


Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Estudo da abundância de relíquia de matéria escura em modelos com fóton escuro

Fernanda Lima Matos

Orientador(a):  Prof.(a) Dr.(a) Enrico Bertuzzo

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre(a) em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Enrico Bertuzzo - Orientador (Instituto de Física da Universidade de São Paulo)

Prof. Dr. Chee Sheng Fong (UFABC)

Prof. Dr. Rogério Rosenfeld (IFT-UNESP)

São Paulo
2023

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Matos, Fernanda Lima

Estudo da abundância de relíquia de matéria escura em modelos com fóton escuro. São Paulo, 2023.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr Enrico Bertuzzo

Área de Concentração: Física das Partículas Elementares e Campos.

Unitermos: 1. Cosmologia; 2. Matéria escura; 3. Universo primordial; 4. Física teórica; 5. Teoria quântica de campo.

USP/IF/SBI-075/2023

University of São Paulo
Physics Institute

Study of Dark Matter relic abundance in dark photon models

Fernanda Lima Matos

Supervisor: Prof. Dr. Enrico Bertuzzo

Dissertation submitted to the Physics Institute of the
University of São Paulo in partial fulfillment of the
requirements for the degree of Master of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Enrico Bertuzzo - Supervisor (Instituto de Física da Universidade de São Paulo)

Prof. Dr. Chee Sheng Fong (UFABC)

Prof. Dr. Rogério Rosenfeld (IFT-UNESP)

São Paulo
2023

Agradecimentos

Este trabalho não seria possível sem o apoio e a ajuda de muitas pessoas. Em primeiro lugar, eu gostaria de agradecer a Deus pelas muitas pessoas especiais que estão presentes na minha vida e pela força que o Seu amor me dá todos os dias.

Eu agradeço à minha mãe, Ednara, por toda a sua dedicação para cuidar de mim e dos meus irmãos. Obrigada por ser uma pessoa tão forte e corajosa que nos inspira a lutar pelo que a gente acredita. Obrigada por ter sempre me ouvido e apoiado na minha vida escolar e acadêmica, mesmo quando as minhas ideias pareciam muito malucas. Agradeço também ao Marcos, por estar sendo seu companheiro de modo tão amoroso.

Agradeço também aos meus irmãos, Felipe e Zainne, que me aguentam todos os dias, mesmo nos momentos em que eu estou cansada, estressada e teimosa. Obrigada porque, mesmo no meio de todos os desafios do dia-a-dia, vocês são meus amigos e minha companhia; cada um do seu jeitinho. Para confidenciar segredos, para conversar de filmes, para segurar minha mão quando preciso... estamos sempre juntos.

Quero agradecer à tia Nilze e à tia Natália, que sempre foram como minhas segundas-mães. Todo o amor, cuidado e apoio de vocês foi e tem sido fundamental ao longo da minha vida. Obrigada por terem sempre permitido que a casa de vocês fosse um lar pra mim.

Ainda, eu gostaria de agradecer de maneira especial à tia Dei e ao tio Carlos. Muito obrigada por todo amor e por todo apoio que vocês me deram ao longo da vida. Obrigada por toda a ajuda e por terem sempre acreditado em mim, pelas caronas pro vestibular e para a escola. Obrigada por terem aberto a porta da casa de vocês em todos os momentos que precisei (inclusive durante boa parte da escrita dessa dissertação).

Agradeço também a todos os meus tios e tias, em especial, à tia Rita e à tia Noêmia, e aos meus primos e primas. Vocês me permitiram, sendo a mais nova de 20 primos, crescer em uma comunidade familiar cheia de amor. Eu amo muito cada um de vocês.

Por fim, eu gostaria de fazer lembradas duas pessoas que não estão mais conosco. Minha vó Delita, que foi profundamente amorosa comigo nos 14 anos que tivemos juntas e que também foi como uma mãe pra mim. E meu pai, José, que pôde deixar uma marca de amor no meu coração mesmo que nosso tempo juntos nessa vida tenha sido tão curto.

Eu quero também agradecer às pessoas da minha igreja pelo apoio, pelas orações, por sempre torcerem por mim com tanto amor e por tudo o que me ensinaram. Com 21 anos fazendo parte dessa comunidade, vocês são parte da minha vida. Em especial, eu quero agradecer as meninas da dança, que são amigas tão amorosas; a todo o pessoal que passou pelo kids, que me ensinou tanto nessa vida; aos líderes, por me apoiarem tanto; e às crianças, por serem tão fofas.

Agradeço também a todos os amigos da graduação pela companhia para enfrentar todos os desafios e desfrutar das experiências da vida acadêmica, incluindo o Renan, Thiago N., Gabriel, Pedro Machado e Pedro Mariano. Em especial, quero agradecer à Milena, à Teresa, ao Christiano, ao Thiago e ao Andrew, pelas muitas conversas e passeios.

Agradeço também aos companheiros da pós. Quando iniciei a parte presencial do meu mestrado (pós-pandemia), eu não imaginava que encontraria um ambiente tão cheio de apoio, de risadas e de molhos. Obrigada Bia, Pedro T., Lucas, Ana, Gustavo S., Cauê, Pedro B., Gabriel, Lua, Igor, Antônio, Matheus, João, Ian, Nati, Bárbara, Mapa, Eli, Mona, Luighi e Gustavo A. por construírem esse grupo tão especial.

Agradeço em particular ao Lucas, à Bia, ao Pedro B. e ao Pedro T. que me ajudaram muito no meu projeto, discutindo física, me ajudando com os pepinos numéricos e me incentivando nos momentos de maior tensão. Agradeço também muito especialmente à Disha, que, além de uma ótima amiga, foi quase minha co-orientadora, contribuindo muito para as discussões que norteiam esse projeto. Sem a ajuda de vocês, meu mestrado teria sido muito mais difícil.

Ainda, eu quero agradecer muito especialmente ao meu orientador, professor Enrico. A excelência com que você faz o seu trabalho é uma inspiração. Obrigada por toda a sua dedicação, paciência e parceria ao longo dos últimos 7 anos. Sua contribuição na minha formação é enorme e, simplesmente, fundamental. Obrigada por acreditar em mim e me apoiar tanto. Obrigada pelas inúmeras conversas e conselhos e por tudo o que você me ensinou e me ensina.

Agradeço também aos professores do grupo de física de partículas, por todas as ricas discussões. Agradeço a todos os funcionários do IFUSP por tornarem o funcionamento do instituto possível.

Ainda, agradeço ao Marcelo. Meu amor, muito obrigada por ser, de fato, meu companheiro. Obrigada por me apoiar e me acolher sempre, com tanto carinho, e, em especial, por estar me apoiando e acolhendo integralmente nessa reta final do mestrado. Obrigada por me incentivar nos meus sonhos e me ajudar tanto sempre. Estar ao seu lado (de perto ou de longe) traz mais doçura, leveza e beleza aos meus dias. Obrigada por todo amor, carinho e respeito e por me apresentar tantas coisas bonitas dessa vida. Eu te amo muito. Obrigada também à família Schwade por todo carinho e apoio.

Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro dado a este projeto (processo nº 2020/14811-4).

Resumo

A natureza fundamental da matéria escura é um dos maiores mistérios da física contemporânea. Dentre os muitos modelos estudados na literatura para responder a esta questão, os setores escuros vêm ganhando notoriedade na comunidade. Tais modelos são capazes de reproduzir a abundância observada de matéria escura, enquanto a natureza indireta das interações de seus componentes com as partículas do modelo padrão pode explicar a dificuldade de se obter sinais de detecção direta.

Neste trabalho, estudamos um modelo de setor escuro chamado modelo de fóton escuro (dark photon). Investigamos, através das equações de Boltzmann adequadas, como diferentes hierarquias de massa entre este mediador e a matéria escura (que supomos ser um férmion de Dirac) impactam o processo de freeze-out desta.

Nosso objetivo foi calcular, para diferentes hierarquias, quais valores de acoplamento entre o dark photon e o modelo padrão são necessários para reproduzir a abundância de relíquia observada para a matéria escura. Considerando massas de matéria escura entre 5 MeV e 1 GeV, observamos a região do espaço de parâmetros viável para dark photons com massa superior a 1 GeV é pequena. Além disso, obtivemos que o valor máximo permitido para a razão entre a massa do dark photon e a massa da matéria escura é levemente maior que 13.

Palavras chave: matéria escura; fóton escuro; setor escuro; hierarquia de massas; freeze-out.

Abstract

The fundamental nature of dark matter is one of the greatest mysteries of contemporary physics. Among the many models studied in the literature to answer this question, dark sectors are gaining more and more attention in the community. These models can reproduce the observed dark matter abundance while the feeble interactions between its components and standard model particles can explain the difficulty of obtaining direct detection signals.

In this work, we study a dark sector model named the dark photon model. We investigate, through the appropriate Boltzmann equations, the impact of different mass hierarchies between this mediator and the dark matter (supposed to be a Dirac fermion) on the dark matter freeze-out.

Our aim is to calculate, for different hierarchies, which values of coupling between the dark photon and the standard model are necessary to reproduce the observed dark matter relic abundance. Considering dark matter masses between 5 MeV and 1 GeV, we observed that the region in the parameter space that is viable for dark photons with masses greater than 1 GeV is small. Moreover, we obtained that the maximum value allowed for the ratio between the mass of the dark photon and the dark matter mass is slightly larger than 13.

Keywords: dark matter; dark photon; dark sector; mass hierarchies; freeze-out.

Sumário

1	Introdução	7
1.1	Evidências da existência de Matéria Escura	9
1.1.1	Fritz Zwicky - Aglomerado de Coma	9
1.1.2	Equilíbrio Hidrostático em Aglomerados	12
1.1.3	Vera Rubin - Curvas de Rotação de Galáxias	13
1.1.4	<i>Bullet Cluster</i>	15
1.1.5	Radiação Cósmica de Fundo	16
1.1.6	Nucleossíntese Primordial	20
1.2	Modelos propostos	26
2	O modelo de <i>Dark Photon</i>	31
2.1	Diagonalização da lagrangiana	32
2.2	Interações do modelo	34
2.2.1	Interações da Matéria Escura	34
2.2.2	Interações entre o bosons neutros e férmions	35
2.2.3	Interações com W^+ e W^-	37
2.2.4	Interações com o bóson de Higgs	38
3	Equação de Boltzmann	40
3.1	Processos $1\ 2 \leftrightarrow 3\ 4$	40
3.2	\dot{N}_1 em processos $1 \leftrightarrow 2\ 3$	44
3.3	\dot{N}_2 em processos $1 \leftrightarrow 2\ 3$	46
3.4	Equação de Boltzmann total	47
3.5	Reparametrização da equação	47
3.6	Contagem dos graus de liberdade	50
3.7	<i>Freeze-out</i> e <i>freeze-in</i>	53
3.8	Cálculo de $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$ e $\langle \Gamma \rangle$	57
4	Equações de Boltzmann para o modelo de <i>Dark Photon</i>	59
4.1	Calculando $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$ numericamente	60
4.2	Resolvendo a equação de Boltzmann numericamente	63
4.3	Varrendo o espaço de parâmetros	64
5	Regime $h \geq 3$	66
5.1	Processos que afetam a abundância da ME neste regime	66
5.1.1	Larguras de decaimento	66
5.1.2	Aniquilações $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow MP\ MP$	67
5.2	Equação de Boltzmann para ME	71
5.3	Curvas de nível obtidas	72

6	Regime $1 \leq h < 3$	78
6.1	Processos que afetam a abundância da ME	78
6.2	Processos que afetam a abundância do DP	79
6.3	Sistema de equações de Boltzmann	84
6.4	Calculando $\langle \Gamma \rangle$'s e $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$'s	86
6.5	Resolvendo a equação de Boltzmann	87
7	Conclusão	88
	Apêndices	95
	Apêndice A Mistura cinética: bósons de gauge abelianos e não-abelianos	95
	Apêndice B Expressões para $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$ e $\langle \Gamma \rangle$	97
B.1	$\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{12 \rightarrow 34}$	97
B.2	$\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{11 \rightarrow 23}$	103
B.3	$\langle \Gamma_{1 \rightarrow 23} \rangle$	103

1 Introdução

Diversos fenômenos físicos indicam a presença de Matéria Escura (ME) no universo. As primeiras evidências de sua existência foram observações da discordância entre a quantidade de matéria estimada a partir da emissão, absorção ou espalhamento de luz e a quantidade estimada por fenômenos gravitacionais, em diferentes sistemas astrofísicos [1]. Hoje, a ME é um dos pilares da cosmologia moderna, fazendo parte dos modelos que buscam descrever a composição e evolução do universo. Observações a apontam como responsável por cerca de 26% da densidade de energia e 84% da densidade de matéria presentes no universo [2].

Apesar de a ME ser tão abundante no universo e de serem muitas as evidências de sua existência (veja seção 1.1), ainda se sabe muito pouco sobre sua natureza fundamental. Através das observações, sabemos apenas que [3–5]: a ME é (quase completamente) neutra sob as interações forte e eletromagnética; deve se comportar como matéria não-relativística quando a temperatura dos fótons é da ordem de keV, para ser consistente com a formação das estruturas observadas no universo; é uma componente estável, com tempo de vida maior que a idade do universo, dado que preserva sua abundância primordial; tem auto-interação limitada por colisões de aglomerados [6] ($\sigma/m_\chi \lesssim 1 \text{ cm}^2/\text{g}$ [7])¹, como o *Bullet Cluster*, e pelo espectro de potência da matéria; e, por fim, sabemos que sua abundância corresponde a cerca de 26% da densidade de energia do universo.

O Modelo Padrão de física de partículas (MP), que fornece a descrição atual da composição e das interações fundamentais da parte visível do universo, não contém nenhuma partícula que atenda a estes requisitos. Por este motivo, supondo-se que a ME é uma partícula elementar, a existência de ME é um dos principais indicadores de que o MP não é a teoria final da constituição elementar da natureza. Ao longo das últimas décadas, muitos modelos de ME, de naturezas muito distintas, já foram propostos (veja seção 1.2). Entretanto, apesar do grande esforço observacional feito pela comunidade, até o presente momento, não foi observada nenhuma das assinaturas experimentais previstas pelos modelos propostos. Assim, a natureza da ME permanece como um dos maiores mistérios da física contemporânea.

Diante da ausência de detecções - sobretudo, de WIMPs (veja seção 1.2) - os modelos de Setor Escuro (SE) [3, 8] vêm ganhando notoriedade nos últimos anos. Neles, supõe-se a existência de algumas ou muitas partículas - dentre as quais se encontra a ME observada astrofísica e cosmológicamente - que são neutras sob as interações forte, fraca e eletromagnética, interagindo com o MP através da gravidade e das chamadas “interações portais”. Esses modelos são particularmente atrativos porque são capazes de reproduzir a abundância de ME observada, via mecanismos térmicos ou não térmicos, ao mesmo tempo que a natureza indireta das interações entre o SE e o MP pode permitir que estas novas partículas escapem das detecções em experimentos desenhados para testar energias cada vez mais altas [3].

Entre os setores escuros propostos, o cenário de *Dark Photon* (DP) [9] têm sido um dos

¹Onde m_χ é a massa da ME e σ é a seção de choque de auto-interação.

mais discutidos na literatura. Este modelo é uma extensão mínima do MP, introduzindo uma nova interação, do tipo $U(1)$, cujo bóson de gauge associado é o DP e cuja interação portal é um termo de mistura cinética com o bóson B, do MP. No contexto deste modelo, há grande interesse na escala de massas de MeV a poucos GeV, na qual as buscas de grande intensidade, que são mais eficientes para detecção de partículas leves e pouco interagentes, são mais viáveis. Nessa mesma escala de massas, esta interação portal é suficiente para estabelecer, no universo primordial, contato térmico entre a ME, presente no SE, e o MP [3]. Isto é muito vantajoso, dado que torna a abundância de ME independente de condições cosmológicas iniciais.

Em geral, na literatura que estuda o modelo de DP no regime em que o DP é mais pesado que a ME, supõe-se que a massa do DP é da mesma ordem de grandeza que a massa da ME. Tipicamente, fixa-se a hierarquia entre a massa da ME, m_χ , e a massa do DP, m_{Z_D} , em $h = m_{Z_D}/m_\chi = 3$ - como pode ser visto, por exemplo, nas referências [10, 11]. Assim, no caso em que estuda-se um candidato de ME com massa da ordem de MeV, a massa do DP cai nesta mesma ordem de grandeza. Entretanto, já existem fortes limites experimentais para DPs com massas da ordem de MeV [3], enquanto limites para ordem de GeV são mais fracos [12] (veja figura 32).

Neste contexto, se torna interessante explorar a seguinte questão: *será possível reproduzir a abundância observada para um candidato de ME com massa da ordem de MeV, no caso em que a massa do DP é da ordem de GeV? Ou ainda: quão mais pesado que a ME o DP pode ser, mantendo-se a previsão correta da abundância de ME?* E são estas as questões que este trabalho de mestrado se propôs a responder. Adicionalmente, pretendeu-se investigar, no caso em que as massas do DP e da ME são próximas, a seguinte pergunta: *qual o impacto que a presença da população de DPs no plasma primordial tem sobre a abundância de relíquia da ME?*

Para isso, o modelo de DP e todas as interações implicadas por ele foram estudadas com detalhe, de modo que foi possível identificar todos os processos que, neste cenário, são importantes para a evolução das abundâncias da ME e do DP. Assim, pudemos escrever as equações de Boltzmann adequadas para este cenário e também e estudar como resolvê-las.

Feito isso, se tornou possível calcular a abundância prevista para diferentes combinações dos 4 parâmetros que caracterizam o modelo de DP - a saber: o parâmetro de mistura cinética entre o DP e o bóson B do MP (ϵ), o acoplamento entre o DP e a ME (g_D), e as massas m_χ e m_{Z_D} . Assim, fixando $g_D = 1$, foi possível, para diferentes valores da hierarquia, h , varrer o espaço de parâmetros ϵ vs. m_{Z_D} encontrando-se as combinações destes dois parâmetros que reproduzem a abundância de ME observada, $\Omega_c h_0^2 = 0.11933 \pm 0.00091$ ^{2,3} [2]. Delineadas as curvas de nível $\Omega(\epsilon, m_{Z_D}) = \Omega_c$, finalmente, foi possível sobrepô-las aos limites experimentais vigentes no plano ϵ vs. m_{Z_D} e avaliar a viabilidade das diferentes hierarquias.

²Definimos $h_0 = H_0/(100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})$ (geralmente chamado apenas de h na literatura de cosmologia) para evitar confusão com a hierarquia de massas, definida como $h = m_{Z_D}/m_\chi$ neste texto.

³Este valor foi obtido em [2] levando em consideração os dados da Radiação Cósmica de Fundo juntamente com os dados de oscilações acústicas de bárions.

1.1 Evidências da existência de Matéria Escura

As evidências da existência de ME são muito diferentes entre si, sendo situadas em escalas de tempo e espaço que vão desde a rotação de estrelas em torno do centro da galáxia que as abriga até a formação de estruturas do universo. Deste modo, a consistência e a diversidade deste conjunto de evidências tornam a questão da ME especialmente contundente.

Neste capítulo serão apresentadas alguma destas evidências: a alta dispersão das velocidades das galáxias em torno do centro do aglomerado de Coma (F. Zwicky, 1933), a distribuição de densidade e alta temperatura do gases em aglomerados de galáxias (sob a hipótese de equilíbrio hidrostático), a ausência de decrescimento kepleriano em curvas de rotação de galáxias (V. Rubin, 1970; Rogstad e Shostak, 1972), a posição dos picos de densidade em aglomerados de galáxias em fusão (D. Clowe, 2006), as informações sobre flutuações de densidade trazidas pela Radiação Cósmica de Fundo e, por fim, as o contraste entre a abundância de bárions prevista pela abundância de elementos leves e a abundância de matéria indicada pelas observações de supernovas distantes.

1.1.1 Fritz Zwicky - Aglomerado de Coma

O trabalho de Fritz Zwicky [13]⁴, publicado em 1933, foi pioneiro em utilizar o teorema do Virial, que é um teorema de grande importância na mecânica estatística, derivado por Rudolf Clausius, no século XIX, para estimar a massa de um aglomerado de galáxias [1].

Com essa ferramenta, ele foi capaz de reinterpretar a alta dispersão de velocidades das galáxias no aglomerado de Coma - que já havia sido notada por E. Hubble e M. Humason em 1931, mas era incompreendida - como um erro na estimativa de massa total do aglomerado [1].

Teorema do Virial

Esta seção foi baseada na referência [15]. Ao longo dela, supomos que todas as componentes do sistema são partículas pontuais, com posição \vec{x}_i e massa m_i . Deste modo, a energia cinética total do sistema pode ser escrita como

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i^2, \quad (1.1)$$

onde $\dot{\vec{x}}_i = d\vec{x}_i/dt$. Por sua vez, a aceleração da i -ésima partícula é igual a

$$\vec{a}_i = \ddot{\vec{x}}_i = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3}, \quad (1.2)$$

enquanto a energia potencial total de um sistema sujeito a forças gravitacionais - considerando desprezíveis quaisquer forças externas - se escreve como

⁴Uma tradução deste artigo para o inglês está disponível em [14].

$$W = -\frac{G}{2} \sum_{i,j \neq i} \frac{m_i m_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|}, \quad (1.3)$$

onde o fator $1/2$ na equação da energia potencial aparece porque, nesta expressão, cada par de corpos é contado duas vezes.

Tomando a definição do momento de inércia em relação à origem,

$$I = \sum_i m_i |\vec{x}_i|^2,$$

e derivando em relação ao tempo, obtêm-se

$$\ddot{I} = 2 \sum_i m_i (\dot{\vec{x}}_i^2 + \vec{x}_i \ddot{\vec{x}}_i) = 4K + 2 \sum_i m_i \vec{x}_i \ddot{\vec{x}}_i. \quad (1.4)$$

No primeiro termo da equação para \ddot{I} , é identificada a energia cinética total no sistema. Substituindo (1.2) no segundo termo, obtemos

$$\begin{aligned} 2 \sum_i m_i \vec{x}_i \ddot{\vec{x}}_i &= 2 \sum_i m_i \vec{x}_i \cdot G \sum_{j \neq i} \frac{m_j (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3} \\ &= G \sum_{i, j \neq i} m_i m_j \vec{x}_i \frac{(\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3} + G \sum_{j, i \neq j} m_j m_i \vec{x}_j \frac{(\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^3} \\ &= G \sum_{i, j \neq i} m_i m_j \frac{-|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^2}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3} \\ &= -G \sum_{i, j \neq i} \frac{m_i m_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|} \\ &= 2W. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Assim, obtêm-se a relação

$$\ddot{I} = 4K + 2W, \quad (1.6)$$

conhecida como Teorema do Virial. Essa relação é especialmente útil em sistemas em equilíbrio do tipo Virial, que são sistemas cujo momento de inércia é constante, implicando:

$$2K = -W. \quad (1.7)$$

Teorema do Virial e o Aglomerado de Coma

Supondo que um aglomerado de galáxias seja bem aproximado por uma esfera de raio R , com densidade uniforme ρ (distribuição de galáxias uniforme), a energia potencial entre um elemento infinitesimal de massa, $dm = \rho dV$ (onde dV é um elemento infinitesimal de volume),

localizado à distância r do centro do aglomerado, e a massa interna a este raio é

$$\begin{aligned} dW &= -\frac{G M_{int}(r) dm}{r} = -\frac{G \cdot \rho V(r) \cdot \rho dV}{r} \\ &= -\frac{G\rho^2}{r} \frac{4\pi r^3}{3} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} W &= \int dW = -\frac{4}{3} G\pi\rho^2 \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= -\frac{16}{15} G\pi^2 \rho^2 R^5 = -\frac{16}{15} GR^5 \pi^2 \left(\frac{M_{total}}{V_{total}} \right)^2 = -\frac{3}{5} \frac{GM_{total}^2}{R}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Adicionando a definição de velocidade média (ponderada pela massa) [15],

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{M_{total}} \sum_i m_i |\dot{\vec{x}}_i|^2, \quad (1.10)$$

e substituindo na equação 1.1, conclui-se que

$$K = \frac{1}{2} M_{total} \langle v^2 \rangle. \quad (1.11)$$

Tomando as descrições das energias potencial gravitacional e cinética total, dadas por (1.9) e (1.11), respectivamente, e supondo que o aglomerado de Coma está em equilíbrio do tipo Virial, o que parece razoável, dado que a idade do aglomerado é da ordem da idade do próprio universo, é possível utilizar a equação (1.7), obtendo-se a relação

$$M_{total} \langle v^2 \rangle = \frac{3}{5} \frac{GM_{total}^2}{R} \implies M_{total} = \frac{5}{3} \frac{\langle v^2 \rangle R}{G}, \quad (1.12)$$

que fornece uma estimativa da massa do aglomerado a partir de seu tamanho e da velocidade das galáxias em torno de seu centro, que pode ser obtida através da dispersão em torno do redshift médio medido para o aglomerado (atribuído à expansão do universo).

O trabalho de Fritz Zwicky, de 1933, não foi o primeiro a utilizar o Teorema do Virial em um contexto astronômico, mas o primeiro a utilizá-lo para estimar a massa de um aglomerado de galáxias [1]. Assim, foi possível relacionar a discrepância entre a dispersão de velocidades estimada teoricamente, a partir da quantidade de galáxias observadas, e a dispersão medida através dos dados de redshift com um erro na estimativa da massa total do aglomerado, indicando a presença de uma quantidade de matéria que não era observada como as galáxias, chamada por ele de *dunkle Materie* (Matéria Escura)⁵, cuja abundância era muito maior que a de matéria

⁵Termo que vinha sendo utilizado por astrônomos que estudavam a dinâmica estelar na Via Láctea e tentavam estimar a quantidade de matéria escura - entendida, à esta altura, como estrelas de brilho muito fraco, ou matéria "nebulosa", ou "meteórica" [1].

comum.

Nos anos seguintes à publicação de Zwicky, foram feitas muitas discussões sobre o que seria responsável pela massa do aglomerado indicada pelo equilíbrio virial e não oriunda das galáxias. Em 1971, um trabalho de Meekins et al. já obteve evidências de que o gás intergalático representava menos que 2% da massa necessária para gerar um potencial gravitacional capaz de manter o sistema em equilíbrio [1], indicando a presença de uma matéria diferente de galáxias ou gases.

1.1.2 Equilíbrio Hidrostático em Aglomerados

Aglomerados de galáxias têm uma parte significativa de sua massa em gás, o qual é aquecido por choques e pela compressão adiabática induzidos pelo potencial gravitacional do aglomerado [16]. Esses processos aquecem e ionizam o gás, que emite raios-X. Através das observações dos espectros destes raios-X, é possível inferir diretamente os perfis de densidade e temperatura do gás [1, 16, 17].

Assumindo que um aglomerado de galáxias seja esfericamente simétrico e que esteja em equilíbrio hidrostático, ou seja, que a força exercida por seu potencial gravitacional está em equilíbrio com a pressão do gás (evitando o escape do gás ou seu colapso), podemos escrever, para uma casca esférica de gás, à distância r do centro do aglomerado, a relação

$$(P_{dentro} - P_{fora}) \cdot A(r) - \frac{GM_{tot}(r)m_{casca}}{r^2} = 0 \implies$$

$$-dPA(r) = \frac{GM_{tot}(r)\rho(r)A(r)dr}{r^2} \implies \frac{dP}{dr} = -\frac{GM_{tot}(r)\rho(r)}{r^2}, \quad (1.13)$$

onde $A(r)$ é a área da casca esférica, G é a constante de Newton, ρ é a densidade do gás, e a pressão, P , é dada pela lei dos gases ideais,

$$P(r) = n(r)k_B T(r) = \frac{\rho(r)}{\mu m_u} k_B T(r), \quad (1.14)$$

onde n é a abundância numérica de partículas no gás, m_u é a unidade de massa atômica, $\mu \sim 0.6$ é o peso molecular médio, o qual parametriza a abundância relativa de hidrogênio, hélio e outros gases no aglomerado [16], k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura do gás. Derivando a equação (1.14), obtemos

$$\frac{dP}{dr} = \frac{k_B T(r)\rho(r)}{m_u \mu r} \left[\frac{d \log \rho(r)}{d \log r} + \frac{d \log T(r)}{d \log r} \right]. \quad (1.15)$$

Substituindo (1.15) em (1.13), têm-se

$$M_{tot}(r) = -\frac{k_B T(r)r}{G m_u \mu} \left[\frac{d \log \rho(r)}{d \log r} + \frac{d \log T(r)}{d \log r} \right]. \quad (1.16)$$

Assim, sob a hipótese de equilíbrio hidrostático, é possível inferir a massa total do aglome-

rado à uma distância r de seu centro, $M_{tot}(r)$, em função dos perfis de densidade e temperatura do gás, os quais são medidas diretamente a partir dos espectros de raios-X.

Os espectros observados indicam que a $M_{tot}(r)$ compatível com o equilíbrio hidrostático é maior do que a massa de matéria visível nos aglomerados, se tornando uma evidência da presença de ME no universo [1, 16, 17]. Além disso, como este método fornece informações sobre a distribuição de massa (não apenas a massa total) no aglomerado, ele se torna interessante para testar modelos de ME, que podem prever sua distribuição espacial, e até teorias de gravidade modificada [17].

1.1.3 Vera Rubin - Curvas de Rotação de Galáxias

Supondo que atração gravitacional é a única força importante na dinâmica de uma galáxia, pode-se escrever a relação

$$F_g = \frac{GM(r)m}{r^2} = m a_{centrípeta} = \frac{mV(r)^2}{r}. \quad (1.17)$$

Assim, é possível descrever o comportamento da velocidade de rotação de estrelas e outros corpos celestes em torno do centro da galáxia como

$$V(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}. \quad (1.18)$$

Com esta relação, pode-se estimar a distribuição de massa em uma galáxia, a partir de sua distribuição de velocidades, a qual, por sua vez, pode ser obtida através de dados de redshift.

O brilho do disco de uma galáxia, I , cai exponencialmente com a distância em relação ao seu centro [15], r ,

$$I(r) = I_{centro} e^{-r/R_s}, \quad (1.19)$$

onde R_s é uma escala de comprimento da galáxia, que equivale a poucos kiloparsecs (4 kpc para Via Láctea). Assim, à uma distância de poucas unidades de R_s do centro da galáxia, quase não há mais brilho, indicando que praticamente toda a massa luminosa da galáxia está contida nesta ordem de poucos kiloparsecs.

Considerando que a matéria próxima ao centro da galáxia está distribuída uniformemente, a massa contida em um raio r cresce com o volume para $r \ll R_s$ e obtemos

$$M(r) \propto r^3 \implies V(r) \propto r \quad (r \ll R_s). \quad (1.20)$$

Ou seja, para raios consideravelmente menores que R_s , a velocidade cresce linearmente com o raio. Já para raios muito maiores que R_s , a massa de matéria luminosa se torna aproximadamente constante à medida que aumenta-se r . Considerando que haja apenas matéria luminosa na galáxia, isto implica que

$$V(r) \propto r^{-1/2} \quad (r \gg R_s). \quad (1.21)$$

Este comportamento de diminuição da velocidade quando $r \gg R_s$ é chamado “decréscimo Kepleriano”.

Com o avanço da Radioastronomia, em 1970 já era possível fazer medidas de velocidade de gás e de estrelas em regiões distantes do centro das galáxias (com baixa densidade destas). O trabalho de Vera Rubin e Kent Ford, publicado em 1970, representa um salto na qualidade destas medições. Utilizando um equipamento desenvolvido por Ford na década de 1960 [1], eles obtiveram dados de velocidades de rotação da galáxia Andrômeda (M31) até uma distância de cerca de 24 kpc, que é, aproximadamente, quatro vezes maior que seu raio crítico (~ 6 kpc) [15].

O comportamento observado por eles, a despeito do esperado, foi a ausência do decréscimo Kepleriano, dando lugar ao aparecimento de um platô no gráfico da velocidade de rotação, na região grandes valores de raio (veja figura 1).

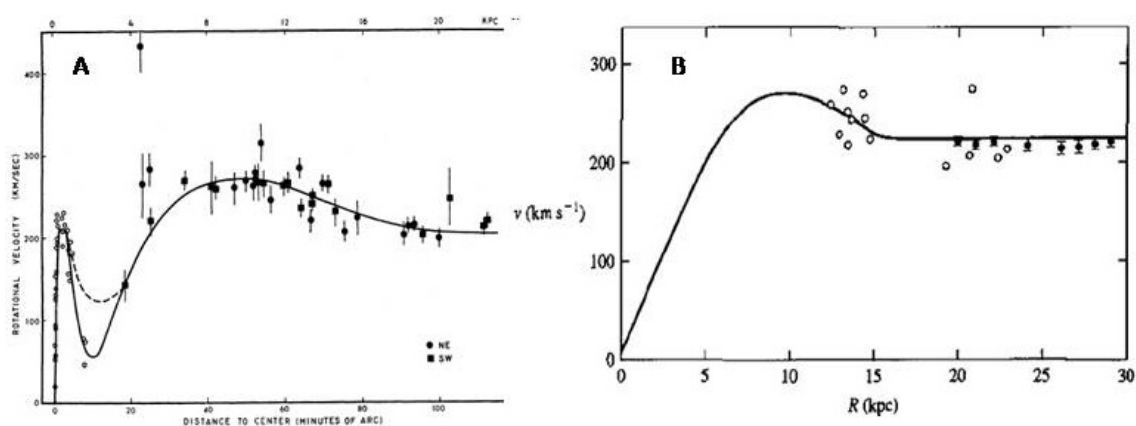


Figura 1: Curvas de Rotação da galáxia de Andrômeda. A) Curva extraída do artigo da Vera Rubin (1970) [18] B) Curva extraída do livro da Bárbara Ryden (2003) [15], sendo uma adaptação da curva obtida por Vera Rubin - os dados em círculos são os obtidos por Vera Rubin em 1970 e os pontos pretos com barra de erro por Roberts and Whitehurst em 1975.

Essa distribuição de velocidades indica que, em distâncias nas quais a massa visível total já pode ser considerada constante, a verdadeira massa total da galáxia continua crescendo, apontando a presença de um tipo de matéria diferente da visível. Além disso, a forma de platô indica que, em regiões distantes do centro da galáxia, este outro tipo de matéria se distribui de modo que a massa cresce linearmente com o raio, diferindo da distribuição de massa da matéria visível, abundante na parte mais central da galáxia.

Ainda por volta de 1970, outros grupos mediram curvas de rotação de galáxias e obtiveram esse mesmo comportamento constante na regiões mais externas, por exemplo, Rogstad e Shostak (1972) [19], que concluíram *“we confirm here the requirement for low-luminosity material in the outer regions of these galaxies”* (veja figura 2).

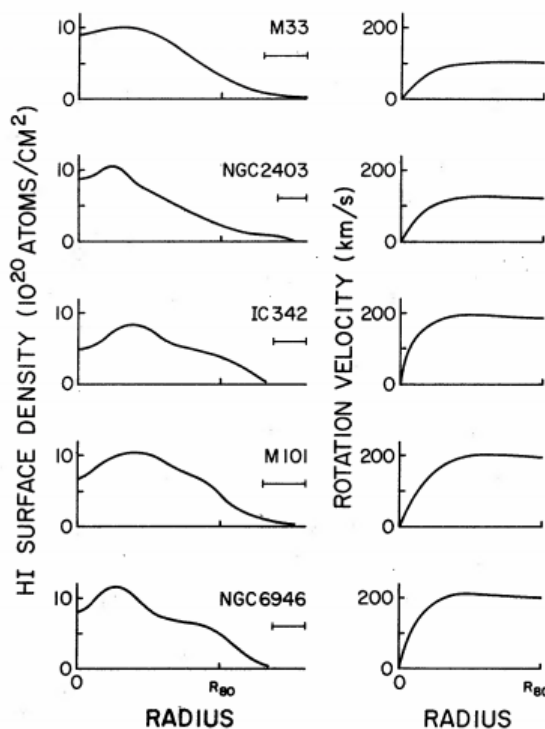


Figura 2: Curvas de rotação de cinco galáxias obtidas por Rogstad e Shostak em 1972 [19] (figura extraída deste artigo). As barras em baixo do nome das galáxias indicam a *average radial beam diameter*, *i.e.* a resolução espacial efetiva. R_{80} é o raio que contém 80% do hidrogênio neutro (HI) observado.

1.1.4 *Bullet Cluster*

Nesta seção será apresentado um artigo de D. Clowe et al., publicado em 2006, intitulado “*A direct empirical proof of the existence of dark matter*” [6]. O artigo apresenta medidas de lentes gravitacionais fracas de 1E0657-558, que é uma fusão de aglomerados de galáxias conhecida como *Bullet Cluster*, dada a forma de sua imagem em raio-X (veja figura 3).

As lentes gravitacionais fracas são medidas de distorção das imagens de galáxias em um fundo distante, devida à deflexão da luz emitida pelas galáxias por um campo gravitacional, o qual estica suas imagens, preferencialmente na direção perpendicular à direção do centro de massa do objeto que é a fonte desse campo. Essas distorções são sutis, da ordem do achatamento intrínseco das galáxias; portanto, podem ser medidas apenas estatisticamente.

A correção dessas imagens mede diretamente dois parâmetros: $\bar{\gamma}$ e κ (que medem, respectivamente, a quantidade de alongamento anisotrópico e o aumento de tamanho da imagem da galáxia), cuja interpretação é diferente em modelos de gravidade Newtonianos e não-Newtonianos (que surgiram como uma alternativa à existência de matéria escura, sugerindo que o modelo Newtoniano não era completo/adequado para escalas astronômicas). Porém, nos dois tipos de interpretação, os picos de κ coincidem com os picos de densidade, assim, a análise das lentes em [6] foi feita através desse parâmetro, para diminuir o viés de algum modelo de gravidade.

O *Bullet Cluster* é um aglomerado particularmente interessante para ser estudado porque, dado um tempo suficiente, galáxias, plasma e qualquer componente escura de matéria assumem uma distribuição similar em um aglomerado, traçando o potencial gravitacional ao qual todos os tipos de matéria estão submetidos. Porém, durante a fusão de dois aglomerados, estes tipos de matéria se comportam de maneiras diferentes: as galáxias não colidem diretamente, passando umas através das outras, enquanto o plasma dos aglomerados sente atrito durante a fusão, sendo desacelerado, o que implica na segregação espacial destes dois tipos de matéria.

Em um aglomerado de galáxias, o plasma é o tipo de matéria bariônica mais abundante, portanto, na ausência de matéria escura, o potencial gravitacional deveria traçar sua distribuição espacial. Porém, no caso de a matéria escura ser o tipo de matéria mais abundante no aglomerado, o potencial gravitacional deve ser mais intenso na região do espaço onde estão as galáxias, já que, assim como elas, a matéria escura não sente o atrito sentido pelo plasma.

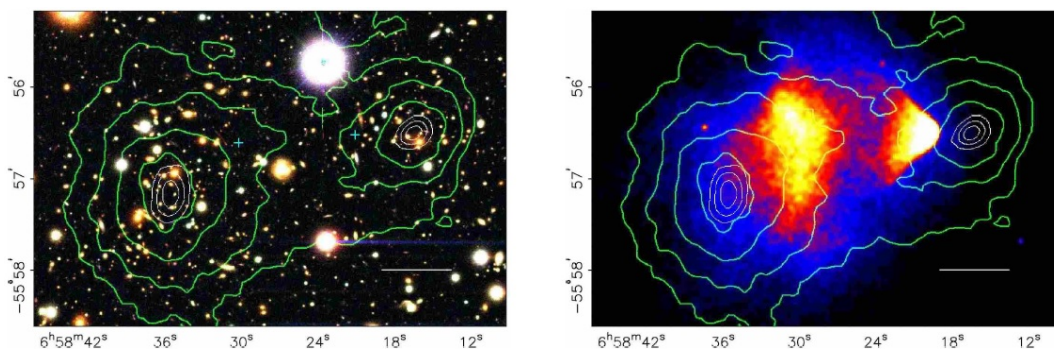


Figura 3: Imagens do aglomerado em fusão 1E0657-558 no visível (esquerda) e em raio-X (direita). A barra branca mostra a distância de 200 kpc no local do aglomerado. Os contornos brancos mostram os erros na posição dos picos parâmetro κ correspondentes aos níveis de confiança de 99.7%, 99.5% e 68.3%. As linhas verdes são as curvas de nível do parâmetro κ , sendo a linha mais externa correspondente à $\kappa = 0.16$ e crescendo com um passo de 0.7. Figura extraída de D. Clowe et al. (2006) [6].

