Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Acreção Esfericamente Simétrica de Matéria: Conceitos Básicos e Aplicações em Cosmologia

Michel Aguena da Silva

Orientador:
Prof. Dr. José Ademir Sales de Lima

Banca examinadora:
Prof. Dr. Prof. Dr. José Ademir Sales de Lima (USP)
Prof. Dr. Luis Raul Weber Abramo (USP)
Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin (UFABC)

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Física para a obtenção do título de Mestre em ciências.

São Paulo
2012

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Silva, Michel Aguena da

Acreção Esfericamente Simétrica de Matéria: Conceitos Básicos e Aplicações em Cosmologia — São Paulo, 2012.

Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo.

Instituto de Física.

Orientador: Prof. Dr. José Ademir Sales de Lima

Área de concentração: Física

Unitermos: 1. Mecânica dos Fluidos; 2. Cosmologia; 3. Buracos Negros; 4. Discos de Acreção

USP/IF/SBI-016/2009

Dedico esta obra à minha mãe
e a minha Gabi,
as mulheres da minha vida.

Agradecimentos

Ao meu orientador José Ademir Sales de Lima, pela escolha do tema da dissertação e por todo o apoio desde o trabalho de graduação no bacharelado de física até o mestrado como também pelos conselhos sobre o mundo acadêmico e a vida.

Ao professor Francisco E. M. da Silveira da UFABC pelo auxílio e pelas discussões sobre processos dissipativos no final do trabalho de graduação e no inicio da dissertação.

À minha família, principalmente à minha mãe por me apoiar sempre a participar de atividades intelectuais, por me propiciar um espaço para discussões de todas as naturezas e por me incentivar a seguir o meu potencial e a minha tia Leonor por tornar a minha jornada mais confortável.

Aos professores do Instituto de Física, do Departamento de Astronomia do IAG e do Instituto de Matemática pelas disciplinas lecionadas e pela minha formação no bacharelado de física na USP e no mestrado.

Aos colegas do grupo de cosmologia pela minha iniciação na área e pelas discussões científicas, em especial a Vinicius Consolini Busti, Rodrigo Fernandes Holanda, Felipe Andrade Oliveira, José Fernando de Jesus e Silvio Fiorentin Neto que abriram um espaço para mim em sua sala de pesquisa.

Ao CNPq pela concessão da bolsa de estudos.

Aos meus amigos do colégio e da universidade por proporcionarem ambientes onde sinto que pertenço.

À Gabi por ser minha companheira nesta vida.

Resumo

Nesta dissertação discutimos o processo da acreção de matéria sobre objetos compactos em suas diferentes abordagens. Iniciando com o caso clássico, estudamos sua contraparte relativística e, por fim, investigamos a acreção de fluidos cosmológicos (energia escura e matéria escura) em buracos negros. Devido à simetria esférica adotada, a formação dos chamados discos de acréscimo é proibida (tanto no caso clássico quanto no relativístico) e, portanto, os problemas relacionados com a física dos discos (sua formação e evolução) não foram investigados.

No contexto clássico, analisamos inicialmente a chamada acreção de Bondi, onde o fluido acretado obedece a uma equação de estado politrópica e o processo de acreção é descrito pela hidrodinâmica euleriana. A existência de 6 tipos possíveis de soluções para o campo de velocidades é identificada e suas consequências físicas são discutidas em detalhe. Apenas uma dessas soluções descreve de forma fisicamente consistente o processo de acreção. A taxa de matéria acretada é constante, um resultado esperado devido à hipótese de regime estacioná-

rio. O estudo do caso relativístico é completamente baseado na Teoria da Relatividade Geral, com o campo gravitacional do corpo central sendo descrito pela métrica de Schwarzschild. O processo relativístico também ocorre sob condições estacionárias e, portanto, a taxa de acreção resultante também é constante.

Uma atenção especial foi dedicada para a acreção de fluidos cosmológicos satisfazendo uma equação de estado linear e também para o chamado gás de Chaplygin. Estudamos separadamente o comportamento espacial do fluido na região dominada pela acreção e também a influência da evolução cosmológica nas regiões mais distantes. Mostramos que a massa do buraco negro central pode apresentar uma evolução no tempo em escala cosmológica. Os resultados de Babichev (caso linear) e o gás de Chaplygin foram unificadamente descritos através de uma equação de estado generalizada. Por fim, determinamos também sob que condições a acreção de matéria pode provocar mudanças significativas na massa do buraco negro.

Abstract

In this dissertation the matter accretion process upon compact objects is discussed in its different approaches. Starting with the classical case, the relativistic type was studied and, in the end, the accretion of cosmological fluids (dark energy and dark matter) onto a black hole is investigated. Due to spherical symmetry adopted, the formation of accretion disks is forbidden (both in the classical and relativistic case) and, thus, the problems related to disk physics (the formation and evolution) were not investigated.

On the classical approach, the so called Bondi accretion is examined, in which the matter flux occurs according to a polytropic equation of state and the accretion itself is described by the Eulerian hydrodynamic. The existence of 6 possible families of solutions for the velocity field is identified and its physical consequences are thoroughly discussed. Only one of these solutions describes the accretion process in a physically consistent manner. The mass accretion rate is found to be constant, as expected duo to the steady-state hypothesis. The relativistic approach is completely based on the General

Relativity Theory. In this case, the gravitational field of the central body is described by the Schwarzschild metric. The relativistic process also occurs in steady-state conditions and, therefore, the accretion flux also is constant.

A particular interest is given to the accretion of cosmological fluids with a linear equation of state and of Chaplygin gas. Both the spacial behaviour of the fluids in the accretion dominated region and their cosmological evolution in farther regions are looked into individually. The mass of the central black hole's evolution is shown to occur in cosmological times. The Babichev (linear equation of state) and Chaplygin results were unified through a generalised equation of state. At last, it is also determined under which conditions the accretion of cosmological fluids can have astonishing effects on the black hole's mass.

Notação e convenções

As convenções a seguir deverão ser adotadas a partir do capítulo (3), onde o regime relativístico é tratado.

- Adotaremos o sistema de unidades onde c=1
- Assinatura da métrica: (+,-,-,-)
- A convenção da soma de Einstein é adotada para índices repetidos
- Os índices gregos variam de 0 a 3, sendo que o índice 0 representa a componente temporal e os índices 1,2,3 representam as coordenadas espaciais.
- Derivada parcial: $\psi,_{\mu} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}}$
- Derivada covariante de um 4-tensor:

  $T^{\mu\nu};_{\rho} \equiv \frac{DT^{\mu\nu}}{Dx^{\rho}} = T^{\mu\nu},_{\rho} + \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda} T^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\lambda} T^{\mu\lambda}$
- Tensor de Ricci: $R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$
- Escalar de curvaruta: $R \equiv R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$
- A massa do sol é representada por $M_{\odot}$

Sumário

Lista de Figuras

1
Introdução

O fenômeno da acreção ocorre quando matéria em forma de gás é atraída gravitacionalmente por um objeto compacto, tal como uma estrela, um buraco negro ou mesmo uma distribuição arbitrária de matéria (galáxias e aglomerados de galáxias). É através desse processo que objetos celestiais ganham massa. O mesmo fenômeno físico ocorre em sistemas binários, onde uma das estrelas absorve o gás das camadas exteriores da outra (canibalismo), levando a formação de discos em torno do objeto atrator. Discos de acreção são estruturas em que toda a nuvem de gás acretada se concentra em um plano devido a conservação do momento angular do sistema e são ocorrências

astronômicas comuns. Nos núcleo ativos de galáxias (*AGN's*) e mesmo durante a formação de estrelas surgem discos de acreção (conhecidos como discos protoplanetários) que dão origem a planetas com órbitas coplanares [1, 2].

Inicialmente, o processo da acreção foi investigado por Hoyle & Lyttleton [3, 4, 5, 6] e por Bondi & Hoyle [7] em estudos de evolução estelar e depois analisado com mais profundidade por Bondi [8]. Com a descoberta de Quasares e fontes de raio-X determinou-se que a acreção é um importante mecanismo de produção de energia explicando, por exemplo a luminosidade dos núcleos ativos de galáxias (*AGN's*) [9, 10, 11, 12].

Mais recentemente o fenômeno de acreção foi estudado no cenário cosmológico e algumas possíveis consequências para a física de buracos negros foram discutidas [13, 14, 15]. A presente dissertação é dedicada ao estudo da acreção esfericamente simétrica nas suas versões clássica e relativística. As linhas gerais de seu desenvolvimento serão apresentadas a seguir.

No capítulo 2, estudamos o processo de acreção da forma originalmente discutida por Bondi [8] . Esta é uma abordagem

clássica para o problema com simetria esférica. A matéria acretada é tratada como fluido e uma equação de estado politrópica é considerada. Determinamos quais as equações que descrevem o processo de acreção e quais outros fenômenos podem ser descritos desta maneira. Além disso, calculamos a taxa de acreção de matéria e qual a região afetada.

No capítulo 3, analisamos a contraparte relativística para o problema da acreção discutido por Michel [16]. Este estudo é necessário quando o campo gravitacional é muito intenso e as energias envolvidas são altas. Esta descrição é feita baseada na teoria da relatividade geral de Einstein. Investigamos quais são as equações relativísticas da acreção e o caso onde o corpo acretor é um buraco negro. Também calculamos qual é a taxa de acreção e o comportamento de um fluido com uma equação de estado politrópica.

No capítulo 4 fazemos uma breve introdução à cosmologia para depois discutirmos o processo de acreção de fluidos cosmológicos em buracos negros. Examinamos também como ocorre a introdução dos fenômenos cosmológicos no processo de acreção e as escalas envolvidas. O comportamento do

fluido na região de influência da acreção e sua evolução cosmológica, assim como as possíveis evoluções para a massa do buraco negro são estudadas para dois tipos de fluidos: um fluido satisfazendo uma equação de estado linear proposta por Babichev e o gás de Chaplygin, que possuem características importantes para a cosmologia.

No capítulo 5 introduzimos uma equação de estado generalizada que pode descrever tanto o caso de Babichev quanto o gás de Chaplygin como casos particulares. Neste contexto, discutimos também qual a variação da massa do buraco negro.

Finalmente, no capítulo 6, resumimos os principais resultados e apontamos algumas perspectivas para o presente trabalho.

Nosso contato com a literatura indica que o material contido em parte do capítulo 4 e todo o capítulo 5 constituem a parte original da dissertação.

2
Acreção Clássica

O estudo de acreção tal como desenvolvido por Bondi [8] foi utilizado como base para muitos desenvolvimentos nesta área [17, 18, 19]. O caso de acreção com pressão nula já havia sido discutido por Hoyle & Lyttleton [3, 4, 5, 6] e com mais detalhes por Bondi & Hoyle [7]. A proposta básica de Bondi era descobrir como a pressão do gás afeta a taxa de acreção da matéria. Nesta abordagem, a massa acretada é muito menor que a do corpo central e a acreção possui simetria esférica. Dessa forma não há momento angular e é possível descrever o processo de acreção de matéria com bastante simplicidade.

Este modelo será desenvolvido a seguir.

2.1 Acreção de Bondi

Em seu trabalho seminal, Hermann Bondi [8] descreveu a acreção com as seguintes palavras: "Uma estrela de massa M está em repouso dentro de uma nuvem de gás que se extende ao infinito, onde sua densidade ρ_∞ e pressão p_∞ são constantes. O movimento do gás é esfericamente simétrico e estacionário, sendo ignorado o aumento da massa da estrela para que o campo de forças permaneça imutável".

O tratamento realizado para descrever processos de acreção é vasto e pode ser aplicado a diversos problemas além de estrelas de campo envoltas por nuvens de gás e galáxias. Ao se utilizar diferentes condições de contorno, esse estudo pode descrever também ventos estelares, galácticos e de cometas [17, 18].

As partículas que constituem o gás interagem principalmente por colisões. Quando o *livre caminho médio* dessas partículas é muito menor que as escalas envolvidas no sistema, o gás pode ser tido como um meio contínuo. É importante ressal-

tar que a descrição de fluidos, embora possa retratar processos de pequena escala, pode não ser válida fisicamente em escalas menores do que o *livre caminho médio*. A dinâmica de um fluido perfeito , cujo campo gravitacional é desprezível, é descrita a partir de duas equações básicas [20]: (i) a equação da continuidade que expressa a conservação de massa e, (ii) a conservação do fluxo de momento, cuja expressão matemática é a equação de Euler:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho \vec{v}) = 0, \tag{2.1}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\vec{\nabla} \right) \vec{v} \right] = -\nabla p + \rho \vec{f}, \tag{2.2}$$

onde ρ é a densidade do fluido, $\vec{v}$, o campo de velocidades, p, a pressão e $\vec{f}$, a força externa atuando no sistema.

No caso da acreção de matéria estudada por Bondi [8] existem várias hipóteses simplificadoras. As mais importantes são: (i) simetria esférica, (ii) regime estacionário, (iii) o gás se encontra em repouso a grandes distâncias do corpo central, (iv) a matéria acretada é muito menor do que a massa do

corpo central e (v) a força externa é a força do campo gravitacional do corpo central. Com tais hipóteses, as equações (2.1) e (2.2) podem ser reescritas nas seguintes formas [21]:

$$\frac{d}{dr}(r^2 v\rho) = 0, \tag{2.3}$$

$$v\frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0. \tag{2.4}$$

A taxa de acreção é dada pelo fluxo de momento ρv integrado em uma superfície em volta do corpo central. Devido à simetria esférica, essa superfície é simplesmente uma casca esférica com área $4\pi r^2$, através da qual o fluxo de momento é constante. Portanto a taxa de acreção $\dot{M}$ é descrita por:

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho \left(-v\right). \tag{2.5}$$

Como o fluxo interno de matéria possui uma velocidade negativa no sistema de coordenadas esféricas, um sinal negativo no lado direito da equação é necessário para que a taxa de acreção seja positiva.

Integrando a equação (2.3) obtemos:

$$r^2 v\rho = \alpha, \tag{2.6}$$

que representa uma relação explícita entre a velocidade do fluido e a sua densidade. Combinando esta relação com (2.5) segue que a taxa de acreção é constante $[\dot{M} = 4\pi\,(-\alpha)]$.

A descrição completa do sistema exige uma especificação da equação de estado obedecida pelo gás que está sendo acretado. A fenomenologia do processo termodinâmico depende da relação entre o tempo necessário para o gás ser acretado e o tempo de aquecimento/resfriamento do gás. Quando a acreção é tão rápida que o gás não termaliza, o processo é dito adiabático e no outro extremo o processo é isotérmico. Portanto a equação politrópica ($p\rho^\gamma = k = constante$, onde γ é a razão dos calores específicos) é uma boa escolha pois descreve uma grande classe de processos, incluindo os casos extremos ($\gamma = 5/3$ para adiabáticos e $\gamma = 1$ para isotérmicos). Assim, como a acreção deve ser algo intermediário, é razoável supor que para este processo $1 < \gamma < \frac{5}{3}$.

A partir da equação de estado definimos a velocidade do

som no fluido

$$v_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \Rightarrow v_s^2 = k\gamma\rho^{\gamma-1} = \frac{k\gamma\alpha^{\gamma-1}}{(r^2 v)^{\gamma-1}} \, (politrópica) \, , \tag{2.7}$$

e reescrevendo o segundo termo da equação (2.4) obtemos:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = \frac{v_s^2}{\rho}\frac{d\rho}{dr} = -\frac{v_s^2}{r^2 v}\frac{d(r^2 v)}{dr}. \tag{2.8}$$

Combinando as equações (2.4) e (2.8) é possível obter uma expressão que permite classificar as soluções de maneira bastante simples:

$$\left(1 - \frac{v_s^2}{v^2}\right)\frac{d}{dr}\left(v^2\right) = -\frac{2GM}{r^2}\left(1 - \frac{2v_s^2 r}{GM}\right). \tag{2.9}$$

Se houver um ponto crítico onde $r_s = \frac{GM}{2v_s^2(r_s)}$, então a velocidade do fluido deve se tornar igual à velocidade do som nele ou a derivada da velocidade deve se anular. Existe ainda outro grupo de soluções onde o fluido não passa por esse raio e, portanto, está confinado a camadas interiores ou exteriores a ele.

Existem 6 tipos distintos de soluções, facilmente identificá-

veis a partir da equação acima [17, 21]:

- Tipo 1: $v^2(r_s) = v_s^2(r_s)$ e $v^2(r \to \infty) \to 0$

  $(v^2 > v_s^2$ para $r < r_s$, $v^2 < v_s^2$ para $r > r_s$ e $\frac{dv^2}{dr} < 0)$

- Tipo 2: $v^2(r_s) = v_s^2(r_s)$ e $v^2(r \to 0) \to 0$

  $(v^2 < v_s^2$ para $r < r_s$, $v^2 > v_s^2$ para $r > r_s$ e $\frac{dv^2}{dr} > 0)$

- Tipo 3: $\frac{d}{dr}\left[v^2(r)\right]_{r=r_s} = 0$ e $v^2 < v_s^2 \ \forall r$
- Tipo 4: $\frac{d}{dr}\left[v^2(r)\right]_{r=r_s} = 0$ e $v^2 > v_s^2 \ \forall r$
- Tipo 5: $\frac{d}{dr}\left[v^2(r)\right]_{r=r_s}$ diverge e $r > r_s$
- Tipo 6: $\frac{d}{dr}\left[v^2(r)\right]_{r=r_s}$ diverge e $r < r_s$

Uma vez que os tipos de soluções forem determinados, é interessante utilizar a forma integral da equação (2.4):

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{v_s^2}{\gamma - 1} - \frac{GM}{r} = E. \tag{2.10}$$

A constante de integração E é a energia por unidade de massa contida no sistema, e os termos de (2.10) são respectivamente a energia cinética do gás, sua energia interna e a energia gravitacional do corpo central.

