Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Interação Hádron-Charmonium em Modelos Simples

Maria Simone Kugeratski Souza

SBI-IFUSP

305M810T3792

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Fernando S. Navarra

Orientador: Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra (USP)

Prof. Dr. Gastão Inácio Grein (IFT)

Prof^{a}. Dra. Maria Carolina Nemes (UFMG)

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3792

ex. 1

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu apoio financeiro do CNPq.

São Paulo, março de 2003.

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

14/03/03

539.7
S729i
M
2003
Ex.1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Souza, Maria Simone Kugeratski

Interação Hádron – Charmonium em Modelos Simples. São Paulo, 2003.

Dissertação (Mestrado) Universidade de São Paulo Instituto de Física. Departamento de Física Experimental

Orientador: Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Modelo Dipolo-Capacitor;
2. Híbrido; 3. Aproximação Clássica;
4. Aproximação Eikonal.

USP/IF/SBI-019/2003

... Edson, dedico a você este trabalho,

com carinho.

" ... não sei se é legítima essa maneira de atribuir ao acaso o seu quinhão
e se essa distinção não será um tanto artificial;
pelos menos, é certo que, enquanto a natureza tiver segredos,
ela será extremamente arbitrária e incerta na sua aplicação ... "

(Jules-Henri Poincaré)

Agradecimentos

Sabemos que optar pela Física, para alguns, não é uma tarefa muito fácil. Às vezes temos que nos privar de muitas coisas, inclusive de nossas famílias e amigos. Então é à minha família que quero agradecer, pelo apoio e pelo carinho, e também aos meus amigos da UFPR, em especial ao Adriano Moraes e ao Vilmar Fernandes.

Na Física alguns levam a sorte de conhecer pessoas encorajadoras. Eu tive a sorte de conhecer o professor e amigo Carlos Henrique dos Santos (UFPR), as professoras Maria José Bechara e Cecil Chow Robillota, a quem devo agradecer pela orientação ao longo do curso de graduação. Ainda durante a gradução conheci o professor Fernando Silveira Navarra. Foi ele quem apresentou-me à área que escolhi para trabalhar. A ele agradeço pela dedicação, paciência e pela minha formação durante estes anos de trabalho. Também quero agradecer aqui ao pessoal do " corredor". Professores e alunos que, de alguma forma, contribuíram para minha formação e andamento do trabalho de mestrado.

Durante o tempo em que vivi aqui em São Paulo, especialmente no Instituto de Física, várias pessoas passaram e deixaram suas marcas. Algumas pessoas entraram em minha vida e algumas outras continuaram nela. Quero agradecer a todos, em especial quero agradecer aqui a companhia e amizade de Kelly Cristina Carvalho, Andréa Sardinha Taschetto, Regina Starapolli de Azevedo, Émerson Alves e Marcelo Pires.

Devo agradecer também ao Edson. A ele devo meu muito obrigado por tudo.

Resumo

Nós desenvolvemos o modelo Dipolo-Capacitor para calcular as seções de choque para a interação hádron-charmonium e hádron-híbrido. Neste modelo o charmonium é tratado como um dipolo de cor muito menor do que o hádron, que é tratado como um capacitor de cor. O capacitor além de ter extensão é caracterizado por seu campo cromo-elétrico $\vec{E}^a$. Os quarks pesados sentem a ação deste campo externo e recebem energia suficiente para se dissociarem num par de mésons D. Os resultados obtidos por nós concordam numericamente com os obtidos através de outras técnicas. Fizemos a extensão do modelo para tratar da interação hádron-híbrido. Encontramos neste caso valores muito menores do que os obtidos em estimativas anteriores.

Abstract

In this work we develop a simple model to study the reactions charmonium-hadron and hybrid-hadron. In this model the charmonium is treated as a small color dipole and the hadron produces an external chromo-eletric field, felt by the heavy quarks. We obtain results for the cross section which are compatible with other existing estimates. We extend this idea further to the case of the hybrid-hadron interaction and compare our results to those obtained in the other approaches.

Sumário

Introdução 2

1 Interação hádron-charmonium 8

1.1 O Modelo Dipolo Capacitor 8

1.2 Hamiltoniana e Funções de Onda. 10

1.3 Cálculo da seção de choque 16

1.4 Resultados numéricos 24

2 Interação hádron-híbrido 35

2.1 O modelo de Kharzeev-Satz 37

2.2 Um Novo Modelo 39

2.3 Resultados numéricos 54

3 Conclusões 59

Apêndice 61

Referências Bibliográficas 66

Introdução

Acreditamos que nosso universo começou numa extraordinária explosão conhecida como Big-Bang. Nos primeiros instantes depois desta explosão, quando a temperatura estava ao redor de centenas de MeV, a matéria existiu num estado desconhecido para nós, um plasma de quarks e glúons desconfinados, o chamado QGP. Recriar em laboratório este estado e identificar corretamente sua formação é o maior desafio dos experimentos realizados no Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) [1].

A proposição, aprovação, execução e entrada em operação do RHIC durou vinte anos. O processo foi iniciado por volta de 1982 e em 2002, na conferência "Quark Matter 2002", houve uma apresentação copiosa de dados obtidos nesta máquina. Eles mostram que já estamos observando em laboratório um estado da matéria nuclear que é mais denso e quente do qualquer outro jamais produzido. Vários novos detetores ainda devem ser instalados e novos dados continuarão a surgir nos próximos anos. Em particular dados sobre a produção de charmonium deverão aparecer nos próximos dois anos. O charmonium é um estado ligado, um méson formado por um quark c e um antiquark $\bar{c}$.

Ao longo destes vinte anos a teoria das interações fortes se desenvolveu muito e desenvolveu um ramo especial que se ocupa de interações fortes em sistemas a altas temperaturas e/ou densidades. A comunidade de física nuclear relativística se subdividiu em muitos grupos que se ocupam dos vários aspectos envolvidos nesta física. Uma parte da comunidade tem estudado a física do charme em colisões hadrônicas a altas energias. Um dos tópicos mais estudados foi sempre a supressão do charmonium que,

desde o início do programa do RHIC, foi considerada uma das melhores "assinaturas" da formação do plasma de quarks e glúons.

Recentemente, esta afirmação foi questionada por alguns trabalhos. A supressão do méson J/ψ (o mais abundante dos estados do charmonium) está baseada no seguinte argumento, apresentado no trabalho original de Matsui e Satz [2]: cálculos de QCD na rede mostram que, no limite de massas muito pesadas, o potencial quark-antiquark se torna "blindado" a altas temperaturas. Como conseqüência, quando o alcance deste potencial se torna mais curto do que o raio de Bohr do J/ψ, o estado ligado não pode mais ser formado. Por outro lado, simulações detalhadas [3] (em reações de íons pesados) da evolução de uma população de pares $c - \bar{c}$ atravessando o plasma mostram que, como o número destes pares é muito alto, o efeito de recombinação dos quarks com antiquarks de sabor c, formando estados ligados é não desprezível e pode inclusive gerar um aumento do número final de J/ψ's. Esta conclusão foi confirmada independentemente por outros autores [4]. Levando a sério estes cálculos, não é mais válida a afirmação de que a simples diminuição do número de J/ψ's seja uma indicação da formação do QGP.

Qualquer que seja a assinatura do QGP envolvendo o charmonium, é necessário conhecer as propriedades do charmonium na matéria nuclear e, em particular, sua seção de choque de interação com outros hádrons, como píons, kaons e prótons.

Lembrando que o processo dominante na formação de pares $c-\bar{c}$ é a fusão de glúons na reação $g + g \rightarrow c + \bar{c}$, vemos que, na maioria dos casos, o par $c - \bar{c}$ não está na configuração singleto de cor, ou seja, não está em combinações de cor do tipo vermelho-antivermelho, verde-antiverde, etc. Quando ele estiver numa configuração de cores desbalanceadas, como, por exemplo, verde-antivermelho, estará num estado octeto de cor designado por $(c - \bar{c})_8$. Um estado deste tipo não pode se propagar livremente no vácuo e nem na matéria nuclear pois ele carrega cor liquída e a propagação livre da cor está proibida pelo confinamento, uma das propriedades básicas da QCD. Após sua formação, o par $(c - \bar{c})_8$ se acopla a um glúon do ambiente (pertencente a algum dos hádrons presentes em colisões nucleares) que tenha exatamente a combinação de

cor-anticor necessária para neutralizá-lo. O estado assim formado é designado por $(c-\overline{c})_8 - g$ e chamado de estado pré-resonante ou híbrido. Com o transcorrer do tempo, o glúon é absorvido pelo quark ou pelo antiquark e este estado se transformará no charmonium usual (singleto de cor). Como este processo ocorre em abundância, fica claro que, tão importante quanto calcular a seção de choque charmonium-hádron, é calcular a seção de choque híbrido-hádron. Nesta dissertação, nos propomos a calcular estas duas quantidades. Enquanto a primeira já foi objeto de muitos trabalhos, a segunda foi abordada em apenas dois artigos.

Quando observamos o espectro de massa dos mésons, vemos que o charmonium, cuja massa está em torno de 3 GeV, ocupa uma posição intermediária entre os mésons realmente pesados, como o bottomium, com massas em torno de 10 GeV, e os mésons leves, como o Φ ou o ρ, com massas da ordem de 1 GeV. Por isso o charmonium já foi chamado de "guarda da fronteira", da misteriosa fronteira entre o pesado e o leve, entre o pequeno e o grande, entre o perturbativo e o não-perturbativo. Nesta região indefinida não sabemos quais são os graus de liberdade relevantes para descrever a interação do charmonium com hádrons leves. Na ausência de uma certeza, todas as abordagens foram desenvolvidas.

Nos trabalhos pioneiros de Bhanot e Peskin [5], mais tarde desenvolvidos por Kharzeev e Satz [6] e recentemente atualizados para o caso da interação píon - J/ψ pelo grupo coreano [7], foi desenvolvida a linha batizada de "QCD a curtas distâncias", que faz uso da QCD perturbativa. A idéia principal é usar o fato do quarkonium ser muito menor do que o hádron com o qual ele colide. Neste trabalhos citados foi desenvolvido um formalismo bastante complicado e que, para produzir resultados, devia incluir a aproximação $m \to \infty$, onde m é a massa do quark c, que na verdade está em torno de 1.5 GeV.

Foram também desenvolvidos, em várias versões, modelos nos quais o charmonium e o hádron são tratados como duas "sacolas" que interagem entre si trocando quarks [8]. O rearranjo dos quarks nas sacolas representa a dissociação do charmonium.

Foram ainda desenvolvidos modelos baseados em lagrangianas efetivas [9] para a

interação charmonium-méson, com o uso de diferentes tipos de simetria. Neste caso a dinâmica é a de troca de mésons entre as partículas em colisão. O nosso grupo deu uma pequena contribuição [10] a essa linha ao introduzir de maneira correta a simetria quiral na interação $\pi - J/\psi$.

Quando a interação charmonium-hádron ocorre a altas energias ($\sqrt{s} > 20$ GeV) é possível usar modelos de espalhamento a altas energias como o modelo do vácuo estocástico. Também nesta região de energia o nosso grupo deu uma pequena contribuição, estimando a seção de choque neste regime de energia [11]. Finalmente, quando a energia da reação é baixa ($\sqrt{s} < 10$ GeV) é possível usar regras de soma da QCD. Também aqui o nosso grupo deu sua contribuição em [12], [13] e [14].

Tomados em conjunto, estes trabalhos levam a valores de $\sigma_{J/\psi-h}$ que convergem para algo em torno de alguns milibarns. As grandes discrepâncias que existiam no passado foram drasticamente reduzidas. Este passou a ser um problema que, embora ainda não tenha sido completamente resolvido, está pelo menos muito bem encaminhado.

É importante ressaltar que todos estes trabalhos (com exceção apenas de [6] e [11]) se ocuparam apenas da reação charmonium (singleto de cor) - hádron e que o caso, mais frequente em laboratório, da reação híbrido (octeto de cor) - hádron foi pouco tratado.

Duas últimas observações complementares sobre a experiência acumulada em todos estes artigos são as seguintes: as seções de choque charmonium-hádron e híbrido-hádron (esta última mais ainda)

i) *têm uma forte componente não perturbativa, com constante de acoplamento grande.*

ii) *são dominadas por trocas de energia da ordem de MeV, sendo sempre menores do que* 1 *GeV.*

Estas observações nos orientam na escolha do formalismo a ser utilizado por nós nesta dissertação. i) indica que lidamos com um problema não perturbativo, já que, no nosso caso, sempre faz uso de uma expansão na constante de acoplamento que não é pequena. Por outro lado, ii) sugere que a teoria de perturbação usual de mecâ-

nica quântica pode ser aplicada. Além disso, se escolhermos trabalhar com graus de liberdade de quarks e glúons, as reações de dissociação mencionadas acima não envolvem necessariamente criação de novas partículas, mas tão somente o espalhamento dos constituintes já presentes no estado inicial. Se este não fosse o caso e estivéssemos diante de um problema genuino de criação (e destruição) de partículas, aí sim seríamos obrigados a usar teoria quântica de campos. Uma outra (e mais forte) razão para adotar o uso da mecânica quântica usual é a sua relativa simplicidade e também a naturalidade com que nela é feita a aproximação de campo externo (como será visto adiante). Seremos, no entanto, obrigados a introduzir correções relativísticas. O resultado é um trabalho simples, bastante legível e que apresenta resultados concretos.

Com o formalismo da mecânica quântica relativística vamos desenvolver a idéia de Bhanot-Peskin, ou seja, de que o charmonium é muito menor do que um hádron ordinário e que sua interação com este hádron pode ser vista como a interação de um "pequeno dipolo de cor atravessando um grande dipolo de cor, ou capacitor". Usando esta imagem vamos construir um modelo que provisoriamente batizamos de modelo do dipolo - capacitor (MDC). Resultados parciais já foram apresentados por nós e publicados em anais de conferências [15, 16]. A seguir, vamos extendê-lo para o caso da interação híbrido - hádron. No primeiro caso, apesar de ter algumas pequenas vantagens, o MDC não pode ser considerado o "estado da arte", sendo menos rigoroso do que os outros modelos já existentes. No entanto, ele tem utilidade pedagógica ao capturar e exibir de maneira transparente a física do problema. Neste caso a comparação com resultados de outros trabalhos tem, para nós, a finalidade de testar o modelo. Se nossos resultados apresentassem grandes desvios das expectativas já existentes faríamos uma reavaliação do modelo. Como será visto, não é isto o que observamos. Sendo bem sucedido na primeira etapa, ou seja, sendo consistente com os outros cálculos citados acima, podemos avançar e usá-lo para calcular a seção de choque híbrido-hádron e aí sim dar uma contribuição original, benvinda numa área onde há tão poucos trabalhos. Antecipando as conclusões, podemos dizer que nossos resultados são encorajadores mas ainda provisórios pois ainda fizemos uso de muitas

e muitas aproximações que comprometem a acuidade numérica da resposta final. No entanto nenhuma destas aproximações é fundamental ou incontornável, a maioria delas podendo ser removida apenas com a introdução de cálculo numérico mais pesado.

Ainda sobre os ingredientes usados na formulação MDC é importante dizer que ele contém marcantes influências, a serem mencionadas ao longo dos próximos capítulos, de trabalhos feitos por membros da comunidade brasileira, notadamente [17, 18, 19, 20].

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: No capítulo 1, estudamos a interação charmonium - hádron utilizando MDC, no capítulo 2 estudamos a interação híbrido-hádron, utilizando a mesma idéia e no capítulo 3 apresentamos nossas conclusões e discussões.

Capítulo 1

Interação hádron-charmonium

1.1 O Modelo Dipolo Capacitor

O modelo consiste em tratar o charmonium (méson J/Ψ), como um dipolo de cor, pois sabemos que o charmonium é composto por um charm e um antiquark do mesmo sabor (c - $\overline{c}$) e para que ele seja um singleto de cor é necessário que quark e antiquark tenham cor e anticor correspondentes (R$\overline{R}$, B$\overline{B}$, G$\overline{G}$), por isso a relação com o dipolo elétrico.

O hádron pode ser um bárion (constituído de três quarks, como por exemplo, um núcleon) ou um méson (constituído por um quark e por um antiquark, como, por exemplo, um píon). O núcleon possui três quarks, e cada um possui uma cor diferente para que o sistema seja um singleto de cor. Uma propriedade das cargas de cor é que duas cores diferentes juntas correspondem à anticor da terceira, portanto o núcleon corresponde a um grande dipolo de cor comparado com o charmonium. O píon é formado por um quark e um antiquark, ou cor e sua anticor correspondente, e também pode ser aproximado por um dipolo de cor. Se este dipolo for grande em relação ao tamanho do charmonium, ele pode ser ainda aproximado por um capacitor

como mostra a Figura 1.1:

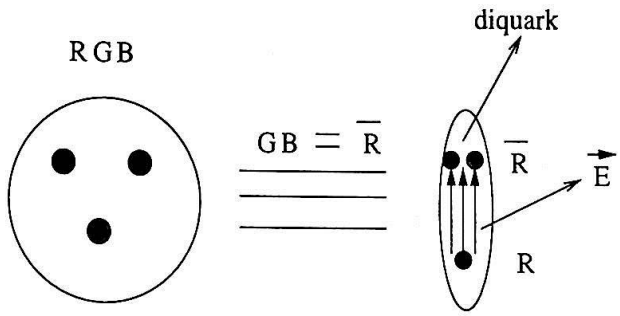

Figura 1.1: O núcleon como um capacitor.

O tamanho do méson (charmonium) pode ser estimado calculando-se o raio quadrático médio:

$$\langle r^2 \rangle = \int d^3r \Psi^* r^2 \Psi \tag{1.1}$$

onde Ψ é a função de onda que representa o méson. No caso de mésons pesados, como o charmonium, esta função de onda Ψ é obtida resolvendo-se a equação de Schrödinger para o potencial de Cornell [21]. O tamanho do núcleon (por exemplo o próton) também pode ser estimado calculando-se o raio quadrático médio que, por sua vez, está relacionado com a densidade de matéria dada por:

$$\rho(r) = \int e^{iqr} F_p(q^2)\, dq \tag{1.2}$$

onde $F_p(q^2)$ é o fator de forma do próton, que é medido no espalhamento elétron-próton. Sabemos que $r_\Psi \cong 0.4fm$ e $r_N \cong 0.8fm$. Como conseqüência, o par $c - \overline{c}$ interagirá predominantemente com o campo gluônico e não com a fonte deste campo (quarks).

Além disso, iremos considerar que tal campo externo tem apenas componentes de baixo momento (gluons "soft"), sendo assim capaz de transferir uma pequena quantidade de energia, a qual no entanto, é suficiente para dissociar o estado ligado.

A energia transferida é da ordem da energia de ligação típica do estado ligado, ou

seja, $\varepsilon \simeq 0.6\,GeV$. Portanto, numa primeira aproximação

$$\varepsilon << M \tag{1.3}$$

onde M é a massa do estado ligado ($M \simeq 3\,GeV$). A energia de ligação também é pequena se comparada à energia de colisão do centro de massa,

$$\varepsilon << \sqrt{s}. \tag{1.4}$$

A aproximação (1.3) justifica o uso da teoria de perturbação da mecânica quântica e a aproximação (1.4) justifica o uso da aproximação eikonal, a qual, neste caso, implica que o capacitor segue uma trajetória retilínea e permanece inalterado durante a interação.