O resultado obtido por D. Clowe et al. (2006) foi que os picos de κ , e, portanto de densidade, não se encontram na região onde plasma se concentrou, mas se encontram na região do espaço onde estão as galáxias, indicando, conforme discutido acima, que o sistema é dominado por matéria escura.

Além disso, a localização destes picos de densidade também são utilizados para estimar a intensidade de interação da matéria escura com ela mesma, o que é um fator importante a ser levado em conta quando se propõe um modelo de matéria escura. Limites da ordem de $\sigma/m_\chi \lesssim 1 \text{ cm}^2/\text{g}$ (onde σ é a seção de choque de auto-interação) são obtidos em [20].

1.1.5 Radiação Cósmica de Fundo

As observações da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) nos dão informações sobre como o Universo era com apenas 380 mil anos de idade [21]. Detectado pela primeira vez na década de

1960, em uma única frequência, por Penzias e Wilson, o sinal da radiação cósmica de fundo já tinha seu espectro medido por Mather et al. em 1990 [22] (veja figura 4).

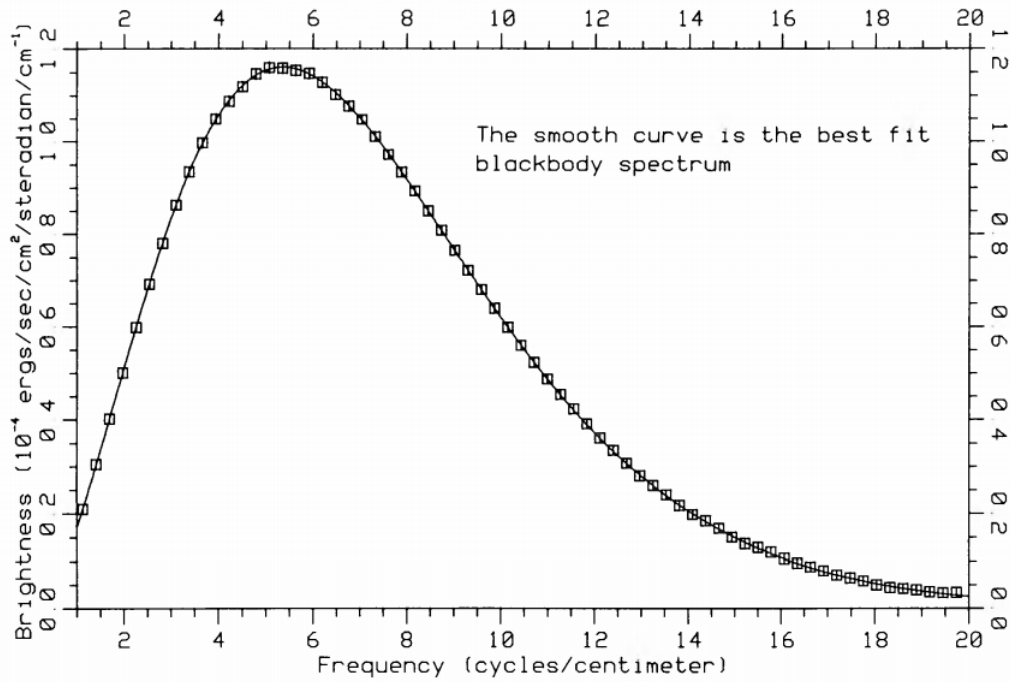


Figura 4: Espectro da RCF obtido com o *Far InfraRed Absolute Spectrophotometer* (FIRAS), instrumento do satélite COBE, por Mather et al. em 1990 [22] (figura extraída deste artigo). As caixas mostram os pontos medidos e seu tamanho corresponde às incerezas correspondentes, assumidas 1%. As unidades do eixo vertical são $10^{-4} \cdot \text{ergs} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{cm}$.

A excelente concordância do espectro da RCF com o espectro teórico de um corpo negro, indicada pela figura 4, é uma evidência notável de que, antes desta radiação desacoplar da matéria bariônica - que nessa época era carregada e espalhava a radiação, tornando o universo opaco - ambas estavam interagindo o suficiente para estarem em equilíbrio térmico, corroborando o modelo cosmológico de *Big Bang*.

Amplitude das flutuações de temperatura e formação de estruturas

Dada esta condição de equilíbrio entre os fótons da RCF e a matéria bariônica, as flutuações na temperatura da RCF ($\Delta T/\bar{T}$) (onde ΔT é a diferença entre a temperatura de um ponto arbitrário no mapa da RCF e a temperatura média, denominada \bar{T}), que são da ordem de 10^{-4} , indicam que as flutuações de densidade de matéria bariônica têm esta mesma intensidade na época do desacoplamento, ocorrido em redshift $z_{dec} \approx 1100$ ($a_{dec} \approx 10^{-3}$) [23].

Flutuações de densidade são quantificadas pelo contraste de densidade, definido como

$$\delta(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}, \quad (1.22)$$

onde $\rho(\vec{x}, t)$ é a densidade de energia nas coordenadas (\vec{x}, t) , e $\bar{\rho}(t)$ é a densidade de energia

média em um tempo t . Como discutido em detalhe em [21], a evolução temporal do valor típico do contraste de densidade de matéria fria (não relativística), na época em que o universo é dominado por matéria, é proporcional ao fator de escala,

$$\frac{\delta(t)}{\delta(t_i)} \approx \frac{a(t)}{a(t_i)}. \quad (1.23)$$

Observando que o redshift da época da igualdade entre matéria e radiação⁶ é igual a $z_{eq} \sim 3500 > z_{dec}$ [15], ou seja, que na época do desacoplamento o universo já era dominado por matéria, podemos utilizar a relação (1.23), para estimar o valor típico do contraste de densidade bariônico hoje

$$\delta_b(t_0) \approx \delta_b(t_{dec}) \frac{a(t_0)}{a_{dec}} \approx 10^{-1}, \quad (1.24)$$

onde, a partir do valor das flutuações de temperatura da RCF, tomamos $\delta_b(t_{dec}) = 10^{-4}$ e t_0 é o tempo de hoje, cujo redshift associado é zero, e $a(t_0) = 1/(1 + z(t_0)) = 1$.

O valor obtido por esta estimativa é incompatível com o contraste de densidade observado no universo hoje, que é em torno de 10^5 para galáxias e 10^3 para aglomerados de galáxias [23]. Essa discrepância entre o valor estimado e o valor observado para o contraste de densidade hoje pode ser explicada pela presença de uma quantidade de matéria que não permaneceu em equilíbrio com os fótons da RCF até redshift ~ 1100 , permitindo que seu contraste de densidade fosse maior que o bariônico no momento do desacoplamento da matéria bariônica com a radiação. Assim, nos momentos posteriores ao desacoplamento, a preexistência de locais cujo contraste de densidade eram maiores que os típicos da RCF pode ter interferido na evolução do contraste de densidade total de matéria, tornando a estimativa feita anteriormente inadequada.

Tal matéria, capaz de interagir gravitacionalmente com a matéria bariônica e inerte aos fótons da época da RCF (que interagem com a matéria bariônica o suficiente para estabelecer o equilíbrio térmico), tem características compatíveis com as da que definem a matéria escura.

Correlações das flutuações angulares de temperatura

Como citado anteriormente, o mapa de temperatura da RCF apresenta flutuações em torno de seu valor central, quando observa-se diferentes direções do céu. Essa variação de temperatura em função da direção, chamada também de anisotropia, pode ser parametrizada pelas coordenadas angulares θ e ϕ através de

$$T(\theta, \phi) = \bar{T} [1 + \Theta(\theta, \phi)], \quad (1.25)$$

⁶Esta época é aquela em que as densidades de energia da matéria e da radiação no universo, ρ_m e ρ_r , respectivamente, se igualam. O fator de escala que corresponde à esta época é $a_{eq} \equiv \rho_{r,0}/\rho_{m,0}$ [24]. Os índices zero indicam as densidades avaliadas hoje.

onde a função $\Theta(\theta, \phi)$ denota a flutuação de temperatura $\Delta T/\bar{T}$ e pode ser expressa através de uma expansão em harmônicos esféricos [24]

$$\Theta(\theta, \phi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (1.26)$$

Deste modo, a informação contida no campo de temperatura $T(\theta, \phi)$ é traduzida pelo valor médio \bar{T} e pelas amplitudes a_{lm} . Estas amplitudes não podem ser preditas diretamente. Entretanto, é possível prever sua distribuição e, a partir desta, a variância, denominada \mathcal{C}_l ,

$$\langle a_{lm} a_{l'm'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \mathcal{C}_l. \quad (1.27)$$

Os valores de \mathcal{C}_l medidos experimentalmente são comumente apresentados em um gráfico que tem a quantidade $l(l+1)\mathcal{C}_l$ no eixo y . Isso é feito para permitir a visualização do platô previsto pela aproximação de Sachs-Wolfe, que é válida para l 's pequenos e prevê que a quantidade $l(l+1)\mathcal{C}_l$ é constante nessa região.

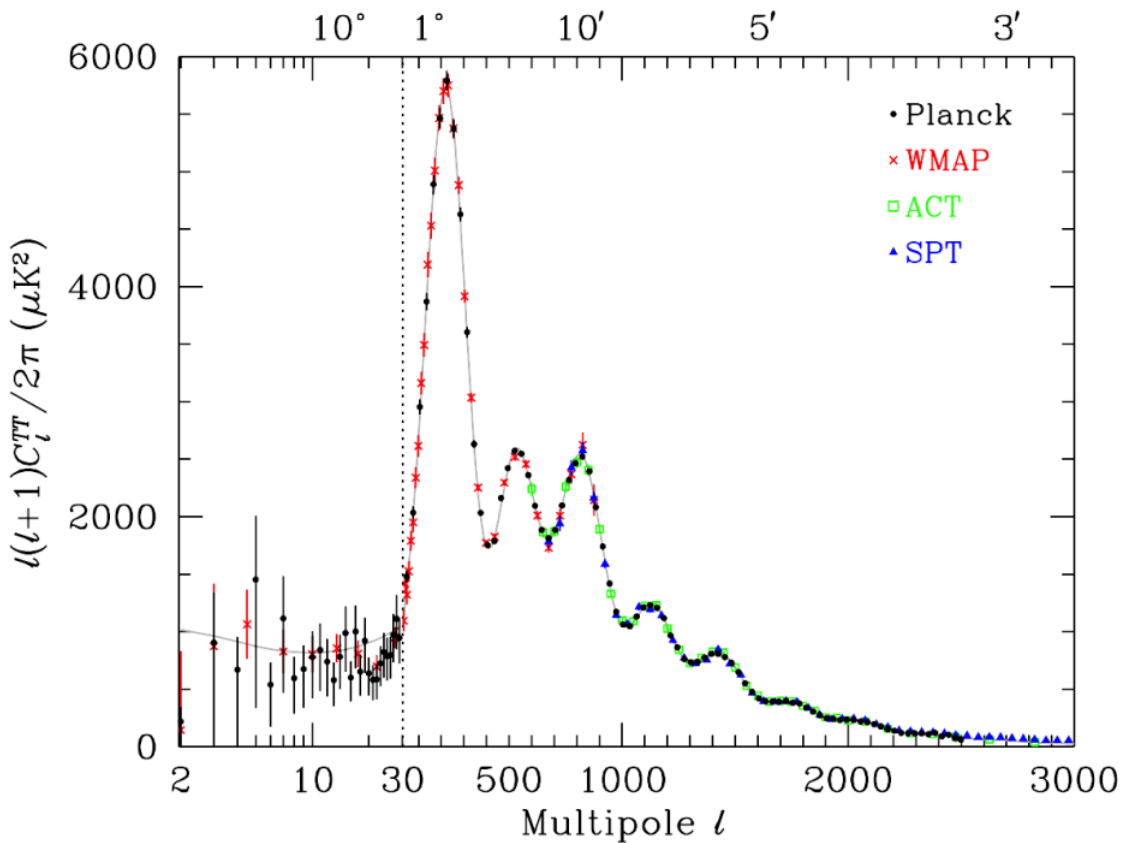


Figura 5: Espectro de potências das flutuações de temperatura da Radiação Cósmica de Fundo. Os pontos experimentais foram obtidos pelos experimentos Planck [2], Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) [25], Atacama Cosmology Telescope (ACT) [26] e South Pole Telescope (SPT) [27]. A curva corresponde ao ajuste dos dados, obtido por [2], a partir do modelo teórico Λ CDM.

Na figura 5, extraída de [28], podemos observar as medições do espectro de potências de temperatura da RCF, medido pelos experimentos Planck [2], Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) [25], Atacama Cosmology Telescope (ACT) [26] e South Pole Telescope (SPT) [27], sendo notável a consistência entre estas medições.

Fisicamente, as variações de temperatura em multipolos $l \geq 2$ correspondem principalmente a manifestações das flutuações de densidade no universo primordial [28]. Deste modo, as medições do espectro de potências podem ser comparadas com previsões de modelos cosmológicos e utilizadas para restringir parâmetros destes modelos. Na figura 5, é possível observar uma impressionante concordância entre os dados experimentais e a curva, obtida por [2], que corresponde ao ajuste dos dados feitos a partir do modelo cosmológico padrão (Λ CDM) [21, 24, 28].

Dado que o modelo cosmológico padrão assume a existência de ME, esta concordância entre a curva teórica e os dados medidos para o espectro de potências é uma importante evidência da existência de ME. Ainda, o ajuste da curva do modelo aos dados fornece uma medida precisa da abundância de ME: $\Omega_c h_0^2 = 0.1200 \pm 0.0012$ [2], indicando que a ME é presente no universo de maneira abundante.

1.1.6 Nucleossíntese Primordial

Quando a temperatura do plasma cósmico era 1 MeV, o universo era constituído de partículas relativísticas (fótons, elétrons e pósitrons, mantidos em equilíbrio devido à interações eletromagnéticas do tipo ($e^+e^- \leftrightarrow \gamma\gamma$)), neutrinos (que desacoplam em temperatura em torno de 1 MeV) e bárions não relativísticos (em abundância muito menor que as espécies relativísticas). Nesta seção, discutiremos a nucleossíntese primordial, que é o processo através do qual os prótons e nêutrons se uniram, formando núcleos atômicos leves. Essa discussão se baseia nas referências [21, 24].

Para estimar a abundância dos nêutrons que estarão disponíveis para a nucleossíntese, é necessário estimar quando este processo ocorreu. Para isso, precisamos do conceito de energia de ligação. A energia de ligação B é a diferença entre a massa de um núcleo atômico m e a soma das massas que os Z prótons e $(A - Z)$ nêutrons que o constituem têm quando estão na forma livre (onde A e Z são os usuais número massa e número atômico, respectivamente), ou seja,

$$B \equiv Zm_p + (A - Z)m_n - m. \quad (1.28)$$

Enquanto a temperatura do universo é da ordem da energia de ligação de um núcleo, ele não é produzido de maneira significativa, pois, toda vez em que um núcleo é produzido, logo é destruído por um dos abundantes fótons de alta energia. Podemos fazer esta análise de modo mais formal para a produção de deutério, que é um isótopo de hidrogênio formado por um nêutron e um próton através da reação (onde γ representa um fóton)

$$n + p \leftrightarrow D + \gamma. \quad (1.29)$$

Quando esta reação ocorre em uma taxa que seja grande comparada à expansão do universo, o processo entra em equilíbrio químico, implicando

$$\mu_n + \mu_p = \mu_D + \mu_\gamma = \mu_D, \quad (1.30)$$

dado que $\mu_\gamma = 0$. Ainda, como discutido em [21, 24], o equilíbrio químico também nos permite escrever (dado que $n_\gamma = n_{\gamma,eq}$)

$$\frac{n_D}{n_n n_p} = \left(\frac{n_D}{n_n n_p} \right)_{eq} = \frac{3}{4} \left(\frac{m_D}{m_n m_p} \frac{2\pi}{T} \right)^{3/2} e^{-(m_D - m_n - m_p)/T}, \quad (1.31)$$

onde, dado que o Deutério tem spin 1, e prótons e nêutrons têm spin 1/2, tomamos $g_D = 3$ e $g_n = g_p = 2$, e utilizamos a relação

$$n_i^{eq} = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu_i - m_i}{T}\right). \quad (1.32)$$

Na equação 1.31, é razoável tomar $m_D \approx m_n + m_p \approx 2m_p$ no fator dentro da raiz, entretanto, na exponencial essa diferença se torna importante, sendo igual à energia de ligação do Deutério, $B_D \approx 2.22$ MeV [24]. Ainda, sabendo que o número de prótons e de neutrons é proporcional ao número de bárions, pode-se utilizar a definição

$$\eta_b \equiv \frac{n_b}{n_\gamma} = 5.5 \times 10^{-10} \left(\frac{\Omega_b h_0^2}{0.020} \right), \quad (1.33)$$

e substituir n_γ pela conhecida distribuição de espécies relativísticas em equilíbrio com $\mu = 0$ [21], $n_\gamma = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3$. Deste modo, obtemos, finalmente

$$\frac{n_D}{n_b} \propto \eta_b \left(\frac{T}{m_p} \right)^{3/2} e^{B_D/T}, \quad (1.34)$$

onde o fator $\eta_b \approx 10^{-9}$ domina até que a B_D/T se torne muito grande. Assim, a grande discrepância entre a quantidade de fótons e bárions inibe a formação de núcleos de deutério até que a temperatura seja muito menor que sua energia de ligação (2.22 MeV).

Um modo simples de estimar quando a nucleossíntese primordial ocorre é supor que ela acontece imediatamente quando a temperatura é baixa o suficiente para compensar a inibição de η_b . Ou seja, tomando o deutério como guia, inicia-se na temperatura T_{nuc} na qual n_D/n_b é da ordem da unidade, assim

$$\begin{aligned} \eta_b \left(\frac{T_{nuc}}{m_p} \right)^{3/2} e^{B_D/T_{nuc}} &\sim 1 \\ \implies \ln(\eta_b) + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{T_{nuc}}{m_p}\right) &\sim -\frac{B_D}{T_{nuc}}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

o que fornece $T_{nuc} \sim 0.07$ MeV. Agora, o próximo passo é estudar qual a abundância de nêutrons presentes no universo nesta temperatura. Pode-se começar estudando seu estado de equilíbrio com o plasma primordial em altas temperaturas.

Os nêutrons podem entrar em equilíbrio com os prótons, via interação fraca, através de reações em que são convertidos um no outro:

$$p + \bar{\nu} \leftrightarrow n + e^+ \quad ; \quad p + e^- \leftrightarrow n + \nu \quad ; \quad n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}. \quad (1.36)$$

Através da expressão (1.32), podemos calcular a razão entre a abundância de neutrões e prótons enquanto o equilíbrio se mantém

$$\left(\frac{n_p}{n_n}\right)_{eq} = \left(\frac{m_p}{m_n}\right)^{3/2} e^{(m_n - m_p)/T} \approx e^{Q/T}, \quad (1.37)$$

onde, na última igualdade, tomamos $(m_p/m_n)^{3/2} \approx 1$ e definimos $Q \equiv m_n - m_p = 1.293$ MeV. Deste modo, a equação (1.37) indica que, para altas temperaturas, nêutrons são tão abundantes quanto prótons, mas, à medida em que a temperatura diminui, a fração de neutrões decresce, caindo muito rapidamente quando temperatura fica menor que 1 MeV.

Se a interação entre neutrões e prótons fosse eficiente o suficiente para manter esse equilíbrio indefinidamente, todos os nêutrons desapareceriam. Entretanto, com a diminuição da quantidade de neutrões, a taxa de interação entre prótons e nêutrons também diminui, até o ponto em que não é suficiente para a manutenção do equilíbrio e os nêutrons passam por um processo de *freeze-out* (veja seção 3.7). A equação de Boltzmann para este processo foi resolvida em Wagoner (1973) [29], resultando no desacoplamento dos nêutrons aproximadamente em $T = 1$ MeV, como pode ser visto na figura 6, onde parametriza-se a abundância dos nêutrons como $X_n \equiv n_n/(n_n + n_p)$, onde n_n e n_p , são, respectivamente, as densidades numéricas dos nêutrons e dos prótons.

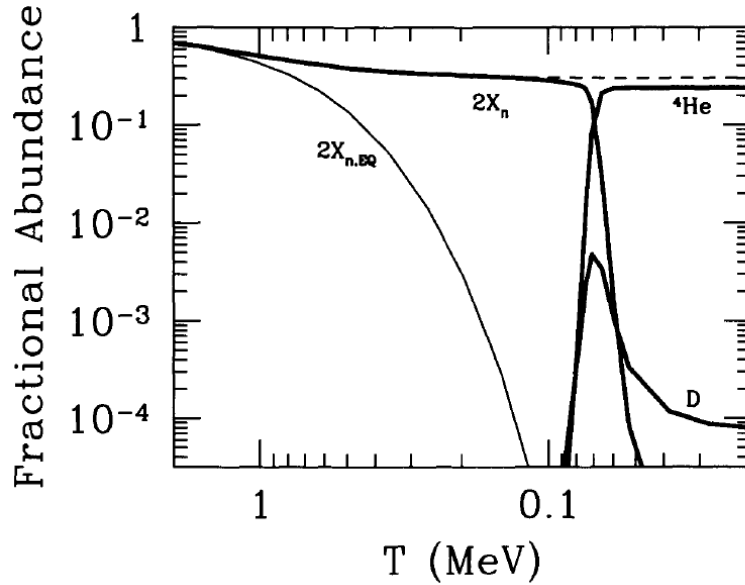


Figura 6: Abundância dos elementos leves e dos nêutrons em função da temperatura. A linha pontilhada mostra o resultado da aproximação analítica para $2X_n$, feita em [24]. A linha fina e sólida mostra duas vezes a abundância de equilíbrio dos nêutrons. As linhas sólidas e grossas mostram os resultados obtidos em [29]. Figura extraída da referência [24].

Como mostrado em [24], a partir da resolução analítica (aproximada) da equação de Boltzmann que descreve o *freeze-out* dos nêutrons e levando-se em conta o fato de que, quando livres, os nêutrons são partículas instáveis, podemos finalmente estimar que a abundância de nêutrons no momento da nucleossíntese primordial (em $T \approx 0.07$ MeV) é

$$X_n(T_{nuc}) = 0.11. \quad (1.38)$$

Como a energia de ligação do hélio é maior que a do deutério, o fator $e^{B/T}$ favorece a formação de ${}^4\text{He}$ sobre o deutério. Deste modo, praticamente todo deutério é processado em ${}^4\text{He}$ quase instantaneamente após sua formação. Como cada núcleo de ${}^4\text{He}$ tem dois nêutrons, a abundância final de ${}^4\text{He}$ é aproximadamente igual à metade da abundância dos nêutrons em T_{nuc} . Usualmente, isso é expressado em função de X_4 , definido como

$$X_4 \equiv 4 \frac{n({}^4\text{He})}{n_b} = 2X_n(T_{nuc}) = 0.22. \quad (1.39)$$

Essa estimativa simplificada é próxima do valor medido para a abundância de ${}^4\text{He}$, como mostrado na figura 7. Esta figura foi obtida em [30] e indica, a partir da observação de regiões extragaláticas de hidrogênio ionizado, uma abundância primordial de hélio $X_4 = Y[O/H = 0] = 0.238$. Esta concordância é um dos pilares da cosmologia observacional.

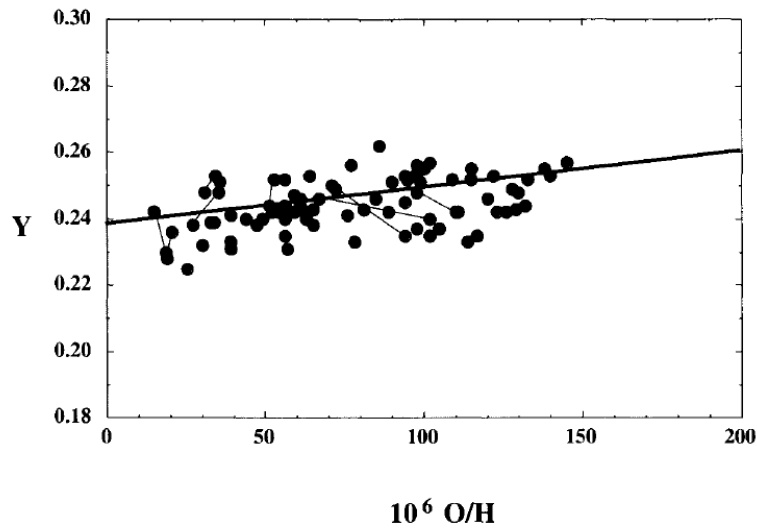


Figura 7: Abundância do Hélio (Y) como função da razão oxigênio/hidrogênio, observada em regiões extragalácticas de hidrogênio ionizado. Sistemas com pouco oxigênio são menos processados, e portanto têm a abundância de hélio mais próxima da primordial. A linha de extrapolação que recupera a abundância primordial $X_4 = 0.238$ foi obtida em [30], com dados de [31–34]. As linhas curtas conectam a mesma região observada por grupos diferentes. Figura extraída de Dodelson [24].

Como mostrado na figura 6, nem todo deutério foi processado em hélio. Isso ocorreu porque a reação que elimina o deutério ($D + p \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$) não é completamente eficiente. Com a baixa densidade de bárions, esse processo é ainda menos eficiente, de modo que, quanto menor a densidade de bárions, maior a quantidade de deutério remanescente. Essa dependência é muito forte, de modo a abundância primordial do deutério restringe de maneira particularmente eficaz a densidade dos bárions, como é perceptível na figura 8. Ainda, o deutério tem uma importância particular porque é possível medir sua abundância em objetos com redshifts da ordem de 3 a 4, que são antigos o suficiente para que a abundância medida seja muito próxima da primordial.

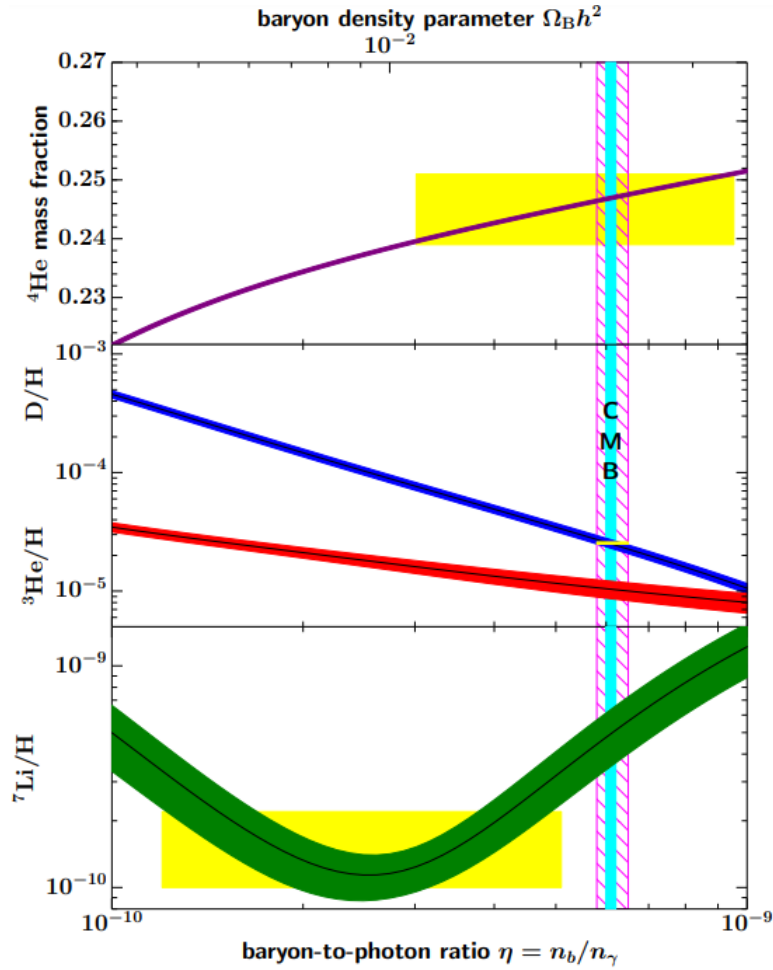


Figura 8: Medições e previsões das abundâncias primordiais de elementos leves. As curvas representam as previsões obtidas por [35], com intervalo de confiança de 95%. As caixas representam as observações. A faixa vertical mais larga indica o intervalo de concordância entre as abundâncias de ${}^4\text{He}$ e D. A faixa vertical mais fina indica a medida de $\Omega_b h_0^2$, obtida por [2], a partir da Radiação Cósmica de Fundo (*Cosmic Microwave Background*) - veja seção 1.1.5. Figura extraída de [28]. As observações da abundância de ${}^3\text{He}$ não foram apresentadas nessa figura porque foram consideradas inapropriadas para sondar Ω_b .

Ainda, as medições de D e ${}^4\text{He}$ apresentadas na figura 8 restringem a contribuição dos bárions para densidade crítica a $\Omega_b = (0.02244 \pm 0.00069)h_0^{-2}$, o que corresponde a cerca de 5%. Entretanto, estimativas da contribuição da matéria para a densidade crítica, Ω_m , feitas, por exemplo, através da relação entre distância e redshift para supernovas, indicam um valor de cerca de 30% (como mostrado na figura 9).

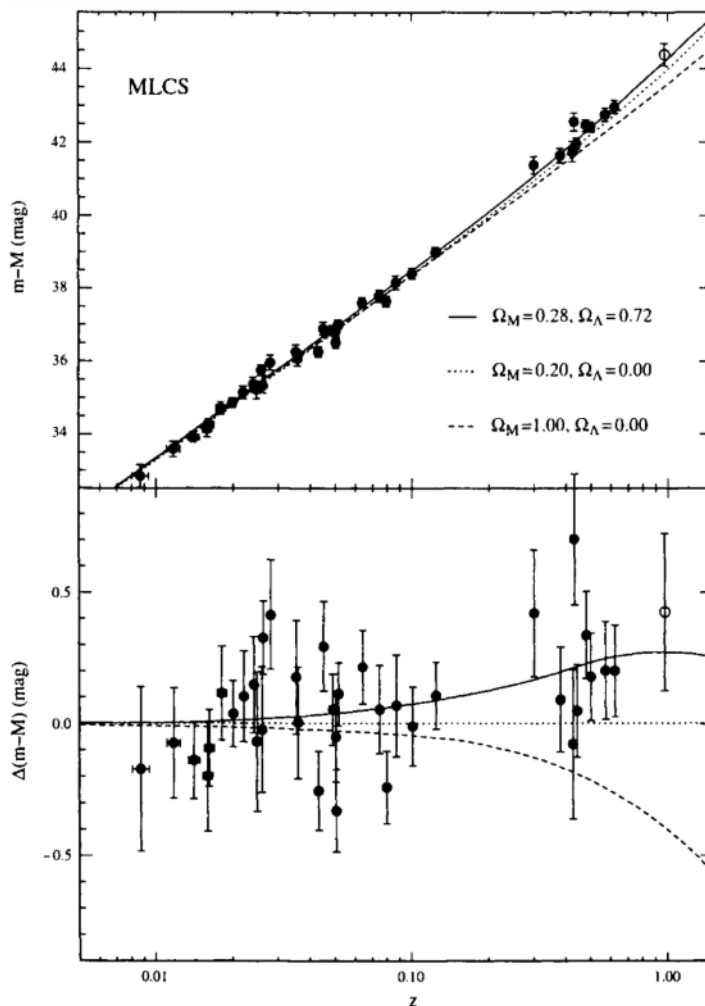


Figura 9: Diagrama de Hubble para supernovas distantes do tipo Ia - magnitude aparente (indicador de distância) em função do redshift. As linhas mostram as previsões para universos com diferentes contribuições de matéria e constante cosmológica para a densidade crítica. A parte inferior é o gráfico de resíduos, que mostra uma tendência dos dados na direção da curva que representa um universo dominado por constante cosmológica. Figura extraída da referência [24].

Assim, a nucleossíntese primordial, além de ser um dos triunfos do modelo do Big Bang e um dos pilares da cosmologia observacional, também é uma robusta indicação de que a matéria escura é não bariônica.

1.2 Modelos propostos

Candidatos de naturezas muito diversas foram propostos na tentativa de desvendar o que é a ME. Os modelos variam de partículas ultra-leves, com massas da ordem de 10^{-22} eV, até objetos com massas astronômicas, como os chamados buracos negros primordiais [1, 5, 36]. A organização desta seção é baseada na referência [5].

Candidatos de ME fermiônicos são consistentes com as estruturas de halo observadas em torno de galáxias apenas quando suas massas são de ordem keV ou superior [5]. Deste modo, existem apenas de candidatos bosônicos com massas inferiores a keV, chamados de ME ultra-

leve. O limite inferior para as massas desses modelos é 10^{-22} eV, sendo indicado pela dinâmica das estrelas observadas em galáxias anãs, dado que a presença de ME ultra leve pode afetá-la. Este tipo de candidato se comporta coletivamente como um campo clássico, ao mesmo tempo em que sua densidade de energia evolui como o esperado cosmologicamente para matéria fria [37]. Estão inclusos nesta classe de candidatos os axions - que foram inicialmente propostos motivados pelo problema de CP forte - e as *axion-like particles*.

No outro extremo do intervalo de massas permitidas para candidatos de ME, temos os buracos negros primordiais, as *WIMPzillas* e os objetos compostos. Os buracos negros primordiais são aqueles gerados a partir do colapso picos de densidade existentes antes da igualdade entre matéria e radiação, sendo, portanto, não bariônicos [38]. As chamadas *WIMPzillas* são candidatos elementares de ME com massas da ordem entre centenas de TeV e M_{Pl} (onde $M_{Pl} = 1.221 \times 10^{19}$ GeV é uma constante, conhecida como massa de Planck [24]). Tais candidatos não podem ter sido produzidos através de *freeze-out*, dado que sua grande massa implicaria uma produção maior do que a abundância observada [39]. Porém, essas partículas podem ser produzidas através de outros mecanismos, como a produção gravitacional de partículas [40], ou via *freeze-in* (veja seção 3.7), através da aniquilação de bósons de Higgs no plasma primordial, no contexto de um setor escuro com portal de Higgs [41]. Ainda, há candidatos com massas maiores que M_{Pl} , se tratando de estados compostos (não fundamentais) [1], como estados solitônicos (que aparecem em modelos supersimétricos), chamados de *Q-balls*, e configurações macroscópicas de quarks, como pedrinhas de escalas de centímetros, chamadas de *Nuggets*.

Na escala intermediária de massas, entre keV e ~ 100 TeV, estão localizados os candidatos de ME que recebem mais atenção da comunidade. O motivo deste interesse é que, neste intervalo de massas, existem modelos capazes de reproduzir a abundância observada de ME através do mecanismo de *freeze-out* (veja seção 3.7). Este mecanismo é bem estabelecido na literatura, sendo compartilhado com as partículas do MP⁷ - dado que todas elas estavam em equilíbrio termodinâmico no universo primordial - e tendo importantíssimos sucessos preditivos, como a nucleossíntese primordial e a radiação cósmica de fundo [21,24]. Além disso, uma vez que a ME entra em equilíbrio térmico com o MP, têm-se a vantagem de que sua abundância e sua função de distribuição se tornam independentes de quaisquer condições cosmológicas iniciais - como, por exemplo, alguma abundância inicial gerada na época do reaquecimento, cuja física ainda não é bem entendida. Além disso, modelos nos quais a ME já esteve em contato térmico com o MP sempre incluem algum tipo de interação entre estes dois setores, facilitando a obtenção previsões de assinaturas experimentais da presença de tais candidatos.

Dentro deste intervalo de massas, entretanto, também há candidatos de ME produzidos não-termicamente, como os chamados neutrinos estéreis. Os neutrinos estéreis seriam parecidos com aqueles do MP, mas sem interagir eletrofracamente como eles. A produção de neutrinos estéreis pode ocorrer através da oscilação de neutrinos do MP, com os quais teriam uma pequena

⁷Entretando, o processo que gerou a assimetria entre matéria e anti-matéria entre as partículas do modelo padrão também é fundamental para definir as abundâncias das espécies visíveis.

mistura [1].

Voltando aos candidatos que entram em equilíbrio com o MP, no intervalo de massas entre poucos GeV e ~ 100 TeV, temos o candidato mais emblemático de ME: as *Weakly Interacting Massive Particles* (WIMPs). Em acordo com a nomenclatura, as WIMPs são partículas carregadas sob a interação fraca do MP. Como discutido extensamente na literatura (veja, por exemplo, [5,21,23,24]) este modelo reproduz a abundância de ME observada quando a ME tem massas da ordem da escala eletrofraca, o que é conhecido como “*WIMP Miracle*”. Este fato tem grande impacto nos estudos sobre ME, dado que modelos teóricos com motivações independentes da questão da ME prevêem nova física na escala eletrofraca, sendo exemplos destes modelos a supersimetria e modelos de Higgs composto, propostos como solução do chamado problema da hierarquia [42]. Além disso, é notável o fato de que as WIMPs seja uma extensão tão mínima do MP, adicionando uma única nova partícula, a qual interage através de uma força já conhecida.

Contudo, a ausência de evidências para WIMPs [4], a despeito de todo o esforço observacional já feito em busca destas partículas, tem estimulado a comunidade a propor novos candidatos de ME. Entre eles, os candidatos de massas da ordem de MeV têm recebido bastante atenção, dada sua rica fenomenologia. Tais candidatos podem ser testados através de medidas cosmológicas, como a análise de dados da radiação cósmica de fundo, e de experimentos terrestres, como colisores e^+e^- e os *beam-dump experiments* [43–47].

Porém, quando supõe-se que um candidato neste intervalo de massas interage através da força fraca do MP, a abundância observada não é reproduzida. Para ilustrar isso, podemos usar a equação

$$\langle\sigma v\rangle\approx 0.1\frac{\alpha_\chi\alpha_l}{\alpha_w^2}\frac{m_\chi^2}{m_V^4}\xrightarrow{\text{caso WIMP}}\frac{m_\chi^2}{\text{GeV}^2}\langle\sigma v\rangle_{\min},\quad (1.40)$$

que é uma estimativa da seção de choque mediada na temperatura de um processo $\chi\chi\rightarrow ll$, apresentada na referência [5]. Os símbolos χ e l representam, respectivamente, a ME e uma partícula leve do MP, suposta em equilíbrio, e esta aniquilação é mediada por um bóson vetorial, V , que satisfaz $m_V > m_\chi$. A seção de choque mediada na temperatura $\langle\sigma v\rangle_{\min} = 10^{-9}\text{GeV}^{-2}$ é uma estimativa do valor mínimo necessário para evitar que a abundância de ME produzida via *freeze-out* seja maior do que aquela observada experimentalmente. A seta “caso WIMP” indica as substituições $m_V\rightarrow 100\text{ GeV}$ e $\alpha_f\alpha_\chi\rightarrow 10^{-3}$, dado que 100 GeV é a escala de massas dos mediadores da força fraca, enquanto 10^{-3} aproxima o valor de $\alpha_w^2\equiv g_w^4/(4\pi)^2$, onde g_w representa o acoplamento típico da interação fraca e $\alpha_l\equiv g_l^2/(4\pi)$ e $\alpha_\chi\equiv g_\chi^2/(4\pi)$, onde g_l e g_χ representam, respectivamente, o acoplamento entre V e l , e o acoplamento entre V e χ .

