

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

**Aspectos gerais sobre transições de fase fora
do equilíbrio em sistemas com simetria de
inversão: estudo em redes regulares e
complexas**

Jesus Mauricio Encinas Riveros

Orientador: Prof. Dr. Carlos
Eduardo Fiore dos Santos

Tese de doutorado apresen-
tada ao Instituto de Física como
requisito parcial para a obtenção
do título de Doutor em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Eduardo Fiore dos Santos (Orientador)(IFUSP)

Prof. Dr. Rafael Sá de Freitas (IFUSP)

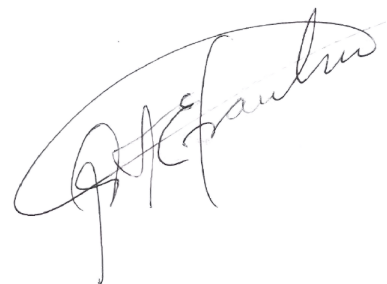
Prof. Dr. José Abel Hoyos Neto (IFSC-USP)

Prof. Dr. Silvio Ferreira (UFV)

Prof. Dr. Jeferson Arenzon (UFRGS)

São Paulo

2021



FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Encinas Riveros , Jesus Mauricio

Aspectos gerais sobre transições de fase fora do equilíbrio em sistemas com simetria de inversão: estudo em redes regulares e complexas. São Paulo, 2021.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, Instituto de Física, Depto. de Física Geral

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Fiore dos Santos

Área de Concentração: Mecânica Estatística

Unitermos: 1. Modelo do votante majoritário; 2. Transições de fase; 3. Aproximação de campo médio.

USP/IF/SBI-029/2021

University of São Paulo
Physics Institute

**General aspects about nonequilibrium phase
transitions in systems with inversion
symmetry: a study in regular and complex
networks**

Jesus Mauricio Encinas Riveros

Supervisor: Prof. Dr. Carlos
Eduardo Fiore dos Santos

Thesis submitted to the Physics Institute of the University of São Paulo in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Carlos Eduardo Fiore dos Santos (Supervisor)(IFUSP)

Prof. Dr. Rafael Sá de Freitas (IFUSP)

Prof. Dr. José Abel Hoyos Neto (IFSC-USP)

Prof. Dr. Silvio Ferreira (UFV)

Prof. Dr. Jeferson Arenzon (UFRGS)

São Paulo

2021

Agradecimentos

Gostaria de agradecer

Primeiramente a Deus por me acompanhar ao longo dos meus caminhos.

Aos meus pais pelo imenso carinho que recebo deles e que sempre me apoiaram e me incentivaram nas minhas escolhas.

A minha grande família por me apoiar em todo momento e todo lugar.

A minha noiva Bianca Guzman pelo apoio e amor que sempre me deu.

Ao meu querido Professor e amigo Dr. Carlos Eduardo Fiore dos Santos, pela assistência que sempre me mostrou, por sua paciência, orientação, colaboração, dedicação, confiança e amizade.

Ao Professor Mario de Oliveira pela confiança e oportunidades que me deu de ser o monitor das suas disciplinas.

Aos amigos dos departamentos de física geral e física matemática com quem compartilhei gratas conversas e me demonstraram colaboração e simpatia.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Nesta tese de doutorado investigamos diferentes aspectos acerca de transições de fase no modelo irreversível/fora do equilíbrio mais simples com simetria com inversão Z_2 "up-down": o modelo do votante majoritário (MVM) [J.Stat.Phys. **66**, 273(1992)], caracterizado originalmente por uma transição de fase ordem-desordem contínua, tanto em redes regulares quanto em redes complexas. Começamos pela análise sobre a existência de ingredientes mínimos para a ocorrência de transições de fase descontínuas no modelo do votante majoritário. Analisamos o papel da inércia, conectividade da rede (número de vizinhos) e topologia da rede (regulares e complexas). Em seguida desenvolvemos uma nova teoria de campo médio, alternativa aquela considerada em [Phys. Rev. E **95**, 042304(2017)], considerando agora uma vizinhança arbitrária e exemplificamos numa variante do modelo majoritário caracterizado pela presença de um ruído extra. Ao contrário de modelos similares, a presença de um ruído extra não altera a ordem da transição, independentemente da topologia da rede. Finalmente o efeito da desordem temporal em transições descontínuas de sistemas com simetria de inversão também foi investigado, estendendo e generalizando para outros parâmetros de controle e outras simetrias os resultados de [Phys. Rev. E **98**, 032518(2018)] para transições com estados absorventes.

***Palavras-chave:** Modelo do votante majoritário, transições de fase, aproximação de campo médio.*

Abstract

In this PHD thesis, distinct aspects about the majority vote model (MVM) [J.Stat.Phys. **66**, 273(1992)], one of the simplest nonequilibrium models with Z_2 up-down symmetry was considered. In the first analysis, we tackle our study about existence of fundamental ingredients for discontinuous phase transitions in the MVM. The role of inertia, neighborhood and lattice topology was investigated. Second, we proposed a new mean-field approach (MFA) alternative to the one in [Phys. Rev. E **95**, 042304(2017)] for the MVM by taking into account a general neighborhood and we exemplified it in a modified version in which an extra noise is present. Unlike allied models, such extra noise does not shift the continuous phase transition to a discontinuous one. Finally, the effect of temporal disorder was carefully investigated, in order to extend for other control parameters as well as to confirm the findings from [Phys. Rev. E **98**, 032518(2018)] for systems with other symmetries beyond absorbing phase transitions.

Keywords: *Majority vote model, phase transitions, mean field approach.*

Conteúdo

Resumo	iii
Abstract	iv
Introdução	1
1 Conceitos essenciais	3
1.1 Equação mestra	3
1.2 Processo Markoviano e método de Monte Carlo	4
1.3 Ergodicidade	4
1.4 Estado estacionário e Balanço detalhado	5
1.5 Dinâmica de um sítio	5
1.6 Expoentes críticos e universalidade	6
1.7 Análise de escala finita	8
1.8 Redes Complexas	10
1.8.1 Redes homogêneas e heterogêneas	10
2 Modelo de votante majoritário com inércia	12
2.1 Aproximação de campo médio	13
2.2 Simulações	17
2.2.1 Transições de fase contínuas	18
2.2.2 Transições de fase descontínuas	20
2.3 Conclusões	24
3 Modelo do votante majoritário com ruído extra em redes complexas	25
3.1 Aproximação de campo médio	25
3.2 Simulações	28
3.3 Conclusões	33
4 Desordem temporal no modelo do votante majoritário	34
4.1 Aproximação de campo médio	35
4.2 Desordem temporal no parâmetro de controle	37
4.3 Desordem temporal na inércia	41
4.4 Simulações	43
4.5 Conclusões	44
5 Conclusões	46
Appendices	48

Lista de Tabelas

2.1	Para o sítio central $\sigma_0 = -1$ e conectividade $k = 8$, a função sinal para diferentes configurações. X é o valor da expressão resultante $1 - \frac{2n_k^-}{k} - 2\theta(1 - \frac{n_k^-}{k})$ e θ_p denota posição do patamar.	18
4.1	Coeficientes $A'(k, f, \theta)$ para $f = 0.12$ e $k_0 = 12$ e a fase correspondente. . .	41
4.2	Coeficientes $A'(k, f, \theta)$ para $f = 0.12$ and $k = 20$ e as fases correspondentes.	43

Lista de Figuras

1.1	Colapso dos dados de susceptibilidade magnética para o modelo de Ising bidimensional. Os pontos são tomados de medições Monte Carlo da susceptibilidade para cinco tamanhos diferentes do sistema como indicado. Para esse colapso encontrou-se $\gamma = 1.76$, $\nu = 1.00$ e $T_c = 2.27J$. Note que o colapso se desfaz uma vez que nos afastamos suficientemente da temperatura crítica ($t = 0$) [1].	9
1.2	Representações esquemáticas de a) uma rede regular ou reticulado, e das redes complexas b) rede aleatória regular de -grau $k = 4$ (Rk-RN), c) rede Erdős-Rényi (ER) com distribuição de graus modelável por uma distribuição de Poisson e d) rede Barabási-Albert (BA) com distribuição de graus modelável por uma distribuição tipo lei de potência.	11
2.1	De acima para baixo, resultados de campo médio para a rede aleatória regular (Rk-RN) para $k = 4$, $k = 8$, $k = 12$ e $k = 20$, respectivamente. Os painéis da esquerda e direita mostram o comportamento da magnetização m vs f para diferentes valores de inercia θ e diagramas de fase ORD e DES representam às fases ordenada e desordenada, respectivamente. Para os casos $k = 8$, $k = 12$ e $k = 20$ para resaltar a biestabilidade em f_f a curva de magnetização vira de cor e em f_b a curva spinodal de magnetização chega no estado desordenado $m = 0$	17
2.2	Da cima para baixo, resultados numéricos para $k = 4, 8, 12$, respectivamente para a rede aleatória regular (Rk-RN). Os painéis esquerdos mostram o comportamento de $\langle m \rangle$ versus f para $\theta = 0.33$ ($k = 4$) e 0.35 ($k = 8$ e 12), à direita os diagramas de fase, respectivamente. Inset: o cumulante reduzido U_4 vs f para $\theta = 0.05$ e $k = 8$. Os círculos (cruzes) correspondem ao aumento (diminuição) de f partindo da fase ordenada (desordenada) [2].	19
2.3	Esquema de interação de um spin com os seus vizinhos mais próximos em uma estrutura regular bidimensional.	20
2.4	Simulações para redes regulares (RR) bidimensionais com diferentes tamanhos do sistema $N = L \times L$: Os painéis da esquerda mostram o cumulante de quarta ordem reduzida U_4 vs f para (a) primeiros vizinhos, (c) os segundos vizinhos e (e) os terceiros vizinhos. Inset: a variância χ vs f . Os painéis da direita mostram os seus diagramas de fase correspondentemente, em todos os casos as linhas contínuas correspondem a transições de fase críticas [2].	20
2.5	Resultados para $k = 20$ e $\theta = 0.3$: o parâmetro de ordem $\langle m \rangle$ vs f para a rede regular aleatória Rk-RN para um sistema de $N = 5000$ sítios	21

- 2.6 Resultados para $k = 20$ e $\theta = 0.35$: Painel (a) compara o parâmetro de ordem $\langle m \rangle$ vs f para a rede regular aleatória Rk-RN (círculos e estrelas) e reticulado (símbolo \times) para um sistema de $N = 10^4$ sítios. Para o caso do reticulado: Os painéis (b) e (c) mostram as áreas iguais da distribuição de probabilidade não normalizada do parâmetro de ordem m , e U_4 vs f para distintos tamanhos de L , ($N = L \times L$), respectivamente. Inset: a variância χ vs f , em (d), a posição dos máximos de χ , mínimos de U_4 e áreas iguais vs $1/N$ [2]. 23
- 2.7 Diagrama de fase θ vs f para o modelo do votante majortário com inercia com $k = 20$ em um reticulado. Linhas contínuas e tracejadas correspondem a transições de fase críticas e descontínuas, respectivamente. Inset: O mesmo para uma topologia Rk-RN. Círculos (\times) correspondem ao incremento(diminuição) de f começando da fase ordenada(desordenada) [2]. . . 23
- 3.1 Representação esquemática dos casos genéricos de vizinhanças, se mostra a relação de um spin com os seus vizinhos, neste caso ($k = 5$). 26
- 3.2 Painéis (a) e (b), mostram para a rede Rk-RN e $p_0 = 0.1$ e $k_0 = 10$, a variância χ e o cumulante reduzido U_4 versus f para diferentes tamanhos de sistema N . Inset: a magnetização por spin $|m|$ vs f . Painéis (c) e (d) mostram os expoentes críticos β/ν e γ/ν para $p = 0.1(k_0 = 10)$ e $p = 0.5(k_0 = 40)$, respectivamente. Eles são consistentes com $\beta/\nu = 1/4$ e $\gamma/\nu = 1/2$, respectivamente [3]. 29
- 3.3 Painéis (a) e (b), mostram para a rede ER e $p = 0.4$ e $\langle k \rangle = 30$, a variância χ e o cumulante reduzido U_4 versus f para diferentes tamanhos de sistema N . Inset: Um gráfico Log-Log de $y^* = f_c - f_N$ versus N , com f_N calculado do valor máximo de χ . A linha reta tem inclinação consistente a $1/\nu = 1/2$. Painéis (c) e (d) mostram os expoentes críticos β/ν e γ/ν (ambos os dois para $\langle k \rangle = 30$), respectivamente. Eles são consistentes com $\beta/\nu = 1/4$ e $\gamma/\nu = 1/2$, respectivamente [3]. 29
- 3.4 Painéis (a) e (b), mostram para a rede AB e $p_0 = 0.4$ e $k_0 = 20$, a variância χ e o cumulante reduzido U_4 versus f para diferentes tamanhos de sistema N . Painéis (c) e (d) mostram os expoentes críticos β/ν e γ/ν para $p = 0.4(k_0 = 20)$ e $p = 0.6(k_0 = 10)$, respectivamente. Eles são consistentes com $\beta/\nu = 0.34(1)$ e $\gamma/\nu = 0.32(1)$, respectivamente [3]. 30
- 3.5 Painel (a) mostra as razões de transição f_c versus o grau dos nós k_0 para diferentes valores de p na rede Rk-RN. Os círculos e as linhas correspondem às estimações obtidas por médio de Eq. (3.10) e Eq. (3.15), respectivamente. O símbolo \times corresponde aos valores numéricos obtidos do cruzamento de U_4 para diferentes N 's. Painel (b) mostra o diagrama de fase p_c versus f_c para diferentes k_0 s [3]. 31
- 3.6 Painel (a) mostra as razões de transição f_c versus o grau médios $\langle k \rangle$ para diferentes valores de p na rede ER. Os círculos e as linhas correspondem às estimações obtidas por médio de Eq. (3.10) e Eq. (3.14), respectivamente. O símbolo \times corresponde aos valores numéricos obtidos do cruzamento de U_4 para diferentes N 's. Painel (b) mostra o diagrama de fase p_c versus f_c para diferentes valores de $\langle k \rangle$ s. [3]. 31

3.7	Panel (a) mostra as razões de transição f_c versus o grau mínimo k_0 para diferentes valores de p na rede AB. Os círculos e as linhas correspondem às estimações obtidas por médio de Eq. (3.10) e Eq. (3.16), respectivamente. O símbolo \times corresponde aos valores numéricos obtidos do cruzamento do cumulante reduzido U_4 para diferentes N 's. Painel (b) mostra o diagrama de fase p_c versus f_c para diferentes k_0 s [3].	32
4.1	Painel (a) mostra o diagrama de fase na ACM para rede aleatória regular para $k = 12$ $k_0 = 12$. ORD, ME and DIS denotam as fases ordenada, metaestável e desordenada, respectivamente. Em (b), a magnetização estacionária m versus f para $\theta = 0.45$. As linhas contínuas e tracejadas denotam as soluções estáveis e instáveis da Eq. (4.5) respectivamente. Os comportamentos que caracterizam a evolução de m como função do tempo são apresentados nos painéis (c) – (d) para $f = 0.016$ (c), $f = 0.10$ (d) and 0.06 (inset) para diferentes valores iniciais $m(0)$	36
4.2	Desordem temporal em ACM: Para uma Rk-RN com $k_0 = 12$, $\theta = 0.45$ e $\Delta t = 5$, a evolução temporal de m para diferentes escolhas de f_+ e f_- junto com diferentes realizações independentes. Painel (a) – (d) exemplificam os seguintes casos: $(f_-, f_+) \in (\text{ORD}, \text{ME})$ com $\bar{f} < f_b$ e $\bar{f} > f_b$, $(f_-, f_+) \in (\text{ORD}, \text{DES})$ e $(f_-, f_+) \in (\text{ME}, \text{DES})$, respectivamente. Curvas tracejadas e de símbolos correspondem às versões pura (para $f = f_+$) e média de m para $N_D = 10^3$ realizações, respectivamente.	38
4.3	Para uma Rk-RN com $k_0 = 12$ e $\theta = 0.454$, painéis (a) – (b) mostram a média de m sobre $N_D = 10^3$ realizações independentes para $\Delta t = 2, 3, 4, 5$ e 6 para $(f_-, f_+) \in (\text{ORD}, \text{DES})$ e (ME, DES) , respectivamente.	39
4.4	Para Rk-RN com $k_0 = 12$ and $\theta = 0.45$ diagrama de fase em ACM sob desordem temporal no parâmetro f . As fases resultantes são representada por diferentes cores. As linhas pontilhadas e tracejadas representam linhas de cruzamento e de transição de fase descontínua, respectivamente.	40
4.5	Análise em ACM para a desordem temporal na inércia: Para a rede Rk-RN com valores $k_0 = 12$ e $f = 0.12$, painéis (a) – (c) exemplificam a evolução temporal média de $m(t)$ para diferentes configurações iniciais e valores de inércia $(\theta_-, \theta_+) \in: (\text{ORD}, \text{ME}), (\text{ORD}, \text{DES}), (\text{ME}, \text{DES}), (\text{ME}, \text{ME})$ [inset], respectivamente. Em (d) o diagrama de fase com linhas tracejadas e pontilhadas representando linhas de transição de fase descontínuas e de cruzamento entre fases respectivamente. A fase resultante é representada pelas cores.	42
4.6	Para $k_0 = 20$, $f = 0.12$, $\theta_- = 0.334 \in \text{ME}$ e $\theta_+ = 0.412 \in \text{DES}$, a média de $m(t)$ versus t obtida para $N_D = 10^3$ realizações independentes com desordem e diferentes Δt 's.	42
4.7	Painel (a) exemplifica para $N = 5000$, $k_0 = 20$ e $\theta = 0.3$, o parâmetro de ordem $ m $ versus f para o sistema puro. As linhas contínuas e pontilhadas denotam o incremento tipo ida (forward) e reversa (backward) de f , respectivamente. Painéis (b) – (d) mostram a evolução temporal média do parâmetro de ordem m (para $N = 10^4$ realizações) para diferentes condições iniciais $m(0)$ com $(f_-, f_+) \in (\text{ME}, \text{ME}), (\text{ME}, \text{DIS}), (\text{ORD}, \text{DIS})$. respectivamente.	44

- 4.8 Para Rk-RN com $N = 10^4$, $k_0 = 20$ e $\theta = 0.3$, painel (a) a evolução temporal média do parâmetro de ordem $m(t)$ partindo de um estado ordenado com $f_- = 0.10$ (ME) para diferentes valores de f_+ 's. Painel (b) mostra para $f = 0.12$ e $m(0) = 1$, as evoluções temporais da média de $m(t)$ para $\theta_- = 0.30$ (ME) com diferentes valores de θ_+ 's. Em (c) o mesmo com $\theta_- = 0.28$ e 0.29 (ambos os dois pertencendo à fase ORD) e diferentes θ_+ 's começando desde $m(0) = 10^{-4}$. em todos os casos, as médias são obtidas de $N = 10^3 - 10^4$ realizações 45

Introdução

Sistemas com simetria Z_2 ("up-down") consistem em descrições fundamentais simplificados para descrição da quebra espontânea de simetria e suas transições de fase e classes de universalidade têm sido um importante tópico de pesquisa científica nas últimas décadas [4, 5, 6]. Em diferentes casos, as transições de fase entre os diferentes regimes não são "suaves"(contínuas), mas descontínuas, caracterizadas por um comportamento significativamente diferente ao observado em transições contínuas.

Comparativamente elas têm recebido menos atenção quando comparadas com as transições contínuas, de forma que uma descrição completa acerca de suas características e ingredientes fundamentais (no âmbito das transições de fase fora do equilíbrio) para suas ocorrências ainda é escassa.

Heuristicamente, a ocorrência de uma transição contínua em sistemas com simetria Z_2 é descrita, sob um ponto de vista de campo médio, por meio da equação "logística" $\dot{m} = am - bm^3$, exibindo as soluções $m = 0$ e $m = \pm\sqrt{a/b}$, estáveis para valores negativos e positivos do parâmetro de controle a , respectivamente. Por outro lado, a descrição de transições descontínuas requer a inclusão de um termo adicional $+cm^5$, sendo que o sinal $c > 0$ garante valores finitos de m . Neste caso, m apresenta um salto/descontinuidade de $\pm\sqrt{b/2c}$ ocorrendo em $a = b^2/4c$. Apesar de prevista por meio da abordagem dada (relativamente simples), em sistemas fora do equilíbrio termodinâmico há poucos modelos microscópicos apresentando transições descontínuas.

Recentemente, Chen e colaboradores [7] mostraram que o modelo do votante majoritário, originalmente sendo um dos modelos mais simples fora do equilíbrio com simetria de inversão e originalmente apresentando uma transição ordem-desordem continua [8, 9, 10], exhibe uma transição de fase descontínua em redes complexas quando valores significativos de inércia, isto é, uma dependência com o spin local, é acrescida na dinâmica de um sítio. A importância desse resultado se deve não apenas ao fato da ocorrência de uma transição de fase descontínua num modelo mínimo, permitindo então verificarmos e estabelecermos características e assinaturas típicas de transições descontínuas, como também pelo fato da inércia ser um ingrediente presente em seres humanos e outras espécies, de forma que o presente modelo possa ser em princípio usado em teoria para uma descrição teórica (simplificada) de tais fenômenos. Entretanto, diferentes questões como a existência de ingredientes fundamentais para sua ocorrência (transições descontínuas) bem como o estudo de ingredientes mais realistas, incluindo variações temporais de parâmetros não tinham sido consideradas.

A presente tese de doutorado objetiva a responder as questões acima. Em particular, analisamos separadamente o papel de diferentes ingredientes, dentre eles a inércia, vizinhança e topologia da rede no estabelecimento(ocorrência) de transições descontínuas. Nosso estudo considera as abordagens de campo médio e simulações numéricas em redes regulares e complexas. Também consideramos o efeito da desordem temporal, tanto no

parâmetro de desalinhamento do modelo do votante majoritário, como na inércia, a fim de verificarmos a ocorrência/supressão da transição de fase bem como seus efeitos. Finalmente, apresentamos uma comparação entre o modelo do votante majoritário com outros modelos similares, dentre eles com resultados para o modelo do q -votante (q -voter model [11]), no qual uma mudança na ordem da transição, de uma contínua para uma descontínua, é verificada para valores altos de q e quando um novo ingrediente, a independência, é acrescida. Em nosso caso verificamos que a independência não altera a ordem da transição no votante majoritário.

Esta tese é organizada conforme descrito a seguir: No primeiro capítulo apresentamos os conceitos essenciais a serem utilizados nos capítulos posteriores. No segundo capítulo estudamos o modelo do votante majoritário com inércia (MVMI) sobre redes regulares e complexas. A inércia representa uma medida da competição de um sítio em relação aos seus vizinhos. No terceiro capítulo apresentamos um estudo do MV sobre redes complexas quando na dinâmica de um sítio é incorporada um ruído extra. Finalmente no quarto capítulo estudamos a influência sobre a transição de fase e evolução temporal da magnetização do MVMI definido em redes aleatórias regulares na presença da desordem temporal tanto no parâmetro de controle quanto na inércia. Todas as nossas análises são feitas por meio de aproximações de campo médio (ACM) como também simulações numéricas da dinâmica do sistema, em redes regulares e complexas.

Capítulo 1

Conceitos essenciais

1.1 Equação mestra

Começamos supondo que o sistema esteja no estado (configuração microscópica) μ , vamos então definir $R(\mu \rightarrow \nu)dt$ como a probabilidade de transição do estado μ para ν no intervalo de tempo dt . Com isso, $R(\mu \rightarrow \nu)$ é a taxa de transição do estado μ para o estado ν . Em muitos casos a taxa de transição é independente do tempo. Podemos também definir uma taxa de transição para o estado possível ν ao qual o sistema possa atingir. Usualmente, o conjunto de taxas de transição é o que conhecemos acerca da dinâmica do sistema, portanto conhecendo o estado inicial do sistema só precisamos deixar evoluir o sistema um certo intervalo de tempo para o sistema atingir qualquer um estado dentre o grande número de estados possíveis. Com essas ideias em mente introduzimos o tratamento probabilístico do problema. Definimos um conjunto de pesos $P_\mu(t)$ que representam a probabilidade do sistema estar no estado μ no tempo t . Na mecânica estatística trabalha-se com esses pesos, pois eles representam boa parte do nosso conhecimento acerca do estado do sistema. Podemos escrever a *equação mestra* para a evolução de $P_\mu(t)$ em termos das taxas $R(\mu \rightarrow \nu)$ como:

$$\frac{dP_\mu(t)}{dt} = \sum_\nu [P_\nu(t)R(\nu \rightarrow \mu) - P_\mu(t)R(\mu \rightarrow \nu)], \quad (1.1)$$

sendo o primeiro termo do lado direito da Eq. (1.1) a taxa com que o sistema "chega no estado μ " e o segundo termo a taxa com que o sistema "sai do estado μ " para outros estados. As probabilidades $P_\mu(t)$ devem obedecer a condição de normalização

$$\sum_\mu P_\mu(t) = 1, \quad (1.2)$$

para todo t , pois o sistema sempre deve ocupar algum estado microscópico. A solução da Eq. (1.1) sujeita à condição Eq. (1.2) diz respeito à forma em que os pesos $P_\mu(t)$ variam no tempo.

Os pesos P_μ estão relacionados às propriedades macroscópicas do sistemas por médio do *valor esperado*. Para a grandeza Q , que assume o valor Q_μ no estado μ , podemos

definir o valor esperado de Q no tempo t como

$$\langle Q \rangle = \sum_{\mu} Q_{\mu} P_{\mu}(t). \quad (1.3)$$

Claramente essa quantidade contém informação importante acerca do valor real de Q que esperamos medir num experimento.

1.2 Processo Markoviano e método de Monte Carlo

A equação mestra obtida acima é a equação que descreve, a tempo contínuo, a evolução temporal da distribuição de probabilidades de um processo markoviano. Processos markovianos são aqueles em que a probabilidade de transição entre dois estados microscópicos quaisquer depende apenas do estado anterior e não de outros estados pelos quais o sistema tenha passado. Muitos processos da natureza podem ser tratados aproximadamente como markovianos. Além disso, eles são comumente utilizados em simulações numéricas para a representação da dinâmica de um sistema em particular. Quase todos os esquemas Monte Carlo baseiam-se em processos markovianos, que são a base da geração do conjunto de estados percorridos pelo sistema. A probabilidade de gerar o estado ν a partir do estado μ , é chamado de *probabilidade de transição* $P(\mu \rightarrow \nu)$ do estado μ para o estado ν . Além disso,

$$\sum_{\nu} P(\mu \rightarrow \nu) = 1, \quad (1.4)$$

pois o processo markoviano deve gerar algum estado ν após o sistema ter permanecido ou transitado pelo estado μ .

Para os modelos estudados nesta tese, a evolução temporal da probabilidade de um dado estado microscópico baseia-se num processo markoviano. Em outras palavras, repetidamente ele é usado para gerar uma cadeia de Markov de estados do sistema.

1.3 Ergodicidade

A ergodicidade é uma condição que deve ser satisfeita para que o processo markoviano atinja qualquer estado do sistema a partir de qualquer um outro estado quando aplicamos o processo (markoviano) por um longo período de tempo. Cada estado ν acontece/aparece com uma probabilidade diferente de zero p_{ν} obedecendo uma certa distribuição de probabilidade. Em caso de um estado ser inacessível a partir de um outro estado μ qualquer, sem importar quanto tempo tenha sido repetido processo, então dito processo não será ergódico. Isto é o que ocorre em transições de fase envolvendo estados absorventes. A condição de ergodicidade nos diz que eventualmente poderá haver uma probabilidade de transição de um estado para outro igual a zero ao longo de uma sequência de estados, embora, deve haver pelo menos alguma sequência de estados, dentre as muitas possíveis, em que a probabilidade de transição entre esses dois estados seja diferente de zero.

1.4 Estado estacionário e Balanço detalhado

Dizer que o sistema está no estado estacionário significa que a probabilidade não varia mais com o tempo. Matematicamente isso pode-se expressar como

$$\sum_{\nu} p_{\mu} P(\mu \rightarrow \nu) = \sum_{\nu} p_{\nu} P(\nu \rightarrow \mu). \quad (1.5)$$

Em particular pode-se mostrar que quando o balanço detalhado é obedecido,

$$p_{\mu} P(\mu \rightarrow \nu) = p_{\nu} P(\nu \rightarrow \mu), \quad (1.6)$$

então o sistema atingirá um estado estacionário de equilíbrio termodinâmico. Por outro lado, se o balanço detalhado for violado o sistema evoluirá para um estado estacionário onde a distribuição de probabilidades é em geral não é a distribuição de probabilidade de Boltzmann-Gibbs. Nesse caso, a dinâmica precisa ser especificada para que as propriedades sejam obtidas. O modelo considerado aqui viola a condição do balanço detalhado.

1.5 Dinâmica de um sítio

Os modelos estudados ao longo desta tese envolvem dinâmica de um sítio. isto é, o estado de apenas um spin/sítio é atualizado em cada passo de tempo. Desta forma a equação mestra adquire uma forma mais conveniente, conforme descrito a seguir.

Dada uma possível configuração microscópica do sistema denotada por $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$, onde σ_i denota o spin do sítio i do sistema de tamanho N , a evolução temporal da probabilidade associada à configuração σ , $P(\sigma, t)$, é governada pela equação mestra

$$\frac{dP(\sigma, t)}{dt} = \sum_{\sigma' \neq \sigma} [\omega(\sigma' \rightarrow \sigma) P(\sigma', t) - \omega(\sigma \rightarrow \sigma') P(\sigma, t)]. \quad (1.7)$$

Uma vez que as transições entre configurações diferem por apenas um spin, $\omega(\sigma' \rightarrow \sigma)$ pode ser escrita (no caso de sistemas com simetria de inversão) como

$$\omega(\sigma' \rightarrow \sigma) = \sum_{i=1}^N \delta(\sigma'_1, \sigma_1) \delta(\sigma'_2, \sigma_2) \dots \delta(\sigma'_i, \sigma_i) \dots \delta(\sigma'_N, \sigma_N) \omega_i(\sigma), \quad (1.8)$$

onde $\delta(\sigma'_j, \sigma_j)$ é a função delta de Kronecker e assume os valores de 1 ou 0 se os spins são iguais ou diferentes, respectivamente, e $\omega_i(\sigma)$ é a taxa de mudança do i -ésimo spin.

Neste caso, as equações mestras adquirem a seguinte forma

$$\frac{dP(\sigma, t)}{dt} = \sum_{i=1}^N \{\omega_i(\sigma^i) P(\sigma^i, t) - \omega_i(\sigma) P(\sigma, t)\}, \quad (1.9)$$

onde $\sigma^i = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, -\sigma_i, \dots, \sigma_N)$.

A evolução temporal de uma dada média $\langle f(\sigma) \rangle$ da função de estado $f(\sigma)$, é dada por

$\langle f(\sigma) \rangle = \sum_{\sigma} f(\sigma)P(\sigma, t)$, torna-se

$$\frac{d\langle f(\sigma) \rangle}{dt} = \sum_{i=1}^N \{f(\sigma^i) - f(\sigma)\} \omega_i(\sigma), \quad (1.10)$$

onde no caso da magnetização por spin $f(\sigma) = \sigma_j$, temos

$$\frac{d\langle \sigma_j \rangle}{dt} = -2\langle \sigma_j \omega_j(\sigma) \rangle. \quad (1.11)$$

Cabe ressaltar que, embora tenhamos exemplificado o caso de sistemas com simetria de inversão, a presente descrição aplica-se numa dinâmica de "um sítio" qualquer.

1.6 Expoentes críticos e universalidade

Embora a introdução dos conceitos de criticalidade, expoentes críticos e universalidade sejam de caráter geral para transições de segunda ordem, iremos considerar sistemas do tipo de Ising como cenário físico. O modelo de Ising é um modelo magnético simples, em que os dipolos ou "spins" s_i estão situados nos vértices ou sítios de um reticulado, em que cada sítio i pode assumir apenas um dos valores $+1$ e -1 . Se há N sítios sobre o reticulado, então o sistema pode ter 2^N estados diferentes, e a energia de um estado particular é dado pelo hamiltoniano de Ising:

$$H = -J \sum_{\langle\langle ij \rangle\rangle} s_i s_j - B \sum_i s_i, \quad (1.12)$$

em que J é uma energia de interação entre spins vizinhos $\langle i, j \rangle$ e B é um campo magnético externo. Para introduzir os conceitos de criticalidade, expoentes críticos e universalidade dizemos que *estamos interessados em simular um sistema de Ising de tamanho finito usando os métodos Monte Carlo, tal que podamos estimar os valores das grandezas tais como a magnetização m , a susceptibilidade magnética χ ou o calor específico c para qualquer temperatura.*

Os spins de um modelo de Ising em equilíbrio formam aglomerados de tamanho típico ξ , chamado de comprimento de correlação. Esse comprimento de correlação diverge quando a temperatura se aproxima à temperatura crítica T_c (a temperatura em que o parâmetro de ordem, -por exemplo a magnetização- se anula). Definimos o parâmetro adimensional t , chamada *temperatura reduzida*, que mede a distância à T_c :

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}. \quad (1.13)$$

Quando $t = 0$, o sistema está na temperatura crítica. A divergência do comprimento de correlação próxima da transição de fase comporta-se como

$$\xi = |t|^{-\nu}, \quad (1.14)$$

em que a quantidade positiva ν é chamada de *expoente crítico*. Tomamos o valor absoluto da temperatura reduzida $|t|$ já que esse comportamento acontece abaixo e acima da

temperatura crítica T_c . O valor o expoente crítico ν é independente do acoplamento J , ou o tipo de estrutura (quadrada, triangular) numa mesma dimensão. No entanto, esse expoente depende em si da dimensão d em que o sistema esteja sendo estudado. Essa propriedade é conhecida como **universalidade** e é um dos resultados mais importantes proveniente dos grupos de renormalização. O valor de ν depende da dimensionalidade da rede em que estejamos estudando-a, assim o modelo de Ising em duas dimensões defere do valor de ν em três dimensões. Além da divergência no comprimento de correlação, há também divergências na suscetibilidade magnética χ e no calor específico c . Assim outros dois expoentes críticos universais governam as divergências nessas grandezas.

$$\chi \sim |t|^{-\gamma}, \quad (1.15)$$

$$c \sim |t|^{-\alpha}, \quad (1.16)$$

Para descrever a divergência do tempo de correlação τ definimos uma classe de expoente levemente diferente, ao qual denotamos por z ;

$$\tau \sim |t|^{-z\nu} \quad (1.17)$$

em que τ é medido em passos Monte Carlo por sitio de rede. O expoente z é usualmente chamado de expoente dinâmico (que não deve ser confundido pelo número de coordenação da rede que usualmente denota-se por z). A sua definição defere dos outros expoente pela inclusão de ν , que é o mesmo ν que na Eq. (1.14); o expoente é de fato $z\nu$, não unicamente z . O expoente dinâmico esta associado a quantificar o efeito da desaceleração crítica. A desaceleração crítica depende do algoritmo que utilizamos em nossas simulações. Assim, diferentes algoritmos produzem diferentes valores de z , dessa forma z não é um expoente universal no mesmo sentido em que são ν , α e γ . Um valor grande de z significa que *o tempo de correlação* τ torna-se grande rapidamente ao aproximarmos da transição de fase, fazendo as nossas simulações muitos mais devagar e portanto menos precisas. Um valor pequeno de z implica relativamente pequenas desacelerações críticas e um rápido algoritmo perto de T_c . Se z for nulo, então não há desaceleração crítica e portanto o algoritmo poderá ser utilizado corretamente para a temperatura crítica se que τ se torne grande. Combinando Eq. (1.14) e Eq. (1.17) podemos escrever

$$\tau \sim \xi^z. \quad (1.18)$$

Essa equação nos diz como o tempo de correlação se faz grande quando o comprimento de correlação diverge perto do ponto critico, embora, em um sistema de tamanho finito o comprimento de correlação nunca deve divergir. Lembrando que o comprimento de correlação é a dimensão típica dos aglomerados de spins correlacionados no sistema.

O tamanho dos aglomerados será da ordem de L . O volume de L^d , onde d é a dimensionalidade do nosso sistema é o maior aglomerado de spins que possamos ter. Isto significa que a divergência do comprimento de correlação e representado por um corte na região para $\xi > L$. Para temperaturas próximas à temperatura crítica, a Eq. (1.18) comporta-se como

$$\tau \sim L^z. \quad (1.19)$$

Conhecendo a temperatura crítica T_c do nosso modelo, podemos utilizar a Eq. (1.19) para

medir z [1, 12].