1.2 Hamiltoniana e Funções de Onda.

Nesta seção vamos definir a Hamiltoniana de interação, os campos cromoelétricos sentidos pelo quark e antiquark e construir os estados inicial e final.

A interação entre um dipolo de cor e um campo de cor externo é dada pela seguinte hamiltoniana:

$$H_{int} = g(T_1^a \vec{E}_1^a \vec{r}_1 + \overline{T}_2^b \vec{E}_2^b \vec{r}_2). \tag{1.5}$$

onde T^a são os geradores da representação fundamental do grupo SU(3) de cor e $\overline{T}^b$ são os geradores da representação conjugada do grupo SU(3) de cor, sendo

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2} \;;\; \overline{T}^b = -\frac{\lambda^{b\,*}}{2} \;\; e \;\; T^a_{lm} = \frac{\lambda^a_{lm}}{2} \;;\; \overline{T}^b_{lm} = -\frac{\lambda^b_{lm}{}^T}{2} = -\frac{\lambda^b_{ml}}{2} \tag{1.6}$$

onde λ^a e λ^b são as matrizes de Gell-Mann, com $a, b = 1, ..., 8$. Os índices 1 e 2 denotam o quark e antiquark respectivamente; $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são as coordenadas do quark e antiquark

no sistema de repouso do charmonium; $\vec{E}_1^a$ e $\vec{E}_2^b$ são os campos cromoelétricos gerados pelo hádron (capacitor) em movimento e "sentidos", respectivamente, pelo quark e antiquark no estado ligado. Estes campos sofrem uma transformação de Lorentz ao serem escritos no referencial de repouso do charmonium. Assim, aparece em nossos cálculos o fator gama, o qual é a fonte da dependência com a energia ($\sqrt{s}$) em nossos resultados e g é a constante de acoplamento da QCD.

A expressão (1.5) está escrita no referencial em que o capacitor está em repouso. Ao colocá-lo em movimento com velocidade v na direção z, como mostrado na Figura 1.2, o campo elétrico percebido no sistema em que o charmonium está em repouso é dado por [22]:

$$E_z^{'} = E_z \quad ; \quad E_x^{'} = \gamma(E_x - \beta B_y) \quad e \quad E_y^{'} = \gamma(E_y + \beta B_x) \tag{1.7}$$

onde $\beta = v/c$ e B_x e B_y são as componentes do campo cromomagnético.

Sabendo que o campo magnético não transfere energia (não realiza trabalho), e como estamos interessados apenas na transferência de energia, pois o hádron deve ceder parte de sua energia para dissociar o charmonium, vamos desprezar a componente magnética.

Daqui em diante vamos omitir a linha (') da expressão (1.7) e vamos escolher o campo orientado ao longo do eixo x.

Então o campo externo sentido pelo quark (1) e antiquark (2) podem ser representados por :

$$\begin{aligned}
\vec{E}^a(r_1,t) &= \gamma\vec{E}_0^a \, exp\left[-\frac{(X-x_1)^2}{d^2} - \frac{(Y-y_1)^2}{d^2}\right] exp\left[-\gamma^2\frac{(vt-z_1)^2}{d^2}\right] \\
\vec{E}^b(r_2,t) &= \gamma\vec{E}_0^b \, exp\left[-\frac{(X-x_2)^2}{d^2} - \frac{(Y-y_2)^2}{d^2}\right] exp\left[-\gamma^2\frac{(vt-z_2)^2}{d^2}\right]
\end{aligned} \tag{1.8}$$

onde d representa o tamanho do hádron. A relação entre d e o raio do hádron é: $\sqrt{\langle r^2\rangle_h} \cong 0.86\, d\, fm$ (veja detalhes no Apêndice); X, Y e Z são as coordenadas do

centro do hádron; a e b são os índices de cor. Assumiremos $Z = vt$, pois o hádron move-se em linha reta com velocidade $\vec{v}$ ao longo do eixo z. Desprezamos o desvio na trajetória do hádron porque estamos estudando reações no regime não perturbativo, ou seja, de baixo momento transferido, no qual vale a aproximação eikonal e E_0 é a magnitude do campo cromoelétrico no interior do hádron. Além disso, X e Y estão relacionados com o parâmetro de impacto b (veja Figura 1.2) por:

$$\vec{b} = X\vec{i} + Y\vec{j}\,;\; b^2 = X^2 + Y^2. \tag{1.9}$$

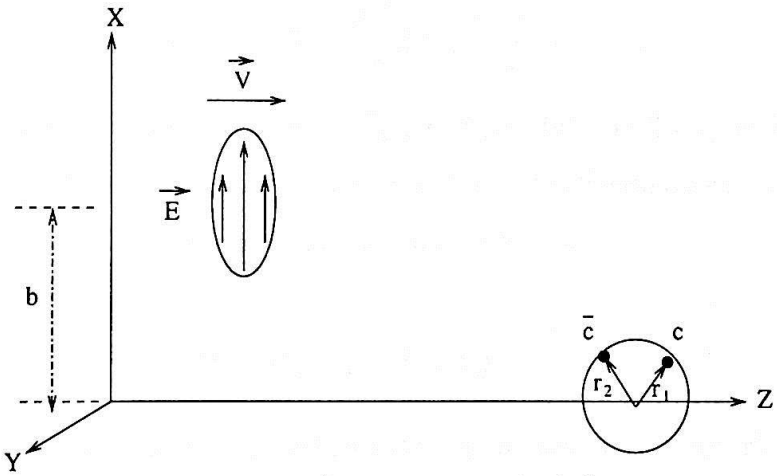

Figura 1.2: A colisão de um hádron projétil, com a contração de Lorentz, com o par $c - \bar{c}$.

Podemos reescrever H_{int} (1.5) como uma parte referente às coordenadas do centro de massa (C.M.) e outra às coordenadas relativas, ou seja,

$$H_{int} = H_{CM} + H_{rel}. \tag{1.10}$$

Por cálculos algébricos, obtemos para H_{int}

$$H_{int} = g(T_1^a \vec{E}_1^a + \overline{T}_2^b \vec{E}_2^b)(\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}) + g(T_1^a \vec{E}_1^a - \overline{T}_2^b \vec{E}_2^b)(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{2}). \tag{1.11}$$

O primeiro termo da expressão acima, H_{CM}, será negligenciado no contexto de nosso trabalho, pois ele pode ser removido através de uma escolha de referencial. Por

exemplo, no sistema do CM do par quark-antiquark : $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$ e $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = 0$. Deste modo

$$H_{int} = g(T_1^a \vec{E}_1^a - \overline{T}_2^b \vec{E}_2^b)(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{2}). \tag{1.12}$$

Como o campo cromoelétrico está orientado na direção x, temos para (1.12):

$$H_{int} = g(T_1^a E_{1x}^a - \overline{T}_2^b E_{2x}^b)(\frac{x_1 - x_2}{2}). \tag{1.13}$$

Usando a definição de T^a (1.6) e omitindo o índice x dos campos cromoelétricos, obtemos:

$$H_{int} = g(\frac{\lambda^a}{2} E_1^a + \frac{\lambda^{b^T}}{2} E_2^b)(\frac{x_1 - x_2}{2}). \tag{1.14}$$

Esta é a Hamiltoniana usada também em [17] (equação 20) e [23] (equação 6).

Inicialmente o par quark-antiquark está numa região localizada do espaço. O estado inicial do sistema contém uma parte espacial e outra de cor.

$$|\Psi_i\rangle = f(r_1, r_2)|c_n d_n\rangle \tag{1.15}$$

onde c_n e d_n , com $n = 1, 2, 3$, são os vetores de cor iniciais para o quark e antiquark respectivamente, representando um estado singleto de cor. Definimos os vetores de cor (c) e anticor (d) por [24]:

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, d_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Desta definição segue que :

$$c_i^\dagger c_j = \delta_{ij}$$
$$d_i^\dagger d_j = \delta_{ij}. \tag{1.18}$$

A parte espacial é escolhida como sendo

$$f(r_1, r_2) = N_i\, exp[-\frac{\vec{r_1}^{\,2}}{a^2}]\, exp[-\frac{\vec{r_2}^{\,2}}{a^2}]\, exp(-i\varepsilon_i t) \tag{1.19}$$

onde a é a separação típica entre o quark e o antiquark. A relação entre a e o raio do charmonium é dada por $\bar{r} = \sqrt{\langle r^2 \rangle_c} \cong 0.86\, a\, fm$ (veja detalhes no Apêndice). $\vec{r_1}$ e $\vec{r_2}$ são as coordenadas do quark (1) e do antiquark (2); ε_i é a energia inicial do charmonium e N_i é a constante de normalização. Normalizando Ψ_i à unidade, através de $\int d^3x \langle \Psi_i | \Psi_i \rangle = 1$ obtemos:

$$N_i = \frac{2\sqrt{2}}{a^3\, \pi^{\frac{3}{2}}}.$$

O estado $|\Psi_i\rangle$ descreve o confinamento dos quarks (representado pela função gaussiana) e a liberdade assintótica entre os quarks (representada pelo produto das funções gaussianas, ou seja, um quark não interage com o outro dentro da "sacola", eles são independentes, justificando-se assim tal produto).

Sob a ação de um campo externo o estado inicial $|\Psi_i\rangle$ vai para um estado final $|\Psi_f\rangle$, dado por:

$$|\Psi_f\rangle = t(r_1, r_2)|c_j d_k\rangle \tag{1.20}$$

onde c_j e d_k, com $j, k = 1, 2, 3$, são os vetores de cor final para o quark e antiquark respectivamente, representando um estado octeto de cor se j $\neq$ k ou um singleto de cor se $j = k$. Um esboço desta interação é mostrado no diagrama de cores da Figura 1.3. A parte espacial do estado final é escolhida como

$$t(r_1, r_2) = N_f\; exp\,(i\vec{p}_1.\vec{r}_1)\; exp\,(i\vec{p}_2.\vec{r}_2)\; exp\,(-i\varepsilon_f t) \tag{1.21}$$

onde $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ são os momentos finais do quark e do antiquark, respectivamente; ε_f é a energia final do par $c - \bar{c}$ e N_f é a constante de normalização. Normalizando Ψ_f à unidade, em uma caixa de volume V obtemos:

$$N_f = \frac{1}{V}.$$

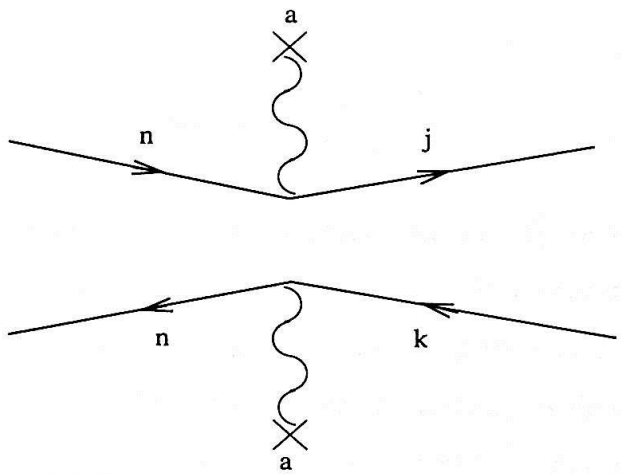

Figura 1.3: Diagrama de cores para a interação.

O estado $|\Psi_f\rangle$ representa um estado para duas partículas livres, pois após a interação os quarks movem-se livremente. Logo a seguir, eles ligar-se-ão a quarks leves para produzir estados finais como mésons. Este processo de hadronização altera os momentos $\vec{p_1}$ e $\vec{p_2}$, produzindo mésons mais "moles" (leves) do que os quarks originais, mas não altera a probabilidade do evento nem sua seção de choque, já que a hadronização acontece sempre com a probabilidade um. Por isso não iremos incluí-la no cálculo.

Nossos estados não incluem spin, pois a hamiltoniana de interação (1.14) não altera spins e este é assim um grau de liberdade irrelevante.

Com todos esses elementos e lembrando que a energia de interação é pequena [25], ou seja, a interação é fraca, podemos escrever a amplitude de transição de i para f como:

$$T_{fi} = \int dt \int d^3x \, \langle \Psi_f | H_{int} | \Psi_i \rangle. \tag{1.22}$$

Apesar de ter boas motivações físicas, a nossa escolha para os estados $|\Psi_i\rangle$ e $|\Psi_f\rangle$ tem inconsistências. Uma delas é que estes estados não são ortogonais, isto é, $\langle\Psi_f|\Psi_i\rangle \neq 0$, o que nos leva a $T_{fi} \neq 0$, mesmo para um H_{int} constante. Num contexto de física nuclear, este mesmo problema foi encontrado em [19]. Os autores da referência [18] tentaram corrigí-lo usando uma prescrição simples para a ortogonalização dos estados inicial e final, que consistia em substituir $|\Psi_f\rangle$ por $|\overline{\Psi}_f\rangle$ definido como

$$|\overline{\Psi}_f\rangle = |\Psi_f\rangle - \frac{|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|\Psi_f\rangle}{\langle\Psi_i|\Psi_i\rangle} . \tag{1.23}$$

Ao recalcular a seção de choque (anteriormente calculada em [19]) os resultados mostraram estruturas (nas seções de choque diferencial) de difícil interpretação. Por isso, num provável refinamento do presente cálculo ao invés de usar (1.23) pretendemos introduzir estados ortonormais do charmonium, usando as funções de onda já obtidas em modelos de potencial. Vamos substituir a transição para ondas planas por uma excitação que vai do estado fundamental até, por exemplo, o segundo estado excitado. Nesse estado o par $c - \overline{c}$ está praticamente desligado. Ao adotarmos este procedimento, teremos que abdicar do cálculo da distribuição de momento (longitudinal e transversal) do quark no estado final.

1.3 Cálculo da seção de choque

A seção de choque diferencial é dada por

$$d^6\sigma = 2\pi \int_0^\infty db\, b\, \overline{|T_{fi}|^2} \cdot \frac{V}{(2\pi^3)} d^3p_1 \cdot \frac{V}{(2\pi^3)} d^3p_2. \tag{1.24}$$

Para calcular a amplitude de transição, substituímos (1.14), (1.15) e (1.20) em

(1.22).

$$
\begin{aligned}
(T_{fi})_{najk} &= \int dt\ d^3r_1\, d^3r_2\, \Psi_f^\dagger\ H_{int}\, \Psi_i \\
&= \int dt\ d^3r_1\, d^3r_2\, t^*(r_1, r_2)\, \frac{g}{2}\, (\frac{x_1 - x_2}{2}) \\
&\times\ f(r_1, r_2)\, \langle d_k^\dagger c_j^\dagger | \lambda_1^a E_1^a + \lambda_2^a E_2^a | c_n d_n \rangle. \qquad (1.25)
\end{aligned}
$$

Lembrando que d atua na partícula 2 (antiquark) e c atua na partícula 1 (quark) temos:

$$
\begin{aligned}
(T_{fi})_{najk} &= \int dt\ d^3r_1 d^3r_2 t^*(r_1, r_2) \frac{g}{2} (\frac{x_1 - x_2}{2}) f(r_1, r_2) \langle d_k^\dagger | d_n \rangle \langle c_j^\dagger | \lambda_1^a E_1^a | c_n \rangle \\
&+ \int dt\ d^3r_1 d^3r_2 t^*(r_1, r_2) \frac{g}{2} (\frac{x_1 - x_2}{2}) \\
&\times\ f(r_1, r_2) \langle d_k^\dagger | \lambda_2^a E_2^a | d_n \rangle \langle c_j^\dagger | c_n \rangle \qquad (1.26)
\end{aligned}
$$

e usando (1.18) temos

$$
(T_{fi})_{najk} = \int dt\ d^3r_1 d^3r_2\, t^*(r_1, r_2)\, \frac{g}{2}\, (\frac{x_1 - x_2}{2}) f(r_1, r_2)\ [\lambda_{jk}^a\ E_1^a + \lambda_{kj}^a\ E_2^a]. \qquad (1.27)
$$

Com o objetivo de obter uma expressão analítica para a amplitude (e para a seção de choque) vamos fazer a seguinte aproximação:

$$
x_1 - x_2 \simeq a \qquad (1.28)
$$

onde a é a separação típica entre quark e antiquark que foi introduzida em (1.19). Com esta aproximação e substituindo as formas explícitas dos campos E_1^a e E_2^a, e das

funções $f(r_1, r_2)$ e $t(r_1, r_2)$ (1.8, 1.19 e 1.21 respectivamente), encontramos

$$
\begin{aligned}
(T_{fi})_{najk} &= \frac{a}{2}\frac{g}{2} N_i N_f \int dt \int d^3r_1 \int d^3r_2\, exp\,(-i\vec{p}_1.\vec{r}_1)\; exp\,(-i\vec{p}_2.\vec{r}_2)\; exp\,(i\varepsilon_f t) \\
&\times \Big\{ \Big[\lambda^a_{jk}\; \gamma \vec{E}_0\; exp\Big(-\frac{(X-x_1)^2}{d^2} - \frac{(Y-y_1)^2}{d^2} \Big)\; exp\Big(-\gamma^2 \frac{[vt-z_1]^2}{d^2} \Big) \\
&+ \lambda^a_{kj}\; \gamma \vec{E}_0\; exp\Big(-\frac{(X-x_2)^2}{d^2} - \frac{(Y-y_2)^2}{d^2} \Big)\; exp\Big(-\gamma^2 \frac{[vt-z_2]^2}{d^2} \Big) \Big] \Big\} \\
&\times exp\,(-\frac{\vec{r}_1{}^2}{a^2})\, exp\,(-\frac{\vec{r}_2{}^2}{a^2})\, exp(-i\varepsilon_i t). \qquad (1.29)
\end{aligned}
$$

Podemos dividir T_{fi} em duas partes, uma referente à interação com a partícula 1 (quark) e outra com a partícula 2 (antiquark) : $T^{(1)}_{fi}$ e $T^{(2)}_{fi}$. Vamos calcular explicitamente $T^{(1)}_{fi}$:

$$
\begin{aligned}
(T^{(1)}_{fi})_{najk} &= \gamma \vec{E}_0 N_i N_f\; \frac{a}{2}\frac{g}{2} \lambda^a_{jk} \int dt \int d^3r_1 \int d^3r_2\, exp\,(-i\vec{p}_1.\vec{r}_1)\; exp\,(-i\vec{p}_2.\vec{r}_2) \\
&\times exp\,(i\varepsilon_f t)\, exp\Big(-\frac{(X-x_1)^2}{d^2} - \frac{(Y-y_1)^2}{d^2} \Big)\; exp\Big(-\gamma^2 \frac{[vt-z_1]^2}{d^2} \Big) \\
&\times exp\,(-\frac{\vec{r}_1{}^2}{a^2})\, exp\,(-\frac{\vec{r}_2{}^2}{a^2})\, exp(-i\varepsilon_i t).
\end{aligned}
$$