A partir da equação (1.40), podemos retomar o fato de que WIMPs com massa da ordem de GeV, ou algumas ordens de grandeza acima, reproduzem a abundância observada, dado que fornecem $\langle\sigma v\rangle\gtrsim\langle\sigma v\rangle_{\min}$. Enquanto isso, mantendo-se os acoplamentos e mediadores típicos das interações fracas, vemos que um candidato de massa menor que alguns GeV corresponde a $\langle\sigma v\rangle<\langle\sigma v\rangle_{\min}$, prevendo, portanto, um excesso de ME. Este resultado é conhecido como

limite de Lee-Weinberg [48].

Por outro lado, a primeira igualdade da equação (1.40) nos mostra que $\langle\sigma v\rangle$ aumenta quando m_V diminui. Assim, temos uma indicação de que candidatos de ME com massa da ordem de MeV podem reproduzir a abundância observada, através do vantajoso mecanismo de *freeze-out*, quando suas interações com o MP são mediadas por partículas mais leves do que os mediadores da interação fraca. Isto implica que considerar ME com massas da ordem de MeV se torna um motivação direta para a hipótese de novos mediadores, dado que os mediadores leves do MP são aqueles responsáveis pelas interações forte e eletromagnética, sob as quais a ME é neutra.

Por sua vez, a indicação de que de, além de um candidato ME, pode haver um novo mediador “invisível” introduz a ideia Setores Escuros (SEs) [3, 8]. Como dito anteriormente, um SE consiste em um conjunto de algumas ou muitas partículas, que não são carregadas sob as interações forte, fraca ou eletromagnética do MP, mas que interagem gravitacionalmente com a matéria visível. Além disso, SEs podem ter interações entre seus constituintes, as quais são pensadas com estruturas similares àsquelas do MP, o que é a hipótese mais simples.

Em geral, além da interação gravitacional, modelos de SE possuem um mediador que interage com o MP através das “interações portais”. O tipo de portal depende do spin e da paridade dos mediadores, que podem ser escalares (tipo Higgs), pseudo-escalares (tipo axion), vetores (como o DP) ou neutrinos. Os operadores portais devem ser singletos sob os grupos de gauge do MP, $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, e sob quaisquer novas simetrias adicionadas pelo SE, o que restringe muito a forma como os portais podem ser escritos, como será discutido na seção 2 e no apêndice A, no caso do portal vetorial. Os termos lagrangianos correspondentes aos diferentes tipos de portais são [3]

$$\mathcal{L}_{portal} = \begin{cases} (\mu\phi + \lambda\phi^2) H^\dagger H, & \text{portal tipo Higgs,} \\ y_n L H N, & \text{portal tipo neutrino,} \\ \frac{a}{f_a} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, & \text{portal tipo axion,} \\ \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{\cos\theta} Z_{D\mu\nu} B^{\mu\nu}, & \text{portal tipo vetorial,} \end{cases} \quad (1.41)$$

onde, em acordo com as definições usuais do MP, H representa o dubleto de Higgs, L representa os dubletos de léptons, $F^{\mu\nu}$ e $\tilde{F}^{\mu\nu}$ representam, respectivamente, o *field strength* do fóton e seu *field strength* dual, $B^{\mu\nu}$ representa o *field strength* do bóson B e θ denota o ângulo de Weinberg. Os novos mediadores, correspondentes a cada tipo de portal, são o escalar ϕ , o axion a , os neutrinos de mão direita N e o bóson vetorial Z_D (o DP). Por fim, μ , λ , y_n e ϵ são acoplamentos das interações, enquanto f_a é uma escala de massa que suprime a interação portal do axion, a qual corresponde a um operador não renormalizável (de dimensão 5).

Outra importante motivação para o estudo de SEs, é que eles apresentam novos estados claramente identificados e podem ser reduzidos em poucos parâmetros, facilitando previsões de assinaturas experimentais [9]. Além disso, eles adicionam à possibilidade de detecção de ME a possibilidade de detecção dos mediadores escuros, ou outras partículas do SE, que têm suas

próprias fenomenologias (veja, por exemplo discussões sobre a fenomenologia de DPs em [9]).

Entre os modelos de SE, o modelo de DP, que se trata de um mediador vetorial, no caso em que o candidato de ME é um férmion de Dirac, é um modelo de referência, sendo amplamente discutido na literatura de SEs. Este é o modelo que foi estudado neste projeto, o qual será discutido na seção 2.

2 O modelo de *Dark Photon*

O modelo de *Dark Photon* [3, 9, 12] consiste na extensão do grupo de simetria do modelo padrão, $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, pela adição de um grupo de gauge abeliano, chamado, neste texto, $U(1)_D$. O bóson de gauge associado a esta força escura é chamado dark photon (DP) e supõe-se que nenhuma das partículas do MP é carregada sob $U(1)_D$.

Um modo simples de escrever a interação portal entre o DP e as partículas do MP é através de um termo de mistura cinética com o grupo de gauge abeliano⁸ (veja o apêndice A) do MP, $U(1)_Y$, na fase em que as simetrias do MP estão preservadas. O termos cinéticos relevantes para este modelo são [12]

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4}\hat{B}_{\mu\nu}\hat{B}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\hat{Z}_{D\mu\nu}\hat{Z}_D^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{\cos\theta}\hat{Z}_{D\mu\nu}\hat{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{D0}^2\hat{Z}_D^\mu\hat{Z}_{D\mu}, \quad (2.1)$$

onde \hat{B} e \hat{Z}_D são os bósons de gauge associados, respectivamente, com $U(1)_Y$ e $U(1)_D$. Os acentos circunflexos indicam que estes campos não têm termos cinéticos canônicos. Os *field strengths* são definidos como $\hat{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu\hat{B}_\nu - \partial_\nu\hat{B}_\mu$ e $\hat{Z}_{D\mu\nu} = \partial_\mu\hat{Z}_{D\nu} - \partial_\nu\hat{Z}_{D\mu}$, ϵ é o parâmetro de mistura cinética e θ denota o *weak angle* (ou ângulo de Weinberg)⁹. Como evidenciado pela presença de um termo de massa para \hat{Z}_D , assumimos que a simetria $U(1)_D$ é quebrada. Explorar a física dessa quebra de simetria pode levar a cenários interessantes, como o mecanismo de *Dark Higgs* (veja [12], por exemplo), mas essa discussão está além do escopo deste trabalho. Portanto, assumimos que o escalar responsável pela geração de massa do DP seja desacoplado da escala de energia relevante para os processos estudados neste trabalho.

O DP, por si só, pode ser um candidato de ME [9], mas nós consideramos aqui um candidato que é um férmion de Dirac, denominado χ . Supomos também que a ME é neutra sob todas as interações do MP, mas carregada sob $U(1)_D$. A interação entre o DP e a ME é escrita como um acoplamento típico entre um bóson de gauge e uma corrente de férmions [3],

$$\mathcal{L}_{SE} = \bar{\chi}(i\not{D} - m_\chi)\chi = g_D\hat{Z}_{D\mu}\bar{\chi}\gamma^\mu\chi + \bar{\chi}(i\not{\partial} - m_\chi)\chi, \quad (2.2)$$

de modo que o DP, interagindo com a ME e com a matéria visível, se torna um portal entre estes dois setores.

Este modelo é uma das realizações mais simples de um setor escuro, dependendo apenas de 4 parâmetros: m_χ, m_{Z_D}, g_D e ϵ , o que facilita consideravelmente a obtenção de previsões quantitativas. Além disso, a hipótese de que a ME é o férmion mais leve (neste caso, o único) carregado sob uma simetria de gauge escura é um jeito natural de motivar sua estabilidade, devido à conservação de carga. Isso vale mesmo quando consideramos que esta simetria de

⁸Dado que termos de mistura cinética com grupos não-abelianos não são invariantes sob as simetrias no MP, sendo inconsistentes, como discutido em maior detalhe no apêndice A.

⁹Este ângulo aparece dividindo ϵ porque, após a diagonalização da lagrangiana, isso resulta em acoplamentos entre o DP e as demais partículas do MP que são análogos aos acoplamentos do bóson Z e/ou do fóton. Veja a equação (2.20) como exemplo.

gauge é quebrada espontâneamente, porque as partículas de ME vão sempre aparecem em pares nas interações [49, 50].

Ainda, a estrutura da interação entre o DP e o MP, através de mistura cinética, juntamente com a hipótese que nenhuma das partículas do MP é carregada sob $U(1)_D$ assegura que esse modelo é livre de anomalias quânticas [51].

2.1 Diagonalização da lagrangiana

Como dito anteriormente, os campos \hat{B} e \hat{Z}_D não têm termos cinéticos canônicos. Assim, é conveniente reescrever a lagrangiana (2.1) em termos dos campos e interações físicos, ou seja, de campos que possuam termos cinéticos e de massa que sejam canônicos. Este processo de reescrita da lagrangiana é chamado de diagonalização e é discutido em [12], no contexto do modelo de DP.

O primeiro passo é diagonalizar o termo cinético, que consiste em reescrever os campos \hat{Z}_D e \hat{B} como a combinação linear de novos campos, B e Z_{D0} , que possuam termos cinéticos canônicos, ou seja, achar a, b, c e d que satisfaçam

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}B^2 - \frac{1}{4}Z_{D0}^2 &= -\frac{1}{4}(aB + bZ_{D0})_{\mu\nu}(aB + bZ_{D0})^{\mu\nu} \\ &\quad -\frac{1}{4}(cB + dZ_{D0})_{\mu\nu}(cB + dZ_{D0})^{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{\cos \theta} (cB + dZ_{D0})_{\mu\nu}(aB + bZ_{D0})^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Uma solução para tal sistema de equações consiste em escrever \hat{Z}_D e \hat{B} como

$$\hat{Z}_D = \frac{Z_{D0}}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{\cos^2 \theta}}} \quad (2.4)$$

e

$$\hat{B} = B + \frac{\epsilon}{\cos \theta} \frac{Z_{D0}}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{\cos^2 \theta}}}, \quad (2.5)$$

o que introduz uma mistura de massas entre Z_{D0} e $Z_0 \equiv W^3 \cos \theta - B \sin \theta$ ¹⁰, a partir dos termos

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} m_{D0}^2 \hat{Z}_D^\mu \hat{Z}_{D\mu} + \frac{1}{2} m_{Z0}^2 \hat{Z}^\mu \hat{Z}_\mu, \quad (2.6)$$

onde $\hat{Z} = W^3 \cos \theta - \hat{B} \sin \theta$, como definido no MP, e o fator m_{Z0} corresponde à previsão do MP para a massa de \hat{Z} , ou seja, $m_{Z0}^2 = (g^2 + g_Y^2) v^2/4$ [52].

Essa mistura de massas pode ser representada através da matriz de massas quadradas, defi-

¹⁰ W^3 representa o bóson de gauge associado à corrente neutra de $SU(2)_L$ [52].

nida por meio da equação

$$\mathcal{L}_m = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_{D0} \end{pmatrix} \mathcal{M}^2 \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_{D0} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

podendo, portanto, ser escrita como

$$\mathcal{M}^2 = m_{Z_0}^2 \begin{pmatrix} 1 & -\eta \sin \theta \\ -\eta \sin \theta & \eta^2 \sin^2 \theta + \delta^2 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

onde define-se

$$\begin{cases} \delta^2 = \frac{m_{D0}^2}{m_{Z_0}^2 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\cos^2 \theta}\right)}, \\ \eta = \frac{\epsilon}{\cos \theta \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{\cos^2 \theta}}}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Para diagonalizar tal matriz de massa, aplicamos uma transformação ortogonal do tipo $M_{diagonal}^2 = R^T \mathcal{M}^2 R$, de modo que, para Z e Z_D denotando os campos físicos/diagonais e impondo

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_{D0} \end{pmatrix} \mathcal{M}^2 \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_{D0} \end{pmatrix} = \mathcal{L}_m = \begin{pmatrix} Z & Z_D \end{pmatrix} M_{diagonal}^2 \begin{pmatrix} Z \\ Z_D \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

obtemos

$$\begin{pmatrix} Z \\ Z_D \end{pmatrix} = R^T \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_{D0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_{D0} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

A condição de diagonalização, $M_{diagonal_{12}}^2 = 0 = M_{diagonal_{21}}^2$, fornece

$$\tan \alpha = \frac{1 - \eta^2 \sin^2 \theta - \delta^2 - \text{Sign}(1 - \delta^2) \sqrt{4\eta^2 \sin^2 \theta + (1 - \eta^2 \sin^2 \theta - \delta^2)^2}}{2\eta \sin \theta}, \quad (2.12)$$

onde a convenção de sinal escolhida é tal que $\tan \alpha \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Usando as transformações (2.4), (2.5) e (2.11) juntas e escrevendo o fóton da lagrangiana do modelo padrão como $\hat{A} = W^3 \sin \theta + \hat{B} \cos \theta$, obtemos, finalmente, as relações entre os campos da lagrangiana inicial ($\hat{A}, \hat{Z}, \hat{Z}_D$) e os campos físicos (A, Z, Z_D):

$$\hat{A} = A + \eta \cos \theta (\sin \alpha Z + \cos \alpha Z_D), \quad (2.13)$$

$$\hat{Z} = (\cos \alpha - \eta \sin \theta \sin \alpha) Z + (-\sin \alpha - \eta \sin \theta \cos \alpha) Z_D, \quad (2.14)$$

$$\hat{Z}_D = \frac{(\sin \alpha Z + \cos \alpha Z_D)}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{\cos^2 \theta}}}, \quad (2.15)$$

onde podemos usar as relações trigonométricas para seno e cosseno, $\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$ e $\sin \alpha = \tan \alpha/\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$, para escrever essas quantidades explicitamente em termos dos parâmetros ϵ e m_{D0} sempre que necessário.

Com a redefinição dos campos escrita acima, as massas físicas dos campos Z e Z_D são dadas pelas raízes dos auto-valores da matriz de massas quadradas, os quais são iguais a

$$m_{Z,Z_D}^2 = \frac{m_{Z0}^2}{2} \left(1 + \delta^2 + \eta^2 \sin^2 \theta \pm \text{Sign}(1 - \delta^2) \sqrt{(1 + \delta^2 + \eta^2 \sin^2 \theta)^2 - 4\delta^2} \right), \quad (2.16)$$

cuja convenção de sinal corresponde a $m_{Z_D} \rightarrow m_{D0}$ e $m_Z \rightarrow m_{Z0}$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

2.2 Interações do modelo

Substituindo as expressões (2.13) e (2.14) nos termos de interação da lagrangiana do MP e a expressão (2.15) na lagrangiana do SE (equação (2.2)), podemos obter os termos de interação previstos por este modelo em função dos campos físicos A , Z e Z_D .

A partir desses termos de interação, seguimos o procedimento usual em teoria quântica de campos para obtenção das regras de Feynman correspondentes, o qual pode ser consultado em [52–54].

2.2.1 Interações da Matéria Escura

Os vértices de interação da ME serão aqueles oriundos da equação (2.2), sendo, portanto, uma consequência direta de sua interação inicial com o DP inicial, \hat{Z}_D . Substituindo a equação (2.15), que descreve \hat{Z}_D em termos dos campos físicos Z e Z_D , em (2.2), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SE} &= \bar{\chi} (i\cancel{\partial} - m_\chi) \chi + g_D \hat{Z}_{D\mu} \bar{\chi} \gamma^\mu \chi \\ &= \bar{\chi} (i\cancel{\partial} - m_\chi) \chi + \frac{g_D}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{\cos^2 \theta}}} (\sin \alpha Z_\mu + \cos \alpha Z_{D\mu}) \bar{\chi} \gamma^\mu \chi. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Seguindo as regras usuais de Teoria Quântica de Campos, as regras de Feynman que correspondem a estes termos de interação são os vértices da figura 10.

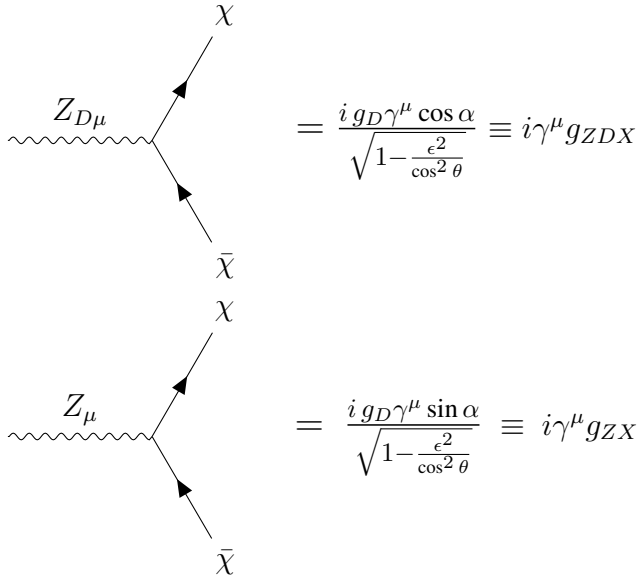


Figura 10: Vértices de interação da Matéria Escura.

2.2.2 Interações entre o bosons neutros e férmions

Dadas as relações escritas em (2.13) e (2.15), todos os termos de interação do MP que envolvem, inicialmente, \hat{A} e \hat{Z} implicarão em novos termos de interação entre o DP e as partículas do MP e também exibirão uma modificação dos acoplamentos entre bóson Z e as demais partículas do MP.

No caso do termo de interação entre \hat{A} , \hat{Z} e os férmions [52],

$$\mathcal{L}_{f,\hat{Z},\hat{A}} = \sum_f \frac{g}{\cos \theta} \left[(t_f^3 \cos^2 \theta - Y_f \sin^2 \theta) \hat{Z}_\mu + (t_f^3 + Y_f) \cos \theta \sin \theta \hat{A}_\mu \right] \bar{f} \gamma^\mu f, \quad (2.18)$$

obtemos os vértices da figura 11. Os fatores t_f^3 e Y_f são números, que correspondem às cargas de um determinado férmion f , relacionadas, respectivamente, ao terceiro gerador de $SU(2)_L$ e à hipercarga. Estes números satisfazem $t_f^3 + Y_f = Q_f$, onde Q_f é a carga elétrica do férmion (em unidades em que a carga do elétron é -1) [52]. Além dos vértices da figura 11, recupera-se, da substituição da equação (2.13) em (2.18), um termo de interação entre o fóton e os férmions que é idêntico ao obtido no MP, como fica óbvio observando-se o primeiro termo de (2.13).

$$\begin{aligned}
& \text{Vértice } Z_{D\mu} \rightarrow f, \bar{f} \\
& = \frac{i g \left[-\sin \alpha (t_f^3 \cos^2 \theta - Y_f \sin^2 \theta) + Y_f \eta \sin \theta \cos \alpha \right] \gamma^\mu}{\cos \theta} \\
& \text{Vértice } Z_\mu \rightarrow f, \bar{f} \\
& = \frac{i g \left[\cos \alpha (t_f^3 \cos^2 \theta - Y_f \sin^2 \theta) + Y_f \eta \sin \theta \sin \alpha \right] \gamma^\mu}{\cos \theta}
\end{aligned}$$

Figura 11: Vértices de interação entre Z_D ou Z e os férmions do modelo padrão.

Lembramos que a soma sobre todos os férmions na equação (2.18) inclui a soma sobre as quiralidades dos férmions, de modo que a regra de Feynman “total” para a interação entre um determinado férmion e , por exemplo, Z_D , é dada por

$$\begin{aligned}
i\gamma^\mu (g_{ZD,L} P_L + g_{ZD,R} P_R) &\equiv \frac{i g \gamma^\mu}{\cos \theta} \\
& \left(P_L \left[-\sin \alpha (t_{f,L}^3 \cos^2 \theta - Y_{f,L} \sin^2 \theta) + Y_{f,L} \eta \sin \theta \cos \alpha \right] \right. \\
& \left. + P_R \left[-\sin \alpha (t_{f,R}^3 \cos^2 \theta - Y_{f,R} \sin^2 \theta) + Y_{f,R} \eta \sin \theta \cos \alpha \right] \right), \tag{2.19}
\end{aligned}$$

onde P_L e P_R são os projetores quirais *left* e *right*, e define-se $g_{ZD,L}$ e $g_{ZD,R}$. Definimos $g_{Z,L}$ e $g_{Z,R}$ de modo plenamente análogo. Os valores destas cargas para todos os férmions do MP são elencados na Tabela 1. Lembramos que $t_{f,R}^3 = 0$ para todos eles.

Tabela 1: Hipercargas e cargas t_3 dos férmions do MP.

Férmion	$Y_{f,L}$	$t_{f,L}^3$	$Y_{f,R}$	Q_f
e^-, μ^-, τ^-	-1/2	-1/2	-1	-1
neutrinos	-1/2	+1/2	-	-
quarks tipo up	1/6	+1/2	+2/3	+2/3
quarks tipo down	1/6	-1/2	-1/3	-1/3

Vale a pena ressaltar que a regra de Feynman entre Z_D e a corrente de férmions do MP, apresentada na figura 11, reproduz o resultado conhecido na literatura para o limite em que $\epsilon \ll 1$ e $m_{D0} \ll m_{Z0}$,

$$\mathcal{L}_{f,ZD} \approx \epsilon e Q_f Z_{D\mu} \bar{f} \gamma^\mu f, \quad (\epsilon \ll 1, m_{D0} \ll m_{Z0}). \tag{2.20}$$

2.2.3 Interações com W^+ e W^-

Por sua vez, os termos de interação entre os bósons de gauge associados à simetria de $SU(2)_L$ do MP, oriundos de seus termos cinéticos, têm a forma [52]

$$\mathcal{L}_{SU(2)Bosons} = -\frac{1}{4}g^2\epsilon^{abc}\epsilon_{aef}W_{\mu b}W_{\nu c}W^{\mu e}W^{\nu f} + \frac{1}{2}g(\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a)\epsilon_{abc}W^{b\mu}W^{c\nu}, \quad (2.21)$$

onde $W^1 = (W^+ + W^-)/\sqrt{2}$, $W^2 = i(W^+ - W^-)/\sqrt{2}$ e $W^3 = \sin\theta\hat{A} + \cos\theta\hat{Z}$. Deste modo, o primeiro termo fornece vértices do tipo apresentado na figura 12. A regra de Feynman para este tipo de vértice não foi calculada porque a contribuição dos processos de aniquilação de ME e de DP que o incluem são suprimidos além da precisão escolhida para este trabalho. No caso das aniquilações de ME, isso ocorre porque tais processos têm 3 ou mais partículas no estado final ¹¹. No caso do DP, os processos de aniquilação com este tipo de vértice são muito suprimidos quando $m_{Z_D} \ll m_W$, o que é válido na escala de massas em que a aniquilação do DP é importante para o nosso estudo, como é discutido no capítulo 6.

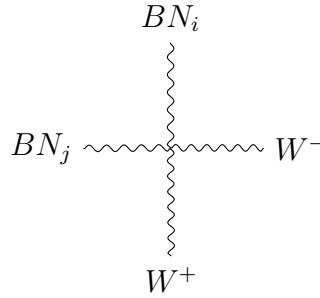


Figura 12: Vértice de bósons neutros, W^+ e W^- . $BN_{i,j}$ representam qualquer combinação entre os bósons neutros dessa teoria: Z , A ou Z_D .

Enquanto isso, a partir do segundo termo de (2.21) obtemos os vértices apresentados na figura 13.

¹¹A adição de uma partícula no estado final de uma aniquilação suprime a seção de choque correspondente por um fator proporcional a $1/(2\pi)^3 \approx 1/248$, oriundo da expressão do espaço de fase [54].

$$\begin{aligned}
 & Z_{D\nu} \xrightarrow{p^{Z_D}} \begin{array}{l} W_\mu^+ \\ p^+ \\ p^- \\ W_\beta^- \end{array} = -i g \cos \theta \sin \alpha \left[g_{\mu\beta} (p_\nu^- - p_\nu^+) + g_{\nu\mu} (p_\beta^{Z_D} + p_\beta^+) - g_{\nu\beta} (p_\mu^- + p_\mu^{Z_D}) \right] \\
 & Z_\nu \xrightarrow{p^Z} \begin{array}{l} W_\mu^+ \\ p^+ \\ p^- \\ W_\beta^- \end{array} = +i g \cos \theta \cos \alpha \left[g_{\mu\beta} (p_\nu^- - p_\nu^+) + g_{\nu\mu} (p_\beta^Z + p_\beta^+) - g_{\nu\beta} (p_\mu^- + p_\mu^Z) \right]
 \end{aligned}$$

Figura 13: Vértices de interação entre de W^+ e W^- e Z_D ou Z .

2.2.4 Interações com o bóson de Higgs

Por fim, as últimas interações que são inseridas ou alteradas, em relação às interações do MP, são aquelas oriundas dos termos de interação entre \hat{Z} e o bóson de Higgs [52],

$$\mathcal{L}_{\hat{Z},h} = \frac{m_{Z_0}^2}{2} \hat{Z}_\mu \hat{Z}^\mu \left[\frac{2h}{\sqrt{2}v} + \left(\frac{h}{\sqrt{2}v} \right)^2 \right]. \quad (2.22)$$

O segundo termo de (2.22) corresponde ao tipo de vértice representado na figura 14. A regra de Feynman para este tipo de vértice não foi calculada pelo mesmo motivo que não calculamos aquela correspondente aos vértices representados na figura 12 (veja seção 2.2.3).

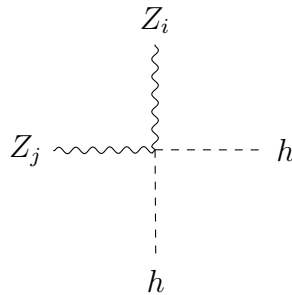


Figura 14: Vértice de interação entre Z e/ou Z_D e hh . $Z_{i,j}$ representam a possibilidade de ser Z ou Z_D .

Ainda, o primeiro termo de (2.22), quando expresso em termos de Z e Z_D , fornece os vértices da figura 15.

$$\begin{aligned}
 &= i \frac{m_{Z_0}^2 (-\sin \alpha - \eta \sin \theta \cos \alpha)^2}{v\sqrt{2}} \\
 &= i \frac{2m_{Z_0}^2 (\cos \alpha - \eta \sin \theta \sin \alpha)(-\sin \alpha - \eta \sin \theta \cos \alpha)}{v\sqrt{2}} \\
 &= i \frac{m_{Z_0}^2 (\cos \alpha - \eta \sin \theta \sin \alpha)^2}{v\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

Figura 15: Vértices de interação entre de h e Z_D e/ou Z .

Estes são todos os vértices adicionados ou modificados em relação aos vértices do MP por conta de introdução de $U(1)_D$.

3 Equação de Boltzmann

A abundância de ME no universo é uma de suas propriedades mais bem estabelecidas, sendo, atualmente, obtida com precisão através dos dados da Radiação Cósmica de Fundo medidos pelo satélite Planck [2]. Deste modo, a reprodução desta abundância observada é um requisito que deve ser atendido por qualquer modelo de ME proposto.

Como mencionado nos capítulos anteriores, o modelo de SE estudado neste projeto permite o mapeamento de combinações dos parâmetros ϵ , g_D , m_{Z_D} e m_χ em abundâncias finais de ME. Este mapeamento é feito através da equação de Boltzmann, que é basicamente onipresente na discussões sobre a abundância das partículas presentes no universo (veja [23,24], por exemplo).

Nesta seção, discutiremos a derivação da contribuição de processos do tipo $1\ 2 \leftrightarrow 3\ 4$ e $1 \leftrightarrow 2\ 3$, quando a abundância que estamos resolvendo é a da partícula 1, e de processos $1 \leftrightarrow 2\ 3$, quando a abundância que estamos resolvendo é a da partícula 2, para as equações de Boltzmann correspondentes. Nos baseamos em [55], mas também fazemos generalizações a partir do que foi apresentado nesta referência, como será apontado ao longo do texto.

3.1 Processos $1\ 2 \leftrightarrow 3\ 4$

Considerando um grupo de partículas de um determinado tipo, confinado em um volume físico, nosso ponto de partida para a derivação da equação de Boltzmann será o seguinte enunciado: a taxa com que a quantidade de partículas deste tipo muda é igual à taxa com que essas partículas são produzidas menos a taxa com que são aniquiladas. Matematicamente, escrevemos para a partícula 1, cuja abundância é regulada por um processo do tipo $1\ 2 \leftrightarrow 3\ 4$,

$$\dot{N}_1 = N_{34} \dot{P}_{34 \rightarrow 12} - N_{12} \dot{P}_{12 \rightarrow 34}, \quad (3.1)$$

onde \dot{N}_1 é a taxa de variação do número de partículas do tipo 1 no tempo, dentro de um volume físico arbitrário V , N_{ij} é o número de combinações possíveis das partículas de tipo i e j em pares, no mesmo volume V , e $\dot{P}_{ij \rightarrow mn}$ é a probabilidade por unidade de tempo de o processo $i\ j \rightarrow m\ n$ ocorrer.

Entretanto, quando levamos em conta a expansão do universo, além do efeito de produção e aniquilação das partículas, temos também a diluição de suas densidades numéricas devido ao aumento das distâncias físicas. Podemos explicitar este efeito na equação de Boltzmann, reescrevendo N_1 em termos de sua a densidade numérica,

$$n_1 = \frac{N_1}{V} = \frac{N_1}{V_c a^3(t)}, \quad (3.2)$$

sendo $a(t)$ o fator de escala, que parametriza a expansão do universo, e V_c o volume comóvel, que permanece constante à medida em que o universo se expande, se relacionando com o volume físico V através da relação $V_c = V a^{-3}(t)$ [21]. Assim, \dot{N}_1 pode ser escrita como

$$\dot{N}_1 = \frac{d}{dt}[n_1 V_c a^3(t)] = V_c a^3(t) \left[\dot{n}_1 + n_1 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right] = V [\dot{n}_1 + 3H n_1], \quad (3.3)$$

onde fizemos a substituição do parâmetro de Hubble $H \equiv \dot{a}(t)/a(t)$.

Sabemos que o número de partículas de tipo i dentro de um volume V é dado por [21]

$$N_i = V \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3 p_i f_i(E_i, t), \quad (3.4)$$

onde a independência da função de distribuição $f_i(E_i, t)$ - abreviada como f_i daqui para frente - em relação à posição da partícula e à direção de seu momento reflete as condições de homogeneidade e isotropia do universo e g_i é o número de graus de liberdade internos da partícula i . Assim, podemos escrever o número de possíveis combinações de partículas do tipo i em pares com partículas do tipo j como [21]

$$N_{ij} = N_i N_j = V^2 \int d^3 p_i d^3 p_j \frac{g_i f_i}{(2\pi)^3} \frac{g_j f_j}{(2\pi)^3}. \quad (3.5)$$

Ainda, fixando-se os momentos e spins do estado inicial $|i j\rangle$, a probabilidade de o processo $i j \rightarrow m n$ ocorrer por unidade de tempo pode ser escrito como¹² [53]

$$\dot{P}_{ij \rightarrow mn} = \sum_{\text{spins}_{m,n}} \int d^3 p_m d^3 p_n \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial t} \frac{| \langle i j | S | m n \rangle |^2}{\langle i j | i j \rangle \langle m n | m n \rangle}. \quad (3.6)$$

Regularizando $\delta^{(3)}(0)$ em um volume finito¹³, escrevemos $\delta^{(3)}(0) = V/(2\pi)^3$, o que fornece a normalização

$$\langle p | p \rangle = (2\pi)^3 (2E_p) \delta^{(3)}(0) = 2E_p V, \quad (3.7)$$

de modo que

$$\langle i j | i j \rangle \langle m n | m n \rangle = (2E_i V)(2E_j V)(2E_m V)(2E_n V). \quad (3.8)$$

Por fim, lembramos que [53]

$$\frac{\partial}{\partial t} | \langle i j | S | m n \rangle |^2 = \delta^{(4)}(\Sigma p) V (2\pi)^4 | \mathcal{M}_{ij \rightarrow mn} |^2, \quad (3.9)$$

¹²Nesta integral, aproximamos como 1 os fatores de mecânica estatística $(1 \pm f_m)(1 \pm f_n)$, onde os sinais + e - são usados se as partículas se tratam, respectivamente, de bósons e férmions. Estes fatores representam o fenômeno de *Bose enhancement* e *Pauli Blocking*: se partículas do tipo i já existem, é mais provável produzir outra partícula de mesmo tipo se as partículas i são bósons do que se forem férmions. Entretanto, esses fatores podem ser aproximados pelo número 1 quando tratamos de partículas massivas que desacoplam do plasma primordial quando não são um gás degenerado. Ainda, em geral, estamos interessados em partículas que desacoplam em temperatura $T < E$, o que implica $(1 \pm f) \approx 1$ [24, 55].

¹³Para isso, comparamos $\delta^{(3)}(0)$ com a expressão $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(p) = \int d^3 x e^{i\vec{p}\vec{x}}$, obtendo $\delta^3(0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 x = \frac{V}{(2\pi)^3}$ quando impomos um volume finito V .

onde $|\mathcal{M}_{ij \rightarrow mn}|$ é o elemento de matriz usual, calculado a partir dos diagramas de Feynman e definimos $\delta^{(4)}(\Sigma p) \equiv \delta^{(4)}(p_{inicial} - p_{final})$ - assim, no caso $1\ 2 \rightarrow 3\ 4$, $\delta^{(4)}(\Sigma p) = \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$.

Substituindo as equações (3.8) e (3.9) em (3.6) obtemos,

$$\dot{P}_{ij \rightarrow mn} = \sum_{spins_{m,n}} \int d^3 p_m d^3 p_n \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{\delta^{(4)}(\Sigma p) V (2\pi)^4 |\mathcal{M}_{ij \rightarrow mn}|^2}{(2E_i V)(2E_j V)(2E_m V)(2E_n V)}. \quad (3.10)$$

Deste modo, considerando todos os possíveis spins e momentos das partículas iniciais e finais, o produto $N_{ij} \dot{P}_{ij \rightarrow mn}$ se escreve

$$N_{ij} \dot{P}_{ij \rightarrow mn} = V \sum_{spins} \int \frac{d^3 p_i V}{(2\pi)^3 (2E_i V)} \frac{d^3 p_j V}{(2\pi)^3 (2E_j V)} \frac{d^3 p_m V}{(2\pi)^3 (2E_m V)} \frac{d^3 p_n V}{(2\pi)^3 (2E_n V)} f_i f_j \delta^{(4)}(\Sigma p) (2\pi)^4 |\mathcal{M}_{ij \rightarrow mn}|^2. \quad (3.11)$$

Substituindo (3.11) em (3.1) obtemos

$$\dot{N}_1 = V \sum_{spins} \int \frac{d^3 p_1 V}{(2\pi)^3 (2E_1 V)} \frac{d^3 p_2 V}{(2\pi)^3 (2E_2 V)} \frac{d^3 p_3 V}{(2\pi)^3 (2E_3 V)} \frac{d^3 p_4 V}{(2\pi)^3 (2E_4 V)} \delta^{(4)}(\Sigma p) (2\pi)^4 [f_3 f_4 |\mathcal{M}_{3\ 4 \rightarrow 1\ 2}|^2 - f_1 f_2 |\mathcal{M}_{1\ 2 \rightarrow 3\ 4}|^2]. \quad (3.12)$$

A partir deste ponto, assumimos que todas as partículas envolvidas permanecem equilíbrio cinético¹⁴ por todo o processo estudado, de modo que podemos escrever $f_i \propto f_i^{eq}$, onde f_i^{eq} é a distribuição de equilíbrio termodinâmico para as partículas i e a constante de proporcionalidade entre as duas distribuições evolui com o tempo, mas é independente do momento [55]. As distribuições de equilíbrio termodinâmico são dadas pela distribuição de Fermi-Dirac (FD), no caso dos férmions e, no caso dos bósons, pela distribuição de Bose-Einstein (BE),

$$f(E, t)_{FD, BE} = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1}, \quad (3.13)$$

onde E é a energia da partícula e μ é seu potencial químico. Além disso, o balanço detalhado nos permite fazer a substituição [55]

$$f_1^{eq} f_2^{eq} = f_3^{eq} f_4^{eq}. \quad (3.14)$$

¹⁴O equilíbrio cinético é mantido por reações elásticas (que não alteram as quantidades das partículas), enquanto o equilíbrio químico é mantido por reações inelásticas (que alteram as quantidades das partículas). Aqui, assumimos que as reações elásticas continuam ocorrendo em taxa suficiente para manter as partículas em equilíbrio cinético mesmo quando as reações inelásticas já são ineficientes, o que provoca o desacoplamento do equilíbrio com o plasma primordial. Veja [55, 56].

Assim, sendo a, b, c, d, ξ e ζ fatores independentes dos momentos, escrevemos as relações

$$\begin{cases} f_1 f_2 = a f_1^{eq} b f_2^{eq} = \xi f_1^{eq} f_2^{eq}, \\ f_3 f_4 = c f_3^{eq} d f_4^{eq} = \zeta f_3^{eq} f_4^{eq} = \zeta f_1^{eq} f_2^{eq}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Por sua vez, a unitariedade/conservação de probabilidade permite que, *dentro da integral* em 3.12, seja escrito $|\mathcal{M}_{3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2}|^2 = |\mathcal{M}_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4}|^2 = |\mathcal{M}|^2$, de modo que obtemos

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 = V [\zeta - \xi] \sum_{spins} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 (2E_1)} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 (2E_2)} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 (2E_3)} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 (2E_4)} \\ f_1^{eq} f_2^{eq} \delta^{(4)}(\Sigma p) (2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Comparando a equação (3.16) com a expressão da seção de choque não polarizada (mediada sobre os spins iniciais e somada sobre os spins finais) para o processo $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ [53],

$$\sigma_{12 \rightarrow 34} = \frac{1}{g_1 g_2} \sum_{spins} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 (2E_3)} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 (2E_4)} \frac{\delta^{(4)}(\Sigma p) (2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2}{4 \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}, \quad (3.17)$$

e usando a definição

$$v_{\text{Mol}} = \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2}, \quad (3.18)$$

reescrevemos (3.16) como

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 = V [\zeta - \xi] \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 (2E_1)} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 (2E_2)} f_1^{eq} f_2^{eq} g_1 g_2 \sigma_{12 \rightarrow 34} 4 v_{\text{Mol}} E_1 E_2 \\ = V [\zeta - \xi] \int \frac{d^3 p_1 g_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2 g_2}{(2\pi)^3} f_1^{eq} f_2^{eq} \sigma_{12 \rightarrow 34} v_{\text{Mol}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Com a definição da seção de choque mediada na temperatura [55],

$$\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle = \frac{\int \frac{d^3 p_1 g_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2 g_2}{(2\pi)^3} f_1^{eq} f_2^{eq} \sigma_{12 \rightarrow 34} v_{\text{Mol}}}{\int \frac{d^3 p_1 g_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2 g_2}{(2\pi)^3} f_1^{eq} f_2^{eq}} = \frac{\int \frac{d^3 p_1 g_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2 g_2}{(2\pi)^3} f_1^{eq} f_2^{eq} \sigma_{12 \rightarrow 34} v_{\text{Mol}}}{n_1^{eq} n_2^{eq}}, \quad (3.20)$$

e aproveitando o fato de que o sistema de equações (3.15) implica ,

$$\begin{cases} n_1 n_2 = \xi n_1^{eq} n_2^{eq}, \\ n_3 n_4 = \zeta n_3^{eq} n_4^{eq}, \end{cases} \quad (3.21)$$

podemos, finalmente, escrever

$$\dot{n}_1 + 3Hn_1 = \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle \left[n_1^{eq} n_2^{eq} \frac{n_3 n_4}{n_3^{eq} n_4^{eq}} - n_1 n_2 \right]. \quad (3.22)$$

Vale ressaltar que este resultado é válido mesmo quando as partículas 1 e 2 são idênticas. Neste caso, o fator de 2 adicional que poderia aparecer no lado direito da equação (3.1), dado que somem/surgem duas partículas a cada aniquilação, é compensado pelo fator de 1/2 que deve ser colocado nos termos N_{12} e $\dot{P}_{3 \rightarrow 1 \ 2}$ para evitar contagem repetida de pares de partículas no estado inicial ou final, respectivamente.