1.7 Análise de escala finita

A análise de escala finita é uma técnica para extrairmos os valores dos expoentes críticos observando como as grandezas medidas variam quando o tamanho L do sistema aumenta. Vamos ilustrar a técnica para o caso do expoente γ da susceptibilidade. Em sistemas finitos o comprimento de correlação ξ sofre um corte quando se aproxima ao tamanho do sistema. Desta forma a susceptibilidade χ também sofrerá um *corte* implicando que em sistemas de tamanho finito a susceptibilidade nunca divergirá. Matematicamente podemos expressar esse *corte* da seguinte maneira: Se ainda denotarmos ξ como o valor do comprimento de correlação em um sistema *infinito* à temperatura t , então, o corte teria lugar quando $\xi > L$. Por outro lado quando $\xi \ll L$ o comportamento de χ será próximo ao do sistema infinito. Assim podemos expressar os efeitos de tamanho finito escrevendo χ da seguinte forma

$$\chi = \xi^{\gamma/\nu} \chi_0(L/\xi), \quad (1.20)$$

em que χ_0 é uma função adimensional de uma variável x e que possui as propriedades

$$\chi_0(x) = \text{constante} \quad \text{para} \quad x \gg 1 \quad (1.21)$$

e

$$\chi_0(x) \sim x^{\gamma/\nu} \quad \text{quando} \quad x \rightarrow 0 \quad (1.22)$$

A forma como a susceptibilidade é *cortada* perto de T_c está contida na forma funcional de χ_0 . É essa função que vamos medir por meio de nossas simulações Monte Carlo. A Eq. (1.20) contém toda a informação que precisamos acerca do comportamento do sistema quando variamos o seu tamanho. No entanto, ela não está em uma forma muito útil, pois ainda contém a variável ξ , que é o comprimento de correlação à temperatura t no sistema infinito que não conhecemos. Por essa razão, é conveniente reorganizar a Eq. (1.20), definindo uma nova função adimensional $\tilde{\chi}$ como:

$$\tilde{\chi}(x) = x^{-\gamma} \chi_0(x^\nu). \quad (1.23)$$

e fazendo uso da Eq. (1.14), obtemos

$$\chi = L^{\gamma/\nu} \tilde{\chi}(L^{1/\nu}|t|). \quad (1.24)$$

De fato teríamos duas equações como essa, uma para valores positivos e outra para valores negativos de t com diferentes funções $\tilde{\chi}$ pois o comportamento de χ não é simétrico em ambos lados da transição de fase. No entanto podemos combinar essas duas equações em uma só, estendendo a definição de $\tilde{\chi}(x)$ a valores negativos de x . Então podemos escrever

$$\chi = L^{\gamma/\nu} \tilde{\chi}(L^{1/\nu}t). \quad (1.25)$$

Essa é a equação básica para o comportamento de escala finita da susceptibilidade magnética. Ela estabelece como a susceptibilidade deve variar com o tamanho L do sistema para sistemas finitos próximos da temperatura crítica.

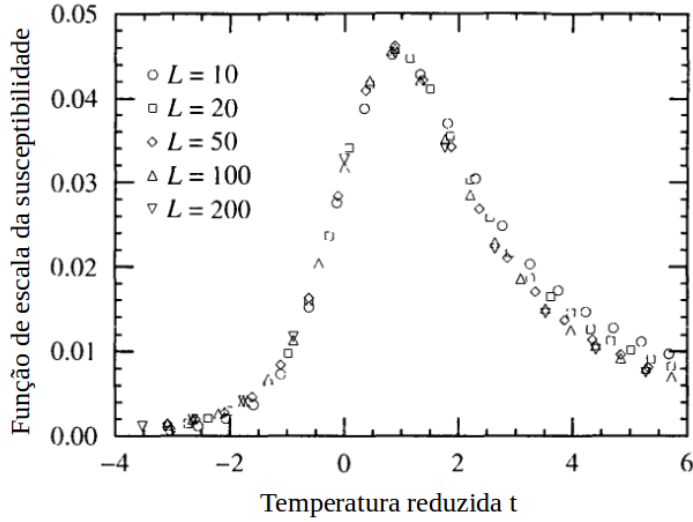


Figura 1.1: Colapso dos dados de susceptibilidade magnética para o modelo de Ising bi-dimensional. Os pontos são tomados de medições Monte Carlo da susceptibilidade para cinco tamanhos diferentes do sistema como indicado. Para esse colapso encontrou-se $\gamma = 1.76$, $\nu = 1.00$ e $T_c = 2.27J$. Note que o colapso se desfaz uma vez que nos afastamos suficientemente da temperatura crítica ($t = 0$) [1].

Agora suponhamos que executamos simulações de Monte Carlo para vários tamanhos L do sistema sobre um intervalo de temperaturas próximas da temperatura crítica. Para cada tamanho do sistema medimos a susceptibilidade magnética $\chi_L(t)$ para um conjunto de temperaturas t . Podemos rearranjar a Eq. (1.26) como

$$\tilde{\chi}(L^{1/\nu}t) = L^{-\gamma/\nu}\chi_L(t), \quad (1.26)$$

para obter uma estimação da função de escala $\tilde{\chi}$ para diferentes valores diferentes da variável de escala

$$x = L^{1/\nu}t \quad (1.27)$$

para cada tamanho do sistema. Uma vez que a função de escala deve ser a mesma para todos os tamanhos, essas curvas devem coincidir uma com outra. Em outras palavras, todas elas devem colapsar em uma mesma curva se juntamos elas em um mesmo gráfico assim como mostrado na Figura 1.1.

Esse método pode ser facilmente estendido a outras grandezas além da susceptibilidade, por exemplo, podemos mostrar que para o calor específico, a magnetização e o cumulante reduzido de quarta ordem por meio de argumentos similares aos dados previamente

$$c = L^{\alpha/\nu}\tilde{c}(L^{1/\nu}t), \quad (1.28)$$

$$m = L^{-\beta/\nu}\tilde{m}(L^{1/\nu}t). \quad (1.29)$$

e

$$U_4 = \tilde{U}(L^{1/\nu}t). \quad (1.30)$$

Executando o colapso de dados e usando as equações acima obtemos valores para α

e β , como também valores para ν e T_c [1]. Usaremos esta técnica para a detecção e classificação de transições de fase contínuas ao longo desta tese.

1.8 Redes Complexas

As redes complexas são estruturas dos sistemas biológicos, ecológicos, tecnológicos e socioeconômicos [13]. Elas são formadas por um conjunto de nós representando as entidades desses sistemas e um conjunto de ligações/laços representando a relação entre pares de nós [14, 15]. Além da diferença de natureza de sistemas representados por essas redes, elas possuem as mesmas propriedades topológicas universais, tais como propriedades de mundo pequeno [16], propriedades livre de escala [17], a existência de *motifs* (sub-estruturas de nós que aparecem de forma repetida na estrutura da rede) [18], e características de auto semelhança [19]. Além disso, tem sido dada grande atenção às propriedades de livre escala presente em várias redes reais que se diferenciam da regularidade observada nos modelos de rede aleatórias tais como a proposta por Erdős e Rényi (ER). Diz-se que uma rede tem propriedades de livre escala se ela tem uma distribuição de graus tipo lei de potência $p(k) \sim k^{-\gamma}$. Uma rede aleatória como a do Erdős-Rényi (ER) apresenta uma distribuição de graus tipo Poisson $p(k) = \langle k \rangle^k e^{-\langle k \rangle} / k!$ que apesar da aleatoriedade apresenta uma estrutura mais homogênea se comparadas com redes livre de escala.

Em outras palavras, em redes aleatórias regulares todos os nós têm exatamente o mesmo grau k . Então, podemos considerar que redes com uma distribuição de grau *Poissoniana* são quase regulares no sentido que a maioria dos seus nós têm o mesmo grau, próximo de \bar{k} , e apenas alguns nós têm um grau maior ou menor. Por outro lado, numa rede livre de escala o desvio dessa regularidade é muito grande. Por exemplo, a probabilidade de encontrar nós de grau muito pequeno é muito alta, por exemplo, $P(1) \sim 1$, enquanto apenas alguns nós têm grau muito grande, por exemplo, para $\gamma > 1$, $P(100) < 0.01$ [20].

1.8.1 Redes homogêneas e heterogêneas

A distribuição de graus de um grafo ou rede é a fração P_k de nós com grau k , para todo k . Uma distribuição de grau é *homogênea* se todos os seus valores são próximos à média de graus, tais como a distribuição de Poisson e Gaussiana. Uma distribuição de grau é *heterogênea* se há uma grande variabilidade entre os seus graus, isto é várias ordens de magnitude entre eles [21]. A figura abaixo ilustra essas estruturas de rede.

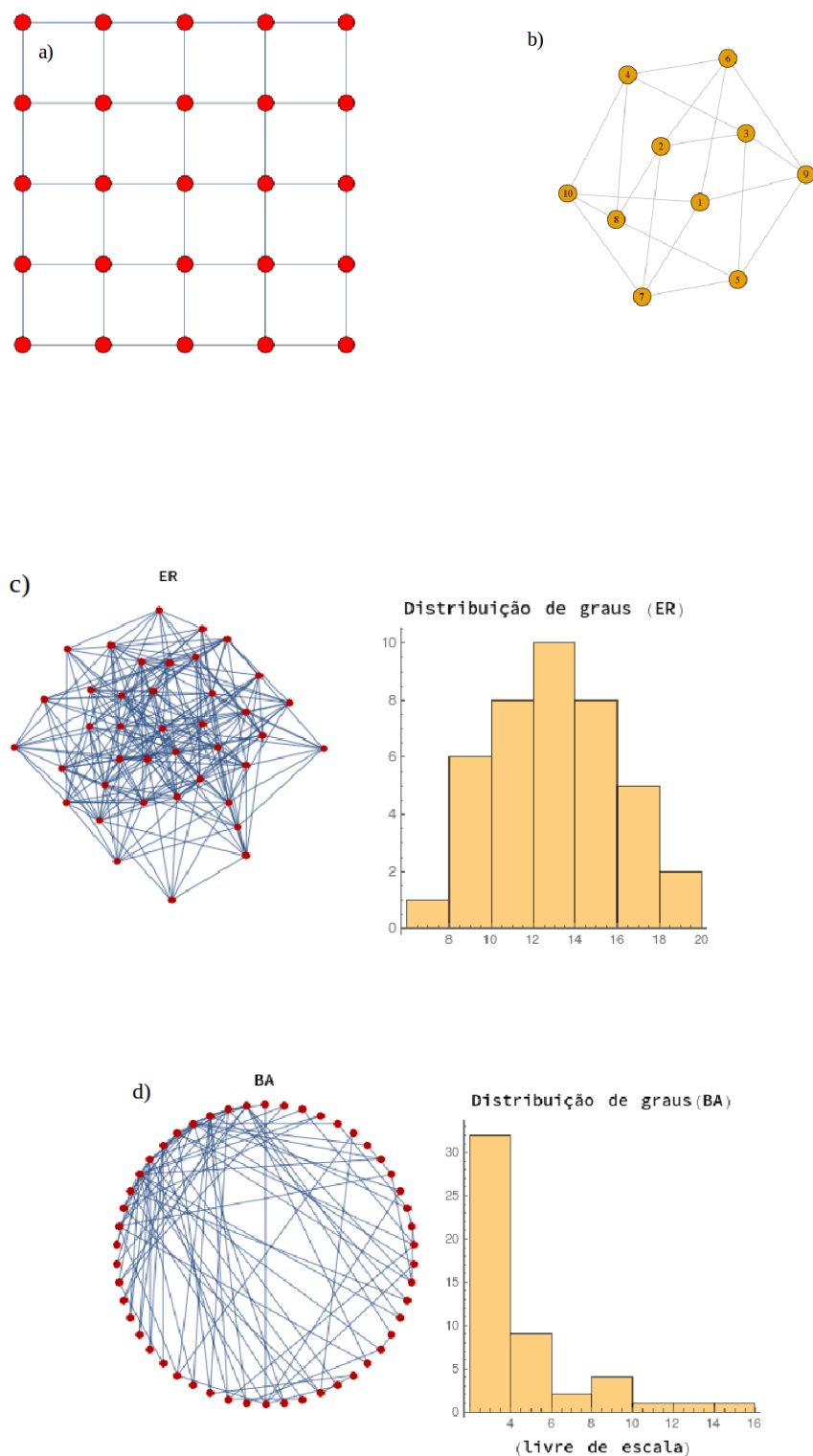


Figura 1.2: Representações esquemáticas de a) uma rede regular ou reticulado, e das redes complexas b) rede aleatória regular de $k = 4$ (Rk-RN), c) rede Erdős-Rényi (ER) com distribuição de graus modelável por uma distribuição de Poisson e d) rede Barabási-Albert (BA) com distribuição de graus modelável por uma distribuição tipo lei de potência.

Capítulo 2

Modelo de votante majoritário com inércia

O modelo do votante majoritário é um dos modelos fora do equilíbrio mais simples que apresenta uma transição ordem-desordem. Nesse capítulo apresenta-se o estudo de uma variante do modelo do votante majoritário original [8] em que a taxa de transição do spin depende não somente do estado do seus spins vizinhos mais próximos mas também do seu próprio estado na evolução do modelo. Esse novo ingrediente é chamado de inércia e desenvolve o papel de um novo parâmetro de controle do modelo cujo valor determinará a ocorrência ou não de uma transição de fase descontínua do sistema.

A inclusão da inércia no modelo do votante majoritário foi inicialmente proposta em Ref. [9]. Nesse trabalho, os autores verificaram que para valores apropriados da inércia a transição de fase muda, passando da usual transição de fase de segunda ordem para uma de primeira. Nesse mesmo trabalho estudou-se o comportamento da magnetização sobre redes complexas homogêneas, *Random degree-regular Networks Rd-RN* (redes aleatórias de grau regular) e redes do tipo Erdős-Rényi (ER) como também sobre redes de estrutura livre de escala (AB) [9].

No modelo do votante majoritário definido em uma rede de estrutura indefinida a cada nó da rede é designada uma variável de spin $\sigma_i \in +1, -1$ ($i = 1, \dots, N$). Em cada instante de tempo um nó i é aleatoriamente escolhido e ele tende a se alinhar com a maioria do seus vizinhos mais próximos com probabilidade $1 - f$, e com probabilidade complementar f que é um parâmetro de ruído, ele não segue não se alinha com a maioria. Desta forma, a taxa de mudança de um spin de σ_i para $-\sigma_i$ pode ser escrita como

$$\omega(\sigma_i) = \frac{1}{2}[1 - (1 - 2f)\sigma_i S(\Theta_i)], \quad (2.1)$$

com

$$\Theta_i = \sum_{j=1}^N \sigma_j, \quad (2.2)$$

onde $S(x) = \text{sign}(x)$ se $x \neq 0$ e $S(0) = 0$. No modelo do votante majoritário original a atualização de estado de cada nó depende exclusivamente do estado do seus nós vizinhos, não levando em conta o seu próprio estado. Incorporamos o efeito da inércia sobre o

modelo original pela substituição na Eq. (2.2) de

$$\Theta_i = (1 - \theta) \sum_{j=1}^N \sigma_j / k_i + \theta \sigma_i \quad (2.3)$$

em que k_i é o grau do nó i e $\theta \in [0, 0.5]$ é um parâmetro de controle da magnitude da inércia. O comportamento da fase do sistema (ordenado ou desordenado) pode ser caracterizada pela magnetização média por sítio, isto é, $m = \sum_{i=1}^N \sigma_i / N$; com $m = 0$ para a fase desordenada e $m \neq 0$ para a fase ordenada. No modelo do votante majoritário original (MV) na rede quadrada a transição da fase ordenada para a desordenada é de segunda ordem com parâmetro crítico $f_c \approx 0.075$ e os expoentes críticos pertencem à classe de universalidade do modelo de Ising [8]. Com $\theta = 0$ recuperamos o modelo do votante majoritário original em que não há inércia. Para $\theta = 0.5$, o modelo é dominado pela inércia e nesse caso não existe magnetização espontânea para $f > 0$. Se $\theta = 0.5$ e $f = 0$, os spins ficarão congelados na configuração inicial, uma vez que não há interação entre um sítio e seus vizinhos.

Nesta primeira parte do doutorado tivemos como objetivo investigar os ingredientes essenciais para a transição descontínua no modelo VM, para tal consideramos redes regulares e complexas os resultados do estudo foram publicados em [2].

2.1 Aproximação de campo médio

Em muitos casos os resultados por meio da aproximação de campo médio fornecem uma boa descrição das propriedades do modelo. Assim, nesta seção apresentamos a aproximação de campo médio (ACM) aplicado ao modelo do votante majoritário com inércia. Os resultados são expressos em termos de m_k , a magnetização média de um nó de grau k , e \tilde{m} a magnetização média de um sítio vizinho aleatoriamente escolhido. Elas podem ser relacionadas através da expressão obtida para redes não correlacionadas onde a probabilidade de que um vizinho aleatoriamente escolhido tenha grau k é dada por $kP(k)/\langle k \rangle$, em que $P(k)$ é a distribuição de probabilidade e $\langle k \rangle$ é seu grau médio. A fim de entendermos melhor a expressão $kP(k)/\langle k \rangle$ apresentamos uma dedução dada a seguir.

Uma rede é dita não correlacionada quando a probabilidade de haver uma ligação que sai de um nó/vértice de grau k e chega a um nó/vértice de grau k' são independentes do grau inicial. Em redes não direcionadas as correlações podem ser medidas por meio da probabilidade condicional $P(k'|k)$ definida como a probabilidade de que um vértice de grau k possua uma ligação com um vértice de grau k' . Essa probabilidade é normalizada

$$\sum_{k'} P(k'|k) = 1, \quad (2.4)$$

de forma que o número total de ligações que saem dos vértices de grau k para os vértices de grau k' deve ser igual ao número de ligações que saem dos vértices de grau k' para os vértices de grau k , isto é,

$$kP(k'|k)P(k) = k'P(k|k')P(k'). \quad (2.5)$$

Assim, para redes não correlacionadas, em que $P(k'|k)$ não depende de k , aplicamos

a condição de normalização dada pela Eq. (2.4) em Eq. (2.5) para obter

$$\sum_k kP(k'|k)P(k) = \sum_k k'P(k|k')P(k'), \quad (2.6)$$

e levando em conta que $P(k'|k)$ não depende de k a Eq. (2.6) pode ser arranjada na forma

$$P(k'|k) \sum_k kP(k) = k'P(k') \sum_k P(k|k'), \quad (2.7)$$

uma vez que $\sum_k kP(k) = \langle k \rangle$ e $\sum_k P(k|k') = 1$ obtemos

$$P(k'|k) = \frac{k'P(k')}{\langle k \rangle}, \quad (e)$$

que é a probabilidade de um nó/vértice de grau k possua uma ligação com um vizinho/nó/vértice de grau k' [22].

Portanto, as magnetizações m_k e \tilde{m} podem ser relacionadas a partir da seguinte relação

$$\tilde{m} = \sum_k \frac{kP(k)m_k}{\langle k \rangle}. \quad (2.8)$$

Para um sítio i com spin acima de grau k , a probabilidade de que o spin resultante dos seus vizinhos seja positivo pode ser escrito como a distribuição binomial acumulada,

$$P_{>}^+ = \sum_{n=[n_k^+]} \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{n,n_k^+}\right) C_k^m p_{\uparrow}^n p_{\downarrow}^{k-n}, \quad (2.9)$$

em que, $p_{\uparrow(\downarrow)} = (1 \pm \tilde{m})/2$ é a probabilidade de que um vizinho aleatoriamente escolhido esteja no estado $+1(-1)$, $[\cdot]$ é a função "ceiling", δ é o simbolo de Kronecker, $C_k^n = k!/[n!(k-n)!]$ são os coeficientes binomiais, respectivamente. Similarmente a probabilidade de que o spin local de um sítio de spin para abaixo de grau k seja positivo é dada por

$$P_{>}^- = \sum_{n=[n_k^-]} \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{n,n_k^-}\right) C_k^m p_{\uparrow}^n p_{\downarrow}^{k-n}, \quad (2.10)$$

em que $n_k^- = k - n_k^+ = k/[2(1 - \theta)]$. A fim de entendermos melhor as quantidades n_k^+ e n_k^- a seguir apresentamos o procedimento que as origina.

Na ausência de inércia, a probabilidade associada ao spin da vizinhança ser positivo ou negativo tem como limite inferior metade do número de vizinhos ter sinal positivo. Na presença de inércia, o spin local e o próprio valor da inércia contribuem para essa probabilidade. Para o caso de um sítio de spin positivo, isto é, $\sigma_i = 1$ e se $\Theta_i = 0$ quando

$$(1 - \theta) \sum_{j=1}^k \sigma_j/k + \theta = 0, \quad (2.11)$$

onde k pode ser escrito como

$$k = n_k^+ + n_k^-, \quad (2.12)$$

com n_k^+ sendo o número de vizinhos de spin $+1$ e n_k^- o número de vizinhos de spin -1 . Analogamente, a soma dos spins vizinhos pode ser escrita como

$$\sum_{j=1}^k \sigma_j = (1)n_k^+ + (-1)n_k^-. \quad (2.13)$$

Substituindo as expressões Eq. (2.12) e Eq. (2.13) em Eq. (2.11) obtemos a seguinte equação para n_k^+

$$(1 - \theta) \frac{(2n_k^+ - k)}{k} + \theta = 0. \quad (2.14)$$

Ordenando Eq. (2.14) chegamos à expressão

$$n_k^+ = \frac{(1 - 2\theta)}{[2(1 - \theta)]} k, \quad (2.15)$$

e portanto $n_k^- = k - n_k^+$ é dado por

$$n_k^- = \frac{k}{2(1 - \theta)}. \quad (2.16)$$

Por outro lado, a probabilidade de mudança de spin ω_k^+ de um sítio com spin apontando para acima de grau k pode ser expressa como a soma de duas partes.

$$\omega_k^+ = fP_{>}^+ + (1 - f)(1 - P_{>}^+), \quad (2.17)$$

em que a primeira parte é aquela em que o spin local de um sítio é positivo e a regra da minoria é aplicada, e a segunda parte é aquela em que o campo local de um sítio é negativo e a regra da maioria é aplicada. Da mesma forma, podemos escrever a probabilidade de mudança de um sítio de spin apontando para abaixo de grau k como,

$$\omega_k^- = f(1 - P_{>}^-) + (1 - f)P_{>}^-, \quad (2.18)$$

com isso, a partir da equação mestra a evolução temporal $\frac{dm_k}{dt}$ é dada por

$$\frac{dm_k}{dt} = -\left(\frac{1 + m_k}{2}\right)\omega_k^+ + \left(\frac{1 - m_k}{2}\right)\omega_k^-. \quad (2.19)$$

No estado estacionário $\dot{m} = 0$, então temos

$$m_k = \frac{\omega_k^- - \omega_k^+}{\omega_k^+ + \omega_k^-}. \quad (2.20)$$

Inserindo a Eq. (2.20) na Eq. (2.8), temos uma equação auto-consistente de \tilde{m}

$$\tilde{m} = \Psi(\tilde{m}), \quad (2.21)$$

com

$$\Psi(\tilde{m}) = \sum_k \frac{kP(k)}{\langle k \rangle} \frac{\omega_k^- - \omega_k^+}{\omega_k^+ + \omega_k^-},$$

e tendo em vista que $P_{>}^+ + P_{>}^- = 1$ e $\omega_k^+ = \omega_k^-$ quando $\tilde{m} = 0$, podemos facilmente ver que $\tilde{m} = 0$ é sempre uma solução estacionária da Eq. (2.21). Essa solução corresponde à fase desordenada. As outras possíveis soluções podem ser obtidas numericamente iterando a Eq. (2.21). Uma vez que \tilde{m} é achada, podemos imediatamente calcular m_k por meio da Eq. (2.20) e a magnetização média por sítio com $m = \sum_k P(k)m_k$.

Uma vez obtidas expressões sob aproximação de campo médio, os resultados para as redes consideradas neste estudo são apresentados a seguir. Começamos com a rede aleatória regular (Rk-RN) com distribuição de graus $P(k) = \delta(k - k_0)$, em que k_0 é o número de vizinhos de um nó, e portanto na rede aleatória regular, todos os nós têm o mesmo número de vizinhos tal como representado no painel (b) da Figura 1.2. Neste trabalho, consideramos os valores $k_0 = 4, 8, 12$ e 20 , de aqui para frente vamos referir k_0 simplesmente como k . A Figura 2.1 mostra os principais resultados do comportamento de m em função do parâmetro de desalinhamento f quando mantemos fixos k e θ além dos diagramas de fase para diferentes vizinhanças. A ACM prediz uma transição de fase contínua para $k = 4$, independente do valor da inércia θ , tal como mostrado no painel (a) da Figura 2.1, onde m é uma função monotônica decrescente de f . Um panorama diferente é apresentado para os casos $k = 8, 12$ e 20 os quais têm em comum as seguintes características; ao incrementarmos os valores de inércia a curva de magnetização muda de uma forma contínua para uma que apresenta uma descontinuidade, caracterizada pela coexistência de fases entre ordenada ($m \neq 0$) e desordenada ($m = 0$), isto é, há uma fase biestável com presença de uma curva spinodal que se origina em f_b e se conecta com o decréscimo monotônico em f_f (ver painéis (c), (e) e (f)). No caso $k = 8$ a linha de coexistência aparece só quando $\theta > 1/3$ e é muito curta, sendo $f_b - f_f \sim 2.10^{-4}$, no entanto essa curva é mais pronunciada para $\theta > 3/7$. Esse comportamento de coexistência é análogo para $k = 12$ e $k = 20$. Com isto, a ACM nos sugere que valores altos de θ e k ($k \geq 6$) são ingredientes fundamentais para a ocorrência de transições de fase descontínuas. Um fato notável concernente aos diagramas de fase é a existência de patamares nos quais os valores dos pontos de transição f_f e f_b são invariantes para os valores de θ ao longo de um patamar. Esse comportamento será explicado com maior detalhe mais para frente, no entanto é uma consequência da rede ser regular. Também o número de patamares aumenta com o aumento de k [2].

Dado que a taxa de transição depende apenas do sinal do argumento resultante da Eq. (2.1) os diagramas de fase apresentarão patamares fornecidos pelo número de vizinhos que é mantido fixo. Genericamente consideremos um reticulado de grau k em que o sítio central σ_0 tem n_k^+ e n_k^- vizinhos com spin $+1$ e -1 , respectivamente, (obviamente $n_k^+ + n_k^- = k$). Considerando por exemplo $\sigma_0 = -1$ (conclusões similares são obtidas para $\sigma_0 = +1$). Nesse caso o argumento $sign(X)$ resulta $1 - \frac{2n_k^-}{k} - 2\theta(1 - \frac{n_k^-}{k})$, implicando que para todo $\theta < \theta_p = \frac{k - 2n_k^-}{2(k - n_k^-)}$ a taxa de transição de $-1 \rightarrow +1$ será sempre $1 - f$, e portanto os pontos de transição serão iguais. Apenas para $\theta > \theta_p$ a transição de $-1 \rightarrow +1$ é realizada com a probabilidade f . A seguinte tabela apresenta os pontos de patamar θ_p para $k = 8$ e diferentes n_k^- s. Por exemplo, para $n_k^- = 3$ e $0 < \theta < \theta_p = \frac{1}{5}$, todas as taxas de transição são iguais, implicando o mesmo f_c para esses valores inércia. Para $\theta = \theta_p = \frac{1}{5}$ a segunda configuração local é diferente e portanto f_c é diferente para os valores $\theta < \theta_p$. Seguindo dessa forma para os demais valores de n_k^- , as outras posições dos patamares serão encontradas. Se $n_k^- > n_k^+$, os θ_p s serão negativos, esses casos não serão estudados aqui.

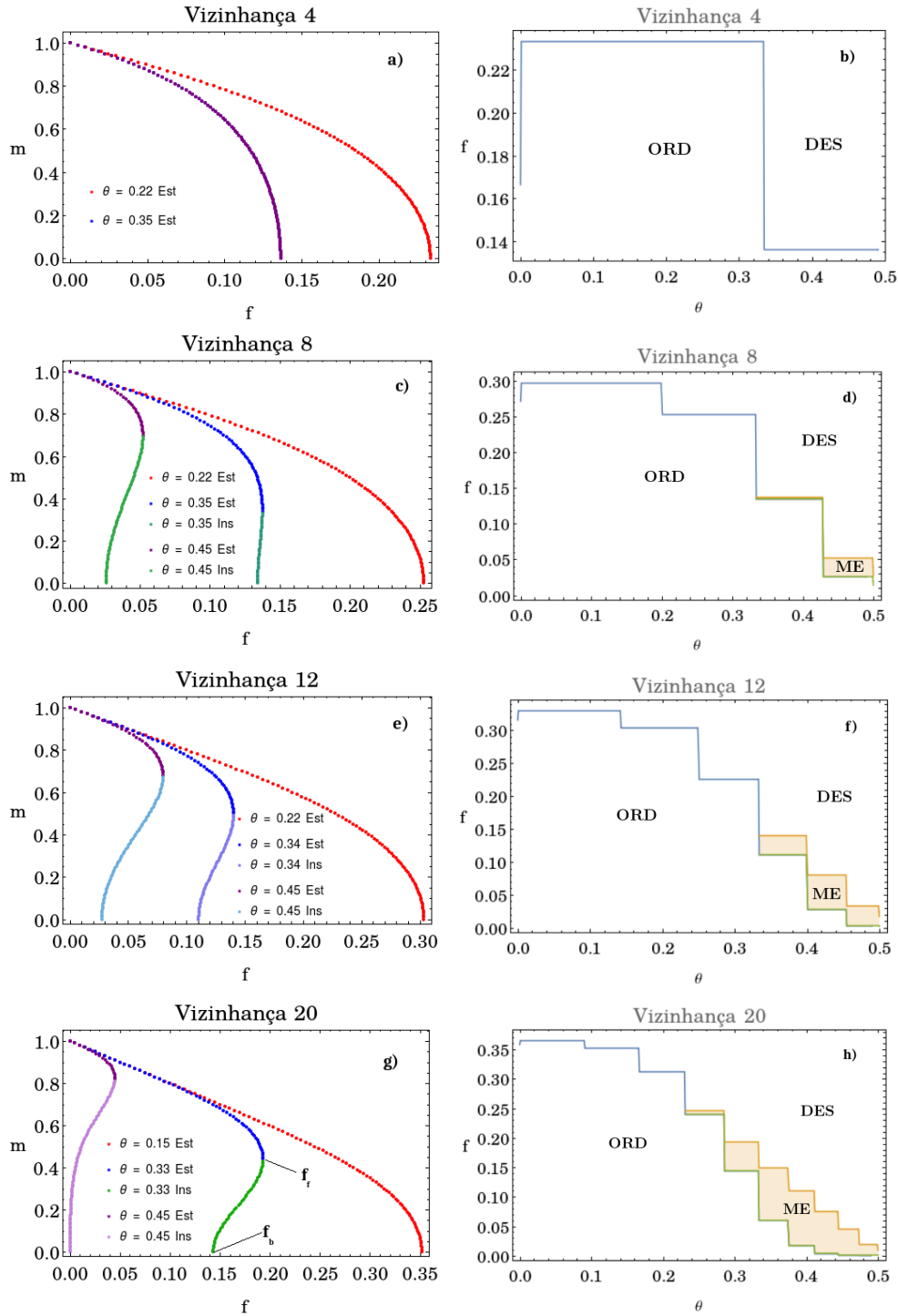


Figura 2.1: De acima para baixo, resultados de campo médio para a rede aleatória regular (Rk-RN) para $k = 4$, $k = 8$, $k = 12$ e $k = 20$, respectivamente. Os painéis da esquerda e direita mostram o comportamento da magnetização m vs f para diferentes valores de inercia θ e diagramas de fase ORD e DES representam às fases ordenada e desordenada, respectivamente. Para os casos $k = 8$, $k = 12$ e $k = 20$ para resaltar a biestabilidade em f_f a curva de magnetização vira de cor e em f_b a curva spinodal de magnetização chega no estado desordenado $m = 0$.

2.2 Simulações

A fim de estudarmos os ingredientes essenciais para as transições descontínuas além do campo médio, realizamos uma série de simulações numéricas tanto para redes regulares

σ_0	n_k^+	n_k^-	$X > 0$	θ_p
-1	4+	4-	$-\theta > 0$	0
-1	5+	3-	$\frac{1-5\theta}{4} > 0$	$\frac{1}{5}$
-1	6+	2-	$\frac{1-3\theta}{2} > 0$	$\frac{1}{3}$
-1	7+	1-	$\frac{3-7\theta}{4} > 0$	$\frac{3}{7}$
-1	8+	0-	$1 - 2\theta > 0$	$\frac{1}{2}$

Tabela 2.1: Para o sítio central $\sigma_0 = -1$ e conectividade $k = 8$, a função sinal para diferentes configurações. X é o valor da expressão resultante $1 - \frac{2n_k^-}{k} - 2\theta(1 - \frac{n_k^-}{k})$ e θ_p denota posição do patamar.

quanto para redes complexas. Tanto para a *rede regular* (RR) [painel (a) da Figura 1.2] quanto para a *rede aleatória regular de grau k* (Rk-RR) [painel (b) da Figura 1.2], mantemos fixos os parâmetros N (número de nós/spins), f (parâmetro de desalinhamento) e θ (inércia), de forma que um sítio i é aleatoriamente escolhido e o valor do seu spin é trocado $\sigma_i \rightarrow \sigma_i$ de acordo com as taxas Eq. (2.1) e Eq. (2.3). Com probabilidade complementar o spin permanece igual. Um passo Monte Carlo (MC) corresponde a N tentativas de mudança de spin sobre a rede. Após a repetição de um número considerável de passos MC (da ordem de 10^6) o sistema atinge o estado estacionário de não equilíbrio. Conforme descrevemos na introdução, estamos interessados em grandezas como

$$\langle |m| \rangle = \frac{1}{N} \langle | \sum_{i=1}^N \sigma_i | \rangle, \quad (2.22)$$

a variância

$$\chi = N[\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2] \quad (2.23)$$

e o cumulante reduzido de quarta ordem

$$U_4 = 1 - \frac{\langle m^4 \rangle}{3\langle m^2 \rangle^2}, \quad (2.24)$$

respectivamente. Esta última é usada para achar o ponto de transição e classificar a transição de fase. Para obter os valores dessas grandezas obtemos a média de $5 \cdot 10^6$ passos MC.

2.2.1 Transições de fase contínuas

Conforme descrevemos no capítulo anterior, para ambas as topologias, no ponto crítico as transições de fase estão caracterizadas pelo comportamento algébrico do tipo $\langle m \rangle \sim N^{-\beta/\nu}$ e $\chi \sim N^{\gamma/\nu}$, em que β/ν e γ/ν são os expoentes críticos associados a essas grandezas. Outro fato de uma transição contínua é que U_4 avaliado para diferentes tamanhos N cruzam-se em $(f, U) = (f_c, U_0^*)$. Não obstante, o conjunto de expoentes críticos como também o valor de intersecção U_0^* dependem da estrutura da rede [8, 9]. Fora do ponto crítico, U_4 se comporta como $U^4 \rightarrow 2/3$ para a fase ordenada e $U_4 \rightarrow 0$ para a fase desordenada quando $N \rightarrow \infty$.

Começando pelas simulações na rede aleatória regular, em consistência com o apresentado anteriormente, as posições dos patamares são idênticas aos obtidos pela ACM. Da

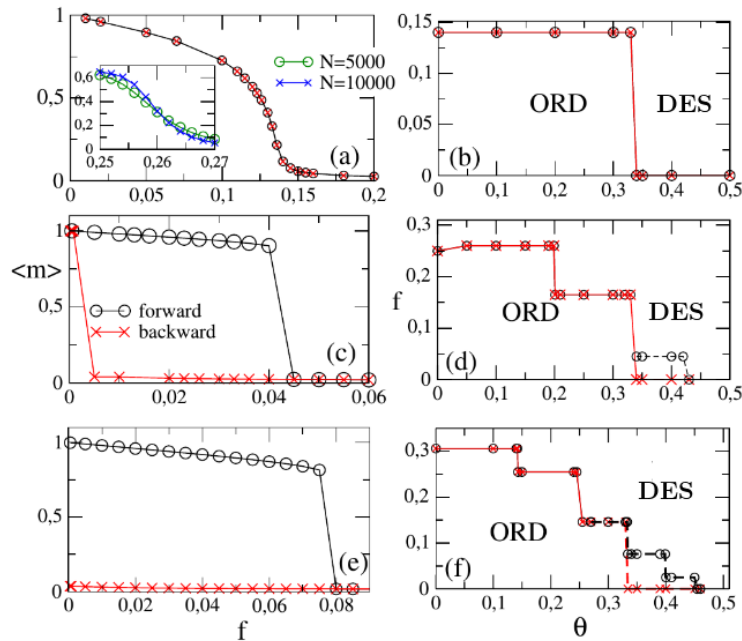


Figura 2.2: Da cima para baixo, resultados numéricos para $k = 4, 8, 12$, respectivamente para a rede aleatória regular (Rk-RN). Os painéis esquerdos mostram o comportamento de $\langle m \rangle$ versus f para $\theta = 0.33$ ($k = 4$) e 0.35 ($k = 8$ e 12), à direita os diagramas de fase, respectivamente. Inset: o cumulante reduzido U_4 vs f para $\theta = 0.05$ e $k = 8$. Os círculos (cruzes) correspondem ao aumento (diminuição) de f partindo da fase ordenada (desordenada) [2].

mesma forma a transição de fase para $k = 4$ é mantida contínua para qualquer valor de inércia. Para $\theta > 1/3$ a transição de fase é deslocada e o sistema apresenta somente fase desordenada. Para o caso de ($k = 4$) as transições são sempre contínuas, o comportamento crítico é exemplificado no painel (a) e inset.