Através da introdução de uma variável auxiliar conhecida como o número de Mach ($\mathcal{M}^2 = v^2/v_s^2$), que descreve quanto o fluido é supersônico ou subsônico, é possível escrever a solução das equações (2.6) e (2.10) de forma explícita:

$$\Delta P\left(\mathcal{M}\right) = Q\left(r/r_0\right) \tag{2.11}$$

onde

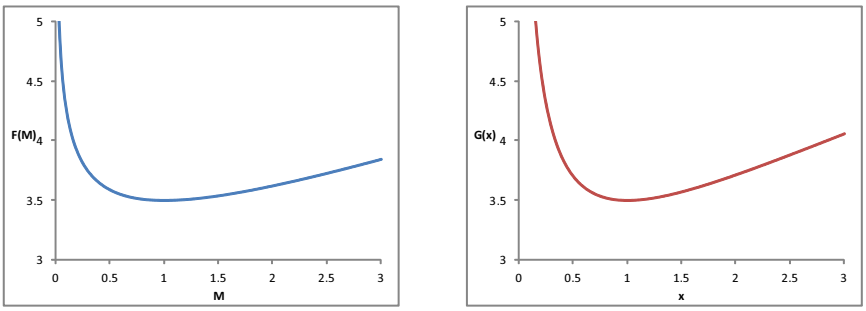
$$P\left(\mathcal{M}\right) = \mathcal{M}^{-2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\left(\frac{\mathcal{M}^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1}\right), \tag{2.12}$$

$$Q\left(x\right) = x^{4\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\left(\frac{1}{2}\frac{5-3\gamma}{\gamma-1} + \frac{2}{x}\right) \tag{2.13}$$

e

$$\Delta = \frac{2}{GM}\left(\gamma k \alpha^{\gamma-1}\right)^{\frac{2}{\gamma+1}} r_0^{\frac{5-3\gamma}{\gamma+1}} \tag{2.14}$$

O valor que normaliza a coordenada radial ($r_0 = \frac{GM}{4E}\frac{5-3\gamma}{\gamma-1}$) foi escolhido de tal forma que o mínimo de $Q\left(x\right)$ ocorra em $x = 1$. A constante Δ foi também escolhida para que os valores mínimos das duas funções sejam iguais ($P_{min} = Q_{min} = \frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$). Note na figura (2.1), que a relação entre $P\left(\mathcal{M}\right)$ e $Q\left(x\right)$ ocorre



(a) $P(\mathcal{M})$ (b) $Q(x)$

Figura 2.1: $P(\mathcal{M})$ e $Q(x)$ para $\gamma = 4/3$. Ambas as funções são parabólicas e possuem o mesmo valor no ponto mínimo, o que simplifica significativamente a interação entre elas.

de maneira muito simples, pois ambas são funções parabólicas e possuem um único mínimo, que é finito.

É importante também mencionar que para $\Delta > 1$, os valores de x são limitados a regiões onde $Q(x) \geq \Delta Q_{min}$. Isso significa que o fluido deve estar confinado dentro de uma esfera de raio r_- ou deve se encontrar integralmente no espaço exterior a uma esfera de raio r_+ onde o raio dessas esferas é definido por $Q(r_\pm) = \Delta Q_{min}$. Quando $\Delta < 1$ a restrição que aparece é $P(\mathcal{M}) \geq P_{min}/\Delta$ e o número de Mach deverá ter um valor máximo($\mathcal{M}_+$) ou valor mínimo($\mathcal{M}_-$) dado por $P(\mathcal{M}_\pm) = P_{min}/\Delta$. Portanto a velocidade do fluido apresenta a mesma característica em todo espaço, seja ela subsônica ou supersônica. Para $\Delta = 1$ não há restrições para os valores de

r e $\mathcal{M}$. Assim é possível encontrar as seis soluções previstas pela equação (2.9) e apresentadas na figura (2.2) de forma numérica. Por fim, é o valor de Δ, fornecido pela relação entre as constantes E, γ e α, que define qual curva descreve o fluido.

Nos limites em $r \to 0$ e $r \to \infty$ as curvas se aproximam das mesmas assíntotas, independentemente do valor de Δ. As soluções do Tipo 1, 4 e 6 se comportam como $\mathcal{M}^2 \propto x^{-\frac{5-3\gamma}{2}}$ e as do Tipo 2, 3 e 6 como $\mathcal{M}^2 \propto x^{\frac{5-3\gamma}{\gamma-1}}$ quando $x \to 0$. Para $x \to \infty$ as soluções do Tipo 2, 4 e 5 se tendem a $\mathcal{M}^2 \propto x^{2(\gamma-1)}$ e as do Tipo 1, 3 e 5 tendem a $\mathcal{M}^2 \propto x^{-4}$. Estes resultados se encontram na tabela (2.1).

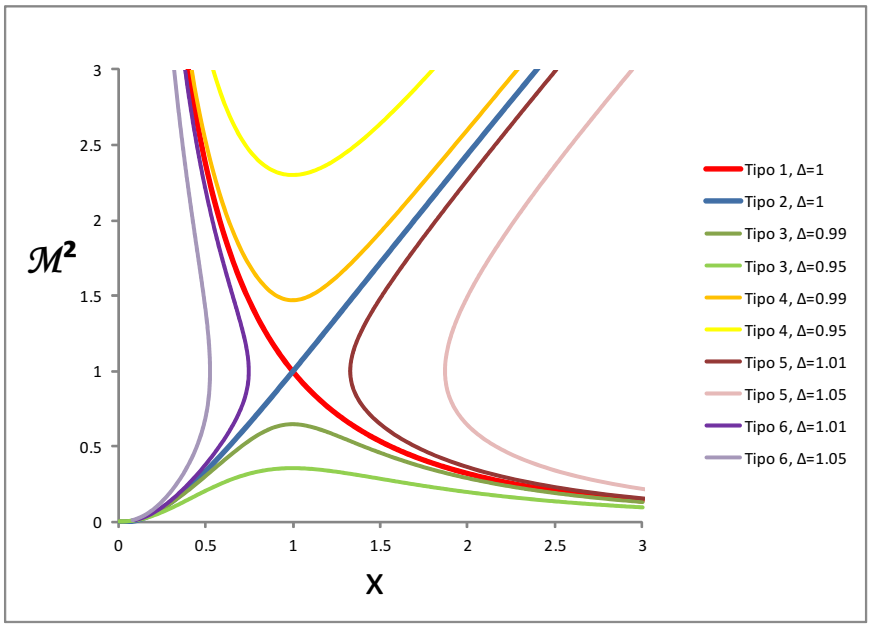


Figura 2.2: Número de Mach ($\mathcal{M}^2 = v^2/v_s^2$) pelo raio normalizado para $\gamma = 4/3$. Aqui observa-se claramente que as soluções do tipo 1 e 2 dividem o espaço em quatro regiões que contém cada uma das outras soluções restantes.

Uma vez determinada a relação entre $\mathcal{M}^2$ e x, a velocidade de escoamento e a velocidade do som podem ser determinadas por:

$$v = V_0\sqrt{\Delta}\left(\mathcal{M}x^{-2(\gamma-1)}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}} \tag{2.15}$$

e

$$v_s^2 = V_0^2\Delta\left(\mathcal{M}x^4\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \tag{2.16}$$

onde

$$V_0 = \sqrt{\frac{GM}{2r_0}} = \sqrt{2E\frac{\gamma - 1}{5 - 3\gamma}}. \tag{2.17}$$

Utilizando o resultado acima, podemos determinar a dependência radial da velocidade de escoamento, da velocidade do som e da densidade do fluido, apresentadas respectivamente nas figuras (2.3), (2.4) e (2.5).

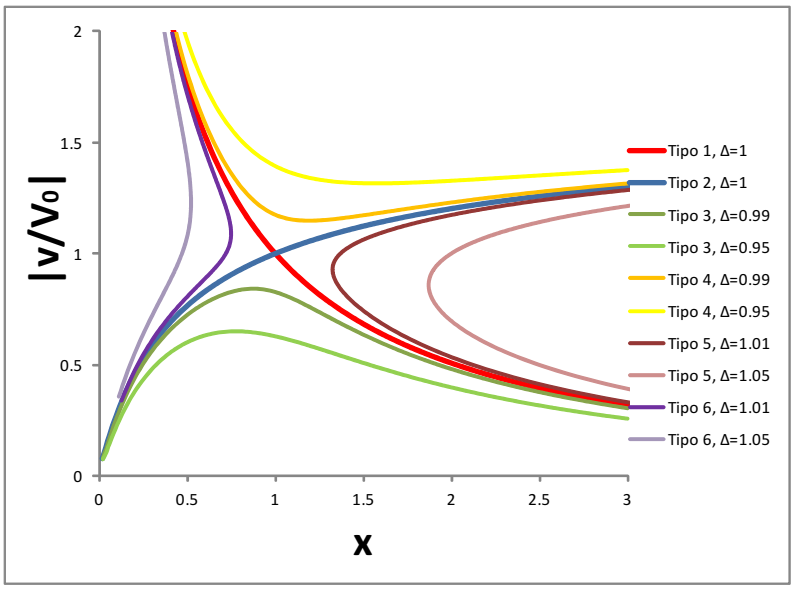


Figura 2.3: Velocidade de escoamento do fluido para $\gamma = 4/3$.

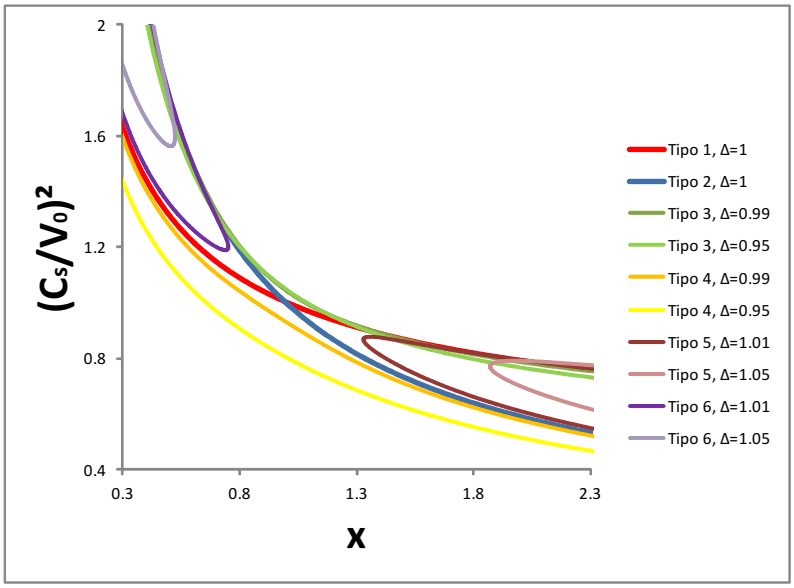


Figura 2.4: Velocidade do som no fluido para $\gamma = 4/3$.

	$r \to 0$			$r \to \infty$
$\mathcal{M}^2 \to \infty$	$v \to \infty$ $v_s^2 \to \infty$			$v \to \sqrt{2E}$ $v_s^2 \to o$
$\mathcal{M}^2 \to 0$	$\gamma < 3/2$ $v \to 0$ $v_s^2 \to \infty$	$\gamma = 3/2$ $v \to \left(\frac{3\gamma k \alpha^{1/2}}{GM}\right)^2$ $v_s^2 \to \infty$	$\gamma > 3/2$ $v \to 0$ $v_s^2 \to \infty$	$v \to 0$ $v_s^2 \to (\gamma - 1)\, E$

Tabela 2.1: Assíntotas de v e v_s^2.

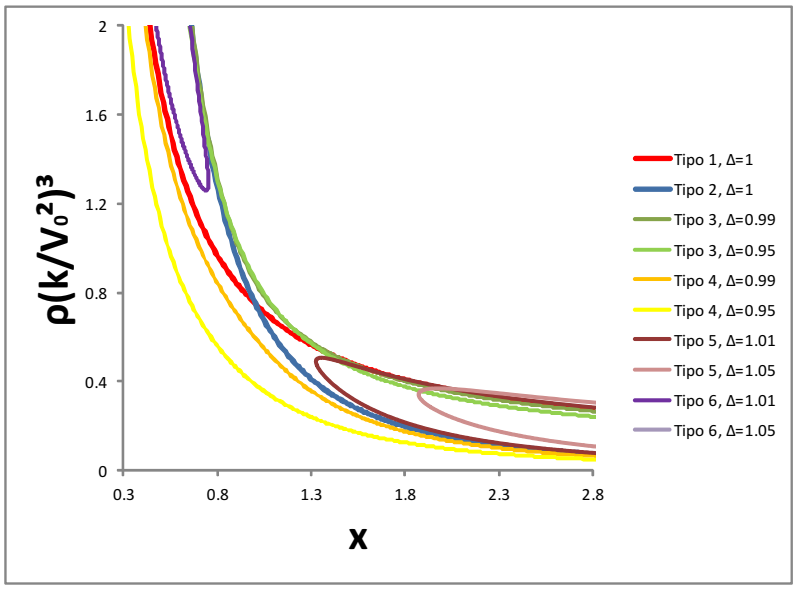


Figura 2.5: densidade do fluido para $\gamma = 4/3$.

Existe apenas uma solução possível para os casos do Tipo 1 e também para os do Tipo 2. Estas soluções fazem a transição entre os regimes subsônico e supersônico em r_s, conhecido como o ponto sônico. As soluções dos Tipos 5 e 6 estão espacialmente confinadas e possuem dois valores para a velocidade do fluido em cada ponto, portanto não descrevem regime de acreção. Como o gás se encontra em repouso no infinito, soluções dos Tipos 2 e 4 também podem ser descartadas.

O Tipo 2 pode descrever ventos estelares, em que a velocidade é positiva e tende a um valor fixo a grandes distâncias

do corpo central. De acordo com Frank, King & Raine [21] é esperado que a velocidade do fluido se torne supersônica perto do corpo central, uma propriedade não compatível com as soluções do Tipo 3. As soluções do Tipo 3 podem descrever uma brisa estelar caso $v > 0$ ou uma atmosfera com queda lenta para $v < 0$. O regime de acreção é descrito por soluções do Tipo 1 (figura 2.6) e a equação (2.10) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{v_s^2 - v_s^2(\infty)}{\gamma - 1} - \frac{GM}{r} = 0, \tag{2.18}$$

com os seguintes valores das grandezas no ponto crítico:

$$v_s^2(r_s) = v_s^2(\infty)\left(\frac{2}{5-3\gamma}\right)^{1/2}, \tag{2.19}$$

$$\rho(r_s) = \rho(\infty)\left(\frac{2}{5-3\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \tag{2.20}$$

É interessante observar que, no processo de acreção, o raio crítico é dado por $r_0 = (5-3\gamma)GM/4v_s^2(\infty)$. Para uma velocidade do som característica do meio interestelar ($\sim 10km/s$) e $\gamma = 4/3$, vemos que este raio é da ordem de $3 \times 10^8 km$.

Portanto a superfície da estrela ($r_\star \sim 10^6$) possui uma coordenada normalizada muito pequena ($x_\star \sim 10^{-3}$) e se encontra praticamente na origem das figuras (2.2), (2.3) e (2.6). Neste caso temos que a velocidade é normalizada por $V_0 \sim 14km/s$.

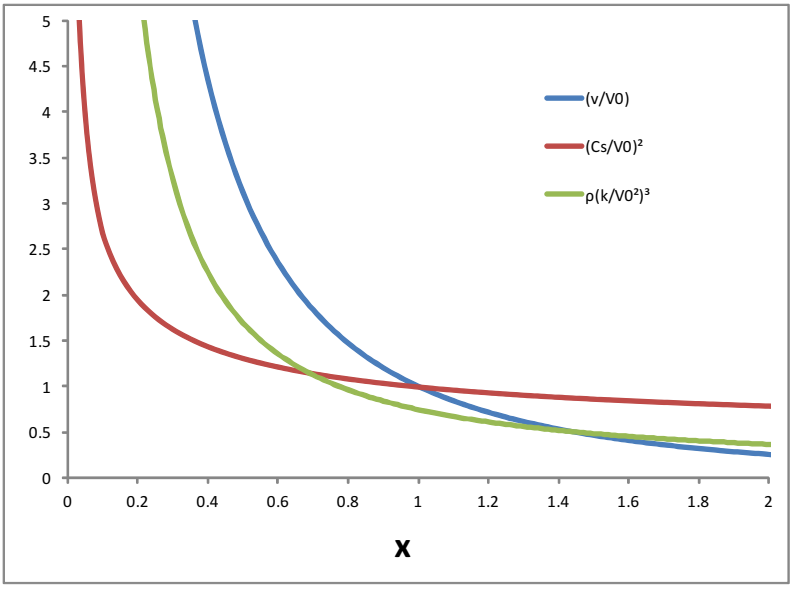


Figura 2.6: Velocidade de escoamento, velocidade do som e densidade do fluido para solução do tipo 1 e $\gamma = 4/3$.

Como a taxa de acreção é constante, podemos obtê-la em qualquer ponto, inclusive no ponto crítico ($r = r_s$). Utilizando a equação (2.18) e a equação de estado temos:

$$\dot{M} = \pi (GM)^2 \frac{\rho(\infty)}{v_s^3(\infty)} f(\gamma), \tag{2.21}$$

onde a função $f(\gamma)$ é dada por:

$$f(\gamma) = \left(\frac{2}{5-3\gamma}\right)^{\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}} . \tag{2.22}$$

Os valores de $f(\gamma)$ para escoamentos nos limites adiabático e isotérmico são $f(\gamma \to \frac{5}{3}) = 1$ e $f(\gamma \to 1) = e^{3/2} \approx 4.5$, respectivamente. Isto significa que f influencia pouco a taxa total de acreção. O valor numérico de $\dot{M}$ pode ser expresso em termos da massa solar ($M_\odot$), da velocidade característica do som no meio interestelar ($v_s(\infty) = 10km/s$), de uma densidade típica para nuvens de gás ($\rho(\infty) = 10^{-24}g/cm^3$) e do fator politrópico. Para um gás ideal com $\gamma = 1.5$, temos:

$$\dot{M} \approx 1.1 \times 10^{11} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{v_s(\infty)}{10km/s}\right)^{-3} \left(\frac{\rho(\infty)}{10^{-24g/cm^3}}\right) g/s \tag{2.23}$$

$$\approx 1.8 \times 10^{-15} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{v_s(\infty)}{10km/s}\right)^{-3} \left(\frac{\rho(\infty)}{10^{-24g/cm^3}}\right) M_\odot/ano .$$

A taxa de acreção obtida acima é de fato pequena e não altera a massa do corpo central como inicialmente suposto (ver seção 2.1). O alcance efetivo da força gravitacional da estrela se limita a regiões onde a energia térmica não excede

muito a energia gravitacional. Fora dessa região:

$$E_{term} \gg E_{grav}, \tag{2.24}$$

$$\Rightarrow \frac{mv_s^2(r)}{2} \gg \frac{GMm}{r}. \tag{2.25}$$

Dessa forma, para todos os efeitos práticos, a taxa total de acreção é limitada pela distância

$$r \gg r_{acc} \equiv \frac{2GM}{v_s^2(\infty)} \sim 17 \left(\frac{M}{M_\odot}\right) UA, \tag{2.26}$$

onde r_{acc} é o raio onde a densidade e a velocidade do som deixam de ter o valor assintótico de grandes distâncias do corpo central e UA são unidades atronômicas ($\approx 1.5 \times 10^{11} m$). A taxa de acreção se aproxima do seguinte valor:

$$\dot{M} \approx \pi r_{acc}^2 v_s(\infty)\rho(\infty). \tag{2.27}$$

Em resumo, três regiões distintas podem ser identificadas:

- $r > r_{acc}$: A influência gravitacional é desprezível, permanecendo o estado do gás inalterado a despeito da presença da

estrela.