Entretando, há uma sutileza quando deseja-se resolver a equação (3.22) para a *quantidade total de partículas não idênticas*. Por exemplo, se tratando de quantidade total de um férmion de Dirac, $n = n_f + n_{\bar{f}}$, e assumindo que não há assimetria ($n_f = n_{\bar{f}}$), temos $n = 2n_f$ e, no caso $n_1 = n_f$ e $n_2 = n_{\bar{f}}$, a equação (3.22) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{n}_f + 3Hn_f &= \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle \left[n_f^{eq} n_{\bar{f}}^{eq} \frac{n_3 n_4}{n_3^{eq} n_4^{eq}} - n_f n_{\bar{f}} \right] \\ &\Downarrow \\ \frac{\dot{n} + 3Hn}{2} &= \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle \left[\frac{(n^{eq})^2}{4} \frac{n_3 n_4}{n_3^{eq} n_4^{eq}} - \frac{n^2}{4} \right], \end{aligned} \quad (3.23)$$

e, portanto,

$$\dot{n} + 3Hn = \frac{\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle}{2} \left[(n^{eq})^2 \frac{n_3 n_4}{n_3^{eq} n_4^{eq}} - n^2 \right]. \quad (3.24)$$

Entretando, no caso em que 1 e 2 são *partículas idênticas*, como dois fótons, $n_1 = n_2 = n$ e a equação (3.22) se escreve *sem fatores adicionais*, ou seja,

$$\dot{n} + 3Hn = \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle \left[(n^{eq})^2 \frac{n_3 n_4}{n_3^{eq} n_4^{eq}} - n^2 \right]. \quad (3.25)$$

Por fim, ainda vale comentar que, no caso em que as partículas 3 e 4 são idênticas, o fator de 1/2 que aparece para evitar a contagem repetida de pares está implicitamente incluso na definição de $\sigma_{12 \rightarrow 34}$, de modo que a expressão final (3.22) continua válida.

3.2 \dot{N}_1 em processos $1 \leftrightarrow 2 \ 3$

Agora vamos ao caso em que a partícula 1, que é de nosso interesse, é instável, tendo sua abundância afetada por um decaimento, $1 \leftrightarrow 2 \ 3$. Para este processo, o equivalente ao enunciado de (3.1) se escreve

$$\dot{N}_1 = N_{23}\dot{P}_{23\rightarrow 1} - N_1\dot{P}_{1\rightarrow 23}. \quad (3.26)$$

Utilizando a expressão (3.4) para escrever N_1 , a expressão (3.5) para escrever N_{23} e a equação (3.10) para escrever $\dot{P}_{23\rightarrow 1}$ e $\dot{P}_{1\rightarrow 23}$, obtemos

$$N_{23}\dot{P}_{23\rightarrow 1} = \sum_{spins} \int \frac{d^3p_2V}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_3V}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_1V}{(2\pi)^3} f_2 f_3 \frac{\delta^{(4)}(\Sigma p)V(2\pi)^4 |\mathcal{M}_{23\rightarrow 1}|^2}{(2E_1V)(2E_2V)(2E_3V)} \quad (3.27)$$

e

$$N_1\dot{P}_{1\rightarrow 23} = \sum_{spins} \int \frac{d^3p_1V}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2V}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_3V}{(2\pi)^3} f_1 \frac{\delta^{(4)}(\Sigma p)V(2\pi)^4 |\mathcal{M}_{1\rightarrow 23}|^2}{(2E_1V)(2E_2V)(2E_3V)}, \quad (3.28)$$

sendo $\delta^{(4)}(\Sigma p) = \delta^{(4)}(p_1 - p_2 - p_3)$, neste caso. Com isso, e aplicando mais uma vez a condição de conservação de probabilidade, que permite que igualemos $|\mathcal{M}_{1\rightarrow 23}|^2 = |\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_{23\rightarrow 1}|^2$ dentro da integral sobre os momentos, temos

$$\dot{N}_1 = V \sum_{spins} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3(2E_1)} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3(2E_2)} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3(2E_3)} \delta^{(4)}(\Sigma p)(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2 [f_2 f_3 - f_1]. \quad (3.29)$$

Em acordo com o que foi feito na seção anterior, supondo que que todas as partículas envolvidas estão em equilíbrio cinético durante todo o processo estudado e usando a relação de balanço detalhado, $f_1^{eq} = f_2^{eq} f_3^{eq}$, podemos escrever

$$\begin{cases} f_1 = \alpha f_1^{eq} \implies \alpha = \frac{n_1}{n_1^{eq}}, \\ f_2 f_3 = \beta f_2^{eq} f_3^{eq} = \beta f_1^{eq} \implies \beta = \frac{n_2 n_3}{n_2^{eq} n_3^{eq}}, \end{cases} \quad (3.30)$$

onde α e β não dependem dos momentos. Isto implica que

$$\dot{N}_1 = V [\beta - \alpha] \sum_{spins} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3(2E_1)} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3(2E_2)} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3(2E_3)} f_1^{eq} \delta^{(4)}(\Sigma p)(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2. \quad (3.31)$$

Comparando a expressão (3.31) com a expressão da lagura de decaimento não polarizada (mediada sobre o spin inicial e somada sobre os spins finais) [54],

$$\Gamma_{1\rightarrow 23} = \frac{1}{g_1} \sum_{spins} \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3(2E_2)} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3(2E_3)} \frac{\delta^{(4)}(\Sigma p)(2\pi)^4}{2m_1} |\mathcal{M}|^2, \quad (3.32)$$

onde m_1 é a massa da partícula 1, obtemos

$$\dot{N}_1 = V [\beta - \alpha] \int \frac{d^3 p_1 g_1}{(2\pi)^3} f_1^{eq} \frac{m_1}{E_1} \Gamma_{1 \rightarrow 23} . \quad (3.33)$$

Ainda, partir da definição de $\langle \Gamma \rangle$ [57],

$$\langle \Gamma_{1 \rightarrow 23} \rangle = \frac{\int \frac{d^3 p_1 g_1 m_1}{(2\pi)^3 E_1} f_1 \Gamma_{1 \rightarrow 23}}{\int \frac{d^3 p_1 g_1}{(2\pi)^3} f_1} = \frac{\int \frac{d^3 p_1 g_1 m_1}{(2\pi)^3 E_1} f_1^{eq} \Gamma_{1 \rightarrow 23}}{n_1^{eq}} , \quad (3.34)$$

onde, na última igualdade, usamos $f_1 = a f_1^{eq}$, e usando as demais relações de (3.30), junto com a equação (3.3), podemos escrever, finalmente

$$\dot{n}_1 + 3Hn_1 = \langle \Gamma_{1 \rightarrow 23} \rangle \left[n_1^{eq} \frac{n_2 n_3}{n_2^{eq} n_3^{eq}} - n_1 \right] . \quad (3.35)$$

Como a equação (3.35) é linearmente proporcional a n_1 , não temos a inclusão de nenhum outro fator quando trocamos n_1 pela soma de partículas idênticas ou não idênticas. Ainda, no caso em que as partículas 2 e 3 são idênticas, o fator de 1/2 que apareceria nas equações (3.28) e (3.27), para evitar a contagem repetida de pares, está implicitamente incluído na definição de $\Gamma_{1 \rightarrow 23}$, de modo que a equação (3.35) permanece válida.

3.3 \dot{N}_2 em processos $1 \leftrightarrow 2 3$

Nesta seção será discutido o caso em que a partícula de interesse tem sua abundância afetada pelo decaimento de outra partícula. Ou seja, sendo a partícula 2 de nosso interesse, vamos revisitar o processo $1 \leftrightarrow 2 3$. O enunciado da equação (3.1) se escreve, neste caso,

$$\dot{N}_2 = N_1 \dot{P}_{1 \rightarrow 23} - N_{23} \dot{P}_{23 \rightarrow 1} , \quad (3.36)$$

que difere da equação (3.26) apenas pelo sinal.

Deste modo, podemos escrever

$$\dot{n}_2 + 3Hn_2 = \langle \Gamma_{1 \rightarrow 23} \rangle \left[n_1 - n_1^{eq} \frac{n_2 n_3}{n_2^{eq} n_3^{eq}} \right] . \quad (3.37)$$

Assim como a equação para \dot{N}_1 no processo $1 2 \rightarrow 3 4$, quando utilizamos a equação (3.37) para monitorar a abundância de *partículas indênticas* e tomamos $n_2 = n_3 = n$, *não há fator adicional* e escrevemos

$$\dot{n} + 3Hn = \langle \Gamma_{1 \rightarrow 23} \rangle \left[n_1 - n_1^{eq} \frac{n^2}{(n^{eq})^2} \right] . \quad (3.38)$$

Entretando, no caso de quisermos monitorar $n = n_2 + n_3$, no caso de partículas *não idênticas*, mas simétricas, de modo que $n = 2n_2$, a equação deve ter um *fator de 2 adicional*,

$$\dot{n} + 3Hn = 2 \langle \Gamma_{1 \rightarrow 23} \rangle \left[n_1 - n_1^{eq} \frac{n^2}{(n^{eq})^2} \right]. \quad (3.39)$$

3.4 Equação de Boltzmann total

Em geral, a abundância de uma partícula no universo depende de múltiplos processos de tipos diferentes, como é o caso da ME e do DP, que serão discutidos em detalhe nos próximos capítulos. Suponha, por exemplo, que uma partícula A tenha sua abundância definida pelos seguintes processos: o espalhamento $A B \leftrightarrow C D$ e o decaimento $E \leftrightarrow A F$.

Neste caso, a equação de Boltzmann necessária para resolver sua abundância depende da taxa total com a qual a partícula A é criada/aniquilada e deve considerar os dois processos. Isso é feito simplesmente somando-se a contribuição de ambos. O enunciado da equação de Boltzmann se escreve, neste caso,

$$\dot{N}_A = \underbrace{N_{CD} \dot{P}_{CD \rightarrow AB} - N_{AB} \dot{P}_{AB \rightarrow CD}}_{\text{Contribuição } A B \leftrightarrow C D} + \underbrace{N_E \dot{P}_{E \rightarrow AF} - N_{AF} \dot{P}_{AF \rightarrow E}}_{\text{Contribuição } E \leftrightarrow A F}, \quad (3.40)$$

onde a expressão para a contribuição de $A B \rightarrow C D$ é dada pela equação (3.22) e a contribuição de $E \rightarrow A F$ é dada pela equação (3.37).

Deste modo, a partir equações obtidas nas seções 3.1 a 3.3, somando todas as contribuições necessárias, podemos resolver a abundância da ME e do DP, dado que são dominante definidas por espalhamentos com duas partículas no estado inicial e final e por decaimentos em duas partículas.

3.5 Reparametrização da equação

Nesta seção vamos discutir como reescrever a equação de Boltzmann na forma mais apresentada na literatura : em termos das variáveis $Y = n/s$ e $x = m/T$ (por exemplo, podemos citar [21, 23, 24, 55]).

Para facilitar a resolução da equação de Boltzmann, é útil reabsorver o termo que explicita o efeito de diluição das densidades numéricas das partículas pela expansão do universo, $3Hn$, dividindo n pela a densidade de entropia do universo¹⁵ [55], a qual pode ser escrita como

$$s = S a(t)^{-3}, \quad (3.41)$$

onde S , sendo a entropia total por volume comóvel, é constante na ausência de produção de entropia (o que vamos assumir daqui para frente). Assim, definimos a quantidade adimensional chamada *yield*, $Y \equiv n/s$, de modo que

¹⁵A densidade de entropia, s , é discutida em maior detalhe na seção seguinte, 3.6.

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{n}{s} \right) = \frac{\dot{n}}{s} + \frac{n}{S} 3 a^2 \dot{a} = \frac{1}{s} [\dot{n} + 3Hn]. \quad (3.42)$$

Além disso, dado que a massa da partícula sob interesse - no caso deste projeto, a ME - indica a escala de tempo e temperatura que seu desacoplamento ocorrerá, é útil introduzir a medida adimensional de tempo,

$$x = \frac{m_\chi}{T}, \quad (3.43)$$

onde T é a temperatura dos fótons. Para encontrar a relação entre dY/dx e dY/dt , seguimos os cálculos apresentados em [55], que se baseiam na aplicação da regra da cadeia,

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dT}{dx} \frac{ds}{dT} \frac{da}{ds} \frac{dt}{da} \frac{dY}{dt} \equiv \lambda \frac{dY}{dt}, \quad (3.44)$$

onde escolhe-se fazer derivadas entre quantidades cuja relação é conhecida na cosmologia, como veremos a seguir.

Dada a definição do parâmetro de Hubble, $H(t) = H$, obtemos

$$H = \frac{da}{dt} \frac{1}{a} \implies \frac{dt}{da} = \frac{1}{aH}, \quad (3.45)$$

por sua vez, a definição de s em (3.41), fornece

$$a = \left(\frac{S}{s} \right)^{1/3} \implies \frac{da}{ds} = -\frac{1}{3} (sa^3)^{1/3} \frac{1}{s^{1/3}s} = -\frac{a}{3s}. \quad (3.46)$$

Ainda, precisamos usar a expressão da densidade de entropia do universo [21],

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_S(T) T^3, \quad (3.47)$$

onde $g_S(T)$ é definido como o número efetivo de graus de liberdade relativísticos em entropia, o qual será discutido em maior detalhe na seção 3.6. Por hora, tudo o que precisamos saber é que este fator depende da temperatura. A partir da expressão (3.47), podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dT} &= \frac{2\pi^2}{45} \left[g_S(T) \frac{dT^3}{dT} + T^3 \frac{dg_S(T)}{dT} \right] \\ &= \frac{3s}{T} \left[1 + \frac{T}{3g_S(T)} \frac{dg_S(T)}{dT} \right], \end{aligned} \quad (3.48)$$

e, por fim,

$$x = \frac{m_\chi}{T} \implies \frac{dT}{dx} = -\frac{m_\chi}{x^2}. \quad (3.49)$$

Assim, finalmente, podemos escrever, para λ definido na equação (3.44),

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{m_\chi}{x^2} \frac{3s}{T} \left[1 + \frac{T}{3g_S(T)} \frac{dg_S(T)}{dT} \right] \frac{a}{3s} \frac{1}{aH} \\ &= \frac{m_\chi}{x^2} \frac{s}{T} \frac{1}{H} \frac{1}{s} \left[1 + \frac{T}{3g_S(T)} \frac{dg_S(T)}{dT} \right].\end{aligned}\quad (3.50)$$

Para chegar na forma final da equação, escrevemos explicitamente o parâmetro de Hubble em um universo dominado por radiação¹⁶ [21],

$$H^2 = \frac{4\pi^3 G}{45} g_\rho(T) T^4, \quad (3.51)$$

onde $g_\rho(T)$ é o número de graus de liberdade relativísticos, que será melhor discutido na seção 3.6, e G é a constante de Newton, que pode ser escrita, em unidades naturais, em termos da massa de Planck, $G = M_{Pl}^{-2} = (1.221 \times 10^{19} \text{GeV})^{-2}$. Com isso, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{s}{TH} &= \frac{2\pi^2}{45} g_S(T) \frac{T^3}{T} \sqrt{\frac{45}{4\pi^3 G g_\rho(T) T^4}} \\ &= \frac{g_S(T)}{\sqrt{g_\rho(T)}} \sqrt{\frac{\pi}{45 G}}.\end{aligned}\quad (3.52)$$

Assim, substituindo as equações (3.52) e (3.50) em (3.44), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dx} &= \frac{m_\chi}{x^2} \sqrt{\frac{\pi}{45 G}} \frac{1}{s} \frac{g_S(T)}{\sqrt{g_\rho(T)}} \left[1 + \frac{T}{3g_S(T)} \frac{dg_S(T)}{dT} \right] \frac{dY}{dt} \\ &\equiv \frac{m_\chi}{x^2} \sqrt{\frac{\pi}{45 G}} \frac{1}{s} g_\star^{1/2}(T) \frac{dY}{dt},\end{aligned}\quad (3.53)$$

onde seguimos a definição de $g_\star^{1/2}(T)$ apresentada em [55]. Entretanto, dado que estamos interessados em resolver a equação de Boltzmann em termos da variável x , é útil reescrever $g_\star^{1/2}(T)$ em função dela. A partir da equação (3.49), podemos escrever

$$g_\star^{1/2}(x) = \frac{g_S(x)}{\sqrt{g_\rho(x)}} \left[1 - \frac{x}{3g_S(x)} \frac{dg_S(x)}{dx} \right], \quad (3.54)$$

onde, dado uma massa de ME, para obter uma lista de valores de $g_\rho(x)$ apenas usamos que $g_\rho(x) = g_\rho(m_\chi/T)$. Para a lista de $g_S(x)$ procedemos do mesmo modo. Por fim, retomando a equação (3.42), temos a equação de Boltzmann escrita como

¹⁶Utilizamos esta expressão para o parâmetro de Hubble porque a densidade de energia do universo é dominada pela contribuição das espécies relativísticas até $T = 0.75 \text{ eV}$ [21] e, dado que estamos tratando de m_χ da ordem de MeV, o *freeze-out* da ME deve ocorrer em $T \sim \text{MeV}/10$, ou seja, quando o universo ainda é dominado por radiação.

$$\boxed{\frac{dY}{dx} = \sqrt{\frac{\pi}{45 G}} \frac{m_\chi}{x^2} g_\star^{1/2}(x) \frac{1}{s^2} [\dot{n} + 3Hn] .} \quad (3.55)$$

Vale ressaltar que o fator de m_χ que aparece na equação acima é devido unicamente à parametrização da evolução temporal $x = m_\chi/T$, de modo que a equação acima é válida para qualquer partícula. É necessário, todavia, substituir $Y_i = n_i/s$ de maneira consistente.

Por último, salientamos o motivo de deixarmos a equação (3.55) com o fator $[\dot{n} + 3Hn]$ escrito explicitamente. Isto foi feito porque, como discutido nas seções 3.1 a 3.3, diferentes tipos de processos que contribuem em $[\dot{n} + 3Hn]$ dependem de diferentes potências de n . Isto implica que, em geral, haja fatores relativos de s na equação de Boltzmann completa para uma espécie, quando escrita em termos de Y . Estes fatores são mais facilmente “seguidos” quando escrevemos primeiro $[\dot{n} + 3Hn]$ e depois fazemos a substituição $n = Ys$. Isso fica claro na equação de Boltzmann do DP, que inclui processos que dependem de n_{Z_D} e de $n_{Z_D}^2$ (veja seção 6.3).

3.6 Contagem dos graus de liberdade

Nesta seção, vamos discutir o significado de g_S , g_ρ e $g_\star^{1/2}$, assim como a introdução da contribuição das partículas do SE nessas quantidades.

A definição de g_ρ deriva diretamente expressão para densidade de energia de uma espécie relativística i [21],

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{g_i \pi^2}{30} T_i^4 & \text{para Bósons} \\ \frac{7}{8} \frac{g_i \pi^2}{30} T_i^4 & \text{para Férmions} \end{cases} \quad (3.56)$$

onde g_i é o número de graus de liberdade internos da partícula i e T_i é a temperatura de sua população. Deste modo, na época em que o universo é dominado por radiação, podemos escrever para a densidade de energia total,

$$\begin{aligned} \rho_{tot} &= \sum_{i = \text{bósons}} \frac{g_i \pi^2}{30} T_i^4 + \sum_{i = \text{férmions}} \frac{7}{8} \frac{g_i \pi^2}{30} T_i^4 \\ &= \frac{\pi^2 T^4}{30} \left[\sum_{i = \text{bósons}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i = \text{férmions}} \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 \right] \\ &\equiv \frac{\pi^2 T^4}{30} g_\rho(T) . \end{aligned} \quad (3.57)$$

Por sua vez, a definição de g_S é oriunda da definição da densidade de entropia [21],

$$\begin{aligned}
s &= \sum \frac{\rho_i + P_i}{T_i} \\
&= \frac{4}{3} \left[\sum_{i=\text{bósons}} \frac{g_i \pi^2}{30} T_i^3 + \sum_{i=\text{férmions}} \frac{7}{8} \frac{g_i \pi^2}{30} T_i^3 \right] \\
&= \frac{2\pi^2 T^3}{45} \left[\sum_{i=\text{bósons}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{férmions}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 \right] \\
&\equiv \frac{2\pi^2 T^3}{45} g_S(T),
\end{aligned} \tag{3.58}$$

onde P é a pressão do fluido de partículas e utilizamos a relação $P_i = \rho_i/3$, que é válida para partículas relativísticas, na segunda igualdade.

Vale ressaltar que enquanto a espécie i está em equilíbrio com o plasma primordial, temos $T_i = T$. Deste modo, enquanto todas as espécies relativísticas estão em equilíbrio, $g_S(T) = g_\rho(T)$. A única espécie do MP que desacopla do plasma enquanto ainda está relativística são os neutrinos. A diferença entre a temperatura dos neutrinos e a temperatura dos fótons, devida à aniquilação $e^+ e^- \rightarrow A A$ (onde A representa os fótons), a qual ocorre depois do desacoplamento dos neutrinos, é discutida em detalhe em [21]. A consequente diferença entre $g_S(T)$ e $g_\rho(T)$ para $T \lesssim 0.3$ MeV pode ser vista na figura 16, que mostra a evolução de destas quantidades ao longo da história do universo, quando levamos em conta apenas as partículas do MP.

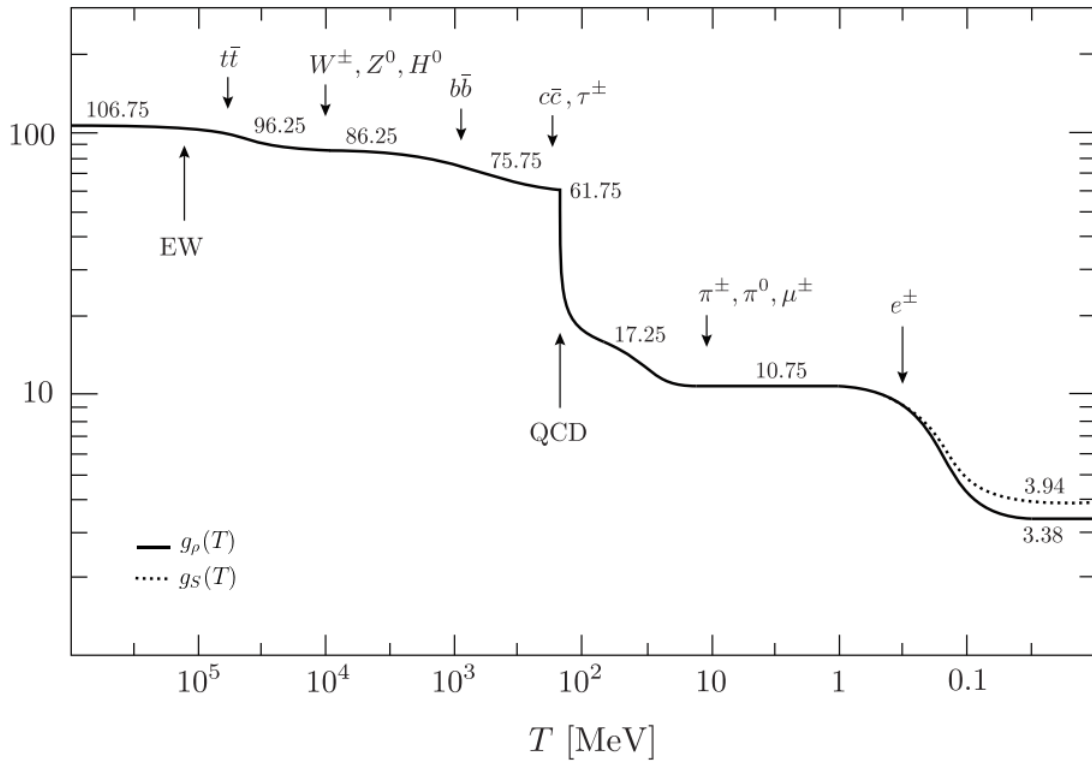


Figura 16: Evolução dos graus de liberdade relativísticos para entropia e densidade, considerando apenas as partículas do MP. Figura adaptada de [21]. Os símbolos que representam partículas indicam quando a temperatura do plasma se aproximou da massa de tal partícula, de modo que ela deixou de ser relativística. A seta EW indica uma estimativa da temperatura da transição de fase eletrofraca, que é quando as partículas elementares do MP adquiriram massa. A seta QCD indica uma estimativa de quando ocorreu o confinamento da QCD, o que resultou no confinamento de partículas mais leves (até então relativísticas) em estados ligados mais pesados (não relativísticos).

Porém, o gráfico da figura 16 não conta a história completa. Quando introduzimos o DP e a ME ao conteúdo de matéria do universo, é necessário somar suas contribuições para $g_S(T)$ e $g_\rho(T)$. Na escala de massas que estudamos nesse projeto, espera-se que os acoplamentos que reproduzem a abundância observada de ME correspondam à candidatos de DP e ME que deixam de ser relativísticos quando ainda estão em equilíbrio com o plasma do MP. Deste modo, para incluir os efeitos deste SE em $g_S(T)$ e $g_\rho(T)$, podemos adotar $T_{Z_D} = T_\chi = T$ e apenas somar suas contribuições, enquanto ainda são relativísticos.

Entretanto, a população de uma partícula de massa m_P não se torna instantaneamente não-relativística quando a temperatura é $T = m_P$. Nos baseando no que é feito em [21] no caso do quark top, consideramos que a contribuição de cada partícula do SE para $g_S(T)$ e $g_\rho(T)$ se anula quando $T \sim m_P/6$. Também fazemos a aproximação que a contribuição das partículas é igual ao seu número de graus de liberdade quando $T \geq m_P$, decrescendo linearmente até se anular em $T = m_P/6$.

Como discutido na seção 3.5, dado m_χ , podemos obter $g_\rho(x)$ e $g_S(x)$, a partir de $g_\rho(T)$ e $g_S(T)$. Assim, por exemplo, no caso da ME, que supomos ser um férmion de Dirac sem

carga de cor, somamos $(4 \times 7/8)$ à $g_S(x)$ e $g_\rho(x)$ quando $x \geq 1$ e consideramos que esta contribuição decresce linearmente, até se anular em $x = 1/6$ ¹⁷. A figura 17 apresenta o efeito de adicionarmos a contribuição da ME em $g_\rho(x)$ deste modo, considerando, como exemplo, $m_\chi = 20$ MeV. A curva $g_{\rho,MP+ME}$ representa a evolução de $g_\rho(x)$ quando consideramos a contribuição da ME e $g_{\rho,MP}$ apresenta a evolução de $g_\rho(x)$ quando levamos em conta apenas as partículas do MP.

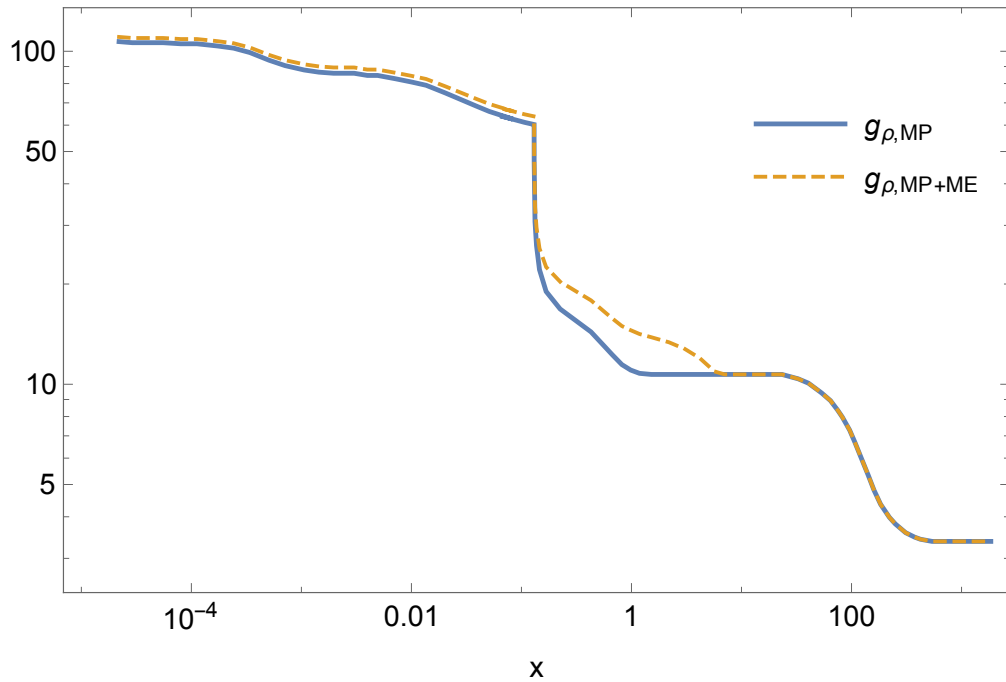


Figura 17: A curva $g_{\rho,MP+ME}$ representa a evolução de g_ρ quando consideramos, como exemplo, a contribuição de um candidato de ME com $m_\chi = 20$ MeV. A curva $g_{\rho,MP}$ apresenta, para comparação, a evolução de g_ρ quando levamos em conta apenas as partículas do MP.

Depois de “atualizar” $g_\rho(x)$ e $g_S(x)$, incluindo a contribuição do SE, pode-se calcular $g_\star^{1/2}(x)$ numericamente, a partir da definição apresentada na equação (3.54).

3.7 Freeze-out e freeze-in

Nesta seção, vamos discutir os fenômenos de *freeze-out* e *freeze-in*, que são responsáveis por definir a abundância de espécies predominantemente produzidas e/ou aniquiladas por espalhamentos e/ou decaimentos com outras partículas.

Estes fenômenos podem ser descritos através da equação de Boltzmann. Para discutí-los, é útil tomar, como exemplo simplificado, a equação de Boltzmann de uma partícula qualquer, 1, cuja abundância é afetada por um único processo, do tipo $1 \leftrightarrow 2 + 3$, onde supomos que as partículas 2 e 3 estejam em equilíbrio com o plasma durante todo o processo de interesse.

Neste caso, a partir da equação (3.25), podemos escrever

¹⁷Para isso, foi calculada uma reta que satisfaz $r(x = 1) = 4 \times 7/8$ e $r(x = 1/6) = 0$.

$$\dot{n}_1 + 3Hn_1 = \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle [(n_1^{eq})^2 - n_1^2]. \quad (3.59)$$

Lembrando que, a partir das relações (3.42) e (3.44), temos

$$\frac{dY_1}{dx} = \frac{\lambda}{s} [n_1 + 3Hn_1], \quad (3.60)$$

onde, aproximando $g_S(T)$ como uma constante, a partir da equação (3.50), podemos escrever

$$\lambda = \frac{s}{Hx} \frac{1}{s} = \frac{n_1}{Y_1 Hx} \frac{1}{s}, \quad (3.61)$$

o que fornece

$$\frac{dY_1}{dx} = \frac{1}{Y_1 x} \frac{n_1 \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle}{H} [(Y_1^{eq})^2 - Y_1^2], \quad (3.62)$$

ou seja,

$$\frac{d \ln Y_1}{d \ln x} = \frac{\Gamma}{H} \left[\frac{(Y_1^{eq})^2}{Y_1^2} - 1 \right], \quad (3.63)$$

onde definimos a chamada *taxa de interação*, $\Gamma = n_1 \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$, que tem unidades de $1/[\text{tempo}]$.

Escrevendo a equação de Boltzmann na forma (3.63), para este exemplo simplificado, se torna mais fácil discutir algumas de suas características. Primeiramente, no caso em que Γ/H é grande o suficiente para variar Y_1 de maneira eficiente, podemos observar que Y_1 tende a seguir sua sua distribuição de equilíbrio. Isto porque, quando $Y_1 < Y_1^{eq}$, o termo entre colchetes é positivo e a equação (3.63) prevê que Y_1 aumentará, à medida que o tempo passa, até que $Y_1 = Y_1^{eq}$. Por outro lado, quando $Y_1 > Y_1^{eq}$, o termo entre colchetes é negativo, indicando que Y_1 diminui até que $Y_1 = Y_1^{eq}$ seja satisfeita.

Ainda, vemos que, quanto maior o fator Γ/H , maior a magnitude da derivada $d \ln Y_1 / d \ln x$, ou seja, mais rápida é a variação de Y_1 e, portanto, mais eficientemente Y_1 persegue a evolução de Y_1^{eq} . Entretanto, à medida que o universo se expande e esfria, a energia e a densidade das partículas diminuem cada vez mais. Em particular, quando uma partícula em equilíbrio se torna não-relativística, sua densidade numérica é exponencialmente suprimida [21],

$$n_i^{eq} \propto e^{-m_i/T}, \quad (3.64)$$

o que é conhecido como supressão de Boltzmann. Deste modo, à medida que o tempo passa, a colisão entre duas partículas se torna menos provável, sendo esperado que $\Gamma = n_1 \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$ diminua.

Com a diminuição de Γ/H , chega um momento em que a manutenção de Y_1 em seu valor

de equilíbrio se torna ineficiente, o que é conhecido como *desacoplamento*. Além disso, quando $\Gamma/H \approx 0$, Y_1 deixa de variar, assumindo seu valor final, o que é conhecido como abundância de relíquia. Este fenômeno de congelamento da abundância de uma partícula após seu desacoplamento do plasma primordial é chamado de *freeze-out*.

Ainda, vale a pena ressaltar uma característica importante do mecanismo de *freeze-out*: em geral, quanto mais intensa for a interação de uma partícula com o plasma primordial, de modo que ela permanece em equilíbrio por mais tempo, menor será sua abundância de relíquia. Isto ocorre porque a abundância de equilíbrio das partículas diminui cada vez mais, à medida que a temperatura diminui. Deste modo, quanto mais tarde uma partícula desacopla, menor será sua abundância no momento do desacoplamento.

Para a ME do modelo de DP considerado neste trabalho, isso pode ser visualizado na figura 18. Como exemplo, fixamos $m_\chi = 100$ MeV, $g_D = 1$, $m_{Z_D} = 300$ MeV e variamos o parâmetro de mistura cinética entre o DP e o bóson B, ϵ . Podemos observar que, em acordo com o que foi discutido acima, quanto maior o valor de ϵ , menor o valor final de Y_χ obtido, dado que

$$\Gamma = n_1 \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle \propto \epsilon^2, \quad (3.65)$$

para aniquilações da ME em partículas do MP.

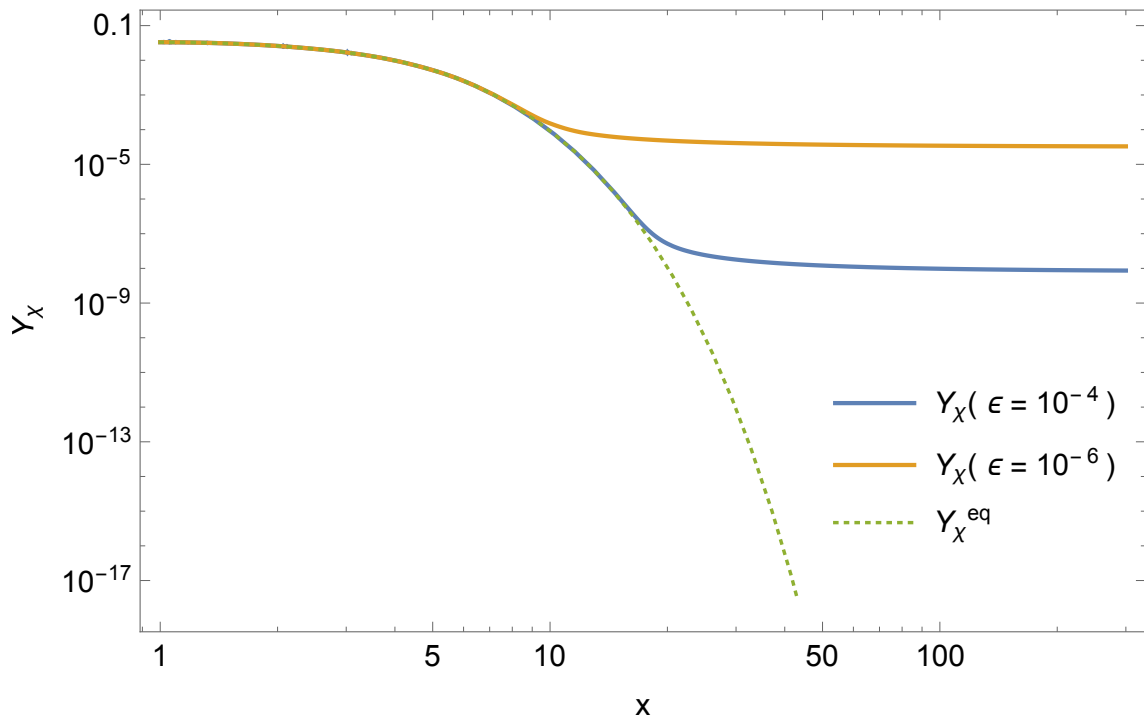


Figura 18: Curva de *freeze-out* da ME correspondente a diferentes valores de ϵ . Os demais parâmetros do modelo foram fixados em $m_\chi = 100$ MeV, $m_{Z_D} = 300$ MeV e $g_D = 1$.

Como discutido em detalhe na referência [24], um tratamento analítico simplificado da equação (3.63) permite estimar que a dependência entre o valor final de Y_1 ($Y_{1_{final}}$) e a $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$ correspondente é dada por

$$Y_{1_{final}} \propto \frac{1}{\langle \sigma v_{Mol} \rangle}. \quad (3.66)$$

Complementarmente, é possível que a espécie 1 seja produzida lentamente pelo mesmo processo $23 \rightarrow 11$, sem que ele nunca ocorra em taxa suficiente para estabelecer equilíbrio térmico entre esta partícula e o plasma. Neste caso, supomos que, em $T \gg m_1$, o *yield* de 1 satisfaça $Y_1 \ll Y_1^{eq}$. Assim, o processo inverso, $11 \rightarrow 23$ é muito suprimido e podemos desprezar o número 1 no termo entre colchetes da equação (3.63), obtendo

$$\frac{d \ln Y_1}{d \ln x} = \frac{\Gamma}{H} \frac{(Y_1^{eq})^2}{Y_1^2}, \quad (3.67)$$

que descreve o acúmulo de partículas 1 no universo, ao longo do tempo. Assim como no caso do *freeze-out*, a equação (3.67) indica o congelamento da abundância de 1 quando $\Gamma/H \approx 0$. O processo de produção lenta de uma partícula seguida do congelamento de sua abundância é conhecido como *freeze-in*.

Na figura 19, são mostradas, como exemplo, duas curvas de *freeze-in*, para a ME do modelo de DP deste trabalho. Por simplicidade, para gerar estas curvas, levamos em conta apenas a contribuição das aniquilações das partículas do MP para a produção de ME. Como no exemplo da figura 18, as curvas foram calculadas fixando $g_D = 1$, $m_\chi = 100$ MeV, $m_{Z_D} = 300$ MeV e variando ϵ .