Usando coordenadas cartesianas, introduzindo a variável $\omega = \varepsilon_f - \varepsilon_i$ e fazendo as integrações em t, $\vec{r_1}$ e $\vec{r_2}$ encontramos:

$$
\begin{aligned}
(T^{(1)}_{fi})_{najk} &= \gamma \vec{E}_0 N_i N_f\; \frac{a}{2}\frac{g}{2} \lambda^a_{jk}\, \pi^{\frac{7}{2}}\, \frac{a^6 d^3}{\gamma v (a^2+d^2)}\, exp\Big\{ -\frac{1}{4}\frac{(d^2+a^2\gamma^2)}{\gamma^2 v^2}\, w^2 \Big\} \\
&\times exp\Big\{ -\frac{X^2+Y^2}{a^2+d^2} \Big\}\, exp\Big\{ -\frac{a^2}{4} p_{1z}^2 - \frac{a^2 d^2}{4(a^2+d^2)} (p_{1x}^2 + p_{1y}^2) \Big\} \\
&\times exp\Big\{ -i\frac{a^2}{a^2+d^2} (X p_{1x} + Y p_{1y}) \Big\}\, exp\Big\{ -\frac{a^2}{4} (p_{2x}^2 + p_{2y}^2 + p_{2z}^2) \Big\} \\
&\times exp\Big\{ \frac{a^2 w}{2 v} p_{1z} \Big\}. \qquad (1.30)
\end{aligned}
$$

$T^{(2)}_{fi}$ pode ser obtida analogamente através da substituição $p_2 \rightleftharpoons p_1$. Somando $T^{(1)}_{fi}$ e

$T_{fi}^{(2)}$ temos para $(T_{fi})_{najk}$:

$$
\begin{aligned}
(T_{fi})_{najk} &= \gamma \vec{E}_0 N_i N_f \, \frac{a}{2}\frac{g}{2}\pi^{\frac{7}{2}} \frac{a^6 d^3}{\gamma v(a^2+d^2)} \; exp\Big\{ -\frac{1}{4}\frac{(d^2+a^2\gamma^2)}{\gamma^2 v^2} \, w^2 \Big\} \\
&\times \; exp\Big\{ -\frac{X^2+Y^2}{a^2+d^2} \Big\} \Big\{ \lambda^a_{jk} \; exp\Big[-\frac{a^2 d^2}{4(a^2+d^2)}(p_{1x}^2+p_{1y}^2) - \frac{a^2}{4} p_{1z}^2 \Big] \\
&\times \; exp\Big[-\frac{a^2}{4}(p_{2x}^2+p_{2y}^2+p_{2z}^2) \Big] \, exp\Big[\frac{a^2 w}{2v} p_{1z} \Big] \\
&\times \; exp\Big[-i\frac{a^2}{a^2+d^2}(Xp_{1x}+Yp_{1y}) \Big] \\
&+ \; \lambda^a_{kj} \; exp\Big[-\frac{a^2 d^2}{4(a^2+d^2)}(p_{2x}^2+p_{2y}^2) - \frac{a^2}{4} p_{2z}^2 \Big] \; exp\Big[-\frac{a^2}{4}(p_{1x}^2+p_{1y}^2+p_{1z}^2) \Big] \\
&\times \; exp\Big[\frac{a^2 w}{2v} p_{2z} \Big] exp - \Big[i\frac{a^2}{a^2+d^2}(Xp_{2x}+Yp_{2y}) \Big] \Big\}.
\end{aligned}
$$

Nos cálculos seguintes usaremos as variáveis: $p_{1x}^2 + p_{1y}^2 = p_{1T}^2$, $p_{2x}^2 + p_{2y}^2 = p_{2T}^2$, e $b^2 = X^2 + Y^2$.

Ao calcularmos o quadrado da amplitude T_{fi}, $|T_{fi}|^2 = T_{fi}^* T_{fi}$, vamos encontrar produtos de matrizes de Gell-Mann. Ao efetuá-los explicitamente, faremos uso da hermiticidade destas matrizes, isto é, $\lambda^* = \lambda^T$, da qual decorrem as seguintes relações:

$$
\begin{aligned}
\lambda^*_{jk}\lambda_{jk} &= \lambda_{kj}\lambda_{jk} \\
\lambda^*_{kj}\lambda_{jk} &= \lambda_{jk}\lambda_{jk} \\
\lambda_{jk}\lambda_{jk} &= \lambda_{kj}\lambda_{kj}.
\end{aligned} \tag{1.31}
$$

Deste modo, obtemos:

$$
\begin{aligned}
|T_{fi}|^2_{najk} &= \Big(\gamma \vec{E}_0 N_i N_f \, \frac{a}{2}\frac{g}{2}\, \pi^{\frac{7}{2}} \, \frac{a^6 d^3}{\gamma v (a^2+d^2)}\Big)^2 \; exp\Big(-\frac{2b^2}{a^2+d^2}\Big) \\
&\times \; exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{(d^2+a^2\gamma^2)}{\gamma^2 v^2}\, w^2\Big) \\
&\times \; \Big\{\lambda^a_{kj}\lambda^a_{jk} \; exp\Big[-\frac{a^2}{2}\, p^2_{1z} - \frac{a^2\, d^2}{2(a^2+d^2)}\, \vec{p}_{1T}{}^{\,2} - \frac{a^2}{2}\, \vec{p}_2^{\,2} + \frac{a^2\, w}{v}\, p_{1z}\Big] \\
&+ \; \lambda^a_{kj}\lambda^a_{kj} \; exp\Big[-\frac{a^2}{4}\,(p^2_{1z}+p^2_{2z}) - \frac{a^2\, d^2}{4(a^2+d^2)}\,(\vec{p}_{1T}{}^{\,2}+\vec{p}_{2T}{}^{\,2}) \\
&- \; \frac{a^2}{4}\,(\vec{p}_2{}^{\,2}+\vec{p}_1{}^{\,2}) + \frac{a^2\, w}{2v}\,(p_{1z}+p_{2z})\Big] \\
&\times \; 2\; cos\Big[\frac{a^2}{a^2+d^2}\Big(X(p_{1x}-p_{2x})+Y(p_{1y}-p_{2y})\Big)\Big] \\
&+ \; \lambda^a_{jk}\lambda^a_{kj} \; exp\Big[-\frac{a^2}{2}\, p^2_{2z} - \frac{a^2\, d^2}{2(a^2+d^2)}\, \vec{p}_{2T}{}^{\,2} - \frac{a^2}{2}\, \vec{p}_1^{\,2} + \frac{a^2\, w}{v}\, p_{2z}\Big]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{1.32}
$$

Como a cor não é observada devemos calcular o quadrado da amplitude fazendo a média sobre todos os possíveis estados iniciais de cor e somando sobre os estados finais, em analogia ao que é feito com estados de spin no espalhamento não polarizado. Assim:

$$
|T_{fi}|^2 \rightarrow \overline{|T_{fi}|^2} \equiv \frac{1}{3}\sum_n \frac{1}{8}\sum_a \sum_j \sum_k |T_{fi}|^2.
$$

Deste modo:

$$
\begin{aligned}
\overline{|T_{fi}|^2} &= \Big(\gamma \vec{E}_0 N_i N_f \, \frac{a}{2}\frac{g}{2}\pi^{\frac{7}{2}} \, \frac{a^6 d^3}{\gamma v (a^2+d^2)}\Big)^2 \, exp\Big[-\frac{2b^2}{a^2+d^2}\Big] \\
&\times \; exp\Big[-\frac{1}{2}\frac{(d^2+a^2\gamma^2)}{\gamma^2 v^2}\, w^2\Big] \, \frac{1}{3}\sum_n \frac{1}{8}\sum_a\sum_j\sum_k \Big\{\lambda^a_{kj}\,\lambda^a_{jk} \\
&\times \; exp\Big[-\frac{a^2}{2}\,p_{1z}^2 - \frac{a^2\,d^2}{2(a^2+d^2)}\,(\vec{p}_{1T})^2 - \frac{a^2}{2}(\vec{p}_2)^2 + \frac{a^2\,w}{v}\,p_{1z}\Big] \\
&+ \; \lambda^a_{kj}\lambda^a_{kj} \; exp\Big[-\frac{a^2}{4}\,(p_{1z}^2+p_{2z}^2) - \frac{a^2\,d^2}{4(a^2+d^2)}\,((\vec{p}_{1T})^2+(\vec{p}_{2T})^2) \\
&- \; \frac{a^2}{4}\,((\vec{p}_2)^2+(\vec{p}_1)^2) + \frac{a^2\,w}{2v}\,(p_{1z}+p_{2z})\Big] \\
&\times \; 2\;cos\Big[\frac{a^2}{a^2+d^2}\Big(X(p_{1x}-p_{2x})+Y(p_{1y}-p_{2y})\Big)\Big] \\
&+ \; \lambda^a_{jk}\lambda^a_{kj} exp\Big[-\frac{a^2}{2}p_{2z}^2 - \frac{a^2 d^2}{2(a^2+d^2)}(\vec{p}_{2T})^2 - \frac{a^2}{2}(\vec{p}_1)^2 + \frac{a^2 w}{v}p_{2z}\Big]\Big\}. \quad (1.33)
\end{aligned}
$$

Mas, da álgebra do grupo $SU(3)$ de cor temos

$$\sum_a\sum_j\sum_k \lambda^a_{kj}\lambda^a_{jk} = Tr[\lambda^{\mathbf{a}}\lambda^{\mathbf{a}}] = 2\delta^{\mathbf{aa}} = 16.$$

Como pode ser visto, o argumento do cosseno pode ser reescrito como:

$$\frac{a^2}{a^2+d^2}\,(\vec{b}\cdot\Delta\vec{p_T}).$$

Para manter o cálculo analítico vamos nos restringir ao caso:

$$\vec{b}\cdot\Delta\vec{p_T} = |\vec{b}|\,|\Delta\vec{p_T}|\,cos\psi \approx 0.$$

Este caso ocorre quando $|\vec{b}| = 0$ (favorecido pela primeira gaussiana em (1.33)) ou quando $\Delta\vec{p_T} = 0$ (consistente com a aproximação não relativística para o estado final, segundo a qual $|\vec{p}_{T1}| \approx |\vec{p}_{T2}| << m$). Ao fazermos esta aproximação, estamos maximizando o termo de interferência (positivo) e estimando assim um limite superior para a seção de choque.

Com esta aproximação podemos calcular a integral no parâmetro de impacto b : $2\pi \int_0^\infty db\, b\, \overline{|T_{fi}|^2}$ e obter para (1.24):

$$
\begin{aligned}
d^6\sigma &= \frac{1}{3}\frac{1}{8}\frac{\pi}{2}\,(a^2+d^2)\,\left(\gamma \vec{E}_0 N_i N_f\,\frac{a}{2}\frac{g}{2}\,\pi^{\frac{7}{2}}\,\frac{a^6 d^3}{\gamma v(a^2+d^2)}\right)^2 \\
&\times\; exp\Big[-\frac{2b^2}{a^2+d^2}\Big]\; exp\Big[-\frac{1}{2}\,\frac{(d^2+a^2\gamma^2)}{\gamma^2 v^2}\,w^2\Big] \\
&\times\; \Big\{16\, exp\Big[-\frac{a^2}{2}\,p_{1z}^2 - \frac{a^2\,d^2}{2(a^2+d^2)}(\vec{p}_{1T})^2 - \frac{a^2}{2}\,(\vec{p}_2)^2 + \frac{a^2\,w}{v}\,p_{1z}\Big] \\
&+\; 16\, exp\Big[-\frac{a^2}{2}\,p_{2z}^2 - \frac{a^2\,d^2}{2(a^2+d^2)}\,(\vec{p}_{2T})^2 - \frac{a^2}{2}\,(\vec{p}_1)^2 + \frac{a^2\,w}{v}\,p_{2z}\Big] \\
&+\; 8\; exp\Big[-\frac{a^2}{4}\,(p_{1z}^2+p_{2z}^2) - \frac{a^2\,d^2}{4(a^2+d^2)}\,((\vec{p}_{1T})^2+(\vec{p}_{2T})^2) \\
&-\; \frac{a^2}{4}\,((\vec{p}_2)^2+(\vec{p}_1)^2) + \frac{a^2\,w}{2v}\,(p_{1z}+p_{2z})\Big]\Big\} \\
&\times\; \frac{V}{(2\pi^3)}d^3p_1\cdot\frac{V}{(2\pi^3)}d^3p_2
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

Vamos reescrever a variável w como:

$$w = \varepsilon_f - \varepsilon_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - M \tag{1.35}$$

onde ε_1 e ε_2 são as energias relativísticas dos quarks 1 e 2 respectivamente, dadas por

$$\varepsilon_1^2 = p_1^2 + m^2$$

$$\varepsilon_2^2 = p_2^2 + m^2$$

e M é a massa do estado inicial do charmonium.

A aproximação (1.3) implica que a energia transferida ao charmonium é pequena e o estado final do par quark-antiquark é não relativístico, ou seja, $\frac{p}{m} << 1$, e a expressão (1.35) torna-se:

$$\omega \simeq \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + m + m - M = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \Delta m$$

onde $\Delta m = m + m - M$. No nosso cálculo Δm coincide com a energia de ligação ε.

Esta última aproximação é necessária para obtermos um resultado puramente analítico para a seção de choque.

A seção de choque total é obtida integrando a seção de choque diferencial diretamente. Integrando sobre os momentos e substituindo os valores das constantes N_i e N_f, obtemos finalmente:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{\pi^2}{768}\,\frac{a^8 d^6}{v^2(a^2+d^2)}\,\langle gE_0\rangle^2\, exp\Big[-\frac{1}{2}\frac{(d^2+a^2\gamma^2)}{\gamma^2 v^2}\Delta m^2\Big] \\
&\times \Bigg\{\frac{1}{\left(\frac{(d^2+a^2\gamma^2)}{\gamma^2v^2}\frac{\Delta m}{2m}+\frac{a^2}{2}\right)^2}\,\frac{4}{\frac{(d^2+a^2\gamma^2)}{\gamma^2v^2}\frac{\Delta m}{2m}+\frac{a^2d^2}{2(a^2+d^2)}}\,exp\Bigg[\frac{(\frac{a^2\Delta m}{v})^2}{4\left(\frac{(d^2+a^2\gamma^2)}{\gamma^2v^2}\frac{\Delta m}{2m}+\frac{a^2}{2}\right)}\Bigg] \\
&+ \frac{1}{\frac{(d^2+a^2\gamma^2)}{\gamma^2v^2}\frac{\Delta m}{2m}+\frac{a^2}{2}}\,\frac{1}{\left(\frac{(d^2+a^2\gamma^2)}{\gamma^2v^2}\frac{\Delta m}{2m}+\frac{a^2d^2}{4(a^2+d^2)}+\frac{a^2}{4}\right)^2} \\
&\times\; exp\Bigg[\frac{(\frac{a^2\Delta m}{2v})^2}{2\left(\frac{(d^2+a^2\gamma^2)}{\gamma^2v^2}\frac{\Delta m}{2m}+\frac{a^2}{2}\right)}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{1.36}$$

onde γ está diretamente relacionado com a energia do centro de massa, $\sqrt{s}$, por

$$\gamma = \frac{s - M^2 - m_h^2}{2Mm_h} \tag{1.37}$$

sendo M a massa do charmonium e m_h a massa do hádron.

Vemos que nosso resultado para a seção de choque total, depende explicitamente das massas do alvo M e do projétil m_h, da energia da colisão $\sqrt{s}$, da massa do quark c, da energia de ligação Δm, da extensão espacial do charmonium a e do hádron d e do valor médio do campo cromoelétrico no interior do hádron multiplicado pela constante de acoplamento $\langle gE\rangle$. É interessante notar que a seção de choque é proporcional ao quadrado do campo cromoelétrico e que cresce com a energia da reação e diminui com o aumento da energia de ligação, Δm.

Finalmente, considerando que $a^2 << d^2$, podemos reescrever (1.36) como:

$$\sigma = \frac{\pi^2}{768}\frac{a^8 d^4}{v^2}\langle gE_0\rangle^2 exp\Big(-\frac{(d^2+a^2\gamma^2)\Delta m^2}{2\gamma^2 v^2}\Big)\frac{1}{F^3}$$
$$\times \left\{4\,exp\Big(\frac{(\frac{a^2\Delta m}{v})^2}{4\,F}\Big) + exp\Big(\frac{(\frac{a^2\Delta m}{2v})^2}{2\,F}\Big)\right\} \tag{1.38}$$

onde

$$F = \frac{(d^2+a^2\gamma^2)}{\gamma^2 v^2}\frac{\Delta m}{2m} + \frac{a^2}{2} \tag{1.39}$$

No limite de altíssimas energias, ou seja, quando $\gamma \to \infty$, a seção de choque torna-se constante, isto é, há uma saturação em seu valor. Quando $\Delta m \to 0$, a seção de choque cresce com o fator $\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}$. Tomando o limite para $\Delta m \to \infty$, $\sigma \to 0$. Como é esperado, quanto maior a energia de ligação do estado ligado, mais difícil dissociá-lo.

Podemos também observar em (1.38) e (1.39) que quando a massa do quark aumenta, F diminui e a seção de choque aumenta.

1.4 Resultados numéricos

Nesta seção apresentamos os resultados alcançados com o modelo dipolo-capacitor para a interação hádron-charmonium e também fazemos comparações com os resultados obtidos por outros modelos encontrados na literatura.

Como ponto de partida vamos calcular (1.36) usando os valores mais prováveis e/ou relevantes para os parâmetros, obtendo assim uma ordem de grandeza para a seção de choque. Se o projétil (hádron) for um píon temos para a massa do hádron: $m_h = 0.14\,GeV$, massa do charmonium: $M = 3\,GeV$, tamanho típico do charmonium: $a = 0.2\,fm$, tamanho típico do hádron: $d = 0.6\,fm$, energia de ligação do charmonium: $\Delta m = 0.6\,GeV$ e $\gamma = 20$ ($\sqrt{s} \cong 4.5\,GeV$). Como tem sido discutido na literatura, este valor relativamente baixo de $\sqrt{s}$ é muito relevante do ponto de vista experimental,

porque numa colisão núcleo-núcleo, o píon e o J/Ψ precisam primeiro ser produzidos e apenas num estágio mais adiantado da colisão, já vivendo dentro de um "fireball" de partículas criadas, é que irão colidir um com o outro. Nesse "fireball" as energias de colisão são bem menores do que a energia da colisão inicial ($\sqrt{s} \cong 100\,GeV$ por par de núcleons colidentes). Finalmente vamos escolher $\langle gE \rangle = 1\,GeV/fm$. Este valor foi utilizado na referência [17] e continua compatível com os cálculos de QCD na rede feitos recentemente. Com estes valores encontramos $\sigma = 0.24\,mb$. Se o hádron for um próton, com massa $m_h = 0.93\,GeV$, tamanho típico $d = 0.8\,fm$ e mantivermos os mesmos parâmetros para o charmonium, obtemos uma seção de choque total de $\sigma = 0.75\,mb$.