- $r_{acc} > r > r_s$: As partículas do gás são atraídas pela estrela, porém segundo um escoamento subsônico e bem comportado. Nesta região o tratamento do gás através da mecânica dos fluidos é bem adequado.
- $r_s > r > r_\star$: O escoamento torna-se supersônico, com destaque para as regiões mais internas onde $v^2 >> v_s^2$. Neste caso pode ser observado em (2.18) que o movimento das partículas do gás toma a forma de uma queda livre até alcançar a superfície da estrela($r_\star$).

Esse tratamento da acreção se aplica bem a estrelas de campo, galáxias e outros corpos onde as velocidades são relativamente baixas. Ele não pode, no entanto, ser utilizado na descrição da acreção em estrelas de nêutrons e buracos negros, onde o campo gravitacional é muito intenso, além de os buracos negros apresentarem horizontes de eventos e singularidades. Para tais objetos supercompactos é necessária uma abordagem relativística para uma descrição mais realística do processo físico. É o que veremos no próximo capítulo.

3
Acreção Relativística

Atualmente, a teoria da relatividade geral (TRG) é considerada uma dos pilares da física contemporânea. Ela substituiu a gravitação newtoniana na descrição dos processos macroscópicos e se reduz a esta nos limites de campos gravitacionais fracos e baixas velocidades. O tratamento relativístico prevê o surgimento de estruturas como estrelas de nêutrons e buracos negros, dotados de campos gravitacionais extremamente intensos. Nos buracos negros a gravidade, ou seja, a deformação do tempo-espaço é tão intensa, que nem mesmo a luz consegue escapar. Nenhum fenômeno que ocorra nesta região

pode exercer qualquer influência em espaços externos - esta região do espaço está causalmente desconectada do exterior[1]. A fronteira entre esses dois espaços é conhecida como *horizonte de eventos* ou *raio de Schwarzschild* [24].

Quando o corpo central é extremamente massivo e estão envolvidas altas energias, a acreção deve ser tratada através da relatividade geral. Nesta abordagem a gravitação é responsável pela distorção no espaço-tempo causada pela presença de uma massa, enquanto o fluido acretado é descrito por um tensor de energia-momento [25, 26]. Os casos considerados aqui possuem condições similares ao caso newtoniano: um corpo central envolto por uma nuvem de gás que não é autogravitante; não há momento angular devido à simetria esférica; e o processo é estacionário (ou quase-estácionário como será discutido no próximo capítulo).

Em seu trabalho seminal sobre acreção relativística, Michel [16] também descreveu o processo supondo simetria esférica e fluido estacionário. Atualmente, seus resultados são utilizados como base para muitos estudos sobre a acreção de matéria

[1]Este é um resultado fundamental da Relatividade Geral, que é uma teoria clássica. Contudo, numa abordagem semi-clássica, um buraco negro se comporta como um corpo negro, emitindo radiação Hawking, cuja temperatura é inversamente proporcional a massa do buraco negro [22, 23]

em buracos negros [13, 27, 28]. É importante também mencionar que estrelas de nêutrons e buracos negros podem possuir campos elétricos intensos, por isso o caso de buracos negros carregados também tem sido analisado recentemente [29, 30].

3.1 Fundamentos de Relatividade Geral

Em 1905 Einstein revolucionou o mundo da física ao introduzir a teoria da relatividade restrita. Esta teoria generaliza a relatividade Galileana estendendo o princípio de relatividade para os fenômenos eletromagnéticos, óticos e, como sabemos hoje, para toda a física com exceção da gravitação. O postulado de que a velocidade da luz é a mesma para todos os referenciais tem importantes consequências, entre elas: a contração espacial, a dilatação temporal e a relatividade da simultaneidade. A mudança de eventos em diferentes referenciais depende das coordenadas espaciais e temporais, o que inspirou Minkowski a introduzir o conceito de espaço-tempo [31].

Neste cenário o espaço-tempo é pseudoeuclidiano, com o elemento de linha tomando a seguinte forma em coordenadas

cartesianas:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{3.1}$$

onde t é o tempo e x, y e z são as coordenadas espaciais. Podemos também escrever o elemento de linha na forma tensorial, com a métrica do espaço-tempo plano ($\eta_{\mu\nu}$) e coordenadas generalizadas espaço-temporais (x^μ):

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{3.2}$$

onde índices repetidos obedecem a convenção da soma de Einstein.

A teoria de relatividade geral (TRG) é uma descrição relativística da gravitação que generaliza a gravitação newtoniana e a própria relatividade restrita. Na TRG, os efeitos do campo gravitacional são tratados como distorções no espaço-tempo e, portanto, podem ser descritos com modificações na geometria. Na presença de campos gravitacionais e de suas fontes,

a métrica tem a seguinte forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{3.3}$$

sendo $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico do espaço-tempo curvo. O efeito da presença de matéria na estrutura do espaço-tempo pode ser calculado através da equação de Einstein [32]:

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{3.4}$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento, Λ a constante cosmológica e $G_{\mu\nu}$ o tensor de Einstein, que é definido em função do tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}$):

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \tag{3.5}$$

sendo $R \equiv R^\mu_\mu$ o escalar de Ricci. O tensor de Ricci é derivado do tensor de Riemann, que por sua vez é definido como:

$$R^\mu_{\nu\rho\lambda} \equiv \Gamma^\mu_{\nu\lambda},_\rho - \Gamma^\mu_{\nu\rho},_\lambda + \Gamma^\mu_{\alpha\rho}\Gamma^\alpha_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{\nu\rho}\,, \tag{3.6}$$

e os símbolos de Christoffel são definidos por:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(g_{\lambda\nu,\rho} + g_{\lambda\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\lambda} \right), \tag{3.7}$$

O lado direito da equação (3.4) contém as informações da distribuição de matéria e de outras fontes que curvam o espaço-tempo; o lado esquerdo representa a geometria que define a trajetória dos corpos. Como a divergência de $G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$ é nula (quando Λ é constante), temos que o tensor energia-momento é conservado. Portanto, as conservações de energia e momento estão contidas nas equações de Einstein.

3.1.1 Buraco Negro de Schwarzschild

A solução do vácuo mais simples com simetria esférica para as equações de Einstein é a solução de Schwarzschild [33]. Tal solução descreve o campo gravitacional de um corpo esférico, estático e sem carga, na ausência de uma constante cosmológica. Considerando o limite de grandes distâncias, a solução gravitacional de Schwarzschild tende para a gravitação newtoniana. Porém, conforme nos aproximamos do corpo central, são fundamentais as diferenças entre os efeitos das duas des-

crições, em particular a presença do *horizonte de eventos*, que rompe a conexão casual entre suas regiões interna e externa. Um corpo cujo tamanho é menor do que o raio de Schwarzschild é um buraco negro. Como a solução de Schwarzschild é válida para qualquer valor de massa, é teoricamente possível a existência de buracos negros super massivos, oriundos do colapso de estrelas de alta massa e continuamente alimentados pela matéria no seu entorno.

A geometria que descreve o espaço-tempo do campo gravitacional de um buraco negro, conhecida como a métrica de Schwarzschild pode ser escrita como [34]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2\right), \tag{3.8}$$

onde G é a constante newtoniana de gravitação e M é a massa do corpo central localizado no centro do sistema de coordenadas.

Para grandes distâncias do corpo central, a métrica de Schwarzschild se reduz à solução da gravitação newtoniana em coordenadas esféricas. À medida que se aproximam da origem,

as soluções clássica e relativística apresentam resultados cada vez mais distintos. O *raio de Schwarzschild* ($r_s = 2GM$), em particular, apresenta uma singularidade que corresponde ao *horizonte de eventos*. Esta é apenas proveniente do sistema de coordenadas, não é uma singularidade física no espaço-tempo e pode ser eliminada adotando-se o sistema de coordenadas de *Kruskal-Szekeres*. Neste sistema as coordenadas (t,r) de Schwarschild são substituídas por (v,u) e a métrica assume a forma [35]:

$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} \left(dv^2 - du^2\right) - r^2 \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2\right), \quad (3.9)$$

sendo r uma função implícita de v e u dada por:

$$\left(\frac{r}{r_s} - 1\right) e^{r/r_s} = u^2 - v^2. \quad (3.10)$$

As coordenadas de *Kruskal-Szekeres* são definidas por:

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{(r/r_s - 1)\, e^{r/r_s}}\, \operatorname{senh}(t/2r_s) \\ u &= \sqrt{(r/r_s - 1)\, e^{r/r_s}}\, \cosh(t/2r_s) \end{aligned}\right\} r > r_s, \quad (3.11)$$

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{1-(r/r_s)\,e^{r/r_s}}\cosh\left(t/2r_s\right) \\ u &= \sqrt{1-(r/r_s)\,e^{r/r_s}}\,\mathrm{senh}\left(t/2r_s\right) \end{aligned}\right\} r < r_s, \tag{3.12}$$

Neste sistema, o *raio de Schwarzschild* ($r = r_s$) corresponde a $v = u$, onde podemos ver que não existe singularidade. Isso mostra que a singularidade de Schwarzschild no horizonte de eventos surge apenas de má escolha do sistema de coordenadas. Entretanto, o ponto $r = 0$ (ou $v^2 = 1 + u^2$) é uma singularidade física no espaço-tempo correspondente à matéria colapsada e, por isso, surge sempre como uma singularidade em qualquer sistema de coordenadas.

Apesar de ser apenas uma singularidade de coordenadas, o *horizonte de eventos* apresenta propriedades físicas importantes. A partir do horizonte, ou seja, para raios menores do que r_s, o campo gravitacional é tão intenso que nem mesmo a luz consegue escapar: um resultado que pode ser obtido até mesmo classicamente [36, 37]. Portanto, eventos que ocorram dentro do *horizonte de eventos* não podem ter efeitos causais na região exterior a ele.

3.2 Acreção em Buracos Negros Relativísticos

O problema estudado por Bondi [8] foi, mais tarde, abordado por Michel [16] do ponto de vista relativístico. Neste caso o gás acretado também foi tratado como um fluido cuja autogravitação é desprezível, com simetria esférica, condições fixas no infinito (ρ_∞ e p_∞) e como um processo estacionário. O corpo central é um objeto compacto representado pela solução de Schwarzschild e as equações de conservação são a forma relativística de (2.1) e (2.2).

Além disso, a descrição do fluido acretado mostra-se diferente da abordagem newtoniana adotada por Bondi. O fluido deve então ser representado pelo tensor energia-momento de um fluido perfeito:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \tag{3.13}$$

onde ρ é a densidade de energia [2], p a pressão e a quadrivelocidade $u^\mu = dx^\mu/ds$ satisfaz $u^\mu u_\mu = 1$.

As equações de Continuidade e de Euler são substituídas pela conservação do tensor energia-momento ($T^{\mu\nu}$) e sua pro-

[2] note que no capítulo 2 (acreção clássica) utilizamos ρ como sendo a densidade de massa.

jeção na quadrivelocidade(u^μ):

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \tag{3.14}$$

e

$$u_\nu T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \tag{3.15}$$

Utilizando-se o tensor energia-momento de fluido perfeito em (3.15) e o fato de ele ser simétrico em (3.14), obtemos suas formas reduzidas:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(T^\mu_\nu\sqrt{-g}\right)_{,\mu} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\nu}T^{\alpha\beta} = 0 \tag{3.16}$$

e

$$u^\mu\rho_{,\mu} + (\rho + p)\, u^\mu{}_{;\mu} = 0. \tag{3.17}$$

onde está definido que $g \equiv Det g_{\mu\nu}$.

O fato de a acreção ser considerada esfericamente simétrica e estacionária simplifica, portanto, estas duas equações, que passam a ter apenas dependência radial. Neste caso, as equa-

ções (3.16) e (3.17) se reduzem à seguinte forma:

$$\frac{d}{dr}\left(T_0^1\sqrt{-g}\right) = 0, \tag{3.18}$$

$$\frac{1}{u^1\sqrt{-g}}\frac{d}{dr}\left(u^1\sqrt{-g}\right) + \frac{1}{(\rho+p)}\frac{d}{dr}(\rho) = 0, \tag{3.19}$$

e podem ser facilmente integradas, resultando nas equações dinâmicas básicas da acreção relativística:

$$(\rho+p)\,u^1 u_0\sqrt{-g} = C_1, \tag{3.20}$$

$$u^1\sqrt{-g}\exp\left[\int_{\rho_\infty}^{\rho}\frac{d\rho'}{\rho'+p\left(\rho'\right)}\right] = C_2. \tag{3.21}$$

As equações acima ainda são completamente gerais para acreção esfericamente simétrica e estacionária, é, então, necessário definir a estrutura do espaço-tempo onde o fluido desenvolve sua dinâmica.

Considerando-se a métrica de Schwarzachild, $g_{00} = -g_{rr}^{-1} = 1-2GM/r$, e a simetria esférica do problema, temos $-g = r^4$ e $u_0 = \sqrt{1-2GM/r+u^2}$, onde definimos $u \equiv u^1$. Inserindo-se essas expressões nas equações (3.20) e (3.21) obtemos as

equações básicas que descrevem o processo de acreção de matéria na geometria de Schwarzschild, que tomam a seguinte forma [13]:

$$(\rho + p)\, ux^2 \sqrt{1 - \frac{2}{x} + u^2} = C_3, \tag{3.22}$$

e

$$ux^2 \exp\left[\int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho' + p(\rho')}\right] = -C. \tag{3.23}$$

Nessas equações, a coordenada x é o raio normalizado ($x \equiv r/GM$) e o sinal negativo em (3.23) aparece para que a constante C seja positiva quando o fluxo de massa é interno ($u < 0$). Calculando o valor de (3.22) e (3.23) no infinito determina-se $C_3 = -C(\rho_\infty + p(\rho_\infty))$. As condições no horizonte de eventos ($r = 2GM$) podem ser expressas como:

$$u_H^2 = \frac{C}{4} \frac{\rho_\infty + p(\rho_\infty)}{\rho_H + p(\rho_H)}, \tag{3.24}$$

onde o valor de ρ_H é obtido de

$$\frac{\rho_H + p(\rho_H)}{\rho_\infty + p(\rho_\infty)} = \exp\left[2 \int_{\rho_\infty}^{\rho_H} \frac{d\rho'}{\rho' + p(\rho')}\right]. \tag{3.25}$$

Tal como no caso clássico, esse sistema hidrodinâmico apresenta um ponto crítico. Diferenciando-se as equações (3.22) e (3.23) de forma a eliminar a variável ρ e com o auxílio da velocidade do som no fluido definida como $u_s^2 = (\partial p/\partial \rho)_S$, podemos encontrar uma equação relativística análoga à (2.9):

$$\left[u_s^2 - \frac{u^2}{\left(1 - \frac{2}{x} + u^2\right)}\right]\frac{du}{u} + \left[2u_s^2 - \frac{1}{x\left(1 - \frac{2}{x} + u^2\right)}\right]\frac{dx}{x} = 0. \tag{3.26}$$

Neste caso, o ponto crítico ocorre quando os dois colchetes de (3.26) se anulam. Se o fluido não passar pelo ponto crítico, a solução ficará limitada em r caso o colchete da esquerda se anule; ou em u caso o colchete da direita se anule. Esses tipos de resolução não correspondem à acreção, como foi visto no capítulo anterior. Portanto o gás deve ter um aumento monotônico da velocidade ao ser acretado e deve passar pelo ponto crítico. Neste caso, é importante enfatizar que o ponto crítico não é necessariamente o ponto sônico. De fato

$$u_c^2 = \frac{1}{2x_c}, \tag{3.27}$$

e

$$u_s^2\left(\rho_c\right) = \frac{u_c^2}{1-3u_c^2} > u_c^2. \tag{3.28}$$

de forma que o ponto crítico é externo ao ponto sônico. A existência do ponto crítico impõe, através da equação (3.28), a condição $u_c^2 < \frac{1}{3}$ ou $x_c > \frac{3}{2}$, o que não impede que ele esteja dentro do horizonte de eventos ($x = 2$). Assim, é possível que a acreção ocorra totalmente de forma subsônica.

