

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA

SOLITONS EM COLISÕES  
NÚCLEON-NÚCLEO

David Augaitis Fogaça

Orientador: Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra

Dissertação submetida ao Instituto de  
Física da Universidade de São Paulo,  
para a obtenção do título de mestre em  
ciências

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra (IFUSP)  
Prof. Dr. Mauro Sérgio Dorsa Cattani (IFUSP)  
Prof. Dr. Manuel Máximo Bastos Malheiro de Oliveira (ITA/CTA)

São Paulo, 2005.

## Agradecimentos

Ao meu pai e minha mãe pelo apoio e compreensão.

Ao Fernando S. Navarra pela orientação e amizade.

Aos professores do IF: Marina Nielsen, Manoel Robilotta, Celso Lima, Adilson José da Silva e Humberto França, que desempenharam um papel de destaque em minha formação, além de serem bons amigos.

Aos professores Sibaji Raha, Dionísio Bazeia, M. Malheiro, Sérgio Duarte e Airton Deppman que contribuíram com ótimas recomendações para a execução deste trabalho.

Aos amigos do “corredor” do GRHAFITE: Regina, Simone, Gabriel, Babi, Dunga, Lécio, Ricardo, Celso Barros, Arthur, Rômulo, Thiago, Markus, Fábio e Renato.

Aos amigos Guilherme Rabello, Marcos, Andréa Taschetto, Karin, Parra, Diogo, Mauro, Guilherme H. , Cristiano, Robson, Fernando, Ivan Lúcio, João, Alberto, Fabíola, Giuliano e Edilver.

Aos professores Frenkel, Barata, Mazé, Hussein, Iberê e Yogiro que contribuíram para minha formação acadêmica direta ou indiretamente.

Ao meu irmão Victor.

À minha Madrinha (em memória).

## Abstract

Assuming that the nucleus can be treated as a perfect fluid we study the conditions for the formation and propagation of Korteweg-de Vries (KdV) solitons in nuclear matter. The existence of these solitons depends on the nuclear equation of state, which, in its turn, depends on the underlying microscopic theory of the nucleon-nucleon interaction and also on the approximations used in the calculations. In this work we reexamine early works on nuclear solitons, replacing the old equations of state by others, more modern and more realistic, based on QHD and on its variants. Our analysis shows that KdV solitons may indeed be formed in the nucleus with a width around one and two fermis.

## Resumo

Supondo que o núcleo possa ser tratado como um fluido perfeito, nós estudamos as condições para a formação de solitons de Korteweg-de Vries (KdV) na matéria nuclear. A existência de solitons de KdV depende da equação de estado nuclear que, por sua vez, depende da teoria microcópica subjacente da interação núcleon-núcleon e das aproximações feitas durante os cálculos. No nosso trabalho, nós retomamos estudos sobre solitons no núcleo feitos no passado e substituímos a equação de estado usada anteriormente por outra mais moderna e mais realista, baseada no modelo de Walecka e suas variantes. Nossa análise mostra que solitons de KdV podem ser formados no interior do núcleo com largura em torno de um a dois fermis.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Transparência nuclear . . . . .	1
1.2	Hidrodinâmica e solitons de KdV em colisões nucleares . . . . .	3
1.3	Nosso trabalho . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Solitons de Korteweg-de Vries na Matéria Nuclear</b>	<b>11</b>
2.1	A equação de Korteweg e de Vries (KdV) . . . . .	11
2.2	Hidrodinâmica não-relativística . . . . .	12
2.3	Vínculos sobre a densidade de energia . . . . .	14
2.4	Obtenção de KdV3 . . . . .	19
<b>3</b>	<b>QHD Modificada (MQHD)</b>	<b>25</b>
3.1	Introdução . . . . .	25
3.2	Equações de Movimento . . . . .	26
3.3	Aproximação Estacionária . . . . .	28
3.4	Densidade de energia . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Solitons de Korteweg-de Vries na QHD Modificada</b>	<b>35</b>
4.1	Introdução . . . . .	35
4.2	Dedução de KdV3 para a QHD Modificada . . . . .	36
4.3	Solução da equação de KdV3 . . . . .	40
4.4	A Equação de KdV5 . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Análise Numérica e Conclusões</b>	<b>48</b>
<b>A</b>	<b>Relações úteis na QHD</b>	<b>54</b>

<b>B</b>	<b>Relações úteis na hidrodinâmica</b>	<b>58</b>
B.1	Hidrodinâmica não-relativística para pequenas perturbações . . . . .	59
B.2	Obtenção da equação de onda . . . . .	60
B.3	Velocidade do som na matéria nuclear . . . . .	61
B.4	Incompressibilidade da matéria nuclear . . . . .	62
<b>C</b>	<b>Modelo não-linear (NL)</b>	<b>65</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Transparência nuclear

É possível que um próton colida com um núcleo, consiga atravessá-lo e saia do outro lado praticamente intacto? Se a resposta for afirmativa é necessário esclarecer qual é o mecanismo responsável por este fenômeno. Esta pergunta pode, em princípio ser respondida experimentalmente. No momento a resposta seria: depende da energia da colisão. A baixas energias, pouco acima da barreira coulombiana, a resposta é não. O próton é absorvido pelo núcleo, que se excita e decai isotropicamente. A altas energias, na região acima de alguns GeV, o próton atravessa o núcleo e emerge do outro lado. Neste caso ocorre uma forte desaceleração, o próton perde muita energia, que é convertida em novas partículas. Portanto a resposta é sim. Na região de energias intermediárias ainda não há resultados experimentais muito conclusivos e a resposta não é muito clara.

Ao fenômeno no qual um núcleon atravessa o meio nuclear sem sofrer alterações significativas nem em sua constituição interna e nem em suas características cinemáticas damos o nome de transparência nuclear (TN). Este conceito pode ser quantificado definindo a probabilidade de que um núcleon escape do núcleo sem sofrer “interações de estado final” (final state interactions ou FSI). Ele se aplica a nucleons de energias intermediárias:  $50 < E_n < 800$  MeV.  $E_n$  é a energia cinética do núcleon no sistema de referência do núcleo.

Ao estudarmos transparência nuclear podemos entender melhor as propriedades da matéria nuclear e as interações de objetos que se propagam

no meio nuclear. Em particular, podemos estudar a “transparência de cor”, fenômeno proposto por Brodsky e Müller [1], no qual uma componente de Fock da função de onda do núcleon que esteja numa configuração espacial menor do que o núcleon usual se comporta como um objeto neutro de cor e se propaga com interação bem menos intensa do que a usual e com um comprimento de atenuação bem maior do que o usual.

Durante a última década numerosos estudos experimentais de TN foram conduzidos com o uso da reação  $A(e, e'p)$  [2, 3, 4, 5, 6, 7]. Nesta reação o elétron transmite energia a um núcleon pertencente ao núcleo e este é ejetado para fora do meio nuclear tendo todas as suas variáveis cinemáticas bem medidas. Estes resultados motivaram numerosos estudos teóricos [8, 9, 10].

A propagação de um núcleon no meio nuclear também pode ser estudada em reações próton-núcleo. Embora neste caso também seja possível falar de transparência nuclear, o conceito mais utilizado é o de “nuclear stopping” ou freiamento nuclear, que quantifica a perda de energia de um próton ao atravessar um núcleo e ser observado do outro lado numa região cinemática próxima do feixe. Há vários estudos experimentais sobre isto e os mais recentes têm sido feitos no GSI, em Darmstadt [11, 12].

De um modo geral, o que se pode concluir dos resultados experimentais é que até agora a transparência de cor tal como prevista em [1] não foi observada. Já a transparência nuclear foi observada (com incertezas) e varia com a energia do núcleon que nela se propaga, tendo um máximo na região entre 100 e 800 MeV.

O estudo teórico de todos estes dados experimentais é feito em termos de modelos da matéria nuclear e de sua equação de estado baseados na “Hadrodinâmica Quântica” (QHD), também conhecida como o modelo de Walecka [13, 14], e suas variações e também em outras abordagens [15, 16].

Neste trabalho nós vamos retomar o problema da transparência nuclear interpretando-a como evidência da formação e propagação de solitons de Korteweg-de Vries (KdV) na matéria nuclear.

Há pouco mais de vinte anos um estudo muito semelhante (e que inspirou o nosso trabalho) foi feito pelo grupo de Marburg, numa série de artigos [17, 18, 19, 20]. Algumas razões nos levam a retomar esta abordagem. Em primeiro lugar, nos últimos anos muitas medidas foram feitas e elas ainda não foram completamente entendidas com nenhum dos modelos existentes. Em segundo lugar, foi feita a previsão de que a transparência em colisões próton-núcleo seria mais acentuada quando a energia do próton incidente fosse tal que o próton absorvido pelo fluido nuclear se transformasse num pulso de



densidade com movimento supersônico. Isto implica o conhecimento da velocidade do som na matéria nuclear, o que, por sua vez implica o conhecimento da equação de estado da matéria nuclear (EOS). Em [17, 18, 19, 20] a equação de estado da matéria nuclear vinha de um trabalho muito antigo [21]. O simples uso de uma EOS mais moderna já seria uma justificativa para refazer os trabalhos do grupo de Marburg. De fato, isto foi feito em [22] com a introdução de uma EOS baseada na força de Skyrme. Nós acreditamos que o contínuo sucesso da QHD ao longo dos últimos vinte anos justifica sua aplicação ao estudo da formação de solitons e da transparência nuclear. Como será visto adiante, em sua versão mais simples a QHD não comporta solitons de KdV, sendo necessária a inclusão de termos com derivadas nos campos dos fermions. Estes termos aparecem em teorias da matéria nuclear construídas a partir da teoria de perturbação quiral, como foi recentemente demonstrado em [23, 24, 25, 26]. Neste trabalho vamos considerar apenas variantes da QHD, mas no futuro pretendemos também usar estas teorias mais modernas da matéria nuclear.

## 1.2 Hidrodinâmica e solitons de KdV em colisões nucleares

O uso de hidrodinâmica em física nuclear sempre teve muito sucesso, tanto no estudo de propriedades de núcleos estáticos [27] como no estudo de colisões envolvendo núcleos a energias baixas [27], intermediárias [28, 29, 30] e altas [31]. No nosso caso, estamos interessados em colisões próton-núcleo a energias intermediárias e portanto o movimento resultante pode ser descrito pela hidrodinâmica não-relativística. Um aspecto importante é que a energia é alta o suficiente para produzir movimento supersônico.

Até onde nós sabemos, a primeira aplicação da hidrodinâmica a este tipo de colisão foi feita por Glassgold e colaboradores [21]. Eles assumiram que a energia do projétil não era grande o suficiente para que ele “cavasse um buraco” no alvo e trataram a colisão como a propagação supersônica de uma perturbação num meio fluido infinito. Sugeriram que haveria a formação de uma onda de choque cônica com a conseqüente emissão lateral de partículas do alvo e o ângulo formado pelas partículas produzidas com a direção do feixe seria o ângulo de Mach. Mais tarde, em estudo feito por Amsden e colaboradores [32], foi mostrado que um projétil puntiforme não seria capaz

de gerar uma onda de choque, mas um íon pesado leve seria capaz de fazê-lo.

Em [17] esta idéia foi levada adiante. A substituição de um projétil puntiforme e leve (tipicamente um núcleon) por um íon pesado leve implicava uma perturbação maior do meio e isto exigia a inclusão de um termo a mais na expansão em gradientes de densidade feita inicialmente em [21]. A inclusão deste novo termo mudou substancialmente a solução encontrada para as equações de movimento, que deixou de ser uma onda e passou a ser um pulso localizado, um sóliton de KdV. Mais precisamente, a equação de Euler para este movimento é dada por:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla \phi \quad (1.1)$$

onde  $\phi$  é o potencial introduzido em [21]:

$$\phi = c_1 \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right) + c_2 \nabla^2 \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \quad (1.2)$$

Na expressão acima  $\rho' = \rho - \rho_0$  é a variação da densidade causada pelo íon-projétil,  $\rho_0$  é a densidade nuclear de equilíbrio e  $c_1$  e  $c_2$  são constantes provenientes da teoria utilizada para descrever a matéria nuclear e sua EOS. Em [21] apenas o termo proporcional a  $c_1$  foi considerado. Em [17] o segundo termo foi incluído.

Como será visto adiante em detalhe, a combinação da equação de Euler acima com a equação da continuidade da hidrodinâmica não-relativística gera a equação de KdV para  $\rho'$  com solução solitônica. Esta solução possui [17] velocidade de propagação  $u$  e largura  $\lambda$  dada por:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2c_2}{(u - \sqrt{c_1})\sqrt{c_1}}}$$

Vemos que os parâmetros que garantem a existência de solitons são as constantes  $c_1$  e  $c_2$ . Novamente, de acordo com [21],  $\sqrt{c_1}$  é a velocidade do som e  $\sqrt{c_2}$  é um comprimento pequeno comparado com as dimensões nucleares. Vemos também que a solução existe apenas quando a velocidade de propagação é maior do que a velocidade do som e que quando elas coincidem a largura do sóliton tende a infinito.

Quando a velocidade de propagação aumenta,  $\lambda$  diminui e o pulso fica mais localizado. Ao mesmo tempo sua amplitude aumenta. Por outro lado,

à medida em que  $u$  aumenta, o gradiente de velocidade entre o pulso e o meio (em repouso) aumenta e os efeitos da viscosidade tornam-se importantes. Quando eles são incluídos, através da substituição das equações de Euler pelas equações de Navier-Stokes, a energia do pulso é dissipada e transferida para o meio. Esta perda de energia leva à desaceleração do pulso e à redução de sua amplitude.

Dada a estabilidade do sóliton, se o projétil se propaga com um pulso de densidade solitônico em uma colisão central com um alvo pesado, este projétil viaja através do alvo sem nenhuma interferência apreciável e emerge na mesma direção do feixe incidente. Este é um mecanismo que gera “transparência” do alvo em relação ao projétil. A assinatura desse evento seria a detecção do projétil ao longo da direção do feixe incidente atrás do núcleo alvo com momento angular relativo nulo e também seria registrado um pequeno número de partículas leves. A propriedade de não existência de momento angular transferido seria suficiente para distinguir um evento solitônico de uma colisão extremamente periférica. Mais ainda, os eventos seriam caracterizados por um limite superior na velocidade do projétil da ordem de duas vezes a velocidade do som, acima do qual o fenômeno de solitons desapareceria.

Existem processos dissipativos na matéria nuclear e seus efeitos sobre o pulso solitônico num núcleo finito são difíceis de prever quantitativamente. Ao final de sua trajetória no núcleo alvo, o pulso solitônico gera fragmentação e ejeção de partículas. Finalmente, o pulso solitônico também poderia ser refletido de volta ao alvo levando à excitação de todo o sistema e ao surgimento de um núcleo composto.

Num trabalho posterior [18] a formação de solitons foi usada para explicar a existência de um limite no momento linear transferido de um feixe de  $^{12}\text{C}$  para um alvo mais pesado. Este limite, de  $\Delta p_{\parallel} \simeq 2 \text{ GeV}$ , foi observado experimentalmente no CERN [33]. Mais precisamente, foi observado que, quando a energia incidente aumentava  $\Delta p_{\parallel}$  (carregado pelos fragmentos do sistema alvo + projétil na direção dianteira) permanecia constante e a energia adicional ia para fragmentos observados a ângulos maiores. Em [18] este comportamento foi interpretado da seguinte maneira. As energias incidentes eram, em geral, bem mais altas do que aquela correspondente ao movimento com a velocidade do som, mas ainda baixas para que uma descrição hidrodinâmica fosse possível. Ao penetrar o alvo, o núcleo de carbono perde energia por dissipação, como foi discutido acima, e é desacelerado até atingir velocidades compatíveis com o movimento solitônico num fluido perfeito. A partir daí ele continua a se propagar sem dissipação e com veloci-

dade constante. Quando a energia inicial aumenta isto implica um aumento de dissipação inicial, com a consequente ejeção de fragmentos, mas depois o carbono atinge a “velocidade de sóliton”, continua com ela e termina transferindo sempre o mesmo momento linear para o alvo (o que sobrou dele), que equivale ao momento linear de doze nucleons se propagando com uma velocidade próxima à velocidade do som na matéria nuclear. Numericamente:

$$\Delta p_{\parallel} = 12 \times M u \simeq 12 \times 0.94 \times 0.17 \simeq 2 \text{ GeV}$$

Apesar de interessante, este argumento tem muita imaginação e pouca base quantitativa, além de usar um valor para a velocidade do som, sobre o qual há, no mínimo, muita incerteza. Por outro lado, a observação do limite em  $\Delta p_{\parallel}$  não foi confirmada e nem desmentida por outras experiências e assim a questão ficou em aberto.

Do ponto de vista teórico, foi concluído que seria fundamental estudar os detalhes da dinâmica do sóliton na presença de mecanismos dissipativos e também incluir o movimento tridimensional. Isto foi feito no trabalho seguinte do grupo de Marburg [19], um estudo da equação de Navier-Stokes em três dimensões no limite de não-linearidade fraca, ou seja, fazendo expansões das quantidades relevantes em torno de seus valores de equilíbrio e estudando os termos de mesma ordem no parâmetro de expansão.

Como resultado, este estudo trouxe a conclusão surpreendente de que a viscosidade não altera o movimento. Se o movimento começa com uma flutuação localizada de densidade, no limite de não-linearidade fraca, a dissipação viscosa não altera a natureza do movimento, independentemente dos valores dos coeficientes de viscosidade.

A inclusão do movimento transversal, por outro lado, traz uma mudança significativa. Repetindo o procedimento usado para a obtenção da equação de KdV no caso unidimensional, é possível chegar a uma nova equação, semelhante à de KdV mas com um termo a mais, que envolve a derivada da densidade com relação à coordenada transversal. Os autores de [19] mostraram que esta equação de KdV modificada também admite uma solução solitônica. No entanto, a natureza do movimento resultante varia com o passar do tempo. Partindo de um pulso localizado de densidade, a amplitude do pulso diminui com o tempo. O efeito do termo adicional na equação de KdV é dissipativo. Inicialmente o sóliton permanece localizado por algum tempo mas sempre se alargando e perdendo amplitude. Para tempos maiores a dissipação destrói o sóliton e ele se quebra em instabilidades ondulatórias, que se propagam na

direção dianteira. Isto implica numa perda crescente de momento pelo pulso (o que resta dele) e na perda de localização.