A seguir, vamos estudar o comportamento destas seções de choque com a energia do centro de massa $\sqrt{s}$ e comparar com outros modelos.

A Figura 1.4, mostra o comportamento da seção de choque $\pi - J/\Psi$ em função de $\sqrt{s}$, para os modelos: troca de méson (linha tracejada) [9], troca de quarks (linha ponto-traço) [8] e QCD à curtas distâncias (linha sólida) [5]. Quando comparamos com nosso modelo, vemos que nosso resultado tem um crescimento com $\sqrt{s}$ semelhante ao da abordagem de QCD à curtas distâncias na região de $\sqrt{s}$ de 4 a 5 GeV. Notamos que no caso da seção de choque próton-charmonium, para um tamanho típico do charmonium igual a $0.25\,fm$, conseguimos reproduzir o resultado obtido na abordagem de QCD à curtas distâncias, o que não ocorre para o píon.

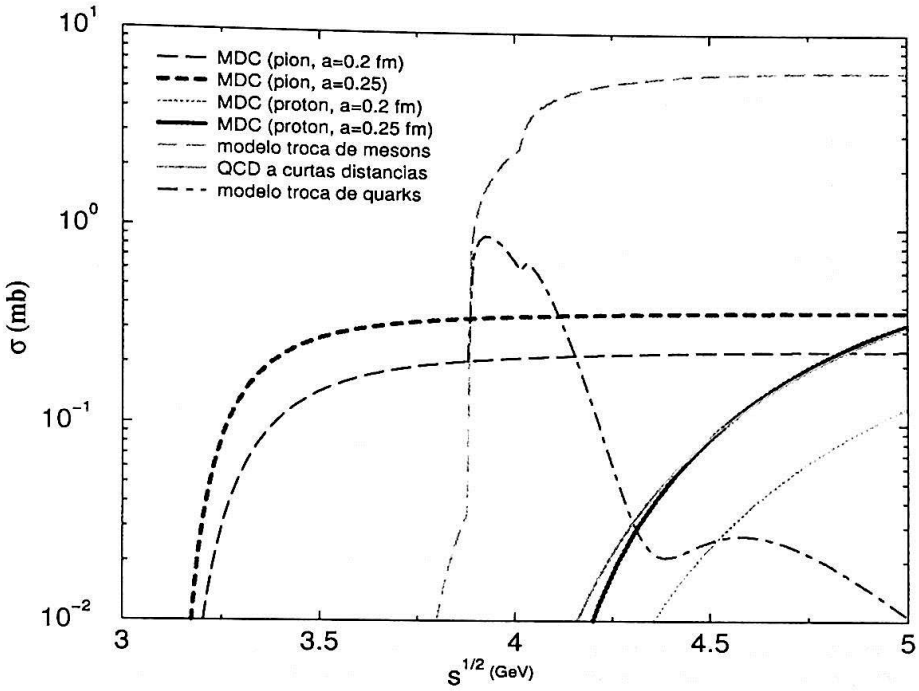

***Figura 1.4:** Seção de choque hádron-charmonium em função de $\sqrt{s}$.*

A Figura 1.5 mostra o comportamento da seção de choque total com a energia do centro de massa, com os mesmoss parâmetros e um intervalo maior em $\sqrt{s}$. Consideramos a massa do píon igual a 0.14 GeV e a massa do próton igual a 0.93 GeV. Vemos que para energias acima de 8 GeV ocorre uma saturação na seção de choque total. Isto era esperado, como vimos na expressão analítica (1.36). Vemos também que esta saturação é mais rápida no caso do píon.

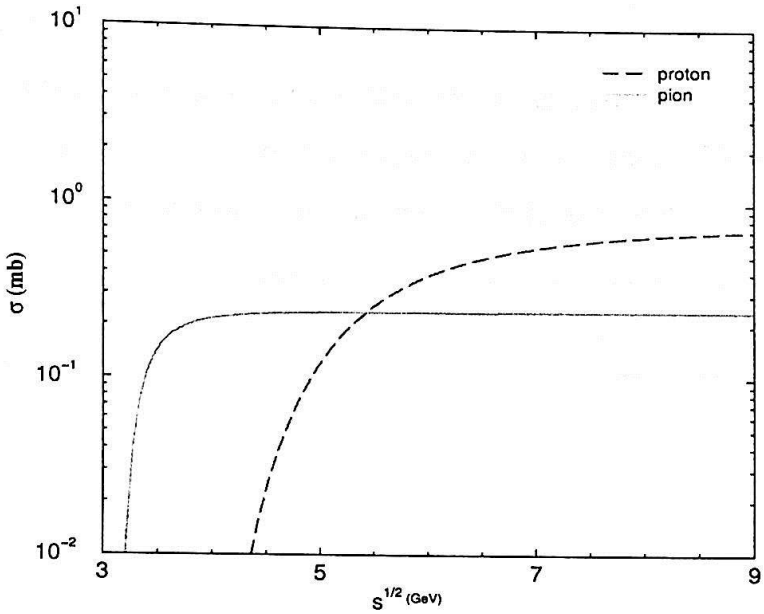

Figura 1.5: Comportamento da seção de choque com $\sqrt{s}$, tendo como parâmetros fixos a energia de ligação (0.6 GeV), o tamanho do charmonium (0.2 fm) e a massa do quark c (1.5 GeV). A curva sólida representa o píon (0.6 fm) e a curva tracejada representa o próton (0.8 fm).

É interessante observar que ao contrário do que ocorre em espalhamentos de hádrons leves a altas energias, quando o alvo é o charmonium não se verifica a relação entre seções de choque dada pelo modelo aditivo de quarks (MAQ). Este modelo prevê, por exemplo, que $\sigma_{\pi p} = \frac{2}{3}\sigma_{pp}$ e esta relação é de fato verificada experimentalmente. O uso desta regra no caso dos espalhamentos $\pi - J/\Psi$ e $p - J/\Psi$ nos levaria a imaginar que $\sigma_{\pi-J/\Psi} = \frac{2}{3}\sigma_{p-J/\Psi}$. No entanto, como mostra a Figura 1.5, a relação entre estas seções de choque é variável com a energia e no limite de energias muito altas temos até $\sigma_{p-J/\Psi} \cong 3\,\sigma_{\pi-J/\Psi}$, muito diferente da previsão do MAQ de $\sigma_{p-J/\Psi} = \frac{3}{2}\sigma_{\pi-J/\Psi}$.

Na Figura 1.6 temos a seção de choque como uma função da energia de ligação para o próton (curva tacejada) e para o píon (curva sólida). Quanto maior a energia de ligação, menor a seção de choque total, como era esperado. Vemos que o valor máximo da seção de choque ocorre para a energia de ligação nula.

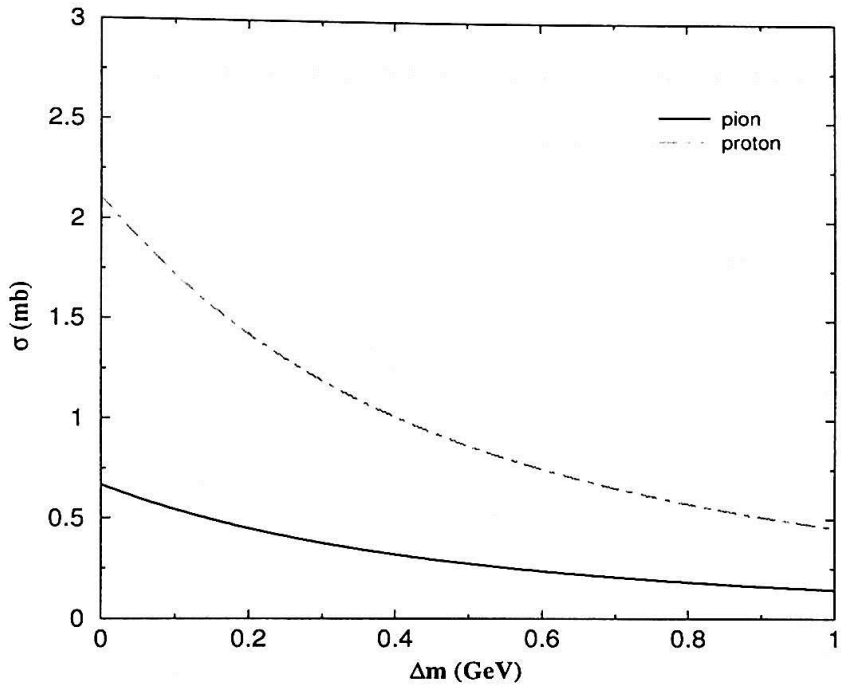

Figura 1.6: Comportamento da seção de choque com a energia de ligação Δm, tendo como parâmetros fixos o tamanho do charmonium (0.2 fm), do hádron (próton: 0.8 fm e píon: 0.6 fm), a massa do quark c (1.5 GeV) e o fator de Lorentz γ (20).

A Figura 1.7 dá a função de distribuição do momento transversal p_t, de um dos quarks. A curva sólida representa o próton e a curva tracejada representa o píon. Para a obtenção da curva do próton, fixamos o tamanho do charmonium (0.2 fm), do hádron (0.8 fm), a massa do quark c (1.5 GeV) e o fator de Lorentz γ (20); e variamos o momento transversal de um dos quarks. E para a obtenção da curva do píon, mantivemos os mesmos parâmetros e usamos o tamanho para o píon de 0.6 fm.

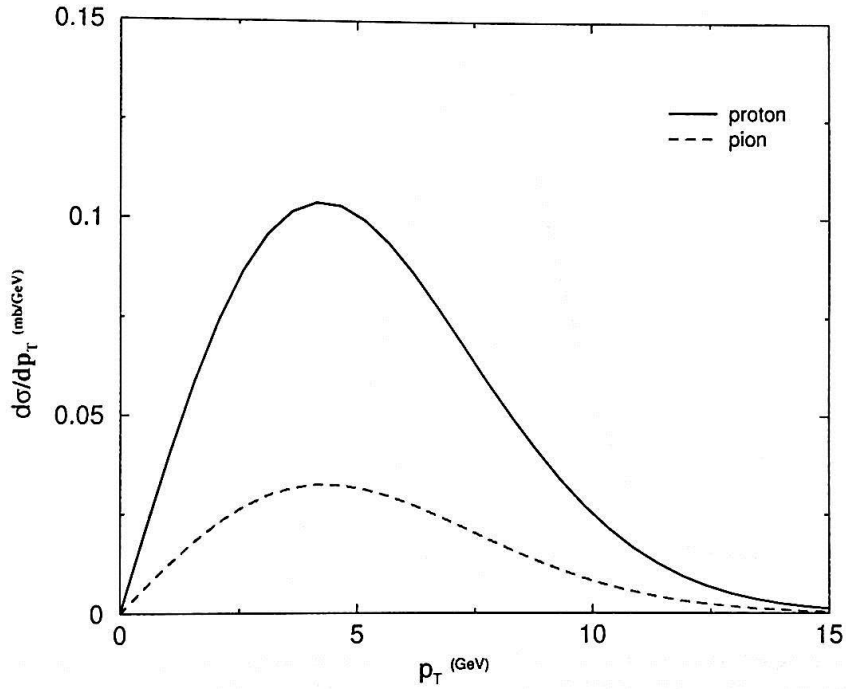

***Figura 1.7:** Comportamento da seção de choque diferencial com o momento transversal p_t, tendo como parâmetros fixos: o tamanho do charmonium (0.2 fm), do próton (0.8 fm , curva sólida), do píon (0.6 fm, curva tracejada), a massa do quark c (1.5 GeV) e o fator de Lorentz γ (20).*

A Figura 1.8 dá a função de distribuição do momento longitudinal p_z. A curva sólida representa o próton e a curva tracejada representa o píon. Estas curvas foram construídas fixando o tamanho do charmonium (0.2 fm), do próton (0.8 fm), do píon (0.6 fm), a massa do quark c (1.5 GeV) e o fator de Lorentz γ (20); e variando o momento longitudinal de um dos quarks.

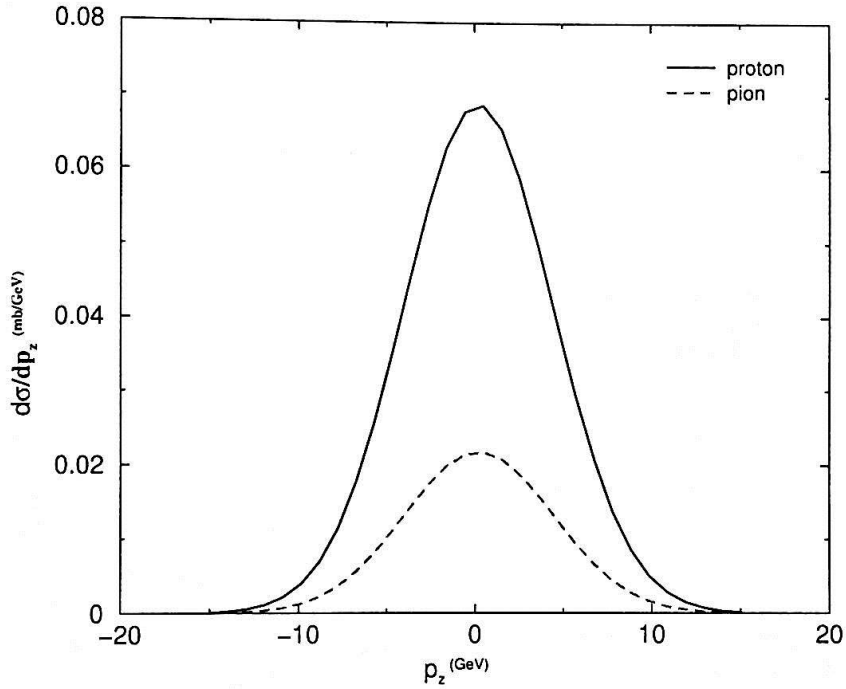

***Figura 1.8:** Comportamento da seção de choque diferencial com o momento longitudinal p_z, tendo como parâmetros fixos: o tamanho do charmonium (0.2 fm), do próton (0.8 fm), do píon (0.6 fm), a massa do quark c (1.5 GeV) e o fator de Lorentz γ (20).*

A Figura 1.9 mostra o comportamento da seção de choque próton-charmonium com a energia do centro de massa para vários valores de a (tamanho típico do charmonium). A curva sólida corresponde a $a = 0.2$ fm, a curva tracejada corresponde a $a = 0.3$ fm, a curva pontilhada corresponde a $a = 0.4$ fm. Para obtermos esta curva, fixamos o tamanho do hádron, próton (0.8 fm), a massa do quark c (1.5 GeV) e a energia de ligação (0.6 GeV); e variamos a energia $\sqrt{s}$.

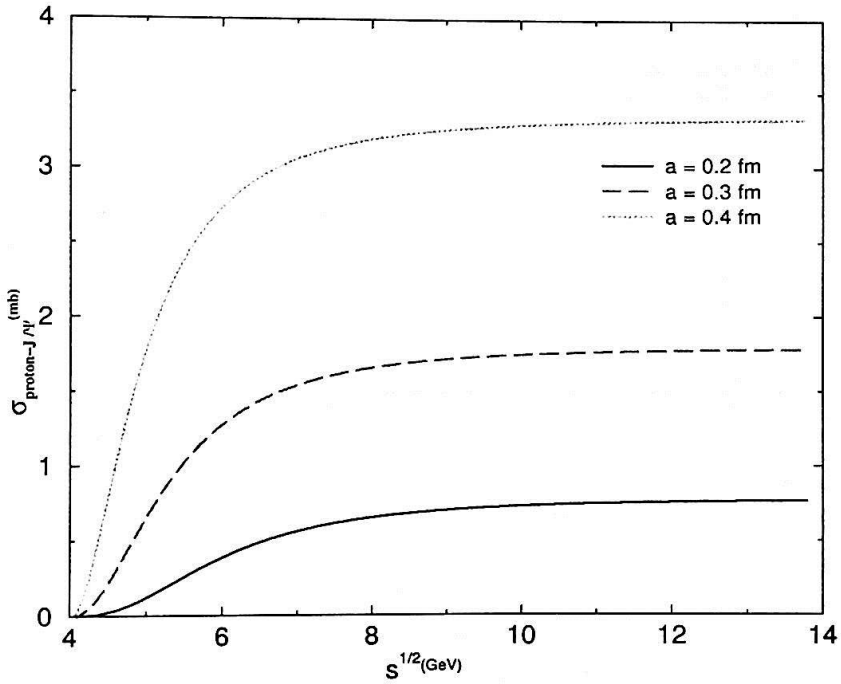

Figura 1.9: Comportamento da seção de choque próton-charmonium com a energia para $a = 0.2$, 0.3 e 0.4 fm. O tamanho do próton é 0.8 fm e a massa do quark c igual a 1.5 GeV.

A Figura 1.10 mostra o comportamento da seção de choque píon-charmonium com a energia do centro de massa para vários valores de a (tamanho típico do charmonium). A curva sólida corresponde a $a = 0.2$ fm, a curva tracejada corresponde a $a = 0.3$ fm, a curva pontilhada corresponde a $a = 0.4$ fm. Para obtermos esta curva, fixamos o tamanho do hádron, píon (0.6 fm), a massa do quark c (1.5 GeV) e a energia de ligação (0.6 GeV) e variamos a energia $\sqrt{s}$.

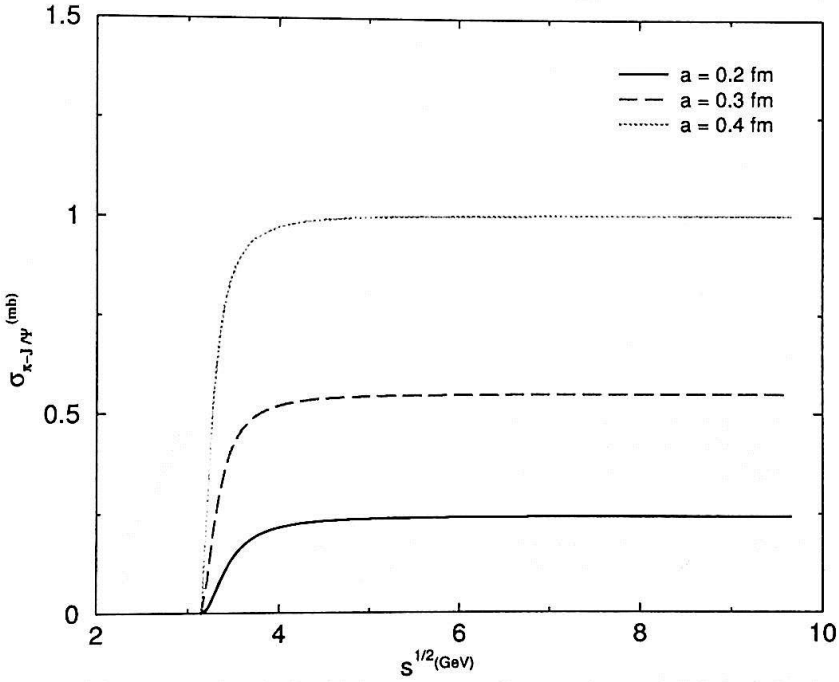

***Figura 1.10:** Comportamento da seção de choque píon-charmonium com a energia para $a = 0.2$, 0.3 e 0.4 fm. Para cada curva foram fixados também: o tamanho do hádron (0.6 fm) e a massa do quark c (1.5 GeV).*

A seguir apresentamos duas curvas, uma para o próton e outra para o píon, a fim de ilustrar o comportamento da seção de choque hádron-charmonium como função de $\sqrt{s}$ para vários valores da massa do quark c. As Figuras 1.11 e 1.12 foram obtidas para uma energia de ligação de 0.6 GeV e para o tamanho típico do charmonium em 0.2 fm.