A taxa de acreção pode ser calculada pela integração do fluxo interno de momento ($-T_0^1$), integrado em uma superfície ao redor do buraco negro. Esse cálculo é bastante simples ao se considerar uma casca esférica $4\pi r^2$ como a superfície integrada. Por conseguinte $\dot{M} = -4\pi r^2 T_0^1$ e seu valor pode ser calculado com o auxílio de (3.22):

$$\dot{M} = 4\pi G^2 M^2 C\left(\rho_\infty + p_\infty\right). \tag{3.29}$$

A constante C influencia fortemente a taxa de acreção, pois possui a mesma importância que o termo $\rho_\infty + p_\infty$. O seu valor pode ser obtido de (3.22) para qualquer ponto x_* onde

$u(x_*)$ e $\rho(x_*)$ sejam conhecidos. Isso ocorre no ponto crítico, cujo valor de u é encontrado em (3.27) e o valor de ρ pode ser encontrado em (3.28) ou pelo cálculo de (3.22) e (3.23) neste ponto, resultando em:

$$\frac{\rho_c + p(\rho_c)}{\rho_\infty + p(\rho_\infty)} \frac{1}{\sqrt{1 + 3u_s^2(\rho_c)}} = \exp\left[\int_{\rho_\infty}^{\rho_c} \frac{d\rho'}{\rho' + p(\rho')}\right] \tag{3.30}$$

Tal como no caso clássico, é necessário uma *equação de estado* para completar a solução. Usualmente uma equação de estado barotrópica, $p(\rho)$, é adotada [13, 27, 28].

3.3 A Solução Politrópica Relativística

Para um fluido perfeito, o que diferencia a maioria dos modelos de acreção é a escolha da equação de estado e da geometria do espaço-tempo. Em seu trabalho, além da métrica de Schwarzschild, Michel utiliza a seguinte equação de estado politrópica:

$$p = K\varrho^\gamma, \tag{3.31}$$

onde temos que ϱ é a densidade de massa, que está relacionada com a densidade de energia da seguinte forma [16]:

$$\rho = c^2\varrho + \varepsilon, \tag{3.32}$$

sendo ε a energia térmica interna do gás por unidade de volume. Nesta equação, a velocidade da luz foi explicitada para enfatizar a relação entre as densidades.

Considerando-se a conservação do fluxo de massa $J^{\mu}{}_{;\mu} = (\varrho u^{\mu})_{;\mu} = 0$ para a acreção esfericamente simétrica e estacionária, temos a seguinte equação:

$$\frac{d}{dr}\left(\varrho u^1\sqrt{-g}\right) = 0, \tag{3.33}$$

que pode ser integrada na métrica de Schwarzschild, resultando em:

$$ux^2\varrho = constante. \tag{3.34}$$

Ao compararmos a equação acima com (3.23), podemos ob-

servar que a densidade de massa satisfaz:

$$\varrho = \varrho_\infty \exp\left[\int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho' + p\left(\rho'\right)}\right]. \tag{3.35}$$

Desta maneira, definindo-se a variável:

$$\epsilon \equiv p/\varrho, \tag{3.36}$$

podemos reescrever as equações (3.22) e (3.23):

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_\infty}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\left[1+\frac{\gamma}{\gamma-1}\epsilon\right]}{\left[1+\frac{\gamma}{\gamma-1}\epsilon_\infty\right]} u x^2 \sqrt{1-\frac{2}{x}+u^2} = -C, \tag{3.37}$$

$$u x^2 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_\infty}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = -C, \tag{3.38}$$

e a velocidade do som:

$$u_s^2 = \frac{(\gamma-1)\gamma\epsilon}{(\gamma-1)+\gamma\epsilon}. \tag{3.39}$$

Através da equação (3.30) podemos encontrar o valor das condições no ponto crítico como função das condições no infinito. Assim, calculando-se as equações (3.37), (3.38) no ponto

crítico determinamos o valor da constante C. Podemos expressar, então, os valores de u_s e ϵ_s na superfície do corpo central para estrelas de nêutrons ($x = x_s \geq 2$) de acordo com as grandezas no infinito.

O caso $\gamma = 4/3$ foi resolvido por Michel [16] e seus resultados estão na figura (3.1), em que ambas as curvas representam processos com o mesmo fluxo de energia e que envolvem estrelas de mesma massa. Considerando-se que o fluido está parado no infinito, temos que $u_\infty = 0$ enquanto ϵ_∞ possui um valor diferente de zero e que depende da temperatura. Para $T \sim 10^4 K$ o valor da componente ϵ é da ordem de $10^4 K$ e, portanto, muito pequeno.

Ao calcularmos a equação (3.30) neste caso, obtemos:

$$\frac{(1+4\epsilon_c)^3}{1+8\epsilon_c} = (1+4\epsilon_\infty)^2 \,. \tag{3.40}$$

Como $\epsilon << 1$, podemos fazer uma aproximação de primeira ordem na equação acima resultando em:

$$1 + 4\epsilon_c \approx 1 + 8\epsilon_\infty, \tag{3.41}$$

de onde temos que $\epsilon_c = 2\epsilon_\infty$. Dessa forma a constante C assume o valor:

$$C = u_c x_c^2 \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_\infty}\right)^3 = \left(\frac{3}{2\epsilon_\infty}\right)^{3/2}. \tag{3.42}$$

Ao se assumir que o valor de ϵ_s na superfície do corpo central continue muito menor que a unidade, devemos ter, pela equação (3.37), que $u_s^2 \approx 2/x_s$. Assim podemos determinar quais são as condições na superfície a partir das condições no infinito:

$$\epsilon_s = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \epsilon_\infty^{1/2} x_s^{-1/2}. \tag{3.43}$$

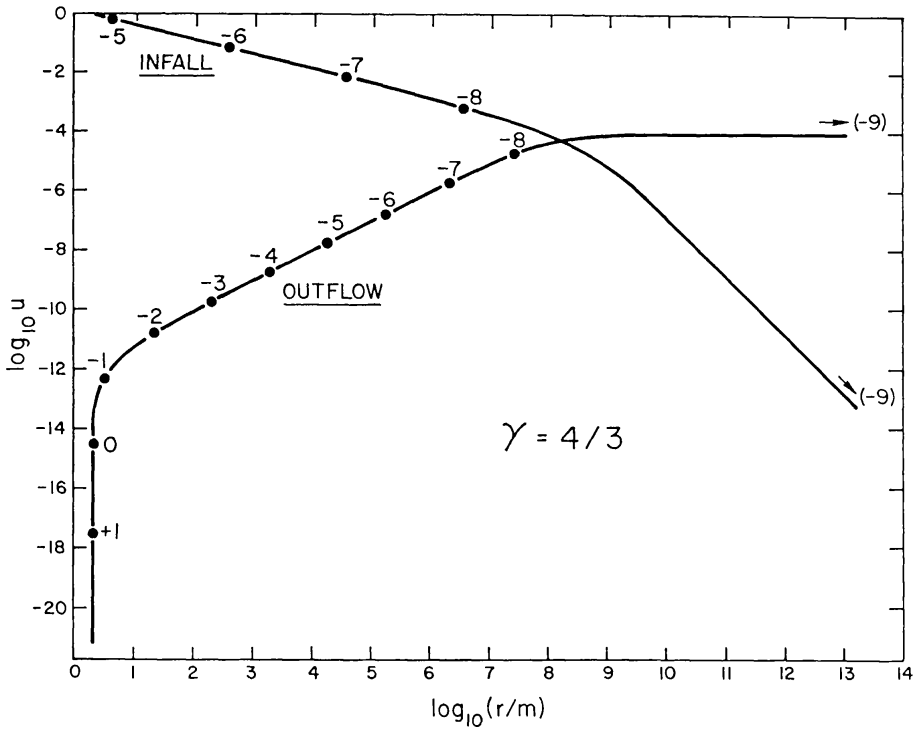


Figura 3.1: Gráfico retirado do artigo de Michel e que representa a velocidade do fluido por raio normalizado ($m = GM$), para uma temperatura no infinito da ordem de $10^4 K$. A curva rotulada "OUTFLOW"representa o gás se afastando do corpo central - a temperatura se aproxima de zero e $u \to 10^{-4}$. A temperatura do gás está indicada nos pontos ao longo das curvas na forma de $\log_{10}(kT/m_p)$

3.4 Limite não-relativístico

Podemos calcular o limite não relativístico das equações presentes neste capítulo e verificar se estas se reduzem às equações do caso clássico de Bondi. Para isso devemos considerar a aproximação para baixas velocidades e campos fracos, por-

tanto, $u << 1$ e $x >> 1$. Assim, pela equação (3.32), temos que $\rho = c^2\varrho$ e a soma $\rho + p \approx \rho$.

Nesta aproximação, as equações de acreção podem ser escritas como:

$$\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) ux^2\sqrt{1} = -C, \tag{3.44}$$

e

$$ux^2 \exp\left[\int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'}\right] = -C. \tag{3.45}$$

Estas duas equações se reduzem à seguinte relação:

$$vr^2\varrho = -C', \tag{3.46}$$

onde $v/c \equiv u$ é a velocidade radial do fluido acretado. A equação acima corresponde à equação (2.6), resultante da integral da conservação da massa no caso clássico.

Para obtermos a equação de Euler, devemos considerar o problema na forma diferencial, portanto, a equação (3.26), onde encontramos o ponto crítico. No limite de baixas veloci-

dades esta equação se reduz a:

$$\left[u_s^2 - u^2\right] \frac{du}{u} + \left[2u_s^2 - \frac{1}{x}\right] \frac{dx}{x} = 0. \tag{3.47}$$

Podemos também reescrever esta equação como:

$$\left[\left(\frac{u_s}{u}\right)^2 - 1\right] \frac{1}{2} du^2 + \left[2u_s^2 x - 1\right] \frac{dx}{x^2} = 0, \tag{3.48}$$

ou ainda:

$$\left[\left(1 - \frac{u_s}{u}\right)^2\right] \frac{du^2}{dx} = -\frac{2}{x^2} \left[1 - 2u_s^2 x\right]. \tag{3.49}$$

Na equação 3.49 podemos ver que o caso clássico da equação de movimento (2.9) é obtido no limite de baixas velocidades e campos fracos, com a velocidade do som clássica $v_s \equiv c \times u_s$ e com $x = rc^2/GM$. O ponto crítico do caso clássico também pode ser obtido mais diretamente a partir do limite nas equações (3.27) e (3.28).

4
Acreção Cosmológica

Como foi visto nos capítulos anteriores, o processo de acreção é utilizado para descrever matéria em forma de gás sendo atraída gravitacionalmente por objetos compactos, sistemas binários, ou mesmo uma distribuição arbitrária de matéria (galáxias e aglomerados de galáxias). Por outro lado, além do gás existente no espaço interestelar e no meio intergaláctico, o universo também está preenchido por duas componentes exóticas: Matéria Escura e Energia Escura. Portanto, é fisicamente interessante investigar o processo de acreção de tais fluidos por objetos localizados. Em particular, buracos negros

supermassivos, tal como sugerido pelas observações recentes, podem ter sido "alimentados" ao longo da história cósmica pela acreção da tais componentes.

Neste contexto, existe um interesse conceitual e metodológico de se entender como energia escura e matéria escura são acretadas por buracos negros [13, 38].

É importante também observar que este problema não é de interesse apenas acadêmico. No ano passado (2011), foi publicado na *Nature* [39] a descoberta do quasar mais distante já observado ($z = 7.085$). Este quasar (ULASJ112001.48+064124.3) tem uma luminosidade de $6.3 \times 10^{13} L_{\odot}$ e hospeda um buraco negro supermassivo de massa $2 \times 10^{9} M_{\odot}$. Neste *redshift* ($z \cong 7$), havia decorrido apenas 700 milhões de anos após o *Big-Bang*. Explicar como este objeto acretou tal quantidade de matéria é um desafio na área de acreção cosmológica de matéria. O processo de acreção das componentes que formam o chamado setor escuro do universo é o tema que será discutido no presente capítulo.

4.1 Cosmologia: Modelo do Big-Bang

O Princípio Cosmológico (PC) foi introduzido por Einstein em 1917 e representa uma generalização do chamado Princípio de Copérnico para todo o universo. De acordo com o PC não existem posições ou direções privilegiadas no universo e, portanto, sua geometria espacial é homogênea e isotrópica. A geometria que obedece a esse princípio permitindo uma variação temporal global é descrita pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), cujo elemento de linha toma a seguinte forma [40]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2\right], \quad (4.1)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e r, θ e ϕ são as coordenadas esféricas comóveis. O parâmetro k define a curvatura do espaço e seu possíveis valores $k > 0$, $k = 0$ e $k < 0$ determinam um universo fechado, plano ou aberto respectivamente. Geralmente a coordenada r é redefinida para que k esteja normalizado assumindo os valores $k = 1$, $k = 0$ e $k = -1$.

Todas componentes do universo (matéria, radiação, energia escura, etc.) devem estar inseridas no Tensor Energia-Momento (TEM). Dado que o universo é homogêneo e isotrópico, temos que as componentes do universo podem ser descritas pelo TEM de um fluido perfeito. Assim, ao utilizarmos (3.13) nas equações de Einstein (3.4) para a métrica FLRW (4.1) obtemos as equações de Friedmann:

$$\frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}, \tag{4.2}$$

$$8\pi G p - \Lambda = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2}, \tag{4.3}$$

que relacionam a dinâmica do universo e sua geometria com as propriedades materiais (ρ, p). Em geral,

$$\rho = \sum_i \rho_i \quad e \quad p = \sum_i p_i \ , \tag{4.4}$$

onde cada índice (i) especifica uma dada componente do TEM.

Podemos obter também uma equação de conservação através de (4.2) e (4.3), ou mais diretamente pela lei de conserva-

ção do TEM ($u_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$):

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \tag{4.5}$$

A figura (4.1) mostra como a evolução do universo dominado por matéria fria ($p = 0$, $\Lambda = 0$) ocorre para os possíveis valores de k. O universo fechado ($k > 0$) começa com um Big-Bang ($a = 0$) e expande até atingir um máximo e passa a se contrair atingindo novamente $a = 0$ no chamado *Big Crunch*. No caso do universo plano a expansão ocorre indefinidamente assim como acontece no universo aberto, porém de forma mais rápida.

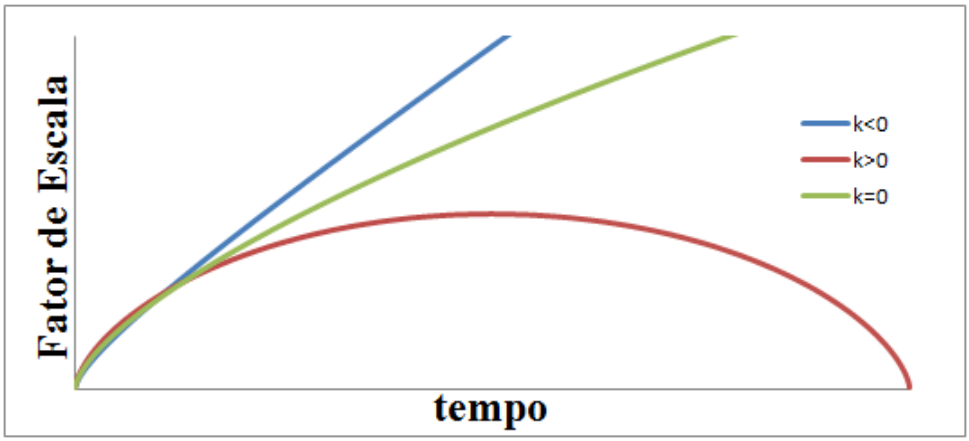


Figura 4.1: Evolução do fator de escala no tempo para um universo com poeira ($p = 0$) e sem constante cosmológica. As curvas representam um universo fechado ($k > 0$), um universo plano ($k = 0$) e um universo aberto ($k < 0$).

Manipulando-se as equações de Friedmann (4.2) e (4.3) temos que a aceleração é dada por:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \tag{4.6}$$

Evidências recentes mostram que o universo se encontra em expansão acelerada, ou seja, $\ddot{a} > 0$ [41, 42]. Para isso devemos ter modelos que possuam uma constante cosmológica ou componentes com pressão negativa $p_i < -\rho_i/3$.

4.1.1 Modelo ΛCDM

Atualmente, um dos modelos mais aceitos pela comunidade científica é o ΛCDM. Além da radiação cósmica de fundo (RCF), o modelo é formado por 3 componentes: Matéria escura, energia escura e a componente luminosa (os bárions). Neste universo a matéria escura é fria (*CDM - Cold Dark Matter*) e se comporta como poeira ($p = 0$), enquanto a constante cosmológica presente é a energia escura, responsável pela expansão acelerada do universo; sugerida pelas observações de supernovas [43, 44, 45]. Geralmente um universo plano ($k = 0$) é considerado, tal como indicado pelas observa-

ções da radiação cósmica de fundo [46, 47].

Dados de Supernovas combinados com a RCF e outras observações complementares, mostram que a componente bariônica é responsável apenas por 4% do conteúdo material total, a matéria escura contribui com cerca de 23% e a energia escura com aproximadamente 73%. O modelo plano do tipo ΛCDM é o que melhor se ajusta aos dados atuais, sendo bastante referido na literatura como modelo de concordância cósmica [47, 48]. Supondo que os fluidos não interagem, cada componente deve obedecer a equação de conservação (4.5) individualmente. Para a matéria não relativística (bárions + matéria escura) isto resulta em:

$$\frac{\rho_m}{\rho_{m0}} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}. \tag{4.7}$$

onde ρ_{m0} e a_0 são a densidade e o fator de escala medidos hoje. No caso de um universo plano, as equações de Friedmann com matéria escura e constante cosmológica se reduzem para:

$$8\pi G\rho_m + \Lambda = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}, \tag{4.8}$$

$$8\pi G p_m - \Lambda = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}. \tag{4.9}$$

Como é bem conhecido, a constante cosmológica está associada à densidade de energia do vácuo, $\rho_v = \Lambda/8\pi G$ [49]. O vácuo pode ser pensado como um fluido perfeito com pressão negativa ($p_v = -\rho_v$).

O parâmetro de Hubble, definido como:

$$H \equiv \frac{\dot{V}}{3V} = \frac{\dot{a}}{a}, \tag{4.10}$$

descreve a taxa de variação do volume comóvel $V \propto a^3(t)$. O seu valor medido hoje (H_0) é conhecido como a *constante de Hubble*. Para estes fluidos podemos reescrever a equação (4.8) e obter o parâmetro de Hubble como função do fator de escala [50]:

$$H(a) = H_0\sqrt{\Omega_{m0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \Omega_\Lambda}, \tag{4.11}$$

onde cada parâmetro de densidade é definido por $\Omega = \rho/\rho_{crit}$, sendo $\rho_{crit} \equiv 3H_0^2/8\pi G$. A equação (4.11) mostra que, para $a << a_0$, a componente de matéria escura domina a expansão

e o universo se comporta como poeira, enquanto para $a >> a_0$, a constante cosmológica passa a dominar a expansão cósmica e a densidade se torna constante (fase de Sitter).