Em resumo, a solução do problema tridimensional conduz a um movimento solitônico predominantemente unidimensional (no nosso caso, ao longo da direção do feixe) mas que é amortecido e que “vasa” para a direção transversal. Este é um fenômeno semelhante ao “amortecimento de Landau”, observado em física de plasmas [34].

Continuando a série de trabalhos sobre este tema, o grupo de Marburg estudou a seguir em [20] o efeito do tamanho finito do alvo e, em particular, o efeito da superfície nuclear sobre a formação e propagação de solitons. O núcleo foi dividido em duas componentes: a parte central, com densidade constante, e a superfície (ou “pele”), na qual a densidade diminui linearmente com o raio. Repetindo mais uma vez todos os procedimentos introduzidos em [17], os autores chegaram a duas equações diferenciais: a eq. de KdV já encontrada anteriormente, que continua válida para a parte central do núcleo e uma equação de KdV “forçada”, válida na superfície nuclear. A solução desta última equação também é um sóliton com a interessante propriedade de que, com o passar do tempo sua amplitude aumenta e sua largura diminui! Para valores numéricos aceitáveis das variáveis nucleares, a amplitude do sóliton cresce em até 40 % e a sua largura diminui em até 30 % durante sua passagem pela superfície nuclear. Este estudo mostrou que na busca experimental pelo sóliton nuclear o efeito de superfície não pode ser desprezado.

A física do “sóliton nuclear” foi abandonada por quase uma década até a publicação de [22]. Neste trabalho os autores reconsideraram a expansão (1.2) e tentaram calcular o parâmetro  $c_2$  a partir de uma teoria microscópica da interação núcleon-núcleon, ingrediente fundamental de uma teoria da matéria nuclear. Eles usaram a teoria da matéria nuclear desenvolvida por Vautherin e Brink [35], que tinha como base a interação núcleon-núcleon efetiva de Skyrme. Os parâmetros desta interação foram ajustados de modo que as propriedades do estado fundamental do núcleo fossem reproduzidas. Como é sabido, a força de Skyrme contém termos dependentes da velocidade. Estes termos geram na densidade de energia e na função potencial  $\phi$  correspondentes um termo contendo o Laplaciano da densidade cujo coeficiente é dado por:

$$c_2 = -\gamma \frac{\rho_0}{m}$$

onde  $\gamma$  é um número positivo que contém os parâmetros ajustados da interação de Skyrme. Na expressão acima vemos que o coeficiente  $c_2$  é ne-

gativo. Nos trabalhos anteriores [17, 18, 19, 20] ele tinha sido considerado positivo por hipótese, sem nenhuma justificativa. Em [22] foi mostrado que, ao repetirmos o procedimento de obtenção do sóliton, esta mudança de sinal leva também a um sóliton, um pulso de densidade, mas de sinal negativo, que deve ser interpretado como um *pulso de rarefação* ao invés do pulso de compressão encontrado antes.

### 1.3 Nosso trabalho

Passados mais dez anos depois do último artigo sobre o assunto, nós voltamos ao tema. Temos agora uma renovada motivação experimental, em vista de existência de muitas medidas recentes e do interesse na questão da transparência nuclear, para a qual a formação de solitons pode dar uma explicação. Além disto consideramos que o trabalho teórico publicado em [22] não foi definitivo, já que ele está baseado numa teoria microscópica da interação núcleon-núcleon (e da matéria nuclear) que é muito antiga. Assim, é no mínimo interessante reanalisar o formalismo do sóliton tendo como ponto de partida uma teoria relativística da matéria nuclear, baseada na QHD.

Nas teorias da matéria nuclear usadas tanto em [17] quanto em [22] e em outras teorias ainda mais antigas [36] a densidade de energia dependia naturalmente (entre outras coisas) do Laplaciano da densidade bariônica e podia ser escrita como uma expansão do tipo:

$$\varepsilon \propto \dots + \dots \nabla^2 \rho_B + \dots \nabla^4 \rho_B$$

Nas Lagrangianas utilizadas nas várias formulações da QHD não aparecem termos que descrevem interações (entre os nucleons) dependentes da velocidade, ou seja, envolvendo acoplamentos derivativos e que geram densidades de energia dependentes do Laplaciano da densidade bariônica. Além disso, mesmo que eles existissem, a QHD funciona com a aproximação de campo médio, na qual todos os gradientes são desprezados. Na aproximação de campo médio, nunca teríamos termos como os que aparecem na expressão para  $\varepsilon$  acima. Para descrever efeitos da superfície nuclear muitos autores foram além da aproximação de campo médio e levaram em conta gradientes para tratar de sistemas espacialmente não homogêneos, mas apenas na superfície nuclear.

Em vista do que foi dito acima, o nosso trabalho traz contribuições à física do sóliton nuclear que podem ser assim resumidas:

i) Introduzimos uma equação de estado derivada de uma teoria relativística da matéria nuclear.

ii) Esta teoria é proposta por nós e é a QHD original acrescida do seguinte termo com acoplamento derivativo:

$$\frac{g_V}{m_V^2} \bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\nu \partial^\nu V^\mu) \psi$$

iii) Propomos também uma aproximação para trabalhar com esta teoria, que deve ser usada no lugar da aproximação de campo médio. Vamos chamá-la provisoriamente de “aproximação estacionária”, pois ela consiste em desprezar todas as derivadas temporais mas não as derivadas espaciais.

Na expressão acima, o campos  $\psi$  e  $V^\mu$  são os campos usuais da QHD representando respectivamente o férmion e o bóson vetorial. Este termo pode ser visto como uma correção ao termo usual  $\bar{\psi} \gamma_\mu V^\mu \psi$ . Ele é pequeno porque é proporcional a:

$$\left( \frac{\partial}{m_V} \right)^2 \rightarrow \left( \frac{p}{m_V} \right)^2$$

e o momento típico na matéria nuclear é da ordem do momento de Fermi,  $k_F$ , que é muito menor do que a massa do méson vetorial. Assim as propriedades da teoria modificada, tais como a massa do núcleon no meio, a curva de saturação e a incompressibilidade, serão aproximadamente as mesmas da QHD original e estarão em bom acordo com as informações empíricas que nós temos da matéria nuclear. A QHD é o nosso ponto de partida por ser a teoria mais simples. Neste trabalho será também estudada uma variante da QHD que contém auto-interações do méson escalar [37] e que gera resultados fenomenológicos melhores do que a QHD.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no capítulo 2 mostramos, de uma maneira independente de modelo, como as equações da hidrodinâmica não-relativística geram a equação de KdV, quando certas condições são satisfeitas pela densidade de energia  $\varepsilon$ . No capítulo 3 apresentamos a QHD modificada e a forma exata da densidade de energia correspondente. No capítulo 4 apresentamos a dedução da equação de KdV

para a densidade de energia obtida diretamente da QHD modificada. Na sequência resolvemos a KdV obtida mostrando que a solução solitônica depende das propriedades da teoria microscópica usada. No capítulo 5 apresentamos as análises numéricas do sóliton. Ao final, apresentamos as conclusões, apêndices e bibliografia.

O material contido neste trabalho já foi apresentado em duas reuniões da área tendo sido publicado nos anais destes encontros [38, 39].



## Capítulo 2

# Solitons de Korteweg-de Vries na Matéria Nuclear

### 2.1 A equação de Korteweg e de Vries (KdV)

Em 1895, Korteweg e de Vries obtiveram a famosa equação que leva seus nomes, uma equação para a propagação de ondas em uma direção na superfície de um canal, contendo uma elevação pequena nesta superfície. Sua forma mais comum é:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0$$

Além de descrever ondas solitárias em superfícies de canais rasos (descoberta e inspiração histórica do fenômeno solitônico), esta equação é utilizada para descrever uma série de fenômenos [40], como por exemplo, ondas acústicas em redes anarmônicas, ondas iônicas em plasmas, ondas magneto-hidrodinâmicas em plasmas, fônons excitados termicamente (a baixas temperaturas) em cristais não-lineares, etc.

Esta equação de KdV pode também ser chamada de KdV3, pois o termo de maior ordem na derivada espacial é 3. Outra forma de encontrar a equação acima ainda de maneira simples é:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0$$

obviamente com as constantes  $\alpha \neq 0$  e  $\beta \neq 0$ .

## 2.2 Hidrodinâmica não-relativística

As equações básicas da hidrodinâmica não-relativística são as equações de Euler e da continuidade, dadas respectivamente por [41]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \left( \frac{1}{\rho} \right) \nabla p \quad (2.1)$$

e

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.2)$$

Nestas equações,  $\rho$  é a densidade volumétrica de massa. No meio nuclear, de acordo com a QHD de Serot-Walecka [14], ela pode ser escrita como

$$\rho = M \rho_B \quad (2.3)$$

onde  $M$  é a massa do núcleon e  $\rho_B$  é a densidade bariônica, que é o número de nucleons por volume. Substituindo então (2.3) nas equações (2.1) e (2.2), obtém-se:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \left( \frac{1}{M \rho_B} \right) \nabla p \quad (2.4)$$

e

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_B \vec{v}) = 0 \quad (2.5)$$

A entalpia por núcleon é dada por [41]:

$$dh = T ds + V dp$$

onde  $V = 1/\rho_B$  é o volume específico. Então:

$$dh = T ds + \frac{1}{\rho_B} dp \quad (2.6)$$

Considerando o sistema isentrópico ( $ds = 0$ ), a equação (2.6) torna-se:

$$dp = \rho_B dh \quad (2.7)$$

e portanto:

$$dp = \rho_B dh \quad \implies \quad \nabla p = \rho_B \nabla h \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) em (2.4) obtém-se a equação de Euler em função da entalpia:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \left( \frac{1}{M} \right) \nabla h \quad (2.9)$$

A entalpia por núcleon pode ser calculada por intermédio de [22]:

$$h = E + \rho_B \frac{\partial E}{\partial \rho_B} \quad (2.10)$$

onde  $E$  é a energia por núcleon dada por:

$$E = \frac{\varepsilon}{\rho_B}$$

que, inserida em (2.10) leva a:

$$h = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} \quad (2.11)$$

e portanto:

$$\nabla h = \nabla \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_B} \quad (2.12)$$

Vemos então que a equação de Euler depende da função  $\varepsilon(\rho_B)$ , ou seja, depende da equação de estado da matéria nuclear. Esta, por sua vez, depende da dinâmica das interações entre os nucleons.

Como será visto mais tarde é possível combinar as equações (2.9) e (2.5) de tal forma a obter uma equação diferencial não-linear para a densidade bariônica, cuja solução é um sóliton, ou seja, um pulso localizado de densidade, que se propaga sem dissipação na matéria nuclear. A existência ou não de solitons depende da função  $\varepsilon(\rho_B)$ . Na próxima seção vamos definir quais condições devem ser satisfeitas por  $\varepsilon(\rho_B)$  para que existam solitons de KdV, independentemente do modelo específico da matéria nuclear.

## 2.3 Vínculos sobre a densidade de energia

Antes de apresentarmos um modelo específico, vamos determinar quais são as condições necessárias e suficientes a serem satisfeitas pela densidade de energia  $\varepsilon(\rho_B)$  para que a matéria nuclear seja compatível com a formação e propagação de solitons de KdV.

Para que a combinação de (2.9) e (2.5) leve a uma equação de KdV é necessário que  $h$  contenha o Laplaciano da densidade bariônica, ou seja:

$$h \propto \nabla^2 \rho_B$$

e portanto de acordo com (2.11):

$$\varepsilon \propto \nabla^2 \rho_B \quad (2.13)$$

Esta exigência exclui todas os modelos relativísticos de campo médio (como o modelo de Walecka original) pois nesta aproximação todos os gradientes (e portanto Laplacianos) são desprezados.

Apesar de grande simplificação nos cálculos e de sucesso fenomenológico a aproximação de campo médio não é muito realista, pois é óbvio que existem variações da densidade bariônica no espaço. Neste trabalho vamos incluir variações espaciais nas quantidades de interesse.

Vamos, inicialmente, considerar uma forma genérica para  $\varepsilon$  com dependência em  $\rho_B$  e em  $\nabla^2 \rho_B$  consideradas como duas variáveis independentes:

$$\varepsilon = f(\rho_B) + g(\rho_B) \nabla^2 \rho_B \quad (2.14)$$

onde  $f(\rho_B)$  e  $g(\rho_B)$  são funções quaisquer da densidade bariônica. A energia por núcleon é:

$$E = \frac{\varepsilon}{\rho_B} = \frac{f(\rho_B)}{\rho_B} + \frac{g(\rho_B)}{\rho_B} \nabla^2 \rho_B \quad (2.15)$$

que, para o cálculo da entalpia por núcleon ( $h$ ), é expandida em série de Taylor até o termo de segunda derivada em torno da densidade bariônica de equilíbrio  $\rho_0$ :

$$\begin{aligned} E &\cong E(\rho_B = \rho_0) + \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial \rho_B} \right)_{\rho_B = \rho_0} \right] (\rho_B - \rho_0) + \left[ \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2} \right)_{\rho_B = \rho_0} \right] \frac{(\rho_B - \rho_0)^2}{2} \\ &\implies E \cong E(\rho_B = \rho_0) + \left[ \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2} \right)_{\rho_B = \rho_0} \right] \frac{(\rho_B - \rho_0)^2}{2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Na última expressão usamos o fato de que bons modelos nucleares apresentam a curva de saturação correta, com um mínimo na densidade normal da matéria nuclear e portanto:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \rho_B}\right)_{\rho_B=\rho_0} = 0$$

A curva de saturação que é apresentada em muitos trabalhos sobre a matéria nuclear é obtida a partir da função  $\frac{\varepsilon}{\rho_B} - M$ , que deve possuir um mínimo em  $\rho_0$ :

$$\left[\frac{\partial}{\partial \rho_B}\left(\frac{\varepsilon}{\rho_B} - M\right)\right]_{\rho_B=\rho_0} = \left[\frac{\partial}{\partial \rho_B}\left(\frac{\varepsilon}{\rho_B}\right)\right]_{\rho_B=\rho_0} = \left(\frac{\partial E}{\partial \rho_B}\right)_{\rho_B=\rho_0} = 0$$

(com  $M =$  massa do núcleon livre). Conseqüentemente temos:

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2}\right)_{\rho_B=\rho_0} > 0$$

Vemos assim que a incompressibilidade, definida por:

$$K = 9\rho_0^2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2}\right)_{\rho_B=\rho_0}$$

é uma grandeza positiva. Da expressão (2.15) vemos que o primeiro termo de (2.16) é:

$$E(\rho_B = \rho_0) = \frac{f(\rho_0)}{\rho_0} + \frac{g(\rho_0)}{\rho_0} \nabla^2 \rho_B \quad (2.17)$$

e a segunda derivada calculada na densidade de equilíbrio é:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2}\right)_{\rho_B=\rho_0} &= \frac{f''(\rho_0)}{\rho_0} - 2\frac{f'(\rho_0)}{\rho_0^2} + 2\frac{f(\rho_0)}{\rho_0^3} + \\ &+ \left[\frac{g''(\rho_0)}{\rho_0} - 2\frac{g'(\rho_0)}{\rho_0^2} + 2\frac{g(\rho_0)}{\rho_0^3}\right] \nabla^2 \rho_B \end{aligned} \quad (2.18)$$

Substituindo (2.17) e (2.18) em (2.16) encontramos:

$$\begin{aligned} E &= \frac{f(\rho_0)}{\rho_0} + \frac{g(\rho_0)}{\rho_0} \nabla^2 \rho_B + \left\{ \frac{f''(\rho_0)}{\rho_0} - 2\frac{f'(\rho_0)}{\rho_0^2} + 2\frac{f(\rho_0)}{\rho_0^3} + \right. \\ &\left. + \left[\frac{g''(\rho_0)}{\rho_0} - 2\frac{g'(\rho_0)}{\rho_0^2} + 2\frac{g(\rho_0)}{\rho_0^3}\right] \nabla^2 \rho_B \right\} \frac{(\rho_B - \rho_0)^2}{2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

que conforme já mencionado, é a forma utilizada para calcular  $h$ . Vale ressaltar que  $f'$  é a notação para a derivada de  $f$  em relação a  $\rho_B$ . A mesma notação é usada para  $g'$  e de forma análoga para as segundas derivadas  $f''$  e  $g''$ .