Em contraste com o caso anterior, as transições de fase tornam-se descontínuas para $k = 8$ e 12 para θ alto, conforme ilustrados nos painéis (c) e (d) para $k = 8$ e $k = 12$. Elas são caracterizadas pela existência de uma histerese onde há mudança na ordem da transição para $\theta = 1/3$ para $k = 8$ e $\theta = 1/4$ para $k = 12$. Apesar da semelhança com o campo médio, existem algumas diferenças entre os dois casos, dentre elas, pela ACM predizemos os pontos de transição super estimados. Além disso, a ACM prediz transições de fase contínuas no intervalo $1/4 < \theta < 1/3$ para ($k = 12$) onde as simulações numéricas sugerem que nesse regime as transições são descontínuas.

Agora passamos à análise das simulações sobre redes regulares (RR) levando em conta diferentes tamanhos ($N = L \times L$) e diferente número de vizinhos mais próximos. O aumento da conectividade na RR foi considerado aumentando a vizinhança conforme esquematizada na Figura 2.3.

A Figura 2.4 mostra os principais resultados para as interações de um spin com $k = 4, 8$ e 12 vizinhos mais próximos. As posições dos patamares são idênticos aos dos casos estudados anteriormente, mas com menores valores de f_c . Isso deve ser entendido lembrando que as estruturas complexas homogêneas exibem uma estrutura mais próxima do campo

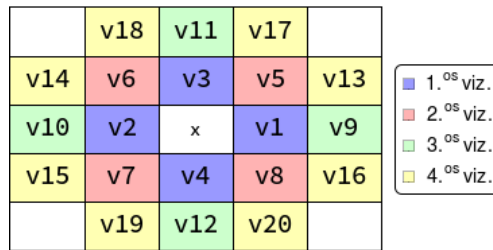


Figura 2.3: Esquema de interação de um spin com os seus vizinhos mais próximos em uma estrutura regular bidimensional.

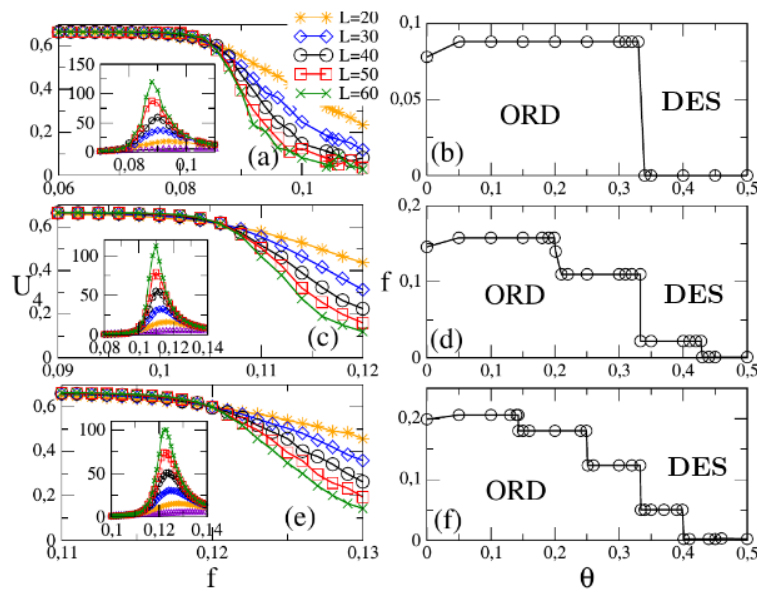


Figura 2.4: Simulações para redes regulares (RR) bidimensionais com diferentes tamanhos do sistema $N = L \times L$: Os painéis da esquerda mostram o cumulante de quarta ordem reduzida U_4 vs f para (a) primeiros vizinhos, (c) os segundos vizinhos e (e) os terceiros vizinhos. Inset: a variância χ vs f . Os painéis da direita mostram os seus diagramas de fase correspondentemente, em todos os casos as linhas contínuas correspondem a transições de fase críticas [2].

médio, no qual seus correspondentes pontos de transição são esperados ser maiores do que aqueles das redes regulares. Similarmente, os pontos críticos são obtidos do cruzamento das curvas de U_4 mas o valor de U_0^* é diferente do que no caso da rede aleatória Rk-RN. No presente caso eles são aqueles caracterizando a classe de universalidade de Ising $U_0^* \sim 0.61$. Além disso, há uma diferença importante entre estruturas aleatórias e regulares: As transições de fase são contínuas independentemente dos valores de inercia para $k = 4$ até $k = 12$. Apenas para $k > 12$ as transições de fase tornam-se descontínuas para θ elevado em redes regulares.

2.2.2 Transições de fase descontínuas

Conforme mencionamos acima, transições descontínuas quando estudadas em redes complexas são caracterizadas pela existência de histerese (Figura 2.5 e Figura 2.6) numa

região compreendida entre f_b e f_f , consistente com um comportamento bi estável no qual o sistema evolui (na fase ordenada) para uma das "soluções" defendendo da condição inicial. Por outro lado, transições descontínuas comportam se de forma completamente diferente quando estudadas em redes regulares. Nesse caso, o sistema não apresenta histerese nem uma descontinuidade na transição, sendo que as principais quantidades apresentam uma variação contínua em seus valores.

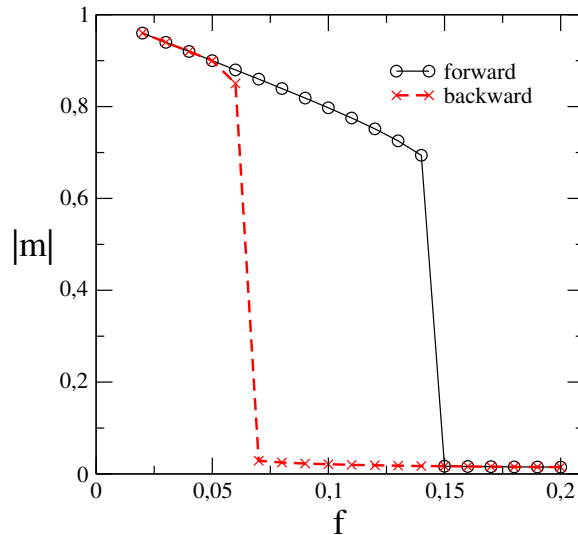


Figura 2.5: Resultados para $k = 20$ e $\theta = 0.3$: o parâmetro de ordem $\langle m \rangle$ vs f para a rede regular aleatória Rk-RN para um sistema de $N = 5000$ sítios

Recentemente foi proposta uma teoria fenomenológica de escala finita para transições de fase descontínuas com estados absorventes, em que não se verifica a presença de histerese, mas é possível observar uma relação de escala σ com o inverso do tamanho do sistema N^{-1} . No presente estendemos a teoria para transições de fase em sistemas com simetria de inversão Z_2 . A relação de escala pode ser entendida assumindo que nas proximidades do ponto de coexistência, a distribuição do parâmetro de ordem é (aproximadamente) composta pela soma de duas distribuições gaussianas independentes, com cada fase σ [$\sigma = o(\text{ordendo})$ e $d(\text{desordenado})$] descrita por seu parâmetro de ordem m_σ tal que

$$P_N(m) = P_N^{(o)}(m) + P_N^{(d)}(m), \quad (2.25)$$

em que cada termo $P_N^{(\sigma)}(m)$ é dado por

$$P_N^{(\sigma)}(m) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp[N\{(\Delta f)m - (m - m_\sigma)^2/(2\chi_\sigma)\}]}{[F_o(\Delta f; N) + F_d(\Delta f; N)]}, \quad (2.26)$$

em que χ_σ é a variância de cada distribuição gaussiana σ , $\Delta f = f_N - f_o$ denota a distância ao ponto de coexistência f_o e cada fator de normalização é $f_{o(d)}$ é dado por

$$F_{o(d)}(\Delta f; N) = \sqrt{\chi_{o(d)}} \exp\left\{N\Delta f \left[m_{o(d)} + \frac{\chi_{o(d)}}{2}\Delta f\right]\right\}. \quad (2.27)$$

É importante ressaltarmos que a Eq. (2.26) leva a uma distribuição de probabilidades que é a soma de duas funções Delta de Dirac centradas em $m = m_o$ e $m = m_d$ em $f = f_o$ para

$N \rightarrow \infty$. Para $f - f_0 \rightarrow 0_{+(-)}$, temos apenas um pico da delta de Dirac em $m = m_d (m_o \neq 0)$. Os pseudo pontos de transição podem ser estimados de diferentes formas, por exemplo por meio de f_N em que ambas as fases apresentam áreas (pesos) iguais. Nesse caso, da Eq. (2.26) a condição das áreas iguais implica que $\int_{-\infty}^{m^*} P_N^{(o)}(m) dm = \int_{m^*}^{\infty} P_N^{(d)}(m) dm$ e portanto

$$(f_N - f_0)[(m_o - m_d) + \frac{(\chi_o - \chi_d)}{2}(f_N - f_0)] = \frac{\ln[\chi_d/\chi_o]}{2} \frac{1}{N}. \quad (2.28)$$

Dado que N é considerado grande, dessa forma o lado direito da Eq. (2.28) é pequeno e portanto $(f_N - f_0)$ também é pequeno. Desconsiderado termos de ordem superior $(f_N - f_0)^2$, temos

$$f_N \approx f_0 + \frac{\ln[\chi_d/\chi_o]}{2(m_o - m_d)} \frac{1}{N}, \quad (2.29)$$

implicando que a diferença $f_N - f_0$ escala com o inverso do tamanho do sistema N . Alternativamente, a determinação de f_N por meio da posição do pico da variância χ fornece a mesma dependência sobre N^{-1} , cuja inclinação é a mesma que da Eq. (2.28) [2]. Uma análise análoga, embora um pouco mais complexa, pode ser estendida para o mínimo do cumulante de quarta ordem, onde um comportamento com N^{-1} também é verificado e dado por

$$f_N \approx f_0 + \frac{\ln[\chi_d/\chi_o] + 2\ln[m_d/m_o]}{2(m_o - m_d)} \frac{1}{N}. \quad (2.30)$$

Esses resultados podem ser verificados em [23].

No presente trabalho temos classificado as transições de fase descontínuas em RR baseadas no comportamento das três grandezas acima descritas.

Um panorama diferente às simulações de RR para $k = 4, 8$ e 12 , onde as transições são sempre contínuas, é revelado ao estendermos as interações até os quartos primeiros vizinhos [ver Figura 2.3], isto é com $k = 20$ e valores grandes de inércia, ($\theta = 0.35$) em que as transições de fase viram descontínuas [ver Figura 2.6]. Em consistência ao mencionado anteriormente para a rede complexa (Rk-RN), a histerese é ausente [painel (a)], mas a distribuição do parâmetro de ordem exibe uma forma bimodal [painel (b) mostra o valor de f_N em que os picos que descrevem as fases ordenada e desordenada apresentam áreas iguais]. Também U_4 comporta-se diferente na posição da transições contínuas e apresenta um valor mínimo que decresce com N [painel (c)], também o máximo da susceptibilidade χ decresce com N (inset). Esses fatos análogos aos das transições de fase descontínuas dos estados absorventes [24], também revelam a emergência de transições descontínuas em reticulados ao incrementarmos o número de vizinhos k . Os f'_N s estimados das posições de áreas iguais, os máximos valores de χ e os mínimos valores de U_4 , todos eles escalam com N^{-1} [painel (d)] de onde obtivemos as estimasões $f_0 = 0.0687(1)$ (áreas iguais e máximo de χ) e $f_0 = 0.689(1)$ mínimo de U_4 .

Na Figura 2.7, é apresentado o diagrama de fase do reticulado para $k = 20$, a coexistência de fases acontece para $\theta > 1/3$ maior do que $\theta > 3/13$ (para a rede Rk-RN). Para $\theta < 1/3$, a transição parece ser contínua, mas U_4 apresenta um valor diferente de $U_0^* \sim 0.61$ no intervalo $2/7 < \theta < 1/3$.

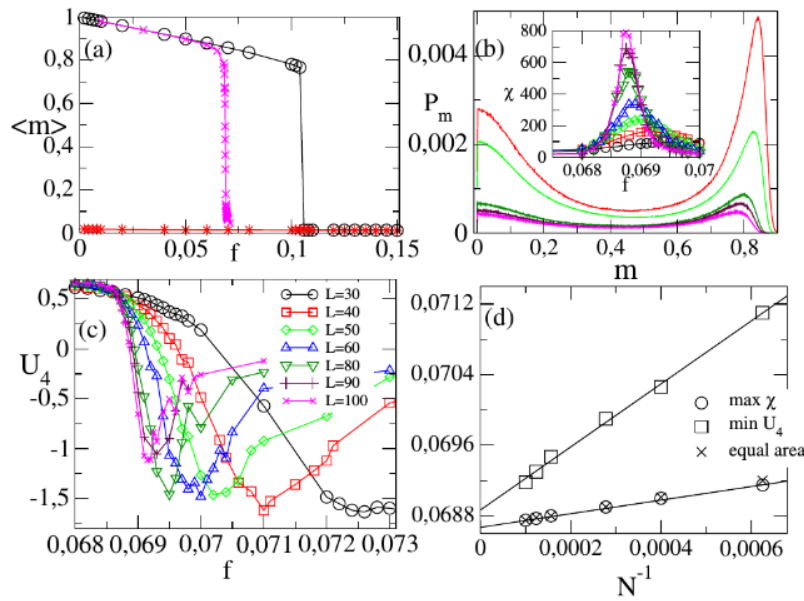


Figura 2.6: Resultados para $k = 20$ e $\theta = 0.35$: Painel (a) compara o parâmetro de ordem $\langle m \rangle$ vs f para a rede regular aleatória Rk-RN (círculos e estrelas) e reticulado (símbolo \times) para um sistema de $N = 10^4$ sítios. Para o caso do reticulado: Os painéis (b) e (c) mostram as áreas iguais da distribuição de probabilidade não normalizada do parâmetro de ordem m , e U_4 vs f para distintos tamanhos de L , ($N = L \times L$), respectivamente. Inset: a variância χ vs f , em (d), a posição dos máximos de χ , mínimos de U_4 e áreas iguais vs $1/N$ [2].

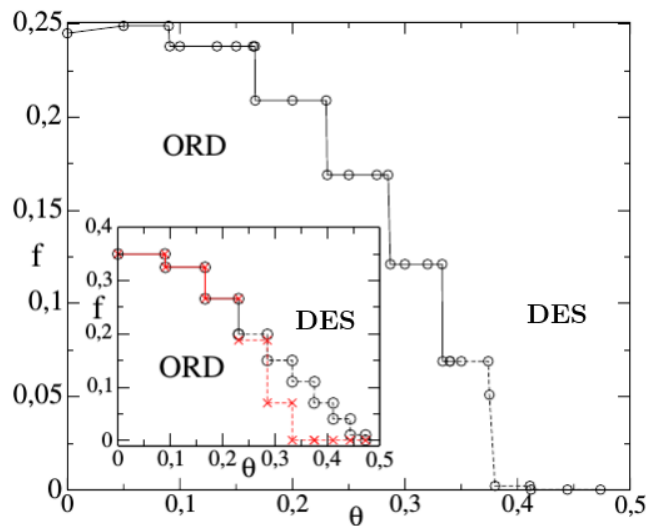


Figura 2.7: Diagrama de fase θ vs f para o modelo do votante majoritário com inercia com $k = 20$ em um reticulado. Linhas contínuas e tracejadas correspondem a transições de fase críticas e descontínuas, respectivamente. Inset: O mesmo para uma topologia Rk-RN. Círculos (\times) correspondem ao incremento(diminuição) de f começando da fase ordenada(desordenada) [2].

2.3 Conclusões

O modelo do votante majoritário original apresenta uma transição de fase de segunda ordem com o conjunto de expoentes críticos que pertencem à classe de universalidade do modelo de Ising bidimensional. Sob a aproximação de campo médio (ACM) e por meio de simulações estudamos os efeitos da inércia sobre dois tipos de estruturas; uma rede aleatória regular de grau k (Rk-RN) e um reticulado bidimensional ou rede regular (RR). Sob a ACM e as simulações encontramos que para uma vizinhança de $k = 4$ a transição de fase se mantém de segunda ordem para ambas as duas redes. Pela ACM na rede Rk-RN com vizinhanças de $k = 8, 12$ e 20 e para valores grandes de inércia acontece uma mudança na ordem da transição, passando de ser uma de segunda ordem para uma transição de primeira ordem. Essa mudança caracteriza-se pela presença de uma fase biestável em um diagrama do parâmetro de ordem m vs f . No caso do sistema em estruturas de redes regulares, apresentamos simulações numéricas juntamente de uma teoria fenomenológica para $k = 8$ e $k = 12$ e para quaisquer valor de inercia não encontramos histerese no diagrama m vs f , concluindo então que não há mudança de transição com essas vizinhanças. No entanto para $k = 20$ e valores altos de inercia, em particular $\theta = 0.35$, as transições de fase são de primeira ordem. Como um último comentário no próximo capítulo apresentamos uma abordagem de campo médio mais simples que aquela apresentada nesse capítulo.

Capítulo 3

Modelo do votante majoritário com ruído extra em redes complexas

Nesse capítulo estudamos o modelo do votante majoritário sob o acréscimo de um outro parâmetro de controle que denominaremos *ruído extra* (p), que socialmente representa um outro tipo de desconformidade diferente do ruído f . Mais especificamente p representa a independência do agente de agir de forma individual/própria do resto da vizinhança. Nosso objetivo consiste em estender o estudo proposto por [25] para a rede quadrada, considerando aqui uma rede complexa qualquer. Por meio de uma aproximação de campo médio (ACM) do modelo do votante majoritário modificado (pMVM) encontramos uma expressão analítica do parâmetro de controle/ruído crítico f_c aplicável em qualquer cenário/estrutura topológica; para redes complexas homogêneas e heterogêneas. Todos os resultados obtidos pela ACM são confirmados por simulações numéricas, incluindo a ordem das transições.

3.1 Aproximação de campo médio

Conforme definimos anteriormente o modelo do votante majoritário (MV) é definido para uma topologia de rede arbitrária, em que cada sítio i de grau k é associado com uma variável de spin σ_i , que pode assumir os valores $\sigma_i \pm 1$, e com uma probabilidade $(1 - f)$ cada nó i tende a se alinhar com a maioria dos seus vizinhos, e com probabilidade complementar f tende a não seguir à maioria, isto é, tende a se desalinhar. O aumento da magnitude de "desalinhamento" f leva a uma transição (contínua) de fase ordem-desordem [8, 9, 10]. O modelo do votante majoritário com ruído extra (MVR) difere do original MV na inclusão da independência de inversão do spin em relação a seus vizinhos. Matematicamente, isso é equivalente a obedecer a seguinte razão de transição.

$$\omega(\sigma_i) = \frac{1-p}{2} [1 - (1-2f)\sigma_i S(\sum_{j=1}^k \sigma_j)] + \frac{p}{2}, \quad (3.1)$$

em que $S(X)$ é definida por $S(X) = \text{sign}(X)$ se $X \neq 0$ e $S(0) = 0$. Note que para $p = 0$ recuperamos o modelo do votante original [Eq. (2.1) e Eq. (2.2)]. Apresentaremos aqui uma nova abordagem para a aproximação de campo médio, baseada na função sinal, ao invés do cálculo das probabilidades associadas a regra da maioria e minoria, como efetuadas no capítulo anterior. Os resultados deste capítulo foram desenvolvidos com os

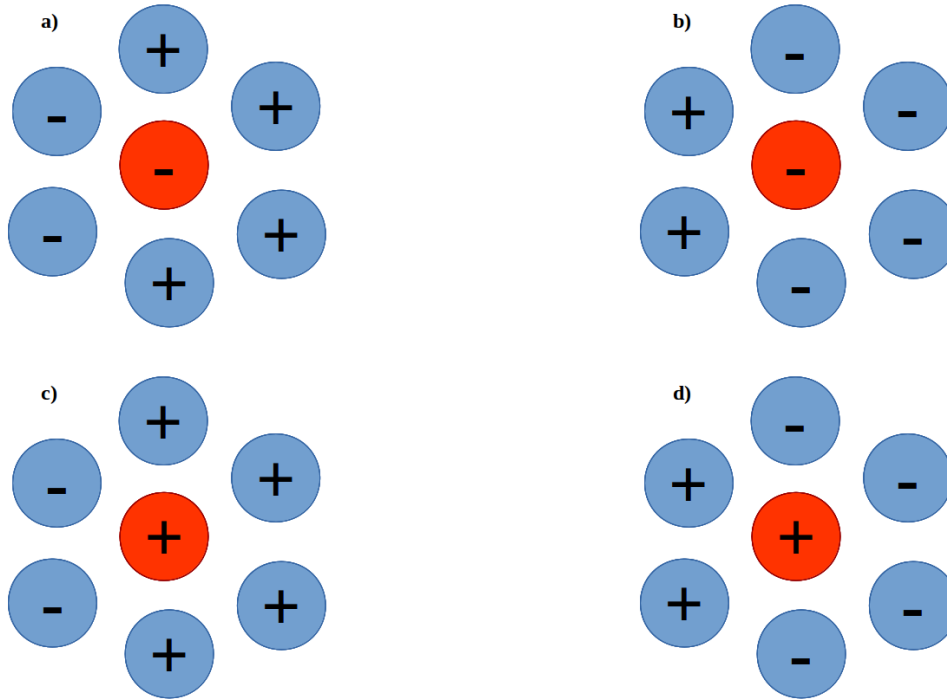


Figura 3.1: Representação esquemática dos casos genéricos de vizinhanças, se mostra a relação de um spin com os seus vizinhos, neste caso ($k = 5$).

pesquisadores Marcelo M de Oliveira (UFSJ) e Hanshuang Chen e publicados em *Physica A* [3].

Conforme vimos anteriormente, para sistemas com simetria de inversão a equação mestra correspondente à magnetização média do sítio i de grau k $m_k = \langle \sigma_i \rangle_k$ é dada por [26].

$$\frac{d\langle \sigma_i \rangle_k}{dt} = -\langle 2\sigma_i \omega(\sigma_i) \rangle_k. \quad (3.2)$$

Substituindo a Eq. (3.1) em Eq. (3.2) chegamos em

$$\frac{1}{1-p} \frac{d}{dt} m_k = -m_k + (1-2f)\langle S(X) \rangle - \frac{p}{1-p} m_k. \quad (3.3)$$

A média da função sinal $\langle S(X) \rangle$ pode ser decomposta em duas partes; $\langle S(X) \rangle = \langle S(X_+) \rangle - \langle S(X_-) \rangle$, com cada termo $\langle S(X_i) \rangle$ sendo aproximado como

$$\langle S(X_{\pm}) \rangle \approx \pm \sum_{n=\lceil k/2 \rceil}^k C_n^k p_{\pm}^n p_{\mp}^{k-n}, \quad (3.4)$$

com p_{\pm} sendo a probabilidade de um sítio vizinho aleatoriamente escolhido possuir spin ± 1 . Conforme vimos anteriormente, para redes não correlacionadas a densidades de sítios de grau k com spin positivo ρ_k se relaciona com p_+ por meio de

$$p_+ = \frac{\sum_k k P(k)}{\langle k \rangle} \rho_k, \quad (3.5)$$

Onde, por sua vez ρ_k e m_k relacionam-se por $m_k = 2\rho_k - 1$. Da Eq. (3.5) no estado estacionário temos a seguinte equação auto consistente de p_+

$$p_+ - \frac{1}{2} = \frac{(1-2f)}{2\langle k \rangle} \sum_{k=1}^k kP(k) \sum_{n=\lceil k/2 \rceil}^k C_n^k (p_+^n p_-^{k-n} - p_-^n p_+^{k-n}) - \frac{p}{1-p} (p_+ - \frac{1}{2}). \quad (3.6)$$

É possível derivar uma expressão analítica para $\langle S(X_{\pm}) \rangle$ no caso de $k \gg 1$, nesse caso que cada termo da distribuição binomial aproxima-se por uma Gaussiana com média kp_{\pm} e variância $\sigma^2 = kp_+p_-$. Desta forma, $\sum_{n=\lceil k/2 \rceil}^k C_n^k p_{\pm}^n p_{\mp}^{k-n}$ torna-se

$$\int_{k/2}^k dl e^{-\frac{(l-kp_{\pm})^2}{\sqrt{2}\sigma}} / (\sigma\sqrt{2\pi}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\operatorname{erf}[\frac{k(1-p_{\pm})}{\sqrt{2}\sigma}] - \operatorname{erf}[\frac{k(1/2-p_{\pm})}{\sqrt{2}\sigma}]), \quad (3.7)$$

em que $\operatorname{erf}(x) = 2 \int_0^x e^{-t^2} dt / \sqrt{\pi}$ denota a função erro. Dessa forma

$$\langle S(X) \rangle = \frac{1}{2} \left[2\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2k}y}{\sqrt{1-4y^2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2k}(\frac{1}{2}-y)}{\sqrt{1-4y^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2k}(\frac{1}{2}+y)}{\sqrt{1-4y^2}}\right) \right], \quad (3.8)$$

com $p_{\pm} = \frac{1}{2} \pm y$ então a Eq. (3.6) adquire a forma

$$y = \frac{(1-2f)}{4\langle k \rangle} \sum_{k=1}^{\infty} kP(k) \left[2\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2k}y}{\sqrt{1-4y^2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2k}(\frac{1}{2}-y)}{\sqrt{1-4y^2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2k}(\frac{1}{2}+y)}{\sqrt{1-4y^2}}\right) \right] - \frac{p}{1-p} y. \quad (3.9)$$

Para $k \gg 1$ o numerador prevalece sobre o denominador e então $\langle S(X) \rangle$ se reduz a $\langle S(X) \rangle = \operatorname{erf}(y\sqrt{2k})$, que leva à equação compacta no estado estacionário

$$y = \frac{1}{2\langle k \rangle} (1-2f) \sum_k [k \operatorname{erf}(y\sqrt{2k})] P(k) - \frac{p}{1-p} y. \quad (3.10)$$

De posse das soluções estacionárias y_0 'ss podemos achar m_k por meio de

$$m_k = (1-2f)\operatorname{erf}(y\sqrt{2k}) - \frac{p}{1-p} m_k, \quad (3.11)$$

cuja magnetização média do sistema é dada por $m = \sum_k P(k)m_k$. Para $f < f_c$ a Eq. (3.10) apresenta duas soluções ($y = \pm y_0 \neq 0$) além da trivial $y = 0$ e apenas a trivial $y = 0$ para $f > f_c$, pois f_c é o valor crítico do parâmetro de controle f . Como y_0 é pequeno próximo do ponto crítico, temos a expressão:

$$y_0 = \left\{ \frac{1}{A(f,p)} \left[-1 + (1-p)(1-2f) \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\langle k^{3/2} \rangle}{\langle k \rangle}} \right] \right\}^{1/2}, \quad (3.12)$$

em que $A(f,p)$ é dada por

$$A(f,p) = \sqrt{\frac{8}{9\pi} \frac{\langle k^{5/2} \rangle}{\langle k \rangle}} (1-p)(1-2f), \quad (3.13)$$

em que $\langle k^n \rangle = \sum_k k^n P(k)$ denota o momento de grau n .

Uma vez que m se anula no ponto crítico, obtemos

$$f_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1-p)} \frac{\langle k \rangle}{\langle k^{3/2} \rangle} \quad (3.14)$$

A partir de Eq. (3.14) podemos achar analiticamente uma expressão para f_c em termos dos momentos $\langle k \rangle$ e $\langle k^{3/2} \rangle$ para uma distribuição de graus $P(k)$ que representa um tipo de rede.

Para a Rk-RN com $P(k) = \delta(k - k_0)$, temos

$$f_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2k_0}} \frac{1}{1-p}. \quad (3.15)$$

enquanto que para a rede ER com $P(k) = \langle k \rangle^k e^{-\langle k \rangle} / k!$ não é possível achar expressões analíticas dos momentos, embora cálculos numéricos são possíveis de ser feitos. Para a rede Barabasi-Albert cuja distribuição de graus obedece uma lei de potência com $P(k) \sim k^{-\gamma}$ obtemos

$$f_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2k_0}} \frac{\gamma - 5/2}{\gamma - 2} \frac{1}{1-p}, \quad (3.16)$$

em que k_0 representa grau mínimo na rede e então $\langle k \rangle = (\gamma - 1)k_0 / (\gamma - 2)$ representa a média de graus e $\langle k^{3/2} \rangle = (\gamma - 1)k_0^{3/2} / (\gamma - 5/2)$ é o momento da distribuição de graus. O expoente $\gamma = 3$ é um valor representativo das estruturas livre de escala que se apresenta em diversos sistemas reais.

3.2 Simulações

Com o intuito de classificar o tipo de transição de fase do pMVM nas estruturas complexas homogêneas e heterogêneas definidas na seção anterior, foram executadas em cada estrutura de rede simulações numéricas para analisarmos os comportamentos da magnetização m , a susceptibilidade χ e o cumulante de quarto ordem U_4 conforme descrevemos no capítulo anterior, definidos pelas equações Eq. (2.22), Eq. (2.23) e Eq. (2.24), respectivamente. Os tamanhos N das redes abrange de $N = 1000$ a 20000 . O esquema de simulação das redes aleatória regulat é o mesmo a apresentado por Bollobás em [27], em que a vizinhança de um sítio não é alterada com o tempo.

Para calcular o ponto crítico e os expoentes críticos, apelamos novamente à análise de escala finita, em que χ e m são dadas pelas Eq. (1.26) e Eq. (1.29), respectivamente, com $L = N$ e $t = \epsilon = (f - f_c) / f_c$ onde para $\epsilon = 0$ a dependência de m e χ com o tamanho do sistema são dados por $m = N^{-\beta/\nu} \tilde{m}(0)$ e $\chi = N^{\gamma/\nu} \tilde{\chi}(0)$, respectivamente. O ponto crítico pode ser propriamente localizado por médio do cumulante de quarta ordem reduzido U_4 dado pela Eq. (2.14), já que curvas de diferentes N 's interseam-se em $f = f_c(\epsilon = 0)$ e U_4 vira constante $U_4 = U_0^*$. Fora do ponto crítico, $U_4 \rightarrow 2/3$ e 0 para as fases ordenada e desordenada, respectivamente, quando $N \rightarrow \infty$.

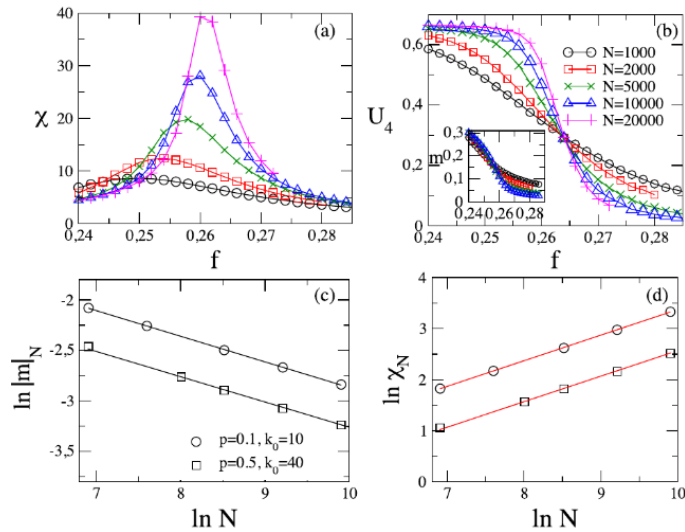


Figura 3.2: Paneis (a) e (b), mostram para a rede Rk-RN e $p_0 = 0.1$ e $k_0 = 10$, a variância χ e o cumulante reduzido U_4 versus f para diferentes tamanhos de sistema N . Inset: a magnetização por spin $|m|$ vs f . Paneis (c) e (d) mostram os expoentes críticos β/ν e γ/ν para $p = 0.1$ ($k_0 = 10$) e $p = 0.5$ ($k_0 = 40$), respectivamente. Eles são consistentes com $\beta/\nu = 1/4$ e $\gamma/\nu = 1/2$, respectivamente [3].

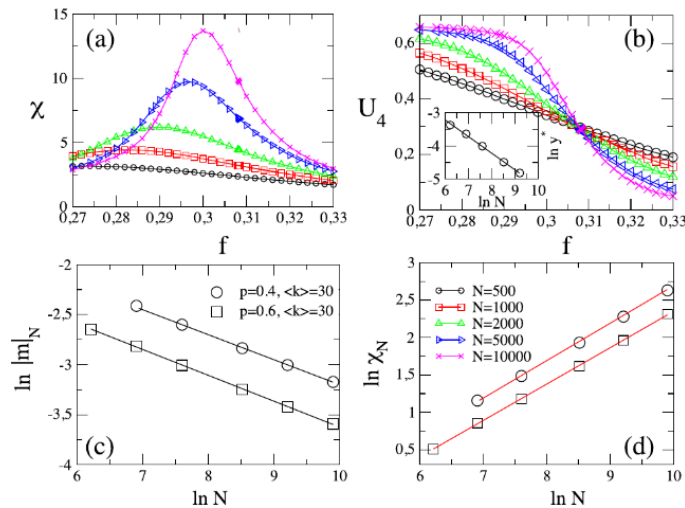


Figura 3.3: Paneis (a) e (b), mostram para a rede ER e $p = 0.4$ e $\langle k \rangle = 30$, a variância χ e o cumulante reduzido U_4 versus f para diferentes tamanhos de sistema N . Inset: Um gráfico Log-Log de $y^* = f_c - f_N$ versus N , com f_N calculado do valor máximo de χ . A linha reta tem inclinação consistente a $1/\nu = 1/2$. Paneis (c) e (d) mostram os expoentes críticos β/ν e γ/ν (ambos os dois para $\langle k \rangle = 30$), respectivamente. Eles são consistentes com $\beta/\nu = 1/4$ e $\gamma/\nu = 1/2$, respectivamente [3].

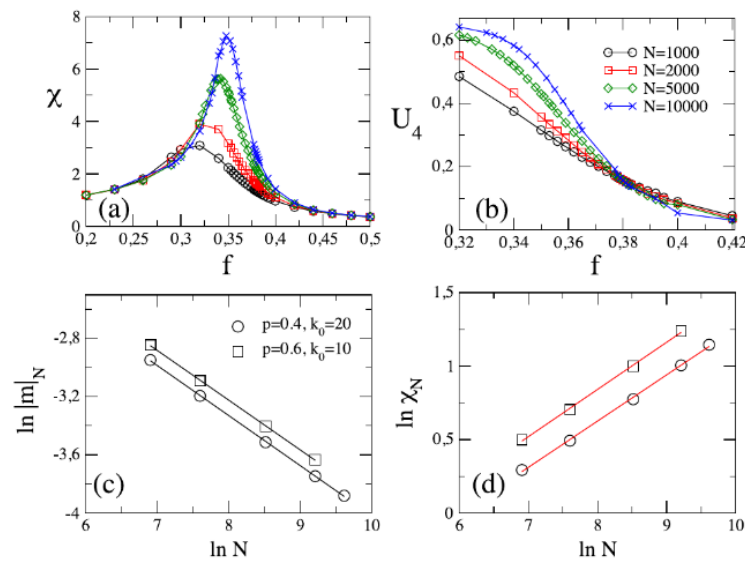


Figura 3.4: Paneis (a) e (b), mostram para a rede AB e $p_0 = 0.4$ e $k_0 = 20$, a variância χ e o cumulante reduzido U_4 versus f para diferentes tamanhos de sistema N . Paneis (c) e (d) mostram os expoentes críticos β/ν e γ/ν para $p = 0.4$ ($k_0 = 20$) e $p = 0.6$ ($k_0 = 10$), respectivamente. Eles são consistewntes com $\beta/\nu = 0.34(1)$ e $\gamma/\nu = 0.32(1)$, respectivamente [3].

O comportamento das grandezas $|m|$, χ e U_4 para as redes Rk-RN $p = 0.1$ ($k_0 = 10$), $p = 0.5$ ($k_0 = 40$) e ER $p_0 = 0.4, 0.6$ ($\langle k \rangle = 30$) são mostrados em Figura 3.2 e Figura 3.3, respectivamente. Os paneis (a) e (b) mostram os traços típicos de transições críticas: $|m|$ decresce levemente ao elevar f (ou p) e χ apresenta um máximo em que o pico vira mais pronunciado com o incremento de N . A natureza das transições de fase é reforçada pela interseção entre as curvas de U_4 para diferentes tamanhos do sistema. Em todos os casos o cruzamento é caracterizado aparente valor universal $U_0^* = 0.28(1)$. A análise dos expoentes críticos fornece resultados consistentes com $\beta/\nu = 1/4$, $\gamma/\nu = 1/2$ e $1/\nu = 1/2$ que também satisfazem a relação $2\beta/\nu + \gamma/\nu = D_{eff}$ com $D_{eff} = 1$, que é uma relação que tem sido usada para indicar um comportamento universal das topologias homogêneas [10]. Por outra parte, todos eles são diferentes dos valores $\beta = 1/8$, $\gamma = 7/4$ e $\nu = 1$ para os reticulados (regulares) bidimensionais [8].