4.2 Influência da Cosmologia na Acreção

A acreção de fluidos cosmológicos pode ser tratada considerando-se separadamente o processo de acreção e a evolução do fluido cosmológico [13]. As escalas temporais e espaciais envolvidas na cosmologia em geral são muito superiores as escalas da acreção e podemos separar o espaço em duas regiões distintas: (i) próxima ao corpo atrator, onde ocorre a acreção do fluido cosmológico e limitada pela influência do campo gravitacional do corpo central; (ii) regiões mais distantes que não sentem a presença da acreção e onde ocorrem os processos cosmológicos (ver figura 4.2).

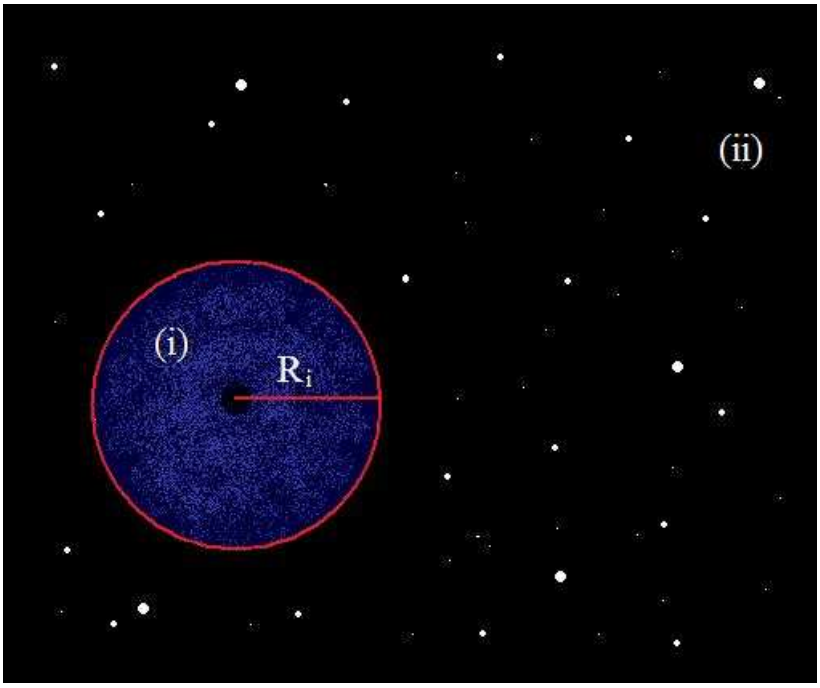


Figura 4.2: As duas regiões distintas tratadas na acreção de fluidos cosmológicos: (i) região dominada pelos processos de acreção; (ii) região dominada pelos processos cosmológicos. R_i é o raio limite da influência do campo gravitacional do corpo atrator centralizado em (i).

Efeitos cosmológicos são desprezíveis em pequenas escalas e a geometria do espaço-tempo é dominada pela deformação causada pelo campo gravitacional do objeto central na região (i). Nesta região o processo de acreção pode ser tratado da maneira como foi feita no capítulo anterior. Na região (ii) a gravitação do corpo acretor não exerce influência e pode ser tratada de forma puramente cosmológica. A união das duas regiões ocorre através das condições de contorno na esfera de

raio R_i.

O fluido que se encontra a grandes distâncias, considerado no "infinito", é justamente o fluido cosmológico. Assim, temos:

$$\rho_\infty \equiv \rho_{cosmo} \quad e \quad p_\infty \equiv p_{cosmo} \,, \tag{4.12}$$

e a seguinte taxa de acreção:

$$\dot{M} = 4\pi G^2 M^2 C \left(\rho_{cosmo} + p_{cosmo}\right). \tag{4.13}$$

Podemos ver por (4.13) a influência explícita da evolução do fluido cosmológico na taxa de acreção. Em particular, para o vácuo ($p_v = -\rho_v$) a massa não varia ($\dot{M} = 0$), enquanto para fluidos *phantom* (onde $\rho + p < 0$) a massa do buraco negro diminui com o tempo [13, 30].

4.2.1 Tempo de Acreção x Tempo Cosmológico

Ao tratarmos de um problema que envolve dois processos de escalas tão distintas (acreção e evolução cosmológica), devemos primeiro discutir a influência de cada processo separadamente. Supondo que a escala de tempo cosmológica seja

muito maior do que a escala de tempo da acreção de matéria, as grandezas que possuem uma evolução no tempo cosmológico podem ser vistas como constantes no tempo do ponto de vista da acreção. Neste caso o formalismo proposto por F. C. Michel pode ser aplicado considerando a densidade e a pressão do fluido cosmológico constantes.

Por outro lado, alguns autores tem integrado diretamente a equação (4.13) supondo pressão e densidade dependentes do tempo. Neste caso está implícito que as escalas de tempo envolvidas são da mesma ordem de grandeza ($t_{acc} \sim t_{cosm} \sim H^{-1}(t)$) e que o processo é suficientemente lento para permanecer quase-estacionário. Naturalmente, a *back-reaction* também tem sido desprezada[1].

Considerando-se separadamente a evolução cosmológica e o processo de acreção de matéria e unindo-os pela condição de fronteira, podemos tratar de inúmeros processos de acreção de fluidos cosmológicos [14, 15, 52]. Além disso, tanto os processos que ocorrem sobre objetos compactos (estrelas e buracos negros) quanto a acreção sobre distribuições arbitrárias

[1] Uma descrição rigorosa da *back-reaction* é ainda um problema em aberto[51]

de matéria (galáxias e aglomerados de galáxias), podem ser aplicados aos cenários cosmológicos de forma bastante simples [53, 54].

Nesta monografia, estamos particularmente interessados no processo de acreção de fluidos cosmológicos no buraco negro de Schwarzschild.

4.3 Influência da Equação de Estado Cósmica

A equação de estado apresenta um papel muito importante na acreção de fluidos cosmológicos pois, além de ser essencial para definir de que forma ocorre a acreção de matéria (3.2), também define o modelo cosmológico adotado.

Os fluidos que consideraremos a seguir apresentam resultados interessantes para a cosmologia. Babichev considerou em seu trabalho [13] um fluido hidrodinamicamente estável cuja equação de estado linear pode descrever matéria X [55], energia escura [56, 57] e energia *phantom* [58, 59]. Também trataremos do gás de Chaplygin que gera um processo de evolução cosmológica acelerado similar ao de cosmologias descritas por um modelo ΛCDM.

4.3.1 Equação linear de Babichev

A seguinte equação de estado barotrópica onde α e ρ_0 são constantes:

$$p = \alpha \left(\rho - \rho_0 \right) , \tag{4.14}$$

foi utilizada por Babichev *et al.* [13] para generalizar diversos fluidos cosmológicos [2]. Este modelo pode descrever um gás ultra-relativístico ($\alpha = 1/3$ e $\rho_0 = 0$), matéria escura fria ($\alpha = 0$), ou modelos simples de energia escura ($\alpha < 0$ e $\rho_0 = 0$). Um problema com os modelos simples de energia escura é que são hidrodinamicamente instáveis e, no caso de *phantom*, ocorre um crescimento da densidade de energia durante a expansão [58, 59, 61].

A equação linear acima permite que o fluido represente energia escura ou até mesmo energia *phantom* e continue sendo hidrodinamicamente estável, pois a velocidade do som, $c_s^2 = \alpha > 0$.

Discutiremos primeiramente a evolução cosmológica deste fluido. A solução é facilmente obtida introduzindo-se a equa-

[2] Este fluido é um caso particular da equação de estado originalmente proposta por Chiba et al. [60]

ção de estado (4.14) na equação de conservação de energia (4.5). A densidade de energia é dada por:

$$\rho = \frac{\alpha\rho_0}{1+\alpha} + \left[\rho\left(a_0\right) - \frac{\alpha\rho_0}{1+\alpha}\right]\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\alpha)}, \tag{4.15}$$

onde ρ_0 é uma densidade constante da equação linear de Babichev (4.14) e $\rho\left(a_0\right)$ é o valor presente da densidade de energia.

Note que se a constante introduzida por Babichev é nula ($\rho_0 = 0$), reobtemos a densidade para um fluido com uma equação de estado cosmológica típica $p = \alpha\rho$. Para $\rho_0 \neq 0$, a densidade do universo parte de um valor divergente quando $a \to 0$ ou se torna nula para um dado valor da razão a/a_0. Neste último caso as densidades aumentam com o tempo. Tais soluções têm problemas do ponto de vista físico e não serão consideradas no corpo desta monografia. Note também que para $\rho_0 = (1+\alpha)\,\rho\left(a_0\right)/\alpha$ a densidade permanece constante (com valor $\alpha\rho_0/\left(1+\alpha\right)$) e resulta, de acordo com (4.14), em uma equação de estado $p = -\rho$. Portanto podemos ver que a solução do vácuo também está contida no fluido de Babichev.

A figura (4.3) ilustra o comportamento de ρ para alguns valores de α e ρ_0. As soluções físicas são aquelas onde $\rho_0 \leq (1+\alpha)\,\rho\,(a_0)\,/\alpha$.

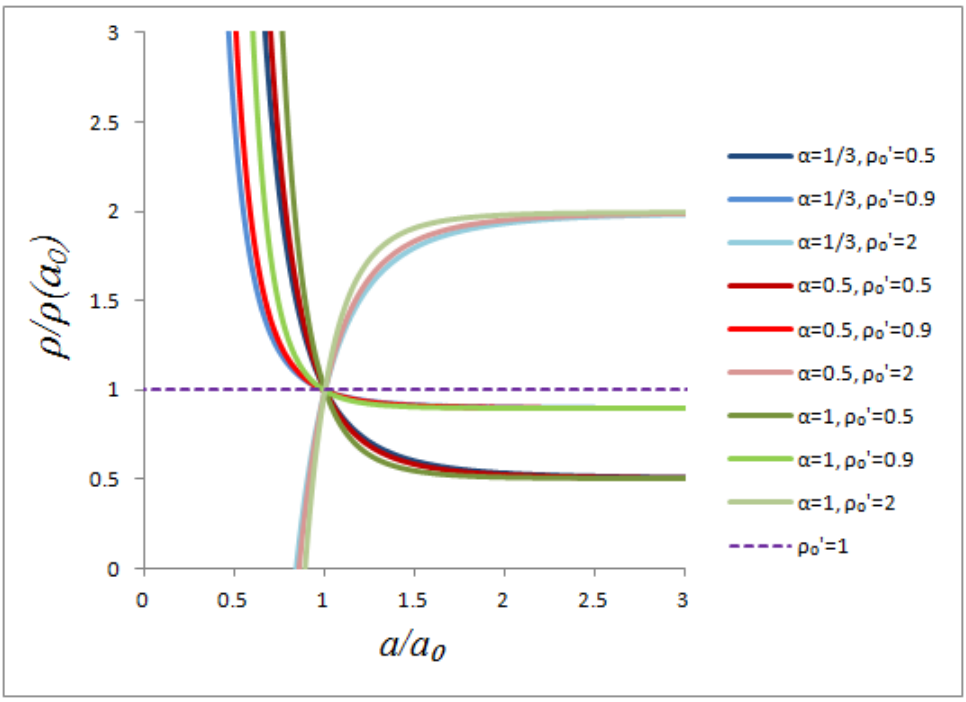


Figura 4.3: Evolução da densidade do fluido cosmológico com a equação de estado linear de Babichev normalizada por $\rho\,(a_0)$ pelo fator de escala a/a_0. Foi definido o parâmetro $\rho_0' \equiv \alpha\rho_0/\left[(1+\alpha)\,\rho\,(a_0)\right]$. Note que as curvas com $\rho_0 > 1$ não representam soluções físicas e, portanto, não serão mais consideradas nesta dissertação.

Para este fluido de Babichev, as equações da acreção (3.22) e (3.23) se tornam:

$$\left(\frac{\rho+p}{\rho_\infty+p_\infty}\right) ux^2\sqrt{1-\frac{2}{x}+u^2} = -C, \qquad (4.16)$$

e

$$ux^2\left(\frac{\rho+p}{\rho_\infty+p_\infty}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}=-C. \tag{4.17}$$

Podemos determinar o valor de C calculando as equações acima no ponto crítico:

$$C=\frac{(1+3\alpha)^{(1+3\alpha)/2\alpha}}{4\alpha^{3/2}}. \tag{4.18}$$

Esta relação é válida somente para $0<\alpha\leq 1$ [13]. Uma condição fisicamente razoável pois, devemos ter $0<c_s^2\leq 1$. Neste caso a constante C depende apenas de α e não sofre influência das condições no infinito, sendo uma constante na evolução cosmológica. Naturalmente, tal condição pode ser violada para equações de estado mais gerais.

O comportamento ρ e u como função de x pode ser obtido numericamente para qualquer valor de α e ρ_0. Rearranjando-se as equações (4.16) e (4.17), temos que $u\,(x)$ pode ser calculado a partir de:

$$u^2-\left(\frac{x^2}{C}\right)^{2\alpha}(-u)^{2\alpha}+\left(1-\frac{2}{x}\right)=0, \tag{4.19}$$

e $\rho(x)$ é obtido a partir das equações (4.17) e (4.19). Temos:

$$\rho = \frac{\alpha\rho_0}{1+\alpha} + \left(\rho_\infty - \frac{\alpha\rho_0}{1+\alpha}\right)\left(-\frac{C}{x^2 u(x)}\right)^{1+\alpha}. \tag{4.20}$$

Existem soluções analíticas de (4.19) apenas para alguns valores específicos de α, por exemplo nos seguintes casos:

- $\alpha = 1$

$$u^2 = \frac{16}{x^4}\frac{1}{\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)}, \tag{4.21}$$

- $\alpha = 1/2$

$$u = -\left(\frac{4x^2}{25\sqrt{5}}\right)\left(1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{25\sqrt{5}}{4x^2}\right)^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}\right). \tag{4.22}$$

Nas figuras (4.5) e (4.6) mostramos o comportamento de algumas soluções obtidas para diferentes valores de ρ_0 e α. Existem basicamente dois tipos de soluções apresentadas: (i) para $\rho_0 < (1+\alpha)\rho_\infty/\alpha$, a densidade do fluido aumenta ao se aproximar da origem e diverge nas proximidades do buraco negro; (ii) para $\rho_0 > (1+\alpha)\rho_\infty/\alpha$, a densidade parte de um valor nulo e aumenta ao se afastar do buraco negro, tendendo

a um valor fixo no infinito. Esta solução corresponde ao caso não físico discutido anteriormente.

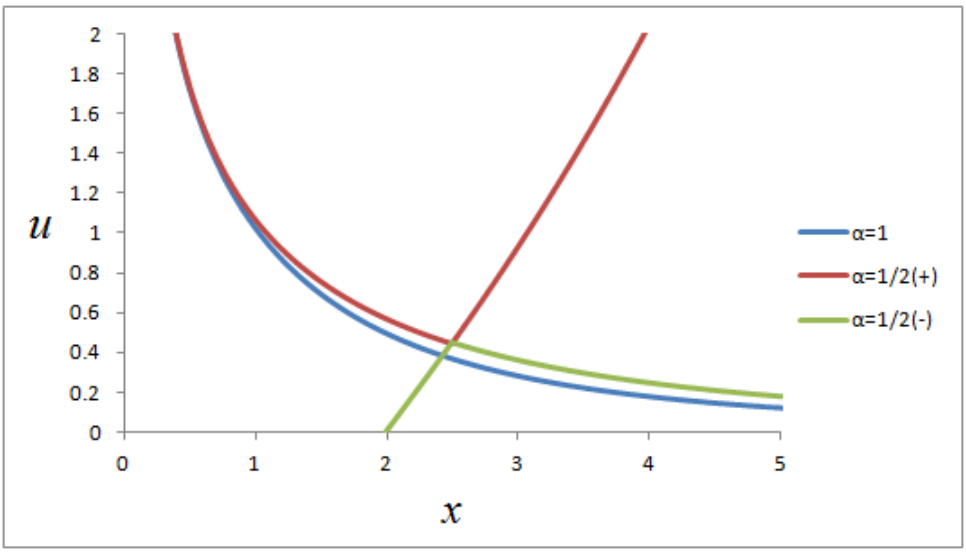


Figura 4.4: Velocidade do fluido acretado como função de x para a equação de estado linear de Babichev.

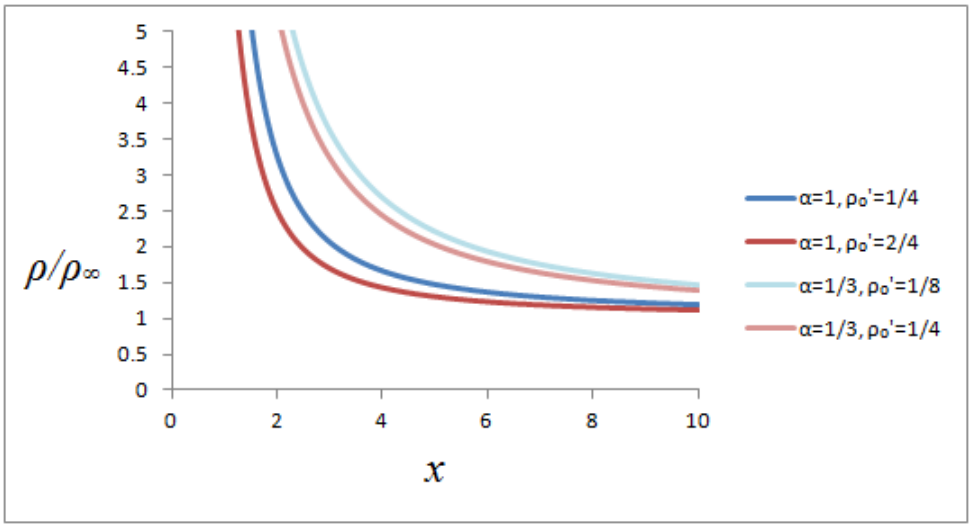


Figura 4.5: Densidade do fluido acretado, normalizada por ρ_∞, como função de x para a equação de estado linear de Babichev. Foi definido o parâmetro $\rho_0' \equiv \alpha\rho_0/\left[(1+\alpha)\,\rho_\infty\right]$.