Observamos em (2.18) que, pelo fato de  $\rho_B$  e  $\nabla^2 \rho_B$  serem consideradas variáveis independentes, temos

$$\frac{\partial}{\partial \rho_B}(\nabla^2 \rho_B) = 0.$$

Reescrevendo (2.19) como uma série de potências de  $\rho_B$ :

$$\begin{aligned} E = & \left\{ \frac{f(\rho_0)}{\rho_0} + A \frac{\rho_0^2}{2} \right\} - A \rho_0 \rho_B + A \frac{\rho_B^2}{2} + \\ & + \left\{ \frac{g(\rho_0)}{\rho_0} + B \frac{\rho_0^2}{2} \right\} \nabla^2 \rho_B - B \rho_0 \rho_B \nabla^2 \rho_B + B \frac{\rho_B^2}{2} \nabla^2 \rho_B \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde:

$$A = \frac{f''(\rho_0)}{\rho_0} - 2 \frac{f'(\rho_0)}{\rho_0^2} + 2 \frac{f(\rho_0)}{\rho_0^3} \quad (2.21)$$

e

$$B = \frac{g''(\rho_0)}{\rho_0} - 2 \frac{g'(\rho_0)}{\rho_0^2} + 2 \frac{g(\rho_0)}{\rho_0^3} \quad (2.22)$$

Calculando (2.10) com (2.20) encontramos:

$$\begin{aligned} h = & \left\{ \frac{f(\rho_0)}{\rho_0} + A \frac{\rho_0^2}{2} \right\} - 2A \rho_0 \rho_B + \frac{3}{2} A \rho_B^2 + \\ & + \left\{ \frac{g(\rho_0)}{\rho_0} + B \frac{\rho_0^2}{2} \right\} \nabla^2 \rho_B - 2B \rho_0 \rho_B \nabla^2 \rho_B + \frac{3}{2} B \rho_B^2 \nabla^2 \rho_B \end{aligned} \quad (2.23)$$

O gradiente da entalpia é dado por:

$$\begin{aligned} \nabla h = & -2A \rho_0 \nabla \rho_B + 3A \rho_B \nabla \rho_B + \left\{ \frac{g(\rho_0)}{\rho_0} + B \frac{\rho_0^2}{2} \right\} \nabla(\nabla^2 \rho_B) - 2B \rho_0 \nabla \rho_B \nabla^2 \rho_B + \\ & - 2B \rho_0 \rho_B \nabla(\nabla^2 \rho_B) + 3B \rho_B \nabla \rho_B \nabla^2 \rho_B + \frac{3}{2} B \rho_B^2 \nabla(\nabla^2 \rho_B) \end{aligned} \quad (2.24)$$

A equação (2.24) quando substituída em (2.9) fornece a equação de Euler com dependência em  $\rho_B$ ,  $\nabla\rho_B$ ,  $\nabla^2\rho_B$  e  $\nabla(\nabla^2\rho_B)$ . Porém, a equação de KdV3 não possui termos com segundas derivadas espaciais e portanto (2.24) não deve ter termos com dependência em  $\nabla^2\rho_B$ . Para que esta condição seja satisfeita, basta que  $B = 0$  em (2.24):

$$\nabla h = -2A\rho_0\nabla\rho_B + 3A\rho_B\nabla\rho_B + \left\{\frac{g(\rho_0)}{\rho_0}\right\}\nabla(\nabla^2\rho_B) \quad (2.25)$$

Usando a definição (2.22), a condição  $B = 0$  implica em:

$$\begin{aligned} B &= \frac{g''(\rho_0)}{\rho_0} - 2\frac{g'(\rho_0)}{\rho_0^2} + 2\frac{g(\rho_0)}{\rho_0^3} = 0 \\ \implies g(\rho_0) &= \rho_0 g'(\rho_0) - \frac{\rho_0^2}{2} g''(\rho_0) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Para que (2.26) seja satisfeita e que de (2.25) a condição

$$\left\{\frac{g(\rho_0)}{\rho_0}\right\} \neq 0 \quad (2.27)$$

se verifique da maneira mais simples, basta termos:

$$g(\rho_B) = a\rho_B \quad (2.28)$$

com  $a$  sendo uma constante (não nula) qualquer. O termo com terceira derivada espacial em KdV3 é isolado de qualquer outra forma de dependência com  $\rho_B$ , daí o fato de (2.28) também satisfazer (2.27).

De (2.25) nota-se também que  $A \neq 0$  para que KdV3 exista, e portanto de (2.21):

$$A = \frac{f''(\rho_0)}{\rho_0} - 2\frac{f'(\rho_0)}{\rho_0^2} + 2\frac{f(\rho_0)}{\rho_0^3} \neq 0 \quad (2.29)$$

Vemos assim que  $f(\rho_B)$  pode ser uma função qualquer não nula desde que (2.18) seja positiva por causa da condição de saturação.

Utilizando então (2.28) e (2.29) em (2.14), obtemos a forma mais simples da densidade de energia para que a matéria nuclear em estudo comporte solitons:

$$\varepsilon = f(\rho_B) + a\rho_B\nabla^2\rho_B \quad (2.30)$$

A expressão acima é independente de modelo e nela;

- $f(\rho_B)$  pode ser uma função qualquer que satisfaça (2.29) e também que garanta que (2.18) seja positiva. É interessante observar que  $f(\rho_B) = 0$  não satisfaz a condição mencionada;

- $g(\rho_B)$  deve satisfazer (2.28) com  $a$  sendo uma constante não nula qualquer.



## 2.4 Obtenção de KdV3

Nesta seção vamos mostrar em detalhe como a densidade de energia  $\varepsilon(\rho_B)$  apresentada na seção anterior, quando combinada com as equações da hidrodinâmica gera a equação de KdV3. Substituindo (2.30) em (2.15)) temos:

$$E = \frac{\varepsilon}{\rho_B} = \frac{f(\rho_B)}{\rho_B} + a\nabla^2\rho_B \quad (2.31)$$

que, expandida em série de Taylor conforme (2.16), leva a:

$$E = \frac{f(\rho_0)}{\rho_0} + a\nabla^2\rho_B + \left[ \frac{f''(\rho_0)}{\rho_0} - 2\frac{f'(\rho_0)}{\rho_0^2} + 2\frac{f(\rho_0)}{\rho_0^3} \right] \frac{(\rho_B - \rho_0)^2}{2} \quad (2.32)$$

Substituindo (2.32) em (2.10) temos a entalpia por núcleon:

$$h = \frac{f(\rho_0)}{\rho_0} + a\nabla^2\rho_B + \frac{3}{2}A\rho_B^2 + A\frac{\rho_0^2}{2} - 2A\rho_0\rho_B \quad (2.33)$$

onde a constante  $A$  é dada por (2.21). Tomando o gradiente da expressão acima e substituindo em (2.9) temos:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\left(\frac{1}{M}\right)[a\nabla(\nabla^2\rho_B) + 3A\rho_B\nabla\rho_B - 2A\rho_0\nabla\rho_B] \quad (2.34)$$

Vamos agora fazer uma mudança para variáveis adimensionais na densidade bariônica e na velocidade:

$$\hat{\rho} = \frac{\rho_B}{\rho_0} \quad (2.35)$$

e

$$\hat{v} = \frac{v}{c_s} \quad (2.36)$$

onde  $\rho_0$  é a densidade bariônica de equilíbrio e  $c_s$  a velocidade do som na matéria nuclear. Substituindo (2.35) e (2.36) na equação da continuidade (2.5) encontramos:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + c_s \nabla \cdot (\hat{\rho} \hat{v}) = 0 \quad (2.37)$$

Da mesma forma, substituindo (2.35) e (2.36) na equação de Euler (2.34) temos:

$$c_s \frac{\partial \hat{\vec{v}}}{\partial t} + c_s^2 (\hat{\vec{v}} \cdot \nabla) \hat{\vec{v}} = -\frac{1}{M} [3A\rho_0^2 \hat{\rho} (\nabla \hat{\rho}) - 2A\rho_0^2 (\nabla \hat{\rho}) + a\rho_0 \nabla (\nabla^2 \hat{\rho})] \quad (2.38)$$

Considerando que o projétil esteja na direção  $x$ , é interessante estudar a colisão deste com o núcleo nesta direção e assim  $\hat{\vec{v}} = (\hat{v}, 0, 0)$  fornecendo:

$$\nabla \cdot (\hat{\rho} \hat{\vec{v}}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\rho} \hat{v}_i) = \frac{\partial}{\partial x} (\hat{\rho} \hat{v}) \quad (2.39)$$

$$(\hat{\vec{v}} \cdot \nabla) \hat{\vec{v}} = \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\vec{v}} = \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \quad (2.40)$$

e

$$\nabla (\nabla^2 \hat{\rho}) = \nabla \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial x_i^2} \right) = \frac{\partial^3 \hat{\rho}}{\partial x^3} \quad (2.41)$$

Utilizando agora (2.39) em (2.37) e também (2.40) e (2.41) em (2.38) chegamos a:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + c_s \frac{\partial}{\partial x} (\hat{\rho} \hat{v}) = 0 \quad (2.42)$$

e

$$c_s \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + c_s^2 \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} = -\left( \frac{3A\rho_0^2}{M} \right) \hat{\rho} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} + \left( \frac{2A\rho_0^2}{M} \right) \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} - \left( \frac{a\rho_0}{M} \right) \frac{\partial^3 \hat{\rho}}{\partial x^3} \quad (2.43)$$

Vamos definir novas coordenadas no espaço  $\xi - \tau$  conforme utilizado em [22]:

$$\xi = \sigma^{1/2} \frac{(x - c_s t)}{R} \quad (2.44)$$

e

$$\tau = \sigma^{3/2} \frac{c_s t}{R} \quad (2.45)$$

onde  $R$  é o raio do núcleo alvo e, conforme [42],

$$\sigma \equiv \delta_{Mach} = \frac{|u - c_s|}{c_s}$$

$$0 < \sigma < 1$$

com  $u$  sendo a velocidade de propagação do sóliton.

Os novos operadores diferenciais fornecidos por (2.44) e (2.45) são:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} = -\frac{\sigma^{1/2} c_s}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\sigma^{3/2} c_s}{R} \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (2.47)$$

e

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} = \frac{\sigma^{3/2}}{R^3} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \quad (2.48)$$

A equação da continuidade neste novo espaço  $\xi - \tau$  é obtida substituindo (2.46) e (2.47) em (2.42):

$$\left( -\frac{\sigma^{1/2} c_s}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\sigma^{3/2} c_s}{R} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \hat{\rho} + c_s \frac{\sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{\rho} \hat{v}) = 0 \quad (2.49)$$

Analogamente, substituindo (2.46), (2.47) e (2.48) em (2.43), podemos reescrever a equação de Euler:

$$\begin{aligned} & -\frac{\sigma^{1/2} c_s^2}{R} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \frac{\sigma^{3/2} c_s^2}{R} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \tau} + \frac{\sigma^{1/2} c_s^2}{R} \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} = \\ & = -\left( \frac{3A\rho_0^2}{M} \right) \frac{\sigma^{1/2}}{R} \hat{\rho} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} + \left( \frac{2A\rho_0^2}{M} \right) \frac{\sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} - \left( \frac{a\rho_0}{M} \right) \frac{\sigma^{3/2}}{R^3} \frac{\partial^3 \hat{\rho}}{\partial \xi^3} \end{aligned} \quad (2.50)$$

As equações (2.49) e (2.50) são as equações da continuidade e de Euler reescritas em termos de variáveis adimensionais  $\hat{\rho}$  e  $\hat{v}$  e em termos das coordenadas adimensionais  $\xi$  e  $\tau$  que estão relacionadas com o Raio nuclear, a velocidade do som na matéria nuclear e o número  $\sigma$ .

O projétil penetra no núcleo alvo causando uma pequena perturbação na densidade bariônica, o que não altera o estado de equilíbrio do núcleo alvo. Podemos assim expandir  $\hat{\rho}$  e  $\hat{v}$  em torno de seus valores de equilíbrio:

$$\hat{\rho} = 1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots \quad (2.51)$$

e

$$\hat{v} = \sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots \quad (2.52)$$

onde o fator  $\sigma$  passa agora a desempenhar o papel de um parâmetro pequeno de expansão ( $0 < \sigma < 1$ ) permitindo que os termos  $\sigma^n$  sejam desprezados nos cálculos daqui em diante desde que  $n \geq 3$ .

Substituindo então (2.51) e (2.52) em (2.49) encontramos:

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\sigma^{1/2}c_s}{R}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\sigma^{3/2}c_s}{R}\frac{\partial}{\partial\tau} \right) (1 + \sigma\rho_1 + \sigma^2\rho_2 + \dots) + \\ & + c_s \frac{\sigma^{1/2}}{R} \frac{\partial}{\partial\xi} [(1 + \sigma\rho_1 + \sigma^2\rho_2 + \dots)(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots)] = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

A expressão acima pode ser reescrita como:

$$(\dots)\sigma^{3/2} + (\dots)\sigma^{5/2} + (\dots)\sigma^{7/2} = 0$$

Vemos que cada parênteses deve se anular independentemente e, após dividir a expressão acima por  $c_s \frac{\sigma^{1/2}}{R}$ , encontramos os termos:

$$\sigma \left( -\frac{\partial\rho_1}{\partial\xi} + \frac{\partial v_1}{\partial\xi} \right) = 0 \quad (2.54)$$

e

$$\sigma^2 \left( -\frac{\partial\rho_2}{\partial\xi} + \frac{\partial\rho_1}{\partial\tau} + \frac{\partial v_2}{\partial\xi} + \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial\xi} + v_1 \frac{\partial\rho_1}{\partial\xi} \right) = 0 \quad (2.55)$$

Da mesma forma, Substituindo (2.51) e (2.52) em (2.50) temos:

$$\begin{aligned} & -\frac{\sigma^{1/2}c_s^2}{R}\frac{\partial}{\partial\xi}(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) + \frac{\sigma^{3/2}c_s^2}{R}\frac{\partial}{\partial\tau}(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) + \\ & + \frac{\sigma^{1/2}c_s^2}{R}(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots)\frac{\partial}{\partial\xi}(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) = \\ & = -\left(\frac{3A\rho_0^2}{M}\right)\frac{\sigma^{1/2}}{R}(1 + \sigma\rho_1 + \sigma^2\rho_2 + \dots)\frac{\partial}{\partial\xi}(1 + \sigma\rho_1 + \sigma^2\rho_2 + \dots) + \\ & + \left(\frac{2A\rho_0^2}{M}\right)\frac{\sigma^{1/2}}{R}\frac{\partial}{\partial\xi}(1 + \sigma\rho_1 + \sigma^2\rho_2 + \dots) - \left(\frac{a\rho_0}{M}\right)\frac{\sigma^{3/2}}{R^3}\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}(1 + \sigma\rho_1 + \sigma^2\rho_2 + \dots) \end{aligned}$$

Repetindo o procedimento usado em (2.53) encontramos:

$$\sigma \left[ -\frac{\partial v_1}{\partial\xi} + \left(\frac{A\rho_0^2}{Mc_s^2}\right)\frac{\partial\rho_1}{\partial\xi} \right] = 0 \quad (2.56)$$

e;

$$\sigma^2 \left[ -\frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \left( \frac{A\rho_0^2}{Mc_s^2} \right) \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} + \left( \frac{3A\rho_0^2}{Mc_s^2} \right) \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \left( \frac{a\rho_0}{Mc_s^2 R^2} \right) \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} \right] = 0 \quad (2.57)$$

Para que (2.54) e (2.56) sejam compatíveis é necessário que:

$$\frac{A\rho_0^2}{Mc_s^2} = 1 \quad \implies \quad A = \frac{Mc_s^2}{\rho_0^2} \quad (2.58)$$

pois assim (2.54) e (2.56) indicam que:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} \quad (2.59)$$

A igualdade acima mostra que, a menos de uma constante, temos:

$$\rho_1 = v_1 \quad (2.60)$$

Substituindo agora (2.60) em (2.55) chegamos a:

$$\sigma^2 \left( -\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + 2\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} \right) = 0$$

e portanto:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + 2\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} - \frac{\partial v_2}{\partial \xi} \quad (2.61)$$

De maneira análoga, substituindo (2.58) e (2.60) em (2.57) temos:

$$\sigma^2 \left[ -\frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + 4\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} + \left( \frac{a\rho_0}{Mc_s^2 R^2} \right) \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} \right] = 0$$

e portanto:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} - \frac{\partial v_2}{\partial \xi} = -\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} - 4\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \left( \frac{a\rho_0}{Mc_s^2 R^2} \right) \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} \quad (2.62)$$

Finalmente, substituindo (2.62) em (2.61) obtemos:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + 2\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} - 4\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \left( \frac{a\rho_0}{Mc_s^2 R^2} \right) \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3}$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + 3\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \left( \frac{a\rho_0}{2Mc_s^2 R^2} \right) \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} = 0 \quad (2.63)$$

A equação (2.63) acima é conhecida como a equação de KdV3 [43] que possui solução solitônica.

Comparando a equação (2.63) com a equação (12) de [22]:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + 3\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \left( \frac{\gamma\rho_0}{2Mc_s^2 R^2} \right) \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} = 0$$

nota-se que a única diferença é a troca de  $a$  por  $-\gamma$ .

# Capítulo 3

## QHD Modificada (MQHD)

### 3.1 Introdução

Como foi mencionado na introdução a teoria relativística mais simples da matéria nuclear, a QHD, não é adequada ao estudo da formação e propagação de solitons. No capítulo anterior vimos que uma densidade de energia com a forma dada por (2.30) é compatível com a existência de solitons. Neste capítulo vamos fazer a “modificação mínima” na Lagrangeana da QHD de modo que a teoria resultante tenha uma densidade de energia do tipo (2.30). Nossa proposta é a seguinte:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QHD} + \frac{g_V}{m_V^2} \bar{\psi} (\partial_\nu \partial^\nu V_\mu) \gamma^\mu \psi \quad (3.1)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QHD} = & \bar{\psi} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_S V^\mu) - (M - g_S \phi)] \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_S^2 \phi^2) + \\ & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_V^2 V_\mu V^\mu \end{aligned}$$

e onde  $g_S$  e  $g_V$  são respectivamente as constantes de acoplamento para os mesons escalar e vetorial;  $m_S$  e  $m_V$  são respectivamente as massas dos mesons escalar e vetorial.

Com o novo termo adicionado à  $\mathcal{L}_{QHD}$  vamos encontrar uma expressão para a densidade de energia do tipo

$$\varepsilon \propto \dots + \dots \nabla^2 \rho_B + \dots \nabla^4 \rho_B$$

e que irá gerar a equação de KdV. É interessante observar que o novo termo desaparece na aproximação de campo médio. Quando ela não é feita ele apenas fornece correções ao termo usual de acoplamento entre o campo fermiônico e o campo vetorial:

$$g_V \bar{\psi} V_\mu \gamma^\mu \psi$$

Desta maneira é possível fazer pequenas modificações na QHD sem destruir suas virtudes e gerando uma matéria nuclear que comporta solitons.

Para a obtenção da densidade de energia é necessário calcular antes as equações de movimento e o tensor momento-energia, utilizando  $\mathcal{L}$  dada por (3.1). Nas próximas seções vamos apresentar manipulações que são muito semelhante às usuais na QHD original, que já fazem até parte dos livros texto. Em várias dissertações sobre matéria nuclear estas passagens são omitidas ou transferidas para apêndices. No nosso caso, como a teoria tem novas interações e estamos fazendo um novo tipo de aproximação, vamos incluir todos os detalhes da derivação da densidade de energia.