Um comportamento crítico diferente é obtido da análise da rede BA, mostrado na Figura 3.4 para $p = 0.4$ ($k_0 = 20$) e $p = 0.6$ ($k_0 = 10$). Em ambos os casos, o valor do cruzamento U_0^* e o conjunto de expoentes críticos são diferentes daqueles obtidos para as redes homogêneas, e valem $U_0^* = 0.16(1)$ e expoentes críticos $\beta/\nu = 0.34(1)$, $\gamma/\nu = 0.32(1)$, respectivamente. No entanto, esses expoentes ainda satisfazem a relação $2\beta/\nu + \gamma/\nu = 1$.

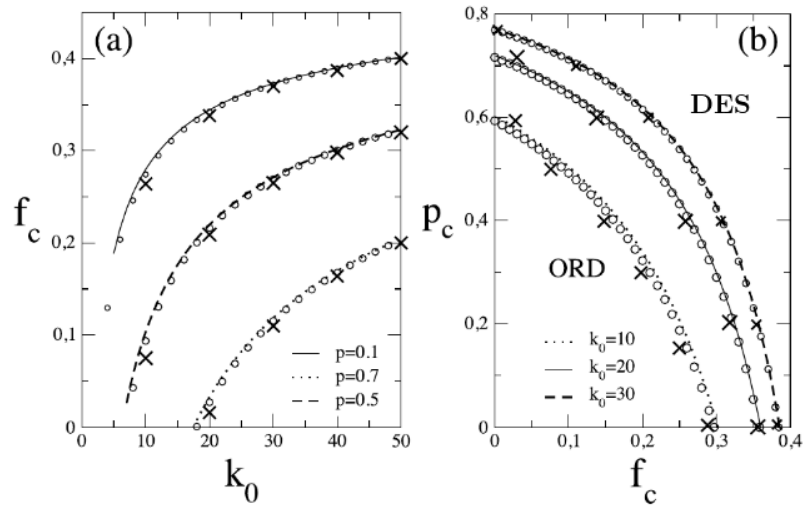


Figura 3.5: Panel (a) mostra as razões de transição f_c versus o grau dos nós k_0 para diferentes valores de p na rede Rk-RN. Os círculos e as linhas correspondem às estimações obtidas por médio de Eq. (3.10) e Eq. (3.15), respectivamente. O símbolo \times corresponde aos valores numéricos obtidos do cruzamento de U_4 para diferentes N 's. Panel (b) mostra o diagrama de fase p_c versus f_c para diferentes k_0 's [3].

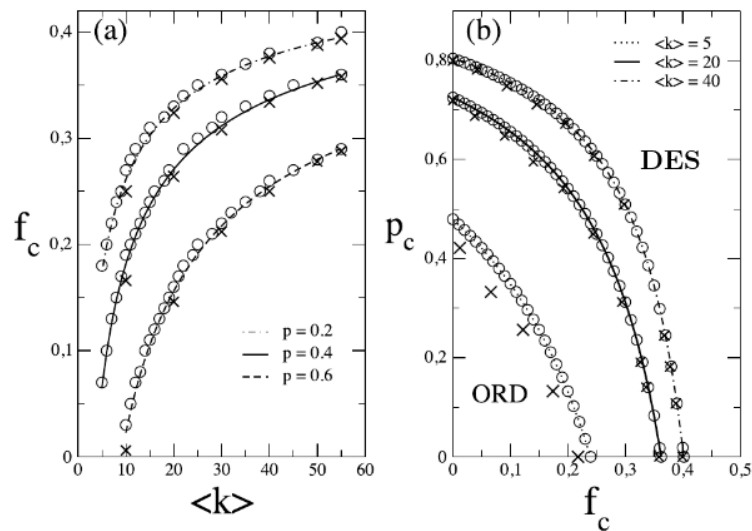


Figura 3.6: Panel (a) mostra as razões de transição f_c versus o grau médio $\langle k \rangle$ para diferentes valores de p na rede ER. Os círculos e as linhas correspondem às estimações obtidas por médio de Eq. (3.10) e Eq. (3.14), respectivamente. O símbolo \times corresponde aos valores numéricos obtidos do cruzamento de U_4 para diferentes N 's. Panel (b) mostra o diagrama de fase p_c versus f_c para diferentes valores de $\langle k \rangle$'s. [3].

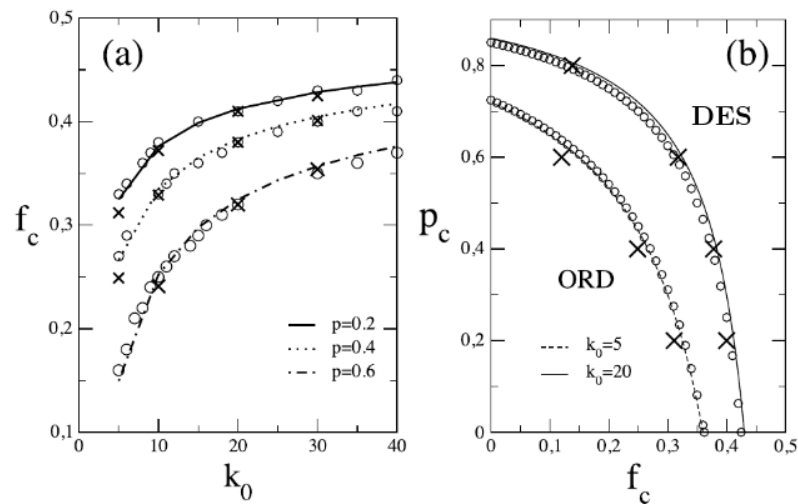


Figura 3.7: Panel (a) mostra as razões de transição f_c versus o grau mínimo k_0 para diferentes valores de p na rede AB. Os círculos e as linhas correspondem às estimativas obtidas por médio de Eq. (3.10) e Eq. (3.16), respectivamente. O símbolo \times corresponde aos valores numéricos obtidos do cruzamento do cumulante reduzido U_4 para diferentes N 's. Painel (b) mostra o diagrama de fase p_c versus f_c para diferentes k_0 's [3].

Os diagramas de fase das topologias homogêneas são apresentados nas Figura 3.5 para a rede Rk-RN com diferentes valores de p e k_0 (número de grau dos nós) e em Figura 3.6 para a rede ER, para diferentes valores de p e $\langle k \rangle$ (valor médio de grau). Da mesma forma na Figura 3.7 é apresentado o diagrama de fase para a rede heterogênea BA para diferentes valores de p e k_0 (número mínimo de grau). Os painéis (a) mostram que todas as estimativas coincidem muito bem para grandes conectividades, mas há algumas discrepâncias para sistemas com baixo número de graus. Tais comportamentos confirmam não apenas a confiabilidade da ACM mas também a sua precisão para localizar o ponto crítico. Como na análise de campo médio, as transições de fase são contínuas independente da topologia da rede e o grau do sistema. Assim também, aumentando o valor de independência p não há alteração das discrepâncias desses métodos (ACM e simulações). Finalmente, observamos que [painéis (b)] a inclusão do ruído adicional encurtam a fase ordenada e então as regiões desordenadas alongam-se.

Verificamos a universalidade nos expoentes críticos das redes homogêneas Rk-RN e ER [10], diferentes daqueles achados para a rede AB que é um dos principais exemplos da rede heterogênea. A presença do ruído p faz com que a fase ordenada sofra um encurtamento e conseqüentemente a fase desordenada um alongamento sobre o diagrama de fase. Verificamos uma concordância dos resultados de CM com os resultados das simulações para valores grandes de k , mas há algumas discordâncias com valores pequenos de vizinhos k em (Rk-RN), valores médios de grau $\langle k \rangle$ em (ER) e valores mínimos de grau k_0 em (BA). Além disso, as transições de fase descontínuas são descartadas sobre a presença do ruído p nas diferentes estruturas topológicas, em contraste com um modelo de votação semelhante ao apresentado em Ref. [9], onde a "independência" é capaz de mudar a ordem da transição para maiores vizinhanças.

3.3 Conclusões

Motivados pela inclusão de indivíduos 'independentes' estudamos o comportamento do votante majoritário na presença de um ingrediente extra, expressando uma probabilidade de mudança independente. Socialmente p considera-se um tipo de desconformidade. Com o objetivo de conhecer a natureza do tipo de transição de fase do pMVM estudamos ele sobre estruturas de redes complexas (homogêneas e heterogêneas), para isso, sob aproximação de campo médio encontramos expressões analíticas do ruído crítico f_c na presença do parâmetro p e válida para uma estrutura de rede genérica. Para estudarmos o tipo de transição de fase nas diferentes estruturas além do campo médio, realizamos simulações numéricas para sistemas finitos em diferentes estruturas, utilizando a metodologia supracitada.

Capítulo 4

Desordem temporal no modelo do votante majoritário

Considerar o efeito/influência de possíveis flutuações de grandezas que definem o comportamento de um sistema é uma forma de fornecer uma descrição mais realista do sistema. Flutuações num sistema podem ser causadas pela incidência de agentes externos sobre o sistema, tais como forças externas ou por interações internas entre as partes do sistema, como em reações químicas. Qualquer uma que seja a origem de uma flutuação ela se faz importante quando é evidente a sua influência sobre o comportamento do sistema. Dentre as diversas formas de representar as flutuações num sistema estão a desordem espacial e desordem temporal do parâmetro de controle que rege o comportamento de um sistema. Resultados mostram que transições de fase com estados absorventes são sempre afetadas pela desordem espacial e temporal [28, 29], levando em cada caso a um novo conjunto de expoentes críticos. Além disso, a desordem (espacial) temporal leva uma região na fase ativa (absorvente) onde o sistema se comporta de forma diferente, mais especificamente a fase absorvente é caracterizada por uma região onde a densidade de partículas apresenta decaimento mais lento (ao invés de exponencial). No caso da desordem temporal, existe uma região na fase ativa onde o tempo de decaimento cresce algebricamente (ao invés de exponencialmente) com o tamanho do sistema. Recentemente, na Ref. [30] verificou-se que ao contrário da desordem espacial transições de fase descontínuas não são destruídas pela desordem temporal. Mais especificamente, a desordem temporal não proíbe a existência de transições descontínuas, embora diferentes e notáveis diferenças surjam em comparação com o sistema puro (sem desordem). Dentre elas destacamos a existência de regiões em que o tempo de decaimento do sistema para a fase ativa é exponencialmente grande. Tais regiões foram denominadas "fases de Griffiths temporais", em analogia aos casos anteriores. O objetivo central deste capítulo é estabelecer uma descrição generalizada das transições de fase para sistemas fora de equilíbrio com simetria de inversão Z_2 na presença de desordem temporal para diferentes parâmetros de controle. O sistema sob consideração é novamente o modelo do votante majoritário com inércia (MVMI) em redes regulares aleatórias de grau k (Rk-RN). Sendo o MVMI governado pelo parâmetro de controle f e a inércia θ o nosso estudo leva em consideração a desordem temporal em ambos os parâmetros, em cada caso é feita uma análise do efeito da desordem temporal sobre as diferentes fases do sistema sob aproximação de campo médio (ACM) e simulações.

4.1 Aproximação de campo médio

Conforme mencionamos anteriormente, a dinâmica de um sítio no MVMI é descrita pelas Eq. (2.1)-Eq. (2.3) que são aplicáveis a qualquer estrutura de rede e em que $w(\sigma_i)$ é a taxa de transição do estado σ_i para $-\sigma_i$ de um sítio i . Aumentando os valores da inércia ($\theta \geq 1/3$) e a conectividade k ($k \geq 7$), há uma mudança no tipo de transição de fase, passando de ser uma transição de fase contínua (ou de segunda ordem) para uma de descontínua (ou de primeira ordem). Na ACM a transição de fase descontínua é marcada pelo surgimento de uma região de histerese/bistabilidade em que duas fases simétricas ordenada e desordenada coexistem. A seguir apresentamos uma ACM diferente à apresentada no capítulo 2, embora equivalente a ela. De acordo com Ref. [26] e em conformidade com o capítulo anterior, a evolução temporal da magnetização média $m_k = \langle \sigma_i \rangle_k$ de um sítio i com grau k é dada por $d\langle \sigma_i \rangle_k / dt = -\langle 2\sigma_i w(\sigma_i) \rangle_k$, de forma que

$$\frac{d}{dt}m_k = -m_k + (1 - 2f)\langle S(\Theta_i) \rangle, \quad (4.1)$$

onde $\langle S(\Theta_i) \rangle$ é a média da função sinal sobre todas as possíveis configurações positivas Θ_+ e negativas Θ_- das vizinhanças do sítio i . Dessa forma podemos escrevê-la sob a aproximação de um sítio da seguinte forma,

$$\langle S(\Theta_i) \rangle = \frac{1}{2}(1 + m_k)\langle S(\Theta_+) \rangle + \frac{1}{2}(1 - m_k)\langle S(\Theta_-) \rangle, \quad (4.2)$$

em que $(1 \pm m_k)/2$ é a probabilidade do sítio i possuir spin ± 1 e com $\langle S(\Theta_{\pm}) \rangle$ dado por

$$\langle S(\Theta_{\pm}) \rangle \approx \sum_{n=\lceil n_k^{\pm} \rceil}^k C_n^k p_+^n p_-^{k-n} - \sum_{n=\lceil n_k^{\mp} \rceil}^k C_n^k p_-^n p_+^{k-n}, \quad (4.3)$$

com p_{\pm} sendo a probabilidade de um vizinho possuir spin ± 1 . p_{\pm} pode ainda ser determinada em termos da magnetização média de uma spin vizinho aleatoriamente escolhido m^* sob a relação $p_{\pm} = (1 \pm m^*)/2$. Na ACM para o MVMI desenvolvida no capítulo 2 foram definidas as grandezas n_k^- e n_k^+ juntamente da relação existente entre m_k e m^* para o caso de redes complexas não correlacionadas de forma que

$$m^* = (1 - 2f) \sum_k \frac{kP(k)}{\langle k \rangle} \left[\left(\frac{1 + m_k}{2} \right) \langle S(\Theta_+) \rangle + \left(\frac{1 - m_k}{2} \right) \langle S(\Theta_-) \rangle \right]. \quad (4.4)$$

Vamos restringir daqui por diante a nossa análise para redes aleatórias (com vizinhança fixa) cuja distribuição de probabilidade dos graus é dada por $P(k) = \delta(k - k_0)$. Dessa forma a Eq. (4.4) se reduz à expressão

$$m = (1 - 2f) \left[\left(\frac{1 + m}{2} \right) \langle S(\Theta_+) \rangle + \left(\frac{1 - m}{2} \right) \langle S(\Theta_-) \rangle \right], \quad (4.5)$$

com $m = m_k = m^*$ sendo a magnetização média da rede no regime estacionário.

Para um valor fixo de inércia no qual a transição de fase seja descontínua a Eq. (4.5) apresenta três soluções estacionárias: que são a solução estável $m_e(f)$, a solução instável $m_i(f)$ e a solução nula que caracteriza a fase desordenada $m_d(f)$, de forma que $m_e(f) >$

$m_i(f) > m_d(f)$. A transição de fase ordem-desordem acontece em f_f . As principais características das transições descontínuas serão novamente discutidas. Com o intuito de estabelecer um marco de referência a seguir apresentamos uma análise da evolução temporal da magnetização média m na ausência de qualquer desordem, isto é, faremos uma análise do sistema puro.

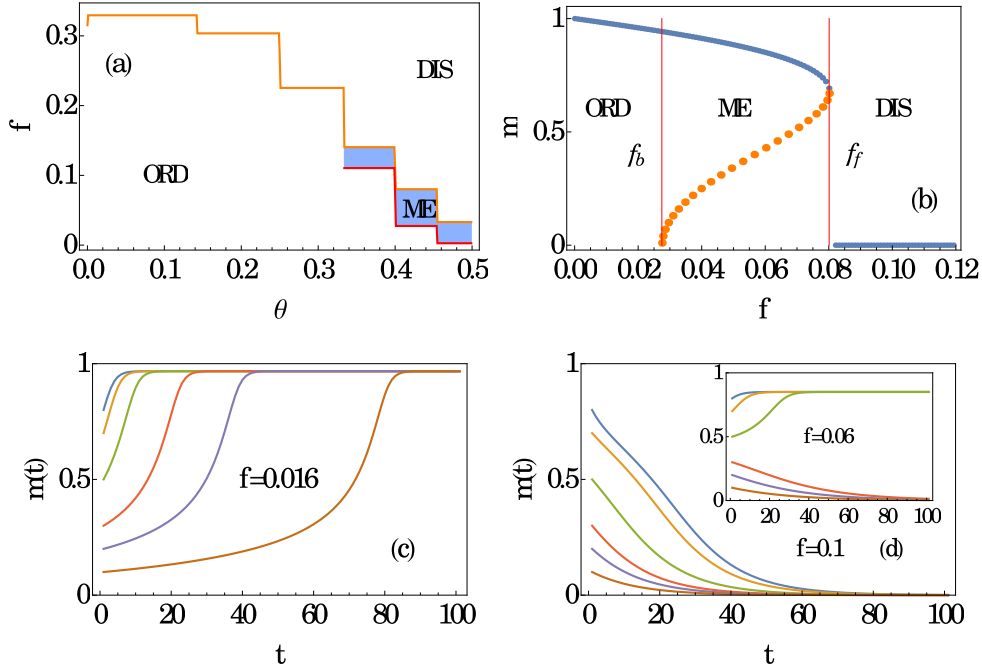


Figura 4.1: Painel (a) mostra o diagrama de fase na ACM para rede aleatória regular para $k = 12$ e $k_0 = 12$. ORD, ME and DIS denotam as fases ordenada, metaestável e desordenada, respectivamente. Em (b), a magnetização estacionária m versus f para $\theta = 0.45$. As linhas contínuas e tracejadas denotam as soluções estáveis e instáveis da Eq. (4.5) respectivamente. Os comportamentos que caracterizam a evolução de m como função do tempo são apresentados nos painéis (c) – (d) para $f = 0.016$ (c), $f = 0.10$ (d) and 0.06 (inset) para diferentes valores iniciais $m(0)$.

Para o caso $k = 12$ e $\theta = 0.45$ o diagrama de fase do MVMI em ACM indica a presença de uma fase metastável (ME) tal como mostrado na Fig. 4.1(a). O comportamento da magnetização média em função do parâmetro de controle f é mostrado na Fig. 4.1(b), em que evidenciam-se as fases ordenada (ORD) com $f < f_b$, metastável (ME) com $f_b \leq f \leq f_f$ e desordenada (DES) com $f > f_f$. Para $f > f_f$, a magnetização média do sistema evolui para a solução $m_d(f) = 0$ que caracteriza a fase desordenada (DES), isto é $m(t \rightarrow \infty) \rightarrow m_d(f) = 0$ para qualquer valor de magnetização inicial como mostrado na Fig. 4.1(d). Para $f < f_b$, $m(t \rightarrow \infty) \rightarrow m_e(f)$ na fase ORD, independentemente do valor inicial da magnetização m_0 como pode ser visto na Fig. 4.1(c). Para $f_b \leq f \leq f_f$, a evolução temporal da magnetização depende da magnetização inicial m_0 . Se $m_0 > m_e(f)$ então $m(t \rightarrow \infty) \rightarrow m_e(f)$ (fase ORD), se $m_0 < m_i(f)$ então $m(t \rightarrow \infty) \rightarrow m_d(f) = 0$ (fase DES), esse comportamento biestável (ver inset da Fig. 4.1) é o que caracteriza uma transição de fase descontínua. O valor $f = f_b$ marca a linha de cruzamento entre a fase ordenada de comportamento monoestável e biestável. Esses resultados podem

ser estendidos para diferentes valores de k e θ na presença de uma transição de fase descontínua.

Partindo da Eq. (3.7) podemos levar a cabo uma análise de campo médio para o regime de $k \gg 1$. Considerando que $\text{erf}[k_0(1 - p_{\pm})/\sqrt{2}\sigma]$ aproxima-se de 1 $k \gg 1$, obtemos a seguinte expressão para o estado estacionário

$$f = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2m}{(1+m)\text{erf}(\alpha) - (1-m)\text{erf}(\beta)} \right], \quad (4.6)$$

onde os parâmetros α e β são dado por

$$\alpha = \sqrt{\frac{k_0}{2}} \left[\frac{\theta}{1-\theta} + m \right] \quad \text{and} \quad \beta = \sqrt{\frac{k_0}{2}} \left[\frac{\theta}{1-\theta} - m \right]. \quad (4.7)$$

O ponto de transição f_f corresponde ao máximo da Eq. (4.6), na vizinhança de f_b (ou f_c para uma transição de fase crítica), espera-se que m é pequeno, e portanto a equação logística aproxima-se como $dm/dt \approx A(f, \theta, k_0)m$, onde $A(f, \theta, k_0)$ é dado por

$$A(f, \theta, k_0) = -1 + (1 - 2f) \left[\sqrt{\frac{2k_0}{\pi}} e^{-\frac{k_0\theta^2}{2(1-\theta)^2}} + \text{erf} \left(\sqrt{\frac{k_0}{2}} \frac{\theta}{1-\theta} \right) \right]. \quad (4.8)$$

Dessa expressão, f_b é dada por $A(f_b, \theta, k_0) = 0$ que marca, para um dado valor de θ , a separação entre o crescimento exponencial ao valor no estado estacionário é $m_e(f)$ se $A(f, k_0, \theta) > 0$ ($f < f_b$) e um decaimento exponencial para $m_d(f)$ se $A(f, k_0, \theta) < 0$ ($f > f_b$). Note que nós recuperamos $2f_c = 1 - \sqrt{\pi/(2k)}$, quando $\theta = 0$ [9].

4.2 Desordem temporal no parâmetro de controle

Uma vez apresentadas as principais características do sistema puro, agora estudamos os efeitos da desordem temporal no parâmetro de controle f . Ainda que resultados similares são esperados para diferentes formas de desordem, aqui consideramos o caso mais simples em que para um dado intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$, o parâmetro de controle f é aleatoriamente extraído de uma distribuição de probabilidade binomial $P_{dis}(f)$ dada por

$$P_{dis}(f) = p\delta(f - f_-) + (1 - p)\delta(f - f_+), \quad (4.9)$$

em que $f_- < f_+$ e $p(1 - p)$ é a probabilidade de f assumir o valor $f_-(f_+)$. Neste intervalo de tempo o sistema comporta-se igual que no caso puro, pois o parâmetro de controle é mantido fixo. Por simplicidade e também para comparação com resultados obtidos em [30] fixamos $p = 1/2$.

Para fins de comparação com o caso sem desordem o nosso cenário de análise é o MVMi com $k = 12$ e $\theta = 0.45$, no qual consideramos todas as possíveis variações de f_+ e f_- ao longo das fases ORD, ME e DES.

Começamos com o caso em que ambos os dois f_+ e f_- variam sobre a fase ORD ($0 \leq f_{\pm} \leq f_b$). Independente da magnetização inicial $m(0)$, o sistema evoluirá a um estado ordenado, em que a magnetização flutuara entre os valores $m_e(f_+)$ e $m_e(f_-)$. Similarmente, quando ambos os dois f_+ e f_- variam sobre a fase DES ($f_f \leq f_{\pm} \leq 1/2$) o sistema decai para a fase desordenada, independentemente do valor de $m(0)$. Para

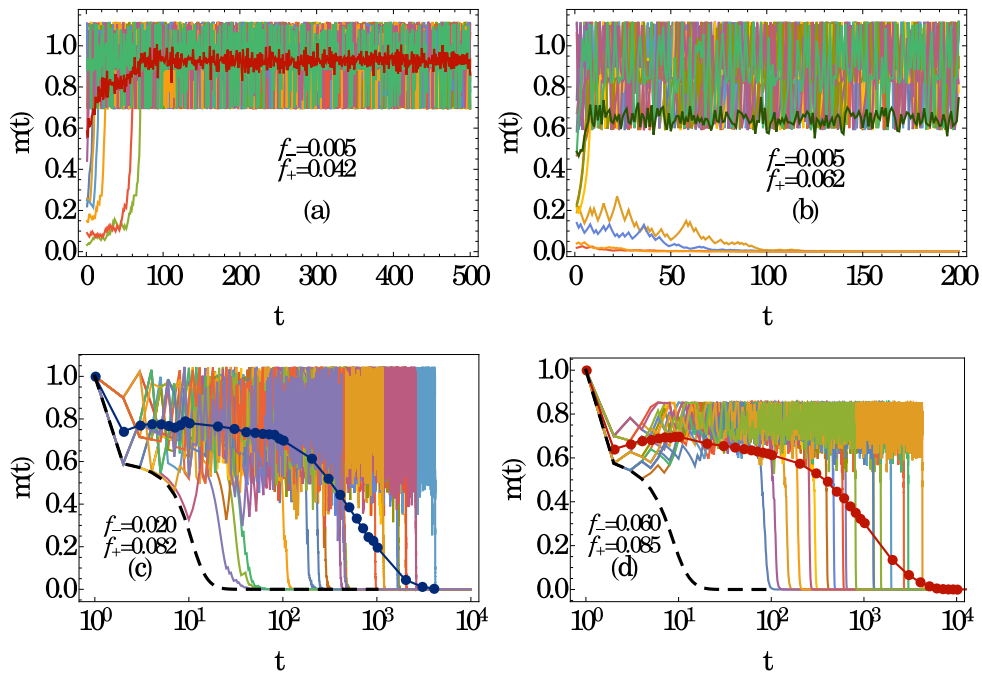


Figura 4.2: Desordem temporal em ACM: Para uma Rk-RN com $k_0 = 12$, $\theta = 0.45$ e $\Delta t = 5$, a evolução temporal de m para diferentes escolhas de f_+ e f_- junto com diferentes realizações independentes. Painel (a) – (d) exemplificam os seguintes casos: $(f_-, f_+) \in (\text{ORD}, \text{ME})$ com $\bar{f} < f_b$ e $\bar{f} > f_b$, $(f_-, f_+) \in (\text{ORD}, \text{DES})$ e $(f_-, f_+) \in (\text{ME}, \text{DES})$, respectivamente. Curvas tracejadas e de símbolos correspondem às versões pura (para $f = f_+$) e média de m para $N_D = 10^3$ realizações, respectivamente.

o caso em que ambos os dois f_+ e f_- variam sobre a fase ME ($f_b \leq f_{\pm} \leq f_f$) com $m_i(f_-) < m_i(f_+)$ a evolução temporal de m depende dos valores de magnetização inicial $m(0)$. Se $m(0) < m_i(f_-)$ então $m(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ e se $m(0) > m_i(f_+)$ então $m(t \rightarrow \infty) \neq 0$, independentemente da sequência de f_+ e f_- . Para o caso em que ($m_i(f_-) \leq m(0) \leq m_i(f_+)$) a evolução temporal da magnetização depende dos detalhes do sistema, isto é, depende da sequência de valores de f_+ e f_- . Portanto, similar às TFA [30] as fases ORD, ME e DES são preservadas sob a desordem temporal em f .

Agora analisamos os casos em que f_- e f_+ pertencem a diferentes fases. Com $f_- \in ORD$ e $f_+ \in ME$ a predominância da fase pode ser entendida sob uma análise heurística baseada na evolução temporal de m no regime de baixas magnetizações. isto é, $m(t) \ll 1$. Para achar uma expressão aproximada de $m(t)$ nesse regime devemos resolver a equação diferencial Eq. (4.1) considerando unicamente o termo linear do lado direito, pois para valores fixos k e θ podemos obter uma série de potências em m tendo como coeficientes funções lineares de f . Por meio desse procedimento a Eq. (4.1) se reduz à forma $m \sim e^{-\alpha(f-f_b)t}$, em que os parâmetros α e f_b são valores numéricos conhecidos. Uma vez que f flutua entre f_- e f_+ a evolução temporal de m assume duas expressões, a primeira dada por $m \sim e^{-\alpha(f_- - f_b)t}$ que faz tender m à fase ORD, pois $f_- < f_b$ e a segunda dada por $m \sim e^{-\alpha(f_+ - f_b)t}$ que faz tender m à DES, pois $f_+ > f_b$. Heuristicamente encontramos que a fase ORD prevalece quando $f_- + f_+ < 2f_b$, exemplificado na Fig. 4.2(a), no entanto a fase ME prevalece quando $f_- + f_+ > 2f_b$, como mostrado na Fig. 4.2(b). A linha satisfazendo $f_- + f_+ = 2f_b$ é a que separa as fases ordenada e metaestável.

Agora consideramos o caso em que $f_- \in ME$ e $f_+ \in DIS$. Embora diferente das TFA [30], a existência da histerese é responsável do domínio da fase DES sobre a fase ME. Uma vez que a magnetização decai a DES quando $f > f_f$ independentemente da magnetização inicial, basta a ocorrência de uma longa sequência consecutiva de f_+ s, isto é, uma flutuação rara, para que $m(t) < m_i(f_-)$ de forma que o sistema atinge a fase DES com probabilidade 1. Para períodos de tempo suficientemente longos uma flutuação rara acontece com uma probabilidade de um e portanto a desordem temporal sempre suprime a fase ME quando $f_+ > f_f$. No entanto, o aparecimento de uma flutuação rara pode requer tempos exponencialmente longos, principalmente quando f_+ é próximo de f_f ou para Δt s pequenos. Comparando algumas realizações independentes da evolução temporal da magnetização com a média de 1000 realizações, a Fig. 4.2(d) mostra o domínio de DES sobre ME para $\Delta t = 5$.

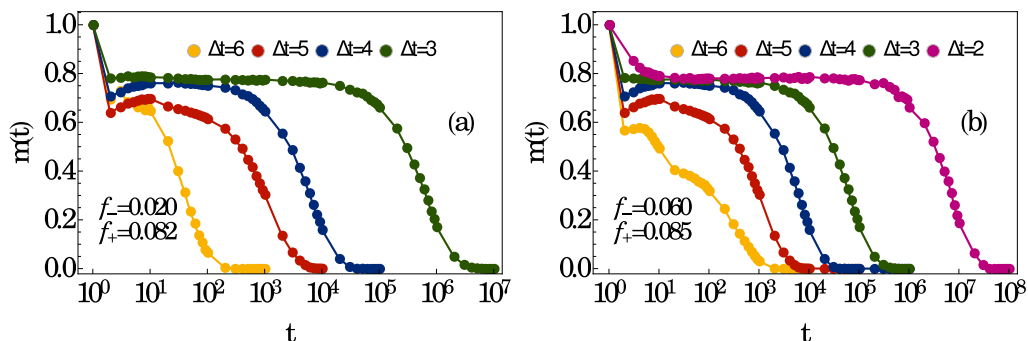


Figura 4.3: Para uma Rk-RN com $k_0 = 12$ e $\theta = 0.454$, painéis (a) – (b) mostram a média de m sobre $N_D = 10^3$ realizações independentes para $\Delta t = 2, 3, 4, 5$ e 6 para $(f_-, f_+) \in (ORD, DES)$ e (ME, DES) , respectivamente.

Note que a evolução do sistema sobre as realizações individuais e sobre seu valor médio diferem significativamente, refletindo a ocorrência da flutuação rara em diferentes períodos de tempos. A evolução temporal média apresenta um patamar entre tempos pequenos/intermediários que diz respeito à ausência de flutuações raras que levam ao sistema à fase DES é obtida levando em conta todos os instantes possíveis no qual surge a flutuação rara e chegamos ao resultado (aproximado). O patamar é mais pronunciado para Δt menores e seguido de um decaimento à DES seguido o tempo característico \bar{T} . Com o intuito de obtermos o limite superior para \bar{T} , assumimos o caso extremo no qual a fase DES é atingida apenas por uma sequência consecutiva de f'_+ s, em que a magnetização evolui de $m_e(f_-)$ para $m_i(f_-)$ quando $f = f_+$, caracterizado pelo tempo de decaimento τ_+ . O tempo característico médio é dado por $\bar{T} \approx \tau_+ p^{\tau_+/\Delta t}$ [30]. A Fig. 4.3(a)-(b) mostra a evolução temporal média de $m(t)$ para diferentes passos de tempo Δt para os casos $(f_-, f_+) \in (ORD, DES)$ e $(f_-, f_+) \in (ME, DES)$, respectivamente. Mesmo prevalecendo a fase DES sobre ME a transição de fase descontínua se entre ME e DES é preservada pela desordem temporal, ela acontece em $f_+ = f_f$.

Finalmente para o caso em que $f_- \in ORD$ e $f_+ \in DES$ a evolução temporal da magnetização pode ser descrita pela análise em regime de $m(t) \ll 1$ em que a fase ORD prevalece se $f_- + f_+ < 2f_b$ e DES prevalece se $f_- + f_+ > 2f_b$. A relação $2f_b = f_- + f_+$ define a linha que separa as duas fases. Analogamente ao caso anterior, uma comparação entre média e algumas realizações independentes da evolução temporal de $m(t)$ com $\Delta t = 5$ é mostrada na Fig. 4.2(c), na qual podemos observar que a fase DES prevalece sobre ORD, neste caso como o menor $f_- = 0$ mais o menor $f_+ = f_f > 2f_b$, a fase desordenada sempre prevalece.

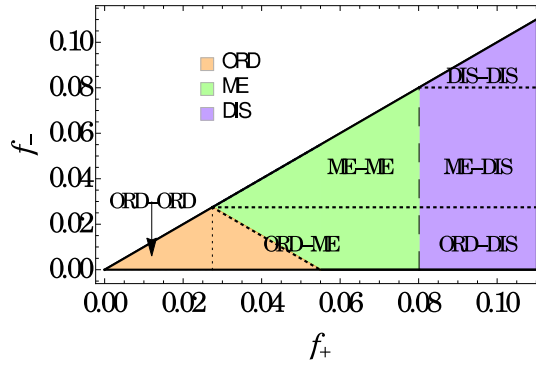


Figura 4.4: Para Rk-RN com $k_0 = 12$ and $\theta = 0.45$ diagrama de fase em ACM sob desordem temporal no parâmetro f . As fases resultantes são representada por diferentes cores. As linhas pontilhadas e tracejadas representam linhas de cruzamento e de transição de fase descontínua, respectivamente.

Em base à análise previa foi construído o diagrama de fase para $k = 12$ e $\theta = 0.45$ como apresentado na Fig. 4.4, em que as diferentes cores representam a fase predominante. Mesmo sendo TFA e Z_2 sistemas de diferentes características, o efeito da desordem temporal é similar e está diretamente relacionada à biestabilidade da fase ordenada.

4.3 Desordem temporal na inércia

Uma vez que a inércia desempenha um papel fundamental na ocorrência de transições descontínuas, estendemos aqui os efeitos sobre a transição de fase devido à desordem temporal na inércia. Adotando a representação da desordem temporal definida na seção anterior, temos que em cada passo de tempo Δt a inércia θ pode assumir um dos possíveis valores θ_- e θ_+ definidos pela distribuição binomial

$$P_{dis}(\theta) = p\delta(\theta - \theta_-) + (1 - p)\delta(\theta - \theta_+), \quad (4.10)$$

com $\theta_- < \theta_+$ e $p(1 - p)$ é a probabilidade de ocorrência de $\theta_-(\theta_+)$. Por simplicidade escolhemos $p = 1/2$.

A ACM é levada a cabo no regime $m(t) \ll 1$, para tal análise é necessário resolver a Eq. (4.1). Para valores fixos de k, f e θ , podemos expandir o lado direito da Eq. (4.1) em série de potências de m , logo após a expansão levamos em consideração apenas o termo linear, que é o termo de maior contribuição nesse regime. A Eq. (4.1) se reduz a $dm/dt \approx A'(k, f, \theta)m$, em que o coeficiente $A'(k, f, \theta)$ é numericamente determinado pela expansão em série de potências. Para valores fixos de k e f o coeficiente $A'(k, f, \theta) > 0$ para $\theta \in ORD$ e $A'(k, f, \theta) < 0$ para $\theta \in ME/DES$. A desordem na inércia é analisada pela competição entre os coeficientes $A'(k, f, \theta_-)$ e $A'(k, f, \theta_+)$ quando θ_- e θ_+ variam ao longo das fases ORD, ME e DES. A partir da Fig. 4.1(a) que representa o diagrama de fase do MVM para Rk-RN com $k = 12$ é possível definir diagramas de fase "puros" correspondentes a um determinado valor de f . Por exemplo para $f = 0.12$ temos a separação entre ORD e ME em $\theta_b = 1/3$ e a separação das fases ME e DES em $\theta_f = 2/5$.

A seguir analisamos a desordem temporal no MVM para o caso $k = 12$ e $f = 0.12$ fixos, essa análise pode ser estendida a quaisquer valores de k e f . Começamos com $\theta_- \in ORD$ e $\theta_+ \in ME/DES$, a fase dominante será a fase ORD se $A'(k, f, \theta_-) > A'(k, f, \theta_+)$, exemplificado em Fig. 4.5(a)-(b) com $(\theta_-, \theta_+) \in (ORD, ME)$ e $(\theta_-, \theta_+) \in (ORD, DES)$, respectivamente. Haverá domínio de ME/DES sobre ORD se $A'(k, f, \theta_-) < A'(k, f, \theta_+)$. Para competição entre $\theta_- \in ME$ e $\theta_+ \in DES$ a fase resultante é DES, exemplificado na Fig. 4.5(c) com $(\theta_-, \theta_+) \in (ME, DES)$, pois ambos os dois coeficientes $A'(k, f, \theta_-)$ e $A'(k, f, \theta_+)$ são negativos, como mostrado na Tab. 2.1. Em conformidade ao caso anterior, nesse caso o sistema requer apenas uma sequência de longa de $\theta = \theta_+$ para se dirigir à $m(t) < m_i(\theta_-)$ e dessa forma decairá para a fase DES independentemente da sequência de valores de θ .