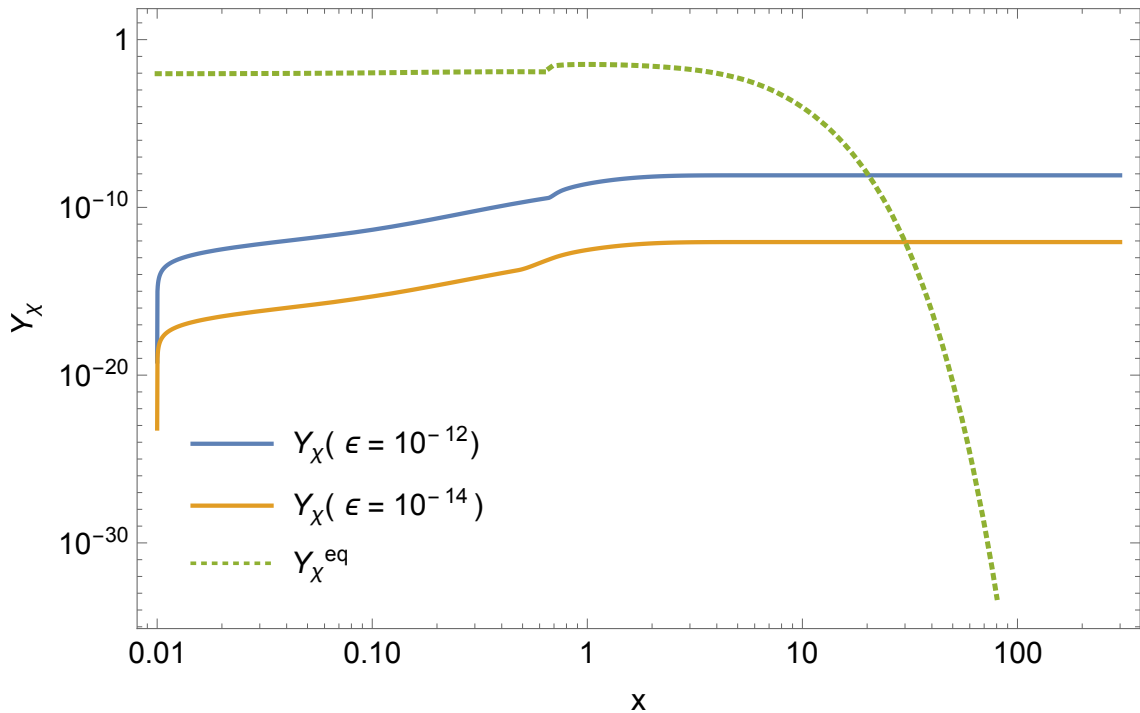


Figura 19: Curva de *freeze-in* da ME correspondente a diferentes valores de ϵ . Os demais parâmetros do modelo foram fixados em $m_\chi = 100$ MeV, $m_{Z_D} = 300$ MeV e $g_D = 1$.

Em oposição ao que ocorre no caso do *freeze-out*, podemos observar, na figura 19, que maiores valores de ϵ correspondem a maiores valores finais de Y_χ , quando a ME é produzida via *freeze-in*. Através da equação (3.67) podemos entender que isso se deve ao fato de que, quanto maior o valor de Γ , mais rápida e eficiente é a produção de ME por este mecanismo.

Os mecanismos de *freeze-out* e *freeze-in* figuram entre aqueles possíveis para produzir a abundância observada de ME. No contexto do modelo de DP, há regiões do espaço de parâmetros ϵ , g_D , m_χ , m_{Z_D} que são compatíveis com o mecanismo de *freeze-out*, ao mesmo tempo que há regiões compatíveis com *freeze-in*. Além disso, há ainda regiões que são compatíveis com mecanismos mais complexos, como o *freeze-in* sequencial e a reaniquilação, como discutido em [49, 58, 59].

Por fim, vale mencionar uma importante vantagem do mecanismo de *freeze-out* em relação ao mecanismo de *freeze-in*: a independência em relação a quaisquer condições cosmológicas iniciais. Isto se dá porque, uma vez que uma partícula entra em equilíbrio com o plasma, ela assume sua distribuição de equilíbrio, dada pela equação (3.13), apagando qualquer informação prévia sobre sua população. Por outro lado, o efeito do mecanismo de *freeze-in* é somado sobre a história prévia da partícula de interesse, dada a ausência de equilíbrio. Em geral, para modelos de ME produzidos via *freeze-in*, assume-se que a contribuição da população inicial para a abundância final é irrisória.

3.8 Cálculo de $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$ e $\langle \Gamma \rangle$

Como introduzido na seção 3.1, a seção de choque mediada na temperatura é definida como

$$\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle = \frac{\int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} g_1 \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} g_2 f_1^{eq} f_2^{eq} \sigma_{12 \rightarrow 34} v_{\text{Mol}}}{\int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} g_1 \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} g_2 f_1^{eq} f_2^{eq}}, \quad (3.68)$$

onde as quantidades $f_{1,2}^{eq}$, $\sigma_{12 \rightarrow 34}$ e v_{Mol} têm dependências complicadas nos momentos p_1 e p_2 . Em especial, a presença das distribuições de equilíbrio (que podem ser escritas, no universo primordial, negligenciando μ [21]),

$$f(E_i, t)_{FD, BE} = \frac{1}{e^{E_i/T} \pm 1}, \quad (3.69)$$

torna o cálculo de $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$ muito difícil, mesmo numericamente. Entretanto, na referência [55] é apresentado um tratamento analítico que permite reescrever $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$ em termos de uma única integral sobre a variável de Mandelstan $s = p_{\text{total, inicial}}^2 = p_{\text{total, final}}^2$, no caso em que a partícula sob interesse, digamos 1, tem sua abundância definida por processos do tipo $1 + 1 \leftrightarrow 2 + 3$.

Esse tratamento analítico parte da aproximação da distribuição de equilíbrio da partícula 1 pela distribuição de Maxwell-Boltzmann,

$$f(E_1, t)_{MB} = e^{-E_1/T}, \quad (3.70)$$

o que corresponde a um erro menor que 5% quando quando $3T \lesssim m_1$ ¹⁸. Deste modo, no contexto de *freeze-out* da ME, esta aproximação é adequada quando tratamos de candidatos que desacoplam em $T > m_1/3$, o que é tipicamente atendido por aqueles que reproduzem a abundância observada no modelo estudado nesse projeto.

A partir disso, como explicado em detalhe no apêndice B e na referência [55], obtêm-se

$$\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{11 \rightarrow 23} = \frac{x}{8m_1^4 m_\chi \mathbf{K}_2^2(m_1 x/m_\chi)} \int_{4m_1^2}^{\infty} \sigma [s - 4m_1^2] \sqrt{s} \mathbf{K}_1(\sqrt{s} x/m_\chi) ds, \quad (3.71)$$

onde \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 são, respectivamente, a primeira e segunda funções modificadas de Bessel e $x = m_\chi/T$.

Entretanto, como discutido no capítulo 6, processos tipo $1\ 2 \leftrightarrow 3\ 4$, onde 1 e 2 são partículas diferentes, também são importantes quando tratamos das aniquilações do DP, de modo que é necessário utilizar uma generalização da equação (3.71).

Tal generalização, que, analogamente, aproxima as distribuições de equilíbrio das partículas 1 e 2 pela distribuição de Maxwell-Boltzmann, é escrita como

$$\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{12 \rightarrow 34} = \frac{x}{8m_\chi m_1^2 m_2^2 \mathbf{K}_2(m_1 x/m_\chi) \mathbf{K}_2(m_2 x/m_\chi)} \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} \sigma_{12 \rightarrow 34} \frac{\mathbf{K}_1(x/m_\chi \sqrt{s})}{\sqrt{s}} [(s - m_1^2 + m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2] ds, \quad (3.72)$$

de acordo com a discussão feita no apêndice B e concordando o resultado apresentado em [49].

Por fim, a expressão para $\langle \Gamma_{1 \rightarrow 23} \rangle$, obtida com a mesma aproximação e também discutida no apêndice B, é apresentada em [57], sendo escrita como

$$\langle \Gamma_{1 \rightarrow 23} \rangle = \frac{\mathbf{K}_1(m_1 x/m_\chi)}{\mathbf{K}_2(m_1 x/m_\chi)} \Gamma_{1 \rightarrow 23}. \quad (3.73)$$

Assim, a partir das expressões apresentadas, podemos calcular $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$ numericamente, para diferentes processos, e podemos calcular $\langle \Gamma_{1 \rightarrow 23} \rangle$ apenas substituindo os valores de $\mathbf{K}_1(m_1 x/m_\chi)$ e $\mathbf{K}_2(m_1 x/m_\chi)$.

¹⁸Para fazer essa estimativa, calculamos o erro relativo, $(f(E_1, t)_{MB} - f(E_1, t)_{FD, BE}) * 100 / f(E_1, t)_{FD, BE}$, obtendo menos de 5% quando $E_1/T = 3$.

4 Equações de Boltzmann para o modelo de *Dark Photon*

Como discutido no capítulo 3, pode-se utilizar a equação de Boltzmann para calcular a evolução da abundância de uma determinada partícula. As reações a serem incluídas nesta equação, bem como as respectivas amplitudes de probabilidade, são definidas pelo modelo teórico utilizado.

O modelo teórico fornece essas informações através dos vértices de interação que ele apresenta e das respectivas regras de Feynman - no caso do modelo de DP, os vértices são aqueles listados na seção 2.2. A partir dos vértices, podemos identificar quais processos afetam a abundância de uma determinada partícula e calcular as seções de choque ou larguras de decaimento correspondentes. Para estes cálculos, utiliza-se o procedimento padrão de teoria quântica de campos, que pode ser encontrado, por exemplo, em [52–54].

No caso do modelo de DP estudado nesse projeto, de modo genérico¹⁹, temos 3 tipos de processos que afetam a abundância da ME,

$$\frac{dY_X}{dx} = \text{taxa } ME \leftrightarrow DP + \text{taxa } ME \leftrightarrow DP, MP + \text{taxa } ME \leftrightarrow MP, \quad (4.1)$$

onde, $ME \leftrightarrow DP$ representa aniquilações da ME em DPs, $ME \leftrightarrow DP, MP$ representa as aniquilações da ME em um DP e uma partícula do MP e $ME \leftrightarrow MP$ representa as aniquilações de ME apenas com partículas do MP. Analogamente, temos, para o DP,

$$\frac{dY_{Z_D}}{dx} = \text{taxa } DP \leftrightarrow ME + \text{taxa } DP \leftrightarrow MP, \quad (4.2)$$

onde $DP \leftrightarrow ME$ e $DP \leftrightarrow MP$ representam as aniquilações e decaimentos de DPs em, respectivamente, partículas de ME e partículas do MP. Devido à natureza fermiônica do candidato de ME, não temos aniquilações/decaimentos de DPs em uma partícula de ME e uma partícula do MP, $DP \leftrightarrow ME, MP$. Como a equação para a abundância da ME depende da abundância do DP e vice-versa, (4.1) e (4.2) constituem um sistema acoplado de equações de Boltzmann.

Entretanto, no contexto deste projeto, em que consideramos diferentes hierarquias de massa entre o DP e a ME, nem sempre é necessário resolver este sistema acoplado. Sabendo que, negligenciando o potencial químico, a densidade numérica de equilíbrio de partículas não-relativísticas é dada por [23]

$$n_i = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp[-m_i/T], \quad (4.3)$$

podemos concluir que, enquanto $T < m_{Z_D}$, $m_{Z_D} > m_X$ e as duas espécies forem mantidas em equilíbrio, o DP será menos abundante que a ME. O fato de o DP ter uma abundância de equilíbrio menor que a da ME, neste regime, indica que ele tenderá a se desacoplar do plasma primeiro. Contudo, dado que o DP é uma partícula instável, sua abundância não irá a se congelar

¹⁹Considerando apenas os processos a *tree-level* e com 1 ou 2 partículas no estado final.

após o desacoplamento, sendo, ao invés disso, exponencialmente suprimida.

Assim, pode-se entender que, quando a massa do DP é expressivamente maior que a da ME, os processos do tipo $DP \rightarrow ME$ e $DP, MP \rightarrow ME$ não serão importantes em torno da época do desacoplamento da ME, dada a supressão da população de DPs em $T < m_\chi < m_{Z_D}$.

Além disso, quando $m_{Z_D} > m_\chi$, os processos opostos, $ME \rightarrow DP$ e $ME \rightarrow DP, MP$ se tornam cinematicamente desfavorecidos em $T \approx m_\chi$ (ou até impedidos, dependendo de quão maior que m_χ é m_{Z_D}).

Deste modo, concluímos que quanto maior a hierarquia $h = m_{Z_D}/m_\chi$, menor será a influência da presença do DP no plasma sobre a abundância de ME. Isto porque, quando h é grande, na prática, os processos $ME \leftrightarrow DP$ e $ME \leftrightarrow DP, MP$ só ocorrem significativamente enquanto $T > m_\chi$ e a ME permanece interagindo com as partículas do MP em uma taxa suficiente para manter sua distribuição de equilíbrio.

Assim, decidimos utilizar a simplificação de desconsiderar a abundância de DPs no plasma para $h \geq 3$, o que corresponde a, no máximo, $T \approx m_{Z_D}/30$ para a temperatura de *freeze-out* da ME (estimada em $T \approx m_\chi/10$). Essa simplificação também é feita em [60], considerando genericamente $m_\chi < m_{Z_D}$. Neste regime, foi utilizada para calcular a abundância de relíquia da ME apenas a equação (4.1), reescrita como

$$\frac{dY_\chi}{dx} = \text{taxa } ME \leftrightarrow MP. \quad (4.4)$$

Complementarmente, focamos o estudo do impacto da presença do DP no plasma sobre o processo de *freeze-out* da ME para hierarquias pequenas, $1 \leq h < 3$. Isso nos aproxima de um caso conhecido na literatura como *Forbidden Dark Matter* [61]. Entretanto, nos propomos a investigar este regime sem introduzir novas partículas no setor escuro e sem supor que o DP segue uma distribuição de equilíbrio. Assim, de fato é necessário resolver o sistema de equações e dado por (4.1) e (4.2) para calcular a evolução das abundâncias do DP e da ME.

4.1 Calculando $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$ numericamente

Depois de definir quais processos serão incluídos na equação de Boltzmann e calcular as respectivas seções de choque ou larguras de decaimento, o próximo passo é calcular as médias térmicas das seções de choque, $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$, numericamente. Nesta seção, vamos discutir brevemente as dificuldades e soluções encontradas para fazer este cálculo no software *Mathematica*.

Os testes iniciais para calcular $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$ haviam sido feitos com valores arbitrários de massa do DP e da ME, na ordem de GeV. Nesta escala de massas, foi possível calcular $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$ com as configurações automáticas da função *NIntegrate* do *Mathematica*. Entretanto, quando a escala de massas foi colocada na ordem de MeV, em acordo com o proposto neste projeto de mestrado, deparamo-nos com muitos avisos de erro no programa e valores irrisórios para $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$ ($\sim 10^{-100} \text{ GeV}^{-2}$), o que nos indicou a presença de problemas numéricos. Como será retomado mais adiante, esta tendência de maior instabilidade numérica quanto menor a massa da ME foi

observada de maneira consistente ao longo do desenvolvimento do projeto.

Na investigação sobre a razão deste problema, plotamos gráficos do tipo apresentado na figura 20, para estudar quais valores de limite superior de integração seriam adequados para calcular $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$ numericamente. Por simplicidade, consideramos inicialmente apenas a contribuição dos processos $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow f \bar{f}$. A figura 20 apresenta $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{\chi\bar{\chi} \rightarrow f\bar{f}}(LS)$, que corresponde a $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{\chi\bar{\chi} \rightarrow f\bar{f}}$ integrado entre $s = 4m_\chi^2$ e o valor s denominado “limite superior” (LS), ou seja,

$$\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{\chi\bar{\chi} \rightarrow f\bar{f}}(LS) = \frac{x}{8m_\chi^5 K_2^2(x)} \int_{4m_\chi^2}^{LS} \sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow f\bar{f}}(s - 4m_\chi^2) \sqrt{s} K_1(\sqrt{s} x/m_\chi) ds. \quad (4.5)$$

Na ausência de erros numéricos, esperamos que o valor de $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{\chi\bar{\chi} \rightarrow f\bar{f}}(LS)$ aumente, à medida que o valor de LS cresce, até um ponto em que o valor dessa integral congela, se mantendo constante enquanto aumentamos ainda mais LS . Esse congelamento deve ocorrer quando o intervalo de integração já cobre todos os valores de s nos quais o integrando da equação 4.5 é não nulo.

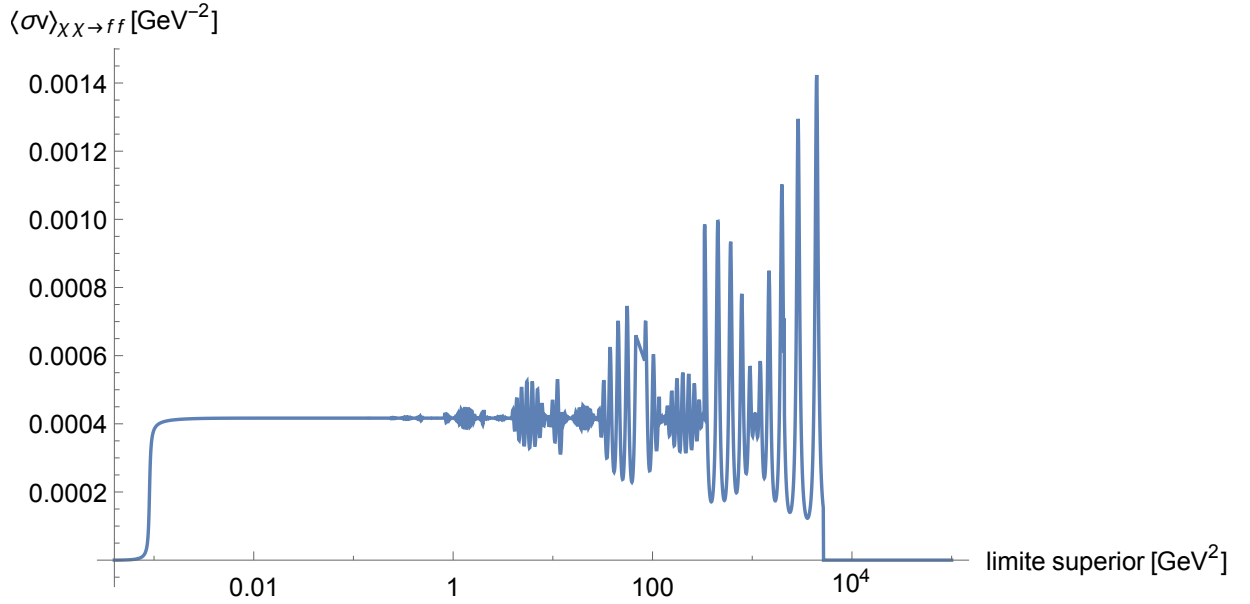


Figura 20: Instabilidade numérica apresentada para grandes valores no limite superior da integral apresentada na equação (4.5). Como exemplo, escolhemos os parâmetros $m_\chi = 10$ MeV, $m_{Z_D} = 30$ MeV, $\epsilon = 10^{-3}$, $g_D = 1$ e $x = 1$ para fazer este gráfico.

Entretanto, o que observamos na figura 20 é que, a partir de LS por volta de 1 GeV, o valor de $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{\chi\bar{\chi} \rightarrow f\bar{f}}$ começa a oscilar, se tornando cada vez mais instável até que, um pouco antes de $LS = 10^4$ GeV, o valor da integral despenca (o que nos retorna os valores ínfimos de $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{\chi\bar{\chi} \rightarrow f\bar{f}}$).

Depois de muita investigação, testando diferentes métodos de integração numérica disponíveis no Mathematica, este erro numérico foi controlado especificando-se o método `ExtrapolatingOscillatory` da função `NIntegrate`, juntamente com especificações de `PrecisionGoal`,

AccuracyGoal, MinRecursion e MaxRecursion. Estes valores foram determinados por tentativa e erro, através de três testes: (i) comparando-se, para diversos valores de massa, os valores retornados pelas integrações feitas com o valor da parte estável de figuras análogas à figura 20; (ii) comparando os gráficos de $\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle(x)$ obtidos com diferentes precisões; e (iii) monitorando o impacto de diferentes escolhas desses parâmetros na abundância final de ME. Nestes testes, nosso objetivo foi manter os erros da abundância final de ME inferiores a 10% de seu valor. Ao mesmo tempo, pretendemos garantir que o tempo para calcular $\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle$ fosse de poucos segundos ou menos, para garantir a viabilidade de repetir esse cálculo milhares de vezes.

Para as aniquilações $ME \leftrightarrow MP$, foram escolhidos os valores PrecisionGoal = 25, AccuracyGoal = 20, MinRecursion = 7 e MaxRecursion = 15, na maior parte do espaço de parâmetros estudado. No entanto, para $5 \text{ MeV} \leq m_\chi \lesssim 20 \text{ MeV}$, foi necessário ajustar o MinRecursion para 10, reiterando que menores valores de m_χ resultam em seções de choque mediadas na temperatura mais instáveis numericamente. Para $m_\chi < 5 \text{ MeV}$ não conseguimos encontrar um método que conseguisse calcular $\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle$ de modo eficiente. Por isso, trabalhamos apenas com m_χ a partir de 5 MeV.

Quando consideramos as aniquilações que envolvem o DP, em geral, mantivemos os mesmos parâmetros, apenas trocando o AccuracyGoal para 25. Entretanto, o cálculo de $\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle$ é mais complexo para algumas destas aniquilações, como discutido na seção 6.4.

Por fim, para a otimização do programa, aproximamos $\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle(x)$ por uma interpolação, $\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle_{\text{Interpolada}}(x)$. Para que essa otimização seja eficiente, foi importante estudar em quantos valores de x é necessário calcular $\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle(x)$ para que a interpolação seja uma boa aproximação. No caso em que consideramos apenas $ME \leftrightarrow MP$, em geral, observamos que cerca de 25 cálculos de $\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle(x)$, para x entre 1 e 200, é uma escolha adequada para obter a abundância final de ME com erro inferior a 10%. Entretanto, para $m_\chi \lesssim 20 \text{ MeV}$, se mostrou necessário aumentar o número de pontos para 250.

Na figura 21, apresentamos uma comparação para ilustrar a diferença entre os valores obtidos para $\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle$ quando especificamos o método de integração e parâmetros de precisão e os valores obtidos sem esta especificação, para a combinação de parâmetros do modelo $m_\chi = 10 \text{ MeV}$, $m_{Z_D} = 30 \text{ MeV}$, $\epsilon = 10^{-3}$ e $g_D = 1$. A curva $\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle_{\chi\chi\rightarrow ff-AUTO}$ foi obtida sem nenhuma especificação de método de integração ou parâmetros de precisão. Por outro lado, a curva $\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle_{\chi\chi\rightarrow ff-ESP}$ foi obtida especificando método de integração numérica `ExtrapolatingOscillatory` e os parâmetros de precisão PrecisionGoal = 25, AccuracyGoal = 20, MinRecursion = 7 e MaxRecursion = 15.

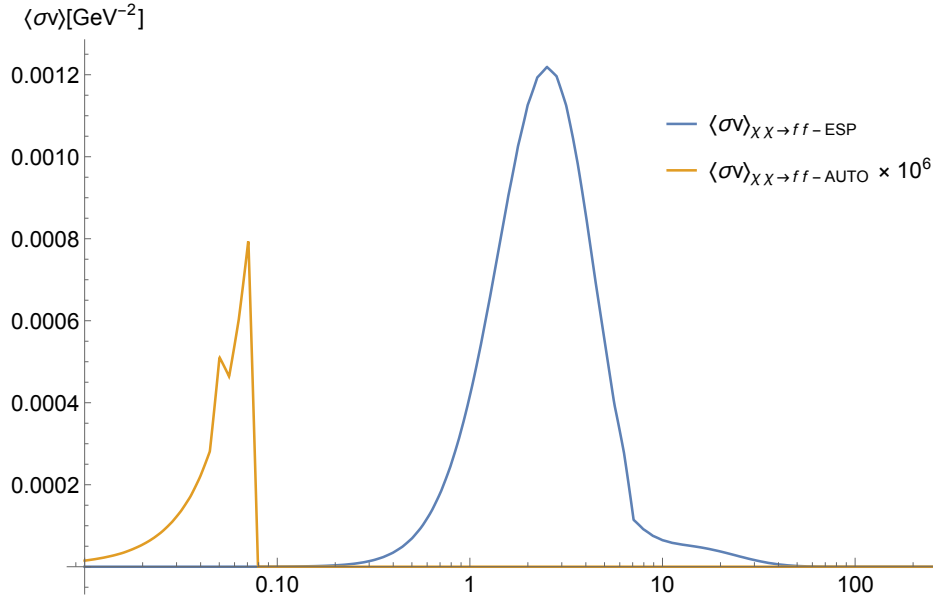


Figura 21: Comparação entre os métodos de integração para $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$, para $m_\chi = 10 \text{ MeV}$, $m_{Z_D} = 30 \text{ MeV}$, $\epsilon = 10^{-3}$ e $g_D = 1$. A curva $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{\chi\chi \rightarrow ff} - \text{AUTO} \times 10^6$ foi obtida a partir do método de integração automático do Mathematica. A curva $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{\chi\chi \rightarrow ff} - \text{ESP}$ foi obtida especificando o método de integração numérica `ExtrapolateTingOscillatory` e os parâmetros de precisão `PrecisionGoal = 25`, `AccuracyGoal = 20`, `MinRecursion = 7` e `MaxRecursion = 15`.

Observando a figura 21 e salientando que a curva correspondente a $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{\chi\chi \rightarrow ff} - \text{AUTO}$ foi multiplicada por 10^6 para ser visível neste gráfico, é nítido que a especificação do método numérico e dos parâmetros de precisão foram fundamentais para calcular $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle(x)$ adequadamente.

4.2 Resolvendo a equação de Boltzmann numericamente

Nos primeiros testes de resolução da equação de Boltzmann, quando levamos em conta apenas os processos $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow f \bar{f}$, foi possível observar a presença de instabilidade numérica para valores de $\epsilon \gtrsim 10^{-3}$.

Tal instabilidade se apresentou quando utilizamos a função `NDSolve` do software Mathematica sem nenhuma especificação de método ou de precisão/acurácia. Podemos observar esse problema numérico na figura 22, no comportamento da curva para $\epsilon = 10^{-3}$, a qual apresenta um comportamento muito diverso do esperado para uma curva de *freeze-out*, cuja forma é semelhante ao apresentado pela curva de $\epsilon = 10^{-7}$.

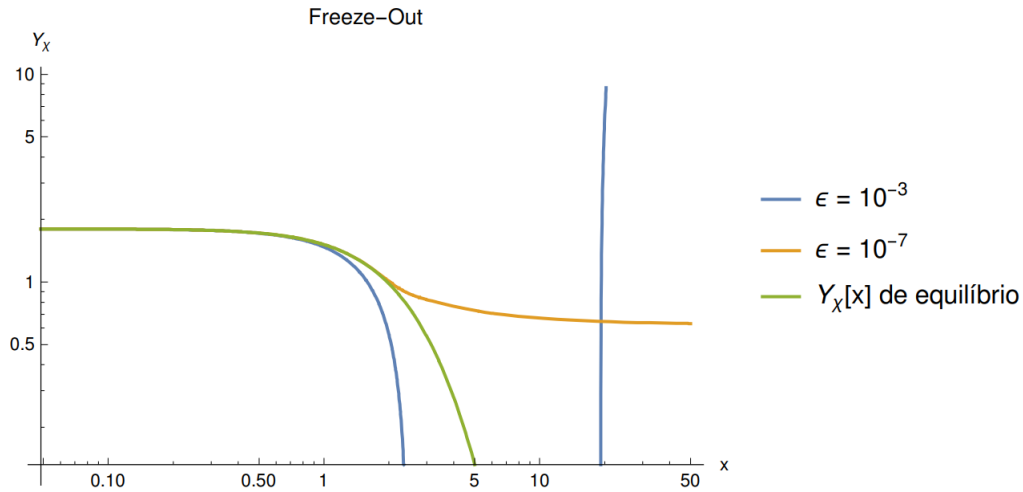


Figura 22: Exemplo de erro numérico na equação de Boltzmann.

Considerando os processos $ME \leftrightarrow MP$, esse problema foi resolvido quando especificamos o método de solução da equação diferencial como `StiffnessSwitching` e escolhemos os valores `AccuracyGoal = 13` e `PrecisionGoal=13`. Para fazer estas escolhas, foram necessários diversos testes, para avaliar quais valores de precisão e acurácia fornecem um erro aceitável na abundância final de ME (menor que 10%), com a equação de Boltzmann sendo resolvida dentro de um tempo viável (de alguns segundos). A resolução da equação de Boltzmann com os valores mais altos de precisão testados demoravam até mais de uma hora para serem feitos pelo computador.

Ainda, para evitar o gasto de tempo calculando $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$ e resolvendo a equação de Boltzmann em um intervalo de x desnecessariamente grande, foram feitos mais testes, para investigar: (i) quais são os valores de x adequados para impor a condição inicial de que a ME está em equilíbrio com o MP, denominados x_I ; (ii) quais valores de x cujas abundâncias associadas já podem ser consideradas a abundância de relíquia de ME, denominados x_F . Obtivemos que, considerando os processos $ME \leftrightarrow MP$, os valores $x_I = 1$ e $x_F = 200$ são adequados para obter a abundância de ME com erro inferior a 10%

4.3 Varrendo o espaço de parâmetros

Como discutido nos capítulos 1 e 2, o modelo de DP apresenta apenas 4 parâmetros livres: ϵ , m_χ , m_{Z_D} e g_D . Portanto, dados os valores destes parâmetros, podemos calcular todas as seções de choque e larguras de decaimento necessárias para resolver as equações de Boltzmann para o DP e para a ME.

Assim, fixando $g_D = 1$ e uma hierarquia $h = m_{Z_D}/m_\chi$, é possível obter a abundância de ME que corresponde a cada ponto no plano ϵ vs. m_χ . Entretanto, o cálculo da abundância de relíquia da ME é custoso computacionalmente, correspondendo a uma demora média de cerca

de 2 minutos para cada ponto no espaço de parâmetros. Deste modo, optamos por não calcular a abundância $\Omega(\epsilon, m_\chi)$ para uma grade arbitrária, com muitas combinações de m_χ e ϵ , mas utilizamos um algoritmo que foca na região em torno da curva de nível que satisfaz $\Omega(\epsilon, m_\chi) = \Omega_c$, onde Ω_c é a abundância observada de ME [2].

Para escrever tal algoritmo, partimos de duas ideias principais. A primeira delas se baseia na expectativa de que os pares de ϵ e m_χ que reproduzem $\Omega(\epsilon, m_\chi) = \Omega_c$ devem se distribuir ao longo de uma curva contínua no plano ϵ vs. m_χ . Com isso, ao buscarmos uma lista com N pares do tipo (ϵ_n, m_{χ_n}) , que satisfaçam a abundância observada, supomos que o melhor palpite inicial para ϵ_n , denominado $\epsilon_{n,0}$, deve ser ϵ_{n-1} .

A segunda ideia é que, fixados m_χ , h e g_D , quanto *maior* o valor de ϵ , por mais tempo a ME tende a ficar em equilíbrio com o MP e *menor* será a previsão de sua abundância de relíquia, $\Omega(\epsilon, m_\chi)$ (como discutido na seção 3.7). Portanto, se o chute inicial $\epsilon_{n,0} = \epsilon_{n-1}$ corresponde a uma abundância *maior* que Ω_c , o algoritmo foi escrito para testar valores cada vez maiores de ϵ , até que encontre um que corresponda a uma abundância menor que Ω_c , o qual chamamos de ϵ_{+n} . Deste modo, a estimativa final do valor de ϵ_n será a média entre ϵ_{+n} e o último valor de ϵ calculado antes dele. No caso oposto, em que o chute inicial $\epsilon_{n,0} = \epsilon_{n-1}$ corresponde a uma abundância *menor* que Ω_c , o programa testa valores cada vez menores ϵ , repetindo o raciocínio anterior.

Por fim, é necessário variar ϵ e m_χ com passos adequados, que correspondam a uma resolução suficiente para delinear a curva de nível $\Omega(\epsilon, m_\chi) = \Omega_c$. Usualmente, na literatura, as curvas de nível e limites experimentais no plano ϵ vs. m_χ (ou outras combinações dos parâmetros deste modelo) são apresentados em escala logarítmica. Por isso, escolhemos passos logarítmicos para variar ϵ e m_χ durante a varredura do espaço de parâmetros. Os valores de massa foram variados de acordo com $m_{\chi_n} = 10^{\text{Log}_{10}(m_{\chi_{n-1}})+0.023}$, o que corresponde a 100 valores de massa no intervalo 5 MeV - 1 GeV. Fixado um valor de massa, m_{χ_n} , para buscar o correspondente ϵ_n , variamos os valores de ϵ testados de acordo com $\epsilon_{n,i} = 10^{\text{Log}_{10}(\epsilon_{n,i-1})+0.02}$, onde o índice i indica o i -ésimo valor testado para ϵ_n . Esta variação de $\epsilon_{n,i}$ corresponde a uma resolução de cerca de 100 pontos no intervalo de valores de ϵ coberto por uma curva de nível $\Omega(\epsilon, m_\chi) = \Omega_c$ com hierarquia fixa.

Um notebook do Mathematica com o código deste algoritmo, dos métodos de integração numérica para $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$ e da resolução da equação de Boltzmann são disponibilizados [neste endereço](https://github.com/flimatos/notebooks_dissertacao)²⁰.

²⁰Caso haja problemas de acesso com o link, pode-se usar diretamente o endereço https://github.com/flimatos/notebooks_dissertacao no navegador.

5 Regime $h \geq 3$

Neste capítulo, são discutidos os resultados para o regime de hierarquias $h = m_{Z_D}/m_\chi \geq 3$. Mais precisamente, consideramos as hierarquias $h = 3, 5, 10, 20, 50, 100$. Partimos da discussão sobre os processos que afetam a abundância de ME neste regime, passando pela escrita da correspondente equação de Boltzmann. Por fim, abordamos as curvas de nível $\Omega(\epsilon, m_\chi) = \Omega_c$, obtidas para as diferentes hierarquias, e como elas são restringidas pelos limites experimentais.

5.1 Processos que afetam a abundância da ME neste regime

Como discutido no capítulo 4, no regime $h \geq 3$ consideramos que apenas processos do tipo $ME \leftrightarrow MP$ afetam a abundância de ME. Lembramos também que, neste projeto, são levados em conta apenas processos a *tree-level* e com duas ou menos partículas no estado final/inicial. Neste contexto, a partir dos vértices apresentados na seção 2.2, inferimos que as reações que podem afetar a abundância de ME são: $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow Z$, $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow Z Z$, $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow W^+ W^-$, $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow Z h$ e $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow f \bar{f}$.

Entretanto, dado que o intervalo de massas de ME considerado neste projeto é de 5 MeV a 1 GeV e as massas de Z , h e W^\pm são da ordem de 100 GeV, sabemos que as aniquilações nessas partículas terão uma contribuição negligenciável na determinação da abundância de ME. Assim, apenas o processo $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow f \bar{f}$ contribui expressivamente. Esta afirmação se baseia no mesmo raciocínio apresentado no capítulo 4, para explicar porque negligenciamos a presença do DP no plasma quando $h \geq 3$. Porém, para fins didáticos, estudamos todas as aniquilações $\chi \chi \rightarrow MP MP$.

Os diagramas relevantes para estas aniquilações, bem como os respectivos gráficos σ vs. s (onde σ é a seção de choque e s é a bem conhecida variável de Mandelstam), são mostrados na seção 5.1.2. As expressões analíticas correspondentes são, em geral, muito longas, sendo pouco esclarecedor colocá-las no corpo da dissertação. Por isso, elas serão disponibilizadas [neste endereço](#)²¹.

Como pode ser visto na seção 5.1.2, boa parte dessas aniquilações tem um DP e um bóson Z como mediadores. Nestes casos, a seção de choque depende dos propagadores destes bósons, os quais, por sua vez, dependem de suas larguras de decaimento. Assim, para calcular as seções de choque dos processos citados, é necessário calcular as larguras de decaimento de Z_D e de Z . Esses cálculos serão discutidos na seção a seguir.

5.1.1 Larguras de decaimento

A largura de decaimento do DP, Γ_{Z_D} , foi calculada de maneira usual, de acordo com as regras de Feynman apresentadas na seção 2.2. Os decaimentos possíveis para o DP são $Z_D \rightarrow \chi \bar{\chi}$,

²¹Caso haja problemas de acesso com o link, pode-se usar diretamente o endereço https://github.com/flimatos/notebooks_dissertacao no navegador.

$Z_D \rightarrow f \bar{f}$, $Z_D \rightarrow W^+ W^-$ e $Z_D \rightarrow h Z$. A expressão analítica para Γ_{Z_D} também está disponível [neste endereço](#).

No caso do bóson Z , sua largura de decaimento total é medida experimentalmente, assim como sua largura de decaimento parcial, para diversos processos. Entretanto, dado que o modelo de DP estudado implica em correções nos acoplamentos do bóson Z (veja seção 2.2), é necessário calcular o impacto previsto pelo modelo em sua largura de decaimento.

Para isso, tomando os valores das larguras parciais medidos como aqueles correspondentes aos acoplamentos previstos pelo MP, $\Gamma_{Z \rightarrow AB_{MP}}$, fizemos os redimensionamentos

$$\Gamma_{Z \rightarrow AB} = \frac{|\mathcal{M}(g_{Z,L}, g_{Z,R})|^2}{|\mathcal{M}(g_{Z,L_{MP}}, g_{Z,R_{MP}})|^2} \Gamma_{Z \rightarrow AB_{MP}}, \quad (5.1)$$

onde nos valem do fato de que nem o módulo quadrado da amplitude calculada com os novos acoplamentos, $|\mathcal{M}(g_{Z,L}, g_{Z,R})|^2$, nem o módulo quadrado da amplitude calculada com os acoplamentos do MP, $|\mathcal{M}(g_{Z,L_{MP}}, g_{Z,R_{MP}})|^2$, têm dependência angular, de modo que podem ser fatorados na expressão da largura de decaimento.

Consultamos os valores de $\Gamma_{Z \rightarrow AB_{MP}}$, assim como os valores das massas de todas as partículas do MP e constantes na referência [62]. Estes dados mostram que a largura de decaimento do bóson Z corresponde quase inteiramente aos decaimentos em léptons carregados, pares de quarks e estados invisíveis (que consideraremos sendo os neutrinos do MP). Com base nisso, consideraremos que estes são os únicos decaimentos de Z em partículas do MP.

Como os acoplamentos de cada férmion dependem de seus números quânticos (veja a figura 11), fizemos o procedimento de redimensionamento por agrupamentos de partículas semelhantes (quarks do tipo up, quarks do tipo down, léptons carregados e neutrinos). Para isso, negligenciamos os fatores $(m_f/m_Z)^2$, onde m_f é a massa do férmion considerado, cujo valor máximo é a massa do quark bottom²², que satisfaz $(m_{bottom}/m_Z)^2 = 2.1 \times 10^{-3}$.

Por fim, somamos a este valor redimensionado a largura de decaimento correspondente a $Z \rightarrow \chi \bar{\chi}$, calculada a partir da regra de Feynman apresentada na figura 10. Vale a pena frisar que as massas de Z e Z_D utilizadas para o cálculo das larguras de decaimento e das seções de choque são as massas físicas, apresentadas na equação (2.16).

5.1.2 Aniquilações $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow MP MP$

Nesta seção, mostramos os diagramas e os gráficos de todas as seções de choque relacionadas às aniquilações da ME em partículas do MP.

Aniquilações $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow f \bar{f}$

Os diagramas importantes para calcular a seção de choque de aniquilação de ME em férmions do MP são apresentados na figura 23.

²²Dado que a massa do quark top é maior que a massa do bóson Z , desconsideramos este quark nessa discussão.



Figura 23: Diagramas para a reação $\chi \bar{\chi} \rightarrow f \bar{f}$.

Tendo em mãos as regras de Feynman das figuras 10 e 11, pode-se obter diretamente as amplitudes relacionadas a estes diagramas e, conseqüentemente, a seção de choque para a reação $\chi \bar{\chi} \rightarrow f \bar{f}$.

O gráfico de $\sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow f\bar{f}}$, somada sobre todos os férmions do MP, é apresentado na figura 24. Para gerar esta figura, escolhemos, como exemplo, o conjunto de parâmetros $\{\epsilon = 10^{-3}, m_\chi = 1 \text{ GeV}, h = 10, g_D = 1\}$. Utilizamos esta mesma combinação de parâmetros para os gráficos das demais seções de choque, para facilitar a comparação entre eles.

