincaré [37].

Há uma classe de sistemas dinâmicos, chamados *autônomos*, cujas equações não dependem explicitamente do tempo [38]. No caso de sistemas Hamiltonianos, se a Hamiltoniana  $H$  não depende explicitamente do tempo, o sistema é autônomo. Caso contrário, é chamado *não-autônomo*. Sistemas Hamiltonianos, de  $N$  graus de liberdade, com dependência explícita no tempo são equivalentes a sistemas autônomos no espaço de fase estendido de dimensão  $2N + 2$ . Nesse novo espaço de fase o tempo  $t$  é uma nova coordenada generalizada, o número de graus de liberdade é acrescido em uma unidade e a dimensão do espaço de fase, em duas [39].

Pode-se escrever as equações de Hamilton em qualquer sistema de coordenadas e momentos desde que a forma das equações (3.1) seja preservada. Uma classe especial é chamada *coordenadas de ação e ângulo*  $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$  [35]. As equações canônicas (3.1) nestas novas variáveis se tornam:

$$\dot{I}_j = -\frac{\partial K}{\partial \theta_j}, \quad \dot{\theta}_j = \frac{\partial K}{\partial I_j} \quad (3.2)$$

onde  $K = K(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$  é a nova Hamiltoniana.

Em sistemas com dois ou mais graus de liberdade a visualização do espaço de fase completo é impossível, já que o mesmo possui mais de três dimensões. Em um espaço de fase  $2N$ -dimensional, a seção de Poincaré é uma hipersuperfície  $N - 1$ -dimensional, transversal ao fluxo de trajetórias. Definimos o mapa de Poincaré como: o conjunto de pontos gerados pela interseção de uma órbita do espaço de fase na seção de Poincaré, que possui uma dimensão a menos em relação ao espaço de fase. Pode-se provar que o mapa de Poincaré preserva as propriedades dinâmicas da trajetória, ou seja, se a órbita é periódica, quase-periódica ou caótica [40].

Uma classe especial de seções de Poincaré é utilizada para gerar *mapas estroboscópicos*, muito úteis na análise de hamiltonianas com dependência temporal periódica no tempo [41]. Dada uma hamiltoniana dependente explicitamente no tempo, periódica, de período  $\tau$ . No espaço de fase estendido, pode-se plotar  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  em intervalos de tempo igualmente espaçado de  $\tau$ . O mapa resultante desse conjunto de pontos é chamada mapa estroboscópico. Percebe-se que esta não é uma seção de Poincaré pela definição acima. Contudo, é um jargão chamar o mapa estroboscópico de mapa ou seção de Poincaré, já que ambos desempenham o mesmo papel.

## 3.2 Sistemas integráveis

Há uma classe de sistemas Hamiltonianos, chamados sistemas integráveis, cuja solução das equações de movimento (3.2) é trivial nas coordenadas de ação e ângulo. A *integrabilidade* é um conceito fundamental em sistemas Hamiltonianos. Ela se refere a possibilidade de encontrar soluções explícitas para as equações de movimento [37]. Definimos um sistema Hamiltoniano, de  $N$  graus de liberdade, como integrável se, e somente se, ele possui  $N$  constantes de movimento em involução<sup>1</sup>. Sobre sistemas integráveis, o principal resultado é o teorema de Liouville-Arnold, demonstrado em [36]. Seu enunciado afirma: seja um sistema Hamiltoniano integrável, com  $N$  graus de liberdade, então:

- (i) Existem variáveis de ação e ângulo  $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$  tais que  $H = H(\mathbf{I})$ , de modo que a solução das equações de movimento são

$$I_j = \text{constante}, \quad \theta_j = \theta_j(0) + \Omega(\mathbf{I})t \quad (3.3)$$

<sup>1</sup> Duas constantes de movimento  $F_j$  e  $F_i$  estão em involução se, e somente se, o parenteses de Poisson delas é nulo:  $[F_j, F_i] = 0$ .

sendo  $\Omega_j(\mathbf{I}) = \partial H / \partial I_j$  é uma constante.

- (ii) As trajetórias no espaço de fase residem na interseção das superfícies definidas pelas  $N$  constantes de movimento. Portanto, estão limitadas a uma variedade descrita por  $N$  ângulos, que coincide topologicamente a um torus  $N$ -dimensional.

### 3.3 Sistemas quase-integráveis

A integrabilidade de um sistema pode ser quebrada por uma perturbação na Hamiltoniana. Os teoremas de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) e Poincaré-Birkhoff (PB) fornecem o cenário das soluções do sistema não integrável quando esta perturbação é suficientemente pequena. Por definição, sistemas quase-integráveis possuem hamiltoniana da forma

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\mathbf{I}) + \epsilon H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) \quad (3.4)$$

onde  $H_0$  é uma hamiltoniana integrável,  $\epsilon$  é um parâmetro adimensional,  $H_1$  o termo perturbativo e  $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$  as variáveis de ação e ângulo do sistema integrável.

O teorema de KAM afirma: se as frequências  $\Omega_i$  do sistema integrável  $H_0$  são racionalmente independentes e suficientemente irracionais<sup>2</sup>, então, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno as soluções do sistema perturbado (3.4) são predominantemente quase-periódicas e diferem ligeiramente do sistema integrável [37]. A quantidade de torus não-ressonantes preservados no sistema perturbado depende do parâmetro de perturbação  $\epsilon$ . Uma das premissas do Teorema de KAM é a não degenerescência da Hamiltoniana integrável, ou seja, que a condição *twist*,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial \mathbf{I}} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{I}^2} \neq 0, \quad (3.5)$$

seja satisfeita. Sistemas quase-integráveis cuja hamiltoniana depende periodicamente do tempo, geralmente, satisfazem as hipóteses do teorema de KAM no espaço de fase estendido [43]. Um exemplo é o oscilador de Duffing conservativo [44].

O teorema de PB remete-se ao destino dos torus ressonantes de  $H_0$  sob a ação da perturbação  $H_1$ . Ele complementa o teorema de KAM, que se refere aos torus não-ressonantes. Ele afirma: dado um toro racional  $r/s$  do sistema integrável  $H_0$ , a ação da perturbação  $H_1$  gera um número par  $2ks$  de pontos periódicos, onde  $k$  é um inteiro positivo. Metade dos pontos são estáveis e dão origem a ilhas, a outra metade são instáveis, gerando

<sup>2</sup> Pode-se aproximar qualquer número irracional por um número racional utilizando frações contínuas. A condição *suficientemente irracional* indica: a diferença entre o número irracional e seu racional mais próximo é menor que um determinado valor  $\delta$ . Para mais detalhes consulte a referência [42].

selas hiperbólicas. As ilhas são agrupadas em cadeias envoltas por uma variedade chamada *separatriz*, que une os pontos hiperbólicos. O teorema não prevê o valor de  $k$ , mas, na maioria dos casos,  $k = 1$  [39]. Destaca-se que, conforme o parâmetro de confinamento  $\epsilon$  aumenta, mais torus de KAM são quebrados e os pontos hiperbólicos dão origem ao caos de separatriz [45].

### 3.4 Mapas simpléticos

Sistemas Hamiltonianos quase-integráveis do tipo (3.4), em geral, possuem mapa de Poincaré aproximadamente modelado pela relação de recorrência:

$$I_{n+1} = I_n + \epsilon f(\theta_n) \quad (3.6a)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega(I_{n+1}) \quad (3.6b)$$

na qual  $f$  é função periódica de  $\theta$ . Sua dependência na variável de ação  $I_{n+1}$ , em oposição a  $I_n$ , garante a preservação de área<sup>3</sup>.

Mapas do tipo (3.6) podem ser derivados de hamiltonianas, mas são considerados sistemas dinâmicos à parte. Dependendo das funções  $f$  e  $\omega$  escolhidas, este mapa modela uma gama de comportamentos apresentados por sistemas Hamiltonianos quase-integráveis [39]. É preferível trabalhar com mapas, em oposição a fluxos, pois seu estudo analítico é mais simples e a resolução numérica é mais rápida computacionalmente. Alguns mapas possuem propriedades de simetria espacial que permitem criar algoritmos para encontrar órbitas periódicas, o que não é possível em sistemas contínuos [46].

A função  $\omega$  é chamada *função twist* do mapa: ela fornece o ângulo entre duas iterações do mapa integrável. Logo, definimos o *número de rotação* de uma órbita em geral,  $\Omega$ , como:

$$\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{1}{n} (\theta_{i+1} - \theta_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_{n+1} - \theta_0}{n} \quad (3.7)$$

No caso do mapa sem perturbação,  $\epsilon = 0$ , a ação é constante,  $I_{n+1} = I_n = \text{constante}$ , característica de sistemas integráveis. Neste caso, a própria função *twist* é constante. Em mapas sem perturbação, ou integráveis, há somente soluções regulares de dois tipos:

<sup>3</sup> Um mapa  $\mathbf{M}(\theta_n, I_n) = (\theta_{n+1}, I_{n+1})$  preserva área se sua matriz Jacobiana possui determinante unitário, ou seja

$$\det \left\{ \frac{\partial(I_{n+1}, \theta_{n+1})}{\partial(I_n, \theta_n)} \right\} = 1$$



- (i) Periódicas: caracterizadas por um número finito  $p$  de pontos. Seu número de rotação é racional  $\Omega = p/q$ , onde  $p$  é o período da órbita e  $q$  o número de revoluções necessárias para formar os  $p$  pontos.
- (ii) Quase-periódicas: caracterizadas por um número infinito de pontos, que nunca coincidem. Formam as chamadas curvas de KAM. Possuem número de rotação irracional.

Para  $\epsilon \neq 0$ , a ação  $I$  não é constante e o sistema não é integrável. Se o parâmetro de perturbação for pequeno, o cenário do mapa é determinado pelos teoremas de KAM e PB: órbitas periódicas levam a cadeias de ilhas, quebrando as órbitas quase-periódicas próximas. O surgimento do caos em sistemas Hamiltonianos ocorre quando o parâmetro de perturbação é suficientemente grande, mas varia de um sistema para outro. A próxima seção discute a transição para o caos em dois mapas Hamiltonianos: o Mapa Padrão *Twist* (MPT) e o Mapa Padrão *Não-Twist* (MPNT).

A função *twist* de um mapa abriga uma importante característica do mesmo. Uma das hipóteses do teorema de KAM é a não degenerescência da Hamiltoniana, equação (3.5). A condição equivalente para mapas é

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} \neq 0, \quad (3.8)$$

ou seja, a função *twist* deve ser monotonicamente crescente, ou decrescente [46].

### 3.4.1 Mapa padrão twist

O Mapa Padrão *Twist* (MPT), definido por:

$$I_{n+1} = I_n + K \sin(2\pi\theta_n) \quad (3.9a)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n - I_{n+1} \pmod{1} \quad (3.9b)$$

é um mapa, não-linear, que descreve o comportamento local de sistemas não integráveis próximo à separatriz de um ressonância não linear [47]. É um caso particular de (3.6), no qual  $f(\theta) = \sin(2\pi\theta)$  e a função *twist* escolhida é  $\omega(I) = I$ . Esta função satisfaz a condição *twist* (3.8), então, os teoremas de KAM e PB são aplicáveis. O parâmetro de perturbação  $K$  é definido para valores não negativos e a variável de ângulo é normalizada:  $\theta \in [0, 1)$ .

O espaço de fase do MPT, para alguns valores de  $K$ , está na Figura 2. Para  $K = 0$ , o mapa (3.9) possui solução:  $I = I_0$  e  $\theta_n = \theta_0 + nI_0$ , Figura 2a. Aumentando o valor da perturbação surgem ilhas dos pontos periódicos, quebrando os torus invariantes próximos, assim como prevê os teoremas de PB e KAM, Figura 2b. Ainda nesta figura, nota-se o

caos de separatriz que surge na ilha central. Na Figura 2c as regiões caóticas tomam maior volume do espaço de fase e mais torus invariantes são quebrados. Para  $K = 0.198$  todas as curvas invariantes, externas às ilhas, foram quebradas. Restam apenas ilhas imersas no mar de caos, Figura 2d. De fato, o último torus é quebrado para um valor crítico  $K_c \approx 0.15464$  [48].

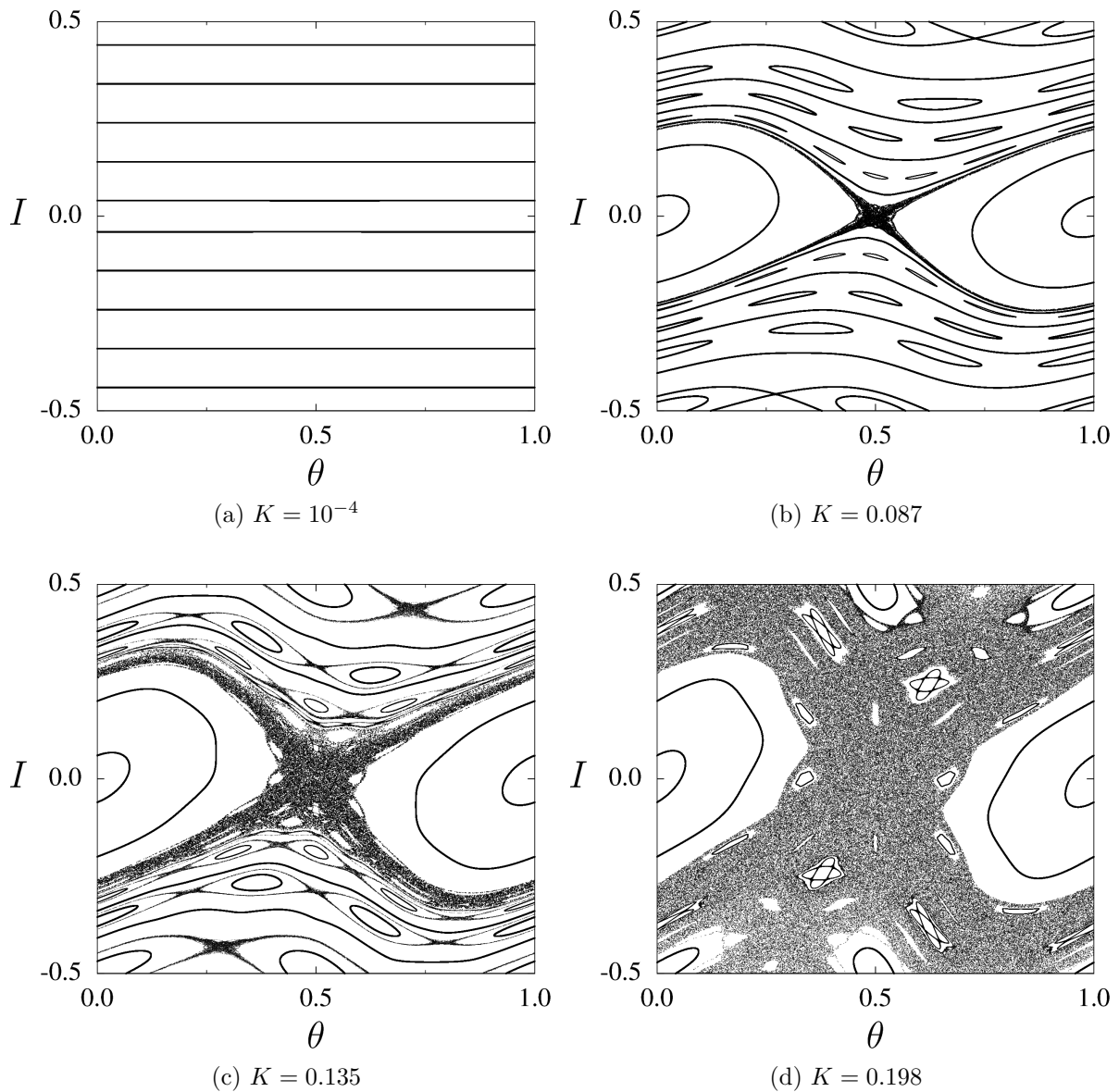


Figura 2 – Espaço de fase MPT. O parâmetro de perturbação  $K$  controla o tamanho das ressonâncias. Conforme as ilhas crescem, torus invariantes são quebrados e caos de separatriz surge. Para  $K = 0.198$  restam apenas ilhas em um mar de caos (d).

O transporte caótico no espaço de fase é tema de estudo em sistemas Hamiltonianos. A presença de curvas invariantes caracterizam barreiras de transporte no espaço de fase, que impedem uma região caótica acessar valores maiores na coordenada de ação. Na Figura 2c as órbitas caóticas estão contidas, aproximadamente, entre  $I = -0.3$  e  $I = 0.3$ , devido

aos toros invariantes. Já na Figura 2c, o mar de caos acessa todo o espaço de fase.

Há, ainda, outro tipo de barreira de transporte. Quando as órbitas invariantes, próximas à essas ressonâncias secundárias, são quebradas devido à perturbação, surgem cantoros: conjuntos invariantes de infinitos pontos que não formam uma curva contínua. Tais estruturas são responsáveis pelo aprisionamento de órbitas, ou *stickiness*: órbitas caóticas que permanecem ao redor de cadeias de ilhas por longo tempo, então escapam novamente para o mar de caos [45].

### 3.4.2 Mapa padrão não-twist

O Mapa Padrão Não-*twist* (MPNT) é definido por [46]:

$$I_{n+1} = I_n - b \sin(2\pi\theta_n) \quad (3.10a)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + a(1 - I_{n+1}^2) \pmod{1} \quad (3.10b)$$

no qual  $a$  é um parâmetro que controla a função *twist* e  $b$  é a amplitude da perturbação. O gráfico de sua função *twist*, e do MPT, está na Figura 3. Observa-se um perfil não monotônico. Ele viola a condição *twist* em uma única órbita:

$$\frac{\partial\theta_{n+1}}{\partial I_n} = 0 \Rightarrow I_{n+1} = 0$$

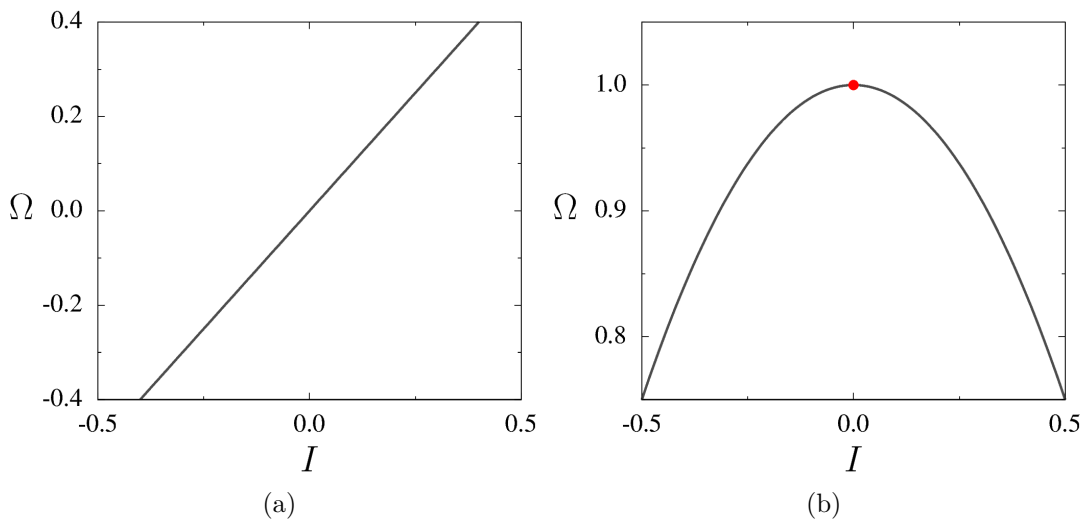


Figura 3 – Função *twist* do MPT (a) e do MPNT (b). A última possui um ponto de máximo, em vermelho, no qual o teorema de KAM falha.

Sistemas não-*twist* ocorrem em diversos sistemas de interesse físico: linhas de campo magnético em tokamaks [49], na teoria de fluidos [13], na física molecular [50]. Sua peculiaridade reside na violação da condição *twist*, que impossibilita de aplicar os

teoremas de KAM e PB nesta região. Por outro lado, a não monotonicidade do perfil do número de rotação implica na presença de duas órbitas com o mesmo número de rotação. A órbita referente ao extremo do perfil de  $\Omega$  possui frequência irracional sendo chamada *curva invariante sem cisalhamento*, ou simplesmente, Curva Sem Cisalhamento (CSC).

O efeito da perturbação no MPNT está na Figura 4. Assim como no MPNT, no limite da perturbação  $b \rightarrow 0$ , o mapa é integrável e as soluções são linhas invariantes, Figura 4a. Aumentando a perturbação duas ilhas se formam (nas cores cyan e magenta), referentes a dois pontos fixos do mapa, Figura 4b. Cadeias de ilhas se formam próximas à curva sem cisalhamento, devido à presença de pontos periódicos na região, Figura 4c. Nesta mesma figura, nota-se que o caos surge da separatriz das ilhas, comportamento idêntico ao MPT.

Para  $b$  grande, o caos está presente em um grande volume do espaço de fase. Na Figura 4d observa-se duas regiões caóticas, uma com pontos em verde e a outra em azul. Em cada um das regiões o caos domina, mas não há transporte entre elas. Isso ocorre pela presença de torus invariantes que separam as regiões de caos. Dentre esses torus está a CSC, em vermelho. Ressalta-se a presença da curva sem cisalhamento para uma amplitude de perturbação  $b = 0.8$ , maior que o valor crítico  $K_c$  do MPT. Na Figura 4e a perturbação destruiu a curva sem cisalhamento, mas há um grande *stickiness*. Uma órbita que inicia nesta região, marcada em preto, permanece nela por um número grande de iterações, até que escapa para o caos em verde e azul. Na literatura, é chamada *barreira de transporte sem cisalhamento*. Na Figura 4f não há *stickiness*, logo, a barreira de transporte é inexistente.

A curva sem cisalhamento, e os toros em sua vizinhança, são resistentes a perturbações: atuam como uma barreira de transporte. Mesmo após sua quebra, a barreira de transporte está presente no efeito *stickiness*, que possui características próprias em sistemas não-*twist* [51, 52].