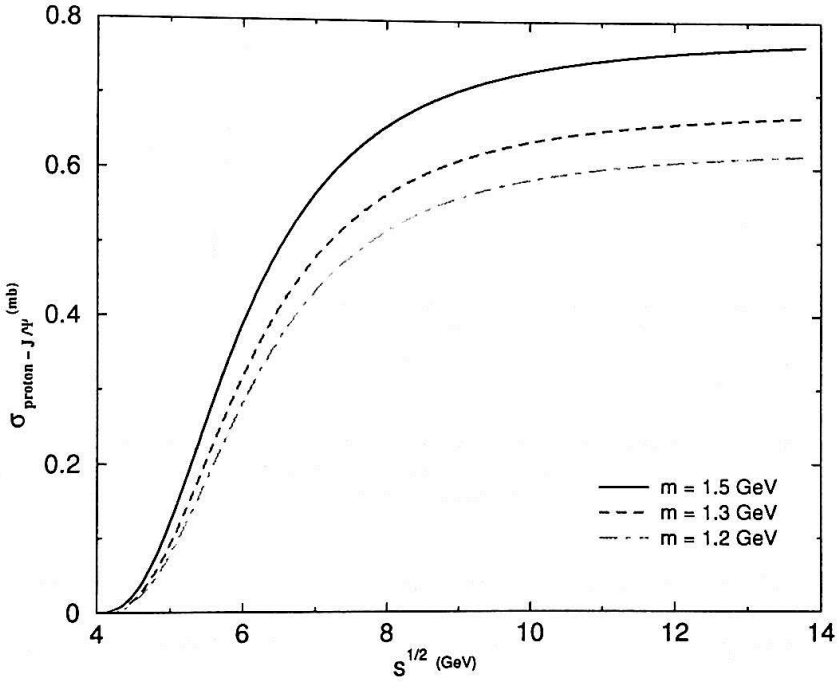

Figura 1.11: Comportamento da seção de choque com a energia para valores fixos de m_c: 1.2, 1.3 e 1.5 GeV. Para cada curva foram fixados também: o tamanho do charmonium (0.2 fm), do hádron (0.8 fm) e a energia de ligação 0.6 GeV.

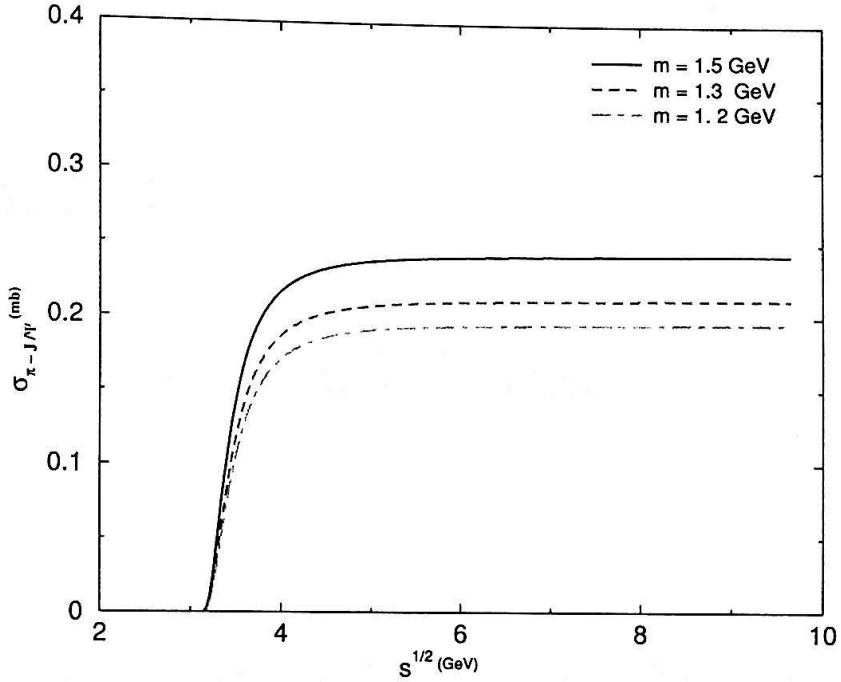

***Figura 1.12:** Comportamento da seção de choque com a energia para valores fixos de m_c: 1.2, 1.3 e 1.5 GeV. Para cada curva foram fixados também: o tamanho do charmonium (0.2 fm), do hádron (0.6 fm) e a energia de ligação 0.6 GeV.*

Da análise das figuras apresentadas concluímos que o MDC produz resultados que são compatíveis em ordem de grandeza (e comportamento com $\sqrt{s}$) com outros modelos. Isto fica claro na Figura 1.4.

Nas oito figuras seguintes, que não poderiam ser obtidas com outros modelos, vemos que o MDC é sensível a todos os parâmetros físicos importantes neste contexto. Por isso acreditamos que é possível aprender muito com ele, apesar de todas as simplificações e aproximações feitas.

Capítulo 2

Interação hádron-híbrido

Apesar de muito já ter sido feito no tocante à interação charmonium-hádron, até agora a maioria dos trabalhos trataram do caso da colisão de um hádron com o charmonium singleto de cor. No entanto é sabido que o charmonium raramente é produzido já num estado singleto de cor, sendo muito mais provável que ele seja produzido num estado octeto de cor, isto é, num estado em que o quark c tenha cor i e o antiquark tenha cor j (j diferente de i). Isto porque o mecanismo de produção mais importante é a fusão de dois glúons de hádrons diferentes e que por isso dificilmente estariam num estado singleto de cor. Há quase dez anos, Kharzeev e Satz, numa série de três artigos [6] se dedicaram ao assunto, mas o fizeram de uma maneira extremamente simplista. Após um cálculo da seção de choque charmonium (singleto de cor) - hádron usando QCD perturbativa, eles estenderam o resultado para a interação $(c-\overline{c})_8 - g$ - hádron, apenas corrigindo o fator de cor e usando uma estimativa para o raio do híbrido, que será reproduzida na primeira parte deste capítulo. Na época eles chamaram este estado de méson pré-resonante, já que ele precede a formação do J/ψ. Após esta pequena série de trabalhos, houve apenas mais um cálculo, feito na referência [11], usando o modelo do vácuo estocástico. Numericamente os resultados encontrados por estas duas referências são semelhantes e giram em torno de $\sigma \simeq 6-7$ mb. Se o tratamento de [11] tinha a vantagem de ser completamente não perturbativo, ele tinha a desvantagem de

ser válido apenas no regime de energias muito altas e também de produzir um resultado completamente independente da energia da reação. De agora em diante vamos nos referir a este estado como um híbrido, porque essa é sua estrutura e este é o nome usado para tratar deste sistema por outra comunidade, a que estuda espectroscopia hadrônica e estados exóticos da QCD. Algum progresso tem sido feito nesta área e hoje está se tornando possível aproveitar conhecimentos sobre estes objetos obtidos em modelos e até mesmo em QCD na rede [26, 27, 28, 29, 30].

Neste capítulo calculamos a seção de choque híbrido-hádron fazendo uma extensão do modelo discutido no capítulo anterior. Parte deste trabalho já foi apresentada em reuniões científicas [31]. A hipótese central, para a aplicação do modelo do "pequeno dipolo atravessando um grande capacitor" e sentindo a presença de seus campos como campos externos é que o dipolo seja pequeno comparado ao capacitor. No caso do charmonium, dada a grande quantidade existente de dados experimentais sobre espectroscopia é possível conhecer a função de onda e o tamanho do estado ligado com alguma precisão. No caso do híbrido, apesar de progressos recentes, pouco se sabe sobre sua função de onda, não sendo possível saber se ele é pequeno ou não.

A primeira questão é, então, quem é maior: um par quark - antiquark numa configuração singleto de cor $(c - \overline{c})$ ou um par quark - antiquark numa configuração octeto de cor ligado a um glúon $((c - \overline{c})_8 - g)$? Sabemos que num par $(c - \overline{c})_8$ os quarks se repelem e que um quark (ou antiquark) e um glúon podem se atrair se estiverem numa configuração de tripleto ou sexteto de cor [32]. Assim sendo, se a atração quark-glúon superar a repulsão quark - antiquark podemos ter um estado ligado $(c - \overline{c})_8 - g$. Nestes estados o glúon desempenha um papel de partícula e por isso eles são chamados de híbridos, pois são uma mistura (híbrido) de quarkonium e glueball. Os híbridos podem ser entendidos pictoricamente no modelo de sacola como sendo uma corda (formada entre quark e antiquark) contendo modos cromoelétricos e magnéticos excitados dentro de uma cavidade. Um análogo destes estados em física atômica é a molécula de H_2, na qual dois prótons pesados se repelem mas a nuvem eletrônica os atrai e supera a repulsão.

Estas idéias permanecem no âmbito qualitativo e para ter uma noção do tamanho do estado ligado em questão é necessário fazer uma estimativa. Reproduzimos abaixo a estimativa simples de Kharzeev-Satz [6] baseada no princípio da incerteza.

2.1 O modelo de Kharzeev-Satz

Kharzeev-Satz sugeriram que o par $(c-\overline{c})_8$ formado em colisões próton - núcleo ou núcleo - núcleo pode se acoplar a um glúon de algum dos hádrons circundantes formando o chamado estado pré-resonante. Este estado dura apenas até que o glúon extra seja absorvido pelo quark c (ou pelo antiquark correspondente) e o J/ψ seja formado, como mostra a Figura 2.1.

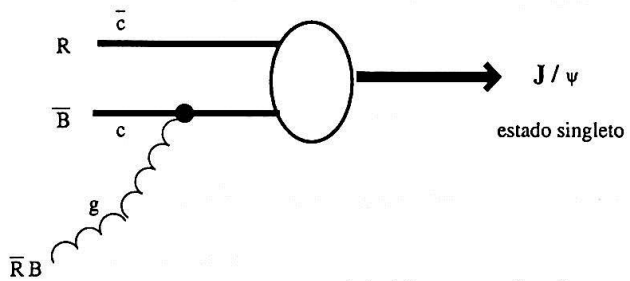

Figura 2.1: Estado pré-resonante, ou híbrido, e seu decaimento no J/ψ.

Vamos supor que o glúon seja absorvido pelo quark c, como mostrado na Figura 2.2.

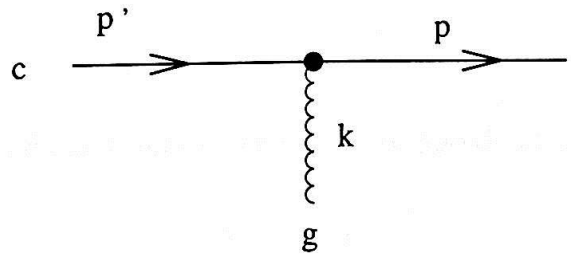

Figura 2.2: Vértice da absorção do glúon.

Nesta figura, $p^{'}, p, k$ são o quadrimomento inicial do quark charm, quadrimomento final do quark charm (após a absorção do glúon) e o quadrimomento do glúon, respectivamente. Usando a conservação do quadrimomento no vértice temos:

$$p' + k = p \Rightarrow p' = p - k \tag{2.1}$$

A virtualidade do quark c inicial é definida como:

$$\Delta^2 \equiv {m_c}^{*2} - {m_c}^2 = {p'}^2 - {m_c}^2 \tag{2.2}$$

Substituindo (2.1) em (2.2):

$$\Delta^2 = (p-k)^2 - m_c^2 = p^2 + k^2 - 2pk - m_c^2 \tag{2.3}$$

Supondo que depois de absorver o glúon o quark c (já constituinte do J/ψ) esteja aproximadamente na camada de massa ($p^2 = m_c^2$) e supondo também que o glúon esteja "on-shell" ($k^2 = 0$) temos:

$$\Delta^2 = -2pk \tag{2.4}$$

Calculando este invariante no sistema de referência em que o quark c final esteja em repouso ($p = (m_c, 0)$) encontramos:

$$\Delta^2 = -2m_c k_0 \tag{2.5}$$

A energia trocada na absorção do glúon é então da ordem de:

$$\Delta E = \sqrt{|\Delta^2|} = \sqrt{2m_c k_0} \tag{2.6}$$

Usando o princípio da incerteza estimamos o tempo de absorção do glúon como:

$$\Delta t \cong \frac{1}{\Delta E} = \frac{1}{\sqrt{|\Delta^2|}} = \tau_8 \tag{2.7}$$

Durante este tempo, o glúon percorre uma distância $r_8 \simeq c\tau_8 \simeq \tau_8$, que é identificada ao raio do híbrido:

$$r_8 = \frac{1}{\sqrt{2m_c k_0}} \tag{2.8}$$

Se o glúon for "soft", isto é, de baixo momento, k_0 assumirá valores da ordem de $\Lambda_{QCD} \simeq 200$ MeV. Usando este valor e também $m_c = 1500$ MeV em (2.8) o raio encontrado por Kharzeev e Satz foi de:

$$r_8 = \frac{1}{\sqrt{2m_c \Lambda_{QCD}}} \cong 0.25 fm. \tag{2.9}$$

Se k_0 for maior do que o valor utilizado encontraremos raios ainda menores. É importante notar que, de acordo com este modelo, o híbrido é muito menor do que um hádron típico, o que torna válida a aproximação de pequeno dipolo atravessando um grande capacitor já usada no capítulo anterior.

Apesar de ser conveniente neste trabalho, a imagem de um híbrido tão compacto ainda não pode ser vista como consolidada. Trabalhos feitos no nosso grupo [33], por exemplo, sugerem que o híbrido seja muito maior. O chamado híbrido GANND (Goldstein-Augaitis-Navarra-Nielsen-Denke) foi obtido através de solução numérica da equação de Schroedinger para o sistema $(c-\bar{c})_8$ com o auxílio do potencial V_8, extraído de cálculos na rede [28]. A repulsão a curtas distâncias, característica do potencial octeto de cor, inibe a formação de estados muito compactos. Usando a função de onda correspondente ao estado de mais baixa energia, o raio obtido foi de $r_8 \simeq 0.6$ fm.

2.2 Um Novo Modelo

Com base nas considerações feitas na seção anterior vamos desenvolver agora um modelo bastante simples para o cálculo da seção de choque híbrido - hádron. A priori não sabemos se o resultado será maior ou menor do que a seção de choque charmonium - hádron. Há dois efeitos em competição: por um lado o híbrido é menor do que o charmonium, mas por outro, ele é um dipolo com "cargas mais intensas" nas extremidades. O primeiro efeito faz a seção de choque diminuir mas o segundo a faz

crescer.

Conforme a Figura 2.3, escolhemos o híbrido como alvo e o hádron como projétil, sendo este representado pelo capacitor "de placas paralelas" em movimento.

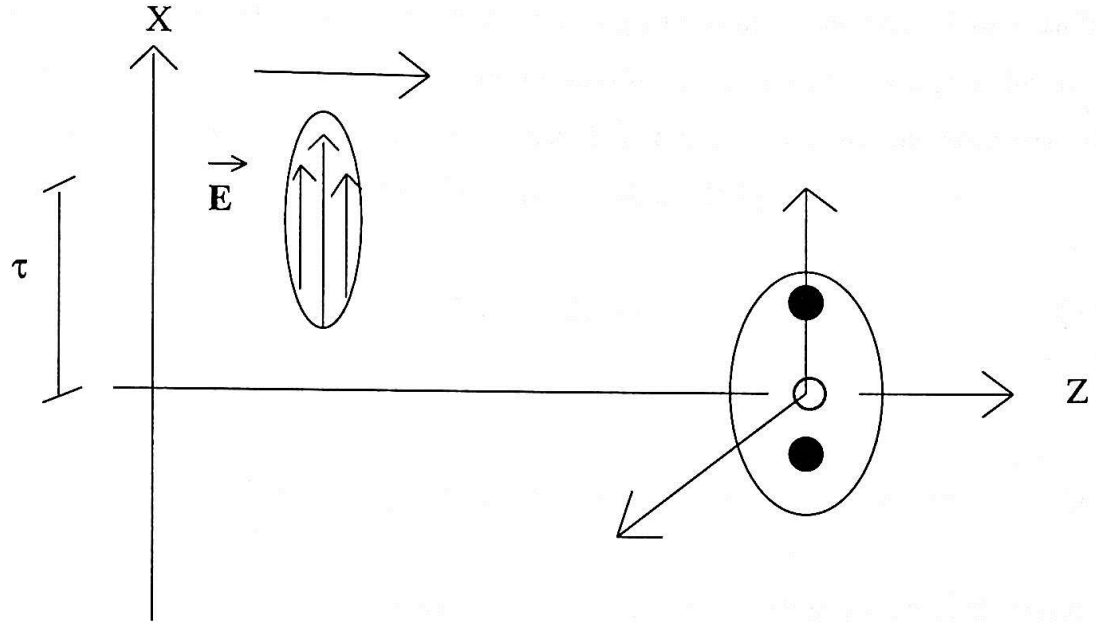

Figura 2.3: Interação híbrido - hádron no modelo do capacitor.

Na Figura 2.3, os pontos pretos são o quark e o antiquark e a bola branca no centro é o "glúon de valência". Estando confinado, este glúon é virtual, podendo ter uma "massa", m_g^*. Estes elementos interagem individualmente com o campo externo. Para que esta hipótese seja válida é fundamental que o estado seja compacto pois, neste caso, c, $\bar{c}$ e g estão necessariamente próximos e a interação entre eles é fraca, como nos garante a propriedade da liberdade assintótica. Também é fundamental que a energia transmitida a cada um dos três elementos seja pequena (< 1 GeV) pois o campo externo E só inclui as componentes de baixo momento do campo gluônico. A transmissão de energia alta tem que ser feita pelas componentes de grandes momentos, que têm pequeno número de ocupação e não podem ser aproximadas por um campo externo não quantizado. Em outras palavras, a transmissão de grande energia é o "efeito fotoelétrico" da QCD e só pode ser realizada por "pacotes de energia", os glúons quânticos. Do que foi dito vemos que, apesar de lidarmos com um estado com-

pacto, a transferência de energia (e consequente dissociação do híbrido) é um processo essencialmente não perturbativo. Esta propriedade será utilizada logo adiante.