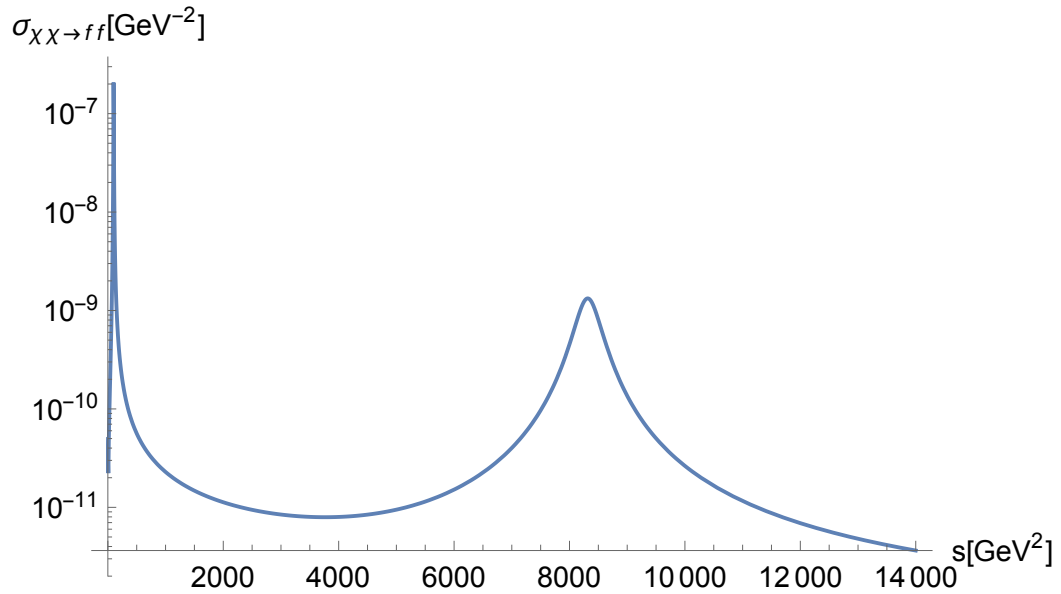


Figura 24: Seção de choque para o processo $\chi \bar{\chi} \rightarrow f \bar{f}$, somada sobre todos os férmions. Este gráfico foi feito fixando-se os parâmetros $\{\epsilon = 10^{-3}, m_\chi = 1 \text{ GeV}, h = 10, g_D = 1\}$.

Na figura 24, podemos visualizar os picos da seção de choque em $s = m_{Z_D}^2 = 100 \text{ GeV}^2$ e $s = m_Z^2 \approx 8300 \text{ GeV}^2$.

Aniquilações $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow W^+ W^-$

Os diagramas que contribuem para a amplitude de probabilidade de aniquilação da ME em W^+ e W^- são apresentados na figura 25.

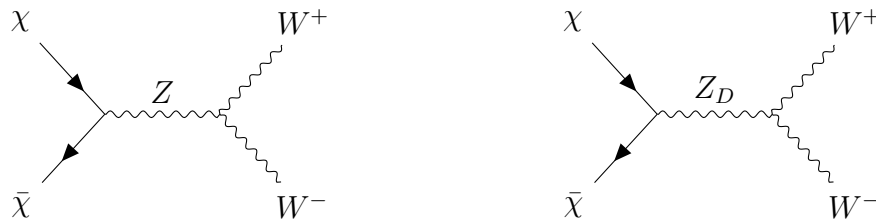


Figura 25: Diagramas para a reação $\chi \bar{\chi} \rightarrow W^+ W^-$.

A seção de choque calculada a partir destes diagramas, que foram construídos a partir das interações apresentadas nas figuras 10 e 13, é graficamente apresentada na figura 26.

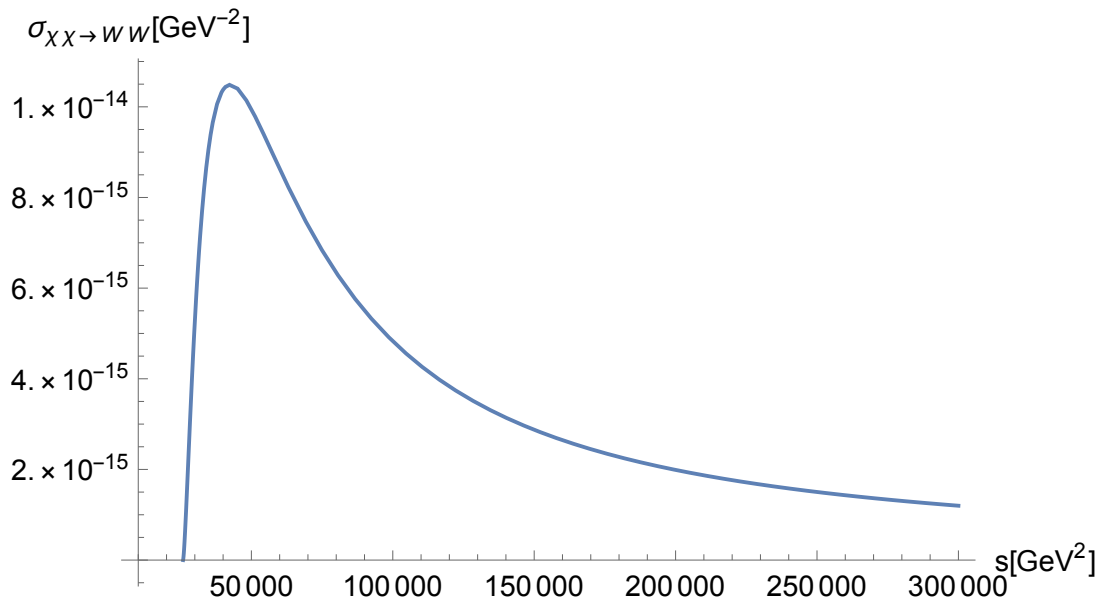


Figura 26: Seção de choque para o processo $\chi \bar{\chi} \rightarrow W^+ W^-$. Este gráfico foi feito fixando-se os parâmetros $\{\epsilon = 10^{-3}, m_\chi = 1 \text{ GeV}, h = 10, g_D = 1\}$.

Aniquilações $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow Z Z$

Para aniquilações de pares partícula-antipartícula de ME que têm como estado final dois bósons Z , os digramas relevantes são aqueles apresentados na figura 27.



Figura 27: Diagramas para as reações $\chi \bar{\chi} \rightarrow Z Z$. As indicações (k_1) e (k_2) nos bósons Z representam seus momentos. A troca de posição entre $Z(k_1)$ e $Z(k_2)$ adiciona um diagrama possível para o processo, o que é levado em conta no cálculo de $\sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow ZZ}$.

O gráfico da seção de choque obtida a partir dos diagramas apresentados na figura 27 e das regras de Feynman das figuras 10 e 13 é mostrado na figura 28.

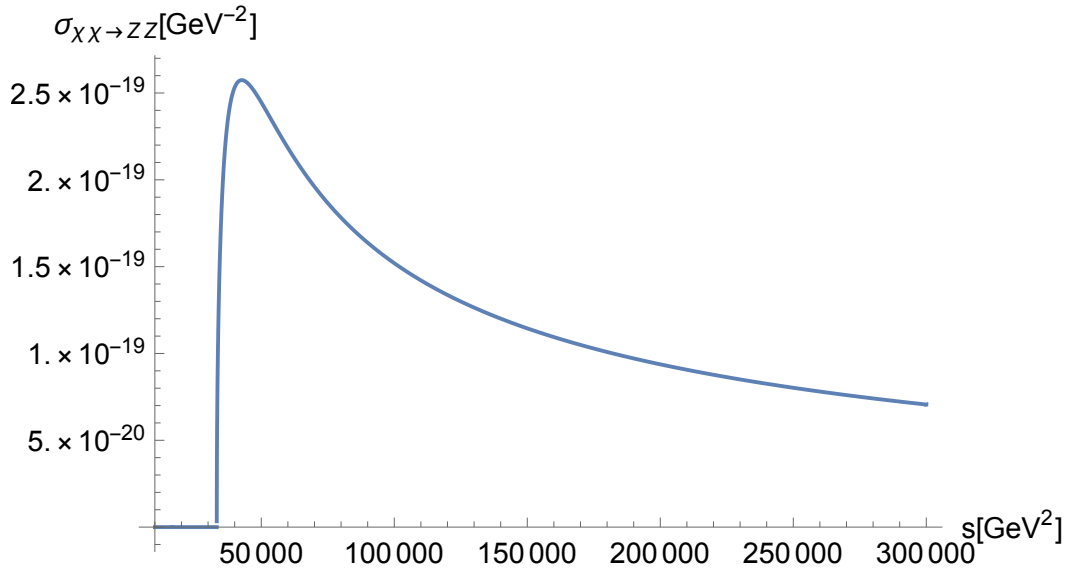


Figura 28: Seção de choque para $\chi \bar{\chi} \rightarrow Z Z$. Este gráfico foi feito fixando-se os parâmetros $\{\epsilon = 10^{-3}, m_\chi = 1 \text{ GeV}, h = 10, g_D = 1\}$.

Aniquilações $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow Z h$

Para a aniquilação da ME em h e Z , os diagramas a serem levados em conta são aqueles mostrados na figura 29.



Figura 29: Diagramas para a reação $\chi \bar{\chi} \rightarrow Z h$.

A partir destes diagramas e das regras de Feynman das figuras 10 e 15, podemos escrever a expressão para a seção de choque $\sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow Z h}$, cujo gráfico é apresentado na figura 30

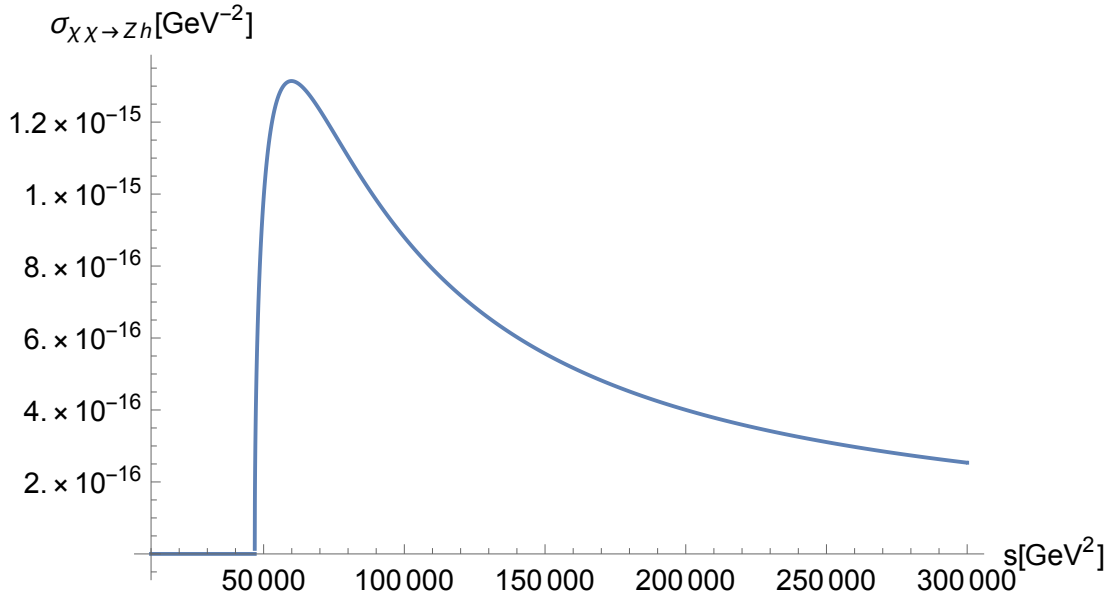


Figura 30: Seção da choque da reação $\chi\bar{\chi} \rightarrow Zh$. Este gráfico foi feito fixando-se os parâmetros $\{\epsilon = 10^{-3}, m_\chi = 1 \text{ GeV}, h = 10, g_D = 1\}$

5.2 Equação de Boltzmann para ME

Sabendo quais são os processos que podem afetar a abundância da ME, podemos finalmente escrever a devida equação de Boltzmann. Para calcular a abundância total $n_\chi \equiv n_{\text{partículas}\chi} + n_{\text{anti-partículas}\chi}$, é necessário utilizar as equações deduzidas no capítulo 3 para partículas *não-indênticas*.

Assim, utilizamos a equação (3.39) para a contribuição do processo $\chi\bar{\chi} \leftrightarrow Z$. Já para as contribuições dos processos $\chi\bar{\chi} \leftrightarrow f\bar{f}$, $\chi\bar{\chi} \leftrightarrow W^+W^-$, $\chi\bar{\chi} \leftrightarrow ZZ$ e $\chi\bar{\chi} \leftrightarrow Zh$, utilizamos a equação (3.24), obtendo

$$\dot{n}_\chi + 3Hn_\chi = \frac{\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{ME-MP}}{2} [(n_\chi^{eq})^2 - n_\chi^2] + 2 \langle \Gamma_{Z \rightarrow \chi\bar{\chi}} \rangle n_Z^{eq} \left[1 - \frac{n_\chi^2}{(n_\chi^{eq})^2} \right], \quad (5.2)$$

onde assumimos que todas as partículas do MP seguem suas distribuições de equilíbrio e definimos, a partir da equação 3.71,

$$\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{ME-MP} = \frac{x}{8m_\chi^5 \mathbf{K}_2^2(x)} \int_{4m_\chi^2}^{\infty} [\sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow f\bar{f}} + \sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow W^+W^-} + \sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow ZZ} + \sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow Zh}] [s - 4m_\chi^2] \sqrt{s} \mathbf{K}_1(\sqrt{s} x/m_\chi) ds. \quad (5.3)$$

Lembrando que $Y_\chi = n_\chi/s$ e utilizando a relação (3.55), podemos, finalmente, escrever

$$\frac{dY_\chi}{dx} = \sqrt{\frac{\pi}{45 G}} \frac{m_\chi g_*^{1/2}(x)}{2 x^2} \left\{ \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{ME-MP} [(Y_\chi^{eq})^2 - Y_\chi^2] + 4 \langle \Gamma_{Z \rightarrow \chi \bar{\chi}} \rangle \frac{n_Z^{eq}}{s^2} \left[1 - \frac{Y_\chi^2}{(Y_\chi^{eq})^2} \right] \right\}, \quad (5.4)$$

onde $\langle \Gamma_{Z \rightarrow \chi \bar{\chi}} \rangle$ pode ser calculada a partir da expressão (3.73) e n_Z^{eq} segue a equação (4.3). Lembremos que, como discutido no capítulo 3.6, é necessário adicionar a contribuição das partículas do SE à evolução de $g_\rho(x)$ e $g_S(x)$. Entretanto, dado que no regime $h \geq 3$ assumimos que a abundância do DP é irrisória, adicionamos apenas a contribuição da ME.

5.3 Curvas de nível obtidas

Como discutido no capítulo 4, a partir da equação (5.4), é possível varrer o plano ϵ vs. m_χ em busca das combinações destes parâmetros que satisfazem $\Omega(\epsilon, m_\chi) = \Omega_c$. Fixando $g_D = 1$ e as hierarquias $h = 3, 5, 10, 13, 20, 50, 100$, obtivemos as curvas de nível apresentadas na figura 31.

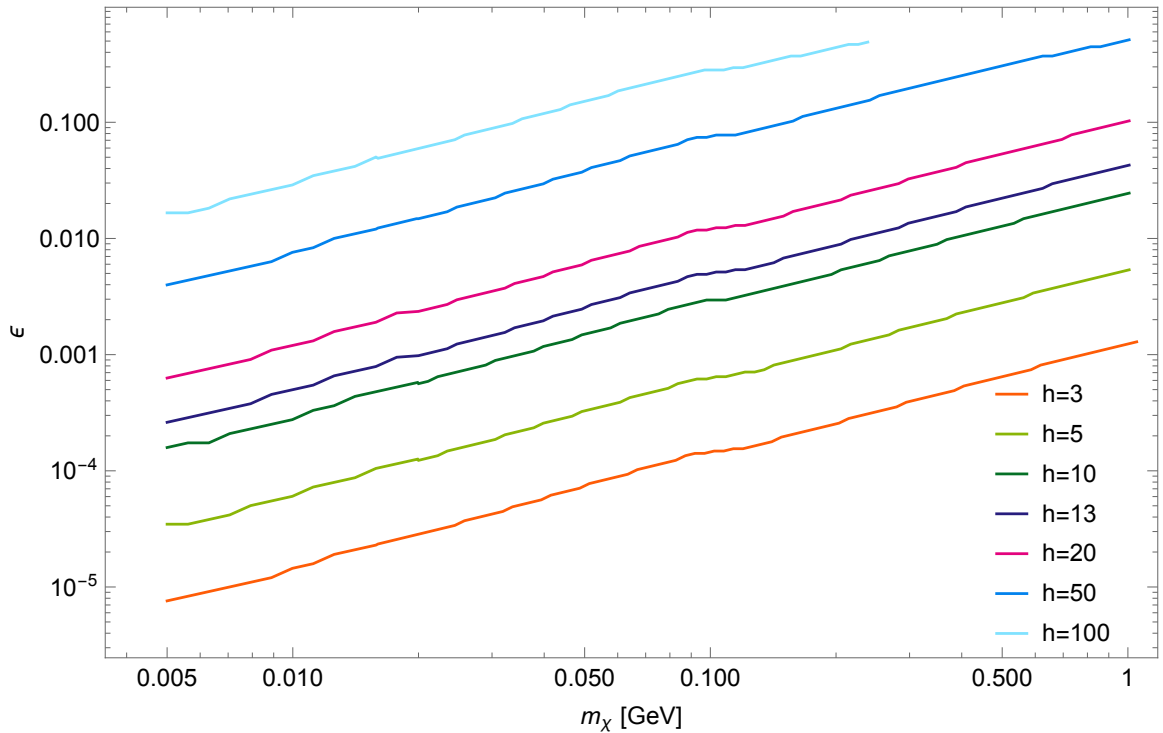


Figura 31: Curvas de nível $\Omega(\epsilon, m_\chi) = \Omega_c$ para diferentes hierarquias $h = m_{Z_D}/m_\chi$, fixando $g_D = 1$.

No caso $h = 100$, optamos por interromper a curva em $\epsilon = 0.5$, porque sabíamos que $\epsilon \geq 0.5$ estava certamente excluído experimentalmente, até mesmo para m_{Z_D} da ordem de GeV. Não apresentamos os limites experimentais na figura 31 porque os limites disponíveis para esse modelo se apresentam no plano ϵ vs. m_{Z_D} (veja figura 32). Deste modo, quando traduzimos tais

limites para o plano ϵ vs. m_χ , obtemos um conjunto de curvas diferentes para cada hierarquia, o que dificultaria muito a visualização neste gráfico.

Entretando, a figura 31 já indica que a escolha de diferentes hierarquias tem um efeito relevante sobre as curvas de nível. Por exemplo, a curva para $h = 5$ apresenta valores de ϵ cerca de uma ordem de grandeza acima daqueles apresentados pela curva $h = 3$, a qual, em geral, é tomada arbitrariamente como referência em estudos sobre modelos de DP que focam no regime $m_{Z_D} > m_\chi$.

Ainda, podemos observar que à medida que aumenta-se o valor de $h = m_{Z_D}/m_\chi$, são necessários valores de ϵ cada vez maiores para reproduzir a abundância observada de ME. Este comportamento é consistente com a discussão feita na seção 1.2 (veja a equação (1.40)), que indica que o aumento da massa do mediador de aniquilações do tipo $ME \leftrightarrow MP$ implica em menores valores da $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$ correspondente. Assim, à medida que aumenta-se h (e, conseqüentemente, m_{Z_D}), se faz necessário aumentar ϵ para manter $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{ME-MP}$ no valor que é consistente com a abundância observada de ME.

A figura 31 apresenta também um sutil decrescimento de todas as curvas de nível em $m_\chi \approx 105$ MeV, que é um valor próximo da massa do múon. Assim, entendemos que o motivo dessa diminuição nos valores de ϵ apresentados pode ter uma justificativa cinemática, dado que, quando $m_\chi > m_\mu$, a reação $(\chi \bar{\chi} \rightarrow \mu \bar{\mu})$ se torna possível em temperatura zero, provocando um aumento no valor total de $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{ME-MP}$, o qual pode ser compensado pela diminuição de ϵ .

Os limites experimentais atuais para um DP que decai principalmente em partículas fora do MP e que satisfaz $m_{Z_D} > 1$ MeV [9] são oriundos do detector BaBar [63], do experimento NA64 [64] e dos chamados *Electroweak Precision Tests* (EWPT) [12].

O detector BaBar é alocado em um colisor elétron-pósitron. A busca desse detector por DPs se baseia na expectativa da produção destas partículas através da reação $e^- e^+ \rightarrow A Z_D$, seguida do decaimento $Z_D \rightarrow$ estados invisíveis. A assinatura deste evento é a detecção de um único fóton de alta energia junto da detecção de um grande “desaparecimento” de momento e energia (que seriam carregados pelo DP, o qual escapa do detector).

Por sua vez, o experimento NA64 utiliza colisões de um feixe de elétrons de 100 GeV com um bloqueador de feixe ativo (*active beam dump*), que se trata de um calorímetro eletromagnético. Este experimento busca detectar DPs através de eventos de “desaparecimento” de energia.

Finalmente, os EWPT restringem os valores de ϵ com base na precisão com que as chamadas *Electroweak Precision Observables* (EWPOs) são medidas. Como discutido no capítulo 2, o modelo de DP prevê correções na massa do bóson Z e em seus acoplamentos, em relação à previsão do MP. Assim, é possível restringir o plano ϵ vs. m_{Z_D} impondo um limite superior no quanto as previsões do modelo de DP podem se desviar dos valores medidos. Entretanto, para evitar a reinterpretação dos desvios existentes entre os valores medidos e as previsões do MP, a concordância entre as previsões do modelo de DP e as observações é avaliada *em relação à concordância do MP com as observações*. Quantitativamente, a qualidade dos ajustes é avaliada através da quantidade estatística χ^2 e o limite imposto pode ser escrito como

$$\chi_{Z_D}^2 - \chi_{MP}^2 \lesssim 3.8, \quad (5.5)$$

onde $\chi_{Z_D}^2$ e χ_{MP}^2 correspondem aos valores de χ^2 dos ajustes feitos, respectivamente, a partir do modelo de DP e do MP.

Estes limites são apresentados na figura 32, sobrepostos às curvas de nível que satisfazem $\Omega(\epsilon, m_{Z_D}) = \Omega_c$, para m_χ no intervalo 5 MeV - 1 GeV. Nesta figura, podemos ver que, como mencionado no capítulo 1, os limites experimentais para DPs com massa da ordem de MeV são mais fortes que aqueles para ordem de GeV.

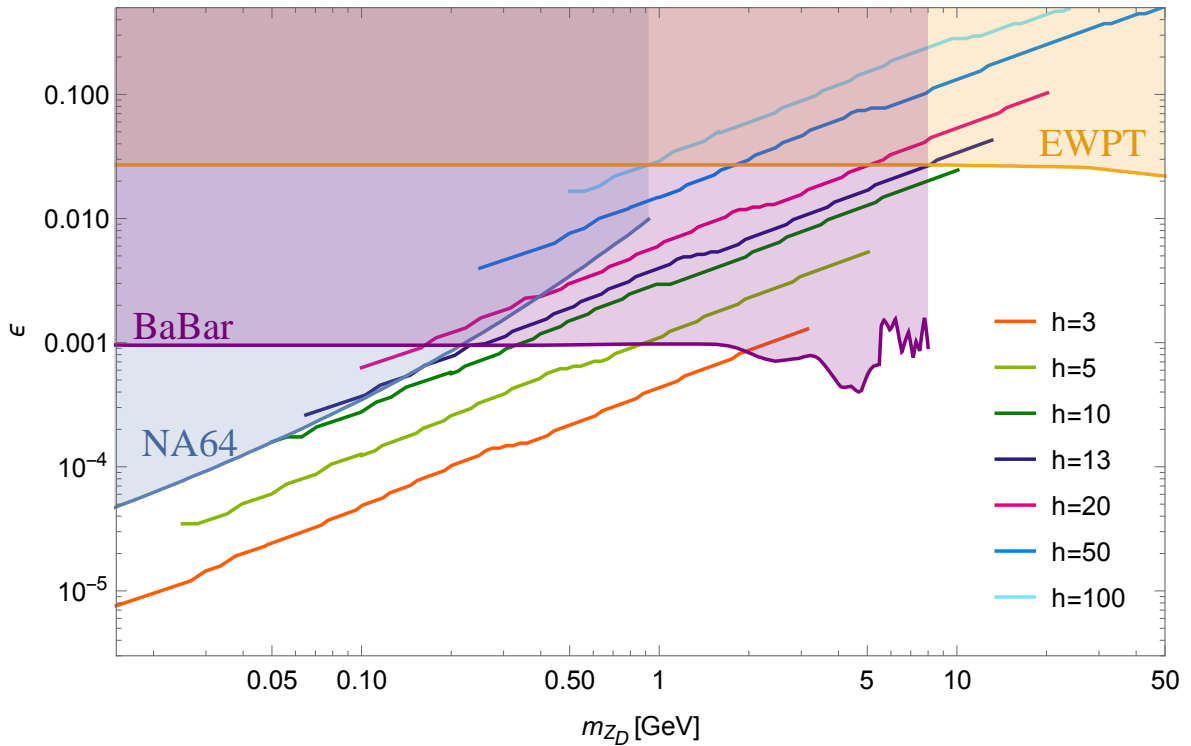


Figura 32: Limites experimentais vigentes no plano ϵ vs. m_{Z_D} , oriundos de BaBar [63], NA64 [64] e EWPT [12]. As linhas diagonais são as curvas de nível que indicam as combinações de ϵ e m_{Z_D} que fornecem $\Omega_\chi(\epsilon, m_{Z_D}) = \Omega_c$, fixando-se $g_D = 1$ e diferentes hierarquias $h = m_{Z_D}/m_\chi$.

Vemos claramente na figura 32 que, para m_χ no intervalo 5 MeV - 1 GeV, as curvas que correspondem às hierarquias $h = 100$, $h = 50$ e $h = 20$ estão completamente excluídas experimentalmente, dado que requerem altos valores de ϵ para reproduzir a abundância observada de ME. Enquanto isso, a curva correspondente a $h = 13$ se apresenta no limiar de estar completamente excluída, sendo viável apenas em um pequeno intervalo em torno de $m_{Z_D} \approx 0.2$ GeV. Deste modo, o comportamento apresentado pelas curvas de nível, as quais requerem valores de ϵ cada vez mais altos à medida que aumenta-se h , indica que o valor máximo permitido para a hierarquia $h = m_{Z_D}/m_\chi$ é levemente maior que 13.

Além disso, observamos que, independentemente da hierarquia fixada, a região do espaço de parâmetros viável para um DP mais pesado que 1 GeV é pequena, quando consideramos um

candidato de ME com massa da ordem de MeV. Dentre as curvas apresentadas, escapam aos limites experimentais apenas os restritos intervalos de 1-2 GeV, para $h = 3$, e 8-10 GeV, para $h = 10$.

Ainda, a partir do modo como estas curvas de nível se distribuem no plano, podemos inferir algumas informações gerais para diferentes intervalos de hierarquias, quando a massa de ME satisfaz $5 \text{ MeV} \leq m_\chi \leq 1 \text{ GeV}$. Para quaisquer hierarquias $5 < h < 13$, os possíveis valores viáveis de m_{Z_D} maiores que 1 GeV estão restringidos entre 8 e ~ 10 GeV, pelos limites do BaBar e de EWPT. Ainda, considerando qualquer hierarquia que satisfaça $h < 5$, podemos afirmar que o valor máximo possível de m_{Z_D} é menor que 3 GeV (considerando $m_\chi \leq 1 \text{ GeV}$).

Enquanto isso, as curvas que correspondem a $h = 3, 5$ e 10 se mostram parcialmente viáveis, de modo que, para $m_{Z_D} \lesssim 0.4 \text{ GeV}$, nenhuma destas curvas é afetada pelos limites experimentais.

Para visualização dos limites experimentais no plano ϵ vs. m_χ , escolhemos arbitrariamente as hierarquias $h = 3$ e $h = 10$ como exemplo. A curva de nível para a hierarquia $h = 3$, sobreposta aos limites experimentais, é apresentada na figura 33.

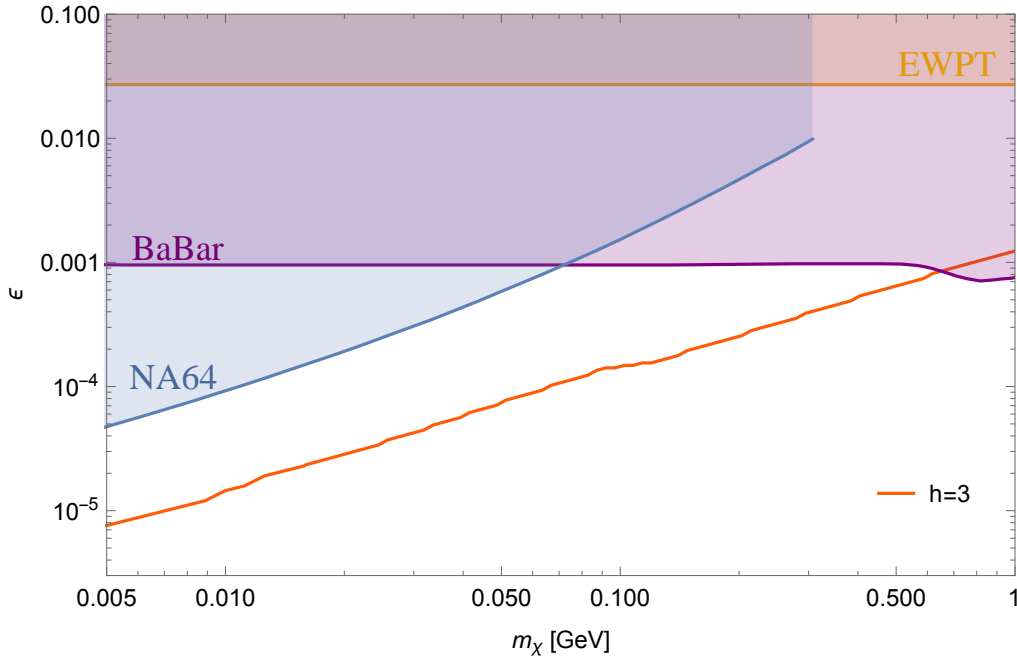


Figura 33: Limites experimentais vigentes no plano ϵ vs. m_χ , oriundos de BaBar [63], NA64 [64] e EWPT [12]. Os limites são sobrepostos à curva de nível $\Omega_\chi(\epsilon, m_\chi) = \Omega_c$, fixando-se $g_D = 1$ e $h = m_{Z_D}/m_\chi = 3$.

Analogamente, para a hierarquia $h = 10$, apresentamos a figura 34.

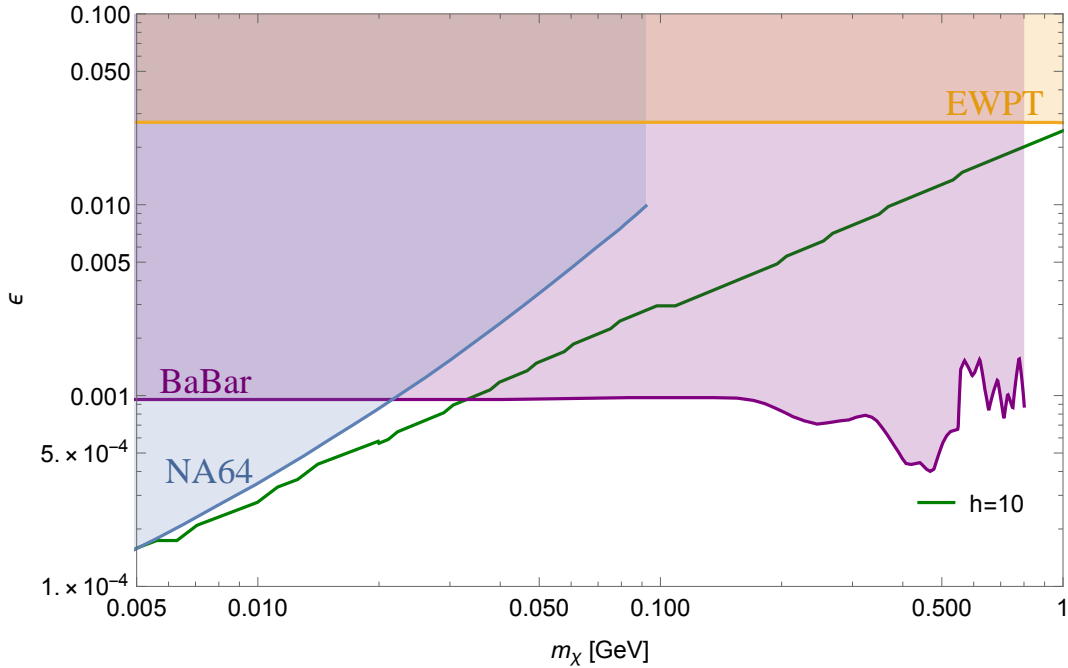


Figura 34: Limites experimentais vigentes no plano ϵ vs. m_χ , oriundos de BaBar [63], NA64 [64] e EWPT [12]. Os limites são sobrepostos à curva de nível $\Omega_\chi(\epsilon, m_\chi) = \Omega_c$, fixando-se $g_D = 1$ e $h = m_{Z_D}/m_\chi = 10$.

Por fim, salientamos que as curvas de nível apresentadas na figura 32 para $h = 3, 5, 10, 13$ e 20 não continuaram até $m_{Z_D} = 50$ apenas porque interrompemos a varredura do espaço de parâmetros em $m_\chi = 1$ GeV, em acordo com o intervalo de massas proposto inicialmente neste projeto.

Entretando, esperamos que o comportamento dessas curvas se mantenha regular, à medida que aumenta-se m_χ (e, conseqüentemente, m_{Z_D}), até que m_{Z_D} se aproxime da massa do bóson Z . Isto porque, quando $m_{Z_D} \approx m_Z$, a mistura de massas entre Z e Z_D se torna importante, podendo afetar as massas físicas e acoplamentos dessas partículas de maneira significativa. Além disso, quando $m_\chi \approx m_Z$ é possível que as populações de partículas mais pesadas (como Z , W^\pm e h) ainda sejam grandes o suficiente para influenciar o processo de *freeze-out* da ME.

Porém, no caso das hierarquias apresentadas, temos que o valor máximo de m_χ que corresponde a $m_{Z_D} = 50$ GeV é igual a $m_\chi = 50 \text{ GeV}/3 \ll m_Z$. Ainda, pode-se observar que a curva para $h = 50$ parece regular até $m_{Z_D} = 50$ GeV, indicando que esta massa de DP ainda é pequena o suficiente para os efeitos de mistura com Z não afetarem significativamente a regularidade das curvas de nível. Assim, apresentamos na figura 35, em linhas tracejadas, extrapolações analíticas para as curvas de nível correspondentes a $h = 3, 5, 10, 13$ e 20, até $m_{Z_D} = 50$ GeV.

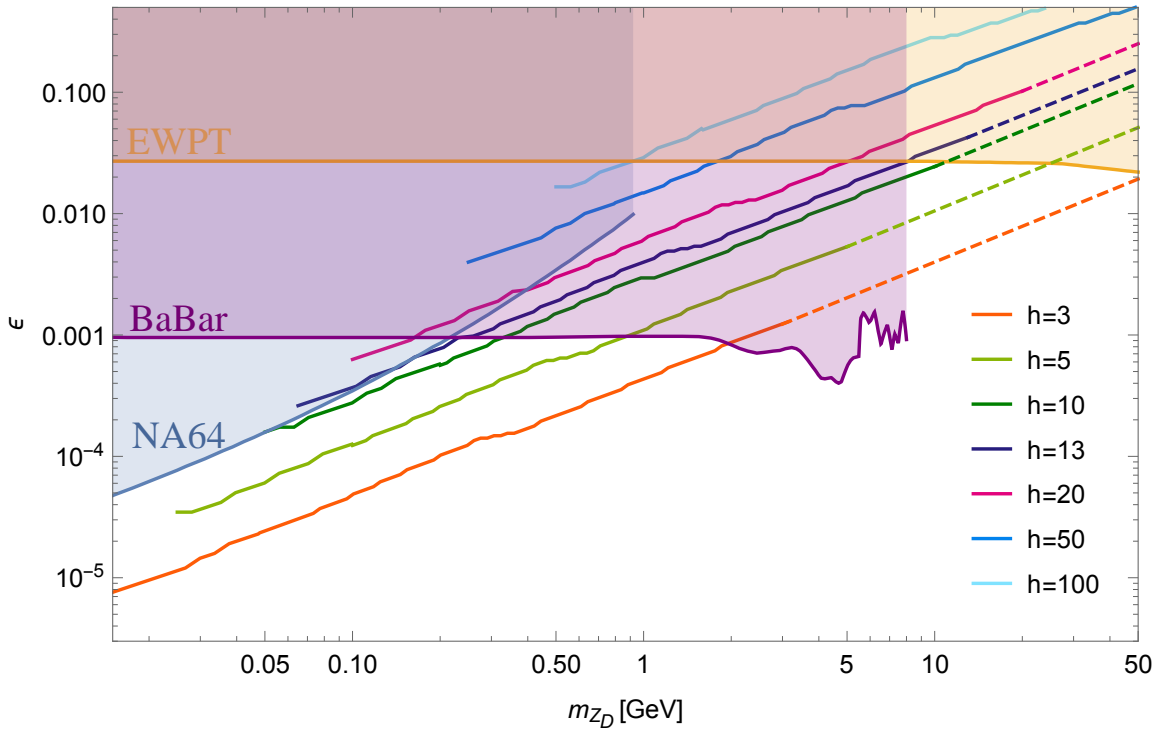


Figura 35: Limites experimentais vigentes no plano ϵ vs. m_{Z_D} , oriundos de BaBar [63], NA64 [64] e EWPT [12]. As linhas diagonais são as curvas de nível que indicam as combinações de ϵ e m_{Z_D} que fornecem $\Omega_\chi(\epsilon, m_{Z_D}) = \Omega_c$, fixando-se $g_D = 1$ e diferentes hierarquias $h = m_{Z_D}/m_\chi$. As linhas contínuas indicam os resultados numéricos, enquanto as linhas pontilhadas indicam as extrapolações analíticas desses resultados.

Através destas curvas de extrapolação, temos a indicação de que o intervalo de massas de DP entre 8 e 50 GeV é cada vez menos restringido à medida que considera-se hierarquias menores, ou, de modo equivalente, candidatos de ME mais pesados. Por exemplo, para a hierarquia $h = 3$, vemos que este intervalo, que corresponde aproximadamente a $2.7 \text{ GeV} \leq m_\chi \leq 16.7 \text{ GeV}$, não é afetado pelos limites experimentais. Enquanto isso, para a hierarquia $h = 10$, este intervalo corresponde a m_χ entre 0.8 GeV e 5 GeV e é significativamente restringido pelo limite de EWPT, sendo viável apenas o sub-intervalo $8 \text{ GeV} \lesssim m_{Z_D} \lesssim 10.5 \text{ GeV}$.

6 Regime $1 \leq h < 3$

Neste capítulo, discutimos o regime de hierarquias $1 \leq h < 3$. Como explicado no capítulo 4, para este intervalo de hierarquias, consideramos que, em $T \lesssim m_\chi$, a população de DPs no plasma primordial pode ser grande o suficiente para influenciar o processo de *freeze-out* da ME. Deste modo, para escrever explicitamente o sistema de equações constituído pelas equações esquemáticas (4.1) e (4.2), estudamos os processos que envolvem o DP e a ME, bem como os processos que envolvem o DP e as partículas do MP.

Porém, dado o intervalo de massas e hierarquias considerado, que corresponde a m_χ entre 5 MeV e 1 GeV e m_{Z_D} entre 5 MeV e 3 GeV, sabemos que os processos de desacoplamento da ME e do DP não serão influenciados por aniquilações em partículas do MP com massas da ordem de 100 GeV, como Z , h e W^\pm . Esta afirmação se baseia no mesmo raciocínio que nos motivou a desconsiderar as aniquilações da ME que envolvem o DP em $h \geq 3$, o qual é apresentado no capítulo 4.