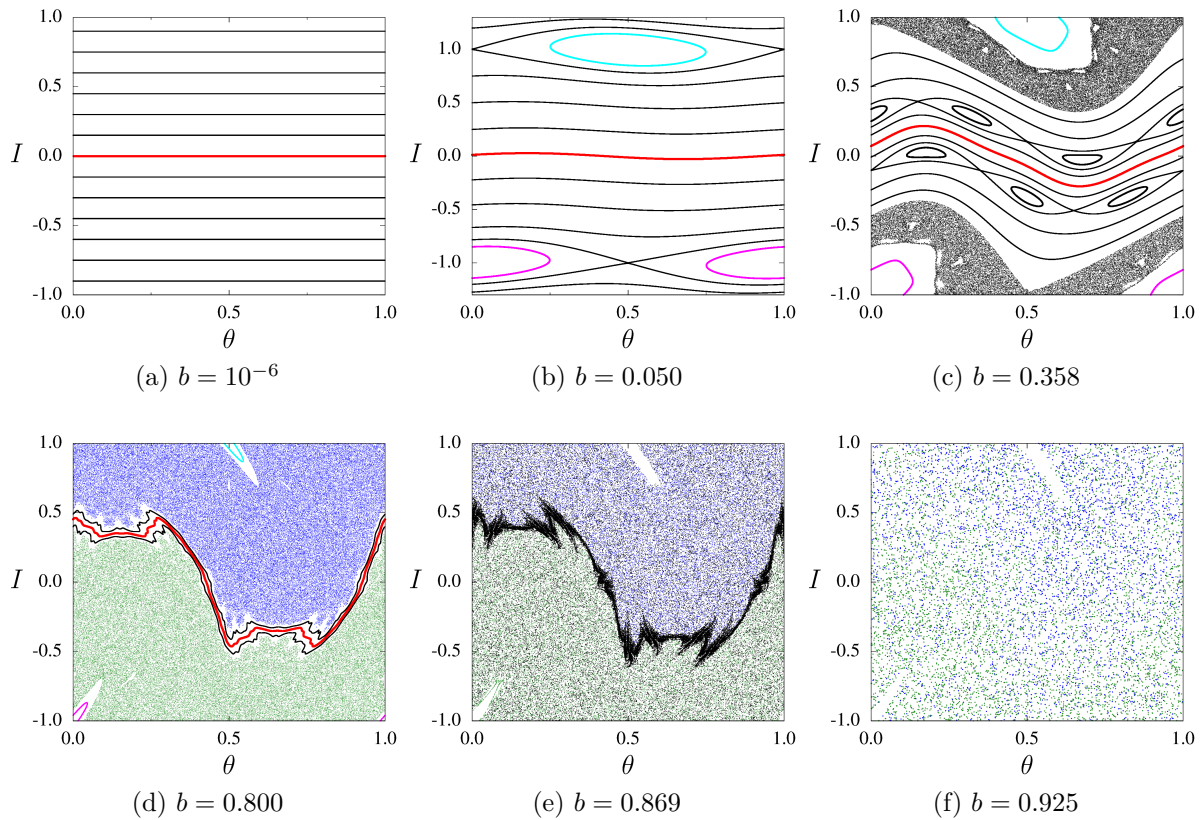


Figura 4 – Espaço de fase do MPNT. A curva sem cisalhamento (em vermelho) é resistente a perturbações e atua como uma barreira de transporte. Parâmetro  $a = 0.354$ .

### 3.4.2.1 Cenários de órbitas periódicas

A presença de um ponto de extremo no perfil do número de rotação permite a presença de órbitas com mesmo número de rotação, ou seja, ilhas isócronas em posições distintas no espaço de fase. Devido a propriedades de simetria espacial há possibilidade de órbitas periódicas isócronas <sup>4</sup> colidirem e aniquilarem-se. Este processo é precedido por uma reconexão entre as separatrizes das duas cadeias. Tal reconexão é afetada pelo período da órbita. Ou seja, colisões de órbitas com período par são distintas dos processos envolvendo órbitas de período ímpar.

#### Cenário par

Órbitas de período par dão origem a bifurcações similares às presentes na Figura 5. Na figura, ao lado de cada mapa, encontra-se o perfil do número de rotação associado. O processo inicia-se com duas cadeias gêmeas possuindo duas ilhas, Figura 5a. No perfil de  $\Omega$  observa-se que ambas possuem o mesmo número de rotação. Alterando o parâmetro  $a$ , os pontos hiperbólicos colidem formando uma única separatriz e suprimindo a Curva Sem Cisalhamento (CSC), Figura 5c. Uma bifurcação duplica os pontos hiperbólicos. O cenário segue com a aproximação dos pontos elípticos, reduzindo o tamanho das ilhas.

<sup>4</sup> Órbitas com mesmo número de rotação.

No limite, tais pontos periódicos colidem e a curva sem cisalhamento retorna ao sistema, Figura 5g. Observamos um par de cadeias gêmeas, na fronteira das regiões caóticas, com três ilhas cada. Variando o parâmetro  $a$ , essas cadeias se desprendem do caos, em direção à curva sem cisalhamento. Cada uma das cadeias possui três ilhas, logo, sua evolução segue o cenário ímpar descrito a seguir.

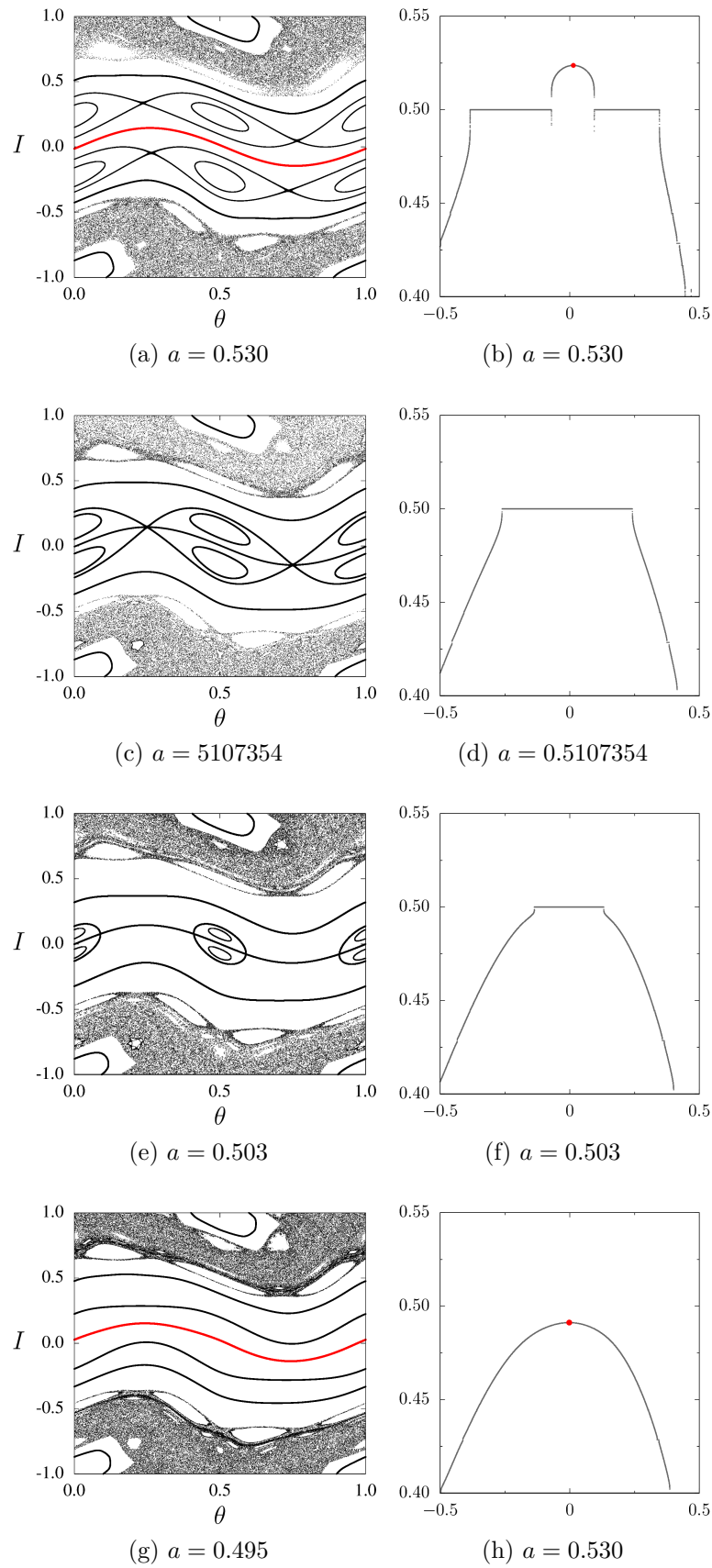


Figura 5 – Cenário par de reconexão de separatrizes do MPNT. À esquerda, o espaço de fase do MPNT e à direita, o perfil de  $\Omega$ , utilizando  $\theta_0 = 0.5$ . Fixado  $b = 0.29$ .

### Cenário ímpar

O cenário de reconexão para as órbitas de período ímpar difere substancialmente do cenário par. A Figura 6 exemplifica tais bifurcações. Na Figura 6a observamos duas ilhas gêmeas de período três e a curva sem cisalhamento, em vermelho. Observamos uma topologia heteroclínica da separatriz. Na sequência, Figura 6b, as separatrizes de ambas as cadeias se unem e a curva sem cisalhamento é suprimida: aqui ocorre a reconexão de fato. Em seguida, a CSC retorna e há uma troca de posição relativa à separatriz, entre as duas cadeias, Figura 6c. A separatriz muda sua topologia para homoclínica, levando à formação de *meanders*<sup>5</sup> [53].

O cenário evolui com a aproximação dos pontos elípticos e hiperbólicos, até que os mesmos colidem e se aniquilam. Desta colisão, surgem curvas sem cisalhamento adicionais, marcadas em azul e verde, Figura 6d. Os dois pontos de máximo no perfil de  $\Omega$ , referentes às curvas sem cisalhamento adicionais, são atenuados variando o parâmetro  $a$ . O resultado é uma bifurcação que extingue as CSC verde e azul, restando apenas a vermelha, Figura 6e.

Estas novas curvas sem cisalhamento, possuem características distintas da CSC vermelha, Figura 6d. Elas têm origem em bifurcações oriundas da perturbação no mapa, possível de detectar somente no cálculo numérico do perfil do número de rotação [54, 55].

---

<sup>5</sup> Torus invariantes que não são um mapeamento sobre a variável  $\theta$  são chamados *meanders*.



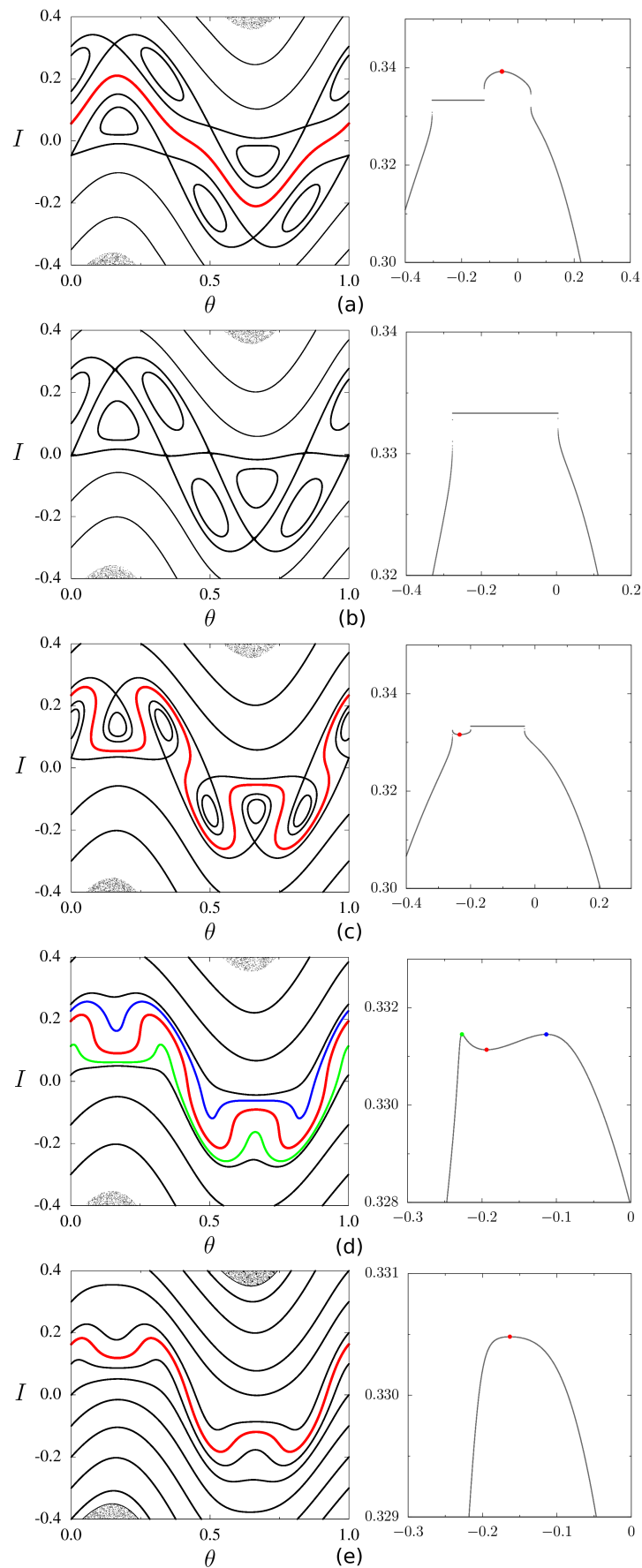


Figura 6 – Cenário ímpar de reconexão de separatrizes do MPNT. À esquerda, o espaço de fase e à direita, o perfil de  $\Omega$ , utilizando  $\theta_0 = 0.5$ . Os parâmetros utilizados são:  $b = 0.32$ , (a)  $a = 0.345$ , (b)  $a = 0.341806$ , (c)  $a = 0.340$ , (d)  $a = 0.3384$  e (e)  $a = 0.337$ .

Através de métodos analíticos é possível encontrar, aproximadamente, os valores críticos de  $a$  e  $b$  para os quais a reconexão ocorre. Tanto no cenário par, quanto no ímpar, é possível propor hamiltonianas quase-integráveis que possuem configurações de ilhas similares ao mapa. Exemplos deste método são encontrados em [56, 57, 46].

Além dos cenários par e ímpar supracitados, o MPNT também possui cenários “não-padrão” de órbitas periódicas. Tais cenários possuem dois ou mais pares de cadeias gêmeas, ou seja, a presença de quatro ou mais cadeias de ilhas isócronas provenientes de sucessivas bifurcações [58].

### 3.5 Abordagem Hamiltoniana no Modelo de Horton

A partir do modelo de Horton obtém-se a equação (2.10), que descreve a evolução temporal da posição de uma partícula teste imersa na borda do plasma. A referência [12] mostra que estas equações formam um sistema Hamiltoniano. Fixando os modos de oscilação espacial  $M$  e  $L$  e definindo variáveis de ação e ângulo<sup>6</sup> ( $I, \psi$ ):

$$I = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \quad (3.11a)$$

$$\psi = M\theta - L\phi \quad (3.11b)$$

podemos reescrever as equações de movimento (2.10), obtendo:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{2M}{Ba^2} \sum_n \phi_n \sin(\psi - n\omega_0 t) \quad (3.12a)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{v_{\parallel}(I)}{q(I)} [M - Lq(I)] - \frac{ME_r(I)}{Ba\sqrt{I}} \quad (3.12b)$$

Definindo os perfis de campo elétrico de equilíbrio  $E_r(I)$ , fator de segurança  $q(I)$ , velocidade paralela  $v_{\parallel}(I)$ , amplitudes  $\phi_n$  e frequência fundamental  $\omega_0$  dos modos ressonantes, podemos resolver as equações (3.12). Para  $\phi_n = 0$ , na ausência de oscilações eletrostáticas na borda do plasma, a ação  $I$  é uma constante de movimento e o sistema é integrável. Se  $\phi_n \neq 0$ , a ação oscila devido às perturbações, caracterizando um sistema Hamiltoniano quase-integrável no qual podemos aplicar a teoria discutida na seção 3.3. Caso o sistema possua infinitos modos temporais, em fase, com mesma amplitude  $\phi_n = \phi$ , pode-se utilizar as identidades

<sup>6</sup> A variável  $\psi$  é o ângulo helicoidal formado pelo modo de oscilação  $M/L$ . Seu caráter periódico é evidente. A variável  $I$  corresponde à coordenada radial normalizada, ao quadrado, pois a ação deve representar a área no espaço de fase original.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\omega_0 t) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega_0 t - 2\pi n) \quad \text{e} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin(n\omega_0 t) = 0$$

para integrar as equações (3.2) utilizando propriedade da função delta de Dirac [10]. A soma destes infinitos modos gera pulsos espaçados por um período  $T = 2\pi/\omega_0$ . Desta integração resulta o mapa

$$I_{n+1} = I_n + \frac{4\pi M\phi}{a^2 B\omega_0} \sin(\Psi_n) \quad (3.13a)$$

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n + \frac{2\pi v_{\parallel}}{\omega_0 R} \frac{[M - Lq(I_{n+1})]}{q(I_{n+1})} - \frac{M}{Ba\omega_0} \frac{E_r(I)}{\sqrt{I}} \quad (3.13b)$$

que descreve o movimento da partícula entre dois pulsos consecutivos através de um mapeamento. Pode-se fazer uma análise do comportamento que o mapa (3.13) possui discutindo alguns casos limite. No limite  $v_{\parallel} \gg E_r/B$  podemos desprezar o termo associado ao campo elétrico de equilíbrio. Neste caso, o mapa resulta em:

$$I_{n+1} = I_n + \frac{4\pi M\phi}{a^2 B\omega_0} \sin(\Psi_n) \quad (3.14a)$$

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n + \frac{2\pi v_{\parallel}}{\omega_0 R} \frac{[M - Lq(I_{n+1})]}{q(I_{n+1})} \quad (3.14b)$$

A partir das equações (3.14), dependendo do perfil escolhido para o fator de segurança, é possível obter o MPT e o MPNT [10], discutidos na seção anterior. Escolhendo um perfil monotônico para o fator de segurança e expandindo  $q(I)$  em torno de  $I = I_*$  obtém-se a expressão:

$$q(I) = q_* + q'_*(I - I_*). \quad (3.15)$$

Substituindo na eq. (3.14),

$$\frac{[M - Lq]}{q} = \frac{M - Lq_* - Lq'_*(I - I_*)}{q_* + q'_*(I - I_*)} = \frac{1}{q_*} \frac{M - Lq_* - Lq'_*(I - I_*)}{1 + \frac{q'_*}{q_*}(I - I_*)} \quad (3.16)$$

Definindo  $\delta = M - Lq_*$  e utilizando a expansão  $(1+x)^{-1} \approx 1-x$  para o denominador,

$$\frac{[M - Lq]}{q} \approx \frac{1}{q_*} [\delta - Lq'_*(I - I_*)] \left[ 1 - \frac{q'_*}{q_*}(I - I_*) \right]$$

Desprezando termos de ordem quadrática ou superior, obtêm-se

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n + \frac{2\pi v_{\parallel} \delta}{Rq_* \omega_0} \left[ 1 - \frac{Lq'_*}{\delta q_*} (I - I_*) \right] \quad (3.17)$$

Introduzindo as variáveis, normalizadas:

$$x = \frac{\Psi}{2\pi} \quad e \quad y = \frac{v_{\parallel} \delta}{\omega_0 Rq_*} \left[ 1 - \frac{Lq'_*}{\delta q_*} (I - I_*) \right]$$

obtemos

$$y_{n+1} = y_n - \frac{v_{\parallel} Lq'_*}{\omega_0 Rq_*} \frac{4\pi M \phi}{a^2 B \omega_0} \sin(2\pi x_n) \quad (3.18)$$

Definindo o parâmetro

$$K = -\frac{4\pi M L v_{\parallel} q'_*}{Ra^2 q_* \omega_0^2} \phi$$

transformamos as equações (3.14) no mapa:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_{n+1} \\ y_{n+1} &= y_n + K \sin(2\pi x_n) \end{aligned}$$

equivalente ao MPT, equações (3.9). Nota-se que o parâmetro de perturbação do mapa,  $K$ , é proporcional á amplitude dos modos de oscilação  $\phi$ . Portanto, utilizando um perfil monotônico para  $q$ , o mapa (3.14) possui comportamento local descrito pelo MPT.

Por outro lado, ao expandir um perfil não monotônico de  $q(I)$  em torno de seu ponto de mínimo  $I = I_m$ , obtêm-se o MPNT, como está descrito abaixo.

Utilizando o perfil do fator de segurança:

$$q(I) = q_m + \frac{q_m''}{2} (I - I_m)^2 \quad (3.19)$$

concluimos que

$$\frac{M - Lq}{q} = \frac{1}{q_m} \frac{M - Lq_m - L \frac{q_m''}{2} (I - I_m)^2}{1 + \frac{q_m''}{2q_m} (I - I_m)^2} \approx \frac{1}{q_m} \left[ \delta - L \frac{q_m''}{2} (I - I_m)^2 \right] \left[ 1 - \frac{q_m''}{2q_m} (I - I_m)^2 \right] \quad (3.20)$$

onde  $\delta = M - Lq_m$ . Desprezando termos de ordem superior a dois, e substituindo nas equações do mapa (3.14),

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n + \frac{2\pi v_{\parallel} \delta}{Rq_m \omega_0} \left[ 1 - \frac{Lq_m''}{2\delta} (I_{n+1} - I_m)^2 \right] \quad (3.21)$$

Efetuando a transformação linear

$$x = \frac{\Psi}{2\pi} \quad e \quad y = \left( \frac{Lq_m''}{2\delta} \right)^{1/2} (I - I_m)$$

obtemos

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{v_{\parallel} \delta}{Rq_m \omega_0} (1 - y_{n+1}^2) \\ y_{n+1} &= y_n + \left( \frac{Lq_m''}{2\delta} \right)^{1/2} \frac{4\pi M \phi}{Ba^2 \omega_0} \sin(2\pi x_n) \end{aligned}$$

Definindo as constantes

$$\alpha = \frac{v_{\parallel}}{Rq_m \omega_0} \quad e \quad \gamma = -\frac{4\pi M \phi}{a^2 B \omega_0} \left( \frac{Lq_m''}{2\delta} \right)^{1/2}$$

o mapa acima se torna o MPNT:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \alpha (1 - y_{n+1}^2) \\ y_{n+1} &= y_n - \gamma \sin(2\pi x_n) \end{aligned}$$

Devido à sua função *twist*, o MPNT possui uma curva sem cisalhamento. Ou seja, o modelo de Horton prevê uma barreira de transporte sem cisalhamento localizada na posição radial correspondente ao mínimo do perfil de  $q$ .

O sistema Hamiltoniano que resulta do modelo de Horton, equações (3.12), descreve o movimento de uma partícula teste na borda de um tokamak, sujeita à deriva  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Através de aproximações que desprezam o efeito do campo elétrico de equilíbrio, conclui-se que o espaço de fase deste sistema possui propriedades típicas de sistemas *twist*, como o MPT. Empregando perfis não monotônicos o sistema apresenta fenômenos não-*twist* que dão origem a barreiras de transporte sem cisalhamento. Estas, são resistentes a perturbações periódicas e, como conjectura, representam barreiras ao transporte de partículas em tokamaks.