Temos assim que calcular três amplitudes de transição independentes (para o quark, o antiquark e o glúon) e somá-las. A interação quark - campo externo já foi estudada no capítulo anterior e em princípio os resultados a serem obtidos agora devem ser semelhantes exceto pelo fator de cor. A novidade é a interação glúon-campo externo, que deve ser descrita pela densidade de Lagrangiana da QCD:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \tag{2.10}$$

onde $\mathcal{L}_0$ é a Lagrangiana livre e $\mathcal{L}_I$ é a Lagrangiana de interação, dada por [34]:

$$\mathcal{L}_I = -\frac{g}{2} f^{abc}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu) A^{b\mu} A^{c\nu} - \frac{g^2}{4} f^{abe} f^{cde} A^a_\mu A^b_\nu A^{c\mu} A^{d\nu} \tag{2.11}$$

Em princípio deveríamos, a partir de (2.10), obter a Hamiltoniana de interação e calcular a amplitude correspondente. Num primeiro momento, no entanto, vamos nos restringir apenas ao uso do segundo termo (quártico) de (2.11) por duas razões. Primeiro porque é ele que, como será visto mais adiante, irá conter potências mais altas nos campos E (que serão reescritos em termos do condensado de glúons) e darão origem aos efeitos não perturbativos mais importantes, nos quais estamos mais interessados. Além disso, os termos de (2.11) contendo derivadas geram integrais que tornam o nosso cálculo não analítico.

Assim a densidade de Hamiltoniana de interação é dada simplesmente por:

$$\mathcal{H}_I = \frac{g^2}{4} f_{abc} f_{dec} \mathcal{A}^\mu_a \mathcal{A}_{\nu e} \mathcal{A}^\nu_b \mathcal{A}_{\mu d} \tag{2.12}$$

Vamos agora fazer a distinção entre o campo do glúon pertencente ao híbrido, que é quântico (e descreve aqui uma partícula) e o campo externo do capacitor que não é quantizado. Como indicado na Figura 2.4, consideramos $\mathcal{A}^\mu_a \mathcal{A}_{\nu e}$ campos externos e $\mathcal{A}^\nu_b \mathcal{A}_{\mu d}$ como sendo o campo do glúon (do híbrido) que entra e que sai, respectivamente.

A Figura 2.4 descreve a "interação elástica" glúon-glúon, típica da QCD.

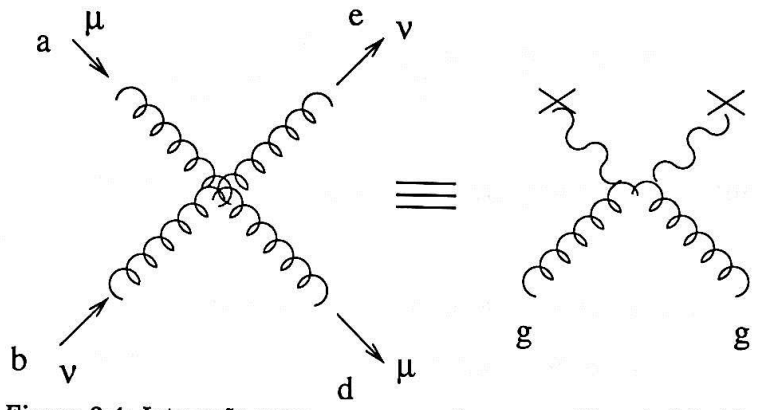

***Figura 2.4:** Interação entre o campo externo e o glúon do híbrido.*

Podemos expandir os campos $\mathcal{A}_b^{\nu}\mathcal{A}_{\mu d}$ de modo análogo ao que é feito em QED para os fótons [25] (página 84):

$$\mathcal{A}_b{}^{\nu} = \mathcal{A}_b{}^{\nu+} + \mathcal{A}_b{}^{\nu-} \tag{2.13}$$

sendo que:

$$\mathcal{A}_b{}^{\nu+} = \sum_{r,b,\mathbf{k}} \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \varepsilon_r{}^{\nu}(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}, b) e^{-ikx}$$

e

$$\mathcal{A}_b{}^{\nu-} = \sum_{r,b,\mathbf{k}} \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \varepsilon_r{}^{\nu}(\mathbf{k}) a_r^{\dagger}(\mathbf{k}, b) e^{ikx}$$

e também:

$$\mathcal{A}_{d\mu} = \mathcal{A}_{d\mu}{}^{+} + \mathcal{A}_{d\mu}{}^{-} \tag{2.14}$$

com:

$$\mathcal{A}_{d\mu}{}^{+} = \sum_{r',d,\mathbf{k}'} \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \varepsilon_{r'\mu}(\mathbf{k}') a_{r'}(\mathbf{k}', d) e^{-ik'x}$$

e

$$\mathcal{A}_{d\mu}{}^{-} = \sum_{r',d,\mathbf{k}'} \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \varepsilon_{r'\mu}(\mathbf{k}') a^{\dagger}_{r'}(\mathbf{k}',d) e^{ik'x}. \tag{2.15}$$

onde a_r e $a_r^{\dagger}$ são os operadores de aniquilação e criação respectivamente, e estes são interpretados como:

$a_r(\mathbf{k},b)$: aniquila um glúon com polarização r, momento $\mathbf{k}$ e cor b;

$a_r^{\dagger}(\mathbf{k},b)$: cria um glúon com polarização r, momento $\mathbf{k}$ e cor b;

$a_{r'}(\mathbf{k}',d)$: aniquila um glúon com polarização r', momento $\mathbf{k}'$ e cor d;

$a_{r'}^{\dagger}(\mathbf{k}',d)$: cria um glúon com polarização r', momento $\mathbf{k}'$ e cor d.

A seguir vamos tomar o limite do contínuo nas expansões acima:

$$\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \tag{2.16}$$

Para esses campos quânticos passam a valer as relações de comutação entre os operadores de aniquilação e criação:

$$[a_r(k,b), a_s^{\dagger}(k',d)] = \delta_{rs}\,\delta_{bd}\,(2\pi)^3\,\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \tag{2.17}$$

Para descrever a interação, precisamos definir os estados pré-interação e pós-interação. Dado o caráter exploratório deste trabalho, vamos assumir que o híbrido seja feito apenas do "glúon de valência", a bola branca da Figura 2.3, que passa assim a ocupar o volume do híbrido, estando confinada a ele. O tratamento completo, com a inclusão de quarks será feito em outra oportunidade. O estado inicial do híbrido é então dado pela seguinte expressão:

$$|i\rangle = N_i e^{-ipx} e^{-x^2/b^2} a_s^{\dagger}(\vec{p},g)|0\rangle \tag{2.18}$$

onde b representa o tamanho típico do híbrido (b está relacionado com a raio quadrático médio por $\sqrt{\langle r^2\rangle_g} = 0.86\,b$; ver Apêndice), s é a polarização inicial, N_i é uma constante

de normalização e o termo gaussiano, e^{-x^2/b^2}, representa o confinamento do híbrido.

Sob a ação do campo externo, $|i\rangle$ vai para $|f\rangle$:

$$|f\rangle = N_f e^{-ip'x} a^\dagger_{s'}(\vec{p'}, h)|0\rangle \tag{2.19}$$

$|f\rangle$ representa um estado de partícula livre, s' é a polarização do estado final e N_f é uma constante de normalização para o estado final. A cor (na representação adjunta de SU(3) de cor) muda de g para h.

Observando (2.17) vemos que o produto dos operadores a e $a^\dagger$ tem dimensão de (energia)$^{-3}$, ou de volume:

$$aa^\dagger \propto \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \propto V$$

Consequentemente, ao usarmos para os estados inicial e final a condição usual de normalização:

$$\int d^3x \, \langle i|i\rangle = \int d^3x \, \langle f|f\rangle = 1$$

encontramos:

$$N_i = (\frac{2}{\pi})^{3/4} \frac{1}{b\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{V}}$$

e

$$N_f = \frac{1}{V}$$

O volume arbitrário V, que aparece na expressão acima, em (2.13), (2.14) e (2.16) é o mesmo e se cancela no decorrer dos cálculos.

Para o cálculo da seção de choque é necessário obtermos a amplitude de transição, que é dada por:

$$T_{fi} = \int d^4x \, \langle f|\mathcal{H}_I|i\rangle \tag{2.20}$$

Inserindo (2.12) em (2.20) temos,

$$T_{fi} = \int d^4x \frac{g^2}{4} f_{abc} f_{dec} \mathcal{A}^\mu_a \mathcal{A}_{\nu e} \langle f|\mathcal{A}^\nu_b \mathcal{A}_{\mu d}|i\rangle \tag{2.21}$$

Notamos que o produto de campos externos fica fora do valor esperado, pois não contém operadores. Para calcular o termo $\langle f|\mathcal{A}_b^\nu \mathcal{A}_{\mu d}|i\rangle$ devemos fazer o limite do contínuo, substituir as expansões dos campos e as definições dos estados na expressão (2.21) e usar as relações de comutação entre a e $a^\dagger$. Assim, chegamos a:

$$\begin{aligned}
\langle f|A_b{}^\nu(\mathbf{p})A_{d\mu}(\mathbf{p}')|i\rangle &= V\int\frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}}\int\frac{d^3k'}{\sqrt{2k_0'}}\sum_{rr'}\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\,\varepsilon_{\nu r'}(\mathbf{k}')\,N_i\,N_f\,e^{i(p'-p)x}e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{b^2}} \\
&\times\ [e^{-i(k-k')x}\,(\delta_{rr'}\,\delta_{bd}\,\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\delta_{ss'}\,\delta_{gh}\,\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p}) \\
&+\ \delta_{r's'}\,\delta_{hd}\,\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{k}')\,\delta_{rs}\,\delta_{bg}\,\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,) \\
&+\ e^{i(k-k')x}\,\delta_{s'r}\,\delta_{hb}\,\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{k})\,\delta_{r's}\,\delta_{dg}\,\delta^3(\mathbf{k}'-\mathbf{p})] \\
&= \sum_{s,s'} V N_i\,N_f\,e^{2i(p'-p)x}\,e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{b^2}}\frac{1}{2\sqrt{p_0p_0'}} \\
&\times\ \left(\varepsilon_s^\mu(\mathbf{p})\,\varepsilon_{\nu s'}(\mathbf{p}')\,\delta_{bg}\,\delta_{hd}\ +\ \varepsilon_{s'}^\mu(\mathbf{p}')\,\varepsilon_{\nu s}(\mathbf{p})\,\delta_{hb}\,\delta_{dg}\right) \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

onde $k_0 = \omega_{\mathbf{k}}/c = |\mathbf{k}|$. Note que desprezamos o primeiro termo da expressão acima (2.22), pois este é desconexo. Deste modo temos para (2.21):

$$\begin{aligned}
T_{fi} &= \int d^4x\frac{g^2}{4}f_{abc}f_{dec}A_a{}^\mu A_{e\nu}\,V\,N_iN_fe^{-\frac{\mathbf{x}^2}{b^2}}\sum_{s,s'}\frac{e^{2i(p'-p)x}}{2\sqrt{p_0p_0'}} \\
&\times\ \left(\varepsilon_s^\mu(\mathbf{p})\,\varepsilon_{\nu s'}(\mathbf{p}')\,\delta_{bg}\,\delta_{hd}+\varepsilon_{s'}^\mu(\mathbf{p}')\,\varepsilon_{\nu s}(\mathbf{p})\,\delta_{hb}\delta_{dg}\right). \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Por simplicidade, vamos admitir que o glúon que entra e o que sai estão no mesmo estado de polarização ($s = s'$). Vamos então escrever a amplitude para uma polarização média dada por [25] (página 145):

$$\varepsilon_s{}^\nu\varepsilon_{s'\mu} \longrightarrow \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2}\varepsilon_s{}^\nu\varepsilon_{s'\mu} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2}\varepsilon^\nu\varepsilon^\alpha g_{\alpha\mu} = \frac{1}{2}(-g^{\nu\alpha})g_{\alpha\mu} = -\frac{1}{2}g^\nu{}_\mu$$

onde omitimos as dependências em $\mathbf{p}'$ e $\mathbf{p}$. Substituindo a expressão acima na ampli-

tude temos:

$$T_{fi} = \frac{g^2}{4} V N_i N_f \frac{1}{2} \int d^4x \frac{e^{-x^2/b^2}}{\sqrt{p_0 p_0'}} e^{2i(p'-p)x} \frac{(-\mathcal{A}_a^\mu \mathcal{A}_{\nu e} g_\mu^\nu)}{2} f_{abc} f_{dec} (\delta_{dh}\delta_{bg} + \delta_{dg}\delta_{bh}) \quad (2.24)$$

Vamos reescrever o campo externo $\mathcal{A}_a^\mu \mathcal{A}_{\nu e}$ em termos do tensor de campo $F_{\mu\nu}^a$:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a + g f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c \quad (2.25)$$

fazendo a escolha do gauge de Fock-Schwinger [35]:

$$\mathcal{A}^\mu x_\mu = 0$$

A grande vantagem da escolha deste gauge é que, nele, podemos inverter a equação (2.25), escrevendo $\mathcal{A}_\mu^a$ em termos de $F_{\mu\nu}^a$. Assim temos:

$$A_j^a = -\frac{1}{2} F_{ji}^a x^i$$

$$A_0^a = -F_{0i}^a x^i \quad (2.26)$$

Introduzimos o análogo aos campos elétricos e magnéticos [36]:

$$\begin{aligned} F_a^{i0} &\equiv E_a^i \\ -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} F_a^{jk} &\equiv B_a^i \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde $i, j, k = 1, 2, 3$ são os índices espaciais. Substituímos (2.27) em (2.26) e esta em (2.24). O produto de campos $\mathcal{A}$ que aparece na amplitude pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} -\mathcal{A}_a^\mu \mathcal{A}_{\nu e} g_\mu^\nu &= -\vec{E}_a \cdot \vec{x} \vec{E}_e \cdot \vec{x} - \vec{E}_a \cdot \vec{E}_e t^2 \\ &+ 16[-\vec{B}_a \cdot \vec{x} \vec{B}_e \cdot \vec{x} + \vec{B}_a \cdot \vec{B}_e x^2] - 4(\vec{B}_e \times \vec{E}_a)\vec{x}t + 4(\vec{B}_a \times \vec{E}_e)\vec{x}t. \end{aligned}$$

Assim como no capítulo anterior, vamos desprezar a contribuição do campo magné-

tico, mas, desta vez, sem nenhuma justificativa, apenas para manter o cálculo simples. Quando $\vec{B} = 0$, temos:

$$\mathcal{A}_a^\mu \mathcal{A}_{\nu e} g_\mu^\nu = \vec{E}_a \cdot \vec{x}\vec{E}_e \cdot \vec{x} + \vec{E}_a \cdot \vec{E}_e t^2$$

Como mostra a Figura 2.3, o campo cromoelétrico está orientado ao longo da direção x e então:

$$\mathcal{A}_a^\mu \mathcal{A}_{\nu e} g_\mu^\nu = E_a E_e (x^2 + t^2) \tag{2.28}$$

O campo $\vec{E}$ que representa o capacitor é o mesmo do capítulo anterior e é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{E}_c(t) &= \gamma \vec{E}_0^c \, exp\Big[- \frac{(X-x)^2}{d^2} - \frac{(Y-y)^2}{d^2} \Big] \\ &\times \; exp\Big[- \gamma^2 \frac{(vt-z)^2}{d^2} \Big] \end{aligned}$$

onde c é o índice de cor; d é o tamanho típico do capacitor; γ é o fator de Lorentz, que surge da transformação dos campos na direção do movimento e X, Y e Z ($= vt$) são as coordenadas do hádron. O parâmetro de impacto é dado por $\tau^2 = X^2 + Y^2$.

Conseqüentemente, o produto dos campos em (2.28) é dado por:

$$E_a E_e = \gamma^2 {E_0}^a {E_0}^e \, exp\Big\{ -2\frac{(X-x)^2}{d^2} - 2\frac{(Y-y)^2}{d^2} \Big\} exp\Big\{ -2\frac{\gamma^2 (vt-z)^2}{d^2} \Big\}. \tag{2.29}$$

Além disso em (2.24),

$$(p' - p)x = (\epsilon_f - \epsilon_i)t - (\mathbf{p_f} - \mathbf{p_i}) \cdot \mathbf{x} \equiv (\Delta\epsilon)t - (\Delta\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}$$

e

$$(p_0 p_0') = \epsilon_i \epsilon_f .$$

Substituindo estas definições na amplitude de transição (2.24) temos:

$$
\begin{aligned}
T_{fi} &= -\frac{g^2}{4} V N_i N_f \frac{1}{2} \frac{(f_{agc} f_{hec} + f_{ahc} f_{gec})}{2\,(\epsilon_i \epsilon_f)^{1/2}} \gamma^2 E_0{}^a E_0{}^e \int d^4x\,(x^2 + t^2) \\
&\times\ exp\Big\{ -2\frac{(X-x)^2}{d^2} - 2\frac{(Y-y)^2}{d^2} \Big\}\, exp\Big\{ -2\frac{\gamma^2 (vt-z)^2}{d^2} \Big\}\,. \\
&\times\ e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{b^2}}\, e^{(2i\Delta\epsilon t)}\, e^{(-2i\Delta\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}.
\end{aligned}
$$

Assim como no capítulo anterior, para encontrar um resultado analítico temos que evitar integrais muito complexas e assim, na expressão acima vamos fazer $x^2 \approx b^2$ e aproximar t pelo intervalo durante o qual ocorre a interação, isto é:

$$
t \to \Delta t = \frac{\Delta z}{v} = \frac{1}{v}\Big(b + \frac{d}{\gamma}\Big) \simeq \frac{b}{v} \tag{2.30}
$$

Resolvendo a integral temporal, obtemos:

$$
\begin{aligned}
T_{fi} &= \Gamma \int d^3\mathbf{x}\, exp\Big\{ -2\frac{(X-x)^2}{d^2} - 2\frac{(Y-y)^2}{d^2} \Big\} \\
&\times\ e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{b^2}} e^{(2i\Delta\epsilon \frac{z}{v})} e^{(-2i\Delta\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

onde Γ é

$$
\begin{aligned}
\Gamma &\equiv -\frac{g^2}{4} V N_i N_f \frac{1}{2}\frac{1}{2} \frac{(f_{agc} f_{hec} + f_{ahc} f_{gec})}{(\epsilon_i \epsilon_f)^{1/2}} \\
&\times\ \gamma E_0{}^a E_0{}^e b^2 \Big(1 + \frac{1}{v^2}\Big) \frac{d}{v} \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{1/2} exp\Big\{ -\frac{(\Delta\epsilon)^2 d^2}{2(\gamma v)^2} \Big\}.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Consideraremos $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i \cong \mathbf{p}_f \equiv q$ (pois $\mathbf{p}_i \approx 0$). Assim a exponencial na amplitude (2.31) será proporcional a:

$$
\Delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = q_x x + q_y y + q_z z
$$