## 3.2 Equações de Movimento

As equações de movimento são obtidas por intermédio da equação de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q_i)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (3.2)$$

para os campos:  $\bar{\psi}$ ,  $V_\nu$  e  $\phi$ . Para o campo  $\bar{\psi}$ , (3.2) toma a seguinte forma:

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0$$

Utilizando (3.1) na equação acima temos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} \left\{ \bar{\psi} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_V V^\mu) - (M - g_S \phi)] \psi + \frac{g_V}{m_V^2} \bar{\psi} (\partial_\nu \partial^\nu V_\mu) \gamma^\mu \psi \right\} = 0 \\ \implies & \left[ \gamma_\mu (i\partial^\mu - g_V V^\mu) - (M - g_S \phi) + \frac{g_V}{m_V^2} (\partial_\nu \partial^\nu V_\mu) \gamma^\mu \right] \psi = 0 \quad (3.3) \end{aligned}$$

Para o campo  $V_\nu$  é interessante usar a definição de  $F_{\mu\nu}$  para reescrever o penúltimo termo de  $\mathcal{L}_{QHD}$ :

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu V_\nu \partial^\nu V^\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu V_\nu \partial^\mu V^\nu$$



e assim (3.1) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_V V^\mu) - (M - g_S \phi)]\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_S^2 \phi^2) + \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu V_\nu \partial^\nu V^\mu - \frac{1}{2}\partial_\mu V_\nu \partial^\mu V^\nu + \frac{1}{2}m_V^2 V_\mu V^\mu + \frac{g_V}{m_V^2} \bar{\psi}(\partial_\nu \partial^\nu V_\mu)\gamma^\mu \psi \end{aligned}$$

A ação  $S$  desta teoria é dada por:

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}_{QHD} + \int d^4x \left\{ \frac{g_V}{m_V^2} \bar{\psi}(\partial_\nu \partial^\nu V_\mu)\gamma^\mu \psi \right\} \quad (3.4)$$

A integral contendo o termo de acoplamento derivativo pode ser feita mediante integração por partes, fornecendo:

$$\int d^4x \left\{ \frac{g_V}{m_V^2} \bar{\psi}(\partial_\nu \partial^\nu V_\mu)\gamma^\mu \psi \right\} = - \int d^4x \left\{ \frac{g_V}{m_V^2} \partial_\nu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \partial^\nu V_\mu \right\}$$

ou

$$\int d^4x \left\{ \frac{g_V}{m_V^2} \bar{\psi}(\partial_\nu \partial^\nu V_\mu)\gamma^\mu \psi \right\} = - \frac{g_V}{m_V^2} \int d^4x \left\{ \partial_\nu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \partial^\nu V^\mu \right\} \quad (3.5)$$

onde o termo de superfície é nulo, ou seja:

$$\left[ (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \partial^\nu V_\mu \right] \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Substituindo (3.5) em (3.4):

$$\int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}_{QHD} - \frac{g_V}{m_V^2} \int d^4x \left\{ \partial_\nu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \partial^\nu V^\mu \right\}$$

fornecendo uma forma alternativa de  $\mathcal{L}$  para o cálculo da equação de movimento do campo  $V_\nu$ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QHD} - \frac{g_V}{m_V^2} \partial_\nu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \partial^\nu V^\mu$$

ou melhor:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_V V^\mu) - (M - g_S \phi)]\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_S^2 \phi^2) + \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu V_\nu \partial^\nu V^\mu - \frac{1}{2}\partial_\mu V_\nu \partial^\mu V^\nu + \frac{1}{2}m_V^2 V_\mu V^\mu - \frac{g_V}{m_V^2} \partial_\nu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \partial^\nu V^\mu \end{aligned} \quad (3.6)$$

Então, utilizando (3.6) acima para

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu V_\nu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_\nu} = 0$$

temos:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu V_\nu)} \left[ + \frac{1}{2} \partial_\mu V_\nu \partial^\nu V^\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu V_\nu \partial^\mu V^\nu - \frac{g_V}{m_V^2} \partial_\nu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \partial^\nu V^\mu \right] \right\} + \\ - \frac{\partial}{\partial V_\nu} \left[ - g_V \bar{\psi} \gamma_\mu V^\mu \psi + \frac{1}{2} m_V^2 V_\mu V^\mu \right] = 0 \\ \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} + m_V^2 V^\nu = g_V \bar{\psi} \gamma^\nu \psi - \frac{g_V}{m_V^2} \partial_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma^\nu \psi) \end{aligned} \quad (3.7)$$

A equação de movimento para o campo  $\phi$  é dada por:

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

que, com o uso de (3.1), fornece:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ g_S \bar{\psi} \phi \psi - \frac{m_S^2}{2} \phi^2 \right] = 0 \\ \implies (\partial_\mu \partial^\mu + m_S^2) \phi = g_S \bar{\psi} \psi \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.3 Aproximação Estacionária

Fazendo as aproximações:

$$V_\mu \rightarrow \langle V_\mu \rangle \equiv \delta_{\mu 0} V_0 \quad (3.9)$$

e

$$\phi \rightarrow \langle \phi \rangle \equiv \phi_0 \quad (3.10)$$

em (3.1), temos

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(V_\mu \rightarrow \langle V_\mu \rangle \equiv \delta_{\mu 0} V_0 \quad \phi \rightarrow \langle \phi \rangle \equiv \phi_0)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = \bar{\psi} [\gamma_\mu (i \partial^\mu - g_V \delta^{\mu 0} V_0) - (M - g_S \phi_0)] \psi + \\ + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - m_S^2 \phi_0^2) - \frac{1}{4} (\partial_\mu \delta_{\nu 0} V_0 - \partial_\nu \delta_{\mu 0} V_0) (\partial^\mu \delta^{\nu 0} V_0 - \partial^\nu \delta^{\mu 0} V_0) + \\ + \frac{1}{2} m_V^2 \delta_{\mu 0} V_0 \delta^{\mu 0} V_0 + \frac{g_V}{m_V^2} \bar{\psi} (\partial_\nu \partial^\nu \delta_{\mu 0} V_0) \gamma^\mu \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \mathcal{L}' &= \bar{\psi}[(i\gamma_\mu \partial^\mu - g_V \gamma_0 V_0) - (M - g_S \phi_0)]\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - m_S^2 \phi_0^2) + \\
&- \frac{1}{4}(\partial_\mu \delta_{\nu 0} V_0 \partial^\mu \delta^{\nu 0} V_0 - \partial_\mu \delta_{\nu 0} V_0 \partial^\nu \delta^{\mu 0} V_0 - \partial_\nu \delta_{\mu 0} V_0 \partial^\mu \delta^{\nu 0} V_0 + \partial_\nu \delta_{\mu 0} V_0 \partial^\nu \delta^{\mu 0} V_0) + \\
&\quad + \frac{1}{2}m_V^2 V_0^2 + \frac{g_V}{m_V^2} \bar{\psi}(\partial_\nu \partial^\nu V_0)\gamma^0 \psi \\
\Rightarrow \quad \mathcal{L}' &= \bar{\psi}[(i\gamma_\mu \partial^\mu - g_V \gamma_0 V_0) - (M - g_S \phi_0)]\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - m_S^2 \phi_0^2) + \\
&\quad + \frac{1}{2}(\nabla V_0)^2 + \frac{1}{2}m_V^2 V_0^2 + \frac{g_V}{m_V^2} \bar{\psi}(\partial_\nu \partial^\nu V_0)\gamma^0 \psi \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Fazendo também a substituição de (3.9) e (3.10) na equação de movimento (3.3) encontramos:

$$\begin{aligned}
&\left[ \gamma_\mu (i\partial^\mu - g_V \delta^{\mu 0} V_0) - (M - g_S \phi_0) + \frac{g_V}{m_V^2} (\partial_\nu \partial^\nu \delta_{\mu 0} V_0) \gamma^\mu \right] \psi = 0 \\
\Rightarrow \quad &i\gamma_\mu \partial^\mu \psi - g_V \gamma_0 V_0 \psi - (M - g_S \phi_0) \psi + \frac{g_V}{m_V^2} (\partial_\nu \partial^\nu V_0) \gamma^0 \psi = 0 \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Da mesma forma para (3.7):

$$\partial_\mu (\partial^\mu \delta^{\nu 0} V_0 - \partial^\nu \delta^{\mu 0} V_0) + m_V^2 \delta^{\nu 0} V_0 = g_V \bar{\psi} \gamma^\nu \psi - \frac{g_V}{m_V^2} \partial_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma^\nu \psi)$$

que multiplicada por  $\delta_{\nu 0}$  fornece:

$$\begin{aligned}
\delta_{\nu 0} \partial_\mu \partial^\mu \delta^{\nu 0} V_0 - \delta_{\nu 0} \partial_\mu \partial^\nu \delta^{\mu 0} V_0 + m_V^2 \delta_{\nu 0} \delta^{\nu 0} V_0 &= g_V \delta_{\nu 0} \bar{\psi} \gamma^\nu \psi - \frac{g_V}{m_V^2} \delta_{\nu 0} \partial_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma^\nu \psi) \\
\Rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu V_0 - \partial_0 \partial^0 V_0 + m_V^2 V_0 &= g_V \bar{\psi} \gamma^0 \psi - \frac{g_V}{m_V^2} \partial_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma^0 \psi) \\
\Rightarrow \quad -\nabla^2 V_0 + m_V^2 V_0 &= g_V \bar{\psi} \gamma^0 \psi - \frac{g_V}{m_V^2} \partial_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma^0 \psi) \quad (3.13)
\end{aligned}$$

e finalmente para (3.8):

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_S^2) \phi_0 = g_S \bar{\psi} \psi \quad (3.14)$$

Desprezando agora apenas as derivadas temporais para os campos  $V_0$  e  $\phi_0$  nas equações citadas, porém não desprezando os gradientes e laplacianos espaciais dos mesmos campos temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* = & \bar{\psi}[(i\gamma_\mu\partial^\mu - g_V\gamma_0V_0) - (M - g_S\phi_0)]\psi - \frac{1}{2}(\nabla\phi_0)^2 - \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2 + \\ & + \frac{1}{2}(\nabla V_0)^2 + \frac{1}{2}m_V^2V_0^2 - \frac{g_V}{m_V^2}\bar{\psi}(\nabla^2V_0)\gamma^0\psi \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$[i\gamma_\mu\partial^\mu - g_V\gamma_0V_0 - (M - g_S\phi_0)]\psi - \frac{g_V}{m_V^2}(\nabla^2V_0)\gamma^0\psi = 0 \quad (3.16)$$

$$-\nabla^2V_0 + m_V^2V_0 = g_V\bar{\psi}\gamma^0\psi - \frac{g_V}{m_V^2}\partial_\mu\partial^\mu(\bar{\psi}\gamma^0\psi) \quad (3.17)$$

e

$$(-\nabla^2 + m_S^2)\phi_0 = g_S\bar{\psi}\psi \quad (3.18)$$

Nossa aproximação difere da aproximação usual de campo médio pela consideração de gradientes e laplacianos dos campos  $V_0$  e  $\phi_0$ .

### 3.4 Densidade de energia

A densidade de energia é dada por:

$$\varepsilon = \langle T_{00} \rangle = -g_{00}\mathcal{L}^* + \partial_0\psi\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial(\partial^0\psi)} \quad (3.19)$$

que, com o auxílio de (3.15) resulta em:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & -g_{00}\left\{\bar{\psi}[(i\gamma_\mu\partial^\mu - g_V\gamma_0V_0) - (M - g_S\phi_0)]\psi - \frac{1}{2}(\nabla\phi_0)^2 - \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(\nabla V_0)^2 + \frac{1}{2}m_V^2V_0^2 - \frac{g_V}{m_V^2}\bar{\psi}(\nabla^2V_0)\gamma^0\psi\right\} + \partial_0\psi\frac{\partial}{\partial(\partial^0\psi)}[i\bar{\psi}\gamma_0\partial^0\psi] \\ \Rightarrow & \varepsilon = -g_{00}\bar{\psi}\left\{[(i\gamma_\mu\partial^\mu - g_V\gamma_0V_0) - (M - g_S\phi_0)] - \frac{g_V}{m_V^2}(\nabla^2V_0)\gamma^0\right\}\psi + \\ & + \frac{1}{2}(\nabla\phi_0)^2 + \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}(\nabla V_0)^2 - \frac{1}{2}m_V^2V_0^2 + i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi \end{aligned} \quad (3.20)$$

A expressão anterior pode ainda ser reescrita utilizando (3.16):

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla\phi_0)^2 + \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}(\nabla V_0)^2 - \frac{1}{2}m_V^2V_0^2 + i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi \quad (3.21)$$

Multiplicando (3.16) por  $\bar{\psi}$  à esquerda e isolando  $i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi$  encontramos:

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi &= -i\bar{\psi}\gamma_0\vec{\alpha} \cdot \nabla\psi + g_V(\bar{\psi}\gamma_0\psi)V_0 + \bar{\psi}(M - g_S\phi_0)\psi + \\ &+ \frac{g_V}{m_V^2}(\nabla^2V_0)\bar{\psi}\gamma^0\psi \end{aligned} \quad (3.22)$$

Substituindo (3.22) em (3.21):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2}(\nabla\phi_0)^2 + \frac{1}{2}m_S^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}(\nabla V_0)^2 - \frac{1}{2}m_V^2V_0^2 - i\bar{\psi}\gamma_0\vec{\alpha} \cdot \nabla\psi + \\ &+ g_V(\bar{\psi}\gamma_0\psi)V_0 + \bar{\psi}(M - g_S\phi_0)\psi + \frac{g_V}{m_V^2}(\nabla^2V_0)\bar{\psi}\gamma^0\psi \end{aligned} \quad (3.23)$$

Vamos usar as definições:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0 \quad (3.24)$$

$$\bar{\psi}\gamma_0\psi = \psi^\dagger\gamma_0\gamma_0\psi = \psi^\dagger\psi \equiv \rho_B \quad (3.25)$$

e

$$M - g_S\phi_0 \equiv M^* \quad (3.26)$$

onde  $\rho_B$  é a densidade bariônica e  $M^*$  é a massa efetiva do núcleon.

Podemos agora reescrever (3.23) utilizando (3.24), (3.25) e (3.26):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2}[(\nabla\phi_0)^2 + m_S^2\phi_0^2 - (\nabla V_0)^2 - m_V^2V_0^2] + g_V\rho_B V_0 + \\ &+ \frac{g_V}{m_V^2}\rho_B(\nabla^2V_0) + \psi^\dagger(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M^*)\psi \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde foi utilizada a notação:  $\beta := \gamma_0$ .

Para calcular os campos  $\phi_0$  e  $V_0$ , primeiramente utilizamos (3.26):

$$\phi_0 = \frac{(M - M^*)}{g_S} \quad (3.28)$$

e também a equação (3.17) que pode ser reescrita por intermédio de (3.25):

$$-\nabla^2 V_0 + m_V^2 V_0 = g_V \rho_B - \frac{g_V}{m_V^2} \partial_0 \partial^0 (\rho_B) + \frac{g_V}{m_V^2} \nabla^2 \rho_B$$

sendo que podemos desprezar a segunda derivada temporal para  $\rho_B$  da mesma maneira que foi feito para  $\phi_0$  e  $V_0$ :

$$-\nabla^2 V_0 + m_V^2 V_0 = g_V \rho_B + \frac{g_V}{m_V^2} \nabla^2 \rho_B$$

e considerar na expressão acima

$$-\nabla^2 V_0 \ll m_V^2 V_0 \quad (3.29)$$

obtendo uma expressão aproximada para  $V_0$  :

$$V_0 = \frac{g_V}{m_V^2} \rho_B + \frac{g_V}{m_V^4} \nabla^2 \rho_B \quad (3.30)$$

Integrando a expressão (3.27) por partes em  $-\frac{1}{2}(\nabla V_0)^2$ , com os termos de superfície indo a zero, temos:

$$-\frac{1}{2}(\nabla V_0)^2 \longrightarrow \frac{1}{2} V_0 (\nabla^2 V_0)$$

resultando em:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2} [(\nabla \phi_0)^2 + m_S^2 \phi_0^2 + V_0 (\nabla^2 V_0) - m_V^2 V_0^2] + g_V \rho_B V_0 + \\ & + \frac{g_V}{m_V^2} \rho_B (\nabla^2 V_0) + \psi^\dagger (-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M^*) \psi \end{aligned} \quad (3.31)$$

Substituindo (3.30) e (3.28) em (3.31) temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2} \left\{ \nabla \left[ \frac{(M - M^*)}{g_S} \right] \right\}^2 + \frac{m_S^2}{2} \left[ \frac{(M - M^*)}{g_S} \right]^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \frac{g_V}{m_V^2} \rho_B + \frac{g_V}{m_V^4} \nabla^2 \rho_B \right] \left\{ \nabla^2 \left[ \frac{g_V}{m_V^2} \rho_B + \frac{g_V}{m_V^4} \nabla^2 \rho_B \right] \right\} + \\ & - \frac{m_V^2}{2} \left[ \frac{g_V}{m_V^2} \rho_B + \frac{g_V}{m_V^4} \nabla^2 \rho_B \right]^2 + g_V \rho_B \left[ \frac{g_V}{m_V^2} \rho_B + \frac{g_V}{m_V^4} \nabla^2 \rho_B \right] + \\ & + \frac{g_V}{m_V^2} \rho_B \left\{ \nabla^2 \left[ \frac{g_V}{m_V^2} \rho_B + \frac{g_V}{m_V^4} \nabla^2 \rho_B \right] \right\} + \psi^\dagger (-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M^*) \psi \end{aligned}$$

Desprezando na expressão anterior o termo proporcional a

$$[\nabla(M - M^*)]^2$$

e proporcional a

$$\nabla^2 \rho_B \nabla^4 \rho_B$$

chegamos a:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_B^2 + \frac{3g_V^2}{2m_V^4} \rho_B \nabla^2 \rho_B + \frac{3g_V^2}{2m_V^6} \rho_B \nabla^4 \rho_B + \\ & + \frac{m_S^2}{2} \left[ \frac{(M - M^*)}{g_S} \right]^2 + \psi^\dagger (-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M^*) \psi \end{aligned} \quad (3.32)$$

Desprezamos o termo  $\propto [\nabla(M - M^*)]^2$  porque ele não altera significativamente a equação para  $M^*$  já conhecida na QHD. Na vizinhança do equilíbrio a equação auto-consistente para  $M^*$  (“equação de gap”) é dada pela (3.35). Nesta região,  $M^* \gg k_F$  como pode ser vista na figura C.1. Então podemos fazer a aproximação:

$$M - M^* \cong \frac{\gamma M^{*2} g_s^2}{4\pi^2 m_S^2} k_F$$

resultando em:

$$\frac{1}{2} \left\{ \nabla \left[ \frac{(M - M^*)}{g_S} \right] \right\}^2 \cong \frac{\gamma^2 M^{*4} g_s^2}{32\pi^4 m_S^4} \left( \frac{6\pi^2}{\gamma} \right)^{2/3} (\nabla \rho_B^{1/3})^2$$

que via integração por partes com os termos de superfície indo a zero:

$$\frac{1}{2} \left\{ \nabla \left[ \frac{(M - M^*)}{g_S} \right] \right\}^2 \cong - \frac{\gamma^2 M^{*4} g_s^2}{32\pi^4 m_S^4} \left( \frac{6\pi^2}{\gamma} \right)^{2/3} \rho_B^{1/3} (\nabla^2 \rho_B^{1/3})$$

ou seja, uma variação muito pequena proporcional a  $\rho_B^{1/3} (\nabla^2 \rho_B^{1/3})$  podendo ser desprezada quando comparada com os outros termos proporcionais a  $\rho_B \nabla^2 \rho_B$  e  $\rho_B \nabla^4 \rho_B$ .