## 4 Influência do Perfil do Fator de Segurança

Neste trabalho, propomos o estudo da influência do fator de segurança no transporte anômalo de partículas na borda de um plasma confinado. Para tanto, utilizamos as equações (3.12) para modelar o movimento do centro-guia dos íons, sujeitos à ação das ondas de deriva e o transporte radial que elas causam. Neste capítulo, na primeira seção, apresentaremos os perfis de plasma utilizados, incluindo o fator de segurança. Logo após, discutiremos como o fator de segurança modifica a barreira de transporte sem cisalhamento. Destaca-se que, mesmo no perfil monotônico do fator de segurança, há a presença da curva sem cisalhamento, já que o campo elétrico radial introduz não-monotonicidades no sistema.

### 4.1 Parâmetros do modelo

Devido à escala de tempo e comprimento dos processos que ocorrem em um tokamak serem pequenas, utilizamos uma normalização, Apêndice A, para evitar influência de flutuação numérica os cálculos computacionais. Após normalizar os parâmetros as equações do modelo de Horton (3.12) resultam em:

$$\frac{dI}{dt} = 2M \sum_n \phi_n \sin(\psi - n\omega_0 t) \quad (4.1a)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{v_{\parallel}(I)}{q(I)} [M - Lq(I)] - \frac{ME_r(I)}{\sqrt{I}} \quad (4.1b)$$

O Quadro 1 elenca todas as variáveis do modelo. Para  $\phi_n = 0$  o sistema é integrável e as órbitas são regulares. Se  $\phi_n \neq 0$  o sistema é quase-integrável e se comporta segundo o cenário descrito pelos teoremas de KAM e PB. Sistemas não integráveis não possuem soluções analíticas, logo só podem ser resolvidos por integração numérica. Neste trabalho, resolveremos estas equações utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem<sup>1</sup> [59]. As trajetórias das partículas no espaço de fase são as típicas de sistemas quase-integráveis: órbitas quase-periódicas (torus de KAM), ilhas e trajetórias caóticas [60], [51].

<sup>1</sup> Como mostra o Apêndice A, após a adimensionalização, a escala de tempo do sistema  $t_0 = 2\pi/\omega_0 \sim 1$ . Utilizamos um passo de integração  $\Delta t = 10^{-3}$  para a resolução das equações diferenciais.

Quadro 1 – Variáveis e parâmetros do modelo.

Perfil do campo elétrico radial de equilíbrio	$E_r(I)$
Perfil do fator de segurança de equilíbrio	$q(I)$
Perfil da velocidade toroidal dos íons	$v_{  }(I)$
Modos espaciais de oscilação	$M$ e $L$
Amplitude do $n$ -ésimo modo temporal de oscilação	$\phi_n$
Frequência fundamental de oscilação	$\omega_0$

A ilhas presentes nos mapas de Poincaré ocorrem nas regiões onde há ressonância, ou seja, a invariância temporal da variável de ação na equação (4.1), isto é, para

$$\frac{d}{dt}(\psi - n\omega_0 t) = 0.$$

Esta condição é satisfeita para o conjunto de ações ressonantes  $I_n$  que obedecem à relação:

$$n = \frac{d\psi}{dt} \frac{1}{\omega_0}, \quad (4.2)$$

Substituindo (4.2) em (4.1), obtém-se a condição para um modo perturbativo ser ressonante:

$$n\omega_0 = \frac{v_{||}}{q(I)} [M - Lq(I)] - \frac{ME_r}{\sqrt{I}} \quad (4.3)$$

Da condição de ressonância, equação (4.3), podemos obter analiticamente a coordenada  $I$  da ressonância referente ao  $n$ -ésimo modo perturbativo.

Utilizaremos seções de Poincaré para analisar as trajetórias no espaço de fase. Tais seções são mapas estroboscópicos construídos pelas interseções das trajetórias na seção toroidal correspondente aos instantes  $t_j = j2\pi/\omega_0$ , para  $j$  inteiro. Com os mapas obtidos numericamente, buscamos um tipo específico de barreira de transporte, chamada Barreira de Transporte sem Cisalhamento (BTSC) cuja origem está na formação de curvas sem cisalhamento [60, 51]. Tais barreiras sem cisalhamento correspondem às trajetórias quase-periódicas com um extremo local no número de rotação da órbita, calculado numericamente pela expressão (3.7).

Os parâmetros e perfis presentes na equação (4.1) remetem às propriedades e condições de equilíbrio do plasma. Alguns resultados experimentais apontam um perfil  $E_r(I)$  não monotônico na borda do plasma [61, 62]. Neste trabalho utilizaremos o perfil radial (4.4) para o campo elétrico de equilíbrio:

$$E_r(r) = 3\alpha r^2 + 2\beta r + \gamma, \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (-80.00, 31.95, -6.00) \times 10^3 \text{ V/m}. \quad (4.4)$$

Trata-se de um perfil não monotônico já utilizado em estudos anteriores que observaram barreiras de transporte nesses perfis [33, 17, 21].

Para a velocidade toroidal dos íons,  $v_{||}$ , utilizamos um perfil com base em dados experimentais do TCABR [63]. Um *fittting* destas medidas por um perfil de tangente hiperbólica resulta na expressão

$$v_{||}(I) = -3.15 + 5.58 \tanh(14.1I - 9.26) \quad (4.5)$$

já adimensionalizada. Na Figura 7 os perfis de  $E_r$  e  $v_{||}$  são plotados em função de  $r/a$ .

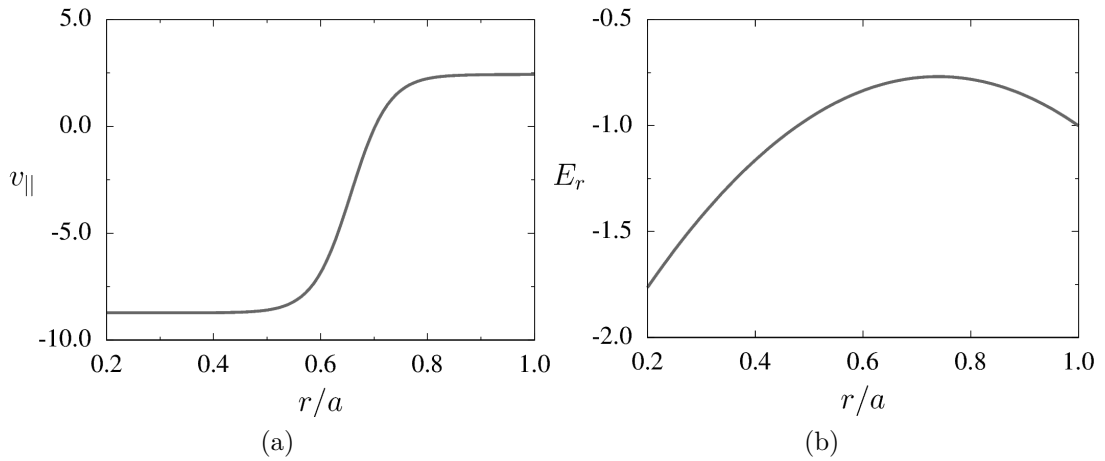


Figura 7 – Perfil de velocidade toroidal (a) obtido a partir de dados experimentais do TCABR [63]. O campo elétrico de equilíbrio (b) é um perfil não monotônico.

Quanto ao espectro de ondas de deriva, foi escolhido o modo espacial  $M/L = 16/4$ . Os modos temporais também foram baseados em dados experimentais do TCABR. Dados coletados mostram que as flutuações são concentradas na região de baixa frequência, da ordem de  $10 \text{ kHz}$ , e em uma faixa de número de onda estreita [17]. A frequência fundamental adotada foi  $\omega_0 = 6 \times 10^4 \text{ Hz}$  e as amplitudes de perturbação sendo:  $\phi_2 = 4.90 \text{ V}$ ,  $\phi_3 = 0.85 \text{ V}$  e  $\phi_4 = 0.10 \text{ V}$ . Por fim, serão utilizados dois perfis distintos para o fator de segurança do plasma: um monotônico e outro não monotônico, apresentados nas seções seguintes.

## 4.2 Perfil monotônico

O perfil do fator de segurança em um Tokamak fornece detalhes das trajetórias de linhas do campo magnético de equilíbrio. Nas chamadas descargas convencionais, o



fator de segurança possui um perfil monotônico típico. Para modelar esta configuração, utilizamos o perfil

$$q(r) = \begin{cases} 1.99 + (q_a - 1.99)(r/a)^2, & r \leq a \\ q_a(r/a)^2, & r > a \end{cases} \quad (4.6)$$

No plasma, ( $r \leq a$ ), trata-se do segmento de uma parábola com mínimo na região central do plasma. Na proximidade externa ao plasma, ( $r > a$ ), o fator de segurança é determinado pelo campo magnético gerado pela corrente de plasma. Seu perfil é obtido aplicando a lei de Ampère, calculando o campo magnético resultante e aplicando condições de contorno na fronteira do plasma.

O parâmetro de controle escolhido foi o fator de segurança na borda do plasma  $q(a) = q_a$ , uma grandeza diretamente relacionada à corrente de plasma, logo, facilmente medida experimentalmente. Na expressão (4.6) podemos variar  $q_a$  mantendo  $q(0)$ , o fator de segurança no centro do plasma, fixo. O perfil  $q(r)$  está representado graficamente na Figura 8a. Uma grandeza relacionada ao fator de segurança, é seu cisalhamento (do inglês, *shear*). Na literatura, ele é chamado cisalhamento magnético e sua expressão é:

$$S_q(r) = \frac{1}{r} \frac{dq(r)}{dr} \quad (4.7)$$

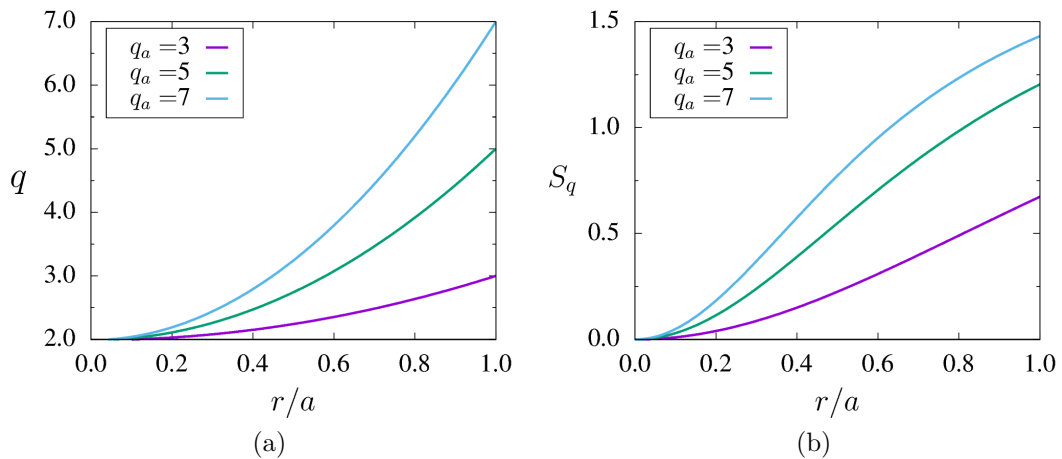


Figura 8 – Perfil monotônico do fator de segurança (a), e seu cisalhamento (b), para alguns valores de  $q_a$ .

Os perfis e parâmetros do plasma determinam quais modos de oscilação são ressonantes. A equação (4.3) fornece uma estimativa da posição dessas ressonâncias. Alterando o parâmetro de controle,  $q_a$ , o perfil  $q(r)$  se altera. Conseqüentemente, modificam-se as condições de ressonância do sistema (4.3), como mostra a Figura 9. Observamos que os modos  $n = 3$  e  $n = 4$  são ressonantes para todos os valores de  $q_a$ , enquanto o modo

$n = 2$  torna-se ressonante apenas em  $q_a \approx 3$ . Em especial, para  $q_a = 7$ , a ressonância  $n = 3$  está localizada em  $I \approx 0.7$  e  $I \approx 1.2$ .

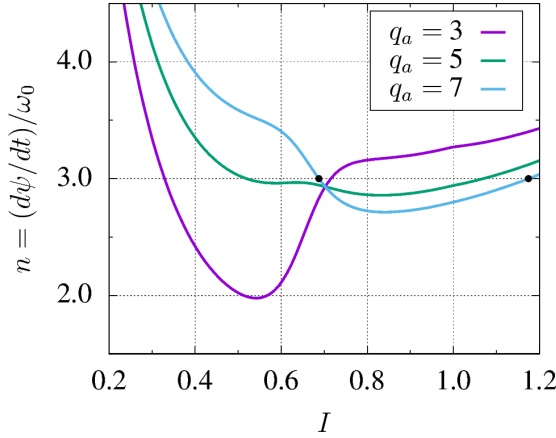


Figura 9 – Condições de ressonância dos modos de oscilação utilizando o perfil monotônico (4.6) do fator de segurança. Os modos  $n = 3$  e  $n = 4$  são sempre ressonantes, enquanto  $n = 2$  é ressonante apenas para  $q_a \leq 3$ .

Para este estudo, variamos o fator de segurança na borda do plasma, no intervalo  $3 < q_a < 7$ , valores típicos de uma descarga de tokamak [64]. A Figura 10 ilustra o tipo de resultado obtido variando o parâmetro de controle. Para  $q_a = 6.98$ , Figura 10a, as trajetórias regulares dominam o espaço de fase. Há duas ilhas em destaque, centradas em  $I \approx 0.6$  e  $I \approx 1.2$ . Tais ilhas são referentes ao modo  $n = 3$ , cuja posição das ressonâncias estão destacadas por pontos na Figura 9. Na região entre as ressonâncias observam-se curvas invariantes, sendo a curva invariante sem cisalhamento destacada em vermelho. O perfil do número de rotação desta seção está na Figura 11. Notamos o ponto de mínimo, destacado em vermelho, que corresponde à curva sem cisalhamento. Note que, mesmo utilizando perfil monotônico do fator de segurança, o sistema apresenta curva sem cisalhamento devido ao perfil do campo elétrico ser não monotônico.

Na Figura 10b está a seção referente a  $q_a = 4.18$ . O caos de separatriz cresce e toma área considerável do espaço de fase. Em  $q_a = 3.78$ , as curvas invariantes entre as ilhas da ressonância são quebradas, inclusive a curva sem cisalhamento, Figura 10c. Este processo de quebra está associado ao crescimento de duas cadeias de ilhas gêmeas (em verde e azul) e a troca de posição relativa à curva sem cisalhamento [46]. Tal processo será detalhado posteriormente. Na Figura 10d, a curva sem cisalhamento está presente no sistema, indicando que ao variar  $q_a$ , tal curva pode se quebrar e ressurgir. Nas Figuras 10e e 10f o caos domina o espaço de fase, sendo que, na última seção,  $q_a = 3.00$ , o modo  $n = 2$  torna-se ressonante. A influência deste modo torna-se mais evidente para  $q_a < 3$ , além do escopo deste trabalho.

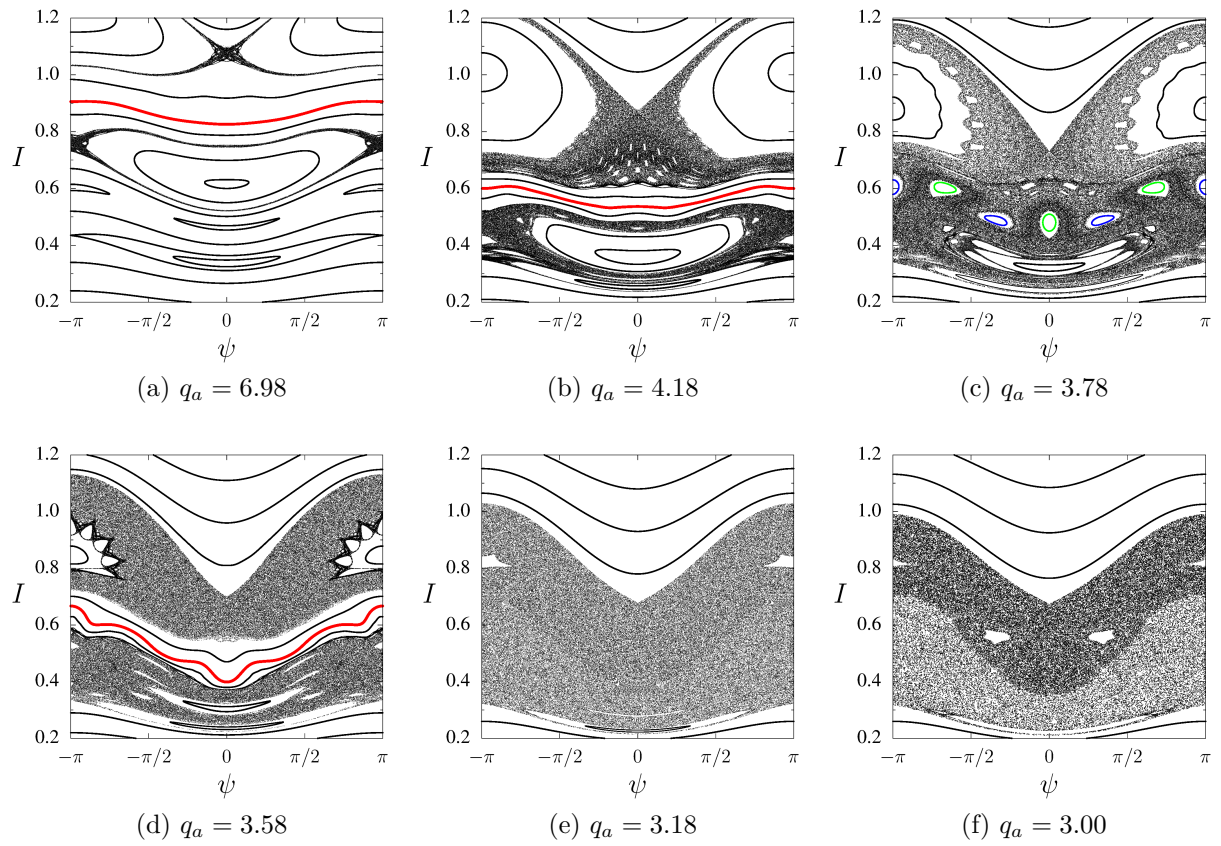


Figura 10 – Seções de Poincaré utilizando perfil monotônico do fator de segurança. Variando o parâmetro  $q_a$ , a posição e formato das ilhas se alteram, regiões caóticas modificam-se e a curva sem cisalhamento (em vermelho) é destruída.

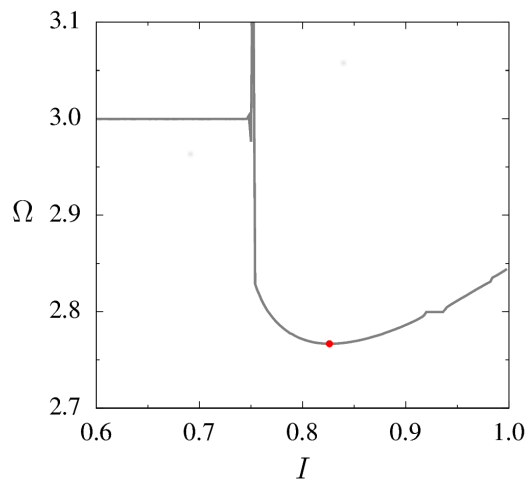


Figura 11 – Perfil de  $\Omega$  referente à Figura 10a. A condição inicial utilizada foi  $\psi_0 = 0$ . O ponto vermelho é o extremo local, caracterizando a curva sem cisalhamento.

O transporte no espaço de fase é altamente afetado pela quebra da curva sem cisalhamento. Um exemplo desta transição está na Figura 12. O processo se inicia com a formação de *meanders*, Figura 12a, curvas invariantes que possuem dois valores de ação para o mesmo  $\psi$ . Há o crescimento de duas cadeias gêmeas com número ímpar de ilhas, azul e verde, responsáveis pela efetiva quebra da curva sem cisalhamento, que ocorre após a reconexão, Figuras 12b - 12c. Notamos uma região de grande *stickiness* acima das cadeias verde e azul, Figura 12c, ou seja, um aprisionamento de órbitas caóticas por um longo intervalo de tempo. Após a reconexão a curva sem cisalhamento retorna ao sistema, Figura 12d. Variando  $q_a$ , este processo de quebra e ressurgimento da curva sem cisalhamento se repete. O cenário de ilhas pode ser semelhante ao apresentado neste parágrafo, ou não. Outras configurações de ilhas serão apresentados na seção 4.4.

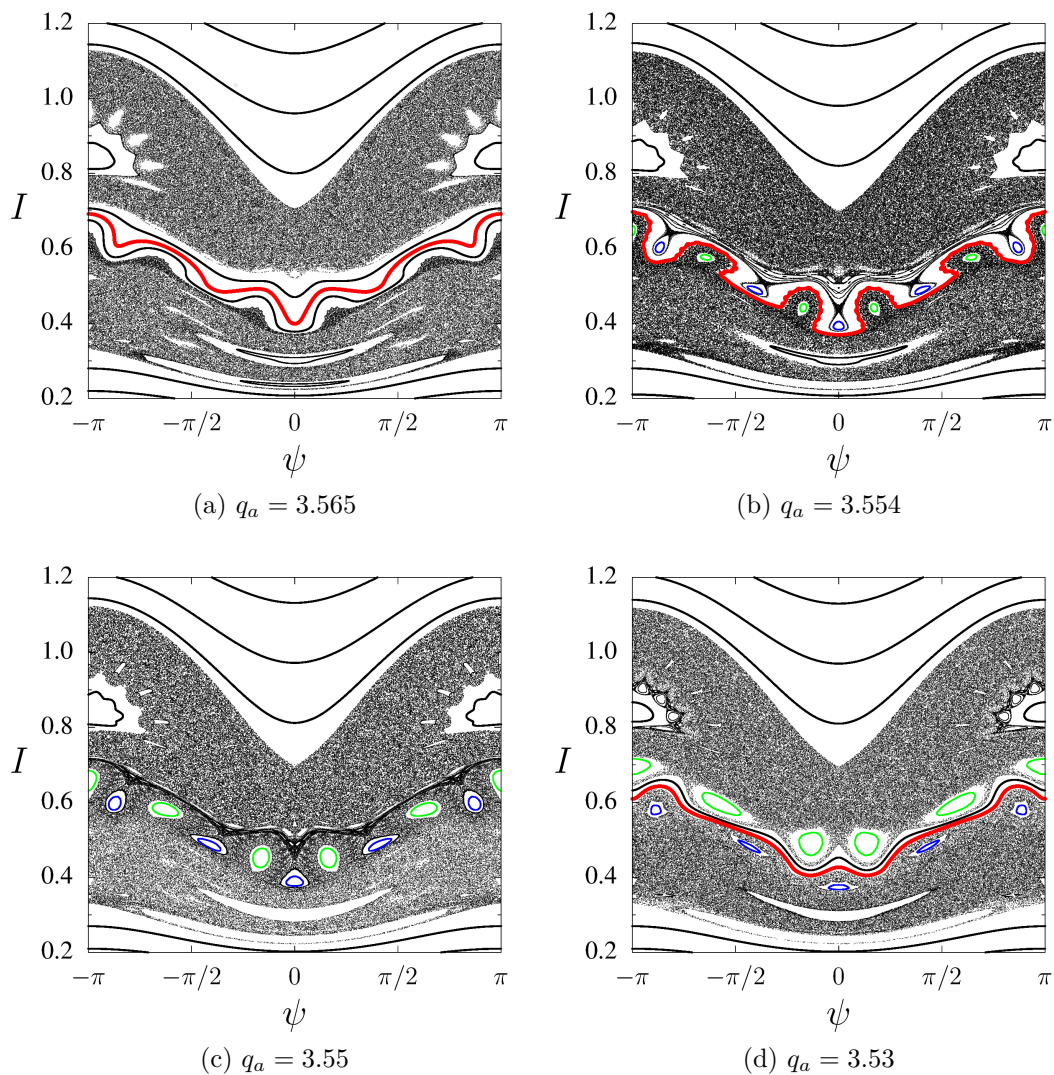


Figura 12 – Exemplo de quebra da curva sem cisalhamento (em vermelho) utilizando perfil monotônico. O processo está relacionado à reconexão de separatrizes das cadeias verde e azul. Mesmo na ausência da curva sem cisalhamento a barreira de transporte está presente no efeito *stickiness*.