No caso $\alpha = 1/2$ temos duas possíveis soluções para cada valor de ρ_0, definidas pelos índices $(+)$ e $(-)$. Cada par de soluções sempre apresenta o mesmo comportamento que depende somente do valor de ρ_0, ou seja, as duas pertencem juntas ao tipo (i) ou pertencem juntas ao tipo (ii). Quando $\rho_0 < (1+\alpha)\rho_\infty/\alpha$, a solução $(+)$ diverge em $x \to 0$ e a solução $(-)$ diverge em $x \to 2$. Os valores de ρ apresentados estão normalizados pelo valor da densidade no infinito, e devemos ter $\rho(x \to \infty) = 1$. Isso não ocorre para as soluções $(+)$ e estas também devem ser descartadas pois não descrevem o problema tratado aqui. Este comportamento pode ser compreendido fisicamente ao observarmos a figura (4.4) onde a velocidade da solução $(+)$ diverge no infinito. Vemos também que a solução $(-)$ possui um valor máximo da velocidade e que esta se anula no horizonte de eventos $(x = 2)$.

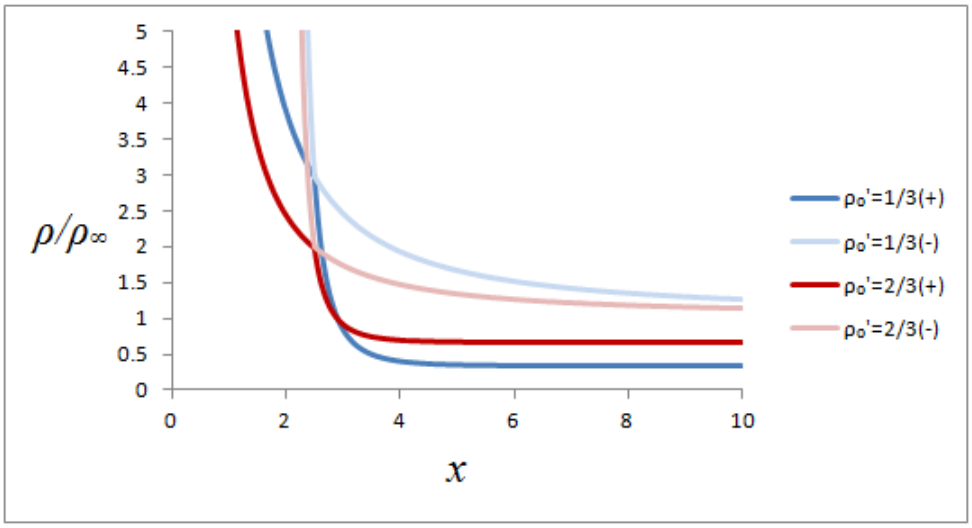


Figura 4.6: Densidade do fluido acretado, normalizada por ρ_∞, como função de x para a equação de estado linear de Babichev com $\alpha = 1/2$. Foi definido o parâmetro $\rho_0' \equiv \alpha\rho_0/\left[(1+\alpha)\,\rho_\infty\right]$. Para este valor de α encontramos duas soluções possíveis para cada ρ_0.

4.3.2 O Gás de Chaplygin

Diversos modelos foram propostos na literatura [49, 62, 63] para tentar incorporar e/ou explicar a presença da energia escura, uma componente cuja pressão negativa é responsável pela aceleração do universo. Um dos modelos mais aceitos hoje é o ΛCDM, que se utiliza da energia do vácuo, a qual exerce o papel da energia escura. Este modelo, porém, também apresenta problemas tais como o *problema da constante cosmológica* [49, 55] e o chamado *problema da coincidência*

[64, 65, 66]. Isto motiva outros candidatos alternativos para energia escura [67].

O gás de Chaplygin é um dos possíveis modelos de energia escura, originalmente sugerido por Kamenschik *et al.* [68] e desenvolvido por Bilić *et al.* [69] e por Bento *et al.* [70]. Sua equação de estado é dada por:

$$p = -\frac{A}{\rho^{\lambda}}, \tag{4.23}$$

onde as constantes A e λ são positivas.

A evolução cosmológica do gás de Chaplygin com o fator de escala é facilmente obtida introduzindo-se a equação de estado (4.23) na equação de conservação de energia (4.5):

$$\frac{\rho}{\rho\left(a_0\right)} = \left[A_s + \left(1 - A_s\right)\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\lambda)}\right]^{\frac{1}{1+\lambda}}, \tag{4.24}$$

onde a constante $A_s \equiv A/\rho\left(a_0\right)^{1+\lambda}$ [71]. Dessa equação vemos que, para instantes iniciais ($a/a_0 << 1$), a densidade se comporta como $\rho \propto a^{-3}$ e para tempos grandes ($a/a_0 >> 1$) a densidade se torna constante com $p = -\rho$. Assim, o gás de Chaplygin se comporta de forma similar ao modelo ΛCDM,

o que o torna uma possível descrição para o nosso universo [71, 72, 73]. Na sua versão de quartessência é uma proposta de redução do chamado setor escuro [57].

Podemos ver que as soluções da densidade se comportam sempre da mesma maneira para qualquer valor de λ positivo. A densidade pode partir de uma divergência na origem ($a = 0$) ou do valor nulo e converge para $A^{1/(1+\lambda)}$, sendo que λ determina apenas a velocidade com que ρ atinge seu valor terminal. A figura (4.7) mostra a densidade para diversos valores de A_s. Existem dois tipos de soluções: quando $A_s > 1$, a densidade parte do zero em $a/a_0 = A/(A-1)$ e cresce tendendo ao valor terminal, esta não é uma solução física; já quando $A_s < 1$, a densidade diverge na origem ($a = 0$) e converge para seu valor terminal no futuro. O caso $A_s = 1$ implica em uma densidade constante no tempo (com valor $A^{1/(1+\lambda)}$) e uma equação de estado $p = -\rho$. Dessa forma podemos ver que o vácuo também está contido nas soluções do gás de Chaplygin como um caso limite.

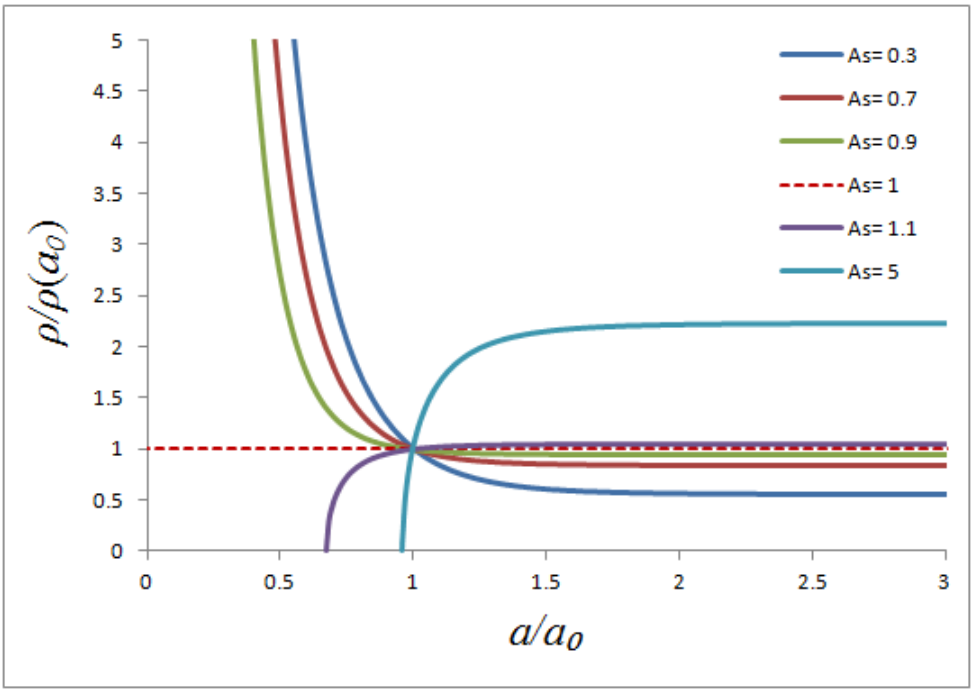


Figura 4.7: Evolução cosmológica da densidade do gás de Chaplygin normalizada por $\rho\,(a_0)$ com o fator de escala a/a_0 para o caso $\lambda = 1$. Note que as curvas com $A_s > 1$ não representam soluções físicas e portanto não serão mais consideradas.

Para o gás de Chaplygin as equações da acreção (3.22) e (3.23) podem ser escritas como:

$$\left(\frac{\rho + p}{\rho_\infty + p_\infty}\right) ux^2 \sqrt{1 - \frac{2}{x} + u^2} = -C, \tag{4.25}$$

e

$$ux^2 \left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} \left(\frac{\rho + p}{\rho_\infty + p_\infty}\right)^{\frac{1}{1+\lambda}} = -C. \tag{4.26}$$

Utilizando-se as equações (3.27) e (3.28) em (4.25) e (4.26), podemos determinar a velocidade do som no ponto crítico pela seguinte relação:

$$\frac{\left(\lambda - u_s^2\left(\rho_c\right)\right)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}}{\sqrt{1+3u_s^2\left(\rho_c\right)}} = \left(\lambda - u_s^2\left(\infty\right)\right)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}. \tag{4.27}$$

O valor da constante C pode ser determinado calculando-se (4.25) ou (4.26) no ponto crítico. Como podemos observar em (4.27) a velocidade do som no ponto crítico depende da velocidade do som no infinito. Neste caso, a constante C também dependerá da densidade cosmológica (ρ_∞) [ver observação abaixo da equação 4.18].

O comportamento ρ e u como função de x pode ser obtido numericamente para diversos valores de λ. Rearranjando-se (4.16) e (4.17) temos que $u\left(x\right)$ pode ser calculado pela seguinte equação:

$$u^2 - \left[\left(1-A'\right) + A'\left(-\frac{ux^2}{C}\right)^{1+\lambda}\right]^{\frac{2\lambda}{1+\lambda}} + \left(1-\frac{2}{x}\right) = 0, \tag{4.28}$$

e $\rho\,(x)$ é obtido de:

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left[A' + (1 - A')\left(-\frac{C}{ux^2}\right)^{1+\lambda}\right]^{\frac{1}{1+\lambda}}, \tag{4.29}$$

onde foi definido que $A' \equiv A/\rho_\infty^{1+\lambda}$.

Para alguns valores específicos de λ existem soluções analíticas simples para o problema. Por exemplo, para o caso $\lambda = 1$ temos que $C = 4/A'^{3/2} = 4\rho_\infty^{3(1+\lambda)/2}/A^{3/2}$:

$$u = -\sqrt{\frac{(1 - A') - \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{1 - \frac{A'^4 x^4}{16}}}. \tag{4.30}$$

As soluções para a densidade se encontram na figura (4.8), onde vemos dois tipos distintos de soluções: (i) quando $A' < 1$, a densidade aumenta ao se aproximar do buraco negro e diverge na origem; (ii) quando $A' > 1$, a densidade parte de um valor nulo e cresce tendendo à unidade no infinito, não correspondendo a soluções físicas. O caso $A' = 1$ não foi apresentado pois resulta em uma densidade constante em todo o espaço.

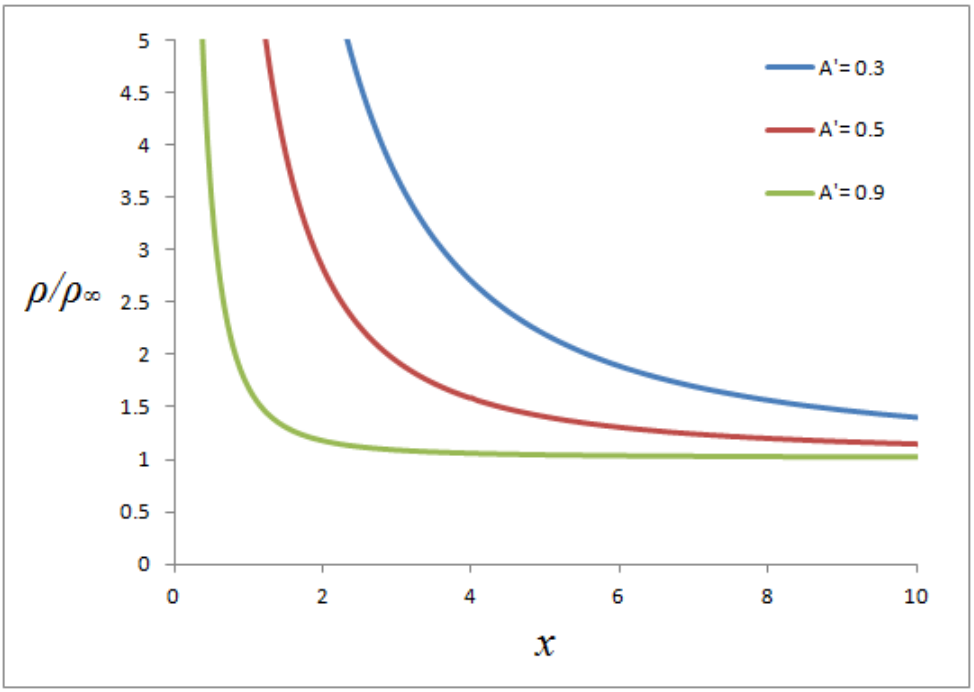


Figura 4.8: Densidade do fluido acretado normalizada por ρ_∞ como função de x para o gás de Chaplygin com $\lambda = 1$.

Naturalmente, tanto para o gás de Babichev quanto para o gás de Chaplygin, a taxa de variação da massa do buraco negro é dada por:

$$\dot{M} = 4\pi G^2 M^2 C_i \left(\rho_\infty + p_\infty\right). \tag{4.31}$$

onde C_i se refere respectivamente a constante C calculada para cada fluido, supondo que $t_{acc} << H^{-1}(t)$.

4.4 Evolução da Massa do Buraco Negro

Até o presente, não existe uma teoria descrevendo o aumento da massa do buraco negro de forma autoconsistente, ou seja, considerando acreção não estacionária que também leve em conta a *back-reaction*. A princípio, um tratamento autoconsistente é necessário se quisermos explicar rigorosamente a massa dos buracos negros primordiais supermassivos como o hospedado pelo quasar ULASJ112001.48+064124.3 [39]. No entanto, poderemos ter uma ideia da eficiência do processo de acreção adotando as expressões do caso estacionário e supondo $t_{acc} \sim H^{-1}(t)$. É o que mostraremos a seguir.

Neste caso, a taxa de acreção pode ser escrita como [13, 28]:

$$\dot{M} = 4\pi G^2 M^2 C \left(\rho + p\right). \tag{4.32}$$

onde ρ e p são a densidade e a pressão cosmológicas e a constante C, em geral, pode também ser uma função de ρ, tal como acontece no gás de Chaplygin.

4.4.1 O caso de Babichev

Inserindo-se (4.5) e (4.2) com $\Lambda = k = 0$ em (4.32) podemos reescrevê-la como:

$$\frac{dM}{d\rho} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi G}{3}} G M^2 C \rho^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.33}$$

No fluido de Babichev, a constante C não depende de ρ_∞ (ver equação 4.18). Portanto a equação (4.33) pode ser integrada diretamente resultando em:

$$M = \frac{M_i}{1 + m_i C \rho_{acc}^{-1/2} \left(\rho^{1/2} - \rho_i^{1/2}\right)}, \tag{4.34}$$

onde M_i e ρ_i são, respectivamente, a massa inicial do buraco negro e a densidade do universo quando o buraco negro se formou, $\rho_{acc} \equiv 3/(8\pi G^3 M_\odot^2)$ e $m_i \equiv M_i/M_\odot$.

A densidade mínima ocorre para $a >> a_0$, com a massa máxima do buraco negro dada por:

$$M_{max} = \frac{M_i}{1 + m_i C \rho_{acc}^{-1/2} \left[\left(\frac{\alpha\rho_0}{1+\alpha}\right)^{1/2} - \rho_i^{1/2}\right]}, \tag{4.35}$$

Caso $\alpha\rho_0/(1+\alpha) = (\rho_i^{1/2} - \rho_{acc}^{1/2}/m_i C)^2$ temos que $M \to \infty$.

Provavelmente, tais soluções deverão ser eliminadas por uma teoria autoconsistente, pois, tanto a não estacionariedade do problema quanto a *back-rection* precisariam ser consideradas. Por outro lado vemos que, se esse ajuste fino não ocorre, a massa limite para o fluido de Babichev pode ser escrita como:

$$M = \frac{M_i}{1 - m_i C \left(\rho_i/\rho_{acc}\right)^{1/2}}, \tag{4.36}$$

supondo $\rho_0 << \rho_i$.

Na figura (4.9) encontramos o comportamento da massa em quatro situações distintas.