Tabela 4.1: Coeficientes $A'(k, f, \theta)$ para $f = 0.12$ e $k_0 = 12$ e a fase correspondente.

θ	$A'(k, f, \theta)$	Fase
$0 < \theta < 1/7$	0.614...	ORD
$1/7 < \theta < 1/4$	0.467...	ORD
$1/4 < \theta < 1/3$	0.192...	ORD
$1/3 < \theta < 2/5$	-0.0122...	ME
$2/5 < \theta < 5/11$	-0.0979...	DES
$5/11 < \theta < 1/2$	-0.118...	DES

Em similaridade ao caso da desordem temporal no parâmetro de controle f , o tempo de decaimento T é maior para intervalos de tempo Δt pequenos, esse decaimento para a fase

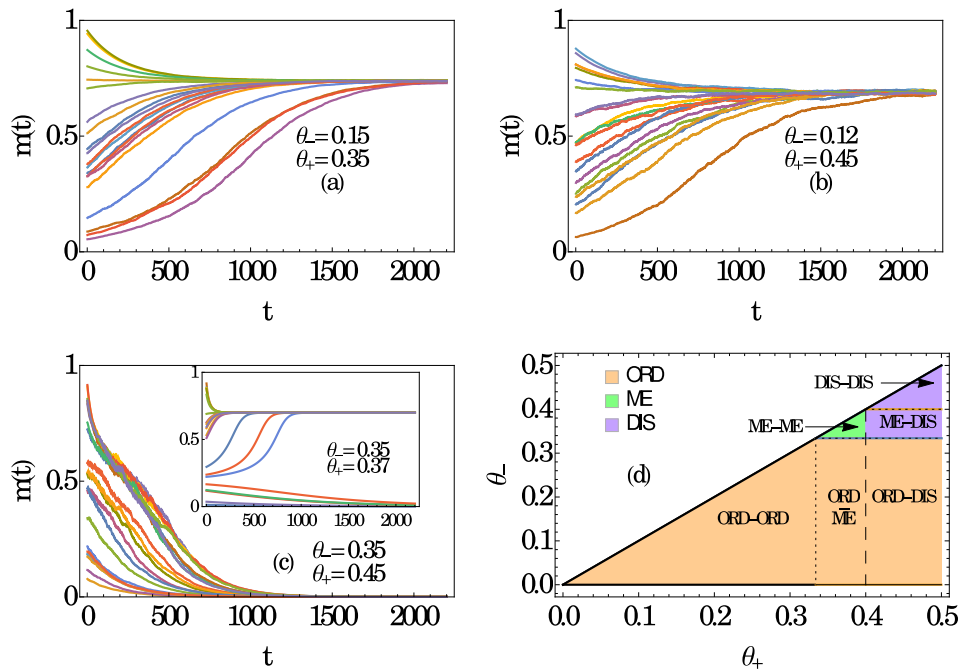


Figura 4.5: Análise em ACM para a desordem temporal na inércia: Para a rede Rk-RN com valores $k_0 = 12$ e $f = 0.12$, painéis (a) – (c) exemplificam a evolução temporal média de $m(t)$ para diferentes configurações iniciais e valores de inércia $(\theta_-, \theta_+) \in$: (ORD,ME), (ORD,DES), (ME,DES), (ME,ME) [inset], respectivamente. Em (d) o diagrama de fase com linhas tracejadas e pontilhadas representando linhas de transição de fase descontínuas e de cruzamento entre fases respectivamente. A fase resultante é representada pelas cores.

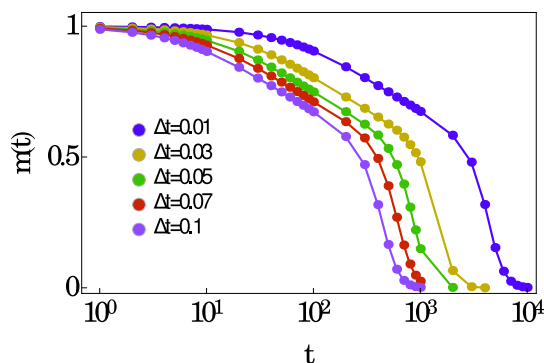


Figura 4.6: Para $k_0 = 20$, $f = 0.12$, $\theta_- = 0.334 \in$ ME e $\theta_+ = 0.412 \in$ DES, a média de $m(t)$ versus t obtida para $N_D = 10^3$ realizações independentes com desordem e diferentes Δt 's.

Tabela 4.2: Coeficientes $A'(k, f, \theta)$ para $f = 0.12$ and $k = 20$ e as fases correspondentes.

θ	$A'(f, \theta, k_0)$	Fase
$3/13 < \theta < 2/7$	0.2295...	ORD
$2/7 \leq \theta < 1/3$	0.0328.	ORD
$1/3 \leq \theta < 3/8$	-0.0683...	ME
$3/8$	-0.0876...	ME
$3/8 < \theta < 7/17$	-0.1176..	DES

DES é devido à ocorrência de uma longa sequência de θ_+ . A transição descontínua entre ME e DES ocorre em $\theta_+ = \theta_f$. Portanto a desordem temporal na inércia também não elimina a existência de uma transição descontínua nem da região de histerese, caracterizada pela biestabilidade, conforme exemplificada no inset da Fig. 4.5.

Uma característica interessante da desordem temporal na inércia é que nem sempre a competição entre $\theta_- \in ORD$ e $\theta_+ \in ME/DES$ é dominada por ORD. Isto é ilustrado no caso de $k = 20$ e $f = 0.12$ onde os coeficientes satisfazem $A'(k, f, \theta_-) < A'(k, f, \theta_+)$ de forma que na competição ME/DES prevaleceram sobre ORD.

O diagrama de fase correspondente a $k = 12$ e $f = 0.12$, onde as linhas tracejadas e pontilhadas representam transições de fase descontínuas e linhas de separação entre fases, respectivamente. As fases dominantes são representadas pelas diferentes cores.

4.4 Simulações

Por meio de simulações Monte Carlo da dinâmica do MVMI numa rede complexa aleatória de grau k e tamanho N estudamos os efeitos na magnetização e nas transições de fase sob a influência da desordem temporal tanto no parâmetro de ordem quanto na inércia. O esquema de simulação é o mesmo a apresentado por Bollobás em [27], em que a vizinhança de um sítio não é alterada com o tempo.

Em similaridade com ACM, as simulações numéricas começam por uma condição inicial em que um novo valor do parâmetro de controle ou da inércia é sorteado entre duas possibilidades f_-/θ_- e f_+/θ_+ a cada intervalo de tempo variando entre t e $t + \Delta t$. A evolução temporal do sistema é analisada até um tempo máximo t_{max} que resulta numa sequência de f_1, f_2, \dots, f_M ($\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M$) em que $t_{max} = M \times \Delta t$. Essa análise é repetida sobre $N_D = 10^3 - 10^4$ sequências distintas com desordem temporal. Em particular temos considerado $\Delta t = 20$ e $t_{max} = 10^5 - 10^6$.

A Figura. 4.7(a) mostra o comportamento do modulo do parâmetro de ordem $|m|$ em função de f para um sistema puro para a Rk-RN com $N = 5000$, $k = 20$ e $\theta = 0.3$. nela há uma região de histerese que marca uma transição de fase descontínua para o sistema. Na presença de desordem temporal no parâmetro de controle f , a evolução temporal da magnetização é similar à ACM, isto é, quando ambos os dois f_- e f_+ pertencem à mesma fase ORD ou DES a magnetização $m(t)$ converge para valores bem definidos nessas mesmas fases, independentemente do valor inicial $m(0)$ na fase ordenada. Devido aos efeitos de tamanho finito a magnetização $m(t)$ nunca se nula, mas $m(t \rightarrow \infty) \sim 1/\sqrt{N}$. Quando ambos os dois f_- e f_+ pertencem à ME verificamos o comportamento biestável de $m(t)$ considerando vários valores iniciais $m(0)$, como mostrado na Fig. 4.7(b) e portanto a desordem temporal em f não altera o comportamento biestável da magnetização. Quando os valores f_- e f_+ pertencem a diferentes fases, com $f_- \in ME/ORD$ e $f_+ \in DES$,

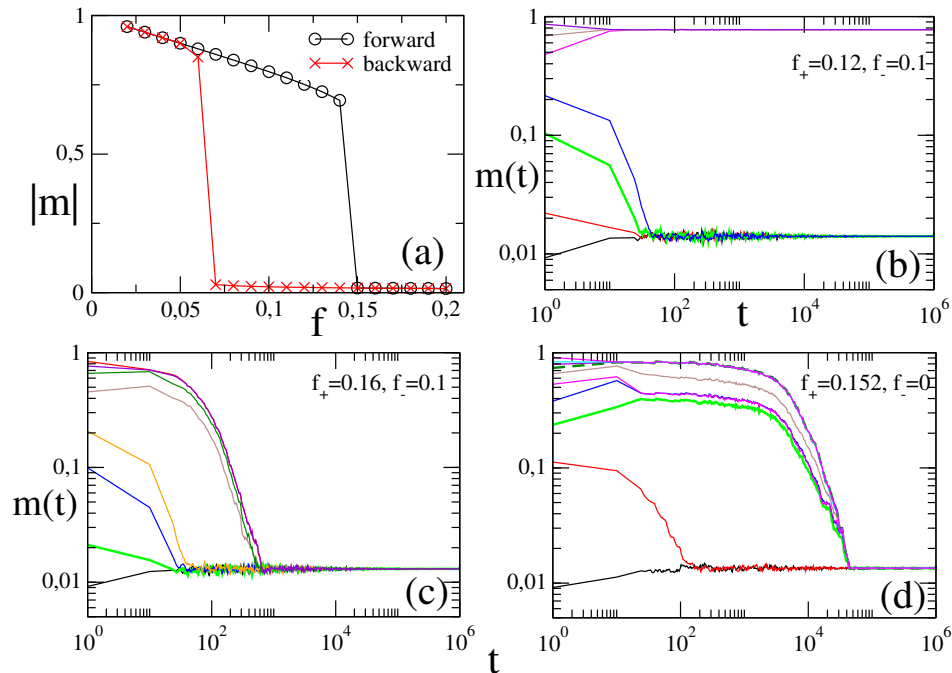


Figura 4.7: Painel (a) exemplifica para $N = 5000$, $k_0 = 20$ e $\theta = 0.3$, o parâmetro de ordem $|m|$ versus f para o sistema puro. As linhas contínuas e pontilhadas denotam o incremento tipo ida (forward) e reversa (backward) de f , respectivamente. Painéis (b)–(d) mostram a evolução temporal média do parâmetro de ordem m (para $N = 10^4$ realizações) para diferentes condições iniciais $m(0)$ com $(f_-, f_+) \in (ME, ME), (ME, DIS), (ORD, DIS)$, respectivamente.

há prevalência da fase DES sobre ME e ORD como mostrado em Fig. 4.7(c) e Fig. 4.7(d), respectivamente. Dessa forma os diferentes resultados obtidos pelas simulações são similares ao campo médio. O predomínio da fase DES ainda ocorre quando $f_- \in ME$ e f_+ nas vizinhanças de f_f como mostrado na Fig. 4.8(a).

Finalmente a competição de entre θ_- e θ_+ quando eles pertencem a diferentes fases para um sistema com $k = 20$ e $f = 0.12$. Em similaridade com o campo médio, na competição entre ME e DES a fase DES predomina sobre ME, como se mostra na Fig. 4.8(b) e uma transição descontínua se produz em $\theta_+ = \theta_f$. Na competição entre ORD e DES dependerá dos valores particulares de θ_- e θ_+ . Em particular, para $\theta_- = 0.28$ e $1/3 < \theta_+ = 3/8$ a fase ORD prevalece, no entanto, para $\theta_- = 0.29$ a fase prevalece a fase DES, como mostrado em Fig. 4.8(c), tudo isso em concordância com a Tabela 4.2.

4.5 Conclusões

Estudamos aqui os efeitos da desordem temporal no modelo do votante majoritário com inércia. Verificamos que a transição de fase descontínua também não é destruída pela desordem temporal, embora diferentes características comparadas com o sistema puro ocorrem. Assim como em transições com estados absorventes, a histerese/biestabilidade é o ingrediente essencial para a não supressão de coexistência. A presente descrição baseada na teoria de campo médio é capaz de descrever um tipo qualquer de desordem temporal.

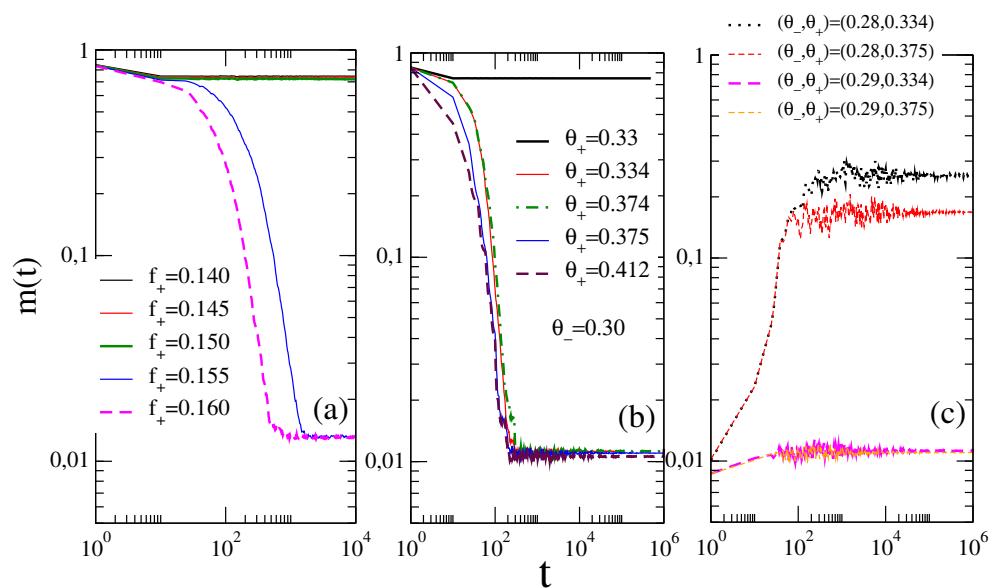


Figura 4.8: Para Rk-RN com $N = 10^4$, $k_0 = 20$ e $\theta = 0.3$, painel (a) a evolução temporal média do parâmetro de ordem $m(t)$ partindo de um estado ordenado com $f_- = 0.10$ (ME) para diferentes valores de f_+ 's. Painel (b) mostra para $f = 0.12$ e $m(0) = 1$, as evoluções temporais da média de $m(t)$ para $\theta_- = 0.30$ (ME) com diferentes valores de θ_+ 's. Em (c) o mesmo com $\theta_- = 0.28$ e 0.29 (ambos os dois pertencendo à fase ORD) e diferentes θ_+ 's começando desde $m(0) = 10^{-4}$. em todos os casos, as médias são obtidas de $N = 10^3 - 10^4$ realizações

Capítulo 5

Conclusões

Nesta tese de doutorado estudamos o efeito de diferentes ingredientes, de eles, a inércia, ruído extra, aumento da vizinhança e diferentes tipos de desordem temporal no modelo mais simples de não equilíbrio com simetria de inversão: o modelo do votante majoritário.

Originalmente ele apresenta uma transição ordem-desordem (com quebra espontânea de simetria) pertencente a classe de universalidade do modelo de Ising (em redes regulares). Nosso estudo teve como um dos principais propósitos no estabelecimento e influência de diferentes ingredientes para a ocorrência de transições descontínuas bem como sua robustez com relação a tais ingredientes.

Diversas conclusões podem ser obtidas. A primeira delas refere-se ao fato de que não apenas a inércia é um ingrediente fundamental para mudança da ordem da transição como também a vizinhança, de forma que uma vizinhança maior é necessária para a ocorrência de transições descontínuas. Além disso, transições descontínuas em redes regulares e complexas apresentam assinaturas diferentes. A primeira sendo caracterizada pela existência de biestabilidade e histerese, enquanto a segunda por um comportamento de escala com o volume do sistema e uma distribuição de probabilidades bimodal, podendo ser aproximada como uma superposição de duas gaussianas independentes.

No que se refere a inclusão de um ruído extra, vimos que ele não afeta a ordem da transição, como verificado em modelos similares [2, 25]. Além disso, desenvolvemos uma aproximação de campo médio mais simples para o modelo MV, baseado numa extensão da função sinal e usado para outras quantidades, dentre elas a produção de entropia [31].

Finalmente, estudamos o modelo MV na presença de desordem temporal, com o intuito de generalizar/estender resultados para transições com estados absorventes. Verificamos que a existência de biestabilidade é o ingrediente essencial para entendermos o efeito da desordem temporal. Em particular, resultados de campo médio e redes complexas mostraram que a desordem temporal não proíbe a existência de transições descontínuas, embora a competição com fase desordenada sempre destrói a fase ordenada bi estável, podendo ser caracterizada por longos períodos até atingir a fase prevalente (desordenada). Outros tipos de desordem, como a desordem na inércia, também pode ser entendida de uma forma similar, por meio da presente teoria.

Como perspectivas, citamos o estudo de outros tipos de desordem temporal, dentre eles a competição entre poucas vizinhanças (onde a transição é crítica) e uma vizinhança maior (onde a transição é descontínua). Tal estudo pode ocorrer em sistemas biológicos (formação de bandos como forma de garantir uma maior ou menor sobrevivência) e variações temporais devem corresponder a uma descrição mais realista. Acreditamos que

a teoria aqui apresentada possa ser utilizada para descrição destes problemas. Outros estudos que podem ser estudados seriam a extensão das ideias aqui apresentadas para verificarmos se por exemplo o aumento da vizinhança muda também a ordem da transição de fase, onde originalmente a transição é contínua.

Anexos

SCIENTIFIC REPORTS

OPEN

Fundamental ingredients for discontinuous phase transitions in the inertial majority vote model

Jesus M. Encinas¹, Pedro E. Harunari¹, M. M. de Oliveira² & Carlos E. Fiore¹

Received: 9 February 2018

Accepted: 27 April 2018

Published online: 19 June 2018

Discontinuous transitions have received considerable interest due to the uncovering that many phenomena such as catastrophic changes, epidemic outbreaks and synchronization present a behavior signed by abrupt (macroscopic) changes (instead of smooth ones) as a tuning parameter is changed. However, in different cases there are still scarce microscopic models reproducing such above trademarks. With these ideas in mind, we investigate the key ingredients underpinning the discontinuous transition in one of the simplest systems with up-down Z_2 symmetry recently ascertained in [Phys. Rev. E 95, 042304 (2017)]. Such system, in the presence of an extra ingredient—the inertia—has its continuous transition being switched to a discontinuous one in complex networks. We scrutinize the role of three central ingredients: inertia, system degree, and the lattice topology. Our analysis has been carried out for regular lattices and random regular networks with different node degrees (interacting neighborhood) through mean-field theory (MFT) treatment and numerical simulations. Our findings reveal that not only the inertia but also the connectivity constitute essential elements for shifting the phase transition. Astoundingly, they also manifest in low-dimensional regular topologies, exposing a scaling behavior entirely different than those from the complex networks case. Therefore, our findings put on firmer bases the essential issues for the manifestation of discontinuous transitions in such relevant class of systems with Z_2 symmetry.

Spontaneous breaking symmetry manifests in a countless sort of systems besides the classical ferromagnetic-paramagnetic phase transition^{1,2}. For example, fishes moving in ordered schools, as a strategy of protecting themselves against predators, can suddenly reverse the direction of their motion due to the emergence of some external factor, such as water turbulence, or opacity³. Also, some species of Asian fireflies start (at night) emitting unsynchronized flashes of light but, some time later, the whole swarm is flashing in a coherent way⁴. In social systems as well, order-disorder transitions describe the spontaneous formation of a common language, culture or the emergence of consensus⁵.

Systems with Z_2 (“up-down”) symmetry constitute ubiquitous models of spontaneous breaking symmetry, and their phase transitions and universality classes have been an active topic of research during the last decades^{1,2,6}. Nonetheless, several transitions between the distinct regimes do not follow smooth behaviors^{7–9}, but instead, they manifest through abrupt shifts. These *discontinuous* (nonequilibrium) transitions have received much less attention than the critical transitions and a complete understanding of their essential aspects is still lacking. In some system classes, essential mechanisms for their occurrence¹⁰, competition with distinct dynamics^{11,12}, phenomenological finite-size theory¹³ and others^{14–17} have been pinpointed.

Heuristically, the occurrence of a continuous transition in systems with Z_2 symmetry is described (at a mean field level) by the logistic equation $\frac{d}{dt}m = am - bm^3$, that exhibit the steady solutions $m = 0$ and $m = \pm\sqrt{a/b}$. The first solution is stable for negative values of the tuning parameter a , while the second is stable for positive values of a . For the description of abrupt shifts, on the other hand, one requires the inclusion of an additional term $+cm^5$, where $c > 0$ ensures finite values of m . In such case, the jump of m yields at $a = \frac{b^2}{4c}$, reading $\pm\sqrt{b/2c}$. Despite portrayed under the simple above logistic equation, there are scarce (nonequilibrium) *microscopic* models forecasting discontinuous transitions¹⁸.

¹Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66318 05315-970, São Paulo, São Paulo, Brazil.

²Departamento de Física e Matemática, CAP, Universidade Federal de São João del Rei, Ouro Branco, MG, 36420-000, Brazil. Correspondence and requests for materials should be addressed to C.E.F. (email: fiore@if.usp.br)

Recently, Chen *et al.*¹⁹ showed that the usual majority vote (MV) model, an emblematic example of nonequilibrium system with Z_2 symmetry^{20–22}, exhibits a discontinuous transition in complex networks, provided relevant strengths of inertia (dependence on the local spin) is incorporated in the dynamics. This results in a stark contrast with the original (non-inertial) MV, whose phase transition is second-order, irrespective the lattice topology and neighborhood. The importance of such results is highlighted by the fact that behavioral inertia is an essential characteristic of human being and animal groups. Therefore, inertia can be a significant ingredient triggering abrupt transitions that arise in social systems⁵.

Although inertia plays a central role for changing the nature of the phase transition, their effects allied to other components have not been satisfactorily understood yet^{23,24}. More concretely, does the phase transition become discontinuous irrespective of the neighborhood or on the contrary, is it required a minimal neighborhood for (additionally to the inertia) promoting a discontinuous shift? Another important question concerns the topology of the network. Is it a principal ingredient? Do complex and low-dimensional regular structures bring us similar conclusions?

Aimed at addressing questions mentioned above, here we examine separately, the role of three key ingredients: inertia, system degree, and the lattice topology. For instance, we consider regular lattice and random regular (RR) networks for different system degrees through mean-field theory (MFT) treatment and numerical simulations. Our findings point out that a minimal neighborhood is also an essential element for promoting an abrupt transition. Astonishing, a discontinuous transition is also observed in low-dimensional regular structures, whose scaling behavior is wholly different from that presented in complex networks¹³. Therefore, our upshots put on firmer bases the minimum and essential issues for the manifestation of “up-down” discontinuous transitions.

Model and Results

In the original MV, with probability $1 - f$ each node i tends to align itself with its local neighborhood majority and, with complementary probability f , the majority rule is not followed. By increasing the misalignment parameter f , a continuous order-disorder phase transition takes place, irrespective the lattice topology^{20–22}. Chen *et al.*¹⁹ included in the original model a term proportional to the local spin σ_i , with strength θ , given by

$$w_i(\sigma) = \frac{1}{2} \left[1 - (1 - 2f)\sigma_i \operatorname{sign} \left(1 - \theta \sum_{j=1}^k \sigma_j/k + \theta \sigma_i \right) \right], \quad (1)$$

where $\operatorname{sign}(X) = \pm 1$ and 0 , according to $X > 0$, < 0 and $X = 0$, respectively. Note that one recovers the original rules as $\theta = 0$.

MFT results. In several cases, a mean field treatment affords a good description of the model properties. By following the main steps from refs^{19,21,24,25}, we derive relations for evaluating the order parameter m for fixed f , θ and k [see Methods, Eqs (3–8)]. Figure 1 shows the main results for $k = 4, 8$ and 12 . Note that MFT predicts a continuous phase transition for $k = 4$ irrespective the value of θ [see panels (a) and (b)], in which m is a decreasing monotonic function of the misalignment parameter f . An opposite scenario is drawn for $k = 8$ and 12 , where phase coexistence stems as θ increases [see panels (c–f)]. They are signed by the presence of a spinodal curve, emerging at f_b [see, e.g., panel (c) and (e)] and meeting the monotonic decreasing branch at f_f . For $k = 8$, the coexistence line arises only when $\theta > 1/3$ and is very tiny ($f_f - f_b$ is about 2.10^{-4}), but they are more pronounced for $\theta > 3/7$. Analogous phase coexistence hallmarks also appear for $k = 12$ (panel (e)) and $k = 20$ (Fig. 6 and ref.¹⁹). Thus, MFT insights us that large θ and k ($k \geq 6$) are core ingredients for the appearance of a discontinuous phase transition. A remarkable feature concerning the phase diagrams is the existence of plateaus, in which the transition points present identical values within a range of inertia values. As it will be explained further, that is a consequence of the regular topology. Also, the number of plateaus increase by raising k .

Numerical results. Numerical simulations furnish more realistic outcomes than the MFT ones, since the dynamic fluctuations are taken into account. The actual simulational protocol is described in [Methods]. Starting with the random topology, Fig. 2 shows the phase diagrams for $k = 4, 8$, and $k = 12$, respectively.

First of all, we observe that the positions of plateaus are identical than those predicted from the MFT. Also, the phase transition is continuous for $k = 4$, irrespective the inertia value. For $\theta > 1/3$, no phase transition is displayed and the system is constrained into the disordered phase. In all cases (see, e.g., Fig. 2(a) for $k = 8$ and $\theta = 0.05$), the critical transitions are absent of hysteresis and U_4 curves cross at $f_c \sim 0.261(1)$ with $U_0^* = 0.28(1)$.

Opposite to the low k , discontinuous transitions are manifested for $k = 8$ and 12 in the regime of pronounced θ . More specifically, the crossovers take place at $\theta = 1/3$ and $\theta = 1/4$ for the former and latter k , respectively. Notwithstanding, there are some differences between approaches. As expected, MFT predicts overestimated transition points than numerical simulations. Although MFT predicts a continuous phase transition in the interval $\frac{1}{4} < \theta < \frac{1}{3}$ ($k = 12$), numerical simulations suggest that it is actually discontinuous.

In Fig. 3, the previous analysis is extended for regular (bidimensional) versions. In order to mimic the increase of connectivity, the cases $k = 4, 8$ and 12 cases are undertaken by restricting the interaction between the first, first and second, first to third next neighbors, as exemplified in panels (a–c) in Fig. 4, respectively.

The positions of plateaus are identical than both previous cases, but with lower f_c 's. This is roughly understood by recalling that homogeneous complex networks exhibit a mean-field structure, whose correspondent transition points are thus larger than those from regular lattices. Similarly, all critical points are obtained from the crossing among U_4 curves, but the value U_0^* is different from the RR case, following to the Ising universality class value $U_0^* \sim 0.61^{1,6,20}$. Thereby, there is an important difference between random and regular structures: The phase transitions are continuous irrespective the inertia value for k from $k = 4$ to $k = 12$.

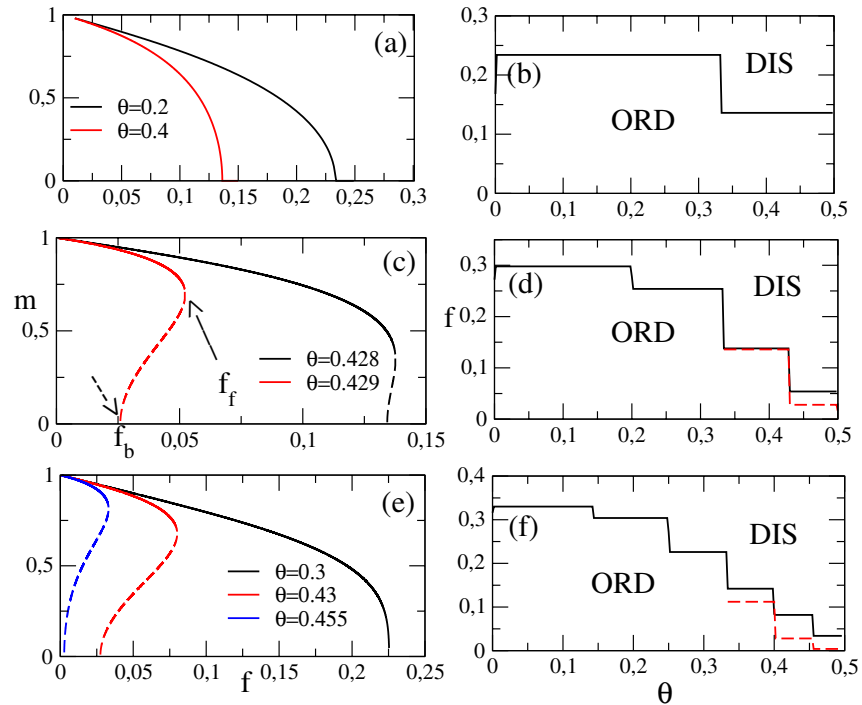


Figure 1. From top to bottom, mean-field results for regular networks for $k = 4$, $k = 8$ and $k = 12$, respectively. The left panels show the behavior of m versus f for distinct θ 's, whereas the right ones show the respective phase diagrams. ORD and DIS correspond to the ordered and disordered phases, respectively. Location of forward and backward transitions are exemplified by arrows in panel (c).

An absolutely different scenario is unveiled by extending interactions range up to the fourth next neighbors spins (mimicking the case $k = 20$) [see, e.g., Fig. 4(d)] and large inertia values, in which the phase transition becomes discontinuous (see, e.g., Fig. 5 for $\theta = 0.35$). Contrary to the random complex case, hysteresis is absent [panel (a)], on the other hand the order-parameter distribution exhibits a bimodal shape [panel (b) shows the value of f_b , in which the peaks describing the ordered and disordered phases present equal areas]. Complementary, U_4 behaves quite differently from continuous transitions and presents a minimum whose value decreases with N [panel (c)]. Also, the maximum of χ increases with N (inset). These features, analogous than discontinuous absorbing phase transitions¹³, also discloses the emergence of discontinuous transitions in regular lattices as k is increased. The f_N 's (estimated from the equal area position, maximum of χ and minimum of U_4) scales with N^{-1} [panel (d)], from which one obtains the estimates $f_0 = 0.0687(1)$ (equal area and maximum of χ) and $f_0 = 0.0689(1)$ (minimum of U_4) [see Methods for obtaining the finite-size scaling relation].

In Fig. 6, the phase diagram is presented. As in previous cases, the positions of the plateaus are identical to the RR for $k = 20$ (see inset and ref.¹⁹). The phase coexistence occurs for $\theta > 1/3$, larger than $\theta > 3/13$ (RR structure). For $\theta < 1/3$, the phase transition is continuous, although U_4 presents a value different from $U_0^* \sim 0.61$ in the interval $2/7 < \theta < 1/3$.

Origin of Plateaus

Since the transition rate depends only on the signal of resulting argument in Eq. (1), the phase diagrams will present plateaus provided the number of neighbors is held fixed. Generically, let us take a lattice of degree k with the central site σ_0 with n_k^+ and n_k^- nearest neighbors with spins $+1$ and -1 , respectively (obviously $n_k^+ + n_k^- = k$). Taking for instance $\sigma_0 = -1$ (similar conclusions are earned for $\sigma_0 = 1$). In such case, the argument of $\text{sign}(X)$ reads $1 - \frac{2n_k^-}{k} - 2\theta \left(1 - \frac{n_k^-}{k}\right)$, implying that for all $\theta < \theta_p = \frac{k - 2n_k^-}{2(k - n_k^-)}$ the transition rate $-1 \rightarrow +1$ will be performed with the same rate $1 - f$ and thus the transition points are equal. Only for $\theta > \theta_p$ the transition $-1 \rightarrow +1$ is performed with probability f . Table 1 lists the plateau points θ_p for $k = 8$ and distinct n_k^- 's. For example, for $n_k^- = 3$ and $0 < \theta < \theta_p = \frac{1}{5}$, all transition rates are equal, implying the same f_c for such above set of inertia. For $\theta = \theta_p = \frac{1}{5}$ the second local configuration becomes different and thereby f_c is different from the value for $\theta < \theta_p$.

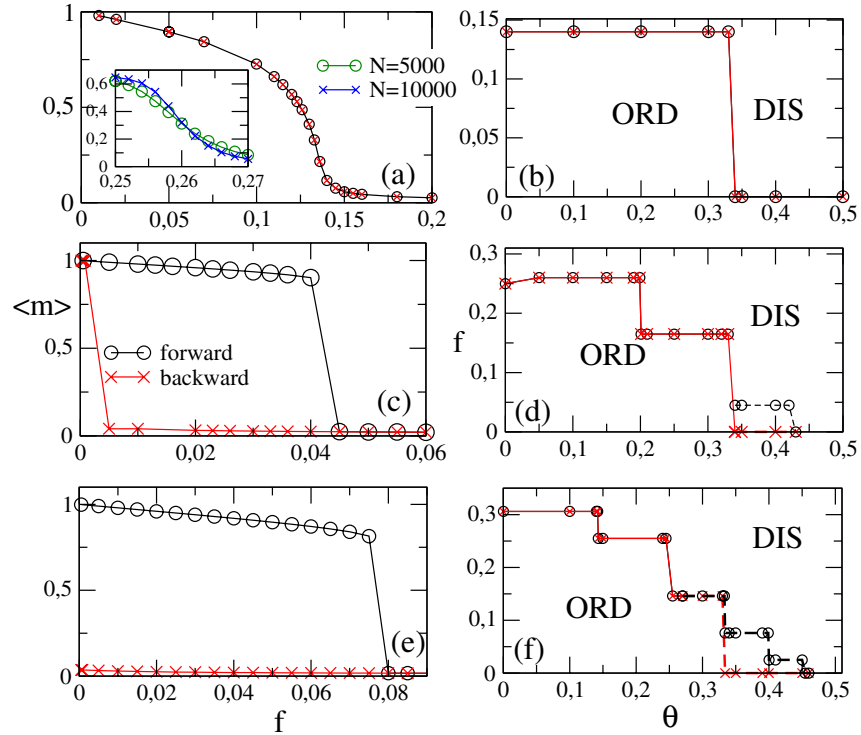


Figure 2. RR Networks: From the top to bottom, numerical results for $k = 4$, $k = 8$ and $k = 12$, respectively. The left panels exemplify the behavior of $\langle m \rangle$ versus f for $\theta = 0.33$ ($k = 4$) and 0.35 ($k = 8$ and 12), whereas right ones show the phase diagrams. Inset: Reduced cumulant U_4 vs. f for $\theta = 0.05$ and $k = 8$. Circles (times) correspond to the increase (decrease) of f starting from an ordered (disordered) phase.

Keeping so on with other values of n_k^- , the next plateau positions are located. It is worth mentioning that $n_k^- > n_k^+$ leads to negative θ_p^+ 's, that not have been examined here.