### 4.3 Perfil não monotônico

Além dos cenários tradicionais, usando perfil monotônico de  $q$ , existem os chamados cenários avançados que utilizam uma gama de perfis não monotônicos para o fator de segurança [65]. Tais configurações de descarga produzem uma corrente não indutiva no plasma que auxilia no aquecimento, conseqüentemente, na fusão [66]. Para obter o perfil não monotônico do fator de segurança partimos do perfil de densidade de corrente do plasma

$$j(r) = j_0 \left[ 1 + \epsilon' \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (4.8)$$

utilizado na literatura [67, 68]. Do perfil  $j(r)$ , calculamos a componente poloidal do campo magnético de equilíbrio  $B_\theta$  a partir da lei de Ampère. Do perfil de campo magnético poloidal, calcula-se o perfil do fator de segurança. O resultado obtido é o perfil não-monotônico:

$$q(r) = q_a \frac{r^2}{a^2} \left[ 1 - \left( 1 + \epsilon' \frac{r^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\mu+1} \right]^{-1}, \quad \epsilon' = \epsilon \frac{\mu + 1}{\epsilon + \mu + 2} \quad (4.9)$$

Fixamos  $\mu = 0.8$  e  $q_0 = 3.75$ , tornando  $\epsilon$  uma função de  $q_a$ , o parâmetro de controle. Variando  $q_a$  obtêm-se diferentes perfis para o fator de segurança e seu cisalhamento (equação (4.7)), ilustrados na Figura 13. O perfil não monotônico possui um mínimo que varia de posição em função do parâmetro  $q_a$ .

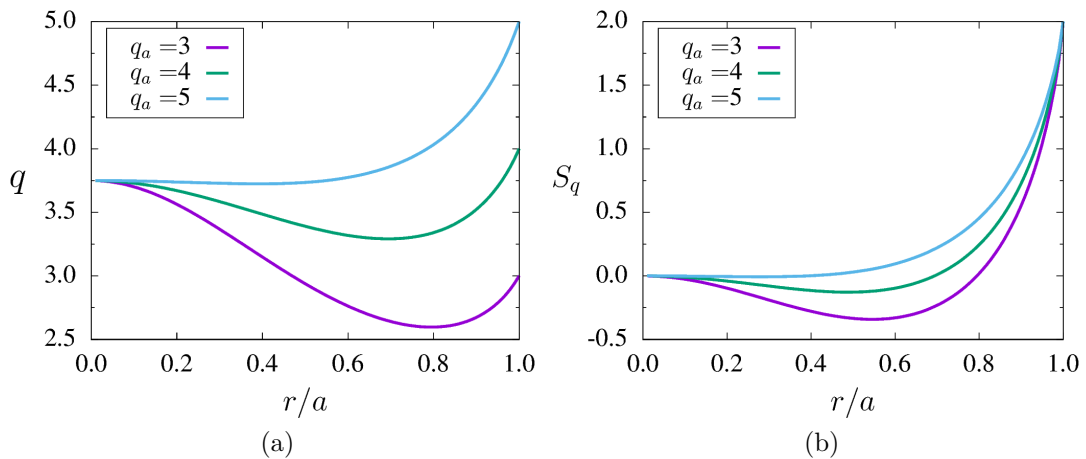


Figura 13 – Perfil não monotônico do fator de segurança (a) e seu cisalhamento (b) para alguns valores  $q_a$ .

Utilizando o perfil não monotônico para o fator de segurança, equação (4.9), obtemos as condições de ressonância presentes na Figura 14. Os modos  $n = 3$  e  $n = 4$  continuam ressonantes, enquanto o modo  $n = 2$  é não ressonante mesmo para  $q_a = 3$ , contrastando com o resultado obtido no perfil monotônico Figura 9.

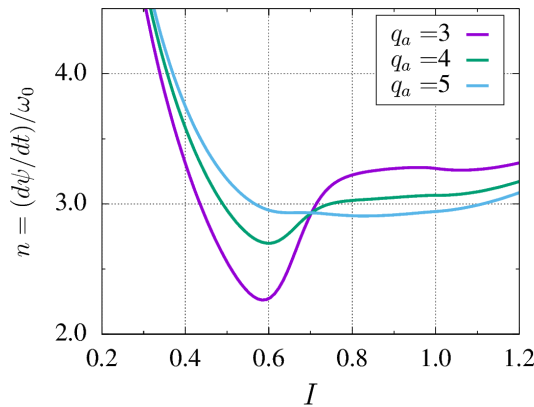


Figura 14 – Condições de ressonância dos modos de oscilação utilizando o perfil não monotônico (4.9) do fator de segurança. Os modos  $n = 3$  e  $n = 4$  são sempre ressonantes.

Na Figura 15 estão alguns resultados obtidos variando  $3 < q_a < 5$ . Para valores de  $q_a \approx 5$ , Figura 15a, há duas ilhas, referentes ao modo  $n = 3$ , centradas em  $I \approx 0.6$  e  $I \approx 1.1$ . Variando o parâmetro de controle, quebras (Figuras 15b e 15d) e ressurgimentos (Figuras 15c) da curva sem cisalhamento também estão presentes utilizando perfil não monotônico do fator de segurança. Uma particularidade encontrada para este perfil é a presença de mais de uma curva sem cisalhamento, à exemplo da Figura 15e, em que há três destas curvas. Cada uma delas corresponde a um ponto de extremo no perfil  $\Omega(I)$ , Figura 16. Assim como no perfil monotônico, as seções com  $q_a \approx 3$ , Figura 15f, são caracterizadas por caos dominando o espaço de fase e suprimindo as ilhas ressonantes.

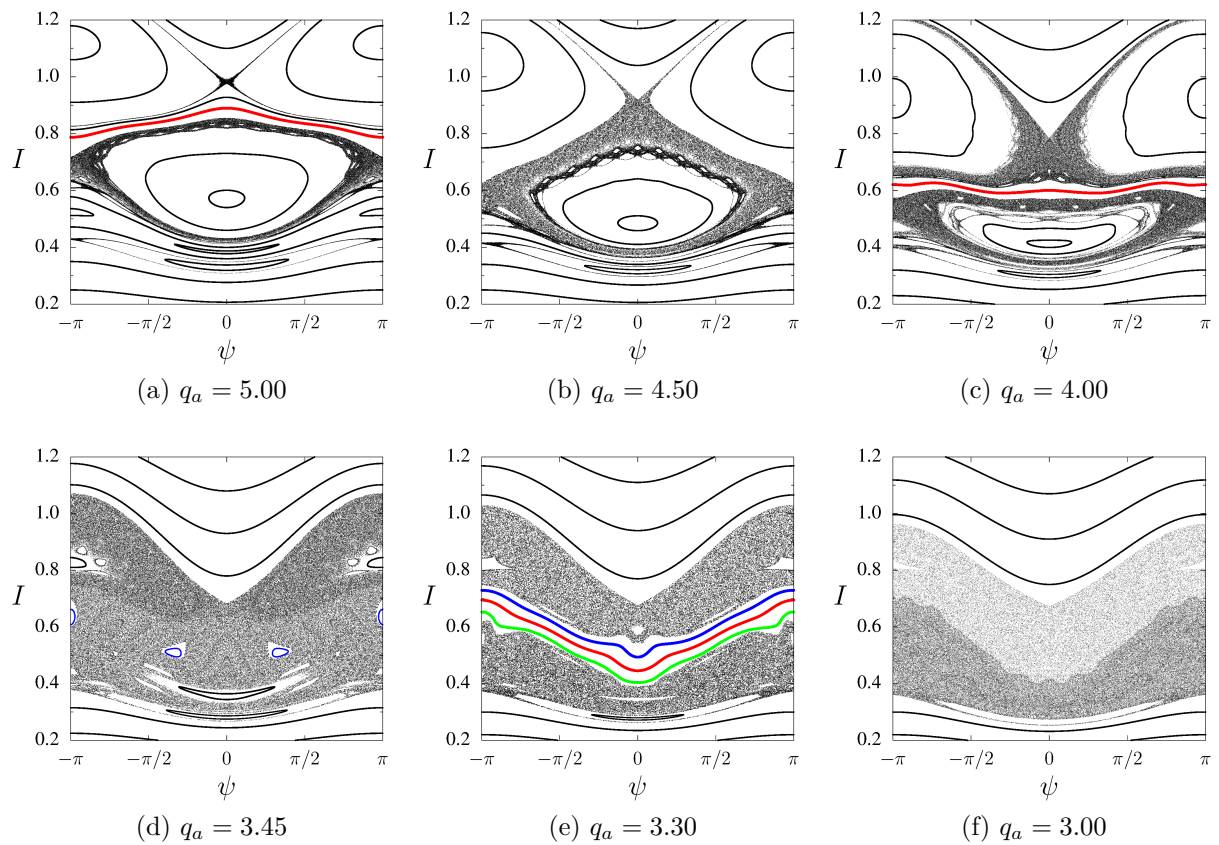


Figura 15 – Seções de Poincaré utilizando perfil não monotônico do fator de segurança. Nota-se a presença de mais de uma curva sem cisalhamento (vermelho, verde e azul) para determinados valores de  $q_a$ .

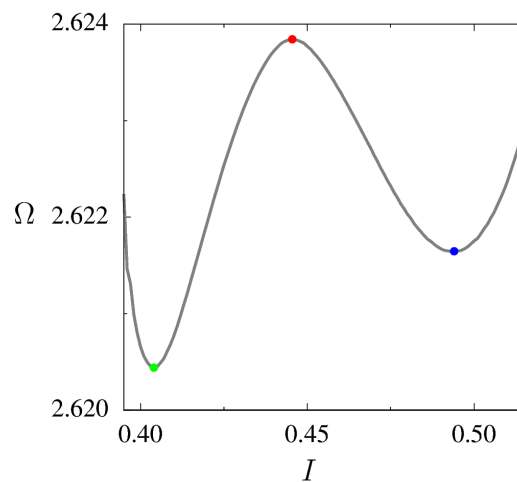


Figura 16 – Perfil de  $\Omega$  da Figura 15e, utilizando a condição inicial  $\psi_0 = 0$ . Há três pontos de extremo no perfil indicando a presença de três curvas sem cisalhamento.

Na Figura 17 está uma sequência de quebra e surgimento da curva sem cisalhamento no perfil não monotônico de  $q$ . As regiões destacadas pelo quadrado estão na Figura 18, para melhor visualização. A curva sem cisalhamento presente na Figura 17a é destruída a medida que cadeias de ilhas verde e azul crescem, Figura 17b. Mesmo após a quebra da curva sem cisalhamento, a barreira de transporte está parcialmente presente no efeito *stickiness*. Quando a curva sem cisalhamento retorna ao sistema surge uma cadeia cyan e outra magenta, além das já presentes azul e verde. As quatro cadeias, verde, azul, cyan e magenta são isócronas e têm o mesmo número de ilhas, Figura 17d. Garantimos que as ilhas possuem o mesmo número de rotação calculando-o para de cada uma delas, utilizando  $10^4$  iterações na seção de Poincaré. O resultado obtido está no Quadro 2: todas elas possuem  $\Omega = 5/2$ .

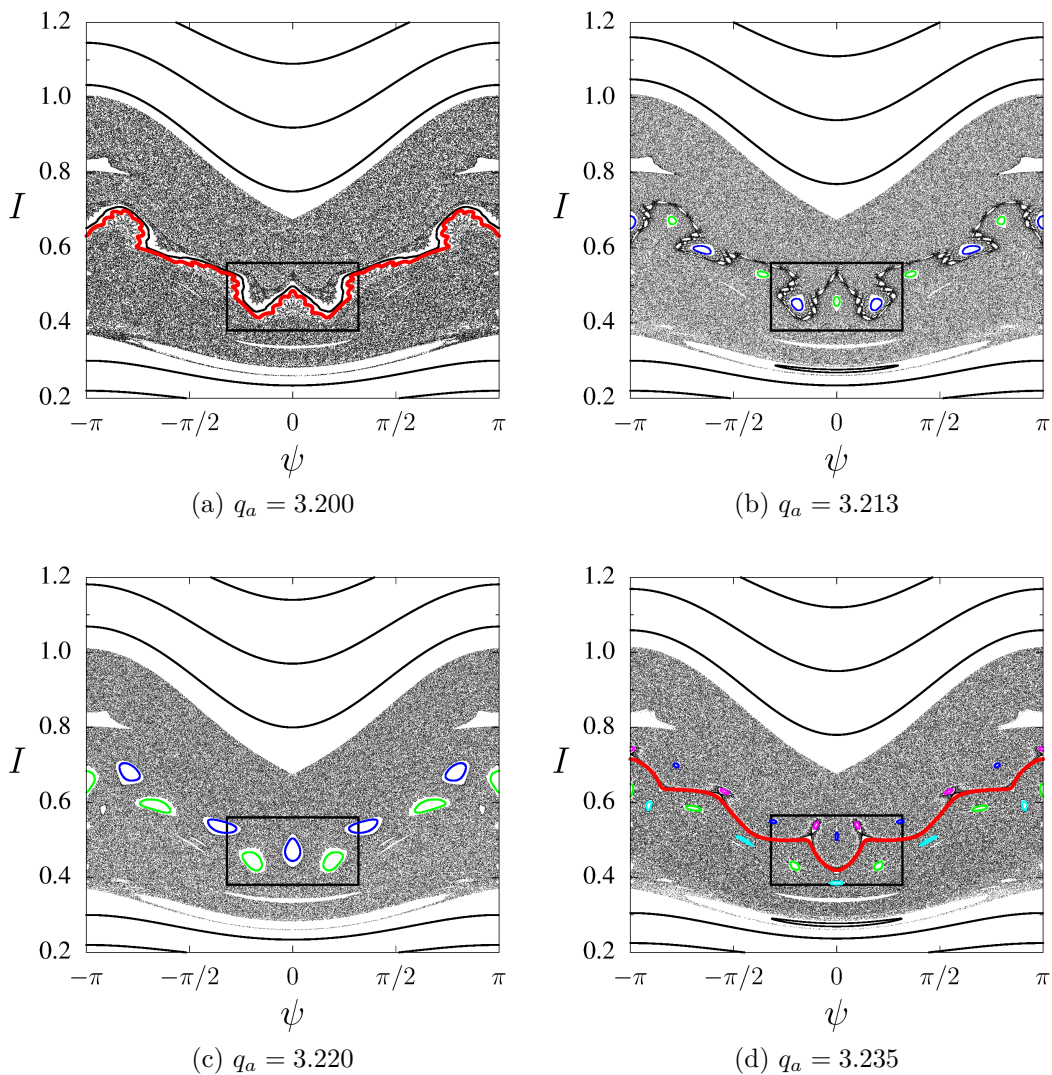


Figura 17 – Exemplo de quebra da curva sem cisalhamento (em vermelho) utilizando perfil não monotônico (4.9).



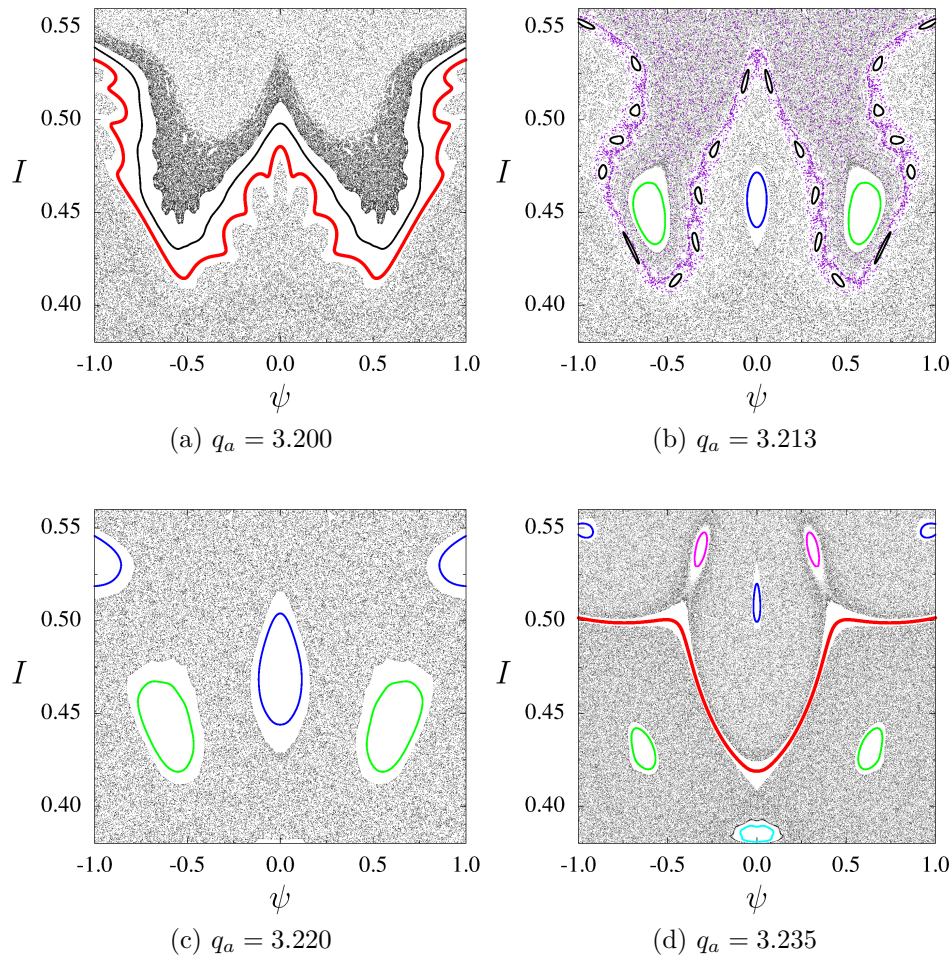


Figura 18 – Ampliação da Figura 17. Após o surgimento da curva sem cisalhamento (d) há um cenário com quatro cadeias isócronas agrupadas aos pares: azul e magenta, verde e cyan.

Cadeia	$\Omega$
Azul	2.500
Magenta	2.500
Cyan	2.500
Verde	2.500

Quadro 2 – Número de rotação calculado para as cadeias presentes na Figura 18d.

O *stickiness*, presente na Figura 18b pode ser analisado utilizando o número de rotação a tempo finito. Ele é calculado para a órbita em roxo da Figura 18b e o resultado está na Figura 19. O comportamento do número de rotação para esta órbita indica convergência até  $\approx 10^4$  iterações, mas o comportamento diverge em seguida, indicando um aprisionamento parcial da órbita.

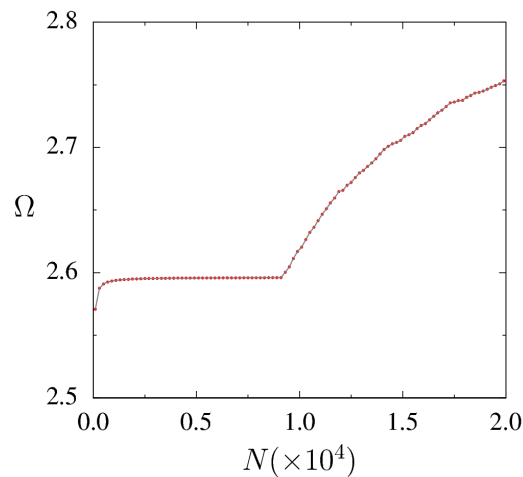


Figura 19 – Número de rotação a tempo finito em função do número de iterações na seção de Poincaré,  $N$ . A aparente convergência de  $\Omega$  para  $N < 10^4$  indica o *stickiness* na região após a quebra da curva sem cisalhamento.

#### 4.4 Cenários assimétricos de órbitas periódicas

O MPNT possui dois cenários principais de órbitas periódicas: o cenário par e o cenário ímpar, discutidos na [subseção 3.4.2.1](#). Cada um deles possui suas particularidades na evolução dos pontos periódicos, reconexão de separatrizes e quebra da curva sem cisalhamento. O sistema estudado neste trabalho também apresenta cenários que se repetem. Alguns deles são semelhantes ao MPNT, como se observa na [Figura 12](#), em que as cadeias de ilhas evoluem de maneira similar ao cenário ímpar do MPNT. Já outras configurações são particulares das equações (4.1), tal qual na [Figura 20a](#), em que observamos uma curva sem cisalhamento (em vermelho) e duas cadeias isócronas com nove ilhas cada, representadas pelos platôs na [Figura 20b](#). Este cenário progride variando o parâmetro  $q_a$ .

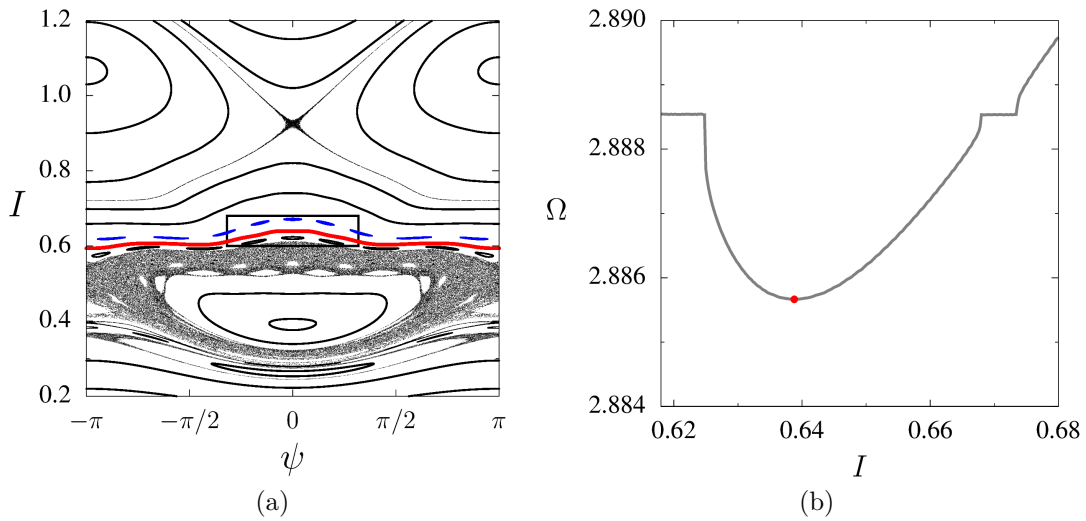


Figura 20 – Cenário de cadeias gêmeas de período ímpar utilizando perfil monotônico e  $q_a = 4.49$ . A seção de Poincaré (a) mostra duas cadeias, preta e azul, associadas à curva sem cisalhamento. Tais cadeias são isócronas como observamos no perfil de  $\Omega$ , calculado em  $\psi_0 = 0$  (b).