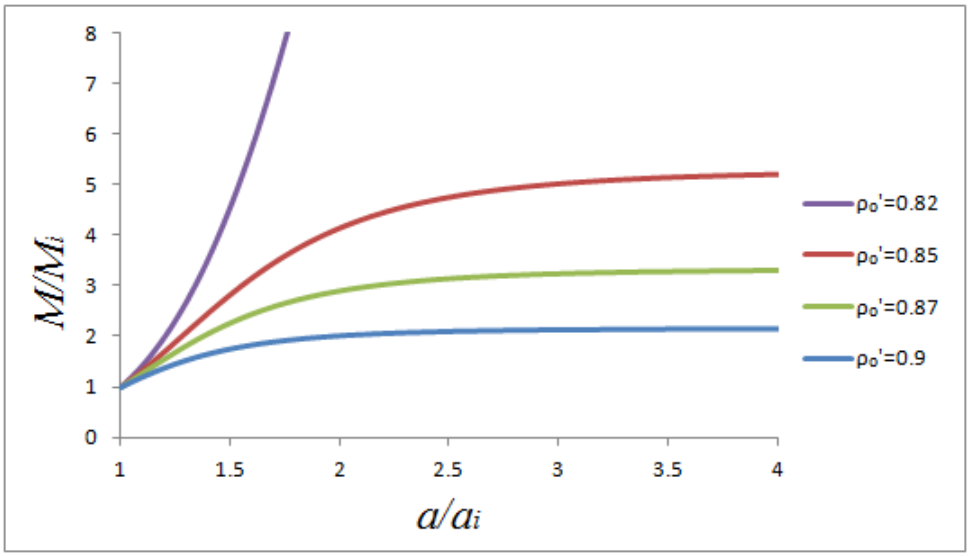


Figura 4.9: Evolução do buraco negro para a equação linear de estado de Babichev com $\alpha = 1/3$. Foi definido o parâmetro $\rho_0' \equiv \alpha\rho_0/\left[(1+\alpha)\,\rho\,(a_0)\right]$. A massa foi definida como $m_i = 1$ para $\rho_i = \rho_{acc}$. Nos casos $\rho_0' \leq 0.82$ a massa diverge e estas soluções não devem ser consideradas.

4.4.2 O Gás de Chaplygin

No caso do gás de Chaplygin, a constante C não pode ser considerada uma constante no cenário cosmológico e a equação (4.33) não pode ser integrada diretamente. Para o caso $\lambda = 1$ a constante C está determinada ($C = 4\rho_{\infty}^{3(1+\lambda)/2}/A^{3/2}$) e a equação diferencial para a massa toma a seguinte forma:

$$\frac{dM}{d\rho} = -2\sqrt{\frac{8\pi G^3}{3A^3}}\rho^{5/2}, \tag{4.37}$$

e pode se resolvida por uma simples integração:

$$M = \frac{M_i}{1 + \frac{4}{7}m_i A_{si}^{-3/2}\overline{\rho}^{-7/2}\left(\rho^{7/2} - \rho_i^{7/2}\right)}, \tag{4.38}$$

onde $m \equiv M/M_{\odot}$, $\rho_{acc} \equiv 3/8\pi G^3 M_{\odot}^2$ e $\overline{\rho} \equiv \rho_i^{6/7}\rho_{acc}^{1/7}$. Para o gás de Chaplygin densidade mínima também ocorre em $a \to \infty$ e a massa máxima do buraco negro é:

$$M_{max} = \frac{M_i}{1 + \frac{4}{7}m_i A^{-3/2}\rho_{acc}^{-1/2}\left(A^{7/2} - \rho_i^{7/2}\right)}. \tag{4.39}$$

Neste caso, o ajuste fino é dado por $4m_i A^{-3/2}\rho_{acc}^{-1/2}(A^{7/4} - \rho_i^{7/2})/7 \leq 1)$. Quando esta condição é obedecida, a massa do

buraco diverge e estas soluções devem ser desprezadas. No entanto, para os casos onde o ajuste fino não ocorre, o valor máximo da massa do buraco negro pode ser escrito como:

$$M_{max} = \frac{M_i}{1 - \frac{4}{7} m_i A_{si}^{-3/2} \left(\frac{\rho_i}{\rho_{acc}}\right)^{1/2}}, \tag{4.40}$$

supondo $\rho_{minimo} = A^{1/2} << \rho i$.

A figura (4.10) ilustra o comportamento da massa para alguns valores de A_{si}, onde o comportamento é similar ao gás de Babichev. O valor da massa inicial ($m_i \approx 2.2$) em $\rho_i = \rho_{acc}$ foi escolhido para que o ajuste fino ocorra em $A_{si} = 0.7$.

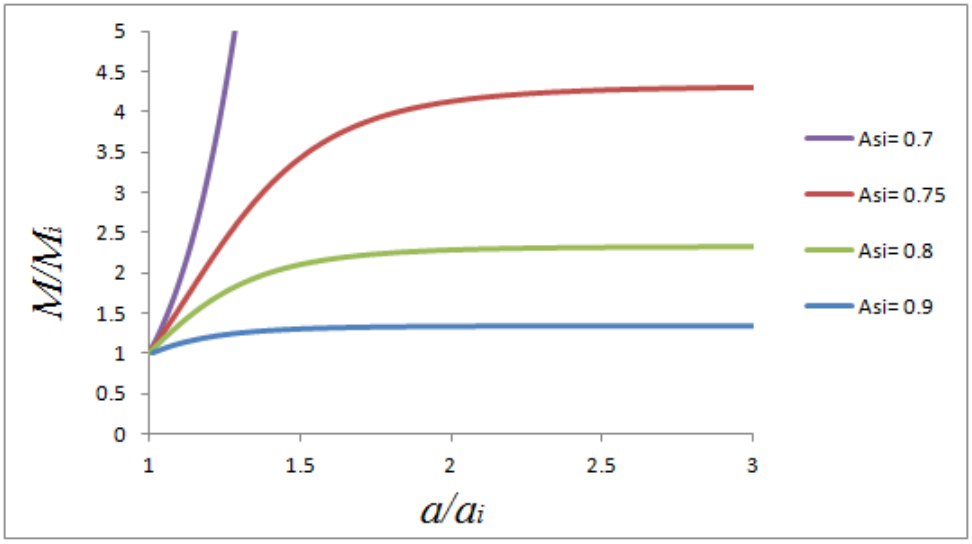


Figura 4.10: Evolução do buraco negro para o gás de Chaplygin com $\lambda = 1$. A massa inicial escolhida foi de $mi \approx 2.2$ para $\rho_i = \rho_{acc}$. Nos casos $A_{si} \leq 0.7$ a massa do buraco negro diverge e devem ser desconsiderados.

5

Um novo exemplo de Acreção Cosmológica

5.1 Equação de Estado Geral

Faremos aqui um tratamento de acreção generalizado, de modo que se possa descrever o caso de Babichev e o gás de Chaplygin como casos particulares. Para isso consideraremos uma equação de estado barotrópica mais abrangente do que as discutidas no capítulo anterior:

$$p = -A\left(\rho - B\right)^{-\lambda} - B. \tag{5.1}$$

Note que o caso de Babichev (equação 4.14) é recuperado para

$\lambda = -1$; $A = -\alpha$; $B = \alpha\rho_0/(\alpha+1)$. Além disso, fixando-se $B = 0$, obtemos a equação de estado para o gás de Chaplygin como apresentada na equação (4.23). Por outro lado, sabemos que as equações que descrevem o processo de acreção dependem da densidade de entalpia $\rho + p$ (ver equações 3.22 e 3.23). No caso da equação (5.1), a densidade de entalpia é dada por:

$$\rho + p = -A\left(\rho - B\right)^{-\lambda} + \left(\rho - B\right) = -A\eta^{-\lambda} + \eta \tag{5.2}$$

onde $\eta \equiv \rho - B$. Como $\dot{\eta} = \dot{\rho}$, a equação de conservação (4.5) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{\eta} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(\eta - A\eta^{-\lambda}\right) = 0. \tag{5.3}$$

A equação acima possui a seguinte solução geral:

$$\frac{\rho}{\rho\left(a_0\right)} = B_s + \left(1 - B_s\right)\left[A_s + \left(1 - A_s\right)\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\lambda)}\right]^{\frac{1}{1+\lambda}}, \tag{5.4}$$

onde $B_s = B/\rho\left(a_0\right)$ e $A_s = A/\eta\left(a_0\right)^{(1+\lambda)}$.

Observamos que o caso $\lambda = -1$ pode ser integrado diretamente da equação (5.3) ou simplesmente ao obter-se o limite da equação (5.4) quando $\lambda \to -1$. As duas abordagens fornecem o seguinte resultado:

$$\frac{\rho}{\rho\left(a_0\right)} = B_s + \left(1 - B_s\right)\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1-A)}. \tag{5.5}$$

Como esperado, podemos ver que esta solução de fato se reduz ao resultado de Babichev para $A = -\alpha$ e $B = \alpha\rho_0/(\alpha + 1)$, conforme apresentado na equação (4.15). Para este caso temos que a evolução da densidade ocorre de forma idêntica à de Babichev ao identificarmos A por $-\alpha$ e B por $\alpha\rho_0/\left(1+\alpha\right)$ (figura 4.3). Para $\lambda = 1$ temos que $u_s^2 = -A$, portanto o caso $A > 0$ representa fluidos hidrodinamicamente instáveis, que também não serão considerados.

Tomando $B = 0$ na solução (5.4), o resultado do gás de Chaplygin é recuperado (ver equação 4.24).

A evolução cosmológica da densidade está ilustrada na figura (5.1), onde vemos as soluções com $0 < B_s < 1$. Quando $A_s > 0$, a densidade apresenta o mesmo comportamento que as soluções não físicas do gás de Chaplygin (figura 4.7). No

caso $B_s > 1$, a densidade apresenta o comportamento inverso ao do gás de Chaplygin, além de possuir um valor máximo igual a B_s, portanto, também não será considerado. Note que os casos $A_s = 1$ e $B_s = 1$ levam a densidades constantes e à equação de estado $p = -\rho$, típica do estado de vácuo.

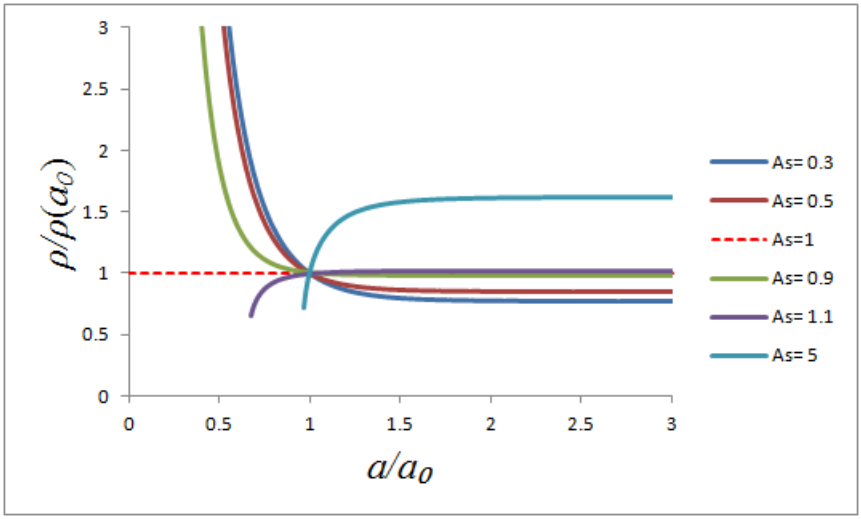


Figura 5.1: Evolução cosmológica da densidade do gás generalizado normalizada por $\rho(a_0)$ com o fator de escala a/a_0 para o caso $\lambda = 1$ e $B_s = 0.5$.

Discutiremos agora o problema da acreção para o fluido descrito pela equação (5.1), cuja densidade cósmica evolui satisfazendo a equação (5.4). Das equações (3.22) e (3.23), podemos

escrever:

$$\left(\frac{\rho+p}{\rho_\infty+p_\infty}\right) ux^2\sqrt{1-\frac{2}{x}+u^2}=-C, \tag{5.6}$$

e

$$ux^2\left(\frac{\eta}{\eta_\infty}\right)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}\left(\frac{\rho+p}{\rho_\infty+p_\infty}\right)^{\frac{1}{1+\lambda}}=-C. \tag{5.7}$$

No limite $\lambda \to -1$ a equação (5.7) tende para:

$$ux^2\left(\frac{\rho+p}{\rho_\infty+p_\infty}\right)^{\frac{1}{1+A}}=-C. \tag{5.8}$$

A velocidade do som no ponto crítico é determinada pela equação (4.27) e a constante C pode ser calculada por (5.6) ou (5.7) no ponto crítico.

O comportamento ρ e u como função de x pode ser obtido rearranjando-se (4.16) e (4.17). A velocidade $u\,(x)$ é a solução da seguinte equação:

$$u^2-\left[(1-A')+A'\left(-\frac{ux^2}{C}\right)^{1+\lambda}\right]^{\frac{2\lambda}{1+\lambda}}+\left(1-\frac{2}{x}\right)=0, \tag{5.9}$$

enquanto $\rho(x)$ é obtido combinando-se (5.8) e (5.9). Temos:

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = B' + (1 - B')\left[A' + (1 - A')\left(-\frac{C}{ux^2}\right)^{1+\lambda}\right]^{\frac{1}{1+\lambda}}, \quad (5.10)$$

onde foi definido que $A' \equiv A/\eta_\infty^{1+\lambda}$ e $B' = B/\rho_\infty$. Ao tomar o limite $\lambda \to -1$ as equações (5.9) e (5.10) se tornam, respectivamente:

$$u^2 - \left(\frac{x^2}{C}\right)^{-2A}(-u)^{-2A} + \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 0, \quad (5.11)$$

e

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = B' + (1 - B')\left(-\frac{C}{x^2 u(x)}\right)^{1-A}. \quad (5.12)$$

Este problema só apresenta soluções analíticas para alguns valores específicos de λ. No caso $\lambda = 1$ podemos calcular o valor da constante $C = 4/A'^{3/2}$ e também ver que a equação (5.10) se reduz a:

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = B' + (1 - B')\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2}{x}\right) - 16x^{-4}A'^{-4}(1 - A')}{\left(1 - \frac{2}{x}\right) - (1 - A')}}, \quad (5.13)$$

As soluções para a densidade como função de x apresentam comportamento distintos que dependem do valor de B'. Podemos ver as soluções do caso $0 < B' < 1$ na figura (5.2), onde $\rho(x)$ também se comporta de forma similar à densidade do gás de Chaplygin (figura 4.8).

No caso $B' > 1$, a densidade pode crescer ao se afastar do corpo central (quando $A' < 1$) ou ao se aproximar do buraco negro, porém é limitada no espaço. Nenhuma das soluções para $B' > 1$ apresentam um significado físico e, portanto, não foram consideradas.

Tanto o caso $A' = 1$ quanto o caso $B' = 1$ resultam em uma densidade constante no espaço.

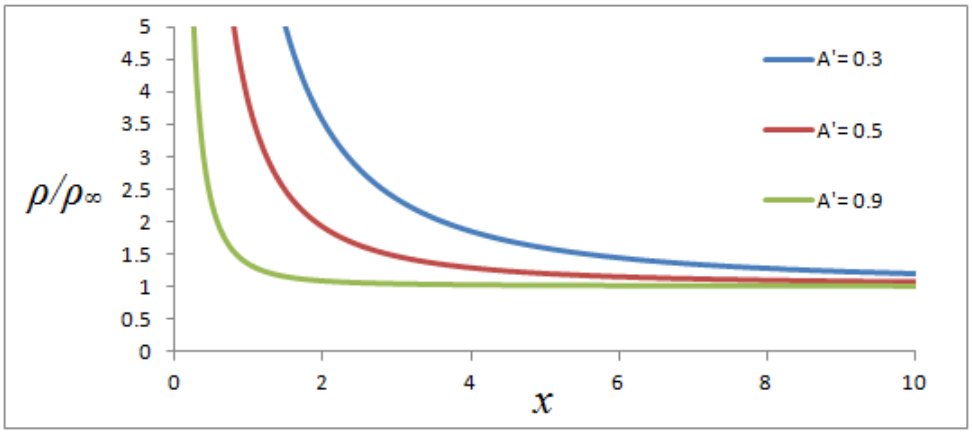


Figura 5.2: Densidade do fluido acretado normalizada por ρ_∞ como função de x para o gás de generalizado com $\lambda = 1$ e $B' = 0.5$.

No caso $\lambda = -1$ podemos calcular a constante C, cujo resultado será igual à equação (4.18) com $\alpha = -A$, lembrando que A deve ser negativo. A solução radial torna-se idêntica à de Babichev, apresentada anteriormente, quando substituímos A por $-\alpha$ e B por $\alpha\rho_0/(1+\alpha)$. Para outros valores dos parâmetros, as soluções são ligeiramente distintas.

5.1.1 Estimativa da Evolução da Massa do Buraco Negro

Como fizemos anteriormente, vamos supor que $t_{acc} \sim H^{-1}$. Tal como no capítulo anterior, a ideia é ter uma estimativa da variação de massa do buraco negro e da eficiência do processo de acreção. Chamamos atenção ao fato de que tais cálculos devem ser vistos apenas como uma forma aproximada, pois não existe uma teoria rigorosa para o processo de acreção não estacionário que leve em conta a *back-reaction* [74].

Para $\lambda = 1$, a constante C está determinada e a taxa de variação de massa pode ser escrita como:

$$\frac{dM}{d\rho} = -2\sqrt{\frac{8\pi G^3}{3A^3}}\,(\rho - B)^3\,\rho^{-1/2}. \tag{5.14}$$

A integral desta equação resulta na evolução cosmológica da

massa do buraco negro:

$$M = \frac{M_i}{1 + 4m_i A_{si}^{-3/2} \overline{\rho}^{-7/2} f\left(\rho,\rho_i\right)}, \tag{5.15}$$

onde $A_{si} \equiv A/\rho_i^2$, $m \equiv M/M_{\odot}$, $\rho_{acc} \equiv 3/8\pi G^3 M_{\odot}^2$, $\overline{\rho} \equiv \rho_i^{6/7} \rho_{acc}^{1/7}$ e a função f é dada por:

$$\begin{aligned} f\left(\rho,\rho_i\right) = \tfrac{1}{7}\left(\rho^{7/2} - \rho_i^{7/2}\right) - \tfrac{3}{5}B\left(\rho^{5/2} - \rho_i^{5/2}\right) \\ + B^2\left(\rho^{3/2} - \rho_i^{3/2}\right) - B^3\left(\rho^{1/2} - \rho_i^{1/2}\right). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Podemos ver que, quando $B = 0$, a equação (5.15) se reduz para a equação da massa no gás de Chaplygin (equação 4.38). A figura (5.3) apresenta a evolução de massa do buraco negro para diferentes valores de A_{si}.