Conforme o apêndice A, podemos utilizar (A.10):

$$\psi^\dagger (-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M^*) \psi \longrightarrow \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2}$$

que substituída em (3.32) nos fornece a forma definitiva para a densidade de energia:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_B^2 + \frac{3g_V^2}{2m_V^4} \rho_B \nabla^2 \rho_B + \frac{3g_V^2}{2m_V^6} \rho_B \nabla^4 \rho_B + \frac{m_S^2}{2} \left[ \frac{(M - M^*)}{g_S} \right]^2 + \\ & + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

com (conforme (A.12) do apêndice A):

$$\rho_B = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3$$

A massa efetiva do núcleon ( $M^*$ ) é obtida pela minimização de  $\varepsilon$  com respeito a  $M^*$ :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial M^*} = 0$$

ou melhor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial M^*} = & -\frac{m_S^2}{g_S^2} (M - M^*) + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2}} = 0 \\ \implies & M^* = M - \frac{g_S^2}{m_S^2} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

A integração nos momentos pode ser feita resultando em:

$$M^* = M - \frac{g_S^2}{m_S^2} \frac{\gamma M^*}{4\pi^2} \left\{ k_F (k_F^2 + M^{*2})^{1/2} - M^* \ln \left[ \frac{k_F + (k_F^2 + M^{*2})^{1/2}}{M^*} \right] \right\} \quad (3.35)$$

A solução desta equação auto-consistente para a massa efetiva é encontrada numericamente.



# Capítulo 4

## Solitons de Korteweg-de Vries na QHD Modificada

### 4.1 Introdução

Neste capítulo vamos fazer a conexão entre o formalismo hidrodinâmico do sóliton (discutido no capítulo 2) e as teorias Lagrangeanas da matéria nuclear. Esta conexão nos permitirá relacionar as propriedades do sóliton com os aspectos microscópicos da interação núcleon-núcleon. Vamos agora deduzir e resolver a equação de KdV3. A dedução de KdV3 será através do procedimento descrito no capítulo 2, utilizando a densidade de energia proveniente da QHD modificada (3.33).

Vamos partir de:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_B^2 + \frac{3g_V^2}{2m_V^4} \rho_B \nabla^2 \rho_B + \frac{m_S^2}{2} \left[ \frac{(M - M^*)}{g_S} \right]^2 + \\ & + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \end{aligned}$$

que coincide com (3.33) a menos de termos proporcionais a  $\nabla^4 \rho_B$  que por enquanto serão desprezados. Esta expressão pode ainda ser reescrita na forma:

$$\varepsilon = \left( \frac{g_V^2}{2m_V^2} \right) \rho_B^2 + \left( \frac{3g_V^2}{2m_V^4} \right) \rho_B (\nabla^2 \rho_B) + \eta(\rho_B) \quad (4.1)$$

com  $\eta(\rho_B)$  sendo uma função com dependência em  $\rho_B$  dada por:

$$\eta(\rho_B) = \frac{1}{2} \left( \frac{m_S}{g_S} \right)^2 (M - M^*)^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k [\vec{k}^2 + M^{*2}]^{1/2}$$

onde

$$\psi^\dagger \psi \equiv \rho_B = \frac{\gamma k_F^3}{6\pi^2}$$

conforme (A.12) com  $\gamma = 4$  sendo o fator de degenerescência de spin-isospin para matéria nuclear simétrica.

A solução da equação de KdV3 será apresentada na seção 4.3 deste capítulo.

## 4.2 Dedução de KdV3 para a QHD Modificada

Podemos ver que (4.1) satisfaz (2.30), onde:

$$f(\rho_B) = \left( \frac{g_V^2}{2m_V^2} \right) \rho_B^2 + \eta(\rho_B)$$

e

$$g(\rho_B) = \left( \frac{3g_V^2}{2m_V^4} \right) \rho_B$$

Com (2.15) pode-se calcular a energia por núcleon:

$$E = \varepsilon / \rho_B$$

$$\implies E = \left( \frac{g_V^2}{2m_V^2} \right) \rho_B + \left( \frac{3g_V^2}{2m_V^4} \right) (\nabla^2 \rho_B) + \frac{\eta(\rho_B)}{\rho_B}$$

Fazendo a expansão em série de Taylor conforme descrito no capítulo 2 até o termo de segunda derivada para os termos dependentes de  $\rho_B$  em torno do valor de equilíbrio  $\rho_0$ , e impondo a condição de saturação

$$\frac{\partial}{\partial \rho_B} \left( \frac{\varepsilon}{\rho_B} - M \right)_{\rho_B = \rho_0} = \left( \frac{\partial E}{\partial \rho_B} \right)_{\rho_B = \rho_0} = 0$$

encontramos:

$$E(\rho_B) = E(\rho_0) + \frac{M c_s^2}{2\rho_0^2} (\rho_B - \rho_0)^2 \quad (4.2)$$

No segundo termo da expressão anterior temos:

$$Mc_s^2 = \rho_0^2 \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2} \right)_{\rho_B = \rho_0} \quad (4.3)$$

onde  $M$  é a massa do núcleon e  $c_s$  é a velocidade do som na matéria nuclear, como está mostrado no apêndice B. Todo o procedimento descrito para a equação da continuidade (2.37) permanece o mesmo nesta seção.

Da equação (4.2) vemos que:

$$E(\rho_0) = \left( \frac{g_V^2}{2m_V^2} \right) \rho_0 + \frac{\eta(\rho_0)}{\rho_0} + \left( \frac{3g_V^2}{2m_V^4} \right) (\nabla^2 \rho_B) \quad (4.4)$$

pois conforme já mencionado,  $\rho_B$  e  $\nabla^2 \rho_B$  são consideradas duas variáveis independentes. A entalpia por núcleon dada por (2.10) é calculada por intermédio de (4.2):

$$h = E(\rho_0) + \frac{Mc_s^2}{2\rho_0^2} (3\rho_B^2 + \rho_0^2 - 4\rho_B\rho_0) \quad (4.5)$$

e o gradiente de  $h$  é obtido através da equação acima:

$$\nabla h = \frac{Mc_s^2}{2\rho_0^2} [6\rho_B(\nabla\rho_B) - 4\rho_0(\nabla\rho_B)] + \left( \frac{3g_V^2}{2m_V^4} \right) \nabla(\nabla^2\rho_B) \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) em (2.9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = & - \left( \frac{c_s^2}{2\rho_0^2} \right) [6\rho_B(\nabla\rho_B) - 4\rho_0(\nabla\rho_B)] \\ & - \left( \frac{3g_V^2}{2Mm_V^4} \right) \nabla(\nabla^2\rho_B) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Usando agora (2.35) e (2.36) em (4.7) temos:

$$c_s \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + c_s^2 (\hat{v} \cdot \nabla) \hat{v} = - \frac{c_s^2}{2} [6\hat{\rho}(\nabla\hat{\rho}) - 4(\nabla\hat{\rho})] - \frac{3g_V^2\rho_0}{2Mm_V^4} \nabla(\nabla^2\hat{\rho}) \quad (4.8)$$

Fazendo as substituições de (2.39), (2.40) e (2.41) em (4.8) chegamos a:

$$c_s \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + c_s^2 \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} = -\frac{c_s^2}{2} \left( 6\hat{\rho} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} - 4 \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} \right) - \left( \frac{3g_V^2 \rho_0}{2Mm_V^4} \right) \frac{\partial^3 \hat{\rho}}{\partial x^3} \quad (4.9)$$

que será combinada com (2.37) para a obtenção de KdV3. Utilizando então (2.44) à (2.48) em (4.9) temos:

$$\begin{aligned} & -\frac{\sigma^{1/2} c_s^2}{R} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \frac{\sigma^{3/2} c_s^2}{R} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \tau} + \frac{\sigma^{1/2} c_s^2}{R} \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} = \\ & = -3 \frac{\sigma^{1/2} c_s^2}{R} \hat{\rho} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} + 2 \frac{\sigma^{1/2} c_s^2}{R} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} - \left( \frac{3g_V^2 \rho_0}{2Mm_V^4} \right) \frac{\sigma^{3/2}}{R^3} \frac{\partial^3 \hat{\rho}}{\partial \xi^3} \end{aligned} \quad (4.10)$$

O próximo passo conforme descrito no capítulo 2 é utilizar as expansões (2.51) e (2.52) em (4.10) acima, que se transforma em:

$$\begin{aligned} & -\frac{\sigma^{1/2} c_s^2}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) + \frac{\sigma^{3/2} c_s^2}{R} \frac{\partial}{\partial \tau} (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) + \\ & \quad + \frac{\sigma^{1/2} c_s^2}{R} (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \xi} (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) = \\ & = -3 \frac{\sigma^{1/2} c_s^2}{R} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \xi} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) + \\ & + 2 \frac{\sigma^{1/2} c_s^2}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) - \left( \frac{3g_V^2 \rho_0}{2Mm_V^4} \right) \frac{\sigma^{3/2}}{R^3} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes dos termos proporcionais a  $\sigma$  na equação acima reobteremos a identidade (2.60):

$$\sigma \left( -\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \right) = 0 \quad \implies \quad \rho_1 = v_1 \quad (4.11)$$

Dos coeficientes dos termos proporcionais a  $\sigma^2$  temos a seguinte identidade:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + 3\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \left( \frac{3g_V^2 \rho_0}{2M c_s^2 m_V^4 R^2} \right) \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} = -\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial \xi} \quad (4.12)$$

Usando agora (4.11) em (4.12) temos:

$$-\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} - \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - 3\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \left( \frac{3g_V^2 \rho_0}{2Mc_s^2 m_V^4 R^2} \right) \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} = \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} - \frac{\partial v_2}{\partial \xi} \quad (4.13)$$

que, substituída em (2.61), resulta finalmente em

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + 3\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \left( \frac{3g_V^2 \rho_0}{4Mc_s^2 m_V^4 R^2} \right) \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} = 0 \quad (4.14)$$

A equação acima é conhecida como equação de Korteweg-de Vries (KdV) para a densidade  $\rho_1$  conforme mencionada no capítulo 1. Neste caso ela pode ser chamada de KdV3 porque contém um termo proporcional à terceira derivada de  $\rho_1$  em relação à  $\xi$ .

Pode-se reescrever (4.14) na seguinte forma para facilitar a notação em sua solução:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + A\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + B \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} = 0 \quad (4.15)$$

com:

$$A = 3$$

e

$$B = \left( \frac{3g_V^2 \rho_0}{4Mc_s^2 m_V^4 R^2} \right)$$

### 4.3 Solução da equação de KdV3

Para resolver (4.14) (ou (4.15)) é interessante retornar ao espaço  $x - t$  para uma melhor análise da solução e da largura do sólito na dimensão correta ( $fm$ ). Assim é possível comparar a largura do sólito com as dimensões do núcleo alvo. Então basta utilizar os operadores das expressões (2.46), (2.47) e (2.48) para volta ao espaço  $x - t$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{R}{\sigma^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{R}{\sigma^{3/2} c_s} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{R}{\sigma^{3/2}} \frac{\partial}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} = \frac{R^3}{\sigma^{3/2}} \frac{\partial^3}{\partial x^3}$$

de tal maneira que (4.15) adquira a forma:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + A c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + B c_s R^2 \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial x^3} = 0 \quad (4.16)$$

onde:

$$\hat{\rho}_1 \equiv \sigma \rho_1 \quad (4.17)$$

A equação (4.16) é a equação de KdV3 modificada no espaço  $x - t$ , que possui uma solução particular que é a de um pulso bem definido se propagando sem alterar sua forma e velocidade de propagação. Tal solução é obtida pela imposição de:

$$\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_1(\chi)$$

com

$$\chi = x - ut,$$

onde  $u$  é a velocidade de propagação desse pulso (sólito). É fácil verificar que:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} = -u \frac{d \hat{\rho}_1}{d \chi} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} = \frac{d \hat{\rho}_1}{d \chi} \quad (4.19)$$

e

$$\frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial x^3} = \frac{d^3 \hat{\rho}_1}{d\chi^3} \quad (4.20)$$

Substituindo agora (4.18), (4.19) e (4.20) em (4.16) encontramos:

$$-u \frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} + c_s \frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} + Ac_s \hat{\rho}_1 \frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} + Bc_s R^2 \frac{d^3 \hat{\rho}_1}{d\chi^3} = 0$$

que integrada em relação à  $\chi$  fornece:

$$-u \int \frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} d\chi + c_s \int \frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} d\chi + Ac_s \int \hat{\rho}_1 \frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} d\chi + Bc_s R^2 \int \frac{d^3 \hat{\rho}_1}{d\chi^3} d\chi = 0$$

e

$$(c_s - u) \hat{\rho}_1 + \frac{Ac_s}{2} (\hat{\rho}_1)^2 + (Bc_s R^2) \frac{d^2 \hat{\rho}_1}{d\chi^2} + C = 0$$

onde  $C$  é uma constante de integração. Integrando a equação acima em relação à  $\hat{\rho}_1$  temos:

$$(c_s - u) \int \hat{\rho}_1 d\hat{\rho}_1 + \frac{Ac_s}{2} \int (\hat{\rho}_1)^2 d\hat{\rho}_1 + (Bc_s R^2) \int \frac{d^2 \hat{\rho}_1}{d\chi^2} d\hat{\rho}_1 + \int C d\hat{\rho}_1 = 0$$

e

$$\frac{(c_s - u)}{2} (\hat{\rho}_1)^2 + \frac{Ac_s}{6} (\hat{\rho}_1)^3 + (Bc_s R^2) \int \frac{d^2 \hat{\rho}_1}{d\chi^2} \frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} d\chi + C \hat{\rho}_1 + D = 0$$

com  $D$  sendo mais uma constante de integração. Continuando a integração da expressão acima:

$$\frac{(c_s - u)}{2} (\hat{\rho}_1)^2 + \frac{Ac_s}{6} (\hat{\rho}_1)^3 + (Bc_s R^2) \int \frac{1}{2} \frac{d}{d\chi} \left( \frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} \right)^2 d\chi + C \hat{\rho}_1 + D = 0$$

e assim:

$$\frac{(c_s - u)}{2} (\hat{\rho}_1)^2 + \frac{Ac_s}{6} (\hat{\rho}_1)^3 + \frac{(Bc_s R^2)}{2} \left( \frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} \right)^2 + C \hat{\rho}_1 + D = 0 \quad (4.21)$$

Para determinar  $C$  e  $D$ , basta aplicar as condições de contorno em (4.21) para que a solução seja um sóliton:

$$\hat{\rho}_1 \rightarrow 0,$$

$$\frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} \rightarrow 0$$

e

$$\frac{d^2\hat{\rho}_1}{d\chi^2} \rightarrow 0$$

quando  $|\chi| \rightarrow \infty$ , encontramos  $D = 0$  e podemos escolher  $C = 0$ , uma vez que o sóliton é uma solução particular da equação de KdV3. Com estas escolhas (4.21) se transforma em:

$$\frac{(c_s - u)}{2}(\hat{\rho}_1)^2 + \frac{Ac_s}{6}(\hat{\rho}_1)^3 + \frac{(Bc_sR^2)}{2}\left(\frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi}\right)^2 = 0 \quad (4.22)$$

que fornece:

$$\frac{d\hat{\rho}_1}{d\chi} = \pm \hat{\rho}_1 \sqrt{\frac{(u - c_s)}{Bc_sR^2} - \frac{A}{3BR^2}} \hat{\rho}_1 \quad ,$$

ou ainda:

$$\pm \int \frac{d\hat{\rho}_1}{\hat{\rho}_1 \sqrt{\frac{(u - c_s)}{Bc_sR^2} - \frac{A}{3BR^2}} \hat{\rho}_1} = \int d\chi \quad (4.23)$$

Impondo para (4.23) uma solução do tipo:

$$\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_1(\theta) = \frac{3(u - c_s)}{Ac_s} \text{sech}^2(\theta) \quad (4.24)$$

e usando o fato de que  $A = 3$  encontramos:

$$d\hat{\rho}_1 = -\frac{2(u - c_s)}{c_s} \frac{\text{senh}(\theta)}{\text{cosh}^3(\theta)} d\theta \quad (4.25)$$