A Figura 21 mostra a evolução da área destacada pelo retângulo da Figura 20a. Inicialmente, observamos duas cadeias gêmeas, azul e preta, Figura 21a. Uma duplicação de pontos periódicos gera a cadeia verde que compartilha a mesma separatriz, isócrona à cadeia preta, Figura 21b. Na Figura 21c uma nova bifurcação extingue a cadeia preta. Logo após, o par azul e verde evolui como no cenário ímpar do MPNT: a reconexão de separatrizes ocorre entre as Figuras 21d e 21e, seguida da colisão de pontos periódicos, Figura 21f, que extingue ambas as ilhas. A sequência descrita neste parágrafo é uma aplicação do Teorema do ponto fixo de Poincaré-Birkhoff. Este, afirma que um sistema quase-integrável que possui uma órbita de período  $s$  (do sistema não-perturbado), possui  $2ks$  pontos fixos, onde  $k$  é inteiro positivo. O teorema não afirma o valor de  $k$ , que pode variar conforme visto nas Figuras 21a-21c. Bifurcações similares que modificam o número de ilhas foram observadas em sistemas que modelam interação onda-partícula e na hamiltoniana de Walker e Ford. [69, 70].

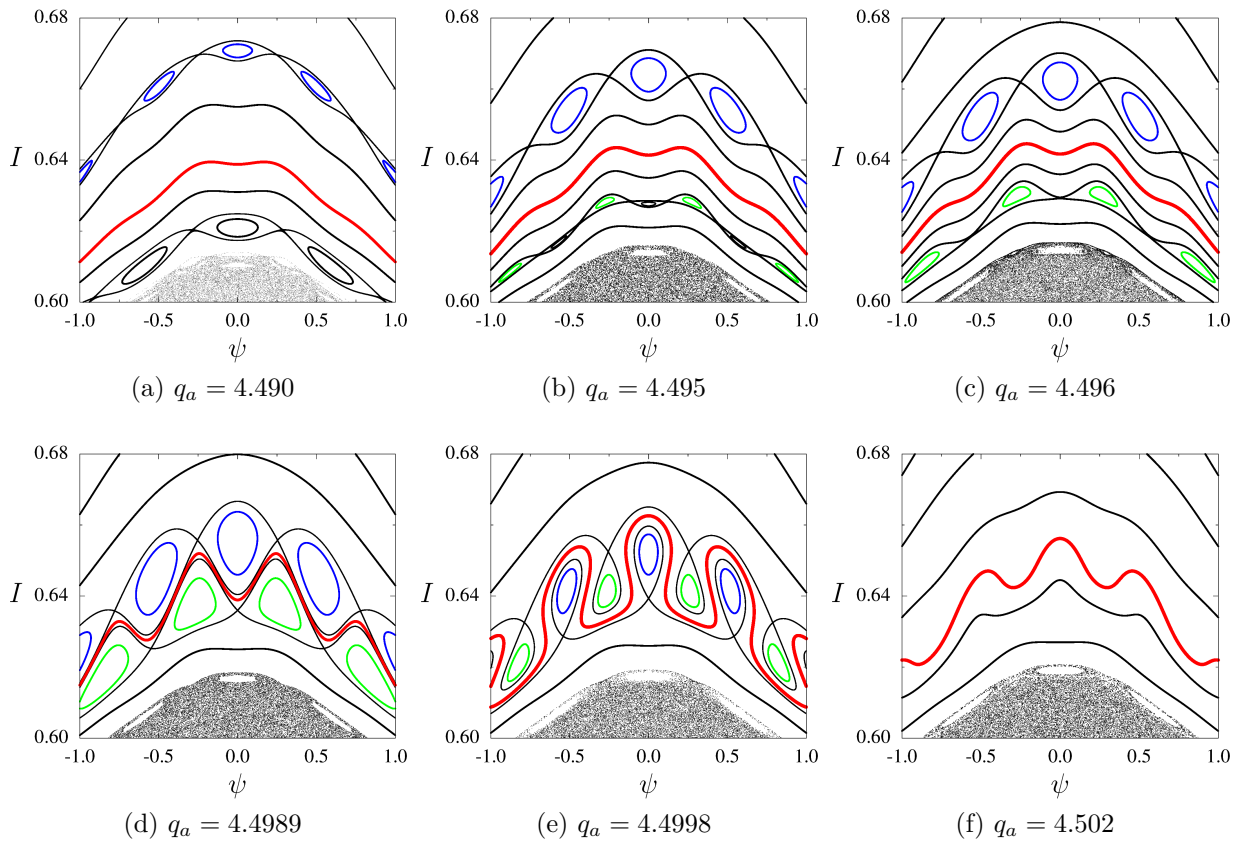


Figura 21 – Bifurcação de pontos periódicos utilizando perfil monotônico de  $q$ . A cadeia de ilhas verde surge (b) e suprime (c) a cadeia preta. A reconexão ocorre entre (d) e (e) seguida pela colisão de pontos fixos que extingue as ilhas (f).

A Figura 22 mostra outro cenário de ilhas. Na Figura 22a há duas cadeias, em verde e azul, cada uma contendo quatro ilhas. As Figuras 22b-22f são uma ampliação da região destacada. A evolução é similar ao cenário par do MPNT, mas neste caso as cadeias não desaparecem concomitantemente: não há simetria. No processo de reconexão a topologia da separatriz é similar ao cenário par do MPNT, Figura 22c. Contudo, a cadeia inferior (verde) desaparece, enquanto a azul é mantida, Figura 22d. Por fim, a própria cadeia azul reduz seu tamanho (Figuras 22e) e se desfaz em um processo que encerra no ressurgimento da curva sem cisalhamento Figura 22f. Observamos que entre as Figuras 22c e 22e não há curva sem cisalhamento, mas há outros torus invariantes separando as regiões caóticas. Comparando com o cenário par do MPNT, em que as órbitas periódicas colidem e se aniquilam, a sequência descrita acima é equivalente, mas sem a simetria apresentada pelo mapa. Uma das órbitas periódicas colide com a separatriz, restando apenas uma das cadeias (azul), que sofre o mesmo processo em seguida.

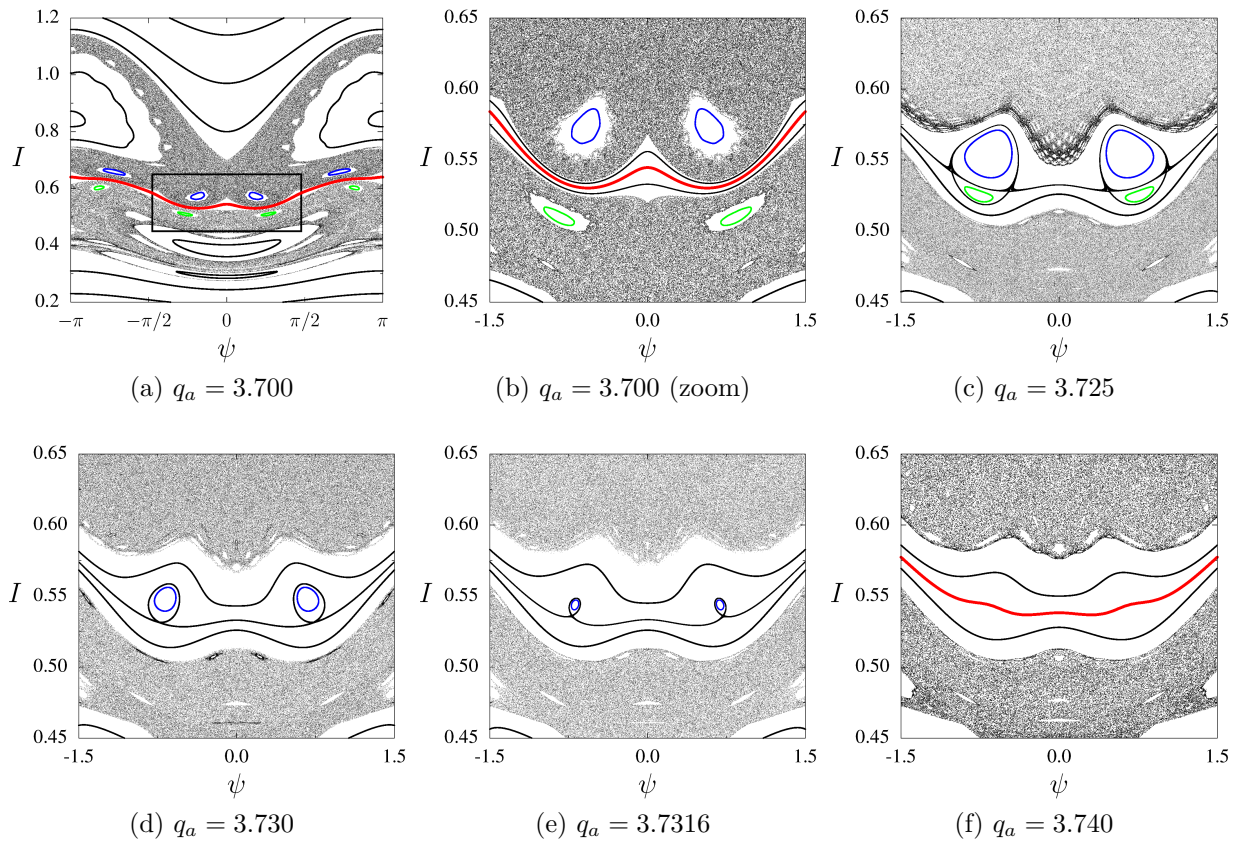


Figura 22 – Cenário ímpar assimétrico utilizando perfil não-monotônico de  $q$ . As cadeias verde e azul colidem (c), a cadeia verde é suprimida (d) seguida da azul, concomitantemente ao retorno da curva sem cisalhamento (d).

Na [Figura 23](#) observamos outro cenário com bifurcação de órbitas periódicas. Observamos a curva sem cisalhamento e duas cadeias gêmeas, verde e azul, cada uma com seis ilhas, [Figuras 23a e 23b](#). Em sequência, na [Figura 23c](#) ocorre uma bifurcação na cadeia inferior, que gera uma nova cadeia (cyan) com mesmo número de rotação. A reconexão ocorre de maneira não trivial: a cadeia verde evolui similarmente ao discutido na [Figura 22](#), mas a cadeia cyan “desacopla” da verde e modifica sua topologia, de heteroclínica ([Figura 23c](#)) para homoclínica<sup>2</sup>. Ao final da reconexão, resta apenas a cadeia azul, [Figura 23e](#), que leva ao ressurgimento da curva sem cisalhamento, [Figura 23f](#).

<sup>2</sup> O caos dificulta a visualização da separatriz, mas a disposição dos pontos elípticos evidencia a topologia da separatriz da cadeia cyan.

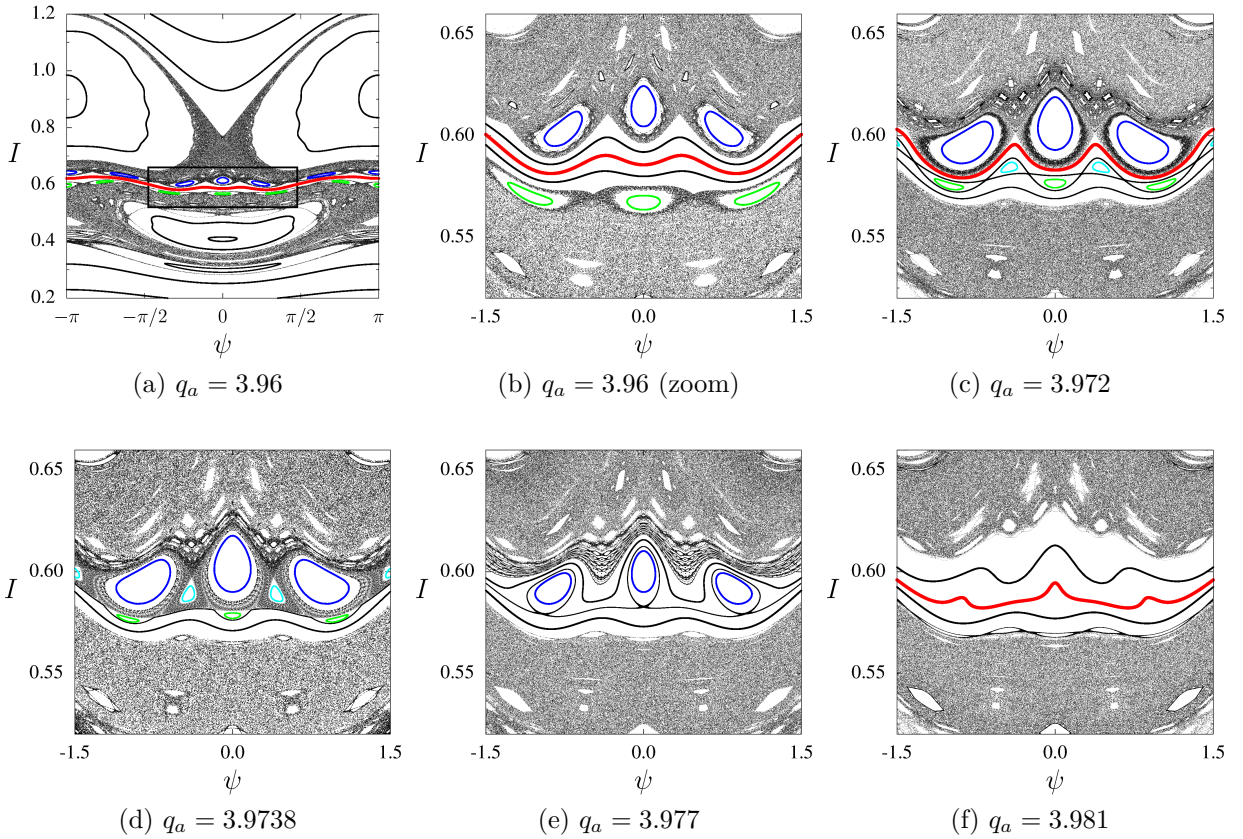


Figura 23 – Bifurcação de pontos periódicos utilizando perfil não monotônico de  $q$ . Uma bifurcação produz a cadeia de ilhas cian, isócrona à verde (c), seguida de uma reconexão com a presença das três cadeias (d).

Neste capítulo estudamos a influência do perfil de campo magnético sobre barreiras de transporte sem cisalhamento. Utilizamos um perfil não monotônico para o campo elétrico de equilíbrio (4.4), e dois perfis para o campo magnético: monotônico (4.6) e não monotônico (4.9). Portanto, o campo elétrico radial introduz não monotonicidades no sistema, gerando curvas sem cisalhamento, que são afetadas pelo perfil do fator de segurança. Sendo este monotônico ou não monotônico, variando seu perfil tal curva é destruída e retorna sucessivas vezes, Figura 12 e Figura 17.

O perfil do fator de segurança tem grande influência no transporte. Variando o parâmetro de controle  $q_a$ , órbitas caóticas surgem destas ilhas e toma grande parte do espaço de fase. Separando as duas regiões caóticas está a curva sem cisalhamento e outros torus invariantes, à exemplo da Figura 15c. Cadeias de ilhas surgem da fronteira do caos. Estas ilhas se aproximam da curva sem cisalhamento. Concomitantemente, curvas de KAM são quebradas e até que a própria curva sem cisalhamento é destruída. Nesta etapa há transporte global. Na sequência, as cadeias se afastam e a curva sem cisalhamento retorna ao sistema. Um exemplo desta sequência está na Figura 12.

Os resultados do parágrafo acima são aplicáveis a ambos os perfis do fator de

segurança utilizado. Contudo, somente no perfil não monotônico foram encontrados mais de um par de cadeias isócronas e múltiplas curvas sem cisalhamento, Figuras 15e e 17d.

Vimos que a quebra da curva sem cisalhamento está relacionada a evolução de cadeias de ilhas gêmeas. Tais cadeias possuem diferentes cenários que variam o número de ilhas e os processos de bifurcação envolvidos. Encontramos, tanto no perfil monotônico, quanto no não monotônico, cadeias de ilhas gêmeas em configurações diferentes das observadas no MPNT. Estes cenários atípicos são caracterizados por quebra de simetria. Por exemplo, na Figura 21 há uma bifurcação em uma das cadeias que gera uma nova cadeia de ilhas, isócrona, na mesma separatriz. Em outro tipo de cenário, uma das cadeias gêmeas se extingue antes de seu par, Figura 22.

## 5 Bifurcações na Curva sem Cisalhamento

Usualmente, para os perfis de equilíbrio do campo elétrico e do fator de segurança utilizados neste trabalho, o espaço de fase do sistema apresenta uma única curva sem cisalhamento. Contudo, na seção 4.3 vimos que o perfil não monotônico de  $q$  propicia o surgimento de mais de uma curva sem cisalhamento, Figura 15e. Neste capítulo, abordaremos o cenário dessa bifurcação da curva sem cisalhamento.

### 5.1 Diagrama de bifurcação da curva sem cisalhamento

Podemos utilizar um diagrama de bifurcação para analisar o comportamento da curva sem cisalhamento em função do parâmetro de controle. Este diagrama está na Figura 24. O gráfico mostra o número de rotação da curva sem cisalhamento em função do parâmetro  $q_a$ . Quando há mais de um ponto, implica a presença de duas ou mais curvas. Neste diagrama, pontos vermelhos indicam a presença de uma curva sem cisalhamento, pontos azuis indicam duas e os verdes, três. Para a maioria dos valores de  $q_a$  o sistema apresenta uma única curva sem cisalhamento. A barra acima do gráfico possui cores referentes ao número de curvas sem cisalhamento. As regiões em que a CSC foi quebrada estão marcadas em preto, como em  $q_a \approx 4.5$ . Verificamos que as bifurcações da curva sem cisalhamento ocorrem entre  $3.2 < q_a < 3.4$ , em destaque na Figura 24b.

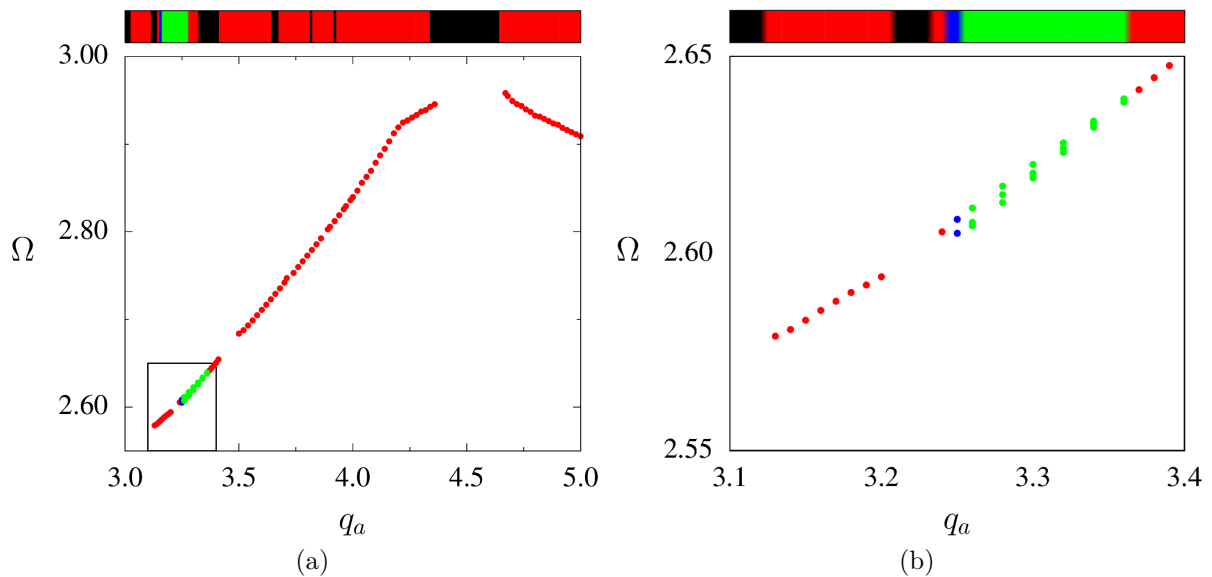


Figura 24 – Diagrama de bifurcação da curva sem cisalhamento para o perfil não monotônico (a), sendo (b) um destaque para a região  $3.10 < q_a < 3.4$  onde ocorrem bifurcações. Em vermelho: apenas uma curva sem cisalhamento, em azul: duas curvas, em verde: três curvas.



## 5.2 Surgimento de novas CSC no espaço de fase

O surgimento da segunda curva ocorre após uma bifurcação sela-nó em uma das quatro cadeias de ilhas isócronas. A Figura 25 mostra uma sequência de bifurcação da curva sem cisalhamento. Copiamos a Figura 18d na Figura 25a para facilitar a visualização. Nela, observamos a presença de uma curva sem cisalhamento e quatro cadeias isócronas, como discutido na seção 4.3. Alterando o parâmetro de controle, observamos que a cadeia magenta se desprende da região caótica superior, Figura 25b. Uma ampliação em uma das ilhas desta cadeia está na Figura 25c. As Figuras 25c - 25e mostram, em detalhe, a bifurcação sela-nó e o surgimento da segunda curva sem cisalhamento, marcada na cor azul. Após a colisão de pontos periódicos, permanece uma camada caótica que contém uma miríade de ilhas, Figura 25d. Então, a curva sem cisalhamento surge adjacente a esta região Figura 25e.