Efetuando as integrais em x, y e z chegamos a:

$$\begin{aligned} T_{fi} &= \Gamma \cdot b \cdot \pi^{3/2}\Big(\frac{1}{b^2}+\frac{2}{d^2}\Big)^{-1} \cdot exp\Big\{-\frac{2}{d^2}(X^2+Y^2)\Big\} \cdot exp\Big\{-b^2\Big(\frac{\Delta\epsilon}{v}-q_z\Big)^2\Big\} \\ &\times\ exp\Big\{\Big[4(\frac{1}{b^2}+\frac{2}{d^2})\Big]^{-1}\Big\} \cdot exp\Big\{(\frac{4X}{d^2}-2iq_x)^2+(\frac{4Y}{d^2}-2iq_y)^2\Big\}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Podemos observar em (2.32) que a amplitude de transição T_{fi}, é proporcional a:

$$T_{fi} \propto (f_{agc}f_{hec}+f_{ahc}f_{gec})g^2E_o^aE_o^e \tag{2.34}$$

Até aqui o campo $\vec{E}$ foi tratado como campo externo. Lembrando que o capacitor que gera este campo representa o hádron h, temos que substituir o operador $(f_{agc}f_{hec}+f_{ahc}f_{gec})g^2E_o^aE_o^e$ por seu valor esperado no hádron em questão. Este valor esperado é completamente desconhecido. No entanto, fazendo a aproximação:

$$\langle h|(f_{agc}f_{hec}+f_{ahc}f_{gec})g^2E_o^aE_o^e|h\rangle \simeq (f_{agc}f_{hec}+f_{ahc}f_{gec})\langle h|g^2E_o^aE_o^e|h\rangle \tag{2.35}$$

é possível ir adiante pois este último elemento de matriz está relacionado com o condensado de glúons. Como para os hádrons físicos apenas os elementos de matriz neutros de cor têm valor não nulo [37], podemos escrever:

$$\langle h|g^2E_o^aE_o^e|h\rangle = \frac{1}{8}\delta_{ae}\langle h|g^2E_o^cE_o^c|h\rangle, \tag{2.36}$$

isto é, T_{fi} é proporcional ao valor esperado do quadrado do campo cromoelétrico no hádron. Este é o principal ingrediente não perturbativo do nosso cálculo e pode ser estimado de várias maneiras. A estimativa mais simples é obtida lembrando-se que os condensados envolvendo glúons variam muito pouco (em relação ao seu valor no vácuo) quando computados em hádrons [38]. Assim podemos aproximar este valor

esperado pelo valor esperado no vácuo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\delta_{ae}\langle h|g^2E_o^cE_o^c|h\rangle &\simeq \frac{1}{8}\delta_{ae}\langle 0|g^2E_o^cE_o^c|0\rangle \\ &= -\frac{1}{8}\delta_{ae}\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}F_{\mu\nu}^cF_c^{\mu\nu}|0\rangle \\ &= -\frac{1}{8}\delta_{ae}\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}F^2|0\rangle = -\frac{1}{8}\delta_{ae}\pi^2\phi^2\end{aligned}$$

onde passamos a usar a notação de Shifman, Vainshtein e Zakharov [39] e identificamos o condensado de glúons ϕ^2. Substituindo as expressão acima em (2.36) e esta em (2.35) e finalmente (2.35) em (2.34) encontramos:

$$T_{fi} \propto -\frac{1}{8}\delta_{ae}\pi^2\phi^2(f_{agc}f_{hec} + f_{ahc}f_{gec})$$

Lembrando [40] que $f_{acd}f_{bcd} = 3\delta_{ab}$, chegamos a:

$$T_{fi} \propto -\frac{1}{8}\pi^2\phi^2 2(f_{agc}f_{hec}) \propto -\frac{1}{8}\pi^2\phi^2\, 6\delta_{gh}$$

Feita a conexão com o condensado de gluons, (2.33) se transforma em:

$$\begin{aligned}T_{fi} &= \frac{1}{8}\pi^2\phi^2\, 6\delta_{gh}\frac{V}{4}N_iN_f\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{(\epsilon_i\epsilon_f)^{1/2}}\gamma b^2\Big(1+\frac{1}{v^2}\Big)\frac{d}{v}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{1/2}exp\Big\{-\frac{(\Delta\epsilon)^2d^2}{2(\gamma v)^2}\Big\} \\ &\times\ b\cdot\pi^{3/2}\Big[\frac{1}{b^2}+\frac{2}{d^2}\Big]^{-1}\cdot exp\Big\{-\frac{2}{d^2}(X^2+Y^2)\Big\}\cdot exp\Big\{-b^2\Big(\frac{\Delta\epsilon}{v}-q_z\Big)^2\Big\} \\ &\times\ exp\Big\{\Big[4(\frac{1}{b^2}+\frac{2}{d^2})\Big]^{-1}\Big\}\cdot exp\Big\{\Big(\frac{4X}{d^2}-2iq_x\Big)^2+\Big(\frac{4Y}{d^2}-2iq_y\Big)^2\Big\}.\end{aligned}$$

Como a cor não é observada, devemos fazer a média sobre os estados iniciais e somar sobre os finais:

$$|T_{fi}|^2 \to \overline{|T_{fi}|^2} \equiv \frac{1}{8}\sum_g\sum_h|T_{fi}|^2$$

Logo,

$$\overline{|T_{fi}|^2} \propto \frac{1}{8}\sum_g\sum_h\frac{1}{64}\pi^4\phi^4\, 36\,\delta_{gh}\delta_{gh} = \frac{1}{8}\frac{36}{64}\pi^4\phi^4\sum_g\delta_{gg} = \frac{36}{64}\pi^4\phi^4,$$

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3792 ex. 1

Então,

$$
\begin{aligned}
\overline{|T_{fi}|^2} &= \frac{36}{64}\pi^4\phi^4\Big(\frac{V}{4}N_iN_f\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{(\epsilon_i\epsilon_f)^{1/2}}\gamma b^2\Big(1+\frac{1}{v^2}\Big)\frac{d}{v}(\frac{\pi}{2})^{1/2}exp\Big\{-\frac{(\Delta\epsilon)^2d^2}{2(\gamma v)^2}\Big\}\Big)^2 \\
&\times\ b^2\cdot\pi^3\cdot\Big[\frac{1}{b^2}+\frac{2}{d^2}\Big]^{-2}\cdot exp\Big\{-\frac{4}{d^2}(X^2+Y^2)\Big\} \\
&\times\ exp\Big\{\frac{8}{d^4}(X^2+Y^2)\cdot\Big(\frac{1}{b^2}+\frac{2}{d^2}\Big)^{-1}\Big\}\cdot exp\Big\{-2({q_x}^2+{q_y}^2)\cdot\Big(\frac{1}{b^2}+\frac{2}{d^2}\Big)^{-1}\Big\} \\
&\times\ exp\Big\{-2b^2\Big(\frac{\Delta\epsilon}{v}-q_z\Big)^2\Big\} \qquad (2.37)
\end{aligned}
$$

onde devemos lembrar que $X^2+Y^2=\tau^2$.

Podemos calcular a seção de choque diferencial através de:

$$
d^3\sigma = 2\pi\int_0^\infty d\tau\,\tau\,\overline{|T_{fi}|^2}\cdot\frac{V}{(2\pi^3)}d^3q
$$

onde o termo $\frac{V}{(2\pi^3)}d^3q$ corresponde ao fator no espaço de fase do glúon final. Integrando no parâmetro de impacto τ:

$$
\begin{aligned}
d^3\sigma &= \frac{36}{64}\pi^4\phi^4\Big(\frac{N_iN_f}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\Big)^2\gamma^2b^4\Big(1+\frac{1}{v^2}\Big)^2\frac{\pi}{2}\frac{d^2}{v^2}exp\Big\{\frac{-(d\Delta\epsilon)^2}{\gamma^2v^2}\Big\}\frac{1}{\epsilon_i\epsilon_f} \\
&\times\ \frac{\pi}{32}\frac{b^2(b^2d^2)^2}{(d^2+2b^2)}exp\Big\{\frac{-2(q_x^2+q_y^2)}{(\frac{1}{b^2}+\frac{2}{d^2})}-2b^2(\frac{\Delta\epsilon}{v}-q_z)^2\Big\}\frac{V}{(2\pi^3)}d^3q \qquad (2.38)
\end{aligned}
$$

Lembramos que, na expressão acima $\Delta\epsilon=\epsilon_f-\epsilon_i$. Além disso $\epsilon_f=p_f=q$ e, uma vez que $p_i\simeq 0$, temos que $\epsilon_i\simeq m_g^*$. m_g^* é a "massa" do glúon inicial, que carrega sua virtualidade. Não conhecemos m_g^* e a presença de ϵ_f no denominador da expressão acima estraga a analiticidade dos cálculos. Por isso vamos cometer uma última aproximação: $\epsilon_f\rightarrow\overline{\epsilon_f}$, um valor médio constante numérico do qual a resposta final vai depender. Assim, fixando as energias do estado inicial e final, efetuando as integrações em dq_x , dq_y e dq_z e substituindo as constantes de normalização, encontramos a

resposta final:

$$\begin{aligned}\sigma &= \pi^2 \frac{18}{(16)^4}(\langle\frac{\alpha_s}{\pi}F^2\rangle)^2 \frac{b^4 d^4}{\epsilon_i \overline{\epsilon_f}} \frac{\gamma^4(2\gamma^2-1)^2}{(\gamma^2-1)^3} \\ &\times \exp\left\{-(\overline{\epsilon_f}-\epsilon_i)^2 \frac{d^2}{\gamma^2-1}\right\} \end{aligned} \tag{2.39}$$

onde $\langle\frac{\alpha_s}{\pi}F^2\rangle = \pi^2\phi^2$.

Podemos agora comparar a expressão acima com a aquela obtida em [11]:

$$\sigma \propto < g^2F^2 >^2 a^{10} \left(\frac{S_h}{a}\right)^{1.5} \left(\frac{S_\psi}{a}\right)^2 \tag{2.40}$$

onde a é o comprimento de correlação dos campos gluônicos no vácuo e S_h e S_ψ são os raios aproximados do hádron e do charmonium.

Vemos que tanto (2.39) como (2.40) são proporcionais ao quadrado do condensado de glúons. As duas expressões são muito sensíveis a variações nos tamanhos do projétil e do alvo. (2.39) ao contrário de (2.40) depende de ϵ_i e $\overline{\epsilon_f}$, sendo suprimida tanto para híbridos com muita energia (inicial ou final) quanto para processos em que a energia tranferida $(\overline{\epsilon_f} - \epsilon_i)$ é grande. Neste aspecto (2.39) é mais realista do que (2.40). Além disso, como γ depende explicitamente de $\sqrt{s}$, (2.39) depende da energia da colisão, enquanto (2.40) é totalmente independente da energia. Em princípio esta característica, por si só, já tornaria a nossa abordagem melhor do que a do vácuo estocástico, mas tomando o limite assintótico em que $s \to \infty$ e consequentemente $\gamma \to \infty$, vemos que (2.39) se comporta como:

$$\sigma \propto \gamma^2 \propto s^2 \tag{2.41}$$

Este crescimento com a energia é muito rápido e viola o limite de Froissart. Este último é um resultado rigoroso que afirma que o crescimento mais rápido de uma seção de

choque total entre dois hádrons quaisquer deve ser:

$$\sigma_{tot} \propto (\ln \frac{s}{s_0})^2 \tag{2.42}$$

Como será visto na próxima seção, (2.39) produz resultados numéricos compatíveis com outras estimativas na região de baixas energias $\sqrt{s}$. Em (2.41 o comportamento em γ^2 vem, em última análise, do fato de o campo externo entrar ao quadrado na amplitude. Ao fazer a transformação de Lorentz no campo externo, surge um fator de γ para cada potência de E. Ainda que a integração temporal da amplitude traga um fator γ para o denominador, ele não é suficiente para cancelar o numerador.

2.3 Resultados numéricos

Nesta seção apresentamos os resultados numéricos alcançados com o modelo dipolo-capacitor para a interação híbrido - hádron.

A fim de estimarmos o valor da seção se choque hádron-híbrido dada por (2.39), fixaremos alguns parâmetros com valores mais prováveis, como o tamanho do híbrido 0.25 fm, o valor do condensado de gluons no vácuo $(0.36\,GeV)^2$, as energias inicial 1 GeV e final 2 GeV. Se o hádron for um próton, temos para seu tamanho típico 0.8 fm. Usando o fator de Lorentz $\gamma = 10$, obtemos para a seção de choque próton-híbrido: $\sigma_{p-g} = 3.76$ mb. Se $\gamma = 20$, $\sigma_{p-g} = 14.98$ mb. Agora se o hádron for um píon, obtemos para a seção de choque píon-híbrido: $\sigma_{\pi-g} = 1.19$ mb, para $\gamma = 10$, e $\sigma_{\pi-g} = 4.72$ mb, para $\gamma = 20$.

Podemos comparar este resultado obtido para a seção de choque híbrido-próton, $\sigma \simeq 3.76\,mb$, com dois trabalhos existentes na literatura. No trabalho de Kharzeev e Satz [6], a seção de choque tem um valor de $\sigma \simeq 6$ mb e no trabalho de Dosch, Navarra, Nielsen e Rueter temos $\sigma \simeq 10$ mb [11].

A Figura 2.5 mostra o comportamento da seção de choque com o fator γ de Lorentz.

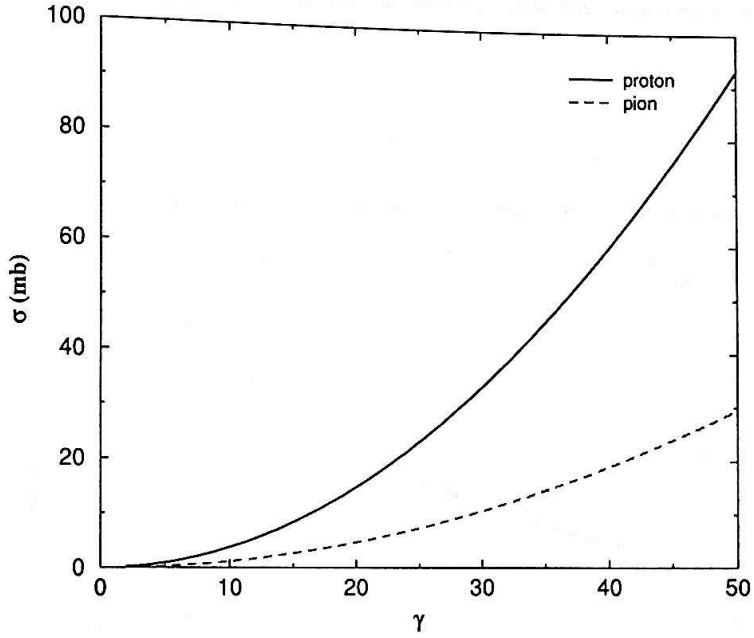

Figura 2.5: ***Seção de choque hádron-híbrido como função de γ.***

A Figura 2.6 mostra o comportamento da seção de choque em função da energia final, fixados a energia inicial em 1 GeV, o tamanho do híbrido, 0.25 fm e o fator de Lorentz, $\gamma = 20$. A curva cheia representa o próton (0.8 fm) e a tracejada, o píon (0.6 fm).

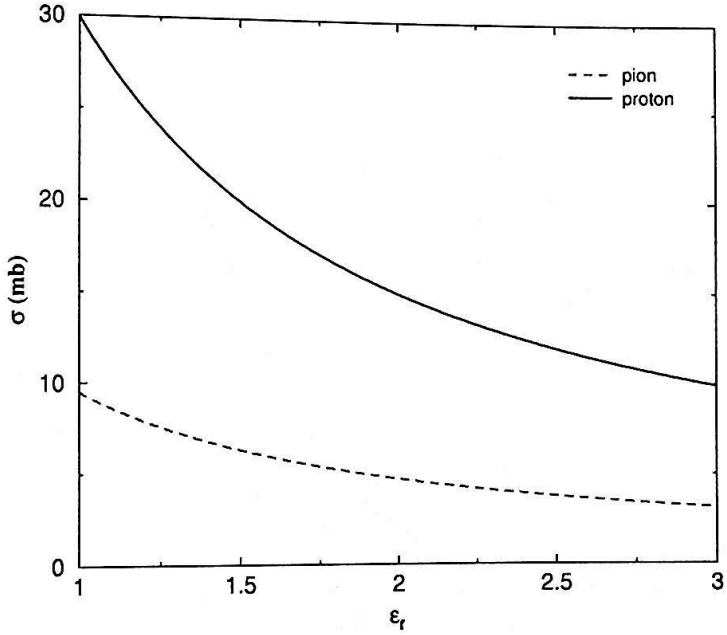

Figura 2.6: Seção de choque hádron-híbrido como função da energia final do glúon, ϵ_f.

A Figura 2.7 mostra a distribuição do momento transversal do glúon final. Para obtenção desta curva, fixamos a energia inicial e final (1 e 2 GeV), o tamanho do híbrido, o fator de Lorentz ($\gamma = 20$). A curva cheia representa o próton (0.8 fm) e a tracejada, o píon (0.6 fm).

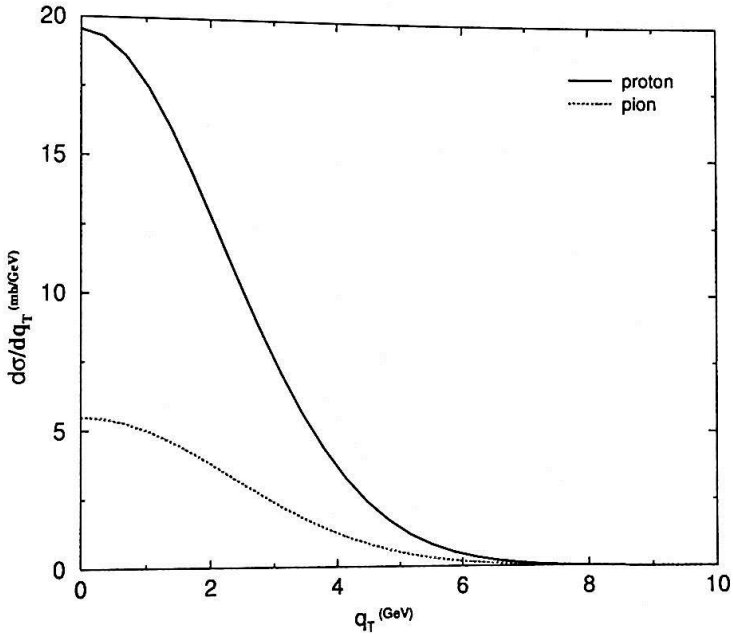

***Figura 2.7:** Seção de choque diferencial hádron-híbrido como função do momento transversal do glúon final.*

A Figura 2.8 mostra a distribuição do momento longitudinal do glúon final. Para a obtenção desta curva, fixamos a energia inicial e final (1 e 2 GeV), o tamanho do híbrido (0.25 fm), o fator de Lorentz ($\gamma = 20$). A curva cheia representa o próton (0.8 fm) e a tracejada, o píon (0.6 fm).