Então, fazendo a substituição de (4.24) e (4.25) em (4.23) temos:

$$\mp 2 \int \frac{\frac{\sinh(\theta)}{\cosh^3(\theta)} d\theta}{\frac{1}{\cosh^2(\theta)} \sqrt{\frac{(u-c_s)}{Bc_s R^2} \operatorname{tgh}^2(\theta)}} = \int d\chi$$

que leva a:

$$\theta = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(u-c_s)}{Bc_s R^2}} (\chi + \eta_0)$$

Escolhendo o sinal positivo e  $\eta_0 = 0$  como constante de fase ficamos com:

$$\theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(u-c_s)}{Bc_s R^2}} \chi \quad (4.26)$$

Substituindo (4.26) em (4.24) usando  $A = 3$  temos:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{(u-c_s)}{c_s} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(u-c_s)}{Bc_s R^2}} \chi \right]$$

e como

$$\chi = x - ut \quad e \quad B = \left( \frac{3g_V^2 \rho_0}{4Mc_s^2 m_V^4 R^2} \right)$$

temos finalmente como solução:

$$\hat{\rho}_1(x, t) = \frac{(u-c_s)}{c_s} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{m_V^2}{g_V} \sqrt{\frac{(u-c_s)c_s M}{3\rho_0}} (x - ut) \right] \quad (4.27)$$

A solução (4.27) acima é um sóliton com velocidade de propagação  $u$  e largura  $\lambda$  igual a:

$$\lambda = \frac{g_V}{m_V^2} \sqrt{\frac{3\rho_0}{(u-c_s)c_s M}} \quad (4.28)$$

que é dependente das características microscópicas do meio. Vemos que a amplitude do pulso é dada por:

$$\text{amplitude} = \frac{(u-c_s)}{c_s} \quad (4.29)$$

Ainda pode ser considerada, conforme a equação (4.17) a solução do tipo

$$\hat{\rho}_1 \equiv \sigma \rho_1 = (\delta_{Mach}) \rho_1 = \frac{|u - c_s|}{c_s} \rho_1$$

que substituída em (4.27) fornece:

$$\rho_1(x, t) = \text{sech}^2 \left[ \frac{m_V^2}{g_V} \sqrt{\frac{(u - c_s)c_s M}{3\rho_0}} (x - ut) \right] \quad (4.30)$$

## 4.4 A Equação de KdV5

Se formos mais rigorosos e considerarmos o termo  $\propto \nabla^4 \rho_B$ , ou melhor dizendo, a expressão (3.33) completa:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho_B^2 + \frac{3g_V^2}{2m_V^4} \rho_B \nabla^2 \rho_B + \frac{3g_V^2}{2m_V^6} \rho_B \nabla^4 \rho_B + \frac{m_S^2}{2} \left[ \frac{(M - M^*)}{g_S} \right]^2 + \\ & + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \end{aligned}$$

podemos prosseguir com o mesmo procedimento para obtenção de KdV3. Podemos reescrever a densidade de energia na forma:

$$\varepsilon = \left( \frac{g_V^2}{2m_V^2} \right) \rho_B^2 + \left( \frac{3g_V^2}{2m_V^4} \right) \rho_B (\nabla^2 \rho_B) + \left( \frac{3g_V^2}{2m_V^6} \right) \rho_B (\nabla^4 \rho_B) + \eta(\rho_B) \quad (4.31)$$

com  $\eta(\rho_B)$  sendo o mesmo termo da seção 4.1:

$$\eta(\rho_B) = \frac{1}{2} \left( \frac{m_S}{g_S} \right)^2 (M - M^*)^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k [\vec{k}^2 + M^{*2}]^{1/2}$$

Por intermédio de (2.15) e a expansão em série de Taylor considerando a propriedade da saturação, obtemos a energia por núcleon exatamente igual a (4.2):

$$E(\rho_B) = E(\rho_0) + \frac{M c_s^2}{2\rho_0^2} (\rho_B - \rho_0)^2 \quad (4.32)$$

que fornece a entalpia por intermédio de (2.10) e conseqüentemente seu gradiente, que é dado por:

$$\begin{aligned} \nabla h = & \frac{Mc_s^2}{2\rho_0^2} [6\rho_B(\nabla\rho_B) - 4\rho_0(\nabla\rho_B)] + \\ & + \left(\frac{3g_V^2}{2m_V^4}\right) \nabla(\nabla^2\rho_B) + \left(\frac{3g_V^2}{2m_V^6}\right) \nabla(\nabla^4\rho_B) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Repetimos os cálculos da seção 4.2 deste capítulo, com a novidade que agora temos:

$$\frac{\partial^5}{\partial x^5} = \frac{\sigma^{5/2}}{R^5} \frac{\partial^5}{\partial \xi^5}$$

e encontramos uma equação semelhante a (4.10):

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma^{1/2}c_s^2}{R} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \frac{\sigma^{3/2}c_s^2}{R} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \tau} + \frac{\sigma^{1/2}c_s^2}{R} \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} = & -3 \frac{\sigma^{1/2}c_s^2}{R} \hat{\rho} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} + \\ + 2 \frac{\sigma^{1/2}c_s^2}{R} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \xi} - \left(\frac{3g_V^2\rho_0}{2Mm_V^4}\right) \frac{\sigma^{3/2}}{R^3} \frac{\partial^3 \hat{\rho}}{\partial \xi^3} - \left(\frac{3g_V^2\rho_0}{2Mm_V^6}\right) \frac{\sigma^{5/2}}{R^5} \frac{\partial^5 \hat{\rho}}{\partial \xi^5} \end{aligned} \quad (4.34)$$

que, com as expansões (2.51) e (2.52), se transforma em:

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma^{1/2}c_s^2}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) + \frac{\sigma^{3/2}c_s^2}{R} \frac{\partial}{\partial \tau} (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) + \\ + \frac{\sigma^{1/2}c_s^2}{R} (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \xi} (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) = \\ = -3 \frac{\sigma^{1/2}c_s^2}{R} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \xi} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) + \\ + 2 \frac{\sigma^{1/2}c_s^2}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) - \left(\frac{3g_V^2\rho_0}{2Mm_V^4}\right) \frac{\sigma^{3/2}}{R^3} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) + \\ - \left(\frac{3g_V^2\rho_0}{2Mm_V^6}\right) \frac{\sigma^{5/2}}{R^5} \frac{\partial^5}{\partial \xi^5} (1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) \end{aligned}$$

Dividindo esta equação por

$$\frac{\sigma^{1/2}c_s^2}{R}$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial \xi}(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) + \sigma \frac{\partial}{\partial \tau}(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) + \\
& \quad + (\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \xi}(\sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \dots) = \\
& = -3(1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \xi}(1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) + \\
& + 2 \frac{\partial}{\partial \xi}(1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) - \left( \frac{3g_V^2 \rho_0}{2Mm_V^4} \right) \frac{\sigma}{c_s^2 R^2} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3}(1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots) + \\
& \quad - \left( \frac{3g_V^2 \rho_0}{2Mm_V^6} \right) \frac{\sigma^2}{c_s^2 R^4} \frac{\partial^5}{\partial \xi^5}(1 + \sigma \rho_1 + \sigma^2 \rho_2 + \dots)
\end{aligned}$$

Analisando os termos proporcionais a  $\sigma$ , encontramos outra vez:

$$\sigma \left( -\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \right) = 0 \quad \implies \quad \rho_1 = v_1$$

Dos termos proporcionais a  $\sigma^2$ , temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + 3\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \left( \frac{3g_V^2 \rho_0}{2Mc_s^2 m_V^4 R^2} \right) \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} + \left( \frac{3g_V^2 \rho_0 \sigma}{2Mc_s^2 m_V^6 R^4} \right) \frac{\partial^5 \rho_1}{\partial \xi^5} = \\
= -\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial \xi}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Substituindo a equação acima em (2.61) e utilizando  $\rho_1 = v_1$  chegamos a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + 3\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \left( \frac{3g_V^2 \rho_0}{4Mc_s^2 m_V^4 R^2} \right) \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi^3} \\
+ \left( \frac{3g_V^2 \rho_0 \sigma}{4Mc_s^2 m_V^6 R^4} \right) \frac{\partial^5 \rho_1}{\partial \xi^5} = 0
\end{aligned} \tag{4.36}$$

que é conhecida como KdV5 [45], pois possui um termo proporcional à

$$\frac{\partial^5 \rho_1}{\partial \xi^5}$$

Para voltar a equação (4.36) ao espaço  $x - t$  é necessário utilizar os operadores:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{R}{\sigma^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} &= \frac{R}{\sigma^{3/2} c_s} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{R}{\sigma^{3/2}} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} &= \frac{R^3}{\sigma^{3/2}} \frac{\partial^3}{\partial x^3}\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial^5}{\partial \xi^5} = \frac{R^5}{\sigma^{5/2}} \frac{\partial^5}{\partial x^5}$$

fornecendo, após considerarmos  $\hat{\rho}_1 \equiv \sigma \rho_1$ :

$$\frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial t} + c_s \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + 3c_s \hat{\rho}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_1}{\partial x} + \left( \frac{3g_V^2 \rho_0}{4M c_s m_V^4} \right) \frac{\partial^3 \hat{\rho}_1}{\partial x^3} + \left( \frac{3g_V^2 \rho_0}{4M c_s m_V^6} \right) \frac{\partial^5 \hat{\rho}_1}{\partial x^5} = 0$$

Esta equação é a KdV5 modificada, que também possui solução solitônica com algumas peculiaridades e será estudada num futuro próximo de acordo com a teoria desenvolvida em [44] e [45].

Podemos concluir que a nossa densidade de energia (3.33) proveniente da QHD modificada gera KdV5 (quando considerados todos os termos), mas neste trabalho nosso enfoque é apenas na equação de KdV3. Podemos dizer que KdV3 é um caso limite de KdV5 na medida em que o termo proporcional a  $m_V^{-6}$  é muito menor que o termo proporcional a  $m_V^{-4}$ .

# Capítulo 5

## Análise Numérica e Conclusões

Apesar do modelo original de Walecka [14] reproduzir bem a curva de saturação nuclear, ele não é capaz de reproduzir algumas propriedades nucleares como a incompressibilidade nuclear ( $K$ ) e a energia de superfície. Para fazer uma análise numérica mais realista é necessário usar o modelo não-linear. Este modelo é uma versão da QHD na qual são adicionados termos de auto-interação do campo escalar dados pela seguinte Lagrangeana de interação:

$$\mathcal{L}_{NL} = -\frac{b\phi^3}{3} - \frac{c\phi^4}{4}$$

Os parâmetros  $b$  e  $c$  são determinados fazendo o ajuste das propriedades da matéria nuclear obtidas com este modelo aos valores bem estabelecidos na literatura. Todas as expressões necessárias para os cálculos com o modelo não-linear estão no apêndice C e os valores numéricos dos parâmetros  $b$  e  $c$  foram obtidos em [37].

Entre outras propriedades o modelo NL dá um valor da incompressibilidade  $K$  muito melhor do que o valor obtido com a QHD. Para a física do sóliton nuclear o valor de  $K$  é muito importante pois, como mostrado no apêndice B (ver B.18), ele está diretamente relacionado com a velocidade do som na matéria nuclear,  $c_s$ . Como foi visto nos capítulos anteriores a formação de solitons é um fenômeno supersônico e assim, ao mudarmos o valor de  $c_s$  estamos também mudando a energia mínima que um projétil deve ter para que ele dê origem a um sóliton.

Lembramos que apesar da densidade de energia (3.33) possuir termos  $\propto \nabla^2 \rho_B$  e  $\propto \nabla^4 \rho_B$ , suas propriedades de saturação são as mesmas da QHD se for utilizada a aproximação de campo médio.

Na Tabela I apresentamos todos os valores numéricos usados neste trabalho. Na primeira coluna estão os resultados obtidos com a MQHD cuja Lagrangeana é dada por (3.1). Como no cálculo de  $K$  utilizamos a aproximação de campo médio estes resultados são os mesmos já obtidos em [14]. Nas demais colunas mostramos os resultados obtidos com o modelo não-linear usando os parâmetros e a nomenclatura apresentados em [37]. Até aqui estamos apenas reproduzindo resultados já conhecidos e a única novidade é o cálculo da velocidade do som, que é muito relevante para nós, mas não para os autores de [37]. Nas tabelas e em todos os cálculos usamos  $\hbar = c = 1$  e portanto  $197,4 \text{ MeV} \cong fm^{-1}$ .

Vamos agora calcular a largura do sóliton em cada uma das teorias apresentadas na Tabela I. A largura é um parâmetro crucial. Se ela for da ordem do raio nuclear ( $\lambda \cong R$ ) isto significa que a energia do projétil é absorvida pelo núcleo como um todo e o efeito que simula transparência, discutido na introdução, simplesmente não ocorre. Se  $\lambda \ll R$ , há uma grande localização do pulso de energia e o efeito pode ocorrer.

A largura do sóliton é dada por (4.28):

$$\lambda = \frac{g_V}{m_V^2} \sqrt{\frac{3\rho_0}{(u - c_s)c_s M}}$$

Vemos que  $\lambda$  é inversamente proporcional a  $\sqrt{u}$ , a velocidade do pulso. Como o pulso é produzido por um projétil podemos aproximar  $u$  pela velocidade do projétil, que é bem conhecida se soubermos sua energia  $E$  e seu momento  $p$ . Temos então:

$$u \cong \frac{p}{E} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + M^2}}$$

Por outro lado, observando a equação (4.27):

$$\hat{\rho}_1(x, t) = \frac{(u - c_s)}{c_s} \text{sech}^2 \left[ \frac{m_V^2}{g_V} \sqrt{\frac{(u - c_s)c_s M}{3\rho_0}} (x - ut) \right]$$

e a expansão (2.51):

$$\frac{\rho_B}{\rho_0} = \hat{\rho} = 1 + \hat{\rho}_1 + \dots$$

vemos que  $\hat{\rho}_1$  é uma perturbação e deve ser menor do que 1 para que a expansão (2.51) faça sentido.

Uma vez que

$$0 < \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{m_V^2}{g_V} \sqrt{\frac{(u - c_s)c_s M}{3\rho_0}} (x - ut) \right] \leq 1$$

é necessário que

$$\frac{u - c_s}{c_s} \leq 1$$

e portanto  $u \leq u_{max} = 2c_s$ . Sendo assim temos um valor máximo para o momento do feixe incidente dado por

$$p_{max} = \frac{2c_s M}{\sqrt{1 - 4c_s^2}} \quad (5.1)$$

Na Tabela II apresentamos os valores de  $\lambda$  nos vários modelos e para momentos do feixe incidente correspondentes a velocidades entre  $c_s$  e  $2c_s$ .

	<i>QHD</i>	<i>NL1</i>	<i>NL3</i>	<i>NL3 - II</i>	<i>NL - SH</i>
K(MeV)	545	211	272	272	355
M(MeV)	939	938	939	939	939
$m_S$ (MeV)	500	492	508,2	507,7	526
$m_V$ (MeV)	780	783	782,5	781,9	783
$g_S$	8,7	10,14	10,22	10,2	10,4
$g_V$	11,62	13,28	12,87	12,8	12,9
$M^*/M$	0,56	0,57	0,6	0,59	0,6
$\rho_0$ ( $fm^{-3}$ )	0,19	0,15	0,15	0,15	0,15
$b$ ( $fm^{-1}$ )	0	-12,17	-10,43	-10,4	-6,9
$c$	0	-36,26	-28,9	-28,9	-15,8
$c_s$	0,25	0,16	0,18	0,18	0,2

**Tabela I: Parâmetros usados nos vários modelos e resultados obtidos para  $K$ ,  $M^*$ ,  $\rho_0$  e  $c_s$ .**



p (MeV)	$u$	$\lambda_{QHD}$	$\lambda_{NL1}$	$\lambda_{NL3}$	$\lambda_{NL3-II}$	$\lambda_{NL-SH}(fm)$
160	0,168	-	7,2	-	-	-
170	0,178	-	4,8	-	-	-
180	0,188	-	3,9	6,6	6,6	-
190	0,198	-	3,3	4,2	4,4	-
200	0,208	-	3,0	3,5	3,5	6.3
300	0,304	2,2	1,7	1,7	1,7	1,7
313	0,316	2	1,6	1,6	1,6	1,6
360	0,358	1,6	-	1,4	1,4	1,4
400	0,392	1,4	-	-	-	1,3
422	0,41	1,3	-	-	-	1,2
500	0,47	1,1	-	-	-	-
542	0,5	1	-	-	-	-

**Tabela II: Cálculo das larguras dos solitons (em  $fm$ ) nos vários modelos utilizados.**

Os resultados da Tabela II são também mostrados na Figura 5.1 onde  $P_{Lab} = p$ . Os valores de  $\lambda$  encontrados podem, em vários casos, ser considerados bem menores do que o raio nuclear.

Ainda que não sejam inteiramente conclusivos, nossos resultados sugerem que é realmente possível produzir pulsos de densidade localizados e que gerem eventos com “transparência”. Quando comparamos os números da Tabela II com as estimativas feitas em [17] e [18] podemos notar algumas diferenças interessantes. Em primeiro lugar o valor de  $c_s$  adotado (e não calculado!) em [17] foi menor do que o nosso valor mínimo. Por isso os autores de [17] e [18] esperavam observar o efeito de transparência em energias mais baixas. Além disso eles não exploraram quantitativamente o fato de  $\lambda$  diminuir com  $P_{Lab}$  tornando o sóliton mais localizado a energias mais altas. Como pode ser visto na figura 5.1 a “janela de energia” para a formação de solitons se estende até  $400MeV$ . A busca experimental de eventos com solitons deve ser feita também neste domínio de energia.