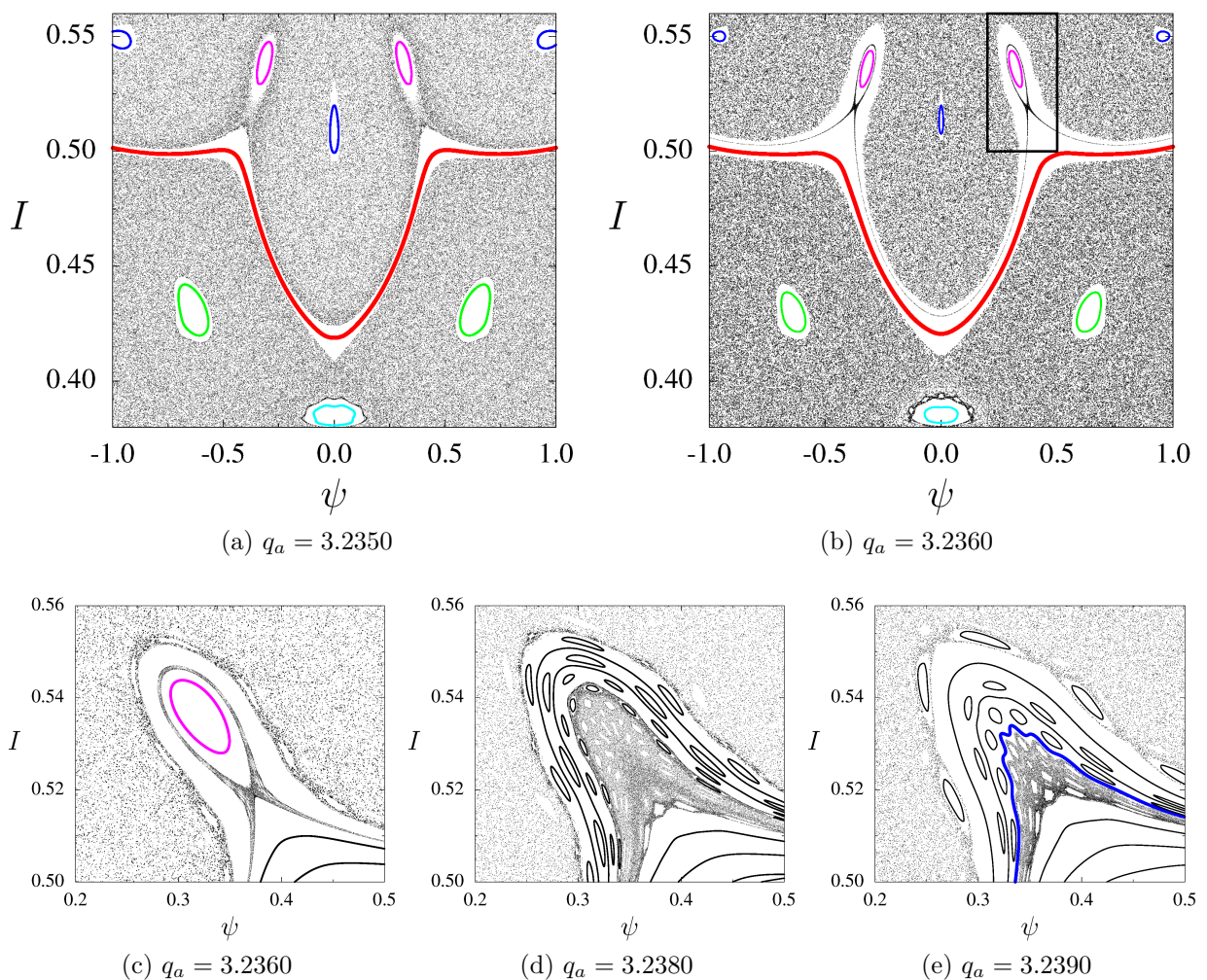


Figura 25 – Sequência de bifurcação da curva sem cisalhamento. Próximo à CSC (vermelha) há quatro ilhas isócronas (a) e (b). Uma bifurcação sela-nó na cadeia magenta (c)-(d) é seguida pelo surgimento da segunda curva sem cisalhamento, em azul (e).

O processo continua com o surgimento de uma terceira curva sem cisalhamento, que ocorre em um cenário idêntico ao discutido na Figura 25. A Figura 26 mostra o processo de formação desta curva. Na Figura 26a há duas CSC, uma vermelha e outra azul, além de uma cadeia de cinco ilhas cyan. Realizando uma ampliação na região central desta imagem, obtemos a Figura 26b, na qual apenas uma ilha da cadeia fica evidente. Alterando o parâmetro de controle, torus invariantes surgem entre a separatriz da ilha e o mar de caos inferior (Figura 26c). Constatamos que a topologia desta cadeia é idêntica à cadeia magenta, da qual surgiu a segunda curva sem cisalhamento, Figura 25. Em seguida, há a bifurcação sela-nó e o surgimento da terceira curva sem cisalhamento (verde), Figuras 26d e 26e.

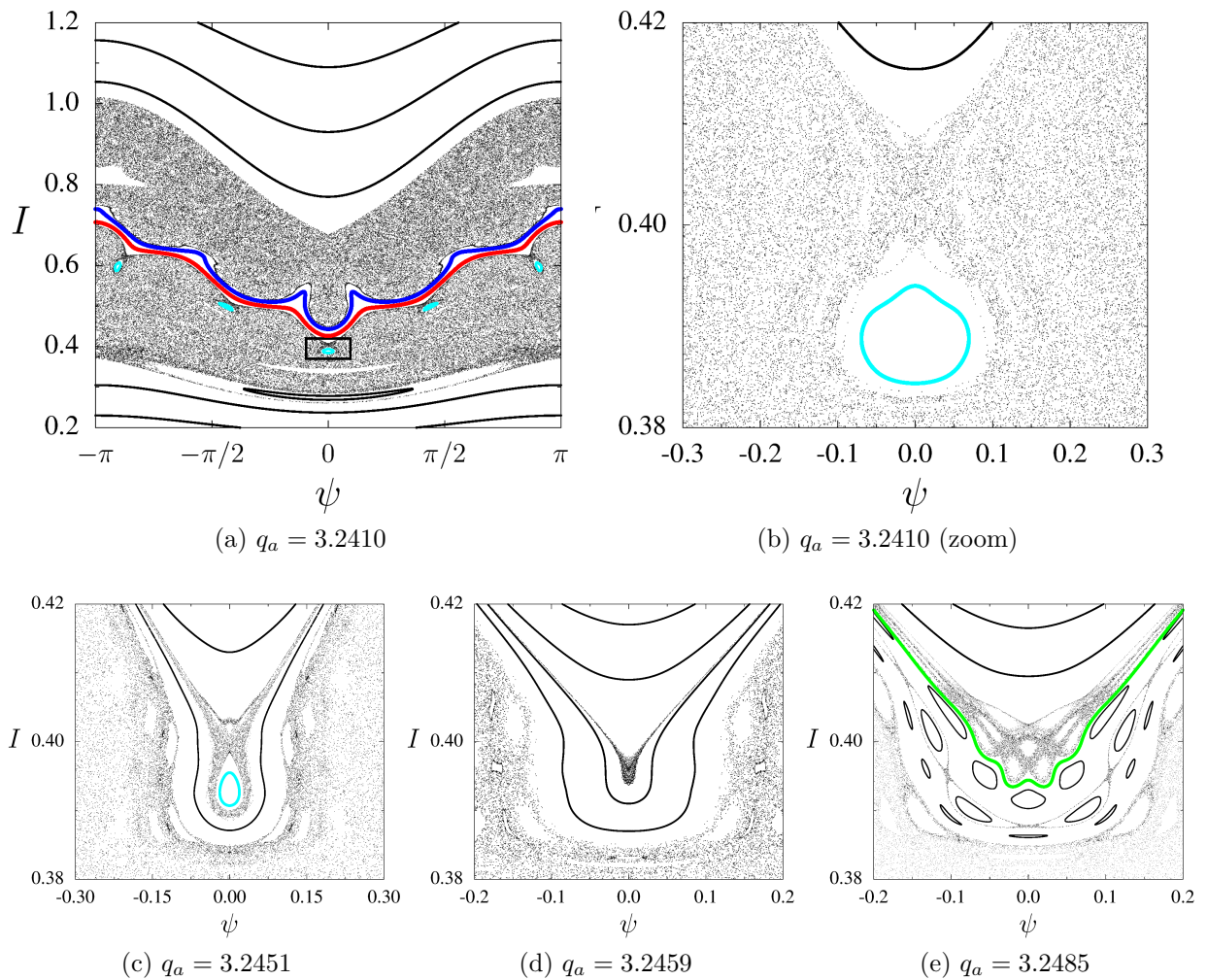


Figura 26 – Bifurcação que gera a terceira curva sem cisalhamento. Das quatro cadeias isócronas, restou apenas a cyan (a). Uma bifurcação sela-nó na cadeia magenta (c)-(d) é seguida pelo surgimento da terceira curva sem cisalhamento, em verde (e).

A Figura 27 traz os perfis de  $\Omega$  referentes às Figuras 26d e 26e. Na Figura 27 observamos dois pontos de extremos que correspondem às curvas sem cisalhamento, azul e vermelho. Uma ampliação do retângulo destacado está na Figura 27c. A terceira curva

sem cisalhamento (verde) surge adjacente a esta região de caos. Observamos o surgimento de um mínimo no perfil do número de rotação nas Figuras 27b e 27d. Novamente, a curva sem cisalhamento surge do caos oriundo de uma bifurcação sela-nó.

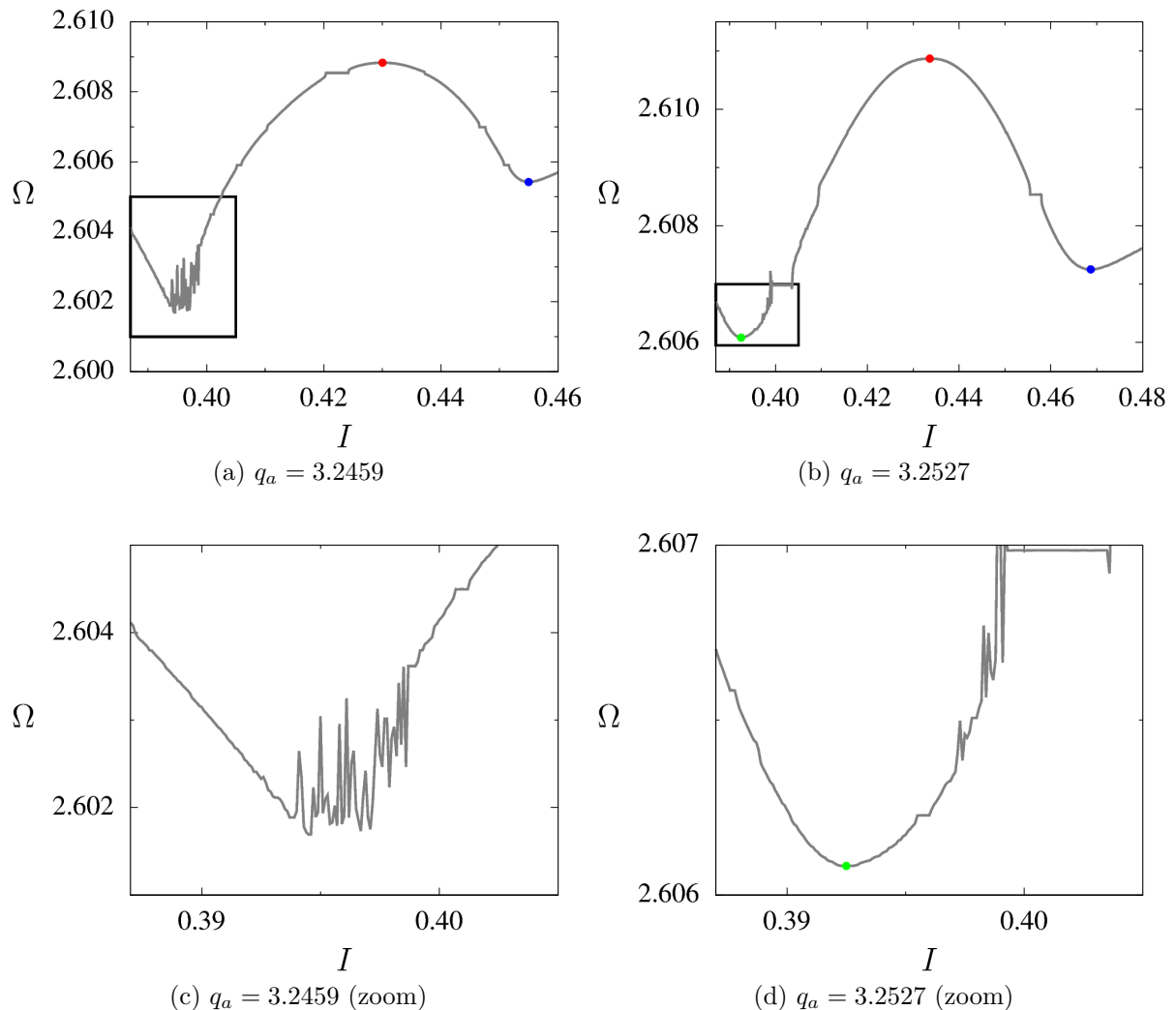


Figura 27 – Perfil de  $\Omega$  referente às Figuras 26d e 26e. A terceira curva sem cisalhamento surge adjacente ao caos gerado da bifurcação sela-nó.

### 5.3 Confluência de curvas sem cisalhamento

O último processo de bifurcação da curva sem cisalhamento encontrado, trata-se da colisão, ou confluência, de duas curvas. Este processo está na Figura 28. As Figuras 28c e 28d são ampliações das regiões destacadas pelos retângulos nas Figuras 28a e 28b. Alterando o parâmetro de controle as curvas vermelha e azul, presentes na Figura 28a, se aproximam até a colisão que extingue ambas, Figura 28b. Após a colisão, somente a CSC verde permanece no espaço de fase.

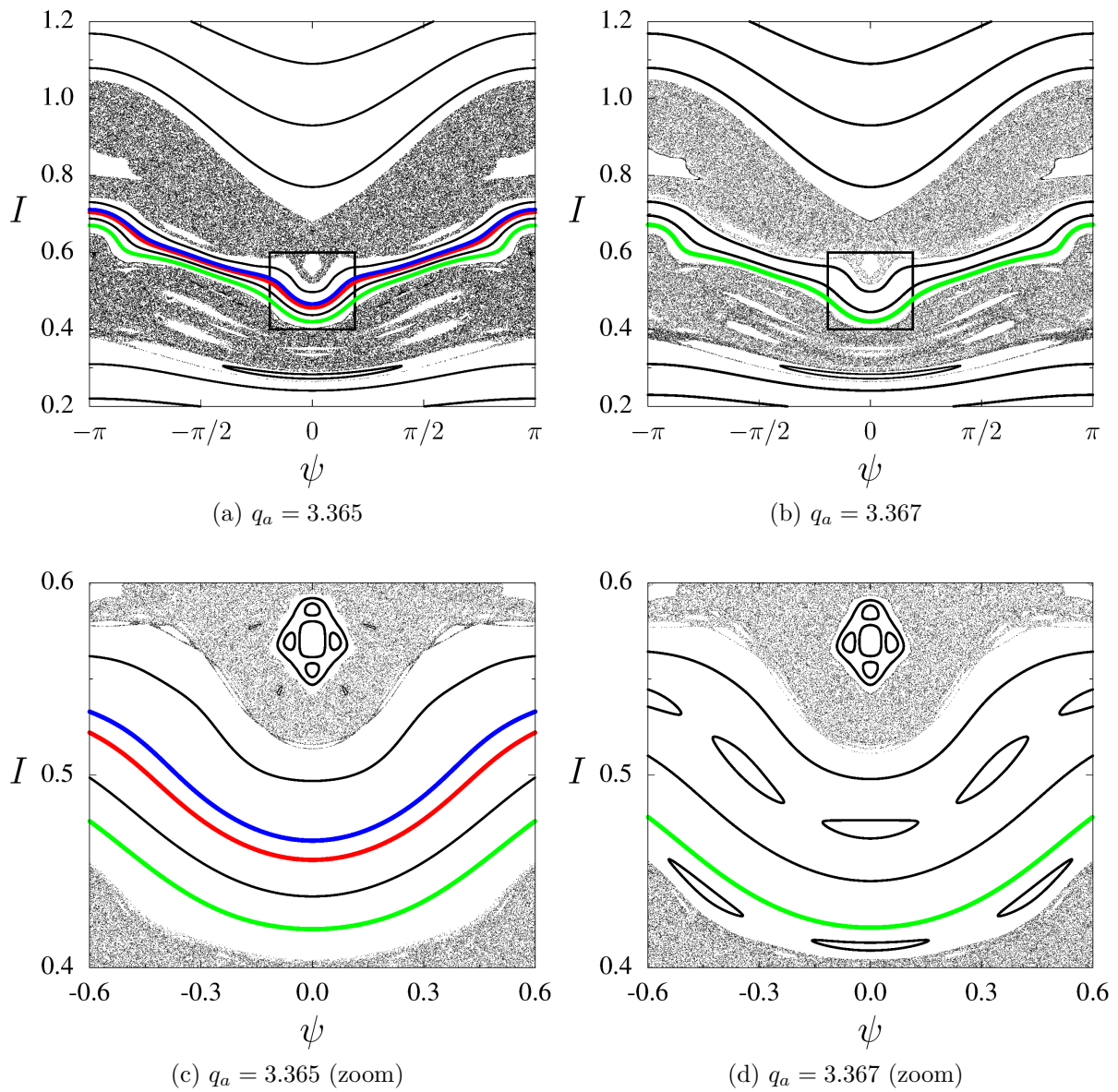


Figura 28 – Confluência de curvas sem cisalhamento. As CSC vermelha e azul colidem aniquilando ambas (a) e (c). Após a colisão, resta apenas uma curva sem cisalhamento, em verde (b) e (d).

Nos perfis de  $\Omega$ , Figura 29, observamos que este processo ocorre devido à colisão dos pontos de máximo e mínimo associados às curvas sem cisalhamento. A curva verde possui um mínimo bem pronunciado, Figura 29a. Já as CSC azul e vermelha correspondem a um mínimo e um máximo adjacentes e pouco pronunciados. Variando  $q_a$  na ordem de  $10^{-3}$  os pontos de extremo se aproximam, até sua colisão. Em seguida, o perfil de  $\Omega$  não apresenta tais pontos restando apenas o mínimo referente à curva verde, Figura 29b.

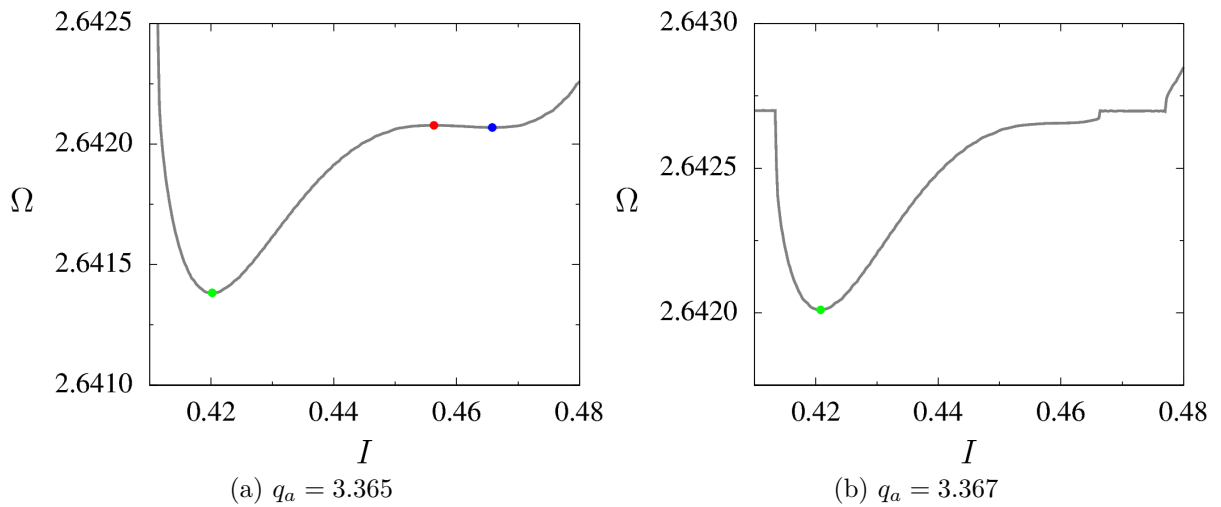


Figura 29 – Perfis de  $\Omega$  referentes às Figuras 28a e 28a. Os pontos de extremo vermelho e azul (a) colidem e aniquilam-se, restando apenas a curva sem cisalhamento verde (b).

Na [seção 4.3](#) vimos que, ao utilizar o perfil não monotônico do fator de segurança, o espaço de fase pode apresentar múltiplas curvas sem cisalhamento. O diagrama de bifurcação da CSC, [Figura 24](#), apresenta mais de uma curva, aproximadamente, no intervalo  $3.2 < q_a < 3.4$ . Neste capítulo analisamos o cenário dessas bifurcações. Constatamos que as curvas adicionais surgem da bifurcação sela-nó de uma das quatro cadeias de ilhas isócronas, [Figura 25](#). Ou seja, a presença de múltiplas cadeias isócronas está relacionada a bifurcações na curva sem cisalhamento. O diagrama de bifurcação também estabelece regiões em que há quebra da curva sem cisalhamento: a mais pronunciada ocorre em  $q_a \approx 4.5$ .

## 6 Mapa Não-*Twist* Quártico

O [Capítulo 3](#) descreve como se obtém o MPNT a partir do modelo de Horton. A validade do MPNT para explicar os fenômenos do modelo de Horton é limitada: efetua-se um truncamento em segunda ordem, simplificando a dinâmica do sistema. Neste capítulo estendemos as aproximações contidas em [10]. Concluimos que utilizando termos até quarta ordem obtemos um novo mapa que possui múltiplas ilhas gêmeas e curvas sem cisalhamento.

### 6.1 O Mapa Não-*twist* Quártico

No [Capítulo 3](#) expandimos o fator de segurança, em torno do ponto de mínimo, em um perfil parabólico. A partir da equação (3.20), repetida abaixo, obteve-se o MPNT ao desprezar termos de ordem maior que dois na variável  $(I - I_m)$ .

$$\frac{M - Lq}{q} = \frac{1}{q_m} \frac{M - Lq_m - L \frac{q_m''}{2} (I - I_m)^2}{1 + \frac{q_m''}{2q_m} (I - I_m)^2} \approx \frac{1}{q_m} \left[ \delta - L \frac{q_m''}{2} (I - I_m)^2 \right] \left[ 1 - \frac{q_m''}{2q_m} (I - I_m)^2 \right] \quad (6.1)$$

Este truncamento restringe a validade do modelo (MPNT) para uma região próxima do mínimo do perfil de  $q$ . Mantendo a expansão até quarta ordem, a equação para  $\Psi$  fica:

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n + \frac{2\pi v_{||} \delta}{Rq_m \omega_0} \left[ 1 - \frac{Lq_m''}{2\delta} (I_{n+1} - I_m)^2 \right] \left[ 1 - \frac{q_m''}{2q_m} (I_{n+1} - I_m)^2 \right] \quad (6.2)$$

Na equação acima,  $\delta = M - Lq_m$ . Por meio da transformação linear

$$x = \frac{\Psi}{2\pi} \quad e \quad y = \left( \frac{Lq_m''}{2\delta} \right)^{1/2} (I - I_m)$$

que introduz as variáveis  $x$  e  $y$ , obtemos o mapa

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{v_{||} \delta}{Rq_m \omega_0} (1 - y_{n+1}^2) \left( 1 - \frac{q_m''}{2q_m} y_{n+1}^2 \right) \\ y_{n+1} &= y_n + \left( \frac{Lq_m''}{2\delta} \right)^{1/2} \frac{4\pi M \phi}{Ba^2 \omega_0} \sin(2\pi x_n) \end{aligned}$$

Definindo as constantes:

$$\alpha = \frac{v_{\parallel}}{Rq_m\omega_0} \quad , \quad \beta = \frac{q_m''}{2q_m} \quad e \quad \gamma = -\frac{4\pi M\phi}{a^2 B\omega_0} \left( \frac{Lq_m''}{2\delta} \right)^{1/2} \quad (6.3)$$

obtemos o Mapa Não-*Twist* Quártico (MNTQ), equação (6.4). Por vezes, faremos a análise do MNTQ no limite  $\beta \rightarrow 0$ . Evidentemente, pelas relações (6.3), tal limite é incompatível com o mapa visto que implica em  $q_m'' = 0 \Rightarrow \gamma = 0$ . Contudo, esta análise é feita considerando o mapa (6.5) como um ente matemático próprio, sem vínculos com os perfis do plasma.