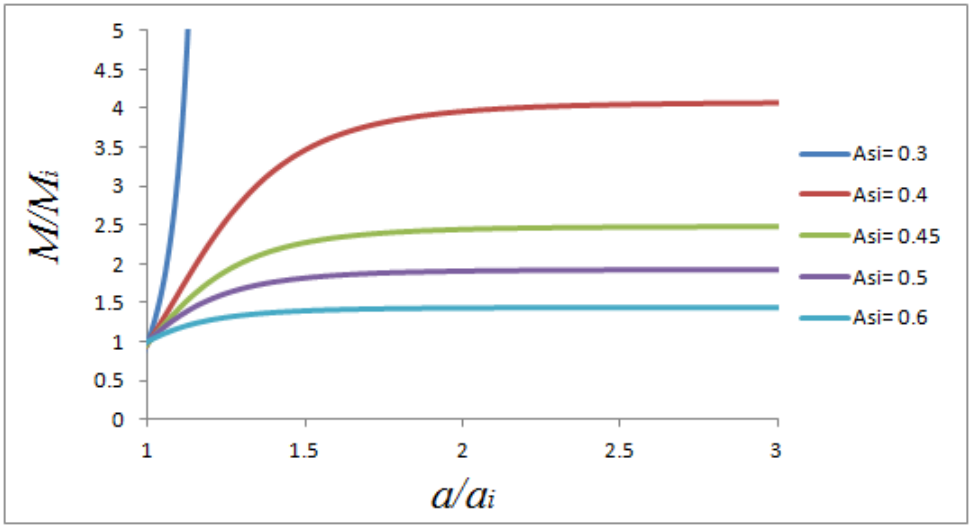


Figura 5.3: Evolução do buraco negro para a equação geral com $\lambda = 1$ e $B_s = 0.5$. O valor de $\rho(a_0)$ foi escolhido igual a ρ_{acc} e a massa foi escolhida $m_i = 7$ em $\rho_i = 1$

É interessante comparar este resultado com aqueles obtidos no capítulo anterior. Vemos que a densidade do fluido cosmológico possui uma influência muito maior do que no caso do fluido de Babichev. Também é interessante notar que o resultado aqui apresentado é equivalente à evolução da massa no gás de Chaplygin com correções em termos de potências de B (ver equação 5.16).

6
Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho estudamos o fenômeno da acreção esfericamente simétrica de matéria em suas diferentes abordagens (clássica e relativística). Foram discutidas em detalhe as equações hidrodinâmicas básicas que descrevem o processo físico em seus diferentes regimes. Adotando a proposta original de Babichev e colaboradores [13], foi dedicada uma atenção especial à compreensão da importância do processo de acreção de fluidos cosmológicos na evolução de buracos negros.

No caso da abordagem clássica adotada no capítulo 2 analisamos o modelo básico de acreção desenvolvido por H. Bondi

[8]. Discutimos sob que condições o gás acretado durante o processo pode ser tratado como um fluido. Além disso, verificamos que as mesmas equações resultantes também descrevem outros fenômenos associados, tais como ventos e brisas estelares. Identificamos a presença de um ponto crítico que também é um ponto sônico que divide naturalmente o regime de acreção em duas variantes distintas: uma com velocidades sub-sônicas e outra com velocidades super-sônicas. A taxa de acreção determinada foi de $\sim 10^{-15} M_{\odot}/ano$ representando um aumento desprezível na massa do corpo central, como esperado. Calculamos a área onde ocorre a acreção, na qual o a influência do campo gravitacional do corpo central é dominante, e que é limitada a uma esfera de raio $r_{acc} \sim 17UA$.

O processo de acreção relativística foi estudado de acordo com o trabalho publicado por F. C. Michel [16]. Nesta abordagem foi adotada a métrica de Schwarzschild, com as equações descrevendo a acreção obtidas através das leis de conservação de energia e momentum para um fluido perfeito. Como é bem conhecido, esta métrica representa a distorção na geometria do espaço-tempo causada pelo campo gravitacional de

um corpo central e é utilizada principalmente na descrição de buracos negros esfericamente simétricos e estáticos. Diferentemente do caso clássico, o ponto crítico encontrado nas equações relativísticas não é um ponto sônico. Notamos também que a presença de um *horizonte de eventos* impõe algumas restrições físicas sobre o processo de acreção.

Vimos também que a equação de estado apresenta grande importância física, pois influencia diretamente a dinâmica do fluido acretado e determina algumas das propriedades físicas do processo de acreção, tal como o comportamento no ponto sônico. Equações de estado diferentes das tradicionais são comumente adotadas para descrever a energia escura, a componente de pressão negativa que acelera o Universo.

No capítulo 4, discutimos a processo de acreção de fluidos cosmológicos em buracos negros. Inicialmente, consideramos que as escalas temporais e espaciais envolvidas na acreção e na evolução cosmológica do fluido são extremamente diferentes ($t_{acc} << H^{-1}$). Neste caso, o tratamento proposto por Michel [16] pode ser diretamente aplicado.

Dois tipos de fluidos cosmológicos foram analisados. O pri-

meiro, descrito por uma equação de estado linear proposta por Babichev, e o segundo, representado pelo chamado gás de Chaplygin. Sob determinadas condições, os dois modelos considerados apresentam semelhanças dinâmicas com o modelo de concordância cósmica (ΛCDM).

O comportamento do caso não estacionário foi feito de maneira aproximada, simplesmente considerando $t_{acc} \sim H^{-1}$ de forma a se obter uma estimativa da massa final do buraco negro e da eficiência do processo de acreção. Mostramos que a massa do buraco negro acretando tais fluidos pode apresentar um aumento significativo caso o buraco negro tenha sido formado mais cedo no universo. Este resultado ocorre nos 3 casos examinados: o fluido de Babichev, o gás de Chaplygin e o gás de Chaplygin generalizado. Isto sugere que o processo de acreção é eficiente e, provavelmente, será fisicamente justificado no futuro por uma teoria mais rigorosa.

6.1 Algumas Perspectivas

Neste ponto, é importante apontar algumas perspectivas de nosso estudo a ser investigado no futuro próximo.

Embora o processo de acreção esfericamente simétrica tenha sido revisto e discutido com bastante detalhe, existem ainda muitas questões pendentes que devem ser cuidadosamente analisadas. Particularmente, em relação à acreção de fluidos cosmológico aqui discutida, foi suposto que o ponto crítico faz parte da solução em analogia ao caso clássico. Além disso, o caso de energia *phantom* ($\rho + p < 0$), encontrada na equação de estado proposta por Babichev e em outros modelos cosmológicos, implica que a taxa de acreção seja negativa. É preciso investigar o significado deste resultado e, se a massa do buraco negro de fato diminui, e também procurar entender fisicamente como e por que isso acontece. Uma resposta mais definitiva será, provavelmente, fornecida apenas por uma teoria geral para processos não estacionários que considere o problema da *back-reaction* [74].

Por outro lado, sabemos que processo de acreção deve ser fortemente influenciado pela métrica de fundo. Neste sentido, lembramos também que estrelas de nêutrons e buracos negros podem possuir um campo eletromagnético significativo [75] e são, em geral, sistemas girantes. Portanto, seria de

grande interesse físico considerar métricas mais gerais do que a de Schwarszchild como, por exemplo, a métrica de Reissner-Nordstrom e suas generalizações para buracos negros carregados. Estudos preliminares nessa linha de investigação foram recentemente publicados [29, 30]. Naturalmente, caso haja a inclusão da rotação, deve-se considerar a métrica de Kerr ou mesmo Kerr-Newman para o caso de buracos negros carregados. Além disso, é importante também estudar o problema sob condições mais abrangentes, ou seja, quando o processo de acreção não pode mais ser considerado como sendo estacionário. Aliás, estudos que tratam de maneira mais consistente do chamado problema da *back-reaction* ainda estão em fase inicial.

Naturalmente, a suposição de que o fluido acretado é meramente um fluido de teste e, portanto, não contribui para a gravitação, também deverá ser abandonada em tratamentos mais consistentes, já que a métrica passa a ser explicitamente dependente do tempo. Apesar das dificuldades para se tratar do problema de forma auto-consistente, podemos esperar que o resultado obtido seja mais abrangente, que seja possí-

vel comparar as soluções com aquelas do caso mais simples e verificar a validade das hipótese adotadas, como por exemplo, em relação às escalas de tempo envolvidas no processo.

Tais linhas de desenvolvimento fazem parte das perspectivas futuras do presente trabalho. Um dos objetivos principais será explicar a formação de buracos negros supermassivos, tais como o quasar ULASJ112001.48+064124.3 [39] no contexto do universo relativamente jovem ($z \gtrsim 7$).

O processo de acreção para múltiplos fluidos não foi discutido na literatura de forma consistente e tal estudo é fisicamente interessante, tanto na sua formulação clássica quanto relativística. A aplicação para misturas de fluidos é de importância considerável tendo em vista a observação do quasar ULASJ112001.48+064124.3 [39]. Para $z \gtrsim 7$, devemos considerar uma mistura de matéria e radiação, pois a energia escura é desprezível em altos *redshifts*. A Termodinâmica do fluido que está sendo acretado também deve ser investigada.

Finalmente, observamos que o estudo apresentado nesta dissertação pode também ser visto como um prelúdio para o caso de discos de acreção, ou seja, quando a hipótese de simetria

esférica é abandonada. Como mencionado na introdução, discos de acreção são fenômenos astronômicos muito comuns e que exercem um papel importante na acreção de matéria em diferentes corpos celestes e até mesmo na formação de sistemas planetários. O modelo padrão descrevendo discos de acreção foi proposto em 1973 por Shakura e Sunyaev [76], mas sua consistência e dificuldades conceituais vêm sendo intensamente discutidas na literatura [77, 78, 79, 80, 81]. Tal estudo nos levará a discutir a influência dos processosf dissipativos no fluido acretado, os quais devem ser importantes até mesmo no caso de simetria esférica. Estão em andamento algumas investigações nessa direção, tanto para o caso clássico quanto relativístico.

Referências Bibliográficas

[1] N. Moeckel, H. B. Throop, *The Astrophysical Journal* **707**, 268 (2009).

[2] P. J. Armitage, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **49**, 195 (2011).

[3] F. Hoyle, R. A. Lyttleton, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosofical Society* **35**, 405 (1939).

[4] F. Hoyle, R. A. Lyttleton, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosofical Society* **35**, 592 (1939).

[5] F. Hoyle, R. A. Lyttleton, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosofical Society* **36**, 325 (1940).

[6] F. Hoyle, R. A. Lyttleton, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosofical Society* **36**, 424 (1940).

[7] H. Bondi, F. Hoyle, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **104**, 273 (1944).

[8] H. Bondi, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **112**, 195 (1952).

[9] I. S. Shklovsky, *Astrophysical Journal* **148**, L1 (1967).

[10] K. H. Prendergast, G. R. Burbidge, *Astrophysical Journal* **151**, L83 (1968).

[11] Y. B. Zel'Dovich, N. I. Shakura, *Soviet Astronomy* **13**, 175 (1969).

[12] D. Lynden-Bell, *Nature* **223**, 690 (1969).

[13] E. Babichev, V. Dokuchaev, Y. Eroshenko, *Physical Review Letters* **93**, 021102 (2004).

[14] F. D. Paolis, M. Jamil, A. Qadir, *International Journal of Theoretical Physics* **49**, 621 (2010).

[15] C.-Y. Sun, *Communications in Theoretical Physics* **52**, 441 (2009).

[16] F. C. Michel, *Astrophysics and Space Science* **15**, 153 (1972).

[17] T. E. Holzer, W. I. Axford, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **8**, 31 (1970).

[18] E. J. Weber, L. D. Jr., *Astrophysical Journal* **148**, 217 (1967).

[19] E. N. Parker, *Space Science Reviews* **4**, 666 (1965).

[20] L. D. Landau, E. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Butterworth-Heinemann, 1987).

[21] J. Frank, A. R. King, D. Raine, *Accretion Power in Astrophysics* (Cambridge University Press, 2002).

[22] M. Demiański, *Relativistic Astrophysics* (Pergamon Press, 1985).

[23] T. Padmanabhan, *Gravitation Foundations and Frontiers* (Cambridge University Press, 2010).

[24] L. D. Landau, *The Classical Theory of Fields* (Butterworth-Heinemann, 1980).

[25] B. J. Carr, S. W. Hawking, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **168**, 339 (1974).

[26] K. S. Thorne, R. A. Flammang, A. N. Zytkow, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **194**, 475 (1981).

[27] M. Jamil, *The European Physical Journal C* **62**, 609 (2009).

[28] J. A. S. Lima, D. C. Guariento, J. E. Horvath, *Physics Letters B* **693**, 218 (2010).

[29] E. O. Babichev, V. I. Dokuchaev, Y. N. Eroshenko, *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **112**, 784 (2011).

[30] M. Jamil, A. Qadir, M. A. Rashid, *The European Physical Journal C* **58**, 325 (2008).

[31] H. Minkowski, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* p. 75 (1909).

[32] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley & Sons, Inc, 1972).

[33] G. D. Birkhoff, *Relativity and Modern Physics* (Cambridge, Harvard University Press, 1923).

[34] K. Schwarzschild, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* **18**, 424 (1916).

[35] M. D. Kruskal, *Physical Review* **119**, 1743 (1960).

[36] J. Michell, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **74**, 35 (1784).

[37] S. Laplace, *Allgemeine geographische Ephemeriden* **4**, 01 (1799).

[38] D. C. Guariento, Evolução de buracos negros primordiais no universo, Ph.D. thesis, Insuto de Física - Universidade de São Paulo (2010).

[39] D. J. Mortlock, S. J. Warren, B. P. Venemans, et al., *Nature* **474**, 616 (2011).

[40] A. Friedmann, *Zeitschrift für Physik* **10**, 377 (1933).

[41] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, et al., *The Astronomical Journal* **116**, 1009 (1998).

[42] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, et al., *The Astrophysical Journal* **517**, 565 (1999).

[43] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, et al., *The Astronomical Journal* **16**, 1009 (1998).

[44] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, et al., *The Astrophysical Journal* **517**, 565 (1999).

[45] B. Leibundgut, J. Sollerman, *Europhysics News* **32**, 121 (2001).

[46] D. N. Spergel, et al., (colaboração do WMAP), *The Astrophysical Journal Supplement* **170**, 377 (2007).

[47] E. Komatsu, et al., (colaboração do WMAP), *The Astrophysical Journal Supplement* **192**, 18 (2011).

[48] R. F. L. Holanda, J. V. Cunha, L. Marassi, J. A. S. Lima, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2**, 35 (2012).

[49] S. Weinberg, *Review of Modern Physics* **61**, 1 (1989).

[50] J. A. S. Lima, *Notas de Aula de Cosmologia* (IAG-USP, 2011).

[51] V. Dokuchaev, Y. Eroshenko, *Physical Review D* **84**, 124022 (2011).

[52] M. Jamil, I. Hussain, M. U. Farooq, *Astrophysics and Space Science* **335**, 339 (2011).

[53] P. F. Gonzalez-Díaz, *Physics Letters B* **632**, 159 (2006).

[54] M. G. Rodrigues, A. Saa, *Physical Review D* **80**, 104018 (2009).

[55] P. J. E. Peebles, B. Ratra, *Reviews of Modern Physics* **75**, 559 (2003).

[56] R. Silva, J. S. Alcaniz, J. A. S. Lima, *International Journal of Modern Physics D* **16**, 469 (2007).

[57] J. A. S. Lima, J. V. Cunha, J. S. Alcaniz, *Astroparticle Physics* **31**, 233 (2009).

[58] J. A. S. Lima, S. H. Pereira, *Physical Review D* **78**, 083504 (2008).

[59] S. H. Pereira, J. A. S. Lima, *Physics Letters B* **669**, 266 (2008).

[60] T. T. Chiba, N. Sugiyama, T. Nakamura, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **289**, L5 (1997).

[61] J. A. S. Lima, S. H. Pereira, J. E. Horvath, D. C. Guariento, *Astroparticle Physics* **33**, 292 (2012).

[62] V. Sahni, A. A. Starobinsky, *International Journal of Modern Physics D* **9**, 373 (2000).

[63] T. Padmanabhan, *Physics Reports* **380**, 235 (2003).

[64] J. C. Carvalho, J. A. S. Lima, I. Waga, *Physical Review D* **46**, 2404 (1992).

[65] J. S. Alcaniz, J. A. S. Lima, *Physical Review D* **72**, 063516 (2005).

[66] P. Wang, X. Meng, *Classical and Quantum Gravity* **22**, 283 (2005).

[67] J. A. S. Lima, *Brazilian Journal of Physics* **34**, 194 (2004).

[68] A. Y. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, *Physics Letters B* **511**, 265 (2001).

[69] N. Bilić, G. B. Tupper, R. D. Viollier, *Physics Letters B* **535**, 17 (2002).

[70] M. C. Bento, O. Bertolami, A. A. Sen, *Physical Review D* **66**, 043507 (2002).

[71] J. A. S. Lima, J. S. Alcaniz, J. V. Cunha, *Astroparticle Physics* **30**, 196 (2008).

[72] J. A. S. Lima, J. S. Alcaniz, *The Astrophysical Journal* **618**, 16 (2005).

[73] J. V. Cunha, J. S. Alcaniz, J. A. S. Lima, *Physical Review D* **69**, 083501 (2004).

[74] E. Babichev, V. Dokuchaev, Y. Eroshenko, *Classical and Quantum Gravity* **29**, 115002 (2012).

[75] I. D. Novikov, *Black Holes and the Universe* (Cambridge University Press, 1995).

[76] N. I. Shakura, R. A. Sunyaev, *Astronomy and Astrophysics* **24**, 337 (1973).

[77] Y. E. Lyubarskij, N. I. Shakura, *Soviet Astronomy Letters* **13**, 386 (1987).

[78] P. J. V. Garcia, *Physical Processes in Circumstellar Disks around Young Stars* (University of Chicago Press, 2011). (P. 273, artigo: Magnetohydrodynamics of Protostellar Disks de S. A. Balbus).

[79] S. Hirose, O. Blaes, J. H. Krolik, *The Astrophysical Journal* **704**, 781 (2009).

[80] Z. Zhu, et al., *The Astrophysical Journal* **746**, 110 (2012).

[81] E. Jacquet, S. Balbus, *eprint arXiv:1203.1817* (2012).