Em vista do que foi dito nós achamos arriscado tirar conclusões firmes sobre a possibilidade de formar solitons estreitos em colisões núcleon-núcleo. A substituição de uma equação de estado muito antiga por outras mais modernas produziu resultados que nem confirmam e nem refutam as conjecturas feitas anteriormente. Para esclarecer este assunto além de qualquer dúvida

será necessário refinar todo o formalismo a começar pela teoria macroscópica adotada. Além disso, na tabela I podemos ver que os valores da velocidade do som nos diferentes modelos variam entre 0,15 e 0,25. Estes valores não são tão menores do que a unidade (velocidade da luz). Assim, é possível que correções relativísticas sejam apreciáveis. Finalmente, quando estudamos solitons formados a partir de projéteis mais energéticos estamos tratando de perturbações com amplitudes maiores. Isto exige a inclusão de termos de ordem mais alta nos gradientes de densidade e no uso da equação de KdV5. Pretendemos abordar estas questões no futuro.

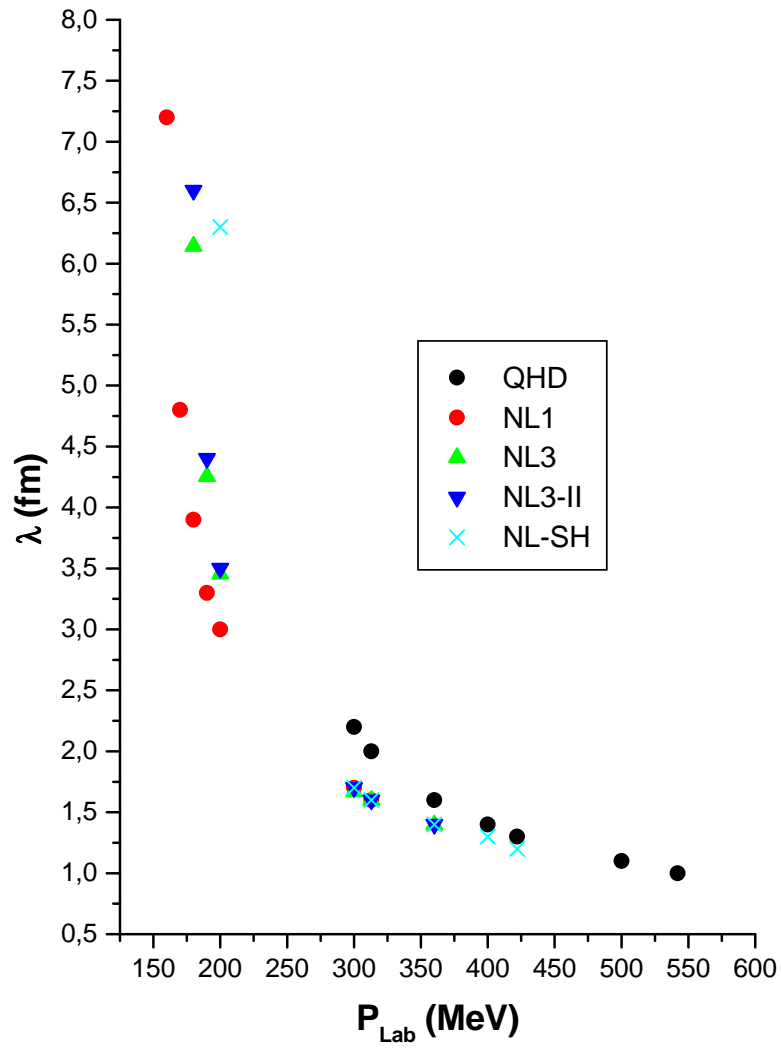


Figura 5.1: Comportamento da largura do sóliton em função do momento do feixe incidente nos vários modelos.

# Apêndice A

## Relações úteis na QHD

É interessante estudar como o termo  $\psi^\dagger(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta M^*)\psi$  da expressão (3.32) possui dependência com  $\rho_B$ .

Então:

$$\psi = \phi(\vec{k}, \lambda)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - iEt} \quad (\text{A.1})$$

com  $\lambda$  sendo o índice de spin.

Substituindo então (A.1) em (3.16):

$$\begin{aligned} & [i\gamma_\mu\partial^\mu - g_V\gamma_0V_0 - (M - g_S\phi_0)]\phi(\vec{k}, \lambda)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - iEt} = \\ & = \frac{g_V}{m_V^2}(\nabla^2V_0)\gamma^0\phi(\vec{k}, \lambda)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - iEt} \\ \implies & [i\gamma_0\partial^0 + i\gamma_0\vec{\alpha}\cdot\nabla - g_V\gamma_0V_0 - M^*]\phi(\vec{k}, \lambda)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - iEt} = \\ & = \frac{g_V}{m_V^2}(\nabla^2V_0)\gamma^0\phi(\vec{k}, \lambda)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - iEt} \\ \implies & [\gamma_0E - \gamma_0\vec{\alpha}\cdot\vec{k} - g_V\gamma_0V_0 - M^*]\phi(\vec{k}, \lambda) = \\ & = \frac{g_V}{m_V^2}(\nabla^2V_0)\gamma^0\phi(\vec{k}, \lambda) \end{aligned}$$

que multiplicada por  $-\gamma_0$  fica na forma:

$$[-E + \vec{\alpha}\cdot\vec{k} + g_VV_0 + \beta M^*]\phi(\vec{k}, \lambda) = -\frac{g_V}{m_V^2}(\nabla^2V_0)\phi(\vec{k}, \lambda)$$

fornecendo por sua vez:

$$[\vec{\alpha}\cdot\vec{k} + \beta M^*]\phi(\vec{k}, \lambda) = \left[ E - g_VV_0 - \frac{g_V}{m_V^2}(\nabla^2V_0) \right]\phi(\vec{k}, \lambda) \quad (\text{A.2})$$

Dividindo por  $\phi(\vec{k}, \lambda)$  e quadrando a expressão acima:

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{k})^2 + (\beta M^*)^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{k} \beta M^* + \beta M^* \vec{\alpha} \cdot \vec{k} = \left[ E - g_V V_0 - \frac{g_V}{m_V^2} (\nabla^2 V_0) \right]^2 \quad (\text{A.3})$$

Mas devido a

$$\{\beta, \alpha^i\} = 0$$

os termos

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{k} \beta M^* + \beta M^* \vec{\alpha} \cdot \vec{k}$$

de (A.3) podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{k} \beta M^* + \beta M^* \vec{\alpha} \cdot \vec{k} &= M^* (\alpha^1 k^1 \beta + \alpha^2 k^2 \beta + \alpha^3 k^3 \beta + \beta \alpha^1 k^1 + \beta \alpha^2 k^2 + \beta \alpha^3 k^3) = \\ &= M^* (k^1 \alpha^1 \beta + k^2 \alpha^2 \beta + k^3 \alpha^3 \beta + \beta \alpha^1 k^1 + \beta \alpha^2 k^2 + \beta \alpha^3 k^3) = \\ &= M^* (k^1 \{\beta, \alpha^1\} + k^2 \{\beta, \alpha^2\} + k^3 \{\beta, \alpha^3\}) = 0 \end{aligned}$$

então (A.3) pode ser reescrita como:

$$(\vec{k}^2 + M^{*2}) = \left[ E - g_V V_0 - \frac{g_V}{m_V^2} (\nabla^2 V_0) \right]^2 \quad (\text{A.4})$$

uma vez que foi utilizado também

$$(\alpha^i)^2 = \beta^2 = I$$

De (A.4) tem-se:

$$\pm (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} = E^{(\pm)} - g_V V_0 - \frac{g_V}{m_V^2} (\nabla^2 V_0)$$

que considerando apenas as energias positivas:

$$E^{(+)} = (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} + g_V V_0 + \frac{g_V}{m_V^2} (\nabla^2 V_0) \quad (\text{A.5})$$

Substituindo (A.5) em (A.2):

$$\begin{aligned} [\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta M^*] \phi(\vec{k}, \lambda) &= \left[ E^{(+)} - g_V V_0 - \frac{g_V}{m_V^2} (\nabla^2 V_0) \right] \phi(\vec{k}, \lambda) \\ \implies [\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta M^*] \phi(\vec{k}, \lambda) &= (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \phi(\vec{k}, \lambda) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Sendo

$$\phi(\vec{k}, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda} A_{\vec{k}, \lambda} U(\vec{k}, \lambda)$$

em (A.1) tem-se que:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda} A_{\vec{k}, \lambda} U(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - iEt} \quad (\text{A.7})$$

fornecendo, utilizando (A.6):

$$\psi^\dagger(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M^*)\psi = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \sum_{\vec{k}', \lambda'} (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} A_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger A_{\vec{k}, \lambda} U^\dagger(\vec{k}', \lambda') U(\vec{k}, \lambda)$$

mas  $\psi^\dagger(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M^*)\psi$  deve ser aplicado no estado com  $n$  nucleons:

$$\langle n | \psi^\dagger(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M^*)\psi | n \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \langle n | A_{\vec{k}, \lambda}^\dagger A_{\vec{k}, \lambda} | n \rangle \quad (\text{A.8})$$

onde foi utilizada a relação:

$$U^\dagger(\vec{k}', \lambda') U(\vec{k}, \lambda) = \delta_{\vec{k}' \vec{k}} \delta_{\lambda \lambda'}$$

De (A.8):

$$\langle n | A_{\vec{k}, \lambda}^\dagger A_{\vec{k}, \lambda} | n \rangle = \langle n | A_{\vec{k}, \lambda}^\dagger | n - 1 \rangle = \langle n | n \rangle = 1$$

de tal maneira que (A.8) assume a forma:

$$\langle n | \psi^\dagger(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M^*)\psi | n \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \quad (\text{A.9})$$

Utilizando:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \longrightarrow \int_0^{k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$$

em (A.9) acima e multiplicando pelo fator de degenerescência spin-isospin  $\gamma$ , tem-se portanto:

$$\psi^\dagger(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M^*)\psi \longrightarrow \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \quad (\text{A.10})$$

Finalmente, a relação entre  $k_F$  e  $\rho_B$  é calculada por:

$$\rho_B \equiv \langle n | \psi^\dagger(\vec{x}) \psi(\vec{x}) | n \rangle \quad (\text{A.11})$$

Então, utilizando (A.7) na (A.11) acima:

$$\rho_B \equiv \langle n | \psi^\dagger(\vec{x}) \psi(\vec{x}) | n \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \langle n | n \rangle$$

forneendo:

$$\rho_B = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \langle n | n \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} 1$$

que novamente utilizando

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \longrightarrow \int_0^{k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$$

e multiplicando por  $\gamma$  obtém-se:

$$\begin{aligned} \rho_B &= \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k \\ \implies \rho_B &= \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

O estado fundamental da matéria nuclear é obtido preenchendo os níveis até  $k_F$  com  $\{p \uparrow, p \downarrow, n \uparrow, n \downarrow\}$ ; o fator de degenerescência para a matéria nuclear é então  $\gamma = 4$  e para a matéria neutra  $\gamma = 2$ .

# Apêndice B

## Relações úteis na hidrodinâmica

Nesta seção justificaremos o uso da expressão (4.3):

$$Mc_s^2 = \rho_0^2 \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2} \right)_{\rho_B = \rho_0}$$

ou melhor dizendo, para a velocidade do som na matéria nuclear:

$$c_s = \rho_0 \sqrt{\frac{1}{M} \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2} \right)_{\rho_B = \rho_0}} \quad (\text{B.1})$$

utilizada no capítulo 4 e de importância no cálculo da largura e da amplitude do sóliton dadas pelas expressões (4.28) e (4.29) respectivamente. Também faremos um estudo da incompressibilidade  $K$  mencionada no capítulo 2:

$$K = 9\rho_0^2 \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2} \right)_{\rho_B = \rho_0} \quad (\text{B.2})$$

que terá sua relação com a velocidade do som na matéria nuclear e seu comportamento determinado também por termos adicionais na densidade de Lagrangiana.



## B.1 Hidrodinâmica não-relativística para pequenas perturbações

As equações de continuidade e de Euler são dadas respectivamente por:

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_B \vec{v}) = 0$$

e

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \left( \frac{1}{M \rho_B} \right) \nabla p$$

que alteram sua forma quando são utilizados  $p = p_0 + p'$ ,  $\rho_B = \rho_0 + \rho'$  juntamente com  $p_0 \gg p'$ ,  $\rho_0 \gg \rho' \Rightarrow \rho_B \cong \rho_0$ :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \frac{\nabla p'}{M \rho_0} \quad (\text{B.4})$$

As duas expressões acima são uma outra forma de abordar o uso das equações da hidrodinâmica não-relativística considerando que o núcleon projétil causa apenas uma perturbação pequena na densidade bariônica do núcleo alvo.

Pretendemos encontrar uma equação de onda resultante destas duas com a utilização de (4.5):

$$h = E(\rho_0) + \frac{M c_s^2}{2 \rho_0^2} (3 \rho_B^2 + \rho_0^2 - 4 \rho_B \rho_0)$$

que forneça um valor para a velocidade do som ( $c_s$ ) no meio nuclear.

## B.2 Obtenção da equação de onda

As grandezas que governam as ondas no meio nuclear são:  $\vec{v}$ ,  $p'$  e  $\rho'$ . Tais ondas são originadas pelo núcleon incidente que causa uma pequena perturbação no núcleo dada por compressões e descompressões adiabáticas:  $ds = 0$ :

$$p = p(\rho_B, s) \Rightarrow dp = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_B} \right)_s d\rho_B + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho_B} ds \Rightarrow$$

$$dp' = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_B} \right)_s d\rho' \quad (\text{B.5})$$

Substituindo agora (B.5) em (B.3):

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_B} \right)_s \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Derivando a expressão (B.6) acima em relação ao tempo:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \rho_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_B} \right)_s \nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = 0$$

que com a utilização de (B.4):

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \rho_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_B} \right)_s \nabla \cdot \left[ -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \frac{\nabla p'}{M \rho_0} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \rho_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_B} \right)_s \nabla \cdot [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] - \rho_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_B} \right)_s \frac{\nabla^2 p'}{M \rho_0} = 0$$

Como a velocidade  $\vec{v}$  é pequena, o termo  $\nabla \cdot [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}]$  pode ser desprezado na expressão acima, como resultado tem-se:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{1}{M} \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_B} \right)_s \nabla^2 p' = 0 \quad (\text{B.7})$$

### B.3 Velocidade do som na matéria nuclear

Sendo  $p'$  o aumento de pressão no núcleo devido à incidência do nêutron, a equação de onda (B.7) tem sua velocidade de propagação ( $v_p$ ) ao quadrado:

$$v_p^2 = \frac{1}{M} \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_B} \right)_s \quad (\text{B.8})$$

Como

$$K = 9 \frac{\partial p}{\partial \rho_B}$$

que utilizando a expressão:

$$K = 9Mc_s^2$$

temos então que

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \rho_B} \right)_s = Mc_s^2 \quad (\text{B.9})$$

A expressão final para a velocidade do som é obtida substituindo (B.9) em (B.8):

$$v_p = c_s \quad (\text{B.10})$$

concluindo que a expressão (B.1) está correta.

## B.4 Incompressibilidade da matéria nuclear

A incompressibilidade da matéria nuclear de acordo com o modelo de Walecka é:

$$K = \left( k_F^2 \frac{\partial^2 E}{\partial k_F^2} \right)_{eq} \quad (\text{B.11})$$

com  $E = \varepsilon/\rho_B$  sendo a energia do núcleon conforme já utilizado nos capítulos anteriores. A relação do momento de Fermi com a densidade bariônica foi encontrada no apêndice A fornecendo a expressão (A.12):

$$\rho_B = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3$$

que fornece o operador:

$$\frac{\partial}{\partial k_F} = \frac{\partial \rho_B}{\partial k_F} \frac{\partial}{\partial \rho_B} = \frac{3\gamma k_F^2}{6\pi^2} \frac{\partial}{\partial \rho_B} \quad (\text{B.12})$$

que por sua vez também fornece:

$$\frac{\partial^2}{\partial k_F^2} = \frac{6\gamma k_F}{6\pi^2} \frac{\partial}{\partial \rho_B} + \frac{3\gamma k_F^2}{6\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial k_F \partial \rho_B} \quad (\text{B.13})$$

Mas o último termo da expressão acima:

$$\frac{3\gamma k_F^2}{6\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial k_F \partial \rho_B} = \frac{3\gamma k_F^2}{6\pi^2} \frac{\partial}{\partial k_F} \frac{\partial}{\partial \rho_B}$$

que utilizando (B.12):

$$\frac{3\gamma k_F^2}{6\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial k_F \partial \rho_B} = \left( \frac{3\gamma k_F^2}{6\pi^2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho_B^2} \quad (\text{B.14})$$

Substituindo então (B.14) em (B.13):

$$\frac{\partial^2}{\partial k_F^2} = \frac{\gamma k_F}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial \rho_B} + \left( \frac{\gamma k_F^2}{2\pi^2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho_B^2} \quad (\text{B.15})$$

Aplicando (B.15) na energia por núcleon  $E$ :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial k_F^2} = \frac{\gamma k_F}{\pi^2} \frac{\partial E}{\partial \rho_B} + \left( \frac{\gamma k_F^2}{2\pi^2} \right)^2 \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2}$$

que na situação de equilíbrio fornece:

$$\left( \frac{\partial^2 E}{\partial k_F^2} \right)_{eq} = \left( \frac{\gamma k_F^2}{2\pi^2} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2} \right)_{eq} \quad (\text{B.16})$$

uma vez que da saturação:

$$\left( \frac{\partial E}{\partial \rho_B} \right)_{eq} = 0$$

De (A.12):

$$\begin{aligned} \rho_B &= \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3 \\ \implies k_F &= \left( \frac{6\pi^2 \rho_B}{\gamma} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

que substituída em (B.11) juntamente com (B.16):

$$K = \left( 9\rho_B^2 \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2} \right)_{eq} = 9\rho_0^2 \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_B^2} \right)_{\rho_B=\rho_0} \quad (\text{B.17})$$

que é a expressão (B.2).

Substituindo (B.2) em (B.1):

$$K = 9Mc_s^2 \quad (\text{B.18})$$

fornece como  $K$  e  $c_s$  se relacionam.