A função *twist* do MNTQ é um polinômio de quarto grau que possui três pontos onde a condição *twist* falha, Figura 30.

$$x_{n+1} = x_n + \alpha (1 - y_{n+1}^2) (1 - \beta y_{n+1}^2) \quad (6.4a)$$

$$y_{n+1} = y_n - \gamma \sin(2\pi x_n) \quad (6.4b)$$

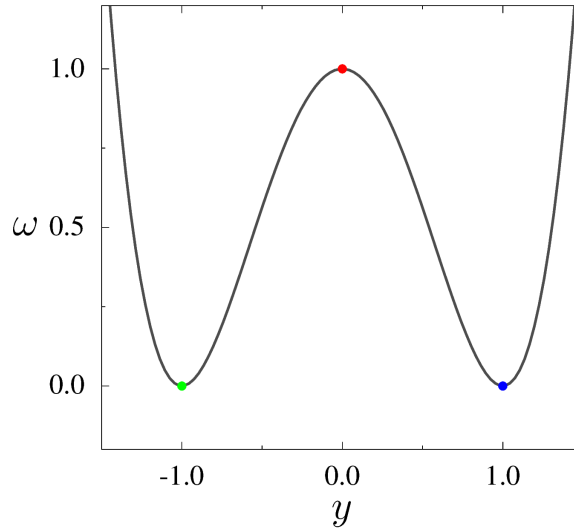


Figura 30 – Função *twist* do MNTQ,  $\alpha = 1$  e  $\beta = 1$ . Os pontos de extremo, em vermelho, verde e azul, indicam a presença de três curvas sem cisalhamento.

Mapas não-*twist* similares já foram abordados na literatura. A referência [71] é um trabalho pioneiro em mapas não-*twist*. Não obstante, foram encontrados mapas, que violam a condição *twist* em mais de um ponto, modelando a trajetória de partículas em plasmas quando se considera o efeito do raio de Larmor finito [72, 73].

Um trabalho recente sobre quebra de curvas sem cisalhamento em mapas com função *twist* cúbica e quártica é o de Wurm [74]. Definindo  $\epsilon = \beta/(1 + \beta)^2$  e efetuando a

transformação linear  $y' = \sqrt{1 + \beta}y$ , podemos reescrever a função *twist* do mapa (6.4). O mapeamento obtido desta transformação é:

$$x'_{n+1} = x'_n + \alpha \left( 1 - y'_{n+1}{}^2 + \epsilon y'_{n+1}{}^4 \right) \quad (6.5a)$$

$$y'_{n+1} = y'_n - \gamma \sin(2\pi x'_n) \quad (6.5b)$$

idêntico ao mapa quártico proposto por Wurm, com exceção do sinal que acompanha  $\epsilon$ . Essa mudança de sinal modifica a dinâmica do sistema, já que o mapa de Wurm viola a condição *twist* em um único ponto.

O mapa quártico, equações (6.4), apresenta oito pontos fixos. Utilizando a notação  $\mathbf{z} = (x, y)$ , estes pontos são:

$$\mathbf{z}_1^{(\pm)} = (0, \pm 1), \quad \mathbf{z}_2^{(\pm)} = \left( 0, \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right), \quad \mathbf{z}_3^{(\pm)} = \left( \frac{1}{2}, \pm 1 \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{z}_4^{(\pm)} = \left( \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right)$$

Além dos pontos fixos  $\mathbf{z}_{1,3}^{(\pm)}$ , também presentes no MPNT, o MNTQ possui outras quatro soluções de equilíbrio:  $\mathbf{z}_{2,4}^{(\pm)}$ . Tais soluções introduzem outras duas ilhas ao espaço de fase do sistema, como veremos na próxima seção. Outra distinção do MNTQ, em relação ao MPNT, é o número de pontos de violação da condição *twist*, equação (3.8). O mapa quártico viola a condição *twist* em três regiões:

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} = 0 \implies y_{n+1} = 0 \quad \text{e} \quad y_{n+1} = \pm \sqrt{\frac{1 + \beta}{2\beta}}$$

Portanto, no MNTQ há três curvas sem cisalhamento  $C_1, C_2$  e  $C_3$ , definidas por:

$$C_1 : y = \gamma \sin(2\pi x), \quad C_{2,3} : y = \pm \sqrt{\frac{1 + \beta}{2\beta}} + \gamma \sin(2\pi x)$$

É possível haver mais de uma curva sem cisalhamento no MPNT. Contudo, elas são oriundas de bifurcações produzidas por reconexões em cadeias de ilhas, como visto na [subseção 3.4.2.1](#). O diferencial do MNTQ é a violação da condição *twist* na própria função *twist* do mapa, ou seja, é uma característica que não depende de perturbações ou bifurcações.

Dos resultados analíticos acima, concluímos que a posição dos pontos fixos, e das curvas sem cisalhamento  $C_{2,3}$ , é determinada pelo parâmetro  $\beta$ . Já  $\alpha$  e  $\gamma$  tem influência similar ao do MPNT, como observaremos nos resultados numéricos.

Quando mapas simpléticos possuem simetrias, espacial e de reversão temporal, algumas consequências dinâmicas ocorrem. No caso do MPNT, elas auxiliam a encontrar



órbitas periódicas e curvas sem cisalhamento [46, 56]. Sistemas não-*twist* podem, ou não, apresentar tais propriedades. Um exemplo de mapa que não possui simetria espacial é o mapa cúbico presente em [74].

O MNTQ é reversível, isto é, pode ser decomposto em duas involuções. Seja  $M$ :

$$M : \begin{cases} x_{n+1} = x_n + \alpha (1 - y_{n+1}^2) (1 - \beta y_{n+1}^2) \\ y_{n+1} = y_n - \gamma \sin(2\pi x_n) \end{cases} \quad (6.6)$$

O mapa pode ser decomposto nas involuções  $M = I_0 \cdot I_1$ , definidas por:

$$I_0 : \begin{cases} x_{n+1} = -x_n \\ y_{n+1} = y_n - \gamma \sin(2\pi x_n) \end{cases} \quad (6.7)$$

$$I_1 : \begin{cases} x_{n+1} = -x_n + \alpha (1 - y_{n+1}^2) (1 - \beta y_{n+1}^2) \\ y_{n+1} = y_n \end{cases} \quad (6.8)$$

Além de reversível, o MNTQ possui simetria espacial em relação à involução  $S$

$$S : \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 1/2 \\ y_{n+1} = -y_n \end{cases} \quad (6.9)$$

Ou seja,  $M = S^{-1}MS$ . Tal simetria indica que o mapa quártico não possui cenários de ilhas assimétricas em relação à curva sem cisalhamento.

Pode-se demonstrar que o conjunto de pontos fixos de uma involução  $I_j$  formam uma curva  $\Gamma_j$  chamada curva de simetria. No MPNT tais curvas são essenciais para obter a localização das órbitas periódicas [46]. As curvas de simetria do MNTQ,  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$ , são a união dos conjuntos:

$$s_1 = \{ (x, y) \mid x = 0, y = y \} \quad (6.10a)$$

$$s_2 = \{ (x, y) \mid x = 1/2, y = y \} \quad (6.10b)$$

$$s_3 = \{ (x, y) \mid x = \alpha(1 - y^2)(1 - \beta y^2), y = y \} \quad (6.10c)$$

$$s_4 = \{ (x, y) \mid x = \alpha(1 - y^2)(1 - \beta y^2) + 1/2, y = y \} \quad (6.10d)$$

Uma vez dispostos as consequências analíticas do MNTQ, abordaremos os resultados numéricos. De início, uma comparação com o MPNT. A [Figura 31](#) exibe o efeito do termo

de quarta ordem no MNTQ. Para  $\beta = 0$ , o sistema reduz-se ao MPNT, Figura 31a. Utilizando  $\beta = 0.4$ , o espaço de fase muda consideravelmente. Além das ilhas magenta e verde-escuro, também presentes no MPNT, o MNTQ apresenta as ilhas laranja e cyan. Destacadas em vermelho, azul e verde estão as três curvas sem cisalhamento  $C_{1,2,3}$ , Figura 31b. A curva vermelha, na região central, é idêntica ao MPNT.

O mapa quártico possui quatro ilhas agrupadas em dois pares associados às curvas azul e verde. Os pontos fixos  $\mathbf{z}_2^\pm$  e  $\mathbf{z}_4^\pm$  também são evidentes na Figura 31b, sendo dois elípticos e dois hiperbólicos.

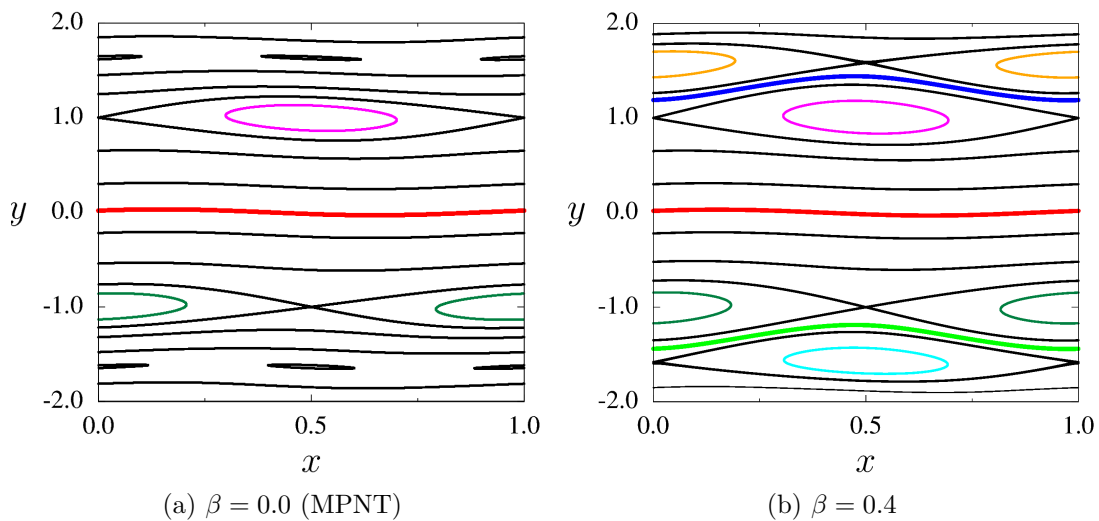


Figura 31 – Comparação entre o MPNT (a) e o MNTQ (b). O MNTQ apresenta três curvas sem cisalhamento e quatro ilhas (b). Os demais parâmetros são  $\alpha = 0.3$ ,  $\gamma = 0.05$ .

As ilhas presentes na Figura 31b têm sua configuração alterada ao variar os parâmetros do mapa. Na Figura 32 observamos quatro ilhas, agrupadas em dois pares: magenta e laranja, verde e cyan, cada uma delas possuindo sua separatriz. Variando o parâmetro  $\alpha$  as ilhas sofrem o processo de reconexão de separatrizes: ilhas com topologia heteroclínica (Figura 32a), colisão e reconexão de separatrizes (Figura 32b), topologia homoclínica e formação de *meanders* (Figura 32c). Nas Figuras 32d, 32e e 32f estão os perfis de  $\Omega$  destes mapas. Observamos os três pontos de extremo no perfil de rotação, marcados em vermelho, verde e azul. Também verificamos que as quatro ilhas presentes no mapa são isócronas. No perfil referente a  $\alpha = 0.3$ , Figura 32d, fica evidente que elas possuem o mesmo número de rotação.

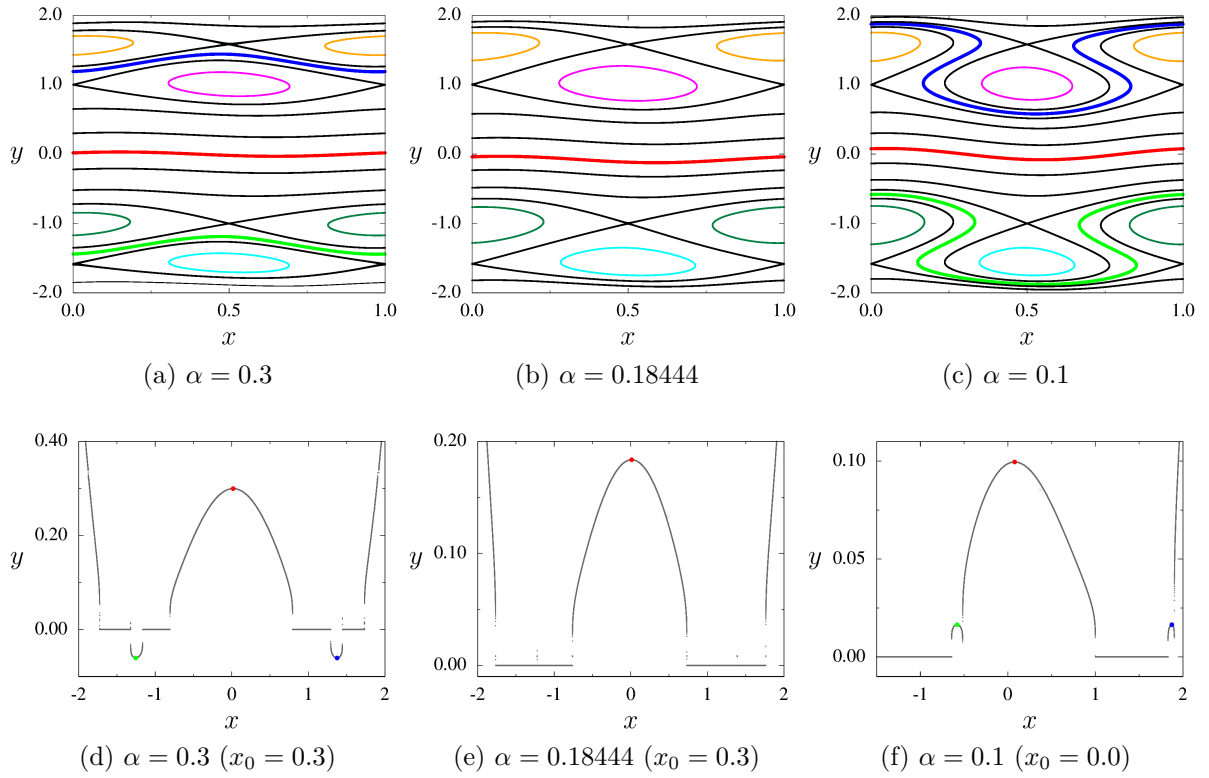


Figura 32 – Cenário de reconexão de separatrizes no MNTQ, variando  $\alpha$ . Os demais parâmetros são  $\beta = 0.4$  e  $\gamma = 0.05$ .

## 6.2 Influência do fator de segurança

Os parâmetros do mapa,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , definidos na equação (6.3), dependem dos parâmetros do plasma e da perturbação. Quanto ao fator de segurança, cujo perfil utilizado está na equação (3.19), ele depende dos três parâmetros, seja por seu valor no ponto de mínimo  $q_m$ , ou pela derivada  $q_m''$ . Para analisar a influência desta variável devemos fixar alguns valores. Escolhemos manter como parâmetro de controle o valor de  $q$  na borda do plasma,  $q_a = q(r = a) = q(I = 1)$ . Sendo assim,  $q_m''$  fica em função de  $q_a$ ,  $q_m$  e  $I_m$ , segundo a relação

$$q_m'' = \frac{2(q_a - q_m)}{(1 - I_m)^2}$$

O objetivo nesta seção é explicar as múltiplas cadeias isócronas e curvas sem cisalhamento, obtidas utilizando as equações (4.1). Tais resultados foram obtidos utilizando o perfil não monotônico (4.9) com parâmetro  $q_a \approx 3.3$ . Para simular estas condições com o perfil (3.19), fixamos  $q_m = 2.85$  e  $I_m = 0.58$ . Dentre os demais parâmetros presentes em (6.3), escolhemos  $v_{||} = 2.5$  e  $q\phi = 0.001$ , já normalizados. O primeiro é o valor do perfil  $v_{||}(I)$  em  $I = I_m = 0.58$ . Já a amplitude de perturbação é na ordem de grandeza da amplitude  $\phi_3$ , o modo ressonante mais relevante nas condições utilizadas.

Os resultados obtidos variando  $q_a$  estão nas Figuras 33 e 34. Na primeira, variamos  $3.1 < q_a < 3.53$ . As três curvas sem cisalhamento e as quatro ilhas isócronas estão presentes, Figura 33a. Variando o parâmetro de controle, a posição do ponto elíptico das ilhas se aproxima do ponto hiperbólico, Figura 33b, até a colisão, 33c. A posição dos pontos fixos é alterada pelo parâmetro  $\beta$ , que depende de  $q_m''$ , logo, influenciado por  $q_a$ .

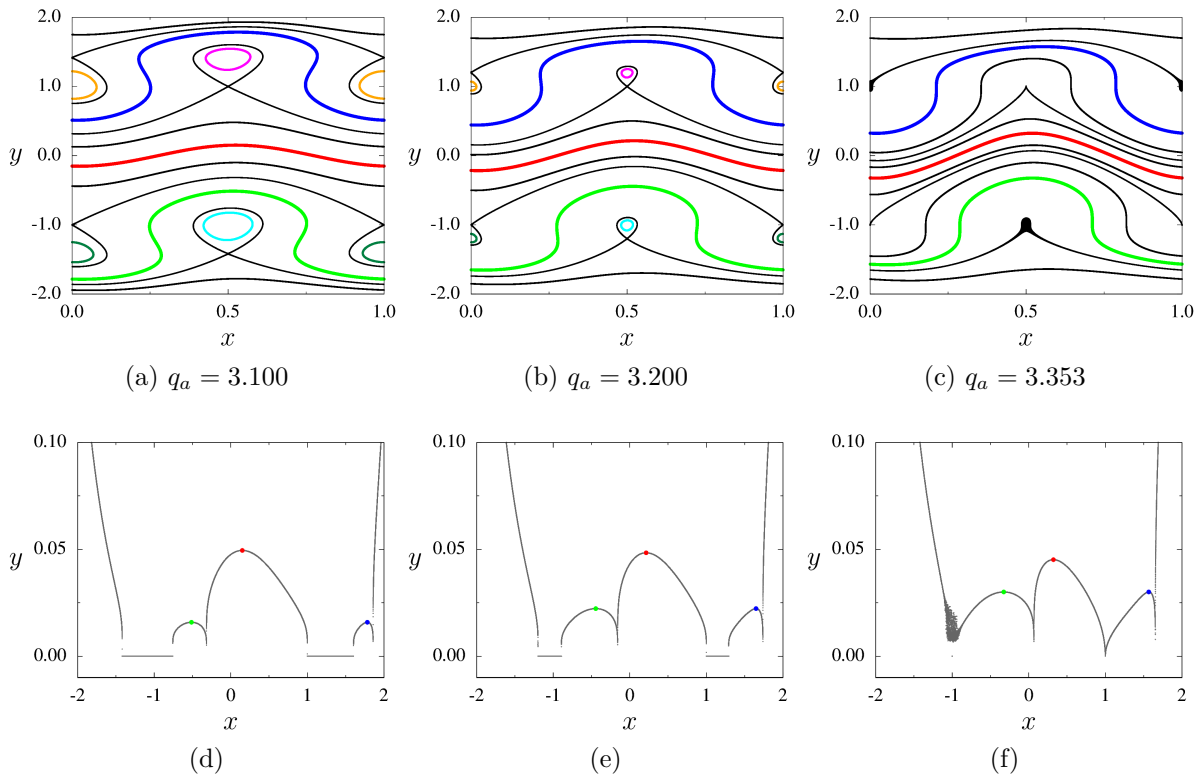


Figura 33 – Espaço de fase do MNTQ, variando  $q_a$ . O parâmetro de controle modifica os pontos fixos das ilhas, causando a bifurcação sela-nó (c) que extingue as mesmas. ( $x_0 = 0.5$ )

Aumentando o parâmetro de controle, outros processos ocorrem no mapa. A Figura 34 exibe um processo de reconexão. A curva sem cisalhamento central, presente na Figura 34a, está ensanduichada entre as separatrizes das ilhas magenta e verde-escuro. Note que a cadeia magenta está acima da curva vermelha. Variando  $q_a$  há uma reconexão de separatrizes entre as duas ilhas supracitadas, levando à formação de *meanders* e a troca de posição relativa à CSC. Por fim, Na Figura 34c as curvas verde e azul são quebradas devido ao crescimento do caos, restando apenas a curva central vermelha. Isso se deve ao parâmetro de perturbação do mapa  $\gamma$  ser dependente do perfil do fator de segurança.