Methods

We consider a class of systems in which each site i can take only two values ± 1 , according to its “local spin” (opinion) σ_i , is “up” or “down”, respectively. The time evolution of the probability $P(\sigma)$ associated to a local configuration $\sigma \equiv (\sigma_1, \dots, \sigma_i, \sigma_N)$ is ruled by the master equation

$$\frac{d}{dt}P(\sigma, t) = \sum_{i=1}^N \{w_i(\sigma^i)P(\sigma^i, t) - w_i(\sigma)P(\sigma, t)\}, \quad (2)$$

where the sum runs over the N sites of the system and $\sigma^i \equiv (\sigma_1, \dots, -\sigma_i, \sigma_N)$ differs from σ by the local spin of the i -th site. From the above, the time evolution of the magnetization of a local site, defined by $m = \langle \sigma_i \rangle$, is given by

$$\frac{d}{dt}m = (1 - m)w_{-1 \rightarrow 1} - (1 + m)w_{1 \rightarrow -1}, \quad (3)$$

where $w_{-1 \rightarrow 1}$ and $w_{1 \rightarrow -1}$ denote the transition rates to states with opposite spin. In the steady state, one has that

$$m = \frac{w_{-1 \rightarrow 1} - w_{1 \rightarrow -1}}{w_{-1 \rightarrow 1} + w_{1 \rightarrow -1}}. \quad (4)$$

By following the formalism from refs^{19,24,25}, the transition rates $w_{-1 \rightarrow 1}$ and $w_{1 \rightarrow -1}$ in Eq. (4) are decomposed as

$$w_{-1 \rightarrow 1} = (1 - 2f)\bar{P}_- + f, \quad (5)$$

and

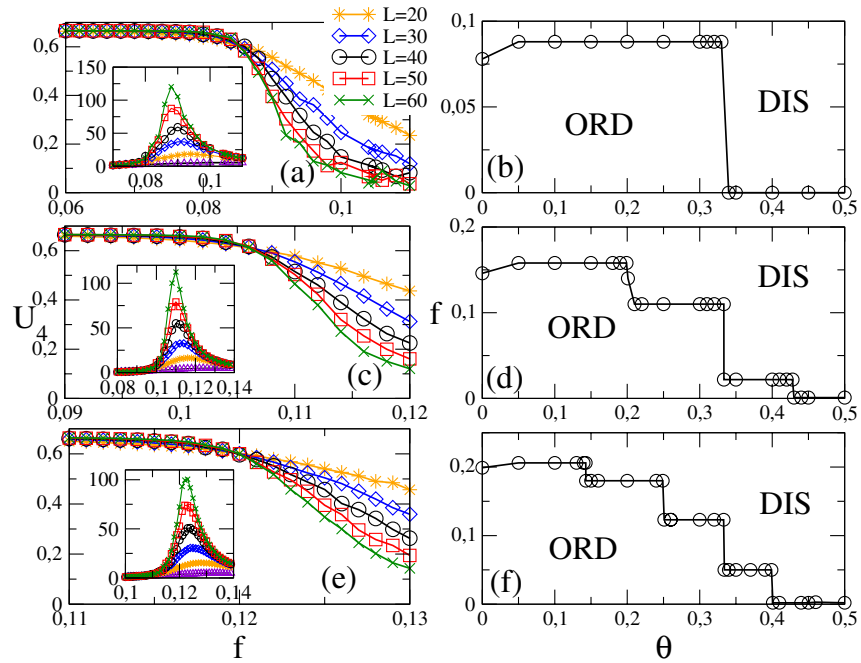


Figure 3. Bidimensional regular lattices for distinct system sizes $N=L \times L$: Left panels show the reduced cumulant U_4 vs f for the nearest neighbor (a) second-neighbor (c) and third-neighbor (e) versions, respectively. Inset: the same but for the variance χ . Right panels show their correspondent phase diagrams. In all cases, continuous lines correspond to critical phase transitions.

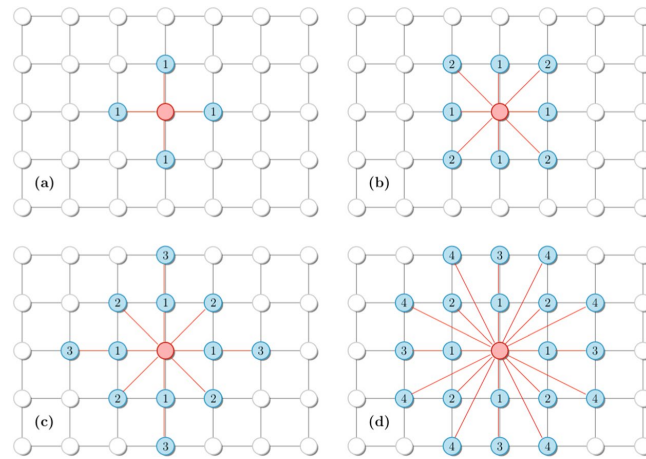


Figure 4. Local configuration for the (bidimensional) versions with interactions between the first (a) first and second (b) first to third (c) and first to fourth (d) next neighbors.

$$w_{1 \rightarrow -1} = (1 - f) - (1 - 2f)\bar{E}_+, \quad (6)$$

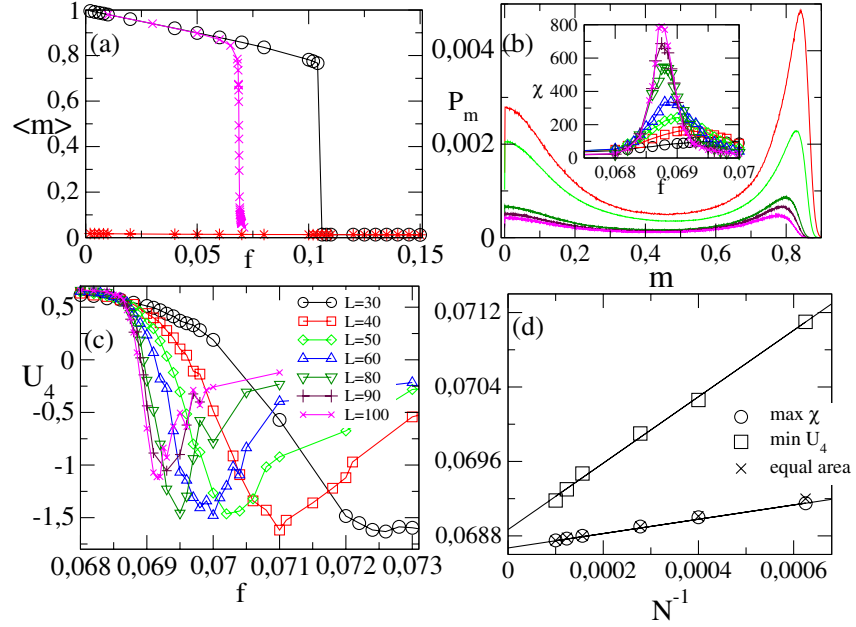


Figure 5. Results for $k=20$ and $\theta=0.35$: Panel (a) compares the order parameter $\langle m \rangle$ versus f for the RR network (circles and stars) and regular lattice (symbol \times) for a system with $N=10^4$ sites. Regular lattice case: Panels (b) and (c) show the non normalized equal area probability distribution and the U_4 vs. f for distinct L 's ($N=L \times L$), respectively. Inset: The variance χ versus f . In (d), the positions of maxima of χ , minima of U_4 and equal area versus $1/N$.

σ_0	n_k^+	n_k^-	$X > 0$	θp
-1	4+	4-	$-\theta > 0$	0
-1	5+	3-	$\frac{1-5\theta}{4} > 0$	$\frac{1}{5}$
-1	6+	2-	$\frac{1-3\theta}{2} > 0$	$\frac{1}{3}$
-1	7+	1-	$\frac{3-7\theta}{4} > 0$	$\frac{3}{7}$
-1	8+	0-	$1-2\theta > 0$	$\frac{1}{2}$

Table 1. For the central site $\sigma_0 = -1$ and connectivity $k=8$, the signal function for distinct local configurations. X is the value of resulting expression $1 - \frac{2n_k^-}{k} - 2\theta\left(1 - \frac{n_k^+}{k}\right)$ (see main Text) and θp denotes the plateaus positions.

where \bar{P}_- (\bar{P}_+) denote the probabilities that the node i of degree k , with spin $\sigma_i = -1$ ($\sigma_i = 1$) changes its state according to the majority (minority) rules, respectively. Such probabilities can be written according to

$$\bar{P}_\pm = \sum_{n=[n_k^\pm]}^k \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{n,n_k^\pm}\right) C_n^k P_{\pm 1}^n P_{\mp 1}^{k-n}, \quad (7)$$

with $p_{\pm 1}$ being the probability that a nearest neighbor is ± 1 and n_k^- and n_k^+ corresponding to the lower limit of the ceiling function, reading $n_k^- = \frac{k}{2(1-\theta)}$ and $n_k^+ = \frac{k(1-2\theta)}{2(1-\theta)}$.

Since we are dealing with uncorrelated structures with the same degree k , p_\pm is simply $(1 \pm m)/2$, from which Eq. (4) reads

$$\frac{1+m}{2} = \frac{(1-2f)\bar{P}_- + f}{1 + (1-2f)(\bar{P}_- - \bar{P}_+)}, \quad (8)$$

with \bar{P}_\pm being evaluated from Eq. (7). Thus, the solution(s) of Eq. (8) grant the steady values of m .

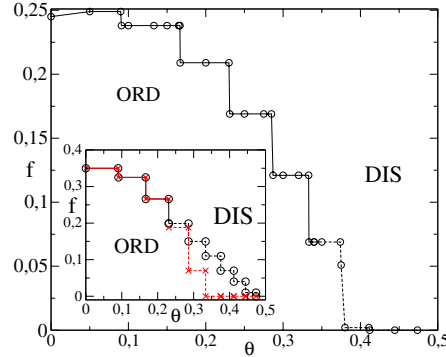


Figure 6. The phase diagram θ versus f for the MV with $k = 20$ in a bidimensional lattice. Continuous and dashed lines correspond to critical and discontinuous phase transitions, respectively. Inset: The same, but for the RR topology. Circles (\times) correspond to the increase (decrease) of f starting from an ordered (disordered) phase.

An alternative way of deriving the MFT expressions consists in writing down the transition rates as the sum of products of the local spins $w_i(\sigma) = \frac{1}{2}(1 - \sigma_i \sum_A c_A \sigma_A)$, where σ_A is the product of spins belonging to the cluster of k sites, and c_A is a real coefficient. For example, for $k = 8$ and $\theta = 0$, we have that $\frac{d}{dt}m = -m + (1 - 2f) \left\{ \frac{35}{16}m - \frac{35}{16}m^3 + \frac{21}{16}m^5 - \frac{5}{16}m^7 \right\}$, yielding the critical point $f_c = \frac{19}{70}$, in full equivalency with f_c obtained from Eq. (8). The numerical simulations will be grouped into two parts: Random regular (RR) network and bidimensional lattices.

The former is generated through a configuration model scheme²⁶ described as follows: For a system with N nodes and connectivity k , we first start with a set of Nk points, distributed in N groups, in which each one contains exactly k points. Next, one chooses a random pairing of the points between groups and then creates a network linking the nodes i and j if there is a pair containing points in the i -th and j -th sets until $Nk/2$ pairs (links) are obtained. In the case the resulting network configuration presents a loop or duplicate links, the above process is restarted. The bidimensional topologies also present connectivity k , but it forms a regular arrangement. Note that both structures are quenched, i.e., they do not change during the simulation of the model.

For a given network topology, and with N, f , and θ held fixed, a site i is randomly chosen, and its spin value σ_i is updated ($\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$) according to Eq. (1). With complementary probability, the local spin remains unchanged. A Monte Carlo (MC) step corresponds to N updating spin trials. After repeating the above dynamics a sufficient number of MC steps (in order of 10^6 MC steps), the system attains a nonequilibrium steady state. Then, appropriate quantities, including the mean magnetization $\langle m \rangle = \frac{1}{N} \langle \sum_{i=1}^N \sigma_i \rangle$, its variance $\chi = N[\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2]$ and the fourth-order reduced cumulant $U_4 = 1 - \frac{\langle m^4 \rangle}{3\langle m^2 \rangle^2}$ are evaluated, in order to locate the transition point and to classify the phase transition. We have evaluated above averages for a total of 5.10^6 MC steps.

For both topologies, continuous phase transitions are trademarked by the algebraic behaviors of $\langle m \rangle \sim N^{-\beta/\nu}$ and $\chi \sim N^{\gamma/\nu}$, where β/ν and γ/ν are their associated critical exponents. Another feature of continuous transitions is that U_4 , evaluated for distinct N 's, intersect at $(f, U) = (f_c, U_4^*)$. Notwithstanding, the set of critical exponents as well as the crossing value U_4^* depend on the lattice topology^{20,22}. Off the critical point, U_4 reads $U_4 \rightarrow 2/3$ and 0 for the ordered and disordered phases, respectively, when $N \rightarrow \infty$.

In similarity with the MFT, numerical analysis of discontinuous transitions in complex networks is commonly identified through the presence of order parameter hysteresis. For the "forward transition", simulations are started at $f = 0$ from a full ordered phase ($|m| = 1$), in which the tuning parameter f is increased by an amount Δf and the system (final) configuration at f used as the initial condition at $f + \Delta f$. Then, the system will jump to a disordered phase ($|m| = 0$) at a threshold value f_f . Conversely, the system evolution now starts in the full disordered phase and one decreases f (also by the increment Δf), so that the ordered phase ($|m| \neq 0$) will be reached at f_b . Both "forward" and "backward" curves are not expected to coincide themselves at the phase coexistence. The value of Δf to be considered will depend on θ , but in all cases it is constrained between 0.005 and 0.02.

In contrast to complex structures, the behavior of discontinuous transitions is less understood in regular lattices. Recently, a phenomenological finite-size theory for discontinuous absorbing phase transitions was proposed¹³, in which no hysteretic nature is conferred, but instead one observes a scaling with the inverse of the system size N^{-1} . Here, we extend it for Z_2 up-down phase transitions. Such relation can be understood by assuming that close to the coexistence point, the order-parameter distribution is (nearly) composed of a sum of two independent Gaussians, with each phase σ [$\sigma = o$ (ordered) and d (disordered)] described by its order parameter value m_σ in such a way that

$$P_N(m) = P_N^{(o)}(m) + P_N^{(d)}(m), \quad (9)$$

where each term $P_N^{(\sigma)}(m)$ reads

$$P_N^{(\sigma)}(m) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp\{N\{(\Delta f)m - (m - m_o)^2/(2\chi_\sigma)\}\}}{[F_o(\Delta f; N) + F_d(\Delta f; N)]}, \quad (10)$$

where χ_σ is the variance of the σ -gaussian distribution, $\Delta f = f_N - f_0$ denotes the “distance” to the coexistence point f_0 and each normalization factor $F_{o(d)}$ reads

$$F_{o(d)}(\Delta f; N) = \sqrt{\chi_{o(d)}} \exp\left\{N\Delta f\left[m_{o(d)} + \frac{\chi_{o(d)}}{2}\Delta f\right]\right\}. \quad (11)$$

Note that (10) leads to the probability distribution being a sum of two Dirac delta functions centered at $m = m_o$ and $m = m_d$ at $f = f_0$ for $N \rightarrow \infty$. For $f - f_0 \rightarrow 0_{+(-)}$, one has a single Dirac delta peak at $m = m_d$ ($m_o \neq 0$). The pseudo-transition points can be estimated under different ways, such as the value of f_N in which both phases present equal weight (areas). In such case, from Eq. (10) it follows that $P_N^{(o)}(m) = P_N^{(d)}(m)$ for

$$(f_N - f_0) [(m_o - m_d) + \frac{(\chi_o - \chi_d)}{2}(f_N - f_0)] = \frac{\ln[\chi_d/\chi_o]}{2} \frac{1}{N}. \quad (12)$$

Since N is supposed to be large, the right side of Eq. (12) becomes small and thus $(f_N - f_0)$ is also small. By neglecting terms of superior order $(f_N - f_0)^2$, we have that

$$f_N \approx f_0 + \frac{\ln[\chi_d/\chi_o]}{2(m_o - m_d)} \frac{1}{N}, \quad (13)$$

implying that the difference $f_N - f_0$ scales with the inverse of the system size N . Evaluation of the position of peak of variance χ provides the same dependence on N^{-1} , whose slope is the same that Eq. (13) [see, e.g., panel (d) in Fig. 5].

In this work, we have classified the (discontinuous) phase transition in regular lattices based on the behavior of the three aforementioned quantities.

Conclusions

A discontinuous phase transition in the standard majority vote model has been recently discovered in the presence of an extra ingredient: the inertia. Results for distinct network topologies revealed the robustness of such phase coexistence trademarked by hysteresis, bimodal probability distribution and others features¹⁹. Here, we advanced by tackling the essential ingredients for its occurrence. A central conclusion has been ascertained: discontinuous transitions in the MV also manifest in low dimensional regular topologies. Also, its finite size behavior (entirely different from the network cases), is identical to that exhibited by discontinuous phase transitions into absorbing states¹³. This suggests the existence of a common and general behavior for first-order transitions in regular structures. In addition, low connectivity leads to the suppression of the phase coexistence, insighting us that not only the inertia is a central ingredient, but also the connectivity. Numerical simulations reveal that for random regular networks, the minimum neighborhood is $k = 7$, whereas about $k = 20$ is required for changing the order of the transition in bidimensional lattices. Summing up, the present contribution aimed not only stemming the key ingredients for the emergence of discontinuous transitions in an arbitrary structure, but also put on firmer basis their scaling behavior in regular topologies.

References

- Marro, J. & Dickman, R. *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- Henkel, M., Hinrichsen, H. & Lubeck, S. *Non-Equilibrium Phase Transitions Volume I: Absorbing Phase Transitions* (Springer-Verlag, The Netherlands, 2008).
- Vicsek, T. & Zafeiris, A. Collective motion. *Physics Reports* **517**, 71 (2012).
- Acebrón, J. A., Bonilla, L. L., Vicente, C. J. P., Ritort, F. & Spigler, The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *R. Rev. Mod. Phys.* **77**, 137 (2005).
- Castellano, C., Fortunato, S. & Loretto, V. Statistical physics of social dynamics. *Rev. Mod. Phys.* **81**, 591 (2009).
- Ódor, G. *Universality In Nonequilibrium Lattice Systems: Theoretical Foundations* (World Scientific, Singapore, 2007).
- Aratijo, N. A. M. & Herrmann, H. J. Explosive Percolation via Control of the Largest Cluster. *Phys. Rev. Lett.* **105**, 035701 (2010).
- Cai, W., Chen, L., Ghanbarnejad, F. & Grassberger, P. Avalanche outbreaks emerging in cooperative contagions. *Nat. Phys.* **11**, 936 (2015).
- Martín, P. A., Bonachela, J. A., Levin, S. A. & Muñoz, M. A. Eluding catastrophic shifts. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **112**, E1828 (2015).
- Fiore, C. E. Minimal mechanism leading to discontinuous phase transitions for short-range systems with absorbing states. *Phys. Rev. E* **89**, 022104 (2014).
- de Oliveira, M. M. & Dickman, R. Contact process with sublattice symmetry breaking. *Phys. Rev. E* **84**, 011125 (2011).
- Pianegonda, S. & Fiore, C. E. Contact processes with competitive dynamics in bipartite lattices: effects of distinct interactions. *J. Stat. Mech.* **2014**, P05008 (2014).
- de Oliveira, M. M., da Luz, M. G. E. & Fiore, C. E. Generic finite size scaling for discontinuous nonequilibrium phase transitions into absorbing states. *Phys. Rev. E* **92**, 062126 (2015).
- de Oliveira, M. M., dos Santos, R. V. & Dickman, R. Symbiotic two-species contact process. *Phys. Rev. E* **86**, 011121 (2012).
- de Oliveira, M. M. & Dickman, R. Phase diagram of the symbiotic two-species contact process. *Phys. Rev. E* **90**, 032120 (2014).
- Dickman, R. First- and second-order phase transitions in a driven lattice gas with nearest-neighbor exclusion. *Phys. Rev. E* **64**, 01612 (2001).
- Nyczka, P., Sznajd-Weron, K. & Cislo, J. Phase transitions in the q-voter model with two types of stochastic driving. *Phys. Rev. E* **86**, 011105 (2012).
- de Oliveira, M. M. & Fiore, C. E. Temporal disorder does not forbid discontinuous absorbing phase transitions in low-dimensional systems. *Phys. Rev. E* **94**, 052138 (2016).

19. Sánchez, A. D., López, J. M. & Rodríguez, M. A Nonequilibrium Phase Transitions in Directed Small-World Networks. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 048701 (2002).
20. Chen, H. *et al.* First-order phase transition in a majority-vote model with inertia. *Phys. Rev. E* **95**, 042304 (2017).
21. de Oliveira, M. J. Isotropic majority-vote model on a square lattice. *J. Stat. Phys.* **66**, 273 (1992).
22. Chen, H., Shen, C., He, G., Zhang, H. & Hou, Z. Critical noise of majority-vote model on complex networks. *Phys. Rev. E* **91**, 022816 (2015).
23. Pereira, L. F. & Moreira, F. G. B. Majority-vote model on random graphs. *Phys. Rev. E* **71**, 016123 (2005).
24. Chen, H., Shen, C., Zhang, H. & Kurths, J. Large deviation induced phase switch in an inertial majority-vote model. *Chaos* **27**, 081102 (2017).
25. Harunari, P. E., de Oliveira, M. M. & Fiore, C. E. Partial inertia induces additional phase transition in the majority vote model. *Phys. Rev. E* **96**, 042305 (2017).
26. Bollobás, B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *Europ. J. Combinatorics* **1**, 311 (1980).

Acknowledgements

We acknowledge the Brazilian agencies CNPq, CAPES and FAPESP for the financial support. P.E.H also acknowledges the financial support from FAPESP under grant 2017/24567-0.

Author Contributions

J.M.E. and P.E.H. performed the MFT calculations, J.M.E. and C.E.F. executed the numerical simulations, C.E.F. and M.M.O. wrote the manuscript. All authors reviewed the manuscript.

Additional Information

Competing Interests: The authors declare no competing interests.

Publisher's note: Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Open Access This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License, which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons license, and indicate if changes were made. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons license, unless indicated otherwise in a credit line to the material. If material is not included in the article's Creative Commons license and your intended use is not permitted by statutory regulation or exceeds the permitted use, you will need to obtain permission directly from the copyright holder. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.

© The Author(s) 2018



Contents lists available at ScienceDirect

Physica A

journal homepage: www.elsevier.com/locate/physa

Majority vote model with ancillary noise in complex networks

J.M. Encinas^a, Hanshuang Chen^b, Marcelo M. de Oliveira^c, Carlos E. Fiore^{a,*}

^a Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66318, 05315-970 São Paulo, São Paulo, Brazil

^b School of Physics and Material Science, Anhui University, Hefei 230039, China

^c Departamento de Física e Matemática, CAP, Universidade Federal de São João del Rei, 36420-000 Ouro Branco-MG, Brazil

HIGHLIGHTS

- A new mean-field approach has been developed for an important class of systems with Z_2 “up-down” symmetry.
- Comparison with numerical simulations in complex networks, including homogeneous and heterogeneous structures, has been performed.
- In all cases, results present excellent agreement among each other.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 31 August 2018

Received in revised form 26 October 2018

Available online 3 November 2018

Keywords:

Majority vote model

Ancillary noise

Universality classes

Networks

Scale free networks

ABSTRACT

We analyze the properties of the majority-vote (MV) model with an additional noise in which a local spin can be changed independently of its neighborhood. In the standard MV, one of the simplest nonequilibrium systems exhibiting an order–disorder phase transition, spins are aligned with their local majority with probability $1 - f$, and with complementary probability f , the majority rule is not followed. In the noisy MV (NMV), a random spin flip is succeeded with probability p (with complementary $1 - p$ the usual MV rule is accomplished). Such extra ingredient was considered by Vieira and Crokidakis (2016) for the square lattice. Here, we generalize the NMV for arbitrary networks, including homogeneous [random regular (RR) and Erdős–Renyi (ER)] and heterogeneous [Barabasi–Albert (BA)] structures, through mean-field calculations and numerical simulations. Results coming from both approaches are in excellent agreement with each other, revealing that the presence of additional noise does not affect the classification of phase transition, which remains continuous irrespective of the network degree and its distribution. The critical point and the threshold probability p_c marking the disappearance of the ordered phase depend on the node distribution and increase with the connectivity k . The critical behavior, investigated numerically, exhibits a common set of critical exponents for RR and ER topologies, but different from BA and regular lattices. Finally, our results indicate that (in contrary to a previous proposition) there is no first-order transition in the NMV for large k .

© 2018 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Phase transitions and spontaneous breaking symmetry appear in a myriad of systems in the scope of physics [1–4], biology [5], chemistry, social dynamics [6,7] and others. Among the several microscopic models that exist in the literature,

* Corresponding author.
E-mail address: fiore@if.usp.br (C.E. Fiore).

the Majority Vote (MV) model is probably one of the simplest nonequilibrium models exhibiting up–down Z_2 symmetry [3]. Its dynamics mimic the existence/formation of different opinions (± 1 in such case) in a community. In particular, it includes the role of individuals that do not adopt the local prevailing (majority) opinion, commonly referred to as contrarians or nonconformist characters. Therefore, it has attracted considerable attention recently, not only for theoretical purposes (including the investigation of critical behavior, universality classes, and phase coexistence) but also for the description (at least in a reduced level) of the mechanisms leading to the opinion formation [6,7]. It is known that the phase transition exhibited by the MV model is continuous, signed by a spontaneous symmetry-breaking [3,8,9], although the critical behavior depends on lattice topology [3,9].

An entirely different behavior was recently uncovered [10,11] with the inclusion of a term proportional to the local spin (an inertial term), in which the phase transition becomes discontinuous. The effects of other ingredients, such as partial inertia [12], more states per site (instead of “up” or “down” as in the MV) [10,13], and diffusion [14] have also been investigated.

The effect of an ancillary noise in the MV model was first studied by Vieira and Crokidakis [15]. In such noisy MV model (NMV), besides the intrinsic noise f , ruling the majority interaction to be or not to be accepted, one includes an independent term allowing a spin to be flipped irrespective of its neighborhood. In the social language jargon, this ingredient corresponds to another kind of nonconformism, usually referred to as independence. It was found a critical behavior in the square lattice identical to the that observed in the standard MV model, although the presence of extra noise provides an additional route for the emergence of the phase transition, even in the absence of misalignment term f [15].

A relevant issue concerns in comparing the NMV with similar models in which the effect of independent noise has been undertaken. Recent studies for the q -voter model [4], in which a spin is flipped to the value of its q nearest neighbors with a certain rate, reveal that the transition becomes discontinuous for large values of q , provided the independence ingredient is included. Due to the similarities between the q -voter model and the NMV, a natural question that arises is if that shift in the order of the phase transition is also verified in the NMV for high connectivity [15].

With these ideas in mind, here we analyze the NMV in distinct topologies for arbitrary connectivity. Through of mean-field calculations (MFT), we derive expressions for the critical points as a function of the extra noise for an arbitrary network topology. We employ a different (MFT) approach than Refs. [8,16], which is based on an extension of the ideas from Ref. [3] for an arbitrary network structure. The critical behavior is also investigated by performing numerical simulations. Although MFT provides an approximate description of the phase transition, we observe an excellent agreement with numerical results in the regime of high connectivities. Our findings reveal the phase transition is continuous for all topologies and connectivities studied. Thus, contrasting to the q -voter model, a first-order transition is not observed in the NMV. Finally, our upshots also indicate the critical behavior in scale-free networks is different from that observed in homogeneous networks.

This paper is organized as follows: In Section 2, we introduce the model and perform a mean field treatment. In Section 3, we show and discuss our numerical results. At last, conclusions are drawn in Section 4.

2. Model and mean field analysis

The MV model is defined in an arbitrary lattice topology, in which each site i of degree k is attached to a binary spin variable, σ_i , that can take the values $\sigma_i = \pm 1$. In the original model, with probability $1 - f$ each node i tends to align itself with its local neighborhood majority, and with complementary probability f , the majority rule is not followed. The increase of the misalignment quantity f gives rise to an order–disorder (continuous) phase transition [3,8,9]. The NMV differs from the original MV due to the inclusion of spin inversion independently of the neighborhood. Mathematically, it is equal to the following transition rate

$$w(\sigma_i) = \frac{(1-p)}{2} [1 - (1-2f)\sigma_i S(\sum_{j=1}^k \sigma_j)] + \frac{p}{2}, \quad (1)$$

where $S(X)$ is defined by $S(X) = \text{sign}(X)$ if $X \neq 0$ and $S(0) = 0$. Note that for $p = 0$ one recovers the original MV model. Since we are dealing with Markovian systems ruled by a master equation, our analysis starts by deriving the time evolution of the local magnetization of a site i with degree k , $m_k = \langle \sigma_i \rangle_k$, given by $d\langle \sigma_i \rangle_k / dt = -\langle 2\sigma_i w(\sigma_i) \rangle_k$. From the transition rate in Eq. (1), we have that

$$\frac{1}{1-p} \frac{d}{dt} m_k = -m_k + (1-2f)\langle S(X) \rangle - \frac{p}{1-p} m_k. \quad (2)$$

Our first inspection regarding the extra noise effect is carried out through a mean-field treatment. We shall consider a somewhat different approach (although equivalent) than Refs. [8,16], in which the mean sign function is decomposed in two parts, $\langle S(X) \rangle = \langle S(X_+) \rangle - \langle S(X_-) \rangle$, with each term $\langle S(X_i) \rangle$ being approximated as

$$\langle S(X_{\pm}) \rangle \approx \pm \sum_{n=\lfloor k/2 \rfloor}^k C_n^k p_{\pm}^n p_{\mp}^{k-n}. \quad (3)$$

Here, each term C_n^k in $\langle S(X_{\pm}) \rangle$ takes into account the number of possibilities of a neighborhood with n and $k - n$ spins in the $+1(-1)$ and $-1(+1)$ states with associated probabilities $p_+(p_-)$ and $p_-(p_+)$, respectively. In the following, we shall relate p_{\pm}

to the local magnetization m_k . By focusing our analysis on uncorrelated structures, the probability ρ_k of a local site presenting the spin +1 is related to p_{\pm} through $p_{\pm} = \sum_k kP(k)\rho_k/\langle k \rangle$, where $P(k)$ is the degree probability distribution with mean value $\langle k \rangle$. Recalling that ρ_k and m_k are constrained through $m_k = 2\rho_k - 1$, the steady solution of Eq. (2) can be rewritten solely in terms of p_{\pm} given by

$$p_{\pm} - \frac{1}{2} = \frac{(1-2f)}{2\langle k \rangle} \sum_{k=1}^{\infty} kP(k) \sum_{n=\lceil k/2 \rceil}^k C_n^k(p_{\pm}^n p_{\mp}^{k-n} - p_{\mp}^n p_{\pm}^{k-n}) - \frac{p}{1-p}(p_{\pm} - \frac{1}{2}). \tag{4}$$

It is possible to derive a simpler expression for $\langle S(X_{\pm}) \rangle$ for large ks , in which each term from the binomial distribution approaches to a Gaussian one with mean kp_{\pm} and variance $\sigma^2 = kp_{\pm}p_{\mp}$. So that $\sum_{n=\lceil k/2 \rceil}^k C_n^k p_{\pm}^n p_{\mp}^{k-n}$ becomes $\int_{k/2}^k d\ell e^{-\frac{(\ell-kp_{\pm})^2}{2\sigma^2}} / (\sigma\sqrt{2\pi}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\text{erf}[\frac{k(1-p_{\pm})}{\sqrt{2\sigma}}] - \text{erf}[\frac{k(1/2-p_{\pm})}{\sqrt{2\sigma}}])$, where $\text{erf}(x) = 2 \int_0^x e^{-t^2} dt / \sqrt{\pi}$ denotes the error function.

Thereby, the expression for the mean $\langle S(X) \rangle$ reads

$$\langle S(X) \rangle = \frac{1}{2} \left[2\text{erf}\left(\frac{\sqrt{2ky}}{\sqrt{1-4y^2}}\right) + \text{erf}\left(\frac{\sqrt{2k(\frac{1}{2}-y)}}{\sqrt{1-4y^2}}\right) - \text{erf}\left(\frac{\sqrt{2k(\frac{1}{2}+y)}}{\sqrt{1-4y^2}}\right) \right], \tag{5}$$

where p_{\pm} is rewritten in terms of the variable y through the formula $p_{\pm} = \frac{1}{2} \pm y$ and for large k Eq. (4) becomes

$$y = \frac{(1-2f)}{4\langle k \rangle} \sum_{k=1}^{\infty} kP(k) \left[2\text{erf}\left(\frac{\sqrt{2ky}}{\sqrt{1-4y^2}}\right) + \text{erf}\left(\frac{\sqrt{2k(\frac{1}{2}-y)}}{\sqrt{1-4y^2}}\right) - \text{erf}\left(\frac{\sqrt{2k(\frac{1}{2}+y)}}{\sqrt{1-4y^2}}\right) \right] - \frac{p}{1-p}y. \tag{6}$$

Note that for large k the numerator dominate over the denominator, so the second and third terms in the right side of Eqs. (5) and (6) cancel themselves and $\langle S(X) \rangle$ reduces to the simpler form $\langle S(X) \rangle = \text{erf}(y\sqrt{2k})$, from which we arrive at the following steady-state relation:

$$y = \frac{1}{2\langle k \rangle} (1-2f) \sum_k [k\text{erf}(y\sqrt{2k})P(k) - \frac{p}{1-p}y]. \tag{7}$$

Thus, having the steady y_0 s [from Eqs. (4) and (7)], the correspondent m_k are then given by (for fixed f and p)

$$m_k = (1-2f)\text{erf}(y\sqrt{2k}) - \frac{p}{1-p}m_k, \tag{8}$$

whose mean magnetization m is finally evaluated through $m = \sum_{k=1}^{\infty} m_k P(k)$.

In order to derive a closed expression for the critical point, we should note that Eq. (7) presents two solutions ($y = \pm y_0 \neq 0$) for $f < f_c$ (besides the trivial $y = 0$) and only the trivial solution $y = 0$ for $f > f_c$. Since y_0 is expected to be small close to the critical point, the first term in the right side of Eq. (7) can be expanded in Taylor series whose dependence on f and p (for arbitrary lattice topology) reads

$$y_0 = \left\{ \frac{1}{A(f,p)} \left[-1 + (1-p)(1-2f)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\langle k^{3/2} \rangle}{\langle k \rangle} \right] \right\}^{1/2}, \tag{9}$$

where $\langle k^{3/2} \rangle = \sum_k k^{3/2}P(k)$ and $A(f,p) = \sqrt{\frac{8}{9\pi}} \frac{\langle k^{5/2} \rangle}{\langle k \rangle} (1-p)(1-2f)$. Finally, the critical f_c is given by

$$f_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-p} \frac{\langle k \rangle}{\langle k^{3/2} \rangle}, \tag{10}$$

with $A(p, f_c) = 2\langle k^{5/2} \rangle / \langle k^{3/2} \rangle$. In particular, for $p = 0$ one recovers the expression $f_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\langle k \rangle}{\langle k^{3/2} \rangle}$, in consistency with the results from Ref. [8]. Complementary, an order–disorder phase transition is also obtained in the absence of misalignment $f = 0$ by increasing the ancillary noise p , whose critical rate p_c satisfies the relation $p_c = 1 - (\sqrt{\pi} \langle k \rangle) / (\sqrt{2} \langle k^{3/2} \rangle)$. Thus, above expression extends the conjecture $p_c(f = 0) = 2f_c(p = 0)$, obtained for the square lattice [15], for arbitrary network distribution. A second MFT upshot to be drawn is that, contrasting to the generalized q -voter model [4], the inclusion of an independent noise does not alter the classification of phase transition, irrespective of the lattice topology and the neighborhood. The critical point, on the other hand, depends on the network topology.

The first structure we consider is a random regular network in which nodes follow the distribution $P(k) = \delta(k - k_0)$, with k_0 being the degree. In this case, Eq. (10) becomes

$$f_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2k_0}} \frac{1}{1-p}. \tag{11}$$

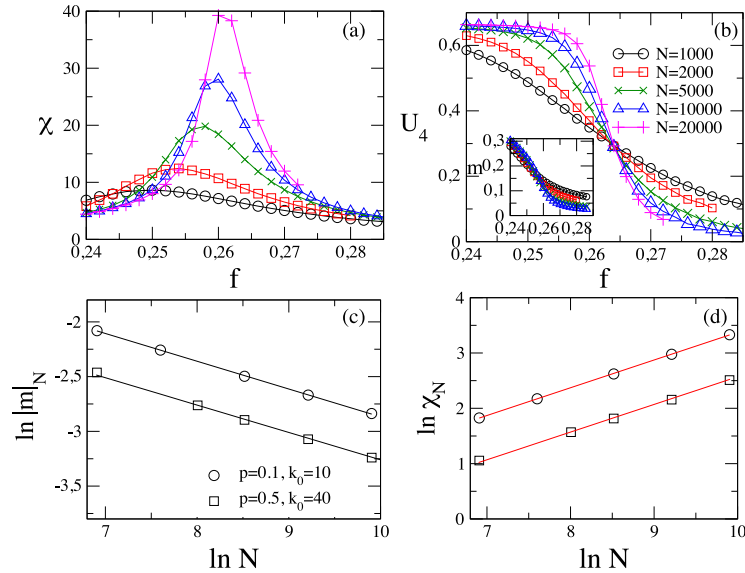


Fig. 1. Panels (a) and (b) show, for the RR networks and $p = 0.1$ and $k_0 = 10$, the variance χ and the reduced cumulant U_4 versus f for distinct system sizes N . Inset: the magnetization per spin $|m|$ vs. f . Panels (c) and (d) show the critical exponents β/ν and γ/ν for $p = 0.1$ ($k_0 = 10$) and $p = 0.5$ ($k_0 = 40$), respectively. They are consistent with $\beta/\nu = 1/4$ and $\gamma/\nu = 1/2$, respectively.

The second topology considered is the Erdős–Rényi (ER) network, an iconic example of a homogeneous random network, with a degree distribution given by $P(k) = \langle k \rangle^k e^{-\langle k \rangle} / k!$. Finally, a heterogeneous network, in which nodes are distributed according to a power-law distribution $P(k) \sim k^{-\gamma}$, is considered. For avoiding divergences when $k \rightarrow 0$ in the PL, we have imposed a minimum degree k_0 and the averages $\langle k \rangle$ and $\langle k^{3/2} \rangle$ become $\langle k \rangle = (\gamma - 1)k_0 / (\gamma - 2)$ and $\langle k^{3/2} \rangle = (\gamma - 1)k_0^{3/2} / (\gamma - 5/2)$, respectively. Thus, the critical point f_c reads

$$f_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2k_0} \frac{\gamma - 5/2}{\gamma - 2} \frac{1}{1 - p}}. \quad (12)$$

In this work, we shall focus on the analysis for $\gamma = 3$, which is a hallmark of scale-free structures [17]. In the next section, we are going to confirm above findings by performing numerical simulations.