Alternativamente <sup>1</sup>, temos da termodinâmica:

$$p + \varepsilon = Ts + \mu\rho_B \quad (\text{B.19})$$

No núcleo temos  $T = 0$  e para a matéria nuclear no equilíbrio  $p = 0$ , deixando a expressão acima na forma:

$$\varepsilon = \mu\rho_B$$

fornece então:

$$\frac{\varepsilon}{\rho_B} = \mu \quad (\text{B.20})$$

---

<sup>1</sup>Agradecemos ao prof. M. Malheiro por nos ter apresentado este cálculo.

e

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{\mu} \quad (\text{B.21})$$

Da curva de saturação temos:

$$\frac{\varepsilon}{\rho_B} - M \cong -16 \text{MeV}$$

que utilizando (B.20) nos fornece:

$$\mu = M - 16$$

ou aproximadamente:

$$\mu \cong M \quad (\text{B.22})$$

A definição da velocidade do som ( $c_s$ ) é:

$$c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \quad (\text{B.23})$$

que pode ser reescrita como:

$$c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho_B} \frac{\partial \rho_B}{\partial \varepsilon}$$

Utilizando (B.21) na expressão acima:

$$c_s^2 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \rho_B} \quad (\text{B.24})$$

Como a incompressibilidade ( $K$ ) é calculada a partir de:

$$K = 9 \frac{\partial p}{\partial \rho_B}$$

temos:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho_B} = \frac{K}{9} \quad (\text{B.25})$$

Finalmente, substituindo (B.25) e (B.22) em (B.24) encontramos:

$$c_s^2 = \frac{1}{M} \frac{K}{9} \quad (\text{B.26})$$

que é novamente a expressão (B.18).

# Apêndice C

## Modelo não-linear (NL)

O aperfeiçoamento no modelo de Walecka para cálculo realista de  $K$  é feito pela inclusão de termos de auto-interação no campo escalar  $\phi$ , ou melhor dizendo, termos não lineares neste campo.

Uma maneira simples de incluir estes termos é considerar a Lagrangeana não linear conforme [37]:

$$\mathcal{L}_{NL} = -\frac{b\phi^3}{3} - \frac{c\phi^4}{4}$$

somada à (3.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{QHD} + \mathcal{L}_{NL} + \frac{g_V}{m_V^2} \bar{\psi} (\partial_\nu \partial^\nu V_\mu) \gamma^\mu \psi \\ \implies \mathcal{L} &= \bar{\psi} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_V V^\mu) - (M - g_S \phi)] \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_S^2 \phi^2) \\ &\quad - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_V^2 V_\mu V^\mu - \frac{b\phi^3}{3} - \frac{c\phi^4}{4} + \frac{g_V}{m_V^2} \bar{\psi} (\partial_\nu \partial^\nu V_\mu) \gamma^\mu \psi \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Utilizando novamente a expressão (3.2), fazendo os cálculos analogamente ao capítulo 3 encontramos as equações de movimento:

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_V V^\mu) - (M - g_S \phi)] \psi + \frac{g_V}{m_V^2} (\partial_\nu \partial^\nu V_\mu) \gamma^\mu \psi = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_V^2 V^\nu = g_V \bar{\psi} \gamma^\nu \psi - \frac{g_V}{m_V^2} \partial_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma^\nu \psi) \quad (\text{C.3})$$

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m_S^2) \phi = g_S \bar{\psi} \psi - b\phi^2 - c\phi^3 \quad (\text{C.4})$$

Fazendo a aproximação estacionária mediante (3.9) e (3.10) para a (C.1) à (C.4), conforme o procedimento feito no capítulo 3 (seção 3.3), encontramos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* = & \bar{\psi} [(i\gamma_\mu \partial^\mu - g_V \gamma_0 V_0) - (M - g_S \phi_0)] \psi - \frac{1}{2} (\nabla \phi_0)^2 - \frac{1}{2} m_S^2 \phi_0^2 + \\ & + \frac{1}{2} (\nabla V_0)^2 + \frac{1}{2} m_V^2 V_0^2 - \frac{b\phi_0^3}{3} - \frac{c\phi_0^4}{4} - \frac{g_V}{m_V^2} \bar{\psi} (\nabla^2 V_0) \gamma^0 \psi \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - g_V \gamma_0 V_0 - (M - g_S \phi_0)] \psi - \frac{g_V}{m_V^2} (\nabla^2 V_0) \gamma^0 \psi = 0 \quad (\text{C.6})$$

$$-\nabla^2 V_0 + m_V^2 V_0 = g_V \bar{\psi} \gamma^0 \psi - \frac{g_V}{m_V^2} \partial_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma^0 \psi) \quad (\text{C.7})$$

e

$$(-\nabla^2 + m_S^2) \phi_0 = g_S \bar{\psi} \psi - b\phi_0^2 - c\phi_0^3 \quad (\text{C.8})$$

Calculando agora a densidade de energia utilizando (3.19) para (C.5) e calculando analogamente como feito na seção 3.3 encontramos:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2} (\nabla \phi_0)^2 + \frac{1}{2} m_S^2 \phi_0^2 - \frac{1}{2} (\nabla V_0)^2 - \frac{1}{2} m_V^2 V_0^2 - i\bar{\psi} \gamma_0 \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi + \\ & + g_V (\bar{\psi} \gamma_0 \psi) V_0 + \bar{\psi} (M - g_S \phi_0) \psi + \frac{g_V}{m_V^2} (\nabla^2 V_0) \bar{\psi} \gamma^0 \psi + \frac{b}{3} \phi_0^3 + \frac{c}{4} \phi_0^4 \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Utilizando (3.24), (3.25) e a definição para a massa efetiva:

$$M + g_S \phi_0 \equiv M^* \quad (\text{C.10})$$

podemos reescrever (C.9) como:



$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2}[(\nabla\phi_0)^2 + m_S^2\phi_0^2 - (\nabla V_0)^2 - m_V^2V_0^2] + g_V\rho_B V_0 + \\ & + \frac{g_V}{m_V^2}\rho_B(\nabla^2 V_0) + \psi^\dagger(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla - \beta M^*)\psi + \frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4 \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Utilizando

$$-\frac{1}{2}(\nabla V_0)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}V_0(\nabla^2 V_0)$$

da seção 3.3 em (C.11) ficamos com:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2}[(\nabla\phi_0)^2 + m_S^2\phi_0^2 + V_0(\nabla^2 V_0) - m_V^2V_0^2] + g_V\rho_B V_0 + \\ & + \frac{g_V}{m_V^2}\rho_B(\nabla^2 V_0) + \psi^\dagger(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla - \beta M^*)\psi + \frac{b}{3}\phi_0^3 + \frac{c}{4}\phi_0^4 \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

De (C.10) temos:

$$\phi_0 = \frac{(M^* - M)}{g_S} \quad (\text{C.13})$$

que substituída juntamente com (3.30) em (C.12):

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{g_V^2}{2m_V^2}\rho_B^2 + \frac{3g_V^2}{2m_V^4}\rho_B\nabla^2\rho_B + \frac{3g_V^2}{2m_V^6}\rho_B\nabla^4\rho_B + \frac{m_S^2}{2}\left[\frac{(M^* - M)}{g_S}\right]^2 + \\ & + \psi^\dagger(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla - \beta M^*)\psi + \frac{b}{3g_S^3}(M^* - M)^3 + \frac{c}{4g_S^4}(M^* - M)^4 \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Utilizando (A.1), (C.6), (C.10) e as propriedades das matrizes de Dirac conforme mostrado no apêndice A, obtemos:

$$\psi^\dagger(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla - \beta M^*)\psi \longrightarrow \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k(k^2 + M^{*2})^{1/2} \quad (\text{C.15})$$

Após substituir (C.15) em (C.14) a expressão final para a densidade de energia do modelo não linear é:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{g_V^2}{2m_V^2}\rho_B^2 + \frac{3g_V^2}{2m_V^4}\rho_B\nabla^2\rho_B + \frac{3g_V^2}{2m_V^6}\rho_B\nabla^4\rho_B + \frac{m_S^2}{2}\left[\frac{(M^* - M)}{g_S}\right]^2 + \\ & + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k(k^2 + M^{*2})^{1/2} + \frac{b}{3g_S^3}(M^* - M)^3 + \frac{c}{4g_S^4}(M^* - M)^4 \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

O cálculo da expressão para a massa efetiva do núcleon é determinada pela minimização de (C.16) em relação à  $M^*$  levando à relação auto-consistente:

$$M^* = M - \frac{g_S^2}{m_S^2} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{(\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2}} - \frac{g_S^2}{m_S^2} \left[ \frac{b}{g_S^3} (M^* - M)^2 + \frac{c}{g_S^4} (M^* - M)^3 \right]$$

ou melhor:

$$M^* = M - \frac{g_S^2}{m_S^2} \frac{\gamma M^*}{4\pi^2} \left\{ k_F (k_F^2 + M^{*2})^{1/2} - M^* \ln \left[ \frac{k_F + (k_F^2 + M^{*2})^{1/2}}{M^*} \right] \right\} - \frac{g_S^2}{m_S^2} \left[ \frac{b}{g_S^3} (M^* - M)^2 + \frac{c}{g_S^4} (M^* - M)^3 \right] \quad (\text{C.17})$$

que também é resolvida numericamente. Os valores dos parâmetros do modelo não-linear estão em [37]. A solução da equação acima está representada na figura C.1, onde ela é comparada à solução da equação (3.35) proveniente da QHD e também da MQHD.

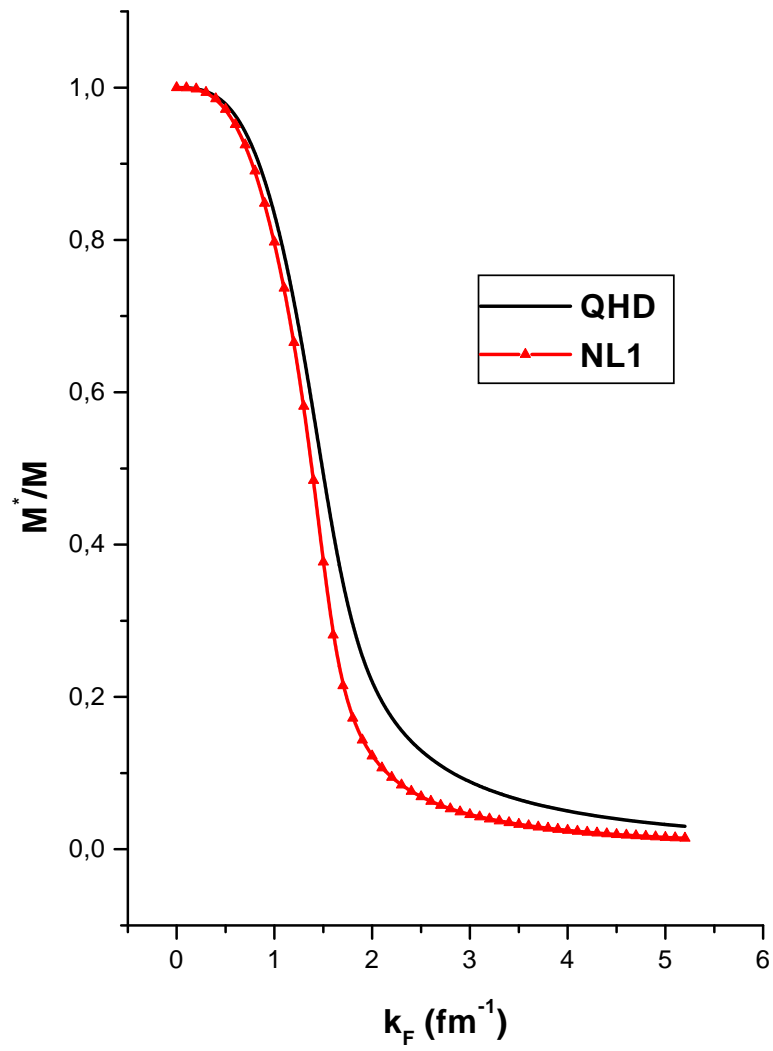


Figura C.1: Massa efetiva do núcleo para QHD(ou MQHD) e NL1.

# Referências Bibliográficas

- [1] S.J. Brodsky, in: Proc. XIII Int. symp. on multiparticle dynamics (Volendam, The Netherlands), eds. E.W. Kittel, W. Metzger, and A. Stergion (World Scientific, Singapore, 1982) p. 963; A. H. Mueller, in: Proc. XVII Rencontre de Moriond (Les Arcs, France), ed. Tran Thanh Van (Editions Frontieres, Gif-sur-Yvette, 1982) p. 13.
- [2] G. Garino et al., *Phys. Rev.* **C45**, 780 (1992).
- [3] T. O'Neill et al., *Phys. Lett.* **B351**, 87 (1995).
- [4] N. Makins et al., *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1986 (1994).
- [5] K. Garrow et al., *Phys. Rev.* **C66**, 044613 (2002).
- [6] D. Abbott et al., *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5072 (1998).
- [7] D. Dutta et al., *Phys. Rev.* **C68**, 064603 (2003).
- [8] P. Lava, M.C. Martinez, J. Ryckebusch, J.A. Caballer, J.M. Udias, *Phys. Lett.* **B595**, 177 (2004); nucl-th/0401041
- [9] A. Meucci, *Phys. Rev.* **C65**, 044601 (2002); nucl-th/0111077
- [10] L. Lapikas, G. van der Steenhoven, L. Frankfurt, M. Strikman, M. Zhalov, *Phys. Rev.* **C61**, 064325 (2000); nucl-ex/9905009.
- [11] FOPI Collaboration: W. Reisdorf et al., *Phys. Rev. Lett.* **92**, 232301 (2004); nucl-ex/0404037.
- [12] FOPI Collaboration: B. Hong et al., *Phys. Rev.* **C57**, 244 (1998); *Phys. Rev.* **C58**, 603 (1998); nucl-ex/9707001.

- [13] B.D. Serot, *Int. J. Mod. Phys.* **A19S1**, 107 (2004) e referências ali citadas.
- [14] B.D. Serot and J.D. Walecka, *Advances in Nuclear Physics* **16**, 1 (1986).
- [15] J.J. Kelly, *Phys. Rev.* **C54**, 2547 (1996).
- [16] J.J. Kelly, *Phys. Rev.* **C59**, 3256 (1999).
- [17] G.N. Fowler, S. Raha, N. Stelte and R.M. Weiner, *Phys. Lett.* **B115**, 286 (1982).
- [18] S. Raha and R.M. Weiner, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 407 (1983).
- [19] S. Raha, K. Wehrberger and R.M. Weiner, *Nucl. Phys.* **A433**, 427 (1984).
- [20] E.F. Hefter, S. Raha and R.M. Weiner, *Phys. Rev.* **C32**, 2201 (1985).
- [21] A.E. Glassgold, W. Heckrotte and K.M. Watson, *Ann. Phys. (N.Y.)* **6**, 1 (1959) e referências ali citadas.
- [22] A.Y. Abul-Magd, I. El-Taher and F.M. Khaliel, *Phys. Rev.* **C45**, 448 (1992).
- [23] W. Weise, nucl-th/0412075 e referências ali citadas.
- [24] D. Vretenar, W. Weise, *Lect. Notes Phys.* **641**, 65 (2004); nucl-th/0312022 e referências ali citadas..
- [25] S. Fritsch, N. Kaiser, W. Weise, nucl-th/0406038.
- [26] N. Kaiser, S. Fritsch, W. Weise, *Nucl. Phys.* **A724**, 47 (2003); nucl-th/0212049
- [27] M. A. Preston, “Physics of the nucleus”, Addison-Wesley, 1981.
- [28] R.B. Clare and D. Strottman, *Phys. Rept.* **141**, 177 (1986).
- [29] J. R. Nix, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **2**, 237 (1979).
- [30] H. Stöcker et al., *Prog. Part. Nucl. Phys.* **4**, 133 (1980).

- [31] U. Heinz, nucl-th/0412094; para uma revisão recente veja P.F. Kolb, U. Heinz, “Hydrodynamic description of ultrarelativistic heavy-ion collisions”, in “Quark Gluon Plasma 3”, Editors: R.C. Hwa and X.-N. Wang, World Scientific, Singapore, (2003) p. 634; nucl-th/0305084.
- [32] A.A Amsden, G.F. Bertsch, F.H. Harlow and J.R. Nix, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 905 (1975).
- [33] J. Galin et al., *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1787 (1982).
- [34] E. Ott and R.N. Sudan, *Phys. Fluids* **12**, 2388 (1969).
- [35] D. Vautherin and D. Brink, *Phys. Rev.* **C5**, 626 (1972).
- [36] L. Willets, *Rev. Mod. Phys.* **30**, 542 (1958).
- [37] G. A. Lalazissis, J. König and P. Ring, *Phys. Rev.* **C55**, 540 (1997).
- [38] D.A. Fogaça and F.S. Navarra, “Solitons in nucleon-nucleus collisions”, Proceedings of the “International Workshop IX Hadron Physics and VII Relativistic Aspects of Nuclear Physics” (HADRON-RANP 2004), Angra dos Reis, RJ, abril de 2004, eds. M. Bracco et al., World Scientific Pub. Co., p. 699.
- [39] D.A. Fogaça e F.S. Navarra, “Solitons em colisões nucleon-núcleo”, Relatório da XVI Reunião de Trabalho sobre Interações Hadrônicas, RETINHA 16, CBPF, outubro de 2004, ed. Y. Hama, gráfica do IFUSP, p. 64.
- [40] Alwyn C. Scott, F. Y. F. Chu and David W. McLaughlin, *Proceedings of the IEEE* **61**, 1443 (1973).
- [41] L. Landau et E. Lifchitz, “Mecanique des Fluides”, Editions MIR, Moscou, 1971.
- [42] R. C. Davidson, “Methods in Nonlinear Plasma Theory”, Academic Press, New York an London, 1972, páginas 20 e 21.
- [43] G. Eilenberger, “Solitons”, Springer, Berlin, 1981.
- [44] V.I. Karpman, *Phys. Rev.* **E47**, 2073 (1993).
- [45] V.I. Karpman, *Phys. Lett.* **A186**, 300 (1994); **A186**, 303 (1994).