Por exemplo, no caso da ME, as reações que podem ser desconsideradas são $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow Z Z_D$ e $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow Z_D h$, além daquelas discutidas na seção 5.1, que também envolvem partículas com massa da ordem 100 GeV, mas não envolvem o DP. Nas seções 6.1 e 6.2 discutimos, diretamente, apenas os processos cuja influência é importante em torno dos desacoplamentos da ME e do DP.

Assim como no capítulo anterior, apresentamos, no corpo da dissertação, os gráficos das seções de choque e os diagramas necessários para calculá-las, ao passo que disponibilizamos as expressões analíticas correspondentes [neste endereço](#).

Lembramos que as larguras de decaimento para Z e Z_D que foram utilizadas para calcular as seções de choque são aquelas discutidas na seção 5.1.1.

6.1 Processos que afetam a abundância da ME

Além dos processos apresentados no capítulo anterior, quando a população de DPs no plasma é grande o suficiente para influenciar a abundância da ME, deve-se levar em conta os processos $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow Z_D Z_D$ e $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow Z_D$.

A largura de decaimento correspondente ao processo $Z_D \rightarrow \chi \bar{\chi}$ pode ser calculada diretamente a partir da regra de Feynman apresentada na figura 10.

Para calcular a seção de choque $\sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow Z_D Z_D}$, foram consideramos os diagramas da figura 36.



Figura 36: Diagramas para as reações $\chi \bar{\chi} \rightarrow Z_D Z_D$. As indicações (k_1) e (k_2) nos DPs representam seus momentos. A troca de posição entre $Z_D(k_1)$ e $Z_D(k_2)$ adiciona um diagrama possível para o processo, o que é levado em conta no cálculo de $\sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow Z_D Z_D}$.

A partir destes diagramas e das regras de Feynman apresentadas nas figuras 10, obteve-se a seção de choque cujo gráfico é apresentado na figura 37

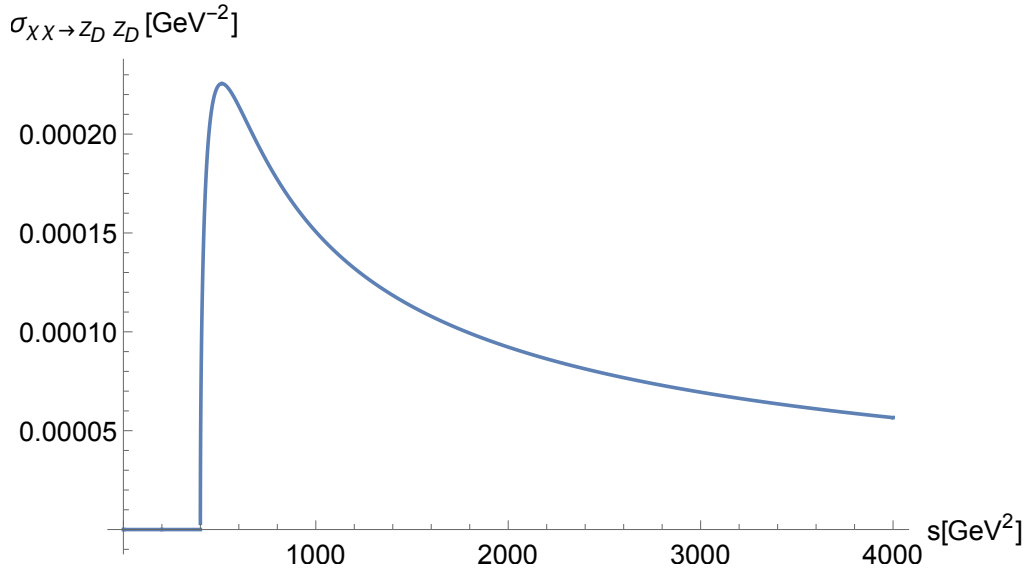


Figura 37: Seção de choque para $\chi \bar{\chi} \rightarrow Z_D Z_D$. Este gráfico foi feito fixando-se os parâmetros $\{\epsilon = 10^{-3}, m_\chi = 1 \text{ GeV}, h = 10, g_D = 1\}$.

6.2 Processos que afetam a abundância do DP

Nesta seção, discutimos os processos que, de acordo com o que foi discutido acima, são importantes para a determinação da abundância do DP quando $T \sim m_{Z_D}$. Assim como no caso da ME, são os vértices de interação apresentados na seção 2.2 que ditam quais são as aniquilações e decaimentos possíveis para o DP.

Estes vértices indicam que, entre os processos que afetam a abundância dos DPs, temos os decaimentos $Z_D \leftrightarrow \chi \bar{\chi}$ e $Z_D \leftrightarrow f \bar{f}$, cujas larguras de decaimento correspondentes podem ser calculadas diretamente a partir das regras de Feynman apresentadas nas figuras 10 e 11.

Além disso, a abundância do DP é afetada por aniquilações, cujos diagramas são apresentados abaixo, junto com os gráficos das seções de choque correspondentes.

Aniquilações $Z_D Z_D \leftrightarrow \chi \bar{\chi}$

Os diagramas necessários para calcular a seção de choque $\sigma_{Z_D Z_D \rightarrow \chi \bar{\chi}}$ são aqueles apresentados na figura 38.



Figura 38: Diagramas para a reação $Z_D Z_D \rightarrow \chi \bar{\chi}$. As indicações (k_1) e (k_2) nos DPs representam seus momentos. A troca de posição entre $Z_D(k_1)$ e $Z_D(k_2)$ adiciona um diagrama possível para o processo, o que é levado em conta no cálculo de $\sigma_{Z_D Z_D \rightarrow \chi \bar{\chi}}$.

Por sua vez, gráfico da seção de choque resultante para o processo $Z_D Z_D \leftrightarrow \chi \bar{\chi}$ é apresentado na figura 39.

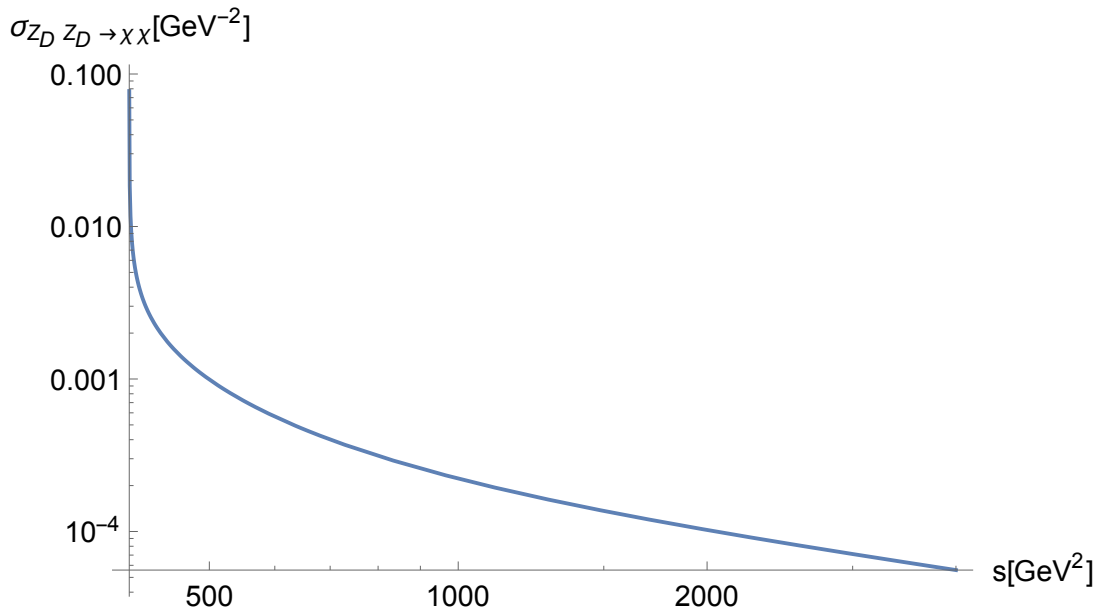


Figura 39: Seção de choque para o processo $Z_D Z_D \rightarrow \chi \bar{\chi}$. Este gráfico foi feito fixando-se os parâmetros $\{\epsilon = 10^{-3}, m_\chi = 1 \text{ GeV}, h = 10, g_D = 1\}$.

Aniquilações $Z_D Z_D \leftrightarrow f \bar{f}$

Os diagramas utilizados para calcular a seção de choque correspondente à aniquilação $Z_D Z_D \rightarrow f \bar{f}$ são apresentados na figura 40, onde f representa cada um dos férmions do MP²³.

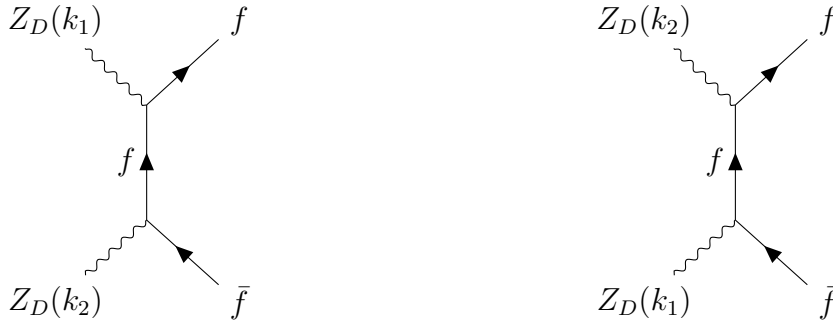


Figura 40: Diagramas para a reação $Z_D Z_D \rightarrow f \bar{f}$. As indicações (k_1) e (k_2) nos DPs representam seus momentos. A troca de posição entre $Z_D(k_1)$ e $Z_D(k_2)$ adiciona um diagrama possível para o processo, o que é levado em conta no cálculo de $\sigma_{Z_D Z_D \rightarrow f \bar{f}}$.

A seção de choque correspondente, somada sobre a contribuição de todos os férmions do MP, é calculada a partir do vértice apresentado na figura 11. Seu gráfico é apresentado na figura 41.

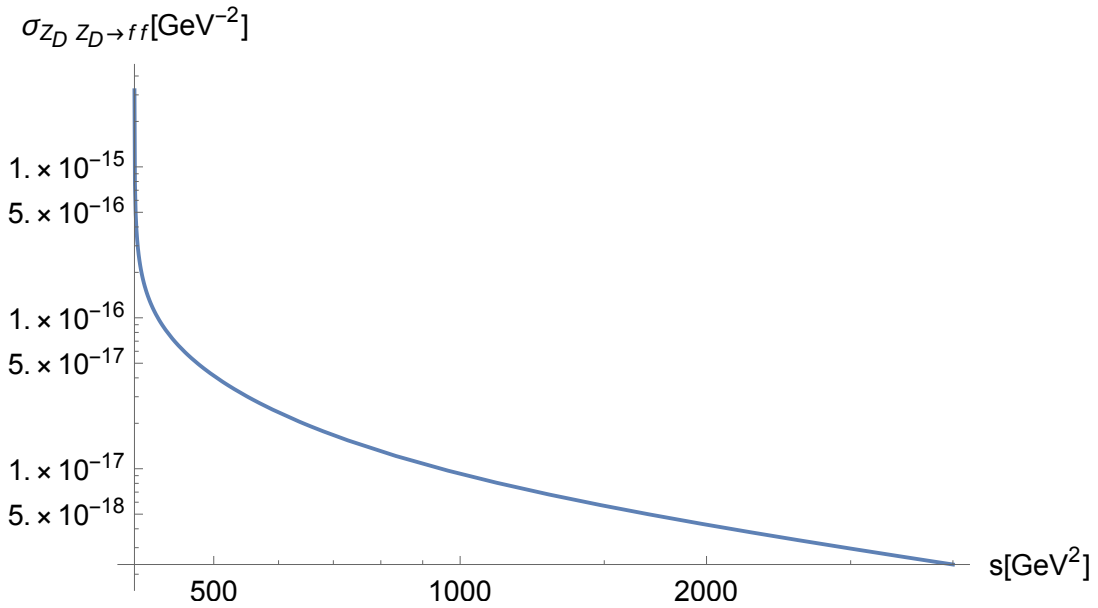


Figura 41: Seção de choque para $Z_D Z_D \rightarrow f \bar{f}$, somada sobre todos os férmions do MP. Este gráfico foi feito fixando-se os parâmetros $\{\epsilon = 10^{-3}, m_\chi = 1 \text{ GeV}, h = 10, g_D = 1\}$.

²³A partir dos vértices listados na seção 2.2, sabemos que, além dos diagramas apresentados na figura 40, é possível desenhar um diagrama de canal s , mediado pelo bóson de Higgs, que poderia contribuir para a seção de choque do processo $Z_D Z_D \leftrightarrow f \bar{f}$. Entretanto, esta contribuição pode ser negligenciada, dado que o acoplamento entre f, \bar{f} e h é suprimido pelo fator m_f/v [52], onde $m_f/v \leq m_{bottom}/v \approx 0.024$ (desconsiderando o quark top, dado que $m_{top} > 100 \text{ GeV}$).

Aniquilações $Z_D f \leftrightarrow A f$ e $Z_D \bar{f} \leftrightarrow A \bar{f}$

As seções de choque para os processos $Z_D f \rightarrow A f$ e $Z_D \bar{f} \leftrightarrow A \bar{f}$ (onde lembramos que o símbolo A representa o fóton do MP) são calculadas a partir dos diagramas apresentados na figura 42.

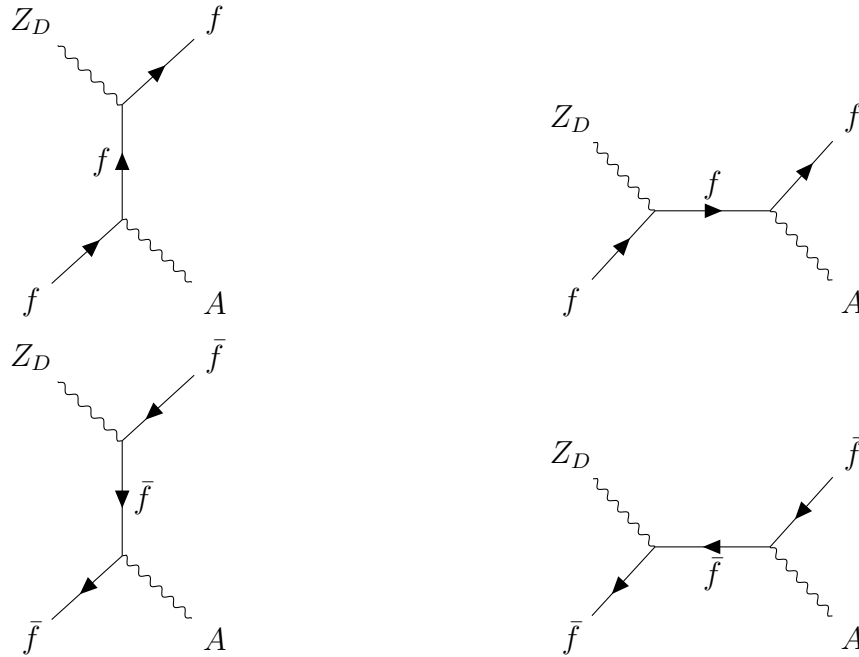


Figura 42: Diagramas para as reações $Z_D f \rightarrow A f$ e $Z_D \bar{f} \rightarrow A \bar{f}$.

Embora $Z_D f \rightarrow A f$ e $Z_D \bar{f} \rightarrow A \bar{f}$ sejam reações diferentes, ambas apresentam a mesma seção de choque, de modo que podemos escrever $\sigma_{Z_D f \rightarrow A f} + \sigma_{Z_D \bar{f} \rightarrow A \bar{f}} = 2\sigma_{Z_D f \rightarrow A f}$. O gráfico de $2\sigma_{Z_D f \rightarrow A f}$, somado sobre a contribuição de todos os férmions do MP, é apresentado na figura 43.

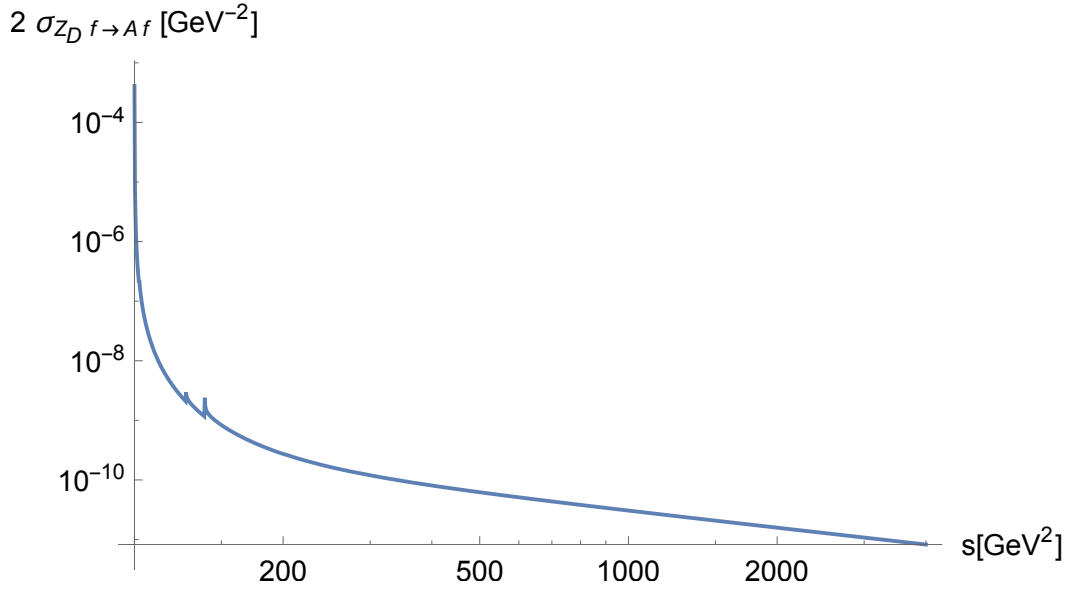


Figura 43: Gráfico de $2\sigma_{Z_D f \rightarrow Af}$, somada sobre todos os férmions do MP. Este gráfico foi feito fixando-se os parâmetros $\{\epsilon = 10^{-3}, m_\chi = 1 \text{ GeV}, h = 10, g_D = 1\}$.

Nesta figura, vemos dois pequenos picos no gráfico de $2\sigma_{Z_D f \rightarrow Af}$, que foi feito fixando-se $m_{Z_D} = 10 \text{ GeV}$. O primeiro pico ocorre em $s = (m_{Z_D} + m_{charm})^2 \approx 127 \text{ GeV}^2$, que corresponde ao quadrado da energia mínima necessária para que os processos $Z_D c \leftrightarrow A c$ e $Z_D \bar{c} \leftrightarrow A \bar{c}$ ocorram (onde c representa o quark charm). Por sua vez, o segundo pico ocorre em $s = (m_{Z_D} + m_\tau)^2 \approx 139 \text{ GeV}^2$, correspondendo ao quadrado da energia mínima necessária para que os processos $Z_D \tau \leftrightarrow A \tau$ e $Z_D \bar{\tau} \leftrightarrow A \bar{\tau}$ ocorram. Deste modo, o aparecimento destes picos se deve ao fato de que, a partir nas energias citadas, mais processos contribuem ativamente para a soma de $2\sigma_{Z_D f \rightarrow Af}$ sobre todos os férmions do MP.

Aniquilações $Z_D A \leftrightarrow f \bar{f}$

Os diagramas necessários para calcular a seção de choque correspondente ao processo $Z_D A \rightarrow f \bar{f}$ são apresentados na figura 44



Figura 44: Diagramas para a reação $Z_D A \rightarrow f \bar{f}$.

Com estes diagramas em mãos, $\sigma_{Z_D A \rightarrow f \bar{f}}$ pode ser calculada a partir da regra de Feynman

apresentada na figura 11 e da regra de Feynman para a interação entre os férmions do MP e o fóton, indicada na figura 45 [52, 53].

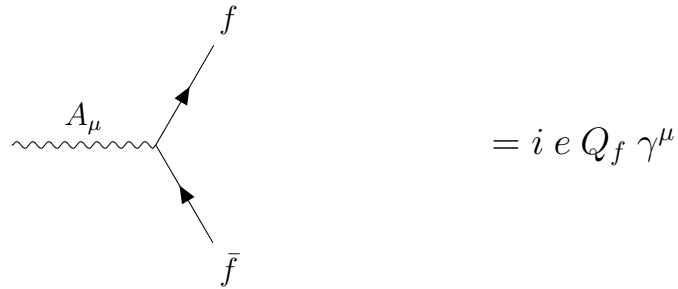


Figura 45: Vértice de interação entre o fóton e os férmions do MP. O acoplamento e é a carga elétrica fundamental.

O gráfico correspondente a $\sigma_{Z_D A \rightarrow f f}$ é apresentado na figura 46.

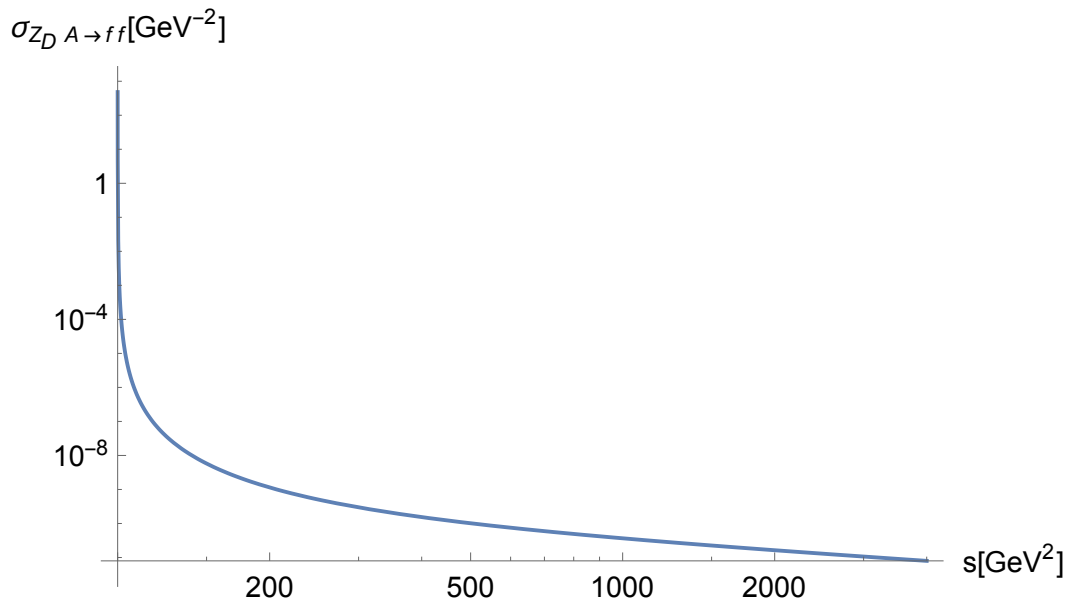


Figura 46: Gráfico da seção de choque correspondente à reação $Z_D A \rightarrow f f$, somada sobre todos os férmions do MP. Este gráfico foi feito fixando-se os parâmetros $\{\epsilon = 10^{-3}, m_\chi = 1 \text{ GeV}, h = 10, g_D = 1\}$.

6.3 Sistema de equações de Boltzmann

Sabendo quais processos são importantes em torno da época em que a ME e o DP desacoplam do equilíbrio, podemos, finalmente, escrever explicitamente o sistema acoplado de equações dado por (4.1) e (4.2), o qual permite o cálculo da evolução simultânea das abundâncias dessas partículas.

Como mencionado no capítulo anterior, no caso da equação de Boltzmann para a densidade numérica total de ME, $n_\chi \equiv n_{\text{partículas}\chi} + n_{\text{anti-partículas}\chi}$, é adequado utilizar as equações obtidas no capítulo 3 para partículas *não-identicas*. Assim, escrevemos a contribuições das reações

$\chi \bar{\chi} \leftrightarrow Z_D Z_D$ e $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow f \bar{f}$ a partir da equação (3.24). Por sua vez, a contribuição da reação $\chi \bar{\chi} \leftrightarrow Z_D$ é escrita a partir da equação (3.39). Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{n}_\chi + 3Hn_\chi = & \frac{\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{\chi\chi \rightarrow f\bar{f}}}{2} [(n_\chi^{\text{eq}})^2 - n_\chi^2] + \frac{\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{\chi\chi \rightarrow Z_D Z_D}}{2} \left[(n_\chi^{\text{eq}})^2 \frac{n_{Z_D}^2}{(n_{Z_D}^{\text{eq}})^2} - n_\chi^2 \right] \\ & + 2\langle \Gamma_{Z_D \rightarrow \chi\chi} \rangle \left[n_{Z_D} - n_{Z_D}^{\text{eq}} \frac{n_\chi^2}{(n_\chi^{\text{eq}})^2} \right], \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde assumimos que todos os férmions do MP permanecem em equilíbrio com o plasma durante todo o processo de interesse. Lembrando que $Y_\chi = n_\chi/s$ e usando usando a equação (3.55) para relacionar $\dot{n}_\chi + 3Hn_\chi$ e $\frac{dY_\chi}{dx}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dY_\chi}{dx} = & \sqrt{\frac{\pi}{45 G}} \frac{m_\chi g_\star^{1/2}(x)}{2 x^2} \left\{ \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{\chi\chi \rightarrow f\bar{f}} [(Y_\chi^{\text{eq}})^2 - Y_\chi^2] \right. \\ & + \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{\chi\chi \rightarrow Z_D Z_D} \left[(Y_\chi^{\text{eq}})^2 \frac{Y_{Z_D}^2}{(Y_{Z_D}^{\text{eq}})^2} - Y_\chi^2 \right] \\ & \left. + \frac{4\langle \Gamma_{Z_D \rightarrow \chi\chi} \rangle}{s} \left[Y_{Z_D} - Y_{Z_D}^{\text{eq}} \frac{Y_\chi^2}{(Y_\chi^{\text{eq}})^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Para escrever a equação de Boltzmann do DP, incluímos as reações listadas na seção 6.2 e utilizamos as equações obtidas no capítulo 3 para *partículas idênticas*. Portanto, escrevemos a contribuição de todos os processos de aniquilação a partir da equação (3.25), equanto a contribuição dos decaimentos são escritos a partir da equação (3.35). Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{n}_{Z_D} + 3Hn_{Z_D} = & \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{Z_D Z_D \leftrightarrow \chi\chi} \left[(n_{Z_D}^{\text{eq}})^2 \frac{n_\chi^2}{(n_\chi^{\text{eq}})^2} - n_{Z_D}^2 \right] + \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{Z_D Z_D \leftrightarrow f\bar{f}} [(n_{Z_D}^{\text{eq}})^2 - n_{Z_D}^2] \\ & + \sum_f \left[2 \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{Z_D f \leftrightarrow A\bar{f}} n_f^{\text{eq}} + \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{Z_D A \leftrightarrow f\bar{f}} n_A^{\text{eq}} + \Gamma_{Z_D \rightarrow f\bar{f}} \right] [n_{Z_D}^{\text{eq}} - n_{Z_D}] \\ & + \Gamma_{Z_D \rightarrow \chi\chi} \left[n_{Z_D}^{\text{eq}} \frac{n_\chi^2}{(n_\chi^{\text{eq}})^2} - n_{Z_D} \right], \end{aligned} \quad (6.3)$$

onde assumimos que todas as partículas do MP padrão seguem suas distribuições de equilíbrio. Lembrando que $Y_{Z_D} = n_{Z_D}/s$, podemos utilizar a equação (3.55) para escrever

$$\begin{aligned}
\frac{dY_{Z_D}}{dx} = & \sqrt{\frac{\pi}{45 G}} \frac{m_\chi g_*^{1/2}(x)}{x^2} \left\{ \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{Z_D Z_D \rightarrow \chi\chi} \left[(Y_{Z_D}^{eq})^2 \frac{Y_\chi^2}{(Y_\chi^{eq})^2} - Y_{Z_D}^2 \right] \right. \\
& + \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{Z_D Z_D \rightarrow ff} \left[(Y_{Z_D}^{eq})^2 - Y_{Z_D}^2 \right] \\
& + \sum_f \left[2 \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{Z_D f \rightarrow Af} Y_f^{eq} + \langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{Z_D A \rightarrow ff} Y_A^{eq} + \langle \Gamma_{Z_D \rightarrow ff} \rangle \right] \left[Y_{Z_D}^{eq} - Y_{Z_D} \right] \\
& \left. + \frac{\langle \Gamma_{Z_D \rightarrow \chi\chi} \rangle}{s} \left[Y_{Z_D}^{eq} \frac{Y_\chi^2}{(Y_\chi^{eq})^2} - Y_{Z_D} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

6.4 Calculando $\langle \Gamma \rangle$'s e $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$'s

As larguras de decaimento mediadas na temperatura $\langle \Gamma_{Z_D \rightarrow \chi\bar{\chi}} \rangle$ e $\langle \Gamma_{Z_D \rightarrow f\bar{f}} \rangle$ podem ser calculadas a partir da expressão (3.73).

Por sua vez, as seções de choque mediadas na temperatura $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{\chi\bar{\chi} \rightarrow ff}$, $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{\chi\bar{\chi} \rightarrow Z_D Z_D}$, $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{Z_D Z_D \rightarrow ff}$ e $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{Z_D Z_D \rightarrow \chi\bar{\chi}}$ podem ser calculadas a partir da expressão (3.71), dado que as partículas do estado inicial destes processos são da mesma espécie.

Ainda, temos que, entre essas $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle$'s, aquelas com estado inicial $\chi \bar{\chi}$ aparecem na equação para Y_χ (6.2), enquanto aquelas com estado inicial $Z_D Z_D$ aparecem na equação para Y_{Z_D} (6.4). Isso indica que a aproximação feita para calcular a equação (3.71), que consiste em aproximar as distribuições das partículas do estado inicial por distribuições de Maxwell-Boltzmann, será adequada na época do desacoplamento do DP e da ME, desde que estas partículas desacoplem em temperaturas cerca de 3 vezes menores que suas massas, ou ainda menores (veja seção 3.8).

Porém, no caso das seções de choque mediadas na temperatura $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{Z_D f \rightarrow Af}$ e $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{Z_D A \rightarrow ff}$, o cenário é diferente. Na tentativa de calculá-las, foi utilizada a equação (3.72), dado que as partículas do estado inicial são distintas. Entretanto, visto que consideramos o fóton sem massa (desconsiderando qualquer possível contribuição térmica para sua massa [65]), a aproximação de sua distribuição de equilíbrio pela distribuição de Maxwell-Boltzmann nunca é adequada. Além disso, quando tratamos de férmions mais leves que a escala de massas da ME e do DP, essa aproximação também não é adequada em $T \sim m_\chi \sim m_{Z_D}$. Por exemplo, temos que a temperatura de *freeze-out* de um candidato de ME com $m_\chi = 1$ GeV que desacopla em torno de $x \sim 10$, é cerca 200 vezes maior que a massa do elétron.

Todavia, mesmo ciente das deficiências destas aproximações decidimos continuar tentando resolver a equação de Boltzmann com elas. Essa escolha foi feita porque o tratamento exato das funções de distribuição e a consideração da massa térmica do fóton introduzem um nível de sofisticação algébrica e numérica que estava além do escopo e do tempo viável para este projeto de mestrado (veja, por exemplo as referências [65–67]).

Assim, decidimos continuar com essas aproximações almejando obter, ao menos, uma indicação qualitativa sobre a dinâmica entre as abundâncias do DP e da ME. Contudo, não

conseguimos calcular $\langle \sigma_{\text{Mol}} \rangle_{Z_D A \rightarrow f \bar{f}}$ com o Mathematica. Acreditamos que o software não consegue realizar essa conta porque as aproximações feitas - considerar que o fóton tem uma distribuição de Maxwell-Boltzmann e ignorar sua massa térmica - tornam as expressões $\sigma_{Z_D A \rightarrow f \bar{f}}$ e $\langle \sigma_{\text{Mol}} \rangle_{Z_D A \rightarrow f \bar{f}}$ numericamente malcomportadas. Deste modo, decidimos seguir na resolução da equação de Boltzmann desprezando a contribuição deste processo, deixando a investigação destes problemas para o futuro.

6.5 Resolvendo a equação de Boltzmann

Como discutido na seção 4.2, as equações (6.2) e (6.4) são equações instáveis numericamente, sendo necessário empregar métodos numéricos específicos para resolvê-las, como o método `StiffnessSwitching`, no Mathematica. A utilização desse método, junto com a especificação de valores adequados de `AccuracyGoal` e `PrecisionGoal` na função `NDSolve` se mostraram suficientes para resolver essa equação quanto temos apenas termos quadráticos, como $(Y^2 - Y_{eq}^2)$. Entretanto, quando nos deparamos com os termos lineares, $(Y_{Z_D}^{eq} - Y_{Z_D})$, presentes na equação (6.4), esta instabilidade numérica se intensificou e o software não teve capacidade de resolver a equação com o método citado.

Para superar este problema, tentamos utilizar uma reparametrização dessas equações, em termos de $\ln Y$, como descrito em [68]. Entretanto, essa estratégia também não funcionou na presença dos termos lineares, mostrando que, para resolver as equações (6.2) e (6.4) juntas, será necessário o aprofundamento no estudo da resolução destas equações, o que precisa de mais tempo do que o disponível dentro deste projeto.

7 Conclusão

Atualmente, entende-se que a ME corresponde a 26% da densidade de energia do universo. Entretanto, apesar de sua grande abundância e das muitas evidências experimentais de sua existência, a natureza fundamental da ME permanece desconhecida, constituindo um dos maiores problemas em aberto da física contemporânea.

Neste trabalho, estudamos um modelo de DP com um candidato de ME que é um férmion de Dirac, com massa da ordem de MeV. Levando em conta que os limites experimentais atuais para DPs com massa da ordem de GeV são mais fracos do que aqueles para DPs com massa de MeV (veja figura 32), nos propomos a responder a seguinte pergunta: *será possível reproduzir a abundância observada para um candidato de ME com massa da ordem de MeV, no caso em que a massa do DP é da ordem de GeV? Ou ainda: quão mais pesado que a ME o DP pode ser, mantendo-se a previsão correta da abundância de ME?*

De maneira complementar, investigamos a dinâmica entre a população de DPs e a abundância de ME quando as massas dessas duas partículas são próximas, buscando responder a seguinte pergunta: *qual o impacto que a presença da população de DPs no plasma primordial tem sobre a abundância de relíquia da ME?*

Para isso, estudamos em detalhe as interações previstas pelo modelo de DP, buscando compreender quais processos são importantes para determinar as abundâncias da ME e do DP. A partir desta investigação, entendemos que, neste modelo, é possível separar o estudo do *freeze-out* da ME em dois casos: $h \geq 3$, no qual fazemos a aproximação de que a influência da população de DPs no plasma sobre o *freeze-out* da ME será irrisória; e $1 \leq h < 3$, quando julgamos ser necessário resolver o sistema acoplado de equações de Boltzmann apresentado na seção 6.3.

Assim, pudemos escrever as equações de Boltzmann necessárias para calcular a abundância de relíquia da ME, em cada regime. Através delas, fixando o acoplamento entre a ME e o DP em $g_D = 1$ e uma hierarquia $h = m_{Z_D}/m_\chi$, é possível calcular a previsão da abundância de ME correspondente a cada ponto no espaço de parâmetros ϵ vs. m_χ ou, equivalentemente, no plano ϵ vs. m_{Z_D} .

Entretanto, ao longo do desenvolvimento do projeto, se tornou evidente que é necessário olhar diligentemente para os problemas numéricos que são enfrentados para resolver equação de Boltzmann e calcular as seções de choque mediadas na temperatura no software *Mathematica*. Sem esse cuidado, perde-se completamente a confiabilidade nos valores de abundância de relíquia de ME obtidos.

No caso das hierarquias $1 \leq h < 3$, os problemas numéricos enfrentados inviabilizaram por completo a resolução da equação de Boltzmann do DP. Isso reforça a importância de tratar esses erros com atenção e indica a necessidade de métodos ou softwares mais adequados para estudar este regime. Porém, infelizmente, no tempo deste projeto de mestrado, não foi possível nos aprofundarmos mais nas estratégias necessárias para resolver esta equação.

Por outro lado, para as hierarquias $h \geq 3$, os métodos numéricos estudados nesse projeto

se mostraram suficientes para obtenção das curvas de nível $\Omega(\epsilon, m_\chi) = \Omega_c$. A partir da figura 31, observamos que as curvas de nível obtidas requerem valores de ϵ cada vez mais altos à medida que aumenta-se h , em acordo com o esperado a partir da equação esquemática 1.40. Além disso, podemos observar que a mudança de hierarquias tem um impacto notável sobre as curvas de nível. Por exemplo, os valores de ϵ apresentados pela curva $h = 3$ – que é a hierarquia geralmente assumida na literatura, em estudos que consideram $m_{Z_D} > m_\chi$ – são cerca de uma ordem de grandeza menores do que aqueles apresentados pela curva $h = 5$.

Por fim, ao olhar para os resultados obtidos no regime $h \geq 3$, apresentados junto aos limites experimentais na figura 32, podemos responder às perguntas iniciais deste projeto. Primeiramente, em relação à hierarquia máxima entre m_{Z_D} e m_χ , podemos afirmar que as hierarquias $h = 20$, $h = 50$ e $h = 100$ estão completamente excluídas experimentalmente, enquanto a hierarquia $h = 13$ se apresenta no limiar de ser completamente excluída. Assim, observando o comportamento apresentado pelas curvas de nível, concluímos que, para o intervalo de massas de ME $5 \text{ MeV} \leq m_\chi \leq 1 \text{ GeV}$, o valor máximo permitido para a hierarquia $h = m_{Z_D}/m_\chi$ é levemente maior que 13.

Por sua vez, a viabilidade de reproduzir a abundância observada de um candidato de ME com massa da ordem de MeV, no caso em que a massa do DP é da ordem de GeV, foi analisada a partir da posição e do comportamento das curvas $\Omega(\epsilon, m_{Z_D}) = \Omega_c$ e dos limites experimentais apresentados na figura 32.

Considerando m_χ entre 5 MeV e 1 GeV, inferimos, para quaisquer hierarquias $5 < h < 13$, que os valores viáveis de m_{Z_D} que satisfazem $m_{Z_D} > 1 \text{ GeV}$ devem estar entre 8 e $\sim 10 \text{ GeV}$. Ainda, para este mesmo intervalo de m_χ e qualquer hierarquia $h < 5$, podemos afirmar que os valores de m_{Z_D} viáveis são menores que 3 GeV. Deste modo, concluímos que a região do espaço de parâmetros viável para um DP mais pesado que 1 GeV é pequena, quando consideramos um candidato de ME com massa da ordem de MeV.