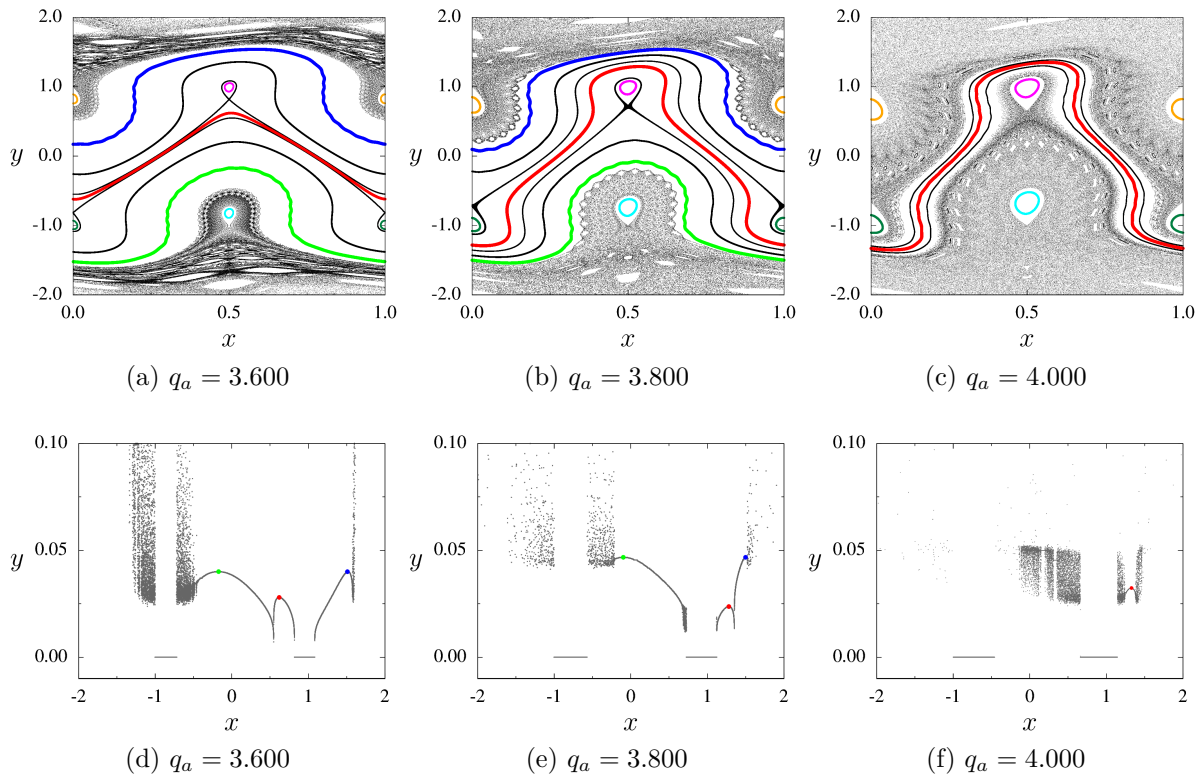


Figura 34 – Mesmo que a Figura 33, para valores de  $q_a$  distintos. O sistema apresenta reconexão de separatrizes (b) e a destruição das CSC verde e azul (c). ( $x_0 = 0.5$ )

Neste capítulo apresentamos o MNTQ e como obtemos ele a partir das equações do modelo de Horton. Discutimos os resultados analíticos e numéricos deste mapa e sua relação com aqueles obtidos na seção 4.3, utilizando perfil não monotônico. Constatamos que a presença de três curvas sem cisalhamento, aliada às múltiplas cadeias isócronas, decorre da função *twist* do MNTQ ser um polinômio de quarta ordem, consequência da não-monotonicidade do perfil de  $q$ . O MPNT também possui cenários com três curvas sem cisalhamento e quatro cadeias isócronas. Contudo, resultados reportados até o momento, indicam que no MPNT essas cadeias são agrupadas, “aos pares”, de maneira distinta do MNTQ. Enquanto no MNTQ as cadeias gêmeas são associadas às CSC superior e inferior ( $C_2$  e  $C_3$ ), Figura 32, no MPNT elas têm origem em bifurcações da curva sem cisalhamento central [58]. Destaca-se que o mapa quártico possui simetria espacial: é simétrico perante a transformação  $S$  definida na equação (6.9).

## 7 Conclusão

Neste trabalho investigamos a influência do perfil do campo magnético de equilíbrio na formação de barreiras ao transporte de partículas na borda de tokamaks. Tais barreiras são afetadas pelos perfis de equilíbrio do campo elétrico e magnético. O campo elétrico escolhido possui um perfil parabólico, gerando uma não monotonicidade no sistema. Para modelar o campo magnético, utilizamos o fator de segurança de suas linhas de campo. Empregamos dois perfis radiais para o fator de segurança: monotônico e não monotônico. Utilizamos um modelo Hamiltoniano quase-integrável para descrever o transporte de partículas devido a perturbações eletrostáticas, chamado modelo de Horton. Aplicamos este modelo, que analisa a trajetória de partículas na borda do plasma, a uma descarga típica de tokamak e resolvemos numericamente suas equações diferenciais.

A composição do espaço de fase do sistema foi analisada utilizando mapas de Poincaré. O espaço de fase típico encontrado é similar ao do Mapa Padrão Não-*Twist* (MPNT): há duas regiões caóticas separadas por uma curva invariante sem cisalhamento que atua como barreira de transporte. Esta curva tem origem em não monotonicidades, tanto no campo elétrico, quanto no fator de segurança. Foi utilizado um perfil não monotônico do campo elétrico de equilíbrio, que produz uma Barreira de Transporte Sem Cisalhamento (BTSC). Alterando o campo magnético do sistema a curva sem cisalhamento é quebrada e restaurada sucessivas vezes. Este comportamento ocorre para ambos os perfis do fator de segurança, monotônico e não monotônico.

A perturbação do sistema se dá pela amplitude dos modos de oscilação  $\phi_n$ , mas o fator de segurança também desempenha papel importante no transporte. Variando seu perfil a curva sem cisalhamento é destruída e retorna ao sistema, sucessivas vezes. Tais quebras ocorrem devido à reconexão de cadeias de ilhas gêmeas, que surgem nas regiões caóticas e seguem em direção a curva sem cisalhamento. Concluimos que tais reconexões podem ocorrer em cenários idênticos ao MPNT, a saber, os cenários par e ímpar. A evolução dessas órbitas periódicas, por vezes, ocorria de maneira distinta do MPNT. Não obstante, em situações nas quais a curva sem cisalhamento foi quebrada, a barreira de transporte permanece no sistema devido ao efeito *stickiness*, caracterizado por um aprisionamento dinâmico das órbitas em determinada região do espaço de fases.

Observamos cenários assimétricos de cadeias de ilhas que, inclusive, podem sofrer bifurcações produzindo pares de cadeias de ilhas isócronas contidos na mesma separatriz. Um cenário atípico encontrado continha dois pares de cadeias de ilhas isócronas, observadas utilizando perfil não monotônico do fator de segurança. Tais cadeias surgem a partir de bifurcações de pontos periódicos devido à variação no perfil de campo magnético. Observa-

mos que dessas cadeias surgem duas novas curvas sem cisalhamento, localizadas acima e abaixo da curva sem cisalhamento original. Ou seja, variando o perfil não monotônico do fator de segurança bifurcações dão origem a mais de uma curva sem cisalhamento no espaço de fase.

Para compreender o mecanismo responsável pelas múltiplas curvas sem cisalhamento e pares de cadeias gêmeas, utilizamos a abordagem de mapas para analisar o modelo de Horton. A partir de uma versão aproximada deste modelo, válida para perfis não monotônicos, obtivemos um mapa que modela o comportamento do sistema em uma região próxima à curva sem cisalhamento. O mapa obtido, nomeado Mapa Não-*Twist* Quártico (MNTQ), possui propriedades similares ao encontrado no sistema de equações diferenciais. Ele viola a condição *twist* em três regiões, logo, possui três curvas sem cisalhamento. O mapa também possui quatro ilhas isócronas, dispostas em dois pares, acima e abaixo das curvas sem cisalhamento superior e inferior.

Também estudamos as propriedades de simetria do MNTQ. Concluímos que o mapa possui simetria espacial em relação à curva sem cisalhamento central. Isso indica que cenários assimétricos de órbitas periódicas, obtidos no sistema de equações diferenciais, não são encontrados no MNTQ.

Dos resultados obtidos nesta dissertação, alguns temas ficaram em aberto e poderão ser abordados em trabalhos futuros. Para o sistema de equações diferenciais, na [seção 4.4](#) obtivemos cenários assimétricos de cadeias de ilhas. Tais assimetrias não são encontradas no MNTQ. O motivo do mapa aproximado não apresentá-las pode residir na aproximação realizada ter validade espacial limitada. Contudo, esta assimetria pode ter origem no campo elétrico de equilíbrio, efeito desprezado na dedução do MNTQ. Como próximo passo, pode-se supor um perfil para o campo elétrico e deduzir um mapa aproximado. Dependendo do perfil utilizado, o mapa resultante pode conter tais cenários assimétricos.

Reportamos neste trabalho, para um perfil não monotônico do campo elétrico, a presença de mais de uma curva sem cisalhamento no espaço de fase utilizando perfil não monotônico do fator de segurança. Observamos que as curvas adicionais tem origem em bifurcações que ocorrem em um cenário contendo dois pares de cadeias isócronas com número ímpar de ilhas. Entretanto, a presença de múltiplas curvas sem cisalhamento não é particularidade de perfis não monotônicos de campo magnético. Resultados semelhantes foram observados utilizando perfil monotônico, mas o cenário em que essas curvas adicionais surgem está em aberto [23].

# Referências

- 1 GORE, A. *An inconvenient truth: The planetary emergency of global warming and what we can do about it.* [S.l.]: Rodale, 2006.
- 2 COWLEY, S. C. The quest for fusion power. *Nature physics*, Nature Publishing Group, v. 12, n. 5, p. 384–386, 2016.
- 3 AYMAR, R.; BARABASCHI, P.; SHIMOMURA, Y. The ITER design. *Plasma physics and controlled fusion*, IOP Publishing, v. 44, n. 5, p. 519, 2002.
- 4 BUCKINGHAM, R.; LOVING, A. Remote-handling challenges in fusion research and beyond. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 12, n. 5, p. 391–393, 2016.
- 5 HUGILL, J. Transport in tokamaks—a review of experiment. *Nuclear Fusion*, IOP Publishing, v. 23, n. 3, p. 331, 1983.
- 6 HORTON, W. *Turbulent transport in magnetized plasmas.* [S.l.]: World Scientific, 2012.
- 7 WAGNER, F. et al. Regime of improved confinement and high beta in neutral-beam-heated divertor discharges of the ASDEX tokamak. *Physical Review Letters*, APS, v. 49, n. 19, p. 1408, 1982.
- 8 HIDALGO, C. On the nature of transport in fusion plasmas. *Astrophysics and Space Science*, Springer, v. 292, n. 1, p. 681–690, 2004.
- 9 WAGNER, F. A quarter-century of H-mode studies. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, IOP Publishing, v. 49, n. 12B, p. B1, 2007.
- 10 HORTON, W. et al. Drift wave test particle transport in reversed shear profile. *Physics of Plasmas*, v. 5, n. 11, p. 3910–3917, 1998.
- 11 LEVINTON, F. et al. Improved confinement with reversed magnetic shear in TFTR. *Physical Review Letters*, APS, v. 75, n. 24, p. 4417, 1995.
- 12 MISKANE, F. et al. Anomalous particle pinch in tokamaks. *Physics of Plasmas*, American Institute of Physics, v. 7, n. 10, p. 4197–4207, 2000.
- 13 CASTILLO-NEGRETE, D. del; MORRISON, P. Chaotic transport by rossby waves in shear flow. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, American Institute of Physics, v. 5, n. 4, p. 948–965, 1993.
- 14 ODA, G. A.; CALDAS, I. Dimerized island chains in tokamaks. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 5, n. 1, p. 15–23, 1995.
- 15 PORTELA, J. S. et al. Diffusive transport through a nontwist barrier in tokamaks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 17, n. 05, p. 1589–1598, 2007.
- 16 KYNER, W. T. Rigorous and formal stability of orbits about an oblate planet. *Mem. Am. Math. Soc*, v. 81, p. 1–27, 1968.



- 17 MARCUS, F. A. et al. Reduction of chaotic particle transport driven by drift waves in sheared flows. *Physics of Plasmas*, American Institute of Physics, v. 15, n. 11, p. 112304, 2008.
- 18 TOUFEN, D. L. et al. Turbulence driven particle transport in texas Helimak. *Physics of Plasmas*, American Institute of Physics, v. 19, n. 1, p. 012307, 2012.
- 19 ROSALEM, K.; ROBERTO, M.; CALDAS, I. Influence of the electric and magnetic shears on tokamak transport. *Nuclear Fusion*, IOP Publishing, v. 54, n. 6, p. 064001, 2014.
- 20 ROSALEM, K.; ROBERTO, M.; CALDAS, I. Drift-wave transport in the velocity shear layer. *Physics of Plasmas*, AIP Publishing LLC, v. 23, n. 7, p. 072504, 2016.
- 21 FERRO, R.; CALDAS, I. Internal transport barriers in plasmas with reversed plasma flow. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 382, n. 15, p. 1014–1019, 2018.
- 22 MARCUS, F. A. et al. Influence of the radial electric field on the shearless transport barriers in tokamaks. *Physics of Plasmas*, v. 26, n. 2, p. 022302, 2019.
- 23 OSORIO, L. et al. Onset of internal transport barriers in tokamaks. *Physics of Plasmas*, AIP Publishing LLC, v. 28, n. 8, p. 082305, 2021.
- 24 WOLF, R. Internal transport barriers in tokamak plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, IOP Publishing, v. 45, n. 1, p. R1, 2002.
- 25 NISHIKAWA, K.; WAKATANI, M.; WAKATANI, M. *Plasma physics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2000. v. 8.
- 26 BITTENCOURT, J. A. *Fundamentals of plasma physics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2004.
- 27 MIYAMOTO, K. et al. *Plasma physics for controlled fusion*. [S.l.]: Springer, 2016. v. 92.
- 28 WESSON, J.; CAMPBELL, D. J. *Tokamaks*. [S.l.]: Oxford university press, 2011. v. 149.
- 29 LI, S. et al. Optimal tracking for a divergent-type parabolic pde system in current profile control. In: HINDAWI. *Abstract and Applied Analysis*. [S.l.], 2014. v. 2014.
- 30 PENG, Y. M.; STRICKLER, D. J. Features of spherical torus plasmas. *Nuclear Fusion*, IOP Publishing, v. 26, n. 6, p. 769, 1986.
- 31 COSTLEY, A. Towards a compact spherical tokamak fusion pilot plant. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, The Royal Society Publishing, v. 377, n. 2141, p. 20170439, 2019.
- 32 RITZ, C. P. et al. Turbulent structure in the edge plasma of the text tokamak. *The Physics of fluids*, American Institute of Physics, v. 27, n. 12, p. 2956–2959, 1984.
- 33 NASCIMENTO, I. et al. Plasma confinement using biased electrode in the TCABR tokamak. *Nuclear Fusion*, IOP Publishing, v. 45, n. 8, p. 796–803, jul 2005.
- 34 HORTON, W. Drift waves and transport. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 71, n. 3, p. 735, 1999.

- 35 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical mechanics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2002.
- 36 ARNOL'D, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 60.
- 37 LEMOS, N. A. *Analytical mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018.
- 38 ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T.; YORKE, J. A. *Chaos: an introduction to dynamical systems*. [S.l.]: Springer New York, 2000.
- 39 LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. *Regular and chaotic dynamics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 38.
- 40 HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. [S.l.]: Academic press, 2012.
- 41 ALMEIDA, A. M. O. D. *Hamiltonian systems: Chaos and quantization*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990.
- 42 AGUIAR, M. A. de. Tópicos de mecânica clássica. *Livraria da Física, 1a edição*, p. 18, 2011.
- 43 REICHL, L. E. *The Transition to Chaos: In Conservative Classical Systems: Quantum Manifestations*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1992.
- 44 REICHL, L. E.; ZHENG, W. M. Field-induced barrier penetration in the quartic potential. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 29, p. 2186–2193, Apr 1984.
- 45 ZASLAVSKY, G. M.; ZASLAVSKIJ, G. M. *Hamiltonian chaos and fractional dynamics*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2005.
- 46 CASTILLO-NEGRETE, D. del; GREENE, J.; MORRISON, P. Area preserving nontwist maps: periodic orbits and transition to chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 91, n. 1, p. 1–23, 1996.
- 47 CHIRIKOV, B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics reports*, Elsevier, v. 52, n. 5, p. 263–379, 1979.
- 48 GREENE, J. M. A method for determining a stochastic transition. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 20, n. 6, p. 1183–1201, 1979.
- 49 CALDAS, I. L. et al. Nontwist symplectic maps in tokamaks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 17, n. 5, p. 2021–2030, 2012.
- 50 CARVALHO, R. E. de; ALMEIDA, A. O. de. Integrable approximation to the overlap of resonances. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 162, n. 6, p. 457–463, 1992.
- 51 SZEZECH, J. D. et al. Transport properties in nontwist area-preserving maps. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, American Institute of Physics, v. 19, n. 4, p. 043108, 2009.
- 52 SZEZECH, J. D. et al. Effective transport barriers in nontwist systems. *Physical Review E*, APS, v. 86, n. 3, p. 036206, 2012.

- 53 WEELE, J. Van der et al. The birth of twin poincaré-birkhoff chains near 1: 3 resonance. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 153, n. 2, p. 283–294, 1988.
- 54 ABUD, C. V.; CALDAS, I. Secondary nontwist phenomena in area-preserving maps. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, American Institute of Physics, v. 22, n. 3, p. 033142, 2012.
- 55 DULLIN, H. R.; MEISS, J.; STERLING, D. Generic twistless bifurcations. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 13, n. 1, p. 203, 2000.
- 56 PETRISOR, E. Nontwist area preserving maps with reversing symmetry group. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 11, n. 02, p. 497–511, 2001.
- 57 CORSO, G.; RIZZATO, F. B. Manifold reconnection in chaotic regimes. *Physical Review E*, APS, v. 58, n. 6, p. 8013, 1998.
- 58 WURM, A. et al. Meanders and reconnection–collision sequences in the standard nontwist map. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, American Institute of Physics, v. 15, n. 2, p. 023108, 2005.
- 59 BUTCHER, J. C. *Numerical methods for ordinary differential equations*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2016.
- 60 CALDAS, I. et al. Dynamical effects in confined plasma turbulence. *Brazilian Journal of Physics*, Springer, v. 44, n. 6, p. 903–913, 2014.
- 61 DOYLE, E. et al. Modifications in turbulence and edge electric fields at the l-h transition in the DIII-D tokamak. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, American Institute of Physics, v. 3, n. 8, p. 2300–2307, 1991.
- 62 GRENFELL, G. et al. H-mode access and the role of spectral shift with electrode biasing in the TCABR tokamak. *Physics of Plasmas*, AIP Publishing LLC, v. 25, n. 7, p. 072301, 2018.
- 63 SEVERO, J. et al. Temporal behaviour of toroidal rotation velocity in the TCABR tokamak. *Nuclear Fusion*, IOP Publishing, v. 49, n. 11, p. 115026, oct 2009.
- 64 FUJITA, T. et al. High performance reversed shear plasmas with a large radius transport barrier in JT-60U. *Nuclear fusion*, IOP Publishing, v. 38, n. 2, p. 207, 1998.
- 65 SIPS, A. C. et al. Advanced scenarios for iter operation. *Plasma physics and controlled fusion*, IOP Publishing, v. 47, n. 5A, p. A19, 2005.
- 66 HOULBERG, W. Bootstrap current in enhanced reversed shear tokamaks for volume neutron source applications. In: IEEE. *Proceedings of 16th International Symposium on Fusion Engineering*. [S.l.], 1995. v. 2, p. 1223–1228.
- 67 KERNER, W.; TASSO, H. Tearing mode stability for arbitrary current distribution. *Plasma Physics*, IOP Publishing, v. 24, n. 1, p. 97, 1982.
- 68 MARTINS, C. G. et al. Analytical solutions for tokamak equilibria with reversed toroidal current. *Physics of Plasmas*, American Institute of Physics, v. 18, n. 8, p. 082508, 2011.

- 69 SOUSA, M. de et al. Alternate islands of multiple isochronous chains in wave-particle interactions. *Physical Review E*, APS, v. 88, n. 6, p. 064901, 2013.
- 70 SOUSA, M. D. et al. Multiple island chains in wave-particle interactions. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2015. v. 641, n. 1, p. 012003.
- 71 HOWARD, J. E.; HUMPHERYS, J. Nonmonotonic twist maps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 80, n. 3, p. 256–276, 1995.
- 72 MARTINELL, J. J.; CASTILLO-NEGRETE, D. del. Gyroaverage effects on chaotic transport by drift waves in zonal flows. *Physics of Plasmas*, American Institute of Physics, v. 20, n. 2, p. 022303, 2013.
- 73 FONSECA, J. D.; CASTILLO-NEGRETE, D. del; CALDAS, I. Area-preserving maps models of gyroaveraged  $E \times B$  chaotic transport. *Physics of Plasmas*, AIP Publishing LLC, v. 21, n. 9, p. 092310, 2014.
- 74 WURM, A.; PORTELA, K. F. Breakup of shearless invariant tori in cubic and quartic nontwist maps. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 17, n. 5, p. 2215–2222, 2012.

# APÊNDICE A – Normalização dos Parâmetros

A normalização feita consiste em dividir os parâmetros do problema ( $E_r, B, a, \omega_0, R$  e  $v_{\parallel}$ ) por um fator que possui a mesma dimensão e unidade da grandeza, com o intuito de deixá-los com valores típicos próximos à unidade. O raio menor do plasma,  $a$ , é dividido por um fator  $a_0$  com dimensão de comprimento, que representa a escala de comprimento característica do sistema. O comprimento característico escolhido o próprio raio menor do plasma,  $a_0 = 0.18m$ , de modo que  $a' = a/a_0 = 1$ , na nova escala. Do mesmo modo, escolhemos  $B_0 = 1.1T \Rightarrow B' = B/B_0 = 1$ . O fator de normalização do campo elétrico foi escolhido de modo que após a normalização  $|E_r(a)| = 1$ , ou seja,  $E_0 = |E_r(a)|$ . No SI, o campo elétrico utilizado foi

$$E_r = 3\alpha r^2 + 2\beta r + \gamma, \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (-80.00, 31.95, -6.00) \times 10^3 \text{ V/m.}$$

Logo, o campo elétrico adimensional será

$$E'_r = \frac{E_r}{E_0} = 3\frac{\alpha a^2}{E_0} \left(\frac{r}{a}\right)^2 + 2\frac{\beta a}{E_0} \left(\frac{r}{a}\right) + \frac{\gamma}{E_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E'_r = 3\alpha' I^2 + 2\beta' I + \gamma', \quad (\alpha', \beta', \gamma') = (-1.140, 2.529, -2.639). \quad (\text{A.1})$$

Os demais fatores de normalização são derivados a partir de  $a_0, B_0, E_0$ :

$$v_0 = \frac{E_0}{B_0} = 2067 \text{ m/s}, \quad t_0 = \frac{a_0}{v_0} = 8.707 \times 10^{-5}, \quad \phi_0 = a_0 E_0 = 409.3 \text{ V}$$

No SI,  $\omega_0 = 6 \times 10^4 \text{ rad/s}$ . A frequência angular nas novas unidades será  $\omega'_0 = \omega_0 t_0 = 5.224$ .

Outro parâmetro que necessita normalização são as amplitudes  $\phi_n$  do potencial eletrostático flutuante. No quadro abaixo estão seus respectivos valores no SI e normalizado.

Quadro 3 – Normalização das amplitudes  $\phi_n$ 

<b>Modo</b>	<b>SI (V)</b>	<b>Normalizado(<math>\times 10^{-3}</math>)</b>
$\phi_2$	4.90	11.97
$\phi_3$	0.85	2.077
$\phi_4$	0.10	0.2443