3. Numerical results and phase diagrams

We have performed extensive numerical simulations for networks with sizes N ranging from $N = 1000$ to 20000 . We generated the RR networks through the classical configuration model, introduced by Bollobás [18]. The ER networks are constructed by connecting each pair of nodes with probability $\langle k \rangle / N$. When the size of the graph $N \rightarrow \infty$, the degree distribution is Poissonian, with mean $\langle k \rangle$. The Barabasi–Albert (BA) scale-free network is a typical representation of heterogeneous structures [17], in which the degree distribution follows a power-law $P(k) \sim k^{-\gamma}$ with scaling exponent $\gamma = 3$.

Besides the order parameter vanishment, continuous phase transitions are signed by an algebraic divergence of the variance $\chi = N[(m^2) - |m|^2]$ at the critical point f_c for $N \rightarrow \infty$ [1,2,19]. Since only finite systems can be simulated, these quantities become rounded at the vicinity of criticality due to finite size effects. For calculating the critical point and the critical exponents, we resort to the finite size scaling theory, in which $|m|$ and χ are rewritten as $|m| = N^{-\beta/\nu} \tilde{f}(N^{1/\nu} |\epsilon|)$ and $\chi = N^{\gamma/\nu} \tilde{g}(N^{1/\nu} |\epsilon|)$, with \tilde{f} and \tilde{g} being scaling functions and $\epsilon = (f - f_c) / f_c$. For $\epsilon = 0$, the above relations acquire the dependence on the system size reading $|m| = N^{-\beta/\nu} \tilde{f}(0)$ and $\chi = N^{\gamma/\nu} \tilde{g}(0)$, in which a log–log plot of $|m|$ and χ versus N furnish the exponents β/ν and γ/ν , respectively. The critical point can be properly located through the reduced cumulant $U_4 = 1 - \langle m^4 \rangle / (3\langle m^2 \rangle^2)$, because curves for distinct N s cross at $f = f_c$ ($\epsilon = 0$) and U_4 becomes constant $U_4 = U_4^*$. Off the critical point, $U_4 \rightarrow 2/3$ and 0 for the ordered and disordered phases, respectively when $N \rightarrow \infty$.

Figs. 1 and 2 exemplify the behavior of above quantities for the RR and ER cases for $p = 0.1$ ($k_0 = 10$), $p = 0.5$ ($k_0 = 40$) and $p = 0.4, 0.6$ ($\langle k \rangle = 30$), respectively. Panels (a) and (b) reproduce the typical trademarks of critical transitions: $|m|$

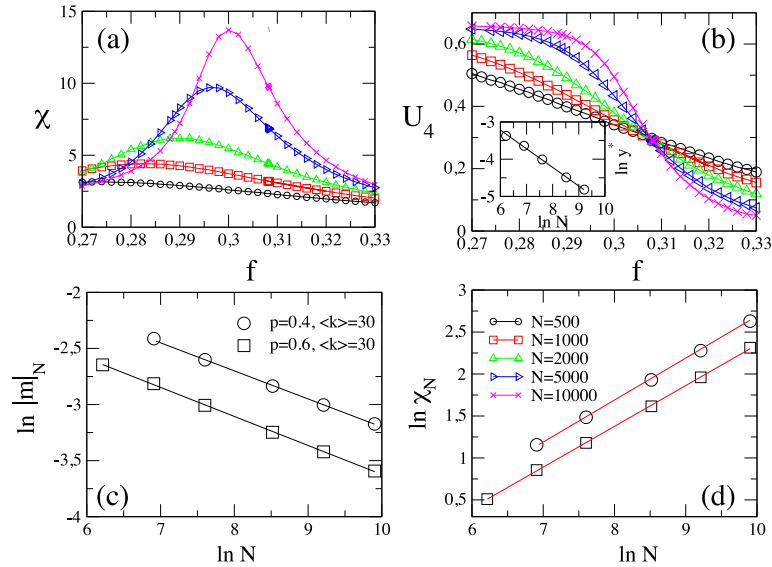


Fig. 2. Panels (a) and (b) show, for the ER case, $p = 0.4$ and $\langle k \rangle = 30$, the variance χ and the reduced cumulant U_4 versus f for distinct system sizes N . Inset: Log–log plot of $y^* \equiv \bar{f}_c - f_N$ versus N , with f_N calculated from the maximum of χ . The straight line has slope consistent to $1/\nu = 1/2$. Panels (c) and (d) show the critical exponents β/ν and γ/ν for $p = 0.4$ and $p = 0.6$ (both for $\langle k \rangle = 30$), respectively. They are consistent with $\beta/\nu = 1/4$ and $\gamma/\nu = 1/2$, respectively.

decreases smoothly by raising f (or p) and χ presents a maximum whose peak becomes more pronounced as N increases. The nature of the phase transitions is reinforced by examining the crossing among the curves of U_4 for distinct system sizes. In all cases, the crossing is characterized by an apparent universal value $U_0^* = 0.28(1)$.

Analysis of the critical exponents furnish results consistent with $\beta/\nu = 1/4$, $\gamma/\nu = 1/2$ and $1/\nu = 1/2$ (see inset of Fig. 2). Also, they satisfy the relation $2\beta/\nu + \gamma/\nu = D_{\text{eff}}$, with $D_{\text{eff}} = 1$, indicating a universal behavior for homogeneous topologies. On the other hand, all of them are very different from the values $\beta = 1/8$, $\gamma = 7/4$ and $\nu = 1$ for bidimensional (regular) lattices [3,15].

A slightly distinct critical behavior is obtained for the BA network, exemplified in Fig. 3 for $p = 0.4$ ($k_0 = 20$) and $p = 0.6$ ($k_0 = 10$). In both cases, the crossing value U_0^* and the set of critical exponents are other than those obtained for the homogeneous structures, reading $U_0^* = 0.16(1)$ and critical exponents $\beta/\nu = 0.34(1)$ and $\gamma/\nu = 0.32(1)$, respectively. Albeit, they also fulfill the relation $2\beta/\nu + \gamma/\nu = 1$.

Now let us examine the phase diagrams. A comparison of the results for distinct topologies is shown in Figs. 4–6 for distinct values of p , k_0 (RR and BA) and $\langle k \rangle$ (ER). Panels (a) show that all estimates agree very well for high connectivities, but some discrepancies arise for the systems with lower degrees. These trends reveal not only the reliability of one-site MFT but also its accuracy for the location of the critical point. As in the MFT, the phase transitions are continuous, irrespective of the lattice topology and the system degree. This result, contrasts to the observed in the q -voter model, where the inclusion of “independence” does turn the phase transition into a discontinuous one [4]. According to [4], whenever the “anti-conformism rule” is drawn, the chosen site (always) flips its spin provided all its q neighbors have opposite spins. This interaction rule is slightly different from the usual majority one, in which the spin flip depends only on the signal of the spin neighborhood and always there is a finite probability of the majority rule not to be followed (except to $f = 0$). Also, increasing the ancillary p does not alter the discrepancies among these methods. Finally, we observe that [panels (b)] the inclusion of additional noise shortens the ordered phase and thus the disordered region enlarges.

4. Conclusions

We have investigated the majority vote model in complex networks, in the presence of two distinct kinds of noise. Our study, through numerical simulations and mean-field theory, considered both homogeneous and heterogeneous (scale-free) topologies. We have derived expressions (through a different mean-field approach than Refs. [8,16]) for the critical point in terms of the network topology and the noise parameter p . The resulting expressions work very well in the regime of high

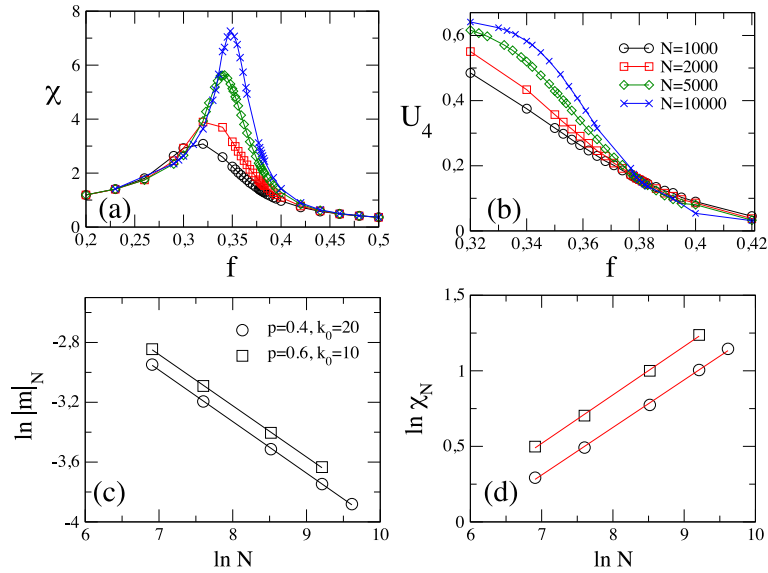


Fig. 3. Panels (a) and (b) show, for the BA network and $p = 0.4$ and $k_0 = 20$, the variance χ and the reduced cumulant U_4 versus f for distinct system sizes N . Panels (c) and (d) show the critical exponents β/ν and γ/ν for $p = 0.4$ ($k_0 = 20$) and $p = 0.6$ ($k_0 = 10$), respectively. They are consistent with $\beta/\nu = 0.34(1)$ and $\gamma/\nu = 0.32(1)$, respectively.

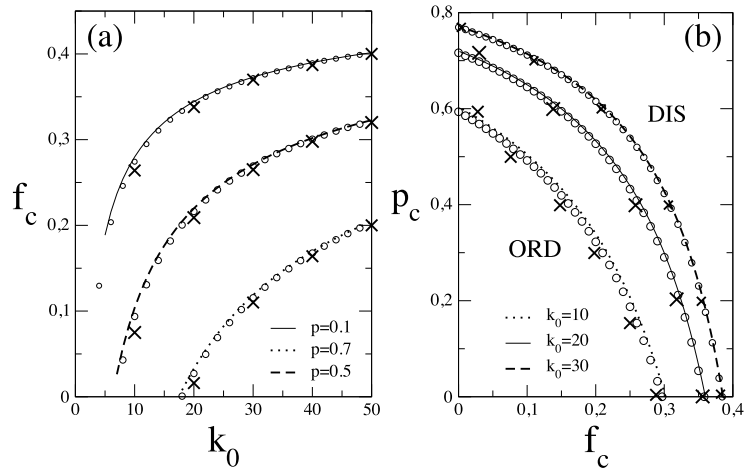


Fig. 4. Panel (a) shows, for the RR network, the transition rates f_c versus the degree node k_0 for distinct values of p . Circles and lines correspond to the estimates obtained from Eqs. (4) and (11), respectively. The symbol \times correspond to the numerical values obtained from the crossing among U_4 for distinct N s. Panel (b) shows the phase diagram p_c versus f_c for distinct k_0 s.

connectivity. The critical behavior and the set of critical exponents have been investigated in detail. Our numerical results strongly suggest the existence of a common set of critical exponents for the random regular and Erdős–Renyi networks. On the other hand, they are different for heterogeneous structures, suggesting a novel universality class for the MV in scale-free structures. Due to the scarcity of results [20], we believe that our findings constitute an important step for classifying

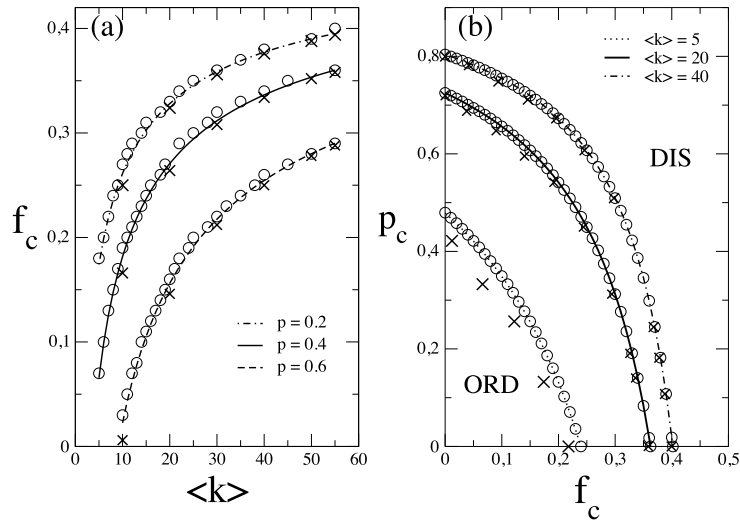


Fig. 5. Panel (a) shows, for the ER case, the transition rates f_c versus the mean degree (k) for distinct values of p . Circles and lines correspond to estimates obtained from Eqs. (4) and (10), respectively. The symbol \times correspond to the numerical values obtained from the crossing among U_4 for distinct N s. Panel (b) shows the phase diagram p_c versus f_c for distinct (k).

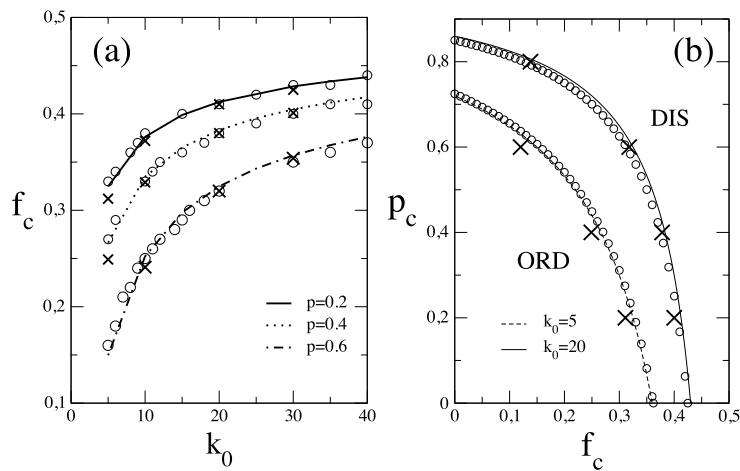


Fig. 6. Panel (a) shows, for the BA case, the transition rates f_c versus the minimum degree k_0 for distinct values of p . Circles and lines correspond to estimates obtained from Eqs. (4) and (12), respectively. The symbol \times correspond to the numerical values obtained from the crossing among fourth-order reduced cumulant for distinct network sizes. Panel (b) shows the phase diagram p_c versus f_c for distinct k_0 s.

the critical behavior in scale-free networks. However, we remark that further studies are still required to a complete classification. In particular, a comparison between the critical behavior exhibited in other heterogeneous structures, such as the uncorrelated configuration model (UCM) [21], can be very interesting. Finally, the previous proposal of a discontinuous phase transition in the regime of high connectivity (irrespective of the network topology) is discarded [15].

Acknowledgment

We acknowledge the financial support from CNPq. CEF acknowledges the financial support from FAPESP under grant 2018/02405-1. H-S C acknowledges the support of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11875069).

References

- [1] J. Marro, R. Dickman, *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [2] G. Ódor, *Universality in Nonequilibrium Lattice Systems: Theoretical Foundations*, World Scientific, Singapore, 2007.
- [3] M.J. de Oliveira, *J. Stat. Phys.* 66 (1992) 273.
- [4] P. Nyczka, K. Sznajd-Weron, J. Cislo, *Phys. Rev. E* 86 (2012) 011105.
- [5] T. Vicsek, A. Zafeiris, *Phys. Rep.* 517 (2012) 71.
- [6] C. Castellano, S. Fortunato, V. Loreto, *Rev. Modern Phys.* 81 (2009) 591.
- [7] C. Castellano, M. Marsili, A. Vespignani, *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000) 3536.
- [8] H. Chen, C. Shen, G. He, H. Zhang, Z. Hou, *Phys. Rev. E* 91 (2015) 022816.
- [9] L.F.C. Pereira, F.G.B. Moreira, *Phys. Rev. E* 71 (2005) 016123.
- [10] H. Chen, C. Shen, H. Zhang, G. Li, Z. Hou, J. Kurths, *Phys. Rev. E* 95 (2017) 042304.
- [11] J.M. Encinas, P.E. Harunari, M.M. de Oliveira, C.E. Fiore, *Sci. Rep.* 8 (2018) 9338.
- [12] P.E. Harunari, M.M. de Oliveira, C.E. Fiore, *Phys. Rev. E* 96 (2017) 042305.
- [13] D.F.F. Melo, L.F. Pereira, F.G.B. Moreira, *J. Stat. Mech.* (2010) P11032; F.W.S. Lima, *Physica A* 391 (2012) 1752.
- [14] N. Crokidakis, P.M.C. de Oliveira, *Phys. Rev. E* 85 (2012) 041147.
- [15] A.R. Vieira, N. Crokidakis, *Physica A* 450 (2016) 30.
- [16] C. Castellano, R. Pastor-Satorras, *J. Stat. Mech.* (2006) P05001.
- [17] A.-L. Barabási, R. Albert, *Science* 286 (1999) 509.
- [18] B. Bollobás, *Eur. J. Combin.* 1 (1980) 311.
- [19] M. Henkel, H. Hinrichsen, S. Lubeck, *Non-Equilibrium Phase Transitions Volume I: Absorbing Phase Transitions*, Springer-Verlag, The Netherlands, 2008.
- [20] F.W.S. Lima, *Internat. J. Modern Phys. C* 17 (2006) 1257.
- [21] M. Catanzaro, M. Boguna, R. Pastor-Satorras, *Phys. Rev. E* 71 (2005) 027103.

Influence of distinct kinds of temporal disorder in discontinuous phase transitionsJesus M. Encinas  and C. E. Fiore ^{*}*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66318 05315-970 São Paulo, São Paulo, Brazil*

(Received 2 October 2020; revised 28 December 2020; accepted 16 February 2021; published 17 March 2021)

Based on mean-field theory (MFT) arguments, a general description for discontinuous phase transitions in the presence of temporal disorder is considered. Our analysis extends the recent findings [C. E. Fiore *et al.*, *Phys. Rev. E* **98**, 032129 (2018)] by considering discontinuous phase transitions beyond those with a single absorbing state. The theory is exemplified in one of the simplest (nonequilibrium) order-disorder (discontinuous) phase transitions with “up-down” Z_2 symmetry: the inertial majority vote model for two kinds of temporal disorder. As for absorbing phase transitions, the temporal disorder does not suppress the occurrence of discontinuous phase transitions, but remarkable differences emerge when compared with the pure (disorderless) case. A comparison between the distinct kinds of temporal disorder is also performed beyond the MFT for random-regular complex topologies. Our work paves the way for the study of a generic discontinuous phase transition under the influence of an arbitrary kind of temporal disorder.

DOI: [10.1103/PhysRevE.103.032124](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.103.032124)**I. INTRODUCTION**

Disorder is commonly present in many real systems and more recently it has also been broadly investigated in nonequilibrium phase transitions with absorbing states [1–3] by considering spatial [4–8] and temporal [9–17] variation of control parameters. In both cases, the criticality is marked by the existence of new (and universal) set of critical exponents and present a subregion in the phase space in which exotic behaviors are found. The former region is named spatial Griffiths phase and it is located in the absorbing phase in which the order parameter vanishes slower (power law or stretched exponential) than the exponential decay in the absence of disorder. Conversely, temporal disorder is featured by a region in the active phase in which the mean lifetime increases as a power law (instead of exponential).

Now let us shift the discussion for nonequilibrium phase transitions with spontaneous breaking symmetry. It manifests in a countless sort of systems beyond the classical ferromagnetic-paramagnetic phase transition [1,2,18], such as for an (approximate) description for fish shoals moving under an ordered way for protecting themselves against predators, spontaneous formations of a common language and culture, the emergence of consensus in social systems, and others [19–21]. They can be qualitatively expressed via the differential equation for the order-parameter x $dx/dt = ax + bx^3 - cx^5 \dots$. It presents only odd terms, in which the classification of phase transition, whether continuous or discontinuous, depends on the above coefficients (b and c should be positive for a discontinuous phase transition). Despite predicted under the simple above approach, comparatively there are less (nonequilibrium) microscopic models presenting discontinuous transitions exhibiting up-down symmetry. A remarkable example is the majority vote model with inertia [22]. Originally, its phase transition is always

continuous [23–25], but the inclusion of an inertial term, e.g., a term proportional to the local spin, can shift the phase transition to a discontinuous one, in both complex network [22,26] and in regular lattices [27,28].

The importance of such results is highlighted not only for occurrence of discontinuous phase transition in a minimal nonequilibrium model in which general features at the phase coexistence were established [27,28], but also by the fact that behavioral inertia is an essential characteristic of human being and animal groups and it is also a significant ingredient triggering abrupt transitions arising in social systems [19]. Thereby, the inertial majority vote (IMV) could be (in principle) considered for the description of such phenomena. However, the effects under the inclusion of more realistic ingredients, such as its time dependent variation of parameters (e.g., inertia), have not been satisfactorily understood yet.

Recently, a theory for discontinuous phase transitions with a single absorbing state in the presence of temporal disorder was proposed in Ref. [29]. In contrast to the spatial disorder case [30], they are not suppressed due to the temporal disorder, although remarkable features emerge when compared with their pure (disorderless) systems. This includes the existence of rare temporal fluctuations which changes the behavior of metastable phase, turning it into an inactive phase characterized by exponentially large decay times. Since systems with Z_2 symmetry present distinct features from phase transitions into a single absorbing state (which can be viewed by a distinct differential equation $dx/dt = ax + bx^2 - cx^3 \dots$) [31,32], a question that naturally arises is if similar findings about the effect of temporal disorder are verified and can be extended beyond Ref. [29]. Due to the fact that inertia plays a fundamental role for shifting the phase transition in the IMV, an interesting question concerns that temporal disorder in the inertia may provide similar findings to the usual case (temporal disorder in the control parameter).

Aimed at answering aforementioned points, here we examine, separately, the role of temporal disorder in two

^{*}fiorecarlos.cf@gmail.com

fundamental ingredients: the control parameter and inertia. Based on mean-field analysis, we derive general predictions for both kinds of temporal disorder, which are also verified beyond the mean-field theory (MFT) for complex structures. Our analysis provides a general procedure for tackling the effect of temporal disorder in discontinuous phase transitions.

This paper is organized as follows: In Sec. II we present the analysis of pure model and temporal disorder based on the MFT, and in Sec. III we present the main findings beyond the MFT. Conclusions are drawn in Sec. IV.

II. MODEL AND MEAN-FIELD ANALYSIS

The original (inertialess) majority vote model (MV) is defined as follows. At each time step, a site i with spin σ_i is randomly selected and with probability $1 - f$ it is (is not) aligned with the majority of its k_i nearest neighbors. If there is no majority of a given spin (whether $+1$ or -1), one of the possible values is chosen with equal probability. The inertial majority vote model (IMV) differs from the MV by the inclusion of an inertial term θ , taking into account the contribution of the local spin. The transition rate $\omega_i(\sigma)$ associated to the spin flip $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ also depends on the local spin σ_i and it is given by [22]

$$\omega_i(\sigma) = \frac{1}{2}[1 - (1 - 2f)\sigma_i S(\Theta_i)], \quad (1)$$

where Θ_i accounts for the local neighborhood plus the inertial contribution given by

$$\Theta_i = (1 - \theta) \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\sigma_j}{k_i} + \theta \sigma_i,$$

with $S(x) = \text{sign}(x)$ if $x \neq 0$ and $S(0) = 0$. Note that one recovers the original MV when $\theta = 0$. Except to the trivial cases, $f = 0$ and $\theta = 0.5$, there is (always) a finite probability of not following the majority vote rule and hence the phase transition does not present an absorbing phase [29]. An order-disorder phase transition yields only when the inertia is constrained between $\theta \in [0, 0.5]$. For $\theta > 0.5$ there is no interaction between neighboring sites and the transition rate is always dominated by the inertial term. Since spin flips

due to the interaction between neighboring spins are absent, there is neither spontaneous magnetization nor phase transition. By increasing θ and the connectivity, phase transition is shifted from continuous (second order) to a discontinuous (first order). At the mean-field level the phase coexistence is marked by the appearance of an hysteretic region in which two symmetric ordered phases and a disordered phase coexist. A discontinuous phase transition also manifests in homogeneous and heterogeneous networks, but an entirely different behavior is presented for regular lattices, in which the main quantities (magnetization, its variance χ , the entropy production, the position of maximum of χ) scale with the system volume at the phase coexistence [27,28,33].

From the transition rate, the time evolution of the average magnetization $m_k = \langle \sigma_i \rangle_k$ of a local site i with degree k is given by

$$\frac{d}{dt} m_k = -m_k + (1 - 2f)\langle S(\Theta_i) \rangle. \quad (2)$$

The first analysis will be performed by means of a MFT treatment, in which the joint probabilities appearing in the average $\langle S(\Theta_i) \rangle$ are rewritten in terms of one-site probabilities. From this assumption, one gets the following expression $\langle S(\Theta_i) \rangle = (1 + m_k)\langle S(\Theta_+) \rangle/2 + (1 - m_k)\langle S(\Theta_-) \rangle/2$, where $\langle S(\Theta_{\pm}) \rangle$ are given by

$$\langle S(\Theta_{\pm}) \rangle \approx \sum_{n=[n_k^{\pm}]}^k C_n^k p_{\pm}^n p_{\mp}^{k-n} - \sum_{n=[n_k^{\mp}]}^k C_n^k p_{\mp}^n p_{\pm}^{k-n}, \quad (3)$$

with p_{\pm} being the probability of a nearest neighbor having spin ± 1 given by $p_{\pm} = (1 \pm m^*)/2$ (associated with the ‘‘local’’ magnetization m^*), n_k^- and n_k^+ correspond to the lower limit of the ceiling function given by $n_k^- = k/[2(1 - \theta)]$ and $n_k^+ = k(1 - 2\theta)/[2(1 - \theta)]$, respectively.

In order to relate m^* and m_k , we shall focus our analysis on uncorrelated networks, in which the probability of a randomly chosen site has degree k reads as $kP(k)/\langle k \rangle$, with $P(k)$ and $\langle k \rangle$ being the probability distribution of nodes and its mean degree, respectively. The relation between m^* and m_k then reads as $m^* = \sum_k m_k k P(k) / \langle k \rangle$. By combining the above expression with Eq. (2), we obtain the following equation of m^* in the steady-state regime:

$$m^* = (1 - 2f) \sum_k \frac{kP(k)}{\langle k \rangle} \left[\left(\frac{1 + m_k}{2} \right) \langle S(\Theta_+) \rangle + \left(\frac{1 - m_k}{2} \right) \langle S(\Theta_-) \rangle \right]. \quad (4)$$

Equation (4) can be analyzed for a generic lattice topology [specified by $P(k)$]. We restrict our study for random-regular (RR) topologies, in which all sites have the same number of neighbors k_0 [$P(k) = \delta(k - k_0)$] and one gets the following self-consistent expression for the steady m in terms of f and θ :

$$m = (1 - 2f) \left[\left(\frac{1 + m}{2} \right) \langle S(\Theta_+) \rangle + \left(\frac{1 - m}{2} \right) \langle S(\Theta_-) \rangle \right], \quad (5)$$

where we considered the fact that $m^* = m$. Equation (5) presents three steady-state solutions $m_s(f) > m_u(f) > m_d(f) = 0$ and a discontinuous phase transition occurring at $f = f_f$. For $f > f_f$, the system evolves to the solution $m_d(f) = 0$ for $t \rightarrow \infty$, characterizing the disordered (DIS)

phase irrespective of the initial condition. Conversely, the ordered phase is separated by two distinct regions: $f < f_b$ and $f_b < f < f_f$. In the former, the time evolution of $m(t)$ evolves to $m(t \rightarrow \infty) \rightarrow m_s(f)$, also independently of the initial condition, whereas for $f_b < f < f_f$ the steady

state depends on the initial condition. More specifically, for $m(0) > m_u(f)$ and $m(0) < m_u(f)$ the system will evolve to $m(t \rightarrow \infty) \rightarrow m_s(f)$ (ordered phase) and $m(t \rightarrow \infty) \rightarrow m_d(f)$ (disordered phase), respectively. This feature of the ordered phase will be referred as the metastable (ME) phase, contrasting with the behavior for $f < f_b$. The value $f = f_b$ marks the crossover between the above regimes. Since $m(t)$ deviates from $m_u(f)$ whenever $m(0) \neq m_u(f)$, such a solution is unstable.

Although the achievement of analytic expressions for the steady-state regime and transition point from Eqs. (4) and (5) become quite cumbersome as k_0 is raised, a simpler analysis can be performed in the limit of large connectivities since each term of the binomial distribution approaches a Gaussian with mean $k_0 p_{\pm}$ and variance $\sigma^2 = k_0 p_{+} p_{-}$ [24,26,33–35]. From Eq. (5), each term from the right hand side is approximately rewritten as

$$\sum_{n=\lceil n_k^{\pm} \rceil}^{k_0} C_n^{k_0} p_{\pm}^n p_{\mp}^{k_0-n} \rightarrow \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{n_k^{\pm}}^{k_0} e^{-\frac{(l-k_0 p_{\pm})^2}{2\sigma^2}} dl = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{k_0(1-p_{\pm})}{\sqrt{2\sigma}} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{k_0(n_k^{\pm} - p_{\pm})}{\sqrt{2\sigma}} \right] \right\}, \quad (6)$$

with $\operatorname{erf}(x)$ denoting the error function $\operatorname{erf}(x) = 2 \int_0^x e^{-t^2} dt / \sqrt{\pi}$, and the second one can be rewritten under a similar way. Taking into account that $\operatorname{erf}[k_0(1-p_{\pm})/\sqrt{2\sigma}]$ approaches to 1 for large k_0 , we arrive at the following expression for the steady-state regime:

$$f = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2m}{(1+m)\operatorname{erf}(\alpha) - (1-m)\operatorname{erf}(\beta)} \right], \quad (7)$$

where parameters α and β are given by

$$\alpha = \sqrt{\frac{k_0}{2}} \left[\frac{\theta}{1-\theta} + m \right] \quad \text{and} \quad \beta = \sqrt{\frac{k_0}{2}} \left[\frac{\theta}{1-\theta} - m \right], \quad (8)$$

respectively. The transition point f_f corresponds to the maximum of Eq. (7), whereas at the vicinity of f_b (or f_c for a critical phase transition), m is expected to be small and then the above differential equation approaches $dm/dt \approx A(f, \theta, k_0)m$, where $A(f, \theta, k_0)$ is given by

$$A(f, \theta, k_0) = -1 + (1-2f) \left[\sqrt{\frac{2k_0}{\pi}} e^{-\frac{k_0 \theta^2}{2(1-\theta)^2}} + \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{k_0}{2}} \frac{\theta}{1-\theta} \right) \right]. \quad (9)$$

From the above expression, f_b is then given by $A(f_b, \theta, k_0) = 0$ and marks, for a given value of θ , the separatrix between an exponentially growth to the steady-state value $m_s(f)$ if $A(f, k_0, \theta) > 0$ ($f < f_b$) and an exponential decay to $m_d(f)$ if $A(f, k_0, \theta) < 0$ ($f > f_b$). For $\theta = 0$, one recovers the expression for the critical point $2f_c = 1 - \sqrt{\pi/(2k)}$ [24,33].

In order to illustrate all previous findings, Fig. 1 depicts, for the clean system, the phase diagram and all the above main features of discontinuous phase transitions for $k_0 = 12$ and $\theta = 0.45$ as f is changed. In particular, the regions $f \leq f_b = 0.0274573\dots$ and $f_b < f < f_f = 0.080121$ mark the ordered (ORD) and ME phases, respectively, whereas for $f > f_f$ the disordered phase (DIS) prevails. Similar results are obtained for other connectivities k_0 and θ .

As a final remark, it is worth mentioning that although the dependence between m and θ is more cumbersome than with f , all previous signatures of phase coexistence are held valid when the inertia is taken as the control parameter (for fixed f).

A. Temporal disorder in the control parameter

Once we presented the main features about the pure system, we now are in position for tackling the effects of the temporal disorder. We start with time variations of the control parameter f . Although similar findings are expected for

distinct temporal disorder distributions, we shall consider the simplest case in which for a given time interval constrained between t and $t + \Delta t$, control parameter f is randomly extracted from a bimodal distribution $P_{\text{dis}}(f)$:

$$P_{\text{dis}}(f) = p\delta(f - f_-) + (1-p)\delta(f - f_+), \quad (10)$$

where $f_- < f_+$ and $p(1-p)$ is the probability in which f assumes the values $f_-(f_+)$. During this time interval, the system behaves as the pure system since its control parameter is kept fixed. For simplicity and also for comparing with previous findings [29], we set $p = \frac{1}{2}$.

Analysis starts from a given initial condition $m(0)$ and its time evolution is analyzed until a sufficient large time t_{max} that generates a given sequence of control parameter values $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$, where $t_{\text{max}} = M \times \Delta t$. This process is then repeated for sufficiently N_D distinct disorder sequences (we have considered here $N_D = 10^2-10^3$).

Although our findings do not depend on particular values of k_0 and θ , the effect of temporal disorder will be exemplified for $k_0 = 12$ and $\theta = 0.45$, in order to draw a comparison between clean and disordered systems. All possible variations of both f_- and f_+ along ORD, ME, and DIS will be considered. We face two scenarios, in which both f_- and f_+ belong to the same and different phases, respectively.

Let us start with the case when both f_- and f_+ vary over the ordered phase ($0 \leq f_{\pm} < f_b$). Irrespective of the initial

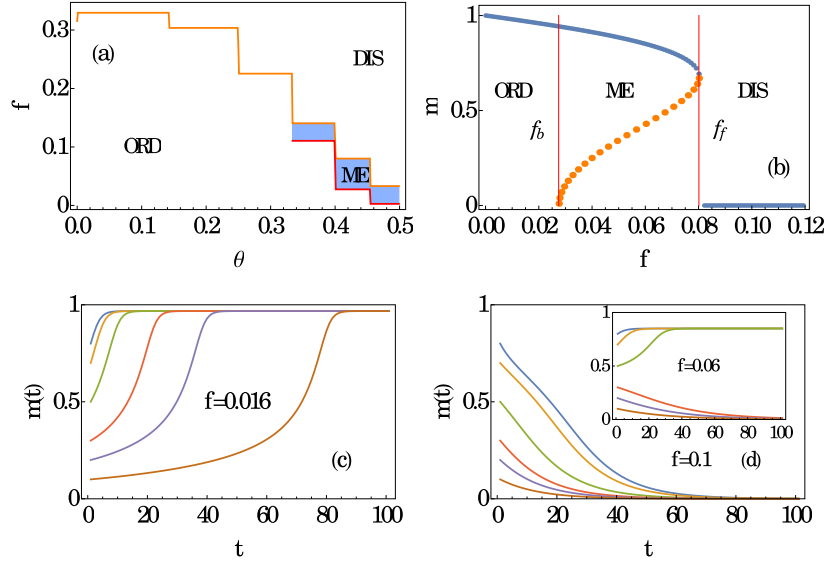


FIG. 1. (a) Depicts the MFT phase diagram for a RR topology with $k_0 = 12$. ORD, ME, and DIS denote the ordered, metastable, and disordered phases, respectively. In (b), the steady magnetization m versus f for $\theta = 0.45$. Continuous and dashed lines denote the stable and unstable solutions of Eq. (5), respectively. Their main features are exemplified in (c) and (d) by taking the time evolution of m as a function of time for $f = 0.016$ (c), $f = 0.10$ (d) and 0.06 (inset) for distinct initial conditions $m(0)$.

condition $m(0)$, the system will evolve towards an ordered state in which the steady magnetization fluctuates between $m_s(f_-)$ and $m_s(f_+)$. A similar conclusion is valid when both f_- and f_+ belong to the disordered phase ($f_j < f_{\pm} \leq \frac{1}{2}$), in which the disordered phase prevails independently of $m(0)$. For both f_- and f_+ belonging to the metastable phase [$f_b \leq f_{\pm} \leq f_j$ and $m_u(f_-) < m_u(f_+)$], then $m(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ and $m(t \rightarrow \infty) \neq 0$ if $m(0) < m_u(f_-)$ and $m(0) > m_u(f_+)$, respectively, irrespective of the sequence of f_- and f_+ . The case in which $m_u(f_-) < m(0) < m_u(f_+)$ will depend on the particular sequence of f_- and f_+ . This can be verified under two extreme cases. Take, for instance, a particular (long) sequence of $f = f_+$, in which $m(t)$ becomes lower than $m_u(f_-)$. In such a case, the system always reaches the disordered phase. Conversely, a long sequence of $f = f_-$ will lead to $m(t) > m_u(f_+)$ and then the system will converge to the ordered phase. Thus, as for absorbing phase transitions [29], ORD, ME, and DIS phases are preserved under the temporal disorder.