Referências

- [1] G. Bertone and D. Hooper, “History of dark matter,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 90, no. 4, p. 45002, 2018.
- [2] Planck Collaboration, N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak, R. Battye, K. Benabed, *et al.*, “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters,” *A&A*, vol. 641, p. A6, Sept. 2020.
- [3] J. Alexander *et al.*, “Dark Sectors 2016 Workshop: Community Report,” 8 2016.
- [4] G. Arcadi, M. Dutra, P. Ghosh, M. Lindner, Y. Mambrini, M. Pierre, S. Profumo, and F. S. Queiroz, “The waning of the WIMP? a review of models, searches, and constraints,” *The European Physical Journal C*, vol. 78, mar 2018.
- [5] T. Lin, “Tasi lectures on dark matter models and direct detection,” 2019.
- [6] D. Clowe, M. Bradac, A. H. Gonzalez, M. Markevitch, S. W. Randall, C. Jones, and D. Zaritsky, “A direct empirical proof of the existence of dark matter,” *Astrophys. J.*, vol. 648, pp. L109–L113, 2006.
- [7] S. Tulin and H.-B. Yu, “Dark matter self-interactions and small scale structure,” *Physics Reports*, vol. 730, pp. 1–57, feb 2018.
- [8] R. Essig, J. A. Jaros, W. Wester, P. H. Adrian, S. Andreas, T. Averett, O. Baker, B. Batell, M. Battaglieri, J. Beacham, T. Beranek, J. D. Bjorken, F. Bossi, J. R. Boyce, G. D. Cates, *et al.*, “Dark sectors and new, light, weakly-coupled particles,” 2013.
- [9] M. Fabbrichesi, E. Gabrielli, and G. Lanfranchi, *The Physics of the Dark Photon*. Springer International Publishing, 2021.
- [10] P. deNiverville and C. Frugiuele, “Hunting sub-GeV dark matter with the NO ν A near detector,” *Phys. Rev. D*, vol. 99, no. 5, p. 051701, 2019.
- [11] A. Berlin and F. Kling, “Inelastic dark matter at the LHC lifetime frontier: ATLAS, CMS, LHCb, CODEX-b, FASER, and MATHUSLA,” *Physical Review D*, vol. 99, jan 2019.
- [12] D. Curtin, R. Essig, S. Gori, and J. Shelton, “Illuminating Dark Photons with High-Energy Colliders,” *JHEP*, vol. 02, p. 157, 2015.
- [13] F. Zwicky, “Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln,” *Helvetica Physica Acta*, vol. 6, pp. 110–127, Jan. 1933.
- [14] H. Andernach and F. Zwicky, “English and spanish translation of zwicky’s (1933) the redshift of extragalactic nebulae,” 2017.
- [15] B. S. Ryden, *Introduction to Cosmology*. Addison-Wesley, 2003.
- [16] S. Ettori, A. Donnarumma, E. Pointecouteau, T. H. Reiprich, S. Giodini, L. Lovisari, and R. W. Schmidt, “Mass profiles of galaxy clusters from x-ray analysis,” *Space Science Reviews*, vol. 177, pp. 119–154, apr 2013.

- [17] S. Ettori, V. Ghirardini, D. Eckert, E. Pointecouteau, F. Gastaldello, M. Sereno, M. Gaspari, S. Ghizzardi, M. Roncarelli, and M. Rossetti, “Hydrostatic mass profiles in x-COP galaxy clusters,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 621, p. A39, jan 2019.
- [18] V. C. Rubin and W. K. Ford, Jr., “Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions,” *Astrophys. J.*, vol. 159, pp. 379–403, 1970.
- [19] D. Rogstad and G. Shostak, “Gross Properties of Five Scd Galaxies as Determined from 21-CENTIMETER Observations,” *The Astrophysical Journal*, vol. 176, p. 315, 1972.
- [20] S. W. Randall, M. Markevitch, D. Clowe, A. H. Gonzalez, and M. Bradač, “Constraints on the self-interaction cross section of dark matter from numerical simulations of the merging galaxy cluster 1e 0657-56,” *The Astrophysical Journal*, vol. 679, pp. 1173–1180, jun 2008.
- [21] D. Baumann, “Cosmology,” <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/db275/Cosmology/Lectures.pdf>, 2015.
- [22] J. C. Mather *et al.*, “A Preliminary measurement of the Cosmic Microwave Background spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) satellite,” *Astrophys. J.*, vol. 354, pp. L37–L40, 1990.
- [23] E. W. Kolb and M. S. Turner, “The Early Universe,” *Front. Phys.*, vol. 69, pp. 1–547, 1990.
- [24] S. Dodelson, *Modern cosmology*. San Diego, CA: Academic Press, 2003.
- [25] G. Hinshaw, D. Larson, E. Komatsu, D. N. Spergel, C. L. Bennett, J. Dunkley, M. R. Nolta, M. Halpern, R. S. Hill, N. Odegard, L. Page, K. M. Smith, J. L. Weiland, B. Gold, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, G. S. Tucker, E. Wollack, and E. L. Wright, “Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Cosmological parameter results,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 208, p. 19, sep 2013.
- [26] S. Das, T. Louis, M. R. Nolta, G. E. Addison, E. S. Battistelli, J. R. Bond, E. Calabrese, D. Crichton, M. J. Devlin, S. Dicker, J. Dunkley, R. Dünner, J. W. Fowler, M. Gralla, A. Hajian, M. Halpern, M. Hasselfield, M. Hilton, A. D. Hincks, R. Hlozek, K. M. Huffenberger, J. P. Hughes, K. D. Irwin, A. Kosowsky, R. H. Lupton, T. A. Marriage, D. Marsden, F. Menanteau, K. Moodley, M. D. Niemack, L. A. Page, B. Partridge, E. D. Reese, B. L. Schmitt, N. Sehgal, B. D. Sherwin, J. L. Sievers, D. N. Spergel, S. T. Staggs, D. S. Swetz, E. R. Switzer, R. Thornton, H. Trac, and E. Wollack, “The atacama cosmology telescope: temperature and gravitational lensing power spectrum measurements from three seasons of data,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2014, pp. 014–014, apr 2014.
- [27] K. T. Story, C. L. Reichardt, Z. Hou, R. Keisler, K. A. Aird, B. A. Benson, L. E. Bleem, J. E. Carlstrom, C. L. Chang, H.-M. Cho, T. M. Crawford, A. T. Crites, T. de Haan, M. A. Dobbs, J. Dudley, B. Follin, E. M. George, N. W. Halverson, G. P. Holder, W. L. Holzapfel, S. Hoover, J. D. Hrubes, M. Joy, L. Knox, A. T. Lee, E. M. Leitch, M. Lueker, D. Luong-Van, J. J. McMahon, J. Mehl, S. S. Meyer, M. Millea, J. J. Mohr, T. E. Montroy, S. Padin, T. Plagge, C. Pryke, J. E. Ruhl, J. T. Sayre, K. K. Schaffer, L. Shaw, E. Shirokoff, H. G. Spieler, Z. Staniszewski, A. A. Stark, A. van Engelen, K. Vanderlinde, J. D. Vieira, R. Williamson, and O. Zahn, “A MEASUREMENT OF THE COSMIC MICROWAVE BACKGROUND DAMPING TAIL FROM THE 2500-SQUARE-DEGREE SPT-SZ SURVEY,” *The Astrophysical Journal*, vol. 779, p. 86, nov 2013.

- [28] R. L. Workman and Others, “Review of Particle Physics,” *PTEP*, vol. 2022, p. 083C01, 2022.
- [29] R. V. Wagoner, “Big-Bang Nucleosynthesis Revisited,” *Astrophysics Journal*, vol. 179, pp. 343–360, Jan. 1973.
- [30] K. A. Olive, “Big bang nucleosynthesis,” *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, vol. 80, pp. 79–93, jan 2000.
- [31] B. E. J. Pagel, E. A. Simonson, R. J. Terlevich, and M. G. Edmunds, “The primordial helium abundance from observations of extragalactic HII regions.,” *MNRAS*, vol. 255, pp. 325–345, Mar. 1992.
- [32] E. D. Skillman and J. Kennicutt, Robert C., “Spatially Resolved Optical and Near-Infrared Spectroscopy of I ZW 18,” *The Astrophysical Journal*, vol. 411, p. 655, July 1993.
- [33] E. D. Skillman, R. J. Televich, J. Kennicutt, Robert C., D. R. Garnett, and E. Terlevich, “Spatially Resolved Optical and Near-Infrared Spectroscopy of the Low-Metallicity Galaxy UGC 4483,” *The Astrophysical Journal*, vol. 431, p. 172, Aug. 1994.
- [34] Y. I. Izotov and T. X. Thuan, “Heavy-element abundances in blue compact galaxies,” *The Astrophysical Journal*, vol. 511, pp. 639–659, feb 1999.
- [35] B. D. Fields, K. A. Olive, T.-H. Yeh, and C. Young, “Big-Bang Nucleosynthesis after Planck,” *JCAP*, vol. 03, p. 010, 2020. [Erratum: *JCAP* 11, E02 (2020)].
- [36] G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk, “Particle dark matter: evidence, candidates and constraints,” *Physics Reports*, vol. 405, pp. 279–390, jan 2005.
- [37] E. G. M. Ferreira, “Ultra-light dark matter,” *The Astronomy and Astrophysics Review*, vol. 29, sep 2021.
- [38] A. M. Green and B. J. Kavanagh, “Primordial black holes as a dark matter candidate,” *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 48, p. 043001, feb 2021.
- [39] K. Griest and M. Kamionkowski, “Unitarity Limits on the Mass and Radius of Dark Matter Particles,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, p. 615, 1990.
- [40] D. J. H. Chung, P. Crotty, E. W. Kolb, and A. Riotto, “Gravitational production of superheavy dark matter,” *Physical Review D*, vol. 64, jul 2001.
- [41] E. W. Kolb and A. J. Long, “Superheavy dark matter through higgs portal operators,” *Physical Review D*, vol. 96, nov 2017.
- [42] R. Barbieri, “Electroweak theory after the first Large Hadron Collider phase,” *Phys. Scripta T*, vol. 158, p. 014006, 2013.
- [43] S. Knapen, T. Lin, and K. M. Zurek, “Light dark matter: Models and constraints,” *Physical Review D*, vol. 96, dec 2017.
- [44] R. Essig, J. Mardon, M. Papucci, T. Volansky, and Y.-M. Zhong, “Constraining light dark matter with low-energy e^+e^- colliders,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2013, nov 2013.

- [45] G. Krnjaic, “Probing light thermal dark matter with a higgs portal mediator,” *Physical Review D*, vol. 94, oct 2016.
- [46] C. Bøhm, M. J. Dolan, and C. McCabe, “A lower bound on the mass of cold thermal dark matter from planck,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2013, pp. 041–041, aug 2013.
- [47] B. Batell, R. Essig, and Z. Surujon, “Strong constraints on sub-GeV dark sectors from SLAC beam dump e137,” *Physical Review Letters*, vol. 113, oct 2014.
- [48] B. W. Lee and S. Weinberg, “Cosmological Lower Bound on Heavy Neutrino Masses,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 39, pp. 165–168, 1977.
- [49] X. Chu, T. Hambye, and M. H. G. Tytgat, “The Four Basic Ways of Creating Dark Matter Through a Portal,” *JCAP*, vol. 05, p. 034, 2012.
- [50] T. Hambye, “On the stability of particle dark matter,” *PoS*, vol. IDM2010, p. 098, 2011.
- [51] M. Pospelov, “Secluded $u(1)$ below the weak scale,” *Physical Review D*, vol. 80, nov 2009.
- [52] E. Bertuzzo, *Lectures on Particle Physics*. Available Online.: http://fmattrm.if.usp.br/~enrico/SM/Particle_Physics_Book.pdf, 2021.
- [53] M. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Quantum Field Theory and the Standard Model, Cambridge University Press, 2014.
- [54] M. Peskin, *An Introduction To Quantum Field Theory*. CRC Press, 2018.
- [55] P. Gondolo and G. Gelmini, “Cosmic abundances of stable particles: Improved analysis,” *Nucl. Phys. B*, vol. 360, pp. 145–179, 1991.
- [56] J. Bernstein, L. S. Brown, and G. Feinberg, “Cosmological heavy-neutrino problem,” *Phys. Rev. D*, vol. 32, pp. 3261–3267, Dec 1985.
- [57] A. Biswas and A. Gupta, “Freeze-in production of sterile neutrino dark matter in $u(1)_{b-1}$ model,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2016, pp. 044–044, sep 2016.
- [58] T. Hambye, M. H. G. Tytgat, J. Vandecasteele, and L. Vanderheyden, “Dark matter from dark photons: a taxonomy of dark matter production,” *Phys. Rev. D*, vol. 100, no. 9, p. 095018, 2019.
- [59] X. Chu, Y. Mambrini, J. Quevillon, and B. Zaldívar, “Thermal and non-thermal production of dark matter via z' -portal(s),” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2014, pp. 034–034, jan 2014.
- [60] M. Dutra, M. Lindner, S. Profumo, F. S. Queiroz, W. Rodejohann, and C. Siqueira, “MeV Dark Matter Complementarity and the Dark Photon Portal,” *JCAP*, vol. 03, p. 037, 2018.
- [61] R. T. D’Agnolo and J. T. Ruderman, “Light Dark Matter from Forbidden Channels,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 115, no. 6, p. 061301, 2015.
- [62] P. Zyla *et al.*, “Review of Particle Physics,” *PTEP*, vol. 2020, no. 8, p. 083C01, 2020. and 2021 update.

- [63] J. Lees, V. Poireau, V. Tisserand, E. Grauges, A. Palano, G. Eigen, D. Brown, M. Derdzinski, A. Giuffrida, *et al.*, “Search for invisible decays of a dark photon produced in $e^+ e^-$ collisions at babar,” *Physical Review Letters*, vol. 119, sep 2017.
- [64] D. Banerjee, V. Burtsev, A. Chumakov, D. Cooke, P. Crivelli, E. Depero, A. Dermenev, S. Donskov, R. Dusaev, *et al.*, “Dark matter search in missing energy events with NA64,” *Physical Review Letters*, vol. 123, sep 2019.
- [65] J. F. Nieves, P. B. Pal, and D. G. Unger, “Photon mass in a background of thermal particles,” *Phys. Rev. D*, vol. 28, pp. 908–914, Aug 1983.
- [66] O. Lebedev, “The higgs portal to cosmology,” *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 120, p. 103881, sep 2021.
- [67] G. Arcadi, O. Lebedev, S. Pokorski, and T. Toma, “Real scalar dark matter: relativistic treatment,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2019, aug 2019.
- [68] G. Steigman, B. Dasgupta, and J. F. Beacom, “Precise relic WIMP abundance and its impact on searches for dark matter annihilation,” *Physical Review D*, vol. 86, jul 2012.
- [69] N. M. Temme, *Special functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics*. John Wiley & Sons, 1996.
- [70] S. Groot, W. Leeuwen, C. van Weert, and C. Weert, *Relativistic Kinetic Theory: Principles and Applications*. North-Holland Publishing Company, 1980.

Apêndices

A Mistura cinética: bósons de gauge abelianos e não-abelianos

Neste apêndice, é discutida a invariância de gauge dos termos de mistura cinética entre dois bósons de gauge abelianos. Discutimos também porque tais termos não são invariantes no caso de bosons de gauge não-abelianos. Essa discussão é fortemente baseada na referência [52].

A derivada covariante relacionada a um grupo $SU(N)$ tem a forma $D_\mu = \partial_\mu + igG_\mu^A T^A$, onde os fatores T^A são os N geradores do grupo e G_μ^A são os bósons de gauge correspondentes. Denominamos u o N -pleto que é transformado na representação fundamental $SU(N)$, ou seja,

$$\text{Para } U \in SU(N), \quad u \rightarrow Uu. \quad (\text{A.1})$$

A condição de que a derivada covariante seja transformada covariantemente sob $SU(N)$, ou seja, $D_\mu u \rightarrow UD_\mu u$, permite-nos entender como os bósons de gauge, G_μ^A , devem ser transformados sob $SU(N)$. Começando com a equação

$$\begin{aligned} (D_\mu u)' &= UD_\mu u \\ \Downarrow \\ (\partial_\mu U)u + U\partial_\mu u + igG_\mu^{A'} T^A Uu &= U\partial_\mu u + igUG_\mu^A T^A u, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

e, então, isolando $G_\mu^{A'}$ e expandindo as matrizes U na base dos geradores ($U \approx \mathbb{1} + \alpha^A T^A$), obtêm-se que

$$G_\mu^A \rightarrow G_\mu^A - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^A - f^{ABC} \alpha^B G_\mu^C, \quad (\text{A.3})$$

onde os fatores f^{ABC} são conhecidos como as constantes de estrutura do grupo, sendo definidos pela relação $[T^A, T^B] = if^{ABC} T^C$.

Para grupos abelianos, todas as constantes de estrutura são nulas e, portanto, a transformação de G_μ^A é reduzida à uma simples transformação de gauge,

$$G_\mu^A \xrightarrow{\text{abeliano}} G_\mu^A - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^A, \quad (\text{A.4})$$

de modo que o *field strength*, definido como $G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu$, é invariante para bósons de gauge associados a grupos abelianos. Isso vale para o grupo $U(1)$, que é o único grupo de Lie abeliano.

Isso nos permite escrever o termo de mistura cinética na equação 2.1,

$$\mathcal{L} \supset \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{\cos \theta} \hat{Z}_{D\mu\nu} \hat{B}^{\mu\nu}, \quad (\text{A.5})$$

dado que $\hat{Z}_{D\mu\nu}$ e $\hat{B}^{\mu\nu}$ são invariantes sob $U(1)_Y$ e $U(1)_D$ - e também trivialmente invariantes sob $SU(3)_c \times SU(2)_L$.

Por outro lado, para bósons de gauge não-abelianos, o último termo de (A.3) é não trivial. Assim, um *field strength* como o definido anteriormente deixa de ser invariante sob a simetria correspondente. Como discutido em detalhem em [52], o que pode ser feito nesse caso é usar a combinação

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + ig [G_\mu, G_\nu] , \quad (\text{A.6})$$

onde $G_\mu \equiv G_\mu^A T^A$. Essa combinação ainda não é invariante sob o grupo correspondente, mas transforma na adjunta, ou seja, $\mathcal{G}_{\mu\nu} \rightarrow U \mathcal{G}_{\mu\nu} U^\dagger$, sendo possível escrever um termo cinético invariante para bósons não-abelianos como

$$\mathcal{L}_{\text{gluon}} = -\frac{1}{2} \text{tr} [(\mathcal{G}_{\mu\nu})^2] . \quad (\text{A.7})$$

Entretanto, um termo de mixing cinético como $\mathcal{G}_{\mu\nu} \hat{Z}_D^{\mu\nu}$ não seria invariante sob o $SU(N)$ relacionado a $\mathcal{G}_{\mu\nu}$, sendo, portanto, proibido.

B Expressões para $\langle \sigma v_{\text{Møll}} \rangle$ e $\langle \Gamma \rangle$

Esta seção é baseada no raciocínio apresentado na referência [55]. Aqui, discutiremos o tratamento analítico feito para obtenção das expressões (3.71), (3.72) e (3.73). Estas expressões são obtidas a partir das definições de $\langle \sigma v_{\text{Møll}} \rangle$ e $\langle \Gamma \rangle$ apresentadas, respectivamente, nas equações (3.20) e (3.34).

Para evitar confusão, nesta seção, chamamos o quadri-momento da partícula i de \mathbf{p}_i e chamamos o módulo de seu tri-momento de p_i ($p_i = |\vec{p}_i|$).

B.1 $\langle \sigma v_{\text{Møll}} \rangle_{12 \rightarrow 34}$

Em acordo com a referência [55], definimos $\langle \sigma v_{\text{Møll}} \rangle_{12 \rightarrow 34}$ como

$$\langle \sigma v_{\text{Møll}} \rangle_{12 \rightarrow 34} = \frac{\int \frac{d^3 p_1 g_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2 g_2}{(2\pi)^3} f_1^{eq} f_2^{eq} \sigma_{12 \rightarrow 34} v_{\text{Møll}}}{\int \frac{d^3 p_1 g_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2 g_2}{(2\pi)^3} f_1^{eq} f_2^{eq}}. \quad (\text{B.1})$$

Como discutido na seção (3.8), para obter a simplificação analítica almejada, as funções de distribuição no equilíbrio, f_1^{eq} e f_2^{eq} , são aproximadas pela distribuição de Maxwell-Boltzmann,

$$f_{i_{MB}} = e^{-E_i/T}. \quad (\text{B.2})$$

Junto com a simplificação dos fatores numéricos de g_i e $(2\pi)^3$, esta aproximação fornece

$$\langle \sigma v_{\text{Møll}} \rangle_{12 \rightarrow 34} = \frac{\int d^3 p_1 d^3 p_2 e^{-E_1/T} e^{-E_2/T} \sigma_{12 \rightarrow 34} v_{\text{Møll}}}{\int d^3 p_1 d^3 p_2 e^{-E_1/T} e^{-E_2/T}}, \quad (\text{B.3})$$

onde a seção de choque, $\sigma_{12 \rightarrow 34}$, depende da variável de Mandelstan $s = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2$, que, por sua vez, depende das energias, E_1 e E_2 , do ângulo relativo entre \vec{p}_1 e \vec{p}_2 , denominado θ , e dos módulos destes vetores; e a velocidade de Møller,

$$v_{\text{Møll}} = \frac{\sqrt{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2}, \quad (\text{B.4})$$

depende das variáveis s , E_1 e E_2 .

Para facilitar a discussão daqui pra frente, nomeamos separadamente o numerador da equação (B.3), $\mathcal{N}_{\langle \sigma v_{\text{Møll}} \rangle}$,

$$\mathcal{N}_{\langle \sigma v_{\text{Møll}} \rangle} \equiv \int d^3 p_1 d^3 p_2 e^{-E_1/T} e^{-E_2/T} \sigma_{12 \rightarrow 34} v_{\text{Møll}}, \quad (\text{B.5})$$

e seu denominador, $\mathcal{D}_{\langle \sigma v_{\text{Møll}} \rangle}$,

$$\mathcal{D}_{\langle \sigma v_{\text{Møll}} \rangle} \equiv \int d^3 p_1 d^3 p_2 e^{-E_1/T} e^{-E_2/T}. \quad (\text{B.6})$$

Para prosseguir, reescrevemos a medida infinitesimal $d^3 p_i$ em coordenadas esféricas, obtendo

$$d^3 p_1 d^3 p_2 = (dp_1 d\phi_1 d\theta_1 \sin \theta_1 p_1^2) (dp_2 d\phi_2 d\theta_2 \sin \theta_2 p_2^2), \quad (\text{B.7})$$

e lembramos que nenhum dos fatores dos integrandos da equação (B.3) depende de ϕ_1 ou ϕ_2 . Ainda, nos aproveitamos do fato de que a integral sobre todos os valores possíveis de θ_1 e θ_2 , é equivalente à integral sobre todos os valores possíveis de θ_1 (ou θ_2) e do ângulo relativo, θ .

Ou seja, para um integrando $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\theta, s, E_1, E_2)$, escrevemos

$$\begin{aligned} \int d^3 p_1 d^3 p_2 \mathcal{I} &= \int dp_1 dp_2 d\phi_1 d\phi_2 d\theta_1 \sin \theta_1 d\theta_2 \sin \theta_2 p_1^2 p_2^2 \mathcal{I} \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\phi_1 \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi_2 \right) \left(\int_{-1}^1 d \cos \theta \right) \int dp_1 dp_2 d \cos \theta p_1^2 p_2^2 \mathcal{I} \quad (\text{B.8}) \\ &= 2 (2\pi)^2 \int dp_1 dp_2 d \cos \theta p_1^2 p_2^2 \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Lembrando que $E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2}$, obtemos

$$\frac{dE_i}{dp_i} = \frac{1}{2} \frac{2p_i}{\sqrt{p_i^2 + m_i^2}} = \frac{p_i}{E_i}, \quad (\text{B.9})$$

e então

$$\int d^3 p_1 d^3 p_2 \mathcal{I} = 2 (2\pi)^2 \int dE_1 dE_2 d \cos \theta p_1 p_2 E_1 E_2 \mathcal{I}. \quad (\text{B.10})$$

Assim, definindo

$$F(s) = v_{\text{Mol}} E_1 E_2 = \sqrt{\frac{1}{4}(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 m_2^2}, \quad (\text{B.11})$$

temos que $\mathcal{N}_{\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle}$ é igual a

$$\mathcal{N}_{\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle} = 2 (2\pi)^2 \int dE_1 dE_2 d \cos \theta p_1 p_2 e^{-(E_1 + E_2)/T} \sigma_{12 \rightarrow 34}(s) F(s). \quad (\text{B.12})$$

Neste ponto, é útil fazer outra transformação de variáveis. Em vez de integrar sobre dE_1 , dE_2 e $d \cos \theta$, se torna conveniente integrar sobre as variáveis

$$\begin{cases} E_+ = E_1 + E_2, \\ E_- = E_1 - E_2, \\ s = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 - 2 p_1 p_2 \cos \theta. \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Para fazer essa mudança de variáveis é necessário calcular o Jacobiano desta transformação,

$$J(E_+, E_-, s) = \begin{vmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial E_+} & \frac{\partial E_1}{\partial E_-} & \frac{\partial E_1}{\partial s} \\ \frac{\partial E_2}{\partial E_+} & \frac{\partial E_2}{\partial E_-} & \frac{\partial E_2}{\partial s} \\ \frac{\partial \cos \theta}{\partial E_+} & \frac{\partial \cos \theta}{\partial E_-} & \frac{\partial \cos \theta}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\partial \cos \theta}{\partial E_+} & \frac{\partial \cos \theta}{\partial E_-} & -\frac{1}{2p_1 p_2} \end{vmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

o que fornece

$$J(E_+, E_-, s) = \frac{1}{4p_1 p_2}. \quad (\text{B.15})$$

Assim, podemos reescrever $\mathcal{N}_{\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle}$ como

$$\mathcal{N}_{\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle} = \frac{2(2\pi)^2}{4} \int dE_+ dE_- ds e^{-E_+/T} \sigma_{12 \rightarrow 34}(s) F(s). \quad (\text{B.16})$$

Os limites de integração sobre E_+ , E_- e s que substituem $E_1 > m_1$, $E_2 > m_2$ e $|\cos \theta| \leq 1$ são

$$\begin{aligned} E_+^2 - s &= (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \geq (p_1 - p_2)^2 \geq 0 \\ &\Downarrow \\ E_+^2 &\geq s, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} s &= (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 \geq (m_1 + m_2)^2 \\ &\Downarrow \\ s &\geq (m_1 + m_2)^2, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

onde utilizamos o referencial do centro de massa para a derivação da desigualdade (B.18), e, por fim, temos para E_-

$$A - B \leq E_- \leq A + B, \quad (\text{B.19})$$

onde

$$A \pm B \equiv \frac{E_+(m_1^2 - m_2^2)}{s} \pm \frac{\sqrt{(E_+^2 - s)}\sqrt{(m_1^2 - m_2^2)^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + s^2}}{s}. \quad (\text{B.20})$$

O limite para E_- foi obtido isolando $\cos \theta$ na expressão para s (apresentada na equação (B.13)), reescrevendo E_1 e E_2 em termos de E_+ e E_- e resolvendo, no Mathematica, os valores de E_- que satisfazem $\cos \theta = \pm 1$. Graficamente, foi possível checar que, de fato, o intervalo $A - B \leq E_- \leq A + B$ corresponde a valores de $\cos \theta$ que satisfazem $|\cos \theta| \leq 1$.

Como exemplo, apresentamos, na figura (47), um gráfico de $\cos \theta$ em função de E_- , assina-

lando os limites $A \pm B$. Para gerar esse gráfico, escolhemos arbitrariamente $E_+ = \sqrt{10}$ GeV, $m_1 = 1.2$ GeV, $m_2 = 1.3$ GeV e também $s = 7$ GeV².

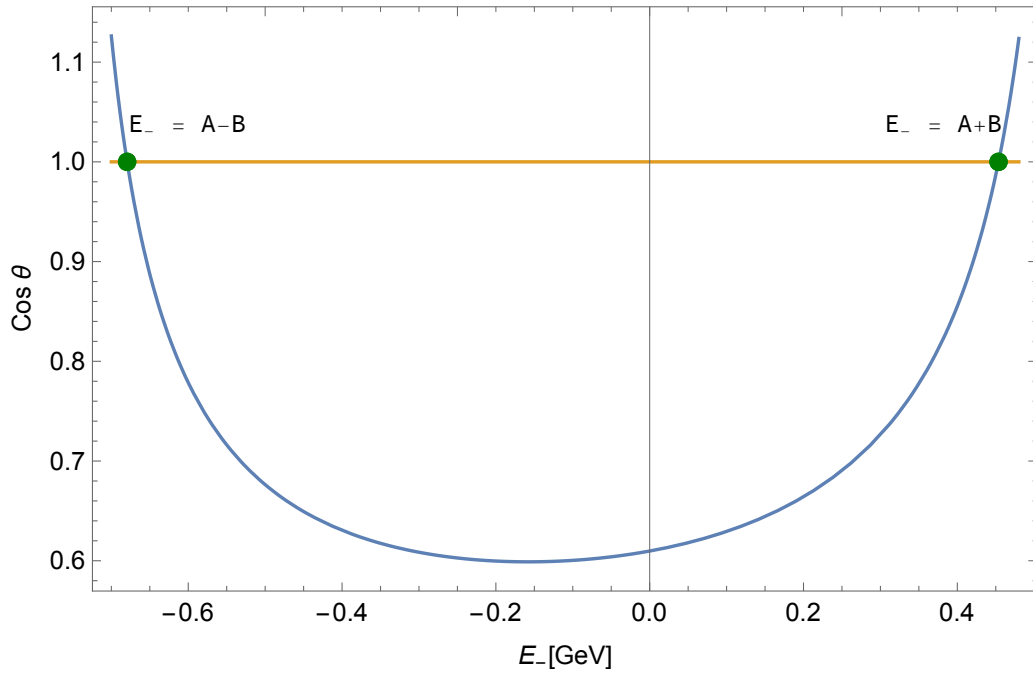


Figura 47: Gráfico de $\cos \theta$ vs. E_- , fixados $E_+ = \sqrt{10}$ GeV, $m_1 = 1.2$ GeV, $m_2 = 1.3$ GeV e $s = 7$ GeV². Os pontos verdes assinalam os limites $E_- = A \pm B$, os quais delimitam o intervalo que satisfaz $|\cos \theta| \leq 1$, onde A e B são definidos na equação (B.20).

Sabendo os limites de integração adequados, podemos voltar à equação (B.16), obtendo

$$\mathcal{N}_{\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle} = 2\pi^2 \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} ds \sigma_{12 \rightarrow 34}(s) F(s) \int_{\sqrt{s}}^{\infty} dE_+ e^{-E_+/T} \int_{A-B}^{A+B} dE_-, \quad (\text{B.21})$$

onde, usando as definições (B.20) e (B.11), podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{A-B}^{A+B} dE_- &= 2B \\ &= 2 \frac{\sqrt{(E_+^2 - s)} \sqrt{(m_1^2 - m_2^2)^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + s^2}}{s} \\ &= 4 \sqrt{(E_+^2 - s)} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{s} \\ &= 4 \sqrt{(E_+^2 - s)} \frac{F(s)}{s}, \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

o que fornece

$$\mathcal{N}_{\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle} = 8\pi^2 \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} ds \sigma_{12\rightarrow 34}(s) \frac{F(s)^2}{s} \int_{\sqrt{s}}^{\infty} dE_+ e^{-E_+/T} \sqrt{(E_+^2 - s)}. \quad (\text{B.23})$$

Neste ponto, é útil tomar uma das formas integrais da primeira função modificada de Bessel [69],

$$\mathbf{K}_1(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma_f(3/2)} \frac{z}{2} \int_1^{\infty} dt e^{-zt} \sqrt{t^2 - 1}, \quad (\text{B.24})$$

onde chamamos de Γ_f a bem conhecida função Gama. A partir desta fórmula, temos

$$\mathbf{K}_1(\sqrt{s}/T) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma_f(3/2)} \frac{\sqrt{s}}{2T} \int_1^{\infty} dt e^{-\sqrt{s}t/T} \sqrt{t^2 - 1}. \quad (\text{B.25})$$

Redefinindo t como $t = E_+/\sqrt{s}$, temos que $dt = dE_+/\sqrt{s}$ e podemos reescrever (B.25)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1(\sqrt{s}/T) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma_f(3/2)} \frac{\sqrt{s}}{2T} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\sqrt{s}}^{\infty} dE_+ e^{-E_+/T} \sqrt{\left(\frac{E_+}{\sqrt{s}}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{1}{T\sqrt{s}} \int_{\sqrt{s}}^{\infty} dE_+ e^{-E_+/T} \sqrt{E_+^2 - s}, \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

onde usamos que $\Gamma_f(3/2) = \sqrt{\pi}/2$. Assim, obtemos

$$\mathcal{N}_{\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle} = 8\pi^2 T \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} ds \sigma_{12\rightarrow 34}(s) \frac{F(s)^2}{\sqrt{s}} \mathbf{K}_1(\sqrt{s}/T), \quad (\text{B.27})$$

que, retomando a definição de $F(s)$ (equação (B.11)), escreve-se

$$\boxed{\mathcal{N}_{\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle} = 2\pi^2 T \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} ds \sigma_{12\rightarrow 34}(s) \frac{[(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2]}{\sqrt{s}} \mathbf{K}_1(\sqrt{s}/T)}. \quad (\text{B.28})$$

Com este resultado, voltamo-nos ao tratamento analítico do denominador da expressão (B.3). Para isso, a partir da definição feita na equação (B.6) e da expressão (B.7), escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle} &= \int dp_1 dp_2 d\phi_1 d\phi_2 d\cos\theta_1 d\cos\theta_2 p_1^2 p_2^2 e^{-E_1/T} e^{-E_2/T} \\ &= (4\pi)^2 \int dE_1 E_1 p_1 e^{-E_1/T} \int dE_2 E_2 p_2 e^{-E_2/T} \\ &= (4\pi)^2 \int_{m_1}^{\infty} dE_1 E_1 \sqrt{E_1^2 - m_1^2} e^{-E_1/T} \int_{m_2}^{\infty} dE_2 E_2 \sqrt{E_2^2 - m_2^2} e^{-E_2/T}, \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

onde utilizamos (B.9) na segunda igualdade.

Neste ponto, é útil a forma integral da segunda função modificada de Bessel apresentada na referência [70],

$$\mathbf{K}_2(z) = \frac{1}{z^2} \int_z^\infty d\tau \sqrt{\tau^2 - z^2} \tau e^{-\tau}, \quad (\text{B.30})$$

a qual implica

$$\mathbf{K}_2(m_i/T) = \frac{T^2}{m_i^2} \int_{m_i/T}^\infty d\tau \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{m_i}{T}\right)^2} \tau e^{-\tau}. \quad (\text{B.31})$$

Redefinindo τ como $\tau = E_i/T$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2(m_i/T) &= \frac{T^2}{m_i^2} \int_{m_i}^\infty dE_i \frac{1}{T^2} \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \frac{E_i}{T} e^{-E_i/T} \\ &= \frac{1}{m_i^2 T} \int_{m_i}^\infty dE_i E_i \sqrt{E_i^2 - m_i^2} e^{-E_i/T}, \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

o que fornece

$$\begin{aligned} \frac{n_i^{eq}}{g_i/(2\pi)^3} &= 4\pi \int_{m_i}^\infty dE_i E_i \sqrt{E_i^2 - m_i^2} e^{-E_i/T} \\ &= 4\pi m_i^2 T \mathbf{K}_2(m_i/T). \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

De mesmo modo, comparando as equações (B.32) e (B.29), obtemos,

$$\boxed{\mathcal{D}_{\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle} = (4\pi)^2 m_1^2 m_2^2 T^2 \mathbf{K}_2(m_1/T) \mathbf{K}_2(m_2/T)}. \quad (\text{B.34})$$

Portanto, retomando que

$$\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle_{12\rightarrow 34} = \frac{\mathcal{N}_{\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle}}{\mathcal{D}_{\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle}}, \quad (\text{B.35})$$

escrevemos, finalmente

$$\boxed{\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle_{12\rightarrow 34} = \frac{1}{8 m_1^2 m_2^2 T \mathbf{K}_2(m_1/T) \mathbf{K}_2(m_2/T)} \int_{(m_1+m_2)^2}^\infty ds \sigma_{12\rightarrow 34}(s) \frac{[(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2]}{\sqrt{s}} \mathbf{K}_1(\sqrt{s}/T)}, \quad (\text{B.36})$$

onde a expressão obtida para $\mathcal{N}_{\langle\sigma v_{\text{Mol}}\rangle}$ (equação (B.28)) concorda com o resultado apresentado em [49] e a expressão para $n_i^{eq}(2\pi)^3/g_i$ (equação (B.33)) concorda com o que é apresentado em [55]. A equação (B.36) retoma a expressão (3.72), apresentada no capítulo 3 pela simples substituição $T = m_\chi/x$.

B.2 $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{11 \rightarrow 23}$

A partir da equação (B.36), podemos obter diretamente a média térmica da seção de choque para o caso em que as duas partículas do estado inicial são da mesma espécie (com massas iguais), denominada $\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{11 \rightarrow 23}$. Para isso, apenas fazemos a substituição direta $m_2 = m_1$, obtendo

$$\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle_{11 \rightarrow 23} = \frac{1}{8 m_1^4 T \mathbf{K}_2^2(m_1/T)} \int_{4m_1^2}^{\infty} ds \sigma_{11 \rightarrow 23}(s) \sqrt{s} [s - 4m_1^2] \mathbf{K}_1(\sqrt{s}/T), \quad (\text{B.37})$$

recuperando o resultado de referência, apresentado em [55].

B.3 $\langle \Gamma_{1 \rightarrow 23} \rangle$

De modo análogo ao que foi feito na seção B.1, para tratar analiticamente $\langle \Gamma_{1 \rightarrow 23} \rangle$, definido como,

$$\langle \Gamma_{1 \rightarrow 23} \rangle = \frac{\int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{g_1}{E_1} f_1 \Gamma_{1 \rightarrow 23}}{\int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} f_1} = \frac{\int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{g_1}{E_1} f_1^{eq} \Gamma_{1 \rightarrow 23}}{n_1^{eq}}, \quad (\text{B.38})$$

fazemos a aproximação $f_1^{eq} = e^{-E_1/T}$, o que fornece

$$\langle \Gamma_{1 \rightarrow 23} \rangle = \frac{g_i/(2\pi)^3}{n_1^{eq}} m_1 \Gamma_{1 \rightarrow 23} \int d^3 p_1 \frac{1}{E_1} e^{-E_1/T}, \quad (\text{B.39})$$

onde deixamos explícito que a largura de decaimento $\Gamma_{1 \rightarrow 23}$ não depende do momento da partícula 1. A partir da equação (B.7), que descreve a transformação do elemento de volume no espaço dos momentos para coordenadas esféricas, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int d^3 p_i \frac{1}{E_1} e^{-E_1/T} &= (4\pi) \int_0^{\infty} dp_1 p_1^2 \frac{1}{E_1} e^{-E_1/T} \\ &= (4\pi) \int_{m_1}^{\infty} dE_1 e^{-E_1/T} \sqrt{E_1^2 - m_1^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

onde pode-se reconhecer certa semelhança com a expressão para \mathbf{K}_1 apresentada em (B.24), a qual implica

$$\mathbf{K}_1(m_1/T) = \frac{m_1}{T} \int_1^{\infty} dt e^{-m_1 t/T} \sqrt{t^2 - 1}. \quad (\text{B.41})$$

Fazendo mudança de variáveis $t \rightarrow E_1/m_1$, obtemos

$$\mathbf{K}_1(m_1/T) = \frac{1}{T m_1} \int_{m_1}^{\infty} dE_1 e^{-E_1/T} \sqrt{E_1^2 - m_1^2}, \quad (\text{B.42})$$

o que fornece

$$\int d^3 p_i \frac{1}{E_1} e^{-E_1/T} = 4\pi T m_1 \mathbf{K}_1(m_1/T), \quad (\text{B.43})$$

de modo que

$$\langle \Gamma_{1 \rightarrow 23} \rangle = \Gamma_{1 \rightarrow 23} \frac{g_i / (2\pi)^3}{n_1^{eq}} 4\pi m_1^2 T \mathbf{K}_1(m_1/T). \quad (\text{B.44})$$

Por fim, recuperando a expressão para $n_i^{eq} (2\pi)^3 / g_i$ apresentada em (B.33), temos

$$\boxed{\langle \Gamma_{1 \rightarrow 23} \rangle = \Gamma_{1 \rightarrow 23} \frac{\mathbf{K}_1(m_1/T)}{\mathbf{K}_2(m_1/T)},} \quad (\text{B.45})$$

o que concorda com a referência [57]. A expressão (3.73), apresentada no capítulo 3 é recuperada pela simples substituição $T = m_\chi/x$.