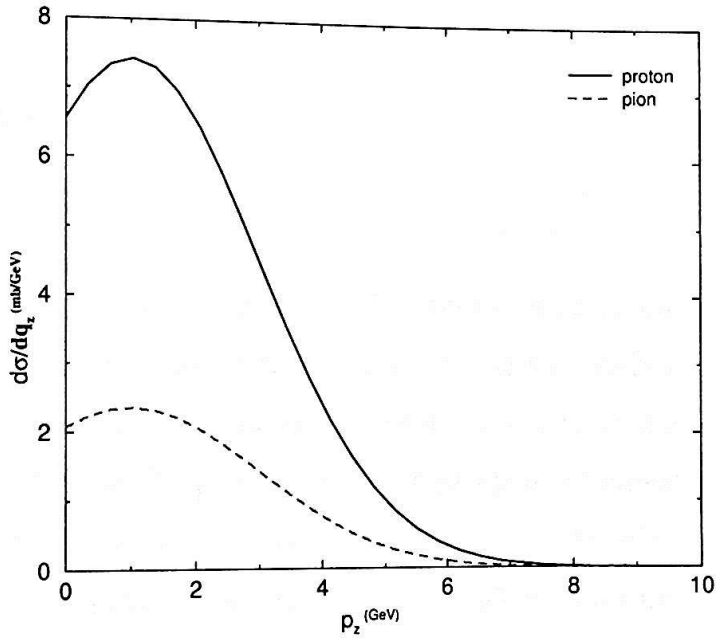

***Figura 2.8:** Seção de choque diferencial hádron-híbrido como função do momento longitudinal do glúon final.*

Apesar de todas as simplificações feitas e aproximações, como a não inclusão dos outros termos da densidade de Lagrangiana, nosso cálculo reproduz em ordem de grandeza o resultado obtido nas referências [6] e [11].

Capítulo 3

Conclusões

Como foi visto desde a introdução desta dissertação, ela teve por objetivo dar uma contribuição para dois problemas ainda em discussão na comunidade que faz teoria para o RHIC: o cálculo da seção de choque charmonium-hádron e o cálculo da seção de choque híbrido-hádron. No primeiro deles, discutido intensamente nos últimos anos, houve nítido progresso. O segundo problema esteve abandonado, apesar de o estado que chamamos de híbrido ocorrer com maior frequência do que o charmonium em colisões de íons relativísticos.

Motivados por esta falta de teoria, desenvolvemos as idéias de Bhanot-Peskin usando mecânica quântica relativística e a aproximação do campo externo para o campo gluônico do hádron. Esta abordagem do problema foi chamada de modelo do dipolo-capacitor (MDC).

O MDC, além de ter utilidade pedagógica ao sintetizar de maneira transparente a física do problema, foi capaz de reproduzir a ordem de grandeza e mesmo (aproximadamente) a dependência com a energia $\sqrt{s}$ da seção de choque charmonium - hádron obtida na ref. [6]. Neste caso a comparação com resultados de outros trabalhos teve, para nós a finalidade de testar o modelo. Tendo sido bem sucedido na primeira etapa, pudemos usá-lo para calcular a seção de choque híbrido-hádron e dar uma contribuição original, benvinda numa área onde há tão poucos trabalhos. Podemos dizer que nossos resultados são encorajadores mas ainda provisórios pois ainda fizemos uso de

muitas e muitas aproximações que comprometem a acuidade numérica da resposta final. No entanto nenhuma destas aproximações é fundamental ou incontornável, a maioria delas podendo ser removida apenas com a introdução de cálculo numérico mais pesado. Se por um lado encontramos uma seção de choque híbrido-hádron com ordem grandeza compatível com a outras seções de choque que aparecem em interações hadrônicas, não sendo nem inesperadamente muito grandes ou muito pequenas, por outro seu comportamento com a energia $\sqrt{s}$ é aparentemente não físico pois observamos um crescimento assintótico maior do que o previsto pelo limite de Froissart. Vamos contudo continuar com este cálculo, removendo as aproximações feitas para verificar se é possível encontrar um resultado mais consistente.

Apêndice

Relação entre o raio do capacitor e d

A relação entre o raio do capacitor (hádron) e d pode ser encontrada a partir da expressão para o campo cromoelétrico (1.8). No sistema em que o capacitor está em repouso sua função de onda é dada por:

$$\Psi = N\, e^{-\frac{r^2}{d^2}} \tag{3.1}$$

onde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e N é a constante de normalização, dada por:

$$N^2 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2}\, d^3} \tag{3.2}$$

O raio quadrático médio é dado por:

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= \int d^3r\, \Psi^*\, r^2\, \Psi \\ &= N^2 \int dr\, r^4\, e^{\frac{-2}{d^2} r^2} \int sen\theta\, d\theta \int d\phi \\ &= 4\,\pi\, N^2 \int dr\, r^4\, e^{\frac{-2}{d^2} r^2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Fazendo a integral em dr e substituindo a constante de normalização, chegamos na seguinte relação:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_h} = 0.86\, d. \tag{3.4}$$

Para obtermos a relação entre o raio do híbrido e b, basta considerarmos o termo gaussiano que aparece na equação do estado inicial do híbrido (2.18). Assim,

$$\Psi = N e^{-\frac{r^2}{b^2}} \tag{3.5}$$

Note que (3.5) tem a mesma forma que (3.1) e analogamente:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_g} = 0.86\, b. \tag{3.6}$$

Relação entre o raio do charmonium e a

A hipótese de fatorização (1.19) usada ao longo deste trabalho, implica que os quarks são independentes e estão confinados dentro do hádron. Assim sendo a relação entre o raio quadrático médio do charmonium e a função de onda de cada quark é dada por

$$\begin{aligned} \bar{r}^2 &= \langle r^2 \rangle_c \\ &= \int d^3r \Psi^* r^2 \Psi \\ &= N_1^2\, 4\pi \int r_1^4\, e^{\frac{-2}{a^2} r_1^2}\, dr_1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde $N_1^2 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2}\, a^3}$. Substituindo N_1 na expressão acima e efetuando a integral, obtemos a seguinte relação:

$$\bar{r} = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.86\, a. \tag{3.8}$$

Uma relação idêntica seria obtida a partir do antiquark.

Nós observamos que mesmo a relação entre $\langle r^2 \rangle$ e a é fortemente dependente da escolha da função de onda, e altera os resultados do cálculo da seção de choque. Por

exemplo, se definirmos $\langle r^2 \rangle$ como sendo

$$\begin{aligned}
\langle r^2 \rangle &= \int d^3r \Psi_i^* \, r^2 \, \Psi_i \\
&= N_i^2 \int d^3r_1 \int d^3r_2 \, e^{\frac{-2}{a^2} r_1^2} \, (r_1 - r_2)^2 \, e^{\frac{-2}{a^2} r_2^2} \\
&= N_i^2 \, (4\pi)^2 \int dr_1 \int dr_2 \, e^{\frac{-2}{a^2} r_1^2} \, (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2) \, e^{\frac{-2}{a^2} r_2^2} \\
&= N_i^2 \, (4\pi)^2 \int r_1^2 \, dr_1 \int r_2^2 \, dr_2 \, e^{\frac{-2}{a^2} r_1^2} \, (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2) \, e^{\frac{-2}{a^2} r_2^2} \\
&= N_i^2 \, (4\pi)^2 \int dr_1 \int dr_2 \, e^{\frac{-2}{a^2} r_1^2} \, (r_1^4 r_2^2 + r_1^2 r_2^4 - 2r_1^3 r_2^3) \, e^{\frac{-2}{a^2} r_2^2} \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

onde N_i é a constante de normalização, dada por:

$$N_i = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2} \, a^3} \qquad (3.10)$$

Inserindo N_i em (3.9) e efetuando as integrais, obtemos a seguinte relação para a :

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.47 \, a \qquad (3.11)$$

Desta forma o tamanho típico do charmonium vai para $a = 0.8$ fm. Considerando este valor para a, teremos os seguintes resultados para a seção de choque píon-charmonium: $\sigma_{\pi - J/\Psi} = 7.84$ mb (para $\gamma = 10$), e $\sigma_{\pi - J/\Psi} = 7.82$ mb (para $\gamma = 20$). E para a seção de choque próton-charmonium: $\sigma_{p - J/\Psi} = 29.85$ mb (para $\gamma = 10$) e $\sigma_{p - J/\Psi} = 29.93$ mb (para $\gamma = 20$). A seguir apresentamos alguns gráficos para valores de a que giram em torno de 0.8 fm, a fim de verificar o comportamento das seções de choque com $\sqrt{s}$.

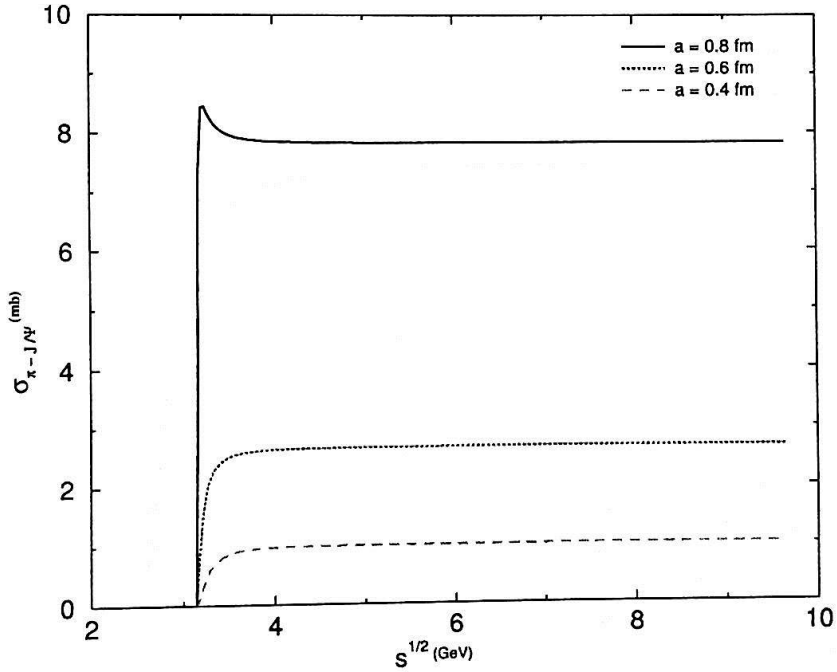

Figura 3.1: Comportamento da seção de choque píon-charmonium com a energia para $a = 0.4$, 0.6 e 0.8 fm. Para cada curva foram fixados também: o tamanho do hádron (0.6 fm) e a massa do quark c (1.5 GeV).

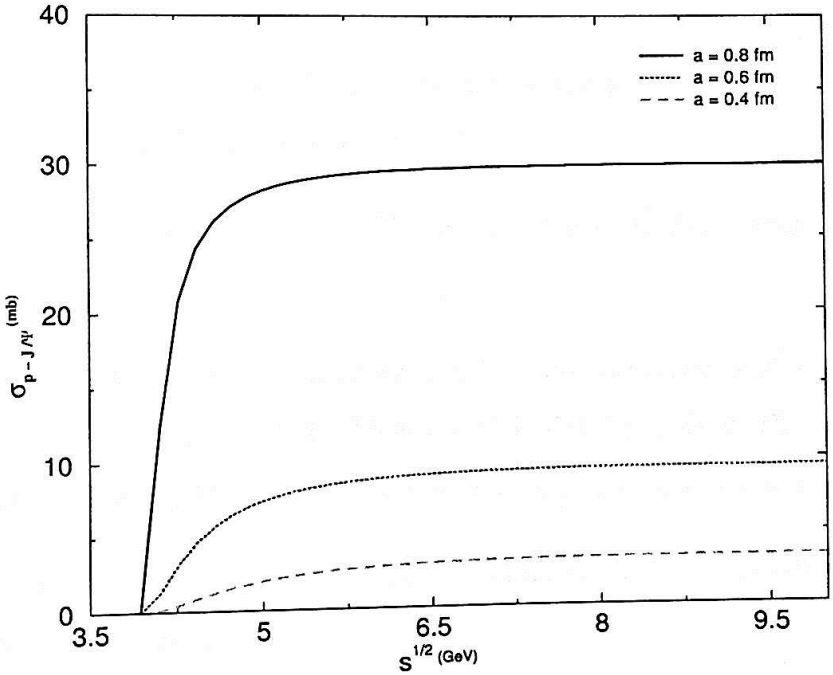

Figura 3.2: Comportamento da seção de choque próton-charmonium com a energia para $a = 0.4$, 0.6 e 0.8 fm. Para cada curva foram fixados também: o tamanho do hádron (0.8 fm) e a massa do quark c (1.5 GeV).

Referências Bibliográficas

[1] "New States of Matter in Hadronic Interactions", Eds. H.T. Elze et al., AIP Conference Proceedings, **631**, (2002); "Quark Matter 2001", Proceedings of the 15th International Conference on Ultra-Relativistics Nucleus-Nucleus Collisions, Eds. T.J. Hallman et al., North Holland, (2002).

[2] T. Matsui and H. Satz, *Phys. Lett.* **B178**, 416 (1986); H. Satz, *Rept. Prog. Phys.* **63**, 1511 (2000).

[3] R. L. Thews, "Nonlinear behavior of quarkonium formation and deconfinement signals", hep-ph/0206179; R. L. Thews and J. Rafelski, *Nucl. Phys.* **A698**, 575 (2002); R. L. Thews, M. Schroedter, J. Rafelski, *Phys. Rev.* **C63**, 054905 (2001).

[4] L. Grandchamp and R. Rapp, hep-ph/0209141; *Nucl. Phys.* **A709**, 415 (2002); *Phys. Lett.* **B523**, 60 (2001).

[5] G. Bhanot and M. E. Peskin, *Nucl. Phys.* **B156**, 391(1979).

[6] D. Kharzeev and H. Satz, *Phys. Lett.* **B366**, 316 (1996); **B356**, 365 (1995); **B334**, 155 (1994).

[7] Su Houng Lee, and Yongseok Oh, *J. Phys.* **G28**, 1903 (2002); Yongseok Oh, Sungsik Kim, Su Houng Lee, *Phys. Rev.* **C65**, 067901 (2002).

[8] C-Y. Wong, E.S. Swanson and T.E. Barnes, *Phys. Rev.* **C62**, 045201 (2000); C-Y. Wong, E.S Swanson and T.E. Barnes , *Phys. Rev.* **C65**, 014903 (2002); C-Y.

Wong, *Phys. Rev.* **C65**, 034902 (2002); D. Hadjimichef, G. Krein, S. Szpigel and J.S. Veiga, *Phys. Lett.* **B367** (1996) e referências aí contidas.

[9] S. G. Matinyan and B. Müller, *Phys. Rev.* **C58**, 2994 (1998);
K. Haglin, *Phys. Rev.* **61**, 031902 (2000);
Z. Lin and C.M. Ko, *Phys. Rev.* **62**, 034903 (2000);
Y. Oh, T. Song and S.H. Lee, *Phys. Rev.* **63**, 034901 (2001);
A. Sibirtsev, K. Tsushima and A.W. Thomas, *Phys. Rev.* **63**, 044906 (2001);
W. Liu, C. M. Ko and Z.W. Lin, *nucl-th/0107058* (2001).

[10] F.S. Navarra, M. Nielsen and M.R. Robilotta, *Phys. Rev.* **64**, 021901 (2001).

[11] H.G. Dosch, F.S. Navarra, M.Nielsen and M. Rueter, *Phys. Lett.* **B466**, 363 (1999).

[12] F.S. Navarra, M. Nielsen, R.S. Marques de Carvalho and G. Krein, *Phys. Lett.* **B529**, 87 (2002).

[13] F.O. Duraes, H. Kim, S.H. Lee, F.S. Navarra and M. Nielsen, *nucl-th/0211092* (2002).

[14] F.O. Duraes, S.H. Lee, F.S. Navarra and M. Nielsen, *nucl-th/0210075* (2002).

[15] "Charmonium-Hadron Cross Sections in Nonperturbative QCD Models", R.S. de Azevedo, R.Z. Denke, F.S. Navarra, M. Nielsen and M.S. Kugeratski Souza, Proceedings of the Sixth International Workshop on Relativistic Aspects of Nuclear Physics, Eds. T. Kodama et al., World Scientific, pg. 219, (2001)

[16] "Charmonium-Hadron Cross Section in Dipole - Condenser Model", M.S. Kugeratski Souza and F.S. Navarra, Proceedings of the International Workshop on Hadron Physics 2002, Eds. C.Z. Vasconcellos et al., World Scientific, (2003).

[17] J. Huefner, C. Lewenkopf and M.C. Nemes, *Nucl. Phys.* **A518**, 297 (1990).

[18] L.L. Barz and A.F.R. de Toledo Piza, *Int. J. Mod. Phys.* **A8**, 2287 (1993); L.L. Barz, "Emissão de nucleons via mecanismo de Feshbach-Zabek na colisão periférica de íons pesados relativísticos", dissertação de mestrado, São Paulo, 1990.

[19] C.A. Bertulani, L.F. Canto, R. Donangelo, J.O. Rasmussen, *Mod. Phys. Lett.* **A4**, 1315 (1989).

[20] M.E. Bracco, F.S. Navarra and M.C. Nemes, *Mod. Phys. Lett.* **A6**, 2587 (1991).

[21] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, T. M. Yan. *Phys. Rev.* **D17**, 3090 (1978); **D21**, 203 (1980).

[22] Jackson, John David. " Classical Electrodynamics", editora : John Wiley & Sons, Inc., 1962.

[23] M. Voloshin and V. Zakharov, *Physical Review Letters*, v.45, n.9, 688 (1980).

[24] Griffiths, David J. "Introduction to Elementary Particles", editora: John Wiley & Sons, Inc., 1987.

[25] F. Mandl and G. Shaw, Quantum Field Theory, 1986.

[26] "The phenomenology of glueball and hybrid mesons", Stephen Godfrey, hep-ph/0211464.

[27] C. McNeile, hep-lat/0207001

[28] K.J. Juge, J. Kuti, C.J. Morningstar, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4400 (1999); C.J. Morningstar, nucl-th/0110074.

[29] "Hybridgen: a model for the study of QCD hybrid states", M.M. Brisudova and T. Goldman, nucl-th/0209065.

[30] "Hybrid meson masses in a quark-gluon constituent model", F. Iddir and L. Semhala, hep-ph/0211289.

[31] "Interação Hadron-híbrido em um modelo simples", M.S. Kugeratski Souza e F.S. Navarra, Relatório da XIV Reunião de Trabalho sobre Interações Hadrônicas, Eds. F.S. Navarra e Y. Hama, pg. 62, 2002.

[32] B. Grinstein, Int.J. Mod. Phys. **A15**, 461 (2000).

[33] R.Z. Denke, Relatório de Iniciação científica, IFUSP, 2000. Não-publicado; D.A. Fogaça, Relatório de Iniciação científica, IFUSP, 2000. Não-publicado.

[34] T. Muta, "Foundations of Quantum Chromodynamics : An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories", World Scientific Pub. Co., 1987.

[35] C. Cronström, *Phys. Lett.* **B90**, n.3, 267 (1980).

[36] C. Itzykson and J.B. Zuber, "Quantum Field Theory", McGraw-Hill Int. Ed., 1985.

[37] S.C. Benzahra, *Physical Review* **C 61**, 064906 (2000).

[38] F.S. Navarra and C.A.A. Nunes, *Phys. Lett.* **B356**, 439 (1995) e referências aí citadas.

[39] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein and V.I. Zakharov, *Nucl. Phys.* **B147**, 385 (1979).

[40] ver, por exemplo: Richard D. Field, "Applications of Perturbative QCD", Addison-Wesley Pub. Co., 1989.