Next, we analyze the cases in which f_- and f_+ belong to different phases. Starting with $f_- \in \text{ORD}$ and $f_+ \in \text{ME}$ (with $f_- < f_b$ and $f_b < f_+ < f_j$), the phase predominance can be understood under a heuristic analysis based on the time evolution for $m(t) \ll 1$. Since the inertia is fixed, Eq. (9) assumes the form $m \sim e^{-\alpha(f-f_b)t}$, where parameters α and f_b are approximately given by Eq. (9) for large k_0 . The dynamics then will be characterized for sequences in which $m(t)$ increases and vanishes according to asymptotic expressions $m \sim e^{\alpha(f_b-f_-)t}$ and $m \sim e^{-\alpha(f_+-f_b)t}$, respectively. The ordered phase prevails if $f_+ + f_- < 2f_b$, whereas the metastable phase dominates when $f_+ + f_- > 2f_b$. The line

fulfilling $f_+ + f_- = 2f_b$ denotes the crossover between ordered and metastable phase lines.

Next, we consider f_- and f_+ belonging to the ME and DIS phases, respectively. Despite different from absorbing phase transitions (APTs) [29], the existence of a hysteretic branch is also responsible for the prevalence of the disordered phase over the metastable one. Since the magnetization vanishes for $f > f_j$, irrespective of the initial condition, it suffices a single long sequence of consecutive f_+ 's (e.g., a rare fluctuation) in which $m(t) < m_u(f_-)$ for the system always reaching the disordered phase. For sufficiently long times, a rare fluctuation occurs with probability one and thus the temporal disorder always suppresses the ME phase when $f_+ > f_j$. However, the appearance of a rare fluctuation may require exponentially large times (mainly when f_+ approaches to f_j and/or for small Δt 's). The above features are depicted in Fig. 2(d) by comparing the time evolution of the magnetization over individual runs and its average value. Note that in all cases, individual runs are featured by the system evolving to the disordered phase after the appearance of a rare fluctuation. Since the interval time in which it appears varies, individual and averaged runs behave very differently. The latter exhibits a "plateau," reflecting the absence of a rare fluctuation that drives the system to the disordered phase for lower and intermediate times. The plateau is more pronounced for lower time windows Δt and it is followed by the vanishing of the mean magnetization according to a characteristic time \bar{T} . In order to obtain an upper limit for \bar{T} , we assume the extreme case in which the disordered phase is reached only via a long sequence of consecutive f_+ 's, whose magnetization evolves

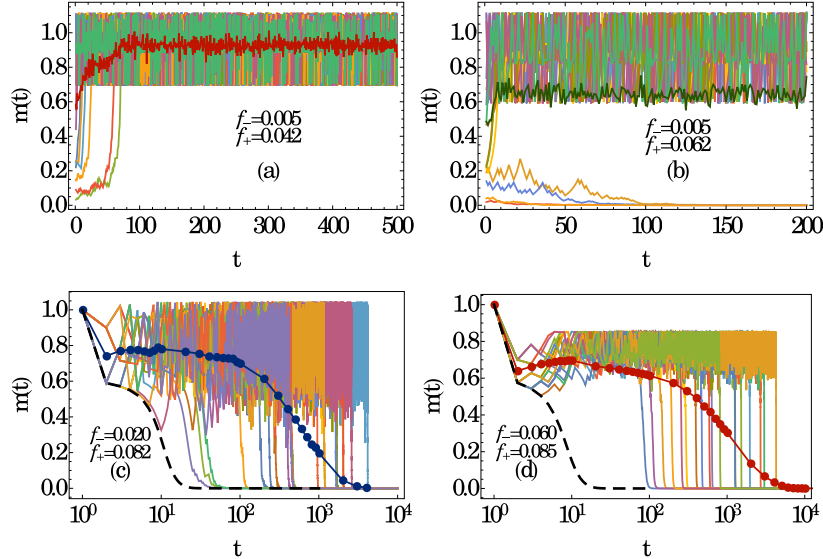


FIG. 2. MFT temporal disorder analysis: For a RR network with $k_0 = 12$, $\theta = 0.45$, and $\Delta t = 5$, the time evolution of m for distinct sets of f_+ and f_- and distinct independent realizations. (a)–(d) Exemplify the following cases: $(f_-, f_+) \in (\text{ORD}, \text{ME})$ with $\bar{f} < \bar{f}_b$ and $\bar{f} > \bar{f}_b$, $(f_-, f_+) \in (\text{ORD}, \text{DIS})$, and $(f_-, f_+) \in (\text{ME}, \text{DIS})$, respectively. Dashed and symbol curves correspond to the pure versions (for $f = f_+$) and m averaged over $N_D = 10^3$ realizations, respectively.

from $m_s(f_-)$ to $m_u(f_-)$ (when $f = f_+$) and it is characterized by the decay time τ_+ . The mean characteristic time \bar{T} is approximately given by $\bar{T} \approx \tau_+ p^{-\tau_+/\Delta t}$ [29]. Figures 3(a) and 3(b) depict the time evolution of average $m(t)$ for distinct Δt 's for $(f_-, f_+) \in (\text{ORD}, \text{DIS})$ and (ME, DIS) , respectively. As can be seen, the relationship between \bar{T} and Δt follows rather well such above theoretical estimate. According to it, the appearance of a rare fluctuation driving the system to the disordered phase would require a sufficient long time $\bar{T} \approx 10^{13}$ for $\Delta t = 1$. We close such analysis by remarking that although the disordered phase prevails over the metastable, the discontinuous phase transition between DIS and ME phases is preserved by the temporal disorder and yields at $f_+ = f_f$.

Since the disordered and metastable phases behave similarly when $m(t) \ll 1$, the case in which f_- and f_+ belong to the ORD and DIS phases is similar to the first one and then the ordered and disordered phases prevail if $\bar{f} < \bar{f}_b$ and $\bar{f} > \bar{f}_b$, respectively. The relation $2\bar{f}_b = f_+ + f_-$ marks the separatrix between the above regimes. As previously, the average $m(t)$ is significantly different from individual runs and the mean decay time also increases as Δt decreases. These features are exemplified in Figs. 2(c) and 3(a) for $\Delta t = 5$, $f_- = 0.020$, and $f_+ = 0.082$ with $N_D = 20/10^3$ individual/averaged runs. The prevalence of ORD phase is possible only for smaller values of inertia ($\frac{1}{3} < \theta < \frac{2}{5}$ and $\frac{3}{13} < \theta < \frac{1}{3}$ for $k_0 = 12$ and 20, respectively). In the present case, the phase DIS always dominates over the ORD phase for $k_0 = 12$ and $\theta = 0.45$ since the summation of lowest $f_- = 0$ and $f_+ = f_f$ is always greater than $2\bar{f}_b$.

From the previous analysis, we build the phase diagram for the temporal disorder IMV for $k_0 = 12$ and $\theta = 0.45$,

as depicted in Fig. 4. Dotted and dashed lines denote the crossover and phase coexistence lines phases.

We close this section by remarking that although APT and up-down systems share distinct features, the effect of temporal disorder is similar and directly related to the bistability of the active or ordered phase.

B. Temporal disorder in the inertia

Now we consider the effects of temporal disorder in the inertia, in which its values are chosen from two possible values θ_- and θ_+ (with $\theta_+ > \theta_-$):

$$P_{\text{dis}}(\theta) = p\delta(\theta - \theta_-) + (1 - p)\delta(\theta - \theta_+). \quad (11)$$

Although the dependence between the $m(t)$ and θ is more cumbersome than the control parameter f , our analysis will be carried out for $m(t) \ll 1$, in which the time evolution of the order parameter is approximately given by $dm/dt \approx A'(f, \theta, k_0)m$ [the coefficient $A'(f, \theta, k_0)$ approaches to Eq. (9) for large k_0]. Since $A'(f, \theta, k_0) > 0 (< 0)$ for θ belonging to the ORD (ME and DIS) phases [see, e.g., Tables I and II and Eq. (9)], the inertial disorder can be analyzed in similarity with the temporal disorder in f , whose resulting phase is predicted from the competition between $A'(f, \theta_+, k)$ and $A'(f, \theta_-, k)$.

Table I and Fig. 5(d) exemplify coefficients $A'(f, \theta, k_0)$ and the phase diagram for $f = 0.12$ and distinct θ 's, respectively. For the pure version, the crossover between ORD and ME phases yields at $\theta_b = \frac{1}{3}$, whereas ME-DIS discontinuous phase transition yields at $\theta_f = \frac{2}{5}$ [see, e.g., Fig. 1(a)].

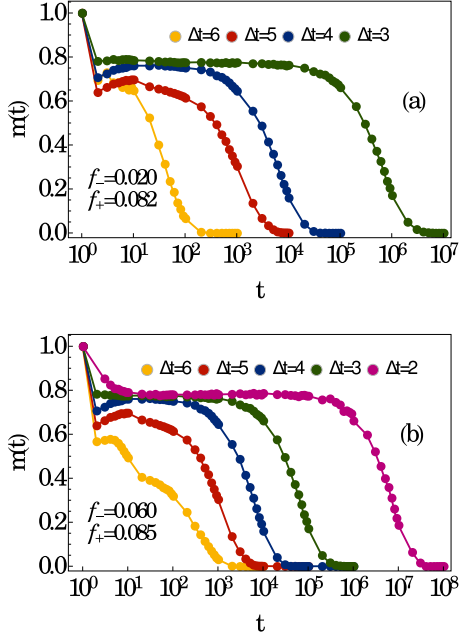


FIG. 3. For a RR network with $k_0 = 12$ and $\theta = 0.45$, (a) and (b) show m averaged over $N_D = 10^3$ realizations for $\Delta t = 2, 3, 4, 5$, and 6 for $(f_-, f_+) \in (\text{ORD}, \text{DIS})$ and (ME, DIS) , respectively.

Starting with θ_- and θ_+ belonging to the same phase (ORD and ME and DIS) the resulting phase will be preserved for the temporal disorder, as expected. When θ_- and θ_+ belong to distinct phases, the result phase will depend on the sign of coefficients $A'(f, \theta, k_0)$'s.

The case in which θ_- belongs to ORD and θ_+ belongs to ME/DIS phases, the resulting phase will be or-

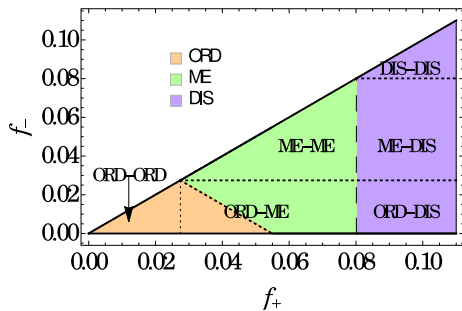


FIG. 4. MFT phase diagram for RR network with values $k_0 = 12$ and $\theta = 0.45$ under temporal disorder over the control parameter f . The resulting phase is represented by distinct colors. Dotted and dashed lines represent crossovers and discontinuous transition lines, respectively.

TABLE I. Coefficients $A'(f, \theta, k_0)$ for $f = 0.12$ and $k_0 = 12$ and the resulting phase.

θ	$A'(f, \theta, k_0)$	Phase
$0 < \theta < 1/7$	0.614...	ORD
$1/7 < \theta < 1/4$	0.467...	ORD
$1/4 < \theta < 1/3$	0.192...	ORD
$1/3 < \theta < 2/5$	-0.0122...	ME
$2/5 < \theta < 5/11$	-0.0979...	DIS
$5/11 < \theta < 1/2$	-0.118...	DIS

dered if $A'(f, \theta_-, k_0) > A'(f, \theta_+, k_0)$ and ME and DIS if $A'(f, \theta_-, k_0) < A'(f, \theta_+, k_0)$, respectively. The competition between θ_- and θ_+ belonging to the ME and DIS phases will also result in the disordered phase. Since both $A'(f, \theta_-, k_0)$ and $A'(f, \theta_+, k_0)$ are negative, the system solely requires a long sequence of $\theta = \theta_+$ for driving it to $m(t) < m_s(\theta_-)$ and then it will evolve to the DIS phase, irrespective of the subsequent values of θ . Although more pronounced for $k_0 = 20$ than for $k_0 = 12$, but (apparently) less pronounced than the disorder in the control parameter, temporal disorder in the inertia is also featured by a long and remarkable period in which the system exhibits ordering until its vanishing [see, e.g., Figs. 5(c) and 6]. As previously, a consecutive sequence of θ_+ 's driving the system to the disordered phase also requires larger times for lower Δt 's and for this reason the mean time decay \bar{T} increases. A discontinuous phase transition between ME and DIS yields at $\theta_+ = \theta_f$. Thus, the temporal disorder in inertia also does not suppress the existence of a discontinuous transition nor hysteretic branch.

Since the difference between the lowest $A'(f, \theta_-, k_0)$ and the largest $A'(f, \theta_+, k_0)$ is always positive, the ORD phase always prevails over the DIS/ME ones for $k_0 = 12$, $f = 0.12$, and $p = \frac{1}{2}$ [see, e.g., Figs. 5(a) and 5(b)]. The prevalence of the ordered phase over the disordered and metastable phases in such case is a feature originated from the temporal disorder in the inertia, whose main features are exemplified in the phase diagram in Fig. 5(d).

We close this section by mentioning that although not presented for $k_0 = 12$, the competition between ORD and ME and DIS phases can result to a metastable or disordered phase as exemplified for $k_0 = 20$ (see, e.g., coefficients in Table II).

III. BEYOND THE MEAN-FIELD THEORY: MONTE CARLO SIMULATIONS FOR DISTINCT KINDS OF TEMPORAL DISORDER

In this section, we tackle the influence of temporal disorder beyond the MFT by analyzing their effects in complex net-

TABLE II. Coefficients $A'(f, \theta, k_0)$ for $f = 0.12$ and $k_0 = 20$ and the resulting phase.

θ	$A'(f, \theta, k_0)$	Phase
$3/13 < \theta < 2/7$	0.2295...	ORD
$2/7 < \theta < 1/3$	0.0328...	ORD
$1/3 \leq \theta < 3/8$	-0.0683...	ME
$3/8$	-0.0876...	ME
$3/8 < \theta < 7/17$	-0.1176...	DIS

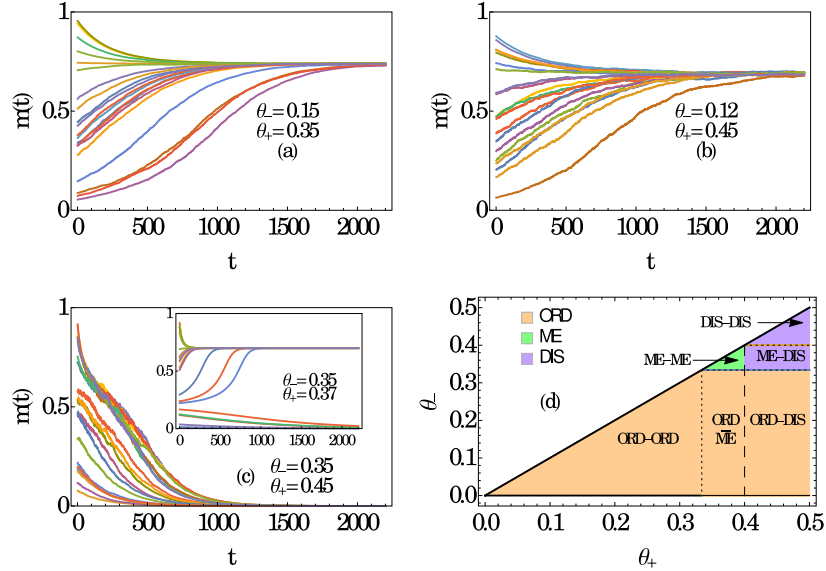


FIG. 5. MFT analysis for the temporal disorder in the inertia: For RR network with values $k_0 = 12$ and $f = 0.12$, (a)–(c) exemplify the average time evolution of the m for distinct initial configurations and sorts of inertia $(\theta_-, \theta_+) \in: (\text{ORD}, \text{ME}), (\text{ORD}, \text{DIS}), (\text{ME}, \text{DIS}), (\text{ME}, \text{ME})$ (inset), respectively. In (d) the phase diagram with dashed and dotted lines representing discontinuous phase transition lines and crossover between phases, respectively. The resulting phase is represented by distinct colors.

works structures. We also consider random-regular structures which have been built for fixed connectivities k_0 (for a given system size N) according to the scheme by Bollobás [36]. Also, the neighborhood of each site has not been altered as the time is changed.

As in the MFT, numerical simulations start for given initial condition in which a new value of the control parameter (whether f or θ) is sorted from the two possible values (f_-/θ_- and f_+/θ_+) for every interval time ranged between t and $t + \Delta t$. The time evolution of system is analyzed until a maximum time t_{\max} that results in a given sequence of $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$

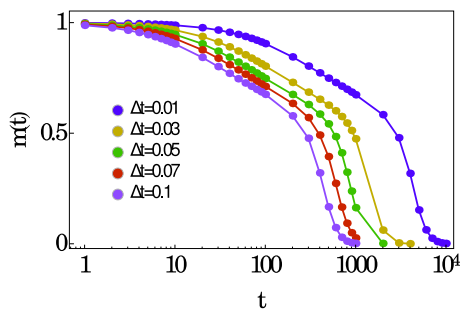


FIG. 6. For $k_0 = 20$, $f = 0.12$, $\theta_- = 0.334 \in \text{ME}$, and $\theta_+ = 0.412 \in \text{DIS}$, the average m versus t obtained for $N_D = 10^3$ disorder realizations and distinct Δt 's.

$(\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M\})$ in which $t_{\max} = M \times \Delta t$. Such analysis is repeated over $N_D = 10^3 - 10^4$ distinct sequences of temporal disorder. We have considered $\Delta t = 20$ and $t_{\max} = 10^5 - 10^6$.

Resulting phases as well as phase transitions can be identified from two distinct (but equivalent) ways. In the former approach, one considers analysis in the steady-state regime in which we start from the ordered phase ($|m|$ close to 1) and f is raised by an amount Δf and the end configuration at f is adopted as the initial condition at $f + \Delta f$. This procedure is repeated until the system reaches the disordered phase at f_f . Conversely, the numerical simulation is restarted for a given value of f constrained in the disordered phase but now f is decreased by Δf until the ordered phase will be reached at f_b . Both forward and backward curves are expected to coincide themselves at both ordered and disordered phases, but not along the metastable branch.

Additionally, the presence of temporal disorder can be more conveniently analyzed (as previously) by inspecting the time evolution of order parameter for distinct initial conditions $0 < |m(0)| \leq 1$. The system will converge for a well defined $m(t \rightarrow \infty)$ in both disordered and ordered phases, respectively, irrespective of the initial conditions, whereas it will evolve to two well defined values for f constrained in the metastable branch. Due to the finite-size effects, the magnetization never vanishes, but instead, it behaves as $m(t \rightarrow \infty) \sim 1/\sqrt{N}$ in the disordered and metastable phases [for low $m(0)$].

Although the temporal disorder features are not expected to depend on the values of θ and k_0 , the bistable branch is more pronounced for large connectivities and θ 's and for this reason numerical simulations will be undertaken for $\theta = 0.3$

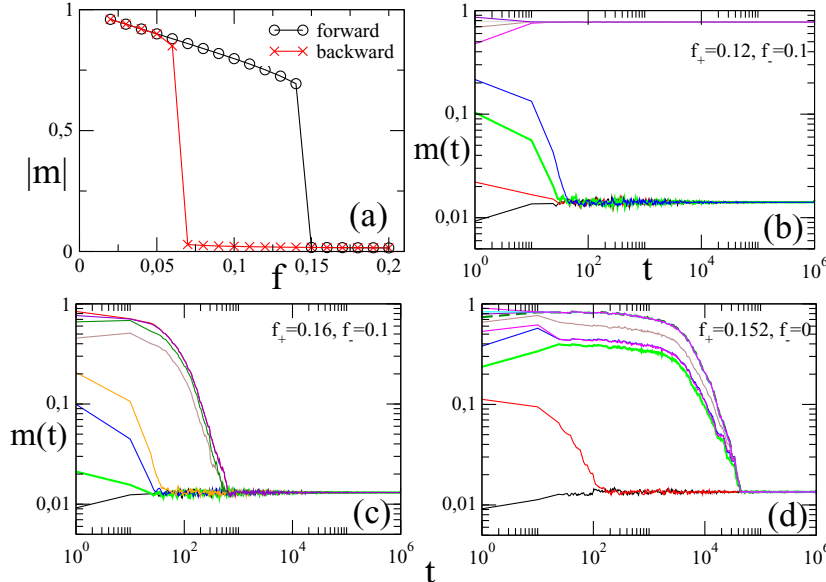


FIG. 7. (a) Depicts, for $N = 5000$, $k_0 = 20$, and $\theta = 0.3$, the order parameter $|m|$ versus f for the pure system. Continuous and dotted lines denote the forward and backward increase of f , respectively. (b)–(d) Show the average time evolution of the order parameter m (over $N_D = 10^4$ realizations) for distinct initial conditions $m(0)$ and different sorts of $[f_-, f_+] \in [\text{ME}, \text{ME}]$, $[\text{ME}, \text{DIS}]$, $[\text{ORD}, \text{DIS}]$, respectively. Due to finite-size effects, $m(t \rightarrow \infty)$ does not vanish in the disorder phase, but it is proportional to $1/\sqrt{N}$.

and $k_0 = 20$, whose hysteretic loop for the pure system was investigated in Ref. [22] and reproduced in Fig. 7(a). As it can be seen, for $f < f_b = 0.060(5)$ the system is constrained in the ordered phase, whereas the bistability yields for $f_b < f < f_f = 0.150(5)$. The disordered phase emerges for $f > f_f$, irrespective of the initial condition. Figures 7(b)–7(d) depict the main features for temporal disorder in the control parameter for distinct sets of f_+ and f_- belonging to the ORD, ME, and DIS phases. In particular, the MFT analysis describes reasonably well the findings obtained from complex topologies, including the prevalence of the disordered phase over the metastable [Fig. 8(a)] for $f_+ < f_f$ and the competition between ordered and metastable and disordered phases. Also, by taking into account that the summation of the lowest $f_- = 0$ and $f_+ = f_f$ is lower than $2f_b$ (for $k_0 = 12$ and $\theta = 0.45$), we can understand (from MFT) the prevalence of the disordered phase over the ORD one, as illustrated in Fig. 5(d). Despite the similarities between MFT and present results, due to a finite-size effects, the ORD phase always prevails over the metastable for finite N . Since $m(t \rightarrow \infty)$ is finite and proportional to $1/\sqrt{N}$ in the disordered phase, it suffices a long sequence (e.g., a rare fluctuation) of $f = f_-$ for driving the system to the ORD phase. However, finite-size effects disappear as $N \rightarrow \infty$ and MFT also describes well the prevalence of the ME phase when $f_+ + f_- > 2f_b$.

Since the main features are quite similar to those from MFT, we shall omit the phase diagram. As a final comment, we expect similar trends for other lattice topologies, although the line separating ordered and other phases does not necessarily obey a derivation like MFT.

In the last analysis, we exemplify the main features of inertial temporal disorder. Figure 8(b) shows the competition between metastable and disordered phases for $f = 0.12$. For the pure version, the hysteretic branch is verified for $\frac{2}{7} < \theta \leq \theta_f = \frac{1}{3}$ in which the order parameter jumps at $\theta > \theta_f$ (see, e.g., [35]).

Also in accordance with previous MFT analysis, the competition between ME and DIS phases always suppresses the phase coexistence [see, e.g., curves for $\theta_+ > \theta_f$ in Fig. 8(b)] and a discontinuous transition yields at $\theta_+ = \theta_f$. On the other hand, the resulting phase from the competition between ORD and DIS phases will depend on particular values of θ_- and θ_+ . More specifically, for $\theta_- = 0.28$ and $\frac{1}{3} < \theta_+ = \frac{3}{8}$ the ORD prevails, whereas the system evolves to disordered phase when $\theta_- = 0.29$. Since transition points from MFT and complex topologies are similar for large k_0 's [22], the above findings can also be (qualitatively) understood from coefficients from Table II from which the predominance of ORD and DIS phases holds for $\theta_- = 0.28$ and 0.29 , respectively.

IV. CONCLUSIONS

Based on the MFT, a general description for discontinuous phase transitions in the presence of temporal disorder was considered. Our theoretical predictions are valid for any system displaying a bistable behavior characterized by the existence of a hysteretic branch. The present study not only confirms previous findings [29], but also extends for other kinds of phase transitions and distinct kinds of temporal disorder. Analysis was exemplified in one of the simplest

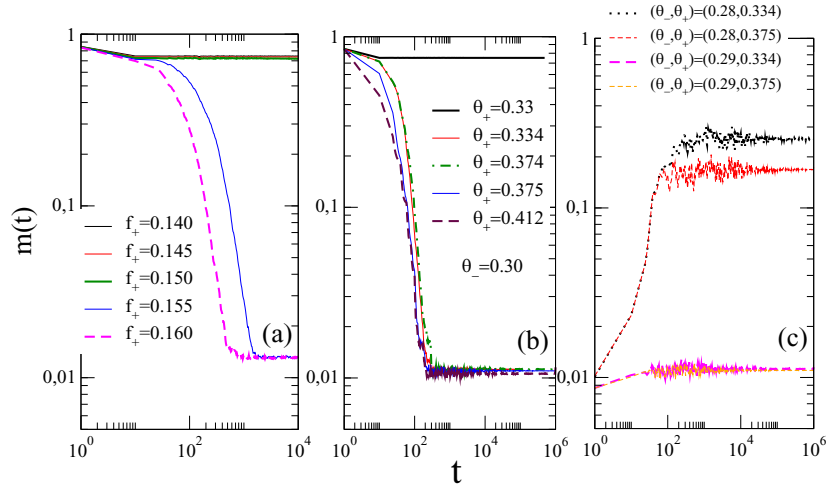


FIG. 8. For a RR network of size $N = 10^4$, $k_0 = 20$, and $\theta = 0.3$, panel (a) depicts the average time evolution of the order parameter m starting from the ordered state for $f_- = 0.10$ (ME) for distinct f_+ 's. (b) Depicts, for $f = 0.12$ and $m(0) = 1$, the time evolution of the average m for $\theta_- = 0.30$ (ME) for distinct θ_+ 's. In (c) the same but for $\theta_- = 0.28$ and 0.29 (both belonging to the ORD phase) and distinct θ_+ 's starting from $m(0) = 10^{-4}$. In all cases, averages are evaluated over $N_D = 10^3$ – 10^4 realizations. Due to finite-size effects, $m(t \rightarrow \infty)$ does not vanish in the disorder phase, but it is proportional to $1/\sqrt{N}$.

“up-down” Z_2 symmetry for two kinds of temporal disorder: the inertial majority vote model. Since the inertia plays a fundamental role for the emergence of a discontinuous transition, the effect of its time variation was also investigated. Although both kinds of temporal disorder do not suppress existence of a discontinuous phase transition, the phase coexistence is always suppressed when there is a competition between disordered and metastable phases. As for APTs, the competition between different phases can also lead to an order-parameter vanishing characterized by exponentially large decay times.

The mean-field approach describes very well the effect of temporal disorder in complex topologies and one expects its validity for other complex networks, such as Erdős-Renyi

and heterogeneous structures. As a final comment, it will be remarkable to extend such analysis for discontinuous phase transitions in regular structures, which presents an entirely different behavior from complex topologies. In these systems, no hysteretic behavior is presented [27,28].

ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge J. A. Hoyos for useful suggestions. C.E.F. acknowledges the financial support from Fundação de Amparo à Pesquisa do estado de São Paulo (FAPESP) under Grant No. 2018/02405-1 and J.M.E. acknowledges the financial support from CAPES.

- [1] J. Marro and R. Dickman, *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [2] M. Henkel, H. Hinrichsen, and S. Lubeck, *Non-Equilibrium Phase Transitions Volume I: Absorbing Phase Transitions* (Springer, The Netherlands, 2008).
- [3] G. Ódor, *Universality In Nonequilibrium Lattice Systems: Theoretical Foundations* (World Scientific, Singapore, 2007).
- [4] T. Vojta and M. Dickison, *Phys. Rev. E* **72**, 036126 (2005).
- [5] T. Vojta and M. Y. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 035701 (2006).
- [6] M. M. de Oliveira and S. C. Ferreira, *J. Stat. Mech* (2008) P11001.
- [7] T. Vojta, A. Farquhar, and J. Mast, *Phys. Rev. E* **79**, 011111 (2009).
- [8] H. Barghathi and T. Vojta, *Phys. Rev. Lett* **109**, 170603 (2012).
- [9] F. Vazquez, J. A. Bonachela, C. López, and M. A. Muñoz, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 235702 (2011).
- [10] R. Martínez-García, F. Vazquez, C. López, and M. A. Muñoz, *Phys. Rev. E* **85**, 051125 (2012).
- [11] J. A. Hoyos and T. Vojta, *Europhys. Lett.* **112**, 30002 (2015).
- [12] T. Vojta and R. Dickman, *Phys. Rev. E* **93**, 032143 (2016).
- [13] H. Barghathi, T. Vojta, and J. A. Hoyos, *Phys. Rev. E* **94**, 022111 (2016).
- [14] C. M. D. Solano, M. M. de Oliveira, and C. E. Fiore, *Phys. Rev. E* **94**, 042123 (2016).
- [15] M. M. de Oliveira and C. E. Fiore, *Phys. Rev. E* **94**, 052138 (2016).
- [16] A. H. O. Wada, M. Small, and T. Vojta, *Phys. Rev. E* **98**, 022112 (2018).
- [17] Alexander H. O. Wada and José A. Hoyos, *Phys. Rev. E* **103**, 012306 (2021).

- [18] O. Al Hammal, H. Chaté, I. Dornic, and M. A. Muñoz, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 230601 (2005).
- [19] C. Castellano, S. Fortunato, and V. Loreto, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 591 (2009).
- [20] T. Vicsek and A. Zafeiris, *Phys. Rep.* **517**, 71 (2012).
- [21] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. P. Vicente, F. Ritort, and R. Spigler, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 137 (2005).
- [22] H. Chen, C. Shen, H. Zhang, G. Li, Z. Hou, and J. Kurths, *Phys. Rev. E* **95**, 042304 (2017).
- [23] M. J. de Oliveira, *J. Stat. Phys.* **66**, 273 (1992).
- [24] H. Chen, C. Shen, G. He, H. Zhang, and Z. Hou, *Phys. Rev. E* **91**, 022816 (2015).
- [25] L. F. C. Pereira and F. G. Brady Moreira, *Phys. Rev. E* **71**, 016123 (2005).
- [26] P. E. Harunari, M. M. de Oliveira, and C. E. Fiore, *Phys. Rev. E* **96**, 042305 (2017).
- [27] J. M. Encinas, P. E. Harunari, M. M. de Oliveira, and C. E. Fiore, *Sci. Rep.* **8**, 9338 (2018).
- [28] M. M. de Oliveira, M. G. E. da Luz, and C. E. Fiore, *Phys. Rev. E* **97**, 060101(R) (2018).
- [29] C. E. Fiore, M. M. de Oliveira, and J. A. Hoyos, *Phys. Rev. E* **98**, 032129 (2018).
- [30] P. Villa Martín, J. A. Bonachela, and M. A. Muñoz, *Phys. Rev. E* **89**, 012145 (2014).
- [31] P. Grassberger, *J. Stat. Mech.* (2006) P01004.
- [32] S. Lubeck, *J. Stat. Phys.* **123**, 193 (2006).
- [33] C. E. Fernández Noa, P. E. Harunari, M. J. de Oliveira, and C. E. Fiore, *Phys. Rev. E* **100**, 012104 (2019).
- [34] C. Castellano and R. Pastor-Satorras, *J. Stat. Mech.* (2006) P05001.
- [35] J. M. Encinas, H. Chen, M. M. de Oliveira, and C. E. Fiore, *Phys. A (Amsterdam)* **516**, 563 (2019).
- [36] B. Bollobás, *Eur. J. Combin.* **1**, 311 (1980).

Referências

- [1] M. Newman and G. Barkema, *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*. Oxford University Press, 2004.
- [2] J. M. Encinas, P. E. Harunari, M. M. de Oliveira, and C. E. Fiore, “Fundamental ingredients for discontinuous phase transitions in the inertial majority vote model,” *Scientific Reports*, vol. 8, no. 1, p. 9338, 2018.
- [3] J. Encinas, H. Chen, M. M. de Oliveira, and C. E. Fiore, “Majority vote model with ancillary noise in complex networks,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 516, pp. 563 – 570, 2019.
- [4] J. Marro and R. Dickman, *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*. Cambridge University Press, 1999.
- [5] G. Ódor, *Universality in Nonequilibrium Lattice Systems: Theoretical Foundations*. Singapore: World Scientific, 2007.
- [6] M. Henkel, H. Hinrichsen, and S. Lubeck, *Nonequilibrium Phase Transition*, vol. I of *Absorbing Phase Transitions*. Netherlands: Springer, 2008.
- [7] H. Chen, C. Shen, G. He, H. Zhang, and Z. Hou, “Critical noise of majority-vote model on complex networks,” *Phys. Rev. E*, vol. 91, p. 022816, Feb 2015.
- [8] M. J. de Oliveira, “Isotropic majority-vote model on a square lattice,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 66, pp. 273–281, Jan 1992.
- [9] H. Chen, C. Shen, H. Zhang, G. Li, Z. Hou, and J. Kurths, “First-order phase transition in a majority-vote model with inertia,” *Phys. Rev. E*, vol. 95, p. 042304, Apr 2017.
- [10] L. F. C. Pereira and F. G. B. Moreira, “Majority-vote model on random graphs,” *Phys. Rev. E*, vol. 71, p. 016123, Jan 2005.
- [11] T. Vicsek and A. Zafeiris, “Collective motion,” *Physics Reports*, vol. 517, no. 3, pp. 71 – 140, 2012. Collective motion.
- [12] D. P. Landau and K. Binder, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*. Cambridge University Press, 4 ed., 2014.
- [13] S. H. Strogatz, “Exploring complex networks,” *Nature*, vol. 410, no. 6825, pp. 268–276, 2001.

- [14] R. Albert and A.-L. Barabási, “Statistical mechanics of complex networks,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 74, pp. 47–97, Jan 2002.
- [15] M. Newman, “The structure and function of complex networks,” *SIAM Review*, vol. 45, no. 2, pp. 167–256, 2003.
- [16] D. J. Watts and S. H. Strogatz, “Collective dynamics of ‘small-world’ networks,” *nature*, vol. 393, no. 6684, pp. 440–442, 1998.
- [17] A.-L. Barabási and R. Albert, “Emergence of scaling in random networks,” *Science*, vol. 286, no. 5439, pp. 509–512, 1999.
- [18] R. Milo, S. Shen-Orr, S. Itzkovitz, N. Kashtan, D. Chklovskii, and U. Alon, “Network motifs: Simple building blocks of complex networks,” *Science*, vol. 298, no. 5594, pp. 824–827, 2002.
- [19] C. Song, S. Havlin, and H. A. Makse, “Self-similarity of complex networks,” *Nature*, vol. 433, no. 7024, pp. 392–395, 2005.
- [20] P. ERDOS, “On the evolution of random graphs,” *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, vol. 5, pp. 17–61, 1960.
- [21] E. Estrada, “Quantifying network heterogeneity,” *Phys. Rev. E*, vol. 82, p. 066102, Dec 2010.
- [22] A. Clauset, C. Shalizi, and M. Newman, “Power-law distributions in empirical data,” *SIAM Review*, vol. 51, no. 4, pp. 661–703, 2009.
- [23] R. Pastor-Santoras and A. Vespignani, *Evolution and structure of the internet: a statistical physics approach*. Cambridge University Press, 2004.
- [24] M. M. de Oliveira, M. G. E. da Luz, and C. E. Fiore, “Finite-size scaling for discontinuous nonequilibrium phase transitions,” *Phys. Rev. E*, vol. 97, p. 060101, Jun 2018.
- [25] de Oliveira M.M., M. da Luz, and C. Fiore, “Generic finite size scaling for discontinuous non equilibrium phase transitions into absorbing states,” *Phys. Rev. E*, vol. 92, p. 062126, 2015.
- [26] A. R. Vieira and N. Crokidakis, “Phase transitions in the majority-vote model with two types of noises,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 450, pp. 30 – 36, 2016.
- [27] M. J. Oliveira and T. Tomé, *Stochastic dynamics and Irreversibility*. Springer International Publisher, 1 ed., 2015.
- [28] B. Bollobás, “A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labeled regular graphs,” *European Journal of Combinatorics*, vol. 1, no. 4, pp. 311 – 316, 1980.
- [29] K. W., “Phase transitions on cellular automata,” *Zeitschrift fur Physik B Condensed Matter*, vol. 58, no. 3, pp. 229–244, 1985.

-
- [30] A. J. Noest, “New universality for spatially disordered cellular automata and directed percolation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, pp. 90–93, Jul 1986.
- [31] C. E. Fiore, M. M. de Oliveira, and J. A. Hoyos, “Temporal disorder in discontinuous nonequilibrium phase transitions: General results,” *Phys. Rev. E*, vol. 98, p. 032129, Sep 2018.
- [32] C. E. F. Noa, P. E. Harunari, M. J. de Oliveira, and C. E. Fiore, “Entropy production as a tool for characterizing nonequilibrium phase transitions,” *Phys. Rev. E*, vol. 100, p. 012104, Jul 2019.